Analysis I

Lars Grüne
Lehrstuhl für Angewandte Mathematik
Mathematisches Institut
Fakultät für Mathematik, Physik und Informatik
Universität Bayreuth
95440 Bayreuth
lars.gruene@uni-bayreuth.de
www.math.uni-bayreuth.de/∼lgruene/

Vorlesungsskript

1. Auflage

Wintersemester 2011/2012

Vorwort

Dieses Skript ist im Rahmen einer gleichnamigen Vorlesung entstanden, die ich im Wintersemester 2011/2012 an der Universität Bayreuth gehalten habe.

Die einzelnen Kapitel des Skriptes wurden auf Basis der im Literaturverzeichnis angegebenen Lehrbücher erstellt. Ich möchte mich an dieser Stelle bei allen aufmerksamen Studenten/innen sowie bei meinen Mitarbeiter/innen Christian Gleißner, Katharina Schüler und Marleen Stieler bedanken, die viele kleinere Fehler gefunden haben, die in dieser Version korrigiert werden konnten. Die Verantwortung für alle verbleibenden Fehler liegt selbstverständlich bei mir. Hinweise dazu werden gerne entgegengenommen.

Eine elektronische Version dieses Skripts gibt es unter

`http://num.math.uni-bayreuth.de/de/team/Gruene_Lars` → Skripten.

Die zugehörigen Übungsaufgaben finden sich im E-Learning System der Universität Bayreuth unter `https://elearning.uni-bayreuth.de/course/view.php?id=4482`. Auf Anfrage per E-Mail an `lars.gruene@uni-bayreuth.de` geben wir Ihnen gerne einen Gastzugang zu diesen Unterlagen.

Bayreuth, Februar 2012 — Lars Grüne

Inhaltsverzeichnis

Vorwort **i**

1 Natürliche Zahlen und die vollständige Induktion **1**

1.1 Ein einführendes Beispiel 1

1.2 Das Prinzip der vollständigen Induktion 3

1.3 Beispiele für die vollständige Induktion 6

1.4 Weitere Anmerkungen zum Induktionsprinzip 12

2 Die reellen Zahlen **15**

2.1 Mengennotation 15

2.2 Die Körperaxiome 16

2.3 Die Anordnungsaxiome 18

2.4 Das Vollständigkeitsaxiom 25

2.5 Infimum und Supremum 28

2.6 Die Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$ 32

3 Folgen **37**

3.1 Definition und Beispiele 37

3.2 Konvergenz 38

3.3 Eigenschaften und Rechenregeln konvergenter Folgen 41

3.4 Uneigentliche Konvergenz 46

3.5 Cauchy-Folgen und monotone Folgen 48

3.6 Teilfolgen 52

4 Reihen **57**

4.1 Definition und Beispiele 57

4.2 Konvergenzkriterien für unendliche Reihen 60

4.3 Absolute Konvergenz 64

5 Funktionen **73**
5.1 Definition und Beispiele . . . 73
5.2 Grenzwerte bei Funktionen . . . 78
5.3 Stetigkeit . . . 80
5.4 Sätze über stetige Funktionen . . . 82
5.5 Das ε-δ Kriterium für Stetigkeit . . . 85

6 Exponentialfunktion und Logarithmus **91**
6.1 Definition der Exponentialfunktion . . . 91
6.2 Rechenregeln und Eigenschaften der Exponentialfunktion . . . 95
6.3 Umkehrfunktionen . . . 97
6.4 Die Logarithmusfunktion . . . 99
6.5 Limesverhalten von exp und ln . . . 102
6.6 Anhang: Elementarer Beweis von Satz 6.3 . . . 106

7 Die komplexen Zahlen **109**
7.1 Definition und Rechenregeln . . . 109
7.2 Veranschaulichung . . . 111
7.3 Komplexe Folgen und Reihen . . . 112
7.4 Die komplexe Exponentialfunktion . . . 113

8 Die trigonometrischen Funktionen **117**
8.1 Definition . . . 117
8.2 Eigenschaften von Sinus und Cosinus . . . 118
8.3 Die Zahl π . . . 121
8.4 Umkehrfunktionen . . . 126
8.5 Polarkoordinaten . . . 127

9 Differentiation **131**
9.1 Definition und Beispiele . . . 131
9.2 Rechenregeln und Eigenschaften der Differentiation . . . 136
9.3 Einseitige Ableitungen . . . 142
9.4 Die Ableitung als Funktion . . . 143

10 Anwendungen der Differentialrechnung **147**
10.1 Extremwerte und der Mittelwertsatz . . . 147
10.2 Die Taylor-Entwicklung . . . 153

11 Funktionenfolgen **161**

11.1 Definitionen 161

11.2 Stetigkeit und Differenzierbarkeit 162

11.3 Potenzreihen 167

11.4 Anhang: Eine Taylorreihe mit Konvergenzradius 0 169

Literaturverzeichnis **171**

Index **172**

Kapitel 1

Natürliche Zahlen und die vollständige Induktion

Stand:
14. Februar 2012

Der Hauptgegenstand der Analysis sind die Funktionen. Dies sind mathematische Objekte, die Beziehungen zwischen Zahlen ausdrücken. Funktionen werden wir in einigen Kapiteln einführen und ausführlich untersuchen. Zunächst wollen wir uns aber mit den zu Grunde liegenden Objekten, den Zahlen beschäftigen. In diesem Kapitel geht es dabei um die einfachsten Zahlen, die *natürlichen Zahlen*

$$\{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Hier vereinbaren wir, dass die natürlichen Zahlen die "0" enthalten, in manchen Büchern wird mit der "1" begonnen, was für die folgenden Ausführungen aber keinen wesentlichen Unterschied macht. Die Menge der natürlichen Zahlen wird mit dem Symbol $\mathbb{N}$ bezeichnet. Man kann natürliche Zahlen auf streng mathematische Weise definieren — durch sogenannte *Axiome* —, worauf wir am Ende dieses Kapitels kurz eingehen werden. Für diese Vorlesung reicht die aus der Schule bekannte "informelle" Vorstellung von den natürlichen Zahlen aber völlig aus. Neben den natürlichen Zahlen werden wir in diesem Kapitel auch die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen verwenden, wobei wir erst einmal davon ausgehen, dass diese ebenfalls aus der Schule bekannt sind. Mit der genauen Definition der reellen Zahlen werden wir uns im nachfolgenden Kapitel ausführlich beschäftigen.

1.1 Ein einführendes Beispiel

Wir wollen in diesem ersten Kapitel eine Beweistechnik einführen, mit der man mathematische Aussagen für alle natürlichen Zahlen beweisen kann. Als Motivation betrachten wir die folgende Aufgabe:

Berechne die Summe der ersten n positiven natürlichen Zahlen

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n.$$

Um diese Summe kürzer schreiben zu können, drücken wir sie mit Hilfe des Summensymbols $\sum$ aus, das wie folgt definiert ist.

Definition 1.1 Es seien m, n natürliche Zahlen mit $m \leq n$. Für jede natürliche Zahl $k = m, \ldots, n$ sei a_k eine reelle Zahl. Dann definieren wir

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n.$$

Zusätzlich definieren wir für $m \geq 1$ die *leere Summe* als

$$\sum_{k=m}^{m-1} a_k := 0$$

unabhängig davon, welche Werte die a_k annehmen. □

Das Symbol ":=" bedeutet dabei, dass das Objekt, das auf der Seite des Doppelpunktes steht, durch den Ausdruck auf der anderen Seite definiert wird, also gerade diesen Wert erhält.

Mit der Summenschreibweise lautet die obige Aufgabe also:

$$\text{Berechne } \sum_{k=1}^{n} k.$$

Zu dieser Aufgabe gibt es eine Anekdote über den Mathematiker Carl Friedrich Gauß (1777–1855), dessen Lehrer seiner Klasse in seiner Schulzeit die Aufgabe gestellt hat, die ersten 100 Zahlen zusammenzuzählen. Dies ist gerade unsere Aufgabe mit $n = 100$. Statt die Zahlen nacheinander zusammenzuzählen, ist Gauß wie folgt vorgegangen

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{100} k &= (1+100) + (2+99) + \ldots + (49+52) + (50+51) \\ &= \underbrace{101 + 101 + \ldots + 101 + 101}_{\text{insgesamt 50 Summanden}} = 50 \cdot 101 = 5050 \end{aligned}$$

und konnte die Lösung damit viel schneller ausrechnen.

Diese Idee lässt sich auf beliebige n verallgemeinern. Im Fall, dass n gerade ist, kann man schreiben

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k &= (1+n) + (2+(n-1)) + \ldots + ((n/2-1)+(n/2+2)) + (n/2+(n/2+1)) \\ &= \underbrace{(n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1) + (n+1)}_{\text{insgesamt n/2 Summanden}} = n/2 \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Im Fall, dass n ungerade ist, kann man den Trick geeignet abändern und erhält das selbe Ergebnis (Übungsaufgabe).

Man könnte nun meinen, dass die Aufgabe damit gelöst ist. Das ist im strengen mathematischen Sinne (den wir in dieser Vorlesung immer anlegen werden) aber nicht richtig. Zwar macht die obige Rechnung plausibel, dass die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \tag{1.1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Mathematisch gesehen ist das aber noch nicht formal bewiesen! Der Grund liegt in den "Pünktchen" in der Summe $(1+n)+(2+(n-1))+\ldots+((n/2-1)+(n/2+2))+(n/2+(n/2+1))$. Zwar ist anschaulich völlig klar, was sich hinter diesen Pünktchen verbirgt, für eine lückenlose mathematische Beweisführung müssten wir die fehlenden Terme aber alle hinschreiben[1]. Dazu müssten wir wissen, wie groß n ist, damit wir wissen, wie viele Terme wir an Stelle der Pünktchen schreiben müssen. Wir können die obige Rechnung daher für jedes $n \in \mathbb{N}$ zu einem formal korrekten Beweis ausbauen, müssen das aber für jedes n einzeln machen. Weil es aber unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ gibt, können wir auf diese Weise keinen Beweis erhalten, der die Formel für alle $n \in \mathbb{N}$ beweist.

1.2 Das Prinzip der vollständigen Induktion

Das Beweisprinzip der vollständigen Induktion löst das gerade erläuterte Problem auf eine elegante Weise. Für ein gegebenes $n_0 \in \mathbb{N}$ dient das Prinzip dazu, eine Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ zu beweisen. Das Prinzip besteht aus den folgenden beiden Schritten:

(1) **Induktionsanfang ($n = n_0$)**: Beweise, dass $A(n_0)$ eine wahre Aussage ist

(2) **Induktionsschritt ($n \to n+1$)**: Beweise, dass für alle $n \geq n_0$ gilt: Falls $A(n)$ eine wahre Aussage ist, so ist auch $A(n+1)$ eine wahre Aussage

Dass damit die Aussage $A(n)$ tatsächlich für alle $n \geq n_0$ gilt, ist leicht einzusehen: Dass $A(n_0)$ gilt, folgt sofort aus (1). Wiederholte Anwendung von (2) liefert dann die Aussage $A(n_0+1)$, $A(n_0+2)$, $A(n_0+3)$ usw. Wichtig dabei ist, dass man diese wiederholte Anwendung von (2) nicht praktisch ausführen muss: Entscheidend ist, dass man durch den Beweis von (2) weiß, dass man den Induktionsschritt beliebig oft ausführen *könnte*.

Wir illustrieren die Anwendung des Prinzips an dem Problem aus dem vorhergehenden Abschnitt und formulieren das Ergebnis als Satz.

Satz 1.2 Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Beweis: Wir wenden das Prinzip der vollständigen Induktion für $n_0 = 0$ auf die Aussage

$$A(n) := \left[\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}\right]$$

an.

[1] Das mag für diese Aufgabe nach übertriebener Genauigkeit aussehen, so bald wir aber etwas kompliziertere Aufgabenstellungen betrachten (einige davon kommen im Rest dieses Kapitels), versagt die Anschauung schnell und es ist überhaupt nicht mehr anschaulich klar, was genau sich hinter den Pünktchen verbirgt.

Induktionsanfang: $n = n_0 = 0$. Für $n = 0$ ist die Summe die leere Summe, also gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{0} k = 0.$$

Andererseits gilt

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{0 \cdot 1}{2} = \frac{0}{2} = 0.$$

Damit ist $A(0)$ bewiesen.

Induktionsschritt: Es gelte $A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Diese Annahme wird als *Induktionsannahme* bezeichnet. Zu zeigen ist, dass dann auch $A(n+1)$ gilt, also

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Aus der Induktionsannahme wissen wir

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1).$$

Zu zeigen ist also

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Ausmultiplizieren der beiden Zähler liefert, dass diese Gleichung äquivalent ist zu

$$\frac{n^2+n}{2} + (n+1) = \frac{n^2+3n+2}{2}.$$

Wegen

$$\frac{n^2+3n+2}{2} = \frac{n^2+n+2n+2}{2} = \frac{n^2+n}{2} + \frac{2n+2}{2} = \frac{n^2+n}{2} + (n+1)$$

ist diese Gleichung tatsächlich erfüllt. □

Voraussetzung für die Anwendung der vollständigen Induktion ist, dass man zunächst einmal einen "Kandidaten" für eine gültige Aussage $A(n)$ hat. Das Prinzip der Induktion hilft einem im Allgemeinen nicht dabei, die Aussage $A(n)$ zu finden. Es dient lediglich dazu, eine Aussage, die man — wie im vorhergehenden Abschnitt — für endlich viele n bereits hergeleitet hat, für *alle* $n \geq n_0$ mathematisch rigoros zu beweisen — oder zu widerlegen, wenn man beim Beweis des Induktionsschritts feststellt, dass dieser nicht gilt. Das Finden der Aussage[2] $A(n)$, für die man die Induktion tatsächlich durchführen kann, ist oftmals der schwierigste Teil, wenn man die vollständige Induktion praktisch anwenden will und verlangt meist die richtige Intuition und etwas Kreativität.

Bevor wir weitere Beispiele der vollständigen Induktion kennen lernen, wollen wir für die weiteren Beweise etwas Notation einführen, mit der man die Schreibweise von Beweisen etwas abkürzen kann.

[2] Ebenso muss für die Induktion natürlich auch ein "passendes" n_0 gefunden werden, was aber zumeist einfacher ist, als die Aussage $A(n)$ zu finden.

Für logische Folgerungen verwenden wir die Folgepfeilnotation[3]. Wenn aus einer Aussage A_1 die Aussage A_2 folgt, dann schreiben wir

$$A_1 \Rightarrow A_2 \tag{1.2}$$

(oder auch $A_2 \Leftarrow A_1$). Dabei wird der Zusatz "ist wahr" oder "ist eine wahre Aussage" zumeist weggelassen. Statt "A_1" ist wahr schreiben wir also meist kurz A_1.

Die im Beweis von Satz 1.2 bewiesene Folgerung kann man mit dieser Schreibweise dann kurz als

$$\text{für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \quad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

schreiben. Allgemein kann man den Induktionsschritt mit dieser Schreibweise kurz als

$$\text{für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \quad \sum_{k=1}^{n} k = A(n) \quad \Rightarrow \quad A(n+1)$$

schreiben.

Dies zeigt bereits eine typische Eigenschaft der hier ganz abstrakt formulierten Aussagen A_1 und A_2: diese beschreiben meist nicht eine Eigenschaft für eine Zahl, sondern Aussagen, die für viele Zahlen gelten, hier gerade für alle natürlichen Zahlen n.

Für $A_1 \Rightarrow A_2$ gibt es verschiedene Sprechweisen:

- A_1 impliziert A_2
- wenn A_1 gilt, dann gilt auch A_2
- A_1 ist hinreichend für A_2
- A_2 folgt aus A_1
- A_2 gilt, wenn A_1 gilt
- A_2 ist notwendig für A_1

Die letzte Sprechweise ist dabei durch die folgende Tatsache motiviert: Nehmen wir an, die Folgerung $A_1 \Rightarrow A_2$ ist wahr. Als Beispiel für eine solche wahre Folgerung nehmen wir die Aussage für natürliche Zahlen n

$$\underbrace{n \text{ ist ohne Rest durch 4 teilbar}}_{A_1} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{n \text{ ist ohne Rest durch 2 teilbar}}_{A_2}.$$

Diese ist sicherlich für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ wahr. Wenn nun A_2 für ein n nicht gilt, so kann auch A_1 für dieses n nicht gelten (denn wenn A_1 gälte, würde die obige Folgerung implizieren, dass A_2 auch gilt). Die Eigenschaft "n ist ohne Rest durch 2 teilbar" (A2) ist

[3] Diese wird an der Tafel öfter benutzt als in diesem Skript.

also eine notwendige Voraussetzung dafür, dass die Eigenschaft "n ist ohne Rest durch 4 teilbar" (A1) gilt.

Den gerade benutzen Zwischenschritt "wenn A_2 nicht gilt, dann gilt auch A_1 nicht", kann man mit dem Folgepfeil auch als

$$A_2 \text{ gilt nicht } \Rightarrow A_1 \text{ gilt nicht} \tag{1.3}$$

schreiben. Da man die Argumentation von oben in gleicher Weise in umgekehrter Richtung anwenden kann, ist die Folgerung (1.3) gleichbedeutend mit der Folgerung (1.2), was man sich in Beweisen oft zu Nutze macht.

Wenn für zwei Aussagen sowohl $A_1 \Rightarrow A_2$ als auch $A_2 \Rightarrow A_1$ gilt, so schreibt man

$$A_1 \Leftrightarrow A_2.$$

Die Aussagen A_1 und A_2 heißen dann *äquivalent* und man sagt auch: A_1 gilt *genau dann*, wenn A_2 gilt[4].

1.3 Beispiele für die vollständige Induktion

In diesem Abschnitt wollen wir das Prinzip der vollständigen Induktion an einigen Beispielaussagen illustrieren und dabei nebenbei einige Aussagen beweisen, die im weiteren Verlauf der Vorlesung nützlich sind.

Wir beginnen mit der Frage nach einer Formel für die Summe

$$\sum_{k=0}^{n} x^k,$$

wobei $x \in \mathbb{R}$ ist und wir vereinbaren, dass $x^0 = 1$ gelten soll. Diese Summe wird *geometrische Reihe* genannt und wird uns im weiteren Verlauf der Vorlesung noch öfter begegnen. Wir betrachten hier den Fall $x \neq 1$; warum, werden wir in Kürze sehen. Das ist aber keine große Einschränkung, weil wir für den Fall $x = 1$ gar keinen Induktionsbeweis benötigen: in diesem Fall gilt nämlich $x^k = 1$ für alle k und wir erhalten direkt $\sum_{k=0}^{n} 1^k = n + 1$.

Um eine Idee zu bekommen, wie die Lösung für $x \neq 1$ aussehen könnte (denn solch eine "Idee" brauchen wir ja, um die Induktion überhaupt zu beginnen), testen wir zunächst einmal kleine k:

$$\sum_{k=0}^{0} x^k = 1,\ \sum_{k=0}^{1} x^k = 1 + x,\ \sum_{k=0}^{2} x^k = 1 + x + x^2,\ \sum_{k=0}^{3} x^k = 1 + x + x^2 + x^3, \ldots$$

Hier sieht man noch nicht so wirklich viel. Die richtige Idee ist nun, die Ausdrücke auf der rechten Seite mit $1 - x$ zu erweitern (wer darauf zum ersten Mal gekommen ist, ist meines Wissens nicht überliefert). Damit erhält man

$$1\frac{1-x}{1-x} = \frac{1-x}{1-x}, \qquad (1+x)\frac{1-x}{1-x} = \frac{1+x-x-x^2}{1-x} = \frac{1-x^2}{1-x},$$

[4] Die Aussagen "A_1 gilt, wenn A_2 gilt" und "A_1 gilt genau dann, wenn A_2 gilt" werden oft verwechselt, was schon zu manchem falschen Beweis geführt hat. In der Kurzschreibweise lautet die erste Aussage $A_1 \Leftarrow A_2$ und die zweite $A_1 \Leftrightarrow A_2$. Hier ist die Verwechslungsgefahr viel geringer.

$$(1+x+x^2)\frac{1-x}{1-x} = \frac{1+x+x^2-x-x^2-x^3}{1-x} = \frac{1-x^3}{1-x},$$
$$(1+x+x^2+x^3)\frac{1-x}{1-x} = \frac{1+x+x^2+x^3-x-x^2-x^3-x^4}{1-x} = \frac{1-x^4}{1-x}.$$

Dies legt die Vermutung nahe, dass

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

gilt (und erklärt auch, warum wir $x = 1$ ausgeschlossen haben, denn durch $1 - 1 = 0$ kann man nicht teilen). Dass diese Vermutung tatsächlich stimmt, beweisen wir wieder per Induktion.

Satz 1.3 Für die geometrische Reihe gilt für jedes $x \neq 1$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

Beweis: Wir beweisen die Aussage[5]

$$A(n) := \left[\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right]$$

per Induktion beginnend mit $n = n_0 = 0$. Hierfür gilt

$$\sum_{k=0}^{0} x^k = 1 = \frac{1-x}{1-x} = \frac{1-x^1}{1-x} \quad \Rightarrow \quad A(n_0).$$

Für den Induktionsschritt $n \to n+1$ nehmen wir an, dass $A(n)$ für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}$ gilt. Für $n+1$ gilt dann

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} x^k &= \underbrace{\sum_{k=0}^{n} x^k}_{=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\text{(Ind.ann.)}} + x^{n+1} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1} \\ &= \frac{1-x^{n+1}+x^{n+1}(1-x)}{1-x} = \frac{1-x^{n+2}}{1-x},\end{aligned}$$

was genau $A(n+1)$ ist. □

Betrachten wir nun zur Abwechslung ein Problem, in dem keine Summe auftaucht. Es geht um die Frage, auf wie viele verschiedene Arten man die Elemente einer n-elementigen Menge $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ anordnen kann.

[5] Wenn man etwas Übung im Umgang mit der vollständigen Induktion hat, kann man die ausführliche Definition von $A(n)$ im Beweis auch weglassen, was wir im Folgenden auch machen werden. Für den Anfang ist es aber sicherlich eine gute Hilfe, genau hinzuschreiben, was man eigentlich beweisen will.

Auch hier machen wir wieder eine Vorüberlegung, um auf einen Ansatz für die Induktion zu kommen: An der ersten Stelle der Anordnung haben wir genau n Möglichkeiten, um ein Element zu wählen. An der zweiten Stelle bleiben dann noch $n-1$ Möglichkeiten, an der dritten $n-2$ usw. bis für die letzte Stelle schließlich noch genau ein Element übrig bleibt. Insgesamt führt das auf

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

Möglichkeiten. Diese Zahl wird n *Fakultät* genannt und mit $n!$ bezeichnet. Führt man analog zum Summensymbol (und mit den gleichen m, n und a_k wie in Definition 1.1) ein Produktsymbol mittels

$$\prod_{k=m}^{n} a_k := a_m \cdot a_{m+1} \cdot \ldots \cdot a_n$$

und das *leere Produkt* als

$$\prod_{k=m}^{m-1} a_k := 1$$

ein, so kann man die Fakultät auch als

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k$$

schreiben.

Den folgenden Satz beweisen wir wieder mit Induktion, wodurch wir das informelle "usw." in der obigen Begründung vermeiden können.

Satz 1.4 Die Anzahl der möglichen Anordnungen einer n-elementigen Menge $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ mit $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, beträgt $n!$.

Beweis: Per vollständiger Induktion mit $n_0 = 1$.

Für $n = n_0 = 1$ gibt es offensichtlich genau eine Möglichkeit der Anordnung, weswegen die Aussage wegen $1! = 1$ für $n_0 = 1$ stimmt.

Nehmen wir nun an, dass die Aussage für $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist. Für eine Menge mit $n+1$ Elementen gibt es dann gerade $n+1$ verschiedene Elemente, die an der ersten Stelle der Anordnung stehen können. Für die in der Anordnung folgenden restlichen n Elemente gibt es nach Induktionsannahme jeweils gerade $n!$ Möglichkeiten. Insgesamt erhalten wir also

$$(n+1) \cdot n! = (n+1)!$$

mögliche Anordnungen, womit die Aussage für $n+1$ bewiesen ist. □

Die Fakultät ist aber nicht nur für die Beschreibung von Teilmengen gut. Im Rest dieses Abschnitts betrachten wir das Problem, den Ausdruck

$$(x+y)^n$$

für zwei reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ und beliebiges $n \in \mathbb{N}$ auszumultiplizieren. Das Resultat, das wir so herleiten wollen, wird *Binomischer Lehrsatz* genannt.

Um zu einer Aussage $A(n)$ zu kommen, für die wir dann einen Induktionsbeweis führen können, ist hier eine etwas längere Vorüberlegung nötig. Wir beginnen wieder damit, die Lösung für kleine n zu berechnen. Das ist natürlich mit etwas Rechenaufwand verbunden; der Kürze halber stellen wir hier nur die Ergebnisse für $n = 0, \ldots, 4$ dar:

$$\begin{array}{rcc}
(x+y)^0 & = & 1 \\
(x+y)^1 & = & x+y \\
(x+y)^2 & = & x^2+2xy+y^2 \\
(x+y)^3 & = & x^3+3x^2y+3xy^2+y^3 \\
(x+y)^4 & = & x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4
\end{array}$$

Die etwas seltsame Anordnung der rechten Seiten dieser Gleichungen in Dreiecksform hilft jetzt, ein Muster bei den Vorfaktoren der einzelnen Terme zu erkennen. Schreiben wir diese ohne die x und y hin (und schreiben eine 1, wo kein expliziter Vorfaktor steht), so erhält man

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

Das Muster, das man jetzt erkennen kann, besteht darin, dass die Einträge am Rand immer den Wert 1 haben und jede nicht am Rand stehende Zahl gerade die Summe der beiden darüberstehenden Zahlen ist. Die entstehende Figur nennt man nach Blaise Pascal (1623–1662) das *Pascalsche Dreieck*, es war tatsächlich aber bereits vor Pascal bekannt[6]. Die Einträge im Pascalschen Dreieck werden als *Binomialkoeffizienten* bezeichnet. Wir nummerieren die Einträge im Pascalschen Dreieck nun von oben nach unten mit n und von links nach rechts mit k durch (jeweils beginnend mit 0) und bezeichnen den jeweiligen Binomialkoeffizienten mit $\binom{n}{k}$, also z.B. $\binom{2}{1} := 2$, $\binom{4}{3} := 4$ oder allgemein

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

Dann erhalten wir aus dem Pascalschen Dreieck die Beziehungen

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \tag{1.4}$$

sowie

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1. \tag{1.5}$$

[6] In Wikipedia findet man viele interessante Informationen dazu, die man natürlich mit der bei Wikipedia-Einträgen immer angebrachten Vorsicht betrachten sollte.

Durch diese Beziehungen sind die Binomialkoeffizienten für alle $n \geq 0$ und alle $k = 0, \ldots, n$ eindeutig bestimmt.

Mit Hilfe kombinatorischer Überlegungen, die wir hier aus Zeitgründen nicht ausführen, kommt man auf die Vermutung, dass die Binomialkoeffizienten durch die Formel

$$\prod_{j=1}^{k} \frac{n-j+1}{j} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k} \tag{1.6}$$

gegeben ist, die man (wie man mit etwas Überlegen sieht) für $k = 0, \ldots, n$ auch als

$$\prod_{j=1}^{k} \frac{n-j+1}{j} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

schreiben kann, wenn wir die Konvention $0! = 1$ verwenden. Aus dieser Darstellung folgt insbesondere

$$\frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!} = 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, \tag{1.7}$$

d.h. die Formel liefert wegen (1.5) den korrekten Wert für alle Randelemente im Pascalschen Dreieck. Wir beweisen nun per Induktion, dass die Formel (1.6) auch für alle anderen Einträge im Pascalschen Dreieck stimmt.

Lemma 1.5 [7] Für die Binomialkoeffizienten gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $k = 0, \ldots, n$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Beweis: Wir beweisen die Aussage per Induktion über n. Für $n = 0$ gibt es nur den Koeffizienten $\binom{0}{0}$, für den die Formel wegen

$$\binom{0}{0} = 1 \quad \text{und} \quad \prod_{j=1}^{0} \frac{n-j+1}{j} = 1$$

gilt (beachte, dass wir hier wieder das leere Produkt benutzt haben).

Für den Induktionsschritt $n \to n+1$ nehmen wir an, dass die Formel für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}$ und alle $k = 0, \ldots, n$ stimmt. Für die Elemente am Rand hatten wir bereits vorher überlegt, dass die Formel wegen (1.7) stimmt. Im Induktionsschritt müssen wir also nur noch zeigen, dass die Formel für $n+1$ auch für die nicht am Rand liegenden Elemente stimmt. Dazu ist zu beweisen, dass (1.4) gilt, d.h. dass die Formel für $n+1$ gerade gleich der Summe der Formeln für die beiden darüberstehenden Koeffizienten aus der Zeile n ist, dass also

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!}$$

[7] Ein Lemma ist in der Mathematik eine Hilfsaussage, die meist zur Vorbereitung des Beweises eines Satzes benötigt wird.

gilt. Wegen

$$\begin{aligned}
\frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} &= \frac{(k+1)n!}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{(k+1)n! + n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{(n+1)n!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!}
\end{aligned}$$

ist dies aber gerade erfüllt, womit der Induktionsschritt bewiesen ist. □

Schauen wir jetzt zurück auf die Herleitung des Pascalschen Dreiecks aus den Koeffizienten des ausmultiplizierten Terms $(x+y)^n$, kommt man leicht auf die Vermutung

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k. \tag{1.8}$$

Diese Gleichung ist gerade die Aussage des *Binomischen Lehrsatzes*, den wir jetzt formulieren und beweisen.

Satz 1.6 Für alle reellen Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ und jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt (1.8).

Beweis: Mit vollständiger Induktion über n. Für $n = 0$ gilt $(x+y)^0 = 1$ und

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} x^{n-k} y^k = \binom{0}{0} x^0 y^0 = 1.$$

Damit ist der Induktionsanfang bewiesen.

Zum Beweis des Induktionsschritts rechnen wir

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)^n(x+y) \\
\text{(Ind.-annahme)} \qquad &= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k\right)(x+y) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n+1-k}y^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k+1} \\
&= \left(x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{n+1-k}y^k\right) + \left(\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k+1} + y^{n+1}\right) \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{n+1-k}y^k + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}\underbrace{x^{n-(k-1)}}_{=x^{n+1-k}}y^k + y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right]x^{n+1-k}y^k + y^{n+1} \\
(1.4) \qquad &= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}x^{n+1-k}y^k + y^{n+1} \\
(1.7) \qquad &= \binom{n+1}{0}x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}x^{n+1-k}y^k + \binom{n+1}{n+1}y^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^{n+1-k}y^k,
\end{aligned}$$

womit die Aussage für $n+1$ gilt und der Induktionsschritt bewiesen ist. □

1.4 Weitere Anmerkungen zum Induktionsprinzip

Betrachtet man die vorhergehenden Abschnitte, so kann man mit gewissem Recht feststellen, dass manche Argumente nicht ganz konsequent sind. So haben wir viel Aufwand getrieben, um die "Pünktchen" aus dem Beweis von (1.1) mit Hilfe der vollständigen Induktion zu entfernen. Tatsächlich finden sich die Pünktchen aber bereits in der Definition der Summe $\sum_{k=m}^{n} a_k$ und sogar in der Definition der natürlichen Zahlen ganz am Anfang dieses Kapitels.

Tatsächlich kann man durch Anwendung induktiver Definitionen, die Pünktchen komplett vermeiden. Die Summe kann man z.B. (mit m und n wie in Definition 1.1) alternativ mittels

$$\sum_{k=m}^{m-1} a_k := 0 \quad \text{und} \quad \sum_{k=m}^{j} a_k := \sum_{k=m}^{j-1} a_k + a_j \text{ für } j = m, \ldots, n$$

induktiv definieren. Der Grund dafür, dass wir das nicht gleich am Anfang gemacht haben, liegt einzig und allein darin, dass die Form von Definition 1.1 in diesem einfachen Fall kaum mathematische Missverständnisse hervorrufen wird, dafür aber deutlich anschaulicher ist.

Ähnlich können die natürlichen Zahlen selbst ohne "Pünktchen" definiert werden, und zwar über die folgenden Bedingungen.

(N0) Die natürlichen Zahlen bilden eine Menge $\mathbb{N}$, die ein ausgezeichnetes Element "0" enthält.

(N1) Auf $\mathbb{N}$ ist eine Abbildung ν definiert, die jeder Zahl $n \in \mathbb{N}$ eine Zahl $\nu(n) \in \mathbb{N}$ mit $\nu(n) \neq 0$ zuordnet. Diese Abbildung erfüllt $n_1 \neq n_2 \Rightarrow \nu(n_1) \neq \nu(n_2)$ für alle $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$.

(N2) Für jede Teilmenge N von $\mathbb{N}$, welche die 0 und für jedes Element $n \in N$ auch $\nu(n)$ enthält, gilt $N = \mathbb{N}$.

Die Abbildung $\nu(n)$ wird dabei als Nachfolger von n bezeichnet. Verwenden wir statt der abstrakten Abbildung ν die aus der Schule bekannte Addition, so ergibt sich gerade $\nu(n) = n + 1$.

Die Aussagen (N0)–(N2) werden *Peano-Axiome* genannt, nach dem italienischen Mathematiker Giuseppe Peano (1858–1932). Ein *Axiom* bezeichnet allgemein eine Bedingung, die sich nicht aus anderen Bedingungen folgern lässt und folglich einen "Grundbaustein" in der Definition mathematischer Objekte darstellt.

Man muss etwas nachdenken, um sich davon zu überzeugen, dass die uns seit der Grundschule bekannten natürlichen Zahlen durch die Peano-Axiome eindeutig festgelegt sind — tatsächlich sind sie es wirklich, wir wollen diesen Aspekt aber aus Zeitgründen nicht vertiefen. Eine ausführliche Behandlung findet sich z.B. in Kapitel I.5 des Buchs Analysis I von Amman und Escher [1]. Anzumerken ist allerdings noch, dass die Axiome lediglich die Struktur der natürlichen Zahlen festlegen, nicht aber deren Bezeichnung. In der üblichen Notation der natürlichen Zahlen mit arabischen Ziffern gilt

$$\nu(0) = 1, \quad \nu(\nu(0)) = 2, \quad \nu(\nu(\nu(0))) = 3 \text{ usw.}$$

man könnte aber auch ganz andere Symbole wählen, z.B. I, II, III, IV, V, ... wie es die alten Römer gemacht haben (die allerdings die Null noch nicht kannten) oder 0, 1, 10, 11, 100, ... wie es bei der Binärdarstellung von Zahlen im Computer gemacht wird. Wichtig ist nur, dass die Struktur der Menge $\mathbb{N}$ unabhängig von der Bezeichnung durch (N0)–(N2) eindeutig festgelegt ist, was bedeutet, dass jede Zahl in einer bestimmten Bezeichnung eindeutig einer Zahl in einer beliebigen anderen Bezeichnung solcherart zugeordnet werden kann, dass die jeweiligen Nachfolger ebenfalls wieder einander zugeordnet werden. Das Axiom (N2) bildet hierbei die formale Grundlage für das Prinzip der vollständigen Induktion, denn sie stellt sicher, dass wir mit dem Induktionsprinzip tatsächlich jedes $n \in \mathbb{N}$ "erreichen".

Kapitel 2

Die reellen Zahlen

Stand:
14. Februar 2012

In diesem Kapitel werden wir die für die Analysis grundlegenden *reellen Zahlen* einführen. Zwar gehen wir davon aus, dass diese aus der Schule bereits bekannt sind, allerdings werden wir dieses Wissen in diesem Kapitel nicht voraussetzen. Zum Beginn führen wir einige Bezeichnungen für Mengen ein, die wir im Folgenden verwenden werden.

2.1 Mengennotation

Eine *Menge* schreiben wir als

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\},$$

wobei die a_i die *Elemente* von A genannt werden. Falls a ein Element einer Menge A ist, schreiben wir $a \in A$, falls nicht schreiben wir $a \notin A$.

Oft benötigen wir Mengen, die alle Elemente einer (oder mehrerer) gegebenen Menge(n) mit gewissen Eigenschaften enthalten. Dies schreiben wir formal als

$$B := \{a \in A \,|\, a \text{ erfüllt } \ldots\}$$

oder auch als

$$B := \{a \,|\, a \in A \text{ und } a \text{ erfüllt } \ldots\}.$$

Das logische "und" bedeutet dabei, dass a beide Bedingungen zugleich erfüllen muss und wird auch mit dem Symbol $\wedge$ abgekürzt. Statt dem Trennstrich "|" kann man hierbei auch den Doppelpunkt ":" verwenden.

Zum Beispiel können wir die Menge aller geraden natürlichen Zahlen auf diese Weise beschreiben als

$$G := \{n \in \mathbb{N} \,|\, n \text{ ist ohne Rest durch 2 teilbar}\}$$

oder auch als

$$G := \{n \,|\, n \in \mathbb{N} \text{ und } n = 2k \text{ für ein } k \in \mathbb{N}\}.$$

Die übliche Vereinigung zweier Mengen A und B können wir mit dieser Schreibweise definieren als

$$A \cup B := \{a \,|\, a \in A \text{ oder } a \in B\}$$

(gesprochen: A vereinigt B). Hierbei bedeutet das logische "oder", dass mindestens eine der Bedingungen erfüllt ist[1]. Das logische "oder" wird auch mit $\vee$ abgekürzt. Der Schnitt zweier Mengen ist definiert als

$$A \cap B := \{a \,|\, a \in A \text{ und } a \in B\}$$

(gesprochen: A geschnitten B) und die Mengensubtraktion als

$$A \setminus B := \{a \in A \,|\, a \notin B\}$$

(gesprochen: A ohne B, manchmal auch A minus B).

Eine Menge B heißt *Teilmenge* einer Menge A, wenn für jedes $b \in B$ auch $b \in A$ gilt. Wir schreiben dann $B \subset A$.

Für eine Aussage der Form "für alle $a \in A$ gilt ..." wird oft die Schreibweise "$\forall a \in A : \ldots$" verwendet und eine Aussage der Form "es gibt ein $a \in A$ für das ... gilt" wird oft als "$\exists a \in A : \ldots$" geschrieben.

Aus der Schule sind bereits verschiedene Mengen von Zahlen bekannt:

$$\begin{array}{lcl} \text{die natürlichen Zahlen} & \mathbb{N} & = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\} \\ \text{die ganzen Zahlen} & \mathbb{Z} & = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\} \\ \text{die rationalen Zahlen} & \mathbb{Q} & = \left\{ \dfrac{p}{q} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z},\, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}. \end{array}$$

Ebenso sind die reellen Zahlen bereits bekannt. Da diese für die Analysis eine besondere Bedeutung haben, werden wir sie in diesem Kapitel von Grund auf einführen. Dies geschieht mit Hilfe sogenannter *Axiome*, d.h. durch Bedingungen, die sich nicht aus anderen Bedingungen ableiten lassen.

2.2 Die Körperaxiome

Die erste Gruppe von Axiomen, die wir betrachten wollen, sind die sogenannten *Körperaxiome*. Die Idee hinter diesen Axiomen ist, die Regeln für die üblichen Grundrechenarten so auf das Wesentliche zu reduzieren, dass alle bekannten Regeln daraus abgeleitet werden können und dass kein Axiom aus dem anderen abgeleitet werden kann.

Körperaxiome: Gegeben sei eine Menge $\mathbb{K}$ von Zahlen, auf der zwei Operationen $+$ ("Addition") und $\cdot$ ("Multiplikation") definiert sind, die je zwei Elementen $a, b \in \mathbb{K}$ neue Elemente $a + b \in \mathbb{K}$ und $a \cdot b \in \mathbb{K}$ (meist kurz geschrieben als $a \cdot b = ab$) zuordnen.

Die Menge $\mathbb{K}$ heißt dann ein *Körper*, wenn die folgenden Axiome erfüllt sind.

(K1) Addition und Multiplikation sind *kommutativ*, d.h. für alle $a, b \in \mathbb{K}$ gilt

$$a + b = b + a \qquad \text{und} \qquad ab = ba.$$

[1] Im Gegensatz zu dem umgangssprachlichen "oder", das oft im Sinne "entweder ... oder" verwendet wird. Beim logischen "oder" ist es erlaubt, dass beide Bedingungen zugleich erfüllt sind, beim umgangssprachlichen oder schließt man dies oft aus.

(K2) Addition und Multiplikation sind *assoziativ*, d.h. für alle $a, b, c \in \mathbb{K}$ gilt

$$(a+b)+c = a+(b+c) \qquad \text{und} \qquad (ab)c = a(bc).$$

(K3) Es gilt das *Distributivgesetz*, d.h. für alle $a, b, c \in \mathbb{K}$ gilt

$$a(b+c) = ab + ac.$$

(K4) Es existieren Elemente $0 \in \mathbb{K}$ und $1 \in \mathbb{K}$ mit $0 \neq 1$, so dass für alle $a \in \mathbb{K}$ gilt

$$a + 0 = a \qquad \text{und} \qquad a \cdot 1 = a.$$

Die Elemente 0 und 1 werden *neutrale Elemente* genannt.

(K5) Für jedes $a \in \mathbb{K}$ existiert ein Element $-a \in \mathbb{K}$ und, falls $a \neq 0$, ein Element $a^{-1} \in \mathbb{K}$, so dass gilt

$$a + (-a) = 0 \qquad \text{und} \qquad a \cdot a^{-1} = 1.$$

Die Elemente $-a$ und a^{-1} werden *inverse Elemente (zu a)* genannt.

□

Alle aus der Schule bekannten Rechenregeln lassen sich aus diesen Axiomen ableiten. Hier ein paar Beispiele dafür[2]:

- Es gilt $a \cdot 0 = 0$. **Beweis:** Aus (K4) folgt $0+0=0$, also auch $a \cdot 0 = a(0+0)$. Mit (K3) erhalten wir daraus $a \cdot 0 = a(0+0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$. Addieren wir nun auf beiden Seiten $-(a \cdot 0)$ so erhalten wir daraus $0 = a \cdot 0 + (-a \cdot 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0 + (-a \cdot 0) = a \cdot 0$. □

- Das inverse Element in (K5) ist eindeutig, was wir für die Addition **beweisen:** Seien $-a$ und $-\tilde{a}$ zwei inverse Elemente, so gilt

$$\begin{aligned}(-\tilde{a}) &\overset{(K4)}{=} (-\tilde{a}) + 0 \overset{(K1)}{=} 0 + (-\tilde{a}) \overset{(K5)}{=} (a + (-a)) + (-\tilde{a}) \\ &= ((-a) + a) + (-\tilde{a}) \overset{(K1)}{=} (-a) + (a + (-\tilde{a})) \overset{(K2)}{=} (-a) + 0 \overset{(K4)}{=} (-a).\end{aligned}$$

□

- Es gilt $-(-a) = a$. **Beweis:** Aus (K1) und (K5) folgt $(-a) + a = a + (-a) = 0$. Da nach (K5) auch $(-a) + (-(-a)) = 0$ gilt und das inverse Element eindeutig ist, folgt also $-(-a) = a$. □

- Auf Grund des Assoziativgesetzes ist es gerechtfertigt, einfach $a + b + c$ oder abc zu schreiben, weil das Ergebnis nicht von der Reihenfolge der Rechnungen abhängt.

[2] Die Hauptschwierigkeit bei den folgenden Beweisen ist, dass man immer versucht ist, in den Umformungen aus der Schule bekannte Rechenregeln anzuwenden, obwohl diese formal noch gar nicht bewiesen sind. Es braucht erfahrungsgemäß eine gewisse Übung, wirklich nur die Axiome und daraus bereits gefolgerte Tatsachen zu verwenden. Dieses Problem werden wir aber nur in diesem Kapitel haben. So bald wir am Ende dieses Kapitels die reellen Zahlen vollständig eingeführt haben, können wir wieder mit allen aus der Schule bekannten Regeln rechnen.

- Es gilt $-(a+b) = (-a)+(-b)$. **Beweis:** Da sowohl $(a+b)+(-(a+b)) = 0$ als auch $(a+b)+(-a)+(-b) = a+(-a)+b+(-b) = 0+0 = 0$ gilt, folgt die Aussage aus der Eindeutigkeit des inversen Elements. $\square$

- Die nicht explizit aufgeführten Operationen Subtraktion und Division lassen sich durch
$$b - a := b + (-a) \qquad \text{und} \qquad b/a := b \cdot a^{-1}$$
für $-a$ und a^{-1} aus (K5) definieren, wobei wir im Fall der Division natürlich $a \neq 0$ voraussetzen.

Betrachten wir die oben genannten Mengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$, so erfüllen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ die Körperaxiome nicht: In $\mathbb{N}$ ist z.B. bereits die Existenz von $-a$ nicht gegeben. In $\mathbb{Z}$ sind alle Axiome mit Ausnahme der Existenz von a^{-1} erfüllt[3] — eine solche Struktur nennt man einen *Ring*. Das inverse Element der Multiplikation a^{-1} fehlt z.B. für die Zahl 2, da $2^{-1} = 1/2 \notin \mathbb{Z}$. In $\mathbb{Q}$ existiert dies und da man auch alle anderen Körperaxiome für $\mathbb{Q}$ nachprüfen kann, ist $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ ein Körper.

Natürlich sind die Körperaxiome historisch gerade aus der Anschauung der "üblichen" Rechenregeln entstanden. Es gibt aber auch Körper, deren "Addition" und "Multiplikation" anders als üblich definiert sind und die noch nicht einmal unendlich viele Zahlen enthalten müssen. Betrachten wir z.B. die zweielementige Menge $\{0, 1\}$ und definieren eine "Addition" mittels

$$0+0 := 0, \;\; 0+1 := 1, \;\; 1+0 := 1, \;\; 1+1 := 0$$

und eine "Multiplikation" mittels

$$0 \cdot 0 := 0, \;\; 0 \cdot 1 := 0, \;\; 1 \cdot 0 := 0, \;\; 1 \cdot 1 := 1,$$

so kann man — durch Ausprobieren aller Möglichkeiten (was einfach aber etwas länglich ist) — nachrechnen, dass alle Körperaxiome erfüllt sind. Der so definierte Körper wird mit $\mathbb{F}_2$ bezeichnet und ist ein schönes Beispiel dafür, dass mathematische Definitionen manchmal unerwartete Effekte haben können. Betrachten wir z.B. das Axiom (K5) für $a = 1$ und die Addition in $\mathbb{F}_2$. Aus den gerade definierten Rechenregeln folgt wegen $1+0 = 1$ und $1+1 = 0$, dass die einzige mögliche Wahl für $-a$ mit $a+(-a) = 0$ gerade $-a = 1$ ist. Es folgt also $-1 = 1$, was auf den ersten Blick sicherlich überraschend und sehr ungewöhnlich ist. "Exotische" Körper wie $\mathbb{F}_2$ sind in vielen Bereichen der Mathematik und auch in Anwendungen wie z.B. der Codierungstheorie wichtige Hilfsmittel, spielen allerdings im weiteren Verlauf dieser Vorlesung keine besondere Rolle.

2.3 Die Anordnungsaxiome

Eine zweite Eigenschaft der bekannten Zahlmengen ist die Tatsache, dass wir je zwei Elemente der Größe nach vergleichen können. Genau wie die Körperaxiome so formuliert sind,

[3] Deswegen kann man in $\mathbb{Z}$ mit der gerade angegebenen Regel eine Subtraktion definieren. In $\mathbb{N}$ geht das nicht auf diese Weise, allerdings kann man die Subtraktion auf $\mathbb{Z}$ wegen $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ nach $\mathbb{N}$ übertragen, wenn man nur Subtraktionen mit Ergebnis $a - b \in \mathbb{N}$ zulässt. Dies definiert aber keine vollständige Subtraktion auf $\mathbb{N}$, weil diese nicht für alle a, b definiert ist.

dass sich alle bekannten Eigenschaften der Grundrechenarten daraus ableiten lassen, sind die nun folgenden Anordnungsaxiome so beschaffen, dass sich alle Rechenregeln für Ungleichungen daraus ergeben.

Um die Herleitung etwas abzukürzen, beschränken wir uns hierbei auf Körper $\mathbb{K}$, die die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ als Teilmenge enthalten. "Enthalten" ist dabei eine informelle Formulierung, die wir noch mathematisch präzise erläutern müssen: Formal bedeutet dies, dass wir jeder Zahl $n \in \mathbb{N}$ eindeutig eine Zahl $n_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K}$ zuordnen können, so dass für alle $n, m, k \in \mathbb{N}$ die Äquivalenz

$$n + m = k \quad \Leftrightarrow \quad n_{\mathbb{K}} + m_{\mathbb{K}} = k_{\mathbb{K}}$$

für die Addition in $\mathbb{K}$ gilt. Für $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ ist dies erfüllt, wenn wir — wie üblich — jeder Zahl $n \in \mathbb{N}$ gerade den Bruch $n/1 \in \mathbb{Q}$ zuordnen. Das Beispiel $\mathbb{F}_2$ zeigt aber, dass man auch Körper mit anderen Additionen definieren kann; aus diesem Grund muss es nicht unbedingt der Fall sein, dass man eine Zuordnung finden kann, so dass die Additionen übereinstimmen.[4] Wenn eine solche Zuordnung möglich ist, muss man zwischen n und $n_{\mathbb{K}}$ und den verschiedenen Additionen nicht mehr unterscheiden, weil ja stets das gleiche Ergebnis herauskommt. Wir können also für $a \in \mathbb{K}$ und $n \in \mathbb{N}$ statt $a + n_{\mathbb{K}}$ oder $an_{\mathbb{K}}$ einfach $a + n$ bzw. an schreiben.

Anordnungsaxiome: Gegeben sei ein Körper $\mathbb{K}$, der die natürlichen Zahlen im gerade erläuterten Sinne enthält. In $\mathbb{K}$ defineren wir gewisse Elemente $a \in \mathbb{K}$ als *positiv* (Schreibweise: $a > 0$) und verlangen, dass für die positiven Zahlen die folgenden Axiome gelten:

(A1) Für jede Zahl $a \in \mathbb{K}$ gilt genau eine der drei Relationen

$$a > 0, \qquad a = 0, \qquad -a > 0.$$

(A2) Aus $a > 0$ und $b > 0$ folgt $a + b > 0$ und $ab > 0$.

(A3) (Archimedisches Axiom) Zu jeder Zahl $a \in \mathbb{K}$ gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n - a > 0$.

□

Ein Körper, der die Axiome (A1), (A2) und (A3) erfüllt wird *archimedisch angeordneter* Körper genannt.

Wenn a positiv ist, nennen wir $-a$ *negativ*.

Das Axiom (A1) kann man dann auch wie folgt formulieren: jede Zahl $a \in \mathbb{K}$ ist entweder positiv oder negativ oder gleich Null. "Entweder ... oder" bedeutet dabei, dass a nicht zwei dieser Eigenschaften zugleich haben kann. Axiom (A2) besagt in Worten, dass Summen und Produkte positiver Zahlen wieder positiv sind.

Die Menge der positiven Zahlen wird mit $\mathbb{K}_+$, die der negativen mit $\mathbb{K}_-$ bezeichnet. Zudem schreiben wir für $a, b \in \mathbb{K}$:

$a > b$,	falls $a - b > 0$	"a ist größer als b"
$a \geq b$,	falls $a < b$ oder $a = b$	"a ist größer oder gleich b"
$a < b$,	falls $b > a$	"a ist kleiner als b"
$a \leq b$,	falls $b \geq a$	"a ist kleiner oder gleich b"

[4] Für $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$ braucht man dies natürlich gar nicht erst versuchen, da bereits die Zuordnung $n \leftrightarrow n_{\mathbb{K}}$ scheitert, weil $\mathbb{F}_2$ ja nur 2 Elemente besitzt.

Die Forderung in Axiom (A3) lässt sich damit umschreiben als $n > a$. Das Axiom besagt damit, dass es für jede Zahl $a \in \mathbb{K}$ eine natürliche Zahl n geben muss, die größer als a ist.

Für die rationalen Zahlen $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ sind alle Anordnungsaxiome erfüllt, wenn wir die positiven Zahlen wie üblich als

$$\mathbb{K}^+ := \{p/q \in \mathbb{Q} \,|\, p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$$

definieren. (A1) gilt, weil jede rationale Zahl $a = p/q$ als Zähler entweder eine natürliche Zahl $p \in \mathbb{N}$ mit $p \neq 0$ hat (dann gilt $a > 0$) oder eine negative Zahl $p \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ (dann erhalten wir $a < 0$) oder $p = 0$ und damit $a = 0$ gilt. Das Axiom (A2) folgt aus den üblichen Rechenregeln für die Addition und Multiplikation von Brüchen und (A3) folgt, wenn wir $n = 0$ im Fall $p \notin \mathbb{N}$ und $n = p + 1$ im Fall $p \in \mathbb{N}$ wählen.

Alle bekannten Rechenregeln für Ungleichungen lassen sich aus den Axiomen ableiten. Der folgende Satz gibt einige Beispiele für Aussagen, die sich allein aus (A1) und (A2) folgern lassen.

Satz 2.1 Für einen Körper $\mathbb{K}$, der (A1) und (A2) erfüllt, gilt:

(1) Für alle $a, b, c \in \mathbb{K}$ gilt: $a > b$ und $b > c \Rightarrow a > c$.

(2) Für beliebige $a, b, c \in \mathbb{K}$ gilt: $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$.

(2a) Für beliebige $a, b, c \in \mathbb{K}$ mit $c > 0$ gilt: $a > b \Rightarrow ac > bc$.

(3) Für jedes $a \in \mathbb{K}$ gilt $a > 0 \Rightarrow -a < 0$ und $a < 0 \Rightarrow -a > 0$.

(4) Für beliebige $a, b \in \mathbb{K}$ gilt genau eine der Aussagen

$$a > b, \qquad a = b, \qquad a < b.$$

(5) Für alle $a, c \in \mathbb{K}$ gilt: $a > 0 \Rightarrow a + c > c$.

(6) Für alle $a \in \mathbb{K}$ gilt: $a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$. Insbesondere gilt damit $1 = 1^2 > 0$.

(7) Für alle $a \in \mathbb{K}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a > 0 \Rightarrow a^k > 0$.

(8) Für alle $a, b \in \mathbb{K}$ mit $a > 0$ und $b \geq 0$ und alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt: $a > b \Leftrightarrow a^n > b^n$.

(9) Für alle $a \in \mathbb{K}$ mit $a \geq -1$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die *Bernoullische Ungleichung*

$$(1 + a)^n \geq 1 + na.$$

Beweis: (1) Aus der Annahme folgt per Definition $a - b > 0$ und $b - c > 0$. Daraus folgt $a - c = a - b + b - c = (a - b) + (b - c) > 0$ wegen (A2).

(2) Nach Definition der Äquivalenz "$\Leftrightarrow$" bedeutet die zu beweisende Aussage ausgeschrieben

$$a > b \;\Rightarrow\; a + c > b + c \quad \text{und} \quad a > b \;\Leftarrow\; a + c > b + c.$$

Daher ist es (wie oft, wenn man eine Äquivalenz beweisen will) sinnvoll, diese beiden Folgerungen einzeln zu beweisen. Wir beginnen mit

"$\Rightarrow$": Es gelte $a > b$. Dann folgt

$$a > b \overset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} a - b > 0 \Rightarrow a - b + (c - c) = a - b + 0 = a - b > 0.$$

Wegen $a - b + (c - c) = (a + c) - (b + c)$ erhalten wir also auch $(a + c) - (b + c) > 0$ woraus per Definition $a + c > b + c$ folgt.

"$\Leftarrow$": Es gelte $a + c > b + c$. Dann gilt nach dem ersten Teil des Beweises auch $a + c + d > b + c + d$ für alle $d \in \mathbb{K}$. Wählen wir $d = -c$ so folgt $c + d = 0$ und damit $a = a + c + d > b + c + d = b$.

(2a) Es gilt

$$a > b \overset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} a - b > 0 \overset{(A2)}{\Rightarrow} (a - b)c > 0 \Leftrightarrow ac - bc > 0 \overset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} ac > bc.$$

(3) Die erste Aussage folgt aus (2) mit $b = 0$ und $c = (-a)$, denn aus $a > 0$ folgt $0 = a + (-a) \overset{(2)}{>} 0 + (-a) = -a$, was nach Definition äquivalent zu $-a < 0$ ist.

