

Theoretische Elektrodynamik

- verständlich¹ erklärt

Dipl.-Phys. Björn Feuerbacher

¹hoffentlich

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
2	Statische Felder im Vakuum	9
2.1	Elektrostatik	9
2.1.1	Skalarpotential, Eichung, Gauß'sches Gesetz	9
2.1.2	Green'sche Funktion - allgemein	12
2.1.3	* Berechnung der Green'schen Funktion	15
2.1.4	Randwertprobleme	17
2.2	Multipolentwicklung	21
2.2.1	Kartesische Multipole	21
2.2.2	* Vollständige Funktionensysteme; die Kugelflächenfunktionen	23
2.2.3	* Sphärische Multipole	28
2.3	Magnetostatik	34
2.3.1	Vektorpotential, Eichung	34
2.3.2	Biot-Savart'sches Gesetz	36
2.4	* Kraft und Drehmoment auf Dipole	39
2.4.1	Elektrische Dipole	39
2.4.2	Magnetische Dipole	41
3	Felder in Materie	46
3.1	Dielektrika	46
3.1.1	Die dielektrische Verschiebung	46
3.1.2	Grenzflächen; dielektrische Kugel	52
3.2	Magnetismus	57
3.2.1	Die magnetische Feldstärke	57
3.2.2	Grenzflächen; Magnetfeld im Spulenspalt	59
3.2.3	Ferromagnetismus, Hysterese	60
3.3	Zusammenfassung: Maxwellgleichungen in Materie	62
3.4	Quasistationäre Probleme: Stromkreise	64
3.4.1	Kirchhoff'sche Regeln, Ohm'sches Gesetz	65
3.4.2	Kapazitäten und Induktivitäten	68
3.4.3	Allgemeinere Stromkreise; Blind- und Scheinwiderstände	72
3.4.4	Technische Anwendungen	77
3.5	* Der Skineneffekt	80

4	Ausbreitung elektromagnetischer Wellen	83
4.1	Ausbreitung im Vakuum und in Materie	83
4.1.1	Freie Wellengleichung und Telegraphengleichung	83
4.1.2	Eigenschaften elektromagnetischer Wellen	86
4.1.3	Polarisation	87
4.1.4	Phasen- und Gruppengeschwindigkeit, Dispersion	88
4.2	* Hohlleiter	90
4.3	Brechung und Reflexion an Grenzflächen	94
4.3.1	Stetigkeitsbedingungen, Snellius-Gesetz	94
4.3.2	* Einfluß der Polarisation: Fresnel'sche Formeln	99
4.4	Energie und Impuls elektromagnetischer Felder	101
4.4.1	Energie in den Feldern	101
4.4.2	Energieerhaltung, Poyntingvektor	104
4.4.3	Impulserhaltung, Strahlungsdruck	107
5	Abstrahlung elektromagnetischer Wellen	112
5.1	Potentiale und Eichung im Vakuum	112
5.1.1	* Coulombeichung	114
5.1.2	Lorentzeichung	115
5.2	Abstrahlung durch bewegte Punktladungen	116
5.2.1	Liénard-Wiechert-Potentiale	116
5.2.2	Harmonisch schwingende Punktladung	117
5.3	Monochromatische Abstrahlung durch beliebige Ladungsverteilungen	120
5.3.1	Die Helmholtz-Gleichung; Monopolstrahlung	120
5.3.2	Multipolstrahlung in kartesischen Koordinaten	122
5.3.3	* Multipolstrahlung in Kugelkoordinaten	124
6	Spezielle Relativitätstheorie	127
6.1	Lorentztransformationen	127
6.1.1	Einstein'sche Postulate	127
6.1.2	Herleitung der Lorentztransformation	129
6.1.3	Konsequenzen	132
6.2	Vierervektor-Formalismus	135
6.2.1	Vierervektor und -tensor-Formalismus, Minkowski-Raum	135
6.2.2	Relativistische Energie und Impuls	141
6.2.3	* Klassifizierung von Lorentztransformationen	143
6.3	Manifest kovariante Formulierung der Elektrodynamik	147
6.3.1	Stromdichten und Felder	147
6.3.2	Potentiale	150
6.3.3	* Lorentzkraft und Energie-Impuls-Tensor	151
6.3.4	Lorentztransformation der Felder; Dopplereffekt; Invarianten	153

7	Lagrange- und Hamiltonformalismus in der Elektrodynamik	158
7.1	Bewegtes Punktteilchen	158
7.1.1	Freie relativistische Bewegung	159
7.1.2	Nichtrelativistisch bewegte Punktladung im elektromagnetischen Feld	160
7.1.3	Relativistisch bewegte Punktladung im elektromagnetischen Feld und kontinuierliche Verteilungen	162
7.1.4	* Kovariante Formulierung	164
7.2	* Das elektromagnetische Feld	166
7.2.1	Klassische Formulierung	166
7.2.2	Kovariante Formulierung	170
8	Zusammenfassung	171
A	Mathematisches Handwerkszeug	176
A.1	Vektorrechnung und -analysis	176
A.1.1	Grundlagen der Vektorrechnung	176
A.1.2	Definition der Vektor-Differentialoperatoren	177
A.1.3	Rechenregeln	178
A.1.4	Differentialoperatoren in Zylinder- und Kugelkoordinaten	178
A.2	Wegunabhängigkeit von Integralen; Potentiale	180
A.3	Die Sätze von Gauß und Stokes	182
A.3.1	Der Satz von Gauß	182
A.3.2	Der Satz von Stokes	182
A.3.3	Der Green'sche Satz	183
A.4	Die Delta-, „Funktion“	183
A.4.1	Distributionen	183
A.4.2	Die Delta-Distribution/-Funktion: Definition	184
A.4.3	Rechenregeln	187
A.5	* Ein wenig Funktionentheorie; Der Residuensatz	189
A.5.1	Analytische Funktionen	189
A.5.2	Cauchy'scher Integralsatz und -formel	190
A.5.3	Der Residuensatz	193
B	Ableitung der Maxwellgleichungen aus den Beobachtungen	197
B.1	Elektrizität; Coulombgesetz; Einheiten I	197
B.2	Magnetismus; Ströme; Einheiten II	201
B.3	Magnetische Monopole	204
B.4	Induktion	205
B.5	Maxwell'scher Verschiebungsstrom	206
B.6	Ladungserhaltung und Kraftgesetz	208
C	Differentielle Formulierung der Maxwell'schen Gleichungen im Vakuum	210
C.1	Kontinuitätsgleichung	210
C.2	Maxwell'sche Gleichungen im Vakuum	212
C.3	Kraftgesetz	213

Kapitel 1

Einleitung

Dieses Skript entstand aufgrund einer (für mich) sehr schlechten Vorlesung über Theoretische Elektrodynamik:

- Konzepte und Herleitungen wurden nicht motiviert („wozu ist das jetzt gut, was macht man damit“), sondern einfach hingeknallt, fielen vom Himmel
- Wichtige Formeln und Sachverhalte wurden nicht extra betont (eingerahmt), sondern gingen im allgemeinen Formelwirrwarr unter.
- Die Vorlesung bestand praktisch nur darin, daß Formeln ineinander umgeformt wurden, fast ohne erklärende Sätze/Worte.
- Auf dem Gebiet der mathematischen Werkzeuge wurde zuviel vorausgesetzt, teilweise wurden wichtige, schwer verständliche Konzepte „im Vorübergehen“ eingeführt, ohne sie näher zu erklären.
- Es wurde kein Wort über die verschiedenen Einheitensystem verloren, die in Gebrauch sind, sondern einfach stur mit dem Gauß'schen System (das zu diesem Zeitpunkt allen unbekannt war) drauflosgerechnet.

Schon während der Vorlesung habe ich mich ziemlich über sie aufgeregt, aber zähneknirschend durchgehalten. Als ich dann Theo II für's Diplom lernte, arbeitete ich meine Vorlesungsmitschriebe nochmals durch und benötigte drei Anläufe und diverse Bücher, bis ich endlich überall verstanden hatte, was das alles heißen soll. Manche Übungsaufgaben zu dieser Vorlesung kann ich bis heute nicht lösen...

Irgendwann während dem Lernen auf's Diplom entschloß ich mich dann, mir die wichtigsten Punkte einfach selbst noch mal rauszusuchen und aufzuschreiben (das waren damals primär die Energie- und Impulserhaltung). Im Laufe der Zeit schrieb ich mir dann immer mehr auf (war teilweise schlicht und einfach nötig, aber andererseits hat es auch oft Spaß gemacht, sich einfach mal was noch mal sauber herzuleiten), und irgendwann während der Diplomarbeit kam dann der Gedanke auf: „Wenn du das sowieso schon alles (für dich) verständlich aufschreibst - warum dann nicht auch andere davon profitieren lassen?“ (Die Aufschriebe kamen meiner Lerngruppe für's Diplom auch schon zugute.)

Also fing ich an, das ganze bis dahin Geschriebene erst mal zu texen - meine eigene Handschrift ist kaum lesbar ;-). Und da kam so viel dabei zusammen (ca. 30 Seiten), und es gab immer noch so viel Unklares in meinen Theo II - Aufschrieben, daß ich mich schließlich entschloß, doch gleich ein Skript zur kompletten Vorlesung daraus zu machen.

Das ganze zog sich etwa über eineinhalb Jahre hin und wurde weit länger, als ich je gedacht hätte. Aber schließlich und endlich wurde ich dann doch noch fertig (nach mehreren Anläufen), und das Resultat seht ihr nun vor euch. Ich bin mir bewußt, daß auch dieses Skript sicher alles andere als perfekt ist und noch sicherer von Rechtschreib- und anderen Fehlern überquillt, aber ich hoffe, daß es doch eine Hilfe sein kann - sowohl beim Verstehen der Vorlesung, beim Bearbeiten der Übungsaufgaben als auch beim Lernen auf's Diplom.

Zunächst mal die positiven Punkte:

- Ich habe versucht, die wesentlichen Konzepte zusammenzufassen, auch auf trivial scheinende Kleinigkeiten einzugehen und hin und wieder auch mal interessante Ausblicke zu geben, ohne den Stoff allzusehr anschwellen zu lassen (na ja - letzteres ist wohl nicht so gut gelungen).
- Wichtige Formeln sind eingerahmt, wichtige Sachverhalte und Fachausdrücke *kursiv* hervorgehoben, und im letzten Kapitel (Zusammenfassung) findet man noch mal eine Übersicht, was besonders wichtig ist (für's Leben und für die Prüfung).
- Begriffe, die nicht Standard sind, sondern meine eigene Erfindung, oder die etwas schwammig definiert sind, sind dagegen in Anführungszeichen „,“ gesetzt.
- Abschnitte, die nicht so wichtig sind und (teilweise) auch übersprungen werden können, sind mit einem Sternchen * markiert. Zumindest die Ergebnisse dieser Abschnitte sollte man sich aber mal anschauen, auch wenn man die Rechnungen nicht unbedingt kapiert.
- Bei den Herleitungen habe ich mich bemüht, zu motivieren, warum man das so macht und worauf man hinaus will. Dabei habe ich immer versucht, einen Mittelweg zwischen anschaulicher (?) Argumentation und strenger (?) mathematischer (???) Herleitung zu finden.
- Die mathematischen Handwerkszeuge, die benutzt werden, findet man im Anhang A zusammengestellt (bis auf Differentialrechnung in einer Dimension, das Auswerten von mehrdimensionalen Integralen, komplexe Zahlen und die Fourier-Entwicklung - das setze ich dann doch voraus).
- In den Anhängen B und C findet man einen kurzen Abriss, wo die Maxwellgleichungen überhaupt herkommen, Bemerkungen über mögliche Einheitensysteme und eine Motivation und Erklärung der differentiellen/ lokalen Formulierung der Maxwell'schen (und anderer) Gleichungen.

Es gibt aber natürlich auch genügend Schwachpunkte:

- Die Stoffauswahl erfolgte teilweise nach persönlichem Geschmack - es kann also sein, daß Dinge, auf die manche Professoren Wert legen, nicht vorkommen, dafür dann aber andere Dinge zu ausführlich dargestellt sind.
- Die Erklärungen und Motivationen stammen zum grössten Teil von mir selbst - so, wie sie hier dargestellt werden, habe ich mir damals die Konzepte klargemacht. Es kann gut sein, daß andere Leute damit gar nichts anfangen können, sondern daß sie einen völlig anderen Zugang zum Stoff brauchen, um ihn zu verstehen.
- Manche Sachen wusste ich auch nicht so genau und habe deshalb stellenweise Abschnitte aus Büchern (mit kleinen persönlichen Änderungen) übernommen (es wird meist an der entsprechenden Stelle darauf hingewiesen).
- Es sind sehr wenig Beispiele und Skizzen und keine Aufgaben enthalten.
- Da dies die erste Auflage ist, wimmelt es sicher noch von allen möglichen Fehlern (trotz Beta-Test).
- Meine Notationen sind nicht immer einheitlich (Beispiel: für Fläche mal A , mal F) und teilweise auch von mir persönlich eingeführt (und deshalb in keinem Lehrbuch zu finden) - zum Beispiel das dyadische Produkt.

Trotzdem hoffe ich, daß dieses Skript für manche StudentInnen eine Hilfe sein wird, die vielleicht (wie ich) an der Elektrodynamik zu verzweifeln drohen.

Zum Schluß noch eine Übersicht über den Inhalt dieses Skripts und den (hoffentlich vorhandenen) „roten Faden“:

- Ich gehe im ganzen Skript davon aus, daß die Maxwell-Gleichungen im Vakuum (in integraler und in differentieller Form) bekannt sind. Ihre Herleitung aus den Beobachtungen und andere Voraussetzungen, sowohl mathematischer als auch physikalischer Natur, findet man in den Anhängen. Im Text wird auf sie mittels der römischen Zahlen (I) bis (IV) verwiesen.
- Das erste Kapitel ist diese Einleitung - die übrigens erst kurz vor Schluß entstand.
- Im zweiten Kapitel beschäftigen wir uns ('tschuldigung: ich mich) mit statischen Feldern im Vakuum, also Feldern, die sich zeitlich nicht ändern. Am Beispiel des elektrischen Feldes, das etwas einfacher zu behandeln ist als das magnetische, werden wichtige Konzepte wie Potential, Eichung, Green'sche Funktion und Multipolentwicklung eingeführt. Das magnetische Feld wird dann um einiges kürzer abgehandelt, da es viele Parallelen zum elektrischen gibt. Am Schluß findet sich noch ein Sternchen-Kapitel über Dipole, die für meinen Geschmack in Standard-Lehrbüchern oft zu kurz kommen.
- Das dritte Kapitel geht dann zu Feldern in Materie über - das Teilgebiet der Elektrodynamik, das mir persönlich am meisten verhaßt ist wegen der

zahlreichen dort nötigen Näherungen und der Unklarheit der Begriffe (ich hoffe, davon merkt man nicht allzu viel). Wieder wird zunächst das (statische) elektrische Feld betrachtet und nach einer Herleitung der zugehörigen Maxwellgleichungen in Materie auch auf das Verhalten an Grenzflächen eingegangen (mit einem „hübschen“ Beispiel abgerundet). Dasselbe Programm wird dann für das magnetische Feld durchgezogen, mit einem zusätzlichen Abschnitt über Ferromagnetismus. Schließlich werden die (statischen) Maxwell-Gleichungen in Materie nochmals zusammengefasst und auf den dynamischen Fall erweitert. Der vorletzte Teilabschnitt beschäftigt sich dann mit technischen Anwendungen: Stromkreise und speziell die besonderen Eigenschaften von Spulen und Kondensatoren; der letzte geht auf eine (technisch lästige) Eigenschaft von Wechselströmen ein: den Skinneffekt.

- Im vierten Kapitel wird's dann (für mich) allmählich interessant: Die Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen wird untersucht. Zunächst wird die Wellengleichung im Vakuum und in Materie hergeleitet und auf einige spezielle Eigenschaften der Wellen eingegangen. Es folgt ein Abschnitt über die technisch wichtigen Hohlleiter. Dann wird die Brechung elektromagnetischer Wellen behandelt, und den Abschluss bildet ein Abschnitt, der auf etwas abstraktere Dinge wie die Energie und den Impuls (und deren Erhaltung) von elektromagnetischen Wellen (oder allgemein Feldern) eingeht. Dieser Abschnitt gehört zu meinen „Lieblingen“ - hat mir mit am meisten Spaß gemacht.
- Weiter geht's im fünften Kapitel mit einer allgemeinen Behandlung von Potentialen, Eichungen und Entkopplung der Gleichungen (auch das gefiel mir sehr gut!). Dies ist die Voraussetzung, um Abstrahlvorgänge zu behandeln - dafür braucht man nämlich eine besondere Art von Potentialen, die sogenannten Liénard-Wiechert-Potentiale, auf die im folgenden Abschnitt eingegangen wird. Dort findet man auch das Standardbeispiel einer schwingenden Punktladung. Der letzte Abschnitt dieses Kapitels wird dann wieder ziemlich mathematisch: Dort wird hergeleitet, wie man die Abstrahlung einer beliebigen, monochromatisch schwingenden Ladungsverteilung bestimmt.
- Die Elektrodynamik ist damit so ziemlich abgehandelt; im folgenden sechsten Kapitel geht es um die Konsequenzen der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit - also die Spezielle Relativitätstheorie. Im ersten Abschnitt erfolgt eine allgemeine Herleitung der Lorentztransformation, und die Konsequenzen werden dargestellt (da blicke ich selbst noch nicht richtig durch - kann man das überhaupt anschaulich verstehen?). Dann erfolgt der Übergang zum abstrakteren Vierervektor-Formalismus, der der Behandlung relativistischer Probleme besser angemessen ist. Hier wird auch die Herleitung der berühmten Formel $E = mc^2$ vorgeführt. Im letzten Abschnitt wird schließlich die Anwendung des Vierervektor-Formalismus auf die Elektrodynamik dargestellt (auch einer meiner Lieblings-Abschnitte).

- Das siebte Kapitel (hat mir am meisten Spaß gemacht) schließlich enthält die Anwendung des Lagrange- und Hamilton-Formalismus' auf die Elektrodynamik. Zunächst wird die Bewegung von Punktteilchen relativistisch und nichtrelativistisch, mit und ohne Feld, studiert, und der Unterschied zwischen kanonischem und kinetischem Impuls näher beleuchtet. Der zweite Abschnitt ist auf meinem eigenen Mist gewachsen und wird von keinem Lehrbuch unterstützt (die benutzen meist völlig andere Notationen und Rechenwege), ich hoffe aber trotzdem, daß man daraus sinnvolle Erkenntnisse gewinnen kann. Er enthält die Lagrange- und Hamiltonfunktion für das elektromagnetische Feld - braucht man sicher in der Elektrodynamik kaum, ist aber für die Quantenelektrodynamik extrem wichtig. Dieser Abschnitt ist also nur für Leute empfehlenswert, die sich für Quantenfeldtheorie interessieren.
- Den Abschluß bildet ein Kapitel, das noch mal zusammenfasst, was jetzt eigentlich besonders wichtig war und was man sich merken sollte.
- Die Anhänge enthalten, wie schon erwähnt, die Voraussetzungen. Im Anhang A findet man mathematische Tips und Tricks (eine Art Formelsammlung), aber teilweise auch mathematische Sätze und Herleitungen. Dies führt von einfacher Vektorrechnung über die Vektoranalysis, Integration von Vektorfelder einschließlich der Sätze von Gauß und Stokes, einen Abriß über die Delta-, „Funktion“ (Erklärung und Umgang mit) bis hin zu einer Einführung in die Funktionentheorie. Der Anhang B wendet sich einerseits an historisch Interessierte (oder allgemein Wißbegierige), die wissen wollen, wo die Maxwellgleichungen eigentlich herkommen, andererseits enthält er aber auch einen Vergleich zwischen dem SI- und dem Gauß'schen Einheitensystem (auf Heaviside-Lorentz konnte ich leider nicht auch noch eingehen). Anhang C erklärt schließlich, wie man auf solche Dinge wie die Kontinuitätsgleichung und andere lokale Formulierungen, einschließlich der Maxwellgleichungen in differentieller Form, kommt.

Kapitel 2

Statische Felder im Vakuum

2.1 Elektrostatik

In diesem Kapitel betrachten wir zunächst Probleme, in denen nur zeitlich unveränderliche elektrische Felder auftreten. Die Maxwellgleichungen lauten also:

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho \quad (2.1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0; \quad (2.2)$$

die Gleichungen (II) und (IV) sind hier unwichtig.

2.1.1 Skalarpotential, Eichung, Gauß'sches Gesetz

Aus der Wirbelfreiheit (2.2) folgt sofort, daß man ein Potential einführen kann: Es gibt eine Funktion $\Phi(\vec{r})$, so daß das elektrische Feld geschrieben werden kann als

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = -\operatorname{grad}\Phi(\vec{r})}. \quad (2.3)$$

Die Umkehrung dieser Relation ist

$$\boxed{\Phi(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}'}. \quad (2.4)$$

Die Funktion Φ ist (bis auf die Wahl des Punktes \vec{r}_0 - siehe unten) eindeutig definiert, ihr Wert hängt nicht davon ab, auf welchem Weg man von \vec{r}_0 nach \vec{r} geht. Die genauen Zusammenhänge zwischen Wegunabhängigkeit, Wirbelfreiheit und Potential werden im Anhang A.2 besprochen (und meist schon in der Vorlesung zur Theoretischen Mechanik behandelt).

Berücksichtigt man, daß die elektrische Feldstärke \vec{E} die Kraft \vec{F} auf eine Probeladung q angibt, so erhält man, daß die Funktion Φ die potentielle Energie (die man als Wegintegral über \vec{F} erhält) pro Probeladung q ist. Die Differenz zwischen den Potentialen an zwei verschiedenen Punkten gibt dann also die Spannung zwischen diesen Punkten an.

Setzt man 2.3 in die Quellengleichung ein, so ergibt sich:

$$\boxed{\Delta\Phi(\vec{r}) = -4\pi\rho(\vec{r})}, \quad (2.5)$$

die sogenannte *Poissongleichung*. Diese Differentialgleichung ist zwar nun von zweiter Ordnung, enthält aber nur skalare Größen und ist deshalb leichter lösbar als die Maxwellgleichung (I). Man sieht, daß $\Phi(\vec{r})$ nicht eindeutig ist: man kann eine beliebige, (räumlich!) konstante Funktion der Zeit zu Φ addieren, ohne dadurch die physikalisch beobachtbaren Größen (ρ , \vec{E} und damit auch Potentialdifferenzen) zu ändern. Dies ist ein Spezialfall der sogenannten *Eichtransformationen*, die wir später noch genauer betrachten werden. Durch Vorgabe von weiteren Bedingungen (z.B. Randbedingungen an Φ) kann diese Funktion (teilweise) fixiert werden; man sagt dann, man arbeite in einer speziellen *Eichung*. Konkreten Beispielen für solche Eichungen werden wir erst später begegnen (Abschnitt 5.1). Hier entspricht die Wahlfreiheit des Potentials einfach der Wahlfreiheit des „Ursprungs“ \vec{r}_0 in der Integraldarstellung (2.4).

Das Ziel soll nun zunächst sein, für eine vorgegebene Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ das Potential (bzw. das elektrische Feld) auszurechnen. Betrachte dafür zunächst den einfachsten Fall: eine Punktladung q am Ort \vec{r}_0 . Wir wissen, daß sich zwei Punktladungen q und Q an den Orten \vec{r}_0 bzw. \vec{r}_1 mit einer Kraft anziehen oder abstoßen, die durch das Coulomb'sche Gesetz gegeben ist:

$$\vec{F} = \frac{qQ}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_0|^2} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_0}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_0|} \quad (2.6)$$

Das elektrische Feld der Punktladung q am Ort \vec{r} ist also:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}, \quad (2.7)$$

und das Potential ergibt sich dann zu

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} + c(t) \quad (2.8)$$

mit einer prinzipiell beliebigen, aber räumlich konstanten Funktion $c(t)$. Wählt man als „Randbedingung“ nun die naheliegende Forderung $\Phi \rightarrow 0$ für $|\vec{r}| \rightarrow \infty$, dann folgt $c(t) = 0$. Mit dieser Wahl werden wir im folgenden praktisch immer arbeiten.

Die erste Verallgemeinerung hiervon ist, daß man N Punktladungen q_i , jeweils am Ort \vec{r}_i , hat. Da für die Kräfte das Superpositionsprinzip gilt und damit auch für die elektrischen Felder und die Potentiale, kann man die einzelnen Potentiale einfach aufaddieren:

$$\Phi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}. \quad (2.9)$$

Nun soll der Übergang von einer diskreten Ladungsverteilung zu einer kontinuierlichen vollzogen werden. Dazu ist es nützlich, sich zunächst die Ladungsdichte für eine diskrete Verteilung anzuschauen. Jede Punktladung ist an einem

Ort konzentriert - die Ladungsdichte ist also an einer Stelle \vec{r}_0 unendlich und an allen anderen Null. Außerdem muß das räumliche Integral über die Ladungsdichte wieder die Ladung q ergeben. Insgesamt ergibt sich also, daß die Ladungsdichte einer Punktladung durch eine (dreidimensionale) Deltafunktion, multipliziert mit der Ladung, dargestellt wird: $\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$. Für eine diskrete Ladungsverteilung aus N Punktladungen hat man also:

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i). \quad (2.10)$$

Das Potential kann dann geschrieben werden als:

$$\Phi(\vec{r}) = \int dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (2.11)$$

(Wenn man die Ladungsdichte (2.10) einsetzt und das Integral ausführt, erhält man wieder die vorherige Formel (2.9).)

Da man sich andererseits jede (kontinuierliche) Ladungsverteilung als aus (unendlich vielen) Punktladungen zusammengesetzt vorstellen kann, folgt, daß (2.11) für jede beliebige Ladungsverteilung gilt.

Man erhält schließlich für das elektrische Feld:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad}\Phi(\vec{r}) = \int dV' \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (2.12)$$

Das Problem, die Poissongleichung für eine vorgegebene Ladungsverteilung zu lösen, ist also auf das Ausrechnen eines Integrals zurückgeführt worden. Diese recht intuitiv-physikalische Herleitung kann auch mathematisch präzisiert werden; dies soll im nächsten Abschnitt vorgeführt werden.

Die Auswertung des Integrals in (2.11) kann im allgemeinen recht kompliziert werden. In Systemen mit hoher Symmetrie (beispielsweise Kugel- oder Zylinder-Symmetrie oder auch der Plattenkondensator) ist es oft einfacher, das Gauß'sche Gesetz (Integralform der ersten Maxwellgleichung)

$$\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{A} = 4\pi Q \quad (2.13)$$

zu verwenden, wobei Q die im Volumen V eingeschlossene Ladung ist.

Beispiel: Gegeben sei eine homogene geladene Kugel mit Radius R und Gesamtladung Q . Die Ladungsdichte ist dann:

$$\rho(r) = \rho_0 = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \quad (2.14)$$

für $r < R$ und 0 für $r > R$. Betrachte dann eine Kugelschale vom Radius r . Die eingeschlossene Ladung ist:

$$Q(r) = \int dV' \rho(\vec{r}') = \int_0^r dr' r'^2 \rho(r') \int d\Omega = \begin{cases} 4\pi \rho_0 \frac{1}{3} r^3 & = Q \frac{r^3}{R^3} & \text{für } r < R \\ 4\pi \rho_0 \frac{1}{3} R^3 & = Q & \text{für } r > R \end{cases} \quad (2.15)$$

Da die Ladungsverteilung kugelsymmetrisch ist, erwartet man, daß auch das elektrische Feld kugelsymmetrisch ist, also nur vom Radius abhängt, und radial nach außen zeigt:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r) \frac{\vec{r}}{r}. \quad (2.16)$$

Der Flächennormalenvektor einer Kugel ist: $d\vec{A} = \frac{\vec{r}}{r} dA = \frac{\vec{r}}{r} r^2 d\Omega$. Also erhält man für das Integral:

$$\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int E(r) \frac{\vec{r}}{r} \cdot \frac{\vec{r}}{r} r^2 d\Omega = 4\pi r^2 E(r). \quad (2.17)$$

Setzt man das Ergebnis für Q nun ins Gaußsche Gesetz ein, so ergibt sich schließlich:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r) \frac{\vec{r}}{r} = \frac{Q(r)}{4\pi r^2} \frac{\vec{r}}{r} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi R^3} \frac{\vec{r}}{r} & \text{für } r < R \\ \frac{Q}{4\pi r^2} \frac{\vec{r}}{r} & \text{für } r > R \end{cases}, \quad (2.18)$$

also steigt die Feldstärke im Inneren der Kugel linear mit dem Radius an, im Außenraum fällt sie quadratisch ab.

2.1.2 Green'sche Funktion - allgemein

Die Differentialgleichung (2.5) ist inhomogen - kann man eine allgemeine Lösung für sie angeben in Abhängigkeit von der vorgegebenen Funktion $\rho(\vec{r})$? Dieses Problem kann sogar noch allgemeiner formuliert werden: Gegeben sei ein linearer (!) Differentialoperator L ; wir suchen für eine vorgegebene Funktion $g(x)$ (physikalisch: *Quelle*; mathematisch: *Inhomogenität*) eine Lösung der Differentialgleichung

$$Lf(x) = g(x). \quad (2.19)$$

Betrachte dafür zunächst ein ähnliches Problem - eine inhomogene lineare Gleichung:

$$M\vec{a} = \vec{b} \iff \sum_j M_{ij} a_j = b_i, \quad (2.20)$$

wobei die Matrix M und der Vektor \vec{b} vorgegeben sind und der Vektor \vec{a} gesucht ist. Falls die Matrix invertierbar ist, d.h., es existiert M^{-1} mit

$$M^{-1}M = id_3 \iff \sum_k M_{ik}^{-1} M_{kj} = \delta_{ij}, \quad (2.21)$$

so kann die Lösung berechnet werden durch

$$\vec{a} = M^{-1}\vec{b} \iff a_i = \sum_j M_{ij}^{-1} b_j. \quad (2.22)$$

Eine Funktion kann man nun als einen (überabzählbar) unendlichdimensionalen Vektor auffassen: Statt eines Vektorindices i hat man die Variable x , statt der Komponenten a_i die Funktionswerte $f(x)$:

$$\begin{aligned} \vec{a} &\equiv (a_1, \dots, a_N) \\ f(x) &\equiv (\dots, f(x_0 - 2dx), f(x_0 - dx), f(x_0), f(x_0 + dx), f(x_0 + 2dx), \dots) \end{aligned} \quad (2.23)$$

mit beliebigem x_0 und infinitesimalem dx . (Einem Mathematiker sträuben sich zwar hier wahrscheinlich die Haare, aber für die Vorstellung hilft's.)

Summationen über den Vektorindex werden nun ersetzt durch Integrationen über die Variable. Matrizen (die zwei Indices haben) werden zu Funktionen von zwei Variablen, das Kronecker-Delta δ_{ij} wird zur Dirac'schen Deltafunktion $\delta(x - y)$.

Die Operation „Matrix mal Vektor“ entspricht dann also (vgl. (2.20):

$$g(x) = \int M(x, y)f(y)dy \quad (2.24)$$

Die neue Funktion $g(x)$ hängt also i. a. an jeder Stelle x von allen Werten der Funktion $f(y)$ ab. Differentialoperatoren D sind Spezialfälle hiervon - bei ihnen hängt die neue Funktion $D[f](x)$ nicht von allen Werten der alten Funktion $f(x)$ ab, sondern nur von den Werten an infinitesimal benachbarten Stellen. Die Analogie zur Matrix ist für Funktionen also entweder eine Funktion von zwei Variablen oder ein Differentialoperator; allgemein spricht man von einem Operator auf dem Raum der Funktionen.

Versuchen wir nun, die inhomogene Differentialgleichung genauso zu lösen wie die inhomogene Vektorgleichung. Die Matrix M entspricht hier dem Differentialoperator L ; der Umkehrmatrix M^{-1} muß ebenfalls ein Operator entsprechen. Wir suchen also zunächst den Umkehroperator zum Operator L ; nehme als Ansatz dafür eine Funktion $G(x, x')$, die dann folgende Gleichung erfüllen muß:

$$LG(x, x') = \delta(x - x'), \quad (2.25)$$

in Analogie zur Beziehung zwischen Matrix und inverser Matrix (2.21).

Diese gesuchte Funktion wird als *Green'sche Funktion* (zum Operator L) bezeichnet. Mit ihr kann man dann die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung schreiben als

$$f(x) = \int G(x, x')g(x')dx', \quad (2.26)$$

in Analogie zu (2.22). Prüfe dies einfach durch Einsetzen nach:

$$Lf(x) = L \int G(x, x')g(x')dx'. \quad (2.27)$$

Da der Differentialoperator als linear vorausgesetzt wurde (dies geht hier wesentlich ein!), kann man ihn in das Integral hineinziehen:

$$Lf(x) = \int LG(x, x')g(x')dx'. \quad (2.28)$$

Der Differentialoperator wirkt nur auf die Variable x , nicht auf x' , also nur auf $G(x, x')$ und nicht auf $g(x')$. Es ergibt sich dann:

$$Lf(x) = \int \delta(x - x')g(x')dx' = g(x) \quad (2.29)$$

nach Definition der Deltafunktion. Wie behauptet löst also (2.26) die inhomogene Differentialgleichung 2.19 - vorausgesetzt, die Green'sche Funktion erfüllt 2.25.

Übertrage nun diese abstrakten Überlegungen auf den konkreten Anwendungsfall: Die zu lösende Differentialgleichung ist die Poissongleichung

$$\Delta Phi = -4\pi\rho. \quad (2.30)$$

Der lineare Differentialoperator ist nun der Laplaceoperator Δ , die Quelle ist $-4\pi\rho$, und gesucht wird das Potential Φ . Verwende zur Lösung nun eine Greens-Funktion, die die folgende Gleichung erfüllt:

$$\boxed{\Delta G(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}').} \quad (2.31)$$

(Anmerkung: Die Notationen sind hier nicht einheitlich - manche Autoren setzen vor die Deltafunktion noch einen Faktor 4π , ein Minuszeichen oder auch beides. Die Green'sche Funktion ändert sich dann dementsprechend um diesen Faktor.) Bei bekannter Greens-Funktion ergibt sich dann das Potential durch Auswerten des Integrals

$$\boxed{\Phi(\vec{r}) = -4\pi \int G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') dV'.} \quad (2.32)$$

G soll im folgenden nun berechnet werden - dies kann man fast beliebig kompliziert machen.

Macht man zunächst den naheliegenden Ansatz, daß G wie die rechte Seite der Gleichung (2.31) auch nur von der Differenz $\vec{r} - \vec{r}'$ abhängen soll, so kann man die Gleichung vereinfachen zu

$$\Delta G(\vec{r}) = \delta(\vec{r}) \quad (2.33)$$

Setzt man außerdem an, daß G nur vom Radius abhängt, also nicht von der Richtung des Vektors $\vec{r} - \vec{r}'$ bzw. \vec{r} , so bleibt vom Laplace-Operator (in Kugelkoordinaten) nur der Radiusanteil, und man kann dann die Differentialgleichung einfach aufintegrieren:

$$\begin{aligned} \Delta G(r) &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} G(r) = \frac{\delta(r)}{4\pi r^2} \\ \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} G(r) &= \frac{\delta(r)}{4\pi} \\ r^2 \frac{\partial}{\partial r} G(r) &= \frac{1}{4\pi} \\ \frac{\partial}{\partial r} G(r) &= \frac{1}{4\pi r^2} \\ G(r) &= -\frac{1}{4\pi r} \end{aligned} \quad (2.34)$$

Dabei wurde benutzt, daß gilt: $\delta(\vec{r}) = \delta(r)/(4\pi r^2)$, wenn nur die Radiusabhängigkeit von \vec{r} interessiert.

Ersetzt man \vec{r} wiederum durch $\vec{r} - \vec{r}'$, so hat man also schließlich für die Green'sche Funktion zum Laplaceoperator:

$$\boxed{G(\vec{r}, \vec{r}') = G(|\vec{r} - \vec{r}'|) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.} \quad (2.35)$$

Die allgemeine Lösung der Poissongleichung wird damit:

$$\Phi(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'. \quad (2.36)$$

Dies ist genau das Ergebnis, daß wir auch schon im vorigen Abschnitt durch eine eher physikalische Argumentation hergeleitet haben.

Es scheint also, daß der ganze Aufwand und abstrakte Formalismus ziemlich unnötig war - was in diesem Fall eigentlich auch stimmt. Die Wichtigkeit dieser Rechnung liegt aber darin, daß sie nicht nur zur Lösung der Poissongleichung verwendet werden kann; mit Hilfe von Green'schen Funktionen kann man allgemein inhomogene lineare Differentialgleichungen lösen. Ein zusätzliches Beispiel ist der harmonische Oszillator mit beliebiger äußerer Kraft; in späteren Kapiteln werden uns weitere Beispiele begegnen.

In praktisch allen diesen Fällen ist eine Lösung nur mit Hilfe dieses (abstrakten) Formalismus möglich; die intuitive Herangehensweise führt dort nicht so einfach zum Ziel wie bei der Poissongleichung. Ein Beispiel dafür ist die Helmholtz-Gleichung, die im nächsten Abschnitt und auch in späteren Kapiteln noch Bedeutung haben wird.

2.1.3 * Berechnung der Green'schen Funktion

Auch ohne den Ansatz, daß G nur vom Abstand r abhängen sollte, ist die Differentialgleichung (2.33) lösbar; lösbar; dies erfordert allerdings einen „etwas“ grösseren mathematischen Aufwand und soll deshalb in diesem Abschnitt ausführlich dargestellt werden.

Zur Lösung der Differentialgleichung erinnern wir uns daran, daß die Fouriertransformierte der Delta-Funktion eine sehr einfache Form hat; außerdem wird durch Fouriertransformation die Ableitung der Greensfunktion einfach durch eine Multiplikation ersetzt. Setzt man also die Fouriertransformierten in die Differentialgleichung ein:

$$\Delta \frac{1}{(2\pi)^3} \int \tilde{G}(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3 k = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3 k, \quad (2.37)$$

so hat man für \tilde{G} die einfache Lösung

$$\tilde{G}(\vec{k}) = -\frac{1}{k^2} \quad (2.38)$$

und kann G berechnen durch

$$G(\vec{r}) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}}{k^2} d^3 k. \quad (2.39)$$

Dieses Integral ist allerdings nicht direkt berechenbar; betrachte statt dessen

$$G(\vec{r}) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{k^2 + k_0^2} d^3k \quad (2.40)$$

Man berechnet dann die Lösung der allgemeineren Differentialgleichung

$$(\Delta - k_0^2)G(\vec{r}) = \delta(\vec{r}); \quad (2.41)$$

diese Gleichung wird auch *Helmholtz-Gleichung* genannt. Sie tritt beispielsweise bei Abstrahlungsvorgängen auf (s. später), ebenso in der Quantenmechanik (führt auf die Lipmann-Schwinger-Gleichung), und auch das Potential der schwachen Wechselwirkung wird dadurch beschrieben. Für $k_0 \rightarrow 0$ geht sie in die Poissongleichung über.

Zur Berechnung des Integral gehe in Kugelkoordinaten über:

$$\begin{aligned} G(\vec{r}) &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{ikr \cos(\theta)}}{k^2 + k_0^2} k^2 dk d\cos(\theta) d\phi \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{e^{ikr \cos(\theta)}}{k^2 + k_0^2} k^2 dk d\cos(\theta) \\ &= -\frac{1}{ir(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{k^2 + k_0^2} k dk \\ &= -\frac{1}{ir(2\pi)^2} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix} x}{x^2 + (k_0 r)^2} dx \end{aligned} \quad (2.42)$$

Der Integrand hat zwei Pole auf der imaginären Achse bei $x = \pm ik_0 r$; außerdem ist das Integral wegen der enthaltenen e-Funktion komplexwertig. Nun kennen wir aber einen allgemeinen Satz, um Integrale in der komplexen Ebene mit Polstellen auszuwerten: den Residuensatz (siehe auch Anhang A.5). Er gilt für geschlossene Wege in der komplexen Ebene; hier haben wir aber nur eine Integration über die reelle Achse! Der Integrationsweg kann jedoch geschlossen werden: durch einen Halbkreis über oder unter der Achse, dessen Radius gegen unendlich geht. Der Wert des Integrals sollte durch diesen Halbkreis natürlich nicht verändert werden; er ist also so zu wählen, daß sein Beitrag gegen 0 geht.

Gehe also im obigen Integral von der reellen Integrationsvariable x zur komplexen z über. Der Integrand enthält dann einen Faktor e^{iz} - wählt man den Halbkreis oben, so hat z auf ihm immer einen positiven Imaginärteil. Man erhält also eine abfallende Exponentialfunktion, und wenn der Radius des Halbkreises gegen unendlich geht, so geht sein Beitrag zum Integral gegen 0. Damit erhält man dann unter Anwendung des Residuensatzes für das geschlossene Wegintegral:

$$\begin{aligned} G(\vec{r}) &= -\frac{1}{ir(2\pi)^2} \oint \frac{e^{iz} z}{z^2 + (k_0 r)^2} dz \\ &= -\frac{1}{2\pi r} \lim_{z \rightarrow ik_0 r} \left[\frac{e^{iz} z}{z^2 + (k_0 r)^2} (z - ik_0 r) \right] \\ &= -\frac{e^{-k_0 r}}{4\pi r}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Dies kann man als das Potential einer abgeschirmten Punktladung betrachten; Beispiel: Proton mit Elektron im s-Zustand - die nach außen sichtbare Ladung und damit das Potential fällt exponentiell mit dem Abstand ab.

Strebt nun k_0 gegen 0, so erhält man also schließlich für die Green'sche Funktion zum Laplaceoperator:

$$G(\vec{r}) = G(r) = -\frac{1}{4\pi r}, \quad (2.44)$$

in völliger Übereinstimmung mit unserem Ergebnis (2.35) im letzten Abschnitt.

Wiederum kann man argumentieren: Was soll der Aufwand, wenn's auch leichter geht? Und wiederum ist die Antwort: Hier geht's zwar leichter - aber im allgemeinen Fall braucht man diesen Formalismus, um die Lösung zu erhalten. Ein Beispiel hierzu wird im Kapitel über Abstrahlung von Wellen auftauchen: die sog. retardierte Greensfunktion.

2.1.4 Randwertprobleme

Bisher haben wir Probleme betrachtet, in denen außer der vorgegebenen Ladungsverteilung keine anderen Körper auftauchen. Sind solche Körper jedoch vorhanden, so werden im allgemeinen auf ihnen durch die vorgegebene Ladungsverteilung wiederum Ladungen induziert, und die obige Lösung (2.11) wird nicht mehr richtig sein. Diese zusätzlichen Ladungen können durch die Angabe von Randbedingungen berücksichtigt werden; diese sind von einem der beiden folgenden Typen:

1. Das Potential auf der Oberfläche der Körper ist vorgegeben. (Dirichlet'sche Randbedingung)
2. Die Ableitung des Potentials, also das elektrische Feld, senkrecht zur Oberfläche der Körper ist vorgegeben. (von Neumann'sche Randbedingung)

Beispielsweise bei einer Punktladung verlangt man normalerweise, daß ihr Potential im Unendlichen verschwinden soll, man hat also im Prinzip eine Dirichlet'sche Randbedingung: Das Potential auf dem (unendlich fernen) Rand soll 0 sein. Die oben berechnete Greensfunktion liefert in diesem Fall die richtige Lösung

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}. \quad (2.45)$$

Die von Neumann'sche Randbedingung lässt sich umformulieren; benutze dafür die integrale Form der 1. Maxwell'schen Gleichung:

$$\oint_{\partial V} d\vec{A} \cdot \vec{E} = 4\pi \int_V \rho \quad (2.46)$$

Integriert man über einen Zylinder vernachlässigbarer Dicke, der ein Stück der Randfläche enthält (s. Abb. 3.2), so wird der Beitrag zum Volumenintegral

über die Ladung im wesentlichen von der Oberflächenladungsdichte σ geliefert; man hat also:

$$\oint_{\partial V} \vec{n} \cdot \vec{E} dA = 4\pi \int dA \sigma, \quad (2.47)$$

wobei \vec{n} den Normalenvektor der Begrenzungsfläche bezeichnet und Benutzt man nun den Zusammenhang $\vec{E} = -\text{grad}\Phi$, so hat man also schließlich zwischen Potential und Flächenladungsdichte die Beziehung

$$\boxed{\vec{n} \cdot \text{grad}\Phi = E_{\perp, \text{innen}} - E_{\perp, \text{außen}} = -4\pi\sigma,} \quad (2.48)$$

d.h., die Angabe einer von Neumann'schen Randbedingung ist äquivalent zur Angabe der Flächenladungsdichte auf der Oberfläche.

Um Φ eindeutig festzulegen, genügt bereits die Angabe einer der beiden Randbedingungen, wie im folgenden gezeigt werden soll. Seien Φ_1 und Φ_2 beide Lösungen der Poissongleichung $\Delta\Phi_i = -4\pi\rho$; betrachte $\delta\Phi := \Phi_1 - \Phi_2$, also $\Delta\delta\Phi = 0$. Man hat dann unter Benutzung des Gauss'schen Satzes zur partiellen Integration:

$$\begin{aligned} \int_V \delta\Phi \Delta\delta\Phi dV &= 0 \\ &= \oint_{\partial V} d\vec{A} \cdot (\delta\Phi \text{grad}\delta\Phi) - \int_V (\text{grad}\delta\Phi)^2 dV \end{aligned} \quad (2.49)$$

Da das Oberflächenintegral in jedem Fall 0 ist, gleichgültig, ob man Dirichlet'sche oder von Neumann'sche Randbedingungen hat, ergibt sich also:

$$\text{grad}\delta\Phi = 0 \quad (2.50)$$

im gesamten betrachteten Integrationsvolumen, d.h. $\delta\Phi$ ist konstant im gesamten Volumen. Falls Dirichlet'sche Randbedingungen vorgegeben sind, so stimmen Φ_1 und Φ_2 auf einem Rand überein und damit dann auch im gesamten Raum; falls von Neumann'sche Randbedingungen vorgegeben sind, ist noch die Wahl einer additiven Konstante bzw. Funktion der Zeit frei - die Eichung ist nicht eindeutig festgelegt. Wie behauptet genügt also bereits die Angabe einer der Randbedingungen, um Φ festzulegen (bis auf eine additive Konstante).

Um Φ zu bestimmen, soll wiederum eine Green'sche Funktion verwendet werden. Die bereits berechnete gilt aber nur für den Fall ohne Randbedingungen - im allgemeinen wird sie eine andere Gestalt haben. Die Bedingung (2.31) soll aber weiterhin erfüllt bleiben; die einzig mögliche Änderung ist also die Addition einer Funktion F , die die *Laplace-Gleichung*

$$\Delta F(\vec{r}, \vec{r}') = 0, \quad (2.51)$$

im betrachteten Volumen V erfüllt. Die (verallgemeinerte) Green'sche Funktion ist dann

$$\boxed{G(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + F(\vec{r}, \vec{r}').} \quad (2.52)$$

Die Funktion F kann physikalisch folgendermaßen interpretiert werden: F löst die Laplace-Gleichung in V , kann also nur das Potential einer Ladungsverteilung sein, die sich außerhalb von V befindet. F bzw. G muß nun so gewählt werden, daß die gegebenen Randbedingungen erfüllt werden können (siehe weiter unten). Die Form und Stärke der Ladungsverteilung, die die Quelle für F ist, wird also von der Form und der Stärke der Ladung im Volumen V abhängen. Darauf basiert die Methode der sogenannten *Bildladungen* (siehe beispielsweise *Greiner, Elektrodynamik*).

Wie kann denn nun aber Φ berechnet werden, wenn die Randbedingungen vorgegeben sind? Gehe dafür aus von:

$$\Phi(\vec{r}) = \int_V \Phi(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') dV' = \int_V \Phi(\vec{r}') \Delta G(\vec{r}, \vec{r}') dV' \quad (2.53)$$

mit der neuen Greensfunktion G , und benutze dann den Green'schen Satz:

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}) &= \int_V G(\vec{r}, \vec{r}') \Delta \Phi(\vec{r}') dV' \\ &\quad + \oint_{\partial V} d\vec{A}' \cdot [\Phi(\vec{r}') \text{grad} G(\vec{r}, \vec{r}') - G(\vec{r}, \vec{r}') \text{grad} \Phi(\vec{r}')] \\ &= -4\pi \int_V G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') dV' + \oint_{\partial V} d\vec{A}' \cdot (\Phi(\vec{r}') \text{grad} G(\vec{r}, \vec{r}')) \\ &\quad + 4\pi \oint_{\partial V} G(\vec{r}, \vec{r}') \sigma(\vec{r}') dA', \end{aligned} \quad (2.54)$$

wobei die Poissongleichung und der Zusammenhang zwischen Potential und Flächenladungsdichte eingesetzt wurden. Im Vergleich zu (2.11) hat man also nun noch zusätzlich Oberflächen-Terme, die die Randbedingungen enthalten.

Wie oben gezeigt, genügt die Angabe einer Randbedingung, um Φ festzulegen. Die Formel enthält beide Bedingungen - allerdings mit einer bisher noch nicht eindeutig festgelegten Greensfunktion. Diese Wahlfreiheit kann man nun benutzen, um die nicht bekannten Bedingungen loszuwerden:

Dirichlet'sche Randbedingungen

Man kann an die Greensfunktion einfach die Bedingung stellen:

$$\boxed{G(\vec{r}, \vec{r}')|_{\vec{r}' \in \partial V} = 0,} \quad (2.55)$$

zusätzlich zur bekannten Gleichung (2.31). Damit ist G eindeutig festgelegt, und man erhält dann Φ als

$$\boxed{\Phi(\vec{r}) = -4\pi \int_V G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') dV' + \oint_{\partial V} d\vec{A}' \cdot \Phi(\vec{r}') \text{grad} G(\vec{r}, \vec{r}').} \quad (2.56)$$

ρ im Volumen und Φ auf den Oberflächen sind vorgegeben, G und damit auch $\text{grad} G$ kann berechnet werden; damit ist Φ nun also für jeden Punkt berechenbar.

von Neumann'sche Randbedingungen

Der naheliegende Ansatz wäre hier

$$\vec{n} \bullet \text{grad}G(\vec{r}, \vec{r}')|_{\vec{r}' \in \partial V} = 0; \quad (2.57)$$

dies kann jedoch nicht erfüllt werden, da immer gelten muß:

$$\oint_{\partial V} \vec{n} \bullet \text{grad}G(\vec{r}, \vec{r}') dA' = \oint_{\partial V} d\vec{F}' \bullet \text{grad}G(\vec{r}, \vec{r}') = \int_V \Delta G(\vec{r}, \vec{r}') dV' = 1. \quad (2.58)$$

Fordere stattdessen also zusätzlich zu (2.31):

$$\boxed{\vec{n} \bullet \text{grad}G(\vec{r}, \vec{r}')|_{\vec{r}' \in \partial V} = \frac{1}{A}}, \quad (2.59)$$

wobei A die Gesamtfläche des Randes ist. Wiederum ist G nun eindeutig bestimmt; Φ ist hier

$$\Phi(\vec{r}) = -4\pi \int_V G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') dV' + \frac{1}{A} \oint_{\partial V} \Phi(\vec{r}') dA' + 4\pi \oint_{\partial V} G(\vec{r}, \vec{r}') \sigma(\vec{r}') dA', \quad (2.60)$$

Der zweite Term ist aber gerade der Mittelwert des Potentials auf der gesamten Randfläche; da dies nur eine additive Konstante ist, kann dieser Term einfach weggelassen werden:

$$\Phi(\vec{r}) = -4\pi \int_V G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') dV' + 4\pi \oint_{\partial V} dA' G(\vec{r}, \vec{r}') \sigma(\vec{r}'). \quad (2.61)$$

Das betrachtete Volumen ist der Außenraum der vorhandenen Körper; der Oberflächen-Normalenvektor zeigt von diesem Volumen aus gesehen nach außen, also in die Körper hinein. Wählt man den Normalenvektor bei der Integration so, daß er wie üblich aus den Körpern heraus zeigt, so muß man also das Vorzeichen umdrehen; schreibe dann beim Oberflächenintegral ∂K statt ∂V , um anzudeuten, daß der Normalenvektor nun von den Körpern aus gesehen nach außen zeigen soll:

$$\boxed{\Phi(\vec{r}) = -4\pi \int_V G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') dV' - 4\pi \oint_{\partial K} dA' G(\vec{r}, \vec{r}') \sigma(\vec{r}')}. \quad (2.62)$$

ρ im Volumen und σ (bzw. $\text{grad}\Phi$) auf den Oberflächen sind gegeben, G kann berechnet werden - damit ist wiederum Φ in jedem Punkt berechenbar.

Alle möglichen Probleme mit Randbedingungen sind damit im Prinzip gelöst. In allen folgenden Kapiteln werden wir uns die Sache aber einfacher machen und nur Probleme ohne Randbedingungen (bzw. nur mit der Randbedingung, daß das Potential im Unendlichen verschwinden soll) betrachten.

2.2 Multipolentwicklung

2.2.1 Kartesische Multipole

Bei vorgegebener Ladungsverteilung kann man das Potential und damit die elektrische Feldstärke an jedem Punkt \vec{r} mittels

$$\Phi(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (2.63)$$

ausrechnen. In vielen Anwendungen interessiert aber nur das qualitative Verhalten für große Abstände; beispielsweise bei einer Punktladung q am Ort \vec{r}_0 :

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \approx \frac{q}{r} \quad (2.64)$$

für große $r = |\vec{r}|$. Im allgemeinen sieht man dem Potential die Abhängigkeit vom Radius aber nicht so direkt an; betrachte z.B. das Potential zweier entgegengesetzt gleich großer Ladungen im Abstand \vec{a} :

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}) &= \frac{-q}{|\vec{r}|} + \frac{q}{|\vec{r} - \vec{a}|} = \frac{-q}{r} + \frac{q}{\sqrt{r^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{a} + a^2}} \\ &= \frac{-q}{r} + \frac{q}{r} \left(\sqrt{1 - 2\frac{\vec{r} \cdot \vec{a}}{r^2} + \frac{a^2}{r^2}} \right)^{-1} \approx \frac{-q}{r} + \frac{q}{r} \left(1 + \frac{\vec{r} \cdot \vec{a}}{r^2} \right) \\ &= \frac{q\vec{a} \cdot \vec{r}}{r^3}, \end{aligned} \quad (2.65)$$

das Potential verhält sich für große Abstände wie r^{-2} , obwohl es sich aus den Potentialen der beiden Punktladungen zusammensetzt, die jeweils mit r^{-1} gehen.

Kann man solche Aussagen verallgemeinern? Betrachte dafür wiederum den exakten Ausdruck für das Potential

$$\Phi(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (2.66)$$

und entwickle nun den Nenner unter dem Integral für große Abstände $r \gg r'$:

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}) &= \frac{1}{r} \int \rho(\vec{r}') \left(\sqrt{1 - 2\frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}} \right)^{-1} dV' \\ &= \int \rho(\vec{r}') \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r} + \frac{1}{2} \frac{1}{r^3} \left(3 \left(\frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r} \right)^2 - r'^2 \right) + \dots \right) dV' \\ &= \int \frac{\rho(\vec{r}')}{r} \left(1 + \frac{r'}{r} \cos \alpha + \frac{1}{2} \left(\frac{r'}{r} \right)^2 (3 \cos^2 \alpha - 1) + \dots \right) dV', \end{aligned} \quad (2.67)$$

wobei α den Winkel zwischen \vec{r} und \vec{r}' bezeichnet. Man hat also nun, wie gewünscht, eine Entwicklung nach Potenzen von $1/r$ - allerdings nur die ersten drei Ordnungen.

Für die einzelnen Terme kann man noch Abkürzungen einführen; zunächst ist

$$q = \int \rho(\vec{r}') dV' \quad (2.68)$$

die *Gesamtladung*; außerdem definiere durch

$$\boxed{\vec{d} := \int \rho(\vec{r}') \vec{r}' dV'} \quad (2.69)$$

das sogenannte *Dipolmoment* der Ladungsverteilung.

Den dritten Term kann man folgendermaßen umschreiben:

$$\begin{aligned} 3(\vec{r}' \bullet \vec{r}')^2 - r'^2 r^2 &= 3 \left(\sum_{i=1}^3 x'_i x_i \right)^2 - r'^2 \sum_{i=1}^3 x_i^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^3 3x'_i x_i x'_j x_j - r'^2 \sum_{i,j=1}^3 \delta_{ij} x_i x_j \\ &= \sum_{i,j=1}^3 (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) x_i x_j \end{aligned} \quad (2.70)$$

Definiert man also durch

$$\boxed{Q_{ij} := \int \rho(\vec{r}') (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) dV'} \quad (2.71)$$

das sogenannte *Quadrupolmoment*, so kann man schließlich schreiben:

$$\boxed{\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{r} + \frac{\vec{r}}{r} \bullet \frac{\vec{d}}{r^2} + \frac{1}{2} \frac{\vec{r}}{r} \bullet \frac{Q}{r^3} \frac{\vec{r}}{r} + \dots,} \quad (2.72)$$

wobei im letzten Term $Q \frac{\vec{r}}{r}$ als Multiplikation Matrix mal Vektor aufzufassen ist.

Q ist nach Definition ein Tensor zweiter Stufe. Er ist symmetrisch, wie man sofort an der Definition sieht, und spurfrei, da $\sum_{i=1}^3 (3x'_i x'_i - r'^2) = 0$ - er hat also nur noch $6 - 1 = 5$ unabhängige Einträge. Der Dipolmoment-Vektor hat drei unabhängige Komponenten, und die Ladung natürlich eine. Betrachtet man die Entwicklung von Φ als eine Entwicklung nach dem Funktionensystem r^{-l-1} (siehe unten), so gehört (bis zu dieser Ordnung der Entwicklung) zu jedem Term l also ein Tensor l -ter Stufe mit $2l + 1$ unabhängigen Einträgen.

In den nächsten beiden Abschnitten werden wir nun versuchen, die bisherigen Aussagen zu verallgemeinern und die Entwicklung auf beliebige Ordnungen auszudehnen. Dies wird leider etwas knifflig; in kartesischen Koordinaten (wie bisher) kommen wir nicht weiter - schon der Ausdruck für das Quadrupolmoment sah ja recht seltsam aus. Höhere Terme (und damit höhere *Multipole*) kann man besser ausrechnen, wenn man in Kugelkoordinaten übergeht - schließlich wollen wir ja auch das Potential in Abhängigkeit von r haben!

Zunächst müssen wir allerdings noch ein wenig auf die allgemeine Theorie der Entwicklung nach vollständigen Funktionensystemen eingehen und uns eine dem Problem angemessene Menge von Funktionen zusammenbasteln, bevor wir schließlich konkrete Formeln für die einzelnen Multipole und für das Potential angeben können. Darum soll es im nächsten Abschnitt gehen.

2.2.2 * Vollständige Funktionensysteme; die Kugelflächenfunktionen

Wir haben das Potential nach Potenzen von $1/r$ entwickelt - ist dies denn überhaupt vernünftig? Konvergiert diese Reihe denn unbedingt gegen die Funktion, die wir entwickelt haben? Dies ist tatsächlich der Fall, wie aus einem sehr allgemeinen mathematischen Satz folgt. Dafür benötigen wir allerdings zunächst folgende Definition: Ein linearer Differentialoperator L heißt *selbstadjungiert*, falls für beliebige, genügend schnell abfallende Funktionen gilt:

$$\int f(x) (Lg(x)) dx = \int (Lf(x)) g(x) dx \quad (2.73)$$

Dieser Operator habe Eigenfunktionen $e_n(x)$: $Le_n(x) = l_n e_n(x)$. Dann gilt folgender Satz: Die Eigenfunktionen $e_n(x)$ sind vollständig, d.h., man kann eine beliebige Funktion nach dieser Menge von Funktionen entwickeln, und die Entwicklung konvergiert dann gegen die ursprüngliche Funktion:

$$a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n(x) \quad (2.74)$$

Die Koeffizienten a_n erhält man dabei durch:

$$a_n = \int e_n^*(x) a(x) dx \quad (2.75)$$

Betrachtet man eine Funktion wiederum als einen unendlichdimensionalen Vektor, so kann man die Analogie zu endlichen Vektoren wieder leicht herstellen: Jeder N -dimensionale Vektor \vec{a} kann nach einem beliebigen Basissystem \vec{n}_i entwickelt werden:

$$\vec{a} = \sum_{n=1}^N a_n \vec{e}_n, \quad (2.76)$$

wobei man die Koeffizienten aus

$$a_n = \vec{a} \bullet \vec{e}_n \quad (2.77)$$

erhält. Die Analogie zu selbstadjungierten Differentialoperatoren sind symmetrische bzw. hermitesche Matrizen: Bei diesen ist es ja auch so, daß die Eigenvektoren eine orthonormale Basis des Vektorraums bilden und man jeden Vektor nach ihnen entwickeln kann.

Ein bekanntes Beispiel für die Entwicklung nach vollständigen Funktionensystemen sind Fourierreihen: Die Funktionen, nach denen entwickelt wird, sind $\sqrt{\pi}^{-1/2} \sin(nx)$, $\sqrt{\pi}^{-1/2} \cos(nx)$ ($n \neq 0$) und $\sqrt{2\pi}^{-1/2}$; sie sind Eigenfunktionen zum Operator $-\frac{\partial^2}{\partial x^2}$. Wie man leicht nachprüfen kann, ist dieser Operator selbstadjungiert (das Integral läuft dabei von 0 bis 2π). Die Fourierreihe einer 2π -periodischen Funktion lautet:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} + b_n \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}} \right) + \frac{b_0}{\sqrt{2\pi}} \quad (2.78)$$

mit

$$a_n = \int_0^{2\pi} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} f(x) dx; \quad b_n = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}} f(x) dx \quad (2.79)$$

Diese Funktionen sind außerdem orthogonal und normiert:

$$\int \frac{\sin(nx) \sin(mx)}{\pi} = \int \frac{\cos(nx) \cos(mx)}{\pi} = \delta_{nm}; \quad \int \frac{\sin(nx) \cos(mx)}{\pi} = 0 \quad (2.80)$$

Im dreidimensionalen Raum ist der Laplaceoperator in kartesischen Koordinaten:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.81)$$

Setzt man allgemein eine Eigenfunktion zu diesem Operator an als:

$$\Delta F(x, y, z) = \Delta(f(x)g(y)h(z)) = c \cdot F(x, y, z) = c \cdot f(x)g(y)h(z), \quad (2.82)$$

so sieht man nach Separation der Variablen, daß sich für die Funktionen f , g und h wiederum als Lösungen trigonometrische Funktionen ergeben; man kann also jede Funktion, die von den drei kartesischen Koordinaten abhängt, in ein vollständiges Funktionensystem entwickeln, das aus Produkten von drei beliebigen trigonometrischen Funktionen besteht.

Die Funktionen, nach denen wir im letzten Abschnitt entwickelt haben, lassen sich schreiben als r^{-l-1} mit $l \in \mathbf{N}$; sie sind Eigenfunktionen des selbstadjungierten Operators $r^2 \Delta_r$ zum Eigenwert $l(l+1)$, wobei Δ_r der Radialanteil des Laplace-Operators in Kugelkoordinaten ist (siehe Anhang A.1.4 für die expliziten Ausdrücke):

$$\Delta = \Delta_r + \Delta_\Omega. \quad (2.83)$$

Es gibt noch eine zweite Gruppe von Eigenfunktionen zu diesem Operator:

$$r^2 \Delta_r r^l = l(l+1)r^l \quad (2.84)$$

Da wir aber an Lösungen interessiert sind, die im Unendlichen verschwinden, interessieren uns diese Eigenfunktionen nicht.

Üblicher in der Physik ist sowieso eine Entwicklung nach Eigenfunktionen von $r^2 \Delta_\Omega$:

$$\boxed{r^2 \Delta_\Omega Y_l(\theta, \varphi) = -l(l+1)Y_l(\theta, \varphi)} \quad (2.85)$$

Man hat also:

$$\begin{aligned} r^2 \Delta \left(r^{-l-1} Y_l(\theta, \varphi) \right) &= (r^2 \Delta_r r^{-l-1}) Y_l(\theta, \varphi) + r^{-l-1} (r^2 \Delta_\Omega Y_l(\theta, \varphi)) \\ &= l(l+1) r^{-l-1} Y_l(\theta, \varphi) - r^{-l-1} l(l+1) Y_l(\theta, \varphi) = 0, \end{aligned}$$

das heißt, die Lösung der Laplacegleichung $\Delta \Phi = 0$ lässt sich immer folgendermaßen entwickeln:

$$\Phi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l \frac{Y_l(\theta, \varphi)}{r^{l+1}} \quad (2.86)$$

mit Koeffizienten a_l .

Die Funktionen Y_l heißen *Kugel(flächen)funktionen* bzw. *spherical harmonics*. Sie sind in der Physik sehr wichtig und treten oft auf, beispielsweise bei der Abstrahlung von Wellen (Stichwort Dipolstrahlung in der Elektrodynamik bzw. Quadrupolstrahlung bei Gravitationswellen); außerdem sind sie auch Eigenfunktionen zum Drehimpulsoperator in der Quantenmechanik und treten deshalb bei der Beschreibung des Wasserstoff-Atoms auf (sie geben die Form der Orbitale an). Daher sollen sie im folgenden etwas näher betrachtet werden.

Zunächst kann man für sie den folgenden Separationsansatz machen:

$$Y_l(\theta, \varphi) = P_l(\theta)E_l(\varphi) \quad (2.87)$$

Eingesetzt in die Differential-Eigenwertgleichung (2.85) hat man dann

$$\left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) P_l(\theta)E_l(\varphi) = -l(l+1)P_l(\theta)E_l(\varphi), \quad (2.88)$$

also

$$\left(\frac{\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial P_l(\theta)}{\partial \theta}}{P_l(\theta)} + l(l+1) \sin^2 \theta \right) + \frac{\frac{\partial^2 E_l(\varphi)}{\partial \varphi^2}}{E_l(\varphi)} = 0. \quad (2.89)$$

Im ersten Term der Gleichung tritt nur θ auf, im zweiten nur φ . Die Summe der beiden Terme kann also nur dann 0 ergeben, wenn jeweils beide Terme für sich weder von θ noch von φ abhängen, also konstant sind:

$$\left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial P_l(\theta)}{\partial \theta} + l(l+1) \sin^2 \theta \right) = m^2 P_l(\theta) \quad (2.90)$$

$$\frac{\partial^2 E_l(\varphi)}{\partial \varphi^2} = -m^2 E_l(\varphi) \quad (2.91)$$

mit $m \in \mathbf{C}$. Die gesuchten Funktionen Y_l sind also durch Angabe von l noch nicht eindeutig festgelegt, sondern hängen noch von einem weiteren Parameter m ab: $Y_l = Y_{lm}(\theta, \varphi)$. (vgl. Entartung in der Quantenmechanik).

Die Lösung der zweiten Gleichung kann man sofort angeben:

$$E_{lm}(\varphi) = N_{lm} e^{im\varphi} \quad (2.92)$$

mit einer noch nicht festgelegten Normierungskonstanten N_{lm} . Da die Lösungsfunktionen bei einer Drehung unter 2π invariant sein müssen, $Y_{lm}(\theta, \varphi + 2\pi) = Y_{lm}(\theta, \varphi)$, muß gelten: $m \in \mathbf{Z}$.

Die erste Gleichung wird nun:

$$\left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) P_{lm}(\theta) = 0 \quad (2.93)$$

Substituiert man $x := \cos \theta$, so erhält man für $m = 0$ die sogenannte Legendre-Differentialgleichung

$$\left((1-x^2) \frac{\partial}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial}{\partial x} + l(l+1) \right) P_{l0}(x) = 0 \quad (2.94)$$

und für $m \neq 0$ die verallgemeinerte Legendre-Differentialgleichung

$$\left((1-x^2) \frac{\partial}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial}{\partial x} + l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right) P_{lm}(x) = 0 \quad (2.95)$$

Beschäftigen wir uns zunächst mit der Gleichung für $m = 0$. Für die gesuchte Funktion $P_l := P_{l0}$ kann man einen Potenzreihenansatz machen:

$$P_l(x) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i x^i \quad (2.96)$$

Eingesetzt in die Differentialgleichung hat man dann

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} ((1-x^2)i(i-1)p_i x^{i-2} - 2xip_i x^{i-1} + l(l+1)p_i x^i) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{\infty} p_i x^i (l(l+1) - i(i-1) - 2i) + \sum_{i=2}^{\infty} i(i-1)p_i x^{i-2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{\infty} [(l(l+1) - i(i+1))p_i + (i+1)(i+2)p_{i+2}] x^i &= 0 \end{aligned} \quad (2.97)$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der Funktionen x^i muß jedes Summenglied einzeln 0 sein, also hat man:

$$p_{i+2} = p_i \frac{i(i+1) - l(l+1)}{(i+1)(i+2)} \quad (2.98)$$

Für $i \rightarrow \infty$ hätte man $p_{i+2} = p_i$, was zu einer divergenten Potenzreihe führen würde. Es kann also nur dann Lösungen geben, wenn die Potenzreihe irgendwo abbricht, das heißt, die Lösungen sind Polynome. Damit die Reihe abbricht, muß gelten: $i(i+1) - l(l+1) = 0$, also $i = l$ ($i \in \mathbf{N}$ vorausgesetzt). Man erhält dann als Lösungen die sogenannten Legendre-Polynome:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1; \\ P_1(x) &= x; \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1); \\ P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x); \quad \dots \end{aligned} \quad (2.99)$$

Statt der rekursiven Beziehung (2.98) zwischen den Koeffizienten kann man übrigens auch die *Formel von Rodriguez* verwenden (ohne Beweis):

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l \quad (2.100)$$

Setzt man $x = \cos \alpha$, so sieht man, daß diese Polynome mit denen übereinstimmen, die bei der Entwicklung von $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ bis zur Ordnung $(r'/r)^2$ auftraten ($r > r'$ vorausgesetzt):

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} \left(1 + P_1(\cos \alpha) \frac{r'}{r} + P_2(\cos \alpha) \left(\frac{r'}{r} \right)^2 + \dots \right) \quad (2.101)$$

Hierbei ist α der Winkel zwischen \vec{r} und \vec{r}' . Damit ist naheliegend, daß allgemein

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\cos \alpha) \quad (2.102)$$

gilt; im nächsten Abschnitt werden wir diese Formel beweisen.

In der Physik werden die Legendre-Polynome in der obigen Form (2.99) verwendet; sie sind dann zwar orthogonal, aber nicht normiert:

$$\int P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) d\Omega = \frac{4\pi}{2l+1} \quad (2.103)$$

Die Kugelflächenfunktionen setzen sich allerdings aus P_l und E_l zusammen; bei letzteren hatten wir uns noch eine Normierungskonstante N_{lm} offengelassen.

Wähle nun $N_{l0} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}$, dann hat man:

$$Y_{l0}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta) \quad (2.104)$$

Damit sind die Kugelflächenfunktionen für $m = 0$ orthogonal und normiert. Außerdem sind sie von φ unabhängig und damit zylindersymmetrisch.

Im allgemeinen wird aber die vorgegebene Ladungsverteilung und damit auch das gesuchte Potential nicht unbedingt zylindersymmetrisch sein, man benötigt also auch noch die Kugelflächenfunktionen für $m \neq 0$. Die Lösung der Differentialgleichung (2.95) wollen wir uns aber nicht auch noch antun, sondern hier nur die Ergebnisse angeben:

$$P_{lm}(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l \quad (2.105)$$

Eine Lösung der Differentialgleichung gibt es dabei nur für

$$\boxed{|m| < l,} \quad (2.106)$$

also hat man eine $(2l+1)$ -fache Entartung.

Definiert man

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) := \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_{lm}(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad (2.107)$$

so bilden die Y_{lm} ein orthonormales Funktionensystem:

$$\boxed{\int Y_{l'm'}^*(\theta, \varphi) Y_{lm}(\theta, \varphi) d\Omega = \delta_{l'l} \delta_{m'm}.} \quad (2.108)$$

Zwischen den Y_{lm} besteht folgende Beziehung:

$$Y_{l,-m} = (-1)^m Y_{lm}^*, \quad (2.109)$$

es genügt also, die Y_{lm} für positive m auszurechnen.

Explizit sehen die ersten Kugelflächenfunktionen folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned}
 Y_{00} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \\
 Y_{10} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos(\theta) \\
 Y_{11} &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin(\theta) e^{i\varphi} \\
 Y_{1-1} &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin(\theta) e^{-i\varphi}
 \end{aligned} \tag{2.110}$$

Es gilt folgendes wichtiges Additionstheorem:

$$P_l(\cos \alpha) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi), \tag{2.111}$$

wobei α wiederum der Winkel zwischen \vec{r} und \vec{r}' ist, die θ s und die φ s geben die Lage der beiden Vektoren im Koordinatensystem an. (es gilt: $\cos \alpha = \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi') + \cos \theta \cos \theta'$)

2.2.3 * Sphärische Multipole

Wir haben nun also ein vollständiges Funktionensystem, daß ebenso wie das ursprünglich betrachtete System r^{-l-1} die Eigenwerte $l(l+1)$ hat, allerdings nun von den Winkeln statt vom Radius abhängt. Eine beliebige Funktion, die von den Raumwinkeln abhängt, kann also nach ihnen entwickelt werden:

$$f(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f_{lm}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi) \tag{2.112}$$

mit

$$f_{lm}(r) = \int f(r, \theta', \varphi') Y_{lm}^*(\theta', \varphi') d\Omega. \tag{2.113}$$

Wir suchen nun die Entwicklung der Funktion $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \sum g_{lm} Y_{lm}$. Die Berechnung nach obiger Formel wäre sehr schwierig; wir wählen hier einen anderen Weg. Betrachte dafür zunächst die Entwicklung der Delta-Funktion in Kugelflächenfunktionen; diese erhält man aus

$$\begin{aligned}
 f(\vec{r}) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f_{lm}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi) \\
 &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(\int f(r', \theta', \varphi') Y_{lm}^*(\theta', \varphi') d\Omega' \right) Y_{lm}(\theta, \varphi) \\
 &= \int f(r', \theta', \varphi') \delta(r - r') dr' \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta, \varphi) Y_{lm}^*(\theta', \varphi') d\Omega'
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int f(\vec{r}') \frac{\delta(r-r')}{r^2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta, \varphi) Y_{lm}^*(\theta', \varphi') dV' \\
&= f(\vec{r}) = \int f(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') dV', \tag{2.114}
\end{aligned}$$

also

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{\delta(r-r')}{r^2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta, \varphi) Y_{lm}^*(\theta', \varphi'). \tag{2.115}$$

Nutze nun aus, daß die folgende Differentialgleichung gilt (vergleiche (2.31), (2.35)) :

$$\Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}') \tag{2.116}$$

und setze auf beiden Seiten jeweils Entwicklungen in Kugelflächenfunktionen ein; dann hat man:

$$\begin{aligned}
\Delta (g_{lm}(r, r') Y_{lm}(\theta, \varphi)) &= -4\pi \frac{\delta(r-r')}{r^2} Y_{lm}(\theta, \varphi) \\
(\Delta_r g_{lm}(r, r')) Y_{lm}(\theta, \varphi) + g_{lm}(r, r') (\Delta_{\Omega} Y_{lm}(\theta, \varphi)) &= -4\pi \frac{\delta(r-r')}{r^2} Y_{lm}(\theta, \varphi) \\
\Delta_r g_{lm}(r, r') - \frac{l(l+1)}{r^2} g_{lm}(r, r') &= -4\pi \frac{\delta(r-r')}{r^2} \\
\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} g_{lm}(r, r') - l(l+1) g_{lm}(r, r') &= -4\pi \delta(r-r') \tag{2.117}
\end{aligned}$$

Der Parameter m tritt nicht mehr auf, man hat also $g_{lm} = g_l$. Integriert man die letzte Gleichung über r um die Stelle $r = r'$, so hat man:

$$\int_{r'-\epsilon}^{r'+\epsilon} \left(\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} g_l(r, r') - l(l+1) g_l(r, r') \right) dr = -4\pi \tag{2.118}$$

Setzt man voraus, daß die Funktion $g_l(r, r')$ überall stetig ist, also auch für $r = r'$, so verschwindet das Integral über den zweiten Term, das über den ersten kann ausgeführt werden, und man hat schließlich:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\partial}{\partial r} g_l(r, r') \right]_{r=r'-\epsilon}^{r=r'+\epsilon} = -\frac{4\pi}{r'^2}, \tag{2.119}$$

also ist die Ableitung von $g_l(r, r')$ bei $r = r'$ unstetig.

