# I. Empirische Grundlagen der mikroskopischen Maxwell-Gleichungen

## Zu diesem Skript:

Im Rahmen einer *Theorie* der Elektrodynamik ist es, systematisch gesehen, naheliegend, als Ausgangspunkt der Theorie mit den Maxwell-Gleichungen *anzufangen*. Das ist auch insofern sinnvoll, als die Maxwell-Gleichungen schon im Grundkurs “Experimentalphysik” ausführlich behandelt werden — wenn auch meist einfach nur als formelhafte Zusammenfassung experimenteller Fakten.

Dennoch soll gerade in diesem Kurs auf eine ‘Begründung’ der Maxwell-Gleichungen nicht verzichtet werden, und zwar aus einem didaktischen wie aus einem theoretischen Grund:

1. in *didaktischer* Hinsicht erscheint es ungeschickt, “mit der Tür ins Haus zu fallen”. Nicht nur sind die Maxwell-Gleichungen historisch in der Tat aus einer Fülle von Einzelerkenntnissen heraus ‘gewachsen’ — angefangen mit der Entdeckung elektrischer Ladungen selbst, sondern es sollte auch nie außer Acht bleiben, daß selbst eine so formale Theorie wie die (elektrodynamische) Feldtheorie ihre eigentliche Begründung, ja: *Existenzberechtigung* aus den *Phänomenen* erhält, die sie beschreiben will — die Theorie lebt vom Experiment!

2. *theoretisch gesehen* ist es lohnend, nachzuvollziehen, wie sich diese Gleichungen aus nur wenigen (allerdings grundlegenden) Erfahrungstatsachen ergeben. Versucht man nämlich, ein solches System von Gleichungen zu *falsifizieren*, so ist es natürlich einfacher, die Allgemeingültigkeit dieser Erfahrungstatsachen selber zu überprüfen als eine Vielzahl von Einzelkonsequenzen aus einem Gleichungssystem [1].

---

[1] Ein besonders deutliches Beispiel dieses Zusammenhangs ist die Frage der Existenz von magnetischen Monopolen — vgl. die Fußnote auf S. 14 .

## Vorbemerkung

Nomenklatorisch wird unterschieden zwischen den “mikroskopischen” Maxwell-Gleichungen (manchmal auch “Vakuum-Maxwell-Gleichungen” genannt):

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\vec{B} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} &= \mu_0\cdot\vec{\jmath} \qquad & \operatorname{rot}\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} &= \vec{0} \\ \operatorname{div}\vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} & \operatorname{div}\vec{B} &= 0 \end{aligned}$$

und den “makroskopischen” Maxwell-Gleichungen (manchmal auch “Maxwell-Gleichungen in Materie” genannt):

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\vec{H} - \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} &= \mu_0\cdot\vec{\jmath} \qquad & \operatorname{rot}\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} &= \vec{0} \\ \operatorname{div}\vec{D} &= \rho & \operatorname{div}\vec{B} &= 0 \quad . \end{aligned}$$

Die Namen “Vakuum-Gleichungen” bzw. “Maxwell-Gleichungen in Materie” sind insofern ganz irreführend (und sollten vermieden werden!), als die “mikroskopischen” Gleichungen durchaus auch bei Vorhandensein von Ladungen und Strömen gültig sind — also auch bei Vorhandensein von *Materie*, denn Ladungen (und damit auch Ströme) sind nach heutiger Kenntnis immer an Materie gebunden.

Eine bessere Nomenklatur ist “fundamentale” bzw. “phänomenologische” Maxwell-Gleichungen, denn die “makroskopischen” Gleichungen – in denen die Felder $\vec{D}$ und $\vec{H}$ ja durch *phänomenologische* sogenannte ‘Materialkonstanten’ wie *Suszepibilität* und *Permeabilität* gekennzeichnet sind – lassen sich, wie wir in einem weiteren Skript [2]. aus den mikroskopischen Maxwell-Gleichungen *herleiten*.

Wir werden in diesem Skript *ausschließlich* mit den mikroskopischen Maxwell-Gleichungen zu tun haben.

[2] “II. Die makroskopischen Maxwell-Gleichungen”

# Inhaltsverzeichnis

## A Die elektrische Ladung

Die Grundlage aller elektrischen – und, wie wir sehen werden, auch *magnetischen* – Erscheinungen ist die Existenz von *elektrischen Ladungen*. Die elektrische Ladung ist durch die folgenden Eigenschaften charakterisiert:

- Sie ist eine **Eigenschaft von Materie** — es gibt keine Ladungen, die nicht in irgendeiner Weise an (Elementar-)Teilchen gebunden sind [3].

- Sie ist eine **“extensive” skalare Größe.** Dabei bedeutet

  **extensiv:** es handelt sich um eine *additive* Größe [4]: die Gesamtladung zweier Subsysteme mit den Ladungen $q_1$ und $q_2$ ist $q = q_1 + q_2$ ,

  **skalar:** die Ladung ist nicht abhängig von dem Koordinatensystem, in dem sie gemessen wird. Anders gesagt: die Ladung eines Systems, das sich (in einem gegebenen Koordinatensystem) mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegt, ist die gleiche wie die, die man mißt, wenn das System ruht. Die Ladung ist aber auch sonst unabhängig von der Umgebung: z.B. ist die Ladung im Vakuum die gleiche wie die im Schwerefeld.

- Sie kommt in **zwei Vorzeichenvarianten** vor. Das bedeutet: es gibt elektrisch *neutrale* Systeme, die aus *geladenen Subsystemen* bestehen (einfaches Beispiel: das elektrisch geladene Wasserstoffatom besteht aus einem “positiv” geladenen Kern (dem Proton) und einem “negativ” geladenen Elektron).

  Die konkrete Wahl des Vorzeichens (das Elektron hat “*negative*” Ladung) ist eine historisch bedingte, *rein willkürliche Festlegung* — auch wenn sie in der Physik *universell gebräuchlich* ist.

- Sie ist eine **universelle Erhaltungsgröße**. Das bedeutet: elektrische Ladung kann nicht einfach ‘entstehen’ oder ‘verschwinden’ — sie kann lediglich von einem Ort zu einem andern transportiert werden. Mathematisch ausgedrückt heißt das [5]

$$-\frac{d}{dt}\int_V \rho \, d\tau = \int_S \vec{j} \, d\vec{\sigma} \quad ;$$

---

[3] Eine wichtige Erkenntnis der Elementarteilchenphysik ist es, daß es neben Teilchen mit Masse (z.B. Elektron, Proton, Neutron) auch *masselose* Teilchen gibt (z.B. Photon, Neutrino, Gluon). Und bemerkenswerterweise können nur *massive* Teilchen geladen sein — masselose Teilchen sind immer elektrisch neutral. Die Frage, *warum* das so ist, ist bis heute *völlig ungeklärt*.

Das Phänomen (elektrische Ladung kommt nur an *massive* Teilchen gebunden vor) ist umso verwunderlicher, als heute in der sogenannten “starken Wechselwirkung” ein zur Ladung (und damit zur gesamten Elektrodynamik!) sehr analoges Phänomen auftritt, nämlich eine (willkürlich so getaufte) “Farbladung” – mit einer zugehörigen Theorie namens “Chromodynamik” –, deren Träger, die “gluonen”, *masselos* sind!

Es gibt also noch viel Unverstandenes in der Physik ...

[4] Allgemein bezeichnet man in der Physik Größen mit dieser Additivitätseigenschaft, die also ‘Mengen’ charakterisieren, als “extensive Größen”. Im Gegensatz dazu stehen “intensive Größen”; für sie gilt: haben zwei Subsystemen die Meßwerte $x_1 = x_2$ der Größe “X”, so ist der Meßwert von $X$ für das Gesamtsystem $x = x_1 = x_2$ . Ein wichtiges Beispiel einer intensiven Größe ist die Temperatur.

[5] Wir benutzen in diesem Skript wie üblich als Notation für das Differential einer Volumenintegration das Symbol $d\tau$, für das Differential eines Oberflächenintegrals $d\vec{\sigma}$ (der Vektor $d\vec{\sigma}$ weist in Richtung der Flächennormale; bei einer geschlossenen Oberfläche nach *außen*.

Manchmal wird das Volumenintegral auch mit $d^3\vec{r}$ geschrieben (besonders dann, wenn das Volumenintegral als Dreifach-Integral berechnet werden soll.

hierbei ist [6]

| | |
|---|---|
| $V$ | ein vorgegebenes Volumen, |
| $S$ | dessen Oberfläche, |
| $d\tau$ | das Differential der Volumenintegration, |
| $d\vec{\sigma}$ | das Differential der Oberflächenintegration, |
| $\rho$ | die elektrische Ladungsdichte im Innern von $V$, |
| $\vec{j}$ | die elektrische Stromdichte auf der Oberfläche von$V$, |

und wie üblich ist das Oberflächendifferential positiv *nach außen* definiert.

In Worten heißt das nichts anderes als: die Ladung im Inneren eines festen Volumens kann nur dadurch abnehmen, daß die entsprechende Menge aus dem Volumen nach außen abfließt.

Nimmt man für $V$ das Volumen des Universums, so folgt wegen $\vec{j} = 0$ auf der Oberfläche (*wohin* könnte auf der Oberfläche des Universums irgendetwas fließen?), daß die Gesamtladung des Universums *zeitlich konstant* ist.

Läßt man umgekehrt das betrachtete Volumen gegen Null gehen, so ergibt sich (mit Hilfe des Gauß-schen Satzes):

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0} \quad , \tag{1}$$

die "Kontinuitätsgleichung", die also nichts anderes als der mathematische Ausdruck für die Erhaltung der Ladung [7] ist.

- Sie ist **quantisiert**. Das bedeutet: jede Messung der elektrischen Ladung hat als Ergebnis ein *ganzzahliges Vielfaches* einer kleinsten Ladungsmenge, der sogenannten "Elementarladung", die gleich (dem Negativen) der Ladung des Elektrons ist [8].

  Da die Elementarladung also eine physikalisch vorgegebene Konstante ist, liegt es nahe, sie zur Basiszahl eines Einheitensystems zu machen. In der Tat ist im SI-System die

---

[6] Eine genaue Definition des Begriffs "Stromdichte" findet sich im Abschn. D 1 .

[7] Die Kontinuitätsgleichung ist infinitesimal formuliert, in ihr kommen daher nicht Ladung und Strom selbst, sondern Ladungs- und Stromdichte vor. Man spricht daher oft von der Kontinuitätsgleichung als der Gleichung, die die "Stromerhaltung" (statt "Ladungserhaltung") ausdrückt. Beides besagt physikalisch das gleiche.

