

Elektrodynamik

Skript zur Vorlesung

Tom Kirchner¹

unter Mitarbeit von
Dennis Röhrbein
und Nils Henkel

Institut für Theoretische Physik
TU Clausthal

¹tom.kirchner@tu-clausthal.de

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
1.1	Kurzer Rückblick auf die Klassische Mechanik	1
1.2	Vorläufiges zum Gegenstand der Elektrodynamik	1
1.3	Zur historischen Entwicklung der ED	2
1.4	ED und Relativitätstheorie	2
1.5	ED und Quantentheorie	3
2	Elektrostatik	5
2.1	Grundbegriffe und Grundgleichungen	5
2.1.1	Das Coulombgesetz (1785)	5
2.1.2	Das elektrische Feld	6
2.1.3	Das Gesetz von Gauß	13
2.1.4	Grundgleichungen der Elektrostatik	17
2.1.5	Elektrostatische Energie	20
2.2	Einfache Randwertprobleme	24
2.2.1	Probleme mit Kugelsymmetrie	24
2.2.2	Probleme mit Azimutalsymmetrie	25
2.2.3	Allgemeine Probleme in Kugelkoordinaten	36
2.3	Allgemeine Randwertprobleme	45
2.3.1	Vorbereitungen	45
2.3.2	Dirichletprobleme	49
2.3.3	Formale Lösung der RWP mit Greenschen Funktionen (GF)	54
2.4	Nichtleitende Materie im elektrischen Feld	59
2.4.1	Grundphänomene	59
2.4.2	Feldgleichungen für den materiegefüllten Raum	61
2.4.3	Polarisationsmodelle und Materialgleichungen	62
2.4.4	Zusammenfassung der Grundgleichungen	64
3	Magnetostatik	69
3.1	Der elektrische Strom	69
3.1.1	Stromdichte	70
3.1.2	Ladungserhaltung und Kontinuitätsgleichung	70
3.1.3	Anwendungen	71

3.2	Die magnetische Induktion \mathbf{B}	73
3.2.1	Definition und experimentelle Basis	73
3.2.2	Gesetz von Ampère	74
3.2.3	Lösungsformel(n) für einfache Fälle	74
3.3	Das Vektorpotential	77
3.3.1	Definition und Grundform für einfache RB	77
3.3.2	Uneindeutigkeit von \mathbf{A} und Eichfreiheit	77
3.3.3	Taylorentwicklungen für lokalisierte Stromverteilungen und das magnetische Moment	78
3.4	Kräfte und Drehmomente auf (bewegte) Ladungen	81
3.4.1	Das Lorentzsche Kraftgesetz	81
3.4.2	Kraft und Drehmoment auf stationäre Ströme	84
3.5	Materie im Magnetfeld	86
3.5.1	Grundphänomen und Modellvorstellungen	86
3.5.2	Formale Fassung der Situation mittels zweier Hilfsfelder	88
3.5.3	Materialgleichungen	89
3.5.4	Zusammenfassung und Gegenüberstellung der Grundgleichungen	91
4	Elektrodynamik I: Grundlagen	93
4.1	Die Maxwell-Gleichungen	93
4.1.1	Das Faradaysche Induktionsgesetz	93
4.1.2	Maxwellscher Verschiebungsstrom	97
4.1.3	Zusammenfassung der Grundgleichungen	98
4.2	Elektromagnetische Potentiale	99
4.2.1	Definition und DGls	99
4.2.2	Eichfreiheit und die üblichen Eichungen der ED	100
4.3	Erhaltungssätze	106
4.3.1	Ladungserhaltung	106
4.3.2	Energiesatz	106
4.3.3	Impulssatz	108
5	Elektrodynamik II: Anwendungen	111
5.1	Elektromagnetische Wellen	111
5.1.1	Wellenausbreitung	111
5.1.2	Reflexion und Brechung	114
5.1.3	Wellenausbreitung in Metallen	116
5.1.4	Weitere Themen	117
5.2	Wellenerzeugung: Das Sendeproblem	117
5.2.1	Harmonisch oszillierende, lokalisierte Quellen	117
5.2.2	Weitere Themen	121

6	Spezielle Relativitätstheorie (SRT)	123
6.1	Die Lorentz-Transformationen	123
6.1.1	Wdh: Galilei-Transformationen	123
6.1.2	Einfache Form der LTs	124
6.1.3	Kinematische Konsequenzen	126
6.2	Minkowski-Raum	129
6.2.1	Definition des Minkowski-Raums	129
6.2.2	Anschauung	130
6.2.3	Ko- und kontravariante Vektorkomponenten	131
6.3	Zur relativistischen Mechanik	137
6.3.1	Ort, Geschwindigkeit, Beschleunigung im MR	137
6.3.2	Impuls, Kraft, Bewegungsgleichung	138
6.3.3	Energie, Masse, Impuls	140
6.4	Lorentz-Kovarianz der Elektrodynamik	141
6.4.1	Kontinuitätsgleichung	141
6.4.2	Potentialgleichungen	142
6.4.3	Feldgleichungen	142
6.4.4	Weitere Diskussionspunkte	145
A	Kleine Formelsammlung zu den Legendrepolynomen	I
B	Zugeordnete Legendresche Polynome	III
C	Berechnung der Greenschen Funktion der Elektrodynamik	V
C.1	Funktionentheoretische Hilfsmittel	VI
C.2	Berechnung von $\mathfrak{J}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iu\tau}}{u} du$	VII
C.3	Die retardierte Greensche Funktion G^+	VIII

Kapitel 1

Einführung

1.1 Kurzer Rückblick auf die Klassische Mechanik

Definition: "Mechanik ist die Lehre von der Bewegung materieller Gegenstände im Raum und den diese beherrschende Gesetzmäßigkeiten." [Jel]

- Objekte der klassischen Mechanik (KM): (Systeme von) Massenpunkte(n)
- Kinematik: Betrachte Trajektorien $\mathbf{r}(t)$
- Dynamik: Kräfte sind die Ursache nichttrivialer Bewegungen: $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}$
- Grundproblem der KM: Lösung der Bewegungsgleichung (BWGl)
- Physikalischer Ursprung der Kräfte ist (eigentlich) nicht Gegenstand der KM

1.2 Vorläufiges zum Gegenstand der Elektrodynamik

- Objekte der Elektrodynamik (ED): Ladungen
→ Ursache von elektrischen Kräften (anziehend oder abstoßend)
- Bewegte Ladungen (Ströme) verursachen magnetische Kräfte
Beide Phänomene werden zusammengefasst als Elektromagnetismus.

- Fruchtbarer Abstraktionsschritt zur Beschreibung der Kraftwirkungen: Der Feldbegriff

$$\begin{aligned} \mathbf{E} : \text{ elektrisches Feld} &\hat{=} \frac{\text{Kraft}}{\text{Ladungseinheit}} && \text{Elektrisches und} \\ \mathbf{B} : \text{ magnetisches Feld} &\hat{=} \frac{\text{Kraft}}{\text{Stromeinheit} \cdot \text{Wegelement}} && \text{magnetisches Feld sind Vektorfelder.} \end{aligned}$$

- Modellvorstellung (Bsp. \mathbf{E} -Feld)
 - (i) Ladung q am Ort \mathbf{r} 'modifiziert' den (leeren) Raum (Quelle des Feldes)
 - (ii) 'Probeladung' tastet Feld ab (Sonde)
 - Eigenschaften der Felder: Träger von Energie, Impuls, Drehimpuls
 - Endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit der Felder \longrightarrow Relativitätstheorie
- Grundaufgabe der ED: Bestimmung von \mathbf{E} - und \mathbf{B} -Feldern zu vorgegeben Quellen (und Randbedingungen) und ihrer Wirkung auf Materie

1.3 Zur historischen Entwicklung der ED

Elektrische und magnetische Phänomene sind seit langer Zeit bekannt. Ihre quantitative Analyse setzte im 18. Jahrhundert ein. Die wichtigsten Meilensteine sind:

1785	Coulombgesetz
1820	Ørsted: elektrischer Strom \longrightarrow Magnetfeld
1831/32	Faraday: Wechselspiel zeitabhängiger \mathbf{E} - und \mathbf{B} -Felder; Induktionsgesetz
1864	Maxwellgleichungen (MGl)
1888	Hertz: Licht = elektromagnetische Wellen (exp. Nachweis)

Literatur zur Historie: [Greb], Kap. 24

1.4 ED und Relativitätstheorie

- Die Elektrodynamik ist unvereinbar mit dem Relativitätsprinzip auf der Basis der Galilei-Transformationen (GT) (d.h. MGl nicht forminvariant unter GT)

Lösungsoptionen:

- (i) ED ist falsch: kein Hinweis
- (ii) Es existiert ein ausgezeichnetes Inertialsystem für ED ('Äther'): kein Hinweis

(iii) Relativitätsprinzip gilt allgemein \implies GT und KM inkorrekt!

Dieser Hinweis erscheint kühn, hat sich aber als richtig erwiesen.

\longrightarrow Einsteins spezielle Relativitätstheorie (SRT) (1905)

- Maxwells ED ist vereinbar mit SRT.

1.5 ED und Quantentheorie

- ED wird durch Quantentheorie (QT) modifiziert (Einsteins Photonenhypothese, 1905)
- Diskussionsebenen:
 - (i) Klassische ED und (phänomenologische) Materialgleichungen (meist ausreichend zur Beschreibung (klass.) makroskopischer Phänomene)
 - (ii) Klassische ED und Response von Quantenteilchen (häufig ausreichend zur Beschreibung von Phänomenen der Festkörper-, Molekül- und Atomphysik)
 - (iii) Quantenfelder in Wechselwirkung (\rightarrow Quantenelektrodynamik (QED)) (die am besten überprüfte physikalische Theorie; geeignet zur Beschreibung aller Mikrophänomene von e^- , e^+ , γ)

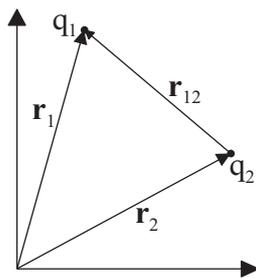
In dieser Vorlesung wird Standpunkt (i) eingenommen.

Kapitel 2

Elektrostatik

2.1 Grundbegriffe und Grundgleichungen

2.1.1 Das Coulombgesetz (1785)



$$\mathbf{F}_{21} = k_e q_1 q_2 \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3} = -\mathbf{F}_{12} \quad (2.1)$$

\mathbf{F}_{21} : Kraft von q_2 auf q_1

$$\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \quad r_{12} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$$

Bemerkungen:

- (i) Newtons 3. Axiom (actio = reactio) wird erfüllt
- (ii) Anziehung und Abstoßung möglich ($q_i \leq 0$); ansonsten gleiche Form wie Gravitationsgesetz
insbesondere: Die elektrische Kraft ist eine konservative Zentralkraft, $\nabla_1 \times \mathbf{F}_{21} = \nabla_2 \times \mathbf{F}_{12} = 0$
- (iii) Punktladungen q_1, q_2 (PLs): Punktförmige Teilchen mit Ladung q (und Masse) (Idealisierung)
 - Mathematische Fassung $\rightarrow \delta$ -Funktion
 - Elementarladung $e_0 \approx 1.6 \cdot 10^{-19}$ Coulomb, $q_e = -e_0$ (Elektron), $q_p = +e_0$ (Proton).

$$\implies q = \pm n e_0, \quad (n \in \mathbb{N})$$

Quantisierung der Ladung (für makroskopische Ladungen irrelevant)

(iv) Festlegung von $k_e \longleftrightarrow$ Wahl eines Maßsystems

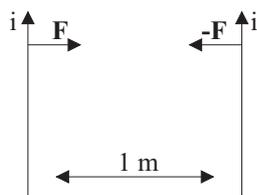
Option 1: (\rightarrow Gaußsches CGS-System)

Festlegung $k_e = 1$ (dimensionslos)

$$\hookrightarrow [q] = \left[\sqrt{Fr^2} \right] = \frac{g^{\frac{1}{2}} \text{cm}^{\frac{3}{2}}}{\text{s}} \stackrel{\text{cgs}}{=} 1 \text{ statcoul} = 1 \text{ esu}$$

Option 2: SI (MKSA)

Festlegung $I = 1$ Ampère, $I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$



$$\frac{F}{l} = 2 \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$\hookrightarrow [q] = \text{As} = 1 \text{ Coulomb}$$

$$\hookrightarrow k_e \approx 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

$$\epsilon_0 \approx 8.9 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2} \quad \text{'elektrische Feldkonstante'}$$

Coulombgesetz in SI-Einheiten:

$$\mathbf{F}_{21}^{\text{SI}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3}$$

Literatur: [Jac], Anhang; [DL], Anhang A

(v) Quantitativer Vergleich Coulombkraft-Gravitation für ($p + e^-$) (H-Atom)

$$|F_{\text{el}}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e_0^2}{r^2}, \quad |F_{\text{grav}}| = \frac{\gamma m_e m_p}{r^2}$$

$$\implies \left| \frac{F_{\text{el}}}{F_{\text{grav}}} \right| = \frac{e_0^2}{4\pi\epsilon_0 \gamma m_e m_p} \approx 2.3 \cdot 10^{39}$$

2.1.2 Das elektrische Feld

a) Definition und grundlegende Eigenschaften

$$\begin{aligned} F_{q'q} &= qE_{q'} \\ \mathbf{E}_{q'}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) &= \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}_{q'q}}{q} = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \end{aligned} \quad (2.2)$$

$E_{q'}(\mathbf{r}', \mathbf{r})$ ist das Feld am Ort \mathbf{r} , verursacht durch Ladung q' an \mathbf{r}'

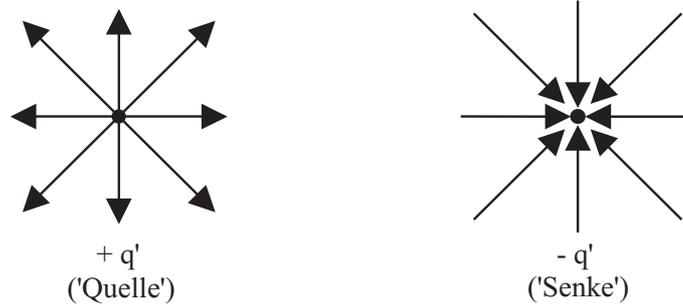
$$\begin{aligned} \hookrightarrow \mathbf{F}_{q'q}(\mathbf{r}) &= q\mathbf{E}_{q'}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \\ &= q\mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (\text{Kurzform}) \end{aligned}$$

PL q' im Ursprung:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{e}_r}{r^2}$$

Bemerkungen:

(i) Feldlinienbilder: tangentielle Linien an Feldvektoren

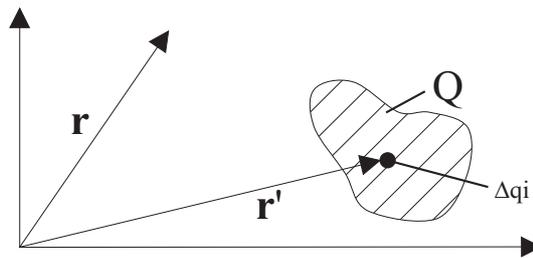


(ii) Superpositionsprinzip

\hookrightarrow Feld einer Verteilung von N-PLs:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \quad (2.3)$$

(iii) Kontinuierliche Ladungsverteilungen

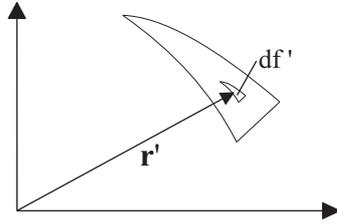


- Raumladungsdichten: $q_i \equiv \Delta q_i = \rho(\mathbf{r}_i) \Delta V_i \xrightarrow{\Delta V_i \rightarrow 0} \rho(\mathbf{r}') \underbrace{d^3 r'}_{dV'}$

$$Q = \sum_i \Delta q_i \longrightarrow \int_V \rho(\mathbf{r}') d^3 r' \quad (2.4)$$

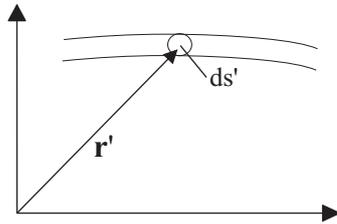
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3 r' \quad (2.5)$$

- Flächenladungsdichten: $\Delta q_i \longrightarrow \sigma(\mathbf{r}') df'$



$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') df' \quad (2.6)$$

- lineare Ladungsdichten: $\Delta q_i \longrightarrow \lambda(\mathbf{r}') ds'$



$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') ds' \quad (2.7)$$

b) δ -Funktion und Ladungsverteilungen

- Motivation: charakterisiere PL (im Ursprung) durch Ladungsdichte $\rho_p(\mathbf{r})$
 \longrightarrow geforderte Eigenschaften

- (i) $q = \int \rho_p(\mathbf{r}) d^3r$
- (ii) $\rho_p(\mathbf{r}) = 0$ für $\mathbf{r} \neq 0$

Diese beiden Forderungen lassen sich nicht von einer gewöhnlichen Funktion erfüllen.

- Heuristischer Zugang zur δ -Funktion (in 1D)

$$\triangleleft \quad \delta_\epsilon(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2}.$$

$\delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(x)$ erfüllt die Forderungen:

- (i) $\delta(x) = 0$, $x \neq 0$
 - (ii) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1.$
- (2.8)

Beweis:

$$(i) \quad \delta_\varepsilon(x \neq 0) \xrightarrow{\varepsilon^2 \ll x^2} \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

$$\text{andererseits: } \delta_\varepsilon(0) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \infty$$

$$(ii) \quad \begin{aligned} \triangleleft \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(x) dx &= \frac{1}{\pi} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-\frac{a}{\varepsilon}}^{\frac{a}{\varepsilon}} \frac{dz}{z^2 + 1} = \frac{1}{\pi} \lim_{a \rightarrow \infty} \arctan z \Big|_{-\frac{a}{\varepsilon}}^{\frac{a}{\varepsilon}} \\ &\left(= \frac{2}{\pi} \lim_{a \rightarrow \infty} \arctan \frac{a}{\varepsilon} \right) = 1. \end{aligned}$$

Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} dx &= \lim_{a \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-a}^a \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} dx \\ &\left(= \pi \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx \right). \end{aligned}$$

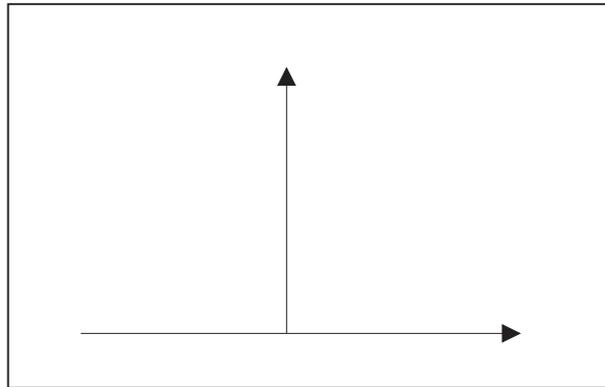


Abbildung 2.1: Delta-Funktion

Charakteristische Eigenschaft der δ -Funktion:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - a) dx = f(a). \quad (2.9)$$

Weitere Eigenschaften der δ -Funktion: [Kira], Anhang A 1

Literatur: [DL], Mathe II, Kap 1 und [Mes], QM I, Anhang A 1.

- Ladungsdichte einer Punktladung:

$$\begin{aligned}\rho_p(\mathbf{r}) &= q\delta(\mathbf{r}) \\ &= q\delta(x)\delta(y)\delta(z)\end{aligned}$$

- Ladungsdichte von N-PLs:

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$$

- lineare Ladungsdichte (z.B. entlang einer Kurve $f(x)$ in der xy -Ebene)

$$\rho(\mathbf{r}) = \lambda(\mathbf{r})\delta(z)\delta(y - f(x))$$

- Flächenladungsdichte (z.B. auf Oberfläche $z = z(x, y)$)

$$\rho(\mathbf{r}) = \sigma(\mathbf{r})\delta(z - f(x, y))$$

- 3-dim δ -Funktion in Zylinderkoordinaten (ρ, z, φ)

$$\rho(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \frac{1}{\rho} \delta(\rho - \rho_0) \delta(\varphi - \varphi_0) \delta(z - z_0)$$

$$\begin{aligned}\int \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \underbrace{d^3r}_{\rho d\rho d\varphi dz} &= \int_0^\infty \delta(\rho - \rho_0) d\rho \int_0^{2\pi} \delta(\varphi - \varphi_0) d\varphi \int_{-\infty}^\infty \delta(z - z_0) dz \\ &= 1\end{aligned}$$

- 3-dim δ -Funktion in Kugelkoordinaten (r, θ, φ)

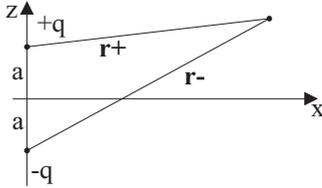
$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0) \delta(\varphi - \varphi_0)$$

allg. E-Feld einer beliebigen Ladungsverteilung

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3r'$$

$\rho(\mathbf{r})$ kann sowohl aus PLs als auch aus kontinuierlichen Anteilen bestehen.

c) Anwendung: explizite Feldberechnung

Beispiel 1: Der Punktdipol

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \left(E_x(x, z), E_z(x, z) \right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{x}{r_+^3} - \frac{x}{r_-^3}, \frac{z-a}{r_+^3} - \frac{z+a}{r_-^3} \right\}$$

$$r_+ = \left[x^2 + (z-a)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$r_- = \left[x^2 + (z+a)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\triangleleft \quad r^2 = x^2 + z^2 \gg a^2 \quad (\text{Fernfeld})$$

$$\frac{1}{r_-^3} = \frac{1}{\left[x^2 + (z+a)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \approx \frac{1}{\left[x^2 + z^2 + 2az \right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\left[r^2 + 2az \right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{1}{r^3} \frac{1}{\left[1 + \frac{2az}{r^2} \right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{1}{r_+^3} = \frac{1}{\left[x^2 + (z-a)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \approx \frac{1}{r^3} \frac{1}{\left[1 - \frac{2az}{r^2} \right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\text{benutze} \quad \left[1 \pm t \right]^{-\frac{3}{2}} \approx 1 \mp \frac{3}{2}t$$

$$\hookrightarrow \frac{1}{r^3} \frac{1}{\left[1 \pm \frac{2az}{r^2} \right]^{\frac{3}{2}}} \approx \frac{1}{r^3} \left(1 \mp \frac{3az}{r^2} \right)$$

$$\hookrightarrow E_x(x, z) = \frac{qx}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_+^3} - \frac{1}{r_-^3} \right)$$

$$\approx \frac{qx}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(1 + \frac{3az}{r^2} - 1 + \frac{3az}{r^2} \right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{6axz}{r^5}$$

$$E_z(x, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{z-a}{r_+^3} - \frac{z+a}{r_-^3} \right)$$

$$\approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \left((z-a) \left(1 + \frac{3az}{r^2} \right) - (z+a) \left(1 - \frac{3az}{r^2} \right) \right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2a}{r^5} (2z^2 - x^2)$$

Definition: Dipolmoment einer Ladungsverteilung

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) d^3 r \quad (2.10)$$

$$\rho(\mathbf{r}) = q\delta(z-a)\delta(x)\delta(y) - q\delta(z+a)\delta(x)\delta(y)$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow p_z &= q \left(\int z\delta(z-a) dz - \int z\delta(z+a) dz \right) \int \delta(x) dx \int \delta(y) dy \\ &= 2aq \end{aligned}$$

$$p_x = p_y = 0$$

$$\hookrightarrow \mathbf{E} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_z}{r^5} (3xz, 2z^2 - x^2)$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow |\mathbf{E}| &= \sqrt{E_x^2 + E_z^2} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_z}{r^5} \left[(3xz)^2 + (2z^2 - x^2)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_z}{r^5} \left[4z^4 + 5x^2z^2 + x^4 \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

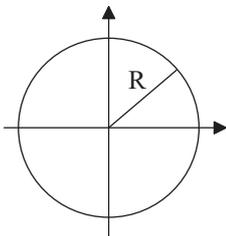
Polarkoordinaten :

$$x = r \sin \theta, \quad z = r \cos \theta$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_z}{r^5} \left[4r^4 \cos^4 \theta + 5r^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + r^4 \sin^4 \theta \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_z}{r^3} \left[4 \cos^4 \theta + 5 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \sin^4 \theta \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_z}{r^3} \left[4 \cos^4 \theta (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + \underbrace{\sin^2 \theta}_{1 - \cos^2 \theta} (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_z}{r^3} \left[1 + 3 \cos^2 \theta \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Bemerkung: Die Endformel gilt auch in dreidimensionaler Welt.

Beispiel 2: Homogene Kugel



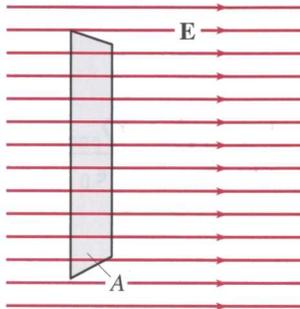
$$\begin{aligned} Q &= \int_V \rho(\mathbf{r}) d^3 r = \rho_0 \int_{\text{Kugel}} d^3 r \\ &= \frac{4\pi}{3} R^3 \rho_0 \end{aligned}$$

Zur expl. Rechnung siehe [DL], Kapitel 1.3 (Detail 1.3)

2.1.3 Das Gesetz von Gauß

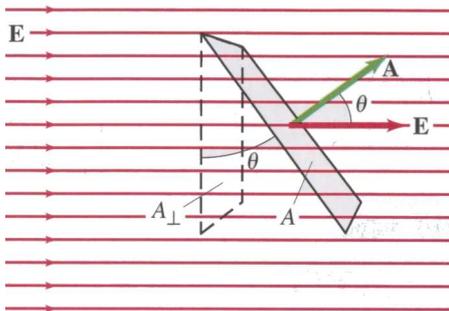
a) Elektrischer Fluss Φ_E

Beispiel 1:



$$|\Phi_E| = |\mathbf{E}|A$$

Beispiel 2:

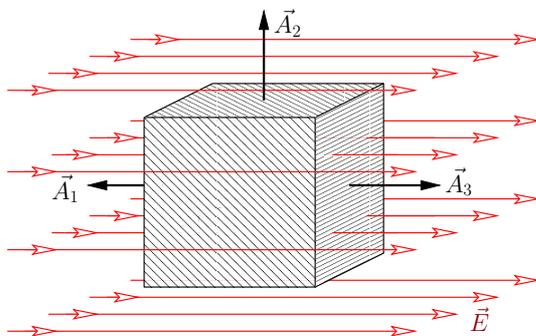


$$\begin{aligned} |\Phi_E| &= |\mathbf{E}|A_{\perp} = |\mathbf{E}|A \cos \theta \\ &= |\mathbf{E} \cdot \mathbf{A}| = 0, \text{ falls } \theta = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Definition: Fluss durch eine Fläche \mathbf{F} :

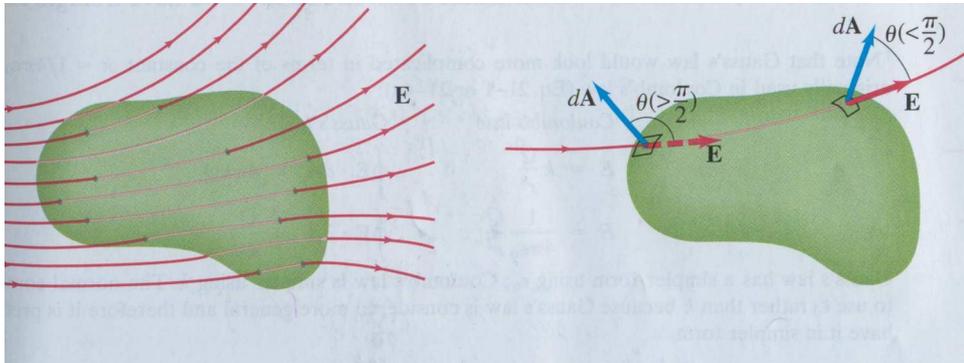
$$\Phi_E = \mathbf{E} \cdot \mathbf{F}.$$

Beispiel 3:



$$\begin{aligned} \Phi_E &= \sum_{i=1}^6 \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{A}_i \\ &= EA_1 \cos \pi + EA_3 \cos 0 \\ &= -EA_1 + EA_3 = 0. \end{aligned}$$

Verallgemeinerung: Unterteile beliebige Fläche F in kleine flache Rechtecke:



$$\Phi_E \approx \sum_i \mathbf{E}_i \cdot \Delta \mathbf{A}_i \xrightarrow{\Delta A_i \rightarrow 0} \iint_F \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f}$$

Geschlossene Fläche $\partial V = F(V)$: Berandung des Volumens V :

$$\Phi_E = \oiint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} \quad (2.11)$$

Bemerkungen:

(i) Fluss eines beliebigen Vektorfelds \mathbf{V} :

$$\Phi_V := \iint_F \mathbf{V} \cdot d\mathbf{f}.$$

(ii) $[\Phi_E] = \frac{Nm^2}{C}$.

(iii) $\Phi_E|_{\partial V} = 0$, falls keine Quellen/Senken von \mathbf{E} im betrachteten Volumen V .

(iv) Ladungen = Quellen/Senken von \mathbf{E} .

b) Integralform des Gesetzes von Gauß

$$\Phi_E = \oiint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = kq.$$

Für eine Punktladung in einer Kugel:

$$\begin{aligned} \oiint_{\partial K} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} &= \oiint_{\partial K} E \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r d\mathbf{f} = E \oiint_{\partial K} d\mathbf{f} \\ &= 4\pi r^2 E \stackrel{!}{=} kq \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow E(r) = \frac{k \cdot q}{4\pi r^2}$$

$$\Rightarrow k = \frac{1}{\epsilon_0}.$$

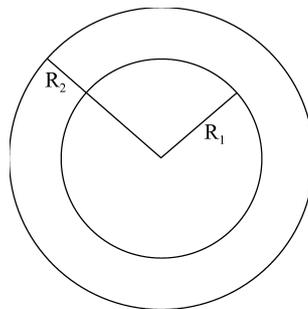
Gesetz von Gauß:

$$\Phi_E = \oiint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = \frac{Q_{\text{ein}}}{\epsilon_0}$$

$$Q_{\text{ein}} = \int_V \rho(\mathbf{r}) d^3r. \quad (2.12)$$

c) Anwendung: Praktische Feldberechnungen

Beispiel 1: Uniform geladene Kugelschale



Aus Symmetriegründen gilt

$$\mathbf{E} = E(r)\mathbf{e}_r$$

Außen:

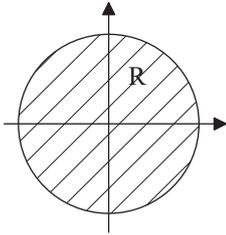
$$\Phi_E = \oiint_{\partial K_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = E(r) \oiint_{\partial K_1} d\mathbf{f} = 4\pi r^2 E(r) \stackrel{!}{=} \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{für } r > R_2.$$

Innen:

$$\Phi_E = \oiint_{\partial K_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = E(r) \oiint_{\partial K_2} d\mathbf{f} = 4\pi r^2 E(r) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow E(r) = 0 \quad \text{für } r < R_1.$$

Beispiel 2: Homogen geladene Kugel

Außen:

$$\mathbf{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r$$

(s. Bsp. 1)

Bemerkung: Gilt stets, wenn $\rho(\mathbf{r}) = \rho(r)$.

Das elektrische Feld einer isotropen Ladungsverteilung sieht also von außen aus wie das einer PL.

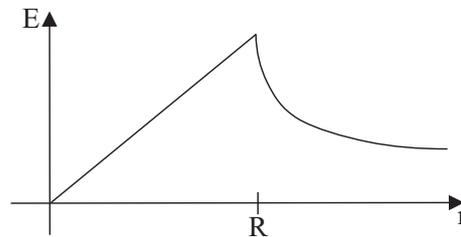
$$\boxed{r \leq R}$$

$$Q_{\text{ein}} = \rho \int_{\text{Kugel}} d^3r = \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{3Q}{4\pi R^3} = Q \frac{r^3}{R^3}$$

$$\stackrel{\text{Gau\ss}}{\Rightarrow} E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3}$$

Zusammenfassung:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} \frac{r}{R^3} \mathbf{e}_r & r \leq R \\ \frac{1}{r^2} \mathbf{e}_r & r > R \end{cases} \quad (2.13)$$

**d) Differentielle Form des Gaußschen Gesetzes**

$$\llcorner \int_V \operatorname{div} \mathbf{E} \, d^3r \stackrel{\text{Divergenztheorem}}{=} \oiint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} \stackrel{\text{Gauss}}{=} \frac{Q_{\text{ein}}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}) \, d^3r$$

$$\Leftrightarrow \int_V \left(\operatorname{div} \mathbf{E} - \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}) \right) d^3r = 0$$

beliebige V
 \Rightarrow

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

"Ladungen sind die Quellen ($q > 0$) und Senken ($q < 0$) des elektrischen Feldes."

2.1.4 Grundgleichungen der Elektrostatik

a) Differentialgleichungen für das elektrische Feld

- Feld einer Punktladung ist wirbelfrei

$$\text{rot } \mathbf{E}_p = \nabla \times \mathbf{E}_p = 0$$

Superpositionsprinzip \leftrightarrow jedes elektrostatische Feld ist wirbelfrei

\implies Grundgleichungen der E-Statik:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (2.14)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (2.15)$$

(gekoppelte partielle DGs 1. Ordnung)

b) Integralform

Integralsatz von Stokes:

$$\iint_F (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{f} = \oint_{\partial F} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad (2.16)$$

\implies Grundgleichungen in Integralform:

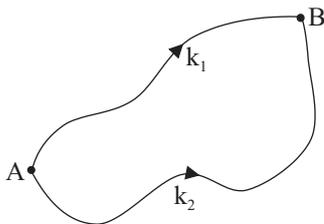
$$\oiint_F \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = \frac{Q_{\text{ein}}}{\varepsilon_0} \quad (2.17)$$

$$\oint_{\partial F} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (2.18)$$

c) Das elektrostatische Potential

Definition:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r}) \quad (2.19)$$



$$\Leftrightarrow \int_{K_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_{K_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

(Wegunabhängigkeit)

$$\hookrightarrow \phi(\mathbf{r}) = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' \quad (2.20)$$

(siehe [Kira], Kapitel 2.3)

Potentielle Energie der PL q :

$$W(\mathbf{r}) = q\phi(\mathbf{r}) , \quad (-\nabla W = \mathbf{F}) \quad (2.21)$$

$$[W] = \left[\frac{\text{Energie}}{\text{Ladung}} \right] = 1 \text{ J} (= 1 \text{ NM} = 1 \text{ VAs})$$

$$[\phi] = \left[\frac{\text{Energie}}{\text{Ladung}} \right] = 1 \frac{\text{J}}{\text{C}} = 1 \text{ Volt}$$

$$\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \phi(A) - \phi(B) :$$

Potentialdifferenz $\hat{=}$ Spannung

$$\begin{aligned} \triangleleft \quad \text{Gau\ss} : \quad \frac{\rho}{\varepsilon_0} &= \nabla \cdot \mathbf{E} = -\nabla \cdot \nabla \phi \\ &= -\text{div grad} \phi = -\Delta \phi \end{aligned}$$

\Leftrightarrow

$$\Delta \phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} \quad \text{Poissongleichung} \quad (2.22)$$

$$\Delta \phi(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{Laplacegleichung} \quad (2.23)$$

(für $\rho = 0$ in V_0)

Feld einer vorgegebenen Ladungsverteilung

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3r' \\ &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \rho(\mathbf{r}') \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' \\ &= -\nabla \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' \right) = -\nabla \phi \end{aligned}$$

\hookrightarrow

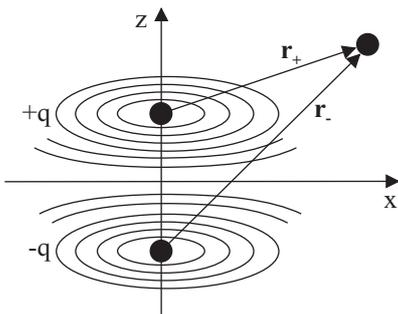
$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' \quad (2.24)$$

Bemerkung: Die Integrationskonstante wurde so gew\u00e4hlt, dass $\phi(\mathbf{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$.

