**Universität Bremen** **Institut für Theoretische Physik**

Quantenelektrodynamik SS 05

C.C. Noack

# Die Elektrodynamik als lokale Eichtheorie

## Zur Notation in diesem Skript:

$$d_\mu := \frac{d}{dx^\mu} \quad , \qquad \mu = 0, 1, 2, 3 \quad ;$$

$x^0$ steht für die Zeit, $x^1, x^2, x^3$ für die räumlichen Koordinaten. Gelegentlich (wo es unmissverständlich ist) sind zur besseren Lesbarkeit die raumzeitlichen Indizes auch ganz weggelassen.

Bei Summationen über raumzeitliche Indizes wird die Summationskonvention benutzt: z.B. steht $x^\mu y_\mu$ als Abkürzung für

$$\sum_{\mu=0}^{3} x^\mu \cdot y_\mu \quad .$$

Eine bestimmte Metrik wird *nicht* benutzt: im vorliegenden Zusammenhang kommt die Metrik nirgends ins Spiel!

[Vers. 2.21/ ccn Ich danke Valentin Kasper für Fragen zu diesem Skript (Version 2.1), die mir Anlass gegeben haben, den Text an einigen Stellen verständlicher zu gestalten. 29. Oktober 2009]

## A Ziel des Skripts

Die moderne Formulierung der Elektrodynamik als einfachstes Beispiel einer “lokalen Eichtheorie” ist bisher nicht in den üblichen Lehrbüchern (Jackson, Landau-Lifschitz, Nolting etc.) enthalten. Sie ist aber nicht nur lehrreich, sondern eröffnet den Zugang zu modernen Methoden der Theoretischen Physik, die ihre Fruchtbarkeit in vielen Gebieten (Teilchenphysik, Festkörperphysik, Hydrodynamik) gerade in den letzten Jahrzehnten eindrucksvoll bewiesen haben.

Aus diesem Grund soll die Methode hier

- in sich geschlossen (und ganz auf die Elektrodynamik bezogen) dargestellt werden,
- auf einem Niveau behandelt werden, das sich dem Anfänger in der Theoretischen Physik (gerade noch) erschließt,

Insbesondere ist es das Ziel, den engen Zusammenhang von Eichtransformationen, Noether-Theorem und Ladungserhaltung deutlich zu machen und das Ganze so darzustellen, dass die Existenz eines (hier *klassischen*) Feldes als ‘Träger der elektrischen Ladung’ ganz allgemein einsichtig wird, ohne dass man explizit auf eine (wie auch immer geartete) physikalische Interpretation dieses Feldes zurückgreifen muss. [1]

In einem zweiten – auf dem vorliegenden aufbauenden – Skript [2] soll dann das Eichprinzip in verallgemeinerter Form so dargestellt werden, dass der grundlegende Ansatz der modernen *nicht-Abelschen* lokalen Eichtheorien verständlich wird.

## B Globale Eichtransformationen

Wir betrachten zunächst ganz allgemein die Lagrange-Dichte $\mathcal{L}$ eines (reellen) Feldes $\Phi(x)$. Damit wir überhaupt nicht-triviale Feldgleichungen bekommen, muss diese Lagrange-Dichte nicht nur von $\Phi$ selbst, sondern auch von seinen Ableitungen $d\Phi$ abhängen [3]:

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}\left\{\Phi(x), d\Phi(x)\right\} \quad .$$

Die Feldgleichung für $\Phi$ erhält man dann aus dem Wirkungsprinzip

$$\delta\mathbf{S} = \delta\int \mathcal{L}\, d^4x = 0 \quad .$$

Nun haben wir gesehen, dass in vielen physikalischen Beispielen die Lagrange-Dichte *homogen* [meistens: quadratisch] in $\Phi$ (bzw. den $d\Phi$) ist: Multiplikation von $\Phi$ mit einem konstanten Faktor $a$ (d.h. eine Skalierung oder auch ‘Eichung’ von $\Phi$) multipliziert die Wirkung insgesamt mit einem konstanten Faktor [meistens: $a^2$] , was bei der Variation herausfällt.