In der Hydrodynamik steht die Kontinuitätsgleichung entsprechend für die Erhaltung der Flüssigkeitsmenge.

[8] Diese an sich erstaunliche Tatsache ist – obwohl schon früher vermutet – empirisch zum ersten Mal im berühmten Millikan-Versuch (1909) zweifelsfrei nachgewiesen worden, lange vor der Entwicklung der Quantenphysik. Es ist aber logisch gesehen klar, daß, wenn die Ladung denn an Masse geknüpft ist, aus der Quantisierung der elektrischen Ladung sofort auch die Quantisierung der *Masse* folgt — also der Begriff des *Elementarteilchens*.

In der schon erwähnten Theorie der starken Wechselwirkungen – der Quantenchromodynamik – treten Teilchen (die "quarks") auf, die nur *ein Drittel* der Elementarladung tragen. Nach der ersten Formulierung der quark-Theorie im Jahr 1964 haben Experimentalphysiker lange und gründlich nach drittelzahligen Ladungen in der Natur gesucht; es wurden aber keine gefunden.

Inzwischen glaubt man zu verstehen, daß (und warum) quarks – obwohl sie als die elementaren Bausteine der Materie anzusehen sind – nicht als *freie Teilchen* vorkommen können, sondern immer nur in gebundenen Zuständen, die insgesamt ganzzahlige Ladung aufweisen. quarks können also nicht als Elementarteilchen im 'klassischen' Sinne gelten.

Einheit der Ladung als

$$1 \text{ Coulomb } := 1 \text{ Ampère-Sekunde} =: -(6.241460 \cdot 10^{18} q_e$$

definiert, das Coulomb also durch die Elementarladung (und nicht umgekehrt).

In logiger Hinsicht wäre es natürlich systematischer gewesen, als 'Einheit der Ladung' gleich die Ladung des Elektrons selbst zu wählen; das hätte aber zur Folge gehabt, daß makroskopische Ladungsmengen unhandlich große Meßzahlen bekommen hätten.

**MERKE**: Dimensionsbehaftete 'Naturkonstanten' sind, was ihren Zahlenwert angeht, vom benutzten Maßsystem abhängig, ihre Maßzahlen haben also allenfalls in Relation zu anderen Maßzahlen im gleichen Maßsystem eine physikalische Bedeutung! *Echte Naturkonstanten* – die Skalen (=Größenordungen) setzen – sind immer *dimensionslos.*

# B Punktladungen — die "$\delta$-Funktion"

Nach heutiger Kenntnis sind Elektronen, die elementaren Träger (negativer) elektrischer Ladung, Teilchen ohne innere Struktur, also auch ohne räumliche Ausdehnung; sie haben kein 'Volumen'. Die Frage, *wie* die elektrische Ladung auf einem Elektron 'verteilt' sein könnte, stellt sich also nicht: damit verbundene anschaulich-materielle Vorstellungen haben in der Quantentheorie keinen Platz. Ähnliches gilt auch für die quarks und ihre Ladungen: auch sie sind als *punktförmig* anzusehen [9]. Ladungen sind also physikalisch immer etwas *diskretes*.

Eine solche Vorstellung von in mathematischen Punkten konzentrierten physikalischen Objekten ist nicht neu. Bereits Newton hat seine Theorie der Gravitation mit Hilfe von "Massenpunkten" oder "Punktmassen" formuliert, auch wenn schon damals klar war, daß die Sonne und die Planeten ausgedehnte Objekte sind, die Newton-schen Massenpunkte also allenfalls eine praktisch brauchbare Näherung sein konnten [10].

Im Rahmen einer *Feldtheorie* reicht jedoch die Newton-sche Vorstellung von Kräften zwischen (Massen)punkten nicht mehr aus; man braucht *Feldgrößen*, d.h. Größen, die als kontinuierliche Funktionen von Raum und Zeit beschrieben werden können. Eine solche Funktion ist die **Ladungsdichte** $\rho(t, \vec{r})$, die man so definieren kann:

| | |
|---|---|
| $\rho(t, \vec{r})$ | ist eine zu jeder Zeit $t$ und an jedem Ort $\vec{r}$ definierte differenzierbare Funktion mit der Eigenschaft |
| $\int_V \rho(t, \vec{r})\, d\tau$ | ist die (zur Zeit $t$) im Volumen $V$ eingeschlossene Ladung. |

Man sieht an dieser Definition sofort, daß man Schwierigkeiten bei der Beschreibung einer Punktladung durch eine entprechende Ladungsdichte bekommt. Denn ist z.B. am Ort $\vec{r} = 0$ eine Punktladung $q$ vorhanden, so müßte die zugeordnete Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ die mathematischen Eigenschaften

(1) $\quad \rho(\vec{r}) = 0 \quad \forall\, \vec{r} \neq \vec{0} \quad ,$

(2) $\quad \int_V \rho(\vec{r})\, d\tau = q \quad$ für jedes Volumen $V$, das den Ursprung einschließt

besitzen. Da aber nach den Sätzen der Integralrechnung das Integral einer Funktion, die nur an einem *isolierten Punkt* [11] ungleich Null ist, stets verschwindet, kann es keine solche Funktion geben.

*P.A.M. Dirac* hat sich in genialer Weise über diesen Satz hinweggesetzt und ein mathematisches Instrument erfunden, das sich in der gesamten Theoretischen Physik als ungeheuer

[9] Dieses Konzept ist natürlich immer eine Idealisierung, die experimentell wegen des endlichen Auflösungsvermögens jeder Messung nicht verifizierbar ist. Rein experimentell kann man nur sagen: Elektronen und quarks haben eine Ausdehung, die jedenfalls kleiner als etwa $10^{-17}$ cm ist.

Ein im mathematischen Sinne streng als *punktförmiges* Teilchen beschriebenes Elektron macht natürlich gewisse mathematische Schwierigkeiten. Man hat deshalb lange (schon im vorigen Jahrhundert!) versucht, eine Theorie der Elektrodynamik aufzubauen, in der das Elektron eine nichtverschwindende Ausdehnung besitzt (sogen. "klassischer Elektronenradius"). Aber all diese Theorien haben sich entweder als im Widerspruch zum Experiment oder aber in sich inkonsistent erwiesen.

Es ist deshalb richtig zu sagen: *aus heutiger Sicht* sind die Träger der elektrischen Ladung *punktförmig*.

[10] Warum diese Näherung so gut funktioniert, werden wir anhand der "Multipolentwicklung" besser verstehen lernen.

[11] Mathematiker sagen: "auf einer Menge vom Maß 0" .

brauchbar erwiesen hat. Er hat nämlich erkannt, daß die Funktion mit den geforderten Eigenschaften (wenn es sie denn gäbe) die schlichte Verallgemeinerung des Kronecker-Symbols $\delta_{ik}$ von diskreten Indizes auf 'kontinuierliche Indizes' ist, und daß man deshalb mit einem solchen Objekt praktisch genauso gut müsse rechnen können, gleich ob man eine stringente mathematische Definition angeben kann oder nicht [12].

## B 1 Die Dirac-sche $\delta$-Funktion

Wir wollen hier in knappster Form die wichtigsten Eigenschaften der $\delta$-Funktion zusammenstellen:

**Definition 1 :**

(1) $\delta(x - x_0) = 0 \quad \forall\, x \neq x_0 \quad ,$

(2) $\displaystyle\int_{x_0-a}^{x_0+a} f(x)\,\delta(x - x_0)\,dx = f(x_0)$ für $a > 0$ und jede im Intervall $[x_0 - a, x_0 + a]$ integrierbare (und bei $x_0$ stetige) Funktion $f(x)$.

Man vergleiche dies mit der Definition des Kronecker-Symbols, um die Analogie zu verstehen:

**Definition 2 :**

(1) $\delta_{ik} = 0 \quad \forall\, i \neq k \quad ,$

(2) $\displaystyle\sum_k f_k\,\delta_{ik} = f_i \quad ,$ falls $i$ in der Indexmenge der $k$ enthalten ist, über die summiert wird .

Die wichtigste 'Rechenregel' ergibt sich aus dem Definitionszusammenhang: die Einführung der $\delta$-Funktion ist ein Trick, um *diskrete Verteilungsfunktionen* (wie die einer Punktladung) formal wie eine *stetige* Verteilung schreiben zu können. Daraus folgt, daß die $\delta$-Funktion eigentlich immer nur *als Argument in einem Integral* einen Sinn hat. Anders ausgedrückt: Endergebnisse von Rechnungen, in deren Verlauf $\delta$-Funktionen vorkommen, haben erst einen (experimentell brauchbaren) Sinn, wenn alle Integrale, die $\delta$-Funktionen enthalten, *tatsächlich ausgeführt sind.* Was damit gemeint ist, wird unten am Beispiel des Fourier-Integrals noch deutlicher werden.

Weitere praktisch wichtige 'Rechenregeln' ergeben sich unmittelbar aus elementaren Regeln der Integralrechnung:

a)

$$\int_{-a}^{+a} \delta(x)\,dx = 1 \quad \text{für } a > 0$$

Das ist sozusagen ein Korollar der Definition von $\delta(x)$ . Man beachte aber immer, daß das Argument $x$ im *Innern* des Integrationsintervalls liegen muß — $\int_0^{+a} \delta(x)\,dx$ ist *nicht* definiert!

[12] Viele Jahre später hat der Mathematiker L. Schwartz eine mathematische Theorie entwickelt, in der die Dirac-sche "$\delta$-Funktion" ihren legitimen Platz hat: die *Theorie der Distributionen.* Für fast alle Anwendungen in der Theoretischen Physik braucht man aber die Theorie der Distributionen nicht zu kennen; es langt die Kenntnis der Dirac-schen 'Rechenregeln'.

b) $\delta(x)$ ist eine *gerade* Funktion:

$$\delta(-x) = \delta(x)$$

c) $\delta(x)$ ist *nicht* linear! Es gilt vielmehr

$$\delta(cx) = \frac{1}{|c|}\,\delta(x)$$

d)

$$f(x)\,\delta(x-x_0) = f(x_0)\cdot\delta(x-x_0) \qquad \text{(Mittelwertsatz der Integralrechnung)}$$

Im dreidimensionalen Fall definiert man ganz analog:

**Definition 3 :**

(1) $\quad \delta(\vec{r}-\vec{r}_0) = 0 \qquad \forall\,\vec{r} \neq \vec{r}_0 \quad ,$

(2) $\quad \int_V f(\vec{r})\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\,d\vec{r} = f(\vec{r}_0) \qquad$ , wenn $\vec{r}_0$ im *Innern* des Volumens $V$ liegt.