Bei der Lösung der Differentialgleichung betrachte zunächst den Fall $r \neq r'$, dann hat man einfach

$$r^2 \Delta_r g_l(r, r') = l(l+1) g_l(r, r') \tag{2.120}$$

Wie wir bereits wissen, wird dies gelöst durch $g_l(r, r') = A_l r^l$ und $g_l(r, r') = B_l r^{-l-1}$. Die erste Gruppe von Funktionen divergiert für $r \rightarrow \infty$, die zweite für $r \rightarrow 0$; will man also eine Funktion haben, die überall endlich bleibt, so sollte man sie abschnittsweise definieren. Die Unstetigkeit bei $r = r'$ legt nahe, diesen

Punkt als Trennstelle zwischen den beiden Abschnitten zu verwenden, also zu setzen: $g_l(r, r') = A_l r^l$ für $r < r'$ und $g_l(r, r') = B_l r^{-l-1}$ für $r > r'$. Benutzt man die Stetigkeit an der Stelle $r = r'$, so hat man dann $B_l = A_l r'^{2l+1}$; setzt man $A_l = C_l r'^{-l-1}$, so erhält man schließlich die symmetrische Form

$$g_l(r, r') = \begin{cases} C_l \frac{r^l}{r'^{l+1}} & \text{für } r < r' \\ C_l \frac{r^l}{r'^{l+1}} & \text{für } r > r' \end{cases} \quad (2.121)$$

Mit $r_< := \min(r, r')$ und $r_> := \max(r, r')$ wird dies zu

$$g_l(r, r') = C_l \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} \quad (2.122)$$

Zur Festlegung der Konstante C_l benutze nun noch die Unstetigkeit der Ableitung (2.119):

$$\lim_{r \rightarrow r'} \left(C_l \frac{l}{r'^2} \left(\frac{r}{r'} \right)^{l-1} - C_l \frac{-l-1}{r'^2} \left(\frac{r'}{r} \right)^l \right) = C_l \frac{2l+1}{r'^2} = -\frac{4\pi}{r'^2}, \quad (2.123)$$

also

$$g_l(r, r') = \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} \quad (2.124)$$

und damit schließlich

$$\boxed{\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} Y_{lm}(\theta, \varphi) Y_{lm}^*(\theta', \varphi')}. \quad (2.125)$$

Benutzt man nun das Additionstheorem für die Kugelflächenfunktionen, so erhält man endlich die Bestätigung der früheren Vermutung:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos \alpha) \quad (2.126)$$

Für die Berechnung des Potentials muß über V' integriert werden, man benötigt also die Abhängigkeit von θ' und φ' statt der von α . Verwende also die Gleichung (2.125) und schreibe damit für Φ :

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}) &= \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \\ &= \int \rho(\vec{r}') \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} Y_{lm}(\theta, \varphi) Y_{lm}^*(\theta', \varphi') dV' \end{aligned} \quad (2.127)$$

Wir sind im allgemeinen am Potential im Außenraum der Ladungsverteilung interessiert, es gilt also: $r > r'$ und damit $r_> = r$, $r_< = r'$. Damit hat man

$$\Phi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{Y_{lm}(\theta, \varphi)}{r^{l+1}} \int \rho(\vec{r}') r'^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') dV'. \quad (2.128)$$

Definiert man nun durch

$$q_{lm} := \int \rho(\vec{r}') r'^l Y_{lm}(\theta', \varphi') dV' \quad (2.129)$$

die sogenannten *Multipolmomente* der Ladungsverteilung, so ergibt sich:

$$\Phi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{Y_{lm}(\theta, \varphi)}{r^{l+1}} q_{lm}^* \quad (2.130)$$

Zu jedem l gehört ein 2^l -Pol; die niedrigsten Ordnungen lauten:

$l=0$ Monopolmoment

$l=1$ Dipolmoment

$l=2$ Quadrupolmoment

$l=3$ Oktupolmoment

usw.

Diese Bezeichnungen kann man folgendermaßen begründen: Man braucht mindestens 2^l Punktladungen (gleichen Betrages!), um ein nicht-triviales Multipol-Moment der Ordnung l zu erhalten. Nicht-trivial bedeutet hier: Es gibt kein Koordinatensystem, in dem dieses Multipol-Moment gleich null wäre. Hat man weniger Punktladungen, so können zwar auch höhere Momente auftreten, es existiert jedoch dann immer ein Koordinatensystem, in dem sie verschwinden (siehe auch z. B. *Wangness: Electromagnetic Fields*, S. 133ff). Beispiele:

Punktladung

Mit der Ladungsdichte

$$\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \quad (2.131)$$

erhält man:

$$q_{lm} = \int \rho(\vec{r}') r'^l Y_{lm}(\theta', \varphi') dV' = q \int \delta(\vec{r}' - \vec{r}_0) r'^l Y_{lm}(\theta', \varphi') dV' = q r_0^l Y_{lm}(\theta_0, \varphi_0). \quad (2.132)$$

Verschiebt man nun das Koordinatensystem so, daß die Punktladung im Ursprung sitzt, so wird r_0 zu 0, und alle Multipolmomente bis auf q_{00} , das Monopolmoment, also die Gesamtladung, verschwinden.

Dipol aus Punktladungen

Mit

$$\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) - q\delta(\vec{r} - \vec{r}_1) \quad (2.133)$$

ergibt sich:

$$q_{lm} = q r_0^l Y_{lm}(\theta_0, \varphi_0) - q r_1^l Y_{lm}(\theta_1, \varphi_1), \quad (2.134)$$

also speziell $q_{00} = 0$ - die Gesamtladung verschwindet (nach Konstruktion) in jedem Koordinatensystem. Legt man den neuen Koordinatenursprung genau zwischen die beiden Punktladungen und dreht es so, daß beide auf der z -Achse liegen, so erhält man:

$$q'_{lm} = qr'^l (Y_{lm}(0, 0) - Y_{lm}(-\pi, 0)). \quad (2.135)$$

Ein Dipolfeld erhält man bekanntlich für verschwindenden Abstand $2r'$ zwischen den Punktladungen, wobei aber das Dipolmoment $d = 2qr'$ endlich ist. Also hat man nun:

$$q'_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} d; \quad (2.136)$$

alle anderen (vor allem auch alle höheren) Multipolmomente sind gleich null.

Die Multipolmomente sind nun gerade die Koeffizienten a_l , die in der Entwicklung (2.86) des Potentials im ladungsfreien Raum außerhalb der vorgegebenen Ladungsverteilung auftraten; sie sind durch diese Verteilung eindeutig bestimmt. Für jedes l hat man $2l + 1$ Faktoren q_{lm} - entsprechend den $2l + 1$ unabhängigen Einträgen des Tensors l -ter Stufe, den man bei der Entwicklung in kartesischen Koordinaten erhält.

Der Zusammenhang zwischen den beiden Entwicklungen soll nun für das Dipolmoment noch etwas genauer betrachtet werden. Zunächst kann man die zugehörigen Kugelflächenfunktionen unter Benutzung des Zusammenhangs zwischen kartesischen und Kugelkoordinaten auch folgendermaßen schreiben:

$$Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{z}{r}; \quad Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{x + iy}{r}; \quad Y_{1-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{x - iy}{r} \quad (2.137)$$

Die Dipolmomente sind dann:

$$\begin{aligned} q_{10} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int \rho(\vec{r}') z' dV' \\ q_{11} &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int \rho(\vec{r}') (x' + iy') dV' \\ q_{1-1} &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int \rho(\vec{r}') (x' - iy') dV' = -q_{11}^* \end{aligned} \quad (2.138)$$

Also hat man den eindeutigen Zusammenhang

$$d_x = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} (q_{1-1} - q_{11}); \quad d_y = i\sqrt{\frac{2\pi}{3}} (q_{1-1} + q_{11}); \quad d_z = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} q_{10} \quad (2.139)$$

Ähnlich findet man für die Quadrupolmomente:

$$q_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} Q_{33}; \quad q_{21} = -\sqrt{\frac{5}{24\pi}} (Q_{13} + iQ_{23}); \quad q_{22} = \sqrt{\frac{5}{96\pi}} (Q_{11} - Q_{22} + 2iQ_{12}). \quad (2.140)$$

Die Koeffizienten q_{2-1} und q_{2-2} erhält man wiederum über die Beziehung $q_{l-m} = (-1)^m q_{lm}^*$ (vergleiche (2.109)).

Zum Abschluß soll nun noch ein spezielles Problem betrachtet werden: das Potential einer vorgegebenen kugelsymmetrischen Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}) = \rho(r)$. Hier ergibt sich für die Multipolmomente:

$$q_{lm} = \int \rho(r') r'^l Y_{lm}(\theta', \varphi') dV' = \int \rho(r') r'^{l+2} dr' \int d\Omega' Y_{lm}(\theta', \varphi'). \quad (2.141)$$

Nun kann man ausnutzen, daß Y_{00}^* einfach eine Konstante ist: $\sqrt{4\pi} Y_{00}^* = 1$. Deswegen kann man es im Integral über den Raumwinkel einfach einfügen:

$$q_{lm} = \int \rho(r') r'^{l+2} dr' \sqrt{4\pi} \int d\Omega' Y_{00}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta', \varphi'). \quad (2.142)$$

Damit hat man also ein Integral über den Raumwinkel von zwei Kugelflächenfunktionen. Dafür kann man die Orthonormalitätsrelation (2.108) benutzen:

$$q_{lm} = \int \rho(r') r'^{l+2} dr' \sqrt{4\pi} \delta_{l0} \delta_{m0} = q_{00} \delta_{l0} \delta_{m0}. \quad (2.143)$$

Es ergibt sich also:

$$q_{00} = \sqrt{4\pi} \int \rho(r') r'^2 dr'; \quad q_{lm} = 0 \text{ für } (l, m) \neq (0, 0). \quad (2.144)$$

Damit ist dann das Potential:

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{Y_{lm}(\theta, \varphi)}{r^{l+1}} q_{00}^* \delta_{l0} \delta_{m0} \\ &= 4\pi \frac{Y_{00}}{r} q_{00}^* = 4\pi \frac{\int \rho(r') r'^2 dr'}{r}. \end{aligned} \quad (2.145)$$

Andererseits ist hier

$$Q = \int dV' \rho(\vec{r}') = \int d\Omega' \int dr' r'^2 \rho(r') = 4\pi \int dr' r'^2 \rho(r'), \quad (2.146)$$

also schließlich das erwartete Ergebnis

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{Q}{r}. \quad (2.147)$$

Man kann nun natürlich fragen: Was soll der Aufwand? Dasselbe Ergebnis erhält man doch, wenn man mittels des Gauß'schen Satzes das elektrische Feld berechnet und daraus dann das Potential? Antwort: Bei der Herleitung mittels des Gauß'schen Gesetzes geht eine wesentliche Annahme ein - daß eine kugelsymmetrische Ladungsverteilung ein kugelsymmetrisches Feld und Potential hat! Dies haben wir hier nicht vorausgesetzt - im Gegenteil haben wir nun *bewiesen*, daß das Potential einer kugelsymmetrischen Ladungsverteilung selbst wieder kugelsymmetrisch ist und nur von der Gesamtladung abhängt.

2.3 Magnetostatik

Nachdem wir die elektrostatischen Felder so ausführlich besprochen haben, gehen wir nun zu einem etwas schwierigerem Problem über: magnetostatische Felder ohne Anwesenheit von elektrischen Feldern. Die relevanten Maxwellgleichungen sind:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (2.148)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}; \quad (2.149)$$

die Gleichungen (I) und (III) sind nun unwichtig.

2.3.1 Vektorpotential, Eichung

Aus der Quellenfreiheit des magnetischen Feldes ergibt sich, daß man es darstellen kann als:

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r})}. \quad (2.150)$$

Das Feld $\vec{A}(\vec{r})$ wird *Vektorpotential* genannt; im Gegensatz zum elektrischen skalaren Potential hat es keine anschauliche Bedeutung. Wir werden allerdings in Kapitel 7 sehen, daß es auf ähnliche Weise mit dem (kanonischen) Impuls zusammenhängt wie das skalare Potential mit der Energie.

Wie das skalare Potential ist auch das Vektorpotential nicht eindeutig definiert. Man kann zu \vec{A} den Gradienten einer beliebigen skalaren Funktion $f(\vec{r})$ addieren, ohne daß sich das Magnetfeld ändert:

$$\operatorname{rot}(\vec{A}(\vec{r}) + \operatorname{grad} f(\vec{r})) = \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r}), \quad (2.151)$$

da die Rotation eines Gradienten bekanntlich verschwindet. Dies ist wiederum ein Spezialfall der später noch zu besprechenden allgemeinen Eichtransformationen.

Es existiert aber immer eine Eichung (also eine Funktion $f(\vec{r})$), so daß gilt:

$$\vec{A}(\vec{r}) = - \int_0^1 (\vec{r} \times \vec{B}(\alpha \vec{r})) \alpha d\alpha. \quad (2.152)$$

Den Beweis, daß die Rotation von diesem \vec{A} -Feld wirklich wieder das \vec{B} -Feld ergibt, findet man in Anhang A.2.

In der Elektrostatik benutzt man zur Fixierung der Eichung meist die Bedingung, daß Φ im Unendlichen verschwinden soll; in der Magnetostatik dagegen verlangt man

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{A} = 0}; \quad (2.153)$$

dies wird als *Coulomeichung* bezeichnet. Der Grund für diesen Namen wird erst bei der allgemeinen Behandlung von Eichtransformationen in Abschnitt 5.1 klar werden, der Grund für die Wahl dieser Bedingung dagegen schon in diesem Abschnitt.

Setzt man nun \vec{B} in die inhomogene Maxwellgleichung ein, so ergibt sich:

$$\text{rot rot } \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad (2.154)$$

und, da $\text{rot rot} = \text{grad div} - \Delta$ ist und $\text{div } \vec{A} = 0$ gewählt wurde, schließlich:

$$\boxed{\Delta \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}.} \quad (2.155)$$

Dies sieht sehr ähnlich aus wie die Poissongleichung (2.5) im elektrostatischen Fall. Man muß allerdings aufpassen: Der Laplace-Operator wird nun auf einen Vektor angewandt, nicht mehr auf einen Skalar! Was das heißen soll, kann man sich klarmachen, wenn man den Vektor als Linearkombination der Einheitsvektoren darstellt:

$$\begin{aligned} \Delta \vec{A} &= \Delta (A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z) \\ &= (\Delta A_x) \vec{e}_x + (\Delta A_y) \vec{e}_y + (\Delta A_z) \vec{e}_z, \end{aligned} \quad (2.156)$$

das heißt, man kann den Laplace-Operator einfach auf jede Komponente einzeln anwenden. Dies gilt allerdings nur, da wir hier ein kartesisches Koordinatensystem verwendet haben! In diesem sind die Einheitsvektoren räumlich konstant, so daß der Laplace-Operator nicht auf sie wirkt. I.a. wird dies nicht so sein; beispielsweise gilt in Kugelkoordinaten: $(\Delta \vec{A})_r \neq \Delta A_r!$ (siehe auch Anhang A.1.4)

Bleibt man in kartesischen Koordinaten, so kann man die obige Gleichung als ein System von drei Differentialgleichungen auffassen, für jede kartesische Koordinate eine. Diese einzelnen Gleichung haben nun die Gestalt der Poissongleichung, und man kann sie genauso lösen: mittels der schon berechneten Green'schen Funktion. Das Endergebnis kann man dann wieder aus den einzelnen kartesischen Komponenten zusammensetzen und hat schließlich das Ergebnis, das man auch naiv sofort hingeschrieben hätte:

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int dV' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.} \quad (2.157)$$

Nun soll noch gezeigt werden, daß diese Lösung tatsächlich die Coulomb-Eichbedingung erfüllt. Bilde also die Divergenz dieses Ausdrucks:

$$\text{div } \vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \vec{\nabla} \cdot \int dV' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (2.158)$$

Den (linearen) Ableitungsoperator kann man nun unter das Integral ziehen und dabei ausnützen, daß \vec{j} nur von \vec{r}' , aber nicht von \vec{r} abhängt:

$$\text{div } \vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int dV' \vec{j}(\vec{r}') \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\frac{1}{c} \int dV' \vec{j}(\vec{r}') \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (2.159)$$

Die Ableitung nach der ungestrichenen wurde hier in eine Ableitung nach der gestrichenen Koordinate umgeschrieben. Nun kann man eine der Produktregeln der Vektoranalysis benutzen:

$$\operatorname{div}\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{1}{c} \int dV' \vec{\nabla}' \cdot \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{1}{c} \int dV' \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (2.160)$$

Das erste Integral forme nun mit dem Gauß'schen Satz in ein Oberflächenintegral um, beim zweiten benutze die Kontinuitätsgleichung:

$$\operatorname{div}\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{1}{c} \int d\vec{F}' \cdot \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{c} \int dV' \frac{\dot{\rho}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (2.161)$$

Die Stromdichte wird sicher nicht unendlich ausgedehnt sein, so daß das Oberflächenintegral zu null wird, wenn man die Oberfläche genügend weit außen wählt. Das zweite Integral verschwindet ebenfalls - wir haben hier ja vorausgesetzt, daß keine elektrischen Felder vorhanden sind, also ist die Ladungsdichte (und erst recht ihre zeitliche Ableitung) null. Insgesamt ergibt sich also wie verlangt:

$$\operatorname{div}\vec{A}(\vec{r}) = 0. \quad (2.162)$$

2.3.2 Biot-Savart'sches Gesetz

Für das elektrische Feld hatten wir aus der Integraldarstellung des Potentials eine explizite Formel hergeleitet. Ebenso können wir uns eine Formel für das magnetische Feld ausrechnen:

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= \operatorname{rot}\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \operatorname{rot} \int dV' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= \frac{1}{c} \int dV' \operatorname{grad} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \times \vec{j}(\vec{r}') \\ &= \frac{1}{c} \int dV' \vec{j}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \end{aligned} \quad (2.163)$$

Betrachtet man nun speziell einen Leiter mit dem Querschnitt A , so ist $|\vec{j}(\vec{r})| = I(\vec{r})/A$. Außerdem kann man schreiben: $dV' = dA ds$, man kann nacheinander die Integration über den Leiterschnitt und entlang des Leiters ausführen. Wenn man nun voraussetzt, daß die Stromstärke nur wenig über den Leiterquerschnitt variiert und der Leiterdurchmesser vernachlässigbar gegenüber dem Abstand des Beobachters ist: $|\vec{r}' - \vec{r}_0| \ll |\vec{r}|$, wobei \vec{r}_0 ein Vektor zur Mitte des Leiters ist, so hat man schließlich:

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{1}{c} \int ds I(\vec{r}_0) \frac{\vec{j}(\vec{r}_0(s))}{|\vec{j}(\vec{r}_0(s))|} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}_0(s)}{|\vec{r} - \vec{r}_0(s)|^3} \\ &= \frac{I}{c} \int d\vec{s} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}_0(s)}{|\vec{r} - \vec{r}_0(s)|^3}, \end{aligned} \quad (2.164)$$

wobei benutzt wurde, daß die Stromstärke entlang des Leiters nicht variiert, und $d\vec{s}$ der infinitesimale Vektor in Richtung des Stromflusses ist.

Damit hat man das *Biot-Savart'sche Gesetz*:

$$\boxed{d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{I}{c} d\vec{s} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}_0(s)}{|\vec{r} - \vec{r}_0(s)|^3},} \quad (2.165)$$

mit dessen Hilfe das Magnetfeld eines Systems von (dünnen) Leitern berechnet werden kann.

Beispiel 1: Magnetfeld eines geraden Leiters

Entlang der z-Achse befinde sich ein gerader, unendlich langer Leiter von vernachlässigbar geringem Durchmesser, der vom Strom I durchflossen wird. Wir betrachten ohne Einschränkung der Allgemeinheit das Magnetfeld in der x-y-Ebene. Dann ist $d\vec{s} = ds\vec{e}_z$, $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$ und $\vec{r}_0(s) = s\vec{e}_z$, also:

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{I}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} ds \vec{e}_z \times \frac{x\vec{e}_x + y\vec{e}_y - s\vec{e}_z}{\sqrt{x^2 + y^2 + s^2}^3} = \frac{I}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} ds \frac{-y\vec{e}_x + x\vec{e}_y}{\sqrt{x^2 + y^2 + s^2}^3} \\ &= \frac{I}{c} r (-\sin\phi \vec{e}_x + \cos\phi \vec{e}_y) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{r^2 + s^2}^3} = \frac{I}{cr^2} \vec{e}_\phi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{1 + \frac{s^2}{r^2}}^3} \\ &= \frac{I}{cr} \vec{e}_\phi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds'}{\sqrt{1 + s'^2}^3} \stackrel{s''=s'/\sqrt{1+s'^2}}{=} \frac{I}{cr} \vec{e}_\phi \int_{-1}^{+1} ds'' = \frac{2I}{cr} \vec{e}_\phi \end{aligned} \quad (2.166)$$

Hier wurde zu Zylinderkoordinaten übergegangen und zweimal substituiert; die zweite Substitution ist hier nicht offensichtlich - aber der Erfolg gibt einem recht (eine andere Möglichkeit wäre die Verwendung der hyperbolischen Funktionen - siehe unten).

Andererseits könnte man auch erst \vec{A} ausrechnen:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{I}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} ds \vec{e}_z \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + s^2}} = \frac{I}{c} \vec{e}_z \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds'}{\sqrt{1 + s'^2}} \quad (2.167)$$

Dieses Integral divergiert allerdings! Betrachte deswegen zunächst einen endlich langen Draht:

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{I}{c} \int_{-L}^{+L} ds \vec{e}_z \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + s^2}} = \frac{I}{c} \vec{e}_z \int_{-L/r}^{+L/r} \frac{ds'}{\sqrt{1 + s'^2}} \\ &\stackrel{s''=\sinh s'}{=} \frac{I}{c} \vec{e}_z \int_{-\operatorname{arsinh}(L/r)}^{+\operatorname{arsinh}(L/r)} ds'' = \frac{2I}{c} \vec{e}_z \operatorname{arsinh}(L/r) \end{aligned} \quad (2.168)$$

Berechne nun daraus das \vec{B} -Feld:

$$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A} = \frac{2I}{c} \operatorname{grad}(\operatorname{arsinh}(L/r)) \times \vec{e}_z = \frac{2I}{c} \frac{d(\operatorname{arsinh}(L/r))}{dr} \vec{e}_r \times \vec{e}_z$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2I}{c} \frac{1}{\sqrt{1+(L/r)^2}} \frac{d(L/r)}{dr} (\sin\theta \sin\phi \vec{e}_x - \sin\theta \cos\phi \vec{e}_y) \\
\stackrel{\theta=\pi/2}{=} & \frac{2I}{c} \frac{1}{\sqrt{1+(L/r)^2}} \frac{-L}{r^2} (-\vec{e}_\phi) \\
&= \frac{2I}{c} \frac{1}{r\sqrt{1+(r/L)^2}} \vec{e}_\phi. \tag{2.169}
\end{aligned}$$

Im Limes $L \rightarrow \infty$ erhält man dann wieder das obige Ergebnis für \vec{B} .

Setzt man voraus, daß \vec{B} aus Symmetriegründen azimuthal verlaufen muß, so kann man dasselbe Ergebnis auch viel einfacher aus dem Ampere'schen Gesetz ableiten, indem man als geschlossenen Weg einen Kreis um den Leiter verwendet:

$$\oint \vec{ds} \cdot \vec{B} = \int_0^{2\pi} d\phi (r\vec{e}_\phi) \cdot (B\vec{e}_\phi) = 2\pi r B = \frac{4\pi}{c} I, \tag{2.170}$$

also wieder $\vec{B} = \frac{2I}{cr} \vec{e}_\phi$.

Beispiel 2: Lange Spule

Um das (oft verwendete) Feld einer Spule auszurechnen, betrachte zunächst eine einzelne kreisförmige Leiterschleife. Sie liege in einer zur x-y-Ebene parallelen Ebene in Höhe z , der Mittelpunkt liege auf der z-Achse, der Radius der Schleife sei R , und der Durchmesser des Drahtes sei vernachlässigbar. Hier soll nur das Feld auf der Mittelachse der Spule ausgerechnet werden - berechne also zunächst das Feld, das die Schleife im Ursprung erzeugt: $\vec{r} = 0$.

Es empfiehlt sich die Verwendung von Zylinderkoordinaten: $\vec{ds} = R d\phi \vec{e}_\phi$, $\vec{r} - \vec{r}_0(s) = -\vec{r}_0(s) = -R\vec{e}_r(\phi) - z\vec{e}_z(\phi)$. Man hat dann:

$$d\vec{B} = \frac{I}{c} R d\phi \vec{e}_\phi \frac{-R\vec{e}_r - z\vec{e}_z(\phi)}{\sqrt{R^2 + z^2}^3} = \frac{I}{c} d\phi \left(\frac{R^2}{\sqrt{R^2 + z^2}^3} \vec{e}_z - \frac{zR}{\sqrt{R^2 + z^2}^3} \vec{e}_r \right). \tag{2.171}$$

Integration über den Winkel führt dann auf:

$$\vec{B} = \frac{2\pi IR^2}{c\sqrt{R^2 + z^2}^3} \vec{e}_z, \tag{2.172}$$

man hat also nur ein Feld in z-Richtung, wie aufgrund der Zylindersymmetrie auch zu erwarten war.

Eine (eng gewickelte) Spule kann man nun annähern durch eine Ansammlung von lauter solchen Leiterschleifen (jede Windung eine Schleife), jeweils in Höhe z_i , die alle vom selben Strom I durchflossen werden. Das gesamte Feld im Ursprung ist dann also:

$$\vec{B} = \sum_{i=0}^N \frac{2\pi IR^2}{c\sqrt{R^2 + z_i^2}^3} \vec{e}_z. \tag{2.173}$$

Die Spule erstrecke sich dabei von $-L/2$ bis $+L/2$ und habe N Windungen. Führt man die Windungsdichte $n = N/L$ ein, so kann man zum Integral übergehen:

$$\vec{B} = n \frac{2\pi IR^2}{c} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}^3} dz \vec{e}_z = \frac{2\pi In}{c} \vec{e}_z \int_{-L/2R}^{L/2R} \frac{1}{\sqrt{1 + s^2}^3} ds. \quad (2.174)$$

Betrachte nun den Grenzfall langer, dünner Spulen - nehme also den Limes $L/R \rightarrow \infty$. Das Integral ergibt dann einfach 2 (siehe oben beim geraden Draht), und das Magnetfeld ist:

$$\boxed{\vec{B} = \frac{4\pi In}{c} \vec{e}_z.} \quad (2.175)$$

Dies ist das Magnetfeld im Ursprung, also im Zentrum der Spule. Für sehr lange und dünne Spulen gilt aber näherungsweise, daß das Feld im Inneren der Spule homogen ist, also überall diesen berechneten Wert (und diese Richtung) hat.

2.4 * Kraft und Drehmoment auf Dipole

2.4.1 Elektrische Dipole

Betrachten wir zunächst den einfachen Fall eines elektrischen Dipols aus Punktladungen, also zwei Ladungen q , $-q$ im Abstand a mit $q \rightarrow \infty$, $a \rightarrow 0$, $d := qa = \text{const.}$. Dann verschwinden alle Multipolmomente außer dem für $l = 1$, man hat also ein reines Dipolfeld. Außerdem sei ein (inhomogenes) elektrisches Feld $\vec{E}(\vec{r})$ gegeben.

Die eine Ladung sei am Punkt \vec{r}_1 , die andere bei $\vec{r}_2 =: \vec{r}_1 + \vec{a}$. Dann ist das Dipolmoment:

$$\vec{d} = q\vec{r}_1 - q\vec{r}_2 = -q\vec{a} \quad (2.176)$$

und die Kraft:

$$\vec{F} = q\vec{E}(\vec{r}_1) - q\vec{E}(\vec{r}_2) \quad (2.177)$$

Da $|\vec{a}|$ als infinitesimal klein vorausgesetzt ist, gilt für die Komponenten von \vec{E} :

$$E_i(\vec{r}_2) = E_i(\vec{r}_1 + \vec{a}) = E_i(\vec{r}_1) + \vec{a} \bullet \text{grad} E_i(\vec{r}_1), \quad (2.178)$$

also

$$F_i = -q\vec{a} \bullet \text{grad} E_i(\vec{r}_1) = \vec{d} \bullet \text{grad} E_i(\vec{r}_1). \quad (2.179)$$

Damit ergibt sich:

$$\boxed{\vec{F} = (\vec{d} \bullet \vec{\nabla}) \vec{E}(\vec{r}_1).} \quad (2.180)$$

Dies kann auch umformuliert werden:

$$\vec{F} = (\vec{\nabla} \otimes \vec{E}(\vec{r}_1))^T \vec{d} =: \frac{d\vec{E}}{d\vec{r}} \vec{d}. \quad (2.181)$$

Das Drehmoment kann man auf dieselbe Weise ausrechnen:

$$\begin{aligned}
\vec{M} &= q\vec{r}_1 \times \vec{E}(\vec{r}_1) - q\vec{r}_2 \times \vec{E}(\vec{r}_2) \\
&= q\vec{r}_1 \times \vec{E}(\vec{r}_1) - q\vec{r}_1 \times \vec{E}(\vec{r}_1 + \vec{a}) - q\vec{a} \times \vec{E}(\vec{r}_1 + \vec{a}) \\
&= q\vec{r}_1 \times \vec{E}(\vec{r}_1) - q\vec{r}_1 \times \vec{E}(\vec{r}_1) - q\vec{r}_1 \times (\vec{a} \cdot \vec{\nabla})\vec{E}(\vec{r}_1) - q\vec{a} \times \vec{E}(\vec{r}_1) \\
&\quad - q\vec{a} \times (\vec{a} \cdot \vec{\nabla})\vec{E}(\vec{r}_1) \\
&= \vec{r}_1 \times (\vec{d} \cdot \vec{\nabla})\vec{E}(\vec{r}_1) + \vec{d} \times \vec{E}(\vec{r}_1)
\end{aligned} \tag{2.182}$$

Der letzte Term ist von der Ordnung a^2 und kann deshalb vernachlässigt werden, die ersten beiden Terme heben sich weg. Damit ergibt sich schließlich:

$$\boxed{\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{F} + \vec{d} \times \vec{E}(\vec{r}_1)}. \tag{2.183}$$

In einem inhomogenen Feld ($\frac{d\vec{E}}{dr} \neq 0$) hat man also sowohl eine Kraft also auch ein Drehmoment auf Dipole, in einem homogenen Feld wirkt nur ein Drehmoment $\vec{M} = \vec{d} \times \vec{E}$ - der Dipol versucht sich parallel zum Feld auszurichten.

Bildet man die Rotation von \vec{F} :

$$\text{rot}\vec{F} = \text{rot}(\vec{d} \cdot \vec{\nabla})\vec{E}(\vec{r}_1) = (\vec{d} \cdot \vec{\nabla})\text{rot}\vec{E}(\vec{r}_1), \tag{2.184}$$

da \vec{d} ein konstanter Vektor ist, so erhält man in der Elektrostatik ($\text{rot}\vec{E}=0$):

$$\text{rot}\vec{F} = 0. \tag{2.185}$$

Das Kraftfeld ist wirbelfrei, also existiert eine potentielle Energie, die man über das übliche Wegintegral ausrechnen kann:

$$\boxed{V(\vec{r}) = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}' \cdot \vec{F}(\vec{r}') = -\vec{d} \cdot \vec{E}(\vec{r})}. \tag{2.186}$$

Man überzeugt sich leicht davon, daß $\vec{F} = -\text{grad}V$ gilt.

Betrachte nun speziell als elektrisches Feld das von einem Dipol erzeugte Feld; das Potential für einen Dipol am Ort \vec{r}_1 ist (siehe (2.65)):

$$\boxed{\Phi(\vec{r}) = \frac{\vec{d}_1 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3}}. \tag{2.187}$$

Der Einfachheit halber rechnen wir im folgenden mit einem Dipol am Ursprung ($\vec{r}_1 = \vec{0}$); am Schluß kann man dann \vec{r} wieder durch $\vec{r} - \vec{r}_1$ ersetzen. Man erhält dann durch Gradientenbildung für das elektrische Feld:

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{3(\vec{d}_1 \cdot \vec{r})\vec{r} - \vec{d}_1 r^2}{r^5}}. \tag{2.188}$$

Setzt man dies in die Formel für die potentielle Energie ein, so ergibt sich also für die (Wechselwirkungs-)Energie eines Systems von zwei Dipolen:

$$\boxed{E_{dWW} = \frac{\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 - 3(\vec{d}_1 \cdot \frac{\vec{r}}{r})(\vec{d}_2 \cdot \frac{\vec{r}}{r})}{r^3}}. \tag{2.189}$$

Schließlich kann man auch noch die Kraft ausrechnen:

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= (\vec{d}_2 \bullet \vec{\nabla}) \vec{E} \Big|_{\vec{r}=\vec{r}_2} \\
&= \frac{3}{r_2^5} \left(\vec{d}_1(\vec{r}_2 \bullet \vec{d}_1) + \vec{d}_2(\vec{r}_2 \bullet \vec{d}_2) + \vec{r}_2(\vec{d}_1 \bullet \vec{d}_2) - 5 \frac{\vec{r}_2(\vec{d}_1 \bullet \vec{r}_2)(\vec{d}_2 \bullet \vec{r}_2)}{r_2^2} \right)
\end{aligned} \tag{2.190}$$

Geht man nun über von \vec{r}_2 zu $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ und setzt

$$\vec{n} := \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}, \tag{2.191}$$

so hat man schließlich:

$$\vec{F} = \frac{3}{r_2^4} \left(\vec{d}_1(\vec{n} \bullet \vec{d}_2) + \vec{d}_2(\vec{n} \bullet \vec{d}_1) + \vec{n}(\vec{d}_1 \bullet \vec{d}_2) - 5\vec{n}(\vec{d}_1 \bullet \vec{n})(\vec{d}_2 \bullet \vec{n}) \right). \tag{2.192}$$

Dasselbe Ergebnis erhält man, indem man den Gradienten der Wechselwirkungsenergie nimmt.

2.4.2 Magnetische Dipole

Im magnetischen Fall müssen wir uns zunächst überlegen, wie ein Dipol aussieht. Es gibt ja keine magnetischen Monopole, also können wir uns keinen Dipol aus zwei Punktladungen zusammenbasteln, wie im elektrischen Fall geschehen. Betrachte statt dessen zunächst die Multipolentwicklung des Vektorpotentials in kartesischen Koordinaten - dort tritt ja ein Dipolterm auf.

$$\begin{aligned}
\vec{A} &= \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \approx \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}'|} \left(1 - \frac{\vec{r} \bullet \vec{r}'}{r^2} \right) dV' \\
&= \frac{1}{cr} \int \vec{j}(\vec{r}') dV' + \frac{1}{cr^3} \int (\vec{r} \bullet \vec{r}') \vec{j}(\vec{r}') dV'
\end{aligned} \tag{2.193}$$

Den ersten Term kann man folgendermaßen umschreiben:

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{cr} \int (\vec{\nabla}' \otimes \vec{r}') \vec{j}(\vec{r}') dV' \\
&= \frac{1}{cr} \int (\vec{r}' \otimes \vec{j}(\vec{r}')) \vec{\nabla}' dV' - \frac{1}{cr} \int \vec{r}' \operatorname{div} \vec{j} \\
&= \frac{1}{cr} \int (\vec{r}' \otimes \vec{j}(\vec{r}')) \vec{d}\vec{A}' = 0,
\end{aligned} \tag{2.194}$$

das Monopolmoment verschwindet also, wie erwartet (im ersten Term der vorletzten Zeile wirkt der Nabla-Operator nach links auf die Matrix!).

Beim zweiten Term kann man ebenfalls benutzen, daß $\vec{j} = (\vec{r} \otimes \vec{j}) \vec{\nabla} - \vec{r} \operatorname{div} \vec{j}$ ist, wobei die Differentiation wiederum nach links wirkt. Da $\operatorname{div} \vec{j} = 0$ gilt, ergibt sich also $\vec{j} = (\vec{r} \otimes \vec{j}) \vec{\nabla}$, und damit:

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{cr^3} \int dV' [(\vec{r}' \otimes \vec{j}(\vec{r}')) \vec{\nabla}'] (\vec{r} \bullet \vec{r}') \\
&= -\frac{1}{cr^3} \int dV' [\vec{r}' \otimes \vec{j}(\vec{r}')] \vec{\nabla}' (\vec{r} \bullet \vec{r}') \\
&= -\frac{1}{cr^3} \int dV' [\vec{r}' \otimes \vec{j}(\vec{r}')] \vec{r}' = -\frac{1}{cr^3} \int dV' (\vec{r}' \bullet \vec{j}(\vec{r}')) \vec{r}',
\end{aligned} \tag{2.195}$$

wobei partiell integriert wurde. Andererseits kann man aber für den zweiten Term in \vec{A} einfach eine der Rechenregeln für das Kreuzprodukt benutzen und schreiben:

$$\vec{A} = \frac{1}{cr^3} \int dV' [(\vec{r} \bullet \vec{j}(\vec{r}'))\vec{r}' - \vec{r} \times (\vec{r}' \times \vec{j})]. \quad (2.196)$$

Es folgt:

$$\frac{1}{cr^3} \int dV' [(\vec{r} \bullet \vec{j}(\vec{r}'))\vec{r}' - \vec{r} \times (\vec{r}' \times \vec{j})] = -\frac{1}{cr^3} \int dV' (\vec{r} \bullet \vec{j}(\vec{r}'))\vec{r}', \quad (2.197)$$

also:

$$\frac{1}{cr^3} \int dV' (\vec{r} \bullet \vec{j})\vec{r}' = \frac{1}{2cr^3} \int dV' \vec{r}' \times (\vec{r}' \times \vec{j}). \quad (2.198)$$

Damit ergibt sich schließlich für das Vektorpotential:

$$\vec{A} = -\frac{\vec{r}}{2cr^3} \times \int (\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')) dV'. \quad (2.199)$$

Definiert man das *magnetische Moment* durch

$$\boxed{\vec{m} := \frac{1}{2c} \int \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}') dV'}, \quad (2.200)$$

so erhält man also ganz ähnlich zum elektrischen Dipolpotential:

$$\boxed{\vec{A} = \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}}. \quad (2.201)$$

Das Magnetfeld wird dann:

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{m} \left(\vec{\nabla} \bullet \frac{\vec{r}}{r^3} \right) - (\vec{m} \bullet \vec{\nabla}) \frac{\vec{r}}{r^3} \\ &= \vec{m} \left(\vec{r} \bullet \vec{\nabla} \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^3} \vec{\nabla} \bullet \vec{r} \right) - \vec{r} \left(\vec{m} \bullet \vec{\nabla} \frac{1}{r^3} \right) - \frac{1}{r^3} (\vec{m} \bullet \vec{\nabla}) \vec{r} \\ &= \vec{m} \left(\vec{r} \bullet \frac{-3}{r^4} \frac{\vec{r}}{r} + \frac{3}{r^3} \right) - \vec{r} \left(\vec{m} \bullet \frac{-3}{r^4} \frac{\vec{r}}{r} \right) - \frac{1}{r^3} (\vec{\nabla} \otimes \vec{r})^T \vec{m} \\ &= 3\vec{r} \frac{\vec{m} \bullet \vec{r}}{r^5} - \frac{1}{r^3} \vec{m}, \end{aligned} \quad (2.202)$$

also

$$\boxed{\vec{B} = \frac{3(\vec{m} \bullet \vec{r})\vec{r} - \vec{m}r^2}{r^5}}, \quad (2.203)$$

in völliger Analogie zum elektrischen Dipolfeld.

Betrachte nun als Spezialfall eine geschlossene Leiterschleife, die in einer Ebene liegen soll, aber ansonsten beliebig geformt sein darf. Wenn der Draht dünn ist, dann kann man wie beim Biot-Savart'schen Gesetz annähern: $\vec{j} dV \approx I \vec{ds}$, also bekommt man für das magnetische Moment:

$$\vec{m} = \frac{I}{2c} \int \vec{r}' \times \vec{ds}' = \frac{IF}{c} \vec{n}, \quad (2.204)$$

wobei F die von der Schleife umschlossene Fläche und \vec{n} der Normalenvektor der Fläche ist. Dies gilt, da $\frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{ds}$ das orientierte Flächenelement ist (vergleiche 2. Kepler'sches Gesetz). Ein Beispiel für magnetische Dipole sind also geschlossene Leiterschleifen bzw. Kreisströme (beispielsweise die sog. Elementarmagnete in Ferromagneten).

Hat man speziell ein Punktteilchen der Masse m und der Ladung q auf einer Kreisbahn vom Radius r in der x-y-Ebene mit Geschwindigkeit v , so ist der Strom:

$$I = \frac{q}{T} = \frac{qv}{2\pi r}, \quad (2.205)$$

also das magnetische Moment:

$$\vec{m} = \frac{qv\pi r^2}{2\pi r c} \vec{e}_z = \frac{qvr}{2c} \vec{e}_z = \frac{q}{2cm} \vec{L}, \quad (2.206)$$

für Punktteilchen existiert also ein Zusammenhang zwischen Drehimpuls und magnetischem Moment. Aus der Quantenmechanik ist bekannt, daß der Drehimpuls quantisiert ist - für vorgegebene Masse und Ladung kann also auch das magnetische Moment nur bestimmte, diskrete Werte annehmen! Dies ist beispielsweise die Grundlage für den bekannten Stern-Gerlach-Versuch.

Die Kraftdichte für eine Stromdichteverteilung erhält man durch:

$$\vec{f} = \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B}, \quad (2.207)$$

also die Kraft durch:

$$\vec{F} = \frac{1}{c} \int \vec{j}(\vec{r}') \times \vec{B}(\vec{r}') dV'. \quad (2.208)$$

Die Stromdichteverteilung sei nun nur in der Nähe des Ursprungs von 0 verschieden; betrachte dann eine Taylorentwicklung des Magnetfeldes:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}(\vec{0}) + (\vec{r} \bullet \text{grad}) \vec{B}(\vec{0}) + \dots \quad (2.209)$$

Dann ist die Kraft also:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{1}{c} \int \vec{j}(\vec{r}') dV' \times \vec{B}(\vec{0}) + \frac{1}{c} \int \vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r}' \bullet \vec{\nabla}) \vec{B}(\vec{0}) dV' \\ &= 0 + \frac{1}{c} \int \vec{j}(\vec{r}') \times [\vec{\nabla}(\vec{r}' \bullet \vec{B}(\vec{0})) - \vec{r}' \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{0}))] dV' \\ &= \frac{1}{c} \int \vec{j}(\vec{r}') \times \vec{\nabla}(\vec{r}' \bullet \vec{B}(\vec{0})) dV', \end{aligned} \quad (2.210)$$

da die Stromdichte, die das \vec{B} -Feld erzeugt, sich nicht am Ort des magnetischen Dipols befindet und daher dort $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{0}$ gilt. Weiterhin:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -\frac{1}{c} \vec{\nabla} \times \int (\vec{r}' \bullet \vec{B}(\vec{0})) \vec{j}(\vec{r}') dV' \\ &= \frac{1}{2c} \vec{\nabla} \times \left(\vec{B}(\vec{0}) \times \left(\int \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}') dV' \right) \right), \end{aligned} \quad (2.211)$$

wobei für das Integral dieselben Umformungen gemacht wurden wie weiter oben bei $\int (\vec{r} \bullet \vec{r}') \vec{j} dV'$. Damit:

$$\vec{F} = \vec{\nabla} \times (\vec{B}(\vec{0}) \times \vec{m}) = (\vec{m} \bullet \vec{\nabla}) \vec{B}(\vec{0}) - (\vec{\nabla} \bullet \vec{B}(\vec{0})) \vec{m}, \quad (2.212)$$

und schließlich ergibt sich wie beim elektrischen Feld:

$$\boxed{\vec{F} = (\vec{m} \bullet \vec{\nabla}) \vec{B}(\vec{0})}. \quad (2.213)$$

Die letzte Formel kann man auch umschreiben zu:

$$\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{m} \bullet \vec{B}), \quad (2.214)$$

also erhält man sofort die potentielle Energie eines magnetischen Dipols im Magnetfeld:

$$\boxed{V = -\vec{m} \bullet \vec{B}}. \quad (2.215)$$

Das Drehmoment berechnet sich zu:

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \int \vec{r}' \times \vec{f}(\vec{r}') dV' = \frac{1}{c} \int \vec{r}' \times (\vec{j}(\vec{r}') \times \vec{B}(\vec{r}')) dV' \\ &= \frac{1}{c} \int \vec{r}' \times (\vec{j}(\vec{r}') \times \vec{B}(\vec{0})) dV' + \dots \\ &= \frac{1}{c} \int (\vec{r}' \bullet \vec{B}(\vec{0})) \vec{j}(\vec{r}') - \frac{1}{c} \int (\vec{r}' \bullet \vec{j}(\vec{r}')) \vec{B}(\vec{0}) dV' \end{aligned} \quad (2.216)$$

Es gilt: $\vec{\nabla} \bullet (r^2 \vec{j}) = 2(\vec{r} \bullet \vec{j}) + r^2 \vec{\nabla} \bullet \vec{j} = 2(\vec{r} \bullet \vec{j})$, also:

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \frac{1}{c} \int (\vec{r}' \bullet \vec{B}(\vec{0})) \vec{j}(\vec{r}') - \frac{1}{2c} \vec{B}(\vec{0}) \int \vec{\nabla} \bullet (r'^2 \vec{j}(\vec{r}')) dV' \\ &= \frac{1}{c} \int (\vec{r}' \bullet \vec{B}(\vec{0})) \vec{j}(\vec{r}') - \frac{1}{2c} \vec{B}(\vec{0}) \int r'^2 \vec{j}(\vec{r}') \bullet d\vec{A}' \\ &= \frac{1}{c} \int (\vec{r}' \bullet \vec{B}(\vec{0})) \vec{j}(\vec{r}') - 0 \\ &= -\frac{1}{2c} \vec{B}(\vec{0}) \times \int \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}') dV', \end{aligned} \quad (2.217)$$

also:

$$\boxed{\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}}, \quad (2.218)$$

was strenggenommen natürlich nur gilt, wenn das Feld sich im Bereich des Dipols so langsam verändert, daß die Taylorentwicklung bis zur ersten Ordnung ausreicht.

Da die Formeln für das von einem Dipol erzeugte Feld und die auf einen Dipol wirkende Kraft völlig äquivalent zum elektrischen Dipol sind, kann man die Formel für die Kraft zwischen zwei Dipolen schließlich einfach übernehmen:

$$\vec{F} = \frac{3}{r_2^4} (\vec{m}_1 (\vec{n} \bullet \vec{m}_1) + \vec{m}_2 (\vec{n} \bullet \vec{m}_2) + \vec{n} (\vec{m}_1 \bullet \vec{m}_2) - 5\vec{n} (\vec{m}_1 \bullet \vec{n}) (\vec{m}_2 \bullet \vec{n})) \quad (2.219)$$

Ebenso erhält man dieselbe Formel für die Wechselwirkungsenergie zweier Dipole:

$$E_{mWW} = \frac{\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2 - 3(\vec{m}_1 \cdot \frac{\vec{r}}{r})(\vec{m}_2 \cdot \frac{\vec{r}}{r})}{r^3}. \quad (2.220)$$

Kapitel 3

Felder in Materie

3.1 Dielektrika

3.1.1 Die dielektrische Verschiebung

Ein makroskopischer Körper besteht aus sehr vielen Atomen oder Molekülen (Größenordnung 10^{23} Teilchen). Wenn das elektrische Feld in einem solchen Körper berechnet werden soll, so müssen also zwangsläufig Näherungen eingeführt werden. Betrachte zunächst das Potential eines einzigen Moleküls:

$$\Phi_j(\vec{r}) = \int_{\text{Molekül } j} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'. \quad (3.1)$$

Wähle nun einen Punkt \vec{r}_{j0} im Inneren des Moleküls (beispielsweise den Schwerpunkt); dann kann jeder Punkt des Moleküls dargestellt werden durch $\vec{r}' = \vec{r}_{j0} + \vec{r}_j$. Das Potential ist also:

$$\Phi_j(\vec{r}) = \int \frac{\rho_j(\vec{r}_j)}{|\vec{r} - \vec{r}_{j0} - \vec{r}_j|} dV_j. \quad (3.2)$$

Dabei ist $\rho_j(\vec{r}_j) = \rho(\vec{r}_{j0} + \vec{r}_j)$ die Ladungsverteilung des Moleküls, betrachtet vom Punkt \vec{r}_{j0} aus.

Es gilt $|\vec{r}_j| \ll |\vec{r} - \vec{r}_{j0}|$ - die Ausdehnung des Moleküls ist vernachlässigbar gering im Vergleich zum Abstand des Beobachters. Also kann man den Bruch unter dem Integral entwickeln:

$$\Phi_j(\vec{r}) = \int \rho_j(\vec{r}_j) \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_{j0}|} + \vec{r}_j \cdot \vec{\nabla}_j \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_{j0}|} + \dots \right) dV_j, \quad (3.3)$$

wobei $\vec{\nabla}_j$ die Ableitung nach \vec{r}_{j0} bezeichne. Zieht man die von \vec{r}_j unabhängigen Terme nun vor das Integral und führt dieses aus, so erhält man:

$$\Phi_j(\vec{r}) = q_j \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_{j0}|} + \vec{d}_j \cdot \vec{\nabla}_j \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_{j0}|} \quad (3.4)$$

mit den üblichen Definitionen für Gesamtladung und Dipolmoment. Wir haben hier also eine Multipolentwicklung um \vec{r}_{j0} gemacht, wobei das Quadrupolmoment und höhere Multipolmomente der Moleküle vernachlässigt wurden

(Messungen zeigen, daß deren Beitrag tatsächlich klein ist gegenüber dem Dipolmoment).

Das gesamte Potential erhält man nun durch Aufsummieren der Potentiale, die von den einzelnen Molekülen erzeugt werden:

$$\Phi(\vec{r}) = \sum_j \left(q_j \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_{j0}|} + \vec{d}_j \cdot \vec{\nabla}_j \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_{j0}|} \right), \quad (3.5)$$

wobei die Summe über alle 10^{23} (größenordnungsmaßig) Moleküle läuft.

Da man diese Summe sicher nicht exakt auswerten kann, führe nun eine weitere Näherung ein: Die Ladungen bzw. Dipolmomente werden als punktförmig angenommen (jeweils im Punkt \vec{r}_{j0} konzentriert). Dann kann man eine mittlere elektrische Ladungsdichte und die elektrische Dipoldichte einführen durch:

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(\vec{r}) &:= \sum_j q_j \delta(\vec{r} - \vec{r}_{j0}) \\ \vec{P}(\vec{r}) &:= \sum_j \vec{d}_j \delta(\vec{r} - \vec{r}_{j0}). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Die statischen Dipolmomente \vec{p}_j der Moleküle sind aber im allgemeinen entweder null, oder ihr Beitrag mittelt sich heraus, da sie ungeordnet im Festkörper verteilt sind. Die Dipoldichte wird deswegen meist dann erst wichtig, wenn ein äußeres elektrisches Feld anliegt (siehe unten).

Ebenso verschwindet die mittlere Ladungsdichte im allgemeinen: Diese ist eine Summe über die Ladungen der einzelnen Moleküle, und Moleküle (oder Basiseinheiten eines Ionengitters in Salzen) sind ja elektrisch neutral ($q_j = 0$) - also ergibt sich $\bar{\rho} = 0$.

Oft betrachtet man aber Fälle, in denen man von außen zusätzliche Ladungen auf einen Körper aufbringt - dann verschwindet die mittlere Ladungsdichte nicht mehr, sondern ist identisch mit der Dichte dieser von außen aufgebrachten („externen“) Ladungsträgern:

$$\bar{\rho} = \rho_{ext}. \quad (3.7)$$

Das Potential ist nun also:

$$\Phi(\vec{r}) = \int \left(\rho_{ext}(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \vec{P}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV'. \quad (3.8)$$

Wende darauf den Laplace-Operator an und berücksichtige, daß $\Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}')$ ist; dann erhält man:

$$\Delta\Phi(\vec{r}) = -4\pi \int \left(\rho_{ext}(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') + \vec{P}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}' \delta(\vec{r} - \vec{r}') \right) dV'. \quad (3.9)$$

Im ersten Summanden führe das Integral direkt aus; im zweiten benutze, daß $\vec{\nabla}' \delta(\vec{r} - \vec{r}') = -\vec{\nabla} \delta(\vec{r} - \vec{r}')$ ist:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi(\vec{r}) &= -4\pi\rho_{ext}(\vec{r}) + 4\pi \int \vec{P}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla} \delta(\vec{r} - \vec{r}') dV' \\ &= -4\pi\rho_{ext}(\vec{r}) + 4\pi \int \vec{\nabla} \cdot (\delta(\vec{r} - \vec{r}') \vec{P}(\vec{r}')) dV'. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Da der Nabla-Operator nun auf den ungestrichenen Vektor wirkt, kann man ihn vor das Integral ziehen und dieses dann ausführen:

$$\Delta\Phi(\vec{r}) = -4\pi\rho_{ext}(\vec{r}) + 4\pi\vec{\nabla} \bullet \vec{P}(\vec{r}). \quad (3.11)$$

Andererseits ist $\Delta\Phi = \text{div grad}\Phi = -\text{div}\vec{E}$, also:

$$\text{div}\vec{E}(\vec{r}) = 4\pi\rho_{ext}(\vec{r}) - 4\pi\text{div}\vec{P}(\vec{r}). \quad (3.12)$$

Man definiert nun die *dielektrische Verschiebung* durch:

$$\boxed{\vec{D} := \vec{E} + 4\pi\vec{P};} \quad (3.13)$$

damit ergibt sich schließlich:

$$\boxed{(I) \text{div}\vec{D} = 4\pi\rho_{ext}.} \quad (3.14)$$

Diese Gleichung ist das Äquivalent zur Vakuum-Maxwellgleichung (I) in Materie.

Während die Quelle der elektrischen Feldstärke die gesamte Ladungsdichte ist (einschließlich lokaler Schwankungen), ist die Quelle für die dielektrische Verschiebung also nur noch die Dichte der von außen zusätzlich aufgebraachten Ladungsträger. Alle Effekte, die durch die Schwankungen der lokalen Ladungsdichte entstehen, sind in die Definition von \vec{D} absorbiert worden. Die dielektrische Verschiebung kann man nun also genauso berechnen, wie man die elektrische Feldstärke im Vakuum bei vorgegebener Ladungsverteilung $\rho = \rho_{ext}$ berechnet hätte.

Die zweite Maxwellgleichung der Elektrostatik bleibt im Gegensatz zur ersten aber ungeändert: Es gilt ja weiterhin $\vec{E} = -\text{grad}\Phi$ (wurde schließlich sogar in der Herleitung benutzt), und, da $\text{rot grad} = 0$:

$$\boxed{(III) \text{rot}\vec{E} = 0.} \quad (3.15)$$

Die Effekte, die durch ein zusätzliches äußeres Feld oder durch zusätzlich aufgebraachte Ladungen entstehen, sollen nun noch genauer betrachtet werden. Liegt ein solches Feld an bzw. entsteht es im Körper durch aufgebraachte Ladungen, so werden in den Molekülen Dipolmomente induziert, indem die positiven und negativen Ladungen gegeneinander verschoben werden (bzw. vorhandene Dipolmomente werden ausgerichtet). Man sagt, daß die Materie *polarisiert* wird; dementsprechend heißt die elektrische Dipoldichte \vec{P} auch (*elektrische*) *Polarisation*.

Durch die Verschiebung der Ladungen wird im Festkörper eine Raumladungsdichte ρ_P induziert; an der Oberfläche entsteht eine Flächenladungsdichte σ_P (siehe Abb. 3.1). Zwischen der Polarisation und diesen Ladungsdichten bestehen Zusammenhänge, die nun hergeleitet werden sollen. Betrachte dafür den von der Polarisation herrührenden Teil des Potentials:

$$\Phi_P(\vec{r}) = \int \vec{P}(\vec{r}') \bullet \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' = \int \left(\vec{\nabla}' \bullet \frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{\vec{\nabla}' \bullet \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV'. \quad (3.16)$$

Abbildung 3.1: Entstehung einer Raum- und einer Flächenladungsdichte durch die Polarisation eines Körpers

Den ersten Summanden kann man wie üblich mit dem Gauß'schen Satz in ein Oberflächenintegral über die Außenfläche des Körpers umwandeln:

$$\Phi_P(\vec{r}) = \int_{\partial V'} \vec{n} \cdot \frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dF' - \int_{V'} \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'. \quad (3.17)$$

Andererseits muß gelten (vergleiche Abschnitt 2.1.4):

$$\Phi_P(\vec{r}) = \int_{\partial V'} \frac{\sigma_P(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dF' + \int_{V'} \frac{\rho_P(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'. \quad (3.18)$$

Damit ergeben sich folgende Beziehungen zwischen den induzierten Ladungsdichten und der Polarisation:

$$\sigma_P = \vec{n} \cdot \vec{P}; \quad \rho_P = -\operatorname{div} \vec{P}. \quad (3.19)$$

Setzt man dies in die Materie-Maxwellgleichung (I) ein, so ergibt sich:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \operatorname{div} \vec{D} - 4\pi \operatorname{div} \vec{P} = 4\pi(\rho_{ext} + \rho_P). \quad (3.20)$$

Es ergibt sich wiederum, daß die Quelle der elektrischen Feldstärke die komplette Ladungsdichte ist - sowohl die der von außen aufgebrachten Ladungen als auch die lokalen Schwankungen, die durch die Verschiebungen, also die Polarisation, hervorgerufen werden. Die Berechnung der elektrischen Feldstärke ist also deutlich schwieriger als die der dielektrischen Verschiebung, für die die einfache Materie-Maxwellgleichung (I) gilt.

Die für die Herleitung dieser vereinfachten Beziehung nötigen Näherung waren dabei:

1. Vernachlässigung höherer Multipolmomente als Dipole (durch Messungen unterstützt)
2. Annäherung der ausgedehnten Ladungsverteilung durch punktförmige Ladungen und Dipole (gerechtfertigt, da die Ausdehnung der Moleküle sehr viel kleiner ist als die des makroskopischen Körpers)

Eine etwas sauberere (aber meiner Ansicht nach auch kompliziertere und undurchsichtigere) Behandlung der hier nötigen Näherungen und Mittelungen findet man in *Greiner: Elektrodynamik*.

Oft interessiert aber gar nicht das einfach zu berechnende Feld \vec{D} , sondern die elektrische Feldstärke \vec{E} - diese hat ja viel mehr physikalische Bedeutung, da durch sie Kräfte auf Ladungen ausgeübt werden. Man erhält sie zwar theoretisch einfach als Differenz von dielektrischer Verschiebung und (4 pi mal) Polarisierung, aber letztere ist eben nicht von vornherein bekannt. Auch hierfür sind wiederum diverse Näherungen in Gebrauch.

Zunächst nimmt man an, daß zwischen Feldstärke und Polarisierung ein linearer Zusammenhang besteht, daß also die Dipolmomente, also die Verschiebungen der Ladungen im Molekül, proportional zum anliegenden Feld sind:

$$\vec{P}(\vec{r}) = \chi_e(\vec{r})\vec{E}(\vec{r}) \quad (3.21)$$

mit der *elektrischen Suszeptibilität* χ_e . Stoffe, in denen dies gilt, werden auch als *linear* bezeichnet. Die Suszeptibilität wird im allgemeinen vom Ort und von der Richtung des Feldes relativ zum Körper abhängen, da viele Körper *anisotrop* sind (also in verschiedene Richtungen eine unterschiedliche Struktur haben). Sie ist also eine Matrix bzw. wegen der Ortsabhängigkeit ein Matrixfeld (genauer: ein Tensorfeld zweiter Stufe); nur bei isotropen Körpern ist sie eine reine Zahl (ein Skalarfeld).

In allen konkreten Rechnungen betrachtet man aber meist nur den Spezialfall χ_e unabhängig von Ort (homogener Körper) und Richtung (isotroper Körper), also

$$\boxed{\vec{P}(\vec{r}) = \chi_e \vec{E}(\vec{r})}. \quad (3.22)$$

Setzt man in die Definition der dielektrischen Verschiebung ein, so erhält man:

$$\vec{D} = (1 + 4\pi\chi_e)\vec{E} =: \epsilon\vec{E}, \quad (3.23)$$

wobei hier die *Dielektrizitätskonstante* ϵ definiert wurde (auch diese ist im allgemeinen ein Tensorfeld zweiter Stufe). Damit ergibt sich dann für das elektrische Feld:

$$\text{div}\epsilon\vec{E} = 4\pi\rho_{ext}. \quad (3.24)$$

Wenn der Körper homogen ist, kann man ϵ vor den Differentialoperator ziehen und erhält dann schließlich:

$$\text{div}\vec{E} = \frac{4\pi\rho_{ext}}{\epsilon}. \quad (3.25)$$

Daraus ergibt sich wiederum

$$\Delta\Phi = -\frac{4\pi\rho_{ext}}{\epsilon}. \quad (3.26)$$

Diese Gleichung kann nun wiederum mit der bekannten Greensfunktion zum Laplaceoperator gelöst werden.

Zusammenfassend haben wir folgende zusätzliche Näherungen benutzt, um auf die einfache Formel (3.25) für das elektrische Feld zu kommen:

3. Linearität (Ladungsverschiebung im Molekül proportional zum Feld),
4. Isotropie und
5. Homogenität des Körpers;

die Formel gilt also nur für eine begrenzte Klasse von Materialien!

Bei bekannter Dielektrizitätskonstante (die eine Materialkonstante ist) kann man nun die elektrische Feldstärke berechnen. Dielektrizitätskonstanten können beispielsweise mit Hilfe von Plattenkondensatoren gemessen werden (siehe Abschnitt 3.4.2). Körper mit $\epsilon \neq 1$ (also so gut wie alle) heißen *Dielektrika*. Typische Werte für ϵ sind:

Vakuum	1
Luft	1.0005
Glas	5-8
Alkohol	26
Wasser	81

In der Natur treten dabei im wesentlichen zwei verschiedene Arten der Polarisation auf (wie schon weiter oben angedeutet). Einerseits können in Molekülen ohne eigenes Dipolmoment die positiven und negativen Ladungen gegeneinander verschoben werden; man spricht dann von *Deformations-* oder *Verschiebungspolarisation*.

Andere Moleküle (Wasser, Ammoniak usw.) haben dagegen schon von vornherein ein Dipolmoment, das allerdings makroskopisch nicht bemerkbar ist (da sie rotieren und außerdem im Körper statistisch wild verteilt durcheinanderliegen). Diese Dipole können nun durch ein äußeres Feld ausgerichtet werden: da sie nun alle in dieselbe Richtung zeigen und sich aufaddieren, ergibt sich ein makroskopisch beobachtbarer Effekt. Dies ist die sogenannte *Orientierungspolarisation*.

In einigen Stoffen gibt es sogar natürliche, ausgerichtete Dipolmomente, die allerdings immer nur in kleinen Bereichen (sogenannte *Weiß'sche Bezirke*) alle in dieselbe Richtung zeigen; in Analogie zum Ferromagnetismus (siehe weiter unten) spricht man dann von *Ferroelektrika*.

Zu beachten ist außerdem noch, daß die Verschiebung der Ladungen bzw. Ausrichtung der Dipolmomente eine gewisse Zeit braucht (man spricht hier manchmal von einer *Relaxationszeit*). Hat man keine statischen äußeren Felder, sondern schnell veränderliche, so kann es passieren, daß die Verschiebung bzw. Ausrichtung nicht mehr schnell genug den Änderungen der Feldstärke folgen kann. Man erhält dann andere (kleinere) Werte für die Dielektrizitätskonstante. Diese ist also frequenzabhängig:

$$\epsilon = \epsilon(\omega). \quad (3.27)$$

Eine genauere Besprechung aller dieser Phänomene findet man in Büchern (oder Vorlesungen) über Festkörperphysik.

3.1.2 Grenzflächen; dielektrische Kugel

Es kommt oft vor, daß zwei Materialien mit unterschiedlichen Dielektrizitätskonstanten aneinandergrenzen. Ein Beispiel ist ein Dielektrikum in einem Plattenkondensator, ein anderes die Lichtbrechung beim Übergang von einem Medium in ein anderes. In beiden Medien werden dann sowohl \vec{E} als auch \vec{D} jeweils andere Beträge und im allgemeinen auch andere Richtungen haben.

Hier soll nun untersucht werden, welcher Zusammenhang zwischen den Feldern in den beiden Medien besteht. Dafür werden wir uns die Grenzflächen etwas genauer anschauen und sehen, daß jeweils gewisse Komponenten der Felder dort stetig sind.

Betrachte zunächst einen flachen Zylinder, der einen Teil der Grenzfläche einschließt und dessen Grundflächen parallel dazu sind (s. Abb. 3.2). Für das Integral der elektrischen Verschiebungsdichte über die Oberfläche dieses Zylinders gilt nach der ersten Maxwellgleichung:

$$\oint_{\partial\text{Zyl}} dA \vec{n} \cdot \vec{D} = 4\pi Q_{ext}. \quad (3.28)$$

Das Oberflächenintegral erhält Beiträge sowohl von den Grundflächen des Zylinders als auch von der Mantelfläche. Letzterer geht gegen null, wenn man den Zylinder immer flacher macht. Dann ist der einzige Beitrag zur Ladung aber schließlich auch nur die Oberflächenladungsdichte σ ; es gilt also: $Q_{ext} = A\sigma$. Andererseits kann man die Verschiebungsdichte als auf der Grundfläche konstant annehmen, wenn man diese klein genug wählt. Dann kann das Oberflächenintegral abgeschätzt werden durch:

$$\oint_{\partial\text{Zyl}} dA \vec{n} \cdot \vec{D} = A\vec{n}_1 \cdot \vec{D}_1 + A\vec{n}_2 \cdot \vec{D}_2 = A\vec{n}_1 \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2), \quad (3.29)$$

da die beiden Normalenvektor \vec{n}_1 und \vec{n}_2 in entgegengesetzte Richtungen zeigen. Wenn man als Abkürzung für $\vec{n}_i \cdot \vec{D}_i$ nun $\vec{D}_{i,\perp}$ schreibt (die Komponente der Verschiebungsdichte, die senkrecht auf der Grenzfläche steht), so folgt schließlich:

$$\boxed{\vec{D}_{1,\perp} - \vec{D}_{2,\perp} = 4\pi\sigma.} \quad (3.30)$$

Abbildung 3.2: Integrationsvolumen bzw. -oberfläche zur Herleitung der Stetigkeit der Normalkomponenten

Speziell falls keine Oberflächenladungen vorhanden sind, gilt:

$$\vec{D}_{1,\perp} = \vec{D}_{2,\perp}, \quad (3.31)$$

das heißt: *Die Normalkomponente der elektrischen Verschiebungsdichte ist an Grenzflächen stetig.*

Ähnlich kann man nun mit der dritten Maxwell-Gleichung verfahren:

$$\oint_{\partial A} \vec{ds} \cdot \vec{E} = 0 \cdot \dot{\vec{B}} \quad (3.32)$$

Als Integrationsweg wähle nun ein Rechteck, von dem zwei Seiten der Länge a parallel zur Grenzfläche und die anderen beiden der Länge b senkrecht dazu sind (s. Abb. 3.3). Lässt man nun b gegen null gehen, so liefern nur noch die beiden Strecken parallel zur Grenzfläche einen Beitrag zum Wegintegral; die beiden Tangentialvektoren dort seien \vec{t}_1 und \vec{t}_2 . Wenn man auch a klein genug wählt, so daß das elektrische Feld auf der gesamten Strecke konstant ist, dann gilt also:

$$a\vec{t}_1 \cdot \vec{E}_1 + a\vec{t}_2 \cdot \vec{E}_2 = 0. \quad (3.33)$$

Die beiden Tangentialvektoren haben entgegengesetzte Richtungen. $\vec{t}_1 \cdot \vec{E}_i$ ist aber gerade die Komponente $\vec{E}_{i,\parallel}$ parallel zur Grenzfläche; also gilt:

$$\boxed{\vec{E}_{1,\parallel} = \vec{E}_{2,\parallel}} \quad (3.34)$$

In Worten: *Die Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke ist an Grenzflächen stetig.*

Ein Anwendungsbeispiel ist das elektrische Feld in einer homogenen Kugel mit Dielektrizitätskonstante ϵ_1 , die in ein homogenes Material mit ϵ_2 eingebettet ist, in dem ein homogenes elektrisches Feld besteht.

Das Feld liege in z -Richtung: $\vec{E}_2 = E_2 \vec{e}_z$. Dann folgt sofort für die elektrische Verschiebungsdichte im Medium 2: $\vec{D}_2 = \epsilon_2 E_2 \vec{e}_z$. Betrachte nun eine Kugel mit Radius R um den Ursprung: Ihr Normalenvektor in Richtung der Winkel θ und ϕ ist $\vec{e}_r = (\sin(\theta) \cos(\phi), \sin(\theta) \sin(\phi), \cos(\theta))$, \vec{e}_θ und \vec{e}_ϕ

Abbildung 3.3: Integrationsfläche bzw. -strecke zur Herleitung der Stetigkeit der Tangentialkomponenten

sind Tangentialvektoren mit $\vec{e}_\theta = (\cos(\theta) \cos(\phi), \cos(\theta) \sin(\phi), -\sin(\theta))$, $\vec{e}_\phi = (-\sin(\theta) \sin(\phi), \sin(\theta) \cos(\phi), 0)$.

Da wir hier keine (von außen aufbrachten) Oberflächenladungen haben, gilt nun:

$$\vec{e}_r \bullet \vec{D}_1 = \vec{e}_r \bullet \vec{D}_2; \quad \vec{e}_\theta \bullet \vec{E}_1 = \vec{e}_\theta \bullet \vec{E}_2; \quad \vec{e}_\phi \bullet \vec{E}_1 = \vec{e}_\phi \bullet \vec{E}_2. \quad (3.35)$$

Nun muß aber noch berücksichtigt werden, daß durch das äußere Feld die Ladungen in der Kugel verschoben werden; es bildet sich also eine Polarisation aus. Dies führt dazu, daß die Kugel als Ganzes nun ein Dipol ist mit $\vec{d} = d\vec{e}_z$. Theoretisch könnten auch höhere Momente auftreten, wir werden jedoch sehen, daß diese Annahme ausreicht. Das gesamte äußere Feld ist damit:

$$\vec{E}_2 = E_2 \vec{e}_z + \frac{3(\vec{d} \bullet \vec{r})\vec{r} - d r^2}{r^5} = E_2 \vec{e}_z + \frac{3d \cos(\theta)}{r^3} \vec{e}_r - \frac{d}{r^3} \vec{e}_z. \quad (3.36)$$

Setzt man alles ein, so erhält man schließlich aus den Stetigkeitsbedingungen an der Kugeloberfläche:

$$\epsilon_1 \vec{e}_r \bullet \vec{E}_1 = \epsilon_2 \cos(\theta) \left(E_2 + \frac{2d}{R^3} \right); \quad \vec{e}_\theta \bullet \vec{E}_1 = -\sin(\theta) \left(E_2 - \frac{d}{R^3} \right); \quad \vec{e}_\phi \bullet \vec{E}_1 = 0, \quad (3.37)$$

also

$$\vec{E}_1 = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \cos(\theta) \left(E_2 + 2 \frac{d}{R^3} \right) \vec{e}_r - \sin(\theta) \left(E_2 - \frac{d}{R^3} \right) \vec{e}_\theta. \quad (3.38)$$

Das innere Feld ergibt sich aber durch das äußere Feld, welches in z -Richtung zeigt, und durch die Polarisation, die wiederum durch das äußere Feld erzeugt wird. Also ist die Annahme naheliegend, daß das elektrische Feld in der Kugel ebenfalls in z -Richtung verläuft:

$$\vec{E}_1 = E_1 \vec{e}_z = E_1 (\cos(\theta) \vec{e}_r - \sin(\theta) \vec{e}_\theta). \quad (3.39)$$

Durch Vergleich mit der vorherigen Formel erhält man

$$E_1 = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \left(E_2 + 2 \frac{d}{R^3} \right) \quad \text{und} \quad E_1 = E_2 - \frac{d}{R^3}. \quad (3.40)$$

Daraus ergibt sich dann:

$$d = R^3 \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} E_2, \quad (3.41)$$

und die Felder innen und außen sind schließlich:

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 &= \frac{3\epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} E_2 \vec{e}_z \\ \vec{E}_2 &= E_2 \vec{e}_z + E_2 \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} \frac{R^3}{r^3} (3 \cos(\theta) \vec{e}_r - \vec{e}_z). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Man sieht, daß das innere Feld für $\epsilon_2 > \epsilon_1$ stärker ist als das anregende äußere, für $\epsilon_2 < \epsilon_1$ dagegen schwächer. Dies rührt daher, daß das äußere Feld zusätzliche Ladungen in der Kugel induziert. Da diese die Quellen des elektrischen Feldes sind, hat man also in der Kugel eine andere Feldstärke als

außen, abhängig von der Polarisierung, die wiederum vom Verhältnis der Dielektrizitätskonstanten abhängt. Die dielektrische Verschiebungsdichte, die ja nur von extern aufgebrauchten Ladungen abhängt, ist dagegen in der Kugel gleich stark wie außerhalb. In Abbildung 3.4 sind die Feldlinien für beide Fälle dargestellt.

Spezialfälle sind:

1. gleiche Materialien: $\epsilon_1 = \epsilon_2$

$$d = 0; \quad \vec{E}_1 = E_2 \vec{e}_z = \vec{E}_2. \quad (3.43)$$

2. dielektrische Kugel in Luft/Vakuum: $\epsilon_2 = 1, \epsilon := \epsilon_1$

$$\begin{aligned} d &= R^3 \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} E_2 \\ \vec{E}_1 &= \frac{3}{\epsilon + 2} E_2 \vec{e}_z \\ \vec{E}_2 &= E_2 \vec{e}_z + E_2 \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \frac{R^3}{r^3} (3 \cos(\theta) \vec{e}_r - \vec{e}_z). \end{aligned} \quad (3.44)$$

3. kugelförmiger Hohlraum in Dielektrikum: $\epsilon_1 = 1, \epsilon := \epsilon_2$

$$\begin{aligned} d &= R^3 \frac{1 - \epsilon}{1 + 2\epsilon} E_2 = -R^3 \frac{\epsilon - 1}{1 + 2\epsilon} E_2 \\ \vec{E}_1 &= \frac{3\epsilon}{2\epsilon + 1} E_2 \vec{e}_z \\ \vec{E}_2 &= E_2 \vec{e}_z - E_2 \frac{\epsilon - 1}{1 + 2\epsilon} \frac{R^3}{r^3} (3 \cos(\theta) \vec{e}_r - \vec{e}_z). \end{aligned} \quad (3.45)$$

Der dritte Fall ist wichtig bei der Herleitung der Clausius-Mosotti-Formel, die einen Zusammenhang zwischen atomarer Polarisierbarkeit und Dielektrizitätskonstante liefert.

Abbildung 3.4: Verlauf der elektrischen Verschiebungsdichte (a) und der elektrischen Feldstärke (b) bei einer dielektrischen Kugel in einem homogenen äußeren Feld

3.2 Magnetismus

3.2.1 Die magnetische Feldstärke

In Analogie zum elektrostatischen Fall kann man die Stromdichte in einem makroskopischen Körper aufteilen in die von außen aufgeprägte makroskopische Stromdichte (die bei Mittelung über lokale Schwankungen übrigbleibt) und lokale Stromdichten, die letztlich durch Kreisströme, also bewegte Elektronen in den Molekülen, entstehen:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}_{ext}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' + \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}_{lokal}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'. \quad (3.46)$$

Die lokale Stromdichte kann dabei wiederum in guter Näherung durch Dipolfelder ausgedrückt werden:

$$\frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}_{lokal}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' = \sum_j \frac{\vec{m}_j \times (\vec{r} - \vec{r}_{j0})}{|\vec{r} - \vec{r}_{j0}|^3} = \int \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \quad (3.47)$$

mit der magnetischen Dipoldichte

$$\vec{M}(\vec{r}) := \sum_j \vec{m}_j \delta(\vec{r} - \vec{r}_{j0}). \quad (3.48)$$

Das Integral über diese Dipoldichte kann umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} \int \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' &= - \int \left(\vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \times \vec{M}(\vec{r}') dV' \\ &= - \int \left(\vec{\nabla}' \times \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV' + \int \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Das erste Integral kann mit Hilfe des Gauß'schen Satzes in ein Oberflächenintegral umgewandelt werden und verschwindet deshalb (da man die Oberfläche im Unendlichen wählen kann und der Körper und deshalb auch die Magnetisierung nur endlich ausgedehnt ist). Man erhält also für das Vektorpotential:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}_{ext}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' + \int \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' = \int \frac{\vec{j}_{ext}(\vec{r}')/c + \text{rot}' \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'. \quad (3.50)$$

Wendet man darauf den Laplace-Operator an, so ergibt sich:

$$\Delta \vec{A}(\vec{r}) = -4\pi \int \left(\frac{1}{c} \vec{j}_{ext}(\vec{r}') + \text{rot}' \vec{M}(\vec{r}') \right) \delta(\vec{r} - \vec{r}') = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}_{ext}(\vec{r}) - 4\pi \text{rot} \vec{M}(\vec{r}). \quad (3.51)$$

Andererseits ist $\Delta \vec{A} = \text{grad} \text{div} \vec{A} - \text{rot} \text{rot} \vec{A} = \text{grad} \text{div} \vec{A} - \text{rot} \vec{B}$. Ähnlich wie in Abschnitt 2.3.1 kann man nun zeigen, daß $\text{div} \vec{A} = 0$ ist (benutze dafür noch $\text{div} \text{rot} = 0$). Also ergibt sich $\Delta \vec{A} = -\text{rot} \vec{B}$ und damit:

$$\text{rot} \vec{B}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_{ext}(\vec{r}) + 4\pi \text{rot} \vec{M}(\vec{r}). \quad (3.52)$$

Definiert man nun

$$\boxed{\vec{H} := \vec{B} - 4\pi\vec{M}}, \quad (3.53)$$

so ergibt sich schließlich folgende Formel, äquivalent zur Maxwellgleichung (IV) der Magnetostatik im Vakuum:

$$\boxed{(IV) \operatorname{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_{ext}}. \quad (3.54)$$

Da die Beziehung zwischen \vec{H} und der magnetischen Flußdichte \vec{B} genauso aussieht wie die zwischen elektrischer Feldstärke und dielektrischer Verschiebung, bezeichnet man \vec{H} als *magnetische Feldstärke*. Fundamental ist aber eigentlich das \vec{B} -Feld - es wird von allen Strömen erzeugt, nicht nur von den extern aufgebrachten (in Analogie zum \vec{E} -Feld), und es übt Kräfte auf bewegte Ladungen aus (in der Lorentzkraft steht \vec{B} , nicht \vec{H}). Der Name „Feldstärke“ für \vec{H} hat wohl historische Gründe (vermute ich).