[1] Der Grund dafür, dass dieser enge Zusammenhang nicht schon viel früher – gerade auch angesichts der Noetherschen Arbeiten! – erkannt wurde, liegt natürlich darin, dass die Vorstellung eines *Felds als Träger von partikelhaft verstandenen Ladungen* erst im Rahmen der Quantenfeldtheorie physikalisch einleuchten kann. Insofern sind die im vorliegenden Skript erläuterten Gedankengänge im Rahmen der *klassischen Feldtheorie* zwar in sich stimmig, aber physikalisch etwas abstrakt.

[2] `http://www.itp.uni-bremen.de/~noack/SS05/gauge.pdf`.

[3] Eine explizite Abhängigkeit von den Koordinaten $x^\mu$ könnte man natürlich auch haben; in unserem Zusammenhang ist das aber irrelevant.

Solch einen Skalierungsfaktor $a$ können wir uns also immer auf 1 normiert denken.

Etwas weniger trivial wird es, wenn man mehr als nur ein Feld betrachtet, im einfachsten Fall *zwei reelle* Felder $\Phi_1, \Phi_2$ oder, äquivalent dazu, *ein komplexes* Feld $\Phi$. Wir haben dann entsprechend *zwei* Eichmöglichkeiten (für jedes Feld eine) oder, wenn wir den Gesamt-Skalierungsfaktor wieder festhalten (auf 1 normieren), noch *eine* Eichmöglichkeit frei. Diese Möglichkeit entspricht geometrisch einer *Drehung* im Raum der beiden Felder; in der komplexen Schreibweise entspricht sie der Multiplikation mit einer *Phase*:

$$\Phi \to \widetilde{\Phi} := \mathbf{U}\,\Phi = e^{i\lambda}\,\Phi \quad . \tag{1}$$

Mathematisch noch ein wenig formaler kann man das als eine *unitäre Transformation* des (eindimensionalen, komplexen) Raums der Felder $\Phi$ ansehen: $e^{i\lambda}$ ist eine eindimensionale unitäre Matrix $U$ [4].

Man sieht unmittelbar, dass Ausdrücke wie $\Phi^* \cdot \Phi = |\Phi|^2$ oder $d_\mu \Phi^* \cdot d^\mu \Phi$ (wie sie typischerweise in der Lagrange-Dichte auftreten) invariant sind gegenüber solchen eindimensional unitären Transformationen (also Elementen einer Lie-Gruppe, der $U_1$) sind. Mit andern Worten: *in vielen physikalisch wichtigen Fällen* ist die Lagrange-Dichte $\mathcal{L}$ (und damit auch das Wirkungsintegral $\mathbf{S}$) *invariant gegenüber eindimensional unitären Transformationen.*

| Diese Invarianz nennt man (globale) *Eichinvarianz.* |
|---|

Als einfachstes Beispiel einer Feldtheorie, die (unter $U_1$) eichinvariant ist, werden wir immer das (klassische) komplexe Klein-Gordon-Feld betrachten:

$$\mathcal{L} = (d_\mu \Phi^*)(d^\mu \Phi) - m^2 \Phi^* \Phi \quad . \tag{2}$$

## C Lokale Eichtransformationen

Globale Eichtransformationen sind aber in gewisser Hinsicht physikalisch unbefriedigend. Wie Herrmann Weyl als erster bemerkt hat, ist die Vorstellung einer globalen Eichung von der Form der Gl.1 mit den Prinzipien der (allgemeinen) Relativitätstheorie unvereinbar. Wenn die Physik tatsächlich von Eichungen unabhängig sein soll, müßte das auch der Fall sein, wenn man an jedem Ort und zu jeder Zeit eine andere Eichung durchführte. Nur die Betrachtung *lokaler Eichungen* hat einen Sinn, so wie auch nur *lokale* Koordinatensysteme Bedeutung haben können.

