

## II. Die makroskopischen Maxwell-Gleichungen

## Inhaltsverzeichnis

<b>A</b>	<b>Physikalische Grundüberlegungen</b>	<b>1</b>
<b>B</b>	<b>Die Multipolentwicklung des Potentials</b>	<b>3</b>
<b>C</b>	<b>Mittelwerte über atomare Skalen</b>	<b>5</b>
C 1	Die gemittelte Ladungsdichte <sup>1</sup> . . . . .	7
C 2	Die gemittelte Stromdichte . . . . .	9
<b>D</b>	<b>Die makroskopischen Maxwell-Gleichungen</b>	<b>11</b>
D 1	Das Gauß-Gesetz . . . . .	11
D 2	Das Ampère-Gesetz . . . . .	12
<b>E</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>13</b>

## A Physikalische Grundüberlegungen

Wir haben bisher die sogenannten “mikroskopischen Maxwell-Gleichungen” kennengelernt:

	homogen	inhomogen
skalar	$\operatorname{div} \vec{B} = 0$	$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$
vektoriell	$\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$	$\operatorname{rot} \vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \cdot \vec{j}(\vec{r})$

Ladungsdichte und Strom erfüllen wegen der Ladungserhaltung die *Kontinuitätsgleichung*:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}(\vec{r}) = 0 \quad ;$$

die *Lorentz-Kraftdichte*  $\frac{d\vec{F}(\vec{r})}{d^3\vec{r}}$  ist gegeben durch <sup>2</sup>

$$\frac{d\vec{F}(\vec{r})}{d^3\vec{r}} = \rho(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}) + \vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}) \quad .$$

Die – leider verbreitete – Bezeichnung “Maxwell-Gleichungen im Vakuum” ist insofern irreführend, als elektrische Ladungen immer an das Vorhandensein von Materie geknüpft sind, im echten Vakuum also Ladungsdichte und Stromdichte streng verschwinden. Eine bessere Bezeichnung für diese Gleichungen ist deshalb “fundamentale” oder “mikroskopische” Maxwell-Gleichungen.

Entsprechend sollte man die hier zu erläuternden Gleichungen nicht “Maxwell-Gleichungen in Materie”, sondern besser “phänomenologische” oder “makroskopische” Maxwell-Gleichungen nennen.

Was ist anders in Materie, verglichen mit dem Vakuum? Im Prinzip nichts; die Maxwell-Gleichungen erheben den Anspruch, für *alle* elektromagnetischen Phänomene gültig zu sein — und alle bekannten experimentellen Tatsachen bestätigen die Richtigkeit dieses Anspruchs.

Aber: die gleichen empirischen Fakten zeigen auch (z.B.):

- die elektromagnetischen Wellen, die sich als Lösungen der Vakuum-Maxwell-Gleichungen ergeben (z.B. Licht, Radiowellen) beschreiben viele Phänomene auch in Materie ausgezeichnet,

---

<sup>2</sup> $d\vec{F}(\vec{r})$  ist die Kraft, die die elektromagnetischen Felder  $\vec{E}(\vec{r})$  und  $\vec{B}(\vec{r})$  auf eine durch  $\rho(\vec{r})$  und  $\vec{j}(\vec{r})$  vorgegebene Ladungsverteilung im Volumenelement  $d^3\vec{r}$  ausüben. Für eine punktförmige Ladung  $q$ , die sich mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  bewegt, ist die Kraft einfach

$$\vec{F}(\vec{r}) = \int_V d\vec{F} = \left[ q \cdot (\vec{E}(\vec{r}) + \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r})) \right] \quad .$$

- viele elektromagnetische Phänomene werden durch die Gleichungen ausgezeichnet wiedergegeben, wenn wir annehmen, dass Materie – bis auf zusätzliche aufgebrauchte Ladungen und Ströme — als elektrisch *neutral* angesehen werden kann (z.B. die gesamte niederfrequente Kupfertechnik).

Es scheint also empirisch so, als ob Kupferdraht (im stromlosen Zustand) *keine* Ladungen enthielte – in eklatantem Widerspruch zur modernen Atomtheorie.

Offenbar ist die Annahme, Kupfer (oder Luft) sei elektrisch neutral, praktisch eine hervorragende Näherung — warum??

Die physikalische Antwort auf diese Frage ergibt sich schnell, wenn wir uns die *Skala* vor Augen führen, auf der wir die Phänomene betrachten wollen: auf der Skala von einigen Millimeter ist ein Stück (stromloses) Kupfer in der Tat *neutral*. Die atomistische Struktur, die die Körnigkeit der elektrischen Ladung in Materie zur Folge hat, tritt erst auf der atomaren Ebene auf, d.h. auf einer Skala von  $10^{-10}m = 10^{-7}$  Millimeter: die positiven Ladungen sitzen in den Atomkernen, die negativen in deren Elektronenhüllen, und diese positiven und negativen Ladungen kompensieren sich auf der Skala von einigen Millimeter völlig.

