Universität Bremen

Institut für Theoretische Physik

Theoretische Physik II: Elektrodynamik SS 96

C.C. Noack

Das Noether-Theorem

— for Pedestrians —

A Einleitung

Das Noether-Theorem [E. Noether: Nachr.Gesellsch.Wiss. Göttingen **2**, 253 (1918)] ist einer der wichtigsten Sätze der klassischen Feldtheorie. Es stellt den Zusammenhang klar zwischen der Invarianz eines Systems gegenüber (kontinuierlichen) Transformationen und Erhaltungssätzen, d.h. der Existenz von physikalischen Größen, die zeitlich konstant bleiben. Die Erhaltungsgrößen aber sind es, die der experimentellen Beobachtung zugänglich sind, während man die Invarianzen eher "den Formeln ansieht". Auf diese Weise stellt das Noether-Theorem ein unentbehrliches Bindeglied zwischen experimenteller und theoretischer Physik dar.

Obwohl der strenge Beweis etwas aufwendig ist[1], läßt sich der Satz selbst verhältnismäßig einfach formulieren. Weil über diese Formulierung hinaus hier nur eine Beweis-*Skizze* gegeben wird, heißt das Skript – nach Zvi Lipkin – "for Pedestrians".

Wir betrachten einen Satz $\{\Phi\} := \{\Phi_a(x)|\ a = 1, 2, \dots, M\}$ von Feldern, die auf einer vorgegebenen N-dimensionalen Mannigfaltigkeit [mit Koordinaten $x := \{x^\mu\}$] definiert sein sollen. Man kann sich darunter einen metrischen Raum (mit Metrik $g^{\mu\nu}$) vorstellen, also z.B. das gewöhnliche (1+3)-dimensionale Zeit-Raum-Kontinuum, oder auch den Minkowski-Raum der speziellen Relativitätstheorie. Da wir in der Formulierung aber konsequent zwischen kontravarianten und kovarianten Größen unterscheiden und *das Index-ziehen vermeiden* werden[2], geht die Metrik in Formulierung und Beweis-Skizze nicht ein.

Die Dynamik des Systems soll durch eine Lagrange-Dichte $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\{\Phi\}, \{d\Phi\}; x)$ beschrieben werden [$\{d\Phi\}$ ist die Gesamtheit der Feldableitungen]; die Feldgleichungen ergeben sich dann als Euler-Lagrange-Variationsgleichungen aus dem Wirkungsprinzip

$$\delta \mathbf{S} = \delta \int \mathcal{L}\, d^N x \stackrel{!}{=} 0$$

$\rightsquigarrow$

$$d_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(d_\mu \Phi_a)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\Phi_a)} = 0 \quad , \ a = 1, 2, \dots, M \quad .$$

[1] Eine ausführliche Darstellung findet sich bei z.B. E.L. Hill: Rev.Mod.Phys. **23**, 253 (1957).

[2] Notation: kontravariante Vektoren mit oberen, kovariante mit unteren griechischen Indices; es wird durchgehend die "Summationskonvention" benutzt: über einen Index, der genau einmal oben und einmal unten vorkommt, ist zu summieren (Kontraktion).

Es läge nahe, die gleiche Konvention auch für die Felder zu vereinbaren: über zweimal vorkommende – hier mit a bezeichnete – Feldindices ist zu summieren. Obwohl das problemlos und systematisch möglich wäre, wird diese Notation hier *nicht* benutzt — um den "Fußgänger" nicht zu verwirren ...

Bevor wir das Theorem selbst formulieren, mag es nützlich sein, sich an den Fall der Punktmechanik zu erinnern, weil der eigentliche Kern des Theorems schon an diesem einfacheren Fall klargemacht werden kann. Man hat dort die Aussage:

> Ist die Lagrange-Funktion des Systems von einer bestimmten (verallgemeinerten) Koordinate q_k *nicht abhängig*, d. h. ist $\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$, so folgt aus der Bewegungsgleichung
> $$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0 \quad ;$$
> das aber bedeutet, dass die Größe
> $$p_k := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \quad ,$$
> der zu q_k kanonisch konjugierte Impuls, eine Erhaltungsgröße der Bewegung ist.

