

# ELEKTRODYNAMIK

Klaus Fredenhagen  
II.Institut für Theoretische Physik  
Universität Hamburg  
Wintersemester 1998/99



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Elektrostatik</b>	<b>2</b>
1.1	Coulombgesetz, das elektrische Feld . . . . .	2
1.2	Das Gaußsche Gesetz . . . . .	4
1.3	Potential . . . . .	7
1.4	Leiter . . . . .	11
1.5	Randwertprobleme; Greensche Funktionen . . . . .	12
1.6	Entwicklung nach orthogonalen Funktionen; Multipolentwicklung . . . . .	20
1.7	Elektrostatische Energie . . . . .	29
<b>2</b>	<b>Magnetostatik</b>	<b>33</b>
2.1	Stationäre Ströme . . . . .	33
2.2	Kräfte zwischen Strömen . . . . .	34
2.3	Magnetfeld(magnetische Induktion) . . . . .	35
2.4	Vektorpotential und Eichtransformationen . . . . .	37
2.5	Das Vektorpotential einer lokalisierten Stromverteilung . . . . .	38
2.6	Dipol im äußeren magnetostatischen Feld . . . . .	40
2.7	Supraleiter . . . . .	42
<b>3</b>	<b>Maxwellgleichungen</b>	<b>51</b>
3.1	Das Faradaysche Induktionsgesetz . . . . .	51
3.2	Maxwellsche Ergänzung . . . . .	52
3.3	Maxwellgleichungen; die Wellengleichung . . . . .	53
3.4	Potentiale und Eichtransformationen . . . . .	54
3.5	Vierdimensionale Formulierung der Maxwellgleichungen . . . . .	56
3.6	Energie und Impuls des elektromagnetischen Feldes . . . . .	58
<b>4</b>	<b>Elektromagnetische Wellen</b>	<b>61</b>
4.1	Die homogene Wellengleichung . . . . .	61
4.2	Die inhomogene Wellengleichung; retardierte Potentiale . . . . .	63
4.3	Polarisation . . . . .	67
4.4	Frequenzverhalten der Suszeptibilität; Kramers-Kronig-Relationen . . . . .	70
4.5	Reflexion und Brechung . . . . .	72
4.6	Beugung . . . . .	74

<b>5</b>	<b>Spezielle Relativitätstheorie</b>	<b>77</b>
5.1	Galilei- und Lorentztransformationen . . . . .	77
5.2	Relativistische Mechanik . . . . .	82
5.3	Strahlung beschleunigter Ladungen . . . . .	85
5.4	Strahlungsrückwirkung . . . . .	88

## 1 Elektrostatik

### 1.1 Coulombgesetz, das elektrische Feld

Elektrische und magnetische Phänomene sind bereits seit langem bekannt, jedoch gelangte man erst recht spät zu quantitativen Aussagen. Die erste derartige Aussage ist das Coulombsche Gesetz über die Kräfte zwischen zwei ruhenden Ladungen. Seien  $e_1$  und  $e_2$  zwei punktförmig gedachte Ladungen an den Orten  $\vec{x}_1$  and  $\vec{x}_2$ , dann wirkt auf die Ladung  $e_1$  die Kraft

$$\vec{F} = k \frac{e_1 e_2 (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3} \quad (1.1)$$

mit einer Konstanten  $k > 0$ . Im SI-System ist  $k = (4\pi\epsilon_0)^{-1}$  mit  $\epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi} \frac{\text{A}^2}{\text{c}^2 \text{N}}$ . Es gibt auch Maßsysteme, z.B. das Gaußsche System, in denen man  $k = 1$  setzt und damit die Einheit der elektrischen Ladung durch mechanische Einheiten ausdrückt. Für die Elementarteilchenphysik wichtig ist die Beziehung von  $k$  zu anderen Naturkonstanten. Es gilt:

$$k = \alpha \frac{\hbar c}{e_0^2} \quad (1.2)$$

mit der Feinstrukturkonstanten  $\alpha \approx \frac{1}{137}$ . Wir werden im folgenden  $\epsilon_0 = c = 1$  setzen. Dies bedeutet, dass, ausgehend von den Einheiten Sekunde und Newton, Längen in Lichtsekunden ( $1\text{m} = (2,9979250 \cdot 10^8)^{-1}\text{s} \approx 3 \cdot \text{ns}$ ) und Ströme in Vielfachen von  $\sqrt{\frac{10^7}{4\pi}}\text{A}$  gemessen werden.

Das Coulombgesetz hat dieselbe Form wie das Newtonsche Gravitationsgesetz, bis darauf, dass die Ladungen verschiedene Vorzeichen haben können, so dass gleichnamige Ladungen sich abstoßen, während ungleichnamige sich anziehen. Dieser Sachverhalt ist für die Stabilität der Materie von ganz entscheidender Bedeutung.

Wie das Gravitationsgesetz ist das Coulombgesetz ein Fernwirkungsgesetz: Ladung 1 wird davon beeinflusst, an welchem Ort sich Ladung 2 befindet. Die Einführung einer Fernwirkung ist schon zu Newtons Zeiten als

unbefriedigend empfunden worden. Sie lässt sich in der folgenden Weise vermeiden, die zunächst rein formal erscheint.

Man definiert eine neue Größe, das *elektrische Feld* am Punkt  $\vec{x}$ , als die Kraft, die eine Probeladung am Punkt  $\vec{x}$  erfährt, dividiert durch deren Ladung. Dabei ist die Probeladung so klein, dass sie das System nicht beeinflusst,

$$\vec{E}(\vec{x}) = \lim_{e \rightarrow 0} \frac{1}{e} \vec{F}(\vec{x}) \quad . \quad (1.3)$$

Man stellt sich jetzt vor, dass das Feld auch vorhanden ist, wenn es nicht durch eine Probeladung getestet wird. Das Problem der Fernwirkung ist damit in zwei Teile zerlegt worden: die Kraft auf das Probeteilchen ist durch dessen Ladung und durch das elektrische Feld an seinem Ort bestimmt, und es bleibt zu verstehen, wie ein elektrisches Feld von einer Konfiguration von Ladungen erzeugt wird. Wie sich später herausstellen wird, ist das elektrische Feld tatsächlich eine selbständige Größe, die auch unabhängig von dem Vorhandensein von Ladungen einen Sinn hat.

Aus den Gleichungen (1.1) und (1.3) ergibt sich das elektrische Feld einer Punktladung  $e$  am Ort  $\vec{y}$  zu

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} e \frac{\vec{x} - \vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|^3} \quad . \quad (1.4)$$

Elektrische Felder mehrerer Punktladungen addieren sich vektoriell,

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \sum_i e_i \frac{\vec{x} - \vec{y}_i}{|\vec{x} - \vec{y}_i|^3} \quad . \quad (1.5)$$

Oft ist es sinnvoll, ein System vieler kleiner Punktladungen durch eine kontinuierliche Ladungsdichte  $\rho(\vec{y})$  zu beschreiben. Das elektrische Feld erhält man dann als das Integral

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3\vec{y} \rho(\vec{y}) \frac{\vec{x} - \vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|^3} \quad . \quad (1.6)$$

Während das elektrische Feld einer Punktladung am Ort der Ladung divergiert, ist das Feld einer unendlich oft differenzierbaren Ladungsdichte  $\rho$  selbst auch unendlich oft differenzierbar.

Neben kontinuierlichen und punktförmigen Ladungsverteilungen betrachtet man auch flächenhafte und linienförmige Verteilungen. Alle diese Situationen kann man einheitlich durch den Begriff der Distribution beschreiben. So ist die Ladungsdichte einer Punktladung am Ort  $\vec{x}$  durch die dreidimensionale Diracsche Deltafunktion gegeben,

$$\rho(\vec{y}) = e \delta^3(\vec{y} - \vec{x}) \quad , \quad (1.7)$$

während eine Flächenladungsdichte  $\sigma$  auf der Oberfläche einer Kugel mit Radius  $R$  und Mittelpunkt  $\vec{a}$  einer Ladungsdichte

$$\rho(\vec{y}) = \sigma(\vec{y})\delta(|\vec{y} - \vec{a}| - R) \quad (1.8)$$

entspricht. Ist eine Fläche durch  $\vec{x}(u, v)$  parametrisiert,  $(u, v) \in G \subset \mathbb{R}^2$ , so führt die Flächenladungsdichte  $\sigma(\vec{x})$  auf dieser Fläche zu einer Ladungsdichte

$$\rho(\vec{y}) = \int_G dudv \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right| \sigma(\vec{y})\delta^3(\vec{y} - \vec{x}(u, v)) \quad (1.9)$$

Ist die Ladung stattdessen auf einer durch  $\vec{x}(s)$ ,  $s \in I \subset \mathbb{R}$  parametrisierten Kurve mit Linienladungsdichte  $\lambda(\vec{y})$  konzentriert, so ist die Ladungsdichte

$$\rho(\vec{y}) = \int_I ds \left| \frac{d\vec{x}}{ds} \right| \lambda(\vec{y})\delta^3(\vec{y} - \vec{x}(s)) \quad (1.10)$$

## 1.2 Das Gaußsche Gesetz

Das elektrische Feld einer Ladungsverteilung nimmt mit dem Quadrat des Abstandes ab. Man kann das Feld geometrisch in der folgenden Weise beschreiben: Von jeder Ladung gehen Feldlinien aus. Ihre Richtung gibt die Richtung des elektrischen Feldes wieder, ihre Dichte dessen Betrag. Die Zahl der Feldlinien, die aus einem Gebiet  $G$  heraustreten, ist ein Maß für die in diesem Gebiet enthaltene Ladung. Quantitativ lässt sich dieser Zusammenhang durch das Gaußsche Gesetz beschreiben.

**Satz 1.1** *Sei  $G$  ein beschränktes Gebiet des  $\mathbb{R}^3$  mit glattem Rand  $\partial G$ . Dann gilt für das elektrische Feld  $\vec{E}$  einer Ladungsverteilung  $\rho$ , die auf  $\partial G$  nicht singulär ist*

$$\int_{\partial G} \vec{E} \cdot d^2 \vec{x} = \int_G \rho d^3 \vec{x} \quad (1.11)$$

Hierbei ist der Ausdruck auf der linken Seite der sogenannte elektrische Fluss durch die Fläche  $\partial G$ . Ist die Fläche  $S$  durch

$$\vec{x}(u, v), \quad (u, v) \in [a, b] \times [c, d], \quad (1.12)$$

parametrisiert, so wird der elektrische Fluss durch  $S$  durch

$$\int_S \vec{E} \cdot d^2 \vec{x} = \int_c^d \left\{ \int_a^b \vec{E} \cdot \left( \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right) du \right\} dv \quad (1.13)$$

definiert.

*Beweis:* Da  $\vec{E}$  linear von  $\rho$  abhängt, genügt es, den Satz für den Fall einer Punktladung der Stärke 1 zu zeigen. Wir wählen den Ort der Punktladung als den Ursprung unseres Koordinatensystems. In Kugelkoordinaten hat der infinitesimale elektrische Fluss  $\vec{E} \cdot d^2\vec{x}$  die einfache Form

$$\begin{aligned} \vec{E} \cdot d^2\vec{x} &= \\ \frac{1}{4\pi r^3} \left( \vec{x} \cdot \left( \frac{\partial \vec{x}}{\partial r} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta} \right) dr d\theta + \vec{x} \cdot \left( \frac{\partial \vec{x}}{\partial r} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial \phi} \right) dr d\phi + \vec{x} \cdot \left( \frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial \phi} \right) d\theta d\phi \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \sin \theta d\theta d\phi \quad . \end{aligned}$$

Er ist also proportional zum Raumwinkelement  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$ . Integration über  $\partial G$  liefert

$$\int_{\partial G} \vec{E} \cdot d^2\vec{x} = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \in G \\ 0 & \text{anderenfalls} \end{cases} \quad . \quad (1.14)$$

Daraus folgt die Behauptung. QED.

Wenn die Ladungsdichte  $\rho$  stetig ist, kann man das Gaußsche Gesetz auch infinitesimal formulieren, indem man das Gebiet  $G$  auf einen Punkt schrumpfen lässt. Ist  $\vec{x} \in G$  und  $Vol(G)$  das Volumen von  $G$ , so definiert man die Divergenz von  $\vec{E}$  durch

$$\operatorname{div} \vec{E} = \lim_{G \rightarrow \{\vec{x}\}} \frac{1}{Vol(G)} \int_{\partial G} \vec{E} \cdot d^2\vec{x} \quad (1.15)$$

und erhält das differentielle Gaußsche Gesetz

$$\operatorname{div} \vec{E} = \rho \quad . \quad (1.16)$$

Zur Berechnung von  $\operatorname{div} \vec{E}$  wählt man zweckmäßigerweise ein kartesisches Koordinatensystem und eine Folge von Würfeln  $G_a$  mit der Kantenlänge  $2a$

$$G_a = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^3, |y_i - x_i| \leq a, i = 1, 2, 3\} \quad . \quad (1.17)$$

Man erhält (o.B.d.A. für  $\vec{x} = 0$ )

$$\begin{aligned} \int_{\partial G_a} \vec{E} \cdot d^2\vec{x} &= \int_{|u|, |v| \leq a} dudv \{ E_1(a, u, v) - E_1(-a, u, v) \\ &\quad + E_2(u, a, v) - E_2(u, -a, v) + E_3(u, v, a) - E_3(u, v, -a) \}. \end{aligned}$$

Einsetzen in die Definition für  $\operatorname{div} \vec{E}$  liefert

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_1}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2}{\partial x_2} + \frac{\partial E_3}{\partial x_3} \quad . \quad (1.18)$$

Für stetig differenzierbare elektrische Felder ist die differentielle Form des Gaußschen Gesetzes äquivalent zur integralen Form. Dieser rein mathematische Zusammenhang ist der Gaußsche Satz:

$$\int_G \operatorname{div} \vec{E} d^3 \vec{x} = \int_{\partial G} \vec{E} \cdot d^2 \vec{x} \quad . \quad (1.19)$$

Für singuläre Felder macht die differentielle Form des Gaußschen Gesetzes keinen direkten Sinn. In diesem Fall interpretiert man die Ableitungen im Sinne von Distributionen. Sei  $f$  eine unendlich oft differenzierbare Funktion, die außerhalb eines beschränkten Gebiets verschwindet. Dann wird  $\operatorname{div} \vec{E}$  als Distribution durch

$$\int \operatorname{div} \vec{E}(\vec{x}) f(\vec{x}) d^3 \vec{x} = - \int \vec{E}(\vec{x}) \cdot \operatorname{grad} f(\vec{x}) d^3 \vec{x} \quad (1.20)$$

definiert. Im Sinne dieser Definition gilt das Gaußsche Gesetz auch für distributionsartige Ladungsdichten und Felder. Für eine Punktladung 1 am Punkt 0 erhält man die Formel

$$\operatorname{div} \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} = 4\pi \delta^3(\vec{x}) \quad . \quad (1.21)$$

Interessant ist die differentielle Form des Gaußschen Gesetzes auch für den Fall einer Flächenladung. Sei  $\sigma$  eine glatte Flächenladungsdichte. Wir betrachten die dosenförmigen Gebiete

$$G_\varepsilon = \{\vec{x} + \lambda \vec{n}(\vec{x}), \vec{x} \in S, |\lambda| < \varepsilon\} \quad (1.22)$$

für ein Teilstück  $S$  der Fläche mit Normalenvektorfeld  $\vec{n}$ . Das Integral des infinitesimalen elektrischen Flusses über den Rand von  $G_\varepsilon$  ergibt Beiträge von Deckel und Boden der Dose

$$\int_S \left\{ \vec{E}(\vec{x} + \varepsilon \vec{n}) \cdot d^2(\vec{x} + \varepsilon \vec{n}) - \vec{E}(\vec{x} - \varepsilon \vec{n}) \cdot d^2(\vec{x} - \varepsilon \vec{n}) \right\} \quad , \quad (1.23)$$

wobei das Minuszeichen von der entgegengesetzten Orientierung des Bodens herrührt, sowie Beiträge vom Mantel der Dose. Im Limes  $\varepsilon \rightarrow 0$  verschwinden die letzteren, da das elektrische Feld einer flächenartigen Ladungsverteilung überall beschränkt ist, und wir erhalten die Aussage, dass die Normalkomponente des elektrischen Feldes an einer geladenen Fläche einen Sprung von  $\sigma$  macht. Man nennt den Sprung der Normalkomponenten an einer Fläche die Flächendivergenz.

### 1.3 Potential

Verschiebt man die Ladung im elektrischen Feld  $\vec{E}$  entlang eines Weges  $\gamma$ , so leistet man die Arbeit

$$A = e \int_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{x} \quad . \quad (1.24)$$

Die infinitesimale Arbeit pro Ladung nennt man die infinitesimale Spannung  $\vec{E} \cdot d\vec{x}$ . Im elektrostatischen Feld gilt wie im Gravitationsfeld, dass die Arbeit wegunabhängig ist. Es gilt also

$$\int_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{x} = 0 \quad (1.25)$$

für geschlossene Wege  $\gamma$ . Daher gibt es eine Funktion  $\varphi$ , das elektrostatische Potential, mit der Eigenschaft

$$\int_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{x} = \varphi(\vec{x}) - \varphi(\vec{y}) \quad (1.26)$$

wobei  $\gamma$  ein Weg von  $\vec{x}$  nach  $\vec{y}$  ist. Äquivalent dazu ist die differentielle Form

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi \quad , \quad (1.27)$$

mit  $\text{grad } \varphi = \nabla \varphi = (\frac{\partial}{\partial x_1} \varphi, \frac{\partial}{\partial x_2} \varphi, \frac{\partial}{\partial x_3} \varphi)$ . Die Wegunabhängigkeit der Spannung formuliert man infinitesimal in der folgenden Weise. Man definiert die Rotation eines Vektorfeldes  $\vec{E}$  in kartesischen Koordinaten durch

$$\text{rot } \vec{E} = \nabla \times \vec{E} = (\frac{\partial}{\partial x_2} E_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} E_2, \frac{\partial}{\partial x_3} E_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} E_3, \frac{\partial}{\partial x_1} E_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} E_1). \quad (1.28)$$

Nach dem Stokesschen Satz gilt die Beziehung

$$\int_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{x} = \int_S \text{rot } \vec{E} \cdot d^2 \vec{x} \quad (1.29)$$

für ein Flächenstück  $S$  mit Rand  $\partial S$ . Damit erhält man die Beziehung

$$\text{rot } \vec{E} = 0 \quad . \quad (1.30)$$

Für distributionsartige Felder gilt dieselbe Beziehung, wenn die Ableitungen im Sinne von Distributionen interpretiert werden. Interessant ist wieder der Fall von Flächenladungen. Wir betrachten eine glatte Flächenladungsdichte  $\sigma$  auf einer Fläche  $S$  und bewegen eine Ladung auf einem geschlossenen Weg  $\gamma$ , der unmittelbar oberhalb der Fläche verläuft (Teilstück  $\gamma_1$ ) und dann unter

ihr zurückläuft (Teilstück  $\gamma_2$ ). Im Limes verschwindenden Abstands von der Fläche erhält man für  $\gamma_2 = \gamma_1^{-1}$  die Gleichung

$$\int_{\gamma_1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\vec{E}(\vec{x} + \varepsilon \vec{n}) - \vec{E}(\vec{x} - \varepsilon \vec{n})) \cdot d\vec{x} = 0 \quad (1.31)$$

mit dem Normalenvektorfeld  $\vec{n}$ , und damit für jeden Tangentialvektor  $\vec{t}$  an die Fläche im Punkt  $\vec{x}$

$$\vec{t} \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\vec{E}(\vec{x} + \varepsilon \vec{n}) - \vec{E}(\vec{x} - \varepsilon \vec{n})) = 0 \quad . \quad (1.32)$$

Die Tangentialkomponenten des elektrischen Feldes an einer geladenen Fläche sind also (im Gegensatz zur Normalkomponente) stetig.

Die beiden Differentialgleichungen

$$\operatorname{div} \vec{E} = \rho \quad , \quad \operatorname{rot} \vec{E} = 0 \quad , \quad (1.33)$$

die das elektrostatische Feld erfüllt, sind die Grundgleichungen der Elektrostatik. Wir stellen uns jetzt auf den Standpunkt, dass alle Lösungen dieser Gleichung physikalisch mögliche elektrische Felder sind. Um die allgemeine Lösung zu finden, nutzen wir zunächst aus, dass die Gleichung  $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$  identisch erfüllt wird, wenn man  $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$  setzt, für eine Funktion  $\varphi$ , das bereits eingeführte elektrostatische Potential. In einem beliebigen einfach zusammenhängenden Gebiet des Raumes gilt auch die Umkehrung, dass nämlich jedes rotationsfreie Vektorfeld der Gradient einer skalaren Funktion ist.  $\varphi$  ist durch  $\vec{E}$  bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt. Einsetzen dieser Form von  $\vec{E}$  in die erste Gleichung ergibt

$$\rho = -\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\nabla \cdot \nabla \varphi = -\Delta \varphi \quad , \quad (1.34)$$

wobei  $\Delta$  der sogenannte Laplaceoperator ist. In kartesischen Koordinaten ist er gegeben durch

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \quad . \quad (1.35)$$

Die Gleichung

$$\Delta \varphi = -\rho \quad (1.36)$$

heißt die Poissongleichung. Die Aufgabe der Elektrostatik ist es, diese Gleichung zu lösen.

Die Poissongleichung ist eine inhomogene lineare partielle Differentialgleichung. Zwei Lösungen  $\varphi_1, \varphi_2$  unterscheiden sich daher um eine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung, der Laplacegleichung

$$\Delta \varphi = 0 \quad , \quad \varphi = \varphi_1 - \varphi_2 \quad . \quad (1.37)$$

Die Lösungen der Laplacegleichung nennt man harmonische Funktionen. In zwei Dimensionen sind die harmonischen Funktionen gerade die Real- und Imaginärteile holomorpher Funktionen. Auch in drei Dimensionen sind harmonische Funktionen unendlich oft differenzierbar. Für uns ist besonders wichtig, dass eine im ganzen Raum beschränkte, harmonische Funktion konstant ist. Eine Lösung der Poissongleichung ist daher eindeutig bestimmt, wenn man verlangt, dass sie im Unendlichen verschwindet.

Wenn die Ladungsdichte  $\rho$  vorgegeben ist und außerhalb eines beschränkten Gebietes verschwindet, so erhält man als eine Lösung der Poissongleichung

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3\vec{y} \frac{\rho(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} \quad . \quad (1.38)$$

Wendet man diese Formel auf eine Punktladung im Ursprung an, so findet man die bemerkenswerte Gleichung

$$\Delta \frac{1}{|\vec{x}|} = -4\pi\delta^3(\vec{x}) \quad , \quad (1.39)$$

die natürlich im Sinne von Distributionen zu verstehen ist.

Betrachten wir einige Beispiele.

#### 1. Homogen geladene Kugel

Wir wählen den Ursprung des Koordinatensystems im Mittelpunkt der Kugel,  $R$  sei der Radius und  $Q$  sei die Ladung der Kugel. Wir suchen eine Lösung  $\varphi$ , die nur von  $|\vec{x}|$  abhängt. Dann ist  $\vec{E}$  parallel zu  $\vec{x}$ . Nach dem Gaußschen Gesetz gilt für eine Kugelschale  $S$  mit dem Radius  $r$  um den Kugelmittelpunkt

$$\begin{aligned} \int_S \vec{E} \cdot d^2\vec{x} &= Q \quad , \quad r > R \\ \int_S \vec{E} \cdot d^2\vec{x} &= Q \frac{r^3}{R^3} \quad , \quad r < R \end{aligned} \quad (1.40)$$

Mit  $\int_S \vec{E} \cdot d^2\vec{x} = 4\pi r^2 |\vec{E}|$  folgt

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi} Q \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} \quad , \quad |\vec{x}| > R \\ \vec{E}(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi} Q \frac{\vec{x}}{R^3} \quad , \quad |\vec{x}| < R \end{aligned} \quad (1.41)$$

Für das Potential erhält man

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} Q \frac{1}{|\vec{x}|} \quad , \quad |\vec{x}| > R$$

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} Q \left( \frac{3}{2R} - \frac{|\vec{x}|^2}{2R^3} \right) \quad , \quad |\vec{x}| < R \quad . \quad (1.42)$$

## 2. Dipol

Wir betrachten zwei Punktladungen  $(e, \vec{x})$  und  $(-e, 0)$ . Ihr Potential ist

$$\varphi(\vec{y}) = \frac{1}{4\pi} e \left( \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} - \frac{1}{|\vec{y}|} \right) \quad . \quad (1.43)$$

Wir interessieren uns für den Grenzfall  $\vec{x} \rightarrow 0$ ,  $e \rightarrow \infty$ , so dass das Dipolmoment  $\vec{p} = e\vec{x}$  konstant bleibt. Dann gilt (mit  $s = e^{-1}$ )

$$\varphi(\vec{y}) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi s} \left( \frac{1}{|\vec{y} - s\vec{p}|} - \frac{1}{|\vec{y}|} \right) = -\frac{1}{4\pi} \vec{p} \cdot \nabla \frac{1}{|\vec{y}|} \quad . \quad (1.44)$$

Die zugehörige Ladungsdichte ist die Ableitung der  $\delta$ -Funktion,

$$\rho(\vec{x}) = -\vec{p} \cdot \nabla \delta^3(\vec{x}) = -\operatorname{div} \vec{p} \delta^3(\vec{x}) \quad . \quad (1.45)$$

## 3. Homogen geladene Ebene

Die Ebene  $z = 0$  sei mit der homogenen Flächenladungsdichte  $\sigma$  versehen. Wir suchen eine Lösung  $\varphi$ , die unabhängig von  $x$  und  $y$  ist. Die Poissongleichung wird dann zur gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{d^2}{dz^2} \varphi = -\sigma \delta(z) \quad . \quad (1.46)$$

Eine Lösung dieser Gleichung ist

$$\varphi(x, y, z) = -\frac{\sigma}{2} |z| \quad . \quad (1.47)$$

Das zugehörige elektrische Feld ist  $\vec{E}(x, y, z) = \frac{\sigma}{2} \operatorname{sign}(z) \vec{e}_z$ ,  $\vec{e}_z$  Einheitsvektor in  $z$ -Richtung.

## 4. Homogen geladene Gerade

Eine Gerade sei homogen geladen mit der Ladung pro Länge,  $\lambda$ . Wir führen Zylinderkoordinaten ein und legen die  $z$ -Achse in Richtung der Zylinderachse. Wir suchen eine Lösung  $\varphi$ , die nur von  $r$  abhängt. Dann weist das elektrische Feld radial nach außen, und der elektrische Fluss pro Längeneinheit durch einen Zylindermantel  $Z$  mit dem Radius  $r$  um die  $z$ -Achse ist

$$|\vec{E}(\vec{x})| 2\pi r = \lambda \quad , \quad \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = r \quad . \quad (1.48)$$

Also ist  $\vec{E}(\vec{x}) = \frac{\lambda}{2\pi r} \vec{e}_r$ , mit  $\vec{e}_r$  als Einheitsvektor in radialer Richtung, und das Potential ergibt sich zu

$$\varphi(\vec{x}) = -\frac{1}{2\pi} \lambda \ln r \quad . \quad (1.49)$$

## 1.4 Leiter

Die Bestimmung des elektrischen Feldes und des elektrostatischen Potentials bei vorgegebener Ladungsverteilung ist durch die im letzten Abschnitt angegebenen Formeln auf Integrationen zurückgeführt worden. In vielen Fällen ist jedoch die Ladungsverteilung zunächst nicht bekannt. Diese Situation liegt zum Beispiel bei elektrischen Leitern vor. Solange im Innern der Leiter ein elektrisches Feld besteht, bewegen sich die Ladungen; wenn sie ruhen, ist das elektrische Feld im Leiter Null. Man muss daher das elektrostatische Potential so bestimmen, dass es außerhalb der Leiter die Poissongleichung erfüllt und innerhalb der Leiter konstant ist. Die Ladung kann nur auf der Oberfläche der Leiter sitzen. Auf den Leitern kann entweder das Potential vorgegeben werden (z.B. durch „Erdung“) oder die Ladung (isolierte Leiter).

Betrachten wir nun einen Hohlraum  $V$  im Inneren eines Leiters, der das Gebiet  $G$  ausfüllt. Sei  $S$  eine geschlossene Fläche im Inneren des Leiters, die den Hohlraum  $V$  umschließt. Da das elektrische Feld innerhalb des Leiters verschwindet, ist nach dem Gaußschen Gesetz die von  $S$  umschlossene Ladung Null. Wir betrachten jetzt den Fall, dass sich keine Ladung im Innern des Hohlraums befindet. Dann ist  $\varphi = \text{const}$  eine Lösung der Poissongleichung in Leiter und Hohlraum,  $G \cup V$ . Wir werden im nächsten Abschnitt sehen, dass es die einzige Lösung ist. Das elektrostatische Feld in einem ladungsfreien Hohlraum im Innern eines Leiters verschwindet also (Faradayscher Käfig).

Als Beispiel betrachten wir eine geladene leitende Kugel mit Radius  $R$ . Das Potential ist  $\varphi = \frac{Q}{4\pi|\vec{x}|}$  für  $|\vec{x}| > R$  und  $\frac{Q}{4\pi R}$  für  $|\vec{x}| < R$ .

Ein anderes Beispiel für Ladungsverteilungen, die nicht vorgegeben werden, sind die Dipoldichten, die bei Dielektrika in elektrischen Feldern durch die Polarisierbarkeit der Materie auftreten. Man zerlegt hierbei die Ladungsdichte in einen vorgegebenen Teil  $\rho_0$  und einen durch die Polarisation (Dipolmoment pro Volumen)  $\vec{P}$  hervorgerufenen Anteil,

$$\rho = \rho_0 - \text{div } \vec{P} \quad (1.50)$$

In vielen Fällen ist die Polarisation eine lineare Funktion des elektrischen Feldes,

$$\vec{P} = \chi \vec{E} \quad (1.51)$$

mit der Suszeptibilität  $\chi$ . Wir werden auf diese Situation später zurückkommen.