Die zweite Aussage folgt in analoger Weise aus (2) mit $a = 0$, $b = a$ und $c = (-a)$.

(4) Für $a - b$ gilt nach (A1) genau eine der Aussagen (i) $a - b > 0$, (ii) $a - b = 0$ oder (iii) $-(a - b) > 0$, was nach (3) äquivalent zu $a - b < 0$ ist. Wir zeigen nun, dass jede dieser Aussagen äquivalent zu einer der Aussagen in der Behauptung des Satzes ist.

(i) "$a - b > 0 \Leftrightarrow a > b$": Die Aussage $a - b > 0$ ist nach Definition gerade äquivalent zu $a > b$.

(ii) "$a - b = 0 \Leftrightarrow a = b$": "$\Rightarrow$": Aus der Aussage $a - b = 0$ erhalten wir mit (K5), dass $-b = -a$ sein muss, also folgt wegen der Eindeutigkeit des inversen Elements $a = -(-a) = -(-b) = b$.

"$\Leftarrow$": Gilt $a = b$, so folgt $a - b = a - a = a + (-a) = 0$ und damit $a - b = 0$.

(iii) "$a - b < 0 \Leftrightarrow a < b$": Die Aussage $a - b < 0$ ist per Definition äquivalent zu $0 > a - b$. Mit Addition von $c = b$ ist dies nach (2) äquivalent zu $b > a$ was wiederum per Definition äquivalent zu $a < b$ ist.

(5) Dies folgt aus (2) mit $b = 0$.

(6) Für $a > 0$ folgt $a^2 > 0$ aus (A2). Für $a < 0$ können wir zunächst aus $a \cdot 0 = 0$ und $a + (-a) = 0$ folgern, dass sowohl $a(a + (-a)) = 0$ als auch $(-a)(a + (-a)) = 0$ gilt. Mit dem Distributivgesetz folgt dann $a^2 + a(-a) = 0$ und $(-a)a + (-a)^2 = 0$, also $a^2 = a(-a) = (-a)a = (-a)^2$. Wegen $-a > 0$ folgt aber aus dem ersten Fall, dass $(-a)^2 > 0$ ist und damit die Behauptung.

(7) Beweis per Induktion über n: Für $n = n_0 = 0$ ist die Aussage wegen $a^0 = 1$ klar. Für $n \to n + 1$ gilt nach Induktionsannahme $a^n > 0$. Mit (A2) folgt dann $a^{n+1} = a^n a > 0$.

(8) Wir wollen die Äquivalenz "$a > b \Leftrightarrow a^n > b^n$" zeigen. Falls $b = 0$ ist, ist auch $b^n = 0$ und die Aussage folgt sofort aus (7). Es bleibt der Fall $b > 0$ zu beweisen.

"$\Rightarrow$": **Beweismethode 1, mit Binomischem Lehrsatz:**
Für $c := a - b > 0$ gilt $a = b + c$, also auch $a^k = (b+c)^k$. Nach dem Binomischen Lehrsatz Satz 1.6 gilt nun

$$(b+c)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^{n-k} c^k = b^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} b^{n-k} c^k + c^n.$$

Aus $b > 0$ und $c > 0$ folgt mit (A2) und (7), dass alle Terme in der letzten Summe > 0 sind und nach (A2) ist damit die gesamte Summe > 0. Mit (5) erhalten wir damit

$$a^k = (b+c)^k = \underbrace{b^n + c^n}_{c \text{ in } (5)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} b^{n-k}}_{a \text{ in } (5)} > b_n + c_n.$$

Aus $c > 0$ folgt dann mit (5) die Ungleichung $b^n + c^n > b^n$ und damit die Behauptung.

Beweismethode 2, mit vollständiger Induktion über n:
Für $n = 1$ ist die Aussage klar. Für $n \to n+1$ gelte per Induktionsannahme $a^n > b^n$, also $a^n - b^n > 0$. Nach Annahme gilt $a > b$ und aus (7) folgt $a^n > 0$. Also gilt

$$a^{n+1} = a^n a \overset{(2a)}{>} a^n b,$$

Damit folgt

$$a^{n+1} - b^{n+1} = a^{n+1} - b^n b \overset{(2)}{>} a^n b - b^n b = (a^n - b^n) b \overset{(A2)}{>} 0,$$

was per Definition gerade äquivalent zur Ungleichung $a^{n+1} > b^{n+1}$ ist, die zu beweisen war.

"$\Leftarrow$": Für diesen Teil des Beweises wenden wir zum ersten Mal die Gleichwertigkeit der Folgerungen (1.2) und (1.3) an. Statt $a^n > b^n \Rightarrow a > b$ zeigen wir die Folgerung "$a > b$ gilt nicht $\Rightarrow a^n > b^n$ gilt nicht" (diese Beweistechnik heißt *Kontraposition*): Wegen (4) ist "$a > b$ gilt nicht" gleichbedeutend mit "$a \leq b$" und "$a^n > b^n$ gilt nicht" gleichbedeutend mit "$a^n \leq b^n$". Wir müssen also die Folgerung

$$a \leq b \;\; \Rightarrow \;\; a^n \leq b^n$$

beweisen. Hierzu unterscheiden wir zwei Fälle:

Im Fall $a = b$ folgt $a^n = b^n$.

Im Fall $a < b$ folgt aus dem ersten Teil des Beweises mit vertauschten a und b, dass $a^n < b^n$ gilt. Zusammen zeigen die beiden Fälle gerade die gewünschte Folgerung.

(9) Beweis per Induktion über n: Für $n = 0$ gilt die behauptete Ungleichung offensichtlich mit Gleichheit. Für $n \to n+1$ folgt wegen $1 + a \geq 0$ mit der Induktionsannahme und (2a) die Ungleichung

$$(1+a)^{n+1} \geq (1+na)(1+a) = 1 + (n+1)a + na^2 \geq 1 + (n+1)a,$$

wobei wir im letzten Schritt (6), (A2) und (5) verwendet haben. □

Alle diese Aussagen konnten wir tatsächlich ohne (A3) beweisen. Ein Beispiel für eine Aussage, für die man (A3) benötigt, ist der folgende Satz.

Satz 2.2 Für einen Körper $\mathbb{K}$, der (A1)–(A3) erfüllt, gilt.

(a) Für jedes $b \in \mathbb{K}$ mit $b > 1$ und jedes $K \in \mathbb{K}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $b^n > K$.

(b) Für jedes $c \in \mathbb{K}$ mit $0 < c < 1$ und jedes $\varepsilon \in \mathbb{K}$ mit $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $c^n < \varepsilon$.

Beweis: (a) Für $a = b - 1$ gilt $b = 1 + a$. Für dieses a liefert die Bernoullische Ungleichung für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$b^n = (1 + a)^n \geq 1 + na.$$

Wählen wir nun n gemäß (A3) so, dass $na > K$ ist, so folgt $b^n > K$.

(b) Wir zeigen zunächst, dass $c^{-1} > 0$ ist. Dies benötigen wir, weil wir im nachfolgenden Schritt Satz 2.1(2a) mit c^-1 an Stelle von c anwenden wollen.

Zum Beweis von $c^{-1} > 0$ verwenden wir eine neue Beweistechnik, den *Beweis durch Widerspruch*: Wir nehmen das Gegenteil der zu beweisenden Behauptung an und zeigen, dass diese Annahme auf einen logischen Widerspruch führt. Folglich muss die Annahme (des Gegenteils) also falsch sein und die zu beweisende Aussage muss gelten.

Hier nehmen wir zur Herbeiführung eines Widerspruchs an, dass $c^{-1} > 0$ nicht gilt. Da $cc^{-1} = 1$ ist, muss $c^{-1} \neq 0$ sein (denn ansonsten wäre $cc^{-1} = c \cdot 0 = 0$), also folgt $c^{-1} < 0$. Nach Satz 2.1(3) ist dann $-c^{-1} > 0$ und aus (A2) folgt somit $(-c^{-1})c > 0$, weil $c > 0$. Wegen $(-c^{-1})c = -c^{-1}c = -1$ folgt also $-1 > 0$. Nach Satz 2.1(6) ist aber $1 > 0$. Mit Satz 2.1(3) folgt daraus $-1 < 0$ und wir erhalten einen Widerspruch.

Als nächstes zeigen wir, dass $c^{-1} > 1$ gilt. Dies gilt wegen $c^{-1} = c^{-1} \cdot 1 > c^{-1}c = 1$, wobei wir für die Ungleichung die Annahme $c < 1$ und 2.1(2a) verwenden, was wegen der eben bewiesenen Ungleichung $c^{-1} > 0$ möglich ist.

Jetzt setzen wir $b = c^{-1}$ und $K = \varepsilon^{-1}$ und wenden (a) an, was wegen $c^{-1} > 1$ möglich ist. Damit folgt $(c^{-1})^n \geq \varepsilon^{-1}$. Multiplikation mit $\varepsilon c^n > 0$ liefert dann

$$c^n = \varepsilon^{-1}\varepsilon c^n \leq (c^{-1})^n \varepsilon c^n = (c^{-1})^n c^n \varepsilon = \varepsilon.$$

Dabei haben wir $(c^{-1})nc^n = 1$ verwendet, was man per Induktion beweisen kann. □

Anschaulich lässt sich jeder archimedisch angeordnete Körper durch die bekannten Zahlengerade darstellen, auf der größere Zahlen weiter rechts und kleinere Zahlen weiter links eingezeichnet werden. Das Axiom (A3) besagt dann, dass beliebig weit rechts immer noch natürliche Zahlen liegen. Ohne die Anordnungsaxiome wäre eine solche grafische Veranschaulichung nicht möglich.

Bemerkung 2.3 Nachdem wir nun alle für die Rechenregeln notwendigen Axiome eingeführt haben, werden wir ab jetzt wieder die üblichen Rechenregeln verwenden, ohne jeweils auf die einzelnen Axiome zu verweisen. An einigen Stellen werden wir jedoch der Vollständigkeit halber auf Aussagen aus den eben bewiesenen Sätzen verweisen, auch wenn sich diese leicht aus den üblichen Rechenregeln ableiten lassen. □

Zm Abschluss dieses Abschnitts wollen wir einen wichtigen Begriff einführen, den sogenannten *Absolutbetrag*.

Definition 2.4 Sei $\mathbb{K}$ ein archimedisch angeordneter Körper. Der Absolutbetrag einer Zahl $a \in \mathbb{K}$ ist definiert als

$$|a| := \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq 0 \\ -a, & \text{falls } a < 0. \end{cases}$$

□

Offensichtlich erfüllt der Absolutbetrag immer $|a| \geq 0$ und $|a| = |-a|$. Zudem gilt der folgende Satz.

Satz 2.5 In einem archimedisch angeordneter Körper erfüllt der Absolutbetrag für alle $a, b \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} |ab| &= |a| \cdot |b| \\ |a+b| &\leq |a| + |b| \\ \big||a| - |b|\big| &\leq |a-b| \end{aligned}$$

Die zweite Aussage wird dabei *Dreiecksungleichung* genannt, die dritte wird als *umgekehrte Dreiecksungleichung* bezeichnet.

Beweis: Für die erste Aussage betrachtet man alle Kombinationen der die Fälle $a \geq 0$, $a < 0$ sowie $b \geq 0$ und $b < 0$ einzeln (Übungsaufgabe).

Ebenfalls durch Betrachtung der einzelnen Fälle kann man nachprüfen, dass für jedes $a \in \mathbb{K}$ immer $a \leq |a|$ und $-a \leq |a|$ gilt. Daraus folgt

$$a + b \leq |a| + |b| \qquad \text{und} \qquad -(a+b) = (-a) + (-b) \leq |a| + |b|.$$

Weil zudem entweder $|a+b| = a+b$ oder $|a+b| = -(a+b)$ gilt, folgt die Dreiecksungleichung.

Aus der Dreiecksungleichung folgt

$$|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|$$

und damit durch Subtraktion von $|b|$ auf beiden Seiten $|a| - |b| \leq |a - b|$. Die gleiche Ungleichung gilt natürlich, wenn wir a und b vertauschen und liefert dann $|b| - |a| \leq |b - a| = |a - b|$. Da stets entweder $\big||a| - |b|\big| = |a| - |b|$ oder $\big||a| - |b|\big| = -(|a| - |b|) = |b| - |a|$ gilt, folgt die behauptete Ungleichung. □

Der Absolutbetrag hat eine nützliche Interpretation auf der Zahlengeraden: $|a - b|$ ist dort nämlich gerade die Länge des Abstandes zwischen den Zahlen a und b.

2.4 Das Vollständigkeitsaxiom

Wir haben die Einführung der Axiome zu Beginn dieses Kapitels dadurch motiviert, dass wir die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ einführen wollen. Bisher werden aber alle Axiome auch durch den Körper der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ erfüllt. Es stellt sich also die Frage, warum wir mit diesen nicht zufrieden sind.

Der Grund ist, dass die rationalen Zahlen viele für die Analysis wichtige Zahlen nicht enthalten. Das mag auf den ersten Blick paradox klingen, denn zwischen je zwei rationalen Zahlen p_1/q_1 und p_2/q_2 kann man ja immer eine weitere rationale Zahl "in der Mitte" finden, nämlich gerade

$$\frac{1}{2}\left(\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}\right)=\frac{p_1q_2+p_2q_1}{2q_1q_2}.$$

Das könnte zu der Vermutung verleiten, dass auf der Zahlengeraden zwischen den Elementen von $\mathbb{Q}$ überhaupt kein Platz mehr für weitere Zahlen ist. Diese Vermutung ist aber falsch, wie das folgende Beispiel zeigt.

Wir wollen eine Zahl $x \in \mathbb{Q}$ mit $x > 0$ finden, welche die Gleichung $x^2 = 2$ löst. Nehmen wir dazu an, dass ein Bruch p/q mit $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$ existiert, so dass

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$$

ist. Wir nehmen dabei an, dass der Bruch gekürzt ist, was formal bedeutet, dass die Zahlen p und q *teilerfremd* sind, dass also keine Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ existiert, so dass sich p und q ohne Rest durch n teilen lassen. Diese Annahme können wir treffen, weil wir den Bruch andernfalls kürzen könnten und mit dem gekürzten Bruch weiter machen könnten[5]. Die obige Gleichung kann man äquivalent umschreiben als

$$\frac{p^2}{q^2} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad p^2 = 2q^2.$$

Aus dieser Darstellung folgt sofort, dass p^2 ohne Rest durch 2 teilbar sein muss, dass p^2 also eine gerade Zahl ist. Daraus folgt, dass auch p eine gerade Zahl ist, denn das Quadrat einer ungeraden Zahl ist immer ungerade (dies folgt aus der Tatsache, dass jede ungerade Zahl als $2k+1$ für ein $k \in \mathbb{N}$ geschrieben werden kann und $(2k+1)^2 = 4k^2+2k+1$ ungerade ist, da es gerade 1 mehr als die gerade Zahl $4k^2 + 2k$ ist).

Also ist $p/2$ eine ganze Zahl, woraus folgt dass auch $(p/2)^2 = p^2/4$ eine ganze Zahl ist. Wegen $q^2 = p^2/2$ ist $q^2/2 = p^2/4$ also ebenfalls eine ganze Zahl, d.h. q^2 ist ohne Rest durch 2 teilbar. Mit dem gleichen Argument wie oben ist dann auch q ohne Rest durch 2 teilbar. Folglich sind sowohl p als auch q durch zwei teilbar, was der Annahme, dass der Bruch gekürzt ist, widerspricht. Folglich kann kein $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 2$ existieren. □

Dieser Beweis geht auf den griechischen Mathematiker Euklid zurück, die Erkenntnis, dass $x^2 = 2$ in $\mathbb{Q}$ nicht lösbar ist, ist also bereits mehrere 1000 Jahre alt.

[5] In der Mathematik gibt es oft Annahmen, die immer erfüllbar sind, indem man die Problemstellung geeignet abändert. Man sagt dann, dass diese Annahme *ohne Beschränkung der Allgemeinheit* (kurz: o.B.d.A.) gilt. In manchen Büchern findet man dafür auch die Bezeichung *ohne Einschränkung* (kurz: o.E.).

Die Idee des nun folgenden Vollständigkeitsaxioms liegt darin, den Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ zu definieren, indem man die "Lücken" in $\mathbb{Q}$ füllt, die rationalen Zahlen also vervollständigt. Es gibt mehrere verschiedene Arten, dieses Axiom zu formulieren. Hier geben wir eine anschauliche Methode an, die auf Karl Weierstraß (1815–1897) zurückgeht. Dazu benötigen wir noch ein paar Definitionen.

Definition 2.6 Sei $\mathbb{K}$ ein archimedisch angeordneter Körper. Für $a, b \in \mathbb{K}$ mit $a < b$ heißt

$$\begin{aligned}
[a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x \leq b\} && \text{abgeschlossenes Intervall} \\
(a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x < b\} && \text{offenes Intervall} \\
[a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x < b\} && \text{(nach rechts) halboffenes Intervall} \\
(a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x \leq b\} && \text{(nach links) halboffenes Intervall}
\end{aligned}$$

Die *Länge* eines Intervalls ist definiert als $|I| := b - a$. □

Definition 2.7 Eine *Intervallschachtelung* ist eine unendliche Folge von Intervallen I_0, I_1, I_2, I_3, ..., kurz als I_n, $n \in \mathbb{N}$ bezeichnet, die die folgenden beiden Eigenschaften erfüllt.

(I1) $I_{n+1} \subseteq I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$

(I2) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein Intervall I_n mit Länge $|I_n| < \varepsilon$.

□

Mit Hilfe dieser Intervallschachtelungen formulieren wir nun unser letztes Axiom. Darin sei $\mathbb{K}$ ein archimedisch angeordneter Körper.

Vollständigkeitsaxiom: Zu jeder Intervallschachtelung in $\mathbb{K}$ gibt es eine Zahl $a \in \mathbb{K}$, die in allen Intervallen I_n liegt.

Beachte, dass diese Zahl a für jede Intervallschachtelung eindeutig ist: Angenommen, es existieren zwei verschiedene Zahlen a und $\tilde{a}$, die in allen Intervallen liegen. O.B.d.A. sei $a < \tilde{a}$. Wir setzen $\varepsilon := \tilde{a} - a > 0$ und betrachten ein Intervall I_n mit $|I_n| < \varepsilon$. Mit a_n und b_n bezeichnen wir die untere und obere Intervallgrenze von I_n. Falls dann $a \in I_n$ liegt, so folgt $a \geq a_n$ und damit $b_n - a \leq b_n - a_n < \varepsilon$, also $b_n < a + \varepsilon$. Folglich ist $\tilde{a} = a + \varepsilon > b_n$ und kann damit nicht in I_n liegen. Gleichermaßen führt die Annahme $\tilde{a} \in I_n$ auf die Aussage $a \notin I_n$. Es können also keine zwei verschiedenen Zahlen in allen Intervallen einer Intervallschachtelung liegen.

Die Menge der reellen Zahlen ist nun gerade der Körper, den wir erhalten, indem wir gerade diejenigen Zahlen zu $\mathbb{Q}$ hinzunehmen, so dass das Vollständigkeitsaxiom erfüllt ist. Bildlich gesprochen ordnet man also jeder Intervallschachtelung eine Zahl zu (wobei man Intervallschachtelungen, die die selbe Zahl ergeben, natürlich auch die selbe Zahl zuordnet) und fügt diese zu $\mathbb{R}$ hinzu. Die so entstehenden "neuen" Zahlen können dann natürlich nicht mehr als Brüche geschrieben werden, da sie ja nicht in $\mathbb{Q}$ liegen. Andererseits wäre es ziemlich umständlich, für jede neue Zahl immer die Intervallschachtelung hinzuschreiben, aus der sie hervorgeht. Alternativ kann man jede reelle Zahl als unendlichen Dezimalbruch schreiben, also als

$$c_l c_{l-1} \ldots c_1, d_1 d_2 d_3 \ldots$$

mit unendlich vielen Nachkommastellen d_i, wobei $c_i, d_i \in \{0, \ldots, 9\}$ gilt. Dies untersuchen wir am Ende dieses Kapitels noch genauer. Da die Darstellung als unendlicher Dezimalbruch zum Hinschreiben auch nicht wirklich praktisch ist, gibt es für viele relle Zahlen eigene Symbole. Die oben gesuchte eindeutige positive Lösung der Gleichung $x^2 = 2$ wird — wie natürlich bekannt ist — mit $\sqrt{2}$ bezeichnet, so wie allgemein die positive Lösung der Gleichung $x^k = y$ mit $\sqrt[k]{y}$ bezeichnet wird. Die Kreiszahl π, die ebenfalls nicht in $\mathbb{Q}$ liegt, hat wegen ihrer großen Bedeutung für die Mathematik ebenfalls ein eigenes Symbol.

Dass das oben beschriebene Vorgehen der Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ tatsächlich auf einen sinvollen Körper führt, dass die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ also tatsächlich existieren und dass in ihnen tatsächlich die gewohnten Rechenregeln gelten, müsste natürlich formal bewiesen werden. Dies würde aber viel mehr Zeit in Anspruch nehmen, als wir in dieser Vorlesung zur Verfügung haben. Eine deutlich ausführlichere — wenngleich auch nicht ganz lückenlose — Darstellung findet sich z.B. im Buch von Amman und Escher [1]. Wir werden ab jetzt mit den reellen Zahlen arbeiten, auch ohne dass wir diesen Beweis hier nachvollziehen. Das Vollständigkeitsaxiom wird uns dabei an einigen Stellen noch einmal begegnen.

Bevor wir diesen Abschnitt beenden, wollen wir noch eine Frage beantworten, über die wir oben stillschweigend hinweggegangen sind, obwohl sie die Motivation für den gesamten Abschnitt war: Wissen wir eigentlich, dass wir es mit dem Vollständigkeitsaxiom tatsächlich geschafft haben, eine Zahl $x > 0$ mit $x^2 = 2$ hinzuzufügen? Dass dies tatsächlich gelungen ist, zeigt der folgende Satz.

Satz 2.8 Es gibt eine Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$, so dass die eindeutige Zahl x, die in allen I_n, $n \in \mathbb{N}$, liegt, positiv ist und die Gleichung $x^2 = 2$ erfüllt. Insbesondere existiert also ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ und $x^2 = 2$.

Beweis: Wir konstruieren eine Intervallschachtelung $I_n = [a_n, b_n]$ mit $a_n, b_n \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ wie folgt:

(1) Setze $a_0 := 1$, $b_0 := 2$, $n := 0$

(2) Definiere $c_n := (a_n + b_n)/2$ (dies ist gerade der Mittelpunkt des Intervalls I_n)

(3) (i) Falls $c_n^2 \geq 2$, setze $a_{n+1} := a_n$ und $b_{n+1} := c_n$;
(ii) sonst setze $a_{n+1} := c_n$ und $b_{n+1} := b_n$

(4) Setze $n := n + 1$ und gehe zu (2).

Aus der Konstruktion folgt $I_{n+1} \subseteq I_n$, $a_n^2 \leq 2$ und $b_n^2 \geq 2$. Da sich die Länge der Intervalle in jedem Schritt halbiert und $|I_0| = 2 - 1 = 1$ gilt, folgt außerdem $|I_n| = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Daher ist I_n eine Intervallschachtelung, denn: Geben wir uns dazu ein beliebiges $\varepsilon > 0$ vor, so können wir nach Satz 2.2(b) ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\left(\frac{1}{2}\right)^n < \varepsilon$ finden. Damit folgt $|I_n| = \left(\frac{1}{2}\right)^n < \varepsilon$.

Aus dem Vollständigkeitsaxiom folgt damit, dass ein (eindeutiges) $x \in \mathbb{R}$ existiert, das in allen I_n liegt, das also $a_n \leq x \leq b_n$ erfüllt. Wegen $x \geq a_0 = 1$ für alle n ist dieses sicherlich positiv. Es bleibt zu zeigen, dass $x^2 = 2$ gilt.

Aus den Ungleichungen $b_n - a_n = |I_n|$, $a_n < b_n \leq b_0 = 2$, $a_n^2 \leq 2 \leq b_n^2$ und $a_n^2 \leq x \leq b_n^2$ erhalten wir die Ungleichung

$$|x^2 - 2| \leq b_n^2 - a_n^2 = (b_n + a_n)(b_n - a_n) \leq 4|I_n|. \tag{2.1}$$

Daraus folgt $x^2 = 2$, denn: wäre $x^2 \neq 2$ so wäre $|x^2 - 2| > 0$ und wir könnten zu $\varepsilon := |x^2 - 2|/4 > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|I_n| < \varepsilon$ finden. Dann wäre aber

$$|x^2 - 2| = 4\varepsilon > 4|I_n|,$$

was ein Widerspruch zu (2.1) wäre. □

2.5 Infimum und Supremum

Betrachten wir eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$, so stellt sich die Frage, ob sie ein größtes oder kleinstes Element besitzt. Eine Grundvoraussetzung dafür ist sicherlich, dass M keine unendlich großen positiven bzw. keine unendlich kleinen negativen Zahlen enthält. Dies ist gerade der Inhalt der folgenden Definition.

Definition 2.9 Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ heißt *nach oben (bzw. nach unten) beschränkt*, wenn es eine Zahl $s \in \mathbb{R}$ gibt, so dass die Ungleichung

$$x \leq s \qquad (\text{bzw. } x \geq s)$$

für alle $x \in M$ gilt. Die Menge M heißt *beschränkt*, wenn sie nach oben und nach unten beschränkt ist. □

Beispiel 2.10 (a) Jedes Intervall $[a, b]$, (a, b), $[a, b)$ und $(a, b]$ im Sinne von Definition 2.7 ist beschränkt. Hierbei ist jedes $s \leq a$ eine untere Schranke und jedes $s \geq b$ eine obere Schranke.

(b) Die Menge $\mathbb{N}$ ist nach unten durch jedes $s \leq 0$ beschränkt, nach oben aber unbeschränkt. Die Menge $\mathbb{Z}$ ist nach oben und unten unbeschränkt.

(c) Die Menge $M := \{1/n \,|\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ ist beschränkt; nach oben durch jedes $s \geq 1$ und nach unten durch jedes $s \leq 0$. □

Was auf den ersten Blick überraschend erscheinen mag, ist die Tatsache, dass es in einer beschränkten Menge keine größte oder kleinste Zahl geben muss. Anschaulich kann man sich das aber gut an den offenen Intervallen klar machen. Das Intervall $I = (0, 1)$ besteht z.B. aus allen Zahlen, die echt größer als 0 und echt kleiner als 1 sind. Gäbe es eine kleinste Zahl $x_{\min} \in I$, so müsste $x_{\min} \leq 0$ gelten, denn für $x_{\min} > 0$ ist auch $x_{\min}/2 > 0$ und die Zahl $x = \min\{x_{\min}/2, 1/2\}$ liegt echt zwischen 0 und 1 und damit in I. Da damit $x \leq x_{\min}/2 < x_{\min}$ gilt, kann $x_{\min}$ nicht größer als Null sein. Andererseits liegt aber keine Zahl $x \leq 0$ in I, weswegen es keine kleinste Zahl in I gibt.

Ähnlich ist das für die kleinste Zahl in $M := \{1/n \,|\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$. Für jedes $x > 0$ können wir $n > 1/x$ wählen und erhalten damit $1/n < x$, weswegen die kleinste Zahl ≤ 0 sein muss. In M sind aber keine Zahlen ≤ 0 enthalten.

Diese Beobachtung ist der Grund dafür, dass man an Stelle von größten (oder kleinsten) Elementen die folgende, auf den ersten Blick etwas umständlichere Definition verwendet.

Definition 2.11 Eine Zahl $s \in \mathbb{R}$ heißt *Supremum* einer Menge $M \subset \mathbb{R}$, falls s die kleinste obere Schranke der Menge ist, d.h.

(i) s ist eine obere Schranke von M

(ii) jede Zahl $\tilde{s} < s$ ist keine obere Schranke von M

Wenn ein Supremum existiert, ist es eindeutig[6] und wird mit

$$s = \sup M$$

bezeichnet.

Analog definiert man das Infimum $s = \inf M$ als größte untere Schranke. □

Beispiel 2.12 Für die Mengen aus Beispiel 2.10 erhält man

(a) $\sup[a,b] = \sup(a,b) = \sup[a,b) = \sup(a,b] = b$ und $\inf[a,b] = \inf(a,b) = \inf[a,b) = \inf(a,b] = a$

(b) $\inf \mathbb{N} = 0$

(c) Für $M = \{1/n \,|\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ ist $\sup M = 1$ und $\inf M = 0$.

Im Fall nach oben unbeschränkter Mengen M schreibt man auch $\sup M = \infty$ und im nach unten unbeschränkten Fall $\inf M = -\infty$. Mit dieser Schreibweise gilt also $\sup \mathbb{N} = \infty$. □

Definition 2.11 enthält die Einschränkung "wenn ein Supremum existiert". Der folgende Satz zeigt, dass dies für nach oben (bzw. unten) beschränkte Teilmengen in $\mathbb{R}$ immer erfüllt ist.

Satz 2.13 Jede nach oben (bzw. unten) beschränkte nichtleere Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ besitzt ein Supremum (bzw. Infimum).

Beweis: Wir zeigen die Behauptung für das Supremum, für das Infimum folgt die Aussage analog. Die Existenz des Supremums folgt aus dem Vollständigkeitsaxiom, wenn wir eine Intervallschachtelung konstruieren können, die das Supremum stets enthält. Dazu konstruieren wir eine Intervallschachtelung $I_n = [a_n, b_n]$ mit $a_n < b_n$ in der Weise, dass b_n stets eine obere Schranke ist und a_n stets keine obere Schranke ist. Aus der Definition des Supremums als kleinste obere Schranke folgt, dass es in jedem solchen Intervall enthalten ist und wegen des Vollständigkeitsaxioms foglich in $\mathbb{R}$ existiert.

[6] Angenommen, s und s' erfüllen die beiden Eigenschaften, dann muss wegen (ii) $s' \geq s$ und $s \geq s'$ gelten, woraus die Gleichheit folgt.

Sei M also eine nichtleere Menge mit einer oberen Schranke s. Wir setzen $b_0 := s$, wählen ein beliebiges Element $x \in M$ und setzen $a_0 := x - 1$. Damit ist sicherlich $a_n < b_n$ und a_n ist per Konstruktion keine obere Schranke.

Sei nun $n \in \mathbb{N}$ beliebig und $a_n < b_n$ mit den obigen Eigenschaften gegeben. Dann gehen wir ähnlich wie im Beweis von Satz 2.8 vor: wir setzen $c_n := (a_n + b_n)/2$ (Mittelpunkt des Intervalls) und setzen $a_{n+1} := a_n$ sowie $b_{n+1} := c_n$ falls c_n eine obere Schranke von M Menge ist und $a_{n+1} := c_n$ und $b_{n+1} := b_n$ sonst.

Aus der Konstruktion folgt $a_{n+1} < b_{n+1}$, a_{n+1} ist keine obere Schranke und b_{n+1} ist eine obere Schranke. Setzen wir diese Konstruktion induktiv fort, so muss das Supremum folglich in allen Intervallen enthalten sein. Zudem sieht man wie im Beweis von Satz 2.8, dass wir mit der fortgesetzten Halbierung tatsächlich eine Intervallschachtelung erhalten. □

Dass die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ (also die Gültigkeit des Vollständigkeitsaxioms) wesentlich für die Existenz des Supremums (bzw. Infimums) ist, kann man sehen, wenn man $\mathbb{Q}$ statt R betrachtet. Z.B. besitzt die Menge

$$M = \{x \in \mathbb{Q} \,|\, x > 0 \text{ und } x^2 < 2\} \subset Q$$

kein Supremum in $\mathbb{Q}$, denn: aus der Definition von M folgt, dass ein $s \in \mathbb{Q}$ genau dann eine obere Schranke von M ist, wenn $s > 0$ und $s^2 \geq 2$ gilt. Wir beweisen jetzt, dass es keine kleinste obere Schranke in Q geben kann. Sei dazu $s \in \mathbb{Q}$ eine beliebige obere Schranke, d.h. es gilt $s > 0$ und $s^2 \geq 2$. Weil in $\mathbb{Q}$ aber kein s mit $s^2 = 2$ existiert, folgt daraus $s^2 > 2$. Wählen wir nun $n \in \mathbb{N}$ mit $1/n < (s^2 - 2)/(2s)$ sowie $1/n < s$ und setzen $\tilde{s} := s - 1/n$, so folgt $\tilde{s} \in \mathbb{Q}$, $\tilde{s} > 0$ $\tilde{s} < s$ und

$$\tilde{s}^2 = (s - 1/n)^2 = s^2 - 2s/n + 1/n^2 > s^2 - 2s/n > s^2 - (s^2 - 2) = 2.$$

Damit ist $\tilde{s}$ ebenfalls wieder eine obere Schranke, was der Definition von s als kleinste obere Schranke widerspricht.

Bemerkung 2.14 Wir haben die Existenz eines Supremums hier aus dem Vollständigkeitsaxiom gefolgert. Tatsächlich gilt auch die Umkehrung, d.h. man kann das Vollständigkeitsaxiom aus der Existenz des Supremums folgern. Dazu definiert man für eine gegebene Intervallschachtelung $I_n = [a_n, b_n]$ die Menge $M = \{a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots\}$. Aus der Schachtelung folgen die Ungleichungen $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots$ und $b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \ldots$. Hieraus und aus $a_n \leq b_n$ folgt für alle $m, n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $a_n \leq b_m$, d.h. jedes b_m ist eine obere Schranke von M. Folglich ist $\sup M \leq b_n$ für alle n, andererseits ist per Definition $\sup M \geq a_n$ für alle n. Daher ist $\sup M$ in allen Intervallen enthalten. Falls $\sup M$ also in $\mathbb{R}$ existiert, ist das Vollständigkeitsaxiom erfüllt.

Alternativ kann man das Vollständigkeitsaxiom in der Definition von $\mathbb{R}$ also ersetzen durch die Bedingung: "jede nach oben beschränkte Menge besitzt ein Supremum in $\mathbb{R}$". □

Ein besonders schöner Fall tritt auf, wenn das Supremum (bzw. Infimum) einer Menge M in der Menge M selbst enthalten ist, d.h. wenn die Menge ein größtes (oder kleinstes) Element besitzt.

Definition 2.15 Falls eine Menge M ein Element $s \in M$ enthält, für das $x \leq s$ (bzw. $x \geq s$) gilt für alle $x \in M$, so heißt s das *Maximum* (bzw. *Minimum*) der Menge M, geschrieben als $s = \max M$ (bzw. $s = \min M$). □

Der Zusammenhang zwischen Maximum und Supremum ist wie folgt: Wenn das Maximum $s = \max M \in M$ existiert, so stimmt es mit dem Supremum überein, denn es ist per Definition eine obere Schranke und für jedes $\tilde{s} < s$ ist wegen $\tilde{s} < s \in M$ keine obere Schranke. Umgekehrt gilt: wenn das das Supremum $\sup M$ existiert, so ist es genau dann ein Maximum, wenn es in M liegt. Ein Maximum ist also stets ein Supremum, umgekehrt ist ein Supremum aber nur (genau) dann ein Maximum, wenn es in M liegt. Eine nach oben beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}$ besitzt folglich genau dann ein Maximum, wenn $\sup M \in M$ gilt. Analog gilt dies für das Minimum und das Infimum.

Beispiel 2.16 (a) Das offene Intervall (a, b) besitzt wegen $\sup(a, b) = b \notin (a, b)$ kein Maximum, das abgeschlossene Intervall $[a, b]$ wegen $\sup(a, b) = b \in [a, b]$ hingegen schon.

(b) Jede nichtleere Teilmenge $N \subset \mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen besitzt ein Minimum, was wir per Widerspruch beweisen: Angenommen, es existiert kein Minimum in N. Dann beweisen wir per Induktion über n, dass die Zahlen $0, \ldots, n$ nicht in N liegen können: Wäre $n = 0 \in \mathbb{N}$ wäre dies auch das Minimum, denn eine kleinere Zahl gibt es nicht in $\mathbb{N}$. Liegen nach Induktionsannahme die Zahlen $0, \ldots, n$ nicht in N, so kann auch $n + 1$ nicht in N liegen, da dies ansonsten das Minimum wäre. Folglich liegt kein $n \in \mathbb{N}$ in N, was der Tatsache widerspricht, dass N nichtleer ist.

(c) Jede nach unten beschränkte Teilmenge $A \subset \mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen besitzt ein Minimum. Falls $A \subset \mathbb{N}$, folgt dies direkt aus (b), falls A negative Zahlen enthält, wählen wir ein $k \in \mathbb{N}$ mit $k > -s$, wobei s die untere Schranke von A ist. Damit definieren wir die Menge

$$\widetilde{A} := \{a + k \mid a \in A\}.$$

Aus dieser Definition folgt

$$\tilde{a} \in \widetilde{A} \Leftrightarrow \tilde{a} - k \in A \qquad \text{und} \qquad a \in A \Leftrightarrow a + k \in \widetilde{A}.$$

Für jedes $\widetilde{a} \in \widetilde{A}$ gilt für $a := \tilde{a} - k$ daher $s \leq a$ und folglich $\widetilde{a} = a + k > a - s \geq 0$. Die Menge $\widetilde{A}$ ist also eine Teilmenge von $\mathbb{N}$ und besitzt damit nach (b) ein Minimum $\min \widetilde{A} \in \widetilde{A}$. Dieses erfüllt $\min \widetilde{A} - k \in A$ und für jedes $a \in A$ gilt mit $\tilde{a} := a + k$ die Ungleichung $\min \widetilde{A} - k \leq \tilde{a} - k = a$. Folglich ist $\min \widetilde{A} - k$ ein Minimum von A. □

Der folgende Satz zeigt eine wichtigen Konsequenz aus der Existenz des Maximums.

Satz 2.17 Es sei ein $s \in \mathbb{R}$ gegeben, so dass für eine gegebene Menge M die Ungleichung $x < s$ für alle $x \in M$ gilt. Dann gilt

$$\sup M \leq s.$$

Falls das Maximum $\max M$ existiert, gilt die strikte Ungleichung

$$\sup M < s.$$

Analog gilt die Aussage für Infimum und Minimum mit den Ungleichungen $\geq$ und $>$.

Beweis: Die erste Aussage folgt aus der Tatsache, dass s eine obere Schranke ist und das Supremum die kleinste obere Schranke ist.

Die zweite Aussage folgt, weil $x := \sup M = \max M \in M$ gilt und damit nach Voraussetzung $\sup M = x < s$ gilt. □

Der Unterschied zwischen den beiden Aussagen ist, dass im ersten Fall möglicherweise Gleichheit gilt, während im zweiten Fall immer eine strikte Ungleichung sicher gestellt werden kann. Oder anders gesagt: Nur wenn ein Maximum existiert, kann sicher gestellt werden, dass sich die elementweise strikte Ungleichung $x < s$ auf das Supremum überträgt; im Allgemeinen kann aus dem elementweisen "$<$" beim Übergang zum Supremum das schwächere "$\leq$" werden.

Beispiel 2.18 Betrachte das offene Intervall (a, b). Da alle $x \in (a, b)$ per Definition $x < b$ erfüllen, ist $s = b$ eine Wahl für das s in Satz 2.17. Wegen $\sup(a, b) = b$ gilt die strikte Ungleichung aber nicht.

Für das abgeschlossene Intervall $[a, b]$ erfüllt $s = b$ die Voraussetzungen von Satz 2.17 gerade nicht, weil für $x = b$ die strikte Ungleichung $x < s$ nicht gilt. □

2.6 Die Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$

Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir uns noch kurz mit der Frage beschäftigen, wie viele reelle Zahlen es eigentlich gibt. Die naheliegende Antwort "unendlich viele" ist natürlich richtig, aber wir wollen das hier genauer untersuchen. Insbesondere wollen wir die Größe der Menge $\mathbb{R}$ mit der Größe der Mengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ vergleichen. Dazu definieren wir einen Größenbegriff für unendliche Mengen.

Definition 2.19 Eine Menge A mit unendlich vielen Elementen heißt *abzählbar*, falls jedem Element $a \in A$ eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ zugeordnet werden kann, so dass kein n mehrfach vorkommt.

Falls dies nicht möglich ist, heißt sie *überabzählbar*. □

Diese Definition formalisiert etwas ganz Anschauliches, nämlich das Durchnummerieren oder eben Abzählen der Elemente der Menge A. Offensichtlich ist $\mathbb{N}$ abzählbar, denn jedem $n \in \mathbb{N}$ kann natürlich gerade n selbst zugeordnet werden. Etwas weniger offensichtlich ist, dass auch $\mathbb{Z}$ abzählbar ist, denn auf den ersten Blick könnte man ja meinen, dass $\mathbb{Z}$ ungefähr doppelt so viele Elemente wie $\mathbb{N}$ hat. Dieses Argument gilt aber nur bei endlichen Mengen; bei unendlichen Mengen kann man ein paar Tricks durchführen, die im Endlichen nicht möglich sind. Für $\mathbb{Z}$ besteht dieser Trick darin, die Elemente wie folgt anordnen:

$$0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \ldots$$

In dieser Anordnung taucht jedes $z \in \mathbb{Z}$ irgendwann einmal auf und wenn wir die Elemente in dieser Anordnung von links nach rechts durchnummerieren, haben wir gerade die gewünschte Zuordnung erhalten.

Bei den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ erscheint es noch verblüffender, dass eine Abzählung gefunden werden kann, denn auf jede natürliche Zahl n kommen ja unendlich viele rationale Zahlen (was einfach daraus folgt, dass zwischen je zwei natürlichen Zahlen unendlich viele rationale Zahlen liegen). Trotzdem geht es, wenn man die rationalen Zahlen p/q wie folgt anordnet und sie gemäß der Pfeilrichtungen durchnummeriert.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\frac{0}{1} & \rightarrow & \frac{-1}{1} & & \frac{1}{1} & \rightarrow & \frac{-2}{1} & & \frac{2}{1} & \rightarrow & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
\frac{0}{2} & & \frac{-1}{2} & & \frac{1}{2} & & \frac{-2}{2} & & \frac{2}{2} & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & \\
\frac{0}{3} & & \frac{-1}{3} & & \frac{1}{3} & & \frac{-2}{3} & & \frac{2}{3} & & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
\frac{0}{4} & & \frac{-1}{4} & & \frac{1}{4} & & \frac{-2}{4} & & \frac{2}{4} & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & \\
\frac{0}{5} & & \frac{-1}{5} & & \frac{1}{5} & & \frac{-2}{5} & & \frac{2}{5} & & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots
\end{array}$$

Hierbei werden von links nach rechts alle möglichen Zähler $p \in \mathbb{Z}$ angeordnet und von oben nach unten alle möglichen Nenner aus $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Da man so alle möglichen rationalen Zahlen bekommt, fehlt keine in der Tabelle. Die Abzählung erhält man nun, indem man jeweils entlang der Diagonalen zählt. Dass viele der autretenden Brüche gleiche Werte haben, stört dabei nicht; denn würden wir diese weglassen, würde die abzuzählende Menge ja nur kleiner.

Die Mengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind also abzählbar — nicht aber $\mathbb{R}$. Genauer gilt sogar der folgende Satz.

Satz 2.20 Jedes Teilintervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ mit $a < b$ enthält überabzählbar viele Zahlen.

Beweis: Wir führen einen Widerspruchsbeweis: Angenommen es gäbe eine Abzählung $[a, b] = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$. Wir konstruieren nun die folgende Intervallschachtelung I_n.

Wir beginnen mit dem Intervall $I_0 = [a, b]$ und konstruieren die Intervalle I_n für $n \geq 1$ wie folgt induktiv: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ unterteilen wir $I_n = [a_n, b_n]$ in die drei gleich großen Teilintervalle

$$\left[a_n, a_n + \frac{1}{3}(b_n - a_n)\right] \qquad \left[a_n + \frac{1}{3}(b_n - a_n), a_n + \frac{2}{3}(b_n - a_n)\right] \qquad \left[a_n + \frac{2}{3}(b_n - a_n), b_n\right].$$

Falls die Zahl x_{n+1} kleiner oder gleich $(a_n + b_n)/2 = a_n + (b_n - a_n)/2$ ist, liegt sie nicht im dritten Intervall und wir wählen I_{n+1} als das dritte Intervall. Andernfalls liegt x_{n+1} sicher nicht im ersten der drei Teilintervalle und wir wählen I_{n+1} gerade als das erste Teilintervall.

Damit erhalten wir eine Intervallschachtelung, da die Intervalle sicherlich ineinander enthalten sind und und die Länge des n-ten Intervalls I_n gerade $(1/3)^n$ beträgt, die Intervalllängen also kleiner als jedes $\varepsilon > 0$ werden. Nach dem Vollständigkeitsaxiom existiert nun ein $s \in \mathbb{R}$, das in allen Intervallen I_n enthalten ist. Nach Konstruktion der Intervalle

gilt aber $x_1 \notin I_1$, $x_2 \notin I_2$ usw. Folglich ist $s \neq x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist die obige Abzählung nicht vollständig und wir erhalten den gesuchten Widerspruch. $\square$

In jedem noch so kleinen Teilintervall von $\mathbb{R}$ liegen also viel mehr Zahlen als in der ganzen Menge $\mathbb{Q}$. Tatsächlich ist übrigens auch die Menge $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ überabzählbar, denn wäre diese Menge abzählbar, so wäre es auch die Vereinigung $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

Kann man daraus schließen, dass es Bereiche auf der reellen Zahlengeraden gibt, in denen keine rationalen Zahlen liegen? Das würde der Intuition sicherlich widersprechen, denn wie wir am Anfang von Abschnitt 2.4 beobachtet haben, liegt ja zwischen je zwei rationalen Zahlen wieder eine weitere rationale Zahl. Und tatsächlich kann es solche Bereiche auch nicht geben, denn zwischen zwei reellen Zahlen liegt stets auch eine rationale Zahl, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 2.21 Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ und jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $r \in \mathbb{Q}$ mit $r \in (x - \varepsilon, x]$, also insbesondere $|x - r| < \varepsilon$.

Beweis: Wähle $n \in \mathbb{N}$ so dass $1/n \leq \varepsilon$ gilt. Sei A die Menge der ganzen Zahlen $> nx$. Diese Menge ist nach unten durch $s = nx$ beschränkt und besitzt damit nach Beispiel 2.16(c) ein Minimum m. Für dieses gilt nach Satz 2.17 $m > nx$ und wegen der Minimalität gilt zudem $m - 1 \leq nx$ (anderfalls wäre $m - 1 \in A$ und m wäre kein Minimum). Daraus folgt $m/n > x$ und $(m-1)/n \leq x$ und damit

$$x \geq \frac{m-1}{n} = \frac{m}{n} - \frac{1}{n} > x - \varepsilon.$$

Folglich gelten für $r = (m-1)/n \in \mathbb{Q}$ die Ungleichungen $r \leq x$ und $r > x - \varepsilon$, also $r \in (x - \varepsilon, x]$ und $|x - r| = x - r < x - (x - \varepsilon) = \varepsilon$. $\square$

Dieser Satz zeigt, dass es beliebige nahe bei jeder reellen Zahl eine rationale Zahl gibt. Man sagt, dass $\mathbb{Q}$ *dicht* in $\mathbb{R}$ liegt. Diese Eigenschaft liefert z.B. die Rechtfertigung dafür, dass Computer oft nur mit rationalen Zahlen rechnen (und davon noch nicht einmal mit allen), weil man jede reelle Zahl beliebig gut durch eine rationale Zahl annähern kann.

Mit einer kleinen Variante des obigen Beweises kann zudem gezeigt werden, dass jede reelle Zahl als Dezimalbruch[7]

$$\pm c_l c_{l-1} \ldots c_1, d_1 d_2 d_3 \ldots$$

mit (möglicherweise) unendlich vielen Nachkommastellen d_i geschrieben werden kann, wobei $c_i, d_i \in \{0, \ldots, 9\}$ gilt. Wir zeigen dies für positive reelle Zahlen $x > 0$ und setzen dazu in dem Beweis

$$\varepsilon = 10^{-k_1} = 0, \underbrace{00\ldots0}_{k_1 - 1 \text{ Stellen}} 1$$

und $n = 10^{k_1}$ für ein beliebiges $k_1 \geq 1$ mit $10^{-k_1} < x$, so ergibt sich eine rationale Zahl der Form

$$r_1 = \frac{m-1}{10^{k_1}} = c_l^1 c_{l-1}^1 \ldots c_1^1, d_1^1 d_2^1 d_3^1 \ldots d_{k_1}^1,$$

[7] In dieser Konstruktion setzen wir die Kenntnis der Dezimalbrüche aus der Schule voraus. Formal werden wir diese in Kapitel 4 definieren.

d.h. ein Dezimalbruch mit höchstens k_1 Nachkommastellen, der wegen $x - r_1 < 10^{-k_1} \Rightarrow r_1 > x - 10^{-k_1} > 0$ positiv ist.

Nun konstruieren wir einen weiteren Dezimalbruch r_2 wie folgt: Falls $r_1 = x$ ist, setzen wir $r_2 := r_1$ und falls $r_1 + 10^{-k_1} = x$ ist, setzen wir $r_2 := r_1 + 10^{-k_1}$.

Anderfalls gilt nach der Konstruktion im Beweis $r_1 < x < r_1 + 10^{-k_1}$, also $0 < x - r_1 < 10^{-k_1}$. Wählen wir nun ein $k_2 \geq k_1 + 1$ mit $10^{-k_2} < x - r_1$, so erhalten wir einen neuen endlichen Dezimalbruch r_2 mit höchstens k_2 Nachkommastellen, für den dann $r_2 \leq x \leq r_2 + 10^{-k_2}$ gilt. Falls $r_2 = x$ ist, sind wir wieder fertig, ansonsten gelten die Ungleichungen

$$x - r_2 \leq 10^{-k_2} < x - r_1 \quad \Rightarrow \quad r_2 > r_1$$

und

$$r_2 - r_1 = \underbrace{r_2 - x}_{\leq 0} + \underbrace{x - r_1}_{< 10^{-k_1}} < 10^{-k_1}.$$

Folglich ist $r_2 - r_1$ von der Form

$$r_2 - r_1 = 0,\underbrace{00\ldots0}_{k_1 \text{ Stellen}}\tilde{d}_{k_1+1}\tilde{d}_{k_1+2}\ldots\tilde{d}_{k_2}$$

und damit

$$r_2 = r_1 + (r_2 - r_1) = c_l c_{l-1}\ldots c_1^1, d_1^1 d_2^1 d_3^1 \ldots d_{k_1}^1 \tilde{d}_{k_1+1}\tilde{d}_{k_1+2}\ldots\tilde{d}_{k_2}.$$

Also stimmen die Vorkommastellen und die ersten k Nachkommastellen der beiden Dezimalzahlen überein, d.h. r_2 entsteht aus r_1 durch "Anhängen" von $k_2 - k_1$ weiteren Dezimalstellen.

Setzen wir dieses Verfahren fort und erzeugen damit Dezimalbrüche $r_1, r_2, r_3, \ldots$ der Form

$$r_j = c_l^j c_{l-1}^j \ldots c_1^j, d_1^j d_2^j d_3^j \ldots d_{k_j}^j,$$

so erhalten wir entweder $r_j = x$ für ein $j \in \mathbb{N}$, womit x ein endlicher Dezimalbruch (und damit insbesondere eine rationale Zahl) ist, oder wir erhalten immer längere Dezimalbrüche, bei denen die Stellen der kürzeren Brüche jeweils mit den entsprechenden Stellen der längeren Brüche übereinstimmen. Wegen $k_j \geq j$ sind durch die Konstruktion für jeden dieser Dezimalbrüche zudem mindestens j Nachkommastellen festgelegt. Definieren wir nun den unendlichen Dezimalbruch

$$x' := c_l^1 c_{l-1}^1 \ldots c_1^1, d_1^1 d_2^2 d_3^3 \ldots,$$

so stimmen die Vorkommastellen und die ersten k_j Nachkommastellen von x' mit r_j überein. Also erhalten wir

$$|x' - r_j| = x' - r_j = 0,\underbrace{00\ldots0}_{k_j \text{ Stellen}} d_{k_j+1}^{k_j+1} d_{k_j+2}^{k_j+2} \ldots \leq 10^{-k_j}$$

und damit für alle $j \geq 1$

$$|x' - x| \leq |x' - r_j| + |r_j - x| \leq 2 \cdot 10^{-k_j}.$$

Wegen $k_j \geq j$ wird die rechte Seite dieser Ungleichung für große j beliebig klein, weswegen die Ungleichung für alle $j \geq 1$ nur gelten kann, wenn $|x' - x| = 0$ und damit $x = x'$ gilt.

Kapitel 3

Folgen

Stand:
14. Februar 2012

3.1 Definition und Beispiele

Eine Folge in $\mathbb{R}$ ist eine Menge reeller Zahlen a_0, a_1, a_2, ..., so dass jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ genau eine Zahl $a_n \in \mathbb{R}$ zugeordnet wird.

Eine Folge schreibt man als $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$. Manchmal ist es dabei sinnvoll oder nötig, mit der Nummerierung erst bei einem $n_0 > 0$ zu beginnen; dies werden wir gegebenenfalls aber immer explizit erwähnen.

Beispiel 3.1 (verschiedene Folgen)

(a) Sei $a_n = a$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann erhält man die *konstante Folge* $(a, a, a, a, \ldots)$.

(b) Sei $a_n = 1/n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$. Dann erhält man $(1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots)$.

(c) Für $a_n = (-1)^n$ erhält man $(1, -1, 1, -1, 1, \ldots)$.

(d) Für $a_n = n/(n+1)$ erhält man $(0, 1/2, 2/3, 3/4, \ldots)$

(e) Für $a_n = n/2^n$ erhält man $(0, 1/2, 1/2, 3/8, 1/4, 5/32, \ldots)$.

(f) Jede Intervallschachtelung im Sinne von Kapitel 2 ist eindeutig durch die zwei Folgen $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ und $(b_0, b_1, b_2, \ldots)$ definiert.

(g) Für $a_n = b^n$ und $b \in \mathbb{R}$ beliebig erhält man $(1, b, b^2, b^3, \ldots)$.

(h) Folgen sind oft rekursiv durch eine Rechenvorschrift definiert. Z.B. erhält man mit $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ und der Vorschrift $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$ für $n \geq 2$ die Folge

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots).$$

Dies ist die sogenannte Fibonacci-Folge. □

Viele Anwendungen der Mathematik führen auf Folgen. Das folgende Beispiel stellt einige (einfache) Anwendungen vor, die wir später noch mathematisch präziser definieren werden.

Beispiel 3.2 (Folgen aus Anwendungen)

(a) **(Marktgleichgewicht)** Ein Bauer erntet eine Menge a_0 kg Kartoffeln und stellt fest, dass der Marktpreis pro Kilogramm Kartoffeln viel zu niedrig ist, um seine Kosten zu decken. Er beschließt, im nächsten Jahr weniger zu pflanzen, so dass die Ernte a_1 kg mit $a_1 < a_0$ beträgt. Am Ende dieses Jahres stellt es fest, dass der Marktpreis deutlich gestiegen ist und beschließt, im folgenden Jahr die Menge wieder auf a_2 kg mit $a_2 > a_1$ zu erhöhen. Wenn er jedes Jahr abhängig vom Marktpreis die Menge für das folgende Jahr auf diese Weise anpasst, entsteht eine Folge $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$.

(b) **(Wassertank)** Ein Wassertank kann durch Ventile gefüllt oder entleert werden. Auf dem Tank ist eine Skala für den Wasserstand, wobei die Marke 0 den gewünschten Stand markiert. Ein Techniker programmiert einen Computer so, dass dieser jede Sekunde den Wasserstand misst. Ist dieser zu hoch, wird das Ablaufventil automatisch geöffnet, ist dieser zu niedrig, das Zulaufventil. Dadurch entsteht eine Folge von Wasserständen $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$.

