

Th. Physik II (Elektrodynamik und Optik) für LA⁽⁺⁾

U. Krey

Institut für Physik II, Universität Regensburg, Universitätsstr. 31,
D-93040 Regensburg

Sommersemester 2002, Verbesserungsvorschläge und Fragen jederzeit willkommen.
(⁽⁺⁾ Auch für Diplom geeignet.)

Inhaltsverzeichnis

1	Vorspann: Literatur, Internet, geplanter Inhalt, Zweck	3
2	Einführung und (mathematische) Präliminarien	3
2.1	Das Maßsystemdilemma und seine Lösung	3
2.2	Mathematische Präliminarien I: Punktladungen und die δ -Funktion . . .	6
2.3	Mathematische Präliminarien II: Vektoranalysis und Integralsätze . . .	7
3	Elektrostatik und Magnetostatik	9
3.1	Elektrostatik im Vakuum	9
3.1.1	Coulomb-Gesetz und Superpositionsprinzip	9
3.1.2	Die Integralformel zur Berechnung des elektrischen Feldes	11
3.1.3	Das Gauß'sche Gesetz und die Poisson-Gleichung	11
3.1.4	Anwendung des Gauß'schen Gesetzes: Feldberechnung bei Kugel- und Zylindersymmetrie	12
3.1.5	Die Rotation des elektrostatischen Feldes; das elektrostatische Potential	13
3.1.6	Einschub: Polar- und Zylinderkoordinaten	14
3.1.7	Das Kondensator-Problem; Kapazität; Harmonische Funktionen	16
3.1.8	Numerische Berechnung elektrischer Felder	18
3.2	Elektrostatische und magnetostatische Felder in polarisierbarer Materie	18
3.2.1	Dielektrika	18
3.2.2	Dipolfelder	18
3.2.3	Die elektrische Polarisierung	19
3.2.4	Multipolmomente und Multipolentwicklung	20
3.2.5	Klassifizierung: Dielektrische, paraelektrische und ferroelektrische Systeme; wahre und effektive Ladungen	21
3.2.6	Feldberechnung im Polarisationsbild und im Effektivladungsbild	22
3.2.7	Magnetostatik	22
3.2.8	Kräfte und Drehmomente auf elektrische und magnetische Dipole	23

3.2.9	Die Feldenergie	24
3.2.10	Der Entmagnetisierungstensor	25
3.2.11	Unstetigkeiten an Grenzflächen	25
4	Magnetfelder stationärer Ströme	26
4.1	Das Ampère'sche „Durchflutungsgesetz“	26
4.1.1	Eine Anwendung: Oberflächenströme in Supraleitern. Der Meissner-Effekt	27
4.2	Das Vektorpotential; Umeichung	27
4.3	Die Biot-Savart'sche Formel	28
4.4	Die Ampère'sche Kreisstrom-Hypothese	28
4.5	Das Gyromagnetische Verhältnis und der Spin-Magnetismus	30
5	Die allgemeinen Maxwell'schen Gleichungen I: Induktionsgesetz, Kontinuitätsgleichung und „Maxwell'sche Ergänzung“	30
5.1	Das Induktionsgesetz und die Lorentzkraft; Generatorspannung	31
5.2	Die Kontinuitätsgleichung	32
5.3	Das Ampère'sche Gesetz mit der Maxwell'schen Ergänzung	32
5.4	Anwendungen: Selbst- und Gegeninduktivitäten; der Transformator; Wechselstromwiderstände; <i>RLC</i> -Resonanz	33
6	Die allgemeinen Maxwell'schen Gleichungen II: Elektromagn. Wellen	36
6.1	Energiesatz; Poynting-Vektor	36
6.2	Die sog. retardierten Potentiale und Vektorpotentiale I: Die d'Alembert-Gleichung	36
6.3	Ebene elektromagnetische Wellen; Kugelwellen	38
6.4	Die sog. retardierten Potentiale und Vektorpotentiale II: Das Superpositionsprinzip mit Retardierung	39
6.5	Der Hertz'sche Dipol (Elektrische Dipolstrahlung, 'Handy')	40
6.6	Magnetische Dipolstrahlung; Synchrotronstrahlung	41
6.7	Allgemeine Multipolstrahlung	42
6.8	Relativistische Invarianz der Elektrodynamik	43
6.9	„Fragestunde“	46
7	Anwendungen der Elektrodynamik in der Optik	47
7.1	Einführung; Wellengleichungen; Dispersionskurven; Gruppen- und Phasengeschwindigkeit	47
7.2	Von der Wellenoptik zur geometrischen Optik (Strahlenoptik); Fermat'sches Prinzip	51
7.3	Kristalloptik und Doppelbrechung	52
7.4	Beugungstheorie	55
7.4.1	Fresnel'sche Kantenbeugung; Nahfeldmikroskopie („SNOM“)	57
7.4.2	Fraunhofer'sche Beugung an der Rechtecköffnung und an der Kreisöffnung; Auflösungsvermögen	59
7.5	Holographie	59

1 Vorspann: Literatur, Internet, geplanter Inhalt, Zweck

Übungen: In den Übungen sollen möglichst realistische Staatsexamensklausuraufgaben oder Teile daraus gerechnet werden.

Literatur: Alle Lehrbücher der Theor. Physik mit Teilkapiteln zur Elektrodynamik und Optik. Bedingt besonders empfohlen: T. Fließbach (II), der allerdings leider statt des mksA-Systems das cgs-System benutzt und wichtige Teile der Optik nicht anspricht¹, aber sonst in der Darstellung und im Inhalt vorbildlich ist. Bibliothek: 84 UC 191 F...;

W. Greiner (Bd. III), 84UC 174 G..., benutzt leider ebenfalls vorwiegend das cgs-System, nicht dagegen:

W. Döring, 84 OC 154 D... (Bd II (E-Dyn.), Bd. III (Optik)) (dieses Buch ist sehr kurz und bzgl. Bd. II zeitlos gut)

W. Nolting, 84 UC 189 N..., (Bd. III, nur E-Dyn., eher zu anspruchsvoll) und

R. Jelitto, 84 UC 182 J..., (Bd. III, ebenfalls nur E-Dyn.)

Literatur speziell zur Optik:

D. Meschede, "Optik, Licht und Laser", 84 UH 5000 M...;

Pedrotti *et al.*: "Optik: Eine Einführung", 84 UH 5000 P...;

J. Perez: "Optik", 84 UH 5000 P...;

H. Römer: "Theoretische Optik", 84 UH 5000 R....

Literatur speziell zur Holographie:

H. Lenk, 84 UH 5700 L....; M. Miler: dito M...;

Internet: [http://www.physik.uni-regensburg.de\(/studium/skripten\)](http://www.physik.uni-regensburg.de(/studium/skripten))

Geplanter Inhalt: siehe Inhaltsverzeichnis

2 Einführung und (mathematische) Prälimarien

Die Elektrodynamik bildet die Grundlage unserer gesamten gegenwärtigen auf der 'Elektrizität' und den Radio-, Fernseh-, 'Handy'-, Radar- und sonstigen Techniken beruhenden Kultur bzw. 'Unkultur'; das ist wesentlich mehr als nur Ingenieurwissenschaft.