Die andere Maxwell-Gleichung der Magnetostatik

$$\boxed{(II) \operatorname{div}\vec{B} = 0} \quad (3.55)$$

bleibt ungeändert, da ja immer noch $\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$ gilt.

Die magnetische Dipoldichte erzeugt ein makroskopisches Magnetfeld; \vec{M} wird deshalb als *Magnetisierung* bezeichnet. Erfahrungsgemäß ist der Zusammenhang zwischen (induzierter) Magnetisierung und äußerem Magnetfeld wiederum näherungsweise linear:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad (3.56)$$

mit der *magnetischen Suszeptibilität* χ_m (im allgemeinen eine ortsabhängige Matrix). Nimmt man wieder an, daß der Körper isotrop ist, so ist die Suszeptibilität eine skalare Größe (im allgemeinen aber immer noch ortsabhängig). Man definiert ganz analog zur Dielektrizitätskonstanten durch

$$\vec{B} = (1 + 4\pi\chi_m)\vec{H} =: \mu\vec{H} \quad (3.57)$$

die *Permeabilität* μ . Für homogene Körper erhält man also:

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \frac{4\pi\mu}{c}\vec{j}_{ext} \quad (3.58)$$

und

$$\Delta\vec{A} = -\frac{4\pi\mu}{c}\vec{j}_{ext}. \quad (3.59)$$

Die verwendeten Näherungen in diesem Abschnitt waren dieselben wie im elektrostatischen Fall (1-5).

Beim Magnetismus sind wiederum die Stoffe zu unterscheiden, in denen die magnetischen Momente erst induziert werden müssen (*Diamagnetismus*) und denen, in denen vorhandene Dipolmomente nur ausgerichtet werden (*Paramagnetismus*). Im ersteren Fall erhält man negative Suszeptibilitäten, da wegen

der Lenz'schen Regel die induzierten Momente ihrer Ursache entgegengerichtet sind. Beispiele sind:

Wasserstoff	$-2.3 \cdot 10^{-9}$
Wasser	$-1.2 \cdot 10^{-5}$
Stickstoff	$-7.0 \cdot 10^{-9}$
Silber	$-2.5 \cdot 10^{-5}$

In paramagnetischen Stoffen sind die Suszeptibilitäten zwar positiv, aber betragsmäßig auch sehr klein. Es gilt also fast immer $|\chi_m| \ll 1$ und damit $\mu \approx 1$. Eine Ausnahme sind lediglich die Ferromagneten, für die sich $\mu \gg 1$ ergibt (siehe Abschnitt 3.2.3). Für eine genauere Behandlung dieser Themen sei wiederum auf die Festkörperphysik verwiesen.

3.2.2 Grenzflächen; Magnetfeld im Spulenspalt

Betreffend der Stetigkeit an Grenzflächen kann man genauso argumentieren wie im elektrischen Fall. Betrachte zunächst die zweite Maxwell-Gleichung:

$$\oint_{\partial A} dA \vec{n} \cdot \vec{B} = 0. \quad (3.60)$$

Wählt man als Integrationsfläche wiederum die Oberfläche eines Zylinders, lässt dessen Höhe gegen null gehen und wählt die Grundfläche so klein, daß das Feld auf ihr konstant ist, dann folgt wie bei der elektrischen Verschiebungsdichte:

$$\boxed{\vec{B}_{1,\perp} = \vec{B}_{2,\perp}}, \quad (3.61)$$

also: *Die Normalkomponente der magnetischen Flußdichte ist an Grenzflächen stetig.*

Außerdem kann man die vierte Maxwell-Gleichung benutzen:

$$\oint_{\partial A} \vec{ds} \cdot \vec{H} = \frac{4\pi}{c} I. \quad (3.62)$$

Nimmt man wiederum ein Rechteck als Integrationsweg und lässt dessen Ausdehnung senkrecht zur Grenzfläche gegen null gehen, so kann der Term rechts nur dann beitragen, wenn es Oberflächenströme gibt. Bis auf wenige exotische Ausnahmen (Supraleiter) kommt dies jedoch nicht vor, so daß dieser Term meist verschwindet. Wählt man nun die Ausdehnung parallel zur Grenzfläche so klein, daß \vec{H} dort näherungsweise konstant ist, dann folgt wie schon beim elektrischen Feld:

$$\boxed{\vec{H}_{1,\parallel} = \vec{H}_{2,\parallel}}, \quad (3.63)$$

es ergibt sich also: *Die Tangentialkomponente der magnetischen Feldstärke ist an Grenzflächen stetig.*

Als Anwendung dieser Regeln betrachtete folgende Situation: Wir nehmen uns eine (lange) Spule und öffnen in ihrer Mitte einen schmalen Spalt. Die Spule sei dabei mit einem Material der Permeabilität μ gefüllt; die magnetische Flußdichte in ihrem Inneren ist also $B = \frac{4\pi\mu}{c} nI$.

Da der Spalt nur sehr schmal ist, kann man annehmen, daß das magnetische Feld in seinem Inneren homogen ist und außerhalb der Spule und des Spaltes praktisch gleich null (relativ grobe Näherung, aber qualitativ stimmt's). Man hat also hier praktisch das magnetische Analogon zu einem Plattenkondensator - siehe Abschnitt 3.4.2. Das magnetische Feld tritt (näherungsweise) senkrecht aus der Spule aus und mündet auch wieder senkrecht in sie ein. Da aber die zur Grenzfläche senkrechte Komponente der magnetischen Flußdichte stetig ist, folgt, daß auch im Außenraum die Flußdichte gegeben ist durch

$$B = \frac{4\pi\mu}{c}nI. \quad (3.64)$$

Mißt man nun die magnetische Flußdichte (z. B. durch die Messung der Lorentzkraft auf geladene Teilchen, die durch den Spalt fliegen), so erhält man bei bekanntem Strom I durch die Spule und bekannter Wicklungsdichte n die Permeabilität μ des Spulenkerns.

Die magnetische Feldstärke erhält man aus der Beziehung $B = \mu H$; im Inneren der Spule ergibt sich also

$$H_i = \frac{4\pi}{c}nI, \quad (3.65)$$

im Spalt dagegen ($\mu_{Luft} \approx 1$):

$$H_a = \frac{4\pi\mu}{c}nI. \quad (3.66)$$

Im Spulenspalt ist die magnetische Feldstärke also größer als in der Spule selbst - speziell für Ferromagnetika mit $\mu \gg 1$ erhält man sehr hohe Feldstärken im Spalt.

3.2.3 Ferromagnetismus, Hysterese

In manchen Stoffen gibt es kleine Bereiche (sogenannte *Weiß'sche Bezirke*), in denen jeweils alle Dipole parallel zueinander ausgerichtet sind - auch ohne ein von außen anliegendes Feld (s. Abb. 3.5). Dies liegt an inneren Wechselwirkungen zwischen den Dipolen - näheres siehe Vorlesungen über Festkörperphysik. Es kann sich hierbei sowohl um elektrische als auch um magnetische Dipole handeln; im ersten Fall spricht man von *Ferroelektrika*, im zweiten von *Ferromagnetika*. Zweitere kommen in der Natur allerdings viel häufiger vor (beispielsweise ist Eisen ein Ferromagnetikum); darum werden wir hier nur auf diese eingehen.

In Paramagnetika gibt es zwar auch schon ohne äußeres Feld magnetische Dipole - diese liegen jedoch wild durcheinander statt parallel und bewegen sich außerdem aufgrund der Temperatur auch noch hin und her. Deswegen ist es schwierig, sie alle in eine Richtung zu stellen; bei Ferromagnetika dagegen sind die Dipole schon parallel, so daß die Richtungen der Weiß'schen Bezirke als ganzes umklappen können. Dazu ist viel weniger Energie nötig, als wenn man jeden Dipol einzeln gegen den Widerstand seiner Nachbarn ausrichten müßte. Oberhalb einer gewissen Temperatur, der sogenannten *Curie-Temperatur*, sind die thermischen Bewegungen allerdings dann doch stärker als

Abbildung 3.5: Weiß'sche Bezirke in einem Ferromagneten bzw. Ferroelektrikum: Der gesamte Körper besteht aus vielen kleinen Bereichen, in denen die Dipole jeweils parallel zueinander sind.

die Dipol-Wechselwirkungen, und die ferromagnetischen Eigenschaften gehen verloren - der Stoff verhält sich dann wie ein Paramagnet.

Bei Ferromagnetika besteht nun im allgemeinen kein einfacher Zusammenhang zwischen von außen angelegtem Magnetfeld H und innerer Magnetisierung M mehr. Dies kann man teilweise dadurch verstehen, daß die Dipole sich relativ leicht ausrichten lassen und deshalb schon bei recht kleinen Feldstärken alle in einer Richtung stehen - und mehr Magnetisierung geht eben nicht. Man spricht von der *Sättigungsmagnetisierung* - für $H \rightarrow \infty$ gilt $M \rightarrow const.$

Außerdem haben die Dipole untereinander starke Wechselwirkungen (deswegen entstehen ja die Weiß'schen Bezirke); dies geht in manchen Ferromagnetika so weit, daß die Dipole ihre Richtung beibehalten, auch nachdem das äußere Feld abgeschaltet wurde. Man hat dann also *Permanentmagnete* - auch für $H = 0$ ist $M \neq 0$. Diese Erscheinung wird auch als *Remanenz* bezeichnet.

Berücksichtigt man diese beiden Effekte, so sieht man sofort, daß der Zusammenhang zwischen H und M bei Ferromagnetika nicht linear sein kann - zumindest nicht über den gesamten Bereich. Manche Ferromagnetika zeigen keine Remanenz, es gilt also $M = 0$ für $H = 0$. Bei diesen Stoffen kann man zumindest für kleine Felder wieder eine lineare Beziehung $M = \chi_m H$ annähern und findet dann sehr große Suszeptibilitäten χ_m und dementsprechend auch sehr hohe Permeabilitäten μ (in der Größenordnung 100-1000). Bei den Ferro-

Abbildung 3.6: Verlauf der Magnetisierung abhängig von der äußeren Feldstärke bei einem Ferromagnetikum ohne bzw. mit Remanenz

magnetika mit Remanenz kann man die Permeabilitäten strenggenommen nur für die „Einschaltkurve“ angeben (siehe unten).

Bei Ferromagnetika mit Remanenzerscheinungen dagegen hängt die Wirkung eines äußeren Feldes auf den Stoff stark davon ab, welche Magnetisierung im Stoff schon vorhanden ist - also quasi von der „Vorgeschichte“ des Stoffes. Dies wird als *Hysterese* (oder auch *Hysteresis*) bezeichnet. Trotzdem kann man einen Zusammenhang zwischen H und M angeben - allerdings nicht als Formel, sondern nur als Kurve: die sogenannte *Hysteresiskurve*.

In Abbildung 3.6 sind die Magnetisierungskurven sowohl für einen Stoff ohne Remanenz als auch für einen ohne dargestellt (alternativ könnte man auch den Zusammenhang zwischen H und B darstellen). Bei dem zweiten Schaubild ist die „Einschaltkurve“ von der „Betriebskurve“ zu unterscheiden: erstere beschreibt die Magnetisierung, die entsteht, wenn der Stoff vorher unmagnetisch war und zum ersten Mal magnetisiert wird; sie sieht im Prinzip genauso aus wie die Magnetisierungskurve beim Ferromagnetikum ohne Remanenz. Die zweite gibt an, wie sich der Stoff verhält, wenn schon eine Magnetisierung vorhanden war.

Nimmt man also einen unmagnetischen Stoff und macht das Magnetfeld langsam stärker bis zu einer gewissen Stärke H_{max} , so verläuft die Magnetisierung zunächst auf der Einschaltkurve; regelt man das Feld wieder herunter, nimmt die Magnetisierung aber nicht wieder getreu der Einschaltkurve ab, sondern geht in die Betriebskurve über. Alle folgenden Magnetfeldänderungen ziehen dann ebenfalls eine Magnetisierung nach sich, die der Betriebskurve folgt. Zu jedem H_{max} , das man am Anfang wählte, um den Stoff zum ersten Mal zu magnetisieren, gehört eine eigene Betriebskurve.

Da beim Aufbau der Magnetisierung Energie in das System hineingesteckt wird und die Magnetisierung auch beim Abschalten des Feldes teilweise bestehen bleibt, folgt, daß ein Permanentmagnet Energie speichern kann. Wird die Magnetisierung durch ein äußeres Feld in entgegengesetzter Richtung wieder abgebaut, so wird diese gespeicherte Energie in Wärme umgewandelt (über die thermische Bewegung der Dipole, die durch ihre Wechselwirkung untereinander Energie übertragen können). Beim Durchlaufen der Hysteresiskurve wird also insgesamt magnetische Energie in Wärme umgewandelt und geht deshalb verloren. Die gesamte Wärmemenge kann dabei ausgerechnet werden durch (ohne Beweis):

$$W = \frac{1}{4\pi} \int dV \oint_{Hysteresiskurve} \vec{H}(\vec{B}) \bullet d\vec{B}, \quad (3.67)$$

wobei über das felderfüllte Volumen und entlang der Hysteresiskurve integriert wird.

3.3 Zusammenfassung: Maxwellgleichungen in Materie

In den letzten beiden Abschnitten wurden die Gleichungen für statische Felder in Materie hergeleitet. Den dynamischen Fall kann man folgendermaßen behandeln:

Zunächst ist das Induktionsgesetz (dritte Maxwellgleichung) zu betrachten. Wie bei der Herleitung der Maxwell-Gleichungen im Vakuum (Anhang C) schon erwähnt, ist dies in gewisser Weise äquivalent zur Lorentzkraft: Die induzierte Spannung, die bei der Bewegung eines stromdurchflossenen Leiters im Magnetfeld entsteht, kann man auch alternativ als Lorentzkraft auf die Leitungsträger deuten. Da in der Formel für die Lorentzkraft aber die magnetische Flußdichte \vec{B} steht, nicht die magnetische Feldstärke \vec{H} , kann man folgern, daß auch im Induktionsgesetz \vec{B} stehen muß.

Das zweite, das noch fehlt, ist der Maxwell'sche Verschiebungsstrom in der vierten Maxwellgleichung. Setze an:

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_{ext} + \frac{1}{c}\dot{\vec{C}}, \quad (3.68)$$

wobei \vec{C} nun entweder die elektrische Feldstärke oder die dielektrische Verschiebung ist. Wie dieser Term aussehen muß, ergibt sich aus der Ladungserhaltung (für die externen Ladungen):

$$\dot{\rho}_{ext} + \operatorname{div}\vec{j}_{ext} = 0. \quad (3.69)$$

Nun folgt aber aus der Materie-Maxwellgleichung (I) und dem Ansatz:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{ext} &= \frac{1}{4\pi}\operatorname{div}\dot{\vec{D}} \\ \operatorname{div}\vec{j}_{ext} &= -\frac{1}{4\pi}\operatorname{div}\dot{\vec{C}}, \end{aligned} \quad (3.70)$$

also muß $\vec{C} = \vec{D}$ sein.

Damit ergibt sich insgesamt für die Maxwell'schen Gleichungen in Materie:

(I)	$\operatorname{div}\vec{D} = 4\pi\rho_{ext}$	(3.71)
(II)	$\operatorname{div}\vec{B} = 0$	
(III)	$\operatorname{rot}\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = 0$	
(IV)	$\operatorname{rot}\vec{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{D} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_{ext}$	

Hinzu kommt die Ladungserhaltung für die externen Ladungen (3.69) und die (unveränderte) Lorentzkraftdichte (C.31). In konkreten Anwendungen lässt man den Index *ext* allerdings meist weg - man muß dann aber jeweils sorgfältig unterscheiden, welche Ladungen/Ströme „von außen“ kommen und welche erst durch die Einwirkung der Felder influenziert/induziert wurden.

Den Zusammenhang zwischen Vakuum- und Materiefeldern geben die Gleichungen

$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$	(3.72)
$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M}$	

Für lineare Beziehungen $\vec{P} = \chi_e\vec{E}$; $\vec{M} = \chi_m\vec{B}$ hat man außerdem die einfachen Formeln

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon\vec{E} \\ \vec{B} &= \mu\vec{H}. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Die Stetigkeitsbedingungen kann man nun auf dieselbe Weise ableiten wie in der Elektro- und Magnetostatik und sieht dann, daß sie ungeändert bleiben:

- \vec{D}_\perp ist stetig, sofern keine Oberflächenladungen auftreten
- \vec{E}_\parallel ist stetig
- \vec{B}_\perp ist stetig
- \vec{H}_\parallel ist stetig, sofern keine Oberflächenströme auftreten

Für die Herleitung dieser Formeln wurden mehrere Näherungen gemacht (siehe die letzten zwei Abschnitte). Im Unterschied zu den Maxwellgleichungen im Vakuum sind die Maxwell-Gleichungen in Materie also nicht exakt! Streng genommen müste man alles mit den Vakuum-Maxwellgleichungen ausrechnen; da sich aber im alltäglichen Gebrauch herausstellt, daß diese Näherungen meist gerechtfertigt sind, erhält man auch mit den Materie-Gleichungen praktisch immer vernünftige Ergebnisse.

Trotzdem sollte man immer vorsichtig sein, ob das konkrete Problem, daß man gerade betrachtet, nicht vielleicht gerade eine der wenigen Ausnahmen darstellt, bei denen diese Vorgehensweise fehlschlägt. So hat man beispielsweise sehr oft anisotrope und inhomogene Materialien - bei diesen muß man dann darauf achten, daß ϵ und μ keine konstanten Skalare mehr sind, sondern Tensorfelder.

3.4 Quasistationäre Probleme: Stromkreise

In technischen Anwendungen sind solche Ströme wichtig, bei denen in einem gegebenen Stromkreis der Strom zu jedem Zeitpunkt an jeder Stelle des Leiters gleich ist (natürlich mit Ausnahme des Inneren der Spannungsquelle); der Strom soll also im wesentlichen nur noch eine Funktion der Zeit sein. Außerdem sollen die Stromfäden zeitlich unveränderliche Linien sein, das heißt der Strom soll immer auf demselben Weg fließen. Solche Ströme nennt man *quasistationär*.

Da bei jedem gegebenen Leiterstück der Strom sowohl am einen als auch am anderen Ende gleich sein soll, folgt, daß in das Volumen des Leiters gleich viel Strom ein- wie ausfließt. Es gilt also:

$$\oint d\vec{A} \bullet \vec{j} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{div} \vec{j} = 0. \quad (3.74)$$

Setzt man dies in die vierte Maxwell-Gleichung (in Materie) ein, so ergibt sich (wegen $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{H} = 0$):

$$\operatorname{div} \dot{\vec{D}} = 0. \quad (3.75)$$

Quasistationäre Ströme hat man also beispielsweise dann, wenn die Verschiebungsdichte zeitunabhängig ist oder zumindest der Beitrag durch ihre Zeitabhängigkeit gegenüber \vec{j} vernachlässigbar ist. Im allgemeinen genügt es aber schon, daß die Divergenz der Zeitableitung verschwindet (bzw. vernachlässigbar ist).

Abbildung 3.7: Geschlossene Leiterschleife (Masche) in einem Stromkreis und anliegende Spannungen

3.4.1 Kirchhoff'sche Regeln, Ohm'sches Gesetz

Als erstes sollen nun Stromkreise betrachtet werden, in denen ein zeitlich konstanter Strom fließt. Man hat dann also keine zeitlich veränderlichen Magnetfelder, und die dritte Maxwell-Gleichung wird zu:

$$\oint \vec{ds} \cdot \vec{E} = 0. \quad (3.76)$$

Längs einer geschlossenen Kurve (siehe Abb. 3.7) ist das Integral über das elektrische Feld also null. Eine solche geschlossene Kurve in einem Stromkreis wird auch als *Masche* bezeichnet. Liegen entlang dieser Masche nun irgendwelche elektrischen Bauelemente (beispielsweise Widerstände, Lampen o.ä.), so kann das gesamte Integral in einzelne Integrale aufgeteilt werden, die jeweils nur ein Bauelement einschließen (wobei im allgemeinen auch der Widerstand des Drahtes selbst berücksichtigt werden muß):

$$\oint \vec{ds} \cdot \vec{E} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{ds} \cdot \vec{E} + \int_{\vec{r}_2}^{\vec{r}_3} \vec{ds} \cdot \vec{E} + \dots + \int_{\vec{r}_n}^{\vec{r}_1} \vec{ds} \cdot \vec{E}. \quad (3.77)$$

Andererseits ist das Integral über das Feld vom Punkt \vec{r}_1 zum Punkt \vec{r}_1 aber gerade die Potentialdifferenz, also die Spannung zwischen diesen beiden Punkten:

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{ds} \cdot \vec{E} = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{ds} \cdot \vec{\nabla} \Phi = \Phi(\vec{r}_1) - \Phi(\vec{r}_2) =: U_{12}. \quad (3.78)$$

Damit ergibt sich schließlich:

$$\oint \vec{ds} \cdot \vec{E} = U_{12} + U_{23} + \dots + U_{n1}, \quad (3.79)$$

Abbildung 3.8: Herleitung der Knotenregel: Die Integration über eine geschlossene Oberfläche, die den Leiter einschließt, zerfällt in die Integration über die Leiterquerschnitte.

und, wenn man die dritte Maxwell-Gleichung einsetzt:

$$\boxed{U_{12} + U_{23} + \dots + U_{n1} = 0.} \quad (3.80)$$

Dies ist die sogenannte *Kirchhoff'sche Maschenregel*: Die Summe aller Spannungen entlang einer Masche ist null.

Bekanntlich existiert noch eine zweite Kirchhoff'sche Regel: Die sogenannte *Knotenregel*. Sie besagt, daß an einem *Knoten* (einer Stelle im Stromkreis, an der mehrere Drähte aufeinanderstoßen), die Summe der einfließenden Ströme gleich der Summe der ausfließenden Ströme ist bzw. wenn man die in ein Volumen einfließenden Ströme wie üblich als negativ definiert und die ausfließenden als positiv:

$$\boxed{I_1 + I_2 + \dots + I_n = 0,} \quad (3.81)$$

die Summe aller Ströme an einem Knoten verschwindet also. Daß diese Regel gilt, ist eigentlich trivial: Wir hatten ja von vornherein gefordert, daß die Stromstärke im Leiter überall gleich groß sein soll. Betrachtet man also ein den Leiter umschliessendes Volumen, in das links ein Draht hinein geht und rechts zwei hinaus, so muß der Strom in den beiden Drähten rechts (die gemeinsam den Leiter bilden) zusammen gleich groß sein wie der Strom in dem einen Draht links. Mathematisch ausgedrückt folgt die Knotenregel direkt aus

$$\oint d\vec{A} \cdot \vec{j} = 0, \quad (3.82)$$

indem man die gesamte Oberflächenintegration in die Integration über die Querschnittsflächen der ein- und austretenden Leiter aufteilt (s. Abb. 3.8).

Wir haben nun schon mehrmals von Widerständen gesprochen. Bekanntlich gilt für diese das *Ohm'sche Gesetz*:

$$U = R \cdot I \Leftrightarrow I = \frac{1}{R} \cdot U. \quad (3.83)$$

R ist hier der *Widerstand* eines Bauelementes oder Leiterstückes, gemessen in *Ohm* (in SI-Einheiten), $1/R$ wird als *Leitfähigkeit* (gemessen in *Siemens* (SI))

bezeichnet. Mit dieser Beziehung ergeben sich dann aus den Kirchhoff'schen Regeln die bekannten Gesetze, wie man den Gesamtwiderstand einer Reihen- bzw. Parallelschaltung von Widerständen berechnet.

Die wesentliche Aussage des Ohm'schen Gesetzes ist, daß die Stromstärke proportional zur Spannung ist und daß die Proportionalitätskonstante abhängig vom betrachteten Leiter(stück) ist. Spannung ist nun gleich Potentialdifferenz, also gleich einem Wegintegral über das elektrische Feld; die Stromstärke ergibt sich als Flächenintegral über die Stromdichte. Damit das Ohm'sche Gesetz global gelten kann, muß also auch lokal eine lineare Beziehung zwischen elektrischem Feld und Stromdichte bestehen:

$$\boxed{\vec{j} = \sigma \vec{E}.} \quad (3.84)$$

Auch σ wird als elektrische Leitfähigkeit bezeichnet; im Unterschied zu $1/R$ ist dies nun aber eine lokale Größe, das heißt, im allgemeinen wird σ von Ort und Richtung abhängen, also wie ϵ und μ ein Tensorfeld zweiter Stufe sein. Wie auch schon bei ϵ und μ betrachtet man bei Anwendungen aber praktisch nur den Fall, daß σ ein ortsunabhängiger Skalar ist. Da die Einheit der Stromdichte Ladung pro Fläche und Zeit ist und im Gauß'schen Einheitensystem die Einheit des elektrischen Feldes Ladung pro Fläche (gleich Kraft pro Ladung), folgt, daß die Einheit der Leitfähigkeit einfach 1 durch Zeit ist:

$$[\sigma] = \frac{1}{s}. \quad (3.85)$$

Damit wird ein leichter qualitativer Vergleich der Stromdichte und der Zeitabhängigkeit der elektrischen Verschiebungsdichte (mit einer Kreisfrequenz ω) möglich: für $\sigma \gg \omega$ ist zweitens, also der zweite Summand in der vierten Maxwell-Gleichung, vernachlässigbar.

Der Zusammenhang zwischen dieser lokalen Definition der Leitfähigkeit und der globalen ist wie folgt: Betrachte ein gerades Leiterstück der Länge l (in x -Richtung) mit konstantem Querschnitt A . Der Leiter soll homogen und isotrop sein, σ also ein ortsunabhängiger Skalar. Für die Spannung an diesem Leiterstück ergibt sich dann:

$$U = \int_0^l dx E_x = \int_0^l dx \frac{j}{\sigma} = \int_0^l dx \frac{I}{A\sigma} = \frac{l}{A\sigma} I, \quad (3.86)$$

da I , A und σ alle von x unabhängig sind. Es gilt also:

$$R = \frac{l}{A\sigma} \Leftrightarrow \frac{1}{R} = \frac{A\sigma}{l}. \quad (3.87)$$

Definiert man wie üblich den *spezifischen Widerstand* ρ eines Stoffes durch

$$R = \rho \frac{l}{A}, \quad (3.88)$$

so ergibt sich sofort der Zusammenhang

$$\boxed{\rho = \frac{1}{\sigma}.} \quad (3.89)$$

Im Gauß'schen System wird der spezifische Widerstand also in Sekunden gemessen... Man sieht mal wieder: Dieses Einheitensystem ist eher für theoretische Rechnungen als für praktische Anwendungen geeignet.

3.4.2 Kapazitäten und Induktivitäten

Neben den einfachen Gesetzen, die im vorhergehenden Abschnitt besprochen wurden, müssen oft auch noch weitere physikalische Effekte berücksichtigt werden. Besonders wichtig sind hierbei die Anhäufung von Ladungen auf Leitern (beispielsweise bei Kondensatoren) und die Induktion von Strömen durch veränderliche Magnetfelder (beispielsweise in Transformatoren). In diesem Abschnitt soll zunächst allgemein gezeigt werden, daß zwischen Spannung und Ladung bzw. zwischen magnetischem Fluß und Strömen lineare Beziehungen bestehen (dies folgt letztlich daraus, daß die Maxwell-Gleichungen lineare Differentialgleichungen sind). Danach soll dies an zwei praktischen Beispielen näher erläutert werden.

Betrachte zunächst eine Ansammlung von N Leitern, auf denen sich die Ladungen Q_i befinden sollen. Diese verteilen sich auf den Oberflächen der Leiter; die Raumladungsdichte $\rho(\vec{r})$ ist also null, die Flächenladungsdichten auf den Oberflächen seien vorgegeben. Nach Abschnitt (2.1.4) handelt es sich damit um von Neumann'sche Randbedingungen; das Potential auf dem Leiter i ergibt sich dann zu:

$$\Phi_i = -4\pi \sum_{j=1}^N \oint_{\partial K_j} dF_j G(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \sigma(\vec{r}_j). \quad (3.90)$$

Es gibt also einen linearen Zusammenhang zwischen den Potentialen auf den Leitern und den Flächenladungsdichten und damit auch zwischen den Potentialen und den Gesamtladungen auf den Leitern:

$$\Phi_i = \sum_{j=1}^N (C^{-1})_{ij} Q_j \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \vdots \\ \Phi_N \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_N \end{pmatrix}. \quad (3.91)$$

Daß man die hier auftretende Matrix als C^{-1} bezeichnet und nicht als C , ist Konvention; ihren Sinn werden wir später bei der Betrachtung eines Beispiels verstehen. Da der Zusammenhang zwischen den Potentialen und den Ladungen aber eindeutig ist, kann man diese Beziehung auch umdrehen:

$$\boxed{Q_i = \sum_{j=1}^N C_{ij} \Phi_j \Leftrightarrow \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_N \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \vdots \\ \Phi_N \end{pmatrix}.} \quad (3.92)$$

Die Konstanten C_{ij} mit $i \neq j$ nennt man *Kapazitäts-* oder auch (*elektrische*) *Induktionskoeffizienten*, C_{ii} heißt *Kapazität* des Leiters i . Sie sind nur von

der Geometrie der Leiteranordnung abhängig, nicht von den Potentialen oder den Ladungen. Dies kann man sich klarmachen, indem man sich nochmals die Formel für das Potential nochmals näher anschaut:

$$\Phi_i = -4\pi \sum_{j=1}^N Q_j \oint_{\partial K_j} dF_j G(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \frac{\sigma(\vec{r}_j)}{Q_j}. \quad (3.93)$$

Man erhält also:

$$(C^{-1})_{ij} = -4\pi \oint_{\partial K_j} dF_j G(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \frac{\sigma(\vec{r}_j)}{Q_j}, \quad (3.94)$$

und dies ist sicher sowohl von den Potentialen als auch von den Ladungen unabhängig (die Ladungsabhängigkeit kürzt sich im Quotienten σ/Q heraus). Da die Matrixelemente $(C^{-1})_{ij}$ also nur von der Geometrie abhängen, gilt dies sicher auch für die Koeffizienten C_{ij} .

Als Beispiel soll nun eine Anordnung aus zwei leitenden Schalen mit den Radien r_1 und r_2 betrachtet werden, die innen die Ladung Q_1 und außen Q_2 trage. Zwischen den Schalen befindet sich ein Dielektrikum mit Dielektrizitätskonstante ϵ . Eine solche Konstruktion wird als *Kugelkondensator* bezeichnet. Das Problem ist kugelsymmetrisch, so daß man zur Berechnung einfach den Gauß'schen Satz verwenden kann (vergleiche das Beispiel mit der homogen geladenen Kugel in Abschnitt 2.1.1). Es ergibt sich dann für das elektrische Feld zwischen den Kugelschalen (\vec{E}_1) bzw. ausserhalb des Kondensators (\vec{E}_2):

$$\vec{E}_1 = \frac{Q_1}{\epsilon r^2} \vec{r}; \quad \vec{E}_2 = \frac{Q_1 + Q_2}{\epsilon r^2} \frac{\vec{r}}{r}. \quad (3.95)$$

Innerhalb der inneren Kugelschale ist das Feld identisch null (dort sind ja keine Ladungen eingeschlossen). Die Potentiale erhält man bei diesen zentralsymmetrischen Feldern einfach als $\Phi(r) = -\int_{\infty}^r \vec{E}(r') \bullet \vec{e}_{r'} dr'$; dies ergibt:

$$\Phi_1 = \frac{Q_1}{r_1} - \frac{Q_1}{r_2} + \frac{Q_1 + Q_2}{r_2} = \frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2}; \quad \Phi_2 = \frac{Q_1 + Q_2}{r_2}. \quad (3.96)$$

Formt man dies um, so erhält man für die Ladungen:

$$Q_1 = \epsilon \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \Phi_1 - \epsilon \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \Phi_2; \quad Q_2 = -\epsilon \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \Phi_1 + \frac{r_2^2 + (\epsilon - 1)r_1 r_2}{r_2 - r_1} \Phi_2. \quad (3.97)$$

Damit ergibt sich für die Matrix der Induktionskoeffizienten:

$$C = \frac{r_2}{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} \epsilon r_1 & -\epsilon r_1 \\ -\epsilon r_1 & r_2 + (\epsilon - 1)r_1 \end{pmatrix}. \quad (3.98)$$

In technischen Anwendungen versteht man aber unter der Kapazität eines Objekts im allgemeinen etwas anderes, wenn auch ähnliches: Man betrachtet zwei Leiter, einen mit Ladung Q , den anderen mit $-Q$. Besteht zwischen den beiden die Spannung $U = \Phi_1 - \Phi_2$, so sagt man, das Objekt habe die Kapazität

$$C := \frac{Q}{U} \Leftrightarrow Q = CU \Leftrightarrow U = \frac{Q}{C}. \quad (3.99)$$

Diese technische Definition macht klar, warum in der Formel, die die Abhängigkeit des Potentials von den Ladungen angibt, die Matrix C^{-1} statt C verwendet wird.

Im obigen Beispiel hatten wir $Q_1 = Q$, $Q_2 = -Q$ und deshalb

$$\Phi_1 = \frac{Q}{\epsilon} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right); \quad \Phi_2 = 0. \quad (3.100)$$

Damit ergibt sich dann für die Kapazität eines Kugelkondensators:

$$C = \frac{\epsilon Q}{Q \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)} = \epsilon \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}. \quad (3.101)$$

Im allgemeineren Fall muß zunächst wieder die Beziehung zwischen Potentialen und Ladungen gefunden werden:

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} Q \\ -Q \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(C_{ij})} \begin{pmatrix} C_{22} & -C_{12} \\ -C_{21} & C_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q \\ -Q \end{pmatrix}, \quad (3.102)$$

also

$$\Phi_1 = \frac{Q}{\det(C_{ij})} (C_{22} + C_{12}); \quad \Phi_2 = -\frac{Q}{\det(C_{ij})} (C_{21} + C_{11}). \quad (3.103)$$

Daraus folgt für die (technische) Kapazität:

$$C = \frac{\det(C_{ij})}{C_{11} + C_{12} + C_{21} + C_{22}}. \quad (3.104)$$

Ein zweites, sehr wichtiges Beispiel ist der Plattenkondensator: Zwei ebene Flächen der Größe A stehen parallel in einer Entfernung d zueinander; auf der ersten Fläche sei die Ladung Q , auf der zweiten $-Q$. Zwischen den Platten befinde sich ein Dielektrikum. Man nimmt nun an, daß das elektrische Feld praktisch nur zwischen den beiden Flächen von 0 verschieden sein wird (gerechtfertigt, falls die seitliche Ausdehnung der Platten sehr viel größer ist als ihr Abstand). Außerdem steht das Feld senkrecht auf den Platten; bei kleinem Abstand ist anzunehmen, daß es im gesamten Raum zwischen den Platten dieselbe Richtung hat. Stehen die Platten in Ebenen parallel zur x-y-Ebene, so wird das Feld also in z-Richtung zeigen. Benutzt man nun das Gauß'sche Gesetz und nimmt als betrachtetes Volumen einen Quader, der die erste Fläche einschließt (aber nicht die zweite), so erhält man für das Feld zwischen den Platten:

$$\oint_{\partial V} d\vec{A} \bullet \vec{E} = E \cdot A = 4\pi \frac{Q}{\epsilon}, \quad (3.105)$$

also $\vec{E} = 4\pi \frac{Q}{\epsilon A} \vec{e}_z$. Die Potentialdifferenz ergibt sich, wenn man von der einen Platte zur anderen integriert:

$$\Phi_1 - \Phi_2 = - \int_{z_1}^{z_2} E dz = 4\pi \frac{Q}{\epsilon A} (z_2 - z_1) = 4\pi Q \frac{d}{\epsilon A}. \quad (3.106)$$

Die (technische) Kapazität eines Plattenkondensators ist also einfach:

$$\boxed{C = \frac{\epsilon}{4\pi} \frac{A}{d} = \frac{Q}{U}.} \quad (3.107)$$

Mißt man die Ladung auf einem Plattenkondensator und gleichzeitig die anliegende Spannung, so erhält man damit sehr einfach die Dielektrizitätskonstante des Dielektrikums zwischen den Platten.

Beim magnetischen Fluß ist die Argumentation etwas präziser möglich als bei der Herleitung der Kapazitäten, bei denen keine explizite Formel angegeben werden konnte. Betrachte N Leiter, durch die jeweils der Strom I_i fließt und die jeweils die Fläche F_i einschließen. Für den magnetischen Fluß, dividiert durch c (dies ist die Größe, die im Induktionsgesetz auftaucht), gilt dann:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \Phi_k &= \frac{1}{c} \int_{F_k} \vec{B} \cdot d\vec{F}_k = \frac{1}{c} \int_{F_k} (\text{rot} \vec{A}) \cdot d\vec{F}_k = \frac{1}{c} \int_{\partial F_k} \vec{A} \cdot d\vec{r}_k \\ &= \frac{\mu}{c^2} \int_{\partial F_k} \sum_i \left(\int dV_i \frac{\vec{j}(\vec{r}_i)}{|\vec{r}_k - \vec{r}_i|} \right) \cdot d\vec{r}_k \\ &\approx \frac{\mu}{c^2} \sum_i \int_{\partial F_k} I_i \left(\int_{\partial F_i} \frac{d\vec{r}_i}{|\vec{r}_k - \vec{r}_i|} \right) \cdot d\vec{r}_k \\ &= \sum_i I_i \frac{\mu}{c^2} \int \int \frac{d\vec{r}_i \cdot d\vec{r}_k}{|\vec{r}_k - \vec{r}_i|}. \end{aligned} \quad (3.108)$$

Definiert man nun

$$\boxed{L_{ki} := \frac{\mu}{c^2} \int \int \frac{d\vec{r}_i \cdot d\vec{r}_k}{|\vec{r}_k - \vec{r}_i|},} \quad (3.109)$$

so ergibt sich:

$$\boxed{\frac{1}{c} \Phi_k = \sum_i L_{ki} I_i.} \quad (3.110)$$

Die (nur von der Geometrie abhängigen) Konstanten L_{ki} ($k \neq i$) heißen (*magnetische*) *Induktionskoeffizienten*, L_{ii} heißt *Selbstinduktionskoeffizient* des Stromkreises i . Im Gegensatz zu den elektrischen Induktionskoeffizienten C_{ij} kann man hier also direkt eine Formel angeben; außerdem sieht man sofort, daß die Matrix (L_{ij}) der Koeffizienten symmetrisch ist, da $L_{ij} = L_{ji}$.

Als einfaches Beispiel soll hier der Selbstinduktionskoeffizient einer langen Spule betrachtet werden. Man hat also nur einen Stromkreis; damit reduziert sich die allgemeine Formel für den magnetischen Fluß auf

$$\frac{1}{c} \Phi_{mag} = LI. \quad (3.111)$$

Außerdem nimmt man an, daß das Magnetfeld praktisch nur innerhalb der Spule von null verschieden ist. Diese Annahme wird umso besser, je größer die Permeabilität μ des Materials in der Spule im Vergleich zu der außerhalb ist;

verwende also am besten einen Eisenkern. Das Magnetfeld ist nun (vergleiche Abschnitt 2.3.2):

$$B = \frac{4\pi\mu n}{c} I, \quad (3.112)$$

wobei n die Wicklungsdichte der Spule ist und I der durchfließende Strom. Hat die Spule die Querschnittfläche A , N Windungen und die Länge l , so ist der gesamte magnetische Fluß:

$$\Phi = N \cdot B \cdot A = n \cdot B \cdot l \cdot A. \quad (3.113)$$

Es gilt also:

$$\frac{1}{c} \dot{\Phi} = \frac{4\pi\mu}{c^2} n^2 \cdot l \cdot A \cdot I, \quad (3.114)$$

und damit erhält man für den Selbstinduktionskoeffizienten:

$$\boxed{L = \frac{4\pi\mu}{c^2} n^2 V}, \quad (3.115)$$

wobei $V = lA$ das Volumen des Innenraums der Spule (also des felderfüllten Raumes) ist.

3.4.3 Allgemeinere Stromkreise; Blind- und Scheinwiderstände

Wie schon erwähnt, gilt in Stromkreisen mit zeitlich konstanten Strömen einfach das Ohm'sche Gesetz:

$$U = RI. \quad (3.116)$$

Im allgemeinen wird man jedoch zeitlich veränderliche Ströme haben: technisch wichtig sind Wechselströme, und selbst bei Gleichströmen muß man die Vorgänge beim Ein- und Ausschalten der Spannung gesondert betrachten, wie wir noch sehen werden.

Zeitlich veränderliche Ströme führen aber automatisch zu veränderlichen Magnetfeldern und damit zu Induktion. Durch diese entsteht eine zusätzliche Spannung $U_{ind} = -\frac{1}{c} \dot{\Phi}_{mag}$ im Stromkreis, die ebenfalls Einfluß auf den Stromfluß durch Widerstände hat. Insgesamt gilt nun also:

$$U - \frac{1}{c} \dot{\Phi}_{mag} = RI. \quad (3.117)$$

Betrachtet man nun wiederum N Stromkreise, so gilt für den Kreis i :

$$U_i = R_i I_i + \frac{1}{c} \dot{\Phi}_{mag,i}. \quad (3.118)$$

Nun kann man die im letzten Abschnitt hergeleitete Beziehung für den magnetischen Fluß einsetzen; es ergibt sich dann:

$$U_i = R_i I_i + \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^N L_{ij} I_j. \quad (3.119)$$

Setzt man voraus, daß sich die Anordnung und die Form der Leiter zeitlich nicht ändern, so ist die zeitliche Änderung der Induktionskoeffizienten gleich

null ($\dot{L}_{ij} = 0$), und man erhält schließlich N gekoppelte inhomogene Differentialgleichungen für die Ströme I_i :

$$U_i = R_i I_i + \sum_{j=1}^N L_{ij} \dot{I}_j. \quad (3.120)$$

Die „eingepprägten“ Spannungen U_i , die Widerstände R_i und die (durch die Geometrie bestimmten) Induktionskoeffizienten L_{ij} werden dabei als von außen vorgegebene feste Parameter betrachtet.

Ein einfaches Beispiel ist ein einzelner Stromkreis, der eine Spule und einen Widerstand enthält; hier tritt nur Selbstinduktion auf, und die relevante Gleichung lautet:

$$U = RI + L\dot{I}. \quad (3.121)$$

Wir haben nun also eine inhomogene Differentialgleichung für den Strom I , deren Lösung von der äußeren Spannung U abhängt. Dafür sollen einige Spezialfälle untersucht werden:

1. Einschaltvorgang: $U(t) = U_0 \neq 0$ für $t > 0$, $U(t) = I(t) = 0$ für $t < 0$.
Dann ergibt sich als Lösung der Gleichung:

$$I(t) = \frac{U_0}{R} \left(1 - e^{-Rt/L}\right). \quad (3.122)$$

Der Strom ist also nicht etwa einfach $\frac{U_0}{R}$, wie man nach dem Ohm'schen Gesetz erwarten würde. Dieser Wert wird zwar exponentiell angestrebt, er wird aber nur asymptotisch (für $t \rightarrow \infty$) wirklich erreicht! Die physikalische Erklärung hierfür ist die Lenz'sche Regel: Durch das Einschalten der Spannung beginnt ein Strom zu fließen, und dadurch baut sich in der Spule ein Magnetfeld auf. Der magnetische Fluß ändert sich also - und die Lenz'sche Regel besagt ja gerade, daß diese Änderung ihrer Ursache entgegenwirkt. Es wird also eine Spannung in der Spule induziert, die der von außen anliegenden Spannung gerade entgegengesetzt ist; dadurch wird das Ansteigen des Stromflusses durch die Spule gebremst. Damit wird aber auch die Änderung des Flusses immer geringer, also wird auch die Gegenspannung immer kleiner, und der Strom kann sich immer mehr seinem asymptotischen Grenzwert annähern.

2. Abschalten der Spannung: $U(t) = 0$ für $t > 0$, $I(t) = I_0 \neq 0$ für $t < 0$.
Dann ergibt sich einfach eine abfallende Exponentialfunktion:

$$I(t) = I_0 e^{-Rt/L}. \quad (3.123)$$

Die Lenz'sche Regel wirkt nun dem Abbau des Magnetfeldes in der Spule entgegen, so daß nach dem Abschalten der Spannung der Strom nicht sofort auf null zurückgeht (wie nach dem Ohm'schen Gesetz zu erwarten wäre), sondern exponentiell abklingt.

3. Wechselfspannung $U(t) = U_0 e^{i\omega t}$; man hat nun also quasi ein periodisches An- und Abschalten (der Ansatz mit der komplexen Exponentialfunktion wurde gewählt, um die Rechnung zu vereinfachen - prinzipiell geht's auch mit Sinus oder Kosinus). Mit dem Ansatz $I(t) = I_0 e^{i\omega t}$ (der Strom folgt der von außen vorgegebenen Spannung) erhält man:

$$U_0 = RI_0 + i\omega LI_0 \implies I_0 = \frac{U_0}{R + i\omega L}. \quad (3.124)$$

Die Spule verhält sich hier also so, als hätte sie den (imaginären und frequenzabhängigen!) Widerstand $i\omega L$, der in Reihe zum normalen Widerstand R geschaltet ist. Man spricht hier vom (*induktiven*) (*Blind-*) *Widerstand* oder auch der *Induktanz* R_L der Spule.

Für das Verhältnis der Amplituden von Strom und Spannung ergibt sich dann:

$$\left| \frac{U_0}{I_0} \right| = |R + i\omega L| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} =: Z. \quad (3.125)$$

Die hier definierte Größe Z wird als *Scheinwiderstand* oder *Impedanz* des Stromkreises bezeichnet. In Stromkreisen ohne Spule ($L = 0$) gilt $Z = R$ - wie erwartet.

Außer dieser Änderung des Gesamtwiderstandes (abhängig von ω) hat man aber auch noch eine Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung; man erhält sie als Argument des Verhältnisses der Amplituden:

$$\Delta\varphi = \arg\left(\frac{U_0}{I_0}\right) = \arg(R + i\omega L) = \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right). \quad (3.126)$$

Für $L \rightarrow 0$ erhält man eine Phasenverschiebung von 0 Grad (wie erwartet), für $R \rightarrow 0$ wird sie zu 90 Grad - die Spannung eilt dem Strom um eine viertel Periode voraus. Allgemein liegt die Phasenverschiebung immer zwischen 0 und 90 Grad; die Spannung eilt dem Strom also immer voraus. Dies sah man ja schon bei den Ein- und Ausschaltvorgängen: Die Stromänderung folgte der Spannungsänderung nie sofort, sondern immer nur asymptotisch.

Wie sieht die Sache aus, wenn wir nun zusätzlich zulassen, daß die Leiter (Stromkreise) nach außen hin nicht elektrisch neutral sind? Dann hat man zusätzlich auf jedem Leiter auch noch Ladungen, die von den jeweils anderen Leitern induziert werden; wie wir im letzten Abschnitt gesehen haben, gilt für die induzierten Spannungen:

$$U_{i,ind} = \sum_{j=1}^N (C^{-1})_{ij} Q_j \quad (3.127)$$

mit den nur durch die Geometrie bestimmten Kapazitätskoeffizienten C_{ij} . Insgesamt hat man nun:

$$U_i + U_{i,ind} = R_i I_i + \sum_{j=1}^N L_{ij} \dot{I}_j \implies U_i = R_i I_i + \sum_{j=1}^N L_{ij} \dot{I}_j - \sum_{j=1}^N (C^{-1})_{ij} Q_j. \quad (3.128)$$

Bildet man nun die zeitliche Ableitung und berücksichtigt $Q = -\dot{I}$, so erhält man für zeitlich konstante Kapazitäts- und Induktionskoeffiziente:

$$\dot{U}_i = R_i \dot{I}_i + \sum_{j=1}^N L_{ij} \ddot{I}_j + \sum_{j=1}^N (C^{-1})_{ij} I_j. \quad (3.129)$$

Damit haben wir wieder N gekoppelte inhomogene Differentialgleichungen für die Ströme I_i , nun mit den von außen vorgegebenen Konstanten R_i , L_{ij} , C_{ij} und den eingepprägten Spannungen U_i .

Zum näheren Verständnis betrachte wiederum nur einen einzelnen Stromkreis mit der Kapazität C (einem Plattenkondensator o.ä) und dem Widerstand R , aber ohne Spule ($L = 0$). Dann haben wir nur noch die relativ einfache Gleichung

$$\dot{U} = R\dot{I} + \frac{I}{C}. \quad (3.130)$$

Auch hier schauen wir uns wieder dieselben drei Spezialfälle an wie schon bei der Spule:

1. Einschaltvorgang: $U(t) = U_0 \neq 0$ für $t > 0$, $U(t) = I(t) = 0$ für $t < 0$, $Q(0) = 0$. Der Spannungsverlauf kann also durch eine Theta-Funktion beschrieben werden: $U(t) = U_0\theta(t)$; die Ableitung ergibt dann eine Delta-Funktion: $\dot{U}(t) = U_0\delta(t)$. Als Lösung der Differentialgleichung erhält man damit schließlich (nachrechnen!):

$$I(t) = \frac{U_0}{R} e^{-t/RC} \theta(t) \implies Q(t) = U_0 C (1 - e^{-t/RC}) \theta(t). \quad (3.131)$$

Der Strom springt also zum Zeitpunkt $t = 0$ auf den (vom Ohm'schen Gesetz her erwarteten) Wert $\frac{U_0}{R}$ und nimmt dann exponentiell ab. Dies versteht man folgendermaßen: Auf dem Kondensator häuft sich durch den Strom Ladung an; dadurch entsteht langsam eine Spannung, die dem Strom entgegenwirkt und ihn immer geringer werden läßt. Das Aufladen des Kondensators geschieht hier also analog zur Bildung des Magnetfeldes in der Spule nicht instantan, sondern die Gesamtladung $Q = U_0 C$ wird erst asymptotisch erreicht. Die Gegenspannung hängt hier im Gegensatz zur Spule aber nicht von der Änderung (der Ableitung) des Stromes ab, sondern von der gesamten deponierten Ladung (also dem Integral über den Strom) - deshalb hat man hier ein anderes zeitliches Verhalten als bei der Spule.

2. Ausschalten: $U(t) = 0$ für $t > 0$, $U(t) = U_0 \neq 0$ für $t < 0$, $I(t) = 0$ für $t < 0$, $Q(t) = Q_0 \neq 0$ für $t < 0$. Hier ergibt sich $\dot{U}(t) = -U_0\delta(t)$ und damit schließlich:

$$I(t) = -\frac{U_0}{R} e^{-t/RC} \theta(t) \implies Q(t) = U_0 C e^{-t/RC}. \quad (3.132)$$

Auch das Entladen des Kondensators geschieht also nur asymptotisch, analog zum Abbau des Magnetfeldes in der Spule.

3. Wechselspannung: $U(t) = U_0 e^{i\omega t}$; $I(t) = I_0 e^{i\omega t}$. Man findet nun:

$$U_0 = I_0 \left(R - i \frac{1}{\omega C} \right); \quad (3.133)$$

man hat also wiederum einen frequenzabhängigen, imaginären (*kapazitiven*) (*Blind-*) *Widerstand* $R_C = -i \frac{1}{\omega C}$. Für den Scheinwiderstand ergibt sich dann:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} \right)^2}, \quad (3.134)$$

und für die Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom:

$$\Delta\varphi = -\arctan \left(\frac{1}{R\omega C} \right). \quad (3.135)$$

Auf einen Stromkreis ohne Kondensator kann man beliebig viel Ladung aufbringen, ohne daß irgendwo im Kreis eine Spannung entsteht - nach $C = Q/U$ ist die Kapazität dann also unendlich groß. Für einen Stromkreis ohne Kondensator ergibt sich also, wie erwartet, $Z = R$ und eine Phasenverschiebung von 0 Grad. Gilt dagegen $R \rightarrow 0$, so erhält man eine Phasenverschiebung von -90 Grad - die Spannung läuft dem Strom um eine viertel Periode hinterher. In Kreisen mit Kapazitäten (aber ohne Induktivitäten) eilt also immer der Strom der Spannung voraus - genau umgekehrt zu den Kreisen mit einer Spule, aber ohne Kondensator.

Nun betrachte einen Stromkreis mit allen drei Elementen: Widerstand, Spule und Kondensator (alles in Reihe geschaltet). Hier soll nur der Fall 3 (Wechselspannung) betrachtet werden; nach dem inzwischen bekannten Ansatz und Rechenweg ergibt sich:

$$U_0 = I_0 \left(R + i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right) \quad (3.136)$$

und daraus

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}; \quad \Delta\varphi = \arctan \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right). \quad (3.137)$$

Das interessante ist nun: Die beiden Blindwiderstände treten mit umgekehrtem Vorzeichen auf - die Effekte können sich also gegenseitig aufheben! Bei der Phasenverschiebung war das ja eigentlich schon zu erwarten: Wir hatten ja gesehen, daß bei der Spule der Strom der Spannung nacheilt und beim Kondensator die Spannung dem Strom, also die Phasenverschiebung in beiden Fällen entgegengesetzt ist. Wir sehen nun, daß für $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ sich die beiden Phasenverschiebungen gegenseitig aufheben und Strom und Spannung wieder gleichphasig sind.

Betrachtet man den Scheinwiderstand Z , so sieht man, daß er sich für $\omega \rightarrow 0$ wie $\frac{1}{\omega C}$ verhält, für $\omega \rightarrow \infty$ wie ωL . Dazwischen liegt ein Minimum - wiederum für $\omega L = \frac{1}{\omega C}$! Bei der Frequenz

$$\boxed{\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}}, \quad (3.138)$$

(a)

(b)

(c)

(d)

Abbildung 3.9: Schaltpläne für Frequenzpässe: (a) Tiefpass mit Spule (b) Hochpass mit Spule (c) Hochpass mit Kondensator (d) Tiefpass mit Kondensator

der sogenannten *Thomson-Frequenz*, hat man also sowohl eine verschwindende Phasenverschiebung als auch den kleinstmöglichen Widerstand $Z = R$. Wählt man die Frequenz passend, so merkt man also gar nichts von der Spule und dem Kondensator im Stromkreis - dieser verhält sich so, als würde er nur einen Ohm'schen Widerstand R enthalten.

3.4.4 Technische Anwendungen

Nun sollen noch einige technische Anwendungen von Stromkreisen mit Kapazitäten und Induktivitäten (sprich: Kondensatoren und Spulen) betrachtet werden. Als erstes fällt einem die Abhängigkeit des Widerstandes solcher Kreise von der Frequenz auf: Kreise nur mit Spulen haben bei niedrigen Frequenzen einen niedrigen Widerstand, der mit zunehmender Frequenz zunimmt, bei solchen nur mit Kondensatoren ist es genau umgekehrt, und Kreise mit beiden haben ein Widerstands-Minimum bei der Thomson-Frequenz, für niedrige und hohe Frequenzen dagegen einen hohen Widerstand. Das legt nahe, solche Stromkreise als sogenannten *Pässe* zu verwenden, also als Schaltungen, die nur bestimmte Frequenzen durchlassen und alle anderen abdämpfen. Je nach Wahl der Elemente erhält man verschiedene Pässe (Schaltpläne siehe Abbildung 3.9):

1. Schaltet man eine Spule in den Stromkreis und greift die Spannung an ihr ab, so wird diese Ausgangsspannung um so größer, je größer die Frequenz wird \Rightarrow *Hochpass*, die Schaltung läßt vor allem hohe Frequenzen durch.
2. Greift man andererseits die Spannung am Widerstand ab, so wird die Ausgangsspannung um so kleiner, je größer die Frequenz wird \Rightarrow *Tiefpass*.

3. Bei einer Schaltung mit Kondensator ist es genau umgekehrt: Tiefpass, wenn man die Spannung am Kondensator abgreift, Hochpass, wenn man sie am Widerstand abgreift.
4. Befinden sich im Stromkreis eine Spule und ein Kondensator gemeinsam, so haben beide zusammen ein Widerstandsminimum bei der Thomson-Frequenz; bei dieser Frequenz liegt also an diesen beiden die geringste Spannung an, und am Widerstand dementsprechend dann die höchste. Greift man die Spannung am Verbund Spule-Kondensator ab, so erhält man also bei der Thomson-Frequenz ein Minimum der Ausgangsspannung, bei allen anderen Frequenzen höhere Werte (siehe Abb. 3.10); greift man sie dagegen am Widerstand ab, so wird sie bei der Thomson-Frequenz maximal und bei allen anderen Frequenzen kleiner. Man spricht von einem *Bandpass*.

Eine völlig andere Anwendung solcher Schaltungen erhält man, wenn man sich nochmals klarmacht, daß die Spannung an der Spule von der Änderung des magnetischen Flusses, also von der zeitlichen Ableitung des Stromes abhängt, die Spannung am Kondensator dagegen von der darauf befindlichen Ladung - also vom Integral über den geflossenen Strom. Man kann also elektrische Schaltungen zum Differenzieren und Integrieren von gegebenen Signalen benutzen! Die Schaltpläne dafür sind genau dieselben wie für den Hochpass mit Spule bzw. den Tiefpass mit Kondensator (siehe Abb. 3.9):

1. Legt man an Widerstand und Spule (in Reihe geschaltet) eine Spannung an und greift die Spannung ab, die an der Spule durch die Magnetfeldänderung induziert wird, so erhält man als Ausgangssignal (für $R \rightarrow 0$) die Ableitung des Eingangssignals (bzw. des Stromes, den man am Widerstand messen kann). Diese Schaltung heißt dementsprechend *Differenzierglied*.
2. Benutzt man dagegen zusätzlich zum Widerstand einen Kondensator und greift an diesem die Spannung ab, so ist das Ausgangssignal ($R \rightarrow 0$) das zeitliche Integral über das Eingangssignal (bzw. über das Stromsignal am Widerstand). Man spricht deshalb von einem *Integrierglied*.

Abbildung 3.10: Spannung an einem Bandpass, abhängig von der Frequenz, in beliebigen Einheiten

Will man dagegen bei komplizierten Schaltungen herausfinden, was sie mit einem vorgegebenen Signal machen, geht man folgendermaßen vor: Zunächst bestimmt man die komplexen Widerstände jedes Elements und rechnet sich damit aus, welches Spannungssignal bei einem sinusförmigen Eingangssignal fester Frequenz am Ausgang anliegen würde. Dann nimmt man sich das gegebene Eingangssignal vor und macht eine Fourieranalyse. Damit hat man dann also das ursprüngliche Eingangssignal in eine Summe oder ein Integral von sinusförmigen Signalen aufgeteilt - und für jede einzelne dieser Sinusschwingungen weiß man ja, wie das Ausgangssignal aussieht! Damit erhält man dann schließlich das komplette Ausgangssignal wiederum durch Fouriertransformation aus den Ausgangssignalen zu den einzelnen Sinusschwingungen. In Formeln:

$$\begin{aligned}\tilde{U}_{ein}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int U_{ein}(t)e^{i\omega t} dt \\ \tilde{U}_{aus}(\omega) &= R(\omega)\tilde{U}_{ein}(\omega) \\ U_{aus}(t) &= \int \tilde{U}_{aus}(\omega)e^{-i\omega t} d\omega.\end{aligned}\quad (3.139)$$

Zum Schluß betrachte nochmals die Kombination aus Widerstand, Spule und Kondensator, nun ohne äußere Spannung. Dann erhält man als zu lösende Differentialgleichung:

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{I}{C} = 0. \quad (3.140)$$

Wir wollen nun annehmen, daß zum Zeitpunkt $t = 0$ schon ein Strom fließe, der sich aber momentan nicht ändere: $I(0) = I_0 \neq 0$, $\dot{I}(0) = 0$. Die Lösung der Differentialgleichung, die den Anfangsbedingungen genügt, ist:

$$I(t) = I_0 e^{-Rt/L} \cos(\omega t) \text{ mit } \omega = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{R^2}{4L^2}} - \frac{R}{2L}, \quad (3.141)$$

wobei $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ wiederum die Thomson-Frequenz ist. Es ergibt sich also eine gedämpfte harmonische Schwingung! Dies hätte man auch erwarten können, ohne die Differentialgleichung zu lösen - sie hat ja dieselbe Form wie die eines mechanischen harmonischen Oszillators:

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = 0, \quad (3.142)$$

wobei m der Trägheit des Oszillators entspricht, γ die Dämpfung misst und k die antreibende Kraft angibt. Analog hat man hier als antreibende Kraft die Spannung auf dem Kondensator ($\sim \frac{1}{C}$), als Dämpfung den Widerstand ($\sim R$) und als Trägheit die Spule, die sich Änderungen der Stromstärke widersetzt ($\sim L$). Aufgrund dieser Analogie zu einem mechanischen schwingenden System spricht man hier von einem (*elektrischen*) *Schwingkreis*.

Die Stromstärke hat hier also abwechselnd Maxima (Kondensator entladen, also elektrisches Feld null, dafür magnetisches Feld in der Spule maximal), Nulldurchgänge (Kondensator komplett aufgeladen, elektrisches Feld maximal, aber deshalb auch kein Strom mehr, also magnetisches Feld null) und Minima

(Kondensator entladen, elektrisches Feld null, Betrag des magnetischen Feldes maximal, aber entgegengesetzt zum Feld bei den Strommaxima). Hier wandeln sich also periodisch elektrische Felder in magnetische um und umgekehrt - wie man es aufgrund der Maxwell'schen Gleichungen auch erwarten sollte.

Damit bekommt man hier schon einen kleinen Vorgeschmack auf elektromagnetische Wellen (bei denen diese Umwandlung ja auch ständig passiert), mit denen wir uns im nächsten Kapitel näher beschäftigen werden. Ein solcher Schwingkreis kann prinzipiell auch als Sender und Empfänger von elektromagnetischen Wellen (deren Frequenz gleich seiner Eigenfrequenz ω ist) dienen. Für typische Radiofrequenzen benutzt man aber dann doch eher Antennen: schon Drähte ohne Spulen und Kondensatoren haben bereits eine Kapazität und eine Selbstinduktivität, und die Antennendrähte sind gerade so dimensioniert, daß sich aus ihrer Kapazität und Induktivität eine zu den Radiofrequenzen passende Eigenschwingung ergibt.

3.5 * Der Skineffekt

(Anmerkung: Dieser Abschnitt baut auf einer der Übungsaufgaben auf, die zu der Vorlesung, die ich gehört hatte, gestellt wurden.)

Ein (technisch wichtiger) Effekt bei der Ausbreitung von elektromagnetischen Signalen in einem Medium ist der sogenannte *Skineffekt*. Dieser soll nun kurz (?) an einem Beispiel erläutert werden:

Betrachte einen (unendlich langen) geraden Leiter mit kreisförmigem Querschnitt (Radius R) entlang der z -Achse. Durch diesen fliesse ein Wechselstrom $I(t) = I_0 e^{-i\omega t}$. Aufgrund der Symmetrie des Problems wird die Stromdichte dann sicher folgende Gestalt haben:

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = j(r) \vec{e}_z e^{-i\omega t}, \quad (3.143)$$

wobei

$$\int_0^R dr \int_0^{2\pi} r d\phi j(r) = 2\pi \int_0^R dr r j(r) = I_0 \quad (3.144)$$

gelten muß.

Leite nun zunächst eine Gleichung für die Stromdichte her. Bildet man die Rotation der dritten Maxwellgleichung und setzt die vierte ein, so ergibt sich:

$$\text{rot rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \text{rot } \dot{\vec{B}} = -\frac{\mu}{c^2} \left(\ddot{\vec{D}} + 4\pi \dot{\vec{j}} \right). \quad (3.145)$$

Benutze nun das Ohm'sche Gesetz:

$$\frac{1}{\sigma} \text{rot rot } \vec{j} = -\frac{\mu}{c^2} \left(\frac{\epsilon}{\sigma} \ddot{\vec{j}} + 4\pi \dot{\vec{j}} \right) = -\frac{\mu}{c^2} \left(-\frac{\omega^2 \epsilon}{\sigma} \vec{j} - 4\pi i \omega \vec{j} \right). \quad (3.146)$$

Typische Werte sind etwa: $\omega = 2\pi \cdot 5 \cdot 10^3 s^{-1}$ und $\sigma = 5.8 \cdot 10^{17} s^{-1}$ (Kupfer). Setzt man diese ein, so sieht man, daß der erste Summand gegenüber dem zweiten vernachlässigt werden kann - wir haben hier also wiederum ein quasistationäres Problem. Benutzt man nun noch $\text{rot rot} = \text{grad div} - \Delta$ und $\text{div } \vec{j} = 0$

(wegen der Kontinuitätsgleichung und der Quasistationarität), so ergibt sich schließlich:

$$-\frac{1}{\sigma}\Delta\vec{j} = \frac{\mu}{c^2}4\pi i\omega\vec{j}, \quad (3.147)$$

also, wenn man den obigen Ansatz einsetzt:

$$\Delta j(r) = -\frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}i\omega j(r). \quad (3.148)$$

Benutze nun den Radialanteil des Laplace-Operators in Zylinderkoordinaten:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial j(r)}{\partial r}\right) = -\frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}i\omega j(r), \quad (3.149)$$

also

$$\frac{\partial^2 j(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial j(r)}{\partial r} + i\frac{4\pi\mu\sigma\omega}{c^2}j(r) = 0. \quad (3.150)$$

Definiere nun als Abkürzung

$$m := \sqrt{\frac{4\pi\mu\sigma\omega}{c^2}} \approx 1.6\text{mm}^{-1}, \quad (3.151)$$

so wird daraus die sogenannte (zylindrische) Bessel'sche Differentialgleichung 0. Ordnung:

$$j''(r) + \frac{j'(r)}{r} + im^2j(r) = 0. \quad (3.152)$$

Lösungen hiervon sind die (zylindrischen) Bessel-Funktionen 1. und 2. Art (und 0. Ordnung) $I_0(\sqrt{im^2r})$ und $N_0(\sqrt{im^2r})$ (vergleiche auch die sphärischen Bessel-Funktionen in Abschnitt 5.3.3; die Bessel-Funktion 2. Art wird oft auch als von Neumann'sche Funktion bezeichnet). Für kleine Argumente können diese Funktionen folgendermaßen angenähert werden:

$$\begin{aligned} I_0(x) &= 1 - \frac{1}{(1!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4 + \dots \\ N_0(x) &\approx \frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{\gamma x}{2}\right), \end{aligned} \quad (3.153)$$

(die Euler'sche Konstante ist $\gamma \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - \ln n\right) \approx 0.577$). Mit der Bessel-Funktion 2. Art können wir hier nichts anfangen - sie hat eine Polstelle für $x \rightarrow 0$, die Stromdichte soll aber überall im Draht (auch in der Mitte) endlich sein. Es bleibt also die Bessel-Funktion 1. Art:

$$j(r) = j_0 I_0(\sqrt{im^2r}) = j_0 \left(1 - i\frac{m^2r^2}{4} - \frac{m^4r^4}{64} + \dots\right). \quad (3.154)$$

Betrachtet man nun beispielsweise einen Draht mit dem Radius $R = 0.5\text{mm}$, so gilt:

$$\frac{m^2R^2}{4} \approx 0.16; \quad \frac{m^4R^4}{64} \approx 0.0064, \quad (3.155)$$

man sieht also, daß die Vernachlässigung der höheren Terme in der Entwicklung gerechtfertigt ist. Es folgt:

$$2\pi \int_0^R dr r j(r) \approx 2\pi j_0 \frac{R^2}{2} = I_0, \quad (3.156)$$

also $j_0 \approx \frac{I_0}{\pi R^2}$ - wie zu erwarten war.

Für die zeitliche und räumliche Abhängigkeit der Stromdichte ergibt sich damit näherungsweise:

$$j(r, t) \approx \frac{I_0}{\pi R^2} \left(1 - i \frac{m^2 r^2}{4} - \frac{m^4 r^4}{64} \right) e^{-i\omega t}. \quad (3.157)$$

Betrachtet man den (physikalisch relevanten) Realteil der Stromdichte (der Ansatz mit der komplexen Exponentialfunktion wurde ja nur gemacht, um die Rechnung zu vereinfachen), so sieht man, daß hier ein Strom mit der Amplitude $\frac{I_0}{\pi R^2} \left(1 - \frac{m^4 r^4}{64} \right)$ auftritt und um $-\pi/2$ phasenverschoben dazu ein weiterer Strom mit der Amplitude $\frac{I_0}{\pi R^2} \frac{m^2 r^2}{4}$. Die gesamte Amplitude erhält man nun entweder, indem man mittels der Additionstheoreme für die trigonometrischen Funktionen die Summe dieser beiden Ströme durch eine einzige Sinus- oder Kosinusfunktion ausdrückt, oder indem man einfach den Betrag des komplexen $j(r, t)$ nimmt. In beiden Fällen ergibt sich:

$$\bar{j} \approx \frac{I_0}{\pi r^2} \left(1 + \frac{m^4 r^4}{32} \right). \quad (3.158)$$

Die Stromdichte ist also in der Mitte des Drahtes minimal und steigt zu den Rändern hin an. Dieser Effekt verstärkt sich immer mehr, je größer m wird, also je größer σ und ω sind. Dieser Effekt, daß Wechselstrom hoher Frequenzen bevorzugt am Außenrand (an der „Haut“) von Drähten fließt, ist nicht nur auf dieses spezielle Beispiel beschränkt, sondern tritt allgemein auf und wird als *Skinneffekt* bezeichnet.

Kapitel 4

Ausbreitung elektromagnetischer Wellen

4.1 Ausbreitung im Vakuum und in Materie

Wir werden nun sehen, daß die Maxwell-Gleichungen neben den statischen und (quasi-)stationären Lösungen auch Wellenlösungen enthalten. Um diese zu erhalten, benötigen wir aber die vollen Maxwellgleichungen.

4.1.1 Freie Wellengleichung und Telegraphengleichung

Betrachte zunächst den einfachen Spezialfall, daß keine freien Ladungen vorhanden sind und auch keine Ströme fließen, also $\rho = 0$ und $\vec{j} = 0$. Dann reduzieren sich die Gleichungen auf die symmetrische Form:

$$(I) \quad \operatorname{div} \vec{D} = 0 \quad (4.1)$$

$$(II) \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (4.2)$$

$$(III) \quad \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = 0 \quad (4.3)$$

$$(IV) \quad \operatorname{rot} \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} = 0. \quad (4.4)$$

Nehme nun die Rotation von der vierten Gleichung; dies ergibt:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \operatorname{rot} \vec{D} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot}(\epsilon \vec{E}). \quad (4.5)$$

Setzt man ein homogenes Medium voraus, so ist ϵ räumlich konstant (zeitlich sowieso), und man erhält:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B}, \quad (4.6)$$

wobei die dritte Gleichung eingesetzt wurde. Benutzt man nun noch den Zusammenhang $\vec{B} = \mu \vec{H}$ und setzt wiederum die räumliche Konstanz von μ voraus, so steht schließlich da:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} = -\frac{\epsilon \mu}{c^2} \ddot{\vec{H}}. \quad (4.7)$$

Die letzten Schritte sind nun die folgenden: Einsetzen der Identität $\text{rot rot} = \text{grad div} - \Delta$ und der zweiten Gleichung. Dies ergibt dann:

$$-\Delta \vec{H} = -\frac{\epsilon\mu}{c^2} \ddot{\vec{H}}. \quad (4.8)$$

Mit dem „Wellen-Operator“ $\square_v := \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$ kann dies auch kurz geschrieben werden als:

$$\boxed{\square_{c'} \vec{H} = 0} \quad (4.9)$$

mit der Abkürzung

$$\boxed{c' := c/\sqrt{\epsilon\mu}}. \quad (4.10)$$

Speziell für $v = c$ schreibt man auch kurz \square statt \square_c und spricht dann vom *d'Alembert-Operator*.

Auf äquivalente Weise erhält man die Gleichung:

$$\boxed{\square_{c'} \vec{E} = 0}. \quad (4.11)$$

Bei der Herleitung beider Wellengleichungen (sowohl für \vec{E} als auch für \vec{H}) ging dabei der Maxwell'sche Verschiebungsstrom wesentlich ein - ohne ihn hätten die Maxwell'schen Gleichungen keine Wellenlösungen. Die Existenz solcher Wellenlösungen ist (neben der Kontinuitätsgleichung) also eine weitere Begründung für die Notwendigkeit dieses Terms.

Betrachte nun zunächst die Gleichung $\square_v f = 0$. Als Lösungsansatz liegt eine Exponentialfunktion nahe, da die Differentialgleichung ja linear ist. Setze also an:

$$f(\vec{x}, t) = f_0 e^{i(\vec{k} \bullet \vec{x} - \omega t)}. \quad (4.12)$$

Der *Wellenvektor* \vec{k} und die (*Kreis-*)*Frequenz* ω wurden zunächst nur eingeführt, um den Exponenten einheitenlos zu machen (die Interpretation folgt in Abschnitt 4.1.4); die Vorzeichen sind Konvention. Der Betrag des Wellenvektors k wird oft als *Wellenzahl* bezeichnet. Setzt man den Ansatz in die Differentialgleichung ein, so ergibt sich:

$$-\frac{1}{v^2} \omega^2 + \vec{k}^2 = 0, \quad (4.13)$$

also $\omega = kv$.

Wegen der Linearität der Differentialgleichung ist die Linearkombination zweier Lösungen wieder eine Lösung, sogar noch allgemeiner: Das Integral über alle möglichen Lösungen, gewichtet mit einer beliebigen Funktion von \vec{k}

$$f(\vec{x}, t) = \int d^3k \tilde{f}(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \bullet \vec{x} - kv t)}, \quad (4.14)$$

ist (sofern existent) auch wiederum eine Lösung. Dies ist aber nichts anderes als eine Fourierdarstellung von $f(\vec{x}, t)$!

Betrachtet man die Differentialgleichungen für die Felder (jede kartesische Komponente einzeln), so ergeben sich also folgende (elementare) Lösungen:

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{E}(\vec{x}, t) &= \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \\ \vec{H}(\vec{x}, t) &= \vec{H}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}.\end{aligned}} \quad (4.15)$$

Wie eben schon erhält man die allgemeinste Lösung der jeweiligen Gleichung als die Fouriertransformierte einer Funktion im \vec{k} -Raum. Wiederum muß gelten:

$$\boxed{\omega = |\vec{k}|c' = |\vec{k}|c/\sqrt{\epsilon\mu}.} \quad (4.16)$$

Diese Gleichung (und allgemein der Zusammenhang zwischen Frequenz und Wellenvektor von beliebigen Wellen) wird als *Dispersionsrelation* bezeichnet.

Man sieht leicht ein, daß die elementaren Lösungen ebene Wellen beschreiben, die sich mit der Geschwindigkeit c' ausbreiten. Speziell im Vakuum mit $\epsilon = \mu = 0$ erhält man Wellen der Geschwindigkeit c - also Wellen, die sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten. Das legt nahe, Licht als elektrische oder magnetische Welle aufzufassen; dies werden wir in den nächsten Abschnitten genauer betrachten.

Zum Abschluß dieses Abschnitts betrachte aber zunächst noch ein etwas komplizierteres Problem: Die Existenz von Wellenlösungen in elektrisch leitenden Medien. Die Dichte der freien Ladungen ist dann weiterhin null, für die Ströme gilt aber das Ohm'sche Gesetz: $\vec{j} = \sigma \vec{E}$. Dann lauten die Maxwellgleichungen:

$$(I) \quad \operatorname{div} \vec{D} = 0 \quad (4.17)$$

$$(II) \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (4.18)$$

$$(III) \quad \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = 0 \quad (4.19)$$

$$(IV) \quad \operatorname{rot} \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} = \frac{4\pi}{c} \sigma \vec{E}. \quad (4.20)$$

Nimmt man die Rotation von Gleichung (III) und setzt Gleichung (IV) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mu \operatorname{rot} \vec{H} \\ &= -\frac{\mu}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{D} - \frac{4\pi\mu}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \sigma \vec{E}.\end{aligned} \quad (4.21)$$

Umschreiben der doppelten Rotation und Einsetzen von Gleichung (I) führt dann auf:

$$\square_{c'} \vec{E} + \frac{4\pi}{c^2} \mu \sigma \dot{\vec{E}} = 0. \quad (4.22)$$

Analog erhält man:

$$\square_{c'} \vec{H} + \frac{4\pi}{c^2} \mu \sigma \dot{\vec{H}} = 0. \quad (4.23)$$

Dies sind die sogenannten *Telegraphengleichungen*. Sie werden so genannt, da sie unter anderem in der Telegraphie eine Rolle spielen - dort breiten sich ja elektromagnetische Wellen entlang von elektrisch leitenden Drähten aus.