(c) **(Wurzelberechnung)** Ein populärer Algorithmus zur Berechnung der Quadratwurzel $\sqrt{x}$ für ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ funktioniert wie folgt: Wir wählen ein beliebiges $a_0 > 0$ und berechnen a_{n+1} aus a_n rekursiv mittels der Formel

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right). \tag{3.1}$$

Dies erzeugt eine Folge $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$. □

Alle Folgen aus den beiden Beispielen werden wir im Folgenden noch einmal aufgreifen und genau analysieren.

3.2 Konvergenz

Definition 3.3 Eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *konvergent*, falls ein $a \in \mathbb{R}$ existiert, so dass gilt:

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass die Ungleichung $|a_n - a| < \varepsilon$ gilt für alle $n \geq N(\varepsilon)$.

In diesem Fall schreiben wir

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{oder} \quad a_n \to a \text{ für } n \to \infty$$

(gesprochen: a_n konvergiert gegen a).

Der Wert a heißt dann *Grenzwert* oder *Limes* der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Falls $a = 0$ nennen wir $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine *Nullfolge*. □

Eine etwas andere Formulierung dieser Definition erhalten wir, wenn wir das Intervall $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ für $\varepsilon > 0$ betrachten. Dieses wird *ε-Umgebung von a* genannt. Aus der Definition der Intervalle und des Betrags folgen die Äquivalenzen

$$a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \;\Leftrightarrow\; a_n > a - \varepsilon \text{ und } a_n < a + \varepsilon \;\Leftrightarrow\; |a_n - a| < \varepsilon.$$

Die Konvergenzbedingung aus Definition 3.3 kann deswegen auch geschrieben werden als:

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass alle Folgenglieder a_n mit $n \geq N(\varepsilon)$ in der ε-Umgebung $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ liegen.

Damit können wir Konvergenz grafisch wie in Abbildung 3.1 veranschaulichen.

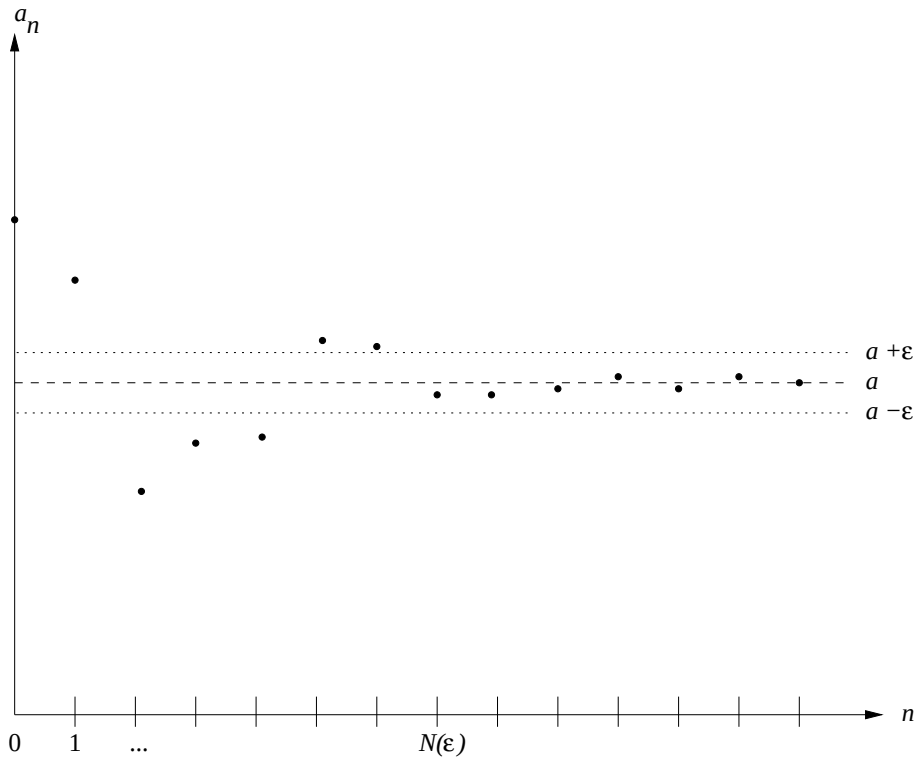


Abbildung 3.1: Illustration der Konvergenz einer Folge

Eine andere äquivalente Formulierung der Konvergenz gibt der folgende Satz.

Satz 3.4 Eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann gegen ein $a \in \mathbb{R}$ wenn es eine Nullfolge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit $|a_n - a| \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$.

Beweis: Wir zeigen zuerst, dass aus der Konvergenz $b_n \to 0$ die Konvergenz $a_n \to a$ folgt. Sei dazu $\varepsilon > 0$ gegeben. Aus $b_n \to 0$ folgt die Existenz von $N(\varepsilon)$ mit $b_n \leq |b_n| = |b_n - 0| < \varepsilon$ für alle $n \geq N(\varepsilon)$. Also folgt

$$|a_n - a| \leq b_n < \varepsilon$$

für alle $n \geq \max\{N(\varepsilon), n_0\}$. Verwenden wir dieses Maximum als "neues" $N(\varepsilon)$ für die Folge a_n, so folgt die Konvergenz $a_n \to a$.

Gelte umgekehrt $a_n \to a$, d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N(\varepsilon)$. Definieren wir $b_n := |a_n - a|$ und $n_0 := 0$ so gilt offensichtlich $|a_n - a| \leq b_n$ und zudem

$$|b_n - 0| = |b_n| = \Big||a_n - a|\Big| = |a_n - a| < \varepsilon,$$

für alle $n \geq N(\varepsilon)$, also $b_n \to 0$. □

Das Gegenteil der Konvergenz ist die Divergenz.

Definition 3.5 Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *divergent*, falls sie nicht konvergent ist. □

Wir untersuchen nun einige der Folgen aus Beispiel 3.1 auf Konvergenz oder Divergenz:

Beispiel 3.1(a): Die Folge ist konvergent mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, denn: sei $\varepsilon > 0$ gegeben, dann gilt für alle $n \geq 0$ die Ungleichung

$$|a_n - a| = |a - a| = 0 < \varepsilon.$$

Wir erhalten also die gesuchte Bedingung mit $N(\varepsilon) = 0$. □

Beispiel 3.1(b): Die Folge ist konvergent mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, denn: sei $\varepsilon > 0$ gegeben und $N(\varepsilon)$ eine natürliche Zahl mit $N(\varepsilon) > 1/\varepsilon$. Dann gilt $1/N(\varepsilon) < \varepsilon$ und damit für alle $n \geq N(\varepsilon)$ die Ungleichung

$$|a_n - a| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N(\varepsilon)} < \varepsilon.$$

Eine Folge, die gegen $a = 0$ konvergiert, heißt *Nullfolge*. Die Folge mit $a_n = 1/n$ ist also eine solche Nullfolge. □

Beispiel 3.1(c): Die Folge ist divergent, was wir per Widerspruch beweisen. Nehmen wir an, dass ein $a \in \mathbb{R}$ existiert, so dass die Folge konvergiert. Dann gibt es nach Definition für $\varepsilon = 1$ ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass

$$|a_n - a| < 1$$

gilt für alle $n \geq N(\varepsilon)$. Für gerades n ist nun gerade $a_n = 1$, daher folgt

$$1 > |a_n - a| > a_n - a = 1 - a \quad \Rightarrow \quad a > 1 - 1 = 0.$$

Für ungerades n ist $a_n = -1$ und daher folgt

$$1 > |a_n - a| > a - a_n = a - (-1) = a + 1 \quad \Rightarrow \quad a < 1 - 1 = 0.$$

Da a aber nicht zugleich kleiner und größer als Null sein kann, erhalten wir einen Widerspruch. □

Beispiel 3.1(d): Die Folge ist konvergent mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$, denn es gilt

$$|a_n - a| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|-\frac{1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}.$$

Da $b_n := \frac{1}{n}$ gemäß (b) gegen 0 konvergiert, konvergiert a_n nach Satz 3.4 gegen $a = 1$. □

Beispiel 3.1(e): Die Folge ist konvergent mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, ist also eine Nullfolge. Um dies zu sehen, beweist man zunächst per Induktion für alle $n \geq 4$ die Ungleichung $n^2 \leq 2^n$. Damit erhalten wir

$$\frac{n^2}{2^n} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{n}{2^n} \leq \frac{1}{n}$$

und somit

$$|a_n - 0| = \left|\frac{n}{2^n} - 0\right| = \frac{n}{2^n} \leq \frac{1}{n}.$$

Wegen $\frac{1}{n} \to 0$ folgt die Behauptung nun aus Satz 3.4. □

Für die Untersuchung weiterer Folgen aus Beispiel 3.1 sowie für die Untersuchung von Beispiel 3.2(c) benötigen wir noch etwas Vorarbeit, die wir im Folgenden machen werden. Für Beispiel 3.2(a) und (b) können wir noch gar keine Aussagen treffen, weil wir ja noch gar keine mathematische Vorschrift für die resultierenden Folgen angegeben haben — diese werden wir uns später überlegen. Trotzdem ist die Konvergenz hier ein sinnvoller Begriff. So ist z.B. die Frage, ob sich die produzierten Mengen in Beispiel 3.2(a) im Laufe der Jahre einem konstanten Wert a (einem sogenannten *Marktgleichgewicht*) annähern, mathematisch nichts anderes als die Frage nach der Konvergenz der Folge. Ebenso ist die Frage, ob die Strategie des Technikers in Beispiel 3.2(b) dazu führt, dass der Wasserstand sich in der 0 "einpendelt", mathematisch nichts anderes als die Frage, ob die resultierende Folge der Wasserstände eine Nullfolge ist.

3.3 Eigenschaften und Rechenregeln konvergenter Folgen

Definition 3.6 Eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *nach oben (bzw. nach unten) beschränkt*, falls es ein $K \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $a_n \leq K$ (bzw. $a_n \geq K$) gilt für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge heißt *beschränkt*, falls sie nach oben und unten beschränkt ist. □

Satz 3.7 Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Beweis: Wir zeigen die Beschränktheit nach oben, der Beweis für die Beschränktheit nach unten funktioniert analog.

Sei die Folge also konvergent mit Grenzwert $a \in \mathbb{R}$. Wir wenden Definition 3.3 mit $\varepsilon = 1$ an. Für alle $n \geq N(\varepsilon)$ gilt dann

$$a_n = a_n - a + a \leq |a_n - a| + a < 1 + a.$$

Wählen wir nun $K = \max\{a_0, a_1, \ldots, a_{N(\varepsilon)-1}, 1 + a\}$ so gilt $a_n \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist die Beschränktheit nach oben gezeigt. □

Die Folge $a_n = (-1)^n$ zeigt, dass die Umkehrung dieses Satzes nicht gilt, denn diese ist mit $K = 1$ und $K = -1$ nach oben und unten beschränkt, konvergiert aber nicht.

Formal haben wir also die Implikation "die Folge konvergiert $\Rightarrow$ die Folge ist beschränkt" gezeigt. Damit gilt ebenfalls die Implikation "die Folge ist nicht beschränkt $\Rightarrow$ die Folge konvergiert nicht", die wir auch als "die Folge ist nicht beschränkt $\Rightarrow$ die Folge divergiert" schreiben können. Damit können wir nun zwei weitere Folgen aus Beispiel 3.1 untersuchen.

Beispiel 3.1(h): Die Fibonacci-Folge divergiert, denn per Induktion zeigt man leicht die Ungleichung $a_n \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, die Folge ist daher unbeschränkt. □

Beispiel 3.1(g): Die Konvergenz oder Divergenz der Folge $a_n = b^n$ hängt vom Wert von b ab.

Fall 1: $|b| < 1$. In diesem Fall existiert nach Satz 2.2(b) für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ (dort einfach n genannt) mit $|b|^{N(\varepsilon)} < \varepsilon$. Damit folgt für alle $n \geq N(\varepsilon)$

$$|a_n - 0| = |b^n| = |b|^n \leq |b|^{N(\varepsilon)} < \varepsilon.$$

Also konvergiert die Folge gegen $a = 0$.

Fall 2: $b = 1$. In diesem Fall gilt $b^n = 1$ für alle n, die Folge konvergiert also gegen $a = 1$, vgl. Beispiel 3.1(a).

Fall 3: $b = -1$. In diesem Fall gilt $b^n = (-1)^n$ für alle n, die Folge divergiert also, vgl. Beispiel 3.1(c).

Fall 4: $|b| > 1$. In diesem Fall folgt aus Satz 2.2(a), dass $|b|^n$ unbeschränkt ist. Damit muss auch b^n unbeschränkt sein, weswegen die Folge divergiert. □

Wir fahren fort mit der Herleitung weiterer Eingenschaften und Rechenregeln für Folgen.

Satz 3.8 (Eindeutigkeit des Limes) Wenn eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sowohl gegen $a \in \mathbb{R}$ als auch gegen $\tilde{a} \in \mathbb{R}$ konvergiert, so gilt $a = \tilde{a}$.

Beweis: Wir nehmen zur Herbeiführung eines Widerspruchs an, dass $a \neq \tilde{a}$ gilt und setzen $\varepsilon := |a - \tilde{a}|/2$. Dann folgt aus Definition 3.3 die Existenz eines $n \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ und $|a_n - \tilde{a}| < \varepsilon$. Daraus folgt mit der Dreiecksungleichung

$$|a - \tilde{a}| = |a - a_n + a_n - \tilde{a}| \leq |a - a_n| + |a_n - \tilde{a}| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = |a - \tilde{a}|.$$

Die resultierende Ungleichung $|a - \tilde{a}| < |a - \tilde{a}|$ ist aber nicht möglich, woraus der Widerspruch folgt. □

Satz 3.9 (Summenregel) Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen mit Grenzwerten $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Dann ist auch die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n := a_n + b_n$ konvergent mit $\lim_{n\to\infty} c_n = a + b$. Kurz geschrieben gilt also

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ und seien $N_a(\varepsilon/2)$ und $N_b(\varepsilon/2)$ die entsprechenden Indizes aus Definition 3.3. Setze $N(\varepsilon) := \max\{N_a(\varepsilon/2), N_b(\varepsilon/2)\}$. Dann gilt für alle $n \geq N(\varepsilon)$

$$|c_n - (a + b)| = |a_n - a + b_n - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

womit die Konvergenz für $a_n + b_n$ gezeigt ist. □

Ein **Beispiel** für die Anwendung der Summenregel ist die Folge $c_n = (n + 1)/n$. Schreibt man diese nämlich als

$$c_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} = a_n + b_n,$$

so kann man die Konvergenz für a_n gegen 1 aus Beispiel 3.1(a) und die Konvergenz von b_n gegen 0 aus Beispiel 3.1(b) verwenden, um ohne weitere Rechnung die Konvergenz von c_n gegen $1 + 0 = 1$ zu folgern.

Satz 3.10 (Produktregel) Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen. Dann ist auch die Folge $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und es gilt

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right).$$

Beweis: Es sei $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ und $b := \lim_{n\to\infty} b_n$. Nach Satz 3.7 ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Setzen wir K gleich dem Maximum der Beträge der oberen und unteren Schranken, so folgt $|a_n| \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Indem wir K — falls nötig — vergrößern, können wir zudem $|b| \leq K$ annehmen.

Sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben und seien $N_a(\varepsilon)$ und $N_b(\varepsilon)$ gemäß Definition 3.3 für die Folgen a_n und b_n gewählt. Dann gilt für alle $n \geq N(\varepsilon) := \max\{N_a(\varepsilon/(2K)), N_b(\varepsilon/(2K))\}$

$$|a_n b_n - ab| = |a_n(b_n - b) + (a_n - a)b| \leq |a_n|\,|b_n - b| + |a_n - a|\,|b| < K\frac{\varepsilon}{2K} + \frac{\varepsilon}{2K}K = \varepsilon.$$

□

Korollar 3.11 [1] Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist auch die Folge $(\lambda b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit

$$\lim_{n\to\infty}(\lambda b_n) = \lambda \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Beweis: Folgt sofort aus Satz 3.10 mit der konstanten Folge $a_n = \lambda$ für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Damit können wir nun auch den Wassertank aus **Beispiel 3.1(b)** behandeln, wenn wir das Öffnen und Schließen der Ventile in geeigneter Form mathematisch definieren. Wir nehmen dazu an, dass das Zulaufventil im Fall $a_n < 0$ gerade so weit geöffnet wird, dass der Wasserpegel in einer Sekunde um den Betrag $|\alpha a_n|$ für ein $\alpha > 0$ zunimmt. Im Fall $a_n > 0$ nehmen wir an, dass das Ablaufventil gerade so weit geöffnet wird, dass der Pegel um den Betrag $|\beta a_n|$ für ein $\beta > 0$ abnimmt. Für den Pegel a_{n+1} nach einer Sekunde gilt dann entweder

$$a_{n+1} = a_n + |\alpha a_n| = a_n - \alpha a_n \quad \text{oder} \quad a_{n+1} = a_n - |\beta a_n| = a_n - \beta a_n$$

(beachte, dass im ersten Fall $a_n < 0$ und damit $|\alpha a_n| = -\alpha a_n$ gilt). Setzen wir nun voraus, dass $\alpha = \beta$ ist[2], so erhalten wir in beiden Fällen die gleiche Vorschrift, die wir als

$$a_{n+1} = a_n - \alpha a_n = (1-\alpha)a_n$$

schreiben können. Per Induktion kann man dann beweisen, dass die resultierende Folge von der Form $a_n = a_0(1-\alpha)^n$ ist, was wir mit $\lambda = a_0$ und $b = (1-\alpha)$ auch als

$$a_n = \lambda b^n$$

[1] Ein *Korollar* bezeichnet eine — zumeist einfache — Folgerung aus vorhergehenden Aussagen.

[2] Der Fall $\alpha \neq \beta$ ist deutlich komplizierter. Bei Interesse können wir diesen in der Fragestunde behandeln.

schreiben können. Falls b^n gegen Null konvergiert, konvergiert nach Korollar 3.11 auch $a_n = \lambda b^n$ gegen Null, womit unser Ziel erreicht wäre.

Betrachten wir nun den Fall, dass der Pegel a_0 am Anfang nicht gleich Null ist (denn dann wäre ja nichts zu tun). Dann ist $\lambda \neq 0$ und falls λb^n gegen Null konvergiert, muss nach Satz 3.10 auch $b^n = \frac{1}{\lambda}(\lambda b^n)$ gegen Null konvergieren (beachte: hier ist $\lambda \neq 0$ wichtig, damit $1/\lambda$ existiert). Für $a_0 \neq 0$ gilt also

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} b^n = 0.$$

Nach Beispiel 3.1(g) konvergiert die Folge b^n nun gerade dann gegen 0, wenn $|b| < 1$ ist. Folglich pendelt sich der Pegel für $a_0 \neq 0$ gerade dann wie gewünscht auf die Null ein, wenn $|1 - \alpha| < 1$ ist, was äquivalent zu $0 < \alpha < 2$ ist.

Der Techniker sollte α also zwischen 0 und 2 wählen. Insbesondere ist der auf den ersten Blick vielleicht naheliegende Schluss, dass der Pegel schneller gegen 0 konvergiert, wenn α sehr groß gewählt wird, wenn also in jeder Sekunde sehr viel Wasser eingefüllt oder abgelassen wird, falsch! □

Korollar 3.12 (Differenzregel) Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen. Dann ist auch die Folge $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und es gilt

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Beweis: Wegen $a_n - b_n = a_n + (-1)b_n$ folgt die Aussage aus Satz 3.9 und Korollar 3.11. □

Satz 3.13 (Quotientenregel) Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen mit $\lim_{n\to\infty} b_n = b \neq 0$. Dann gibt es ein n_0, so dass $b_n \neq 0$ gilt für alle $n \geq n_0$ und die Folge $(a_n/b_n)_{n\geq n_0}$ ist konvergent mit

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

Beweis: Wir betrachten zunächst die Konvergenz der Folge $1/b_n$.

Da $b \neq 0$ ist, folgt $|b|/2 > 0$. Damit gilt für alle $n \geq N_b(|b|/2)$ mit der umgekehrten Dreiecksungleichung

$$|b| - |b_n| \leq |b - b_n| < \frac{|b|}{2} \quad \Rightarrow \quad |b_n| > |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2} > 0$$

woraus insbesondere $b_n \neq 0$ folgt. Wir können also $n_0 = N_b(|b|/2)$ wählen.

Sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben und setze $N(\varepsilon) := \max\{n_0, N_b(\varepsilon|b|^2/2)\}$. Dann gilt für alle $n \geq N(\varepsilon)$

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - b_n}{b_n b}\right| = \frac{1}{|b_n||b|}|b_n - b| < \frac{2}{|b|^2}\frac{\varepsilon|b|^2}{2} = \varepsilon,$$

wobei wir in der letzten Ungleichung $\frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|b|}$ verwendet haben, was aus $|b_n| > \frac{|b|}{2}$ folgt. Dies zeigt, dass $1/b_n$ konvergent ist mit Limes $1/b$.

Die Konvergenz der Folge a_n/b_n folgt nun wegen

$$\frac{a_n}{b_n} = a_n \frac{1}{b_n}$$

aus Satz 3.10. □

Damit haben wir die wesentlichen Rechenregeln für konvergente Folgen bewiesen. Mit diesen Regeln kann man Grenzwerte für Folgen mit komplizierten Termen berechnen, wobei man allerdings zumeist die richtige Idee für einen Ansatz braucht. Betrachten wir als **Beispiel** die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{5n^3 + 7n}{n^3 - 3}.$$

Die Quotientenregel ist hier nicht anwendbar, weil weder der Zähler noch der Nenner einzeln konvergieren. Für $n \geq 1$ können wir den Bruch aber mit n^3 kürzen[3] und erhalten so

$$a_n = \frac{5 + 7/n^2}{1 - 3/n^3}.$$

Jetzt können wir unsere Sätze auf die einzelnen Terme anwenden: Im Zähler gilt $1/n^2 \to 0$ wegen Satz 3.10 — angewendet auf $1/n$ und $1/n$ — und Beispiel 3.1(b). Wenden wir auf $1/n^2$ und $1/n$ noch einmal Satz 3.10 und Beispiel 3.1(b) an, so folgt auch für den Term im Nenner $1/n^3 \to 0$. Nach Korollar 3.11 gilt dann auch $7/n^2 \to 0$ und $3/n^3 \to 0$. Mit Satz 3.9 folgt dann, dass der Zähler gegen 5 konvergiert und wegen Korollar 3.12 konvergiert der Nenner gegen 1. Wegen $1 \neq 0$ ist schließlich Satz 3.13 anwendbar, was für den gesamten Bruch Konvergenz mit Grenzwert $5/1 = 5$ liefert.

Zum Abschluss dieses Abschnitts betrachten wir noch Ungleichungen für Grenzwerte.

Satz 3.14 Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen, für die ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $a_n \leq b_n$ für alle $n \geq n_0$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Beweis: Wir setzen $a := \lim_{n\to\infty} a_n$, $b := \lim_{n\to\infty} b_n$ und nehmen an, dass $a > b$ ist. Für alle $n \geq \max\{N_a(\varepsilon), N_b(\varepsilon)\}$ mit $\varepsilon = a/2 - b/2 > 0$ gilt dann

$$a_n > a - \varepsilon = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} \quad \text{und} \quad b_n < b + \varepsilon = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}.$$

Daraus folgt

$$a_n > \frac{a}{2} + \frac{b}{2} > b_n,$$

[3] Dass wir hier das Folgenglied für $n = 0$ herausnehmen müssen, ist für die Konvergenz und den Grenzwert unerheblich, da die Bedingung in der Definition der Konvergenz ja nur für hinreichend große n nachgeprüft werden muss.

was der Annahme $a_n \leq b_n$ widerspricht, da n beliebig groß ist und damit größer als n_0 gewählt werden kann. $\square$

Achtung: Aus der strikten Ungleichung $a_n < b_n$ für alle n folgt im Allgemeinen **nicht** die strikte Ungleichung

$$\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Ein Beispiel hierfür sind die Folgen $a_n = 0$ und $b_n = 1/n$. Hier gilt sicherlich $a_n < b_n$, beide Folgen haben aber den Limes 0. Der Grenzwert verhält sich also wie das Supremum: auch wenn alle Folgenglieder/Elemente eine strikte Ungleichung erfüllen, kann für den Grenzwert/das Supremum Gleichheit gelten.

Indem wir entweder a_n oder b_n in Satz 3.14 konstant gleich A oder B wählen, erhalten wir sofort das folgende Korollar.

Korollar 3.15 Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge und $A, B \in \mathbb{R}$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ gegeben mit $A \leq a_n \leq B$ für alle $n \geq n_0$. Dann gilt

$$A \leq \lim_{n\to\infty} a_n \leq B.$$

3.4 Uneigentliche Konvergenz

Divergente Folgen können sich auf ganz unterschiedliche Weisen verhalten. Betrachten wir beispielsweise die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

(i) $a_n = 2^n$

(ii) $a_n = -2^n$

(iii) $a_n = (-2)^n$

(iv) $a_n = (-1)^n$

so stellt man fest, dass die Glieder der Folge (i) immer größer werden, die Glieder der Folge (ii) immer kleiner (im Sinne von immer "negativer") werden und dass die Glieder der Folge (iii) abwechselnd immer größer und immer kleiner werden. Alle diese Folgen sind dabei unbeschränkt und damit divergent. Die Folge (iv) ist beschränkt, ist aber wie in Beispiel 3.1(c) gezeigt ebenfalls divergent.

Wir haben hier also vier Folgen, die alle divergent sind, dies aber auf ganz unterschiedliche Weise. Die folgende Definition umfasst zwei dieser Fälle.

Definition 3.16 Eine Folge reeller Zahlen heißt *uneigentlich konvergent* gegen $+\infty$ (bzw. gegen $-\infty$), wenn es zu jedem $K \in \mathbb{R}$ ein $M(K) \in \mathbb{N}$ gibt so dass

$$a_n > K \ \text{ (bzw. } a_n < K) \quad \text{für alle } n \geq M(K).$$

Wir schreiben in diesem Fall auch[4]

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \infty \quad (\text{bzw. } \lim_{k\to\infty} a_k = -\infty).$$

Statt uneigentlich konvergent sagt man auch *bestimmt divergent*. □

Wichtig für diese Definition ist nicht, dass ein Folgenglied jeweils größer (bzw. kleiner) ist als das vorhergehende, sondern dass jede beliebige Schranke für hinreichend große N nicht mehr unterschritten (bzw. überschritten) wird.

Die Folge (i) ist also uneigentlich konvergent gegen $+\infty$, die Folge (ii) uneigentlich konvergent gegen $-\infty$. Die Folgen (iii) und (iv) sind nicht uneigentlich konvergent.

Mit dem Begriff der uneigentlichen Konvergenz können wir nun auch Grenzwerte von Folgen der Form $1/a_n$ betrachten, wenn der Grenzwert von a_n entweder Null ist oder gar nicht im eigentlichen Sinne existiert.

Satz 3.17 (a) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei uneigentlich konvergent gegen ∞ (bzw. $-\infty$). Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $a_n \neq 0$ gilt für alle $n \geq n_0$ und die Folge $1/a_n$, $n \geq n_0$ ist konvergent mit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0,$$

d.h. sie ist eine Nullfolge.

(b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge für die für ein $n_0 \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $a_n > 0$ für alle $n \geq n_0$ (bzw. $a_n < 0$ für alle $n \geq n_0$) gilt. Dann ist die Folge $1/a_n$, $n \geq n_0$ uneigentlich konvergent mit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \infty \ \ (\text{bzw. } = -\infty).$$

Beweis: Wir beweisen für beide Teile den Fall "∞", der Beweis für den Fall "$-\infty$" verläuft analog.

(a) Setzen wir $n_0 = M(1)$ für $M(K)$ aus Definition 3.16, so folgt aus $a_n > 1$ die Ungleichung $a_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$. Für ein gegebenes $\varepsilon > 0$ setzen wir $N(\varepsilon) = \max\{n_0, M(K)\}$ mit $K = 1/\varepsilon$. Dann folgt

$$\left|\frac{1}{a_n} - 0\right| = \left|\frac{1}{a_n}\right| = \frac{1}{a_n} < \frac{1}{K} = \varepsilon.$$

□

(b) Sei $K > 0$ gegeben. Setzen wir $M(K) := \max\{n_0, N(\varepsilon)\}$ mit $\varepsilon = 1/K$ so folgt für alle $n \geq N(K)$

$$\frac{1}{a_n} > \frac{1}{\varepsilon} = K.$$

□

[4]Beachte, dass ∞ und $-\infty$ hier nur Symbole sind, keine reellen Zahlen. Die Existenz einer reellen Zahl ∞ würde wegen $\infty + 1 = \infty$ und $\infty + 0 = \infty$ implizieren, dass $1 = 0$ ist, was in den Körperaxiomen explizit ausgeschlossen ist.

3.5 Cauchy-Folgen und monotone Folgen

Die bisherige Definition 3.3 der Konvergenz hat den Nachteil, dass man den Grenzwert a kennen muss, bevor man überprüfen kann, ob eine Folge konvergent ist. Dies macht ihre Verwendung manchmal umständlich oder sogar unmöglich. Mit den nach dem französischen Mathematiker Augustin Louis Cauchy (1789–1857) benannten Cauchy-Folgen umgeht man dieses Problem, wie der nach der Definition dieser Folgen angegebene Satz 3.19 zeigt.

Definition 3.18 Eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *Cauchy-Folge*, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $C(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$|a_n - a_m| < \varepsilon$$

gilt für alle $n, m \geq C(\varepsilon)$. □

Anschaulich besagt diese Definition, dass für $n, m \geq C(\varepsilon)$ alle Folgenglieder a_m in einer ε-Umgebung von a_n liegen. Im Gegensatz zur Definition der Konvergenz in Definition 3.3 wird diese Umgebung ohne Kenntnis eines Grenzwerts a definiert. Der folgende Satz zeigt, dass diese Bedingung äquivalent zur Konvergenz ist.

Satz 3.19 Eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.

Beweis: Wir beweisen die Folgerungen "Konvergenz ⇒ Cauchy-Folge" und "Cauchy-Folge ⇒ Konvergenz" und beginnen mit der ersten.

"Konvergenz ⇒ Cauchy-Folge": Wir verwenden $N(\varepsilon)$ aus Definition 3.3 und setzen $C(\varepsilon) := N(\varepsilon/2)$. Dann gilt für alle $n, m \geq C(\varepsilon)$ mit der Dreiecksungleichung

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Folglich ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.

"Cauchy-Folge ⇒ Konvergenz": Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Ähnlich wie im Beweis von Satz 3.7 sieht man, dass jede Cauchy-Folge beschränkt ist (die Ausarbeitung dieses Beweises ist eine Übungsaufgabe). Wir definieren zwei Folgen $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie folgt:

$$b_n := \inf\{a_k \,|\, k \geq n\} \quad \text{und} \quad c_n := \sup\{a_k \,|\, k \geq n\}.$$

Mit dieser Definition gilt dann die Ungleichung

$$b_n \leq a_k \leq c_n \quad \text{für alle } k \geq n. \tag{3.2}$$

Falls nun ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $b_{n_0} = c_{n_0}$, so folgt aus (3.2) $a_k = b_{n_0}$ für alle $k \geq n_0$. Die Folge (a_n) ist also konstant gleich b_{n_0} für $n \geq n_0$ und konvergiert damit gegen b_{n_0}.

Es bleibt der Fall zu betrachten, dass $b_n < c_n$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$. Für b_n gilt

$$b_{n+1} = \inf\{a_k \,|\, k \geq n+1\} \geq \min\{\inf\{a_k \,|\, k \geq n+1\},\, a_n\} = \inf\{a_k \,|\, k \geq n\} = b_n.$$

Analog zeigt man $c_{n+1} \leq c_n$. Definieren wir also Intervalle $I_n := [b_n, c_n]$, so gilt $I_{n+1} \subset I_n$. Zudem folgt aus (3.2), dass $a_k \in I_n$ gilt für alle $k \geq n$.

Aus der Cauchy-Folgen-Eigenschaft folgt $|a_k - a_n| < \varepsilon$ für alle $k, n \geq C(\varepsilon)$. Insbesondere gilt also $a_k > a_n - \varepsilon$ und $a_k < a_n + \varepsilon$ für $n = C(\varepsilon)$ und alle $k \geq C(\varepsilon)$. Nach Satz 2.17 übertragen sich diese Ungleichungen (in nicht strikter Form) auf das Supremum und Infimum, also

$$b_n \geq a_n - \varepsilon \quad \text{und} \quad c_n \leq a_n + \varepsilon.$$

Folglich gilt für jedes $\varepsilon > 0$ mit $n = C(\varepsilon/4)$ die Ungleichung

$$|I_n| = c_n - b_n \leq a_n + \varepsilon/4 - a_n + \varepsilon/4 = \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Damit ist (I_n) eine Intervallschachtelung und nach dem Vollständigkeitsaxiom existiert ein eindeutiges $a \in \mathbb{R}$ mit $a \in I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aus $a \in I_n$ und der oben bereits bewiesenen Ungleichung $b_n \leq a_k \leq c_n$ folgt dann für $k \geq C(\varepsilon/2)$

$$a_k - a \leq c_n - a \leq c_n - b_n < \varepsilon$$

und

$$a - a_k \leq c_n - a_k \leq c_n - b_n < \varepsilon.$$

Damit gilt auch $|a_k - a| < \varepsilon$ und folglich Konvergenz gegen a mit $N(\varepsilon) = C(\varepsilon/2)$. □

Mit Hilfe der Cauchy-Folgen können wir ein Konvergenzkriterium herleiten, das in der Analysis eine wichtige Rolle spielt, weil es für eine gegebene Folge oft relativ leicht nachzuprüfen ist. Dazu benötigen wir noch den folgenden Begriff.

Definition 3.20 Eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt

- *monoton wachsend*, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $a_{n+1} \geq a_n$ gilt
- *monoton fallend*, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $a_{n+1} \leq a_n$ gilt.
- *monoton*, falls sie entweder monoton wachsend oder monoton fallend ist.

□

Man kann (teilweise mit etwas Rechnerei) nachprüfen, dass z.B. die Folgen aus Beispiel 3.1(a), (b), (d), (e), (f), (h) monoton sind. Die Folge $a_n = b^n$ aus Beispiel 3.1(g) ist monoton, falls $b \geq 0$ ist. Die Folge $(-1)^n$ aus Beispiel 3.1(c) ist nicht monoton.

Satz 3.21 Jede beschränkte und monotone reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Beweis: Wir beweisen den Satz für monoton wachsende Folgen, für monton fallende Folgen verläuft er analog. Wir werden zeigen, dass jede beschränkte und monoton wachsende Folge eine Cauchy-Folge ist, woraus dann die Behauptung mit Satz 3.19 folgt.

Dazu nehmen wir zur Herbeiführung eines Widerspruchs an, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Cauchy-Folge ist. Um mit dieser Annahme einen Beweis zu führen, müssen wir uns überlegen, was es formal bedeutet, wenn eine Folge keine Cauchy-Folge ist.

Die Definition der Cauchy-Folge verlangt, dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein $C(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert mit $|a_n - a_m| < \varepsilon$ für alle $n, m \geq C(\varepsilon)$. Wenn eine Folge also keine Cauchy-Folge ist, heißt dies, dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass kein solches $C(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert. Das bedeutet, dass egal wie wir $C(\varepsilon)$ wählen, immer Zahlen $n, m \geq C(\varepsilon)$ existieren, so dass $|a_n - a_m| \geq \varepsilon$. Da unser $\varepsilon > 0$ jetzt fest ist, brauchen wir die Abhängigkeit $C(\varepsilon)$ nicht eigens zu betonen und schreiben einfach C. Zusammengefasst impliziert die Tatsache, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Cauchy-Folge ist, also die folgende Eigenschaft:

Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass für jedes $C \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen $n, m \geq C$ existieren mit $|a_n - a_m| \geq \varepsilon$.

Hierbei können wir die Benennung von n und m o.B.d.A. so wählen, dass $n > m$ ist. Wegen der Monotonie der Folge gilt dann

$$a_n - a_m = |a_n - a_m| \geq \varepsilon \quad \Rightarrow \quad a_n \geq a_m + \varepsilon.$$

Per Induktion beweisen wir jetzt, dass daraus die folgende Aussage folgt: Für jedes $k \in \mathbb{N}$ existiert ein $n_k \in \mathbb{N}$ mit

$$a_{n_k} \geq a_0 + k\varepsilon. \tag{3.3}$$

$k = 0$: klar mit $n_0 = 0$

$k \to k+1$: Nach der Induktionsannahme existiert n_k mit (3.3). Wenden wir nun die obige Eigenschaft der Nicht-Cauchy-Folge mit $C = n_k$ an, so finden wir $n > m \geq n_k$ mit $a_n \geq a_m + \varepsilon$. Setzen wir $n_{k+1} := n$ so gilt wegen der Monotonie der Folge und der Induktionsannahme

$$a_{n_{k+1}} = a_n \geq a_m + \varepsilon \geq a_{n_k} + \varepsilon \geq a_0 + k\varepsilon + \varepsilon = a_0 + (k+1)\varepsilon.$$

Damit ist (3.3) bewiesen.

Da die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Annahme beschränkt ist, existiert nun $K \in \mathbb{R}$ mit $a_n \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wählen wir nun $k > (K - a_0)/\varepsilon$, so folgt $k\varepsilon > K - a_0$ und damit aus (3.3)

$$a_{n_k} \geq a_0 + k\varepsilon > a_0 + K - a_0 = K.$$

Damit erhalten wir den gesuchten Widerspruch.

Jede beschränkte und monotone Folge ist also eine Cauchy-Folge und damit nach Satz 3.19 konvergent. □

Beispiel 3.1(f): Mit diesem Satz können wir nun auch die Konvergenz für die durch die Ränder der Intervallschachtelung in Beispiel 3.1(f) definierten Folgen a_n und b_n beweisen: Da die Intervalle verschachtelt sind, muss $a_{n+1} \geq a_n$ und $b_{n+1} \leq b_n$ gelten, also sind die Folgen monoton. Aus der Monotonie folgt sofort, dass $K = a_0$ wegen $a_n \geq a_0$ eine untere Schranke für a_n ist. Wegen $a_n < b_n \leq b_0$ ist zudem $K = b_0$ eine obere Schranke. Also ist a_n beschränkt und analog sieht man, dass auch b_n beschränkt ist. Folglich sind beide Folgen nach Satz 3.21 konvergent.

Tatsächlich können wir hier noch mehr beweisen, nämlich dass beide Grenzwerte $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ und $b := \lim_{n\to\infty} b_n$ in jedem Intervall I_n liegen. Sei dazu ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Korollar 3.15 liefert wegen $a_k \geq a_n$ für alle $k \geq n$ die Ungleichung $a \geq a_n$; analog folgt $b \leq b_n$. Wegen $a_n < b_n$ liefert Satz 3.14 zudem $a \leq b$. Folglich gilt

$$a_n \leq a \leq b \leq b_n \quad \Rightarrow \quad a \in I_n \text{ und } b \in I_n.$$

Da wir in Abschnitt 2.4 bereits bewiesen haben, dass es nur ein Element geben kann, das in allen Intervallen I_n liegt, folgt daraus insbesondere die Gleichheit $a = b$. $\square$

Dieses Beispiel zeigt, dass aus Satz 3.21 das Vollständigkeitsaxiom folgt, denn wir haben ja bewiesen, dass der Grenzwert a in $\mathbb{R}$ existiert und in allen Intervallen liegt. Das klingt auf den ersten Blick verwirrend, denn wir hatten ja gesagt, dass ein Axiom eine Bedingung ist, die sich nicht aus anderen Bedingungen ableiten lässt. Betrachtet man aber die einzelnen Schritte, die zu dem gerade gegebenen Beweis geführt haben, so stellt man fest, dass diese wie folgt aufeinander aufbauen.

$$\begin{array}{c}\text{Vollständigkeitsaxiom}\\ \Downarrow\\ \text{Jede Cauchy-Folge konvergiert}\\ \Downarrow\\ \text{Jede monotone beschränkte Folge konvergiert}\\ \Downarrow\\ \text{Vollständigkeitsaxiom}\end{array}$$

Damit löst sich die Verwirrung auf, denn wir haben das Vollständigkeitsaxiom aus sich selbst gefolgert, was der Eigeschaft eines Axioms nicht widerspricht. Diese Kette der Folgerungen zeigt aber auch, dass das Vollständigkeitsaxiom äquivalent zu den beiden Eigenschaften in der Mitte der Kette ist. Wir hätten also äquivalent eine dieser beiden Eigenschaften an Stelle des Vollständigkeitsaxioms fordern können, was in einigen Büchern auch so gemacht wird.

Mit den Sätzen aus diesem Abschnitt können wir nun die Methode der Wurzelberechnung aus **Beispiel 3.2(c)** analysieren und insbesondere beweisen, dass die rekursiv definierte Folge

$$a_0 > 0 \text{ beliebig}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right)$$

tatsächlich gegen ein $a \in \mathbb{R}$ mit $a^2 = x$ konvergiert. Dass solch ein $a \in \mathbb{R}$ existiert, setzen wir dabei nicht voraus; die Existenz ergibt sich als "Nebenprodukt" aus dem folgenden Beweis, der in 6 Schritte (0-5) unterteilt ist.

0. Als Vorüberlegung beweisen wir zunächst, dass es nur eine positive Lösung $y \in \mathbb{R}$ der Gleichung $y^2 = x$ geben kann. Angenommen, für $\tilde{y} > 0$ gilt ebenfalls $\tilde{y}^2 = x$. Dann folgt

$$0 = x - x = y^2 - \tilde{y}^2 = (y + \tilde{y})(y - \tilde{y}).$$

Wegen $y + \tilde{y} > 0$ muss also $y - \tilde{y} = 0$ sein, also $y = \tilde{y}$. Es gibt also höchstens eine positive Lösung der Gleichung $y^2 = x$.

1. Es gilt $a_n > 0$ für alle n. Dies folgt leicht per Induktion, da mit $a_n > 0$ auch der Ausdruck in der Klammer stets > 0 ist.

2. Es gilt $a_n^2 \geq x$ für alle $n \geq 1$, denn:

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 - x &= \left(\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right)\right)^2 - x = \frac{1}{4}\left(a_n^2 + 2x + \frac{x^2}{a_n^2}\right) - x \\ &= \frac{1}{4}\left(a_n^2 - 2x + \frac{x^2}{a_n^2}\right) = \frac{1}{4}\left(a_n - \frac{x}{a_n}\right)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

3. Es gilt $a_{n+1} \leq a_n$ für alle $n \geq 1$, denn:

$$a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right) = \frac{1}{2a_n}(a_n^2 - x) \geq 0.$$

4. Aus 3. folgt, dass die Folge a_n für $n \geq 1$ monoton fallend ist. Folglich ist sie nach oben durch a_1 beschränkt. Da sie gemäß 1. nach unten durch 0 beschränkt ist, ist sie also insgesamt monoton und beschränkt und konvergiert damit nach Satz 3.21 gegen ein $a \in \mathbb{R}$. Aus 1. folgt $a_n > 0$ und damit nach Satz 3.14 auch $a \geq 0$. Nach Satz 3.10 konvergiert die Folge a_n^2 gegen a^2 und weil für diese nach 2. $a_n^2 > x$ gilt, folgt mit Satz 3.14 $a^2 \geq x$. Also muss wegen $x > 0$ auch $a > 0$ gelten.

5. Nach den Regeln für das Rechnen mit Grenzwerten gilt nun (beachte, dass Satz 3.13 wegen $a > 0$ anwendbar ist und dass die Folge $(a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls gegen a konvergiert)

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right) = \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} a_n + \frac{x}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}\right) = \frac{1}{2}\left(a + \frac{x}{a}\right).$$

Daraus folgt

$$a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{x}{a}\right) \quad \Rightarrow \quad 2a^2 = a^2 + x \quad \Rightarrow \quad a^2 = x$$

und folglich ist a eine positive Lösung der Gleichung $a^2 = x$. Wir haben damit zugleich die Existenz einer solchen Lösung bewiesen, die wir ab jetzt (wie üblich) mit $\sqrt{x}$ bezeichnen. □

3.6 Teilfolgen

Definition 3.22 Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge und

$$n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$$

eine aufsteigende Folge reeller Zahlen. Dann heißt die Folge

$$(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} := (a_{n_0}, a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots)$$

eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

Beachte, dass aus $n_k < n_{k+1}$ sofort $n_{k+1} \geq n_k + 1$ und damit per Induktion $n_k \geq k$ folgt.

Beispiel 3.23 (a) Für die Folge mit $a_n = (-1)^n$ erhalten wir mit $n_k = 2k$, also $n_0 = 0, n_1 = 2, n_2 = 4, \ldots$, die Teilfolge $(1, 1, 1, 1, \ldots)$. Für $n_k = 2k+1$ erhalten wir die Teilfolge $(-1, -1, -1, -1, \ldots)$.

(b) Betrachte die Folge mit $a_n = (-1)^n + (1/2)^n$, vgl. Abb. 3.2. Hierfür erhalten wir mit $n_k = 2k$, also $(0, 2, 4, 6, \ldots)$ die Teilfolge $a_{n_k} = (-1)^{2k} + (1/2)^{2k} = 1 + (1/2)^{2k}$, also $(2, 5/4, 17/16, \ldots)$. Für $n_k = 2k+1$, also $(1, 3, 5, 7, \ldots)$, erhalten wir $a_{n_k} = -1 + (1/2)^{2k+1}$, also $(-1/2, -7/8, -31/32, \ldots)$. □

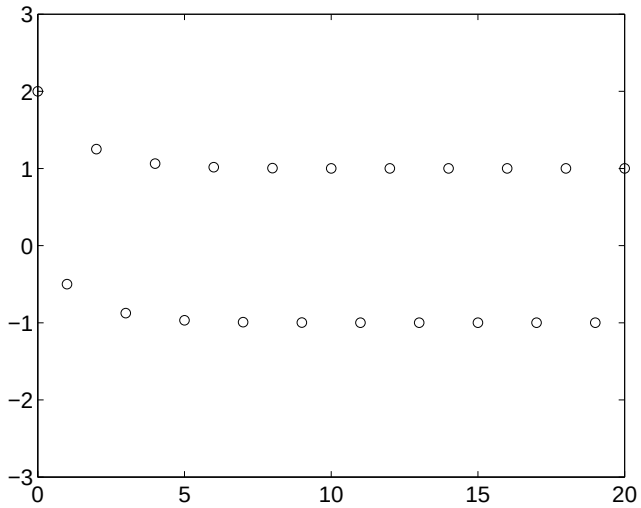


Abbildung 3.2: Illustration der Folge $a_n = (-1)^n + (1/2)^n$

Wenn die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, so folgt aus der Definition der Konvergenz, dass auch jede Teilfolge gegen den gleichen Grenzwert konvergiert, denn wenn $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N(\varepsilon)$ gilt, dann gilt wegen $n_k \geq k$ auch $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$ für alle $k \geq N(\varepsilon)$.

Eine Folge kann aber auch dann konvergente Teilfolgen enthalten, wenn sie selbst nicht konvergent ist. Ein Beispiel ist die Folge $a_n = (-1)^n$, denn für diese Folge konvergieren die beiden oben angegebenen Teilfolgen gegen 1 bzw -1, die Folge selbst konvergiert aber bekanntermaßen nicht.

Definition 3.24 Ein $p \in \mathbb{R}$ heißt *Häufungspunkt* einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn es eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gibt, die gegen p konvergiert. □

Aus der vorhergehenden Überlegung folgt sofort, dass eine konvergente Folge genau einen Häufungspunkt besitzt. Die folgende Definition gibt uns auch im Falle der Nichtkonvergenz eine Möglichkeit, obere und untere Schranken für die Häufungspunkte einer Folge zu bestimmen, wie wir im Anschluss beweisen werden.

Definition 3.25 (a) Für eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definieren wir die Folge

$$b_n := \sup\{a_k \,|\, k \geq n\}.$$

Falls diese Suprema für alle $n \in \mathbb{N}$ existieren (also $< \infty$ sind) und die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, so sagen wir, dass der *Limes superior* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert und definieren diesen als

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} b_n.$$

(b) Für eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definieren wir die Folge

$$c_n := \inf\{a_k \,|\, k \geq n\}.$$

Falls diese Infima für alle $n \in \mathbb{N}$ existieren (also $> -\infty$ sind) und diese Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, so sagen wir, dass der *Limes inferior* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert und definieren diesen als

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n.$$

□

Beispiel 3.26 (a) Für die Folge mit $a_n = (-1)^n$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$,

$$b_n = \sup\{a_k | k \geq n\} = 1 \quad \text{und} \quad c_n = \inf\{a_k | k \geq n\} = -1.$$

Die Folgen b_n und c_n sind also konstant und konvergieren gegen 1 bzw. -1. Es gilt also

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = 1 \quad \text{und} \quad \liminf_{n\to\infty} a_n = -1.$$

(b) Für die Folge mit $a_n = (-1)^n + (-1/2)^n$ gilt $b_n = 1 + (1/2)^n$ falls n gerade ist und $b_n = 1 + (1/2)^{n+1}$ falls n ungerade ist. Der Grenzwert ist also 1 und damit gilt $\limsup_{n\to\infty} a_n = 1$. Analog sieht man $\liminf_{n\to\infty} a_n = -1$. □

Satz 3.27 Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann beschränkt, wenn sowohl der Limes superior als auch der Limes inferior existieren.

Beweis: Wir beweisen zunächst, dass aus der Beschränktheit die Existenz folgt. Wir beweisen dies für den Limes superior; der Beweis für den Limes inferior verläuft analog.

Zunächst folgt aus der Beschränktheit nach oben nach Satz 2.13, dass die Suprema in der Definition von b_n existieren. Aus der Definition der Folge b_n folgt

$$b_{n+1} = \sup\{a_k \,|\, k \geq n+1\} \leq \max\{\sup\{a_k \,|\, k \geq n+1\},\, a_n\} = \sup\{a_k \,|\, k \geq n\} = b_n.$$

Die Folge b_n ist also monoton fallend und damit insbesondere durch b_0 nach oben beschränkt. Wegen der Beschränktheit von a_n nach unten existiert zudem ein $K \in \mathbb{R}$ mit $a_n \geq K$, woraus mit der Definition des Supremums auch $b_n \geq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt. Folglich ist b_n durch K nach unten beschränkt und damit insgesamt beschränkt und monoton. Die Existenz des Grenzwertes folgt nun aus Satz 3.21.

Wenn nun umgekehrt der Limes Superior existiert, so existieren per Definition die Suprema in der Definition der b_n. Insbesondere ist also b_0 eine obere Schranke für die Folge, woraus die Beschränktheit nach oben folgt. Analog folgt aus der Existenz des Limes inferior, dass c_0 eine untere Schranke für die Folge ist. Also ist sie beschränkt. □

Um den Zusammenhang zwischen den Teilfolgen und dem Limes superior und inferior zu beweisen, brauchen wir noch die folgende Hilfsaussage.

Lemma 3.28 Für eine nach oben (bzw. nach unten) beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert zu jedem b_j (bzw. c_j) aus Definition 3.25 und jedem $\varepsilon > 0$ ein $n \geq j$ mit

$$|b_j - a_n| < \varepsilon \qquad (\text{bzw. } |c_j - a_n| < \varepsilon).$$

Beweis: Wir führen den Beweis für die b_j.

Wegen $b_j := \sup\{a_n \,|\, n \geq j\}$ folgt sofort $a_n - b_j \leq 0$ für alle $n \geq j$. Es genügt also für jedes $\varepsilon > 0$ die Existenz von a_n, $n \geq j$, mit $b_j - a_n < \varepsilon$ zu zeigen, um $|b_j - a_n| < \varepsilon$ zu beweisen.

Angenommen, zu einem gegebenen $\varepsilon > 0$ gibt es kein solches a_n, d.h. für alle $n \geq j$ gilt $b_j - a_n \geq \varepsilon$. Dann folgt $a_n \leq b_j - \varepsilon$, weswegen $b_j - \varepsilon$ eine obere Schranke der Menge $\{a_n \,|\, n \geq j\}$ ist. Dies wäre aber eine kleinere obere Schranke als b_j, was der Definition des Supremums als kleinste obere Schranke widerspricht. □

Satz 3.29 Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, für die der Limes superior (bzw. der Limes inferior) existiert. Dann ist

$$p := \limsup_{n\to\infty} a_n \quad (\text{bzw. } p := \liminf_{n\to\infty} a_n).$$

ein Häufungspunkt und für alle weiteren Häufungspunkt $q \in \mathbb{R}$ gilt

$$q \leq \limsup_{n\to\infty} a_n \quad (\text{bzw. } q \geq \liminf_{n\to\infty} a_n).$$

Beweis: Wir beweisen den Satz für den Limes superior und konstruieren eine gegen p konvergierende Teilfolge induktiv wie folgt: Wir setzen zunächst $n_0 = 0$. Für jedes $k \geq 1$ setzen wir $j = n_{k-1} + 1$ und $\varepsilon = 1/j$, wählen den zugehörigen Index n aus Lemma 3.28 und setzen $n_k = n$. Dann gilt per Konstruktion $n_k = j \geq n_{k-1} + 1 > n_{k-1}$ (und damit wegen $n_0 = 0$ insbesondere $n_k \geq k$) und

$$|b_{n_{k-1}+1} - a_{n_k}| = |b_j - a_n| < \varepsilon = 1/j = 1/(n_{k-1} + 1) \leq 1/k.$$

Sei nun $p := \limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir wählen $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ so, dass $|b_k - p| < \varepsilon/2$ und $1/k < \varepsilon/2$ gilt für alle $k \geq N(\varepsilon)$. Dann folgt

$$|a_{n_k} - p| \leq |a_{n_k} - b_{n_{k-1}+1}| + |b_{n_{k-1}+1} - p| < 1/k + \varepsilon/2 < \varepsilon$$

für alle $k \geq N(\varepsilon)$, was die Konvergenz von a_{n_k} gegen p beweist.

Um die behauptete Ungleichung für die weiteren Häufungspunkte q zu zeigen, nehmen wir an, dass es eine Teilfolge gibt mit

$$q := \lim_{k\to\infty} a_{n_k} > \limsup_{n\to\infty} a_n =: p.$$

Dann existiert für $\varepsilon = (q - p)/2$ ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ so dass $a_{n_k} > q - \varepsilon$ gilt für alle $k \geq N(\varepsilon)$. Daraus folgt

$$b_n = \sup\{a_k \,|\, k \geq n\} \geq \sup\{a_{n_k} \,|\, n_k \geq n\} \geq q - \varepsilon = q - (q-p)/2 = q/2 + p/2 = p + (q-p)/2$$

und damit auch $\lim_{n\to\infty} b_n \geq p + (q - p)/2 > p$, was ein Widerspruch zur Definition von p ist. □

Ein wichtiger Satz der Analysis — benannt nach den Mathematikern Bernard Bolzano (1781–1848) und Karl Weierstraß (1815–1897) — folgt nun direkt aus den beiden vorhergehenden Sätzen.

Satz 3.30 (Satz von Bolzano-Weierstraß) Jede beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beweis: Nach Satz 3.27 existiert für eine beschränkte Folge der Limes superior und nach Satz 3.29 ist dieser ein Häufungspunkt. Folglich existiert eine Teilfolge, die gegen den Limes superior konvergiert, die also konvergent ist. □

Aus dem Satz von Bolzano-Weierstraß kann man den (hier bereits auf anderem Wege bewiesenen) Satz 3.21 über die Kovergenz beschränkter und monotoner Folgen ableiten, ohne das Vollständigkeitsaxiom benutzen zu müssen (was wir hier nicht durchführen werden). Da der Satz von Bolzano-Weierstraß wiederum auf dem Vollständigkeitsaxiom beruht (denn dieses sichert die Existenz des Supremums im Beweis von Satz 3.27), ist auch dieser Satz äquivalent zum Vollständigkeitsaxiom.

Wir beenden diesen Abschnitt mit zwei Folgerungen aus den vorhergehenden Sätzen.

Korollar 3.31 Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge.

(a) Die Folge ist genau dann konvergent, wenn der Limes superior und der Limes inferior existieren und übereinstimmen. In diesem Fall gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n.$$

(b) Wenn die Folge beschränkt ist und genau einen Häufungspunkt besitzt, dann konvergiert sie.