2.1 Das Maßsystemdilemma und seine Lösung

Leider gibt es ein kleines Problem bei der Formulierung der Theorie; dieses Problem beruht auf der Verwendung zweier unterschiedlicher Maßsysteme bei der Formulierung der Grundgleichungen der Theorie, der 'Maxwell'schen Gleichungen'. Die in diesen Gleichungen beschriebenen physikalischen Zusammenhänge sind natürlich unabhängig von den bei der Beschreibung benutzten Maßsystemen, das heißt, die Maßsysteme sind auf jeden Fall äquivalent; das ist aber nicht immer gleich zu erkennen.

- Und zwar wird von den Ingenieuren, in der Schule, und zunehmend auch in den meisten Vorlesungen und in vielen Büchern, das als 'mksA'-System (oder 'SI'- oder 'Georgi'-System) bezeichnete Maß- und Gleichungssystem benutzt.

¹deshalb 'bedingt'

- Dagegen benutzen andere Bücher und die meisten Theoretiker vorwiegend das sog. 'cgs-System' (auch Gauß'sches System oder 'e.m.u'-System ('electromagnetic units') genannt), das insbesondere in den USA noch vorherrscht (dort auch bei den Ingenieuren), sich aber sehr langsam 'auf dem Rückzug befindet'.

Beide Systeme sind – wie gesagt – äquivalent, und man kann systematisch von einem Maßsystem ins andere umrechnen; allerdings ist die Umrechnung nicht ganz so einfach wie bei der Umwandlung von m in cm oder 'inches', und die 'Maxwell'schen Gleichungen' haben in beiden Maßsystemen etwas unterschiedliche Form, was leicht verwirren kann, zumal die Darstellung des Sachverhalts in vielen Büchern nicht immer ganz richtig ist.

Hier soll - wie es sich für das Lehramt gehört - das 'mksA'-System benutzt werden; allerdings soll hergeleitet werden, wie man von einem System ins andere umrechnet; die Physik ist – wie gesagt – dieselbe.

Im mksA-System verwendet man zusätzlich zu den Größen 'Länge', 'Masse' und 'Zeit' noch eine weitere vierte 'Grundgröße', die elektrische Ladung, die in Einheiten von '1 Coulomb' (= '1 Ampere s') gemessen wird. Für die Schule: Ein Coulomb ist die mksA-Ladung, die von einem bestimmten Elektrolytsystem unter bestimmten Bedingungen in einer Sekunde an einer der Elektroden abgeschieden wird.

Für die Theoretiker wäre es natürlich naheliegender, statt der Einheit 1 Coulomb (=1 As) die Elementarladung $|e| \cong 1,602 \cdot 10^{-19}$ Coulomb als Einheit zu benutzen, aber damit wären die Ingenieure überfordert.

Der Name 'Elektrizität' ist natürlich an das Phänomen der Reibungselektrizität geknüpft ($\epsilon\lambda\epsilon\kappa\tau\rho\nu$ = 'Bernstein'), und es war im 18. Jahrhundert ein großer Schritt, das Coulomb-Gesetz² zu formulieren, nach welchem zwei geladene Körper eine Kraft aufeinander ausüben, die in Richtung der Verbindungsachse wirkt, proportional zum Produkt ihrer beiden Ladungen und umgekehrt proportional zum Quadrat ihres Abstandes ist:

Im mksA-System formuliert man

$$\vec{F}_{1\leftarrow 2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{1,2}^2} \vec{e}_{1\leftarrow 2}, \quad (1)$$

mit dem Verbindungsvektor $\vec{e}_{1\leftarrow 2} := (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)/|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ und dem Abstand $r_{1,2} := |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$.

Nach Gleichung (1) ist ϵ_0 eine Größe der Dimension $Coulomb^2/cm^2 Newton^{-1}$, die man bei gegebenem q_1 und q_2 durch eine Kraftmessung bestimmen kann. Mit der Beziehung $1 W(att) s = 1 V(olt) A(mpere) s = 1 V Coulomb = 1 J(oule) = 1 N(ewton) m$ kann man noch die 'abgeleitete Größe' $V(olt)$ einführen und erhält mit der Vakuumlichtgeschwindigkeit $c = 2,998 \cdot 10^8$ m/s (s.u.) schließlich $\epsilon_0 \cong 8,854 \cdot 10^{-12}$ As/Vm.

Im 'cgs'-System sieht man als Physiker dagegen überhaupt keinen Anlass, den Ingenieuren zuliebe den Faktor $4\pi\epsilon_0$ einzuführen, d.h. man schreibt anstelle von (1) einfach

$$\vec{F}_{1\leftarrow 2} = \frac{q'_1 q'_2}{r_{1,2}^2} \vec{e}_{1\leftarrow 2}, \quad (2)$$

und misst durch die Kraftmessung direkt die 'cgs'-Ladungen q'_1 und q'_2 ; diese sind von den (ungestrichenen) mksA-Ladungen verschieden; allerdings gilt der sehr einfache Zu-

²Charles Augustin de Coulomb, 1785.

sammenhang

$$q' = \frac{q}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}, \quad (3)$$

d.h. die beiden Ladungen unterscheiden sich nur durch einen Faktor, der jedoch dimensionsbehaftet ist.

Dementsprechend rechnet man auch die elektrischen Feldstärken \vec{E} um: und zwar, indem man $\vec{F} = q \cdot \vec{E} \equiv q' \cdot \vec{E}'$ schreibt, so dass also

$$\vec{E}' = \vec{E} \cdot \sqrt{4\pi\epsilon_0} \quad (4)$$

gilt. Die Konstante ϵ_0 wird als 'absolute Dielektrizitätskonstante' bezeichnet, im cgs-System kommt sie gar nicht vor, sie hat also im Grunde keine wesentliche physikalische Bedeutung.

Per Gesetz ist ϵ_0 (und damit letzten Endes die Einheit '1 Coulomb' bzw. '1 Ampere') exakt wie folgt definiert: Man setzt $\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$, mit der Vakuum-Lichtgeschwindigkeit c , die durch Messung zu bestimmen ist, und mit der gesetzlich festgelegten Konstante $\mu_0 \equiv 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/(Am)}$, der sog. 'Permeabilität des Vakuums'. Damit erhält man für ϵ_0 den oben angegebenen Wert, der im Gegensatz zu μ_0 schwer zu merken ist.

