Skript zu den Vorlesungen

Analysis I (MIA)
und
Analysis II (MIIA)

Neubearbeitung eines Skripts von
Prof.Dr. U.Oppel

Sommersemester 2005
Wintersemster 2005/2006
Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Mathematik

Vorlesungen gehalten von Prof.Dr. U.Oppel

Skript bearbeitet und getippt von:
Martin Slawski

Fehler, die bestimmt noch zahlreich vorhanden sind, bitte an:
Martin.Slawski@campus.lmu.de

Inhaltsverzeichnis

§0	**Etwas Logik**	**S. 6 – 11**
	Stichwörter:	
	Aussagenlogik, Wahrheitstafeln	**S. 6 – 8**
	Quantorenlogik	**S. 8 – 10**
	Theorien, mathematische Theorie, Axiomatisierung	**S. 10 – 11**
§1	**Natürliche Zahlen und vollständige Induktion**	**S. 12 – 15**
	Peano-Axiome	**S. 13**
	Vollständige Induktion	**S. 14 – 15**
§2	**Mengen, Abbildungen und Ordnungen**	**S. 16 – 23**
	Zermelo-Fränkel Axiomensystem	**S. 17**
	Relationen, Korrespondenzen	**S. 19**
	Ordnungen	**S. 20**
	Supremum und Infimum	**S. 21**
	Abbildungen	**S. 22 – 23**
§3	**Die reellen Zahlen**	**S. 24 - 34**
	Axiomatische Einführung der reellen Zahlen	**S. 24 – 26**
	Folgerungen aus den Axiomen	**S. 25 – 27**
	Endliche Summen und Produkte	**S. 27**
	Potenzen	**S. 28**
	Fakultät, Binomialentwicklung	**S. 29**
	Ungleichung von Bernoulli	**S. 30**
	Eigenschaften von $\lvert \cdot \rvert$	**S. 30 – 31**
	Ungleichung von Cauchy	**S. 31**
	Satz von Archimedes, Archimedisches Axiom	**S. 32**
	Wurzeln	**S. 33 – 34**
§4	**Folgen und Reihen**	**S.35 - 50**
	Iterationsverfahren für die Berechnung von $\sqrt{\cdot}$	**S. 36**
	Folgenkonvergenz, elementare Eigenschaften	**S. 38 – 39**
	Häufungspunkte, limes inferior und superior	**S. 41 - 42**
	Satz von Bolzano – Weierstraß	**S. 41**
	Cauchyfolgen	**S. 41 – 42**
	geometrische Reihe	**S. 44**
	harmonische Reihe	**S. 44**
	Konvergenzkriterien für Reihen	**S. 47 – 50**
§5	**stetige Funktionen auf $\mathbb{R}$**	**S. 51 – 59**
	topologische Grundbegriffe	**S. 51 - 52**
	$\epsilon - \delta$ Kriterium, Folgenstetigkeit	**S. 53**
	Zwischenwertsatz, Intervallschachtelungsverfahren	**S. 54**
	gleichm. Stetigkeit, Folgenkompaktheit, Vollständigkeit	**S. 55**
	Satz von Heine – Borel	**S. 56**

	punktw. und gleichm. Konvergenz von Funktionenfolgen	S. 57 – 59
	Satz von Dini	S. 58
	Weierstraßscher Approximationssatz	S. 59
§6	**Potenzreihen**	**S. 60 – 72**
	allgemeine Eigenschaften	S. 60 – 63
	Konvergenzradius	S. 60
	Satz von Abel	S. 62
	Exponential- und Logarithmusfunktion	S. 63 – 67
	Trigonometrische Funktionen	S. 68 – 72
§7	**Differentiation**	**S. 73 – 79**
	Differentiationsregeln	S. 75 – 76
	Mittelwertsätze	S. 77 – 78
	Taylorformel	S. 79
§8	**Einige Anwendungen der Differentialrechnung**	**S. 80 – 85**
	lokale Extrema	S. 80
	physikalische Anwendungen	S. 81 – 83
	Regel von de L'Hospital	S. 84 – 85
§9	**Das Riemann-Integral**	**S. 86 – 93**
	Riemannsche Summen	S. 86 – 87
	Elementare Eigenschaften	S. 87 – 88
	Hauptsatz der Integralrechnung	S. 89 – 90
	Integrationsregeln	S. 90 – 91
	Mittelwertsätze	S. 92
	Uneigentliche Riemann-Integrierbarkeit	S. 92 – 93
§10	**Anwendungen der Differential- und Integralrechnung**	**S. 94 – 98**
§11	**Taylor- und Fourierreihen**	**S. 99 – 111**
	Vertauschung von Limes und Differentiation/Integration	S. 99 – 101
	Taylorreihen	S. 101 – 103
	Fourierreihen	S. 103 – 111
	Satz von Féjer	S. 109
	Abtasttheorem	S. 111
§12	**Komplexe Zahlen**	**S. 112 – 115**
	Fundamentalsatz der Algebra	S. 114
	Gaußsche Ebene	S. 114- 115
§13	**Metrische und normierte Räume**	**S. 116 – 123**
	Metriken, metrische Räume	S. 116 – 120
	Folgenkonvergenz, Stetigkeit	S. 116
	Hausdorffsche Trennungseigenschaft	S. 117
	Cauchyfolgen, Vollständigkeit	S. 118 - 119

	Kompaktheit	S. 119
	gleichm. Stetigkeit, gleichm. Konvergenz v. Abbildungen	S. 120
	normierte Räume, Banach – Räume	S. 120 – 122
	Satz von Weierstraß, Satz von Heine – Borel	S. 123
§14	**partielle Differentiation**	**S.124 – 135**
	Gradient, Nabla – Operator	S. 128
	Vektorfelder, Divergenz, Rotation	S. 128
	Laplace – Operator	S. 128
	physikalische Anwendungen	S. 130 – 135
§15	**totale Differentiation**	**S. 136 – 142**
	lokale Lipschitz-Stetigkeit	S. 137
	Jacobi – Matrix	S. 138
	Kettenregel	S. 138 – 139
	Mittelwertsatz	S. 139
	Taylorformel	S. 140 – 141
	Hesse – Matrix	S. 142
§16	**Anwendung: lokale Extrema**	**S. 143 – 150**
	Positive Definitheit, Hurwitz-Kriterium	S. 146
§17	**Satz über implizite Funktionen**	**S. 151 – 153**
§18	**Optimierung unter Nebenbedingungen**	**S. 154 – 156**
	Lagrange-Verfahren	S. 154 – 156
§19	**M1 Mengensysteme**	**S. 157 – 160**
	Mengenalgebren, σ - Algebren und ihre Erzeuger	S. 157 – 158
	σ - Algebra der Borelschen Teilmengen	S. 158
	Messräume und messbare Abbildungen	S. 159
	Dynkinsysteme	S. 160
§20	**M2 Inhalte und Maße**	**S. 161 – 164**
§21	**M3 Fortsetzung von Maßen**	**S. 165 – 168**
	Nullmengen und Vollständigkeit	S. 165 – 166
	äußeres Maß	S. 166 – 167
	Carathéodory – Fortsetzung	S. 167 – 168
§22	**M4 Das Lebesguesche Maß**	**S. 169 - 172**
§23	**M5 Messbare Funktionen**	**S. 173 – 176**
	Approximation durch Treppenfunktionen	S. 175 – 176

§24	**M6 Das μ - Integral**	**S. 177 – 183**
	Elementare Funktionen	**S. 177 – 179**
	Nichtnegative Funktionen	**S. 179 – 181**
	Satz der isotonen Konvergenz I, B.Levi	**S. 180**
	μ - Integrierbarkeit	**S. 181 – 183**
	Fast überall bestehende Eigenschaften	**S. 183**
§25	**zu M6 Bildmaße und Integraltransformationssatz**	**S. 184**
§26	**M7 Integralkonvergenzsätze**	**S. 185 – 188**
	Satz der monotonen Konvergenz II, B.Levi	**S. 186**
	Lemma von Fatou	**S. 186**
	Satz der majorisierten Konvergenz I, Lebesgue	**S. 186**
	Stetigkeit des Parameterintegrals	**S. 187**
	Vertauschbarkeit v. Differentiation und Integration	**S. 188**
§27	**$\mathcal{L}^p$ - Räume**	**S. 189 – 192**
	p - Norm	**S. 189 – 190**
	Höldersche Ungleichung	**S. 189**
	Minkowskische Ungleichung	**S. 190**
	Konvergenz im p - ten Mittel	**S. 190**
	Satz der majorisierten Konvergenz II, Lebesgue	**S. 192**
	Satz von Fischer – Riesz	**S. 192**
§28	**Markov-Kerne und der verallg. Satz von Fubini**	**S. 194 – 197**
	Produktmengenalgebren, Produkt-σ-Algebren	**S. 194**
	Markov-Kerne	**S. 195**
	verallg. Satz von Fubini	**S. 196**
	Satz von Fubini	**S. 197**
Literaturverzeichnis		**S. 197**

§0 Etwas Logik

Aussage: entweder wahr (w) oder falsch (f)
(zweiwertige Logik ; tertium non datur)
Grobschema: Subjekt – Prädikat – Objekt

Sprache: natürliche und künstliche Regelung zur Bildung von Aussagen;
zugelassene Subjekte, Prädikate und Objekte;
logische Struktur: nicht, und, oder, dann, genau dann; für alle,
es existiert,…

a) Aussagenlogik

Seien P, Q und R (Bezeichnungen für irgendwelche) Aussagen (in einer Sprache):

Folgende Verbindungsregeln sollen gelten:

J1) Negation **„nicht P“** (in Zeichen: $\neg P$) Negation von P

Regel: $\neg P$ ist genau dann wahr, wenn P falsch ist.

Tafel:

P	w	f
$\neg P$	f	w

J2) Konjunktion: **„P und Q“** (in Zeichen: $P \wedge Q$) Konjunktion von P und Q

Regel: $P \wedge Q$ ist genau dann wahr, wenn P wahr und Q wahr ist.

Tafel:

P	w	w	f	f
Q	w	f	w	f
$P \wedge Q$	w	f	f	f

J3) Adjunktion: **„P oder Q“** (in Zeichen: $P \vee Q$) Adjunktion von P und Q

Regel: $P \vee Q$ ist genau dann wahr, wenn P oder Q wahr ist.

Tafel:

P	w	w	f	f
Q	w	f	w	f
$P \wedge Q$	w	w	w	f

J4) Subjunktion (Implikation): „wenn P, dann Q“ (in Zeichen: $P \Rightarrow Q$)
Implikation von P nach Q; aus P folgt Q; P hinreichend für Q

Regel: „$P \Rightarrow Q$“ ist genau dann wahr, wenn P falsch ist oder wenn P wahr und Q wahr ist.

Tafel:

P	w	w	f	f
Q	w	f	w	f
$P \Rightarrow Q$	w	f	w	w

P: Prämisse, Hypothese, Voraussetzung, hinreichende Bedingung für Q
Q: Konklusion, Behauptung, notwendige Bedingung für P

J5 Bijunktion: „P genau dann, wenn Q“ (in Zeichen: $P \Leftrightarrow Q$)
Äquivalenz von P und Q; P dann und nur dann, wenn Q;
P notwendige und hinreichende Bedingung für Q.

Regel: „$P \Leftrightarrow Q$“ ist genau dann wahr, wenn (P wahr und Q wahr) oder (P falsch und Q falsch)

Tafel:

P	w	w	f	f
Q	w	f	w	f
$P \Leftrightarrow Q$	w	f	f	w

Klammern: zum Zusammenfassen von Aussagen;
sparen: Junktoren $\Leftrightarrow, \Rightarrow, \vee, \wedge, \neg$ von links nach rechts zunehmende Bindungsstärke

Aus J1 – J5 können (z.B. formal mit Tafeln) folgende Tautologien (synonym: allgemeingültige Aussagen, aussagenlogische Sätze) abgeleitet werden:

Satz vom ausgeschlossenen Dritten: $P \vee (\neg P)$
Satz vom Widerspruch: $\neg(P \wedge \neg P)$
Satz von der doppelten Verneinung: $\neg(\neg P) \Leftrightarrow P$
Gesetze von de Morgan: $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$
$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$
Kontrapositionsgesetz: $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$
Gesetz zum modus ponens: $P \wedge (P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q$
Idempotenz: $P \wedge P \Leftrightarrow P$
$P \vee P \Leftrightarrow P$
Kommutativgesetze: $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$
$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$
Assoziativgesetze: $P \wedge (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R$
$P \vee (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \vee R$

Distributivgesetze: $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

Transitiviät der Subjunktion: $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$

Beispiele von Ableitungen von Tautologien mittels Tafeln:

1)

P	w	f
$\neg$P	f	w
P$\vee$($\neg$P)	w	w

2)

P	w	f
$\neg$P	f	w
P$\wedge$($\neg$P)	f	f
$\neg$(P$\wedge$($\neg$P))	w	w

3)

P	w	f
$\neg$P	f	w
$\neg$($\neg$P)	w	f
$\neg$($\neg$P)$\Leftrightarrow$P	w	w

4)

P	w	w	f	f
Q	w	f	w	f
P$\Rightarrow$Q	w	f	w	w
$\neg$Q	f	w	f	w
$\neg$P	f	f	w	w
($\neg$Q)$\Rightarrow$($\neg$P)	w	f	w	w
(P$\Rightarrow$Q)$\Leftrightarrow$ ($\neg$Q)$\Rightarrow$($\neg$P)	w	w	w	w

b) Quantorenlogik (Kurzfassung)

Jede Sprache hat Namen für die in dieser Sprache zugelassenen Objekte unseres Denkens:

Bonn ist ein Dorf.
5 ist eine Primzahl.
6 multipliziert mit 11 ergibt 66.

Aussageformen mit Variablen:

x ist ein Dorf.
x ist eine Primzah.
x multipliziert mit y ergibt z.

Variable x, y, z sind Zeichen in Aussageteilen, die durch dafür zugelassene Namen a, b, c ersetzt werden sollen, z.B.

Aussageform $P(x, y, z) \rightarrow\rightarrow\rightarrow$ Substitution von Namen $\rightarrow\rightarrow\rightarrow$ Aussage $P(a, b, c)$

Quantifizierung der erlaubten Substitution in einer Aussageform:

a) Für alle x gilt $P(x)$. In Zeichen: $\forall x$ gilt $P(x)$.
b) Es existiert (mindestens) ein x, für das $P(x)$ gilt.
In Zeichen: $\exists\, x$ mit $P(x)$
c) Es existiert genau ein x, für das $P(x)$ gilt.
In Zeichen: $\exists_1\, x$ mit $P(x)$
d) Es existiert kein x, für das $P(x)$ gilt.
In Zeichen: $\nexists\, x$ mit $P(x)$

Gemischte Quantierungen:

1) Für alle x existiert ein y mit $P(x, y)$.
In Zeichen: $\forall x\, \exists\, y$ mit $P(x, y)$.
2) Es existiert ein x, so dass $P(x, y)$ für alle y gilt:
In Zeichen: $\exists\, x\, \forall y$ gilt $P(x, y)$.
3)……

Dabei sind Formulierungen „es gilt P“ oder „mit P“ äquivalent zu „P ist wahr“.

Beispiel:

a und b seien <u>alle</u> zur Substitution zugelassene Namen.
Dann gilt („offensichtlich“):

$i)\ P(a) \Rightarrow P(a) \vee P(b)$
$ii)\ P(a) \wedge P(b) \Rightarrow P(a)$
$iii)\ \forall x$ gilt $P(x) :\Leftrightarrow\ P(a) \wedge P(b)$
$iv)\ \exists\, x$ mit $P(x) :\Leftrightarrow\ P(a) \vee P(b)$

Wenn man die durch iii) und iv) definierten quantifizierten Aussagen verneint, so erhält man mit den de Morgan'schen Gesetzen:

$\neg(\forall x \text{ gilt } P(x)) \Leftrightarrow \neg(P(a) \wedge P(b)) \Leftrightarrow \neg P(a) \vee \neg P(b) \Leftrightarrow \exists\, x \text{ mit } (\neg P(x))$
$\neg(\exists\, x \text{ mit } P(x)) \Leftrightarrow \neg(P(a) \vee P(b)) \Leftrightarrow \neg P(a) \wedge \neg P(b) \Leftrightarrow \forall x \text{ gilt } (\neg P(x))$

Auch für „beliebig viele“ zugelassene Aussagen sollen diese Regeln gelten:

Implikationsregeln: a zugelassen $\wedge$ $\forall x$ gilt $P(x)$ $\Rightarrow P(a)$ gilt
a zugelassen $\wedge$ $P(a)$ gilt $\Rightarrow$ $\exists\, x$ mit $P(x)$

Verneinungsregeln: $\neg(\forall x \text{ gilt } P(x)) \Leftrightarrow \exists\, x \text{ mit } (\neg P(x))$
$\neg(\exists\, x \text{ mit } (P(x)) \Leftrightarrow \forall x \text{ gilt } (\neg P(x))$

Daraus werden weitere Denkregeln durch Verbindung von quantifizierten und unquantifizierten (aussagenlogischen) Denkregeln abgeleitet. Dies führt stufenweise zu immer komplexeren Regeln.

c) Theorien

Identitätsbegriff: (Leibniz)

Zwei Objekte x und y unseres Denkens sind – im Rahmen einer Betrachtungsweise – identisch (in Zeichen: $x = y$),
wenn - im Rahmen dieser Betrachtungsweise – für x jede Aussage wahr ist, die für y wahr ist und für y jede Aussage wahr ist, die für x wahr ist.

Der Identitätsbegriff „hat“ die folgenden Eigenschaften:

$\forall x$ ist $x = x$	**(Reflexivität)**
$\forall x\ \forall y$ mit $y = x$ gilt $x = y$	**(Symmetrie)**
$\forall x\ \forall y\ \forall z$ mit $x = y\ \wedge\ y = z$ gilt $x = z$	**(Transitivität)**

Bisher haben wir nur Regeln zur Verbindung von Aussagen behandelt, nichts aber über deren Inhalte gesagt.

Theorie:

Inhalte von Aussagen werden in einer Theorie betrachtet.

Begriffe in Aussagen werden inhaltlich präzisiert und durch logische Regeln relativiert.

primitive Begriffe: wenige, intuitiv verständlich

definierte Begriffe: durch eine logische Aussage A über primitive oder bereits definierte Begriffe wird ein neuer Begriff B definiert.
In Zeichen: $B :\Leftrightarrow A$ oder $B := A$

mathematische Theorie:

Axiome:	(möglichst wenige) Aussagen über primitive Begriffe, die als wahr betrachtet werden.
Sätze:	Aus Axiomen mit Hilfe von logischen Regeln abgeleitete Aussagen. (Satz synonym mit Theorem)
Beweise:	diese Ableitungen
Ziel:	Eine mathematische Theorie soll möglichst widerspruchsfrei sein. Verschiedene mathematische Theorien sollen (im hierarchischen Sinne) möglichst verträglich sein.

Mathematisierung einer nichtmathematischen Theorie:

1) Experiment:

Untersuchung eines Phänomens oder eines Prozesses deterministischer oder stochastischer Art.

z.B.: Bewegung eines Pendels;
Untersuchung eines Spektrums;
Zuverlässigkeit eines Kernkraftwerkes;
biologische Evolution;
Aktienkursverlauf;
Märkte; etc.

Diese Untersuchung geschieht üblicherweise mit einer fachspezifischen Theorie.

2) Axiomatisierung

Interpretation fachlicher Begriffe durch mathematische Begriffe.

z.B.: Geschwindigkeit als Ableitung des Ortes nach der Zeit;
Spektrallinie als Eigenwert eines Differentialoperators;
zufällige Ereignisse als Mengen und Wahrscheinlichkeiten als σ – additive Mengenfunktion;
Mutation und Selektion als Übergangswahrscheinlichkeiten;
Kursverlauf als Zeitreihe oder Markov-Prozess;
Marktgleichgewicht als Martingale;

Die Relationen dieser Begriffe werden durch Axiome beschrieben.

3) Anwendung (anderer) mathematischer Theorien darauf.
4) Ergebnisse in Form mathematischer Sätze
5) Interpretation der aus der mathematischen Theorie gewonnen Sätze:
zur Weiterentwicklung der fachspez. Theorie, stets begleitet von fachl. Kritik.

§1 Natürliche Zahlen und vollständige Induktion

Zahlbegriff mindestens seit der Jungsteinzeit:
für kultische und praktische Zwecke

afrikanische Buschmänner:
Eins (a), zwei (oa), drei = viele (oaa), vier (oa oa)

Sumerer, Inder, Babylonier:
für kaufmännische, architektonische und kultisch-astrologische Zwecke;
Sechsersystem

Ägypter: auch zur Landvermessung

Griechen: auch für naturwissenschaftliche Untersuchungen;
Aristoteles, Diophant, Pythagoras, Thales, Archimedes, Euklid
und viele andere.

Römer: I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII,IX, X, XI, XII,…,L,...,C,...,M
Kalender; Abacus (Rechenbrett).

Germanen: "Zahl"= Einschnitt im Kerbholz

Maya und Azteken:
für astrologische und dynastische Zwecke;
Zwanzigersystem; Brüche, negative Zahlen

Araber:
Muhammed Alchwarizmi (820, Rechenbuch; vgl. „Algorithmus")
Dezimalpositionssystem, Null; → Kloster Salem.

Indisch-arabisches Dezimalpositionssystem seit dem 8.Jahrhundert in Europa.
Adam Riese: Rechenbücher 1518, 1525 und 1530; Stellenrechnen.

Zahlsysteme: 2 (Computer); 5 und 10 (Hand);
6 und 60 (Babylonisch und Zeit- und Winkelsystem)
12 (z.B. Dutzend); 20 (Maya und Azteken)

Kronecker (1823):
„Die natürlichen Zahlen sind vom lieben Gott gemacht."

Dedekind, Frege und Russell:
Die natürlichen Zahlen sind Menschenwerk und ein Teil der Logik.

Peano (1889):
Axiomatische Theorie der natürlichen Zahlen.

Axiomatische Theorie der natürlichen Zahlen

undefinierte Begriffe:

natürliche Zahl,
Eins (in Zeichen: 1)
Nachfolgerbeziehung: x ist Nachfolger von y; in Zeichen $x = y^+$.
Gleichheit

Axiome P1 – P5:

P1: Eins ist eine natürliche Zahl.

P2: Zu jeder natürlichen Zahl y existiert genau eine natürliche Zahl x, welche Nachfolger von y ist.

P3: Für jede natürliche Zahl ist ihr Nachfolger ungleich Eins.

P4: Ungleiche natürliche Zahlen haben ungleiche Nachfolger.

P5: **(Induktionsaxiom)**

Für jede Aussageform $P(x)$ für natürliche Zahlen gilt:
Gilt $P(1)$ und folgt $P(x^+)$ aus $P(x)$, so gilt $P(y)$ für jede natürliche Zahl y.

Definition:

$2 := 1^+,\ 3 := 2^+,\ 4 := 3^+, \ldots\ldots$

Definition der Addition: (rekursiv mit P5)

$1 + 1 := 1^+ (= 2),$
$x + 1 := x^+,$
$x + y^+ := (x + y)^+$

Definition der Multiplikation: (rekursiv mit P5)

$x \cdot 1 := x$
$x \cdot y^+ := (x \cdot y) + x$

Definition der Ordnung:

"x ist kleiner als y" genau dann, wenn eine natürliche Zahl z existiert mit $x + z = y$. [in Zeichen: $x < y :\Leftrightarrow \exists\, z$ nat. Zahl mit $x + z = y$]

Definition der Halbordnung:

$x \le y :\Leftrightarrow\ x = y$ oder $x < y$

Damit kann man (mit etwas Mühe) beweisen:

Satz 1.1:

Seien x, y und z natürliche Zahlen. Dann gilt:

a) $x + y = y + x$ (Kommutativität der Addition)

b) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (Assoziativität der Addition)

c) $x \cdot y = y \cdot x$ (Kommutativität der Multiplikation)

d) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (Assoziativität der Multiplikation)

e) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ (Distributivität)

f) Aus $x < y$ folgt $x + z < y + z$.
[in Zeichen: $x < y \ \Rightarrow\ x + z < y + z$]

g) $x < y \ \Rightarrow\ x \cdot z < y \cdot z$ (hier ist z eine natürliche Zahl !)

Anderer Zugang zu den natürlichen Zahlen:

Im Rahmen der Mengenlehre kann man natürliche Zahlen so definieren, dass man die (hier postulierten) Eigenschaften P1 – P5 als Satz erhält.

Auch Addition und Multiplikation kann man in diesem Rahmen so definieren, dass man den obigen Satz erhält.

Man kann dann (und erst dann) von der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen sprechen.

Die Methode des Beweises durch vollständige Induktion

„Nach Adam Riese“ (1518) gilt für jede natürliche Zahl:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{bei } \sum_{k=1}^{n} k := 1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

Eine Verfikation dieser Formel ist nur für einige n möglich, nie aber für alle:

n	$\sum_{k=1}^{n} k$	$\frac{n(n+1)}{2}$	
1	1	1	w
2	3	3	w
3	6	6	w
4	10	10	w
….			

Beweis durch vollständige Induktion:

Aussageform: $P(n) = \text{"}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}\text{"}$ zugelassen für jede natürliche Zahl n.

Wir wollen zeigen, dass $P(n)$ für alle natürlichen Zahlen n wahr ist.

Induktionsanfang: **P(1) <u>ist</u> wahr.** (vgl. oben)

Induktionsvoraussetzung: **P(n) <u>sei</u> wahr für n.**

Nach Axiom P5 ist zu zeigen, dass dann auch P(n+1) wahr ist.
(Es ist $n^{+} = n+1$ der Nachfolger von n.)

Induktionsschluss von n auf $n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \overset{\text{Induktionsvoraussetzung}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left(1+\frac{n}{2}\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Also ist **P(n+1) wahr.**

Nach dem Induktionsaxiom gilt:

P(n) ist wahr für alle natürlichen Zahlen n.

Achtung: Beim Beweis durch vollständige Induktion den Induktionsanfang nicht vergessen !

Warnung:

Es existieren Aussageformen $P(n)$ für natürliche Zahlen n mit der Eigenschaft:
$\left(P(n) \Rightarrow P(n+1)\right) \not\Rightarrow \forall n$ natürliche Zahl gilt $P(n)$
In Worten: Aus "$P(n) \Rightarrow P(n+1)$" folgt nicht, dass $P(n)$ für jede natürliche Zahl n gilt.

Beispiel: $P(n) := \text{"}n+1 < n\text{"}$

§ 2 Mengen, Abbildungen und Ordnungen

2.1 Zur Mengenlehre

Georg Cantor (1848 – 1915):
Arbeiten: 1874 (Crelle's Journal), 1895 und 1897 (Math. Annalen)

Cantors Definition der Menge:

Unter einer „Menge" verstehen wir jede Zusammenfasssung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens.

Antinomien:

Cantor (1895):	Menge aller Ordinalzahlen; Menge aller Mengen
Burali – Forti:	…
Russell (1901):	Menge A der Mengen x, die nicht Element von sich sind.
populär:	Allmacht, Barbier

Auswege:

1) Russell 1908 und Russell – Whitehead: Typentheorie
   (Präzisierung der Sprache, stufenweise Mengenbildung)
2) Zermelo (1908); Hausdorff (1914); Fränkel (1919):
   axiomatische Mengenlehre
3) von Neumann (1925); Bernays (1937); Gödel (1940); Bernays – Fränkel (1958):
   endliches Axiomensystem (Klassen: Mengen und Untermengen)

Grundsätzlich:

Bis heute kein Beweis der Widerspruchsfreiheit von 2) und 3)
Nur „relative Widerspruchsfreiheit": z.B. Gödel (1940)

Im Folgenden:

a) Sehr naiver Zugang zur Mengenlehre.
b) Naiver Zugang zur Mengenlehre (nur in den Übungen ausführlicher):
   Axiomensystem von Zermelo – Fränkel
   Die Begriffe „Menge" und „Element" werden nicht definiert.
   Die Beziehung dieser undefinierten Begriffe wird beschrieben.

Sehr naiver Zugang zur Mengenlehre

Undefinierte Begriffe:
Menge
Elementbeziehung: x ist Element der Menge A; in Zeichen: $x \in A$

Gleichheit: A ist gleich B; in Zeichen: $A = B$
reflexiv $(A = A)$, transitiv $(A = B$ und $B = C \Rightarrow A = C)$
und symmetrisch $(A = B \Rightarrow B = A)$

ZF1: Extensionalitätsaxiom

Zwei Mengen sind genau dann gleich, wenn sie dieselben Elemente haben.

ZF 2: Aussonderungsaxiom

Zu jeder Menge A und zu jeder Aussageform $P(x)$ gibt es eine Menge B, deren Elemente genau jene y aus A sind, für die $P(y)$ wahr ist.

ZF3: Paarbildungsaxiom

Zu je zwei Mengen gibt es stets eine Menge, die jene beiden als Elemente enthält.

ZF4: Vereinigunsaxiom

Zu jeder Menge A gibt es eine Menge B, die für jedes Element z von A, welches eine Menge ist, jedes Element x von z enthält.

Definition:

Seien A und B Mengen. A heißt Teilmenge von B (in Zeichen: $A \subset B$), wenn jedes Element von A Element von B ist.

Satz 2.1.1:

Seien A, B und C Mengen. Dann gilt (für die Teilmengenrelation "$\subset$"):

a) $A \subset A$ (Reflexivität)

b) Ist $A \subset B$ und $B \subset C$, so ist $A \subset C$. (Transitivität)

c) Ist $A \subset B$ und $B \subset A$, so ist $A = B$. (Antisymmetrie)

Definition:

Die Menge, die keine Elemente enthält, heißt die leere Menge (Nullmenge).
Sie wird mit $\varnothing$ bezeichnet.

Definition:

Sei $\mathfrak{A}$ eine Menge von Mengen (d.h. jedes Element von $\mathfrak{A}$ ist eine Menge).
Dann heißt die Menge C, die jedes Element enhält, das mindestens zu einer Menge A aus $\mathfrak{A}$ gehört, die Vereinigung von $\mathfrak{A}$.

$$\bigcup \mathfrak{A} := \bigcup_{A \in \mathfrak{A}} A := \{x : \exists\, A \in \mathfrak{A} \text{ mit } x \in A\} := C$$

Definition:

Seien A und B Mengen. Dann heißen:

a) $A \cup B := \{x : x \in A \text{ oder } x \in B\}$ die Vereinigung von A und B.

b) $A \cap B := \{x : x \in A \text{ und } x \in B\}$ der Durchschnitt von A und B.

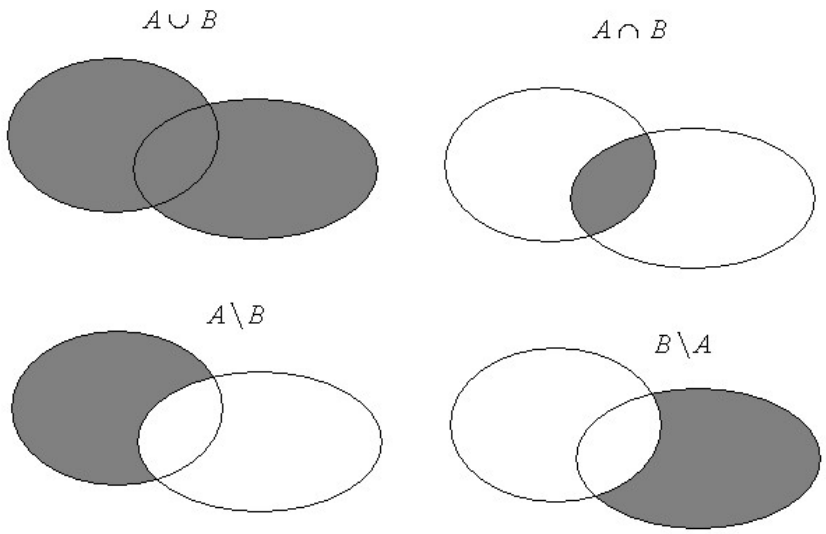
c) $A \backslash B := \{x : x \in A \text{ und } x \notin B\}$ das Komplement von B bezüglich A.

d) Bei $A \cap B = \varnothing$ heißen A und B diskunkt.

Warnung:

$A \backslash B$ im Allgemeinen ungleich $B \backslash A$.

Zeichnungen:



Satz 2.1.2:

Seien A, B und C Mengen. Dann gilt:

a) $A \cup \varnothing = A$

$A \cup B = B \cup A$

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$A \cup A = A$

$A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$

b) $A \cap \varnothing = \varnothing$

$A \cap B = B \cap A$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

$A \cap A = A$

$A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$

c) Distributivgesetze:

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

d) De Morgan'sche Gesetze:

$A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$

$A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$

Definition.

Sei $\mathfrak{A} \neq \emptyset$ eine Menge von Mengen und $\bigcup \mathfrak{A}$ die Vereinigung von $\mathfrak{A}$.
$\bigcap \mathfrak{A} := \bigcap_{A \in \mathfrak{A}} := \{x \in \bigcup \mathfrak{A} : \forall A \in \mathfrak{A} \text{ ist } x \in A\}$ heißt der Durchschnitt von $\mathfrak{A}$.

2.2. Produktmengen, Relationen und Abbildungen

Definition:

Seien A und B Mengen und $a \in A$ und $b \in B$.

a) $\{a, b\}$ heißt das ungeordnete Paar von a und b.

b) $(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$ heißt das geordnete Paar mit der 1. Koordinate a und der 2. Koordinate b.

c) $A \times B := \{z : \exists\, a \in A\ \exists\, b \in B \text{ mit } z = (a, b)\}$
$= \{(a, b) : a \in A \text{ und } b \in B\}$ heißt das Produkt der Mengen A und B.

Anmerkung:

In der Sprache der Mengenlehre sind „rechts“ und „links“ nicht zugelassen. Das wird durch die obige Methode „ersetzt“. Diese „aufwendige“ Methode kann man dann aber sofort wieder vergessen und mit „rechts“ und „links“ operieren.

Definition:

Seien A und B Mengen und $(a, b) \in A \times B$ und $(\alpha, \beta) \in A \times B$. Dann gilt:
$(a, b) = (\alpha, \beta) \;\Leftrightarrow\; a = \alpha$ und $b = \beta$

Definition:

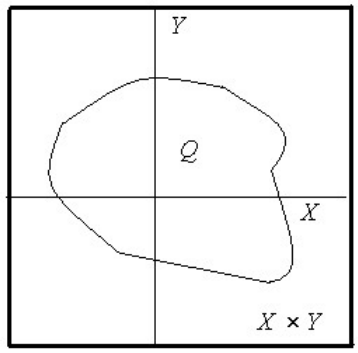
Seien X und Y Mengen und $Q \subset X \times Y$. Q heißt Relation von X nach Y.
Eine Relation Q von X nach Y heißt Korrespondenz von X nach Y, wenn gilt:
$\forall x \in X$ ist $\{(z, y) \in Q : z = x\} \neq \emptyset$
Eine Teilmenge R von $X \times X$ heißt Relation in X.
Eine Relation R in X heißt:
reflexiv: $\Leftrightarrow\ \forall x \in X$ ist $(x, x) \in R$
symmetrisch: $\Leftrightarrow\ \forall x \in X\ \forall y \in X$ mit $(x, y) \in \mathbb{R}$ ist $(y, x) \in R$
antisymmetrisch: $\Leftrightarrow\ \forall x \in X\ \forall y \in X$ mit $(x, y) \in \mathbb{R}$ und $(y, x) \in R$ ist $x = y$.
transitiv: $\Leftrightarrow\ \forall x \in X\ \forall y \in X\ \forall z \in X$ mit $(x, y) \in R$ und $(y, z) \in R$ ist $(x, z) \in R$.

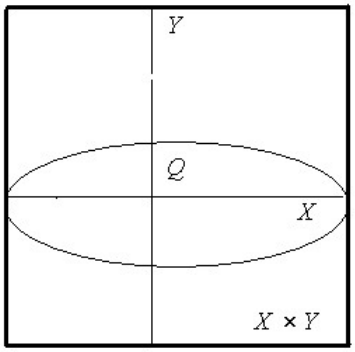
Beispiele 1:

a) $X :=$ Menge der natürliche Zahlen, $R := \{(x, y) \mid x \le y;\ x, y \text{ nat. Zahlen}\} =$
$= \{(1,1), (1,2), (1,3), \ldots, (2,2), \ldots\}$ heißt $\le$-Relation

b) $X :=$ Menge aller Menschen, $R := \{(x, y) : x \text{ ist Vater von } y\}$

Zeichnungen: Relation und Korrespondenz





Definition:

Sei X eine Menge und R eine Relation in X.

a) R heißt Ordnung (synonym: teilweise Ordnung; Halbordnung) auf X, wenn R reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist.

b) Sei R eine Ordnung auf X. Wir schreiben:
$x \le y :\Leftrightarrow (x, y) \in R$
$x < y :\Leftrightarrow (x, y) \in R$ und $x \ne y$
Wir sagen: X ist bezüglich R (oder: $\le$) geordnet (auch: teilweise geordnet, halbgeordnet).

c) Eine Ordnung auf X heißt total (synonym: linear; vollständig), wenn gilt:
$\forall x \in X\ \forall y \in X$ ist $(x, y) \in R$ oder $(y, x) \in R$.

d) Sei X geordnet bezüglich $\le$, $y \in X$ und $A \subset X$.
y kleinstes Element in $A :\Leftrightarrow y \in A$ und $\forall x \in A$ ist $y \le x$.
y größtes Element in $A :\Leftrightarrow y \in A$ und $\forall x \in A$ ist $x \le y$.
y untere Schranke von $A :\Leftrightarrow \forall x \in A$ ist $y \le x$.
y obere Schranke von $A :\Leftrightarrow \forall x \in A$ ist $x \le y$.

Satz 2.2.1:

Sei X teilweise geordnet und $A \subset X$.
Dann gibt es höchstens ein kleinstes bzw. größtes Element in A.

Definition:

Sei X bzgl. $\leq$ teilweise geordnet, $A \subset X$ und $y \in X$.

a) y heißt Supremum (synonym: kleinste obere Schranke) von A
[in Zeichen: $y = \sup A$], wenn gilt:
$i)$ $\forall x \in A$ ist $x \leq y$
$ii)$ $\forall z \in X$ mit $x \leq z$ $\forall x \in A$ ist $y \leq z$

b) y heißt Infimum (synonym: größte untere Schranke) von A
[in Zeichen: $y = \inf A$], wenn gilt:
$i)$ $\forall x \in A$ ist $y \leq x$
$ii)$ $\forall z \in X$ mit $z \leq x$ $\forall x \in A$ ist $z \leq y$

Warnung: Weder $\sup A$ noch $\inf A$ brauchen zu existieren.

$A := \left\{ x \in \mathbb{R} : -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \right\}$ hat Supremum und Infimum in $\mathbb{R}$.
Aber: $B := A \cap \mathbb{Q}$ hat kein Supremum/Infimum in $\mathbb{Q}$.

Satz 2.2.2:

Sei X eine teilweise geordnete Menge und $A \subset X$. Dann gilt:

a) Es gibt höchstens ein Supremum bzw. Infimum von A.

b) Falls $\sup A$ bzw. $\inf A$ existiert, ist $\sup A$ bzw. $\inf A$ das kleinste bzw. das größte Elemente in der Menge der oberen bzw. unteren Schranken von A.

Definition:

Seien X und Y Mengen.
Eine Menge f mit $f \subset X \times Y$ heißt Abbildung von X nach Y
[in Zeichen: $f : X \to Y$ mit $x \mapsto f(x)$], wenn gilt:
Für jedes $x \in X$ existiert genau ein $y \in Y$ mit $(x, y) \in f$.
X heißt der Definitionsbereich und Y der Wertebereich von f.
Seien $x \in X$ und $y \in Y$ mit $(x, y) \in f$. (Dann ist y durch x und f eindeutig bestimmt.)
$f(x) := y$ heißt der Wert von f in x (oder: an der Stelle x).
Für $A \subset X$ heißt $f[A] := f(A) := \{ f(x) : x \in A \}$ das Bild von A unter f.
Für $B \subset Y$ heißt $f^{-1}(B) := \{ x \in X : f(x) \in B \}$ das Urbild von B unter f.

Anmerkung:

Wenn man f als „Zuordnung“ interpretiert:
$graph(f) := f$ heißt der Graph von f
Unter dem Graphen von f „versteht“ man dann das „Bild“ , das die Teilmenge f in der Produktmenge $X \times Y$ „darstellt“.

Definition:

Seien X und Y Mengen und $f : X \to Y$ mit $x \mapsto f(x)$ eine Abbildung.

a) f surjektiv $:\Leftrightarrow f(X) = Y$

b) f injektiv $:\Leftrightarrow \forall x_1 \in X \ \forall x_2 \in X$ mit $f(x_1) = f(x_2)$ ist $x_1 = x_2$

c) f bijektiv $:\Leftrightarrow f$ surjektiv und injektiv

Beispiele:

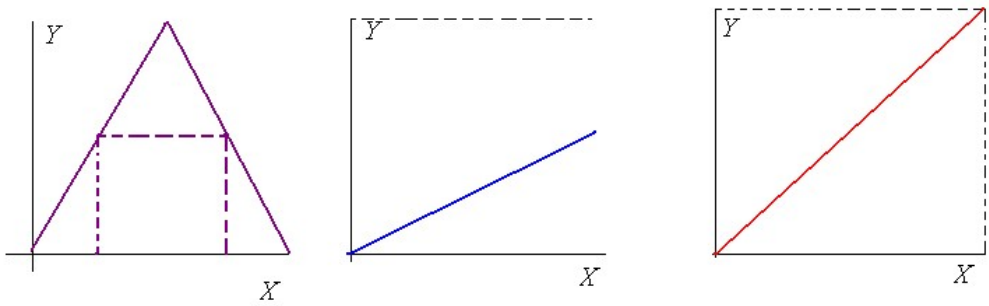
a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x^3$ ist bijektiv

b) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $x \mapsto x^3$ ist injektiv, nicht aber surjektiv

c) $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $(x, y) \mapsto x + y$ ist surjektiv, aber nicht injektiv

d) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit $(x, y) \mapsto \left(y, \frac{1}{1+e^x} \right)$ ist injektiv, aber nicht surjektiv

Zeichnungen: surjektiv(links); injektiv (Mitte); bijektiv (rechts)



Bemerkung:

Seien $f : X \to Y$ mit $x \mapsto f(x)$ und $Y_0 \to Z$ mit $y \mapsto g(y)$ Abbildungen und $f(X) \subset Y_0$. Dann ist $g \circ f : X \to Z$ mit $x \mapsto g \circ f(x) := g(f(x))$ eine Abbildung von X nach Z.

Definition:

$g \circ f : X \to Z$ aus der vorangehenden Bemerkung heißt Hintereinanderschaltung (Komposition) von f und g.

Definition:

Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ Abbildungen.
g heißt inverse Abbildung (Umkehrabbildung) zu f, wenn gilt:
$\forall x \in X$ ist $g(f(x)) = x$ und $\forall y \in Y$ ist $f(g(y)) = y$.

Definition:

Seien X bzw. Y bezüglich $\leq_X$ bzw. $\leq_Y$ teilweise geordnet und
$f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann heißt $f : X \to Y$ (bzgl. $\leq_X$ und $\leq_Y$):
a) isoton: (synonym: monoton wachsend)
$:\Leftrightarrow \ \forall x_1 \in X \ \forall x_2 \in X$ mit $x_1 \leq_X x_2$ ist $f(x_1) \leq_Y f(x_2)$
b) antiton: (synonym: monoton fallend)
$:\Leftrightarrow \ \forall x_1 \in X \ \forall x_2 \in X$ mit $x_1 \leq_X x_2$ ist $f(x_2) \leq_Y f(x_1)$
c) streng isoton: (synonym: streng monoton wachsend)
$:\Leftrightarrow \ \forall x_1 \in X \ \forall x_2 \in X$ mit $x_1 \leq_X x_2$ ist $f(x_1) <_Y f(x_2)$
d) streng antiton: (synonym: streng monoton fallend)
$:\Leftrightarrow \ \forall x_1 \in X \ \forall x_2 \in X$ mit $x_1 \leq_X x_2$ ist $f(x_2) <_Y f(x_1)$

Satz:

Die Kompostion zweier (streng) isotoner (bzw. (streng) antitoner) Abbildungen ist (streng) isoton (bzw. (streng) antiton).

§3 Die reellen Zahlen

Man kann axiomatisch fordern oder mit viel Mühe (ausgehend von der Mengenlehre) beweisen, dass gilt:

Es existiert eine Menge $\mathbb{R}$, welche die Menge der reellen Zahlen genannt wird und es existieren die Abbildungen

Addition $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $(x, y) \mapsto x + y$ und

Multiplikation $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $(x, y) \mapsto xy$ mit im Folgenden angegebenen Eigenschaften:

$\mathbb{R}$A1: (Assoziativität der Add.): $x + (y + z) = (x + y) + z \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$

$\mathbb{R}$A2: (Kommutativität der Add.): $x + y = y + x \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

$\mathbb{R}$A3: (Nullelement): $\exists 0 \in \mathbb{R}$ mit $x + 0 = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\mathbb{R}$A4: (inverses Element der Add.) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}$ mit $x + y = 0$

Definition:

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit . $x + y = 0$. Dann heißt $-x := y$ das Negative von x. $x + z$ und $x - z := x + (-z)$ bei $z \in \mathbb{R}$ heißen Summe bzw. Differenz von x und z.

$\mathbb{R}$M1: (Assoziativität der Mult.): $x(yz) = (xy)z \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$.

$\mathbb{R}$M2: (Kommutativität der Mult.): $xy = yx \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

$\mathbb{R}$M3: (Einselement): $\exists 1 \in \mathbb{R}$ mit $1x = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$\mathbb{R}$M4: (inverses Element der Mult.): $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \exists z \in \mathbb{R}$ mit $xz = 1$

Definition:

Seien $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $z \in \mathbb{R}$ mit xz=1. Dann heißt $x^{-1} := z$ das Inverse von x.
Für $y \in \mathbb{R}$ sei $yx^{-1} := yz$.

$\mathbb{R}$D: (Distributivgesetz): $x(y + z) = xy + xz \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$.

Anmerkung:

$\mathbb{R}$A1–$\mathbb{R}$A4, $\mathbb{R}$M1–$\mathbb{R}$M4 und $\mathbb{R}$D machen $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ zu einem kommutativen Körper.
$\mathbb{R}$A1–$\mathbb{R}$A4 machen $(\mathbb{R}, +)$, $\mathbb{R}$M1–$\mathbb{R}$M4 machen $(\mathbb{R}, \cdot)$ zu kommutativen Gruppen.

$\mathbb{R}$O1: (Existenz positiver reeller Zahlen): $\exists\, \mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt entweder $x \in \mathbb{R}^+$ oder $-x \in \mathbb{R}^+$.

$\mathbb{R}$O2: $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$ gilt $x + y \in \mathbb{R}^+$ und $xy \in \mathbb{R}^+$.

Definition:

a) $\mathbb{R}^+$ aus $\mathbb{R}$O1 heißt die Menge der positiven reellen Zahlen.
b) $\mathbb{R}_0^+ := \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ heißt die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen.
c) Seien $x, y \in \mathbb{R}$. $x \leq y :\Leftrightarrow y - x \in \mathbb{R}_0^+$
$x < y :\Leftrightarrow y - x \in \mathbb{R}^+$
($\leq$ definiert eine lineare Ordnung auf $\mathbb{R}$)

d) Sei $M \subset \mathbb{R}$.
M nach oben beschränkt: $\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}\ \forall x \in M$ gilt $x \leq c$
M nach unten beschränkt: $\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}\ \forall x \in M$ gilt $c \leq x$
M beschränkt: $\Leftrightarrow$ M nach oben und nach unten beschränkt.

$\mathbb{R}$V (Vollständigkeit): $\forall \emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$ mit M nach oben beschränkt $\exists c \in \mathbb{R}$ mit $\forall x \in M$ ist $x \leq c$ und $\forall y \in \mathbb{R}$ mit $x \leq y\ \forall x \in M$ gilt $c \leq y$. (d.h. jede nichtleere und nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt in $\mathbb{R}$ eine kleinste obere Schranke (Supremum))

Anmerkung:

Alle obigen Axiome zusammen machen $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ zu einem vollständigen angeordneten kommutativen Körper.

Aus $\mathbb{R}$A1–$\mathbb{R}$A4 folgt:

Satz 1:

a) Das Nullelement ist eindeutig bestimmt: Ist $y \in \mathbb{R}$ und gilt $x + y = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so ist $y = 0$.
b) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist $-x$ eindeutig bestimmt. Sind $y, z \in \mathbb{R}$ und
$x + y = 0 = x + z \quad \Rightarrow y = z$
c) $0 = -0$
d) $\forall y, z \in \mathbb{R}\ \exists_1 x \in \mathbb{R}$ mit $x + y = z$. Es ist $x = z - y$.
e) $\forall x \in \mathbb{R}$ ist $-(-x) = x$
f) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ist $-(x + y) = -x - y$.

Aus $\mathbb{R}$A1–$\mathbb{R}$A4, $\mathbb{R}$M1–$\mathbb{R}$M4 und $\mathbb{R}$D folgt:

Satz 2:

a) Das Einselement ist eindeutig bestimmt:
Ist $y \in \mathbb{R}$ und gilt $xy = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so ist $y = 1$.

b) Für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist das Inverse x^{-1} eindeutig bestimmt:
Sind $y, z \in \mathbb{R}$ und $xy = 1 = xz \quad \Rightarrow y = z$.

c) Es gibt einen kommutativen Körper, der nur zwei Elemente enthält.

d) $\forall y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \forall z \in \mathbb{R}\ \exists_1 x \in \mathbb{R}$ mit $xy = z$. Es ist $x = zy^{-1}$

e) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ ist $(x + y)z = xz + yz$.

f) $\forall x \in \mathbb{R}$ ist $x \cdot 0 = 0$.

g) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ mit $xy = 0$ ist $(x = 0) \vee (y = 0)$

h) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ist $(-x)y = -(xy)$.

i) $\forall x \in \mathbb{R}$ ist $(-1)x = -x$

j) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ist $(-x)(-y) = xy$

k) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist $(x^{-1})^{-1} = x$

l) $\forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$.

Definition:

$\mathbb{N} := \bigcap \mathfrak{A}$ bei $\mathfrak{A} := \{A \in \mathbb{R}: 1 \in A$ und $\forall x \in A$ ist $x + 1 \in A\}$
$\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n: n \in \mathbb{N}\}$ Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ Menge der nichtnegativen Zahlen.
$\mathbb{Q} := \{xy^{-1} : x \in \mathbb{Z}$ und $y \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{Q}^+ := \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{Q}$
$\mathfrak{J} := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ Menge der irrationalen Zahlen

Offensichtlich gilt:

Satz 3:

a) $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\} \subset \mathbb{R}^+$ ist die Menge der natürlichen Zahlen.

b) $1, 0 \in \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Bemerkung 1:

Das oben definierte $\mathbb{N}$ erfüllt mit 1 als Einselement und der Nachfolgerdefinition $x^+ := x+1$ die Axiome P1 – P5 von Peano und ist darum zu $\mathbb{N}$ aus §1 isomorph. Wir verwenden darum die gleiche Bezeichnung und nennen diese Menge $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen. Streng genommen haben wir ein neues Modell der natürlichen Zahlen.

Definition: (endliche Summen und Produkte)

Bei $n \in \mathbb{N}$ und $x_i \in \mathbb{R}$ für $i \in \mathbb{N}:=\{k \in \mathbb{N}: 1 \le k \le n\}$ definieren wir rekursiv:

1) $\sum_{i=1}^{0} x_i := 0$, $\sum_{i=1}^{1} x_i := x_1$ und $\sum_{i=1}^{n} x_i := \sum_{i=1}^{n-1} x_i + x_n$ für $n \ge 1$

Außerdem sei $\sum_{i \in N} x_i := \sum_{i=1}^{n} x_i$.

2) $\prod_{i=1}^{0} x_i := 1$, $\prod_{i=1}^{1} x_i = 1$ und $\prod_{i=1}^{n} x_i := \left(\prod_{i=1}^{n-1} x_i\right) x_n$ für $n \ge 1$

Durch vollständige Induktion beweist man mit $\mathbb{R}$A1–$\mathbb{R}$A4, $\mathbb{R}$M1–$\mathbb{R}$M4 und $\mathbb{R}$D, dass gilt:

Satz 4 :

Seien $n, m \in \mathbb{N}$ mit $m < n$, $x_i \in \mathbb{R}$ für $i \in \mathbb{N}:=\{k \in \mathbb{N}: 1 \le k \le n\}$ und p: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung. Dann gilt:

a) Allgemeine Assoziativgesetze: $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{m} x_i + \sum_{i=1}^{n-m} x_{m+i}$

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = \prod_{i=1}^{m} x_i + \prod_{i=1}^{n-m} x_{m+i}$$

b) Allgemeine Kommutativgesetze: $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_{p(i)}$

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = \prod_{i=1}^{n} x_{p(i)}$$

c) Allgemeines Distributivgesetz: $\sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{j=1}^{n-m} x_{m+j} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n-m} x_i x_{m+j}$

Folgerung:

Seien $n, m \in \mathbb{N}$ und $x_{ij} \in \mathbb{R}$ für $i = 1,\ldots,m$ und $j = 1,\ldots,n$. Dann gilt:

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij}\right) \text{ und } \prod_{i=1}^{m}\left(\prod_{j=1}^{n} x_{ij}\right) = \prod_{j=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{m} x_{ij}\right).$$

Definition: (Potenzen)

Bei $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ seien $x^0 := 1$, $\quad x^n = \prod_{i=1}^{n} x_i$ bei $x_i := x$ und $x^{-n} := \left(x^n\right)^{-1}$ bei $x \neq 0$.
Durch vollständige Induktion zeigt man folgende Rechenregeln für Potenzen:

Satz 5:

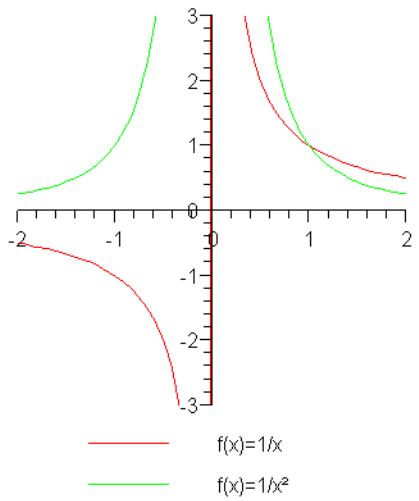
Seien $n, m \in \mathbb{Z}$ und $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann gilt:
a) $x^n x^m = x^{n+m}$ **b)** $\left(x^n\right)^m = x^{nm}$ **c)** $x^n y^n = (xy)^n$.

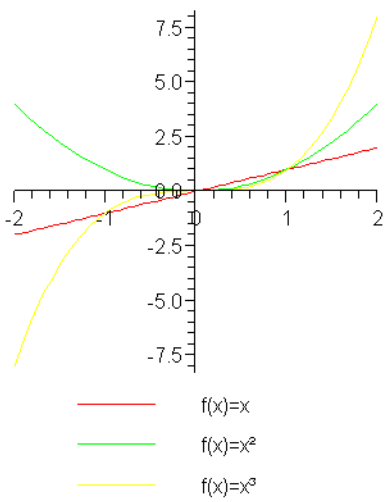
Definition:

a) Sei X eine Menge, $Y \subset \mathbb{R}$ und f: $X \to Y$ eine Abbildung. Dann heißt f: $X \to Y$ eine (reellwertige) Funktion.

b) Für $n \in \mathbb{N}_0$ heißt die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x^n$ die Parabel n-ter Ordnung durch $(0,0)$.

c) Für $n \in \mathbb{N}$ heißt die Funktion $\mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x^{-n}$ die Hyperbel n-ter Ordnung (mit Pol$(0,0)$).





Definition:

a) Für $n \in \mathbb{N}_0$ werde $n! := \prod_{i=1}^{n} i$ als n-Fakultät bezeichnet.

b) Für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ werde $\binom{x}{n} := \prod_{i=1}^{n} \frac{(x-i+1)}{i}$ als „x über n" bezeichnet.

Durch vollständige Definition beweist man damit folgende Rechenregeln:

Satz 6:

Seien $n, m \in \mathbb{N}_0$ und $x, y \in x \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

a) $$\binom{n}{m} = \begin{cases} \dfrac{n!}{(m!(n-m)!)} & \text{für} \quad 0 \le m \le n \\ 0 & \text{für} \quad m > n \end{cases}$$

b) $$\binom{x+1}{n+1} = \binom{x}{n} + \binom{x}{n+1}$$

c) Binomialentwicklung: $(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$

Aus $\mathbb{R}O1 - \mathbb{R}O2$ folgen:

Satz 7:

Für $x, y, a, b, \xi, \nu \in \mathbb{R}$ gilt:

a) $x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow 0 < x \Leftrightarrow -x < 0$

b) Transitivität: $x < y$ und $y < z \Rightarrow x < z$
$x \le y$ und $y \le z \Rightarrow x \le z$

c) Reflexivität: $x \le x$

d) Antisymmetrie: $x \le y$ und $y \le x \Rightarrow x = y$

e) Translationsinvarianz: $x < y \quad \Rightarrow x + a \le y + a$

f) $x < y$ und $\xi < \nu \Rightarrow x + \xi < y + \nu$.

g) Linearität: $x \leq y$ oder $y \leq x$

h) $x < y$ und $a \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow xa < ya$
i) $x < y$ und $-a \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow xa > ya$
j) ……
k) $x \neq 0 \Leftrightarrow 0 < x^2$
l) $0 < x \Leftrightarrow 0 < x^{-1}$
m) $x < 0 \Leftrightarrow x^{-1} < 0$
n) …….
o) …….
p) $x = x^2 \Leftrightarrow (x = 1) \vee (x = 0)$
q) …….
r) Ungleichung von Bernoulli: $(1+x)^n \geq 1 + nx$ bei $x \geq -1$

Definition:

a) Für $x, y \in \mathbb{R}$ sei $\max(x, y) := \sup\{x, y\}$ und $\min(x, y) := \inf\{x, y\}$

b) Für $x \in \mathbb{R}$ sei $x^+ := \max(0, x)$ der Positivteil,
$x^- := \max(0, -x)$ der Negativteil und
$|x| := \max(x^+, x^-)$ der Absolutbetrag von x.

c) Die Funktion $|\ \cdot\ | : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto |x|$ heißt Betragsfunktion.

Es gilt der Satz:

Satz 8:

Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

a) $|x|, x^+, x^- \in \mathbb{R}_0{}^+$ und $x = x^+ - x^-$

b) $x = 0 \Leftrightarrow |x| = 0$

c) $|-x| = |x|$

d) $|xy| = |x| \cdot |y|$

e) postiv homogen: $|\alpha x| = \alpha |x|$ bei $\alpha \in \mathbb{R}_0{}^+$

f) $|xy^{-1}| = |x| \cdot |y|^{-1}$ bei $y \neq 0$

g) Dreiecksungleichung: $|x+y| \le |x| + |y|$

h) $|x| - |y| \le |x+y|$ und $\big||x| - |y|\big| \le |x| + |y|$

i)

$$\max(x,y) = \frac{1}{2}\big(x + y + |x-y|\big)$$

$$\min(x,y) = \frac{1}{2}(x + y - |x-y|)$$

j) $|x| \le |y| \Leftrightarrow -|y| \le x \le |y|$

$|x| < |y| \Leftrightarrow -|y| < x < |y|$

Satz 9:

Für $n \in \mathbb{N}$ und $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ für $i = 1,\dots,n$ gilt:

a) **Verallgemeinerte Dreiecksungleichung:** $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \le \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

b) **Ungleichung von Cauchy:** $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2$

Definition:

Für $x \in \mathbb{R}$ sei $sign(x) := \begin{cases} 1 & \textit{für} \quad 0 < x \\ 0 & \textit{für} \quad x = 0 \\ -1 & \textit{für} \quad x < 0 \end{cases}$

Die Funktion sign: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto sign(x)$ heißt die Vorzeichenfunktion.

