

## Physik III, RWTH, WS 2002/2003, T.Hebbeker

19-Dec-2002

Literatur: Gerthsen-Physik

WWW: Chua's circuit:

[http://www.cmp.caltech.edu/mcc/chaos\\_new/Chua.html](http://www.cmp.caltech.edu/mcc/chaos_new/Chua.html)

[http://wug.physics.uiuc.edu/courses/phys398emi/Student\\_Projects/Fall00/MChukhman\\_NSears/chua\\_index.html](http://wug.physics.uiuc.edu/courses/phys398emi/Student_Projects/Fall00/MChukhman_NSears/chua_index.html)

WWW: Mandelbrot-Set:

<http://www.heise.de/ct/ftp/result.xhtml?url=/ct/ftp/98/15/186/default.shtmlwords=Mandelbrot>

WWW: Fraktale:

<http://www.physik.rwth-aachen.de/harm/aixphysik/index.html>

Selberbauen: Magnetpendel!

Drei gleiche Magnete sind als gleichseitiges Dreieck in einer Platte eingelassen. Genau in der Mitte darüber ist an einem Faden ein weiterer Magnet frei aufgehängt.

**VERSUCH: 7.1.1:** Magnetpendel

### Nichtlineare Dynamik - Chaos - Fraktale

Hier: klassische Physik (keine Quantenphänomene!), also deterministische Systeme!

A) René Descartes (17. Jh.), Pierre Simon de Laplace (19. Jh.): Anfangsbedingungen + Naturgesetze  
→ Alles ist vorhersagbar (Determinismus)

*Beispiel: Billard*

*Beispiel: Planetenbewegung<sup>1</sup>*

B) Henri Poincaré (1903): Kleine Abweichungen in den Anfangsbedingungen können große Unterschiede in den Phänomenen erzeugen → Vorhersagen werden unmöglich.

Edward Lorenz, 1972: "Does the Flap of a Butterfly's Wings in Brazil Set Off a Tornado in Texas ?"  
(Chaos)

*Beispiel: Aufrecht stehende und dann fallende Nadel*

*Beispiel: Wettervorhersage*

Wer hat recht ? Präzisere Formulierung der Frage: 'Führen kleine Änderungen der Anfangsbedingungen zu kleinen oder zu großen Variationen der zu prognostizierenden Größe ?'

**VERSUCH: 7.2.1:** Video-Rückkopplung

<sup>1</sup>Dieses ursprünglich als Argument für Determinismus angeführte Beispiel ist inzwischen als chaotisches System entlarvt worden: Eine Vorhersage über mehr als 100 Millionen Jahre ist derzeit **nicht** möglich!

## 1. Bekannte physikalische Systeme

Bisher haben wir meist physikalische Systeme studiert, die durch **LINEARE** Differentialgleichungen für eine oder mehrere zeitabhängige Größen beschrieben wurden.

*Beispiele:*

a) *Gleichmäßig beschleunigte Bewegung:*

$$\ddot{x} = \text{const} \quad (1)$$

b) *Gedämpfte Schwingung:*

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\gamma \dot{x} = 0 \quad \gamma \ll \omega_0 \quad (2)$$

c) *Gekoppelte harmonische Oszillatoren:*

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{g}{l} + \frac{D}{m} & -\frac{D}{m} \\ -\frac{D}{m} & \frac{g}{l} + \frac{D}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (3)$$

d) *Wellengleichung:*

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = v^2 \cdot \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \quad (4)$$

Die Lösungen der Gleichungen enthalten Konstanten, lineare Terme in  $t$ , Exponential- und Winkelfunktionen. Auch die allgemeine Lösung der Wellengleichung ist von einfacher Form.

Wie ist hier die zentrale Frage dieser Vorlesung zu beantworten ?

Antwort: Jein! Problematisch sind die Winkelfunktionen, sagen wir  $\cos(\omega t)$ . Kleine Variationen in  $\omega$  führen zu riesigen Unterschieden in der Phase bzw. Amplitude nach einer großen Zahl von Perioden, also für  $t \gg 1/\omega$ .

*Beispiel: Sichtbares Licht*

Um die Amplitude nach 1 Sekunde voraussagen zu können, muss die Frequenz auf relativ  $< 10^{-15}$  genau bekannt sein!

Trotzdem: verglichen mit den weiter unten betrachteten Systemen verhalten sich die Winkelfunktionen recht zivilisiert . . .

*Beispiel:*

e) *Ungedämpfter, harmonisch angeregter harmonischer Oszillator*

*Die Amplitude*

$$x_0(\omega) \sim \frac{1}{|\omega^2 - \omega_0^2|} \quad (5)$$

wird in der Nähe der Eigenfrequenz  $\omega_0$  sehr groß und die Ableitung divergiert:

$$\left| \frac{dx_0(\omega)}{d\omega} \right| \sim \frac{\omega}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2} \rightarrow \infty \quad \text{fuer } \omega \rightarrow \omega_0 \rightarrow \infty \quad (6)$$

Vorhersagen sind mit Annäherung an die Resonanzfrequenz also zunehmend schwieriger.

Beispiel:

f) Der asymmetrische kräftefreie Kreisel! Die Rotation um die Achse mit dem mittleren Hauptträgheitsmoment ist instabil, d.h. die Nutationsbewegung (Figurenachse) verläuft scheinbar unvorhersagbar. Im Prinzip liegt hier die gleiche Situation vor wie bei der umfallenden Nadel, aber die Bewegung ist spektakulärer . . .

Während die zugrundeliegenden Differentialgleichungen des 'idealen' Kreisels linear sind, können Reibung und Vibrationen zu nichtlinearen Beiträgen führen (s.u.) . . .

**VERSUCH: 7.1.2:** Asymmetrischer Kreisel

## 2. Nichtlineare kontinuierliche physikalische Systeme

Wichtigste Konsequenz einer nichtlinearen Differentialgleichung: Kein Superpositionsprinzip, also die arithmetische Summe zweier Lösungen ist keine Lösung!

### 2.1. Einfache Beispiele

Ein einfaches Beispiel ist das Fadenpendel bei mäßig großer Amplitude:

$$m \cdot l \cdot \ddot{\phi} = F = -m \cdot g \cdot \sin \phi \quad (7)$$

Die Schwingungsdauer hängt jetzt von der Amplitude  $\phi_0$  ab, die Lösung ist eine periodische, analytisch nicht darstellbare Funktion. 'Chaotisches Verhalten' (= "unvorhersagbarer Bewegungsablauf") stellt sich jedoch nicht ein.