Dass die partielle Ableitung $\frac{\partial L}{\partial q_k}$ verschwindet, bedeutet aber nichts anderes, als dass L *invariant ist gegenüber (infinitesimalen) Translationen in der Koordinate* q_k; man sieht hier also deutlich, wie der Zusammenhang zwischen Invarianz und Erhaltungssatz eine Folge der Bewegungsgleichung, d. h. der Dynamik des Systems ist.

Der Noether-sche Satz handelt im Grunde von nichts anderem als der Verallgemeinerung dieses Sachverhalts auf Felder. Der wichtigste Schritt hierbei ist es, das Verhalten der Felder unter der in Frage stehenden Transformation genau zu betrachten.

B Beschreibung der Transformationen

Wir betrachten zunächst ganz abstrakt eine Transformation Ω, von der wir nur voraussetzen, dass sie differenzierbar von einem (reellen) Parameter ω abhängt, so dass wir sie nach diesem Parameter entwickeln können:
$$\Omega = \mathbb{1} + \omega + \mathcal{O}(\omega^2) \quad .$$

Es kann nun sein, dass Ω die Koordinaten des zugrundeliegenden Raumes nicht unverändert läßt — in diesem Falle würde man von einer *Koordinatentransformation* sprechen. Wenn der Zusammenhang, wie vorausgesetzt, differenzierbar ist, kann man auch die transformierten Koordinaten nach ω entwickeln[3]:

$$x^\mu \underset{\Omega}{\longrightarrow} \tilde{x}^\mu := x^\mu + \alpha^\mu \cdot \omega + \mathcal{O}(\omega^2) \quad .$$

Entsprechend müssen wir auch angeben, wie sich die Felder $\Phi_a(x)$ transformieren. Hier können sich nun nicht nur die Koordinaten x^μ, von denen die Φ_a ja abhängen, ändern, sondern auch die Felder selbst (wie man schon an dem einfachen Beispiel eines elektrischen Feldes sieht, das bei einer Koordinatendrehung auch seine Richtung ändert). Wir schreiben also

$$\Phi_a(x) \underset{\Omega}{\longrightarrow} \tilde{\Phi}_a(\tilde{x}) := \Phi_a(x) + \beta_a \cdot \omega + \mathcal{O}(\omega^2) \quad .$$

[3] Man beachte hierbei, dass Ω als Koordinatentransformation natürlich den zugrundeliegenden Raum auf sich abbilden soll — Punkte gehen über in andere Punkte, kontravariante Vektoren daher auch wieder in kontravariante Vektoren. Das abstrakte ω muß deshalb in obiger Transformationsformel mit einem *kontravarianten* Vektor α^μ multipliziert sein, der eben gerade angibt, *wie* Ω auf die Punkte des Raumes wirkt.

Drei Bemerkungen:

1. die Reihenentwicklung von Ω nach Potenzen von ω führt auf Reihenentwicklungen auch der Koordinaten und der Felder nach Potenzen von ω; α^μ bzw. β_a sind die Entwicklungskoeffizienten 1. Ordnung dieser Reihenentwicklungen. Die α^μ und β_a sind also nichts irgendwie 'infinitesimales'!

2. die zunächst abstrakt mit Ω bezeichnete Transformation wird erst *konkret durch Angabe der α^μ und der β_a* bestimmt — diese Größen sind also nicht anderes als eine Beschreibung der in Frage stehenden Transformation,

3. die β_a sind in der Regel selbst wieder Felder. Bei einer räumlichen Drehung eines Vektorfeldes z. B. sind die β_a Linearkombinationen der Φ_a.