Alternatives Muster für die Feldberechnung:

- (i) Bestimme $\phi(\mathbf{r})$ (durch direkte Integration (in einfachen Fällen) oder Lösung der Poisson- + Laplacegleichung)
- (ii) Berechne $\mathbf{E} = -\nabla\phi$

Beispiel 1: Punktdipol



$$r_+ = [x^2 + y^2 + (z - a)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$r_- = [x^2 + y^2 + (z + a)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$\hookrightarrow \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-} \right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{r_- - r_+}{r_+ r_-} \right)$$

Äquipotentiallinien (senkrecht zum Feld) : $\frac{r_- - r_+}{r_+ r_-} = \text{const.}$

$$\triangleleft \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \gg a^2$$

$$\hookrightarrow r_+ \approx [x^2 + y^2 + z^2 - 2az]^{\frac{1}{2}}$$

$$= r \left[1 - \frac{2az}{r^2} \right]^{\frac{1}{2}} \approx r \left(1 - \frac{az}{r^2} \right)$$

$$r_- \approx r \left(1 + \frac{az}{r^2} \right)$$

$$\hookrightarrow r_- - r_+ \approx \frac{2az}{r} = 2a \cos \theta, \quad (z = r \cos \theta)$$

$$\hookrightarrow r_+ r_- \approx r^2$$

$$\hookrightarrow \phi(\mathbf{r}) \stackrel{r \gg a}{\approx} \frac{2aq \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{p_z \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$$

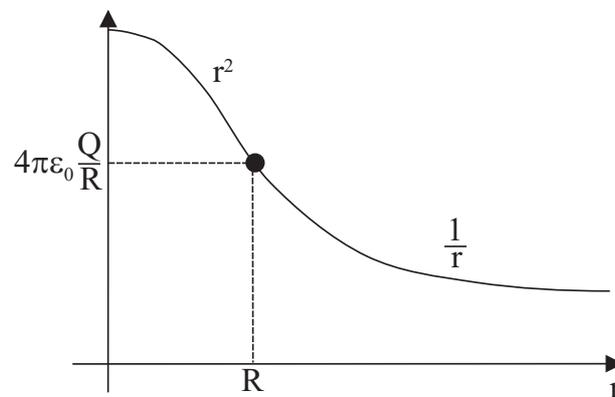
Fernfeld $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left(\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right)$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}{r^3} + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) \nabla \left(\frac{1}{r^3} \right) \right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right)$$

Beispiel 2: Homogene Kugel

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{Kugel}} \frac{d^3r'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad \left(Q = \int_{\text{Kugel}} \rho dV = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho \right) \\ &\quad \left(\rho = \frac{3Q}{4\pi R^3} \right) \\ &= \text{s. KM Skript S.25ff} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} \frac{3}{2R} - \frac{r^2}{2R^3} & r \leq R \\ \frac{1}{r} & r \geq R \end{cases} \end{aligned}$$

**2.1.5 Elektrostatistische Energie****a) Diskrete Ladungsverteilung**

Wiederholung: potentielle Energie einer PL q_1 am Ort \mathbf{r}_1 im vorgegebenen Feld $\mathbf{E} = -\nabla\phi$

$$W = q_1\phi(\mathbf{r}_1) + \text{const.}$$

Sei

$$\phi(\mathbf{r}_1) = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

↔ Wechselwirkung zwischen 2 Pls

$$W_{12} = \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

- WW-Energie zwischen 3 PLs

$$\begin{aligned} W &= W_{12} + W_{13} + W_{23} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q_1q_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} + \frac{q_1q_3}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|} + \frac{q_2q_3}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|} \right\} \end{aligned} \quad (2.25)$$

- WW-Energie von N PLs

$$W = \sum_{i,j; i < j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} = \frac{1}{2} \sum_{i,j; i \neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}$$

- Umschreibung mit $\rho(\mathbf{r}) = \sum_i \rho_i(\mathbf{r})$ $\rho_i(\mathbf{r}) = q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \int d^3r \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \int d^3r' \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_j) \\ &= \frac{1}{2} \int d^3r \int d^3r' \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \sum_{i \neq j} q_i q_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_j) \\ &= \frac{1}{2} \int d^3r \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{2} \sum_i \int d^3r \int d^3r' \frac{\rho_i(\mathbf{r})\rho_i(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \end{aligned}$$

Bemerkung:

- Beide Terme divergieren wg. "Selbstenergiebeiträgen" für $i = j$
- Terme sind endlich für beschränkte, kontinuierliche Ladungsverteilungen

b) Kontinuierliche Ladungsverteilung

'Wähle' disponible Konstante, so dass

$$W = \frac{1}{2} \int d^3r \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} < \infty \quad (2.26)$$

- Umschreibung

$$(i) \quad W = \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}) d^3r \quad (2.27)$$

$$(ii) \quad \rho(\mathbf{r}) = -\epsilon_0 \Delta\phi(\mathbf{r}) \quad (\text{Poissongleichung})$$

$$\hookrightarrow \quad W = -\frac{\epsilon_0}{2} \int \phi(\mathbf{r})\Delta\phi(\mathbf{r}) d^3r$$

benutze Divergenztheorem

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} d^3r = \iint_{\partial V} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{f}$$

$$\begin{aligned} \text{wähle } \mathbf{A} &= \phi \nabla \phi & \hookrightarrow \nabla \cdot \mathbf{A} &= (\nabla \phi)^2 + \phi \Delta \phi \\ & & \Leftrightarrow \phi \Delta \phi &= \nabla \cdot (\phi \nabla \phi) - (\nabla \phi)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W &= -\frac{\varepsilon_0}{2} \iiint (\phi(\mathbf{r}) \cdot \nabla \phi(\mathbf{r})) \cdot d\mathbf{f} + \frac{\varepsilon_0}{2} \int (\nabla \phi(\mathbf{r}))^2 d^3r \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2} \int (\nabla \phi(\mathbf{r}))^2 d^3r = \frac{\varepsilon_0}{2} \int (\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})) d^3r \quad (2.28) \end{aligned}$$

Definition:

$$w(\mathbf{r}) = \frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (2.29)$$

"Energiedichte des elektrischen Feldes"

$$\hookrightarrow W = \int w(\mathbf{r}) d^3r \quad (2.30)$$

Interpretation: in \mathbf{E} -Feld ist Energie gespeichert

- Beispiel: homogene Kugel

$$\mathbf{E}^2(\mathbf{r}) = \frac{Q^2}{(4\pi\varepsilon_0)^2} \begin{cases} \frac{r^2}{R^6} & r < R \\ \frac{1}{r^4} & r \geq R \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow W &= \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{Q^2}{(4\pi\varepsilon_0)^2} \left(\frac{1}{R^6} \int_{\text{innen}} r^2 dr + \int_{\text{außen}} \frac{d^3r}{r^4} \right) \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{4\pi Q^2}{(4\pi\varepsilon_0)^2} \left(\frac{1}{R^6} \int_0^R r^4 dr + \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{5R} + \frac{1}{R} \right) \\ &= \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R} \quad (2.31) \end{aligned}$$

Bemerkungen:

- (i) "Klassischer Elektronenradius"

$$\frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R} \approx m_e c^2 \quad \Leftrightarrow \quad R \approx \frac{3}{5} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{m_e c^2} \sim 10^{-15} \text{ m}$$

- (ii) $W_{\text{Kugel}} \xrightarrow{R \rightarrow 0} \infty$
- (iii) $W = \int w(\mathbf{r}) d^3r \geq 0$ enthält Selbstenergieanteile, die für PLs gegen unendlich gehen

2.2 Einfache Randwertprobleme

Ziel: Löse Laplace- und Poissongleichung für vorgegebene Ladungsverteilungen.

Aufgaben:

- (i) Formulierung von Randbedingungen (RBs)
- (ii) Lösung von partiellen DGLs

2.2.1 Probleme mit Kugelsymmetrie

$$\Delta\phi(\mathbf{r}) \longrightarrow \Delta\phi(r) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) = -\frac{\rho(r)}{\varepsilon_0} \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} \text{Typische Situation :} \quad \rho &\neq 0 \quad \text{für} \quad \mathbf{r} \in V_0 \\ \rho &= 0 \quad \text{für} \quad \mathbf{r} \notin V_0 \end{aligned}$$

\hookrightarrow Schritt 1: Allg. Lösung der Laplacegleichung (für $\mathbf{r} \notin V_0$)

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi_a}{dr} \right) &= 0 \\ \left(r^2 \frac{d\phi_a}{dr} \right) &= b_1 \\ \iff \frac{d\phi_a}{dr} &= \frac{b_1}{r^2} \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\hookrightarrow \phi_a(r) = b_1 \int \frac{dr}{r^2} = -\frac{b_1}{r} + b_2 \quad (2.34)$$

Schritt 2: Allgemeine Lösung der Poissongleichung ($\mathbf{r} \in V_0$)

Schritt 3: Bestimme 4 Integrationskonstanten durch geeignet RBs

Beispiel: homogene Kugel

$$\rho = \frac{3Q}{4\pi R^3} \quad \text{für} \quad r \leq R$$

$$\begin{aligned} \text{Schritt 2 :} \quad \triangleleft \quad \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi_i}{dr} \right) &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0} r^2 \\ \hookrightarrow r^2 \frac{d\phi_i}{dr} &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \int r^2 dr = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0} r^3 + a_1 \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$\iff \frac{d\phi_i}{dr} = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0} r + \frac{a_1}{r^2} \quad (2.36)$$

$$\hookrightarrow \phi_i(r) = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0} r^2 - \frac{a_1}{r} + a_2 \quad (2.37)$$

Schritt 3: RBs

- (i) $\phi_a(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$, $\hookrightarrow b_2 = 0$
- (ii) $\phi_i(R) = \phi_a(R)$
- (iii) $\phi'_i(R) = \phi'_a(R)$
- (iv) $\phi'_i(0) = 0$, $\hookrightarrow a_1 = 0$

$$\begin{aligned}
 \text{RB (iii):} \quad & -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}R = \frac{b_1}{R^2} \iff b_1 = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}R^3 = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \\
 \text{RB (ii):} \quad & -\frac{\rho}{6\varepsilon_0}R^2 + a_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0R} \iff a_2 = \frac{3Q}{8\pi\varepsilon_0R} \\
 \hookrightarrow \phi(r) = & \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \begin{cases} \frac{3}{2R} - \frac{r^2}{2R^3} & r \leq R \\ \frac{1}{r} & r \geq R \end{cases} \quad (2.38)
 \end{aligned}$$

Bemerkungen:

- (i) Integralform des Gaußschen Gesetzes bietet für kugelsymmetrische Probleme den praktikabelsten Lösungsweg!
- (ii) Für $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r)\mathbf{e}_r$ ist auch direkte Auswertung von $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr}(r^2 E(r)) = \frac{\rho(r)}{\varepsilon_0}$ möglich
- (iii) Falls $\rho(r) \neq 0 \quad \forall r \quad \hookrightarrow$ Lösung einer Poissongleichung mit 2 RBs

2.2.2 Probleme mit Azimutalsymmetrie

charakterisiert durch

$$\begin{aligned}
 \rho(\mathbf{r}) &= \rho(r, \theta) \\
 \hookrightarrow \phi(\mathbf{r}) &= \phi(r, \theta)
 \end{aligned}$$

a) Lösung der Laplacegleichung

$$\begin{aligned}
 \Delta\phi_a(\mathbf{r}) \longrightarrow \Delta\phi_a(r, \theta) &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi_a}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi_a}{\partial \theta} \right) = 0 \\
 \iff \underbrace{\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi_a}{\partial r} \right)}_{\Delta_r \phi_a(r, \theta)} + \underbrace{\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi_a}{\partial \theta} \right)}_{\Delta_\theta \phi_a(r, \theta)} &= 0 \\
 \Delta_r \phi_a(r, \theta) + \Delta_\theta \phi_a(r, \theta) &= 0
 \end{aligned}$$

Separationsansatz:

$$\phi_a(r, \theta) = R(r)P(\theta) \quad (2.39)$$

$$\hookrightarrow \Delta_r(R(r)P(\theta)) + \Delta_\theta(R(r)P(\theta)) = P(\theta)\Delta_r R(r) + R(r)\Delta_\theta P(\theta) = 0$$

$$\iff \frac{\Delta_r R(r)}{R(r)} = -\frac{\Delta_\theta P(\theta)}{P(\theta)} = k = \text{const.} \quad (2.40)$$

$$\hookrightarrow \frac{\Delta_R R}{R} = k \iff \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = kR \quad (2.41)$$

$$\frac{\Delta_\theta P}{P} = -k \iff \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) = -kP \quad (2.42)$$

• Radialgleichung

$$r^2 R''(r) + 2rR'(r) - kR(r) = 0 \quad (2.43)$$

Ansatz :

$$R(r) = r^\alpha$$

$$\hookrightarrow R'(r) = \alpha r^{\alpha-1}$$

$$R''(r) = \alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2}$$

$$\stackrel{\text{DGL}}{\hookrightarrow} (\alpha(\alpha-1) + 2\alpha - k)r^\alpha = 0$$

$$\hookrightarrow k = \alpha(\alpha+1) \quad (2.44)$$

$$= \alpha^2 + \alpha + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}$$

$$= \left(\alpha + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4}$$

Diskussion der Funktion $k(\alpha)$:

- $k \geq -\frac{1}{4}$
- für jedes $k > -\frac{1}{4}$ gibt es zwei α -Werte :
 $\alpha_1 = \alpha$
 $\alpha_2 = -\alpha - 1$
 $\hookrightarrow R_1(r) = r^\alpha, \quad R_2(r) = r^{-(\alpha+1)}$

Allgemeine Lösung: (für $k = \alpha(\alpha+1) > -\frac{1}{4}$)

$$R(r) = R_\alpha(r) = A_\alpha r^{-(\alpha+1)} + B_\alpha r^\alpha \quad (2.45)$$

- Winkelgleichung

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) + \alpha(\alpha + 1)P(\theta) = 0 \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} x &= \cos \theta, \quad (-1 \leq x \leq 1) \\ \hookrightarrow \sin \theta &= \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - x^2} \\ \frac{d}{d\theta} &= \frac{d}{dx} \frac{dx}{d\theta} = -\sin \theta \frac{d}{dx} = -\sqrt{1 - x^2} \frac{d}{dx} \\ \hookrightarrow &+ \frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{dP}{dx} \right] + \alpha(\alpha + 1)P = 0 \end{aligned}$$

$$\iff (1 - x^2)P''(x) - 2xP'(x) + \alpha(\alpha + 1)P(x) = 0 \quad (2.47)$$

Legendresche DGL

Lösung durch Potenzreihenansatz:

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (2.48)$$

$$P'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$P''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$\sum_n n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_n n(n-1) a_n x^n - \sum_n 2n a_n x^n + \sum_n \alpha(\alpha+1) a_n x^n = 0$$

$$\begin{aligned} \text{NR : } \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n \end{aligned}$$

$$\hookrightarrow \sum_n x^n \left\{ (n+2)(n+1) a_{n+2} - \left(n(n-1) + 2n - \alpha(\alpha+1) \right) a_n \right\} = 0$$

$$\Leftrightarrow a_{n+2} = \frac{n(n+1) - \alpha(\alpha+1)}{(n+2)(n+1)} a_n \quad (2.49)$$

$$\Leftrightarrow a_{n+2} = -\frac{(\alpha-n)(\alpha+n+1)}{(n+2)(n+1)} a_n \quad (2.50)$$

n gerade

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{\alpha(\alpha+1)}{2} a_0 \\ a_4 &= -\frac{(\alpha-2)(\alpha+3)}{4 \cdot 3} a_2 = \frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha+1)(\alpha+3)}{4!} a_0 \\ a_6 &= -\frac{(\alpha-4)(\alpha+5)}{6 \cdot 5} a_4 = -\frac{\alpha(\alpha-4)(\alpha-2)(\alpha+1)(\alpha+3)(\alpha+5)}{6!} a_0 \end{aligned}$$

n ungerade

$$\begin{aligned} a_3 &= -\frac{(\alpha-1)(\alpha+2)}{3 \cdot 2} a_1 = -\frac{(\alpha-1)(\alpha+2)}{3!} a_1 \\ a_5 &= -\frac{(\alpha-3)(\alpha+4)}{5 \cdot 4} a_3 = \frac{(\alpha-3)(\alpha-1)(\alpha+2)(\alpha+4)}{5!} a_1 \end{aligned}$$

Allgemeine Lösung:

$$P_\alpha(x) = C_\alpha P_{\alpha,g}(x) + D_\alpha P_{\alpha,u}(x) \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned} P_{\alpha,g}(x) &= a_0 \left\{ 1 - \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha+1)(\alpha+3)}{4!} x^4 + \dots \right\} \\ P_{\alpha,u}(x) &= a_1 \left\{ x - \frac{(\alpha-1)(\alpha+2)}{3!} x^3 + \frac{(\alpha-3)(\alpha-1)(\alpha+2)(\alpha+4)}{5!} x^5 + \dots \right\} \end{aligned}$$

(absolute) Konvergenz, falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+2} x^{n+2}}{a_n x^n} \right| < 1 \quad (\text{Quotientenkriterium})$$

$$\triangleleft \left| \frac{n(n+1) - \alpha(\alpha+1)}{(n+2)(n+1)} x^2 \right| = \left| \left(\frac{n}{(n+2)} - \frac{\alpha(\alpha+1)}{(n+2)(n+1)} \right) x^2 \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x^2$$

\Leftrightarrow Reihen konvergieren für $|x| < 1$

Reihen divergieren für $|x| = 1$, ($\theta = 0, \pi$)

Damit die Reihen für $|x| \leq 1$ konvergieren, muss man α so wählen, dass sie

abbrechen:

Wähle $\alpha \equiv l = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \alpha = 0 : \quad P_{0,g}(x) &= a_0 \\ P_{0,u}(x) &= a_1 \left\{ x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \dots \right\} \\ &= \frac{a_1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \quad (\text{divergiert für } |x| = 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha = 1 : \quad P_{1,u}(x) &= a_1 x \\ P_{1,g} &= a_0 \left\{ 1 - x^2 - \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{5}x^6 + \dots \right\} \\ &= a_0 \left\{ a_0 - x \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right) \right\} \\ &= a_0 \left\{ 1 - x \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \right\} \quad (\text{divergiert für } |x| = 1) \end{aligned}$$

Zusammenfassung: Für jedes $l \in \mathbb{N}_0$ existiert ein Polynom l -ten Grades $P_l(x)$, das die Legendre-DGL löst (für $x \leq |1|$).

$P_l(x)$: "Legendrepolynome"

Eigenschaften der $P_l(x)$: Anhang A

- Physikalisch relevante Lösung der Laplacegleichung

$$\begin{aligned} \phi_a(r, \theta) &= R(r)P(\theta) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(A_l r^{-(l+1)} + B_l r^l \right) P_l(\cos \theta) \quad (l \in \mathbb{N}_0) \end{aligned}$$

einfache RB: $\phi_a \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0 \quad B_l = 0$

$$\Leftrightarrow \boxed{\phi_a(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{A_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta)} \quad (2.52)$$

b) Bestimmung der A_l

Ausgangspunkt:

$$\triangleleft \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r'$$

$$\begin{aligned}
|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| &= [(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2]^{\frac{1}{2}} = [r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \alpha]^{\frac{1}{2}} \\
&= \left[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \left[x^2 + y^2 + z^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 - 2(xx' + yy' + zz') \right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \left[r^2 + r'^2 - 2rr' \left\{ \sin \theta \sin \theta' (\cos \varphi \cos \varphi' + \sin \varphi \sin \varphi') + \cos \theta \cos \theta' \right\} \right]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich schließlich:

$$\cos \alpha = \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi') + \cos \theta \cos \theta' \quad (2.53)$$

$r > r'$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \alpha}} \\
&= \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{r'}{r} \cos \alpha}} \\
&= \frac{1}{r} \sum_l \left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\cos \alpha)
\end{aligned}$$

$r < r'$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \frac{1}{r'} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{r'}\right)^2 - 2\frac{r}{r'} \cos \alpha}} \\
&= \frac{1}{r'} \sum_l \left(\frac{r}{r'}\right)^l P_l(\cos \alpha)
\end{aligned}$$

Zusammenfassung:

$$\boxed{\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l_{<}}{r^{l+1}_{>}} P_l(\cos \alpha)} \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned}
\hookrightarrow \phi_a(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_l \frac{1}{r^{l+1}} \int \rho(r', \theta') r'^l P_l(\cos \alpha) d^3r' \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_l \frac{A_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta)
\end{aligned}$$

$$\hookrightarrow \boxed{A_l P_l(\cos \theta) = \int r'^l \rho(r', \theta') P_l(\cos \alpha) d^3 r'} \quad (2.55)$$

$$\boxed{l = 0 :}$$

$$\boxed{A_0 = \int \rho(r', \theta') d^3 r' = Q}$$

$$\boxed{l = 1 :}$$

$$\begin{aligned} A_1 \cos \theta &= \int r' \rho(r', \theta') \cos \alpha d^3 r' \\ &\stackrel{(2.53)}{=} \int_0^\infty r'^3 dr' \int_{-1}^1 d \cos \theta' \rho(r', \theta') \\ &\quad \times \left\{ \sin \theta \sin \theta' \int_0^{2\pi} d\varphi \cos(\varphi - \varphi') + \cos \theta \cos \theta' \int_0^{2\pi} d\varphi \right\} \\ &= \cos \theta \int r' \cos \theta' \rho(r', \theta') d^3 r' \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{A_1 = \int z' \rho(r', \theta') d^3 r' = p_z}$$

(Dipolmoment!)

c) Exkurs über orthogonale Funktionensysteme

Die Legendrepolynome bilden ein sogenanntes orthogonales Funktionensystem. Da weitere derartige Systeme folgen werden, bieten sich an dieser Stelle einige (semiquantitative) Bemerkungen zu diesem (umfangreichen) mathematischen Thema an.

Basisdarstellung von Vektoren:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n v_i \mathbf{e}_i$$

$(\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_n)$ bilden Orthonormalbasis (ONB) in \mathbb{R}^n

→ Übertragung des Konzeptes der Basisdarstellung auf Funktionen:

$$f(x) \stackrel{?}{=} \sum_i c_i g_i(x)$$

Schritte:

- (i) (z.B. integrierbare) Funktionen sind Vektoren, d.h. sie erfüllen Vektorraumaxiome

$$\begin{aligned} \text{insb. : } \quad (\lambda f + \mu g)(x) &= \lambda f(x) + \mu g(x) \\ &= \mu g(x) + \lambda f(x) \\ &= (\mu g + \lambda f)(x), \quad (\forall x; \lambda, \mu \in \mathbb{C}). \end{aligned}$$

D.h. Addition von Vektoren ist kommutativ und ist wie die Multiplikation mit Skalaren punktweise definiert.

$$f, g \in V \implies \lambda f + \mu g \in V$$

$\{g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x)\}$ sind linear unabhängig

$$\Leftrightarrow \text{aus } \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i(x) = 0 \quad \text{folgt } \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$

- (ii) Skalarprodukt

- im \mathbb{R}^3 : $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos \alpha$
insbesondere $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$
 $\Leftrightarrow \mathbf{u}, \mathbf{v}$ sind orthogonal: $\Leftrightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$
Diese Aussage kann man direkt verallgemeinern auf den \mathbb{R}^n : $(\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_n)$
ONB: $\Leftrightarrow (\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_n)$ sind linear unabhängig und
 $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$

- $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n u_i \mathbf{e}_i$, $\mathbf{v} = \sum_{j=1}^n v_j \mathbf{e}_j$

$$\Leftrightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{ij} u_i v_j \underbrace{(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j)}_{=\delta_{ij}} = \sum_i u_i v_i$$

$$\text{insb. (Norm)} \quad \|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{\sum_i u_i^2}$$

- Skalarprodukt für Funktionen (über Intervall $[a, b]$)

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f^*(x) g(x) dx \quad (2.56)$$

Man kann zeigen, dass dieses Skalarprodukt dieselben Rechenregeln erfüllt wie das oben definierte im \mathbb{R}^3 . Aus mathematischer Sicht definiert man das Skalarprodukt von Vektoren durch diese Rechenregeln (s. ([Kirb]), Kap. 3.1.1.). \Leftrightarrow Norm einer Funktion

$$\|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}$$

Man nennt f quadratintegrabel, falls $\|f\| < \infty$.
 f und g sind orthogonal (über $[a, b]$): \iff

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f^*(x)g(x) dx = 0$$

(iii) Orthonormalsysteme

$$\{g_1(x), g_2(x), \dots\} \text{ ist ONS : } \iff \langle g_i, g_j \rangle = \delta_{ij} \quad \forall i, j$$

Beispiel 1:

$$u_l(x) = \sqrt{\frac{2l+1}{2}} P_l(x), \quad (l = 0, 1, \dots)$$

bilden ONS über $[-1, 1]$

$$\int_{-1}^1 u_l(x)u_{l'}(x) dx = \delta_{ll'} \quad (2.57)$$

Beispiel 2:

$$S_m(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{imx}, \quad (m = -\infty, \dots, \infty)$$

bilden ONS über $[0, 2\pi]$

- Sei $f_n(x) := \sum_{i=1}^n c_i g_i(x)$ über $[a, b]$

$$\begin{aligned} \text{wobei} \quad \langle g_i, g_j \rangle &= \int_a^b g_i^*(x)g_j(x) dx = 0, \quad i \neq j \\ \langle g_i, g_i \rangle &= \int_a^b |g_i(x)|^2 dx = N_i \end{aligned}$$

Frage: Wie sind $\{c_1 \dots c_n\}$ zu wählen, so dass $f_n(x)$ eine vorgegebene Funktion $f(x)$ möglichst gut approximiert?

Definition: "Fehlerfunktion"

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_n &:= \|f - f_n\|^2 = \langle f - f_n, f - f_n \rangle \\
 &= \int_a^b |f(x) - f_n(x)|^2 dx \\
 &= \int_a^b \left| f(x) - \sum_{i=1}^n c_i g_i(x) \right|^2 dx \\
 &= \int_a^b \left(f^*(x) - \sum_i c_i^* g_i^*(x) \right) \left(f(x) - \sum_j c_j g_j(x) \right) dx \\
 &= \int_a^b \left\{ f^*(x)f(x) - \sum_i c_i^* g_i^*(x)f(x) \right. \\
 &\quad \left. - \sum_j c_j g_j(x)f^*(x) + \sum_{ij} c_i^* c_j g_i^*(x)g_j(x) \right\} dx \\
 &= \int_a^b |f(x)|^2 dx - \sum_{i=1}^n c_i^* \int_a^b g_i^*(x)f(x) dx \\
 &\quad - \sum_j c_j \int_a^b f^*(x)g_j(x) dx + \sum_{ij} c_i^* c_j \underbrace{\int_a^b g_i^*(x)g_j(x) dx}_{=\delta_{ij}N_i}.
 \end{aligned} \tag{2.58}$$

Notwendige Bedingung für Minimum von $\varepsilon_n = \varepsilon_n(c_1 \dots c_n, c_1^*, \dots c_n^*)$:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial c_k} &= \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial c_k^*} = 0 \quad \forall k = 1, \dots, n \\
 \\
 \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial c_k^*} &= - \int_a^b g_k^*(x)f(x) dx + c_k N_k \\
 &= - \langle g_k, f \rangle + c_k N_k = 0 \\
 \Leftrightarrow c_k &= \frac{\langle g_k, f \rangle}{N_k} = \frac{\int_a^b g_k^*(x)f(x) dx}{N_k} \\
 \\
 \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial c_k} &= - \langle f, g_k \rangle + c_k^* N_k \stackrel{!}{=} 0 \\
 \Leftrightarrow c_k^* &= \frac{\langle f, g_k \rangle}{N_k} = \frac{\langle g_k, f \rangle^*}{N_k} \\
 \\
 \Rightarrow \varepsilon_n^{\min} &= \int_a^b |f(x)|^2 dx - \sum_i \frac{\langle f, g_i \rangle \langle g_i, f \rangle}{N_i} \\
 &= \|f\|^2 - \|f_n^{\max}\|^2,
 \end{aligned} \tag{2.59}$$

wobei $f_n^{\max}(x) = \sum_i \frac{\langle g_i, f \rangle}{N_i} g_i(x)$.

Wegen $\varepsilon_n^{\min} \geq 0$ gilt $\|f\|^2 - \|f_n^{\max}\|^2 \geq 0 \quad \forall n$

Für $N_i = 1 \quad \forall i$:

$$\hookrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |c_i|^2 \leq \int_a^b |f(x)|^2 dx \quad (2.60)$$

Besselsche Ungleichung

$$\text{Falls } \sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 = \int_a^b |f(x)|^2 dx \quad (2.61)$$

$$\iff \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0 :$$

Vollständigkeitsrelation (Parseval)

\hookrightarrow Konvergenz "im quadratischen Mittel" :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i g_i(x)$$

$$\text{mit } c_i = \int_a^b g_i^*(x) f(x) dx = \langle g_i, f \rangle$$

Bemerkungen:

(i) Alternative Form der Vollständigkeitsrelation

Einsetzen der Koeffizienten:

$$\begin{aligned} \sum_i \int dx' g_i^*(x') f(x') g_i(x) &= f(x) \\ \Rightarrow \sum_i g_i(x) g_i^*(x') &= \delta(x - x'). \end{aligned}$$

(ii)

Vektoren im \mathbb{R}^n	\longleftrightarrow	Funktionen
$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n v_i \mathbf{e}_i$		$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i g_i(x)$
$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$		$\int_a^b g_i^*(x) g_j(x) dx = \delta_{ij}$
$v_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{v}$		$c_i = \int g_i^*(x) f(x) dx$

(iii) Es existieren diverse vollständige orthogonale Funktionensysteme, z.B.