Satz 10:

Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

a) $x = |x| \cdot sign(x)$ **b)** $sign(xy) = sign(x) \cdot sign(y)$

Satz 11:

a) Wohlordnung von $\mathbb{N}$:

Jede nichtleere Teilmenge M von $\mathbb{N}$ besitzt ein minimales Element, d.h. $\mathbb{N}$ ist bezüglich $\leq$ wohlgeordnet.

b) Äquivalenz der Wohlordnung und des Induktionsaxioms:

Axiom P5 und die Wohlordnung von $\mathbb{N}$ bezüglich $\leq$ sind äquivalent.

Aus $\mathbb{R}$V und den vorangehenden Axiomen und Sätzen folgt:

Satz 12:

a) $\mathbb{R}$V $\Leftrightarrow$ $\forall \emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$ nach unten beschränkt $\exists \inf M \in \mathbb{R}$

b) $M \subset \mathbb{R}$ nach oben beschränkt $\Leftrightarrow \{-x : x \in M\}$ nach unten beschränkt

c) $\forall \emptyset \neq M \subset \mathbb{Z}$ nach oben beschränkt [bzw. nach unten] beschränkt $\exists x \in$ M maximal [bzw. minimal]

d) $\forall x \in \mathbb{R}$ ist $\{ y \in \mathbb{R}: \ y < x \} \neq \emptyset$

e) $0 = \inf \mathbb{R}_0{}^+ = \inf \mathbb{R}^+ = \inf \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$

f) Satz von Archimedes:

$\forall x \in \mathbb{R} \, \exists n \in \mathbb{N}$ mit $x < n$ (also: $\mathbb{R}$ und $\mathbb{N}$ sind nicht nach oben beschränkt)

g) Archimedisches Axiom:

$\forall x, y \in \mathbb{R}^+ \, \exists n \in \mathbb{N}$ mit $nx > y$

h) $b \in \mathbb{R}$ mit $b > 1 \Rightarrow$ $\forall z \in \mathbb{R}^+ \ \exists n \in \mathbb{N}$ mit $z < b^n$

i) $a \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < 1$ $\Rightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \ \exists n \in \mathbb{N}$ mit $a^n < \varepsilon$

j) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$ $\exists z \in \mathbb{Q}$ mit $x < z < y$

k) $\forall x \in \mathbb{R}$ ist $\sup \{ z \in \mathbb{Q}: \ z \leq x \} = x = \inf \{ z \in \mathbb{Q}: \ x \leq z \}$

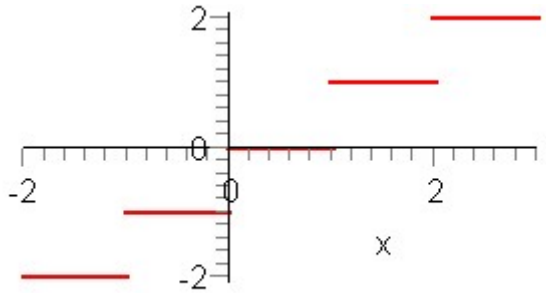
Bemerkung 2:

Wegen Satz b.12 (b,c, und f) gilt: $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists_1 z \in \mathbb{Z}$ mit $z \le x < z+1$

Definition:

Für $x \in \mathbb{R}$ sei $entier(x) := [x] := \sup\{z \in \mathbb{Z}:\ z \le x\}$.
Die Abbildung entier: $\mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ mit $x \mapsto entier(x)$ heißt die entier-Funktion.

Zeichnung:



Bemerkung 3:

Sei $y \in \mathbb{R}$. Nach Satz b.7.k hat die Gleichung $x^2 = y$ höchstens dann eine Lösung x in $\mathbb{R}$, wenn $y \ge 0$ ist.

Satz 13: (Existenz und Eindeutigkeit der Quadratwurzel)

$\forall y \in \mathbb{R}_0^+\ \ \exists_1 x \in \mathbb{R}_0^+$ mit $x^2 = y$

Definition:

x aus Satz b.13 heißt die positive Quadratwurzel von y und wird mit $\sqrt{y}$ $\sqrt{y}$ oder $y^{\frac{1}{2}}$ bezeichnet.

Satz 14:

Für $x, y \in \mathbb{R}_0^+$ $x, y \in \mathbb{R}_0^+$ gilt:

a) $0 \le x < y \Leftrightarrow \sqrt{x} < \sqrt{y}$

b) $\sqrt{x^{-1}} = \left(\sqrt{x}\right)^{-1}$

c) $\sqrt{xy} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$

d) $\sqrt{2} \in \mathfrak{J} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Satz 15 (Existenz und Eindeutigkeit der m-ten Wurzel):

$\forall m \in \mathbb{N} \quad \forall y \in \mathbb{R}_0^+ \, \exists_1 \, x \in \mathbb{R}_0^+$ mit $x^m = y$.

Definition:

Seien $m \in \mathbb{N}$ und $x, y \in \mathbb{R}_0^+$ mit $x^m = y$.
$\sqrt[m]{y} := y^{\frac{1}{m}}$ heißt die m-te Wurzel von y.

Satz 16:

Für $n, m \in \mathbb{N}$ und $x, y \in \mathbb{R}_0^+$ gilt:

a) $0 \le x < y \Leftrightarrow \sqrt[m]{x} < \sqrt[m]{y}$

b) $\sqrt[m]{x^{-1}} = \left(\sqrt[m]{x}\right)^{-1}$ bei $x > 0$

c) $\sqrt[m]{xy} = \sqrt[m]{x} \cdot \sqrt[m]{y}$

d) $\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{1}{nm}}$

§4 Folgen und Reihen

Die wichtigsten Eigenschaften der natürlichen, rationalen und reellen Zahlen sind im §1 und im §3 zusammengestellt.

Seien
$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, ...\}$ die Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen mit der üblichen Addition und Multiplikation
$\leq$ die "übliche" Ordnung auf $\mathbb{R}$
(d.h. $x \leq y \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{R}_0^+$)
$\mathbb{R}_0^+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen
$\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ die Menge der positiven reellen Zahlen
$|x|$ der "übliche" Betrag von $x \in \mathbb{R}$, d.h.
$|x| := x$ bei $x \in \mathbb{R}_0^+$ und $|x| := -x$ sonst.
Es ist $|\quad \cdot \quad| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto |x|$ eine Abbildung. Sie hat folgende Eigenschaften:
$|x| \geq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$
$|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
$|\alpha x| = \alpha \cdot |x| \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}_0^+ \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (positiv homogen)
$|x + y| \leq |x| + |y|$ (Dreiecksungleichung)
und
$|x| - |y| \leq |x + y|$,
$||x| - |y|| \leq |x + y|$
$\max(x, y) = \frac{1}{2}\left(x + y + |x - y|\right)$
$\min(x, y) = \frac{1}{2}\left(x + y - |x - y|\right)$ und
$|x| \leq |y| \Leftrightarrow -|y| \leq x \leq |y| \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$

$\widetilde{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ mit $-\infty < x < +\infty \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

Definition:

Sei X eine Menge, $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen und
$\mathfrak{X} : \mathbb{N} \to X$ mit $n \mapsto x_n := \mathfrak{X}(n)$ eine Abbildung.
$\mathfrak{X}$ heißt Folge in X und wird auch mit $(x_n : n \in \mathbb{N})$ oder kürzer (x_n) bezeichnet.
x_n heißt das n-te Glied der Folge $\mathfrak{X}$.

Das Bild $\mathfrak{X}(\mathbb{N})$ von $\mathbb{N}$ unter $\mathfrak{X}$ wird auch mit $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ bezeichnet.

Beispiel 1: Iterationsverfahren für die Berechnung von $\sqrt{y}$ für $y \in \mathbb{R}^+$.

$$x_0 := a \text{ mit } a \in \mathbb{R}^+ \text{ und } x_{n+1} := \frac{\left(x_n + \frac{y}{x_n}\right)}{2} \text{ für } n \in \mathbb{N}$$

Es gilt: $x_n \to y$ für $n \to +\infty$; $y = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Sei $y = 4$; $\sqrt{y} = 2$

1. $a = 1$

$x_0 = 1$

$x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{4}{x_0}\right) = \frac{5}{2}$

$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{4}{x_1}\right) = 2{,}05$

$x_3 = ... = \frac{5281}{1640} = ... = 2{,}006097$

$x_4 = ... = 2{,}0000005$

....

$x_n = 2$

2. $a = 2$ als Beginn: $x_0 = x_1 = ... = x_n = 2$

3. $a = 20$: $x_0 = 20,\ x_1 = 10{,}1,\ x_2 = 5{,}2480135,$
$x_3 = 3{,}0051058,\ x_4 = 2{,}168,\ x_5 = 2{,}006,\ x_6 = 2{,}0000010$

Beispiel 2: Approximative Bestimmung von krummlinig begrenzten Flächen durch Bildung von Unter- und Obersummen.

Beispiel 3: Geometrische Reihe

für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $s_n := \sum\limits_{k=0}^{n} 2^{-k}$; die s_n bilden eine Folge:

$s_0 = 1$ $\qquad s_1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ $\qquad s_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$

$s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8}$ $\qquad s_4 = ...$

Verschiedene Interpretationen:

1) Population nimmt bei jeder (Wachstums-)periode um 2^{-k} zu.
Frage: Wie verhält sich das Wachstum dieser Population ?

2) Schrittweite 2^{-k}. Wie weit kommt man ?

Durch vollständige Induktion: $s_n = 2 - 2^{-n}$
Wohin strebt s_n ?
$2^n \to 0,\ s_n = 2 - \underbrace{2^n}_{\to 0} \to 2$

Sei nun X mit einer Halbordnung versehen; $(X, \leq)$. Für $x, y \in X$ mit $x \leq y$ schreiben wir auch $y \geq x$. Auf $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ betrachten wir immer die übliche Ordnung; d.h. :

$n \leq m :\Leftrightarrow m - n \in \mathbb{N}_0$ bzw. $\quad (m-n) \in \mathbb{R}_0^+$

$n < m :\Leftrightarrow m - n \in \mathbb{N}$ bzw. $\quad (m-n) \in \mathbb{R}^+$

Definition:

Seien $(X, \leq)$ halbgeordnet und $\mathfrak{X} := (x_n : n \in \mathbb{N})$ eine Folge in X. Dann heißt $\mathfrak{X}$

beschränkt	$:\Leftrightarrow$	$\exists y, z \in X$ mit $y \leq x_n \leq z \quad \forall n \in \mathbb{N}$
isoton	$:\Leftrightarrow$	$x_n \leq x_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
streng isoton	$:\Leftrightarrow$	$x_n < x_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
antiton	$:\Leftrightarrow$	$x_n \geq x_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
streng antiton	$:\Leftrightarrow$	$x_n > x_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(vgl. §3)

Beispiele 4:

Sei $\mathfrak{X} := (x_n : n \in \mathbb{N})$ eine Folge in X.
1) Sei $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{Q}$ die Menge der reellen Zahlen bzw. rationalen Zahlen
Bei $X := \mathbb{R}$ heißt $\mathfrak{X}$ eine Folge von reellen Zahlen.
Bei $X := \mathbb{Q}$ heißt $\mathfrak{X}$ eine Folge von rationalen Zahlen.
Wegen $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ nennen wir eine Folge in $\mathbb{Q}$ auch eine Folge in $\mathbb{R}$.

2)$\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ist die Menge aller Abbildungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Bei $X := \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ist $\mathfrak{X}$ eine Folge von Abbildungen $x_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $t \to x_n(t)$.

Definition:

Seien $\mathfrak{X} := (x_n : n \in \mathbb{N})$ eine Folge und $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\mathrm{n} \to k(\mathrm{n})$ eine streng isotone Abbildung. Dann heißt die Folge $\mathfrak{X} \circ k : \mathbb{N} \to X$ mit $n \to \mathfrak{X}(k(n))$ eine Teilfolge von $\mathfrak{X}$ und wird mit $(x_{k(n)} : n \in \mathbb{N})$ oder $(x_{k_n} : n \in \mathbb{N})$ bezeichnet.

§4.a Folgen in $\mathbb{R}$

Im folgenden seien $\mathfrak{X} := (x_n : n \in \mathbb{N})$ und $\mathfrak{y} := (y_n : n \in \mathbb{N})$ Folgen in $\mathbb{R}$ und $x, y \in \mathbb{R}$.

Beispiele a.1 :

1) $z \in \mathbb{R}$ mit $(x_n : n \in \mathbb{N})$, $x_n := z \; \forall n \in \mathbb{N}$ konstante Folge

2) $x_n := n, n \in \mathbb{N}$

3) $z \in \mathbb{R}$, $x_n := \begin{cases} z & \text{für n gerade} \\ -z & \text{für n ungerade} \end{cases}$ alternierende Folge

4) $x_n := \dfrac{1}{n}$ Nullfolge

5) $x_n := 2^n$; $x_n := 2^{-n}$

Definition:

a) $(x_n : n \in \mathbb{N})$ konvergiert gegen $x \in \mathbb{R}$, in Zeichen:

$x_n \to x$ für $n \to \infty$

$x = \lim\limits_{n \to \infty} x_n, \quad x = \lim\limits_{n \in \mathbb{N}} x_n$

$:\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \; \exists \mathrm{m} \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m$ gilt $|x_n - x| < \varepsilon$

b) $(x_n : n \in \mathbb{N})$ konvergiert in $\mathbb{R} :\Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{R}$ mit $y = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$

c) $(x_n : n \in \mathbb{N})$ divergiert $:\Leftrightarrow$ $(x_n : n \in \mathbb{N})$ konvergiert nicht in $\mathbb{R}$

d) Es konvergiere $(x_n : n \in \mathbb{N})$ gegen $x \in \mathbb{R}$. Dann heißt x Limes (synonym: Grenzwert) von $(x_n : n \in \mathbb{N})$

e) $(x_n : n \in \mathbb{N})$ heißt Nullfolge $:\Leftrightarrow (x_n : n \in \mathbb{N})$ konvergiert gegen 0

Satz a.1:

Der Limes einer konvergenten Folge in $\mathbb{R}$ ist eindeutig bestimmt.

Beispiele a.2:

1) $x_n := z \; \forall n \in \mathbb{N}; \; (x_n) \to z$

2) $x_n := n$ divergiert

3) $x_n := (-1)^{n+1} \cdot z$ divergiert, falls $z \neq 0$

4) $x_n := \frac{1}{n} \to 0$ (Nullfolge)

5) $x_n := 2^{-n} \to 0$ (Nullfolge)

6) $x_n := 2^n$ divergiert

$y_n := (-1)^{n+1} \cdot 2^{-n} \to 0$ alternierende Nullfolge

7) $y_n := x_{2n+1}$ Teilfolge von $(\mathrm{x_n})$ mit $x_n := (-1)^{n+1} \cdot z$

$y_n \to z$, aber $x_n \not\to z$

Satz a.2:

a) $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} |x_n - x| = 0$

b) $0 = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ und $\exists m \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m$ gilt $|x_n - x| \leq y_n$

$\Rightarrow \; x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$

c) $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \quad \Rightarrow \quad |x| = \lim\limits_{n\to\infty} |x_n|$

$\not\Leftarrow$

d) $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ und y= $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ und $\exists m \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m$ gilt $x_n \leq y_n$

$\Rightarrow \; x \leq y$

$\not\Leftarrow$

e) $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ und y= $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \alpha x + \beta y = \lim\limits_{n\to\infty} (\alpha x_n + \beta y_n)$

$\not\Leftarrow$

f) $0 \neq x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \quad \Rightarrow \; \exists m \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m$ gilt $|x_n| \geq \frac{1}{2}|x|$

$\Rightarrow \; \forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m$ existiert x_n^{-1}

g) $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ und x_n^{-1} und x^{-1} existieren $\Rightarrow x^{-1} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n^{-1}$

Warnung:

Aus $x_n < y_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ folgt nicht $\lim\limits_{n\to\infty} x_n < \lim\limits_{n\to\infty} y_n$:

Sei z.B. $x_n := 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ und $y_n := \frac{1}{n}$.

$x_n < y_n \ \forall n \in \mathbb{N}$, aber $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$

Satz a.3:

a) $(x_n : n \in \mathbb{N})$ isoton [bzw. antiton]

$\Rightarrow \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ nach unten [bzw. nach oben] beschränkt

Warnung: isoton $\not\Rightarrow$ nach oben beschränkt

b) $(x_n : n \in \mathbb{N})$ beschränkt und $(y_n : n \in \mathbb{N})$ Nullfolge

$\Rightarrow (x_n y_n : n \in \mathbb{N})$ Nullfolge

c) $(x_n : n \in \mathbb{N})$ konvergent $\Rightarrow (x_n : n \in \mathbb{N})$ beschränkt

$\not\Leftarrow$

d) $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ und $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n \ \Rightarrow \ xy = \lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n$

$\not\Leftarrow$

e) $x_n \neq 0 \neq x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ und $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n \ \Rightarrow \ \frac{y}{x} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n}$

$\not\Leftarrow$

f) $(x_{k_n} : n \in \mathbb{N})$ Teilfolge von $(x_n : n \in \mathbb{N})$ und

i) (x_n) nach oben beschränkt $\Rightarrow (x_{k_n})$ nach oben beschränkt

$\not\Leftarrow$

ii) (x_n) nach unten beschränkt $\Rightarrow (x_{k_n})$ nach unten beschränkt

$\not\Leftarrow$

iii) (x_n) konvergent $\Rightarrow$ (x_{k_n}) konvergent

$\not\Leftarrow$

iv) (x_n) konvergent gegen x $\Rightarrow$ (x_{k_n}) konvergent gegen x

$\not\Leftarrow$

g) $(x_n : n \in \mathbb{N})$ Nullfolge mit $x_n \neq 0 \ \Rightarrow \ (x_n^{-1} : n \in \mathbb{N})$ nicht beschränkt

$\not\Leftarrow$

Satz a.4

Sei $(x_n : n \in \mathbb{N})$ isoton [bzw. antiton] und nach oben [bzw. nach unten] beschränkt.
Dann gilt:

a) $(x_n : n \in \mathbb{N})$ ist konvergent in $\mathbb{R}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ [bzw. $\inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$]

Warnung: „Isoton“ <u>und</u> „nach oben/unten beschränkt“ sind wesentlich in Satz a.4.

Definition:

$x \in \mathbb{R}$ heißt Häufungspunkt der Folge $(x_n : n \in \mathbb{N})$

$:\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \ \forall n \in \mathbb{N} \ \exists m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq n$ und $|x_m - x| < \varepsilon$

Satz a.5:

a) x Häufungspunkt von $(x_n : n \in \mathbb{N}) \ \Leftrightarrow$

$\exists$ Teilfolge $(x_{n_k} : n \in \mathbb{N})$ von $(x_n : n \in \mathbb{N})$ mit $x = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$

b) $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \quad \Rightarrow \ x$ ist einziger Häufungspunkt von $(x_n : n \in \mathbb{N})$

$\not\Leftarrow$

Beispiele a.3:

1) $x_n := n$ kein Häufungspunkt

2) $x_n := (-1)^n$ -1,+1 Häufungspunkte

3) $x_n := (-1)^n + \frac{1}{n}$ -1,+1 Häufungspunkte

4) $x_{2n} := n$ und $x_{2n+1} = \frac{1}{n}$ 0 einziger Häufungspunkt

5) Diagonalabzählungsverfahren von $\mathbb{Q}$

Satz a.6 (Bolzano-Weierstraß)

Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ hat mindestens einen Häufungspunkt.

Definition:

$(x_n : n \in \mathbb{N})$ heißt Cauchyfolge $:\Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \ \ \exists k \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq k \ \forall m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq k$ gilt $|x_n - x_m| < \varepsilon$

Satz a.7:

a) $(x_n : n \in \mathbb{N})$ konvergiert in $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $(x_n : n \in \mathbb{N})$ ist Cauchyfolge
b) $(x_n : n \in \mathbb{N})$ Cauchyfolge $\Rightarrow$ $(x_n : n \in \mathbb{N})$ beschränkt

Satz a.8: (Cauchysches Konvergenzkriterium)

$(x_n : n \in \mathbb{N})$ konvergiert in $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $(x_n : n \in \mathbb{N})$ ist Cauchyfolge

Definition:

$(x_n : n \in \mathbb{N})$ konvergiert uneigentlich gegen +∞ bzw. -∞
[in Zeichen: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ bzw. $-\infty$) $:\Leftrightarrow$
$\forall z \in \mathbb{R}\ \exists m \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m$ gilt $z < x_n$ [bzw. $x_n < z$]

Beispiele a.4:

1) $x_n := n \quad \lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$
2) $x_n := -n \quad \lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$

Definition:

a) $x := \limsup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n := \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n := \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\{x_k : n \leq k \in \mathbb{N}\}\right)$
x heißt limes superior von $(x_n : n \in \mathbb{N})$

b) $y := \liminf\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n := \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n := \lim\limits_{n\to\infty}\left(\inf\{x_k : n \leq k \in \mathbb{N}\}\right)$
y heißt limes inferior von $(x_n : n \in \mathbb{N})$

Anmerkung: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\{x_k : n \leq k \in \mathbb{N}\}\right) = \inf\left\{\sup\{x_k : n \leq k \in \mathbb{N}\} : n \in \mathbb{N}\right\}$

Beispiele a.5:

1) $x_n := (-1)^n + \frac{1}{n}$; -1=$\liminf(x_n)$, $+1 = \limsup(x_n)$
2) $x_n := n$; lim sup(x_n)=lim inf$(x_n) = \lim(x_n) = +\infty$
3) $x = \lim(x_n) \Rightarrow \liminf(x_n) = \limsup(x_n)$
$\not\Leftarrow$
4) $x_1 := 1 + \frac{1}{1}; x_2 := 0; x_3 := -1 + \frac{1}{3}; x_4 := 1 + \frac{1}{4}$ usw.
{-1,0,1} sind Häufungspunke (x_n); $\liminf x_n = -1$; $\limsup = 1$

Satz a.9:

a) $\limsup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n \in \widetilde{\mathbb{R}}$ und $\liminf\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n \in \widetilde{\mathbb{R}}$ sind eindeutig bestimmt.

b) $\liminf\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n = -\limsup\limits_{n\in\mathbb{N}}(-x_n)$

c) $x = \limsup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ und $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \ \exists m \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m$ gilt $x_n < x + \varepsilon$ und

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \ \forall m \in \mathbb{N} \ \exists n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m$ gilt $x - \varepsilon < x_n$ und

d) Ist $\limsup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n \in \mathbb{R}$ bzw. $\liminf\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n \in \mathbb{R}$, so ist $(x_n : n \in \mathbb{N})$ nach oben bzw. nach unten beschränkt und

$\limsup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ der größte und $\liminf\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ der kleinste Häufungspunkt von $(x_n : n \in \mathbb{N})$

e) $\liminf\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n + \liminf\limits_{n\in\mathbb{N}} y_n \leq \liminf\limits_{n\in\mathbb{N}} (x_n + y_n) \leq \liminf\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n + \limsup\limits_{n\in\mathbb{N}} y_n \leq \limsup\limits_{n\in\mathbb{N}} (x_n + y_n)$
$\leq \limsup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n + \limsup\limits_{n\in\mathbb{N}} y_n$

§4.b Reihen

Definition:

Sei $(x_n : n \in \mathbb{N})$ eine Folge reeller Zahlen

a) Bei $n \in \mathbb{N}$ heißt $s_n := \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ die n-te Partialsumme zu $(x_n : n \in \mathbb{N})$

b) Die Folge $(s_n : n \in \mathbb{N})$ heißt die Folge der Partialsummen zu $(x_n : n \in \mathbb{N})$ oder auch die von $(x_n : n \in \mathbb{N})$ gebildete Reihe und wird auch mit $\sum(x_n : n \in \mathbb{N})$

c) Es konvergiere $\sum(x_n : n \in \mathbb{N})$ in $\mathbb{R}$ oder uneigentlich gegen $+\infty$ oder $-\infty$. Dann heißt

$\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n := \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n := \lim\limits_{n\in\mathbb{N}} s_n$ die Summe dieser Reihe.

Beispiele b.1:

1) Jede endliche Summe kann als "unendliche Summe" einer Reihe dargestellt werden.

2) Jede Folge reeller Zahlen kann als Reihe dargestellt werden.

3) $x_n := 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow \ \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n = 0$

4) $a \in \mathbb{R}^+$ und $a \leq x_n \ \forall n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow \ n \cdot a \leq s_n := \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \ \Rightarrow \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n = +\infty$

5) $a \in \mathbb{R}^+$ und $-a \geq x_n \ \forall n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow \ \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n = -\infty$

6) $x_n := (-1)^n \ \Rightarrow \ \sum_{n\in\mathbb{N}} (x_n : n \in \mathbb{N})$ divergiert (d.h. konvergiert nicht in $\mathbb{R}$),

konvergiert nicht uneigentlich

7) $x_n := \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \ldots \ \Rightarrow \ s_n := \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{n}{n+1}$

8) geometrische Reihe:

Bei $x_n = q^n$ mit $q \in \mathbb{R}$ ist $\sum_{i=1}^{n} x_i = \begin{cases} \frac{(q - q^{n+1})}{(1-q)} & \text{bei } q \neq 1 \\ n & \text{bei } q=1 \end{cases}$

Also gilt:

i) Bei $|q| < 1$ ist $\sum_{n\in\mathbb{N}} q^n = \frac{q}{1-q}$

ii) Bei $q \geq 1$ ist $\sum_{n\in\mathbb{N}} q^n = +\infty$

iii) Bei $q \leq -1$ ist $\sum_{n\in\mathbb{N}} q^n$ divergent und nicht uneigentlich konvergent

Satz b.1:

a) $\sum (x_n : n \in \mathbb{N})$ konvergiert in $\mathbb{R} \ \Rightarrow \ (x_n : n \in \mathbb{N})$ ist eine Nullfolge

$\not\Leftarrow$ (z.B $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}$, vgl. Beispiel 2)

b) Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$\sum (x_n : n \in \mathbb{N})$ konvergiert in $\mathbb{R}$ bzw. uneigentlich $\Leftrightarrow$

$\sum (x_{n+k} : n \in \mathbb{N})$ konvergiert in $\mathbb{R}$ bzw. uneigentlich

c) $\sum (x_n : n \in \mathbb{N})$ und $\sum (y_n : n \in \mathbb{N})$ konvergieren in $\mathbb{R}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \sum (\alpha x_n + \beta y_n : n \in \mathbb{N})$ konvergiert in $\mathbb{R}$ und

$\sum_{n\in\mathbb{N}} (\alpha x_n + \beta y_n : n \in \mathbb{N}) = \alpha \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n + \beta \sum_{n\in\mathbb{N}} y_n$

d) Bei $x_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ gilt:

$\sum (x_n : n \in \mathbb{N})$ konvergiert in $\mathbb{R} \ \Leftrightarrow \ \sum (x_n : n \in \mathbb{N})$ nach oben beschränkt

e) $\sum (x_n : n \in \mathbb{N})$ konvergiert in $\mathbb{R} \ \Rightarrow \ 0 = \lim_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=n}^{\infty} x_k := \lim_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{N}}^{\infty} x_{n+k-1}$

Beispiel b.2: Harmonische Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} = +\infty$

Definition:

a) $\sum(x_n : n \in \mathbb{N})$ konvergiert absolut $\Leftrightarrow$ $\sum(|x_n| : n \in \mathbb{N})$ konvergiert in $\mathbb{R}$

b) Sei τ: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung. Dann heißt $\sum(x_{\tau(n)} : n \in \mathbb{N})$ eine Umordnung von $\sum(x_n : n \in \mathbb{N})$.

c) $\sum(x_n : n \in \mathbb{N})$ konvergiert unbedingt: $\Leftrightarrow$ Jede Umordnung von $\sum(x_n : n \in \mathbb{N})$ konvergiert in $\mathbb{R}$.

Beispiele b.3:

Bei $x_n := \dfrac{(-1)^n}{n}$ gilt:

1)

i) $\sum(x_n : n \in \mathbb{N})$ konvergiert nicht absolut (vgl. harmonische Reihe)

ii) $\sum(x_n : n \in \mathbb{N})$ konvergiert in $\mathbb{R}$ (vgl. unten: alternierende harm. Reihe)

2) Bei $-1 < q < 1$ ist $\sum(q^n : n \in \mathbb{N})$ absolut konvergent.

Satz b.2:

a) $\sum(x_n : n \in \mathbb{N})$ konvergiert absolut $\Leftrightarrow$ $\sup\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i| : n \in \mathbb{N}\right) < \infty$

b) Kommutativgesetz für Reihen: $\sum(x_n : n \in \mathbb{N})$ konvergiert absolut $\Rightarrow$

$\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n^{+} - \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n^{-} = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_{\tau(n)}$ für jede Umordnung

c) Assoziativgesetz für Reihen:

$\sum(x_n : n \in \mathbb{N})$ konvergiert absolut und $\mathbb{N} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} N_k$ mit $N_k \cap N_1 = \emptyset$ für $k \neq 1$ (N_k paarweise disjunkt) $\Rightarrow$

$\sum_{n\in N_k} x_n$ ist nach Satz b.2.b wohldefinierbar und aus $\mathbb{R}$ und*r*

$\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n = \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{n\in N_k} x_n$

d) Dreiecksungleichung für Reihen:

$\left|\sum_{n=1}^{k} x_n\right| \leq \sum_{n=1}^{k} |x_n| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \quad \forall k \in \mathbb{N};$

falls $\sum(x_n : n \in \mathbb{N})$ konvergiert, gilt: $\left|\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n\right| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n| = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n^{+} + \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n^{-}$

e) Sind $\sum(x_n : n \in \mathbb{N})$ und $\sum(y_n : n \in \mathbb{N})$ absolut konvergent, so ist $\sum(x_n \cdot y_m : n,m \in \mathbb{N})$ im Sinne von Satz b.2.b wohldefiniert und es gilt:

$$\sum_{n,m\in\mathbb{N}} x_n y_m = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n\right)\left(\sum_{m\in\mathbb{N}} y_m\right)$$

Warnung: In Satz b.2.b und c ist „absolut" wesentlich.

Folgerung b.2.1:

Seien $\sum(x_n : n \in \mathbb{N})$ und $\sum(y_n : n \in \mathbb{N})$ absolut konvergent und $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ mit $n \to \varphi(n) := (\varphi_1(n), \varphi_2(n))$ und $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ mit $\psi(n) := (\psi_1(n), \psi_2(n))$ bijektive Abbildungen. Dann gilt :

$\sum\left(x_{\varphi_1(n)} y_{\varphi_2(n)} : n \in \mathbb{N}\right)$ und $\sum\left(x_{\psi_1(n)} y_{\psi_2(n)} : n \in \mathbb{N}\right)$ konvergieren absolut in $\mathbb{R}$ und

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} y_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_{\varphi_1(n)} y_{\varphi_2(n)} = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_{\psi_1(n)} y_{\psi_2(n)} =: \sum_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} x_n y_m =: \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{m\in\mathbb{N}} x_n y_m$$

Satz b.3 (Riemann)

a) $\sum(x_n : n \in \mathbb{N})$ konvergiert in $\mathbb{R}$ und $\sum(|x_n| : n \in \mathbb{N})$ divergiert. Dann:
$\forall a,b \in \widetilde{\mathbb{R}}$ mit $a \le b$ $\exists$ eine Umordnung $\sum\left(x_{\tau(n)} : n \in \mathbb{N}\right)$ von $\sum(x_n : n \in \mathbb{N})$
mit $a = \liminf_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^{n} x_{\tau(i)}$ und $b = \limsup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^{n} x_{\tau(i)}$
b) $\sum(x_n : n \in \mathbb{N})$ konvergiert absolut $\Leftrightarrow \sum(x_n : n \in \mathbb{N})$ konvergiert unbedingt

Satz b.4 (Cauchy-Produkt von Reihen)

$\sum(x_n : n \in \mathbb{N}_0)$ und $\sum(y_n : n \in \mathbb{N}_0)$ konvergieren absolut und $z_n := \sum_{k=0}^{n} x_{n-k} y_k$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

Dann konvergiert $\sum(z_n : n \in \mathbb{N}_0)$ absolut und $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} z_n = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}_0} x_n\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{N}_0} y_n\right)$

Warnung: „absolut" in Satz b.4 ist wesentlich.

Schema: ….

§4.c Konvergenzkriterien für Reihen

Satz c.1: (Cauchykriterium)

$\sum(x_n : n \in \mathbb{N})$ konvergiert in $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i : n \in \mathbb{N}\right)$ ist eine Cauchyfolge

Satz c.2: (Vergleichskriterium)

a) Majorantenkriterium
$|x_n| \le y_n$ für schließlich alle $n \in \mathbb{N}$ und $\sum(y_n : n \in \mathbb{N})$ konvergiert in $\mathbb{R}$
$\Rightarrow \sum(x_n : n \in \mathbb{N})$ konvergiert (auch: absolut) in $\mathbb{R}$
b) $0 \le y_n \le x_n$ für (schließlich) alle $n \in \mathbb{N}$ und $\sum_{n\in\mathbb{N}} y_n = +\infty$
$\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n = +\infty$

Beispiele c.1:

Bei $k \in \mathbb{N}$ mit $k \ge 2$ und $x_n := n^{-k}$ gilt: $\sum(n^{-k} : n \in \mathbb{N})$ konvergiert in $\mathbb{R}$.
Denn: $0 \le x_n = n^{-k} \le n^{-2} \le \dfrac{2}{n(n+1)}$ und Beispiel b.1.7 nach Satz c.2.a

Satz c.3 (Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen)

$(x_n : n \in \mathbb{N})$ antitone Nullfolge und $x_n \ge 0$ $\Rightarrow$ $\sum\left((-1)^n x_n : n \in \mathbb{N}\right)$ konvergiert in $\mathbb{R}$

Warnung: „antiton“ und $x_n \ge 0$ wesentlich. Beispiel: $x_n := (-1)^n \dfrac{1}{n}$

Beispiel c.2: alternierende harmonische Reihe

$x_n := (-1)^{n-1} \dfrac{1}{n}$ $\Rightarrow$ $\sum(x_n : n \in \mathbb{N})$ konvergiert in $\mathbb{R}$ (nicht absolut)
später: $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^{n-1} \dfrac{1}{n} = \ln(2)$

Satz c.4 (Wurzelkriterium)

a) $\exists q \in \mathbb{R}$ mit $0 < q < 1$ $\exists m \in \mathbb{N}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m$ gilt $\sqrt[n]{|x_n|} \leq q$

$\Rightarrow \sum(x_n : n \in \mathbb{N})$ konvergiert (auch: absolut) in $\mathbb{R}$

b) $\exists m \in \mathbb{N}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m$ gilt $\sqrt[n]{|x_n|} \geq 1 \Rightarrow \sum(x_n : n \in \mathbb{N})$ divergiert

Beispiele c.3:

Bei $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{R}$ und $x_n := n^p q^n$ gilt:

$\sum(x_n : n \in \mathbb{N})$ konvergiert, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

i) $|q| < 1$. Denn:

$\sqrt[n]{|x_n|} = n^{\frac{p}{n}} |q|$. Wg. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ gilt: $\sqrt[n]{|x_n|} \leq |q|(1+\varepsilon)$, $\forall \varepsilon > 0$ $\forall n \geq N_\varepsilon \in \mathbb{N}$.

Also ist $\sqrt[n]{|x_n|} \leq a$ für ein $a \in (0,1)$. Mit dem Wurzelkriterium folgt, dass $\sum(x_n : n \in \mathbb{N})$ konvergiert

ii) $q = -1$ und $p \leq -1$

Sei $x_n = (-1)^n n^p$. Aus dem Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen folgt, dass $\sum(x_n : n \in \mathbb{N})$ konvergiert, falls $p \leq -1$.

iii) $q = 1$ und $p \leq -2$

Mit dem Majorantenkriterium: z.Z. ist nur die Kovergenz für $p = -2$.

Sei also $x_n := \frac{1}{n^2}$. Nach Beispiel c.1 konvergiert $\sum(x_n : n \in \mathbb{N})$.

Ansonsten divergiert $\sum(x_n : n \in \mathbb{N})$.

Satz c.5 (Quotientenkriterium)

a) $\exists q \in \mathbb{R}$ mit $0 < q < 1$ $\exists m \in \mathbb{N}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m$ bei $x_n \neq 0$ und

$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \leq q \Rightarrow \sum(x_n : n \in \mathbb{N})$ konvergiert (auch: absolut) in $\mathbb{R}$

b) $\exists m \in \mathbb{N}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m$ bei $x_n \neq 0$ und $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| > 1$

$\Rightarrow \sum(x_n : n \in \mathbb{N})$ divergiert

Beispiel c.4:

Bei $c \in \mathbb{R}$ mit $1 < c$, $k \in \mathbb{N}$ und $x_n := \frac{n^k}{c^n}$ gilt mit dem Quotientenkriterium:

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \left|\frac{(n+1)^k}{c^{n+1}} \cdot \frac{c^n}{n^k}\right| = \left|\frac{1}{c}\left(\frac{n+1}{n}\right)^k\right| \to \frac{1}{c}$$

Beispiel c.5:

Die Exponentialreihe $\sum\left(\frac{\alpha^n}{n!} : n \in \mathbb{N}\right)$ konvergiert in $\mathbb{R}$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

mit Quotientenkriterium:

$\alpha = 0$: trivial

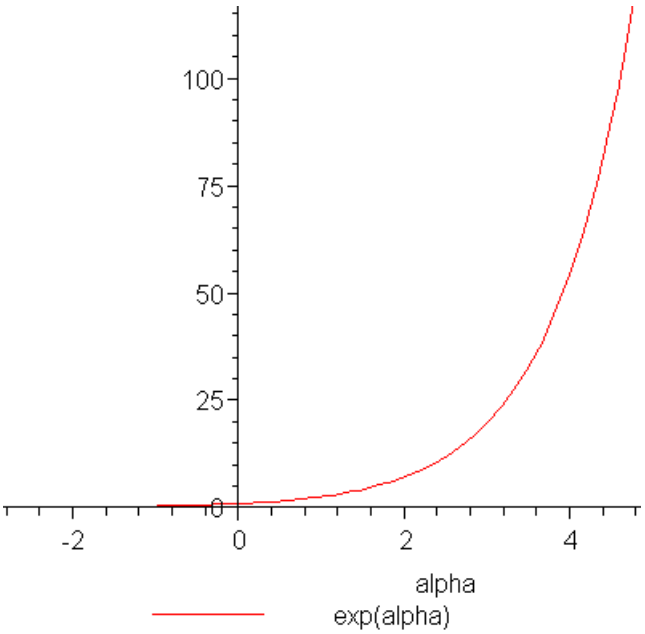
$$\alpha \neq 0: \left|\frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{\alpha^n}\right| = |a| \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

Definition:

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $\exp(\alpha) := \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} = 1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{6} + \ldots$

Die Abbildung $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\alpha \to \exp(\alpha)$ heißt die Exponentialfunktion.

Graph der Exponentialfunktion:



Bemerkung c.1: $\lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp(1) =: e \quad (e \approx 2.718281\ldots)$

vgl. auch §6 (Potenzreihen)

Satz c.6 (Verdichtungskriterium)

Seien $(x_n : n \in \mathbb{N})$ antiton mit $x_n \in \mathbb{R}_0^+$ und $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ streng isoton. Dann gilt:

a) $\inf \left\{ \frac{f(n+1)}{f(n)} : n \in \mathbb{N} \right\} > 1$ und $\sum (x_n : n \in \mathbb{N})$ konvergiert in $\mathbb{R}$

$\Rightarrow \sum \left(f(n)\, x_{f(n)} : n \in \mathbb{N} \right)$ konvergiert in $\mathbb{R}$

b) $\sup \left\{ \frac{f(n+1)}{f(n)} : n \in \mathbb{N} \right\} < \infty$ und $\sum (x_n : n \in \mathbb{N})$ divergiert

$\Rightarrow \sum \left(f(n)\, x_{f(n)} : n \in \mathbb{N} \right)$ divergiert

Folgerung c.6.1: (Cauchysches Verdichtungskriterium)

Sei $(x_n : n \in \mathbb{N})$ eine antitone (oder isotone) Folge mit $x_n \in \mathbb{R}_0^+$.
Dann hat die Reihe $\sum (x_n : n \in \mathbb{N})$ das gleiche Konvergenzverhalten wie die Reihe
$\sum \left(2^n x_{2^n} : n \in \mathbb{N} \right)$

Beispiele c.6:

1) Bei $2 \le p \in \mathbb{N}$ und $x_n := n^{-\frac{n}{p}}$ gilt: $\sum (x_n : n \in \mathbb{N})$ konvergiert in $\mathbb{R}$.

2) Bei $p, q \in \mathbb{N}$ und $x_n := n^{-\frac{q}{p}}$ gilt:
$\sum (x_n : n \in \mathbb{N})$ konvergiert $\Leftrightarrow q > p$

§5 Stetige Funktionen auf $\mathbb{R}$

§5.a Offene und abgeschlossene Mengen in $\mathbb{R}$

Seien $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen,

$\widetilde{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$,

$\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ und $\mathbb{R}_0^+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$

$\mathbb{Q}$ die Menge der rationalen Zahlen

$|\quad\cdot\quad| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ die Betragsfunktion

Definition:

a) Seien $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Dann heißen

$K(x,\varepsilon) := (x-\varepsilon, x+\varepsilon) := \{y \in \mathbb{R} : x-\varepsilon < y < x+\varepsilon\} = \{y \in \mathbb{R} : |x-y| < \varepsilon\}$

die offene ε-Umgebung von x und

$\overline{K}(x,\varepsilon) := [x-\varepsilon, x+\varepsilon] := \{y \in \mathbb{R} : x-\varepsilon \leq y \leq x+\varepsilon\} = \{y \in \mathbb{R} : |x-y| \leq \varepsilon\}$

die abgeschlossene ε-Umgebung von x

b) Seien $T \subset \mathbb{R}$ und $\varepsilon_x \in \mathbb{R}^+ \ \forall x \in T$. Dann heißt

$G := \bigcup_{x \in T} (x-\varepsilon_x, x+\varepsilon_x)$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$.

c) Sei $G \subset \mathbb{R}$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$ (kurz: offen in $\mathbb{R}$). Dann heißt

$A := \mathbb{R} \setminus G$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}$ (kurz: abgeschlossen in $\mathbb{R}$).

d) Seien $a, b \in \widetilde{\mathbb{R}}$ mit $a < b$. Dann heißt

$(a\ ,\ b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ ein offenes Intervall von $\mathbb{R}$.

Bei $a, b \in \mathbb{R}$ heißt

$[a\ ,\ \mathrm{b}] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ ein abgeschlossenes Intervall in $\mathbb{R}$.

Bei $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ und $b \in \mathbb{R}$ heißt

$(a\ ,\ b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ ein links offenes und rechts abgeschlossenes Intervall in $\mathbb{R}$;

$[b\ ,\ a)$ analog

Bemerkung a.1:

Seien $a, b \in \widetilde{\mathbb{R}}$ mit $a < b$. Dann gilt:

a) $(a\ ,\ b)$ ist offen

$[a\ ,\ b]$ ist abgeschlossen (bei $a, b \in \mathbb{R}$).

b) $\mathbb{R}$ und $\varnothing$ sind offen und abgeschlossen.

c) $\exists\, D \subset (a\ ,\ b) \cap \mathbb{Q}$ und $\forall y \in D\ \exists \varepsilon_y \in \mathbb{Q}^+ := \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{Q}$ mit $(a\ ,\ b) = \bigcup_{y \in D} \left(y - \varepsilon_y, y + \varepsilon_y \right)$

Da die Menge der rationalen Zahlen abzählbar ist (mit dem Diagonalverfahren kann man zeigen, dass eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ existiert), ist damit jedes offene Intervall und damit auch jede offene Teilmenge als eine Vereinigung einer Menge von abzählbar vielen Intervallen mit rationalen Endpunkten darstellbar. Wegen der Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$ ist die Menge der Intervalle mit abzählbaren Endpunkten selbst abzählbar.

d) $b = \sup[a\ ,\ b] = \sup(a\ ,\ b) = \sup[a\ ,\ b) = \sup(a\ ,\ b]$

$a = \inf[a\ ,\ b] = \inf(a\ ,\ b) = \inf[a\ ,\ b) = \inf(a\ ,\ b]$

Definition:

Seien $X \subset \mathbb{R}$. Dann heißt

$\overline{X} := \left\{ x \in \mathbb{R} : \exists \text{ Folge } (x_n : n \in \mathbb{N}) \text{ in } X \text{ mit } x = \lim_{n \in \mathbb{N}} x_n \right\}$ der Abschluss von X

oder die abgeschlossene Hülle von X.

Anmerkung:

1) $X \subset \overline{X}$

2) $\overline{X}$ ist abgeschlossen; vgl. Satz c.1.a unten

3) $\overline{X}$ ist die kleinste abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}$, die X enthält.

4) $\overline{X} = \mathbb{R} \backslash G$ mit $G = \bigcup_{y \in H} \left(y - \varepsilon_y, y + \varepsilon_y \right)$

bei $H = \left\{ y \in \mathbb{R} : \exists \varepsilon_y \in \mathbb{R}^+ \text{ mit } \left(y - \varepsilon_y, y + \varepsilon_y \right) \subset \mathbb{R} \backslash X \right\}$

5) Aus der Definition von $\overline{X}$ folgt sofort:

$\overline{X} = \left\{ x \in \mathbb{R} :\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+\ \exists\, x_\varepsilon \text{ mit } x_\varepsilon \in K(x, \varepsilon) \right\} =$

$= \left\{ x \in \mathbb{R} :\ \forall n \in \mathbb{N}\ \exists\, x_n \in X \text{ mit } x_n \in K\left(x, \frac{1}{n} \right) \right\} =$

$=$ Menge aller Limites von Folgen in X $=$

$=$ Menge aller Häufungspunkte von Folgen in X

§5.b Stetige reelle Funktionen

Definition:

Seien $X \subset \mathbb{R}$ und $x \in X$.
a) Eine Abbildung $f : X \to \mathbb{R}$ heißt reelle Funktion mit dem Definitionsbereich X und dem Wertebereich $f(X) := \{ f(x) : x \in X \}$,
b) Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ heißt stetig in $x :\Leftrightarrow$
$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \ \forall y \in X$ mit $|y - x| < \delta$ gilt $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$.
c) $f : X \to \mathbb{R}$ heißt stetig auf $X :\Leftrightarrow$ $f : X \to \mathbb{R}$ ist stetig in y $\forall y \in X$
d) Eine stetige Funktion auf $\mathbb{R}$ heißt (überall) stetig.

Satz b.1 (Stetigkeit = Folgenstetigkeit)

Seien $X \subset \mathbb{R}$, $x \in X$ und $f : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann sind äquivalent:
a) $f : X \to \mathbb{R}$ ist stetig in x.
b) $\forall$ Folge $(x_n : n \in \mathbb{N})$ in X mit $x = \lim\limits_{n \in \mathbb{N}} x_n$ ist $f(x) = \lim\limits_{n \in \mathbb{N}} f(x_n)$

Beispiele b.1: stetige und unstetige Funktionen

1) Stetige Funktionen

a) konstante Funktion: $\mathbb{R} \ni x \mapsto c$ mit $c \in \mathbb{R}$ fest.
b) identische Funktion: $\mathbb{R} \ni x \mapsto id_{\mathbb{R}}(x) := x$
c) Betragsfunktion: $\mathbb{R} \ni x \mapsto |x|$
d) Parabelfunktion: $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ fest
e) Hyperbelfunktion: $\mathbb{R} \setminus \{0\} \ni x \mapsto x^{-n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ fest
f) Wurzelfunktion: $\mathbb{R}_0^+ \ni x \mapsto \sqrt[n]{x}$ mit $n \in \mathbb{N}$ fest
g) Exponentialfunktion: $\mathbb{R} \ni x \mapsto \exp(x)$ (vgl. §6 Potenzreihen)
h) Sinus, Cosinus, Tangens: ... (vgl. §6 Potenzreihen)
i) Arcsin, Arccos, Arctan: ... (vgl. §6 Potenzreihen)
j) Sägezahnfunktion: ...

2) Unstetige Funktionen:

a) Vorzeichenfunktion: $\mathbb{R} \ni x \mapsto sign(x)$
Unstetig in 0; sonst stetig.
b) Entier-Funktion: $\mathbb{R} \ni x \mapsto entier(x)$
Unstetig in jedem $z \in \mathbb{Z}$; sonst stetig.

c) Indikatorfunktionen von Intervallen: $1_{[a,b]}, 1_{(a,b]}, 1_{(a,b)}, 1_{[a,b)}$

mit $\mathbb{R} \ni x \mapsto 1_{[a,b]}(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } a \le x \le b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

unstetig in a und b; sonst stetig

d) Treppenfunktionen: $\mathbb{R} \ni x \mapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, 1_{C_i}$ bei $\alpha_i \in \mathbb{R}$ und $C_i \subset \mathbb{R}$

e) Indikatorfunktion von $\mathbb{Q}$: $\mathbb{R} \ni x \mapsto 1_{\mathbb{Q}}(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Jedes $x \in \mathbb{R}$ ist Unstetigkeitsstelle.

f) $\mathbb{R} \ni x \mapsto id_{\mathbb{R}}(x) \, 1_{\mathbb{Q}}(x)$: stetig in 0; unstetig sonst.

Satz b.2: (Zwischenwertsatz)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a\ ,\ b] \to \mathbb{R}$ stetig mit (o.E.d.A) $f(a) < f(b)$.
Dann gilt: $\forall y \in \big(f(a)\ ,\ f(b) \big)\ \exists x \in \big(a\ ,\ b \big)$ mit $f(x) = y$.

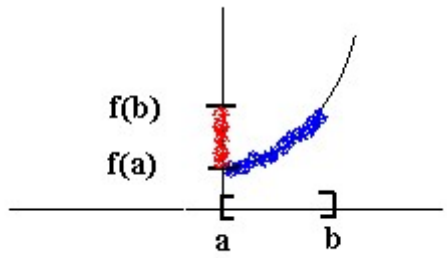
Warnung: Die Stetigkeit in Satz b.2 ist wesentlich.

Beispiele b.2:

1) $f : [1/2\ ,\ 1] : [0\ ,\ 1] \to \mathbb{R}$ nicht stetig; $f\big([0\ ,\ 1]\big) = \{0\ ,\ 1\}$

2) $f : [a\ ,\ b] \to \mathbb{R}$ stetig $\not\Rightarrow$ $f\big([a\ ,\ b]\big) \subset [\, f(a)\ ,\ f(b)]$;

Skizze zu 2) : rot [f(a) , f(b)]; blau: f([a,b])



Bemerkung:

Intervallschachtelungsmethode des Beweises von Satz b.2 liefert approximatives Verfahren zur Lösung von Gleichungen $y = f(x)$ bei stetigem f.

Satz b.3:

a) Seien $x_0 \in X \subset \mathbb{R}$ und $f : X \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(x_0) > 0$. Dann gilt:
$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \ \forall x \in K(x_0;\varepsilon) \cap X$ gilt $f(x) > 0$
b) Seien $x_0 \in X \subset \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f, g : X \to \mathbb{R}$ stetig in x_0. Dann gilt:
$f + g : X \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto (f+g)(x) := f(x) + g(x)$ ist stetig in x_0,
$f \cdot g : X \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto (f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$ ist stetig in x_0
$\alpha f : X \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \alpha f(x) := \alpha f(x)$ ist stetig in x_0
und bei $Y := \{x \in X : g(x) \neq 0\}$ und $x_0 \in Y$ ist
$\frac{f}{g} : Y \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$ stetig in x_0.
c) Seien $f : X \to \mathbb{R}$ und $g : Y \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(x) \subset Y$. Dann ist auch die Funktion
$g \circ f : X \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto g \circ f(x) = g(f(x))$ stetig.

Definition:

$g \circ f$ aus Satz b.3.c heißt die Hintereinanderschaltung oder die Kompositon von f und g.

Warnung: Die Stetigkeit von f ist wesentlich in Satz b.3.a.

Beispiel b.3: $\mathbb{R} \ni x \mapsto g(x) := -|x| + 1_{\{0\}}(x)$

§5.c Gleichmäßig stetige Funktionen, Vollständigkeit und Folgenkompaktheit

Definition:

Sei $X \subset \mathbb{R}$.
a) $f : X \to \mathbb{R}$ heißt gleichmäßig stetig (in X) $:\Leftrightarrow$
$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \ \forall x, y \in X$ mit $|x - y| < \delta$ gilt $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$
b) X heißt folgenkompakt $:\Leftrightarrow$
Jede Folge $(x_n : n \in \mathbb{N})$ in X hat eine gegen ein $x \in X$ konvergente Teilfolge.
c) X heißt vollständig $:\Leftrightarrow$
Jede Cauchyfolge $(x_n : n \in \mathbb{N})$ in X konvergiert gegen ein $x \in X$.

Beispiele c.1:

1) $\mathbb{R} \ni x \mapsto x$ gleichmäßig stetig. $\mathbb{R}_0^+ \ni x \mapsto \sqrt{x}$ gleichmäßig stetig
2) $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^2$ nicht gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$; $[-2\ ,\ 2] \ni x \mapsto x^2$ gleichmäßig stetig

3) $\mathbb{R}$ vollständig; $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q} \cap [-2\ ,\ 3]$ nicht vollständig:

$\exists\ (q_n) \in \mathbb{Q}$ mit $q_n \to \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

4) $\mathbb{R}$ und $\mathbb{N}$ nicht folgenkompakt;

$[-2\ ,\ 3]$ folgenkompakt z.B. nach Bolzano-Weierstraß (oder Heine-Borel).

5) Bei $x_n \to x$ für $n \to \infty$ ist $X := \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$

abgeschlossen, beschränkt, vollständig, folgenkompakt.

Satz c.1:

Sei $X \subset \mathbb{R}$. Dann gilt:

a) X abgeschlossen in $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $\forall$ Folge $(x_n : n \in \mathbb{N})$ in X mit $\lim\limits_{n \in \mathbb{N}} x_n = x \in \mathbb{R}$

ist $x \in X$, d.h. $X = \overline{X}$.

b) X vollständig $\Leftrightarrow$ X abgeschlossen in $\mathbb{R}$

c) Satz von Heine-Borel:

X folgenkompakt $\Leftrightarrow$ X abgeschlossen in $\mathbb{R}$ und beschränkt

$\Leftrightarrow$ X vollständig und beschränkt

Satz c.2:

Seien $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}$ folgenkompakt und $f : X \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:

a) $f : X \to \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig.

b) $\exists x_M \in X$ und $\exists x_m \in X$ mit

$f(x_M) = \sup\{f(x) : x \in X\} = \max\{f(x) : x \in X\} = \max\limits_{x \in X} f(x)$

$f(x_m) = \inf\{f(x) : x \in X\} = \min\{f(x) : x \in X\} = \min\limits_{x \in X} f(x)$

c) $f(X)$ ist folgenkompakt

Definition:

In der Situation von Satz c.2.b heißt x_M eine Maximalstelle und x_m eine Minimalstelle von f.

Beispiele c.2:

1) $id : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, $id(\mathbb{R})$ nicht beschränkt

$(0\ ,\ 1) \ni x \mapsto x$ stetig, beschränkt, keine Maximal- und Minimalstelle

$(0\ ,\ 1] \ni x \mapsto x$ stetig, beschränkt, keine Minimalstelle, Maximalstelle 1

$\left[-\sqrt{2}\ ,\ \sqrt{2}\right] \cap \mathbb{Q} \ni x \mapsto x$ stetig, beschränkt, keine Maximal- und Minimalstelle

2) $\mathbb{R}^+ = (0\ ,\ +\infty) \ni x \mapsto \dfrac{1}{x}$ stetig, nicht beschränkt, keine Maximal- und Minimalstelle

$(0\ ,\ 1] \ni x \mapsto \dfrac{1}{x}$ stetig, nicht beschränkt, keine Maximalstelle, Minimalstelle 1

3) $[0\ ,\ 1] \ni x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{bei } x = 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{sonst} \end{cases}$ nicht stetig, unbeschränkt, Minimalstelle 0, keine Maximalstelle

4) $\mathbb{R} \ni x \mapsto x$ gleichmäßig stetig, unbeschränkt, keine Maximal- und Minimalstelle

5) $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^2$ nicht gleichmäßig stetig; $[0\ ,\ 1] \ni x \mapsto x^2$ gleichmäßig stetig

§5.d Gleichmäßige Konvergenz

Definition:

Seien $X \subset \mathbb{R}$, $(f_n : n \in \mathbb{N})$ eine Folge von Funktionen $f_n : X \to \mathbb{R}$ und $f : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion

a) $(f_n : n \in \mathbb{N})$ konvergiert punktweise gegen f (i.Z.: $f = \lim\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $f_n \to f$, $f_n \xrightarrow{pktw} f$) $:\Leftrightarrow$

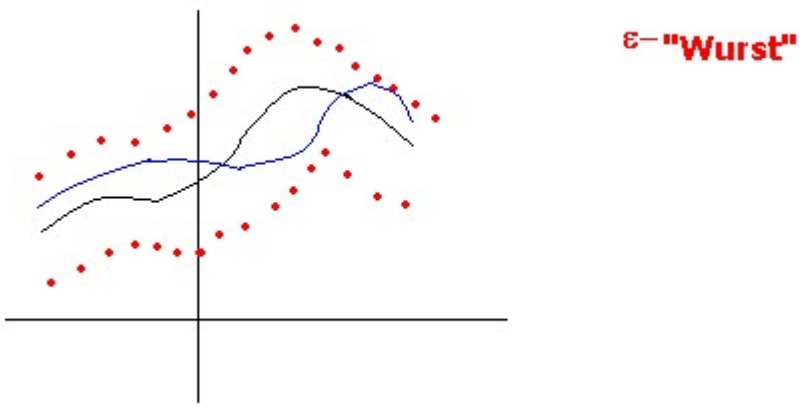
$\forall x \in X$ ist $f(x) = \lim\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$, d.h. $\forall x \in X\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+\ \exists m_{x,\varepsilon} \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m_\varepsilon$ gilt $|f_n - f| < \varepsilon$

b) $(f_n : n \in \mathbb{N})$ konvergiert gleichmäßig gegen f (i.Z.: $f_n \rightrightarrows f$, $f_n \xrightarrow{glm} f$) $:\Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+\ \exists m_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m_\varepsilon\ \forall x \in X$ gilt $|f_n - f| < \varepsilon$

$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+\ \exists m_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m_\varepsilon$ gilt $\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in X\} < \varepsilon)$

Skizze:



Anmerkungen:

1) $f_n \xrightarrow{glm} f \ \Rightarrow\ f_n \xrightarrow{pktw} f$

2) Für jedes $x \in X$ existiere $\lim\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ in $\mathbb{R}$. Bei $f(x) : \lim\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ ist

$f : X \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x)$ dann eine Funktion; vgl. §4, Satz a.1 (Eindeutigkeit des Limes)

Beispiele d.1:

1) $X := \mathbb{R}$ und $f_n(x) := x + \frac{x}{n}$ und $f(x) := x \ \forall x \in X$.
f_n und f stetig; f_n konvergiert punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen f.
2) $Y := [0\ ,\ 1]$ (oder: $Y := (0\ ,\ 1)$) und f_n und f wie oben;
$g_n := f_n \,|\, Y$ und $g := f \,|\, Y$ die Einschränkung auf Y.
$(g_n : n \in \mathbb{N})$ konvergiert gleichmäßig (und damit auch punktweise) gegen g
3) $X := [0\ ,\ 1]$; $f := 1_{\{0\}}$ und $f_n(x) := \begin{cases} 1 - nx & \text{für } 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ f_n stetig auf X; f unstetig in 0;
$(f_n : n \in \mathbb{N})$ konvergiert punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen f.