In diesem Geiste untersuchen wir jetzt also *lokale* Eichtransformationen, d.h. solche, bei denen die Transformation $U$ eine (differenzierbare) Funktion von Ort und Zeit ist:

$$\Phi(x) \to \widetilde{\Phi}(x) := \mathbf{U}(x)\,\Phi(x) = e^{i\lambda(x)}\,\Phi(x) \quad . \tag{1'}$$

Was wird dabei aus einer global eichinvarianten Lagrangedichte? $\mathcal{L}$ ist auch *lokal* eichinvariant, wenn gilt

$$\widetilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}\left[\widetilde{\Phi}, \widetilde{d\Phi}\right] \stackrel{!}{=} \mathcal{L}\left[\Phi, d\Phi\right] \quad .$$

[4] Man erhält hier mitgeliefert den (gruppentheoretischen) **Satz**: die Gruppe der *reellen orthogonalen* Matrizen in zwei Dimensionen ["$O_2$"] ist *isomorph* zur [ d.h.: läßt sich unter Wahrung der Gruppenstruktur umkehrbar abbilden auf die ] Gruppe der *unitären komplexen* Matrizen in einer Dimension ["$U_1$"] — eine Verklausulierung der Erfindung der Gauß-schen Zahlenebene!

Für Terme, die (global eichinvariant) *nur von* $\Phi$ abhängen (z.B. der Massenterm in Gl.2), passiert garnichts:

$$\widetilde{\Phi^*}\,\widetilde{\Phi} = \{\mathbf{U}(x)\Phi)\}^*\ \mathbf{U}(x)\Phi = \Phi^*\,\mathbf{U}^*(x)\mathbf{U}(x)\Phi = \Phi^*\,\Phi \quad ;$$

$\mathbf{U}(x)$ ist ja unitär.

Für die Ableitungsterme aber müssen wir rechnen[5] :

$$\begin{aligned} \widetilde{d_\mu \Phi} :&= \mathbf{U}(x)\,(d_\mu \Phi) \\ &= d_\mu \Big\{\mathbf{U}(x)\Phi\Big\} - \Big\{d_\mu \mathbf{U}(x)\Big\} \cdot \Phi \\ &= d_\mu \widetilde{\Phi} - \Big\{d_\mu \mathbf{U}(x)\Big\} \cdot \Phi \\ &\neq \widetilde{d_\mu}\,\widetilde{\Phi} \quad , \end{aligned} \tag{3}$$

man erhält also von der Lokalität der Transformation $\mathbf{U} = \mathbf{U}(x)$ einen Zusatzterm, der die Eichinvarianz zerstört.

Man versucht nun – das ist das Eichprinzip! – aus $\mathcal{L}$ eine *neue Lagrange-Dichte zu konstruieren, die auch noch unter* lokalen *Eichtransformationen invariant bleibt.* Hierzu führt man eine neu definierte Ableitung ein, die sogenannte 'kovariante Ableitung', $D_\mu$ .

Diese neue Ableitung $D_\mu$ soll zwei Eigenschaften haben:

1. $D_\mu$ soll alle Eigenschaften einer normalen Ableitung haben (vor allem Leibniz-Regel),
2. $D_\mu$ soll sich unter lokalen Eichtransformationen so transformieren, dass der oben in Gl.3 aufgetretene Zusatzterm wegfällt.

Dazu setzen wir an

$$D_\mu := d_\mu + igA_\mu(x) \quad , \tag{4}$$

mit einem neu einzuführenden Vektorfeld[6] $A_\mu(x)$. Weil das so definierte $D_\mu$ nun explizit vom Raum-Zeit-Punkt $x$ abhängt, ist es selbst nicht mehr (wie der gewöhnliche Gradient $d_\mu$) eichinvariant. Man hat vielmehr zunächst

$$\widetilde{D}_\mu = \widetilde{d}_\mu + ig\,\widetilde{A}_\mu(x) = d_\mu + ig\,\widetilde{A}_\mu(x) \tag{5}$$

und bestimmt dann das (ja nicht vorgegebene) Transformationsverhalten des Vektorfelds $A_\mu(x)$ eben gerade so, dass die neue (durch Ersatz von $d_\mu$ durch $D_\mu$ abgeänderte) Lagrange-Dichte $\mathcal{L}'(\Phi, d\Phi) := \mathcal{L}(\Phi, D\Phi)$ lokal eichinvariant wird.