Wir wollen das etwas genauer fassen. Seien in einem gegebenen Stück Material <sup>3</sup> der Ort des Atomkerns  $i$  (zu einem gegebenen Zeitpunkt  $t$ ) mit  $\vec{R}_i$ , die Orte der zugehörigen Elektronen  $k$  mit  $\vec{r}_{ik}$  bezeichnet. Dann kann man die Ladungsdichte in diesem Stück Materie (zur Zeit  $t$ ) schreiben als

$$\rho(t, \vec{r}) = q \cdot \sum_i \left( Z \cdot \delta^3(\vec{R}_i) - \sum_{k=1}^Z \delta^3(\vec{r}_{ik}) \right) ; \quad (1)$$

das daraus resultierende elektrische Potential ist dann

$$\Phi(t, \vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{r}' \frac{\rho(t, \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} . \quad (2)$$

Für sehr große  $r$  verschwindet dies Potential (weil die Summe aller positiven Atomkernladungen gleich der Summe aller negativen Elektronenladungen ist); je näher man an das Material herankommt (oder gar im Innern), wird sich die in Gestalt der  $\delta$ -Funktionen ja stark fluktuierende Ladungsdichte auch in Fluktuationen des Potentials bemerkbar machen.

Diese qualitativen Überlegungen zeigen:

Die Maxwell-Gleichungen gelten – mit gewissen noch herzuleitenden Modifikationen – auf einer makroskopischen Skala *auch in Materie*, wenn die Ladungen auf der mikroskopischen Ebene neutralisiert sind.

Was heißt das quantitativ?

1. Man wird keine Effekte der (atomistischen) Körnigkeit der Materie sehen, wenn die *Wellenlänge*  $\lambda$  der im Experiment benutzten elektromagnetischen Wellen groß ist gegen die Abstände, auf denen die Ladungsfuktuationen relevant sind, also z.B. die Atomradien. Mit der Beziehung  $\lambda \cdot \frac{\omega}{2\pi} = c$  wird aus  $\lambda \gg 10^{-10}m$  also

$$\frac{\omega}{2\pi} \ll 10^{18}\text{Hz} (!!)$$

---

<sup>3</sup>Wir nehmen der Einfachheit halber hier an, dass das Material aus einer einheitlichen Atomsorte besteht, mit der Ordnungszahl  $Z$ .

eine Frequenz, die der Größenordnung nach in den Röntgenbereich fällt.

Die in der konventionellen Elektrotechnik benutzten Frequenzen sind also um viele Größenordnungen zu niedrig, um atomare Strukturen “auflösen” zu können. Umgekehrt ausgedrückt bedeutet das: in der konventionellen Elektrotechnik spielt die körnige Struktur der Materie *kaum eine Rolle*;

2. will man genaueres wissen, so wird man den angegebenen exakten (aber so natürlich unbrauchbaren) Ausdruck für das Potential  $\Phi(\vec{r})$  zweckmäßigerweise über die bereits genannte nullte Näherung

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi(\vec{r}) = 0$$

hinaus in eine Reihe nach Potenzen von  $1/r$  entwickeln.

Diese Reihenentwicklung heißt “Multipolentwicklung” (vgl. Abschn. B);

3. wir müssen ab jetzt sorgfältig unterscheiden zwischen den Ladungen, die in der Materie *gebunden* sind (in neutralen Atomen) und zusätzlich aufgebrachten Ladungen (meist Elektronen). Diese zusätzlichen Ladungen (von denen allein in den klassischen Experimenten z.B. der Elektrostatik die Rede ist!) bezeichnet man im Unterschied zu den in den Atomen gebundenen als “*freie* Ladungen”. Entsprechend muss man gebundene Stromdichten und “*freie* Stromdichten” unterscheiden.

Der Rest ist (mathematische) Technik.

## B Die Multipolentwicklung des Potentials

Die “Multipolentwicklung” des Potentials [Gl. (2)]

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

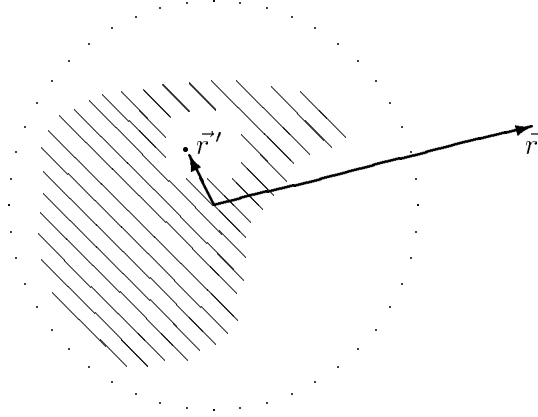
ist nichts anderes als eine Taylor-Entwicklung nach Potenzen von  $1/r$ . Die physikalische Motivation für eine solche Reihenentwicklung kannte schon Newton in Gestalt des Satzes

Weit außerhalb ist das (Gravitations-) Potential einer räumlichen Massenverteilung das gleiche wie das, das man erhält, wenn man sich die gesamte Masse im Schwerpunkt zusammenfasst denkt ( $G$  ist die Gravitationskonstante):

$$\Phi(\vec{r}) = G \frac{M}{r} .$$

Ist die Massen-/(Ladungs-)Verteilung kugelsymmetrisch, so gilt dieser Satz sogar exakt für jeden Aufpunkt außerhalb der Ladungsverteilung, und eine Abweichung von der Kugelsymmetrie macht sich, wie wir sehen werden, nur in höheren Potenzen von  $1/r$  bemerkbar.