Die Permeabilität μ_0 spielt bei den magnetischen Größen die gleiche Rolle wie ϵ_0 bei den elektrischen Größen: Analog zur elektrischen Ladung, zu den elektrischen Dipolmomenten, zur Ladungsdichte ρ und zur Stromdichte \vec{j} (z.B. $\vec{j}' \equiv \frac{\vec{j}}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}$) sowie zur elektrischen Feldstärke \vec{E} (z.B. $\vec{E}' = \vec{E} \cdot \sqrt{4\pi\epsilon_0}$) transformiert man auch die magnetischen Größen vom ungestrichenen mksA-System ins gestrichene cgs-System, und zwar (o.B.) die magnetischen Dipolmomente nach der Formel $\vec{m}' = \frac{\vec{m}}{\sqrt{4\pi\mu_0}}$ und die magnetische Induktion \vec{B} nach der Formel $\vec{B}' = \vec{B} \cdot \sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}}$. Dabei ist immer $\epsilon_0\mu_0 \equiv \frac{1}{c^2}$. So erhält man nach einer längeren elementaren Rechnung (im Vakuum) aus den vier Maxwell'schen Gleichungen im mksA-System (die wir uns merken, weil sie in dieser Vorlesung noch häufig wiederholt werden), nämlich

$$\begin{aligned} \text{div}\vec{E} &= \rho/\epsilon_0 \\ \text{div}\vec{B} &= 0 \\ \text{rot}\vec{E} &= -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \text{rot}\vec{B} &= \mu_0\vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (5)$$

die analogen Gleichungen im cgs-System, die wir uns nicht merken, obwohl sie in vielen Büchern stehen (in der Regel ohne den Strich):

$$\begin{aligned} \text{div}\vec{E}' &= 4\pi\rho' \\ \text{div}\vec{B}' &= 0 \\ \text{rot}\vec{E}' &= -\frac{\partial\vec{B}'}{c\partial t} \\ \text{rot}\vec{B}' &= \frac{4\pi}{c}\vec{j}' + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}'}{\partial t} \end{aligned}$$

Wichtig ist auch die Formel für die Kraft auf ein geladenes Teilchen, welches sich mit der Geschwindigkeit \vec{v} im elektromagnetischen Feld bewegt ('Lorentzkraft'). Sie lautet im mksA-System

$$\vec{F} = q \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \quad (6)$$

und im cgs-System

$$\vec{F} = q' \cdot (\vec{E}' + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}').$$

2.2 Mathematische Präliminarien I: Punktladungen und die δ -Funktion

Einer (geringfügig 'verschmierten') Punktladung der Stärke q am Ort \vec{r}' entspricht formal die Ladungsdichte $\rho_\epsilon(\vec{r}) = q \cdot \delta_\epsilon(\vec{r} - \vec{r}')$. Dabei ist $\delta_\epsilon(\vec{r} - \vec{r}')$ eine im Unendlichen hinreichend rasch abfallende, unendlich oft differenzierbare Funktion mit einem (für kleine ϵ) sehr hohen und schmalen Maximum bei $\vec{r} = \vec{r}'$, wobei für alle ϵ das Integral $\int d^3r \delta_\epsilon(\vec{r} - \vec{r}') \equiv 1$ sein soll, obwohl für $\vec{r} \neq 0$ der Limes $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(\vec{r})$ gleich Null ist: Das geht trotzdem, z.B. mit sehr hohen und schmalen 'Gauß'schen Glockenfunktionen'

$\delta_\epsilon(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{\exp(-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}{2\epsilon^2})}{(2\pi\epsilon^2)^{3/2}}$ (ohne Beweis für den Wert des Integrals, siehe auch Abbildung 1).

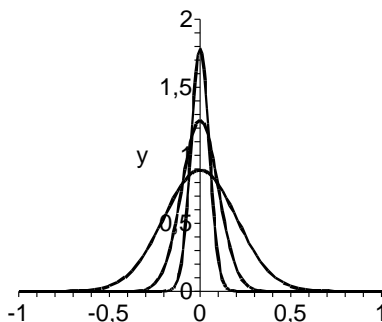


Abbildung 1: Gaußglocken als Approximation für Dirac's δ -Funktion :

Im Grenzfall wachsender Steilheit werden für $\epsilon = 0.2, 0.1$ und 0.05 die Gauß-Approximationen $\delta_\epsilon(x) := (2\pi\epsilon^2)^{-0.5} \exp(-x^2/(2\epsilon^2))$ der Dirac'schen δ -Funktion dargestellt; die Dirac'sche δ -Funktion erhält man (unter dem Integral) im Limes $\epsilon \rightarrow 0$.

Die Funktionen $\delta_\epsilon(\vec{r} - \vec{r}')$ sind also für $\epsilon \neq 0$ sehr gutartig und erst im Limes $\epsilon \rightarrow 0$ so 'zackig', wie es der ebenfalls für die δ -Funktion gebräuchliche Name 'Zackenfunktion' suggeriert³:

Die sog. 'Dirac'sche δ -Funktion ist der formale Limes $\delta(\vec{r} - \vec{r}') := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(\vec{r} - \vec{r}')$, wobei der angegebene Limes stets *vor* dem Integral ausgeführt werden soll, wie bei den folgenden Integralen (7) und (8):

³Manchmal werden die Funktionen $\delta_\epsilon(x)$ – für $d=1$ – auch durch ' $\delta_\epsilon(x) = 1/\epsilon$ für $|x| \leq \epsilon/2, = 0$ sonst' definiert. Das ist im Hinblick auf Gleichung (7) besonders bequem; wegen Gleichung (8) empfiehlt es sich aber, diese Funktionen durch leichtes 'Verschmieren' unendlich oft differenzierbar zu machen.

Es sei $f(\vec{r})$ eine stetige 'Testfunktion mit beschränktem Träger', d.h. $f \equiv 0$ außerhalb eines beschränkten Gebietes, dann gilt für alle diese f :

$$\int d^3r' \delta(\vec{r}' - \vec{r}) \cdot f(\vec{r}') := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int d^3r' \delta_\epsilon(\vec{r}' - \vec{r}) \cdot f(\vec{r}') \equiv f(\vec{r}). \quad (7)$$

In diesem 'schwachen' Sinne ist die δ -Funktion beliebig oft differenzierbar: Falls z.B. die Testfunktion $f(\vec{r})$ nach x stetig differenzierbar ist, gilt mit einer partiellen Integration für alle diese f :

$$\int d^3r' \frac{\partial}{\partial x'} \delta(\vec{r}' - \vec{r}) \cdot f(\vec{r}') := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int d^3r' \frac{\partial}{\partial x'} \delta_\epsilon(\vec{r}' - \vec{r}) \cdot f(\vec{r}') \equiv (-1) \frac{\partial}{\partial x} f(\vec{r}). \quad (8)$$

Also wird eine Punktladung der Stärke q am Ort \vec{r}' beschrieben durch die (formal beliebig oft differenzierbare) Ladungsdichte

$$\rho(\vec{r}) = q \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (9)$$

2.3 Mathematische Präliminarien II: Vektoranalysis und Integralsätze

Der sog. Nabla-Operator ist der vektorwertige formale Operator

$$\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right). \quad (10)$$

Der Vektorpfeil wird dabei weggelassen, und im Folgenden wird zur Vereinfachung stets $\partial_j := \frac{\partial}{\partial x_j}$ geschrieben, mit $j=1,2,3$ für x, y and z (falls nichts Anderes gesagt wird).