Beweis: (a) Wenn die Folge konvergent ist, so besitzt sie gemäß der Überlegung nach Definition 3.24 genau einen Häufungspunkt p. Weil jede konvergente Folge nach Satz 3.7 beschränkt ist, existieren nach Satz 3.27 sowohl der Limes superior als auch der Limes inferior. Nach Satz 3.29 müssen diese dann aber übereinstimmen, denn ansonsten gäbe es zwei unterschiedliche Häufungspunkte.

Wenn umgekehrt Limes superior und Limes inferior existieren und übereinstimmen, gilt nach Satz 3.29 für alle Häufungspunkte die Gleichung $p = \limsup_{n\to\infty} a_n$. Nehmen wir nun an, dass die gesamte Folge nicht gegen p konvergiert. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ für das unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ existieren mit $|a_n - p| \geq \varepsilon$. Ordnen wir die Menge all dieser n in der Form $n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$ aufsteigend an, so erhalten wir eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Da die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Satz 3.27 beschränkt ist, ist auch die Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt, besitzt also nach Satz 3.30 eine konvergente Teilfolge $(a_{n_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$, die dann auch eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist und daher gegen p konvergiert. Folglich gibt es ein $j \in \mathbb{N}$ mit $|a_{n_{k_j}} - p| < \varepsilon$, was der Definition der n_k widerspricht.

(b) Wenn die Folge beschränkt ist, dann existieren nach Satz 3.27 sowohl der Limes superior als auch der Limes inferior und nach Satz 3.29 sind diese Häufungspunkte. Wenn es dann nur einen einzigen Häufungspunkt gibt, müssen die beiden Limites übereinstimmen und die Konvergenz folgt aus (a). □

Kapitel 4

Reihen

Stand:
14. Februar 2012

4.1 Definition und Beispiele

Definition 4.1 Für eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt die Folge

$$b_n := \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad n \in \mathbb{N}$$

(unendliche) Reihe. Falls die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, so nennen wir auch die Reihe $\sum_{k=0}^{n} a_k$ *konvergent* und schreiben den Grenzwert als

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} b_n.$$

□

Beachte: Manche Autoren verwenden den Ausdruck "$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$" als symbolische Schreibweise für die unendliche Reihe selbst, auch wenn der Grenzwert nicht existiert. In dieser Vorlesung werden wir diesen Ausdruck ausschließlich für den Grenzwert verwenden. Die Sprechweise "der Grenzwert existiert" ist dabei gleichbedeutend mit "die Reihe konvergiert".

Oftmals ist es sinnvoll, eine Reihe erst bei einem Index $k_0 \geq 1$ statt bei 0 beginnen zu lassen, d.h.

$$\sum_{k=k_0}^{n} a_k.$$

Alle Aussagen in diesem Kapitel gelten analog für solche Reihen, wenn wir die Einschränkung $n \geq k_0$ beachten.

Ein Beispiel für eine unendliche Reihe erhalten wir aus **Beispiel 3.2(a)**, wenn wir die Regeln, nach denen der Bauer seine Kartoffelproduktion plant, geeignet festlegen. Nehmen wir dazu an, dass der Preis p_n, den er im Jahr n pro Kilogramm erzielen kann, direkt von

der von ihm angebotenen Menge abhängt und umso niedriger ist, je höher die angebotene Menge ist. Z.B. können wir annehmen, dass sich der Preis als

$$p_n = c - da_n$$

ausdrücken lässt, wobei c und d positive reelle Zahlen sind. Das bedeutet, dass der Preis gerade gleich c ist, wenn überhaupt keine Kartoffeln angeboten werden und linear abnimmt, je größer das Angebot ist. Dies ist natürlich eine sehr vereinfachte Annahme, da ein Markt normalerweise nach deutlich komplizierteren Regeln funktioniert. Wir nehmen dies jetzt aber der Einfachheit halber an, um zu einer Formel zu kommen, mit der wir weiter rechnen können[1].

Nehmen wir desweiteren an, dass der Bauer im Folgejahr um so mehr Kartoffeln a_{n+1} produziert, je höher der Preis p_n war. Zum Beispiel könnte er nach der Formel

$$a_{n+1} = bp_n$$

mit $b > 0$ vorgehen, die Menge also einfach proportional dem Vorjahrespreis anpassen.

Wenn der Bauer im Jahr n die Menge a_n produziert, ergibt sich der Preis $p_n = c - da_n$ und damit im Folgejahr die Menge

$$a_{n+1} = bp_n = bc - bda_n.$$

Beginnen wir mit einer beliebigen Menge a_0, so ergibt sich damit

$$a_1 = bc - bda_0,$$

$$a_2 = bc - bda_1 = bc - bd(bc - bda_0) = bc(1 - bd) + b^2d^2a_0,$$

$$a_3 = bc - bda_2 = bc - bd(bc(1 - bd) + b^2d^2a_0) = bc(1 - bd + b^2d^2) - b^3d^3a_0.$$

Per Induktion kann man dann beweisen, dass für beliebige n die Gleichung

$$a_n = bc\left(\sum_{k=0}^{n-1}(-bd)^k\right) + (-bd)^n a_0$$

gilt.

Wenn wir nun wissen wollen, ob sich die produzierte Menge im Laufe der Jahre einer festen Menge a annähert (einem sogenannten *Marktgleichgewicht*), ist dies mathematisch ausgedrückt nichts anderes als die Frage nach der Konvergenz der Folge a_n. Da die Folge als einen Bestandteil die Reihe $\sum_{k=0}^{n-1}(-bd)^k$ enthält, müssen wir dazu untersuchen, wann diese Reihe konvergiert. □

[1] Diese Vorgehensweise ist fast immer unumgänglich, wenn man reale Gegebenheiten mathematisch modelliert, d.h. in mathematische Formeln "übersetzt". In ökonomischen Zusammenhängen ist das meist offensichtlicher als in technischen oder naturwissenschaftlichen Anwendungen, aber auch dort müssen fast immer Vereinfachungen gemacht werden. Wichtig dabei ist, dass man bei der Interpretation der Ergebnisse am Ende nicht vergisst, dass man gewisse vereinfachende Annahmen gemacht hat.

Beispiel 4.2 Ein weiteres Beispiel für Reihen sind die am Ende von Kapitel 2 bereits ohne genaue Definition verwendeten unendlichen Dezimalbrüche. Wir beschränken uns hier der einfacheren Notation wegen auf die positiven Dezimalbrüche zwischen 0 und 10, die als

$$d_0, d_1 d_2 d_3 \ldots$$

mit $d_k \in \{0, \ldots, 9\}$ geschrieben werden können. Der Wert dieses unendlichen Dezimalbruchs ist dann gerade

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k 10^{-k},$$

d.h. um sicher zu stellen, dass dies überhaupt ein sinnvoll definierter Wert ist, müssen wir zunächst beweisen, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{n} a_k$ mit $a_k = d_k 10^{-k}$ überhaupt konvergiert. □

Aus der Summenregel für konvergente Folgen in Satz 3.9 ergibt sich wegen

$$\sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} b_k$$

(was aus dem Assoziativgesetz und Kommutativgesetz folgt) sofort, dass für zwei konvergente Reihen $\sum_{k=0}^{n} a_k$ und $\sum_{k=0}^{n} b_k$ auch die Reihe $\sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k)$ konvergiert und die Gleichung

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

gilt. Ebenso gilt für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ wegen

$$\sum_{k=0}^{n} (\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=0}^{n} a_k,$$

(was aus dem Distributivgesetz folgt) mit Korollar 3.11 für jede konvergente Reihe $\sum_{k=0}^{n} a_k$ die Gleichung

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Deutlich komplizierter ist allerdings die Multiplikation konvergenter Reihen. Der Grund dafür ist, dass hier im Allgemeinen

$$\sum_{k=0}^{n} (a_k \cdot b_k) \neq \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} b_k \right)$$

gilt. Z.B. gilt bereits für $n = 1$

$$\sum_{k=0}^{1} (a_k \cdot b_k) = a_0 b_0 + a_1 b_1$$

aber

$$\left(\sum_{k=0}^{1} a_k \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{1} b_k \right) = (a_0 + a_1)(b_0 + b_1) = a_0 b_0 + a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_1 b_1.$$

Die Multiplikation werden wir deswegen erst etwas später betrachten.

4.2 Konvergenzkriterien für unendliche Reihen

Wir wollen nun Bedingungen angeben, unter denen wir sicher stellen können, dass eine unendliche Reihe konvergiert. Schön wäre dabei ein einfaches Kriterium der Form "die Reihe konvergiert genau dann, wenn die a_k die Bedingung x erfüllen". Leider gibt es eine solche einfache Bedingung x aber nicht. Wir können im Folgenden daher nur verschiedene hinreichende und notwendige Bedingungen für Konvergenz angeben.

Wir beginnen mit einer bereits bekannten Reihe.

Satz 4.3 Die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{n} x^k$$

konvergiert genau dann, wenn $|x| < 1$ ist. In diesem Fall gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

Beweis: Nach Satz 1.3 gilt für $x \neq 1$

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x} x^{n+1}.$$

Im Fall $|x| < 1$ gilt nach den Rechenregeln für Grenzwerte und Beispiel 3.1(g)

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x} \underbrace{\lim_{n\to\infty} x^{n+1}}_{=0} = \frac{1}{1-x}.$$

Im Fall $|x| > 1$ oder $x = -1$ konvergiert x^{n+1} nach Beispiel 3.1(g) nicht, damit konvergiert auch die Reihe nicht. Im Fall $x = 1$ gilt $\sum_{k=0}^{n} x^k = n + 1$, was ebenfalls nicht konvergiert. □

Viele Reihen sind allerdings nicht von dieser Form. Ein weiteres Konvergenzkriterium ergibt sich direkt aus der Definition der Cauchy-Folge. Es ist tatsächlich ein "genau-dann-wenn" Kriterium, allerdings nicht direkt für die Glieder der Reihe sondern für Teilsummen.

Satz 4.4 (**Cauchysches Konvergenzkriterium für Reihen**) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Dann existiert der Grenzwert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $C(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, so dass die Ungleichung

$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| \leq \varepsilon$$

für alle $n \geq m \geq C(\varepsilon)$ erfüllt ist.

Beweis: Für die Folge

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

gilt

$$|b_n - b_{m-1}| = \left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right|.$$

Damit folgt die Aussage direkt aus Satz 3.19, denn die Folge b_n ist gerade dann eine Cauchy-Folge, wenn die angegebene Bedingung gilt. □

Aus Satz 4.4 folgt sofort die folgende notwendige Bedingung an die a_k.

Satz 4.5 Wenn der Grenzwert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ existiert, so folgt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Beweis: Es gilt $a_n = \sum_{k=n}^{n} a_k$. Damit gilt für jedes $\varepsilon > 0$ und alle $n \geq C(\varepsilon)$ aus Satz 4.4 die Ungleichung $|a_n - 0| = |a_n| \leq \varepsilon$, folglich konvergiert a_n gegen 0. □

Beispiel 4.6 Die Reihe $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k$ konvergiert nicht, weil die Folge $(-1)^n$ nicht gegen Null konvergiert. □

Ein hinreichendes Kriterium für Konvergenz lässt sich aus den Sätzen 3.7 und 3.21 ableiten.

Satz 4.7 Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann existiert der Grenzwert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ genau dann, wenn die Reihe beschränkt ist, d.h. wenn ein $K \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \leq K \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Beweis: Wegen $a_n \geq 0$ ist die Folge $b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \geq 0$ monoton wachsend. Zudem ist sie genau dann beschränkt, wenn sie nach oben beschränkt ist. Daher folgt die Aussage aus den Sätzen 3.7 und 3.21. □

Beispiel 4.8 Wir betrachten die Reihen

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

Für die erste Reihe —die sogenannte *harmonische Reihe*— betrachten wir die Teilsummen

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k}$$

und spalten diese Summe in die Summanden mit den Indizes $\{1,2\}$ und $\{2^p+1,\ldots,2^{p+1}\}$ für $p=1,\ldots,n$ auf (also $\{1,2\}$, $\{3,4\}$, $\{5,6,7,8\}$, $\{9,10,11,12,13,14,15,16\}$ usw.). Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} &= 1+\frac{1}{2}+\sum_{p=1}^{n}\left(\sum_{k=2^p+1}^{2^{p+1}}\frac{1}{k}\right)\\
&= 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\ldots+\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}}\frac{1}{k}\\
&\geq 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\ldots+\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}}\frac{1}{2^{n+1}}.
\end{aligned}$$

In jeder Teilsumme befinden sich also 2^p Summanden mit Wert $\geq 1/2^{p+1}$, also gilt für den Wert jeder Teilsumme

$$\sum_{k=2^p+1}^{2^{p+1}}\frac{1}{k} \geq \sum_{k=2^p+1}^{2^{p+1}}\frac{1}{2^{p+1}} = 2^p\frac{1}{2^{p+1}} = \frac{1}{2}.$$

Also gilt

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}}\frac{1}{k} \geq 1+\frac{1}{2}+n\frac{1}{2} = \frac{n+3}{2}$$

und die Reihe ist nicht beschränkt. Folglich konvergiert die harmonische Reihe nach Satz 4.7 nicht, obwohl man dies wegen $1/n \to 0$ für $n\to\infty$ zunächst vielleicht vermuten würde.

Für die Reihe $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ zeigen wir nun, dass sie durch $K=2$ beschränkt ist und damit nach Satz 4.7 konvergiert. Sei dazu ein beliebiges $n\in\mathbb{N}$ gegeben und sei $m\in\mathbb{N}$ so groß, dass $n\leq 2^{m+1}-1$ ist. Dann gilt mit einer ähnlichen Aufteilung der Indizes wie gerade eben und Satz 1.3

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} &\leq \sum_{k=1}^{2^{m+1}-1}\frac{1}{k^2} = \sum_{p=0}^{m}\left(\sum_{k=2^p}^{2^{p+1}-1}\frac{1}{k^2}\right) \leq \sum_{p=0}^{m}\left(2^p\frac{1}{(2^p)^2}\right)\\
&= \sum_{p=0}^{m}\left(\frac{1}{2}\right)^p = \frac{1-(1/2)^{m+1}}{1-1/2} \leq \frac{1}{1-1/2} = 2.
\end{aligned}$$

Wir werden später in Beispiel 4.16 zeigen, dass alle Reihen der Form

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p}$$

für $p\geq 2$ konvergieren. Mit weitergehenden analytischen Methoden kann man zudem beweisen, dass $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\pi^2/6$ ist. □

Zum Abschluss dieses Abschnitts betrachten wir noch ein Konvergenzkriterium für Reihen, deren Summanden in jedem Schritt das Vorzeichen wechseln. Reihen dieser Art nennt man *alternierend*. Für den folgenden Satz ist es sinnvoll, die Summanden in der Form $(-1)^n a_n$ mit $a_n\geq 0$ zu schreiben.

Satz 4.9 (Leibnizsches Konvergenzkriterium für alternierende Reihen) Für eine monoton fallende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \geq 0$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ existiert der Grenzwert

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k.$$

Beweis: Wir betrachten die Folge $b_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$ und die beiden Teilfolgen

$$b_{2n} = (b_0, b_2, b_4, \ldots) \quad \text{und} \quad b_{2n+1} = (b_1, b_3, b_5, \ldots).$$

Für diese gilt wegen der Monotonie der a_k

$$b_{2n+2} - b_{2n} = (-1)^{2n+2}a_{2n+2} + (-1)^{2n+1}a_{2n+1} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0$$

und

$$b_{2n+3} - b_{2n+1} = (-1)^{2n+3}a_{2n+3} + (-1)^{2n+2}a_{2n+2} = -a_{2n+3} + a_{2n+2} \geq 0.$$

Also ist b_{2n} monoton fallend und b_{2n+1} monoton wachsend. Zudem gelten wegen $b_{2n+1} - b_{2n} = (-1)^{2n+1}a_{2n+1} \leq 0$ die Ungleichungen

$$b_{2n+1} \leq b_{2n} \leq b_0 \quad \text{und} \quad b_{2n} \geq b_{2n+1} \geq b_1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit sind beide Folgen monoton und beschränkt und konvergieren damit. Für die Grenzwerte gilt dabei nach den Rechenregeln für Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} b_{2n} - \lim_{n\to\infty} b_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}(b_{2n} - b_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} -(-1)^{2n+1}a_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0,$$

weswegen die beiden Grenzwerte übereinstimmen. Bezeichnen wir diesen Grenzwert mit b, so existieren für jedes $\varepsilon > 0$ Indizes $N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$$|b_{2n} - b| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq N_1(\varepsilon) \quad \text{und} \quad |b_{2n+1} - b| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq N_2(\varepsilon).$$

Für alle $n \geq N(\varepsilon) := \max\{2N_1(\varepsilon), 2N_2(\varepsilon) + 1\}$ gilt damit

$$|b_n - b| < \varepsilon,$$

womit die Konvergenz gezeigt ist. □

Beispiel 4.10 Wir haben in Beispiel 4.8 gesehen, dass die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ nicht konvergiert. Im Gegensatz dazu erfüllt die *alternierende harmonische Reihe*

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \ldots \pm \frac{1}{n}$$

die Voraussetzungen von Satz 4.9 und konvergiert also. Die genaue Berechnung des Grenzwertes benötigt Methoden, die wir erst später behandeln. □

Die alternierende harmonische Reihe ist ein schönes Beispiel dafür, dass sich das Konvergenzverhalten einer Reihe verändern kann, wenn man die Glieder einer Reihe umordnet. Wir können die Glieder z.B. wie folgt anordnen

$$\begin{aligned}
1 \quad - \quad & \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \\
+ \quad & \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) - \frac{1}{6} \\
+ \quad & \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15}\right) - \frac{1}{8} \\
+ \quad & \left(\frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} + \frac{1}{23} + \frac{1}{25} + \frac{1}{27} + \frac{1}{29} + \frac{1}{31}\right) - \frac{1}{10} \\
+ \quad & \ldots
\end{aligned}$$

d.h. beginnend mit $1/5$ nehmen wir für $p = 1, 2, 3, \ldots$ immer die nächsten 2^p noch nicht verwendeten positiven Elemente und danach das nächste noch nicht verwendete negative Element. Man kann sich leicht überlegen, dass jeder Summand der alternierenden harmonischen Reihe hier irgendwann einmal auftaucht, dass also kein Summand "verloren geht", ebenso tritt kein Summand mehrfach auf. Trotzdem hat die neue Reihe ein ganz anderes Konvergenzverhalten: In jeder Zeile summieren sich die Brüche in den Klammern nämlich zu einer Zahl $> 1/4$ auf, von der dann maximal $1/6$ abgezogen wird. Insgesamt ergibt sich also in jeder Zeile ein Wert $> 1/4 - 1/6 = 1/12$, weswegen die Summe nach n Zeilen größer als $n/12$ ist und damit unbeschränkt wächst. Aus der konvergenten alternierenden Reihe ist durch Umordnung eine unbeschränkte und damit divergierende Reihe geworden.

Im nachfolgenden Abschnitt behandeln wir einen "stärkeren" Konvergenzbegriff für Reihen, unter dem sowohl die Konvergenzeigenschaft als auch der Grenzwert unter beliebigen Umordnungen erhalten bleibt.

4.3 Absolute Konvergenz

Definition 4.11 Eine Reihe $\sum_{k=0}^{n} a_k$ heißt *absolut konvergent*, wenn die Reihe

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k|$$

konvergiert. □

Dass die absolute Konvergenz tatsächlich ein stärkerer Begriff ist als die "normale" Konvergenz[2], zeigt der folgende Satz und die nachfolgende Diskussion.

Satz 4.12 Jede absolut konvergente Reihe ist auch im üblichen Sinne konvergent.

[2] Man sagt, dass eine Eigenschaft a *stärker* ist als eine Eigenschaft b, wenn die Implikation $a \Rightarrow b$ gilt, die Implikation $b \Rightarrow a$ aber nicht gilt.

Beweis: Wenn die Reihe absolut konvergiert, existiert nach dem Cauchyschen Konvergenzkriterium aus Satz 4.4 zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $C(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{k=m}^{n} |a_k| = \left| \sum_{k=m}^{n} |a_k| \right| < \varepsilon$$

für alle $n \geq m \geq C(\varepsilon)$. Damit folgt mit $(n-m)$-maliger Anwendung der Dreiecksungleichung

$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=m}^{n} |a_k| < \varepsilon$$

und die Reihe konvergiert wiederum nach Satz 4.4. □

Beachte, dass die Aussage des Satzes nicht impliziert, dass die beiden Grenzwerte $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ und $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ übereinstimmen. Er sagt lediglich, dass der zweite Grenzwert existiert, falls der erste existiert. Umgekehrt gilt das natürlich nicht, wie die alternierende harmonische Reihe zeigt, die ein Beispiel für eine Reihe ist, die konvergiert aber nicht absolut konvergiert. Dies zeigt, dass die Konvergenz die absolute Konvergenz nicht impliziert; die absolute Konvergenz ist also tatsächlich eine stärkere Eigenschaft. Die Reihe $\sum_{k=1}^{n} 1/k^2$ hingegen konvergiert absolut, da für $a_k = 1/k^2$ wegen $1/k^2 > 0$ offensichtlich $|a_k| = a_k$ gilt.

Der folgende Satz zeigt nun, dass im Falle absoluter Konvergenz beliebige Umordnungen nichts am Konvergenzverhalten ändern, ja dass sogar der Grenzwert gleich bleibt. Dazu definieren wir die Umordnung zunächst formal.

Definition 4.13 Eine Reihe $\sum_{k=0}^{n} a_{\tau(k)}$ mit einer Folge $(\tau(j))_{j\in\mathbb{N}}$ heißt *Umordnung* einer Reihe $\sum_{k=0}^{n} a_k$, wenn jeder Index $k \in \mathbb{N}$ genau einmal in der Folge $(\tau(j))_{j\in\mathbb{N}}$ auftritt[3]. □

Satz 4.14 Sei $\sum_{k=0}^{n} a_k$ eine absolut konvergente Reihe. Dann konvergiert auch jede Umordnung $\sum_{k=0}^{n} a_{\tau(k)}$ der Reihe und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{\tau(k)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Beweis: Sei

$$b := \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Wir müssen dann beweisen, dass $\sum_{k=0}^{n} a_{\tau(k)}$ gegen b konvergiert. Da die ursprüngliche Reihe absolut konvergiert, gibt es nach Satz 4.4 zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $k_0 = C(\varepsilon/2) \in \mathbb{N}$ mit

$$c_m := \sum_{k=k_0}^{m} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}$$

[3] Verwenden wir die in der Linearen Algebra eingeführten Begriffe, so ist τ also eine *bijektive Abbildung* von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$.

für alle $m \geq k_0$. Die Folge c_m ist also monoton und beschränkt und konvergiert damit gegen einen Grenzwert $\sum_{k=k_0}^{\infty} |a_k|$, für den nach Satz 3.14

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} |a_k| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

gilt. Daraus folgt[4]

$$\left| b - \sum_{k=0}^{k_0-1} a_k \right| = \left| \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=k_0}^{\infty} |a_k| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da jedes k in der Folge $(\tau(j))_{j\in\mathbb{N}}$ auftritt, gibt es also für jedes k ein j_k mit $k = \tau(j_k)$. Setzen wir nun $N(\varepsilon) := \max\{j_0, j_1, \ldots, j_{k_0-1}\}$ so taucht jedes $k = 0, \ldots, k_0 - 1$ in der Menge $\{\tau(0), \tau(1), \ldots, \tau(N(\varepsilon))\}$ auf. Damit gilt für alle $m \geq N(\varepsilon)$ die Ungleichung

$$\left| \sum_{k=0}^{m} a_{\tau(k)} - \sum_{k=0}^{k_0-1} a_k \right| = \left| \sum_{\substack{k=0 \\ k\neq j_0,\ldots,j_{k_0-1}}}^{m} a_{\tau(k)} \right| \leq \sum_{\substack{k=0 \\ k\neq j_0,\ldots,j_{k_0-1}}}^{m} |a_{\tau(k)}| \leq \sum_{k=k_0}^{\max\{\tau(0),\ldots,\tau(m)\}} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2},$$

wobei wir im vorletzten Schritt ausgenutzt haben, dass jeder Index k in der Folge höchstens einmal auftritt. Somit erhalten wir für alle $m \geq N$

$$\left| \sum_{k=0}^{m} a_{\tau(k)} - b \right| \leq \left| \sum_{k=0}^{m} a_{\tau(k)} - \sum_{k=0}^{k_0-1} a_k \right| + \left| \sum_{k=0}^{k_0-1} a_k - b \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

und folglich die behauptete Konvergenz. □

Nachdem die absolute Konvergenz offenbar eine nützliche Eigenschaft ist (einen weiteren Beleg dafür geben wir im letzten Satz dieses Abschnitts), ist es sinnvoll, Kriterien zu finden, mit denen wir sie für eine gegebene Reihe nachweisen können. Die folgenden beiden Sätze geben zwei solche Kriterien.

Satz 4.15 (Majorantenkriterium) Sei $\sum_{k=0}^{n} c_k$ eine konvergente Reihe mit $c_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Sei $k_0 \in \mathbb{N}$ und $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $|a_k| \leq c_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq k_0$. Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=0}^{n} a_k$$

absolut. Die Reihe $\sum_{k=0}^{n} c_k$ heißt dann *Majorante* der Reihe $\sum_{k=0}^{n} a_k$.

Beweis: Im Fall $k_0 = 0$ folgt die Aussage wegen

$$\left| \sum_{k=m}^{n} |a_k| \right| = \sum_{k=m}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=m}^{n} c_k = \left| \sum_{k=m}^{n} c_k \right|$$

[4] Wenn die obere Summationsgrenze endlich ist, folgt die hier verwendete Ungleichung aus der Dreiecksungleichung. Wegen Satz 3.14 überträgt sich die Ungleichung auf die Grenzwerte.

analog zum Beweis von Satz 4.12 aus Satz 4.4.

Im Fall $k_0 > 0$ definiere $\tilde{a}_k := c_k$ für $k = 0, \ldots, k_0 - 1$ und $\tilde{a}_k := a_k$ für $k \geq k_0$. Dann erfüllt die Reihe $\sum_{k=0}^{n} \tilde{a}_k$ die Bedingung des Satzes für $k_0 = 0$ und konvergiert nach dem ersten Teil des Beweises. Aus der Definition der $\tilde{a}_k$ folgt dan für $n \geq k_0$ die Gleichung

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} \tilde{a}_k - \sum_{k=0}^{k_0-1} c_k + \sum_{k=0}^{k_0-1} a_k$$

und weil die Reihe $\sum_{k=0}^{n} \tilde{a}_k$ für $n \to \infty$ konvergiert und die beiden anderen Ausdrücke auf der rechten Seite unabhängig von n sind, konvergiert auch die Reihe $\sum_{k=0}^{n} a_k$. □

Beispiel 4.16 Betrachte die Reihen

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^p}$$

für $p \geq 2$. Für $p = 2$ haben wir die Konvergenz bereits in Beispiel 4.8 bewiesen. Wegen $k \geq 1$ gilt $k^q \geq 1$ und damit $1/k^q \leq 1$ für alle $q \geq 1$. Für $p \geq 3$ erhalten wir so

$$\left| \frac{1}{k^p} \right| = \frac{1}{k^p} = \frac{1}{k^{p-2}} \cdot \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k^2}.$$

Damit folgt die absolute Konvergenz (und damit auch die übliche Konvergenz) aus dem Majorantenkriterium mit $k_0 = 0$. □

Beispiel 4.17 Für die Dezimalbrüche aus Beispiel 4.2 gilt

$$|d_k 10^{-k}| \leq 9 \cdot 10^{-k}.$$

Da die Reihe

$$\sum_{k=0}^{n} 9 \cdot 10^{-k} = 9 \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{10} \right)^k$$

nach Satz 4.3 gegen $9 \frac{1}{1-1/10} = 10$ konvergiert und offensichtlich positive Summanden besitzt, konvergiert also jede Dezimalbruchreihe absolut nach dem Majorantenkriterium. Insbesondere besitzt also jeder unendliche Dezimalbruch einen eindeutig definierten Wert. □

Satz 4.18 (Quotientenkriterium) Sei $\sum_{k=0}^{n} a_k$ eine Reihe mit $a_k \neq 0$ für alle $k \geq k_0$. Sei $\theta \in \mathbb{R}$ mit $0 < \theta < 1$, so dass

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq \theta \quad \text{gilt für alle } k \geq k_0. \tag{4.1}$$

Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{n} a_k$ absolut.

Beweis: Mittels vollständiger Induktion folgt aus der Annahme die Ungleichung

$$|a_k| \leq \theta^{k-k_0} |a_{k_0}|$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq k_0$. Die Reihe

$$\sum_{k=0}^{n} |a_{k_0}| \theta^{k-k_0}$$

ist daher eine Majorante für $\sum_{k=0}^{n} a_k$ für $k \geq k_0$. Da

$$\sum_{k=0}^{n} |a_{k_0}| \theta^{k-k_0} = |a_{k_0}| \theta^{-k_0} \sum_{k=0}^{n} \theta^k$$

wegen $|\theta| < 1$ nach Satz 4.3 konvergiert, folgt die Konvergenz mit Satz 4.15. □

Beispiel 4.19 (a) Die Reihe $\sum_{k=0}^{n} a_k$ mit $a_k = \frac{k^2}{2^k}$ konvergiert, denn es gilt

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{(k+1)^2 2^k}{2^{k+1} k^2} = \frac{1}{2} \frac{(k+1)^2}{k^2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{k} \right)^2$$

und dieser Ausdruck ist für alle $k \geq k_0 = 3$ kleiner als $8/9 < 1$.

(b) Das Beispiel der harmonischen Reihe ($a_k = 1/k$) zeigt, dass die Formulierung der Ungleichung in (4.1) als "$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq \theta < 1$" wichtig ist und die schwächere Ungleichung "$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1$" nicht ausreicht. Diese schwächere Ungleichung ist nämlich für die harmonische Reihe wegen

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{k}{k+1} < 1$$

erfüllt. Da der Bruch $k/(k+1)$ für große k aber beliebig nahe bei 1 liegt (denn er konvergiert ja gegen 1), lässt sich kein $\theta < 1$ finden, für das (4.1) für beliebig große k gilt. Dies kann auch nicht sein, denn die harmonische Reihe ist ja nicht konvergent.

(c) Das Beispiel $a_k = 1/k^2$ zeigt, dass das Quotientenkriterium hinreichend aber nicht notwendig ist für die absolute Konvergenz. Ähnlich wie für die harmonische Reihe sieht man hier, dass kein $\theta < 1$ gefunden werden kann, so dass die (4.1) gilt. Trotzdem ist die Reihe absolut konvergent.

(d) Aus der Definition des lim sup folgt, dass die Voraussetzung von Satz 4.18 genau dann erfüllt ist, wenn

$$\limsup_{k \to \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1$$

gilt. Falls die Folge $\left(\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \right)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert, ist diese Ungleichung äquivalent zu

$$\lim_{k \to \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1,$$

da lim und lim sup im Falle der Konvergenz übereinstimmen. Dies lässt sich zum Beispiel für die Reihe aus (a) anwenden, denn dort gilt

$$\lim_{k \to \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{k} \right)^2 = \frac{1}{2} < 1.$$

Auf diese Weise kann man Satz 4.18 anwenden, ohne k_0 und θ ausrechnen zu müssen. □

Zum Abschluss dieses Kapitels kommen wir noch mal auf die eingangs bereits erwähnte Multplikation konvergenter Reihen zurück. Wie dort bereits bemerkt, ist die Reihe $\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_k$ nicht der richtige Ausdruck, um das Produkt zweier Reihen als eine Reihe darzustellen. Der folgende Satz zeigt, wie der richtige Ausdruck aussieht. Beachte, dass er nur für absolut konvergente Reihen gilt, weil für seinen Beweis eine Abschätzung von Teilsummen über Beträge nötig ist.

Satz 4.20 (Cauchy-Produkt von Reihen) Es seien $\sum_{k=0}^{n} a_k$ und $\sum_{k=0}^{n} b_k$ absolut konvergente Reihen. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ definiere

$$c_k := \sum_{j=0}^{k} a_{k-j} b_j.$$

Dann ist auch die Reihe $\sum_{k=0}^{n} c_k$ absolut konvergent und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right).$$

Beweis: Es sei $a := \sum_{k=0}^{\infty} a_k$, $b := \sum_{k=0}^{\infty} b_k$ und $d_n := \sum_{k=0}^{n} c_k$. Wir zeigen zunächst, dass d_n im üblichen Sinne konvergiert und dass

$$\lim_{n\to\infty} d_n = ab$$

gilt. Die absolute Konvergenz wird dann im nachfolgenden Schritt bewiesen.

Es sei

$$d_n^* := \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right).$$

Nach Satz 3.10 gilt $d_n^* \to ab$ für $n \to \infty$. Um zu zeigen, dass auch $d_n \to ab$ gilt, beweisen wir, dass die Folge $(d_n^* - d_n)$ konvergiert mit

$$\lim_{n\to\infty} (d_n^* - d_n) = 0. \tag{4.2}$$

Damit folgt die Behauptung wegen

$$d_n = \underbrace{d_n^*}_{\to ab} - \underbrace{(d_n^* - d_n)}_{\to 0}$$

aus Korollar 3.12.

Zum Beweis von (4.2) schreiben wir d_n^* nach dem Distributivgesetz als

$$d_n^* = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} b_j\right) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_i b_j =: \sum_{i,j=0}^{n} a_i b_j.$$

Den Ausdruck für d_n schreiben wir um, indem wir $i = k - j$ als "künstlichen" neuen Summationsindex mit der Nebenbedingung $j + i = k$ einführen:

$$d_n = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} a_{k-j} b_j = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} \sum_{\substack{i=0 \\ i+j=k}}^{k} a_i b_j = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j=k}}^{k} a_i b_j = \sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j \le n}}^{n} a_i b_j.$$

Daraus folgt

$$d_n^* - d_n = \sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j>n}}^{n} a_i b_j. \tag{4.3}$$

Sei nun

$$p_n := \left(\sum_{k=0}^{n} |a_k| \right) \left(\sum_{k=0}^{n} |b_k| \right) = \sum_{i,j=0}^{n} |a_i b_j|.$$

Nach Satz 3.10 konvergiert p_n, zu gegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es also nach Satz 3.19 ein $n_0 := C(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$$|p_n - p_{n_0}| < \varepsilon$$

für alle $n \ge n_0$. Die Differenz $p_n - p_{n_0}$ kann man auch schreiben als

$$p_n - p_{n_0} = \sum_{i,j=0}^{n} |a_i b_j| - \sum_{i,j=0}^{n_0} |a_i b_j| = \sum_{\substack{i,j=0 \\ i \ge n_0+1 \text{ oder } j \ge n_0+1}}^{n} |a_i b_j|. \tag{4.4}$$

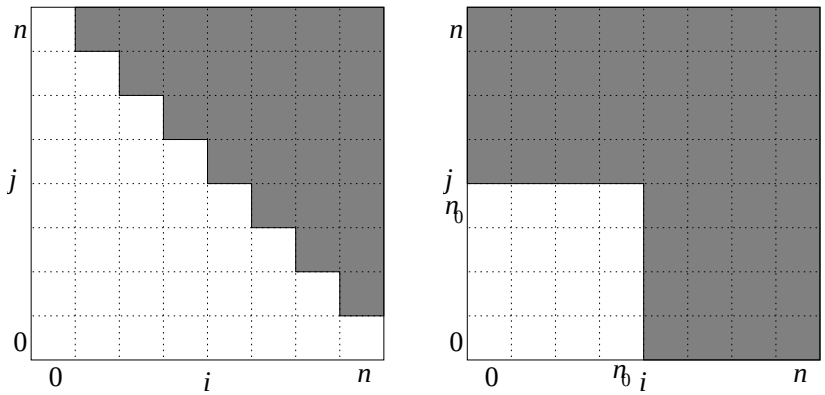


Abbildung 4.1: Indexpaare (i, j) in (4.3) (links) und (4.4) (rechts), jeweils grau gefärbt. Veranschaulichung für $n = 7$ und $n_0 = 3$

Vergleichen wir nun die Summationsindizes in der letzten Summe in (4.3) mit denen in der letzten Summe in (4.4) (diese sind in Abbildung 4.1 beispielhaft grafisch dargestellt), so sieht man, dass für $n \ge 2n_0$ jedes Indexpaar aus (4.3) auch in (4.4) auftaucht, denn wenn $i + j > n \ge 2n_0$ gilt muss $i \ge n_0 + 1$ oder $j \ge n_0 + 1$ gelten; ansonsten wäre $i + j \le 2n_0$. Damit folgt

$$|d_n^* - d_n| = \left| \sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j>n}}^{n} a_i b_j \right| \le \sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j>n}}^{n} |a_i b_j| \le \sum_{\substack{i,j=0 \\ i \ge n_0+1 \text{ oder } j \ge n_0+1}}^{n} |a_i b_j| = p_n - p_{n_0} < \varepsilon.$$

Dies zeigt die Konvergenz (4.2) mit $N(\varepsilon) = 2n_0 = 2C(\varepsilon)$.

Es bleibt noch die absolute Konvergenz zu zeigen. Wenn wir den ersten Teil des Beweises auf die Reihen $\sum_{k=0}^{n} |a_k|$ und $\sum_{k=0}^{n} |b_k|$ anwenden, so erhalten wir wegen der absoluten Konvergenz der ursprünglichen Reihen, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{n} c'_k$ mit

$$c'_n := \sum_{k=0}^{n} |a_{n-k}|\,|b_k|$$

konvergiert. Wegen

$$|c_n| = \left|\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k\right| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_{n-k}|\,|b_k| = c'_n$$

ist $\sum_{k=0}^{n} c'_k$ eine konvergente Majorante, weswegen $\sum_{k=0}^{n} c_k$ absolut konvergiert. $\square$

Kapitel 5

Funktionen

Stand:
14. Februar 2012

5.1 Definition und Beispiele

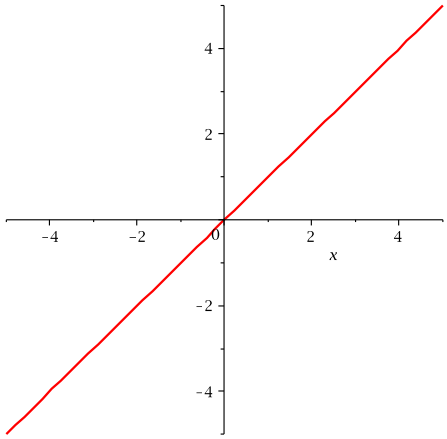
Definition 5.1 Eine *reelle Funktion* ist eine Vorschrift f, die jeder Zahl x aus einer Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ eine Zahl $f(x) \in \mathbb{R}$ zuordnet. Dabei heißt die Menge D *Definitionsmenge* und die Menge $f(D) := \{f(x) \,|\, x \in D\}$ *Wertemenge* von f. Schreibweise: $f : D \to \mathbb{R}$; falls $f(D) \subset A$ gilt für eine Menge $A \subset \mathbb{R}$, schreiben wir auch $f : D \to A$. □

Reelle Funktionen werden grafisch in einem Koordinatensystem dargestellt, indem man zu jedem $x \in D$ auf der horizontalen Achse den Wert $f(x)$ der Funktion auf der vertikalen Achse aufträgt. Die so entstehende Figur wird *Graph* der Funktion genannt.

Funktionen werden oft durch eine von x abhängige Formel definiert. Wir schreiben dann $f : x \mapsto \ldots$, wobei an Stelle der Punkte die entsprechende Formel eingesetzt wird. Oft wird auch einfach kurz $f(x) = \ldots$ geschrieben.

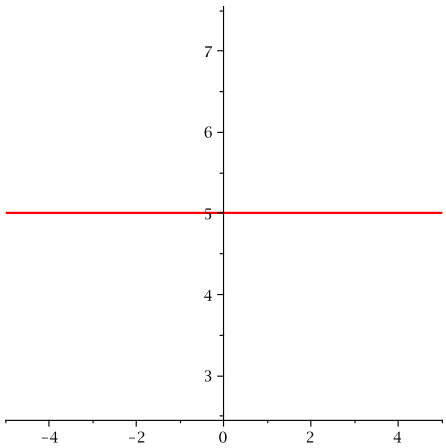
Hier einige Beispiele dafür.

Beispiel 5.2 (a) **(identische Funktion oder Identität)** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f : x \mapsto x$



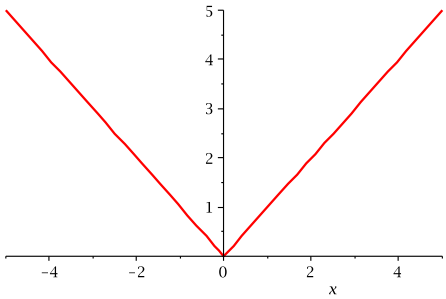
Graph der identischen Funktion $f(x) = x$

(b) **(konstante Funktion)** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f : x \mapsto c$ für ein festes $c \in \mathbb{R}$.



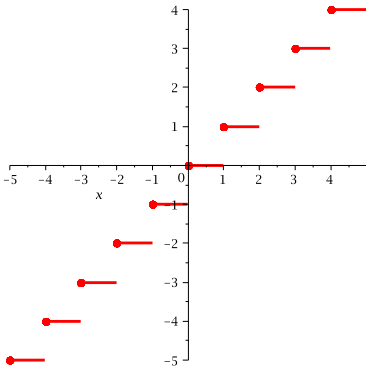
Graph der konstanten Funktion $f(x) = c$, hier für $c = 5$

(c) **(Absolutbetrag)** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f : x \mapsto |x|$



Graph der Absolutbetrag-Funktion $f(x) = |x|$

(d) **(Gaußklammer)** Wir definieren die sogenannte *Gaußklammer* $[x]$ einer reellen Zahl x als die größte ganze Zahl $k \leq x$, oder formal: $[x] := \max\{k \in \mathbb{Z} \,|\, k \leq x\}$. Die zugehörige Funktion lautet dann $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f : x \mapsto [x]$.



Graph der Gaußklammer-Funktion $f(x) = [x]$

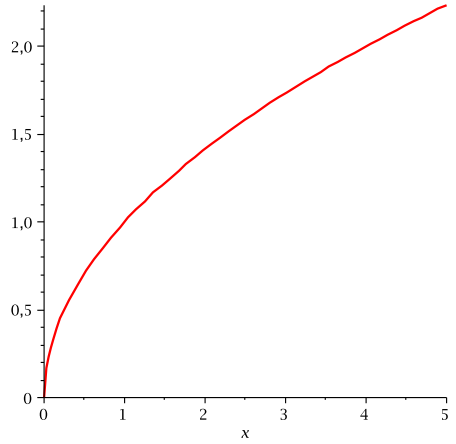
Die Punkte im Graphen veranschaulichen dabei, wo der Wert an der Stelle liegt, an der der Graph "springt".

Beachte: Die Definitionsmenge D ist eine Menge, die wir uns selbst aussuchen können. Wir können also z.B. die Funktion $f : x \mapsto |x|$ nur für x zwischen 0 und 1 betrachten und dazu die Definitionsmenge als $D = [0, 1]$ wählen. Wir könnten aber natürlich auch $D = \mathbb{R}$ wählen. Falls allerdings der Ausdruck, der $f(x)$ definiert, für manche $x \in \mathbb{R}$ nicht definiert ist, so müssen wir diese x aus D herausnehmen, um eine sinnvoll definierte Funktion zu erhalten. Dies ist z.B. in dem folgenden Beispiel (e) der Fall. Die Menge aller x, auf denen der Ausdruck $f(x)$ definiert ist, wird als *maximale* Definitionsmenge bezeichnet. Größer als die maximale Definitionsmenge können wir D also nicht wählen — kleiner hingegen schon.

(e) **(Quadratwurzel)** Alle bisherigen Beispiele konnten auf $D = \mathbb{R}$ definiert werden. Die Quadratwurzel ist in $\mathbb{R}$ nur für Zahlen ≥ 0 definiert, weswegen wir die Definitionsmenge der Quadratwurzelfunktion einschränken müssen. Wir erweitern dazu die Definition 2.6 der Intervalle um die folgenden unbeschränkten Intervalle für $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
[a, \infty) &:= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq a\} \\
(a, \infty) &:= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > a\} \\
(-\infty, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq b\} \\
(-\infty, b) &:= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < b\}
\end{aligned}$$

Die maximale Definitionsmenge der Quadratwurzelfunktion ist mit dieser Schreibweise gerade $D = [0, \infty)$, wir können diese also als $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f : x \mapsto \sqrt{x}$ schreiben.



Graph der Quadratwurzel-Funktion $f(x) = \sqrt{x}$

Die Wertemengen $f(D) := \{f(x) \,|\, x \in D\}$ dieser Funktionen lassen sich aus den angegebenen Formeln jeweils leicht ermitteln. Es gilt

(a) $f(D) = \mathbb{R}$

(b) $f(D) = \{c\}$

(c) $f(D) = [0, \infty)$

(d) $f(D) = \mathbb{Z}$

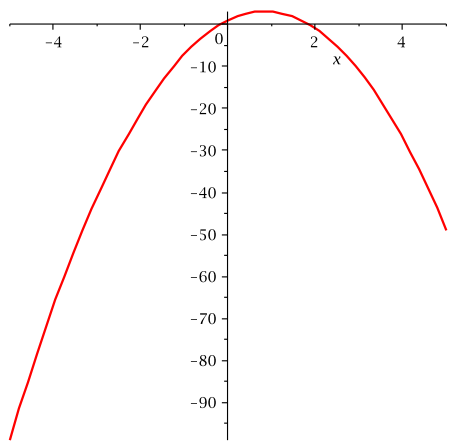
(e) $f(D) = [0, \infty)$

Man sieht hier insbesondere, dass die Wertemenge im Allgemeinen nicht ganz $\mathbb{R}$ ist.

Weitere Beispiele für Funktionen sind

(f) **(Polynomfunktionen)** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f : x \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, wobei $n \in \mathbb{N}$ ist und $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ fest gewählte Werte sind, die sogenannten *Koeffizienten* des Polynoms. Als konkretes Beispiel erhalten wir z.B. mit $n = 2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 5$ und $a_2 = -3$ die Funktion

$$f : x \mapsto -3x^2 + 5x + 1.$$



Graph der Polynomfunktion $f(x) = -3x^2 + 5x + 1$

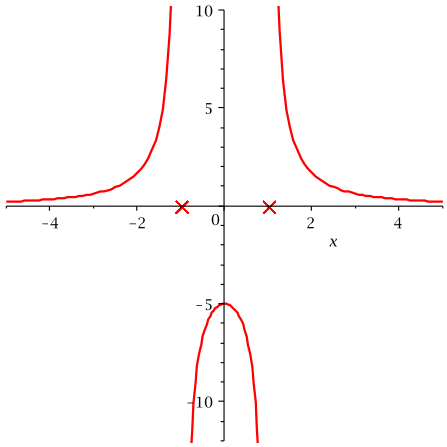
(g) **(rationale Funktionen)** Für zwei Polynomfunktionen g und h definieren wir die Menge $D := \{x \in \mathbb{R} \,|\, h(x) \neq 0\}$. Damit definieren wir die *rationale Funktion*

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad f : x \mapsto \frac{g(x)}{h(x)}.$$

Konkrete Beispiele für rationale Funktionen sind

$$f(x) = \frac{5}{x^2 - 1} \quad \text{und} \quad f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

mit den maximalen Definitionsmengen $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ bzw. $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.



Graph der rationalen Funktion $f(x) = \frac{5}{x^2-1}$. Die Kreuze markieren die $x \notin D$.

Die Wertemengen für Polynomfunktionen und rationale Funktionen lassen sich nicht so einfach ermitteln wie für die vorhergehenden Beispiele. Aus den angegebenen Graphen lässt sich zwar erahnen, wie diese in etwa aussehen, die konkrete Berechnung ist aber i.A. recht aufwendig.

(h) Eine Funktion, deren Graph man nicht zeichnen kann, ist

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(i) Zu jeder Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kann man mittels $f : n \mapsto a_n$ eine Funktion mit Definitionsmenge $D = \mathbb{N}$ definieren. Umgekehrt kann man zu jeder Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := f(n)$ definieren. Folgen und Funktionen mit Definitionsmenge $D = \mathbb{N}$ sind also nur zwei unterschiedliche Schreibweisen für die gleichen mathematischen Objekte.

□

Funktionen sind allgegenwärtig in allen Anwendungen der Mathematik. Ob man in der Physik eine Leitfähigkeit in Abhängigkeit von der Temperatur, in der Elektrotechnik den Strom in Abhängigkeit von der Spannung oder in den Wirtschaftswissenschaften den Einkommensteuersatz in Abhängigkeit von der Höhe des Gehalts betrachtet: immer wird dies mathematisch durch Funktionen ausgedrückt.

Aus gegebenen Funktionen kann man auf verschiedene Weise neue Funktionen zusammensetzen.

Definition 5.3 Für gegebene Funktionen $f, g : D \to \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ definieren wir die Funktionen

$$\begin{aligned} f+g &: D \to \mathbb{R}, & f+g &: \ x \mapsto f(x)+g(x) \\ \lambda f &: D \to \mathbb{R}, & \lambda f &: \ x \mapsto \lambda f(x) \\ fg &: D \to \mathbb{R}, & fg &: \ x \mapsto f(x)g(x) \\ \frac{f}{g} &: D' \to \mathbb{R}, & \frac{f}{g} &: \ x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}, \end{aligned}$$

wobei die Definitionsmenge D' im letzten Fall eingeschränkt werden muss auf

$$D' := \{x \in D \mid g(x) \neq 0\}.$$

Für zwei Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : E \to \mathbb{R}$ mit $f(D) \subset E$ definieren wir die *Komposition* (oder auch *Verkettung* oder *Hintereinanderausführung*) von f und g als

$$g \circ f : D \to \mathbb{R}, \quad g \circ f : x \mapsto g(f(x)).$$

□

Für $f(x) = 2x$ und $g(x) = x^2$ gilt z.B. $(f + g)(x) = x^2 + 2x$ und $(g \circ f)(x) = (2x)^2 = 4x^2$. Für $f(x) = x^2$ und $g(x) = \sqrt{x}$ ergibt sich $(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2} = |x|$.

5.2 Grenzwerte bei Funktionen

Betrachtet man die Graphen der verschiedenen Funktionen aus dem letzten Abschnitt, so stellt man gewisse Unterschiede fest. Aus der Reihe fällt zum einen der Graph (g), weil er nicht überall definiert ist. Dies liegt an den Lücken in der maximalen Definitionsmenge, die sich direkt aus der Formel für $f(x)$ ergeben.

Ebenfalls aus der Reihe fällt der Graph (d), weil er "Sprünge" hat. Wir wollen im nächsten Abschnitt die Eigenschaft "ein Graph hat keine Sprünge" mathematisch formal definieren. Dazu müssen wir zunächst das von den Folgen bekannte Konzept der Grenzwerte auf Funktionen verallgemeinern.

Definition 5.4 Sei $f : D \to \mathbb{R}$ und sei $a \in \mathbb{R}$ ein Punkt, für den eine konvergente reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \in D$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ existiert[1].

Falls ein $c \in \mathbb{R}$ existiert, so dass für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in D$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ die Folge $f(x_n)$ konvergiert mit

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c,$$

so sagen wir, dass der Grenzwert von f in a existiert, nennen c den *Grenzwert* oder *Limes* von f in a und definieren

$$\lim_{x\to a} f(x) := c.$$

Mit der Notation der uneigentlichen Konvergenz aus Definition 3.16 können wir auf die selbe Weise die Grenzwerte

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x).$$

definieren. □

[1] Dies gilt immer für $a \in D$, da man einfach $a_n = a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wählen kann. Es kann aber auch für $a \notin D$ gelten. Z.B. können wir im Fall $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ die Folge $a_n = 1 + 1/n$, $n \geq 1$, wählen, die für alle n in D liegt aber gegen $1 \notin D$ konvergiert.

Beispiel 5.5 (a) $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$, denn für jede Folge $x_n \to 0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} x_n^2 = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

(b) Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ existiert der Limes $\lim_{x\to k}[x]$ nicht, denn für die Folgen $x_n := k + 1/n$ und $x_n' := k - 1/n$ gilt für alle $n \geq 2$

$$[x_n] = k \quad \text{und} \quad [x_n'] = k - 1$$

und damit

$$\lim_{n\to\infty} [x_n] = k \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} [x_n'] = k - 1.$$

Die Bedingung, dass alle Folgen der Form $[x_n]$ gegen ein und denselben Grenzwert c konvergieren, ist also verletzt.

(c) Für die rationale Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

mit der maximalen Definitionsmenge $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ existiert der Grenzwert $\lim_{x\to 1} f(x)$, obwohl $1 \notin D$, denn: sei x_n eine beliebige Folge mit $x_n \to 1$ und $x_n \in D$, also $x_n \neq 1$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$f(x_n) = \frac{x_n^2 - 1}{x_n - 1} = \frac{(x_n - 1)(x_n + 1)}{x_n - 1} = x_n + 1 \to 2.$$

Es ergibt sich also immer der gleiche Grenzwert $c = 2$.

(d) Eine Beispiel für uneigentliche Grenzwerte ist das folgende: Für ein Polynom der Form $f(x) = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_0$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \begin{cases} \infty, & \text{falls } k \text{ gerade} \\ -\infty, & \text{falls } k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Zum Beweis der ersten Aussage müssen wir zeigen, dass für jede Folge $x_n \to \infty$ und jedes $K > 0$ ein $M(K) \in \mathbb{N}$ existiert mit $f(x_n) > K$ für alle $n \geq M(K)$. Dazu schreiben wir f für $x \neq 0$ als $f(x) = x^k g(x)$ mit

$$g(x) = 1 + \frac{a_{k-1}}{x} + \ldots + \frac{a_0}{x^k}.$$

Aus $x_n \to \infty$ folgt $x_n^k \to \infty$ für alle $k \geq 0$. Damit folgt aus Satz 3.17, dass jeder der Brüche in g gegen Null konvergiert und folglich

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = 1.$$

gilt. Für alle hinreichend großen n ist also $g(x_n) \geq 1/2$ und damit $f(x_n) \geq x_n^k/2$. Wiederum wegen $x_n \to \infty$ gilt dann $f(x_n) > K$ für alle hinreichend großen n, woraus die Existenz von $M(K)$ folgt.

Die zweite Aussage folgt für gerades k aus

$$f(-x) = x^k - a_{k-1}x^{k-1} + a_{k-2}x^{k-2} \ldots + -a_1 x + a_0 =: h(x)$$

und für ungerades k aus

$$f(-x) = -\Big[\underbrace{x^k - a_{k-1}x^{k-1} + a_{k-2}x^{k-2} \ldots + a_1 x - a_0}_{=:h(x)}\Big].$$

Beachte, dass die Funktionen $h(x)$ in den beiden Fällen nicht identisch sind, aber in beiden Fällen die Voraussetzungen für die erste Aussage erfüllen, weswegen $\lim_{x\to\infty} h(x) = \infty$ gilt. Für $x_n \to -\infty$ gilt nun $(-x_n) \to \infty$ und damit $h(-x_n) \to \infty$. Daher folgt für gerades k mit $x = -x_n$

$$f(x_n) = f(-(-x_n)) = h(-x_n) \to \infty$$

und für ungerades k

$$f(x_n) = f(-(-x_n)) = -h(-x_n) \to -\infty.$$

□

5.3 Stetigkeit

Stetigkeit ist gerade die Eigenschaft einer Funktion, auf ihrer Definitionsmenge keine Sprünge im Graphen zu besitzen. Aus den Beispielen im vergangenen Abschnitt erfüllt offenbar genau die Gaußklammer diese Eigenschaft nicht, und zwar gerade in den Punkten $k \in \mathbb{Z}$. Die in Beispiel 5.5(b) gemachte Beobachtung, dass bei dieser Funktion der Grenzwert in $k \in \mathbb{Z}$ nicht existiert, gibt uns eine Möglicheit, das anschauliche Kriterium "keine Sprünge" in eine mathematisch rigorose Bedingung zu fassen.