## B 2 Fourier-Transformation

Die Bedeutung der Dirac-schen $\delta$-Funktion kann man besonders gut bei ihrer Anwendung in der Fourier-Transformation sehen. Die Fourier-Transformation kann (im Dreidimensionalen) geschrieben werden in der Form [13]

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} dk\,\tilde{f}(k)\,e^{ikx} \\ \tilde{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,f(x)\,e^{-ikx} \quad . \end{aligned}$$

Setzt man den zweiten Ausdruck in den ersten ein, so erhält man

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} dk\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} dx'\,f(x')\,e^{-ikx'}\,e^{ikx} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dk\int_{-\infty}^{+\infty} dx'\,f(x')\,e^{ik(x-x')} \quad ; \end{aligned}$$

Vertauschung der beiden Integrationen [14] ergibt

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx'\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dk\,e^{ik(x-x')}\right] f(x') \quad .$$

[13] Die symmetrische Aufteilung des 'Normierungsfaktors' $\frac{1}{2\pi}$ auf die beiden Integrale ist willkürlich, aber in der Theoretischen Physik allgemein üblich.

Wir lassen in dem heuristischen Zusammenhang, in dem wir uns hier mit der Fourier-Transformation befassen, jede Diskussion der Voraussetzungen dieses Entwicklungssatzes weg; s. hierzu die mathematische Literatur.

[14] Auch hier lassen wir alle mathematische Strenge beiseite (es ist ja nicht von vorneherein klar, unter welchen Voraussetzungen diese Vertauschung erlaubt ist!).

An dieser Form liest man nun eine nützliche 'Darstellung' der $\delta$-Funktion ab, nämlich

$$\delta(x-x') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(x-x')}\,dk \quad .$$

Man kann diese Formel als 'kontinuierlichen limes' der (leicht zu beweisenden) diskreten Formel

$$\delta_{n,n'} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{i(n-n')x}\,dk$$

ansehen, womit noch einmal die Analogie zwischen dem – diskreten – Kronecker-Symbol und der – kontinuierlichen – $\delta$-Funktion deutlich wird.

Die Verallgemeinerung des obigen Ausdruck für den dreidimensionalen Fall lautet entsprechend

$$\delta^3(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{k}\; e^{i\vec{k}\,(\vec{r}-\vec{r}\,')} \quad .$$

Es gibt noch viele andere solche 'Darstellungen' der $\delta$-Funktion, die oft beim Umformen von Integralen recht nützlich sein können. Ein besonders anschauliches Beispiel ist

$$\delta(x) = \lim_{\sigma\to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad ;$$

das ist einfach eine normierte Gauß-Funktion mit verschwindender Streuung!

Mit Hilfe der $\delta$-Funktion können wir nun schließlich auch die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ einer Ansammlung von Punktladungen systematisch und bequem beschreiben: wenn sich an den Orten $\vec{r}_i$ $(i = 1, \ldots, N)$ jeweils die Punktladungen $q_i$ befinden, so ist die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ im ganzen Raum einfach durch

$$\rho(\vec{r}) = \sum_i q_i\, \delta^3(\vec{r}-\vec{r}_i)$$

gegeben. Die gesamte im Volumen $V$ enthaltene Ladung ergibt sich dann zu

$$q = \int_V \rho(\vec{r})\,d\tau = \sum_i q_i \int_V \delta^3(\vec{r}-\vec{r}_i)\,d^3\vec{r} = \sum_{i\in V} q_i \quad ,$$

wie das sein soll.

In der Elektro*statik* betrachten wir nur den *statischen Fall*, d.h. wir gehen davon aus, daß die Ladungsverteilung im Raum, die wir gerade untersuchen, sich *zeitlich* nicht ändert, kurz gesagt: daß $\rho(t,(\vec{r}))$ als Funktion der Zeit $t$ *konstant* ist: $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ ist.

In der Elektro*statik* gilt also – gewissermaßen als Definition dieses Begriffs – immer

$$\boxed{\dot{\rho} = 0} \quad . \tag{2}$$

# C Elektrostatik

## C 1 Das Coulomb-Gesetz

Wir wollen zunächst das Coulomb-Gesetz auf wenige, grundlegende Prinzipien zurückführen[15]. Dazu betrachten wir Punktladungen $q_1$, $q_2$ und $q_3$, die sich an den Orten $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ bzw. $\vec{r}_3$ befinden, und fragen nach den Eigenschaften der Kräfte, die sie aufeinander ausüben. Wir fordern, daß diese Kräfte den folgenden Forderungen genügen sollen:

(1) **Die Kräfte hängen von keinen 'externen' Größen ab.** Wir betrachten also das System der Ladungen als *abgeschlossen* und verlangen darüber hinaus, daß es durch die gegebenen Parameter (also die *Ladungen* und die *Orte*, an denen diese sich befinden) *vollständig* beschrieben werden kann [16].

(2) **Kräfte sind Vektoren.** Das ist das "2. Newton-sche Axiom". Die Diskussion der physikalischen Bedeutung dieser Forderung wird hier als bekannt vorausgesetzt.

(3) **Die Kraft zwischen jeweils 2 Ladungen ist unabhängig von den übrigen Ladungen** ('Zweikörper-Kräfte'). Konkret heißt das, daß die Kraft $\vec{F}$, die die Ladung $q_1$ auf die Ladung $q_2$ ausübt, weder von $q_3$ noch von $\vec{r}_3$ abhängt, sondern nur von $q_1, \vec{r}_1$ und $q_2, \vec{r}_2$ :

$$\vec{F}_{1\to 2} = \vec{F}(q_1, \vec{r}_1; q_2, \vec{r}_2)$$

oder kurz

$$\vec{F}_{1\to 2} = \vec{F}(1;2) \quad .$$

Auch diese Forderung ist ausschließlich durch ihre Einfachheit begründet [17].

(4) **Ladungen skalar und additiv.** (wurde schon in Abschn.A ausführlich behandelt).

(5) **Kräfte addieren sich linear (Superpositionsprinzip).** In Formeln heißt das :

$$\vec{F}_{(1,2)\to 3} = \vec{F}(1;3) + \vec{F}(2;3) \quad .$$

(6) **Die Kräfte sind reziprok** ("3. Newton-sches Axiom"):

$$\vec{F}_{2\to 1} = -\vec{F}_{1\to 2} \quad ,$$

also

$$\vec{F}(2;1) = -\vec{F}(1;2) \quad .$$

[15] Die folgenden Überlegungen kann man natürlich ganz analog schon beim Gravitationsgesetz anstellen; ja, einige der Prinzipien sind nichts anderes als die von Newton selbst aufgestellten 'Axiome'.

[16] Diese Forderungen sind erkenntnistheoretisch keinesfalls trivial! Z.B. gibt es keinen logisch zwingenden Grund zur Annahme, daß die Kräfte nicht von der Geschichte des Systems abhängen könnten, oder von der Größe des Weltalls, oder, oder ...

Noch viel naheliegender wäre die Hypothese, die Kräfte könnten von den *Geschwindigkeiten* abhängen, mit denen sich die Ladungen bewegen.

Die Annahme der *Abgeschlossenheit* des Systems und der *Vollständigkeit* der Parameter Ort und Ladung ist also nur durch ihre *Einfachheit* zu begründen. Eine *möglichst einfache* Theorie zu finden ist eines der tragenden Motive aller Theoretischen Physik!

[17] Tatsächlich ist heute in der Physik kein Beispiel bekannt, in dem die Einführung *echter Dreikörperkräfte* – die man oft genug versucht hat – zu einer besseren (d.h. entweder einfacheren oder die Experimente besser beschreibenden) Theorie geführt hätte.

Aus den Forderungen (1) bis 6) folgen nun eine Reihe erheblicher Einschränkungen für die mögliche funktionale Abhängigkeit der Kraft $\vec{F}$ von ihren Parametern.

Die erste (und vielleicht wichtigste!) Konsequenz aus der Forderung nach Abgeschlossenheit (1) ist die, daß die Kräfte *nicht* vom gewählten Koordinatensystem abhängig sein dürfen — eine Konsequenz, die im Grunde schon von Galilei stammt und dann von Newton sehr bewußt formuliert wurde, obwohl sie damals erkenntnistheoretisch geradezu 'anstößig' war.

Da man seit Newton also den Koordinatenursprung frei verschieben 'darf', können die Kräfte nur von der *Differenz* der Koordinatenvektoren abhängen [18]:

$$\vec{F}\,(1;2) = \vec{F}\,(q_1, q_2, \vec{r}\,) \quad \text{mit } \vec{r} := \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad .$$

Es gibt in dem System also nur *einen* Vektor, von dem $\vec{F}$ abhängen kann. Mit der Forderung (2) folgt dann

$$\vec{F}\,(1;2) = F(q_1, q_2; r) \cdot \hat{r} \quad \text{mit } r := |\vec{r}\,|,\ \hat{r} := \frac{\vec{r}}{r} \quad ,$$

wobei $F(q_1, q_2; r)$ eine *skalare* Funktion ihrer 3 (skalaren) Argumente ist.

Aus der Additivität der Ladung (4) und dem Superpositionsprinzip (5) folgt nun weiter, dass $F(q_1, q_2; r)$ eine *lineare* Funktion der beiden Ladungen $q_1$ und $q_2$ ist. Denn wenn sich am Ort $\vec{r}_1$ *zwei* Ladungen $q_{11}$ und $q_{12}$ befinden, so folgt

$$F(q_{11}, q_2; r) + F(q_{12}, q_2; r) = F(q_{11} + q_{12}, q_2; r) \quad ,$$

$F(q_1, q_2; r)$ ist also linear in $q_1$. Aus (6) folgt aber

$$F(q_2, q_1; r) = F(q_1, q_2; r)$$

(man beachte $\vec{r}_{12} = -\vec{r}_{21}$ !), so daß $F(q_1, q_2; r)$ auch in $q_2$ linear ist.

