

Über die Felder \mathbf{B} , \mathbf{H} und \mathbf{M} in der Magnetostatik

T. Hebbeker Humboldt-Universität Berlin

In den Physik-Lehrbüchern herrscht immer noch einige Verwirrung über die Bedeutung von und die Zusammenhänge zwischen den Feldern $\vec{\mathbf{B}}$, $\vec{\mathbf{H}}$ und $\vec{\mathbf{M}}$. Ich schlage eine neue Definition der (nicht messbaren !) Felder $\vec{\mathbf{H}}$ und $\vec{\mathbf{M}}$ vor, die für elementare magnetische Systeme deren Bestimmung und Interpretation vereinfacht, und zu einem besseren Verständnis dieser Größen führt.

Messbar ist nur das magnetische Feld $\vec{\mathbf{B}}$, über die direkte Kraftwirkung auf geladene Teilchen (Lorentzkraft)

$$\vec{\mathbf{F}} = q (\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}) \quad (1)$$

und indirekt via Induktionsgesetz

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \quad (2)$$

mit der elektrischen Feldstärke $\vec{\mathbf{E}}$.

Im Folgenden vernachlässigen wir alle elektrischen Felder. Alle B-Felder entstehen dann durch elektrische Ströme. Die Erzeugung beschreibt die Maxwell-Gleichung

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{j}} = \vec{\mathbf{j}}_a + \vec{\mathbf{j}}_m \quad (3)$$

(Amperesches Gesetz). Hier tragen sowohl die äußere makroskopische Stromdichte $\vec{\mathbf{j}}_a$ (stromdurchflossener Draht) als auch die mikroskopischen atomaren Kreisströme bei, die man im Term $\vec{\mathbf{j}}_m$ zusammenfassen kann. Man spricht auch von 'freien' und 'gebundenen' Strömen. Ferner ist das \mathbf{B} -Feld immer divergenzfrei:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0 \quad (4)$$

Verwirrung tritt bei den magnetischen Feldgrößen oft auch im Zusammenhang mit dem Einheitensystem auf! Um diese Schwierigkeit von vornherein zu vermeiden setzen wir in den Gleichungen alle auftretenden universellen Konstanten wie μ_0 zu eins. Bei geeigneter Wahl der Einheiten ist dies immer möglich.

Jetzt können wir die Felder $\vec{\mathbf{H}}$ und $\vec{\mathbf{M}}$ definieren durch

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{j}}_a \quad (5)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{M}} = \vec{\mathbf{j}}_m \quad (6)$$

Hieraus folgt zunächst nur

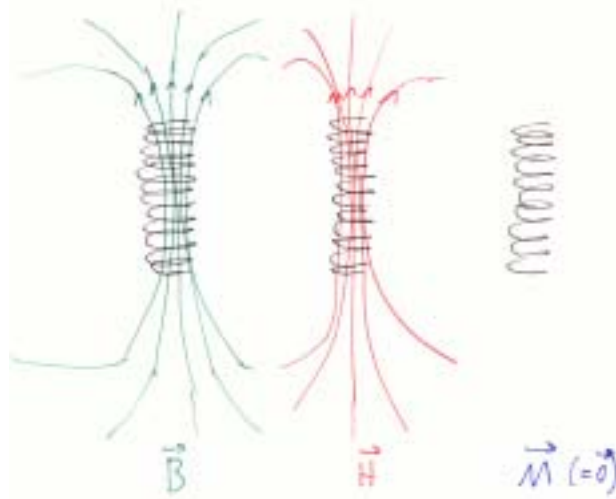
$$\vec{\nabla} \times \vec{H} + \vec{\nabla} \times \vec{M} = \vec{\nabla} \times \vec{B} \quad (7)$$