Wir betrachten jetzt also den Fall, in dem der Aufpunkt  $\vec{r}$  außerhalb der Ladungsverteilung liegt <sup>4</sup>:



Dann ist für jeden Quellpunkt  $\vec{r}'$  der Betrag des Vektors  $\vec{r}'/r$  kleiner als 1, und wir können das Potential in der Form

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}') \left[ 1 - 2\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} + \frac{(\vec{r}')^2}{r^2} \right]^{-\frac{1}{2}}$$

in eine Taylor-Reihe nach  $\vec{r}'/r$  entwickeln. Das ist vor allem deshalb nicht sonderlich schwierig (wenn auch – wie immer bei Reihenentwicklungen – für die höheren Ordnungen zunehmend aufwendig), weil jede Potenz des Ausdrucks in eckigen Klammern an der Stelle  $\vec{r}'/r = \vec{0}$  einfach = 1 ist. Für die ersten Potenzen erhält man <sup>5</sup>

$$\left[ 1 - 2\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} + \frac{(\vec{r}')^2}{r^2} \right]^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{i=1}^3 \hat{x}_i \cdot \frac{x'_i}{r} + \frac{1}{2!} \sum_{i,k=1}^3 (3\hat{x}_i \hat{x}_k - \delta_{ik}) \cdot \frac{x'_i x'_k}{r^2} + \dots$$

Setzt man dies in das Potential ein und ordnet man nach Potenzen von  $1/r$ , so erhält man übersichtlich

$$4\pi\epsilon_0\Phi(\vec{r}) = \frac{M_0}{r} + \frac{\sum_i (M_1)_i \cdot \hat{x}_i}{r^2} + \frac{1}{2} \frac{\sum_{ik} \hat{x}_i \cdot (M_2)_{ik} \cdot \hat{x}_k}{r^3} + \dots, \quad (3)$$

<sup>4</sup>Genau ist damit folgendes gemeint: wenn man sich um den – willkürlich gewählten – Ursprung des Koordinatensystems eine Kugel gelegt denkt so, dass die Ladungsverteilung *ganz innerhalb* dieser Kugel liegt, so soll der Aufpunkt *außerhalb der Kugel* liegen (vgl. Skizze).

Will man das Potential auch *innerhalb* der Ladungsverteilung wissen, so muss man – etwas umständlich – das Volumenintegral aufteilen in den Teil des Volumens innerhalb der Kugel, auf deren Oberfläche der Aufpunkt  $\vec{r}$  liegt, und den Rest außerhalb. Man erhält dabei eine analoge Reihe, die aber innerhalb der beschriebenen das Potential nach Potenzen des Vektors  $\vec{r}'/r'$  entwickelt.

<sup>5</sup>Der Übersichtlichkeit wegen schreiben wir statt der Komponenten des Aufpunktvektors  $\vec{r}$  die des zugehörigen Einheitsvektors; d.h.

$$\hat{x}_i := \frac{x_i}{r}$$

mit

$$M_0 := \int d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}') \cdot 1$$

$$(M_1)_i := \int d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}') \cdot x'_i$$

$$(M_2)_{ik} := \int d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}') \cdot [3x'_i x'_k - (\vec{r}')^2 \delta_{ik}] \quad ,$$

und ganz analogen Ausdrücken für die höheren Terme. Dies sind die “Multipolmomente” der Ladungsverteilung  $\rho(\vec{r})$ : das “0. Moment”,  $M_0$ , ist einfach die *Gesamtladung*;  $M_1$  heißt “Dipolmoment” (und ist ein *Vektor*);  $M_2$  heißt “Quadrupolmoment” (und ist ein *Tensor 2. Stufe*).

Gl. (3) stellt die sogenannte “Multipolentwicklung” einer gegebenen Ladungsverteilung dar. Man sieht daran dreierlei:

1. die Multipolentwicklung ist eine Entwicklung nach abfallenden Potenzen der Entfernung: je höher die Ordnung eines Multipolmoments, desto schneller fällt der zugehörige Term des Potentials mit der Entfernung ab;
2. die Multipolentwicklung ist *gleichzeitig* eine Entwicklung nach *Tensoren*. Sie sagt also etwas aus darüber, wie die einzelnen Terme vom Koordinatensystem abhängen, oder, anders ausgedrückt: wie stark die Ladungsverteilung von der anfangs erwähnten sphärischen Symmetrie abweicht <sup>6</sup> (vgl. dazu Übungsaufgabe 4–4);
3. Statt eine Ladungsverteilung explizit anzugeben, kann man auch die numerischen Werte ihrer *Multipolmomente* angeben. Das hat z.B. den Vorteil, dass man bei nicht zu kleinen Abständen von der Ladungsverteilung nur mit wenigen Momenten auskommt (weil die Terme mit den höheren Momenten immer schneller klein werden).