$F$ muß als Funktion von $q_1$ also die Form $F = c \cdot q_1 + d$ haben. Weil aber die Kraft natürlich bei verschwindender Ladung selbst verschwinden muß (sonst wäre die Abgeschlossenheit (1) nicht gegeben!), muß $d = 0$, $F$ also *homogen* sein. Es folgt schließlich insgesamt

$$F = q_1 \cdot q_2 \cdot f(r)$$

oder

$$\vec{F}_{1\to 2} = \vec{F}\,(q_1, \vec{r}_1; q_2, \vec{r}_2) = q_1 \cdot q_2 \cdot f(r) \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad ;$$

es bleibt nur noch eine skalare Funktion $f$ einer skalaren Variablen $r$ zu bestimmen, deren Form sich aus den obigen Postulaten (1) bis (6) allerdings noch nicht ergibt.

---

[18] Das gleiche Argument gilt aber auch für den *zeitlichen* Koordinatenursprung; die Kraft zwischen den Ladungen $q_1$ und $q_2$ kann also allenfalls von der Zeit*differenz* $(t_2 - t_1)$ abhängen, also der Differenz zwischen der Zeit $t_1$, zu der die Ladung $q_1$ ihre Kraft auf $q_2$ ausübt, und der Zeit $t_2$, zu der die Ladung $q_2$ diese Kraft spürt.

Newton hat wie selbstverständlich angenommen, daß diese 'Kraftübertragung' *instantan* geschieht, die beschriebene Zeitdifferenz also immer Null ist. Mit dieser *zusätzlichen* Annahme sind alle Kräfte zu statischen, d.h. zeitunabhängigen Kräften geworden.

Erst mit der Relativitätstheorie Einsteins ist klargeworden, daß diese Annahme Newtons inkonsistent ist und fallengelassen werden *muß*, und zwar sowohl in der Eletrodynamik wie in der Gravitationstheorie — mit der Folge, daß die gesamten Vorstellungen Newtons zu Zeit, Raum und Kräften unhaltbar wurden.

Wir werden diese Zusammenhänge im Verlauf des Kurses noch im Detail zu untersuchen haben. Hier sei vorerst nur festgehalten, daß das Coulomb-Gesetz auf wesentliche Weise von dieser Annahme einer *instantanen* Kraftwirkung abhängt; wir werden also auch das Coulomb-Gesetz später zu revidieren haben.

Wir greifen daher an diesem Punkt unmittelbar auf das Experiment zurück, in dem man $f(r)$ ja direkt ausmessen kann. Aus solchen Experimenten ergibt sich dann [19] das vollständige **Coulomb-Gesetz**:

$$\boxed{\vec{F}\,(1,2) = (\text{Maßsystemkonstante}) \cdot q_1 q_2 \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \hat{r}} \quad . \tag{3}$$

Man beachte, daß dieser Ausdruck das entgegengesetzte Vorzeichen hat als das Gravitationsgesetz; es ist Ausdruck der empirischen Erfahrung, daß "gleichnamige" Ladungen sich *abstoßen*.)

Da, wie oben schon bemerkt, die Festlegung der Einheit der elektrischen Ladung willkürlich ist, gilt das gleiche von der Verknüpfung der Einheit der Ladung mit der Einheit der Kraft: man erhält eine Maßsystemkonstante, der keinerlei echte physikalische Bedeutung zukommt. In SI-Einheiten hat diese Konstante den Wert

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \quad ;$$

Theoretiker benutzen oft – zwecks Ersparung von Schreibarbeit! – ein Maßsystem, in dem derartige Maßsystemkonstanten ohne echte physikalische Bedeutung den numerischen Wert 1 haben.

Um der Klarheit willen bleiben wir in diesem Kurs systematisch bei SI-Einheiten.

## C 2 Die Differentialgleichungen der Elektrostatik

Im Grunde enthält das Coulomb-Gesetz alle physikalischen Aussagen der Elektrostatik. Jedoch geht dieses Gesetz, wie ja aus seiner 'Herleitung' im letzten Abschnitt ganz deutlich wurde, von einem *mechanischen Standpunkt* aus, der (instantane!) Kräfte zwischen *Punktladungen* zu seinem Gegenstand macht [20].

Begrifflich im Gegensatz dazu – wenn auch physikalisch zunächst äquivalent – steht der Gedanke einer elektrischen *Feldtheorie*, in der die Ladungen an dem Zeit- und Raumpunkt, an dem sie sich befinden, eine Kraft 'spüren', deren Ursache ein 'Zustand' des Raumes an diesem Zeit- und Raumpunkt ist, eben das *elektrische Feld*. In bewußter Unsymmetrie schreibt man das Kraftgesetz in der Form [21]

$$\vec{F}\,(\vec{r};q) = q \cdot \vec{E}\,(\vec{r}) \quad ; \tag{4}$$

d.h. in Worten: die *Kraft*, die auf eine Ladung $q$ wirkt, die sich zur Zeit $t$ am Ort $\vec{r}$ befindet, ist gegeben durch das *elektrische Feld* $\vec{E}\,(t,\vec{r})$ an eben diesem Raum- und Zeitpunkt.

Die Konsistenz mit den Ergebnissen des vorigen Abschnitts erfordert dann, zu sagen, daß die *Quellen* (also: Ursachen) dieses elektrischen Feldes die elektrischen Ladungen sind, und

[19] Es ist bemerkenswert, daß im Fall des Gravitationsgesetzes Newton das entsprechende Ergebnis *nicht* mittels einer unmittelbaren Kraftmessung (die ihm ja nicht möglich war) erzielt hat, sondern mit einer weiteren theoretischen Überlegung, nämlich der "Rückwärts-Analyse" der Planetenbahnen (d.h. der Kepler-schen Gesetze).

[20] In der Sprache der Geschichte und Philosophie der Naturwissenschaften wird das meist der "Fernwirkungsstandpunkt" genannt.

[21] bzw. – für eine *kontiniuierliche Ladungsverteilung* –

$$d\vec{F}\,(\vec{r};q)d\tau = \rho(\vec{r})\,d\tau \cdot \vec{E}\,(\vec{r}) \quad .$$

zwar eben gerade so, daß eine Ladung $q$ am Ort $\vec{r}\,'$ (dem "Quellpunkt") ein Feld am Ort $\vec{r}$ (dem "Aufpunkt") erzeugt, das durch

$$\vec{E}\,(\vec{r}\,) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^2}\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \tag{5}$$

gegeben ist [22].

Mit den Ergebnissen von Abschn. B kann man dies nun offenbar in einer dem Feldbegriff angemessenen (nämlich kontinuierlichen) Sprache so schreiben:

$$\vec{E}\,(\vec{r}\,) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \rho(\vec{r}\,')\,\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\,d\tau' \quad . \tag{6}$$

### C 2.1 Das elektrische Potential ("Skalarpotential")

Schon aus der Mechanik wissen wir, daß ein Feld der Form (5) bzw. (6) *rotationsfrei* ist:

$$\boxed{\operatorname{rot}\vec{E} = \vec{0}} \quad ; \tag{7}$$

es läßt sich also immer in der Form [23]

$$\vec{E}\,(\vec{r}\,) = -\operatorname{grad}\Phi(\vec{r}\,)$$

oder

$$\Phi(\vec{r}\,) = -\int \vec{E}\,(\vec{r}\,')\cdot d\vec{r}\,' \quad +\text{const.}$$

schreiben.

▷ **Übung:** Nachrechnen!

Im Coulomb-Fall hat man

$$\boxed{\Phi(\vec{r}\,) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3\vec{r}\,'\frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}} \quad . \tag{8}$$

und damit

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\Phi\vec{r} \quad .$$

▷ **Übung:** Nachrechnen!

[22] Wir haben wieder – im Rahmen der hier zu behandelnden Elektrostatik – alle Zeitabhängigkeiten weggelassen. Siehe hierzu jedoch noch einmal die Fußnote auf S.9!

[23] Das Minuszeichen ist Konvention; es hat zu tun mit der Konvention, daß Elektronen *negative* Ladung tragen.

## C 2.2 Die Quellen des elektrischen Feldes

Um zu sehen, daß hinter der invers-quadratischen Abstandsabhängigkeit der Coulomb-Kraft mehr steckt als nur eine Art Zufälligkeit der Naturgesetze, berechnen wir auch die *Divergenz* des elektrischen Feldes. Der Einfachheit halber betrachten wir zunächst eine Punktladung $q$ im Ursprung. Das elektrische Feld ist dann

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \frac{\vec{r}}{r^3}$$

und damit [24]

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \vec{E} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \sum_{k=1}^{3} d_k \left(\frac{x^k}{r^3}\right) \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{r^3} \cdot 3 + \sum_{k=1}^{3} x^k \cdot \left(-\tfrac{3}{2}\right) \frac{1}{r^5} \cdot 2x_k\right] \\
&= 0 \quad \text{für } r \neq 0 \quad ,
\end{aligned}$$

während das Ergebnis dieser Rechnung für $r = 0$ undefiniert ist. Den nötigen Grenzübergang für $r \to 0$ macht man hier am besten anhand der Definition der Divergenz selbst [als Volumen nehmen wir eine Kugel $K$ um den Ursprung; $S$ ist dann deren Oberfläche]:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \vec{E}\Big|_{r=0} &= \lim_{K\to 0} \frac{1}{K} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{\sigma} \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \lim_{r\to 0} \frac{q}{r^2} \cdot \frac{1}{K} \int_S \frac{\vec{r}}{r}\, d\vec{\sigma} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \lim_{r\to 0} \frac{q}{K} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot 4\pi r^2 \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \lim_{r\to 0} 4\pi \frac{q}{K} = \frac{1}{\varepsilon_0} q \lim_{r\to 0} \frac{1}{K} \quad ,
\end{aligned}$$

so daß also

$$\lim_{r\to 0} \int_K \operatorname{div} \vec{E}\, d\tau = \frac{1}{\varepsilon_0} q \lim_{r\to 0} \int_K \frac{1}{K}\, d\tau = \frac{1}{\varepsilon_0} q$$

bleibt.

Vergleicht man das mit der Ladungsdichte der betrachteten Punktladung:

$$\rho(\vec{r}) = q \cdot \delta^3(\vec{r}) \quad ;$$

so erhält man schließlich

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{E}\,(\vec{r}) = -\Delta\Phi(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}} \quad , \tag{9}$$

das "Gauß-sche Gesetz der Elektrostatik".