- Trigonometrische Funktionen (\longrightarrow Fourierreihen)
- Legendrepolynome
- Kugelflächenfunktionen (s. Kap. 2.2.3)

- (iv) Es existieren alternative, strengere Konvergenzbegriffe: punktweise und gleichmäßige Konvergenz

z.B.: jede stetige Funktion kann auf kompaktem Intervall durch Polynome gleichmäßig approximiert werden (Weierstraß)

- (v) Orthogonale Funktionensysteme bilden ONBs im "Hilbertraum" (\rightarrow QM)

2.2.3 Allgemeine Probleme in Kugelkoordinaten

a) Lösung der Laplacegleichung

$$\begin{aligned}\Delta\phi_a(r, \theta, \varphi) &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi_a}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi_a}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi_a}{\partial \varphi^2} \\ &= 0\end{aligned}\quad (2.62)$$

Separationsansatz:

$$\phi_a(r, \theta, \varphi) = R(r)P(\theta)S(\varphi) \quad (2.63)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\sin^2 \theta \left\{ \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{P \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) \right\}}_{F_1(r, \theta)} + \underbrace{\frac{1}{S} \frac{d^2 S}{d\varphi^2}}_{F_2(\varphi)} = 0$$

$$\Leftrightarrow F_1(r, \theta) = -F_2(\varphi) = m^2, \quad (m \in \mathbb{C}) \quad (2.64)$$

- Winkelgleichung (φ)

$$\begin{aligned}S''(\varphi) + m^2 S(\varphi) &= 0 \\ \Leftrightarrow S(\varphi) &= C_1 e^{im\varphi} + C_2 e^{-im\varphi}\end{aligned}\quad (2.65)$$

Eindeutigkeit der Lösungen: $S(\varphi) = S(\varphi + 2\pi) \Leftrightarrow m \in \mathbb{Z}$

Bemerkung: $\{e^{\pm im\varphi}\}$ bilden orthogonale Basis für integrierbare Funktionen über $[0, 2\pi]$

- 2. Separationsschritt

$$\begin{aligned}F_1(r, \theta) &= m^2 \\ \Leftrightarrow \left[\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) \right] &= - \left[\frac{1}{P \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \\ &= l(l+1)\end{aligned}$$

- Radialgleichung

$$\begin{aligned} R''(r) + 2rR'(r) - l(l+1)R &= 0 \\ \Leftrightarrow R_l(r) &= \frac{A_l}{r^{l+1}} + B_l r^l \\ &\left(\text{für } l > -\frac{1}{2}\right) \quad (\text{wie zuvor}) \end{aligned}$$

- Winkelgleichung (θ)

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) P = 0 \quad (2.66)$$

$$x = \cos \theta, \quad (|x| \leq 1)$$

$$\Leftrightarrow (1-x^2)P''(x) - 2xP'(x) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P(x) = 0 \quad (2.67)$$

”zugeordnete Legendresche DGL”

Reguläre Lösungen (für $|x| \leq 1$): zugeordnete Legendre-Funktionen (s. Anhang B):

$$P_l^m(x) := (-1)^m (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) \quad (2.68)$$

Einige Eigenschaften:

- (i) Spezialfälle

$$P_l^0(x) = P_l(x), \quad P_l^m(1) = \delta_{m,0}$$

- (ii) Erwartete Rodriguezformel

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} \left[(x^2-1)^l \right] \quad (2.69)$$

- (iii) Indexbereich

$$\begin{aligned} l &= 0, 1, 2, \dots \\ m &= -l, -l+1, \dots, 0, \dots, l-1, l \end{aligned}$$

- (iv) Symmetrierelation

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x) \quad (2.70)$$

- Kugelflächenfunktionen

$$Y_{lm}(\Omega) \equiv Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi} \quad (2.71)$$

$$\begin{aligned} (l = 0, 1, 2, \dots) & \quad (0 \leq \theta \leq \pi) \\ (-l \leq m \leq l) & \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi) \end{aligned}$$

Physikalisch relevante Lösung der Laplacegleichung

$$\phi_a(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{A_{lm}}{r^{l+1}} Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (2.72)$$

b) Kugelflächenfunktionen ("spherical harmonics")

- Differentialgleichung

Ausgangspunkt:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP_l^m}{d\theta} \right) + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) P_l^m = 0$$

mit $m^2 = -\frac{1}{S_m} \frac{d^2 S_m}{d\varphi^2}$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP_l^m}{d\theta} \right) S_m(\varphi) + \left(l(l+1) S_m(\varphi) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{d^2 S_m}{d\varphi^2} \right) P_l^m = 0$$

$$\longrightarrow \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_{lm}}{\partial \varphi^2} = -l(l+1) Y_{lm} \quad (2.73)$$

$$\iff \Delta_{\theta, \varphi} Y_{lm} = -l(l+1) Y_{lm}$$

$\iff Y_{lm}$ sind die einzigen regulären Lösungen dieser "Eigenwertgleichung" von $\Delta_{\theta, \varphi}$ auf der gesamten Kugeloberfläche ($0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$)

- Spezialfälle

$$Y_{l0}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta) \quad (2.74)$$

$$Y_{lm}(\theta = 0, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \delta_{m0} \quad (2.75)$$

- Symmetrierelation

$$Y_{l,-m}(\theta, \varphi) = (-1)^m Y_{lm}^*(\theta, \varphi) \quad (2.76)$$

($Y_{l,m}$, $Y_{l,-m}$ sind linear unabhängig)

- Grundintegral

$$\int Y_{l'm'}^*(\theta, \varphi) Y_{lm}(\theta, \varphi) d\Omega = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (2.77)$$

→ Y_{lm} bilden ONS auf Kugeloberfläche

- Vollständigkeit

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) = \frac{\delta(\theta - \theta')}{\sin \theta} \delta(\varphi - \varphi') \quad (2.78)$$

$$\Leftrightarrow g(\theta, \varphi) = \sum_{lm} C_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (2.79)$$

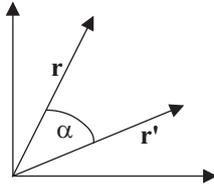
$$\text{mit } C_{lm} = \int Y_{lm}^*(\Omega) g(\Omega) d\Omega \quad (2.80)$$

- Explizite Formeln

$$\begin{aligned} Y_{0,0} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \\ Y_{1,-1} &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{-i\varphi} \\ Y_{1,0} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta \\ Y_{1,1} &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\varphi} \end{aligned}$$

Literatur: [Jac], Kapitel 3.5

- Additionstheorem



$$\cos \alpha = \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi') + \cos \theta \cos \theta'$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} P_l(\cos \alpha) &= \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) \\ &= \frac{4\pi}{2l+1} \sum_m Y_{lm}(\theta', \varphi') Y_{lm}^*(\theta, \varphi) \end{aligned} \quad (2.81)$$

(Beweis: siehe [Jac], Kapitel 3.6)

Insbesondere gilt:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow P_l(\cos \alpha = 1) &= \frac{4\pi}{2l+1} \sum_m |Y_{lm}(\theta, \varphi)|^2 \\ &\Leftrightarrow \sum_m |Y_{lm}(\Omega)|^2 = \frac{2l+1}{4\pi}. \end{aligned} \quad (2.82)$$

Literatur über die Winkelfunktionen:

[DL], Anhang C (und Mathematik, Kapitel 4.3); ([Jac], Kapitel 3.5, 3.6); [Mes], QM I, Appendix B; [Lin]

c) Multipolentwicklung und -momente

Ausgangspunkt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos \theta) \\ &= \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) \end{aligned} \quad (2.83)$$

Multipolentwicklung der Abstandsfunktion.

$$\boxed{r > r'}$$

$$\phi_a(r, \theta, \varphi) \stackrel{(2.24)}{=} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{Y_{lm}(\theta, \varphi)}{r^{l+1}} \int \rho(\mathbf{r}') r'^l Y_{lm}^*(\Omega') d^3 r' \quad (2.84)$$

$$\stackrel{\text{vgl. (2.78)}}{=} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{lm} \frac{A_{lm}}{r^{l+1}} Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (2.85)$$

$$\iff A_{lm} = \frac{4\pi}{2l+1} q_{lm} \quad (2.86)$$

mit

$$q_{lm} = \int \rho(\mathbf{r}') r'^l Y_{lm}^*(\Omega') d^3 r' \quad (2.87)$$

(sphärische) Multipolmomente: $(2l+1)$ -Stück für jedes $l \in \mathbb{N}_0$

$$q_{l,-m} = (-1)^m q_{lm}^* \quad (2.88)$$

Explizit:

$$\boxed{l=0}$$

$$q_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int \rho(\mathbf{r}') d^3 r' = \frac{Q}{\sqrt{4\pi}} \quad (2.89)$$

→ Monopolmoment.

$$\boxed{l=1}$$

$$q_{1,-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int \rho(\mathbf{r}') r' \sin \theta' e^{i\varphi'} d^3 r' \quad (2.90)$$

$$q_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int \rho(\mathbf{r}') r' \cos \theta' d^3 r' \quad (2.91)$$

$$q_{1,1} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int \rho(\mathbf{r}') r' \sin \theta' e^{-i\varphi'} d^3 r' \quad (2.92)$$

→ sphärische Dipolmomente

kartesische Dipolmomente (vgl. (2.10))

$$p_x = \int x' \rho(\mathbf{r}') d^3 r' = \int r' \sin \theta' \cos \varphi' \rho(\mathbf{r}') d^3 r'$$

$$p_y = \int y' \rho(\mathbf{r}') d^3 r' = \int r' \sin \theta' \sin \varphi' \rho(\mathbf{r}') d^3 r'$$

$$p_z = \int z' \rho(\mathbf{r}') d^3 r' = \int r' \cos \theta' \rho(\mathbf{r}') d^3 r' = q_{1,0} \sqrt{\frac{4\pi}{3}}$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow q_{1,-1} &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}}(p_x + ip_y) \\ q_{1,0} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}p_z \\ q_{1,1} &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}(p_x - ip_y) \end{aligned}$$

Dipolpotential:

$$\begin{aligned} \Phi_D(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{m=-1}^1 \frac{4\pi}{3} q_{1m} \frac{Y_{1m}(\Omega)}{r^2} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\pi}{3r^2} \left[\sqrt{\frac{3}{8\pi}}(p_x + ip_y)Y_{1,-1} - \sqrt{\frac{3}{8\pi}}(p_x - ip_y)Y_{11} + \sqrt{\frac{3}{4\pi}}p_z Y_{10} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} [\sin\theta \cos\varphi p_x + \sin\theta \sin\varphi p_y + \cos\theta p_z] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}. \end{aligned}$$

Das Dipolpotential hat also für jede Ladungsverteilung die Form, die wir für den Punktdipol in Kap. 2.1.4c explizit gefunden haben.

$\boxed{l=2}$ 5 sphärische 'Quadrupolmomente'

$\boxed{l=3}$ 7 sphärische 'Oktupolmomente'

Spezialfall 1: Kugelsymmetrische Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r}') = \rho(r')$

$$\begin{aligned} q_{lm} &= \int_0^\infty dr' \rho(r') (r')^{l+2} \int Y_{lm}^*(\Omega') d\Omega' \\ &= \sqrt{4\pi} \int_0^\infty dr' (r')^{l+2} \rho(r') \underbrace{\int Y_{lm}^*(\Omega') Y_{00}(\Omega') d\Omega'}_{\delta_{l0}\delta_{m0}} \\ &= \frac{Q}{\sqrt{4\pi}} \delta_{l0}\delta_{m0} \end{aligned} \tag{2.93}$$

$$\hookrightarrow \phi_a(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\pi q_{00}}{r} Y_{00} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

Spezialfall 2: Azimutalsymmetrische Ladungsverteilung

$$\rho(\mathbf{r}') = \rho(r', \theta')$$

$$q_{lm} = \int \rho(r', \theta') r'^l Y_{lm}^*(\Omega') d^3r'$$

φ -Integration:

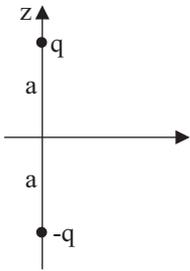
$$\int_0^{2\pi} e^{im\varphi'} d\varphi' = 2\pi\delta_{m0} \quad \text{mit} \quad Y_{l0} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow q_{lm} &= \delta_{m0} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \int \rho(r', \theta') r'^l P_l(\cos \theta') d^3 r' \\ &= 2\pi\delta_{m0} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \int_0^\infty dr' (r')^{l+2} \int_{-1}^1 d\cos \theta' \rho(r', \theta') P_l(\cos \theta') \end{aligned} \quad (2.94)$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \phi_a(r, \theta) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{lm} \frac{4\pi}{2l+1} q_{lm} \frac{Y_{lm}}{r^{l+1}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} q_{l0} \frac{P_l(\cos \theta)}{r^{l+1}} \end{aligned} \quad (2.95)$$

$$\hookrightarrow q_{l0} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} A_l$$

Beispiel 1: Punktdipol

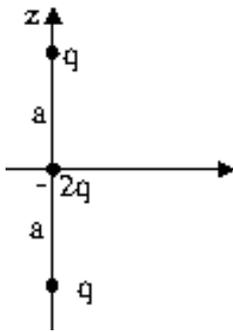


$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}) &= q\delta(z-a)\delta(x)\delta(y) - q\delta(z+a)\delta(x)\delta(y) \\ &= \frac{q}{2\pi r^2} \delta(r-a) \left\{ \delta(\cos \theta - 1) - \delta(\cos \theta + 1) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow A_l &= \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} q_{l0} = 2\pi \int_0^\infty dr' (r')^{l+2} \int_{-1}^1 dx' \rho(r', x') P_l(x') \\ &\quad (x' = \cos \theta') \\ &= q \int_0^\infty dr' r'^l r'^l \delta(r-a) \\ &\quad \times \left\{ \int_{-1}^1 dx' \delta(x'-1) P_l(x') - \int_{-1}^1 dx' \delta(x'+1) P_l(x') \right\} \\ &= qa^l \left\{ P_l(1) - P_l(-1) \right\} = qa^l \left\{ 1 - (-1)^l \right\} \\ A_l &= \begin{cases} 0 & l \text{ gerade} \\ 2qa^l & l \text{ ungerade} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.96)$$

$$\begin{aligned}
\hookrightarrow \phi_a(r, \theta) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_l \frac{A_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta) \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{2qa}{r^2} P_1(\cos \theta) + \frac{2qa^3}{r^4} P_3(\cos \theta) + \dots \right\} \\
&\xrightarrow{r \ll a} \frac{2qa}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{r^2}
\end{aligned}$$

Sprechweise: 2^l -Pol: Ladungsverteilung mit $q_{l'm} = 0$ für $l' < l$.
Beispiel 2) gestreckter Punktquadrupol



$$\begin{aligned}
\rho(r, \theta) &= \frac{q}{2\pi r^2} \{ \delta(r - a) \delta(\cos \theta - 1) - \delta(r) \\
&\quad + \delta(r - a) \delta(\cos \theta + 1) \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hookrightarrow A_l &= q \left\{ \int (r')^l \delta(r' - a) dr' \int dx \delta(x' - 1) P_l(x') \right. \\
&\quad \left. - 2 \int r'^l \delta(r') dr' + \int r'^l \delta(r' + a) \int \delta(x + 1) P_l(x') dx \right\} \\
&= q \{ a^l P_l(1) - 2\delta_{l0} + a^l P_l(-1) \} \\
&= q \{ a^l - 2\delta_{l0} + a^l (-1)^l \}
\end{aligned}$$

$$A_l = \begin{cases} 0 & l = 0 \\ 0 & l \text{ ungerade} \\ 2qa^l & l \text{ gerade} \end{cases}$$

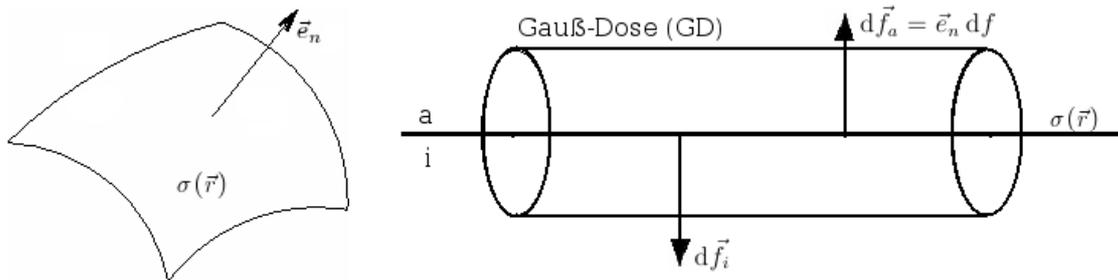
$$\hookrightarrow \phi(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{2qa^2}{r^3} P_2(\cos \theta) + \frac{2qa^4}{r^5} P_4(\cos \theta) + \dots \right\}$$

2.3 Allgemeine Randwertprobleme

2.3.1 Vorbereitungen

a) Das elektrische Feld beim Durchgang durch geladene Flächen

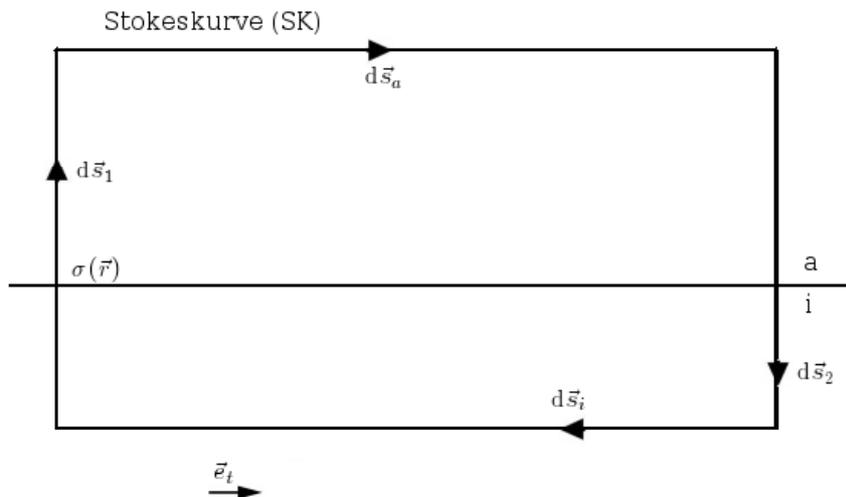
Wir betrachten eine Fläche der Ladungsdichte $\sigma(\mathbf{r})$ und legen eine Gauß-Dose um ein infinitesimal kleines Flächenstück.



$$\begin{aligned}
 \oiint_{\text{GD}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} &\approx \iint \mathbf{E}(\mathbf{r}_a) \cdot d\mathbf{f}_a + \iint \mathbf{E}(\mathbf{r}_i) \cdot d\mathbf{f}_i + \underbrace{\iint_{\text{Seiten}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f}}_{\rightarrow 0} \\
 &\approx \iint (\mathbf{E}(\mathbf{r}_a) - \mathbf{E}(\mathbf{r}_i)) \cdot \mathbf{e}_n df \\
 &= \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{ein}} = \frac{1}{\epsilon_0} \iint \sigma(\mathbf{r}) df \\
 &\Rightarrow \boxed{\epsilon_0 (E_{a,n}(\mathbf{r}) - E_{i,n}(\mathbf{r})) = \sigma(\mathbf{r})}. \quad (2.97)
 \end{aligned}$$

(Mit $E_{a,n} = \mathbf{E}_a \cdot \mathbf{e}_n$ und $E_{i,n} = \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{e}_n$)

Die Normalkomponente des elektrischen Feldes ist also beim Durchgang durch eine geladene Fläche unstetig. Um eine Aussage über die Tangentialkomponente zu gewinnen, betrachten wir eine „Stokeskurve“ durch die Fläche.

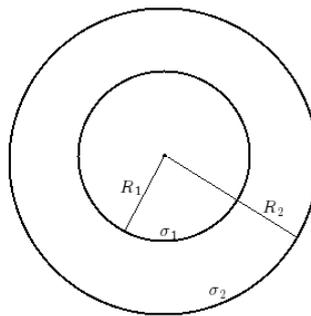


$$\begin{aligned}
0 = \oint_{\text{SK}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} &\approx \int \mathbf{E}(\mathbf{r}_a) \cdot d\mathbf{s}_a + \int \mathbf{E}(\mathbf{r}_i) \cdot d\mathbf{s}_i + \underbrace{\int_{s_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}_1 + \int_{s_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}_2}_{\rightarrow 0} \\
&\approx \int (\mathbf{E}(\mathbf{r}_a) - \mathbf{E}(\mathbf{r}_i)) \cdot \mathbf{e}_t \, ds \\
&\Rightarrow \boxed{E_{a,t}(\mathbf{r}) = E_{i,t}(\mathbf{r})}. \tag{2.98}
\end{aligned}$$

Die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes ist also stetig.

Bemerkungen

(i) Idealer Kugelkondensator



Man findet mit dem Gesetz von Gauß:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} & R_1 \leq r < R_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$R_1 : \quad E_{a,n} - E_{i,n} = + \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{4\pi R_1^2} = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0}$$

$$R_2 : \quad E_{a,n} - E_{i,n} = - \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{4\pi R_2^2} = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0}$$

$$E_{a,t} = E_{i,t} = 0$$

(ii) Potential ist stetig beim Durchgang durch geladene Flächen.

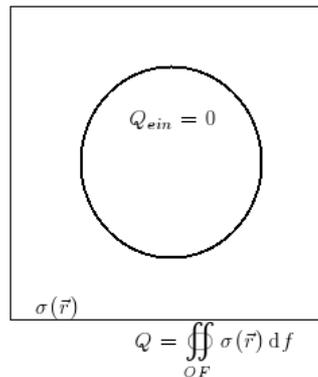
(iii) Potential springt beim Durchgang durch Dipolschicht.
[Grea]; [Jac], Kap 1.6

b) Feldverteilung in Leitern

In Leitern: Frei bewegliche Elektronen, daher (im Mittel):

$$\mathbf{E}_{\text{innen}} = 0.$$

Somit befindet sich in geladenen Leitern die gesamte Ladung auf der Oberfläche:



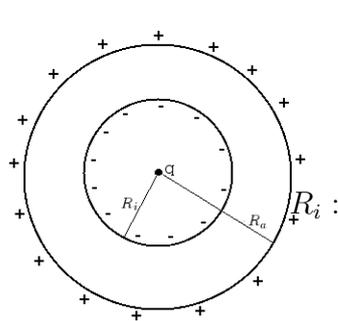
Mit (2.97) und (2.98) folgt: $E_{i,t} = E_{a,t} = E_{i,n} = 0$, $E_{a,n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$.

Die Feldlinien stehen also senkrecht auf der Leiteroberfläche. Für das Potential gilt: $\Phi_{\text{innen}} = \Phi_{\text{OF}} = \text{const}$.

Beispiel: Feld einer Metallkugel (vgl. mit (2.13))

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0 & r < R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r} & r \geq R \end{cases}$$

Eine wichtige Konsequenz der freien Beweglichkeit von Ladungen in Leitern ist die Influenz: Ladungstrennung in einem zunächst ungeladenen Leiter unter Einfluss eines elektrischen Feldes.

Beispiel 1: Punktladung in Hohlkugel

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathbf{e}_r & r < R_i \\ 0 & R_i < r < R_a \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathbf{e}_r & r > R_a \end{cases}$$

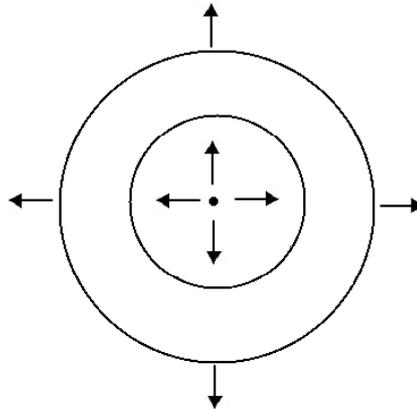
$$E_{a,n} - E_{i,n} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_i^2} = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0}$$

$$\Leftrightarrow \sigma_i = -\frac{q}{4\pi R_i^2} = \text{const}$$

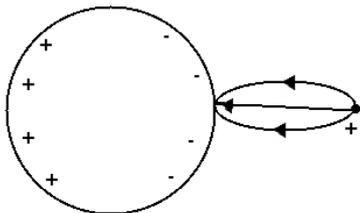
$$\text{analog } \sigma_a = +\frac{q}{4\pi R_i^2} = \text{const}$$

$$\Rightarrow |\sigma_i| > |\sigma_a|.$$

Feldlinienbild:



Beispiel 2: Metallkugel und Punktladung

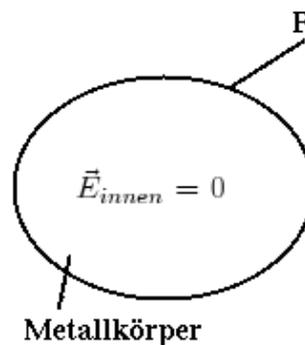


In diesem Fall ist die induzierte Oberflächenladung nicht homogen. Die Influenz ist es, die die Berechnung des elektrischen Feldes in Anwesenheit von Metallen schwierig macht.

Systematischer Zugang: Diskussion von allgemeinen Randbedingungen.

c) Klassifikation von Randbedingungen

Typ 1: Dirichletsches Randwertproblem



$$\Phi_i(\mathbf{r})|_F = \Phi_a(\mathbf{r})|_F = \Phi_0 = \text{const} \quad (2.99)$$

„Dirichletsche Randbedingung“

Allgemeines Dirichletproblem:

Im Raumgebiet G sei auf Flächen F_i der Wert des Potentials Φ vorgegeben. Zusätzlich sind in G Raum- und Punktladungen verteilt. Aufgabe:

Löse Poisson-Gleichung so, dass Φ auf den vorgegebenen Flächen die vorgegebenen Werte annimmt.

Dann kann man die Oberflächenladungen berechnen:

$$\begin{aligned}\sigma(\mathbf{r})|_{F_i} &= \epsilon_0 (E_{a,n}(\mathbf{r})|_{F_i} - E_{i,n}(\mathbf{r})|_{F_i}) \\ &= -\epsilon_0 \frac{\partial \Phi_a}{\partial n}|_{F_i}\end{aligned}\quad (2.100)$$

Typ 2: Neumannsches Randwertproblem

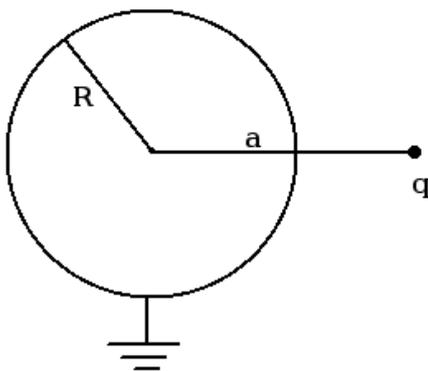
In G seien auf (geschlossenen) Oberflächen O_i die Flächenladungsdichten bzw. die Normalkomponenten des elektrischen Feldes vorgegeben:

$$\sigma(\mathbf{r})|_{O_i} = -\epsilon_0 \frac{\partial \Phi_a}{\partial n}|_{O_i} = \epsilon_0 E_{a,n} \quad (2.101)$$

Bemerkung:

Vorgabe von Dirichlet- oder Neumann-Randbedingungen bestimmt $\Phi(\mathbf{r})$ eindeutig.

Beweis: [Jac], Kap 1.9

2.3.2 DirichletproblemeBeispiel 1: Geerdete Metallkugel und Punktladung

Erdung: $\Phi(\mathbf{R}) = 0$ (Dirichlet-Randbedingung) sowie $\Phi(\mathbf{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$.

Poisson-Gleichung:

$$\Delta \Phi = -\frac{q}{\epsilon_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{a}), \quad r \geq R$$

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{r}) &= \Phi_{\text{hom}}(\mathbf{r}) + \Phi_{\text{inh}}(\mathbf{r}) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{A_l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta) + \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} \right) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0\end{aligned}\quad (2.102)$$

Aufgabe: bestimme A_l , sodass Dirichlet-RB erfüllt wird. Betrachte:

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\mathbf{R} - \mathbf{a}|} &\stackrel{R \leq a}{=} \frac{1}{a} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{R}{a}\right)^l P_l(\cos\theta) \\ \Rightarrow \Phi(\mathbf{R}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{A_l}{R^{l+1}} + \frac{q}{a} \left(\frac{R}{a}\right)^l \right) P_l(\cos\theta) \right) \stackrel{!}{=} 0 \\ &\Rightarrow \frac{A_l}{R^{l+1}} + \frac{q}{a} \left(\frac{R}{a}\right)^l = 0 \\ &\Leftrightarrow \boxed{A_l = -q \frac{R^{2l+1}}{a^{l+1}}}\end{aligned}\quad (2.103)$$

Damit hat man die eindeutige Lösung:

$$\boxed{\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} - \frac{R}{ar} \sum_l \left(\frac{R^2}{ar}\right)^l P_l(\cos\theta) \right)}$$
 (2.104)

Diese kann man noch weiter umschreiben:

$$\frac{1}{r} \sum_l \left(\frac{R^2}{a}\right)^l \frac{1}{r^l} P_l(\cos\theta) = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}'|}$$

mit $\mathbf{a}' = (0, 0, \frac{R^2}{a})$, $a' < R$. Sei $q' = -q\frac{R}{a}$, dann ist

$$\Phi(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} + \frac{q'}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}'|} \right) & r \geq R \\ 0 & r < R \end{cases}\quad (2.105)$$

Bemerkungen:

- (i) $\Phi(\mathbf{r})$ ist das Potential von q am Ort \mathbf{a} sowie der „Spiegelladung“ q' am Ort \mathbf{a}' .
- (ii) „Spiegelladungsmethode“
Ansatz:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} + \frac{q'}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}'|} \right)$$

Sei $\mathbf{a} = a\mathbf{e}_z$ und $\mathbf{a}' = a'\mathbf{e}_z$:

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{R}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{q}{|\mathbf{R}-\mathbf{a}|} &= -\frac{q'}{|\mathbf{R}-\mathbf{a}'|} \\ \Leftrightarrow \frac{q}{R|\mathbf{e}_r - \frac{a}{R}\mathbf{e}_z|} &= -\frac{q'}{a'|\frac{R}{a'}\mathbf{e}_r - \mathbf{e}_z|}\end{aligned}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{e}_r - \frac{a}{R}\mathbf{e}_z\right)^2 &= 1 - 2\frac{a}{R}\cos\theta + \frac{a^2}{R^2}, \\ \left(\mathbf{e}_z - \frac{R}{a'}\mathbf{e}_r\right)^2 &= 1 - 2\frac{R}{a'}\cos\theta + \frac{R^2}{a'^2}\end{aligned}$$

Und somit

$$\boxed{a' = \frac{R^2}{a} \quad \wedge \quad q' = -q\frac{R}{a}}$$

(iii) Induzierte Oberflächenladung

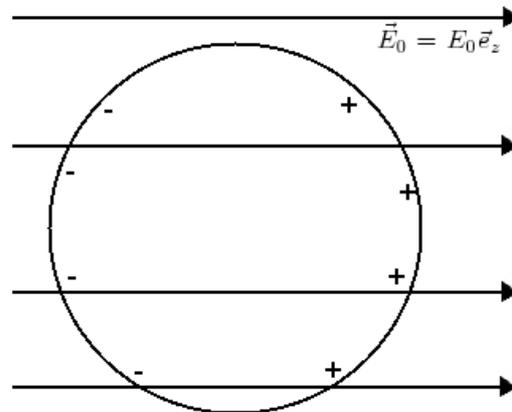
$$\begin{aligned}\sigma(\mathbf{r}) &= \sigma(R, \theta) = -\epsilon_0 \frac{\partial\Phi}{\partial r}\Big|_{r=R} \\ &= -\frac{q}{4\pi R} \frac{(a^2 - R^2)}{|\mathbf{R} - \mathbf{a}|^3}\end{aligned}\tag{2.106}$$

$$\tag{2.107}$$

- $q_{\text{ind}} = \iint \sigma(R, \theta) \, df = \dots = q'$
- $|\sigma|$ ist maximal für $\theta = 0$.
- $\sigma(R, \theta) \xrightarrow{a \rightarrow \infty} 0$
 $q' \xrightarrow{a \rightarrow \infty} 0$
- $\sigma(R, \theta) \xrightarrow{a \rightarrow R} -\frac{q}{2\pi R^2} \delta(\cos\theta - 1) \Rightarrow \Phi(\mathbf{r}) \xrightarrow{a \rightarrow R} 0$

(iv) Varianten (s. [DL], Kap. 4.2):

- $\Phi(\mathbf{R}) = \Phi_0 \neq 0$
- Geladene (von Batterie abgetrennte) Kugel

Beispiel 2: Ungeladene Metallkugel im homogenen elektrischen Feld

Aufgabe: Berechne Feldmodifikation aufgrund der Influenz auf der Kugel.

- Vor der Modifikation: $\Phi(\mathbf{r}) = -E_0 z$
- Randbedingungen:
 - (i) $Q = \iint_{\text{Kugel}} \sigma(\mathbf{R}) \, df = 0$
 - (ii) $\Phi(\mathbf{R}) = \Phi_R = \text{const}$
 - (iii) $\Phi(\mathbf{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \Phi_o(\mathbf{r}) = -E_0 z = -E_0 r P_1(\cos \theta)$
- DGL: $\Delta \Phi = 0$ für $r > R$

Ansatz:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{A_l}{r^{l+1}} + B_l r^l \right) P_l(\cos \theta) \quad (2.108)$$

Randbedingungen einsetzen:

(ii)

$$\begin{aligned}
 \Phi(\mathbf{R}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{A_l}{R^{l+1}} + B_l R^l \right) P_l(\cos \theta) \\
 &= \Phi_R = \Phi_R P_l(\cos \theta) \delta_{l0} \\
 \Leftrightarrow \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{A_l}{R^{l+1}} + B_l R^l - 4\pi\epsilon_0 \Phi_R \delta_{l0} \right) P_l(\cos \theta) &= 0 \\
 \Rightarrow \boxed{\frac{A_l}{R^{l+1}} + B_l R^l} &= 4\pi\epsilon_0 \Phi_R \delta_{l0}
 \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
 \Phi(\mathbf{r}) &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_l B_l r^l P_l(\cos \theta) \stackrel{!}{=} -E_0 r \delta_{l1} P_l(\cos \theta) \\
 \Rightarrow \boxed{B_l} &= -4\pi\epsilon_0 E_0 \delta_{l1} \\
 \Rightarrow A_l &= 4\pi\epsilon_0 (E_0 R^{2l+1} \delta_{l1} + \Phi_R R^{l+1} \delta_{l0})
 \end{aligned}$$

Explizit:

$$\begin{aligned}
 A_0 &= 4\pi\epsilon_0 R \Phi_R & B_0 &= 0 \\
 A_1 &= 4\pi\epsilon_0 R^3 E_0 & B_1 &= -4\pi\epsilon_0 E_0 \\
 A_l &= B_l = 0 & \text{für } l &\geq 2
 \end{aligned} \tag{2.109}$$

$$\Rightarrow \Phi(\mathbf{r}) = \frac{R\Phi_R}{r} - E_0 \left(r - \frac{R^3}{r^2} \right) \cos \theta.$$

$$\begin{aligned}
 \sigma(\mathbf{r}) &= \sigma(r, \theta) = -\epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_R \\
 &= \epsilon_0 \left[\frac{R\Phi_R}{r^2} + E_0 \left(1 + \frac{2R^3}{r^3} \right) \cos \theta \right] \Big|_{r=R} \\
 &= \epsilon_0 \left(\frac{\Phi_R}{R} + 3E_0 \cos \theta \right) \\
 \stackrel{(i)}{\Rightarrow} 0 &= Q = \iint \sigma(R, \theta) \, df = 2\pi R^2 \int_{-1}^1 \sigma(R, \theta) \, d \cos \theta \\
 &= 2\pi R^2 \epsilon_0 \left(\frac{\Phi_R}{R} \int_{-1}^1 dx + 3E_0 \int_{-1}^1 x \, dx \right) \\
 &= 4\pi\epsilon_0 R \Phi_R \\
 \Rightarrow \Phi_R &= 0
 \end{aligned}$$

Also hat man die endgültige Lösung:

$$\begin{aligned}\Phi(r, \theta) &= \begin{cases} 0 & r \leq R \\ -E_0 \left(r - \frac{R^3}{r^2} \right) \cos \theta & r \geq R \end{cases} \\ \sigma(R, \theta) &= 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta\end{aligned}\quad (2.110)$$

2.3.3 Formale Lösung der Randwertprobleme mit Greenschen Funktionen (GF)

GF: Hilfsmittel bei der Lösung inhomogener linearer DGL.
Beispiel aus der KM: getriebener harmonischer Oszillator

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = F(t) \quad (2.111)$$

$$\triangleleft \quad \ddot{G}(t) + \frac{\beta}{m}\dot{G}(t) + \frac{k}{m}G(t) = \frac{1}{m}\delta(t) \quad (2.112)$$

$$\Rightarrow \quad x_{\text{part}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t')F(t') dt' \quad (2.113)$$

Beweis:

$$\begin{aligned}& \ddot{x}_{\text{part}} + \frac{\beta}{m}\dot{x}_{\text{part}} + \frac{k}{m}x_{\text{part}} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d^2}{dt^2} G(t-t') + \frac{\beta}{m} \frac{d}{dt} G(t-t') + \frac{k}{m} G(t-t') \right) F(t') dt' \\ &= \frac{1}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t') F(t') dt' = \frac{1}{m} F(t), \quad \text{q.e.d.}\end{aligned}$$

Lösungs-Schema:

(i) Bestimme GF

(ii) Berechne $\int_{-\infty}^{\infty} G(t-t')F(t') dt'$

Mehr zur GF des getriebenen Oszillators [Kira], Kap. 3.2.3
Die Lösung einer DGL mit einer δ -förmigen Inhomogenität ist eine GF.