C Das Theorem

Mit diesen Bezeichnungen definiert man den "Noether-Strom $\mathbf{N}^\mu(x)$" als [4]

$$\boxed{\mathbf{N}^\mu(x) := \sum_a \mathbf{\Pi}^{a\mu} \cdot \{\alpha^\nu \, d_\nu \Phi_a - \beta_a\} \; - \mathcal{L} \cdot \alpha^\mu}$$

wobei $\mathbf{\Pi}^{a\mu}$ das zu Φ_a 'kanonisch konjugierte Feld' ist:

$$\mathbf{\Pi}^{a\mu} := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(d_\mu \Phi_a)} \quad .$$

Dann gilt der Satz:

Ist das Wirkungsintegral S der Lagrange-Dichte des Systems unter der Transformation Ω *invariant* [5], so ist der zugehörige Noether-Strom $\mathbf{N}^\mu$ erhalten:

$$\boxed{d_\mu \mathbf{N}^\mu = 0 \quad .}$$

[4] Das Vorzeichen von $\mathbf{N}^\mu(x)$ ist willkürlich (aber für physikalische Zwecke bequem so).

[5] Was das genau heißen soll, muß erst noch formuliert werden! Vgl. hierzu die Beweis-Skizze.

Physikalisch erhält man aus der Kontinuitätsgleichung $d_\mu \mathbf{N}^\mu = 0$ eine *zeitliche Erhaltungsgröße* $\mathbf{Q}$ durch *räumliche* Integration der *Zeit*-Komponente $\mathbf{N}^t$ des Noether-Stroms: [6]

$$\mathbf{Q} := \int_{\text{Raum}} \mathbf{N}^t \, d^{N-1}x \quad ;$$

es folgt dann nämlich

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{Q}} &= \frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \int \frac{\partial \mathbf{N}^t}{\partial t} \, d^{N-1}x \\ &= -\int \nabla \cdot \vec{\mathbf{N}} \, d^{N-1}x \qquad ; \end{aligned}$$

das letzte Integral verschwindet aber, wenn die Integration sich über den ganzen Raum erstreckt (Gaußscher Satz).

D Beweis-Skizze:

D 1 Grundidee

Unter der Wirkung der Transformation Ω ändern sich die Koordinaten x^μ, die Felder Φ_a, damit auch die Lagrangedichte $\mathcal{L}$ und schließlich (im allgemeinen) das Wirkungsintegral[7]

$$\mathbf{S} := \int_V dV \, \mathcal{L} \left(\Phi(x), \dots \right) \quad .$$

Das Volumen τ, über das hier integriert wird $[dV \equiv d^N x]$, ist entsprechend den Vorschriften des Euler-Lagrange-Variationsverfahrens beliebig, bei der Variation selbst aber festzuhalten.

Die durch Ω bewirkte Änderung von $\mathbf{S}$:

$$\delta \mathbf{S} := \tilde{\mathbf{S}} - \mathbf{S} = \int_{\tilde{\tau}} d\tilde{\tau} \, \mathcal{L} \left(\tilde{\Phi}(\tilde{x}), \dots \right) \; - \int_V dV \, \mathcal{L}$$

wird nun im allgemeinen bereits in 1.Ordnung in ω von Null verschieden sein. Ist aber das System *invariant* gegenüber der Transformation Ω, so ist $\delta \mathbf{S} = 0$; das ist sozusagen die Definition des Begriffs "Invarianz des Systems gegenüber Ω".

Der wesentliche Gedanke des Satzes von Emmy Noether besteht nun darin, die Änderung $\delta \mathbf{S}$ in ein Volumenintegral einer *Divergenz* umzuformen. Aus der Beliebigkeit des Volumens τ folgt dann nämlich, dass das Integral nur verschwindet, wenn der Integrand verschwindet — und diese Bedingung hat dann die Gestalt einer *Kontinuitätsgleichung*.

D 2 Volumen-Transformation

Das Integrationsvolumen τ muß natürlich auch mit Ω transformiert werden: $V \underset{\Omega}{\longrightarrow} \tilde{\tau}$; da die Funktionaldeterminante dieser Tranformation nicht notwendig dem Betrage nach $= 1$ ist, ist grundsätzlich Vorsicht geboten.

---

[6] Das heißt: wir interpretieren *eine* Koordinate der zugrundeliegenden N-dimensionalen Mannigfaltigkeit als "Zeit", und alle übrigen als "Raum". Mathematisch bedeutet das Integration über eine vorgegebene Hyperfläche (sogenannte "zeitartige Hyperfläche").

[7] Der Übersichtlichkeit der Formeln wegen lassen wir im folgenden Indices überall weg; sie können ohne Schwierigkeiten zum Schluß wieder eingefügt werden.