Es zeigt sich also, daß in einem sehr wörtlichen Sinne die *Ladungen die Quellen des elektrischen Feldes* sind: die Divergenz (das Maß für die 'Quellstärke') am Ort $\vec{r}$ hängt

---

[24] Wir schreiben $d_k$ als Kurzschrift für die übliche Schreibweise $(\frac{\partial}{\partial k})$ der partiellen Ableitung (zur Systematik dieser Notation vgl. C.C. Noack: *Tensoranalysis*; Skriptum Univ. Bremen 1994 .

von der *Ladungsdichte* in $\vec{r}$ ab *und von sonst garnichts* — das quadratische Anwachsen der Oberfläche, durch die das Feld im Abstand $r$ von der Quelle 'durchströmt', wird gerade durch die invers-quadratische Abstandsabhängigkeit der Coulomb-Kraft genau kompensiert.

*Keine andere Abhängigkeit vom Abstand als die invers-quadratische hat diese* (im Gauß-Gesetz zum Ausdruck kommende) *Eigenschaft!*

Schließlich läßt sich zeigen daß die beiden aus dem Coulomb-Gesetz deduzierten Differentialgleichungen

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= \vec{0} \end{aligned}} \quad , \tag{7}$$

die auch als **Grundgleichungen der Elektrostatik** bezeichnet werden, als Lösung einfach

$$\vec{E}\,(\vec{r}\,) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \rho(\vec{r}\,') \, \frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \, d^3\vec{r}\,'$$

haben.

Die Grundgleichungen der Elektrostatik sind also in ihrem physikalischen Gehalt *äquivalent zum Coulomb-Gesetz.*

# D Magnetostatik

## D 1 Elektrische Ströme als Ursache des Magnetismus

Entsprechend dem Vorgehen im vorigen Abschnitt möchte man nun auch die *magnetischen* Phänomene theoretisch systematisieren. Dabei könnte man zunächst auf den Gedanken kommen, analog zu den Kräften zwischen elektrischen Ladungen nun die Kräfte zwischen Permanentmagneten zu analysieren. Das führt jedoch deshalb nicht recht weiter, weil der Permanentmagnetismus nicht eine fundamentale Eigenschaft aller Materie ist wie die Ladung, sondern in Wahrheit ein recht kompliziertes Phänomen der Festkörperphysik, dessen gründliches Verständnis überdies wesentliche Aspekte der Quantentheorie erfordert [25].

Ein einfacherer Zugang liegt in der Erkenntnis, daß magnetische Kräfte *Kräfte zwischen elektrischen Strömen* sind, Kräfte also zwischen *bewegten* Ladungen ("Lorentz-Kraft").

Was aber ist ein elektrischer "Strom"? Bei einer Punktladung ist das ziemlich einfach zu definieren: in Analogie zum mechanischen Impuls [26] $mv$ wird man darunter das Produkt von *Ladung* und der *Geschwindigkeit* verstehen, mit der die Ladung sich bewegt, also

$$\text{elektrischer Strom} := q \cdot \vec{v}\,(\vec{r}\,) \quad .$$

Entsprechend dem Kontinuumsansatz der Feldtheorie brauchen wir aber wieder eine *Dichte*, die "Stromdichte $\vec{\jmath}$", die sich dann völlig analog aus der Ladungsdichte ergibt:

$$\vec{\jmath}\,(\vec{r}\,) := \rho(\vec{r}\,) \cdot \vec{v}\,(\vec{r}\,) \quad .$$

Für eine Menge von bewegten Punktladungen $q_k$ hätten wir dann

$$\rho(\vec{r}\,) = \sum_k q_k \cdot \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_k)$$

und daraus

$$\vec{\jmath}\,(\vec{r}\,) = \sum_k q_k \cdot \vec{v}\,(\vec{r}_k)\delta^3(\vec{r} - \vec{r}_k) = \sum_k q_k \cdot \vec{v}\,(\vec{r}\,)\delta^3(\vec{r} - \vec{r}_k) \quad .$$

▷ **Übung:** Man überzeuge sich im einzelnen von der Konsistenz dieser Definitionen mit denen im Abschn. B!

Im Rahmen der Magneto*statik* lassen wir wieder alle Zeitabhängigkeiten weg, d.h. wir beschäftigen uns hier nur mit *stationären* Strömen. Das soll heißen: zwar bewegen sich

[25] Auch eine theoretische Abstraktion wie die von "magnetischen Monopolen", d.h. von Objekten, die analog zu elektrischen Punktladungen in zwei Varianten (etwa "$N$" und "$S$") auftreten würden, hilft nicht weiter, weil eine solche Vorstellung in grundlegendem Widerspruch zu allen experimentellen Befunden steht.

In jüngster Zeit sind allerdings im Zusammenhang des Versuchs, eine einheitliche (Quanten-)Theorie aller Naturkräfte zu schaffen, auch immer wieder über die Maxwell-Theorie hinausgehende Theorien der Elektrodynamik vorgeschlagen worden, die das Auftreten von magnetischen Monopolen erlauben würden, und in der Folge wird auch immer wieder experimentell nach solchen Monopolen gesucht. Weder Theorien noch Experimente haben jedoch bisher nennenswerte Erfolge gezeitigt.

(Eine knappe, aber sehr lesbare Darstellung der einfachsten "Monopol-Theorien" – und ihrer wundersamen Konsequenzen! – findet sich in Jackson: *Classical Elektrodynamics*, New York 1975).

[26] Newton hat ja bekanntlich den Impuls sehr prägnant "Größe der Bewegung" genannt, ein Begriff, der ausdrückt, daß der Impuls einen 'extensiven' Aspekt (die Masse) und einen 'intensiven' Aspekt (die Geschwindigkeit) hat.

Ganz entsprechend beschreibt der elektrische Strom die "Größe der elektrischen Bewegung".

die Ladungen, aber deren Geschwindigkeiten (und damit die Ströme) sind als *nicht* explizit zeitabhängig vorausgesetzt: an einem gegebenen Ort bleibt der Strom zeitlich immer gleich[27]. In der reinen Magnetostatik haben wir es außerdem *nur mit Strömen* zu tun; eine statische *Ladungs*dichte bleibt ganz außer Betracht – sie ist daher a fortiori zeitlich konstant. Aus der Kontinuitätsgleichung Gl. 1 (die – als Satz von der Ladungserhaltung – *immer* gilt!) folgt dann

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{\jmath} = 0} \quad . \tag{8}$$

Man kann diese Gleichung – analog zu Gl. 2 für die Elektrostatik – als *Definition* des Begriffs "Magnetostatik" ansehen.

Die oben definierte Stromdichte $\vec{\jmath}(\vec{r})$ hat, wie man leicht abliest, die Dimension 'Ladung pro Zeit und Stromquerschnitt', also etwa $A/\mathrm{cm}^2$ . Ein Integral dieser Stromdichte über den Querschnitt eines Leiters müßte also die gewöhnliche "elektrotechnische" Stromstärke $J$ ergeben. Das kann man auch für eine einzelne Punktladung $q$ leicht nachvollziehen, wenn man sich deren Stromdichte $\vec{\jmath}(\vec{r})$ über ein infinitesimales Volumenelement (um die Punktladung) integriert denkt:

$$\vec{\jmath}(\vec{r})\, d\tau = \lim_{V\to 0} \int_V \vec{\jmath}(\vec{r})\, d\tau = q \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{dq}{dt} \cdot d\vec{s} =: d\vec{J} = J\, d\vec{s} \quad ; \tag{9}$$

hier ist $J := \frac{d|\vec{J}\,|}{ds} = \frac{dq}{dt}$ in der Tat einfach die "Stromstärke", nämlich die in der Zeiteinheit durch einen Querschnitt fließende Ladung.

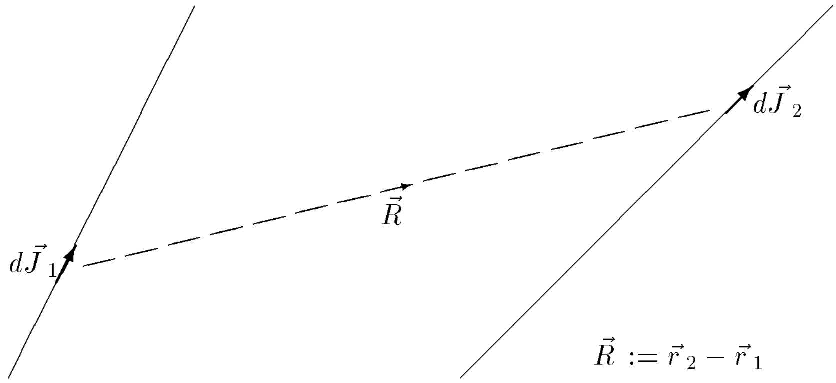
▷ **Übung:** Man mache sich diesen Zusammenhang zwischen Strom*dichte* und Strom*stärke* auch direkt aus deren Definitionen – ohne Bezug auf eine Punktladung – klar.

Mit dieser Konstruktion von $d\vec{J}$ haben wir ein "infinitesimales Stromelement" erhalten, das gewissermaßen als Analogon zu einer Punktladung dienen kann, wenn wir nun die *Kräfte zwischen Strömen* weiter analysieren wollen [28].

[27] Auch in diesem Zusammenhang ist wieder ein Verweis auf die Fußnote auf S.9 am Platze!

[28] Dabei muß man allerdings immer im Auge behalten, daß das "infinitesimale Stromelement" *anders als die Punktladung* ein mathematisches Konstrukt ist. Denn aus der Ladungserhaltung (vgl. Abschn. A) folgt ja, daß die Stromstärke $J$ längs eines gesamten stromdurchflossenen Leiters überall konstant ist — einem infinitesimalen Stromelement kommt deshalb keine unmittelbare *physikalische* Bedeutung zu, sondern es sind immer nur *Linienintegrale über geschlossene Leiterschleifen* physikalisch relevant!

Wir betrachten also jetzt zwei stromdurchflossene Leiter:




und wollen analog zu unserem Vorgehen im Fall des Coulomb-Gesetzes (Abschn. C 1) ein *differentielles* Kraftgesetz herleiten.

Unsere Grundpostulate sind sinngemäß die gleichen wie dort:

(1) **Abgeschlossenheit und Vollständigkeit der Parameter** [29];

(2) **Kräfte sind Vektoren**;

(3) **Die Kraft zwischen jeweils 2 Stromelementen ist unabhängig von den übrigen Stromelementen** [30];

(4) **Strom*stärken* sind skalar, Strom*dichten* also Vektoren. Beide sind additiv**;

(5) **Kräfte genügen dem Superpositionsprinzip**;

(6) **3. Newton-sches Axiom**.