Satz d.1:

Sei $(f_n : n \in \mathbb{N})$ eine Folge von Funktionen mit $X \subset \mathbb{R}$. Dann gilt:
a) $\exists f : X \to \mathbb{R}$ und $f_n \xrightarrow{glm} f \ \Leftrightarrow$
$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \ \exists m \in \mathbb{N} \ \forall k, l \in \mathbb{N}$ mit $k, l \ge m \ \forall x \in X$ gilt $|f_k(x) - f_l(x)| < \varepsilon$
b) $f_n \xrightarrow{glm} f$ und $f_n : X \to \mathbb{R}$ stetig [in $x \in X$] für alle $n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow f : X \to \mathbb{R}$ stetig [in $x \in X$]

Satz d.2: (Dini)

Sei $X \subset \mathbb{R}$ folgenkompakt und seien $f_n : X \to \mathbb{R}$ und $f : X \to \mathbb{R}$ stetig.
Weiter sei für jedes $x \in X$ die Folge $(f_n(x) : n \in \mathbb{N})$ isoton und $f(x) = \lim_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$.
Dann gilt: $f_n \xrightarrow{glm} f$

Warnung:
Jede der Voraussetzungen „X folgenkompakt“ und „f stetig“ in Satz d.2 ist wesentlich.

Beispiele d.2:

1) $X = \mathbb{R}$ nicht folgenkompakt: Beispiel d.1.1
2) $f := 1_{\{0\}}$ nicht stetig: Beispiel d.1.3

Satz d.3 (Weierstraßscher Approximationssatz)

Sei $X := [a\ ,\ b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$ (also ein folgenkompaktes Intervall) und $f : X \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:

$\forall n \in \mathbb{N}\ \ \exists$ Polynom $p_n : X \to \mathbb{R}$ mit $\sup\{|f(x) - p_n(x)| : x \in X\} < \frac{1}{n}$.

Es gilt also: $p_n \xrightarrow{glm} f$

Warnung: Die (Folgen-)Kompaktheit von X in Satz d.3 ist wesentlich.

Beispiele d.3:

1) Bei $X := \mathbb{R}$ gilt für jedes Polynom $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto p(x) := a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$ nämlich $\lim\limits_{x \to \infty} p(x) \in \{-\infty, +\infty\}$ bei $n \geq 1$ und $a_n \neq 0$ oder $p(x) = \alpha \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}$ bei $n = 0$.

Es gibt aber nichtkonstante stetige Funktionen (z.B. sin(x)). Also ist bei $X := \mathbb{R}$ nicht jede stetige Funktion durch eine Folge von Polynomen gleichmäßig approximierbar (wohl aber punktweise).

2) Bei $X := (0\ ,\ 1)$ ist $f : X \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) := \frac{1}{x}$ stetig auf X.

Jedes Polynom p auf X ist stetig zu einem Polynom $\overline{p}$ auf $[0\ ,\ 1]$ fortsetzbar.

Es ist $\overline{p}$ auf $[0\ ,\ 1]$ und damit p auf $(0\ ,\ 1)$ beschränkt.

Wegen $f(x) \to +\infty$ für $x \to 0$ ist f auf X nicht durch Polynome gleichmäßig approximierbar.

Hinweis:

vgl. §11 Taylor- und Fourierreihen, Satz von Fejér:
Approximation stetiger (period.) Funktionen durch gemittelte Fourier-Partialsummen = Approximation durch „trigonometrische Polynome“.

Weierstraßscher Approximationssatz folgt z.B. aus dem Satz von Fejér.

§6 Potenzreihen

§6.a Allgemeine Eigenschaften

Für eine Folge $(a_n : n \in \mathbb{N}_0)$ reeller Zahlen $a_n \in \mathbb{R}$ seien die Partialsummen

$s_n := \sum_{i=0}^{n} a_i$ und die Reihe $\sum(a_n : n \in \mathbb{N}_0) := (s_n : n \in \mathbb{N}_0)$ und gegebenenfalls $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n := \lim_{n\to\infty} s_n$.

Definition:

Sei $(a_n : n \in \mathbb{N}_0)$ eine Folge reeller Zahlen.

a) Die Abbildung $\mathbb{R} \ni x \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n := \sum(a_n x^n : n \in \mathbb{N}_0) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$

heißt die zu dieser Folge von Koeffizienten a_n gehörige (formale) Potenzreihe.

Falls für $x \in \mathbb{R}$ die Reihe $\sum(a_n x^n : n \in \mathbb{N}_0)$ in $\mathbb{R}$ oder uneigentlich konvergiert,

wird ihre Summe auch mit $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n$ $(\in \widetilde{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\})$ bezeichnet.

Bei $K : K(a_n : n \in \mathbb{N}_0) := \{y \in \mathbb{R} : \sum(a_n y^n : n \in \mathbb{N}_0)$ konvergiert in $\mathbb{R}\}$ heißt die Abbildung

$K \ni x \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n \in \mathbb{R}$ die zu dieser Folge gehörige konvergente Potenzreihe mit dem Konvergenzbereich K.

b) Bei $\frac{1}{0} := +\infty$ und $\frac{1}{\infty} := 0$ heißt $r := r(a_n : n \in \mathbb{N}_0) := \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$

der zugehörige Konvergenzradius.

Beispiele a.0:

1) $a_n := 0$ für $n \in \mathbb{N}_0$: $r = \infty$; zugehörige Potenzreihe ist Polynom

2) $a_n := 1$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$: r=1; zugehörige Potenzreihe ist die geometrische Reihe

3) Für $x := 0$ ist $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n = a_0$

Satz a.1: (Hadamard)

Sei $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius r. Dann:

a) $\sum(a_n x^n : n \in \mathbb{N}_0)$ konvergiert absolut für $|x| < r$.

b) $\sum(a_n x^n : n \in \mathbb{N}_0)$ divergiert für $|x| > r$.

Warnung: Für $x = +r$ oder $x = -r$ ist im allgemeinen keine Konvergenzaussage möglich.

Beispiele a.1:

1) $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} x^n$ hat den Konvergenzbereich $-1 < x < +1$

2) $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{1}{n}\, x^n$ hat den Konvergenzbereich $1 \le x < +1$

3) $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{1}{n^2}\, x^n$ hat den Konvergenzbereich $1 \le x \le +1$

Satz a.2:

Sei $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius r. Dann:

a) Bei $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \le r \le \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

b) Gleichmäßige Konvergenz:

Für $|x| < r$ ist $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n \in \mathbb{R}$ und für alle $0 \le \rho < r$ gilt:

$$\lim_{m\to\infty} \sup\left\{\left|\sum_{n=0}^{m} a_n x^n - \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n\right| : |x| \le \rho\right\} = 0$$

c) Stetigkeit:

Die Funktion $f : (-r\ ,\ r) \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) := \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n$ ist stetig.

Beispiele a.2:

1) $\exp(x) := \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{x^n}{n!}$ hat den Konvergenzradius $r = \infty$

2) **Warnung:**

Im allgemeinen liegt in $(-r\ ,\ r)$ keine gleichmäßige Konvergenz vor, d.h $\rho < r$ in Satz a.2.b ist wesentlich.

Beispiel:

Für $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} x^n$ ist $r = 1$.

$$\sup\left\{\sum_{n=m+1}^{\infty} x^n : |x| < 1\right\} = \infty$$

3) Wegen 1) und Satz a.2.c ist $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig.

Satz a.3

Seien $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n$ und $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} b_n x^n$ Potenzreihen mit dem Konvergenzradius r bzw R. Dann gilt:

a) Identitätssatz:

Sei $(x_k : k \in \mathbb{N})$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $0 < |x_k| < \min(r, R)$,

$0 = \lim_{k\to\infty} x_k$ und $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n {x_k}^n = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} b_n {x_k}^n$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Dann ist $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

b) Cauchy-Produkt:

Bei $c_n := \sum_{l=0}^{n} a_l\ b_{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ konvergiert $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} c_n x^n$ für $|x| < \min(r, R)$

und $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} c_n x^n = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{N}_0} b_n x^n\right)$

Beispiele a.3:

Für $|x| < 1$ ist $\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}_0} x_n\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{N}_0} x_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} (n+1)\, x^n$

Satz 4: (Abel)

Sei $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $0 < r < \infty$. Dann gilt:

a) Konvergiert $\sum\left(a_n r^n : n \in \mathbb{N}_0\right)$ in $\mathbb{R}$, so gilt:

$\lim_{x\uparrow r} \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n r^n$

b) Konvergiert $\sum\left(a_n (-r)^n : n \in \mathbb{N}_0\right)$ in $\mathbb{R}$, so gilt:

$\lim_{x\downarrow -r} \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n (-r)^n$

Warnung:

Aus der Existenz von $\lim_{x\uparrow r} \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n$ folgt nicht die Konvergenz von $\sum\left(a_n r^n : n \in \mathbb{N}_0\right)$.

Beispiel: $a_n := (-1)^n$. Nach Satz a.2.a ist $r = 1$.

$$\sum\left(a_n r^n : n \in \mathbb{N}_0\right) \text{ divergiert, aber: } \sum_{n\in\mathbb{N}_0} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} \xrightarrow{x\to 1} \frac{1}{2}$$

Beispiele a.4:

$a_n := \frac{1}{n}$, vgl. Beispiel a.1.2: konvergiert für $-1 \le x < 1$;

$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}(-1)^n = \lim_{x\downarrow -1} \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} x^n$ nach Satz a.4.b

$x := +1$: $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} = +\infty$; $\lim_{x\uparrow 1} \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} x^n = ?$

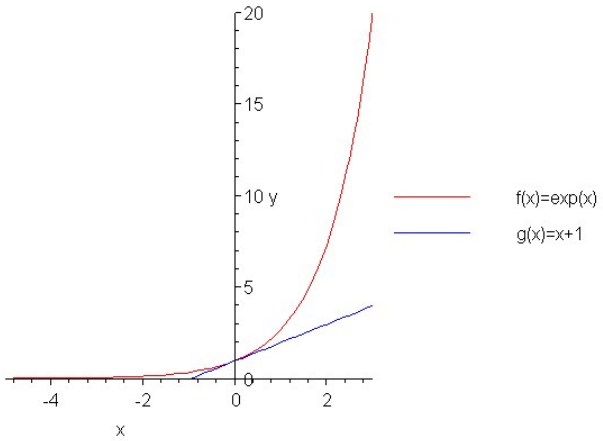
§6.b Exponential- und Logarithmusfunktion

Wir betrachten im folgenden eine spezielle Potenzreihe, nämlich die Exponentialfunktion (vgl. §4.c und §6.a) $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \exp(x) := \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{x^n}{n!}$ und deren Umkehrfunktion, die Logarithmusfunktion.

Satz b.1:

a) $\exp$ hat den Konvergenzradius $r = \infty$.
b) $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig.
c) $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
d) $1 + x \le \exp(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
e) $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist streng isoton und damit injektiv.
f) $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$ und $\exp(0) = 1$ und $\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$
g) $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$ (und damit ist $\exp(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$).
h) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(x)}{x^n} = +\infty \ \forall n \in \mathbb{N}$ (d.h. $\exp$ wächst schneller als jede Potenzfunktion)
i) $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist streng konvex, d.h. $\forall x, y \in \mathbb{R} \ \forall \vartheta \in \mathbb{R}$ mit $0 < \vartheta < 1$ ist
$\exp(\vartheta x + (1-\vartheta) y) < \vartheta \exp(x) + (1-\vartheta) \exp(y)$

Zeichnung:



Definition

Die Umkehrfunktion (vgl. §2.2 und Satz b.1.e und b.1.g oben) $\log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \log(x)$ der Exponentialfunktion heißt die (natürliche) Logarithmusfunktion. $\ln x := \ln(x) := \log(x)$ heißt der natürliche Logarithmus von $x \in \mathbb{R}^+$.

Anmerkung: $\exp(\log(y)) = y \quad \forall y \in \mathbb{R}^+$ und $x = \log(\exp(x)) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Satz b.2:

a) $\log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ ist stetig.

b) $\log(xy) = \log(x) + \log(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+$ (vgl. Rechenschieber)

c) $\log(x) \leq x - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

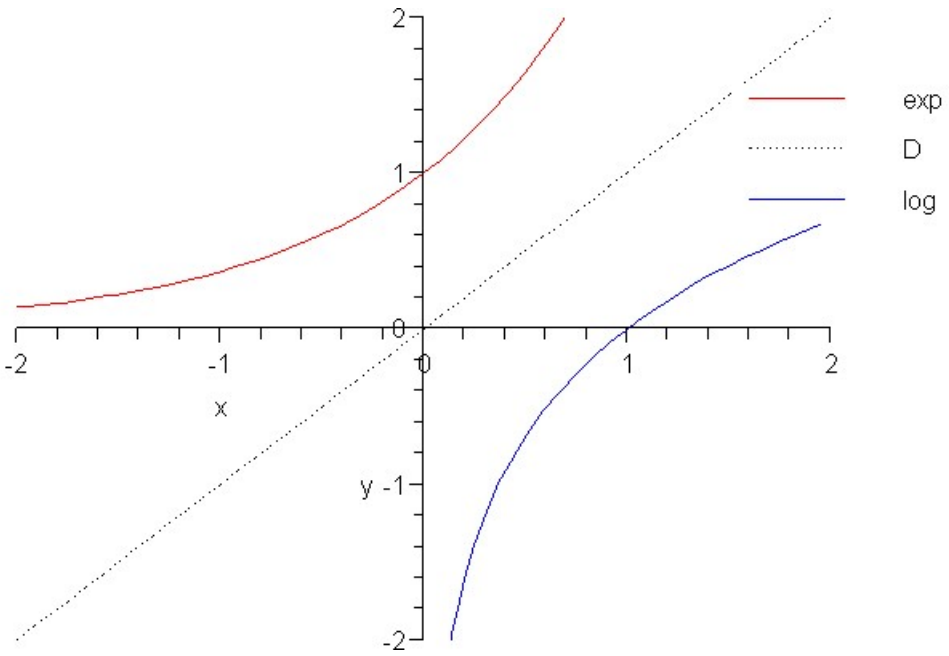
d) $\log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ ist streng isoton, injektiv und surjektiv.

e) $\lim\limits_{x \to 0} \log(x) = -\infty$ und $\log(1) = 0$ und $\lim\limits_{x \to +\infty} \log(x) = +\infty$.

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\log(x)} \right) = +\infty$, d.h. $\log$ wächst langsamer als jede n-te Wurzel

g) $\log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ ist streng konkav; d.h. $\forall x, y \in \mathbb{R}^+ \ \forall \vartheta \in \mathbb{R}$ mit $0 < \vartheta < 1$ ist $\log(\vartheta x + (1 - \vartheta) y) > \vartheta \log(x) + \vartheta \log(y)$

Zeichnung:



Anmerkung: (Spiegelung an Hauptdiagonale $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$

$graph(\log) = \Pi(graph(\exp))$ bei $\Pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $(x, y) \mapsto \Pi(x, y) := (y, x)$

Satz b.3 (Charakterisierungen)

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ stetig [monoton] und $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)\quad\forall x,y\in\mathbb{R}$
$\Rightarrow\exists\alpha\in\mathbb{R}$ mit $f(x)=\exp(\alpha x)\quad\forall x\in\mathbb{R}$.
b) $g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ stetig [monoton] und $g(xy)=g(x)+g(y)\quad\forall x,y\in\mathbb{R}^+$
$\Rightarrow\exists\beta\in\mathbb{R}$ mit $g(x)=\beta\log(x)\quad\forall x\in\mathbb{R}^+$.

Definition: $e:=\exp(1)$ (e heißt Eulersche Zahl. $e\approx 2.71828183...$)

Satz b.4:
a) $e:=\exp(1):=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
b) Restgliedabschätzung:
$0<\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{n!}=e-\sum_{n=0}^{m}\frac{1}{n!}<\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{m!}\quad\forall m\in\mathbb{N}$
c) $e\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, d.h. e ist irrational

Definition:
Sei $a\in\mathbb{R}^+$.
a) Für $x\in\mathbb{R}$ sei $a^x:=\exp_a(x):=\exp(x\cdot\log(a))$.
Es heißen a die Basis und x der Exponent von a^x.
b) Die Funktion $\exp_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ mit $x\mapsto\exp_a(x)$ heißt die Exponentialfunktion zur Basis a.

Satz b.5.

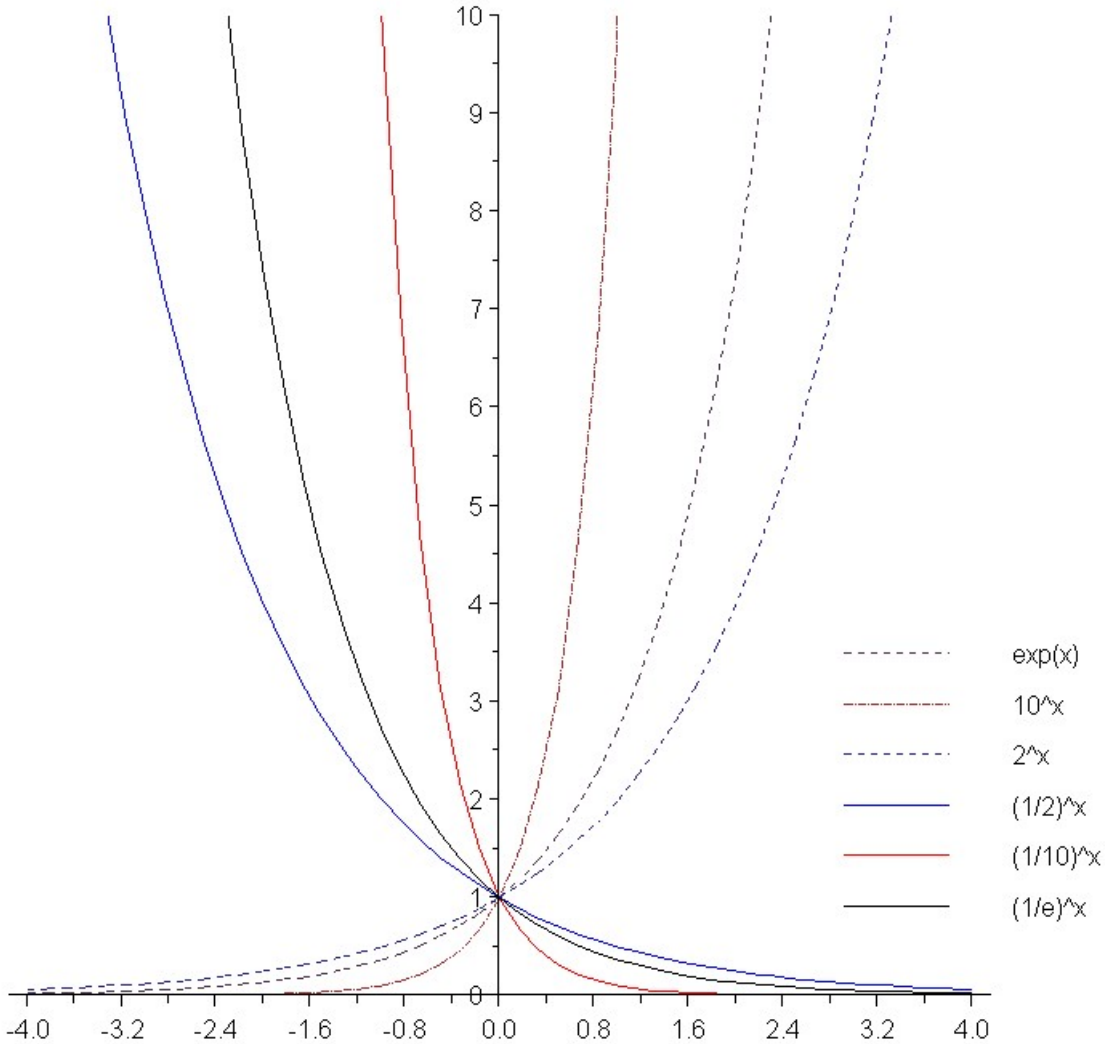
a) Verträglichkeit (vgl. §3.b): Für $n\in\mathbb{N}$ gilt:
$x^n:=\exp(n\cdot\log(x))=\prod_{i=1}^{n}\exp(\log(x_i))=\prod_{i=1}^{n}x_i$ bei $x_i:=x$
$x^{\frac{1}{n}}:=\exp\left(\frac{1}{n}\cdot\log(x)\right)=\sqrt[n]{\exp(\log(x))}=\sqrt[n]{x}$
b) $a^0=1$ und $1^x=1\quad\forall a\in\mathbb{R}^+$ und $\forall x\in\mathbb{R}$
c) $\exp(x)=e^x=\exp_e(x)\quad\forall x\in\mathbb{R}$
d) $\left(a^x\right)^y=\exp(y\cdot\log(a^x))=\exp(y\cdot\log(\exp(x\cdot\log(a))))=\exp(yx\cdot\log(a))=a^{xy}$
e) $\exp_a(x)=\exp(x\cdot\log(a))=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x\cdot\log(a))^n}{n!}\quad\forall x\in\mathbb{R}\ \forall a\in\mathbb{R}^+$
f) Für $a\in\mathbb{R}^+$ gilt:
1) $\exp_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ist stetig.
2) $\exp_a(x+y)=\exp_a(x)\cdot\exp_a(y)\quad\forall x,y\in\mathbb{R}$
3) $\exp_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ist streng $\begin{cases}\text{isoton für } 1<a\\ \text{antiton für } a<1\end{cases}$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 1<a \\ +\infty & \text{für } a<1 \end{cases}$

$\exp_a(0) = 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \exp_a(x) = \begin{cases} +\infty & \text{für } 1<a \\ 0 & \text{für } a<1 \end{cases}$

Zeichnung:



$e := \exp(1)$ und $\log(e) = 1$

$e^x = \exp(x) = \exp(x \cdot \log(e)) = \exp_e(x)$ $\qquad 2^x := \exp_2(x) := \exp(x \cdot \log(2))$

$10^x := \exp_{10}(x) := \exp(x \cdot \log(10))$ $\qquad 1^x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$0.1^x := \exp_{0.1}(x) := \exp(x \cdot \log\left(\frac{1}{10}\right)) = \exp(-x \cdot \log(10))$

$\left(\frac{1}{e}\right)^x = \exp_{\frac{1}{e}}(x) := \exp(x \cdot \log\left(\frac{1}{e}\right)) = \exp(-x)$

$0.5^x := \exp_{0.5}(x) := \exp(x \cdot \log\left(\frac{1}{2}\right)) = \exp(-x \cdot \log(2))$

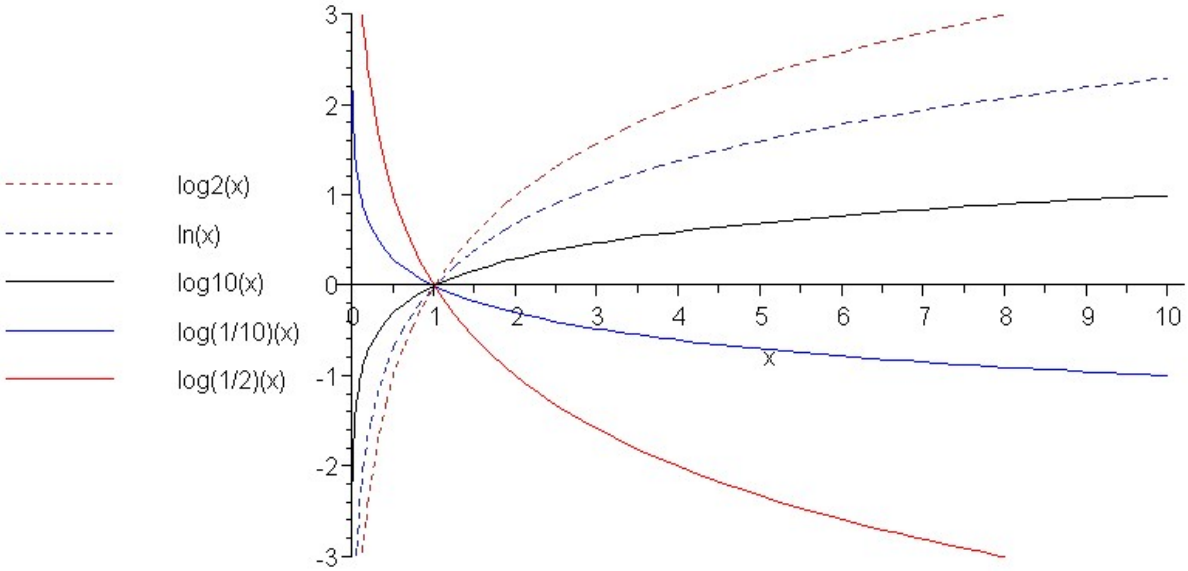
Definition:

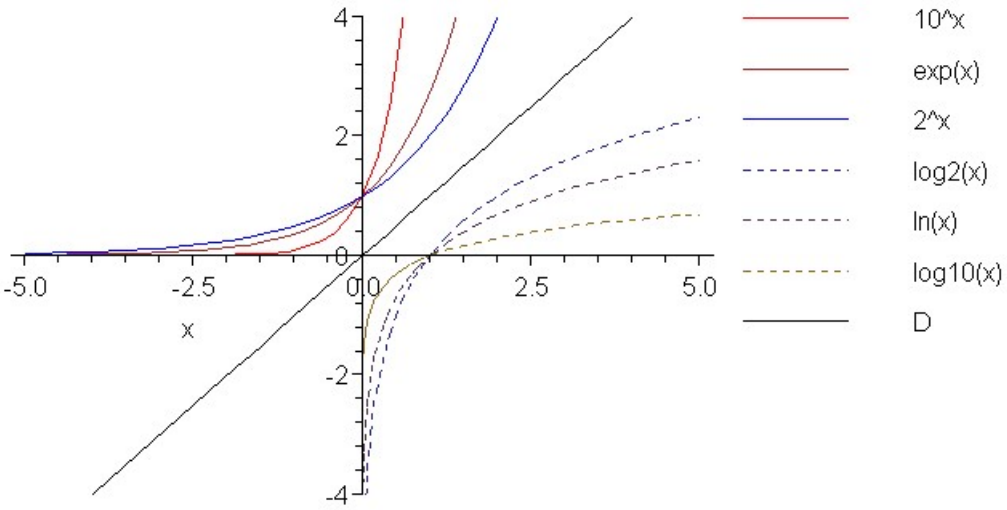
Die Umkehrfunktion $\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \log_a(x)$ der Exponentialfunktion $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ zur Basis a heißt die Logarithmusfunktion zur Basis a.
$\log_a(x)$ Logarithmus von x zur Basis a.
$\ln(x) := \log(x) = \log_e(x); \quad \lg(x) := \log_{10}(x)$

Vorsicht: Uneinheitlicher Gebrauch dieser Bezeichnungen !
Manchmal z.B. auch $\log(x) := \log_2(x)$ oder $\log(x) := \lg(x)$.

Bemerkung: $\log_a(x) = \dfrac{\log(x)}{\log(a)}$

Zeichnung:





§6.c Trigonometrische Funktionen

Für $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \le \exp(|x|)$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{|x|^{2n}}{(2n)!} \le \exp(|x|)$$

Definition:

a) Für $x \in \mathbb{R}$ heißt $\sin(x) := \sum_{n\in\mathbb{N}_0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ der Sinus von x;

$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \sin(x)$ heißt die Sinusfunktion.

b) Für $x \in \mathbb{R}$ heißt $\cos(x) := \sum_{n\in\mathbb{N}_0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ der Kosinus von x;

$\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \cos(x)$ heißt die Kosinusfunktion.

Satz c.1:

a) $\sin$ und $\cos$ haben den Konvergenzradius $r = +\infty$.

b) $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind stetig.

c) $\sin(0) = 0$ und $\cos(0) = 1$

d) $\sin(-x) = -\sin(x)$ und $\cos(-x) = \cos(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

e) $\lim_{0\neq x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ und $\lim_{0\neq x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$

f) Additionssatz:

$\sin(x+y) = \cos(x)\cdot\sin(y) + \sin(x)\cdot\cos(y)$

$\cos(x+y) = \cos(x)\cdot\cos(y) - \sin(x)\cdot\sin(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

g) (Pythagoras, Winkelinterpretation):

$(\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

h) $|\sin(x)| \le 1$ und $|\cos(x)| \le 1$

i) Restgliedabschätzung: Für $|x| \le 1$ und $m \in \mathbb{N}$ ist

$$\left|\sin(x) - \sum_{n=0}^{m} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right| \le \frac{1}{(2m+2)(2m+2)!}$$

$$\left|\cos(x) - \sum_{n=0}^{m} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right| \le \frac{1}{2m(2m)!}$$

j) $\exists y \in (0\ ,\ 2)$ mit $\cos(y) = 0$

Definition: $\pi := \inf\left\{x \in \mathbb{R}^+ : \cos\left(\frac{x}{2}\right)\right\}$ heißt die Kreiszahl.

Anmerkung: $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ und $\pi \approx 3.141592653... \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

Satz c.2:

a) $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ ist streng isoton

b) $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$ und $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

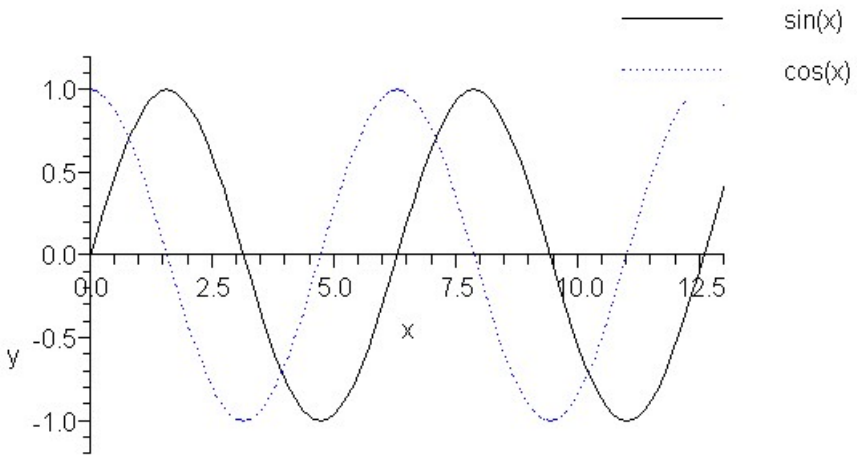
c) $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$ und $\cos(x+\pi) = -\cos(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

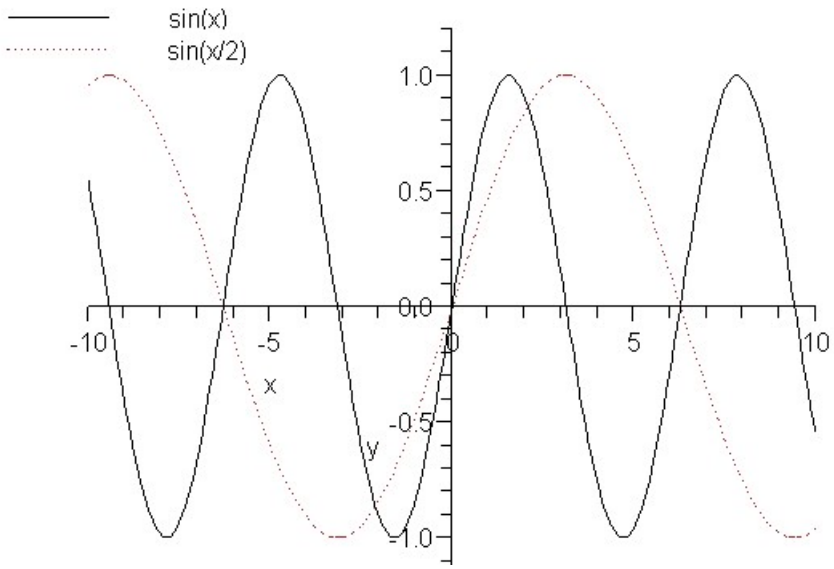
d) $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$ und $\cos(x+2\pi) = \cos(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

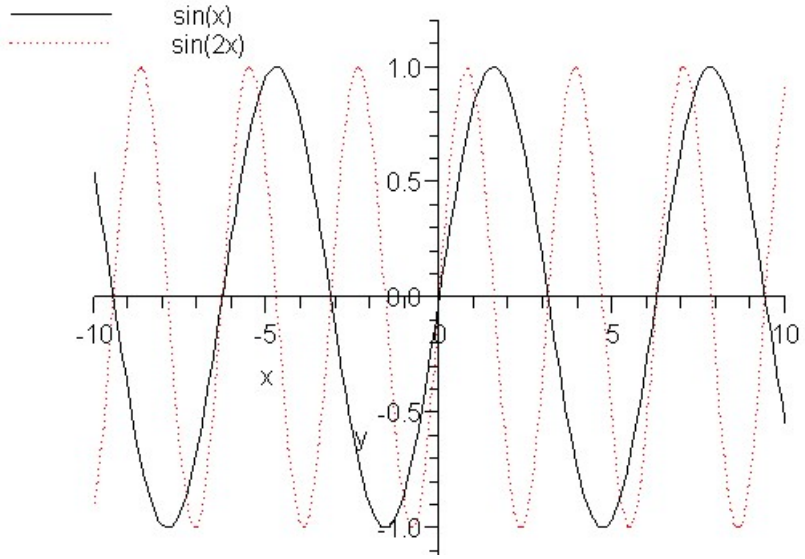
e) $\{x \in \mathbb{R} : \sin(x) = 0\} = \{z\pi : z \in \mathbb{Z}\}$ und

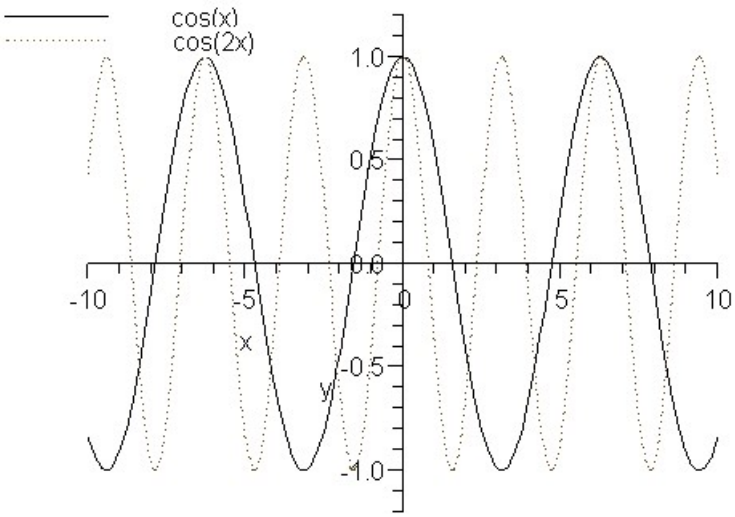
$$\{x \in \mathbb{R} : \cos(x) = 0\} = \left\{\left(z + \frac{1}{2}\right)\pi : z \in \mathbb{Z}\right\}$$

Zeichnung:









Definition:

a) Für $x \in T := \mathbb{R} \setminus \{y \in \mathbb{R} : \cos(y) = 0\} = \left\{ y \in \mathbb{R} : y \neq \left(z + \frac{1}{2} \right)\pi \ \text{ mit } z \in \mathbb{Z} \right\}$ heißt

$\tan(x) := \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ der Tangens von x; $\tan : T \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \tan(x)$ heißt die Tangensfunktion.

b) Für $x \in C := \mathbb{R} \setminus \{y \in \mathbb{R} : \sin(y) = 0\} = \{y \in \mathbb{R} : y \neq z\pi \ \text{ mit } z \in \mathbb{Z}\}$ heißt

$\cot(x) := \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$ der Kotangens von x; $\cot : C \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \cot(x)$ heißt die Kotangensfunktion.

Satz c.3:

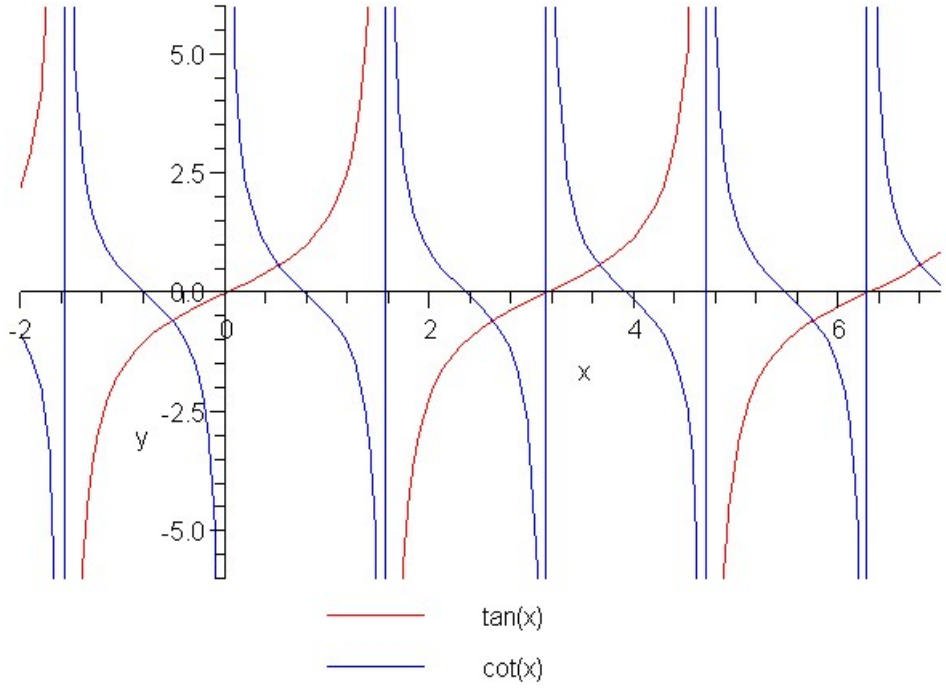
a) $\tan : T \to \mathbb{R}$ ist stetig.

b) $\tan(0) = 0$ und $\tan(x + \pi) = \tan(x) \ \ \forall x \in T$

c) $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ ist streng isoton.

d) $\lim\limits_{x \downarrow -\frac{\pi}{2}} \tan(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x \uparrow \frac{\pi}{2}} \tan(x) = +\infty$

Zeichnung:



Anmerkung: (etwas Latein)

a) sinus: Rundung, Bogen,…
b) co- abgeleitet von „cum“, vgl.: Komilitone, Kooperation,…;
c) tangere: berühren (vgl. Tangente (an einen Kreis))
d) arcus: Bogen, Kreisbogen (vgl.Architekt; tectum: Dach)

Definition:

a) $\arcsin : [-1\,,\,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right]$ sei die Umkehrfunktion zu $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right] \to [-1\,,\,1]$.

Sie heißt (die) Arcussinusfunktion.

b) $\arccos : [-1\,,\,1] \to [0\,,\,\pi]$ sei die Umkehrfunktion zu $\cos : [0\,,\,\pi] \to [-1\,,\,1]$.

Sie heißt (die) Arcuscosinusfunktion.

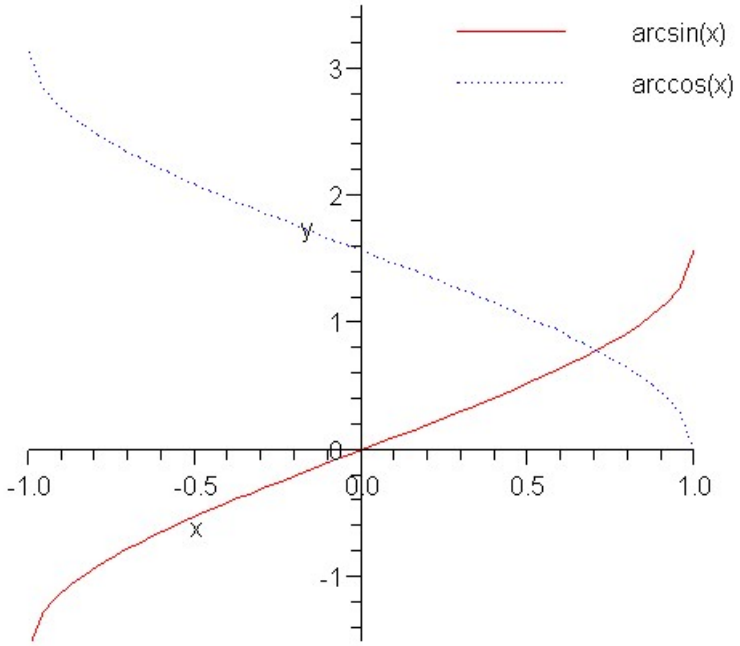
c) $\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right)$ sei die Umkehrfunktion zu $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$.

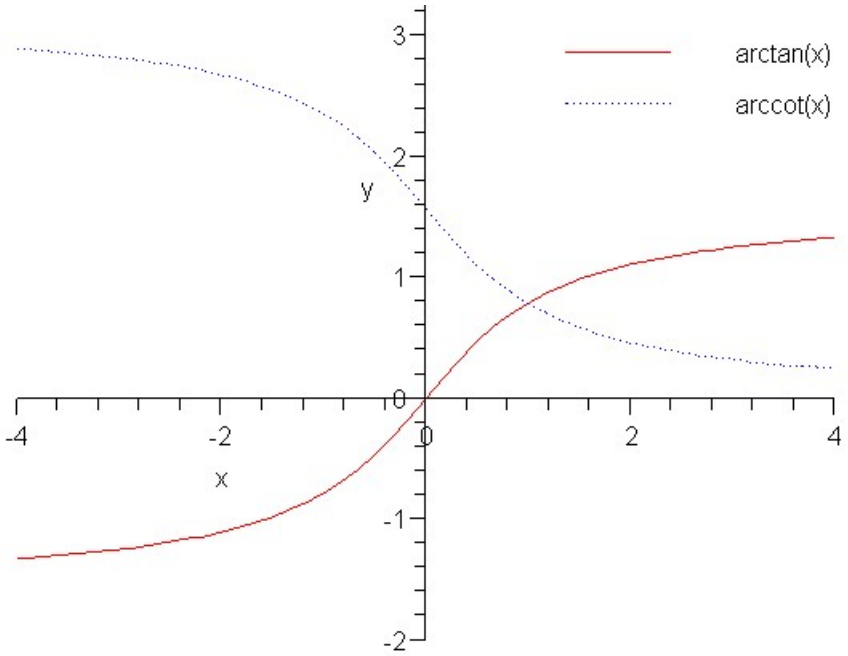
Sie heißt (die) Arcustangensfunktion.

d) $\operatorname{arc\,cot} : \mathbb{R} \to (0\,,\,\pi)$ sei die Umkehrfunktion zu $\cot : (0\,,\,\pi) \to \mathbb{R}$.

Sie heißt (die) Arcuscotangensfunktion.

Zeichnung:


arcsin(x)
arccos(x)
y
x
3
2
1
0
-1
-1.0
-0.5
0.0
0.5
1.0


arctan(x)
arccot(x)
y
x
3
2
1
0
-1
-2
-4
-2
0
2
4

§7 Differentiation

Definition:

Seien $x \in E \subset D \subset \mathbb{R}$, $a \in \widetilde{\mathbb{R}}$, $(x_n : n \in \mathbb{N})$ eine gegen x konvergente Folge in D und $g : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = a$.

$\lim\limits_{\substack{y\to x \\ y\in E}} g(y) = a \;:\Leftrightarrow$ Für jede gegen x konvergente Folge $(y_n : n \in \mathbb{N})$ in E gilt:

$\lim\limits_{n\to\infty} g(y_n) = a$

Bei $E := \{y \in D : x < y\}$ bzw. $E := \{y \in D : y < x\}$ schreiben wir:

$\lim\limits_{\substack{y\downarrow x \\ (y\in D)}} g(y)$ bzw. $\lim\limits_{\substack{y\uparrow x \\ (y\in D)}} g(y)$ anstelle von $\lim\limits_{\substack{y\to x \\ y\in E}} g(y)$.

Definition:

Seien $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f heißt differenzierbar in $x \in D$,

wenn $f'(x) := \dfrac{df}{dx}(x) := \dot{f}(x) := \lim\limits_{\substack{y\to x \\ y\in D\setminus\{x\}}} \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$ in $\mathbb{R}$ existiert.

$f'(x)$ heißt dann der Differentialquotient oder die Ableitung von f in x.

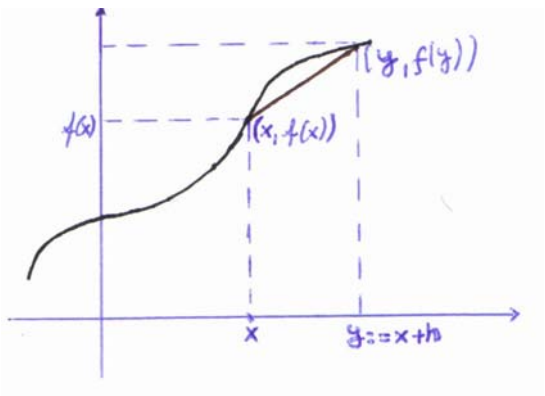
$\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$ heißt Differenzenquotient.

f heißt differenzierbar in D, wenn f differenzierbar ist für jedes $x \in D$.

Sei f in D differenzierbar und $f' : D \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f'(x)$ die Ableitung von f.

Anstelle von $f'(z)$ bei $z \in D$ schreiben wir auch $\dfrac{df}{dx}(z)$ und anstelle von f' auch $\dfrac{df}{dx}$ oder $\dfrac{d}{dx}f$.

Skizze zum Differenzenquotient:



$\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$ Steigung der Sekante durch $(x, f(x))$, $(y, f(y))$. Bei $y \to x$ wird Sekante zur Tangente. Bei Existenz ist die Funktion in x differenzierbar.

Satz 1:

Seien $x \in D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$. Dann gilt:

a) f ist differenzierbar in x $\Rightarrow$ f ist stetig in x

$\not\Leftarrow$

b) f ist differenzierbar in x $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{0 \neq h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ existiert in $\mathbb{R}$.

c) f ist differenzierbar in x $\Leftrightarrow$ $\exists\, c \in \mathbb{R}$ und $\exists\, \varphi : D \to \mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{\substack{y \to x \\ y \in D \setminus \{x\}}} \dfrac{\varphi(y)}{y - x} = 0$

und $f(y) = f(x) + c(y - x) + \varphi(y) \quad \forall y \in D$

Interpretation: „f ist in x linear approximierbar“
„f'(x) Steigung der Tangente in (x,f(x))“

Beispiele 1:

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) := ax + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. $f'(x) = a \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) := x^2$. $f'(x) = 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

3) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) := \dfrac{1}{x}$. $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

4) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) := \exp(x)$. $f'(x) = \exp(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

5) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) := \sin(x)$. $f'(x) = \cos(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

6) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) := \cos(x)$. $f'(x) = -\sin(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

7) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) := 1_{[0\,,\,1]}(x)$. f nicht differenzierbar in $x = 0$ und $x = 1$;
wohl aber dort von rechts und von links differenzierbar. Für $x \notin \{0,1\}$ ist
f differenzierbar mit $f'(x) = 0$

8) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) := |x|$. f ist nicht differenzierbar in $x = 0$;
wohl aber in $x = 0$ von rechts und von links differenzierbar.
f ist in $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar mit $f'(x) = sign(x)$.

Definition:

Seien $x \in D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$. f heißt von rechts bzw. von links differenzierbar in x, wenn
$f_+'(x) := \lim\limits_{y \downarrow x} \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}$ bzw. $f_-'(x) := \lim\limits_{y \uparrow x} \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}$ in $\mathbb{R}$ existieren.

$f_+'(x)$ bzw. $f_-'(x)$ heißen rechtsseitige Ableitung bzw. linksseitige Ableitung von f in x.

Anmerkung:

$$f \text{ differenzierbar in } x \in D \subset \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad f_+'(x) := \lim_{y \downarrow x} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \text{ und } f_-'(x) := \lim_{y \uparrow x} \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$$

existieren in $\mathbb{R}$ und $f_+'(x) = f_-'(x)$

Genauer: Falls f in x von links differenzierbar bzw. von rechts differenzierbar bzw. differenzierbar ist, sind $f_+'(x)$ bzw. $f_-'(x)$ bzw. $f'(x)$ reelle Zahlen. (Dann existieren Folgen $(x_n : n \in \mathbb{N})$ mit $x_n \uparrow x$ bzw. $(y_n : n \in \mathbb{N})$ mit $y_n \downarrow x$ bzw. $z_n \to x$ in D). Im Falle der Differenzierbarkeit von f gilt dann: $f'(x) = f_+'(x)$ oder $f'(x) = f_-'(x)$.
Ist f in x von links und rechts differenzierbar und gilt $f_+'(x) = f_-'(x)$, so ist f in x auch differenzierbar und $f'(x) = f_+'(x) = f_-'(x)$.

Satz 2:

Seien $x \in D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : D \to \mathbb{R}$ in x differenzierbar und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Dann gilt:

a) $f+g$, αf und $f \cdot g$ sind in x differenzierbar

b) Bei $g(y) \neq 0 \;\; \forall y \in D$ ist $\frac{f}{g} : D \to \mathbb{R}$ in x differenzierbar

c) Linearität der Differentiation: $(\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha \cdot f'(x) + \beta \cdot g'(x)$

d) Produktregel: $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

e) Quotientenregel: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

Beispiele 2:

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) := x^n$ bei $n \in \mathbb{N}$. $f'(x) = n \cdot x^{n-1} \;\; \forall x \in \mathbb{R}$ (Aus Satz 2.d, vollst. Induktion)

2) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) := x^{-n}$ bei $n \in \mathbb{N}$. $f'(x) = -n \cdot x^{-(n+1)} \;\; \forall x \in \mathbb{R}$ (Aus Satz 2.e, vollst. Ind.)

3) $f : \mathbb{R} \setminus \left\{ (2z+1)\frac{\pi}{2} : z \in \mathbb{Z} \right\} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) := \tan(x)$.

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ (2z+1)\frac{\pi}{2} : z \in \mathbb{Z} \right\} \quad \left(\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \text{ Satz 2.e}\right)$$

4) $f : \mathbb{R} \setminus \{z\pi : z \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) := \cot(x)$

$$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{z\pi : z \in \mathbb{Z}\}$$

Satz 3: (Ableitung der Umkehrfunktion)

Seien $D \subset \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}$, $f : D \to E$ eine bijektive Funktion und $\varphi : E \to D$ mit $\varphi(y) := f^{-1}(\{y\})$ deren Umkehrfunktion. Dann gilt:
Ist f in $x \in D$ differenzierbar mit $f'(x) \neq 0$ und ist $\varphi : E \to D$ in $y := f(x)$ stetig, so ist φ in y differenzierbar und

$$\varphi'(y) = \left(\frac{d\varphi}{dy}(y) = \frac{d\varphi}{dy}(f(x)) = \frac{1}{\frac{df}{dx}(x)} = \frac{1}{\frac{df}{dx}(\varphi(y))} \right) = \frac{1}{f'(\varphi(y))}$$

Salopp: $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

Beispiele 3:

1) $\log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mit $y \mapsto \log(y)$ ist die Umkehrfunktion von $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$.
Sie ist stetig und $\frac{d \log}{dy}(y) = \frac{1}{y} \quad \forall y \in \mathbb{R}^+$

2) $\arcsin : [-1\ ,\ 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2} \right]$ mit $y \mapsto \arcsin(y)$ ist die Umkehrfunktion von $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2} \right] \to [-1\ ,\ 1]$ mit $x \mapsto \sin(x)$. Sie ist stetig und $\frac{d \arcsin}{dy}(y) = \frac{1}{\sqrt{(1-y^2)}}$

3) $\arccos : [-1\ ,\ 1] \to [0\ ,\ \pi\ ]$ mit $y \mapsto \arccos(y)$ ist die Umkehrfunktion von $\cos : [0\ ,\ \pi\ ] \to [-1\ ,\ 1]$ mit $x \mapsto \cos(x)$. Sie ist stetig und $\frac{d \arccos}{dy}(y) = -\frac{1}{\sqrt{(1-y^2)}}$

4) $\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2} \right)$ mit $y \mapsto \arctan(y)$ ist die Umkehrfunktion von $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2} \right) \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \tan(x)$. Sie ist stetig und $\frac{d \arctan}{dy}(y) = \frac{1}{1+y^2}$

5) $\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to (0\ ,\ \pi)$ mit $y \mapsto arc\cot(y)$ ist die Umkehrfunktion von $\cot : (0\ ,\ \pi) \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \cot(x)$. Sie ist stetig und $\frac{d \operatorname{arccot}}{dy}(y) = -\frac{1}{1+y^2}$

Satz 4: (Kettenregel)

Seien $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : E \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(D) \subset E$.
Ist f in $x \in D$ und g in $y := f(x) \in E$ differenzierbar, so ist $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ in x differenzierbar und $\frac{d(g \circ f)}{dx}(x) = \left(\frac{dg}{dx}(f(x)) \cdot \frac{df}{dx}(x) \right) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

Beispiele 4:

1) Sei $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ differenzierbar in $x\in\mathbb{R}$. Dann ist bei $a,b\in\mathbb{R}$ und $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $x\mapsto f(x):=ax+b$ die Funktion $g\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $x\mapsto g\circ f(x):=g(f(x))$ differenzierbar in $x\in\mathbb{R}$ und $\frac{d\ g\circ f}{dx}(x)=\frac{dg(ax+b)}{dx}(x)=a\frac{dg}{dx}(ax+b)$

2) Bei $\alpha\in\mathbb{R}$ sei $\mathbb{R}^+\ni x\mapsto x^\alpha:=\exp(\alpha\cdot\log(x))\in\mathbb{R}$. Dann ist $\frac{dx^\alpha}{dx}(x)=\alpha x^{\alpha-1}$

Satz 5:

Seien $a,b\in\mathbb{R}$ mit $a<b$.

a) Notwendige Bedingung für Extremwertstelle:

Die Funktion $f:(a\ ,\ b)\to\mathbb{R}$ besitze eine Maximal- (bzw. Minimal-)stelle $x_0\in(a\ ,\ b)$.

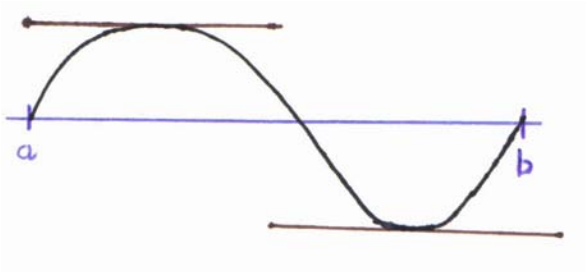
Ist f differenzierbar, so gilt: $f'(x)=0$

b) Satz von Rolle:

Sei $f:[a\ ,\ b]\to\mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a)=0=f(b)$

Ist f in jedem $x\in(a\ ,\ b)$ differenzierbar, so gibt es ein $x_0\in(a\ ,\ b)$ mit $f'(x_0)=0$

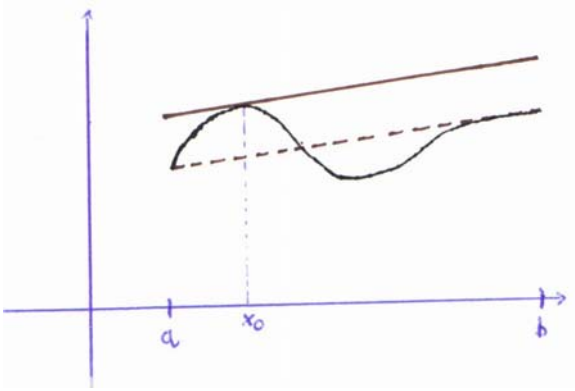
Geometrische Interpretation:



c) Erster Mittelwertsatz der Differentialrechnung:

Ist $f:[a\ ,\ b]\to\mathbb{R}$ stetig und in jedem $x\in(a\ ,\ b)$ differenzierbar, so existiert ein $x_0\in(a\ ,\ b)$ mit $f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Geometrische Interpretation:



d) Zweiter Mittelwertsatz der Differentialrechnung:
Sind $f:[a\ ,\ b]\to\mathbb{R}$ und $g:[a\ ,\ b]\to\mathbb{R}$ stetige Funktionen, die beide in jedem $x\in(a\ ,\ b)$ differenzierbar sind, so existiert ein $x_0\in(a\ ,\ b)$ mit $(f(b)-f(a))\cdot g'(x_0)=(g(b)-g(a))\cdot f'(x_0)$ und bei $g'(x_0)\neq 0$ dann auch $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.

Warnung zu Satz 5.a:

1) "$(a\ ,\ b)$" im Satz 5.a ist wesentlich. Beispiel: $[0\ ,\ 1]\ni x\mapsto f(x):=x$
f hat Maximalstelle 1; f ist in $[0\ ,\ 1]$ differenzierbar; aber $f'(x)=1\ \ \forall x\in[0\ ,\ 1]$.
2) "$f'(x_0)=0$" ist nur eine notwendige, nicht aber eine hinreichende Bedingung für eine Extremalstelle. Beispiel: $(-1\ ,\ 1)\ni x\mapsto f(x):=x^3$. $f'(0)=0$, aber $x=0$ keine Extremalstelle.

Definition:

Seien $x\in D$, $f:D\to\mathbb{R}$ und $f^{(0)}(x):=f(x)$
Ist f in x differenzierbar, so sei $f^{(1)}(x):=\dfrac{df}{dx}(x)$.
Existiert $f^{(1)}(y)$ für alle $y\in(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$ mit $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$, so kann man den Differenzenquotienten $\dfrac{f^{(1)}(x)-f^{(1)}(y)}{x-y}$ betrachten. Existiert $f^{(2)}(x):=f''(x):=\dfrac{d^2f}{dx^2}:=\lim\limits_{x\neq y\to x}\dfrac{f^{(1)}(x)-f^{(1)}(y)}{x-y}$, so heißt f zweimal in x differenzierbar und $f^{(2)}(x)$ die zweite Ableitung von f in x.

(Interpretation: Änderung der Steigung f' von f in x *)*

Analog sei für $k\geq 2$ induktiv definiert:
$f^{(k)}(x):=\dfrac{d^kf}{dx^k}(x):=\lim\limits_{x\neq y\to x}\dfrac{f^{(k-1)}(x)-f^{(k-1)}(y)}{x-y}$ (im Fall der Existenz)
die k-te Ableitung von f in x; $f^{(k)}$ heißt dann k-te Ableitung von f.

Definition:

Eine Funktion $f:D\to\mathbb{R}$ heißt k-mal differenzierbar, wenn die k-te Ableitung $f^{(k)}$ von f für alle $x\in D$ existiert. Sie heißt k-mal stetig differenzierbar in D, wenn zusätzlich die k-te Ableitung $f^{(k)}:D\to\mathbb{R}$ stetig ist.