## 1.5 Randwertprobleme; Greensche Funktionen

Die Poissongleichung bei Anwesenheit von Leitern führt auf ein sogenanntes Randwertproblem. Man sucht die Lösung der Gleichung in einem Gebiet  $V$ , dem Komplement der von den Leitern eingenommenen Gebiete  $V_i$ , unter der zusätzlichen Bedingung, dass das Potential am Rand  $\partial V$  des Gebietes, also an den Oberflächen  $\partial V_i$  der Leiter gewissen Einschränkungen unterworfen ist; entweder ist der Wert des Potentials vorgegeben, oder das Potential ist konstant und die Ladung

$$Q_i = - \int_{\partial V_i} \partial_n \varphi df \quad (1.52)$$

auf dem  $i$ -ten Leiter ist vorgegeben. Hierbei ist  $\partial_n \varphi = \vec{n} \cdot \text{grad } \varphi$  mit dem Normaleneinheitsvektor  $\vec{n}$  auf  $\partial V_i$ , und  $df$  ist das Flächenelement auf  $\partial V_i$ .

Wir lösen das Problem in zwei Schritten. Im ersten ignorieren wir das Vorhandensein der Leiter und setzen

$$\varphi_0(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_V d^3 \vec{y} \rho(\vec{y}) \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \quad (1.53)$$

Dann erfüllt  $\varphi_1 = \varphi - \varphi_0$  in  $V$  die Laplacegleichung. Zusätzlich muss  $\varphi_1$  die vorgegebenen Randbedingungen erfüllen. Sei nun  $\psi$  die Differenz zweier Lösungen mit den vorgegebenen Randbedingungen. Es gilt  $\Delta \psi = 0$  sowie

$$\int_V \psi \Delta \psi d^3 \vec{x} = \int_{\partial V} \psi \text{grad } \psi d^2 \vec{x} - \int_V |\text{grad } \psi|^2 d^3 \vec{x} \quad (1.54)$$

Dies ist die sogenannte 1. Greensche Identität. Sie folgt durch Anwendung des Gaußschen Satzes auf die Funktion  $\psi \text{grad } \psi$  unter Benutzung der Formel

$$\text{div}(\psi \text{grad } \psi) = \text{grad } \psi \cdot \text{grad } \psi + \psi \Delta \psi \quad (1.55)$$

Ist nun auf dem Leiter  $V_i$  das Potential vorgegeben, so verschwindet  $\psi$  auf  $\partial V_i$ , ist stattdessen die Ladung vorgegeben, so ist  $\psi$  auf  $\partial V_i$  konstant und

$$\int_{\partial V_i} \text{grad } \psi \cdot d^2 \vec{x} = 0 \quad .$$

In beiden Fällen verschwindet das Oberflächenintegral über  $\partial V_i$ , und wir erhalten

$$\int_V |\text{grad } \psi|^2 d^3 \vec{x} = 0 \quad (1.56)$$

Also ist  $\psi$  in  $V$  konstant. Es verschwindet, falls der Wert des Potentials an einem Punkt festliegt. Wir haben damit das Problem, die Poissongleichung

zu lösen, auf das Problem, die Laplacegleichung mit vorgegebenen Randbedingungen zu lösen, zurückgeführt. Formal löst man das letztere Problem durch die Einführung sogenannter Greenscher Funktionen. Sei  $G_D(\vec{x}, \vec{y})$  eine Lösung der Gleichung

$$\Delta_{\vec{y}} G_D(\vec{x}, \vec{y}) = -\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad , \quad \vec{x}, \vec{y} \in V \quad (1.57)$$

mit den Randbedingungen (Dirichletsche Randbedingungen)

$$G_D(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \quad , \quad \vec{y} \in \partial V \quad . \quad (1.58)$$

Sei nun  $\psi$  eine Lösung der Laplacegleichung in  $V$  mit vorgegebenen Randwerten auf  $\partial V$ . Dann gilt

$$\psi(\vec{x}) = \int_V \psi(\vec{y}) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) d^3 \vec{y} = - \int_V \psi(\vec{y}) \Delta_{\vec{y}} G_D(\vec{x}, \vec{y}) d^3 \vec{y} \quad . \quad (1.59)$$

Aus der 1. Greenschen Identität folgt

$$\begin{aligned} \int_V \psi(\vec{y}) \Delta_{\vec{y}} G_D(\vec{x}, \vec{y}) d^3 \vec{y} = \\ \int_{\partial V} \psi(\vec{y}) \text{grad}_{\vec{y}} G_D(\vec{x}, \vec{y}) \cdot d^2 \vec{y} - \int_V \text{grad} \psi(\vec{y}) \cdot \text{grad}_{\vec{y}} G_D(\vec{x}, \vec{y}) d^3 \vec{y} \quad . \end{aligned}$$

Wendet man auf den zweiten Term auf der rechten Seite wieder die 1. Greensche Identität an, so findet man

$$\begin{aligned} \int_V \text{grad} \psi(\vec{y}) \cdot \text{grad}_{\vec{y}} G_D(\vec{x}, \vec{y}) d^3 \vec{y} = \\ \int_{\partial V} \text{grad} \psi(\vec{y}) G_D(\vec{x}, \vec{y}) \cdot d^2 \vec{y} - \int_V \Delta \psi(\vec{y}) G_D(\vec{x}, \vec{y}) d^3 \vec{y} \quad . \end{aligned}$$

Die beiden Terme auf der rechten Seite verschwinden. Wir erhalten also

$$\psi(\vec{x}) = - \int_{\partial V} \psi(\vec{y}) \partial_{n, \vec{y}} G_D(\vec{x}, \vec{y}) df(\vec{y}) \quad . \quad (1.60)$$

Wenn die Greensche Funktion bekannt ist, kann also jede harmonische Funktion auf  $V$  durch ihre Werte auf dem Rand von  $V$  ausgedrückt werden. Umgekehrt ist jede Funktion  $\psi$  der Form (1.60) mit beliebig (stückweise stetig) vorgegebenen Randwerten harmonisch.

Dies folgt aus der Symmetrie der Greenschen Funktion  $G_D$ , die man direkt aus den Greenschen Identitäten ablesen kann,

$$G_D(\vec{x}, \vec{y}) - G_D(\vec{y}, \vec{x}) = - \int_V d^3 \vec{z} [G_D(\vec{x}, \vec{z}) \Delta_{\vec{z}} G_D(\vec{y}, \vec{z}) - G_D(\vec{y}, \vec{z}) \Delta_{\vec{z}} G_D(\vec{x}, \vec{z})]$$

$$= - \int_{\partial V} d^2 \vec{z} \cdot (G_D(\vec{x}, \vec{z}) \text{grad } G_D(\vec{y}, \vec{z}) - G_D(\vec{y}, \vec{z}) \text{grad } G_D(\vec{x}, \vec{z})) = 0 \quad .$$

Statt die Werte von  $\psi$  auf dem Rand vorzugeben, kann man auch die Normalkomponente des Gradienten auf dem Rand vorschreiben (Neumannsche Randbedingungen). Allerdings legt dies die Lösung der Laplacegleichung nur bis auf eine Konstante fest. Für die zugehörige Greensche Funktion  $G_N$  muss gelten

$$\int_V d^3 \vec{y} \Delta_{\vec{y}} G_N(\vec{x}, \vec{y}) = \int_{\partial V} \partial_{n, \vec{y}} G_N(\vec{x}, \vec{y}) df(\vec{y}) \quad . \quad (1.61)$$

Um diese Bedingung nicht zu verletzen, fordert man neben

$$\Delta_{\vec{y}} G_N(\vec{x}, \vec{y}) = -\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (1.62)$$

als Randbedingung

$$\partial_{n, \vec{y}} G_N(\vec{x}, \vec{y}) = -\frac{1}{|\partial V|} \quad . \quad (1.63)$$

Zu beachten ist, dass für eine harmonische Funktion  $\psi$  die Normalableitungen nicht frei vorgegeben werden können, sondern die Bedingung

$$\int_{\partial V} \partial_n \psi df(\vec{y}) = 0 \quad (1.64)$$

erfüllen müssen. Die harmonische Funktion gewinnt man dann aus ihren Normalableitungen durch

$$\psi(\vec{x}) = \int_{\partial V} \partial_n \psi(\vec{y}) G_N(\vec{y}, \vec{x}) df(\vec{y}) + c \quad , \quad (1.65)$$

wobei die Konstante  $c$  gerade der Mittelwert von  $\psi$  über  $\partial V$  ist.

In der Elektrostatik verwendet man überwiegend die Dirichletsche Greensche Funktion  $G_D$ . Es ist im allgemeinen schwer, diese explizit anzugeben. Es lassen sich aber einige qualitative Aussagen machen. Wir betrachten zunächst einen Spezialfall. Sei  $V$  eine Kugel mit Radius  $R$  um den Punkt  $\vec{x}$ . Dann ist

$$G_D(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} - \frac{1}{R} \right) \quad . \quad (1.66)$$

Hieraus folgt mit (1.60) für eine beliebige harmonische Funktion

$$\psi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{|\vec{y} - \vec{x}|=R} \psi(\vec{y}) df \quad (1.67)$$

$\psi(\vec{x})$  ist also gleich dem Mittelwert von  $\psi(\vec{y})$  über die Oberfläche einer beliebigen Kugel mit Mittelpunkt  $\vec{x}$ . Hieraus folgt der wichtige Satz:

**Satz 1.2** *Eine in einem offenen, zusammenhängenden Gebiet harmonische Funktion nimmt ihr Supremum oder Infimum nur dann an, wenn sie konstant ist.*

*Beweis:* Sei  $\psi$  harmonisch in dem offenen Gebiet  $V$ , und sei  $\vec{x} \in V$  mit  $\psi(\vec{x}) \geq \psi(\vec{y}) \forall \vec{y} \in V$ . Es gibt ein  $R > 0$ , so dass die Kugel um  $\vec{x}$  mit Radius  $R$  in  $V$  liegt. Wegen der Mittelwerteigenschaft muss dann  $\psi(\vec{y}) = \psi(\vec{x})$  gelten für alle  $\vec{y}$  mit  $|\vec{x} - \vec{y}| < R$ . Die Menge der Punkte  $\vec{y}$ , an denen  $\psi$  sein Supremum annimmt, ist also offen, wegen der Stetigkeit von  $\psi$  aber auch abgeschlossen in  $V$ . Da  $V$  zusammenhängend ist, stimmt sie mit  $V$  überein. Falls das Infimum angenommen wird, argumentiert man entsprechend. QED.

Ist  $V$  beschränkt und  $\psi$  stetig auf dem Abschluss von  $V$ , so nimmt es sein Maximum und Minimum notwendig auf dem Rand an. Man kann sich diesen Sachverhalt in einem ganz anderen physikalischen Zusammenhang klarmachen. Wir betrachten die Temperaturverteilung  $T(\vec{x}, t)$  in einem Festkörper. Diese wird durch die Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t T = \lambda \Delta T \quad (1.68)$$

zusammen mit geeigneten Randbedingungen bestimmt. Wir betrachten jetzt den Fall, dass die Temperaturverteilung an der Oberfläche des Körpers fest vorgegeben ist und fragen nach der stationären Verteilung  $T$  mit  $\partial_t T = 0$ . Diese ist offenbar durch eine harmonische Funktion mit den vorgegebenen Randbedingungen gegeben, und das Maximumsprinzip sagt aus, dass die Temperatur im Innern zwischen dem maximalem und dem minimalen Wert auf dem Rand liegt.

Aus dem Satz folgt insbesondere, dass

$$-\partial_{n,\vec{y}} G_D(\vec{x}, \vec{y}) \geq 0 \quad (1.69)$$

für  $\vec{y} \in \partial V$  gilt. Physikalisch kann man das in der folgenden Weise verstehen.  $e G_D(\vec{x}, \vec{y})$  ist das Potential einer Punktladung  $e$  am Ort  $\vec{x} \in V$ , in Gegenwart eines geerdeten Leiters, der  $V$  umschließt. Durch die Punktladung  $e$  wird auf der Oberfläche des Leiters eine Flächenladungsdichte  $\sigma$  induziert. Nach dem Satz über die Flächendivergenz springt die Normalkomponente des elektrischen Feldes an der Leiteroberfläche von  $\sigma$  auf 0. Berücksichtigt man, dass die Leiteroberfläche entgegengesetzt zu  $\partial V$  orientiert ist, so folgt

$$\sigma(\vec{y}) = e \partial_{n,\vec{y}} G_D(\vec{x}, \vec{y}) \quad . \quad (1.70)$$

Die induzierte Flächenladung ist also immer negativ (für  $e > 0$ ). Die insgesamt induzierte Flächenladungsdichte ist

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} \sigma df &= e \int_{\partial V} \text{grad}_{\vec{y}} G_D(\vec{x}, \vec{y}) \cdot d^2 \vec{y} = e \int_V \Delta_{\vec{y}} G_D(\vec{x}, \vec{y}) d^3 \vec{x} \\ &= -e \int_V \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) d^3 \vec{y} = -e \quad . \end{aligned} \quad (1.71)$$

Ist  $G_D$  bekannt, so kann die Lösung der Poissongleichung in  $V$  mit vorgegebenen Werten auf dem Rand von  $V$  sofort angegeben werden,

$$\varphi(\vec{x}) = \int_V \rho(\vec{y}) G_D(\vec{x}, \vec{y}) d^3 \vec{y} - \int_{\partial V} \varphi(\vec{y}) \partial_{n, \vec{y}} G_D(\vec{x}, \vec{y}) df(\vec{y}) \quad . \quad (1.72)$$

Die in einem Punkt  $\vec{x} \in \partial V$  induzierte Flächenladungsdichte ist

$$\sigma(\vec{x}) = \int_V \rho(\vec{y}) \partial_{n, \vec{x}} G_D(\vec{x}, \vec{y}) d^3 \vec{y} - \int_{\partial V} \varphi(\vec{y}) \partial_{n, \vec{x}} \partial_{n, \vec{y}} G_D(\vec{x}, \vec{y}) df(\vec{y}) \quad . \quad (1.73)$$

Ist  $V$  beschränkt und verschwindet das Potential auf dem Rand von  $V$ , so ist die insgesamt induzierte Ladung

$$Q = - \int_V \rho d^3 \vec{x} \quad . \quad (1.74)$$

Das Komplement des Gebietes  $V$  besteht aus Zusammenhangskomponenten  $V_j$ , die wir uns durch Leiter ausgefüllt denken. Auf jedem Leiter  $V_j$  sei jetzt das Potential  $\varphi_j$  vorgegeben. Dann wird auf  $\partial V_i$  zusätzlich die Ladung

$$Q_i = \sum_j C_{ij} \varphi_j \quad (1.75)$$

induziert mit den sogenannten Kapazitätskoeffizienten

$$C_{ij} = - \int_{\partial V_i} df(\vec{x}) \int_{\partial V_j} df(\vec{y}) \partial_{n, \vec{x}} \partial_{n, \vec{y}} G_D(\vec{x}, \vec{y}) \quad . \quad (1.76)$$

Die Matrix  $C$  ist nach Definition symmetrisch. Weiter besitzt sie die folgenden Eigenschaften:

1.  $\sum_j C_{ij} = 0$
2.  $C$  ist positiv semidefinit

*Beweis:* Sei  $\rho = 0$  in  $V$  und  $\varphi_j = 1$  für alle  $j$ . Dann ist das Potential  $\varphi = 1$  in ganz  $V$ , da es als harmonische Funktion Maximum und Minimum auf dem Rand von  $V$  annimmt. Also verschwindet die induzierte Flächenladungsdichte überall. Insbesondere ist die auf dem  $i$ -ten Leiter induzierte Ladung  $Q_i = \sum_j C_{ij} = 0$ . Dass  $C$  positiv semidefinit ist, folgt aus der folgenden Überlegung: Sei wieder  $\rho = 0$  in  $V$ , und sei  $\varphi$  das durch die Vorgabe der Werte  $\varphi_j$  auf  $V_j$  bestimmte Potential. Dann gilt:

$$\sum_{ij} \varphi_i C_{ij} \varphi_j = \sum_i \varphi_i Q_i = \sum_i \int_{\partial V_i} \varphi_i \sigma df = \int_{\partial V} \varphi \partial_n \varphi df = \int_V |\text{grad } \varphi|^2 d^3 \vec{x} \quad .$$

$C$  ist also positiv semidefinit, und  $\sum \varphi_i C_{ij} \varphi_j = 0$  impliziert  $\varphi_i = \varphi_j$  für alle  $i, j$ . QED.

Als Beispiel betrachten wir eine Anordnung aus 2 konzentrischen Kugelschalen mit Radien  $R_1 > R_2$ , Ladungen  $Q_1, Q_2$  und Potentialen  $\varphi_1, \varphi_2$ . Im Außenraum ist das Potential  $\varphi(r) = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi r}$ , innerhalb der inneren Schale ist  $\varphi(r) = \varphi_2$ . In der Kugelschale dazwischen gilt  $\varphi(r) = \frac{a}{r} + b$  mit  $a = \frac{Q_2}{4\pi}$ . Aus der Stetigkeit des Potentials an den Grenzflächen folgt

$$R_1 \varphi_1 - R_2 \varphi_2 = (R_1 - R_2)b \quad , \quad (1.77)$$

also  $Q_2 = \frac{4\pi R_1 R_2}{(R_1 - R_2)}(\varphi_2 - \varphi_1)$  und  $Q_1 = 4\pi R_1 \varphi_1 - Q_2$ . Die Kapazitätskoeffizienten sind also

$$C_{11} = \frac{4\pi R_1^2}{R_1 - R_2} \quad , \quad C_{12} = -\frac{4\pi R_1 R_2}{R_1 - R_2} = -C_{22} \quad . \quad (1.78)$$

Wir wollen jetzt die Greensche Funktion  $G_D$  in einigen Spezialfällen berechnen. Eine wichtige Methode dabei ist die Methode der Spiegelladungen. Das einfachste Beispiel ist ein Halbraum, der durch eine Ebene begrenzt wird. Die Greensche Funktion ergibt sich zu

$$G_D(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} - \frac{1}{|S\vec{x} - \vec{y}|} \right) \quad , \quad (1.79)$$

wobei  $S$  die Spiegelung an der Ebene bezeichnet. Eine Punktladung vor einer leitenden geerdeten Ebene induziert also eine Flächenladungsdichte auf der Ebene, deren elektrisches Feld im Halbraum mit dem einer entgegengesetzt geladenen Punktladung am gespiegelten Ort übereinstimmt. Ist ein Gebiet  $W$  der Durchschnitt mehrerer Halbräume mit der Eigenschaft, dass die Spiegelungen an den jeweiligen Begrenzungsebenen eine endliche Gruppe  $G$  erzeugen (diese Gruppe ist dann notwendig eine Untergruppe der  $O(3)$ ), so macht man für die Greensche Funktion den Ansatz

$$G_D(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{S \in G} \frac{\det(S)}{|S\vec{x} - \vec{y}|} \quad . \quad (1.80)$$

Falls  $W \cap SW = \emptyset$  für  $S \neq 1$  und für jedes  $\vec{y} \in \partial W$  ein  $S \in G$  mit  $S\vec{y} = \vec{y}$  und  $\det(S) = -1$  existiert, so erfüllt der angegebene Ausdruck die Bedingungen für  $G_D$ .

Ein etwas komplizierteres Problem, das sich mit der Methode der Spiegelladungen lösen lässt, ist das Problem einer leitenden Kugel. Sei  $V$  der Außenraum einer Kugel mit Radius  $R$  um den Ursprung. Für die Greensche Funktion machen wir den Ansatz

$$G_D(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} - \frac{q}{|S\vec{x} - \vec{y}|} \right) \quad (1.81)$$

mit  $|S\vec{x}| < R$  für  $|\vec{x}| > R$ . Die Randbedingung für  $G_D$  ist äquivalent zu

$$|S\vec{x} - \vec{y}| = q|\vec{x} - \vec{y}| \quad , \quad |\vec{y}| = R \quad . \quad (1.82)$$

Aus Symmetriegründen ist  $S\vec{x}$  parallel zu  $\vec{x}$ . Für  $\vec{y}$  parallel zu  $\vec{x}$  folgt

$$R \pm |S\vec{x}| = q(|\vec{x}| \pm R) \quad .$$

Addition ergibt mit  $r = |\vec{x}|$

$$q = \frac{R}{r} \quad (1.83)$$

und damit

$$S\vec{x} = q^2 \vec{x} \quad . \quad (1.84)$$

Mit diesen Werten ist die obige Bedingung für die Greensche Funktion erfüllt. Denn das Quadrat der linken Seite ist

$$q^4 r^2 - 2q^2 \vec{x} \cdot \vec{y} + R^2 \quad ,$$

das der rechten Seite

$$q^2 r^2 - 2q^2 \vec{x} \cdot \vec{y} + q^2 R^2 \quad .$$

Beide Seiten stimmen überein, wenn der Wert für  $q$  eingesetzt wird. Wir erhalten also als Greensche Funktion der Kugel

$$G_D(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} - \frac{q}{|q^2 \vec{x} - \vec{y}|} \right) \quad , \quad q = \frac{R}{r} \quad . \quad (1.85)$$

Für die auf der Kugeloberfläche durch eine Einheitsladung im Punkt  $\vec{x}$  induzierte Flächenladung ergibt sich ( $|\vec{y}| = R$ )

$$\sigma(\vec{y}) = \left(-\frac{\vec{y}}{R}\right) \cdot \text{grad}_{\vec{y}} G_D(\vec{x}, \vec{y}) \quad (1.86)$$

mit

$$\operatorname{grad}_{\vec{y}} G_D(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\vec{x} - \vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|^3} - q \frac{q^2 \vec{x} - \vec{y}}{|q^2 \vec{x} - \vec{y}|^3} \right) .$$

Wegen  $|q^2 \vec{x} - \vec{y}| = q|\vec{x} - \vec{y}|$  vereinfacht sich die rechte Seite zu

$$\frac{1}{4\pi} (q^{-2} - 1) \frac{\vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|^3} .$$

Mit  $\cos \gamma = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| |\vec{y}|}$  erhält man

$$\sigma(\vec{y}) = -\frac{r^2 - R^2}{4\pi R (r^2 - 2rR \cos \gamma + R^2)^{\frac{3}{2}}} . \quad (1.87)$$

Die insgesamt influenzierte Ladung ist

$$\begin{aligned} \int \sigma df &= -\frac{r^2 - R^2}{4\pi R} 2\pi R^2 \int_{-1}^1 \frac{dw}{(r^2 - 2rRw + R^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= -\frac{1}{2} (r^2 - R^2) R \frac{1}{rR} (r^2 - 2rRw + R^2)^{-\frac{1}{2}} \Big|_{-1}^1 \\ &= -\frac{1}{2r} (r^2 - R^2) \left( \frac{1}{r - R} - \frac{1}{r + R} \right) \\ &= -\frac{1}{2r} (r + R - (r - R)) = -\frac{R}{r} = -q , \end{aligned}$$

stimmt also mit der Spiegelladung überein.

Bei der Berechnung der Kapazitätskoeffizienten ist zu beachten, dass der Rand von  $V$  aus dem Rand der Kugel  $V_1$  und aus dem Rand bei  $\infty$  besteht. Es gilt

$$\begin{aligned} C_{11} &= - \int_{\partial V_1} df(\vec{x}) \int_{\partial V_1} df(\vec{y}) \partial_{n,\vec{x}} \partial_{n,\vec{y}} G_D(\vec{x}, \vec{y}) \\ &= - \int_{|\vec{x}|=R} df(\vec{x}) \partial_n \left( \frac{R}{|\vec{x}|} \right) = 4\pi R^2 \frac{1}{R} = 4\pi R . \end{aligned} \quad (1.88)$$

Wir wollen jetzt die Greensche Funktion der Kugel zur Lösung einiger elektrostatischer Probleme benutzen.

1. Punktladung  $(e, \vec{x})$  vor geerdeter Kugel:

$$\varphi(\vec{y}) = e G_D(\vec{y}, \vec{x}) . \quad (1.89)$$

2. Punktladung ( $e, \vec{x}$ ) vor Kugel auf konstantem Potential  $\varphi_1$ :

$$\varphi(\vec{y}) = eG_D(\vec{y}, \vec{x}) - \varphi_1 \int df(\vec{z}) \partial_{n,\vec{z}} G_D(\vec{y}, \vec{z}) = eG_D(\vec{y}, \vec{x}) + \varphi_1 \frac{R}{|\vec{y}|} \quad (1.90)$$

Die influenzierte Ladung ist

$$Q = -e \frac{R}{|\vec{x}|} + C_{11} \varphi_1 = -e \frac{R}{|\vec{x}|} + \varphi_1 4\pi R \quad . \quad (1.91)$$

3. Punktladung ( $e, \vec{x}$ ) vor leitender isolierter Kugel mit Ladung  $Q$ :  
Das Potential auf der Kugel ist

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{Q}{R} + \frac{e}{|\vec{x}|} \right) \quad . \quad (1.92)$$

Daraus ergibt sich  $\varphi$  wie oben. Ist insbesondere  $Q = 0$ , so ist ( $q = \frac{R}{|\vec{x}|}$ )

$$\varphi(\vec{y}) = \frac{1}{4\pi} e \left( \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} - q \left( \frac{1}{|q^2 \vec{x} - \vec{y}|} - \frac{1}{|\vec{y}|} \right) \right) \quad ; \quad (1.93)$$

für große Werte von  $|\vec{x}|$  verhält sich die Ladungsverteilung auf der Kugel also wie ein im Zentrum der Kugel befindlicher Dipol mit dem Dipolmoment  $\vec{p} = -eq^3 \vec{x} = -4\pi R^3 \vec{E}$ , wobei  $\vec{E}$  das von der Punktladung am Ort  $\vec{x}$  im Zentrum der Kugel erzeugte Feld ist.

4. Leitende Kugel (isoliert, ungeladen) im homogenen Feld:

Wir approximieren das homogene elektrische Feld  $\vec{E}$  durch das Feld einer weit entfernten Punktladung und erhalten wie im vorherigen Beispiel ein induziertes Dipolfeld.

## 1.6 Entwicklung nach orthogonalen Funktionen; Multipolentwicklung

Für Dirichletsche Randbedingungen hatten wir die Lösung der Poissongleichung in einem offenen beschränkten Gebiet  $V$  in der folgenden Form gefunden,

$$\varphi(\vec{x}) = \int_V d^3 \vec{y} \rho(\vec{y}) G_D(\vec{x}, \vec{y}) - \int_{\partial V} df \varphi(\vec{y}) \partial_{n,\vec{y}} G_D(\vec{x}, \vec{y}) \quad . \quad (1.94)$$

Der zweite Term stellt eine harmonische Funktion mit vorgegebenen Randwerten dar, der erste eine Lösung der Poissongleichung mit verschwindenden Randwerten. Wir interpretieren den ersten Term in der folgenden Weise. Sei

$C^\infty(V)$  der Raum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen in  $V$ . Der Laplaceoperator ist eine lineare Abbildung auf diesem Raum. Wir schränken sie ein auf den Unterraum  $D$  der Funktionen, die auf dem Rand von  $V$  verschwinden. Dann besitzt die Gleichung

$$\Delta\varphi = -\rho \quad (1.95)$$

für ein  $\rho \in C^\infty(V)$  mit kompaktem Träger genau eine Lösung in  $D$ ,

$$\varphi(\vec{x}) = \int_V d^3\vec{y} G_D(\vec{x}, \vec{y}) \rho(\vec{y}) =: (G_D\rho)(\vec{x}) \quad . \quad (1.96)$$

Sei  $C \subset D$  der Unterraum der Funktionen, deren Träger in  $V$  liegt. Die Greensche Funktion definiert dann einen Operator  $G_D : C \rightarrow D$ , der gerade das Inverse des Laplaceoperators mit Dirichletrandbedingungen ist (bis auf den Faktor  $-1$ ). In derselben Weise definiert die Deltafunktion den Einheitsoperator,

$$(1\rho)(\vec{x}) = \int_V d^3\vec{y} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \rho(\vec{y}) = \rho(\vec{x}) \quad . \quad (1.97)$$

Als Operatorgleichung erhalten wir

$$\Delta G_D = -1 \quad . \quad (1.98)$$

Die Lösung der linearen Differentialgleichung kann also wie im Fall linearer Gleichungen mit endlich vielen Unbekannten auf die Inversion einer linearen Abbildung zurückgeführt werden.

Besonders leicht lässt sich das Inverse auf einem Eigenvektor berechnen. Sei  $0 \neq f \in D$  mit  $\Delta f = -\omega f$ . Wegen  $\int d^3\vec{x} f \Delta f = -\int d^3\vec{x} |\text{grad } f|^2$  ist  $\omega > 0$ . Dann gilt  $G_D f = \frac{1}{\omega} f$ . Eine Methode zur Berechnung von  $G_D$  ist daher, das Eigenwertproblem für  $\Delta$  als lineare Abbildung von  $D$  nach  $C^\infty(V)$  zu lösen und dann eine beliebige Funktion als Superposition von Eigenfunktionen zu schreiben.

Betrachten wir zunächst den eindimensionalen Fall. Auf dem Intervall  $[0, \pi]$  sind die Funktionen  $\sin nx, n \in \mathbb{N}$  Eigenfunktionen des eindimensionalen Laplaceoperators mit der Randbedingung  $f(0) = f(\pi) = 0$  und Eigenwert  $-n^2$ . Gelingt es uns, eine beliebige (genügend glatte) Funktion  $f$  in der Form

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx \quad , \quad c_n \in \mathbb{R} \quad (1.99)$$

zu schreiben, so ist die Greensche Funktion mit

$$\frac{d^2}{dx^2} G_D(y, x) = -\delta(y - x) \quad , \quad G_D(y, 0) = 0 = G_D(y, \pi) \quad (1.100)$$

gegeben durch

$$(G_D f)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^2} \sin nx \quad . \quad (1.101)$$

Zur Bestimmung der Entwicklungskoeffizienten führt man in den betrachteten Funktionenräumen ein Skalarprodukt ein, so dass die Eigenfunktionen des Laplaceoperators paarweise orthogonal zueinander sind. In unserem Beispiel ist das Skalarprodukt

$$(f, g) = \int_0^{\pi} dx f(x)g(x) \quad . \quad (1.102)$$

Mit diesem Skalarprodukt gilt

$$\begin{aligned} (\sin nx, \sin mx) &= \int_0^{\pi} dx \sin nx \sin mx \\ &= \int_0^{\pi} dx \frac{1}{2} [\cos(n-m)x - \cos(n+m)x] \\ &= \delta_{nm} \frac{\pi}{2} \quad . \end{aligned} \quad (1.103)$$

Wir definieren orthonormierte Funktionen

$$u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx \quad , n \in \mathbb{N} \quad . \quad (1.104)$$

Ist  $f = \sum c_n u_n$ , so ist der Entwicklungskoeffizient  $c_n$  durch

$$c_n = (u_n, f) \quad (1.105)$$

gegeben, und es gilt die Parsevalsche Gleichung

$$\sum_n c_n^2 = (f, f) \quad . \quad (1.106)$$

Man kann zeigen, dass das Funktionensystem  $\{u_n\}$  vollständig ist, d.h., dass jede quadratisch integrierbare Funktion  $f$  im quadratischen Mittel durch endliche Linearkombinationen der Funktionen  $u_n$  approximiert werden kann,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (f - f_N, f - f_N) = 0 \quad , \quad (1.107)$$

mit  $f_N = \sum_{n=1}^N c_n u_n$ , etwa durch Rückführung auf die Entwicklung einer Funktion in ihre Fourierreihe. Die Konvergenz ist um so besser, je glatter die Funktion ist, falls die Funktion an den Rändern verschwindet.