Die Dispersionsrelation lautet nun:

$$|\vec{k}|c' = \omega \left(1 + i \frac{4\pi\sigma}{\omega\epsilon} \right) \quad (4.24)$$

Das Auftauchen von i führt dazu, daß die Wellen nun einen exponentiell abfallenden Term enthalten: in leitenden Medien können sich elektromagnetische Wellen nur gedämpft ausbreiten. Dies ist anschaulich klar: Durch die Erzeugung von Strömen geht der Welle Energie verloren.

4.1.2 Eigenschaften elektromagnetischer Wellen

Mit Hilfe der Maxwellgleichungen kann man noch weitere Informationen über die allgemeinen Wellenlösungen erhalten. Setzt man die Lösung (4.15) für \vec{E} in die Maxwell-Gleichung (I) (ohne Quellen!) ein, so erhält man:

$$\operatorname{div} \left(\vec{E}_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t} \right) = \vec{E}_0 \cdot \left(\operatorname{grad} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t} \right) = \vec{E}_0 \cdot i\vec{k} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t} = 0, \quad (4.25)$$

also $\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0$ - das elektrische Feld steht immer senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung! Analog erhält man für das magnetische Feld: $\vec{k} \cdot \vec{B}_0 = 0$ - auch dieses steht immer senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung. Man spricht von *transversal polarisierten* Wellen (im Gegensatz zu *longitudinal polarisierten* Wellen, bei denen die betrachtete Größe in Ausbreitungsrichtung schwingt - z. B. Schallwellen).

Außerdem kann man auch noch die Maxwell-Gleichung (III) benutzen; dies ergibt dann:

$$i\vec{k} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}. \quad (4.26)$$

Man sieht sofort, daß jede elektrische Welle immer auch eine magnetische Welle erzeugt, die gleichphasig zur ersteren schwingt.

Setzt man auch für \vec{B} die Wellengleichung ein (mit $\vec{B} = \mu\vec{H}$), so erhält man:

$$\boxed{\vec{k} \times \vec{E} = \frac{\omega}{c} \vec{B}.} \quad (4.27)$$

Da das Kreuzprodukt von \vec{k} und \vec{E} bekanntlich senkrecht auf \vec{E} steht und hier proportional zu \vec{B} ist, steht die magnetische Welle also immer senkrecht auf der elektrischen. Umgekehrt folgt aus Gleichung (IV) (ohne Quellen), daß jede magnetische Welle eine elektrische Welle erzeugt, die senkrecht zur ersteren steht und gleichphasig schwingt. Deswegen genügt es bei der Behandlung elektromagnetischer Wellen, nur mit dem elektrischen oder nur mit dem magnetischen Anteil zu rechnen - der jeweils andere Anteil ergibt sich dann sofort mit Hilfe der Gleichung (III) bzw. (IV).

Nimmt man den Betrag von dieser Gleichung und benutzt außerdem noch, daß \vec{k} und \vec{E} senkrecht sind, dann folgt:

$$|\vec{k}||\vec{E}| = \frac{\omega}{c} |\vec{B}| = \frac{|\vec{k}|c'}{c} |\vec{B}|, \quad (4.28)$$

wobei noch die Dispersionsrelation (für nichtleitende Medien!) eingesetzt wurde. Es folgt dann: $c|\vec{E}| = c'|\vec{B}|$ und speziell im Vakuum

$$\boxed{|\vec{E}| = |\vec{B}|} \quad (4.29)$$

Zusammenfassend:

1. Elektrische und magnetische Wellen treten immer gemeinsam auf; man spricht deshalb von *elektromagnetischen Wellen*.
2. Die elektrische und die magnetische Welle stehen senkrecht aufeinander und schwingen gleichphasig.
3. Beide Wellen stehen senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung: elektromagnetische Wellen sind *transversal*.
4. Für die Amplituden gilt (in nichtleitenden Medien): $\frac{|\vec{B}|}{|\vec{E}|} = \frac{c}{c'} = \sqrt{\epsilon\mu}$; speziell im Vakuum haben beide Wellen dieselbe Amplitude.

Alle diese Eigenschaften wurden zwar nur für die speziellen Lösungen (4.15) hergeleitet; da sich aber eine allgemeine Welle durch Fouriertransformation in diese elementaren Lösungen zerlegen läßt, gelten alle diese Eigenschaften auch für beliebige Wellen (vorausgesetzt, alle Teilwellen haben dieselbe Ausbreitungsrichtung; Gegenbeispiel siehe Abschnitt 4.2). Dieses Prinzip wird oft verwendet: Man löst ein Problem zunächst für monochromatische ebene Wellen (also für die speziellen Lösungen (4.15)) und erhält die allgemeine Lösung dann durch Fouriertransformation.

4.1.3 Polarisation

(frei nach Greiner: *Elektrodynamik*)

Bei den speziellen Lösungen (4.15) sind \vec{E}_0 und \vec{H}_0 (räumlich und zeitlich) konstante Vektoren. Man spricht dann von *linear polarisierten* Wellen; die *Polarisationsebene* ist die Ebene, die senkrecht zur Ausbreitungsrichtung \vec{k} steht.

In dieser Ebene kann man nun orthonormale Einheitsvektoren \vec{e}_1 und \vec{e}_2 wählen. Statt der speziellen Lösungen (4.15) kann man nun auch allgemeinere betrachten; eine ebene Welle, die sich in Richtung \vec{k} ausbreitet, kann man ansetzen als:

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = (E_1\vec{e}_1 + E_2\vec{e}_2)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}. \quad (4.30)$$

Die Amplitudenfaktoren können i. a. komplex sein; der imaginäre Anteil bewirkt dann eine Phasenverschiebung der einen Teilwelle gegen die andere.

Betrachte zunächst den einfachen Fall ohne Phasenverschiebung. Dann hat man wiederum eine linear polarisierte Welle, wobei $\vec{E}_0 = E_1\vec{e}_1 + E_2\vec{e}_2$ ist; der Betrag der Feldstärke ist also $\vec{E}_0^2 = (E_1)^2 + (E_2)^2$, und der Winkel zur \vec{e}_1 -Richtung ist $\theta = \arctan\left(\frac{E_2}{E_1}\right)$.

Der nächstkompliziertere Fall ist eine Phasenverschiebung von $\pm\frac{\pi}{2}$, wobei aber $|E_1| = |E_2| =: E_0$ gelten soll. Dann hat man:

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = E_0(\vec{e}_1 \pm i\vec{e}_2)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} =: \vec{e}_1 E_1(\vec{x}, t) + \vec{e}_2 E_2(\vec{x}, t). \quad (4.31)$$

Physikalisch relevant sind nur die Realteile dieser komplexen Wellen; diese sind:

$$\begin{aligned} E_1(\vec{x}, t) &= E_0 \cos(\vec{k} \bullet \vec{x} - \omega t) \\ E_2(\vec{x}, t) &= \mp E_0 \sin(\vec{k} \bullet \vec{x} - \omega t) \end{aligned} \quad (4.32)$$

Betrachtet man die Welle im Ursprung, so hat man:

$$\begin{aligned} E_1(\vec{x}, t) &= E_0 \cos(\omega t) \\ E_2(\vec{x}, t) &= \pm E_0 \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (4.33)$$

Die beiden (senkrecht aufeinanderstehenden) Teilwellen führen also harmonische Schwingungen aus, die um $\pm \frac{\pi}{2}$ gegeneinander verschoben sind - als Resultat läuft \vec{E} auf einem Kreis um. Man spricht dann von *zirkular polarisierten* Wellen.

Die Drehrichtung ist folgendermaßen definiert: Man schaue auf die entgegenkommende Welle (also entgegen \vec{k}). Für das obere Vorzeichen in den Gleichungen dreht sich dann \vec{E} linksherum, für das untere rechtsherum. Man spricht dementsprechend von *links-* bzw. *rechtsdrehender zirkularer Polarisation*.

Der allgemeine Fall (Phasenverschiebung ungleich null, $E_1 \neq E_2$) führt dann auf *elliptisch polarisierte* Wellen. Diese sind allerdings nicht so wichtig wie die linear oder zirkular polarisierten und sollen deshalb hier nicht näher betrachtet werden.

4.1.4 Phasen- und Gruppengeschwindigkeit, Dispersion

(frei nach *Greiner: Elektrodynamik, Mechanik 1*)

Die Lösungen (4.15) beschreiben, wie schon mehrmals erwähnt, ebene monochromatische Wellen. Nimmt man den (physikalisch sinnvollen) Realteil und betrachtet dann den Betrag des Feldes zu einer festen Zeit t abhängig vom Ort \vec{x} , so ergibt sich eine Sinuskurve, die um ωt gegenüber dem Ursprung verschoben ist. Der Abstand zweier nebeneinanderliegender Wellenberge (oder zweier beliebiger anderer Punkte gleicher Phase) ist die *Wellenlänge* λ . Man sieht leicht, daß

$$\boxed{\lambda = 2\pi/|\vec{k}|} \quad (4.34)$$

gilt. Andererseits hat man für einen festen Raumpunkt \vec{x} eine harmonische Schwingung, die um $\vec{k} \bullet \vec{x}$ phasenverschoben ist. Der Abstand zweier aufeinanderfolgender Maxima (oder anderer Punkte gleicher Phase) ist die *Schwingungsdauer* T ; es gilt

$$\boxed{T = 2\pi/\omega.} \quad (4.35)$$

Die Geschwindigkeit, mit der sich ein Wellenberg (oder ein anderer Punkt fester Phase) fortbewegt, heißt *Phasengeschwindigkeit* v_p . Sie ist gegeben durch

$$\boxed{v_p = \lambda/T = \omega/k = c'.} \quad (4.36)$$

In der Natur kommen aber solche (unendlich ausgedehnten) monochromatischen ebenen Wellen nicht vor: jeder Wellenzug hat eine endliche Länge, und

oft hat man auch gar keine Wellen, sondern eher Pulse o. ä. Alle diese Signalformen lassen sich aber durch Fouriertransformation auf eine (meist unendliche) Linearkombination monochromatischer Wellen zurückführen (durch Fouriertransformation). Im allgemeinen hat man also eine *Wellengruppe*, oft auch *Wellenpaket* genannt.

Nun tritt allerdings ein Problem auf: Jede Teilwelle hat die (Phasen-) Geschwindigkeit $c' = c/\sqrt{\epsilon\mu}$. μ kann zwar meist vernachlässigt werden ($\mu \approx 1$ für die meisten Materialien), aber ϵ hängt im allgemeinen von der Frequenz ab. Damit hat jede Teilwelle eine andere Phasengeschwindigkeit! Die Wellengruppe wird also im Lauf der Zeit ihre Gestalt ändern („auseinanderlaufen“); man spricht von *Dispersion*. Deswegen bewegt sich eine beliebige Marke (z.B. der höchste Wellenberg der Gruppe) nicht einfach mit der durchschnittlichen Phasengeschwindigkeit der Gruppe, sondern mit der sogenannten *Gruppengeschwindigkeit* v_g . Für diese kann im allgemeinen keine einfache Formel angegeben werden; ein Spezialfall, in dem dies möglich ist, wird weiter unten besprochen.

Die Gruppengeschwindigkeit hat allerdings physikalisch eine größere Bedeutung als die Phasengeschwindigkeit: Die in einer Welle enthaltene Energie hängt mit der Amplitude zusammen (siehe später); die Gruppengeschwindigkeit gibt also auch die Geschwindigkeit des Energietransports an. Außerdem wird bei der Übertragung von Informationen immer auf eine bestimmte Pulshöhe getriggert - also ist im allgemeinen auch die Geschwindigkeit der Informationsübertragung gleich der Gruppengeschwindigkeit. Die Phasengeschwindigkeit kann größer als c werden (es gibt Medien, in denen $\sqrt{\epsilon\mu} < 1$ ist); für die Gruppengeschwindigkeit (Signalgeschwindigkeit) dagegen ist in allen bekannten physikalischen Situationen die Lichtgeschwindigkeit die obere Grenze.

Im Spezialfall einer (hier der Einfachheit halber eindimensionalen) Welle, die aus Teilwellen zusammengesetzt ist, deren Wellenzahlen alle in einem engen Intervall liegen, kann man eine Formel für die Gruppengeschwindigkeit finden. Die Welle wird beschrieben durch:

$$f(x, t) = \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} \tilde{f}(k) e^{i(kx - \omega t)} dk \quad (4.37)$$

mit $\Delta k \ll k_0$. ω ist aufgrund der Dispersionsrelation eine Funktion von k ; da Δk als klein vorausgesetzt wird, kann man diese Funktion in eine Taylorreihe entwickeln und nach dem ersten Glied abbrechen:

$$\omega(k) \approx \omega_0 + \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0 (k - k_0) \quad (4.38)$$

mit $\omega_0 := \omega(k_0)$, $\left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0 := \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0}$.

Nimmt man außerdem an, daß $\tilde{f}(k)$ nur wenig von k abhängt, so kann man die Näherung $\tilde{f}(k) \approx \tilde{f}(k_0)$ machen. Mit der neuen Integrationsvariable $\kappa := k - k_0$ wird dann die Welle zu:

$$f(x, t) = \tilde{f}(k_0) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \int_{-\Delta k}^{\Delta k} e^{i\kappa(x - (d\omega/dt)_0 t)} d\kappa$$

$$\begin{aligned}
&= 2\tilde{f}(k_0)e^{i(k_0x-\omega_0t)}\frac{\sin\left(\Delta k\left[x-\left(\frac{d\omega}{dk}\right)_0t\right]\right)}{x-\left(\frac{d\omega}{dk}\right)_0t} \\
&=: A(x,t)e^{i(k_0x-\omega_0t)}.
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Da die Funktion $A(x, t)$ von Δk abhängt, welches als klein vorausgesetzt wurde, ist sie eine nur langsam veränderliche Funktion und kann im Vergleich zum Exponentialfaktor, der $k_0 \gg \Delta k$ enthält, als fast konstant angesehen werden. Also hat man näherungsweise eine monochromatische Welle mit Amplitude A , Frequenz ω_0 , Wellenzahl k_0 und Phasengeschwindigkeit $v_p = \frac{\omega_0}{k_0}$.

Die Wellengruppe als ganzes bewegt sich aber auch fort (wenn auch langsam im Vergleich zur Phasengeschwindigkeit). Ein Maß für ihre Geschwindigkeit ist die Geschwindigkeit des Maximums der Gruppe; dieses befindet sich (wie man leicht nachrechnet) an der Position

$$x_{max} = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_0 t. \tag{4.40}$$

Also ist die Gruppengeschwindigkeit im Spezialfall eines schmalen Frequenzbandes und einer schwachen Frequenzabhängigkeit der Fouriertransformierten:

$$v_g = \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k=k_0}. \tag{4.41}$$

Nun wird auch klar, warum der Zusammenhang zwischen Kreisfrequenz und Wellenvektor Dispersionsrelation genannt wird: aus ihm folgen Phasen- und Gruppengeschwindigkeit, also auch die Dispersion einer Wellengruppe. Nur wenn der Zusammenhang zwischen ω und k *linear* ist, gilt $v_p = v_g$, die Gruppe läuft also nicht auseinander. Man spricht dann von *dispersionsfreien* Medien.

4.2 * Hohlleiter

Wie wir in Abschnitt 3.5 gesehen haben, breiten sich elektromagnetische Wellen hoher Frequenz bevorzugt in einer dünnen äußeren Schicht von Drähten fort. Dementsprechend ist der Widerstand hoch und die Dämpfung stark. Bei sehr hohen Frequenzen (ab etwa 1 Gigahertz - Mikrowellen, Radar usw.) ist es vernünftiger, statt Drähten sogenannte Hohlleiter zu verwenden, um elektromagnetische Signale zu übermitteln. Dies sind einfach Röhren von verschiedener Form mit leitenden Wänden. Als einfaches Beispiel soll hier die Wellenausbreitung in einem rechteckigen Hohlleiter untersucht werden, der mit einem Material mit der Dielektrizitätskonstanten ϵ und der Permeabilität μ ausgefüllt ist.

Der Hohlleiter liege in z -Richtung, seine Wände erstrecken sich in x -Richtung von 0 bis a und in y -Richtung von 0 bis b ($a \leq b$). Wir wollen die Ausbreitung von Wellen durch den Hohlleiter untersuchen; setze deshalb von

vornherein eine Welle in z -Richtung an und lasse nur noch eine Abhängigkeit von x und y zu:

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}_0(x, y)e^{i(k_z z - \omega t)}; \quad \vec{H}(\vec{x}, t) = \vec{H}_0(x, y)e^{i(k_z z - \omega t)} \quad (4.42)$$

Die Maxwell-Gleichungen werden dann zu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(E_0)_x}{\partial x} + \frac{\partial(E_0)_y}{\partial y} + ik_z(E_0)_z &= 0 \\ \frac{\partial(H_0)_x}{\partial x} + \frac{\partial(H_0)_y}{\partial y} + ik_z(H_0)_z &= 0 \\ \text{rot } \vec{E} &= i\frac{\omega}{c}\vec{B} \\ \text{rot } \vec{H} &= -i\frac{\omega}{c}\vec{D}, \end{aligned} \quad (4.43)$$

und die Wellengleichungen zu

$$\begin{aligned} \left(-\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_z^2 \right) \vec{E}_0 &= 0 \\ \left(-\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_z^2 \right) \vec{H}_0 &= 0. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Da die Wände leitend sind, muß das elektrische Feld auf ihnen senkrecht stehen und das magnetische Feld parallel zu ihnen sein:

$$(E_0)_y(0, y) = (E_0)_y(a, y) = (E_0)_x(x, 0) = (E_0)_x(x, b) = 0 \quad (4.45)$$

und

$$(H_0)_x(0, y) = (H_0)_x(a, y) = (H_0)_y(x, 0) = (H_0)_y(x, b) = 0. \quad (4.46)$$

Berechne nun zunächst die x -Komponente des elektrischen Feldes. Mache dafür einen Separationsansatz:

$$(E_0)_x(x, y) = f_x(x)g_x(y) \quad (4.47)$$

und setze dies in die Wellengleichung ein:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f_x(x)g_x(y) = \left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) f_x(x)g_x(y). \quad (4.48)$$

Teilt man durch f_x und g_x , so wird dies zu:

$$\frac{f_x''}{f_x} + \frac{g_x''}{g_x} = k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (4.49)$$

Nun hängt der erste Summand auf der linken Seiten nur noch von x ab, der zweite nur noch von y . Auf der rechten Seite steht aber eine (von x und y unabhängige) Konstante. Also müssen beide Summanden für sich schon jeweils konstant sein:

$$\frac{f_x''}{f_x} = c_1; \quad \frac{g_x''}{g_x} = c_2; \quad c_1 + c_2 = k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (4.50)$$

Die Gleichungen für f_x und g_x kann man dann sofort lösen:

$$f_x(x) = f_{x1} \sin(k_{xx}x) + f_{x2} \cos(k_{xx}x); \quad g_x(y) = g_{x1} \sin(k_{xy}y) + g_{x2} \cos(k_{xy}y) \quad (4.51)$$

mit $k_{xx}^2 = -c_1$, $k_{xy}^2 = -c_2$ (c_1, c_2 werden als negativ angenommen, da man sonst keine Wellenlösungen erhalten würde). Setzt man die Randbedingungen (4.45) ein, so erhält man:

$$g(0) = g_{x2} = 0; \quad g(b) = g_{x1} \sin(k_{xy}b) + 0 = 0, \quad (4.52)$$

also $g_x(y) = g_{x1} \sin(k_{xy}y)$ mit $k_{xy} = \frac{2\pi}{b}n_{xy}$ ($n_{xy} \in \mathbf{N}$).

Ebenso führt der Separationsansatz für die y -Komponente

$$(E_0)_y(x, y) = f_y(x)g_y(y) \quad (4.53)$$

auf

$$f_y(x) = f_{y1} \sin(k_{yx}x); \quad g_y(y) = g_{y1} \sin(k_{yy}y) + g_{y2} \cos(k_{yy}y) \quad (4.54)$$

mit

$$-k_{yx}^2 - k_{yy}^2 = k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \quad (4.55)$$

und $k_{yx} = \frac{2\pi}{a}n_{yx}$ ($n_{yx} \in \mathbf{N}$).

Man hat nun also:

$$(E_0)_x(x, y) = f_x(x)g_{x1} \sin(k_{xy}y); \quad (E_0)_y(x, y) = f_{y1} \sin(k_{yx}x)g_y(y) \quad (4.56)$$

Setze nun an, daß das elektrische Feld transversal sein soll: $(E_0)_z = 0$. Dann wird die erste Maxwell-Gleichung zu:

$$\frac{\partial(E_0)_x}{\partial x} + \frac{\partial(E_0)_y}{\partial y} = f'_x(x)g_{x1} \sin(k_{xy}y) + f_{y1} \sin(k_{yx}x)g'_y(y) = 0 \quad (4.57)$$

Teilt man durch die Sinus-Funktionen (samt Vorfaktoren), so erhält man wiederum eine Gleichung, in der beide Summanden jeweils nur von einer Variable abhängen:

$$\frac{f'_x(x)}{f_{y1} \sin(k_{yx}x)} + \frac{g'_y(y)}{g_{x1} \sin(k_{xy}y)} = 0. \quad (4.58)$$

Es muß also gelten:

$$\frac{f'_x(x)}{f_{y1} \sin(k_{yx}x)} = -c = \frac{g'_y(y)}{g_{x1} \sin(k_{xy}y)} \quad (4.59)$$

und damit

$$f_x(x) = \frac{cf_{y1}}{k_{yx}} \cos(k_{yx}x); \quad g_y(y) = -\frac{cg_{x1}}{k_{xy}} \cos(k_{xy}y). \quad (4.60)$$

Durch Vergleich mit den allgemeinen Lösungen (4.51), (4.54) erhält man: $f_{x1} = 0$, $f_{x2} = \frac{cf_{y1}}{k_{yx}}$, $k_{xx} = k_{yx} =: k_x$, $g_{y1} = 0$, $g_{y2} = -\frac{cg_{x1}}{k_{xy}}$, $k_{yy} = k_{xy} =: k_y$.

Also ergibt sich schließlich:

$$\boxed{\begin{aligned}(E_0)_x(x, y) &= \mathcal{E}_x \cos(k_x x) \sin(k_y y) \\ (E_0)_y(x, y) &= -\mathcal{E}_y \sin(k_x x) \cos(k_y y) \\ (E_0)_z(x, y) &= 0,\end{aligned}} \quad (4.61)$$

wobei die Konstanten $f_{x2}, f_{y1}, g_{x1}, g_{y2}$ zu den Amplituden $\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_y$ zusammengefaßt wurden. Man hat also in x - und in y -Richtung zusätzlich zur Ausbreitung in z -Richtung auch noch stehende Wellen. Dabei gelten folgende Nebenbedingungen:

$$k_x \mathcal{E}_x - k_y \mathcal{E}_y = 0, \quad (4.62)$$

die Amplituden sind also nicht unabhängig voneinander, und

$$k_z^2 = \frac{\omega^2}{c'^2} - k_x^2 - k_y^2 \quad (4.63)$$

mit $k_x = \frac{2\pi}{a}n_x, k_y = \frac{2\pi}{b}n_y, n_x, n_y \in \mathbf{N}$. Dies bedeutet, daß es für jede vorgegebene Frequenz mehrere Möglichkeiten für die Wellenzahl k_z in Ausbreitungsrichtung gibt; diese verschiedenen möglichen Wellen nennt man *Moden*. Sie werden durch n_x und n_y charakterisiert; diese geben die Anzahl der Bäuche der stehenden Welle in x - bzw. y -Richtung an. Für $n_x = n_y = 0$ hat man kein elektrisches Feld, also gibt es keine 0-0-Mode; die niedrigsten nichtverschwindenden Moden sind die 1-0-Mode und die 0-1-Mode. Anschaulich gesehen sind die Moden die Eigenschwingungen des hohlen Innenraums des Leiters.

k_z^2 muß natürlich immer positiv sein, damit Ausbreitung von Wellen stattfindet. Mit der zweiten Nebenbedingung führt dies auf

$$\frac{\omega^2}{c'^2} > k_x^2 + k_y^2. \quad (4.64)$$

Für jede vorgegebene Mode gibt es also eine Grenzfrequenz

$$\boxed{\omega_{\text{grenz}}(n_x, n_y) = 2\pi c \sqrt{\left(\frac{n_x}{a}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{b}\right)^2}}, \quad (4.65)$$

unterhalb der keine Ausbreitung dieser Mode im Hohlleiter stattfinden kann. Da $a \leq b$ vorausgesetzt wurde, kann sich unterhalb der Frequenz

$$\boxed{\omega_{\text{grenz}} = \frac{2\pi c}{b}}, \quad (4.66)$$

also überhaupt keine Welle mehr im Hohlleiter fortpflanzen.

Nun soll noch das magnetische Feld berechnet werden; man erhält es mit Hilfe der dritten Maxwell-Gleichung: Aus $\text{rot} \vec{E} = i \frac{\omega}{c} \vec{B}$ ergibt sich $\vec{H} = -i \frac{c\mu}{\omega} \text{rot} \vec{E}$ und damit dann:

$$\boxed{\begin{aligned}(H_0)_x(x, y) &= \mathcal{H}_x \sin(k_x x) \cos(k_y y) \\ (H_0)_y(x, y) &= \mathcal{H}_y \cos(k_x x) \sin(k_y y) \\ (H_0)_z(x, y) &= i \mathcal{H}_z \cos(k_x x) \cos(k_y y)\end{aligned}} \quad (4.67)$$

mit $\mathcal{H}_x = \frac{c\mu}{\omega}\mathcal{E}_y k_z$, $\mathcal{H}_y = \frac{c\mu}{\omega}\mathcal{E}_x k_z$, $\mathcal{H}_z = \frac{c\mu}{\omega}(\mathcal{E}_x k_y + \mathcal{E}_y k_x)$; der Faktor i in der z -Komponente bewirkt dabei eine Phasenverschiebung um $\pi/2$ gegenüber dem elektrischen Feld.

Hier taucht nun also auch ein magnetisches Feld in Ausbreitungsrichtung der Welle auf! Dies scheint zwar zunächst ein Widerspruch zur Transversalität elektromagnetischer Wellen zu sein, kann aber dadurch erklärt werden, daß wir hier nicht nur eine Welle in z -Richtung haben, sondern zusätzlich auch noch andere (stehende) Wellen (bzw. Eigenschwingungen des Innenraums des Leiters) in x - und y -Richtung. Bei der Herleitung der Transversalität hatten wir dagegen eine einzelne Welle oder eine Überlagerung von Wellen, die alle dieselbe Ausbreitungsrichtung haben, angenommen.

Ignoriert man die Tatsache, daß man eigentlich mehrere Wellen hat, und betrachtet nur die Ausbreitung in z -Richtung, so ist zwar das elektrische Feld transversal, das magnetische aber nicht. Deswegen heißen diese Wellen *TE-Moden*.

Man könnte die ganze Rechnung jetzt noch mal von vorne anfangen, diesmal mit dem Magnetfeld, fordern, daß dieses transversal ist, und dann daraus das elektrische Feld ausrechnen. Das sparen wir uns aber (die Rechnung geht ja fast gleich); am Schluß bekommt man dann jedenfalls raus, daß nun das magnetische Feld transversal ist, aber das elektrische nicht. Dementsprechend spricht man dann von *TM-Moden*. Sowohl die TE- als auch die TM-Moden werden jeweils durch Angabe von n_x und n_y durchnummeriert.

Wellen, bei denen sowohl das elektrische als auch das magnetische Feld transversal sind (TEM-Moden), können in einem rechteckigen Hohlleiter nicht auftreten. In Hohlleitern von anderer Form ist dies aber möglich; für einen zylindrischen Hohlleiter (Koaxialkabel) siehe beispielsweise *Greiner: Elektrodynamik*.

4.3 Brechung und Reflexion an Grenzflächen

(Anmerkung: Auch dieser Abschnitt baut auf zwei meiner Übungsaufgaben auf.)

Nun wollen wir uns anschauen, was mit einer elektromagnetischen Welle passiert, die auf eine Grenzfläche zwischen zwei Medien trifft. Beide Medien haben im allgemeinen unterschiedliche Dielektrizitätskonstanten ϵ_1 , ϵ_2 und Permeabilitäten μ_1 , μ_2 . Die verwendete Geometrie soll folgendermaßen sein: Die Grenzfläche zwischen den beiden Medien sei die x - y -Ebene, der Wellenvektor der einfallenden Welle liege in der y - z -Ebene (siehe Abb. 4.1). Außerdem betrachten wir hier speziell wieder nur monochromatische Wellen (den allgemeinen Fall erhält man dann mit Hilfe der Fourieranalyse).

4.3.1 Stetigkeitsbedingungen, Snellius-Gesetz

Aus dem Experiment wissen wir, daß Licht durch Grenzflächen nur teilweise durchgeht - im allgemeinen wird ein Teil auch reflektiert. Wir setzen also an, daß man im oberen Halbraum ($z \geq 0$) zwei ebene Wellen hat: die einfallende und die reflektierte, im unteren eine: die durchgehende. Die Amplituden des

Abbildung 4.1: Elektromagnetische ebene Welle an der Grenzfläche zweier Medien

elektrischen Feldes seien für die einfallende Welle \vec{E}_0 , für die durchgehende \vec{E}'_0 und für die reflektierte \vec{E}''_0 ; die Wellenvektoren entsprechend \vec{k} , \vec{k}' und \vec{k}'' und die Frequenzen ω , ω' und ω'' . Wir haben nun also:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \\ \vec{E}' &= \vec{E}'_0 e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{x} - \omega' t)} \\ \vec{E}'' &= \vec{E}''_0 e^{i(\vec{k}'' \cdot \vec{x} - \omega'' t)}\end{aligned}\tag{4.68}$$

Um Beziehungen zwischen den Amplituden und den Wellenvektoren zu finden, kann man die Stetigkeit der Felder an der Grenzfläche betrachten. Diese hat den Normalenvektor $\vec{n} = \vec{e}_z$; die Normal- und Tangential-Komponente eines gegebenen Vektors \vec{a} erhält man dann mittels:

$$|\vec{a}_\perp| = |\vec{a} \cdot \vec{n}|; \quad |\vec{a}_\parallel| = |\vec{a} \times \vec{n}|.\tag{4.69}$$

Als Stetigkeitsbedingungen für die Felder hat man:

$$\vec{D}_\perp + \vec{D}'_\perp = \vec{D}''_\perp; \quad \vec{E}_\parallel + \vec{E}''_\parallel = \vec{E}'_\parallel.\tag{4.70}$$

Es ergibt sich also:

$$(\epsilon_1 \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} + \epsilon_1 \vec{E}''_0 e^{i(\vec{k}'' \cdot \vec{x} - \omega'' t)} - \epsilon_2 \vec{E}'_0 e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{x} - \omega' t)}) \cdot \vec{e}_z = 0\tag{4.71}$$

$$(\vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} + \vec{E}''_0 e^{i(\vec{k}'' \cdot \vec{x} - \omega'' t)} - \vec{E}'_0 e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{x} - \omega' t)}) \times \vec{e}_z = 0\tag{4.72}$$

Die Gleichungen (4.71) und (4.72) können nur dann für alle Zeiten t gelten, wenn die zeitabhängigen Argumente der Exponentialfunktionen gleich sind, also wenn gilt:

$$\omega = \omega' = \omega''.\tag{4.73}$$

Man erhält also: *Einfallende, durchgehende und reflektierte Welle haben alle dieselbe Frequenz.*

Außerdem gilt ja bei monochromatischen elektromagnetischen Wellen, daß man die magnetische Flußdichte einfach aus dem elektrischen Feld erhält mittels (4.27):

$$\vec{B} = \frac{c}{\omega}(\vec{k} \times \vec{E}). \quad (4.74)$$

Nutzt man außerdem noch die bekannten Stetigkeitsbedingungen für das magnetische Feld

$$\vec{B}_\perp + \vec{B}''_\perp = \vec{B}'_\perp; \quad \vec{H}_\parallel + \vec{H}''_\parallel = \vec{H}'_\parallel, \quad (4.75)$$

aus, so erhält man schließlich zusätzlich (die zeitlichen Exponentialfunktionen wurden bereits gekürzt):

$$(\vec{k} \times \vec{E}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} + \vec{k}'' \times \vec{E}_0'' e^{i\vec{k}'' \cdot \vec{x}} - \vec{k}' \times \vec{E}_0' e^{i\vec{k}' \cdot \vec{x}}) \bullet \vec{e}_z = 0 \quad (4.76)$$

$$\left(\frac{1}{\mu_1} \vec{k} \times \vec{E}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} + \frac{1}{\mu_1} \vec{k}'' \times \vec{E}_0'' e^{i\vec{k}'' \cdot \vec{x}} - \frac{1}{\mu_2} \vec{k}' \times \vec{E}_0' e^{i\vec{k}' \cdot \vec{x}} \right) \times \vec{e}_z = 0 \quad (4.77)$$

Die (kompliziert aussehenden) Beziehungen (4.71), (4.72), (4.76) und (4.77), werden wir erst im nächsten Abschnitt voll ausnutzen. Hier sollen zunächst Beziehungen zwischen den Wellenvektoren hergeleitet werden.

Der Wellenvektor der einfallenden Welle soll nun, wie gesagt, in der y - z -Ebene liegen; er hat also die Gestalt:

$$\vec{k} = k(0, \sin(\varphi_1), -\cos(\varphi_1)), \quad (4.78)$$

wobei $k = |\vec{k}|$ und φ_1 der Winkel ist, den \vec{k} zur z -Achse hat. Damit gilt:

$$\vec{k} \bullet \vec{x} = k \sin(\varphi_1)y - k \cos(\varphi_1)z = k \sin(\varphi_1)y, \quad (4.79)$$

da wir die Stetigkeit an der Grenzfläche $z = 0$ betrachten. Für die beiden anderen Wellenvektoren ergibt sich:

$$\vec{k}' \bullet \vec{x} = k'_x x + k'_y y; \quad \vec{k}'' \bullet \vec{x} = k''_x x + k''_y y. \quad (4.80)$$

Die Stetigkeitsbedingungen können aber nur dann für alle x und y erfüllt sein, wenn die Abhängigkeit aller drei Exponentialfunktionen von diesen Variablen gleich ist. Aus der x -Abhängigkeit ergibt sich:

$$0 = k'_x = k''_x, \quad (4.81)$$

alle drei Wellenvektoren liegen also in einer Ebene (hier: der y - z -Ebene). Außerdem folgt aus der y -Abhängigkeit:

$$k \sin(\varphi_1) = k'_y = k''_y. \quad (4.82)$$

Die Wellenvektoren der durchgehenden und der reflektierten Welle haben also folgende Gestalt:

$$\vec{k}' = (0, k \sin(\varphi_1), k'_z); \quad \vec{k}'' = (0, k \sin(\varphi_1), k''_z) \quad (4.83)$$

Aus der Dispersionsrelation $|\vec{k}| = \frac{\omega}{c(\epsilon, \mu)}$ ergibt sich außerdem:

$$|\vec{k}| = k = |\vec{k}''|; |\vec{k}'| = k \frac{c_1}{c_2} = k' \quad (4.84)$$

Da aber mit der oben angegebenen Gestalt des Vektors \vec{k}'' gilt:

$$k = |\vec{k}''| = \sqrt{k^2 \sin^2(\varphi_1) + (k_z'')^2}, \quad (4.85)$$

folgt

$$k_z'' = \pm \sqrt{k^2 - k^2 \sin^2(\varphi_1)} = \pm k \cos(\varphi). \quad (4.86)$$

Da nach Voraussetzung $\vec{k}'' \neq \vec{k}$ gilt (die reflektierte Welle soll nicht mit der einfallenden übereinstimmen), kann nur das positive Vorzeichen richtig sein, also:

$$\vec{k}' = (0, k \sin(\varphi_1), k \cos(\varphi_1)). \quad (4.87)$$

Damit haben wir gezeigt: Der Wellenvektor der reflektierten Welle hat zur z -Achse (also mit der Flächennormalen) denselben Winkel wie der Wellenvektor der einfallenden Welle, oder kürzer: *Einfallswinkel* = *Ausfallswinkel*.

Außerdem gilt:

$$k_y' = k' \sin(\varphi_2), \quad (4.88)$$

wobei φ_2 nun der Winkel von \vec{k}' zur z -Achse ist. Da aber, wie oben hergeleitet, wegen der Stetigkeit $k_y' = k \sin(\varphi_1)$ gilt, folgt:

$$\frac{\sin(\varphi_1)}{\sin(\varphi_2)} = \frac{k'}{k} = \frac{c_1}{c_2} = \sqrt{\frac{\epsilon_2 \mu_2}{\epsilon_1 \mu_1}} \quad (4.89)$$

Nun definiert man den sogenannten *Brechungsindex* durch

$$\boxed{n := \sqrt{\epsilon \mu}.} \quad (4.90)$$

Es folgt sofort, daß gilt:

$$n = \frac{c_{\text{Vakuum}}}{c_{\text{Materie}}}, \text{ also } n \geq 1. \quad (4.91)$$

Je größer n für einen Stoff ist, desto langsamer ist das Licht also in ihm. Man spricht von *optisch dichten* bzw. *optisch dünnen* Medien (für n groß bzw. klein). Setzt man in der obigen Formel die Brechungsindizes ein, so erhält man schließlich:

$$\boxed{\frac{\sin(\varphi_1)}{\sin(\varphi_2)} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{c_1}{c_2}.} \quad (4.92)$$

Dies ist das bekannte *Snellius'sche Brechungsgesetz*. Es sagt aus, daß sich beim Übergang zwischen zwei Medien mit unterschiedlichen Brechungsindizes der Winkel des Wellenvektors der einfallenden Welle (also der Winkel des Lichtstrahls) zur z -Achse (bzw. allgemein zum Lot) ändert. Man spricht von (*Licht-*) *Brechung*. Im optisch dichteren Medium ist dabei der Winkel zum Lot kleiner

als im optisch dünneren, oder kurz: *Lichtstrahlen werden im optisch dichteren Medium zum Lot hin gebrochen.*

Schließlich kann man auch noch k'_z ausrechnen:

$$(k'_z)^2 + k^2 \sin^2(\varphi_1) = |\vec{k}'|^2 = \frac{c_1^2}{c_2^2} k^2 = \frac{n_2^2}{n_1^2} k^2, \quad (4.93)$$

also

$$k'_z = -k \sqrt{\frac{n_2^2}{n_1^2} - \sin^2(\varphi_1)} = -k' \cos(\varphi_2). \quad (4.94)$$

(k'_z muß negativ sein, da die durchgehende Welle nach unten weiterläuft.) Falls $n_2 < n_1$ ist (Übergang vom optisch dichteren ins optisch dünnere Medium), so kann es passieren, daß $\sin(\varphi_1) < \frac{n_2}{n_1}$ ist - der Ausdruck unter der Wurzel würde dann negativ werden, k'_z also rein imaginär! Im dünneren Medium gibt es dann keine Welle mehr, sondern nur eine exponentiell mit dem Abstand zur Grenzfläche abnehmende Schwingung. Es folgt also: Ab einem Grenzwinkel

$$\boxed{\sin(\varphi_{1,grenz}) = \frac{n_2}{n_1}} \quad (4.95)$$

gibt es keine durchgehende Welle mehr, sondern nur noch eine reflektierte. Man spricht dementsprechend von *Totalreflektion*.

Zusammenfassend: Aus der (relativ schwachen) Annahme, daß es zu jeder einfallende Welle sowohl eine durchgehende als auch eine reflektierte Welle gibt, haben wir (unter Ausnutzung der Stetigkeit der Felder an Grenzflächen) folgende Schlüsse gezogen:

1. Alle drei Wellen haben dieselbe Frequenz.
2. Alle drei Wellenvektoren (Lichtstrahlen) liegen in derselben Ebene.
3. Der reflektierte Strahl schliesst mit dem Lot denselben Winkel ein wie der einfallende Strahl (*Einfallswinkel = Ausfallswinkel*).
4. Der Winkel des durchgehenden Strahls zur z -Achse ist anders als der des einfallendes Strahls; man spricht von *Brechung*. Das Snellius-Gesetz (4.92) trifft zum Verhältnis der Winkel eine quantitative Aussage.
5. Beim Übergang vom optisch dichteren ins optische dünnere Medium gibt es einen Grenzwinkel, jenseits dessen keine Brechung mehr stattfindet, sondern nur noch Reflektion (*Totalreflektion*).

Die geometrischen Verhältnisse wären nun also geklärt; über die Amplituden \vec{E}_0 , \vec{E}'_0 und \vec{E}''_0 haben wir bis jetzt aber noch überhaupt nichts ausgesagt. Dies soll im nächsten Abschnitt geschehen.

Abbildung 4.2: Einfluß der Polarisation bei der Brechung: Richtung der elektrischen Feldstärke (a) senkrecht zur Einfallsebene, (b) in der Einfallsebene

4.3.2 * Einfluß der Polarisation: Fresnel'sche Formeln

Um quantitative Aussagen über das Verhalten der Amplituden treffen zu können, muß man die Polarisation der einfallenden Welle berücksichtigen. Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden: Der Vektor der elektrischen Feldstärke kann sowohl senkrecht zur Einfallsebene (hier: y - z -Ebene) als auch in ihr schwingen (siehe Abb. 4.2); alle anderen Fälle ergeben sich als Linearkombination hieraus.

Betrachte zunächst den zweiten Fall: $\vec{E}_0 = E_0 \vec{t}$ senkrecht zur Einfallsebene; wegen der Symmetrie und der Stetigkeit erwartet man, daß dann auch \vec{E}'_0 und \vec{E}''_0 senkrecht zur Einfallsebene liegen. Da der Normalenvektor \vec{n} in dieser Ebene liegt, folgt also: $\vec{E}_0 \cdot \vec{n} = \vec{E}'_0 \cdot \vec{n} = \vec{E}''_0 \cdot \vec{n} = 0$. Damit geben die Gleichungen (4.71), (4.76) nur die trivialen Ergebnisse $0 = 0$. Nimmt man dagegen von der Gleichung (4.72) den Betrag und berücksichtigt, daß \vec{n} senkrecht auf \vec{t} steht und beide den Betrag eins haben, so erhält man:

$$0 = |(E_0 + E''_0 - E'_0)(\vec{t} \times \vec{n})| = |E_0 + E''_0 - E'_0|, \quad (4.96)$$

also $E_0 + E''_0 = E'_0$.

Bei der Gleichung (4.77) verfähre folgendermaßen: Forme zunächst die Kreuzprodukte um:

$$(\vec{k} \times \vec{E}_0) \times \vec{e}_z = \vec{E}_0(\vec{e}_z \cdot \vec{k}) - \vec{k}(\vec{e}_z \cdot \vec{E}_0) = -\vec{E}_0 k \cos(\varphi_1). \quad (4.97)$$

Führt man dies für die anderen beiden Kreuzprodukte genauso durch, dann geht Gleichung (4.77) über in:

$$-\frac{k}{\mu_1} \vec{E}_0 \cos(\varphi_1) + \frac{k}{\mu_1} \vec{E}''_0 \cos(\varphi_1) + \frac{k'}{\mu_2} \vec{E}'_0 \cos(\varphi_2) = 0. \quad (4.98)$$

Nimmt man nun zur Vereinfachung an, daß $\mu_1 = \mu_2 = 1$ ist (dies gilt in guter Näherung für die meisten Stoffe bei den Frequenzen von Licht), teilt die Gleichung durch k und nimmt den Betrag, so hat man:

$$E_0 \cos(\varphi_1) - E''_0 \cos(\varphi_1) - \frac{k'}{k} E'_0 \cos(\varphi_2) = 0. \quad (4.99)$$

Dann setze für $\frac{k'}{k}$ das Brechungsgesetz ein und teile außerdem noch durch $\cos(\varphi_1)$:

$$E_0 - E_0'' - E_0' \frac{\tan(\varphi_1)}{\tan(\varphi_2)} = 0. \quad (4.100)$$

Nutzt man die aus (4.72) gefolgerte Beziehung $E_0' = E_0 + E_0''$, so erhält man:

$$E_0 - E_0'' - (E_0 + E_0'') \frac{\tan(\varphi_1)}{\tan(\varphi_2)} = 0. \quad (4.101)$$

Nach einigen trigonometrischen Umformungen (länglich, aber nicht schwierig - viel Spaß beim Nachrechnen! ;-)) ergibt sich schließlich:

$$\boxed{\frac{E_0''}{E_0} = \frac{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)}}. \quad (4.102)$$

Setzt man dies wieder in $E_0' = E_0 + E_0''$ ein, so kann man nun auch eine Formel für die Amplitude der gebrochenen Welle finden:

$$\boxed{\frac{E_0'}{E_0} = \frac{2 \sin(\varphi_2) \cos(\varphi_1)}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)}}. \quad (4.103)$$

Betrachte nun noch kurz den anderen Fall: \vec{E}_0 liegt in der Einfallsebene. Dann ist $\vec{E}_0 \times \vec{n} = 0$, und die Gleichungen (4.72) und (4.77) entfallen. Aus den anderen beiden Gleichungen (4.71) und (4.76) erhält man dann wiederum nach längerem Rumgerechne:

$$\boxed{\frac{E_0''}{E_0} = \frac{\tan(\varphi_1 - \varphi_2)}{\tan(\varphi_1 + \varphi_2)}}. \quad (4.104)$$

und

$$\boxed{\frac{E_0'}{E_0} = \frac{2 \sin(\varphi_2) \cos(\varphi_1)}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2) \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}}. \quad (4.105)$$

Die Beziehungen (4.102), (4.103), (4.104) und (4.105) heißen *Fresnel'sche Formeln*. Sie geben jeweils das Verhältnis der Amplituden von reflektierter zu einfallender Welle ((4.102) und (4.104)) bzw. von gebrochener zu einfallender Welle ((4.103) und (4.105)) an. (4.102) und (4.103) gelten, falls das Licht senkrecht zur Einfallsebene polarisiert ist, (4.104) und (4.105) dagegen, wenn die Polarisierung in der Einfallsebene liegt.

Ein Spezialfall tritt auf, wenn $\varphi_1 + \varphi_2 = 90^\circ$ ist, denn dann folgt für parallel zur Einfallsebene polarisiertes Licht aus (4.104):

$$E_0'' = 0, \quad (4.106)$$

es gibt also keinen reflektierten Strahl, der parallel zur Einfallsebene polarisiert ist! Mit Hilfe des Brechungsgesetzes kann man den Einfallswinkel ϕ_1 , bei dem dies geschieht, bestimmen: $\sin(\varphi_2) = \sin(90^\circ - \varphi_1) = \cos(\varphi_1)$, also

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin(\varphi_1)}{\sin(\varphi_2)} = \tan(\varphi_1), \quad (4.107)$$

und damit:

$$\boxed{\tan(\varphi_{1,Br}) = \frac{n_2}{n_1}} \quad (4.108)$$

$\varphi_{1,Br}$ heißt *Brewster'scher Winkel*. Fällt beliebig polarisiertes Licht im Brewster'schen Winkel auf eine Oberfläche, so wird also nur der Anteil reflektiert, der senkrecht zur Einfallsebene schwingt. Auf diese Weise kann man eine Reflektion an einer Grenzfläche dazu benutzen, um Licht linear zu polarisieren.

4.4 Energie und Impuls elektromagnetischer Felder

Ebenso wie Teilchen mit Masse, also Materie, haben auch elektromagnetische Felder eine Energie und einen Impuls. Dies sieht man schon daran, daß sie Kräfte auf die Materie ausüben - dabei ändert sich ja die Energie und der Impuls der Teilchen. Wenn die Energie- und Impulserhaltung weiterhin gelten soll, kann man die Kräfte also nur dadurch erklären, daß die Änderung durch eine Übertragung von Energie und Impuls von den Feldern auf die Teilchen bewirkt wird.

4.4.1 Energie in den Feldern

Betrachte zunächst ein einfaches elektrostatisches Problem: eine Ansammlung von N Punktladungen q_i an den Stellen \vec{r}_i in einem homogenen, isotropen, unendlich ausgedehnten Dielektrikum mit Dielektrizitätskonstante ϵ . Um die Gesamtenergie auszurechnen, die in diesem System steckt, berechnen wir nun die Arbeit, die nötig ist, um das System aufzubauen.

Nehme dafür an, daß sich alle Punktladungen unendlich weit vom Ursprung und unendlich weit voneinander entfernt befinden; es wirken also keine Kräfte zwischen ihnen. Um die erste Punktladung q_1 an den Ort \vec{r}_1 zu bringen, braucht man also keine Arbeit: $W_1 = 0$. Danach ist aber ein elektrisches Feld vorhanden:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 = \frac{1}{\epsilon} \frac{q_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} = \frac{1}{\epsilon} q_1 \vec{\nabla} \frac{-1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}. \quad (4.109)$$

Gegen dieses elektrische Feld muß nun Arbeit geleistet werden, um die zweite Ladung an ihren Platz zu bringen:

$$W_2 = W_{12} = \int_{\infty}^{\vec{r}_2} q_2 \vec{E}_1 \cdot d\vec{s} = \frac{q_1 q_2}{\epsilon} \int_{\infty}^{\vec{r}_2} \vec{\nabla} \frac{-1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon} \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}. \quad (4.110)$$

Das neue elektrische Feld ergibt sich dann durch Superposition der beiden einzelnen Felder:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{1}{\epsilon} \frac{q_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} + \frac{1}{\epsilon} \frac{q_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|}. \quad (4.111)$$

Die Arbeit, die benötigt wird, um die dritte Ladung an ihren Platz zu bringen, ist deshalb:

$$W_3 = W_{13} + W_{23} = \frac{1}{\epsilon} \frac{q_1 q_3}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|} + \frac{1}{\epsilon} \frac{q_2 q_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|}. \quad (4.112)$$

Führt man diese Prozedur fort, so erhält man schließlich für die i -te Punktladung:

$$W_i = \sum_{j=1}^{i-1} W_{ji} = \frac{1}{\epsilon} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_j q_i}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|}, \quad (4.113)$$

und die gesamte Arbeit ergibt sich als Summe über alle diese Beiträge zu:

$$W_e = \sum_{i=1}^N W_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j<i} W_{ji} = \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^N \sum_{j<i} \frac{q_j q_i}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|}. \quad (4.114)$$

Die einzelnen Summanden sind nun aber symmetrisch bezüglich Austausch ihrer Indizes:

$$W_{ji} = \frac{1}{\epsilon} \frac{q_j q_i}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|} = \frac{1}{\epsilon} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} = W_{ij}. \quad (4.115)$$

Deshalb kann man die Summe umschreiben:

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j<i} W_{ji} + \sum_{i=1}^N \sum_{j<i} W_{ji} \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j<i} W_{ji} + \sum_{i=1}^N \sum_{j<i} W_{ij} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j<i} W_{ji} + \sum_{i=1}^N \sum_{i<j} W_{ji} \right), \end{aligned} \quad (4.116)$$

wobei im letzten Schritt die Summationsindices umbenannt wurden. Es ergibt sich also schließlich:

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1;i \neq j}^N W_{ji} = \frac{1}{2\epsilon} \sum_{i,j=1;i \neq j}^N \frac{q_j q_i}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|}. \quad (4.117)$$

Die Verallgemeinerung dieser Formel auf kontinuierliche Ladungsverteilungen ist dann:

$$W_e = \frac{1}{2\epsilon} \int dV \int dV' \frac{\rho(\vec{r}) \rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (4.118)$$

Hier wurde von der Summe über Punktladungen zum Integral über kontinuierliche Dichten übergegangen. In diese integrale Formulierung kann nun aber die Forderung $\vec{r} \neq \vec{r}'$ nicht so einfach aufgenommen werden wie die Forderung $i \neq j$ bei der Summierung. Die Formel enthält nun also auch noch Selbstenergie-Anteile: Gewissermaßen die potentielle Energie, die die Ladungen in ihrem eigenen Feld haben. Für Punktladungen sind diese Selbstenergien unendlich groß; bei konkreten Rechnungen müssen sie extra berücksichtigt und am Ende absubtrahiert werden, um vernünftige Ergebnisse zu erhalten.

Diese Formel kann man aber noch weiter umformen. Zunächst benutze den integralen Zusammenhang zwischen Ladungsdichte und Potential

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon} \int dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (4.119)$$

um eines der beiden Integrale loszuwerden:

$$W_e = \frac{1}{2} \int \Phi(\vec{r}) \rho(\vec{r}) dV. \quad (4.120)$$

Außerdem setze nun für die Ladungsdichte die erste Maxwell-Gleichung ein:

$$W_e = \frac{1}{8\pi} \int (\Phi(\vec{r}) \operatorname{div} \vec{D}(\vec{r})) dV = \frac{1}{8\pi} \int (\vec{\nabla}(\Phi \vec{D}) - \vec{D} \bullet \vec{\nabla} \Phi) dV, \quad (4.121)$$

wobei eine der Produktregeln der Vektoranalysis benutzt wurde. Das erste Integral wird wie üblich mit dem Gauß'schen Satz in ein Oberflächenintegral umgewandelt und verschwindet deswegen (der Integrand geht mindestens mit r^{-3} gegen null, das Flächenelement aber nur mit r^2 gegen unendlich).

Setzt man nun noch die Beziehung zwischen Potential und elektrischer Feldstärke ein, so ergibt sich schließlich:

$$W_e = \frac{1}{8\pi} \int \vec{E} \bullet \vec{D} dV. \quad (4.122)$$

Die Energiedichte von elektrostatischen Feldern ist also:

$$\boxed{w_e = \frac{1}{8\pi} \vec{E} \bullet \vec{D}.} \quad (4.123)$$

Bei der Energiedichte des magnetischen Feldes könnte man versuchen, analog vorzugehen: Man könnte die Arbeit berechnen, die man braucht, um eine gegebene Stromverteilung aufzubauen, und daraus dann die Feldenergie ausrechnen. Einfacher ist jedoch folgender Weg: Betrachte eine Ansammlung von N Stromkreisen mit Widerständen R_i , Strömen I_i , Spannungen U_i und Induktionskoeffizienten L_{ij} . Es gilt dann (siehe Abschnitt 3.4.3):

$$R_i I_i + \sum_{j=1}^N L_{ij} \dot{I}_j = U_i. \quad (4.124)$$

Multipliziert man diese Gleichung mit I_i , so wird sie zu:

$$R_i I_i^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N L_{ij} I_i I_j \right) = U_i I_i. \quad (4.125)$$

Rechts steht nun die gesamte vom Stromkreis aufgenommene Leistung, der erste Summand links ist die Energie, die pro Zeiteinheit an den Widerständen (durch Erwärmung) verlorengeht. Der zweite Summand muß also angeben, welche Leistung benötigt wird, um den magnetischen Fluß im Stromkreis i , also das Magnetfeld zu ändern. Damit ergibt sich für die Energie im magnetischen Feld:

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N L_{ij} I_i I_j. \quad (4.126)$$

Setzt man die Definition der Induktionskoeffizienten ein, so wird dies zu:

$$W_m = \frac{\mu}{2c^2} \sum_{i,j=1}^N \int \int \frac{I_i \vec{d}\vec{r}_i \bullet I_j \vec{d}\vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}. \quad (4.127)$$

Für dünne Leiter, bei denen man $\vec{j}(\vec{r}_i)dV_i \approx I_i d\vec{r}_i$ annähern kann, ergibt sich dann:

$$W_m = \frac{\mu}{2c^2} \int \int \frac{\vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV dV'. \quad (4.128)$$

Setzt man nun den integralen Zusammenhang zwischen Vektorpotential und Stromdichte ein, so folgt:

$$W_m = \frac{1}{2c} \int \vec{A}(\vec{r}) \cdot \vec{j}(\vec{r}) dV. \quad (4.129)$$

Schließlich kann man noch die vierte Maxwell-Gleichung (der Magnetostatik) verwenden:

$$W_m = \frac{1}{8\pi} \int \vec{A} \cdot \text{rot} \vec{H} dV = \frac{1}{8\pi} \int \text{rot} \vec{A} \cdot \vec{H} dV = \frac{1}{8\pi} \int \vec{B} \cdot \vec{H} dV, \quad (4.130)$$

wobei eine partielle Integration durchgeführt wurde (unter Benutzung einer der Produktregeln der Vektoranalysis und Vernachlässigung der Oberflächenterme). Die magnetische Energiedichte (im statischen Fall) ist damit schließlich:

$$\boxed{w_m = \frac{1}{8\pi} \vec{B} \cdot \vec{H}}, \quad (4.131)$$

in völliger Analogie zum elektrischen Fall.

Damit wird auch klar, wo der Ausdruck, der in Abschnitt 3.2.3 für den Energieverlust beim Durchlaufen der Hysteriskurve angegeben wurde, herkommt: Die Änderung der Energiedichte ergibt sich einfach als $dw_m = \frac{1}{8\pi} d(\vec{B} \cdot \vec{H}) = \frac{1}{4\pi} \vec{H} \cdot d\vec{B}$.

4.4.2 Energieerhaltung, Poyntingvektor

Im letzten Abschnitt haben wir explizite Ausdrücke für die Energie in statischen elektrischen bzw. magnetischen Feldern gefunden. Nun postulieren wir, daß diese Formeln auch im dynamischen Fall gelten, daß also die gesamte Energie im elektromagnetischen Feld gegeben ist durch:

$$\boxed{W_{em} = \frac{1}{8\pi} \int dV (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H})}. \quad (4.132)$$

Davon ausgehend soll untersucht werden, wie die Erhaltung der Energie in der Elektrodynamik ausgedrückt werden kann.

Es ist zweckmäßig, hier mit der Energiedichte zu arbeiten, um gleich Effekte wie Energieströmungen mit berücksichtigen zu können (vergleiche Kontinuitätsgleichung der Ladungserhaltung). Betrachte also die zeitliche Ableitung der elektromagnetischen Energiedichte:

$$\frac{\partial}{\partial t} w_{em} = \frac{1}{8\pi} \left(\dot{\vec{E}} \cdot \vec{D} + \vec{E} \cdot \dot{\vec{D}} + \dot{\vec{B}} \cdot \vec{H} + \vec{B} \cdot \dot{\vec{H}} \right). \quad (4.133)$$

Nimmt man wie üblich an, daß \vec{D} proportional zu \vec{E} ist und ebenso für \vec{B} und \vec{H} , dann sind jeweils zwei der Terme gleich, und man hat

$$\frac{\partial}{\partial t} w_{em} = \frac{1}{4\pi} \left(\vec{E} \bullet \dot{\vec{D}} + \dot{\vec{B}} \bullet \vec{H} \right). \quad (4.134)$$

Benutze nun für die Zeitableitungen die Maxwell-Gleichungen (III) und (IV):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} w_{em} &= \frac{1}{4\pi} \left(\vec{E} \bullet \left(c \operatorname{rot} \vec{H} - 4\pi \vec{j} \right) - c \operatorname{rot} \vec{E} \bullet \vec{H} \right) \\ &= \frac{c}{4\pi} \left(\vec{E} \bullet \operatorname{rot} \vec{H} - \operatorname{rot} \vec{E} \bullet \vec{H} \right) - \vec{E} \bullet \vec{j}. \end{aligned} \quad (4.135)$$

Wendet man die Produktregel $\operatorname{div}(\vec{a} \times \vec{b}) = \operatorname{rot} \vec{a} \bullet \vec{b} - \vec{a} \bullet \operatorname{rot} \vec{b}$ rückwärts an, so wird dies zu

$$\frac{\partial}{\partial t} w_{em} = -\frac{c}{4\pi} \operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H}) - \vec{E} \bullet \vec{j}. \quad (4.136)$$

Definiert man nun den *Poyntingvektor*

$$\boxed{\vec{S} := \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{H})}, \quad (4.137)$$

so hat man schließlich den *Poynting'schen Satz*:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} w_{em} + \operatorname{div} \vec{S} = -\vec{j} \bullet \vec{E}}. \quad (4.138)$$

Diese Gleichung drückt die Energieerhaltung aus - auch wenn man ihr das zugegebenermaßen nicht sofort ansieht. Vergleicht man mit der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \operatorname{div} \vec{j} = 0, \quad (4.139)$$

so wird klar, daß der Poyntingvektor ein Maß für den Energiefluß ist: Beispielsweise durch Abstrahlung elektromagnetischer Wellen kann Energie aus einem vorgegebenen Volumen hinaustransportiert werden. \vec{S} gibt dann die Richtung und die Stärke der Abstrahlung an (siehe auch weiter unten).

Der Term auf der rechten Seite wird klarer, wenn man für die Stromdichte einfach Ladungsdichte mal Geschwindigkeit einsetzt:

$$\vec{j}(\vec{r}) \bullet \vec{E}(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) \vec{v}(\vec{r}) \bullet \vec{E}(\vec{r}) = \vec{v}(\vec{r}) \bullet \vec{f}(\vec{r}). \quad (4.140)$$

Dieser Term ist also nichts anderes als die Kraftdichte, die durch die Wirkung des elektrischen Feldes auf die Ladungen entsteht, mal die Geschwindigkeit der Ladungen. erinnert man sich daran, daß das Produkt aus Kraft und Geschwindigkeit aber gerade die mechanische Leistung ist, so wird klar, daß hier die Leistungsdichte steht - das heißt, die Änderung der mechanischen Energiedichte durch das Einwirken des elektrischen Feldes auf die Materie.

Dies sieht man auch noch auf andere Weise: Setzt man für \vec{j} das Ohm'sche Gesetz ein, so erhält man

$$\vec{j} \bullet \vec{E} = \sigma \vec{E}^2. \quad (4.141)$$

In der „globalen“ Formulierung, die man bei Stromkreisen anwendet, gehört zu \vec{E} die Spannung U , zu \vec{j} der Strom I und zu σ der reziproke Widerstand $1/R$. Man erhält also:

$$\vec{j} \bullet \vec{E} \doteq IU; \quad \sigma \vec{E}^2 \doteq \frac{U^2}{R}. \quad (4.142)$$

IU und $\frac{U^2}{R}$ sind aber beides Ausdrücke für die Ohm'schen Energieverluste an einem Widerstand. Diese Energieverluste geschehen dadurch, daß der Widerstand sich bei Stromdurchfluß aufheizt - also wird dort elektrische Feldenergie in mechanische (Wärme-)Energie umgewandelt. Wieder erhält man, daß $\vec{j} \bullet \vec{E}$ angibt, wie sich die mechanische Energiedichte durch Einwirkung des Feldes ändert.

Es gilt also:

$$\vec{j} \bullet \vec{E} = \frac{\partial}{\partial t} w_{mech}, \quad (4.143)$$

und damit erhält man:

$$\frac{\partial}{\partial t} (w_{em} + w_{mech}) = -\text{div} \vec{S}. \quad (4.144)$$

Die gesamte Energiedichte (Energie in den Feldern und in der Materie) kann sich also nur durch Abstrahlung ändern - sprich: die Energie bleibt erhalten.

Global sieht man dies folgendermaßen: Die Gesamtenergie erhält man als Integral über die Energiedichte; wähle dabei das Volumen so groß, daß keine Abstrahlung durch die Oberfläche nach außen stattfindet (möglich, wenn die Abstrahlung nicht gerade bis ins Unendliche geht - was aber meistens der Fall ist). Bilde dann die zeitliche Ableitung:

$$\frac{d}{dt} W = \int \frac{\partial}{\partial t} (w_{em} + w_{mech}) dV = - \int \text{div} \vec{S} dV = - \int \vec{S} \bullet d\vec{A} = 0, \quad (4.145)$$

die Gesamtenergie bleibt also konstant.

Nun soll noch kurz veranschaulicht werden, daß der Poyntingvektor \vec{S} tatsächlich die Richtung des Energieflusses angibt. Speziell bei monochromatischen elektromagnetischen Wellen gilt ja $\vec{B} = \frac{c}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}$, also:

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \left(\frac{c}{\mu\omega} \vec{k} \times \vec{E} \right) = \frac{c^2}{4\pi\mu\omega} \vec{E}^2 \vec{k}, \quad (4.146)$$

da \vec{E} senkrecht auf \vec{k} steht. Dies kann man noch weiter umformen:

$$\vec{S} = \frac{c^2}{4\pi\epsilon\mu} (\vec{E} \bullet \vec{D}) \frac{\vec{k}}{\omega} = \frac{c'}{4\pi} (\vec{E} \bullet \vec{D}) \vec{e}_k = 2c' w_e \vec{e}_k, \quad (4.147)$$

wobei die Dispersionsrelation für freie Wellen eingesetzt wurde und \vec{e}_k der Einheitsvektor in Ausbreitungsrichtung der Welle ist. Nutzt man nun noch aus, daß hier elektrische und magnetische Energiedichte gleich groß sind (folgt daraus, daß die Felder gleiche Amplituden haben), so ist $2w_e = w_e + w_m = w_{em}$, und

$$\vec{S} = c' w_{em} \vec{e}_k. \quad (4.148)$$

Der Poyntingvektor ist hier also das Produkt aus der Ausbreitungsgeschwindigkeit c' der Welle, ihrer Energiedichte w_{em} und ihrer Ausbreitungsrichtung \vec{e}_k . Dies legt es doch sehr nahe, den Poyntingvektor als Richtung und Stärke des Energieflusses zu interpretieren.

4.4.3 Impulserhaltung, Strahlungsdruck

Auch die Impulserhaltung kann man am besten in differentieller Form formulieren. Ausgangspunkt ist hierbei die Feststellung, daß eine Änderung des Impulses nichts anderes ist als eine Kraft (2. Newton'sches Gesetz!); also bedeutet eine Änderung der Impulsdichte (mangels Buchstaben durch \vec{p} dargestellt wie sonst der Impuls als ganzes) das Vorhandensein einer Kraftdichte. Diese Kraftdichte kann aber nur die Lorentzkraftdichte sein; durch sie wird Impuls von den Feldern auf die Materie übertragen:

$$\vec{f} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{p}_{mech} = \rho \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B}. \quad (4.149)$$

Für die Quellen kann man die Maxwell-Gleichungen (I) und (IV) einsetzen:

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{p}_{mech} = \frac{1}{4\pi} (\operatorname{div} \vec{D}) \vec{E} + \frac{1}{4\pi} \left(\operatorname{rot} \vec{H} - \frac{1}{c} \dot{\vec{D}} \right) \times \vec{B}. \quad (4.150)$$

Nun kann man noch zwei Terme addieren, die (unter Benutzung der Maxwell-Gleichungen (II) und (III)) identisch null sind:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \vec{p}_{mech} &= \frac{1}{4\pi} (\operatorname{div} \vec{D}) \vec{E} + \frac{1}{4\pi} (\operatorname{div} \vec{B}) \vec{H} \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \left(\operatorname{rot} \vec{H} - \frac{1}{c} \dot{\vec{D}} \right) \times \vec{B} + \frac{1}{4\pi} \left(\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \dot{\vec{B}} \right) \times \vec{D} \\ &= \frac{1}{4\pi} \left((\operatorname{div} \vec{D}) \vec{E} + (\operatorname{rot} \vec{E}) \times \vec{D} + (\operatorname{div} \vec{B}) \vec{H} + (\operatorname{rot} \vec{H}) \times \vec{B} \right) \\ &\quad - \frac{1}{4\pi c} \left(\dot{\vec{D}} \times \vec{B} + \vec{D} \times \dot{\vec{B}} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \left((\operatorname{div} \vec{D}) \vec{E} + (\operatorname{rot} \vec{E}) \times \vec{D} + (\operatorname{div} \vec{B}) \vec{H} + (\operatorname{rot} \vec{H}) \times \vec{B} \right) \\ &\quad - \frac{\epsilon\mu}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{H}) \\ &= \frac{1}{4\pi} \left((\operatorname{div} \vec{D}) \vec{E} + (\operatorname{rot} \vec{E}) \times \vec{D} + (\operatorname{div} \vec{B}) \vec{H} + (\operatorname{rot} \vec{H}) \times \vec{B} \right) \\ &\quad - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{S}. \end{aligned} \quad (4.151)$$

Es liegt nun nahe, durch

$$\boxed{\vec{p}_{em} := \frac{\epsilon\mu}{c^2} \vec{S} = \frac{1}{(c')^2} \vec{S}} \quad (4.152)$$

die Impulsdichte des elektromagnetischen Feldes zu definieren (es ist sinnvoll anzunehmen, daß der Impuls in dieselbe Richtung zeigt wie der Energiefluß \vec{S} ,

und außerdem stimmt die Einheit). Dann erhält man:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{p}_{em} + \vec{p}_{mech}) = \frac{1}{4\pi} \left((\operatorname{div} \vec{D}) \vec{E} + (\operatorname{rot} \vec{E}) \times \vec{D} + (\operatorname{div} \vec{B}) \vec{H} + (\operatorname{rot} \vec{H}) \times \vec{B} \right). \quad (4.153)$$

Der Term auf der rechten Seite muß also die (negative) Divergenz des „Impulsflusses“ sein; er gibt an, welcher Impuls dem Gesamtsystem dadurch verlorengeht, daß elektromagnetische Wellen abgestrahlt werden.

Die Divergenz des Impulsflusses muß einen Vektor ergeben - der Impulsfluß selbst kann also nur durch eine Matrix dargestellt werden (genauer: durch einen Tensor 2.Stufe). Diesen Tensor wollen wir im folgenden ausrechnen. Betrachte dafür zunächst das elektrische Feld:

$$\begin{aligned} (\operatorname{div} \vec{D}) \vec{E} + (\operatorname{rot} \vec{E}) \times \vec{D} &= \sum_i \frac{\partial D_i}{\partial x_i} \sum_k E_k \vec{e}_k + \sum_{i,j,k} \epsilon_{kij} \vec{e}_k (\operatorname{rot} \vec{E})_i D_j \\ &= \sum_{i,k} \frac{\partial D_i}{\partial x_i} E_k \vec{e}_k + \sum_{i,j,k,l,m} \epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} \frac{\partial E_m}{\partial x_l} D_j \vec{e}_k \\ &= \sum_{i,k} \frac{\partial D_i}{\partial x_i} E_k \vec{e}_k + \sum_{j,k,l,m} (\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}) \frac{\partial E_m}{\partial x_l} D_j \vec{e}_k \\ &= \epsilon \sum_{i,k} \left(\frac{\partial E_i}{\partial x_i} E_k + \frac{\partial E_k}{\partial x_i} E_i - \frac{\partial E_i}{\partial x_k} E_i \right) \vec{e}_k \\ &= \epsilon \sum_{i,k} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (E_i E_k) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} (E_i E_i) \right) \vec{e}_k \\ &= \sum_{i,k} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(E_i D_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} \vec{E} \cdot \vec{D} \right) \vec{e}_k. \end{aligned} \quad (4.154)$$

Ebenso kann man mit dem Ausdruck für das magnetische Feld verfahren und erhält:

$$(\operatorname{div} \vec{B}) \vec{H} + (\operatorname{rot} \vec{H}) \times \vec{B} = \mu \sum_{i,k} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(H_i B_k - \frac{1}{2} \delta_{ij} \vec{H} \cdot \vec{B} \right) \vec{e}_k. \quad (4.155)$$

Insgesamt ergibt sich also:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{p}_{em} + \vec{p}_{mech}) &= \frac{1}{4\pi} \sum_{i,k} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(E_i D_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} \vec{E} \cdot \vec{D} + H_i B_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} \vec{H} \cdot \vec{B} \right) \vec{e}_k \\ &= -\frac{1}{4\pi} \sum_{i,k} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\delta_{ik}}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} - E_i D_k + \frac{\delta_{ik}}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} - H_i B_k \right) \vec{e}_k. \end{aligned}$$

Definiere nun den *Maxwell'schen Spannungstensor* (keine Ahnung, was der mit Spannung zu tun hat) durch

$$\boxed{T_{ik} := \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{2} \delta_{ik} \vec{E} \cdot \vec{D} - E_i D_k + \frac{1}{2} \delta_{ik} \vec{H} \cdot \vec{B} - H_i B_k \right)}. \quad (4.156)$$

Dies kann auch geschrieben werden als:

$$T = w_{em} id_3 - \frac{1}{4\pi} \left(\vec{E} \otimes \vec{D} + \vec{H} \otimes \vec{B} \right). \quad (4.157)$$

Setzt man nun die Definition des Energie-Impuls-Tensors in die Impulsgleichung ein, so ergibt sich:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{p}_{em} + \vec{p}_{mech}) = - \sum_{i,k} \frac{\partial}{\partial x_i} T_{ik} \vec{e}_k. \quad (4.158)$$

Die meisten Lehrbücher lassen diesen Ausdruck nun so stehen und schreiben die Impulserhaltung komponentenweise. Man kann sie aber auch für den ganzen Vektor auf einmal ausdrücken, wenn man noch einige Umformungen durchführt und eine neue Notation einführt.

Da T symmetrisch ist, kann die Summe auch umgeschrieben werden zu:

$$\sum_{i,k} \frac{\partial}{\partial x_i} T_{ik} \vec{e}_k = \sum_{i,k} \left(T_{ki} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \vec{e}_k, \quad (4.159)$$

wobei der Ableitungsoperator (entgegen sonstiger Konvention) nun nach links wirken muß. Was nun da steht, ist aber nichts anderes als die Matrix T angewandt auf den Vektor $\vec{\nabla}$:

$$\sum_{i,k} \left(T_{ki} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \vec{e}_k = T \vec{\nabla}. \quad (4.160)$$

Dies legt nahe, als Divergenz einer Matrix zu definieren (*Vorsicht: keine Standardnotation!*):

$$\boxed{\text{div} A := A \vec{\nabla} = \sum_{i,k} \left(A_{ki} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \vec{e}_k,} \quad (4.161)$$

wobei der Ableitungsoperator nach links wirken muß.

Die Impulserhaltung kann damit nun geschrieben werden als:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{p}_{em} + \vec{p}_{mech}) = -\text{div} T \quad (4.162)$$

oder auch

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \vec{p}_{em} + \text{div} T = -\vec{f} = -\rho \vec{E} - \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B}.} \quad (4.163)$$

Die Spur des Maxwell'schen Spannungstensor ist:

$$\begin{aligned} \text{Sp} T &= \sum_i T_{ii} = -\frac{1}{4\pi} \sum_i \left(E_i D_i - \frac{1}{2} \delta_{ii} \vec{E} \cdot \vec{D} + H_i B_i - \frac{1}{2} \delta_{ii} \vec{H} \cdot \vec{B} \right) \\ &= -\frac{1}{4\pi} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) + \frac{\sum_i \delta_{ii}}{8\pi} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) \\ &= \frac{1}{8\pi} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) = w_{em} \end{aligned} \quad (4.164)$$

(mit $\sum_i \delta_{ii} = 3$).

Energie- und Impulserhaltung können also zusammengefaßt auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\text{Sp}T) + \text{div}\vec{S} = -\vec{j} \bullet \vec{E} \quad (4.165)$$

$$\frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{S} + \text{div}T = -\rho\vec{E} - \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B}. \quad (4.166)$$

Hier deutet sich schon der enge Zusammenhang zwischen Energie und Impuls an, auf den wir dann in Kapitel 6 näher eingehen werden.

Zum Abschluß soll noch eine physikalische Interpretation des Spannungstensors gegeben werden. Betrachte dafür die globale Formulierung der Impulserhaltung, wobei der Gesamtimpuls nun mit \vec{P} bezeichnet sei:

$$\frac{d}{dt} (\vec{P}_{em} + \vec{P}_{mech}) = \int dV \frac{\partial}{\partial t} (\vec{p}_{em} + \vec{p}_{mech}) = - \int dV \text{div}T. \quad (4.167)$$

Nun kann man den Gauß'schen Satz anwenden - in leicht modifizierter Form: Zu jeder Impulskomponente gehört die Divergenz einer Zeile des Spannungstensors, also eines Vektors. Durch den Gauß'schen Satz geht das Volumenintegral über die Divergenz eines Vektorfeldes über in ein Flächenintegral über das Skalarprodukt zwischen Normalenvektor der Fläche und Vektorfeld; also geht die Divergenz einer Zeile des Spannungstensors über in das Skalarprodukt dieser Zeile mit dem Flächennormalenvektor (Bandwurmsatz - am besten mehrmals lesen! ;-)). Dies kann andererseits wieder geschrieben werden als Matrix mal Normalenvektor; es ergibt sich:

$$\frac{d}{dt} (\vec{P}_{em} + \vec{P}_{mech}) = - \int T \vec{n} dA. \quad (4.168)$$

Man sieht, daß $T\vec{n}$ den Impulsfluß (Impulsänderung pro Zeit und Fläche) durch eine Fläche mit Normalenvektor \vec{n} angibt, $T\vec{n} dA$ die Impulsänderung pro Zeit - also eine Kraft $d\vec{F}$. Trifft elektromagnetische Strahlung auf eine Fläche mit Normalenvektor \vec{n} , so wird auf diese also die Kraft $\int (\vec{n} \bullet d\vec{F}) = \int (\vec{n} \bullet T\vec{n}) dA$ ausgeübt. Ist die Fläche eben und ist T auf der gesamten Fläche A konstant, dann ergibt sich $F = (\vec{n} \bullet T\vec{n})A$ bzw. $F/A = \vec{n} \bullet T\vec{n}$. Kraft pro Fläche ist aber gerade Druck - Strahlung übt auf eine Fläche mit Normalenvektor \vec{n} also den Druck

$$p_{strahlung} = \vec{n} \bullet T\vec{n} = \sum_{i,j=1}^3 T_{ij} n_i n_j \quad (4.169)$$

aus. Man spricht hier vom *Strahlungsdruck* (naheliegend ;-)).