Motivation: …..
Polynome – Potenzreihen – Approximation stetiger oder differenzierbarer Funktionen durch Polynome: Satz von Weierstraß (§5) – Taylorreihen (§11) – Fourierreihen (§11)

Satz 6: (Taylorformel)

Sei $f:[a\ ,\ b]\to\mathbb{R}$ n-mal stetig differenzierbar und in $(a\ ,\ b)$ n+1-mal differenzierbar.
Weiter seien $x_0\in[a\ ,\ b]$ und $h\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ mit $(x_0+h)\in[a\ ,\ b]$. Dann ist

$$f(x_0+h)=\left(\sum_{\nu=0}^{n}\frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!}\,h^{\nu}\right)+R$$

wobei das Restglied R folgende Gestalt hat:

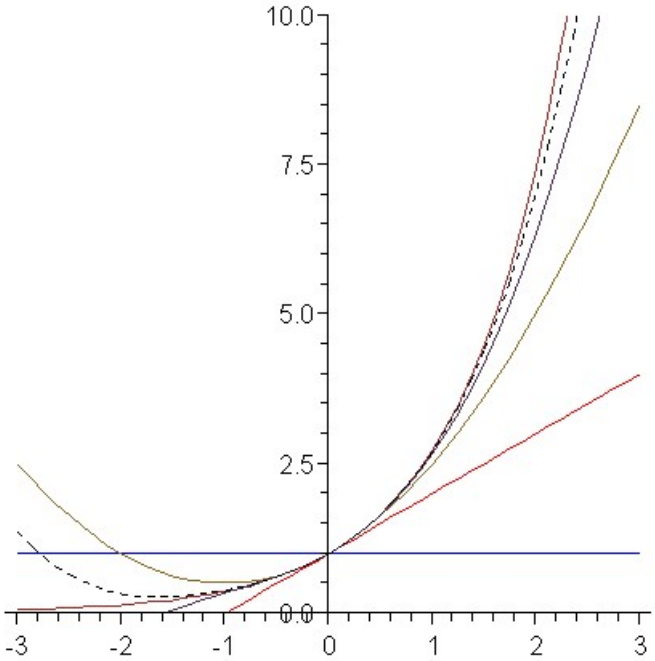
a) Cauchy: $\exists\ \gamma\in\mathbb{R}^+$ mit $0<\gamma<1$ und $R=\dfrac{(1-\gamma)^n\,f^{(n+1)}(x_0+\gamma h)}{n!}h^{n+1}$

b) Lagrange: $\exists\ \lambda\in\mathbb{R}^+$ mit $0<\lambda<1$ und $R=\dfrac{f^{(n+1)}(x_0+\lambda h)}{(n+1)!}h^{n+1}$

c) Taylor-Schlömilch:
Sei $g:[a\ ,\ b]\to\mathbb{R}$ stetig und in $(a\ ,\ b)$ differenzierbar mit
$g(x_0)\neq g(x_0+h)$ und $g'(x_0)\neq 0\ \forall x$ mit $x_0<x<x_0+h$.
Dann existiert ein $\vartheta\in\mathbb{R}^+$ mit $0<\vartheta<1$ und $R=\dfrac{g(x_0+h)-g(x_0)}{g'(x_0+\vartheta h)}\cdot\dfrac{(1-\vartheta)^n}{n!}h^n f^{(n+1)}(x_0+\vartheta h)$

Anmerkung: γ,λ und ϑ hängen auch von h ab !

Zeichnung: Taylorentwicklung der Exponentialfunktion im Entwicklungspunkt 0 bis einschließlich fünfter Ordnung



§8 Einige Anwendungen der Differentialrechnung

a) Extrema

Aus dem ersten Mittelwertsatz der Differentialrechnung (Satz 5.b in §7) folgt:

Satz a.1:

Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Im Inneren $\overset{\circ}{I}$ $(=(a\ ,\ b)$ mit geeigneten $a, b \in \widetilde{\mathbb{R}})$ von I sei f differenzierbar. Dann gilt:

a) $f'(x) \geq 0\ \forall x \in \overset{\circ}{I} \quad \Rightarrow f$ ist isoton auf I

b) $f'(x) \leq 0\ \forall x \in \overset{\circ}{I} \quad \Rightarrow f$ ist antiton auf I

Weiter gilt:

$\alpha)$ $f'(x) > 0\ \forall x \in \overset{\circ}{I} \quad \Rightarrow f$ ist streng isoton auf I

$\beta)$ $f'(x) < 0\ \forall x \in \overset{\circ}{I} \quad \Rightarrow f$ ist streng antiton auf I

Nach Satz 5.a in §7 ist $f'(x_0) = 0$ notwendig für eine lokale Extremalstelle $x_0 \in (a\ ,\ b)$ einer differenzierbaren Funktion $f : (a\ ,\ b) \to \mathbb{R}$. Diese Bedingung ist aber nicht hinreichend (vgl. $f(x) := x^3$); Warnung zu Satz 5.a in §7). Es muss geprüft werden, ob für eine differenzierbare Funktion $f : (a\ ,\ b) \to \mathbb{R}$ mit $f'(x_0) = 0$ auch wirklich eine Extremalstelle vorliegt. Der nachfolgende Satz folgt aus Satz a.1:

Satz a.2:

Seien $x_0 \in (a\ ,\ b), \varepsilon \in \mathbb{R}^+$, $f : (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $f'(x_0) = 0$.
Dann gilt:

a) $f'(x) > 0\ \ \forall x$ mit $x_0 - \varepsilon < x < x_0$ und $f'(x) < 0\ \ \forall x$ mit $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$
$\Rightarrow x_0$ ist eine lokale Maximalstelle

b) $f'(x) < 0\ \ \forall x$ mit $x_0 - \varepsilon < x < x_0$ und $f'(x) > 0\ \ \forall x$ mit $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$
$\Rightarrow x_0$ ist eine lokale Minimalstelle

Existiert f'' und ist f'' stetig, so gilt:

c) $f''(x_0) < 0 \quad \Rightarrow \quad x_0$ ist eine lokale Maximalstelle

d) $f''(x_0) > 0 \quad \Rightarrow \quad x_0$ ist eine lokale Minimalstelle

Warnung:

Die obigen Bedingungen sind nur hinreichend, nicht aber notwendig.
Beispiel: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) := x^4$; f hat Minimalstelle $x_0 = 0$.
aber: $f''(x_0) = 0$.

b) Einige physikalische Anwendungen:

I) Ableitung des Brechungsgesetzes und des Reflexionsgesetzes aus dem Fermatschen Prinzip

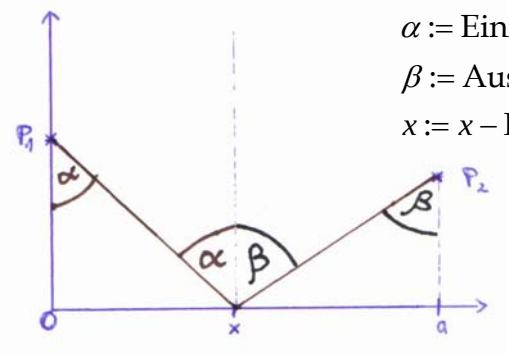
Fermatsches Prinzip: (Pierre de Fermat, 1601-1665)

Ein Lichstrahl, der von einem Punkt P_1 zu einem Punkt P_2 geht (oder unter bestimmten Nebenbedingungen gehen soll), schlägt immer den Weg ein, der die kürzeste oder die längste Zeit erfordert; im allgemeinen ist das erstere der Fall.

1) Ableitung des Reflexionsgesetzes:

Ein Lichtstrahl soll von $P_1 := (0\ ,\ h_1)$ nach $P_2 := (a\ ,\ h_2)$ gelangen, indem er zuerst an der $x-$Achse reflektiert wird.

Zeichnung:



$\alpha :=$ Einfallswinkel (Winkel vom Strahl zum Lot der Reflexionsgerade)

$\beta :=$ Ausfallswinkel

$x := x-$Koordinate des Reflexionspunktes $P := (x, 0)$

Annahme:

Von P_1 nach P und von P nach P_2 verläuft der Strahl in einem Medium mit übereinstimmender und konstanter Lichtgeschwindigkeit c.

Die Länge des Weges von P_1 nach P und von P nach P_2 ist

$$L(x) := \sqrt{x^2 + h_1^{\,2}} + \sqrt{\left((a-x)^2 + h_2^{\,2}\right)}$$

Wird die Länge des Weges extremal, so wird auch die benötigte Zeit extremal. Nach dem Fermat'schen Prinzip wird gesucht: $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $L(x_0)$ extremal.

Der direkte Weg von P_1 nach P_2 wäre zeitmaximal. Aber hier soll der Strahl an der $x-$Achse reflektiert werden. Offensichtlich kann $L(x)$ beliebig groß werden. Also ist hier eine Extremalstelle der differenzierbaren Funktion $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto L(x)$ stets eine Minimalstelle.

$$L'(x) := \frac{x}{\sqrt{\left(x^2 + h_1^{\,2}\right)}} - \frac{a - x}{\sqrt{\left((a-x)^2 + h_2^{\,2}\right)}}.$$

Nach Satz 5.a in §7 muss für eine Extremalstelle x_0 gelten: $L'(x_0) = 0$

Also: $$\frac{x_0}{\sqrt{\left(x_0^{\,2} + h_1^{\,2}\right)}} = \frac{a - x_0}{\sqrt{\left((a-x_0)^2 + h_2^{\,2}\right)}}. \qquad (*)$$

Es ist weiter:

$$\sin(\alpha) = \frac{x_0}{\sqrt{\left(x_0^{\,2} + h_1^{\,2}\right)}} \quad \text{und} \quad \sin(\beta) = \frac{a - x_0}{\sqrt{\left((a-x_0)^2 + h_2^{\,2}\right)}}$$

Damit folgt aus (*) dann: $\sin(\alpha) = \sin(\beta)$. Wegen

$L(x) \geq L(\xi)$ für $x_0 \notin [0\ ,\ a]$ und $\xi \in [0\ ,\ a]$ gilt: $0 \leq \alpha, \beta \leq \frac{\pi}{2}$.

Damit folgt aus $\sin(\alpha) = \sin(\beta)$ auch $\alpha = \beta$.

Reflexionsgesetz:

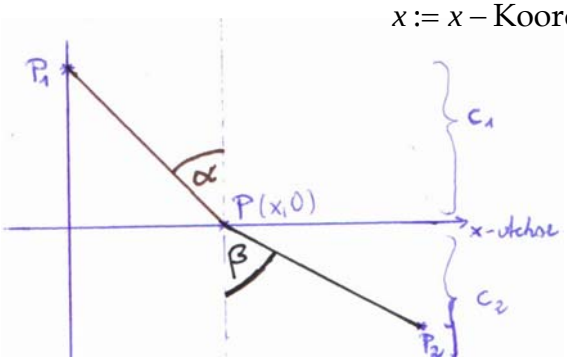
Bei der Reflexion ist der Einfallswinkel α gleich dem Ausfallswinkel β.

2) Ableitung des Brechungsgesetzes:

Ein Lichtstrahl soll von $P_1 := (0\ ,\ h_1)$ nach $P_2 := (a\ ,\ h_2)$ gelangen, indem er zunächst von P_1 nach $P := (x, 0)$ in der oberen Halbebene in einem Medium konstanter Lichtgeschwindigkeit c_1 und dann von P nach P_2 in der unteren Halbebene in einem Medium konstanter Lichtgeschwindigkeit c_2 verläuft.

Zeichnung:

$\alpha :=$ Einfallswinkel (Winkel von Strahl zum Lot zur Trennungsgerade)
$\beta :=$ Ausfallswinkel
$x := x -$ Koordinate des Reflexionspunktes $P := (x, 0)$



Die Zeit, die der Lichtstrahl von P_1 nach P und dann von P nach P_2 benötigt, ist

$$T(x) := \frac{\sqrt{(x^2 + h_1^{\,2})}}{c_1} + \frac{\sqrt{\left((a-x)^2 + h_2^{\,2}\right)}}{c_2}$$

Nach dem Fermatschen Prinzip wird gesucht: $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $T(x_0)$ extremal.

Auch hier ist eine Extremalstelle stets eine Minimalstelle.

$$T'(x) = \frac{x}{\left(c_1\sqrt{(x^2+h_1^2)}\right)} - \frac{a-x}{\left[c_2\sqrt{\left((a-x)^2+h_2^2\right)}\right]}.$$

Nach Satz 5.a in §7 muss für eine Extremalstelle x_0 gelten: $T'(x_0)=0$;

Also: $\frac{1}{c_1}\sin(\alpha) = \frac{1}{c_2}\sin(\beta)$

Brechungsgesetz: (1621; Willebrordus Snellius 1580-1626)

Das Verhältnis des Sinus des Einfallswinkels α zum Sinus des Ausfallswinkels β ist konstant, nämlich $\frac{c_1}{c_2}$; d.h. $\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{c_1}{c_2}$

II) Ableitung des Wienschen Verschiebungsgesetzes aus dem Planckschen Strahlungsgesetz

Plancksche Strahlungsgesetz:
(1900; Max Planck, 1858-1947; Nobelpreis für Physik 1918)

Das Emissionsvermögen eines schwarzen Körpers wird durch

$$E(\lambda) = \frac{2c^2h}{\lambda^5\left(\exp\left(\frac{ch}{k\lambda T}\right)-1\right)}$$ gegeben, wobei

λ die Wellenlänge
T die absolute Temperatur des Körpers
c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum
h das Plancksche Wirkungsquantum ($= 6{,}625\ 10^{-34}\ J\ s$)
k die Boltzmann-Konstante (=$1{,}3804\ 10^{-23}\ J/K$)

ist.

Frage: Bei welcher Wellenlänge λ_0 ist bei (festem T) das Emissionsvermögen maximal ?

Nach Satz 5.a in §7 muss für eine Maximalstelle λ_0 der differenzierbaren Funktion $E:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ gelten: $E'(\lambda_0)=0$

$$E'(\lambda) = \ldots = -2ch^2\left(-x\exp(x)+5\left(\exp(x)-1\right)\right)\left(\lambda^6\left(\exp(x)-1\right)^2\right)^{-1}$$

bei $x := \frac{ch}{k\lambda T}$

Man erhält als einzige positive Nullstelle von $E'(\lambda)$ z.B. mit Hilfe des Intervallschachtelungsverfahren $\lambda_0 \approx \dfrac{ch}{kT \cdot 4{,}9651}$

und damit $\lambda_0 T \approx \dfrac{ch}{k \cdot 4{,}9651} = konst \ \in \mathbb{R}$

Dies ist das **Wiensche Verschiebungsgesetz** (1893/1894).
(Wilhelm Wien, 1864-1928; Nobelpreis für Physik 1911; LMU München).

c) Regel von L'Hospital

Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $a \in I$.
Gegeben: $f : I \to \mathbb{R}$ und $g : I \to \mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \to a} g(x)$

Gesucht: $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = ?!$

Satz c.1 (G.F.A Marquis de L'Hospital; 1641-1704)

Seien $I := (a\ ,\ b) \subset \mathbb{R}$ mit $a, b \in \widetilde{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ und
$f : I \to \mathbb{R}$ und $g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$
Außerdem gelte eine der folgenden Eigenschaften:

$i)$ $\lim\limits_{x \downarrow a} f(x) = \lim\limits_{x \downarrow a} g(x) = 0$

$ii)$ $\lim\limits_{x \downarrow a} g(x) = +\infty$ oder $= -\infty$

Dann gilt: $\lim\limits_{x \downarrow a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \downarrow a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, falls der rechte Limes existiert.

Analoges gilt für $x \uparrow b$.

Anmerkung: Eventuelle mehrfache Hintereinanderschaltung der Regel von L'Hospital.

Warnung:

Die Regel von L'Hospital führt nicht immer zum Erfolg, wenn
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty = \lim\limits_{x \to a} g(x)$. Beispiele:

1) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{e^{2x}} \underset{\text{Satz c.1}}{\overset{\sqcup}{=}} \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{2e^x} = ?$

2) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \underset{\text{Satz c.1}}{\overset{\sqcup}{=}} \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = ?$

Beispiele c.1:

1) Bei $\alpha > 0$ gilt: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\exp(\alpha x)}{x} = +\infty$

2) Bei $\alpha,\beta > 0$ gilt: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\exp(\alpha x)}{x^{\beta}} = +\infty$

3) Sei $\alpha > 0$ und $p(x)$ ein Polynom: $\lim\limits_{x\to\infty} p(x)\exp(-\alpha x) = 0$

4) Bei $\alpha > 0$ gilt: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\log(\alpha x)}{x^{\alpha}} = 0$

5) Bei $\alpha,\beta > 0$ gilt: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\log(\alpha x)^{\beta}}{x^{\alpha}} = 0$

6) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = 1$

7) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

8) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1-\cos(x))}{x} = 0$

9) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1-\cos(x))}{x^2} = \frac{1}{2}$

§9 Das Riemann-Integral (Bernhard Riemann; 1826-1866)

Definition:

Seien $a,b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f:[a\ ,\ b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.
a) Bei $n \in \mathbb{N}$ und $a =: x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n := b$ heißt $\mathfrak{Z} := \{x_0,...,x_n\}$ eine Zerlegung von $[a\ ,\ b]$ der Feinheit $\varepsilon(\mathfrak{Z}) := \max\{x_i - x_{i-1} : i = 1,...n\}$.
Bei $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ nennen wir $\xi_{\mathfrak{Z}} := (\xi_1,...,\xi_n)$ einen $\mathfrak{Z}$-Vektor.
b) Bei $\mathfrak{Z}$ und $\xi_{\mathfrak{Z}}$ wie oben heißt $R(f,\mathfrak{Z},\xi_{\mathfrak{Z}}) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ eine Riemann-Summe der Feinheit $\varepsilon(\mathfrak{Z})$ zu $\mathfrak{Z}$ und $\xi_{\mathfrak{Z}}$.
c) f heißt Riemann-integriebar über $[a\ ,\ b]$, wenn gilt:
Es existiert ein $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass für jede Folge $(\mathfrak{Z}_n : n \in \mathbb{N})$ von Zerlegungen $\mathfrak{Z}_n$ von $[a\ ,\ b]$ mit $\lim_{n\to\infty} \varepsilon(\mathfrak{Z}_n) = 0$ und für jede Folge $(\xi_{\mathfrak{Z}_n} : n \in \mathbb{N})$ von $\mathfrak{Z}_n$-Vektoren $\xi_{\mathfrak{Z}_n}$ gilt: $\alpha = \lim_{n\to\infty} R(f,\mathfrak{Z},\xi_{\mathfrak{Z}})$.

Ist f Riemann-integrierbar, so heißt $\int_a^b f(x)dx := \alpha$ das Riemann-Integral von f über $[a\ ,\ b]$.

Beispiele 1:

1) Riemann-integrierbar: $f_1 := 1_{[a\ ,\ b]}$ und $f_2 := \sum_{i=1}^{n} 1_{[a_i\ ,\ b_i]}$
2) nicht Riemann-integrierbar: $f_3 := 1_{[a\ ,\ b]}\ 1_{\mathbb{Q}}$

Bemerkung:

Seien $a,b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f:[a\ ,\ b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Weiter sei $\mathfrak{Z}(a\ ,\ b)$ die Menge aller Zerlegungen von $[a\ ,\ b]$.
a) Für die Riemannsche Obersumme:
$$\overline{R}(f;\mathfrak{Z}) := \sum_{i=1}^{n} \sup\{f(\xi) : \xi \in [x_{i-1}, x_i]\} \cdot (x_i - x_{i-1})$$
und die Riemannsche Untersumme
$$\underline{R}(f;\mathfrak{Z}) := \sum_{i=1}^{n} \inf\{f(\xi) : \xi \in [x_{i-1}, x_i]\} \cdot (x_i - x_{i-1})$$
und die Riemannsche Summe $R(f,\mathfrak{Z},\xi_{\mathfrak{Z}})$ zu einer Zerlegung $\mathfrak{Z} := \{x_0,...,x_n\}$ aus $\mathfrak{Z}(a\ ,\ b)$ gilt: $\underline{R}(f;\mathfrak{Z}) \le R(f,\mathfrak{Z},\xi_{\mathfrak{Z}}) \le \overline{R}(f;\mathfrak{Z})$.

b) Für das Riemann-Oberintegral $\int_a^{b\,*} f(x)dx := \inf\left\{\overline{R}(f,\mathfrak{Z}) : \mathfrak{Z} \in \mathfrak{Z}(a\ ,\ b)\right\}$

und das Riemann-Unterintegral $\int_{a\,*}^{b} f(x)dx := \sup\left\{\underline{R}(f,\mathfrak{Z}) : \mathfrak{Z} \in \mathfrak{Z}(a\ ,\ b)\right\}$

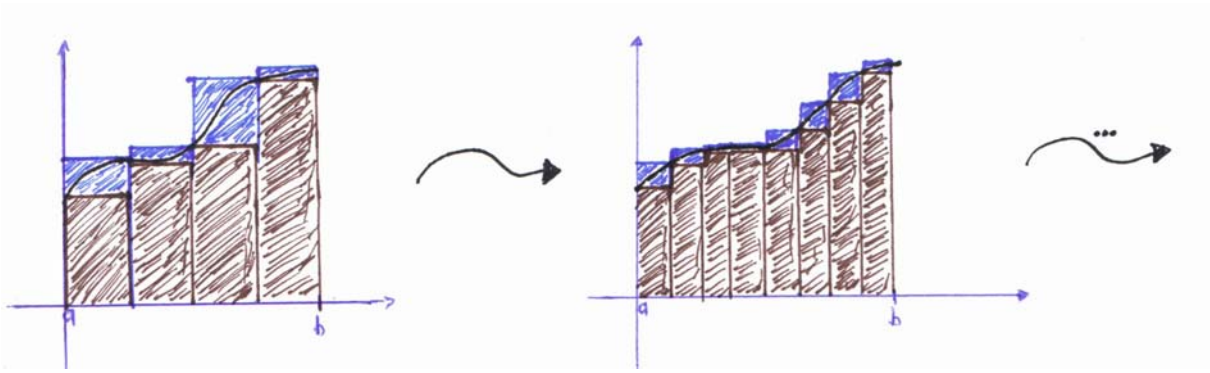
ist $\int_{a\,*}^{b} f(x)dx \le \int_a^{b\,*} f(x)dx.$

c) f ist Riemann-integriebar $\Leftrightarrow$ $\int_{a\,*}^{b} f(x)dx = \int_a^{b\,*} f(x)dx$

$\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \mathfrak{Z} \in \mathfrak{Z}(a\ ,\ b)$ mit $\overline{R}(f,\mathfrak{Z}) - \underline{R}(f,\mathfrak{Z}) < \varepsilon$

$\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta\ \forall \mathfrak{Z} \in \mathfrak{Z}(a\ ,\ b)$ mit $\varepsilon(\mathfrak{Z}) < \delta$ ist $\overline{R}(f,\mathfrak{Z}) - \underline{R}(f,\mathfrak{Z}) < \varepsilon.$

Zeichnung:



Satz 1:

Seien $f : [a\ ,\ b] \to \mathbb{R}$ und $g : [a\ ,\ b] \to \mathbb{R}$. Dann gilt:

a) Linearität: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und f, g Riemann-integrierbar $\Rightarrow$

$$\int_a^b \left(\alpha f(x) + \beta g(x)\right) dx = \alpha \int_a^b f(x)dx\ + \beta \int_a^b g(x)dx$$

b) Monotonie: f, g Riemann-integrierbar und $f(x) \le g(x)\ \ \forall x \in [a\ ,\ b]$ $\Rightarrow$

$$\int_a^b f(x)dx\ \le\ \int_a^b g(x)dx$$

c) f ist R-integrierbar $\Rightarrow$ $f^+, f^-, |f|$ sind R-integrierbar und

$$\int_a^b -f^-(x)dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b f^+(x)dx \text{ und } \left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$

d) f, g sind R-integrierbar $\Rightarrow$ $f \cdot g$ ist R-integrierbar

e) f ist R-integrierbar und $g(x) = f(x)\ \ \forall x \in [a\ ,\ b] \setminus \{x_1, ..., x_m\}$ mit $m \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ g ist R-integrierbar und $\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

f) $f:[a\ ,\ b]\to\mathbb{R}$ ist beschränkt und stückweise stetig (d.h. stetig für $x\in[a\ ,\ b]\setminus\{x_1,...,x_m\}$ mit $m\in\mathbb{N}$) $\Rightarrow$ f ist R-integrierbar

g) $f:[a\ ,\ b]$ ist monoton $\Rightarrow$ f ist R-integrierbar

Warnungen:

1) $|f|$ Riemann-integrierbar $\not\Rightarrow$ f ist Riemann-integrierbar

Beispiel: $f:=1_{[a\ ,\ b]}\left(1_{\mathbb{Q}}-1_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}\right)$

2) $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx\neq\int\limits_a^b f(x)dx\cdot\int\limits_a^b g(x)dx$ im allg.

Beispiel: $a:=0,\ \ b:=2\ ,\ f(x):=g(x):=1$

3) "$m\in\mathbb{N}$" in e) ist wesentlich.

Beispiel: $f:=0$ und $g:=1_{\mathbb{Q}};\ \ \mathbb{Q}:=\{q_n:n\in\mathbb{N}\}$ Abzählung

Beispiele 2:

1) $\int\limits_a^b 1_{[\alpha,\beta]}(x)dx=\int\limits_a^b 1_{(\alpha,\beta]}(x)dx=\int\limits_a^b 1_{(\alpha,\beta)}(x)dx$

2) $\int\limits_0^b x\ dx=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^n\left(b\cdot\frac{i}{n}\right)\left(\frac{i\cdot b}{n}-\frac{(i-1)\cdot b}{n}\right)=b^2\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^n\frac{i}{n^2}=b^2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}=\frac{b^2}{2}$

3) $\int\limits_0^b x^2=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^n\left(\frac{b\cdot i}{n^2}\right)\cdot\frac{b}{n}=b^3\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum\limits_{i=1}^n i^2=b^3\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n^2+n)(2n+1)}{6n^3}=\frac{b^3}{3}$

Definition:

$\int\limits_b^a f(x)dx=-\int\limits_a^b f(x)dx$ und $\int\limits_a^a f(x)dx:=0$

Satz 2:

a) Sind $0\le\alpha,\beta\le b$ und f R-integrierbar über $[a\ ,\ b]$, so ist f R-integrierbar über Teilintervalle von $[a\ ,\ b]$ und

$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^\alpha f(x)dx+\int\limits_\alpha^\beta f(x)dx+\int\limits_\beta^b f(x)dx$

b) Sind $a\le\alpha_n\le\beta_n\le b$ mit $a=\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n$ und $b=\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n$ und f beschränkt und über $[\alpha_n,\beta_n]$ R-integrierbar für jedes $n\in\mathbb{N}$. Dann gilt:

f über $[a\ ,\ b]$ R-integrierbar und $\int\limits_a^b f(x)dx=\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{\alpha_n}^{\beta_n} f(x)dx$

Satz 3:

Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein (offenes, halboffenes oder abgeschlossenes) Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die über jedem Intervall $[a,b] \subset I$ R-integrierbar ist.

Weiter seien $x_0 \in I$ und $F : I \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto F(x) := \int_{x_0}^{x} f(\xi)\, d\xi$. Dann gilt:

a) $F : I \to \mathbb{R}$ ist stetig.
b) Haupsatz der Integralrechnung:
Ist f stetig in $x \in I$, so ist F differenzierbar in x und $F'(x) = f(x)$

Warnung:
"f stetig in x" in Satz 3.b ist wesentlich.
Beispiel 3:
Bei $a := x_0 := 0,\ b := 2,\ f := 1_{[1\,,\,2]}$ ist $F = (x-1)1_{[1\,,\,2]}$ in 1 nicht differenzierbar.

Definition:

Sind I und f wie in Satz 3 und $G : I \to \mathbb{R}$ auf I differenzierbar und $G'(x) = f(x)\ \ \forall x \in I$, so heißt G eine Stammfunktion von f auf I.

Satz 4:

Mit I und f wie in Satz 3 gilt:
a) Ist $F : I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f und $G : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion,
so gilt: G ist eine Stammfunktion von $f \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, c \in \mathbb{R}$ mit $F(x) - G(x) = c\ \forall x \in I$
b) Ist $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und $F : I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f, so gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) =: F(x)\Big]_a^b \qquad \forall a,b \in I$$

Definition:

Seien I und f wie oben. $\int f(x)dx := \mathfrak{I}(f) := \{F : I \to \mathbb{R} \text{ mit } F'(x) = f(x)\ \ \forall x \in I\}$
heißt das unbestimmte Integral von f über I.
$Salopp:\ \int f(x)dx = F$ mit $F \in \mathfrak{I}(f)$.

Anmerkung:

$$\alpha \int f(x)dx\ + \beta \int f(x)dx\ := \{\alpha F + \beta G : F' = f,\ G' = g\} = \int \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)dx$$

Beispiel 4:

1) $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad \begin{cases} \alpha \in \mathbb{N}: & I = \mathbb{R} \\ \alpha \in \mathbb{Z} \text{ mit } \alpha \leq -2: & I = (-\infty, 0) \text{ oder } I = (0, +\infty) \\ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}: & I == (0, +\infty) \end{cases}$

2) $\int \dfrac{1}{x}\, dx = \log(|x|)$ bei $I = (-\infty, 0)$ oder $I = (0, +\infty)$

3) $\int \sin(x)\, dx = -\cos(x)$ bei $I = \mathbb{R}$

4) $\int \cos(x)\, dx = \sin(x)$ bei $I = \mathbb{R}$

5) $\int \dfrac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}\, dx = \arcsin(x)$ bei $I = (-1\ ,\ 1)$

6) $\int \dfrac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan(x)$ bei $I = \mathbb{R}$

7) $\int \dfrac{1}{\cos^2(x)}\, dx = \tan(x)$ bei $I = \left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{3\pi}{2} + k\pi\right)$ mit $k \in \mathbb{Z}$

8) $\int \exp(x)\, dx = \exp(x)$ bei $I = \mathbb{R}$

Satz 5: (Substitutionsregel)

Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein (beliebiges) Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Weiter seien $a, b \in I$ mit $a < b$ und $\varphi : [a\ ,\ b] \to I$ eine stetig differenzierbare Funktion.

Dann gilt: $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(t))\ \varphi'(t)\ dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx$

Salopp: $f \circ \varphi\ d\varphi = f\ dx;\ x = \varphi(t)$ und $dx = \varphi'(t)\ dt$

Beispiele 5:

1) $\displaystyle\int_a^b f(t+c)\ dt = \int_{a+c}^{b+c} f(x) dx$

2) $\displaystyle\int_a^b f(ct)\ dc = \frac{1}{c}\int_{ac}^{bc} f(x) dx$

3) $\displaystyle\int_a^b t\ f(t^2) = \frac{1}{2}\int_{a^2}^{b^2} f(x) dx$

4) $\displaystyle\int_a^b \frac{t}{\sqrt{(1-t^2)}}\, dt = -\sqrt{(1-b^2)} + \sqrt{(1-a^2)}$ bei $-1 < a < b < +1$

5) $\displaystyle\int_a^b \frac{x}{\sqrt{(x-1)}}\, dx = \left(2\sqrt{(x-1)} + \frac{2}{3}\left(\sqrt{(x-1)}\right)^3\right)\Bigg]_a^b$

6) Bei $\varphi:[a\ ,\ b]\to\mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $\varphi(t)\neq 0\ \forall t\in[a\ ,\ b]$ gilt:

$$\int_a^b \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\ dt = \log\left(|\varphi(t)|\right)\Big]_a^b$$

7) $\int_a^b \tan(t)\ dt = \log(\cos(t))\Big]_a^b$ bei $[a\ ,\ b]\subset\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

Satz 6: (partielle Integration)

Seien $f:[a\ ,\ b]\to\mathbb{R}$ und $g:[a\ ,\ b]\to\mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann:

$$\int_a^b f(x)\ g'(x)\ dx = f(x)\ g(x)\Big]_a^b - \int_a^b g(x)\ f'(x)\ dx$$

Beispiele 6:

1) $\int_a^b x\ \log(x) = \frac{1}{2}x^2\left(\log(x)-\frac{1}{2}\right)\Big]_a^b$ für $[a\ ,\ b]\subset\mathbb{R}^+$

2) $J_n := \int_1^e \left(\log(x)\right)^n\ dx = e - n\cdot J_{n-1}$ für $n\in\mathbb{N}$ bei $J_0 := e-1$

3) $\int_a^b \log(x)\ dx = x\left(\log(x)-1\right)\Big]_a^b$ für $a,b>0$

4) $\int x\ \arctan(x)\ dx = \int \frac{x}{1+x^2}\ dx = \frac{1}{2}\log(1+x^2)$

$\int \arctan(x)\ dx = x\ \arctan(x) - \frac{1}{2}\log(1+x^2)$

5) $\int x\ \arcsin(x)\ dx = \int \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}\ dx = -\sqrt{(1-x^2)}$

$\int \arcsin(x)\ dx = x\ \arcsin(x) + \sqrt{(1-x^2)}$

Satz 7: (Partialbruchzerlegung)

Zerlegung rationaler Funktionen, d.h. Funktionen der Form

$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ für $q(x)\neq 0;\ p,q$ sind Polynome

Jede rationale Funktion lässt sich in Haupteile und einen Polynomrest zerlegen.
Jede rationale Funktion mit reellen Koeffizienten kann mittels rationaler Funktionen sowie des Logarithmus und des Arcustangens integriert werden.

Weiterführende Literatur: Königsberger, Analysis I, S.35ff. und S.204
Heuser, Lehrbuch der Analysis, S.398ff.
Erwe, Differential- und Integralrechnung I

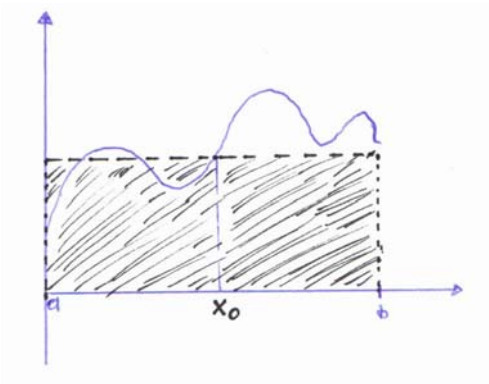
Satz 8: **(Mittelwertsätze der Integralrechnung)**

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Dann gilt:

a) Erster Mittelwertsatz:

$$f:[a\ ,\ b] \to \mathbb{R} \text{ stetig } \Rightarrow \exists\, x_0 \in (a\ ,\ b) \text{ mit } \int_a^b f(x)dx = f(x_0)\cdot(b-a)$$

Zeichnung:



b) Erweiterter erster Mittelwertsatz:

$f:[a\ ,\ b] \to \mathbb{R}$ stetig und $g:[a\ ,\ b] \to \mathbb{R}_0^+$ R-integriebar (bzw. stetig)

$$\Rightarrow \exists\, x_0 \in [a\ ,\ b] \text{ (bzw. } x_0 \in (a\ ,\ b)) \text{ mit } \int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(x_0)\int_a^b g(x)\,dx$$

c) Zweiter Mittelwertsatz:

$f:[a\ ,\ b] \to \mathbb{R}$ monoton und stetig differenzierbar und $g:[a\ ,\ b] \to \mathbb{R}_0^+$ stetig.

Dann gilt: $\exists\, x_0 \in (a\ ,\ b)$ mit $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\cdot\int_a^{x_0} g(x)dx + f(b)\int_{x_0}^b g(x)dx$

Warnungen und Beispiele:

1) In Satz 8.a ist "f stetig" wesentlich

Beispiel: $a := 0,\ b := 1,\ f := 1_{[0{,}5\ ;\ 1]}$

2) In Satz 8.b ist "$g([a\ ,\ b]) \subset \mathbb{R}_0^+$ (oder: $\mathbb{R}_0^-$) wesentlich.

3) In Satz 8.c ist "f monoton" wesentlich.

Beispiel: $a := -1,\ b := +1,\ f(x) := -x^2 + 1,\ g := 1$

4) In Satz 8.c ist "g stetig" wesentlich.

Definition:

Sei I ein beliebiges Intervall, also $I = (a\ ,\ b]$ oder $I = [a\ ,\ b)$ usw. mit $-\infty \le a < b \le +\infty$.
Weiter sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die auf jedem Intervall $[\alpha, \beta] \subset I$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar ist.

Dann heißt f uneigentlich Riemann-quasi-integrierbar über I, wenn gilt:

$\exists\ \gamma \in \widetilde{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}\ \forall (\alpha_n : n \in \mathbb{N})$ Folge in $\mathbb{R}$ mit $a \le \alpha_n$ und $a = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n$

$\forall (\beta_n : n \in \mathbb{N})$ Folge in $\mathbb{R}$ mit $\beta_n \le b$ und $b = \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n$

gilt: $\quad \gamma = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\alpha_n}^{\beta_n} f(x)dx.$

In diesem Fall heißt $\int\limits_a^b f(x)dx := \gamma$ das uneigentliche Riemann-Integral von f über I.

Ist $\gamma \in \mathbb{R}$, so heißt f über I uneigentlich Riemann-integrierbar und $\int\limits_a^b f(x)dx$ konvergent.

Anmerkung: vgl. Satz 2.b.

Beispiele 9:

1) $\int\limits_0^1 x^\sigma dx = \begin{cases} +\infty \text{ bei } \sigma = -1 \\ +\infty \text{ bei } \sigma < -1 \\ \dfrac{1}{(\sigma+1)} \text{ bei } \sigma > -1 \end{cases}$ 2) $\int\limits_1^{+\infty} x^\sigma dx = \begin{cases} +\infty \text{ bei } \sigma = -1 \\ +\infty \text{ bei } \sigma > -1 \\ -\dfrac{1}{(\sigma+1)} \text{ bei } \sigma < -1 \end{cases}$

3) $\int\limits_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\, dx = 2$

4) $\int\limits_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{(1-x)^2}}\, dx = \dfrac{\pi}{2}$ und $\int\limits_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{(1-x)^2}} = \dfrac{\pi}{2}$

5) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{1}{1+x^2}\, dx = \pi$

§10 Anwendungen der Differential- und Integralrechnung

1) Aufstellung von Differenzengleichungen
2) Differentialgleichung aus Differenzengleichung durch Grenzübergang
3) Lösung der Differentialgleichung und deren Eindeutigkeit

Beispiel A1: Der radioaktive Zerfall

Es soll ein Gesetz für den Zerfall radioaktiver Substanzen gefunden werden.

1) Aufstellen der Differenzengleichung

Sei $Q(t)$ die Masse des zur Zeit t vorhandenen radioaktiven Stoffes. Wir vergleichen dazu $Q(t)$ mit $Q(\tau)$ mit $t < \tau$ für ein kleines Zeitintervall $\tau - t$.

Beobachtungen zeigen:

Die zwischen den Zeitpunkten t und τ zerfallende Masse des Stoffes $Q(t) - Q(\tau)$ ist für kleines $\tau - t$ annähernd proportional zu $Q(t)$ und τ-t.
Der Proportionalitätsfaktor sei λ; es ist $\lambda > 0$ stoffspezifisch. Also:
$Q(t) - Q(\tau) = \lambda \cdot Q(t) \cdot (\tau - t)$
oder:

$$\frac{\left(Q(t) - Q(\tau)\right)}{(\tau - t)} \approx -\lambda Q(t) \qquad (*)$$

Eine solche Gleichung nennt man Differenzengleichung, vgl. Differenzenquotient.

2) Ableitung einer Differentialgleichung aus einer Differenzengleichung durch Grenzübergang:

Falls Q in t differenzierbar ist – und dies nehmen wir hier an !! – ergibt sich bei $\tau \to t$ aus (*):

$$Q'(t) = -\lambda Q(t) \qquad (**)$$

Eine solche Gleichung nennt man eine Differentialgleichung. (**) ist die Differentialgleichung des radioaktiven Zerfalls.
Gesucht ist eine oder alle differenzierbaren Funktionen, die die Gleichung (**) erfüllen.

3) Lösung der Differentialgleichung:

Oft gibt es verschiedene Methoden, eine solche Differentialgleichung zu lösen. Manchmal – eventuell unter zusätzlichen Annahmen – ist ihre Lösung eindeutig bestimmt.

a) Lösung durch Antidifferenzieren:

Man suche oder errate eine Funktion Q, die (**) erfüllt. Für die Exponentialfunktion $\mathbb{R} \ni t \mapsto \exp(\alpha t)$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt nach §7: $\frac{d\exp(\alpha t)}{dt} = \alpha \exp(\alpha t)$.
Bei $Q_1(t) := \exp(-\lambda t)$ gilt darum: $Q_1'(t) = -\lambda Q_1(t)$.
Also ist Q_1 eine Lösung von (**). Mit Q_1 ist aber auch $Q_a(t) := a \cdot Q_1(t)$ eine Lösung von (**) für jedes $a \in \mathbb{R}$:
$Q_a'(t) = a \cdot Q_1'(t) = a \cdot \left(-\lambda Q_1(t)\right) = -\lambda Q_a(t)$.

b) Lösung durch Trennen der Variablen und Integrieren:

Bei $Q'(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$ folgt aus (**) etwas salopp:
$dQ = -\lambda Q \; dt$
oder wegen $Q > 0$:
$\frac{1}{Q} \; dQ = -\lambda \; dt$ **(„Trennung der Variablen“)**
Durch Integration erhält man daraus:
$\int \frac{1}{Q} \; dQ = \int -\lambda \; dt$ (***)
Mit Beispiel 4.2 bzw. 2.1 in §9 erhält man:
$\int \frac{1}{Q} \; dQ = \log(Q) + C_L$ und
$\int -\lambda \; dt = -\lambda t + C_R$ mit $C_L, C_R \in \mathbb{R}$
damit folgt aus (***):
$\log(Q) = -\lambda t + C_0$ mit $C_0 \in \mathbb{R}$
oder:
$Q_c(t) = \exp(-\lambda t + C_0) = C \exp(-\lambda t)$ bei $C := \exp(C_0)$
Dass diese „Rechnung“ tatsächlich für jedes $C \in \mathbb{R}$ zu einer Lösung Q_C von (**) führt, überprüft man durch Nachrechnen, d.h. Differenzieren.

c) Eindeutigkeit der Lösung bei dem Anfangswert $Q(0) := A$:

Wenn wir annehmen, dass zur Zeit $t = 0$ der radioaktive Stoff die Masse $Q(0) := A$ mit $A > 0$ hatte, bleibt von all den obigen Lösungen von (**) – wegen $\exp(-\lambda \cdot 0) = 1$ nur die Lösung $Q_A(t) = A \cdot \exp(-\lambda t)$.

Da wir angenommen haben, dass Q differenzierbar ist, ist Q auch stetig für jede Lösung von (**). Wegen der Gestalt von (**) ist dann auch $Q'(t)$ stetig.
Nach dem Haupsatz der Differential- und Integralrechnung (Satz 3 und 4 in §9) hat jede Stammfunktion $\mathfrak{Q}$ von Q' die Gestalt
$\mathfrak{Q}(t) = Q(t) + D$ mit $D \in \mathbb{R}$.

Damit ist die Lösung (****) von (**) mit $Q(0) = A$ und $Q'(t) = C \cdot \exp(-\lambda t)$ eindeutig bestimmt

Es könnte allerdings sein, dass es neben der Lösung (****) von (**) mit $Q(0) = A$ noch weitere Lösungen von (**)
mit $Q(0) = A$, aber mit $Q'(t) \neq C \cdot \exp(-\lambda t)$ gibt. Wir werden aber später sehen (z.B. Satz von Picard-Lindelöf), dass dies nicht der Fall ist.

Also ist (****) die durch die Anfangsbedingung $Q(0) = A$ eindeutig bestimmte Massengleichung des radioaktiven Zerfalls.

Beispiele A2: Die barometrische Höhenformel

Es soll ein möglichst einfaches Gesetz für den Verlauf des Druckes in der Atmosphäre gefunden werden.

1) Aufstellen der Differenzengleichung:

Bei einer Beschränkung auf ein kleines Beobachtungsgebiet können wir annehmen:
Ist x die Höhe (über dem Meeresspiegel in cm), so gilt:
$p = p(x)$, d.h. der Druck hängt nur von der Höhe ab.
$\rho = \rho(x)$, d.h. die spezifische Dichte hängt nur von der Höhe ab.
$V = V(x)$, d.h. das spezifische Volumen hängt nur von der Höhe ab.
$T = T(x)$, d.h. die Temperatur hängt nur von der Höhe ab.

Sei $0 \leq \xi < x$. Es folgt aus der Physik:
Ist $G(\xi, x)$ das Gewicht einer vertikalen Luftsäule vom Querschnitt $1\ cm^2$ zwischen den Höhen ξ und x, so gilt:
$G(\xi, x) = p(\xi) - p(x)$. Ist $x - \xi$ „klein", so ist $\rho(y)$ in dieser Luftsäule annähernd gleich $\rho(x)$. Also gilt: $G(\xi, x) = g \cdot \rho(x) \cdot (x - \xi)$ und damit:
$p(\xi) - p(x) \approx g \cdot \rho(x) \cdot (x - \xi)$, wobei
$g = g(x)$ die (von der Höhe) unabhängige) Erdbeschleunigung ist.
Damit gilt:

$$\frac{\left(p(\xi) - p(x)\right)}{(\xi - x)} = -g \cdot \rho(x) \qquad (+)$$

barometrische Differenzengleichung

2) Ableitung einer Differentialgleichung aus der Differenzengleichung durch Grenzübergang:

Falls p in x differenzierbar ist – und dies nehmen wir an !!- so ergibt sich bei $\xi \to x$ aus (+):

$$p'(x) = -g \cdot \rho(x) \qquad (++)$$

barometrische Differentialgleichung

Weitere „physikalische“ Annahmen:

Wir betrachten die Luft als ideales Gas.
Ist M ihr Molekulargewicht und
R eine Konstante $(R = 8{,}31...J\ K^{-1}\ mol^{-1}$, Gaskonstante$)$,
so folgt aus der theoretischen Physik:

$$p(x) \cdot V(x) = \frac{p(x)}{\rho(x)} = \frac{R \cdot T(x)}{M}$$

Damit folgt aus (++):

$$p'(x) = -\frac{g \cdot M}{\left(R \cdot T(x)\right)} \qquad (+++)$$

barometrische Differentialgleichung für ein ideales Gas

Aus (++) und aus (+++) kann $p(x)$ bestimmt werden und zwar eindeutig bei gegebener Anfangsbedingung. Wir stellen später Lösungsverfahren für solche Differentialgleichungen bereit. Zur Vereinfachung machen wir jetzt die zusätzliche Annahme:

$T(x) = T \in \mathbb{R}$, d.h. die Temperatur ist unabhängig von der Höhe x.

Dann erhalten wir aus (+++) die uns (aus Beispiel A1) bekannte Differentialgleichung

$$p'(x) = -\frac{g \cdot M}{R \cdot T}\ p(x) \qquad (\#)$$

barometrische Differentialgleichung für ein ideales Gas bei konstanter Temperatur

3) Lösung der Differentialgleichung (#):

a) Lösung durch Antidifferenzieren oder Trennung der Variablen:

Wie in Beispiel A1 erhalten wir:

$$p_a(x) = a \cdot \exp\left(-\frac{g \cdot M \cdot x}{R \cdot T}\right)$$

ist für jedes $a \in \mathbb{R}$ eine Lösung von (#)

b) Eindeutigkeit der Lösung bei Anfangswert $p(0) = A$:

Wie in Beispiel A1 folgt:
$p_a(x)$ wie oben sind alle Lösungen von (#).
Unter der zusätzlichen Annahme: $p(0) = A$ mit A aus $\mathbb{R}$ folgt wieder wie in Beispiel A1:

$$p_A(x) := A \cdot \exp\left(-\frac{g \cdot M \cdot x}{R \cdot T}\right) = p(0) \cdot \exp\left(-\frac{g \cdot M \cdot x}{R \cdot T}\right)$$

eindeutig bestimmte Lösung von (#) mit dem Anfangswert $p(0) = A$
barometrische Höhenformel für ein ideales Gas bei konstanter Temperatur

Beispiel A3: Die Abkühlung eines heißen Körpes

Beispiel A4: Eine Populationsgleichung

Beispiel A5: Die chemische Reaktion erster Ordnung

Beispiel A6: Die chemische Reaktion zweiter Ordnung

§11 Taylor- und Fourierreihen

a) Vertauschung von Limesbildung und Differentiation bzw. Integration bei Funktionenfolgen

Erinnerung an Beispiel d.1 in §5:

$$X := [0\ ,\ 1];\ f := 1_{\{0\}} \text{ und } f_n(x) := \begin{cases} 1 - nx & \text{für } 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$(f_n : n \in \mathbb{N})$ konvergiert punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen f.
f_n stetig auf X $\forall n \in \mathbb{N}$; aber: f unstetig in 0;

Erinnerung an Satz d.1 in §5:

Bei $f_n \xrightarrow{glm} f$ und f_n stetig $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad \Rightarrow \quad f$ stetig

Beispiel a.1:

$$f_n(x) := \frac{\sin(nx)}{n} \xrightarrow{glm} f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

f_n und f stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}$; $f_n = \cos(nx)$; aber: $1 = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(0) \ne f'(0) = 0$

Beispiele a.2:

1) $f_n(x) := n \cdot 1_{[0,\ 1/n]}(x) \xrightarrow{pktw} f(x) = 0\ \forall x \in [0\ ,\ 1]$; f_n und f Riemann-integrierbar;

aber: $\int\limits_0^1 f_n(x)\ dx = 1 \ne 0 = \int\limits_0^1 f(x)dx$

2) $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $g_n(x) \mapsto \begin{cases} n^2 x & \text{für } 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ 2n - n^2 & \text{für } \frac{1}{n} < x \le \frac{2}{n} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

stetig mit $g_n(x) \xrightarrow{pktw} g(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$; g_n R-integrierbar über [0 , 1];

aber: $\int\limits_0^1 g_n(x)\ dx = 1 \ne 0 = \int\limits_0^1 g(x)dx$

3) $h_n,\ h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h_n(x) := \frac{1}{n}\ 1_{[0,n]}(x)$ und $h(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$; h_n, h uneigentlich R-integrierbar über $\mathbb{R}$;

$h_n \xrightarrow{glm} h$; aber: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} h_n(x) = 1 \ne 0 = \int\limits_0^1 h(x)dx$

4) Seien $\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Abzählung und $k_n(x) := \sum_{i=1}^{n} 1_{\{q_i\}}$

$k_n(x) \to k(x) := 1_{\mathbb{Q}}(x)\ \forall x \in [0,1]$; k_n R-integrierbar, nicht k.

Satz a.1.

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig für alle $n \in \mathbb{N}$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion.
Es konvergiere die Folge $(f_n : n \in \mathbb{N})$ gleichmäßig gegen f auf $[a,b]$.
Dann gilt:
a) f ist stetig und damit Riemann-integrierbar
b) $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx$

Beispiele a.3:

1) $g_n(x) := \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} \xrightarrow{glm} \exp(x) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$ auf $[a,b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$;

$\int_a^b g_n(x)\, dx \to \int_a^b \exp(x)\, dx$

2) analog wie in 1) $\sin(x)$ und $\cos(x)$; vgl. §6

Beispiele a.4:

"$f_n \xrightarrow{glm} f$" in Satz a.1 hinreichend, aber nicht notwendig:
$f_n(x) := x^n$ und $f(x) := 1_{\{1\}}(x)$ mit $x \in [0,1]$.

Satz a.2:

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $(f_n : n \in \mathbb{N})$ eine Folge von auf $[a,b]$ stetig differenzierbaren Funktionen $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$.
Es existiere ein $x_0 \in [a,b]$, für welches die Folge $(f_n(x_0) : n \in \mathbb{N})$ in $\mathbb{R}$ konvergiert.
Außerdem existiere eine Funktion $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, so dass die Folge $(f_n' : n \in \mathbb{N})$ der Ableitungen f_n' von f_n gleichmäßig auf $[a,b]$ gegen g konvergiert.
Dann gilt:
a) Es existiert eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, so dass $(f_n : n \in \mathbb{N}) \xrightarrow{glm} f$ auf $[a,b]$.
b) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist auf $[a,b]$ stetig differenzierbar und
$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$ für alle $x \in [a,b]$

Beispiele a.5:

1) $f_n(x) := \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} \xrightarrow{glm} \exp(x) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$ auf $[a,b]$ mit $a,b \in \mathbb{R}$;

$f_n'(x) := \sum_{i=1}^{n} \frac{x^{i-1}}{(i-1)!} = f_{n-1}(x) \xrightarrow{glm} \exp(x)$ auf $[a,b]$;

also nach Satz a.2: $\exp'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \exp(x)$ (vgl. §7)

2) analog mit $\sin(x)$ und $\cos(x)$; vgl. §6

Folgerung a.2.1:

Sei $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$.

Dann gilt: $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n (x-x_0)^{n-1}$ für alle $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$.

Folgerung a.2.2:

Sei $r > 0$ und $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ konvergiere in $I := (x_0 - r, x_0 + r)$.

Dann ist $f : I \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar und $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beispiel a.6:

Für $|x| < 1$ gilt: $\sum_{n=1}^{\infty} n\, x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = x \cdot \frac{d \sum_{n=0}^{\infty} x^n}{dx} = x \cdot \frac{d\left(\frac{1}{1-x}\right)}{dx} = \frac{x}{(1-x)^2}$

b) Taylorreihen

Erinnerung an Taylorentwicklungen in §7 (Satz 6)

Satz b.1 (Taylorentwicklung mit Integralrestglied):

Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion. Für $x, x_0 \in I$ gilt dann:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x-x_0)^i + R_{n+1}(x; x_0)$$

mit $R_{n+1} := \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt$

Folgerung b.1.1:

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal stetig differenzierbar mit $f^{n+1}(x) = 0$ für alle $x \in I$.

Dann ist f ein Polynom $p(x) := \sum_{i=0}^{k} \underbrace{\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}}_{:=a_i(x_0)} (x - x_0)^i$ vom Grad $k \le n$.

Folgerung b.1.2:

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal stetig differenzierbar in $x_0 \in I$. Dann existiert eine Funktion $\rho : I \to \mathbb{R}$ mit

$\lim_{x \to x_0} \rho(x) = 0$ und $f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x_i - x_0) + \rho(x) \ \forall x \in I$.

Definition:

Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in I$ und $f : I \to \mathbb{R}$ in x_0 beliebig oft (stetig) differenzierbar.

a) Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$ heißt die Taylorreihe zu f in x_0 oder auch die Taylorentwicklung von f in x_0.

b) Wir sagen "f lässt sich als Taylorreihe um x_0 in I darstellen", wenn gilt:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad \forall x \in I.$$

Beispiele b.1:

1) f Potenzreihe. Dann ist die zu f gehörige Taylorreihe die Funktion f selbst.

2) Eine Taylorreihe zu f konvergiert nicht notwendig gegen f.

Beispiel: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion $f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{falls } x \neq 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$

f ist beliebig oft differenzierbar und $f^{(n)}(0) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

Die Taylorreihe zu f im Entwicklungspunkt 0 ist identisch Null.

aber: $f(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Beispiele b.2:

1) $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ Taylorreihe zu $\exp(x)$ um 0; $f^{(n)}(0) = \exp(0) = 1$

2) $\sin$ und $\cos$ analog

3) $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ für $x \in (-1\ ,\ 1]$

4) $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ für $x \in [-1\ ,\ 1]$

5) Binomische Reihe:

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $\binom{\alpha}{n} := \prod_{k=1}^{n} \frac{(\alpha - k + 1)}{k}$

$(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ für $x \in (-1\ ,\ 1)$

Satz b.2:

Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar und $R_n(x; x_0)$ das Restglied aus der Taylorentwicklung zu f (z.B. aus Satz b.1). Dann gilt:

a) f lässt sich genau dann in I als Taylorreihe um x_0 darstellen, wenn gilt:
$\lim_{n\to\infty} R_n(x, x_0) = 0 \quad \forall x \in I$

b) Existiert ein $\gamma \in \mathbb{R}$ mit $\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \sup_{x\in I} \left| f^{(n)}(x) \right| \le \gamma$, so lässt sich f in I als Taylorreihe um x_0 darstellen.

c) Fourierreihen

Seien X eine Menge, $N := \mathbb{N}$ oder $N := \mathbb{N}_0$ und $(g_n : n \in \mathbb{N})$ eine Folge von Funktionen $g_n : X \to \mathbb{R}$.

Für jedes $x \in X$ betrachten wird die Reihe $\sum (g_n(x) : n \in N)$, d.h. die Folge $(f_n(x) : n \in N)$ der Partialsummen $f_n(x) := \sum_{\substack{i\in N \\ i\le n}} g_n(x)$.

Definition:

a) Die Abbildung $X \ni x \mapsto \sum (g_n(x) : n \in N)$ heißt die zu $(g_n : n \in N)$ gehörige (formale) Funktionenreihe.

Falls für $x \in X$ die Reihe $\sum (g_n(x) : n \in N)$ in $\mathbb{R}$ oder uneigentlich konvergiert, wird ihre Summe mit $\sum_{n\in N} g_n(x)$ bezeichnet.

b) Die Abbildung $K := \left\{ x \in X : \sum (g_n(x) : n \in N) \text{ konvergiert in } \mathbb{R} \right\} \ni x \mapsto \sum_{n\in N} g_n(x)$ heißt die zu $(g_n : n \in N)$ gehörige konvergente Funktionenreihe mit dem Konvergenzbereich K.

Definition:

Seien $(a_n : n \in \mathbb{N}_0)$ und $(b_n : n \in \mathbb{N}_0)$ Folgen reeller Zahlen und $X := [0, 2\pi]$ oder $X := \mathbb{R}$. Die Funktionenreihe $\sum (g_n : n \in \mathbb{N}_0)$ mit
$g_n(x) := a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$
heißt trigonometrische Reihe auf X; a_n und b_n heißen die Koeffizienten dieser trigonometrischen Reihe. ($b_0 := 0$ o.E.d.A)

Bild 1: Sinuskurven

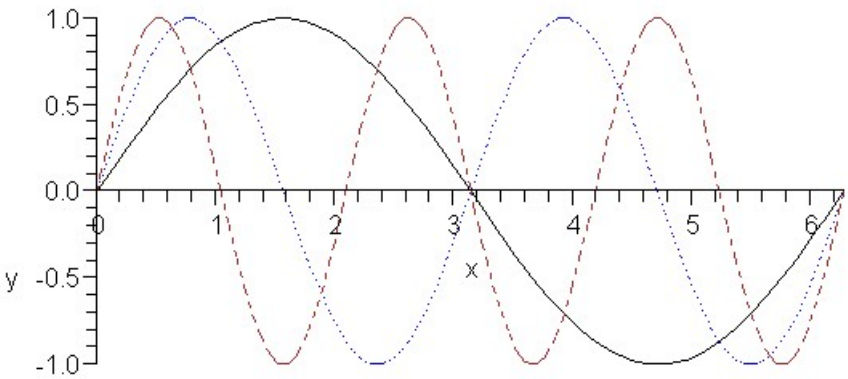
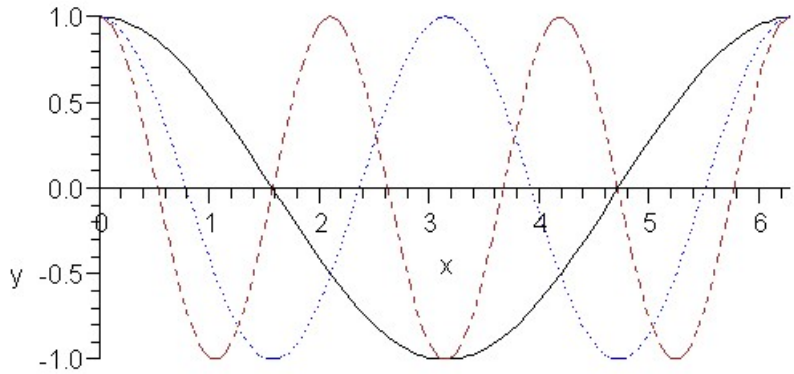


Bild 2: Kosinuskurven



Es ist $\int_0^{2\pi} \cos(nx)\, dx = \int_0^{2\pi} \sin(nx)\, dx = 0$ für $n \in \mathbb{N}$

$\cos(nx) = \cos(n(x + 2k\pi))$ und $\sin(nx) = \sin(n(x + 2k\pi))$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$ $\forall k \in \mathbb{Z}$

Interpretation:

a_n und b_n beschreibt die „Amplitude“ des „Schwingungsanteils“ $\cos(nx)$ bzw. $\sin(nx)$ und n die „Frequenz“.