Definition 5.6 Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *stetig in einem Punkt* $a \in D$, wenn der Grenzwert für $x \to a$ existiert und die Gleichung

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

gilt. Die Funktion heißt *stetig*, wenn sie in allen Punkten $a \in D$ stetig ist. □

Beispiel 5.7 (a) Die Funktion $f : x \mapsto x^2$ ist in $x = 0$ stetig, wegen $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$ (vgl. Beispiel 5.5(a)) und $f(0) = 0^2 = 0$. Tatsächlich ist die Funktion sogar in allen $x \in D = \mathbb{R}$ stetig, was aus dem nachfolgenden Korollar 5.9 folgt.

(b) Die Gaußklammerfunktion $f : x \mapsto [x]$ ist in den Punkten $x = k$ für $k \in \mathbb{Z}$ nicht stetig, da der Grenzwert hier nach Beispiel 5.5(b) nicht existiert.

(c) Der Begriff der Stetigkeit ist für die rationale Funktion aus Beispiel 5.5(c) in $x = 1$ nicht anwendbar, weil $1 \notin D$.

(d) Die konstante Funktion $f : x \mapsto c$ und die identische Funktion $f : x \mapsto x$ sind stetig, denn: Für die konstante Funktion $f(x) = c$ gilt $f(x_n) = c$ für jede beliebige Folge x_n. Also gilt für alle $a \in \mathbb{R}$ und jede gegen a konvergente Folge $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c = f(a)$.

Für die Identität gilt $f(x_n) = x_n$. Konvergiert also eine Folge x_n gegen a, so auch $f(x_n)$ und es folgt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a = f(a)$.

(e) Die Betragsfunktion $f : x \mapsto |x|$ ist stetig, denn: für jede konvergente Folge $x_n \to a$ gilt nach der umgekehrten Dreiecksungleichung

$$|f(x_n) - f(a)| = \big||x_n| - |a|\big| \leq |x_n - a|.$$

Wenn $|x_n - a| \to 0$ folgt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$ dann aus Satz 3.4. □

Stetigkeit mit Hilfe der Grenzwerte aus Definition 5.4 ist ausgesprochen aufwendig, weswegen man dies nach Möglichkeit vermeidet. Statt dessen versucht man zumeist, die Stetigkeit von Funktionen aus der Stetigkeit bekannter Funktionen abzuleiten. Der folgende Satz zeigt, wie das geht.

Satz 5.8 (a) Es seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ Funktionen, die in einem Punkt $a \in D$ stetig sind. Dann sind für $\lambda > 0$ auch die Funktionen

$$f + g, \quad \lambda f, \quad \text{und} \quad fg$$

stetig in a. Falls zusätzlich $a \in D' := \{x \in D \,|\, g(x) \neq 0\}$ gilt, ist zudem die Funktion

$$\frac{f}{g}$$

stetig in a.

(b) Für zwei Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : E \to \mathbb{R}$ mit $f(D) \subset E$, bei denen f in $a \in D$ und g in $f(a) \in E$ stetig ist, ist auch die Komposition $g \circ f$ stetig in a.

Beweis: (a) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $x_n \in D$ (bzw. $x \in D'$ im letzten Fall) und $x_n \to a$. Dann ist zu zeigen, dass die Funktionen $f(x_n)+g(x_n)$ etc. konvergieren mit $\lim_{n\to\infty}(f(x_n)+g(x_n)) = f(a)+g(a)$ etc. Dies folgt wegen der vorausgesetzten Konvergenzen $f(x_n) \to f(a)$ und $g(x_n) \to g(a)$ für $n \to \infty$ für alle angegebenen Funktionen aber direkt aus ihrer Definition und den entsprechenden Sätzen für Summen, Produkte und Quotienten von Grenzwerten.

(b) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $x_n \in D$. Aus der Stetigkeit von f folgt dann $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$. Die Folge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert also gegen $f(a)$, woraus mit der Stetigkeit von g auch

$$\lim_{n\to\infty} g \circ f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(f(x_n)) = g(f(a)) = g \circ f(a)$$

folgt. Also ist $g \circ f$ stetig in a. □

Korollar 5.9 Jede rationale Funktion ist stetig.

Beweis: Jede rationale Funktion ist von der Form

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

mit $g(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ und $h(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$. Sie lässt sich also schreiben als

$$f(x) = \frac{a_n p(x)^n + a_{n-1}p(x)^{n-1} + \ldots + a_1 p(x) + q(x)}{b_m p(x)^m + b_{m-1}p(x)^{m-1} + \ldots + b_1 p(x) + r(x)}$$

mit der Identität $p(x) = x$ und den konstanten Funktionen $q(x) = a_0$ und $r(x) = b_0$. Damit folgt die Stetigkeit in jedem $a \in D$ durch wiederholte Anwendung von Satz 5.8(a) auf die einzelnen Komponenten von f aus der in Beispiel 5.7(d) nachgewiesenen Stetigkeit der identischen und der konstanten Funktion. □

Ein Beispiel für die Anwendung von Satz 5.8 ist die Funktion $f : x \mapsto |x^3|$, die sich als $g \circ h$ mit $g(x) = |x|$ und $h(x) = x^3$ schreiben lässt. Da g und h stetig sind und jeweils $D = \mathbb{R}$ gilt, ist f ebenfalls stetig.

5.4 Sätze über stetige Funktionen

Stetige Funktionen haben viele für die Analysis sehr nützliche Eigenschaften. In diesem Kapitel werden wir einige der wichtigsten davon formulieren und beweisen. Hierbei verwenden wir die bereits vor Beispiel 5.2(e) erwähnte Tatsache, dass wir die maximale Definitionsmenge beliebig einschränken können. Hier werden wir zumeist Funktionen der Form $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ auf beschränkten abgeschlossenen Intervallen $[a, b]$ betrachten. Dies bedeutet nicht, dass $D = [a, b]$ die maximal mögliche Definitionsmenge der Funktion f ist sondern vielmehr, dass die maximal mögliche Definitionsmenge das Intervall $[a, b]$ enthält und wir im Folgenden nur die Werte $f(x)$ für $x \in [a, b]$ betrachten — was die Funktion außerhalb $[a, b]$ macht, interessiert uns dabei nicht. Wenn wir also z.B. von *stetigen* Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sprechen, so bedeutet dies, dass die Funktion in allen $x \in [a, b]$ stetig ist, aber nicht notwendigerweise in allen x aus der maximal möglichen Definitionsmenge.

Satz 5.10 (Zwischenwertsatz) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) \leq 0$ und $f(b) \geq 0$ (bzw. $f(a) \geq 0$ und $f(b) \leq 0$). Dann existiert ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = 0$. Dieses x wird *Nullstelle* genannt.

Beweis: Wir betrachten den Fall $f(a) \leq 0$ und $f(b) \geq 0$. Der Fall mit umgekehrten Vorzeichen folgt, wenn wir den Beweis mit $-f$ an Stelle von f führen.

Zum Beweis konstruieren wir zunächst eine Intervallschachtelung $I_n = [a_n, b_n]$, für deren Ränder stets $f(a_n) \leq 0$ und $f(b_n) \geq 0$ gilt. Dies erreichen wir, indem wir ganz analog zum Beweis von Satz 2.8 wie folgt vorgehen:

(1) Setze $a_0 := a$, $b_0 := b$, $n := 0$

(2) Definiere $c_n := (a_n + b_n)/2$ (dies ist gerade der Mittelpunkt des Intervalls I_n)

(3) (i) Falls $f(c_n) \geq 0$, setze $a_{n+1} := a_n$ und $b_{n+1} := c_n$;
(ii) sonst setze $a_{n+1} := c_n$ und $b_{n+1} := b_n$

(4) Setze $n := n + 1$ und gehe zu (2).

Aus der Konstruktion der a_n und b_n folgen sofort die gewünschten Ungleichungen $f(a_n) \leq 0$ und $f(b_n) \geq 0$ und die Konvergenz $|I_n| \to 0$ folgt mit Satz 3.4 direkt aus der Ungleichung[2]

$$|I_n| \leq \frac{b-a}{2^n}.$$

Nach Beispiel 3.1(f) konvergieren a_n und b_n gegen den gleichen Grenzwert x und aus der Stetigkeit von f folgt $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x)$ und $\lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(x)$. Nach Korollar 3.14 gilt dann

$$0 \geq \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \leq 0$$

und folglich $f(x) = 0$. □

Das folgende Beispiel gibt einige Anwendungen dieses Satzes.

Beispiel 5.11 (a) Für jedes $y > 0$ und $k \in \mathbb{N}$ gibt es ein $x > 0$ mit $x^k = y$. Wir schreiben dafür auch $x = \sqrt[k]{y}$.

Diese Aussage folgt, indem wir den Zwischenwertsatz auf die stetige Funktion $f(x) = x^k - y$ anwenden. Für $x \to \infty$ gilt nach Beispiel 5.5(d) dass $f(x) \to \infty$, also gibt es ein b mit $f(b) > 0$. Andererseits gilt für $a = 0$ gerade $f(a) = 0^k - y = -y < 0$. Folglich besitzt f nach Satz 5.10 eine Nullstelle $x = x_0$, für die gerade $0 = f(x) = x^k - y \Leftrightarrow x^k = y$ gilt.

Beachte, dass der Satz für $y < 0$ und $k = 2$ nicht anwendbar ist, denn dann gilt $f(x) = x^k - y \geq 0 - y = -y > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Es existiert also keine Nullstelle.

(b) Jedes Polynom der Form $f(x) = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_0$ mit ungeradem k besitzt (mindestens) eine Nullstelle. Dies folgt, weil f stetig ist und nach Beispiel 5.5(d) dass $f(x) \to \infty$ für $x \to \infty$ und $f(x) \to -\infty$ für $x \to -\infty$ gilt. Für hinreichend großes b gilt also $f(b) > 0$ und für hinreichend kleines a gilt $f(a) < 0$. Damit ist Satz 5.10 anwendbar.

(c) Das Beispiel $f(x) = [x] + 1/2$ zeigt, dass die Stetigkeit wesentlich für die Gültigkeit von Satz 5.10 ist. Für dieses f gilt nämlich $f(1/2) = 1/2 > 0$ und $f(-1/2) = -1/2 < 0$, trotzdem gibt es kein $x_0 \in [-1/2, 1/2]$ mit $f(x_0) = 0$, weil die Funktion in $x = 0$ unstetig von $-1/2$ auf $1/2$ springt, ohne die dazwischen liegenden Werte anzunehmen. □

Eine direkte Folgerung aus Satz 5.10 gibt das folgende Korollar.

Korollar 5.12 Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) \leq c$ und $f(b) \geq c$ (bzw. $f(a) \geq c$ und $f(b) \leq c$). Dann existiert ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = c$.

Beweis: Die Funktion $g : x \mapsto f(x) - c$ erfüllt alle Voraussetzungen von Satz 5.10, folglich existiert ein $x \in [a, b]$ mit $g(x) = 0$. Daraus folgt

$$f(x) - c = g(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = c.$$

□

[2]Beachte, dass wir jetzt viel kürzer als im Beweis von Satz 2.8 argumentieren können, weil wir bereits viel mehr Begriffe und Sätze zur Verfügung haben, die wir verwenden können.

Definition 5.13 Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *beschränkt*, falls die Menge $f(D)$ beschränkt ist, d.h. wenn ein $M \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$|f(x)| \leq M \quad \text{für alle } x \in D.$$

□

Der folgende Satz gibt eine sowohl für viele theoretische Grundlagen als auch für viele Anwendungen der Mathematik wichtige Aussage.

Satz 5.14 Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ auf einem abgeschlossenen beschränkten Intervall $[a, b]$ ist beschränkt. Zudem nimmt sie ihr Maximum und Minimum an, d.h. es existieren $p, q \in [a, b]$ mit

$$f(p) = \sup\{f(x) \,|\, x \in [a, b]\} \quad \text{und} \quad f(q) = \inf\{f(x) \,|\, x \in [a, b]\}.$$

Beweis: Wir beweisen den Satz für das Maximum. Der Beweis für das Minimum verläuft analog und die Beschränktheit folgt dann aus der Existenz des Maximums und Minimums mit $M = \max\{|f(p)|, |f(q)|\}$.

Es sei

$$s := \sup\{f(x) \,|\, x \in [a, b]\},$$

wobei wir $s = \infty$ schreiben, falls die Menge nach oben unbeschränkt ist. Im Falle, dass s endlich ist, existiert dann zu jedem $\varepsilon = 1/n$, $n \geq 1$, ein $x_n \in [a, b]$ mit $f(x_n) > s - \varepsilon$ und falls $s = \infty$ ist, existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in [a, b]$ mit $f(x_n) > n$. In beiden Fällen finden wir so eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = s.$$

Da die Folge $x_n \in [a, b]$ beschränkt ist, existiert nach Satz 3.30 (Bolzano-Weierstraß) eine konvergente Teilfolge x_{n_k}, für deren Grenzwert wegen Korollar 3.15 und der Abgeschlossenheit von $[a, b]$ die Beziehung $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} =: p \in [a, b]$ gilt. Da die Teilfolge $(f(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ gegen den gleichen Grenzwert wie die Folge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, gilt $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = s$. Da f auf $[a, b]$ stetig ist, folgt damit

$$f(p) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = s.$$

Daraus folgt $s = f(p) \in \mathbb{R}$, d.h. das Supremum ist endlich und $f(p)$ ist wegen $f(p) = s$ und $f(p) \in \{f(x) \,|\, x \in [a, b]\}$ das gesuchte Maximum. □

Wir werden im Laufe der Analysis-Vorlesung verschiedene Anwendungen dieses Satzes kennen lernen. Er ist aber auch über die Analysis hinaus wichtig. Viele Anwendungen der Mathematik führen auf sogenannte Optimierungsprobleme, in denen man etwas maximieren (z.B. Gewinn, Produktionsertrag, Fahrkomfort,...) oder minimieren (z.B. Verlust, Schadstoffausstoß, Abweichungen eines Werts von einem Sollwert, ...) möchte. Zwar sagt uns

Satz 5.14 nicht, *wie* wir das machen — dazu benötigen wir noch eine Reihe weiterer mathematischer Hilfsmittel — er stellt aber sicher, dass es *sinnvoll* ist, nach einem Maximum oder Minimum zu suchen.

Die folgenden Beispiele zeigen, dass keine der Voraussetzungen (Stetigkeit, abgeschlossenes Intervall, beschränktes Intervall) weggelassen werden kann.

Beispiel 5.15 (a) Betrachte die unstetige Funktion $f(x) = x - [x]$ auf dem Intervall $[0, 1]$. Für beliebiges $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon < 1$ gilt für diese Funktion

$$f(1-\varepsilon) = 1 - \varepsilon - [1-\varepsilon] = 1 - \varepsilon - 0 = 1 - \varepsilon,$$

weswegen

$$\sup\{f(x) \,|\, x \in [0,1]\} = \sup\{1 - \varepsilon \,|\, \varepsilon \in (0,1)\} = 1$$

gilt. Es gibt aber kein $p \in [0, 1]$ mit $f(p) = 1$, denn für $0 \leq p < 1$ gilt $f(p) = p - [p] = p < 1$ und für $p = 1$ gilt $f(p) = 1 - [1] = 1 - 1 = 0$.

(b) Betrachte die Funktion $f(x) = 1/x$. Diese Funktion ist als rationale Funktion auf ihrer Definitionsmenge $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ und damit insbesondere auf dem (nach links offenen) Intervall $(0, 1]$ stetig. Sie ist aber auf diesem Intervall nicht beschränkt, da sie für $x = 1/n \in (0, 1]$, $n \geq 1$ die beliebig großen Werte $f(x) = 1/(1/n) = n$ annimmt.

(c) Betrachte wiederum die Funktion $f(x) = 1/x$, nun auf dem unbeschränkten Intervall $[1, \infty)$. Dises Funktion ist durch $M = 1$ beschränkt, nimmt aber kein Minimum an, denn: für $x = n$, $n \geq 1$, liegt $f(x) = 1/n$ beliebig nahe bei Null, weswegen

$$\inf\{f(x) \,|\, x \in [1,\infty)\} = 0$$

gilt. Es gibt aber kein $q \in [1, \infty)$ mit $f(q) = 1/q = 0$. □

5.5 Das ε-δ Kriterium für Stetigkeit

Das Folgenkriterium für die Stetigkeit ist zum Nachprüfen der Stetigkeit in manchen Fällen recht unhandlich, weil alle möglichen konvergenten Folgen überprüft werden müssen. Es ist zudem unpraktisch, wenn man Informationen darüber haben möchte, wie sehr sich die Werte $f(x_n)$ und $f(a)$ unterscheiden (ein Beispiel für eine Eigenschaft, bei der dies eine Rolle spielt, werden wir in Definition 5.19 und den nachfolgenden Beispielen betrachten).

Wir werden daher zum Abschluss dieses Kapitels eine äquivalente Definition der Konvergenz einführen, die ohne die Betrachtung von Folgen und Grenzwerten auskommt.

Satz 5.16 (ε-δ Kriterium der Stetigkeit) Eine reelle Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist genau dann in $a \in D$ stetig, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in D$ gilt

$$|x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Anschaulich ausgedrückt: wenn x sich von a nur wenig unterscheidet, unterscheiden sich auch die Funktionswerte $f(x)$ und $f(a)$ nur wenig.

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass aus dem ε-δ Kriterium die Folgendefinition 5.6 der Stetigkeit folgt. Sei dazu $a \in D$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge mit $x_n \to a$ und $x_n \in D$. Zu zeigen ist dann, dass $f(x_n)$ konvergiert mit $f(x_n) \to f(a)$.

Sei dazu ein $\varepsilon > 0$ gegeben und sei $\delta > 0$ aus dem Kriterium. Wegen $x_n \to a$ existiert ein $N_x(\delta) \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - a| < \delta$ für alle $n \geq N(\delta)$ und es folgt

$$|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon.$$

Damit ist die Definition der Konvergenz erfüllt mit $N(\varepsilon) = N_x(\delta)$.

Nun zeigen wir umgekehrt, dass aus der Folgendefinition der Stetigkeit das ε-δ Kriterium folgt. Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen dazu an, dass f in $a \in D$ im üblichen Sinne stetig ist, das ε-δ Kriterium aber nicht gilt. Das bedeutet also:

Es gibt ein $\varepsilon > 0$ so dass zu jedem $\delta > 0$ ein $x_\delta \in D$ mit $|x_\delta - a| < \delta$ und $|f(x_\delta) - f(a)| \geq \varepsilon$ existiert.

Setzen wir nun $\delta = 1/n$ und wählen als x_n gerade dieses x_δ, so folgt $|x_n - a| < 1/n$ und damit nach Satz 3.4 auch $x_n \to a$. Andererseits gilt aber

$$|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$$

und damit ebenfalls nach Satz 3.4 $f(x_n) \not\to f(a)$. Dies widerspricht aber der Stetigkeit in a. Also muss das ε-δ Kriterium gelten. □

Wir wenden dieses Kriterium an, um die Stetigkeit der Wurzelfunktion nachzuweisen.

Beispiel 5.17 Betrachte die Funktion $f : x \mapsto \sqrt{x}$ mit Definitionsmenge $D = [0, \infty)$. Für $a > 0$ und $x \geq 0$ gilt

$$f(x) - f(a) = \sqrt{x} - \sqrt{a} = (\sqrt{x} - \sqrt{a})\frac{\sqrt{x} + \sqrt{a}}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{x - a}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}.$$

Wir betrachten nun die zwei Fälle $a > 0$ und $a = 0$ getrennt:

Im Fall $a > 0$ gilt für alle $x \geq 0$ mit $|x - a| < \delta$ die Ungleichung

$$|f(x) - f(a)| = \left|\frac{x - a}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}\right| < \frac{\delta}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \leq \frac{\delta}{\sqrt{a}}.$$

Die gewünschte Ungleichung $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ folgt also, wenn wir $\delta = \varepsilon\sqrt{a}$ setzen.

Im Fall $a = 0$ ist die Ungleichung $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ für $x = a = 0$ klarerweise für alle $\varepsilon > 0$ erfüllt. Für alle $x > 0$ mit $|x - a| < \delta$ gilt die Ungleichung $x < \delta$ und damit

$$|f(x) - f(a)| = |\sqrt{x} - \sqrt{0}| = |\sqrt{x}| = \sqrt{x} < \sqrt{\delta}.$$

In diesem Fall folgt die gewünschte Ungleichung $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ also mit $\delta = \varepsilon^2$.

Dies Beispiel zeigt auch, wie ein passendes $\delta > 0$ üblicherweise gefunden wird: wir versuchen zunächst, eine von δ (und ggf. a) abhängige obere Schranke für den Ausdruck $|f(x) - f(a)|$ zu finden und bestimmen daraus ein geeignetes δ abhängig von dem gegebenen ε und ggf. a. □

Das ε-δ Kriterium ist zum Beispiel nützlich, um den folgenden Satz zu beweisen[3].

Satz 5.18 Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die in einem Punkt $a \in \mathbb{R}$ stetig ist und $f(a) \neq c$ erfüllt. Dann existiert ein $\delta > 0$, so dass $f(x) \neq c$ gilt für alle $x \in D \cap (a - \delta, a + \delta)$.

Beweis: Wähle $\varepsilon = |f(a) - c|$ und $\delta > 0$ aus dem ε-δ Kriterium. Dann gilt für alle $x \in D \cap (a - \delta, a + \delta)$ die Ungleichung $|x - a| < \delta$ und damit nach der umgekehrten Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} |f(x) - c| &= |f(x) - f(a) + f(a) - c| = |(f(a) - c) - (f(a) - f(x))| \\ &\geq |f(a) - c| - \underbrace{|f(a) - f(x)|}_{<\varepsilon} > |f(a) - c| - \varepsilon = 0, \end{aligned}$$

also $|f(x) - c| > 0$ und damit $f(x) \neq c$. □

Das in Beispiel 5.17 für die Wurzelfunktion hergeleitete δ hängt nicht nur von ε sondern auch von a ab. Tatsächlich wird das dort berechnete $\delta = \varepsilon\sqrt{a}$ bei gleichbleibendem $\varepsilon > 0$ immer kleiner, je näher a bei Null liegt. Vergleicht man dies mit dem Graphen der Wurzelfunktion aus Beispiel 5.2(e) so sieht man, dass dies offenbar mit der Steigung des Graphen zusammenhängt: je steiler der Graph ist, desto kleiner muss man δ bei gleichbleibendem ε wählen. Dies leuchtet sofort ein, wenn man sich den Zusammanhang zwischen ε und δ graphisch veranschaulicht.

Ein besonders schöner Fall der Stetigkeit liegt nun vor, wenn das δ unabhängig von a gewählt werden kann. Diese Form der Stetigkeit ist in der folgenden Definition formal definiert.

Definition 5.19 Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *gleichmäßig stetig*, wenn gilt:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $x, x' \in D$ gilt

$$|x - x'| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

□

Beachte den kleinen aber wesentlichen Unterschied zu der Bedingung aus Satz 5.16: In der gleichmäßigen Stetigkeit muss ein und dasselbe δ die Ungleichung $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ für alle $x' \in D$ sicher stellen, während das δ in Satz 5.16 von a abhängen darf.

Da das δ bei der Wurzelfunktion in Beispiel 5.17 tatsächlich von a abhängt und für kleiner werdende a immer kleiner wird, liegt nun der Schluss nahe, dass die Wurzelfunktion nicht gleichmäßig stetig ist. Das wäre aber voreilig geschlossen, denn woher wissen wir, ob wir in Beispiel 5.17 das bestmögliche δ ausgerechnet haben? Könnte man nicht vielleicht mit einer geschickteren Rechnung ein von a unabhängiges δ finden?

Tatsächlich geht das, aber statt dieses δ umständlich auszurechnen gehen wir eleganter vor und beweisen den folgenden Satz.

[3] Natürlich könnte man diesen auch mit der Folgendefinition der Stetigkeit beweisen, das wäre aber viel komplizierter und langwieriger.

Satz 5.20 Jede auf einem beschränkten abgeschlossenen Intervall definierte stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist dort auch gleichmäßig stetig.

Beweis: Angenommen, f ist nicht gleichmäßig stetig. Analog zum zweiten Teil des Beweises von Satz 5.16 bedeutet dies:

Es gibt ein $\varepsilon > 0$ so dass zu jedem $\delta > 0$ Punkte $x_\delta, x'_\delta \in D$ mit $|x_\delta - x'_\delta| < \delta$ und $|f(x_\delta) - f(x'_\delta)| \geq \varepsilon$ existieren.

Wie im Beweis von Satz 5.16 setzen wir zu jedem $n \geq 1$ nun $\delta = 1/n$ und erhalten so zu jedem n zwei Folgenelemente $x_n = x_\delta$ und $x'_n = x'_\delta$ mit

$$|x_n - x'_n| \leq 1/n \quad \text{und} \quad |f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon.$$

Dies definiert zwei Folgen mit Elementen $x_n, x'_n \in [a, b]$, d.h. die Folgen sind beschränkt. Nach Bolzano-Weierstraß besitzt x_n damit eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit Grenzwert

$$p := \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \in [a, b]$$

und wegen

$$|x'_{n_k} - p| \leq |x'_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - p| < \frac{1}{n_k} + |x_{n_k} - p| \to 0$$

konvergiert auch die Teilfolge $(x'_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen p. Da f auf $[a, b]$ stetig ist, folgt damit

$$\lim_{k\to\infty} \big(f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})\big) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) - \lim_{k\to\infty} f(x'_{n_k}) = f(p) - f(p) = 0,$$

was der Ungleichung $|f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})| \geq \varepsilon$ widerspricht. Also muss f gleichmäßig stetig sein. □

Der Satz zeigt, dass gleichmäßige Stetigkeit kein "Sonderfall" ist, sondern eine Eigenschaft, die jede stetige Funktion auf beschränkten abgeschlossenen Intervallen besitzt. Lediglich auf (halb)offenen oder unbeschränkten Intervallen kann es sein, dass diese Eigenschaft nicht gilt.

Dies zeigt auch, dass die Wurzelfunktion auf jedem Intervall der Form $[0, b]$ tatsächlich gleichmäßig stetig ist, da sie ja wie in Beispiel 5.17 gezeigt stetig ist. Das Problem mit den immer kleiner werdenden δ für a nahe Null liegt also daran, dass wir in dem Beispiel nicht das bestmögliche δ ausgerechnet haben.

Auch wenn wir das "bessere" (d.h. nicht von a abhängige) δ nach dem vorhergehenden Satz nun gar nicht mehr ausrechnen müssen, um seine Existenz zu beweisen, ist es natürlich trotzdem interessant zu sehen, an welcher Stelle wir die Abschätzung in Beispiel 5.17 verbessern können. Tatsächlich kann man im Fall $a > 0$ wie folgt vorgehen:

Im Fall $a > x$ verwenden wir

$$|f(x) - f(a)| = \left|\frac{x - a}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}\right| \leq \frac{a - x}{\sqrt{a}} \leq \frac{a - x}{\sqrt{a - x}} = \sqrt{a - x} < \sqrt{\delta}$$

und im Fall $a < x$

$$|f(x) - f(a)| = \left|\frac{x - a}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}\right| \leq \frac{x - a}{\sqrt{x}} \leq \frac{x - a}{\sqrt{x - a}} = \sqrt{x - a} < \sqrt{\delta}.$$

Jetzt sieht man, dass man auch im Fall $a > 0$ den Wert $\delta = \varepsilon^2$ verwenden kann, um die Ungleichung $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ zu erhalten. Da dieses δ unabhängig von a ist, kann es auch für beliebige x und x' (an Stelle von x und a) und damit in der Definition der gleichmäßigen Stetigkeit verwendet werden. Dies funktioniert sogar auf dem Intervall $[0, \infty)$, weswegen die Wurzelfunktion tatsächlich sogar auf ihrem maximalen Definitionsbereich $[0, \infty)$ gleichmäßig stetig ist.

Um zu illustrieren, dass stetige Funktionen auf unbeschränkten Intervallen im Allgemeinen nicht gleichmäßig stetig sind, betrachten wir ein abschließendes Beispiel.

Beispiel 5.21 Betrachte die Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x^2$. Angenommen, die Funktion wäre auf $[0, \infty)$ gleichmäßig stetig. Dann können wir zu gegebenem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ finden, so dass für alle $x, x' \in [0, \infty)$ mit $|x - x'| < \delta$ die Ungleichung $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$ gilt. Insbesondere muss diese Ungleichung dann für $x' = x + \delta/2$ gelten und wir erhalten

$$\varepsilon > |f(x + \delta/2) - f(x)| = x^2 + \delta x + \frac{\delta^2}{4} - x^2 \geq \delta x$$

gilt, weswegen $\delta < \varepsilon/x$ für alle $x \in [0, \infty)$ gelten muss. Dies ist aber für kein $\delta > 0$ möglich, weswegen wir einen Widerspruch erhalten. □

Kapitel 6

Exponentialfunktion und Logarithmus

Stand:
14. Februar 2012

6.1 Definition der Exponentialfunktion

Alle Beispiele von Funktionen, die wir bisher betrachtet haben, waren durch einfache rationale Formeln oder andere elementare Operationen (wie z.B. der Absolutbetrag oder die Gaußklammer) definiert. In diesem Abschnitt betrachten wir nun eine für viele Bereiche der Analysis und ihrer Anwendungen wichtige Funktion, die mittels einer unendlichen Reihe definiert ist.

Satz 6.1 Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist die *Exponentialreihe*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

absolut konvergent.

Beweis: Die Behauptung ist für $x = 0$ sofort klar, da alle Summanden für $k \geq 1$ gleich Null sind. Wir verwenden dabei die Konventionen $0^0 = 1$ und $0! = 1$, weswegen die Summe für $x = 0$ den Wert 1 besitzt (vgl. dazu auch den Beweis von Satz 6.7). Für $x \neq 0$ folgt die Behauptung aus dem Quotientenkriterium in Satz 4.18 mit $\theta = 1/2$, denn es gilt

$$\left| \frac{\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{x^k}{k!}} \right| = \frac{|x|}{k+1} \leq \frac{1}{2}$$

für alle $k \geq 2|x|$. $\square$

Damit ist die Existenz des Grenzwerts $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ sicher gestellt und wir können die folgende Definition formulieren.

Definition 6.2 Wir definieren die Exponentialfunktion[1] $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

□

Die besondere Bedeutung der Exponentialfunktion für die Analysis wird in diesem und den nachfolgenden Kapiteln an vielen Stellen deutlich werden. Die Funktion ist aber auch in vielen Anwendungen wichtig; wir geben dazu einige Beispiele. Dazu benötigen wir die folgende alternative Darstellung der Exponentialfunktion.

Satz 6.3 Für die Exponentialfunktion gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Der Beweis dieses Satzes lässt sich mit den bisher bekannten Techniken zwar führen, ist aber recht technisch und wenig anschaulich. Der Vollständigkeit halber ist er in Abschnitt 6.6 angegeben, wird aber an der Tafel nicht behandelt. Ein kurzer Beweis wird später in Kapitel 9 nach Beispiel 9.11 gegeben.

Mit Satz 6.3 können wir nun die bereits angekündigten Anwendungsbeispiele geben.

Beispiel 6.4 (a) **(Zinseszins)** Wenn eine Geldanlage von a€ jährlich mit p% verzinst wird, so hat diese bei jährlicher Verzinsung (am Jahresende) unter Berücksichtigung der Zinsen gerade den Wert $a(1+r)$€ mit $r = p/100$ (Zahlenbeispiel: $a = 100$€ bei $p = 5\%$ Verzinsung $\rightsquigarrow r = 0.05 \rightsquigarrow$ Betrag am Jahresende $100(1+0.05)$€ $= 100(1.05)$€ $= 105$€).

Bei zweimaliger Verzinsung (nach einem halben Jahr und nach dem ganzen Jahr) und unter Berücksichtigung der Zinseszinsen beträgt der Wert

$$a\left(1+\frac{r}{2}\right)\left(1+\frac{r}{2}\right)\text{€} = a\left(1+\frac{r}{2}\right)^2\text{€}$$

(im Zahlenbeispiel: $100(1.025)(1.025)$€ $= 105.0625$€).

Bei $n = 12$ Verzinsungen (also nach jeweils nach einem Monat) ergibt sich analog

$$a\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12}\text{€}$$

(im Beispiel: $a \approx 105.1162$€).

[1] Wir betrachten nach dem folgenden Beispiel, wie man diesen Wert näherungsweise berechnen kann. Jeder wissenschaftliche Taschenrechner, jede höhere Programmiersprache und jedes Mathematikprogramm hat die Exponentialfunktion aber fest eingebaut. Manchmal wird diese dabei mit "e^x" bezeichnet; warum, sehen wir in Kürze.

Setzt man dies für größere n fort, verzinst also immer häufiger (wöchentlich, täglich, stündlich, ...), so erhält man nach Satz 6.3 den Betrag

$$\lim_{n\to\infty} a\left(1+\frac{r}{n}\right)^n = a\exp(r)€;$$

diese Art der Verzinsung wird *kontinuierliche Verzinsung* genannt. Im Zahlenbeispiel erhält man hier $a \approx 105.1272€$, was zeigt, dass die Abweichung zur monatlichen Verzinsung nur noch sehr gering ist, nämlich nur noch ca. 0.01%. Da man mit der Exponentialfunktion viel einfacher rechnen kann als mit den Termen $(1+r/n)^n$, wird in der Finanzmathematik meistens die kontinuierliche Verzinsung angenommen.

(b) **(Wassertank)** Wir hatten in Beispiel 3.2(b) auf Seite 43 die Formel $a_m = a_0(1-\alpha)^m$ für den Wasserstand nach m Sekunden hergeleitet. Wenn der Wasserstand nun nicht nur jede Sekunde sondern k mal pro Sekunde gemessen und das Ventil entsprechend nachgestellt wird, ergibt sich die Formel

$$a_m = a_0\left(1-\frac{\alpha}{k}\right)^{mk},$$

wobei der Bruch α/k in der Klammer daraus folgt, dass in dem Zeitraum $1/k$ Sekunden natürlich nur $1/k$ mal so viel Wasser zu- oder abfließt als in einer vollen Sekunde. Setzen wir nun $n = mk$, so erhalten wir

$$a_m = a_0\left(1-\frac{m\alpha}{n}\right)^n.$$

Für $k \to \infty$, d.h. für immer häufigeres Messen und Einstellen gilt dann auch $n \to \infty$ und wir erhalten mit Satz 6.3

$$a_m = \lim_{n\to\infty} a_0\left(1+\frac{-\alpha m}{n}\right)^n = a_0\exp(-\alpha m).$$

Wiederum wegen des bequemeren Rechnens mit der Exponentialfunktion wird in der Praxis bei Problemen dieser Art in der Mathematik und den Ingenieurwissenschaften zumeist dieses letzte Modell verwendet. Selbst in Fällen, in denen in der Praxis beliebig schnelles Messen und Einstellen nicht möglich ist, ist der dabei gemachte Fehler i.A. so klein, dass er für die praktische Anwendung der Formel keine Rolle spielt. □

Wie berechnet man nun den Wert $\exp(x)$ der Exponentialfunktion in der Praxis, bzw. wie macht der Taschenrechner oder der Computer das? Die naheliegende Idee dabei ist, den Wert durch

$$\exp(x) \approx \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!}$$

für ein hinreichend großes $N \in \mathbb{N}$ anzuhähern. Der folgende Satz zeigt, wie groß dieses N für eine gewünschte Genauigkeit der Approximation gewählt werden muss.

Satz 6.5 Es gilt

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} + r_{N+1}(x)$$

mit

$$|r_{N+1}(x)| \leq 2\frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \qquad \text{für } |x| \leq 1 + \frac{N}{2}.$$

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned}
|r_{N+1}(x)| &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \left|\frac{x^n}{n!}\right| \\
&= \left|\frac{x^{N+1}}{(N+1)!}\right| \sum_{n=N+1}^{\infty} \left|\frac{x^{n-(N+1)}(N+1)!}{n!}\right| \\
&\leq \left|\frac{x^{N+1}}{(N+1)!}\right| \sum_{n=N+1}^{\infty} \left|\frac{x^{n-(N+1)}}{(N+2)^{n-(N+1)}}\right| = \left|\frac{x^{N+1}}{(N+1)!}\right| \sum_{n=N+1}^{\infty} \left|\frac{x}{N+2}\right|^{n-(N+1)}.
\end{aligned}$$

Für $|x| \leq 1 + N/2$ gilt dann

$$\frac{|x|}{N+2} \leq \frac{1+N/2}{N+2} = \frac{(2+N)/2}{N+2} = \frac{1}{2}$$

und damit

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \left|\frac{x}{N+2}\right|^{n-(N+1)} \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-(N+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} = \frac{1}{1-1/2} = 2,$$

nach dem Satz 4.3 für geometrische Reihen. Also gilt

$$|r_{N+1}(x)| \leq 2\left|\frac{x^{N+1}}{(N+1)!}\right|,$$

was gerade die Behauptung war. □

Wollen wir also z.B. den Wert $\exp(2)$ mit einem Fehler von höchsten 10^{-10} approximieren, so müssen wir N so groß wählen, dass die Ungleichungen

$$2\frac{2^{N+1}}{(N+1)!} \leq 10^{-10} \qquad \text{und} \qquad 2 \leq 1 + \frac{N}{2}$$

erfüllt sind. Die zweite Ungleichung gilt für alle $N \geq 2$ und die erste gilt für alle $N \geq 17$, wie man durch einfaches Ausprobieren mit dem Taschenrechner überprüft. Es müssen also die ersten 18 Summanden der Exponentialreihe berechnet und aufsummiert werden.

Wir werden in Kürze sehen, dass die Abschätzung des Terms $r_{N+1}(x)$, des sogenannten *Restglieds*, auch für andere Zwecke als nur für die Berechnung des Werts $\exp(x)$ nützlich ist.

6.2 Rechenregeln und Eigenschaften der Exponentialfunktion

In diesem Abschnitt beweisen wir die wichtigsten Rechenregeln für die Exponentialfunktion.

Satz 6.6 (Funktionalgleichung der Exponentialfunktion) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y).$$

Beweis: Wir verwenden das Cauchy-Produkt von Reihen gemäß Satz 4.20. Dies ist wegen der in Satz 6.1 nachgewiesenen absoluten Konvergenz der Exponentialreihe anwendbar.

Nach Satz 4.20 gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right)$$

mit

$$c_k := \sum_{j=0}^{k} a_{k-j} b_j.$$

Angewendet auf die Exponentialreihen mit

$$a_k := \frac{x^k}{k!} \quad \text{und} \quad b_k := \frac{y^k}{k!}$$

ist also

$$c_k = \sum_{j=0}^{k} \frac{x^{k-j}}{(k-j)!} \cdot \frac{y^j}{j!} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x^{k-j} y^j,$$

mit dem Binomialkoeffizienten

$$\binom{k}{j} = \frac{k!}{(k-j)!j!}.$$

Nach dem Binomischen Lehrsatz Satz 1.6 gilt daher

$$c_k = \frac{1}{k!}(x+y)^k$$

und folglich

$$\exp(x+y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+y)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = \exp(x)\exp(y).$$

□

Aus diesem Satz folgen sofort die folgenden Eigenschaften der Exponentialfunktion.

Satz 6.7 (a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} = \exp(x)^{-1}$.

(b) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\exp(x) > 0$.

(c) Für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt $\exp(n) = e^n$, wobei e die *Eulersche Zahl*

$$e := \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

ist.

Beweis: (a) Nach Satz 6.6 gilt

$$\exp(x)\exp(-x) = \exp(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n!} = 1$$

wobei wir die Konvention $0^0 = 1$ verwenden[2]. Also folgt $\exp(x) \neq 0$ und

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}.$$

(b) Für $x \geq 0$ ist die Aussage wegen $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \geq x^0 = 1$ klar. Für $x < 0$ ist somit $\exp(-x) > 0$ und damit auch $\exp(x) = 1/\exp(-x) > 0$.

(c) Wir zeigen die Aussage zunächst mit vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $n = 0$ gilt $\exp(0) = 1 = e^0$.

Für $n \to n+1$ und $n \geq 0$ gilt

$$\exp(n+1) = \exp(n)\exp(1) = \exp(n)e = e^n e = e^{n+1}.$$

Damit ist die Aussage für $k = n \geq 0$ gezeigt.

Für $k \in \mathbb{Z}$ mit $k < 0$ gilt mit $n = -k$

$$\exp(k) = \exp(-n) = \frac{1}{\exp(n)} = \frac{1}{e^n} = e^{-n} = e^k.$$

Dies zeigt die Aussage für $k < 0$. □

Aussage (c) gibt bereits einen Anhaltspunkt, warum man oft e^x statt $\exp(x)$ schreibt. Es gibt aber noch einen tieferen Grund, den wir etwas später in diesem Kapitel kennen lernen werden.

Mit den gerade bewiesenen Rechenregeln und den Abschätzungen aus Satz 6.5 können wir nun den folgenden Satz beweisen.

Satz 6.8 Die Exponentialfunktion ist stetig.

[2] Diese ergibt sich wegen $x^n = \prod_{k=1}^{n} x$ und $\prod_{n}^{n-1} x = 1$ aus der für alle $x \in \mathbb{R}$ vorausgesetzen Definition des leeren Produkts.

Beweis: Für jedes $a \in \mathbb{R}$ und jede beliebige Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n \to a$ müssen wir beweisen, dass $\lim_{n\to\infty} \exp(x_n) = \exp(a)$ gilt. Sei x_n im Folgenden eine solche Folge.

Wir betrachten zunächst $a = 0$. Aus Satz 6.5 folgt mit $N = 0$ für alle $|x| \leq 1$

$$|\exp(x) - 1| = r_1(x) \leq 2|x|.$$

Für $x_n \to 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|x_n| \leq 1$ für alle $n \geq n_0$. Damit folgt

$$|\exp(x_n) - 1| = r_1(x_n) \leq 2|x_n| \to 0$$

für $n \to \infty$ und damit $\exp(x_n) \to 1 = \exp(0)$.

Für $a \neq 0$ gilt $x_n - a \to 0$ und damit

$$\exp(x_n) = \exp(a)\exp(x_n - a) \to \exp(a)\exp(0) = \exp(a).$$

□

6.3 Umkehrfunktionen

Wir wollen im folgenden Abschnitt den Logarithmus als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion einführen. Dazu müssen wir aber zunächst klären, was wir unter einer Umkehrfunktion überhaupt verstehen.

Definition 6.9 Eine reelle Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *injektiv*, wenn für alle $x, x' \in \mathbb{R}$ mit $x \neq x'$ die Ungleichung $f(x) \neq f(x')$ gilt. □

Für eine injektive Funktion gibt es zu jedem $y \in f(D)$ eine eindeutige Zahl $x \in D$ mit $f(x) = y$, denn: dass es ein solches x gibt, folgt aus der Definition von $f(D)$ und gäbe es ein weiteres $x' \in D$ mit $x' \neq x$ und $f(x') = y$ so wäre $f(x) = y = f(x')$, was der Injektivität widerspräche.

Wenn eine Funktion injektiv ist, können wir eine neue Funktion wie folgt definieren.

Definition 6.10 Für eine injektive Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ und $D' := f(D)$ definiere die *Umkehrfunktion* $f^{-1} : D' \to \mathbb{R}$ für alle $x \in D'$ mittels

$$f^{-1}(y) := x, \quad \text{wobei } x \in D \text{ die eindeutige Zahl mit } f(x) = y \text{ ist.}$$

□

Für die Umkehrfunktion gilt mit $y = f(x)$ gerade

$$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x \quad \text{für alle } x \in D.$$

Ebenso gilt

$$f \circ f^{-1}(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y \quad \text{für alle } y \in D'.$$

Tatsächlich ist die Umkehrfunktion eindeutig durch jede dieser beiden Beziehungen festgelegt.

Vorsicht: Die Umkehrfunktion f^{-1} wird leicht mit der Funktion $x \mapsto f(x)^{-1} = \frac{1}{f(x)}$ verwechselt.

Beispiel 6.11 Die Funktion $f(x) = x^2$ ist für $D = \mathbb{R}$ nicht bijektiv, denn für $x > 0$ ist $-x \neq x$ aber $f(x) = x^2 = (-x)^2 = f(-x)$. Für $D = [0, \infty)$ ist sie bijektiv, denn für $x, x' \geq 0$ mit $x \neq x'$ gilt entweder $x' > x$ und damit $f(x') > f(x)$ oder $x' < x$ und damit $f(x') < f(x)$, in beiden Fällen also $f(x) \neq f(x')$. Ihre Umkehrfunktion kann man aus der Beziehung "$f^{-1}(y)$ ist die eindeutige Zahl $x \in [0, \infty)$ mit $x^2 = y$" $\Leftrightarrow f^{-1}(y) = \sqrt{y}$. berechnen. □

Beachte, dass sich für Umkehrfunktionen oft keine einfachen Formeln angeben lassen.

Definition 6.12 Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt monoton wachsend (bzw. streng monoton wachsend, monoton fallend oder streng monoton fallend), falls für alle $x, x' \in D$ mit $x < x'$ die Ungleichung

$$f(x) \leq f(x') \quad (\text{bzw.} \quad f(x) < f(x'), \quad f(x) \geq f(x') \quad \text{oder} \quad f(x) > f(x'))$$

gilt. □

Satz 6.13 Jede streng monotone wachsende (bzw. fallende) Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist injektiv. Sie besitzt damit eine Umkehrfunktion f^{-1} mit Definitionsmenge $D' = f(D)$. Diese ist ebenfalls streng monoton wachsend (bzw. fallend). Falls f darüberhinaus stetig und $D = [a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall ist, so gilt $D' = [f(a), f(b)]$ (bzw. $D' = [f(b), f(a)]$) und f^{-1} ist ebenfalls stetig.

Beweis: Wir zeigen die Behauptung für streng monoton wachsende Funktionen.

Injektivität: Seien dazu $x, x' \in D$ mit $x \neq x'$ gegeben. Dann gilt entweder $x' > x$ und damit $f(x') > f(x)$ oder $x' < x$ und damit $f(x') < f(x)$, in beiden Fällen also $f(x) \neq f(x')$.

Monotonie der Umkehrfunktion: Für $y, y' \in D'$ mit $y' > y$ und $y = f(x)$, $y' = f(x')$ gilt $x' > x$, da ansonsten wegen der strengen Monotonie $y' = f(x') \leq f(x) = y$ gelten müsste. Also folgt

$$f^{-1}(y') = x' > x = f^{-1}(y)$$

und damit die strenge Monotonie von f^{-1}.

Stetigkeit der Umkehrfunktion: Aus der strengen Monotonie von f und $D = [a, b]$ folgt, dass $f(D) \subset [f(a), f(b)]$ ist. Wegen der Stetigkeit von f wird dabei nach dem Zwischenwertsatz jeder Wert $y \in [f(a), f(b)]$ angenommen, woraus $D' = f(D) = [f(a), f(b)]$ folgt. Wegen $D = [a, b]$ gilt zudem $f^{-1}(y) \in [a, b]$ für alle $y \in D'$.

Zum Beweis der Stetigkeit sei nun y_n eine Folge in D' mit $y_n \to y \in D'$. Wir nehmen an, dass der Grenzwert von $f^{-1}(y_n)$ entweder nicht existiert oder ungleich $f^{-1}(y)$ ist. In beiden Fällen bedeutet dies, dass ein $\varepsilon > 0$ und beliebig große $n \in \mathbb{N}$ existieren mit $|f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y)| \geq \varepsilon$, d.h. es gibt eine Teilfolge y_{n_k} mit

$$|f^{-1}(y_{n_k}) - f^{-1}(y)| \geq \varepsilon \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}. \tag{6.1}$$

Wegen $f^{-1}(y_{n_k}) \in [a, b]$ ist die Folge $f^{-1}(y_{n_k})$ beschränkt und es existiert eine konvergente Teilfolge, die wir wiederum mit $f^{-1}(y_{n_k})$ bezeichnen (diese Vereinfachung dürfen wir

machen, weil (6.1) bei dem Übergang zu einer weiteren Teilfolge sicherlich weiterhin gilt). Sei

$$x' := \lim_{k\to\infty} f^{-1}(y_{n_k}),$$

dann folgt

$$y_{n_k} = f(f^{-1}(y_{n_k})) \to f(x') =: y'.$$

Da die y_{n_k} als Teilfolge der konvergenten Folge y_n gegen den gleichen Grenzwert konvergieren muss, folgt $y' = y$ und damit

$$|f^{-1}(y_{n_k}) - f^{-1}(y)| = |f^{-1}(y_{n_k}) - f^{-1}(y')| = |f^{-1}(y_{n_k}) - x'| \to 0$$

für $n \to \infty$, was der Ungleichung (6.1) widerspricht. □

Es folgt, dass jede streng monotone Funktion eine Umkehrfunktion besitzt.

Der Vollständigkeit halber merken wir noch an, dass eine Funktion $f : D \to W$ für ein gegebenes $W \subset \mathbb{R}$ surjektiv heißt, wenn $f(D) = W$ gilt und bijektiv, wenn sie injektiv und surjektiv ist. Für eine bijektive Funktion f ist die Umkehrfunktion also auf $D' = W$ definiert. Beachte, dass jede injektive Funktion auf ihrem Bild $W = f(D)$ bijektiv ist.

6.4 Die Logarithmusfunktion

Satz 6.14 Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend und es gilt $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$. Sie ist daher injektiv und besitzt eine Umkehrfunktion mit Definitionsmenge $D' = (0, \infty)$.

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass exp streng monoton wachsend ist. Für $x' > x \geq 0$ gilt

$$\exp(x') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x')^n}{n!} = 1 + x' + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x')^n}{n!} \geq 1 + x' + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} > 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x).$$

Für $x' > 0$ und $x \leq 0$ folgt die Aussage wegen

$$\exp(x') > \exp(0) = 1 \quad \text{und} \quad \exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} \leq \frac{1}{\exp(0)} \leq 1$$

und für $0 \geq x' > x$ gilt $-x > -x' \geq 0$, damit folgt aus dem ersten Fall $\exp(-x) > \exp(-x')$ und folglich

$$\exp(x') = \frac{1}{\exp(-x')} > \frac{1}{\exp(-x)} = \exp(x).$$

Es bleibt $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$ zu zeigen. Wegen $\exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\exp(\mathbb{R}) \subset (0, \infty)$. Wegen $\exp(x) \geq x$ für $x > 0$ nimmt $\exp(x)$ beliebig große Werte an und wegen $\exp(-x) = 1/\exp(x)$ auch Werte beliebig nahe bei 0. Dass auch alle Werte dazwischen angenommen werden, folgt aus der Stetigkeit mit dem Zwischenwertsatz. □

Definition 6.15 Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion wird (natürlicher) Logarithmus genannt und mit

$$\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$$

bezeichnet[3]. □

Satz 6.16 Der natürliche Logarithmus ist stetig und streng monoton wachsend.

Beweis: Wenn wir die Exponentialfunktion auf ein abgeschlossenes Intervall $[a, b]$ einschränken, folgen beide Eigenschaften direkt aus Satz 6.13. Stetigkeit für beliebige $y \in D' = (0, \infty)$ und Monotonie für beliebige $y' > y \in D'$ folgen dann, indem wir $a = y/2$ und $b = 2y$ bzw. $b = 2y'$ wählen. □

Satz 6.17 (Funktionalgleichung des Logarithmus) Für alle $x, y \in (0, \infty)$ gilt

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).$$

Beweis: Wegen der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion und der Umkehrfunktionseigenschaft des Logarithmus gilt

$$xy = \exp(\ln(x)) \exp(\ln(y)) = \exp(\ln(x) + \ln(y)).$$

Wenden wir nun auf beiden Seiten den Logarithmus an, so folgt

$$\ln(xy) = \ln(\exp(\ln(x) + \ln(y))) = \ln(x) + \ln(y).$$

□

Aus dieser Gleichung folgt

$$\ln 1 = \ln(1 \cdot 1) = \ln 1 + \ln 1 \quad \Rightarrow \quad \ln 1 = 0$$

und für $x > 0$

$$\ln(x) + \ln(1/x) = \ln(x/x) = \ln 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln(1/x) = -\ln(x).$$

Zudem folgt aus der Funktionalgleichung und der Umkehrfunktionseigenschaft für alle reellen $a > 0$

$$a^2 = aa = \exp(\ln(a) + \ln(a)) = \exp(2 \ln(a))$$

und daraus per Induktion für alle $n \geq 1$ auch

$$a^n = \exp(n \ln(a)).$$

Ebenso gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{\exp(n \ln(a))} = \exp(-n \ln(a)).$$

Dies motiviert die folgende Definition.

[3] Manchmal findet sich auch die Bezeichnung log.

Definition 6.18 Für $a, x \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ definieren wir die *Potenz* a^x als

$$a^x := \exp(x \ln(a)).$$

Diese wird auch *Exponentialfunktion zur Basis* a genannt und

$$\exp_a(x) := \exp(x \ln a)$$

geschrieben. □

Man kann leicht nachrechnen, dass $\exp_a$ für $a > 1$ streng monoton wachsend und für $a < 1$ streng monoton fallend ist. Zudem ist $\exp_a$ für alle $a > 0$ stetig mit $\exp_a(\mathbb{R}) = (0, \infty)$ und erfüllt die Funktionalgleichung

$$\exp_a(x + y) = \exp_a(x) \exp_a(y).$$

sowie nach der Vorüberlegung $\exp_a(k) = a^k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Desweiteren gelten die Gleichungen

$$\exp_a(nx) = (\exp_a(x))^n \quad \text{und} \quad \exp_a\left(\frac{p}{q}\right) = \sqrt[q]{a^p}.$$

Die erste Gleichung folgt per Induktion mit dem Induktionsschritt

$$\exp_a((n+1)x) = \exp_a(nx + x) = \exp_a(nx) \exp_a(x) = \exp_a(x)^n \exp_a(x) = \exp_a(x)^{n+1}$$

und die zweite aus

$$a^p = \exp_a(p) = \exp_a\left(q \cdot \frac{p}{q}\right) = \exp_a\left(\frac{p}{q}\right)^q,$$

woraus durch Ziehen der q-ten Wurzel die Behauptung folgt.

In die Schreibweise $\exp_a(x) = a^x$ übersetzt lautet die Funktionalgleichung gerade

$$a^{x+y} = a^x a^y.$$

Zudem beweist man mit elementaren Umformungen die (bekannten) Rechenregeln

$$(a^x)^y = a^{xy}, \quad a^x b^x = (ab)^x \quad \text{und} \quad \left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}.$$

Für $a = e = \exp(1)$ folgt wegen $\ln(e) = 1$

$$e^x = \exp_e(x) = \exp(x \ln(e)) = \exp(x),$$

d.h. die übliche Exponentialfunktion ist gerade die Exponentialfunktion zur Basis e. Dies ist der eigentliche Grund, warum man statt $\exp(x)$ auch e^x schreibt.

Definition 6.19 Die Umkehrfunktion von $\exp_a$ wird mit $\log_a$ bezeichnet und Logarithmus zur Basis a genannt. □

Aus $\exp = \exp_e$ folgt dann sofort $\ln = \log_e$.

Eine Folgerung aus der Gleichung $\sqrt[n]{a} = \exp_a(1/n)$ ist das folgende Korollar.

Korollar 6.20 Für alle $a > 0$ gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Beweis: Wegen $\sqrt[n]{a} = \exp_a(1/n)$ und $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$ folgt wegen der Stetigkeit von $\exp_a$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \exp_a(1/n) = \exp(0) = 1.$$

□

Man könnte sich nun fragen, ob man eine allgemeine Potenz a^x nicht auch auf andere Weise definieren könnte. Man kann aber nachrechnen (was wir hier aus Zeitgründen unterlassen), dass dies die einzige Möglichkeit der Definition ist, wenn die Gleichungen $a^1 = a$ und $a^{x+y} = a^x a^y$ erfüllt sein sollen. Ein Beweis dafür findet sich z.B. im Buch von Forster [3, §12, Satz 6].

6.5 Limesverhalten von exp und ln

Wir beenden dieses Kapitel mit einigen Aussagen über das Verhalten von exp und ln für $x \to \infty$ und $x \to 0$.