Wir können die Funktionaldeterminante jedoch nach ω entwickeln. Es ist[8]

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\nu} &= \delta^\mu{}_\nu + (d_\nu \alpha^\mu)\cdot\omega + \mathcal{O}(\omega^2) \\ &=: \delta^\mu{}_\nu + \Delta^\mu{}_\nu + \mathcal{O}(\Delta^2) \qquad ;\end{aligned}$$

die $\Delta^\mu{}_\nu \equiv (d_\nu \alpha^\mu)\cdot\omega$ sind also von 1.Ordnung in ω. Entwickelt man die Determinante

$$\left|\frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\nu}\right| = \begin{vmatrix} (1+\Delta^1{}_1) & \Delta^1{}_2 & \cdots \\ \Delta^2{}_1 & (1+\Delta^2{}_2) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

(z. B.) nach ihrer ersten Spalte, so erhält man

$$\Big| \qquad \Big|_N = (1+\Delta^1{}_1)\cdot \Big| \qquad \Big|_{N-1} + \sum_{i=2}^{N} \Delta^i{}_1 \cdot U_i \quad .$$

Die Unterdeterminanten U_i enthalten – da die i-te Zeile gerade herausgestrichen ist – nur Terme $\propto \Delta$, sind also selbst mindestens von 1.Ordnung in Δ. Die ganze Summe ist also von höherer Ordnung in Δ und kann deshalb weggelassen werden. Entwickelt man die (N-1)-dimensionale Determinante im 1.Term entsprechend weiter, so erhält man schließlich (streng: durch Induktion)

$$\Big| \qquad \Big|_N = \prod_{i=1}^{N}(1+\Delta^i{}_i) + \mathcal{O}(\Delta^2) = 1 + \sum_{i=1}^{N} \Delta^i{}_i + \mathcal{O}(\Delta^2)$$

In unserem Fall erhalten wir also für die Funktionaldeterminante der durch Ω bewirkten Koordinatentransformation $x \longrightarrow \tilde{x}$:

$$\left|\frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\nu}\right| = 1 + (d_\mu \alpha^\mu)\cdot\omega + \mathcal{O}(\omega^2) \quad .$$

D 3 Umrechnung

Zum Zwecke der weiteren Umrechnung teilen wir $\delta\mathbf{S}$ zunächst in 2 Terme auf, die dann getrennt betrachtet werden:

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{S} &= \mathbf{A}+\mathbf{B} \\ \mathbf{A} &:= \int_{\tilde{\tau}} d\tilde{\tau}\,\left[\mathcal{L}\left(\tilde{\Phi}(\tilde{x}),\dots\right) - \mathcal{L}\left(\Phi(\tilde{x}),\dots\right)\right] \\ \mathbf{B} &:= \int_{\tilde{\tau}} d\tilde{\tau}\,\mathcal{L}(\Phi\,(\tilde{x}),\dots) - \int_V dV\,\mathcal{L} \quad .\end{aligned}$$

Im Integral $\mathbf{A}$ kommen als unabhängige Variablen nur die $\tilde{x}$ vor; wir können es daher insgesamt nach x zurücktransformieren. Da der Integrand schon $\propto \omega$ ist, langt es, die Funktionaldeterminante der Transformation in nullter Ordnung einzusetzen, wenn wir das Integral nur bis zur 1.Ordnung haben wollen. Wir erhalten so

$$\mathbf{A} = \int_V dV\,\left[\mathcal{L}\left(\tilde{\Phi}(x),\dots\right) - \mathcal{L}\left(\Phi(x),\dots\right)\right] + \mathcal{O}(\omega^2) \quad .$$

[8] Das im folgenden abgeleitete Resultat gilt übrigens ganz allgemein für Determinanten und ist auch in anderem Zusammenhang nützlich!