Die Übertragung von Impuls von elektromagnetischen Wellen auf Materie kann experimentell geprüft werden, beispielsweise durch sogenannte *Lichtmühlen*. Diese bestehen aus einem oder mehreren drehbaren Armen, die an ihren Enden je ein Plättchen mit je einer dunklen und einer spiegelnden Seite haben (siehe Abbildung 4.3). An der dunklen Seite wird das Licht absorbiert, an der anderen reflektiert; der Impulsübertrag ist also an der spiegelnden Seite doppelt so hoch wie an der dunklen, und die Mühle dreht sich mit der dunklen

Seite voraus. Es muß allerdings darauf geachtet werden, daß die Drehbewegung nicht durch Luftströmungen beeinflusst wird: Die Luft wird ebenfalls durch das Licht aufgeheizt, und zwar vor der dunklen Seite stärker als vor der reflektierenden, und übt deswegen auf die dunklere Seite auch einen stärkeren Druck aus. Wenn der Versuch nicht im Vakuum durchgeführt wird, dreht sich das Rad mit der reflektierenden Seite voraus! (vergleiche hierzu auch *Tipler, Physik*, Aufgabe 29.51)

Ein zweites (sehr hübsches) Beispiel für den Strahlungsdruck sind die Kometenschweife: Die Kraft, die durch den Impulsfluß der Sonnenstrahlung auf Staubteilchen ausgeübt wird, ist viel stärker als die gravitative Anziehungskraft der Sonne. Also bilden sich, wenn sich der Komet der Sonne annähert und Staub und Gas von ihm abdampft, von der Sonne weggerichtete Schweife, die viele Millionen Kilometer lang werden.

Abbildung 4.3: Eine sogenannte Lichtmühle: Auf die hellen Seiten der Plättchen wirkt der Lichtdruck stärker als auf die dunklen, also drehen sich die Arme mit der dunklen Seite voraus.

Kapitel 5

Abstrahlung elektromagnetischer Wellen

5.1 Potentiale und Eichung im Vakuum

Wie wir schon in der Elektro- und Magnetostatik gesehen haben, ist es möglich, die Kraftfelder als erste Ableitung von Potentialen darzustellen. Dies folgte aus der Wirbelfreiheit des elektrischen bzw. der Quellenfreiheit des magnetischen Feldes. Im dynamischen Fall ist das elektrische Feld wegen der Induktion aber nicht mehr wirbelfrei; unsere Überlegungen müssen also modifiziert werden.

Betrachtet man den homogenen Anteil der dynamischen Gleichungen im Vakuum

$$\operatorname{rot}\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (5.1)$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0, \quad (5.2)$$

so sieht man, daß man wiederum ein Vektorpotential einführen kann:

$$\boxed{\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}.} \quad (5.3)$$

Eingesetzt in (5.1) erhält man dann

$$\operatorname{rot}\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 0, \quad (5.4)$$

man hat also Wirbelfreiheit für das kombinierte Feld $\vec{E} + \frac{1}{c}\dot{\vec{A}}$ und kann schreiben

$$\vec{E} + \frac{1}{c}\dot{\vec{A}} = -\operatorname{grad}\Phi \Rightarrow \boxed{\vec{E} = -\operatorname{grad}\Phi - \frac{1}{c}\dot{\vec{A}}.} \quad (5.5)$$

Verwende nun die inhomogenen Gleichungen:

$$\operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho \quad (5.6)$$

$$\operatorname{rot}\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \quad (5.7)$$

und setze (5.3), (5.5) ein:

$$\Delta\Phi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{A} = -4\pi\rho \quad (5.8)$$

$$\Delta\vec{A} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{grad} \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (5.9)$$

Benutzt man nun wiederum den d'Alembert-Operator

$$\square \equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta, \quad (5.10)$$

so kann man die obigen Gleichungen auch umschreiben zu

$$\square\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \Phi \right) = 4\pi\rho \quad (5.11)$$

$$\square\vec{A} + \operatorname{grad} \left(\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \Phi \right) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (5.12)$$

Diese Gleichungen geben den allgemeinen Zusammenhang zwischen den Ladungs- bzw. Stromdichten und den Potentialen. Ein Vorteil gegenüber den normalen Maxwellgleichungen ist, daß man nun nur noch zwei gekoppelte Gleichungen für die vier Unbekannten Φ, \vec{A} lösen muß statt vier gekoppelten Gleichungen für sechs Unbekannte \vec{E}, \vec{B} . Hat man die Potentiale berechnet, so bekommt man die Felder dann einfach durch Ableiten mittels der Formeln (5.3), (5.5).

Die Gleichungen sehen recht kompliziert aus - man kann sie jedoch noch vereinfachen. Benutze dafür das schon aus der Elektro- und Magnetostatik bekannte Prinzip der Eichinvarianz: Die Potentiale sind nicht eindeutig festgelegt, sondern man kann Modifikationen an ihnen vornehmen, ohne daß sich die Kraftfelder ändern - nur diese sind ja im Gegensatz zu den Potentialen physikalisch beobachtbar.

Aber unter welchen Änderungen der Potentiale sind nun die Felder im dynamischen Fall invariant? Betrachten wir zunächst das Vektorpotential (5.3): Wie schon im statischen Fall ist das Magnetfeld invariant, wenn man zu \vec{A} den Gradienten eines beliebigen Skalarfeldes χ addiert, das nun aber auch zeitabhängig sein kann:

$$\boxed{\vec{A}' = \vec{A} + \operatorname{grad} \chi(\vec{r}, t)}. \quad (5.13)$$

Wegen (5.5) ist damit jedoch nun eine Änderung des elektrischen Feldes verbunden. Diese kann durch folgende Transformation des Skalarpotentials behoben werden:

$$\boxed{\Phi' = \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \chi(\vec{r}, t)}. \quad (5.14)$$

Die Transformationen (5.13), (5.14) mit beliebigem Skalarfeld χ beschreiben nun die allgemeinst möglichen Eichtransformationen in der Elektrodynamik. Im Gegensatz zur Statik müssen in der Elektrodynamik also immer beide Potentiale simultan transformiert werden, und zwar mit derselben Funktion χ !

Durch geschickte Wahl der Eichung - je nach betrachtetem Problem - kann man die Gleichungen (5.11), (5.12) vereinfachen, wobei meist eine Entkoppelung der Gleichungen das Ziel ist. Dazu stellt man gewisse Bedingungen an die Potentiale, die durch eine passend gewählte Eichtransformation, also eine passend gewählte Funktion χ , erfüllt werden können. Die beiden am häufigsten verwendeten Eichungen sind die Coulomb-Eichung, auch transversale Eichung genannt, und die Lorentzeichung.

5.1.1 * Coulombeichung

Hier fordert man

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{A} = 0,} \quad (5.15)$$

wie schon aus der Magnetostatik bekannt. Hat man ursprünglich ein Vektorpotential \vec{A} , daß diese Bedingung nicht erfüllt, so kann man eine Eichtransformation anwenden und erhält dann für das neue Vektorpotential \vec{A}' :

$$\operatorname{div} \vec{A}' = \operatorname{div} \vec{A} + \Delta \chi. \quad (5.16)$$

Wählt man nun χ so, daß es die (immer lösbare) Differentialgleichung

$$\Delta \chi = -\operatorname{div} \vec{A}, \quad (5.17)$$

löst, so erfüllt \vec{A}' die Coulomb-Eichbedingung.

Würde man für \vec{A} eine ebene Welle ansetzen, so würde diese Bedingung dazu führen, daß die Welle transversal ist - daher der Name transversale Eichung.

Mit der Eichbedingung vereinfachen sich die inhomogenen Gleichungen zu

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta \Phi &= -4\pi \rho \\ \square \vec{A} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{grad} \Phi. \end{aligned}} \quad (5.18)$$

Das Skalarpotential erhält man also wie schon in der Elektrostatik einfach mittels der üblichen Greensfunktion aus der Ladungsdichte - wobei nun aber beide Größen zusätzlich von der Zeit abhängen. Es ergibt sich schlußendlich wieder das Coulomb-Gesetz - deswegen spricht man auch von der Coulomb-Eichung.

Die Gleichung für \vec{A} sieht immer noch recht kompliziert aus; sie kann jedoch noch vereinfacht dargestellt werden. Wie oben schon ausgeführt, sind „Vektorpotential-Wellen“ in dieser Eichung transversal, also muß die rechte Seite der Gleichung auch transversal sein - das heißt, es sollte gelten:

$$\operatorname{div} \left(4\pi \vec{j} - \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{grad} \Phi \right) = 0. \quad (5.19)$$

Um dies zu zeigen, benutze die Greensfunktion zum Laplace-Operator; man hat:

$$\begin{aligned} 4\pi \vec{j}(\vec{r}, t) &= 4\pi \int \vec{j}(\vec{r}', t) \delta(\vec{r} - \vec{r}') = -\Delta \int \frac{\vec{j}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'; \\ \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{grad} \Phi(\vec{r}, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{grad} \int \frac{\rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' = \operatorname{grad} \int \frac{\dot{\rho}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned}
&= -\text{grad} \int \frac{\text{div}' \vec{j}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' = \text{grad} \int \vec{j}(\vec{r}', t) \bullet \text{grad}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \\
&= -\text{grad} \text{div} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV', \tag{5.21}
\end{aligned}$$

wobei die Kontinuitätsgleichung benutzt und einmal partiell integriert wurde. Damit ergibt sich:

$$4\pi \vec{j} - \frac{\partial}{\partial t} \text{grad} \Phi = (\text{grad} \text{div} - \Delta) \int \frac{\vec{j}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' = \text{rot} \text{rot} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \tag{5.22}$$

- man sieht sofort, daß die Divergenz dieses Ausdrucks wie verlangt verschwindet.

Spaltet man nun also den Strom auf in einen transversalen und einen longitudinalen Anteil

$$\vec{j} = \vec{j}_t + \vec{j}_l = \frac{1}{4\pi} \left(\text{rot} \text{rot} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' - \text{grad} \text{div} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \right) \tag{5.23}$$

mit $\text{div} \vec{j}_t = 0$ und $\text{rot} \vec{j}_l = 0$, so hat man die Gleichungen

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \text{grad} \Phi &= 4\pi \vec{j}_l \\ \square \vec{A} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}_t, \end{aligned}} \tag{5.24}$$

wobei es im allgemeinen praktischer ist, für Φ statt der ersten dieser Gleichungen die obige Poissongleichung zu verwenden. Die zweite Gleichung enthält einen d'Alembert-Operator - wir kommen später darauf zurück, wie Gleichungen von diesem Typ gelöst werden.

5.1.2 Lorentzgleichung

Bei dieser Eichung verlangt man

$$\boxed{\text{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \Phi = 0,} \tag{5.25}$$

was gegebenenfalls durch eine Eichtransformation mit

$$\square \chi = \text{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \Phi \tag{5.26}$$

erreicht werden kann. Man hat nun also

$$\boxed{\begin{aligned} \square \Phi &= 4\pi \rho \\ \square \vec{A} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}. \end{aligned}} \tag{5.27}$$

Diese Gleichungen (und die obige für χ und die transversale Gleichung für \vec{A} in der Coulomeichung) können nun gelöst werden, wenn man die Greensfunktion zum d'Alembert-Operator kennt.

Setzt man für diese zeitabhängige Greensfunktion an:

$$\boxed{\square G(\vec{r} - \vec{r}', t - t') = 4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}')\delta(t - t'),} \quad (5.28)$$

so ergibt eine seeehr längliche Rechnung (vergleiche die Berechnung der Greensfunktion zum Laplace-Operator, Abschnitt 2.1.3) folgenden Ausdruck:

$$\boxed{G(\vec{r} - \vec{r}', t - t') = \frac{\delta\left(t' - \left(t \mp \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.} \quad (5.29)$$

Die zwei verschiedenen Vorzeichen entsprechen zwei verschiedenen physikalischen Situationen: wählt man das negative Vorzeichen, so sieht man, daß eine zur Zeit t' am Ort \vec{r}' stattfindende Störung am Ort \vec{r} erst zur späteren Zeit t Auswirkungen hat, wobei die benötigte Zeit gerade durch die Ausbreitungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen c und den Abstand gegeben ist - die Kausalität bleibt gewahrt. Mit dieser Greensfunktion kann man also die Abstrahlung von Wellen beschreiben; sie heißt *retardierte* Greensfunktion. Das positive Vorzeichen dagegen würde eine Störung beschreiben, die sich rückwärts in der Zeit ausbreitet; man kann damit also die Situation in der Gegenwart berechnen, wenn die in der Zukunft bekannt ist. Die zugehörige Greensfunktion wird als *avanciert* bezeichnet.

Entsprechend ergeben sich nun die retardieren bzw. avancierten Potentiale, wenn man die entsprechende Greensfunktion zur Lösung der Potentialgleichungen benützt und über die Zeit integriert:

$$\boxed{\begin{aligned} \Phi(\vec{r}, t) &= \int \frac{\rho\left(\vec{r}', t \mp \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \\ \vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}\left(\vec{r}', t \mp \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \end{aligned}} \quad (5.30)$$

5.2 Abstrahlung durch bewegte Punktladungen

5.2.1 Liénard-Wiechert-Potentiale

Betrachtet man eine Punktladung q , die sich auf einer Bahn $\vec{x}(t)$ bewegt, so sind die Ladungs- und Stromdichte gegeben durch:

$$\rho(\vec{r}, t) = q\delta(\vec{r} - \vec{x}(t)) \quad (5.31)$$

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = q\dot{\vec{x}}(t)\delta(\vec{r} - \vec{x}(t)) \quad (5.32)$$

Benützt man die retardierte Greensfunktion (5.29) zur Lösung der Potentialgleichungen und setzt diese Dichten ein, so hat man also nach Ausführung der räumlichen Integration

$$\Phi(\vec{r}, t) = q \int \frac{\delta\left(t' - \left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{x}(t')|}{c}\right)\right)}{|\vec{r} - \vec{x}(t')|} dt' \quad (5.33)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{q}{c} \int \frac{\delta\left(t' - \left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{x}(t')|}{c}\right)\right) \dot{\vec{x}}(t')}{|\vec{r} - \vec{x}(t')|} dt' \quad (5.34)$$

Um die Integrationen ausführen zu können, benutze den bekannten Zusammenhang

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x_i)}{|f'(x_i)|}, \quad (5.35)$$

wobei die x_i die einfachen Nullstellen der Funktion $f(x)$ sind. Im obigen Fall muß man also die Nullstelle von

$$\tau(t') := t' - \left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{x}(t')|}{c} \right) \quad (5.36)$$

benutzen; außerdem benötigt man noch die erste Ableitung dieser Funktion:

$$\frac{d\tau(t')}{dt'} = 1 - \frac{\vec{r} - \vec{x}(t')}{|\vec{r} - \vec{x}(t')|} \bullet \frac{\dot{\vec{x}}(t')}{c} \quad (5.37)$$

Da allgemein gilt: $\vec{a} \bullet \vec{b} \leq |\vec{a}||\vec{b}|$ und $|\dot{\vec{x}}| < c$ sein muß, ist der hintere Term sicher immer < 1 und der gesamte Ausdruck also immer > 0 . Setzt man dies ein, so hat man schließlich:

$$\Phi(\vec{r}, t) = \frac{q}{|\vec{r} - \vec{x}(t')| \left(1 - \frac{\vec{r} - \vec{x}(t')}{|\vec{r} - \vec{x}(t')|} \bullet \frac{\dot{\vec{x}}(t')}{c} \right)} \Bigg|_{t' = t - \frac{|\vec{r} - \vec{x}(t')|}{c}} \quad (5.38)$$

und

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\dot{\vec{x}}(t')}{c} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{x}(t')| \left(1 - \frac{\vec{r} - \vec{x}(t')}{|\vec{r} - \vec{x}(t')|} \bullet \frac{\dot{\vec{x}}(t')}{c} \right)} \Bigg|_{t' = t - \frac{|\vec{r} - \vec{x}(t')|}{c}} \quad (5.39)$$

Dies sind die sogenannten *Liénard-Wiechert-Potentiale*, mit denen die Potentiale für eine bewegte Punktladung berechnet werden können. Mir ist allerdings kein Fall bekannt, in dem dies ohne Näherungen möglich wäre. Der interessanteste Fall ist wohl eine harmonisch schwingende Punktladung (alle anderen Bewegungen kann man prinzipiell aus dieser per Fourierentwicklung erhalten); dieser wird im folgenden Abschnitt behandelt.

5.2.2 Harmonisch schwingende Punktladung

Betrachte nun den Spezialfall

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0 \sin(\omega t), \quad (5.40)$$

also eine um den Ursprung harmonisch schwingende Punktladung. Man hat dann ein zeitlich veränderliches Dipolmoment

$$\vec{d}(t) = q\vec{x}(t). \quad (5.41)$$

In dem Problem tauchen drei charakteristische Längen auf: $|\vec{x}_0|$, ein Maß für die Ausdehnung der Quelle, die Wellenlänge λ , die man aus der Kreisfrequenz ω erhält, und $r = |\vec{r}|$, der Abstand des Beobachters. Wir werden das Problem im folgenden unter der Annahme zweier Voraussetzungen näherungsweise lösen:

$$(1) \quad \text{großer Abstand des Beobachters: } r \gg |\vec{x}_0| \quad (5.42)$$

$$(2) \quad \text{lange Bewegung der Quelle: } |\dot{\vec{x}}| \ll c \quad (5.43)$$

Wie man unter Benutzung des Ansatzes (5.40) leicht sieht, kann man die zweite Bedingung auch umformulieren zu:

$$(2') \quad \text{Quelle klein gegen Wellenlänge: } |\vec{x}_0| \ll \lambda \Leftrightarrow k|\vec{x}_0| \ll 1. \quad (5.44)$$

Wir werden nun den Ansatz in die Liénard-Wiechert-Potentiale einsetzen und eine Entwicklung nach $|\vec{x}_0|/r$ und $|\dot{\vec{x}}|/c$ machen, in der wir nur Terme bis zur ersten Ordnung in einem der beiden Parameter mitnehmen; Terme, die beide Terme zugleich in erster oder mindestens einen in höherer Ordnung enthalten, werden vernachlässigt.

Zunächst hat man

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{x}(t')|} \approx \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \bullet \vec{x}(t')}{r^3} \quad (5.45)$$

und

$$\frac{1}{1 - \frac{\vec{r} - \vec{x}(t')}{|\vec{r} - \vec{x}(t')|} \bullet \frac{\dot{\vec{x}}(t')}{c}} \approx 1 + \frac{\vec{r} - \vec{x}(t')}{|\vec{r} - \vec{x}(t')|} \bullet \frac{\dot{\vec{x}}(t')}{c} \approx 1 + \frac{\vec{r}}{r} \bullet \frac{\dot{\vec{x}}(t')}{c} \quad (5.46)$$

Für Φ muß man alle diese Terme berücksichtigen, \vec{A} dagegen enthält schon einen Faktor $|\dot{\vec{x}}|/c$ - also genügen hier die Entwicklungen bis zur 0. Ordnung. Man erhält also:

$$\Phi(\vec{r}, t) = \frac{q}{r} \left(1 + \frac{\vec{r} \bullet \vec{x}(t')}{r^2} + \frac{\vec{r}}{r} \bullet \frac{\dot{\vec{x}}(t')}{c} \right) \quad (5.47)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{q}{r} \frac{\dot{\vec{x}}(t')}{c} \quad (5.48)$$

Die Retardierung führt auf

$$\vec{x}(t') = \vec{x}_0 \sin(\omega t') \approx \vec{x}_0 \sin \left(\omega t - \frac{\omega}{c} \left(r - \frac{\vec{r} \bullet \vec{x}(t')}{r} \right) \right) \quad (5.49)$$

bzw. nach Einsetzen in die Potentiale und wiederum nur Mitnehmen der Terme bis zur ersten Ordnung:

$$\Phi(\vec{r}, t) = \frac{q}{r} \left(1 + \frac{\vec{r} \bullet \vec{x}_0}{r^2} \sin(\omega t - kr) + k \frac{\vec{r} \bullet \vec{x}_0}{r} \cos(\omega t - kr) \right) \quad (5.50)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{q}{r} k \vec{x}_0 \cos(\omega t - kr) \quad (5.51)$$

Nun kann man die Felder ausrechnen:

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= -\text{grad}\Phi - \frac{1}{c}\dot{\vec{A}} \\
&= \frac{q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} - q\frac{\vec{x}_0}{r^3}(\sin(\omega t - kr) + kr\cos(\omega t - kr)) \\
&\quad + q\frac{\vec{r}\vec{r}\cdot\vec{x}_0}{r^4}(3\sin(\omega t - kr) + 3kr\cos(\omega t - kr) - (kr)^2\sin(\omega t - kr)) \\
&\quad + \frac{q}{r}k^2\vec{x}_0\sin(\omega t - kr)
\end{aligned} \tag{5.52}$$

$$\vec{B} = qk\frac{\vec{r}}{r} \times \vec{x}_0 \frac{kr\sin(\omega t - kr) - \cos(\omega t - kr)}{r^2} \tag{5.53}$$

Im folgenden betrachte zwei verschiedene Situationen:

Nahfeld

Die Voraussetzung ist hier $r \ll \lambda \Leftrightarrow kr \ll 1$, also gilt insgesamt für die drei charakteristischen Längen:

$$\boxed{|\vec{x}_0| \ll r \ll \lambda.} \tag{5.54}$$

Man hat dann näherungsweise für das elektrische Feld

$$\vec{E}(t) = \frac{q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} - q\frac{\vec{x}_0}{r^3}\sin(\omega t) + q\frac{\vec{r}\vec{r}\cdot\vec{x}_0}{r^4}3\sin(\omega t) \tag{5.55}$$

$$= \frac{q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} + \frac{1}{r^3}\left(3\left(\frac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{d}(t)\right)\frac{\vec{r}}{r} - \vec{d}(t)\right), \tag{5.56}$$

also das Feld der Punktladung und das des zeitlich veränderlichen Dipols, und für das magnetische Feld

$$\vec{B} = q\vec{x}_0 \times \frac{\vec{r}}{r} \frac{k\cos(\omega t)}{r^2} \tag{5.57}$$

$$= q\frac{\dot{\vec{d}}(t)}{r^2c} \times \frac{\vec{r}}{r}. \tag{5.58}$$

Wie man leicht sieht, steht das magnetische Feld senkrecht zum elektrischen und zur Schwingungsrichtung der Ladung.

Fernfeld

Betrachte nun den anderen Grenzfall, also $r \gg \lambda \Leftrightarrow kr \gg 1$ und damit

$$\boxed{|\vec{x}_0| \ll \lambda \ll r.} \tag{5.59}$$

Dann hat man nur die folgenden Terme zu berücksichtigen:

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= -q\frac{\vec{r}\vec{r}\cdot\vec{x}_0}{r^2}k^2\sin(\omega t - kr) + \frac{q}{r}\vec{x}_0k^2\sin(\omega t - kr) \\
&= \frac{\vec{r}\vec{r}\cdot\ddot{\vec{d}}(t-r/c)}{r^2} - \frac{\ddot{\vec{d}}(t-r/c)}{rc^2}
\end{aligned} \tag{5.60}$$

$$\vec{B} = -q\frac{k^2\sin(\omega t - kr)}{r}\vec{x}_0 \times \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\ddot{\vec{d}}(t-r/c)}{rc^2} \times \frac{\vec{r}}{r} \tag{5.61}$$

Es gilt nun:

$$\frac{\vec{r}}{r} \times \vec{B} = -\vec{E} \quad (5.62)$$

$$\frac{\vec{r}}{r} \times \vec{E} = +\vec{B}, \quad (5.63)$$

also stehen das magnetische und elektrische Feld jeweils senkrecht aufeinander und auf der Beobachtungsrichtung \vec{r} .

Für die Abstrahlung betrachte den Poyntingvektor

$$\begin{aligned} \vec{S}(\vec{r}, t) &= \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B}) = \frac{1}{4\pi c^3 r^4} \frac{\vec{r}}{r} (r^2 \ddot{\vec{d}}^2 - (\vec{r} \bullet \ddot{\vec{d}})^2) \\ &= \frac{1}{4\pi c^3 r^4} \frac{\vec{r}}{r} r^2 \ddot{\vec{d}}^2 (1 - \cos^2 \theta), \end{aligned} \quad (5.64)$$

also

$$\boxed{\vec{S}(\vec{r}, t) = \frac{\ddot{\vec{d}}^2(t - r/c) \sin^2 \theta}{4\pi c^3} \frac{\vec{r}}{r^2} \frac{1}{r}}, \quad (5.65)$$

wobei θ der Winkel zwischen der Dipolschwingungs- und der Beobachtungsrichtung ist. Dies ist die typische Abstrahlungscharakteristik eines Dipols: die Strahlung ist radial nach außen gerichtet, die Winkelabhängigkeit der Intensität ist $\sin^2 \theta$, und sie nimmt mit r^{-2} ab.

Die gesamte abgestrahlte Leistung bekommt man durch Integration über eine geschlossene Oberfläche - zweckmäßigerweise eine Kugel - um den Dipol:

$$\begin{aligned} I(r, t) &= \oint \vec{S} \bullet d\vec{A} = \frac{\ddot{\vec{d}}^2(t - r/c)}{4\pi c^3} \int d\Omega \sin^2 \theta \\ &= \frac{\ddot{\vec{d}}^2(t - r/c)}{4\pi c^3} \int (1 - \cos^2 \theta) d \cos \theta d\varphi = \frac{2\ddot{\vec{d}}^2(t - r/c)}{3c^3} \\ &= \frac{2\vec{d}_0^2}{3c^3} \omega^4 \sin^2(\omega t - kr) \end{aligned} \quad (5.66)$$

Für die im zeitlichen Mittel abgestrahlte Leistung erhält man schließlich:

$$\boxed{\bar{I} = \frac{1}{T} \int_0^T I(r, t) dt = \frac{\vec{d}_0^2}{3c^3} \omega^4}, \quad (5.67)$$

also die bekannte Abhängigkeit der Intensität der Dipolstrahlung von ihrer Frequenz und ihrer Amplitude.

5.3 Monochromatische Abstrahlung durch beliebige Ladungsverteilungen

5.3.1 Die Helmholtz-Gleichung; Monopolstrahlung

In realen Situation hat man im allgemeinen keine einzelne bewegte Punktladung, sondern eine ausgedehnte Ladungs- und Stromverteilung. Betrachte also

nun eine solche beliebig vorgegebene, aber räumlich begrenzte Verteilung. Zur Vereinfachung gehen wir von der Annahme aus, daß diese mit einer festen Frequenz ω schwingt - ist dies nicht der Fall, so kann man immer eine Fourierzerlegung des zeitlichen Verhaltens machen und die einzelnen Fourierkomponenten getrennt betrachten.

Setze nun also an:

$$\rho(\vec{r}, t) = \tilde{\rho}(\vec{r}, \omega) \exp(-i\omega t) \quad (5.68)$$

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{\tilde{j}}(\vec{r}, \omega) \exp(-i\omega t); \quad (5.69)$$

damit erhält man für die Potentiale

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}, t) &= \int dV' \frac{\tilde{\rho}(\vec{r}', \omega)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \exp\left(-i\omega\left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)\right) \\ &= \int dV' \tilde{\rho}(\vec{r}', \omega) \frac{\exp(ik|\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \exp(-i\omega t) \end{aligned} \quad (5.70)$$

$$= \tilde{\Phi}(\vec{r}, \omega) \exp(-i\omega t) \quad (5.71)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \int dV' \frac{\vec{\tilde{j}}(\vec{r}', \omega)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \exp\left(-i\omega\left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)\right) \quad (5.72)$$

$$= \int dV' \vec{\tilde{j}}(\vec{r}', \omega) \frac{\exp(ik|\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \exp(-i\omega t) \quad (5.73)$$

$$= \vec{\tilde{A}}(\vec{r}, \omega) \exp(-i\omega t), \quad (5.74)$$

die Potentiale schwingen dann also auch monochromatisch, mit derselben Frequenz.

Betrachte nun die Wirkung des Laplaceoperators auf das Skalarpotential:

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{\Phi}(\vec{r}, \omega) &= \int dV' \tilde{\rho}(\vec{r}', \omega) \left(\exp(ik|\vec{r} - \vec{r}'|) \Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \Delta \exp(ik|\vec{r} - \vec{r}'|) \right) \\ &= -4\pi \tilde{\rho}(\vec{r}, \omega) - k^2 \tilde{\Phi}(\vec{r}, \omega); \end{aligned} \quad (5.75)$$

also erfüllt das Skalarpotential die Differentialgleichung

$$\boxed{(\Delta + k^2) \tilde{\Phi}(\vec{r}, \omega) = -4\pi \tilde{\rho}(\vec{r}, \omega).} \quad (5.76)$$

Dies ist die sogenannte *Helmholtzgleichung*; sie gilt entsprechend auch für das Vektorpotential.

Die Greensfunktion zu diesem Differentialoperator kann an den obigen Gleichungen direkt abgelesen werden (oder auch durch Vergleich mit Abschnitt 2.1.3):

$$\boxed{G(\vec{r}, \vec{r}', \omega) = -\frac{\exp(ik|\vec{r} - \vec{r}'|)}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|}.} \quad (5.77)$$

Im folgenden soll die Ladungsverteilung wieder, wie schon im statischen Fall, nach ihren Multipolen zerlegt werden. Dipolstrahlung hatten wir ja eben

schon bei der harmonisch schwingenden Punktladungen - gibt es auch Monopolstrahlung, also Strahlung von einer periodisch veränderlichen, aber räumlich festen Ladung? Die Antwort ist nein - man kann sich ausrechnen, daß dies im Widerspruch zu unserer Voraussetzung endlich ausgedehnter Ladungs- und Stromverteilungen stehen würde. Die Rechnung geht folgendermaßen:

$$\operatorname{div} \vec{j} = -\dot{\rho} = +i\omega\rho, \quad (5.78)$$

also, da die Stromverteilung als räumlich begrenzt vorausgesetzt ist:

$$Q = \int \rho dV = \frac{1}{i\omega} \int \operatorname{div} \vec{j} dV = \frac{1}{i\omega} \oint \vec{j} \bullet d\vec{A} = 0, \quad (5.79)$$

wenn die Integrationsfläche außerhalb der Stromverteilung gewählt wird. Nur mit einer unendlich ausgedehnten Stromverteilung könnte man eine periodisch veränderliche, räumlich feste Ladung haben. Im nächsten Abschnitt werden wir außerdem nochmals allgemein sehen, daß zeitlich veränderliche Monopole keinen Beitrag zur Abstrahlung liefern.

5.3.2 Multipolstrahlung in kartesischen Koordinaten

Betrachte nun die Näherung $|\vec{r}| \gg |\vec{r}'|$, d.h., einen Beobachter in großem Abstand. Dann kann man entwickeln:

$$|\vec{r} - \vec{r}'|^{-1} \approx r + \frac{\vec{r} \bullet \vec{r}'}{r} \quad (5.80)$$

$$\frac{\exp(ik|\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \approx \frac{\exp(ikr)}{r} \exp(-i\vec{k} \bullet \vec{r}'), \quad (5.81)$$

wobei $\vec{k} := k\frac{\vec{r}}{r}$ gesetzt wurde. Man hat also für das Skalarpotential

$$\Phi(\vec{r}, t) = \frac{\exp(i(kr - \omega t))}{r} \int dV' \tilde{\rho}(\vec{r}', \omega) \exp(-i\vec{k} \bullet \vec{r}'), \quad (5.82)$$

d. h., man hat eine radial nach außen laufende Welle, deren Winkelabhängigkeit durch die räumliche Fouriertransformierte der Ladungsverteilung gegeben ist. Entsprechendes gilt für das Vektorpotential.

Im folgenden betrachte wiederum eine langsame Bewegung der Quelle; dies ist äquivalent zu $\vec{k} \bullet \vec{r}' \ll 1$. Man kann also den Exponentialfaktor unter dem Integral nun auch noch entwickeln und erhält dann

$$\Phi(\vec{r}, t) = \frac{\exp(i(kr - \omega t))}{r} \int dV' \tilde{\rho}(\vec{r}', \omega) \left(1 - i\vec{k} \bullet \vec{r}' + \frac{\vec{r} \bullet \vec{r}'}{r^2} \right), \quad (5.83)$$

wobei der zweite Term in der Klammer aus der Entwicklung (5.80) von $|\vec{r} - \vec{r}'|^{-1}$ stammt.

Wenn man nun die üblichen Definitionen für Gesamtladung und Dipolmoment einsetzt und außerdem nur das Fernfeld betrachtet ($kr \gg 1$), ergibt sich:

$$\Phi(\vec{r}, t) = \frac{\exp(i(kr - \omega t))}{r} (\tilde{Q}(\omega) - i\vec{k} \bullet \tilde{\vec{d}}(\omega)). \quad (5.84)$$

Nach den Überlegungen im letzten Abschnitt muß $\tilde{Q}(\omega)$ verschwinden; im folgenden werden wir außerdem sehen, daß dieser Term sowieso keinen Beitrag zur Abstrahlung liefert.

Für \vec{A} ist die Rechnung ein wenig komplizierter: Zunächst beachte, daß \tilde{j}/c bereits von der Ordnung $\vec{k} \bullet \vec{r}'$ ist (siehe z.B. bewegte Punktladung). In allen Entwicklungen braucht man also nur bis zur 0.Ordnung zu gehen; daraus erhält man:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\exp(i(kr - \omega t))}{rc} \int dV' \tilde{j}(\vec{r}', \omega) \quad (5.85)$$

Dies läßt sich auch über das Dipolmoment der Ladungsverteilung ausdrücken, wie im folgenden gezeigt wird:

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{\exp(i(kr - \omega t))}{rc} \int dV' id_3 \tilde{j}(\vec{r}', \omega) \\ &= \frac{\exp(i(kr - \omega t))}{rc} \int dV' (\vec{\nabla}' \otimes \vec{r}') \tilde{j}(\vec{r}', \omega) \\ &= \frac{\exp(i(kr - \omega t))}{rc} \int dV' [\vec{\nabla}'(\vec{r}' \otimes \tilde{j}) - \vec{r}' \operatorname{div}' \tilde{j}] \\ &= \frac{\exp(i(kr - \omega t))}{rc} \left[\int d\vec{A}'(\vec{r}' \otimes \tilde{j}) - i\omega \int dV' \vec{r}' \tilde{\rho} \right] \end{aligned} \quad (5.86)$$

Da die Stromverteilung als räumlich begrenzt vorausgesetzt wurde, verschwindet das erste Integral; das zweite gibt:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = -i \frac{\exp(i(kr - \omega t))}{r} k \tilde{d}(\omega) \quad (5.87)$$

Unter Beachtung der Näherungen $|\vec{r}'| \ll \lambda \ll r$ hat man dann für die Felder:

$$\begin{aligned} \vec{E} &\approx -i \vec{k} \frac{\exp(i(kr - \omega t))}{r} \tilde{Q} + \frac{\exp(i(kr - \omega t))}{r} (k^2 \tilde{d} - (\vec{d} \bullet \vec{k}) \vec{k}) \\ \vec{B} &\approx k^2 \frac{\exp(i(kr - \omega t))}{r} \frac{\vec{r}}{r} \times \tilde{d} \end{aligned} \quad (5.88)$$

bzw. für die Realteile, die letztlich physikalisch relevant sind:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \vec{E} &= \vec{k} \frac{\sin(kr - \omega t)}{r} \tilde{Q} + \frac{\cos(kr - \omega t)}{r} (k^2 \tilde{d} - (\vec{d} \bullet \vec{k}) \vec{k}) \\ \operatorname{Re} \vec{B} &= k \frac{\cos(kr - \omega t)}{r} \vec{k} \times \tilde{d} \end{aligned} \quad (5.89)$$

Der Poyntingvektor ist also

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \frac{c}{4\pi} \frac{k}{r^2} \left(\tilde{Q} \sin(kr - \omega t) \cos(kr - \omega t) ((\vec{d} \bullet \vec{k}) \vec{k} - k^2 \tilde{d}) \right. \\ &\quad \left. + k^2 \tilde{d}^2 \vec{k} \cos^2(kr - \omega t) \sin^2 \theta \right) \\ &= \frac{c}{4\pi} \frac{k^3}{r^2} \left(\tilde{Q} \sin(kr - \omega t) \cos(kr - \omega t) \left(\left(\frac{\vec{d} \bullet \vec{r}}{r} \right) \frac{\vec{r}}{r} - \tilde{d} \right) \right. \\ &\quad \left. + k \tilde{d}^2 \frac{\vec{r}}{r} \cos^2(kr - \omega t) \sin^2 \theta \right) \end{aligned} \quad (5.90)$$

Betrachtet man nun die gesamte Abstrahlung nach außen, so muß man über eine Kugelschale integrieren. Dabei ergibt sich:

$$\vec{S} \bullet d\vec{F} = \vec{S} \bullet \frac{\vec{r}}{r^2} d\Omega = \frac{c}{4\pi} k^4 \tilde{d}^2 \cos^2(kr - \omega t) \sin^2 \theta, \quad (5.91)$$

da $\left(\left(\frac{\vec{d}}{r} \bullet \frac{\vec{r}}{r} \right) \frac{\vec{r}}{r} - \vec{d} \right) \bullet \frac{\vec{r}}{r} = 0$ ist. Der Term, der \tilde{Q} enthält, verschwindet damit - eine periodisch schwingende, räumlich feste Ladung (die es laut dem letzten Abschnitt sowieso nicht geben kann) würde also nichts nach außen abstrahlen.

Für den gesamten Strahlungsfluß durch eine Kugelfläche hat man schließlich wieder

$$I(r, t) = \frac{2}{3} k^4 c \tilde{d}^2 \cos^2(kr - \omega t) \quad (5.92)$$

$$\bar{I} = \frac{\tilde{d}^2}{3c^3} \omega^4 \quad (5.93)$$

5.3.3 * Multipolstrahlung in Kugelkoordinaten

Wie wir gesehen haben, sind die Rechnungen zur Abstrahlung in kartesischen Koordinaten schon in der niedrigsten nicht-trivialen Ordnung recht kompliziert. Bei statischen Problemen war es dagegen möglich, durch die Verwendung von Kugelkoordinaten explizite Ausdrücke für beliebige Multipolmomente anzugeben. Ist dies auch hier im dynamischen Fall möglich ?

Um dies zu beantworten, gehen wir wie im statischen Fall wiederum von der Greensfunktion aus - in diesem Fall von der zur Helmholtzgleichung gehörigen; wir betrachten also monochromatische Strahlung (im allgemeinen Fall behandle die Fourierkomponenten getrennt).

$$(\Delta + k^2)G(\vec{r}, \vec{r}', \omega) = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (5.94)$$

$$G(\vec{r}, \vec{r}', \omega) = -\frac{\exp(i|\vec{r} - \vec{r}'|)}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (5.95)$$

Setze wieder die Zerlegung an

$$G(\vec{r}, \vec{r}', \omega) = \sum_{l,m} g_{lm}(r, r') Y_{lm}(\theta, \varphi) Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \quad (5.96)$$

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{\delta(r - r')}{r^2} \sum_{l,m} Y_{lm}(\theta, \varphi) Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \quad (5.97)$$

Eingesetzt in die Differentialgleichung führt dies auf

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} + k^2 \right) g_{lm}(r, r') = \frac{\delta(r - r')}{r^2} \quad (5.98)$$

Wiederum sind die Lösungen unabhängig von m , und man hat wieder eine Unstetigkeit der 1.Ableitung bei $r = r'$.

Die Lösungen der homogenen Gleichung sind nun aber die sog. *sphärischen Besselfunktionen* $j_l(x)$ bzw. *Neumannfunktionen* $n_l(x)$ mit $x = kr$; eine allgemeine Lösung kann geschrieben werden als

$$R_l(r) = aj_l(x) + bn_l(x) = a'h_l^{(1)}(x) + b'h_l^{(2)}(x) \quad (5.99)$$

mit beliebigen Koeffizienten a, b bzw. a', b' . Die hier auftretenden sog. *sphärischen Hankelfunktionen* $h_l^{(i)}(x)$ sind definiert als

$$h_l^{(1)} = j_l + in_l; \quad h_l^{(2)} = j_l - in_l \quad (5.100)$$

Eine wichtige Eigenschaft dieser Funktionen ist ihr Verhalten in den Grenzfällen großer und kleiner x :

$$x \rightarrow 0: \quad j_l(x) \rightarrow \frac{x^l}{(2l+1)!!} \quad (5.101)$$

$$x \rightarrow \infty: \quad h_l^{(1)}(x) \rightarrow (-i)^{l+1} \frac{e^{ix}}{x} \quad (5.102)$$

Die Besselfunktion liefert also ein ähnliches Verhalten, wie wir es schon von den statischen Multipolen gewohnt sind ($\equiv r^l$), die Hankelfunktion gibt uns die nach außen laufende Welle.

Setze deswegen versuchsweise an:

$$g_l(r, r') = A_l j_l(kr_{<}) h_l^{(1)}(kr_{>}) \quad (5.103)$$

mit den bereits bekannten Definitionen

$$r_{<} = \min(r, r'); \quad r_{>} = \max(r, r') \quad (5.104)$$

Die Normierungskonstante A_l kann durch die Unstetigkeit bei $r = r'$ bestimmt werden, analog zur Rechnung bei den statischen Multipolen. Dafür benötigt man folgende Beziehung zwischen den sphärischen Besselfunktionen:

$$j_l(x)n_l'(x) - n_l(x)j_l'(x) = \frac{1}{x^2}. \quad (5.105)$$

Der Beweis dieser Formel ist länglich. (Wen's interessiert: in *Boas, Mathematical methods in the physical sciences* findet man in den Aufgaben 18.3 bis 18.5 einen Beweis für eine ähnliche Beziehung zwischen den zylindrischen Besselfunktionen; mittels der Formeln (17.4) im selben Buch kann man dann die hier angegebene Beziehung für die sphärischen Besselfunktionen herleiten.)

Man erhält dann $A_l = -ik$ und daraus schließlich:

$$G(\vec{r}, \vec{r}', \omega) = -ik \sum_{l,m} j_l(kr_{<}) h_l^{(1)}(kr_{>}) Y_{lm}(\theta, \varphi) Y_{lm}^*(\theta', \varphi'). \quad (5.106)$$

Wir betrachten wiederum den Außenraum einer räumlich begrenzten Ladungsverteilung, also ist $r_{<} = r'$ und $r_{>} = r$. Es gilt nun:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(\vec{r}, \omega) &= -4\pi \int dV' G(\vec{r}, \vec{r}', \omega) \tilde{\rho}(\vec{r}', \omega) \\ &= 4\pi ik \sum_{l,m} h_l^{(1)}(kr) Y_{lm}(\theta, \varphi) \int dV' j_l(kr') Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \tilde{\rho}(\vec{r}', \omega). \end{aligned} \quad (5.107)$$

Definiert man also die dynamischen Multipolmomente durch

$$\boxed{\rho_{lm}(\omega) := \int dV' j_l(kr') Y_{lm}(\theta', \varphi') \tilde{\rho}(\vec{r}', \omega)} \quad (5.108)$$

(und entsprechend für \vec{j}), so ist das Skalarpotential im Außenraum der Ladungsverteilung gegeben durch:

$$\boxed{\tilde{\Phi}(\vec{r}, \omega) = 4\pi i k \sum_{l,m} \rho_{lm}^*(\omega) h_l^{(1)}(kr) Y_{lm}(\theta, \varphi)} \quad (5.109)$$

und entsprechend für \vec{A} .

Betrachte nun noch die üblichen Näherungen: langsame Bewegung der Quelle ($kr' \ll 1$) und Fernfeld ($kr \gg 1$), dann vereinfachen sich die Gleichungen zu

$$\rho_{lm}(\omega) = \int dV' \frac{(kr')^l}{(2l+1)!!} Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \tilde{\rho}(\vec{r}', \omega) \quad (5.110)$$

$$\tilde{\Phi}(\vec{r}, \omega) = 4\pi \frac{e^{ikr}}{r} \sum_{l,m} \rho_{lm}(\omega) (-i)^l Y_{lm}(\theta, \varphi); \quad (5.111)$$

die Multipolmomente werden also fast genauso wie im statischen Fall berechnet, und das Potential ergibt sich einfach als Kugelwelle, deren Winkelabhängigkeit durch die Kugelflächenfunktionen modifiziert wird, mit dem jeweils zugehörigen Multipolmoment als Koeffizienten. Die einzelnen Partialwellen sind dabei gegeneinander phasenverschoben (Faktor $(-i)^l$).

Außerdem sieht man, daß es bei langsamer Bewegung der Quelle ($kr' \ll 1$, vergleiche (5.44)) im allgemeinen genügt, bei der Entwicklung nur wenige Terme mitzunehmen. Betrachte nochmals den einfachsten nicht-trivialen Fall, die Dipolstrahlung: Zunächst sieht man, daß Ladung und Dipolmoment mit den hier definierten Multipolmomenten folgendermaßen zusammenhängen (ÜA!):

$$\begin{aligned} \rho_{00} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \tilde{Q}; & \vec{j}_{00} &= -\frac{1}{\sqrt{4\pi}} i\omega \vec{d} \\ \rho_{10} &= \frac{1}{\sqrt{12\pi}} k \tilde{d}_z; & \rho_{11} &= \frac{1}{\sqrt{12\pi}} k (i\tilde{d}_y - \tilde{d}_x) = \rho_{1-1}^* \end{aligned} \quad (5.112)$$

Setzt man dies in die Entwicklung ein, so erhält man wieder die Ergebnisse aus Abschnitt 5.3.2:

$$\tilde{\Phi}(\vec{r}, t) = \frac{\exp(i(kr - \omega t))}{r} (\tilde{Q}(\omega) - i\vec{k} \bullet \vec{d}(\omega)) \quad (5.113)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = -i \frac{\exp(i(kr - \omega t))}{r} k \vec{d}(\omega) \quad (5.114)$$

Die restliche Rechnung läuft dann genauso wie dort.

Kapitel 6

Spezielle Relativitätstheorie

6.1 Lorentztransformationen

6.1.1 Einstein'sche Postulate

In der klassischen Mechanik galt für die Umrechnung der Koordinaten zweier Inertialsysteme, die sich gegeneinander mit einer Geschwindigkeit v bewegen, die Galilei-Transformation:

$$\begin{aligned}x' &= x \\y' &= y \\z' &= z - vt \\t' &= t\end{aligned}\tag{6.1}$$

Hierbei bewege sich das gestrichene Koordinatensystem in Richtung der positiven z -Achse des ungestrichenen Systems.

Eine solche Transformation ist äquivalent dazu, das sich Relativgeschwindigkeiten immer addieren. Eine Konsequenz daraus wäre, daß die Lichtgeschwindigkeit verschieden groß sein sollte, je nachdem, in welche Richtung man sich relativ zur Ausbreitung des Lichtes bewegt. Dieses sollte sich nach damaligen Vorstellungen im ruhenden „Äther“ ausbreiten, durch den sich alle materiellen Körper ohne Widerstand hindurchbewegen sollten. Da sich auch die Erde auf ihrer Umlaufbahn um die Sonne durch ihn bewegen sollte, erwartete man, daß die Lichtgeschwindigkeit auf der Erdoberfläche gemessen in Umlaufrichtung der Erde kleiner sein sollte als gemessen entgegengesetzt oder parallel zur Umlaufrichtung. Das Experiment von Michelson und Morley ergab jedoch eine klare Widerlegung dieser Erwartung - die Idee vom ruhenden Äther mußte also aufgegeben werden.

Es gab verschiedene Vorschläge zur Problemlösung - beispielsweise die Idee, daß der Äther den materiellen Körpern doch Widerstand entgegengesetzt und teilweise von ihnen mitgerissen wird (sog. „Ätherwind“). Deshalb wurde das Michelson-Morley-Experiment auf hohen Bergen wiederholt, wo dieses Mitreißen als vernachlässigbar und der Äther als ruhend angenommen wurde - ebenfalls mit negativem Ergebnis. Ein anderer Vorschlag war, daß die Lichtgeschwindigkeit immer relativ zum aussendenden Körper konstant sein soll -

doch auch diese These konnte widerlegt werden. Außerdem ist sie nicht mit den Maxwell-Gleichungen verträglich, in denen die Lichtgeschwindigkeit einfach als Konstante vorkommt, mit denen sich elektromagnetische Wellen im Vakuum ausbreiten - auf einen eventuellen Sender wird kein Bezug genommen.

Einstein postulierte deshalb das *Relativitätsprinzip*:

1) *Die Naturgesetze sind in allen Inertialsystemen gleich.*

Dies bedeutet, daß alle Inertialsysteme gleichberechtigt sind - keines ist von den anderen unterscheidbar. Da Geschwindigkeiten immer nur relativ zu einem Bezugssystem angegeben werden können, folgt daraus automatisch, daß es keine absoluten Geschwindigkeiten geben kann - nur Relativgeschwindigkeiten zwischen zwei Inertialsystemen. Gäbe es absolute Geschwindigkeiten, so wären automatisch ein Inertialsystem ausgezeichnet (das, in dem die Geschwindigkeit gemessen wird) - was im Widerspruch zu obigem Postulat stehen würde.

Diese Aussage wird durch die Allgemeine Relativitätstheorie modifiziert: das Universum an sich bildet ein ausgezeichnetes Koordinatensystem, so daß absolute Geschwindigkeiten (z.B. Bewegung der Galaxien durch Expansion des Universums, Stichwort Rotverschiebung) angebbar sind - allerdings ist zu berücksichtigen, daß in der ART von allgemeinen Koordinatensystemen und nicht mehr nur von Inertialsystemen die Rede ist.

Das Relativitätsprinzip existierte eigentlich schon früher - aber es wurde vorher nur für die Gesetze der Mechanik angewandt und nicht allgemein. Wendet man es auch auf die Elektrodynamik bzw. Optik an, so folgt sofort:

Die Maxwellgleichungen lauten in allen Inertialsystemen gleich.

Die Gesetze der Elektrodynamik stehen nicht im Widerspruch zu den Ergebnissen von Michelson und Morley - eine konstante, vom Bewegungszustand unabhängige Lichtgeschwindigkeit vorausgesetzt. Die Gesetze der klassischen Mechanik dagegen widersprechen der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit - sichtbar beispielsweise an den Galilei-Transformationen. Deshalb sah Einstein die Maxwell-Gleichungen als fundamentaler an als die klassische Mechanik. Er ging davon aus, daß die Maxwell-Gleichungen korrekt sind, die Gesetze der Mechanik aber abgeändert werden müssen.

Die Lichtgeschwindigkeit ist ein Teil der Maxwell'schen Gleichungen - sie gibt die Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Wellen an. Es kann aber nicht automatisch gefolgert werden, daß sie in allen Inertialsystemen gleich ist - Invarianz der Naturgesetze meint hier ja nur Forminvarianz und nicht unbedingt, daß die Größen auch wirklich gleich groß bleiben.

Der Unterschied soll kurz an einem nicht-relativistischen Beispiel erläutert werden: Geschwindigkeiten ändern sich, wenn man sie in einem anderen Koordinatensystem betrachtet (gemäß $\vec{v}' = \vec{v} + \vec{v}_{relativ}$) - die Beziehung $\vec{v} = \dot{\vec{x}}$ bleibt dagegen unter Galilei-Transformationen immer gleich, sie wird eben nur unter Benutzung der neuen Koordinaten geschrieben als $\vec{v}' = \dot{\vec{x}}'$. Geschwindigkeiten sind also (unter Galilei-Transformationen) nicht invariant - nur die für sie geltenden Gesetze sind forminvariant (statt forminvariant sagt man oft auch *kovariant*).

Andersherum kann aus der Forminvarianz der Maxwell'schen Gleichungen (die das erste Postulat verlangt) nicht automatisch auf die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit geschlossen werden - in den Maxwell'schen Gleichungen im gestrichenen System könnte ja einfach c' statt c stehen. Einstein brauchte also noch ein zweites Postulat:

2) *Die Lichtgeschwindigkeit ist in allen Inertialsystemen gleich groß.*

Dies bedeutet, daß die Lichtgeschwindigkeit etwas fundamental anderes ist als andere Geschwindigkeiten - sie wird nicht relativ zu einem bestimmten Inertialsystem gemessen, sondern ist immer gleich groß. Sie ist eine Naturkonstante, also eine absolute Größe und damit unabhängig vom Bezugssystem.

6.1.2 Herleitung der Lorentztransformation

Die Bedingung der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit steht im Widerspruch zu den Galilei-Transformationen, die eine Abhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit vom jeweiligen Bezugssystem bewirken würden. Anscheinend benötigt man also für den Übergang von einem Inertialsystem in ein anderes eine andere Art von Transformation. Diese wollen wir nun herleiten - sie heißt *Lorentztransformation*.

Zunächst ist zu erwarten, daß sie (ebenso wie die Galilei-Transformation) linear in den Koordinaten ist, daß also gilt: $(\vec{x} + \vec{y})' = \vec{x}' + \vec{y}'$ und $(a\vec{x})' = a\vec{x}'$. Die Forderung der Linearität ist naheliegend, da wir ja hier letztlich nur eine Basistransformation des dreidimensionalen Raumes \mathbf{R}^3 betrachten - dasselbe physikalische Ereignis soll aus zwei verschiedenen Bezugssystem betrachtet werden. Im Unterschied zur Galilei-Transformation lassen wir nun aber auch eine Transformation der Zeit zu, fordern allerdings auch bei dieser, daß sie linear sein soll.

Das Koordinatensystem mit den gestrichenen Koordinaten bewege sich wiederum in die positive z -Richtung des ungestrichenen Systems. Dann ist es naheliegend zu fordern, daß x und y ungeändert bleiben. Sicherheitshalber setze aber an, daß

$$x' = a(v)x \text{ und } y' = a(v)y \quad (6.2)$$

sein könnte - die Koordinaten senkrecht zur Bewegungsrichtung sollen sich also um einen von der Geschwindigkeit abhängigen Faktor ändern können. Für die z -Koordinate und die Zeit setze dagegen noch allgemeiner an:

$$z' = d(v)z + e(v)ct \text{ und } ct' = f(v)z + g(v)ct. \quad (6.3)$$

Hierbei wurde gleich ct statt t geschrieben, um alle vorkommenden Größen in der Einheit Meter zu haben - damit spart man sich dann später Umrechnungsfaktoren. Zu bestimmen sind also nun die fünf Funktionen $a(v)$, $d(v)$, $e(v)$, $f(v)$ und $g(v)$.

Betrachte hierfür zunächst die Bewegung des Ursprungs des gestrichenen Systems. Im alten System wird hat er die Koordinaten $z = vt$, im gestrichenen gilt $z' = 0$. Also hat man: $0 = d(v)vt + e(v)ct$, das heißt $d(v)v = -e(v)c$, und

damit schließlich $z' = d(v)(z - vt)$ - die Anzahl der unbekannt Funktionen wurde also schon um eins reduziert.

Nun gibt es eine wichtige Forderung, die man an physikalische Gesetze stellt: ihre Invarianz unter Raumspiegelungen (Paritätstransformationen). Das heißt, wenn man alle Vektoren durch ihr negatives ersetzt, müssen die Gesetze invariant sein (Vorsicht: Pseudovektoren wie z. B. Drehimpuls oder Magnetfeld werden nicht geändert!). Ersetze also in den Formeln für die Lorentztransformation alle Koordinaten und Geschwindigkeiten durch ihr negatives: $-x' = -a(-v)x$, $-y' = -a(-v)y$, $-z' = -d(-v)(z - vt)$, $ct' = -f(-v)z + g(-v)ct$. Da diese Gleichungen nun dieselben Aussagen wie die ursprünglichen enthalten müssen (Paritätsinvarianz), muß gelten: $a(v) = a(-v)$, $d(v) = d(-v)$, $f(v) = -f(-v)$, $g(v) = g(-v)$. Damit hat man wichtige Aussagen über die Symmetrie der gesuchten Funktion gewonnen.

Außerdem kann man die Umkehrtransformation betrachten, also den Übergang vom gestrichenen Koordinatensystem ins ungestrichene. Diese muß natürlich durch dieselben Formeln dargestellt werden, nur daß die Geschwindigkeit gerade umgedreht wird. Es gilt also: $x = a(-v)x'$, $y = a(-v)y'$, $z = d(-v)(z' + vt')$, $ct = f(-v)z + g(-v)ct'$. Einsetzen der ursprünglichen Transformation ergibt zunächst $x = a^2(v)x$, also $a(v) = \pm 1$ - das Minuszeichen kann weggelassen werden, da die neuen Koordinaten sicher aus den alten nicht durch Spiegelung hervorgehen (dies würde auch $\lim_{v \rightarrow 0} a(v) = 1$ widersprechen). Es gilt also $a(v) = 1$ - wie man erwartet hätte.

Bei der z -Koordinate ergibt sich

$$z = (d^2(v) + \frac{v}{c}f(v)d(v))z + (-d^2(v)v + vg(v)d(v))t, \quad (6.4)$$

also:

$$d^2(v) + \frac{v}{c}f(v)d(v) = 1 \text{ und } d(v) = g(v). \quad (6.5)$$

Damit erhält man schließlich:

$$f(v) = \frac{c}{v} (d^{-1}(v) - d(v)) \quad (6.6)$$

Wir haben nun also rein durch plausible physikalische Überlegungen hergeleitet, daß für *jede* Koordinatentransformation zwischen zwei Systemen, von den sich eines in die positive z -Richtung des anderen bewegt, gelten sollte:

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y \\ z' &= d(v)(z - vt) \\ ct' &= \frac{c}{v} (d^{-1}(v) - d(v)) z + d(v)ct \end{aligned} \quad (6.7)$$

Hier tritt nur noch eine unbekannt Funktion $d(v)$ auf; die Galilei-Transformation ist ein Spezialfall hiervon mit $d(v) \equiv 1$.

Nun kommt das zweite Postulat von Einstein ins Spiel: Die Lichtgeschwindigkeit ist in beiden System gleich groß. Betrachte also einen Lichtpuls im ungestrichenen System: Er werde zum Zeitpunkt $t = 0$ vom Ursprung $x = y = z = 0$

aus in z -Richtung gesendet. Seine Ausbreitung wird dann beschrieben durch $z = ct$. Wie sieht seine Ausbreitung im gestrichenen System aus? Naiv (sprich: über eine Galilei-Transformation) würde man sagen: das gestrichene System bewegt sich in dieselbe Richtung wie der Lichtpuls, also muß er im gestrichenen System langsamer erscheinen: $z' = (c - v)t'$. Das Einstein'sche Postulat sagt nun jedoch, daß auch im gestrichenen System der Lichtpuls die Geschwindigkeit c haben muß, also: $z' = ct'$!

Setzt man die Formeln für die Ausbreitung des Pulses in die obigen Transformationsformeln ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} ct' &= d(v)(ct - vt) \\ \text{und } ct' &= \frac{c}{v} \left(d^{-1}(v) - d(v) \right) ct + d(v)ct. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt als Lösung für die gesuchte Funktion $d(v)$:

$$d^2(v) = \frac{c^2}{c^2 - v^2} = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (6.9)$$

Definiert man nun noch

$$\boxed{\beta := \frac{v}{c}} \quad (6.10)$$

und setzt voraus, daß $d(v)$ positiv sein soll (aus denselben Gründen wie oben bei $a(v)$), so erhält man schließlich:

$$\boxed{d(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} =: \gamma.} \quad (6.11)$$

Zusammenfassend hat man also folgende Transformationsformeln:

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y \\ z' &= \gamma(z - \beta ct) \\ ct' &= \gamma(-\beta z + ct) \end{aligned}} \quad (6.12)$$

Dies ist die gesuchte (spezielle) Lorentztransformation.

Was ist nun neu an ihr im Vergleich zur Galilei-Transformation? Eine Neuerung haben wir schon in den Ansatz mithineingesteckt, indem wir eine z -Abhängigkeit der Zeit vermutet haben: Die Zeit ist nun nicht mehr unabhängig vom Inertialsystem (sprich: vom Bewegungszustand) - ein bewegter Beobachter empfindet die Zeit anders als ein (relativ gesehen) ruhender!

Die zweite wichtige Änderung ist das Auftauchen des ' γ -Faktors'. Wie man sieht, gilt $\gamma \rightarrow \infty$ für $v \rightarrow c$, und für $v > c$ wäre γ imaginär - es ist also unmöglich, mit Lorentztransformationen zwei Inertialsysteme miteinander zu verknüpfen, die sich gegeneinander mit Licht- oder sogar Überlichtgeschwindigkeit bewegen. Da wir aber vorausgesetzt haben, daß alle Inertialsysteme miteinander über diese Transformation zusammenhängen sollen, folgt automatisch,

daß es keine Inertialsysteme geben kann, die sich gegeneinander mit Lichtgeschwindigkeit oder mehr bewegen - die Lichtgeschwindigkeit ist die größtmögliche Geschwindigkeit für jede Bewegung! Diese Begründung ist rein kinematisch (man kann Bewegungen mit Überlichtgeschwindigkeit formelmäßig nicht erfassen); eine dynamische Begründung, warum die Lichtgeschwindigkeit nicht erreicht (also auch nicht überschritten) werden kann, folgt später bei der Betrachtung der relativistischen Energie.

6.1.3 Konsequenzen

Zwei wichtige Konsequenzen wurden eben schon angesprochen: Die Abhängigkeit der Zeit von der Bewegung und die Unmöglichkeit von Überlichtgeschwindigkeiten. Im folgenden soll zunächst auf zweiteres näher eingegangen werden. Man könnte ja folgendermaßen argumentieren: Man könnte auf knapp unter Lichtgeschwindigkeit beschleunigen (relativ z.B. zur als ruhend angenommenen Erde) und dann einen Gegenstand in Flugrichtung schleudern. Wählt man dessen Geschwindigkeit groß genug, so würde er (relativ zur Erde) ja dann doch mit Überlichtgeschwindigkeit fliegen! Wo steckt hier der Denkfehler?

Der Fehler liegt darin, zu glauben, daß man die beiden Relativ-Geschwindigkeiten einfach addieren kann. Dies ist das altbekannte Superpositionsprinzip aus der klassischen Mechanik - und es steht in engem Zusammenhang mit den Galilei-Transformationen! Diese haben sich ja nun als falsch (bzw. eigentlich nur unvollständig) herausgestellt - also sollte man auch davon ausgehen, daß sich nun auch die Regel für das Addieren von Geschwindigkeiten ändert.

Um die neue Regel zu finden, betrachte eine Lorentztransformation von den ungestrichenen Koordinaten (ruhendes System „Erde“) auf die gestrichenen Koordinaten (bewegtes System „Raumschiff“), und eine Lorentztransformation von diesen gestrichenen Koordinaten auf zweifach gestrichene (bewegtes System „Geschoß“). Die Relativgeschwindigkeiten seien v_1 und v_2 . Dann gilt (betrachte nur die z -Koordinaten und die Zeit):

$$\begin{aligned} z'' &= \gamma_2(z' - \beta_2 ct'); & z' &= \gamma_1(z - \beta_1 ct) \\ ct'' &= \gamma_2(-\beta_2 z' + ct'); & ct' &= \gamma_1(-\beta_1 z + ct) \end{aligned} \quad (6.13)$$

Setzt man die jeweils rechten Gleichung in die jeweils linken ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} z'' &= \gamma_1 \gamma_2 ((1 + \beta_1 \beta_2) z - (\beta_1 + \beta_2) ct) \\ ct'' &= \gamma_1 \gamma_2 (-(\beta_1 + \beta_2) z + (1 + \beta_1 \beta_2) ct) \end{aligned} \quad (6.14)$$

Dieses zweifach gestrichene Koordinatensystem bewegt sich gegenüber dem ungestrichenen nun mit einer Geschwindigkeit v_3 , muß mit ihm also über eine Lorentztransformation zusammenhängen:

$$\begin{aligned} z'' &= \gamma_3(z - \beta_3 ct') \\ ct'' &= \gamma_3(-\beta_3 z + ct) \end{aligned} \quad (6.15)$$

Es muß also gelten: $\gamma_1 \gamma_2 (1 + \beta_1 \beta_2) = \gamma_3$ und gleichzeitig $\gamma_1 \gamma_2 (\beta_1 + \beta_2) = \gamma_3 \beta_3$. Dies sind zwei Gleichungen für nur eine Unbekannte - γ_3 hängt ja von β_3 ab.

Aus beiden Gleichungen erhält man aber dieselbe Lösung $\beta_3 = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2}$, also:

$$\boxed{v_3 = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}}. \quad (6.16)$$

Geschwindigkeiten werden nun also nicht mehr nur einfach addiert, sondern man muß zusätzlich einen 'Korrekturfaktor' $(1 + v_1 v_2 / c^2)^{-1}$ anbringen. Da dieser immer < 1 ist, folgt, daß die Gesamtgeschwindigkeit immer kleiner als der naiv erwartete Wert $v_1 + v_2$ ist.

Für kleine Geschwindigkeiten $v_1, v_2 \ll c$ gilt zwar immer noch:

$$v_3 \approx (v_1 + v_2) \left(1 - \frac{v_1 v_2}{c^2}\right) \approx v_1 + v_2, \quad (6.17)$$

bei großen ändert sich dies aber drastisch. Für $v_1 = v_2 = 0.5c$ beispielsweise erhält man nicht etwa $v_3 = c$, sondern $v_3 = c/(1.25) = 0.8c$! Insbesondere gilt für alle Geschwindigkeiten $v_1, v_2 \leq c$ immer $v_3 \leq c$ - Überlichtgeschwindigkeiten treten nicht auf.

Selbst wenn man beispielsweise aus einem mit Lichtgeschwindigkeit fliegenden Raumschiff (was unmöglich ist) in Flugrichtung ein Geschöß mit Lichtgeschwindigkeit abschießen würde (was ebenfalls unmöglich ist), so hätte dies für den als ruhend angenommenen Beobachter immer noch nur Lichtgeschwindigkeit! Für diesen Beobachter wären das Raumschiff und das Geschöß also gleich schnell - das Geschöß würde sich nicht vom Raumschiff entfernen. Andererseits würde die Raumschiffbesatzung sehr wohl sehen, daß sich das Geschöß entfernt - und das sogar mit Lichtgeschwindigkeit. Ähnliches gilt, wenn man kleinere (also physikalisch mögliche) Geschwindigkeiten betrachtet: Für den ruhenden Beobachter bewegt sich das Geschöß langsamer vom Raumschiff weg als für die Besatzung. Wie passt dies zusammen?

Hier gibt es zwei mögliche Erklärungen, die letztlich eigentlich nur verschiedene Aspekte desselben Sachverhalts sind. Geschwindigkeit ist ja definiert als Strecke pro Zeit - wenn also der ruhende Beobachter eine andere Geschwindigkeit für das Geschöß mißt als der bewegte, so kann das entweder an einer unterschiedlichen Zeit- oder Streckenmessung liegen. Wir werden nun sehen, daß diese Effekte tatsächlich auftreten: Für einen bewegten Beobachter ergeben Zeitmessungen einen größeren, Längenmessungen einen kürzeren Wert als für einen ruhenden.

Betrachte zunächst die Längenmessung - dafür bauen wir im ruhenden System einen Maßstab auf, der sich von $z_1 = 0$ bis $z_2 = l$ erstreckt. Im bewegten System sollen nun die Positionen z'_1, z'_2 der beiden Enden gleichzeitig gemessen werden, also für $t'_1 = t'_2$. Die Lorentztransformationen für die beiden Orte und Zeiten lauten:

$$\begin{aligned} z'_1 &= \gamma(0 - \beta ct_1) \\ z'_2 &= \gamma(l - \beta ct_2) \\ ct'_1 &= \gamma(0 + ct_1) \\ ct'_2 &= \gamma(-\beta l + ct_2) \end{aligned} \quad (6.18)$$

Mit der Bedingung der Gleichzeitigkeit $t'_1 = t'_2$ erhält man zunächst: $ct_2 - ct_1 = \beta l$. Die Länge ergibt sich dann zu $l' = z'_2 - z'_1 = \gamma(l - \beta(ct_2 - ct_1)) = \gamma(l - \beta^2 l) = \gamma l / \gamma^2$, also:

$$\boxed{l' = l/\gamma.} \quad (6.19)$$

Da immer $\gamma \geq 1$ gilt, ist l' immer kürzer als l - daher spricht man von der *Längenkontraktion*.

Bei der Zeitmessung betrachte dagegen die Aussendung zweier Lichtsignale vom Ursprung des ruhenden Systems aus. Der Ort ist beidesmal gleich, $z_1 = z_2$, die Zeiten seien t_1 und t_2 , die Zeitdifferenz sei $\tau := t_2 - t_1$. Die Lorentztransformation ergibt:

$$\begin{aligned} ct'_1 &= \gamma(0 + ct_1) \\ ct'_2 &= \gamma(0 + ct_2) \end{aligned} \quad (6.20)$$

Dann ist $\tau' = t'_2 - t'_1 = \gamma t_2 - \gamma t_1$, also

$$\boxed{\tau' = \gamma\tau} \quad (6.21)$$

- im bewegten System wird also eine längere Zeit gemessen. Dieser Effekt wird *Zeitdilatation* genannt. Eine andere Betrachtungsweise ist folgende: Wir betrachten das System, das wir vorher als bewegt angesehen haben, als ruhend, und das vorher ruhende System, in dem sich die Uhr befindet, als bewegt. Die Formeln bleiben dieselben - im nunmehr ruhenden System wird eine längere Zeit gemessen als in dem mit der Uhr mitbewegten System. Ein Beobachter im ruhenden System würde also feststellen: *Bewegte Uhren gehen langsamer*.

Hieraus ergibt sich das berühmt-berüchtigte *Zwillingsparadoxon*: Nehmen wir an, von einem Zwillingpaar bleibt der eine auf der Erde, der andere fliegt mit einem Raumschiff fort, das sich relativ zur Erde mit nahezu Lichtgeschwindigkeit bewegt ($\gamma = 10$). Dann sieht der Zwilling auf der Erde, daß für seinen bewegten Bruder die Zeit langsamer vergeht - dieser altert also auch langsamer. Wenn der Zwilling auf der Erde um 10 Jahre älter wird, so altert der andere nur um 1 Jahr! Dies wird in vielen Büchern und Artikeln (vor allem populärwissenschaftlichen) als das Zwillingsparadoxon bezeichnet - fälschlicherweise! Bis jetzt ist ja noch nichts paradoxes (paradox = in sich widersprüchlich) daran - auch wenn es einem reichlich seltsam vorkommt.

Paradox wird die Sache erst, wenn man das Ganze vom Standpunkt des Zwilling im Raumschiff betrachtet: Dieser könnte ja eigentlich behaupten, sein Raumschiff ruhe und die Erde bewege sich mit fast Lichtgeschwindigkeit von ihm weg (diese Behauptung ist zulässig, da ja nur Relativgeschwindigkeiten physikalisch sinnvoll sind und es keine absolute Ruhe gibt). Dann ist für ihn der Zwilling auf der Erde aber in einem bewegten Bezugssystem, dessen Uhren gehen also langsamer - und damit altert der Zwilling auf der Erde nun langsamer als der im Raumschiff (wiederum ein Jahr statt zehn Jahre). Insgesamt haben wir also festgestellt: Der Zwilling im Raumschiff altert langsamer als der auf der Erde, und der Zwilling auf der Erde altert langsamer als der im Raumschiff - da haben wir unser Paradoxon!

Dieses löst sich auf, wenn man beachtet, daß das Raumschiff strenggenommen kein Inertialsystem ist: Zunächst muß von der Erde aus gestartet und beschleunigt werden, dann muß man irgendwann auch wieder abbremsen, umdrehen und erneut beschleunigen, und schließlich zur Landung erneut abbremsen (der zweite Zwilling muß zur Erde zurückkehren, damit es überhaupt Sinn macht, ihr Alter zu vergleichen). Es gibt also mehrere Phasen der Beschleunigung - für ein Inertialsystem ist aber eine gleichmäßige Bewegung vorausgesetzt. Die Effekte der Beschleunigung können erst mit Hilfe der Allgemeinen Relativitätstheorie berücksichtigt werden; bezieht man diese mit ein, so erhält man schlußendlich das eindeutige Ergebnis, daß der Zwilling, der mit dem Raumschiff unterwegs war, jünger als sein auf der Erde gebliebener Bruder ist. (siehe auch *Gerthsen: Physik*, Aufgabe 15.4.2 oder

Wir werden nun noch eine wichtige sogenannte *relativistische Invariante* konstruieren, also eine physikalische Größe, die sich unter Lorentztransformationen nicht ändert. Betrachte hierfür:

$$\boxed{c^2\tau^2 := c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2.} \quad (6.22)$$

Unter einer Lorentztransformation wird dies zu:

$$\begin{aligned} c^2\tau'^2 &= c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = \gamma^2(-\beta z + ct)^2 - x^2 - y^2 - \gamma^2(z - \beta ct)^2 \\ &= \gamma^2(\beta^2 z^2 - 2\beta ct + c^2t^2 - z^2 + 2\beta ct + \beta^2 c^2t^2) - x^2 - y^2 \\ &= \gamma^2(1 - \beta^2)(c^2t^2 - z^2) - x^2 - y^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \\ &= c^2\tau^2. \end{aligned} \quad (6.23)$$

$c^2\tau^2$ und damit auch τ ist also unter Lorentztransformationen invariant.

Betrachte nun ein infinitesimal kurzes Zeitintervall dt in einem beliebigen Inertialsystem; dann ergibt sich $c^2d\tau^2 = c^2dt^2$, also $d\tau = dt$. In einem relativ dazu bewegten System dagegen ist die Länge des Zeitintervalls $dt' = \gamma dt$ (siehe oben bei der Zeitdilatation) und damit $dt' = \gamma d\tau$. Für das ruhende System ist $\gamma = 1$, also gilt auch dort $dt = \gamma d\tau$. Damit ergibt sich allgemein:

$$\boxed{d\tau = \gamma^{-1}dt,} \quad (6.24)$$

wobei dt nun die in einem beliebigen Inertialsystem gemessene Zeitdifferenz ist und γ die Geschwindigkeit dieses Inertialsystem gemessen relativ zum Ruhesystem ist. Wir haben nun also eine relativistisch invariante Zeitdifferenz; da $d\tau$ im Ruhesystem identisch mit der „normalen“ Zeitdifferenz dt ist, heißt τ *Eigenzeit*.

6.2 Vierervektor-Formalismus

6.2.1 Vierervektor und -tensor-Formalismus, Minkowski-Raum

Wir haben gesehen, daß bei den Lorentztransformationen Raum- und Zeitkoordinaten „durcheinandergemischt“ werden, genauso, wie bei einer Drehung die

räumlichen Koordinaten gemischt werden. Es liegt also nahe, alle vier Koordinaten nun in ein Zahlentupel zusammenzufassen:

$$(x^\mu) := \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix} \quad (6.25)$$

Daß hier der Index oben geschrieben wird und griechische Buchstaben verwendet werden, ist Konvention. Dieser sog. Lorentzindex wird dabei von 0 bis 3 durchgezählt; es gibt auch andere Konventionen, wonach beispielsweise die Zeit als letzte Komponente geschrieben wird und der Index von 1 bis 4 läuft, oder bei denen *ict* statt *ct* verwendet wird (*(pseudo-)euklidischer Formalismus*).

In den meisten Büchern wird x^μ sowohl als Symbol für den ganzen Vierervektor als auch für seine μ -te Komponente verwendet - was jeweils gemeint ist, folgt meist aus dem Zusammenhang. Zur besseren Unterscheidung werde ich allerdings (x^μ) schreiben, wenn der gesamte Vektor gemeint ist, und die Klammern nur dann weglassen, wenn eine Komponente gemeint ist; entsprechend bei Matrizen. Wenn klar ist, welches Objekt (mit wieviel Indizes) gemeint ist, schreibe ich auch oft nur x (oder ähnliches).