Wir verlangen darüberhinaus:

$$\vec{H} + \vec{M} = \vec{B} \quad (8)$$

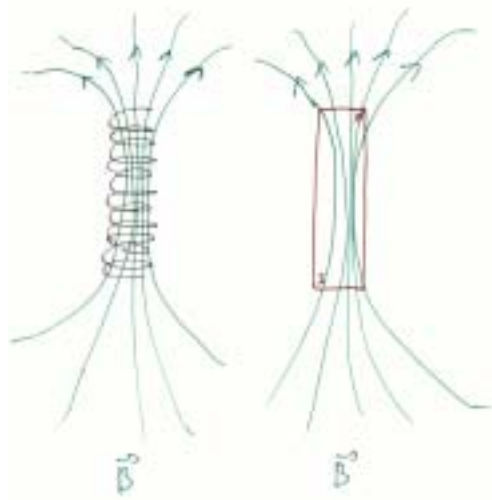
Es handelt sich hier um nützliche Hilfsgrößen, die man aus praktischen Gründen einführt, auf die man aber auch ganz verzichten könnte! Da in der Literatur für diese Größen keineswegs einheitliche Namen verwendet werden, sprechen wir hier einfach vom **B**-Feld, **H**-Feld und **M**-Feld. Man beachte, dass durch Definition von $\vec{\nabla} \times \vec{H}$ das Feld \vec{H} selbst noch nicht eindeutig festgelegt ist, entsprechendes gilt für \vec{M} . Man wählt \vec{M} aber in jedem Fall so, dass das M-Feld verschwindet, wenn überhaupt keine gebundenen Ströme vorhanden sind.

Zunächst betrachten wir die von einer stromdurchflossenen zylinderförmigen Spule im Vakuum erzeugten Felder:



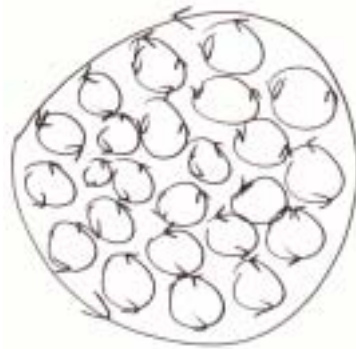
Dieser Fall ist klar!

Jetzt betrachten wir ein isoliertes ferromagnetisches Material ohne äußere Ströme. Der Einfachheit halber soll es sich um einen Stabmagneten handeln, der den gleichen kreisförmigen Querschnitt und die gleiche Länge wie die obige Spule hat. Bei geeignetem Strom im Fall A) erzeugen Spule und Stabmagnet sowohl im Inneren als auch außen das gleiche **B**-Feld:



Man beachte: es gibt für die senkrechten Feldkomponenten keine Unstetigkeiten an den oberen und unteren Grenzflächen, an denen die Feldlinien ein- bzw. austreten.

Welche Bedeutung hat nun das \mathbf{M} -Feld? Wir setzen es hier **nicht** von vorneherein gleich der magnetischen Volumendichte. Auf die quantenmechanischen Details (Fluktuation, Elektronspin) wollen wir nicht eingehen und stellen uns durch kleine Kreisströme erzeugte atomare magnetische Dipole vor, die sich zu einem makroskopischen Dipolfeld überlagern:



In diesem Sinne ist die obige Stromdichte \vec{j}_m eine effektive Größe, sie ergibt sich aus der Summe aller mikroskopischen Ströme.

Jetzt kommen wir zum entscheidenden Punkt: Wie definieren wir das \mathbf{M} -Feld im Vakuum, also außerhalb des magnetischen Materials? Kann es überhaupt unterschiedliche Antworten auf diese Frage geben? Ja, denn die Felder, \mathbf{H} und \mathbf{M} haben keine direkte physikalische Bedeutung, nur $\vec{H} + \vec{M} = \vec{B}$ muss erfüllt sein. Wir können ohne weiteres ein wirbelfreies 'Korrekturfeld' \vec{K} (d.h. $\vec{\nabla} \times \vec{K} = \mathbf{0}$) so einführen, dass sich \mathbf{M} und \mathbf{H} wie folgt ändern:

$$\vec{M} \rightarrow \vec{M} + \vec{K} \quad (9)$$

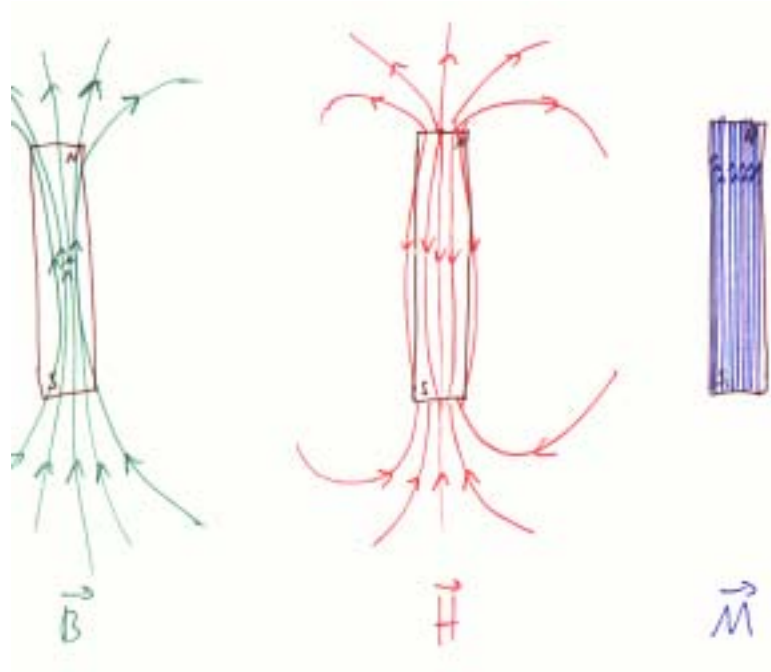
$$\vec{H} \rightarrow \vec{H} - \vec{K} \quad (10)$$

Durch diese Um-Eichung bleiben die Beziehungen (5)-(8) unverändert.

Wir betrachten jetzt zwei alternative Definitionen:

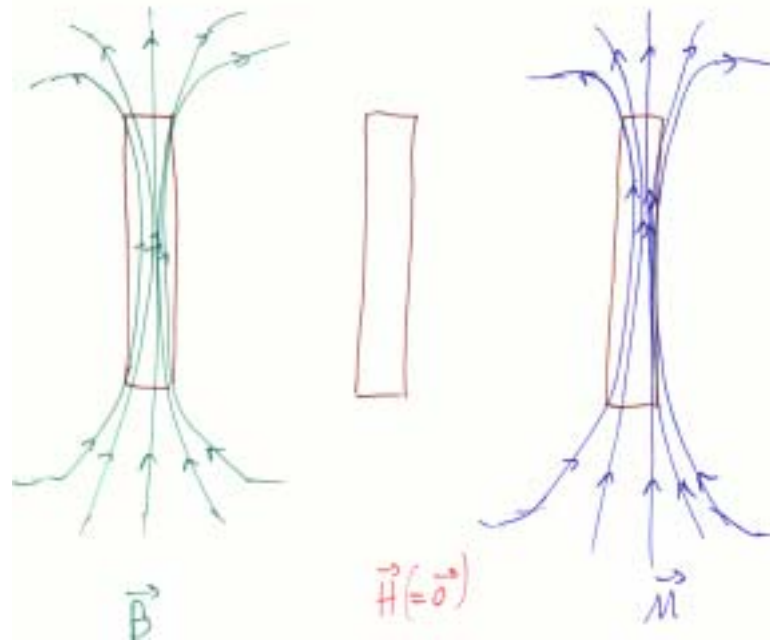
i) In der Literatur wird das \mathbf{M} -Feld durch die Volumendichte der mikroskopischen magnetischen Dipolmomente definiert, so dass im Außenbereich \mathbf{M} verschwindet [1]. Vorteil: \mathbf{M} gibt direkt an,