Mit dem Nabla-Operator sind drei Größen verbunden:

1. Der sog. **Gradient** einer skalaren Funktion $f(\vec{r})$;
2. die sog. **Divergenz** von $\vec{v}(\vec{r})$, das ist eine aus $\vec{v}(\vec{r})$ durch Differentiation gebildete skalare Größe, die sog. 'Quellendichte' des Vektorfeldes $\vec{v}(\vec{r})$, und
3. die sog. **Rotation** dieses Vektorfeldes, d.i. eine aus $\vec{v}(\vec{r})$ durch Differentiation gebildete vektorielle Größe, die sog. Wirbeldichte.

Im Einzelnen gilt

•

$$\text{grad}f(\vec{r}) := \nabla f(\vec{r}) = (\partial_x f(\vec{r}), \partial_y f(\vec{r}), \partial_z f(\vec{r})). \quad (11)$$

Dieser Vektor steht senkrecht auf den 'Höhenlinien' der Funktion $f(\vec{r})$ und weist in Richtung des steilsten Anstiegs. Er wird in der Elektrodynamik meist im Zusammenhang mit dem Gesetz $\vec{E} = -\text{grad}\phi$ benutzt, wobei $\phi(\vec{r})$ die sog. 'Potentialfunktion' des elektrischen Feldes \vec{E} ist. Das Minuszeichen ist Konvention, wie bei der sog. 'Potentiellen Energie' in der Mechanik. Der Vektorpfeil wird dabei weggelassen, und im Folgenden wird zur Vereinfachung stets $\partial_j := \frac{\partial}{\partial x_j}$ geschrieben, mit $j=1,2,3$ für x, y and z (falls nichts Anderes gesagt wird).

-

$$\operatorname{div} \vec{v}(\vec{r}) := \nabla \cdot \vec{v}(\vec{r}) = \partial_x v_x + \partial_y v_y + \partial_z v_z . \quad (12)$$

Wir werden noch sehen, dass diese aus $\vec{v}(\vec{r})$ durch Differentiation gebildete Größe⁴ die Bedeutung einer Quellendichte des Vektorfeldes $\vec{v}(\vec{r})$ hat (\rightarrow Gauß'scher Integralsatz, s.u.).

-

$$\operatorname{rot} \vec{v} := \nabla \times \vec{v}(\vec{r}) = [\partial_y v_z - \partial_z v_y, \partial_z v_x - \partial_x v_z, \partial_x v_y - \partial_y v_x] . \quad (13)$$

(In der angelsächsischen Literatur ist statt $\operatorname{rot} \vec{v}$ auch die Bezeichnung $\operatorname{curl} \vec{v}$ gebräuchlich. Nützlich ist auch die Formulierung mit dem antisymmetrischen Einheitstensor, $(\operatorname{rot} \vec{v})_i = e_{ijk} \partial_j v_k$, worauf ich aber an dieser Stelle nicht weiter eingehen kann.)

Die Interpretation der Rotation als 'Wirbeldichte' ergibt sich aus dem Stokes'schen Integralsatz (s.u.).

Die bereits angesprochenen Integralsätze, der Gauß'sche und der Stokes'sche Integralsatz, können wie folgt formuliert werden:

- **Gauß'scher Integralsatz:**

Es sei V ('Volumen') eine orientierbare glatte 3d-Mannigfaltigkeit mit der geschlossenen Randfläche ∂V , mit der 'äußeren Normalen' $\vec{n}(\vec{r})$. Das Vektorfeld $\vec{v}(\vec{r})$ sei auf ∂V stetig und im Innern von V stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\oint_{\partial V} \vec{v}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r}) \, d^2 A = \iiint_V \operatorname{div} \vec{v}(\vec{r}) \, d^3 V . \quad (14)$$

Dabei bezeichnet $d^2 A$ den Flächeninhalt eines infinitesimalen Flächenelementes von ∂V und $d^3 V$ den Volumeninhalt eines infinitesimalen Volumenelementes von V , das heißt, das Integral auf der linken Seite von Gleichung (14) ist der 'Quellfluß von \vec{v} aus V heraus durch die Oberfläche ∂V '. Es liegt daher nahe, den Integranden $\operatorname{div} \vec{v}(\vec{r})$ des Volumenintegrals auf der rechten Seite als 'Quellendichte von $\vec{v}(\vec{r})$ ' zu apostrophieren.

(Zur konkreten Berechnung des 'Quellfluss-Integrals' auf der linken Seite von (14): Falls ∂V stückweise durch folgende Parametrisierung gegeben ist:

$$\partial V := \{ \vec{r} | \vec{r} = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \text{ mit } (u, v) \in G(u, v) \} , \quad (15)$$

so gilt

$$\oint_{\partial V} \vec{v}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r}) \, d^2 A = \iint_{G(u, v)} \vec{v}(\vec{r}(u, v)) \cdot \left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right] \, du \, dv \quad .) \quad (16)$$

Der Beweis des Gauß'schen Integralsatzes geht analog zum Beweis des (folgenden) Stokes'schen Integralsatzes.

⁴Hier sollte man den 'Dot', \cdot , für die skalare Multiplikation zweier Vektoren nicht vergessen, weil z.B. $\mathbf{c} := \nabla \vec{v}$ (also ohne \cdot), kein Skalar, sondern ein zweistufiger Tensor mit den Komponenten $c_{i,k} = \frac{\partial v_k}{\partial x_i}$ wäre.

- **Stokes'scher Integralsatz:**

Es sei ∂F eine orientierte geschlossene Kurve und F ein in ∂F eingespanntes, d.h. von dieser Kurve berandetes Flächenstück mit dem äußeren Normalenvektorfeld $\vec{n}(\vec{r})$. Ferner sei $\vec{v}(\vec{r})$ auf ∂F stetig und in F stetig-differenzierbar. Dann gilt

$$\oint_{\partial F} \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \iint_F (\text{rot } \vec{v}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r})) d^2A. \quad (17)$$

Die linke Seite dieser Gleichung definiert die sog. 'Zirkulation' des Vektorfeldes $\vec{v}(\vec{r})$ längs der geschlossenen Kurve ∂F ; diese wird vermöge des Integralsatzes in ein Flächenintegral mit dem durch die rechte Seite definierten Integranden umgewandelt. Also liegt es nahe, $\text{rot } \vec{v}$ als (vektorielle) Flächendichte der Zirkulation von $\vec{v}(\vec{r})$ zu bezeichnen.