In der Elektrostatik wird die GF definiert durch Randbedingungen und

$$\epsilon_0 \Delta_r G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.114)$$

a) Greensche Integralsätze

Ausgangspunkt: Divergenztheorem

$$\int_B \nabla \cdot \mathbf{A} \, d^3r = \oiint_{\partial B} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{f}$$

- Wähle $\mathbf{A} = \Phi \nabla \Psi$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{A} &= \Phi \Delta \Psi + \nabla \Phi \cdot \nabla \Psi \\ \mathbf{A} \cdot d\mathbf{f} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_n \, df = \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} \, df \end{aligned}$$

Einsetzen in Divergenztheorem:

$$\int_B \Phi \Delta \Psi + \nabla \Phi \cdot \nabla \Psi \, d^3r = \oiint_{\partial B} \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} \, df \quad (2.115)$$

(1. Greenscher Integralsatz)

Durch Vertauschen von Ψ und Φ erhält man:

$$\int_B \Psi \Delta \Phi + \nabla \Psi \cdot \nabla \Phi \, d^3r = \oiint_{\partial B} \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} \, df$$

Abziehen von 2.115 ergibt:

$$\int_B \Phi \Delta \Psi - \Psi \Delta \Phi \, d^3r = \oiint_{\partial B} \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} - \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} \, df \quad (2.116)$$

(2. Greenscher Integralsatz)

b) Lösungsformel

Anwendung des zweiten Integralsatzes auf:

$$\begin{array}{ll} \Phi: & \text{gesuchtes Potential} \quad -\epsilon_0 \Delta \Phi = \rho \\ \Psi: & \text{GF} \quad -\epsilon_0 \Delta G = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \end{array}$$

$$\begin{aligned} & \int_B \Phi(\mathbf{r}) \Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Delta \Phi(\mathbf{r}) \, d^3r \\ &= -\frac{1}{\epsilon_0} \left(\int_B \Phi(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \, d^3r - \int_B G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}) \, d^3r \right) \\ & \stackrel{\text{Green2}}{=} \oiint_{\partial B} \left(\Phi \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) \, df \end{aligned}$$

⇒

$$\boxed{\Phi(\mathbf{r}) = \int_B G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}') d^3r' + \epsilon_0 \iint_{\partial B} \left(G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}')}{\partial n} - \Phi(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial n'} \right) df'} \quad (2.117)$$

(für $\mathbf{r} \in B$)

Fall i):

Dirichletsche RB : \Leftrightarrow Vorgabe von $\Phi(\mathbf{r}')$ für $\mathbf{r}' \in \partial B$.

Fordere RB für GF: $G_D(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = 0$ für $\mathbf{r}' \in \partial B$.

$$\Rightarrow \boxed{\Phi(\mathbf{r}) = \int_B G_D(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}') d^3r' - \epsilon_0 \iint_{\partial B} \Phi(\mathbf{r}') \frac{\partial G_D(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial n'} df'} \quad (2.118)$$

Lösungs-Schema:

- (i) Löse $\epsilon_0 \Delta' G_D(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$
mit Dirichlet-RB $G_D(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = 0$ für $\mathbf{r}' \in \partial B$.
- (ii) Für vorgegebene Dirichlet-RB für Φ und vorgegebene $\rho(\mathbf{r})$ in B berechne Φ in B .

Fall ii):

Neumannsche Randbedingungen : \Leftrightarrow Vorgabe von $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ auf ∂B .

Man kann hier nicht $\frac{\partial G}{\partial n} = 0$ auf ∂B fordern:

$$\begin{aligned} \triangleleft \iint_{\partial B} \frac{\partial G}{\partial n'} df' &= \int_B \nabla' \cdot (\nabla' G) d^3r' = \int_B \Delta' G d^3r' \\ &\stackrel{2.114}{=} -\frac{1}{\epsilon_0} \int_B \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3r' = -\frac{1}{\epsilon_0} \neq 0. \end{aligned}$$

(für $\mathbf{r} \in B$)

Stattdessen fordert man: $\frac{\partial G_N}{\partial n} = G_0 = \text{const}$ für $\mathbf{r}' \in \partial B$. Aus dem Divergenztheorem folgt dann:

$$\begin{aligned} G_0 \iint_{\partial B} df &= -\frac{1}{\epsilon_0} \\ \Leftrightarrow G_0 &= -\frac{1}{\epsilon_0 |\partial B|}, \end{aligned}$$

und somit

$$\boxed{\Phi(\mathbf{r}) = \int_B G_N(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}') d^3r' + \epsilon_0 \iint_{\partial B} G_N(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}')}{\partial n'} df' + \frac{1}{|\partial B|} \iint_{\partial B} \Phi(\mathbf{r}') df'} \quad (2.119)$$

Der dritte Term ist der konstante Mittelwert des Potentials auf ∂B

$$\langle \Phi \rangle := \frac{1}{|\partial B|} \iint_{\partial B} \Phi(\mathbf{r}') \, df' \xrightarrow{B \rightarrow \infty} 0$$

Lösungs-Schema:

- (i) Löse $\epsilon_0 \Delta' G_N(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$
mit Neumann-RB $\frac{\partial G_N(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial n} = -\frac{1}{\epsilon_0 |\partial B|}$ für $\mathbf{r}' \in \partial B$.
- (ii) Für vorgegebene Neumann-RB für Φ und vorgegebene $\rho(\mathbf{r})$ in B berechne Φ in B .

Bemerkungen

- (i) Symmetrie der GF: $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G(\mathbf{r}', \mathbf{r})$. Beweisbar für G_D und wird als zusätzliche Forderung an G_N erhoben.

(ii)

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + F(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$$

mit $\Delta F = 0$ und $F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = F(\mathbf{r}', \mathbf{r})$ für $\mathbf{r} \in B$.

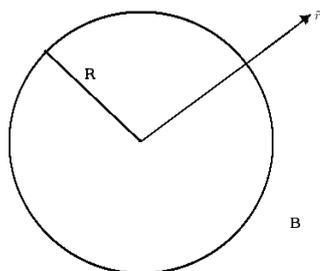
- (iii) Einfache RB: $\Phi(\mathbf{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$ und keine Metalle.
 $\hat{=}$ Spezialfall eines Dirichlet-Problems:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad \wedge \quad F = 0$$

$$\stackrel{2.118}{\Rightarrow} \Phi(\mathbf{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') \, d^3 r' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, d^3 r'.$$

Dies ist das für diesen Fall altbekannte Resultat.

c) Anwendung(en): Ein Dirichletproblem



RB: $\Phi(\mathbf{R})$ vorgegeben, $\Phi(\mathbf{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$.

$\Delta G_D(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = -\frac{\delta(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\epsilon_0}$ mit $G_D(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = 0$ und $G_D(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$.
Spiegelladungsansatz für G_D :

$$\begin{aligned} G_D(\mathbf{r}', \mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{q_s}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_s|} \right) \\ &\stackrel{\text{RB}}{\Rightarrow} r' r'_s = R^2 \\ \Rightarrow \mathbf{r}'_s &= \frac{R^2}{r'^2} \mathbf{r}', \quad q_s = -\frac{R}{r'}. \\ \Rightarrow G_D(\mathbf{r}', \mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{R}{r'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \frac{R^2}{r'^2} \mathbf{r}'|} \right). \end{aligned}$$

Außerdem:

$$\left. \frac{\partial G_D(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial r'} \right|_{r'=R} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{r^2 - R^2}{R[r^2 + R^2 - 2rR \cos \alpha]^{3/2}}$$

Beides einsetzen in die Lösungsformel:

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_B \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' - R \int_B \frac{\rho(\mathbf{r}')}{r' |\mathbf{r} - \frac{R^2}{r'^2} \mathbf{r}'|} d^3r' \right) \\ &+ \frac{1}{4\pi R} \iint_{\partial B} \Phi(R, \theta', \phi') \frac{r^2 - R^2}{[r^2 + R^2 - 2rR \cos \alpha]^{3/2}} R^2 d\Omega' \end{aligned}$$

Beispiel:

$$\Phi(\mathbf{R}) = 0, \quad \rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{a})$$

(geerdete Metallkugel + Punktladung, s. Kap. 2.3.2)

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_B \frac{\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{a})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' - R \int_B \frac{\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{a})}{r' |\mathbf{r} - \frac{R^2}{r'^2} \mathbf{r}'|} d^3r' \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} - \frac{R}{a} \frac{1}{|\mathbf{r} - \frac{R^2}{a^2} \mathbf{a}|} \right) = \Phi_{\text{erd}}(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

Variante 1:

$\Phi(\mathbf{R}) = \Phi_0$:

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}) &= \Phi_{\text{erd}}(\mathbf{r}) + \frac{\Phi_0 R}{4\pi} \int_{\partial B} \frac{r^2 - R^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^3} d\Omega \\ &= \Phi_{\text{erd}}(\mathbf{r}) + \frac{\Phi_0 R}{r}. \end{aligned}$$

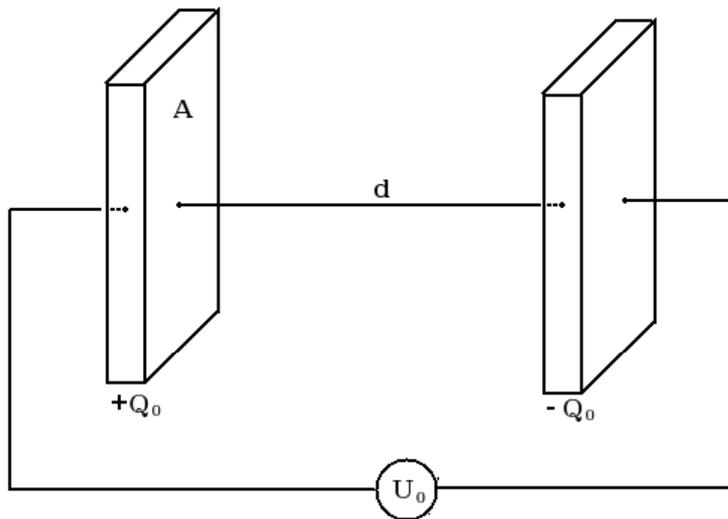
2.4 Nichtleitende Materie im elektrischen Feld

- Wie wirken elektrische Felder auf Isolatoren (Dielektrika)?
- Wie wird das elektrische Feld durch Anwesenheit von Dielektrika modifiziert?

Phänomenologische Modelle ermöglichen präzise Feldberechnungen (aus makroskopischer Sicht).

2.4.1 Grundphänomene

a) Plattenkondensator im Vakuum



Wir stellen uns vor, der Kondensator werde aufgeladen und anschließend von der Spannungsquelle abgetrennt:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_0 \mathbf{e}_x = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \mathbf{e}_x = \frac{Q_0}{A \epsilon_0} \mathbf{e}_x \quad (2.120)$$

(Beweis z.B. durch Gaußsches Gesetz)

Spannung zwischen den Platten:

$$U_0 = |\Phi_2 - \Phi_1| = \int_0^d E_0 dx = \frac{Q_0 d}{\epsilon_0 A} \quad (2.121)$$

$$\Rightarrow \frac{Q_0}{U_0} = \frac{\epsilon_0 A}{d} =: C_0 \quad \text{Kapazität} \quad (2.122)$$

$$[C] = \frac{\text{Coulomb}}{\text{Volt}} = 1 \text{ Farad.}$$

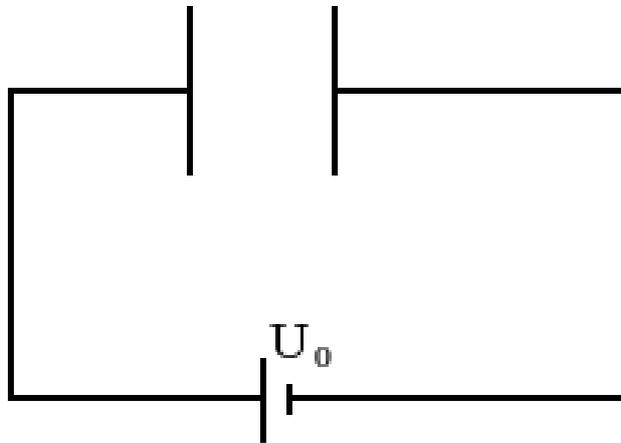
b) Plattenkondensator mit Dielektrikum

Beobachtung:

$$U = \frac{U_0}{\epsilon} < U_0 \quad (\epsilon > 1) \quad (2.123)$$

$$\Rightarrow C = \frac{Q_0}{U} = \epsilon C_0 > C_0 \quad (2.124)$$

Variante: Anschluss an Spannungsquelle



Beobachtung:

$$Q = \epsilon Q_0 > Q_0 \quad (2.125)$$

$$C = \frac{Q}{U_0} = \epsilon C_0 \quad (\text{wie zuvor}).$$

Qualitative Interpretation:

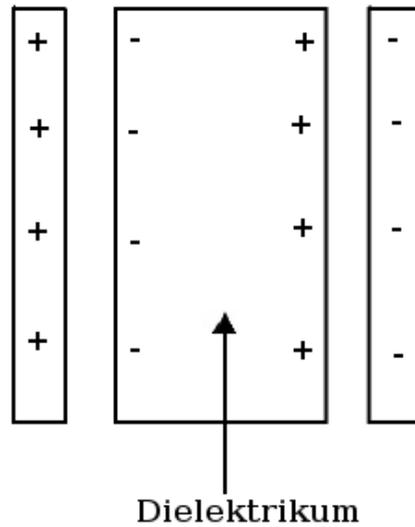
(i) Spannungsabfall \leftrightarrow Feldänderung

$$E = \frac{U}{d} = \frac{U_0}{\epsilon d}$$

$$\Rightarrow E = \frac{E_0}{\epsilon} < E_0$$

\leftrightarrow Polarisationsladungen Q_{pd} im Dielektrikum

- Änderung von Q zum Ausgleich von Q_{pd} bei festgehaltener Spannung/Feldstärke



Das Dielektrikum wird also polarisiert (abgeschwächte Form der Influenz)

2.4.2 Feldgleichungen für den materiegefüllten Raum

Wir unterscheiden zwischen freien Ladungen und gebundenen (Polarisations-) Ladungen.

$$\rho = \rho_f + \rho_b \quad (2.126)$$

ρ_f : freie Ladungen,
 ρ_b : gebundene Ladungen.

Definition der dielektrischen Polarisation \mathbf{P} :

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = -\rho_b \quad (2.127)$$

$$\mathbf{P} = 0, \quad \text{falls} \quad \rho_b = 0 \quad (2.128)$$

Konsequenz:

$$Q_b = \int_{\text{Diel.}} \rho_b(\mathbf{r}) d^3r = \int_{B \supset \text{Diel.}} \rho_b(\mathbf{r}) d^3r = - \int_B \nabla \cdot \mathbf{P} d^3r = - \oint_{\partial B} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{f} = 0.$$

Resultierendes elektrisches Feld:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E}) &= \rho = \rho_f + \rho_b \\ \Rightarrow \nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) &= \rho_f \end{aligned} \quad (2.129)$$

Dies gibt Anlass zur folgenden Definition der dielektrischen Verschiebung \mathbf{D} :

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (2.130)$$

$$\stackrel{(2.129)}{\Rightarrow} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f. \quad (2.131)$$

Mikroskopische Theorie:

- Berechne 'Response' des Dielektrikums auf \mathbf{D} -Feld ($\rightarrow \rho_b, \mathbf{P}$)
- Berechne $\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0}(\mathbf{D} - \mathbf{P})$

Makroskopische Theorie:

- Heuristische Ansätze für $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E})$
 \rightarrow Materialgleichungen
- Löse $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$
- $\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0}(\mathbf{D} - \mathbf{P}(\mathbf{E}))$

2.4.3 Polarisationsmodelle und Materialgleichungen

a) Mikroskopische Modellvorstellungen

Verschiebungspol.	Orientierungspol.	(Spontane Pol.)
atomare/molekulare Dipolmomente werden induziert	at./mol. DM werden ausgerichtet	Ausrichtung auch ohne Feld (bei tiefen Temperaturen)
normale Dielektrika	polare Dielektrika	(anomale Dielektr.), Ferroelektrika

b) Polarisation und Dipoldichte

Definition: Makroskopische Dipoldichte $\bar{\mathbf{P}}$

$$\bar{\mathbf{P}}(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha} N_{\alpha} \langle \mathbf{p}_{\alpha} \rangle(\mathbf{r}), \quad (2.132)$$

wobei N_{α} Zahl der Moleküle der Sorte α pro Volumen.

$$\langle \mathbf{p}_{\alpha} \rangle(\mathbf{r}) = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \mathbf{p}_{\alpha}(\mathbf{r}_{\alpha}) d^3 r_{\alpha}$$

Wiederholung: Potential eines Punktdipols in großer Entfernung

$$\Phi_D(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$$

Ausgedehnte Dipol-Verteilung

$$\begin{aligned}
 \Phi_D(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\bar{\mathbf{P}}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3r' & (2.133) \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \bar{\mathbf{P}}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' \\
 &\stackrel{\text{GreenI}}{=} -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla' \cdot \bar{\mathbf{P}}(\mathbf{r}') d^3r' \quad (V' \supset V) \\
 &\stackrel{!}{=} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho_b(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r'
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \nabla \cdot \bar{\mathbf{P}}(\mathbf{r}') &= -\rho_b & (2.134) \\
 \Rightarrow \bar{\mathbf{P}} &= \mathbf{P}
 \end{aligned}$$

Polarisation und makroskopische Dipoldichte können also miteinander identifiziert werden.

c) Materialgleichung

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P} &= \mathbf{P}[\mathbf{E}] = \mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_l[\mathbf{E}] + \mathbf{P}[O(E^2)] \\
 &\approx \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} & (2.135)
 \end{aligned}$$

für normale und polare Dielektrika. χ_e heißt 'elektrische Suszeptibilität'.

Einfachster Fall: $0 < \chi_e = \text{const}$ (homogene, isotrope Polarisation).
 (Allgemeinere Situation: Tensorstruktur und Ortsabhängigkeit)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} &= \epsilon_0(1 + \chi_e) \mathbf{E} \\
 &= \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}. & (2.136)
 \end{aligned}$$

$\epsilon_r = 1 + \chi_e$: relative Dielektrizitätskonstante.

Beispiel: Plattenkondensator (von Spannungsquelle abgetrennt)

- ohne Dielektrikum $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}_0$
- mit Dielektrikum $\mathbf{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E}$

Material	ϵ_r
Vakuum	1
Luft	1.0005
Glas	5...10
Wasser	81

Lit zu 4.3:
 [Greb], Kap. 6
 [Jac], Kap 4.5f

2.4.4 Zusammenfassung der Grundgleichungen

a) Feldgleichungen

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_f \\ \nabla \times \mathbf{E} &= 0\end{aligned}$$

b) Materialgleichung

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \underline{\epsilon_r} \mathbf{E} \xrightarrow{\text{einfache F\u00e4lle}} \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} \quad (2.137)$$

c) Potential

Wie zuvor: $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$.

F\u00fcr $\epsilon_r = \text{const}$:

$$\Delta\Phi = -\frac{\rho_f}{\epsilon_0 \epsilon_r}.$$

Praxis:

- L\u00f6se Poissongleichung f\u00fcr vorgegebene RB
- Berechne interessierende Gr\u00f6\u00dfen aus Φ , z.B.

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\nabla\Phi \\ \mathbf{D} &= -\epsilon_0 \epsilon_r \nabla\Phi \\ \mathbf{P} &= -\epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \nabla\Phi\end{aligned}$$

- Beachte: \mathbf{E} ist das wahre elektrische Feld, w\u00e4hrend \mathbf{D} und \mathbf{P} nur Hilfsgr\u00f6\u00dfen sind.

d) Elektrostatische Energie

- Kontinuierliche Ladungsverteilung ohne Dielektrika (vgl. (2.27))

$$W = \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}) d^3r$$

- Ladungsverteilung ρ_f und Dielektrika

$$W = \frac{1}{2} \int \rho_f(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}) d^3r \quad (2.138)$$

Begründung: [Jac], Kap. 4.7

Umschreibung auf Felder:

$$\begin{aligned} \rho_f(\mathbf{r}) &= -\epsilon_0 \epsilon_r \Delta \Phi(\mathbf{r}) \\ \Rightarrow W &= -\frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{2} \int \Phi \Delta \Phi d^3r \\ &\stackrel{\text{GreenI}}{=} \frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{2} \int (\nabla \Phi)^2 d^3r \\ &= \frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{2} \int \mathbf{E}^2 d^3r \\ &= \frac{1}{2} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} d^3r \end{aligned} \quad (2.139)$$

Energiedichte:

$$w(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \quad (2.140)$$

- Energieänderung einer festen Ladungsverteilung ρ_f durch Einbringen eines Dielektrikums des Volumens V_D :

vorher: $W_0 = \frac{1}{2} \int \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{D}_0 d^3r$
mit $\nabla \cdot \mathbf{D}_0 = \rho_f$, $\mathbf{D}_0 = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}_0$.

nachher: $W_1 = \frac{1}{2} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} d^3r$
mit $\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{D}_0 = \rho_f$, $\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}$.

$$\begin{aligned} W_1 - W_0 &= \frac{1}{2} \int (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} - \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{D}_0) d^3r \\ &= \frac{1}{2} \int (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}_0 - \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}_0) d^3r + \frac{1}{2} \int (\mathbf{E} + \mathbf{E}_0) \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{D}_0) d^3r \\ &=: I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Wir zeigen: $I_2 = 0$:

Sei $-\nabla \tilde{\Phi} = \mathbf{E} + \mathbf{E}_0$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow I_2 &= -\frac{1}{2} \int \nabla \tilde{\Phi} \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{D}_0) d^3r \\
&= -\frac{1}{2} \int \nabla \cdot (\Phi(\mathbf{D} - \mathbf{D}_0)) d^3r \\
&= -\frac{1}{2} \iiint_{\partial\mathbb{R}^3} \Phi(\mathbf{D} - \mathbf{D}_0) df = 0, \quad \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$

Somit ist

$$W_1 - W_0 = \frac{1}{2} \int (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}_0 - \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}_0) d^3r.$$

Außerhalb des Dielektrikums gilt $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$, also

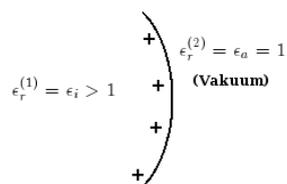
$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}_0 - \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}_0 = \epsilon_0 (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_0 - \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_0) = 0.$$

Also ist

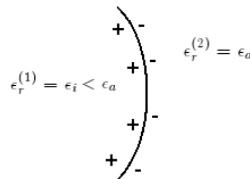
$$\begin{aligned}
W_1 - W_0 &= \frac{1}{2} \int_{V_D} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}_0 - \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}_0) d^3r \\
&= \frac{1}{2} \int_{V_D} (\epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_0 - \epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_0) d^3r \\
&= \frac{1}{2} \int_{V_D} \epsilon_0 (1 - \epsilon_r) \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_0 d^3r \\
&= -\frac{1}{2} \int_{V_D} \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}_0 d^3r \tag{2.141}
\end{aligned}$$

e) Verhalten von \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{P} an Trennflächen dielektrischer Materialien

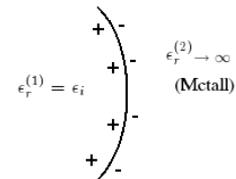
Situation (i)



Situation (ii)



Situation (iii)



Normalkomponenten (für $\sigma_f = 0$):

$$D_{a,n} = D_{i,n} \quad (\text{stetig}) \tag{2.142}$$

$$E_{a,n} - E_{i,n} = \frac{\sigma_b}{\epsilon_0} \quad (\text{unstetig}) \tag{2.143}$$

$$\begin{aligned}
P_{a,n} - P_{i,n} &= D_{a,n} - D_{i,n} - \epsilon_0 (E_{a,n} - E_{i,n}) \\
&= -\sigma_b \quad (\text{unstetig}) \tag{2.144}
\end{aligned}$$

Außerdem:

$$(2.142) : \quad E_{a,n} = \frac{\epsilon_i}{\epsilon_a} E_{i,n} \quad (2.145)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sigma_b &= \epsilon_0 (E_{a,n} - E_{i,n}) \\ &= \epsilon_0 \left(\frac{\epsilon_i - \epsilon_a}{\epsilon_a} \right) E_{i,n} \\ &= \epsilon_0 \left(\frac{\epsilon_i - \epsilon_a}{\epsilon_i} \right) E_{a,n} \end{aligned} \quad (2.146)$$

$$\frac{\epsilon_i}{\epsilon_i - 1} P_{i,n} = \frac{\epsilon_a}{\epsilon_a - 1} P_{i,n} \quad (2.147)$$

Tangentialkomponenten:

$$E_{a,t} = E_{i,t} \quad (2.148)$$

$$D_{a,t} = \frac{\epsilon_a}{\epsilon_i} D_{i,t} \quad (2.149)$$

$$P_{a,t} = \frac{\epsilon_a - 1}{\epsilon_i - 1} P_{i,t} \quad (2.150)$$

$$(2.151)$$

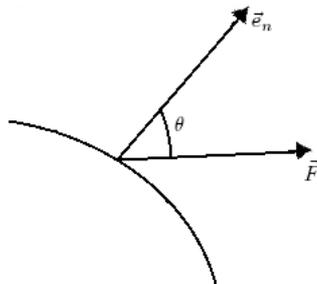
Zusammenfassung ($\sigma_f = 0$):

$$\frac{D_{a,n}}{D_{a,t}} = \frac{\epsilon_i}{\epsilon_a} \frac{D_{i,n}}{D_{i,t}} \quad (2.152)$$

$$\frac{E_{a,n}}{E_{a,t}} = \frac{\epsilon_i}{\epsilon_a} \frac{E_{i,n}}{E_{i,t}} \quad (2.153)$$

$$\frac{P_{a,n}}{P_{a,t}} = \frac{\epsilon_i}{\epsilon_a} \frac{P_{i,n}}{P_{i,t}} \quad (2.154)$$

Geometrisch:



$$\boxed{\frac{\tan \theta_i}{\tan \theta_a} = \frac{\epsilon_i}{\epsilon_a}} \quad (2.155)$$

'Brechungsgesetz der Feldlinien'

Bemerkungen:

(i) Falls $\epsilon_a > \epsilon_i$: $\tan \theta_a > \tan \theta_i$, 'Brechung vom Lot weg'.

(ii) Feldlinien stehen nicht senkrecht auf Grenzfläche, außer für $\epsilon \rightarrow \infty$.

f) Abschließende Bemerkung

Angegebene Grundgleichungen sind 'makroskopische' Grundgleichungen der Elektrostatik, d.h. Gleichungen für makroskopische Mittelwerte (haben aber dieselbe Form wie die 'mikroskopischen' Gleichungen, da sowohl die benutzten Gleichungen als auch die Mittelwertbildung linear sind).

Lit:

[Jel], Kap. 9

[Jac], Kap. 6.7

Lit. zu 4.3

[Greb], Kap. 6

[Jac], Kap 4.5f

Kapitel 3

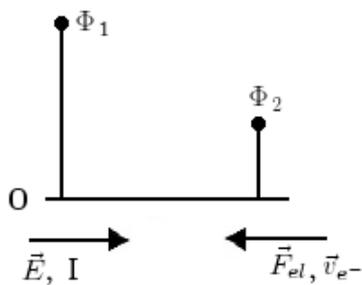
Magnetostatik

3.1 Der elektrische Strom

Stromstärke

$$|I| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta Q}{\Delta t} \right| = \left| \frac{dQ}{dt} \right|. \quad (3.1)$$

$\mathbf{F}_{el} = q\mathbf{E}$, $q_{\text{Elektron}} = -e$. Elektronen bewegen sich also konventionsgemäß entgegen der Stromrichtung.



I : Pseudoskalar (d.h. ändert Vorzeichen bei Punktspiegelung)
Einheit: $[I] = A$ (Ampère).

3.1.1 Stromdichte

◁ Über Leiterquerschnitt F homogener Strom I

$$|j| = \frac{|I|}{F} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} |I| &= \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{\rho \Delta V}{\Delta t} = \rho v F \\ \Rightarrow \mathbf{j} &= \rho \mathbf{v} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Allgemeine Definition:

$$I = \iint_A \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f} \quad (3.4)$$

Beispiel: Stromdichte einer Punktladung auf Trajektorie $\mathbf{r}_0(t)$.

$$\mathbf{j}_{PL}(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t))\dot{\mathbf{r}}(t) \quad (3.5)$$

3.1.2 Ladungserhaltung und Kontinuitätsgleichung

$$\begin{aligned} \triangleleft \text{Volumen } V: \quad Q(t_1) &= \int_V \rho(\mathbf{r}, t_1) d^3r \\ Q(t_2) &= \int_V \rho(\mathbf{r}, t_2) d^3r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left. \frac{dQ}{dt} \right|_{t=t_1} &= \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \left(\frac{Q(t_2) - Q(t_1)}{t_2 - t_1} \right) = -I|_{\partial V} \\ &= -\oiint_{\partial V} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t_1) \cdot d\mathbf{f} \end{aligned} \quad (3.6)$$

(Ladungsänderung \leftrightarrow Stromfluss)

- Differentielle Form

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= \int_V \partial_t \rho(\mathbf{r}, t) d^3r = -\oiint_{\partial V} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{f} \\ &= -\int_V \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) d^3r \\ \Leftrightarrow &\boxed{\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0} \end{aligned} \quad (3.7)$$

(Kontinuitätsgleichung)

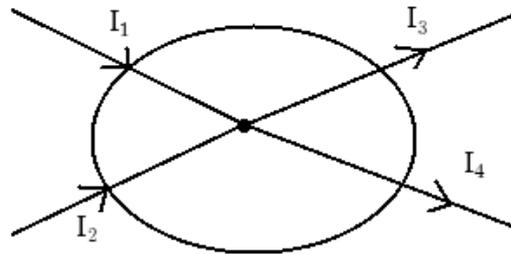
Situation 1:	$\partial_t \rho = 0, \mathbf{j} = 0$	\rightarrow	Elektrostatik
Situation 2:	$\partial_t \rho = 0 = \nabla \cdot \mathbf{j}$	\rightarrow	Magnetostatik (‘stationäre Ströme’)
Situation 3:	$\partial_t \rho \neq 0, \nabla \cdot \mathbf{j} \neq 0$	\rightarrow	Elektrodynamik
<u>Beispiel:</u> Punktladung			

$$\begin{aligned}
 \partial_t \rho &= q \partial_t \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)) = q \partial_t \delta(\mathbf{r}_0(t) - \mathbf{r}) \\
 &= q \dot{\mathbf{r}}_0 \nabla_0 \delta(\mathbf{r}_0(t) - \mathbf{r}) \\
 &= -\nabla q \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}_0 \\
 &= -\nabla \cdot \mathbf{j}.
 \end{aligned}$$

3.1.3 Anwendungen

a) Kirchhoffsche Knotenregel

„An jedem Verzweigungspunkt (in einer Schaltung) ist die Summe der zufließenden gleich der Summe der abfließenden Ströme“.



$$\sum_n I_n = 0.$$

Beweis:

Stationäre Ströme:

$$0 = \int_V \nabla \cdot \mathbf{j} d^3r = \sum_n \iint_{F_n} \mathbf{j}_n \cdot d\mathbf{f} = \sum_n I_n$$

b) Ohmsches Gesetz

e^- im homogenen elektrischen Feld: $m_e \dot{\mathbf{v}} = -e\mathbf{E}$

$$\Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 - \frac{e}{m_e} \mathbf{E}t$$

Andererseits:

$$\mathbf{j} = \rho \langle \mathbf{v} \rangle = -ne \langle \mathbf{v} \rangle = \frac{ne^2}{m_e} \langle t \rangle \mathbf{E}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}} \quad (3.8)$$

σ : (spezifische) Leitfähigkeit

Dies ist die differentielle Form des Ohmschen Gesetzes.

Integrale Form:

$$\begin{aligned} U &= |\Phi_2 - \Phi_1| \\ &= \left| \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \right| \\ &= \frac{1}{\sigma} \left| \int_1^2 \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s} \right| \stackrel{j=\text{const}}{=} \frac{j l}{\sigma} \\ &= j F \frac{l}{\sigma F} = I \frac{l}{\sigma F} \end{aligned}$$

Widerstand:

$$\begin{aligned} R &:= \frac{l}{\sigma F} = \frac{U}{I} & (3.9) \\ [R] &= \frac{V}{A} =: 1\Omega \\ [\sigma] &= (\Omega m)^{-1} \end{aligned}$$

3.2 Die magnetische Induktion \mathbf{B}

3.2.1 Definition und experimentelle Basis

Elektrostatik (Coulomb):

- Ladungen sind die Ursache von E-Feldern.
- Ladungen erfahren Kraftwirkungen in Feldern.

Magnetostatik (Ørsted):

- Ströme sind die Ursache von B-Feldern.
- Magnetische Dipole erfahren Drehmomente in B-Feldern.
- Bewegte Ladungen erfahren Kraftwirkungen. (Lorentz)

Das B-Feld wird über die zweite Aussage definiert:

Ein magnetischer Dipol \mathbf{m} erfährt im Feld \mathbf{B} das Drehmoment

$$\mathbf{D} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \quad (3.10)$$

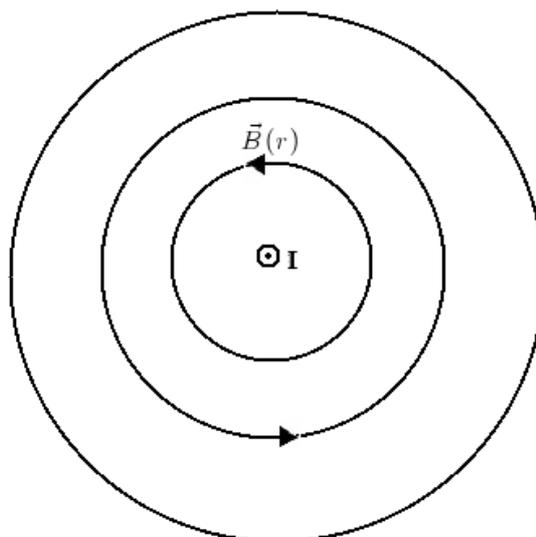
(Ausrichtung von 'Probedipolen')

Definition des B-Feldes:

$$|\mathbf{B}| = \lim_{m \rightarrow 0} \frac{|\mathbf{D}|}{|\mathbf{m}| \sin \phi}$$

(Richtung: Kreuzprodukt)

Ørsted-Experiment:



$$B(r) = 2k_m \frac{I}{r} \quad (3.11)$$

$$k_m^{SI} = \frac{\mu_0}{4\pi} \quad \text{mit} \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \quad (3.12)$$

(μ_0 : magnetische Feldkonstante)

$$\begin{aligned} \Rightarrow [B] &= \frac{\text{kg} \cdot \text{m} \text{ A}}{\text{C}^2 \text{ m}} = \frac{\text{kg}}{\text{Cs}} = \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = 1 \text{ Tesla,} \\ [m] &= \left[\frac{D}{B} \right] = \frac{\text{Nm}^3}{\text{Vs}} = \text{Am}^2. \end{aligned}$$

3.2.2 Gesetz von Ampère

a) Integralform

$$\begin{aligned} \text{Ørsted} &\Leftrightarrow 2\pi r B(r) = \mu_0 I \\ \Rightarrow &\boxed{\oint_K \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 I} \quad (3.13) \end{aligned}$$

Ampères Gesetz

(Gilt allgemein für geschlossene Kurven um Leiter.)

b) Differentielle Form

$$\begin{aligned} \oint_{\partial F} \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} &\stackrel{\text{Stokes}}{=} \iint_F (\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r})) \cdot d\mathbf{f} \\ \mu_0 I &= \mu_0 \iint_F \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f}. \end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned} \text{Ampère} &\Leftrightarrow \iint_F (\nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{j}) \cdot d\mathbf{f} = 0 \\ \Rightarrow &\boxed{\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}} \quad (3.14) \end{aligned}$$

3.2.3 Lösungsformel(n) für einfache Fälle

a) Lösung der Ampèreschen DGL

Behauptung:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' \quad (3.15)$$

löst $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ für $\text{RB } \mathbf{j}(\mathbf{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$.