[5] Das $\widetilde{d_\mu}$ in der letzten Zeile ist natürlich trivialerweise gleich $d_\mu$. Wie man gleich sehen wird, ist es trotzdem nützlich, die Eichinvarianzbedingung auch hier formal als $\widetilde{d_\mu \Phi} \stackrel{!}{=} \widetilde{d_\mu}\widetilde{\Phi}$ zu schreiben.

[6] $g$ ist eine aus physikalischen Maßsystemgründen aus $A_\mu(x)$ herausgezogene 'Kopplungskonstante' . Das Herausziehen der imaginären Einheit $i$ bewirkt, dass $A_\mu$ reell (Hermite-sch) wird. Beides ist reine Definitionssache.

**Exkurs:** (an exercise in Poor Man's Differential Geometry)

Manchem flößt der Name 'Kovariante Ableitung' nichts als Schrecken ein. Dabei hat man ein Beispiel der Differentiation in gekrümmten Räumen (und nichts anderes ist – natürlich in gehöriger Weise abstrahiert – Differentialgeometrie) schon im ersten Semester (oder noch früher) bei der Diskussion ebener Bewegungen kennengelernt (Newton!):

In einem (ebenen) krummlinigen Koordinatensystem schreibt man den Ortsvektor am besten so:

$$\vec{r} = r \cdot \vec{e}_r \quad ;$$

dabei ist $\vec{e}_r$ der Einheitsvektor in Richtung des momentanen Orts eines mitgeführten rechtwinkligen Koordinatensystems; $\vec{e}_\phi$ ist der zu $\vec{e}_r$ orthogonale Einheitsvektor.

Die Geschwindigkeit ist die Zeitableitung des Orts:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} \quad ,$$

ebenso die Beschleunigung die Ableitung der Geschwindigkeit:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} \quad .$$

Die schlichte Rechnung ergibt [man beachte $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r = 1$ , also $\dot{\vec{e}}_r \perp \vec{e}_r$]

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{r}} &= \dot{r} \cdot \vec{e}_r + r \cdot \dot{\vec{e}}_r = \dot{r} \cdot \vec{e}_r + r(\dot{\phi} \cdot \vec{e}_\phi) \\
\ddot{\vec{r}} &= \ddot{r} \cdot \vec{e}_r + \dot{r} \cdot \dot{\vec{e}}_r + \dot{r}\dot{\phi} \cdot \vec{e}_\phi + r\ddot{\phi} \cdot \vec{e}_\phi - r\dot{\phi}^2 \cdot \vec{e}_r \\
&= (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) \cdot \vec{e}_r + (r\ddot{\phi} + (2\dot{r}\dot{\phi}) \cdot \vec{e}_\phi \quad ,
\end{aligned}$$

und Zentifugal- wie Coriolis-Beschleunigung entpuppen sich als 'Scheinkräfte', d.h. als Ergebnis der nicht-kovarianten Schreibweise.
Die Analogie liegt auf der Hand!

Dazu muss offenbar (analog zu oben im Fall der globalen Transformation) gelten [7]

$$\widetilde{D\Phi} := \mathbf{U}(D\Phi) = (\mathbf{U}D\mathbf{U}^{-1})\,\mathbf{U}\Phi = (\mathbf{U}D\mathbf{U}^{-1})\,\widetilde{\Phi} \stackrel{!}{=} \widetilde{D}\,\widetilde{\Phi} \quad ,$$

also [nicht weiter überrraschend]

$$\widetilde{D} \stackrel{!}{=} \mathbf{U}D\mathbf{U}^{-1} \tag{6}$$

oder [mit $U = e^i\lambda(x)$]

$$\widetilde{d}_\mu + ig\widetilde{A}_\mu(x) \stackrel{!}{=} e^{i\lambda(x)} \left\{ d_\mu + igA_\mu(x) \right\} e^{-i\lambda(x)} = d_\mu - i\frac{\partial\lambda}{\partial x^\mu} + igA_\mu(x)$$

[7] Hier sind die raumzeitlichen Indizes weggelassen.

und daraus schließlich [8]

$$\boxed{\widetilde{A}_\mu(x) \overset{!}{=} A_\mu(x) - \frac{1}{g}\lambda_{,\mu}(x)} \quad . \tag{7}$$

▷ **Übung:** Man rechne dieses Ergebnis nach.