Sind die Eigenfunktionen  $u_n$  bekannt, so erhält man die Greensche Funktion als

$$G_D(x, y) = \sum_n \omega_n^{-1} u_n(x) u_n(y) \quad , \quad (1.108)$$

wobei  $\omega_n$  der zu  $u_n$  gehörige Eigenwert des Operators  $-\Delta$  ist.

In unserem Beispiel ergibt sich

$$G_D(x, y) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin nx \sin ny = \frac{1}{2} (-|x - y| + x + y) - \frac{1}{\pi} xy \quad . \quad (1.109)$$

Betrachten wir nun wieder 3-dimensionale Probleme. Ist  $V$  ein Quader mit den Kantenlängen  $a_1, a_2, a_3$ , so erhält man Eigenfunktionen von  $\Delta$  durch Produkte der (geeignet skalierten) Lösungen des eindimensionalen Problems,

$$\Delta u_{n_1}^1(x_1) u_{n_2}^2(x_2) u_{n_3}^3(x_3) = -\pi^2 \left( \frac{n_1^2}{a_1^2} + \frac{n_2^2}{a_2^2} + \frac{n_3^2}{a_3^2} \right) u_{n_1}^1(x_1) u_{n_2}^2(x_2) u_{n_3}^3(x_3) \quad (1.110)$$

mit  $u_n^i(x) = \sqrt{\frac{2}{a_i}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a_i}\right)$ . Für die Greensche Funktion erhält man

$$G_D(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{\vec{n} \in \mathbb{N}^3} \omega_{\vec{n}}^{-1} u_{\vec{n}}(\vec{x}) u_{\vec{n}}(\vec{y}) \quad (1.111)$$

mit  $\omega_{\vec{n}} = \pi^2 \left( \frac{n_1^2}{a_1^2} + \frac{n_2^2}{a_2^2} + \frac{n_3^2}{a_3^2} \right)$  und  $u_{\vec{n}}(\vec{x}) = u_{n_1}^1(x_1) u_{n_2}^2(x_2) u_{n_3}^3(x_3)$ .

In diesem Fall wie in vielen anderen Fällen kann man eine eindimensionale Summation explizit durchführen. Nennen wir die kartesischen Koordinaten  $x, y, z$  und die Kantenlängen  $a, b, c$ , so erhält die Greensche Funktion die Darstellung

$$G_D(x, y, z, x', y', z') = \sum_{n, m=1}^{\infty} g_{n, m}(x, x') u_n^2(y) u_m^3(z) u_n^2(y') u_m^3(z') \quad , \quad (1.112)$$

wobei die Funktionen  $g_{n, m}$  die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d^2}{dx^2} g_{n, m}(x, x') = \pi^2 \left( \frac{n^2}{b^2} + \frac{m^2}{c^2} \right) g_{n, m}(x, x') - \delta(x - x') \quad (1.113)$$

mit den Randbedingungen  $g_{n, m}(x, 0) = g_{n, m}(x, a) = 0$  erfüllen. Wir lösen die Gleichung in dem Spezialfall, dass die erste Kante des Quaders von  $-\infty$  nach  $+\infty$  reicht (unendlich langer Hohlleiter mit rechteckigem Querschnitt). Für  $x' < x$  sind die Lösungen, die bei  $\infty$  verschwinden, von der Form  $A \exp kx'$

mit  $k = \sqrt{\pi^2(\frac{n^2}{b^2} + \frac{m^2}{c^2})}$ , für  $x' > x$  ergibt sich  $B \exp(-kx')$  für diejenigen Lösungen, die bei  $+\infty$  verschwinden. Fordert man als Anschlussbedingung

$$A \exp kx = B \exp(-kx) \quad , \quad (1.114)$$

so muss  $g_{n,m}$  offenbar die Form

$$g_{n,m}(x, x') = C \exp(-k|x - x'|) \quad (1.115)$$

haben. Die Konstante  $C$  ergibt sich aus dem Vorfaktor der  $\delta$ -Funktion zu  $C = \frac{1}{2k}$ . Wir erkennen aus diesem Resultat, dass das elektrostatische Feld einer Punktladung in einem Hohlleiter exponentiell abfällt.

Besonders wichtig sind kugelsymmetrische Situationen. Zu ihrer Behandlung schreibt man den Laplaceoperator in Kugelkoordinaten  $r, \theta, \phi$ ,

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \quad . \quad (1.116)$$

Im Gegensatz zum Laplaceoperator in kartesischen Koordinaten ist der Laplaceoperator in Kugelkoordinaten nicht eine Summe von Termen, die jeweils nur eine Koordinate enthalten. Trotzdem kann das Eigenwertproblem auch in diesem Fall auf 3 eindimensionale Eigenwertprobleme zurückgeführt werden. Man macht dazu für die Eigenfunktionen einen Produktansatz,

$$u(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi) \quad . \quad (1.117)$$

Dividiert man die Eigenwertgleichung  $\Delta u = -\omega u$  durch  $u$ , so erhält man  $\omega$  als eine Summe von 3 Termen, von denen zwei von  $\phi$  unabhängig sind, also auch der dritte. Das bedeutet, dass  $\Phi$  Eigenfunktion von  $\frac{d^2}{d\phi^2}$  sein muss,

$$\frac{d^2}{d\phi^2} \Phi = -\mu \Phi \quad . \quad (1.118)$$

Setzt man diese Beziehung ein, so findet man, dass  $\Theta$  Eigenfunktion des Operators  $(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \mu)$  ist,

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \Theta - \frac{1}{\sin^2 \theta} \mu \Theta = -\lambda \Theta \quad , \quad (1.119)$$

und schließlich  $R$  Eigenfunktion von  $\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{\lambda}{r^2}$  ist,

$$\frac{d^2}{dr^2} R + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} R - \frac{\lambda}{r^2} R = -\omega R \quad . \quad (1.120)$$

Für  $\omega = 0$  erhält man die Lösungen  $R = r^l$  mit  $l(l+1) = \lambda$ .  $u$  ist dann eine Lösung der Laplacegleichung.

Das Eigenwertproblem für  $\Phi$  wird gelöst durch

$$\Phi(\phi) = \exp im\phi \quad (1.121)$$

mit  $m^2 = \mu$ . Da  $u$  eine (eindeutige) Funktion des Ortes sein soll, sind nur ganzzahlige Werte für  $m$  möglich.

Um das Eigenwertproblem für  $\Theta$  zu lösen, führen wir als neue Variable  $w = \cos \theta$  ein. Dann erhält man die Gleichung

$$\frac{d}{dw}(1-w^2)\frac{d}{dw}\Theta - \frac{m^2}{1-w^2}\Theta = -\lambda\Theta \quad (1.122)$$

Wir lösen die Gleichung zunächst für den Fall  $m = 0$  (Legendregleichung). Wir suchen Lösungen im Intervall  $[-1, 1]$ , die am Rand stetig sind. Im Innern des Intervalls gibt es für beliebige Werte von  $\lambda$  2 linear unabhängige Lösungen, die aber in der Regel am Rand singular werden. Reguläre Lösungen findet man nach der folgenden Methode: Man bemerkt zunächst, dass der Operator  $A = -\frac{d}{dw}(1-w^2)\frac{d}{dw}$  Polynome in Polynome überführt und dabei den Grad des Polynoms nicht erhöht. Man kann das Eigenwertproblem daher auf den endlich dimensionalen Unterräumen der Polynome mit  $\text{Grad} \leq l, l \in \mathbb{N}_0$  betrachten. Weiter beobachtet man, dass Eigenfunktionen zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal zueinander sind. Dies liegt daran, dass der betrachtete Operator hermitesch ist,

$$(f, Ag) = \int dw \left( \frac{d}{dw} f(w) \right) (1-w^2) \frac{d}{dw} g(w) = (Af, g) \quad (1.123)$$

Sind daher  $f$  und  $g$  Eigenfunktionen von  $A$  zu Eigenwerten  $\lambda_1$  bzw.  $\lambda_2$ , so folgt

$$\lambda_1(f, g) = \lambda_2(f, g) \quad (1.124)$$

und damit die Behauptung. Sind die Eigenwerte gleich, so ist auch jede Linearkombination von  $f$  und  $g$  Eigenfunktion zum selben Eigenwert. Daher kann auch in diesem Fall  $g$  orthogonal zu  $f$  gewählt werden. Da ein hermitescher Operator auf einem endlich dimensionalen Vektorraum eine Basis von Eigenvektoren besitzt, ist ein Polynom mit Grad  $l$  genau dann Eigenfunktion von  $A$ , wenn es orthogonal zu allen Polynomen mit kleinerem Grad ist. Den zugehörigen Eigenwert findet man mit Hilfe der folgenden Betrachtung. Sei  $P_l$  ein Polynom mit Grad  $l$ , das Eigenfunktion von  $A$  mit dem Eigenwert  $\lambda$  ist. Der Koeffizient von  $w^l$  in  $AP_l$  unterscheidet sich von dem von  $P_l$  um den Faktor  $l(l+1)$ , also gilt  $\lambda = l(l+1)$ . Die Polynome  $P_l$  heißen Legendrepolynome und können aus den Monomen  $\{w^l, l \in \mathbb{N}_0\}$  durch

das Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren gewonnen werden. Da jede auf einem endlichen Intervall stetige Funktion gleichmäßig durch Polynome approximiert werden kann, kann es keine anderen regulären Lösungen der Legendregleichung geben.

Eine geschlossene Formel für die Legendrepolynome bekommt man durch den folgenden Trick. Definitionsgemäß gilt

$$\int_{-1}^1 dw w^k P_l(w) = 0 \quad , \quad k < l \quad . \quad (1.125)$$

Sei

$$Q_k(w) = \int_{-1}^w dw_1 \int_{-1}^{w_1} dw_2 \cdots \int_{-1}^{w_{k-1}} dw_k P_l(w_k) \quad . \quad (1.126)$$

Es gilt  $\frac{d}{dw} Q_{k+1} = Q_k$  und  $Q_0 = P_l$ . Durch Vertauschung der Integrationsreihenfolge ergibt sich

$$Q_k(w) = \int_{-1}^w dw_k P_l(w_k) \int_{w_k}^w dw_{k-1} \cdots \int_{w_2}^w dw_1 = \int_{-1}^w dw_k P_l(w_k) \frac{(w - w_k)^{k-1}}{(k-1)!} \quad . \quad (1.127)$$

Für  $1 \leq k \leq l$  verschwindet  $Q_k$  bei  $w = \pm 1$ . Als Polynom vom Grad  $2l$  ist  $Q_l$  daher von der Form

$$Q_l = \text{const}(w^2 - 1)^l \quad . \quad (1.128)$$

Man gewinnt so die folgende Form für das Legendrepolynom  $P_l$

$$P_l = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dw^l} (w^2 - 1)^l \quad (1.129)$$

(Formel von Rodrigues). Der willkürliche Normierungsfaktor ist dabei so gewählt worden, dass  $P_l(1) = 1$  ist. Für das Skalarprodukt mit sich selbst ergibt sich

$$(P_l, P_l) = \frac{2}{2l+1} \quad . \quad (1.130)$$

Als eine Anwendung betrachten wir das Coulombpotential einer Punktladung  $\varphi(\vec{x}) = \frac{c}{|\vec{x}-\vec{y}|}$ ,  $c = \frac{e}{4\pi}$ . Für  $\vec{x} \neq \vec{y}$  ist dies eine Lösung der Laplacegleichung in  $\vec{x}$ . Wir legen die  $z$ -Achse in Richtung von  $\vec{y}$ . In Kugelkoordinaten hängt  $\varphi$  dann nur von  $r$  und  $\theta$  ab. Wir entwickeln  $\varphi$  für  $r \neq |\vec{y}|$  jetzt nach Legendrefunktionen,

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l(r) P_l(\cos \theta) \quad . \quad (1.131)$$

Jeder Summand ist eine Lösung der Laplacegleichung, daher ist  $A_l = a_l r^l$  für  $r < |\vec{y}|$  und  $A_l = b_l r^{-(l+1)}$  für  $r > |\vec{y}|$ . Für  $\theta = 0$  und  $r < r' = |\vec{y}|$  ergibt sich

$$\frac{c}{r' - r} = \sum_l a_l r^l, \quad (1.132)$$

also sind die Koeffizienten  $a_l$  gerade die Koeffizienten der Taylorentwicklung um  $r = 0$ ,

$$a_l = c r'^{-(l+1)}. \quad (1.133)$$

Entsprechend findet man

$$b_l = c r'^l. \quad (1.134)$$

Damit erhält man die folgende Entwicklungsformel für das Coulombpotential

$$\frac{c}{|\vec{x} - \vec{y}|} = c \sum_l \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos \gamma) \quad (1.135)$$

mit  $r_{<} = \min(|\vec{x}|, |\vec{y}|)$ ,  $r_{>} = \max(|\vec{x}|, |\vec{y}|)$  und  $\cos \gamma = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| |\vec{y}|}$ .

Aus dieser Entwicklung kann man auch sehr schnell die Greensche Funktion für ein Gebiet zwischen zwei konzentrischen Kugelschalen mit Radien  $a < b$  entnehmen. Man setzt an

$$G_D(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_l g_l(r, r') P_l(\cos \gamma) \quad (1.136)$$

mit  $r = |\vec{x}|$ ,  $r' = |\vec{y}|$  und

$$g_l(r, r') = \frac{1}{4\pi} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} + A(r) r^l + B(r) r'^{-(l+1)}, \quad (1.137)$$

wobei  $A$  und  $B$  durch die Randbedingungen

$$g_l(r, a) = 0 = g_l(r, b) \quad (1.138)$$

bestimmt sind. Man findet

$$g_l(r, r') = \frac{1}{4\pi} \frac{(r_{<}^l - a^{2l+1} r_{<}^{-(l+1)})(r_{>}^{-(l+1)} - b^{-(2l+1)} r_{>}^l)}{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{(2l+1)}}. \quad (1.139)$$

Wir wenden uns jetzt wieder der Gleichung für  $\Theta$  zu und betrachten den Fall  $m \neq 0$ . Mit ähnlichen Methoden findet man als Lösungen die sogenannten zugeordneten Legendrefunktionen

$$P_l^m(w) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1 - w^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{l+m}}{dw^{l+m}} (w^2 - 1)^l \quad (1.140)$$

mit  $m \in \mathbb{Z}, |m| \leq l$ . Ebenso wie die Legendrepolynome bilden die zugeordneten Legendrefunktionen für festes  $m$  ein System orthogonaler Funktionen auf dem Intervall  $[-1, 1]$ ,

$$(P_l^m, P_{l'}^m) = \delta_{ll'} \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} . \quad (1.141)$$

Mit Hilfe der zugeordneten Legendrefunktionen kann man jetzt ein orthogonales Funktionensystem auf der Einheitssphäre definieren, die sogenannten Kugelflächenfunktionen,

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) \exp im\phi . \quad (1.142)$$

Der Vorfaktor wurde so gewählt, dass die folgende Orthonormierungsrelation gilt,

$$(Y_{lm}, Y_{l'm'}) = \delta_{ll'} \delta_{mm'} , \quad (1.143)$$

wobei das Skalarprodukt zweier komplexwertiger Funktionen auf der Einheitssphäre erklärt ist durch

$$(f, g) = \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi \overline{f(\theta, \phi)} g(\theta, \phi) . \quad (1.144)$$

Die Kugelflächenfunktionen bilden ein vollständiges System orthonormaler Funktionen auf der Einheitssphäre  $S_2$ . Dies lässt sich am leichtesten dadurch einsehen, dass man bemerkt, dass die Funktion  $Y_{lm}$  ein Polynom in den kartesischen Koordinaten  $x, y, z, x^2 + y^2 + z^2 = 1$  ist,

$$Y_{lm} = c_{lm} (x + iy)^m \frac{d^{l+m}}{dz^{l+m}} (z^2 - 1)^l . \quad (1.145)$$

Da sich jede stetige Funktion auf einer kompakten Menge im  $\mathbb{R}^3$  gleichmäßig durch Polynome approximieren lässt, genügt es zu zeigen, dass jedes Polynom auf der Sphäre als Linearkombination der Kugelflächenfunktionen dargestellt werden kann.

Formal schreibt man die Vollständigkeitsrelation in der Form

$$\sum_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) \overline{Y_{lm}(\theta', \phi')} = \frac{1}{\sin \theta} \delta(\theta - \theta') \delta(\phi - \phi') . \quad (1.146)$$

Summiert man nur über  $m$ , so erhält man das interessante Additionstheorem für Kugelflächenfunktionen,

$$\sum_m Y_{lm}(\theta, \phi) \overline{Y_{lm}(\theta', \phi')} = \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\cos \gamma) \quad (1.147)$$

mit  $\cos \gamma = \vec{n}(\theta, \phi) \cdot \vec{n}(\theta', \phi')$ ,  $\vec{n}(\theta, \phi) = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ . Zum Beweis zeigt man zunächst, dass die Summe auf der linken Seite sich nicht ändert, wenn beide Koordinatensysteme mit derselben Rotation transformiert werden. Dann setzt man  $\theta = 0$  und damit  $\theta' = \gamma$  und setzt die expliziten Formeln für  $Y_{lm}$  ein.

Wir können dieses Additionstheorem in die Entwicklung des Coulombpotentials nach Legendrepolyomen einsetzen. Ist  $\rho$  eine Ladungsdichte, die außerhalb einer Kugel mit Radius  $R$  um den Ursprung verschwindet, so ergibt sich für das Potential außerhalb dieser Kugel die sogenannte Multipolentwicklung,

$$\varphi(r, \theta, \phi) = \sum_{lm} \frac{1}{2l+1} \frac{1}{r^{l+1}} Y_{lm}(\theta, \phi) q_{lm} \quad , \quad (1.148)$$

mit den Multipolmomenten

$$q_{lm} = \int dr d\theta d\phi r^2 \sin \theta \rho(r, \theta, \phi) r^l \overline{Y_{lm}(\theta, \phi)} \quad . \quad (1.149)$$

## 1.7 Elektrostatische Energie

Die potentielle Energie eines Systems von Punktladungen  $(e_i, \vec{x}_i)$  ist

$$U = \frac{1}{8\pi} \sum_{i \neq j} \frac{e_i e_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|} \quad . \quad (1.150)$$

Für kontinuierliche Ladungsverteilungen ergibt sich

$$U = \frac{1}{8\pi} \int d^3 \vec{x} d^3 \vec{y} \frac{\rho(\vec{x}) \rho(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} \quad . \quad (1.151)$$

Nach der Definition des elektrostatischen Potentials einer Ladungsverteilung  $\rho$  findet man

$$U = \frac{1}{2} \int d^3 \vec{x} \rho(\vec{x}) \varphi(\vec{x}) \quad . \quad (1.152)$$

Nach der Poissongleichung ist  $\rho(\vec{x}) = -\Delta \varphi(\vec{x})$ . Setzt man dies in die obige Gleichung ein und benutzt die 1. Greensche Identität, so folgt

$$U = \frac{1}{2} \int d^3 \vec{x} |\vec{E}(\vec{x})|^2 \quad (1.153)$$

mit dem elektrischen Feld  $\vec{E} = -\text{grad} \varphi$ .  $U$  wird jetzt interpretiert als die Energie des elektrostatischen Feldes  $\vec{E}$ ,  $u = \frac{1}{2} |\vec{E}|^2$  als Energiedichte. Insbesondere ist  $U \geq 0$ . Die Formel bleibt richtig für Flächenladungen, für

Punktladungen aber divergiert die sogenannte Selbstenergie. Man muss dann die Energie „renormieren“, indem man die unendlichen Selbstenergien subtrahiert. Die Energie des elektrischen Feldes einer Punktladung  $(e, \vec{x})$  im Außenraum einer Kugel mit Radius  $R$  um den Ort der Ladung ist

$$U_R = \frac{1}{2} \int_{|\vec{x}-\vec{y}|>R} d^3\vec{y} |\vec{E}|^2 = \frac{e^2}{8\pi R} \quad . \quad (1.154)$$

Sind Punktladungen  $(e_i, \vec{x}_i)$  vorhanden, so ist die renormierte Energie des Feldes

$$U_{\text{ren}} = \lim_{R \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{2} \int_{|\vec{x}-\vec{x}_i|>R} d^3\vec{x} |\vec{E}|^2 - \frac{1}{8\pi R} \sum_i e_i^2 \right\} \quad . \quad (1.155)$$

Die renormierte Energie ist nicht mehr notwendig positiv. Divergenzen bei kurzen Abständen und ihre Beseitigung durch Renormierung sind nicht auf die klassische Elektrodynamik beschränkt, sondern treten auch in der Quantenelektrodynamik auf.

Die Positivität der elektrostatischen Energie in Abwesenheit von Punktladungen führt zu einer Charakterisierung von elektrostatischen Feldern als Feldkonfigurationen mit minimaler Energie.

**Satz:** Sei  $\varphi$  eine Lösung der Laplacegleichung in  $V$  und sei  $\psi$  eine andere (genügend glatte) Funktion, die auf  $\partial V$  mit  $\varphi$  übereinstimmt. Dann gilt

$$\int_V d^3\vec{x} |\text{grad } \psi|^2 > \int_V d^3\vec{x} |\text{grad } \varphi|^2 \quad . \quad (1.156)$$

*Beweis:* Sei  $\chi = \psi - \varphi$ . Es gilt

$$\int_V d^3\vec{x} |\text{grad } \psi|^2 = \int_V d^3\vec{x} |\text{grad } \varphi|^2 + 2 \int_V d^3\vec{x} \text{grad } \varphi \cdot \text{grad } \chi + \int_V d^3\vec{x} |\text{grad } \chi|^2 \quad . \quad (1.157)$$

Anwendung der 1. Greenschen Identität auf den gemischten Term ergibt

$$\int_V d^3\vec{x} \text{grad } \varphi \cdot \text{grad } \chi = \int_{\partial V} df(\vec{x}) (\partial_n \varphi) \chi - \int_V d^3\vec{x} (\Delta \varphi) \chi = 0 \quad . \quad (1.158)$$

Daraus folgt die Behauptung.

Eine ähnliche Aussage macht der Satz von Thomson. Nach diesem Satz verteilen sich die Ladungen in einem Leiter gerade so, dass die elektrostatische Energie minimal wird. Sei  $\vec{E}$  das elektrostatische Feld einer Anordnung

von Leitern mit vorgegebenen Ladungen, und sei  $\vec{E}'$  ein anderes innerhalb von  $V$  divergenzfreies Feld mit denselben Flüssen durch die Leiteroberflächen,

$$\int_{\partial V_i} \vec{E}' \cdot d^2 \vec{x} = \int_{\partial V_i} \vec{E} \cdot d^2 \vec{x} \quad \forall i \quad . \quad (1.159)$$

Dann gilt

$$\int_V d^3 \vec{x} |\vec{E}'|^2 > \int_V d^3 \vec{x} |\vec{E}|^2 \quad . \quad (1.160)$$

Dies folgt ähnlich wie oben aus dem Verschwinden des Terms

$$\int_V d^3 \vec{x} \vec{E} \cdot (\vec{E}' - \vec{E}) = \sum_i \int_{\partial V_i} \varphi (\vec{E}' - \vec{E}) \cdot d^2 \vec{x} + \int_V \varphi \operatorname{div} (\vec{E}' - \vec{E}) \quad . \quad (1.161)$$

Insbesondere sinkt die Feldenergie, wenn ein ungeladener Leiter in das System eingeführt wird. Ein ungeladener Leiter wird also von einem geladenen Leiter angezogen.



## 2 Magnetostatik

### 2.1 Stationäre Ströme

Magnetische Erscheinungen sind mindestens ebenso lange bekannt wie elektrische. Ihre mathematische Beschreibung aber erwies sich lange Zeit als schwierig. Der Grund ist die Abwesenheit magnetischer Ladungen.

Grundlegend für das Verständnis der Magnetostatik war die Beobachtung Oerstedts (1819), dass ein stromdurchflossener Draht ein Magnetfeld erzeugt. Wir gehen daher von der Elektrostatik, in der alle Ladungen ruhen, zu der Situation über, in der sich Ladungen bewegen.

Die Bewegung von Ladungen beschreibt man durch die elektrische Stromdichte  $\vec{j}$ .  $\vec{j}$  ist ein Vektorfeld, das angibt, wieviele Ladungen pro Zeiteinheit durch ein Flächenelement hindurchtreten,

$$dQ = \vec{j} \cdot d^2\vec{x} dt \quad . \quad (2.1)$$

Betrachtet man ein Gebiet  $V$ , so ist

$$\int_{\partial V} \vec{j} \cdot d^2\vec{x} = -\frac{d}{dt}Q(V) \quad , \quad (2.2)$$

wenn  $Q(V)$  die in  $V$  enthaltene Ladung ist. Diese Beziehung drückt die Ladungserhaltung aus. Mit Hilfe der Ladungsdichte schreibt man

$$\int_{\partial V} \vec{j} \cdot d^2\vec{x} + \int_V d^3\vec{x} \frac{\partial}{\partial t} \rho(t, \vec{x}) = 0 \quad . \quad (2.3)$$

Daraus erhält man mittels des Gaußschen Satzes die sogenannte Kontinuitätsgleichung

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \rho = 0 \quad . \quad (2.4)$$

Man nennt einen Strom stationär, wenn  $\rho$  und  $\vec{j}$  zeitunabhängig sind. Dann gilt

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0 \quad , \quad (2.5)$$

oder für ein Gebiet  $V$

$$\int_{\partial V} \vec{j} \cdot d^2\vec{x} = 0 \quad , \quad (2.6)$$

d.h., es fließen genauso viele Ladungen hinein wie hinaus.

Der elektrische Strom, der durch eine Fläche  $S$  hindurchtritt, ist definiert als

$$I(S) = \int_S \vec{j} \cdot d^2\vec{x} = \int_S df(\vec{x}) \vec{n} \cdot \vec{j} \quad , \quad (2.7)$$

wobei  $\vec{n}$  das Normalenfeld auf  $S$  bezeichnet. Wir werden oft linienförmige Stromverteilungen betrachten. Dort fließt der Strom  $I$  in geschlossenen Wegen  $\gamma$ . Die Stromdichte ist dann

$$\vec{j}(\vec{x}) = I \int_0^1 ds \frac{d\vec{y}}{ds} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}(s)) \quad , \quad (2.8)$$

für eine Parametrisierung  $[0, 1] \ni s \rightarrow \vec{y}(s)$  von  $\gamma$ .

## 2.2 Kräfte zwischen Strömen

Zwei stromdurchflossene Leiter üben Kräfte aufeinander aus. Diese Kräfte werden durch das Ampèresche Gesetz beschrieben. Seien  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  zwei Leiterschleifen, in denen die Ströme  $I_1$  und  $I_2$  fließen. Dann wirkt auf die erste Schleife die Kraft

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -k' I_1 I_2 \int_{\gamma_1 \times \gamma_2} (d\vec{x}_1 \cdot d\vec{x}_2) \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3} \\ &= -k' I_1 I_2 \int_0^1 ds_1 \int_0^1 ds_2 \left( \frac{d\vec{x}_1}{ds_1} \cdot \frac{d\vec{x}_2}{ds_2} \right) \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3} \quad , \end{aligned} \quad (2.9)$$

mit Parametrisierungen  $[0, 1] \ni s_i \rightarrow \vec{x}_i(s_i)$  von  $\gamma_i$ ,  $i = 1, 2$ .  $k' > 0$  ist hierbei eine Konstante. Das Verhältnis  $k/k'$  der Konstanten, die in Coulombgesetz und Ampèresgesetz auftreten, hat die Dimension einer Geschwindigkeit zum Quadrat. Messungen ergeben, dass  $\sqrt{\frac{k}{k'}}$  mit der Lichtgeschwindigkeit  $c$  übereinstimmt. Im SI-System definiert man als die Einheit des Stroms das Ampère A, indem man setzt

$$k' = 10^{-7} \frac{N}{A^2} \quad . \quad (2.10)$$

Mit  $\mu_0 = 4\pi k'$ ,  $\varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$  erhält man dann

$$k = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \quad , \quad c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \quad , \quad k' = \frac{\mu_0}{4\pi} \quad . \quad (2.11)$$

Im Einklang mit unseren Konventionen aus der Elektrostatik setzen wir  $\mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} = 1$ .

Das Auftreten einer Naturkonstanten mit der Dimension einer Geschwindigkeit in einem statischen Problem lässt zwei Deutungen zu:

- Die Gesetze der Elektrodynamik sind nicht in allen Inertialsystemen gleich.

- Die Vorstellungen der klassischen Mechanik über die Struktur von Raum und Zeit müssen revidiert werden.

Nachdem die erste Alternative durch Experimente ausgeschlossen war, blieb nur die zweite Möglichkeit offen, die dann durch die spezielle Relativitätstheorie Einsteins ausgefüllt wurde.