Ersetzt man den Faden durch eine 'mathematische Stange' (masselos), kann man Amplituden bis  $180^\circ$  zulassen. Nähert man sich diesem Grenzwert, wird die Abhängigkeit der Periodendauer

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\phi_0}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{\phi_0}{2} \dots\right) \quad (8)$$

von  $\phi_0$  sehr groß und deshalb kann  $T$  nicht mehr mit ausreichender Genauigkeit berechnet werden<sup>2</sup>:

$\phi_0 - 0.1^\circ$	$T/T_0 = 0.99996$	$\phi_0 - 0.1^\circ$	$T/T_0 = 0.99996$	$\phi_0 - 0.1^\circ$	$T/T_0 = 0.984$
$\phi_0 = 10^\circ$	$T_0 = 1.0019 \text{ s}$	$\phi_0 = 90^\circ$	$T_0 = 1.1803 \text{ s}$	$\phi_0 = 179^\circ$	$T_0 = 3.9011 \text{ s}$
$\phi_0 + 0.1^\circ$	$T/T_0 = 1.00004$	$\phi_0 + 0.1^\circ$	$T/T_0 = 1.00004$	$\phi_0 + 0.1^\circ$	$T/T_0 = 1.018$

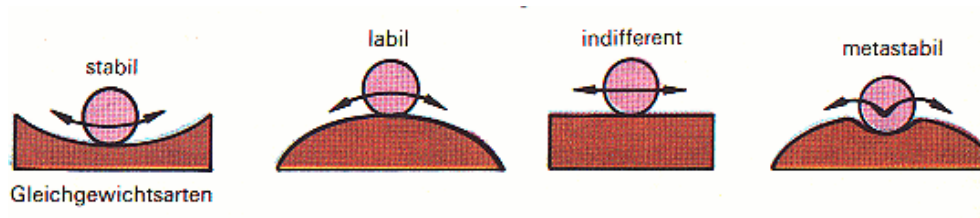
Wir erkennen hier wieder eine charakteristische Eigenschaft von Systemen, die keine Vorhersagen erlauben:

$$\frac{dT}{d\phi_0} \rightarrow \infty \quad \text{fuer } \phi_0 \rightarrow 180^\circ \quad (9)$$

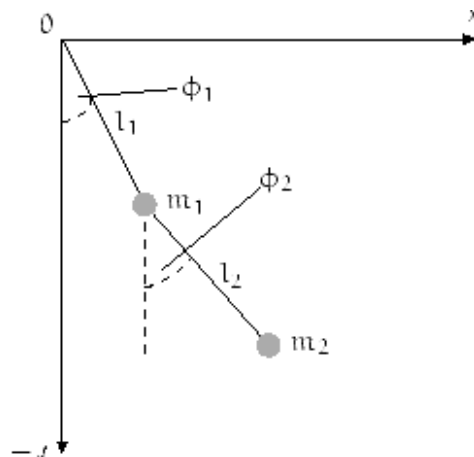
Die Situation  $\phi_0 \rightarrow 180^\circ$  erinnert an die umfallende Nadel (instabiles Gleichgewicht)!

Erinnerung:

<sup>2</sup>Hier  $2\pi \sqrt{l/g} = 1 \text{ s}$

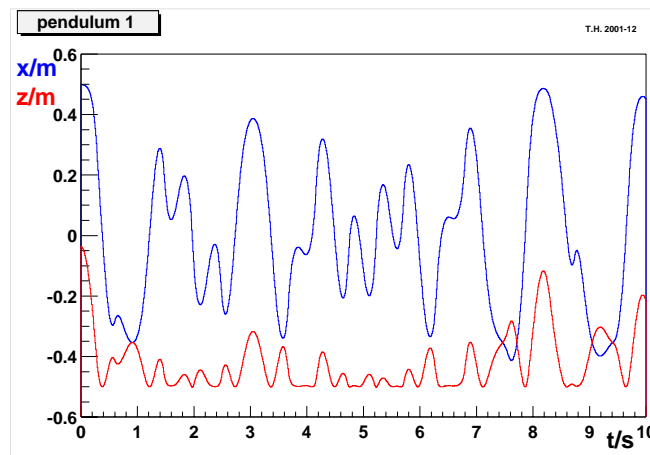


Ein zweites Beispiel für ein nichtlineares System ist das ideale Doppel(stangen)pendel, das wir auch schon kennengelernt haben.

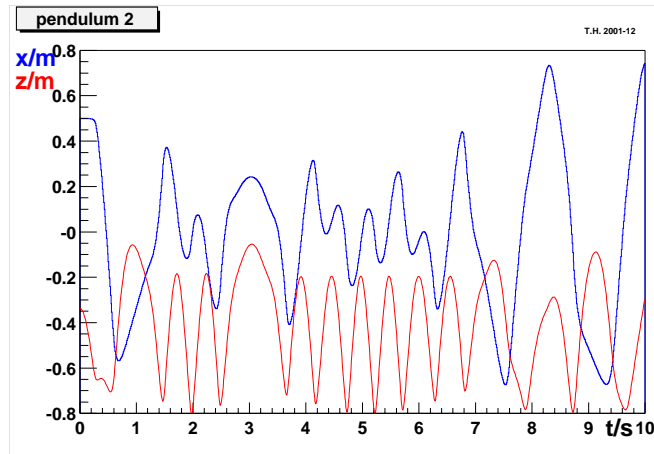


**VERSUCH: 7.1.2: Doppelpendel**

Hier ist auch die Bewegung chaotisch: Horizontale ( $x$ ) und vertikale ( $z$ ) Koordinate des obersten Pendels:



Horizontale ( $x$ ) und vertikale ( $z$ ) Koordinate des unteren Pendels:

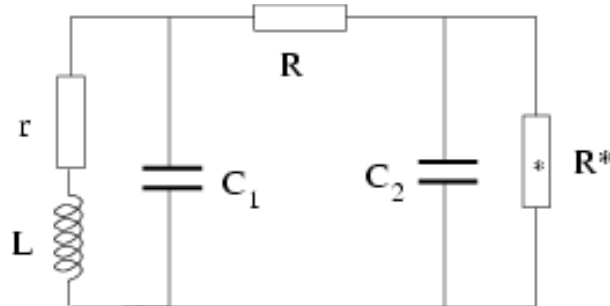


**SIMULATION:** Doppelpendel

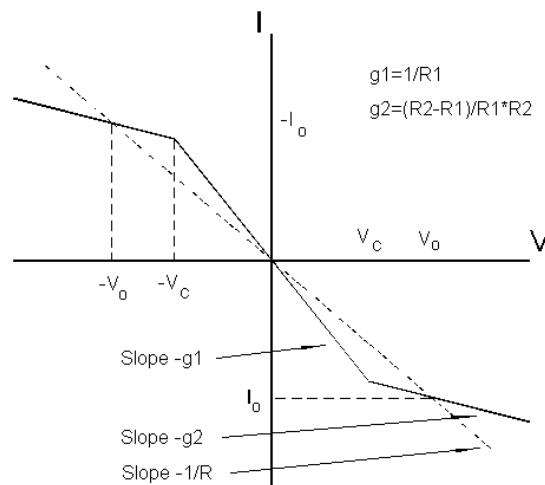
Winphysik: Spur einschalten; a) Startwinkel = 0.7; b) Startwinkel = 1.8

Wir definieren ein System als chaotisch, wenn die Zeitabhängigkeit der Observablen nichtperiodisch ist und empfindlich auf Variation der Anfangswerte reagiert.