## C Mittelwerte über atomare Skalen

Wie wir oben schon festgestellt haben, sind die exakte Ladungs- bzw. Strom-Dichte [vgl. Gl. 1] und damit natürlich auch die exakten Lösungen der Maxwell-Gleichungen stark fluktuierende Funktionen. Wir wollen diese Funktionen nun auf der atomaren Skala ‘glätten’, indem wir sie über atomare Dimensionen mitteln. Die Glättung einer fluktuierenden Funktion  $f(\vec{r})$  kann man z.B. durch Faltung mit einer geeignet gewählten ‘Mittelungsfunktion’  $g(\vec{r})$  erreichen:

$$f(\vec{r}) \implies \bar{f}(\vec{r}) := \int d^3\vec{r}' \cdot g(\vec{r} - \vec{r}') \cdot f(\vec{r}') \quad ,$$

wobei  $g(\vec{r})$  z.B. eine Stufenfunktion ist, die nur auf einem mikroskopischen Intervall  $a \neq 0$  ist (und dort natürlich positiv):

$$g(\vec{r}) := \begin{cases} c & \text{für } \begin{cases} |\vec{r}| \leq a \\ > a \end{cases} \\ 0 & \end{cases} \quad .$$

---

<sup>6</sup>Dieser Zusammenhang wird besonders deutlich, wenn man die Entwicklung nicht in kartesischen Koordinaten, sondern in Kugelkoordinaten ansetzt: man entwickelt nicht in eine Taylor-Reihe nach  $\vec{r}/r$ , sondern nach  $r'/r$ . Die Entwicklungskoeffizienten werden dann Funktionen der Winkelkoordinaten von  $\vec{r}$  — gerade die bekannten *Kugelfunktionen*  $Y_l^m(\vartheta, \varphi)$ . Diese “sphärische Multipolentwicklung” ist in vieler Hinsicht mathematisch übersichtlicher und rechnerisch oft nützlicher als die hier besprochene kartesische.

Auf die genaue Form der Faltungsfunktion  $g(\vec{r})$  kommt es dabei nicht so sehr an — zweckmäßigerweise wählt man  $g(\vec{r})$  natürlich stetig und differenzierbar, d.h. man wählt z.B. eine Stufenfunktion mit ‘abgerundeten Ecken’:



Natürlich muss  $g(\vec{r})$  normiert sein, damit eine ohnehin konstante Funktion sich durch die Mittelung nicht ändert: für  $f(\vec{r}) = 1$  muss natürlich gelten  $\bar{f}(\vec{r}) = 1$ , woraus folgt

$$\int d^3\vec{r}' \cdot g(\vec{r} - \vec{r}') \stackrel{!}{=} 1 \quad .$$

Eine solche Mittelung ist *linear*: es gilt

$$\overline{c_1 f_1(\vec{r}) + c_2 f_2(\vec{r})} = c_1 \overline{f_1(\vec{r})} + c_2 \overline{f_2(\vec{r})} \quad ,$$

aber auch

$$\overline{\nabla f(\vec{r})} = \nabla \bar{f}(\vec{r}) \quad .$$

Daraus folgt sofort, dass die *homogenen* Maxwell-Gleichungen unverändert auch für die *gemittelten* Felder gelten:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \tag{4}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0} \quad . \tag{5}$$

Für die inhomogenen Gleichungen haben wir

$$\operatorname{div} \varepsilon_0 \vec{E} = \bar{\rho}(\vec{r}) \tag{6}$$

$$\operatorname{rot} \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j}(\vec{r}) \tag{7}$$

Es geht jetzt also nur noch darum,  $\bar{\rho}(\vec{r})$  und  $\vec{j}(\vec{r})$  zu bestimmen.



## C 1 Die gemittelte Ladungsdichte <sup>7</sup>

Um die exakte Ladungsdichte  $\rho(\vec{r})$  geeignet mitteln zu können, denken wir uns jetzt die makroskopische Materie aus *Molekülen* zusammengesetzt, die ihrerseits aus irgendwelchen (positiven und negativen) Ladungen bestehen. Wenn wir also mit  $q_{m\alpha}$  die Ladungen  $\alpha$  im Molekül  $m$  bezeichnen und mit  $\vec{r}_{m\alpha}$  ihren Ort, so ist – immer noch exakt –

$$\rho(\vec{r}) = \sum_m \sum_\alpha q_{m\alpha} \delta(\vec{r} - \vec{r}_{m\alpha}) \quad ;$$

dabei steht

$\sum_m$  für die Summe über alle Moleküle  $m$ ,

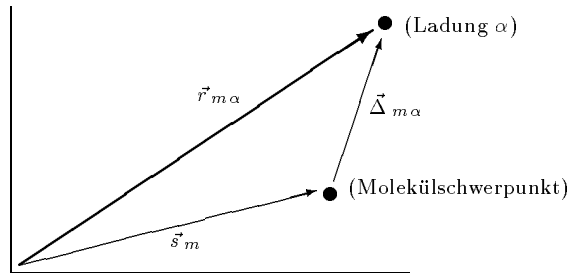
$\sum_\alpha$  für die Summe über alle Ladungen im Molekül  $m$ .