Die Analyse der mathematischen Folgen dieser Postulate ist hier deutlich komplizierter, weil *drei* Vektoren, $d\vec{J}_1$, $d\vec{J}_2$ und $\vec{R}$ im Spiel sind [31], von denen die Kraft – die nach (2) selbst ein Vektor ist – abhängen kann.

Berücksichtigen wir gleich die Linearität in $d\vec{J}_1$ und $d\vec{J}_2$ [die sich ganz analog wie im Coulomb-Fall aus (4) und (5) ergibt], so erhalten wir die folgende Liste von Möglichkeiten, wie man die gegebenen Vektoren zu einem Vektor zusammensetzen kann (Jeder der Vektoren in dieser Liste ist dann jeweils noch mit einer – wie im Coulomb-Fall durch (1) bis (6) noch *nicht* festgelegten – *skalaren* Funktion von $R$ zu multiplizieren):

[29] Bei genauerer Analyse erweist sich dieses Postulat hier als in sich problematisch. Die in unserem stationären Ansatz implizit enthaltene Annahme einer instantanen Wechselwirkung auch zwischen Strömen ist nicht konsistent mit deren (zeitlichem) "fließen".

Diese begrifflichen Schwierigkeiten manifestieren sich allerdings erst beim Versuch, eine solche "Fern-Wechselwirkung" relativistisch korrekt zu formulieren. Diese Schwierigkeiten (die hier nur angedeutet werden können) sind einer der Gründe, warum man in einer relativistisch korrekten Theorie geradezu *gezwungen* ist, zum Feldstandpunkt überzugehen!

[30] Auch hier sieht man, daß diese Annahme weit weniger einleuchtend erscheint als im Fall von Kräften zwischen punktförmigen Objekten!

[31] Aus den gleichen Gründen wie im Coulomb-Fall kann die Kraft nur von der *Differenz* $\vec{R} := \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ abhängen.

$$(d\vec{J}_1 \cdot d\vec{J}_2)\, \vec{R}$$
$$(\vec{R} \cdot d\vec{J}_2)\, d\vec{J}_1$$
$$(\vec{R} \cdot d\vec{J}_1)\, d\vec{J}_2$$

$$\vec{R} \times (d\vec{J}_1 \times d\vec{J}_2)$$
$$d\vec{J}_1 \times (\vec{R} \times d\vec{J}_2)$$
$$d\vec{J}_2 \times (\vec{R} \times d\vec{J}_1) \qquad .$$

▷ **Übung:** Einfache Kreuzprodukte – z.B. die Kombinatiion $d\vec{J}_1 \times d\vec{J}_2$ – können nicht vorkommen. Warum nicht?

Die drei letzten Ausdrücke (doppelte Kreuzprodukte) können wir außer Acht lassen: sie lassen sich alle als Linarkombinationen der ersten drei schreiben.

▷ **Übung:** Nachrechnen!

Wir machen also für die (infinitesimale) Kraft $d\vec{F}$, die von dem Stromelement $d\vec{J}_1$ auf das Stromelement $d\vec{J}_2$ ausgeübt wird, den Ansatz [32]:

$$d\vec{F} = -k \cdot \left[ f_1(R^2) \cdot (d\vec{J}_1 \cdot d\vec{J}_2)\, \vec{R} + f_2(R^2) \cdot (\vec{R} \cdot d\vec{J}_2)\, d\vec{J}_1 + f_3(R^2) \cdot (\vec{R} \cdot d\vec{J}_1)\, d\vec{J}_2 \right] \quad ,$$

wobei $f_1, f_2, f_3$ noch festzulegende *skalare* Funktionen von $R^2$ sind.

Wie bestimmen sich diese Funktionen? Zunächst ist zu beachten, daß (wie schon oben bemerkt) nicht $d\vec{F}$ selbst, sondern nur das *Integral* über diese infinitesimale Kraft – und zwar über *beide geschlossenen Stromkreise* – physikalisch relevant ist.

Nun ist aber

$$f_2(R^2) \cdot \vec{R} = \mathrm{grad}\, [\phi_2(R^2)] \quad \text{mit } \phi_2 := \tfrac{1}{2} \int f_2(R^2)\, d(R^2) \quad ,$$

also

$$f_2(R^2) \left( \vec{R} \cdot d\vec{J}_2 \right) = \left( \mathrm{grad}\, [\phi(R^2)] \cdot d\vec{J}_2 \right) \quad ;$$

daraus aber folgt

$$\int_{J_1} \int_{J_2} f_2(R^2) \left( \vec{R} \cdot d\vec{J}_2 \right) d\vec{J}_1 = \int_{J_1} \int_{J_2} \left( \mathrm{grad}\, \phi_2 \cdot d\vec{J}_2 \right) d\vec{J}_1 = 0 \quad ,$$

weil das $\int_{J_2}$ ein geschlossenes Linienintegral eines Gradienten ist; entsprechendes gilt analog auch für $f_3$. Der zweite und der dritte Term in $\vec{F}$ tragen also *makroskopisch nichts bei* — sie können beliebig gewählt werden!

[32] $-k$ ist eine nur der späteren Bequemlichkeit wegen schon hier herausgezogene Gesamtkonstante.

## D 2 Das Ampère-sche Gesetz

Am einfachsten ist es natürlich, $f_2 = f_3 = 0$ zu setzen. Man erhält dann

$$d\vec{F} = -k \cdot f_1(R^2) \cdot \left(d\vec{J}_1 \cdot d\vec{J}_2\right) \vec{R} \quad ;$$

experimentell findet man auch hier (ganz analog zum Coulomb-Fall) $f_1 = 1/R^3$, oder

$$d\vec{F} = -k \cdot \frac{\left(d\vec{J}_1 \cdot d\vec{J}_2\right)}{R^2} \cdot \frac{\vec{R}}{R} = -k \cdot \frac{J_1 J_2}{R^2} \cdot (d\vec{s}_1 \cdot d\vec{s}_2) \cdot \frac{\vec{R}}{R} \quad ,$$

gewissermaßen eine *vektorielle Form* des Coulomb-Gesetzes. Dies ist das **"Ampère-sche Gesetz"**.

Das Vorzeichen der Konstanten $k$ ist positiv: $d\vec{F}$ ist die Kraft auf $d\vec{J}_2$, und parallele Ströme *ziehen sich an* (man beachte $\vec{R} := \vec{r}_2 - \vec{r}_1$).

Im übrigen ist $-k$ eine willkürliche (vom Maßsystem abhängige) Konstante [33].

## D 3 Das Gesetz von Biot und Savart

Das Ampère-sche Gesetz ist *nicht* wie das Coulomb-Gesetz in der Elektrostatik zum Aufbau einer Feldtheorie geeignet. Denn anders als dort, wo die Trennung in 'Quelle' und davon erzeugtes 'Feld' einfach durch die multiplikative Schreibweise $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$ geleistet wird, können wir hier das Skalarprodukt $\left(d\vec{J}_1 \cdot d\vec{J}_2\right)$ nicht ohne weiteres in zwei unabhängige Faktoren separieren.

Wir können ähnliches aber erreichen, wenn wir die Freiheit in der Wahl der Funktionen $f_2$ und $f_3$ (die wir oben ja nur der Einfachheit halber zu Null gesetzt haben) geschickter ausnutzen. Wir setzen jetzt – bewußt unsymmetrisch –

$$f_2 = -f_1\,, \quad f_3 = 0$$

und erhalten so

$$\begin{aligned} d\vec{F} &= -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{R^3}\left[\left(d\vec{J}_1 \cdot d\vec{J}_2\right)\vec{R} - \left(\vec{R} \cdot d\vec{J}_2\right) d\vec{J}_1\right] \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{R^3}\, d\vec{J}_2 \times \left(\vec{R} \times d\vec{J}_1\right) \\ &= +d\vec{J}_2 \times \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{d\vec{J}_1 \times \vec{R}}{R^3} \quad ; \end{aligned}$$

in dieser Form heißt das Kraftgesetz **"Biot-Savart-sches Gesetz"**. [34]

---

[33] In SI-Einheiten wird durch die Setzung

$$\frac{\mu_0}{4\pi} := k =: 10^{-7}\,\frac{N}{A^2}$$

das Ampère ($A$) als Einheit der Stromstärke *definiert* [ $1\,N$ : 1 Newton ] .

[34] Wie aus der ganzen Konstruktion hervorgeht, unterscheiden sich die Gesetze von Ampère und Biot-Savart *makroskopisch nicht*; das bedeutet, daß man sie auch experimentell nicht unterscheiden kann: sie sind *äquivalente* Formulierungen desselben Sachverhalts.

*Mikroskopisch* dagegen besteht sehr wohl ein wichtiger Unterschied. Er läßt sich besonders deutlich daran ablesen, daß wir durch die unsymetrische Behandlung von $d\vec{J}_1$ und $d\vec{J}_2$ unter der Hand das 3. Newton-sche

## D 4 Die Differentialgleichungen der Magnetostatik

Der Einführung des Begriff (statisches) "Magnetfeld" steht nun nichts mehr im Wege — man schreibt für die Kraft am Ort $\vec{r}_2$

$$d\vec{F}(\vec{r}_2) = d\vec{J}_2 \times \vec{B}(\vec{r}_2)$$

mit

$$\vec{B}(\vec{r}_2) := \frac{\mu_0}{4\pi} d\vec{J}_1 \times \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$$

als dem "magnetischen Feld", das am Ort $\vec{r}_2$ von dem Stromelement $d\vec{J}_1$ erzeugt wird.

Um den Übergang zu einer Feldformulierung zu vervollständigen, müssen wir nun nur noch das Konstrukt der 'infinitesimalen Stromelemente' durch die Strom*dichte* ersetzen, die in einer Feldtheorie ihren legitimen Platz hat. Wir benutzen dazu den schon oben in Gl. 9 benutzten Zusammenhang:

$$d\vec{J} = \int_V \vec{\jmath}(\vec{r})\, d\tau \quad ;$$

damit erhält man – in deutlicher Analogie zur Elektrostatik (Gl. 6)

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{\jmath}(\vec{r}\,') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}\, d\tau' \quad .} \quad . \tag{10}$$

und [35]

$$d\vec{F}(\vec{r}) = \vec{\jmath}(\vec{r})\, d\tau \times \vec{B}(\vec{r}) \quad . \tag{11}$$

Man beachte hier besonders den Transformationscharakter des Magnetfeldes: als Kreuzprodukt zweier Vektoren ist das Magnetfeld *kein Vektor*, sondern vielmehr ein antisymmetrischer Tensor 2. Stufe! [36]

---

Axiom eingbüßt haben! Es gilt für das Biot-Savart-sche Kraftgesetz *nicht* mehr

$$d\vec{F}_{1\to 2} + d\vec{F}_{2\to 1} = 0 \quad .$$

Da aber die Summe aller Kräfte in einem abgeschlossenen System verschwinden muß (sonst wäre auch sein Gesamtimpuls keine Erhaltungsgröße mehr!), muß man folgern, daß ein System aus zwei infinitesimalen Stromelementen *kein abgeschlossenes System* dargestellt.