Ein weiteres Beispiel entnehmen wir der Elektrizitätslehre. Folgender Schaltkreis ist in der Literatur nach seinem Erfinder Leon Chua als “Chua’s circuit” bekannt<sup>3</sup>:



Das Besondere ist der ‘Widerstand’  $R^*$ , der negativ(!) und nichtlinear sein soll:



<sup>3</sup>es gibt mehrere Varianten ...

Ein solches hypothetisches Bauelement hat bizarre Eigenschaften, wie man sich an einfachen Beispielen überlegen kann. Der negative nichtlineare Widerstand kann elektronisch mit Hilfe eines Operationsverstärkers und zwei Dioden realisiert werden.

Die den Schaltkreis beschreibenden Differentialgleichungen können numerisch gelöst werden. Das System wird durch kurzes Anlegen einer Gleichspannung an  $C_1$  gestartet.

**SIMULATION:** Chua (im Browser)

Applet von Michael Cross, Caltech

a) Standardwerte: Oszillationen, Amplitude abklingend. (Beachte: Endwerte ungleich null wegen negativem Widerstand!)

b) Standardwerte, in langsamen Schritten  $R$  erniedrigen (auf etwa 1.24): Pendeln zwischen zwei Regionen!

Aufgetragen ist  $X \sim V_1$  (Spannung Kondensator 1) und  $Y \sim V_2$  (Spannung Kondensator 2). Variabel sind die Werte der Widerstände ( $k\Omega$ ), Kondensatoren ( $nF$ ), und Spule ( $mH$ ).

**DEMONSTRATION:** 'Chua-Musik'

University Illinois (4.0 - 4.5 Min.)

## 2.2. Mathematische Beschreibung und Analyse

### 2.2.1. Annahmen und Definitionen

Wir betrachten ein deterministisches System, in dem - im Prinzip - zu jedem Satz von Anfangswerten  $\zeta_i(0)$  die zukünftige Konfiguration  $\zeta_i(t)$  für alle  $t > 0$  berechnet werden kann.

Wir nehmen an, dass dieses System von  $n$  **kontinuierlichen** unabhängigen<sup>4</sup> Größen  $\zeta_i$  (reell, hängen von der Zeit  $t$  ab) beschrieben werden kann durch ein System von Differentialgleichungen der Form:

$$\dot{\zeta}_i = f_i(\zeta_1, \dots, \zeta_n, t) \quad (10)$$

Bei den Variablen  $\zeta_i$  kann es sich um Auslenkungen, Feldstärken, Geschwindigkeiten (!), Temperaturen ... handeln. Die  $f_i$  können beliebige Funktionen sein, sind also im allgemeinen nichtlinear in den Variablen  $\zeta_i$ .  $n$  ist die Ordnung des Systems. Wir fassen die  $n$  Observablen  $\zeta_i$  durch den Zustandsvektor  $\zeta$  zusammen:

$$\vec{\zeta}(t) = (\zeta_1(t), \zeta_2(t), \dots, \zeta_n(t)) \quad (11)$$

Den zugehörigen  $n$ -dimensionalen Raum nennen wir Phasenraum.

Falls (10) nicht explizit von der Zeit abhängt, nennen wir das System autonom.

Mann kann eine Differentialgleichung mit höheren zeitlichen Ableitungen in die Form (10) bringen, indem man die höheren Ableitungen als neue Variable definiert.

*Beispiel (autonom):*

$$\ddot{x} = \frac{F}{m} = \text{const} \quad (12)$$

*schreiben wir so um:*

$$\zeta_1 = x \quad \zeta_2 = \dot{x} \quad (13)$$

<sup>4</sup>in dem Sinne, dass man nicht mit weniger als  $n$  auskommen kann

$$\dot{\zeta}_1 = f_1(\zeta_1, \zeta_2) = \zeta_2 \quad (14)$$

$$\dot{\zeta}_2 = f_2(\zeta_1, \zeta_2) = \frac{F}{m} \quad (15)$$

Ein nicht-autonomes System von  $n$  Variablen kann man durch Definition der  $n + 1$ -ten Variablen  $\zeta_{n+1} = t$  in ein autonomes der Ordnung  $n + 1$  umwandeln.

*Beispiel (nicht-autonom):*

$$\ddot{x} = \frac{F(t)}{m} = A \cdot \cos(\omega t) \quad (16)$$

*schreiben wir so um:*

$$\zeta_1 = x \quad \zeta_2 = \dot{x} \quad \zeta_3 = t \quad (17)$$

$$\dot{\zeta}_1 = f_1(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \zeta_2 \quad (18)$$

$$\dot{\zeta}_2 = f_2(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = A \cdot \cos(\omega t) \quad (19)$$

$$\dot{\zeta}_3 = f_3(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = 1 \quad (20)$$

Alle bisher in dieser Vorlesung aufgeführten Systeme sind vom hier zu untersuchenden Typ (10).

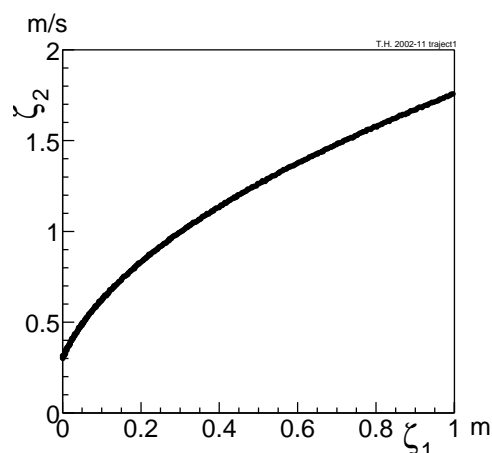
Die Dynamik des Systems ist durch die  $n$  Differentialgleichungen bestimmt. Bei Kenntnis von  $n$  Anfangsbedingungen (da Differentialgleichung 1. Ordnung!), etwa  $\vec{\zeta}(0)$ , kann man  $\zeta(t)$  berechnen. Zu jedem Zeitpunkt  $t_1$  ist also das System vollständig durch  $\zeta(t_1)$  gekennzeichnet, die Evolution bis zu einem Zeitpunkt  $t_2$  wird durch die Trajektorie<sup>5</sup> im Phasenraum

$$\vec{\zeta}(t) \quad t_1 \leq t \leq t_2 \quad (21)$$

beschrieben, die sich graphisch darstellen lässt.