Die spezielle Lorentztransformation (6.12) können wir nun folgendermaßen schreiben:

$$x'^\mu = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad (6.26)$$

mit der Matrix

$$(\Lambda^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}. \quad (6.27)$$

Daß hier ein Index oben und einer unten steht, hängt mit der sogenannten *Einstein'schen Summenkonvention* zusammen: Kommt ein Index in einem Term doppelt vor, und steht er dabei einmal oben und einmal unten, so wird über ihn von 0 bis 3 summiert. Zum Beispiel schreibt sich mit dieser Konvention die Lorentztransformation als:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad (6.28)$$

Eine solche Summation bezeichnet man auch als *Kontraktion*. Beispielsweise sagt man bei (6.28), daß die Matrix Λ mit dem Vektor x (zum Vektor x') kontrahiert wird. Andere Sprechweise: Der Index ν wird kontrahiert - das heißt, über ihn wird summiert.

Bei der Stellung der Indices muß man aufpassen: Einerseits muß weiterhin darauf geachtet werden, daß bei Matrixmultiplikationen die Indizes nebeneinander stehen müssen (im Beispiel: ν muß rechts stehen, da der Vektor (x^ν) von rechts an die Matrix multipliziert wird).

Außerdem kommt es nun aber auch noch darauf an, daß Indizes oben und unten stehen können - den genauen Grund werden wir erst weiter unten sehen, im Moment soll als Begründung reichen, daß dies für die Einstein'sche Summenkonvention benötigt wird. In (6.28) wird rechts über ν summiert - deswegen

muß dieser Index einmal oben und einmal unten stehen. Bei x steht er aber definitionsgemäß oben, also muß er bei Λ unten stehen. Außerdem steht der Index μ auf der linken Seite oben - also muß er auch rechts oben stehen, damit die ganze Notation in sich schlüssig bleibt.

Wir definieren nun allgemein: Vierer-Zahlentupel, die sich bei einer Lorentztransformation wie (6.28) verhalten, heißen *kontravariante (Lorentz-)Vierervektoren*; bei ihnen wird der Index immer oben geschrieben. Dies ist ganz analog dazu, daß ein dreidimensionales Zahlentupel genau dann ein (physikalischer) Vektor ist, wenn er sich unter Drehungen wie der Ortsvektor verhält.

Diese Definition legt nahe, daß sich bei einer Lorentztransformation, die für den Koordinatenvektor durch die Matrix Λ beschrieben wird, eben nicht alle Vierertupel genau gleich verhalten. Betrachte beispielsweise das vierdimensionale Analogon zum Nabla-Operator:

$$(\partial_\mu) := \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right) \quad (6.29)$$

Der Lorentzindex wurde hier unten geschrieben, da sich dieser Vierervektor, wie wir sehen werden, anders transformiert als der Vierervektor der Koordinaten. Um herauszubekommen, wie sich dieser Operator unter einer Lorentztransformation verhält (also: wie man $\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)$ aus $\left(\frac{\partial}{\partial x'^\mu} \right)$ berechnen kann), betrachte die Wirkung des untransformierten Operators auf eine Funktion der transformierten Koordinaten:

$$\begin{aligned} \partial_\mu f(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) &= \sum_{\nu=0}^3 \partial'_\nu f(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \\ &= \sum_{\nu=0}^3 \left(\partial'_\nu f(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) \right) \Lambda^\nu_\mu \\ &= \left(\Lambda^\nu_\mu \partial'_\nu \right) f(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) \end{aligned} \quad (6.30)$$

Hierbei wurde die Kettenregel benutzt und (6.28) eingesetzt.

In Matrixform geschrieben ist dies $\partial^T = \partial'^T \Lambda$ (∂^T ist also ein Zeilenvektor, der von rechts mit der Transformationsmatrix multipliziert wird). Damit ergibt sich dann $\partial'^T = \partial^T \Lambda^{-1}$ - ausgeschrieben:

$$\boxed{\partial'_\mu = \partial_\nu (\Lambda^{-1})^\nu_\mu} \quad (6.31)$$

Der Vierer-Nabla-Operator transformiert also nicht mit der Matrix Λ , die bei der Koordinatentransformation auftrat, sondern mit ihrer Inversen. Vierertupel, die so transformiert werden, bezeichnet man als *kovariante (Lorentz-)Vierervektoren*; zur Unterscheidung von den kontravarianten Vierervektoren schreibt man bei ihnen den Index unten hin.

Entsprechend bezeichnet man Objekte mit mehreren Lorentzindices wie z.B. Λ als Lorentztensoren entsprechender Stufe, sofern sie sich unter Lorentztransformationen bezüglich jedes Index wie ein entsprechender Vierervektor verhalten (auch dies ist analog zur Definition bei Drehungen). Λ beispielsweise ist ein Lorentztensor zweiter Stufe, einfach kontravariant und einfach kovariant, wie

man folgendermaßen sieht: Zunächst muß natürlich bei einer Lorentztransformation (dargestellt durch eine Matrix $\tilde{\Lambda}$) $(\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu)'$ = $\Lambda'^\mu{}_\nu x'^\nu$ gelten. Andererseits ist aber:

$$(\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu)' = (x'^\mu)' = \tilde{\Lambda}^\mu{}_\rho x'^\rho = \tilde{\Lambda}^\mu{}_\rho \Lambda^\rho{}_\nu x^\nu = \tilde{\Lambda}^\mu{}_\rho \Lambda^\rho{}_\lambda (\tilde{\Lambda}^{-1})^\lambda{}_\nu x'^\nu, \quad (6.32)$$

also

$$(\Lambda^\mu{}_\nu)' = \tilde{\Lambda}^\mu{}_\rho \Lambda^\rho{}_\lambda (\tilde{\Lambda}^{-1})^\lambda{}_\nu \quad (6.33)$$

Bezüglich des vorderen Index transformiert sich Λ also wie ein kontra-, bezüglich des hinteren wie ein kovarianter Vierervektor, womit die Behauptung bewiesen ist.

Objekte, die unter Lorentztransformationen invariant sind, also ihren Wert nicht ändern, bezeichnet man dementsprechend als Tensoren nullter Stufe (sie haben keine Indices) bzw. als (*Lorentz-*)*Skalare*. Man muß unterscheiden zwischen den bisher bekannten Skalaren (unter Drehungen) und den Lorentz-Skalaren - beispielsweise die Zeit ist unter Drehungen invariant, unter Lorentztransformationen aber nicht.

Das Postulat, daß die Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen gleich groß ist, kann damit nun auch formuliert werden als:

Die Lichtgeschwindigkeit ist ein Lorentzskalar.

Bei Drehungen sind Skalarprodukte von Vektoren invariant - gibt es bei Lorentztransformationen auch ein analoges Skalarprodukt der Vierervektoren, das invariant bleibt? Eine solche Konstruktion existiert tatsächlich - bei der Definition der Eigenzeit hatten wir ja gesehen, daß folgende Summe invariant unter Lorentztransformationen ist:

$$c^2 t^2 - \vec{x}^2 \quad (6.34)$$

Dies kann man nun als Skalarprodukt des Raum-Zeit-Vierervektors mit sich selbst auffassen. Im mathematischen Sinne ist es zwar kein Skalarprodukt, da es auch negative Werte annehmen kann, es wird allerdings in der Physik trotzdem als solches bezeichnet. Dabei heißen Vektoren, für die das Skalarprodukt mit sich selbst größer als null ist, zeitartig (die „Zeitkomponente“ überwiegt), wenn es kleiner als null ist, raumartig (die „Raumkomponenten“ sind größer), und wenn es gleich null ist, lichtartig (da beim Licht $|\vec{x}| = ct$ gilt, also das Skalarprodukt null wird).

Die Interpretation ist wie folgt: Sei (x^μ) der „Abstandsvektor“ zweier Punkte im vierdimensionalen Raum, also zweier *Ereignisse*. Betrachte dann das eine Ereignis als Ursache und das andere als Wirkung - für die Ausbreitung vom einen zum anderen hat man dann als Geschwindigkeit $v = |\vec{x}|/t$. Ist der Vektor nun raumartig, so folgt, daß $v > c$ gelten müßte - da dies unmöglich ist, ergibt sich, daß Ereignisse mit raumartigem Abstand nichts miteinander zu tun haben können. Ereignisse mit lichtartigem Abstand können sich nur dann beeinflussen, wenn die Ausbreitung der Wirkung mit Lichtgeschwindigkeit erfolgt; bei zeitartigem Abstand sind auch kleinere Geschwindigkeiten möglich.

Führt man die Matrix

$$(g_{\mu\nu}) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (6.35)$$

ein, so kann man dieses Skalarprodukt schreiben als:

$$c^2 t^2 - \vec{x}^2 = x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu, \quad (6.36)$$

oder in Matrixschreibweise:

$$c^2 t^2 - \vec{x}^2 = x^T g x \quad (6.37)$$

Da diese Matrix das Skalarprodukt und damit Längen und Winkel in diesem vierdimensionalen Raum festlegt, wird sie als *Metrik* bezeichnet. So, wie sie hier definiert ist, spricht man von der Minkowski-Metrik, der Raum der Vierervektoren (kontra- und kovariante) zusammen mit dieser Metrik heißt entsprechend Minkowski-Raum. Bei anderer Koordinatenwahl und vor allem in der Allgemeinen Relativitätstheorie kann die Metrik auch ein anderes (komplizierteres) Aussehen als hier haben.

Speziell bei der Wahl einer imaginären Zeit wird die Metrik einfach die vierdimensionale Einheitsmatrix, man hat dann also wieder einen euklidischen Raum und spricht deshalb in diesem Fall von einer euklidischen Metrik. Dann verschwinden auch alle Unterschiede zwischen ko- und kontravarianten Tensoren, und der Formalismus vereinfacht sich stark. Für Anwendungen in der Quantenfeldtheorie oder in der Allgemeinen Relativitätstheorie ist jedoch die Kenntnis des hier dargestellten Formalismus unerlässlich - außerdem wäre die Verwendung einer imaginären Zeit ja auch nicht gerade anschaulich.

Die Metrik wurde hier mit zwei Indizes unten geschrieben - dies legt nahe, daß sie ein zweifach kovarianter Tensor ist. Dies soll nun bewiesen werden. Die Form des Skalarprodukts ist (nach Definition) unabhängig vom Inertialsystem (von der Koordinatenwahl), also muß gelten:

$$g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \quad (6.38)$$

Nutzt man andererseits die Invarianz des Wertes des Skalarprodukts aus, so hat man

$$x'^\mu g'_{\mu\nu} x'^\nu = \Lambda^\mu{}_\rho x^\rho g'_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\lambda x^\lambda \stackrel{!}{=} x^\rho g_{\rho\lambda} x^\lambda, \quad (6.39)$$

also

$$g'_{\mu\nu} = (\Lambda^{-1})_\mu{}^\rho (\Lambda^{-1})_\nu{}^\lambda g_{\rho\lambda}, \quad (6.40)$$

die Metrik ist also ein zweifach kovarianter Lorentztensor; man spricht vom *metrischen Tensor*.

Will man diese Gleichung in Matrixform schreiben, so ist wiederum darauf zu achten, daß gleiche Indizes nebeneinanderstehen. Dies wird folgendermaßen erreicht:

$$g'_{\mu\nu} = (\Lambda^{-1})_\mu{}^\rho g_{\rho\lambda} (\Lambda^{-1})_\nu{}^\lambda = (\Lambda^{-1})_\mu{}^\rho g_{\rho\lambda} ((\Lambda^{-1})^T)^\lambda{}_\nu \quad (6.41)$$

Also gilt: $g' = \Lambda^{-1}g(\Lambda^{-1})^T$, oder, wenn man benutzt, daß Transposition und Bildung der Inversen vertauschbar sind:

$$\Lambda^{-1}g = g'\Lambda^T = g\Lambda^T, \quad (6.42)$$

da, wie oben bewiesen, $g' = g$ gilt.

Wenn man diese Formel wiederum für die einzelnen Komponenten hinschreibt und dann die Indices mit der Metrik kontrahiert, so hat man:

$$(\Lambda^{-1})_{\mu}^{\nu} g_{\nu\rho} = g_{\mu\nu} (\Lambda^T)^{\nu}_{\rho} \iff (\Lambda^{-1})_{\mu\rho} = (\Lambda^T)_{\mu\rho} = \Lambda_{\rho\mu}. \quad (6.43)$$

Man erhält die Matrix der inversen Lorentztransformation also nicht einfach durch Transponieren der Transformationsmatrix (Λ^{μ}_{ν}) , sondern man muß deren ersten Index zuerst mit der Metrik kontrahieren (herunterziehen). Dadurch bekommt man eine neue Matrix $(\Lambda_{\rho\nu})$, deren transponiertes die Matrix $(\Lambda_{\nu\rho}^{-1})$ ist. Nach Hochziehen des zweiten Indices hat man dann endlich die inverse Transformationsmatrix $((\Lambda^{-1})_{\nu}^{\mu})$.

Definiert man durch

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta^{\mu}_{\lambda} \quad (6.44)$$

mit dem üblichen Kronecker-Delta, nur die Indices anders geschrieben, die Umkehrmatrix $(g^{\mu\nu})$ zu $(g_{\mu\nu})$, so sieht man, daß diese dieselben Einträge einhält, im Unterschied zu $(g_{\mu\nu})$ aber ein zweifach kontravarianter Lorentztensor ist (da, wie man leicht zeigt, das Kronecker-Delta einfach ko- und einfach kontravariant ist). Die Gleichheit der beiden Matrizen kommt wieder von der Wahl des Koordinatensystems - im allgemeinen Fall haben diese beiden Matrizen unterschiedliche Einträge.

Man kann nun relativ leicht zeigen, daß (a_{ν}) mit $a_{\nu} := g_{\mu\nu} a^{\mu}$ ein kovarianter und (b^{μ}) mit $b^{\mu} := g^{\mu\nu} b_{\nu}$ ein kontravarianter Vierervektor ist, sofern (a^{ν}) bzw. (b_{ν}) kontra- bzw. kovariant ist. Durch Kontraktion mit der Metrik bzw. ihres Inversen können also Indices „herunter-“ bzw. „hochgezogen“ werden; dies gilt nicht nur für Vektoren, sondern allgemein auch bei Lorentztensoren höherer Stufe. Explizit hat man beispielsweise:

$$\boxed{(x_{\mu}) = \begin{pmatrix} ct \\ -\vec{x} \end{pmatrix}; \quad (\partial^{\mu}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \\ -\vec{\nabla} \end{pmatrix}.} \quad (6.45)$$

Das Skalarprodukt zweier Vektoren kann nun auf die folgenden verschiedenen Weisen geschrieben werden:

$$\boxed{a^{\mu} g_{\mu\nu} b^{\nu} = a_{\nu} b^{\nu} = a^{\mu} b_{\mu} = a_{\nu} g^{\nu\mu} b_{\mu} = a_0 b_0 - \vec{a} \bullet \vec{b}} \quad (6.46)$$

Nebenbei ergibt sich, daß auch der d'Alembert-Operator

$$\square \equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta = \partial_{\mu} \partial^{\mu} \quad (6.47)$$

ein Lorentzskalar ist.

Wie wir gesehen haben, ergibt die Kontraktion eines kontravarianten mit einem kovarianten Vierervektor immer einen Lorentzskalar. Dies kann man zu folgender Aussage verallgemeinern: wenn ein kontravarianter Index eines Lorentztensors n . Stufe mit einem kovarianten Index eines Tensors m . Stufe kontrahiert wird, so ist das resultierende Objekt ein Tensor von $(n+m-2)$. Stufe. Derselbe Schluß gilt auch umgekehrt: Ergibt die Kontraktion eines Vierervektors mit einem Objekt, das n Indices trägt, einen Lorentztensor $(n-1)$. Stufe, so war das ursprüngliche Objekt ein Lorentztensor n . Stufe. Dies kann verwendet, um die Transformationseigenschaften eines gegebenen Objekts (Vierertupel, Matrix, ...) zu überprüfen.

6.2.2 Relativistische Energie und Impuls

Die Eigenzeit $d\tau = \gamma^{-1}dt$ ist unter Lorentztransformationen ein Skalar, wie wir schon gesehen hatten (sie kann auch geschrieben werden als $d\tau^2 = dx_\mu dx^\mu$). Bildet man also die „Vierergeschwindigkeit“

$$\boxed{(u^\mu) := \left(\frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = \gamma \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix}}, \quad (6.48)$$

so folgt sofort, daß diese wie der Ortsvektor (x^μ) ein kontravarianter Vierervektor ist. Für ihren Betrag gilt:

$$u_\mu u^\mu = \gamma^2 (c^2 - \vec{v}^2) = c^2, \quad (6.49)$$

er ist also konstant.

Ebenso kann man die „Viererbeschleunigung“ definieren, die dann ebenfalls ein kontravarianter Vierervektor ist:

$$\boxed{(a^\mu) := \left(\frac{du^\mu}{d\tau} \right) = \gamma \begin{pmatrix} c\dot{\gamma} \\ (\gamma\vec{v}) \end{pmatrix}}. \quad (6.50)$$

Es gilt dann:

$$\frac{d}{d\tau} u_\mu u^\mu = \frac{d}{d\tau} c^2 = 0 = 2a^\mu u^\mu, \quad (6.51)$$

die Viererbeschleunigung steht also immer senkrecht auf der Vierergeschwindigkeit (vgl. Bewegung auf einer Kugelschale: die Beschleunigung steht senkrecht auf der Geschwindigkeit, und der Betrag der Geschwindigkeit ist konstant).

Definiere nun die *Ruhemasse* eines Teilchens als die Masse, die gemessen wird, wenn das Teilchen relativ zur Waage ruht. Sie hängt sicher nicht vom Inertialsystem ab (sonst könnte man ja Inertialsysteme durch den Wert der Ruhemasse eines bestimmten Teilchens unterscheiden, was im Widerspruch zum Relativitätsprinzip stehen würde), ist also ein Lorentzskalar. Also ist auch der *Viererimpuls*

$$\boxed{(p^\mu) := m_0(u^\mu) = \gamma \begin{pmatrix} m_0 c \\ m_0 \vec{v} \end{pmatrix}} \quad (6.52)$$

ein kontravarianter Vierervektor. Sein Betrag ist:

$$\boxed{p_\mu p^\mu = m_0^2 c^2}, \quad (6.53)$$

also konstant. Der relativistische Impuls $\vec{p} := \gamma m_0 \vec{v}$ hat nun im Vergleich zum klassischen Impuls einen zusätzlichen Faktor γ .

Definiert man sich auch noch eine „Viererkraft“ durch

$$\boxed{F^\mu := \frac{d}{d\tau} p^\mu} = \gamma \dot{p}^\mu, \quad (6.54)$$

so sieht man leicht, daß gilt:

$$\boxed{F^\mu = m_0 a^\mu} \quad \text{und} \quad \boxed{p_\mu F^\mu = 0}, \quad (6.55)$$

die Kraft steht also immer senkrecht auf dem Impuls. In Analogie zur Bewegung auf einer Kugelschale sagt man, das Teilchen bewege sich *auf der Massenschale* (auch: *on-shell*). Trägt man p^0 gegen $|\vec{p}|$ auf, so sieht man allerdings, daß die Gleichung $p_\mu p^\mu = \text{const.}$ keine Kugelschale ($\vec{x}^2 = \text{const.}$) definiert, sondern ein Hyperboloid; dies liegt an den Minuszeichen in der Metrik, also an der Struktur des Minkowskiraumes.

Der „räumliche“ Anteil ($\mu = 1, 2, 3$) der Viererkraft ist gerade $\gamma \dot{\vec{p}}$, also γ mal der üblichen, nichtrelativistischen Kraft \vec{F} . Aber wie ist der „zeitliche“ Anteil ($\mu = 0$) zu interpretieren? Gehe zunächst von der Beziehung $p_\mu F^\mu = 0$ aus; dies ergibt:

$$p_0 F^0 = - \sum_{\mu=1}^3 p_\mu F^\mu = \vec{p} \cdot \gamma \dot{\vec{F}} = \gamma m_0 \vec{v} \cdot \gamma \dot{\vec{F}}, \quad (6.56)$$

also:

$$F^0 = \frac{p_0 F^0}{p_0} = \frac{\gamma m_0 \vec{v} \cdot \gamma \dot{\vec{F}}}{\gamma m_0 c} = \gamma \frac{\vec{v}}{c} \cdot \dot{\vec{F}}. \quad (6.57)$$

Dies ist aber gerade γ/c mal der (klassischen) Leistung - der zeitliche Anteil der Viererkraft gibt also die Änderung der Energie an. Da hier keine potentielle Energie auftritt, gilt: $\dot{E} = \dot{T}$, also $F_0 = \frac{2}{c} \dot{T}$. Andererseits ist:

$$F^0 = \frac{d}{d\tau} p^0 = \gamma \dot{p}^0, \quad (6.58)$$

also schließlich:

$$\dot{p}^0 = \frac{1}{c} \dot{T}. \quad (6.59)$$

Aufintegrieren ergibt:

$$p^0 = \frac{T}{c} + k \quad (6.60)$$

mit einer Integrationskonstante k , und, da $p^0 = \gamma m_0 c$ ist:

$$T = \gamma m_0 c^2 - kc. \quad (6.61)$$

Da für die kinetische Energie gelten sollte: $T = 0$ für $v = 0$, folgt, daß $k = m_0 c$ sein muß, also:

$$\boxed{T = (\gamma - 1)m_0 c^2} = \gamma(v)m_0 c^2 - \gamma(0)m_0 c^2 \quad (6.62)$$

Für kleine Geschwindigkeiten kann man γ entwickeln und erhält dann:

$$T \approx \left(1 + \frac{1}{2}v^2/c^2 - 1\right) m_0 c^2 = \frac{1}{2}m_0 v^2, \quad (6.63)$$

was mit der bekannten klassischen Formel übereinstimmt.

Die obigen Formeln legen folgende Interpretation nahe: Auch in Ruhe besitzen Körper noch eine 'Ruheenergie' $E = \gamma(0)m_0 c^2 = m_0 c^2$, in Bewegung haben sie dagegen die Energie $E = \gamma(v)m_0 c^2$ - die kinetische Energie ist gerade die Differenz von beiden. Definiert man nun noch die sog. *bewegte Masse* (im Gegensatz zur Ruhemasse) durch $m := \gamma m_0$, dann ergibt sich schließlich und endlich die berühmte Formel:

$$\boxed{E = mc^2.} \quad (6.64)$$

Man sieht, daß die Masse m eines Teilchens monoton wächst und für $v \rightarrow c$ gegen unendlich geht. Je schneller ein Teilchen also ist, umso mehr Kraft braucht man, um es noch weiter zu beschleunigen; um auf Lichtgeschwindigkeit zu kommen, bräuchte man unendlich viel Kraft. Damit haben wir nun auch eine dynamische Begründung gefunden, warum die Lichtgeschwindigkeit nicht erreicht werden kann.

Insgesamt hat man nun also für den Viererimpuls:

$$(p^\mu) = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \vec{p} \end{pmatrix} \quad (6.65)$$

Nutzt man noch aus, daß sein Betrag gleich $m_0^2 c^2$ ist, so erhält man folgende Beziehung zwischen relativistischer Energie, relativistischem Impuls und der Ruhemasse:

$$\boxed{E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m_0^2 c^4.} \quad (6.66)$$

Diese Formel findet z.B. bei der Hamilton'schen Formulierung der Mechanik eines relativistischen Teilchens eine Anwendung (siehe Kapitel 7) oder auch in der relativistischen Quantenmechanik (Klein-Gordon-Gleichung).

6.2.3 * Klassifizierung von Lorentztransformationen

Bisher haben wir nur sehr spezielle Lorentztransformationen besprochen: Den Übergang von einem als ruhend angenommenen Koordinatensystem in ein System, das sich in z -Richtung mit einer Geschwindigkeit v bewegt. Dies ist natürlich nicht die allgemeinste mögliche Transformation - die Lorentztransformationen bilden eine viel größere Klasse. Dies soll im folgenden näher untersucht werden.

Führe zunächst eine neue Notation ein: Durch

$$\boxed{\beta =: \tanh \alpha} \quad (6.67)$$

wird eine neue Variable α definiert - hier zunächst ohne anschauliche Begründung. Nutzt man die bekannten Formeln für die Hyperbelfunktionen aus, so erhält man dann $\gamma = \cosh \alpha$ und $\beta\gamma = \sinh \alpha$; die Transformationsmatrix wird also zu:

$$(\Lambda^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} \cosh \alpha & 0 & 0 & -\sinh \alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh \alpha & 0 & 0 & \cosh \alpha \end{pmatrix}. \quad (6.68)$$

Diese Matrix erinnert nun aber stark an die einer Drehung! (*Anmerkung:* Bei Verwendung einer imaginären Zeit sieht sie sogar genau wie eine Drehmatrix aus.) Das legt nahe, Lorentztransformationen als verallgemeinerte Drehungen aufzufassen - oder andersherum: die Drehungen als eine spezielle Sorte von Lorentztransformationen zu betrachten.

Damit die Drehungen als Lorentztransformationen aufgefasst werden können, sollte allerdings wie für die bereits besprochene spezielle Lorentztransformation gelten, daß sie das Skalarprodukt $a_\mu b^\mu \equiv a_0 b^0 - \vec{a} \bullet \vec{b}$ im Minkowski-Raum invariant lassen. Der vordere Summand ist nun unter Drehungen sowieso invariant, der hintere ist das Negative des normalen Skalarprodukt im dreidimensionalen Raum. Dieses ist bekanntlich ebenfalls invariant unter Drehungen - also ist die geforderte Bedingung erfüllt.

Die Invarianz des Skalarproduktes wurde hier als Kriterium benutzt, um zu entscheiden, ob eine Transformation eine Lorentztransformation sein kann; außerdem wurde das Skalarprodukt so definiert, daß es auch unter den zuerst betrachteten speziellen Lorentztransformationen invariant ist. Dies legt nahe, andersherum nun zu definieren:

Alle linearen Koordinatentransformationen, die das Skalarprodukt im Minkowski-Raum invariant lassen, heißen Lorentztransformationen.

Betrachte beispielsweise Transformationen, die einen Übergang in Systeme beschreiben, die sich in x - oder y -Richtung bewegen. Man könnte wie oben herleiten, wie sie aussehen müssen, und dann explizit zeigen, daß sie das Skalarprodukt invariant lassen. Eleganter ist jedoch ein anderer Weg: Eine Bewegung in x - oder y -Richtung lässt sich durch eine Drehung in eine Bewegung in z -Richtung überführen - der Übergang in ein solches bewegtes System kann also durch die Kombination einer Drehung, einer Lorentztransformation in z -Richtung und einer Rückdrehung beschrieben werden. Es bleibt nur noch zu zeigen, daß die Kombination von mehreren Lorentztransformationen (hier drei) wieder eine Lorentztransformation ergibt. Mathematisch formuliert heißt das:

Die Lorentztransformationen bilden eine Gruppe.

Diese Behauptung soll im folgenden bewiesen werden. Invarianz des Skalarproduktes bedeutet ja Invarianz der Metrik, das heißt, für eine Lorentztransformation, die durch die Matrix Λ dargestellt wird, gilt:

$$g' = \Lambda^{-1} g (\Lambda^{-1})^T = g. \quad (6.69)$$

Seien nun Λ_1, Λ_2 die Matrizen zu zwei Lorentztransformationen. Es ist zu zeigen, daß das Produkt dieser Matrizen $\Lambda_3 := \Lambda_1\Lambda_2$ wieder eine Lorentztransformation darstellt. Dies sieht man aber relativ leicht:

$$\begin{aligned} g' &= \Lambda_3^{-1}g(\Lambda_3^{-1})^T = (\Lambda_1\Lambda_2)^{-1}g((\Lambda_1\Lambda_2)^{-1})^T = \Lambda_2^{-1}\Lambda_1^{-1}g(\Lambda_2^{-1}\Lambda_1^{-1})^T \\ &= \Lambda_2^{-1}\Lambda_1^{-1}g(\Lambda_1^{-1})^T(\Lambda_2^{-1})^T = \Lambda_2^{-1}g(\Lambda_2^{-1})^T = g \end{aligned} \quad (6.70)$$

Das Produkt der Matrizen läßt die Metrik invariant - also ergibt die Hintereinanderausführung von zwei Lorentztransformationen wieder eine Lorentztransformation. Damit ist die Abgeschlossenheit unter Verknüpfung von Lorentztransformationen gezeigt.

Zum Beweis, daß die Lorentztransformationen eine Gruppe bilden, müssen aber noch zwei weitere Eigenschaften nachgewiesen werden: Erstens, daß ein neutrales Element existiert - dies ist aber gerade die Einheitsmatrix $E = id_4$ bzw. Identitätsabbildung. Es ist trivial, daß sie das Skalarprodukt invariant läßt, also zur Menge der Lorentztransformationen gehört. Zweitens ist zu zeigen, daß zu jeder Transformation eine Inverse existiert. Es ist also zu zeigen, daß, wenn die Matrix Λ eine Lorentztransformation darstellt, auch die Matrix Λ^{-1} eine solche Transformation repräsentiert. Aber auch dies ist einfach nachweisbar - aus $\Lambda^{-1}g(\Lambda^{-1})^T = g$ folgt ja sofort $g = \Lambda g \Lambda^T$, also $(\Lambda^{-1})^{-1}g((\Lambda^{-1})^{-1})^T = g$ - was zu zeigen war.

Damit ist bewiesen, daß die Lorentztransformationen eine Gruppe L bilden. Mathematisch gesehen ist dies die nicht-abelsche Gruppe $O(1,3)$ (die Gruppe $O(n,m)$ ist definiert als die Menge aller Transformationen, die $x_1^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2 - \dots - x_m^2$ invariant läßt). Die orthogonale, nicht-abelsche Gruppe $SO(3)$ der Drehungen ist eine Untergruppe davon, die in sich abgeschlossen ist. Die Menge der Lorentztransformationen, die keine Drehung bewirken, sondern nur einen Übergang in ein (in beliebige Richtung) bewegtes Bezugssystem (auch *Boosts* genannt), ist dagegen nicht in sich abgeschlossen (man kann Gegenbeispiele konstruieren) und bildet daher keine Untergruppe. Dies ist letztlich der Ursprung der sogenannten Thomas-Präzession (siehe z. B. *Jackson: Klassische Elektrodynamik*).

Man kann allerdings noch eine andere Unterteilung der Lorentztransformationen vornehmen. Betrachte nochmals die Transformation der Metrik: $\Lambda^{-1}g(\Lambda^{-1})^T = g$. Nimmt man auf beiden Seiten die Determinante und nutzt aus, daß diese multiplikativ ist, so folgt, daß $(\det \Lambda)^2 = 1$ gelten muß - also kann die Determinante nur ± 1 sein. Die Lorentztransformationen, deren Matrix die Determinante $+1$ hat, heißen *eigentliche* Lorentztransformationen - sie bilden eine Untergruppe L_+ : die Einheitsmatrix ist ein Element von L_+ , mit jedem Element von L_+ ist auch das Inverse ein Element von L_+ (da das Inverse einer Matrix mit Determinante $+1$ wieder Determinante $+1$ hat), und auch das Produkte zweier Elemente ist wieder in L_+ (da die Determinante multiplikativ ist). Die Menge der Matrizen mit Determinante -1 heißt dementsprechend *uneigentliche* Lorentztransformationen. Diese Transformationen bilden aber keine Untergruppe - das Produkt von zwei uneigentlichen Transformationen ist nämlich aufgrund der Multiplikativität der Determinante immer eine eigentliche Transformation.

Eine spezielle uneigentliche Transformation ist die Paritätstransformation P (Raumspiegelung), die schon bei der Herleitung der speziellen Lorentztransformation erwähnt wurde. Die zugehörige Matrix sieht wie die Metrik aus: Auf der Diagonalen einmal $+1$ und dreimal -1 , der Rest 0 . Die Verkettung der Paritätstransformation mit einer uneigentlichen Transformation Λ^- ergibt immer eine eigentliche Transformation Λ^+ : $P\Lambda^- = \Lambda^+$. Durch Multiplikation mit $P^{-1} = P$ von links folgt: Für alle uneigentlichen Transformationen gibt es eine eigentliche Transformation, so daß $\Lambda^- = P\Lambda^+$ ist. Dies kann man auch kürzer schreiben als $L_- = PL_+$ - die Multiplikation eines Mengenelements P mit einer Menge wird hierbei folgendermaßen definiert:

$$P \cdot \{\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \dots\} := \{P\Lambda_1, P\Lambda_2, P\Lambda_3, \dots\}. \quad (6.71)$$

Statt der Paritäts- könnte man auch die Zeitumkehrtransformation T betrachten. Die zugehörige Matrix hat auf der Diagonalen einmal -1 und dreimal $+1$, der Rest ist 0 . Um eine Unterteilung der Lorentztransformationen zu spezifizieren, betrachte nun die Komponente Λ^0_0 - diese verknüpft ja gerade die Zeitkoordinaten in den beiden Koordinatensystemen miteinander. Aus

$$g_{00} = 1 = \Lambda^\mu_0 \Lambda^\nu_0 g_{\mu\nu} = (\Lambda^0_0)^2 - \sum_{i=1}^3 (\Lambda^i_0)^2 \quad (6.72)$$

folgt sofort, daß $|\Lambda^0_0| \geq 1$ gelten muß. Entsprechend nennt man nun die Transformationen mit $\Lambda^0_0 \geq 1$ *orthochron* und die mit $\Lambda^0_0 \leq -1$ *nicht-orthochron*. Die jeweiligen Mengen werden mit L^\uparrow bzw. L^\downarrow bezeichnet. Man sieht leicht ein, daß $L^\downarrow = TL^\uparrow$ ist. Auch L^\uparrow ist eine Untergruppe: die Einheitsmatrix ist ein Element von L^\uparrow , mit jedem Element in L^\uparrow ist auch das Inverse in L^\uparrow (da $(\Lambda^{-1})_{00} = \Lambda_{00}$ nach (6.43)). Wie man allerdings zeigt, daß auch das Produkt zweier Elemente wieder in L^\uparrow liegt, weiss ich leider nicht... Aber es ist ja auch anschaulich klar, daß die Hintereinanderausführung von zwei Transformationen, die die Zeitrichtung invariant lassen, ebenso diese Richtung invariant lässt.

Insgesamt kann man also die Lorentztransformationen in vier Klassen einteilen:

L^\uparrow_+	$\det \Lambda = 1$	$\Lambda^0_0 \geq 1$	eigentlich, orthochron
L^\uparrow_-	$\det \Lambda = -1$	$\Lambda^0_0 \geq 1$	uneigentlich, orthochron
L^\downarrow_+	$\det \Lambda = 1$	$\Lambda^0_0 \leq -1$	eigentlich, nicht-orthochron
L^\downarrow_-	$\det \Lambda = -1$	$\Lambda^0_0 \leq -1$	uneigentlich, nicht-orthochron

Nur die erste Menge bildet eine Untergruppe von L , die anderen erhält man daraus durch: $L^\uparrow_- = PL^\uparrow_+$, $L^\downarrow_- = TL^\uparrow_+$ und $L^\downarrow_+ = PTL^\uparrow_+ = -L^\uparrow_+$ (sie sind sogenannte *Linksnebenklassen*).

Die Gruppe aller Lorentztransformationen kann damit nun also geschrieben werden als:

$$L = L^\uparrow_+ \cup L^\uparrow_- \cup L^\downarrow_+ \cup L^\downarrow_- = L^\uparrow_+ \cup PL^\uparrow_+ \cup TL^\uparrow_+ \cup -L^\uparrow_+ =: \{E, P, T, -E\} \cdot L^\uparrow_+. \quad (6.73)$$

Alle Transformationen in L^\uparrow_+ kann man sich nun als zusammengesetzt aus einem Boost und einer Drehung vorstellen. Die Menge aller Drehungen ist

dabei wiederum eine Untergruppe von L_+^\uparrow , die Menge aller Boosts nicht. Da die Drehungen durch drei Parameter klassifiziert werden können (die drei Euler-Winkel) und die Boosts ebenfalls durch drei (für jede Raumrichtung ein α_i), kann jede beliebige eigentliche orthochrone Lorentztransformation also durch sechs Parameter beschrieben werden. Die zur Drehung gehörenden drei sind auf den Bereich von 0 bis 2π eingeschränkt; man sagt, die Menge der Drehungen ist eine *kompakte* Gruppe. Die anderen drei können dagegen jeden beliebigen Wert annehmen - die Menge der Boosts ist nicht kompakt. Damit ergibt sich automatisch, daß auch L_+^\uparrow keine kompakte Gruppe ist.

Zum Abschluß soll noch der am Anfang recht künstlich eingeführte Parameter α physikalisch interpretiert werden. Betrachte dafür die Additionsformel für Geschwindigkeiten und setze auf beiden Seiten $\beta = \tanh \alpha$ ein:

$$\tanh \alpha_3 = \frac{\tanh \alpha_1 + \tanh \alpha_2}{1 + (\tanh \alpha_1)(\tanh \alpha_2)} = \tanh(\alpha_1 + \alpha_2), \quad (6.74)$$

wobei das Additionstheorem für den Tangens hyperbolicus verwendet wurde. Man hat also:

$$\boxed{\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2.} \quad (6.75)$$

α ist damit nichts anderes als die relativistische Verallgemeinerung von Relativgeschwindigkeiten! Bewegt sich System 1 relativ zu System 2 und System 2 relativ zu System 3, so erhält man die Relativgeschwindigkeit zwischen 1 und 3 wie gewohnt durch Addition - nur werden nun eben nicht mehr direkt die „anschaulichen“ Geschwindigkeiten v addiert, sondern stattdessen die „verallgemeinerten“ Geschwindigkeiten $\alpha = \operatorname{artanh}(v/c)$. $|v|$ ist beschränkt auf Werte kleiner c , α dagegen kann jeden beliebigen Wert annehmen. Insofern ist α eigentlich eine „vernünftiger“ Geschwindigkeit als v - allerdings eben leider weniger anschaulich.

6.3 Manifest kovariante Formulierung der Elektrodynamik

6.3.1 Stromdichten und Felder

Wir haben gesehen, wie die Gesetze der Mechanik abgeändert werden müssen, um Invarianz unter Lorentztransformationen zu erreichen. Wie im folgenden dargelegt wird, ist eine Änderung der Gesetze der Elektrodynamik dagegen überhaupt nicht nötig - sie sind schon invariant unter Lorentztransformationen. Allerdings sieht man das den Maxwellgleichungen nicht an; sie müssen zunächst umformuliert, in eine *manifest kovariante* Form gebracht werden.

Dies funktioniert allerdings nur im Vakuum problemlos - die Anwesenheit von Materie führt ja beispielsweise dazu, daß die Lichtgeschwindigkeit einen anderen Wert als den im Vakuum hat, was im Widerspruch zu den Einstein'schen Postulaten steht. Die Behandlung der zusätzlichen Probleme, die durch den Einfluß der Materie entstehen, ist kompliziert (und ich habe keine Ahnung, wie man das macht).

Betrachten wir also zunächst die vorkommenden Größen: \vec{E} , \vec{B} , \vec{j} , ρ . Ist es möglich, daraus Vierervektoren zu konstruieren? Bei den Feldern scheint es nicht zu funktionieren, aber die Strom- und Ladungsdichten kann man versuchsweise zusammenfassen:

$$\boxed{(j^\mu) := \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{j} \end{pmatrix}} \quad (6.76)$$

Ist dies nun wirklich ein Vierervektor? Erinnern wir uns dafür an die Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \operatorname{div}\vec{j} = 0. \quad (6.77)$$

Sie kann nun folgendermaßen umgeschrieben werden:

$$\boxed{\partial_\mu j^\mu = 0.} \quad (6.78)$$

Da sie in jedem Inertialsystem gilt, ist die 0 auf der rechten Seite ein Lorentzskalar. ∂_μ ist ein kovarianter Vierervektor - also ist j^μ wirklich ein kontravarianter Vierervektor.

Damit wäre ein Element der Grundgleichungen der Elektrodynamik also schon manifest lorentzinvariant formuliert. Doch das Problem mit den Feldern besteht immer noch - als Vierervektoren kann man sie nicht darstellen. Es gibt allerdings eine Alternative: Wie wir wissen, kann man Kreuzprodukte von Vektoren auch in Matrixform schreiben:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix} \vec{b}, \quad (6.79)$$

wobei die hier auftauchende Matrix antisymmetrisch ist. In der inhomogenen Gleichung für das Magnetfeld taucht eine Rotation auf, also ein Kreuzprodukt. Schreiben wir das Magnetfeld also versuchsweise in Matrixform hin, fügen das elektrische Feld hinzu, um eine 4×4 -Matrix zu erhalten, und achten dabei auf die Antisymmetrie:

$$\boxed{(F^{\mu\nu}) := \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}.} \quad (6.80)$$

Die Vorzeichen wurden hier passend gewählt, damit nachher die richtigen Gleichungen rauskommen.

Nun kann man die inhomogenen Maxwellgleichungen nämlich einfach folgendermaßen schreiben:

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu.} \quad (6.81)$$

Beispielsweise für $\nu = 0$ ergibt sich:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} 0 + \frac{\partial}{\partial x} E_x + \frac{\partial}{\partial y} E_y + \frac{\partial}{\partial z} E_z = \frac{4\pi}{c} c\rho, \quad (6.82)$$

also die erste Maxwellgleichung

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho. \quad (6.83)$$

Ebenso ergeben sich für $\nu = 1, 2, 3$ die drei Komponenten der vierten Maxwellgleichung.

In (6.81) steht rechts ein kontravarianter Vierervektor, links die Kontraktion eines kovarianten Vierervektors mit der Feldstärken-Matrix - also muß die Matrix ein zweifach kontravarianter Lorentztensor sein. Man spricht vom *Feldstärkentensor*.

Wie bei jedem anderen Lorentztensor kann man natürlich auch bei diesem beliebig die Indices herunterziehen; oft verwendet wird die Form mit beiden Indices unten:

$$(F_{\mu\nu}) = (g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho}F^{\lambda\rho}) = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (6.84)$$

Die inhomogenen Maxwellgleichungen sind damit umgeschrieben; eine etwas längliche Rechnung zeigt, daß die homogenen Gleichungen folgende Form annehmen:

$$\partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} + \partial^\lambda F^{\mu\nu} = 0 \quad (6.85)$$

Man definiert nun durch

$$\boxed{(\tilde{F}^{\mu\nu}) := \frac{1}{2}(\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}} \quad (6.86)$$

den sogenannten *dualen Feldstärkentensor*. Dieser ist ebenfalls ein zweifach kontravarianter Lorentztensor, da $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$, die vierdimensionale Erweiterung des Levi-Cevita-Symbols, ein vierfach kontravarianter Lorentztensor ist (in jedem Inertialsystem gilt definitionsgemäß: sind mindestens zwei Indices gleich, so ist er gleich 0, ansonsten das Signum der entsprechenden Permutation von (0123)). Dann kann man die homogenen Maxwellgleichungen auch wie folgt schreiben:

$$\boxed{\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0.} \quad (6.87)$$

Mit den Definitionen (6.76), (6.80) und (6.86) und den Gleichungen (6.78), (6.81) und (6.87) haben wir nun also eine manifest lorentzinvariante Darstellung der Grundgleichungen der Elektrodynamik gefunden. Die Gleichungen wurden nur umgeschrieben - es war nicht nötig, neue Begriffe einzuführen wie in der Mechanik („relativistische Geschwindigkeit“ (u^μ) u. ä.) oder irgendwo γ -Faktoren einzufügen. Dies war auch fast schon zu erwarten: Die Maxwell-Gleichungen waren der Ausgangspunkt und die Motivation für die Lorentztransformationen - also scheint es natürlich, daß bei ihnen keine Änderungen notwendig sind.

Was noch fehlt, ist die Lorentzkraft - darauf werden wir allerdings erst am Schluß dieses Kapitels eingehen. Vorher soll noch gezeigt werden, daß auch die Darstellung mit Hilfe der Potentiale manifest lorentzinvariant geschrieben werden kann, da diese z.B. in der Quantentheorie wichtiger sind als die Felder oder Kräfte.

6.3.2 Potentiale

Es liegt nun natürlich nahe, einfach das Skalar- und das Vektorpotential zu einem Vierertupel zusammenzufassen:

$$\boxed{(A^\mu) := \begin{pmatrix} \Phi \\ \vec{A} \end{pmatrix}.} \quad (6.88)$$

Ist dies nun ein kontravarianter Vierervektor? Um diese Frage zu beantworten, betrachte die Gleichungen, die die Potentiale erfüllen:

$$\square \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \Phi \right) = 4\pi \rho \quad (6.89)$$

$$\square \vec{A} + \operatorname{grad} \left(\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \Phi \right) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (6.90)$$

Dies kann umgeschrieben werden zu

$$\square A^\mu - \partial^\mu \partial_\nu A^\nu = \frac{4\pi}{c} j^\mu \quad (6.91)$$

bzw. zu

$$(\delta^\mu_\nu \square - \partial^\mu \partial_\nu) A^\nu = \frac{4\pi}{c} j^\mu. \quad (6.92)$$

Der in der Klammer stehende Differentialoperator ist ein einfach kontra- und einfach kovarianter Lorentztensor, rechts steht ein kontravarianter Vierervektor - also ist A^μ , wie erwartet, ein kontravarianter Vierervektor.

Eichtransformationen haben nun die einfache Gestalt

$$\boxed{A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \chi} \quad (6.93)$$

mit einem beliebigen Skalarfeld χ . Man sieht nun auch, daß die Bedingung für die Lorentzgleichung lorentzinvariant dargestellt werden kann:

$$\boxed{\partial_\mu A^\mu = 0.} \quad (6.94)$$

Das heißt, wenn man in einem Inertialsystem die Potentiale so gewählt hat, daß sie die Lorentzgleichung erfüllen, so tun sie das auch in allen anderen Inertialsystemen. Die Coulombgleichung ist dagegen nicht lorentzinvariant.

Setzt man die Lorentzgleichung in die obige inhomogene Gleichung ein, so erhält man schließlich die einfache Beziehung

$$\boxed{\square A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu.} \quad (6.95)$$

Diese Gleichung kann nun wiederum allgemein mittels der Green'schen Funktion zum d'Alembert-Operator gelöst werden.

Wegen der fehlenden Lorentzinvarianz können die Gleichungen, die sich aus der Coulombbeziehung ergeben, dagegen nicht im Vierervektor-Formalismus dargestellt werden.

Um den Zusammenhang mit dem Feldstärkentensor zu sehen, betrachte die bekannten Beziehungen zwischen den Potentiale und den Feldstärken, beispielsweise für die x-Komponente:

$$F^{23} = B_x = (\text{rot} \vec{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \partial^2 A^3 - \partial^3 A^2 \quad (6.96)$$

$$F^{10} = E_x = \left(-\vec{\nabla} \Phi - \frac{1}{c} \dot{\vec{A}} \right)_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} = \partial^1 A^0 - \partial^0 A^1. \quad (6.97)$$

Damit sieht man leicht ein, daß der Feldstärkentensor auch folgendermaßen dargestellt werden kann:

$$\boxed{F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu.} \quad (6.98)$$

Dieser Form sieht man sowohl die Antisymmetrie als auch das Verhalten unter Lorentztransformationen sofort an. Setzt man sie in die inhomogenen Maxwellgleichungen (6.81) ein, so erhält man wiederum die obige Gleichung (6.91) für das Viererpotential.

6.3.3 * Lorentzkraft und Energie-Impuls-Tensor

Für die i -te Komponente der Lorentzkraftdichte gilt:

$$(\vec{f}_{mech})_i = \left(\frac{d\vec{p}_{mech}}{dt} \right)_i = \rho E_i + \frac{1}{c} (\vec{j} \times \vec{B})_i \quad (6.99)$$

Unter Benutzung der Viererstromdichte und des Feldstärkentensors wird dies zu:

$$(\vec{f}_{mech})_i = -\frac{1}{c} j_\mu F^{\mu i} \quad (6.100)$$

Für die Änderung der mechanischen Energiedichte durch Ohm'sche Verluste, also die Leistungsdichte P , hat man:

$$P_{mech} = \frac{dw_{mech}}{dt} = \vec{j} \cdot \vec{E} = -j_\mu F^{\mu 0} \quad (6.101)$$

Definiert man nun

$$\boxed{(f_{mech}^\mu) := \begin{pmatrix} P_{mech}/c \\ \vec{f}_{mech} \end{pmatrix},} \quad (6.102)$$

so kann man diese beiden Beziehungen zusammenfassen:

$$f_{mech}^\mu = -\frac{1}{c} j_\nu F^{\nu\mu}, \quad (6.103)$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich, daß f_{mech}^μ ein kontravarianter Vierervektor ist.

Unser Ziel ist nun, die Gleichungen für Energie- und Impulserhaltung kovariant zu formulieren. Setze dafür zunächst die inhomogenen Maxwell-Gleichungen ein und benutze dann die Produktregel:

$$\begin{aligned}
f_{mech}^\mu &= -\frac{1}{4\pi}(\partial^\lambda F_{\lambda\nu})F^{\nu\mu} \\
&= -\frac{1}{4\pi}[\partial^\lambda(F_{\lambda\nu}F^{\nu\mu}) - F_{\lambda\nu}(\partial^\lambda F^{\nu\mu})] \\
&= -\frac{1}{4\pi}[\partial^\lambda(F_{\lambda\nu}F^{\nu\mu}) - \frac{1}{2}F_{\lambda\nu}(\partial^\lambda F^{\nu\mu}) - \frac{1}{2}F_{\nu\lambda}(\partial^\nu F^{\lambda\mu})], \quad (6.104)
\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt der hintere Term aufgespalten und einige Indices umbenannt wurden. Benutze nun die Antisymmetrie des Feldstärkentensors und die homogenen Maxwellgleichungen (6.85):

$$\begin{aligned}
f_{mech}^\mu &= -\frac{1}{4\pi}[\partial^\lambda(F_{\lambda\nu}F^{\nu\mu}) - \frac{1}{2}F_{\lambda\nu}(\partial^\lambda F^{\nu\mu}) - \frac{1}{2}F_{\lambda\nu}(\partial^\nu F^{\mu\lambda})] \\
&= -\frac{1}{4\pi}[\partial^\lambda(F_{\lambda\nu}F^{\nu\mu}) + \frac{1}{2}F_{\lambda\nu}(\partial^\mu F^{\lambda\nu})] \\
&= -\frac{1}{4\pi}[\partial_\lambda(g^{\lambda\rho}F_{\rho\nu}F^{\nu\mu}) + \frac{1}{4}\partial^\mu(F_{\lambda\nu}F^{\lambda\nu})] \quad (6.105)
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde wiederum die Produktregel angewandt. Es ergibt sich also schließlich:

$$\begin{aligned}
f_{mech}^\mu &= -\partial_\lambda \frac{1}{4\pi}[g^{\lambda\rho}F_{\rho\nu}F^{\nu\mu} + \frac{1}{4}g^{\lambda\mu}F_{\rho\nu}F^{\rho\nu}] \\
&= -\partial_\lambda T^{\lambda\mu}, \quad (6.106)
\end{aligned}$$

wobei der sogenannte Energie-Impuls-Tensor definiert ist als

$$\boxed{T^{\mu\nu} := \frac{1}{4\pi}(g^{\mu\rho}F_{\rho\lambda}F^{\lambda\nu} + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F_{\rho\lambda}F^{\rho\lambda})} \quad (6.107)$$

Die Energie- und Impulserhaltung kann also insgesamt geschrieben werden als:

$$\boxed{\partial_\mu T^{\mu\nu} = -f_{mech}^\nu = \frac{1}{c}j_\mu F^{\mu\nu}.} \quad (6.108)$$

Wie man schon an der Definition sieht, ist $T^{\mu\nu}$ ein zweifach kontravarianter Lorentztensor. Außerdem ist er symmetrisch; dem hinteren Term sieht man das sofort an ($g^{\mu\nu}$ ist symmetrisch), beim vorderen Term verfähre folgendermaßen:

$$g^{\mu\rho}F_{\rho\lambda}F^{\lambda\nu} = F_{\lambda\rho}^{\mu}F^{\lambda\nu} = F_{\lambda}^{\mu}F^{\nu\lambda} = F^{\nu\lambda}F_{\lambda}^{\mu} = g^{\nu\rho}F_{\rho}^{\lambda}F_{\lambda}^{\mu} = g^{\nu\rho}F_{\rho\lambda}F^{\lambda\mu}. \quad (6.109)$$

Die dritte wichtige Eigenschaft des Energie-Impuls-Tensors ist, daß seine Spur verschwindet:

$$\begin{aligned}
Sp(T) &= T^\mu{}_\mu = \frac{1}{4\pi}(g^{\mu\rho}F_{\rho\lambda}F^\lambda{}_\mu + \frac{1}{4}g^\mu{}_\mu F_{\rho\lambda}F^{\rho\lambda}) = \frac{1}{4\pi}(F^\mu{}_\lambda F^\lambda{}_\mu + \frac{1}{4}4F_{\rho\lambda}F^{\rho\lambda}) \\
&= \frac{1}{4\pi}(F_{\mu\lambda}F^{\lambda\mu} - F_{\rho\lambda}F^{\lambda\rho}) = 0. \quad (6.110)
\end{aligned}$$

Setzt man die Definition des Feldstärkentensors ein, so kann man die explizite Gestalt von $T^{\mu\nu}$ ausrechnen:

$$(T^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} w_{em} & \vec{p}_{em}c \\ \vec{S}/c & (T_M)_{ik} \end{pmatrix} \quad (6.111)$$

mit den bekannten Definitionen:

$$w_{em} = \frac{1}{8\pi}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \quad (\text{Energiedichte}) \quad (6.112)$$

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}(\vec{E} \times \vec{B}) \quad (\text{Energieflußdichte: Poyntingvektor}) \quad (6.113)$$

$$\vec{p}_{em} = \frac{1}{4\pi c}(\vec{E} \times \vec{B}) = \frac{\vec{S}}{c^2} \quad (\text{Impulsdichte}) \quad (6.114)$$

$$T_M = w_{em}id_3 - \frac{1}{4\pi}(\vec{E} \otimes \vec{E} + \vec{B} \otimes \vec{B}) \quad (6.115)$$

(Impulsflußdichte: Maxwell'scher Spannungstensor)

Aus (6.108) ergeben sich dann wieder die bekannten Erhaltungssätze bzw. Kontinuitätsgleichungen für Energie und Impuls:

$$\partial_t w_{em} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = -\vec{j} \cdot \vec{E} \quad (6.116)$$

$$\partial_t \vec{p}_{em} + \vec{\nabla} \cdot T = -\rho \vec{E} - \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B} \quad (6.117)$$

Die Symmetrie des Energie-Impuls-Tensors folgt nun aus der Symmetrie des Spannungstensors und der Beziehung zwischen Energieflußdichte und Impulsdichte; die Spurfreiheit folgt aus der Tatsache, daß die Spur des Spannungstensors gleich der Energiedichte ist:

$$\text{Sp}(T) = T^\mu{}_\mu = T^0_0 + \sum_i T^i{}_i = T^{00} - \sum_i T^{ii} = T^{00} - \text{Sp}T_M = w_{em} - w_{em} = 0. \quad (6.118)$$

6.3.4 Lorentztransformation der Felder; Dopplereffekt; Invarianten

Das elektrische und das magnetische Feld sind jeweils Teile des Feldstärkentensors, sie transformieren also anders als beispielsweise der Ortsvektor \vec{x} , obwohl sie ebenfalls (dreidimensionale) Vektoren sind. Man hat:

$$\boxed{F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\lambda F^{\rho\lambda}.} \quad (6.119)$$

Wähle als Beispiel die anfangs behandelte Lorentztransformation in ein in z -Richtung bewegtes Bezugssystem. Dann ergibt sich explizit:

$$(F'^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma E_x + \beta\gamma B_y & -\gamma E_y - \beta\gamma B_x & -E_z \\ +\gamma E_x - \beta\gamma B_y & 0 & -B_z & -\beta\gamma E_x + \gamma B_y \\ +\gamma E_y + \beta\gamma B_x & B_z & 0 & -\beta\gamma E_y - \gamma B_x \\ E_z & +\beta\gamma E_x - \gamma B_y & +\beta\gamma E_y + \gamma B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (6.120)$$

Daraus kann man die transformierten Felder ablesen:

$$\begin{aligned}
 E'_x &= \gamma(E_x - \beta B_y) \\
 E'_y &= \gamma(E_y + \beta B_x) \\
 E'_z &= E_z \\
 B'_x &= \gamma(B_x + \beta E_y) \\
 B'_y &= \gamma(B_y - \beta E_x) \\
 B'_z &= B_z.
 \end{aligned}
 \tag{6.121}$$

Berücksichtige nun noch, daß $\vec{v} = v\vec{e}_z$ ist, und zerlege \vec{E} und \vec{B} jeweils in ihre Anteile parallel und senkrecht zu \vec{v} ; dann gilt:

$$\boxed{
 \begin{aligned}
 \vec{E}'_{\perp} &= \gamma(\vec{E}_{\perp} + \vec{\beta} \times \vec{B}) \\
 \vec{E}'_{\parallel} &= \vec{E}_{\parallel} \\
 \vec{B}'_{\perp} &= \gamma(\vec{B}_{\perp} - \vec{\beta} \times \vec{E}) \\
 \vec{B}'_{\parallel} &= \vec{B}_{\parallel}.
 \end{aligned}
 }
 \tag{6.122}$$

Diese Formeln gelten nicht nur für den Übergang in ein in z -Richtung bewegtes Bezugssystem, sondern können allgemein für beliebige Boosts benutzt werden.

Vergleiche dies mit dem Transformationsverhalten des Koordinatenvektors:

$$\begin{aligned}
 \vec{x}'_{\perp} &= \vec{x}_{\perp} \\
 \vec{x}'_{\parallel} &= \gamma(\vec{x}_{\parallel} - \vec{\beta}ct).
 \end{aligned}
 \tag{6.123}$$

Es treten sowohl Gemeinsamkeiten als auch Unterschiede auf. Das erste, das auffällt, ist das Auftauchen der γ - und β -Faktoren in beiden Fällen: Die ungestrichenen Größen werden mit γ multipliziert, und andere Größen werden, zusätzlich mit β multipliziert, subtrahiert. Es findet also jeweils eine Vermischung von Größen statt, die vorher scheinbar nichts miteinander zu tun hatten, wobei die dazugemischten Größen um einen Faktor $\frac{v}{c}$ kleiner sind als die ursprünglichen.

Damit hören die Gemeinsamkeiten aber auch schon auf: Während beim Koordinatenvektor die nullte Komponente des Vierervektors dazugemischt wird, mischen hier zwei Dreiervektoren miteinander. Durch Lorentztransformation kann aus einem elektrischen Feld ein magnetisches werden und umgekehrt! Damit hat man etwas ganz wesentliches gezeigt: Elektrische und magnetische Felder sind eigentlich identisch - wie sich das „elektromagnetische Feld“ jeweils bemerkbar macht, hängt nur vom Bewegungszustand des Beobachters ab!

Ein Beispiel: Wenn ein Elektron durch ein Magnetfeld fliegt, wird es abgelenkt. Wie sieht dieser Vorgang aus, wenn man in das Bezugssystem des Elektrons geht? Dann ist das Elektron ja in Ruhe - also dürfte das magnetische Feld keinen Einfluß auf es haben. Man kann sich aber ausrechnen, daß vom Elektron aus gesehen zusätzlich ein elektrisches Feld existiert - und dieses hat genau die Stärke und Richtung, die nötig ist, um vom Standpunkt des Elektrons aus die Beschleunigung zu erklären, die der ruhende Beobachter durch das Magnetfeld erklärt.

Die Transformationsformel für das elektrische Feld kann man sich dementsprechend auch schon an der Formel für die Lorentzkraft klarmachen:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}). \quad (6.124)$$

Multipliziere diese Gleichung mit γ , damit links die relativistische Kraft steht:

$$\gamma\vec{F} = q\gamma(\vec{E} + \vec{\beta} \times \vec{B}) \quad (6.125)$$

Diese Kraft kann man nun so interpretieren, daß ein „effektives“ elektrisches Feld \vec{E}' auf das Teilchen einwirkt. Dann hat man sofort:

$$\vec{E}' = \gamma(\vec{E} + \vec{\beta} \times \vec{B}) \quad (6.126)$$

- was genau die oben angegebene Transformationsformel für \vec{E}'_{\perp} ist.

Die eben angesprochene Einheit des elektrischen und des magnetischen Feldes sieht man auch schon daran, daß sie zusammen im Feldstärketensor stehen - sie bilden gemeinsam ein physikalisches Objekt. Für unsere Sinne und unseren „gesunden Menschenverstand“ erscheinen sie zwar als zwei getrennte dreidimensionale Vektorfelder, in Wirklichkeit gehören sie aber zusammen und sind nur zwei verschiedene Erscheinungsformen desselben vierdimensionalen Tensorfeldes.

Deswegen transformieren die Vektorfelder auch so anders als beispielsweise der dreidimensionale Koordinatenvektor: Wie schon besprochen, mischen sie untereinander statt mit einer (hier gar nicht vorhandenen) nullten Komponente. Der zweite wichtige Unterschied ist das Verhalten der einzelnen Komponenten: Die Komponente in Bewegungsrichtung bleibt erhalten, die senkrecht dazu werden dagegen transformiert - im Gegensatz zum Koordinatenvektor, bei dem die Transformation nur Auswirkungen auf die Komponente in Bewegungsrichtung hatte. Die führt zu einer Verzerrung der Felder bewegter Ladungen: In Flugrichtung misst man immer noch das Feld einer (ruhenden) Punktladung, senkrecht dazu ist dagegen das Feld stärker - die Feldlinien werden immer dichter zusammengedrängt, um so größer die Geschwindigkeit ist (siehe auch *Greiner, Elektrodynamik*). Auch Effekte wie die sog. *Synchrotronstrahlung* können damit erklärt werden.

Wellen scheinen in bewegten Bezugssystem bekanntlich eine andere Frequenz zu haben als in ruhenden (*Dopplereffekt*). Bei der Herleitung der Frequenzverschiebung unterscheidet man klassisch die Fälle bewegter Sender/ ruhende Quelle und bewegte Quelle/ ruhender Sender. Vom Standpunkt des Relativitätsprinzips aus kann man diese beiden Fälle allerdings nicht unterscheiden - für beide muß dieselbe Formel gelten! Der Unterschied zu „klassischen“ Wellen ist der, daß bei diesen auch noch ein Medium existiert, in dem sie sich ausbreiten, so daß man Bewegungen immer eindeutig relativ zu diesem Medium angeben kann. Ein solches Medium existiert aber bekanntlich für elektromagnetische Wellen nicht (vgl. Michelson-Morley).

Betrachten wir also nun eine elektromagnetische ebene Welle mit den Amplituden $f_{\mu\nu}$, dem Wellenvektor \vec{k} und der Frequenz ω :

$$F_{\mu\nu}(\vec{x}, t) = f_{\mu\nu} e^{i(\vec{k} \bullet \vec{x} - \omega t)}. \quad (6.127)$$

In einem relativ dazu bewegten Inertialsystem gilt dann:

$$F'_{\mu\nu}(\vec{x}', t') = f'_{\mu\nu} e^{i(\vec{k}' \bullet \vec{x}' - \omega t')}, \quad (6.128)$$

wobei die Feldstärketensoren über

$$F'^{\mu\nu}(\vec{x}', t') = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\lambda F^{\rho\lambda}(\vec{x}(\vec{x}', t'), t(\vec{x}', t')) = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\lambda f^{\rho\lambda} e^{i(\vec{k} \bullet \vec{x} - \omega t)}. \quad (6.129)$$

miteinander verknüpft sind. Da aber die Amplituden $f_{\mu\nu}$ bzw. $f'_{\mu\nu}$ ebenfalls elektrische und magnetische Feldstärken sind, transformieren sie genauso:

$$f'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\lambda f^{\rho\lambda}. \quad (6.130)$$

Eingesetzt in (6.129) ergibt sich, daß die Welle im neuen Koordinatensystem die folgende Gestalt hat:

$$F'_{\mu\nu}(\vec{x}, t) = f'_{\mu\nu} e^{i(\vec{k}' \bullet \vec{x} - \omega t)}. \quad (6.131)$$

Vergleicht man dies mit dem obigen Ansatz für die Welle im neuen Koordinatensystem, so sieht man, daß die Phasen gleich sein müssen:

$$\vec{k}' \bullet \vec{x}' - \omega t' = \vec{k} \bullet \vec{x} - \omega t. \quad (6.132)$$

Definiert man sich den Vierertupel

$$(k^\mu) := \begin{pmatrix} \omega/c \\ \vec{k} \end{pmatrix}, \quad (6.133)$$

so kann die Phasengleichheit geschrieben werden als:

$$k'^\mu x'_\mu = k^\mu x_\mu, \quad (6.134)$$

das Skalarprodukt aus k und x ist also lorentzinvariant. Daraus folgt sofort, daß der *Vierer-Wellenvektor* (k^μ) ein kontravarianter Lorentz-Vierervektor ist. Dies sieht man auch an den de Broglie-Beziehungen $E = \hbar\omega$, $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ der Quantenmechanik: Sie können abkürzend geschrieben werden als $p^\mu = \hbar k^\mu$. Da (p^μ) aber ein kontravarianter Vierervektor ist und \hbar sicher ein Lorentzskalar, ergibt sich, daß auch (k^μ) ein kontravarianter Vierervektor sein muß.

Damit ergibt sich für die Transformationseigenschaften unter einer Lorentztransformation (in z -Richtung):

$$\begin{aligned} \omega' &= \gamma(\omega - k_z \beta c) \\ k'_x &= k_x \\ k'_y &= k_y \\ k'_z &= \gamma(k_z - \omega \beta / c). \end{aligned} \quad (6.135)$$

Allgemeiner ergibt sich für eine Lorentztransformation in Richtung \vec{n} (Einheitsvektor): $\omega' = \gamma(\omega - \vec{k} \bullet \vec{n} \beta c) = \gamma(\omega - kc\beta \cos(\theta))$, wobei θ der Winkel zwischen der Ausbreitungsrichtung der Welle und der Bewegungsrichtung des gestrichenen Inertialsystems ist. Mit der Dispersionsrelation $\omega = kc$ folgt also schließlich:

$$\boxed{\omega' = \gamma\omega(1 - \beta \cos(\theta))}. \quad (6.136)$$

Daran sieht man beispielsweise, daß sogar bei einer Bewegung senkrecht zur Richtung des Lichts ein Dopplereffekt auftritt ($\omega' = \gamma\omega$ für $\theta = \pi/2$): dies ist der sogenannte *transversale Dopplereffekt*, der experimentell auch bestätigt wurde. Aus den Transformationsformeln für den dreidimensionalen Wellenvektor kann man außerdem herleiten, daß man im gestrichenen System die Ausbreitungsrichtung der Welle unter einem anderen Winkel sieht (*Aberration*):

$$\tan(\theta') = \frac{\sin(\theta)}{\gamma(\cos(\theta) - \beta)}. \quad (6.137)$$

Zum Abschluß soll noch eine weitere Analogie zur Mechanik untersucht werden. Dort gibt es Größen, die unter Lorentztransformationen invariant sind, nämlich die Skalarprodukte von Vierervektoren, z. B. $x_\mu x^\mu$. Gibt es solche Invarianten auch in der Elektrodynamik?

Wir haben hier einerseits die Vierervektoren j^μ , A^μ und ∂^μ . Skalarprodukte, in denen A^μ vorkommt (beispielsweise die Lorentzgleichung $\partial_\mu A^\mu$), sind zwar sicher invariant, machen aber keine Aussagen über „anschauliche“ physikalische Größen. Sinnvoller ist da schon die Kontinuitätsgleichung $\partial_\mu j^\mu = 0$, die die Ladungserhaltung ausdrückt.

Andererseits haben wir nun aber auch noch den Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$ und den zugehörigen dualen Tensor $\tilde{F}^{\mu\nu}$. Um aus diesen Skalare zu konstruieren, müssen beide Indices kontrahiert werden; Beispiele hierfür sind $F_{\mu\nu} F^{\nu\mu}$, $F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\nu\mu}$, $\tilde{F}_{\mu\nu} F^{\nu\mu}$, $\tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}^{\nu\mu}$, $j_\mu F^{\mu\nu} j_\nu$ usw. Eine genauere Untersuchung ergibt, daß von den ersten vier jeweils zwei dasselbe Ergebnis liefern; die anderen Möglichkeiten sind von geringerem physikalischem Interesse. Explizit hat man:

$$\boxed{F_{\mu\nu} F^{\nu\mu} = 2\vec{B}^2 - 2\vec{E}^2} \quad (6.138)$$

und

$$\boxed{F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\nu\mu} = -4\vec{E} \bullet \vec{B}}. \quad (6.139)$$

Die Ausdrücke $\vec{E}^2 - \vec{B}^2$ und $\vec{E} \bullet \vec{B}$ sind also lorentzinvariant. Dies hätte man ohne Verwendung des Vierervektor-Formalismus schwerlich herausgefunden.

Man kann die beiden Invarianten auch zusammenfassend darstellen: In dem Ausdruck

$$(\vec{E} + i\vec{B})^2 = \vec{E}^2 - \vec{B}^2 + 2i\vec{E} \bullet \vec{B} \quad (6.140)$$

sind Real- und Imaginärteil beide lorentzinvariant.

Kapitel 7

Lagrange- und Hamiltonformalismus in der Elektrodynamik

In der Vorlesung Theoretische Physik I (Theoretische Mechanik) wurden zwei relativ abstrakte, aber auch sehr allgemeine Formalismen hergeleitet, mittels derer die Bewegungsgleichungen für ein gegebenes mechanisches System ausgerechnet werden können. Dies sind der Lagrange- und der Hamiltonformalismus mit jeweils einer zugehörigen Funktion $L(x, \dot{x})$ bzw. $H(x, p)$. Dieser Formalismus soll nun auch auf die Elektrodynamik erweitert werden.

Der Sinn ist nicht sofort einsichtig - wie auch schon in der Mechanik können wir uns ja die Bewegungsgleichungen mittels der Ausdrücke für die Kräfte sofort herleiten und brauchen diesen komplizierten Formalismus eigentlich gar nicht. Dieser hat jedoch (unter anderem) den Vorteil, daß alle physikalischen Gesetze nun in einem Ausdruck zusammengefaßt werden können: Aus der Lagrangefunktion erhält man mittels der Euler-Lagrange-Gleichungen alle Bewegungsgleichungen, ebenso aus der Hamiltonfunktion mittels der Hamilton-Gleichungen. Man muß nicht mehr jede Bewegungsgleichung einzeln hinschreiben, sondern hat alle zusammen in einer Formel. Die Lagrange- und die Hamiltonfunktion beschreiben also jeweils die komplette „Physik“ des Systems.

Konkrete Anwendungen findet der Hamiltonformalismus dann vor allem in der Quantenmechanik und Quantenfeldtheorie, wenn man zum Hamiltonoperator übergeht. Der Lagrangeformalismus ist dagegen der Ausgangspunkt für den Pfadintegral-Formalismus, ebenfalls sowohl in der Quantenmechanik als auch in der Quantenfeldtheorie.

7.1 Bewegtes Punktteilchen

Zunächst wollen wir wieder die Bewegungsgleichung für ein Punktteilchen finden, wie schon in der Theoretischen Mechanik. Neu hinzu kommt jedoch, daß wir nun auch relativistische Effekte berücksichtigen und außerdem die Kräfte nun von elektromagnetischen Feldern herkommen. Es treten also auch (durch

die Lorentzkraft) geschwindigkeitsabhängige Kräfte auf - es ist nicht von vornherein klar, wie man mit diesen umzugehen hat.

7.1.1 Freie relativistische Bewegung

Zunächst soll ein Fall ohne elektromagnetische Felder betrachtet werden: Die Lagrange- und Hamiltonfunktion für ein freies Teilchen der Ruhemasse m_0 . Dies wurde zwar eigentlich schon in der Theoretischen Mechanik behandelt - dort allerdings nur im nichtrelativistischen Grenzfall. Mit unseren Kenntnissen über Relativitätstheorie kann dies nun auf eine relativistische Bewegung verallgemeinert werden.

Ausgangspunkt soll hierbei die Hamiltonfunktion sein. Diese ist ja im allgemeinen identisch mit der Gesamtenergie; also gilt nun (für eine Bewegung in x-Richtung):

$$\boxed{H(x, p_x, t) = \sqrt{p_x^2 c^2 + m_0^2 c^4}.} \quad (7.1)$$

Durch eine der beiden Hamiltongleichungen ist dann die Geschwindigkeit festgelegt:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x c^2}{\sqrt{p_x^2 c^2 + m_0^2 c^4}}, \quad (7.2)$$

also

$$p_x = \frac{m_0 \dot{x}}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}}} = \gamma m_0 \dot{x}, \quad (7.3)$$

wie schon in Kapitel 6 hergeleitet.

Führt man nun eine Legendre-Transformation aus, so erhält man die Lagrangefunktion:

$$\begin{aligned} L(x, \dot{x}, t) &= p_x \dot{x} - H(x, p_x, t) = \gamma m_0 \dot{x}^2 - \sqrt{\gamma^2 m_0^2 \dot{x}^2 c^2 + m_0^2 c^4} \\ &= \gamma m_0 \dot{x}^2 - m_0 c^2 \sqrt{\gamma^2 \frac{\dot{x}^2}{c^2} + 1} = \gamma m_0 \dot{x}^2 - m_0 c^2 \sqrt{\frac{\dot{x}^2/c^2}{1 - \dot{x}^2/c^2} + 1} \\ &= \gamma m_0 \dot{x}^2 - m_0 c^2 \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}}} = \gamma m_0 (\dot{x}^2 - c^2) \\ &= -\gamma m_0 c^2 \left(1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}\right) = -\gamma m_0 c^2 \frac{1}{\gamma^2}, \end{aligned} \quad (7.4)$$

also

$$\boxed{L(x, \dot{x}, t) = -\frac{m_0 c^2}{\gamma};} \quad (7.5)$$

dasselbe Ergebnis erhält man auch für dreidimensionale Bewegungen.

Im Limes $\frac{\dot{x}}{c} \ll 1$ ergibt dies:

$$L(x, \dot{x}, t) \approx \frac{1}{2} m_0 \dot{x}^2 - m_0 c^2, \quad (7.6)$$

also gerade die übliche kinetische Energie, nur daß jetzt noch die Ruheenergie abgezogen wird. Die Ruheenergie/-masse kann also als potentielle Energie aufgefaßt werden (im Higgs-Feld).

7.1.2 Nichtrelativistisch bewegte Punktladung im elektromagnetischen Feld

Auf bewegte Punktladungen wirkt die Lorentzkraft - diese ist von der Geschwindigkeit abhängig. Die gewohnte Beziehung $L = T - V$ gilt aber nur dann, wenn die auftretenden Kräfte geschwindigkeits-unabhängig sind! Ebenso gilt nun nicht mehr unbedingt, daß die Hamiltonfunktion identisch mit der Gesamtenergie ist. Damit können wir nun weder Lagrange- noch Hamiltonfunktion direkt hinschreiben.

Wir gehen deshalb einen anderen Weg: Zunächst fordern wir, daß die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \quad (7.7)$$

weiterhin gültig sein soll. L muß nun so konstruiert werden, daß diese Formel die korrekte Bewegungsgleichung für ein bewegtes Partikel liefert.

Setze dafür zunächst die üblichen Terme für die kinetische und die potentielle Energie an: $T = \frac{1}{2} m_0 \dot{\vec{x}}^2$, $V_e = q\Phi$. Da die Lorentzkraft vom Magnetfeld abhängt und dieses wiederum vom Vektorpotential, liegt es nun nahe, analog zum Term mit dem skalaren Potential noch einen hinzuzufügen, der das Vektorpotential enthält. Die Lagrangefunktion muß aber ein Skalar sein - also kann der Term, der das Vektorpotential enthält, nur ein Skalarprodukt von \vec{A} mit einem anderen Vektor sein.

Zur Auswahl stehen im wesentlichen: 1) $\vec{A} \bullet \vec{A}$ - dann käme in der Lagrangefunktion das Vektorpotential quadratisch vor, im Gegensatz zum skalaren Potential. 2) $\vec{\nabla} \bullet \vec{A}$ - dann würde die Lagrangefunktion eine Ableitung des Vektorpotentials enthalten, wiederum im Gegensatz zum Term mit dem skalaren Potential. 3) $\vec{x} \bullet \vec{A}$ - sieht nicht schlecht aus, aber irgendwie vermisst man in diesem Term die Tatsache, daß die daraus abgeleitete Kraft von der Geschwindigkeit abhängt; außerdem steht keine sinnvolle Konstante zur Verfügung, mit der man diesen Term auf die richtige Einheit bringen könnte. 4) $\dot{\vec{x}} \bullet \vec{A}$ - dies scheint recht vielversprechend zu sein: die Bewegung steckt in diesem Term drin, und die Einheit bekommt man richtig hin, wenn man noch einen Faktor $\frac{1}{c}$ einbaut - wie üblich. Fügt man noch die Ladung hinzu, dann hat man also als Ansatz:

$$L = \frac{1}{2} m_0 \dot{\vec{x}}^2 - q\Phi + k q \frac{\dot{\vec{x}}}{c} \bullet \vec{A} \quad (7.8)$$

mit einer noch festzulegenden Konstante k .