Durch Faltung mit der oben beschriebenen ‘Mittelungsfunktion’  $g(\vec{r})$  erhalten wir daraus die gemittelte Ladungsdichte  $\bar{\rho}(\vec{r})$  :

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(\vec{r}) &= \int d^3\vec{r}' g(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \rho(\vec{r}') \\ &= \sum_m \sum_\alpha q_{m\alpha} \cdot g(\vec{r} - \vec{r}_{m\alpha}) \quad . \end{aligned}$$

Wir setzen nun weiter

$$\vec{r}_{m\alpha} =: \vec{s}_m + \vec{\Delta}_{m\alpha} \quad ,$$



wobei  $\vec{s}_m$  der Ort des Moleküls  $m$  (z.B. die Koordinaten des Schwerpunkts) sein soll. Wenn wir die Mittelungsskala  $a$  in der Größenordnung der Molekülausdehnung wählen, ergibt sich

$$|\vec{\Delta}_{m\alpha}| = \mathcal{O}(a) \quad .$$

Damit können wir die gemittelte Ladungsdichte

$$\bar{\rho}(\vec{r}) = \sum_m \sum_\alpha q_{m\alpha} \cdot g(\vec{r} - \vec{s}_m - \vec{\Delta}_{m\alpha})$$

---

<sup>7</sup>Dieser Abschnitt ist notgedrungen ziemlich technisch und mathematisch ein wenig aufwendig. Da die Grundgedanken schon in Abschn. A dargelegt wurden, kann der an den Details weniger interessierte Leser sich damit begnügen, den Abschnitt nur zu überfliegen.

in eine Taylorreihe nach den  $\vec{\Delta}_{m\alpha}$  (genauer: für jeden Summanden in  $\alpha$  eine) entwickeln und erhalten

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(\vec{r}) &= \sum_m \sum_\alpha q_{m\alpha} \left\{ g(\vec{r} - \vec{s}_m) - \sum_{i=1}^3 \Delta_{m\alpha}^i \cdot d_i g + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^3 \Delta_{m\alpha}^i \cdot d_i d_k g \cdot \Delta_{m\alpha}^k \right\} \\ &+ \mathcal{O}(a^3) \quad ; \end{aligned}$$

dabei ist  $\Delta_{m\alpha}^i$  die  $i$ -Komponente des Vektors  $\vec{\Delta}_{m\alpha}$ , und  $d_i g$  eine Abkürzung für

$$\left. \frac{\partial g}{\partial x^i} \right|_{\vec{r} - \vec{s}_m} \quad ,$$

entsprechend  $d_i d_k g$  .

In dieser etwas kompliziert aussehenden Reihenentwicklung entspricht – nach der oben getroffenen Festlegung der Mittelungsskala  $a$  – jeder Faktor  $\Delta_{m\alpha}$  einer Potenz von  $a$ . Wir können die Reihe also als Potenzreihe in  $a$  ansehen, indem wir schreiben:

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}^{(0)} + \bar{\rho}^{(1)} + \bar{\rho}^{(2)} + \mathcal{O}(a^3) \quad ;$$

dabei ist

$$\bar{\rho}^{(0)} = \sum_m \left( \sum_\alpha q_{m\alpha} \right) g(\vec{r} - \vec{s}_m) \quad (8)$$

$$\bar{\rho}^{(1)} = - \sum_m \sum_{i=1}^3 \left( \sum_\alpha q_{m\alpha} \Delta_{m\alpha}^i \right) \cdot d_i g \quad (9)$$

$$\bar{\rho}^{(2)} = + \frac{1}{2} \sum_m \sum_{i,k=1}^3 \left( \sum_\alpha q_{m\alpha} \Delta_{m\alpha}^i q_{m\alpha} \Delta_{m\alpha}^k \right) \cdot d_i d_k g \quad . \quad (10)$$

$\bar{\rho}^{(0)}$  können wir noch vereinfachen;  $\sum_\alpha q_{m\alpha}$  ist ja nichts anderes als die Gesamtladung des Moleküls  $m$  (die wir mit  $q_m$  bezeichnen):

$$\begin{aligned} \bar{\rho}^{(0)} &= \sum_m q_m g(\vec{r} - \vec{s}_m) \\ &= \int d^3 \vec{r}' g(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \sum_m q_m \delta^3(\vec{r} - \vec{s}_m) \quad , \end{aligned}$$

Wie man an der letzten Form sieht, ist  $\bar{\rho}^{(0)}$  einfach die über alle Moleküle gemittelte *Gesamtladung* — eine makroskopische Größe!

Nun ist nach unseren Annahmen bzw. Voraussetzungen jedes Molekül – jedenfalls wenn keine “freien” Ladungen <sup>8</sup> vorhanden sind – in sich elektrisch *neutral*. In diesem Fall verschwindet also  $\bar{\rho}^{(0)}$  insgesamt. Sind aber “freie” Ladungen vorhanden, so wird damit  $\bar{\rho}^{(0)}$  nichts anderes als die (mikroskopische gemittelte) Netto-Dichte dieser “freien” Ladungen.