Um dies weiter umzurechnen, führen wir zunächst folgende Abkürzungen ein:

$$\begin{aligned} \Delta x &:= \tilde{x} - x \\ \Delta\Phi &:= \tilde{\Phi}(x) - \Phi(x) \end{aligned}$$

[man beachte $\Delta\Phi \neq \tilde{\Phi}(\tilde{x}) - \Phi(x)$!] und erhalten damit

$$\Delta x = \alpha \cdot \omega + \mathcal{O}(\omega^2)$$

und

$$\Delta\Phi = \left\{\tilde{\Phi}(\tilde{x}) - \Phi(x)\right\} - \left\{\tilde{\Phi}(\tilde{x}) - \tilde{\Phi}(x)\right\} \quad .$$

Der 1.Term auf der rechten Seite ist $\beta \cdot \omega$; Entwicklung des 2.Terms in eine Taylor-Reihe ergibt

$$\begin{aligned} \left\{\tilde{\Phi}(\tilde{x}) - \tilde{\Phi}(x)\right\} &= d\tilde{\Phi} \cdot \Delta x + \mathcal{O}(\omega^2) \\ &= (d\tilde{\Phi} \cdot \alpha) \cdot \omega + \mathcal{O}(\omega^2) \quad . \end{aligned}$$

Dieser Term ist aber bereits von 1.Ordnung in ω. Wir können deshalb darin $\tilde{\Phi}$ durch Φ ersetzen (da wir insgesamt nur bis zur 1.Ordnung entwickeln) und erhalten so schließlich

$$\Delta\Phi = \beta \cdot \omega - d\Phi \cdot \alpha \cdot \omega + \mathcal{O}(\omega^2) \quad .$$

Für $\mathbf{A}$ erhalten wir also insgesamt

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \int_V dV \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(d\Phi)} \cdot \Delta(d\Phi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi} \cdot \Delta\Phi\right] + \mathcal{O}(\omega^2) \\ &= \int_V dV \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(d\Phi)} \cdot \Delta(d\Phi) + d\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(d\Phi)} \cdot \Delta\Phi\right] + \mathcal{O}(\omega^2) \\ &= \int_V dV \; d\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(d\Phi)} \cdot \Delta\Phi\right] + \mathcal{O}(\omega^2) = \int_V dV \; d[\mathbf{\Pi} \cdot \Delta\Phi] + \mathcal{O}(\omega^2) \\ &= \int_V dV \; d\left[\mathbf{\Pi}\left(\beta - d\Phi \cdot \alpha\right)\right] \cdot \omega + \mathcal{O}(\omega^2) \quad . \end{aligned}$$

[In der Umrechnung von der 1. zur 2. Zeile sind die Feldgleichungen benutzt worden.] Der Integrand ist eine *Divergenz*, hat also die gewünschte Form.

In $\mathbf{B}$ entwickeln wir zunächst den Integranden des ersten Integrals bis zur 1.Ordnung:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(\Phi(\tilde{x}), \dots\right) &= \mathcal{L}\left(\Phi(x), \dots\right) + d\mathcal{L}\Big|_x \cdot \Delta x + \mathcal{O}(\omega^2) \\ &= \mathcal{L} + (d\mathcal{L})\, \alpha \cdot \omega + \mathcal{O}(\omega^2) \quad . \end{aligned}$$

Um das Integral auf die ursprünglichen Koordinaten umzurechnen, müssen wir nun wirklich die Funktionaldeterminante einsetzen:

$$\int_{\tilde{\tau}} \dots \, d\tilde{\tau} = \int_V \dots \left|\frac{\partial\tilde{x}^\mu}{\partial x^\nu}\right| dx \quad .$$

Insgesamt erhalten wir so für $\mathbf{B}$ (immer noch in Kurzschrift):

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \int dV \, \mathcal{L}\,(d\alpha) \cdot \omega + \int dV \, (d\mathcal{L})\, \alpha \cdot \omega + \mathcal{O}(\omega^2) \\ &= \int dV \, d(\mathcal{L}\alpha) \cdot \omega + \mathcal{O}(\omega^2) \quad , \end{aligned}$$

also wieder eine *Divergenz.*

Fassen wir beide Terme zusammen, so erhalten wir insgesamt

$$\delta\mathbf{S} = -\left\{\int_V dV\, d\left[\mathbf{\Pi}\left(\alpha\, d\Phi - \beta\right) - \mathcal{L}\alpha\right]\right\} \cdot \omega \quad .$$

Fügt man schließlich noch alle Indices (und Summationen über Feldkomponenten) wieder ein, so sieht man, dass der in eckigen Klammern stehende Ausdruck gerade der oben in Abschnitt **C** definierte *Noether-Strom* $\mathbf{N}^\mu$ ist, der Integrand die Divergenz $d_\mu \mathbf{N}^\mu$ dieses Stroms.