Beweis:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \times \nabla \times \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(\nabla \left(\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \underbrace{-\Delta \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}_{=4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \right) \mathbf{j}(\mathbf{r}') d^3 r' \\ &= T_1 + \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

Wir zeigen, dass $T_1 = 0$:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \int \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \mathbf{j}(\mathbf{r}') d^3 r' \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \int \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \mathbf{j}(\mathbf{r}') d^3 r' \\ &\stackrel{\nabla \cdot \mathbf{j}=0}{=} -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \int \left(\nabla' \cdot \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d^3 r' \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \oint_{\partial \mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{f}' \\ &= 0, \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Bemerkungen:

- (i) Umschreibung
Behauptung:

$$\boxed{\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3 r'} \quad (3.16)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3 r' &= - \int \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' \\ &= \nabla \times \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' \quad , \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

- (ii)

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{B} = 0}, \quad (3.17)$$

denn $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{G}) = 0 \quad \forall \mathbf{G}$.

„Es gibt keine magnetischen Monopole.“

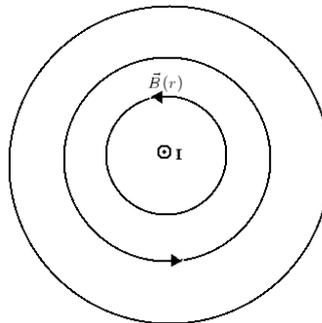
Daher Integralform:

$$\Phi_F^{mag} := \oiint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{B} d^3r = 0.$$

b) Formel von Biot-Savart

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \underbrace{d^3r'}_{=df' ds'} \\ &\stackrel{\text{„dünne Leiter“}}{\approx} \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{e}_{j'} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \left(\iint |\mathbf{j}(\mathbf{r}')| df' \right) ds' \\ &\Rightarrow \boxed{\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \times ds'} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Beispiel: B-Feld eines langen dünnen Leiters (Strom I)



$$ds' = (0, 0, dz')$$

$$\Rightarrow \left| ds' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right| = \frac{dz'}{R^2} \sin \phi'$$

$$\sin \phi' = \sin(\pi - \phi') = \frac{r}{R},$$

$$R = \sqrt{r^2 + z'^2}$$

$$\Rightarrow B(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I r}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{[r^2 + z'^2]^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

3.3 Das Vektorpotential

3.3.1 Definition und Grundform für einfache RB

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \\ \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{B} &= \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad \forall \mathbf{A}\end{aligned}\tag{3.19}$$

- Einfache RB:

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' \\ \Rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r'\end{aligned}\tag{3.20}$$

vgl. E-Statik:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r'$$

- Allgemein:

$$\mu_0 \mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}\tag{3.21}$$

3.3.2 Uneindeutigkeit von \mathbf{A} und Eichfreiheit

E-Statik:

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}(\mathbf{r}) &= \Phi(\mathbf{r}) + C \quad (\text{uneindeutig}) \\ \Rightarrow \mathbf{E} &= -\nabla\Phi = -\nabla\tilde{\Phi} \quad (\text{eindeutig!})\end{aligned}$$

M-Statik:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) &= \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla\Psi(\mathbf{r}) \quad (\text{uneindeutig}) \\ \Rightarrow \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \tilde{\mathbf{A}} \quad (\text{eindeutig!})\end{aligned}$$

Transformationen von \mathbf{A} nach $\tilde{\mathbf{A}}$ bzw. von Φ nach $\tilde{\Phi}$ nennt man „Eichtransformationen“

Satz:

Man kann $\Psi(\mathbf{r})$ stets so festlegen, dass $\nabla \cdot \tilde{\mathbf{A}} = 0$.

Beweis:

Sei $f = \nabla \cdot \mathbf{A}$.

$$\begin{aligned}\Rightarrow \nabla \cdot \tilde{\mathbf{A}} &= \nabla \cdot (\mathbf{A} + \nabla\Psi) = f + \Delta\Psi \\ \Rightarrow \boxed{\nabla \cdot \tilde{\mathbf{A}} = 0 \Leftrightarrow \Delta\Psi = -f}\end{aligned}\tag{3.22}$$

„Coulombeichung“

In dieser Eichung folgt aus dem Ampèreschen Gesetz:

$$\boxed{\Delta \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}}. \quad (3.23)$$

Bemerkung:

Für

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r'$$

ist $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$.

Beweis:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla' \cdot \left(\mathbf{j}(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d^3r' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int \underbrace{(\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}'))}_{=0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\partial R^3} \mathbf{j}(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \cdot d\mathbf{f}' = 0 \quad \text{für } \lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0. \end{aligned}$$

3.3.3 Taylorentwicklungen für lokalisierte Stromverteilungen und das magnetische (Dipol-)Moment

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \stackrel{r \gg r'}{\approx} \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3} + \dots \quad (3.24)$$

a) Grundform von \mathbf{A}

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{1}{r} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}') d^3r' + \frac{1}{r^3} \int (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{j}(\mathbf{r}') d^3r' \right)$$

• Monopolterm:

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}') d^3r' = 0. \quad (3.25)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \int j_m(\mathbf{r}') d^3r' &= \int \nabla' \cdot (r'_m \mathbf{j}(\mathbf{r}')) d^3r' - \int r'_m \underbrace{(\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}'))}_{=0} d^3r' \\ &= \iiint_{\partial R^3} r'_m \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{f}' = 0, \end{aligned}$$

falls $|\mathbf{j}|$ schneller abfällt als $\frac{1}{r^3}$.

- Dipolterm

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \int (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{j}(\mathbf{r}') d^3 r' \quad (3.26)$$

Zutaten:

$$(i) \quad \int r'_n j'_m d^3 r' = - \int r'_m j'_n d^3 r' \quad (3.27)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (r_m r_n \mathbf{j}) &= r_n j'_m + r_m j'_n + r_m r_n \underbrace{(\nabla \cdot \mathbf{j})}_{=0} \\ \Rightarrow \int r'_n j'_m + r'_m j'_n d^3 r' &= \int \nabla' \cdot (r'_m r'_n \mathbf{j}) d^3 r' = \oint_{\partial \mathbb{R}^3} r'_m r'_n \mathbf{j} df' = 0, \end{aligned}$$

falls $|\mathbf{j}|$ schneller abfällt als $\frac{1}{|\mathbf{r}|^4}$.

$$(ii) \quad \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \quad (3.28)$$

Damit:

◁ m-te Komponente:

$$\begin{aligned} &\sum_n r_n \int r'_n j'_m(\mathbf{r}') d^3 r' \\ \stackrel{(i)}{=} &\frac{1}{2} (\sum_n r_n \int r'_n j'_m d^3 r' - \int j'_n r'_m d^3 r') \\ \Rightarrow &\int (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{j}(\mathbf{r}') d^3 r' = \frac{1}{2} (\int (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{j}(\mathbf{r}') d^3 r' - \int (\mathbf{r} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}')) \mathbf{r}' d^3 r') \\ \stackrel{(ii)}{=} &\frac{1}{2} \mathbf{r} \times \int \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \mathbf{r}' d^3 r' \end{aligned}$$

Definition: Magnetisches Dipolmoment

$$\mathbf{m} := \frac{1}{2} \int \mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}') d^3 r' \quad (3.29)$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbf{A}(\mathbf{r}) \approx \mathbf{A}_1(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi r^3} (\mathbf{r} \times \mathbf{m}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}} \quad (3.30)$$

vgl. E-Statik:

$$\Phi_D(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$$

Somit:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \\ &\approx \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right) \end{aligned} \quad (3.31)$$

vgl. E-Statik:

$$\mathbf{E}_D(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right)$$

b) Biot-Savart-Form

Dünne Leiter:

$$\mathbf{j} d^3r' \rightarrow I ds' \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} d^3r' \rightarrow \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int ds' \times \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} = \mathbf{B}^{BS}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3r' \rightarrow \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{ds'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \mathbf{A}^{BS}(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (3.33)$$

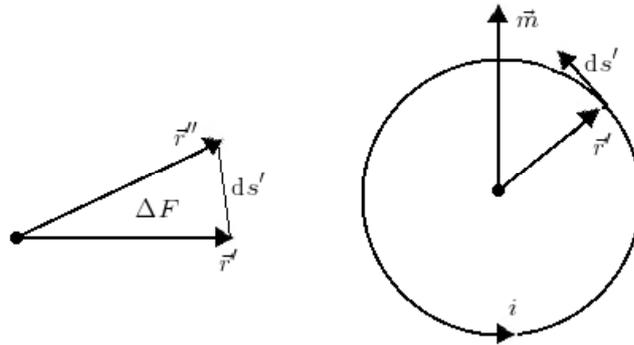
$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int (\mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}')) d^3r' \rightarrow \frac{I}{2} \int \mathbf{r}' \times ds' = \mathbf{m}^{BS}. \quad (3.34)$$

Geschlossene Stromschleife:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{BS}(\mathbf{r}) &\approx \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint ds' \left(\frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3} \right) \\ &= \mathbf{A}_1^{Bl}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m}^{BS} \times \mathbf{r}}{r^3}. \end{aligned}$$

c) Bemerkungen zum magnetischen Moment

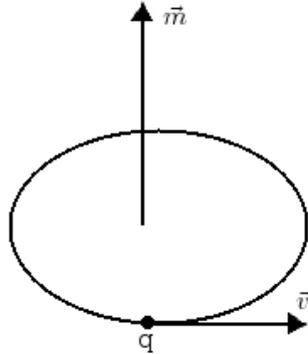
Beispiel 1: Ebene Stromschleife



$$\begin{aligned} \Delta F &\approx \frac{1}{2} |\mathbf{r}'' \times \mathbf{r}'| = \frac{1}{2} |\mathbf{r}' \times (\mathbf{r}'' - \mathbf{r}')| \rightarrow \frac{1}{2} |\mathbf{r}' \times ds'| \\ &\Rightarrow \mathbf{F} = \frac{1}{2} \int \mathbf{r}' \times ds' \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\Rightarrow \mathbf{m} = I\mathbf{F} \quad (3.36)$$

Beispiel 2: Punktladung auf (geschlossener) Bahn



$$\begin{aligned}
 \mathbf{j}_{PL} &= q\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0(t))\mathbf{v}_0 \\
 \Rightarrow \mathbf{m} &= \frac{1}{2} \int \mathbf{r}' \times \mathbf{j}_{PL}(\mathbf{r}') d^3r' \\
 &= \frac{q}{2} \mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0 = \frac{q}{2m} \mathbf{l}
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

Bemerkungen:

(i) • $\mathbf{A}_1(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}$: \mathbf{m} verursacht Magnetfeld

• $\mathbf{D} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$ \mathbf{m} richtet sich in Magnetfeld aus.

(ii) $\mathbf{m} \propto \mathbf{l}$ gilt auch in QM.

(iii) Messe magnetische Momente (\rightarrow Drehimpulse) von Quantenteilchen über deren Reaktion auf B-Felder
 \rightarrow Spinhypothese.

3.4 Kräfte und Drehmomente auf (bewegte) Ladungen

3.4.1 Das Lorentzsche Kraftgesetz

$$\mathbf{F}_{mag} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{3.38}$$

• Magnetische Kraftwirkung auf *bewegte* Ladungen

• $\mathbf{F}_{mag} \perp \mathbf{v}, \mathbf{B}$

Erweiterung: Kraft auf Ladung in E - und B -Feld:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} \triangleleft m\dot{\mathbf{v}} &= q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \\ \Rightarrow m\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} &= q(\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}) \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} v^2 \right) &= q(\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}) = -q \nabla \Phi \cdot \mathbf{v} \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} v^2 + q\Phi \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{m}{2} v^2 + q\Phi &= \text{const.} \end{aligned} \quad (3.40)$$

Bemerkung:

$W = \frac{m}{2} v^2 + q\Phi = W(t)$ gilt in *Elektrodynamik*.

a) Einfache Anwendung: Punktladung im homogenen B -Feld

$$\mathbf{B} = (0, 0, B)$$

BWGl:

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{r}} &= q(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}) = qB \begin{pmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \\ 0 \end{pmatrix}. \\ \Rightarrow z(t) &= z_0 + v_{0z}t \end{aligned} \quad (3.41)$$

Definition:

$$\omega := \frac{q}{m} B \quad \text{Larmor-Frequenz} \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \dot{v}_x = \omega v_y \\ \ddot{y} &= \dot{v}_y = -\omega v_x \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \dot{v}_y &= \frac{\ddot{x}}{\omega} = -v_x \\ \Leftrightarrow \ddot{v}_x + \omega^2 v_x &= 0 \\ \Rightarrow v_x(t) &= v_0 \cos(\omega t + \delta) \end{aligned} \quad (3.44)$$

Einsetzen in erste Gleichung:

$$\Rightarrow v_y(t) = v_0 \sin(\omega t + \delta) \quad (3.45)$$

$$\Rightarrow v_x^2 + v_y^2 = v_0^2 = \text{const}$$

Integrieren:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_x + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t + \delta) \\ y(t) &= A_y + \frac{v_0}{\omega} \cos(\omega t + \delta) \end{aligned} \quad (3.46)$$

das Teilchen beschreibt also eine Schraubenlinie; der Radius ihrer Projektion auf die xy-Ebene ist

$$R = \sqrt{(x - A_x)^2 + (y - A_y)^2} = \frac{v_0}{\omega} = \frac{mv_0}{qB}.$$

Umlaufzeit:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB}.$$

Anwendung: Bestimme $\frac{q}{m}$ durch Messung von T.

b) Wechselseitige magnetische Kraftwirkung zweier PL

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1(\mathbf{r}_2) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{j}_1(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'|^3} d^3r' \\ \text{mit } \mathbf{j}_1(\mathbf{r}') &= q_1 \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_1) \mathbf{v}_1 \\ \Rightarrow \mathbf{B}_1(\mathbf{r}_2) &= \frac{\mu_0}{4\pi} q_1 \frac{\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \end{aligned} \quad (3.47)$$

\Rightarrow Kraft auf das zweite Teilchen:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{12}^{mag} &= q_2 (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{B}_1(\mathbf{r}_2)) \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} q_1 q_2 \frac{\mathbf{v}_2 \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{r}_{12})}{r_{12}^3} \end{aligned} \quad (3.48)$$

Analog:

$$\mathbf{B}_2(\mathbf{r}_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} q_2 \frac{\mathbf{v}_2 \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \quad (3.49)$$

$$\mathbf{F}_{21}^{mag} = -\frac{\mu_0}{4\pi} q_1 q_2 \frac{\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{r}_{12})}{r_{12}^3} \quad (3.50)$$

i.A.:

$$\boxed{\mathbf{F}_{12}^{mag} \neq -\mathbf{F}_{21}^{mag}}, \quad (3.51)$$

d.h. Impuls- und Drehimpulssatz werden verletzt.

Ausweg: Einbeziehung des Feldimpulses in Diskussion der Erhaltungssätze (Kap. 4.3)

Illustration:

q_1 bewegt sich (momentan) in x-Richtung,

q_2 bewegt sich (momentan) in y-Richtung und befindet sich auf x-Achse

$$\Rightarrow \mathbf{B}_1(\mathbf{r}_2) = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{F}_{12}^{mag} = 0,$$

aber $\mathbf{B}_2(\mathbf{r}_1) \neq 0$

$$\Rightarrow \mathbf{F}_{21}^{mag} \neq 0$$

3.4.2 Kraft und Drehmoment auf stationäre Ströme

◁ magnetische Kraft auf N PL:

$$\mathbf{F}_{mag} = \sum_i q_i (\mathbf{v}_i \times \mathbf{B})$$

$$\text{mit } \mathbf{j}(\mathbf{r}) = \sum_i q_i \mathbf{v}_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$$

also für kontinuierliche Stromdichten:

$$\mathbf{F}_{mag} = \int \mathbf{j}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) d^3r \quad (3.52)$$

Dünnere Leiter: ($\mathbf{j} d^3r \rightarrow I ds$)

$$\mathbf{F}_{mag}^{BS} = I \int ds \times \mathbf{B} \quad (3.53)$$

Drehmoment:

$$\mathbf{D} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{mag} = \sum_i q_i \mathbf{r}_i \times (\mathbf{v}_i \times \mathbf{B})$$

$$\Rightarrow \mathbf{D} = \int \mathbf{r} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) d^3r \quad (3.54)$$

$$\mathbf{D}^{BS} = I \int \mathbf{r} \times (ds \times \mathbf{B}) d^3r \quad (3.55)$$

Umschreibung:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \int (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{j} d^3r - \int (\mathbf{r} \cdot \mathbf{j}) \mathbf{B} d^3r \\ &=: T_1 - T_2. \end{aligned}$$

Für homogenes Feld: $T_2 = \mathbf{B} \int \mathbf{r} \cdot \mathbf{j} d^3r = 0$ (Spezialfall von 3.27).

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \mathbf{D} &= \int (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{j} d^3r \\
&= \frac{1}{2} \int \mathbf{j} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) d^3r - \frac{1}{2} \int \mathbf{r} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{j}) d^3r \\
&= \frac{1}{2} \mathbf{B} \times \int \mathbf{j} \times \mathbf{r} d^3r = -\mathbf{m} \times \mathbf{B}
\end{aligned} \tag{3.56}$$

Potentielle Energie des Dipols:

$$\begin{aligned}
U &= \int \mathbf{D}(\phi') \cdot \mathbf{e}_n d\phi' = mB \int \sin \phi' d\phi' \\
&= -mB \cos \phi = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}
\end{aligned} \tag{3.57}$$

Bemerkungen:

- (i) $U = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$ gilt auch in QM.
→ Aufspaltung von Energieniveaus im B-Feld (Zeemaneffekt)
- (ii) Kraft auf Dipol:

$$\mathbf{F} = -\nabla U = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) \neq 0,$$

falls \mathbf{B} inhomogen.

Genauer: [Jac], Kap. 5.7

Anwendung: Stern-Gerlach-Experiment (1922):
Ablenkung von Atomstrahlen im inhomogenen B-Feld aufgrund magnetischer (Spin-)Momente.

- (iii) Magnetische Kraftwirkung zwischen dünnen Leiterstücken

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$$

für geschlossene oder ins Unendliche reichende Leiterstücke.

[DL], Kap. 5.5

[Jel], Kap. 4.4f

3.5 Materie im Magnetfeld

- Wie wirken B-Felder auf Materie?
- Wie werden B-Felder durch Anwesenheit von Materie modifiziert?
Pauschale phänomenologische Modelle → 'makroskopische Magnetostatik'
($\hat{=}$ Theorie für makroskopische Mittelwerte)

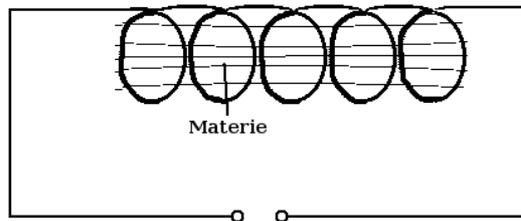
Lit:

[Jel], Kap. 9

[Jac], Kap. 6.7

3.5.1 Grundphänomenen und Modellvorstellungen

a) Grundexperiment



$$\mathbf{B}_{mat} = \mu_r \mathbf{B} \quad (3.58)$$

b) Pauschale Magnetisierungsmodelle

Atomare/molekulare magnetische Dipole (aufgrund zirkulierender Elektronen und derer Spins) werden in B-Feld erzeugt oder ausgerichtet und erzeugen Zusatzfeld.

Diamagnetismus	Paramagnetismus	Ferromagnetismus
Dipole werden induziert	individuelle Ausrichtung der Dipole	<u>kollektive</u> Ausrichtung
$\mu_r < 1$ H_2O	$\mu_r > 1$ Al	$\mu_r \gg 1$ Fe

Formal ist das Zusatzfeld gegeben durch

$$\mathbf{A}_{Dipol} \stackrel{3.30}{=} \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_i \frac{\mathbf{m}_i \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}. \quad (3.59)$$

Aus praktischer Sicht ist diese Formel unbrauchbar, da die Summe typischerweise über 10^{23} Teilchen geht und die Verteilung der Elementardipole nicht bekannt ist. Die Formel ist aber der Ausgangspunkt für die makroskopische Umsetzung der Modellvorstellungen, die im nächsten Abschnitt behandelt wird.

c) Die Magnetisierung

Definition:

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}') = \sum_{\alpha} N_{\alpha} \langle \mathbf{m}_{\alpha} \rangle(\mathbf{r}') \quad (3.60)$$

N_{α} : Zahl der Moleküle vom Ty α pro Volumen.

$\langle \mathbf{m}_{\alpha} \rangle(\mathbf{r}')$ mittleres Dipolmoment der α -Moleküle am Ort \mathbf{r}' .

$$\langle \mathbf{m}_{\alpha} \rangle = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \mathbf{m}_{\alpha}(\mathbf{r}_{\alpha}) d^3 r_{\alpha}$$

\Rightarrow Vektorpotential der Dipolverteilung:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{Dipol}(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{A}_M(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3 r' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V' \supset V} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3 r' \end{aligned} \quad (3.61)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' \quad (3.62)$$

Zutaten zur weiteren Umformung:

(i)

$$\begin{aligned} \nabla \times (\phi \mathbf{F}) &= \phi (\nabla \times \mathbf{F}) + (\nabla \phi \times \mathbf{F}) \\ \Leftrightarrow \mathbf{F} \times \nabla \phi &= \phi (\nabla \times \mathbf{F}) - \nabla \times (\phi \mathbf{F}) \end{aligned} \quad (3.63)$$

(ii)

$$\int_V \nabla \times \mathbf{F} d^3 r = \oint_{\partial V} d\mathbf{f} \times \mathbf{F}$$

(Beweis: [Greb])

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \mathbf{A}_M(\mathbf{r}) &\stackrel{(i)}{=} \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\int_{V'} \frac{\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' - \underbrace{\int_{V'} \nabla' \times \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r'}_{=:T_2} \right) \\
T_2 &\stackrel{(ii)}{=} \oint_{\partial V'} \frac{d\mathbf{f}' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = 0 \\
\Rightarrow \quad \mathbf{A}_M(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' \quad (3.64)
\end{aligned}$$

Definition: Magnetisierungsstromdichte

$$\mathbf{j}_m(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{r}) \quad (3.65)$$

$$\Rightarrow \mathbf{A}_m(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}_m(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' \quad (3.66)$$

vgl. E-Statik:

$$\begin{aligned}
\rho_b &= -\nabla \cdot \mathbf{P} \\
\Rightarrow \Phi_D(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_b(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r'
\end{aligned}$$

3.5.2 Formale Fassung der Situation mittels zweier Hilfsfelder

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}_w(\mathbf{r}) + \mathbf{j}_M(\mathbf{r}) \quad (3.67)$$

\mathbf{j}_w : 'wahrer' Strom

'Resultierendes' B-Feld:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} = \mu_0 (\mathbf{j}_w + \mathbf{j}_M) \quad (3.68)$$

(Empirischer Fakt: Es gilt nach wie vor $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$.)

$$\nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{j}_M = \nabla \times (\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{M}) = \mu_0 \mathbf{j}_w \quad (3.69)$$

Definition: Magnetische Feldstärke

$$\mathbf{H} := \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \quad (3.70)$$

$$\Rightarrow \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_w \quad (3.71)$$

Wiederholung:

$$[B] = \frac{Vs}{m^2} = \text{Tesla}$$

$$[H] = [M] = \frac{A}{m}$$

3.5.3 Materialgleichungen

Wiederholung: E-Statik:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}[\mathbf{E}] \approx \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$$

M-Statik:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}[\mathbf{B}] \approx \frac{\chi'_m}{\mu_0} \mathbf{B}$$

Üblicher Ansatz:

$$\mathbf{M} = \chi_M \mathbf{H} \quad (\text{linear response}) \quad (3.72)$$

(für Dia- und Paramagnetismus)

χ_M : magnetische Suszeptibilität

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathbf{H} &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \chi_m \mathbf{H} \\ \Leftrightarrow \mathbf{B} &= \mu_0 (1 + \chi_M) \mathbf{H} \\ &=: \mu_0 \mu_r \mathbf{H}. \end{aligned} \quad (3.73)$$

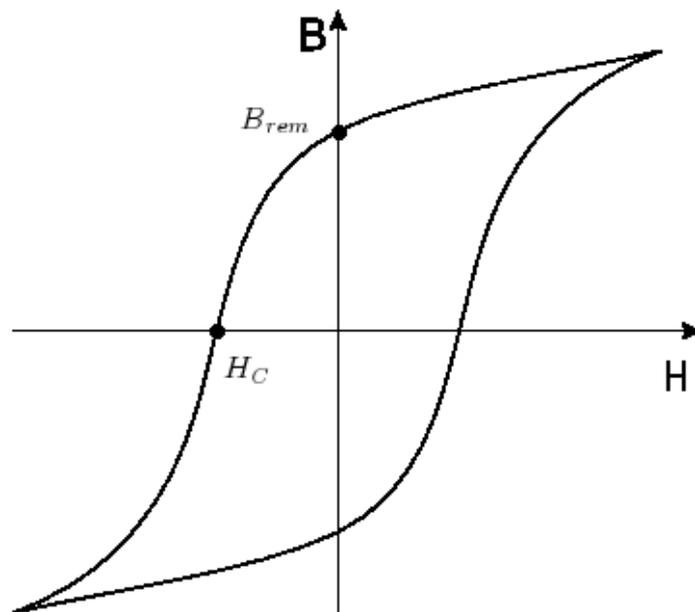
(μ_r : relative Permeabilitätszahl)

Ferromagnetika:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mu_r(\mathbf{H}(\mathbf{r})) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}) = f(\mathbf{H}(\mathbf{r}))$$

(nichtlinear)

Beispiel: Spule mit Eisenkern: $H \propto I$



Hystereseschleife

Lit: [Blö], Kap. 7.3

3.5.4 Zusammenfassung und Gegenüberstellung der Grundgleichungen

a) Feldgleichungen

E-Statik	M-Statik
$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
$\nabla \times \mathbf{E} = 0$	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_f$

b) Materialgleichungen (für einfache Fälle)

$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}$	$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}$
---	---------------------------------------

c) Potentialgleichungen (für einfache Fälle)

$\mathbf{E} = -\nabla \Phi$	$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$
$\epsilon_0 \epsilon_r \Delta \Phi = -\rho_f$	$\Delta \mathbf{A} = -\mu_0 \mu_r \mathbf{j}_w$

d) Polarisation und Magnetisierung

E-Statik	M-Statik
$\mathbf{P} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \mathbf{E}$	$\mathbf{M} = (\mu_r - 1) \mathbf{H}$
$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \epsilon_0 \mathbf{E}$	$\mathbf{M} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{H}$
$\nabla \cdot \mathbf{P} = -\rho_b$	$\nabla \times \mathbf{M} = \mathbf{j}_M$

e) Energiedichte

$w_{el} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$	$w_{mag} = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}$
--	---

f) Randbedingungen an Grenzflächen

$D_{a,n} = D_{i,n}$	$B_{a,n} = B_{i,n}$	stetig
$\epsilon_a E_{a,n} = \epsilon_i E_{i,n}$	$\mu_a H_{a,n} = \mu_i H_{i,n}$	unstetig
$E_{a,t} = E_{i,t}$	$H_{a,t} = H_{i,t}$	stetig
$\epsilon_i D_{a,t} = \epsilon_a D_{i,t}$	$\mu_i B_{a,t} = \mu_a B_{i,t}$	unstetig

(Unter der Annahme, dass $\sigma_f = \mathbf{j}_f = 0$ auf Grenzflächen)

Kapitel 4

Elektrodynamik I: Grundlagen

E-Statik : $\rho(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r})$

M-Statik : $\mathbf{j}(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{r})$

E-Dynamik: $\rho(\mathbf{r}, t), \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$.

→ Modifikation der Feldgleichungen.

Aber:

Kontinuitätsgleichung und Lorentzkraftgesetz haben Bestand:

$$\partial_t \rho(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0$$

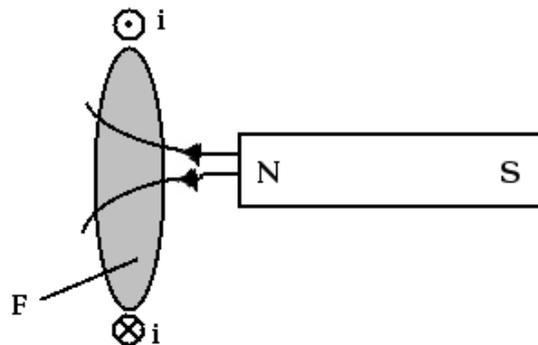
$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = q(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v}(t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t))$$

4.1 Die Maxwell-Gleichungen

4.1.1 Das Faradaysche Induktionsgesetz

a) Grundexperimente und praktische Form des Induktionsgesetzes

Ein Magnetfeld greife durch eine Stromschleife.



Bewege Permanentmagnet und messe $I(t)$.

$$\llcorner \quad \Phi_F^{mag} = \Phi_F^{mag}(t) = \int_F \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{f}$$

Beobachtung:

$$I_{ind}(t) = -\tilde{k} \frac{d}{dt} \Phi_F^{mag}(t) \quad (4.1)$$

„Induktionsstrom ist so gerichtet, dass das von ihm hervorgerufene Magnetfeld \mathbf{B}_{ind} der Änderung des Flusses entgegenwirkt.“
(Lenzsche Regel)

Umschreibung mit dem Ohmschen Gesetz:

$$\begin{aligned} U_{ind}(t) &= RI_{ind}(t) \\ &= -R\tilde{k} \dot{\Phi}_F^{mag} \\ &= -k_{ind} \dot{\Phi}_F^{mag} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Im SI-System gilt:

$$k_{ind}^{SI} = 1,$$

was mehr als eine empirische Tatsache ist, wie wir sehen werden.
Also folgt die endgültige Form des Gesetzes:

$$U_{ind}(t) = -\dot{\Phi}_F^{mag} \quad (4.3)$$

b) Differentielle Form des Induktionsgesetzes

$$U_{ind}(t) = \oint_{\partial F} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r} \quad (4.4)$$

$$\stackrel{\text{Faraday}}{\Rightarrow} \oint_{\partial F} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r} = -\frac{d}{dt} \iint_F \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{f} \quad (4.5)$$

für eine unbewegte Fläche:

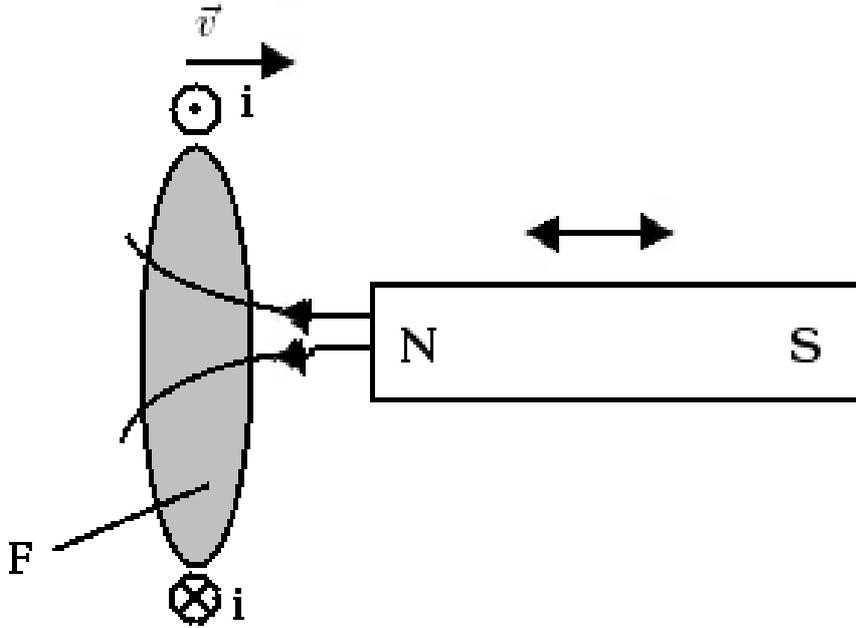
$$\frac{d}{dt} \iint_F \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{f} = \iint_F \partial_t \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{f}$$

$$\begin{aligned} \stackrel{\text{Stokes}}{\Rightarrow} \oint_{\partial F} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r} &= \iint_F \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{f} \\ &= -\iint_F \partial_t \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{f} \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \partial_t \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0} \quad (4.7)$$

Man sieht sofort: Falls $\partial_t \mathbf{B} = 0$, so ist $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ (Statik)

c) Variante des Grundexperiments und Galilei-Invarianz



bewegter Magnet, bewegte Schleife, $\partial_t \mathbf{B} \neq 0$.

Faraday:

$$\oint_{\partial F} \mathbf{E}'(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r} = -\frac{d}{dt} \int_F \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{f}$$

\mathbf{E}' : Feldstärke aus Sicht der Leiterschleife.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{F(t)} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{f} &= \frac{d}{dt} \int_F \mathbf{B}(\mathbf{r}(t), t) \cdot d\mathbf{f} \\ &= \int_F \frac{d}{dt} \mathbf{B}(\mathbf{r}(t), t) \cdot d\mathbf{f} = \int_F \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} \end{aligned}$$

Hilfsrelation:

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) &= \mathbf{C}(\nabla \cdot \mathbf{D}) + (\mathbf{D} \cdot \nabla) \mathbf{C} - \mathbf{D}(\nabla \cdot \mathbf{C}) - (\mathbf{C} \cdot \nabla) \mathbf{D} \\ \stackrel{\mathbf{v}=\text{const}}{\implies} \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) &= (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \mathbf{v} \underbrace{(\nabla \cdot \mathbf{B})}_{=0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \oint_{\partial F} \mathbf{E}'(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r} &= - \int_F \partial_t \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} - \int_F \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{f} \\ \stackrel{\text{Stokes}}{\Leftrightarrow} \oint_{\partial F} [\mathbf{E}'(\mathbf{r}, t) + (\mathbf{B} \times \mathbf{v})] \cdot d\mathbf{r} &= - \int_F \partial_t \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Wähle $F' = F(t_0) = \text{const.}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow - \int_F \partial_t \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} &= - \int_{F'} \partial_t \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} \\ &= - \frac{d}{dt} \int_{F'} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} \\ &\stackrel{\text{Faraday}}{=} \oint_{\partial F'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{4.8}{=} \oint_{\partial F} (\mathbf{E}' + (\mathbf{B} \times \mathbf{v})) \cdot d\mathbf{f} \\ \Rightarrow \mathbf{E}' &= \mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Interpretation

◁ Punktladung q , die bzgl. einer mit \mathbf{v} bewegten Schleife in Ruhe ist.

Kraft auf q bzgl. S : $\mathbf{F}|_S = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$

Kraft auf q bzgl. S' : $\mathbf{F}|_{S'} = q\mathbf{E}'$

wegen $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{F}|_S = \mathbf{F}|_{S'} \Rightarrow \text{Galilei-Invarianz!}$

Bemerkungen

(i) Galilei-Invarianz ergibt sich, weil $\mathbf{v} = \text{const}$ benutzt wurde.