Aus all dem folgt der wichtige

**Satz :** *Ist eine vorgegebene Lagrange-Dichte $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\Phi, d\Phi)$ [ $\Phi(x)$ ist ein skalares komplexes Feld ] unter den Transformationen der Transformationsgruppe $U_1$* ***global*** *invariant, und konstruiert man dann eine neue Lagrange-Dichte $\mathcal{L}'$ dadurch, dass man in $\mathcal{L}$ überall die Ableitung $d_\mu$ durch die wie oben konstruierte* ***kovariante Ableitung*** *$D_\mu$ ersetzt, so ist $\mathcal{L}'$ unter den Transformationen der Gruppe auch* ***lokal*** *invariant.*

Wie wir im zweiten Skript zu diesem Thema [9] sehen werden, lässt sich das in diesem Satz zusammengefaßte *Eichprinzip* sehr weitgehend verallgemeinern. Man braucht insbesondere *keine speziellen Annahmen* über die Form der Lagrange-Dichte zu machen. Einzige Voraussetzung dafür, dass dieser Satz nicht-triviale physikalische Ergebnisse produziert, ist, dass man überhaupt eine nicht-triviale Eichgruppe hat; dafür muss man – wie hier – mindestens zwei reelle bzw. ein komplexes Feld haben.

## D Das Eichfeld und die volle Lagrange-Dichte

Das *Eichprinzip*, soweit bisher dargestellt, stellt eine logisch recht zwingende Methode dar, globale Eichinvarianz auf *lokale* Eichinvarianz auszudehnen. Die Frage einer *physikalischen* Bedeutung des Eichfelds $A_\mu(x)$ blieb dabei allerdings noch völlig offen.

Eine physikalische Bedeutung wird man dem Eichfeld nur geben können, wenn man annimmt, dass es grundsätzlich auch für sich allein existieren könnte, mit andern Worten: wenn die volle Lagrange-Dichte eines physikalischen Systems einen Term enthält, der das Eichfeld allein (das 'freie' Eichfeld) beschreibt. Wenn wir die Lagrange-Dichte $\mathcal{L}_E$ des freien Eichfelds kennen, können wir sie zu $\mathcal{L}'$ addieren und so eine Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}_{\text{tot}} := \mathcal{L}' + \mathcal{L}_E \tag{8}$$

konstruieren, die beide Felder $(\Phi, A)$ zusammen in einer in sich *konsistenten, von willkürlichen Setzungen freien* Weise beschreibt.

Wie also könnte die Lagrange-Dichte $\mathcal{L}_E$ des freien Eichfelds aussehen? Sie müßte, nach den allgemeinen Prinzipien der Feldtheorie, eine Funktion des Felds und seiner ersten Ableitungen sein [10], also

$$\mathcal{L}_E = \mathcal{L}_E\Big(A(x), dA(x)\Big) \quad .$$

[8] Wir schreiben hier ausdrücklich $\lambda_{,\mu} := \frac{\partial\lambda}{\partial x^\mu}$, um schon in der Schreibweise deutlich zu machen, dass der Differentialoperator $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ hier nur auf $\lambda(x)$ wirkt und nicht auf das, was vielleicht rechts davon noch steht (wie das bei der Schreibweise $d_\mu\lambda$ üblicherweise impliziert ist).

[9] `http://www.itp.uni-bremen.de/~noack/SS05/gauge.pdf`.

[10] Im Prinzip könnte man auch Terme mit höheren Ableitungen als die erste einfügen. Die aus einem solchen Ansatz resultierenden Bewegungsgleichungen werden allerdings sehr kompliziert; insbesondere führt der Versuch, eine darauf aufbauende *Qanten*feldtheorie zu formulieren, auf meist unlösbare Probleme, und ein physikalischer Nutzen ist bei solchen Versuchen bisher nicht herausgekomen.