Eine „beliebige Schwingung“ kann als Superposition von Kosinus- und Sinus-Schwingungen „gedacht“ werden.

Mechanische, elektrische und elektromanische Schwingungen; Wärmeleitung; Zeitreihen.
Beziehung zu Taylorreihen und komplexen Polynomen (vgl. auch §12, komplexe Zahlen) über die Darstellung eine komplexen Zahl

$z = |z| \exp(i\ \phi_z) = |z|(\cos(\phi_z) + i\ \sin(\phi_z))$ bei $\phi_z := \arg(z)$

und ihrer Potenzen $z^n = |z|^n \exp(i\ n\ \phi_z) = |z|^n (\cos(n \cdot \phi_z) + i\ \sin(n \cdot \phi_z))$

Später: Die trigonometrischen Funktionen $\sin(nx)$ und $\cos(mx)$ bilden ein vollständiges Orthonormalsystem im Hilbertraum der (Äquivalenz der) quadratintegrierbaren Funktionen. Die Partialsummen von trigonometrischen Reihen werden auch trigonometrische Polynome genannt.

Satz c.1:

Sei $\sum(g_n : n \in \mathbb{N}_0)$ eine trigonometrische Reihe auf $\mathbb{R}$ mit den Koeffizientenfolgen $(a_n : n \in \mathbb{N}_0)$ und $(b_n : n \in \mathbb{N}_0)$ und dem Konvergenzbereich K.
Weiter seien $f : K \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) := \sum_{n \in \mathbb{N}_0} g_n(x)$ und

$$f : X \to \mathbb{R} \text{ mit } x \mapsto f_n(x) := \sum_{i=0}^{n} g_i(x)$$

Dann gilt:
a) Mit $x \in K$ ist auch $x + k2\pi \in K$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.
b) $f(x) = f(x + k2\pi)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.
c) Konvergiert $\sum(|a_n| + |b_n| : n \in \mathbb{N}_0)$ in $\mathbb{R}$, so ist $K = \mathbb{R}$ und $\sum(g_n : n \in \mathbb{N}_0)$ konvergiert gleichmäßig gegen f.
d) Konvergiert $\sum(g_n : n \in \mathbb{N}_0)$ gleichmäßig auf $I \subset \mathbb{R}$ gegen f, so gilt:
i) $f : I \to \mathbb{R}$ ist stetig.
ii) Bei $I := [a,b]$ ist $\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx$
iii) Bei $I := [0, 2\pi]$ ist $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\ dx$
e) Für $n, m \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx)\ \cos(nx)\ dx = \begin{cases} 2\pi & \text{bei } n = m = 0 \\ \pi & \text{bei } n = m \neq 0 \\ 0 & \text{bei } n \neq m \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx)\ \sin(nx)\ dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(mx)\ \sin(nx)\ dx = \begin{cases} 0 & \text{bei } n = m = 0 \\ \pi & \text{bei } n = m \neq 0 \\ 0 & \text{bei } n \neq m \end{cases}$$

Die Orthogonalitätsrelationen aus Satz c.1.e zeigt man am einfachsten über:
$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \quad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$

Satz c.2: (Riemann)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann gilt (bei $z \in \mathbb{R}$):

$$\lim_{z\to\infty} \int_a^b f(x)\ \cos(zx)\ dx = 0 = \lim_{z\to\infty} \int_a^b f(x)\ \sin(zx)\ dx$$

Definition:

Sei $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann heißen

$a_0 := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\ dx$ und $b_0 := 0$,

$a_n := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\ \cos(nx)\ dx$ und $b_n := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\ \sin(nx)\ dx$ für $n \in \mathbb{N}$

die Fourierkoeffizienten von f und $\sum(g_n : n \in \mathbb{N}_0)$ mit $g_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$
die formale Fourierreihe zu f.

Bemerkung:

In der komplexen Darstellung lautet die Fourierreihe zu einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit Periode 2π, welche stückweise stetig differenzierbar ist:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} c_k e^{ikx} := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{k=n} c_k e^{ikx} \quad \text{mit den Koeffizienten } c_k := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\ e^{-ikt}\ dt$$

Fragen: 1) Für welche x konvergiert die Fourierreihe $\sum(g_n : n \in \mathbb{N}_0)$ zu f ?

2) Wann ist $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$?

3) Wie schnell ist die Konvergenz ?

Beispiele und Warnungen:

1) Es existiert eine konvergente trigonometrische Reihe, die nicht Fourierreihe einer Riemann-integrierbaren Funktion ist.

2) Es existiert eine stetige Funktion f, deren Fourierreihe für „viele“ x nicht gegen $f(x)$ konvergiert.

Satz c.3: (Dirichlet)

Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ Riemann-integrierbar auf $[0,2\pi]$ und periodisch mit der Periode 2π.
Weiter sei $(f_n : n\in\mathbb{N}_0)$ die Folge der Partialsummen der Fourierreihe zu f.
Dann gilt für $x\in\mathbb{R}$:

a) $f_n(x)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\big(f(x+2t)+f(x-2t)\big)}{2}K_n(t)\,dt,$

wobei $K_n(t):=\begin{cases}\dfrac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} & \text{für } 0<t\le\dfrac{\pi}{2}\\ 2n+1 & \text{für } t=0\end{cases}$

der Dirichlet'sche Kern heißt.

b) Darstellung des Restes:

$$F_n(x):=f_n(x)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\big(f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)\big)K_n(t)\,dt$$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\gamma\in\mathbb{R}\quad\Leftrightarrow\quad\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\big(f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)\big)K_n(t)=0$

Anmerkung:

1) $\dfrac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}\xrightarrow{t\to 0}2n+1$ 2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}K_n(t)\,dt=\frac{\pi}{2}$

Satz c.4:

Seien $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ Riemann-integrierbar über $[0,2\pi]$ und periodisch mit der Periode 2π und $x_0\in[0,2\pi]$ derart, dass in $\mathbb{R}$ folgende Limites existieren:

$f(x_0^+):=\lim\limits_{x\downarrow x_0}f(x)$ (rechtsseitiger Limes)

$f(x_0^-):=\lim\limits_{x\uparrow x_0}f(x)$ (linksseitiger Limes)

$f_+'(x_0^+):=\lim\limits_{x\downarrow x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0^+)}{x-x_0}$ (rechtsseitige verallgemeinerte Ableitung)

$f_-'(x_0^-):=\lim\limits_{x\uparrow x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0^-)}{x-x_0}$ (linksseitige verallgemeinerte Ableitung)

Dann gilt:

a) Die Fourierreihe zu f konvergiert in x_0 gegen $\dfrac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}$

b) Ist zusätzlich f in x_0 stetig (also $f(x_0^+)=f(x_0^-)$), so konvergiert die Fourierreihe zu f in x_0 gegen $f(x_0)$.

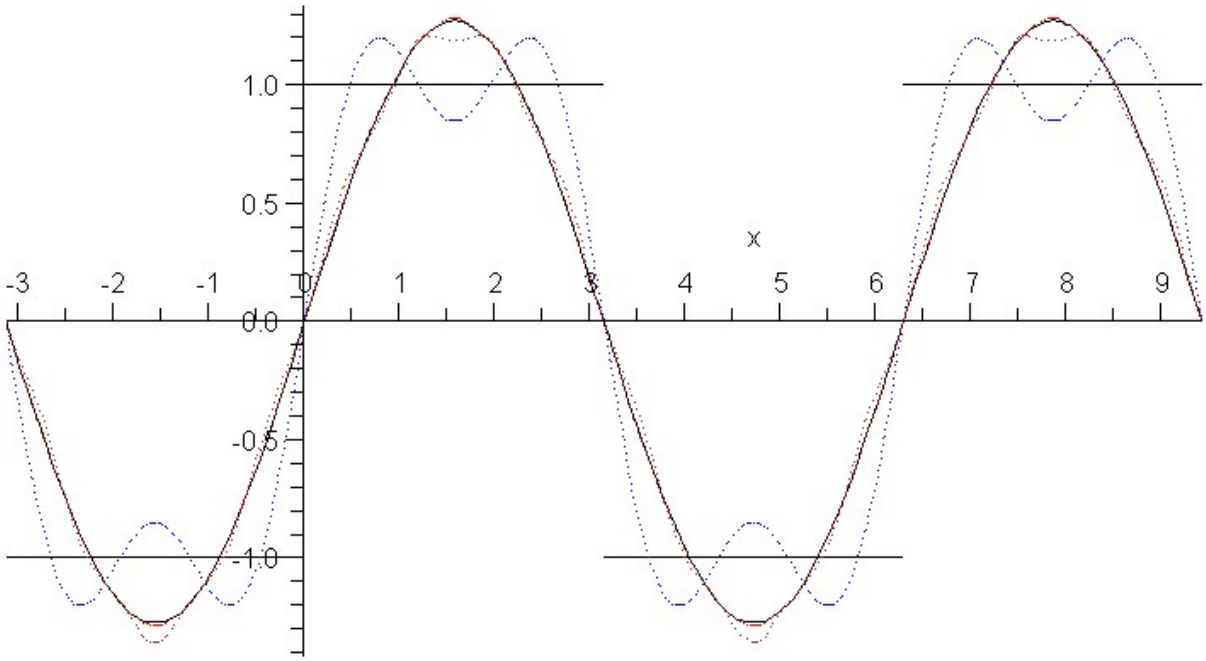
Beispiel:

Man betrachte die periodische Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x):=\begin{cases} 1 & \text{für } 0\le x<\pi \\ -1 & \text{für } \pi\le x<2\pi \end{cases}$

Bilder:

Als Fourier-Partialsummen zu f ergeben sich:

$$S_1(x)=\frac{4}{\pi}\sin x;\ S_3(x)=\frac{4}{\pi}\left(\sin x+\frac{\sin 3x}{3}\right);S_5(x)=\frac{4}{\pi}\left(\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}\right);$$
$$S_7(x)=\frac{4}{\pi}\left(\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\frac{\sin 7x}{7}\right)$$



Satz c.5

Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ periodisch mit der Periode 2π. Dann gilt:
a) Sind $x_0\in\mathbb{R}$, f Riemann-integrierbar in $[0,2\pi]$ und

$$J:=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left|f(x_0+2t)+f(x_0+2t)-2f(x_0)\right|}{t}\,dt\ <\infty$$

so konvergiert die Fourierreihe zu f in x_0 und hat die Summe $f(x_0)$.

b) Hölder-Bedingung:
Existieren $\alpha \in (0,1)$ und $\gamma \in \mathbb{R}$ zu f mit
$|f(x) - f(x')| < \gamma |x - x'|^{\alpha} \quad \forall x, x' \in \mathbb{R}$ mit $|x - x'| < \pi$
so konvergiert die Fourierreihe zu f in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ und hat die Summe $f(x_0)$

Anmerkung:

Selbst für stetiges $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ braucht die Folge $(f_n : n \in \mathbb{N}_0)$ der Partialsummen der Fourierreihe zu f nicht gegen $f(x)$ in x zu konvergieren, falls sie überhaupt konvergiert. Aber die Mittel $h_n := \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f_i$ tun dies – und zwar gleichmäßig, wie der folgende Satz zeigt.

Satz c.6 : (Fejér)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und periodisch mit der Periode 2π.
Weiter sei $(f_n : n \in \mathbb{N}_0)$ die Folge der Partialsummen der Fourierreihe zu f.
Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| f(x) - \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f_i \right| = 0$$

Anmerkung.

Für den Fejér-Kern $F_n(t) := \begin{cases} \left(\frac{\sin(nt)}{\sin(t)}\right)^2 & \text{für } 0 < t \le \frac{\pi}{2} \\ n^2 & \text{für } t = 0 \end{cases}$ gilt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} F_n(t)\, dt = \frac{n\pi}{2} \quad \text{und } F_n(t) \xrightarrow{t\to 0} n^2$$

Folgerung c.6.1:

Mit dem Satz von Fejér, der Darstellung der trigonometrischen Funktionen als Potenzreihen und dem Satz über die gleichmäßige (vgl. §6) kann man den Satz von Weierstraß über die gleichmäßige Approximation von stetigen Funktionen durch Polynome (vgl. §5) beweisen.

****
Warnung: (du Bois-Reymond, 1872)

Die Fourierreihe zu einer stetigen Funktionen kann divergieren.

Beispiel: (Fejér)

Bei $t_{p,q}(x) := 2\sin(px)\sum_{k=1}^{q}\frac{\sin(kx)}{k}$ und $f := \sum_{k\in\mathbb{N}}\alpha_k t_{p_k,q_k}$ mit $p_k := 2^{k^3+1}$, $q_k := 2^{k^3}$

und $\alpha_k := \frac{1}{k^2}$ ist f stetig, aber die Fourierreihe zu f konvergiert nicht in 0.

Zum Beweis vgl. z.B. Edwards, Vol.I, S.161 f.; Zygmund, Vol.I, S.298ff.;
Dort auch weitere Beispiele und Sätze:

i) Es existiert eine stetige Funktion, deren Fourierreihe überall konvergiert, nicht aber gleichmäßig.

ii) Ist f stetig (und damit über $[0,2\pi]$ quadratintegrierbar), so folgt aus dem unten zitierten Satz von Carleson, dass die Fourierreihe zu f fast überall gegen f konvergiert.

iii) Es existiert eine stetige Funktion derart, dass jede Teilfolge der Folge der Partialsummen der Fourierreihe zu f an irgendeinem Punkt divergiert.
(Men'show, 1947)

Aus Folgerung 6.1 (und dem Dichtliegen von $C[0,2\pi]$ in $L_2[0,2\pi]$) folgt:

Satz c.7 (vollständiges Orthonormalsystem)

$\mathfrak{B} := \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(n\,\cdot) : n\in\mathbb{N}\right\}\cup\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(n\,\cdot) : n\in\mathbb{N}\right\}\cup\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right\}$ ist ein vollständiges Orthonormalsystem in $C[0,2\pi]$ und damit auch in $L_2[0,2\pi]$ mit $\langle f,g\rangle := \int f(x)\cdot\overline{g(x)}\,dx$.

Wegen der (abstrakten) Fourierreihenentwicklung in Prähilberträumen bezüglich vollständiger Orthonormalsysteme folgt damit:

Satz c.8 (Quadratmittelkonvergenz der Fourierreihe)

Ist $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ quadratintegrierbar, so konvergiert die Fourierreihe zu f im quadratischen Mittel gegen f.

Satz c.9 (Carleson, 1966)

Ist $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ quadratintegrierbar, so konvergiert die Fourierreihe zu f fast überall gegen f.

Warnung: (Kolmogorov, 1926)

Es existiert eine integrierbare Funktion $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$, deren Fourierreihe überall divergiert. (Konstruktiv schwieriger Beweis; vgl. z.B. Bary, S.455-464 oder Zygmund, I, S.310 ff.)

****

Satz c.10: (Abtasttheorem; Whittaker – Kotelnikov – Nyquist – Shannon)

Sei $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ mit $x\mapsto f(x):=\sum_{k=0}^{n}\left(a_k\ \cos(kx)+b_k\ \sin(kx)\right)$ bei $n\in\mathbb{N}$.
Dann ist f durch seine Werte an $2n+1$ verschiedenen Stellen $x\in[0,2\pi)$ eindeutig bestimmt.

Definition:

a) n in Satz c.10 heißt Grenzfrequenz.
b) Sei $N\in\mathbb{N}$ und $x_N:=\frac{2\pi}{N}$. Dann heißt $\{k\ x_N : k=0,1,...N-1\}$ eine (gleichabständige) Abstastung von $[0,2\pi]$ der Länge x_N.
N heißt Abtastfrequenz dieser Abtastung.

Anmerkung:

Satz c.10 sagt, dass ein trigonometrisches Polynom mit der Grenzfrequenz n durch eine Abtastung mit einer Abtastfrequenz N eindeutig bestimmt ist, die mehr als zweimal so groß ist wie seine Grenzfrequenz: $N\geq 2n+1$.

§12 Die komplexen Zahlen

Sei $(\mathbb{R},+,\cdot)$ der Körper der reellen Zahlen mit der gewöhnlichen Addition „+“ und der gewöhnlichen Multiplikation „ $\cdot$“, der Null 0 und der Eins 1.

Problem: $x^2+1=0$ hat keine Lösung in $\mathbb{R}$.
Lösung: Konstruktion der komplexen Zahlen.

Definition:

a) $\mathbb{C} := \mathbb{R}\times\mathbb{R} = \{(x,y) : x\in\mathbb{R} \text{ und } y\in\mathbb{R}\}$ heißt die Menge der komplexen Zahlen.
b) $+ : \mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ mit $(x_1,y_1)+(x_2,y_2) := (x_1+x_2, y_1+y_2)$ heißt die Addition komplexer Zahlen.

c) $\cdot : \mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ mit $(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2) := (x_1\cdot x_2 - y_1\cdot y_2,\ x_1\cdot y_2 + x_2\cdot y_1)$ heißt die Multiplikation komplexer Zahlen.

Anmerkung:

Die Additionen $+ : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ und $+ : \mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ sind vorläufig ganz verschieden; vgl. Satz 2 samt Anmerkung. Gleiches gilt für die Multiplikationen.

Satz 1: ($(\mathbb{C},+,\cdot)$ ist ein kommutativer Körper)

Sei $(\mathbb{C},+,\cdot)$ mit $\mathbb{C}$, $+$ und $\cdot$ wie oben. Dann sind $+ : \mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ und $\cdot : \mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ Abbildungen und es gilt:
a) $(\mathbb{C},+)$ ist eine kommutative Gruppe; d.h. es gelten $\mathbb{C}$A1 - $\mathbb{C}$A4 analog zu $\mathbb{R}$A1 - $\mathbb{R}$A4 in §3. Null (= das neutrale Element bzgl. +) ist $(0,0)$.
b) $(\mathbb{C}\setminus\{(0,0)\},\ \cdot)$ ist eine kommutative Gruppe; d.h. es gelten $\mathbb{C}$M1 - $\mathbb{C}$M4 analog zu $\mathbb{R}$M1 - $\mathbb{R}$M4 in §3. Die Eins (=das neutrale Element bzgl. $\cdot$) ist $(1,0)$.
c) Es gilt das Distributivgesetz; d.h. es gilt $\mathbb{C}$D analog zu $\mathbb{R}$D in §3.

Definition:

a) $(\mathbb{C},+,\cdot)$ heißt der Körper der komplexen Zahlen.
$0_{\mathbb{C}} := (0,0)$ heißt die komplexe Null.
$1_{\mathbb{C}} := (1,0)$ heißt die komplexe Eins.
$z := (x,y)\in\mathbb{C}$ heißt komplexe Zahl.

b) Sei $z := (x, y) \in \mathbb{C}$. Dann heißen
$\mathrm{Re}(z) := \mathrm{Re}\, z := x$ der Realteil und $\mathrm{Im}(z) := \mathrm{Im}\, z := y$ der Imaginärteil von z,
$-z := (-x, -y)$ das Negative und $z^{-1} := \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$ bei $z \neq 0_{\mathbb{C}}$ das Inverse von z.

Satz 2: (Einbettung von $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ in $(\mathbb{C}, +, \cdot)$)

Sei $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ der Körper der reellen Zahlen und $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ der Körper der komplexen Zahlen.
Die Abbildung $\varphi: (\mathbb{R}, +, \cdot) \to (\mathbb{C}, +, \cdot)$ mit $x \mapsto \varphi(x) := (x, 0)$ ist injektiv. Für sie gilt.
a) $\varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$
b) $\varphi(x_1 \cdot x_2) = \varphi(x_1) \cdot \varphi(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$
c) $\varphi(0) = 0 = 0_{\mathbb{C}}$ und $\varphi(1) = (1, 0) = 1_{\mathbb{C}}$

Anmerkung:

1) $\varphi: (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{C}, +)$ und $\varphi: (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot) \to (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ sind Gruppenhomomorphismen.
2) $\varphi: (\mathbb{R}, +, \cdot) \to (\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist ein Körperhomomorphismus.

3) Wir identifizieren $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ mit $(\varphi(\mathbb{R}), +, \cdot)$ und fassen $\mathbb{R}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$ und $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ als Unterkörper von $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ auf.

Definition:

a) Sei $i := (0, 1)$.
b) Für $x, y \in \mathbb{R}$ seien $iy := (0, y)$, $x + iy := (x, y)$ und $(x, 0)$.
c) Endliche Summen und Produkte und Potenzen seien für komplexe Zahlen analog definiert für reelle Zahlen.
d) $z := (x, y) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \;:\Leftrightarrow\; z \in \mathbb{C} \setminus \varphi(\mathbb{R}) = \{(x_1, y_1) \in \mathbb{C} : y_1 \neq 0\}$

Satz 3:

a) $i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ und $i^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (-1, 0) = \varphi(-1) = -1_{\mathbb{C}}$, d.h. $i =: \sqrt{-1}$.
b) $z = \mathrm{Re}(z) + i \cdot \mathrm{Im}(z) = x + iy \quad \forall z = (x, y) \in \mathbb{C}$

Definition:

Seien $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ und $z = x + iy$.
$\sqrt{\alpha}$ sei die nichtnegative Wurzel der nichtnegativen reellen Zahl α.
a) $\bar{z} := x - iy = (x, -y)$ heißt die zu z konjugierte komplexe Zahl.
b) $|z| := \sqrt{(x^2 + y^2)}$ heißt der Betrag (die Länge, Norm) von z.
c) $|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_0^+$ mit $z \to |z|$ heißt die Betragsfunktion.

Satz 4:

Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ und $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gemäß Satz 2. Dann gilt:

a) $z = \bar{z} \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Im}(z) = 0 \;\Leftrightarrow\; z \in \varphi(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$

b) $z \cdot \bar{z} = (x + iy) \cdot (x - iy) = (x^2 - i^2 y^2, 0) = \varphi(x^2 + y^2) = |z|^2$ und $|z| = |\bar{z}|$.

c) Bei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\alpha z := (\alpha x, \alpha y) = \varphi(\alpha) \cdot z$ gilt: $|\alpha z| = |\alpha||z|$, d.h. $|\;\cdot\;| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_0^+$ ist postiv homogen.

d) Dreiecksungleichung: $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2| \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

e) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Hinweis auf den Fundamentalsatz der Algebra:

Eine Aussageform für $z \in \mathbb{C}$ der Art

$P(z) := \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ mit $n \in \mathbb{N}$, $a_k \in \mathbb{C}$ für $k = 0,..,n$ und $a_n \neq 0$

heißt Polynom über $\mathbb{C}$ vom Grad n mit den Koeffizienten $a_k \in \mathbb{C}$.

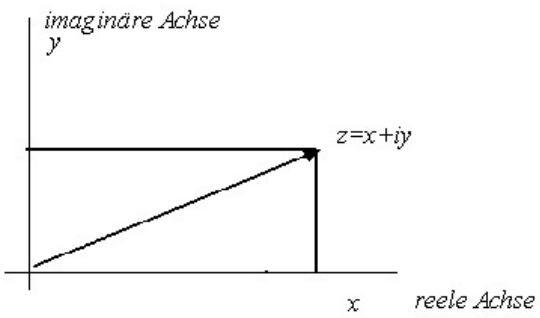
Fundamentalsatz der Algebra (Gauß, 1799):

Jedes Polynom $P(z)$ über $\mathbb{C}$ vom Grad $n \ge 1$ hat mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$;
d.h. $\exists\, z \in \mathbb{C}$ mit $P(z) = 0$.

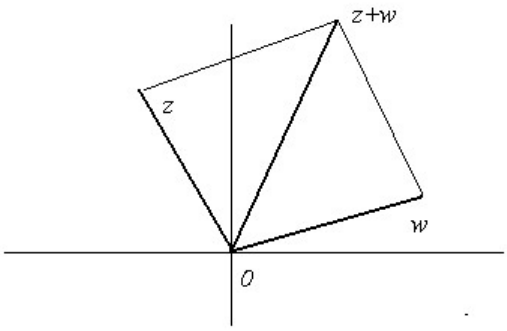
(verschiedene Beweise: z.B. mit Hilfe der Funktionentheorie; vgl. auch Gerd Fischer , Lineare Algebra, S.217 f.)

Graphische Darstellung der komplexen Zahlen: Gaußsche Ebene

Zeichnung:



Addition komlexer Zahlen: Vektoraddition



$z := (x, y) \in \mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ als Vektor der Länge $|z|$

$\arg(z) :=$ Winkel zwischen der $x-$Achse und der Gerade von $0_{\mathbb{C}}$ nach z

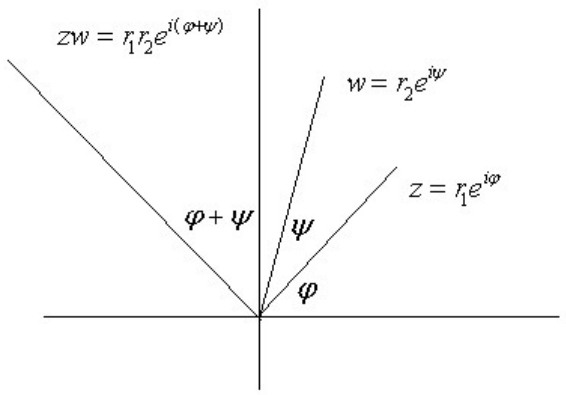
$\mathrm{Re}(z) = x = |z|\cos(\arg(z))$ und $\mathrm{Im}(z) = y = |z|\sin(\arg(z))$

$z = |z|\cos(\arg(z)) + i\,|z|\sin(\arg(z))$

Bei $e^{i\alpha} := \exp(i\alpha) := (\cos(\alpha), \sin(\alpha)) = \cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha)$ für $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:
$z = |z| e^{i \arg(z)}$

Multiplikation mit einer komplexen Zahl z:
Drehung um $\arg(z)$ und Streckung um $|z|$.

Zeichnung:



§13 Metrische und normierte Räume

a) Metriken und Normen

Definition:

Sei X eine Menge und $d : X \times X \to \mathbb{R}_0^+$ eine Abbildung mit

M1) $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x,y \in X$ (Symmetrie)

M2) $d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y) \quad \forall x,y,z \in X$ (Dreiecksungleichung)

M3) $d(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$ (Trennung)

d heißt Metrik auf X (oder: Distanzfunktion); (X,d) heißt metrischer Raum.

Beispiele a.1:

1) diskrete Metrik: X bel. Menge und $d(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{bei } x = y \\ 1 & \text{bei } x \ne y \end{cases}$

2) gewöhnliche Metrik (Betragsmetrik) auf $\mathbb{R}$: $X := \mathbb{R}$ und $d(x,y) := |x-y|$

3) euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^n : n \in \mathbb{N}$; $X := \mathbb{R}^n$, $x := (x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n$ und $d(x,y) := \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right)}$

4) Tschebyscheff-Metrik: $n \in \mathbb{N}$; $X := \mathbb{R}^n; x,y \in \mathbb{R}^n$ und $d(x,y) := \max\{|x_i - y_i| : i = 1,..,n\}$

Definition:

Seien (X,d) ein metrischer Raum, $x \in X$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$.

a) $K_d(x,\varepsilon) := K(x,\varepsilon) := \{y \in X : d(x,y) < \varepsilon\}$ heißt offene $d-$Kugel um x mit Radius ε.

$\widetilde{K}_d(x,\varepsilon) := \widetilde{K}(x,\varepsilon) := \{y \in X : d(x,y) \le \varepsilon\}$ heißt abgeschlossene $d-$Kugel um x mit Radius ε.

b) Eine Folge $(x_n : n \in \mathbb{N})$ konvergiert in (X,d) gegen $x \in X$

in Zeichen: $x = d - \lim_{n\to\infty} x_n$; $x = d - \lim x_n$; $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} x$, wenn gilt:

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \ \exists N \in \mathbb{N}$ mit $d(x,x_n) < \varepsilon \quad \forall n \ge N$

c) Sei auch (Y,δ) ein metrischer Raum. Dann heißt: $f : (X,d) \to (Y,\delta)$ stetig in $x \in X$,

wenn $f(x) = \delta - \lim f(x_n)$ aus $x = d - \lim x_n$ folgt.

f heißt stetig, wenn f stetig in $x \in X$ ist für jedes $x \in X$.

d) Sei $Y \subset X$. Dann heißt Y abgeschlossen in (X,d), wenn gilt:

$\forall (x_n : n \in \mathbb{N})$ Folge in Y mit $x = d - \lim x_n$ ist $x \in Y$.

Y heißt offen, wenn $X \setminus Y$ abgeschlossen ist.

Beispiele a.2:

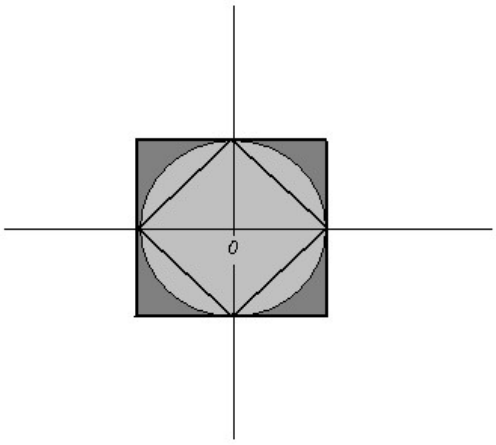
1) euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^n$:
$n=1$: offene Kugel $\leftrightarrow$ offenes Intervall
geschlossene Kugel $\leftrightarrow$ geschlossenes Intervall
$n=2$: offene Kugel $\leftrightarrow$ offener Kreis
geschlossene Kugel $\leftrightarrow$ geschlossener Kreis
$n=3$: offene Kugel $\leftrightarrow$ offene Kugel im Sinne der analyt. Geometrie
geschlossene Kugel $\leftrightarrow$ geschlossene Kugel im Sinne der analyt. Geometrie

2) Tschebyscheff-Metrik auf $\mathbb{R}^n$:

$n=1$: offene Kugel $\leftrightarrow$ offenes Intervall
geschlossene Kugel $\leftrightarrow$ geschlossenes Intervall
$n=2$: offene Kugel $\leftrightarrow$ offenes Quadrat
geschlossene Kugel $\leftrightarrow$ abgeschlossenes Quadrat
$n=3$: offene Kugel $\leftrightarrow$ offener Würfel
geschlossene Kugel $\leftrightarrow$ abgeschlossener Würfel

Zeichnung:

p-Normen für $p=1,2,\infty$ im $\mathbb{R}^2$ mit $\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ und $\|x\|_\infty := \max\{|x_1|,\dots,|x_n|\}$ (vgl. unten, „Normen") für $x \in \mathbb{R}^n$.



Satz a.1:

Sei (X,d) ein metrischer Raum. Dann gilt:

a) $x \in K_d(x,\varepsilon) \quad \forall x \in X \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$

b) $\{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_d(x;1/n) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{K}_d(x;1/n) \quad \forall x \in X$

c) Hausdorffsche Trennungseigenschaft:

$\forall x,y \in X$ mit $x \neq y \ \exists\ \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $K_d(x;\varepsilon) \cap K_d(y;\varepsilon) = \varnothing$

d) Eindeutigkeit des Limes:
$x = d\text{-}\lim x_n = y \;\Rightarrow x = y$

e) Sei auch (Y,δ) ein metrischer Raum und $f:(X,d)\to(Y,\delta)$ stetig.
Ist G_Y eine offene Teilmenge von (Y,δ), so ist $f^{-1}(G_Y)$ eine offene Teilmenge von (X,d).
Ist A_Y eine abgeschlossene Teilmenge von (Y,δ), so ist $f^{-1}(A_Y)$ eine abgeschlossene Teilmenge von (X,d).

f) Für jedes $x\in X$ ist $d(x,\cdot): X \mapsto \mathbb{R}_0^+$ stetig und damit $K_d(x;\varepsilon)$ in (X,d) offen und $\widetilde{K}_d(x,\varepsilon)$ abgeschlossen.

g) Seien $(X,d_X),(Y,d_Y)$ und (Z,d_Z) metrische Räume und $f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$ und $g:(Y,d_Y)\to(Z,d_Z)$ stetig. Dann ist auch $g\circ f:(X,d_X)\to(Z,d_Z)$ stetig.

Definition:

Sei (X,d) ein metrischer Raum.
a) Eine Folge $(x_n : n\in\mathbb{N})$ in X heißt $d-$Cauchyfolge, wenn gilt:
$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\ \exists N\in\mathbb{N}$ mit $d(x_n,x_m)<\varepsilon\ \ \forall n,m>N$.
b) (X,d) heißt vollständig, wenn jede $d-$Cauchyfolge in (X,d) gegen ein $x\in X$ konvergiert.

Beispiele a.3:

1) $\mathbb{R}$ ist mit der Betragsmetrik (=euklidische Metrik=Tschebyscheff-Metrik) vollständig.
Vgl. §4, Satz a.8.
2) $\mathbb{Q}$ ist mit der Betragsmetrik nicht vollständig.
3) $\mathbb{R}$ ist mit der Arcustangens-Metrik $d:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $(x,y)\mapsto d(x,y):=|\arctan x-\arctan y|$ nicht vollständig.

Satz a.2:

Seien (X,d) ein metrischer Raum, $Y\subset X$ und $d_Y: Y\times Y\to\mathbb{R}_0^+$
mit $(y_1,y_2)\mapsto d_Y(y_1,y_2):=d(y_1,y_2)$ die Einschränkung von d auf Y.
Dann gilt:
a) (Y,d_Y) ist ein metrischer Raum.

b) Jede gegen ein $x\in X$ in (X,d) konvergente Folge $(x_n : n\in\mathbb{N})$ in X ist eine $d-$Cauchyfolge.

c) Ist (Y, d_Y) vollständig, so ist Y abgeschlossen in (X, d).
d) Ist (X, d) vollständig und Y in (X, d) abgeschlossen, so ist (Y, d_Y) vollständig.

Definition:

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Menge $Z \subset X$ heißt folgenkompakt in (X, d), wenn jede Folge $(x_n : n \in \mathbb{N})$ in Z eine gegen ein $z \in Z$ in (X, d) konvergente Teilfolge hat.

Definition:

Sei (X, d) ein metrischer Raum, $Z \subset X$.
a) Unter einer offenen Überdeckung von Z versteht man eine Familie $(U_i)_{i \in I}$ von offenen Teilmengen $U_i \subset X$ mit $Z \subset \bigcup_{i \in I} U_i$.
Dabei ist I eine endliche oder unendliche Indexmenge.

b) $Z \subset X$ heißt kompakt, wenn es zu jeder offenen Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von Z eine endliche Teilmenge $J \subset I$ von indizes gibt, so dass $Z \subset \bigcup_{j \in J} U_j$.

Bemerkung:

Sei (X, d) ein metrischer Raum.
Dann sind für jede Teilmenge $Z \subset X$ folgende Eigenschaften äquivalent:
i) Z ist folgenkompakt, d.h. jede Folge $(x_n : n \in \mathbb{N})$ besitzt eine gegen ein $z \in Z$ konvergente Teilfolge.
ii) Z hat die offene Überdeckungseigenschaft, d.h. aus $Z \subset \bigcup_{i \in I} U_i$, wobei I eine beliebige Indexmenge und $U_i \subset X \quad \forall i \in I$ offen ist, folgt, dass eine endliche eine endliche Indexmenge $J \subset I$ mit $Z \subset \bigcup_{j \in J} U_j$ existiert.
iii) Z hat die endliche Durchschnittseigenschaft, d.h. aus $\bigcap_{i \in I} Z_i = \emptyset$, wobei I eine beliebige Indexmenge und $Z_i \subset Z \quad \forall i \in I$ abgeschlossen im metrischen Raum (Z, d) ist, folgt, dass eine endliche Indexmenge $J \subset I$ mit $\bigcap_{j \in I} Z_j = \emptyset$ existiert.

Satz a.3:

Sei (X, d) ein metrischer Raum, $Y \subset X$ und $d_Y : Y \times Y \to \mathbb{R}_0^+$ die Einschränkung von d auf Y. Dann gilt:
Ist Y folgenkompakt in (X, d), so ist Y abgeschlossen in (X, d) und (Y, d_Y) vollständig.

Definition:

Seien (X,d) und (Y,δ) metrische Räume.
a) Eine Abbildung $f:(X,d)\to(Y,\delta)$ heißt gleichmäßig stetig, wenn gilt:
$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\ \exists\ \eta\in\mathbb{R}^+\ \forall x_1,x_2\in X$ mit $d(x_1,x_2)<\eta$ gilt $\delta(f(x_1),f(x_2))<\varepsilon$.
b) Sei Z eine Menge. Eine Folge $\left(f_n:n\in\mathbb{N}\right)$ von Abbildungen $f_n:Z\to(Y,\delta)$
konvergiert gleichmäßig gegen eine Abbildung gegen eine Abbildung
$f:Z\to(Y,\delta)$, wenn gilt:
$\lim\limits_{n\to\infty}\ \sup\left\{\delta(f_n(z),f(z)):z\in Z\right\}=0$

Satz a.4:

Seien (X,d) und (Y,δ) metrische Räume, $\varnothing\neq X$ folgenkompakt und
$f:(X,d)\to(Y,\delta)$ stetig. Dann gilt:
a) $f:(X,d)\to(Y,\delta)$ ist gleichmäßig stetig.
b) $f(X)$ ist folgenkompakt in (Y,δ).
c) Ist $Y=\mathbb{R}$ und δ die gewöhnliche Betragsmetrik, so gilt:
Es existieren $x_m,\ x_M\in X$ mit $f(x_m)=\inf\left\{f(x):x\in X\right\}$ und $f(x_M)=\sup\left\{f(x):x\in X\right\}$

Satz a.5:

Seien (X,d) und (Y,δ) metrische Räume und $\left(f_n:n\in\mathbb{N}\right)$ eine Folge von stetigen Abbildungen
$f_n:(X,d)\to(Y,\delta)$, die gleichmäßig gegen eine Abbildung $f:X\to Y$ konvergieren. Dann ist
$f:(X,d)\to(Y,\delta)$ stetig.

Definition:

a) Sei $\mathbb{K}$ gleich $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. (Skalarenkörper)
b) Sei X ein $\mathbb{K}$-linearer Raum (d.h. ein Vektorraum über $\mathbb{K}$).
Eine Abbildung $\|\cdot\|:X\to\mathbb{R}_0^+$ mit $x\mapsto\|x\|$ heißt Norm auf X, wenn gilt.
N1) $\|\alpha x\|=|\alpha|\ \|x\|\quad\forall\alpha\in\mathbb{K}\ \forall x\in X$ (positiv homogen)
N2) $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|\quad\forall x,y\in X$ (Dreiecksungleichung)
N3) $\|x\|=0\ \Leftrightarrow\ x=0$ (Trennung)

c) Sei X ein $\mathbb{K}$-linearer Raum und $\|\cdot\|:X\to\mathbb{R}_0^+$ eine Norm auf X.
Dann heißt $(X,\|\cdot\|)$ ein normierter Raum.

d) Sei $(X, \| \cdot \|)$ ein normierter Raum. Eine Menge $Z \subset X$ bzw. eine eine Funktion $f : Y \to X$ mit $f(Y) = Z$ heißen normbeschränkt, wenn $\sup\{\|z\| : z \in Z\} < \infty$.

Beispiele a.4 normierte Räume:

1) $\mathbb{R}$ mit dem Betrag 2) $\mathbb{C}$ mit dem $\mathbb{C}$-Betrag

3) $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Norm $\|x\| := \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ für $x := (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$

4) $\mathbb{R}^n$ mit der Tschebyscheff-Norm $\|x\|_\infty := \max\{|x_i| : i = 1, ..., n\}$ für $x := (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$

5) Sei X eine Menge, $(Y, \| \cdot \|)$ ein normierter $\mathbb{R}$-linearer Raum, $\mathfrak{F}$ die Menge der $\| \cdot \|$-beschränkten Funktionen $f : X \to Y$. $\mathfrak{F}$ ist mit der punktweisen Addition $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ und der punktweisen Skalarenmultiplikation $(\alpha f)(x) := \alpha f(x)$ ein $\mathbb{R}$-linearer Raum. Mit der Tschebyscheff-Norm $|||f||| := \sup\{\|f(x)\| : x \in X\}$ ist $\mathfrak{F}$ ein normierter Raum.

Definition:

Sei $(X, \| \cdot \|)$ ein $\mathbb{K}$-linearer Raum. $\| \cdot \|$ induziert eine Metrik $d(x, y) := \|x - y\|$ auf X.
$(X, \| \cdot \|)$ heißt Banachraum wenn (X, d) vollständig ist.

Anmerkung: $d(x, y) := \|x - y\| = \|(x + z) - (y + z)\|$ ist translationsinvariant.

Beispiele a.5: Banach-Räume

1) $\mathbb{R}$ mit dem Betrag 2) $\mathbb{C}$ mit dem $\mathbb{C}$-Betrag

3) $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen norm

4) $\mathbb{R}^n$ mit der Tschebyscheff-Norm

5) X Menge, $(Y, \| \cdot \|)$ ein Banach-Raum, $\mathfrak{F}$ Menge der $\| \cdot \|$-beschränkten Funktionen $f : X \to Y$. mit der Tschebyscheff-Norm ist $\mathfrak{F}$ ein Banach-Raum.

b) Der euklidische Raum $\mathbb{R}^k$

Seien $k \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{R}^k := \{(x_1, ..., x_k) : x_i \in \mathbb{R} \text{ für } i = 1, ..., k\}$. $\mathbb{R}^k$ ist auffassbar als $\mathbb{R}$-linearer Raum:

$\alpha x := (\alpha x_1, ..., \alpha x_k)$ bei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $x := (x_1, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k$
$x + y := (x_1 + y_1, ..., x_k + y_k)$ bei $x, y \in \mathbb{R}^k$
Eine algebraische Basis des $\mathbb{R}$-linearen Raumes ist z.B.
$(1,0,...,0);\ (0,1,0,...,0);....;(0,...,0,1)$. Seine algebraische Dimension ist k.

Auf dem $\mathbb{R}$-linearen Raum $\mathbb{R}^k$ kann man mehrere Normen betrachten, z.B. die

Tschebyscheff-Norm: $\|x\|_\infty := \max\{|x_i| : i = 1,...,k\}$

euklidische Norm: $\|x\| := \left(\sum_{i=1}^{k} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$

L_1-Norm: $\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{k} |x_i|$ für $x := (x_1, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k$.

Diese Normen induzieren translationsinvariante Metriken, nämlich die

Tschebyscheff-Metrik: $D(x, y) := \|x - y\|_\infty$

euklidische Metrik: $d(x, y) := d_k(x - y) := \|x - y\|$

L_1-Metrik: $\delta(x, y) := \|x - y\|_1$

Anmerkung: Offensichtlich sind all diese Metriken äquivalent.

Konventionen:

a) Im folgenden werden wir auf $\mathbb{R}^k$ (- wenn nichts anderes gesagt wird -) mit $\|\cdot\|$ stets die euklidische Norm bezeichnen und die dadurch induzierte euklidische Metrik d bezeichnen.

b) Für eine in $(\mathbb{R}^k,\ d)$ gegen ein $x \in \mathbb{R}^k$ konvergente Folge $(x_n : n \in \mathbb{N})$ schreiben wir $x = \lim x_n$ anstelle von $x = d - \lim x_n$.

c) Die gewöhnliche Metrik auf $\mathbb{R}^k$ soll die euklidische Metrik d sein. Unter einer Cauchyfolge verstehen wir immer eine d – Cauchyfolge und unter vollständig stets d – vollständig.

d) Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ (mit $l \in \mathbb{N}$) heiße stetig bzw. gleichmäßig stetig, wenn $f : (\mathbb{R}^k, d_k) \to (\mathbb{R}^l, \delta_l)$ stetig bzw. $f : (\mathbb{R}^k, d_k) \to (\mathbb{R}^l, \delta_l)$ gleichmäßig stetig ist, wobei d_k bzw. δ_l die euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^k$ bzw. $\mathbb{R}^l$ ist.

Satz b.1:

Seien $(x_n : n \in \mathbb{N})$ eine Folge in $\mathbb{R}^k$ mit $x_n := (x_1^n, ..., x_k^n) \in \mathbb{R}^k$ und $x := (x_1, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k$. Dann gilt:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} x_i^n = x_i \quad \forall i = 1, ..., k$

b) $(x_n \in \mathbb{N})$ Cauchyfolge $\Leftrightarrow$ $(x_i^n : n \in \mathbb{N})$ Cauchyfolge $\forall i = 1, ..., k$

Definition: $\mathfrak{C}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^l) := \{ f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l \text{ stetig} \}$

Satz b.2:

Mit der punktweisen Skalrenmultiplikation und der punktweisen Addition (vgl. Beispiel a.5.6) ist $\mathfrak{C}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^l)$ ein $\mathbb{R}$-linearer Raum.

Definition:

a) $X \subset \mathbb{R}^k$ heißt beschränkt, wenn $\sup\{\|x\| : x \in X\} < \infty$.

b) $x \in \mathbb{R}^k$ heißt Häufungspunkt einer Folge $(x_n : n \in \mathbb{N})$ in $\mathbb{R}^k$, wenn gilt: $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists\, n > N$ mit $x_n \in K(x; \varepsilon)$.

Satz b.3:

a) Sei $(x_n : n \in \mathbb{N})$ eine gegen ein $x \in \mathbb{R}^k$ konvergente Folge in $\mathbb{R}^k$.
Dann ist $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ folgenkompakt.

b) $\mathbb{R}^k$ ist vollständig.

c) Satz von Weierstraß:
Ist $X \subset \mathbb{R}^k$ beschränkt, so besitzt jede Folge $(x_n : n \in \mathbb{N})$ mindestens einen Häufungspunkt $x \in \mathbb{R}^k$.

d) Satz von Heine-Borel:
$X \subset \mathbb{R}^k$ folgenkompakt $\Leftrightarrow$ X beschränkt und abgeschlossen

§14 Partielle Differentiation

Sei $k \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{R}^k$ aufgefasst als $\mathbb{R}$ -linearer Raum.

$x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k$ als Spaltenvektor (d.h. k -zeilige und 1-spaltige Matrix).

Eine algebraische Basis von $\mathbb{R}^k$ ist

$$e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 := ..., \ ....., \quad e_k := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Also ist $x = \sum_{i=1}^{k} x_i e_i$; x_i ist die i – te Koordinate von x; $x_i \in \mathbb{R}$.

Schreibweise für Matrizen, vgl. Vorlesung M I B:

$x^T := (x_1, ..., x_k)$ ist die Transponierte zu x.

$\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \ni (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle := x^T y := \sum_{i=1}^{k} x_i y_i$ euklidisches Skalarprodukt.

Bei $x, \mathfrak{y} \in \mathbb{R}^k$ mit $\mathfrak{y} \neq \vec{0}$ ist $G(x;\mathfrak{y}) := \{x + t\mathfrak{y} : t \in \mathbb{R}\}$ die Gerade durch x in Richtung $\mathfrak{y}$ und $G(x;\mathfrak{y}) \ni z = x + t\mathfrak{y} \mapsto t \in \mathbb{R}$ eine bijektive und stetige Abbildung, deren Umkehrabbildung auch stetig ist.

Allgemeine Voraussetzung: Sei $G \subset \mathbb{R}^k$ offen und $f : G \to \mathbb{R}$ eine Abbildung.
Bez.: f heißt auch Funktion von k Variablen.

Anmerkung: $x \in G$ und G offen $\Rightarrow \exists\, \varepsilon_{\mathfrak{y}} \in \mathbb{R}^+$ mit $x + t\mathfrak{y} \in G \ \forall\ |t| < \varepsilon_{\mathfrak{y}}$

Definition:

a) Seien $x \in G$ und $\mathfrak{y} \in \mathbb{R}^k$. Dann heißt bei $x + t\mathfrak{y} \in G$ und $t \neq 0$

$\dfrac{f(x + t\mathfrak{y}) - f(x)}{t}$ Differenzenquotient.

Im Falle seiner Existenz heißt

$\dfrac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}}(x) := D(f, x, \mathfrak{y}) := \lim\limits_{0 \neq t \to 0} \dfrac{f(x + t\mathfrak{y}) - f(x)}{t}$ Differentialquotient oder

partielle Ableitung von f in Richtung $\mathfrak{y}$.

b) Bei $i \in \{1,...,k\}$ heißt (im Falle seiner Existenz) $D(f,x;e_i)$ die partielle Ableitung von f in x nach x_i. Es sind die folgenden Schreibweisen üblich:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) := f_{x_i}(x) := D_{x_i} f(x) := D_i f(x) := D(f,x;e_i)$$

c) $f : G \to \mathbb{R}$ heißt partiell differenzierbar, wenn gilt:

$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ existiert $\forall x \in G \ \forall i \in \{1,...,k\}$

d) $f : G \to \mathbb{R}$ heißt stetig partiell differenzierbar, wenn gilt:

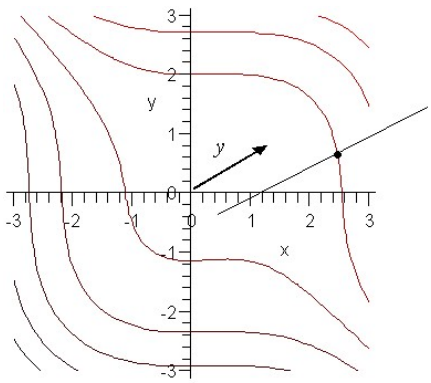
$f : G \to \mathbb{R}$ ist partiell diffferenzierbar und

$\frac{\partial f}{\partial x_i} : G \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ ist stetig für $i = 1,...,k$

Interpretation der partiellen Ableitung:

1) partielles Differenzieren bzgl. der i-ten Koordinatenrichtung x_i "=" gewöhnliches Differenzieren bzgl. der i-ten Koordinate x_i und Festhalten der anderen Koordinaten.

2) $D(f;x,y)$ = „Steigung" von f in x in Richtung y.
z.B. $\mathbb{R}^2$: grafische Darstellung durch Niveaulinien $N_f(\alpha) = \{z \in G : f(z) = \alpha\}$



Satz 1:

Für die partielle Differentiation nach x_i (i fest) gelten die Regeln für die eindimensionale Differentiation aus §7 (Differentiation), z.B. die Produkt-, Quotienten- und Kettenregel.
Dabei werden x_i als eindimensionale Variable und x_j für $j \neq i$ als Konstante betrachtet.

Beispiele 1:

1) $f(x) := \gamma \in \mathbb{R} \quad \forall x \in G$

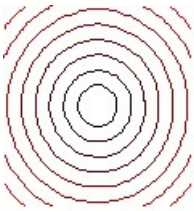
$D(f, x; \mathfrak{y}) = 0 \quad \forall x \in G \ \forall \mathfrak{y} \in \mathbb{R}^k$

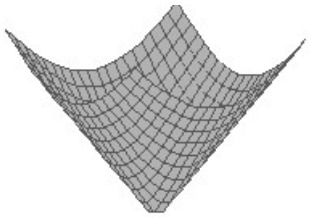
2) $k = 2$ und $f(x_1, x_2) := f_1(x_1)\, f_2(x_2)$ mit $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = f_2(x_2) \cdot \frac{df_1}{dx_1}(x_1) \quad \forall x := (x_1, x_2) \in G$$

3) $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \|x\|$. Dann: $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \dfrac{x_i}{\|x\|}$

Zeichnungen zu 3): Bei $k = 2$. Niveaulinien sind Sphären





4) Bei $k \geq 2$ sei $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ mit $x := (x_1, ..., x_k)^T \mapsto f(x)$ mit $f(\vec{0}) := 0$

$f(x) := \dfrac{\prod_{i=1}^{k} x_i}{\|x\|^{2k}}$ ist überall partiell differenzierbar nach x_i für $i = 1, .., k$

$$\text{mit } \frac{\partial f}{\partial x_i} = \begin{cases} \dfrac{\prod_{j \neq i} x_j}{\|x\|^{2k}} - \dfrac{2k \cdot x_i^{\,2} \prod_{j \neq i} x_j}{\|x\|^{2k+2}} & \text{für } x \neq \vec{0} \\ \vec{0} & \text{für } x = \vec{0} \end{cases}$$

Aber f ist nicht stetig in $\vec{0} := (0, ..., 0)^T$.

Partielle Ableitungen sind unbeschränkt.

Warnung: Bei $k \geq 2$ folgt aus "f partiell differenzierbar" nicht, dass f stetig ist.

Definition:

a) Induktiv definiert man:

$f: G \to \mathbb{R}$ 1-mal partiell differenzierbar $:\Leftrightarrow$ f partiell differenzierbar

Sei $n \geq 2$: $f: G \to \mathbb{R}$ $n-$mal partiell differenzierbar $:\Leftrightarrow$

$\forall\ (i_1,...,i_{n-1}) \in \{1,...,k\}^{n-1}$ ist $f_{(i_1,...,i_{n-1})}: G \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar, wobei

$$f_{(i_1,...,i_{n-1})}(x) := D_{i_{n-1}}(D_{i_{n-2}}(...(D_{i_1} f)...))(x) =: \prod_{j=1}^{n-1} D_{i_j} f$$

b) analog: n-mal stetig differenzierbar

c) Folgende Schreibweisen sind üblich:

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n} ... \partial x_{i_1}} := \prod_{j=1}^{n} D_{x_{i_j}} f := f_{x_{i_1},...,x_{i_n}} := \prod_{j=1}^{n} D_{i_j} f$$

gemischte partielle Ableitungen

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_i^{\,n}} := \prod_{j=1}^{n} D_{i_j} f \quad \text{bei } i_j = i \quad \text{für } j = 1,..,n$$

$n-$te partielle Ableitung nach x_i

Beispiel 2: (f zweimal partiell differenzierbar, aber nicht stetig p. differenzierbar)

Bei $k = 2$, $G := \mathbb{R}^2$ und $f(x_1, x_2) := \begin{cases} \dfrac{x_1 \cdot x_2}{x_1^{\,2} + x_2^{\,2}} & \text{für } (x_1, x_2)^T \neq \vec{0} \\ 0 & \text{für } (x_1, x_2)^T = \vec{0} \end{cases}$

ist f überall zweimal differenzierbar, aber in $(0,0)^T$ sind die gemischten zweiten Ableitungen nicht stetig.

Satz 2:

Seien $x \in G$, $f: G \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar und es existiere ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$,

so dass $\dfrac{\partial f}{\partial x_1},...,\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ auf $K(x;\varepsilon)$ beschränkt sind.

Dann ist f in x stetig.

Satz 3:

Sei $f: G \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar. Dann gilt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \quad \forall x \in G \quad \forall i, j \in \{1,...,k\}$$

Folgerung 3.1:

Sei $f : G \to \mathbb{R}$ $n-$mal stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$\prod_{j=1}^{n} D_{i_j} f(x) = \prod_{j=1}^{n} D_{\pi(i_j)} f(x) \quad \forall x \in G \quad \forall \pi \in \mathfrak{S}(n)$$

$\mathfrak{S}(n) := \{\gamma : \{1,...,n\} \to \{1,...,n\} \text{ bijektiv}\}$; $\pi \in \mathfrak{S}(n)$ Permutation.

Definition:

a) Sei $f : G \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar.

$grad\ f(x) := (D_1 f(x),...,D_k f(x))$ Gradient von f in x

$\nabla f := grad\ f : G \to \mathbb{R}^k$ mit $x \mapsto grad\ f(x)$ Gradient von f

$\nabla := (D_1,...,D_k)^T$ Nabla-Operator

b) Eine Abbildung $V : G \to \mathbb{R}^k$ mit $x \mapsto V(x)$ heißt Vektorfeld.

$V(x) = (v_1(x),...,v_k(x))^T$ stets mit $v_i := pr_i \circ V : G \to \mathbb{R}^k$.

c) Ein Vektorfeld $V : G \to \mathbb{R}^k$ mit $x \mapsto V(x) := (v_1(x),...,v_k(x))^T$ heißt partiell differenzierbar, wenn v_i partiell differenzierbar ist für jedes $i \in \{1,...,k\}$

d) Sei $V : G \to \mathbb{R}^k$ mit $x \mapsto V(x) := (v_1(x),...,v_k(x))^T$ ein partiell differenzierbares Vektorfeld.

$div\ V(x) := \sum_{i=1}^{k} D_i v_i(x)$ Divergenz von V in x

$\langle \nabla, V \rangle := \sum_{i=1}^{k} D_i v_i(x) : G \to \mathbb{R}$ Divergenz von V

e) Sei $V : G \to \mathbb{R}^3$ wie in d).

$rot\ V(x) = (D_2 v_3 - D_3 v_2, D_3 v_1 - D_1 v_3, D_1 v_2 - D_2 v_1)^T$

Rotation von V in x.

$\nabla \times V := rot\ V : G \to \mathbb{R}^k$ mit $x \mapsto rot\ V(x)$ Rotationsfeld von V.

f) Sei $f : G \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar.

$$\Delta f(x) := \sum_{i=1}^{k} D_i\ D_i\ f(x) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^{\,2}}(x)$$

Δ Laplace-Operator

g) Sei $f : G \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar und $g : G \to \mathbb{R}$ eine (z.B. stetige) Abbildung.

$\Delta f = 0$ Potentialgleichung; eine Lösung heißt harmonische Funktion.

$\Delta f = g$ Poisson-Gleichung

h) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $u : G \times I \to \mathbb{R}$ mit $(x,t) \mapsto u(x,t)$. Für jedes $t \in I$ sei $u(\ \cdot\ ,t) : G \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar und für jedes $x \in G$ sei $u(x,\ \cdot\ ) : I \to \mathbb{R}$ nach t einmal bzw. zweimal stetig differenzierbar.

$\frac{1}{c^2}\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta\ u$ Wellengleichung

$\frac{1}{k}\ \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta\ u$ Wärmeleitungsgleichung

(c ~ Wellenausbreitungsgeschwindigkeit; k ~ Temperaturleitfähigkeit)

Satz 4:

a) Sind $f : G \to \mathbb{R}$ und $g : G \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar, so gilt:

$grad\ (f \cdot g) = g \cdot grad\ f + f \cdot grad\ g$

b) Sind $f : U \to \mathbb{R}$ (total) differenzierbar und $g : G \to U \subset \mathbb{R}^k$ partiell differenzierbar, so gilt:

$\frac{\partial f \circ g}{\partial x_i} = f'(g(x))\ \frac{\partial g}{\partial x_i}(x)$ und $grad\ (f \circ g)\ (x) = f'(g(x))\ grad\ g(x)$

c) Sei $f : G \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar in Richtung $\mathfrak{y}$ für alle $\mathfrak{y} \in \mathbb{R}^k$.