Die Ableitungen der Lagrangefunktion sind nun:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m_0 \dot{x}_i + k \frac{q}{c} A_i \quad (7.9)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -q \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + k q \frac{\dot{\vec{x}}}{c} \bullet \frac{\partial \vec{A}}{\partial x_i}. \quad (7.10)$$

Bei der Berechnung der totalen Zeitableitung muß darauf geachtet werden, daß \vec{A} nicht nur direkt von der Zeit abhängt, sondern auch auf dem Umweg über

die Bahnkoordinaten:

$$\frac{d}{dt}A_i(\vec{x}(t), t) = \frac{\partial A_i}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial t} = \dot{A}_i + \dot{\vec{x}} \bullet \vec{\nabla} A_i. \quad (7.11)$$

Setzt man diese Ausdrücke schließlich in die Euler-Lagrange-Gleichung ein, so hat man:

$$m_0 \ddot{x}_i + k \frac{q}{c} \dot{A}_i + k \frac{q}{c} \dot{\vec{x}} \bullet \vec{\nabla} A_i + q \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} - k \frac{q}{c} \dot{\vec{x}} \bullet \frac{\partial \vec{A}}{\partial x_i} = 0. \quad (7.12)$$

Fasse nun die beiden Summanden mit $\dot{\vec{x}}$ zusammen. Um den Term $\dot{\vec{x}} \bullet (\vec{\nabla} A_i - \frac{\partial \vec{A}}{\partial x_i})$ auszuwerten, betrachtet man am besten eine feste Komponente, also beispielsweise $i = 1$ ($x_i = x_1 = x$):

$$\dot{\vec{x}} \bullet \left(\vec{\nabla} A_x - \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} \right) = \vec{v} \bullet \begin{pmatrix} \frac{\partial A_x}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial x} \\ \frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \end{pmatrix} = \vec{v} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ B_z \\ -B_y \end{pmatrix} = -v_y B_z + v_z B_y \quad (7.13)$$

Für die beiden anderen Komponenten geht die Rechnung genauso; man findet also: $\dot{\vec{x}} \bullet (\vec{\nabla} A_i - \frac{\partial \vec{A}}{\partial x_i}) = -(\vec{v} \times \vec{B})_i$. Eingesetzt in (7.12) ergibt dies dann:

$$m_0 \ddot{\vec{x}} = q \left(-\text{grad} \Phi - k \frac{1}{c} \dot{\vec{A}} \right) + k \frac{q}{c} (\vec{v} \times \vec{B}) = q \vec{E} + \frac{q}{c} (\vec{v} \times \vec{B}). \quad (7.14)$$

Andererseits muß $m_0 \ddot{\vec{x}}$ genau die Lorentzkraft

$$\vec{F} = q \vec{E} + \frac{q}{c} (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (7.15)$$

sein; also folgt $k = 1$.

Die Lagrangefunktion für ein nicht-relativistisches Teilchen in einem elektromagnetischen Feld ist also:

$$\boxed{L(\vec{x}, \vec{v}, t) = \frac{1}{2} m_0 \vec{v}^2 - q \Phi + q \frac{\vec{v}}{c} \bullet \vec{A}.} \quad (7.16)$$

Der kanonisch konjugierte Impuls $p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}$ ergibt sich nun zu:

$$\vec{p} = m_0 \vec{v} + \frac{q}{c} \vec{A} = \vec{p}_{kin} + \frac{q}{c} \vec{A}. \quad (7.17)$$

Der gewohnte „kinetische“ Impuls $\vec{p}_{kin} = m_0 \vec{v}$ ist nun also nicht mehr identisch mit dem kanonischen Impuls, der in die Hamiltongleichungen eingeht (und zu dem der Impulsoperator der Quantenmechanik gehört)!

Durch Legendre-Transformation gewinnt man die Hamiltonfunktion:

$$H = \vec{p} \bullet \vec{v} - L = \vec{p} \bullet \frac{\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A}}{m_0} - \frac{1}{2} m_0 \frac{\left(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2}{m_0^2} + q \Phi - \frac{\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A}}{m_0} \bullet \frac{q}{c} \vec{A}, \quad (7.18)$$

also

$$H(\vec{x}, \vec{p}, t) = \frac{1}{2} \frac{\left(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A}\right)^2}{m_0} + q\Phi = \frac{\vec{p}_{kin}^2}{2m_0} + q\Phi. \quad (7.19)$$

Man hat also für H genau den Ausdruck, den man auch sofort naiv für die Gesamtenergie hingeschrieben hätte. Nur hätte man dabei eine wichtige „Kleinigkeit“ verpaßt: Der Impuls, der in der kinetischen Energie steht, ist zwar weiterhin der kinetische Impuls $\vec{p}_{kin} = m_0 \vec{v}$; in die Hamiltongleichungen geht aber nicht er ein, sondern der kanonisch konjugierte Impuls $\vec{p} = \vec{p}_{kin} + \frac{q}{c} \vec{A}$! Der Umweg über das „Erraten“ der richtigen Form für die Lagrangefunktion war also nötig, um den korrekten Ausdruck für den Impuls zu finden.

7.1.3 Relativistisch bewegte Punktladung im elektromagnetischen Feld und kontinuierliche Verteilungen

Nachdem wir schon die Hamilton- und Lagrangefunktionen für das freie relativistische Punktteilchen und für die nichtrelativistische Punktladung kennen, können wir es uns im Prinzip aussuchen, wo wir bei der Behandlung der relativistisch bewegten Punktladung anfangen. Der Zugang über die Hamiltonfunktion ist meiner Ansicht nach zu bevorzugen, da diese (als Gesamtenergie) wenigstens noch eine halbwegs anschauliche Größe ist - im Gegensatz zur Lagrangefunktion.

Postulieren wir also aufgrund unserer bisher gewonnen Kenntnisse die Hamiltonfunktion für eine bewegte Punktladung im elektromagnetischen Feld:

$$H(\vec{x}, \vec{p}, t) = \sqrt{\left(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A}\right)^2 c^2 + m_0^2 c^4} + q\Phi. \quad (7.20)$$

Die Geschwindigkeit bekommt man wieder aus einer der beiden Hamiltongleichungen:

$$\vec{v} = \frac{\left(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A}\right) c^2}{\sqrt{\left(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A}\right)^2 c^2 + m_0^2 c^4}}, \quad (7.21)$$

und daraus folgt dann:

$$\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A} = \gamma m_0 \vec{v} = \vec{p}_{kin}, \quad (7.22)$$

wie erwartet. Die Legendre-Transformation liefert dann:

$$\begin{aligned} L &= \left(\gamma m_0 \vec{v} + \frac{q}{c} \vec{A}\right) \bullet \vec{v} - \sqrt{\gamma^2 m_0^2 \vec{v}^2 c^2 + m_0^2 c^4} - q\Phi \\ &= \gamma m_0 \vec{v}^2 - \sqrt{\gamma^2 m_0^2 \vec{v}^2 c^2 + m_0^2 c^4} - q\Phi + \frac{q}{c} \vec{A} \bullet \vec{v}. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Die restlichen Umformungen gehen genauso wie im Falle des freien relativistischen Teilchens, so daß man schließlich wie erwartet erhält:

$$L(\vec{x}, \vec{v}, t) = -\frac{m_0 c^2}{\gamma} - q\Phi + q \frac{\vec{v}}{c} \bullet \vec{A}. \quad (7.24)$$

Zusammenfassend: Der kinetische Term in der Lagrangefunktion ändert sich durch die Wechselwirkung mit dem magnetischen Feld nicht; er ist im nichtrelativistischen Fall gegeben durch $\frac{1}{2}m_0\vec{v}^2$, im relativistischen Fall durch $-\frac{m_0c^2}{\gamma}$. Der Wechselwirkungsterm mit dem Feld ist in beiden Fällen $-q\Phi + q\frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{A}$. In der Hamiltonfunktion ist der kinetische Term gegeben durch $\frac{\vec{p}_{kin}^2}{2m_0}$ (nichtrelativistisch) bzw. $\sqrt{\vec{p}_{kin}^2c^2 + m_0^2c^4}$ (relativistisch). Im Falle einer Wechselwirkung mit einem elektromagnetischen Feld ist für den kinetischen Impuls der kanonische minus die Wechselwirkung mit dem Vektorpotential einzusetzen: $\vec{p}_{kin} = \vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}$; zur Hamiltonfunktion (Gesamtenergie) ist die Wechselwirkung mit dem skalaren Potential $q\Phi$ zu addieren.

Will man die Bewegungsgleichung nicht für Punktteilchen, sondern für eine kontinuierliche Massenverteilung wissen, so ist der Lagrangeformalismus zu modifizieren. Zunächst kann man Masse und Ladung als Integral über die jeweiligen Dichten schreiben:

$$m_0 = \int \rho_m dV \quad (7.25)$$

$$q = \int \rho_e dV \quad (7.26)$$

Die Lagrangefunktion (7.24) geht nun über in:

$$L(\vec{x}, \vec{v}, t) = \int dV \left(-\frac{\rho_m c^2}{\gamma} - \rho_e \Phi + \rho_e \frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{A} \right). \quad (7.27)$$

Es liegt nun nahe, eine sogenannte *Lagrangedichte* \mathcal{L} einzuführen:

$$L = \int \mathcal{L} dV. \quad (7.28)$$

Dann hat man:

$$\mathcal{L}(\vec{x}, \vec{v}, t) = -\frac{\rho_m c^2}{\gamma} - \rho_e \Phi + \rho_e \frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{A}. \quad (7.29)$$

Der Ausdruck $\rho_e \vec{v}$ ist aber identisch mit der Stromdichte \vec{j} ; also gilt schließlich:

$$\boxed{\mathcal{L}(\vec{x}, \vec{v}, t) = -\frac{\rho_m c^2}{\gamma} - \rho_e \Phi + \frac{\vec{j}}{c} \cdot \vec{A}.} \quad (7.30)$$

In der Lagrangedichte steht nun der Ausdruck $\frac{1}{c}\vec{j} \cdot \vec{A}$ - genau dieser Ausdruck tauchte aber bei der Berechnung der Energie einer Stromverteilung im Magnetfeld (Abschnitt 4.4.1) schon mal auf. Damit ist unser Formalismus in sich konsistent.

7.1.4 * Kovariante Formulierung

Betrachte zunächst die Lagrangefunktion für die Punktladung (7.24). Berücksichtigt man, daß es für die Geschwindigkeit und das Potential jeweils Vierervektoren gibt ($A^\mu = (\Phi, \vec{A})$, $u^\mu = \gamma(c, \vec{v})$), so wird sie zu:

$$L(x^\mu, u^\mu, \tau) = -\frac{m_0 c^2}{\gamma} - \frac{q}{c\gamma} u_\mu A^\mu. \quad (7.31)$$

Der Faktor $\frac{1}{\gamma}$ ist hier noch etwas störend. Um ihn loszuwerden, berücksichtige, daß zu jeder Lagrangefunktion ja auch immer eine Wirkung gehört:

$$S = \int L dt. \quad (7.32)$$

Beim Rechnen mit relativistischen Größen ist es nun aber sinnvoller, statt der normalen Zeit t , die vom Bezugssystem abhängig ist, die Eigenzeit τ zu verwenden. Für diese gilt bekanntlich $dt = \gamma d\tau$; damit wird die Wirkung zu:

$$S = \int L \gamma d\tau. \quad (7.33)$$

Es ist also sinnvoll, die Lagrangefunktion nun umzudefinieren: $L_{rel} := \gamma L$. Damit hat man dann:

$$\boxed{L_{rel}(x^\mu, u^\mu, \tau) = -m_0 c^2 - \frac{q}{c} u_\mu A^\mu.} \quad (7.34)$$

Dieser Ausdruck ist manifest lorentzinvariant. Da die Wirkung das Integral dieser relativistischen Lagrangefunktion über die (ebenfalls invariante) Eigenzeit ist, ergibt sich, daß auch *die Wirkung ein Lorentzskalar ist*. Dies gilt übrigens nicht nur hier in diesem Spezialfall, sondern allgemein.

Um aus L_{rel} die Bewegungsgleichung zu gewinnen (sprich: die Lorentzkraft), braucht man allerdings eine modifizierte Euler-Lagrange-Gleichung (vergleiche *Greiner: Elektrodynamik*):

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial w^\mu} - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0, \quad (7.35)$$

wobei

$$w^\mu := \frac{dx^\mu}{ds} = u^\mu \frac{d\tau}{ds} \quad (7.36)$$

und s eine beliebige differenzierbare Funktion von τ ist.

Bei der Formulierung für kontinuierliche Verteilungen setze zunächst einfach die Vierervektoren $A^\mu = (\Phi, \vec{A})$, $j^\mu = (\rho, \vec{j})$ ein:

$$\boxed{\mathcal{L}(\vec{x}, \vec{v}, t) = -\frac{\rho_m c^2}{\gamma} - \frac{1}{c} j_\mu A^\mu.} \quad (7.37)$$

Der zweite Term ist manifest kovariant - aber was ist mit dem ersten? Um diese Frage zu beantworten, müssen wir uns zunächst das Transformationsverhalten

von Integrationsmaßen unter Lorentztransformationen anschauen. Für Raum-Zeit-Integrationen definiere: $d^4x := dV c dt$. Für die Umrechnung auf andere Koordinaten benutze wie üblich die Jacobi-Determinante:

$$d^4x' = \left| \det \left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \right) \right| d^4x. \quad (7.38)$$

Da aber bei Lorentztransformationen gilt: $\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} = \Lambda^{\mu}_{\nu}$ und $\det \Lambda = \pm 1$, folgt:

$$\boxed{d^4x' = d^4x}, \quad (7.39)$$

das vierdimensionale Integrationsmaß ist also lorentzinvariant.

Andererseits ist $d\tau = dt/\gamma$ auch lorentzinvariant; da aber $d^4x = dV c dt = dV \gamma c d\tau$ gilt, folgt, daß γdV eine Lorentzinvariante sein muß. Schreibt man nun den Zusammenhänge zwischen Masse und Massendichte bzw. Ladung und Ladungsdichte um:

$$m_0 = \int \frac{\rho_m}{\gamma} \gamma dV \quad (7.40)$$

$$q = \int \frac{\rho_e}{\gamma} \gamma dV, \quad (7.41)$$

und berücksichtigt, daß m_0 und q beides Lorentzskalare sind, so ergibt sich, daß die Dichten keine Skalare sein können (bei der Ladungsdichte wissen wir ja sowieso schon, daß sie die nullte Komponente eines Vierervektors ist); der Ausdruck ρ/γ ist aber lorentzinvariant. Genau dieser Ausdruck taucht nun im ersten Term der Lagrangedichte (7.37) auf - also ist diese insgesamt auch ein Lorentzskalar.

Auch für die Hamiltonfunktion kann man relativistische Argumente verwenden: Die Gesamtenergie ist ja proportional zur Nullkomponente des Viererimpulses, $H = cp^0$. Verwendet man die Hamiltonfunktion für ein freies relativistisches Teilchen, so gilt also:

$$cp^0 = \sqrt{\sum_i (p^i)^2 c^2 + m_0^2 c^4}. \quad (7.42)$$

Macht man nun die Ersetzung

$$p^{\mu} \rightarrow p^{\mu} - \frac{q}{c} A^{\mu}, \quad (7.43)$$

so wird daraus:

$$cp^0 - q\Phi = \sqrt{\sum_i \left(p^i - \frac{q}{c} A^i \right)^2 c^2 + m_0^2 c^4}. \quad (7.44)$$

Damit erhält man wieder das schon bekannte Ergebnis (7.20).

Die Regel (7.43), die angibt, wie der Viererimpuls geändert werden muß, wenn man eine Wechselwirkung mit einem elektromagnetischen Feld berücksichtigen will, wird oft als *minimale Ersetzung/Erweiterung* bezeichnet. *Minimal* meint hier, das für die Wechselwirkung nur die Ladung des betrachteten

Teilchens wichtig ist; alle anderen Eigenschaften wie beispielsweise Dipolmoment und ähnliches werden vernachlässigt. Deshalb gilt die Regel streng nur für Punktteilchen ohne innere Struktur, da diese kein Dipolmoment oder höhere Momente haben können. Für Elektronen ist die Formel sicher richtig (und auch ausgiebig experimentell überprüft); schon bei Protonen funktioniert sie nicht mehr.

7.2 * Das elektromagnetische Feld

Da wir gesehen haben, daß sich für ein Punktteilchen die richtigen Bewegungsgleichungen aus dem Lagrange- und Hamiltonformalismus ergeben (im wesentlichen die Lorentzkraft), ist zu vermuten, daß auch die Maxwell'schen Gleichungen eventuell irgendwie aus einer passend gewählten Lagrange- oder Hamiltonfunktion ableitbar sind.

Im Unterschied zum Punktteilchen benötigt man dafür aber den Lagrange- und Hamiltonformalismus für (relativistische) Felder. Dieser wird eigentlich normalerweise erst in Vorlesungen über Quantenfeldtheorie eingeführt und ist schlecht in Kürze darstellbar. Daher ist dieser Abschnitt relativ knapp formuliert; oft werden Sachverhalte nicht genauer erklärt, sondern nur angerissen. Eine exakte Behandlung dieser Probleme würde den Rahmen dieses Skriptes sprengen.

7.2.1 Klassische Formulierung

Ein möglicher Anfang ist hier erneut die Hamiltonfunktion, von der wir wiederum annehmen, daß sie mit der Gesamtenergie übereinstimmt. Der Einfachheit halber betrachten wir außerdem nur Felder im Vakuum und nehmen (vorläufig) an, daß keine Quellen vorhanden sind. Es gilt dann also:

$$H = \frac{1}{8\pi} \int \left(\vec{E}^2(\vec{x}, t) + \vec{B}^2(\vec{x}, t) \right) dV. \quad (7.45)$$

Die Hamiltonfunktion ist nun eigentlich aber gar keine Funktion mehr: Es wird nicht jedem Wert der Phasenraumkoordinaten (\vec{x}, \vec{p}, t) eine Zahl zugewiesen, sondern jeder Konfiguration der Felder, die durch die Funktionen \vec{E} und \vec{B} beschrieben werden, wird eine Zahl zugeordnet. Das heißt, wir haben nun ein Funktional der Felder, das *Hamiltonfunktional* $H[\vec{E}, \vec{B}]$.

Im vorherigen Abschnitt haben wir allerdings gelernt, daß im Lagrange- und Hamiltonformalismus im allgemeinen nicht die Felder auftauchen, sondern nur die Potentiale. Setze diese also ein:

$$H[\Phi, \partial_\mu \Phi, \vec{A}, \partial_\mu \vec{A}] = \frac{1}{8\pi} \int \left(\left(-\text{grad}\Phi - \frac{1}{c} \dot{\vec{A}} \right)^2 + (\text{rot}\vec{A})^2 \right) dV. \quad (7.46)$$

Um mit dem Funktional überhaupt irgendetwas ausrechnen zu können, brauchen wir nun zunächst die sogenannte *Funktionalableitung*. Diese ist definiert durch

$$\frac{\delta F[g]}{\delta g(x)} := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F[g + \epsilon \delta(x)] - F[g]}{\epsilon}. \quad (7.47)$$

Daraus erhält man sofort

$$\frac{\delta g(y)}{\delta g(x)} = \delta(y - x) \quad (7.48)$$

(analog $\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}$) und damit

$$\frac{\delta \int g(y) f(y) dy}{\delta g(x)} = f(x) \quad (7.49)$$

(analog $\frac{\partial(\vec{x} \cdot \vec{y})}{\partial x_j} = y_j$). Alle anderen Ableitungsregeln können im Prinzip von der normalen Ableitung übernommen werden; es gilt also beispielsweise:

$$\frac{\delta \int g^n(y) dy}{\delta g(x)} = n g^{n-1}(x). \quad (7.50)$$

Zu den Feldern können damit dann kanonisch konjugierte Impulse definiert werden (was auch immer man sich darunter vorzustellen hat):

$$\Pi(\vec{r}) := \frac{\delta H[\Phi, \vec{A}, \dot{\vec{A}}]}{\delta \dot{\Phi}(\vec{r})} = 0 \quad (7.51)$$

$$\mathcal{A}_i(\vec{r}) := \frac{\delta H[\Phi, \vec{A}, \dot{\vec{A}}]}{\delta \dot{A}_i(\vec{r})} = \frac{1}{4\pi c} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \dot{A}_i \right) = -\frac{1}{4\pi c} E_i. \quad (7.52)$$

Das Hamiltonfunktional ist also, wie üblich ausgedrückt durch die „Koordinaten“ und die kanonisch konjugierten „Impulse“:

$$H[\Phi, \partial_i \Phi, \Pi, \vec{A}, \partial_i \vec{A}, \dot{\vec{A}}] = \int \left(2\pi c^2 \vec{\mathcal{A}}^2 + \frac{1}{8\pi} (\text{rot} \vec{A})^2 \right) dV. \quad (7.53)$$

Das Lagrangefunktional erhält man durch eine entsprechend verallgemeinerte Legendre-Transformation:

$$\begin{aligned} L[\Phi, \dot{\Phi}, \vec{A}, \dot{\vec{A}}] &= \int (\dot{\Phi} \Pi) dV + \int (\dot{\vec{A}} \bullet \vec{\mathcal{A}}) dV - H \\ &= \frac{1}{4\pi c} \int \dot{\vec{A}} \bullet \left(\text{grad} \Phi + \frac{1}{c} \dot{\vec{A}} \right) dV \\ &\quad - \frac{1}{8\pi} \int \left(\left(-\text{grad} \Phi - \frac{1}{c} \dot{\vec{A}} \right)^2 + (\text{rot} \vec{A})^2 \right) dV \\ &= \frac{1}{4\pi} \int \left(\left(\text{grad} \Phi + \frac{1}{c} \dot{\vec{A}} \right)^2 - \text{grad} \Phi \bullet \left(\text{grad} \Phi + \frac{1}{c} \dot{\vec{A}} \right) \right) dV \\ &\quad - \frac{1}{8\pi} \int \left(\left(-\text{grad} \Phi - \frac{1}{c} \dot{\vec{A}} \right)^2 + (\text{rot} \vec{A})^2 \right) dV \\ &= \frac{1}{8\pi} \int \left(\left(-\text{grad} \Phi - \frac{1}{c} \dot{\vec{A}} \right)^2 - (\text{rot} \vec{A})^2 \right) dV \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \int \text{grad} \Phi \bullet \left(\text{grad} \Phi + \frac{1}{c} \dot{\vec{A}} \right) dV \\ &= \frac{1}{8\pi} \int (\vec{E}^2 - \vec{B}^2) dV + \frac{1}{4\pi} \int \Phi \left(\Delta \Phi + \frac{1}{c} \text{div} \dot{\vec{A}} \right) dV \\ &= \frac{1}{8\pi} \int (\vec{E}^2 - \vec{B}^2) dV - \int (\Phi \rho) dV \end{aligned} \quad (7.55)$$

Dabei wurde im zweiten Term eine partielle Integration ausgeführt, die Randterme weggelassen (es wird wie üblich angenommen, daß die Felder genügend stark gegen null gehen) und schließlich noch die Gleichung (5.8) eingesetzt. Da wir vorausgesetzt hatten, daß keine Quellen vorhanden sind ($\rho = 0$), ergibt sich also:

$$L[\vec{E}, \vec{B}] = \frac{1}{8\pi} \int (\vec{E}^2 - \vec{B}^2) dV \quad (7.56)$$

beziehungsweise

$$L[\Phi, \dot{\Phi}, \partial_i \Phi, \vec{A}, \dot{\vec{A}}, \partial_i \vec{A}] = \frac{1}{8\pi} \int \left(\left(-\text{grad}\Phi - \frac{1}{c} \dot{\vec{A}} \right)^2 - (\text{rot}\vec{A})^2 \right) dV. \quad (7.57)$$

Gehe nun über zum Fall mit Quelltermen. Beim Lagrange-Funktional haben wir schon gesehen, wie der Term mit der Ladungsdichte auszusehen hat; den Term mit der Stromdichte können wir wiederum äquivalent ansetzen (siehe auch (7.30)). Wir starten also mit folgendem Lagrangefunktional:

$$\boxed{L[\vec{E}, \vec{B}] = \int \left[\frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 - \vec{B}^2) - \rho\Phi + \frac{1}{c} \vec{j} \cdot \vec{A} \right] dV} \quad (7.58)$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned} & L[\Phi, \partial_\mu \Phi, \vec{A}, \partial_\mu \vec{A}] \quad (7.59) \\ &= \int \left[\frac{1}{8\pi} \left(\left(\text{grad}\Phi + \frac{1}{c} \dot{\vec{A}} \right)^2 - (\text{rot}\vec{A})^2 \right) - (\Phi\rho) + \frac{1}{c} (\vec{A} \cdot \vec{j}) \right] dV. \end{aligned}$$

Die kanonisch konjugierten Impulse erhält man nun durch Funktionalableitung von L :

$$\Pi(\vec{r}) := \frac{\delta L[\Phi, \dot{\Phi}, \vec{A}, \dot{\vec{A}}]}{\delta \dot{\Phi}(\vec{r})} = 0 \quad (7.60)$$

$$\mathcal{A}_i(\vec{r}) := \frac{\delta L[\Phi, \dot{\Phi}, \vec{A}, \dot{\vec{A}}]}{\delta \dot{A}_i(\vec{r})} = \frac{1}{4\pi c} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \dot{A}_i \right) = -\frac{1}{4\pi c} E_i; \quad (7.61)$$

man erhält dieselben „Impulse“ wie im Fall ohne Quellen, da die Quellterme keine zeitlichen Ableitungen der Potentiale enthalten. Setzt man für ρ nun wiederum (5.8) ein und führt alle Schritte, die vom Hamilton- zum Lagrange-funktional ohne Quellen führten, rückwärts durch, so erhält man also für das Hamiltonfunktional:

$$H[\Phi, \partial_\mu \Phi, \vec{A}, \partial_\mu \vec{A}] = \int \left[\frac{1}{8\pi} \left(\left(\text{grad}\Phi + \frac{1}{c} \dot{\vec{A}} \right)^2 + (\text{rot}\vec{A})^2 \right) - \frac{1}{c} (\vec{A} \cdot \vec{j}) \right] dV, \quad (7.62)$$

bzw. mit den kanonisch konjugierten Impulsen geschrieben:

$$H[\Phi, \partial_i \Phi, \Pi, \vec{A}, \partial_i \vec{A}, \vec{A}] = \int \left[\frac{1}{8\pi} \left(\vec{A}^2 + (\text{rot}\vec{A})^2 \right) - \frac{1}{c} (\vec{A} \cdot \vec{j}) \right] dV \quad (7.63)$$

oder mit den Feldern:

$$\boxed{H[\vec{E}, \vec{B}] = \int \left[\frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) - \frac{1}{c} \vec{j} \cdot \vec{A} \right] dV.} \quad (7.64)$$

Das Lagrangefunktional (7.58) sieht zwar recht vernünftig aus - enthält es aber auch wirklich die richtigen Gleichungen? Sprich: Sind die Maxwell-Gleichungen aus ihm ableitbar?

Wir werden nun sehen, daß sich zumindest die Gleichungen für die Potentiale direkt aus diesem Funktional ergeben. Dafür benötigen wir aber zunächst die Euler-Lagrange-Gleichung für Felder; sie lautet wie folgt:

$$\partial_t \frac{\delta L[\Phi]}{\delta(\partial_t \Phi)} + \sum_i \partial_i \frac{\delta L[\Phi]}{\delta(\partial_i \Phi)} - \frac{\delta L[\Phi]}{\delta \Phi} = 0, \quad (7.65)$$

wobei $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$ und $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ gesetzt wurde. Für die Komponenten A_i von \vec{A} sieht die Gleichung entsprechend aus.

Berechne also die Ableitungen des Lagrangefunktionals:

$$\frac{\delta L[\Phi]}{\delta(\partial_t \Phi)} = 0 \quad (7.66)$$

$$\partial_i \frac{\delta L[\Phi]}{\delta(\partial_i \Phi)} = \frac{1}{4\pi} \left(\partial_i \Phi + \frac{1}{c} \dot{A}_i \right) \quad (7.67)$$

$$\frac{\delta L[\Phi]}{\delta \Phi} = -\rho \quad (7.68)$$

Eingesetzt in die Euler-Lagrange-Gleichung ergibt sich dann:

$$\frac{1}{4\pi} \sum_i \left(\partial_i^2 \Phi + \frac{1}{c} \partial_i \dot{A}_i \right) + \rho = 0, \quad (7.69)$$

also

$$\Delta \Phi + \frac{1}{c} \operatorname{div} \dot{\vec{A}} = -4\pi\rho. \quad (7.70)$$

Diese Gleichung ist identisch mit der Potentialgleichung (5.8).

Diese hatten wir bei der Herleitung schon benutzt - also ist es kein allzu-großes Wunder, daß sie am Schluß auch wieder rauskommt. Das zeigt uns letztlich aber nur, daß der ganze Formalismus in sich schlüssig und widerspruchsfrei ist. Außerdem kann man aus dem Funktional durch Ableitung nach den A_i auch noch die zweite Potentialgleichung herausholen (die Rechnung spare ich mir jetzt):

$$\Delta \vec{A} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{grad} \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad (7.71)$$

und diese hatten wir ja bei der Konstruktion des Funktionals nicht benutzt. Es steckt also doch noch ein wenig mehr in der Gleichung drin als das, was man reingesteckt hat und deshalb sowieso erwartet hätte.

Setzt man nun die Felder wie üblich an als:

$$\vec{E} = -\text{grad}\Phi - \frac{1}{c}\dot{\vec{A}} \quad (7.72)$$

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A}, \quad (7.73)$$

wendet die möglichen Differentialoperatoren auf sie an und setzt (7.70), (7.71) ein, so erhält man schließlich wieder die Maxwell-Gleichungen (im Vakuum):

$$\text{div}\vec{E} = 4\pi\rho \quad (7.74)$$

$$\text{div}\vec{B} = 0 \quad (7.75)$$

$$\text{rot}\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = 0 \quad (7.76)$$

$$\text{rot}\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}. \quad (7.77)$$

7.2.2 Kovariante Formulierung

Schauen wir uns das Lagrangefunktional noch einmal genauer an. Die beiden hinteren Terme $-\rho\Phi + \frac{1}{c}\vec{j} \cdot \vec{A}$ kann man zum einfachen Ausdruck $-\frac{1}{c}j_\mu A^\mu$ zusammenfassen (siehe (7.37)).

Was aber ist mit dem vorderen Term? Der Ausdruck $\vec{E}^2 - \vec{B}^2$ tauchte so ähnlich schon mal auf - wir hatten in Abschnitt 6.3.4 gefunden, daß $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -2\vec{E}^2 + 2\vec{B}^2$ ein Lorentzskalar ist! Also kann das Lagrangefunktional (kurz, prägnant und manifest lorentzinvariant) geschrieben werden als:

$$L[F^{\mu\nu}, A^\mu] = \int \left[-\frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{c}j_\mu A^\mu \right] dV. \quad (7.78)$$

Setzt man den Zusammenhang (6.98) zwischen Feldstärketensor und Potentialen ein, so erhält man:

$$L[A_\mu, \partial^\nu A^\mu] = \int \left[-\frac{1}{16\pi}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) - \frac{1}{c}j_\mu A^\mu \right] dV. \quad (7.79)$$

Nach Ausmultiplikation und Umbenennen einiger Indices wird dies zu:

$$L[A_\mu, \partial^\nu A^\mu] = \int \left[-\frac{1}{8\pi}(\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu) - \frac{1}{c}j_\mu A^\mu \right] dV. \quad (7.80)$$

Eine partielle Integration (unter Vernachlässigung der Randterme) führt auf

$$L[A_\mu, \partial^\nu A^\mu] = \int \left[\frac{1}{8\pi}(A_\nu \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - A_\nu \partial_\mu \partial^\nu A^\mu) - \frac{1}{c}j_\mu A^\mu \right] dV. \quad (7.81)$$

Dies kann auch geschrieben werden als:

$$L[A_\mu, \partial^\nu A^\mu] = \int \left[\frac{1}{8\pi}A_\mu (g^{\mu\nu} \square - \partial^\mu \partial^\nu) A_\nu - \frac{1}{c}j_\mu A^\mu \right] dV. \quad (7.82)$$

Diese Form des Lagrangefunktionals ist der Ausgangspunkt der Quantisierung des elektromagnetischen Feldes im Pfadintegralformalismus der Quantenfeldtheorie.

Kapitel 8

Zusammenfassung

Die Fülle der Konzepte, die in den Kapitel 2 bis 7 präsentiert wurde, macht es nötig, noch mal zusammenzufassen, was denn nun wirklich wichtig ist und was man sich von diesem Teilgebiet der Theoretischen Physik merken sollte (für's Leben oder auch nur für die Prüfung). Im folgenden wird also aufgeschlüsselt nach Kapitel nochmals eine Übersicht gegeben. (*Anmerkung:* Wer das alles weiß, kann wohl mit einer 1.0 rechnen - außer natürlich, er weiß zu den anderen Vorlesungen nichts...)

Grundwissen (siehe auch Anhänge)

Was auf jeden Fall bekannt sein sollte: die Maxwell'schen Gleichungen in integraler und differentieller Form (im Vakuum und in Materie), die Ladungserhaltung (int. und diff., dafür auch die Herleitung aus den Maxwell'schen Gleichung - Verschiebungsstrom!) und die Lorentzkraft.

Außerdem sollte man die Vektorrechnung und -analysis halbwegs beherrschen. Die Kenntnis der kompletten Differentialoperatoren in krummlinigen Koordinaten ist sicher nicht nötig (sowas schlägt man bei Bedarf nach) - aber zumindest der Radialanteil des Laplaceoperators sollte bekannt sein. Außerdem sollte man sich mit konservativen Kraftfeldern und Potentialen auskennen und die Sätze von Gauß und Stokes kennen. Mit der Delta-Funktion umgehen zu können, wird ebenfalls vorausgesetzt - aber nicht ihre mathematische Herleitung und die Distributionentheorie. Aus der Funktionentheorie braucht man nicht allzuviel zu wissen - vielleicht gerade mal, daß es sowas wie analytische Funktionen gibt, die einige nette Eigenschaften haben, und daß Integralformeln wie die von Cauchy und der Residuensatz existieren, mit denen man Integrale in der komplexen Ebene auswerten kann.

Kapitel 2: Statische Felder im Vakuum

Wichtig ist hier das Konzept des skalaren Potentials, einschließlich Eichung (obwohl darauf später sowieso noch mal genauer eingegangen wird). Speziell die Poissongleichung (2.5) und der Zusammenhang mit dem elektrischen Feld über den Gradienten ist als absolut elementar zu bezeichnen. Das Potential einer Punktladung sollte bekannt sein - die Formel (2.11) für das Potential einer

beliebigen Ladungsverteilung ergibt sich ja dann daraus. Außerdem sollte man wissen, wie man das Gauß'sche Gesetz zur Berechnung von elektrischen Feldern benutzen kann. Das Konzept der Green'schen Funktion zur Lösung inhomogener Differentialgleichungen sollte zumindest soweit verstanden sein, das man es anwenden kann. Die Green'sche Funktion zum Laplace-Operator sollte bekannt sein (bis auf Faktoren -4π o. ä.). Die konkrete Berechnung von Green'schen Funktionen ist dagegen dann doch etwas zu kompliziert - das braucht man nicht alles verstanden zu haben, geschweige denn sich zu merken. Der grobe Rechenweg sollte aber klar sein: Fouriertransformation, um den Differentialoperator loszuwerden, Lösen der Gleichung im Fourierraum, Rücktransformation mit Hilfe des Residuensatzes. Die Behandlung von Randwertproblemen ist dagegen wieder wichtig: welche können auftreten, Lösung mittels geeigneter Wahl der Green'schen Funktion (die jeweiligen Formeln für muß man sich aber nicht unbedingt merken) und mittels Spiegelladungen.

Von der Multipolentwicklung sollte man sich vor allem merken, daß eine Entwicklung des Potentials nach Potenzen von $\frac{1}{r}$ möglich ist und daß die dabei auftretenden Koeffizienten Multipolmomente heißen. Es sollte bekannt sein, daß das Monopolmoment die Ladung ist, und für das Dipolmoment sollte man die definierende Formel (2.69) kennen. Zu den Kugelflächenfunktionen sollte man wissen, daß sie ein vollständiges Funktionensystem auf der Kugelschale bilden, daß man jede Funktion nach ihnen entwickeln kann, daß sie orthonormal sind und welche es überhaupt gibt (mögliche Werte für l und m) - und zumindest die konkrete Gestalt von Y_{00} sollte bekannt sein (Konstante). Die ganzen komplizierten Formeln für die Multipolentwicklung in Kugelkoordinaten braucht man sich dagegen nicht im Detail zu merken - höchstens qualitativ: zu einem Multipolmoment der Ordnung l gehört die radiale Abhängigkeit r^{-l-1} , die Winkelabhängigkeit wird durch die entsprechenden Kugelflächenfunktionen gegeben.

In der Magnetostatik ist der Zusammenhang zwischen Feld und Vektorpotential über die Rotation wiederum als elementar zu bezeichnen. Auch hier sollte man wissen, welche Eichtransformationen möglich sind, und es sollte bekannt sein, daß man in der Magnetostatik die Coulombbeziehung verwendet. Den integralen Zusammenhang zwischen Stromdichte und Vektorpotential sollte man sich ja leicht merken können, da er völlig analog zum elektrostatischen Fall ist. Außerdem sollte man mit dem Biot-Savart'schen Gesetz und auch mit dem Ampère'schen Gesetz umgehen können und beide herleiten können.

Zu Dipolen sollte man folgendes wissen: das von ihnen erzeugte Potential, ihre potentielle Energie in Feldern, Kräfte und Drehmomente auf sie - und daß die Kraft zwischen zwei Dipolen recht kompliziert ist, speziell daß sie von der relativen Orientierung abhängt.

Kapitel 3: Felder in Materie

Hier sollte man wissen, daß die Maxwell'schen Gleichungen in Materie durch eine Mittelung über lokale Ladungs- und Stromschwankungen der Materie entstehen. Die Zusammenhänge (3.13) und (3.53) sollten bekannt sein, ebenso, daß die Polarisation und die Magnetisierung jeweils Dipoldichten sind. Das

Stetigkeitsverhalten der vier Felder an Grenzflächen ist auch sehr wichtig.

Zu Stromkreisen sollten die Kirchhoff'schen Regeln bekannt sein und woraus sie folgen. Elementar ist auch das Ohm'sche Gesetz, sowohl in der lokalen als auch in der globalen Formulierung. Außerdem sollte man wissen, daß zwischen Ladungen und Potentialen bzw. magnetischen Flüssen und Strömen jeweils ein linearer Zusammenhang besteht (aber nicht unbedingt, wie dieser im Detail aussieht), der durch die Kapazitäts- bzw. Induktionskoeffizienten gegeben ist. Die technische Definition der Kapazität sollte bekannt sein, und man sollte auch bei einfachen Problemen (Platten-, Kugel-, Zylinderkondensator) die Kapazität ausrechnen können. Zu den konkreten Anwendungen in Stromkreisen sollte man wissen, daß imaginäre frequenzabhängige Widerstände und damit Phasenverschiebungen auftreten; außerdem sollte bekannt sein, daß solche Schaltungen als Frequenzpässe verwendbar sind. Die Formel für die Thomson-Frequenz und ihre Bedeutung ist ebenfalls gut zu wissen. Außerdem sollte klar sein, wie man die Wirkung einer Schaltung auf beliebige Signale mittels Fouriertransformation bestimmt. Der Skineffekt ist eher unwichtig - man sollte halt wissen, daß Signale hoher Frequenz sich bevorzugt in der „Haut“ des Drahtes ausbreiten.

Kapitel 4: Ausbreitung elektromagnetischer Wellen

Hier gehört die Herleitung der Wellengleichung für freie Wellen aus den Maxwellgleichungen zu den wichtigsten Dingen (wenn man's für die Telegraphengleichung auch kann, ist's natürlich auch nicht schlecht). Es muß bekannt sein, wie eine ebene Welle aussieht und wie man die allgemeinen Eigenschaften elektromagnetischer Wellen (besonders die Transversalität) aus den Maxwellgleichungen herleiten. Die verschiedenen Arten der Polarisierung und die Dispersionsrelation, speziell auch der Zusammenhang mit Phasen- und Gruppengeschwindigkeit, sollten ebenfalls klar sein.

Zu Hohlleitern braucht man eigentlich nur zu wissen, daß für eine gegebene Frequenz dort verschiedene Moden auftreten können und daß es sowohl TE-, TM- als auch TEM-Moden gibt (was das heißt, sollte natürlich auch klar sein!).

Bei der Brechung ist folgendes wichtig: Stetigkeit der Felder an der Grenzfläche, gleiche Frequenz, gleiche Ebene, Definition Brechungsindex, Snellius-Gesetz, Totalreflektion. Bei den Fresnel'schen Formeln sollte man wissen, wozu sie gut sind, aber nicht, wie sie aussehen - höchstens die Formel für den Brewster-Winkel könnte man sich merken.

Die Formeln (4.123), (4.131) für die Energiedichten der Felder sind dagegen wiederum sehr wichtig; auch den Poyntingvektor sollte man sich merken. Die Kontinuitätsgleichung für die Energieerhaltung sollte man herleiten und interpretieren können. Bei der Impulserhaltung genügt dagegen die Kenntnis der Gleichung und das Wissen, daß T eine Matrix (bzw. ein Tensor zweiter Stufe) ist (Formel ist nicht unbedingt nötig!). Der Zusammenhang mit dem Strahlungsdruck sollte bekannt sein, Beispiele dazu zu kennen ist sicher auch nicht schlecht.

Kapitel 5: Abstrahlung elektromagnetischer Wellen

Die Einführung der Potentiale muß klar sein (sollte man vorrechnen können), ebenso die Eichtransformationen. Zur Coulomb Eichung sollte man die Eichbedingung kennen und den Grund, warum sie so bezeichnet wird; ebenso den Grund für die Bezeichnung als transversale Eichung. Weitere Formeln wie die Zerlegung des Stromes in den transversalen und longitudinalen Anteil sind eher unwichtig. Die Lorentz Eichung dagegen sollte in allen Details klar sein, speziell die Gleichungen, die dann den Zusammenhang zwischen Potentialen und Ladungs- und Stromdichten angeben. Die retardierte Greensfunktion sollte bekannt sein (wenn auch nicht unbedingt in allen Details); wichtig ist vor allem die Interpretation als Abstrahlungsvorgang und die Verzögerung der Reaktion des Systems um die Zeit, die das Signal braucht, um von der Quelle dorthin zu laufen.

Von den Liénard-Wiechert-Potentialen sollte man zumindest gehört haben und ihre Bedeutung kennen; die genauen Formeln und die Herleitung sind dagegen nicht ganz so wichtig. Bei der Abstrahlung von Wellen durch eine harmonisch schwingende Punktladung muß man vor allem wissen, welche Näherungen durchgeführt werden (speziell auch die Unterscheidung Nah- und Fernfeld). Hier ist es sicher auch nicht schlecht, wenn man eine Entwicklung auch mal explizit vorführen kann. Die Abstrahlcharakteristik (Abhängigkeit von Frequenz, Winkel und Abstand) eines Dipols sollte bekannt sein.

Bei den allgemeinen Abstrahlungsvorgängen ist es wichtig zu wissen, daß man speziell monochromatische Schwingungen betrachtet und daß man den allgemeinen Fall wieder durch Fouriertransformation bekommt. Die Helmholtz-Gleichung und die zugehörige Green'sche Funktion sollte man sich mal angeschaut haben. Außerdem sollte der Beweis, daß es keine Monopolstrahlung geben kann, klar sein. Bei der konkreten Rechnung in kartesischen Koordinaten genügt es wiederum, die Näherungen und Entwicklungen verstanden zu haben und damit umgehen zu können. Bei der Multipolstrahlung in Kugelkoordinaten braucht man nur zu wissen, daß die radiale Abhängigkeit nun durch sphärische Besselfunktionen und die Winkelabhängigkeit wieder durch Kugelflächenfunktionen gegeben ist.

Kapitel 6: Spezielle Relativitätstheorie

Die Galilei-Transformation, die Einstein'schen Postulate und die Lorentztransformation (samt Konsequenzen, aber ohne Herleitung) müssen bekannt sein.

Der Vierervektorformalismus sollte klar sein - speziell die Unterscheidung zwischen kontra- und kovarianten Vierervektoren. Der Orts- und der Ableitungs-Vierervektor sollten bekannt sein, ebenso die Transformationsmatrix $\Lambda^\mu{}_\nu$, der metrische Tensor $g^{\mu\nu}$ und die Definition des Skalarproduktes. Auch wichtig sind die Definition von Vierergeschwindigkeit, -beschleunigung, -kraft und -impuls (bei letzterem auch das konkrete Aussehen). Daß die Einstein'sche Formel $E = mc^2$ bekannt sein muß, braucht ja wohl kaum erwähnt zu werden (die Herleitung muß man dagegen nicht unbedingt wissen). Zum Abschnitt über die Klassifizierung von Lorentztransformationen sollte man sich vor allem die

alternative Parametrisierung mittels der α_i und die darausfolgende Verwandtschaft zu Drehungen merken; auch die Additivität der α s ist wichtig. Das ganze Zeug über die Gruppeneigenschaften von Lorentztransformationen ist dagegen unwichtig.

Zur kovarianten Formulierung der Elektrodynamik sollten folgende Gleichungen auf jeden Fall bekannt sein: Viererstrom (6.76), Kontinuitätsgleichung (6.78), Feldstärkentensor (6.80), dualer Feldstärkentensor (6.86) und die Maxwell-Gleichungen (6.87) und (6.81). Bei den Tensoren ist es natürlich nicht so schlimm, wenn man sich nicht jedes einzelne Vorzeichen merken kann - nur die Grundstruktur sollte klar sein. Außerdem sollte man das Viererpotential, die Eichtransformationen, die Lorentzgleichung und den Zusammenhang mit dem Viererstrom hinschreiben können und wissen, wie der Feldstärkentensor aus dem Viererpotential berechnet wird. Zur Energie-Impuls-Erhaltung genügt es, die Formel (6.108) und den Aufbau des Energie-Impuls-Tensors aus Energiedichte, Poyntingvektor, Impulsdichte und Spannungstensor zu kennen - die explizite Formel für $T^{\mu\nu}$ braucht man sich nicht zu merken. In allen Einzelheiten bekannt sollte dagegen das Transformationsverhalten der Felder sein; und als kleinen Bonus kann man sich dann auch noch die relativistischen Invarianten merken.

Kapitel 7: Lagrange- und Hamiltonformalismus in der Elektrodynamik

Hier sollte man die explizite Gestalt der Lagrange- und Hamiltonfunktion für nicht-relativistische und relativistische Punktteilchen, jeweils mit und ohne Felder, kennen. Besonders wichtig ist hierbei die Unterscheidung zwischen kinetischem und kanonischem Impuls. Die kovariante Formulierung ist dagegen eher wieder unwichtig (aber ich fand's halt interessant).

Das gleiche gilt für den kompletten Abschnitt 7.2: ist zwar sehr interessant, wird aber in der Elektrodynamik sicher nicht gefragt. Wen's interessiert, der kann es natürlich gerne trotzdem lernen - wichtig finde ich dort aber eigentlich nur die explizite Gestalt des Lagrangefunktional (speziell daß dort die Differenz der Quadrate der Feldstärken auftaucht) und die kovariante Formulierung, sowohl mit dem Feldstärketensor als auch mit den Potentialen.

Das war's dann - dies ist (hoffentlich) alles, was man über Theoretische Elektrodynamik jemals wissen muß (und wahrscheinlich noch einiges darüber hinaus). Mir bleibt nur noch zu sagen:

Mehr, wenn ihr mich wiederseht - ihr müsst unbedingt gucken, wie's weitergeht! (im Skript zur Quantenmechanik - Erscheinungsdatum sehr fraglich)

Anhang A

Mathematisches Handwerkszeug

A.1 Vektorrechnung und -analysis

A.1.1 Grundlagen der Vektorrechnung

Für die Rechnungen in der Elektrodynamik ist es wichtig, einige grundlegende Definitionen und Formeln zu kennen. Geradezu elementar ist dabei der Umgang mit Vektoren. Addition von Vektoren und Multiplikation mit einem Skalar bedürfen wohl keiner näheren Erläuterung, ebenso das Skalarprodukt (auch inneres Produkt genannt). Eine weitere Möglichkeit zur Multiplikation von Vektoren ist das Kreuz- oder auch äusseres Produkt, das bekanntlich für zwei Vektoren $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ und $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ folgendermaßen definiert ist:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x), \quad (\text{A.1})$$

was auch geschrieben werden kann als

$$(\vec{a} \times \vec{b})_i = \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} a_j b_k \quad (\text{A.2})$$

mit dem sogenannten Levi-Cevita-Symbol ϵ_{ijk} , das 0 ist, falls zwei der Indices übereinstimmen, und ansonsten das Vorzeichen der jeweiligen Permutation von (1,2,3) angibt (also z.B. $\epsilon_{132} = -1$). Eine dritte Möglichkeit ist die Darstellung als Matrixmultiplikation:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix} \vec{b} =: A\vec{b}; \quad (\text{A.3})$$

die hier auftauchende Matrix ist antisymmetrisch; $A_{ik} = \epsilon_{ijk} a_j$.

Für das Rechnen mit Skalar- und Kreuzprodukt gelten folgende Regeln:

$$\begin{aligned} \vec{a} \bullet \vec{b} &= \vec{b} \bullet \vec{a} \quad (\text{Kommutativität}) \\ \vec{a} \times \vec{b} &= -\vec{b} \times \vec{a} \quad (\text{Anti-Kommutativität}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{a} \bullet (\vec{b} \times \vec{c}) &= \vec{b} \bullet (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \bullet (\vec{a} \times \vec{b}) \quad (\text{Spatprodukt}) \\
\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{a} \bullet \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \bullet \vec{b}) \quad (,bac-cab") \\
\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) &= 0 \quad (\text{Jacobi-Identität}). \quad (\text{A.4})
\end{aligned}$$

Es gibt noch eine weitere Möglichkeit zur Multiplikation von Vektoren: das sogenannte dyadische Produkt. Es ist folgendermaßen definiert:

$$\vec{a} \otimes \vec{b} := \begin{pmatrix} a_x b_x & a_x b_y & a_x b_z \\ a_y b_x & a_y b_y & a_y b_z \\ a_z b_x & a_z b_y & a_z b_z \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

(*Vorsicht, keine Standardnotation!* In *Bronstein, Taschenbuch der Mathematik* wird beispielsweise $\vec{a} \cdot \vec{b}$ geschrieben.) Man kann also aus Vektoren durch Multiplikation sowohl einen Skalar, einen Vektor als auch einen Tensor zweiter Stufe erhalten; dies ist spezifisch für den dreidimensionalen Raum und in anderen Dimensionen nicht möglich. Leicht nachrechenbar sind folgende Beziehungen:

$$(\vec{a} \otimes \vec{b})^T \vec{c} = (\vec{b} \otimes \vec{a}) \vec{c} = (\vec{a} \bullet \vec{c}) \vec{b} \quad (\text{A.6})$$

$$\text{Sp}(\vec{a} \otimes \vec{b}) = \vec{a} \bullet \vec{b}. \quad (\text{A.7})$$

A.1.2 Definition der Vektor-Differentialoperatoren

Wie in anderen Gebieten der Physik sind auch in der Elektrodynamik die grundlegenden Gleichungen Differentialgleichungen. Im Gegenteil zur Mechanik kommen nun in den Gleichungen aber Felder vor, d.h., Funktionen der Ortsvariablen. Deswegen tritt nun ein vektorwertiger Differentialoperator auf, der sogenannte Nabla-Operator:

$$\vec{\nabla} := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

Mit diesem Operator kann i.a. genau wie mit einem normalen Vektor gerechnet werden. Es werden allerdings einige spezielle Bezeichnungen verwendet:

$$\text{grad} \Phi := \vec{\nabla} \Phi \quad (\text{A.9})$$

$$\text{div} \vec{A} := \vec{\nabla} \bullet \vec{A} \quad (\text{A.10})$$

$$\text{rot} \vec{A} := \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (\text{A.11})$$

$$\Delta \Phi := \vec{\nabla} \bullet \vec{\nabla} \Phi \quad (\text{A.12})$$

$$\equiv \text{div grad} \Phi \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi \quad (\text{A.13})$$

Der Differentialoperator zweiter Ordnung Δ heißt Laplace-Operator und ist auch auf Vektoren (komponentenweise) anwendbar - wenn man in kartesischen Koordinaten rechnet. Zusätzlich zu diesen Differentialoperatoren kann man auch eine sog. Richtungsableitung $\vec{A} \bullet \vec{\nabla}$ bilden.

A.1.3 Rechenregeln

Es gelten folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \vec{r} &= 3; \quad \operatorname{rot} \vec{r} = 0; \quad \operatorname{grad} f(r) = \frac{\vec{r}}{r} \frac{\partial f}{\partial r}; \quad \vec{\nabla} \otimes \vec{r} = id_3 \\
 \operatorname{rot} \operatorname{grad} &= 0 \Leftrightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \Phi) = 0 \\
 \operatorname{div} \operatorname{rot} &= 0 \Leftrightarrow \vec{\nabla} \bullet (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0 \\
 \operatorname{rot} \operatorname{rot} &= \operatorname{grad} \operatorname{div} - \Delta \Leftrightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = (\vec{\nabla} \otimes \vec{\nabla} - id_3 \vec{\nabla} \bullet \vec{\nabla}) \vec{A} \\
 (\vec{A} \bullet \vec{\nabla}) \vec{B} &= (\vec{\nabla} \otimes \vec{B})^T \vec{A} \tag{A.14}
 \end{aligned}$$

id bezeichnet bei mir die Identitätsabbildung, im speziellen id_n die Einheitsmatrix im n -dimensionalen Raum (auch keine Standardnotation!).

Außerdem gibt es noch mehrere Produktregeln:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{grad}(\vec{A}(\vec{r}) \bullet \vec{B}(\vec{r})) &= (\vec{A} \bullet \vec{\nabla}) \vec{B} + (\vec{B} \bullet \vec{\nabla}) \vec{A} + \vec{A} \times (\operatorname{rot} \vec{B}) + \vec{B} \times (\operatorname{rot} \vec{A}) \\
 \operatorname{div}(f(\vec{r}) \vec{A}(\vec{r})) &= \operatorname{grad} f(\vec{r}) \bullet \vec{A}(\vec{r}) + f(\vec{r}) \operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}) \\
 \operatorname{rot}(f(\vec{r}) \vec{A}(\vec{r})) &= \operatorname{grad} f(\vec{r}) \times \vec{A}(\vec{r}) + f(\vec{r}) \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r}) \\
 \operatorname{div}(\vec{A}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})) &= (\operatorname{rot} \vec{A}) \bullet \vec{B} - \vec{A} \bullet (\operatorname{rot} \vec{B}) \\
 \operatorname{rot}(\vec{A}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})) &= \vec{A}(\operatorname{div} \vec{B}) - (\operatorname{div} \vec{A}) \vec{B} + (\vec{B} \bullet \vec{\nabla}) \vec{A} - (\vec{A} \bullet \vec{\nabla}) \vec{B} \tag{A.15}
 \end{aligned}$$

A.1.4 Differentialoperatoren in Zylinder- und Kugelkoordinaten

Bei Verwendung krummliniger Koordinatensysteme haben die Differentialoperatoren nicht mehr die einfache Gestalt wie in kartesischen Koordinaten. Den allgemeinen Formalismus findet man z. B. in *Großmann, Mathematischer Einführungskurs für die Physik*; hier sollen nur die Ergebnisse angegeben werden.

Zylinderkoordinaten

Die Koordinaten sind hier der Radius r , der (Azimuthal-)Winkel ϕ und die Höhe z ; der Zusammenhang mit den kartesischen Koordinaten ist:

$$x = r \cos(\phi); \quad y = r \sin(\phi); \quad z = z \tag{A.16}$$

Man kann dann orthonormierte Einheitsvektoren in Richtung dieser Koordinaten definieren durch:

$$\vec{e}_r := \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} / \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right| = (\cos(\phi), \sin(\phi), 0) \tag{A.17}$$

usw. Ein beliebiger Vektor hat bezüglich dieser Basisvektoren folgende Darstellung:

$$\vec{a} = a_r \vec{e}_r + a_\phi \vec{e}_\phi + a_z \vec{e}_z. \tag{A.18}$$

Da die Einheitsvektoren im Gegensatz zum kartesischen Koordinatensystem nun also ortsabhängig sind, tauchen Schwierigkeiten mit den Differentialoperatoren auf: Bei Anwendung eines solchen Operators wird nun nicht nur die

Funktion abgeleitet, sondern auch die Basisvektoren. Die Differentialoperatoren wirken dann folgendermaßen:

$$\text{grad}\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\vec{e}_\phi + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{e}_z \quad (\text{A.19})$$

$$\text{div}\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{A.20})$$

$$\begin{aligned} \text{rot}\vec{A} &= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\phi \\ &\quad + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\phi}\right)\vec{e}_z \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \quad (\text{A.22})$$

Die Wirkung des Laplaceoperators auf einen Vektor erhält man mit Hilfe der Formel $\Delta = \text{grad div} - \text{rot rot}$.

Kugelkoordinaten

Die Koordinaten sind nun der Radius r , der Polarwinkel θ und der Azimutalwinkel ϕ mit:

$$x = r \sin(\theta) \cos(\phi); \quad y = r \sin(\theta) \sin(\phi); \quad z = r \cos(\theta). \quad (\text{A.23})$$

Ebenso wie bei den Zylinderkoordinaten kann man die zugehörigen Einheitsvektoren definieren.

Die Differentialoperatoren wirken nun wie folgt:

$$\text{grad}\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\vec{e}_\phi \quad (\text{A.24})$$

$$\text{div}\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial(\sin(\theta)A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} \quad (\text{A.25})$$

$$\begin{aligned} \text{rot}\vec{A} &= \frac{1}{r\sin(\theta)}\left(\frac{\partial(\sin(\theta)A_\phi)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right)\vec{e}_r \\ &\quad + \frac{1}{r\sin(\theta)}\left(\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \sin(\theta)\frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta \\ &\quad + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\vec{e}_z \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} \quad (\text{A.27})$$

Wiederum erhält man die Wirkung des Laplaceoperators auf einen Vektor mittels $\Delta = \text{grad div} - \text{rot rot}$. Beispielsweise gilt:

$$(\Delta\vec{A})_r = \Delta A_r - \frac{2}{r^2}A_r - \frac{2}{r^2\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin(\theta)A_\theta) - \frac{2}{r^2\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\phi}A_\phi; \quad (\text{A.28})$$

nicht etwa $(\Delta \vec{A})_r = \Delta A_r!!!$

Den Radiusanteil des Laplaceoperators, angewandt auf skalare Funktionen, kann man auch noch auf zwei andere Arten schreiben:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r\Phi)}{\partial r^2} \quad (\text{A.29})$$

A.2 Wegunabhängigkeit von Integralen; Potentiale

Betrachte ein skalares Feld $\Phi(\vec{r})$ und bilde daraus das Gradientenfeld:

$$\vec{E}(\vec{r}) := -\text{grad}\Phi(\vec{r}). \quad (\text{A.30})$$

Man sieht sofort, daß $\text{rot } \vec{E} = 0$ gilt, da $\text{rot grad} = 0$. Man kann also folgern: wenn ein Vektorfeld \vec{E} sich als Gradient eines Skalarfeldes darstellen lässt, also eine Stammfunktion besitzt, dann ist $\text{rot } \vec{E} = 0$ in dem Bereich, in dem \vec{E} differenzierbar ist. In diesem Fall kann man Φ schreiben als

$$\Phi(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{s} \cdot \vec{E}(\vec{s}) \quad (\text{A.31})$$

mit einem beliebig wählbaren Punkt \vec{r}_0 (die Wahl eines anderen Punktes führt nur zu einer additiven Konstante, wie üblich bei der Definition einer Stammfunktion). Nach Voraussetzung ist Φ eindeutig bestimmt (bis auf die Wahl von \vec{r}_0), d.h., der Wert des Integrals ist unabhängig vom genauen Weg, den man von \vec{r}_0 nach \vec{r} nimmt! Umgekehrt kann man natürlich auch folgern: Wenn Integrale über \vec{E} wegunabhängig sind, dann kann man ein skalares Feld Φ so definieren wie angegeben, \vec{E} lässt sich dann als Gradientenfeld dieses skalaren Feldes schreiben, und es gilt wieder $\text{rot } \vec{E} = 0$.

Wenn man von $\text{rot } \vec{E} = 0$ ausgeht, kann man dagegen nicht automatisch folgern, daß das Integral wegunabhängig ist und Φ existiert. Man benötigt eine zusätzliche Voraussetzung: Das betrachtete Gebiet muß einfach zusammenhängend sein, d.h., jede geschlossene Kurve in dem Gebiet muß sich auf einen Punkt zusammenziehen lassen. (zweidimensionale Beispiele: siehe Abb. A.1) Wenn dies gilt, so ist $\text{rot } \vec{E} = 0$ äquivalent zur Wegunabhängigkeit von Integralen über \vec{E} und zur Existenz eines skalaren Feldes, als dessen Gradientenfeld \vec{E} geschrieben werden kann.

Erfüllt ein Kraftfeld diese Bedingungen, so spricht man in der Mechanik von einem sog. konservativen Kraftfeld; das zugehörige skalare Feld ist dann die potentielle Energie. Deswegen wird das hier auftretende skalare Feld allgemein auch als Potential bezeichnet.

Wir haben bisher den Fall eines wirbelfreien Feldes betrachtet. Es kann aber auch vorkommen, daß ein Feld zwar Wirbel, aber keine Quellen hat, $\text{div } \vec{B} = 0$. Auch in diesem Fall kann man eine Stammfunktion für \vec{B} finden: benutze nun statt $\text{rot grad} = 0$ die Beziehung $\text{div rot} = 0$; das heisst, es ist zu vermuten, daß sich \vec{B} darstellen läßt als

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}. \quad (\text{A.32})$$

Abbildung A.1: Verschiedene mögliche Gebiete: Das erste und das zweite sind einfach zusammenhängend, das dritte dagegen nicht (eine Kurve, die das Loch einschließt, kann nicht innerhalb des Gebietes auf einen Punkt zusammengezogen werden)

Dies gilt wiederum relativ allgemein; Voraussetzung ist nur, daß das betrachtete Gebiet einfach zusammenhängend ist - nun allerdings in einer etwas anderen Bedeutung als beim Skalarpotential: Jede geschlossene Fläche muß sich auf einen Punkt zusammenziehen lassen (beim Skalarpotential: jede geschlossene Kurve). Der Raum zwischen zwei konzentrischen Kugelschalen wäre beispielsweise für geschlossene Kurven einfach zusammenhängend, für geschlossene Flächen nicht.

\vec{A} wird in Analogie zu Φ als Vektorpotential bezeichnet; es läßt sich berechnen durch

$$\vec{A} = \int_0^1 (\vec{B}(\alpha\vec{r}) \times \vec{r}) \alpha d\alpha. \quad (\text{A.33})$$

Bildet man nämlich von dieser Formel die Rotation, so ergibt sich wieder das Feld \vec{B} :

$$\begin{aligned} \text{rot}\vec{A}(\vec{r}) &= \int_0^1 \text{rot}(\vec{B}(\alpha\vec{r}) \times \vec{r}) \alpha d\alpha \\ &= \int_0^1 [\vec{B}(\text{div}\vec{r}) - (\text{div}\vec{B})\vec{r} + (\vec{r} \bullet \vec{\nabla})\vec{B} - (\vec{B} \bullet \vec{\nabla})\vec{r}] \alpha d\alpha \\ &= \int_0^1 [3\vec{B} - 0 + \alpha \left(\vec{r} \bullet \frac{\vec{\nabla}}{\alpha} \right) \vec{B}(\alpha\vec{r}) - \vec{B}] \alpha d\alpha \\ &= \int_0^1 \left[2\vec{B}(\vec{r}') + \alpha \left(\vec{r} \bullet \vec{\nabla}' \right) \vec{B}(\vec{r}') \right] \alpha d\alpha \\ &= \int_0^1 \left[2\vec{B}(\vec{r}') + \alpha \left(\frac{d\vec{r}'}{d\alpha} \bullet \vec{\nabla}' \right) \vec{B}(\vec{r}') \right] \alpha d\alpha \\ &= \int_0^1 \left[2\alpha\vec{B}(\vec{r}') + \alpha^2 \frac{d\vec{B}(\vec{r}')}{d\alpha} \right] d\alpha = \int_0^1 \frac{d}{d\alpha} [\alpha^2 \vec{B}(\vec{r}')] d\alpha \\ &= [\alpha^2 \vec{B}(\vec{r}')]_0^1 = \vec{B}(\vec{r}). \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

\vec{A} ist aber ebenso wie Φ nicht eindeutig bestimmt. Bei Φ besteht die Wahlfreiheit nur in einer additiven Konstante - zu \vec{A} kann man dagegen den Gradienten eines beliebigen Skalarfeldes χ addieren, ohne \vec{B} zu verändern, da rot

grad = 0 gilt:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad}\chi \implies \text{rot}\vec{A}' = \text{rot}\vec{A}. \quad (\text{A.35})$$

A.3 Die Sätze von Gauß und Stokes

Ebenso wie bei normalen Integralen gibt es auch für räumliche Integrale über Felder Regeln für die (partielle) Integration. Man kann Volumenintegrale über Ableitungen von Feldern in Oberflächenintegrale über die Felder umwandeln, und ebenso Flächenintegrale über die Ableitungen in Randintegrale über die Felder. Dies wird durch die Sätze von Gauß und Stokes ermöglicht, die im folgenden näher betrachtet werden sollen.

A.3.1 Der Satz von Gauß

Sei \vec{A} ein Vektorfeld, daß auf einem Volumen V des Raumes mindestens einmal differenzierbar ist, und sei ∂V der Rand dieses Gebietes, also eine geschlossene Fläche, so gilt:

$$\int_V dV \text{div}\vec{A} = \oint_{\partial V} d\vec{F} \cdot \vec{A} \quad (\text{Gauß 1839}). \quad (\text{A.36})$$

Bei der Flächenintegration zeigt dabei das infinitesimale Flächenelement $d\vec{F}$ nach außen.

Ausgehend von diesem Satz kann man auch noch andere Formeln gewinnen; setze beispielsweise für \vec{A} einen konstanten Vektor, multipliziert mit einem skalaren Feld, ein:

$$\int_V dV \text{div}(\vec{A}_0 \Phi) = \vec{A}_0 \cdot \int_V dV \text{grad}\Phi(\vec{r}) = \vec{A}_0 \cdot \oint_{\partial V} d\vec{F} \Phi, \quad (\text{A.37})$$

also

$$\int_V dV \text{grad}\Phi(\vec{r}) = \oint_{\partial V} d\vec{F} \Phi. \quad (\text{A.38})$$

Ähnlich zeigt man:

$$\int_V dV \text{rot}\vec{A} = \oint_{\partial V} d\vec{F} \times \vec{A} \quad (\text{A.39})$$

A.3.2 Der Satz von Stokes

Betrachte hier eine beliebige (nicht geschlossene) Fläche F im Raum mit Rand ∂F und ein auf dieser Fläche mindestens einmal differenzierbares Vektorfeld \vec{A} . Es gilt dann:

$$\int_F d\vec{F} \cdot \text{rot}\vec{A} = \oint_{\partial F} d\vec{s} \cdot \vec{A} \quad (\text{Stokes 18??}) \quad (\text{A.40})$$

Die Integration über ∂F ist dabei so auszuführen, daß die Flächennormale $d\vec{F}$ im mathematisch positiven Sinn umlaufen wird (Rechte-Hand-Regel).

Dies ist der Satz von Stokes in der Form, wie er in der Physik meist verwendet wird. Die mathematische Formulierung benutzt die Sprache der Differentialformen und ist weit allgemeiner.

Wiederum kann man relativ leicht andere Formeln daraus ableiten, z.B.:

$$\int_F d\vec{F} \times \text{grad}\Phi = \oint_{\partial F} d\vec{s}\Phi \quad (\text{A.41})$$

A.3.3 Der Green'sche Satz

Man kann den Gauß'schen Satz auch für partielle Integrationen benutzen, z.B.:

$$\begin{aligned} \int_V dV \Phi \Delta \Psi &= \int_V dV (\text{div}(\Phi \text{grad}\Psi) - \text{grad}\Phi \bullet \text{grad}\Psi) \\ &= \oint_{\partial V} d\vec{F} \bullet (\Phi \text{grad}\Psi) - \int_V dV \text{grad}\Phi \bullet \text{grad}\Psi \quad (\text{A.42}) \end{aligned}$$

Wenn man im folgenden in beiden Termen partiell integriert, so hat man also

$$\begin{aligned} \int_V dV (\Phi \Delta \Psi - \Psi \Delta \Phi) &= \oint_{\partial V} d\vec{F} \bullet (\Phi \text{grad}\Psi - \Psi \text{grad}\Phi) \\ &\quad - \int_V dV (\text{grad}\Phi \bullet \text{grad}\Psi - \text{grad}\Psi \bullet \text{grad}\Phi) \quad (\text{A.43}) \end{aligned}$$

Das zweite Integral ist 0 - man erhält also:

$$\int_V dV (\Phi \Delta \Psi - \Psi \Delta \Phi) = \oint_{\partial V} d\vec{F} \bullet (\Phi \text{grad}\Psi - \Psi \text{grad}\Phi) \quad (\text{A.44})$$

Dieser sog. Green'sche Satz ist zwar relativ leicht aus dem Gauß'schen Satz ableitbar, wurde jedoch ohne dessen Kenntnis schon 1828 von Graham Greene gefunden und hat viele Anwendungen in der Physik und der Mathematik.

A.4 Die Delta-, „Funktion“

(Teile entnommen aus Vorlesung von Dösch zur Quantenmechanik, außerdem ein wenig aus *Großmann: Mathematischer Einführungskurs für die Physik*)

Um die Deltafunktion mathematisch korrekt herzuleiten, müßte man sich etwas ausführlicher mit den sogenannten *Distributionen* auseinandersetzen. Hier soll eine kurze mathematische Einführung ausreichen und mehr Gewicht auf den konkreten Umgang mit dieser Funktion gelegt werden.

A.4.1 Distributionen

Eine *Distribution* ist im wesentlichen eine Abbildung aus einem Vektorraum von Funktionen (meist stellt man diverse Forderungen an diesen Raum, beispielsweise daß die Funktionen im Unendlichen genügend stark abfallen sollen) auf den zugrundeliegenden Körper, für Physiker also: auf die reellen oder komplexen Zahlen. Dies ist eigentlich nur ein Spezialfall der sogenannten *Funktionale*, die allgemein Abbildungen von einem Vektorraum auf den zugrundeliegenden Körper sind (siehe auch Quantenmechanik, Pfadintegralformalismus usw. usw.). Sie werden meist durch Großbuchstaben dargestellt; das Argument steht in eckigen Klammern.

Beispiele sind:

$$F[f] = \int f(x)dx \quad (\text{A.45})$$

oder, allgemeiner:

$$F_g[f] = \int g(x)f(x)dx \quad (\text{A.46})$$

mit einer (relativ) beliebigen Funktion g . In beiden Fällen wird einer Funktion f eine Zahl zugeordnet: der Wert des Integrals über diese Funktion (im zweiten Fall gewichtet mit der Funktion g). Das Integral läuft dabei über den gemeinsamen Definitionsbereich von f und g .

Es gelten u. a. folgende Rechenregeln (definitionsgemäß!):

$$(h(x) \cdot F)[f] := F[h \cdot f] \quad \text{für alle Funktionen } h \quad (\text{A.47})$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} F\right)[f] := -F\left[\frac{\partial}{\partial x} f\right] \quad (\text{A.48})$$

A.4.2 Die Delta-Distribution/-Funktion: Definition

Das für die Physik wohl wichtigste Beispiel ist die *Delta-Distribution* $\delta[f]$:

$$\delta[f] := f(0). \quad (\text{A.49})$$

Durch sie wird einer (relativ) beliebigen Funktion f ihr Wert an der Stelle 0 zugeordnet. Speziell gilt: $\delta[1] = 1$ (Normierung).

Formal kann die Delta-Distribution ebenso durch ein Integral dargestellt werden wie in den vorigen Beispielen:

$$\delta[f] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)f(x)dx \quad (\text{A.50})$$

mit der *Delta-Funktion* $\delta(x)$. Aus der Normierung folgt sofort, daß gilt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1. \quad (\text{A.51})$$

Andererseits ergibt sich, daß $\delta(x)$ überall identisch null sein muß (da für alle Funktionen, egal welche Werte sie haben, der Funktionswert an der Stelle null „herausprojiziert“ werden soll) - außer bei $x = 0$. Da das Integral über die Funktion aber 1 ergeben soll, folgt sofort, daß der Funktionswert an der Stelle 0 unendlich groß sein muß, da das Integrationsintervall unendlich klein ist! Es kann sich also um keine Funktion im mathematischen Sinne handeln - diese sind Abbildungen auf einen Körper, meist auf die reellen oder komplexen Zahlen, und kein Körper enthält die Zahl „unendlich“.

Insofern ist es mathematisch inkorrekt, von einer Delta-„Funktion“ zu reden. Da man aber mit dieser viel leichter rechnen kann als mit der zugehörigen Distribution, wird sie von den Physikern ständig verwendet - obwohl sie (mathematisch gesehen) gar nicht existiert. Wie üblich - der Erfolg gibt einem recht!

Historisch gesehen wurde die Deltafunktion übrigens von Dirac (einem Physiker) eingeführt - die Theorie der Distributionen als mathematische „Rechtfertigung“ wurde erst später von dem Mathematiker Schwartz nachgereicht.

Oft wird die Deltafunktion auch als Limes einer Funktionenfolge definiert. Beispiele sind:

$$f_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nx^2} \quad (\text{A.52})$$

$$g_n(x) = \begin{cases} n & -\frac{1}{2n} \leq x \leq +\frac{1}{2n} \\ 0 & x < -\frac{1}{2n} \text{ oder } x > +\frac{1}{2n} \end{cases} \quad (\text{A.53})$$

$$h_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{n}{1+n^2x^2} \quad (\text{A.54})$$

$$j_n(x) = \frac{n}{\pi} \left(\frac{\sin(nx)}{nx} \right)^2 \quad (\text{A.55})$$

$$k_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(nx)}{x} \quad (\text{A.56})$$

Für alle Funktionen dieser Folgen gilt, daß das Integral über sie eins ergibt; für $x \neq 0$ gilt gehen sie gegen 0 für $n \rightarrow \infty$, und an der Stelle 0 gehen sie gegen unendlich für $n \rightarrow \infty$. Würde die Deltafunktion also existieren (und wäre der Limes erlaubt), so könnte man sagen, daß $\delta(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = \dots$ ist.

Etwas mathematischer argumentiert: Beispielsweise für das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x) f(x) dx = \int_{-\frac{1}{2n}}^{+\frac{1}{2n}} g_n(x) f(x) dx \quad (\text{A.57})$$

gilt nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung, daß im Integrationsintervall ein x_0 existiert, so daß es gleich dem folgenden Ausdruck ist:

$$f(x_0) \int_{-\frac{1}{2n}}^{+\frac{1}{2n}} g_n(x) dx. \quad (\text{A.58})$$

Da das Integral über $g_n(x)$ aber eins ergibt, hat man:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x) f(x) dx = f(x_0). \quad (\text{A.59})$$

x_0 muß nun im Intervall zwischen $-\frac{1}{2n}$ und $\frac{1}{2n}$ liegen; für $n \rightarrow \infty$ gilt also: $x_0 \rightarrow 0$. Insgesamt ergibt sich:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x) f(x) dx = f(0). \quad (\text{A.60})$$

Als Physiker kann man nun den Limes einfach unter das Integral ziehen (Mathematiker verbieten einem das zwar, aber was soll's...) und erhält wieder $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = \delta(x)$. Ähnlich kann man auch bei den anderen angegebenen Folgen argumentieren.

Analog wie diese Delta-Distribution kann man natürlich auch andere definieren, die nicht den Funktionswert an der Stelle 0, sondern an einer beliebigen Stelle a herausprojizieren:

$$\delta_a[f] := f(a). \quad (\text{A.61})$$

Es ist aber nicht nötig, dafür nun auch eine verallgemeinerte Deltafunktion einzuführen; es gilt nämlich:

$$\delta_a[f] = f(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(a+x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a) f(x) dx, \quad (\text{A.62})$$

zur Distribution $\delta_a[f]$ gehört also einfach die „verschobene“ Deltafunktion $\delta(x-a)$.