## 2.3 Magnetfeld(magnetische Induktion)

Ebenso wie in der Elektrostatik möchte man das Fernwirkungsgesetz durch ein Nahwirkungsgesetz ersetzen. Als Ansatz führt man ein Tensorfeld  $\mathcal{B}_{ij}$  ein, das mit der auf einen Teststromkreis wirkenden Kraft über die Gleichung

$$F_j = I \sum_i \int_{\gamma} dx_i \mathcal{B}_{ij}(\vec{x}) \quad (2.12)$$

zusammenhängt. Da in der Magnetostatik nur geschlossene Stromkreise betrachtet werden, ist das Tensorfeld  $\mathcal{B}_{ij}$  durch diese Gleichung nur bis auf einen Term der Form  $\frac{\partial}{\partial x_i} f_j$  bestimmt. Eine zusätzliche Information liefert das auf den Stromkreis ausgeübte Drehmoment. Wir setzen an

$$N_k = I \sum_{ijl} \int_{\gamma} x_i dx_j \mathcal{B}_{jl} \varepsilon_{ilk} \quad (2.13)$$

mit dem total antisymmetrischen Tensor  $\varepsilon_{ilk}$ . Wir betrachten diese Gleichung für einen sehr kleinen Stromkreis  $\gamma$ , so dass  $\mathcal{B}_{jl}$  bei der Integration über  $\gamma$  als konstant angesehen werden kann. Sei  $m_{ij} = I \int_{\gamma} x_i dx_j$ .  $m_{ij}/I$  ist der von der Projektion von  $\gamma$  auf die  $(ij)$ -Ebene eingeschlossene orientierte Flächeninhalt. Es gilt daher  $m_{ij} = -m_{ji}$ , und wir setzen

$$m_k = \frac{1}{2} \sum_{ij} \varepsilon_{ijk} m_{ij} \quad . \quad (2.14)$$

Man nennt den Vektor  $\vec{m}$  das magnetische Moment des Stromkreises  $(I, \gamma)$ . Einsetzen in (2.13) liefert (mit  $m_{ij} = \sum_k \varepsilon_{ijk} m_k$ )

$$\begin{aligned} N_k &= \sum_{ijln} \varepsilon_{ijl} m_l \mathcal{B}_{jn} \varepsilon_{ink} \\ &= \sum_{jln} (\delta_{jn} \delta_{lk} - \delta_{jk} \delta_{ln}) m_l \mathcal{B}_{jn} \\ &= \sum_j (m_k \mathcal{B}_{jj} - m_j \mathcal{B}_{kj}) \quad . \end{aligned}$$

Man findet

$$\mathcal{B}_{ij} = \frac{I'}{4\pi} \int_{\gamma'} \left( dy_i \frac{x_j - y_j}{|\vec{x} - \vec{y}|^3} - dy_j \frac{x_i - y_i}{|\vec{x} - \vec{y}|^3} \right) . \quad (2.15)$$

Der 2. Term ist von der Form  $\frac{\partial}{\partial x_i} f_j$  und trägt daher nicht zur Kraft auf den Stromkreis  $(I, \gamma)$  bei. Das Tensorfeld  $\mathcal{B}$  ist antisymmetrisch, hat also nur 3 unabhängige Komponenten. Wir führen jetzt das Magnetfeld  $\vec{B}$  (auch magnetische Induktion genannt) ein durch

$$B_k = -\frac{1}{2} \sum_{ij} \varepsilon_{ijk} \mathcal{B}_{ij} . \quad (2.16)$$

Wir erhalten

$$\vec{N} = \vec{m} \times \vec{B} \quad (2.17)$$

mit

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} I' \int_{\gamma'} d\vec{y} \times \frac{\vec{x} - \vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|^3} . \quad (2.18)$$

(Biot-Savartsches Gesetz). Der Zusammenhang mit dem Ampèreschen Gesetz ist

$$\begin{aligned} \vec{F} &= I \int_{\gamma} d\vec{x} \times \vec{B}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} II' \int_{\gamma \times \gamma'} d\vec{x} \times \left( d\vec{y} \times \frac{\vec{x} - \vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|^3} \right) = \\ &= \frac{1}{4\pi} II' \int_{\gamma \times \gamma'} \left( d\vec{x} \cdot \frac{\vec{x} - \vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|^3} \right) d\vec{y} - \frac{1}{4\pi} II' \int_{\gamma \times \gamma'} (d\vec{x} \cdot d\vec{y}) \frac{\vec{x} - \vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|^3} , \end{aligned} \quad (2.19)$$

wobei der erste Term als Integral eines Gradienten über einen geschlossenen Weg verschwindet.

Wie in der Elektrostatik gilt auch in der Magnetostatik das Superpositionsprinzip, dass Felder verschiedener Stromkreise sich ungestört überlagern. Wir beschreiben nun eine allgemeine stationäre Stromverteilung durch eine Stromdichte  $\vec{j}$  mit  $\text{div } \vec{j} = 0$ . Das erzeugte magnetische Feld ist

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3\vec{y} \vec{j}(\vec{y}) \times \frac{\vec{x} - \vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|^3} . \quad (2.20)$$

Unter Benutzung von  $\frac{\vec{x} - \vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|^3} = -\text{grad}_{\vec{x}} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|}$  und von  $\vec{a} \times \text{grad } f = -\text{rot } \vec{a} f$  für konstantes  $\vec{a}$ , können wir auch schreiben

$$\vec{B}(\vec{x}) = \text{rot } \vec{A}(\vec{x}) \quad (2.21)$$

mit

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3\vec{y} \frac{\vec{j}(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} . \quad (2.22)$$

Ein Vektorfeld  $\vec{A}$  mit der Eigenschaft  $\text{rot } \vec{A} = \vec{B}$  heißt ein zu  $\vec{B}$  gehörendes Vektorpotential. Wegen  $\text{div rot} = 0$  folgt

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (2.23)$$

oder in integraler Form

$$\int_{\partial V} \vec{B} \cdot d^2\vec{x} = 0 \quad . \quad (2.24)$$

Diese Gleichung besagt, dass es keine magnetischen Ladungen gibt. Sie entspricht der Gleichung  $\text{rot } \vec{E} = 0$  in der Elektrostatik.

Als nächstes berechnen wir  $\text{rot } \vec{B}$ . Wir nutzen dabei aus, dass sich der Laplaceoperator auf Vektorfeldern in der Form

$$\Delta = \text{grad div} - \text{rot rot} \quad (2.25)$$

schreiben lässt. Setzen wir  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$  mit dem oben angegebenen Vektorpotential  $\vec{A}$ , so gilt wegen

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{A}(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi} \int d^3\vec{y} \vec{j}(\vec{y}) \cdot \text{grad}_x \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} = -\frac{1}{4\pi} \int d^3\vec{y} \vec{j}(\vec{y}) \cdot \text{grad}_y \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \\ &= \frac{1}{4\pi} \int d^3\vec{y} \text{div } \vec{j}(\vec{y}) \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} = 0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

die Gleichung

$$\text{rot } \vec{B} = \text{rot } \text{rot } \vec{A} = -\Delta \vec{A} = \vec{j} \quad . \quad (2.27)$$

Diese Gleichung heißt Ampèresches Durchflutungsgesetz und stellt in Analogie zum Gaußschen Gesetz den Zusammenhang zwischen Strom und Magnetfeld her. Die integrale Form lautet

$$\int_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{x} = I(S) \quad . \quad (2.28)$$

## 2.4 Vektorpotential und Eichtransformationen

Die beiden Gleichungen

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad , \quad \text{rot } \vec{B} = \vec{j} \quad (2.29)$$

sind die Grundgleichungen der Magnetostatik. Wie in der Elektrostatik wollen wir alle Lösungen dieses Gleichungssystems als physikalisch erlaubte Magnetfelder ansehen.

In zusammenziehbaren Gebieten ist die erste Gleichung äquivalent zur Existenz eines Vektorpotentials  $\vec{A}$  mit  $\text{rot } \vec{A} = \vec{B}$  (Poincarésches Lemma).  $\vec{A}$

ist durch  $\vec{B}$  nicht eindeutig bestimmt. Sind  $\vec{A}_1$  und  $\vec{A}_2$  zwei Lösungen der Gleichung  $\text{rot } \vec{A} = \vec{B}$ , so gilt

$$\text{rot } (\vec{A}_1 - \vec{A}_2) = 0 \quad , \quad (2.30)$$

d.h. es gibt eine skalare Funktion  $\Lambda$  mit  $\text{grad } \Lambda = \vec{A}_1 - \vec{A}_2$ . Die Transformation  $\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \text{grad } \Lambda$  ändert das Magnetfeld nicht und wird Eichtransformation genannt.

Wir setzen jetzt  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$  in das Ampèresche Durchflutungsgesetz ein und erhalten

$$\text{rot } \text{rot } \vec{A} = -\Delta \vec{A} + \text{grad } \text{div } \vec{A} = \vec{j} \quad . \quad (2.31)$$

Wir nutzen die Eichfreiheit bei der Wahl von  $\vec{A}$  aus, um  $\text{div } \vec{A}$  beliebig vorzugeben. Sei  $\vec{A}'$  ein Vektorfeld mit  $\text{rot } \vec{A}' = \vec{B}$ . Wir suchen eine Funktion  $\Lambda$ , so dass das eichtransformierte Vektorpotential  $\vec{A} = \vec{A}' + \text{grad } \Lambda$  die Bedingung

$$\text{div } \vec{A} = f \quad (2.32)$$

erfüllt.  $\Lambda$  erhält man dann als Lösung der Poissongleichung

$$\Delta \Lambda = f - \text{div } \vec{A}' \quad . \quad (2.33)$$

Wählt man  $\text{div } \vec{A} = 0$  (Coulombbeingung), so erfüllt  $\vec{A}$  in jeder Komponente die Poissongleichung

$$\Delta \vec{A} = -\vec{j} \quad , \quad (2.34)$$

und als Lösung, die (bei Stromverteilungen mit kompaktem Träger) im Unendlichen verschwindet, erhält man

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3\vec{y} \frac{\vec{j}(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} \quad , \quad (2.35)$$

also die bereits angegebene Form des Vektorpotentials.

## 2.5 Das Vektorpotential einer lokalisierten Stromverteilung

Sei  $\vec{j}$  eine gegebene Stromverteilung, die ganz in dem Gebiet  $V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3, |\vec{x}| < R\}$  lokalisiert ist. Wir interessieren uns für das Verhalten des magnetischen Feldes bei großen Abständen. In der Formel für das Vektorpotential können wir  $\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|}$  nach Potenzen von  $\frac{|\vec{x}|}{|\vec{y}|}$  entwickeln,

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{|\vec{y}|} \left(\frac{|\vec{x}|}{|\vec{y}|}\right)^l P_l\left(\frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}||\vec{y}|}\right) \quad . \quad (2.36)$$

Für den Term der Ordnung  $l = 0$  ergibt sich

$$\vec{A}_0(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi|\vec{x}|} \int d^3\vec{y} \vec{j}(\vec{y}) \quad . \quad (2.37)$$

Dieser Term (der Monopolterm) verschwindet, da sich die Komponenten des Integranden wegen  $\text{div } \vec{j} = 0$  als Divergenzen eines Vektorfeldes mit kompaktem Träger schreiben lassen,  $j_k = \text{div } y_k \vec{j}$ . Für den Dipolterm ( $l = 1$ ) ergibt sich

$$\vec{A}_1(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi|\vec{x}|^3} \int d^3\vec{y} \vec{j}(\vec{y}) (\vec{y} \cdot \vec{x}) \quad . \quad (2.38)$$

Wir können diesen Ausdruck in der folgenden Weise umformen. Der Tensor

$$m_{ik} = \int d^3\vec{y} y_i j_k(\vec{y}) \quad (2.39)$$

ist antisymmetrisch. Denn

$$m_{ik} + m_{ki} = \int d^3\vec{y} (y_i j_k + y_k j_i) = \int d^3\vec{y} \text{div} (y_i y_k \vec{j}) = 0 \quad . \quad (2.40)$$

Wir definieren daher  $m_k = \frac{1}{2} \sum_{ij} \varepsilon_{ijk} m_{ij}$  oder

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int d^3\vec{y} \vec{y} \times \vec{j} \quad (2.41)$$

als das magnetische Moment der Stromverteilung. Für eine linienförmige Stromverteilung stimmt die oben angegebene Definition mit der bei der Einführung des magnetischen Feldes gegebenen Definition überein. Denn sei  $\vec{j}(\vec{x}) = I \int_{\gamma} d\vec{y} \delta^3(\vec{x} - \vec{y})$ . Dann ist

$$\vec{m} = \frac{I}{2} \int d^3\vec{x} \vec{x} \times \left( \int d\vec{y} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \right) = \frac{I}{2} \int \vec{y} \times d\vec{y} \quad . \quad (2.42)$$

Für das Vektorpotential erhalten wir

$$\vec{A}_1(\vec{x}) = \frac{\vec{m} \times \vec{x}}{4\pi|\vec{x}|^3} \quad , \quad (2.43)$$

und das zugehörige Magnetfeld ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \vec{B}_1(\vec{x}) &= \text{rot } \vec{A}_1(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \nabla \times \left( \vec{m} \times \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} (\nabla \cdot \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}) \vec{m} - \frac{1}{4\pi} (\vec{m} \cdot \nabla) \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} \end{aligned}$$

$$= \vec{m} \delta^3(\vec{x}) + \frac{1}{4\pi} \text{grad}(\vec{m} \cdot \text{grad} \frac{1}{|\vec{x}|}) \quad (2.44)$$

Es unterscheidet sich also von dem entsprechenden elektrischen Feld eines elektrischen Dipols durch ein Vielfaches der Deltafunktion.  $\vec{B}_1$  ist der für große Abstände führende Anteil des magnetischen Feldes der Stromverteilung  $\vec{j}$ . Wir können auch eine Stromverteilung angeben, für die  $\vec{B}_1$  das exakte Magnetfeld ist, nämlich  $\vec{j}_\infty(\vec{x}) = \text{rot} \vec{m} \delta^3(\vec{x})$ . Diese Stromverteilung lässt sich als Grenzfall der skalierten Stromverteilungen  $\vec{j}_\lambda(\vec{y}) = \lambda^4 \vec{j}(\lambda \vec{y})$  für  $\lambda \rightarrow \infty$  verstehen, d.h. für jedes Testvektorfeld  $\vec{f}$  gilt

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int d^3 \vec{y} \vec{j}_\lambda(\vec{y}) \cdot \vec{f}(\vec{y}) = \vec{m} \cdot \text{rot} \vec{f}(0) \quad . \quad (2.45)$$

Wir betrachten nun den Fall, dass der Strom aus geladenen Teilchen der Masse  $M$  und der Ladung  $e$  besteht. Sei  $\rho_N$  die Teilchenzahldichte und  $\vec{v}$  das Geschwindigkeitsfeld. Dann ist die elektrische Stromdichte

$$\vec{j}(\vec{x}) = e \rho_N(\vec{x}) \vec{v}(\vec{x}) \quad (2.46)$$

und die Massenstromdichte (Impulsdichte)

$$\vec{j}_M(\vec{x}) = M \rho_N(\vec{x}) \vec{v}(\vec{x}) = \frac{M}{e} \vec{j}(\vec{x}) \quad . \quad (2.47)$$

Mit der Massenstromdichte verbunden ist der mechanische Drehimpuls

$$\vec{L} = \int d^3 \vec{y} \vec{y} \times \vec{j}_M(\vec{y}) = \frac{2M}{e} \vec{m} \quad . \quad (2.48)$$

Der Faktor  $\frac{e}{2M}$ , der magnetisches Moment und Drehimpuls verknüpft, heißt gyromagnetisches Verhältnis.

Bei Elementarteilchen ist der Zusammenhang zwischen Eigendrehimpuls (Spin) und magnetischem Moment komplizierter. Für das Elektron ergibt sich

$$\vec{m} = g \frac{e}{2M} \vec{L} \quad (2.49)$$

mit  $g \approx 2$ . Die Abweichung  $g - 2$  lässt sich mit großer Genauigkeit in der QED berechnen.

## 2.6 Dipol im äußeren magnetostatischen Feld

Auf einen magnetischen Dipol  $\vec{m}$  am Ort  $\vec{x}$  wirkt im magnetischen Feld  $\vec{B}$  eine Kraft und ein Drehmoment. Dem Dipol entspricht die Stromverteilung

$$\vec{j}(\vec{y}) = \text{rot}_{\vec{y}} \vec{m} \delta^3(\vec{y} - \vec{x}) \quad . \quad (2.50)$$

Die auf den Dipol wirkende Kraft ist

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= \int d^3\vec{y} \vec{j}(\vec{y}) \times \vec{B}(\vec{y}) \\
&= \int d^3\vec{y} (\nabla_{\vec{y}} \times \vec{m} \delta^3(\vec{y} - \vec{x})) \times \vec{B}(\vec{y}) \\
&= \int d^3\vec{y} (\vec{B}(\vec{y}) \cdot \nabla_{\vec{y}} \delta^3(\vec{y} - \vec{x})) \vec{m} - (\vec{B}(\vec{y}) \cdot \vec{m}) \nabla_{\vec{y}} \delta^3(\vec{y} - \vec{x}) \\
&= -\vec{m} \operatorname{div} \vec{B}(\vec{x}) + \operatorname{grad} (\vec{m} \cdot \vec{B}(\vec{x})) \\
&= \operatorname{grad} (\vec{m} \cdot \vec{B}(\vec{x})) \quad .
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Diese Kraft ist konservativ, das zugehörige Potential ist

$$V(\vec{x}) = (-\vec{m} \cdot \vec{B}(\vec{x})) \quad . \tag{2.52}$$

Wie wir später sehen werden, ist dieses Potential auf Grund des Induktionsgesetzes nicht die Gesamtenergie des magnetischen Feldes. Für atomare Systeme, in denen sich das magnetische Moment nicht stetig ändern kann, beschreibt es aber die richtige Wechselwirkungsenergie zweier Dipole

$$V = -\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2 \delta^3(\vec{x}) - \frac{1}{4\pi} (\vec{m}_1 \cdot \nabla) (\vec{m}_2 \cdot \nabla) \frac{1}{|\vec{x}|} \quad , \tag{2.53}$$

wenn  $\vec{x}$  der Verbindungsvektor der beiden Dipole ist. Bis auf den Deltafunktionsanteil stimmt dieser Ausdruck mit dem entsprechenden Ausdruck für die Wechselwirkungsenergie zweier elektrischer Dipole überein. In der Atomphysik wird der Deltafunktionsanteil z.B. in der Hyperfeinstruktur der s-Niveaus sichtbar (Wechselwirkung zwischen den magnetischen Momenten von Kern und Elektron). Hierbei kommt es auf den rotationsinvarianten Anteil der Wechselwirkungsenergie an. Der rotationsinvariante Anteil von  $\partial_i \partial_j$  ist  $\frac{1}{3} \delta_{ij} \Delta$ , also ergibt sich für den rotationsinvarianten Anteil von  $V$

$$\bar{V} = -\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2 \delta(\vec{x}) \frac{2}{3} \quad . \tag{2.54}$$

Beobachtet wird dieser Effekt in der astrophysikalischen 21cm-Linie.

Das auf eine Stromverteilung  $\vec{j}$  im Magnetfeld  $\vec{B}$  wirkende Drehmoment bezüglich des Ursprungs ist

$$\vec{N} = \int d^3\vec{y} (\vec{y} \times (\vec{j}(\vec{y}) \times \vec{B}(\vec{y})))$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int d^3\vec{y} \{ \vec{y} \times (\vec{j} \times \vec{B}) - \vec{j} \times (\vec{y} \times \vec{B}) \} \\
&+ \frac{1}{2} \int d^3\vec{y} \{ \vec{y} \times (\vec{j} \times \vec{B}) + \vec{j} \times (\vec{y} \times \vec{B}) \} \quad .
\end{aligned}$$

Der erste Term ergibt nach der Jakobiidentität

$$\frac{1}{2} \int d^3\vec{y} (\vec{y} \times \vec{j}(\vec{y})) \times \vec{B}(\vec{y}) \quad . \quad (2.55)$$

Im Limes punktförmiger Stromverteilungen wird dieser Term zu

$$\vec{m} \times \vec{B}(\vec{x}) \quad , \quad (2.56)$$

also dem Ausdruck, den wir bei der Einführung des magnetischen Feldes bereits benutzt haben. Die  $i$ -Komponente des zweiten Terms ist

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \sum_{klmn} \int d^3\vec{y} (y_n j_k + y_k j_n) B_l \varepsilon_{klm} \varepsilon_{nmi} &= \frac{1}{2} \sum_{klmn} \int d^3\vec{y} \operatorname{div} (y_n y_k \vec{j}) B_l \varepsilon_{klm} \varepsilon_{nmi} \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{klmn} \int d^3\vec{y} y_n y_k \vec{j} \cdot \operatorname{grad} B_l \varepsilon_{klm} \varepsilon_{nmi} \quad . \quad (2.57)
\end{aligned}$$

Im Limes punktförmiger Stromverteilungen am Ursprung verschwindet dieser Term. Sitzt das magnetische Moment am Punkt  $\vec{x}$ , so ergibt sich als Beitrag zum Drehmoment  $\vec{N} = \vec{x} \times \operatorname{grad} (\vec{m} \cdot \vec{B}(\vec{x}))$ .

## 2.7 Supraleiter

Oft ist die Stromverteilung nicht von vornherein bekannt, so dass das Magnetfeld nicht einfach durch Integration bestimmt werden kann. In magnetisierbaren Stoffen kann eine Magnetisierung  $\vec{M}$  (magnetisches Moment pro Volumen) vorliegen, mit einer Stromdichte

$$\vec{j}_m = \operatorname{rot} \vec{M} \quad . \quad (2.58)$$

Man spaltet den Strom dann auf in einen vorgegebenen Anteil  $\vec{j}_0$  und den Magnetisierungsstrom  $\vec{j}_m$  und schreibt das Durchflutungsgesetz in der Form

$$\operatorname{rot} (\vec{B} - \vec{M}) = \vec{j}_0 \quad . \quad (2.59)$$

Mit  $\vec{H} = \vec{B} - \vec{M}$  nimmt es dann die Form

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}_0 \quad (2.60)$$

an. Aus historischen Gründen wird  $\vec{H}$  manchmal als Magnetfeld bezeichnet, eine Konvention, an die wir uns nicht halten wollen.

An Grenzflächen, an denen  $\vec{j}_0$  verschwindet, sind die Tangentialkomponenten von  $\vec{H}$  und die Normalkomponente von  $\vec{B}$  stetig. Zur Lösung der statischen Grundgleichungen benötigt man zusätzliche Informationen über  $\vec{M}$ .

Eine etwas andere Situation liegt beim Supraleiter vor. Supraleiter sind Stoffe (typischerweise Metalle, aber auch einige Keramiken bei tiefen Temperaturen), die durch den Meißner-Ochsenfeld-Effekt charakterisiert werden. Ein magnetisches Feld kann nur bis auf eine sehr kurze Distanz (die Eindringtiefe  $\Lambda$ ) in den Körper eindringen (typische Werte von  $\Lambda$  liegen zwischen 100 und 200 Angström).

Betrachten wir den idealisierten Fall, dass die Eindringtiefe verschwindet. Dann verhalten sich Supraleiter bei magnetischen Feldern ähnlich wie Leiter bei elektrischen Feldern.

Sei das Gebiet  $V$  durch einen Supraleiter ausgefüllt. Dann gilt  $\vec{B} = 0$  innerhalb von  $V$ . Wegen

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \vec{j} \quad (2.61)$$

ist  $\vec{j} = 0$  innerhalb von  $V$ . Auf dem Rand  $\partial V$  gilt wegen  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$

$$\vec{n} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.62)$$

mit dem Normaleneinheitsvektor von  $\partial V$ . Aus  $\operatorname{rot} \vec{B} = \vec{j}$  folgt, dass bei nicht verschwindendem Magnetfeld außerhalb an der Oberfläche des Supraleiters ein Oberflächenstrom fließt. Es gilt

$$\int_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{x} = \int_S \vec{j} \cdot d^2\vec{x} \quad (2.63)$$

für ein Flächenstück  $S$ . Wir wählen jetzt einen Weg  $\gamma$  auf  $\partial V$  mit Parametrisierung  $\vec{x}(s)$ ,  $s \in [0, 1]$ , und betrachten die Flächen

$$S_\varepsilon = \{\vec{x}(s) + u\vec{n}(\vec{x}(s)), (u, s) \in [-\varepsilon, \varepsilon] \times [0, 1]\} \quad (2.64)$$

Der Strom  $\vec{j}$  ist auf  $\partial V$  konzentriert, er hängt daher mit der Flächenstromdichte  $\vec{g}$  in der folgenden Weise zusammen,

$$\vec{j}(\vec{x}) = \int_{\partial V} df(\vec{y}) \vec{g}(\vec{y}) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad , \quad (2.65)$$

wobei  $\vec{g}$  ein Vektorfeld auf  $\partial V$  ist, das tangential gerichtet ist. Es gilt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \vec{j} \cdot d^2\vec{x} = \int_\gamma \vec{g} \cdot (\vec{n} \times d\vec{x}) = \int_\gamma (\vec{g} \times \vec{n}) \cdot d\vec{x} \quad , \quad (2.66)$$

also gilt auf  $\partial V$

$$\vec{B} = \vec{g} \times \vec{n} \quad (2.67)$$

und wegen  $\vec{g} \cdot \vec{n} = 0$

$$\vec{n} \times \vec{B} = \vec{g} \quad . \quad (2.68)$$

Wir betrachten als einfaches Beispiel eine Kugel aus supraleitendem Material. Außerhalb der Kugel ist  $\text{rot } \vec{B} = 0$ . Es gibt daher eine skalare Funktion  $\varphi_m$  (das magnetische Potential) mit

$$\vec{B} = -\text{grad } \varphi_m \quad (2.69)$$

außerhalb der Kugel. Die Randbedingung auf der Kugel ist  $\partial_n \varphi_m = 0$ .  $\varphi_m$  ist eine Lösung der Laplacegleichung. Sie ist eindeutig bestimmt, wenn ihr Verhalten bei  $\infty$  bekannt ist.

Ist  $\vec{B} = 0$  bei  $\infty$ , so erfüllt  $\varphi_m = 0$  alle Bedingungen, also ist  $\vec{B} = 0$  überall und  $\vec{g} = 0$ . Geht  $\vec{B} \rightarrow \vec{B}_\infty = \text{const}$  für  $|\vec{x}| \rightarrow \infty$ , so findet man eine Lösung in der folgenden Weise:

$$\varphi_1 = -\vec{B}_\infty \cdot \vec{x} = -B_\infty r \cos \theta \quad (2.70)$$

( $B_\infty = |\vec{B}_\infty|$ ,  $(r, \theta, \varphi)$  Kugelkoordinaten mit z-Achse in Richtung  $\vec{B}_\infty$ ) ist eine Lösung der Laplacegleichung mit den richtigen Randbedingungen bei  $\infty$ . Durch Spiegelung an der Sphäre  $\{|\vec{x}| = R\}$  erhält man eine Lösung der Laplacegleichung für  $\vec{x} \neq 0$ ,

$$\varphi_2 = -\vec{B}_\infty \cdot \vec{x} \left(\frac{R}{|\vec{x}|}\right)^3 = -B_\infty R^3 r^{-2} \cos \theta \quad , \quad (2.71)$$

die bei  $\infty$  verschwindet. Es gilt

$$\partial_n \varphi_1 = \frac{\partial}{\partial r} \varphi_1 = -B_\infty \cos \theta \quad (2.72)$$

und

$$\partial_n \varphi_2 = \frac{\partial}{\partial r} \varphi_2 = 2B_\infty \left(\frac{R}{r}\right)^3 \cos \theta \quad , \quad (2.73)$$

daher erfüllt

$$\varphi_m = \varphi_1 + \frac{1}{2} \varphi_2 \quad (2.74)$$

die geforderten Randbedingungen bei  $r = R$ . Das Magnetfeld ergibt sich zu

$$\vec{B}(\vec{x}) = \vec{B}_\infty + \frac{R^3}{2} \text{grad} \left( \vec{B}_\infty \cdot \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} \right) \quad . \quad (2.75)$$

Das Zusatzfeld ist also dasjenige eines magnetischen Dipols mit dem Moment

$$\vec{m} = -\frac{3}{2}V\vec{B}_\infty \quad , \quad (2.76)$$

wobei  $V$  das Volumen der Kugel bezeichnet. (Man vergleiche dieses Resultat mit dem elektrischen Dipolmoment, das ein asymptotisch konstantes elektrisches Feld in einer leitenden ungeladenen Kugel induziert,  $\vec{p} = -3V\vec{E}_\infty$  (Abschnitt 1.5).)

Wir wollen nun die Flächenstromdichte berechnen. Es gilt

$$\vec{g} = \frac{3}{2R}(\vec{x} \times \vec{B}_\infty) \quad . \quad (2.77)$$

Wir wollen dieses Ergebnis mit dem Feld einer Kugel vom Radius  $R$  vergleichen, die mit der homogenen Flächenladungsdichte  $\sigma$  geladen ist und sich mit der Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$  dreht. Der Oberflächenstrom ist dann

$$\vec{g} = \sigma\vec{\omega} \times \vec{x} \quad . \quad (2.78)$$

Der Superstrom, der von  $\vec{B}_\infty$  induziert wird, besteht also in einer Rotation der zugehörigen Ladungsträger um die Richtung von  $\vec{B}_\infty$ . Der damit verbundene Drehimpuls ist

$$\vec{L} = \frac{2M}{e}\vec{m} \quad , \quad (2.79)$$

wobei  $M$  die Masse und  $e$  die Ladung der supraleitenden Ladungsträger sind. Da das äußere Magnetfeld aber keinen Drehimpuls auf die Kugel ausübt, muss in einer drehbar aufgehängten Kugel das Gitter der Metallionen in umgekehrter Richtung rotieren, damit der Gesamtdrehimpuls verschwindet. Dieser gyromagnetische Effekt konnte tatsächlich nachgewiesen werden (Einstein-de Haas-Effekt).

Als nächstes Beispiel betrachten wir einen unendlich langen zylindrischen Supraleiter. Wieder gilt  $\text{rot } \vec{B} = 0$  außerhalb des vom Supraleiter ausgefüllten Gebietes  $V$ . Das Komplement von  $V$  ist aber nicht einfach zusammenhängend, so dass ein eindeutiges magnetisches Potential nicht existiert.

Wir führen Zylinderkoordinaten  $(r, \phi, z)$  ein. Der Zylinder sei gegeben durch

$$V = \{(r, \phi, z) | r \leq R\} \quad . \quad (2.80)$$

Das Gebiet  $V' = \{(r, \phi, z) | r > R, 0 < \phi < 2\pi\}$  ist einfach zusammenhängend. Dort existiert daher ein magnetisches Potential mit den Randbedingungen

$$\frac{\partial \varphi_m}{\partial r} = 0 \quad , \quad r = R \quad (2.81)$$

und

$$\varphi_m(r, 0, z) - \varphi_m(r, 2\pi, z) = \int_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{x} = I \quad , \quad (2.82)$$

wobei  $S$  eine Fläche ist, die den Zylinder einmal schneidet, den Punkt  $(r, 0, z)$  am Rand enthält und in Richtung der  $z$ -Achse orientiert ist.  $I$  ist der im Supraleiter in Richtung der  $z$ -Achse fließende Strom. Fordert man jetzt zusätzlich, dass  $\varphi_m$  und seine Ableitungen für  $r \rightarrow \infty$  genügend schnell verschwinden, so ist das Randwertproblem für  $\varphi_m$  eindeutig lösbar.