wo sich das magnetische Material befindet. Aber es gibt auch einen großen Nachteil: Da ja außerhalb des Ferromagneten ein \mathbf{B} -Feld auftritt, müssen wir jetzt ein \mathbf{H} -Feld einführen, obwohl gar keine äußeren Stromdichten \vec{j}_a vorhanden sind! Das Feld \mathbf{M} macht an den Polen des Stabmagneten einen Sprung und ist deshalb nicht divergenzfrei! Das erzwingt wegen $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0$ auch einen Sprung im \mathbf{H} -Feld. Die Ursache wird in der Literatur interpretiert als ‘magnetische Oberflächenladung’, obwohl sich das \mathbf{B} -Feld an der Grenzfläche Luft-Magnet an den Pole des Ferromagneten stetig verhält. Da ferner wegen der Abwesenheit freier Ströme \mathbf{H} rotationsfrei ist (nicht aber \mathbf{B} und \mathbf{M}) kehrt sich die \mathbf{H} -Feldrichtung an den Polen um. Somit ergibt sich folgendes Bild:



Direkt an den Polen gilt $|\vec{H}| = |\vec{B}|$ im Vakuum, und im Magneten folgt $|\vec{H}| < |\vec{M}|$ und $|\vec{B}| < |\vec{M}|$. Das \mathbf{M} -Feld ist homogen (im Magneten), während die \mathbf{H} -Feldlinien recht kompliziert verlaufen.

ii) Alternativ kann man die Magnetisierung so definieren, dass das \mathbf{M} -Feld sich stetig über die Pole hinaus in den Außenraum fortsetzt, also dort $\vec{M}_{ii} = \vec{H}_i$ gilt. Die Indizes beziehen sich auf die beiden Ansätze i) und ii). Jetzt ist das \mathbf{H} -Feld überall null:



Der Übergang von den Feldern der Definition i) zu denen der Definition ii) entspricht der Einführung eines Korrekturfeldes $\vec{K} = \vec{H}_i$. Im Inneren hat das \vec{M} -Feld jetzt einen kleineren Wert als im Fall der Definition i), da ja das \vec{B} -Feld unverändert ist, denn $\vec{B} = \vec{M}_i + \vec{H}_i = \vec{M}_{ii}$ (\vec{M}_i und \vec{H}_i sind entgegengerichtet!). Damit gibt es jetzt eine klare Zuordnung zwischen den freien Strömen und dem \vec{H} -Feld einerseits und zwischen gebundenen Strömen und \vec{M} -Feld andererseits. Ist eine der beiden Stromarten überall null, so tritt auch das zugehörige Feld nicht auf. Am Grenzübergang Luft - Magnet tritt keine Divergenz mehr auf. Bei komplizierteren Problemen muss man zur Berechnung von \vec{B} einfach die Felder \vec{H} und \vec{M} entsprechend ihrer Ursachen bestimmen und addieren. Dabei ist natürlich zu beachten, dass im allgemeinen \vec{M} von \vec{B} abhängt: Paramagnetismus, Diamagnetismus . . .

Natürlich hat auch diese Sichtweise Nachteile. Einmal ist das \vec{M} -Feld jetzt nicht mehr auf die materiefüllten Regionen beschränkt, sondern tritt auch im Vakuum auf. Zweitens erscheint unschön, dass das \vec{B} -Feld im Vakuum zwar nicht zwischen Spule und Stabmagnet unterscheiden kann, aber die (unphysikalischen) Felder in den beiden Fällen anders aussehen. Aber diese Felder sind nun mal keine messbaren Größen!

Schließlich müssen wir noch einmal auf die Frage nach der Magnetisierung \vec{M} als Maß für das magnetische Moment pro Volumen, \vec{M} , zurückkommen, denn die \vec{M} -Feld-Definitionen i) und ii) unterscheiden sich ja. Es gilt $\vec{M}_i = \vec{M}$, aber es gibt keinen einfachen Zusammenhang zwischen \vec{M}_{ii} und \vec{M} . Das kann man als Nachteil ansehen, da man jetzt mit vier magnetische Größen arbeiten muss. Andererseits ist es vielleicht gerade von Vorteil, die Dipoldichte und das von ihr erzeugte Feld als unterschiedliche Größen mit verschiedenen Bedeutungen zu akzeptieren!

Ich danke Herrn Prof. Dr. R. Keiper für viele lehrreiche Anmerkungen.

Literatur:

[1] J.D. Jackson, Classical Electrodynamics