*Beispiel: Gleichmäßig beschleunigte Bewegung (s.o.)*

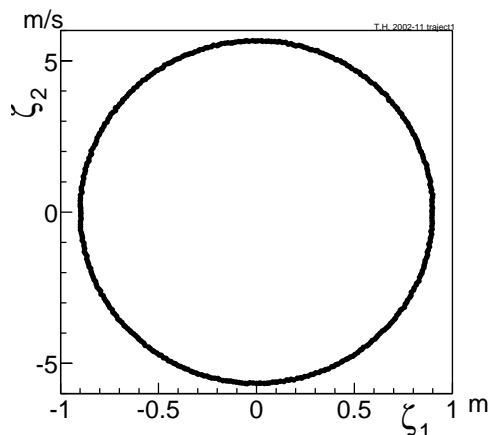
$$\zeta_1 = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2 \quad \zeta_2 = v_0 + \frac{F}{m} t \quad (22)$$



<sup>5</sup>manchmal auch 'Orbit' genannt

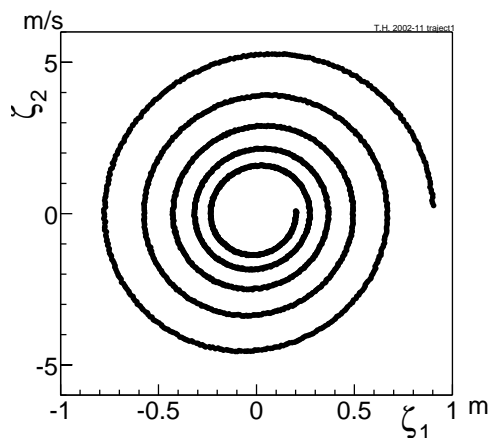
Beispiel: Harmonischer Oszillator

$$\zeta_1 = x_r + x_0 \sin(\omega_0 t + \phi) \quad \zeta_2 = x_0 \omega_0 \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (23)$$



Beispiel: Gedämpfter harmonischer Oszillator

$$\zeta_1 = x_r + x_0 \sin(\omega_0 t + \phi) e^{-\gamma t} \quad \zeta_2 = x_0 (\omega_0 \cos(\omega_0 t + \phi) - \gamma \sin(\omega_0 t + \phi)) e^{-\gamma t} \quad (24)$$

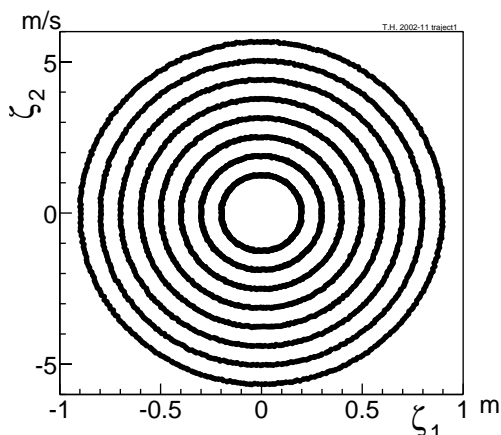


Bei Systemen höherer Ordnung muss offenbar die graphische Darstellung auf einen Unterraum des Phasenraumes beschränkt werden.

Diese Trajektorien hängen natürlich von den Anfangsbedingungen an. Will man die Dynamik unabhängig von den Anfangsbedingungen charakterisieren, so kann man die Gesamtheit aller Trajektorien betrachten, die man bei Durchlaufen aller erlaubten Anfangswerte  $\vec{\zeta}(0)$  erhält: Phasenporträt.

Beispiele (ungedämpfter Oszillator, s.o.):



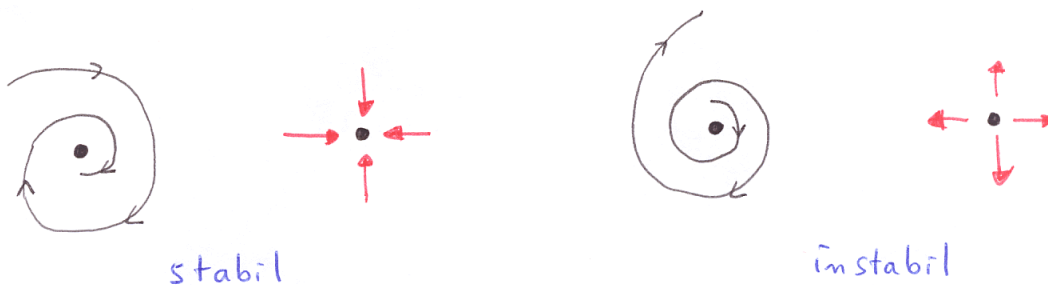


Natürlich sind nicht alle möglichen Trajektorien eingezeichnet!

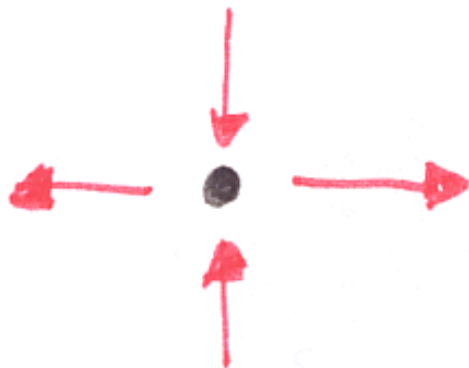
Fixpunkte  $\vec{\zeta}^*$  sind dadurch gekennzeichnet, dass

$$\dot{\vec{\zeta}}^* = \vec{0} \tag{25}$$

Eine Trajektorie durch einen solchen Punkt endet dort! In den Phasenporträts erkennt man, dass die Trajektorien ‘ihren’ Fixpunkt umkreisen und eventuell in ihn münden. Man spricht hier von Attraktoren oder stabilen Fixpunkten. Werden die Trajektorien ‘abgestoßen’, nennt man den Fixpunkt instabil.