(Dies ist der Fall, wenn f total differenzierbar ist.) Für $\mathfrak{y} \in \mathbb{R}^k$ und $x \in G$ gilt dann:

$\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}}(x) = \langle grad\ f(x), \mathfrak{y} \rangle$ und damit wegen der Schwarzschen Ungleichung:

$\left| \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}}(x) \right| \le \| grad\ f \|$ bei $\| \mathfrak{y} \| \le 1$

d) Sind $f : G \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar und $V : G \to \mathbb{R}^k$ ein partiell differenzierbares Vektorfeld, so gilt:

$div\ (f\ V) = \langle grad\ f,\ V \rangle + f\ div\ V$

e) Ist $f : G \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar, so gilt:

$\Delta f = div\ grad\ f$

f) Bei $k = 3$ und f wie in e) gilt:

$rot\ (grad\ f) = 0$

Beispiel 3:

1) Für $G := \mathbb{R}^k \setminus \{\vec{0}\} \ni x \mapsto \|x\|$ ist $grad\ (\|x\|) = \left(\frac{x_1}{\|x\|}, \ldots, \frac{x_k}{\|x\|} \right)^T$

2) Sei G wie in 1) und $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $U \subset \mathbb{R}$ offen. Dann:

$$grad\ f(\|x\|) = f'(\|x\|) \cdot \left(\frac{x_1}{\|x\|}, \ldots, \frac{x_k}{\|x\|} \right)^T$$

3) Sei G wie in 1). Dann: $div\ \frac{x}{\|x\|} = \frac{k-1}{\|x\|}$

Beispiel 4: Laplace-Operator angewandt auf rotationsymmetrische Funktion; Newtonsches und logarithmisches Potential

Seien $G := \mathbb{R}^k \setminus \{\vec{0}\}$, $U := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar.

Dann ist $g : G \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto g(x) := f(\|x\|)$ eine rotationsymmetrische Funktion.

Nach Beispiel 3.2 ist $grad\ g(x) = f'(\|x\|) \cdot \frac{x}{\|x\|}$.

Damit gilt nach Satz 4.e und 4.d, der Produktregel und Beispiel 3.3:

$$\Delta f(\|x\|) = f''(\|x\|) + \frac{k-1}{\|x\|} \cdot f'(\|x\|)$$

Bei $f(z) := \frac{1}{z^{k-2}}$ und $k \geq 3$ bzw. $f(z) := \ln(z)$ und $k = 2$ ergibt sich:

$\Delta \frac{1}{\|x\|^{k-2}} = 0$ Newtonsches Potential

$\Delta \ln(\|x\|) = 0$ Logarithmisches Potential

Beispiel 5: **Schwingende Seite**

Anwendung der Methode der Fourierreihen und der Methode der Trennung der Variablen zur Lösung einer „eindimensionalen“ Wellengleichung mit „Rand- und Anfangsbedingungen“ :

Physikalische Situation:

Eine in der $x-y$-Ebene schwingende homogene Saite ist eingespannt in $(0,0)$ und $(\pi,0)$. $y := u(x,t)$ sei die Auslenkung der Saite an der Stelle x zur Zeit t.
Aus der Physik (z.B. Gerthsen: Physik. Seite 105 f) folgt:

(1) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ bei $a \in \mathbb{R}$ **„Wellengleichung“**

Anmerkung: $u(x,t)=0 \;\; \forall x,t$ ist eine triviale Lösung von (1).
Die Einspannung der Saite bewirkt :

(2) $u(0,t)=0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}_0^+$ **„Randbedingungen“**

(3) $u(\pi,t)=0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}_0^+$

Wir betrachten eine Saite, die am Anfang $(t=0)$ ausgelenkt wird gemäß:

(4) $u(x,0)=f(x)$ bei $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ vorgegeben

und bei $t=0$ aus der Ruhelage losgelassen wird :

(5) $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0 \qquad \forall x \in [0,\pi]$

(4) und (5) heißen „Anfangsbedingungen“

Mathematisches Problem:

Gesucht ist eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion, die (1) - (5) erfüllt.

a) Methode der Trennung der Variablen :

Ansatz: $u(x,t)=X(x)\cdot T(t) \qquad \forall x \in [0,\pi] \;\; \forall t \in \mathbb{R}_0^+$
mit $X:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ und $T:\mathbb{R}_0^+\to\mathbb{R}$ zweimal differenzierbar

Durch Einsetzen in (1) erhält man :

$X(x)=A\;\cos(\mu x)\;+\;B\;\sin(\mu x)$
$T(t)=C\;\cos(\mu\,at)\;+\;D\;\sin(\mu\,at)$ mit $A,B,C,D\in\mathbb{R}$

Aus den Randbedingungen (2) und (3) folgt:

$A=0$ und $\mu\in\mathbb{N}$

Aus der Anfangsbedingung (5) folgt :

$D=0$

Die Bedingungen (1) – (3) und (5) werden folgenden Funktionen erfüllt :

$u(x,t)=\gamma\;\sin(\mu x)\;\cos(\mu\,at)$ mit $\gamma\in\mathbb{R}$ und $\mu\in\mathbb{N}$

b) Linearkombinationen und gleichmäßige Konvergenz :

Wegen der Linearität von (1) – (3) und (5) erfüllt dann auch

$$u_n(x,t) := \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \ \sin(\mu_i x) \ \cos(\mu \ at) \quad \text{mit } \gamma_i \in \mathbb{R}, \mu_i \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$$

diese Bedingungen. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der zweiten partiellen Ableitungen (nach t bzw. x) bei $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\gamma_n| \mu_i^2 < \infty$ ist nach Satz a.2 in §11 (Taylor- und Fourierreihen) dann auch $u(x,t) := \lim_{n\to\infty} u_n(x,t)$ zweimal stetig partiell differenzierbar.
Wegen der Linearität von (1) - (3) und (5) ist dann auch
$u(x,t)$ eine Lösung von (1) – (3) und (5).

c) Anfangsbedingung und Fourierreihenentwicklung von f :

Aus der Anfangsbedingung (4) folgt für die Lösung

(#) $$u(x,t) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \gamma_n \sin(\mu_n x) \ \cos(\mu_n at) \quad \text{mit } \sum_{n\in\mathbb{N}} |\gamma_n| \mu_i^2 < \infty, \ \gamma_n \in \mathbb{R}, \ \mu_n \in \mathbb{N}$$

von (1) – (3) und (5) dann:

$$u(x,0) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \gamma_n \sin(\mu_n x) = f(x) \quad \forall x \in [0,\pi]$$

Für ein f dieser Gestalt ist also ein derartiges u eine Lösung von (1) – (5).
Ist f „geeignet gutartig“ im Sinne der Sätze c.4 oder c.5 in §11, so lässt sich f als Fourierreihe entwickeln. Da $f(0) = 0$ und $f(\pi) = 0$ wegen (2) – (4) ist, hat die Fourierreihe zu f die Gestalt :

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \gamma_n \sin(nx)$$

Ist $\sum_{n\in\mathbb{N}} \gamma_n < \infty$ und $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\gamma_n| n^2 < \infty$, so ist $u(x,t) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \gamma_n \sin(nx) \ \cos(n \ at)$

eine Lösung von (1)-(5). Man kann die Eindeutigkeit der Lösung des Problems (1) – (5) zeigen

Anmerkung:

$\mu \in \mathbb{N}$ sind die „Eigenwerte“ des Problems (1) – (3) und (5),
$\sin(\mu x) \ \cos(\mu \ at)$ in (#) sind die „Eigenschwingungen des Problems.
$\sin(x) \ \cos(at)$ zu $\mu = 1$ heißt „Grundschwingung“.
$\sin(2x) \ \cos(2at)$ zu μ=2 heißt „erste Oktav“..

Für $\mu \geq 4$ heißen $\sin(\mu x)$ $\cos(\mu\, at)$ „höhere harmonische Schwingungen“ oder „Obertöne“.

$\mathbb{N} =$ Menge der Eigenwerte heißt das „Spektrum“.
$\mu \in \mathbb{N}$ beschreibt die „Eigenfrequenzen“.

Beispiel 6: Wärmeleitung in einem Stab

Wiederum Anwendung der Methode der Fourierreihen und der Methode der Trennung der Variablen zur Lösung einer „eindimensionalen“ Wärmeleitungs-Gleichung mit „Rand- und Anfangsbedingungen“:

Physikalische Situation:

Ein homogener Stab ist zwischen $x = 0$ und $x = \pi$ eingespannt.
Er sei völlig isoliert im Bereich $0 < x < \pi$ und an den Endpunkten $x = 0$ und $x = \pi$ auf konstanter Temperatur (z.B. $= 0$) gehalten.

$u(x,t)$ sei die Temperatur an der Stelle x zur Zeit t

$0 \leq x \leq \pi$ und $t \in \mathbb{R}_0^+$

Aus der physikalischen Theorie der Wärmeleitung folgt :

(1) $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ bei $a \in \mathbb{R}$ **„Wärmeleitungsgleichung“**

Das betrachtete System hat die Randbedingungen :

(2) $u(0,t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}_0^+$ **„Randbedingungen“**
(3) $u(\pi,t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}_0^+$

Außerdem soll der Stab am Anfang ($t = 0$) eine vorgegebene Wärme $f(x)$ am Ort x zur Zeit $t = 0$ haben, was zu der Anfangsbedingung

(4) $u(x,0) = f(x)$ bei $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = 0 = f(\pi)$ vorgegeben

Mathematisches Problem:

Gesucht ist einmal stetig nach t und zweimal stetig nach x partiell differenzierbare Funktion $u : [0,\pi] \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ mit $(x,t) \mapsto u(x,t)$, die die Bedingungen (1) – (4) erfüllt.

Wie im Beispiel 5 wird f als „geeignet gutartig“ vorausgesetzt. Wie im Beispiel 5 gelangt man auch hier mit der Methode der Trennung der Variablen zur Lösung:

Ansatz: $u(x,t) = X(x)\ T(t) \quad \forall x \in [0,\pi]$ und $\forall t \in \mathbb{R}_0^+$

mit $X : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar

und $T : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ einmal differenzierbar

ergibt: $$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{a^2 T} =: -\lambda^2 \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R}$$

Analog wie im Beispiel 5 zeigt man damit:

Jede nichttriviale Lösung von (1) in faktorisierter Form, welche (2) und (3) erfüllt, hat die Form:

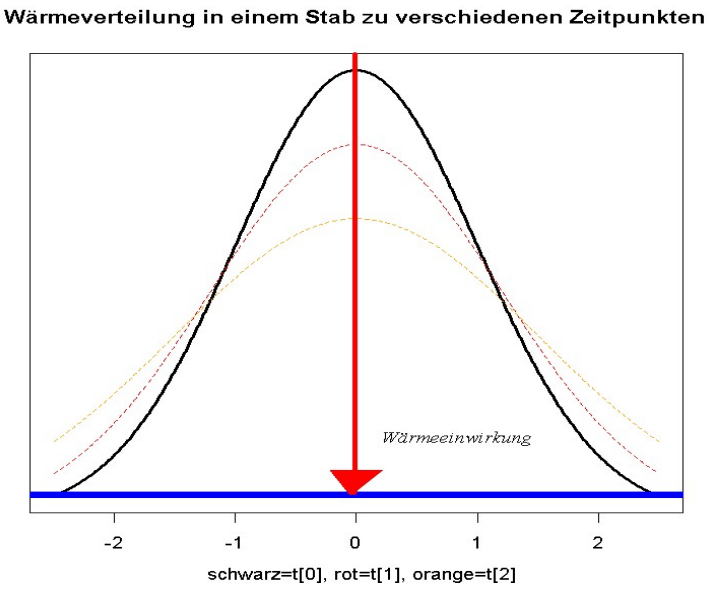
$\gamma\ \sin(nx)\ \exp(-n^2 a^2 t) \qquad$ mit $\gamma \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$

Mit den gleichen Konvergenzüberlegungen und mit (4) zeigt man:

Ist f „geeignet gutartig" (wie in Beispiel 5 präzisiert), so existiert eine Lösung

$u(x,t) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \gamma_n \sin(nx)\ \exp(-n^2 a^2 t)$ des Problems (1) – (4), wobei γ_n die Fourier-koeffizienten zu $u(x,0) = f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \gamma_n \sin(nx)$ sind.

Beispiel 7: Wärmeleitung – Gaußverteilung



Sei $k \in \mathbb{N}$ und $u : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ mit $(x,t) \mapsto u(x,t) := t^{-\frac{k}{2}} \exp\left(\frac{-\|x\|^2}{4t}\right)$

Dann ist u (und $\alpha \cdot u$ für $\alpha \in \mathbb{R}$) eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung:

d.h. $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_x\ u$

Beweis:

$$\frac{\partial\, u(x,t)}{\partial t} = -\frac{k}{2} t^{-\frac{k}{2}-1} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4t}\right) + t^{-\frac{k}{2}} \frac{\|x\|^2}{4t^2} \cdot \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4t}\right)$$

$$= \frac{1}{2} t^{-\frac{k}{2}-1} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4t}\right) \left(\frac{1}{2t}\|x\|^2 - k\right)$$

Sei $i = \{1,\ldots,k\}$. Beachte $\|x\|^2 = x_1{}^2 + \ldots + x_k{}^2$, also $\frac{\partial\, \|x\|^2}{\partial x_i} = 2x_i$

$$\frac{\partial\, u(x,t)}{\partial x_i} = t^{-\frac{k}{2}} \left(-\frac{x_i}{2t}\right) \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4t}\right) = -\frac{1}{2} t^{-\frac{k}{2}-1} \cdot x_i \cdot \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4t}\right)$$

$$\frac{\partial^2\, u(x,t)}{\partial x_i{}^2} = -\frac{1}{2} t^{-\frac{k}{2}-1} \left[\exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4t}\right) + x_i \left(-\frac{x_i}{2t}\right) \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4t}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2} t^{-\frac{k}{2}-1} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4t}\right)\left[\frac{1}{2t} x_i{}^2 - 1\right]$$

$$\Delta_x\, u(x,t) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial^2\, u(x,t)}{\partial x_i{}^2} = \frac{1}{2} t^{-\frac{k}{2}-1} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4t}\right) \cdot \left[\frac{1}{2t} \underbrace{\sum_{i=1}^{k} x_i{}^2}_{\|x\|^2} - \underbrace{\sum_{i=1}^{k} 1}_{k}\right] \quad \text{q.e.d.}$$

§15 Totale Differentiation

Es gelten die Voraussetzungen und Bezeichnungen von §14; insbesondere ist $k \in \mathbb{N}$, $G \subset \mathbb{R}^k$ offen, $f : G \to \mathbb{R}^k$ und $D_i f := D_{x_i} f := \frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Es ist $\langle x, y \rangle := \langle x, y \rangle_k := \sum_{i=1}^{k} x_i y_i$ das Skalarprodukt von $x := (x_1, ..., x_k)^T \in \mathbb{R}^k$ und $y := (y_1, ..., y_k)^T \in \mathbb{R}^k$ und $\|x\| := \left(\langle x, x \rangle\right)^{\frac{1}{2}}$ die Norm von x.

Definition:

Sei $f : G \to \mathbb{R}^k$ eine Funktion und $x \in G$. Dann heißt f (total) differenzierbar in x, wenn gilt:
$\exists\, c \in \mathbb{R}^k$ und $\exists$ Funktion $\varphi : U \to \mathbb{R}$ mit $x \in U \subset G$ offen mit

i) $\varphi(x) = \lim_{y \to x} \varphi(y) = 0$

ii) $f(y) = f(x) + \langle c, y - x \rangle + \|y - x\| \; \varphi(y) \quad \forall y \in U$

Anmerkung: vgl.Satz 1.c in §7

a) f wird approximiert durch die affine Funktion $y \mapsto f(x) + \langle c, y - x \rangle$

b) Die Funktion $\mathbb{R}^k \ni y \mapsto \lambda(y) := \langle c, y - x \rangle_k \in \mathbb{R}$ ist linear und stetig mit $\lambda(x) = 0$
Darum sind dann auch
$\mathbb{R}^{k+1} \ni z := (y, r) \mapsto \pi_{1k}(z) := y \in \mathbb{R}^k$
$\mathbb{R}^{k+1} \ni z := (y, r) \mapsto \gamma(z) := \lambda(\pi_{1k}(z)) := \lambda(y) \in \mathbb{R}$
$\mathbb{R}^{k+1} \ni z := (y, r) \mapsto \pi_{k+1}(z) := r \in \mathbb{R}$ und
$\mathbb{R}^{k+1} \ni z := (y, r) \mapsto \varepsilon(z) := \pi_{k+1}(z) - \lambda(\pi_{1k}(z)) \in \mathbb{R}$
stetige lineare Funktionen;
also existiert ein $\hat{z} \in \mathbb{R}^{k+1}$ mit $\varepsilon(z) = \langle \hat{z}, z \rangle_{k+1}$ für alle $z \in \mathbb{R}^{k+1}$.
$\{z \in \mathbb{R}^{k+1} : \varepsilon(z) = 0\}$ ist eine Hyperebene in $\mathbb{R}^{k+1}$
$\{z \in \mathbb{R}^{k+1} : \varepsilon(z) = f(x)\} = \{(y, f(x) + \lambda(y)) \in \mathbb{R}^{k+1} : y \in \mathbb{R}^k\}$ ist eine affine Hyperebene in $\mathbb{R}^{k+1}$.

c) $k = 2$: $\{(y, f(x) + \langle c, y - x \rangle) \in \mathbb{R}^3 : y \in \mathbb{R}^2\}$ ist die Tangentialebene im Punkt $(x, f(x))$ an Fläche $\{(y, f(y)) \in \mathbb{R}^3 : y \in \mathbb{R}^2\}$

Beispiel 1:

Partiell differenzierbare, aber nicht stetige, nicht stetig partiell differenzierbare und nicht total differenzierbare Funktion:

$$\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Satz 1:

Ist $f : G \to \mathbb{R}$ (total) differenzierbar, so gilt:

a) Es existieren alle partiellen Ableitungen von f in x.

Bei $c_i := D_i f(x)$ erfüllt $c := (c_1, ..., c_k)^T$ die Eigenschaft der Definition.

Es ist $c = grad\ f(x)$

b) f ist in jeder Richtung $\mathfrak{y} \in \mathbb{R}^k$ differenzierbar und es gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}}(x) = \langle grad\ f(x), \mathfrak{y} \rangle$$

c) Lokale Lipschitz-Stetigkeit:

$\exists\, x \in U \subset G$ offen und $\exists\, \gamma \in \mathbb{R}^+$ $|f(x) - f(y)| \leq \gamma \|x - y\|$ $\forall y \in U$

Satz 2:

Ist $f : G \to \mathbb{R}$ in $x \in G$ (total) differenzierbar, so ist f stetig in x.

Satz 3:

Ist $f : G \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar und sind alle partiellen Ableitungen $D_i f(x)$ in x stetig, so ist f in x (total) differenzierbar.

Definition:

Seien $k, l \in \mathbb{N}$, $x_0 \in G \subset \mathbb{R}^k$ offen. Weiter sei $V : G \to \mathbb{R}^l$ ein Vektorfeld mit $x \mapsto V(x) := (v_1(x), v_l(x))^T$.

Dann heißt V (total) differenzierbar in $x_0 \in G$, wenn alle $v_i : G \to \mathbb{R}$ in x_0 (total) differenzierbar sind.

Satz 4:

Seien $k, l \in \mathbb{N}$, $x \in G \subset \mathbb{R}^k$ offen. Weiter sei $V : G \to \mathbb{R}^l$ ein Vektorefeld mit $\xi \mapsto V(\xi) := (v_1(\xi), ..., v_l(\xi))^T$. Dann gilt:

a) V (total) differenzierbar in x $\Leftrightarrow$

$\exists\, l \times k$ Matrix $A := (a_{ij})$ und eine Abbildung $\Phi : U \to \mathbb{R}^l$ in einer offenen Umgebung U von x in G mit $\lim\limits_{y \to x} \Phi(y) = \Phi(x) = 0$ und

$V(y) = V(x) + A(y - x) + \|y - x\|\ \Phi(y)$ $\forall y \in U$

b) Ist $V = (v_1, ..., v_l)^T$ (total) differenzierbar in x, so gilt:

Zu v_i $\exists\, x \in U_i \subset G$ offen, $c^{(i)} \in \mathbb{R}^k$ und $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}$ geeignet mit

$v_i(y) = v_i(x) + \left\langle c^{(i)}, y - x \right\rangle + \|y - x\| \;\; \varphi_i(y) \;\; \forall y \in U_i$

$\forall y \in U := \bigcap_{i=1}^{l} U_i \;\; \forall i \in \{1, ..., l\}$ und für $A = \left(a_{ij}\right)$ und Φ aus a) gilt:

$\left(a_{ij}\right) = D_j v_i(x)$ und $\Phi = (\varphi_1, ..., \varphi_l)$

(i ist Zeilenindex; j ist Spaltenindex)

Definition:

Sei $V : \mathbb{R}^k \supset G \to \mathbb{R}^l$ mit $x := (x_1, ..., x_k) \mapsto V(x) := (v_1(x), ..., v_l(x))^T$ (total) differenzierbar. Dann heißt:

$$\frac{dV}{dx}(x) := D\,V(x) := J_V(x) := \frac{\partial(v_1, ..., v_l)}{\partial(x_1, ..., x_k)} := \left(D_i v_j(x)\right)_{\substack{i=1,...,l \\ j=1,...,k}}$$

die Jacobische Funktionalmatrix; sie wird auch als das (totale) Differential von V in x bezeichnet.

(i ist Zeilenindex; j ist Spaltenindex)

Bei $k = l$ heißt die Determinante $\det\left(J_V(x)\right)$ von $J_V(x)$ die Jacobische Funktionaldeterminante.

Beispiel 2: Polarkoordinatentransformationen; vgl. Übungen

Satz 5: (Kettenregel)

Seien $k, l, m \in \mathbb{N}$, $U \subset \mathbb{R}^k$ und $V \subset \mathbb{R}^l$. Weiter seien $g : U \to \mathbb{R}^l$ und $f : V \to \mathbb{R}^m$ Abbildungen mit $g(U) \subset V$.

Ist g in $x \in U$ und f in $y := g(x)$ differenzierbar, so ist $f \circ g : U \to \mathbb{R}^m$ in x differenzierbar und es gilt:

$$\frac{df \circ g}{dx}(x) = \frac{df}{dy}(g(x)) \cdot \frac{dg}{dx}(x)$$

wobei "$\cdot$" die Matrizenmultiplikation ist.

Folgerung 5.1:

Sei $m = 1$ und $g : U \to \mathbb{R}^l$ mit $x \mapsto g(x) := (g_1(x), ..., g_l(x))^T$ und $f : V \to \mathbb{R}$ mit $g(U) \subset V$ wie oben.
Ist g in $x \in U$ und f in $y := g(x)$ differenzierbar, so ist $h := f \circ g : U \to \mathbb{R}$ in x differenzierbar und es gilt:

$$\frac{dh}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^{l} \frac{\partial f}{\partial y_j}(g(x)) \; \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x) \text{ und}$$

$$\frac{dh}{dx}(x) = \left(\frac{\partial h}{\partial x_1}(x), ..., \frac{\partial h}{\partial x_k}(x) \right)$$

Satz 6: (Mittelwertsatz)

Seien $G \subset \mathbb{R}^k$ offen und $x, y \in G$ und es liege die Verbindungsstrecke $\overline{xy} := \{x + \alpha(y - x) : 0 \le \alpha \le 1\}$ von x nach y ganz in G. Dann gilt:

a) Ist $f : G \to \mathbb{R}$ in ganz G differenzierbar, so existiert ein $\vartheta \in (0,1)$ mit

$$f(y) - f(x) = \langle grad \; (f(x + \vartheta(y - x)), y - x \rangle$$

und es ist

$$f(y) - f(x) = \left\langle \int_0^1 grad \; (f(x + \alpha(y - x)) \; d\alpha, y - x \right\rangle$$

b) Ist $F : G \to \mathbb{R}^l$ mit $x \mapsto F(x) := (f_1(x), ..., f_l(x))^T$ in ganz G differenzierbar, so ist

$$F(y) - F(x) = \int_0^1 \frac{dF}{dx}(x + \alpha(y - x)) \; d\alpha \; \cdot \; (y - x)$$

Dabei werden Integrale über matrix-wertige Funktionen:

$t \to A(t) := \left(a_{ij}(t)\right)_{\substack{i=1,...,l \\ j=1,...,k}}$ komponentenweise verstanden:

$$\int_0^1 A(t) \; dt = \left(\int_0^1 a_{ij}(t) \; dt \right)_{\substack{i=1,...,l \\ j=1,...,k}}$$

Definition:

Seien $G \subset \mathbb{R}^k$ und $n \in \mathbb{N}$. Die Abbildung $f : G \to \mathbb{R}$ heißt n-mal stetig differenzierbar [in $x \in G$], wenn sie $n-$mal stetig partiell differenzierbar [in $x \in G$] ist.

Anmerkung: vgl. Satz 1.a und Satz 3.

Bemerkung:

$f : G \to \mathbb{R}$ ist genau dann $1-$mal stetig differenzierbar, wenn für jedes $\mathfrak{y} \in \mathbb{R}^k$ die Richtungsableitung $\dfrac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}}$ existiert und stetig ist.

Erinnerung an Taylorformel (Satz 6.b in §7): ….

Satz 7: (Taylorformel)

Seien $G \subset \mathbb{R}^k$ offen, $x := (x_1, ..., x_k)^T$ und $y := (y_1, ..., y_k)^T$ aus G mit $x \neq y$ und $\overline{xy} := \{x + t(y - x) : 0 \le t \le 1\} \subset G$.

a) Bei $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $t \mapsto \varphi(t) := f(x + t(y - x))$ gilt:
$\varphi(0) = f(x)$ und $\varphi(1) = f(y)$.

b) Ist $f : G \to \mathbb{R}$ $(n+1)-$mal stetig differenzierbar, so ist $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ $(n+1)-$mal stetig differenzierbar und es gilt nach der Taylorformel (§7, Satz 6.b):
Es existiert ein $\vartheta \in (0,1)$ mit

$$\text{(T1)} \quad \varphi(1) = \varphi(0) + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\varphi^{(\nu)}(0)}{\nu!} 1^{\nu} + \frac{1}{(n+1)!} \varphi^{(n+1)}(\vartheta)\, 1^{n+1}$$

c) Für $s \in [0,1]$ und $1 \le \nu \le n+1$ ist

$$\varphi^{(\nu)}(s) = \sum_{(i_1,...,i_\nu) \in \{1,...,k\}^\nu} \frac{\partial^\nu f(x + s(y - x))}{\partial x_{i_1} ... \partial x_{i_\nu}} \prod_{\mu=1}^{\nu} (y_{i_\mu} - x_{i_\mu})$$

$$= \sum_{(i_1,...,i_\nu) \in \{1,...,k\}^\nu} \left(\prod_{\mu=1}^{\nu} D_{x_{i_\mu}} f \right)(x + s(y - x)) \prod_{\mu=1}^{\nu} (y_{i_\mu} - x_{i_\mu})$$

$=: [(y - x) \cdot grad\ f]^\nu (x + s(y - x))$ und damit

$$\text{(T2)} \quad f(y) = f(x) + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{[(y - x) \cdot grad\ f]^\nu (x)}{\nu!} + \frac{[(y - x) \cdot grad\ f]^{n+1}}{(n+1)!} (x + \vartheta(y - x))$$

Definition:

Seien $k \in \mathbb{N}$ und $z := (z_1, ..., z_k)^T \in \mathbb{R}^k$. Für $\alpha := (\alpha_1, ..., \alpha_k) \in \mathbb{N}_0{}^k$ seien

$$|\alpha| := \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \ , \ \alpha! := \prod_{i=1}^{k} (\alpha_i!) \ , \ z^\alpha := \prod_{i=1}^{k} z_i{}^{\alpha_i} \text{ und } D^\alpha := \prod_{i=1}^{k} (D_{x_i})^{\alpha_i} \text{ bei } (D_{x_i})^{\alpha_i} := \underbrace{D_{x_i} ... D_{x_i}}_{\alpha_i - \text{mal}} = \frac{\partial^{\alpha_i}}{\partial x_i{}^{\alpha_i}}$$

Anmerkung:……

Folgerung 7.1:

Mit den Voraussetzungen und Bezeichnungen von Satz 7 gilt:

$$\varphi^{(\nu)}(s) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0{}^k \text{ mit } |\alpha|=\nu} \frac{\nu!}{\alpha!} D^\alpha f(x+s(y-x))\cdot(y-x)^\alpha = \left[(y-x)\cdot grad\ f\right]^\nu (x+s(y-x))$$

und damit

$$\text{(T3)}\quad f(y) = f(x) + \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0{}^k \text{ mit } |\alpha|=\nu} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!}\cdot(y-x)^\alpha + \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0{}^k \text{ mit } |\alpha|=\nu} \frac{D^\alpha f(x+\vartheta(y-x))}{\alpha!}\cdot(y-x)^\alpha$$

Spezialfälle: $n=1$ und $n=2$

Rechenbeispiel:

Berechnen Sie für

$f:(0,\infty)\times(0,\infty)\to\mathbb{R}$ mit $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$ die Taylorentwicklung im Punkt (1,1) bis einschließlich der Glieder 2.Ordnung.

Es gibt ein $\vartheta\in(0,1)$, so dass $(x,y)\in(0,\infty)\times(0,\infty)$

$$f(x,y) = \underbrace{f(1,1) + \sum_{\nu=1}^{2} \sum_{\substack{(\alpha_1,\alpha_2)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0 \\ mit\ \alpha_1+\alpha_2=\nu}} \frac{1}{\alpha_1!\alpha_2!}\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x^{\alpha_1}}\left(\frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial y^{\alpha_2}} f(1,1)\right)\cdot(x-1)^{\alpha_1}(y-1)^{\alpha_2}}_{g(x,y)} +$$

$$+ \sum_{\substack{(\alpha_1,\alpha_2)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0 \\ mit\ \alpha_1+\alpha_2=3}} \frac{1}{\alpha_1!\alpha_2!}\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x^{\alpha_1}}\left(\frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial y^{\alpha_2}} f\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \vartheta\begin{pmatrix}x-1\\y-1\end{pmatrix}\right)\right)(x-1)^{\alpha_1}(y-1)^{\alpha_2}$$

$$g(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)\ (x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\ (x-1) + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1)\ (x-1)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,1)\ (x-1)(y-1) +$$
$$+ \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1)\ (y-1)^2$$

mit $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{2y}{(x+y)^2}$ $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{-4y}{(x+y)^3}$ $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \dfrac{4x}{(x+y)^3}$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{-2x}{(x+y)^2}$ $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = \dfrac{2(x-y)}{(x+y)^3}$

Auswertung dieser Funktionen an (1,1) führt zu:

$$g(x,y) = x - y - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2$$

Definition:

$H_{f,x} := \left(h_{ij}\right)_{\substack{i=1,\dots,k \\ j=1,\dots,k}}$ bei $h_{ij} := \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$ Hesse'sche Matrix von f in x.

Anmerkung: $\displaystyle\sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{k} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(y_i - x_i)(y_j - x_j) = \left\langle H_{f,x}(y-x),(y-x)\right\rangle$

§16 Anwendung: lokale Extrema

Der Einfachheit wegen: $k = 2$

$\xi := (x, y)^T := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\eta := (u, v)^T \in \mathbb{R}^2$ Spaltenvektoren mit $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ und

euklidischer Norm $\|\xi\| := (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$ und euklidischem Skalarprodukt $\langle \xi, \eta \rangle := \xi^T \eta = xu + yv$.

Totale Differenzierbarkeit:

Seien $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ offen, $\eta := (u, v)^T \in G$ und $f : G \to \mathbb{R}$ mit $\xi := (x, y)^T \mapsto f(\xi)$
eine reelwertige Funktion auf der offenen Teilmenge G von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
Dann heißt f in η (total) differenzierbar, wenn gilt:

Es existieren eine (kleine) Umgebung U von $\vec{0} := (0, 0)^T \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, eine (durch eine zweizeilige und einspaltige 2×1 Matrix mit reellen Koeffizienten b_i darstellbare) lineare Abbildung $B : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und eine Funktion $\psi : U \to \mathbb{R}$ mit

$\frac{\psi(\xi)}{\|\xi\|} \to 0$ für $\vec{0} \neq \xi \in U$ und $\|\xi\| \to \vec{0}$ und (D1)

$f(\eta + \xi) = f(\eta) + B(\xi) + \psi(\xi)$ (D2)

Anmerkungen:

a) Für $\xi \neq \vec{0}$ ist $\|\xi\| \neq 0$

b) $U_\eta := \eta + U := \{\eta + \xi : \xi \in U\}$ ist eine Umgebung von η.

c) $\{\xi \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \|\xi\| < \varepsilon\}$ offene Kreisscheibe um $\vec{0}$ mit Radius ε ist für jedes $\varepsilon > 0$ eine Umgebung von $\vec{0}$.

d) Wir schreiben hier der Bequemlichkeit halber Vektoren als transponierte Zeilenvektoren.

e) Eine 2×1 Matrix B mit reellen Koeffizienten ist ein Vektor
$\beta := (b_1, b_2)^T \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Es ist also $B = \beta = (b_1, b_2)^T$.

f) (D1) bedeutet:
Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit $\left| \frac{\psi(\xi)}{\|\xi\|} \right| < \varepsilon$ für $\xi \in U$ mit $\xi \neq \vec{0}$ und $\|\xi\| < \delta$.

g) Vergleich mit §15 (mit $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ und $\mathfrak{c}$ statt den dortigen x, y und c):
$k = 2, \mathfrak{x} = \eta,\ \mathfrak{y} = \eta + \xi,\ \langle \mathfrak{c}, \mathfrak{y} - \mathfrak{x} \rangle = B(\xi)$ und $\varphi(\mathfrak{y}) \|\mathfrak{y} - \mathfrak{x}\| = \psi(\xi)$

Interpretation:

Der Graph der Funktion f ist eine (eventuell gekrümmte) „Fläche“ über dem Definitionsbereich G von f.

Die Funktion $g : U_\eta \to \mathbb{R}$ mit $\xi \mapsto g(\xi) := f(\eta) + B(\xi - \eta)$ stellt eine Tangentialebene an die durch f definierte Fläche im „Punkt $f(\eta)$ über η“ (genauer: in $(\eta, f(\eta) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R})$) dar.

g ist ein Polynom ersten Grades in x und y mit einem konstanten Term $f(\eta)$.

Totale Differenzierbarkeit von f in einem Punkt η bedeutet, dass die durch f definierte Fläche im Punkt $f(\eta)$ auf der Fläche (über η) lokal durch eine Ebene approximiert werden kann. Diese approximierende ebene Fläche wird die durch g beschriebene affine Ebene gegeben.

Die Funktion ψ beschreibt den Fehler der Approximation von f in der Umgebung U_η von η durch g. Die Bedingung (D1) sagt, dass dieser Fehler schneller als $\|\xi\|$ gegen Null geht.

Für $\xi := \vec{0}$ ist $B(\xi) = 0$ und damit $g(\eta) = f(\eta)$. Wegen (D2) ist dann auch $\psi(\xi) = 0$.

Die lokale Approximation einer total differenzierbaren Funktion auf (einer Teilmenge von) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ durch eine Ebene entspricht der lokalen Approximation einer differenzierbaren Funktion auf $\mathbb{R}$ durch eine Gerade. Eine Gerade wird durch ein Polynom ersten Grades beschrieben.

Differenzierbarkeit hat etwas mit Glattheit zu tun. Ist eine Funktion sogar zweifach differenzierbar, so ist sie noch glatter. Je glatter eine Funktion ist, desto besser lässt sie sich durch Polynome approximieren.

Eine zweimal differenzierbare Funktion auf $\mathbb{R}$ kann man nicht nur durch eine Gerade, sondern durch eine Parabel (Polynom zweiten Grades) lokal approximieren. Diese lokale Approximation mit einer Parabel kann besser gemacht werden, d.h. der Fehler kann kleiner sein, also schneller gegen Null gehen.

Die approximierende Parabel kann man mit Hilfe der Taylorentwicklung (für Funktionen auf $\mathbb{R}$) finden.

Analog ist das für auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definierte Funktionen; vgl. Hilfssatz 2.

Extremwerte:

Eine notwendige Bedingung dafür, dass x lokaler Extremwert einer differenzierbaren reelwertigen Funktion $g: U \to \mathbb{R}$ auf einer offenen Teilmenge U von $\mathbb{R}$ ist, ist das Verschwinden der Ableitung in x, d.h. $g'(x) = 0$. Diese Bedingung ist aber bekanntlich nicht hinreichend. Ist g sogar zweimal stetig differenzierbar, so kann man durch Ausrechnen der zweiten Ableitung von g in x feststellen, ob g in x ein lokales Maximum (bei $g''(x) < 0$) oder ein lokales Minimum (bei $g''(x) > 0$) hat.

(Bei $g''(x) = 0$) ist keine Aussage über Extrema möglich: $g(x) := \pm x^4$ hat in 0 Minimum bzw. Maximum; $g(x) := x^3$ hat in 0 einen Wendepunkt und kein Extremum.

Ganz analog ist dies bei einer reellwertigen Funktion f auf einer offenen Teilmenge U von $\mathbb{R}^k$. Auch hier sei der Einfachheit wegen wieder $k = 2$.

Sei $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ offen und $f: U \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Funktion f hat in $\xi \in U$ ein lokales Maximum, wenn eine offene Umgebung V mit $\xi \in V \subset U$ existiert mit $f(\xi) \geq f(\eta)$ für alle $\eta \in V$. Analog ist ein lokales Minimum definiert.

Hat f in $\xi \in U$ ein solches lokales Extremum und gilt " $f(\xi) = f(\eta)$ nur für $\eta = \xi$ für alle $\eta \in W$ für eine offene Umgebung W mit $\xi \in W \subset V$ ", so hat f in ξ ein isoliertes lokales Extremum.

Zunächst gilt in Verallgemeinerung von Satz a.2., Teil a und b in §8 bei (partieller) Differenzierbarkeit von f über eine notwendige Bedingung für ein Extremum von f:

Satz 1:

Sei $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ offen und $f: U \to \mathbb{R}$ (nur) partiell differenzierbar.
Hat f in $\xi \in U$ ein lokales Extremum, so gilt:
$grad\ f(\xi) = \vec{0}$

Beweis:

Zunächst existiert wegen der Offenheit von U ein $\varepsilon > 0$ mit $K(\xi;\varepsilon) \subset U$.
Wegen der partiellen Differenzierbarkeit von f ist für $i = 1,2$ und den $i-$ten Einheitsvektor e_i dann
$g_i : (-\varepsilon, +\varepsilon) \to \mathbb{R}$ mit $t \mapsto g_i(t) := f(\xi + t\, e_i)$ differenzierbar und (*) $g_i'(0) = D_i f(\xi)$.
Hat f in ξ ein lokales Extremum, so hat g_i in 0 ein lokales Extremum.
Nach Satz a.2 in §8 gilt dann $g_i'(0) = 0$
Also gilt wegen (*): $grad\ f(\xi) = \vec{0}$.

Diese notwendige Bedingung für ein lokales Extremum wird in enger Analogie zum Fall von auf $\mathbb{R}$ definierten Funktionen auch im Fall von den hier betrachteten Funktionen von mehreren Veränderlichen ergänzt durch ein hinreichendes Kriterium. Wie im Satz a.2, Teil c und d, in §8 wird auch hier dazu im nachfolgenden Satz 2 die zweimalige (stetige totale) Differenzierbarkeit gebraucht.

Seien $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ offen und
$f : G \to \mathbb{R}$ mit $\xi := (x, y)^T \mapsto f(\xi)$ zweimal stetig differenzierbar.
Die partiellen Ableitungen von f nach x bzw. nach y in $\xi := (x, y)^T$ werden mit $f_x(\xi)$ bzw. $f_y(\xi)$ bezeichnet.
Da f zweimal stetig differenzierbar ist, ist f in $\xi \in G$ zweimal stetig partiell differenzierbar und es gilt $f_{xy}(\xi) = f_{yx}(\xi)$ für alle $\xi \in G$. (1)

$H_{f,\xi} := Hess\, f(\xi) := \begin{pmatrix} f_{xx}(\xi) & f_{xy}(\xi) \\ f_{yx}(\xi) & f_{yy}(\xi) \end{pmatrix}$ die Hessesche Matrix von f in ξ. (2)

Wegen (1) ist die Hessesche Matrix von f in ξ symmetrisch für alle $\xi \in G$.

Eine $2 \times 2-$Matrix A mit reellen Koeffizienten a_{ij} für $i, j = 1, 2$ heißt symmetrisch, wenn gilt: $a_{ij} = a_{ji}$ für $i, j = 1, 2$.

Eine symmetrische $2 \times 2-$Matrix A mit reellen Koeffizienten a_{ij} für $i, j = 1, 2$ heißt positiv definit (bzw. negativ definit), wenn gilt:
$\langle \xi, A(\xi) \rangle > 0$ (bzw. $\langle \xi, A(\xi) \rangle < 0$) für alle $\xi \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit $\xi \neq \vec{0}$.
Dabei ist $A(\xi) := A\xi := (a_{11}x + a_{12}y\ ,\ a_{21}x + a_{22}y)^T \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
(Die Multiplikation der $2 \times 2-$Matrix A und der $2 \times 1-$Matrix ξ ist wie üblich als „Addition: Zeile mal Spalte“ auszuführen.)

Eine solche Matrix A heißt indefinit, wenn gilt:
A ist nicht positiv definit und nicht negativ definit; d.h.
$\exists\ \xi \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit $\langle \xi, A(\xi) \rangle > 0$ und $\exists\ \eta \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit $\langle \eta, A(\eta) \rangle < 0$

Hilfssatz 1:

Eine symmetrische reelle $2 \times 2-$Matrix A ist genau dann positiv definit, wenn eine der folgenden Eigenschaften gilt:

a) Alle (wegen der Symmetrie bekanntlich reelle) Eigenwerte λ_1 und λ_2 von A sind positiv. (4)
b) Hurwitz-Kriterium:
$a_{11} > 0$ und $\det A > 0$, wobei $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ (5)

Beweis: a) z.B. G.Fischer, Lineare Algebra, Kor.6.7.2, S.214
a) und b): F.E.Hohn, Elementary Matrix Algebra, Sec. 9.14, S.256 ff.

Hilfssatz 2:

Für eine zweimal stetig differenzierbare Funktion f existiert zu jedem $\eta \in G$ eine (kleine) Umgebung U von $\vec{0} = (0,0)^T \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und eine Funktion

$$\varphi : U \to \mathbb{R} \text{ mit } \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|^2} \to 0 \text{ für } \xi \neq (0,0)^T \text{ und } \|\xi\| \to 0 \qquad (6)$$

und

$$f(\eta + \xi) = f(\eta) + \langle \alpha, \xi \rangle + \frac{1}{2} \langle \xi, A(\xi) \rangle + \varphi(\xi) \qquad (7)$$

wobei $\alpha := grad\ f(\eta) := (f_x(\eta), f_y(\eta)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ der Gradient von f in η und $A := Hess\ f(\eta)$ die Hessesche Matrix von f in η sind.

Dieser Hilfssatz folgt aus der Taylor-Entwicklung von f um η (Satz 7, §15).

Interpretation:

α im Hilfssatz 2 ist das B aus der Definition der totalen Differenzierbarkeit.

Das ψ aus der Definition der totalen Differenzierbarkeit ist hier wählbar als:

$$\psi(\xi) = \frac{1}{2} \langle \xi, A(\xi) \rangle + \varphi(\xi)$$

Durch Ausrechnen erkennt man:

$\xi := (x, y)^T \mapsto P(\xi) := f(\eta) + \langle \alpha, \xi \rangle + \frac{1}{2} \langle \xi, A(\xi) \rangle$ ist ein Polynom zweiten Grades in x und y. P beschreibt eine zweidimensionale Parabelfläche, die im Punkt $f(\eta)$ über η die durch f gegebene Fläche „tangential" berührt.

Die Aussage (7) des Hilfssatzes 2 besagt, dass die zweimal stetig differenzierbare Funktion f in η durch das Polynom P (mit einem konstanten Term $f(\eta)$) approximiert wird.

Die Approximation von f in η durch P hat den Fehler φ aus (6) im Hilfssatz 2. Dieser Fehler geht schneller als $\|\xi\|^2$ gegen Null. Damit geht dieser Fehler schneller gegen Null als der Fehler ψ in der Definition der totalen Differenzierbarkeit, der nur schneller als $\|\xi\|$ gegen Null geht.

Der mit Hilfe der zweiten partiellen Ableitungen gebildete Term $\xi := (x, y)^T \mapsto \frac{1}{2} \langle \xi, A(\xi) \rangle$ bringt also eine (lokale) Verbesserung der Approximation von f in η.

Mit dem auf der Taylorentwicklung beruhenden Hilfssatz 2 und einigen weiteren (im Beweis hervorgehobenen) Sätzen kann man nun den folgenden Satz beweisen:

Satz 2:

Seien $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ offen, $f : G \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, $\eta \in G$ und $grad\ f(\eta) = \vec{0}$. Dann gilt:

a) Ist $Hess\ f(\eta)$ positiv definit (bzw. negativ definit), so hat f in η ein isoliertes lokales Minimum (bzw. Maximum)

b) Ist $Hess\ f(\eta)$ indefinit, so besitzt f in η kein lokales Extremum.

Beweis von a):

Wegen $grad\ f(\eta) = (0,0)^T = \vec{0}$ gilt $\langle grad\ f(\eta), \xi \rangle = 0$ und damit nach dem Hilfssatz 2 mit den dortigen Bezeichnungen:

Es existieren eine Umgebung U von $\vec{0} = (0,0)^T$ und eine Funktion

$\varphi : U \to \mathbb{R}$ mit $\dfrac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|^2} \to 0$ für $\xi \neq (0,0)^T$ und $\|\xi\| \to 0$ (6*) und

$$f(\eta + \xi) = f(\eta) + \frac{1}{2}\langle \xi, A(\xi) \rangle + \varphi(\xi) \qquad (7^*)$$

Wegen (6*) gilt:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ exisitiert ein $\delta > 0$ mit $|\varphi(\xi)| \leq \varepsilon \|\xi\|^2$ für $\|\xi\| < \delta$. (8)

Sei $A := Hess\ f(\eta)$ positiv definit. Wir zeigen nun die Existenz eines lokalen Minimums. (Andernfalls betrachte man die Funktion $-f$ anstelle der Funktion f. Ein Minimum für $-f$ ist ein Maximum für f. $Hess\ (-f)(\eta) = -Hess\ f(\eta)$.)

1) Die Sphäre $S := \{\xi \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \|\xi\| = 1\}$ mit Radius 1 um $\vec{0}$ in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist abgeschlossen und beschränkt und damit nach dem Satz von Heine-Borel (Satz b.3.d, §13) auch (folgen-)kompakt.

Auf einer (folgen-)kompakten Menge nimmt jede stetige reelle Funktion ihr Minimum (und ihr Maximum) an (Satz a.4.c, §13). Da die Funktion:

$S \ni \xi \mapsto \langle \xi, A(\xi) \rangle \in \mathbb{R}$ wegen $\langle \xi, A(\xi) \rangle = x(a_{11}x + a_{12}y) + y(a_{21}x + a_{22}y)$ mit $\xi := (x, y)^T$ stetig ist, nimmt diese auf S ihr Minimum an, d.h.

es existiert ein $\kappa \in S$ mit $c := \langle \kappa, A(\kappa) \rangle = \inf \{\langle \xi, A(\xi) \rangle : \xi \in S\}$. (9)

Da A positiv definit und $\vec{0} := (0,0)^T \notin S$, ist $\langle \xi, A(\xi) \rangle > 0$ für alle $\xi \in S$.

Wegen (9) gilt dann:

$c > 0$ (10)

2) Wir zeigen: $\langle \xi, A(\xi) \rangle \geq c\|\xi\|^2$ für alle $\xi \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (11)

Fall: "$\xi = (0,0)^T$" klar (beide Seiten von (11) sind 0)

Fall: "$\xi \neq (0,0)^T$": (Dann ist $\|\xi\| \neq 0$)

Seien $k := \dfrac{1}{\|\xi\|}$ und $\sigma := k\xi$. Dann ist $\sigma \in S$. Wegen (10) und (9) gilt dann:

$\langle \sigma, A(\sigma) \rangle \geq c$

Damit folgt (A ist linear, $\langle ..., ... \rangle$ ist bilinear):

$$\langle \sigma, A(\sigma) \rangle = \langle k\xi, k\ A(\xi) \rangle = k^2 \langle \xi, A(\xi) \rangle = \frac{1}{\|\xi\|^2} \langle \xi, A(\xi) \rangle$$

Also gilt (11).

3) Wir setzen nun $\varepsilon := \dfrac{c}{4}$. Dann folgt aus (8) die Existenz eines $\delta > 0$ mit

$|\varphi(\xi)| \leq \dfrac{c}{4}\|\xi\|^2$ für ξ mit $\|\xi\| < \delta$

Aus (7*) und (11) folgt:

$$f(\eta + \xi) \geq f(\eta) + \frac{c}{4}\|\xi\|^2$$

Wegen $c > 0$ nach 1) und $\|\xi\|^2 \geq 0$ ist auch $\dfrac{c}{4}\|\xi\|^2 \geq 0$ und damit

$f(\eta + \xi) > f(\eta)$ für alle ξ mit $0 \leq \|\xi\| < \delta$ (12)

4) Aus (12) in 3) folgt, dass f in η ein isoliertes lokales Minimum hat; q.e.d.

Beweis von b):

Sei $A := Hess\, f(\eta)$ indefinit. Zu zeigen:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \xi, \zeta \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit $\|\xi - \eta\| < \varepsilon$ und $\|\zeta - \xi\| < \varepsilon$ und $f(\xi) < f(\eta) < f(\zeta)$

Aus A indefinit folgt: $\exists\ \vec{0} \neq \kappa \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit $\langle \kappa, A(\kappa) \rangle =: \alpha > 0$

Wegen (7*) gilt dann:

$$f(\eta + t\kappa) = f(\eta) + \frac{1}{2}\langle t\kappa, A(t\kappa) \rangle + \varphi(t\kappa) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$= f(\eta) + \alpha \frac{t^2}{2} + \varphi(t\kappa)$$

Wegen (6*) oder (8) gilt für t genügend klein: $\varphi(t\kappa) \leq \alpha \dfrac{t^2}{2}$

Also: $f(\eta + t\kappa) > f(\eta)\ \ \forall\ 0 < |t| < \delta$

Ebenso:

Aus A indefinit folgt: $\exists\ \vec{0} \neq \lambda \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit $\langle \lambda, A(\lambda) \rangle =: \beta < 0$

Und damit: $f(\eta + t\lambda) < f(\eta)\ \ \forall\ 0 < |t| < \delta$ q.e.d

Rechenbeispiele:

a) Paraboloid $f(x,y) := C + x^2 + y^2$;

$f_x(x,y) = 2x$, $f_y(x,y) = 2y$;

also: $grad\ f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y))^T = \vec{0} \Rightarrow x = 0,\ y = 0$

$f_{xx}(x,y) = 2,\ f_{xy}(x,y) = 0 = f_{yx}(x,y),\ f_{yy}(x,y) = 2$;

also: $Hess\ f(0,0)$ hat nur den (zweifachen) positiven Eigenwert 2

(auch: $\det\ (Hess\ f(0,0)) = 4$);

$Hess\ f(0,0)$ ist positiv definit; also (lokales) Minimum in $(0,0)$.

b) $f(x,y) := x^2 + y^2 - xy - 2x + y$:

$f_x(x,y) = 2x - y - 2,\ f_y(x,y) = 2y - x +$

also: $grad\ f(x,y) = \vec{0} \Rightarrow x = 1, y = 0$;

$f_{xx}(x,y) = 2,\ f_{xy}(x,y) = -1 = f_{yx}(x,y),\ f_{yy}(x,y) = 2$

Hurwitz-Kriterium: $f_{xx}(1,0) > 0,\ \det(Hess\ f(1,0)) = 3$;

$Hess\ f(1,0)$ ist positiv definit, also lokales Minimum in $(1,0)$.

c) $f(x,y) := x^2 + y^2 + xy - 2x + y$:

$f_x(x,y) = 2x + y - 2,\ f_y(x,y) = 2y + x + 1$

also: $grad\ f(x,y) = \vec{0} \Rightarrow x = 5/3, y = -4/3$;

$f_{xx}(x,y) = 2,\ f_{xy}(x,y) = 1 = f_{yx}(x,y),\ f_{yy}(x,y) = 2$

Hurwitz-Kriterium: $f_{xx}(1,0) > 0,\ \det(Hess\ f(1,0)) = 3$;

$Hess\ f(5/3,-4/3)$ ist positiv definit, also lokales Minimum in $(5/3,-4/3)$.

d) Sattelfläche $f(x,y) := C + x^2 - y^2$:

$f_x(x,y) = 2x,\ f_y(x,y) = -2y$;

also: $grad\ f(x,y) = \vec{0} \Rightarrow x = 0,\ y = 0$;

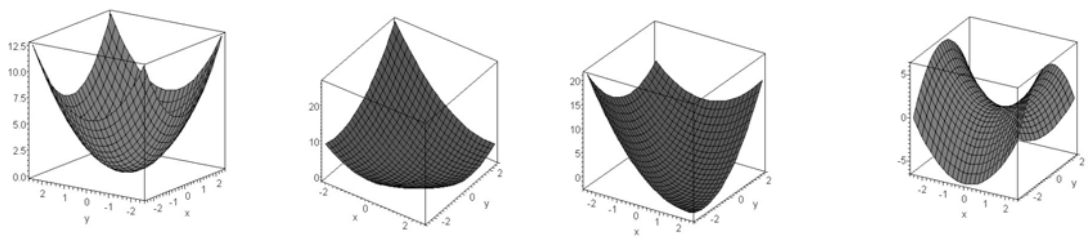
$f_{xx}(x,y) = 2,\ f_{xy}(x,y) = 0 = f_{yx}(x,y),\ f_{yy}(x,y) = -2$

also: $Hess\ f(0,0)$ hat positiven und negativen Eigenwert: $2, -2$

(auch: $\det(Hess\ f(0,0) = -4)$;

$Hess\ f(0,0)$ ist indefinit, also kein Extremum in $(0,0)$.

Zeichnungen: (a) (b) (c) (d)



§17 Satz über implizite Funktionen

Seien $k, l \in \mathbb{N}$, $x \in U \subset \mathbb{R}^k$, $y \in V \subset \mathbb{R}^l$ und $f : U \times V \to \mathbb{R}$ und $f_i : U \times V \to \mathbb{R}$ für $i = 1, \ldots, l$ Funktionen.
Es geht im folgenden um Gleichungen

$f(x, y) = 0$

oder um Systeme von Gleichungen

$f_1(x, y) = 0$

$\vdots$

$f_l(x, y) = 0$

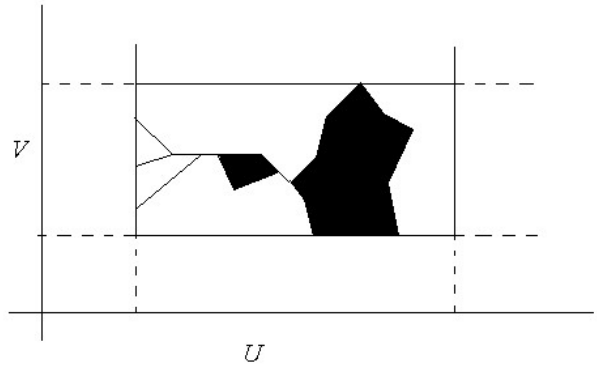
und ihre Lösbarkeit; d.h. es geht um Fragen der Art:

1) Existieren $(x, y) \in U \times V$ mit $f(x, y) = 0$?
2) Existiert zu jedem $x \in U$ ein $y \in V$ mit $f(x, y) = 0$?
3) Unter welchen Bedingungen existiert zu jedem $x \in U$ genau ein $y \in V$
   (oder aus $\widetilde{V} \subset V$ mit $f(x, y) = 0$); d.h. wann existiert eine Abbildung
   $g : U \to \widetilde{V}$ mit $f(x, g(x)) = 0$?

und um Eigenschaften solcher "Lösungsfunktionen g":

4) Eindeutigkeit
5) Stetigkeit
6) Differenzierbarkeit

Zeichnung:



schwarz in $U \times V : \{(x, y) : f(x, y) = 0\}$

Beispiel 1:

$f(x, y) := Ax - y = 0$ mit $x \in \mathbb{R}^k$, A $l \times k$-Matrix, $y \in \mathbb{R}^l$

a) Rang von A gleich l und $k = l$:
   Für jedes $y \in \mathbb{R}^l$ genau eine Lösung x.
b) Rang von A kleiner l und $k = l$
   für $y \in A(\mathbb{R}^k)$ viele Lösungen; sonst: keine
c) Rang von A gleich l und $l < k$: .....

Beispiel 2:

$f(x,y) := x - e^y = 0$

a) Für jedes $x \in \mathbb{R}^+$ lösbar.

b) Für kein $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^+$ in $\mathbb{R}$ lösbar.

Beispiel 3:

a) $f_1(x,y) := x^2 + y^2 - 1 = 0;\ f_2(x,y) := 2x^2 + 2y^2 - 3 = 0$

Keine Lösung in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

b) $f(x,y) := x^2 + 1 = 0$

Keine Lösung in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Beispiel 4:

$f(x,y) := x^4 - y^2 = 0$

a) Für $x = 0$ nur Lösung $y = 0$.

b) Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$: Lösungen sind z.B. $g_1(x) := x^2,\ g_2(x) := -x^2,\ g_3(x) := x|x|,\ g_4(x) := -x|x|$ und stückweise Kombinationen dieser Funktionen.

Satz 1: (Hauptsatz über implizite Funktionen)

Seien $\bar{x} \in U \subset \mathbb{R}^k$ und $\bar{y} \in V \subset \mathbb{R}^l$ mit $U \subset \mathbb{R}^k$ und $V \subset \mathbb{R}^l$ offen und

$F : U \times V \to \mathbb{R}^l$ mit $(x,y) \mapsto F(x,y) := (f_1(x,y), \ldots, f_l(x,y))^T$

mit folgenden Eigenschaften:

$i)$ F ist stetig differenzierbar

$ii)$ $F(\bar{x}, \bar{y}) = 0$

$iii)$ $A := \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(\bar{x}, \bar{y}) \right)_{\substack{i=1,\ldots,l \\ j=1,\ldots,l}}$ ist invertierbar.

Dann ist die Gleichung $F(x,y) = 0$ lokal in $\bar{x}$ nach y auflösbar, d.h.

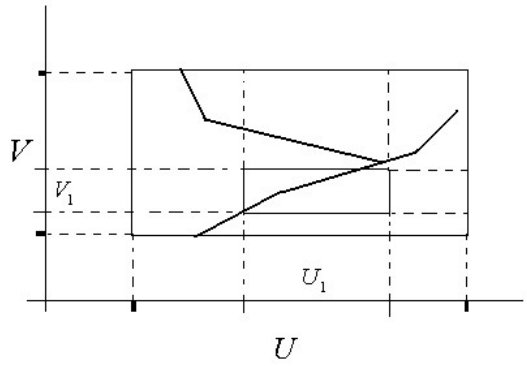
$\exists\ \bar{x} \in U_1 \subset U$ offen und $\bar{y} \in V_1 \subset V$ offen und $\exists$ stetige Abbildung

$g : U_1 \to V_1$ mit $F(x, g(x)) = 0\ \forall x \in U_1$.