Zum Beweis: Es soll nur der Stokes'sche Satz bewiesen werden; dabei wird vorausgesetzt, dass die Fläche F zwar nicht notwendig eben, aber 'triangulierbar' ist, d.h. dass sie z.B. mit infinitesimal-kleinen Rechtecken so 'gepflastert' werden kann, dass die Randkurvenstücke dieser Rechtecke im Innern von F paarweise in entgegengesetzter Richtung durchlaufen werden. Der Satz muss daher in bekannter Weise nur für jedes dieser infinitesimalen Rechtecke R bewiesen werden. Das betrachtete Rechteck soll o.B.d.A. in der (x,y)-Ebene liegen; seine vier Eckpunkte seien $P_1 = (-\Delta x/2, -\Delta y/2)$, $P_2 = (+\Delta x/2, -\Delta y/2)$, $P_3 = (+\Delta x/2, +\Delta y/2)$ und $P_4 = (-\Delta x/2, +\Delta y/2)$. Es ist daher

$$\begin{aligned} \oint_{\partial R} \vec{v} \cdot d\vec{r} &\cong [v_x(0, -\Delta y/2) - v_x(0, +\Delta y/2)]\Delta x + [v_y(+\Delta x/2, 0) - v_y(-\Delta x/2, 0)]\Delta y \\ &\cong \left(-\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) \Delta x \Delta y = \iint_R \text{rot } \vec{v} \cdot \vec{n} d^2A. \end{aligned} \quad (18)$$

Mit $\vec{n} = (0, 0, 1)$ und $d^2A = dx dy$ ergibt dies die Aussage des Satzes⁵.

Der Gauß'sche Integralsatz ist analog zu beweisen; siehe Abbildung 2 auf der nächsten Seite.

3 Elektrostatik und Magnetostatik

3.1 Elektrostatik im Vakuum

3.1.1 Coulomb-Gesetz und Superpositionsprinzip

Eine elektrische Punktladung der Stärke q am Ort \vec{r}' erfährt dort in einem elektrischen Feld $\vec{E}(\vec{r}')$ eine Kraft ('passive Ladung', 'Nahwirkung'),

$$\vec{F}(\vec{r}') = q\vec{E}(\vec{r}') \quad (19)$$

⁵Aus Gründen der grösseren Suggestionskraft haben wir in Gleichung (18) $\oint_{\partial R}$ statt $\int_{\partial R}$ geschrieben, obwohl auch in der letzten Form alles Nötige gesagt ist.

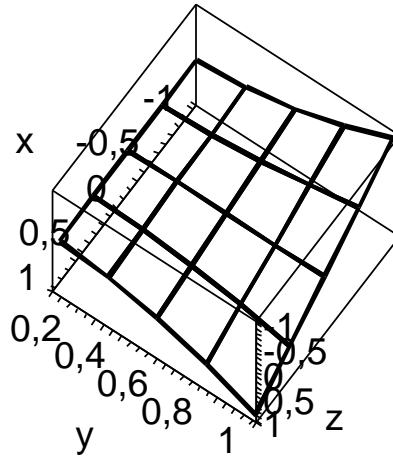


Abbildung 2: Triangularisierung („Pflasterung“) einer 2d-Fläche im Raum

Ein Flächenstück der Fläche $z = xy^2$ wird triangularisiert („gepflastert“), und zwar durch das eingezeichnete quadratische Koordinatennetz. Wenn die Quadrate allesamt ebenso orientiert sind wie die äußerste Randkurve bzw. das Flächenstück insgesamt (z.B. denkt man sich alle Quadrate virtuell mit rechtshändigen Wirbeln versehen, die aber nicht dargestellt sind), dann heben sich *im Innern* des Flächenstücks die Linienintegrale über die eingezeichneten Linien paarweise auf, da sie im entgegengesetzten Sinn durchlaufen werden. Infolgedessen gilt: *Wenn der Stokes'sche Integralsatz für infinitesimale Quadrate bewiesen werden kann, so gilt er ganz allgemein für beliebig geformte orientierbare Flächenstücke.*

sie erzeugt aber auch selbst am Ort \vec{r} ein Feld $\vec{E}(\vec{r})$ ('aktive Ladung', 'Fernwirkung'):

$$\vec{E}(\vec{r}) = q \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (20)$$

Dass hier aktive und passive Ladung gleich sind (bis auf eine Naturkonstante, die o.B.d.A. =1 gesetzt werden kann), ist nicht ganz selbstverständlich, sondern ist äquivalent zum Newton'schen 'actio gleich reactio'. Für das Coulomb-Gesetz gilt ja

$$\vec{F}_{1,2} = \frac{q_1 q_2 (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} = -\vec{F}_{2,1}. \quad (21)$$

Bei den Gravitationskräften ist es ähnlich – man könnte die sog. 'schwere Masse' auch als 'Gravitationsladung' bezeichnen. Es ist aber ein wesentlicher Unterschied u.a. darin zu sehen, dass die elektrische Ladung sowohl positiv als auch negativ sein kann und zwischen zwei elektrischen Ladungen entsprechend dem Vorzeichen des Produkts $q_1 q_2$ eine abstoßende oder anziehende Wechselwirkung besteht, während die Gravitationskraft zwischen zwei 'Gravitationsladungen' immer anziehend ist, obwohl die Gravitationsladungen positiv sind. Das Newton'sche Gravitationsgesetz

$$(\vec{F}_{\text{Gravitation}})_{1,2} = -\gamma \frac{m_1 m_2 (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \quad (22)$$

mit der Gravitationskonstanten γ , ist aber im Übrigen sehr ähnlich zum Coulomb'schen Gesetz. Dass zusätzlich auch noch die sog. 'träge Masse' m_t , die in dem Newtonschen Gesetz $m_t \ddot{\vec{r}} = \vec{F}$ auftritt, gleich der 'Gravitationsladung' ist („träge Masse gleich schwere Masse“) ist im Grunde noch erstaunlicher, hat aber erst A. Einstein ernstlich gewundert.