Fixpunkte können auch im Unendlichen liegen. Solche rechnen wir nicht zu den stabilen. Ein Punkt des Phasenraumes kann für  $n$  von  $N$  Richtungen anziehend, für die anderen  $N - n$  abstoßend sein:



Ein solcher Fixpunkt ist instabil!

Gibt es mehrere stabile Fixpunkte, so hat jeder ein 'Einzugsgebiet', das aus allen Punkten besteht, die diesem Fixpunkt zustreben. Die Grenze zwischen diesen Bereichen nennt man Separatrix.

Chaotische Systeme haben Trajektorien, die nicht an bestimmte Fixpunkte gekoppelt sind, sondern durch den ganzen Phasenraum laufen. Man spricht von seltsamen Attraktoren.

Beispiele:

1)



2) Chua-Oszillator, s.o.

Diese Phasenporträts haben fraktale Eigenschaften, s.u.

Notwendige Bedingung für chaotisches Verhalten (ohne Beweis): System mindestens 3. Ordnung und Nichtlinearität!

### 2.2.2. Phasenraumeigenschaften und Stabilität

Wir betrachten autonome kontinuierliche Systeme. Eine wichtige Frage ist, ob ein Fixpunkt stabil ist oder nicht. Um sie zu beantworten, entwickelt man die  $f_i$  in der Nähe des Fixpunktes  $\vec{\zeta}^* = (\zeta_1^*, \zeta_2^* \dots)$  (also  $f_i(\zeta_1^*, \zeta_2^* \dots) = 0$  !) und beschränkt sich auf eine lineare Approximation:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}_i \equiv \frac{\partial}{\partial t} (\zeta_i - \zeta_i^*) \approx f_i(\zeta_1^*, \zeta_2^* \dots) + \sum_k \frac{\partial f_i}{\partial \zeta_k} \mathbf{u}_k = \sum_k \frac{\partial f_i}{\partial \zeta_k} \mathbf{u}_k \equiv \sum_k A_{ik} \mathbf{u}_k \quad (26)$$

Dies ist eine Matrixgleichung:

$$\dot{\vec{u}} = A \cdot \vec{u} \quad (27)$$

Durch eine Hauptachsentransformation ( $\vec{u} \rightarrow \vec{v}$ ) kann man  $A$  diagonalisieren. Zweidimensional:

$$\dot{\vec{v}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \vec{v} \quad (28)$$

$\lambda_i$  sind die (komplexen) Eigenwerte von  $A$ . In den neuen, voneinander unabhängigen Variablen  $\vec{u}$  kann man (in Fixpunktnähe!) die Lösungen sofort angeben:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i^0 \cdot e^{\lambda_i t} = \mathbf{v}_i^0 \cdot e^{Re(\lambda_i) t} \cdot e^{i Im(\lambda_i) t} \quad (29)$$

Der letzte Faktor beschreibt eine Oszillation (ohne Änderung des Betrages von  $v_i$ ), der Realteil dagegen bestimmt, ob der Abstand zum Fixpunkt wächst oder schrumpft.

Ein Fixpunkt ist genau dann stabil, wenn **alle** Eigenwerte  $\lambda_i$  der Matrix  $A$  negative Realteile besitzen.

*Beispiel: (Schwach) gedämpfter harmonischer Oszillator (s.o.)*

*Differentialgleichung: (2).*

$$\zeta_1 = x \quad \zeta_2 = \dot{x} \quad (30)$$

$$\dot{\zeta}_1 = f_1(\zeta_1, \zeta_2) = \zeta_2 \quad (31)$$

$$\dot{\zeta}_2 = f_2(\zeta_1, \zeta_2) = -\omega_0^2 \zeta_1 - 2\gamma \zeta_2 \quad (32)$$

*Lösung: (24). Fixpunkt ist  $\vec{\zeta}^* = (x_r, 0)$ .*

*Matrix:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\gamma \end{pmatrix} \quad (33)$$

*Eigenwerte berechnet man aus*

$$0 = \det(A - \lambda) = \lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 \quad (34)$$

*Ergebnis:*

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} \quad (35)$$

*Also: stabil!*

### 3. Diskrete Systeme mit chaotischem Verhalten

Wir betrachten jetzt weiterhin reelle Variable, aber erlauben nur diskrete Zeitpunkte:

$$t_k = t_0 + kT \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (36)$$

und nennen die zugehörigen Zustandsvektoren  $\vec{\zeta}(k) \equiv \vec{\zeta}(t_k)$ . Die Evolution wird durch eine Rechenvorschrift

$$\vec{\zeta}(k+1) = \vec{g}(\vec{\zeta}(k)) \quad (37)$$

gegeben, die die Folge

$$\vec{\zeta}(k) \rightarrow \vec{\zeta}(k+1) \rightarrow \vec{\zeta}(k+2) \dots \quad (38)$$

erzeugt. Die Trajektorien sind jetzt Punktfolgen. Derartige Systeme findet man nicht nur in der Physik!

#### 3.1. Logistische Gleichung

Als Beispiel betrachten wir die logistische Gleichung oder Verhulst-Gleichung<sup>6</sup>:

$$\vec{\zeta} = (\zeta_1) \rightarrow x \quad x_{k+1} = a \cdot x_k \cdot (1 - x_k) \quad (39)$$

mit einer positiven reellen Zahl  $a$  und Anfangswerten  $0 \leq x_0 \leq 1$ . Obwohl es sich um ein sehr einfaches System (Ordnung 1, simple Rechenregel) handelt, zeigt es ein sehr komplexes und insbesondere chaotisches Verhalten (s.u.), das erst in den 70er Jahren des 20. Jh. erkannt und analysiert wurde.

Welche Systeme beschreibt die logistische Gleichung? Sie dient als Modell in vielen Bereichen der Naturwissenschaften und darüber hinaus, auch in der kontinuierlichen Variante <sup>7</sup>  $\dot{x} = b x (1 - x)$ . Insbesondere kann man Wachstum damit beschreiben; wir betrachten hier ein Modell der Populationsdynamik: Aufeinanderfolgende Zeitpunkte entsprechen den Generationen. Gibt es in der Generation  $k$  insgesamt  $N_k$  Lebewesen der gleichen Spezies, dann beträgt die Zahl in der Generation  $k+1$

$$N_{k+1} = (N_k + \alpha N_k) (N^{max} - N_k) \quad (40)$$

Der erste Faktor  $\alpha N_k$  beschreibt den Netto-Zuwachs<sup>8</sup>; dieser allein würde zu einem exponentiellen Bevölkerungswachstum führen. Der dies korrigierende Faktor  $(N^{max} - N_k)$  berücksichtigt die endlichen Ressourcen des Systems: Nahrung, Platz, ..., so dass insbesondere die Beschränkung  $N_k \leq N^{max}$  gilt. Mit der Definition  $x_k = \frac{N_k}{N^{max}}$  bekommt man die Form (39) mit  $a = 1 + \alpha \geq 1$ .  $x_k$  ist damit eine rationale<sup>9</sup> Zahl zwischen 0 und 1. Wir beschränken uns im folgenden auf Werte des Parameters  $a$  zwischen 1 und 4, denn andernfalls verlässt man den Gültigkeitsbereich des Modells ( $0 \leq x_k \leq 1$ ).