Selbstverständlich muss man (wenn der ganze Ansatz nicht wieder zunichtegemacht werden soll) verlangen, dass $\mathcal{L}_{\text{tot}}$, also auch $\mathcal{L}_E$ selbst lokal eichinvariant ist ($\mathcal{L}'$ ist es bereits, nach Konstruktion) .

Zunächst sieht man sofort, dass deshalb $\mathcal{L}_E$ nicht von den Feldern $A_\mu$ selbst abhängen kann, denn $A_\mu$ ist *nicht* eichinvariant (vgl. Gl.7). Das heißt aber, dass ein 'Massenterm' wie in der Gl.2 (Klein-Gordon-Gleichung) nicht auftreten kann [11].

**Eichfelder sind eo ipso masselos !**

Bleibt ein Term, der von den Feldableitungen abhängt. Er würde (vgl. wieder Gl.2) gewissermaßen die 'kinetische Energie' des Eichfelds beschreiben.

Ein solcher Term in $\mathcal{L}_E$ muss also

1. bilinear in den Feldableitungen $d_\mu A_\nu$ ,
2. selbst *lokal eichinvariant*

sein.

Nach dem oben Gesagten ist nun zwar die Ableitung $D_\mu A_\nu$ selbst auch *nicht* eichinvariant [vgl. Gl.5 und 7]; aber man sieht leicht, dass man die Invarianz durch *Antisymmetrisierung* erreichen kann:

$$\widetilde{D}_\mu \widetilde{A}_\nu = \left\{ d_\mu + ig\,\widetilde{A}_\mu \right\} \widetilde{A}_\nu = d_\mu \left\{ A_\nu - \frac{1}{g}\lambda_{,\nu} \right\} + ig\,\widetilde{A}_\mu\,\widetilde{A}_\nu$$

$$\widetilde{D}_\nu \widetilde{A}_\mu = \left\{ d_\nu + ig\,\widetilde{A}_\nu \right\} \widetilde{A}_\mu = d_\nu \left\{ A_\mu - \frac{1}{g}\lambda_{,\mu} \right\} + ig\,\widetilde{A}_\nu\,\widetilde{A}_\mu \quad ;$$

der Kommutator $\left[\widetilde{A}_\mu, \widetilde{A}_\nu\right]$ aber verschwindet (in der rechten Seite von Gl.7 stehen ja keine Differential*operatoren*).

Es folgt also

$$\widetilde{D}_\mu \widetilde{A}_\nu - \widetilde{D}_\nu \widetilde{A}_\mu = D_\mu A_\nu - D_\nu A_\mu = d_\mu A_\nu - d_\nu A_\mu =: F_{\mu\nu}(x) \quad ,$$

diese antisymmetrische Kombination [der "Feldtensor"] ist also *lokal eichinvariant*.

Die einzige Lorentz-invariante Größe, die wir aus den Feldableitungen $d_\mu A_\nu$ konstruieren können [12] und die gleichzeitig eichinvariant ist, ist

$$\boxed{\mathcal{L}_E := -\frac{1}{4}(D_\mu A_\nu - D_\nu A_\mu)(D^\mu A^\nu - D^\nu A^\mu) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}\,F^{\mu\nu}} \quad . \qquad (9)$$

Wir definieren also schlussendlich die Gesamt-Lagrange-Dichte des vermöge des Eichprinzips jetzt gekoppelten Systems als

$$\mathcal{L}_{\text{tot}} := \mathcal{L}' + \mathcal{L}_E$$

und variieren dann die Gesamtwirkung $\mathbf{S} = \int \mathcal{L}_{\text{tot}}\, d^4x$ nach dem Eichfeld $A_\nu$.

[11] Wer sich in der modernen Physik einigermaßen auskennt, mag sich fragen, wieso dann die Vektorbosonen $W^\pm, Z^0$ der schwachen Wechselwirkung so massiv ($\sim$ 100 GeV) sein können ? Die Antwort ist kompliziert: es liegt an der sogen. 'spontanen Symmetriebrechung' !

[12] Siehe dazu auch Fußnote 10 auf S.6. Der Faktor $(-1/4)$ in Gl.9 ist – allerdings bequeme – Konvention.