Zusätzlich können U_1 und V_1 so gewählt werden, dass gilt:

Ist $(x,y) \in U_1 \times V_1$ mit $F(x,y) = 0$, so ist $y = g(x)$.

Zeichnung:



Zusatz zu Satz 1:

In der Situation von Satz 1 gilt:

a) Es existieren eine offene Menge U_0 mit $\bar{x} \in U_0 \subset U_1$ und eine offene Menge V_0 mit $\bar{y} \in V_0 \subset V_1$ mit $g(U_0) \subset V_0$ und $\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x,y)\right)_{\substack{i=1,\dots,l \\ j=1,\dots,l}} \neq 0 \quad \forall x \in U_0 \ \forall y \in V_0$

b) g aus Satz 1 ist stetig differenzierbar in U_0 und es gilt:

$$\frac{dg}{dx}(x) = -\left(\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x,g(x))\right)_{\substack{i=1,\dots,l \\ j=1,\dots,l}}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x,g(x))\right)_{\substack{i=1,\dots,l \\ j=1,\dots,k}}$$

$$=: -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x,g(x))\right)^{-1} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,g(x))\right)$$

Definition:

Für $F : U \times V \to \mathbb{R}^l$ in der Situation von Satz 1 seien

$$\frac{\partial F}{\partial x} := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{i=1,\dots,l \\ j=1,\dots,k}} \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial y} := \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right)_{\substack{i=1,\dots,l \\ j=1,\dots,l}}$$

Anwendungen: lokale Umkehrbarkeit
Lagrange-Multiplikatoren
Optimierung unter Nebenbedingungen

§18 Optimierung unter Nebenbedingungen

Seien $k \in \mathbb{N}$, $G \subset \mathbb{R}^k$ und $f : G \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Weiter seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mathfrak{g} : G \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion und $N := \left\{ x \in G : \mathfrak{g}(x) = \vec{0} \right\}$.

Definition:

a) f hat in $y \in G$ ein lokales Maximum unter der Nebenbedingung $\mathfrak{g} = \vec{0}$, wenn gilt:
$\exists\, y \in N$ und $\exists\, U \subset \mathbb{R}^k$ offen mit $y \in U \subset G$ und $f(x) \leq f(y)\ \forall x \in U \cap N$

b) analog: lokales Minimum unter Nebenbedingungen; Extremum

Satz 1: (Lagrange – Multiplikatoren)

Seien $k \in \mathbb{N}$, $y \in G \subset \mathbb{R}^k$ offen, $m \leq k$, $f : G \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $\mathfrak{g} : G \to \mathbb{R}^m$ mit $x \mapsto \mathfrak{g}(x) := (g_1(x), ..., g_m(x))^T \in \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar.
Weiter sei $\frac{d\mathfrak{g}}{dx}$ die Jacobische Funktionalmatrix zu $\mathfrak{g}$. Dann gilt:
Besitzt f in y ein lokales Extremum unter der Nebenbedingung $\mathfrak{g} = \vec{0}$
und ist $rg\left(\frac{d\mathfrak{g}}{dx}(y)\right) = m$, so existiert ein $\lambda := (\lambda_1, ..., \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ mit

$$\frac{\partial f}{\partial x_\kappa}(y) + \sum_{\mu=1}^{m} \lambda_\mu \frac{\partial g_\mu}{\partial x_\kappa}(y) = 0 \text{ für } \kappa = 1, ..., k$$

Bezeichnung: $\lambda_1, ..., \lambda_m$ heißen Lagrange – Multiplikatoren

Spezialfall: $m = 1$; $grad\ f(y) = -\lambda\ grad\ \mathfrak{g}(y)$

Langrange – Verfahren zur Optimierung unter Nebenbedingungen:

1) Sei $(x, \lambda) := (x_1, ..., x_k, \lambda_1, ..., \lambda_m)^T \in \mathbb{R}^{k+m}$ eine Lösung des Gleichungssystems

$$\frac{\partial f}{\partial x_\kappa}(x) + \sum_{\mu=1}^{m} \lambda_\mu \frac{\partial g_\mu}{\partial x_\kappa}(x) = 0 \text{ für } \kappa = 1, ..., k$$

$$g_\mu(x) = 0 \quad \text{für } \mu = 1, ..., m$$

Nach Satz 1 ist dann x ein Kandidat für ein lokales Extremum von f unter der Nebenbedingung $\mathfrak{g} = \vec{0}$, wenn $rg\left(\frac{d\mathfrak{g}}{dx}(x)\right) = m$ ist.
Für alle solche x prüfe man, ob ein lokales Extremum vorliegt.

2) Schließlich bestimme man alle die $x \in \mathbb{R}^k$ mit $rg\left(\frac{d\mathfrak{g}}{dx}(x)\right) < m$ und prüfe, ob für ein jedes dieser ein lokales Extremum unter der Nebenbedingung $\mathfrak{g} = \vec{0}$ vorliegt.

Anmerkung 1:

Man erhält das obige Gleichungssystem, wenn man die Funktion
$F(x,\lambda) := f(x) + \sum_{\mu=1}^{m} \lambda_\mu g_\mu(x)$
nach $x_1,...,x_k,\lambda_1,...,\lambda_m$ partiell differenziert und gleich 0 setzt.

Anmerkung 2:

Lässt sich das Gleichungssystem
$\mathfrak{g}(x) = \vec{0}$, d.h. $g_\mu(x) = 0$ für $\mu = 1,...,m$
mit $\varphi_1,...,\varphi_m$ z.B. global nach x auflösen (vgl. Beweis von Satz 1), so lässt sich das Problem der Optimierung von f unter der Nebenbedingung $\mathfrak{g} = \vec{0}$ auf das gewöhnliche Optimierungsproblem (ohne Nebenbedingung; vgl. §16) für
$h : \mathbb{R}^{k-m} \supset G_z \ni z := (x_{k-m},...,x_k) \mapsto h(z) := f(\varphi_1(z),...,\varphi_m(z), z)$
reduzieren und mit den Methoden von §16 lösen.

Beispiel 1: (Optimierung mit Lagrange – Verfahren; beachte Anmerkung 2)

$k = 3$ und $m = 1$:
Bestimme denjenigen Punkt auf der Ebene $E := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 = x_3\}$, der vom Punkt $(1,0,0)$ den geringsten Abstand hat.

Das führt zur Aufgabe der Minimierung von
$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f(x_1, x_2, x_3) := (x_1 - 1)^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2$
unter der Nebenbedingung $g(x_1, x_2, x_3) := x_1 + x_2 - x_3 = 0$ (#)

Zunächst gilt:
Es gibt kein lokales oder globales Maximum.
Es gibt eine globale Minimalstelle von f unter der Nebenbedingung (#).
(Dies folgt aus der Stetigkeit von f und aus der Kompaktheit der nichtleeren Menge $E \cap \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1 - 1)^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 \le 100\}$.)

Es ist $rg\left(\frac{d\mathfrak{g}}{dx}(y)\right) = m = 1$ für alle $y \in \mathbb{R}^3$.

Lösung von

$$\frac{\partial f}{\partial x_\kappa}(x) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_\kappa}(x) = 0 \quad \text{für } \kappa = 1,2,3$$

$$g(x) = 0$$

d.h. $2(x_1 - 1) + \lambda = 0 \qquad 2x_3 - \lambda = 0$

$2x_2 + \lambda = 0 \qquad x_1 + x_2 - x_3 = 0$

ergibt als Kandidat für eine Extremalstelle unter der Nebenbedingung

$$x_1 = \frac{2}{3},\ x_2 = -\frac{1}{3},\ x_3 = \frac{1}{3}$$

Also ist $\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ die globale Minimalstelle und damit der gesuchte Punkt.

§19 M1 Mengensysteme

Sei Ω eine Menge und $\mathfrak{A}$ eine Teilmenge der Potenzmenge $\mathfrak{P}(\Omega)$ von Ω.
Für $A \in \mathfrak{P}(\Omega)$ sei $\overline{A} := \Omega \setminus A$

a) Mengenalgebren und σ – Algebren

Definition:

a) $\mathfrak{A}$ heißt Mengenalgebra über Ω, wenn gilt:

$i)$ $\mathfrak{A} \neq \emptyset$

$ii)$ $A \in \mathfrak{A} \;\Rightarrow\; \overline{A} \in \mathfrak{A}$

$iii)$ $A, B \in \mathfrak{A} \;\Rightarrow\; A \cup B \in \mathfrak{A}$

b) $\mathfrak{A}$ heißt σ – Algebra über Ω, wenn gilt:

$i)$ $\mathfrak{A} \neq \emptyset$

$ii)$ $A \in \mathfrak{A} \;\Rightarrow\; \overline{A} \in \mathfrak{A}$

$iii)$ $A_n \in \mathfrak{A}$ für $n \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{A}$

c) $\mathfrak{A}$ heißt $\bigcap$–stabil, wenn gilt: $A, B \in \mathfrak{A} \;\Rightarrow\; A \cap B \in \mathfrak{A}$

Anmerkung a.1:

1) $\mathfrak{A}$ Mengenalgebra $\Rightarrow$ $\emptyset, \Omega \in \mathfrak{A}$

2) $\mathfrak{A}$ σ – Algebra $\Rightarrow$ $\mathfrak{A}$ Mengenalgebra

$\not\Leftarrow$

Beispiel:

$\Omega := \mathbb{N}$, $\mathfrak{A} := \left\{ A \subset \Omega : A \text{ oder } \overline{A} \text{ endlich} \right\}$ ist eine Mengenalgebra, aber keine σ – Algebra:

Setze $A_n := \{2n,\ n \in \mathbb{N}\}$; $A_n \in \mathfrak{A}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, aber $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \notin \mathfrak{A}$

3) $\mathfrak{P}(\Omega)$ und $\{\emptyset, \Omega\}$ sind σ – Algebren.

4) $A \in \mathfrak{A} \;\Rightarrow\; \left\{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\right\}$ kleinste σ – Algebra, die A enthält.

5) $\mathfrak{A}$ Mengenalgebra, $A_i \in \mathfrak{A}$ für $i = 1, \ldots, n \;\Rightarrow\; \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathfrak{A}$, $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathfrak{A}$

6) $\mathfrak{A}$ σ – Algebra, $A_i \in \mathfrak{A}$ für $i \in \mathbb{N} \;\Rightarrow$ analog.

Bemerkung a.1:

Zu $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ existiert eine kleinste Mengenalgebra $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$
und eine kleinste $\sigma-$Algebra $\mathfrak{C}$ mit $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{C}$.
${}^{A}\mathfrak{A} := \mathfrak{B} = \{\mathfrak{D} : \mathfrak{D} \subset \mathfrak{P}(\Omega) \text{ Mengenalgebra mit } \mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}\}$
${}^{\sigma}\mathfrak{A} := {}^{B}\mathfrak{A} := \mathfrak{C} = \{\mathfrak{D} : \mathfrak{D} \subset \mathfrak{P}(\Omega)\ \sigma-\text{Algebra mit } \mathfrak{A} \subset \mathfrak{C}\}$

Definition:

${}^{A}\mathfrak{A}$ bzw. ${}^{\sigma}\mathfrak{A}$ heißt die von $\mathfrak{A}$ erzeugte Mengen- bzw. $\sigma-$Algebra.
$\mathfrak{A}$ heißt ihr Erzeuger.

Anmerkung a.2: ${}^{\sigma}\left({}^{A}\mathfrak{A}\right) = {}^{\sigma}\mathfrak{A} = {}^{A}\left({}^{\sigma}\mathfrak{A}\right);....$

Bemerkung a.2:

Seien $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ und $\mathfrak{E}_1 := \left\{A \subset \Omega : A \in \mathfrak{E} \text{ oder } \overline{A} \in \mathfrak{E}\right\}$ und

$$\mathfrak{E}_2 := \left\{\bigcap_{\mu=1}^{m} A_\mu : m \in \mathbb{N},\ A_\mu \in \mathfrak{E}_1 \text{ für } 1 \le \mu \le m\right\}$$

Dann ist ${}^{A}\mathfrak{E} = \left\{\bigcup_{\nu=1}^{n} A_\nu : n \in \mathbb{N},\ A_\nu \in \mathfrak{E}_2 \text{ für } 1 \le \nu \le n\right\}$

Anmerkung a.3:

Ein ähnliches Konstruktionsverfahren ist für ${}^{\sigma}\mathfrak{E}$ nur mittels transfiniter Induktion möglich.

Definition:

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\mathfrak{G}$ die Menge der offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$.
Dann heißt $\mathfrak{B}_n := \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n) := {}^{\sigma}\mathfrak{G}$ die $\sigma-$Algebra der Borelschen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$.

Bemerkung 3:

Sei $n = 1$ und $\mathfrak{F}$ die Menge der abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{R}$. Weiter seien
$\mathfrak{H}_l := \{(a,b] : a,b \in \mathbb{R}\}$, $\mathfrak{H}_r := \{[a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$ und $\mathfrak{H}_l^{\mathbb{Q}} := \{[a,b) : a,b \in \mathbb{Q}\}$.
Dann gilt: $\mathfrak{B}_1 = {}^{\sigma}\mathfrak{F} = {}^{\sigma}\mathfrak{H}_l = {}^{\sigma}\mathfrak{H}_r = {}^{\sigma}\mathfrak{H}_l^{\mathbb{Q}}$

Definition:

Seien $(X,\mathfrak{A})$ und $(Y,\mathfrak{B})$ Messräume und $f: X \to Y$ eine Abbildung.
$f:(X,\mathfrak{A}) \to (Y,\mathfrak{B})$ heißt messbar, wenn gilt: $f^{-1}(\mathfrak{B}) := \left\{ f^{-1}(B) : B \in \mathfrak{B} \right\} \subset \mathfrak{A}$.

Lemma:

Seien $f: X \to Y$ eine Abbildung und $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{P}(Y)$. Dann gilt: $f^{-1}({}^{\sigma}\mathfrak{E}) = {}^{\sigma}(f^{-1}(\mathfrak{E}))$.

Anmerkung a.4:

Es sei $f: X \to Y$ eine Abbildung , $\mathfrak{A}$ eine $\sigma-$Algebra über X und $\mathfrak{B}$ eine $\sigma-$Algebra über Y.

a) $f^{-1}(\mathfrak{B}) := \left\{ f^{-1}(B) : B \in \mathfrak{B} \right\}$ ist eine $\sigma-$Algebra.

b) $f(\mathfrak{A}) := \left\{ f(A) : A \in \mathfrak{A} \right\}$ ist i.a. keine $\sigma-$Algebra.

c) $\mathfrak{C} := \left\{ B \subset Y : f^{-1}(B) \in \mathfrak{A} \right\}$ ist eine $\sigma-$Algebra.

d) Ist $X = Y$ und $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ und f eine bijektive Abbildung, so ist i.A. $\mathfrak{A} \neq f(\mathfrak{A}) \neq f^{-1}(\mathfrak{A}) \neq \mathfrak{A}$.

Satz a.1:

Seien Y eine Menge, $((X_i,\mathfrak{A}_i) : i \in I)$ eine nichtleere Menge von Messräumen und $f_i : X_i \to Y$ und $g_i : Y \to X_i$ Abbildungen für $i \in I$. Dann gilt:

a) Es gibt genau eine größte $\sigma-$Algebra $\mathfrak{F}$ über Y derart, dass
$f_i : (X_i,\mathfrak{A}_i) \to (Y,\mathfrak{F})$ für jedes $i \in I$ messbar ist.
Es gilt: $\mathfrak{F} = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ bei $\mathfrak{F}_i := \left\{ B \subset Y : f_i^{-1}(B) \in \mathfrak{A}_i \right\}$
$\mathfrak{F}$ heißt Final-$\sigma-$Algebra bzgl. $(f_i : (X_i,\mathfrak{A}_i) \to Y \ : i \in I)$.

b) Sei $\mathfrak{F}$ wie in a), $(Z,\mathfrak{Z})$ ein Messraum und $h: Y \to Z$ eine Abbildung. Dann:
$h:(Y,\mathfrak{F}) \to (Z,\mathfrak{Z})$ messbar $\Leftrightarrow$ $h \circ f_i : (X_i,\mathfrak{A}_i) \to (Z,\mathfrak{Z})$ messbar $\forall i \in I$.

c) Es gibt eine kleinste $\sigma-$Algebra $\mathfrak{J}$ über Y derart, dass $g_i : (Y,\mathfrak{J}) \to (X_i,\mathfrak{A}_i)$ für jedes $i \in I$ messbar ist.
Es gilt: $\mathfrak{J} = {}^{\sigma}\left(\bigcup_{i \in I} g_i^{-1}(\mathfrak{A}_i) \right)$.
$\mathfrak{J}$ heißt die Initial-$\sigma-$Algebra bzgl. $(g_i : Y \to (X_i,\mathfrak{A}_i) : i \in I)$.

d) Seien $\mathfrak{J}$ wie in c), $(Z,\mathfrak{Z})$ ein Messraum und $k: Z \to Y$ eine Abbildung. Dann:
$k:(Z,\mathfrak{Z}) \to (Y,\mathfrak{J})$ messbar $\Leftrightarrow$ $g_i \circ k : (Z,\mathfrak{Z}) \to (X_i,\mathfrak{A}_i)$ messbar $\forall i \in I$.

e) Bei $\mathfrak{J}$ wie in c) gilt: $\forall K \in \mathfrak{J}\ \exists\, I_K \subset I$ abzählbar mit $K \in {}^{\sigma}\left(\bigcup_{i \in I_K} g_i^{-1}(\mathfrak{A}_i) \right)$

b) Dynkinsysteme

Definition:

Sei $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$. $\mathfrak{D}$ heißt ein Dynkinsystem über Ω, wenn gilt:

D1) $\Omega \in \mathfrak{D}$

D2) $D, E \in \mathfrak{D}$ und $D \subset E \quad \Rightarrow \; E \setminus D \in \mathfrak{D}$

D3) $D_n \in \mathfrak{D}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $D_n \cap D_m = \emptyset$ für $n \neq m \;\Rightarrow\; \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$

Anmerkung b.1:

1. Ein Mengensystem $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ mit den Eigenschaften D1) und D3) ist genau dann ein Dynkinsystem, wenn es die Eigenschaft
   D2*) $D \in \mathfrak{D} \Rightarrow \overline{D} \in \mathfrak{D}$ besitzt.

....

Bemerkung b.1:

1) Ein Dynkinsystem $\mathfrak{D}$ ist genau dann eine σ – Algebra, wenn gilt:
   $D, E \in \mathfrak{D} \;\Rightarrow\; D \cap E \in \mathfrak{D}$ (d.h. $\mathfrak{D}$ ist endlich durchschnittstabil)
2) Sei $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$. Dann existiert ein kleinstes Dynkinsystem $\mathfrak{D}$ über Ω mit $\mathfrak{D} \supset \mathfrak{E}$.
   Es gilt: $\bigcap \{\mathfrak{F} : \mathfrak{F}$ ist Dynkinsystem mit $\mathfrak{F} \supset \mathfrak{E}\}$

Definition:

Seien $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ und $\mathfrak{D}$ das kleinste Dynkinsystem mit $\mathfrak{D} \supset \mathfrak{E}$. ${}^{D}\mathfrak{E} := \mathfrak{D}$ heißt das von $\mathfrak{E}$ erzeugte Dynkinsystem. $\mathfrak{E}$ heißt der Erzeuger des Dynkinsystems ${}^{D}\mathfrak{E}$.

Satz b.1:

Seien $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ endlich durchschnittstabil. Dann gilt: ${}^{\sigma}\mathfrak{E} = {}^{D}\mathfrak{E}$.

§20 M2 Inhalte und Maße

Seien $\mathfrak{A}$ eine Mengenalgebra über Ω und $\widetilde{\mathbb{R}}_0^+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \cup \{\infty\}$ mit $\alpha + \infty := \infty$ für $\alpha \in \widetilde{\mathbb{R}}_0^+$.

Definition:

a) $\mu : \mathfrak{A} \to \widetilde{\mathbb{R}}_0^+$ heißt (endlich additiver) Inhalt, wenn gilt:

$i)$ $\mu(\emptyset) = 0$

$ii)$ $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ für $A, B \in \mathfrak{A}$ mit $A \cap B = \emptyset$.

b) Sei $\mu : \mathfrak{A} \to \widetilde{\mathbb{R}}_0^+$ ein Inhalt. μ heißt $\sigma-$additiv, wenn gilt:

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \text{ für } A_n \in \mathfrak{A} \text{ mit } A_n \cap A_m = \emptyset \text{ für } n \neq m \text{ und } \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{A}$$

c) $\mu : \mathfrak{A} \to \widetilde{\mathbb{R}}_0^+$ heißt Maß, wenn $\mathfrak{A}$ eine $\sigma-$Algebra und μ ein $\sigma-$additiver Inhalt ist.

d) Sei $\mu : \mathfrak{A} \to \widetilde{\mathbb{R}}_0^+$ ein Inhalt. μ heißt unendlich, finit bzw. normiert, wenn $\mu(\Omega) = \infty$, $\mu(\Omega) < \infty$ bzw. $\mu(\Omega) = 1$ ist.

e) Ein Inhalt $\mu : \mathfrak{A} \to \widetilde{\mathbb{R}}_0^+$ heißt $\sigma-$finit, wenn eine Folge $(A_n : n \in \mathbb{N})$ existiert mit $A_n \in \mathfrak{A}$, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega$ und $\mu(A_n) < \infty$ für $n \in \mathbb{N}$.

f) Anstelle von $\mu : \mathfrak{A} \to \widetilde{\mathbb{R}}_0^+$ schreiben wir auch $\mu \,|\, \mathfrak{A}$.

g) Ist $\mu : \mathfrak{A} \to \widetilde{\mathbb{R}}_0^+$ ein Maß auf der $\sigma-$Algebra $\mathfrak{A}$, so heißt $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum.

Beispiele: 1)-6)

2) Sei $\mathfrak{A}$ eine $\sigma-$Algebra über X, $x \in X$.

$$\mu(A) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x \notin A \\ 1, & \text{falls } x \in A \end{cases} \qquad \text{für } A \in \mathfrak{A}$$

ist ein (normiertes) Maß. μ heißt das in x konzentrierte und normierte Dirac-Maß.

3) Sei $\mathfrak{A}$ eine $\sigma-$Algebra über X.

$$\mu : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}_0^+ \text{ mit } \mu(A) := \begin{cases} \text{Anzahl der Elemente von } A, & \text{falls } A \text{ endlich} \\ +\infty, & \text{falls } A \text{ unendlich} \end{cases}$$

ist ein $\sigma-$additives Maß. Bei $\mathfrak{A} := \mathfrak{P}(X)$: μ $\sigma-$finit (bzw. finit) $:\Leftrightarrow$ X hat höchstens abzählbar viele Elemente (bzw. endlich viele Elemente)

μ heißt Zählmaß.

4) $X := \mathbb{R}$ und $\mathfrak{A} := \left\{ A \subset \mathbb{R} : A \text{ oder } \overline{A} \text{ abzählbar} \right\}$

$\mathfrak{A}$ ist eine $\sigma-$Algebra.

$\mu : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}_0^+$ mit $\mu(A) := 0$ bei A abzählbar und $\mu(A) = 1$ bei $\overline{A}$ abzählbar ist ein (normiertes) Maß.

5) $X := \mathbb{N}$ und $\mathfrak{A} := \left\{ A \subset \mathbb{N} : A \text{ oder } \overline{A} \text{ endlich} \right\}$

$\mathfrak{A}$ ist eine Mengenalgebra, aber keine $\sigma-$Algebra.

$\mu : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}_0^+$ mit $\mu(A) := 0$ bei A endlich und $\mu(A) = 1$ bei $\overline{A}$ endlich ist ein (normierter) Inhalt, additiv, aber nicht $\sigma-$additiv:

$$A_n := \{n\},\ \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{N} \in \mathfrak{A}\ ;\ \mu(A_n) = 0 \quad ;\ 0 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \neq \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \right) = \mu(X) = 1$$

6) X Menge, $\mu : \mathfrak{P}(X) \to \mathbb{R}_0^+$ mit $\mu(A) := \begin{cases} 0 & \text{für } A = \varnothing \\ +\infty & \text{sonst} \end{cases}$

μ ist ein Maß auf $\mathfrak{P}(X)$. Bei $X \neq \varnothing$: μ nicht $\sigma-$finit.

Bemerkung 1:

Seien $\mu : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}_0^+$ ein Inhalt, $n \in \mathbb{N}$ und $A, A_n, B \in \mathfrak{A}$. Dann gilt:

1) $\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B)$

2) Isotonie: $A \subset B \ \Rightarrow\ \mu(A) \leq \mu(B)$

3) Subtraktivität: $A \subset B$ und $\mu(A) < \infty \ \Rightarrow\ \mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$.

4) Subadditivität: $\mu\left(\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu \right) \leq \sum_{\nu=1}^{n} \mu(A_\nu)$

5) Bei $A_n \cap A_m = \varnothing$ für $n \neq m$ und $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{A}$ gilt: $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \leq \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \right)$

6) Ist μ $\sigma-$additiv, so gilt bei $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{A}$ auch: $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$

7) Ist $(\mu_n : n \in \mathbb{N})$ eine Folge von Inhalten $\mu_n \,|\, \mathfrak{A}$ und $(\alpha_n : n \in \mathbb{N})$ eine Folge in $\mathbb{R}_0^+$, so ist auch $\mu := \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \mu_n$ ein Inhalt auf $\mathfrak{A}$.

Bemerkung 2:

Sei $\mu|\mathfrak{A}$ ein Inhalt. Dann gilt:

a) $\mu|\mathfrak{A}$ $\sigma-$additiv $\Leftrightarrow$ $\mu|\mathfrak{A}$ $\sigma-$subadditiv, d.h.

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \text{ für } A_n \in \mathfrak{A} \text{ mit } A_n \cap A_m = \emptyset \text{ für } n \neq m \text{ und } \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{A}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \text{ für } A_n \in \mathfrak{A} \text{ und } \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{A}$$

b) Warnung: $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{A} \not\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$

vgl. Beispiel 5 zu Inhalten und Maßen.

Satz 1:

Für einen Inhalt $\mu|\mathfrak{A}$ auf einer Mengenalgebra $\mathfrak{A}$ betrachte man die folgenden Eigenschaften:

$S\uparrow$) Stetigkeit von unten:

$\forall$ Folge $(A_n : n \in \mathbb{N})$ in $\mathfrak{A}$ mit $A_n \subset A_{n+1}$ und $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{A}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$$

$S\downarrow$) Stetigkeit von oben:

$\forall$ Folge $(A_n : n \in \mathbb{N})$ in $\mathfrak{A}$ mit $A_n \supset A_{n+1}$, $\mu(A_n) < \infty$ und $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{A}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$$

$\emptyset S$) Nullstetigkeit:

$\forall$ Folge $(A_n : n \in \mathbb{N})$ in $\mathfrak{A}$ mit $A_n \supset A_{n+1}$, $\mu(A_n) < \infty$ und $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$$

Dann gilt:

a) μ $\sigma-$additiv $\Leftrightarrow$ $S\uparrow$)

b) $S\uparrow$) $\Rightarrow$ $S\downarrow$) $\Rightarrow$ $\emptyset S$)

c) Ist μ finit, so gilt: μ $\sigma-$additiv $\Leftrightarrow$ $S\uparrow$) $\Leftrightarrow$ $S\downarrow$) $\Leftrightarrow$ $\emptyset S$)

Warnung:

"$\mu(A_n) < \infty$" in $S \downarrow$) und $\varnothing S$) ist wesentlich.

Beispiel: $X := \mathbb{N}$, $\mathfrak{A} := \left\{ A \subset \mathbb{N} : A \text{ oder } \overline{A} \text{ endlich} \right\}$ Mengenalgebra

$\mu \,|\, \mathfrak{A}$ Zählmaß. $A_n := \mathbb{N} \setminus \{1, \ldots, n\} \supset A_{n+1} \supset \ldots$ und $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \varnothing$

$$\lim_{n \to \infty} \mu(A_n) = +\infty \neq 0 = \mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \right)$$

Warnung:

"μ finit" in c) ist wesentlich.

Beispiel eines $\varnothing$-stetigen und nicht $\sigma-$additiven Inhalts:

$X := \mathbb{N}$ und $\mathfrak{A} := \left\{ A \subset X : A \text{ oder } \overline{A} \text{ endlich} \right\}$ und

$$\mu(A) := \begin{cases} 0 & \text{für } A \text{ endlich} \\ +\infty & \text{für } \overline{A} \text{ endlich} \end{cases}$$

§21 M3 Fortsetzung von Maßen

Sei X eine Menge („Grundmenge"). Es gelten die Bezeichnungen der §§ M1, M2.

Ziel: 1) Fortsetzung von einem (σ – additiven) Inhalt $\mu \mid \mathfrak{A}$ zu einem Maß $\overline{\mu} \mid {}^{B}\mathfrak{A}$.
2) Vervollständigung von $\overline{\mu}$.

Methode: Carathéodory, Uni München.

Bemerkung 1:

Seien $\mathfrak{A}$ eine Mengenalgebra über X und $\mu \mid \mathfrak{A}$ ein Inhalt. Weiter seien $\mathfrak{B}$ eine σ – Algebra über X mit $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ und $\hat{\mu} \mid \mathfrak{B}$ mit $\hat{\mu}(A) = \mu(A) \quad \forall A \in \mathfrak{A}$.
Dann ist $\mu \mid \mathfrak{A}$ σ – additiv.

Anmerkung 1:

$X := \{1,2\}$; $\mathfrak{A} := \{\varnothing, X\}$; $\mu(\varnothing) := 0$; $\mu(X) := 1$
$\mathfrak{A} = {}^{A}\mathfrak{A} = {}^{\sigma}\mathfrak{A} \neq \mathfrak{P}(X)$
$\mu_1(\{1\}) := 1 =: \mu_2(\{2\})$, $\mu_1(\{2\}) := 0 =: \mu_2(\{1\})$
Für $i = 1,2$ $\mu_i \mid \mathfrak{P}(X)$ Maße mit $\mu_1 \neq \mu_2$; $\mu_i \mid \mathfrak{A} = \mu \mid \mathfrak{A}$

Definition:

Sei $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ ein Maßraum.
a) $B \in \mathfrak{B}$ heißt eine $\mu - \mathfrak{B}$ Nullmenge $:\Leftrightarrow$ $\mu(B) = 0$
b) $N \in \mathfrak{P}(X)$ heißt eine μ – Nullmenge $:\Leftrightarrow$ $\exists\, B \in \mathfrak{B}$ mit $N \subset B$ und $\mu(B) = 0$.
c) $\mathfrak{N}(\mu) := \{N \in \mathfrak{P}(X) : \; N \; \mu - \text{Nullmenge}\}$
d) $\mu \mid \mathfrak{B}$ heißt vollständig $:\Leftrightarrow$ $\mathfrak{N}(\mu) \subset \mathfrak{B}$
$(X, \mathfrak{B}, \mu)$ heißt vollständig $:\Leftrightarrow$ $\mu \mid \mathfrak{B}$ ist vollständig

Anmerkung 2:

1) i.A. $\mathfrak{N}(\mu) \not\subset \mathfrak{B}$
2) Sei $\mu := \delta_x \mid \mathfrak{B}$ das in x konzentrierte und normierte Dirac-Maß.
Bei $x \in \mathfrak{B}$ ist $\mathfrak{N}(\mu) = \{A \in \mathfrak{P}(X) : \; x \notin A\}$ und ${}^{\sigma}(\mathfrak{B} \cup \mathfrak{N}(\mu)) = \mathfrak{P}(X)$.
$\delta_x \mid \mathfrak{B}$ (für jedes $\mathfrak{B}$) auf $\mathfrak{P}(X)$ eindeutig fortsetzbar.
3) Bei $\mu(B) := 0$ für $B = \varnothing$ und $\mu(B) := \infty$ für $B \neq \varnothing$ ist $\mathfrak{N}(\mu) = \varnothing$
${}^{\sigma}(\mathfrak{B} \cup \mathfrak{N}(\mu)) = \mathfrak{B} \supset \mathfrak{N}(\mu)$
4) Eine abzählbare Vereinigung von μ-Nullmengen ist wieder eine μ-Nullmenge.

Satz 1: (Vervollständigung eines Maßes)

Sei $\mu \,|\, \mathfrak{B}$ ein Maß. Dann gilt:

1) ${}^{B}(\mathfrak{B} \cup \mathfrak{N}(\mu)) = \{B \cup N : \; B \in \mathfrak{B} \text{ und } N \in \mathfrak{N}(\mu) \text{ mit } B \cap N = \emptyset\} =: \widetilde{\mathfrak{B}}^{\mu}$

2) $\widetilde{\mu} : \widetilde{\mathfrak{B}}^{\mu} \to \mathbb{R}_0^+$ mit $C := B \cup N \mapsto \widetilde{\mu}(C) := \mu(B)$ ist ein vollständiges Maß.

3) Für jedes Maß $\nu | \widetilde{\mathfrak{B}}^{\mu}$ mit $\nu(B) = \mu(B) \;\; \forall B \in \mathfrak{B}$ ist $\nu | \widetilde{\mathfrak{B}}^{\mu} = \widetilde{\mu} \,|\, \widetilde{\mathfrak{B}}^{\mu}$.

Definition:

Seien $\mu \,|\, \mathfrak{B}$ ein Maß und $\widetilde{\mathfrak{B}}^{\mu}$ und $\widetilde{\mu} \,|\, \widetilde{\mathfrak{B}}^{\mu}$ wie in Satz 1. Dann heißt $\widetilde{\mathfrak{B}}^{\mu}$ die Vervollständigung von $\mathfrak{B}$ bzgl. μ und $\widetilde{\mu} \,|\, \widetilde{\mathfrak{B}}^{\mu}$ die Vervollständigung von μ.

Definition:

Die Abbildung $\lambda : \mathfrak{P}(X) \to \mathbb{R}_0^+$ heißt äußeres Maß, wenn gilt:

äm1) $\lambda(\emptyset) = 0$

äm2) $\sigma -$Subadditivität:

$$\lambda(A) \le \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(A_n) \;\; \forall \, A, A_n \in \mathfrak{P}(X) \text{ mit } A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

äm3) Isotonie: $\lambda(A) \le \lambda(B)$ für $A \subset B$

Definition:

Sei $\lambda : \mathfrak{P}(X) \to \mathbb{R}_0^+$ ein äußeres Maß.

a) $M \in \mathfrak{P}(X)$ heißt $\lambda -$ messbar $:\Leftrightarrow \;\; \lambda(A) = \lambda(A \cap M) + \lambda(A \cap \overline{M}) \;\; \forall A \in \mathfrak{P}(X)$

b) $\mathfrak{L}(\lambda) := \{M \in \mathfrak{P}(X) : \; M \;\; \lambda -$ messbar$\}$

Definition:

Sei $\mu : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}_0^+$ ein Inhalt. Dann heißt die Abbildung $\mu^* : \mathfrak{P}(X) \to \mathbb{R}_0^+$

mit $B \mapsto \mu^*(B) := \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) : A_n \in \mathfrak{A}, \; B \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right\}$ das äußere $\mu -$Maß.

Anmerkung 3:

Sei $\mu | \mathfrak{A}$ ein Inhalt. Dann:

1) $\mathfrak{A}$ Mengenalgebra $\Rightarrow \; B \subset X \in \mathfrak{A} \; \Rightarrow$ inf aus Definition stets definiert, $0 \le \mu^* \le \infty$

2) Bemerkung 1.5 aus M2: $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) \le \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right)$ bei A_n disjunkt, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ in $\mathfrak{A}$ (Subadditivität)

$\mu^*(A) \le \mu(A) \;\; \forall A \in \mathfrak{A}$

Bemerkung 2:

a) Ist $\mu \,|\, \mathfrak{A}$ ein Inhalt, so ist das äußere $\mu-$Maß $\mu^* : \mathfrak{P}(X) \to \mathbb{R}_0^+$
ein äußeres Maß mit $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{L}(\mu^*)$ und $\mu^*(A) \le \mu(A) \;\; \forall A \in \mathfrak{A}$.

b) Ist $\mu \,|\, \mathfrak{A}$ ein $\sigma-$additiver Inhalt, so gilt: $\mu^*(A) = \mu(A) \; \forall A \in \mathfrak{A}$.

c) Ist $\mu \,|\, \mathfrak{A}$ ein Maß, so gilt: $\mu^*(B) = \inf\{\mu(A) : B \subset A \in \mathfrak{A}\}$

Satz 2: (Carathéodory-Vervollständigung)

Sei $\lambda : \mathfrak{P}(X) \to \mathbb{R}_0^+$ ein äußeres Maß und $\mathfrak{L}(\lambda)$ die Menge der $\lambda-$messbaren Teilmengen von X. Dann gilt:

a) $\mathfrak{L}(\lambda)$ ist eine $\sigma-$Algebra.

b) Die Einschränkung $\tilde{\lambda} : \mathfrak{L}(\lambda) \to \mathbb{R}_0^+$ mit $A \mapsto \tilde{\lambda}(A) := \lambda(A)$ von $\lambda \,|\, \mathfrak{P}(X)$
auf $\mathfrak{L}(\lambda)$ ist ein vollständiges Maß.

Satz 3 (Fortsetzung; Carathéodory)

Seien $\mu \,|\, \mathfrak{A}$ ein $\sigma-$additiver Inhalt und $\mathfrak{B} := {}^B\mathfrak{A}$. Dann existiert mindestens ein Maß $\overline{\mu} \,|\, \mathfrak{B}$ mit $\overline{\mu}(A) = \mu(A) \;\; \forall A \in \mathfrak{A}$.

Satz 4: (Eindeutigkeit)

Seien $\mu | \mathfrak{B}$ und $\nu | \mathfrak{B}$ Maße und $\mathfrak{E}$ ein durchschnittstabiler Erzeuger von $\mathfrak{B}$.
Weiter sei $(E_n : n \in \mathbb{N})$ eine Folge in $\mathfrak{E}$ mit $E_n \subset E_{n+1} \;\; \forall n \in \mathbb{N}$ und $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = X$.
Schließlich sei $\mu(E) = \nu(E) \;\; \forall E \in \mathfrak{E}$ und $\mu(E_n) < \infty \; \forall n \in \mathbb{N}$.
Dann gilt: $\mu(B) = \nu(B) \;\; \forall B \in \mathfrak{B}$.

Anmerkung: Aus $\mu(E_n) < \infty$ und $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ folgt: μ und ν sind $\sigma-$finit.

Warnung: "$E_n \subset E_{n+1} \;\; \forall n \in \mathbb{N}$ und $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = X$" ist wesentlich.

Beispiel: $\mathfrak{B} := \{\varnothing, X\}$, $\mathfrak{E} := \{\varnothing\}$ $\cap-$stabiler Erzeuger von $\mathfrak{B} := {}^\sigma\mathfrak{E}$
$\mu(X) := 1$, $\nu(X) := 2$: $\nu = 2\mu \ne \mu$.
aber: $\nu(\varnothing) = 0 = \mu(\varnothing)$, d.h. $\mu(E) = \nu(E) \;\; \forall E \in \mathfrak{E}$

Warnung: "$\mu(E_n) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$" ist wesentlich.

Beispiel: $X := \mathbb{N}$, $\mu \,|\, \mathfrak{P}(X)$ Zählmaß

$\nu := 2\mu \neq \mu$; $\mathfrak{E} := \{E(k) : k \in \mathbb{N}\}$ mit $E(k) := \mathbb{N} \setminus \{1, \ldots, k\}$ $\cap$-stabiler Erzeuger von $\mathfrak{P}(X)$

mit $E_n := E_{(1)} = \mathbb{N} \;\forall n \in \mathbb{N}$; $\mu(E) = \infty = \nu(E) \quad \forall E \in \mathfrak{E}$. Es gilt nicht: $\mu(E_n) < \infty$

Warnung: Satz 4 gilt nicht mit "$\leq$" anstelle von "$=$".

Satz 5: (Maßerweiterungssatz)

Seien $\mu | \mathfrak{A}$ ein $\sigma-$finiter und $\sigma-$additiver Inhalt und $\mathfrak{B} := {}^{B}\mathfrak{A}$. Dann gilt:

a) Es existiert genau ein Maß $\overline{\mu} \,|\, \mathfrak{B}$ mit $\overline{\mu}(A) = \mu(A) \quad \forall A \in \mathfrak{A}$.

b) Für das äußere $\mu-$Maß $\mu^* \,|\, \mathfrak{P}(X)$ und das äußere $\overline{\mu}-$Maß $\overline{\mu}^* \,|\, \mathfrak{P}(X)$ gilt

$\mu^*(B) = \overline{\mu}^*(B) \;\forall B \in \mathfrak{P}(X)$ und damit $\mathfrak{L}(\mu^*) = \mathfrak{L}(\overline{\mu}^*)$.

c) Sei $\widetilde{\mu} : \mathfrak{L}(\mu^*) \to \mathbb{R}_0^+$ die Einschränkung von $\mu^* \,|\, \mathfrak{P}(X)$ auf $\mathfrak{L}(\mu^*)$. Dann:

$\widetilde{\mu} \,|\, \mathfrak{L}(\mu^*)$ ist die Vervollständigung von $\overline{\mu} \,|\, \mathfrak{B}$ und $\widetilde{\mathfrak{B}}^{\overline{\mu}} = \mathfrak{L}(\mu^*)$.

Warnung: Die Voraussetzung "$\sigma-$finit" in Satz 5.a und 5.c ist wesentlich.

§22 M4 Das Lebesguesche Maß

a) Das eindimensionale Lebesgue – Borel - Maß

Sei $\mathfrak{T}_{\mathbb{R}}$ die (vom Betrag induzierte) gewöhnliche Topologie auf $\mathbb{R}$. Weiter sei $\mathfrak{B}_1 := \mathfrak{B}(\mathbb{R}) := {}^{\sigma}\mathfrak{T}_{\mathbb{R}}$ erzeugte σ – Algebra; sie heißt die σ – Algebra der Borelschen Teilmengen von $\mathbb{R}$.

Anmerkung 1:

a) $G \in \mathfrak{T}_{\mathbb{R}} \Rightarrow \exists$ abzählbar viele disjunkte offene Intervalle $I_n := (\alpha_n, \beta_n)$ mit $\alpha_n, \beta_n \in \widetilde{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ bei $\alpha_n \le \beta_n$ und $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$

b) Zu (α, β) $\exists$ α_n mit $(\alpha, \beta) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\alpha_n, \beta)$.

Seien $\mathfrak{J} := \{[\alpha, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ mit } \alpha \le \beta\}$ und

$$\lambda_{\mathfrak{J}} : \mathfrak{J} \to \mathbb{R}_0^+ \text{ mit } I := [\alpha, \beta) \mapsto \lambda_{\mathfrak{J}}(I) := \beta - \alpha$$

Bemerkung a.1:

a) $\lambda_{\mathfrak{J}}$ ist endlich additiv.
b) $\mathfrak{J}$ ist bezüglich endlicher Durchschnitte stabil.
c) $\mathfrak{J}$ ist Erzeuger von $\mathfrak{B}_1$.

Seien $\mathfrak{J}_\infty := \{(\alpha, \beta) : \alpha, \beta \in \widetilde{\mathbb{R}}\} \cup \{[\alpha, \beta] : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \cup \mathfrak{J}$

$\mathfrak{G} := {}^{A}\mathfrak{J}_\infty$ die von $\mathfrak{J}_\infty$ erzeugte Mengenalgebra.

Bemerkung a.2:

a) $\mathfrak{G} = {}^{A}\mathfrak{J}_\infty = \left\{ \bigcup_{i=1}^{n} I_i : n \in \mathbb{N},\ I_i \in \mathfrak{J}_\infty \text{ paarweise disjunkt} \right\}$ und ${}^{\sigma}\mathfrak{G} = {}^{\sigma}\mathfrak{J} = \mathfrak{B}_1$

b) $\lambda_{\mathfrak{G}} : \mathfrak{G} \to \widetilde{\mathbb{R}}_0^+$ mit $G = \bigcup_{i=1}^{n} I_i \mapsto \lambda_{\mathfrak{G}}(G) := \sum_{i=1}^{n} (\beta_i - \alpha_i)$
mit $I_i := (\alpha_i, \beta_i)$, $I_i := [\alpha_i, \beta_i)$ oder $I_i := [\alpha_i, \beta_i]$ mit den üblichen Konventionen (d.h. $\beta - (-\infty) := +\infty$ etc.) ist endlich additiv, also ein Inhalt.

c) $\lambda_{\mathfrak{G}} | \mathfrak{G}$ ist σ – finit.

Ziel:

Wir zeigen, dass $\lambda_{\mathfrak{G}} | \mathfrak{G}$ σ – additiv ist. (vgl. Satz a.1)

Nach dem Maßerweiterungssatz lässt sich dann der $\sigma-$finite und $\sigma-$additive Inhalt $\lambda_{\mathfrak{G}}|\mathfrak{G}$ zu genau einem Maß $\lambda|\mathfrak{B}_1$ fortsetzen.

$\lambda|\mathfrak{B}_1$ lässt sich nach dem Vervollständigungssatz zu genau einem Maß $\tilde{\lambda}|\mathfrak{L}$ fortsetzen, wobei $\mathfrak{L} := \tilde{\mathfrak{B}}_1^{\lambda}$ die Vervollständigung von $\mathfrak{B}_1$ bezüglich λ ist.

Definition:

Nach dem oben Gesagten und dem nachfolgenden Satz a.1 existenten und eindeutig bestimmten Fortsetzungen $\lambda : \mathfrak{B}_1 \to \mathbb{R}_0^+$ und $\tilde{\lambda} : \mathfrak{L} \to \mathbb{R}_0^+$ heißen das eindimensionale Lebesgue-Borel-Maß bzw. das Lebesguesche Maß; $\mathfrak{L}$ heißt die $\sigma-$Algebra der Lebesgueschen Teilmengen von $\mathbb{R}$.

Weg:

1) Wir zerlegen $\lambda_{\mathfrak{G}}|\mathfrak{G}$ in eine Summe von abzählbar vielen endlichen Inhalten λ_z.

2) Wir zeigen, dass jeder dieser endlichen Inhalte λ_z $\sigma-$additiv ist.
   Dies geschieht durch den Nachweis der Nullstetigkeit; dazu:

   α) Approximation durch Kompakta von innen.
   β) Nullstetigkeit mit endlicher Durchschnittseigenschaft.

Bemerkung a.3:

a) Bei $z \in \mathbb{Z}$ und $\lambda_z : \mathfrak{G} \to \mathbb{R}_0^+$ mit $G \mapsto \lambda_z(G) := \lambda_{\mathfrak{G}}\left(G \cap [z, z+1)\right)$
   ist λ_z ein endlich additiver und finiter Inhalt.
b) Sind die Inhalte λ_z alle $\sigma-$additiv, so ist auch $\overline{\lambda} := \sum_{z \in \mathbb{Z}} \lambda_z | \mathfrak{G}$ $\sigma-$additiv.
   Außerdem gilt: $\overline{\lambda}|\mathfrak{G} = \lambda_{\mathfrak{G}}|\mathfrak{G}$.
c) Bei $T_z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto T_z(x) := x + z$ ist $\lambda_z(G) = \lambda_0 \circ T_z^{-1}(G) := \lambda_0(T_z^{-1}(G))$
   $\forall G \in \mathfrak{G}$.
d) Für jedes $I \in \mathfrak{J}_\infty$ und jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein Kompaktum $I_0 \in \mathfrak{J}_\infty$ mit
   $I_0 \subset I \cap [0,1)$ und $\lambda_0(I \setminus I_0) \le \varepsilon$.
e) Da eine endliche Vereinigung von Kompakta kompakt ist, gilt:
   $\forall G \in \mathfrak{G}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists K \in \mathfrak{G}$ kompakt mit $K \subset G \cap [0,1)$ und $\lambda_0(G \setminus K) \le \varepsilon$.

Satz a.1: $\lambda_0 \,|\, \mathfrak{G}$ ist $\sigma-$additiv (und damit auch $\lambda_{\mathfrak{G}} \,|\, \mathfrak{G}$).

Wir betrachten nun einige Eigenschaften des Lebesgue-Borelschen Maßes:

Satz a.2: Ist $A \subset \mathbb{R}$ abzählbar, so ist $A \in \mathfrak{B}_1$ und $\lambda(A) = 0$.

Warnung: Cantorsches Diskontinuum D ist überabzählbar und $\lambda(D) = 0$

Anmerkung 2:

1) $card(\mathfrak{B}_1) = card(\mathbb{R})$
2) $\mathfrak{L} \supset \mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{L} \neq \mathfrak{B}_1$
3) $B \in \mathfrak{L} \;\Leftrightarrow\; \lambda_*(B) = \lambda^*(B)$

Satz a.3:

Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha \neq 0$ und $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto T(x) := \alpha x + \beta$. Dann gilt:
1) $T^{-1}(B) \in \mathfrak{B}_1 \;\Leftrightarrow\; B \in \mathfrak{B}_1 \;\Leftrightarrow\; T(B) \in \mathfrak{B}_1$
2) $\lambda(T(B)) = |\alpha| \lambda(B) \;\; \forall B \in \mathfrak{B}_1$
3) Aus 1) und 2) und der Definition von λ^* und λ_* folgt:
   $\alpha)$ $T^{-1}(L) \in \mathfrak{L} \;\Leftrightarrow\; L \in \mathfrak{L} \;\Leftrightarrow\; T(L) \in \mathfrak{L}$
   $\beta)$ $\lambda_*(T(A)) = |\alpha| \lambda_*(A)$ und $\lambda^*(T(A)) = |\alpha| \lambda^*(A) \;\; \forall A \in \mathfrak{P}(\mathbb{R})$
   speziell: $\tilde{\lambda}(T(A)) = |\alpha| \tilde{\lambda}(A) \;\; \forall A \in \mathfrak{L}$

Anmerkung 3:

1) Translationsinvarianz und $\sigma-$Finitheit von λ und $\tilde{\lambda}$.
2) Haarsches Maß
3) Zählmaß translationsinvariant, aber nicht $\sigma-$finit.

Problem: $\mathfrak{L} = \mathfrak{P}(\mathbb{R})$ oder $\mathfrak{L} \neq \mathfrak{P}(\mathbb{R})$?

Antwort: Hängt von den Axiomen der Mengenlehre ab.

Literaturhinweise:
Keisler-Tarski: Fundamenta Mathematicae L III (1964)
Solovay: Annals of Mathematics 92 (1970)
Benedetto: Real Variable and Integration. Teubner: Stuttgart, 1976

Satz a.4: (Vitali, 1905)

In einem Zermelo-Fränkel-Modell der Mengenlehre mit dem Auswahlaxiom gilt: $\mathfrak{L} \neq \mathfrak{P}(\mathbb{R})$.

Beispiel: (Sierpinski, 1920)

Bemerkung a.4:

a) $\forall L \in \mathfrak{L}$ mit $\tilde{\lambda}(L) > 0$ und $\forall \alpha$ mit $0 \leq \alpha < 1$ $\exists \varnothing \neq G \in \mathfrak{T}_{\mathbb{R}}$ mit $\tilde{\lambda}(L \cap G) \geq \alpha\lambda(G)$

b) $\forall L \in \mathfrak{L}$ mit $\tilde{\lambda}(L) > 0$ $\exists G \in \mathfrak{T}_{\mathbb{R}}$ mit $0 \in G$ und $G \subset L - L := \{x - y : x, y \in L\}$

Satz a.5:

Seien $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und $A_x := \{y + zx : y, z \in \mathbb{Z}\}$. Dann ist A_x dicht in $\mathbb{R}$.

§23 M5 Messbare Funktionen

Seien $(X,\mathfrak{A})$ ein Messraum, $\overline{A} := X \setminus A$ für $A \subset X$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}^n$ versehen mit der gewöhnlichen Topologie $\mathfrak{T}_{\mathbb{R}}$ bzw. $\mathfrak{T}_{\mathbb{R}^n}$ und $\mathfrak{B}_n := (\mathbb{R}^n, \mathfrak{T}_{\mathbb{R}^n})$ die von $\mathfrak{T}_{\mathbb{R}^n}$ erzeugte $\sigma-$Algebra der Borelschen Teilmengen von $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{T}_{\mathbb{R}^n})$.
$\mathfrak{T}_{\mathbb{R}}$ bzw. $\mathfrak{T}_{\mathbb{R}^n}$ ist die Menge der offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}^n$ und damit die Menge der Vereinigung von offenen Intervallen bzw. Kugeln.

Weiter seien $\widetilde{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ und $\widetilde{\mathfrak{B}}_1 := {}^B\left(\mathfrak{B}_1 \cup \{\{-\infty\},\{+\infty\}\}\right)$ die $\sigma-$Algebra der Borelschen Teilmengen von $\widetilde{\mathbb{R}}$ (z.B. aufgefasst als Zweipunktkompaktifizierung).
Erinnerung: (§19 M1)

1) $\varphi : (X,\mathfrak{A}) \to (Y,\mathfrak{B})$ messbar: $\Leftrightarrow$ $\varphi^{-1}(\mathfrak{B}) := \left\{\varphi^{-1}(B) : B \in \mathfrak{B}\right\} \subset \mathfrak{A}$
2) $\varphi : (X,\mathfrak{A}) \to (Y,\mathfrak{B})$ und $\psi : (Y,\mathfrak{B}) \to (Z,\mathfrak{C})$ messbar $\Rightarrow$ $\psi \circ \varphi : (X,\mathfrak{A}) \to (Z,\mathfrak{C})$ messbar
3) Sei $\varphi : X \to Y$ eine Abbildung und $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{P}(Y)$. Nach Lemma 1, §19 M1:
$\sigma(\varphi^{-1}(\mathfrak{E})) = \varphi^{-1}({}^{\sigma}\mathfrak{E})$

Definition:

a) Eine messbare Abbildung $f : (X,\mathfrak{A}) \to (\mathbb{R},\mathfrak{B}_1)$ heißt messbare (reelle) Funktion. Wir schreiben dann kürzer: $f : (X,\mathfrak{A}) \to \mathbb{R}$ messbar.
b) Eine messbare Abbildung $f : (X,\mathfrak{A}) \to (\widetilde{\mathbb{R}},\widetilde{\mathfrak{B}}_1)$ heißt messbare numerische Funktion. Wir schreiben dann kürzer: $f : (X,\mathfrak{A}) \to \widetilde{\mathbb{R}}$ messbar.
c) Sei $B \in \mathfrak{P}(X)$. Die Abbildung $1_B : X \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto 1_B(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in B \\ 0 & \text{für } x \notin B \end{cases}$
heißt die Indikatorfunktion der Menge B.

Bemerkung 1:

Seien $A, B, A_i \in \mathfrak{P}(X)$. Dann gilt:

1) $A \subset B \Leftrightarrow 1_A \le 1_B$ 2) $1_{X \setminus A} = 1 - 1_A$
3) $1_{\bigcup_{i\in I} A_i} = \sup_{i\in I} 1_{A_i}$ 4) $1_{\bigcap_{i\in I} A_i} = \inf_{i\in I} 1_{A_i}$
5) $1_A^{-1}(\mathfrak{B}_1) = \left\{\varnothing, A, \overline{A}, X\right\}$ 6) $1_A : (X,\mathfrak{A}) \to (\mathbb{R},\mathfrak{B}_1)$ messbar $\Leftrightarrow$ $A \in \mathfrak{A}$

Bemerkung 2:

Folgende Aussagen sind äquivalent:

1) $f:(X,\mathfrak{A})\to \overset{(\sim)}{\mathbb{R}}$ ist eine messbare (numerische) Funktion
2) $\{x\in X : f(x)\geq \alpha\}\in\mathfrak{A} \quad \forall \alpha\in\mathbb{R}$
3) $\{x\in X : f(x)> \alpha\}\in\mathfrak{A} \quad \forall \alpha\in\mathbb{R}$
4) $\{x\in X : f(x)\leq \alpha\}\in\mathfrak{A} \quad \forall \alpha\in\mathbb{R}$
5) $\{x\in X : f(x)< \alpha\}\in\mathfrak{A} \quad \forall \alpha\in\mathbb{R}$

Satz 1:

Seien $f,g:(X,\mathfrak{A})\to\widetilde{\mathbb{R}}$ messbare numerische Funktionen und $\alpha\in\mathbb{R}$. Dann:

a) $\{x\in X : f(x)\geq g(x)\}\in\mathfrak{A}$
$\{x\in X : f(x)> g(x)\}\in\mathfrak{A}$
$\{x\in X : f(x)= g(x)\}\in\mathfrak{A}$
$\{x\in X : f(x)\neq g(x)\}\in\mathfrak{A}$

b) Falls die numerischen Funktionen $f+g,\ f-g,\ \alpha f,\ f\cdot g,\ \dfrac{f}{g}$

(punktweise definiert; z.B. mit den Konventionen $\dfrac{1}{\infty}:=0=:\dfrac{1}{-\infty},\ 0\cdot(\pm\infty):=0,\ \dfrac{1}{0}:=\infty$)

wohldefiniert sind, sind auch diese messbare numerische Funktionen.

Anmerkung:

Sei $\mathfrak{F}(X,\mathfrak{A})$ die Menge der reellen messbaren Funktionen $f:(X,\mathfrak{A})\to\mathbb{R}$.
Versehen mit der punktweisen Addition und der punktweisen Skalarenmultiplikation ist $\mathfrak{F}(X,\mathfrak{A})$ ein reeller Vektorraum.

Satz 2:

Sei $(f_n : n\in\mathbb{N})$ eine Folge messbarer numerischer Funktionen $f_n:(X,\mathfrak{A})\to\widetilde{\mathbb{R}}$.
Dann sind auch die (punktweise definierten) numerischen Funktionen
$\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n,\ \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n,\ \limsup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ und $\liminf\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ messbare numerische Funktionen auf $(X,\mathfrak{A})$.
Existiert $\lim\limits_{n\in\mathbb{N}}$ in $\widetilde{\mathbb{R}}$ für jedes $x\in X$, so ist auch diese Funktion messbar.

Warnung: Dies braucht nicht bei überabzählbaren Familien $(f_i : i\in I)$ zu gelten.
Beispiel: $X:=[0,1]$; $\mathfrak{A}:=\{A\subset X : A \text{ oder } X\setminus A \text{ abzählbar}\}$
$1_{\{x\}}:(X,\mathfrak{A})\to\mathbb{R}$ messbar für alle $x\in X$. Aber: $\sup\limits_{x\in[0,1/2]} 1_{\{x\}}=1_{[0,1/2]}$ nicht messbar.

Anmerkung und Definition:

$\mathfrak{F}(X,\mathfrak{A})$ ist ein Vektorverband, d.h. mit $f,g \in \mathfrak{F}(X,\mathfrak{A})$ ist auch $\sup(f,g)$ und $\inf(f,g)$ in $\mathfrak{F}(X,\mathfrak{A})$.
$f^+ := \sup(f,0)$ Positivteil, $f^- := -\inf(f,0)$ Negativteil und $|f| := f^+ + f^-$ Betrag von f.
f messbar $\Rightarrow f^+, f^-, |f|$ messbar.

Warnung: Mit $|f|$ braucht nicht auch f messbar zu sein.