#### **SIMULATION:** Logistische Gleichung

logistic1.exe  $a = 2$

*Beispiel:*

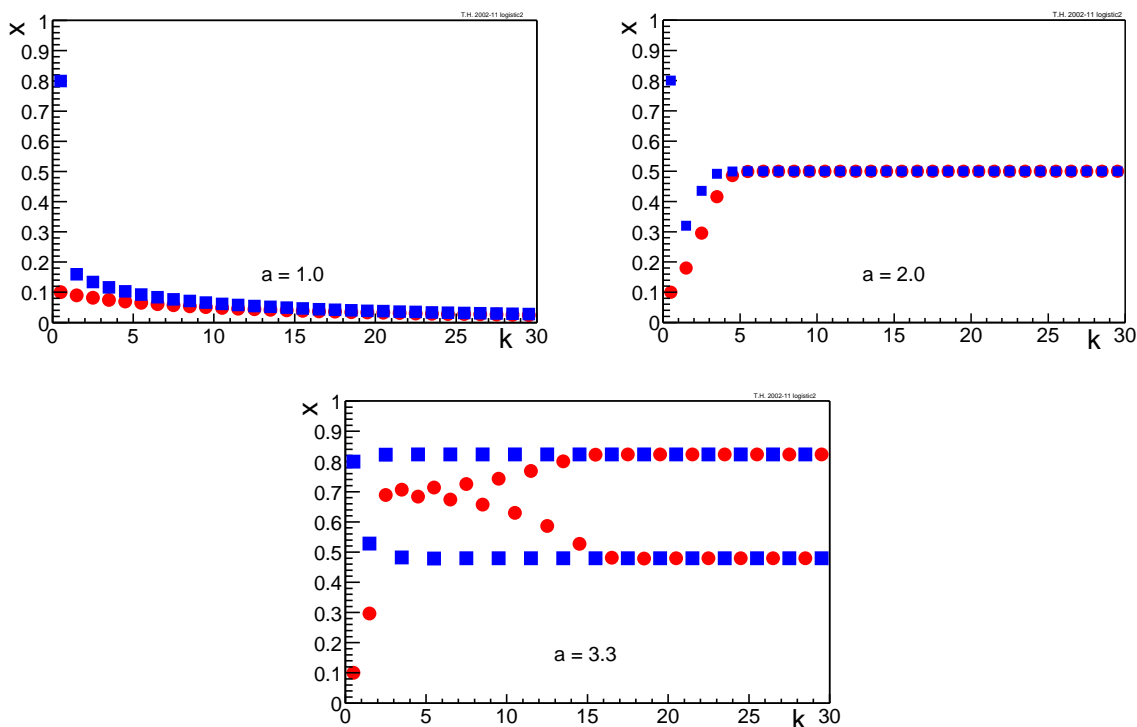
$x_0 = 0.1$  und  $x_0 = 0.8$  ergeben für  $a = 1.0, 2.0, 3.3$  diese Sequenzen :

<sup>6</sup>P.F. Verhulst, 1845 (!)

<sup>7</sup>Diese hat eine einfache analytische Lösung ohne chaotisches Verhalten

<sup>8</sup>kann im Prinzip auch negativ sein  $\rightarrow$  Aussterben  $\rightarrow$  wird hier nicht betrachtet

<sup>9</sup>Wir lassen hier alle reellen Zahlen zu, rationale und irrationale



Man sieht, dass der/die Endwert/e unabhängig vom Startwert  $x_0$  sind<sup>10</sup>!

Die Terminologie der kontinuierlichen Systeme kann man auch an diskrete Systeme adaptieren: Ein Fixpunkt der Periode 1 ist durch

$$\vec{\zeta}(k + 1) = \vec{\zeta}(k) \tag{41}$$

gekennzeichnet.

*Beispiel:*

Für  $a = 2$  trifft dies zu auf  $x \equiv x_k = 0.5$ .

Verallgemeinerung: Ein Fixpunkt der Periode p ist durch

$$\vec{\zeta}(k + p) = \vec{\zeta}(k) \tag{42}$$

definiert.

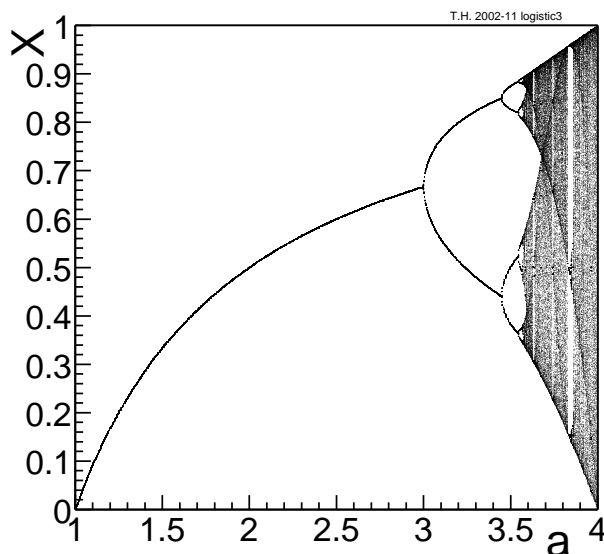
*Beispiel:*

Für  $a$  zwischen 3 und  $\approx 3.449$  gibt es genau 2 stabile Fixpunkte der Periode 2.

Diese bilden zusammen einen stabilen Attraktor!

Um unser diskretes System zu charakterisieren, tragen wir für alle erlaubten Werte von  $a$  die zugehörigen stabilen Fixpunkte  $X$  auf und erhalten (Feigenbaum-Diagramm):

<sup>10</sup>Ausnahme:  $X = 0$  und  $X = 1 - 1/a$  sind (instabile) Fixpunkte der Periode 1, denn mit diesen Werten gilt  $x_{k+1} = x_k$ ! Startet man z.B. für  $a = 3.3$  mit einem dieser beiden  $X$ -Werte, kommen die beiden Fixpunkte der Periode 2 nicht zum Zuge...