Der erste Satz besagt, dass die Exponentialfunktion $\exp(x)$ für $x \to \infty$ schneller wächst als jede Potenz x^k. Formal drückt man dieses "schneller Wachsen" aus, indem man den Quotienten $\exp(x)/x^k$ betrachtet. Dass exp schneller wächst, drückt sich dann wie folgt aus.

Satz 6.21 Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^k} = \infty$.

Beweis: Wir müssen zeigen, dass für jedes $K > 0$ ein $x_K > 0$ existiert mit

$$\frac{e^x}{x^k} > K \quad \text{für alle } x > x_K.$$

Wählen wir $x_K = K(k+1)!$, so folgt für alle $x > x_K$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \geq \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$$

und damit

$$\frac{e^x}{x^k} \geq \frac{x^{k+1}}{x^k(k+1)!} = \frac{x}{(k+1)!} > \frac{K(k+1)!}{(k+1)!} = K.$$

□

Der nächste Satz zeigt, dass e^{-x} für $x \to \infty$ so schnell gegen Null strebt, dass auch $x^k e^{-x}$ für jedes k noch gegen Null konvergiert. Als zweites Resultat zeigt er, dass $e^{1/x}$ für $x \to 0$ so schnell gegen unendlich strebt, dass auch $x^k e^{1/x}$ divergiert.

Satz 6.22 Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} x^k e^{-x} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^k e^{1/x} = \infty.$$

Die zweite Schreibweise "$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}$" bedeutet dabei, dass wir beim Bilden des Grenzwerts gemäß Definition 5.4 nur Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n > 0$ betrachten.

Beweis: Mit Satz 6.21 und Satz 3.17 folgt

$$x^k e^{-x} = \left(\frac{e^x}{x^k}\right)^{-1} \to 0.$$

Ebenso gilt mit Satz 6.21 mit $y = 1/x$

$$x^k e^{1/x} = \left(\frac{1}{y}\right)^k e^y = \frac{e^y}{y^k} \to \infty,$$

da $y = 1/x \to \infty$ gilt für $x \to 0$. □

Wozu kann man diesen Satz brauchen? Um ein Beispiel für eine Anwendung zu geben, formulieren wir zunächst ein Korollar.

Korollar 6.23 Für alle $a \in \mathbb{R}$ mit $|a| < 1$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} ka^k = 0.$$

Beweis: Wir betrachten zunächst $a > 0$ und setzen $b := 1/a$. Dann gilt (vgl. die Folgerungen nach Satz 6.17) $\ln b = -\ln a > 0$ und damit

$$a^k = e^{k\ln a} = e^{-k\ln b}.$$

Setzen wir nun $x = k\ln b$ so folgt

$$ka^k = ke^{-k\ln b} = \frac{x}{\ln b}e^{-x} = \frac{1}{\ln b}xe^{-x}$$

und weil für $k \to \infty$ wegen $\ln b > 1$ auch $x \to \infty$ gilt, folgt die Behauptung mit Satz 6.22.

Für $a = 0$ ist die Aussage sofort klar und für $a < 0$ gilt $ka^k = (-1)^k k|a|^k$. Nach dem ersten Teil des Beweises gilt $k|a|^k \to 0$ und damit auch $ka^k \to 0$ für $k \to \infty$. □

Beispiel 6.24 Als Anwendungsbeispiel betrachten wir nun noch einmal den Wassertank aus Beispiel 3.2(b) mit der auf Seite 43 betrachteten "Strategie", in jedem Zeitintervall gerade die Wassermenge αa_n einzufüllen oder abzulassen. Dies führt wie bereits gesehen auf die rekursive Gleichung

$$a_{n+1} = (1-\alpha)a_n$$

für den Wasserstand. Wir betrachten nun den Fall, dass wir einen zweiten — völlig gleichen — Tank haben, dessen Wasserstand mit b_n bezeichnet wird und der mit genau der gleichen Strategie (und dem gleichen α) befüllt bzw. entleert wird. Für diesen gilt also die Gleichung

$$b_{n+1} = (1-\alpha)b_n.$$

Das Wasser, was in den zweiten Tank gefüllt wird wird dabei jetzt aber aus dem ersten Tank entnommen und das Wasser, was aus dem zweiten Tank abgelassen wird, in den ersten Tank eingefüllt. Damit ändert sich die Gleichung für den ersten Tank auf

$$a_{n+1} = (1-\alpha)a_n + \alpha b_n.$$

Die Frage ist nun: konvergiert der Wasserstand des ersten Tanks immer noch gegen Null?

Mit vollständiger Induktion kann man nun beweisen, dass die Gleichung für den ersten Tank in expliziter Form als

$$a_n = (1-\alpha)^n a_0 + n(1-\alpha)^{n-1} b_0$$

geschrieben werden kann. Für $0 < \alpha < 2$ konvergiert der erste Summand (mit den gleichen Überlegungen wie auf Seite 43) gegen Null. Der zweite Term ist für $\alpha = 1$ gerade gleich Null für alle $n \geq 2$ und konvergiert damit gegen Null. Für $0 < \alpha < 2$ und $\alpha \neq 1$ erhalten wir

$$n(1-\alpha)^{n-1} b_0 = \frac{b_0}{1-\alpha} n(1-\alpha)^n.$$

Weil nun aus $0 < \alpha < 2$ aber gerade $|1-\alpha| < 1$ folgt, konvergiert der Term nach Korollar 6.23 ebenfalls gegen Null.

Wir erhalten also: die Wasserstände in den beiden verbundenen Tanks konvergieren unter genau den gleichen Bedingungen an α gegen Null wie die Wasserstände in dem Einzeltank. □

Aus der Stetigkeit von exp folgt sofort die Konvergenz $\lim_{x\to 0} e^x - 1 = 0$. Der folgende Satz zeigt, was passiert, wenn man diese Differenz noch durch x teilt.

Satz 6.25 Es gilt

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Beweis: Aus Satz 6.5 folgt mit $N = 1$ und für $|x| < 3/2$ die Ungleichung

$$|e^x - (1+x)| = |r_2(x)| \leq |x|^2.$$

Damit ergibt sich

$$\left|\frac{e^x - 1}{x} - 1\right| = \left|\frac{e^x - (1+x)}{x}\right| \leq |x| \to 0$$

für $x \to 0$ und $x \neq 0$. Damit folgt die Behauptung.

Betrachten wir nun noch einige Limeseigenschaften des Logarithmus.

Satz 6.26 Es gilt

$$\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty.$$

Beweis: Für die erste Behauptung müssen wir zeigen, dass für jedes $K > 0$ ein $x_K > 0$ existiert mit $\ln x > K$ für alle $x > x_K$. Da der Logarithmus streng monoton wachsend ist, gilt für $x > x_K := e^K$

$$\ln x > \ln x_K = \ln(e^K) = K.$$

Die zweite Behauptung folgt aus der ersten mit $y = 1/x$ wegen

$$\ln x = \ln \frac{1}{y} = -\ln y \to -\infty,$$

weil $y \to \infty$ für $x \to 0$. □

Diese Eigenschaft hat direkte Konsequenzen für die Potenz.

Satz 6.27 Für jede reelle Zahl $y > 0$ gilt

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^y = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^{-y} = \infty.$$

Beweis: Für die erste Behauptung betrachte eine Folge $x_n \to 0$ mit $x_n > 0$. Dann gilt mit Satz 6.26

$$\lim_{n\to\infty} y \ln x_n = -\infty.$$

Weil aus Satz 6.22 (mit $k = 0$) insbesondere $\lim_{z\to-\infty} e^z = 0$ folgt, erhalten wir

$$x_n^y = e^{y \ln x_n} \to 0$$

für $n \to \infty$. Die zweite Behauptung folgt dann aus der ersten mit Satz 3.17 wegen $x^{-y} = 1/x^y$. □

Beachte, dass für festes $y > 0$ die Funktion $x \mapsto x^y$ zunächst nur für $x \in (0, \infty)$ definiert ist. Wir können diese Funktion aber auf dem abgeschlossenen Intervall definieren, wenn wir den Wert 0^y festlegen. Dafür könnte man im Prinzip beliebige Werte verwenden, aus dem vorhergehenden Satz folgt aber, dass $0^y = 0$ eine gute Wahl ist, da die Abbildung $x \mapsto x^y$ damit für jedes $y > 0$ stetig auf dem ganzen Definitionsbereich $[0, \infty)$ wird. Man nennt eine solchermaßen erweiterte Funktion auch *stetige Fortsetzung*.

Wir haben diesen Abschnitt begonnen mit der Feststellung, dass die Exponentialfunktion schneller wächst als jede Potenz. Da der Logarithmus die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion ist, könnte man nun vermuten, dass sich diese Eigenschaft beim Logarithmus gerade umkehrt. Dies ist tatsächlich der Fall: Der Logarithmus wächst langsamer als jede Potenz, wie der folgende letzte Satz dieses Kapitels zeigt.

Satz 6.28 Für alle $y > 0$ gilt

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ x>0}} \frac{\ln x}{x^y} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^y \ln x = 0.$$

Beweis: Für die erste Behauptung sei $x_n \to \infty$ mit $x_n > 0$. Aus Satz 6.26 folgt dann $a_n := y \ln x_n \to \infty$. Wegen $x_n^y = e^{y \ln x_n} = e^{a_n}$ folgt dann $e^{a_n}/a_n \to \infty$ und damit nach Satz 3.17

$$\frac{\ln x_n}{{x_n}^y} = \frac{1}{y}\frac{a_n}{e^{a_n}} \to 0.$$

Die zweite Behauptung folgt aus der ersten mit $z = 1/x$ wegen

$$x^y \ln x = -\frac{\ln z}{z^y}$$

und $z \to \infty$ falls $x \to 0$. □

6.6 Anhang: Elementarer Beweis von Satz 6.3

(wurde an der Tafel nicht behandelt und ist folglich auch nicht prüfungsrelevant)

Beweis: Wir beweisen den Satz zuerst für $x \geq 0$ und schreiben dazu kurz

$$a_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \quad \text{und} \quad b_n := \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Nach dem Binomischen Lehrsatz Satz 1.6 gilt

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \left(\frac{x}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!n^k} x^k.$$

Wegen

$$\frac{n!}{(n-k)!n^k} = \frac{1}{1} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k}{n-k} \cdot \frac{n-k+1}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{n} \leq 1$$

folgt

$$b_n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!n^k} x^k \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k = a_n \leq \exp(x).$$

Die Folge b_n ist also nach oben durch $\exp(x)$ beschränkt, woraus die Existenz des Limes Superior und die Ungleichung

$$\limsup_{n\to\infty} b_n \leq \exp(x)$$

folgt. Andererseits gilt für jedes feste $k \in \mathbb{N}$

$$\frac{n!}{(n-k)!n^k} = \frac{1}{1} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k}{n-k} \cdot \frac{n-k+1}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{n} \geq \left(\frac{n-k}{n}\right)^k = \left(1 - \frac{k}{n}\right)^k \to 1 \quad \text{für } n \to \infty.$$

Also gilt für jedes feste $m \in \mathbb{N}$

$$a_m - b_n = \sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!} - b_n \leq \underbrace{\sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!} \left(1 - \left(\frac{n-k}{n}\right)^k\right)}_{=:c_n} \to 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

Da c_n monoton gegen Null konvergiert, folgt damit auch

$$\sup\{a_m - b_k \mid k \geq n\} \leq \sup\{c_k \mid k \geq n\} = c_n \quad \Rightarrow \quad \inf\{b_k - a_m \mid k \geq n\} \geq -c_n$$

und somit mit Satz 3.14

$$\liminf_{n\to\infty} b_n - a_m = \liminf_{n\to\infty}(b_n - a_m) \geq \lim_{n\to\infty}(-c_n) = 0,$$

also $a_m \leq \liminf_{n\to\infty} b_n$. Nochmals mit Satz 3.14 folgt daraus

$$\exp(x) = \lim_{m\to\infty} a_m \leq \liminf_{n\to\infty} b_n.$$

Aus den damit bewiesenen Ungleichungen $\limsup_{n\to\infty} b_n \leq \exp(x)$ und $\liminf_{n\to\infty} b_n \geq \exp(x)$ folgt nun die Behauptung mit Korollar 3.31(a).

Für $x < 0$ definieren wir zunächst

$$d_n := \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = \left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)\left(1 - \frac{x}{n}\right)\right)^n = \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n.$$

Wegen $d_n \leq 1$ folgt $\limsup_{n\to\infty} d_n \leq 1$. Andererseits gilt nach dem Binomischen Lehrsatz für alle $y > 0$

$$\left(1 - \frac{y}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-y)^k}{n^k} \geq 1 - \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{y^k}{n^k} = 1 - \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{y^k}{n^k} - 1\right) = 2 - \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n.$$

Zu gegebenem $x < 0$ wähle nun ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $y := x^2/n_0 < 1$. Für $n \geq n_0$ gilt dann $x^2/n^2 \leq x^2/(n_0 n) = y/n$, damit auch $1 - x^2/n^2 \geq 1 - y/n$ und

$$\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n \geq \left(1 - \frac{y}{n}\right)^n \geq 2 - \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n.$$

Also folgt

$$\liminf_{n\to\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n \geq 2 - \exp(y) = 2 - \exp\left(\frac{x^2}{n_0}\right).$$

Da dies für alle hinreichend großen $n_0 \in \mathbb{N}$ gilt, folgt wegen der Stetigkeit von exp $\liminf_{n\to\infty} d_n \geq 2 - 1 = 1$ und damit $\lim_{n\to\infty} d_n = 1$.

Damit folgt für alle $x < 0$ mit Satz 3.13

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{d_n}{\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} d_n}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{-x}{n}\right)^n} = \frac{1}{\exp(-x)},$$

da für $-x > 0$ die bereits bewiesene Aussage gilt. Wegen $1/\exp(-x) = \exp(x)$ folgt die Behauptung. $\square$

Kapitel 7

Die komplexen Zahlen

Stand:
14. Februar 2012

Wir hatten die Einführung der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ damit motiviert, dass in $\mathbb{Q}$ die Zahl $\sqrt{2}$ nicht enthalten ist, dass wir also keine Lösung der Gleichung $x^2 = 2$ finden können.

Während die Definition von $\mathbb{R}$ über das Vollständigkeitsaxiom dieses Problem löst, gibt es trotzdem quadratische Gleichungen, die in $\mathbb{R}$ nicht erfüllt sind. Ein Beispiel ist die Gleichung

$$x^2 = -1.$$

Für diese Gleichung kann es in $\mathbb{R}$ keine Lösung geben: offensichtlich ist $x = 0$ keine Lösung der Gleichung, für $x \neq 0$ gilt mit Satz 2.1(3) und (6) aber $-1 < 0$ und $x^2 > 0$, weswegen es keine Lösung geben kann.

Wir müssen also eine neue — größere — Menge von Zahlen einführen, die sogenannten komplexen Zahlen. Da diese bereits aus der Linearen Algebra bekannt sind, werden wir uns in diesem Kapitel relativ kurz fassen.

7.1 Definition und Rechenregeln

Die Idee der Definition der komplexen Zahlen liegt darin, das Symbol "i" für die in $\mathbb{R}$ nicht vorhandene Zahl $\sqrt{-1}$ einzuführen. Jede komplexe Zahl z ist dann die Summe aus einem reellen Vielfachen der 1 und einem reellen Vielfachen von i. Formal also

$$\mathbb{C} := \{a + ib \,|\, a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Für $z = a+ib$ heißt die Zahl $\mathrm{Re}(z) := a \in \mathbb{R}$ der *Realteil* von z und die Zahl $\mathrm{Im}(z) := b \in \mathbb{R}$ der *Imaginärteil* von z. Die Zahl i wird als *Imaginäre Einheit* bezeichnet und eine komplexe Zahl $z = a + ib$ mit $a = \mathrm{Re}(z) = 0$ als *(rein) imaginäre Zahl*.

Die Rechenregeln für komplexe Zahlen ergeben sich direkt aus ihrer Definition. Für $z_1 = a_1 + ib_1$ und $z_2 = a_2 + ib_2$ gilt

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2), \qquad z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$$

und

$$z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1a_2 + a_1ib_2 + ib_1a_2 + i^2b_1b_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + b_1a_2).$$

Zur Definition der Division betrachten wir zunächst das inverse Element $z_2 = z_1^{-1}$. Für dieses muss gelten

$$1 = z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(b_1 a_2 + a_1 b_2),$$

also $b_1 a_2 + a_1 b_2 = 0$ und $a_1 a_2 - b_1 b_2 = 1$. Man rechnet nach, dass dies gerade für

$$z_2 = \frac{1}{a_1^2 + b_1^2}(a_1 - ib_1)$$

erfüllt ist, d.h. für

$$a_2 = \frac{a_1}{a_1^2 + b_1^2} \quad \text{und} \quad b_2 = \frac{-b_1}{a_1^2 + b_1^2}.$$

Definieren wir zu $z = a + ib$ die *konjugiert komplexe Zahl* $\bar{z}$ und den *Betrag* $|z|$ als

$$\bar{z} := a - ib \quad \text{und} \quad |z| := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2},$$

so können wir kurz $z^{-1} = \bar{z}/|z|^2$ schreiben. Die Division ist mit diesen Schreibweisen durch

$$\frac{z_1}{z_2} := z_1 z_2^{-1} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}$$

gegeben.

Mit diesen Operationen kann man nachrechnen, dass $\mathbb{C}$ ein Körper ist. Zudem erfüllt $\mathbb{C}$ das Vollständigkeitsaxiom, wobei jede Intervallschachtelung jetzt natürlich aus zwei Folgen von Intervallen für den Realteil a und den Imaginärteil b besteht. Dass das auf diese Art verallgemeinerte Vollständigkeitsaxiom erfüllt ist, folgt sofort aus der Tatsache, dass a und b reelle Zahlen sind.

Nicht erfüllt sind allerdings die Anordnungsaxiome, denn Satz 2.1 gilt nicht nur für $\mathbb{R}$ sondern für jeden Körper, der die Anordnungsaxiome (A1) und (A2) erfüllt. Jeder Versuch, eine Ordnung auf $\mathbb{C}$ zu definieren, würde also nach Teil (3) und (6) dieses Satzes für $z = i$ auf den Widerspruch $z^2 = -1 < 0$ und $z^2 > 0$ führen. Diese Tatsache zusammen mit der etwas esoterisch anmutenden Bezeichnung "imaginäre Zahl" haben dazu geführt, dass die komplexen Zahlen anfangs sehr skeptisch betrachtet wurden. Tatsächlich sind sie aber nichts anderes als ein sehr nützliches Werkzeug, nicht nur innerhalb der Mathematik sondern auch in den Anwendungen. So vereinfacht sich z.B. die Analyse von elektrischen Wechselstromschaltkreisen deutlich, wenn man die dort auftretenden Größen geeignet mit komplexen Zahlen beschreibt.

Wir beweisen noch die folgenden Eigenschaften des Betrags einer komplexen Zahl.

Satz 7.1 Für alle $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt

(1) $|z| \geq 0 \quad \text{und} \quad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

(2) $|z_1|\,|z_2| = |z_1 z_2|$

(3) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (Dreiecksungleichung)

Beweis:

(1) Folgt sofort aus der Darstellung $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ für $z = a + ib$.

(2) Durch Nachrechnen folgt die Gleichheit $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$. Damit ergibt sich

$$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2}) = (z_1 z_2)(\bar{z}_1 \bar{z}_2) = (z_1 \bar{z}_1)(z_2 \bar{z}_2) = |z_1|^2 \, |z_2|^2.$$

(3) Zunächst gilt für $z = a + ib$ die Ungleichung

$$\mathrm{Re}(z) = a \leq \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$$

und damit mit (2)

$$\mathrm{Re}(z_1 \bar{z}_2) \leq |z_1 \bar{z}_2| = |z_1| \, |\bar{z}_2| = |z_1| \, |z_2|.$$

Die Behauptung folgt nun aus der Ungleichung

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = z_1 \bar{z}_1 + z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 \\ &= |z_1|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1 \bar{z}_2) + |z_2|^2 \\ &\leq |z_1|^2 + 2|z_2| \, |z_2| + |z_2|^2 \\ &= (|z_1| + |z_2|)^2 \end{aligned}$$

durch Ziehen der Wurzel auf beiden Seiten.

□

Man kann komplexe Zahlen alternativ als Zahlenpaar $z = (a, b)$ ohne Verwendung von i schreiben. Die obigen Rechenregeln sind dann komponentenweise anzuwenden, für $z_1 = (a_1, b_1)$ und $z_2 = (a_2, b_2)$ also z.B.

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2, b_1 a_2 + a_1 b_2).$$

7.2 Veranschaulichung

Da jede komplexe Zahl als ein Paar von reellen Zahlen aufgefasst werden kann, bietet es sich an, diese in einem zweidimensionalen Koordinatensystem zu veranschaulichen. Dabei tragen wir den Realteil in der horizontalen Richtung und den Imaginärteil in der vertikalen Richtung auf, vgl. Abb. 7.1.

Die für diese Darstellung verwendete zweidimensionale Ebene wird *komplexe Ebene* genannt, die beiden Achsen im Koordinatensystem heißen *reelle* und *komplexe Achse*.

Der Betrag einer komplexen Zahl ist in dieser Darstellung gerade die Länge des Vektors von 0 nach z, wie man leicht durch Anwendung des Satzes von Pythagoras sieht. Die konjugiert komplexe Zahl entsteht durch Spiegeln der Zahl an der reellen Achse.

Die Addition entspricht hier der bekannten Vektoraddition. Mit dieser grafischen Interpretation ergibt auch die Bezeichnung "Dreiecksungleichung" für die Ungleichung aus Satz 7.1(3) geometrisch einen Sinn (eine Zeichung dazu gibt es in der Vorlesung).

Die Multiplikation ergibt einen neuen Vektor, bei dem die Längen der beiden Vektoren miteinander multipliziert werden und die Winkel zur rellen Achse addiert werden. Die Aussage über die Längen folgt dabei aus Satz 7.1(2), die Aussage über die Winkel werden wir in Abschnitt 8.5 beweisen.

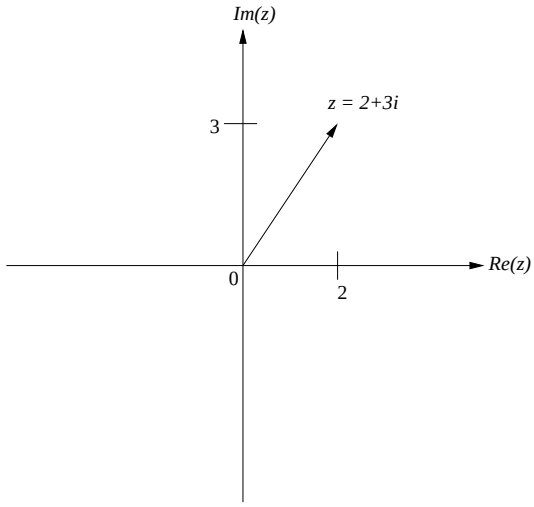


Abbildung 7.1: Veranschaulichung der komplexen Zahl $z = 2 + 3i$

7.3 Komplexe Folgen und Reihen

Genau wie in $\mathbb{R}$ kann man auch in $\mathbb{C}$ Folgen $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n + ib_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definieren. Konvergenz wird ganz genau wie in $\mathbb{R}$ definiert.

Definition 7.2 Eine komplexe Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *konvergent*, falls ein $z \in \mathbb{C}$ existiert, so dass gilt:

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass die Ungleichung $|z_n - z| < \varepsilon$ gilt für alle $n \geq N(\varepsilon)$. □

Die Bezeichnung $\lim_{n\to\infty} z_n := z$ wird dann wie in $\mathbb{R}$ benutzt.

Der folgende Satz ist der Grund dafür, dass sich alle Sätze für reelle konvergente Folgen auf komplexe Folgen übertragen.

Satz 7.3 Eine komplexe Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n + ib_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann konvergent, wenn die reellen Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent sind. In diesem Fall gilt

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} a_n + i \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Beweis: Es sei z_n konvergent mit Grenzwert $z = a + ib$. Dann existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$$|z_n - z| < \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq N(\varepsilon).$$

Es gilt nun

$$|z_n - z| = \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} \geq \sqrt{(a_n - a)^2} = |a_n - a|;$$

analog beweist man $|z_n - z| \geq |b_n - b|$. Es folgt also

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{und} \quad |b_n - b| < \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq N(\varepsilon),$$

also konvergieren a_n und b_n gegen a und b.

Seien umgekehrt a_n und b_n konvergent mit Grenzwerten a und b. Seien $N_a(\varepsilon)$ und $N_b(\varepsilon)$ die zugehörigen Indizes aus Definition 3.3. Dann gilt für alle $\varepsilon > 0$ und $n \geq N(\varepsilon) := \max\{N_a(\varepsilon/2), N_b(\varepsilon/2)\}$ und $z = a + ib$ die Ungleichung

$$|z_n - z|^2 = (a_n - a)^2 + (b_n - b)^2 < \frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{\varepsilon^2}{4} = \frac{\varepsilon^2}{2}$$

und damit

$$|z_n - z| < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2}} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} < \varepsilon.$$

Also folgt die Konvergenz von z_n gegen z. □

Auf ähnliche Art beweist man, dass z_n genau dann eine Cauchy-Folge ist, wenn a_n und b_n Cauchy-Folgen sind.

Satz 7.3 ist die Grundlage dafür, dass alle Rechenregeln für reelle Grenzwerte auf komplexe Grenzwerte übertragen werden können. Für komplex konjugierte Folgen folgt aus dem Satz zudem sofort, dass z_n genau dann konvergiert, wenn $\bar{z}_n$ konvergiert und in diesem Fall gilt

$$\lim_{n\to\infty} \bar{z}_n = \overline{\lim_{n\to\infty} z_n}. \tag{7.1}$$

Mittels der Konvergenz komplexer Folgen lässt sich ganz analog zum reellen Fall die Stetigkeit komplexer Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definieren.

Für komplexe Reihen $\sum_{k=0}^{n} z_k$ können alle Definitionen aus $\mathbb{R}$ wörtlich übertragen werden, insbesondere die Konvergenz und die absolute Konvergenz. Majorantenkriterium, Quotientenkriterium und der Satz über das Cauchy-Produkt von Reihen gelten dann in $\mathbb{C}$ genau wie in $\mathbb{R}$, wobei die Majorante im Majorantenkriterium nach wie vor eine reelle Reihe ist.

7.4 Die komplexe Exponentialfunktion

Die eben genannten Übertragungen der Eigenschaften von reellen Reihen in die komplexen Zahlen erlauben es, die komplexe Exponentialfunktion genau wie ihr reelles Gegenstück zu definieren. Die (absolute) Konvergenz der Exponentialreihe folgt wie im Reellen aus dem Quotientenkriterium.

Definition 7.4 Wir definieren die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ als

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

□

Ganz analog zu den Beweisen im Reellen beweist man

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!} + r_{N+1}(z)$$

mit der Abschätzung

$$|r_{N+1}(z)| \leq 2\frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!} \qquad \text{für } |z| \leq 1 + \frac{N}{2}$$

und die Funktionalgleichung

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2).$$

Daraus folgt insbesondere

$$\exp(z)\exp(-z) = \exp(z - z) = \exp(0) = 1$$

und damit $\exp(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Ebenso wie in $\mathbb{R}$ lässt sich zudem beweisen, dass die Exponentialfunktion stetig ist. Im Folgenden werden wir wie im Reellen auch für $z \in \mathbb{C}$ wieder die Schreibweise e^z alternativ zu $\exp(z)$ verwenden.

Eine wichtige Eigenschaft der komplexen Exponentialfunktion, zu der es kein reelles Gegenstück gibt, zeigt der folgende Satz.

Satz 7.5 Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$.

Beweis: Beachte zunächst, dass für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ die Gleichung $\bar{z}_1\bar{z}_2 = \overline{z_1 z_2}$ gilt. Per Induktion folgt daraus $\bar{z}^k = \overline{z^k}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und alle $k \geq 0$. Schreiben wir abkürzend

$$s_n(z) := \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!},$$

so gilt

$$s_n(\bar{z}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\bar{z}^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \overline{\left(\frac{z^k}{k!}\right)} = \overline{\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}} = \overline{s_n(z)}.$$

Die Behauptung folgt dann aus

$$e^{\bar{z}} = \lim_{n\to\infty} s_n(\bar{z}) = \lim_{n\to\infty} \overline{s_n(z)} = \overline{\lim_{n\to\infty} s_n(z)} = \overline{e^z},$$

wobei wir bei der vorletzten Gleichheit (7.1) benutzt haben. □

Korollar 7.6 Für jede rein imaginäre Zahl $z = ib$ mit $b \in \mathbb{R}$ gilt $|e^z| = 1$.

Beweis: Es gilt

$$|e^z|^2 = e^z\overline{e^z} = e^z e^{\bar{z}} = e^z e^{-z} = 1.$$

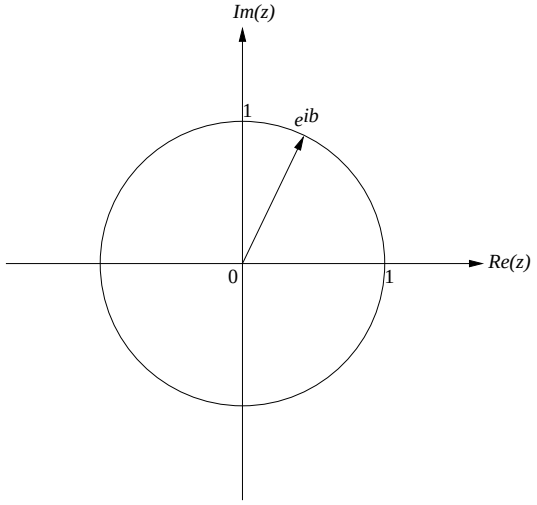


Abbildung 7.2: Veranschaulichung von e^{ib}

Daraus folgt die Behauptung wegen $\sqrt{1} = \pm 1$ und weil der Betrag einer komplexen Zahl stets nichtnegativ ist. □

In der komplexen Ebene dargestellt, liegen also alle komplexen Zahlen der Form e^{ib} auf dem Kreis mit Radius 1. Ein Beispiel ist in Abb. 7.2 dargestellt.

Eine wichtige Frage ist hierbei, wie die Position von e^{ib} auf dem Kreis von der Zahl $b \in \mathbb{R}$ abhängt. Die Zahl b ist gerade ein Maß für den Winkel zwischen der reellen Achse und dem Vektor e^{ib}, gemessen entgegen dem Uhrzeigersinn. Wir werden im folgenden Kapitel die Zahl π definieren und beweisen, dass $e^{i\pi/2} = i$, $e^{i\pi} = -1$, $e^{i3\pi/2} = -i$ und $e^{i2\pi} = e^{i0} = 1$ gilt. Für diese Werte ist b also gerade die Länge des Kreisbogens vom Punkt $1 = 1 + i0$ zum Vektor e^{ib}, wiederum gemessen entgegen dem Uhrzeigersinn. Folglich ist die Zahl b für 0, $\pi/2$, π,... nichts anderes als der Winkel gemessen im Bogenmaß, welches wir im Folgenden zur Winkelmessung stets verwenden werden. Im aus der Schule bekannten Gradmaß gelten dann die Entsprechungen $\pi/2 = 90°$, $\pi = 180°$, $3/2\pi = 270°$ und $2\pi = 360°$. Tatsächlich gilt die Beziehung zwischen b und der Bogenlänge nicht nur für diese Werte sondern für alle $b \in [0, 2\pi)$, was wir aber erst in der Analysis 2 beweisen werden.

Kapitel 8

Die trigonometrischen Funktionen

Stand:
14. Februar 2012

Aus der Schule sind die trigonometrischen Funktionen sin, cos, ... bereits bekannt. Hier führen wir sie von Grund auf ein und ermitteln ihre wichtigsten Eigenschaften.

8.1 Definition

Aus der Schule ist bekannt, dass der Sinus gerade das Verhältnis von Gegenkathete zu Hypothenuse in einem rechtwinkligen Dreieck ist und der Cosinus gerade das Verhältnis von Ankathete zu Hypothenuse angibt. Im speziellen Fall, dass die Hypothenuse die Länge 1 besitzt, ist der Sinus also gerade die Länge der Gegenkathete und der Cosinus die Länge der Ankathete.

Betrachten wir nun Abbildung 7.2 noch einmal, so können wir hier ein rechtwinkliges Dreieck einzeichnen, dessen Hypothenuse gerade der Vektor e^{ib} ist. Dies ist in Abb. 8.1 gemacht, in der wir die reelle Zahl b nun mit x bezeichnen.

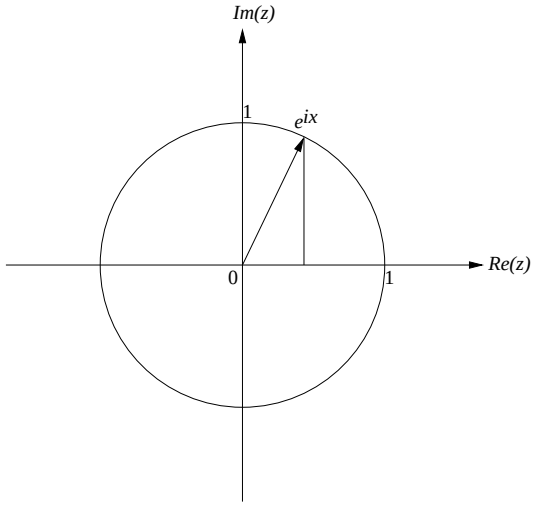


Abbildung 8.1: Rechtwinkliges Dreieck mit Hypothenuse e^{ix}

Offensichtlich ist die Länge der Hypothenuse hier gerade gleich $\exp(ix) = 1$, weswegen Sinus uns Cosinus hier gerade durch die Längen der entsprechenden Katheten gegeben sind, vgl. Abb. 8.2.

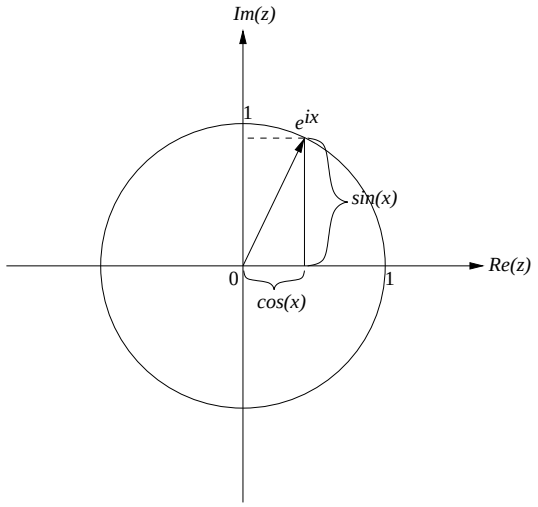


Abbildung 8.2: Sinus und Cosinus im rechtwinkligen Dreieck aus Abb. 8.1

Die Werte für Sinus und Cosinus sind also nichts anderes als die Koordinaten des Vektors $\exp(ix)$. Diese wiederum sind gerade der Realteil und der Imaginärteil dieser Funktion. Diese Beobachtung führt dies auf die folgende Definition.

Definition 8.1 Für jedes $x \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$\sin x := \mathrm{Im}(e^{ix}) \quad \text{und} \quad \cos x := \mathrm{Re}(e^{ix}).$$

□

Eine sofortige Konsequenz aus dieser Definition ist die *Eulersche Formel*

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Diese ist benannt nach dem schweizer Mathematiker Leonhard Euler (1707–1783), der den Zusammenhang zwischen der Exponentialfunktion und Sinus und Cosinus systematisch untersucht hat.

8.2 Eigenschaften von Sinus und Cosinus

Aus Definition 8.1 lassen sich die wichtigsten Eigenschaften von Sinus und Cosinus direkt ableiten.

Satz 8.2 Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt[1]

[1] Beachte: man schreibt $\sin^2 x$ und $\cos^2 x$ statt $(\sin x)^2$ und $(\cos x)^2$.

(1) $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \quad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$

(2) $\cos(-x) = \cos x, \quad \sin(-x) = -\sin x$

(3) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Beweis: (1) Für jede komplexe Zahl gilt $\mathrm{Re}(z) = (z + \bar{z})/2$ und $\mathrm{Im}(z) = (z - \bar{z})/(2i)$. Damit folgt die Behauptung wegen $e^{-ix} = e^{\overline{ix}} = \overline{e^{ix}}$.

(2) Mit (1) gilt

$$\cos(-x) = \frac{1}{2}(e^{i(-x)} + e^{-i(-x)}) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) = \cos x$$

und

$$\sin(-x) = \frac{1}{2i}(e^{i(-x)} - e^{-i(-x)}) = \frac{1}{2i}(e^{-ix} - e^{ix}) = -\frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) = -\sin x.$$

(3) Es gilt

$$\cos^2 x + \sin^2 x = \mathrm{Re}(e^{ix})^2 + \mathrm{Im}(e^{ix})^2 = |e^{ix}|^2 = 1.$$

□

Satz 8.3 Die Funktionen $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind stetig.

Beweis: Sei $x \in \mathbb{R}$ und x_n eine reelle Folge mit $x_n \to x$. Dann gilt mit Satz 7.3 (angewendet mit $a_n = 0$ und $b_n = x_n$) die Konvergenz $ix_n \to ix$ und wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion folgt $e^{ix_n} \to e^{ix}$. Wiederum mit Satz 7.3 folgt dann

$$\cos x_n = \mathrm{Re}(e^{ix_n}) \to \mathrm{Re}(e^{ix}) = \cos x \quad \text{und} \quad \sin x_n = \mathrm{Im}(e^{ix_n}) \to \mathrm{Im}(e^{ix}) = \sin x.$$

Dies zeigt die Stetigkeit für alle $x \in \mathbb{R}$. □

Satz 8.4 (Additionstheoreme) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y. \end{aligned}$$

Beweis: Aus der Funktionalgleichung $e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy}$ folgt mit der Eulerschen Formel

$$\begin{aligned} \cos(x+y) + i\sin(x+y) &= (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) \\ &= (\cos x \cos y - \sin x \sin y) + i(\sin x \cos y + \cos x \sin y). \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun, indem wir den Realteil bzw. den Imaginärteil auf beiden Seiten der Gleichung bilden. □

Satz 8.5 (Reihendarstellung von Sinus und Cosinus) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}\cos x &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \ldots \\ \sin x &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \ldots\end{aligned}$$

Diese Reihen konvergieren absolut.

Beweis: Für die Potenzen von i gilt

$$(i^0, i^1, i^2, i^3, i^4, i^5, i^6, \ldots) = (1, i, -1, -i, 1, i, -1, -i, \ldots).$$

Damit gilt

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Durch Bilden des Real- und des Imaginärteils folgen die behaupteten Reihendarstellungen. Die absolute Konvergenz folgt aus der absoluten Konvergenz der Exponentialreihe. □

Aus Satz 6.5 folgen sofort die Darstellungen

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + r_{2n+2}(x) \tag{8.1}$$

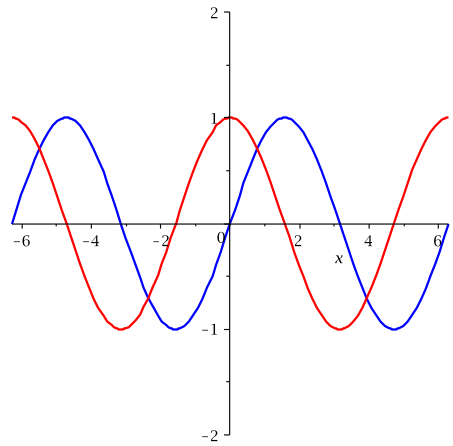
$$\sin x = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + r_{2n+3}(x), \tag{8.2}$$

in denen für die *Restglieder* die Abschätzung

$$|r_N(x)| \leq \frac{|x|^N}{N!} \quad \text{für } |x| \leq 1 + \frac{N}{2}$$

gilt. Diese Abschätzung folgt aus Satz 6.5, weil wir die fehlenden Glieder in der Reihendarstellung von cos und sin durch die Glieder der Exponentialreihe abschätzen können. Mit anderen Techniken, die wir später kennen lernen werden, kann man beweisen, dass diese Abschätzungen sogar für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten.

Mit Hilfe dieser Reihendarstellung kann man die Werte $\sin x$ und $\cos x$ nun näherungsweise berechnen und damit insbesondere die Graphen dieser Funktionen zeichnen.



Graphen von sin (blau) und cos (rot)

Aus (8.2) folgt die folgende Aussage.

Satz 8.6 Es gilt

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Beweis: Betrachte eine beliebige Folge $x_n \to 0$ mit $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für alle hinreichend großen n gilt dann $|x_n| < 3$. Aus (8.2) folgt für diese n

$$\sin x_n = x_n + r_3(x_n) \quad \text{mit } |r_3(x_n)| \leq \frac{|x_n|^3}{3!} < |x_n|^3$$

und damit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin x_n}{x_n} = 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{r_3(x_n)}{x_n}.$$

Wegen $|\frac{r_3(x_n)}{x_n}| \leq |x_n|^2 \to 0$ für $n \to \infty$ folgt $\lim_{n\to\infty} \frac{r_3(x_n)}{x_n} = 0$ und damit die Behauptung. □

8.3 Die Zahl π

Wir haben die Zahl π bereits an einigen Stellen verwendet und dabei die Kenntnis dieser Zahl aus der Schule vorausgesetzt. In diesem Abschnitt werden wir sie formal definieren. Dazu verwenden wir die folgende Aussage.

Satz 8.7 Die Funktion cos hat im Intervall $[0, 2]$ genau eine Nullstelle.

Bevor wir Satz 8.7 beweisen können, benötigen wir drei Lemmas.

Lemma 8.8 Es gilt $\cos 2 \leq -1/3$.

Beweis: Nach (8.1) gilt

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + r_4(x) \quad \text{mit } |r_4(x)| \leq \frac{|x|^4}{24} \text{ für } |x| \leq 4.$$

Also folgt für $x = 2$

$$\cos x \leq 1 - \frac{2^2}{2} + \frac{2^4}{24} = 1 - 2 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}.$$

□

Lemma 8.9 Für alle $x \in (0, 2]$ gilt $\sin x > 0$.

Beweis: Für $x \neq 0$ gilt

$$\sin x = x + r_3(x) = x\left(1 + \frac{r_3(x)}{x}\right).$$

Aus (8.2) folgt für alle $x \in (0, 2]$ (beachte, dass daraus $|x| \leq 3$ folgt)

$$\left|\frac{r_3(x)}{x}\right| \leq \frac{|x|^2}{6} \leq \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

und damit

$$\sin x \geq x\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}x > 0.$$

□

Lemma 8.10 Die Funktion cos ist im Intervall $[0, 2]$ streng monoton fallend.

Beweis: Sei $0 \leq x < x' \leq 2$. Wir müssen beweisen, dass $\cos x' < \cos x$ ist.

Mit $u := (x' + x)/2$ und $v = (x' - x)/2$ folgt $x = u - v$ und $x' = u + v$. Mit Satz 8.4 und Satz 8.2(2) gilt dann

$$\begin{aligned}
\cos x' - \cos x &= \cos(u + v) - \cos(u - v) \\
&= \cos u \cos v - \sin u \sin v - (\cos u \cos(-v) - \sin u \sin(-v)) \\
&= \cos u \cos v - \sin u \sin v - \cos u \cos(-v) + \sin u \sin(-v) \\
&= \cos u \cos v - \sin u \sin v - \cos u \cos v - \sin u \sin v \\
&= -2 \sin u \sin v
\end{aligned}$$

Aus der Definition von u und v und den Ungleichungen für x und x' folgt nun $0 < u < 2$ und $0 < v \leq 1$. Also folgt aus Lemma 8.9

$$\cos x' - \cos x = -2 \sin u \sin v < 0,$$

woraus die gewünschte Ungleichung direkt folgt. □

Beweis von Satz 8.7: Da $\cos 0 = \mathrm{Re}(e^0) = \mathrm{Re}(1) = 1$ und $\cos 2 \leq -1/3$ (nach Lemma 8.8) und der Cosinus stetig ist, besitzt die Funktion nach dem Zwischenwertsatz (Satz 5.10) eine Nullstelle x^* im Intervall $[0, 2]$. Aus der strengen Monotonie (Lemma 8.10) folgt dann für alle $x \in [0, x^*)$ die Ungleichung $\cos x > \cos x^* = 0$ und für alle $x \in (x^*, 2]$ die Ungleichung $\cos x < \cos x^* = 0$. Folglich ist x^* die einzige Nullstelle im Intervall $[0, 2]$. □

Definition 8.11 Sei x^* die eindeutige Nullstelle von cos im Intervall $[0,2]$. Dann definieren wir

$$\pi := 2x^*,$$

d.h. $\pi/2$ ist die eindeutige Nullstelle von cos im Intervall $[0,2]$. □

Mit dieser Definition kann $\pi/2$ (und damit natürlich auch π selbst) näherungsweise berechnet werden, beispielsweise durch die Intervallschachtelung wie im Beweis des Zwischenwertsatzes beginnend mit $a_0 = 0$ und $b_0 = 2$. Dabei muss man für die Intervall-Mittelpunkte c_n jeweils bestimmen, ob $\cos c_n > 0$ oder $\cos c_n < 0$ ist. Dazu verwendet man die Reihendarstellung (8.1) mit Restglied wie folgt:

Wir berechnen für ein $p \in \mathbb{N}$ den Wert

$$d_{n,p} := \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{c_n^{2k}}{(2k)!}$$

aus und testen, ob die Ungleichung $|d_{n,p}| > |r_{2p+2}(c_n)|$ gilt, was man wegen $|r_{2p+2}(c_n)| \leq |c_n|^{2p+2}/(2p+2)!$ mit Hilfe der Ungleichung

$$|d_{n,p}| > \frac{|c_n|^{2p+2}}{(2p+2)!} \tag{8.3}$$

überprüfen kann. Falls (8.3) nicht erfüllt ist, erhöhen wir p um 1 und wiederholen den Test. Dies machen wir so lange mit immer größeren p, bis die Ungleichung (8.3) gilt. Da

$$\lim_{p\to\infty} d_{n,p} = \cos c_n \qquad \text{und} \qquad \lim_{p\to\infty} \frac{|c_n|^{2p+2}}{(2p+2)!} = 0$$

gilt, ist (8.3) für hinreichend großes p stets erfüllt, falls $\cos c_n \neq 0$ ist. Dies ist aber immer der Fall: Da die c_n nach Konstruktion alle in $\mathbb{Q} \cap [0,2]$ liegen, die einzige Nullstelle $\pi/2$ des Cosinus in diesem Intervall aber nicht in $\mathbb{Q}$ liegt[2], kann der Fall $\cos c_n = 0$ nicht eintreten.

Falls dann $d_{n,p} > 0$ gilt, so folgt

$$\cos c_n = d_{n,p} + r_{2p+2}(c_n) \geq d_{n,p} - |r_{2p+2}(c_n)| > 0$$

und falls $d_{n,p} < 0$ gilt, so folgt

$$\cos c_n = d_{n,p} + r_{2p+2}(c_n) \leq d_{n,p} + |r_{2p+2}(c_n)| < 0.$$

Mit der eben erfolgten Definition von π kann man nun verschiedene Werte der komplexen Exponentialfunktion exakt (d.h. nicht nur näherungsweise über die bereits bekannte Reihendarstellung) berechnen.

Satz 8.12 Es gilt

$$e^{\frac{1}{2}i\pi} = i, \quad e^{i\pi} = -1, \quad e^{\frac{3}{2}i\pi} = -i, \quad e^{2i\pi} = 1.$$

[2] Wofür es leider keinen einfachen Beweis gibt, den wir mit den bisher bekannten Methoden führen könnten; wir kommen später noch einmal darauf zurück.

Beweis: Wegen $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ und $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ folgt

$$\sin^2\frac{\pi}{2} = 1 - \cos^2\frac{\pi}{2} = 1$$

und damit mit Lemma 8.9

$$\sin\frac{\pi}{2} = 1.$$

Also ist

$$e^{\frac{1}{2}i\pi} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i.$$

Die weiteren Werte folgen dann mit $n = 2, 3, 4$ aus der Gleichung

$$e^{n\frac{1}{2}i\pi} = \left(e^{\frac{1}{2}i\pi}\right)^n = i^n.$$

□

Damit können wir die folgende Wertetabelle für sin und cos aufstellen.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$\cos x$	1	0	-1	0	1

Aus den Additionstheoremen (Satz 8.4) folgt damit

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x \underbrace{\cos 2\pi}_{=1} - \sin x \underbrace{\sin 2\pi}_{=0} = \cos x \tag{8.4}$$

und mit analogen Rechnungen auch

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x \tag{8.5}$$

$$\cos(x + \pi) = -\cos x, \qquad \sin(x + \pi) = -\sin x \tag{8.6}$$

sowie

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \qquad \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right). \tag{8.7}$$

Die Gleichungen (8.4) und (8.5) zeigen, dass die Werte von sin und cos sich wiederholen, wenn x um 2π zunimmt. Man sagt, dass Sinus und Cosinus *periodisch* mit *Periode* 2π sind. Beachte, dass aus diesen Gleichungen per Induktion

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x \quad \text{und} \quad \sin(x + 2k\pi) = \sin x \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z} \tag{8.8}$$

folgt.

Das folgende Korollar gibt alle Nullstellen von sin und cos an.

Korollar 8.13 Die Nullstellen des Sinus sind gegeben durch die Menge

$$\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots, -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 2\pi, \ldots\}$$

und die Nullstellen des Cosinus durch die Menge

$$\{\pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} = \left\{\ldots, -\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots\right\}.$$

Beweis: Nach Definition von $\pi/2$ und wegen $\cos x = \cos(-x)$ folgt $\cos x > 0$ für $-\pi/2 < x < \pi/2$. Aus (8.7) folgt damit

$$\sin x > 0 \quad \text{für } 0 < x < \pi$$

und aus (8.6) folgt daraus

$$\sin x < 0 \quad \text{für } \pi < x < 2\pi.$$

Folglich sind die in der obigen Wertetabelle angegeben Nullstellen 0, π und 2π die einzigen Nullstellen des Sinus im Intervall $[0, 2\pi]$. Die angegebene Nullstellenmenge folgt dann direkt aus der 2π-Periodizität des Sinus gemäß (8.8).

Die Aussage für den Cosinus folgt dann aus (8.7). □

Eine sofortige Folgerung hieraus ist das folgende Korollar.

Korollar 8.14 Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $e^{ix} = 1$ genau dann, wenn $x = 2k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ ist.

Beweis: Es gilt

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Sei nun $e^{ix} = 1$. Dann ist insbesondere $e^{ix} \in \mathbb{R}$ und folglich muss $\sin x = 0$ gelten, woraus $x = 2k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ folgt.

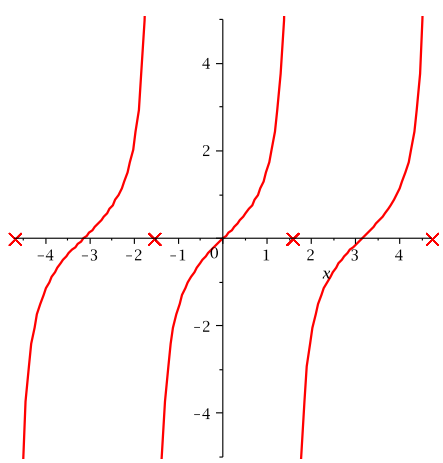
Sei umgekehrt $x = 2k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Dann ist $\sin x = 0$ und aus der Wertetabelle und der 2π-Periodizität (8.8) des Cosinus folgt $\cos x = 1$. Also folgt $e^{ix} = 1$. □

Definition 8.15 Für $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ definieren wir den *Tangens* als

$$\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}.$$

□

Der Tangens ist also eine Funktion, die für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $\cos x \neq 0$ definiert ist.



Graph von $\tan x$. Die Definitionslücken sind mit Kreuzen gekennzeichnet.

8.4 Umkehrfunktionen

Satz 8.16 (a) Die Funktion cos ist auf $[0, \pi]$ streng monoton fallend mit $\cos([0, \pi]) = [-1, 1]$.

(b) Die Funktion sin ist auf $[-\pi/2, \pi/2]$ streng monoton wachsend mit $\sin([0, \pi]) = [-1, 1]$.

(c) Die Funktion tan ist auf $(-\pi/2, \pi/2)$ streng monoton wachsend mit $\tan((-\pi/2, \pi/2)) = \mathbb{R}$.

Insbesondere besitzen die drei Funktionen damit nach Satz 6.13 Umkehrfunktionen

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi], \quad \arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2], \quad \arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$$

(gesprochen: Arcus-Cosinus, Arcus-Sinus und Arcus-Tangens).

Beweis: (a) Nach Lemma 8.10 ist der cos auf $[0, 2]$ und damit insbesondere auf $[0, \pi/2]$ streng monoton fallend. Wegen $\cos(x) = \cos(-x)$ ist er dann auf $[-\pi/2, 0]$ streng monoton wachsend und damit wegen (8.6) auf $[\pi/2, \pi]$ streng monoton fallend. Da der Cosinus stetig ist mit $\cos 0 = 1$ und $\cos \pi = -1$ folgt $\cos([0, \pi]) = [-1, 1]$ aus dem Zwischenwertsatz (Satz 5.10).

(b) Folgt aus (a) wegen $\sin x = \cos(\pi/2 - x)$.

(c) Die strenge Monotonie folgt aus der bereits bewiesenen strengen Monotonie von sin und cos. Um zu beweisen, dass $\tan((-\pi/2, \pi/2)) = \mathbb{R}$ gilt, zeigen wir, dass die uneigentliche Konvergenz

$$\text{(i)} \lim_{\substack{x \to \pi/2 \\ x < \pi/2}} \tan x = \infty \quad \text{und} \quad \text{(ii)} \lim_{\substack{x \to -\pi/2 \\ x > -\pi/2}} \tan x = -\infty$$

gilt. Wegen der Stetigkeit des Tangens folgt dann aus dem Zwischenwertsatz, dass jedes $y \in \mathbb{R}$ im Bild von $\tan((-\pi/2, \pi/2))$ liegt.

(i) Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $x_n \to \pi/2$ und $x_n < \pi/2$. Dann gilt $\sin x_n \to 1$ wegen der Stetigkeit des Sinus und $\sin \pi/2 = 1$ und daher mit der Quotientenregel aus Satz 3.13

$$y_n := \frac{\cos x_n}{\sin x_n} \to \frac{0}{1} = 0.$$

Wählen wir nun $n_0 \in \mathbb{N}$ so groß, dass $x_n > 1$ für alle $n \geq n_0$ gilt, so folgt zudem $\cos x_n > 0$ und $\sin x_n > 0$ und damit auch $y_n > 0$. Folglich erhalten wir mit Satz 3.17(b) die gewünschte uneigentliche Konvergenz

$$\tan x_n = \frac{1}{y_n} \to \infty.$$

(ii) Wegen

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

folgt die Aussage aus (i). $\square$

8.5 Polarkoordinaten

Wir kommen in diesem Abschnitt noch einmal auf die geometrische Veranschaulichung der komplexen Zahlen aus Abschnitt 7.2 zurück. Jede komplexe Zahl $z = a + ib$ kann demnach als Punkt in der komplexen Ebene mit den Koordinaten (a, b) aufgefasst werden. Der folgende Satz gibt eine alternative Darstellung für die komplexen Zahlen und damit auch für die Punkte in der zweidimensionalen Ebene an. Die geometrische Interpretation werden wir nach dem Beweis des Satzes geben.

Satz 8.17 (Polarkoordinaten) Jede komplexe Zahl $z = a + ib \in \mathbb{C}$ lässt sich schreiben als

$$z = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

mit $r = |z| \in \mathbb{R}$ (beachte: $r \geq 0$) und $\varphi \in [0, 2\pi)$. Im Fall $z \neq 0$ ist φ zudem eindeutig bestimmt.

Beweis: Für $z = 0$ ist die Aussage für $r = 0$ und beliebiges $\varphi \in [0, 2\pi)$ sicherlich richtig.