Satz 3:

Sei $(f_n : n \in \mathbb{N})$ eine Folge messbarer numerischer Funktionen $f_n : (X,\mathfrak{A}) \to \mathbb{R}$.
Dann gilt:
$\{x \in X : \lim f_n(x) = +\infty\} \in \mathfrak{A}$
$\{x \in X : \lim f_n(x) = -\infty\} \in \mathfrak{A}$
$\{x \in X : \lim f_n(x) \text{ existiert in } \mathbb{R}\} \in \mathfrak{A}$
$\{x \in X : \lim f_n(x) \text{ existiert nicht in } \mathbb{R}\} \in \mathfrak{A}$
$\{x \in X : \lim f_n(x) \text{ existiert in } \widetilde{\mathbb{R}}\} \in \mathfrak{A}$
$\{x \in X : \lim f_n(x) \text{ existiert nicht in } \widetilde{\mathbb{R}}\} \in \mathfrak{A}$

Bezeichnung:

$\{f > \alpha\} := \{x \in X : f(x) > \alpha\}$, $\{f \neq g\} := \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$, $\{f \in B\} := \{x \in X : f(x) \in B\}$ etc.

Satz 4:

Sei $f : (X,\mathfrak{A}) \to \widetilde{\mathbb{R}}$ eine messbare numerische Funktion. Dann gilt:
a) Punktweise Approximation durch endliche Treppenfunktionen:
Bei $f_n := -n\, 1_{\{f<-n\}} + R_n^- + R_n^+ + n\, 1_{\{n \le f\}}$ mit

$$R_n^- := \sum_{k=1}^{n\,2^n} -\frac{k}{2^n}\, 1_{\{-k/2^n \le f < -(k-1)/2^n\}}$$

$$R_n^+ := \sum_{k=1}^{n\,2^n} \frac{k-1}{2^n}\, 1_{\{(k-1)/2^n \le f < k/2^n\}}$$

gilt: $\lim_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) = f(x)\ \ \forall x \in X$ und $f_n(X) \subset \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}$.
Ist $f(X) \subset \widetilde{\mathbb{R}}_0^+$, so gilt $f_n(x) \le f_{n+1}(x) \le f(x)\ \forall x \in X\ \ \forall n \in \mathbb{N}$.
Ist f beschränkt, so gilt $\lim_{n\in\mathbb{N}} \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| = 0$

b) Gleichmäßige Approximation durch unendliche Treppenfunktionen:

Bei $g_n := -\infty\, 1_{\{f=-\infty\}} + R^-_{n,\infty} + R^+_{n,\infty} + \infty\, 1_{\{f=+\infty\}}$ mit

$$R^-_{n,\infty} := \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{k}{2^n}\, 1_{\{-k/2^n \le f < -(k-1)/2^n\}}$$

$$R^+_{n,\infty} := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{2^n}\, 1_{\{(k-1)/2^n \le f < k/2^n\}}$$

gilt: $\lim\limits_{n\in\mathbb{N}} \sup\limits_{x\in X} \left|g_n(x) - f(x)\right| = 0$ und

$$g_n(x) \le g_{n+1}(x) \le f(x)\ \forall x \in X\ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ist $f(X) \subset \mathbb{R}$, so ist auch $g_n(x) \subset \mathbb{R}$.

§24 M6 Das μ - Integral

a) Das μ - Integral von elementaren Funktionen

Seien X eine Menge, $\mathfrak{A}$ eine Mengenalgebra über X und $\mu|\mathfrak{A}$ ein Inhalt.

Definition:

a) Bei $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha_i \in \mathbb{R}$ und $A_i \in \mathfrak{A}$ für $i = 1,...,n$ heißt die Abbildung

$u : X \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto u(x) := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i}(x)$

eine elementare Funktion (Treppenfunktion) auf $(X, \mathfrak{A})$.

b) Bei u wie in a) mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$ und $X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ heißt u eine

eine elementare Funktion in Normalform.

c) $\mathcal{E} := \mathcal{E}(X, \mathfrak{A}) :=$ Menge der elementaren Funktion auf $(X, \mathfrak{A})$.

d) $\mathcal{E}^+ := \mathcal{E}^+(X, \mathfrak{A}) := \{u \in \mathcal{E}(X, \mathfrak{A}) : u \geq 0\}$

Beispiele a.1:

1) $X := [0,1]$ und $\mathfrak{A} := \mathfrak{B}_1 \cap [0,1] := \{B \cap [0,1] : B \in \mathfrak{B}_1\}$

$u : X \to \mathbb{R}$ mit $u(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$v(x) := 1_{\mathbb{Q} \cap [0,1]} + 0 \cdot 1_{[0,1] \setminus \mathbb{Q}}$ Normalform von u; u und v elementare Funktionen.

2) X und $\mathfrak{A}$ wie oben. $v : X \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto v(x) := x$ ist keine elementare Funktion.

Anmerkung a.1:

1) $u \in \mathcal{E}(X, \mathfrak{A}) \Rightarrow u(X)$ endlich und $u(x) = \sum_{\alpha \in u(X)} \alpha 1_{\{u=\alpha\}}$ Normalform.

2) $(X, \mathfrak{A})$ Messraum, also $\mathfrak{A}$ eine $\sigma-$Algebra. $u \in (X, \mathfrak{A}) \Rightarrow u \in \mathfrak{F}(X, \mathfrak{A})$

Menge der messbaren reellen Funktionen auf $(X, \mathfrak{A})$.

Bemerkung a.1:

Seien $u, v \in \mathcal{E}(X, \mathfrak{A})$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

1) $\alpha \cdot u \in \mathcal{E}(X, \mathfrak{A})$ 2) $u + v \in \mathcal{E}(X, \mathfrak{A})$

3) $u \cdot v \in \mathcal{E}(X, \mathfrak{A})$

4) $\sup(u, v) \in \mathcal{E}(X, \mathfrak{A})$ 5) $\inf(u, v) \in \mathcal{E}(X, \mathfrak{A})$

6) $u^+ := \sup(u, 0)$, $u^- := -\inf(u, 0)$, $|u| := u^+ + u^- \in \mathcal{E}(X, \mathfrak{A})$

Bemerkung a.1*:

Mit der punktweisen Skalarenmultiplikation, Addition und Halbordnung ist $\mathcal{E}(X,\mathfrak{A})$ ein $\mathbb{R}$-linearer Vektorverband.

Bemerkung a.2:

Für zwei Normalformen $u=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i 1_{A_i}=\sum_{j=1}^{n}\beta_j 1_{B_j}$ einer elementaren Funktion $u\in\mathcal{E}^+(X,\mathfrak{A})$ gilt: $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\mu(A_i)=\sum_{j=1}^{n}\beta_j\mu(B_j)$

Definition:

a) Für $u\in\mathcal{E}^+(X,\mathfrak{A})$ in der Normalform $u=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i 1_{A_i}$ heißt

$\int_X u\,d\mu:=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\mu(A_i)$ das $\mu-$Integral von u über X.

b) Bei $u\in\mathcal{E}(X,\mathfrak{A})$ mit $\int_X u^+\,d\mu<\infty$ und $\int_X u^-\,d\mu<\infty$ heißt u μ-integrabel

und $\int_X u\,d\mu:=\int_X u^+\,d\mu-\int_X u^-\,d\mu$ das $\mu-$Integral von u über X.

c) $\mathcal{I}(X,\mathfrak{A},\mu):=\{u\in\mathcal{E}(X,\mathfrak{A}):u \text{ ist } \mu-\text{integrabel}\}$

Bemerkung a.3:

Seien $u,v\in\mathcal{E}^+(X,\mathfrak{A})$, $\alpha\in\mathbb{R}_0^+$ und $A\in\mathfrak{A}$. Dann gilt:

1) $\int_X 1_A\,d\mu=\mu(A)$ und 1_A ist genau dann $\mu-$integrabel, wenn $\mu(A)<\infty$

2) $\int_X \alpha\,u\,d\mu=\alpha\int_X u\,d\mu$

3) $\int_X (u+v)\,d\mu=\int_X u\,d\mu+\int_X v\,d\mu$

4) $u\le v \;\Rightarrow\; \int_X u\,d\mu\le\int_X v\,d\mu$

Bemerkung a.3.1:

Ist $u=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i 1_{A_i}$ eine beliebige Darstellung eines $u\in\mathcal{E}^+(X,\mathfrak{A})$, so gilt:

$\int_X u\,d\mu=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\mu(A_i)$

Bemerkung a.3*:

Mit der punktweisen Skalarenmultiplikation, Addition und Halbordnung ist $\mathcal{I}(X,\mathfrak{A},\mu)$ ein $\mathbb{R}$ - linearer Vektorverband.
Die Abbildung $I:\mathcal{I}(X,\mathfrak{A},\mu)\to\mathbb{R}$ mit $u\mapsto I(u):=\int_X u\ d\mu$ ist eine positive Linearform.

Bemerkung a.4:

Seien $(X,\mathfrak{A},\mu)$ ein Maßraum und $(X,\widetilde{\mathfrak{A}}^{\mu},\widetilde{\mu})$ seine Vervollständigung. Dann:
$\forall u\in\mathcal{I}(X,\widetilde{\mathfrak{A}}^{\mu},\widetilde{\mu})\ \exists\ u_1,u_2\in\mathcal{I}(X,\mathfrak{A},\mu)$ mit $u_1\le u\le u_2,\ \mu\left(\{u_1\ne u_2\}\right)=0$ und
$\int_X u_1\ d\mu=\int_X u\ d\widetilde{\mu}=\int_X u_2\ d\mu.$

b) Das μ-Integral nichtnegativer messbarer Funktionen

Sei $(X,\mathfrak{A},\mu)$ ein Maßraum. Es gelten die Konventionen:
$0\cdot(\pm\infty):=0;\quad \alpha+(\pm\infty):=\pm\infty\ \forall\alpha\in\mathbb{R};\ \alpha\cdot(\pm\infty):=\pm\infty\ \forall\alpha\in\mathbb{R}^+.$

Anmerkung b.1:

1) $(u_n:n\in\mathbb{N})$ Folge in $\mathcal{E}^+(X,\mathfrak{A})$ und $v\in\mathcal{E}^+(X,\mathfrak{A})$ mit $u_n\le v,$ so gilt:
$\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\int_X u_n\ d\mu\le\int_X v\ d\mu.$
2) Bei $u_n\in\mathcal{E}^+(X,\mathfrak{A})$ ist $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}u_n:(X,\mathfrak{A})\to\mathbb{R}_0^+$ messbar.
3) ...

Bemerkung b.1:

Sei $(u_n:n\in\mathbb{N})$ eine isotone Folge in $\mathcal{E}^+(X,\mathfrak{A})$. Dann gilt:
1) $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\int_X u_n\ d\mu=\lim\limits_{n\in\mathbb{N}}\int_X u_n\ d\mu$
2) Für $v\in\mathcal{E}^+(X,\mathfrak{A})$ mit $v\le\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}u_n$ gilt: $\int_X v\ d\mu\le\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\int_X u_n\ d\mu$
3) Für zwei isotone Folgen $(u_n:n\in\mathbb{N})$ und $(v_n:n\in\mathbb{N})$ in $\mathcal{E}^+(X,\mathfrak{A})$ mit
$\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}u_n\le\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}v_n$ gilt: $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\int_X u_n\ d\mu\le\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\int_X v_n\ d\mu.$

Anmerkung b.2:…

Definition:

$$\widetilde{\mathcal{E}}^{+*} := \widetilde{\mathcal{E}}^{+*}(X,\mathfrak{A};\widetilde{\mathbb{R}}) := \left\{\sup u_n : u_n \in \mathcal{E}^{+}(X,\mathfrak{A}) \text{ mit } u_n \le u_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}\right\}$$

$$\widetilde{\mathfrak{F}}^{+} := \mathfrak{F}^{+}(X,\mathfrak{A};\widetilde{\mathbb{R}}) := \left\{ f : (X,\mathfrak{A}) \to \mathbb{R}_0^+ \text{ messbar}\right\}$$

Anmerkung b.3:

1) $\mathcal{E}^{+*}(X,\mathfrak{A};\widetilde{\mathbb{R}}) = \mathfrak{F}^{+}(X,\mathfrak{A};\widetilde{\mathbb{R}}) \supset \mathcal{E}^{+}(X,\mathfrak{A})$

2) Bei $u_n \in \mathcal{E}^{+*}(X,\mathfrak{A};\widetilde{\mathbb{R}})$ ist $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n \in \mathcal{E}^{+*}(X,\mathfrak{A};\widetilde{\mathbb{R}})$

Definition:

Für $f \in \mathcal{E}^{+*}(X,\mathfrak{A};\widetilde{\mathbb{R}})$ mit $f = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ bei $u_n \in \mathcal{E}^{+}(X,\mathfrak{A})$ bei $u_n \le u_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

heißt $\int_X f \ d\mu := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \int_X u_n \ d\mu$ das $\mu-$Integral von f über X.

Bemerkung b.2:

Für $f,g \in \mathcal{E}^{+*}(X,\mathfrak{A};\widetilde{\mathbb{R}})$ und $\alpha \in \mathbb{R}_0^+$ gilt:

1) $\alpha f \in \mathcal{E}^{+*}(X,\mathfrak{A};\widetilde{\mathbb{R}})$ 2) $f+g \in \mathcal{E}^{+*}(X,\mathfrak{A};\widetilde{\mathbb{R}})$

3) $\sup(f,g) \in \mathcal{E}^{+*}(X,\mathfrak{A};\widetilde{\mathbb{R}})$ 4) $\inf(f,g) \in \mathcal{E}^{+*}(X,\mathfrak{A};\widetilde{\mathbb{R}})$

Bemerkung b.3:

Für $f,g \in \mathcal{E}^{+*}(X,\mathfrak{A};\widetilde{\mathbb{R}})$ und $\alpha \in \mathbb{R}_0^+$ gilt:

1) $\int_X \alpha f \ d\mu = \alpha \int_X f \ d\mu$

2) $\int_X (f+g) \ d\mu = \int_X f \ d\mu + \int_X g \ d\mu$

3) $f \le g \ \Rightarrow \int_X f \ d\mu \le \int_X g \ d\mu$

Bemerkung b.3*:

Die Abbildung $I^* : \mathcal{E}^{+*}(X,\mathfrak{A};\widetilde{\mathbb{R}}) \to \widetilde{\mathbb{R}}$ mit $f \mapsto I^*(f) := \int_X f \ d\mu$ ist positiv-homogen, additiv und isoton.

Satz b.1: (isotone Konvergenz I; B.Levi)

Sei $\left(f_n : n \in \mathbb{N}\right)$ eine Folge in $\mathcal{E}^{+*}(X,\mathfrak{A};\widetilde{\mathbb{R}})$ mit $f_n \le f_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\int_X \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \ d\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n \ d\mu$$

Anmerkung: hier ist $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n = \lim_{n\in\mathbb{N}} f_n$

Warnung:

$f_n \geq f_{n+1} \not\Rightarrow \int_X \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n \, d\mu = \inf_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n \, d\mu$

Beispiel: $X := \mathbb{N}$, $\mathfrak{A} := \mathfrak{P}(\mathbb{N})$, $\mu \,|\, \mathfrak{P}(\mathbb{N}) :=$ Zählmaß; $f_n := 1_{\{m\in\mathbb{N}:m\geq n\}} \geq f_{n+1} \to f \equiv 0$

$\int_X f_n \, d\mu = \mu\big(\{m \in \mathbb{N} : m \geq n\}\big) = +\infty$, aber $\int_X \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu = 0$

Folgerung b.1.1:

Sei $\big(f_n : n \in \mathbb{N}\big)$ eine Folge in $\mathcal{E}^{+*}(X, \mathfrak{A}; \widetilde{\mathbb{R}})$. Dann gilt:

$\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n \, d\mu = \int_X \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \, d\mu$

c) Die μ-Integrierbarkeit und elementare Eigenschaften des μ-Integrals

Sei $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum. Sei $f : X \to \widetilde{\mathbb{R}}$ eine numerische Funktion. Dann heißt
$f^+ := \sup(0, f)$ der Positivteil,
$f^- := -\inf(f, 0) = (-f)^+$ der Negativteil und
$|f| := f^+ + f^-$ der Betrag von f.
Es ist $f^+ \geq 0$, $f^- \geq 0$ und $f = f^+ - f^-$. Für $f \geq 0$ ist $f^+ = f$ und $f^- = 0$.

Definition:

a) Eine messbare numerische Funktion $f : (X, \mathfrak{A}) \to \widetilde{\mathbb{R}}$ heißt μ-integrierbar (μ-integrabel), wenn gilt: $\int_X f^+ \, d\mu < \infty$ <u>und</u> $\int_X f^- \, d\mu < \infty$.

b) Eine messbare numerische Funktion $f : (X, \mathfrak{A}) \to \widetilde{\mathbb{R}}$ heißt μ-quasi-integrierbar, wenn gilt: $\int_X f^+ \, d\mu < \infty$ <u>oder</u> $\int_X f^- \, d\mu < \infty$.

c) Ist f μ-integrierbar oder μ-quasi-integrierbar, so heißt:
$\int_X f \, d\mu := \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu$ das μ-Integral von f über X
(gegebenenfalls mit $(+\infty) - \alpha := +\infty$ und $\alpha - (+\infty) := -\infty$ für $\alpha \in \mathbb{R}$).
Wir sagen, dass das μ-Integral eigentlich bzw. uneigentlich existiert, wenn $\int_X f \, d\mu \in \mathbb{R}$ bzw. $\int_X f \, d\mu \in \{-\infty, +\infty\}$ ist.
Andere Schreibweise: $\int_X f(x) \, \mu(dx) := \int_X f \, d\mu$

d) $\mathfrak{L}_1 := \mathfrak{L}_1(\mu) := \mathfrak{L}_1(X, \mathfrak{A}, \mu) := \{ f : (X, \mathfrak{A}) \to \mathbb{R} \;\; \mu\text{-integrierbar} \}$

Satz c.1:

Sei $f:(X,\mathfrak{A})\to\widetilde{\mathbb{R}}$ eine messbare numerische Funktion.
Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1) f ist μ-integrierbar
2) f^+ und f^- sind μ-integrierbar.
3) Es existieren μ-integrierbare numerische Funktionen $u,v\geq 0$ mit $f=u-v$
4) Es existiert eine μ-integrierbare Funktion g mit $|f|\leq g$.
5) $|f|$ ist μ-integrierbar.

Satz c.2:

Seien $f,g:(X,\mathfrak{A})\to\widetilde{\mathbb{R}}$ μ-integrierbare messbare numerische Funktionen und $\alpha\in\mathbb{R}$. Dann:

1) αf, $\sup(f,g)$, $\inf(f,g)$ und $f+g$ (falls definiert; eventuell mit Konvention) sind μ-integrierbar.
2) $\int_X \alpha f\ d\mu=\alpha\int_X f\ d\mu$
3) $\int_X (f+g)\ d\mu=\int_X f\ d\mu+\int_X g\ d\mu$
4) $f\leq g\ \Rightarrow\ \int_X f\ d\mu\leq\int_X g\ d\mu$
5) $\left|\int_X f\ d\mu\right|\leq\int_X |f|\ d\mu$

Satz c.2*:

Mit der punktweisen Skalarenmultiplikation, Addition und Halbordnung ist $\mathfrak{L}_1(X,\mu,\mathfrak{A})$ ein $\mathbb{R}$ - linearer Vektorverband.
Die Abbildung $I_\mu:\mathfrak{L}_1(X,\mathfrak{A},\mu)\to\mathbb{R}$ mit $f\mapsto I_\mu(f):=\int_X f\ d\mu$ ist eine positive (d.h. isotone) Linearform.

Bemerkung c.1: Ist $f:(X,\mathfrak{A})\to\widetilde{\mathbb{R}}$ μ-integrierbar, so gilt $\mu\left(\{|f|=\infty\}\right)=0$.

Definition:

Seien $f:(X,\mathfrak{A})\to\widetilde{\mathbb{R}}$ eine messbare numerische Funktion und $A\in\mathfrak{A}$.
f heißt μ-integrierbar über A bzw. μ-quasiintegrierbar über A, wenn $1_A f$ μ-integrierbar bzw. μ-quasiintegrierbar ist. Dann sei $\int_A f\ d\mu:=\int_X 1_A f\ d\mu$.

Anmerkung: ....

Bemerkung c.2:

Bei $n \in \mathbb{N}$ und $A_i \in \mathfrak{A}$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$ gilt für $B := \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

und μ-quasi-integrierbares f: $\int_B f \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} f \, d\mu$

Definition:

Eine durch eine Menge $A \in \mathfrak{A}$ beschriebene Eigenschaft P gilt μ-fast überall (kurz: μ-f.ü.), wenn $\mu(X \setminus A) = 0$ gilt.
Eine Eigenschaft P ist durch A beschreibbar, wenn $A = \{x \in X : P(x) \text{ ist wahr}\}$.

Bemerkung c.3:

Seien $f, g : (X, \mathfrak{A}) \to \widetilde{\mathbb{R}}$ messbare numerische Funktionen und $A \in \mathfrak{A}$. Dann:

a) Bei $f = g$ μ-fast überall ist f genau dann μ-(quasi-)-integrierbar über A, wenn g μ-(quasi-)-integrierbar über A ist.
Im Falle der Existenz gilt dann: $\int_A f \, d\mu = \int_A g \, d\mu$

b) Bei $f \leq g$ μ-fast überall gilt für μ-quasi-integrierbares f und g:
$\int_A f \, d\mu \leq \int_A g \, d\mu$

c) Ist g μ-integrierbar über A und $|f| \leq g$ μ-fast überall, so ist auch f μ-integrierbar über A und $\int_A f \, d\mu \leq \int_A g \, d\mu$.

Bemerkung c.4:

Seien $f, g : (X, \mathfrak{A}) \to \widetilde{\mathbb{R}}$ messbare numerische Funktionen und $A \in \mathfrak{A}$. Dann:

a) $f = 0$ μ-fast überall $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ $\int_X f \, d\mu = 0$

b) Bei $f \geq 0$ μ-fast überall gilt: $\int_X f \, d\mu = 0 \Rightarrow f = 0$ μ-f.ü.

c) $f = 0$ μ-f.ü. $\Leftrightarrow$ $\int_A f \, d\mu = 0 \; \forall A \in \mathfrak{A}$

d) Sind f und g μ-integrierbar, so gilt:
$f = g$ μ-f.ü. $\Leftrightarrow$ $\int_A f \, d\mu = \int_A g \, d\mu \; \forall A \in \mathfrak{A}$.

e) Sind f und g μ-quasi-integrierbar und gilt $\int_A f \, d\mu = \int_A g \, d\mu \; \forall A \in \mathfrak{A}$, so braucht nicht $f = g$ μ-f.ü. zu gelten.

Bemerkung c.5:

Sei f μ-integrierbar und $A := \{x \in X : f(x) \neq 0\}$. Dann ist das Maß $\mu_A : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}_0^+$ mit $B \mapsto \mu_A(B) := \mu(A \cap B)$ $\sigma-$finit.

§25 Zu M6, §24: §24.d Bildmaße und Integraltransformationen

Seien $(X, \mathfrak{A})$ und $(Y, \mathfrak{B})$ Messräume und $T : (X, \mathfrak{A}) \to (Y, \mathfrak{B})$ eine messbare Abbildung.

d) Bildmaße und Einschränkungen von Maßen.

Bemerkung d.1:

Sei $\mu : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}_0^+$ ein Maß. Dann ist auch $\mu \circ T^{-1} : \mathfrak{B} \to \mathbb{R}_0^+$ mit $B \mapsto \mu \circ T^{-1}(B) := \mu(T^{-1}(B))$ ein Maß. Ist $\mu : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}_0^+$ $\sigma-$finit, so braucht $\mu \circ T^{-1} : \mathfrak{B} \to \mathbb{R}_0^+$ nicht auch $\sigma-$finit zu sein.

Definition:

In der Situation von Bemerkung d.1 heißt $\mu \circ T^{-1} : \mathfrak{B} \to \mathbb{R}_0^+$ das Bildmaß von μ bezüglich T.

Satz d.1: (Integraltransformationssatz)

Seien $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, $T : (X, \mathfrak{A}) \to (Y, \mathfrak{B})$ eine messbare Abbildung und $f : (Y, \mathfrak{B}) \to \widetilde{\mathbb{R}}$ eine messbare numerische Funktion. Dann gilt:

a) Ist f nichtnegativ, so gilt: $\int_B f \; d\mu \circ T^{-1} = \int_{T^{-1}(B)} f \circ T \; d\mu \quad \forall B \in \mathfrak{B}$.

b) f ist genau dann $\mu \circ T^{-1}$ integrierbar, wenn $f \circ T$ μ-integrierbar ist.
Ist dies der Fall, so gilt: $\int_B f \; d\mu \circ T^{-1} = \int_{T^{-1}(B)} f \circ T \; d\mu \quad \forall B \in \mathfrak{B}$.

§26 M7 Integralkonvergenzsätze (Teil 1)

Seien $(X,\mathfrak{A},\mu)$ ein Maßraum und $f_n, f, h : (X,\mathfrak{A}) \to \widetilde{\mathbb{R}}$ messbare numerische Funktionen.

Frage: Wann folgt aus " $f_n \to f$ " auch $\int_X f_n \, d\mu \to \int_X f \, d\mu$?

Beispiel 1:

$X := \mathbb{N}$, $\mathfrak{A} := \mathfrak{P}(\mathbb{N})$, $\mu \,|\, \mathfrak{A}$ mit $\mu(\{x\}) := 2^{-x} \quad \forall x \in X$.

Es ist $\mu(X) \underset{\text{geometr.Reihe}}{=} 1$ (normiertes Maß). Sei $f_n := 2^n \, 1_{\{n\}}$ und $f \equiv 0$;

$f_n(x) \xrightarrow{pktw.} f(x) = 0 \quad \forall x \in X$, aber $\int_X f_n \, d\mu = 2^n \cdot \mu(\{n\}) = 1 \not\longrightarrow \int_X f \, d\mu = 0$

Bemerkung:

Seien $(X,\mathfrak{A},\mu)$ ein finiter Maßraum (d.h. $\mu(X) < \infty$) und $(f_n : n \in \mathbb{N})$ eine gleichmäßig gegen f konvergente Folge von μ-integrierbaren Funktionen f_n.
Dann ist auch f μ-integrierbar und $\lim\limits_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$.

Warnung:

Ist $(X,\mathfrak{A},\mu)$ nicht finit, so gilt die Behauptung aus Bemerkung 1 i.A. nicht.

Beispiel 2:

a) $X := \mathbb{N}$, $\mathfrak{A} := \mathfrak{P}(\mathbb{N})$ und $\mu|\mathfrak{A}$ mit $\mu(\{x\}) := 2^{+x} \quad \forall x \in X$.

$g_n := 1_{\{n\}}$; $f_n := \sum\limits_{\nu=1}^{n} 2^{-\nu} g_\nu$ und $f := \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} g_n \cdot 2^{-n}$; $0 \le f_n \in \mathcal{E}^+(X,\mathfrak{A})$ und $f = \lim\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$

$0 \le \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} |g_n| < \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} < \infty \;\Rightarrow f_n \xrightarrow{glm.} f$

aber: $\int_X f_n \, d\mu = \sum\limits_{\nu=1}^{n} \int_X 2^{-\nu} g_\nu \, d\mu = n$ und $\int_X f \, d\mu = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n \, d\mu = +\infty$

b) $X := \mathbb{N}$, $\mathfrak{A} := \mathfrak{P}(\mathbb{N})$ und $\mu|\mathfrak{A}$ Zählmaß, $f_n := \dfrac{1}{n} \, 1_{\mathbb{N}}$, $f := 0$; $f_n \xrightarrow{glm.} f$

aber: $\int_X f_n \, d\mu = +\infty \not\longrightarrow \int_X f \, d\mu = 0$.

genauso bei $g_n := \dfrac{1}{n} \cdot 1_{\{1,\ldots,n\}}$

Anmerkung: ...

Satz 1: (monotone Konvergenz; B.Levi)

Es konvergiere die Folge $(f_n : n \in \mathbb{N})$ $\mu-$fast überall gegen f bei $f_n \leq f_{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$ und es existiere ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\int_X f_k^- \, d\mu < \infty$.

Dann gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$

Warnung:
"isoton" ist wesentlich; bei antitoner Folge braucht die Aussage des Satzes nicht zu gelten.

Folgerung 1.1:

Bei $f_n \geq 0$ μ-fast überall für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\int_X \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \, d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n \, d\mu.$$

Folgerung 1.2:

Seien $f \geq 0$ μ-f.ü., $A_n \in \mathfrak{A}$ mit $A_n \cap A_m$ für $n \neq m$ und $A := \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$

Dann gilt: $\int_A f \, d\mu = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \int_{A_n} f \, d\mu.$

Lemma von Fatou:

Bei $f_n \geq 0$ μ-f.ü. $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Satz 2: (majorisierte Konvergenz I, Lebesgue)

Es existiere ein $\mu-$integrierbares h mit $|f_n| \leq h$ μ-f.ü. $\forall n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

a) $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n$ und $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n$ sind μ-integrierbar.

b) $\int_X \liminf\limits_{n\to\infty} f_n \, d\mu \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu \leq \limsup\limits_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu \leq \int_X \limsup\limits_{n\to\infty} f_n \, d\mu.$

c) Es konvergiere die Folge $(f_n : n \in \mathbb{N})$ μ-fast überall gegen f
[oder nach Maß μ-($n.M.i.$) für $i \in \{1,2,3\}$].
Dann ist f μ-integrierbar und $\lim\limits_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$

Anmerkung: ...

Warnung: "$|f_n| \leq h$" und "h μ-integrierbar" sind wesentlich.

Folgerung 2.1:

Seien f μ-integrierbar, $A_n \in \mathfrak{A}$ mit $A_n \cap A_m$ für $n \neq m$ und $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Dann gilt: $\int_A f \; d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{A_n} f_n \; d\mu.$

Folgerung 2.2:

Sei $\sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n|$ μ-integrierbar (d.h. wegen Folgerung 1.1 $\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_X |f_n| \; d\mu < \infty$).

Dann ist auch $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ μ-integrierbar und $\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n \; d\mu = \int_X \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \; d\mu.$

Bemerkung 2: **(σ – Additivität des μ-Integrals)**

Seien f μ-quasi-integrierbar, $A_n \in \mathfrak{A}$ mit $A_n \cap A_m$ für $n \neq m$ und $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Dann gilt: $\int_A f \; d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{A_n} f_n \; d\mu.$

Folgerung 2.3: (Stetigkeit des Parameterintegrals)

Sei T eine Menge mit Folgenkonvergenz und $t_0 \in T$.
Weiter sei $f : X \times T \to \mathbb{R}$ bei $(x,t) \mapsto f(x,t)$ eine Abbildung mit

i) $f(\cdot,t) : (X, \mathfrak{A}) \to \mathbb{R}$ messbar $\forall t \in T$
ii) $\exists\, g \in \mathfrak{L}_1(X, \mathfrak{A}, \mu)$ mit $|f(\cdot,t)| \leq g$ μ-f.ü. $\forall t \in T$
iii) $\exists\, N \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(N) = 0$, so dass $f(x,\cdot) : T \to \mathbb{R}$ folgenstetig ist $\forall x \in X \setminus N$
Dann ist für jedes $A \in \mathfrak{A}$ die Abbildung
$I_A : T \to \mathbb{R}$ mit $t \mapsto I_A(t) := \int_A f(x,t) \; \mu(dx)$ folgenstetig in t_0.

Folgerung 2.4: (Vertauschbarkeit von Differentiation und Integration)

Seien $T \subset \mathbb{R}$ mit $t_0 \in T$ und $f : X \times T \to \mathbb{R}$ mit $(x,t) \to f(x,t)$ eine Abbildung mit

i) $f(\cdot,t) \in \mathfrak{L}_1(X,\mathfrak{A},\mu)\ \forall t \in T.$

ii) $\exists\, N \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(N) = 0,$ so dass $\dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)$ existiert $\forall x \in X \setminus N.$

iii) $\exists\, \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ und $\exists\, h \in \mathfrak{L}_1(X,\mathfrak{A},\mu)$ mit einer der beiden Eigenschaften:

(*) $\left|\dfrac{f(\cdot,t) - f(\cdot,t_0)}{t - t_0}\right| \le h$ μ-f.ü. $\forall t_0 \ne t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \cap T$

(**) $\exists\, \dfrac{\partial f}{\partial t}(\cdot,t)$ und $\left|\dfrac{\partial f}{\partial t}(\cdot,t)\right| \le h$ μ-f.ü. $\forall t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ und $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \subset T$

(d.h. T bei t_0 lokal ein Intervall).

Dann ist für jedes $A \in \mathfrak{A}$ die Abbildung

$\varphi_A : T \to \mathbb{R}$ mit $t \mapsto \varphi_A(t) := \int_A f(x,t)\ \mu(dx)$ in t_0 nach t differenzierbar

(gegebenfalls einseitig) und es gilt:

$$\frac{d}{dt}\int_A f(x,t_0)\ \mu(dx) = \int_A \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)\ \mu(dx)$$

Beispiel: für $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_0^1 f(x,t)\ dx \ne \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\ dx$

$X := [0,1],\ \mathfrak{A} := \mathfrak{B}_1 \cap [0,1],\ \mu = \lambda_{[0,1]}$ Lebesguesches Maß.

$f(x,t) := \dfrac{t^3}{x^2}\exp\left(-\dfrac{t^2}{x}\right)$ für $x \in (0,1]$ und $:= 0$ für $x = 0\ \forall t \in \mathbb{R}.$

Erfüllt *i)* und *ii)* von Folgerung 2.4:

i) $f(\cdot,t)\ \forall t \in \mathbb{R}$ integrierbar: $\varphi_X(t) = \displaystyle\int_0^1 f(x,t) = t\ \exp\left(-\frac{t^2}{x}\right)\Bigg]_0^1 = t\ \exp(-t^2)$

ii) $f(x,\cdot)\ \forall x \in [0,1]$ differenzierbar nach t:

Für $x \ne 0$: $\dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t) = \underbrace{\exp\left(-\dfrac{t^2}{x}\right)(3^{\frac{t^2}{x^2}} - 2^{-\frac{t^4}{x^3}})}_{\text{auf } [0,1] \text{ integrierbar}}$

Für $x = 0$: $\dfrac{\partial f}{\partial t}(0,t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$; auf $[0,1]$ integrierbar

φ_X auf $\mathbb{R}$ differenzierbar: $\dfrac{d\varphi_X}{dt}(t) = e^{-t^2}(1 - 2t^2)$

Aber: $\displaystyle\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(x,0)\ dx = \int_0^1 0\ dx = 0 \ne 1 = \frac{d\varphi_X}{dt}(0)$

§27 M8 $\mathfrak{L}_p$ – und L_p - Räume

Sei $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum.

Bemerkung 1:

Sei $f : (X, \mathfrak{A}) \to \widetilde{\mathbb{R}}$ eine messbare numerische Funktion und $p \in \mathbb{R}^+$. Dann gilt:

1) f^p und $|f|^p$ sind messbar; $|f|^p$ ist μ-quasi-integrierbar.

2) Ist f μ-integrierbar, so braucht $|f|^p$ und damit f^p nicht integrierbar zu sein.

Beispiel 1:

Sei $1 < p < \infty$, $X := \mathbb{N}$; $\mathfrak{A} := \mathfrak{P}(X)$; $\mu(\{n\}) := n^{-p-1}$; $f(n) = n$.

Dann: $\int_X |f| \, d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} n \cdot n^{-p-1} = \sum_{n \in \mathbb{N}} n^{-p} < \infty$, wg. $1 < p$.

Aber: $\int_X |f|^p \, d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} n^p \cdot n^{-p-1} = \sum_{n \in \mathbb{N}} n^{-1} = \infty$ (harmonische Reihe).

Definition:

Sei $f : (X, \mathfrak{A}) \to \mathbb{R}$ eine messbare numerische Funktion und $p \in \mathbb{R}$. Es sei

$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}$ bei $\infty^p := \infty$ und $\infty^{1/p} := \infty$.

Beispiel 2:

$p \in \mathbb{R}^+$. $X := \{1, 2\}$; $\mathfrak{A} := \mathfrak{P}(X)$; $\mu(\{1\}) = 0$, $\mu(\{2\}) = 1$

$f(x) := x$ und $g \equiv 2$. Dann: $\|f - g\|_p = 0$; aber: $f \neq g$

Satz 1:

Seien $f, g : (X, \mathfrak{A}) \to \mathbb{R}$ messbare numerische Funktionen und $p \in \mathbb{R}$.
Dann gilt:

a) $0 \leq \|f\|_p \leq \infty$

b) positiv homogen: $\|\alpha f\|_p = |\alpha| \cdot \|f\|_p \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

c) Höldersche Ungleichung:

Bei $1 < p < \infty$ und $q \in \mathbb{R}$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt:

$\|f \; g\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$

d) Minkowskische Ungleichung:

Bei $1 \le p < \infty$ und (μ-fast) überall definiertem $f+g$ gilt:

$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$

e) Seien $\|f\|_p < \infty$ und $\|g\|_p < \infty$. Bei $1 \le p < \infty$ gilt:

$\|\sup(f,g)\|_p < \infty$ und $\|\inf(f,g)\|_p < \infty$.

Insbesondere gilt: $\|f\|_p < \infty \Leftrightarrow \|f^+\|_p < \infty$ und $\|f^-\|_p < \infty$

Zusatz zu Satz 1:

Für $0 < p < 1$ und $q \in \mathbb{R}$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (und damit $q < 0$) gilt:

1) "umgedrehte Ungleichung von Hölder":

Für $f \in \mathfrak{L}_p^+(X, \mathfrak{A}, \mu) := \{h \in \mathfrak{L}_p(X, \mathfrak{A}, \mu) : h \ge 0 \ \mu\text{-f.ü.}\}$ und $g \in \mathfrak{L}_q^+(X, \mathfrak{A}, \mu)$

mit $\|g\|_q \ne 0$ gilt: $\|f\ g\|_1 \ge \|f\|_p \|g\|_q$

2) "umgedrehte Ungleichung von Minkowski":

Für $f \in \mathfrak{L}_p^+(X, \mathfrak{A}, \mu)$ und $q \in \mathfrak{L}_p^+(X, \mathfrak{A}, \mu)$ gilt:

$\|f+g\| \ge \|f\|_p + \|g\|_p$

Definition 2:

Sei $1 \le p \in \mathbb{R}^+$

a) Eine messbare Funktion $f : (X, \mathfrak{A}) \to \mathbb{R}$ mit $\|f\|_p < \infty$ heißt p-fach μ-integrierbar.

$\|f\|_p$ heißt "p-Norm" von f.

b) $\mathfrak{L}_p(X, \mathfrak{A}, \mu) := \mathfrak{L}_p(\mu) := \{f : (X, \mathfrak{A}) \to \mathbb{R} \ \ p\text{-fach } \mu\text{-integrierbar}\}$

Satz 1*:

Mit der punktweisen Skalarenmultiplikation und Addition und mit der Halbnorm $\|\cdot\|_p$ ist $\mathfrak{L}_p(X, \mathfrak{A}, \mu)$ für $1 \le p$ ein $\mathbb{R}$-linearer halbnormierter Vektorverband.

Definition 3:

a) Die Konvergenz in $\mathfrak{L}_p(X, \mathfrak{A}, \mu)$ heißt Konvergenz im p – ten Mittel.

b) Bei $p = 2$: $f \in \mathfrak{L}_2(X, \mathfrak{A}, \mu)$ heißt quadratisch integrierbar bezüglich μ.

Die Konvergenz heißt Quadratmittelkonvergenz.

Bemerkung 2:

1) Seien $p, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann gilt:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \;\Leftrightarrow\; p + q = pq \;\Leftrightarrow\; p = pq - q \;\Leftrightarrow\; (p-1)(q-1) = 1$$

2) Für $1 < p < \infty$ und $q \in \mathbb{R}^+$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ folgt:

$$\left\| f^{p-1} \right\|_q = \left(\left\| f^{q(p-1)} \right\|_1 \right)^{1/q} = \left(\left\| f^p \right\|_1 \right)^{1/q}$$

3) Bei $p = 2$ folgt $q = 2$ aus $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann: Hölder = Cauchy-Schwarz.

Satz 2:

a) Seien $1 < p < \infty$ und $q \in \mathbb{R}^+$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Bei $f \in \mathfrak{L}_p(X, \mathfrak{A}, \mu)$ und $g \in \mathfrak{L}_q(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ist $f \cdot g \in \mathfrak{L}_1(X, \mathfrak{A}, \mu)$

b) Bei $\mu(X) < \infty$ und $1 \le p \le r < \infty$ gilt:

$$\mathfrak{L}_1(X, \mathfrak{A}, \mu) \supset \mathfrak{L}_p(X, \mathfrak{A}, \mu) \supset \mathfrak{L}_r(X, \mathfrak{A}, \mu)$$

c) Seien $p \in \mathbb{R}^+$, $f \in \mathfrak{L}_p(X, \mathfrak{A}, \mu)$ und $g : (X, \mathfrak{A}) \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann ist $f \cdot g \in \mathfrak{L}_p(X, \mathfrak{A}, \mu)$.

Warnung:

Bei $\mu(X) = \infty$ und $1 \le p < \infty$ folgt im allgemeinen werder $\mathfrak{L}_1(\mu) \supset \mathfrak{L}_p(\mu)$ noch $\mathfrak{L}_1(\mu) \subset \mathfrak{L}_p(\mu)$.

Beispiel :

$$X := \mathbb{N};\; \mathfrak{A} := \mathfrak{P}(\mathbb{N});\; \mu(\{n\}) := \frac{1}{\sqrt{n}};\; f(n) = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Dann: $\int_X |f| \, d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} = +\infty;\; f \notin \mathfrak{L}_1(X, \mathfrak{A}, \mu)$

Aber: $\int_X |f|^p \, d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^p \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^{p+1} < \infty$ wg. $p > 1$ und $\frac{p+1}{2} > 1$.

Bemerkung 3:

Sei $\nu : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}_0^+$ ein weiteres Maß. Dann gilt: $\mathfrak{L}_1(\mu+\nu) = \mathfrak{L}_1(\mu) \cap \mathfrak{L}_1(\nu)$.

Satz 3: (majorisierte Konvergenz II, Lebesgue)

Seien $1 \le p < \infty$, $(f_n : n \in \mathbb{N})$ eine μ-fast-überall konvergente Folge von messbaren Funktionen $f_n : (X, \mathfrak{A}) \to \mathbb{R}$ und $g \in \mathfrak{L}_p(X, \mathfrak{A}, \mu)$ mit $|f_n| \le g$ μ-f.ü. $\forall n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

1) $f_n \in \mathfrak{L}_p(X, \mathfrak{A}, \mu)$ und $\exists\, f \in \mathfrak{L}_p(X, \mathfrak{A}, \mu)$ mit $f_n \to f$ μ-f.ü.
2) $\|f_n - f\|_p \to 0$ für $n \to \infty$.

Bemerkung 4:

Für $1 \le p < \infty$ und $0 \le g_n \in \mathfrak{L}_p(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ist $\left\| \sum_{n\in\mathbb{N}} g_n \right\|_p \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \|g_n\|_p$.

Satz 4: (Fischer – Riesz)

Seien $1 \le p < \infty$ und $(f_n : n \in \mathbb{N})$ eine Cauchyfolge in $\left(\mathfrak{L}_p(X, \mathfrak{A}, \mu), \|\cdot\|_p\right)$.
Dann gilt:

a) $\exists\, f \in \mathfrak{L}_p(X, \mathfrak{A}, \mu)$ mit $\|f_n - f\|_p \to 0$ für $n \to \infty$
b) $\exists$ Teilfolge $(f_m : m \in M)$ von $(f_n : n \in \mathbb{N})$ mit $f_m \xrightarrow[m\in M]{} f$ μ-f.ü.

Insbesondere ist $\left(\mathfrak{L}_p(X, \mathfrak{A}, \mu), \|\cdot\|_p\right)$ vollständig.

Warnung:

1) $\|f_n - f\|_p \to 0 \not\Rightarrow f_n \to f$ μ-f.ü.
2) $f_n \to f$ μ-f.ü. $\not\Rightarrow \|f_n - f\|_p \to 0$

Beispiele:

1) $X := [0,1]$; $\mathfrak{A} := \mathfrak{B}_1 \cap [0,1]$; $\mu := \lambda_{[0,1]}$; $f_n := 1_{A_n}$ (mit A_n wie in Zeichnung unten)

$\int_X f_n \, d\mu = \lambda(A_n) \to 0$

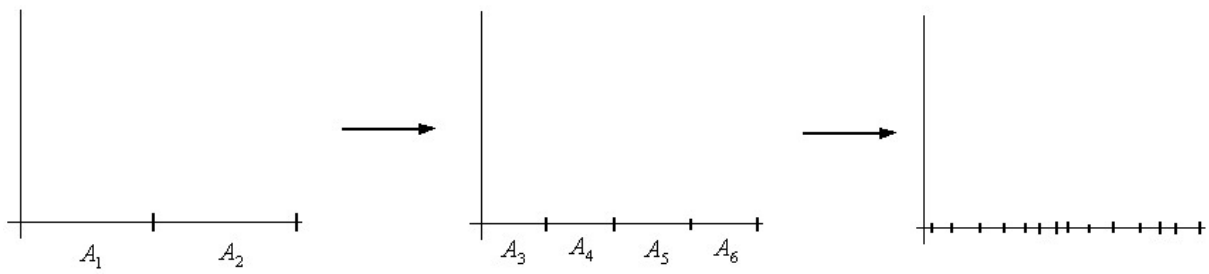
also (Stetigkeit der Wurzelfunktion): $\| f_n \|_p \to 0$

aber: $f_n \not\to f \equiv 0$.

2) $X, \mathfrak{A}, \mu$ wie oben, $f_n := n \cdot 1_{(0,1/n]}$; $f_n \to f \equiv 0$ (μ-f.ü.)

$\int_X f_n \, d\mu = 1 \; \forall n \in \mathbb{N}$, also: $\| f_n - f \|_p \not\to 0$.

Zeichnung:



Satz 5:

Seien $1 \le p < \infty$, $\mu(X) < \infty$ und $f_n, f \in \mathfrak{L}_p(X, \mathfrak{A}, \mu)$ mit $\| f_n - f \|_p \to 0$.

Dann gilt: $f_n, f \in \mathfrak{L}_1(X, \mathfrak{A}, \mu)$ und $\| f_n - f \|_1 \to 0$.

Warnung:

"$\mu(X) < \infty$" ist wesentlich in Satz 5. Beispiel !

§28 M9 Markov-Kerne und der verallgemeinerte Satz von Fubini

Seien $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen, $\widetilde{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ und $\mathfrak{B}$ (bzw. $\widetilde{\mathfrak{B}}$) die $\sigma-$Algebra der Borelschen Teilmengen von $\mathbb{R}$ bzw. $\widetilde{\mathbb{R}}$, welches die kleinste $\sigma-$Algebra ist, die alle offenen Intervalle enthält.

Weiter seien Ω eine nichtleere Menge, $\mathfrak{K}$ eine $\sigma-$Algebra auf Ω, $p : \mathfrak{K} \to [0,1]$ ein normiertes Maß.

Schließlich seine für $i = 1,2$:
Ω_i eine nichtleere Menge,
$pr_i : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \Omega_i$ mit $\omega := (\omega_1, \omega_2) \mapsto pr_i := \omega_i$ die kanonische Projektion von $\Omega_1 \times \Omega_2$ auf Ω_i,
$\mathfrak{K}_i$ eine $\sigma-$Algebra auf Ω und
$\mathfrak{K}_1 \otimes \mathfrak{K}_2 :=^{\sigma} \left(\bigcup_{i=1}^{2} pr_i^{-1}(\mathfrak{K}_i) \right)$ die Produkt-$\sigma-$Algebra auf $\Omega_1 \times \Omega_2$, welche von den messbaren Rechtecken $K_1 \times K_2$ mit $K_i \in \mathfrak{K}_i$ erzeugt wird.
$\mathfrak{K}_1 \boxtimes \mathfrak{K}_2$ die Produktmengenalgebra auf $\Omega_1 \times \Omega_2$, welche von $\left(\bigcup_{i=1}^{2} pr_i^{-1}(\mathfrak{K}_i) \right)$ erzeugt wird.

Bemerkung 1:

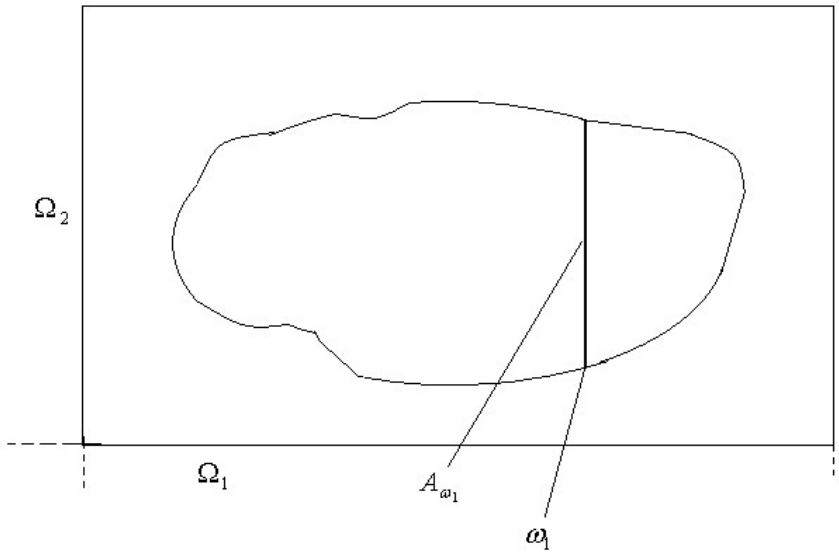
$$\begin{aligned}\mathfrak{K}_1 \boxtimes \mathfrak{K}_2 &= \left\{ \bigcup_{\nu=1}^{n} A_{1\nu} \times A_{2\nu} : A_{i\nu} \in \mathfrak{K}_i,\ \left(A_{1\nu} \times A_{2\nu}\right) \cap \left(A_{1\mu} \times A_{2\mu}\right) = \varnothing \text{ für } \nu \neq \mu \right\} \\ &= \left\{ \bigcup_{\nu=1}^{n} \bigcup_{\mu=1}^{\mu_\nu} \left(A_{1\nu} \times A_{2\mu}\right) : A_{ik} \in \mathfrak{K}_i;\ A_{i\kappa} \cap A_{i\lambda} = \varnothing \text{ für } \kappa \neq \lambda;\ \mu_\nu \leq n \in \mathbb{N} \right\}\end{aligned}$$

Definition 1:

a) Seien A eine Teilmenge von $\Omega_1 \times \Omega_2$ und $\omega_1 \in \Omega_1$.
Die Menge $A_{\omega_1} := \{\omega_2 \in \Omega_2 : (\omega_1, \omega_2) \in A\}$ heißt der ω_1-Schnitt von A.

b) Seien $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \widetilde{\mathbb{R}}$ eine Abbildung und $\omega_1 \in \Omega_1$.
Die Abbildung $f_{\omega_1} : \Omega_2 \to \widetilde{\mathbb{R}}$ mit $\omega_2 \mapsto f(\omega_1, \omega_2)$ heißt der ω_1-Schnitt von f.

Zeichnung:



Satz 1:

Seien $A \in \mathfrak{K}_1 \otimes \mathfrak{K}_2$, $\omega_1 \in \Omega_1$ und $f : (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathfrak{K}_1 \otimes \mathfrak{K}_2) \to (\widetilde{\mathbb{R}}, \widetilde{\mathfrak{B}})$ messbar. Dann gilt:

a) $A_{\omega_1 \in} \mathfrak{K}_2$

b) $f_{\omega_1} : (\Omega_2, \mathfrak{K}_2) \to (\widetilde{\mathbb{R}}, \widetilde{\mathfrak{B}})$ ist messbar.

Definition 2:

Die Abbildung $\mathbb{P} : \Omega_1 \times \mathfrak{K}_2 \to [0,1]$ heißt Markov-Kern (oder: Übergangswahrscheinlichkeit) von $(\Omega_1, \mathfrak{K}_1)$ nach $(\Omega_2, \mathfrak{K}_2)$ wenn gilt:

i) $\mathbb{P}(\omega_1, \cdot) : \mathfrak{K}_2 \to [0,1]$ ist ein normiertes Maß für jedes $\omega_1 \in \Omega_1$.

ii) $\mathbb{P}(\cdot\,, K_2) : (\Omega_1, \mathfrak{K}_1) \to [0,1]$ ist messbar für jedes $K_2 \in \mathfrak{K}_2$.

Beispiele:

a) Seien $(\Omega_1, \mathfrak{K}_1)$ ein Messraum und $(\Omega_1, \mathfrak{K}_2, p_2)$ ein normierter Maßraum.
Dann ist: $\mathbb{P} : \Omega_1 \times \mathfrak{K}_2 \to [0,1]$ mit $(\omega_1, K_2) \mapsto \mathbb{P}(\omega_1, K_2) := p_2(K_2)$ ein Markov-Kern, der nicht von ω_1 abhängt.

b) Seien $\Omega_i := \{1, ..., n_i\}$, $\mathfrak{K}_i := \mathfrak{P}(\Omega_i)$, $a : \Omega_1 \to \Omega_2$ eine Abbildung und $p_1 : \mathfrak{K}_1 \to [0,1]$ ein normiertes Maß mit $p_1(\{\omega_1\}) > 0$ für alle $\omega_1 \in \Omega_1$.
Auf folgende Weise können wir einen Markov-Kern definieren:

$$\mathbb{P}(\omega_1, K_2) := \frac{p_1(a^{-1}(K_2) \cap \{\omega_1\})}{p_1(\{\omega_1\})} = p_1\left(a^{-1}(K_2) \mid \{\omega_1\}\right).$$

Interpretation:

$\mathbb{P}(\omega_1, K_2)$ ist die Wahrscheinlichkeit, von ω_1 nach K_2 durch die Abbildung a zu gelangen.

Satz 2: (Verallgemeinerter Satz von Fubini)

Seien $P: \Omega_1 \times \mathfrak{K}_2 \to [0,1]$ ein Markov-Kern von $(\Omega_1, \mathfrak{K}_1)$ nach $(\Omega_2, \mathfrak{K}_2)$,
$f: (\Omega_1 \times \Omega_1, \mathfrak{K}_1 \otimes \mathfrak{K}_2) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ eine messbare Funktion mit $f^+ := \max(f, 0)$
und $p: \mathfrak{K}_1 \to [0,1]$ ein normiertes Maß. Dann gilt:

a) Es existiert genau ein normiertes Maß $\mathbb{P}: \mathfrak{K}_1 \otimes \mathfrak{K}_2 \to [0,1]$ mit
$\mathbb{P}(K_1 \times K_2) = \int_{K_1} P(\omega_1, K_2)\, p(d\omega_1)$ für alle $K_1 \in \mathfrak{K}_1$ und $K_2 \in \mathfrak{K}_2$.

b) $g: (\Omega_1, \mathfrak{K}_1) \to (\widetilde{\mathbb{R}}, \widetilde{\mathfrak{B}})$ mit $\omega_1 \mapsto g(\omega_1) := \int_{\Omega_2} (f^+)_{\omega_1}(\omega_2)\, P(\omega_1, d\omega_2)$
ist messbar.

c) $\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f^+ \, d\mathbb{P} = \int_{\Omega_1} g(\omega_1)\, p(d\omega_1)$
(beide Integrale sind gleichzeitig endlich oder unendlich)

Wenn f bezüglich $\mathbb{P}$ integrierbar ist, so gilt:

d) Es existiert ein $N \in \mathfrak{K}_1$ mit $p(N) = 0$, so dass
$h: (\Omega_1, \mathfrak{K}_1) \to (\widetilde{\mathbb{R}}, \widetilde{\mathfrak{B}})$ mit $\omega_1 \mapsto h(\omega_1) := \begin{cases} 0 & \text{für } \omega_1 \in N \\ \int_{\Omega_2} f_{\omega_1}(\omega_2)\; P(\omega_1, d\omega_2) & \text{sonst} \end{cases}$
eine messbare Funktion ist.

e) $\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f \, d\mathbb{P} = \int_{\Omega_1} h(\omega_1)\, p(d\omega_1)$

Anmerkung:

Anstelle von $\int_{K_1} P(\omega_1, K_2)\, p\,(d\omega_1)$ benutzen wir auch die folgende Notation:
$\int_{K_1} P(\cdot\,, K_2)\, dp$

Bemerkung 2:

Sei $\mathfrak{G}$ eine Mengenalgebra über Ω und $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{G}$ mit

$i)\ A, B \in \mathfrak{E} \ \Rightarrow\ A \cap B \in \mathfrak{E}$

$ii)\ \mathfrak{G} = \left\{ \bigcup_{i=1}^{n} A_i : n \in \mathbb{N},\ A_i \cap A_j = \emptyset \text{ für } i \neq j,\ A_i \in \mathfrak{E} \right\}$

und $\widetilde{\mu} : \mathfrak{E} \to \mathbb{R}_0^+$ additiv. Dann:

$\exists_1$ Inhalt $\mu : \mathfrak{G} \to \mathbb{R}_0^+$ mit $\mu(E) = \widetilde{\mu}(E)\ \forall E \in \mathfrak{E};\ \mu$ ist endlich.

Korollar 2.1:

Seien $(\Omega_1, \mathfrak{K}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathfrak{K}_2, \mu_2)$ $\sigma-$finite Maßräume. Dann existiert genau ein Maß $\mu : \mathfrak{K}_1 \otimes \mathfrak{K}_2 \to \mathbb{R}_0^+$ mit $\mu(K_1 \times K_2) = \mu_1(K_1) \cdot \mu_2(K_2) \quad \forall K_1 \in \mathfrak{K}_1\ \forall K_2 \in \mathfrak{K}_2$

Definition:

Das Maß $\mu \,|\, \mathfrak{K}_1 \otimes \mathfrak{K}_2$ aus Korollar 2.1 wird das Produktmaß der Maße $\mu_1 \,|\, \mathfrak{K}_1$ und $\mu_2 \,|\, \mathfrak{K}_2$ genannt und mit $\mu_1 \times \mu_2$ oder $\mu_1 \otimes \mu_2$ bezeichnet.

Warnung:

"$\sigma-$finit" in Korollar 2.1 ist wesentlich. (Sonst mit anderen Methode nur noch Existenz, aber keine Eindeutigkeit.)

Korollar 2.2: (Satz von Fubini)

Seien $(\Omega_1, \mathfrak{K}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathfrak{K}_2, \mu_2)$ $\sigma-$finite Maßräume und $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \widetilde{\mathbb{R}}$ eine $\mu_1 \otimes \mu_2-$integrierbare Funktion. Dann gilt:

a) Für μ_2-fast alle $\omega_2 \in \Omega_2$ ist $f_{\omega_1} : \Omega_2 \to \widetilde{\mathbb{R}}$ bzgl. μ_2 integrierbar.
   Analog: f_{ω_2}

b) Die μ_1-fast überall definierte Funktion $\omega_1 \mapsto \int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2)\ \mu_2(d\omega_2)$ ist bzgl. μ_1 integrierbar. Ebenso: $1 \leftrightarrow 2$.

c) Es gilt:

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f\ d\mu_1 \otimes \mu_2 = \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2)\ \mu_2(d\omega_2)\ \ \mu_1(d\omega_1) = \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} f(\omega_1, \omega_2)\ \mu_1(d\omega_1)\ \ \mu_2(d\omega_2)$$

Literaturverzeichnis

[1] Otto Forster: Analysis I. vieweg. 5.Auflage, 1999.

[2] Otto Forster: Analysis II. vieweg. 5.Auflage, 1984

[3] Konrad Königsberger: Analysis I.

[4] Erik Ekström: Kurzgefasste Lösungen zu den Übungen in Analysis I.
Mathematisches Institut Uni München, 2005

[5] Heinz Bauer: Maß- und Integrationstheorie. De Gruyter, 1990