Eigenschaften:

- Mit größer werdendem  $a$  verzweigt die Kurve immer mehr und entsprechend nimmt die Zahl der stabilen Fixpunkte zu.
- Die Zahl  $n_F$  dieser Fixpunkte ist von der Form  $2^n$  (für  $a < 3.59$ ).
- Die Zunahme der Verzweigungen und Fixpunkte mit  $a$  erfolgt immer schneller, wenn man sich auf  $a \approx 3.59$  zu bewegt. Aufeinanderfolgende  $a$ -Intervalle mit jeweils konstanter Fixpunktzahl werden entsprechend immer kürzer, und zwar ungefähr um den asymptotischen Wert <sup>11</sup>

$$\delta = 4.6692016091029909 \dots = \text{Feigenbaumzahl} \quad (43)$$

Diese universelle Konstante (irrationale Zahl) tritt in einer großen Klasse von Systemen auf, zu denen ein Fixpunkt-Diagramm gehört, welches dem der logistischen Gleichung ähnelt.

*Beispiel:*

$$n_f = 1 \text{ in } 1 \leq a < 3,$$

$$n_f = 2 \text{ in } 3 \leq a < 3.449,$$

also verhalten sich die Intervallgrößen wie  $2/0.449 = 4.45$

- Bei  $a \approx 3.59$  wird das Verhalten chaotisch<sup>12</sup>. Es gibt jetzt keine stabilen Fixpunkte mehr. Bei  $a = 4$  werden alle Zahlen aus dem Intervall  $(0, 1)$  durchlaufen.

**SIMULATION:** Logistische Gleichung

logistic1.exe  $x_0 = 0.1, a = 4$

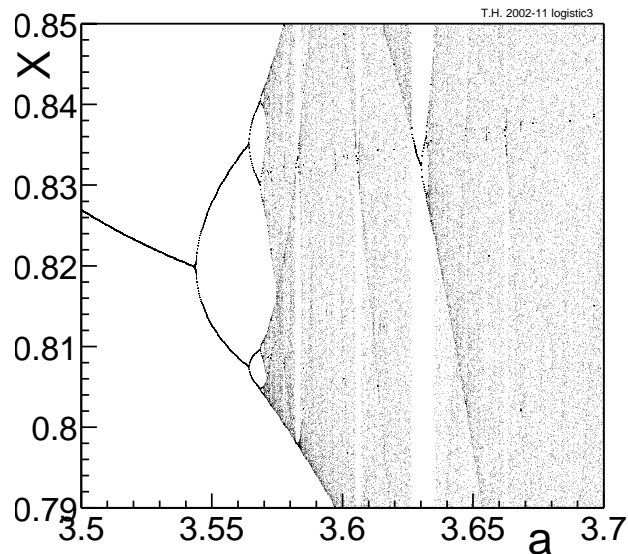
Zwischen  $a = 3.59$  und  $a = 4$  gibt es auch wieder Bereiche ohne Chaos, etwa bekommt man für 3.84 (s. Abbildung!) drei (!) Fixpunkte.

<sup>11</sup>M. Feigenbaum, 1975

<sup>12</sup>Den Wert kann man aus der geometrischen Reihe  $3 + 2/\delta + 2/\delta^2 + \dots$  ausrechnen!

- Selbstähnlichkeit: ‘Zoomed’ man in das Diagramm hinein, findet man wieder die gleiche Struktur wie sie das Gesamtbild aufweist.

*Beispiel:*



Interessant ist insbesondere der plötzliche Übergang vom “normalen” zum chaotischen Verhalten bei Variation von  $a$ ; man versucht mit Hilfe solcher Modelle z.B. zu verstehen, wie Strömungen vom laminaren in den turbulenten Zustand ‘umkippen’.

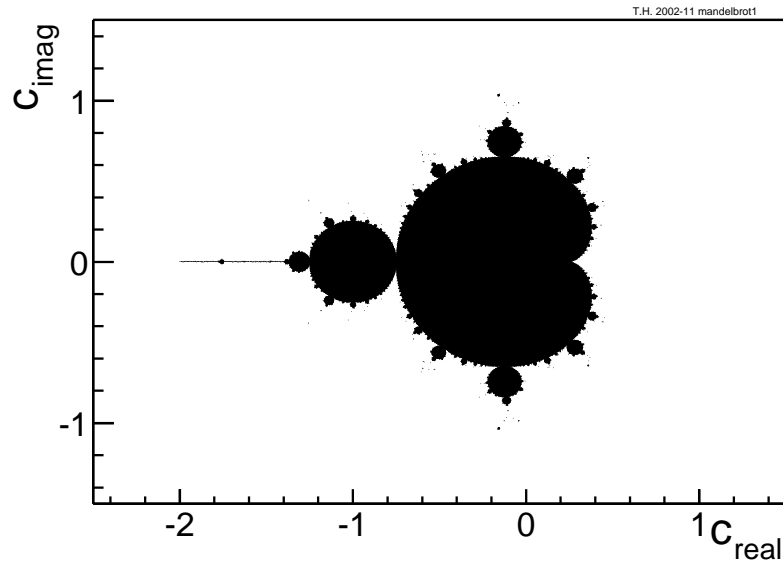
### 3.2. Mandelbrot-Menge

Das wohl bekannteste diskrete System<sup>13</sup> ist das mit der Rechenvorschrift

$$z_{k+1} = z_k^2 + c \quad (44)$$

wobei  $z$  und  $c$  komplexe Zahlen sind. Die Menge aller Zahlen  $c$ , für die diese Reihe bei einem Anfangswert  $z_0 = 0$  **nicht** divergiert, heißt Mandelbrot-Menge:

<sup>13</sup>Untersucht von B. Mandelbrot  $\approx$  1980



Auch hier finden wir Selbstähnlichkeit!

#### **SIMULATION:** Mandelbrot-Set

ctapfw.exe, von Andreas Stiller, ct 1998/15

Die Farben geben an, wie schnell die Reihe divergiert. Interessant: In den ‘Tentakeln’ findet man das ‘Apfelmännchen’ wieder!

### 3.3. Selbstähnlichkeit und Fraktale

Die oben beobachteten Systeme mit Selbstähnlichkeit kann man durch eine fraktale Dimension kennzeichnen.

Gebrochene Zahlen als Dimensionen wurden von F. Hausdorff 1919 eingeführt. B. Mandelbrot erkannte 1975 den Zusammenhang mit den obigen Systemen und mit vielen Naturerscheinungen! Er prägte den Begriff Fraktal für Systeme mit nicht-ganzzahligen Dimensionen.