Versuchen wir ähnlich, für  $\bar{\rho}^{(1)}$  eine anschauliche Deutung zu finden. Der in Gl.(9) vorkommende Ausdruck

$$p_m^i := \sum_\alpha q_{m\alpha} \Delta_{m\alpha}^i$$

---

<sup>8</sup>Zum Begriff “freie” Ladungen s. Punkt 3 auf S. 3.

ist offenbar das Gesamt-Dipolmoment des Moleküls  $m$  (genauer: dessen  $i$ -Komponente).  
Damit wird

$$\begin{aligned}
\bar{\rho}^{(1)} &= - \sum_{i=1}^3 \sum_m p_m^i \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} g(\vec{r} - \vec{s}_m) \\
&= - \sum_{i=1}^3 \sum_m p_m^i \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} \int d^3\vec{r}' g(\vec{r} - \vec{r}') \delta^3(\vec{r}' - \vec{s}_m) \\
&= - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^i} \int d^3\vec{r}' g(\vec{r} - \vec{r}') \left( \sum_m p_m^i \cdot \delta^3(\vec{r}' - \vec{s}_m) \right) \\
&= - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^i} \bar{P}^i
\end{aligned} \tag{11}$$

mit

$$\bar{P}^i := \int d^3\vec{r}' g(\vec{r} - \vec{r}') \left( \sum_m p_m^i \cdot \delta^3(\vec{r}' - \vec{s}_m) \right) .$$

$\bar{P}^i$  ist das (über alle Moleküle) gemittelte *makroskopische* Gesamt-Dipolmoment.

Ganz entsprechend findet man

$$\bar{\rho}^{(2)} = + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^k} \bar{Q}^{ik}$$

mit

$$\begin{aligned}
Q_m^{ik} &:= \sum_{\alpha} \Delta_{m\alpha}^i \cdot q_{m\alpha} \cdot \Delta_{m\alpha}^k , \\
\bar{Q}^{ik} &:= \int d^3\vec{r}' g(\vec{r} - \vec{r}') \left( \sum_m Q_m^{ik} \cdot \delta^3(\vec{r}' - \vec{s}_m) \right) .
\end{aligned}$$

für das Gesamt-Quadrupolmoment. Auch hier bleiben schließlich nur *makroskopische* Größen stehen!

Man erkennt unschwer, dass die Reihenentwicklung nach den  $\Delta_{m\alpha}^i$  nichts anderes ist als die Multipolentwicklung, die wir (auch aus diesem Grunde!) in Absch.B schon behandelt haben. Eine formale tensoranalytische Betrachtung hätte deshalb schneller zu den hier gewonnenen Resultaten geführt — allerdings unter Verlust der physikalischen Anschaulichkeit.

## C 2 Die gemittelte Stromdichte

Im vorigen Abschnitt haben wir die Rechnungen in großem Detail durchgeführt. Dabei haben wir schließlich gesehen, wie der Mittelungsprozess für die mikroskopische Ladungsdichte im wesentlichen auf eine Multipol-Entwicklung hinausläuft.

Für die Stromdichte kann man ganz analog verfahren. Die Details werden wegen des Vektorfeld-Charakters der Stromdichte natürlich noch um einiges komplizierter; wir beschränken uns deshalb hier darauf, die Ergebnisse darzustellen und plausibel zu machen.

Wieder macht man eine Taylor-Entwicklung nach den  $\vec{\Delta}_{m\alpha}$ ; aber zusätzlich muss man den Vektorcharakter der Stromdichte berücksichtigen. So erhält man auf ähnliche Weise wie im vorigen Abschnitt hier

$$\vec{j} = \vec{j}^{(0)} + \vec{j}^{(1)} + \mathcal{O}(a^2) \quad . \quad (12)$$

Die Analogie zur freien Ladungsdichte ist  $\vec{j}^{(0)}$  die *freie Stromdichte*:

$$\vec{j}^{(0)} = \int d^3\vec{r}' g(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{j}_m \quad ,$$

wobei

$$\vec{j}_m = \sum_{\alpha} q_{m\alpha} \cdot \vec{v}_{m\alpha} \quad ,$$

die Stromdichtebeitrag des Moleküls  $m$  ist.

Der nächste Term,  $\vec{j}^{(1)}$ , ist etwas komplizierter. Der Vergleich mit (11) sagt uns, dass er von der Form <sup>9</sup>

$$-(\text{Ableitung von } \vec{M})$$

sein muss, wobei  $\vec{M}$  ein noch näher zu bestimmender Vektor ist.

Nun ist aber  $\vec{j}^{(1)}$  selbst ein Vektor, und auch die Ableitung (der “Nabla-Operator”) ist ein Vektor. Die einzige Möglichkeit, aus  $\nabla$  und  $\vec{M}$  einen Vektor zu erhalten, ist das Vektorprodukt:

$$(\nabla \times \vec{M}) \quad .$$

Es folgt also

$$\vec{j}^{(1)} = -(\nabla \times \vec{M}) = -\text{rot } \vec{M} \quad .$$

Mehr noch: weil die Stromdichte ein gewöhnlicher (*polarer*) Vektor ist, das Vektorprodukt zweier polarer Vektoren aber ein *axialer* Vektor <sup>10</sup>, so folgt, dass  $\vec{M}$  ein *axialer Vektor* sein muss.