Dieser Sachverhalt macht noch einmal die Tatsache deutlich, die schon oben betont wurde: die "infinitesimalen Stromelemente" sind ein mathematisches Konstrukt, denen keine unmittelbare *physikalische* Bedeutung zukommt.

[35]bzw. – für eine (bewegte) *Punktladung* –

$$\vec{F}(\vec{r}; q) = q\,\vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}) \quad .$$

[36]Daß ein solcher antisymmetrischer Tensor im dreidimensionalen Raum wie ein Vektor gerade auch nur soviele Komponenten hat wie der Raum Dimensionen, so daß eine Verwechslung mit einem Vektor überhaupt vorkommen kann, mag man als 'zufällig' ansehen; es ist jedenfalls eine spezielle Eigenschaft des $\mathbb{R}^3$.

Genaueres zu diesem Thema findet sich in C.C. Noack: *Tensoranalysis*; Skriptum Univ. Bremen 1994, oder auch (sehr anschaulich!) in den *Feynman Lectures*, Bd. I .

### D 4.1 Das magnetische Potential ("Vektorpotential")

Analog zum Vorgehen in Abschn. C 2.1, in dem wir die Wirbelfreiheit des (statischen) elektrischen Feldes als Konsequenz des Coulomb-Gesetzes festgestellt haben, können wir nun aus der Form Gl. 10 ableiten, daß aus dem Biot-Savart-schen Gesetz die *Quellen*freiheit des *magnetischen* Felds folgt. Wir tun dies, indem wir den Ausdruck in Gl. 10 explizit in der Form

$$\boxed{\vec{B}\,(\vec{r}\,) =: \mathrm{rot}\,\vec{A}\,(\vec{r}\,)} \tag{12}$$

schreiben. Wir benützen dazu die bereits im Coulomb-Fall benutzte Identität

$$\left[\mathrm{grad}\left(\frac{1}{R}\right)\right]_m \equiv d_m\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right) = -\frac{x_m - x'_m}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} \quad ;$$

mit ihr können wir Gl. 10 explizit (in Komponenten) schreiben als

$$B_i(\vec{r}\,) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\sum_{k,m=1}^{3}\varepsilon_{ikm}\int_V \jmath_k(\vec{r}\,')\,d_m\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)d\tau'$$

oder

$$\vec{B}\,(\vec{r}\,) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \vec{\jmath}\,(\vec{r}\,')\times\mathrm{grad}\left(\frac{1}{R}\right)d\tau' \quad .$$

Da aber $\vec{\jmath}\,(\vec{r}\,')$ nicht von $\vec{r}$ abhängt, ist einfach

$$-\vec{\jmath}\,(\vec{r}\,')\times\mathrm{grad}\left(\frac{1}{R}\right) = +\,\mathrm{grad}\left(\frac{1}{R}\right)\times\vec{\jmath}\,(\vec{r}\,') = +\,\mathrm{rot}\left(\frac{\vec{\jmath}\,(\vec{r}\,')}{R}\right) \quad ;$$

wir können also schreiben

$$\vec{B}\,(\vec{r}\,) = \mathrm{rot}\,\vec{A}\,(\vec{r}\,)$$

mit

$$\boxed{\vec{A}\,(\vec{r}\,) := \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{\jmath}\,(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d^3\vec{r}\,'} \quad . \tag{13}$$

$\vec{A}$ ist ein *polares* Vektorfeld; es trägt den – naheliegenden – Namen "Vektorpotential".

Das (statische) [37] Magnetfeld $\vec{B}$ hat also *keine Quellen*:

$$\boxed{\mathrm{div}\,\vec{B} = \vec{0}} \quad ; \tag{14}$$

oder:

**Es gibt keine magnetischen Pole.**

[37] Anders als beim elektrischen Feld (das nur im statischen Fall wirbelfrei ist), gilt die Quellenfreiheit des Magnetfelds *allgemein*, vgl. Abschn. F.

### D 4.2 Die Wirbel des magnetischen Feldes

Die schon hier deutlichen Parallelen zur Elektrostatik legen nahe, nun auch rot $\vec{B}$ zu berechnen. Es ist zunächst

$$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{A} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{A} - \Delta\vec{A} \quad ;$$

für div $\vec{A}$ findet man

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)^{-1} \mathrm{div}\,\vec{A} &= \int_V \sum_{k=1}^{3} d_k \left(\frac{\jmath_k(\vec{r}\,')}{R}\right) d\tau' = \int_V \sum_{k=1}^{3} \jmath_k(\vec{r}\,')\, d_k \left(\frac{1}{R}\right) d\tau' \\
&= -\int_V \sum_{k=1}^{3} \jmath_k(\vec{r}\,')\, d_k{}' \left(\frac{1}{R}\right) d\tau' \qquad [\text{beachte } \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}\,' \; !] \\
&= -\int_V \sum_{k=1}^{3} \left[ d_k{}' \left(\frac{\jmath_k(\vec{r}\,')}{R}\right) - \frac{1}{R}\, d_k{}' \jmath_k(\vec{r}\,') \right] d\tau' \quad .
\end{aligned}$$

Der zweite Term im letzten Ausdruck verschwindet, weil div $\vec{\jmath} = d_k \jmath_k = 0$ in der Magnetostatik; der erste Term läßt sich mit dem Gauß-schen Satz umformen:

$$-\int_V \sum_{k=1}^{3} d_k{}' \left(\frac{\jmath_k(\vec{r}\,')}{R}\right) d\tau' = -\int_S \frac{\vec{\jmath}\,(\vec{r}\,')}{R} d\sigma'$$

und verschwindet ebenfalls, weil $\vec{\jmath}$ auf der Oberfläche (des gesamten Raums) verschwinden muß. Wir haben also

$$\mathrm{div}\,\vec{A} = 0 \quad .$$

Auch das Vektorpotential hat also keine Quellen.

Mit [38]

$$\Delta\left(\frac{1}{R}\right) = -4\pi\, \delta^3(\vec{R}\,)$$

erhalten wir so

$$-\Delta\vec{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{\jmath} \cdot \Delta\left(\frac{1}{R}\right) d\tau' = +\mu_0 \int_V \vec{\jmath} \cdot \delta^3(\vec{r} - \vec{r}\,') d\tau' = \mu_0\, \vec{\jmath}\,(\vec{r}) \quad ,$$

und damit schließlich für die Rotation des Magnetfelds:

$$\boxed{\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0\, \vec{\jmath}\,(\vec{r})} \quad . \tag{15}$$

Auch hier läßt sich zeigen, daß die beiden aus dem Biot-Savart-Gesetz deduzierten Differentialgleichungen

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{rot}\,\vec{B} &= \mu_0 \cdot \vec{\jmath}\,(\vec{r}) \\ \mathrm{div}\,\vec{B} &= 0 \end{aligned}} \quad , \tag{13}$$

[38] Vgl. die zu Gl. 9 führende Rechnung in Abschn. C 2.2.

die als **Grundgleichungen der Magnetostatik** bezeichnet werden, als Lösung einfach

$$\vec{B}\,(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{\jmath}\,(\vec{r}\,') \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}\, d\tau\,'$$

haben.

Die Grundgleichungen der Magnetostatik sind also in ihrem physikalischen Gehalt *äquivalent zum Biot-Savart-Gesetz.*

# E Zusammenfassung der statischen Gleichungen

Die Ergebnisse der vorigen Abschnitte sollen hier noch einmal tabellarisch zusammengefaßt werden, vor allem, um die Analogien und Symmetrien zwischen dem elektrischen und dem magnetischen Fall herauszuarbeiten:

| Elektrostatik | Magnetostatik |
|---|---|

Die unter diesen Begriffen beschriebenen physikalischen Phänomenen sind charakterisiert durch

| | |
|---|---|
| $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ | $\operatorname{div} \vec{j} = 0$ . |

Daraus folgt die *Kontinuitätsgleichung*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0$$

(die aber auch allgemein – für zeitabhängige Ladungs- und Stromdichten – ihre Gültigkeit behält).

Die Felder werden definiert über die Kraftwirkung, die sie auf

| | |
|---|---|
| Ladungen | Ströme |

ausüben: die Kraft auf eine *Punktladung*, die

| | |
|---|---|
| Coulomb-Kraft, | Lorentz-Kraft, |

ist

| | |
|---|---|
| $\vec{F}(\vec{r}) = q \cdot \vec{E}(\vec{r})$ | $\vec{F}(\vec{r}) = q\, \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r})$ , |

oder (in kontinuierlicher Schreibweise)

| | |
|---|---|
| $d\vec{F}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})\, d\tau \cdot \vec{E}(\vec{r})$ | $d\vec{F}(\vec{r}) = \vec{j}(\vec{r})\, d\tau \times \vec{B}(\vec{r})$ ; |

dabei ist das Feld gegeben durch

| | |
|---|---|
| $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \rho(\vec{r}\,') \frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')}{\lvert \vec{r} - \vec{r}\,' \rvert^3}\, d\tau'$ | $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{j}(\vec{r}\,') \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')}{\lvert \vec{r} - \vec{r}\,' \rvert^3}\, d\tau'$ |

Es gilt die – *homogene* – Differentialgleichung

| | |
|---|---|
| $\boxed{\mathrm{rot}\,\vec{E} = \vec{0}}$ | $\boxed{\mathrm{div}\,\vec{B} = 0}$ |

Aufgrund dieser Differentialgleichung kann man das Feld als Ableitung eines *Potentials* schreiben in der Form

| | |
|---|---|
| $\vec{E}(\vec{r}) = -\,\mathrm{grad}\,\Phi(\vec{r})$ | $\vec{B}(\vec{r}) = \mathrm{rot}\,\vec{A}(\vec{r})$ . |

Das Potential ist ein

| | |
|---|---|
| skalares Feld , | Vektorfeld , |

das gegeben ist durch

| | |
|---|---|
| $\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{\lvert\vec{r}-\vec{r}\,'\rvert}d\tau'$ | $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{\lvert\vec{r}-\vec{r}\,'\rvert}d\tau'$ . |

Das daraus abgeleitete Feld $\vec{E}$ bzw. $\vec{B}$ ist daher ein

| | |
|---|---|
| Vektorfeld | Tensorfeld . |

Das Potential genügt der Differentialgleichung

| | |
|---|---|
| $\Delta\Phi(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$ | $\Delta\vec{A}(\vec{r}) = \mu_0 \cdot \vec{j}(\vec{r})$ , |

das Feld $\vec{E}$ bzw. $\vec{B}$ der – *inhomogenen* – Differentialgleichung

| | |
|---|---|
| $\boxed{\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}}$ | $\boxed{\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{j}(\vec{r})}$ . |

# F Die Maxwell-Gleichungen

Wir betrachten nun die volle Dynamik der elektrischen und magnetischen Erscheinungen, d.h. *zeitabhängige* Felder.