*Beispiel:*

Variiert man die Seitenlänge  $L$  eines Würfels (der zunächst die Kantenlänge  $L_0$  und das Volumen  $V_0$  habe), so ändert sich das Volumen  $V$  wie

$$V = L^3 = V_0 \cdot (L/L_0)^3 \equiv V_0 \cdot f^3 \quad (45)$$

Das System Würfel hat die ganzzahlige Dimension

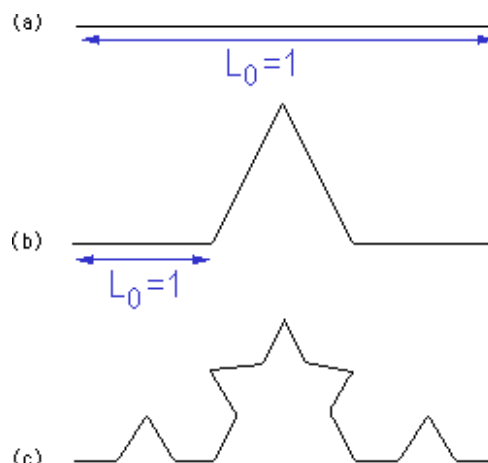
$$d = \frac{\log V/V_0}{\log L/L_0} = \frac{3 \log f}{\log f} = 3 \quad (46)$$

*Beispiel:* ‘Koch-Kurve’<sup>14</sup>

*Konstruktionsvorschrift:* Linie  $\rightarrow$  Verdreifachung  $\rightarrow$  Mittelstück = gleichseitiges Dreieck  $\rightarrow$  Basis entfernen

<sup>14</sup>H. von Koch, 1904



**SIMULATION: Koch-Kurve**

[http://www.uni-flensburg.de/mathe/zero/fgalerie/fraktale/koch\\_kurve.html](http://www.uni-flensburg.de/mathe/zero/fgalerie/fraktale/koch_kurve.html)

Man kann die Länge  $L_{Koch}$  als Funktion der Iterationsschritte  $n$  berechnen:

$$L_{Koch}(n) = L_0 \cdot 4^n \quad (47)$$

Die Basis-Länge dagegen wächst so an:

$$L(n) = L_0 \cdot 3^n \quad (48)$$

Für  $n \rightarrow \infty$  gilt  $L_{Koch}/L \rightarrow \infty !!!$

Die Kochsche Figur hat die fraktale Dimension

$$d = \frac{\log L_{Koch}/L_0}{\log L/L_0} = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1.262 \quad (49)$$

denn damit kann man schreiben:

$$L_{Koch} = \text{const} \cdot L^d \quad (50)$$

Ein Wert zwischen 1 und 2 bedeutet, dass mit diesem geometrischen Gebilde eine Fläche ( $d = 2$ ) nur partiell ausgefüllt werden kann.

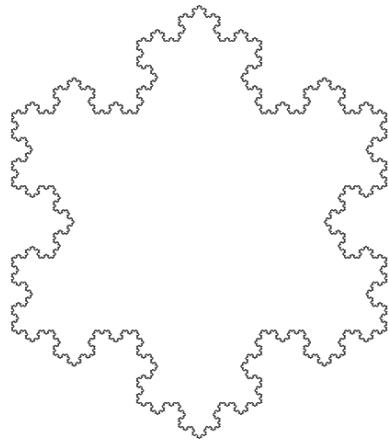
Mandelbrot erkannte, dass die Küste von England ein Fraktal ist: je genauer man sie betrachtet ( $n$  wächst), desto länger ist die Küstenlinie!

Man kann zeigen, dass die 'Einhüllende' der Mandelbrot-Menge, topologisch eine Linie, die fraktale Dimension 2 hat!

Mit einfachen fraktalen Geometrien kann man sehr einfach in der Natur vorkommende Strukturen nachahmen.

Beispiele:

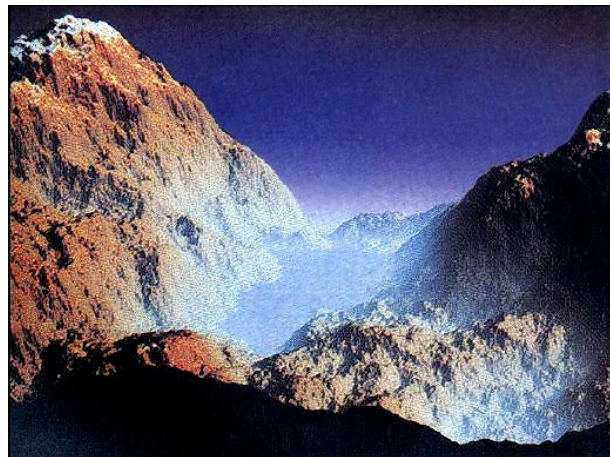
Modifizierte Koch-Kurve  $\rightarrow$  Schneeflocke:



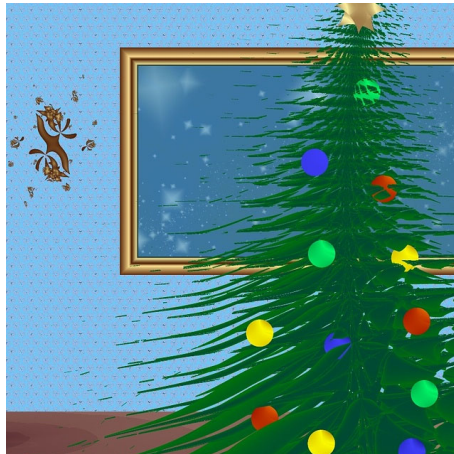
*Farn:*



*Landschaft:*



*und zuletzt . . . :*



### Epilog

Beeinflusst der Schmetterling nun das Wetter oder nicht ?

Die Antwort liegt 'zwischen' Descartes und Lorenz. Es gibt tatsächlich chaotische deterministische Systeme in der Mathematik, aber die Natur wird durch solche Modelle nicht exakt beschrieben. Insbesondere treten in der Realität Dämpfungseffekte auf, die den asymmetrischen Kreisel abbremsen und auch den Einfluss des Schmetterlings räumlich stark beschränken . . .

In der Tat gibt es jedoch in der Natur sehr komplexe Systeme, für die Vorhersagen sehr schwierig sind - obwohl quantenmechanische Effekte keine Rolle spielen. So wird eine treffsichere Wettervorhersage über einen Zeitraum von 1 Monat vielleicht nie möglich sein.