Im Fall $z \neq 0$ setzen wir $r := |z|$ und $\zeta := z/r$. Dann gilt $|\zeta| = 1$. Schreiben wir $\zeta = c + id$, so gilt

$$c^2 + d^2 = |\zeta|^2 = 1,$$

woraus insbesondere $c^2 \leq 1$ und damit auch $|c| \leq 1$ folgt. Also ist $\alpha := \arccos c$ definiert und aus $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ folgt

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \pm\sqrt{1 - c^2} = \pm d.$$

Wir setzen nun $\varphi := \alpha$, falls $\sin\alpha = d$ und $\varphi := 2\pi - \alpha$ sonst. Weil die Werte von arccos im Intervall $[0, \pi]$ liegen, folgt damit $\varphi \in [0, 2\pi)$. Im Fall $\varphi = \alpha$ folgt

$$e^{i\varphi} = \cos\alpha + i\sin\alpha = c + id = \zeta$$

und im Fall $\varphi = 2\pi - \alpha$ erhalten wir wegen der Periodizität und Satz 8.2(2)

$$e^{i\varphi} = \cos(2\pi - \alpha) + i\sin(2\pi - \alpha) = \cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha) = \cos\alpha - i\sin\alpha = c + id = \zeta.$$

In beiden Fällen folgt also

$$re^{i\varphi} = r\zeta = z.$$

Die Eindeutigkeit von φ folgt, weil für $\varphi, \varphi' \in [0, 2\pi)$ mit $\varphi \neq \varphi'$ wegen der Monotonie von sin und cos mindestens eine der beiden Ungleichungen $\cos\varphi \neq \cos\varphi'$ oder $\sin\varphi \neq \sin\varphi'$ gilt. Daher kann es für $r \neq 0$ keine zwei Winkel geben, die die gleiche Zahl z liefern. □

Tatsächlich sind die Polarkoordinaten für alle Winkel $\varphi \in \mathbb{R}$, also auch für solche mit $\varphi \notin [0, 2\pi)$ definiert, denn natürlich ist $re^{i\varphi}$ auch für solche Winkel eine komplexe Zahl. Die Aussage des Satzes ist aber, dass man für solche φ keine "neuen" Zahlen hinzugewinnt. Es reicht, $\varphi \in [0, 2\pi)$ zu wählen, um alle möglichen $z \in \mathbb{C}$ in der Form $z = re^{i\varphi}$ schreiben zu können.

Abbildung 8.3 veranschaulicht die Polarkoordinaten: stellen wir die Zahl $z \in \mathbb{C}$ als Vektor in der komplexen Ebene dar, so ist r gerade die Länge dieses Vektors und φ der Winkel

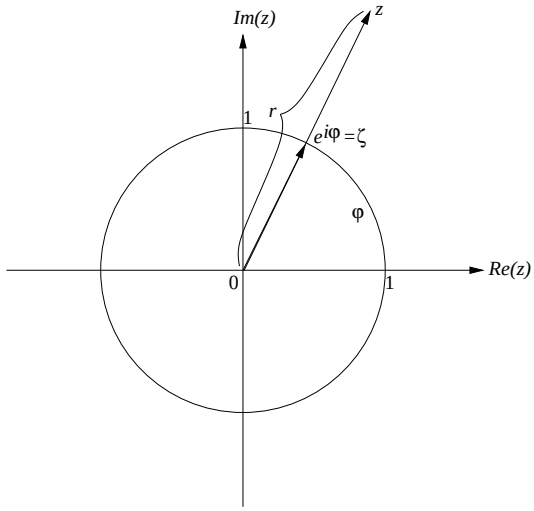


Abbildung 8.3: Veranschaulichung der Polarkoordinaten

zwischen der reellen Achse und diesem Vektor. Winkel $\varphi \notin [0, 2\pi)$ entsprechen dann entweder Drehrichtungen entgegen dem Uhrzeigersinn oder mehrfachen "Umdrehungen" von z. Dies erklärt auch geometrisch, warum man damit keine neuen komplexen Zahlen erhält.

Aus Satz 8.17 folgt sofort, dass sich jeder zweidimensionale Punkt mit den Koordinaten (x, y), $x, y \in \mathbb{R}$, in der Form

$$(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$$

mit $r \geq 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ schreiben lässt, da sich jeder solche Punkt eindeutig als komplexe Zahl $z = x + iy$ ausdrücken lässt.

In der Darstellung in Polarkordinaten können wir nun auch die bereits in Abschnitt 7.2 gegebene geometrische Veranschaulichung der Multiplikation zweier komplexer Zahlen erklären: Für $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ und $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ gilt gerade

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

Die Längen werden also multipliziert und die Winkel addiert.

Wir beenden diesen Abschnitt mit einer Aussage über spezielle Zahlen der Form e^{ix}.

Satz 8.18 (n-te Einheitswurzeln) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 2$. Dann besitzt die Gleichung $z^n = 1$ genau n komplexe Lösungen von der Form

$$\zeta_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Diese werden *n-te (komplexe) Einheitswurzeln* genannt.

Beweis: Mit Korollar 8.14 folgt

$$(e^{i\frac{2k\pi}{n}})^n = e^{i\frac{2k\pi}{n}n} = e^{i2k\pi} = 1.$$

Also lösen die komplexen Einheitswurzeln die angegebene Gleichung.

Sei umgekehrt $z \in \mathbb{C}$ eine beliebige Lösung der angegebenen Gleichung. Weil dann $|z| = 1$ gelten muss (denn es gilt $|z|^n = |z^n| = |1| = 1$, was wegen $|z| \in \mathbb{R}$ und $|z| \geq 0$ nur die Lösung $|z| = 1$ zulässt), gilt $r = 1$ in der Polarkoordinatendarstellunf von z, also

$$z = e^{i\varphi}.$$

Wegen $1 = z^n = e^{i\varphi n}$ muss nach Korollar 8.14 die Gleichung $\varphi n = 2k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ gelten. Also folgt

$$\varphi = \frac{2k\pi}{n}.$$

Wegen $\varphi \in [0, 2\pi)$ muss $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ gelten, weswegen die Lösung eine n-te Einheitswurzel ist. $\square$

Kapitel 9

Differentiation

Stand:
14. Februar 2012

In diesem Kapitel führen wir das Konzept der Ableitung einer Funktion ein und besprechen die wichtigsten Recheregeln.

9.1 Definition und Beispiele

Anschaulich ist die Ableitung einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ an einer Stelle $x \in D$ eine reelle Zahl (bezeichnet mit $f'(x) \in \mathbb{R}$), die die Steigung des Funktionsgraphen im Punkt $(x, f(x))$ angibt. Man kann die Definition der Ableitung direkt aus dieser Anschauung herleiten: nehmen wir an, wir wollen die Steigung des Funktionsgraphen in einem Punkt bestimmen. Dann können wir diese näherungsweise berechnen, indem wir eine kleine reelle Zahl $h \neq 0$ wählen und die Steigung der Geraden durch die Punkte $(x, f(x))$ und $(x + h, f(x + h))$ betrachten (diese Gerade heißt *Sekante*). Je kleiner $|h|$ ist, desto genauer stimmt die Steigung der Sekante dann mit der Steigung der Funktion im Punkt x überein, vgl. Abbildung 9.1.

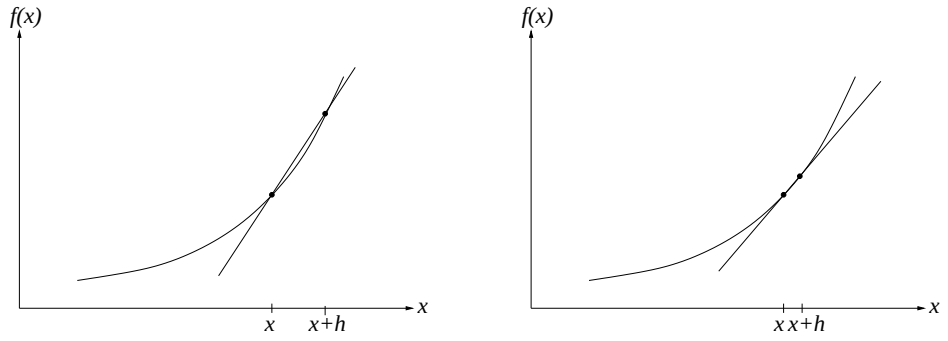


Abbildung 9.1: Veranschaulichung der Ableitung über die Steigung

Lässt man nun $h \to 0$ streben, so wird die Steigung der Sekante gegen die Steigung des

Funktionsgraphen konvergieren. Da die Steigung der Sekante gerade durch den Quotienten

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

den sogenannten *Differenzenquotienten*, gegeben ist, führt dies auf die folgende Definition.

Definition 9.1 Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}$ heißt *differenzierbar* in einem Punkt $x \in D$, wenn der Grenzwert

$$f'(x) := \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0, x+h\in D}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

existiert. Insbesondere setzen wir dabei voraus, dass mindestens eine Folge $h_n \to 0$ mit $h_n \neq 0$ und $x + h_n \in D$ existiert.

Der Wert $f'(x) \in \mathbb{R}$ heißt dann die *Ableitung* (oder auch das *Differential*) von f in x.

□

Alternativ kann die Ableitung auch über den Grenzwert

$$\lim_{\substack{y\to x\\ y\neq x, y\in D}} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

definiert werden, denn die beiden Definition lassen sich mit $y = x + h$ bzw. $h = y - x$ einfach ineinander umschreiben.

Beispiel 9.2 Bei den folgenden Beispielen schreiben wir die Bedingungen $h \neq 0, x+h \in D$ unter dem lim nicht explizit hin, um die Schreibweise zu vereinfachen. Sie werden aber nach wie vor stets verlangt.

(a) konstante Funktion $f(x) = c$:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) affin lineare Funktion $f(x) = a + bx$:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a+b(x+h)-a-bx}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{bh}{h} = \lim_{h\to 0} b = b$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Insbsondere gilt für die identische Funktion $f(x) = x$ (also $a = 0$ und $b = 1$) gerade $f'(x) = 1$.

(c) Parabel $f(x) = x^2$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2hx+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

(d) Hyperbelfunktion $f(x) = 1/x$ mit $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x-x-h}{(x+h)x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{hx^2+h^2x} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{x^2+hx} = -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

für alle $x \in D$.

(e) Exponentialfunktion $f(x) = e^x$:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^x e^h - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} e^x \frac{e^h-1}{h} = e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = e^x$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, wobei wir im letzten Schritt Satz 6.25 verwendet haben. Die Exponentialfunktion ist also gleich ihrer eigenen Ableitung.

(f) Cosinus $f(x) = \cos x$:
Im Beweis von Lemma 8.10 wurde die Gleichung

$$\cos x' - \cos x = -2\sin\left(\frac{x'+x}{2}\right)\sin\left(\frac{x'-x}{2}\right)$$

bewiesen. Setzen wir $x' = x + h$, so folgt

$$\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \frac{-2\sin\left(\frac{2x+h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h} = -\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}.$$

Wegen der Stetigkeit des Sinus folgt nun

$$\lim_{h\to 0} \sin\left(x+\frac{h}{2}\right) = \sin x$$

und aus Satz 8.6 folgt

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1.$$

Also gilt nach der Produktregel für Grenzwerte

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = -\lim_{h\to 0} \sin\left(x+\frac{h}{2}\right) \lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = -\sin x.$$

(g) Sinus $f(x) = \sin x$:
Mit einer ähnlichen Rechnung wie für den Cosinus folgt

$$f'(x) = \cos x.$$

(h) Absolutbetrag $f(x) = |x|$
Behauptung: diese Funktion ist in $x = 0$ nicht differenzierbar.
Beweis: Für Folgen $h_n \to 0$, mit $h_n > 0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|0+h_n|-|0|}{h_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{h_n}{h_n} = 1.$$

Für Folgen $h_n \to 0$, mit $h_n < 0$ gilt hingegen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|0+h_n|-|0|}{h_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{-h_n}{h_n} = -1.$$

Also existiert der Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} \frac{|0+h|-|0|}{h}$$

nicht. Betrachtet man den Graphen der Betragsfunktion, so sieht man, dass dieser in $x = 0$ einen Knick aufweist. Anschaulich ist Differenzierbarkeit in einem Punkt x tatsächlich nichts anderes als die Eigenschaft, dass der Graph in x keinen Knick besitzt. Statt "differenzierbar" wird daher oft auch der Begriff "glatt" benutzt.

□

Beispiel 9.3 (Ableitungen in Anwendungen) Das Konzept der Ableitung hat vielfältige Interpretationen in verschiedenen Anwendungsbereichen der Mathematik. Wir geben hier zwei Beispiele.

(a) Der *Grenzsteuersatz* gibt an, wie hoch der Einkommensteuersatz auf einen Gehaltszuwachs ist. Zahlt man z.B. bei 40.000€ Jahreseinkommen 8.000€ Steuern, und auf 40.002€ Einkommen 8.001€ Steuern, so zahlt man auf die zusätzlichen 2€ Einkommen tatsächlich 50% Steuern, denn es gilt

$$\frac{8.001€ - 8000€}{2€} \cdot 100\% = \frac{1}{2} \cdot 100\% = 50\%.$$

Bezeichnen wir Höhe der Steuer auf ein Einkommen von x€ allgemein mit $f(x)$€, so ist der Steuersatz für zusätzliche h€ gegeben durch

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \cdot 100\%.$$

Der Grenzsteuersatz ist nun gerade den Grenzwert für $h \to 0$ dieses Ausdrucks, d.h. der Steuersatz auf ein "beliebig kleines" zusätzliches Einkommen, also

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \cdot 100\% = f'(x) \cdot 100\%.$$

Der Grenzsteuersatz ist also gerade die Ableitung der Höhe der Steuer in Prozenten ausgedrückt.

(b) Beim *radioaktiven Zerfall* ist die Abnahme der radioaktiven Teilchen in einem kleinen Zeitintervall ungefähr proportional zu der gerade vorhandenen Anzahl der Teilchen, wobei diese Beziehung immer genauer wird, je kleiner das betrachtete Zeitintervall ist. Formal bedeutet das das folgende: Bezeichnen wir die Masse der Teilchen zur Zeit x mit $f(x)$ und bezeichnen wir mit $\lambda > 0$ die Proportionalitätskonstante der Abnahme, so gilt

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = -\lambda f(x) + r(h), \tag{9.1}$$

wobei der "Fehlerterm" $r(h)$ gegen Null konvergiert für $h \to 0$. Für $h \to 0$ erhalten wir so

$$f'(x) = -\lambda f(x). \tag{9.2}$$

Wir werden später in Beispiel 9.14(b) sehen, welche Funktion diese Gleichung erfüllt.

□

Eine äquivalente Beschreibung der Differenzierbarkeit gibt der folgende Satz.

Satz 9.4 Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $x \in D$ ein Punkt, so dass mindestens eine Folge $h_n \to 0$, $h_n \neq 0$ mit $x+h_n \in D$ existiert. Dann ist eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ genau dann in x differenzierbar, wenn ein $a \in \mathbb{R}$ und eine Funktion $\varphi : D \to \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{h\to 0} \frac{\varphi(h)}{h} = 0$$

existiert, so dass

$$f(y) = f(x) + a(y-x) + \varphi(y-x)$$

gilt für alle $y \in D$. In diesem Fall gilt $f'(x) = a$.

Beweis: Sei f in x differenzierbar. Setzen wir $a := f'(x)$ und definieren $\varphi(h) := f(x+h) - f(x) - ha$, so folgt mit $h = y - x$ gerade die gesuchte Gleichung

$$f(x) + a(y-x) + \varphi(y-x) = f(x) + ha + \varphi(h) = f(x+h) = f(y).$$

Zudem gilt

$$\lim_{h\to 0} \frac{\varphi(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - ha}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - a = f'(x) - f'(x) = 0,$$

also gerade die gewünschte Eigenschaft.

Gelte umgekehrt die Gleichung $f(y) = f(x) + a(y-x) + \varphi(y-x)$ mit φ wie im Satz angegeben. Dann folgt mit $y = x + h$, also $h = y - x$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{ah + \varphi(h)}{h} = a + \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(h)}{h} = a.$$

Also ist f differenzierbar in x mit $f'(x) = a$. □

Bemerkung 9.5 (i) Die Bedingung

$$\lim_{h\to 0} \frac{\varphi(h)}{h} = 0$$

schreibt man kurz auch als

$$\varphi(h) = o(h).$$

Der Term $o(h)$ wird dabei *Landau-Symbol* genannt. Anschaulich bedeutet diese Bedingung, dass $\varphi(h)$ für $h \to 0$ so viel schneller gegen Null konvergiert als h selbst, dass der Quotient

immer noch gegen Null konvergiert. Beispiele für solche Funktionen sind z.B. $\varphi(h) = h^2$ (wegen $\varphi(h)/h = h \to 0$ für $h \to 0$) oder $\varphi(h) = h\sqrt{h}$ (wegen $\varphi(h)/h = \sqrt{h} \to 0$ für $h \to 0$).

(ii) In informeller Schreibweise kann man die Aussage von Satz 9.4 als

$$f(y) \approx f(x) + f'(x)(y - x)$$

schreiben. Das Zeichen "$\approx$" (gesprochen: ungefähr gleich) bedeutet hier, dass die zur Gleichheit fehlenden Terme im Betrag deutlich kleiner als $|x - y|$ sind, falls $|x - y|$ hinreichend klein ist. Da die fehlenden Terme gerade $\varphi(y - x)$ sind, folgt dies gerade aus der Konvergenzeigenschaft von φ.

(iii) Die approximierende Funktion $g(y) := f(x) + f'(x)(y - x)$ aus (ii) ist geometrisch nichts anderes als die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x, f(x))$. □

Beispiel 9.6 (a) Für die Parabel $f(x) = x^2$ gilt $a = f'(x) = 2x$ und damit

$$\varphi(h) = f(x + h) - f(x) - ha = (x + h)^2 - x^2 - 2hx = x^2 + 2hx + h^2 - x^2 - 2hx = h^2.$$

Diese Funktion erfüllt nach Bemerkung 9.5(i) gerade $\lim_{h\to 0} \varphi(h)/h = 0$.

Die Tangente im Punkt $(x, f(x))$ ist dann gegeben durch $g(y) = x^2+2x(y-x) = -x^2+2xy$.

(b) Sei f eine Funktion, die das radioaktive Zerfallsgesetz $f'(x) = -\lambda f(x)$ für ein $x \in \mathbb{R}$ erfüllt (und die dann natürlich differenzierbar in x ist). Dann gilt mit $y = x + h$

$$f(x + h) = f(x) - \lambda f(x)h + \varphi(h)$$

bzw. nach Division durch h

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = -\lambda f(x) + \frac{\varphi(h)}{h}.$$

Das bedeutet, dass die Funktion die Gleichung (9.2) mit $r(h) = \varphi(h)/h$ erfüllt, für die dann $r(h) \to 0$ für $h \to 0$.

Wir können also nicht nur wie in Beispiel 9.3(b) die Gleichung (9.2) aus der Gleichung (9.1) folgern, sondern mit Satz 9.4 auch umgekehrt die Gleichung (9.1) aus der Gleichung (9.2). □

9.2 Rechenregeln und Eigenschaften der Differentiation

Satz 9.7 Wenn eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $x \in D$ differenzierbar ist, so ist f auch stetig in x.

Beweis: Zu beweisen ist $\lim_{y\to x} f(y) = f(x)$. Mit den Bezeichnungen aus Satz 9.4 gilt $\lim_{y\to x} a(y - x) = 0$ und

$$\lim_{y\to x} \varphi(y - x) = \lim_{y\to x} \frac{\varphi(y - x)}{y - x}(y - x) = \lim_{y\to x} \frac{\varphi(y - x)}{y - x} \lim_{y\to x}(y - x) = 0 \cdot 0 = 0.$$

Also folgt die Behauptung wegen

$$\lim_{y\to x} f(y) = \lim_{y\to x} f(x) + a(y-x) + \varphi(y-x) = f(x) + \lim_{y\to x} a(y-x) + \lim_{y\to x} \varphi(y-x) = f(x).$$

□

Satz 9.8 Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ in $x \in D$ differenzierbar und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Funktionen $f+g, \lambda f$ und $fg : D \to \mathbb{R}$ in x differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned}
(f+g)'(x) &= f'(x) + g'(x) \\
(\lambda f)'(x) &= \lambda f'(x) \\
(fg)'(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad \text{(Produktregel).}
\end{aligned}$$

Ist $g(y) \neq 0$ für alle $y \in D$, so ist auch $\frac{f}{g} : D \to \mathbb{R}$ in x differenzierbar und es gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \quad \text{(Quotientenregel).}$$

Beweis: Die ersten beiden Aussagen folgen aus den Gleichheiten

$$\frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

und

$$\frac{(\lambda f)(x+h) - (\lambda f)(x)}{h} = \lambda \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

und den Rechenregeln für Grenzwerte.

Die Produktregel folgt aus

$$\begin{aligned}
(fg)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big(f(x+h)(g(x+h) - g(x)) + (f(x+h) - f(x))g(x)\Big) \\
&= \lim_{h\to 0} f(x+h)\frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x) \\
&= f(x)g'(x) + f'(x)g(x),
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Stetigkeit von f in x verwendet haben.

Die Quotientenregel beweisen wir zunächst für die konstante Funktion $f(x) := 1$ für alle $x \in D$. Damit gilt

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{g}\right)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}\right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x+h)g(x)}\left(\frac{g(x) - g(x+h)}{h}\right) = \frac{-g'(x)}{g(x)^2},
\end{aligned}$$

wobei wir die Stetigkeit von g in x und $g(x+h) \neq 0$ verwendet haben (beachte, dass wir hier bei der Bildung des Grenzwerts stets $x+h \in D$ voraussetzen, auch wenn wir das nicht explizit hinschreiben).

Der allgemeine Fall folgt nun aus der Produktregel mit

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x) = f'(x)\frac{1}{g(x)} + f(x)\left(\frac{1}{g}\right)'(x) \\ &= \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{g(x)^2} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.\end{aligned}$$

□

Beispiel 9.9 (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Behauptung: $f'(x) = nx^{n-1}$

Beweis per Induktion über n: Für $n = 0$ folgt die Behauptung aus Beispiel 9.2(a). Für $n \to n+1$ gilt mit der Produktregel, der Induktionsannahme und Beispiel 9.2(b) (mit $a = 0$ und $b = 1$)

$$f'(x) = (x^{n-1}x)' = \underbrace{(x^{n-1})'}_{=(n-1)x^{n-2}} x + x^{n-1} \underbrace{(x)'}_{=1} = (n-1)x^{n-2}x + x^{n-1} = nx^{n-1}.$$

□

(b) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{-n} = 1/x^n$, $n \in \mathbb{N}$.
Setzen wir $g(x) := 1/f(x) = x^n$, so gilt mit der Quotientenregel

$$f'(x) = \left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \frac{-g'(x)}{g(x)^2} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -n\frac{1}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}.$$

Fassen wir (a) und (b) zusammen, so erhalten wir für alle $k \in \mathbb{Z}$ für $f(x) = x^k$ (mit $x \neq 0$ falls $k < 0$) die Gleichung $f'(x) = kx^{k-1}$. Im Fall $k \geq 0$ folgt dies sofort aus (a) mit $n = k$ und im Fall $k < 0$ können wir (b) mit $n = -k$ anwenden und erhalten $f'(x) = -nx^{-n-1} = kx^{k-1}$.

(c) Für $f(x) = \tan x = \sin x / \cos x$ folgt mit der Quotientenregel

$$f'(x) = \frac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

(d) Für $f(x) = a\exp(x)$ gilt für alle $a \in \mathbb{R}$ die Gleichung $f'(x) = a\exp'(x) = a\exp(x)$ nach Beispiel 9.2(e) und Satz 9.8 mit $\lambda = a$. Also gilt auch für die Funktion $f(x) = a\exp(x)$, dass die Ableitung gleich der Funktion selbst ist.

□

Satz 9.10 (Ableitung der Umkehrfunktion) Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall, $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige und streng monotone Funktion und $f^{-1} : D' \to \mathbb{R}$ ihre auf

$D' = f(D)$ definierte (und nach Satz 6.13 existierende und stetige) Umkehrfunktion. Dann gilt:

Ist f in einem Punkt $y \in D$ differenzierbar mit $f'(y) \neq 0$, dann ist f^{-1} im Punkt $x = f(y)$ differenzierbar und es gilt

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Beweis: Sei h_n eine beliebige Folge mit $h_n \to 0$, so dass für $x_n := x + h_n$ die Bedingunen $x_n \in D'$ und $x_n \neq x$ gelten. Setzen wir $y_n := f^{-1}(x_n)$ so folgt aus der Stetigkeit von f^{-1} die Konvergenz $y_n = f^{-1}(x_n) \to f^{-1}(x) = y$. Wegen $f^{-1}(D') = D$ folgt $y_n \in D$ und weil f^{-1} streng monoton und damit injektiv ist, folgt aus $x_n \neq x$ auch $y_n \neq y$. Also können wir schreiben

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{-1}(x+h_n) - f^{-1}(x)}{h_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{-1}(x_n) - f^{-1}(x)}{x_n - x} = \lim_{n\to\infty} \frac{y_n - y}{f(y_n) - f(y)} = \frac{1}{f'(y)},$$

wobei wir im letzten Schritt die Quotientenregel aus Satz 3.13 benutzt haben, den wir wegen $f'(y) \neq 0$ anwenden dürfen. □

Beispiel 9.11 Für $\ln(x) = \exp^{-1}(x)$ gilt

$$\ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln x)} = \frac{1}{\exp(\ln x)} = \frac{1}{x}.$$

□

Damit können wir nun den **Beweis von Satz 6.3** führen, d.h. den Beweis der Gleichung

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Für $x = 0$ folgt die Behauptung sofort wegen $\exp(0) = 1$. Für $x \neq 0$ gilt wegen $\ln(1) = 0$

$$n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = x \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \ln(1)}{\frac{x}{n}}$$

und damit wegen $\ln'(1) = 1/1 = 1$

$$\lim_{n\to\infty} n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = x \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \ln(1)}{\frac{x}{n}} = x \ln'(1) = x.$$

Wegen $a^b = \exp(b \ln(a))$ folgt

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right)$$

und folglich wegen der Stetigkeit von exp

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \exp\left(\lim_{n\to\infty} n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right) = \exp(x).$$

□

Weitere Beispiele für die Anwendung von Satz 9.10 sind die folgenden Funktionen.

Beispiel 9.12 (a) $\arcsin : [-1,1] \to \mathbb{R}$. Für $x \in (-1,1)$ ist $y = \arcsin x \in (-\pi/2, \pi/s)$ und damit $\sin' y = \cos y \neq 0$. Also folgt aus Satz 9.10 für $x \in (-1,1)$

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}.$$

Verwenden wir zudem die Gleichung $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1-x^2}$ so können wir den Ausdruck noch vereinfachen zu

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(b) $\arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wegen $\arctan(x) \in (-\pi/2, \pi/2)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt (vgl. Beispiel 9.9(c)) $\tan'(\arctan x)) = 1/\cos^2(\arctan x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit ist Satz 9.10 anwendbar für alle $x \in \mathbb{R}$ und es folgt

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan x))} = \cos^2(\arctan x).$$

Mit $y = \arctan x$ gilt zudem

$$x^2 = \tan^2(y) = \frac{\sin^2 y}{\cos^2 y} = \frac{1-\cos^2 y}{\cos^2 y} = \frac{1}{\cos^2 y} - 1$$

und folglich

$$\cos^2(\arctan x) = \cos^2 y = \frac{1}{1+x^2}.$$

Damit lässt sich die Formel für $\arctan'$ vereinfachen zu

$$\arctan'(x) = \cos^2(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

□

Satz 9.13 (Kettenregel) Seien $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : E \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(D) \subset E$. Sei f in $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar und g in $y := f(x) \in E$ differenzierbar. Dann ist die Komposition $g \circ f$ in x differenzierbar und es gilt

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

Beweis: Nach Satz 9.4 (angewendet mit $y = x + h$ und $x = x$ bzw. $y = y + \tilde{h}$ und $x = y$) gilt

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \varphi_f(h)$$

und

$$g(y+\tilde{h}) = g(y) + g'(y)\tilde{h} + \varphi_g(\tilde{h})$$

mit $\varphi_f(h)/h \to 0$ und $\varphi_g(h)/h \to 0$ für $h \to 0$. Aus der zweiten Gleichung folgt dabei $\varphi_g(\tilde{h}) = 0$ für $\tilde{h} = 0$ und aus der Konvergenz $\varphi_f(h)/h \to 0$ folgt $\varphi_f(h) = h(\varphi_f(h)/h) \to 0$ für $h \to 0$.

Aus diesen Gleichungen folgt (mit $\tilde{h} = f'(x)h + \varphi_f(h)$)

$$\begin{aligned} g \circ f(x+h) &= g(f(x+h)) = g(f(x) + f'(x)h + \varphi_f(h)) \\ &= g \circ f(x) + g'(y)\big(f'(x)h + \varphi_f(h)\big) + \varphi_g(f'(x)h + \varphi_f(h)) \\ &= g(y) + g'(y)f'(x)h + \underbrace{g'(y)\varphi_f(h) + \varphi_g(\tilde{h})}_{=:\varphi(h)}. \end{aligned}$$

Für diese Definition von $\varphi(h)$ folgt

$$\frac{\varphi(h)}{h} = g'(y)\frac{\varphi_f(h)}{h} + \frac{\varphi_g(\tilde{h})}{h}.$$

Für die Terme auf der rechten Seite gilt nun

$$g'(y)\frac{\varphi_f(h)}{h} \to 0$$

für $h \to 0$ und

$$\frac{\varphi_g(\tilde{h})}{h} = \begin{cases} \frac{\varphi_g(\tilde{h})}{\tilde{h}} \cdot \frac{\tilde{h}}{h}, & \text{falls } \tilde{h} \neq 0 \\ 0, & \text{falls } \tilde{h} = 0 \end{cases}$$

Für $h \to 0$ gilt wegen $\varphi_f(h) \to 0$ auch $\tilde{h} \to 0$ und damit

$$\frac{\varphi_g(\tilde{h})}{\tilde{h}} \to 0 \quad \text{und} \quad \frac{\tilde{h}}{h} = \frac{f'(x)h + \varphi_f(h)}{h} \to f'(x).$$

Also konvergiert $\varphi(h)/h$ gegen 0 für $h \to 0$. Es gilt also

$$g \circ f(x+h) = g(y) + g'(y)f'(x)h + \varphi(h) = g \circ f(x) + g'(f(x))f'(x)h + \varphi(h)$$

mit $\varphi(h)/h \to 0$, woraus die Behauptung wiederum mit Satz 9.4 (angewendet mit $y = x+h$) folgt. □

Beispiel 9.14 (a) $h(x) = x^\alpha$ für $\alpha \in \mathbb{R}$. Wegen $x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)$ kann $h(x)$ als $g \circ f$ mit $f(x) = \alpha \ln x$ und $g(x) = \exp(x)$ geschrieben werden. Damit folgt aus der Kettenregel

$$h'(x) = g'(f(x))f'(x) = \exp(\alpha \ln x)\alpha\frac{1}{x} = x^\alpha \alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Die bereits in Beispiel 9.9(a) und (b) hergeleitete Formel gilt also nicht nur für ganzzahlige sondern auch für reelle Eponenten.

(b) $h(x) = a\exp(bx)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Nach der Kettenregel mit $f(x) = bx$ und $g(x) = a\exp(x)$ und Beispiel 9.9(d) gilt dann

$$h'(x) = g'(f(x))f'(x) = a\exp(bx)b = ba\exp(bx),$$

was wir auch als $h'(x) = bh(x)$ schreiben können. Insbesondere erfüllt die Funktion $h(x) = a\exp(-\lambda x)$ also das radioaktive Zerfallsgesetz aus Beispiel 9.3(b).

□

9.3 Einseitige Ableitungen

Als Erweiterung des Ableitungsbegriffs kann man die *rechtsseitige und linksseitige Ableitung*

$$f'_+(x) := \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0, x+h\in D}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \text{und} \quad f'_-(x) := \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0, x+h\in D}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

definieren, wobei wir wiederum voraussetzen, dass Folgen $h_n \to 0$ mit den angegebenen Bedingungen existieren (ansonsten existieren die angegebenen Ableitungen nicht). Diese einseitigen Ableitungen existieren für den Absolutbetrag $f(x) = |x|$ und es gilt $f'_+(x) = 1$ und $f'_-(x) = -1$. Allgemein gilt der folgende Satz.

Satz 9.15 Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x \in D$ ein Punkt, in dem die rechts- und linksseitigen Ableitungen $f'_+(x)$ und $f'_-(x)$ existieren. Dann ist die Funktion genau dann in x differenzierbar, wenn $f'_+(x)$ und $f'_-(x)$ übereinstimmen. In diesem Fall gilt

$$f'(x) = f'_+(x) = f'_-(x).$$

Beweis: Sei f in x differenzierbar. Dann gilt nach der Definition der Ableitung und des Grenzwerts für Funktionen für jede Folge $h_n \to 0$ mit $h_n \neq 0$ und $x + h_n \in D$

$$\lim_{h_n\to 0} \frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n} = f'(x).$$

Insbesondere gilt diese Konvergenz also für alle Folgen mit $h_n > 0$ und $x + h_n \in D$, woraus $f'_+(x) = f'(x)$ folgt und für alle Folgen mit $h_n < 0$ und $x + h_n \in D$, woraus $f'_-(x) = f'(x)$ folgt. Also folgt $f'_+(x) = f'_-(x) = f'(x)$.

Nehmen wir umgekehrt an, dass $f'_+(x)$ und $f'_-(x)$ existieren und übereinstimmen. Dann gilt für jedes $\varepsilon > 0$, jede Folge $h_n \to 0$ mit $h_n \neq 0$ und alle hinreichend großen n

$$\left|\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n} - f'_+(x)\right| < \varepsilon, \quad \text{falls } h_n > 0$$

und

$$\left|\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n} - f'_-(x)\right| < \varepsilon, \quad \text{falls } h_n < 0.$$

Aus $f'_+(x) = f'_-(x)$ folgt daraus, dass der Differenzenquotient gegen $f'_+(x) = f'_-(x)$ konvergiert, also ist die Funktion differenzierbar mit $f'(x) = f'_+(x) = f'_-(x)$. □

Bemerkung 9.16 Wenn wir eine differenzierbare Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ betrachten, deren Definitionsmenge ein abgeschlossenes Intervall $D = [a, b]$ ist, so erhalten wir bei Verwendung der Ableitungsdefinition 9.1 für $x = a$ stets den rechtsseitigen Grenzwert und für $x = b$ stets den linksseitigen Grenzwert. Der Grund ist, dass für $x = a$ und $h \neq 0$ in D nur Werte der Form $x + h$ mit $h > 0$ enthalten sind und für $x = b$ nur Werte der Form $x + h$ mit $h < 0$. Das gleich gilt bei halboffenen Intervallen an den Randpunkten, die zu dem Intervall dazugehören.

Eine Folgerung aus dieser Tatsache ist, dass eine Funktion, die in einem Punkt $a \in D$ nicht differenzierbar ist, differenzierbar werden kann, wenn wir die Definitionsmenge einschränken.

Als **Beispiel** dafür dient die Betragsfunktion $f(x) = |x|$. Als Funktion auf $D = \mathbb{R}$ ist diese wie bereits gesehen in $x = 0$ nicht differenzierbar. Betrachten wir die Funktion aber auf der Definitionsmenge $D = [0, \infty)$, so gilt $f(x) = |x| = x$. Die Funktion ist also für alle $x \in D$ differenzierbar und es gilt $f'(x) = 1$.

Diese Tatsache kann zu dem falschen Schluss verleiten, dass die Betragsfunktion auch auf $D = \mathbb{R}$ in $x = 0$ differenzierbar ist, was sie aber natürlich nicht ist. Der Grund dafür ist, dass wir durch die Einschränkung auf $[0, \infty)$ in $x = 0$ nur die rechtsseitige Ableitung berechnet haben.

Bei offenen Definitionsbereichen der Form $D = (a, b)$ (oder auch $D = (a, \infty)$, $D = (-\infty, b)$ oder $D = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$) fällt dieses Problem weg, da D dann keine Randpunkte enthält, d.h. für jedes $x \in D$ existieren sowohl Folgen $h_n \to 0$ mit $h_n > 0$ und $x + h_n \in D$ als auch Folgen $h_n \to 0$ mit $h_n < 0$ und $x + h_n \in D$. Aus diesem Grunde bevorzugt man bei der Berechnung von Ableitungen oft offene Intervalle als Definitionsbereich.

Als **Beispiel** betrachten wir noch einmal die Betragsfunktion $f(x) = |x|$. Auf der Definitionsmenge $D = (0, \infty)$ gilt wie oben $f'(x) = 1$ für alle $x \in D$. Da das Intervall offen ist, ist dies nun auch tatsächlich für alle $x \in D$ die richtige Ableitung. □

9.4 Die Ableitung als Funktion

Bisher haben wir Ableitungen immer nur in einem festen Punkt $x \in D$ betrachtet. Die Schreibweise $f'(x)$ für die Ableitung legt aber nun nahe, dass die Ableitung selbst wieder als Funktion aufgefasst werden kann. Das ist tatsächlich so, wenn wir die folgende Definition verwenden.

Definition 9.17 Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar (auf D), wenn sie für alle $x \in D$ differenzierbar ist. Die Ableitung kann dann als Funktion

$$f' : D \to \mathbb{R}, \quad f' : x \mapsto f'(x)$$

aufgefasst werden. □

Wenn die Ableitung $f' : D \to \mathbb{R}$ nun selbst wieder eine Funktion, so kann man diese natürlich auch selbst wieder ableiten, falls sie differenzierbar ist. Wir können also $f^{(2)}(x) := (f')'(x)$ und gegebenenfalls auch $f^{(3)}(x) := ((f')')'(x)$ usw. definieren.

Dies ist gerade der Inhalt der folgenden induktiven Definition.

Definition 9.18 (i) Für eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ definieren wir die *höheren Ableitungen* $f^{(k)} : D \to \mathbb{R}$

- für $k = 0$ als $f^{(0)}(x) := f(x)$ für alle $x \in D$

- für $k = 1, 2, 3, \ldots$ induktiv als

$$f^{(k)}(x) := (f^{(k-1)})'(x) \quad \text{für alle } x \in D,$$

sofern $f^{(k-1)} : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist.

Beachte, dass $f^{(k)} : D \to \mathbb{R}$ damit gerade für solche $k \geq 1$ definiert ist, für die $f^{(l)} : D \to \mathbb{R}$ für alle $l \in \{0, \ldots, k-1\}$ definiert und differenzierbar ist.

(ii) Falls die Bedingung "$f^{(k-1)} : D \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar" für alle $k = 1, \ldots, n$ und ein $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist (und die Definition aus (i) damit für $k = 1, \ldots, n$ anwendbar ist), so heißt f *n-mal differenzierbar*. Falls die Bedingung für alle $k \in \mathbb{N}$ erfüllt ist, so heißt f *unendlich oft differenzierbar*.

(iii) Falls die Funktion f n-mal differenzierbar ist und $f^{(n)} : D \to \mathbb{R}$ stetig ist, so heißt f *n-mal stetig differenzierbar*. Die Menge aller n-mal stetig differenzierbaren Funktionen wird mit $C^n(D, \mathbb{R})$ bezeichnet (oder auch kurz mit C^n, falls D aus dem Kontext klar ist).

□

Die "nullte" Ableitung $f^{(0)}$ gemäß dieser Definition ist nichts anderes als die Funktion selbst und $f^{(1)}$ ist gerade f'. Statt $f^{(2)}(x)$ schreibt man auch $f''(x)$ und statt $f^{(3)}(x)$ manchmal auch $f'''(x)$. Alternativ schreibt man $f^{(n)}(x)$ auch als

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) \quad \text{oder} \quad \frac{d^n f}{dx^n}(x).$$

Beispiel 9.19 (a) Für $f(x) = \sin x$ gilt

$$f^{(1)}(x) = \sin' x = \cos x, \quad f^{(2)}(x) = \cos' x = -\sin x,$$

$$f^{(3)}(x) = -\sin' x = -\cos x, \quad f^{(4)}(x) = -\cos' x = \sin x, \ldots$$

Da $f^{(4)} = f^{(0)}$ gilt, wiederholt sich diese Abfolge beliebig oft, damit ist $\sin x$ unendlich oft differenzierbar.

(b) Für $f(x) = x|x|$ mit $D = \mathbb{R}$ gilt für $x \in [0, \infty)$, dass $f(x) = x^2$ ist, also folgt $f'(x) = 2x$ für $x > 0$ und $f'_+(0) = 0$. Für $x \in (-\infty, 0]$ gilt $f(x) = -x^2$ und damit $f'(x) = -2x$ für $x < 0$ und $f'_-(0) = 0$. Damit ist die Funktion für alle $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar, denn für $x \neq 0$ haben wir die Ableitung explizit ausgerechnet und in $x = 0$ stimmen der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert überein. Insgesamt gilt damit

$$f'(x) = 2|x|.$$

Diese Funktion wiederum ist zwar stetig, in $x = 0$ aber nicht mehr differenzierbar und damit nicht differenzierbar auf $D = \mathbb{R}$. Die Funktion $f(x) = x|x|$ ist auf $D = \mathbb{R}$ folglich einmal stetig differenzierbar aber nicht zweimal differenzierbar.

□

Bemerkung 9.20 (Geometrische Interpretation der zweiten Ableitung) Geometrisch ist der Wert der ersten Ableitung $f'(x)$ einer Funktion in einem Punkt $x \in D$ gerade die Steigung der Funktion. Auch die zweite Ableitung kann man geometrisch interpretieren: Zunächst einmal ist die zweite Ableitung f'' natürlich gemäß der induktiven Definition nichts anderes als die Steigung der ersten Ableitung f'. Was bedeutet dies aber für die Funktion f selbst? Betrachten wir dazu alle x aus einem offenen Intervall (a, b).

Wenn $f''(x) > 0$ gilt für alle $x \in (a, b)$, so steigt $f'(x)$ in diesem Intervall an[1]. Da $f'(x)$ nun wiederum die Steigung von f in x angibt, bedeutet das, dass die Steigung der Funktion f im Intervall (a, b) zunimmt. Für den Graphen bedeutet das, dass dieser "nach oben" gekrümmt ist. Umgekehrt nimmt die Steigung von f im Intervall (a, b) ab, falls $f''(x) < 0$ ist für alle $x \in (a, b)$. Die Funktion ist also "nach unten" gekrümmt. Im Fall $f''(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$ nimmt die Steigung weder zu noch ab, sie ist also konstant und die Funktion f ist im Intervall (a, b) überhaupt nicht gekrümmt — ihr Graph ist in diesem Intervall also eine Gerade. Zusammengefasst gibt $f''(x)$ geometrisch also gerade die Krümmung der Funktion f im Punkt x an. □

Wir hatten die Einführung der höheren Ableitungen damit begründet, dass die Ableitung selbst wieder eine Funktion von D nach $\mathbb{R}$ ist, wenn die Funktion f in allen $x \in D$ differenzierbar ist. Daraus ergibt sich die Frage, ob man höhere Ableitungen auch definieren kann, wenn f nur in einem einzelnen Punkt $x \in D$ differenzierbar ist.

Tatsächlich geht das nicht, denn dann wäre f' nur für dieses x definiert, man benötigt aber z.B. schon zur Berechnung der zweiten Ableitung, dass der Definitionsbereich von f' eine Folge mit $x_n = x + h_n \to x$ und $x_n \neq x$ enthält. Eine solche Folge kann es aber nicht geben, wenn f' nur in x aber nicht in einer Umgebung von x definiert ist.

Trotzdem kann man die Idee der Differenzierbarkeit in nur einem Punkt auf höhere Ableitungen übertragen. Hinreichend dafür ist z.B., dass f' (bzw. allgemein $f^{(k-1)}$) auf einem offenen Intervall der Form $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ für ein $\varepsilon > 0$ definiert und in allen Punkten aus diesem Intervall differenzierbar ist. Das ε darf dabei beliebig klein sein, muss aber positiv sein. Dies führt auf die folgende Definition.

Definition 9.21 Für ein $n \in \mathbb{N}$ heißt eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $x \in D$ n-mal differenzierbar, wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass die Funktion auf dem eingeschränkten Definitionsbereich $D = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ n-mal differenzierbar ist. □

Beachte, dass diese Definition voraussetzt, dass der ursprüngliche Definitionsbereich für das gegebene x ein Intervall der Form $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ ist. Dies ist z.B. immer dann für alle $x \in D$ erfüllt, wenn D ein offenes Intervall ist. Dies ist ein weiterer Grund dafür, dass man bei der Berechnung von Ableitungen offene Intervalle als Definitionsbereiche bevorzugt.

[1] Dies ist anschaulich einsichtig, formal werden wir dies in Satz 10.6 beweisen.

Kapitel 10

Anwendungen der Differentialrechnung

Stand:
14. Februar 2012

In diesem Kapitel besprechen wir verschiedene Anwendungen der Differentialrechnung.

10.1 Extremwerte und der Mittelwertsatz

Extremwerte sind Minima und Maxima einer Funktion. Speziell betrachten wir hier *lokale* Minima und Maxima gemäß der folgenden Definition.

Definition 10.1 Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir sagen, dass f in einem $x \in D$ ein *lokales Minimum* besitzt, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass gilt

$$f(x) \leq f(y) \quad \text{für alle } y \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap D.$$

Das Minimum heißt *strikt*, falls die obige Ungleichung mit $<$ erfüllt ist für $y \neq x$. Der Punkt x heißt *(strikte) Minimalstelle* von f. Analog definieren wir das (strikte) lokale Maximum mit $\geq$ bzw. $>$. □

Wir hatten in Abschnitt 5.4 das Infimum und Supremum der Menge

$$\{f(y) \,|\, y \in D\}$$

betrachtet. Insbesondere hatten wir in Satz 5.14 bewiesen, dass diese Menge ein Minimum $f(q)$ und ein Maximum $f(p)$ besitzt, wenn $D = [a, b]$ ist (also ein abgeschlossenes Intervall) und f stetig ist. Es gilt also

$$f(q) \leq f(y) \quad \text{und} \quad f(p) \geq f(y) \quad \text{für alle } y \in D.$$

Daher werden $f(q)$ und $f(p)$ *globales* Minimum bzw. Maximum genannt. Man sieht leicht, dass jedes globale Minimum (bzw. Maximum) auch ein lokales Minimum (bzw. Maximum) ist. Umgekehrt muss das aber natürlich nicht gelten.

Für differenzierbare Funktionen kann man lokale Minima und Maxima an der Ableitung erkennen, falls die Definitionsmenge ein offenes Intervall ist.

Satz 10.2 Sei D ein (nicht notwendigerweise beschränktes) offenes Intervall. Dann gilt für jedes $x \in D$, in dem f differenzierbar ist, die Folgerung

$$f \text{ besitzt in } x \text{ ein lokales Minimum oder Maximum } \Rightarrow f'(x) = 0.$$

Beweis: Wir beweisen den Fall des Minimums. Wir wählen $\varepsilon > 0$ so klein, dass die Ungleichung aus der Definition des Minimums auf $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ gilt und dass $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset D$ gilt (beachte, dass die zweite Bedingung im Falle von ein- oder beidseitig beschränkten Intervallen (a, b), (a, ∞) oder $(-\infty, b)$ für alle $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon \leq x - a$ bzw. $\varepsilon \leq b - x$ erfüllt ist).

Da die Funktion nach Annahme in x differenzierbar ist, existieren nach Satz 9.15 die einseitigen Ableitungen und es gilt $f'(x) = f'_+(x) = f'_-(x)$. Für jede Folge $h_n \to 0$ gilt nun $x + h_n \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ für alle hinreichend großen n. Für $h_n > 0$ folgt aus der Minimumseigenschaft für diese n die Ungleichung

$$\frac{f(x + h_n) - f(x)}{h_n} \leq 0$$

und damit $f'_+(x) \leq 0$. Für $h_n < 0$ folgt

$$\frac{f(x + h_n) - f(x)}{h_n} \geq 0$$

und damit $f'_-(x) \geq 0$. Aus $f'(x) = f'_+(x) = f'_-(x)$ folgt also $f'(x) \geq 0$ und $f'(x) \leq 0$, was nur für $f'(x) = 0$ erfüllt sein kann. □

Beispiel 10.3 (i) Für $f(x) = x^2$ mit $D = \mathbb{R}$ besitzt f in $x = 0$ wegen $0^2 = 0$ und $x^2 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ offenbar ein (sogar striktes) lokales Minimum. Wegen $f'(x) = 2x$ gilt wie erwartet $f'(0) = 0$.

(ii) Für die konstante Funktion $f(x) = c$ mit beliebigem $c \in \mathbb{R}$ besitzt f in jedem x ein lokales Minimum (und auch Maximum, beides aber natürlich nicht strikt). Wegen $f'(x) = 0$ ist die Ableitung tatsächlich auch überall gleich 0.

(iii) Für abgeschlossene Intervalle gilt Satz 10.2 nicht, falls sich die Extremstellen am Rand des Intervalls befinden. So besitzt z.B. die Funktion $f(x) = x$ auf dem abgeschlossenen Intervall $[-1, 1]$ ein lokales (und auch globales) Minimum in $x = -1$ und ein lokales (und ebenfalls auch globales) Maximum in $x = 1$. Es gilt aber $f'(x) = 1$ für alle x, die Ableitung ist also nicht gleich 0.

(iv) Die Bedingung aus Satz 10.2 ist nur eine hinreichende Bedingung, d.h. aus $f'(x) = 0$ lässt sich im Allgemeinen nicht folgern, dass x ein Minimum oder Maximum ist. Ein Beispiel dafür ist die Funktion $f(x) = x^3$. Offensichtlich besitzt f in $x = 0$ weder ein lokales Minimum noch ein lokales Maximum, denn für $x > 0$ gilt $f(x) > 0$ und für $x < 0$ gilt $f(x) < 0$. Trotzdem gilt wegen $f'(x) = 3x^2$ die Gleichung $f'(0) = 0$. □

Wie kann man nun sicherstellen, dass in einem Punkt $x \in D$ mit $f'(x) = 0$ tatsächlich ein lokales Maximum oder Minimum existiert und wie kann man Maxima und Minima unterscheiden? Hierfür benötigen wir als Hilfsmittel den Mittelwertsatz der Differentialrechnung. Dieser stellt eine Beziehung zwischen den Funktionswerten von f und den Werten der Ableitung dar. Der folgende Satz von Rolle gibt zunächst eine vereinfachte Version dieses Satzes, aus der wir den eigentlichen Satz danach leicht folgern können.

Satz 10.4 (Satz von Rolle) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) = f(b)$, die auf (a, b) differenzierbar ist. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

Beweis: Falls f konstant auf $[a, b]$ ist, ist die Ableitung auf ganz (a, b) gleich Null und die Aussage folgt sofort für jedes $\xi \in (a, b)$.

Andernfalls gibt es ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f(x_0) < f(a)$ oder $f(x_0) > f(a)$. Da f stetig ist, existieren nach Satz 5.14 Punkte $p, q \in [a, b]$ mit

$$f(p) = \min\{f(x)|x \in [a, b]\} \quad \text{und} \quad f(q) = \max\{f(x)|x \in [a, b]\}.$$

Im Fall $f(x_0) < f(a) = f(b)$ muss $p \in (a, b)$ gelten und im Fall $f(x_0) > f(a) = f(b)$ muss $q \in (a, b)$ gelten. Da globale Minima/Maxima auch lokale Minima/Maxima sind, muss nach Satz 10.2 also $f'(p) = 0$ oder $f'(q) = 0$ gelten. Die Behauptung folgt im ersten Fall mit $\xi = p$ und im zweiten Fall mit $\xi = q$. □

Satz 10.5 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf (a, b) differenzierbar ist. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Beweis: Wir definieren die Funktion

$$g(x) = f(x) + \frac{f(a) - f(b)}{b - a}(x - a).$$

Für diese gilt

$$g(a) = f(a) + \frac{f(a) - f(b)}{b - a}(a - a) = f(a), \quad g(b) = f(b) + \frac{f(a) - f(b)}{b - a}(b - a) = f(a).$$

Da g als Summe stetiger und differenzierbarer Funktionen auf $[a, b]$ stetig und auf (a, b) differenzierbar ist, sind die Voraussetzungen des Satzes von Rolle erfüllt. Es existiert also ein $\xi \in (a, b)$ mit $g'(\xi) = 0$. Wegen

$$g'(x) = f'(x) + \frac{f(a) - f(b)}{b - a}$$

folgt

$$f'(\xi) = g'(\xi) - \frac{f(a) - f(b)}{b - a} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

□

Um einen Bezug zu den Extremwerten herzustellen, betrachten wir die folgende Folgerung aus dem Mittelwertsatz.

Satz 10.6 Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf (a, b) differenzierbar ist. Wenn für alle $x \in (a, b)$ die Ungleichung

$$f'(x) \geq 0 \quad (\text{bzw. } f'(x) > 0,\ f'(x) \leq 0,\ f'(x) < 0)$$

gilt, so ist f auf $[a, b]$ monoton wachsend (bzw. streng monoton wachsend, monoton fallend, streng monoton fallend).

Beweis: Wir beweisen den Fall $f'(x) > 0$, die anderen Fälle werden analog bewiesen. Angenommen, f sei nicht streng monoton wachsend. Dann gibt es $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $x_1 < x_2$ und $f(x_1) \geq f(x_2)$. Nach dem Mittelwertsatz existiert dann ein $\xi \in (x_1, x_2)$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq 0,$$

was der Annahme $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$ widerspricht. □

Betrachten wir nun wieder die Extremwerte. Eine Möglichkeit zu entscheiden, ob im Falle von $f'(x) = 0$ tatsächlich ein Minimum oder Maximum vorliegt, geht über die Betrachtung der zweiten Ableitung.

Satz 10.7 Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf (a, b) zwei mal differenzierbar ist. Sei $x \in (a, b)$ mit $f'(x) = 0$ gegeben. Dann gelten die Folgerungen

$$f''(x) > 0 \Rightarrow f \text{ besitzt in } x \text{ ein striktes lokales Minimum}$$

und

$$f''(x) < 0 \Rightarrow f \text{ besitzt in } x \text{ ein striktes lokales Maximum.}$$

Beweis: Wir beweisen den Fall $f''(x) > 0$. Aus

$$0 < f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x + h) - f'(x)}{h}$$

folgt die Existenz von $\varepsilon > 0$, so dass

$$\frac{f'(x + h) - f'(x)}{h} > 0$$

gilt für alle $h \in \mathbb{R}$ mit $|h| < \varepsilon$: wäre das nicht der Fall, so gäbe es betragsmäßig beliebig kleine h mit

$$\frac{f'(x + h) - f'(x)}{h} \leq 0,$$

woraus für $h \to 0$ auch $f''(x) \leq 0$ folgen würde.

Für $h \in (0, \varepsilon)$ folgt daraus

$$f'(x + h) > f'(x) = 0,$$

weswegen f auf $[x, x + \varepsilon]$ nach Satz 10.6 streng monoton wachsend ist. Es gilt also $f(x) < f(y)$ für alle $y \in (x, x + \varepsilon]$. Analog sieht man, dass f auf $[x - \varepsilon, x]$ streng monoton fallend ist, woraus $f(x) < f(y)$ für alle $y \in [x - \varepsilon, x)$ folgt. Also besitzt f in x ein striktes lokales Minimum. □

Beispiel 10.8 (i) Für $f(x) = x^2$ gilt $f'(x) = 2x$ und $f''(x) = 2$. Also ist $f'(0) = 0$ und $f''(0) = 2$. Folglich existiert in $x = 0$ ein lokales Minimum.

(ii) Für $f(x) = x^3$ besitzt f in $x = 0$ weder ein lokales Maximum noch ein lokales Minimum, $f''(0)$ kann also weder positiv noch negativ sein, muss also gleich 0 sein. Aus $f'(x) = 3x^2$ folgt $f''(x) = 6x$, also gilt tatsächlich $f''(0) = 6 \cdot 0 = 0$.