(ii) $\left. \begin{array}{l} \text{E-Feld} \\ \text{B-Feld} \end{array} \right\} \rightarrow \text{Elektromagnetisches Feld (EM-Feld)}$

(iii) Zur Relativistik:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' = \mathbf{E}'(\mathbf{E}, \mathbf{B}) &\stackrel{v \ll c}{\longrightarrow} \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \\ \text{Lorentz-Trafo} &\longrightarrow \text{Galilei-Trafo (s. Kap VI)} \end{aligned}$$

(iv) $k_{ind} = 1$ folgt aus Konsistenz von Faraday- und Lorentzkraftgesetz.

4.1.2 Maxwellscher Verschiebungsstrom

◁ Ampèresches Gesetz der M-Statik:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{j}_w =: \mathbf{j} \\ \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{j} &= \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = 0\end{aligned}\quad (4.11)$$

↔ stationäre Ströme

Elektrodynamik:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{j} &= -\partial_t \rho \quad (\text{Kontinuitätsgleichung}) \\ \stackrel{\text{Gauß}}{=} & -\partial_t \nabla \cdot \mathbf{D} = -\nabla \cdot \partial_t \mathbf{D} \\ \Leftrightarrow \nabla \cdot (\mathbf{j} + \partial_t \mathbf{D}) &= 0\end{aligned}\quad (4.12)$$

Definition: Verschiebungsstromdichte

$$\mathbf{j}_v(\mathbf{r}, t) = \partial_t \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \quad (4.13)$$

⇒ Erweiterung von Ampère:

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \mathbf{j}_v = \mathbf{j} + \partial_t \mathbf{D}} \quad (4.14)$$

(erfüllt $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot (\mathbf{j} + \mathbf{j}_v) = 0$).

Bemerkungen

- (i) Anschauung für \mathbf{j}_v :
[DL], S.223f
sowie diverse Experimentalphysik-Lehrbücher
- (ii) – Maxwell führte \mathbf{j}_v 1861/62 anhand eines mechanischen Modells für Medium des EM-Feldes (Äther) ein.

– 1865 folgt formale Diskussion (inkl. Konsistenzbetrachtung zur Kontinuitätsgleichung).

4.1.3 Zusammenfassung der Grundgleichungen

$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	Gauß	(4.15)
$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \partial_t \mathbf{D}$	Ampère	(4.16)
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	keine magnetischen Monopole	(4.17)
$\nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = 0$	Faraday	(4.18)

„Maxwell-Gleichungen“ (MGs)

→ 8 gekoppelte lineare DGL 1. Ordnung.

Des Weiteren:

- Einfache Materialgleichungen:

	Vakuum	Materie
$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$	$\epsilon = \epsilon_0$	$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$
$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$	$\mu = \mu_0$	$\mu = \mu_0 \mu_r$
$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$		$\rho = \rho_f \wedge \mathbf{j} = \mathbf{j}_w$

- Kontinuitätsgleichung:

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (4.19)$$

(Folgerung aus MGs)

- Lorentzkraftgesetz

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) &= q(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)) \quad (4.20) \\ \Rightarrow \mathbf{F}_K(t) &= \int_K \mathbf{f}(\mathbf{r}', t) d^3 r' \end{aligned}$$

mit Kraftdichte

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t)\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (4.21)$$

($\mathbf{F}_K(t)$: Gesamtkraft auf Gebiet K)

Bemerkungen:

- (i) Nimmt man in den Maxwell-Gleichungen wieder stationäre Ströme/Ladungen an, gehen diese in E-Statik/M-Statik über.

(ii) MGls sind symmetrisch unter sogenannten “Dualitätstransformationen“
→ Magnetische Monopole?

- Würden Quantisierung der Ladung „erklären“
(Dirac 1931,1948)
- Sind Bestandteil einiger “grand unified theories“
- Sind bislang nicht experimentell nachgewiesen

[Jac], Kap. 6.12

(iii) MGls in Integralform:

$$\Phi_{\partial V}^D = \oiint_{\partial V} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{f} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{D} d^3r = \int_V \rho d^3r = Q_{\text{ein}} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} Z_F^m &:= \oint_{\partial F} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \iint_F \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f} + \frac{d}{dt} \iint_F \mathbf{D} \cdot d\mathbf{f} \\ &= I_F(t) + \dot{\Phi}_F^D \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\Phi_{\partial V}^B = \oiint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} = 0 \quad (4.24)$$

$$U_{\text{ind}} = \oint_{\partial F} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{d}{dt} \iint_F \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} = -\frac{d}{dt} \Phi_F^B \quad (4.25)$$

→ Ausgangspunkt für Anwendungen (E-Technik etc.)

(iv) Wichtigste Folgerung aus MGl: EM-Wellen (s. Kap. V)

(v) Formale Aspekte

- EM-Potentiale \mathbf{A} , Φ
- Energie- und Impulssatz

(folgen als nächstes)

(vi) MGls sind verträglich mit der speziellen Relativitätstheorie (Kap. VI)

4.2 Elektromagnetische Potentiale

4.2.1 Definition und DGLs

Im folgenden werden die Abkürzungen $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ und $\mu = \mu_0 \mu_r$ benutzt.
Wie in der Magnetostatik wird das Vektorpotential über

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (4.26)$$

definiert.

⇒ Faraday:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} \\ = \nabla \times (\mathbf{E} + \partial_t \mathbf{A}) = 0.\end{aligned}$$

Definition:

$$\begin{aligned}-\nabla\Phi &= \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{A} \\ \Leftrightarrow \mathbf{E} &= -\nabla\Phi - \partial_t \mathbf{A}\end{aligned}\quad (4.27)$$

$$\begin{aligned}\stackrel{\text{Gau\ss}}{\Rightarrow} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \nabla \cdot (-\nabla\Phi - \partial_t \mathbf{A}) \stackrel{!}{=} \frac{\rho}{\epsilon} \\ \Leftrightarrow -\frac{\rho}{\epsilon} &= \Delta\Phi + \partial_t \nabla \cdot \mathbf{A}\end{aligned}\quad (4.28)$$

Analog:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{B} &= \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \stackrel{!}{=} \mu \mathbf{j} + \mu \epsilon \partial_t \mathbf{E} \\ \Leftrightarrow \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} &= \mu \mathbf{j} + \mu \epsilon \partial_t (-\nabla\Phi - \partial_t \mathbf{A}) \\ \Leftrightarrow \Delta \mathbf{A} - \mu \epsilon \partial_t^2 \mathbf{A} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu \epsilon \partial_t \Phi) &= -\mu \mathbf{j}\end{aligned}\quad (4.29)$$

4.2.2 Eichfreiheit und die üblichen Eichungen der ED

a) Coulombeichung (vgl. Kap. 3.3.2)

Eichbedingung:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (4.30)$$

$$\Rightarrow \Delta\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (4.31)$$

$$\Rightarrow \Delta \mathbf{A} - \mu \epsilon \partial_t^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{j} + \epsilon \mu \nabla \partial_t \Phi \quad (4.32)$$

Rezept

(i) Löse Poissongleichung, erhalte Φ .

$$\text{Einfache RB: } \Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r'$$

(ii) Berechne $\nabla \partial_t \Phi$.

(iii) Löse inhomogene DGl für \mathbf{A}

Spezialfall: $\rho = \mathbf{j} = 0$.

$$\Rightarrow \Delta\Phi = 0$$

Triviale Lösung:

$$\Phi = 0 \quad (4.33)$$

$$\Rightarrow \Delta \mathbf{A} - \mu\epsilon \partial_t^2 \mathbf{A} = 0 \quad (4.34)$$

Partikulärlösungen: Ebene Wellen

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}_0 e^{i(\mathbf{kr} \pm \omega t)} \quad (4.35)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \nabla e^{i(\mathbf{kr} \pm \omega t)} &= i\mathbf{k} e^{i(\mathbf{kr} \pm \omega t)} \\ \partial_t e^{i(\mathbf{kr} \pm \omega t)} &= \pm i\omega e^{i(\mathbf{kr} \pm \omega t)} \\ \Rightarrow \Delta \mathbf{A} - \mu\epsilon \partial_t^2 \mathbf{A} &= (\omega^2 \mu\epsilon - k^2) A_0 e^{i(\mathbf{kr} \pm \omega t)} \stackrel{!}{=} 0 \\ \Leftrightarrow \omega = \omega(k) &= \frac{k}{\sqrt{\mu\epsilon}} \end{aligned} \quad (4.36)$$

Interpretation

(i) Physikalische Lösung:

$$\text{Re} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}_0 \cos(i(\mathbf{kr} \pm \omega t + \phi_0))$$

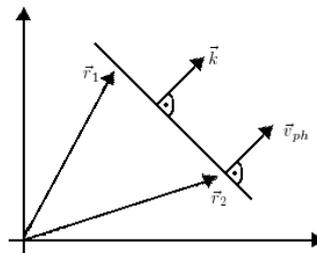
Mit der Phase $\alpha = \mathbf{kr} \pm \omega t + \phi_0$ und $\mathbf{A}_0 \in \mathbb{R}^3$.

(ii)

$$\triangleleft \Psi(\mathbf{r}, t) = A_0 \cos(\mathbf{kr} - \omega t)$$

Orte \mathbf{r} konstanter Phase α_0 sind für $t = t_0$ gegeben durch

$$\mathbf{kr} = \alpha_0 + \omega t_0 = \text{const.}$$

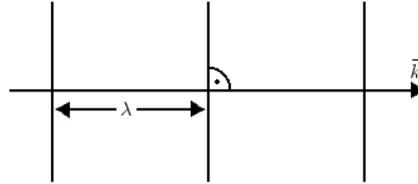


Zeitentwicklung dieser Orte konstanter Phase:

$$\begin{aligned} \alpha(\mathbf{r}, t) = \mathbf{kr} - \omega t &\stackrel{!}{=} \alpha_0 \\ \Leftrightarrow \frac{\alpha_0}{k} + \frac{\omega}{k} t &= \frac{\mathbf{kr}}{k} =: r_{\parallel}(t) \end{aligned}$$

$$\rightarrow v_{ph} := \frac{\omega}{k} \quad (\text{Phasengeschwindigkeit}) \quad (4.37)$$

Insgesamt:



Wellenlänge $\lambda = \frac{2\pi}{k}$, Wellenvektor \mathbf{k} , Kreisfrequenz $\omega = 2\pi\nu$, Periode $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$.

Dispersionsrelation:

$$\begin{aligned} \omega &= v_{ph} k \\ \Leftrightarrow \lambda \nu &= v_{ph} \end{aligned}$$

- Welle bewegt sich mit v_{ph} in Richtung von \mathbf{k} falls $\alpha = \mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t$
- ... entgegen (antiparallel) \mathbf{k} für $\alpha = \mathbf{k}\mathbf{r} + \omega t$

Allgemeine Lösung der Wellengleichung für \mathbf{A} :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} (\mathbf{A}_0(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega(k)t)} + \mathbf{B}_0(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} + \omega(k)t)}) d^3k \quad (4.38)$$

Bemerkungen

(i) Erfüllung der Eichbedingung:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = i \int_{\mathbb{R}^3} (\mathbf{A}_0(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega(k)t)} + \mathbf{B}_0(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} + \omega(k)t)}) d^3k \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0 \perp \mathbf{k}$$

→ transversale Wellen.

(ii)

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} = [\mu\epsilon]^{-1/2} = [\mu_0\epsilon_0]^{-1/2} [\mu_r\epsilon_r]^{-1/2} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r\epsilon_r}} \leq c, \quad (4.39)$$

mit der Vakuumlichtgeschwindigkeit $c \approx 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

(iii) Wellenlösungen der freien Maxwellgleichungen:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \\ \wedge \quad \mathbf{E} &= -\partial_t \mathbf{A} \end{aligned}$$

führt ebenfalls auf transversale Wellen mit $v_{ph} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}}$.

Beweis:

MGLs für $\rho = \mathbf{j} = 0$:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\partial_t \mathbf{B} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \epsilon \mu \partial_t \mathbf{B} \\ \Rightarrow \nabla \times \nabla \times \mathbf{B} &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \Delta \mathbf{B} = \epsilon \mu \partial_t (\nabla \times \mathbf{E}) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\Delta \mathbf{B} = \epsilon \mu \partial_t^2 \mathbf{B}}$$

Analog:

$$\Leftrightarrow \boxed{\Delta \mathbf{E} = \epsilon \mu \partial_t^2 \mathbf{E}} \quad (4.40)$$

→ transversale EM-Wellen mit $v_{ph} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}}$.

b) Lorentzbeziehung

Ausgangspunkt: Ursprüngliche DGL (4.28), (4.29):

$$\Delta \mathbf{A} - \mu \epsilon \partial_t^2 \mathbf{A} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu \epsilon \partial_t \Phi) = -\mu \mathbf{j}$$

$$\Delta \Phi + \partial_t \nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

Eichbedingung:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu \epsilon \partial_t \Phi = 0 \quad (4.41)$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta \mathbf{A} - \mu \epsilon \partial_t^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{j}} \quad (4.42)$$

$$\text{und} \quad \boxed{\Delta \Phi - \mu \epsilon \partial_t^2 \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon}} \quad (4.43)$$

Sei $\tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{A} = \nabla \Psi$

$$\Rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \tilde{\mathbf{A}} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla \Phi - \partial_t \mathbf{A} \stackrel{!}{=} -\nabla \tilde{\Phi} - \partial_t \tilde{\mathbf{A}} \\ &= -\nabla \tilde{\Phi} - \partial_t \mathbf{A} - \partial_t \nabla \Psi \\ \Leftrightarrow \nabla(\tilde{\Phi} - \Phi) &= -\partial_t \nabla \Psi \end{aligned}$$

Dies wird gelöst von

$$\tilde{\Phi} - \Phi = -\partial_t \Psi, \quad (4.45)$$

Also werden \mathbf{E}, \mathbf{B} von der Eichtrafo

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} \rightarrow \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \nabla \Psi \\ \Phi \rightarrow \tilde{\Phi} = \Phi - \partial_t \Psi \end{pmatrix}$$

nicht geändert. Wir prüfen, ob es für beliebige \mathbf{A}, Φ eine Eichfunktion Ψ gibt, sodass die Lorentzbedingung erfüllt wird:

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla \cdot \tilde{\mathbf{A}} + \mu\epsilon \partial_t \tilde{\Phi} \\ &= \nabla \cdot (\mathbf{A} + \nabla \Psi) + \mu\epsilon \partial_t (\Phi - \partial_t \Psi) \\ &= \nabla \cdot \mathbf{A} + \Delta \Psi + \mu\epsilon \partial_t \Phi - \mu\epsilon \partial_t^2 \Psi \\ \Leftrightarrow \Delta \Psi - \mu\epsilon \partial_t^2 \Psi &= -(\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu\epsilon \partial_t \Phi) \end{aligned} \quad (4.46)$$

Diese Bedingung ist für vernünftige Inhomogenitäten stets erfüllbar, somit existiert Ψ und die Lorentzbedingung ist stets möglich.

Zur Lösung der DGL (4.42), (4.43) in der Lorentzbedingung:

$$\triangleleft (\Delta - \mu\epsilon \partial_t^2) f(\mathbf{r}, t) = -g(\mathbf{r}, t) \quad (4.47)$$

Definition: Greensche Funktion G durch

$$(\Delta - \mu\epsilon \partial_t^2) G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t') \quad (4.48)$$

(Vgl. GF in E-Statik: Kap. 2.3.3)

G entspricht also dem Potential einer Punktladung $q = \epsilon_0$, die sich zum Zeitpunkt $t = t'$ am Ort $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ befindet.

Behauptung:

$$f(\mathbf{r}, t) = \int d^3 r' \int dt' [G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') g(\mathbf{r}', t')] \quad (4.49)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} (\Delta - \mu\epsilon \partial_t^2) f(\mathbf{r}, t) &= \int d^3 r' \int dt' [g(\mathbf{r}', t') (\Delta - \mu\epsilon \partial_t^2) G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')] \\ &\stackrel{4.48}{=} \int d^3 r' \int dt' [g(\mathbf{r}', t') (-\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t'))] \\ &= -g(\mathbf{r}, t), \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

•

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\omega \int d^3 k \left[e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} e^{i\omega(t-t')} \right]$$

- Ansatz:

$$G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\omega \int d^3k \left[g(\mathbf{k}, \omega) e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} e^{i\omega(t-t')} \right] \quad (4.50)$$

Damit:

$$\begin{aligned} & (\Delta - \mu\epsilon\partial_t^2)G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\omega \int d^3k \left[g(\mathbf{k}, \omega)(\Delta - \mu\epsilon\partial_t^2)e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} e^{i\omega(t-t')} \right] \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d\omega \int d^3k \left[g(\mathbf{k}, \omega)(k^2 - \epsilon\mu\omega^2)e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} e^{i\omega(t-t')} \right] \\ &\stackrel{!}{=} -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d\omega \int d^3k \left[e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} e^{i\omega(t-t')} \right] \\ \Leftrightarrow 0 &= \int d\omega \int d^3k \left[g(\mathbf{k}, \omega)(k^2 - \epsilon\mu\omega^2) - 1 \right] e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} e^{i\omega(t-t')} \\ \Leftrightarrow & \boxed{g(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{k^2 - \epsilon\mu\omega^2}} \quad (4.51) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\omega \int d^3k \left[\frac{e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} e^{i\omega(t-t')}}{k^2 - \epsilon\mu\omega^2} \right] \\ &= G(\mathbf{r} - \mathbf{r}'; t - t') \end{aligned} \quad (4.52)$$

G hat Divergenzen für $k = \pm\omega\sqrt{\epsilon\mu}$.

- Integral kann berechnet werden für Zusatzbedingungen

$$\text{entweder } G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = 0 \quad \text{für } t - t' < 0 \quad (1)$$

$$\text{oder } G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = 0 \quad \text{für } t - t' > 0 \quad (2)$$

(1) entspricht Forderung nach Kausalität

$G = G^+$ 'retardierte GF'

(2) widerspricht Kausalitätsprinzip

$G = G^-$ 'avancierte GF'

Physikalische Lösung (s. Anhang C):

$$G^+(\mathbf{r} - \mathbf{r}'; t - t') = \begin{cases} 0 & t < t' \\ \frac{1}{4\pi} \frac{\delta(t-t'-\sqrt{\epsilon\mu}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} & t \geq t' \end{cases}$$

Lit: [Jel], Kap. 6 (insb. 6.4f)

→ Punktladung an (\mathbf{r}', t') wird zur Zeit $t = t' + \sqrt{\epsilon\mu}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = t' + \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{v}$ am Ort \mathbf{r} 'registriert'.

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r}, t) &= \int d^3r' \int dt' G^+(\mathbf{r} - \mathbf{r}'; t - t') g(\mathbf{r}', t') \\ &= \frac{1}{4\pi} \int d^3r' \frac{g(\mathbf{r}', t - \sqrt{\epsilon\mu}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \end{aligned} \quad (4.53)$$

Retardierte EM-Potentiale:

$$\Phi^+(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\mathbf{r}', t - \sqrt{\epsilon\mu}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' \quad (4.54)$$

$$\mathbf{A}^+(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - \sqrt{\epsilon\mu}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' \quad (4.55)$$

Bemerkung: Φ^+ , \mathbf{A}^+ erfüllen die Lorentzbedingung.

Beweis: [Jel], Kap. 6.6

4.3 Erhaltungssätze

4.3.1 Ladungserhaltung (Wdhg.)

Gauß:

$$\partial_t \rho = \nabla \cdot \partial_t \mathbf{D} \stackrel{\text{Ampère}}{=} \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{j}) = -\nabla \cdot \mathbf{j}.$$

4.3.2 Energiesatz

Ausgangspunkt (vgl. Kap 3.4.1):

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} v^2 \right) &= q(\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}) = \frac{dA}{dt} \\ \Rightarrow \frac{da}{dt} &= \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \end{aligned} \quad (4.56)$$

(a : mechanische Energiedichte)

Beispiel: Gerader Draht

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} d^3r = \frac{1}{\sigma} \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} dF ds \\ &\approx \frac{I}{\sigma} \int j ds \approx \frac{I^2 l}{\sigma F} = I^2 R \end{aligned}$$

→ 'Joulesche Wärme'

$$\stackrel{\text{Ampère}}{=} \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) - \mathbf{E} \cdot \partial_t \mathbf{D}$$

benutze $\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H})$

$$\Rightarrow \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \mathbf{E} \cdot \partial_t \mathbf{D} \quad (4.57)$$

$$\stackrel{\text{Faraday}}{=} -(\mathbf{H} \cdot \partial_t \mathbf{B} + \mathbf{E} \cdot \partial_t \mathbf{D} + \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H})) \quad (4.58)$$

$$= -\frac{1}{2} \partial_t (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}).$$

$$w_{em} := \frac{1}{2} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) \quad (4.59)$$

$$\mathbf{S} := \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (4.60)$$

$$\Rightarrow \boxed{\partial_t w_{em}(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)} \quad (4.61)$$

differentielle Form des Energiesatzes (Poyntingtheorems) der ED.
Bemerkungen

(i)

$$w_{em} = w_{el} + w_{mag}.$$

Energiedichte des EM-Feldes.

Begründung: [Jac], Kap. 6.2/5.16 (2./3. Auflage)

$$W_{em} = \int_V w_{em}(\mathbf{r}, t) d^3r$$

Energie des EM-Feldes im Volumen V .

(ii) \mathbf{S} : „Poyntingvektor“:

$$[S] = \left[\frac{\text{Energie}}{\text{Fläche} \cdot \text{Zeit}} \right]$$

ist ein Maß für die Energiestromdichte

(iii) Integralform des Poyntingtheorems:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} W_{em}(t) &= - \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) d^3r - \int_V \nabla \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) d^3r \\ &= - \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) d^3r - \oint_{\partial V} \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{f} \end{aligned} \quad (4.62)$$

Zeitliche Änderung der EM-Feldenergie in V äußert sich in mechanischer Energie der Ladungen in V (\rightarrow Joulesche Wärme) plus Energiestrom durch die Grenzfläche von V (\rightarrow EM-Wellen).

(iv) Theorem gilt in dieser Form nur für μ_r, ϵ_r konstant.

4.3.3 Impulssatz

Ausgangspunkt:

$$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

$$\Rightarrow \dot{\mathbf{p}}_{mech} = \int_V (\rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}) d^3r \quad (4.63)$$

$$\stackrel{\text{MGls}}{=} \int_V [(\nabla \cdot \mathbf{D})\mathbf{E} + (\nabla \times \mathbf{H}) \times \mathbf{B} - \partial_t \mathbf{D} \times \mathbf{B}] d^3r \quad (4.64)$$

Nebenrechnung:

•

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{D} \times \mathbf{B} &= \partial_t(\mathbf{D} \times \mathbf{B}) - \mathbf{D} \times \partial_t \mathbf{B} \\ &= \partial_t(\mathbf{D} \times \mathbf{B}) + \mathbf{D} \times (\nabla \times \mathbf{E}) \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} \partial_t(\mathbf{D} \times \mathbf{B}) &= \epsilon \mu \partial_t(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \epsilon \mu \partial_t \mathbf{S} \\ &= \frac{1}{v^2} \partial_t \mathbf{S} \end{aligned}$$

$\frac{\mathbf{S}}{c^2}$: Impulsdichte des EM-Feldes im Vakuum.

• Definition:

$$\mathbf{p}_{Feld}(t) := \epsilon \mu \int \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) d^3r \quad (4.65)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \frac{d}{dt}(\mathbf{p}_{mech} + \mathbf{p}_{Feld}) \\ = & \int_V [(\nabla \cdot \mathbf{D})\mathbf{E} - \mathbf{D} \times (\nabla \times \mathbf{E}) + (\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{H} - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{H})] d^3r \quad (4.66) \end{aligned}$$

Weitere Nebenrechnung:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\epsilon} [\nabla \cdot \mathbf{D}] \mathbf{E} - \mathbf{D} \times (\nabla \times \mathbf{E})_1 \\
 = & (\partial_1 E_1 + \partial_2 E_2 + \partial_3 E_3) E_1 - E_2 (\partial_1 E_2 - \partial_2 E_1) + E_3 (\partial_3 E_1 - \partial_1 E_3) \\
 = & \partial_1 E_1^2 + \partial_2 (E_1 E_2) + \partial_3 (E_1 E_3) - \frac{1}{2} \partial_1 (\mathbf{E}^2) \\
 \Rightarrow & [(\nabla \cdot \mathbf{D}) \mathbf{E} - \mathbf{D} \times (\nabla \times \mathbf{E})]_i = \epsilon \sum_{k=1}^3 \partial_k (E_i E_k - \frac{1}{2} \mathbf{E}^2 \delta_{ik})
 \end{aligned}$$

Definition:

$$\begin{aligned}
 T_{ik} & := \epsilon (E_1 E_k - \frac{1}{2} \mathbf{E}^2 \delta_{ik}) + \frac{1}{\mu} (B_i B_k - \frac{1}{2} \mathbf{B}^2 \delta_{ik}) \\
 & = D_i E_k + B_i H_k - \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \delta_{ik} \quad (4.67) \\
 \underline{\mathbf{T}} & = (T_{ik})_1^3: \text{ „Maxwellscher Spannungstensor“}
 \end{aligned}$$

Gesamtimpuls:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P} & := \mathbf{p}_{mech} + \mathbf{p}_{Feld} \\
 \Rightarrow \frac{d}{dt} P_i & = \int_V \sum_{k=1}^3 \partial_k T_{ik}(\mathbf{r}, t) d^3 r \\
 & = \int_V \nabla \cdot \mathbf{T}_i(\mathbf{r}, t) d^3 r = \oint_{\partial V} \mathbf{T}_i(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{f}
 \end{aligned}$$

mit $\mathbf{T}_i = (T_{i1}, T_{i2}, T_{i3})$.

Zeitliche Änderung des Gesamtimpulses von Feld und Ladungen =
Impulsfluss durch Oberfläche von V .

Bemerkungen

(i) Differentielle Form

$$(\rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B})_i + \mu \epsilon \partial_t S_i = \nabla \cdot \mathbf{T}_i \quad (4.68)$$

(ii)

$$[T_{ik}] = \left[\frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}} \right] \rightarrow \text{Strahlungsdruck}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}(\underline{\mathbf{T}}) & = T_{11} + T_{22} + T_{33} \\
 & = -\frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \\
 & = -w_{em}(\mathbf{r}, t)
 \end{aligned}$$

(iv) Antwort auf Kap. 3.4.1 b):

$$\mathbf{F}_{12}^{mag} \neq -\mathbf{F}_{21}^{mag},$$

aber:

Erhaltung der Summe aus mechanischem und Feldimpuls im abgeschlossenen System!

Kapitel 5

E-Dynamik II: Anwendungen

5.1 Elektromagnetische Wellen

5.1.1 Wellenausbreitung

Ausgangspunkt: freie MGls

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{B} &= \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\partial_t \mathbf{B} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \epsilon\mu\partial_t \mathbf{E}\end{aligned}$$

Kap 4.2.2a)
 \Rightarrow

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{B} &= \epsilon\mu\partial_t^2 \mathbf{B} \\ \wedge \Delta \mathbf{E} &= \epsilon\mu\partial_t^2 \mathbf{E}\end{aligned}$$

(Partikular-)Fundamentallösungen:

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}\end{aligned}$$

mit der Dispersionsrelation $\omega = \omega(k) = \frac{k}{\sqrt{\epsilon\mu}} = vk$.

a) Zur Geometrie/Kinematik:

- $\mathbf{E}, \mathbf{B} \perp \mathbf{k}$ (schon bekannt)
- Behauptung: $\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{k}$ bilden Rechtssystem und $E_0 = vB_0$.

Beweis:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\partial_t \mathbf{B} \\ \Leftrightarrow i\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r}-\omega t)} &= i\omega \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r}-\omega t)} \\ \Leftrightarrow \mathbf{k} \times \mathbf{E} &= \omega \mathbf{B}, \quad \text{q.e.d.}\end{aligned}$$

Und es ist

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{k}}{\omega} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (5.1)$$

b) Polarisation

Wähle $\mathbf{k} = (0, 0, k)$.

$$\begin{aligned}\text{wähle } \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= (E_x e^{i(kz-\omega t)}, E_y e^{i(kz-\omega t)}, 0) = \tilde{\mathbf{E}}_x e^{i(kz-\omega t+\alpha_x)} \\ \Rightarrow \mathbf{E}_{reell}(\mathbf{r}, t) &= (\tilde{E}_x \cos(kz - \omega t + \alpha_x), \tilde{E}_y \cos(kz - \omega t + \alpha_y), 0) \quad (5.2)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbf{B}_{reell}(\mathbf{r}, t) = \frac{k}{\omega} (-\tilde{E}_y \cos(kz - \omega t + \alpha_y), \tilde{E}_x \cos(kz - \omega t + \alpha_x), 0) \quad (5.3)$$

Spezialfälle:

(i) $\tilde{E}_y = 0$.

$$\begin{aligned}\Rightarrow \mathbf{E}_{reell}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{e}_x \tilde{E}_x \cos(kz - \omega t + \alpha_x) \\ \text{und } \mathbf{B}_{reell}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{e}_y \frac{k}{\omega} \tilde{E}_x \cos(kz - \omega t + \alpha_x)\end{aligned}$$

→ lineare Polarisation

(ii) $\alpha_y = \alpha_x \pm \frac{\pi}{2}$ und $\tilde{E}_x = \tilde{E}_y =: \tilde{E}$:

$$\begin{aligned}\Rightarrow \mathbf{E}_{reell}(\mathbf{r}, t) &= (\tilde{E} \cos(kz - \omega t + \alpha_x), \mp \tilde{E} \sin(kz - \omega t + \alpha_x), 0) \\ \text{und } \mathbf{B}_{reell}(\mathbf{r}, t) &= \frac{k}{\omega} (\pm \tilde{E} \sin(kz - \omega t + \alpha_x), \tilde{E} \cos(kz - \omega t + \alpha_x), 0)\end{aligned}$$

→ zirkulare Polarisation.

(iii) $\tilde{E}_x \neq \tilde{E}_y, \alpha_x \neq \alpha_y$ → elliptische Polarisation

c) Dispersion

- \triangleleft skalares Wellenpaket (1D):

$$\Phi(z, t) = \int A(k) e^{i(kz - \omega t)} dk \quad (5.4)$$

- Definition: Einhüllende des WPs:

$$\chi(z, t) = \int |A(k)| e^{i\phi(k, z, t)} dk \quad (5.5)$$

$$\text{mit } \phi(k, z, t) = (k - k_0)z - (\omega(k) - \omega_0)t + \alpha(k),$$

$$\omega_0 = \omega(k_0),$$

$$\text{und } A(k) = |A(k)| e^{i\alpha(k)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Phi(z, t) = \chi(z, t) e^{i(k_0 z - \omega_0 t)}} \quad (5.6)$$

- Definiere Paketschwerpunkt z_{SP} über Bedingung

$$\frac{d\phi}{dk} \Big|_{k=k_0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{z_{SP} = \frac{d\omega}{dk} \Big|_{k_0} t - \frac{d\alpha}{dk} \Big|_{k_0}} \quad (5.7)$$

Gruppengeschwindigkeit:

$$v_{gr} := \frac{d\omega}{dk} \Big|_{k_0} \quad (5.8)$$

- Relation zu $v_{ph} = \frac{\omega}{k}$:

$$v_{gr} = \frac{d}{dk} (k v_{ph}) \Big|_{k_0} = \left[v_{ph} + k \frac{dv_{ph}}{dk} \right]_{k=k_0} \quad (5.9)$$

Beispiel 1: EM-Welle im Vakuum

$$v_{ph} = c = v_{gr}$$

$$\Rightarrow \omega(k) - \omega_0 = c(k - k_0) = v_{gr}(k - k_0)$$

$$\begin{aligned} \chi(z, t) &= \int |A(k)| e^{i[(k-k_0)z - v_{gr}(k-k_0)t + \alpha(k)]} dk \\ &= \int A(k) e^{i(k-k_0)(z - v_{gr}t)} dk \\ &= \chi(z - v_{gr}t, 0) \end{aligned} \quad (5.10)$$

→ WP ändert seine Form nicht.

Beispiel 2: EM-Welle im dispersiven Medium ($\epsilon_r = \epsilon_r(k)$, $\mu_r = \mu_r(k)$)

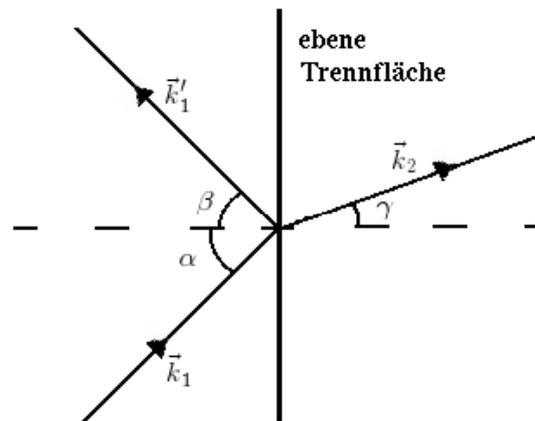
$$\Rightarrow \omega(k) = kv_{ph}(k)$$

$$\Rightarrow v_{gr} \neq v_{ph}$$

$$\Rightarrow \chi(z, t) \neq \chi(z - v_{gr}t, 0)$$

→ Dispersion.

5.1.2 Reflexion und Brechung



Wir wollen die einfachen geometrischen Gesetze begründen:

$$\alpha = \beta \quad (\text{Reflexionsgesetz})$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{n_2}{n_1} \quad (\text{Snellius' Brechungsgesetz}) \quad (5.11)$$

Definition: Brechungsindex

$$n_i = \sqrt{\epsilon_{ri}\mu_{ri}} = \frac{c}{v_i}, \quad i = 1, 2. \quad (5.12)$$

◁ **E, B**-Felder der drei (quellenfreien) Wellen:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_e &= \mathbf{E}_1 e^{i(\mathbf{k}_1 \mathbf{r} - \omega_1 t)} && \text{einfallende Welle} \\ \mathbf{B}_e &= \frac{n_1}{ck_1} (\mathbf{k}_1 \times \mathbf{E}_e) && \omega_1 = \frac{c}{n_1} k_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_t &= \mathbf{E}_2 e^{i(\mathbf{k}_2 \mathbf{r} - \omega_2 t)} && \text{transmittierte} \\ \mathbf{B}_t &= \frac{n_1}{ck_1} (\mathbf{k}_2 \times \mathbf{E}_t) && \text{(gebrochene) Welle} \\ &&& \omega_2 = \frac{c}{n_2} k_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_r &= \mathbf{E}'_1 e^{i(\mathbf{k}'_1 \mathbf{r} - \omega'_1 t)} && \text{reflektierte Welle} \\ \mathbf{B}_r &= \frac{n_1}{ck'_1} (\mathbf{k}'_1 \times \mathbf{E}_r) && \omega'_1 = \frac{c}{n_1} k'_1 \end{aligned}$$

Grenzbedingung:

$$\mathbf{k}_1 \mathbf{r} - \omega_1 t|_{z=0} = \mathbf{k}_2 \mathbf{r} - \omega_2 t|_{z=0} = \mathbf{k}'_1 \mathbf{r} - \omega'_1 t|_{z=0} \quad (5.13)$$

◁ $\mathbf{r} = 0, t \neq 0$:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_2 = \omega'_1 \\ \Rightarrow k_1 &= \frac{n_1}{c} \omega = k'_1 \\ k_2 &= \frac{n_2}{c} \omega \\ \Rightarrow \frac{k_1}{k_2} &= \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{n_1}{n_2} \end{aligned} \quad (5.14)$$

◁ $\mathbf{r} \neq 0$:

$$\mathbf{k}_1 \mathbf{r} = \mathbf{k}_2 \mathbf{r} = \mathbf{k}'_1 \mathbf{r}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow k_1 r \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= k_2 r \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) \\ &= k_1 r \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sin \alpha &= \sin \beta \\ \Rightarrow \alpha &= \beta \\ \text{und } \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} &\stackrel{!}{=} \frac{k_2}{k_1} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{v_1}{v_2} \end{aligned}$$

Detailanalyse der Grenzbedingungen führt auf Intensitätsverhältnisse (Fresnel'sche Formeln).