Ist das System gegenüber der Transformation Ω *invariant*, so muß $\delta\mathbf{S}$ auch für endliches ω *verschwinden.* Wegen der Beliebigkeit des Volumens τ bedeutet das: der Integrand muß verschwinden.

Das aber ist die Aussage des Noether-Theorems. ∎

E Zwei Beispiele

E 1 Translation:

Wir betrachten ein skalares Feld Φ und eine Koordinaten-Translation längs einer festen Achse, sagen wir der ν-Achse. Das bedeutet

$$\tilde{x}^\mu = x^\mu + \delta^\mu{}_\nu \cdot \omega$$

(die Koordinate ν wird um ω verschoben, die andern bleiben unverändert). Wir haben also

$$\alpha^\mu_{(\nu)} = \delta^\mu{}_\nu \quad .$$

Das Feld Φ soll skalar sein; das heißt $\tilde{\Phi}(\tilde{x}) = \Phi(x)$; es ist also $\beta = 0$. Setzen wir dies in den Ausdruck für den Noether-Strom ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^\mu_{(\nu)} &= \mathbf{\Pi}^\mu \cdot \{\delta^\rho{}_\nu\, d_\rho \Phi \; - 0\} - \delta^\mu{}_\nu \mathcal{L} \\ &= \mathbf{\Pi}^\mu \cdot \, d_\nu \Phi \; - \delta^\mu{}_\nu \mathcal{L} \quad , \end{aligned}$$

also gerade die ν-te Komponente des Energie-Impuls-Tensors, wie wir das in Analogie zur Punktmechanik nicht anders erwarten.

E 2 Globale Eichtransformation:

Wir betrachten ein komplexes "Klein-Gordon-Feld" Φ [9], die Lagrange-Dichte ist also

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} d_\mu \Phi^* \cdot d^\mu \Phi \; - \frac{m^2}{2} \Phi^* \Phi \quad .$$

$\mathcal{L}$ ist invariant gegenüber 'globalen Eichtranformationen', d.h. der Multiplikation mit einer (*festen*) komplexen Phase:

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x \\ \tilde{\Phi} &= e^{i\vartheta}\Phi \\ \tilde{\Phi}^* &= e^{-i\vartheta}\Phi^* \quad , \end{aligned}$$

[9] Das Beispiel soll hier lediglich die mathematischen Zusammenhänge deutlich machen – die genaue *physikalische* Bedeutung des Klein-Gordon-Felds erschließt sich erst in der (relativistischen) Quantenmechanik.

also ($\omega \to \vartheta$)

$$
\begin{aligned}
\alpha &= 0 \\
\beta &= i\Phi \\
\beta^* &= -i\Phi^* \quad .
\end{aligned}
$$

Es folgt

$$
\begin{aligned}
\mathbf{N}^\mu &= -\mathbf{\Pi}^\mu \, \beta - \mathbf{\Pi}^{*\mu} \, \beta^* \\
&= -i\Phi \, \mathbf{\Pi}^\mu + i\Phi^* \, \mathbf{\Pi}^{*\mu} \\
&= +i \left[\Phi^* \, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (d_\mu \Phi^*)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (d_\mu \Phi)} \, \Phi \right] \\
&= +\frac{i}{2} \left[\Phi^* (d^\mu \Phi) - (d^\mu \Phi^*) \, \Phi \right] \quad ,
\end{aligned}
$$

also der aus der Quantenmechanik bekannte 'Klein-Gordon-Strom', der – wie man aus seiner anschaulichen Interpretation kennt – die elektrische Stromdichte für ein durch das Feld Φ beschriebenes geladenes Teilchen angibt.

Physikalische Schlußfolgerung:

Die zur (globalen) Eichinvarianz gehörende Erhaltungsgröße ist die *Ladung* !