(iii) Die Bedingungen aus Satz 10.7 sind nur hinreichend aber nicht notwendig, d.h. auch im Falle $f'(x) = 0$ und $f''(x) = 0$ kann f in x ein striktes lokales Minimum oder Maximum besitzen. Ein Beispiel dafür ist die Funktion $f(x) = x^4$ in $x = 0$. Hier existiert in $x = 0$ wegen $x^4 > 0$ für $x \neq 0$ ein striktes lokales Minimum. Trotzdem gilt wegen $f''(x) = 12x^2$, dass $f''(0) = 0$ ist. □

Zum Abschluss dieses Abschnitts wollen wir uns noch überlegen, ob wir unter geeigneten Bedingungen aus $f'(x) = 0$ auch die Existenz eines globalen Minimums oder Maximums folgern können. Tatsächlich geht das, wenn man Funktionen mit passenden Eigenschaften betrachtet.

Definition 10.9 Sei D ein (nicht unbedingt beschränktes) Intervall. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *konvex*, wenn für alle $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 \neq x_2$ und alle $\lambda \in (0, 1)$ die Ungleichung

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

gilt. Sie heißt *strikt konvex*, wenn die Ungleichung mit $<$ statt $\leq$ erfüllt ist. Die Funktion heißt *konkav* (bzw. *strikt konkav*), wenn die obige Ungleichung mit $\geq$ (bzw. $>$) erfüllt ist. □

Beachte, dass f genau dann (strikt) konvex ist, wenn $-f$ (strikt) konkav ist.

Konvexität und Konkavität kann man wiederum mit der zweiten Ableitung überprüfen. Wir formulieren den entsprechenden Satz für konvexe Funktionen.

Satz 10.10 Sei D ein offenes (nicht unbedingt beschränktes) Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ zwei mal differenzierbar. Dann gilt: Falls $f''(x) \geq 0$ gilt für alle $x \in D$ so ist f konvex und falls $f''(x) > 0$ gilt für alle $x \in D$ so ist f strikt konvex.

Beweis: Wir beweisen den strikt konvexen Fall. Aus $f''(x) > 0$ folgt mit Satz 10.6, dass f' streng monoton wachsend ist.

Seien nun $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 \neq x_2$ und $\lambda \in (0, 1)$ gegeben. O.B.d.A. sei $x_1 < x_2$. Setzen wir $x := \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ so folgt $x \in (x_1, x_2)$ und nach dem Mittelwertsatz gilt

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\xi_1) < f'(\xi_2) = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

Dabei haben wir für die mittlere Ungleichung ausgenutzt, dass $\xi_1 \in (x_1, x)$ und $\xi_2 \in (x, x_2)$ gilt, woraus $\xi_1 < \xi_2$ und daraus mit der Monotonie von f' die verwendete Ungleichung folgt.

Aus der Definition von x folgt nun $x - x_1 = (1-\lambda)(x_2 - x_1)$ und $x_2 - x = \lambda(x_2 - x_1)$. Damit erhalten wir

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{1-\lambda} < \frac{f(x_2) - f(x)}{\lambda}.$$

Multiplikation der Gleichung mit λ und $1-\lambda$ liefert dann

$$\lambda(f(x) - f(x_1)) < (1-\lambda)(f(x_2) - f(x)),$$

woraus die gesuchte Ungleichung aus der Definition der strikten Konvexität folgt. □

Beispiel 10.11 (i) Mit Hilfe der zweiten Ableitungen überprüft man, dass z.B. die Funktionen $f(x) = \exp(x)$ und $f(x) = x^2$ strikt konvex sind.

(ii) Jede lineare Funktion $f(x) = ax$ ist sowohl konvex als auch konkav, beides aber nicht strikt.

(iii) Man kann (mit einem längeren Beweis, vgl. z.B. Forster [3, §16]) beweisen, dass aus Konvexität umgekehrt $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in D$ folgt. Aus strikter Konvexität folgt aber *nicht* $f''(x) > 0$ für alle $x \in D$. Ein Beispiel hierfür ist die strikt konvexe Funktion $f(x) = x^4$, für die aber $f''(0) = 0$ gilt. □

Den Zusammenhang zwischen Konvexität und der Existenz von Minima ist nun durch den folgenden Satz gegeben.

Satz 10.12 Sei D ein offenes (nicht unbedingt beschränktes) Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Sei $x \in D$ mit $f'(x) = 0$ gegeben. Dann ist x ein globales Minimum. Falls f strikt konvex ist, ist x ein striktes globales Minimum, d.h. es gilt $f(x) < f(y)$ für alle $y \in D$ mit $y \neq x$.

Beweis: Wir beweisen zunächst die globale Minimumseigenschaft. Für $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$ und $\lambda \in (0,1)$ gilt

$$\begin{aligned}
\frac{f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) - f(x_1)}{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 - x_1} &= \frac{f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) - f(x_1)}{(1-\lambda)(x_2 - x_1)} \\
&\leq \frac{\lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) - f(x_1)}{(1-\lambda)(x_2 - x_1)} \\
&= \frac{(1-\lambda)(f(x_2) - f(x_1))}{(1-\lambda)(x_2 - x_1)} \\
&= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.
\end{aligned}$$

Beachte, dass wir für die Ungleichung benötigen, dass der Nenner positiv ist, was wegen $x_1 < x_2$ und $\lambda < 1$ aber der Fall ist.

Weil für $\lambda \to 1$ die Konvergenz $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \to x_1$ folgt, gilt also

$$f'(x_1) = \lim_{\lambda \to 1} \frac{f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) - f(x_1)}{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Mit einer analogen Rechnung beweist man die Ungleichung

$$f'(x_2) \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Daraus folgt, dass f' monoton wachsend ist. Aus $f'(x) = 0$ folgen also für alle $y \in D$ die Ungleichungen $f'(y) \geq 0$ falls $y \geq x$ und $f'(y) \leq 0$ für $y \leq x$. Nach Satz 10.6 ist f also monoton fallend auf allen Intervallen der Form $[a, x] \subset D$ und monoton wachsend auf allen Intervallen der Form $[x, b] \subset D$. Damit folgt $f(a) \geq f(x)$ für alle $a \in D$ mit $a \leq x$ und $f(x) \leq f(b)$ für alle $b \in D$ mit $x \leq b$. Folglich ist $f(x)$ ein globales Minimum.

Sei f nun strikt konvex. Wir nehmen an, dass $f(x)$ kein striktes Minimum ist, d.h. dass $y \neq x$ existiert mit $f(x) = f(y)$. Aus der strikten Konvexität, folgt dann für jedes $\lambda \in (0, 1)$

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) = f(x),$$

was der Tatsache widerspricht, dass $f(x)$ ein globales Minimum ist. Also muss $f(x)$ auch ein striktes Minimum sein. □

10.2 Die Taylor-Entwicklung

Für viele Anwendungen — z.B. wenn man komplizierte Funktionen mit dem Computer bearbeiten möchte — ist es sinnvoll, diese näherungsweise durch einfachere Funktionen darzustellen. Besonders schöne "einfache Funktionen" sind die Polynome, also Funktionen der Form

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

wobei $n \in \mathbb{N}$ der Grad und die Parameter $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ die Koeffizienten des Polynoms sind. Polynome sind deswegen schön, weil zum Speichern eines Polynoms vom Grad n nur die $n + 1$ Koeffizienten, also nur $n + 1$ reelle Zahlen im Computer gespeichert werden müssen.

Es stellt sich nun die Frage, wie man zu einer gegebenen Funktion f ein Polynom P mit vorgegebenem Grad $n \in \mathbb{N}$ findet, das in der Nähe eines gegebenen Punktes $x_0 \in \mathbb{R}$ gut mit der Funktion übereinstimmt, d.h. dessen Werte $P(x)$ für x nahe x_0 nur wenig von den Funktionswerten $f(x)$ abweichen.

Die anschauliche Idee der Taylorentwicklung liegt nun darin, das Polynom gerade so zu bestimmen, dass sein Funktionswert und die ersten n Ableitungen in x_0 mit denen von f übereinstimmen. Voraussetzung dafür ist natürlich, dass f in x_0 hinreichend oft differenzierbar ist. Um die Rechnung zu vereinfachen, empfiehlt es sich, das Polynom in der Form

$$P(x) = a_n(x - x_0)^n + a_{n-1}(x - x_0)^{n-1} + \ldots + a_1(x - x_0) + a_0$$

zu schreiben. Durch Ausmultiplizieren sieht man leicht, dass dies tatsächlich wieder ein Polynom der obigen Form (allerdings mit anderen Koeffizienten) ist. Durch sukzessives Ausrechnen der Ableitungen erhält man die Formel

$$P^{(k)}(x_0) = k! a_k, \quad \text{für } k = 0, \ldots, n.$$

Wenn wir also wollen, dass die Gleichung $P^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ für $k = 0, \ldots, n$ gilt, so müssen wir $a_k = f^{(k)}/k!$ setzen, d.h. wir müssen P definieren als

$$P(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k. \tag{10.1}$$

Dieses Polynom wird *Taylorpolynom* (vom Grad n) von f in x_0 genannt.

Der folgende Satz gibt Auskunft über die Differenz zwischen $f(x)$ und $P(x)$.

Satz 10.13 Es sei D ein offenes Intervall, $f : D \to \mathbb{R}$ $n+1$-mal differenzierbar und P aus (10.1). Dann existiert für jedes $x \in D$ mit $x > x_0$ ein $\xi \in (x_0, x)$ mit

$$f(x) = P(x) + R_n \quad \text{mit } R_n := \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

Die gleiche Aussage gilt für $x < x_0$ mit $\xi \in (x, x_0)$. Der Ausdruck R_n wird *Lagrangesches Restglied* genannt.

Zum Beweis von Satz 10.13 benötigen wir die folgende Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung. Beachte, dass wir die bisherige Form aus Satz 10.5 aus dieser Verallgemeinerung erhalten, indem wir $g(x) = x$ wählen.

Satz 10.14 (verallgemeinerter Mittelwertsatz der Differentialrechnung) Es seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, die auf (a, b) differenzierbar sind mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Dann ist $g(b) - g(a) \neq 0$ und es existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Beweis: Aus dem Satz von Rolle folgt zunächst, dass tatsächlich $g(b) - g(a) \neq 0$ gilt, denn ansonsten wäre $g(a) = g(b)$ und es müsste $g'(x) = 0$ gelten für ein $x \in (a, b)$.

Definiere nun die Funktion

$$h(x) = (g(b) - g(a))f(x) - (f(b) - f(a))g(x).$$

Für diese gilt

$$h(b) - h(a) = (g(b) - g(a))f(b) - (f(b) - f(a))g(b) - (g(b) - g(a))f(a) + (f(b) - f(a))g(a) = 0,$$

also $h(b) = h(a)$. Folglich existiert nach dem Satz von Rolle ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$0 = h'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi) - (f(b) - f(a))g'(\xi),$$

woraus die Behauptung folgt. □

Beweis von Satz 10.13: Definiere die Funktion

$$g(x) := f(x) - P(x).$$

Wegen $g^{(k)}(x) = f^{(k)}(x) - P^{(k)}(x)$ erfüllt diese Funktion

(i) g ist $n+1$ mal differenzierbar auf D

(ii) $g(x_0) = g'(x_0) = \ldots = g^{(n)}(x_0) = 0$

Wir beweisen, dass für jede Funktion $g : D \to \mathbb{R}$ mit (i) und (ii) und jedes $x \geq x_0$ ein $\xi \in (x_0, x)$ existiert mit

$$g(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} g^{(n+1)}(\xi). \tag{10.2}$$

Hieraus folgt die Behauptung des Satzes, denn da P ein Polynom vom Grad n ist, folgt $P^{(n+1)}(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und damit $g^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - P^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$.

Den Beweis von (10.2) führen wir per Induktion über n. Für $n = 0$ folgt wegen $g(x_0) = 0$ aus dem üblichen Mittelwertsatz

$$\frac{g(x)}{x-x_0} = \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = g'(\xi)$$

und damit (10.2) für $n = 0$.

Für $n \to n+1$ betrachten wir eine Funktion, die (i) und (ii) für $n+1$ (an Stelle von n) erfüllt. Wir müssen beweisen, dass für diese Funktion (10.2) mit $n+1$ an Stelle von n gilt.

Wenn g (i) und (ii) mit $n+1$ erfüllt, so erfüllt die Funktion g' die Bedingungen (i) und (ii) für n und nach Induktionsannahme können wir schließen, dass (10.2) für g' und n gilt. Wählen wir also ein beliebiges $\tilde{\xi} \in D$ mit $\tilde{\xi} > x_0$ und wenden (10.2) mit $x = \tilde{\xi}$ und $g = g'$ an, so existiert ein $\xi \in (x_0, \tilde{\xi})$ mit

$$g'(\tilde{\xi}) = \frac{(\tilde{\xi}-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} g^{(n+2)}(\xi), \tag{10.3}$$

wobei wir $g'^{(n+1)} = g^{(n+2)}$ verwendet haben.

Wir wenden nun den verallgemeinerten Mittelwertsatz auf die Funktion g (an Stelle von f) und $h(x) = (x-x_0)^{n+2}$ (an Stelle von g) auf $[x_0, x]$ an. Damit existiert ein $\tilde{\xi} \in (x_0, x)$, so dass

$$\frac{g'(\tilde{\xi})}{h'(\tilde{\xi})} = \frac{g(x)-g(x_0)}{h(x)-h(x_0)}$$

gilt, woraus mit der speziellen Wahl von g und h die Gleichung

$$\frac{g(x)}{(x-x_0)^{n+2}} = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{g(x)-g(x_0)}{h(x)-h(x_0)} = \frac{g'(\tilde{\xi})}{h'(\tilde{\xi})} = \frac{g'(\tilde{\xi})}{(n+2)(\tilde{\xi}-x_0)^{n+1}}$$

folgt. Setzen wir nun den Ausdruck für $g'(\tilde{\xi})$ aus (10.3) hier ein, so erhalten wir

$$\frac{g(x)}{(x-x_0)^{n+2}} = \frac{(\tilde{\xi}-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{g^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)(\tilde{\xi}-x_0)^{n+1}} = \frac{g^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!},$$

was gerade die zu beweisende Gleichung (10.2) ist. $\square$

Bemerkung 10.15 Ähnlich wie das "kleine" Landau-Symbol $o(\cdot)$, das wir in Bemerkung 9.5(i) eingeführt haben, definiert man das große Landau-Symbol $O(\cdot)$ wie folgt: Für eine Funktion $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, für die es Konstanten $\varepsilon, C > 0$ und ein $p \in \mathbb{N}$ gibt, so dass die Ungleichung

$$\frac{|r(h)|}{h^p} \leq C$$

gilt für alle $h \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ mit $h \neq 0$, schreiben wir kurz

$$r(h) = O(h^p).$$

Falls die Ableitung $f^{(n+1)}$ auf $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ im Betrag durch ein C beschränkt ist für ein $\varepsilon > 0$ (was immer der Fall ist wenn $f^{(n+1)}$ stetig ist), so gilt für das Taylorpolynom P mit dieser Schreibweise unter den Voraussetzungen von Satz 10.13

$$f(x) - P(x) = O((x - x_0)^{n+1}).$$

In dieses Form findet man die Taylorentwicklung oft angegeben. □

Beispiel 10.16 (i) Sei $f(x) = \sin x$ und $x_0 = 0$. Dann gilt

$$f(0) = \sin 0 = 0,\ f'(0) = \cos 0 = 1,\ f''(0) = -\sin 0 = 0,$$

$$f^{(3)}(0) = -\cos 0 = -1,\ f^{(4)}(0) = \sin 0 = 0, \ldots$$

und damit (für ungerade n)

$$P(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \ldots \pm \frac{x^n}{n!}$$

Wir erhalten also gerade die Terme bis zur Ordnung n aus der Reihendarstellung des Sinus aus Satz 8.5. Für $n = 15$ sind f und P in Abbildung 10.1 grafisch dargestellt.

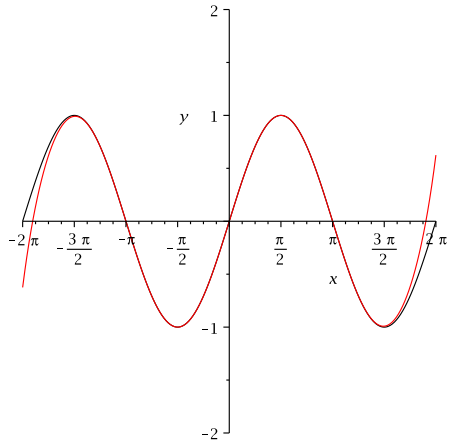


Abbildung 10.1: $\sin x$ (schwarz) und Taylor-Polynom für $n = 15$ und $x_0 = 0$ (rot)

Da für $f(x) = \sin x$ die Ungleichung $|f^{(n)}(x)| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt (denn jede Ableitung ist von der Form $\pm \sin x$ oder $\pm \cos x$), folgt aus Satz 10.13 die Abschätzung

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Daraus folgt, dass die Einschränkung $|x| \leq 1 + N/2$ für die Abschätzung des Restglieds r_N in (8.2) gar nicht nötig ist. Ähnlich beweist man dies mit der Taylorentwicklung für das Restglied der Exponentialfunktion in Satz 6.5 und für den Cosinus.

(ii) Die sogenannte *Runge-Funktion* ist gegeben durch $f(x) = 1/(1 + x^2)$. Mit (etwas länglicher) Rechnung erhält man

$$f^{(k)}(0) = (-1)^{k/2} k!$$

für gerade k und $f^{(k)}(0) = 0$ für ungerade k. Damit folgt (für gerade n)

$$P(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 \pm \ldots \pm x^n.$$

Wiederum für $n = 15$ sind f und P in Abbildung 10.2 grafisch dargestellt. □

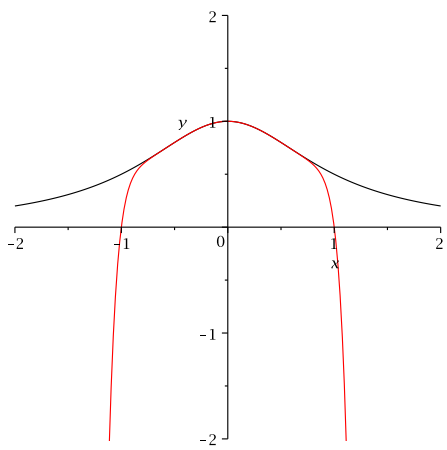


Abbildung 10.2: $1/(1 + x^2)$ (schwarz) und Taylor-Polynom für $n = 15$ und $x_0 = 0$ (rot)

Betrachtet man die Beispiele 10.16 (i) und (ii) für wachsende Grade n des Taylorpolynoms, so fällt auf, dass das Polynom P im Falle des Sinus auf dem gesamten Intervall gegen den Sinus konvergiert, sogar auf beliebig großen Intervallen. Im Gegensatz dazu erhält man für die Runge-Funktion an den Rändern und außerhalb des Intervalls $[-1, 1]$ keine Konvergenz. Die Polynomwerte $P(x)$ bilden hier also tatsächlich nur in einer Umgebung von x_0 eine gute Näherung für die Funktionswerte $f(x)$.

Falls $f : D \to \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar ist und die über die Taylorpolynome entstehende unendliche Reihe

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k, \quad n \in \mathbb{N}$$

für $n \to \infty$ konvergiert, so nennt man diese Reihe die *Taylorreihe* von f in x_0. Die Taylorreihe ist ein Spezialfall einer *Potenzreihe*, die allgemein von der Form

$$\sum_{k=0}^{n} c_k (x - x_0)^k, \quad n \in \mathbb{N}$$

für Koeffizienten $c_k \in \mathbb{R}$ ist.

Betrachtet man die Herleitung der Taylorreihe, so könnte man bei einem ersten Blick vermuten, dass die Gleichung

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k. \tag{10.4}$$

gilt. Dies ist aber im Allgemeinen *nicht richtig*. Genauer können zwei Probleme auftreten:

(1) Es kann sein, dass der Grenzwert

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^k$$

für gewisse $x \in D$ überhaupt nicht existiert.

(2) Auch wenn der Grenzwert existiert, kann es sein, dass die Gleichung (10.4) für manche (oder sogar sehr viele) $x \in D$ nicht gilt.

Im Rest dieses Abschnittes untersuchen wir diese beiden Fälle genauer und beginnen mit (1).

Beispiel 10.17 Für die Runge-Funktion lautet die Taylor-Reihe (nach passender Umstellung der Indizes)

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k}.$$

Beachte, dass hier $x_0 = 0$ gilt. Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \geq 1$ gilt dann $|(-1)^k x^{2k}| \geq 1$, die Summanden der Taylorreihe konvergieren also nicht gegen 0 und die Reihe konvergiert daher nach Satz 4.5 nicht. Für $|x| < 1$ hingegen folgt die (sogar absolute) Konvergenz aus dem Quotientenkriterium. Insgesamt konvergiert die Taylorreihe also für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$.

Dass sie für diese Werte tatsächlich gegen $f(x)$ konvergiert, kann man beweisen, indem man zeigt, dass der Betrag des Restglied R_n für alle $|x| \leq a$ und $|\xi| \leq a$ für $a < 1$ durch einen Ausdruck b_n beschränkt ist, der für $n \to \infty$ gegen Null konvergiert. Genauer wird dies im folgenden Satz 10.19 formuliert. Aus Zeitgründen verzichten wir auf das explizite Ausrechnen der Schranken b_n für dieses Beispiel. □

Zur Beschreibung der Konvergenzeigenschaftem einer Potenzreihe macht man die folgende Definition.

Definition 10.18 Der *Konvergenzradius* einer Potenzreihe ist die größte Zahl $r \geq 0$, so dass die Reihe für alle $x \in D$ mit $|x_0 - x| < r$ für $n \to \infty$ konvergiert. □

Für die Taylorreihe der Runge-Funktion in $x_0 = 0$ gilt nach dem vorhergehenden Beispiel also $r = 1$. Tatsächlich gibt es auch Taylorreihen, deren Konvergenzradius 0 ist; die zugehörigen Funktionen sind aber recht kompliziert darzustellen. Eine Skizze für die Konstruktion einer solchen Funktion findet sich in Abschnitt 11.4.

Im Fall einer Taylorreihe gilt dann der folgende Satz, der die im letzten Abschnitt des vorhergehenden Beispiels verwendete Begründung formalisiert.

Satz 10.19 Betrachte die Taylorreihe einer Funktion f im Punkt $x_0 \in D$. Für ein $a > 0$ und eine Nullfolge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gelte für das Lagrangesche Restglied die Ungleichung

$$|R_n| \leq b_n \quad \text{für alle } x, \xi \in D \text{ mit } |x - x_0| \leq a, |\xi - x_0| \leq a.$$

Dann gilt für den Konvergenzradius der Taylorreihe $r \geq a$ und es gilt

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < a$.

Beweis: Aus der Annahme folgt mit Satz 10.13 die Ungleichung

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \right| = |R_n| \leq b_n \to 0$$

für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| \leq a$. Damit folgt mit Satz 3.4 die Konvergenz der Reihe gegen $f(x)$ und damit insbesondere die Konvergenz. □

Dieser Satz stellt sowohl Konvergenz der Taylorreihe als auch Konvergenz gegen $f(x)$ sicher. Einige klassische Taylorreihen, für die man mit Hilfe dieses Satzes Konvergenz beweisen kann, sind

$$\begin{aligned}
\exp x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, && x \in \mathbb{R} \\
\sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, && x \in \mathbb{R} \\
\cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, && x \in \mathbb{R} \\
\ln(1+x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k, && x \in (-1, 1] \\
(1+x)^\alpha &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k, && x \in (-1, 1)
\end{aligned}$$

mit

$$\binom{\alpha}{k} = \prod_{k=1}^{n} \frac{\alpha - k + 1}{k}.$$

Betrachten wir nun den oben in Punkt (2) genannten Fall, dass die Taylorreihe konvergiert, aber nicht gegen $f(x)$. Das folgende Beispiel gibt eine Funktion an, für die dies passiert.

Beispiel 10.20 Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Mittels Induktion beweisen wir, dass die Ableitungen dieser Funktion von der Form

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} P_n(1/x)e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

sind, wobei P_n ein Polynom vom Grad n ist.

Für $n = 0$ ist die Aussage klar mit $P_0(x) = 0$. Für $n \to n+1$ gilt für $x \neq 0$

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{d}{dx} f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx}\left(P_n(1/x)e^{-1/x^2}\right) \\ &= \frac{d}{dx}(P_n(1/x)))e^{-1/x^2} + P_n(1/x)\frac{d}{dx}e^{-1/x^2} \\ &= -P_n'(1/x)\frac{1}{x^2}e^{-1/x^2} + P_n(1/x)e^{-1/x^2}\frac{2}{x^3} \\ &= P_{n+1}(1/x)e^{-1/x^2} \end{aligned}$$

mit $P_{n+1}(1/x) = -P_n'(1/x)\frac{1}{x^2} + P_n(1/x)\frac{2}{x^3}$.

Für $x = 0$ gilt

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f^{(n)}(h) - f^{(n)}(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{P_n(1/h)e^{-1/h^2}}{h} = 0,$$

wobei wir im letzten Schritt Satz 6.22 mit $x = 1/h$ sowie die Ungleichung $e^{-1/h^2} \leq e^{-1/|h|}$ für $|h| < 1$ auf die einzelnen Summanden des Polynoms angewendet haben. Damit folgt, dass die Ableitungen tatsächlich von der angegebenen Form sind.

Die Taylorreihe in $x_0 = 0$ lautet also

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{0}{k!}x^k = 0$$

und stimmt daher für kein $x \neq 0$ mit $f(x) > 0$ überein. □

Es muss also bei jeder Taylorentwicklung separat an Hand des Restglieds untersucht werden, ob die Taylorreihe tatsächlich gegen $f(x)$ konvergiert und für welche x dies gilt.

Wenn eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ für alle $x \in D$ durch eine Potenzreihe (also z.B. die Taylorreihe) dargestellt werden kann, so nennt man f *analytisch* auf D.

Kapitel 11

Funktionenfolgen

Stand:
14. Februar 2012

Folgen kann man nicht nur für reelle und komplexe Zahlen definieren, sondern auch für Funktionen. In diesem Kapitel betrachten wir die wesentlichen Eigenschaften solcher Funktionenfolgen.

11.1 Definitionen

Definition 11.1 Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{R}$ heißt *Funktionenfolge*. □

Wir geben einige einfache Beispiele für Funktionenfolgen.

Beispiel 11.2 (i) $f_n(x) = (1 + 1/n)x^2$, $D = \mathbb{R}$, $n \geq 1$

(ii) $f_n(x) = x^n$, $D = \mathbb{R}$ oder $D = [0, 1]$

(iii) $f_n(x) = |x|^{1+1/n}$, $D = \mathbb{R}$, $n \geq 1$

(iv) Funktionenfolgen, die aus Reihen entstehen:

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} g_k(x)$$

mit $g_k : D \to \mathbb{R}$

(v) Potenzreihen:

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k(x - x_0)^k$$

mit $c_k \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ und $D \subset \mathbb{R}$. Beachte, dass dies ein Spezialfall von (iv) ist. □

Die folgende Definition gibt einen Konvergenzbegriff für Funktionenfolgen an.

Definition 11.3 Wir sagen, dass eine Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *punktweise* gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ *konvergiert*, falls

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

gilt für alle $x \in D$. Die Funktion f wird dann als *Grenzfunktion* bezeichnet. □

Beispiel 11.4 Wir betrachten die punktweise Konvergenz der Funktionenfolgen aus Beispiel 11.2 für $n \to \infty$.

(i) $f_n(x) = (1 + 1/n)x^2$: Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f_n(x) = (1 + 1/n)x^2 = x^2 + x^2/n \to x^2 =: f(x).$$

(ii) $f_n(x) = x^n$: Für $|x| > 1$ konvergiert diese Funktionenfolge wegen $|x^n| = |x|^n \to \infty$ offenbar nicht. Sie konvergiert aber z.B. für $x \in [0, 1]$, und zwar mit

$$f_n(x) \to \begin{cases} 0, & x \in [0, 1) \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

(iii) $f_n(x) = |x|^{1+1/n}$: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f_n(x) = |x|^{1+1/n} \to |x|^1 = |x| =: f(x).$$

(iv) und (v) Die durch die Reihen definierten Funktionen konvergieren punktweise gegen die entsprechenden Grenzwerte der Reihen, sofern diese existieren. Bei der Potenzreihe ist dies in jedem Fall für die eingeschränkte Definitionsmenge $D = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < r\}$ der Fall, wobei r der Konvergenzradius der Potentzreihe ist. □

11.2 Stetigkeit und Differenzierbarkeit

In diesem Abschnitt wollen wir zwei wichtige Fragen untersuchen: Wenn alle Funktionen f_n einer Funktionenfolge stetig bzw. differenzierbar sind, und die Funktionenfolge gegen eine Grenzfunktion f konvergiert, ist dann auch f stetig bzw. differenzierbar?

Wir beginnen mit der Stetigkeit und betrachten Beispiel 11.2(ii), d.h. $f_n(x) = x^n$, auf $D = [0, 1]$. Da jedes f_n ein Polynom ist, ist es auf $\mathbb{R}$ und damit insbesondere auf D stetig. Nach Beispiel 11.4(ii) konvergiert die Funktionenfolge $f_n(x)$ allerdings punktweise gegen die Grenzfunktion $f(x) = 0$ für $x \in [0, 1)$ und $f(x) = 1$ für $x = 1$, welche offensichtlich unstetig in $x = 1$ ist.

Die Grenzfunktion einer punktweise konvergenten Folge stetiger Funktionen ist also nicht "automatisch" selbst wieder stetig. Um dies schließen zu können, brauchen wir den folgenden stärkeren Konvergenzbegriff.

Definition 11.5 Eine Funktionenfolge $f_n : D \to \mathbb{R}$ heißt *gleichmäßig konvergent* gegen eine Grenzfunktion $f : D \to \mathbb{R}$, falls die Konvergenz

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{y\in D} |f_n(y) - f(y)| = 0$$

gilt. □

Beachte, dass aus der gleichmäßigen Konvergenz wegen

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{y \in D} |f_n(y) - f(y)| \to 0$$

für alle $x \in D$ die punktweise Konvergenz folgt. Umgekehrt gilt dies allerdings nicht, wie Beispiel 11.2(ii) zeigt:

Da $f_n(x) = x^n$ stetig ist und $f_n(1) = 1$ gilt, gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $x_{n,\varepsilon} < 1$ mit $f_n(x_{n,\varepsilon}) > 1 - \varepsilon$. Für die Grenzfunktion f aus Beispiel 11.4(ii) gilt also

$$\sup_{y \in D} |f_n(y) - f(y)| \geq |f_n(x_{n,\varepsilon}) - f(x_{n,\varepsilon})| > |1 - \varepsilon - 0| = 1 - \varepsilon$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ und damit

$$\sup_{y \in D} |f_n(y) - f(y)| \not\to 0.$$

In Beispiel 11.2(iii) hingegen gilt gleichmäßige Konvergenz, wenn wir die Definitionsmenge $D = [-d, d]$ für beliebiges $d > 0$ betrachten. Für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt zunächst

$$|f_n(y) - f(y)| = \left| |y|^{1+1/n} - |y| \right| = |y| \left| |y|^{1/n} - 1 \right|.$$

Um zu beweisen, dass das Supremum über alle $y \in [-d, d]$ für diesen Ausdruck tatsächlich gegen 0 konvergiert, wählen wir ein beliebiges $\varepsilon > 0$ und zeigen, dass für alle hinreichend großen $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$\sup_{y \in [-d,d]} |y| \left| |y|^{1/n} - 1 \right| < \varepsilon$$

gilt. Dazu betrachten wir drei Fälle:

Fall 1: $|y| < \varepsilon$. In diesem Fall gilt $||y|^{1/n} - 1| \leq 1$ und es folgt

$$|y| \left| |y|^{1/n} - 1 \right| \leq |y| < \varepsilon.$$

Fall 2: $|y| \in [\varepsilon, 1]$. In diesem Fall gilt $|y| \leq 1$, $|y|^{1/n} \leq 1$ und $|y|^{1/n} \geq \varepsilon^{1/n}$. Damit folgt

$$|y| \left| |y|^{1/n} - 1 \right| = |y|(1 - |y|^{1/n}) \leq 1 - |y|^{1/n} \leq 1 - \varepsilon^{1/n} < \varepsilon$$

für alle hinreichend großen n, da $\varepsilon^{1/n}$ für $n \to \infty$ wegen Korollar 6.20 gegen 1 konvergiert und damit für alle hinreichend großen n größer als $1 - \varepsilon$ ist.

Fall 3: $|y| \in [1, d]$. In diesem Fall gilt $|y|^{1/n} \geq 1$ und damit

$$|y| \left| |y|^{1/n} - 1 \right| = |y|(|y|^{1/n} - 1) \leq d(d^{1/n} - 1) < \varepsilon$$

für alle hinreichend großen n, da $d^{1/n}$ für $n \to \infty$ wegen Korollar 6.20 gegen 1 konvergiert und damit für alle hinreichend großen n kleiner als $1 + \varepsilon/d$ ist.

Aus den drei Fällen folgt für alle hinreichend großen $n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{y \in [-d,d]} |y| \left| |y|^{1/n} - 1 \right| \leq \max\{\varepsilon, 1 - \varepsilon^{1/n}, d(d^{1/n} - 1)\} < \varepsilon$$

und damit die Konvergenz gegen 0 und folglich die gleichmäßige Konvergenz.

Satz 11.6 Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen $f_n : D \to \mathbb{R}$, die gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $f : D \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist f ebenfalls stetig.

Beweis: Sei $x \in D$. Wir verwenden das ε-δ-Kriterium der Stetigkeit. Zu zeigen ist dafür, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass die Folgerung

$$|x - y| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

für alle $y \in D$ gilt. Sei also $\varepsilon > 0$ gegeben.

Da f_n gleichmäßig gegen f konvergiert, existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\sup_{y\in D} |f_n(y) - f(y)| \leq \varepsilon/3,$$

d.h. für alle $y \in D$ gilt die Ungleichung $|f_n(y) - f(y)| \leq \varepsilon/3$. Da f_n stetig ist, existiert zudem ein $\delta > 0$, so dass die Folgerung

$$|x - y| < \delta \;\Rightarrow\; |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon/3$$

gilt. Für $|x - y| < \delta$ folgt dann

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 < \varepsilon,$$

also die gesuchte Eigenschaft. □

Da die gleichmäßige Konvergenz also offenbar eine sehr nützliche Eigenschaft ist, führen wir nun eine Notation ein, mit der wir diese kompakter schreiben können.

Definition 11.7 Für $f : D \to \mathbb{R}$ definieren wir die ∞-*Norm* als

$$\|f\|_\infty := \sup_{y\in D} |f(y)|.$$

□

Man kann nachrechnen, dass $\|\cdot\|_\infty$ tatsächlich eine Norm auf dem Vektorraum aller Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ mit $\|f\|_\infty < \infty$ ist.

Die Bedingung für die gleichmäßige Konvergenz kann man dann mit dieser Norm kurz schreiben als

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0.$$

Für Funktionenfolgen, die gemäß Beispiel 11.2(iv) über eine Reihe definiert sind, kann man das folgende Kriterium für gleichmäßige Konvergenz angeben.

Satz 11.8 (Konvergenzkriterium von Weierstraß) Es seien $g_k : D \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, Funktionen, für die der Grenzwert

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|g_k\|_\infty$$

existiert. Dann konvergiert die Funktionenfolge $f_n : D \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x) := \sum_{k=0}^{n} g_k(x)$$

absolut[1] und gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $f : D \to \mathbb{R}$.

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass die f_n punktweise gegen ein f konvergieren. Sei dazu $x \in D$. Wegen $|g_k(x)| \leq \|g_k\|_\infty$ konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{n} g_k(x)$ nach dem Majorantenkriterium absolut. Setzen wir

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

so konvergieren die f_n punktweise gegen dieses f.

Zum Beweis der gleichmäßigen Konvergenz sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir müssen zeigen, dass ein $N(\varepsilon) > 0$ existiert mit $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$ für alle $n \geq N(\varepsilon)$. Aus der Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} \|g_k\|_\infty$ folgt aus Satz 4.4, dass ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \|g_k\|_\infty \leq \varepsilon/2$$

für alle $n \geq N(\varepsilon)$. Daraus folgt für alle $y \in D$

$$|f_n(y) - f(y)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} g_k(y) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |g_k(y)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|g_k\|_\infty \leq \varepsilon/2$$

und damit auch $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$. □

Betrachten wir nun wieder allgemeine Funktionenfolgen. Wir untersuchen die Frage, ob aus der gleichmäßigen Konvergenz einer Folge differenzierbarer Funktionen f_n auch die Differenzierbarkeit der Grenzfunktion f folgt.

Beispiel 11.2(iii) zeigt, dass dies nicht der Fall ist. Wegen

$$f_n(x) = |x|^{1+1/n} = \exp((1+1/n)\ln|x|)$$

folgt für $x > 0$ mit der Kettenregel

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= \exp'((1+1/n)\ln x)(1+1/n)\ln' x \\ &= \exp((1+1/n)\ln x)(1+1/n)\frac{1}{x} = x^{1+1/n}(1+1/n)\frac{1}{x} = (1+1/n)x^{1/n} \\ &= (1+1/n)|x|^{1/n}. \end{aligned}$$

Für $x < 0$ folgt mit einer analogen Rechnung

$$f_n'(x) = \exp((1+1/n)\ln(-x))(1+1/n)\ln'(-x)(-1) = (1+1/n)(-x)^{1/n} = (1+1/n)|x|^{1/n}.$$

[1] Analog zu den reellen Reihen sagen wir, dass eine Reihe von Funktionen absolut konvergiert, wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{n} |g_k(x)|$ punktweise konvergiert.

Für $x = 0$ sind die rechtsseitige und die linksseitige Ableitung gleich Null und stimmen daher überein. Folglich ist die Funktion f_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ differenzierbar. Die Grenzfunktion $f(x) = |x|$ ist in $x = 0$ aber nicht differenzierbar, obwohl die f_n auf $D = [-d, d]$ gleichmäßig gegen f konvergieren.

Gleichmäßige Konvergenz der Funktion reicht also nicht aus, um Differenzierbarkeit der Grenzfunktion zu garantieren. Der folgende Satz zeigt, unter welcher zusätzlichen Bedingung man Differenzierbarkeit erhält.

Satz 11.9 Sei $f_n : D \to \mathbb{R}$ eine Folge von stetig differenzierbaren Funktionen, so dass f_n und f_n' gleichmäßig gegen Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ und $f^* : D \to \mathbb{R}$ konvergieren. Dann ist f stetig differenzierbar mit $f' = f^*$.

Beweis: Sei $x \in D$. Für ein gegebenes $h \in \mathbb{R}$ mit $h \neq 0$ und $x + h \in D$ wähle $n(|h|)$ so groß, dass die Ungleichungen

$$\|f_n - f\|_\infty < h^2 \quad \text{und} \quad \|f_n' - f^*\|_\infty < |h|$$

für $n = n(|h|)$ gelten. Dann folgt für $n = n(|h|)$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} + R_1(h)$$

mit

$$R_1(h) = \frac{f(x+h) - f_n(x+h)}{h} + \frac{f_n(x) - f(x)}{h}.$$

Für $R_1(h)$ gilt

$$|R_1(h)| \leq \left| \frac{f(x+h) - f_n(x+h)}{h} \right| + \left| \frac{f_n(x) - f(x)}{h} \right| < \frac{h^2}{|h|} + \frac{h^2}{|h|} = 2|h|,$$

woraus $R_1(h) \to 0$ für $h \to 0$ folgt. Aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung folgt

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f_n'(\xi) + R_1(h) = f^*(\xi) + R_1(h) + R_2(h)$$

mit $\xi \in [x - |h|, x + |h|]$ und $\xi \in D$ sowie

$$|R_2(h)| = |f_n'(\xi) - f^*(\xi)| < |h|.$$

Daraus folgt $R_2(h) \to 0$ für $h \to 0$.

Da die f_n' gleichmäßig konvergieren, ist f^* nach Satz 11.6 stetig und weil $\xi \to x$ gilt für $h \to 0$ folgt

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \Big(f^*(\xi) + R_1(h) + R_2(h) \Big) = f^*(x).$$

Dies zeigt die Behauptung. $\square$

11.3 Potenzreihen

Zum Abschluss dieses Kapitels betrachten wir noch einmal die Potenzreihen gemäß Beispiel 11.2(iv) (vgl. auch Abschnitt 10.2). Auf Grund der besonderen Struktur der Summanden können wir hier ein besonders schönes Kriterium für gleichmäßige Konvergenz angeben. Der folgende Satz gilt tatsächlich auch für komplexe Potenzreihen (bei der also alle angegebenen Zahlen aus $\mathbb{C}$ sind), wir formulieren und beweisen hier aus Zeitgründen aber die reelle Version.

Satz 11.10 Gegeben sei eine Potenzreihe

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k (x - x_0)^k$$

mit $c_k, x_0 \in \mathbb{R}$, die für ein $x = x_1 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 \neq x_0$ konvergiert.

Dann konvergiert die Potenzreihe für jedes $\rho > 0$ mit $\rho < |x_1 - x_0|$ absolut und gleichmäßig auf $D = [x_0 - \rho, x_0 + \rho]$. Insbesondere gilt für den Konvergenzradius r der Reihe die Ungleichung $r \geq |x_1 - x_0|$. Zudem konvergiert auch die Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{n} k c_n (x - x_0)^{k-1}$$

ebenfalls absolut und gleichmäßig auf D.

Beweis: Setze $g_k(x) := c_k(x - x_0)^k$. Nach Voraussetzung konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{n} g_k(x_1)$, also folgt aus Satz 4.5 $|g_k(x_1)| \to 0$ für $k \to \infty$, woraus mit Satz 3.7 folgt, dass ein $M \in \mathbb{R}$ existiert mit $|g_k(x_1)| \leq M$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Daraus folgt für alle $x \in D$

$$|g_k(x)| = |c_k(x - x_0)^k| = |c_k(x_1 - x_0)^k| \cdot \left| \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right|^k \leq M\theta^k$$

mit

$$\theta = \left| \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right| \leq \frac{\rho}{|x_1 - x_0|} < 1.$$

Da diese Ungleichung für alle $x \in D$ gilt, folgt auch $\|g_k\|_\infty \leq M\theta^k$. Wegen $\theta \in [0, 1)$ konvergiert die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{n} M\theta^k$, also konvergiert $\sum_{k=0}^{n} \|g_k\|_\infty$ nach dem Majorantenkriterium und die absolute und gleichmäßige Konvergenz der f_n folgt aus Satz 11.8.

Für die Reihe

$$\sum_{k=1}^{n} k c_n (x - x_0)^{k-1}$$

beweist man für $g_k(x) = k c_n (x - x_0)^{k-1}$ analog zum ersten Teil des Beweises die Ungleichung $\|g_k\|_\infty \leq kM\theta^{k-1}$. Weil

$$\frac{(k+1)M\theta^k}{kM\theta^{k-1}} = \frac{k+1}{k}\theta \to \theta < 1$$

gilt, konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{n} kM\theta^{k-1}$ nach dem Quotientenkriterium, vgl. Beispiel 4.19(i). Wiederum wie im ersten Teil des Beweises folgt die Aussage nun mit dem Majorantenkriterium. □

Korollar 11.11 Unter den Voraussetzungen von Satz 11.10 gilt für die dort definierte Menge D:

Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k$$

ist stetig differenzierbar (also insbesondere selbst stetig) mit

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k (x - x_0)^{k-1}.$$

Beweis: Nach Satz 11.10 konvergieren die Funktionen

$$f_n(x) := \sum_{k=0}^{n} c_k (x - x_0)^k \quad \text{und} \quad \tilde{f}_n(x) := \sum_{k=1}^{n} k c_k (x - x_0)^{k-1}$$

gleichmäßig gegen f bzw. eine Grenzfunktion $f^* : D \to \mathbb{R}$. Als Polynome sind f_n und $\tilde{f}_n$ stetig und differenzierbar und aus Beispiel 9.9(a) und der Kettenregel folgt $f_n' = \tilde{f}_n$, da jeder Summand in der Reihe für $\tilde{f}_n$ gerade die Ableitung des entsprechenden Summanden in der Reihe für f_n ist. Die Behauptung folgt daher mit Satz 11.9. □

Mit anderen Worten besagt dieses Korollar also, dass wir Potenzreihen auf dem in Satz 11.10 angegebenen Definitionsbereich D gliedweise differenzieren dürfen, um ihre Ableitung zu bestimmen.

Beispiel 11.12 Für den Cosinus gilt

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Dies ist gerade die Potenzreihe

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

mit $c_k = (-1)^{k/2}/k!$ für gerades k und $c_k = 0$ für ungerades k.

Da diese Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert, gilt die Aussage von Korollar 11.11 auf jeder Menge der Form $D = [-\rho, \rho]$ für alle $\rho > 0$, also auf ganz $\mathbb{R}$. Die Ableitung des Cosinus ist also gegeben durch

$$\begin{aligned} \cos' x &= \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} \\ &= 0 + 2c_2 x + 0 + 4c_4 x^3 + 0 + 6c_6 x^5 + \dots \\ &= -x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} - \frac{x^9}{9!} \pm \dots \end{aligned}$$

Wie zu erwarten ist dies genau die Reihe der Funktion $-\sin x$. □

11.4 Anhang: Eine Taylorreihe mit Konvergenzradius 0

Mit den Techniken, die wir in diesem Kapitel kennen gelernt haben, können wir eine Funktion konstruieren, deremn Taylorreihe den Konvergenzradius 0 besitzt (vielen Dank an Herrn Prof. Kriecherbauer für dieses Beispiel).

Wir verwenden dazu eine Funktion $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:

- $0 \leq \chi(x) \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$
- $\chi(x) = 1$ für alle $x \in [-1/2, 1/2]$
- $\chi(x) = 0$ für alle $x \notin [-1, 1]$
- χ ist auf $\mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar

Eine solche Funktion kann durch Zusammensetzen von konstanten Funktionen und Exponentialfunktionen (ähnlich wie die aus Beispiel 10.20) explizit konstruiert werden, was beweist, dass eine solche Funktion existiert. Da die spezielle Form von χ aber im Weiteren keine Rolle spielt, brauchen wir gar keine explizite Konstruktion.

Da χ außerhalb von $[-1, 1]$ konstant gleich Null ist, gilt dies auch für alle höheren Ableitungen $\chi^{(m)}$ von χ und es folgt

$$\|\chi^{(m)}\|_\infty = \sup\{|\chi^{(m)}(x)| \,:\, x \in [-1, 1]\} = \chi^{(m)}(p)$$

für ein $p \in [-1, 1]$, weswegen $\|\chi^{(m)}\|_\infty < \infty$ ist. Die Definition

$$C_m := \max\{\|\chi^{(n)}\|_\infty \,|\, n = 0, \ldots, m\}$$

liefert also einen endlichen Wert.

Wir definieren nun für $k \in \mathbb{N}$ die Funktionen

$$g_k(x) := (kx)^k \chi(k^2 x).$$

Per Induktion und unter Verwendung der Produkt- und Kettenregel sowie des binomischen Lehrsatzes beweist man, dass die höheren Ableitungen dieser g_k gegeben sind durch

$$g_k^{(m)} = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} k^k \frac{k!}{(k-j)!} x^{k-j} \chi^{(m-j)}(k^2 x) k^{2(m-j)}.$$

Mit dem oben definieren C_m folgt

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x^{k-j} \chi^{(m-j)}(k^2 x)| \leq C_m \left(\frac{1}{k^2}\right)^{k-j} = C_m k^{2(j-k)},$$

weil $\chi^{(m-j)}(k^2x)$ ja nur für $k^2x \in [-1,1]$, also für $x \in [-1/k^2, 1/k^2]$ Werte $\neq 0$ annimmt. Es folgt die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\|g_k^{(m)}\|_\infty &\leq \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} k^k \underbrace{\frac{k!}{(k-j)!}}_{\leq k^j \leq k^m} C_m \underbrace{k^{2(j-k)} k^{2(m-j)}}_{=k^{2(m-k)}} \\
&\leq k^{k+m} k^{2(m-k)} \underbrace{\sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j}}_{=2^k} \\
&= Ck^{3m-k}2^m.
\end{aligned}$$

Mit dem Quotientenkriterium sieht man, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{n} Ck^{3m-k}2^m$ konvergiert und aus dem Majorantenkriterium folgt damit, dass der Grenzwert

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|g_k^{(m)}\|_\infty$$

für jedes $m \in \mathbb{N}$ existiert. Aus dem Konvergenzkriterium von Weierstraß (Satz 11.8) folgt damit die gleichmäßige Konvergenz von

$$f_n^{(m)}(x) := \sum_{k=0}^{n} g_k^{(m)}(x)$$

gegen Grenzfunktionen $f^{(m)}$ und mit Satz 11.9 folgt die Differenzierbarkeit aller $f^{(m)}$ mit $(f^{(m)})' = f^{(m+1)}$. Folglich ist $f = f^{(0)}$ auf $\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar und wir können die Taylorreihe in $x_0 = 0$ bilden. Da χ auf $[-1/2, 1/2]$ konstant gleich 1 ist, folgt $\chi(0) = 1$ und $\chi^{(m)}(1) = 0$ für alle $m \geq 1$. Einsetzen in die Formeln für $g_k^{(m)}$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, liefert dann $g_k^{(m)}(0) = 0$ für $m \neq k$ und $g_k^{(m)}(0) = k!k^k$ für $m = k$. Daraus folgt

$$f^{(m)}(0) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k^{(m)}(0) = m!m^m.$$

Die Taylorreihe von f in $x_0 = 0$ ist also von der Form

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{k!k^k}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} k^k x^k.$$

Für jedes $x \neq 0$ gilt für $k \geq |2/x|$ daher für die Summanden der Reihe die Ungleichung $|k^k x^k| = |kx|^k \geq 2^k$. Diese konvergieren also nicht gegen Null, weswegen auch die Reihe nicht konvergieren kann. Folglich konvergiert die Taylorreihe für kein $x \neq 0$ und der Konvergenzradius ist gleich 0.

Literaturverzeichnis

[1] H. Amman and J. Escher, *Analysis I*, Birkhäuser Verlag, 3. Auflage, 2006.

[2] C. Blatter, *Analysis I*, Springer Verlag, 2. Auflage, 1977.

[3] O. Forster, *Analysis 1*, Vieweg + Teubner Verlag, 10. Auflage, 2011.

[4] K. Königsberger, *Analysis 1*, Springer Verlag, 6. Auflage, 2003.

[5] W. Rudin, *Analysis*, Oldenbourg Verlag, 4. Auflage, 2009.

Index

Ableitung, 132
  der Umkehrfunktion, 138
  einseitig, 142
  höhere, 143
  Kettenregel, 140
  linksseitig, 142
  Produktregel, 137
  Quotientenregel, 137
  rechtsseitig, 142
Absolutbetrag, 24
absolute Konvergenz, 64, 165
abzählbar, 32
Addition, 16
Additionstheoreme, 119
analytisch, 160
Arcus-Cosinus, 126
Arcus-Sinus, 126
Arcus-Tangens, 126
Assoziativgesetz, 17
Äquivalenz, 6
Axiom, 13
  Anordnung, 19
  archimedisch, 19
  Körper, 16
  Peano, 13
  Vollständigkeit, 26

Bernoullische Ungleichung, 20
Beschränktheit, 28, 41, 84
Betrag, 24
bijektiv, 65
Binomialkoeffizient, 9
Binomischer Lehrsatz, 8, 11
Bolzano-Weierstraß
  Satz von, 56

Cauchy-Folge, 48
Cauchy-Produkt von Reihen, 69
Cauchysches Konvergenzkriterium
  für Reihen, 60
Cosinus, 118
  Additionstheorem, 119
  Reihendarstellung, 120
  Wertetabelle, 124

Definitionsmenge, 73
  maximale, 75
Dezimalbruch, 34, 59
dicht, 34
Differential, 132
Differenzenquotient, 132
differenzierbar
  auf D, 143
  in einem Punkt, 132
Distributivgesetz, 17
Divergenz, 40
  eigentlich, 46
Dreiecksungleichung, 24, 110, 111
  umgekehrte, 24

Einheitswurzel, 128
Element, 15
  invers, 17
  neutral, 17
ε-Umgebung, 38
Eulersche Formel, 118
Exponentialfunktion, 92
  Funktionalgleichung, 95
  komplex, 113
  zur Basis a, 101

Fakultät, 8
Folge, 37
  Cauchy, 48
  monoton, 49
Funktion, 73
  Komposition, 78
  rationale, 76

Verkettung, 78
Funktionenfolge, 161

geometrische Reihe, 6
Graph, 73
Grenzfunktion, 162
Grenzsteuersatz, 134
Grenzwert, 38
bei Funktionen, 78
Differenzregel, 44
Produktregel, 43
Quotientenregel, 44
Summenregel, 42
Ungleichung, 45

harmonische Reihe, 61
alternierend, 63
Häufungspunkt, 53

imaginäre Einheit, 109
Imaginärteil, 109
Induktion
vollständige, 3
Induktionsanfang, 3
Induktionsschritt, 3
Infimum, 29
injektiv, 97
Intervall, 26
abgeschlossen, 26
Länge, 26
offen, 26
Intervallschachtelung, 26

Kettenregel, 140
Kommutativgesetz, 16
komplexe Ebene, 111
komplexe Einheitswurzel, 128
komplexe Zahlen, 109
konkav, 151
kontinuierliche Verzinsung, 93
Kontraposition, 22
Konvergenz, 38
absolut, 64, 165
gleichmäßig, 162
komplexe Folgen, 112
punktweise, 162
uneigentlich, 46
Konvergenzkriterium
von Weierstraß, 164
Konvergenzradius, 158
konvex, 151
Körper, 16
archimedisch angeordneter, 19
Krümmung, 145

Lagrangesches Restglied, 154
Landau-Symbol, 135, 156
Leibnizsches Konvergenzkriterium
für alternierende Reihen, 63
Limes, 38
bei Funktionen, 78
Limes inferior, 54
Limes superior, 53
Logarithmus
Funktionalgleichung, 100
natürlich, 100
zur Basis a, 101

Marktgleichgewicht, 38, 58
Maximalstelle, 147
Maximum, 31, 84
global, 147
lokal, 147
strikt, 147
Menge, 15
Minimalstelle, 147
Minimum, 31, 84
global, 147
lokal, 147
strikt, 147
Mittelwertsatz
der Differentialrechnung, 149
verallgemeinert, 154
Monotonie
Folge, 49
Funktion, 98
Multiplikation, 16

natürliche Zahlen, 1
formale Definition, 13
negativ, 19
Nullfolge, 38
Nullstelle, 82

Pascalsches Dreieck, 9

Peano-Axiome, 13
periodisch, 124
π, 123
Polarkoordinaten, 127
Polynom, 76
positiv, 19
Potenzreihe, 158, 167
    gliedweise Ableitung, 168
Produkt, 8
    leeres, 8

Quotientenkriterium, 67

radiokativer Zerfall, 134
reelle Zahlen, 15
Reihe, 57
    Cauchy-Produkt, 69
    geometrische, 6
    harmonische, 61
      alternierend, 63
Ring, 18
Rolle
    Satz von, 149
Runge-Funktion, 157

Schranke, 28
    obere, 28
    untere, 28
Sinus, 118
    Additionstheorem, 119
    Reihendarstellung, 120
    Wertetabelle, 124
Steigung, 131
Stetigkeit, 80
    ε-δ Kriterium, 85
    gleichmäßig, 87
Summe, 2
    leere, 2
Supremum, 29

Tangens, 125
Taylorpolynom, 154
Taylorreihe, 158
Teilfolge, 52
Teilmenge, 16

überabzählbar, 32
Umgebung, 38
Umkehrfunktion, 97
Umordnung, 64, 65
Unbeschränktheit, 28
∞-Norm, 164

vollständige Induktion, 3
Vollständigkeitsaxiom, 26

Wassertank, 38, 43, 93, 103
Wertemenge, 73
Widerspruchsbeweis, 23
Wurzelberechnung, 38

Zinseszins, 92
Zwischenwertsatz, 82