Lit: z.B. [Jac], Kap. 7.3f

5.1.3 Wellenausbreitung in Metallen

Zu den MGs für Metalle ($\rho = 0, \mathbf{j} \neq 0$) nimmt man das Ohmsche Gesetz

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$$

hinzu.

$$\begin{aligned} \triangleleft \quad \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} &= -\partial_t(\nabla \times \mathbf{B}) \\ &= -\mu\sigma\partial_t\mathbf{E} - \mu\epsilon\partial_t^2\mathbf{E} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\Delta\mathbf{E} - \mu\epsilon\partial_t^2\mathbf{E} - \mu\sigma\partial_t\mathbf{E} = 0}$$

Analog:

$$\boxed{\Delta\mathbf{B} - \mu\epsilon\partial_t^2\mathbf{B} - \mu\sigma\partial_t\mathbf{B} = 0} \quad (5.15)$$

„Telegraphengleichungen“

Telegraphengleichungen $\xrightarrow{\sigma \rightarrow 0}$ hom. Wellengl.

Fundamentallösungen: gedämpfte ebene Wellen:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}_0 e^{-\beta\mathbf{r}} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{B}_0 e^{-\beta\mathbf{r}} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \end{aligned} \quad (5.16)$$

mit der Dämpfungskonstanten $\beta \parallel \mathbf{k}$.

Dies überprüfen wir durch Einsetzen in (5.15):

$$\begin{aligned} k^2 - \beta^2 &= \epsilon\mu\omega^2 \\ 2k\beta &= \mu\sigma\omega \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$\Rightarrow k^4 - \epsilon\mu\omega^2 k^2 - \frac{1}{4}\mu^2\sigma^2\omega^2 = 0 \quad (5.18)$$

Reelle Lösungen:

$$k = \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}}\omega \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2} + 1 \right]^{1/2} \quad (5.19)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}}\omega \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2} - 1 \right]^{1/2} \quad (5.20)$$

Gute Leiter \rightarrow starke Dämpfung \rightarrow EM-Wellen dringen kaum in Metall ein.

Weitere Details (s. z.B. [DL], Kap. 7.2.2):

- transversale Wellen
- Phasenverschiebung zwischen \mathbf{E} und \mathbf{B}
- $B_0 > E_0$ in guten Leitern.

5.1.4 Weitere Themen

a) Hohlleiter, Wellenleiter, Hohlraumresonatoren

- [Jac], Kap. 8
- [Greb], Kap. 18
- [DL], Kap. 7.2.3

b) Wellenausbreitung in dispersiven Medien

- [Jac], Kap. 7.5-7.11
- [Greb], Kap. 16

c) Beugung

- [Jac], Kap. 9.8-9.12
- [DL], Kap. 7.2.4

5.2 Wellenerzeugung: Das Sendeproblem

Aufgabe: Auswertung von (4.54), (4.55)

$$\Phi^+(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\mathbf{r}', t - \sqrt{\epsilon\mu}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r'$$

$$\mathbf{A}^+(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - \sqrt{\epsilon\mu}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r'$$

für vorgegebene ρ, \mathbf{j} .

5.2.1 Harmonisch oszillierende, lokalisierte Quellen

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r})e^{-i\omega t} \quad (5.21)$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} \quad (5.22)$$

Aus der Kontinuitätsgleichung folgt

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = i\omega\rho \quad (5.23)$$

Vakuum:

$$\sqrt{\epsilon\mu} = \frac{1}{c}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Phi^+(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_s} \frac{\rho(\mathbf{r}') e^{-i\omega(t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c})}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3r' \\ &= \frac{e^{i\omega t}}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_s} \frac{\rho(\mathbf{r}') e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3r' \\ &= \Phi^+(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (5.24)$$

$$\text{Analog: } \mathbf{A}^+(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}^+(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \quad (5.25)$$

Bemerkung:

Φ^+ , \mathbf{A}^+ lösen 'Helmholtz-Gleichung'

$$\Delta\Phi^+ + k^2\Phi^+ = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (5.26)$$

Fallunterscheidungen:

- Nahzone: Ausdehnung des Senders $V_s^{1/3} = L_s \ll r \ll \lambda = \frac{2\pi}{k}$
- Zwischenzone: $L_s \ll r \approx \lambda$
- Fernzone (Strahlungszone): $L_s \ll \lambda \ll r$

a) Nahzone

$$e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \approx e^{ikr} = 1 + ikr \pm \dots$$

$$\Phi_0^+(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_s} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3r'$$

$$\mathbf{A}_0^+(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_s} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3r'$$

keine Retardierung.

b) Strahlungszone (SZ)

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}-\mathbf{r}'| &= r \left[1 - 2\frac{\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}'}{r} + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 \right]^{1/2} \\ &\approx r - \mathbf{r}' \cdot \mathbf{e}_r \\ \Rightarrow e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} &\approx e^{ikr} e^{-ik\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}'} =: e^{ikr} e^{-ik\mathbf{r}' \cdot \mathbf{e}_r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &\stackrel{r \gg r'}{\approx} \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3} \\ \Rightarrow \frac{e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &\approx \frac{e^{ikr} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'}}{r} \end{aligned}$$

Also

$$\Phi^+(\mathbf{r}, t) \approx \Phi_{SZ}^+(\mathbf{r}, t) = \Phi_{SZ}(\mathbf{k}) \cdot \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} \quad (5.27)$$

$$\mathbf{A}^+(\mathbf{r}, t) \approx \mathbf{A}_{SZ}^+(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}_{SZ}(\mathbf{k}) \cdot \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} \quad (5.28)$$

$$\Rightarrow \Phi_{SZ}(\mathbf{k}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_s} \rho(\mathbf{r}') e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'} d^3 r' \quad (5.29)$$

$$\mathbf{A}_{SZ}(\mathbf{k}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_s} \mathbf{j}(\mathbf{r}') e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'} d^3 r' \quad (5.30)$$

- Langwellennäherung: $e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'} \approx 1$ (gültig für $L_s \ll \lambda$)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathbf{A}_{SZ}(\mathbf{k}) &\approx \mathbf{A}_0(\mathbf{k}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_s} \mathbf{j}(\mathbf{r}') d^3 r' \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_s} \mathbf{r}' (\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}')) d^3 r' \\ &\stackrel{5.23}{=} -i \frac{\omega \mu_0}{4\pi} \int_{V_s} \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') d^3 r' \\ &= -i \frac{\omega \mu_0}{4\pi} \mathbf{p} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbf{A}_0(\mathbf{r}, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{p} \frac{ikc}{r} e^{i(kr - \omega t)} \quad (5.31)$$

Für das skalare Potential findet man:

$$\Phi_{SZ}(\mathbf{k}) \approx -\frac{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0} \quad (5.32)$$

$$\Rightarrow \Phi_1(\mathbf{r}, t) = -\frac{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} e^{i(kr - \omega t)} \quad (5.33)$$

(Hertzsche Dipolstrahlung)

EM-Felder:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{kc}{r} (\mathbf{k} \times \mathbf{p}) e^{i(kr - \omega t)} \quad (5.34)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} ((\mathbf{k} \times \mathbf{p}) \times \mathbf{k}) \frac{1}{r} e^{i(kr - \omega t)} \quad (5.35)$$

Energiefluss:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{S}} &= \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) dt \\ &= -\frac{kc}{32\pi^2\epsilon_0} [(\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{p}) \times (\mathbf{k} \times \mathbf{p}))] \frac{1}{r^2} \\ &= \frac{kc}{32\pi^2\epsilon_0} |\mathbf{k} \times \mathbf{p}|^2 \frac{\mathbf{k}}{r^2} - \frac{k^2c}{32\pi^2\epsilon_0} |\mathbf{k} \times \mathbf{p}|^2 \frac{\mathbf{e}_r}{r^2} \end{aligned} \quad (5.36)$$

Abgestrahlte mittlere Leistung:

$$\begin{aligned} P &= \oiint_{Kugel} \bar{\mathbf{S}} \cdot d\mathbf{f} = \frac{k^2c}{32\pi^2\epsilon_0} \int_{Kugel} |\mathbf{k} \times \mathbf{p}|^2 d\Omega \\ &= \frac{k^4p^2c}{32\pi^2\epsilon_0} \int_{Kugel} \sin^2 \Theta d\Omega \end{aligned} \quad (5.37)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{k^4p^2c}{32\pi^2\epsilon_0} \left(2\pi \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx \right) \\ &= \frac{ck^4}{12\pi\epsilon_0} p^2 \end{aligned} \quad (5.38)$$

Charakteristikum: $P \propto \frac{1}{\lambda^4}$.

Außerdem erkennt man aus (5.37) sofort:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{k^4p^2c}{32\pi^2\epsilon_0} \sin^2 \Theta \quad (5.39)$$

(Dipolcharakteristik $\propto \sin^2 \Theta$)

Mögliche weitere Diskussionspunkte:

c) Höhere Multipolbeiträge in der Strahlungzone

[DL], 7.3.3

[Jac], 9.3

d) Zwischenzone

Systematische Lösung der Helmholtzgleichungen mittels GF

[DL], 7.3.4

5.2.2 Weitere Themen

a) Streuung von EM-Wellen bei großen Wellenlängen: Rayleigh-Streuung

EM-Welle $\lambda \gg L_s$ Streukörper \rightarrow Dipolstrahlung $\propto \frac{1}{\lambda^4}$
 [Jac], 9.6, 9.7;
 3. Auflage: Kap. 10 „Streuung und Beugung“

b) Strahlung bewegter PLs

Quellterme:

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{r}, t) &= q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}(t)) \\ \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) &= q\dot{\mathbf{R}}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}(t))\end{aligned}$$

Einsetzen in

$$\Phi^+(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\epsilon_0} \int d^3r' \int dt' G^+(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \rho(\mathbf{r}', t') \quad (5.40)$$

mit $G^+(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = \frac{1}{4\pi} \frac{\delta(t - t' - \frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$, ($t \geq t'$) ergibt

$$\begin{aligned}\Phi^+(\mathbf{r}, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \int dt' \frac{\delta(t - t' - \frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{R}(t')) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int dt' \frac{\delta(t' - t + \frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{R}(t')|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}(t')|}\end{aligned}$$

Substitution: $u(t') = t' - t + \frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{R}(t')|$.

$$\begin{aligned}\Rightarrow \Phi^+(\mathbf{r}, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int du \frac{\delta(u)}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}(u)| \left(1 - \frac{1}{c} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{R}(u)}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}(u)|} \cdot \dot{\mathbf{R}}(u)\right)} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[|\mathbf{r} - \mathbf{R}(t')| - \frac{1}{c} (\mathbf{r} - \mathbf{R}(t')) \cdot \dot{\mathbf{R}}(t') \right]^{-1}.\end{aligned}$$

($t = t' + \frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{R}(t')|$)

Analog findet man

$$\mathbf{A}^+(\mathbf{r}, t) = \frac{q\mu_0}{4\pi} \dot{\mathbf{R}}(t) \left[|\mathbf{r} - \mathbf{R}(t')| - \frac{1}{c} (\mathbf{r} - \mathbf{R}(t')) \cdot \dot{\mathbf{R}}(t') \right]^{-1}$$

mit $t = t' + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{R}(t')|}{c}$.
 (Liénard-Wiechert-Potentiale)

Falls $\dot{\mathbf{R}} = 0$:

$$\begin{aligned}\Phi^+(\mathbf{r}, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} \\ \mathbf{A}^+(\mathbf{r}, t) &= 0\end{aligned}$$

(Elektrostatik)

Mögliche Diskussionspunkte:

- (i) Bremsstrahlung
→ Energieabstrahlung beschleunigter PLs
([DL], 7.4.2)

- (ii) Cerenkovstrahlung:
Energieabstrahlung in einem Medium, in dem $\dot{\mathbf{R}} > v_{EM}$.
(uniform bewegte PLs)
[DL], 7.4.3

- (iii) Punktdipol:
Anwendung: Rutherford-Atom
Energieabstrahlung → Lebensdauer $\approx 10^{-11}\text{s}$.
[Grea], Kap. 21

Kapitel 6

Spezielle Relativitätstheorie (SRT)

Ausgangspunkt der SRT:

Unvereinbarkeit der ED mit Relativitätsprinzip auf Basis der Galilei-Transformationen (GTs).

Einsteins Postulate (1905)

- (i) Alle Inertialsysteme (IS) sind gleichwertig (Relativitätsprinzip)
- (ii) Die Lichtgeschwindigkeit ist in allen IS gleich.

→ gestützt (aber (1905) nicht bewiesen) durch Experimente, z.B. Michelson-Morley (1887).

Literatur zur experimentellen Situation (vor und nach Einstein):

[Jac], Kap 11.1, 11.2

[Sch], SRT, Anhang

6.1 Die Lorentz-Transformationen (LTs)

6.1.1 Wdh: Galilei-Transformationen

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= \mathbf{R}(t) + \mathbf{r}'(t) \\ &= \mathbf{r}_{rel}(t) + \mathbf{v}_{rel}t + \mathbf{r}'(t) && (6.1) \\ \Rightarrow \mathbf{v}(t) &= \mathbf{v}_{rel} + \mathbf{v}'(t) && (6.2) \\ \mathbf{a}(t) &= \mathbf{a}'(t)\end{aligned}$$

◁ Zwei Raumpunkte:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t) &= \mathbf{R}(t) + \mathbf{r}'_1(t) - (\mathbf{R}(t) + \mathbf{r}'_2(t)) \\ &= \mathbf{r}'_1(t) - \mathbf{r}'_2(t) \\ \Rightarrow |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| &= |\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2| \end{aligned} \quad (6.3)$$

Weitere Annahmen/Voraussetzungen:

$$t' = t \quad (6.4)$$

$$m' = m \quad (6.5)$$

6.1.2 Einfache Form der LTs

Wir betrachten Inertialsysteme S, S' :

- $S = S'$ für $t = 0$:
- S' bewegt sich mit $\mathbf{v}_{rel} = v_{rel}\mathbf{e}_x$ für $t > 0$

Linearer Ansatz (wegen Relativitätsprinzip):

$$\begin{aligned} x' &= Ax + Bt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= Cx + Dt \end{aligned} \quad (6.6)$$

Bei Gültigkeit der GT wäre:

$$A = 1, B = -v_{rel}, C = 0, D = 1.$$

◁ Lichtblitz bei $t = 0$ im gemeinsamen Ursprung \rightarrow erreiche Punkt P .

$$\begin{aligned} S: \quad r = ct &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0 \\ S': \quad r' = ct' &\Leftrightarrow x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = 0 \end{aligned} \quad (6.7)$$

$$\Rightarrow x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 \quad (6.8)$$

Bestimmung der Koeffizienten A, B, C, D :

(i) ◁ Ursprung von S' für $t > 0$:

$$\begin{aligned} 0 = x' &= Ax + Bt = Av_{rel}t + Bt \\ &\Leftrightarrow B = -Av_{rel}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

(ii)

$$\begin{aligned}
 x^2 - c^2 t^2 &= x'^2 - c^2 t'^2 \\
 &= (Ax + Bt)^2 - c^2 (Cx + Dt)^2 \\
 &= (A^2 - c^2 C^2)x^2 - 2(A^2 v_{rel} + c^2 CD)xt - c^2 \left(D^2 - \frac{v_{rel}^2 A^2}{c^2} \right) t^2.
 \end{aligned}$$

 (x, t) beliebig

$$\begin{aligned}
 A^2 - c^2 C^2 &= 1 & (1) \\
 A^2 v_{rel} + c^2 CD &= 0 & (2) \\
 D^2 - \frac{v_{rel}^2}{c^2} A^2 &= 1. & (3)
 \end{aligned} \tag{6.10}$$

(2) in (1) einsetzen:

$$\begin{aligned}
 (1') \quad A^2 - c^2 \left(\frac{A^2 v_{rel}}{D c^2} \right)^2 &= 1 \\
 (3') \quad D^2 &= 1 + \frac{v_{rel}^2}{c^2} A^2 \\
 (1'') \quad A^2 - \frac{v_{rel}^2 A^4}{c^2 (1 + \frac{v_{rel}^2}{c^2} A^2)} &= 1 \\
 \Leftrightarrow A^2 &= \frac{c^2}{c^2 - v_{rel}^2} = \frac{1}{1 - \left(\frac{v_{rel}}{c} \right)^2} \\
 (3'') \quad D^2 &= 1 + \frac{v_{rel}^2}{c^2 - v_{rel}^2} = \frac{c^2}{c^2 - v_{rel}^2} = A^2.
 \end{aligned}$$

Fordere LT \rightarrow GT

$$\Rightarrow A = D = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_{rel}}{c} \right)^2}}$$

$$(2') \quad C = -\frac{A^2 v_{rel}}{D c^2} = -\frac{v_{rel}}{c^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_{rel}}{c} \right)^2}}$$

Def:

$$\beta = \frac{v_{rel}}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

 \Rightarrow einfache LTs:

$$\begin{aligned}
 x' &= \gamma(x - v_{rel}t) \\
 t' &= \gamma \left(t - \frac{\beta}{c} x \right)
 \end{aligned} \tag{6.11}$$

Bemerkungen:

(i) $LT \xrightarrow{\beta \rightarrow 0} GT$

(ii) Inverse LT

$$\begin{aligned}x &= \gamma(x' + v_{rel}t') \\t &= \gamma\left(t' + \frac{\beta}{c}x'\right)\end{aligned}$$

6.1.3 Kinematische Konsequenzen

a) Additionstheorem für Geschwindigkeiten

$$GT: \quad \mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{rel}$$

LT:

$$\begin{aligned}dx' &= \gamma(dx - v_{rel} dt) \\dy' &= dy \\dz' &= dz \\dt' &= \gamma\left(dt - \frac{\beta}{c} dx\right) \\ \Rightarrow v'_x = \dot{x}' &= \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - v_{rel} dt}{dt - \frac{\beta}{c} dx} \\ &= \frac{dx - v_{rel} dt}{dt\left(1 - \frac{\beta}{c} \frac{dx}{dt}\right)} = \frac{v_x - v_{rel}}{1 - \frac{v_x v_{rel}}{c^2}} \\ v'_y &= \frac{dy'}{dt'} = v_y \frac{[1 - \beta^2]^{1/2}}{1 - \frac{v_x v_{rel}}{c^2}} \\ v'_z &= \frac{dz'}{dt'} = v_z \frac{[1 - \beta^2]^{1/2}}{1 - \frac{v_x v_{rel}}{c^2}}\end{aligned} \tag{6.12}$$

Diskussion

(i) $v_{rel} \ll c$:

$$v'_x = v_x - v_{rel}, v'_y = v_y, v'_z = v_z$$

$\Leftrightarrow GT$

(ii) $v > c$ ist nach LT unmöglich

Beispiel 1:

S: EM-Welle mit $\mathbf{v} = (c, 0, 0)$.

S' bewegt sich gegen S mit v_{rel} in x-Richtung

$$\Rightarrow v'_x = \frac{c - v_{rel}}{1 - \frac{cv_{rel}}{c^2}} = c$$

$$v'_y = v'_z = 0$$

Beispiel 2:

S: EM-Welle mit $\mathbf{v} = (0, c, 0)$.

S' bewegt sich gegen S mit v_{rel} in x-Richtung

$$\Rightarrow v'_x = -v_{rel}$$

$$v'_y = c\sqrt{1 - \beta^2} = \frac{c}{\gamma}$$

$$v'_z = 0$$

$$\Rightarrow |\mathbf{v}'| = \sqrt{v_x'^2 + v_y'^2} = c.$$

b) Längen-(Lorentz-)Kontraktion

Ein Maßstab ruhe in Bezug auf S' . Seine Länge in S' ist:

$$l_0(S') = x'_b - x'_a$$

(„Ruhelänge“)

LT:

$$x'_b = \gamma(x_b - v_{rel}t_b)$$

$$x'_a = \gamma(x_a - v_{rel}t_a)$$

$$\Rightarrow l_0(S') = x'_b - x'_a = \gamma(x_b - x_a - v_{rel}(t_b - t_a))$$

Nebenbedingung: $t_a = t_b$ (in S)

$$l_0(S') = \gamma(x_b - x_a) = \gamma l(S) \quad (6.13)$$

Bemerkungen

(i) Wegen $y' = y, z' = z$ folgt:

$$V = V_0\sqrt{1 - \beta^2} = \frac{V_0}{\gamma}$$

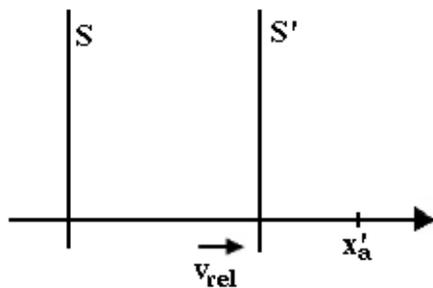
(„Volumenkontraktion“)

(ii) Reziprokes Problem:

$$\Rightarrow l(S') = \frac{1}{\gamma} l_0(S)$$

Es ist immer der bewegte Maßstab, der verkürzt erscheint.

c) Zeitdilatation



Aus Sicht von S' stehe am Ort x'_a eine Uhr für eine bestimmte Zeit $t_0(S')$.

$$\tau_0(S') = t'_b - t'_a, \quad x'_b = x'_a$$

$$\Rightarrow t_a = \gamma(t'_a + \frac{\beta}{c}x'_a)$$

$$t_b = \gamma(t'_b + \frac{\beta}{c}x'_a)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \tau(S) &= t_b - t_a = \gamma(t'_b - t'_a) \\ &= \gamma\tau_0(S') \end{aligned}$$

(6.14)

Reziprokes Problem:

$$\tau_0(S) = \frac{1}{\gamma}\tau(S')$$

→ bewegte Uhren gehen langsamer

Bemerkungen:

- (i) Zeitdilatation ist experimentell gut bestätigt.
(Z.B. verlängerte Lebensdauer bewegter μ -Mesonen)
- (ii) Zwillingsparadoxon → der reisende Zwilling altert langsamer.
[Sch], Kap 3.5(6)

6.2 Minkowski-Raum

Ziel: Beschreibe physikalische Vorgänge in einem vierdimensionalen Raum, da Ort und Zeit in den LT eine gleichberechtigte Rolle spielen. Dabei muss die Lorentzbedingung (6.8)

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$$

eingehalten werden.

6.2.1 Definition des Minkowski-Raums

- Koordinaten:

$$x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z \quad (6.15)$$

- Fordere:

$$\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu = g_{\mu\nu} \quad (6.16)$$

mit

$$(g_{\mu\nu})_{\mu,\nu=1}^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (6.17)$$

„metrischer Tensor“

Durch diese Forderung wird ein neues Skalarprodukt „ \cdot “ in \mathbb{R}^4 definiert.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathbf{r}^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} &= \left(\sum_{\mu=0}^3 x^\mu \mathbf{e}_\mu \right) \cdot \left(\sum_{\nu=0}^3 x^\nu \mathbf{e}_\nu \right) = \sum_{\mu\nu} x^\mu x^\nu g_{\mu\nu} \\ &= c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = s^2 \end{aligned} \quad (6.18)$$

→ Minkowskiraum; $M(1,3)$: vierdimensionaler Raum mit durch $(g_{\mu\nu})$ definierter „pseudoeuklidischer Metrik“.

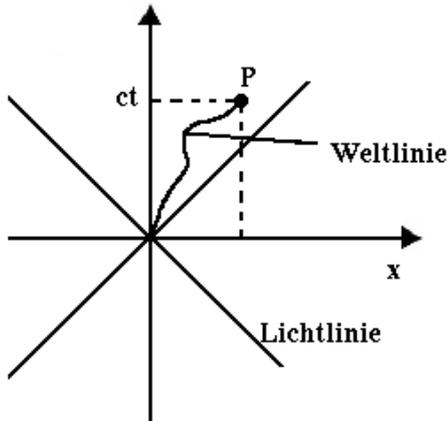
Bemerkung: Es existieren (triviale) Varianten in der Literatur.

6.2.2 Anschauung

a) Minkowskidiagramme

$$\triangleleft M(1,1): \quad x^0 = ct, x^1 = x; \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow s^2 = c^2t^2 - x^2$$



$$P = (x^0, x^1): \text{„Ereignis“}$$

Klassifikation von Ereignissen (Punkten in $M(1,1)$):

- $s^2 = 0$: „lichtartig“
- $s^2 > 0$: „zeitartig“ \rightarrow kausal mit $P_0 = (0,0)$ verknüpfbare Ereignisse
- $s^2 < 0$: „raumartig“

Verallgemeinerung: $M(1,2)$, $M(1,3)$: Aus Lichtlinien wird (Hyper-)Lichtkegel.

b) LTs in der Minkowskiwelt

$$\triangleleft M(1,1):$$

$$\begin{aligned} (x')^0 &= \gamma(x^0 - \beta x^1) \\ (x')^1 &= \gamma(x^1 - \beta x^0) \end{aligned}$$

$$(x')^0 - \text{Achse} : (x')^1 = 0 \Leftrightarrow x^0 = \frac{1}{\beta} x^1$$

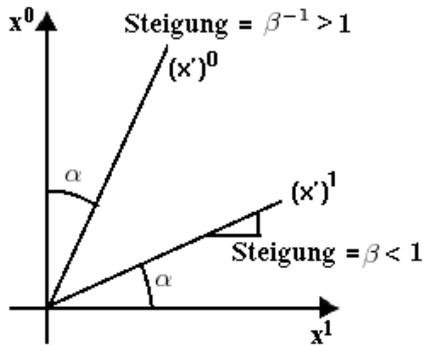
$$(x')^1 - \text{Achse} : (x')^0 = 0 \Leftrightarrow x^0 = \beta x^1$$

Def: $\cosh \alpha := \gamma$, $\sinh \alpha := \beta\gamma$.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} (x')^0 \\ (x')^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \alpha & -\sinh \alpha \\ -\sinh \alpha & \cosh \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} \quad (6.19)$$

Bemerkung:

$$\det \begin{pmatrix} \cosh \alpha & -\sinh \alpha \\ -\sinh \alpha & \cosh \alpha \end{pmatrix} = 1$$



Einfache kinematische Phänomene (z.B. Längenkontraktion und Zeitdilatation) lassen sich durch Minkowskidiagramme veranschaulichen.

Lit.: [Sch], Kap 5.4

6.2.3 Formale Fassung: Ko- und kontravariante Vektor- komponenten

a) Allgemeines über schiefwinklige Koordinatensysteme

- Def: Basisvektoren $\mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{e}_n$
mit

$$\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu = g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} \quad (6.20)$$

- Def: Kovariante Komponenten

$$a_\mu := \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_\mu \quad (6.21)$$

Dann gilt i.A.

$$\sum_{\mu} a_\mu \mathbf{e}_\mu \neq \mathbf{a}, \quad (6.22)$$

denn:

$$\text{Annahme: } \sum_{\mu} a_\mu \mathbf{e}_\mu = \mathbf{a}$$

$$\Rightarrow \sum_{\mu} a_\mu (\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu) = a_\nu$$

$$\Rightarrow \sum_{\mu} a_\mu g_{\mu\nu} = a_\nu \quad \zeta$$

- Def: Kontravariante Komponenten a^μ

$$\mathbf{a} = \sum_{\mu} a^\mu \mathbf{e}_\mu \quad (6.23)$$

- \rightarrow Zusammenhang:

$$a_\nu = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_\nu = \sum_{\mu} a^\mu \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu = \sum_{\mu} a^\mu g_{\mu\nu} = \sum_{\mu} a^\mu g_{\nu\mu} \quad (6.24)$$

- Def: Basisvektoren $\mathbf{e}^1 \cdots \mathbf{e}^n$:

$$\mathbf{a} = \sum_{\nu} a_\nu \mathbf{e}^\nu \quad (6.25)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{\mu} a^\mu \mathbf{e}_\mu &= \sum_{\mu\nu} g_{\nu\mu} a^\mu \mathbf{e}^\nu \\ \Rightarrow \mathbf{e}_\mu &= \sum_{\nu} g_{\mu\nu} \mathbf{e}^\nu \end{aligned} \quad (6.26)$$

Ansatz:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^\nu &\stackrel{!}{=} \sum_{\mu} g^{\nu\mu} \mathbf{e}_\mu \\ &= \sum_{\mu\nu'} g^{\nu\mu} g_{\mu\nu'} \mathbf{e}^{\nu'} \end{aligned} \quad (6.27)$$

$$\Rightarrow \sum_{\mu} g^{\nu\mu} g_{\mu\nu'} = \delta_{\nu\nu'} =: \delta_{\nu'}^\nu \quad (6.28)$$

D.h.: $(g^{\mu\nu})$ ist zu $(g_{\mu\nu})$ inverser metrischer Tensor.

Folgerungen

-

$$\mathbf{e}^\nu \cdot \mathbf{e}_\mu = \sum_{\mu'} g^{\nu\mu'} \mathbf{e}_{\mu'} \cdot \mathbf{e}_\mu = \sum_{\mu'} g^{\nu\mu'} g_{\mu\mu'} = \delta_{\mu}^\nu$$

-

$$\begin{aligned} a^\nu &= \sum_{\mu} a^\mu \underbrace{\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}^\nu}_{=\delta_{\mu}^\nu} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^\nu \\ &= \sum_{\mu} g^{\nu\mu} \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_\mu = \sum_{\mu} g^{\nu\mu} a_\mu \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}^\mu \cdot \mathbf{e}^\nu &= \sum_{\mu'\nu'} g^{\mu\mu'} g^{\nu\nu'} \mathbf{e}_{\mu'} \cdot \mathbf{e}_{\nu'} \\
&= \sum_{\mu'\nu'} g^{\mu\mu'} g^{\nu\nu'} g_{\mu'\nu'} \\
&= g^{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{6.29}$$

• Skalarprodukt, zwei Formen:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &\stackrel{\text{kontra}}{=} \sum_{\mu\nu} a^\mu b^\nu \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu = \sum_{\mu\nu} a^\mu b^\nu g_{\mu\nu} = \sum_{\mu} a^\mu b_\mu \\
&\stackrel{\text{ko}}{=} \sum_{\mu\nu} a_\mu b_\nu \mathbf{e}^\mu \cdot \mathbf{e}^\nu = \sum_{\mu\nu} a_\mu b_\nu g^{\mu\nu} = \sum_{\mu} a_\mu b^\mu
\end{aligned} \tag{6.30}$$

• Einsteins Summenkonvention: Über gleiche Indizes werde summiert, d.h. z.B.

$$a_\mu b^\mu := \sum_{\mu} a_\mu b^\mu$$

b) Lorentztransformation und Vierervektoren

Metrischer Tensor der SRT:

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (g^{\mu\nu}) \tag{6.31}$$

„Ereignisvektor“:

$$\vec{r} := \sum_{\mu=0}^3 x^\mu \mathbf{e}_\mu \tag{6.32}$$

mit $x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$.Im Folgenden ist jetzt immer $\vec{r} \in M(1, 3)$

Alternative Notation:

$$(x^\mu) = (x^0, \underbrace{\mathbf{r}}_{\in \mathbb{R}^3}) = (ct, \mathbf{r}) = (ct, x, y, z) \tag{6.33}$$

Grundbedingung der LTs:

$$\begin{aligned}
s^2 &= c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 \\
\Rightarrow s^2 &= \vec{r} \cdot \vec{r} = \sum_{\mu} x_\mu x^\mu \stackrel{!}{=} \sum_{\mu} x'_\mu x'^\mu = s'^2
\end{aligned} \tag{6.34}$$

→ Allgemeine Definition der (homogenen) LTs:
Lineare Transformation, sodass

$$\sum_{\mu} x_{\mu} x^{\mu} = \sum_{\mu} x'_{\mu} x'^{\mu}$$

Ansatz:

$$\begin{aligned} x'_{\mu} &= \sum_{\nu} L_{\mu\nu} x^{\nu} \\ \text{und } x'^{\mu} &= \sum_{\nu} L^{\mu\nu} x_{\nu} \end{aligned} \quad (6.35)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{\nu} g^{\mu\nu} x'_{\nu} &= x'^{\mu} \\ &= \sum_{\nu\lambda} g^{\mu\nu} L_{\nu\lambda} x^{\lambda} \\ &= \sum_{\nu\lambda\rho} g^{\mu\nu} L_{\nu\lambda} g^{\lambda\rho} x_{\rho} \\ &\stackrel{!}{=} \sum_{\rho} L^{\mu\rho} x_{\rho} \\ \Rightarrow L^{\mu\rho} &= \sum_{\nu\lambda} g^{\mu\nu} L_{\nu\lambda} g^{\lambda\rho} \end{aligned} \quad (6.36)$$

Invarianzbedingung:

$$\begin{aligned} \sum_{\mu} x'_{\mu} x'^{\mu} &= \sum_{\mu\nu\lambda} L_{\mu\nu} L^{\mu\lambda} x^{\nu} x_{\lambda} \stackrel{!}{=} \sum_{\nu} x^{\nu} x_{\nu} \\ \Leftrightarrow \sum_{\mu} L_{\mu\nu} L^{\mu\lambda} &= \delta_{\nu}^{\lambda} \end{aligned} \quad (6.37)$$

Orthogonalitätsrelationen der LTs

⇒ LTs sind orthogonale Transformationen im Minkowskiraum.
Alternative Form der Orthogonalitätsrelationen:

$$\sum_{\mu\nu} L_{\mu\lambda} g^{\mu\nu} L_{\nu\rho} = g_{\lambda\rho} \quad (6.38)$$

Bemerkungen:

- (i)
- Beispiel 1:
- Lorentzboost in x-Richtung (s. 6.1.2)

$$(L_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(L^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Beispiel 2: Zeitumkehr

$$L_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu}$$

Beispiel 3: Raumspiegelung

$$L_{\mu\nu} = +\delta_{\mu\nu}$$

- (ii) Allgemeine LT:
Drehung \rightarrow Boost \rightarrow Drehung
- (ii) Menge der LTs ist „6-parametrische Gruppe“.
[Jac], Kap 11.7
- (iii) Vierervektoren $(a^\mu) = (a^0, a^1, a^2, a^3)$, $(a_\mu) = (a^0, -a^1, -a^2, -a^3)$ transformieren sich gemäß:

$$a'_\mu = \sum_\nu L_{\mu\nu} a^\nu$$

$$a'^\mu = \sum_\nu L^{\mu\nu} a_\nu \quad (6.39)$$

Das Skalarprodukt zweier Vierervektoren ist invariant unter LT (s. (6.30)).