Wenn verschiedene Punktladungen an verschiedenen Orten vorliegen, ist das von ihnen erzeugte elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ nach dem Superpositionsprinzip zu berechnen:

$$\vec{F}_{1 \leftarrow 2,3,\dots} = q_1 \sum_{j=2,3,\dots} \frac{q_j (\vec{r}_1 - \vec{r}_j)}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_1 - \vec{r}_j|^3} \quad (23)$$

Auch dieses Superpositionsprinzip, dass auch für die Newton'sche Gravitationstheorie gilt, nimmt man fälschlicherweise als selbstverständlich hin. Für andere Wechselwirkungen (z.B. Kernkräfte) gilt es aber keineswegs, und seine Gültigkeit ist äquivalent zur Linearität der Maxwell'schen Gleichungen: Die vier Maxwell'schen Gleichungen (5) hängen ja linear von den elektrischen und magnetischen Feldern \vec{E} und \vec{B} sowie von Ladungsdichte ρ und Stromdichte \vec{j} ab. Bei der sog. 'Chromodynamik', einer Theorie, welche formal der Elektrodynamik ähnelt, welche aber die Kernkräfte beschreibt, ist das anders: Die Grundgleichungen der Chromodynamik sind nichtlinear; das hat zur Folge, dass bei den Kernkräften das Superpositionsprinzip nicht gilt.

3.1.2 Die Integralformel zur Berechnung des elektrischen Feldes

Im 'Kontinuum', d.h. wenn man die diskreten Punktladungen zu einer kontinuierlichen Ladungsdichte verschmiert, ($q_j \rightarrow \rho(\vec{r}_j)\Delta V_j$), wird aus der ('Riemannschen') Summe durch Grenzübergang ein Integral, und zwar

$$\vec{E}(\vec{r}) = \iiint dV' \frac{\rho(\vec{r}') (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (24)$$

In diesem Integral hat man nur scheinbar eine Singularität $\propto |\vec{r} - \vec{r}'|^{-2}$, denn in Polarkoordinaten um $\vec{r}' = \vec{r}$ gilt $dV' \propto |\vec{r}' - \vec{r}|^2 d(|\vec{r}' - \vec{r}|)$. Das Feld $\vec{E}(\vec{r})$ ist also stetig, wenn $\rho(\vec{r})$ stetig ist; man kann beweisen, dass $\vec{E}(\vec{r})$ unter dieser Voraussetzung bei beschränktem Integrationsgebiet sogar stetig-differenzierbar ist⁶, und zwar gilt $\text{div}\vec{E}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})/\epsilon_0$. Dies ist die erste der Maxwell'schen Gleichungen (5), das sog. 'Gauß'sche Gesetz der Elektrostatik'. (Es gilt übrigens nicht nur in der Elektrostatik, sondern ganz allgemein, d.h. auch, wenn alle Größen explizit von der Zeit abhängen.)

3.1.3 Das Gauß'sche Gesetz und die Poisson-Gleichung

Zum Beweis des Gauß'schen Gesetzes der Elektrostatik⁷: Der Beweis ist subtil und kann hier nur angedeutet werden:

⁶Das ist einigermaßen plausibel, weil in Eindimensionalen die Stammfunktion einer stetigen Funktion stetig-differenzierbar ist.

⁷Das Gesetz bleibt wie erwähnt auch in der Elektrodynamik gültig, d.h. auch bei Zeitabhängigkeit.

Wir zerlegen das Integral in zwei Teile, und zwar wird im ersten Teil die Integration $\int dV'$... nur über eine kleine Kugel vom Radius ϵ mit dem Kugelmittel bei der Singularität $\vec{r}' = \vec{r}$ durchgeführt; das Integrationsgebiet des zweiten Teilintegral ist das Komplement ('Außengebiet') dieser Kugel. In diesem Teil kann man die Differentiation des Integranden nach den Komponenten \vec{r} unter dem Integral ausführen und erhält 0, weil für $\vec{r} \neq \vec{r}'$ gilt: $\operatorname{div} \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = 0$ (weil $\partial_x(x/r^3) = 1/r^3 - 3x^2/r^5$, also $\nabla \cdot (\vec{r}/r^3) = 0$). Daher bleibt $\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) \equiv \operatorname{div} \vec{E}_1(\vec{r})$, wobei $\vec{E}_1(\vec{r}) = \rho(\vec{r}') \Delta V \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$, wenn wir annehmen, dass das Volumen ΔV der Kugel so klein ist, dass in der Kugel $\rho(\vec{r})$ als konstant angenähert werden kann. Indem wir nun die mit dem Gauß'schen Integralsatz äquivalente Aussage benutzen, dass $\operatorname{div} \vec{E}_1$ als Quellendichte interpretiert werden kann, also $\operatorname{div} \vec{E}_1(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} (\Delta V)^{-1} \int \int_{\partial \Delta V} \vec{E}_1(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r}) d^2 A$, erhalten wir mit $\vec{n} = \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ nach kurzer elementarer Rechnung mit $R = \epsilon$ die gesuchte Aussage: $\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})(\Delta V)4\pi R^2}{(\Delta V)4\pi\epsilon_0 R^2} \equiv \rho(\vec{r})/\epsilon_0$.

Man kann diesen Beweis der sog. Poissonschen Gleichung $\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})/\epsilon_0$, das ist die differentielle Formulierung des Gauß'schen Gesetzes, formal sehr vereinfachen, wenn man schreibt

$$\operatorname{div} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = 4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (25)$$

Denn dann kann man von Anfang an unter dem Integral differenzieren und erhält sofort

$$\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) = \iiint dV' \rho(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}')/\epsilon_0 = \rho(\vec{r})/\epsilon_0. \quad (26)$$

Mit dem Gauß'schen Integralsatz erhalten wir aus der differentiellen Formulierung des Gauß'schen Gesetzes, d.h. aus der Poisson'schen Gleichung, die folgende Integralformulierung des Gauß'schen Gesetzes:

$$\oint_{\partial V} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r}) d^2 A \equiv \frac{Q(V)}{\epsilon_0}. \quad (27)$$

Dabei ist $Q(V)$ die gesamte in V enthaltene Ladung⁸, auch Punktladungen dürfen dabei sein. In dieser Integralformulierung ist der Satz besonders anschaulich beweisbar, weil man wegen des Superpositionsprinzips annehmen darf, dass man es mit einer einzigen Punktladung am Ort Null zu tun hat. Die Feldstärke ist dann $\propto R^{-2}$, genauer ist $\vec{E} \cdot \vec{n} = \cos \theta (4\pi\epsilon_0 R^2)^{-1}$, aber $d^2 A = R^2 d\Omega / \cos \theta$. Dabei ist θ der Winkel zwischen der Feldrichtung (Radialrichtung) und dem Oberflächennormalvektor \vec{n} (nicht notwendig radial gerichtet); $d\Omega$ ist das zur Integrationsfläche gehörige Raumwinkelelement, also $\oint d\Omega = 4\pi$. (An dieser Stelle empfiehlt sich eine Zeichnung.)