Der Laplaceoperator in Zylinderkoordinaten lautet

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad . \quad (2.83)$$

Als Lösung mit den gewünschten Randbedingungen findet man

$$\varphi_m(r, \phi, z) = -\frac{1}{2\pi} I \phi \quad . \quad (2.84)$$

Das Magnetfeld ergibt sich aus der infinitesimalen magnetischen Spannung

$$\vec{B} \cdot d\vec{x} = -d\varphi_m = \frac{1}{2\pi} I d\phi \quad (2.85)$$

also  $B_x = -I \frac{\sin \phi}{2\pi r}$ ,  $B_y = I \frac{\cos \phi}{2\pi r}$ ,  $B_z = 0$ . Es hat also kreisförmige Feldlinien um die Zylinderachse. Der Oberflächenstrom ist

$$\vec{g} = \vec{n} \times \vec{B} = \frac{I}{2\pi R} \vec{e}_z \quad , \quad (2.86)$$

$\vec{e}_z$  Einheitsvektor in  $z$ -Richtung, er verteilt sich also, wie zu erwarten, gleichmäßig über den Umfang des Zylinders.

Wir wollen jetzt versuchen, das Randwertproblem der Magnetostatik im Prinzip zu lösen, so wie es uns für die Elektrostatik bereits gelungen ist. Wir betrachten einen zusammenhängenden Supraleiter, der das Gebiet  $V$  ausfüllt. Der Rand  $\partial V$  von  $V$  ist homöomorph zum Rand einer Kugel mit  $n$  Henkeln, wobei  $n + 1$  der Zusammenhangsgrad von  $\partial V$  ist,  $n \geq 0$ . Wir können  $n$  orientierte Flächenstücke  $S_i$  im Komplement von  $V$  finden, die die  $n$  Löcher des Supraleiters schließen, so dass das Komplement  $V'$  von  $V \cup \bigcup_i S_i$  einfach zusammenhängend ist. Weiter gibt es auf  $\partial V$   $n$  geschlossene Kurven  $\gamma_i$ , die jeweils eine der Flächen  $S_i$  einmal von unten nach oben schneiden,  $|\gamma_i \cap S_j| = \delta_{ij}$ .

Wir betrachten jetzt die Größen

$$I_i = \int_{\gamma_i} \vec{B} \cdot d\vec{x} \quad (2.87)$$

(den Strom durch den von  $\gamma_i$  begrenzten Querschnitt von  $V$ ) und

$$\Phi_i = \int_{S_i} \vec{B} \cdot d^2\vec{x} \quad (2.88)$$

(den magnetischen Fluss durch  $S_i$ ). Je nach experimenteller Anordnung kann  $I_i$  oder  $\Phi_i$  vorgegeben werden.

Auf  $V'$  existiert jetzt ein magnetisches Potential  $\varphi_m$  mit den Eigenschaften

1.  $\partial_n \varphi_m = 0$  auf  $\partial V$ .
2.  $\varphi_m^+ - \varphi_m^- = I_i$  auf  $S_i$  (bei vorgegebenen Strömen) oder  $\varphi_m^+ - \varphi_m^- = \text{const}$  auf  $S_i$  und  $-\int_{S_i} \partial_n \varphi_m df = \Phi_i$  (bei vorgegebenen Flüssen).
3.  $\varphi_m$  und  $\text{grad } \varphi_m$  fallen im Unendlichen genügend schnell ab.

Die Lösung dieser Randwertprobleme ist eindeutig. Denn sei  $\psi$  die Differenz zweier Lösungen.  $\psi$  ist eine Lösung der Laplacegleichung, die bei unendlich verschwindet, deren Normalableitung auf  $\partial V$  verschwindet und die auf  $S_i$  die Bedingungen erfüllt

$$\psi^+ = \psi^- \quad (2.89)$$

(bei vorgegebenen Strömen) oder

$$\psi^+ - \psi^- = \text{const} \quad , \quad \int_{S_i} \partial_n \psi = 0 \quad (2.90)$$

(bei vorgegebenen magnetischen Flüssen). Es gilt

$$0 = \int_{V'} \psi \Delta \psi = - \int_{V'} |\text{grad } \psi|^2 - \int_{\partial V} \psi \partial_n \psi - \sum_i \int_{S_i} (\psi^+ - \psi^-) \partial_n \psi \quad (2.91)$$

und daher  $\text{grad } \psi = 0$ .

Man kann jetzt (analog zu den Kapazitätskoeffizienten in der Elektrostatik) die Induktivitätskoeffizienten definieren durch

$$\Phi_i = \sum_j L_{ij} I_j \quad . \quad (2.92)$$

Auch die Matrix der Induktivitätskoeffizienten ist positiv definit und symmetrisch.

Wir wollen jetzt an einem Beispiel den von einem äußeren Strom in einem Supraleiter induzierten Oberflächenstrom diskutieren. Der Halbraum  $\{x >$

0} sei von einem Supraleiter ausgefüllt.  $\vec{j}$  sei eine stationäre Stromverteilung im Halbraum  $\{x < 0\}$ .

Wegen des Meißner-Ochsenfeld-Effekts verschwindet das Magnetfeld  $\vec{B}$  für  $x > 0$ . Da die Normalkomponente  $-B_x$  an der Oberfläche stetig ist, gilt  $B_x = 0$  für  $x = 0$ . Diese Bedingung ist automatisch erfüllt, wenn das Vektorpotential  $\vec{A}$  an der Oberfläche in x-Richtung zeigt.

In Analogie zur Methode der Spiegelladungen in der Elektrostatik machen wir den Ansatz, dass das von den Oberflächenströmen erzeugte Vektorpotential im linken Halbraum durch einen Spiegelstrom im rechten Halbraum erzeugt werden kann. Sei  $S$  die Spiegelung an der Ebene  $x = 0$ . Dann setzen wir

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3\vec{y} \frac{\vec{j}(\vec{y}) - S\vec{j}(S\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} \quad , \quad x_1 > 0 \quad . \quad (2.93)$$

$\vec{A}$  erfüllt die Gleichungen  $\Delta\vec{A} = -\vec{j}$  und  $\text{div}\vec{A} = 0$  im Halbraum  $x_1 < 0$ . Auf der Fläche  $x_1 = 0$  gilt wegen  $S\vec{x} = \vec{x}$ , dass  $S\vec{A} = -\vec{A}$  ist.  $\vec{A}$  zeigt daher in x-Richtung, und  $B_x$  verschwindet. Das Magnetfeld an der Oberfläche ist also wie gefordert tangential gerichtet. Man findet

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3\vec{y} (\vec{j}(\vec{y}) - S\vec{j}(S\vec{y})) \times \frac{\vec{x} - \vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|^3} = \frac{1}{4\pi} \int d^3\vec{y} \frac{2}{|\vec{x} - \vec{y}|^3} [\vec{j}(\vec{y}) \times (\vec{x} - \vec{y})] \quad , \quad (2.94)$$

wobei  $[\vec{a}]$  die Projektion von  $\vec{a}$  auf die y-z-Ebene bezeichnet. Der induzierte Oberflächenstrom ist

$$\vec{g}(\vec{x}) = -\vec{e}_1 \times \vec{B}(\vec{x}) = \frac{1}{2\pi} \int d^3\vec{y} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|^3} (y_1 \vec{j}(\vec{y}) + j_1(\vec{y})(\vec{x} - \vec{y})) \quad . \quad (2.95)$$

Betrachten wir als Beispiel einen linienförmigen Strom  $I$ , der im Abstand  $d$  von der Grenzfläche in die y-Richtung fließt. Dann fließt auch  $\vec{g}$  in die y-Richtung. Man erhält

$$g_2(\vec{x}) = -\frac{Id}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} ds (d^2 + \delta^2 + s^2)^{-\frac{3}{2}} \quad , \quad (2.96)$$

wenn  $\sqrt{d^2 + \delta^2}$  der Abstand zwischen  $\vec{x}$  und dem Stromfaden ist. Wir setzen  $s = \sqrt{d^2 + \delta^2} u$  und finden

$$g_2(\vec{x}) = -\frac{Id}{2\pi(d^2 + \delta^2)} \int_{-\infty}^{\infty} du (1 + u^2)^{-\frac{3}{2}} \quad . \quad (2.97)$$

Das Integral berechnen wir mit der Substitution  $u = \tan \alpha$ . Dann ist  $du = \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha}$  und  $1 + u^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ . Folglich erhalten wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} du (1 + u^2)^{-\frac{3}{2}} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\alpha \cos \alpha = 2 \quad , \quad (2.98)$$

und damit

$$g_2(\vec{x}) = -\frac{Id}{\pi(d^2 + \delta^2)} \quad . \quad (2.99)$$

Der insgesamt induzierte Strom ist

$$I_{\text{ind}} = -I \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\delta \frac{d}{d^2 + \delta^2} = -I \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\alpha = -I \quad , \quad (2.100)$$

wobei wir  $\delta = d \tan \alpha$  substituiert haben. Man erkennt, dass der induzierte Strom dem erzeugenden Strom entgegengesetzt gleich ist. Insbesondere stößt ein Supraleiter also einen anderen Stromkreis ab.



## 3 Maxwellgleichungen

### 3.1 Das Faradaysche Induktionsgesetz

1831 entdeckte Faraday das Induktionsgesetz: ein zeitlich veränderliches magnetisches Feld erzeugt in einem geschlossenen Leiter einen Strom. Ursache dieses Stroms ist ein elektrisches Feld. Ist  $\gamma$  die Leiterschleife, so ergibt sich quantitativ

$$\int_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{x} = -k'' \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d^2\vec{x} \quad , \quad (3.1)$$

wenn  $\gamma$  die Fläche  $S$  im positiven Sinne umrandet. Die im Induktionsgesetz auftretende Konstante  $k''$  lässt sich durch die bereits bekannten Konstanten ausdrücken. Dies kann man in der folgenden Weise einsehen.

Wir betrachten ein Magnetfeld, dessen Zeitabhängigkeit durch

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \vec{B}_0(\vec{x} + \vec{v}t) \quad (3.2)$$

gegeben ist, etwa indem sich die erzeugende Stromverteilung mit der konstanten Geschwindigkeit  $-\vec{v}$  bewegt. Dann gilt

$$\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d^2\vec{x} = \int_S (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{B}_0 \cdot d^2\vec{x} \quad . \quad (3.3)$$

Mit  $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{B}_0 = (\nabla \cdot \vec{B}_0) \vec{v} - \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}_0)$  und  $\nabla \cdot \vec{B}_0 = 0$  folgt

$$\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d^2\vec{x} = - \int_{\partial S} (\vec{v} \times \vec{B}_0) \cdot d\vec{x} \quad . \quad (3.4)$$

$\vec{v} \times \vec{B}_0$  ist aber gerade die Kraft, die auf eine Einheitsladung wirkt, die sich im Magnetfeld  $\vec{B}_0$  mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  bewegt. Nach den Gesetzen der klassischen Mechanik bleibt die Kraft gleich, wenn man in ein anderes Inertialsystem geht (Galilei-Invarianz). Im System, in dem die Ladung ruht und das Magnetfeld sich mit der konstanten Geschwindigkeit  $-\vec{v}$  bewegt, interpretieren wir die Kraft  $\vec{v} \times \vec{B}_0$  als elektrisches Feld  $\vec{E}$  und erhalten daher einen Spezialfall des Induktionsgesetzes mit  $k'' = 1$ .

Wir werden später sehen, dass die Galilei-Invarianz in der Elektrodynamik nicht gilt, so dass die obige Argumentation nicht ganz überzeugend ist. Die Galilei-Invarianz gilt aber im Limes kleiner Geschwindigkeiten; dies reicht aus, um die Konstante  $k''$  zu fixieren.

Die differentielle Form des Induktionsgesetzes lautet

$$\text{rot } \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = 0 \quad . \quad (3.5)$$

Man kann diese Gleichungen in ähnlicher Weise wie die statischen Gleichungen verstehen, indem man zu einer vierdimensionalen Beschreibung übergeht, in der die Zeit die vierte Dimension ist. Wir werden später darauf zurückkommen.

### 3.2 Maxwell'sche Ergänzung

Aus dem Ampèreschen Durchflutungsgesetz

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \vec{j} \quad (3.6)$$

folgt  $\operatorname{div} \vec{j} = 0$ . Andererseits gilt wegen der Erhaltung der elektrischen Ladung die Kontinuitätsgleichung

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad . \quad (3.7)$$

Das Ampèresche Durchflutungsgesetz kann also bei zeitlich veränderlicher Ladungsdichte nicht mehr richtig sein. Nach dem Gaußschen Gesetz ist

$$\rho = \operatorname{div} \vec{E} \quad , \quad (3.8)$$

also gilt

$$\operatorname{div} \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0 \quad . \quad (3.9)$$

Maxwell veränderte daher das Ampèresche Durchflutungsgesetz, indem er auf der rechten Seite den sogenannten Verschiebungsstrom  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  hinzufügte (Maxwell'sche Ergänzung). Damit erhält man

$$\operatorname{rot} \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j} \quad . \quad (3.10)$$

Um uns eine Vorstellung von der Größenordnung der Maxwell'schen Ergänzung machen zu können, betrachten wir die folgende Situation: ein homogenes elektrisches Feld im Innern eines Zylinders mit Radius  $r$  werde gleichmäßig in der Zeit  $t$  von 0 auf  $E$  gesteigert. Das dadurch am Rand des Zylinders verursachte Magnetfeld hat die Stärke

$$B = \frac{r}{2t} E \quad . \quad (3.11)$$

Auf eine Punktladung  $e$ , die sich mit der Geschwindigkeit  $v$  parallel zur Zylinderachse bewegt, wirkt daher die Lorentzkraft mit der Stärke

$$evB = eEv \frac{r}{2t} \quad . \quad (3.12)$$

Solange  $v$  und  $\frac{r}{2t}$  klein gegen die Lichtgeschwindigkeit  $c = 1$  sind, ist diese Kraft klein gegen die elektrische Kraft  $eE$ . Ein direkter Nachweis des Verschiebungsstroms ist daher schwierig. Wir werden aber sehen, dass dieser Zusatzterm verantwortlich für das Auftreten elektromagnetischer Wellen ist.

### 3.3 Maxwellgleichungen; die Wellengleichung

Wir haben jetzt das folgende Gleichungssystem für die Elektrodynamik gefunden:

$$1. \quad \text{rot } \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = 0$$

$$2. \quad \text{div } \vec{B} = 0$$

$$3. \quad \text{div } \vec{E} = \rho$$

$$4. \quad \text{rot } \vec{B} - \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} = \vec{j}$$

Diese 4 Gleichungen nennt man die Maxwellgleichungen. Sie bilden die Grundlage für die gesamte Elektrodynamik.

Einen ersten Eindruck über die Aussagekraft dieser Gleichungen gewinnt man, indem man die erste Gleichung nach der Zeit differenziert,

$$0 = \text{rot } \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B} \quad . \quad (3.13)$$

Einsetzen der vierten Gleichung ergibt

$$0 = \text{rot rot } \vec{B} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B} - \text{rot } \vec{j} \quad . \quad (3.14)$$

Mit  $\Delta = \text{grad div} - \text{rot rot}$  und  $\text{div } \vec{B} = 0$  folgt

$$\square \vec{B} = \text{rot } \vec{j} \quad (3.15)$$

mit dem d'Alembert-Operator  $\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$ . Diese Gleichung ist die inhomogene Wellengleichung. Eine entsprechende Rechnung führt für das elektrische Feld auf die inhomogene Wellengleichung

$$\square \vec{E} = -(\text{grad } \rho + \frac{\partial}{\partial t} \vec{j}) \quad . \quad (3.16)$$

Die zugehörigen homogenen Gleichungen besitzen nichttriviale Lösungen, die elektromagnetischen Wellen. Der Nachweis dieser Wellen durch Hertz lieferte die entscheidende Bestätigung für die Maxwellgleichungen.

### 3.4 Potentiale und Eichtransformationen

Die Maxwellgleichungen stellen ein System von 8 gekoppelten linearen partiellen Differentialgleichungen dar. Um sie bei vorgegebenen Strom- und Ladungsdichte zu lösen, kann man folgendermaßen vorgehen. Zunächst betrachtet man die beiden homogenen Gleichungen. Aus  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$  folgt die Existenz eines Vektorpotentials  $\vec{A}$  mit

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{B} \quad . \quad (3.17)$$

Setzt man diesen Ausdruck für  $\vec{B}$  in das Induktionsgesetz ein, so erhält man

$$\operatorname{rot} \left( \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} \right) = 0 \quad . \quad (3.18)$$

Also gibt es wie im statischen Fall ein skalares Potential  $\varphi$  mit

$$-\operatorname{grad} \varphi = \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} \quad . \quad (3.19)$$

Sind  $\varphi$  und  $\vec{A}$  beliebig vorgegeben, so lösen  $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}$  und  $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$  die homogenen Maxwellgleichungen. Die vierkomponentige Größe  $(\varphi, \vec{A})$  nennt man das elektromagnetische Potential.

Wir setzen die gefundenen Ausdrücke für das elektromagnetische Feld  $(\vec{E}, \vec{B})$  in die beiden inhomogenen Maxwellgleichungen ein und erhalten

$$-\Delta \varphi - \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{A} = \rho \quad , \quad (3.20)$$

und mit  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} = \operatorname{grad} \operatorname{div} - \Delta$

$$-\Delta \vec{A} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} + \operatorname{grad} (\operatorname{div} \vec{A} + \frac{\partial}{\partial t} \varphi) = \vec{j} \quad . \quad (3.21)$$

Die Wahl der Potentiale ist nicht eindeutig durch die elektromagnetischen Felder bestimmt. Ersetzt man  $\vec{A}$  durch  $\vec{A} + \operatorname{grad} \Lambda$  und  $\varphi$  durch  $\varphi - \frac{\partial}{\partial t} \Lambda$  mit einer skalaren Funktion  $\Lambda(t, \vec{x})$ , so ergeben sich dieselben Felder. Transformationen dieser Art nennt man Eichtransformationen.

Man kann die Eichfreiheit dazu benutzen, die Gleichungen für die Potentiale zu vereinfachen. Eine beliebte Eichung ist die Lorentzeichung

$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{\partial}{\partial t} \varphi = 0 \quad . \quad (3.22)$$

In diesem Fall erhält man 4 entkoppelte inhomogene Wellengleichungen,

$$\square \vec{A} = \vec{j} \quad (3.23)$$

und

$$\square\varphi = \rho \quad . \quad (3.24)$$

Man erreicht die Lorentzeichung in der folgenden Weise. Sei  $(\varphi, \vec{A})$  ein beliebig vorgegebenes elektromagnetisches Potential. Gesucht wird eine skalare Funktion  $\Lambda$ , so dass

$$(\varphi', \vec{A}') = \left(\varphi - \frac{\partial}{\partial t}\Lambda, \vec{A} + \text{grad } \Lambda\right) \quad (3.25)$$

die Lorentzeichung erfüllt. Dies bedeutet, dass  $\Lambda$  die inhomogene Wellengleichung

$$\square\Lambda = \text{div } \vec{A} + \frac{\partial}{\partial t}\varphi \quad (3.26)$$

erfüllen muss.

Eine weitere beliebige Eichung ist die bereits besprochene Coulombeichung (auch Strahlungseichung genannt),

$$\text{div } \vec{A} = 0 \quad . \quad (3.27)$$

Das skalare Potential  $\varphi$  erfüllt dann wie im statischen Fall die Poissongleichung. Für eine im endlichen konzentrierte Ladungsverteilung  $\rho$  ist die im Unendlichen verschwindende Lösung

$$\varphi(t, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3\vec{y} \frac{\rho(t, \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} \quad . \quad (3.28)$$

Das Potential hängt also nur von der Ladungsverteilung zur selben Zeit ab. Dies scheint im Widerspruch zu stehen zu der noch zu besprechenden Kausalitätseigenschaft der Elektrodynamik, dass sich nämlich Signale nur mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten können. Die Auflösung des Widerspruchs besteht darin, dass das Potential selbst keine beobachtbare Größe ist. Wir werden sehen, dass für die daraus abgeleiteten Felder die Kausalitätsbedingung erfüllt ist.

Wir setzen jetzt die gefundene Lösung für  $\varphi$  in die Gleichung für  $\vec{A}$  ein und erhalten mit  $\frac{\partial}{\partial t}\rho = -\text{div } \vec{j}$ ,  $\text{grad div} = \text{rot rot} + \Delta$  und  $\Delta \frac{1}{|\vec{x}|} = -4\pi\delta^3(\vec{x})$

$$\square\vec{A} = \vec{j}_{tr} \quad (3.29)$$

wobei  $\vec{j}_{tr}$ , der „transversale“ Anteil des Stroms, definiert ist durch

$$\vec{j}_{tr}(t, \vec{x}) = \text{rot rot} \frac{1}{4\pi} \int d^3\vec{y} \frac{\vec{j}(t, \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} \quad . \quad (3.30)$$

$\vec{j}_{tr}$  hat wegen  $\operatorname{div} \vec{j}_{tr} = 0$  nur 2 unabhängige Komponenten, die den beiden physikalischen Freiheitsgraden einer elektromagnetischen Welle mit vorgegebenem Wellenzahlvektor entsprechen. Im allgemeinen ist  $\vec{j}_{tr}$  eine nichtlokale Funktion von  $\vec{j}$ . Im Fall  $\operatorname{div} \vec{j} = 0$  stimmt  $\vec{j}_{tr}$  mit  $\vec{j}$  überein.

Eine weitere oft verwendete Eichung ist die temporale Eichung  $\varphi = 0$ .

### 3.5 Vierdimensionale Formulierung der Maxwellgleichungen

Integriert man das Induktionsgesetz

$$\int_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{x} + \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d^2\vec{x} = 0 \quad (3.31)$$

über die Zeit von  $t_1$  nach  $t_2$ , so erhält man

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\partial S} d\vec{x} \cdot \vec{E} + \int_S \vec{B} \cdot d^2\vec{x}|_{t=t_2} - \int_S \vec{B} \cdot d^2\vec{x}|_{t=t_1} = 0 \quad . \quad (3.32)$$

Die linke Seite lässt sich als Integral des elektromagnetischen Feldes über die geschlossene 2-dimensionale Fläche

$$\tilde{S} = [t_1, t_2] \times \partial S \cup \{t_2\} \times S \cup \{t_1\} \times (-S) \quad (3.33)$$

im  $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$  interpretieren, wobei der erste Faktor  $\mathbb{R}$  die Zeit und der zweite Faktor  $\mathbb{R}^3$  den Raum beschreibt ( $-S$  ist  $S$  mit umgekehrter Orientierung). Ist allgemein eine 2-dimensionale Fläche  $K$  im  $\mathbb{R}^4$  gegeben mit der Parametrisierung  $x^\mu(u, v)$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3$ ,  $(u, v) \in [a, b] \times [c, d]$ , so integriert man einen antisymmetrischen Tensor 2. Stufe  $C_{\mu\nu}$  in der folgenden Weise über  $K$

$$\int_K \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu=0}^3 C_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \int_a^b du \int_c^d dv \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu} C_{\mu\nu} \left( \frac{\partial x^\mu}{\partial u} \frac{\partial x^\nu}{\partial v} - \frac{\partial x^\mu}{\partial v} \frac{\partial x^\nu}{\partial u} \right) \quad . \quad (3.34)$$

Wir definieren daher den elektromagnetischen Feldstärketensor  $F_{\mu\nu}$  durch

$$F_{0i} = -F_{i0} = E_i \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.35)$$

$$F_{ik} = - \sum_l \varepsilon_{ikl} B_l \quad . \quad (3.36)$$

Dann besagt das Induktionsgesetz

$$\int_{\partial V} \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu=0}^3 F_{\mu, \nu} dx^\mu dx^\nu = 0 \quad , \quad (3.37)$$

wobei  $V$  die 3-dimensionale Hyperfläche  $[t_1, t_2] \times S$  ist.

Ersetzen wir in dieser Gleichung die Hyperfläche durch  $V = \{t\} \times V_0$  mit einem Gebiet  $V_0 \subset \mathbb{R}^3$ , so ergibt sich das Gesetz über die Abwesenheit magnetischer Ladungen. Ist  $V = \bigcup_{t \in [t_1, t_2]} \{t\} \times S_t$  mit einer glatten Familie 2-dimensionaler Flächen im  $\mathbb{R}^3$ , deren Randpunkte sich langsam (im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit) bewegen, so erhält man das allgemeine Induktionsgesetz (man beachte, dass das im Induktionsgesetz auftretende elektrische Feld sich auf das Bezugssystem des Leiters bezieht).

Differentiell ergibt sich

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} + \frac{\partial F_{\nu\rho}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial F_{\rho\mu}}{\partial x^\nu} = 0 \quad , \quad \mu, \nu, \rho = 0, \dots, 3 \quad . \quad (3.38)$$

Diese Gleichungen fassen die beiden homogenen Maxwellgleichungen zusammen. Nach dem verallgemeinerten Satz von Stokes ist diese Gleichung äquivalent zum Verschwinden des Integrals des Feldstärketensors über den Rand einer beliebigen 3-dimensionalen Hyperfläche im  $\mathbb{R}^4$ .

In ähnlicher Weise kann man auch die inhomogenen Maxwellgleichungen behandeln. Dies führt auf den sogenannten dualen Feldstärketensor, bei dem die Rollen von elektrischem und magnetischem Feld vertauscht sind. Stattdessen drücken wir  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  in den inhomogenen Maxwellgleichungen durch den Feldstärketensor  $F_{\mu\nu}$  aus und erhalten

$$\sum_{i=1}^3 \partial_i F_{0i} = \rho \quad (3.39)$$

$$\sum_{i=1}^3 \partial_i F_{ik} - \partial_0 F_{0k} = (\vec{j})_k \quad , \quad k = 1, 2, 3 \quad , \quad (3.40)$$

mit  $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ ,  $\mu = 0, \dots, 3$ . Offenbar sind die 3 letzten Gleichungen von ähnlicher Struktur wie die erste, bis auf das Vorzeichen beim Term mit Index 0. Wir definieren einen symmetrischen Tensor zweiter Stufe  $g_{\mu\nu}$  durch  $g_{00} = 1$ ,  $g_{ii} = -1$ ,  $i = 1, 2, 3$  und  $g_{\mu\nu} = 0$ ,  $\mu \neq \nu$ . Der inverse Tensor ist definiert durch

$$\sum_{\nu} g_{\mu\nu} g^{\nu\rho} = \delta_{\mu}^{\rho} \quad , \quad (3.41)$$

also  $g^{00} = 1$ ,  $g^{ii} = -1$ ,  $i = 1, 2, 3$  und  $g^{\mu\nu} = 0$ ,  $\mu \neq \nu$ . Wir fassen Ladungsdichte und Stromdichte zu einem Viererstrom zusammen,  $(j^0, j^1, j^2, j^3) = (\rho, \vec{j})$ . Wir unterscheiden Größen mit oberem Index (kontravariant) (z.B. Koordinaten) von solchen mit unterem Index (kovariant) (z.B. Ableitungen nach den Koordinaten). Tauchen in einer Formel untere und obere Indizes mit gleichem Namen auf, so soll über diese Indizes summiert werden.

Der Tensor  $g_{\mu\nu}$  (der metrische Tensor) und sein Inverses ermöglichen es, Größen mit oberem Index auf solche mit unterem Index abzubilden. So ist  $j_\mu := g_{\mu\nu} j^\nu$ , also  $j_0 = \rho$ ,  $j_i = -j^i$  und  $\partial^\mu := g^{\mu\nu} \partial_\nu$ . Mit diesen Notationen schreiben sich die inhomogenen Maxwellgleichungen als

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = j_\nu \quad . \quad (3.42)$$

Wir erkennen einen wichtigen Strukturunterschied zwischen den homogenen und den inhomogenen Maxwellgleichungen. Während zur Formulierung der homogenen Maxwellgleichungen kein Zusammenhang zwischen Raum und Zeit benötigt wird, geht ein solcher über den metrischen Tensor in die inhomogenen Maxwellgleichungen ein. Die Raumzeit wird dadurch zu einem sogenannten pseudo-Riemannschen Raum, dem Minkowskiraum. Wir werden im Kapitel über Relativitätstheorie darauf zurückkommen.