Zunächst bemerken wir, daß für den Fall einer zeitabhängigen Ladungsdichte auch

$$\operatorname{div}\vec{\jmath} \neq 0$$

ist, denn die Ladungserhaltung erfordert ja die Gültigkeit der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{\jmath} = 0$$

auch für zeitabhängige Felder.

Daraus folgt aber sofort, daß die bisher aufgestellten Differentialgleichungen der Statik abgeändert werden *müssen*; denn aus

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{\jmath}$$

würde folgen

$$0 \equiv \operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0 \cdot \operatorname{div}\vec{\jmath} = -\mu_0 \cdot \frac{\partial\rho}{\partial t} \quad ,$$

im Widerspruch zur Voraussetzung einer zeitabhängigen Ladungsdichte.

Wir setzen deshalb *in Abänderung der statischen Gleichung* an:

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{\jmath} + \frac{\partial\vec{X}}{\partial t} \quad ,$$

mit einem noch zu bestimmenden Feld $\vec{X}$ – dabei stellt die Einführung der *Zeitableitung* von $\vec{X}$ (und nicht von $\vec{X}$ selber) [39] sicher, daß die Magnetostatik unverändert bleibt. Es folgt

$$0 = \operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0 \cdot \operatorname{div}\vec{\jmath} + \operatorname{div}\frac{\partial\vec{X}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(-\mu_0 \cdot \rho + \operatorname{div}\vec{X}\right) \quad . \tag{14}$$

Wie steht es mit der anderen inhomogenen Gleichung, dem Gauß-Gesetz,

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad ,$$

das den Zusammenhang zwischen dem *elektrischen* Feld $\vec{E}$ und seinen Quellen beschreibt?

Es gibt zwei Gründe, zu versuchen, diese Gleichung *unabgeändert* zu lassen. Der erste ist allgemein das Prinzip der Einfachheit der Theorie, das wir schon früher als durchaus produktiv erkannt haben. Noch wichtiger aber ist der zweite Grund: im Abschn. C 2.2 haben wir gesehen, wie das Gauß-Gesetz die Ladungen in einem sehr wörtlichen Sinne als *die Quellen des elektrischen Feldes* identifiziert. Dieses Prinzip erscheint zu fundamental, um es ohne Not aufzugeben.

Diese Argumentation gilt in gleicher Weise für die Gleichung

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0 \quad ,$$

[39] Das ist im übrigen mathematisch keine Einschränkung der Allgemeinheit.

die die Nichtexistenz von magnetischen Monopolen zum Ausdruck bringt. Wir wollen daher an beiden auch für den zeitabhängigen Fall festhalten.

Mit dem Gauß-Gesetz können wir in Gl. 14 die Ladungsdichte durch das elektrische Feld ersetzen:

$$0 = \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{B} = \operatorname{div} \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{X} - \varepsilon_0\mu_0 \vec{E}\right) \quad .$$

Diese Bedingung läßt sich am einfachsten erfüllen, wenn man mit Maxwell setzt

$$\vec{X} := \varepsilon_0\mu_0 \vec{E} \quad ,$$

die statische Gleichung $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{\jmath}$ also ersetzt durch

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{\jmath} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

oder (die Felder auf die linke, die 'Quellterme' als Inhomogenitäten auf die rechte Seite) :

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{B} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \cdot \vec{\jmath}} \quad , \tag{15}$$

Es bleibt noch die letzte Gleichung zu diskutieren: $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$. Die Analogie zu oben (mehr noch aber die ohnehin schon auffällige Symmetrie des Systems dieser Gleichungen!) legt es nahe, in Abänderung der statischen Gleichung anzusetzen

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \frac{\partial \vec{Y}}{\partial t} \quad ,$$

wobei wir vermuten, daß $\vec{Y}$ proportional zu $\vec{B}$ sein könnte.

In der Tat folgt zunächst aus $\operatorname{div} \operatorname{rot} \equiv 0$, daß

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{Y} = 0$$

sein muß; da aber wir bereits $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ haben, ist die Gleichung

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

oder (wieder systematischer geschrieben) :

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}} \quad , \tag{16}$$

mit allen bisherigen Überlegungen verträglich, wobei das *Vorzeichen* von $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ in (16) durch unsere Symmetrieüberlegungen *nicht festgelegt* wird, sondern hier als empirisches Faktum zu gelten hat [40].

[40] Im Verlauf des Kurses (bei der relativistischen Behandlung) wird sich herausstellen, daß die schon an dieser Stelle bemerkenswerte Symmetrie der Maxwell-Gleichungen noch sehr viel weiter geht und tiefer liegt, als dies hier erkennbar wird.

Durch diese weitergehende Symmetrie ist auch das Vorzeichen in Gl. 16 eindeutig festgelegt.

Wir erhalten so schließlich das folgende System von gekopppelten partiellen Differentialgleichungen:

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{B}\,(\vec{r},t) - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \vec{E}\,(\vec{r},t)}{\partial t} &\\ = \mu_0 \cdot \vec{\jmath}\,(\vec{r},t) &\\ \operatorname{div} \vec{E}\,(\vec{r},t) = \frac{\rho(\vec{r},t)}{\varepsilon_0} & \end{aligned}} \qquad \Bigg\| \qquad \boxed{\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E}\,(\vec{r},t) + \frac{\partial \vec{B}\,(\vec{r},t)}{\partial t} &= \vec{0} \\ \operatorname{div} \vec{B}\,(\vec{r},t) &= 0 \end{aligned}}$$

Das sind die “Maxwellgleichungen”.

Man kann die Gleichungen (ästhetisierend) noch etwas umschreiben, indem man die Maßsystemkonstanten in den inhomogenen Gleichungen etwas eleganter verteilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \vec{\jmath} \\ \operatorname{div} \varepsilon_0 \vec{E} &= \rho \end{aligned} \qquad \Bigg\| \qquad \begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \vec{0} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \end{aligned}$$

Zusätzlich kann man dann noch (wenn man will) in den inhomogenen Gleichungen neue Buchstaben einführen [41]:

$$\begin{aligned} \vec{D} &:= \varepsilon_0 \vec{E} \\ \vec{H} &:= \frac{\vec{B}}{\mu_0} \quad . \end{aligned}$$

so daß man Gleichungen ohne jede Konstanten [42] erhält:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} &= \vec{\jmath} \\ \operatorname{div} \vec{D} &= \rho \end{aligned} \qquad \Bigg\| \qquad \begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \vec{0} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \end{aligned}$$

[41] Das bedeutet *nicht*, daß $\vec{D}$ und $\vec{H}$ *neue* physikalische Felder wären! Es handelt sich hier vielmehr um eine pure Notationsvereinbarung.

In der *makroskopischen* Maxwell-Theorie allerdings werden $\vec{D}$ und $\vec{H}$ in der Tat zu *neuen* (gemittelten) physikalischen Feldern. Siehe hierzu das Skript “II. Die ‘phänomenologischen’ Maxwell-Gleichungen”.

[42] Noch einfacher ist es natürlich, von vorneherein ein Maßsystem zu benutzen, in dem $\varepsilon_0 = \mu_0 = 1$ ist ...

# G Die Lorentzkraft

Die Maxwellgleichungen sind gekoppelte partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung; durch sie sind elektrisches und magnetisches Feld bestimmt, wenn die Ladungsdichte $\rho(\vec{r}, t)$ und die Stromdichte $\vec{\jmath}\,(\vec{r}, t)$ gegeben sind.

Umgekehrt üben aber die Felder auch *Kräfte auf die Ladungen aus*; das haben wir schon bei Einführung der Felder ausführlich diskutiert.

Für die Kraft auf eine Punktladung $q$ ("Coulomb-Kraft") hatten wir (Gl. 4)

$$\vec{F}\,(\vec{r}) = q \cdot \vec{E}\,(\vec{r}) \quad .$$

Ist eine kontinuierliche Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}, t)$ gegeben, so ist offenbar die entsprechende Kraft*dichte* gegeben durch

$$\frac{d\vec{F}\,(\vec{r}, t)}{d\tau} = \rho(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}\,(\vec{r}, t) \quad .$$

Ganz entsprechend hat man für die Kraftdichte, mit der ein Magnetfeld auf eine Stromdichte wirkt ("Lorentz-Kraft", Gl. 11)

$$\frac{d\vec{F}\,(\vec{r}, t)}{d\tau} = \vec{\jmath}\,(\vec{r}, t) \times \vec{B}\,(\vec{r}, t) \quad .$$

Für eine Punktladung $q$, die sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegt, ist $\vec{\jmath} = q \cdot \vec{v}$, und entsprechend hat man

$$\vec{F}\,(\vec{r}, t) = q\,\vec{v} \times \vec{B}\,(\vec{r}, t) \quad .$$

Insgesamt ist also die Kraft auf bewegte Ladungen gegeben durch

$$\boxed{\frac{d\vec{F}\,(\vec{r}, t)}{d\tau} = \rho(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}\,(\vec{r}, t) + \vec{\jmath}\,(\vec{r}, t) \times \vec{B}\,(\vec{r}, t)} \tag{17}$$

bzw.

$$\boxed{\vec{F}\,(\vec{r}, t) = q \cdot \left[\vec{E}\,(\vec{r}, t) + \vec{v} \times \vec{B}\,(\vec{r}, t)\right]} \quad , \tag{18}$$

Wenn nicht explizit zwischen elektrischer und magnetischer Kraft unterschieden werden muss, wird auch die Gesamtkraft der elektromagnetischen Felder (Gl. 17 bzw. Gl. 18) oft kurz "die Lorentzkraft" genannt.