3.1.4 Anwendung des Gauß'schen Gesetzes: Feldberechnung bei Kugel- und Zylindersymmetrie

Die Integralformulierung des Gauß'schen Gesetzes ist sehr nützlich zur Vereinfachung der Feldberechnung bei Kugel- und Zylinder-Symmetrie (siehe Übungsaufgaben 1 und

⁸Oberflächenladungen werden allerdings nur halb gezählt

3):

Dies sei zunächst für Kugelsymmetrie erläutert:

Es sei eine kugelsymmetrische Ladungsverteilung gegeben: $\rho(\vec{r}) \equiv \rho(r)$, mit $r := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Dann ist auch das elektrische Feld kugelsymmetrisch, d.h. $\vec{E}(\vec{r}) = E(r) \cdot \vec{e}_r$, mit dem radialen Einheitsvektor $\vec{e}_r := \frac{\vec{r}}{r}$. Mit der Integralformulierung des Gauß'schen Gesetzes folgt leicht, durch Anwendung auf eine Kugel vom Radius R das folgende Resultat für die Feldamplitude $E(R)$, und zwar für alle $0 \leq R < \infty$:

$$E(R) = \frac{1}{\epsilon_0 R^2} \int_0^R r^2 dr \rho(r). \quad (28)$$

Ähnliches gilt bei Zylindersymmetrie (vgl. Übungsaufgabe 3), also falls $\rho(\vec{r}) = \rho(r_\perp)$, mit $r_\perp := \sqrt{x^2 + y^2}$: Es ist $\vec{E}(\vec{r}) = E_\perp(r_\perp) \vec{e}_\perp$, mit $\vec{r} = (x, y, z)$, aber $\vec{e}_\perp := (x, y, 0)/r_\perp$:

$$E_\perp(R_\perp) = \frac{1}{\epsilon_0 R_\perp} \int_0^{R_\perp} r_\perp dr_\perp \rho(r_\perp). \quad (29)$$

Mit diesen Formeln kann man die Felder im Innenraum und im Außenraum von *Hohlkugeln und Vollkugeln bzw. von Hohlzylindern und Vollzylindern* berechnen, wobei sich nur im Innenraum Unterschiede ergeben: Das Außenfeld dagegen sieht in jedem Falle so aus, als ob die Gesamtladung der Kugel bzw. des Zylinders im Kugelmittelpunkt bzw. in der Mittellinie des Kreiszyinders vereinigt wäre. Das gilt – wie gesagt – aber nur bei den angegebenen Symmetrien.

3.1.5 Die Rotation des elektrostatischen Feldes; das elektrostatische Potential

Die Rotation des elektrostatischen Feldes ist immer Null. Das ist ein Erfahrungssatz, der im Einklang mit der dritten Maxwell'schen Gleichung, dem 'Induktionsgesetz' $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ ist, also $\text{rot } \vec{E} = 0$ in der Elektrostatik.

Dabei sollte man sich jedoch immer vor Augen halten, dass die Maxwell'schen Gleichungen, die man gerne 'quasi-axiomatisch' der Erfahrung voranstellen würde, selbst auf experimenteller Erfahrung beruhen, also keineswegs die Rolle von „Axiomen“ spielen.

Die zugrundeliegende experimentelle Erfahrung ist, dass man durch Integration der Kraft $\vec{F}(\vec{r}) = q \vec{E}(\vec{r})$ längs einer geschlossenen Kurve keine Arbeit gewinnen kann, dass also stets $\oint_\Gamma \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0$ ist, für jede geschlossene Kurve Γ . Dabei nehmen wir an, dass der Rand des betrachteten Gebietes zusammenhängend ist (sog. 'einfach-zusammenhängende Gebiete', d.h. ohne Löcher), d.h. dass jede geschlossene Kurve des betrachteten Gebietes G als Randkurve ∂F eines in die Kurve eingespannten, ganz in G liegenden Flächenstückes aufgefasst werden kann.

Unter diesen Umständen erhält man ja mit dem Stokes'schen Satz $\oint_\Gamma \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int \int_F \text{rot } \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r}) d^2 A$. Also muss $\text{rot } \vec{E}(\vec{r}) \equiv 0$ sein, da das Linienintegral stets Null ergibt.

Nach einem Satz von Poincaré besitzt aber ein Vektorfeld $\vec{v}(\vec{r})$, das in einem einfach-zusammenhängenden Gebiet G wirbelfrei ist ($\text{rot } \vec{v}(\vec{r}) \equiv 0$) in G ein Potential $\phi_v(\vec{r})$, d.h. dass $\vec{v}(\vec{r}) = -\text{grad } \phi(\vec{r})$, also $v_i(\vec{r}) = -\partial_i \phi_v(\vec{r})$ für $i = 1, 2, 3$. (Natürlich ist $\phi_v(\vec{r})$, wie die potentielle Energie in der Mechanik, nur bis auf eine Konstante bestimmt, und natürlich ist das Minus-Zeichen Konvention, die sich aber eingebürgert hat.) Und zwar gilt

$$\phi_v(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}} \vec{v}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}', \quad (30)$$

wobei \vec{r}_1 , ebenso wie der Integrationsweg, ganz beliebig ist.

Ein Potential $\phi(\vec{r})$, dass zu dem in der Elektrostatik ständig vorkommenden Ausdruck $\frac{r-r'}{|r-r'|^3}$ passt, ist $\phi(\vec{r}) = \frac{1}{|r-r'|}$, denn es gilt, wie man mit $|r-r'| = [(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{\frac{1}{2}}$ leicht nachrechnet: $-\partial_x \frac{1}{|r-r'|} = \frac{x-x'}{|r-r'|^3}$. Für eine kontinuierliche Ladungsverteilung erhält man also nach dem Superpositionsprinzip das Potential

$$\phi(\vec{r}) = \iiint dV' \rho(\vec{r}') \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |r-r'|}, \quad (31)$$

also ein ganz simples Ergebnis.

3.1.6 Einschub: Polar- und Zylinderkoordinaten

An dieser Stelle ist es sinnvoll, einen kleinen mathematischen Einschub über Polarkoordinaten anzubringen. Bisher haben wir Vektoren, insbesondere die Vektordifferenz $d\vec{r}$, immer als Tripel dreier orthogonaler kartesischer Komponenten geschrieben. Jetzt benutzen wir allgemeinere krummlinige Koordinaten u, v, w und haben:

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} du_3. \quad (32)$$

Indem man die Einheitsvektoren $\vec{e}_i := \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} / |\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}|$ ($i = 1, 2, 3$) einführt, schreibt man mit eindeutig definierten Funktionen $a_i(u_1, u_2, u_3)$ (für $i = 1, 2, 3$):

$$d\vec{r} = \sum_{i=1}^3 (a_i(u_1, u_2, u_3) du_i) \vec{e}_i(u_1, u_2, u_3). \quad (33)$$

Man beachte, dass die Koeffizienten $a_i du_i$ die physikalische Dimension 'Länge' haben. Indem man zu den \vec{e}_i das sog. duale System der Bi-Orthogonalvektoren \vec{e}_j^* einführt (es soll also für $i, j = 1$ bis 3 gelten: $\vec{e}_j^* \cdot \vec{e}_i = \delta_{j,i}$, also $=1$ für $i = j$, $=0$ für $i \neq j$, d.h. z.B. konkret: $\vec{e}_1^* := \frac{[\vec{e}_2 \times \vec{e}_3]}{\vec{e}_1 \cdot [\vec{e}_2 \times \vec{e}_3]}$), erhält man

$$\text{grad } \phi = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \phi}{\partial u_i} \vec{e}_i^*. \quad (34)$$

Man erhält also, wie es sein muss, für das totale Differential die Relationen $d\phi = \text{grad } \phi \cdot d\vec{r} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \phi}{\partial u_i} du_i$.