$\vec{M}$  heisst “magnetisches Moment” (oder oft “Magnetisierung”). Damit folgen die weiteren Ausdrücke fast ohne Weiteres:

$$\vec{M} = \int d^3\vec{r}' g(\vec{r} - \vec{r}') \left( \sum_m \vec{p}_m \cdot \delta^3(\vec{r}' - \vec{s}_m) \right) \quad ,$$

$$\vec{p}_m = \sum_{\alpha} q_{m\alpha} \cdot (\vec{\Delta}_{m\alpha} \times \vec{v}_{m\alpha}) \quad .$$

Man erkennt in  $\vec{p}_m$  den wohlbekannten Ausdruck  $q \cdot (\vec{r} \times \vec{v})$  für das magnetische Moment einer Ladung  $q$ , die sich mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  bewegt.

<sup>9</sup>Das Minuszeichen kommt, wie in Abschn. C 1, aus der Taylorentwicklung.

<sup>10</sup>Ein axialer Vektor ändert bei Spiegelungen des Koordinatensystem (Übergang von einem rechthändigen zu einem linkshändigen Koordinatensystem) ein Vorzeichen *nicht* — im Gegensatz zu einem gewöhnlichen (polaren) Vektor.

Zu den Komplikationen im magnetischen Fall gehört, dass der Ausdruck (12) nur im statischen Fall die Verhältnisse ganz richtig wiedergibt. Das hängt damit zusammen, dass die *Zeitabhängigkeit* der Ladungsdichte mit der *Ortsabhängigkeit* der Stromdichte über die Kontinuitätsgleichung zusammenhängen.

Es würde zu weit führen, dies hier im Einzelnen darzulegen, zumal das Ergebnis auf eine schließlich sehr übersichtlichen Maxwell-Gleichung führt (wie wir am Schluss in Abschn. D 2 sehen werden): zu der mittleren makroskopischen Stromdichte muss man ausser den in (12) enthaltenen, aus der Mittelung über die mikroskopische Struktur entstandenen Termen noch die Zeitabhängigkeit der *elektrischen Polarisation* hinzufügen:

$$\vec{j} = \vec{j}^{(0)} + \vec{j}^{(1)} + \frac{\partial P}{\partial t} + \mathcal{O}(a^2) \quad .$$

## D Die makroskopischen Maxwell-Gleichungen

### D 1 Das Gauß-Gesetz

Setzt man die Ergebnisse von Abschn. C 1 in die gemittelte inhomogene Maxwell-Gleichung (6) ein, so erhält man

$$\operatorname{div} \varepsilon_0 \vec{E} = \bar{\rho}(\vec{r}) = \bar{\rho}^{(0)} - \operatorname{div} \vec{P} + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^k} \bar{Q}^{ik} + \mathcal{O}(a^3) \quad .$$

Auch den Quadrupolterm kann man in Form einer Divergenz schreiben:

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^k} \bar{Q}^{ik} = \operatorname{div} \vec{Q} \quad ,$$

wenn man setzt

$$\vec{Q}^i := + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^k} \bar{Q}^{ik} \quad ,$$

und Ähnliches gilt offenbar <sup>11</sup> auch für die höheren Terme (die wir hier nicht explizit angegeben haben).

Alle diese Terme kann man also mit  $\varepsilon_0 \vec{E}$  zusammenfassen, indem man ein *mittleres, makroskopisches* oder *phänomenologisches* Feld <sup>12</sup>  $\vec{D}(\vec{r}, t)$  einführt:

$$\vec{D}(\vec{r}, t) := \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} + \vec{Q} + \mathcal{O}(a^3) \quad .$$

Versteht man überdies unter  $\rho$  die mittlere Dichte der *freien* Ladungen, also  $\bar{\rho}^{(0)} \rightarrow \rho$ , so kann man Gl.(6) auf die sehr einprägsame Form bringen:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

<sup>11</sup>Vgl. hierzu die Schlussbemerkung in Abschn. C 1 .

<sup>12</sup> $\vec{D}$  wird seit Maxwell oft als "elektrische Verschiebung" bezeichnet — ein physikalisch eher nichtssagender historischer Name.

Das ist das Gauß-Gesetz in makroskopischer Form.

Legt man an Materie, die zunächst nicht nur elektrisch neutral sein soll, sondern auch ein verschwindendes mittleres Dipolmoment haben soll, ein *äußeres* makroskopisches elektrisches Feld  $\vec{E}$ <sup>13</sup>, so wirken auf die positiven und negativen elektrischen Ladungen in den Molekülen entgegengesetzt gerichtete Kräfte, wodurch sich in den Molekülen nichtverschwindende Dipolmomente  $\vec{p}_m$  entwickeln: die Materie wird *polarisiert*. Diese molekularen Dipolmomente führen in der Regel auch auf ein nicht-verschwindendes *makroskopisches* Dipolmoment  $\vec{P}$  (auch die höheren Momente können von Bedeutung werden). Man nennt den Vektor  $\vec{P}$ , weil er im Allgemeinen eben durch den beschriebenen Prozess der Polarisation entsteht, auch den “Polarisationsvektor”.

Diese einfache qualitative Überlegung zeigt, dass das makroskopische Feld  $\vec{D}$  in der Regel von dem (ebenfalls makroskopischen!) Feld  $\vec{E}$  verschieden ist und von  $\vec{E}$  *abhängt*:

$$\vec{D} = \vec{D}(\vec{E}) \quad , \quad (13)$$

wobei die funktionale Abhängigkeit im konkreten Einzelfall sehr kompliziert sein kann.