## E Bewegungsgleichung für das Eichfeld

Man findet

$$\frac{\partial \ \mathcal{L}_{\text{tot}}}{\partial(d_\mu A_\nu)} = \frac{\partial \ \mathcal{L}_E}{\partial(d_\mu A_\nu)} = -F^{\mu\nu} \quad ,$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{tot}}}{\partial A_\nu} &= \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial A_\nu} \\
&= \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(D_\mu \Phi)} \cdot \frac{\partial(D_\mu \Phi)}{\partial A_\nu} \qquad + \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(D_\mu \Phi)^*} \cdot \frac{\partial(D_\mu \Phi)^*}{\partial A_\nu} \\
&= \frac{\partial \ \mathcal{L}}{\partial(d_\mu \Phi)} \cdot \frac{\partial[d_\mu \Phi + ig\, A_\mu \Phi]}{\partial A_\nu} + \frac{\partial \ \mathcal{L}}{\partial(d_\mu \Phi)^*} \cdot \frac{\partial[(d_\mu \Phi)^* - ig\, A_\mu \Phi^*]}{\partial A_\nu} \\
&= \frac{\partial \ \mathcal{L}}{\partial(d_\nu \Phi)} \cdot ig\Phi \qquad + \frac{\partial \ \mathcal{L}}{\partial(d_\nu \Phi)^*} \cdot (-ig\Phi^*) \quad .
\end{aligned}$$

Man findet also für die Bewegungsgleichung des Eichfelds die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$d_\mu F^{\mu\nu} = ig \left( \frac{\partial \ \mathcal{L}}{\partial(d_\mu \Phi)} \, \Phi - \Phi^* \, \frac{\partial \ \mathcal{L}}{\partial(d_\mu \Phi^*)} \right) \quad . \tag{10}$$

▷ **Übung:** Nachrechnen!

## F Der Noether-Strom

Ebenso einfach berechnet man den zu den Eichtransformationen gehörigen Noether-Strom. Die Eichtransformationen sind explizit

$$\begin{aligned}
\Phi \ &\to \widetilde{\Phi} \ = \Phi + i\lambda\Phi + \mathcal{O}(\lambda^2) \quad , \\
\Phi^* &\to \widetilde{\Phi^*} = \Phi^* - i\lambda\Phi^* + \mathcal{O}(\lambda^2) \quad ;
\end{aligned}$$

in der Notation des Noether-Theorem-Skripts [13] ist also

$$\beta = i\Phi \quad , \qquad\qquad \beta^* = -i\Phi^* \quad .$$

In diesem Skript ist auch dargelegt, dass (und wie) sich das Theorem aus der Betrachtung *infinitesimaler* Transformationen ergibt. Deshalb spielt es keine Rolle, ob der Entwicklungsparameter $\lambda$ eine Konstante oder eine Funktion von $x$ ist; mit andern Worten: der Noether-Strom ist unabhängig davon, ob es sich um globale oder lokale Transformationen handelt. Aus dieser Überlegung folgt, dass wir zu seiner Berechnung die ursprüngliche Lagrange-Dichte $\mathcal{L}$ heranziehen können.

Damit erhält man explizit für den Noether-Strom [14]

$$N^\mu = i \left( \frac{\partial \ \mathcal{L}}{\partial(d_\mu \Phi)} \, \Phi - \Phi^* \, \frac{\partial \ \mathcal{L}}{\partial(d_\mu \Phi^*)} \right) \quad . \tag{11}$$

[13] `http://www.itp.uni-bremen.de/~noack/noether.pdf`.

[14] Man beachte, dass $N^\mu$ reell ist — dafür der Faktor $i$ in der Definition des Noether-Stroms. Das Vorzeichen ist Definitionssache.