Eine weitere Verallgemeinerung sind mehrdimensionale Deltafunktionen. Die Definition ist sofort einleuchtend, z.B.:

$$\int dV f(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}') = f(\vec{r}') \quad (\text{A.63})$$

für alle Felder f . Oft schreibt man auch explizit die Dimension hin, in diesem Beispiel: $\delta^3(\vec{r} - \vec{r}')$. Der Sinn dieser Schreibweise wird klar, wenn man sich überlegt, daß man diese dreidimensionale Deltafunktion auch als Produkt von drei eindimensionalen Deltafunktionen schreiben kann:

$$\delta^3(\vec{r} - \vec{r}') = \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z') \quad (\text{A.64})$$

An dieser Stelle ist es Zeit, auf eine „physikalische“ Eigenschaft der Deltafunktion einzugehen: ihre Maßeinheit. Betrachte zunächst die normale Deltafunktion:

$$\int f(x) \delta(x) dx = f(0). \quad (\text{A.65})$$

Die Funktion f ist im allgemeinen eine physikalische Größe mit irgendeiner Einheit - ein Beispiel wäre eine Funktion, die die Stromstärke (gemessen in Ampere) an einer bestimmten Stelle x (gemessen in Meter) eines Drahtes angibt. Dann würde gelten: $[f(x)] = [f(0)] = A$; da aber andererseits gilt: $[f(0)] = [f(x)] * [\delta(x)] = A * m$, folgt sofort, daß die Deltafunktion die Einheit $1/m$ haben muß.

Allgemein kann man sagen: Die Deltafunktion hat immer die inverse Maßeinheit ihres Arguments. Betrachtet man also beispielsweise eine zeitliche Deltafunktion $\delta(t)$, wobei t in Sekunden gemessen wird, so folgt: $[\delta(t)] = 1/s$. Bei mehrdimensionalen Deltafunktionen hat man dann die entsprechende Potenz der inversen Maßeinheit des Arguments, z. B. $[\delta^3(\vec{r})] = 1/m^3$.

A.4.3 Rechenregeln

Da die Deltafunktion überall gleich null ist, außer für $x = 0$, ergibt sich sofort:

$$\int_a^b f(x)\delta(x)dx = \begin{cases} f(0) = \delta[f] & 0 \in (a; b) \\ 0 & 0 \notin [a; b] \end{cases} \quad (\text{A.66})$$

Die Fälle $a = 0$ oder $b = 0$ sind nicht definiert. Eine äquivalente Formel gilt natürlich auch für $\delta(x - a)$.

Ebenso wegen der Eigenschaft, daß $\delta(x - a)$ überall null ist außer bei $x = a$, folgt sofort, daß gilt:

$$f(x)\delta(x - a) = f(a)\delta(x - a); \quad \text{speziell: } x\delta(x) = 0. \quad (\text{A.67})$$

Dies sieht man auch aus der Definition der Deltafunktion:

$$\int f(x)\delta(x - a)dx = f(a) = f(a) \int \delta(x - a)dx = \int f(a)\delta(x - a)dx. \quad (\text{A.68})$$

Außerdem folgt diese Eigenschaft auch aus der allgemeinen Rechenregel für Distributionen (A.47).

Wiederum weil die Deltafunktion überall null ist - außer für $x = 0$ - erhält man sofort $\delta(x) = \delta(-x)$ - die Deltafunktion ist gerade. Dies sieht man auch folgendermaßen:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(-x)dx = - \int_{+\infty}^{-\infty} f(-x)\delta(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-x)\delta(x)dx = f(0), \quad (\text{A.69})$$

also gilt $\delta(x) = \delta(-x)$.

Ähnlich zeigt man:

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x), \quad (\text{A.70})$$

oder noch allgemeiner:

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{1}{|f'(x_i)|}\delta(x - x_i), \quad (\text{A.71})$$

wobei die x_i die *einfachen* Nullstellen der Funktion f seien.

Bei einer Umrechnung auf andere Koordinaten x', y', z' muß berücksichtigt werden, daß die neuen Koordinaten Funktionen von den alten sind: $x'(x, y, z)$, $y'(x, y, z)$, $z'(x, y, z)$. Die Regel (A.71) muß dafür also auf mehrdimensionale Deltafunktionen verallgemeinert werden; dies geschieht folgendermaßen:

$$\delta(x' - x'_0)\delta(y' - y'_0)\delta(z' - z'_0) = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x', y', z')} \right|^{-1} \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0), \quad (\text{A.72})$$

wobei $\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x', y', z')} \right|$ die (auch bei der Umrechnung von Volumenelementen auftretende) Jacobi-Determinante ist. Damit ergibt sich für die dreidimensionale Deltafunktion in Zylinder- bzw. Kugelkoordinaten:

$$\delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{1}{r}\delta(r - r_0)\delta(\phi - \phi_0)\delta(z - z_0) \quad (\text{A.73})$$

$$= \frac{1}{r^2 \sin(\theta)}\delta(r - r_0)\delta(\theta - \theta_0)\delta(\phi - \phi_0). \quad (\text{A.74})$$

Man rechnet sofort nach, daß mit diesen Ausdrücken die Normierung der Deltafunktion auch dann noch stimmt, wenn man das Volumenelement in Zylinder- bzw. Kugelkoordinaten ausdrückt, z.B.:

$$\begin{aligned} \int dV \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0) &= \int r^2 \sin(\theta) \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0) \delta(\phi - \phi_0) \\ &= \int_0^\infty dr \delta(r - r_0) \int_0^\pi \delta(\theta - \theta_0) \int_0^{2\pi} \delta(\phi - \phi_0) = 1^3 = 1 \end{aligned} \quad (\text{A.75})$$

Die Vorfaktoren werden folgendermaßen auf die einzelnen Deltafunktionen verteilt:

$$\delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0) = \delta(r - r_0) \frac{\delta(\phi - \phi_0)}{r} \delta(z - z_0) \quad (\text{A.76})$$

$$= \delta(r - r_0) \frac{\delta(\theta - \theta_0)}{r} \frac{\delta(\phi - \phi_0)}{r \sin(\theta)}, \quad (\text{A.77})$$

entsprechend der Aufteilung im Volumenelement: $dV = dr \cdot r d\phi \cdot dz = dr \cdot r d\theta \cdot r \sin(\theta) d\phi$.

Aus der zweiten Rechenregel für Distributionen (A.48) erhält man schließlich für die Ableitung der Deltafunktion:

$$\int \delta'(x - a) f(x) dx = -f'(a). \quad (\text{A.78})$$

(Diese Regel kann man sich im Prinzip auch einfach durch partielle Integration herleiten.) Es folgt dann, daß $\delta'(x)$ eine ungerade Funktion ist. Außerdem gilt: $\delta'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g'_n(x) = \dots$

Oft verwendet wird auch die sogenannte *Theta-* oder *Stufen-Funktion*, die definiert ist durch:

$$\theta(x) := \int_{-\infty}^x \delta(y) dy = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (\text{A.79})$$

Für $x = 0$ ist sie wiederum nicht definiert; meist wird $\theta(0) = 0$ verwendet. Mit ihrer Hilfe kann man abschnittsweise definierte Funktionen umschreiben, z.B.:

$$|x| = x\theta(x) - x\theta(-x) \quad (\text{A.80})$$

Zum Abschluß soll noch eine Fourierdarstellung der Deltafunktion gefunden werden. Man kann einfach einsetzen:

$$\tilde{\delta}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi}; \quad (\text{A.81})$$

also

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\delta}(k) e^{ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dx. \quad (\text{A.82})$$

Eine andere Möglichkeit ist folgende: Betrachte eine beliebige Funktion $f(x)$ und ihre Fouriertransformierte $\tilde{f}(k)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k) e^{ikx} dk \\ \tilde{f}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-iky} dy \end{aligned} \quad (\text{A.83})$$

Setzt man die zweite Gleichung in die erste ein, so erhält man:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(f(y) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(x-y)} dk \right) dy. \quad (\text{A.84})$$

Da aber andererseits gilt:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \delta(x-y) dy, \quad (\text{A.85})$$

erhält man wiederum:

$$2\pi \delta(x-y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(x-y)} dk. \quad (\text{A.86})$$

Diese Formel wird oft benutzt - beispielsweise bei der Berechnung von Green'schen Funktionen.

A.5 * Ein wenig Funktionentheorie; Der Residuensatz

(Der folgende Stoff stützt sich im wesentlichen auf *Greiner: Elektrodynamik* und *Busam, Freitag: Funktionentheorie*.)

A.5.1 Analytische Funktionen

Sei f eine komplexwertige Funktion einer komplexen Variablen z , $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$. Dann kann man $f(z)$ schreiben als:

$$f(z) = u(z) + iv(z) \quad \text{bzw.} \quad f(x+iy) = u(x+iy) + iv(x+iy) \quad (\text{A.87})$$

Die Funktionen u und v (und damit auch f) können jeweils auch als Funktionen der beiden reellen Variablen x und y aufgefasst werden, also $u, v : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$.

Die Funktion f heißt *stetig* in z_0 , wenn gilt: $f(z) \rightarrow f(z_0)$ für $z \rightarrow z_0$ (auf allen möglichen Wegen). Sie heißt *komplex differenzierbar/analytisch/holo-morph/regulär* in z_0 , wenn der Grenzwert

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z_0) - f(z)}{z_0 - z} \quad (\text{A.88})$$

existiert und unabhängig vom Weg nach z_0 ist; sie heißt *analytisch/ ... im Gebiet G* , wenn sie für alle $z \in G$ analytisch ist.

Da die komplexe Ebene zweidimensional ist, existieren natürlich nur zwei linear unabhängige Richtungen, die man ohne Beschränkung der Allgemeinheit als Parallelen zur reellen und zur imaginären Achse ansetzen kann. Man kann die Forderung der Wegunabhängigkeit also folgendermassen formulieren:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0 + iy_0) - f(x + iy_0)}{x_0 - x} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0 + iy_0) - f(x_0 + iy)}{i(y_0 - y)}, \quad (\text{A.89})$$

also:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{i \partial y} \quad (\text{A.90})$$

Setzt man die Funktionen u und v ein, so erhält man schließlich die *Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen*:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}; \quad \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = -\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}. \quad (\text{A.91})$$

Sie lassen sich kurz auch so formulieren:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) (u(x, y) + iv(x, y)) = 0 \quad (\text{A.92})$$

Analytische Funktionen haben im Gegensatz zu (stetig) differenzierbaren reellen Funktionen einige bemerkenswerte Eigenschaften. Eine davon ist die Existenz und Eindeutigkeit der sogenannten *analytischen Fortsetzung*: Hat man eine analytische Funktion auf einem Teilgebiet der komplexen Ebene gegeben, so existiert immer genau eine analytische Funktion, die auf der gesamten komplexen Ebene definiert ist und eingeschränkt auf das Teilgebiet wieder die ursprüngliche Funktion ergibt. Vergleiche dazu den reellen Fall: Wenn man eine stetig differenzierbare Funktion auf einem Intervall gegeben hat, so gibt es unendlich viele Möglichkeiten, sie auf ganz \mathbf{R} zu einer immer noch stetig differenzierbaren Funktion fortzusetzen!

A.5.2 Cauchy'scher Integralsatz und -formel

Eine andere, sehr wichtige Eigenschaft ist der *Cauchy'sche Integralsatz*: Integrale in der komplexen Ebene über eine analytische Funktion sind vom Weg unabhängig, das heißt,

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = \int_{t_1}^{t_2} f(z(t)) z'(t) dt \quad (\text{A.93})$$

ist unabhängig von der gewählten Parametrisierung $z(t)$.

Wenn eine Funktion auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet analytisch ist, darf man also einen geschlossenen Weg beliebig verformen und sogar zu einem Punkt zusammenziehen, ohne den Wert des Integrals zu verändern. Da aber das Integral der Funktion über einen einzigen Punkt 0 ergibt, so folgt, daß das Integral einer Funktion über einen geschlossenen Weg 0 ergibt, falls die Funktion im vom Weg umschlossenen Gebiet G überall analytisch ist:

$$\oint_{\partial G} f(z)dz = 0, \text{ falls } f \text{ in } G \text{ analytisch ist} \quad (\text{A.94})$$

Andererseits kann man folgern, daß Integrale vom Weg unabhängig sind, wenn das Integral über geschlossene Wege verschwindet, da man jeden offenen Weg als einen anderen offenen Weg plus einen geschlossenen Weg darstellen kann.

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz \text{ wegunabhängig} \Leftrightarrow \oint f(z)dz = 0 \quad (\text{A.95})$$

Dieser Satz (wenn f differenzierbar ist, dann ist das Integral über f wegunabhängig) ist völlig analog zum dreidimensionalen Fall: Wenn die Rotation eines Vektorfeldes verschwindet, so sind Wegintegrale über dieses Feld wegunabhängig.

Anders sieht es aus, wenn das betrachtete Gebiet nicht einfach zusammenhängend ist bzw. wenn die Funktion in diesem Gebiet nicht überall analytisch ist. Betrachte zwei Beispiele: $f_1(z) = z$, $f_2(z) = 1/z$, und als geschlossenen Weg einen Kreis um den Ursprung mit Radius 1, der im mathematisch positiven Drehsinn durchlaufen wird. Die erste Funktion ist in der ganzen Ebene analytisch, die zweite ist für $z = 0$ nicht definiert. Es ist also zu erwarten, daß das Integral über die erste Funktion zu 0 wird, bei der zweiten Funktion sollte dagegen ein endlicher Wert herauskommen. Wähle für die Integrale die Parametrisierung $z(t) = e^{it}$, dann hat man:

$$\oint f_1(z)dz = \oint z dz = \int_0^{2\pi} e^{it} i e^{it} dt = \frac{1}{2} [e^{2it}]_0^{2\pi} = 0 \quad (\text{A.96})$$

$$\oint f_2(z)dz = \oint \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{i e^{it}}{e^{it}} dt = i [t]_0^{2\pi} = 2\pi i, \quad (\text{A.97})$$

in Übereinstimmung mit der Erwartung.

Allerdings gilt auch in solchen Fällen wieder, daß das Integral über geschlossene Wege wegunabhängig ist - vorausgesetzt, sie schließen die Stelle(n), in denen f nicht analytisch ist, ein. Genauer: Die betrachteten Weg müssen stetig ineinander verformbar sein bzw. es muß ein geschlossener Weg W existieren, in dessen Inneren f analytisch ist, so daß man den zweiten Weg erhält, indem man zum ursprünglichen Weg W dazuaddiert. Man kann nun also z.B. allgemein sagen: Integriert man die Funktion $f_2(z) = 1/z$ auf einem beliebigen Weg, der $z = 0$ einschließt und im mathematisch positiven Drehsinn durchlaufen wird, so erhält man $2\pi i$.

Betrachten wir nun folgendes Integral:

$$\oint_{\partial G} \frac{f(z)}{z - z_0} dz, \quad (\text{A.98})$$

wobei die Funktion $f(z)$ im Gebiet G analytisch sein und z_0 in G liegen soll.

Man kann $f(z)$ in eine Taylorreihe entwickeln:

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + \frac{1}{2}(z - z_0)^2 f''(z_0) + \dots \quad (\text{A.99})$$

Setze dies in das obere Integral ein:

$$f(z_0) \oint_{\partial G} \frac{1}{z - z_0} dz + f'(z_0) \oint_{\partial G} dz + \frac{1}{2} f''(z_0) \oint_{\partial G} (z - z_0) dz + \dots \quad (\text{A.100})$$

Alle Integranden außer dem ersten sind analytisch in G , also hat man:

$$\oint_{\partial G} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0) \oint_{\partial G} \frac{1}{z - z_0} dz \stackrel{z' = z - z_0}{=} f(z_0) \oint_{\partial G} \frac{1}{z'} dz' = 2\pi i f(z_0) \quad (\text{A.101})$$

und damit schließlich die *Cauchy'sche Integralformel*:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial G} \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \quad (\text{A.102})$$

Das heißt, wenn man eine Funktion auf dem Rand eines Gebietes G kennt und weiß, daß sie überall in G analytisch ist, dann kann man jeden beliebigen Funktionswert, den sie in G annimmt, berechnen! Die Funktion ist also im gesamten Gebiet G eindeutig bestimmt, wenn nur ihre Werte auf dem Rand von G gegeben sind - dies ist ein Spezialfall der schon oben erwähnten analytischen Fortsetzung.

Man kann allgemein beweisen, daß für analytische Funktionen Integration und Differentiation vertauschbar sind. Damit erhält man also aus der Cauchy'schen Integralformel:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\partial G} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad (\text{A.103})$$

das heißt, nicht nur die Funktionswerte, sondern auch die Werte aller Ableitungen in G sind eindeutig bestimmt, wenn die Funktionswerte auf dem Rand gegeben sind!

Außerdem kann man leicht zeigen, daß $(z - z_0)^{-n-1}$ für alle $n \in \mathbf{Z}$ als Funktion von z_0 analytisch ist und damit auch das Integral über diese Funktion - also folgt, daß auch $f^{(n)}$ analytisch ist. Damit hat man den wichtigen Satz: *Ist eine Funktion analytisch, d.h., einmal komplex differenzierbar, so sind auch sämtliche Ableitungen analytisch (und damit auch stetig), die Funktion ist also unendlich oft stetig differenzierbar.*

A.5.3 Der Residuensatz

Auch über Funktionen, die in einem Gebiet G nicht analytisch sind, kann man dennoch noch Aussagen treffen. Betrachte hierfür zwei konzentrische Kreise K_1, K_2 um das Gebiet G , die vollständig in dem Bereich verlaufen, in dem f analytisch ist, und eine Verbindungsstrecke zwischen den beiden Kreisen, die zweimal in entgegengesetzten Richtungen durchlaufen wird und sich deshalb weghebt (s. Abb. A.2). Man hat dann einen geschlossenen Weg, und für ein beliebiges z_0 im umschlossenen Bereich gilt:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{K_2} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad (\text{A.104})$$

Das Minuszeichen beim zweiten, inneren Kreis tritt deshalb auf, weil er im mathematisch negativen Drehsinn durchlaufen wird.

Dies kann man umschreiben zu:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_1} \frac{f(z)}{z - z_1} \frac{1}{1 - \frac{z_0 - z_1}{z - z_1}} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{K_2} \frac{f(z)}{z_0 - z_1} \frac{1}{1 - \frac{z - z_1}{z_0 - z_1}} dz \quad (\text{A.105})$$

mit einem beliebigen Punkt z_1 .

Wählt man diesen Punkt im Gebiet G , so gilt:

$$\left| \frac{z_0 - z_1}{z - z_1} \right| < 1 \quad \forall z \in K_1; \quad \left| \frac{z - z_1}{z_0 - z_1} \right| < 1 \quad \forall z \in K_2, \quad (\text{A.106})$$

und man kann die obigen Brüche als geometrische Reihen schreiben:

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{K_1} \frac{f(z)}{z - z_1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z_0 - z_1}{z - z_1} \right)^n dz + \int_{K_2} \frac{f(z)}{z_0 - z_1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_1}{z_0 - z_1} \right)^n dz \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint f(z) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_0 - z_1)^n}{(z - z_1)^{n+1}} + \sum_{n=-\infty}^0 \frac{(z_0 - z_1)^{n-1}}{(z - z_1)^n} \right) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint f(z) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(z_0 - z_1)^n}{(z - z_1)^{n+1}} dz = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z_0 - z_1)^n \quad (\text{A.107}) \end{aligned}$$

K_1

K_2

G

z_0

Abbildung A.2: Integrationsweg zur Untersuchung von Integralen über nicht-analytische Funktionen.

mit:

$$a_n := \frac{1}{2\pi i} \oint_W \frac{f(z)}{(z - z_1)^{n+1}}. \quad (\text{A.108})$$

Diese Entwicklung einer teilweise nicht analytischen Funktion f in einem Ringgebiet, in dem sie analytisch ist, heißt *Laurent'sche Reihe*. W darf dabei jeder beliebige, um G geschlossene, im Gebiet zwischen K_1 und K_2 verlaufende Weg sein (den vorher betrachteten Weg aus K_1 und K_2 kann man zu einem beliebigen anderen Weg, der im Gebiet zwischen den Kreisen verläuft, umformen), z_1 muß in G liegen.

Wenn f an der Stelle z_1 nicht holomorph ist, aber eine Umgebung von z_1 existiert, in der f holomorph ist (d.h., es existiert ein $\epsilon > 0$, so daß $f(z)$ holomorph $\forall |z - z_1| < \epsilon, z \neq z_1$), dann heißt z_1 eine *isolierte Singularität*, und

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_W f(z) dz =: \text{Res}(f, z_1), \quad (\text{A.109})$$

wobei W ein geschlossener Weg in dieser Umgebung um z_1 ist, heißt *Residuum* von f in z_1 .

Wenn sich nun in einem Gebiet G endlich viele isolierte Singularitäten z_i befinden, so erhält man aus dieser Definition sofort:

$$\boxed{\oint_{\partial G} f(z) dz = 2\pi i \sum_i \text{Res}(f, z_i)} \quad (\text{A.110})$$

(siehe Abb. A.3). Dies ist der sogenannte *Residuensatz*.

Die konkrete Berechnung von Residuen ist allerdings nur dann relativ einfach möglich, wenn die Laurentreihe bei irgendeinem (negativen) n abbricht, also $a_{n-m} = 0 \forall m > 0$. Man spricht dann von einem *Pol n -ter Ordnung* in z_1 . Die Laurentreihe ist in diesem Fall:

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z - z_1)^n} + \dots + \frac{a_{-1}}{z - z_1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_1)^n \quad (\text{A.111})$$

Man macht sich leicht klar, daß man dann das Residuum in z_1 erhält durch:

$$\text{Res}(f, z_1) = a_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_1} \left(\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} ((z - z_1)^n f(z)) \right) \quad (\text{A.112})$$

Abbildung A.3: Ein Integrationsweg, der mehrere Singularitäten einschließt, kann immer so umgeformt werden, daß er jede Singularität einzeln einschließt; auf diese ist dann A.109 anwendbar.

Speziell für einen Pol 1. Ordnung in z_1 ergibt sich:

$$\boxed{\text{Res}(f, z_1) = \lim_{z \rightarrow z_1} ((z - z_1) \cdot f(z))}. \quad (\text{A.113})$$

Wir können nun also sowohl geschlossene Wegintegrale in der komplexen Ebene ausrechnen, deren Integrand im umschlossenen Gebiet überall analytisch ist, als auch solche, bei denen der Integrand in diesem Gebiet beliebig viele Polstellen von beliebig hoher Ordnung hat. Im ersteren Fall ist der Wert des Integrals einfach 0, im zweiten Fall berechnet man zunächst die Residuen der Polstellen mittels der obigen Formel und erhält den Wert des Integrals dann aus dem Residuensatz.

Diese Regeln für das Ausführen von Integralen in der komplexen Ebene werden oft benutzt, um reelle Integrale auszuwerten. Der ursprüngliche Integrationsweg läuft dann also entlang der reellen Achse; man kann ihn durch einen Halbkreis über oder unter der Achse zu einem geschlossenen Weg ergänzen (achte dabei auf die Orientierung des Weges!). Wenn der Integrand im Unendlichen genügend stark abfällt, dann trägt das Integral über diesen Halbkreis nicht bei, so daß der Wert des Integrals ungeändert bleibt. Für den geschlossenen Weg kann man dann den Residuensatz anwenden und erhält so den Wert des reellen Integrals. Diese Methode wird z.B. bei Fouriertransformationen öfters angewendet; der Faktor e^{ikx} sorgt bei geeigneter Wahl des Weges dafür, daß der Halbkreis im Unendlichen nichts beiträgt.

Beispiel:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} \stackrel{x=\tan y}{=} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} dy = \pi \quad (\text{A.114})$$

Andererseits betrachte das Integral:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{W_R} \frac{dz}{1+z^2}, \quad (\text{A.115})$$

wobei W_R der Weg ist, der auf der reellen Achse von $-R$ bis $+R$ führt und dann auf einem Halbkreis über der reellen Achse wieder nach $-R$. Auf dem Halbkreis kann z parametrisiert werden als $Re^{i\phi}$, also gilt:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{dz}{1+z^2} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{iR e^{i\phi} d\phi}{1+R^2 e^{2i\phi}} = 0, \quad (\text{A.116})$$

d.h., der Beitrag des Halbkreises zum Integral verschwindet im Unendlichen, und es gilt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{W_R} \frac{dz}{1+z^2} \quad (\text{A.117})$$

Die Pole des Integranden $f(z) = 1/(1+z^2)$ liegen bei $z_{1/2} = \pm i$; innerhalb des geschlossenen Weges liegt nur $z_1 = +i$. Das Residuum dieses einfachen Poles ist:

$$\text{Res}(1/(1+z^2), i) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{z-i}{z^2+1} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{z-i}{(z+i)(z-i)} = \frac{1}{2i}, \quad (\text{A.118})$$

also:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\pi i \operatorname{Res}(1/(1+z^2), i) = \pi, \quad (\text{A.119})$$

in Übereinstimmung mit dem auf die normale Methode erhaltenen Resultat.

Andererseits könnte man den Halbkreis auch unten schließen; der Weg wird dann allerdings im mathematisch negativen Sinn durchlaufen, und man erhält ein zusätzliches Minuszeichen, aber dennoch am Schluss dasselbe Ergebnis:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = -2\pi i \operatorname{Res}(1/(1+z^2), -i) = -2\pi i \lim_{z \rightarrow -i} \frac{z+i}{(z+i)(z-i)} = \pi \quad (\text{A.120})$$

Anhang B

Ableitung der Maxwellgleichungen aus den Beobachtungen

(teilweise entnommen aus *Greiner: Elektrodynamik*)

B.1 Elektrizität; Coulombgesetz; Einheiten I

Schon im antiken Griechenland, etwa seit dem 4. Jahrhundert vor Christus, waren elektrische Erscheinungen bekannt: Man hatte schon festgestellt, daß Bernsteinstücke einander anzogen oder abstießen, wenn man sie mit einem Fell o. ä. rieb. Der Name „Elektrizität“ leitet sich ja vom griechischen Wort für Bernstein ($\eta\lambda\epsilon\kappa\tau\rho\nu$, Elektron) ab, was wiederum von $\eta\lambda\epsilon\kappa\tau\omicron\rho$, Glanz, kommt. Auch bei anderen Stoffen bemerkte man bald, daß sie sich anzogen oder abstießen, wenn man sie rieb. Eine systematische Untersuchung dieser Erscheinungen gab es damals allerdings noch nicht, sie wurden eher als Magie oder göttlich betrachtet. Die einzige Anwendung in den folgenden Jahrhunderten war daher medizinischer Natur: die Elektrizität von Zitterfischen wurde als Heilmittel benutzt.

Erst 1660 wurde die erste experimentelle Anordnung zur genaueren Untersuchung der Elektrizität aufgebaut: *Otto von Guericke* (1602-1686) erfand eine Elektrisiermaschine, mit der elektrische Funken erzeugt werden konnten. Damit untersuchte er auch die elektrische Abstoßung, konnte aber keine wesentlichen Erkenntnisse gewinnen.

1733 gab es dann den ersten größeren Vorschrift: *Charles-Francois de Cisternay Dufay* (1698-1739) stellte fest, daß (durch Reibung) elektrisierte Körper unelektrisierte Körper anziehen, sie elektrisieren und dann wieder abstoßen. Indem er mit geriebenem Glas, geriebenem Harz und Metallen experimentierte und die verschiedenen An- und Abstoßungskräfte zwischen ihnen verglich, kam er zu dem Schluß, daß es zwei Arten von Elektrizität gibt. Weitere Forschungen auf dem Gebiet der Influenz wurden von *Benjamin Franklin* (1706-1709) durchgeführt (1747). Das Konzept der positiven und negativen Ladungen wurde aber erst von *Johann Carl Wilcke* (1732-1796) und *Symmer* im Jahre 1759 konse-

quent eingeführt. Die Polarisation von Dielektrika wurde durch Wilcke bereits 1758 festgestellt.

Im Jahre 1767 schloß *Joseph Priestley* (1733-1804) aus der Tatsache, daß im Inneren eines Leiters keine Kräfte wirken, daß die Kraft zwischen zwei Ladungen mit $1/r^2$ abnehmen muß. *Charles Augustin Coulomb* (1736-1806) benutzte dann 1785 eine Drehwaage, um die Kräfte zwischen elektrischen Ladungen zu messen, und bestätigte die Vermutung von Priestly. Außerdem fand er heraus, daß die Kraft proportional zur Stärke beider Ladungen ist und in Richtung der Verbindungsstrecke wirkt; in heutiger Formelsprache:

$$\vec{F} \sim \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}. \quad (\text{B.1})$$

Solange keine Maßeinheit für die Ladung definiert ist, kann man den bisher noch fehlenden Proportionalitätsfaktor in dieser Gleichung natürlich nicht angeben. Im *SI-Einheitensystem* (auch *praktisches* oder *rationales* System genannt) ist die Maßeinheit für die Ladung durch die für die Stromstärke definiert (zu deren Definition siehe weiter unten); dies ist möglich, da der Strom ja definiert ist als Ladung pro Zeit: Wenn eine Sekunde lang ein Strom von einem Ampère fließt, so ist insgesamt eine Ladungsmenge von einem Coulomb geflossen. Mißt man beide Ladungen in Coulomb, so lautet das obige Kraftgesetz:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}. \quad (\text{B.2})$$

Daß die *Dielektrizitätskonstante* ϵ_0 im Nenner steht, hat historische Gründe. Der Faktor 4π wurde hier wohl eingefügt, damit er nachher nicht in den Maxwell'schen Gleichung auftaucht (siehe unten). Der durch Messung ermittelte Zahlenwert für diese Konstante ist dann

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{m^2 N} \text{ bzw. } \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,988 \cdot 10^9 \frac{m^2 N}{C^2}. \quad (\text{B.3})$$

Im *Gauß-* oder *cgs-System* (Centimeter, Gramm, Sekunde als Grundeinheiten statt Meter, Kilogramm, Sekunde, Ampère wie im SI-System) dagegen setzt man die Proportionalitätskonstante einfach gleich 1. Das Coulomb'sche Gesetz lautet dann ganz simpel:

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}. \quad (\text{B.4})$$

Dies bedeutet aber, daß nun die Ladung keine eigene Einheit mehr haben kann, sondern aus den mechanischen Einheiten abgeleitet wird. Definitionsgemäß haben zwei Ladungen genau dann jeweils eine *elektrostatistische Einheit* (*esE*), wenn sie sich im Abstand von einem Zentimeter mit einer Kraft von einem Dyn ($1\text{dyn} = 1g \cdot cm/s^2 = 10^{-5}N$, Krafteinheit im Gauß-System) abstoßen. Damit ergibt sich:

$$1\text{esE} = 1cm^{3/2}g^{1/2}/s; \quad (\text{B.5})$$

die Ladung hat nun also eine reichlich „abartige“ Einheit.

Indem man ausrechnet, welche Ladungen (gemessen in Coulomb) beim Abstand von einem Zentimeter eine Kraft von einem Dyn aufeinander ausüben, erhält man die Umrechnungsformel:

$$1\text{esE} \hat{=} 3,335 \cdot 10^{-10}\text{C}. \quad (\text{B.6})$$

Obwohl diese Definition der Maßeinheit für die Ladung auf den ersten Blick (o. k., auf den zweiten wohl auch noch) sehr seltsam aussieht, wird das Gauß'sche System doch in weiten Teilen der Physik verwendet, vor allem in der Atom- und Kernphysik und in praktisch allen Gebieten der theoretischen Physik. Es geht auf *Gauß* (1777-1855) zurück (wer hätt's gedacht), der es ca. 1833 zusammen mit *Weber* in Göttingen begründete.

Nun aber weiter mit der historischen Entwicklung hin zu den Maxwell'schen Gleichungen, auf die wir ja schließlich hinauswollen. *Michael Faraday* (1791-1867) führte 1831/32 Versuche zur Umwandlung von Elektrizität in Magnetismus und umgekehrt durch (siehe unten) und führte zur Erklärung seiner Ergebnisse den Begriff der „Kraftlinie“ zwischen Ladungen bzw. Magneten ein. Für ihn lag das Wesentliche der elektrischen Erscheinungen in einem von Ort zu Ort wirkenden Spannungszustand in dem Medium zwischen den Ladungen. Die waren die Anfänge des Feldbegriffes im Gegensatz zu den „Fernwirkungen“, die früher für die elektrischen und magnetischen Kräfte angenommen worden waren.

Eine wichtige mathematische Stütze für die Weiterentwicklung der Theorie kam dann von *Pierre-Simon Laplace* (1749-1827), der 1782 den Potentialbegriff einführte und eine Differentialgleichung für das Gravitationspotential außerhalb einer gegebenen Massenverteilung fand. Diese Gleichung wurde 1811 von *Siméon-Denis Poisson* (1781-1840) auf das Gebiet innerhalb der Massenverteilung erweitert; in der Elektrostatik ist die damals gefundene Formel heute noch als *Poisson'sche Gleichung* bekannt. Weitere Beiträge zu der Potentialtheorie lieferte *George Green* (1773-1841) im Jahre 1828; er dachte dabei erstmals an Beispiele aus der Elektrizitätslehre. Die allgemeinen Theoreme und Sätze von Gauß ermöglichten dann 1839 eine ordentliche mathematische Beschreibung der elektro- (und magneto-)statischen Erscheinungen.

James Clark Maxwell (1831-1879) führte dann Faraday's Vorstellungen von Kraftlinien konsequent fort und baute darauf die heute nach ihm benannten Gleichungen auf (1855-65). Danach ist das die *elektrische Feldstärke* als der Quotient aus der Kraft auf eine Probeladung q und der Stärke dieser Ladung definiert (die als so klein angenommen wird, daß sie das Feld selbst nicht wesentlich stört):

$$\vec{E}(\vec{r}) := \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q}, \text{ oder besser: } \vec{E}(\vec{r}) := \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q}. \quad (\text{B.7})$$

Die Richtung des Feldvektors gibt die Richtung der (momentanen) Beschleunigung einer positiven Ladung an; dementsprechend geben Feldlinien die Bahn einer positiven Ladung an. Die Einheit der elektrischen Feldstärke ist:

$$[\vec{E}] = 1 \frac{\text{N}}{\text{C}} \text{ (SI) bzw. } = 1 \frac{\text{dyn}}{\text{esE}} = 1 \frac{\text{esE}}{\text{cm}^2} \text{ (Gauß)}. \quad (\text{B.8})$$

Das elektrische Feld einer Punktladung der Stärke Q ist dann unter Verwendung des Coulomb'schen Gesetzes:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (\text{B.9})$$

Der *Fluß* des elektrischen Feldes durch eine Fläche F mit Normalenvektor \vec{n} ist definiert durch als:

$$\Phi_e := (\vec{E} \bullet \vec{n}) F, \quad (\text{B.10})$$

analog z. B. einer Strömung, bei der der (Volumen-)Fluß gegeben ist durch $\Phi_V = (\vec{v} \bullet \vec{n}) F$, wobei \vec{v} die Geschwindigkeit ist.

Da das elektrische Feld aber im allgemeinen nicht auf der gesamten Fläche konstant sein wird, ist folgende Definition vorzuziehen:

$$\Phi_e := \int_F \vec{E}(\vec{r}) \bullet \vec{n}(\vec{r}) dF. \quad (\text{B.11})$$

Wie man sich ausrechnen kann, ist für eine Punktladung der Stärke q , die im Koordinatenursprung sitzt, der Fluß durch eine geschlossene Schale um den Ursprung gleich $\Phi_e = 4\pi q$ (bzw. im SI-System: $\Phi_e = q/\epsilon_0$ - hier macht sich der Faktor 4π , der also einen geometrischen Ursprung hat, erstmals bemerkbar). Falls die Ladung außerhalb dieser Schale liegt (also nicht im Ursprung), bekommt man dagegen das Ergebnis $\Phi_e = 0$. Dabei ist die Form der Schale völlig gleichgültig!

Experimente ergeben, daß sich die elektrischen Felder einzelner Ladungen einfach (vektoriell) aufaddieren (*Superpositionsprinzip*). Dies ist äquivalent dazu, daß die Maxwell-Gleichungen *lineare* Integral- bzw. Differentialgleichungen für die Felder sind - denn genau bei linearen Gleichungen ist ja die Summe zweier Lösungen wieder eine Lösung. Damit ergibt sich aber sofort, daß für den Fluß des elektrischen Feldes durch eine geschlossene Schale, die mehrere Punktladungen q_i enthält, gilt: $\Phi_e = 4\pi \sum_i q_i$. Dieses Ergebnis kann man zusammenfassen im *Gauß'schen Gesetz*, wobei $d\vec{F} = \vec{n}(\vec{r}) dF$ ist:

$$\oint_F \vec{E}(\vec{r}) \bullet d\vec{F} = 4\pi Q. \quad (\text{B.12})$$

(In Worten: Der Fluß des elektrischen Feldes durch eine geschlossene Fläche ist gleich der Gesamtstärke aller eingeschlossenen Ladungen.) Genau dies ist aber die erste der gesuchten Maxwell'schen Gleichungen!

Anschaulich macht man sich dies wie folgt klar: elektrische Feldlinien beginnen und enden immer an elektrischen Ladungen - die Ladungen sind die *Quellen* und *Senken* des Feldes. Wenn man eine geschlossene Schale um eine Ladung hat, dann gehen von dieser aus nur Feldlinien nach außen (positive Ladung) bzw. nur Feldlinien in die Schale hinein (negative Ladung). Betrachtet man dagegen eine geschlossene Schale, in der sich keine Ladung befindet, so gehen genausoviele Linien hinein wie hinaus, der Gesamtfluß durch die Schale ist also gleich null - da die Schale keine Quellen oder Senken des Feldes enthält.

B.2 Magnetismus; Ströme; Einheiten II

Auch magnetische Erscheinungen waren im alten Griechenland schon bekannt: Es waren Steine gefunden worden, die einander anzogen und abstießen, je nachdem, wie man sie zueinander hielt (sogenannte Magnetsteine). Aber auch hier herrschte der Aberglaube vor - es gingen Sagen von einem angeblichen Magnetberg um und Geschichten über schwebende Götter- und Heiligenbilder.

In China gab es dagegen etwa 300 n. Chr. schon eine erste Anwendung: Magnetsteine wurden zur Richtungsbestimmung benutzt (Kompaß!). Die Römer stellten dann fest, daß magnetische Wirkungen durch andere Metalle nicht abgeschirmt werden.

Eine größere Zusammenstellung über magnetische Erscheinungen findet sich aber erst in einem 1600 erschienenen Buch von *William Gilbert* (1544-1503). Darin wurde, basierend auf Experimenten, beschrieben, daß positive und negative Magnetpole nicht getrennt werden können, und wie man Magnetfelder mit Magnetnadeln „vermessen“ kann. Er zeigte sogar, daß sich das Erdmagnetfeld als das einer magnetischen Kugel deuten läßt; nur das quantitative Kraftgesetz $F \sim 1/r^2$ fehlte noch. Dieses Kraftgesetz wurde erst 1785 durch Coulomb im Laufe seiner schon erwähnten Experimente mit einer Drehwaage entdeckt. Auf diesen „natürlichen Magnetismus“ (Ferromagnete) werden wir aber hier nicht näher eingehen (siehe dafür Kapitel 3).

Weitergehende Entdeckungen wurden erst möglich, als man länger fließende elektrische Ströme erzeugen konnte. Es war schon bekannt, daß Blitze und die bei elektrischen Fischen auftretenden Erscheinungen auf dem Fließen von Ladungen beruhten, ebenso wie die Funken bei Elektrisiermaschinen, doch waren dies alles sehr kurzlebige Erscheinungen. Man brauchte eine starke Quelle von elektrischen Ladungen, die man in dosierbarer Geschwindigkeit abfließen lassen konnte. Aufgrund von Forschungen von *Luigi Galvani* (1737-1798) über tierische Elektrizität (1780) und *Alessandro Graf Volta* (1745-1827) über die Spannung zwischen verschiedenen Metallen (1794) wurde schließlich von letzterem die „Volta'sche Säule“, bestehend aus einer Reihe von „galvanischen Elementen“, erfunden - die Grundlage für die heutige Elektrochemie und Batterien und Akkus. Nach Volta ist heute die Maßeinheit für die Spannung benannt.

Hans Christian Oersted (1777-1851) machte dann 1820 eine der wohl wichtigsten Entdeckungen überhaupt: Er stellte fest, daß eine Magnetnadel abgelenkt wird, wenn man sie in die Nähe eines stromdurchflossenen Drahtes bringt. Bis dahin waren elektrische und magnetische Erscheinungen immer getrennt voneinander betrachtet worden, man meinte, es seien zwei völlig verschiedene Kräfte. Nun deutete sich erstmals ein Zusammenhang zwischen beiden an! Oersted merkte die Abhängigkeit der Ablenkung der Nadel von der Stromrichtung und zeigte, daß zwischen Strom und Magnetnadel gebrachte unmagnetische Stoffe die Erscheinungen nicht beeinträchtigten. Außerdem entdeckte er bald darauf, daß auch zwei stromdurchflossene Leiter sich anziehen, daß also magnetische Felder wiederum Kräfte auf Ströme ausüben.

Durch *André Marie Ampère* (1775-1836) wurden dann diese Effekte quantitativ untersucht und ausformuliert (1820-1825). Er präzisierte die Begriffe *Spannung* und *Stromstärke* und formulierte die Regeln der Kraftwirkung von

Strom auf Magneten und der Kräfte zwischen zwei Strömen. Von ihm stammt auch die Vorstellung von Elementarströmen in den kleinsten Materiepartikeln als Ursache für das magnetische Verhalten gewisser Stoffe (siehe wiederum Kapitel 3). Die Abstandsabhängigkeit der magnetischen Kraft eines stromdurchflossenen Leiters wurde von *Jean-Baptiste Biot* (1774-1862) und *Félix Savart* (1791-1841) experimentell zu r^{-2} bestimmt (siehe das Biot-Savart'sche Gesetz weiter unten).

Faraday postulierte aufgrund seiner schon erwähnten Versuche auch für die magnetischen Erscheinungen „Kraftlinien“ von Nordpol zu Südpol. Diese Vorstellung führte wiederum zur Annahme eines magnetischen Feldes, das durch Ströme (bewegte Ladungen) entsteht und auch wiederum Kräfte auf Ströme (bewegte Ladungen) ausübt.

Durch Magneten kann die Richtung eines magnetischen Feldes festgestellt werden; mißt man dann die Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter, so stellt man fest, daß sie senkrecht steht sowohl auf der Stromrichtung als auch auf der Feldrichtung. Außerdem ist sie proportional zur Länge des Drahtes und zur Stromstärke. Es gilt also (empirisch) für die Kraft $d\vec{F}$ auf ein infinitesimal kurzes Leiterstück $d\vec{s}$, das vom Strom I durchflossen wird:

$$d\vec{F} = k_1 I d\vec{s} \times \vec{B} \quad (1. \text{ Ampère'sches Gesetz}). \quad (\text{B.13})$$

Der Vektor \vec{B} ist ein Maß für die Stärke des magnetischen Feldes, wird aber dennoch nicht so bezeichnet, sondern heißt *magnetische Flußdichte*. Der Grund für diese Benennung wird im nächsten Abschnitt klarer werden. Die Konstante k_1 kann dazu verwendet werden, die Maßeinheit und Skala von \vec{B} festzulegen; dazu gleich mehr.

Zunächst benötigt man noch eine Formel für das Feld, das von einem Strom erzeugt wird. Es gilt für ein infinitesimal kurzes Leiterstück $d\vec{s}$, das vom Strom I durchflossen wird:

$$d\vec{B}(\vec{r}) = k_2 I \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3}. \quad (\text{B.14})$$

Auch diese Formel wurde empirisch gefunden und heißt *Biot-Savart'sches Gesetz*. Die Konstante k_2 wurde eingeführt, da wir ja auch für die Stromstärke noch keine Maßeinheit definiert haben.

Eine Umformulierung dieser Formel in eine Integralgleichung wurde von Ampère gefunden:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = 4\pi k_2 I \quad (2. \text{ Ampère'sches Gesetz}). \quad (\text{B.15})$$

Es besagt, daß das Integral des magnetischen Flusses längs einer geschlossenen Kurve proportional dem eingeschlossenen Strom ist. Da das Integral über konservative Kraftfelder längs einer geschlossenen Kurve immer null ist, folgt also, daß das Magnetfeld (in Anwesenheit von Strömen) nicht konservativ ist.

Im Gegensatz zur Elektrizitätslehre wurde hier nicht direkt eine Formel für die Kraft zwischen zwei Leitern aufgestellt, sondern die Gesetzmässigkeiten wurden auf zwei Formeln aufgeteilt. Aus diesen beiden kann man dann natürlich das Kraftgesetz ableiten (längere Rechnung, hier nur das Ergebnis):

$$\frac{dF}{ds} = 2k_1 k_2 \frac{I_1 I_2}{d}. \quad (\text{B.16})$$

Dies ist die Kraft pro Längeneinheit zwischen zwei parallelen, geraden, unendlichen Längendrähten im Abstand d , die von den Strömen I_1 bzw. I_2 durchflossen werden.

Betreffend der Maßeinheit muß man nun in den beiden gebräuchlichen Einheitensystem unterschiedlich vorgehen. Im SI-System wird die Stromstärke nämlich über die Kraft zwischen zwei unendlich langen parallelen geraden Leitern definiert: Sie werden genau dann beide vom Strom 1 Ampère durchflossen, wenn sie sich pro Einheitslänge 1 Meter mit einer Kraft von $2 \cdot 10^{-7}$ Newton anziehen. Daraus abgeleitet ist die Maßeinheit der Ladung: $1C = 1As$. Zur Definition der magnetischen Flußdichte wird dann das Biot-Savart'sche Gesetz verwendet: Wenn ein Magnetfeld eine Kraft von 1 Newton auf einen Leiter der Länge 1 Meter ausübt, der von einem Strom der Stärke 1 Ampère durchflossen wird, dann hat das Magnetfeld die Stärke 1 *Tesla*. Die Konstante k_1 wurde gleich 1 gesetzt; damit hat man für die Einheit der Flußdichte:

$$1T = 1 \frac{N}{Am}. \quad (\text{B.17})$$

Aus dem Kraftgesetz und diesen Definitionen folgt dann: $k_2 = 10^{-7} \frac{Tm}{A} = 10^{-7} \frac{N}{A^2}$. Man verwendet statt k_2 aber im SI-System die *Induktionskonstante* $\mu_0 := 4\pi k_2 \approx 1,26 \cdot 10^{-6} \frac{N}{A^2}$. Der Faktor 4π wurde wiederum aus geometrischen Gründen eingefügt; er kürzt sich im 2. Ampère'schen Gesetz heraus.

Im Gauß-System dagegen ist die Einheit der Stromstärke schon festgelegt. Die Ladung ist hier nämlich nicht durch die Stromstärke definiert, sondern umgekehrt: Die Maßeinheit der Ladung wurde durch das Coulomb'sche Gesetz auf 1 elektrostatische Einheit festgelegt; die Einheit der Stromstärke ist dann also 1 esE/s. Damit bleibt nur noch eine Konstante in den beiden Gleichungen wahlfrei; setze $k_1 = k_2 =: k$. Die Maßeinheit der magnetischen Flußdichte hängt dann nur noch davon ab, wo in den Gleichungen man diese wahlfreie Konstante hinschreibt; hier wurde sie zwischen beiden Gleichungen aufgeteilt.

Die Kraft zwischen zwei stromdurchflossenen Drähten ist nun proportional zu k^2 ; experimentell ergibt sich $k = 1/c$ mit $c = 3 \cdot 10^{10} \frac{cm}{s}$ - identisch mit der Lichtgeschwindigkeit!!! Im Gauß-System taucht die Lichtgeschwindigkeit also schon recht früh auf - bereits beim Aufstellen der Grundgleichungen; im SI-System dagegen ergibt sich erst beim Ausrechnen der Geschwindigkeit elektromagnetischer Wellen der Zusammenhang $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$. Insofern ist das Gauß-System etwas „natürlicher“ als das SI-System: Die für die Elektrodynamik wesentliche Naturkonstante steckt von vornherein in den Gleichungen drin; im SI-System stehen dagegen in den Gleichungen nur Konstanten, die die Umrechnung zwischen (künstlich eingeführten) elektromagnetischen und mechanischen Einheiten bewirken.

Durch Einsetzen in eines der beiden Gesetze erhält man dann auch sofort die Einheit der magnetischen Flußdichte:

$$[\vec{B}] = 1 \frac{dyn}{esE} = [\vec{E}]. \quad (\text{B.18})$$

Magnetische Flußdichte und elektrische Feldstärke haben also dieselbe Einheit! Hier zeigt sich die größere Symmetrie des Gauß'schen Systems gegenüber den SI-Einheiten.

Setzt man k ins zweite Ampère'sche Gesetz ein, so erhält man:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{4\pi}{c} I. \quad (\text{B.19})$$

Dies sieht schon recht ähnlich aus wie die erste Maxwell-Gleichung (B.12): links steht ein Integral über das Feld (im elektrischen Fall über eine geschlossene Fläche, hier über eine geschlossene Kurve), rechts steht ein „Quellenterm“ (verziert mit einigen Konstanten). Wir werden jedoch später sehen, daß (B.19) noch nicht vollständig ist - es fehlt ein weiterer Summand, um daraus eine Maxwell-Gleichung zu machen.

B.3 Magnetische Monopole

Da, wie von Gilbert gezeigt, magnetische Pole immer nur gemeinsam auftreten (als *Dipol*), ist die gesamte „magnetische Ladung“ in einer geschlossenen Schale immer gleich null. In Analogie zur Elektrodynamik kann man die Pole als Quellen und Senken des Feldes ansehen; jede geschlossene Schale, die eine Quelle enthält, beinhaltet also immer auch eine gleich große Senke. Daraus folgt, daß durch die Schale genausoviele Feldlinien aus- wie eintreten - der Fluß des magnetischen Feldes durch eine geschlossene Schale ist immer identisch null.

Mathematisch formuliert:

$$\boxed{\oint_F \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{F} = 0.} \quad (\text{B.20})$$

für jede geschlossene Fläche. Dies ist die zweite Maxwell'sche Gleichung.

Dabei heißt

$$\int_F \vec{B}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r}) dF =: \Phi_m, \quad (\text{B.21})$$

in Analogie zum elektrischen Fall der *magnetische Fluß*. Damit wird auch der Name *magnetische Flußdichte* für \vec{B} klar - es ist einfach der magnetische Fluß pro Fläche. Warum \vec{B} nicht magnetische Feldstärke heißt, wird in Kapitel 3 erklärt.

Die Gleichung (B.20) sagt also aus, daß „magnetische Ladungen“ nie einzeln auftreten, sondern immer nur als Dipol - es gibt keine *magnetischen Monopole*! Dies ist natürlich nicht bewiesen, sondern nur ein experimenteller Befund. Heutzutage gibt es immer noch Arbeitsgruppen, die nach magnetischen Monopolen suchen - sie haben nämlich eine relativ große theoretische Bedeutung. Einerseits würden durch magnetische Ladungen und Ströme die Maxwell-Gleichungen symmetrischer werden (und Theoretiker wollen ihre Gleichungen immer so schön wie möglich haben ;-), andererseits könnte man damit die Quantisierung der elektrischen Ladung relativ leicht erklären (sie wird dann auf die Quantisierung des Drehimpulses zurückgeführt - aber das würde hier zu weit führen). Außerdem könnte eine solche Entdeckung auch Konsequenzen für die anderen Kräfte haben, zum Beispiel für das Quark-Confinement durch die starke Wechselwirkung. Trotz jahrzehntelanger Suche konnten aber bisher noch keine Monopole gefunden werden.

B.4 Induktion

Faradays Versuche (1831) ergaben eine weitere tiefgreifende Verknüpfung zwischen Elektrizität und Magnetismus: Er bemerkte, daß ein bewegter Magnet in einem in der Nähe befindlichen Draht einen Stromstoß induzierte; dasselbe Ergebnis bewirkte ein bewegter stromdurchflossener Draht oder ein Draht mit einem Strom veränderlicher Stärke. Außerdem waren Ströme in geschlossenen Leiterschleifen, die durch ein Magnetfeld bewegt wurden, zu bemerken. Dies war genau dann der Fall, wenn das Magnetfeld inhomogen war oder die Schleife in einem homogenen Feld gedreht wurde. In allen Fällen änderte sich also entweder das Feld oder die felddurchsetzte Fläche - kurz: der magnetische Fluß.

Durch Änderungen des magnetischen Flusses durch eine Schleife werden also Ströme hervorgerufen. Nach den Forschungen (1826) von *Georg Simon Ohm* (1789-1854) gehört zu einem Strom aber immer auch eine Spannung (eine Potentialdifferenz) - durch Änderungen in einem Magnetfeld werden also Spannungen erzeugt bzw. *induziert*; der Effekt heißt dementsprechend *Induktion*.

Zur mathematischen Präzisierung ist zunächst der Begriff der Spannung festzulegen. Diese ist definiert als der Quotient aus der Arbeit, die man aufwenden muß, um eine Punktladung in einem elektrischen Feld entlang eines Weges zu bewegen, und der Größe dieser Ladung. Die Arbeit bekommt man dabei über die übliche Formel Kraft mal Weg bzw. Wegintegral über Kraft. In Formeln: Die Spannung zwischen den Punkten \vec{r}_1 und \vec{r}_2 ist gegeben durch

$$U_{12} = \frac{\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{s}}{q} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{s}. \quad (\text{B.22})$$

Kraftfelder, für die dieses Integral wegunabhängig ist, heißen bekanntlich konservativ; ihre Rotation verschwindet. Wir wissen aber nicht von vornherein, daß das elektrische Feld konservativ ist - im allgemeinen wird dies eher nicht der Fall sein.

Wenn das Feld konservativ wäre, so wäre auch das Integral über eine geschlossene Kurve immer gleich null - genau dies gilt aber bei der Induktion nicht: Durch Änderung des Magnetflusses wird ja eine Spannung in einer geschlossenen Leiterschleife induziert; dies bedeutet aber gerade, daß das Integral über das elektrische Feld entlang dieses geschlossenen Weges nicht verschwindet. Genauer: Die induzierte Spannung ist proportional zur Änderung des Magnetflusses und immer so gerichtet, daß der durch sie erzeugte Strom ein Magnetfeld hervorruft, das der Änderung entgegenwirkt. Dies ist die bekannte *Lenz'sche Regel* (1834 durch *Heinrich Friedrich Lenz* (1804-1865) aufgestellt):

$$U = -\dot{\Phi}_m \text{ (SI) bzw. } U = -\frac{1}{c}\dot{\Phi}_m \text{ (Gauß)}. \quad (\text{B.23})$$

Das Minuszeichen besagt hier also, daß die Änderung des magnetischen Flusses eine Spannung hervorruft, die der Änderung Widerstand leistet.

Setzt man die letzten beiden Integralformeln ein, so wird das zu:

$$\boxed{\oint_{\partial F} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_F \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{F}.} \quad (\text{B.24})$$

Dabei ist F eine beliebige (nicht geschlossene) Fläche und ∂F der Rand dieser Fläche - und damit notwendigerweise eine geschlossene Kurve. Damit haben wir schon die dritte Maxwellgleichung gefunden! Sie wird oft auch als *Faraday'sches Induktionsgesetz* bezeichnet.

B.5 Maxwell'scher Verschiebungsstrom

Wie schon erwähnt, ist die Gleichung (B.19) noch nicht vollständig. Nachdem wir die dritte Maxwellgleichung kennen, können wir nun auch vermuten, was fehlt: Eine Änderung im magnetischen Fluß erzeugt ein elektrisches Feld - laut der dritten Maxwellgleichung. Dann liegt aber die Vermutung nahe, daß auch ein veränderlicher elektrischer Fluß ein magnetisches Feld erzeugen könnte. Maxwell erweiterte die Gleichung deshalb zu

$$\boxed{\oint_{\partial F} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{4\pi}{c} I + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_F \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{F}.} \quad (\text{B.25})$$

Der zweite Term auf der rechten Seite, der die zeitliche Änderung des elektrischen Flusses enthält, wird auch als *Maxwell'scher Verschiebungsstrom* bezeichnet. Darauf soll nun noch näher eingegangen werden.

Betrachte hierfür einen Plattenkondensator, der mit einem Dielektrikum gefüllt ist und gerade aufgeladen wird - in den Zuleitungen fließt also ein Strom I . Dieser erzeugt nach der vierten Maxwell'schen Gleichung (dem Ampère'schen Gesetz) einen magnetischen Fluß - wenn man den Integrationsweg um den Draht legt, denn dann ist der Strom ja von der Integrationskurve eingeschlossen, was Voraussetzung für dieses Gesetz ist.

Abbildung B.1: Das Ampère'sche Gesetz führt bei der Anwendung auf den Plattenkondensator auf einen Widerspruch: Auf ineinander umformbaren Wegen erhält man unterschiedliche Werte für den eingeschlossenen Strom.

Andererseits gilt für eine geschlossene Kurve, die den Strom nicht einschließt, daß das Integral über sie null ergibt. Nun können wir aber aus der geschlossenen Kurve, die den Leiter einschließt, durch Addition von weiteren geschlossenen Kurven, die den Leiter nicht einschließen und deshalb am Wert des Integrals nichts ändern, eine geschlossene Kurve machen, die das Dielektrikum einschließt (s. Abb. B.1) - aber nicht mehr den Leiter! Also müßte das Integral über diese neue Kurve gleich null sein - aber wir haben doch vorher gesagt, daß es ungleich null ist, da es identisch mit dem Integral über die ursprüngliche Kurve ist, die den Leiter ja einschloß!

Wie rettet man sich aus diesem Dilemma? Relativ einfach - man muß nur berücksichtigen, daß im Dielektrikum ja auch ein Strom fließt, wenn der Kondensator aufgeladen wird: Durch das Aufladen der Platten wird das Dielektrikum polarisiert, es fließen Ladungen von einem Ende zum anderen. In den allermeisten Fällen fließen sie zwar nicht wirklich (da die Elektronen ja im Atom gebunden sind), sondern werden nur etwas verschoben. Diese kleine Bewegung reicht aber schon aus, um einen Stromfluß mit merkbaren Effekten zu erzeugen. Da er durch das Verschieben von Ladungen entsteht, bezeichnete ihn Maxwell als *Verschiebungsstrom*. Er entsteht letztlich dadurch, daß sich das elektrische Feld im Dielektrikum ändert, ist also proportional zur Änderung der elektrischen Flußdichte. Dieser Verschiebungsstrom ruft dann im Kondensator dasselbe Magnetfeld hervor wie außen um die Leiter herum.

So kommt der zweite Summand in der vierten Maxwellgleichung (B.25) zustande: Die widerspruchsfreie Berechnung des (messtechnisch nachweisbaren) Magnetfeldes erfordert im Inneren des Kondensators einen Strom, der durch die Verschiebung der Ladungen im Dielektrikum, also letztlich durch die Änderung der elektrischen Flußdichte hervorgerufen wird. Das einzige Postulat von Maxwell war nun noch, daß derselbe Effekt auch im Vakuum auftreten sollte: Ein veränderlicher elektrischer Fluß sollte immer ein Magnetfeld erzeugen - auch ohne den „Umweg“ über Ströme in irgendeinem Medium. Dies klingt zwar zunächst recht abstrakt - ist aber letztlich doch nur logisch, wenn man an das Faraday'sche Induktionsgesetz denkt.

Bei der Induktion geht man nämlich völlig äquivalent vor: Die Kräfte, die auf Leiterschleifen wirken, wenn man sie in einem Magnetfeld bewegt oder die Stärke des Magnetfeldes ändert, kann man sich auch so erklären, daß auf die Ladungen im Leiter eine Lorentzkraft wirkt. Damit erhält man dieselben Ergebnisse wie mit der Betrachtung, daß eine sich ändernde magnetische Flußdichte ein elektrisches Feld erzeugt. Der Unterschied ist wiederum, daß der letztere Effekt auch im Vakuum wirkt, wenn gar keine Leiterschleifen vorhanden sind.

Das benötigte Vorzeichen und der Vorfaktor $\frac{1}{c}$ können entweder aus dem Experiment bestimmt oder auch theoretisch hergeleitet werden. Dies geht aber weit einfacher, wenn man die Maxwell-Gleichungen in ihrer differentiellen Form verwendet, wie sie in Anhang C besprochen werden sollen. Dort wird dann deutlich werden, daß ein enger Zusammenhang zwischen dem Verschiebungsstrom und der Erhaltung der elektrischen Ladung (auf welche im nächsten Abschnitt noch eingegangen werden soll) besteht. Dies sieht man auch hier schon ein wenig: Wenn man nur den Leiter betrachtet und die Verteilung der Ladung auf die Platten vernachlässigt, dann scheint es, als ob der Strom im Nichts endet

bzw. im Nichts anfängt - die Ladung scheint dort verschluckt bzw. erzeugt zu werden. Die Vorstellung eines (Verschiebungs-)Stromes zwischen den Platten schließt dagegen den Stromkreis.

B.6 Ladungserhaltung und Kraftgesetz

Zu Abschluß sollen noch zwei Gesetze aufgestellt werden, die nicht direkt zu den Maxwell'schen Gleichung gehören, aber doch eng mit ihnen zusammenhängen.

Betrachte zunächst die Erhaltung der elektrischen Ladung. Dies ist selbstverständlich ebenfalls wieder nur ein empirischer Befund, der aber experimentell sehr gut abgesichert ist und auch weitreichende theoretische Konsequenzen hat, die man aber erst mit den Mitteln der Quantenmechanik und der Quantenfeldtheorie voll erfassen kann. Man sieht dann nämlich, daß die Ladungserhaltung eine notwendige Folge der Eichinvarianz der Lagrangefunktion ist. Dies ergibt sich aus dem bekannten Noether-Theorem: aus einer Symmetrie der Lagrangefunktion (hier: Invarianz unter globalen Eichtransformationen des elektromagnetischen Potentials) folgt eine Erhaltungsgröße (hier: die elektrische Ladung).

Aber zurück zur mathematischen Darstellung der Ladungserhaltung. Naiv würde man einfach sagen: Erhaltung der Ladung bedeutet, daß sie sich zeitlich nicht ändert, also

$$\frac{d}{dt}Q = 0. \quad (\text{B.26})$$

Dann berücksichtigt man aber einen wichtigen Sachverhalt nicht: Ladung kann fließen - elektrische Ströme führen also dazu, daß die Ladung sich zeitlich ändert. Betrachtet man ein festes Volumen, das die Ladung Q beinhaltet, und hat man Ströme durch die Oberfläche dieses Volumens nach außen (positives Vorzeichen) oder nach innen (negatives Vorzeichen), so gilt:

$$\boxed{\frac{d}{dt}Q = -I.} \quad (\text{B.27})$$

Dies drückt nichts anderes aus, als daß durch Ströme nach außen die Ladung im Inneren abnimmt und durch Ströme nach innen zunimmt. Wählt man das Volumen so, daß keine Ströme nach außen oder innen fließen (dies sollte eigentlich immer möglich sein, da man ja normalerweise keine unendlich weit ausgedehnten Ladungs- und Stromverteilungen hat), so gilt wieder die „naive“ Formel (B.26).

Wie wir im Anhang C sehen werden, ist die Ladungserhaltung allerdings eigentlich keine unabhängige Gleichung, sondern ergibt sich aus den Maxwell-Gleichungen (vorausgesetzt, diese enthalten den Verschiebungsstrom). Außerdem kann sie, wie gesagt, auch mittels des Noether-Theorems hergeleitet werden.

Zusätzlich zu den bisherigen Gleichungen, die ja nur beschreiben, wie Felder durch Materie (Ladungen und Ströme) erzeugt werden bzw. wie die Felder aufeinander wirken, braucht man natürlich auch noch eine Formel, die einem sagt, wie die Felder auf die Materie einwirken - sprich: welche Kräfte die Felder

auf Ladungen und Ströme ausüben. Eigentlich haben wir diese Formel schon - wir müssen nur noch einige Einzelteile zusammensetzen.

Zunächst ergibt sich schon aus der Definition des elektrischen Feldes, daß ein Feld der Stärke \vec{E} auf eine (Punkt-)Ladung q eine Kraft ausübt, die gegeben ist durch $\vec{F} = q\vec{E}$. Dies ist die erste Hälfte der gesuchten Formel.

Andererseits hatten wir für die Kraftwirkung magnetischer Felder die Beziehung $\Delta\vec{F} = \frac{1}{c}I\Delta\vec{s} \times \vec{B}$. Dies gibt die Kraft auf ein Leiterstück der Länge (und Richtung) $\Delta\vec{s}$ an, das von einem Strom I durchflossen wird. Wir interessieren uns nun wiederum für die Kraft auf eine Punktladung, die nun natürlich bewegt sein muß (ansonsten hätte man ja keinen Strom). Eine Punktladung mit der Geschwindigkeit v (in Richtung von $\Delta\vec{s}$) braucht die Zeit $\Delta t = \frac{|\Delta\vec{s}|}{v}$, um das Leiterstückchen zu durchqueren, und erzeugt demnach den Strom $I = \frac{q}{\Delta t} = \frac{qv}{|\Delta\vec{s}|}$. Also ist die Kraft dann: $\Delta\vec{F} = \frac{1}{c}q\vec{v} \times \vec{B}$. Diese Kraft, die ein Magnetfeld auf eine bewegte Punktladung ausübt, wird auch als *Lorentzkraft* bezeichnet. (Im SI-System fehlt der Faktor $\frac{1}{c}$.)

Nach dem üblichen Superpositionsprinzip kann man die beiden Kräfte nun einfach addieren und erhält dann für die gesamte Kraftwirkung auf eine mit der Geschwindigkeit \vec{v} bewegte Punktladung q , wenn ein elektrisches Feld der Stärke \vec{E} und ein magnetisches Feld der Flußdichte \vec{B} vorhanden sind:

$$\boxed{\vec{F} = q \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right)}. \quad (\text{B.28})$$

Diese Formel ist das Bindeglied zwischen der Elektrodynamik und der Mechanik.

Anhang C

Differentielle Formulierung der Maxwell'schen Gleichungen im Vakuum

Die integrale Formulierung der Maxwell'schen Gleichungen im Vakuum lautet, wie im Anhang B hergeleitet:

$$(I) \quad \oint_{\partial V} d\vec{F} \cdot \vec{E} = 4\pi Q \quad (C.1)$$

$$(II) \quad \oint_{\partial V} d\vec{F} \cdot \vec{B} = 0 \quad (C.2)$$

$$(III) \quad \oint_{\partial F} d\vec{s} \cdot \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_F d\vec{F} \cdot \vec{B} \quad (C.3)$$

$$(IV) \quad \oint_{\partial F} d\vec{s} \cdot \vec{B} = \frac{4\pi}{c} I + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_F d\vec{F} \cdot \vec{E} \quad (C.4)$$

Diese Formulierung ist global, sie macht Aussagen über ganze Raumgebiete. Oft ist es jedoch praktischer, Aussagen über die interessierenden Größen an einem speziellen Punkt zu machen, also eine lokale Form zu verwenden. Wie wir sehen werden, führt das auf eine Formulierung mittels Differentialgleichungen.

C.1 Kontinuitätsgleichung

Beginnen wir mit der Ladungserhaltung. Statt der Gesamtladung in einem Gebiet betrachte nun die Ladungsdichte ρ an einer bestimmten Stelle x und eine kleine Umgebung Δx , zunächst eindimensional. Von links soll der Strom $j(x)$ hereinfließen, nach rechts der Strom $j(x + \Delta x)$ hinausfließen.

Was uns interessiert, ist die Änderung der Ladung am Punkt x . Die Ladung ist gegeben durch $q = \rho(x)\Delta x$; sie ändert sich durch die ein- und ausfließenden Ströme. Die Änderung ist also einfach gegeben durch die Differenz dieser Ströme:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(x)\Delta x = j(x) - j(x + \Delta x) \approx j(x) - (j(x) + \Delta x \frac{\partial}{\partial x} j) = -\frac{\partial}{\partial x} j(x)\Delta x, \quad (C.5)$$

also

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x) + \frac{\partial}{\partial x}j(x) = 0 \quad (\text{C.6})$$

Betrachte nun die dreidimensionale Verallgemeinerung: die infinitesimale Umgebung hat eine geschlossene Oberfläche um den interessierenden Punkt herum. Durch diese Oberfläche fließt Strom hinein und hinaus. Wählt man die Oberfläche als Würfel, so kann man die drei Koordinaten getrennt betrachten; wichtig sind jeweils nur die Komponenten senkrecht zu den Würfelflächen. Letztlich erhält man damit:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \operatorname{div}\vec{j} = 0. \quad (\text{C.7})$$

Dies ist die sogenannte *Kontinuitätsgleichung* - die infinitesimale Formulierung der Ladungserhaltung. Wie wir später sehen werden, kann man solche Kontinuitätsgleichungen auch für andere erhaltene Größen aufstellen.

Wie man an der Kontinuitätsgleichung ablesen kann, muß für die Maßeinheit von \vec{j} gelten:

$$[\vec{j}] = [\rho]\frac{m}{s} = \frac{esE}{m^2s}. \quad (\text{C.8})$$

Damit ergibt sich einerseits, daß \vec{j} gegeben ist durch die Ladungsdichte mal eine Geschwindigkeit:

$$\vec{j}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})\vec{v}(\vec{r}). \quad (\text{C.9})$$

Im allgemeinen wird dies allerdings nur lokal gelten; nur in einigen Spezialfällen (beispielsweise Punktladungen) kann man für die gesamte Ladungsverteilung ρ dieselbe Geschwindigkeit ansetzen.

Andererseits sieht man nun, daß die Einheit von \vec{j} Ladung pro Fläche und Sekunde, also Strom pro Fläche ist. Wie bei ρ handelt es sich also auch bei \vec{j} um eine Dichte - nun aber um eine Flächendichte statt eine räumliche. \vec{j} heißt deshalb *Stromdichte*; den gesamten Strom durch eine Fläche erhält man, indem man die Stromdichte über die Oberfläche integriert (siehe unten). (*Anmerkung:* Im eindimensionalen Beispiel am Anfang dieses Abschnittes hatten wir gar keine Fläche senkrecht zur Stromrichtung, daher war j dort einfach ein Strom und keine Stromdichte.)

Bevor wir uns den anderen Gleichungen zuwenden, betrachten wir nach der anschaulichen Herleitung der Kontinuitätsgleichung auch noch eine mathematischere, die wir im folgenden dann auch anwenden werden. Ladung und Strom kann man jeweils als Integrale darstellen:

$$Q = \int_V dV \rho; \quad I = \oint_{\partial V} d\vec{F} \cdot \vec{j} \quad (\text{C.10})$$

Mit Hilfe des Gauß'schen Satzes kann man den Ausdruck für I umschreiben zu

$$I = \int_V dV \operatorname{div}\vec{j} \quad (\text{C.11})$$

Setzt man dies ein in die globale Formulierung der Ladungserhaltung (B.27) ein, so hat man

$$\frac{d}{dt} \int_V dV \rho = - \int_V dV \operatorname{div}\vec{j}, \quad (\text{C.12})$$

also letztlich wieder

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\rho + \operatorname{div}\vec{j} = 0.} \quad (\text{C.13})$$

C.2 Maxwell'sche Gleichungen im Vakuum

Betrachte zunächst die erste Maxwellgleichung, das Gauß'sche Gesetz:

$$\oint_{\partial V} d\vec{F} \bullet \vec{E} = 4\pi Q = 4\pi \int_V dV \rho \quad (\text{C.14})$$

Benutzt man für das erste Integral wiederum den Gauß'schen Satz, dann erhält man

$$\operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho \quad (\text{C.15})$$

und damit eine differentielle, lokale Form der ersten Maxwellgleichung. Ebenso kann man mit der zweiten Gleichung verfahren und hat dann einfach

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0. \quad (\text{C.16})$$

Die dritte Gleichung, das Induktionsgesetz, lautet:

$$\oint_{\partial F} d\vec{s} \bullet \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_F d\vec{A} \bullet \vec{B} \quad (\text{C.17})$$

Hier kann man nun für die linke Seite den Stoke'schen Satz benutzen und hat dann

$$\int_F d\vec{F} \bullet \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_F d\vec{F} \bullet \vec{B}, \quad (\text{C.18})$$

also

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}. \quad (\text{C.19})$$

Da man im Gegensatz zum integralen Ausdruck auf der rechten Seite nun auch eine Ortsabhängigkeit hat, muß man hier eine partielle Ableitung verwenden.

Ebenso erhält man aus der vierten Gleichung schließlich unter Verwendung des schon oben benutzten Ausdrucks für den Strom:

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}. \quad (\text{C.20})$$

Nimmt man von dieser Gleichung die Divergenz, so hat man

$$\operatorname{div} \operatorname{rot}\vec{B} = 0 = \frac{4\pi}{c} \operatorname{div}\vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div}\vec{E}, \quad (\text{C.21})$$

und, wenn man die erste Gleichung einsetzt, schließlich wieder die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \operatorname{div}\vec{j} = 0. \quad (\text{C.22})$$

Unter Benutzung der differentiellen Form sieht man also ganz einfach, daß der zweite Term in der vierten Maxwell-Gleichung, der Verschiebungsstrom, nötig ist, um Ladungserhaltung zu gewährleisten.

Wir haben nun also eine Darstellung der Maxwell'schen Gleichungen im Vakuum in differentieller Form:

$$\begin{array}{ll}
 (I) & \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho \\
 (II) & \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\
 (III) & \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = 0 \\
 (IV) & \operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}.
 \end{array} \tag{C.23}$$

Die dritte und die vierte Gleichung wurden noch leicht umgestellt, so daß die Felder jeweils überall auf der linken Seite stehen. Man sieht, daß man zwei inhomogene und zwei homogene Differentialgleichungen für die Felder hat, die miteinander gekoppelt sind. Im Gegensatz zum SI-System sehen die Gleichungen hier nun sehr symmetrisch aus - bei jeder Zeitableitung taucht ein Faktor c^{-1} auf, und auch die Einheiten der Quellterme sind beidesmal gleich (\vec{j}/c hat dieselbe Einheit wie ρ).

C.3 Kraftgesetz

Wir haben bereits Formeln für die Kraft auf eine (bewegte) Punktladung (B.28) und für die Kraft auf einen (ausgedehnten) Strom (B.13). In den lokalen Maxwellgleichungen treten nun aber Ladungs- und Stromdichten auf; entsprechend sollte man erwarten, daß auch die Kraft sich als Integral über ein Kraftdichte darstellen läßt - alle kleinen, lokalen Kräfte summieren sich zur Gesamtkraft auf:

$$\vec{F} = \int dV \vec{f}(\vec{r}), \text{ also } d\vec{F} = \vec{f} dV. \tag{C.24}$$

Betrachte zunächst die elektrische Kraft. Hier gilt für eine Punktladung $\vec{F} = q\vec{E}$; also sollte man für eine ausgedehnte Ladungsverteilung (die man sich ja aus Punktladungen zusammengesetzt vorstellen kann) erwarten:

$$\vec{F} = \int dV \rho(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}) = \int dV \vec{f}(\vec{r}); \tag{C.25}$$

es folgt sofort:

$$\vec{f} = \rho \vec{E}. \tag{C.26}$$

Ströme dagegen kann man durch das Integral der Stromdichte über den Leiterquerschnitt darstellen:

$$I = \int_A \vec{j}(\vec{r}) \cdot d\vec{A}. \tag{C.27}$$

Hier werden die Stromrichtungen der infinitesimal schmalen Teilströme (durch \vec{j} dargestellt) über den Leiterquerschnitt gemittelt. Betrachtet man nur einen solchen Teilstrom, so ist klar, daß gilt:

$$I ds = \vec{j} dA |d\vec{s}| = \vec{j} dV. \tag{C.28}$$

Setzt man dies in das Kraftgesetz ein, so hat man:

$$d\vec{F} = \frac{1}{c} \vec{j} dV \times \vec{B} = \vec{f} dV, \quad (\text{C.29})$$

also ergibt sich folgende Formel:

$$\vec{f} = \frac{\vec{j}}{c} \times \vec{B}. \quad (\text{C.30})$$

Insgesamt hat man dann für die Kraftdichte auf eine Ladungs- und Stromdichte:

$$\boxed{\vec{f} = \rho \vec{E} + \frac{\vec{j}}{c} \times \vec{B}.} \quad (\text{C.31})$$

Die Gleichungen (C.23), (C.13) und (C.31) sind die Grundgleichungen der Elektrodynamik (wobei allerdings, wie gezeigt, (C.13) nicht unabhängig ist, sondern aus (C.23) folgt). Mit ihnen wird in diesem Skript gearbeitet - Folgerungen werden hergeleitet, ihr physikalischer Inhalt wird erforscht, und Lösungsverfahren für konkrete Probleme werden dargestellt.

Abbildungsverzeichnis

3.1	Polarisation	49
3.2	Stetigkeit der Normalkomponenten	52
3.3	Stetigkeit der Tangentialkomponenten	53
3.4	Dielektrische Kugel im elektrischen Feld	56
3.5	Weiß'sche Bezirke	61
3.6	Magnetisierungs-Kurven	61
3.7	Masche im Stromkreis	65
3.8	Knotenregel	66
3.9	Schaltpläne für Frequenzpässe	77
3.10	Spannung am Bandpass	78
4.1	Brechung	95
4.2	Einfluß der Polarisation bei der Brechung	99
4.3	Lichtmühle	111
A.1	Einfach zusammenhängende Gebiete	181
A.2	Integrationsweg für Laurent'sche Reihe	193
A.3	Residuensatz bei mehreren Polen	194
B.1	Ampère'sches Gesetz beim Kondensator	206