Häufig allerdings – vor allem für schwache elektrische Felder – ist die Polarisation  $\vec{P}$  *proportional* zu  $\vec{E}$ :

$$\vec{P} = \chi \cdot \varepsilon_0 \vec{E}$$

– die Proportionalitätskonstante  $\chi$  heißt “Suszeptibilität” –, und die höheren Momente sind vernachlässigbar klein. In diesen Fällen schreibt man

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \chi \cdot \varepsilon_0 \vec{E} =: \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \vec{E} \quad (14)$$

und nennt  $\varepsilon$  die “Dielektrizitätskonstante” der (betreffenden) Materie.

Es ist aber wichtig, sich stets vor Augen zu halten, dass dies eine *Näherung* darstellt. Viele der interessantesten Effekte (z.B. der Optik) lassen sich zwar mit Gl. (13), aber *nicht* mit einer wirklich konstanten Dielektrizitätskonstanten angemessen beschreiben.

Natürlich kann man – und das geschieht oft – Gl. (14) einfach als Definitionsgleichung für  $\varepsilon$  ansehen und damit auch in komplizierteren Fällen beibehalten; aber dann wird die Dielektrizitäts-‘Konstante’  $\varepsilon$  eben eine *Funktion* der Feldstärke  $\vec{E}$  – oft sogar nicht einmal eine *skalare* Funktion. Denn bei einer Funktion, die einen Vektor in einen anderen Vektor abbildet, handelt es sich im Allgemeinen offenbar um einen *Tensor* (2. Stufe).

## D 2 Das Ampère-Gesetz

Zunächst geht alles sehr analog. Setzen wir den Ausdruck für die makroskopische Stromdichte in Gl. 7 ein, so erhalten wir

$$\text{rot} \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j} = \vec{j}^{(0)} - \text{rot} \vec{M} + \frac{\partial P}{\partial t} + \mathcal{O}(a^2) = \vec{j}(\vec{r}) \quad ,$$

wobei wir wie oben jetzt einfach  $\vec{j}$  für die gemittelte Netto-Stromdichte  $\vec{j}$  geschrieben haben.

<sup>13</sup>Wir lassen ab jetzt der Übersichtlichkeit halber (auch in den homogenen Gleichungen Gl. 4,5) die Mittelungsstriche weg, indem wir festhalten, dass *alle* betrachteten Felder als gemittelt und damit makroskopisch zu verstehen sind.

Wie im elektrischen Fall führen wir auch hier ein neues makroskopisches Feld,  $\vec{H}$ , ein durch <sup>14</sup>

$$\vec{H}(t, \vec{r}) := \frac{1}{\mu_0} \vec{B} + \vec{M} + \mathcal{O}(a^2) \quad .$$

Berücksichtigt man noch den Zusammenhang zwischen der Polarisation  $\vec{P}$  und dem elektrischen Feld  $\vec{D}$ :

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} + \mathcal{O}(a^2) \quad ,$$

so kann man Gl. 7 auf die einprägsame Form bringen:

$$\boxed{\text{rot } \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j}}$$

Das ist das Ampère-Gesetz in makroskopischer Form.

Wieder ist  $\vec{H}$  von  $\vec{B}$  bzw.  $\vec{B}$  von  $\vec{H}$  abhängig. Vor allem, wenn die Abhängigkeit linear ist, setzt man

$$\vec{B} = \mu \cdot \mu_0 \vec{H}$$

und nennt  $\mu$  die “Permeabilität”.

Die entsprechenden Bemerkungen am Schluss von Abschn. D 1 gelten *mutatis mutandis* auch hier.

## E Zusammenfassung

Die makroskopischen (phänomenologischen) Maxwell-Gleichungen lauten insgesamt also

	homogen	inhomogen
skalar	$\text{div } \vec{B} = 0$	$\text{div } \vec{D} = \rho(\vec{r})$
vektoriell	$\text{rot } \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$	$\text{rot } \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j}(\vec{r})$

Der einzige Unterschied zu den mikroskopischen Maxwell-Gleichungen besteht also lediglich darin, dass *in den inhomogenen Gleichungen die Felder  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  durch die phänomenologischen Felder  $\vec{D}$  bzw.  $\vec{H}$  ersetzt sind* (und die lästigen Maßsystem-Konstanten  $\varepsilon_0, \mu_0$  in die Definition dieser beiden Felder absorbiert sind).

$\vec{D}$  und  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  und  $\vec{B}$  sind als unabhängige Feldgrößen anzusehen, die jedoch über die (phänomenologischen) Materialgleichungen

$$\vec{D} = \varepsilon(\vec{E}) \cdot \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu(\vec{H}) \cdot \mu_0 \vec{H}$$

verknüpft sind.

---

<sup>14</sup> $\vec{H}$  wurde früher auch “magnetische Erregung” genannt — wieder so ein blöder Name ... Heute nennt man meist  $\vec{H}$  die “magnetische Feldstärke” und  $\vec{B}$  die “magnetische Induktion”.