### 3.6 Energie und Impuls des elektromagnetischen Feldes

Wenn ein elektrisches Feld  $\vec{E}$  in einem Leiter endlicher Leitfähigkeit einen Strom  $\vec{j}$  verursacht, so ist die pro Zeiteinheit im Gebiet  $V$  erzeugte Joulesche Wärme

$$P = \int d^3\vec{x} \vec{j}(\vec{x}, t) \cdot \vec{E}(\vec{x}, t) \quad . \quad (3.43)$$

Nach der 4. Maxwellischen Gleichung ist

$$\vec{j}(\vec{x}, t) = \text{rot } \vec{B}(\vec{x}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(\vec{x}, t) \quad , \quad (3.44)$$

weiter gilt

$$\text{div}(\vec{E} \times \vec{B}) = \text{rot } \vec{E} \cdot \vec{B} - \vec{E} \cdot \text{rot } \vec{B} \quad , \quad (3.45)$$

sowie nach der 1. Maxwellischen Gleichung

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \quad (3.46)$$

und damit

$$P = -\frac{d}{dt} \int_V d^3\vec{x} u(\vec{x}, t) - \int_{\partial V} \vec{S} \cdot d^2\vec{x} \quad (3.47)$$

(Poyntingscher Satz) mit der elektromagnetischen Energiedichte

$$u = \frac{1}{2} \left( |\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2 \right) \quad (3.48)$$

und der elektromagnetischen Energiestromdichte

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{B} \quad . \quad (3.49)$$

Der Poyntingsche Satz drückt die Energieerhaltung des elektromagnetischen Feldes aus. Um den Impuls des elektromagnetischen Feldes zu finden, betrachten wir die Kraft, die ein elektromagnetisches Feld auf eine Ladungs- und Stromverteilung im Gebiet  $V$  ausübt. Es gilt

$$\vec{K} = \int_V d^3\vec{x} \vec{k}(\vec{x}) \quad (3.50)$$

mit der Kraftdichte

$$\vec{k} = \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} \quad . \quad (3.51)$$

Die Kraftdichte kann zusammen mit der Leistungsdichte  $\vec{j} \cdot \vec{E}$  zu einer 4-komponentigen Größe zusammengefasst werden,

$$k^\mu = F^\mu{}_\nu j^\nu \quad . \quad (3.52)$$

Mit

$$j^\mu = \partial_\nu F^{\nu\mu} \quad (3.53)$$

folgt

$$k^\mu = F^\mu{}_\nu \partial_\rho F^{\rho\nu} = \partial_\rho (F^\mu{}_\nu F^{\rho\nu}) - (\partial^\rho F^{\mu\nu}) F_{\rho\nu} \quad . \quad (3.54)$$

Es gilt wegen der Antisymmetrie von  $F^{\mu\nu}$

$$(\partial^\rho F^{\mu\nu}) F_{\rho\nu} = \frac{1}{2} (\partial^\rho F^{\mu\nu} + \partial^\nu F^{\rho\mu}) F_{\rho\nu} \quad . \quad (3.55)$$

Einsetzen der homogenen Maxwellgleichungen (3.38) ergibt

$$-\frac{1}{2} (\partial^\mu F^{\nu\rho}) F_{\rho\nu} = \frac{1}{4} \partial^\mu (F^{\nu\rho} F_{\nu\rho}) \quad . \quad (3.56)$$

Damit erhalten wir

$$k^\mu + \partial^\nu T^\mu{}_\nu = 0 \quad (3.57)$$

mit dem Energieimpulstensor

$$T^\mu{}_\nu = F^\mu{}_\rho F^\rho{}_\nu - \frac{1}{4} \delta^\mu{}_\nu F^\rho{}_\lambda F^\lambda{}_\rho \quad . \quad (3.58)$$

Der Energieimpulstensor ist symmetrisch

$$T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu} \quad (3.59)$$

und spurfrei

$$T^\mu{}_\mu = 0 \quad . \quad (3.60)$$

Es gilt  $T_{00} = u$ ,  $T^i{}_0 = (\vec{E} \times \vec{B})_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Die räumlichen Komponenten ( $\mu, \nu \neq 0$ ) des Energieimpulstensors bilden den Maxwellschen Spannungstensor,

$$T^i{}_j = E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} |\vec{E}|^2 + B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} |\vec{B}|^2 \quad . \quad (3.61)$$

Aus ihm lassen sich Kräfte und Drehmomente auf Ladungs- und Stromverteilungen berechnen. So wirkt auf ein Stück  $S$  der Grenzfläche eines idealen Supraleiters im statischen Fall die Kraft

$$\vec{K} = \frac{1}{2} \int_S df (\sigma^2 - |\vec{g}|^2) \vec{n} \quad , \quad (3.62)$$

wenn  $\sigma$  die Flächenladungsdichte,  $\vec{g}$  die Flächenstromdichte und  $\vec{n}$  den nach außen gerichteten Normalenvektor auf  $S$  bezeichnet.

## 4 Elektromagnetische Wellen

### 4.1 Die homogene Wellengleichung

Die Gleichung

$$\square u = 0 \quad , \quad \square = \partial^\mu \partial_\mu = g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \quad (4.1)$$

nennt man Wellengleichung. Spezielle Lösungen dieser Gleichung sind die ebenen Wellen

$$u(t, \vec{x}) = f(t - \vec{n} \cdot \vec{x}) \quad (4.2)$$

mit einer glatten Funktion  $f$  und einem Einheitsvektor  $\vec{n}$ . Diese Lösungen sind zu einer festen Zeit  $t$  auf den Ebenen senkrecht zu  $\vec{n}$  konstant. Die Ebenen mit konstantem  $u$  bewegen sich mit der Geschwindigkeit  $\vec{n}$ . Ein Spezialfall ebener Wellen sind die monochromatischen ebenen Wellen

$$u(t, \vec{x}) = e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \quad , \quad (4.3)$$

mit dem Wellenzahlvektor  $\vec{k}$  und der Frequenz  $\omega$ . Die Wellengleichung impliziert die Dispersionsrelation  $|\vec{k}|^2 = \omega^2$ .

Ähnlich wie in der Mechanik wollen wir jetzt das Anfangswertproblem untersuchen. Da die Wellengleichung eine Differentialgleichung zweiter Ordnung in der Zeit ist, erwarten wir, dass die Lösung bestimmt wird durch Angabe von  $u$  und seiner Zeitableitung zur Zeit  $t = 0$ . Man nennt  $u_0(\vec{x}) := u(0, \vec{x})$  und  $v_0(\vec{x}) := \frac{\partial}{\partial t} u(0, \vec{x})$  die Cauchydaten von  $u$  und fragt, für welche vorgegebenen Cauchydaten eine zugehörige Lösung der Wellengleichung existiert und eindeutig bestimmt ist (Cauchyproblem).

Betrachten wir zunächst Lösungen der Form

$$u(t, \vec{x}) = f(t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}. \quad (4.4)$$

$f$  erfüllt dann die Differentialgleichung

$$f'' + |\vec{k}|^2 f = 0 \quad (4.5)$$

mit der allgemeinen Lösung

$$f(t) = f(0) \cos |\vec{k}|t + \frac{f'(0)}{|\vec{k}|} \sin |\vec{k}|t \quad . \quad (4.6)$$

Durch Superposition dieser Lösungen können wir das Cauchyproblem auch für Anfangsbedingungen der Form

$$u(0, \vec{x}) = u_0(\vec{x}) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d^3\vec{k} \tilde{u}_0(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(0, \vec{x}) = v_0(\vec{x}) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d^3\vec{k} \tilde{v}_0(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \quad , \quad (4.8)$$

(Überlagerung ebener monochromatischer Wellen) lösen. Es gilt

$$u(t, \vec{x}) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d^3\vec{k} \left( \tilde{u}_0(\vec{k}) \cos |\vec{k}|t + \frac{\tilde{v}_0(\vec{k})}{|\vec{k}|} \sin |\vec{k}|t \right) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \quad . \quad (4.9)$$

Seien nun  $u_0, v_0$  beliebig vorgegebene Anfangsbedingungen. Mit den Fouriertransformierten

$$\tilde{u}_0(\vec{k}) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d^3\vec{x} u_0(\vec{x}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \quad , \quad (4.10)$$

$$\tilde{v}_0(\vec{k}) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d^3\vec{x} v_0(\vec{x}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \quad , \quad (4.11)$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} u(t, \vec{x}) &= (2\pi)^{-3} \int d^3\vec{k} d^3\vec{y} \left( u_0(\vec{y}) \cos |\vec{k}|t + v_0(\vec{y}) \frac{\sin |\vec{k}|t}{|\vec{k}|} \right) e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \\ &= \int d^3\vec{y} \left[ \frac{\partial}{\partial t} D(t, \vec{x} - \vec{y}) u_0(\vec{y}) + D(t, \vec{x} - \vec{y}) v_0(\vec{y}) \right] \end{aligned} \quad (4.12)$$

mit

$$D(t, \vec{x}) = (2\pi)^{-3} \int d^3\vec{k} \frac{\sin |\vec{k}|t}{|\vec{k}|} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \quad (4.13)$$

$$= \frac{1}{4\pi|\vec{x}|} (\delta(t - |\vec{x}|) - \delta(t + |\vec{x}|)) \quad . \quad (4.14)$$

Bei den obigen Rechnungen wurde benutzt, dass die Fouriertransformierten der Cauchydaten existieren und durch die inverse Fouriertransformation auf die ursprünglichen Daten abgebildet werden. Dies ist sicherlich erfüllt für Funktionen aus dem sogenannten Schwartzraum  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ , dem Raum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen, die zusammen mit ihren Ableitungen schneller als jede Potenz bei unendlich abfallen. Der Schwartzraum ist invariant unter der Fouriertransformation und eignet sich daher besonders gut für diese Diskussion. Bei allgemeineren Cauchydaten ist es meist zweckmäßig, sie als Distributionen über dem Testfunktionenraum  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$  zu betrachten (sogenannte temperierte Distributionen). Für jede integrable Funktion  $t$  gilt die Formel

$$\int d^3\vec{k} \tilde{t}(\vec{k}) \varphi(\vec{k}) := \int d^3\vec{x} t(\vec{x}) \tilde{\varphi}(\vec{x}) \quad (4.15)$$

$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ . Für eine beliebige temperierte Distribution  $t$  ist die Fouriertransformierte durch (4.15) erklärt.

Nennt man den Mittelwert einer Funktion  $h(\vec{x})$  über eine Kugel vom Radius  $r$  um den Punkt  $\vec{x}$

$$(M_r h)(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi r^2} \int df h(\vec{x} + \vec{y}) \quad , \quad |\vec{y}| = r \quad , \quad (4.16)$$

so lässt sich die Lösung  $u$  durch die Anfangsbedingungen  $u_0, v_0$  in der folgenden Form ausdrücken :

$$u(t, \vec{x}) = \frac{\partial}{\partial t} (t M_{|t|} u_0)(\vec{x}) + (t M_{|t|} v_0)(\vec{x}) \quad . \quad (4.17)$$

$u(t, \vec{x})$  ist also unabhängig von den Werten von  $u_0$  und  $v_0$  außerhalb der Oberfläche der Kugel mit dem Radius  $|t|$ .

Wendet man die gefundenen Ausdrücke auf die Maxwell'schen Gleichungen mit  $\rho, \vec{j} = 0$  an, so folgt

$$\vec{E}(t, \vec{x}) = \int d^3 \vec{y} \left[ \frac{\partial}{\partial t} D(t, \vec{x} - \vec{y}) \vec{E}(0, \vec{y}) + D(t, \vec{x} - \vec{y}) \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(0, \vec{y}) \right] , \quad (4.18)$$

und entsprechend für  $\vec{B}$ . Wegen der Maxwellgleichungen sind die Anfangsbedingungen nicht frei wählbar, sondern müssen die Maxwellgleichungen

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad , \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{rot} \vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0 \quad , \quad \operatorname{rot} \vec{B} - \dot{\vec{E}} = 0 \quad (4.19)$$

zur Zeit  $t = 0$  erfüllen. Geben wir  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  zur Zeit  $t = 0$  divergenzfrei vor, so sind  $\dot{\vec{E}}$  und  $\dot{\vec{B}}$  dadurch bereits festgelegt. Wir erhalten

$$\begin{pmatrix} \vec{E}(t, \vec{x}) \\ \vec{B}(t, \vec{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_t & \operatorname{rot} \\ -\operatorname{rot} & \partial_t \end{pmatrix} \int d^3 \vec{y} D(t, \vec{x} - \vec{y}) \begin{pmatrix} \vec{E}(0, \vec{y}) \\ \vec{B}(0, \vec{y}) \end{pmatrix} . \quad (4.20)$$

## 4.2 Die inhomogene Wellengleichung; retardierte Potentiale

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Wellengleichung

$$\square u = w \quad (4.21)$$

erhält man, indem man eine spezielle Lösung aufsucht und dann die allgemeine Lösung der homogenen Wellengleichung dazu addiert. Wir suchen (für

supp  $w$  kompakt) eine Lösung, die zu sehr frühen Zeiten verschwindet. Eine solche Lösung ist eindeutig bestimmt. Sie ist gegeben durch

$$u(t, \vec{x}) = \int_{-\infty}^t ds u_s(t, \vec{x}) \quad , \quad (4.22)$$

wobei  $u_s(t, \vec{x})$  die Lösung der homogenen Wellengleichung ist mit den Anfangsbedingungen

$$u_s(s, \vec{x}) = 0 \quad , \quad \partial_t u_s(s, \vec{x}) = w(s, \vec{x}) \quad . \quad (4.23)$$

Tatsächlich gilt

$$\partial_t u(t, \vec{x}) = \underbrace{u_t(t, \vec{x})}_{=0} + \int_{-\infty}^t ds \partial_t u_s(t, \vec{x}) \quad , \quad (4.24)$$

$$\partial_t^2 u(t, \vec{x}) = \partial_t u_t(t, \vec{x}) + \int_{-\infty}^t ds \partial_t^2 u_s(t, \vec{x}) \quad (4.25)$$

$$= w(t, \vec{x}) + \int_{-\infty}^t ds \Delta u_s(t, \vec{x}) \quad (4.26)$$

$$= w(t, \vec{x}) + \Delta u(t, \vec{x}) \quad . \quad (4.27)$$

Wir schreiben

$$u(t, \vec{x}) = \int ds \int d^3 \vec{y} D_{ret}(t - s, \vec{x} - \vec{y}) w(s, \vec{y}) \quad (4.28)$$

mit der retardierten Greenschen Funktion

$$D_{ret}(t, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi |\vec{x}|} \delta(t - |\vec{x}|) \quad . \quad (4.29)$$

Es gilt

$$D_{ret}(t, \vec{x}) = 0 \quad (4.30)$$

für  $t \neq |\vec{x}|$  und

$$\square D_{ret}(t, \vec{x}) = \delta(t) \delta^3(\vec{x}) \quad . \quad (4.31)$$

Eine andere Greensche Funktion ist die avancierte Greensche Funktion

$$D_{av}(t, \vec{x}) = D_{ret}(-t, -\vec{x}) = \frac{1}{4\pi |\vec{x}|} \delta(t + |\vec{x}|) \quad . \quad (4.32)$$

Die Differenz der beiden ist die schon behandelte Funktion

$$D = D_{ret} - D_{av} \quad . \quad (4.33)$$

$D$  ist eine Lösung der homogenen Wellengleichung. Da eine Lösung der homogenen Wellengleichung durch ihre Anfangswerte zu einer beliebigen Zeit festgelegt wird, ist  $D_{ret}$  die einzige Greensche Funktion, die außerhalb des Vorwärtskegels

$$\bar{V}_+ = \{(t, \vec{x}) \mid |\vec{x}| \leq t\} \quad (4.34)$$

verschwindet.

Wir können jetzt sofort die sogenannten retardierten Potentiale angeben. Ist  $(\rho, \vec{j})$  eine Ladungs- und Stromverteilung, so gilt für die retardierten Potentiale (in der Lorentzzeichnung)

$$\varphi_{ret}(t, \vec{x}) = \int dt' d^3\vec{y} D_{ret}(t - t', \vec{x} - \vec{y}) \rho(t', \vec{y}) \quad (4.35)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int dt' d^3\vec{y} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \delta((t - t') - |\vec{x} - \vec{y}|) \rho(t', \vec{y}) \quad (4.36)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int d^3\vec{y} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \rho(t - |\vec{x} - \vec{y}|, \vec{y}) \quad (4.37)$$

und

$$\vec{A}_{ret}(t, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3\vec{y} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \vec{j}(t - |\vec{x} - \vec{y}|, \vec{y}) \quad (4.38)$$

Als Beispiel betrachten wir einen zeitabhängigen, punktförmigen elektrischen Dipol  $\vec{p}(t)$  am Ort  $\vec{x} = 0$  (Hertzscher Dipol). Die zugehörige Ladungsdichte ist

$$\rho(t, \vec{x}) = -\dot{\vec{p}}(t) \cdot \text{grad} \delta^3(\vec{x}) \quad (4.39)$$

der zugehörige Strom

$$\vec{j}(t, \vec{x}) = \dot{\vec{p}}(t) \delta^3(\vec{x}) \quad (4.40)$$

Damit erhält man für das retardierte Vektorpotential

$$\vec{A}_{ret}(t, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3\vec{y} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \dot{\vec{p}}(t - |\vec{x} - \vec{y}|) \delta^3(\vec{y}) \quad (4.41)$$

$$= \frac{1}{4\pi |\vec{x}|} \dot{\vec{p}}(t - |\vec{x}|) = \frac{1}{4\pi r} \dot{\vec{p}}(t_{ret}) \quad (4.42)$$

mit der retardierten Zeit  $t_{ret} = t - |\vec{x}|$ , und für das zugehörige magnetische Feld

$$\vec{B}_{ret}(t, \vec{x}) = \text{rot} \vec{A}_{ret}(t, \vec{x}) \quad (4.43)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left( \dot{\vec{p}}(t_{ret}) \times \frac{\vec{n}}{r^2} + \ddot{\vec{p}}(t_{ret}) \times \frac{\vec{n}}{r} \right) \quad (4.44)$$

mit  $r = |\vec{x}|$  und  $\vec{n} = \frac{\vec{x}}{r}$ . Der erste Term ist das sogenannte Nahfeld, das bei kleinen Abständen überwiegt. Den zweiten Term nennt man das Fernfeld. Dies ist das eigentliche Strahlungsfeld. Es ist proportional zu  $\ddot{\vec{p}}$  und fällt nur wie  $\frac{1}{r}$  ab. Zur Bestimmung des elektrischen Feldes berechnen wir zunächst das skalare Potential,

$$\varphi_{ret}(t, \vec{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int d^3\vec{y} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \vec{p}(t - |\vec{x} - \vec{y}|) \cdot \text{grad} \delta^3(\vec{y}) \quad (4.45)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int d^3\vec{y} \text{div}_{\vec{y}} \left( \frac{\vec{p}(t - |\vec{x} - \vec{y}|)}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) \delta^3(\vec{y}) \quad (4.46)$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \text{div} \frac{\vec{p}(t - |\vec{x}|)}{|\vec{x}|} \quad (4.47)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left( \vec{p}(t - |\vec{x}|) \cdot \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} + \dot{\vec{p}}(t - |\vec{x}|) \cdot \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^2} \right) \quad (4.48)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\vec{p}(t_{ret}) \cdot \vec{n}}{r^2} + \frac{\dot{\vec{p}}(t_{ret}) \cdot \vec{n}}{r} \right) \quad (4.49)$$

Das elektrische Feld ergibt sich dann zu

$$\vec{E}_{ret}(t, \vec{x}) = -\text{grad} \varphi_{ret} - \dot{\vec{A}}_{ret} \quad (4.50)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left( \frac{3\vec{n}(\vec{p} \cdot \vec{n}) - \vec{p}}{r^3} + \frac{3\vec{n}(\dot{\vec{p}} \cdot \vec{n}) - \dot{\vec{p}}}{r^2} - \frac{\ddot{\vec{p}} - (\vec{n} \cdot \ddot{\vec{p}})\vec{n}}{r} \right) \quad (4.51)$$

Wieder gibt es einen Anteil  $\vec{E}_{Fern}$ , der nur wie  $\frac{1}{r}$  abfällt und daher bei großen Abständen dominiert. Für den Poyntingvektor gilt (für große  $r$ )

$$\vec{S} = \vec{E}_{Fern} \times \vec{B}_{Fern} = -\frac{1}{16\pi^2 r^2} \left( \ddot{\vec{p}} - (\ddot{\vec{p}} \cdot \vec{n})\vec{n} \right) \times (\ddot{\vec{p}} \times \vec{n}) \quad (4.52)$$

$$= -\frac{1}{16\pi^2 r^2} \left( (\ddot{\vec{p}} \cdot \vec{n})\ddot{\vec{p}} - |\ddot{\vec{p}}|^2 \vec{n} - (\ddot{\vec{p}} \cdot \vec{n})\ddot{\vec{p}} + (\ddot{\vec{p}} \cdot \vec{n})^2 \vec{n} \right) \quad (4.53)$$

$$= -\frac{1}{16\pi^2 r^2} \left( (\ddot{\vec{p}} \cdot \vec{n})^2 - |\ddot{\vec{p}}|^2 \right) \vec{n} \quad (4.54)$$

$$= \frac{1}{16\pi^2 r^2} |\ddot{\vec{p}}|^2 \sin^2 \vartheta \vec{n} \quad , \quad \cos \vartheta = \frac{\ddot{\vec{p}} \cdot \vec{n}}{|\ddot{\vec{p}}|} \quad (4.55)$$

Zur Bestimmung der abgestrahlten Leistung berechnen wir den Energiefluss durch eine Kugelschale um den Ursprung mit Radius  $r$ , im Grenzfall großer  $r$ , so dass nur der Beitrag der Fernfelder berücksichtigt werden muss.

$$P = \int_{|\vec{x}|=r} \vec{S} \cdot d^2\vec{x} = \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{8\pi} \int_{-1}^1 dw (1 - w^2) = \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{6\pi} \quad (4.56)$$

Wenn der Dipol mit der Frequenz  $\omega$  schwingt

$$\vec{p}(t) = \vec{p}_0 \cos \omega t \quad , \quad (4.57)$$

dann ergibt sich

$$P(t) = \frac{1}{6\pi} |\vec{p}_0|^2 \omega^4 \cos^2 \omega t_{ret} \quad . \quad (4.58)$$

### 4.3 Polarisation

Ebene monochromatische elektromagnetische Wellen haben die Form

$$\vec{E}(t, \vec{x}) = \text{Re} \left( \vec{e} \exp i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) \right) \quad , \quad \vec{B}(t, \vec{x}) = \text{Re} \left( \vec{b} \exp i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) \right) \quad (4.59)$$

mit  $\omega^2 = |\vec{k}|^2$  und  $\vec{e}, \vec{b} \in \mathbb{C}^3$ . Wegen der Maxwellgleichungen gelten für  $\vec{e}$  und  $\vec{b}$  die Bedingungen

$$\vec{k} \cdot \vec{e} = \vec{k} \cdot \vec{b} = 0 \quad (4.60)$$

$$\vec{k} \times \vec{e} = \omega \vec{b} \quad , \quad \vec{k} \times \vec{b} = -\omega \vec{e} \quad (4.61)$$

und damit  $\vec{e} \cdot \vec{b} = 0$ . Die Vektoren  $\vec{E}, \vec{B}$  und  $\vec{k}$  bilden also ein orthogonales, positiv orientiertes Dreibein. Die Energiedichte ist

$$u = \frac{1}{2} |\vec{E}|^2 + \frac{1}{2} |\vec{B}|^2 = |\vec{E}|^2 = \frac{1}{2} \left( |\vec{e}|^2 + \text{Re}(\vec{e} \cdot \vec{e}) e^{2i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \right) \quad . \quad (4.62)$$

Die Energiestromdichte ist

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{B} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} |\vec{E}|^2 = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} u \quad . \quad (4.63)$$

Die zeitliche Abhängigkeit der Richtung des elektrischen Feldes wird durch den komplexen Vektor  $\vec{e}$  charakterisiert. Ist  $\vec{e}$  ein Vielfaches eines reellen Vektors, so zeigt  $\vec{E}$  immer in dieselbe Richtung; die Welle heißt linear polarisiert. Sind Realteil und Imaginärteil von  $\vec{e}$  senkrecht zueinander und von gleichem Betrag, so beschreibt  $\vec{E}(t, \vec{x})$  für festes  $\vec{x}$  einen Kreis mit Radius  $\frac{1}{\sqrt{2}} |\vec{e}|$  (zirkular polarisiert). Im allgemeinen Fall beschreibt  $\vec{E}$  eine Ellipse. Wir wählen  $\alpha \in \mathbb{R}$ , so dass

$$\vec{e} \cdot \vec{e} e^{-2i\alpha} \geq 0 \quad . \quad (4.64)$$

Dann hat  $\vec{e}_0 = e^{-i\alpha} \vec{e}$  die Eigenschaft

$$\vec{e}_0 \cdot \vec{e}_0 \geq 0 \quad . \quad (4.65)$$

Sei  $\vec{e}_0 = \vec{e}_1 + i\vec{e}_2$ ,  $\vec{e}_1, \vec{e}_2 \in \mathbb{R}^3$ . Dann folgt  $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$ . Es gilt

$$\vec{E}(t, \vec{x}) = \operatorname{Re} \vec{e}_0 e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t + \alpha)} \quad (4.66)$$

$$= \vec{e}_1 \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t + \alpha) - \vec{e}_2 \sin(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t + \alpha) \quad , \quad (4.67)$$

d.h.  $\vec{E}$  beschreibt eine Ellipse in der Ebene senkrecht zu  $\vec{k}$  mit den Halbachsen  $\vec{e}_1$  und  $\vec{e}_2$ . Ist  $\vec{e}_2 = 0$ , so ist  $\vec{E}$  linear polarisiert. Ist  $|\vec{e}_2| = |\vec{e}_1|$ , so hat man zirkular polarisiertes Licht (linkszirkular für  $(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) \cdot \vec{k} > 0$ ). Man kann den Polarisationszustand einer Welle durch die sogenannte Polarisationsmatrix charakterisieren. Sei  $\vec{k}$  o.B.d.A. ein Vektor in positiver  $z$ -Richtung. Dann betrachtet man die Matrix

$$\rho = \frac{1}{|\vec{e}|^2} \begin{pmatrix} e_x \bar{e}_x & e_x \bar{e}_y \\ e_y \bar{e}_x & e_y \bar{e}_y \end{pmatrix}$$

mit  $\vec{e} = (e_x, e_y, 0)$ .

Die Matrix  $\rho$  hat die Eigenschaften

$$\operatorname{Tr} \rho = 1 \quad , \quad \det \rho = 0 \quad , \quad \rho = \rho^* \quad , \quad (4.68)$$

sie kann parametrisiert werden durch

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \xi_3 & \xi_1 + i\xi_2 \\ \xi_1 - i\xi_2 & 1 - \xi_3 \end{pmatrix} \quad , \quad (4.69)$$

$\xi_i \in \mathbb{R}$ ,  $\sum \xi_i^2 = 1$ .  $\xi_2 = 0$  bedeutet lineare Polarisation,  $\xi_2 = \pm 1$  zirkulare Polarisation. Zur Bestimmung der Koeffizienten  $\xi_i$  misst man die mittleren relativen Intensitäten der linear und zirkular polarisierten Komponenten, etwa durch einen Linearpolarisator und ein  $\lambda/4$ -Plättchen. Steht der Linearpolarisator mit Winkel  $\phi$  zur  $x$ -Achse, so hat das durchgelassene elektrische Feld den Amplitudenvektor

$$\vec{e}' = P_\phi \vec{e}$$

mit dem Projektor auf die Richtung von  $\phi$

$$P_\phi = \begin{pmatrix} \cos^2 \phi & \cos \phi \sin \phi \\ \cos \phi \sin \phi & \sin^2 \phi \end{pmatrix} \quad .$$

Die relative Intensität  $I(\phi) = \frac{|\vec{e}'|^2}{|\vec{e}|^2}$  ergibt sich dann zu

$$I(\phi) = \operatorname{Tr} \rho P_\phi = \frac{1}{2} (1 + \xi_3 \cos 2\phi + \xi_1 \sin 2\phi) \quad . \quad (4.70)$$

Die zirkular polarisierten Komponenten kann man mit dem folgenden Verfahren herausprojizieren: Ein  $\lambda/4$ -Plättchen wird so in den Strahl gebracht, dass die optische Weglänge der  $y$ -Komponente des elektrischen Feldes sich gerade um  $\lambda/4$  (mit der Wellenlänge  $\lambda = 2\pi/|\vec{k}|$ ) von derjenigen der  $x$ -Komponente unterscheidet. Danach tritt der Strahl durch einen Linearpolarisator in Richtung  $\phi = \pm\pi/4$ . Der jetzt linear polarisierte Strahl wird durch ein gegenüber dem ersten Plättchen um  $\pi/2$  verdrehten  $\lambda/4$ -Plättchen wieder zirkular polarisiert. Bis auf eine für die mittlere Intensität irrelevante Phase ergibt sich für den Amplitudenvektor des elektrischen Feldes hinter dem Projektor

$$\vec{e}' = U^* P_{\pm\pi/4} U \vec{e} \quad (4.71)$$

mit der unitären Matrix

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$

die die Wirkung des  $\lambda/4$ -Plättchens beschreibt. Die relativen Intensitäten der zirkular polarisierten Komponenten sind

$$I_{\pm} = \text{Tr} \rho U^* P_{\pm\pi/4} U = \frac{1}{2}(1 \pm \xi_2) \quad (4.72)$$

Ist eine Welle nicht strikt monochromatisch, so kann man sie näherungsweise durch einen zeitabhängigen Vektor  $\vec{e}(t)$  beschreiben. Im Zeitmittel erhält man eine Polarisationsmatrix

$$\bar{\rho} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\int_{-T}^T \rho(t) |\vec{e}(t)|^2 dt}{\int_{-T}^T |\vec{e}(t)|^2 dt} \quad (4.73)$$

$\bar{\rho}$  ist hermitesch mit Spur 1, aber i.a. ist  $\det \bar{\rho} \neq 0$ ,

$$\bar{\rho} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \xi_3 & \xi_1 + i\xi_2 \\ \xi_1 - i\xi_2 & 1 - \xi_3 \end{pmatrix} \quad (4.74)$$

mit  $\sum \xi_i^2 < 1$ . Eine solche gemischte Polarisationsmatrix lässt sich immer als Mischung zweier reiner Polarisationsmatrizen ausdrücken. Diese Zerlegung ist jedoch nicht eindeutig.

*Beispiel:* Wir betrachten die Überlagerung zweier monochromatischer ebener Wellen mit derselben Ausbreitungsrichtung, deren Frequenz sich um  $\delta \ll \omega$  unterscheidet. Das elektrische Feld an einem bestimmten Punkt kann dann durch einen zeitabhängigen Amplitudenvektor der Form  $\vec{e}(t) = \vec{e} + \vec{f} e^{i\delta t}$  beschrieben werden. In der zeitlich gemittelten Polarisationsmatrix verschwinden die gemischten Terme, und wir erhalten die konvexe Kombination

$$\bar{\rho} = \alpha \rho_{\vec{e}} + \beta \rho_{\vec{f}} \quad (4.75)$$

mit

$$\alpha = \frac{|\vec{e}|^2}{|\vec{e}|^2 + |\vec{f}|^2} \quad , \quad \beta = \frac{|\vec{f}|^2}{|\vec{e}|^2 + |\vec{f}|^2} \quad (4.76)$$

und den Polarisationsmatrizen  $\rho_{\vec{e}}, \rho_{\vec{f}}$  der beiden monochromatischen Wellen.