Der Vergleich der Gl.11 mit Gl.10 zeigt, dass die Bewegungsgleichung in der Form

$$\boxed{d_\mu F^{\mu\nu} = g \cdot N^\nu} \quad .$$

*Das aber sind gerade die Maxwell-Gleichungen, wenn man die Kopplungskonstante g mit der elektrischen Ladung und den (wegen der Eichinvarianz erhaltenen!) Noether-Strom mit dem elektrischen Strom identifiziert:*

$$\jmath^\nu := g \cdot N^\nu \quad \text{, und} \qquad d_\nu \jmath^\nu = 0 \quad .$$

## G Zusammenfassung

Die Ergebnisse der vorigen Abschnitte zeigen eine ganz außerordentliche Geschlossenheit und einen großen inneren Zusammenhang, den wir als “Eichprinzip” zusammenfassen wollen:

**Gegeben sei eine (freie) Lagrange-Dichte $\mathcal{L}$ für ein komplexes Feld $\Phi(x)$; $\mathcal{L}$ sei gegenüber den (*globalen*) Eichtransformationen $\Phi(x) \Longrightarrow e^{i\lambda}\,\Phi(x)$ *invariant.* Konstruiert man dann eine neue *lokal eichinvariante* Lagrange-Dichte**

$$\mathcal{L}_{\mathbf{tot}} := \mathcal{L}' + \mathcal{L}_E \quad ,$$

**indem man**

**(i) in $\mathcal{L}$ alle Ableitungen $d_\mu$ durch die *kovarianten Ableitungen* $D_\mu$ (nach Gl.4, S.4) ersetzt:**

$$\mathcal{L}[\phi, d\Phi] \rightarrow \mathcal{L}' := \mathcal{L}[\phi, D\Phi] \quad ,$$

**(ii) für das dabei neu eingeführte ‘Eichfeld’ $A_\mu(x)$ das entsprechende Eichtransformationsverhalten (Gl.7, S.6) fordert, und schließlich**

**(iii) auch für das Eichfeld $A_\mu(x)$ selbst eine – lokal eichinvariante! – freie Lagrange-Dichte $\mathcal{L}_E$ (Gl.9, S.7) einführt,**

**so erhält man auf eindeutige und ganz natürliche Weise eine *Kopplung* zwischen dem – ursprünglich freien – Feld $\Phi(x)$ und dem Eichfeld $A_\mu(x)$, und zwar so, dass die Inhomogenität der Bewegungsgleichungen für das Eichfeld gerade der durch die Eichinvarianz erzeugte *Noether-Strom* ist.**

Man interpretiert dann natürlich das – ursprünglich freie – Feld $\Phi(x)$ als *Träger* der Ladung, die zu dem erhaltenen Noether-Strom gehört.

Aus der Ableitung wird deutlich, dass die Eigenschaft des Felds $\Phi(x)$, ‘Träger der Ladung’ zu sein, dabei ganz unabhängig ist von seinen sonstigen Eigenschaften (die Ableitung gilt für eine sehr große Klasse von Lagrange-Dichten $\mathcal{L}$).

Sind das Feld $\Phi(x)$ [samt der Lagrange-Dichte $\mathcal{L}$] konkret gegeben, so erhält man natürlich noch mehr aus dem Eichprinzip, nämlich auch die Rückwirkung des Eichfeldes auf die Dynamik des 'Trägerfelds' $\Phi(x)$; dazu muss man nur die Gesamtwirkung $\mathbf{S}$ nach $\Phi(x)$ variieren. Man erhält so eine (in der Regel ziemlich komplizierte) Feldgleichung[15], die man, analog zu den Maxwell-Gleichungen, so schreiben kann, dass links die *freie* Bewegungsgleichung des Trägerfelds $\Phi$ steht und auf der rechten Seite – als Inhomogeneität – Kopplungsterme zwischen dem Trägerfeld $\Phi$ und dem Eichfeld $A^\mu$. Diese Feldgleichung ist das feldtheoretische Analogon zur Bewegungsgleichung einer Punktladung unter der Einwirkung der Lorentz-Kraft:

$$\vec{F} = \dot{\vec{p}} = e\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) \quad .$$

[15]Für das eingangs (S.3) erwähnte Beispiel des Klein-Gordon-Felds erhält man

$$(d_\mu d^\mu + m^2)\Phi = -ig\,(2A^\mu\, d_\mu\Phi + \Phi \cdot d_\mu A^\mu) + g^2 A_\mu A^\mu \cdot \Phi \quad .$$