- (iv) Vierergradient
Abkürzungen:

$$\partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \partial^\mu := \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \partial_t := \frac{\partial}{\partial t}$$

Man definiert analog zum Gradienten $\nabla = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$ im \mathbb{R}^3 einen formalen Vierervektor

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right).$$

◁ Wirkung auf Skalarfeld

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = f(x'_0, x'_1, x'_2, x'_3)$$

Kettenregel:

$$\partial'^\mu f = \sum_\lambda (\partial_\lambda f) \cdot (\partial'^\mu x^\lambda).$$

$$\text{wegen } x^\lambda = \sum_\nu L^{\nu\lambda} x'_\nu \quad (6.40)$$

$$\text{ist } \partial'^\mu x^\lambda = L^{\mu\lambda} \quad (6.41)$$

$$\Rightarrow \partial'^\mu f = \sum_\lambda L^{\mu\lambda} (\partial_\lambda f) \quad (6.42)$$

$$\text{vgl. } a'^\mu = \sum_\lambda L^{\mu\lambda} a_\lambda \quad (6.43)$$

⇒ Der Vierergradient transformiert sich genau wie ein Ereignisvektor.

Analog findet man:

$$\partial'_\mu f = \sum_\lambda L_{\mu\lambda} \partial^\lambda f \quad (6.44)$$

Analog zu Ereignisvektoren ergeben sich also wieder zwei Zerlegungen von $\vec{\nabla}$:

$$\text{Kovariant: } (\partial^\mu) = \left(\frac{1}{c} \partial_t, -\nabla_3 \right)$$

$$\text{Kontravariant: } (\partial_\mu) = \left(\frac{1}{c} \partial_t, \nabla_3 \right)$$

Konsequenzen:

•

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \sum_\mu \partial^\mu a_\mu = \sum_\mu \partial_\mu a^\mu = \partial_0 a^0 + \nabla \cdot (a^1, a^2, a^3)$$

(Viererdivergenz) ist invariant unter LT

•

$$\square := \sum_\mu \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \Delta_3 \quad (\text{D'Alembert-Operator})$$

ist invariant unter LT

(v)

- Skalar: $a = a'$ Tensor 0. Stufe
- Vierervektor: $(a'_\mu) = \sum_\lambda L_{\mu\lambda} a^\lambda$ Tensor 1. Stufe
- Matrix: $(A'_{\mu\nu}) = \sum_{\lambda\rho} L_{\mu\lambda} L_{\nu\rho} A^{\lambda\rho}$ Tensor 2. Stufe
- $(B'_{\lambda\mu\nu}) = \sum_{\lambda'\mu'\nu'} L_{\lambda\lambda'} L_{\mu\mu'} L_{\nu\nu'} B^{\lambda'\mu'\nu'}$ Tensor 3. Stufe:

Lit: (Tensorrechnung) [Sch], Kap 4(vi) In diesem Sinne ist g ein Tensor 2. Stufe.

6.3 Zur relativistischen Mechanik

6.3.1 Ort, Geschwindigkeit, Beschleunigung im MR

- Ereignisvektor $\vec{x} = (ct, \mathbf{r})$ ist Vierervektor.
- $\Delta(x^\mu) = (c\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$ (Differenz) ist Vierervektor
- Behauptung:

$$\Delta\tau := \frac{\Delta t}{\gamma}$$

ist invariant unter LT, sodass

$$\vec{v} := \frac{d\vec{x}}{d\tau}$$

Vierervektor ist. $\Delta\tau$: Eigenzeit.**Beweis:**

$$\begin{aligned} \sum_\mu x_\mu x^\mu &= c^2 t^2 - r^2 \\ \Rightarrow \frac{ds^2}{c^2} &= dt^2 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2} = \text{const} \\ \Rightarrow d\tau &= \sqrt{\frac{ds^2}{c^2}} = dt \sqrt{1 - \beta^2} = \text{const}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v} = \gamma \frac{d\vec{x}}{dt} = \gamma(c, \mathbf{v}) \quad (6.45)$$

Bemerkungen:

(i) Trafo-Gleichungen:

$$v'^{\mu} = \sum_{\nu} L^{\mu\nu} v_{\nu}$$

\Leftrightarrow Additionstheorem für Geschwindigkeiten (Kap. 6.1.3a)

(ii)

$$\sum_{\mu} v_{\mu} v^{\mu} = \gamma^2 (c^2 - \mathbf{v}^2) = c^2$$

(iii)

$$\vec{v} \xrightarrow{v \ll c} (c, \mathbf{v})$$

• Viererbeschleunigung:

$$\vec{b} := \frac{d\vec{v}}{d\tau} = \gamma \frac{d\vec{v}}{dt} = \gamma \frac{d}{dt} (\gamma c, \gamma \mathbf{v}).$$

Dabei ist

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\gamma}{d\beta} \frac{d\beta}{dt} = \gamma^3 \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{c^2} \quad (6.46)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{b} = \left(\gamma^4 \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{c}, \gamma^4 \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{v}}{c^2} + \gamma^2 \mathbf{a} \right) \quad (6.47)$$

Bemerkung:

$$\sum_{\mu} v_{\mu} b^{\mu} = 0 \quad (6.48)$$

6.3.2 Impuls, Kraft, Bewegungsgleichung

• Viererimpuls

$$\vec{p} := m_0 \vec{v} = m_0 \gamma(c, \mathbf{v}) \xrightarrow{v \ll c} (m_0 c, m_0 \mathbf{v}) \quad (6.49)$$

m_0 : Ruhemasse;

$m_{rel}(v) := m(v) := m_0 \gamma$: „relativistische Masse“

$\lim_{v \rightarrow c} m(v) = \infty$ (experimentell bestätigt).

- „Minkowski-Kraft“

$$\vec{K} := \frac{d}{d\tau} \vec{p} = m_0 \frac{d}{d\tau} \vec{v} = m_0 \vec{b} \quad (6.50)$$

Bemerkungen:

- (i) Lorentz-Kovarianz

$$\begin{aligned} K'^{\mu} &= \sum_{\nu} L^{\mu\nu} K_{\nu}; b'^{\mu} = \sum_{\nu} L^{\mu\nu} b_{\nu} \\ &\Rightarrow K'^{\mu} = m_0 b'^{\mu} \end{aligned}$$

- (ii) Relativistische Dynamik
 ◁ Raumkomponenten

$$\begin{aligned} K^i &= \gamma \frac{d}{dt} p^i \quad (i = 1, 2, 3) \\ &= \gamma \frac{d}{dt} (m(v) v^i) \end{aligned}$$

→ postuliere relativistische Bewegungsgleichungen:
 vorgegebene Kraft \mathbf{F} bewirkt Impulsänderung:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \dot{\mathbf{p}} = \frac{d}{dt} (m(v) \mathbf{v}) \\ &= \frac{dm}{dt} \mathbf{v} + m \mathbf{a} \\ &= m_0 \gamma \left(\frac{\gamma^2}{c^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{v} + \mathbf{a} \right) \xrightarrow{v \ll c} m_0 \mathbf{a} \end{aligned} \quad (6.51)$$

- (iii) Nullkomponente

$$K^0 = m_0 b^0 = m_0 \gamma^4 \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{c^2}$$

$$\begin{aligned} \sum_{\mu} v_{\mu} K^{\mu} &= m_0 \sum_{\mu} v_{\mu} b^{\mu} \stackrel{6.48}{=} 0 \\ \Rightarrow v_0 K^0 &= -(v_1 K^1 + v_2 K^2 + v_3 K^3) \\ \Leftrightarrow \gamma c K^0 &= \gamma^2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} \\ \Leftrightarrow K^0 &= \gamma \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{c} \end{aligned} \quad (6.52)$$

$$\Rightarrow \vec{K} = \gamma \left(\frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{c}, \mathbf{F} \right) \quad (6.53)$$

Zusammenhang der Nullkomponenten:

$$K^0 = \frac{dp^0}{d\tau}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} (m(v)c^2) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (6.54)$$

$$(6.55)$$

Energie/Zeit; im Newtonschen Sinne Leistung. Wird hier ebenso interpretiert. Zeitliche Integration (mit $v(0) = 0$):

$$\int_0^t \frac{d}{dt'} (m(v(t'))c^2) dt' = \int_0^t \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt'$$

$$\Leftrightarrow c^2 \int_{m(v(0))}^{m(v(t))} dm = \int_0^{\mathbf{r}(t)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}'$$

$$\Leftrightarrow c^2(m(v) - m_0) = A(0 \rightarrow t) \quad (6.56)$$

$$\Rightarrow T = A(0 \rightarrow t). \quad (6.57)$$

6.3.3 Energie, Masse, Impuls

kinetische Energie:

$$T = T(v) = m_0(\gamma - 1)c^2 = \frac{1}{2}m_0v^2 + \frac{3}{8}m_0\frac{v^4}{c^2} + \dots \quad (6.58)$$

Einsteins Interpretation:

$$E = m(v)c^2 \xrightarrow{v \ll c} m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0v^2 \quad (\text{Gesamtenergie}) \quad (6.59)$$

$$E_0 = m_0c^2 \quad (\text{Ruheenergie}) \quad (6.60)$$

$$\Rightarrow T = E - E_0.$$

→ Masse-Energie-Äquivalenz.

$$p^0 = \gamma m_0 c = \frac{E}{c}$$

$$\Rightarrow \vec{p} = \left(\frac{E}{c}, m(v)\mathbf{v} \right) = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right) \quad (6.61)$$

$$\Rightarrow \sum_{\mu} p_{\mu} p^{\mu} = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 = \sum_{\mu} p'_{\mu} p'^{\mu} \quad (\text{invariant!}) \quad (6.62)$$

Wähle S' so, dass $\mathbf{v}' = 0$:

$$\vec{p}' = \left(\frac{E_0}{c}, \mathbf{0} \right) = (m_0 c, \mathbf{0})$$

$$\Rightarrow \vec{p}' \cdot \vec{p}' = m_0^2 c^2.$$

Da \vec{p} invariant unter LT, also auch:

$$\begin{aligned} \vec{p} \cdot \vec{p} &= m_0^2 c^2 \\ \Leftrightarrow \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 &= m_0^2 c^2 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4} \quad (6.63)$$

relativistischer Energie-Impulssatz

6.4 Lorentz-Kovarianz der Elektrodynamik

6.4.1 Kontinuitätsgleichung

$$0 = \partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = \partial_0 (c\rho) + \nabla \cdot \mathbf{j}$$

Def: Viererstromdichte

$$\vec{j} := (c\rho, \mathbf{j}) \quad (6.64)$$

Damit schreibt sich die Kontinuitätsgleichung als

$$0 = \sum_{\mu} \partial_{\mu} j^{\mu} = \sum_{\mu} \partial^{\mu} j_{\mu} \quad (6.65)$$

\vec{j} ist Vierervektor, denn die Ladung ist Lorentz-invariant und

$$dq dx^{\mu} = \rho d^3x dx^{\mu} = \frac{1}{c} d^4x \rho \frac{dx^{\mu}}{dt} = \frac{1}{c} d^4x j^{\mu}$$

ist die μ -te Komponente eines Vierervektors.

Damit gilt die Kontinuitätsgleichung in allen IS.

6.4.2 Potentialgleichungen

◁ Vakuum und Lorentzzeichnung:

$$\begin{aligned} \left(\Delta - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right)\Phi &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \Leftrightarrow \quad \square\Phi = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \left(\Delta - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right)\mathbf{A} &= -\mu_0\mathbf{j} \quad \Leftrightarrow \quad \square\mathbf{A} = \mu_0\mathbf{j} \end{aligned}$$

Def: Viererpotential

$$\vec{A} := \left(\frac{1}{c}\Phi, \mathbf{A}\right) \quad (6.66)$$

$$\Rightarrow \frac{\rho}{\epsilon_0} = \square\Phi = c\square A^0$$

$$\Leftrightarrow \square A^0 = \frac{\rho}{\epsilon_0 c} = \frac{j^0}{\epsilon_0 c^2} = \mu_0 j^0$$

$$\Rightarrow \boxed{\square \vec{A} = \mu_0 \vec{j}} \quad (6.67)$$

Lorentzkovarianz:

$$\begin{aligned} A^\mu &\xrightarrow{\text{LT}} A'^\mu, \quad j^\mu \xrightarrow{\text{LT}} j'^\mu \\ \Rightarrow \square \vec{A} &= \mu_0 \vec{j} \end{aligned}$$

Lorentzzeichbedingung:

$$0 = \frac{1}{c^2}\partial_t\Phi + \nabla \cdot \mathbf{A} = \partial_0 A^0 + \nabla \cdot \mathbf{A} = \sum_{\mu} \partial_{\mu} A^{\mu} \quad (6.68)$$

Lorentzinvariante Viererdivergenz: Gilt die Eichbedingung in einem IS, so auch in allen anderen.

6.4.3 Feldgleichungen

a) Feldstärketensor

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla\Phi - \partial_t\mathbf{A} \\ E_x &= -\partial_x\Phi - \partial_t A_x \\ &= -c\partial_1 A^0 - c\partial_0 A^1 \\ &= -c(\partial^0 A^1 - \partial^1 A^0) \\ E_y &= -c(\partial^0 A^2 - \partial^2 A^0) \\ E_z &= -c(\partial^0 A^3 - \partial^3 A^0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \\
B_x &= \partial_y A_z - \partial_z A_y \\
&= \partial_2 A^3 - \partial_3 A^2 \\
&= -(\partial^2 A^3 - \partial^3 A^2) \\
B_y &= -(\partial^3 A^1 - \partial^1 A^3) \\
B_z &= -(\partial^1 A^2 - \partial^2 A^1)
\end{aligned}$$

Def. (antisymmetrischer) Feldstärketensor:

$$F = (F^{\mu\nu})_0^3 := (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)_0^3 \quad (6.69)$$

Explizit:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (6.70)$$

→ 6 unabhängige Elemente

$$F^{\mu\nu} \xrightarrow{\text{LT}} F'^{\mu\nu}$$

Führt man die Transformation beispielsweise für einen Lorentzboost explizit aus, sieht man, dass elektrische und magnetische Komponenten bunt gemischt werden. Die Trennung zwischen elektrischem und magnetischem Feld ist damit endgültig aufgehoben.

b) Inhomogene MGIs

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \partial_t \mathbf{E} = \mu_0 \mathbf{j}$$

Behauptung: Sie können zusammengefasst werden zu

$$\boxed{\sum_{\mu} \partial_{\mu} F^{\mu\nu} = \mu_0 j^{\nu}} \quad (6.71)$$

Bemerkung: Man kann explizit überprüfen, dass die sogenannte Kontraktion $\sum_{\mu} \partial_{\mu} F^{\mu\nu}$ ein Vierervektor ist.

Beweis (für $\nu = 0$)

$$\begin{aligned}
 & \partial_0 \underbrace{F^{00}}_{=0} + \partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} \\
 &= \frac{1}{c} \left(\frac{\partial E_x}{\partial x^1} + \frac{\partial E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial E_z}{\partial x^3} \right) = \frac{1}{c} \nabla \cdot \mathbf{E} \\
 & \stackrel{!}{=} \mu_0 c \rho \\
 & \Leftrightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \text{q.e.d.}
 \end{aligned}$$

Analog kann man zeigen, dass $\nu = 1 \dots 3$ gerade den Komponenten des Ampèreschen Gesetzes entsprechen.

c) Homogene MGIs

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = 0$$

$$\begin{aligned}
 \triangleleft \nabla \cdot \mathbf{B} &= \partial_x B_x + \partial_y B_y + \partial_z B_z \\
 &= -(\partial_1 F^{23} + \partial_2 F^{31} + \partial_3 F^{12}) \\
 &= \partial^1 F^{23} + \partial^2 F^{31} + \partial^3 F^{12} \\
 &= \partial^1 (\partial^2 A^3 - \partial^3 A^2) + \partial^2 (\partial^3 A^1 - \partial^1 A^3) + \partial^3 (\partial^1 A^2 - \partial^2 A^1) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Analoge Rechnung macht man für das Faraday-Gesetz, insgesamt ergeben sich die homogenen MGI zu:

$$\boxed{H^{\mu\nu\lambda} := \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} + \partial^\lambda F^{\mu\nu} = 0} \quad (6.72)$$

Prägnante Zusammenfassung der kovarianten MGI:

Definition:

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} := \frac{1}{2} \sum_{\rho\sigma} \mathcal{E}^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \quad (6.73)$$

(„dualer Feldtensor“)

mit

$$\mathcal{E}^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1 & \text{falls } (\mu, \nu, \rho, \sigma) \text{ gerade Permutation von } (0, 1, 2, 3) \\ -1 & \text{falls } (\mu, \nu, \rho, \sigma) \text{ ungerade Permutation von } (0, 1, 2, 3) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$F_{\rho\nu} = \sum_{\mu\sigma} g_{\rho\mu} F^{\mu\sigma} g_{\sigma\nu}.$$

Damit erhält man insgesamt

$$\begin{aligned}\sum_{\mu} \partial_{\mu} F^{\mu\nu} &= \mu_0 j^{\nu} \\ \sum_{\nu} \partial_{\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu} &= 0.\end{aligned}$$

6.4.4 Weitere Diskussionspunkte

a) Lorentzkraftgleichung in kovarianter Form

$$\frac{dp^{\mu}}{d\tau} = K^{\mu} = q \sum_{\nu} F^{\mu\nu} v_{\nu} \quad (6.74)$$

[Jac], Kap 11.9

b) Lagrangegleichung und Wirkungsfunktional

c) Noethertheorem und Energie-Impuls-Tensor

Lit: zu b) und c)

[Sch], Kap 7

[Blö], Kap 11.12

Anhang A

Kleine Formelsammlung zu den Legendrepolynomen

- Differentialgleichung

$$(1 - x^2)P_l''(x) - 2xP_l'(x) + l(l + 1)P_l(x) = 0$$

($x = \cos \Theta$)

P_l sind beschränkte Lösungen auf $[-1, 1]$.

- Übliche Normierung: $P_l(1) = 1$

$$\begin{aligned}\Rightarrow P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\ P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\ &\dots\end{aligned}$$

- Symmetrie:

$$P_l(x) = (-1)^l P_l(-x)$$

- Erzeugende Funktion:

$$[1 - 2hx + h^2]^{-1/2} = \sum_{l=0}^{\infty} h^l P_l(x)$$

Begründung:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{[1+y]^{\frac{1}{2}}} \stackrel{|y|<1}{\approx} 1 - \frac{1}{2}y + \frac{3}{8}y^2 \pm \dots \\ \hookrightarrow & \frac{1}{[1+h^2-2hx]^{\frac{1}{2}}} \stackrel{h \ll 1}{\approx} 1 - \frac{1}{2}(h^2 - 2hx) + \frac{3}{8}(h^2 - 2hx)^2 \pm \dots \\ & \approx 1 + hx + h^2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}x^2 \right) \pm \dots \\ & = P_0(x) + hP_1(x) + h^2P_2(x) + \dots \end{aligned}$$

- Rodriguezformel

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} \left[(x^2 - 1)^l \right]$$

- Einige Rekursionsformeln

$$\begin{aligned} (l+1)P_{l+1}(x) &= (2l+1)xP_l(x) - lP_{l-1}(x) \\ xP'_l(x) &= P'_{l-1}(x) + lP_l(x) \\ P'_{l+1}(x) &= P'_{l-1}(x) + (2l+1)P_l(x) \end{aligned}$$

- Integrale

$$\int_{-1}^1 f(x)P_l(x) dx = \frac{(-1)^l}{2^l l!} \int_{-1}^1 \frac{d^l f(x)}{dx^l} (x^2 - 1)^l dx \quad (\text{Grundformel})$$

Spezialfall: Orthogonalität

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_l(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{lm}$$

- Darstellung von Funktionen auf $[-1, 1]$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{l=0}^{\infty} c_l P_l(x) \\ \text{mit } c_l &= \left(l + \frac{1}{2} \right) \int_{-1}^1 P_l(x) f(x) dx. \end{aligned}$$

Anhang B

Zugeordnete Legendresche Polynome

Differentialgleichung:

$$(1-x^2)P''(x) - 2xP'(x) + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right)P(x) = 0.$$

Ansatz (gewusst wie):

$$P(x) := P_l^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}}\varphi_{lm}(x)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow (P_l^m)'(x) &= \frac{m}{2}(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1}(-2x)\varphi_{lm}(x) + (1-x^2)^{\frac{m}{2}}\varphi'_{lm}(x) \\ &= (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \left[\varphi'_{lm}(x) - \frac{mx}{1-x^2}\varphi_{lm}(x) \right]. \\ \Rightarrow (P_l^m)''(x) &= \frac{m}{2}(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1}(-2x) \left[\varphi'_{lm} - \frac{mx}{1-x^2}\varphi_{lm} \right] \\ &\quad + (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \left[\varphi''_{lm} - \frac{mx}{1-x^2}\varphi'_{lm} - \frac{m(1-x^2) + 2mx^2}{(1-x^2)^2}\varphi'_{lm} \right] \\ &= (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \left[\varphi''_{lm} - \varphi'_{lm} \left(\frac{mx}{1-x^2} + \frac{mx}{1-x^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \varphi_{lm} \left(\left(\frac{mx}{1-x^2} \right)^2 - \frac{m}{1-x^2} - \frac{2mx^2}{(1-x^2)^2} \right) \right] \\ &= (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \left[\varphi''_{lm} - \frac{2mx}{1-x^2}\varphi'_{lm} + \frac{m(mx^2 - x^2 - 3)}{(1-x^2)^2}\varphi_{lm} \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\stackrel{\text{DGl}}{\Rightarrow} & (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \cdot \left[(1-x^2)\varphi_{lm}'' - 2mx\varphi_{lm}' + \frac{m(mx^2-x^2-1)}{1-x^2}\varphi_{lm} \right. \\
& \left. - 2x\varphi_{lm}' + \frac{2mx^2}{1-x^2}\varphi_{lm} + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right) \varphi_{lm} \right] = 0 \\
\Leftrightarrow & (1-x^2)\varphi_{lm}'' - 2x(m+1)\varphi_{lm}' + \varphi_{lm} \left[\frac{2mx^2+m^2x^2-mx^2-m-m^2}{1-x^2} + l(l+1) \right] = 0 \\
\Leftrightarrow & (1-x^2)\varphi_{lm}'' - 2x(m+1)\varphi_{lm}' + \varphi_{lm} \left[\frac{m(x^2-1)+m^2(x^2-1)}{1-x^2} + l(l+1) \right] = 0 \\
\Leftrightarrow & \boxed{(1-x^2)\varphi_{lm}'' - 2x(m+1)\varphi_{lm}' + \varphi_{lm} [l(l+1) - m(m+1)] = 0.} \quad (\star)
\end{aligned}$$

DGl für noch unbestimmte Funktionen φ_{lm} .

◁ Legendresche DGl:

$$(1-x^2)P_l'' - 2xP_l' + l(l+1)P_l = 0$$

Behauptung: m -maliges Differenzieren ergibt

$$(1-x^2)P_l^{(m+2)} - 2(m+1)xP_l^{(m+1)} + (l(l+1) - m(m+1))P_l^{(m)} = 0 \quad (\star\star)$$

(wobei $P_l^{(m)} = \frac{d^m}{dx^m}P_l$).

Beweis durch vollständige Induktion nach m :

(i) Aussage ist erfüllt für $m = 0$ (trivial).

Prüfe $m = 1, 2$ explizit:

einmaliges Differenzieren ergibt:

$$(1-x^2)P_l''' - 4xP_l'' + (l(l+1) - 2)P_l' = 0, \quad \checkmark$$

nochmaliges Differenzieren:

$$(1-x^2)P_l^{(4)} - 6xP_l''' + (l(l+1) - 6)P_l'' = 0. \quad \checkmark$$

(ii) Induktionsschritt $(m-1) \rightarrow m$: Es gelte also

$$(1-x^2)P_l^{(m+1)} - 2mxP_l^{(m)} + (l(l+1) - m(m-1))P_l^{(m-1)} = 0.$$

Differentiation der Gleichung ergibt

$$(1-x^2)P_l^{(m+2)} - 2(m+1)xP_l^{(m+1)} + (l(l+1) - m(m+1))P_l^{(m)} = 0, \quad \text{q.e.d.}$$

Vergleiche (\star) mit $(\star\star)$

$$\Rightarrow \varphi_{lm}(x) = \alpha P_l^{(m)}(x) \quad (\alpha = \text{const.})$$

Konvention: $\alpha = (-1)^m$.

Dann ergibt sich insgesamt die Lösung der zugeordneten Legendreschen DGl:

$$\boxed{P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x)} \quad .$$

Anhang C

Berechnung der Greenschen Funktion der Elektrodynamik

Ausgangspunkt: Gl. (4.52)

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{\mathbb{R}} d\omega \int_{\mathbb{R}^3} d^3k \frac{e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} e^{i\omega(t-t')}}{k^2 - \epsilon\mu\omega^2} \\ &=: \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{\mathbb{R}^3} d^3k e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} I(k, \tau). \\ I(k, \tau) &= \int_{\mathbb{R}} d\omega \frac{e^{i\omega\tau}}{k^2 - \epsilon\mu\omega^2} \quad (\tau = t - t') \\ &= \int_{\mathbb{R}} d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{k^2 - \epsilon\mu\omega^2} \\ &= v^2 \int_{\mathbb{R}} d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{(vk - \omega)(vk + \omega)} \\ &= \frac{v}{2k} \left[- \int_{\mathbb{R}} d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega - vk} + \int_{\mathbb{R}} d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega + vk} \right] \\ &\stackrel{\omega =: u \pm vk}{=} \frac{v}{2k} \left[- \int_{\mathbb{R}} du \frac{e^{-i(u+vk)\tau}}{u} + \int_{\mathbb{R}} du \frac{e^{-i(u-vk)\tau}}{u} \right] \\ &=: -\frac{v}{2k} e^{-ivk\tau} \mathfrak{J}(\tau) + \frac{v}{2k} e^{ivk\tau} \mathfrak{J}(\tau) \end{aligned}$$

mit

$$\mathfrak{J}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iu\tau}}{u} du.$$

Dieses Integral kann man mit Hilfe des Residuensatzes der Funktionentheorie berechnen.

C.1 Funktionentheoretische Hilfsmittel

a) Definitionen

- (i) Komplexe Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto f(z)$.
 $z = x + iy$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.
- (ii) f holomorph (analytisch) $:\Leftrightarrow f$ differenzierbar auf Gebiet G .
- (iii) f meromorph $:\Leftrightarrow f$ holomorph außer an isolierten Polen.

b) Cauchys Integralsatz

Sei f holomorph in G (einfach zusammenhängend). Dann gilt für jeden geschlossene Weg C in G :

$$\oint_C f(z) dz = 0.$$

c) Residuensatz

Sei C geschlossene, positiv orientierte, rektifizierbare Kurve in G . Sei f holomorph außer an isolierten Singularitäten $z_1 \dots z_N$ innerhalb von C . Dann gilt

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k),$$

wobei für Pole m -ter Ordnung:

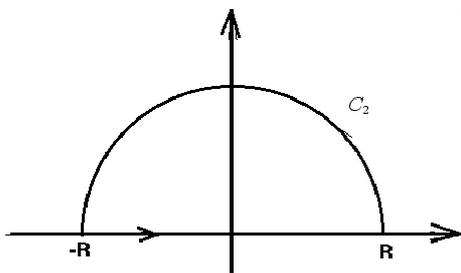
$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z - z_0)^m f(z)),$$

also für Pole erster Ordnung:

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z).$$

d) Beispiel

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} := \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{dx}{1+x^2}$$



Es gilt

$$I' = \oint_C \frac{dz}{1+z^2} \\ = \int_{-R}^R \frac{dx}{1+x^2} + \int_{C_2(R)} \frac{dz}{1+z^2}$$

$$\left| \int_{C_2(R)} \frac{dz}{1+z^2} \right| \stackrel{z(t)=Re^{it}}{=} \left| \int_0^\pi \frac{1}{1+R^2e^{2it}} iRe^{it} dt \right| \leq R \int_0^\pi \frac{1}{|1+R^2e^{2it}|} dt \\ \leq R \int_0^\pi \frac{1}{\inf_{0 \leq t \leq \pi} |1+R^2e^{2it}|} dt = R \int_0^\pi \frac{1}{|1-R^2|} dt \\ \stackrel{R > 1}{=} R \int_0^\pi \frac{1}{R^2-1} dt = \frac{\pi R}{R^2-1} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0,$$

also $I' = I$.

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{z+i} \cdot \frac{1}{z-i},$$

also haben wir Pole erster Ordnung $z = \pm i$.

$$\text{Res}(f, i) = \lim_{z \rightarrow i} (z-i) \frac{1}{z+i} \cdot \frac{1}{z-i} = \frac{1}{2i}. \\ \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \oint_C \frac{dz}{1+z^2} = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi.$$

C.2 Berechnung von $\mathfrak{J}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iu\tau}}{u} du$

$$\triangleleft \tilde{\mathfrak{J}}(\tau) := \oint_C \frac{e^{-iz\tau}}{z} dz$$

Pol erster Ordnung bei $z = 0$. Problem: Die Kurve C muss die reelle Achse enthalten und dann liegt der Pol auf der Kurve.

Option (i) Verschiebe Pol von $z = 0$ zu $z = i\epsilon$ und betrachte ähnliche Wege wie oben:

(γ_1 oberer Halbkreis, γ_2 unterer Halbkreis, α auf der reellen Achse von links nach rechts, $C := \gamma_1 - \gamma_2$).

$$\tilde{\mathfrak{J}} = \oint_C \frac{e^{-i(z-i\epsilon)\tau}}{z-i\epsilon} dz$$

Für alle Wege kann man das Integral jetzt mit dem Residuensatz ausrechnen:

$$\oint_C f(z) dz = \oint_{\gamma_{1+\alpha}} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i\epsilon) = 2\pi i(z - i\epsilon)f(i\epsilon) = 2\pi i,$$

$$\oint_{\gamma_{2+\alpha}} f(z) dz = 0.$$

Genauso gut kann man den Pol von $z = 0$ zu $z = -i\epsilon$ verschieben und erhält in diesem Fall

$$\oint_C f(z) dz = \oint_{\gamma_{2+\alpha}} f(z) dz = -2\pi i \operatorname{Res}(f, -i\epsilon) = -2\pi i(z + i\epsilon)f(-i\epsilon) = -2\pi i,$$

$$\oint_{\gamma_{1+\alpha}} f(z) dz = 0.$$

Außerdem gilt mit $z = x + iy$ auf γ_1 oder γ_2 :

$$\left| \frac{e^{-iz\tau}}{z} \right| = \frac{1}{|z|} e^{y\tau} = \frac{1}{R} e^{y\tau}.$$

Das Integral über γ_1 hierüber geht gegen 0 (Beweis nicht einfach), für $\tau > 0$ und $y \rightarrow -\infty$ bzw. für $\tau < 0$ und $y \rightarrow \infty$. Zusammengefasst ergibt sich also

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx &= 2\pi i && \text{für } \tau < 0 \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx &= 0 && \text{für } \tau > 0 \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx &= 0 && \text{für } \tau < 0 \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx &= -2\pi i && \text{für } \tau > 0. \end{aligned}$$

Mit Kausalitätsforderung ergibt sich

$$J(\tau) := J^+(\tau) = \begin{cases} 0 & \tau < 0 \\ -2\pi i & \tau > 0 \end{cases}. \quad (\text{C.1})$$

C.3 Die retardierte Greensche Funktion G^+

$$G^+(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \tau) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{\mathbb{R}^3} d^3k e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} I^+(k, \tau),$$

$$\begin{aligned} I^+(k, \tau) &= -\frac{v}{2k} e^{-ivk\tau} \mathfrak{J}^+(\tau) + \frac{v}{2k} e^{ivk\tau} \mathfrak{J}^+(\tau) \\ &= \begin{cases} 0 & \tau < 0 \\ \frac{2\pi v}{k} \cdot \frac{1}{2i} (e^{ivk\tau} - e^{-ivk\tau}) & \tau > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \tau < 0 \\ \frac{2\pi v}{k} \sin(vk\tau) & \tau > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$\tau > 0:$

$$\begin{aligned}
G^+(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \tau) &= \frac{v}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3k \frac{e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \sin(vk\tau)}{k} \\
&= \frac{v}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk k \sin(vk\tau) \int_{-1}^1 d(\cos(\theta_k)) e^{ikr \cos(\theta_k)} \int_0^{2\pi} d\phi_k \\
&= \frac{v}{(2\pi)^2} \frac{2}{R} \int_0^\infty dk \sin(vk\tau) \sin(kR) dk \\
&= -\frac{v}{8\pi^2 R} \int_0^\infty dk (e^{ivk\tau} - e^{-ivk\tau}) (e^{ikR} - e^{-ikR}) dk \\
&= -\frac{v}{8\pi^2 R} \left(\int_{-\infty}^\infty e^{ik(R+v\tau)} dk - \int_{-\infty}^\infty e^{ik(R-v\tau)} dk \right) \\
&= \frac{v}{4\pi R} (\delta(R - v\tau) - \delta(R + v\tau)) \\
&= \frac{1}{4\pi R} \delta\left(\frac{R}{v} - \tau\right).
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = \begin{cases} 0 & t < t' \\ \frac{\delta(t-t'-\sqrt{\epsilon\mu}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} & t > t'. \end{cases}$$

Literaturverzeichnis

- [Blö] BLÖCHL, P.: Theoretische Physik II: Elektrodynamik. Internetadresse: <http://www2.pt.tu-clausthal.de/atp/education.html>.
- [DL] DREIZLER, R. M. und LÜDDE, C. S.: Theoretische Physik 2. Springer.
- [Grea] GREINER, W.: Theoretische Physik I. H. Deutsch.
- [Greb] GREINER, W.: Theoretische Physik III. H. Deutsch.
- [Jac] JACKSON, J.D.: Classical Electrodynamics. de Gruyter.
- [Jel] JELITTO, R.: Theoretische Physik IV, V. Aula.
- [Kira] KIRCHNER, TOM: Theoretische Physik I: Klassische Mechanik. Internetadresse: <http://www2.pt.tu-clausthal.de/qd/skripten.html>.
- [Kirb] KIRCHNER, TOM: Theoretische Physik III: Quantenmechanik. Internetadresse: <http://www2.pt.tu-clausthal.de/qd/skripten.html>.
- [Lin] LINDNER, A.: Drehimpulse in der QM. Teubner.
- [Mes] MESSIAH, A.: Quantenmechanik I, II. de Gruyter.
- [Sch] SCHRÖDER, U.E.: Spezielle Relativitätstheorie. H. Deutsch.