#### 4.4 Frequenzverhalten der Suszeptibilität; Kramers-Kronig-Relationen

Die Polarisation  $\vec{P}$  in einem Dielektrikum, die durch ein zeitabhängiges Feld  $\vec{E}(t)$  erzeugt wird, kann für nicht zu große Feldstärken in der Form

$$\vec{P}(t) = \int ds f(t-s) \vec{E}(s) \quad (4.77)$$

angesetzt werden, wobei  $f(t) = 0$  ist, wenn  $t \leq 0$  ist. (Eine eventuelle Ortsabhängigkeit der Suszeptibilität wird vernachlässigt.) Mit der Polarisation verbunden ist der Polarisationsstrom

$$\vec{j} = \dot{\vec{P}} \quad , \quad (4.78)$$

so dass die abgegebene Energiedichte

$$\int dt \vec{j} \cdot \vec{E} = \int dt \int ds \dot{f}(t-s) \vec{E}(s) \cdot \vec{E}(t) \quad (4.79)$$

beträgt. Aus Gesetzen der Thermodynamik folgt, dass die insgesamt abgegebene Energie positiv sein muss. Also erfüllt  $f$  die Positivitätsbedingung

$$\int dt \int ds g(t) \dot{f}(t-s) g(s) \geq 0 \quad (4.80)$$

für alle Funktionen  $g$ . Eine Funktion  $f$  mit dieser Eigenschaft heißt von positivem Typ. Wir betrachten jetzt elektromagnetische Felder mit Frequenz  $\omega \neq 0$ ,

$$(\vec{E}, \vec{B})(t) = \text{Re} (\vec{E}_\omega, \vec{B}_\omega) e^{-i\omega t} \quad . \quad (4.81)$$

Dann gilt für die Polarisation

$$\vec{P}(t) = \text{Re} \vec{P}_\omega e^{-i\omega t} \quad (4.82)$$

mit

$$\vec{P}_\omega = \int ds f(t-s) e^{i\omega(t-s)} \vec{E}_\omega = \chi(\omega) \vec{E}_\omega \quad (4.83)$$

und der frequenzabhängigen Suszeptibilität  $\chi(\omega) = \int dt f(t)e^{i\omega t}$ .  $\chi(\omega)$  ist komplexwertig. Als Fouriertransformierte einer reellen Funktion besitzt  $\chi$  die Eigenschaft

$$\overline{\chi(\omega)} = \chi(-\omega) \quad . \quad (4.84)$$

Die Positivitätsbedingung an  $\dot{f}$  bedeutet, dass  $\omega \text{Im} \chi(\omega) \geq 0$ . Zwischen Real- und Imaginärteil von  $\chi$  gibt es einen interessanten Zusammenhang, nämlich die Kramers-Kronig-Relationen. Diese folgen aus der Tatsache, dass  $f(t) = 0$  ist für  $t < 0$ . Dann ist nämlich die Funktion

$$\chi(\omega) = \int dt e^{i\omega t} f(t) \quad (4.85)$$

analytisch für  $\text{Im}\omega > 0$ . Wir wenden die Cauchysche Integralformel an

$$\chi(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} d\omega' \frac{\chi(\omega')}{(\omega' - \omega)} \quad , \quad (4.86)$$

wobei  $C_R$  den Weg bezeichnet, der auf der reellen Achse von  $-R$  bis  $R$  und dann auf einem Halbkreis in der oberen Halbebene zurück nach  $-R$  verläuft, und  $\omega$  ein Punkt in dem von  $C_R$  umschlossenen Gebiet ist. Im Limes  $R \rightarrow \infty$  geht das Integral über den Halbkreis gegen Null (wir nehmen an, dass  $f$  in der Klasse der Schwartzfunktionen ist) und das Integral über die reelle Achse existiert. Also gilt für  $\varepsilon > 0, \omega \in \mathbb{R}$

$$\chi(\omega + i\varepsilon) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega - i\varepsilon} \quad . \quad (4.87)$$

Im Limes  $\varepsilon \rightarrow 0$  gilt

$$\frac{1}{x - i\varepsilon} \rightarrow P\left(\frac{1}{x}\right) + i\pi\delta(x) \quad (4.88)$$

mit dem Cauchyschen Hauptwert  $P\left(\frac{1}{x}\right)$ ,

$$\int dx P\left(\frac{1}{x}\right) \varphi(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} dx \frac{\varphi(x)}{x} \quad . \quad (4.89)$$

Also gilt

$$\chi(\omega) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' P\left(\frac{1}{\omega' - \omega}\right) \chi(\omega') \quad . \quad (4.90)$$

Mit der Realitätsbedingung (4.84) folgen die Kramers-Kronig-Relationen

$$\text{Re} \chi(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega' P \frac{\omega' \text{Im} \chi(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} \quad , \quad (4.91)$$

$$\operatorname{Im} \chi(\omega) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty d\omega' P \frac{\omega' \operatorname{Re} \chi(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} . \quad (4.92)$$

Der Realteil von  $\chi$  kann daher aus dem Absorptionsverhalten berechnet werden. Wird z.B. nur bei der Frequenz  $\omega_0$  absorbiert,  $\omega \operatorname{Im} \chi(\omega) = K \delta(\omega - \omega_0)$ , so gilt für  $\omega \neq \omega_0$

$$\operatorname{Re} \chi(\omega) = \frac{2K}{\pi} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} . \quad (4.93)$$

(Man überzeuge sich davon, dass auch in diesem Fall der oben beschriebene Grenzwert im komplexen Kurvenintegral durchgeführt werden kann.) Ähnliche Überlegungen gelten für die magnetische Suszeptibilität. Für Frequenzen im optischen Bereich kann die magnetische Suszeptibilität i.a. vernachlässigt werden.

## 4.5 Reflexion und Brechung

In einem Medium mit frequenzabhängiger Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon(\omega) = 1 + \chi(\omega)$  und  $\mu \equiv 1$  nehmen die Maxwellgleichungen für Felder mit der Zeitabhängigkeit  $e^{-i\omega t}$  die Form an ( $\omega \neq 0$ )

$$\operatorname{rot} \vec{E} = i\omega \vec{B} \quad , \quad \operatorname{rot} \vec{B} = -i\omega \varepsilon(\omega) \vec{E} . \quad (4.94)$$

Die Gleichungen  $\operatorname{div} \vec{E} = 0$  und  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$  sind eine Konsequenz. Lösungen findet man durch den Ansatz

$$\vec{E} = \vec{e} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \quad \text{mit} \quad \vec{k} \cdot \vec{k} = \varepsilon(\omega) \omega^2 . \quad (4.95)$$

Hierbei sind

$$\vec{e}, \vec{k} \in \mathbb{C}^3 \quad , \quad \vec{e} \cdot \vec{k} = 0 . \quad (4.96)$$

Wir betrachten jetzt eine ebene Grenzfläche zwischen zwei Medien mit den Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$ . Wir suchen Lösungen der Maxwellgleichungen mit den Grenzbedingungen, dass die Tangentialkomponenten von  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  stetig sind. Wir geben  $\omega$  und die Tangentialkomponente  $\vec{k}_t$  von  $\vec{k}$  vor,  $\vec{k}_t \cdot \vec{n} = 0$ ,  $\vec{k}_t \in \mathbb{R}^3$ ,  $\vec{n}$  Normalenvektor der Grenzfläche (zeigt von 2 nach 1). Dann gilt für die Normalkomponente  $k_\perp$  von  $\vec{k}$ ,  $k_\perp = \vec{k} \cdot \vec{n}$

$$k_\perp^2 = \varepsilon \omega^2 - |\vec{k}_t|^2 . \quad (4.97)$$

Wir wollen annehmen, dass  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}$ . Dann gilt für den Einfallswinkel  $\alpha$ ,

$$\sin^2 \alpha = \frac{|\vec{k}_t|^2}{\vec{k} \cdot \vec{k}} = \frac{|\vec{k}_t|^2}{\varepsilon(\omega) \omega^2} , \quad (4.98)$$

d.h. für die beiden möglichen Richtungen in den Gebieten 1 bzw. 2 ist  $\sin^2 \alpha$  gleich (Reflexionssatz), und für die Richtungen in verschiedene Gebiete gilt das Brechungsgesetz

$$\frac{\sin^2 \alpha_1}{\sin^2 \alpha_2} = \frac{\varepsilon_2(\omega)}{\varepsilon_1(\omega)} = \frac{n_2^2}{n_1^2} \quad , \quad n = \sqrt{\varepsilon} \quad . \quad (4.99)$$

In jedem der beiden Gebiete gibt es vier linear unabhängige Lösungen, entsprechend den beiden Werten für  $k_{\perp}$  und den beiden unabhängigen Polarisationen. Wir betrachten den Fall, dass eine Welle aus dem Gebiet 1 auf die Grenzfläche trifft. Dann gibt es im Gebiet 2 nur die auslaufende Welle, die u.U. auch exponentiell gedämpft sein kann,  $k_{\perp} > 0$  oder  $\text{Im} k_{\perp} > 0$ . Um die Grenzbedingungen zu erfüllen, muss dann im Gebiet 1 auch das andere Vorzeichen von  $k_{\perp}$  auftreten, als reflektierte Welle.

Wie zerlegen unsere einlaufende Welle in den in der Einfallsebene (aufgespannt von  $\vec{k}_t$  und  $\vec{n}$ ) linear polarisierten Anteil (p-polarisiert) und den dazu senkrecht polarisierten Anteil (s-polarisiert). Für den s-polarisierten Anteil gilt ( $\vec{n} \cdot \vec{e} = 0$ )

$$\vec{e}_{ein} + \vec{e}_{refl} = \vec{e}_{trans} \quad (\text{Stetigkeit von } \vec{E}_t) \quad (4.100)$$

$$k_{\perp ein} (\vec{e}_{ein} - \vec{e}_{refl}) = k_{\perp trans} \vec{e}_{trans} \quad (\text{Stetigkeit von } \vec{B}_t) \quad (4.101)$$

und damit

$$(k_{\perp trans} + k_{\perp ein}) \vec{e}_{refl} = -(k_{\perp trans} - k_{\perp ein}) \vec{e}_{ein} \quad . \quad (4.102)$$

Mit  $k_{\perp ein} = n_1 \cos \alpha_1$  ,  $k_{\perp trans} = n_2 \cos \alpha_2$  folgt

$$\vec{e}_{refl} = r_{\perp} \vec{e}_{ein} \quad . \quad (4.103)$$

mit dem Reflexionskoeffizienten

$$r_{\perp} = \frac{n_1 \cos \alpha_1 - n_2 \cos \alpha_2}{n_1 \cos \alpha_1 + n_2 \cos \alpha_2} \quad (4.104)$$

$$= \frac{\sin \alpha_2 \cos \alpha_1 - \sin \alpha_1 \cos \alpha_2}{\sin \alpha_2 \cos \alpha_1 + \sin \alpha_1 \cos \alpha_2} = \frac{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)}{\sin(\alpha_2 + \alpha_1)} \quad . \quad (4.105)$$

Für den p-polarisierten Anteil erhält man entsprechend

$$r_{\parallel} = \frac{n_2 \cos \alpha_1 - n_1 \cos \alpha_2}{n_2 \cos \alpha_1 + n_1 \cos \alpha_2} \quad (4.106)$$

$$= \frac{\sin \alpha_1 \cos \alpha_1 - \sin \alpha_2 \cos \alpha_2}{\sin \alpha_1 \cos \alpha_1 + \sin \alpha_2 \cos \alpha_2} = \frac{\tan(\alpha_1 - \alpha_2)}{\tan(\alpha_1 + \alpha_2)} \quad . \quad (4.107)$$

Ist  $\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$ , so steht der reflektierte Strahl senkrecht auf dem gebrochenen. In diesem Fall verschwindet  $r_{\parallel}$ ; der reflektierte Strahl ist daher s-polarisiert. Der zugehörige Winkel  $\alpha_1$  heißt Brewsterwinkel  $\alpha_B$ ,

$$\tan \alpha_B = \frac{n_2}{n_1} . \quad (4.108)$$

$|r_{\perp}|^2$  und  $|r_{\parallel}|^2$  sind die reflektierten Intensitäten im Zeitmittel, relativ zur einfallenden Intensität.

Ist  $n_2 < n_1$ , so ist  $\alpha_2$  für  $\alpha_1 > \alpha_g = \arcsin \frac{n_2}{n_1}$  imaginär. Dann ist auch  $k_{\perp trans}$  imaginär, und die Welle fällt im Medium 2 exponentiell ab. Es gilt  $|r_{\perp}|^2 = |r_{\parallel}|^2 = 1$  (Totalreflexion).

## 4.6 Beugung

Der Einfluss von Randbedingungen auf die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen ist ziemlich kompliziert. Wir wollen dieses Problem an einem einfachen Beispiel studieren.

Wir betrachten einen ideal leitenden Schirm, der die Halbebene

$$\{(r \cos \phi_0, -r \sin \phi_0, z) \mid r \geq 0, z \in \mathbb{R}\} \quad , \quad (4.109)$$

$0 < \phi_0 < \pi$  ausfüllt, und lassen eine in  $z$ -Richtung linear polarisierte elektromagnetische Welle der Frequenz  $\omega$  aus der Richtung der negativen  $x$ -Achse auf den Schirm treffen. Nach der geometrischen Optik erwarten wir eine durchlaufende Welle in  $x$ -Richtung für  $y \geq 0$ ,  $x \rightarrow \infty$  und eine reflektierte Welle, deren Richtung zur  $x$ -Achse den Winkel  $-2\phi_0$  hat.

Zu lösen ist das folgende Randwertproblem für die  $z$ -Komponente des elektrischen Feldes  $E_z =: u$ ,  $u = u(x, y)$ ,

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u = -k^2 u \quad (4.110)$$

mit den Randbedingungen  $u(x, y) = 0$  auf dem Schirm und  $u(x, y) - e^{ikx} \rightarrow 0$ ,  $x \rightarrow \infty$ ,  $y > 0$ ,  $k = \omega$ .

Wir führen Polarkoordinaten in der  $xy$ -Ebene ein und machen den folgenden Ansatz (für  $-\phi_0 < \phi < 2\pi - \phi_0$ )

$$u(r, \phi) = v(r, \phi) - v(r, -\phi - 2\phi_0) \quad . \quad (4.111)$$

Hierbei ist  $v$  eine Lösung der Gleichung

$$\left( \partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_\phi^2 \right) v = -k^2 v \quad (4.112)$$

mit den Randbedingungen für  $r \rightarrow \infty$   $v(r, \phi) \rightarrow e^{ikr \cos \phi}$ ,  $0 < \phi < 2\pi$ ,  $v(r, \phi) \rightarrow 0$ ,  $-2\pi < \phi < 0$ . Insbesondere hat  $v$  die Periode  $4\pi$  in  $\phi$ .

Um  $v$  zu finden, fassen wir  $\sqrt{r} \exp i\frac{\phi}{2} = \xi + i\eta$  als komplexe Koordinate auf  $\mathbb{R}^2$  auf.  $v$  kann dann als Funktion von  $\xi$  und  $\eta$  angesehen werden.  $v$  erfüllt die Gleichung

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + (\xi^2 + \eta^2)4k^2 \right) v = 0 \quad (4.113)$$

mit der Randbedingung bei unendlich

$$\begin{aligned} f(\xi, \eta) &:= e^{-ik(\xi^2 - \eta^2)} v(\xi, \eta) \rightarrow 1, \quad \eta > 0 \\ f(\xi, \eta) &\rightarrow 0, \quad \eta < 0 \end{aligned} \quad (4.114)$$

Für  $f$  erhalten wir die Gleichung

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + 4ik\left(\xi \frac{\partial}{\partial \xi} - \eta \frac{\partial}{\partial \eta}\right) \right) f = 0 \quad (4.115)$$

Da die Randbedingung für  $f$  nicht von  $\xi$  abhängt, setzen wir  $f$  als Funktion allein von  $\eta$  an. Dann erfüllt  $f$  die gewöhnliche Differentialgleichung

$$f'' - 4ik\eta f' = 0 \quad (4.116)$$

Also ist  $\ln f' = 2ik\eta^2 + \text{const}$ , und

$$f(\eta) = \text{const} \int_{-\infty}^{\eta} d\tau e^{2ik\tau^2} = \text{const}' \int_{-\infty}^{\sqrt{2k}\eta} ds e^{is^2} \quad (4.117)$$

Die Randbedingung bei  $\eta \rightarrow -\infty$  ist dabei bereits erfüllt. Um die Randbedingung bei  $\eta \rightarrow +\infty$  zu erfüllen, berechnen wir das (uneigentliche) Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} ds e^{is^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(1+i) \quad (4.118)$$

Wir setzen

$$F(t) = \frac{1-i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t ds e^{is^2} \quad (4.119)$$

und erhalten als Lösung für  $v$  in den ursprünglichen Polarkoordinaten  $(r, \phi)$

$$v(r, \phi) = e^{ikr \cos \phi} F(\sqrt{2kr} \sin \frac{\phi}{2}) \quad (4.120)$$

Trägt man die Werte von  $F$  in der komplexen Ebene auf, so erhält man die sogenannte Cornusche Spirale.

Wir wollen jetzt die Intensität für große Werte von  $r$  an der Schattengrenze  $\phi = 0$  untersuchen. Die an dem Schirm gespiegelte Welle trägt zum asymptotischen Verhalten in diesem Bereich nichts bei, das Magnetfeld zeigt dort in die negative  $y$ -Richtung und hat denselben Betrag wie das elektrische Feld. Daher erhalten wir für die relative mittlere Intensität

$$I(r, \phi) = |F(\sqrt{2kr} \sin \frac{\phi}{2})|^2 \quad . \quad (4.121)$$

Zur Auswertung dieser Formel berechnen wir  $F(t)$  näherungsweise in den Bereichen  $t \rightarrow -\infty$ ,  $t \approx 0$  und  $t \rightarrow \infty$ .

Im Bereich  $t \approx 0$  entwickeln wir  $F$  bis zur ersten Ordnung nach Taylor und erhalten

$$F(t) \approx \frac{1}{2} + \frac{1-i}{\sqrt{2\pi}} t \quad . \quad (4.122)$$

Im Bereich  $t \rightarrow -\infty$  führen wir im Integral, das  $F$  definiert, zunächst die Variablentransformation  $s^2 = x$  durch und finden

$$F(t) = \frac{1-i}{2\sqrt{2\pi}} \int_{t^2}^{\infty} dx x^{-\frac{1}{2}} e^{ix} \quad . \quad (4.123)$$

Wir integrieren dann den Faktor  $e^{ix}$  partiell und bekommen

$$F(t) = \frac{1+i}{2\sqrt{2\pi}|t|} e^{it^2} - \frac{1+i}{4\sqrt{2\pi}} \int_{t^2}^{\infty} dx x^{-\frac{3}{2}} e^{ix} \quad . \quad (4.124)$$

Das verbleibende Integral kann nach einer weiteren partiellen Integration durch  $\text{const}|t|^{-3}$  abgeschätzt werden, so dass wir den Näherungsausdruck

$$F(t) \approx \frac{1+i}{2\sqrt{2\pi}|t|} e^{it^2} \quad (4.125)$$

erhalten. Im Bereich  $t \rightarrow \infty$  schließlich nutzen wir die Formeln  $F(t) = F(\infty) - F(-t)$  und  $F(\infty) = 1$  aus und finden

$$F(t) \approx 1 - \frac{1+i}{2\sqrt{2\pi}|t|} e^{it^2} \quad . \quad (4.126)$$

Für die relativen Intensitäten ergibt sich

$$I(t) \approx \begin{cases} \frac{1}{4\pi t^2} & , \quad t \ll 0 \\ 1 - \frac{\sin(t^2 - \frac{\pi}{4})}{t\sqrt{\pi}} & , \quad t \gg 0 \\ \frac{1}{4} + \frac{t}{\sqrt{2\pi}} & , \quad t \approx 0 \end{cases} \quad . \quad (4.127)$$

## 5 Spezielle Relativitätstheorie

### 5.1 Galilei- und Lorentztransformationen

Die Gesetze der klassischen Mechanik sind in allen Inertialsystemen gleich. Dies zeigt sich in der Invarianz der Bewegungsgleichungen unter den sogenannten Galilei-Transformationen:

$$(t, \vec{x}) \rightarrow (t', \vec{x}') = (t, \vec{x} + \vec{v}t) \quad . \quad (5.1)$$

Die Maxwellgleichungen sind jedoch unter Galileitransformationen nicht invariant. Betrachten wir z.B. eine ebene Welle

$$u(t, \vec{x}) = e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \quad , \quad \omega = |\vec{k}| \quad . \quad (5.2)$$

Durch Galilei-Transformation erhalten wir

$$u(t', \vec{x}') = e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - (\omega - \vec{k} \cdot \vec{v})t)} \quad , \quad (5.3)$$

also eine Lösung der Wellengleichung mit der gegen  $c + 1$  geänderten Geschwindigkeit

$$c_{\vec{v}} = 1 - \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \cdot \vec{v} \quad . \quad (5.4)$$

Sehr genaue Messungen zeigen aber, dass die Maxwellgleichungen auch in gleichförmig bewegten Bezugssystemen gültig sind. Man sucht deshalb nach Transformationen, die (im  $(t, \vec{x})$ -Raum) Geraden in Geraden überführen,

$$x \rightarrow x' \quad : \quad x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu} \quad (5.5)$$

mit  $\Lambda^{\mu}_{\nu} \in \mathbb{R}$ , und die Maxwellgleichungen invariant lassen. Setzen wir

$$k_0 = \omega \quad , \quad k_i = -(\vec{k})_i \quad , \quad (5.6)$$

dann soll

$$e^{-ik_{\mu}x'^{\mu}} = e^{-ik_{\mu}\Lambda^{\mu}_{\nu}x^{\nu}} \quad (5.7)$$

eine Lösung der Wellengleichung sein, d.h.

$$k_{\mu}\Lambda^{\mu}_{\rho}k_{\nu}\Lambda^{\nu}_{\sigma}g^{\rho\sigma} = 0 \quad (5.8)$$

für  $k_{\mu}k_{\nu}g^{\mu\nu} = 0$  ( $= \omega^2 - |\vec{k}|^2$ ). Betrachten wir den transformierten Tensor

$$g'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}_{\rho}\Lambda^{\nu}_{\sigma}g^{\rho\sigma} \quad . \quad (5.9)$$

Nach (5.8) soll für *alle*  $\vec{k} \in \mathbb{R}^3$  gelten

$$|\vec{k}|^2 g'^{00} + 2(\vec{k})_i |\vec{k}| g'^{0i} + (\vec{k})_i (\vec{k})_j g'^{ij} = 0 \quad . \quad (5.10)$$

Subtrahiert man von dieser Gleichung die entsprechende für  $-\vec{k}$ , so erhält man  $g'^{0i} = 0$ , addiert man sie, so ergibt sich

$$g'^{ii} = -g'^{00} \quad . \quad (5.11)$$

Es folgt

$$g'^{\mu\nu} = \lambda g^{\mu\nu} \quad \text{mit} \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad .$$

Transformationen  $x \rightarrow x' = \Lambda x$  ,  $(\Lambda x)^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$  , mit  $\lambda = 1$ , d.h.

$$\Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma g^{\rho\sigma} = g^{\mu\nu} \quad (5.12)$$

nennt man Lorentztransformationen. Offenbar gehen skalare Lösungen der Wellengleichung unter Lorentztransformationen wieder in Lösungen über.

Für tensorielle Größen wie den Feldstärketensor  $F_{\mu\nu}$  und den Strom  $j_\mu$  setzt man

$$F'_{\mu\nu}(x) = \Lambda^\rho{}_\mu \Lambda^\sigma{}_\nu F_{\rho\sigma}(\Lambda x) \quad (5.13)$$

$$j'_\mu(x) = \Lambda^\rho{}_\mu j_\rho(\Lambda x) \quad . \quad (5.14)$$

Es folgt

$$\begin{aligned} & \partial_\rho F'_{\mu\nu} + \partial_\mu F'_{\nu\rho} + \partial_\nu F'_{\rho\mu} \\ &= \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu \partial_\gamma F_{\alpha\beta} \Lambda^\gamma{}_\rho + \Lambda^\alpha{}_\nu \Lambda^\beta{}_\rho \partial_\gamma F_{\alpha\beta} \Lambda^\gamma{}_\mu + \Lambda^\alpha{}_\rho \Lambda^\beta{}_\mu \partial_\gamma F_{\alpha\beta} \Lambda^\gamma{}_\nu \\ &= \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu \partial_\gamma F_{\alpha\beta} \Lambda^\gamma{}_\rho + \Lambda^\beta{}_\nu \Lambda^\gamma{}_\rho \partial_\alpha F_{\beta\gamma} \Lambda^\alpha{}_\mu + \Lambda^\gamma{}_\rho \Lambda^\alpha{}_\mu \partial_\beta F_{\gamma\alpha} \Lambda^\beta{}_\nu \\ &= \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu \Lambda^\gamma{}_\rho (\partial_\gamma F_{\alpha\beta} + \partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha}) = 0 \quad , \end{aligned}$$

d.h.  $F'$  löst die erste Gruppe der Maxwellgleichungen, falls  $F$  es tut und

$$\begin{aligned} \partial^\mu F'_{\mu\nu} - j'_\nu &= \Lambda^\rho{}_\mu \Lambda^\sigma{}_\nu g^{\mu\lambda} \partial_\alpha F_{\rho\sigma} \Lambda^\alpha{}_\lambda - \Lambda^\sigma{}_\nu j_\sigma \\ &= \Lambda^\sigma{}_\nu g^{\rho\alpha} \partial_\alpha F_{\rho\sigma} - \Lambda^\sigma{}_\nu j_\sigma \\ &= \Lambda^\sigma{}_\nu (\partial^\rho F_{\rho\sigma} - j_\sigma) \quad , \end{aligned}$$

d.h.  $F', j'$  löst die 2. Gruppe der Maxwellgleichungen, wenn  $F, j$  es tut.

Betrachten wir nun die Menge der Lorentztransformationen etwas genauer. Sie kann identifiziert werden mit der Menge  $L$  der  $4 \times 4$ -Matrixen  $\Lambda$ , die die Bedingung

$$\Lambda g \Lambda^T = g \quad , \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

erfüllen.  $L$  ist eine Gruppe. Typische Elemente von  $L$  sind die Rotationen:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \mathbf{R} & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{1}_3 \quad (5.16)$$

sowie die Elemente

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh \beta & \sinh \beta & 0 & 0 \\ \sinh \beta & \cosh \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta \in \mathbb{R} \quad (5.17)$$

Die letzteren erfüllen die Bedingung (5.15) wegen  $\cosh^2 \beta - \sinh^2 \beta = 1$  und können als Rotationen mit imaginärem Winkel aufgefasst werden.

Zu ihrer Interpretation betrachten wir das Bild der Geraden  $x^i = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$  unter  $\Lambda$

$$\Lambda \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \beta t \\ \sinh \beta t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (5.18)$$

Diese Gerade beschreibt also eine Bewegung mit der Geschwindigkeit  $\vec{v} = \tanh \beta \vec{e}_1$ . Wegen  $\cosh \beta = 1/\sqrt{1 - \tanh^2 \beta}$  gilt (mit  $v = \tanh \beta$ )

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} & 0 & 0 \\ \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

Ein Punkt  $(t, \vec{x})$  der Raumzeit transformiert sich unter  $\Lambda$  in der folgenden Weise

$$(t', \vec{x}') = \left( \frac{t + vx^1}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{x^1 + vt}{\sqrt{1-v^2}}, x^2, x^3 \right) \quad (5.20)$$

$$= \left( \frac{t + \vec{v} \cdot \vec{x}}{\sqrt{1-|\vec{v}|^2}}, \frac{\vec{x}_{\parallel} + \vec{v}t}{\sqrt{1-|\vec{v}|^2}}, \vec{x}_{\perp} \right) \quad (5.21)$$

mit  $\vec{x}_{\parallel} = |\vec{v}|^{-2}(\vec{x} \cdot \vec{v})\vec{v}$  und  $\vec{x}_{\perp} = \vec{x} - \vec{x}_{\parallel}$ . Gleichung (5.21) definiert für alle Geschwindigkeiten  $\vec{v}$  mit  $|\vec{v}| < 1$  eine Lorentztransformation  $\Lambda(\vec{v})$ . Sind die Geschwindigkeiten  $|\vec{v}|$  und  $|\vec{x}|/t$  klein gegen  $c = 1$ , so erhält man ungefähr

die Galilei-Transformation (5.1).  $\Lambda(\vec{v})$  kann daher als Verallgemeinerung der Galilei-Transformation aufgefasst werden. Man bezeichnet die Lorentztransformationen (5.21) als eigentliche Lorentztransformationen, Lorentzbeschleunigungen oder Lorentz-Boosts.

Bemerkenswert ist, dass auch die Zeit transformiert wird. Dies bedeutet, dass es keine absolute Zeit gibt. Die Gleichzeitigkeit zweier Ereignisse kann wegen der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichts nicht eindeutig festgestellt werden.

Offenbar kann jede Gerade  $\vec{x} = \vec{v}t$ ,  $|\vec{v}| < 1$  durch eine Lorentztransformation in die Gerade  $\vec{x}' = 0$  transformiert werden. Der Punkt  $(t, \vec{v}t)$  wird dabei auf den Punkt  $(t', 0)$  mit  $t' = t\sqrt{1 - |\vec{v}|^2}$  transformiert. Man nennt  $t'$  die Eigenzeit eines sich mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  bewegenden Beobachters.

Betrachten wir einen Beobachter, der sich eine Zeit  $t$  lang mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  von 0 entfernt und dann mit der Geschwindigkeit  $-\vec{v}$  zurückkehrt. Während für den bei 0 ruhenden Beobachter die Zeit  $2t$  vergangen ist, ist für den bewegten Beobachter die Zeit  $2t' = 2t\sqrt{1 - |\vec{v}|^2}$  vergangen (sogenanntes Zwillingsparadoxon).

Beschreibt man die Bahn eines Teilchens durch eine Bahnkurve  $\vec{x}(t)$  mit  $|\dot{\vec{x}}(t)| < 1$ , so definiert man

$$\tau = \int \sqrt{1 - |\dot{\vec{x}}(t)|^2} dt = \int (g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu)^{1/2} dt \quad (5.22)$$

als die Eigenzeit des Teilchens. Die Bahnen mit konstanter Geschwindigkeit sind die Bahnen längster Eigenzeit zwischen 2 Punkten: Nach der Variationsrechnung erfüllt die Bahn längster Eigenzeit die Gleichung

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \sqrt{1 - \sum \dot{x}_j^2} = \frac{d}{dt} \frac{-\dot{x}_i}{\sqrt{1 - \sum_j \dot{x}_j^2}} \quad , \quad (5.23)$$

d.h.  $\dot{\vec{x}} = \text{const.}$

Betrachten wir nun Bahnen  $\vec{x}(t) = \vec{v}t$  mit  $|\vec{v}| > 1$ . Dann gibt es eine Lorentztransformation mit

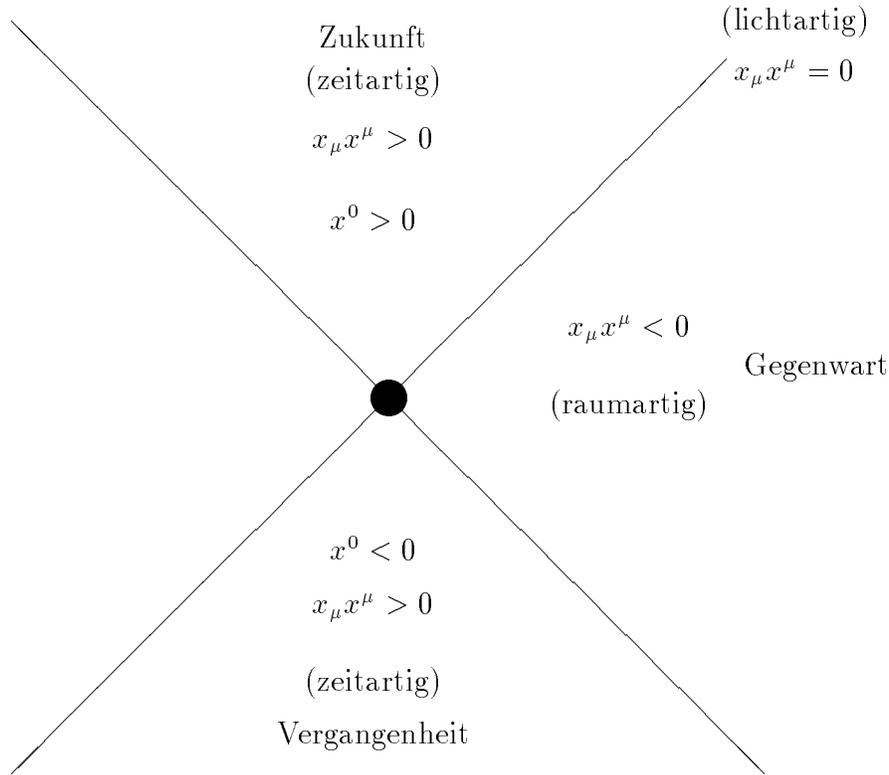
$$\Lambda(t, \vec{v}t) = \left( 0, t\vec{v} \sqrt{1 - \frac{1}{|\vec{v}|^2}} \right) \quad , \quad (5.24)$$

d.h. vom System  $\Lambda$  aus gesehen ist die Geschwindigkeit  $\infty$ . Auf so einer Bahn macht es keinen Sinn, eine Zeitrichtung auszuzeichnen. Wir können auch Bezugssysteme finden, in denen die Bahn rückwärts in der Zeit läuft. Durch Kombination solcher Bahnen könnte man die eigene Vergangenheit beeinflussen, was Probleme mit der Kausalität bringt. Man zieht daraus den

Schluss, dass solche Bahnen nicht zur Signalübertragung dienen können.

**Postulat:** Die Lichtgeschwindigkeit ist die größtmögliche Geschwindigkeit der Signalübertragung.

Man erhält das folgende Bild



Im Fall  $x_\mu x^\mu > 0$  ist  $\tau = \sqrt{x_\mu x^\mu}$  die Zeitdifferenz zwischen  $0$  und  $x$  für einen Beobachter, für den sich  $0$  und  $x$  am gleichen Ort befinden (seine Weltlinie ist  $tx$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ).

Im Fall  $x_\mu x^\mu < 0$  ist  $r = \sqrt{-x_\mu x^\mu}$  der Abstand zwischen  $0$  und  $x$  für einen Beobachter, für den  $0$  und  $x$  gleichzeitig stattfinden. Hierbei ist Gleichzeitigkeit nach der folgenden Uhrensynchronisationsvorschrift definiert:

Sei  $ty$ ,  $t \in \mathbb{R}$  die Weltlinie eines gleichförmig bewegten Beobachters ( $y_\mu y^\mu > 0$ ,  $y_0 = 1$ ). Der Raumpunkt  $x = (x^0, \vec{x})$  wird als gleichzeitig angesehen, wenn ein bei  $-y$  abgesandtes Lichtsignal bei  $x$  reflektiert und bei  $y$  wieder eintrifft.  $x$  erfüllt also die Gleichungen

$$(x^\mu - y^\mu)(x_\mu - y_\mu) = 0 \quad (5.25)$$

$$(x^\mu + y^\mu)(x_\mu + y_\mu) = 0 \quad (5.26)$$

Durch Subtraktion ergibt sich

$$x^\mu y_\mu = 0 = x^0 - \vec{x} \cdot \vec{y} \quad (5.27)$$

und durch Addition

$$x^\mu x_\mu + y^\mu y_\mu = 0 \quad . \quad (5.28)$$

Also transformiert die Lorentztransformation, die  $y$  auf  $(\sqrt{y^\mu y_\mu}, 0)$  transformiert,  $x$  auf einen Punkt in der Zeit-0-Hyperebene, dessen Abstand vom Ursprung  $r = +\sqrt{y^\mu y_\mu} = \sqrt{-x^\mu x_\mu}$  ist. Dies ist gerade die Hälfte der Eigenzeit zwischen Absendung und Empfang des Signals.

Zum Abschluss betrachten wir noch das relativistische Additionstheorem für Geschwindigkeiten. In einem System 1, das sich mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}_1$  gegenüber einem fest gewählten System 0 bewegt, misst man ein Teilchen mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}_2$ . Seine Bahnkurve ist also  $x^{(1)}(t) = t(1, \vec{v}_2)$  im System 1. Im System 0 ergibt sich die Bahnkurve

$$x^{(0)}(t) = t\Lambda(\vec{v}_1)(1, \vec{v}_2) = \frac{t}{\sqrt{1 - |\vec{v}_1|^2}} \left( 1 + \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2, \vec{v}_1 + \vec{v}_{2\parallel} + \vec{v}_{2\perp} \sqrt{1 - |\vec{v}_1|^2} \right) \quad . \quad (5.29)$$

Die Geschwindigkeit im System 0 beträgt also

$$\vec{v}_0 = \frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_{2\parallel} + \vec{v}_{2\perp} \sqrt{1 - |\vec{v}_1|^2}}{1 + \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2} \quad . \quad (5.30)$$

## 5.2 Relativistische Mechanik

Die Gesetze der Mechanik müssen so modifiziert werden, dass sie mit der Forderung der Lorentzinvarianz verträglich sind. Dabei soll der mit Hilfe des Energieimpulstensors des elektromagnetischen Feldes formulierte Energie-Impuls-Satz gültig bleiben.

Der mit der Bewegung eines Teilchen der Ladung  $e$  auf der Bahn  $\vec{x}(t)$  verbundene Viererstrom  $j^\mu = (\rho, \vec{j})$  ist

$$\rho(t, \vec{x}) = e\delta^3(\vec{x} - \vec{x}(t)) \quad (5.31)$$

$$\vec{j}(t, \vec{x}) = e\dot{\vec{x}}\delta^3(\vec{x} - \vec{x}(t)) \quad . \quad (5.32)$$

Die von einem elektromagnetischen Feld an das Teilchen abgegebene Leistung und ausgeübte Kraft ist  $(p_0 = E, p_i = -(\vec{p})_i)$

$$\frac{dp_\mu}{dt} = eF_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{dt} \quad , \quad x^0 = t, \quad x^i = (\vec{x})_i \quad . \quad (5.33)$$

Parametrisieren wir die Bahn des Teilchens durch die Eigenzeit, so ergibt sich die lorentzinvariante Gleichung

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = eF_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \quad . \quad (5.34)$$

Es bleibt der Zusammenhang zwischen  $p_\mu$  und der auf die Eigenzeit bezogene Vierergeschwindigkeit  $u_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau}$  zu finden. Es gilt

$$u^0 = \frac{1}{\sqrt{1 - |\dot{\vec{x}}|^2}}, \quad u^i = \frac{\dot{x}^i}{\sqrt{1 - |\dot{\vec{x}}|^2}}, \quad i = 1, 2, 3 \quad . \quad (5.35)$$

Ist  $p_\mu$  eine Funktion von  $u$  mit

$$p_\mu(u) = \Lambda^\nu{}_\mu p_\nu(\Lambda u) \quad , \quad (\Lambda u)^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu u^\nu \quad , \quad (5.36)$$

so ist  $p_\mu$  invariant unter allen Drehungen im System, in dem  $u = (1, 0, 0, 0)$  ist. Daher ist  $p_\mu = mg_{\mu\nu}u^\nu$  mit einer Konstanten  $m$ , d.h.

$$p^i = \frac{m\dot{x}^i}{\sqrt{1 - |\dot{\vec{x}}|^2}} \quad \text{und} \quad p^0 = \frac{m}{\sqrt{1 - |\dot{\vec{x}}|^2}} \quad .$$

Die relativistische Verallgemeinerung der Beziehung zwischen Impuls und Geschwindigkeit ist also

$$\vec{p} = \frac{m\dot{\vec{x}}}{\sqrt{1 - |\dot{\vec{x}}|^2}} \quad . \quad (5.37)$$

Diese Beziehung ergibt sich auch, wenn man  $L = -m\sqrt{1 - |\dot{\vec{x}}|^2}$  als Lagrangefunktion des kräftefreien Teilchens verwendet. Das Prinzip der kleinsten Wirkung wird dann zum Prinzip der längsten Eigenzeit. Weiter findet man, mit der üblichen Formel für die Energie

$$E = \vec{p} \cdot \dot{\vec{x}} - L = p^0 \quad . \quad (5.38)$$

Die kinetische Energie ist

$$p_0 - m = m \left( \frac{1}{\sqrt{1 - |\dot{\vec{x}}|^2}} - 1 \right) = \frac{m}{2} |\dot{\vec{x}}|^2 + O(|\dot{\vec{x}}|^4) \quad , \quad (5.39)$$

geht also für kleine Geschwindigkeiten in den nichtrelativistischen Ausdruck über.

Die Bewegungsgleichung lautet also

$$m \frac{du_\mu}{d\tau} = e F_{\mu\nu} u^\nu \quad . \quad (5.40)$$

Auf der rechten Seite kann man auch andere lorentzinvariante Kräfte schreiben,

$$m \frac{du_\mu}{d\tau} = K_\mu \quad . \quad (5.41)$$

Da aus  $u_\mu u^\mu = 1$  durch Differentiation  $u^\mu \frac{d}{dt} u_\mu = 0$  folgt, muss die lorentzkovariante Kraft die Bedingung

$$u^\mu K_\mu = 0 \quad (5.42)$$

erfüllen. Dies ist nichts anderes als die Bedingung, dass die Leistung gleich Kraft mal Geschwindigkeit ist.

Als Beispiel betrachten wir die Bewegung eines geladenen Teilchens in einem konstanten elektrischen Feld in 1-Richtung. Wir erhalten die Bewegungsgleichung

$$\frac{du^0}{d\tau} = \frac{e}{m} E u^1 \quad (5.43)$$

$$\frac{du^1}{d\tau} = \frac{e}{m} E u^0 \quad , \quad \frac{du^i}{d\tau} = 0 \quad , \quad i = 2, 3 \quad . \quad (5.44)$$

Mit der Abkürzung  $\frac{e}{m} E = a$  schreibt sich die Lösung als

$$\begin{aligned} u^0(\tau) &= u^0(0) \cosh(a\tau) + u^1(0) \sinh(a\tau) \\ u^1(\tau) &= u^0(0) \sinh(a\tau) + u^1(0) \cosh(a\tau) \\ u^2(\tau) &= \text{const.} \quad , \quad u^3(\tau) = \text{const.} \quad . \end{aligned} \quad (5.45)$$

$$x^0(\tau) = x^0(0) + u^0(0) \frac{\sinh(a\tau)}{a} + u^1(0) \frac{\cosh(a\tau) - 1}{a} \quad (5.46)$$

$$x^1(\tau) = x^1(0) + u^0(0) \frac{\cosh(a\tau) - 1}{a} + u^1(0) \frac{\sinh(a\tau)}{a} \quad (5.47)$$

$$x^2(\tau) = x^2(0) + u^2(0)\tau \quad (5.48)$$

$$x^3(\tau) = x^3(0) + u^3(0)\tau \quad . \quad (5.49)$$

Die Beschleunigung, vom mitbewegten Beobachter aus gesehen, ist konstant ( $= a$ ). Die Geschwindigkeit, vom Ruhssystem aus gesehen, ist  $v^1 = \frac{d}{dt} x^1 = \frac{dx^1}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{u^1}{u^0}$ . Für den Fall  $x^0(0) = 0$  und  $u^1(0) = 0$ ,  $u^0(0) = 1$  ergibt sich

$$v^1 = \tanh(a\tau) = \frac{at}{\sqrt{1 + a^2 t^2}} \quad , \quad (5.50)$$

die Geschwindigkeit konvergiert also gegen die Lichtgeschwindigkeit  $c = 1$ . Die Beschleunigung, vom Ruhssystem aus gesehen, ist

$$a^1(t) = \frac{d}{dt} \frac{at}{\sqrt{1+a^2t^2}} = \frac{a}{(1+a^2t^2)^{3/2}} . \quad (5.51)$$

### 5.3 Strahlung beschleunigter Ladungen

Sei  $\vec{z}(t)$  die Bahn eines Teilchens der Ladung  $e$ . Der zugehörige Viererstrom ist

$$j^\mu(t, \vec{x}) = e \frac{dz^\mu(t)}{dt} \delta^3(\vec{x} - \vec{z}(t)) \quad , \quad z^0(t) = t, \quad z^i(t) = (\vec{z}(t))_i \quad (5.52)$$

$$= e \int d\tau \frac{dz^\mu(\tau)}{d\tau} \underbrace{\delta^3(\vec{x} - \vec{z}(\tau)) \delta(t - z^0(\tau))}_{\delta^4(x - z(\tau))} \quad (5.53)$$

mit einer beliebigen Parametrisierung von  $z^\mu(\tau)$  mit  $\frac{dz^0(\tau)}{d\tau} > 0$ . Im folgenden sei  $\tau$  die Eigenzeit. Für das retardierte Potential in der Lorentzzeichnung ergibt sich

$$A^\mu(x) = \frac{e}{4\pi} \int_{z^0(\tau) < x^0} d\tau \frac{\delta(x^0 - z^0(\tau) - |\vec{x} - \vec{z}(\tau)|)}{|x^0 - z^0(\tau)|} \frac{dz^\mu}{d\tau} . \quad (5.54)$$

$A^\mu(x)$  hängt also nur von  $z$  und  $\frac{dz}{d\tau}$  an der Stelle  $\tau_{ret}$  ab, wobei  $\tau_{ret}$  durch die Bedingungen

$$z^0(\tau_{ret}) < x^0 \quad , \quad x^0 - z^0(\tau_{ret}) = |\vec{x} - \vec{z}(\tau_{ret})| \quad (5.55)$$

bestimmt ist. Wir wählen ein Lorentzsystem, in dem  $\dot{\vec{z}}(\tau_{ret}) = 0$  gilt. Dann folgt

$$A^\mu(x) = \frac{e \delta^\mu_0}{4\pi(x^0 - z^0(\tau_{ret}))} = \frac{e \frac{dz^\mu}{d\tau}(\tau_{ret})}{4\pi \frac{dz^\nu}{d\tau}(\tau_{ret})(x_\nu - z_\nu(\tau_{ret}))} = \frac{eu^\mu(\tau_{ret})}{4\pi u^\nu(\tau_{ret})(x_\nu - z_\nu(\tau_{ret}))} \quad (5.56)$$

Der letzte Ausdruck ist lorentzinvariant und gilt daher in allen Bezugssystemen. Die Potentiale  $A^\mu$  nennt man die Liénard-Wiechertschen Potentiale.

$A^\mu$  hängt von  $x$  sowohl explizit und als auch implizit über  $\tau_{ret}$  ab. Um die Ableitungen von  $\tau_{ret}$  nach  $x^\mu$  zu berechnen, differenzieren wir die Bedingung

$$(x^\mu - z^\mu(\tau_{ret}))(x_\mu - z_\mu(\tau_{ret})) = 0 \quad (5.57)$$

nach  $x^\nu$ . Wir erhalten

$$0 = (x_\nu - z_\nu(\tau_{ret})) - (x^\mu - z^\mu(\tau_{ret}))u_\mu \partial_\nu \tau_{ret} \quad (5.58)$$

und damit

$$\partial_\nu \tau_{ret} = \frac{x_\nu - z_\nu(\tau_{ret})}{U} = \frac{y_\nu}{U} \quad , \quad \text{wo} \quad U = (x^\mu - z^\mu(\tau_{ret}))u_\mu \quad . \quad (5.59)$$

Weiter ist

$$\partial_\mu U = u_\mu + \left( \frac{d}{d\tau} U \right) \partial_\mu \tau_{ret} \quad . \quad (5.60)$$

Also gilt mit  $y^\mu = x^\mu - z^\mu(\tau)$

$$\begin{aligned} \partial_\mu A_\nu &= \frac{e}{4\pi U^2} \left[ \frac{du_\nu}{d\tau} (\partial_\mu \tau_{ret}) U - u_\nu \partial_\mu U \right] \\ &= \frac{e}{4\pi U^2} \left[ \left( \frac{du_\nu}{d\tau} U - u_\nu \frac{d}{d\tau} U \right) \partial_\mu \tau_{ret} - u_\nu u_\mu \right] \\ &= \frac{e}{4\pi U} \left[ \frac{du_\nu}{d\tau} y_\mu U^{-1} - u_\nu y_\mu U^{-2} \frac{d}{d\tau} U + u_\nu U^{-1} \frac{d}{d\tau} y_\mu \right] \\ &= \frac{e}{4\pi U} \frac{d}{d\tau} \frac{u_\nu y_\mu}{U} \end{aligned} \quad (5.61)$$

und

$$F_{\mu\nu} = \frac{e}{4\pi U} \frac{d}{d\tau} \frac{u_\nu y_\mu - u_\mu y_\nu}{U} = \frac{e}{4\pi \dot{z}_\alpha y^\alpha} \frac{d}{dt} \frac{\dot{z}_\nu y_\mu - \dot{z}_\mu y_\nu}{\dot{z}_\beta y^\beta} \quad , \quad (5.62)$$

wobei  $t$  eine beliebige Parametrisierung der Bahn des Teilchens ist. Unter Beachtung von

$$\frac{d}{dt} y^\mu = \frac{d}{dt} (x^\mu - z^\mu(t)) = -\dot{z}^\mu \quad (5.63)$$

berechnet man

$$F_{\mu\nu} = \frac{e}{4\pi (\dot{z}^\alpha y_\alpha)^3} \left[ \ddot{z}_\nu y_\mu \dot{z}^\beta y_\beta - \dot{z}_\nu y_\mu \ddot{z}^\beta y_\beta + \dot{z}_\nu y_\mu \dot{z}^\beta \dot{z}_\beta - (\nu \leftrightarrow \mu) \right] \quad . \quad (5.64)$$

Um zu expliziteren Ausdrücken zu gelangen, parametrisieren wir den Weg durch die Zeitkoordinate  $t$  für einen ruhenden Beobachter

$$(z^\mu(t)) = (t, \vec{z}(t)) \quad (5.65)$$

und schreiben

$$(y^\mu(t)) = R(1, \vec{n}) \quad . \quad (5.66)$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} \vec{E} = (F^{10}, F^{20}, F^{30}) &= \frac{e}{4\pi R(1 - \vec{n} \cdot \dot{\vec{z}})^3} \left[ -\ddot{\vec{z}}(1 - \vec{n} \cdot \dot{\vec{z}}) + (\vec{n} - \dot{\vec{z}})(\ddot{\vec{z}} \cdot \vec{n}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1 - |\dot{\vec{z}}|^2)(\vec{n} - \dot{\vec{z}})}{R} \right] \end{aligned} \quad (5.67)$$

und

$$\vec{B} = (F^{32}, F^{13}, F^{21}) = \frac{e}{4\pi R(1 - \vec{n} \cdot \dot{\vec{z}})^3} \left[ (\ddot{\vec{z}} \times \vec{n})(1 - \vec{n} \cdot \dot{\vec{z}}) + (\dot{\vec{z}} \times \vec{n})(\ddot{\vec{z}} \cdot \vec{n}) + \frac{(\dot{\vec{z}} \times \vec{n})(1 - |\dot{\vec{z}}|^2)}{R} \right] = \vec{n} \times \vec{E} \quad . \quad (5.68)$$

$\vec{B}$  steht also immer senkrecht zu  $\vec{E}$ . Ist  $\dot{\vec{z}} = 0$ , so ergibt sich der einfachere Ausdruck

$$\vec{E} = \frac{e}{4\pi R} \underbrace{\left( -\ddot{\vec{z}} + (\vec{n} \cdot \ddot{\vec{z}})\vec{n} \right)}_{\vec{n} \times (\vec{n} \times \ddot{\vec{z}})} + \frac{e}{4\pi R^2} \vec{n} \quad , \quad (5.69)$$

$$\vec{B} = \frac{e}{4\pi R} \ddot{\vec{z}} \times \vec{n} \quad . \quad (5.70)$$

Der Poyntingvektor ergibt sich in diesem Fall zu

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \vec{E} \times \vec{B} = \frac{e^2}{16\pi^2 R^3} \vec{n} \times (\ddot{\vec{z}} \times \vec{n}) + \frac{e^2}{16\pi^2 R^2} \left( (\vec{n} \cdot \ddot{\vec{z}})\vec{n} - \ddot{\vec{z}} \right) \times (\ddot{\vec{z}} \times \vec{n}) \\ &= \frac{e^2}{16\pi^2 R^2} \left( \frac{\ddot{\vec{z}} - (\vec{n} \cdot \ddot{\vec{z}})\vec{n}}{R} + |\vec{n} \times \ddot{\vec{z}}|^2 \vec{n} \right) \quad . \end{aligned} \quad (5.71)$$

Die Integration über eine Kugeloberfläche mit dem Radius  $R$  zur Zeit  $R$  ergibt den Energiefluss

$$-\frac{d}{dt} P_0 = \frac{e^2}{16\pi^2} 2\pi \underbrace{\int_{-1}^1 d(\cos \vartheta) \sin^2 \vartheta}_{4/3} |\ddot{\vec{z}}|^2 = \frac{e^2}{6\pi} |\ddot{\vec{z}}|^2 \quad . \quad (5.72)$$

Dies nennt man die Larmorformel.

Man überzeugt sich leicht davon, dass der Impulsfluss (wie aus Symmetriegründen zu erwarten) verschwindet. Weiter stimmt  $t$  für  $\dot{\vec{z}} = 0$  bis zur zweiten Ordnung mit der Eigenzeit  $\tau$  überein:

$$\frac{dt}{d\tau} = (1 - |\dot{\vec{z}}|^2)^{-1/2} \quad , \quad \frac{d^2 t}{d\tau^2} = \dot{\vec{z}} \cdot \ddot{\vec{z}} (1 - |\dot{\vec{z}}|^2)^{-2} \quad . \quad (5.73)$$

Daher ist

$$\frac{d^2 z^\mu}{d\tau^2} = \frac{d^2 z^\mu}{dt^2} \quad .$$

Also gilt

$$\frac{d}{d\tau} P^\mu = \frac{e^2}{6\pi} \frac{dz_\mu}{d\tau} \frac{d^2 z_\alpha}{d\tau^2} \frac{d^2 z^\alpha}{d\tau^2} \quad (5.74)$$

(kovariante Larmorformel). Da dieser Ausdruck lorentzinvariant ist, gilt er auch für  $\dot{\vec{z}} \neq 0$ . Die Leistung ergibt sich dann zu

$$-\frac{d}{dt}P_0 = -\frac{d}{d\tau}P_0\sqrt{1-|\dot{\vec{z}}|^2} = -\frac{e^2}{6\pi}\frac{d^2z_\alpha}{d\tau^2}\frac{d^2z^\alpha}{d\tau^2} \quad (5.75)$$

Mit

$$\frac{dz^\mu}{d\tau} = \gamma(1, \dot{\vec{z}}) \quad , \quad \frac{d^2z^\mu}{d\tau^2} = \gamma^2(0, \ddot{\vec{z}}) + \gamma^4\dot{\vec{z}} \cdot \ddot{\vec{z}}(1, \dot{\vec{z}}) \quad , \quad \gamma = \left(1 - |\dot{\vec{z}}|^2\right)^{-1/2} \quad (5.76)$$

erhält man

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt}P_0 &= -\frac{e^2}{6\pi}\gamma^6 \left( (|\dot{\vec{z}}|^2 - 1)|\ddot{\vec{z}}|^2 - 2(\dot{\vec{z}} \cdot \ddot{\vec{z}})^2 + (\dot{\vec{z}} \cdot \dot{\vec{z}})^2 \right) \\ &= \frac{e^2}{6\pi}\gamma^6 \left( |\ddot{\vec{z}}|^2 - |\dot{\vec{z}} \times \ddot{\vec{z}}|^2 \right) \end{aligned} \quad (5.77)$$

(relativistische Larmorformel).

## 5.4 Strahlungsrückwirkung

Die Maxwellgleichungen stellen zusammen mit den Bewegungsgleichungen der relativistischen Mechanik ein gekoppeltes System von Differentialgleichungen dar. Da jedoch die mit der Bewegung geladener Massenpunkte verbundenen Ströme singular sind, ist das elektromagnetische Feld am Ort der Teilchen nicht definiert. Im Fall der relativistischen Mechanik hatte man bei singularen Kraftfeldern die Selbstrückwirkung weggelassen. In der Elektrodynamik hat das Feld aber eine eigenständige Bedeutung, die sich z.B. in der Ausstrahlung elektromagnetischer Wellen zeigt. Ein beschleunigtes Teilchen strahlt Energie ab; diese muss in irgendeiner Form aufgebracht werden.

Die Schwierigkeiten liegen letztlich daran, dass die elektrostatische Energie des Feldes einer Punktladung  $\infty$  ist. Da diese Energie zur Masse des Teilchens beiträgt, die Gesamtmasse aber endlich ist, müsste man dem Teilchen ohne Feld eine unendlich große negative Masse zuordnen. Die damit verbundenen Unbestimmtheiten verhindern eine konsistente Theorie der Wechselwirkung zwischen elektromagnetischem Feld und geladenen Teilchen.

Verlässt man das Konzept des Punktteilchens, so muss man zunächst feststellen, dass starre Körper eine Idealisierung sind, die dem Postulat der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeiten von Wirkungen widerspricht. Man muss daher zu einer echten Kontinuumsmechanik übergehen, bei der auch die geladene Materie durch Felder beschrieben wird. Will man darüber hinaus die diskrete Struktur der Materie berücksichtigen, so wird man auf die

Quantenfeldtheorie geführt. Die dort auftretenden Divergenzen sind zwar nicht so schlimm wie bei einem Punktteilchen in der klassischen Elektrodynamik, jedoch ist die mathematisch saubere Konstruktion der Theorie noch immer nicht gelungen.

Kehren wir zurück zum Problem der Strahlungsrückwirkung. Sei  $z(\tau)$  die mit der Eigenzeit  $\tau$  parametrisierte Bahnkurve des Teilchens. Nach der kovarianten Larmorformel (5.74) erwarten wir im Mittel eine Kraft

$$\overline{K}_\mu = \frac{e^2}{6\pi} \frac{dz_\mu}{d\tau} \frac{d^2 z^\alpha}{d\tau^2} \frac{d^2 z_\alpha}{d\tau^2} . \quad (5.78)$$

Diese verletzt allerdings die Bedingung (5.42) für eine relativistische Kraft und kann daher nicht in die Bewegungsgleichung eingesetzt werden. Es gilt

$$\frac{dz^\mu}{d\tau} \overline{K}_\mu = \frac{e^2}{6\pi} \frac{d^2 z^\alpha}{d\tau^2} \frac{d^2 z_\alpha}{d\tau^2} = -\frac{e^2}{6\pi} \frac{dz^\alpha}{d\tau} \frac{d^3 z_\alpha}{d\tau^3} \quad (5.79)$$

Daher erfüllt

$$K_\mu = \frac{e^2}{6\pi} \left[ \frac{dz_\mu}{d\tau} \frac{d^2 z^\alpha}{d\tau^2} \frac{d^2 z_\alpha}{d\tau^2} + \frac{d^3 z_\mu}{d\tau^3} \right] \quad (5.80)$$

die Bedingung (5.42). Im zeitlichen Mittel ist  $K_\mu = \overline{K}_\mu$ , falls die Beschleunigung nur in einem endlichen Zeitraum von Null verschieden ist. Die gesuchte Bewegungsgleichung ist

$$m \frac{d^2 z_\mu}{d\tau^2} = e F_{\mu\nu}^{ein} \frac{dz^\nu}{d\tau} + \frac{e^2}{6\pi} \left( \frac{dz_\mu}{d\tau} \frac{d^2 z^\alpha}{d\tau^2} \frac{d^2 z_\alpha}{d\tau^2} + \frac{d^3 z_\mu}{d\tau^3} \right) . \quad (5.81)$$

Hierbei ist  $F_{\mu\nu}^{ein}$  das einlaufende elektromagnetische Feld

$$F_{\mu\nu}^{ein}(z) = F_{\mu\nu}(z) - F_{\mu\nu}^{ret}(z) . \quad (5.82)$$

Der 2. Term soll die Wirkung des erzeugten Feldes auf das Teilchen beschreiben.

Betrachten wir diese Gleichung zunächst in der nichtrelativistischen Näherung  $|\dot{\vec{z}}| \ll 1$ . Dann folgt

$$m \ddot{\vec{z}} = e(\vec{E} + \dot{\vec{z}} \times \vec{B}) + \frac{e^2}{6\pi} \dot{\vec{z}} . \quad (5.83)$$

Im Gegensatz zu der üblichen Form der Newtonschen Bewegungsgleichung hängt hier die Kraft von der zeitlichen Änderung der Beschleunigung ab. Dies führt zu der paradoxen Existenz von Lösungen, bei denen sich das geladene Teilchen selbst beschleunigt ("run-away-solutions").

Sei  $\vec{E} = \vec{B} = 0$ . Dann ist

$$\dot{\vec{z}}(t) = e^{t/T} \dot{\vec{z}}(0) \quad , \quad T = \frac{e^2}{6\pi m} \quad (5.84)$$

eine Lösung der Gleichung. Eine entsprechende Lösung besitzt auch die relativistische Gleichung:

$$\dot{z}(\tau) = (\cosh(Tae^{\tau/T}), \sinh(Tae^{\tau/T}), 0, 0) \dot{z}(0) \quad , \quad a \in \mathbb{R} \text{ beliebig} \quad . \quad (5.85)$$

Es ist bis heute nicht gut verstanden, wie die physikalisch sinnvollen Lösungen des gekoppelten Teilchen-Feld-Systems von den inakzeptablen Lösungen getrennt werden können. Eine Diskussion findet man z.B. im Jackson und im Band 2 des Lehrbuchs der Mathematischen Physik von Thirring.