Dies ist die koordinatenunabhängige Schreibweise der Vektoren $d\vec{r}$ und $\text{grad } \phi$ in 'krummlinigen Koordinaten'. Speziell für Kugel- und Zylinderkoordinaten hat man $\vec{e}_j^* \equiv \vec{e}_j$, d.h. man hat es mit 'orthogonalen krummlinigen Koordinaten' zu tun und kann den * weglassen.

Und zwar ist

- für Kugelkoordinaten ('sphärische Polarkoordinaten'), mit $\theta \in [0, \pi]$ (Breitenkreise), $\varphi \in [0, 2\pi)$ (Längenkreise):

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta : \quad (35)$$

$$d\vec{r} = dr \vec{e}_r + r \cdot d\theta \vec{e}_\theta + r \cdot \sin \theta d\varphi \vec{e}_\varphi, \quad (36)$$

$$dV = r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi \quad (37)$$

$$\text{grad } \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{\partial \phi}{r \cdot \partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial \phi}{r \sin \theta \cdot \partial \varphi} \vec{e}_\varphi, \text{ und (s.u.)} \quad (38)$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\phi) + \frac{\partial}{r^2 \sin \theta \partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta}) + \frac{\partial^2 \phi}{r^2 \sin^2 \theta \partial \varphi^2}. \quad (39)$$

(Den ersten Ausdruck auf der rechten Seite von Gleichung (39) kann man auch in der Form $\frac{\partial}{r^2 \partial r} (r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r})$ darstellen.)

- In Zylinderkoordinaten ('ebenen Polarkoordinaten') gilt dagegen

$$x = r_\perp \cos \varphi, \quad y = r_\perp \sin \varphi, \quad z = z \quad (\text{ungeändert}) : \quad (40)$$

$$d\vec{r} = dr_\perp \vec{e}_{r_\perp} + r_\perp \cdot d\varphi \vec{e}_\varphi + dz \vec{e}_z, \quad (41)$$

$$dV = r_\perp dr_\perp d\varphi dz, \quad (42)$$

$$\text{grad } \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r_\perp} \vec{e}_{r_\perp} + \frac{\partial \phi}{r_\perp \cdot \partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{e}_z, \quad (43)$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial}{r_\perp \partial r_\perp} (r_\perp \frac{\partial \phi}{\partial r_\perp}) + \frac{\partial^2 \phi}{r_\perp^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad (44)$$

Hier haben wir noch die (nützlichen, weil später immer wieder benötigten) Transformationsformeln für den Laplace-Operator ∇^2 aufgeschrieben, die sich mit $\nabla^2 \phi \equiv \text{div grad } \phi$ und $\text{grad } \phi = -\vec{E}$ aus einer für orthogonale krummlinige Koordinaten allgemeingültigen und sehr elementar beweisbaren Formel ergeben, nämlich

$$\text{div } \vec{E} = \frac{1}{a_1 a_2 a_3} \left\{ a_2 a_3 \frac{\partial E_1}{\partial u_1} + a_3 a_1 \frac{\partial E_2}{\partial u_2} + a_1 a_2 \frac{\partial E_3}{\partial u_3} \right\}. \quad (45)$$

3.1.7 Das Kondensator-Problem; Kapazität; Harmonische Funktionen

Gegeben sei eine Batterie mit der Batteriespannung U . Die beiden Pole der Batterie werden an zwei irgendwie geformte, räumlich getrennte Metallstücke V_1 und V_2 angeschlossen. Eine solche Anordnung (hier empfiehlt sich eine Skizze !) nennt man einen 'Kondensator' (englisch: 'Capacitor'). Es muss sich also nicht notwendig um einen Plattenkondensator handeln. Trotzdem werden wir im Folgenden der Einfachheit halber meistens von den 'Metallplatten' oder 'Kondensatorplatten' sprechen. (Wir setzen voraus, dass wir es auf jeden Fall mit hinreichend glatten Systemen zu tun haben.)

In der Elektrostatik gilt der Satz:

Die Oberfläche eines Metallstückes ist immer eine Äquipotentialfläche, d.h. die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes ist an der Oberfläche des Metallstückes Null (im Innern des Metallstückes sind ohnehin alle drei Komponenten Null).

Denn andernfalls würden sich die Elektronen, die im Metall ja frei beweglich sind, unter dem Einfluss elektrostatischer Kräfte, $\vec{F} = q\vec{E}$, verschieben.

Aus demselben Grund muss das Innere der Metallstücke V_1 und V_2 feldfrei und elektrisch neutral sein.

Da $\vec{E} = -\text{grad } \phi$ ist und somit stets senkrecht auf den Äquipotentialflächen steht, kann man den ungefähren Potential- und Feldverlauf zwischen den beiden 'Kondensatorplatten' V_1 und V_2 leicht graphisch skizzieren (auch hier empfiehlt sich eine Skizze).

Wie aber berechnet man den Feldverlauf im 'Zwischenraum' zwischen den 'Kondensatorplatten' quantitativ ? In diesem 'Zwischenraum' ZR außerhalb der Metallstücke gilt ja bei Abwesenheit von Ladungen, dass $\nabla^2\phi(\vec{r}) = 0$ ist. Auf den Oberflächen ∂V_i der beiden Metallplatten muss ϕ konstant sein, und zwar $\phi|_{\partial V_1} = c + U$, wenn $\phi|_{\partial V_2} = c$ ist.⁹

Funktionen $\phi(\vec{r})$, die in einem offenen Gebiet G die (sog. Laplace'sche) Differentialgleichung $\nabla^2\phi = 0$ erfüllen, nennt man „harmonische Funktionen“.

Es ist also in ZR eine harmonische Funktion $\phi(\vec{r})$ zu bestimmen, die auf ∂V_1 den Wert U und auf ∂V_2 den Wert 0 annimmt (und im Unendlichen hinreichend rasch verschwindet).

Dies ist ein Spezialfall des etwas allgemeineren sog. „Dirichlet-Problems“: In diesem Problem ist bei gegebenem $\rho(\vec{r})$ eine Funktion $\Phi(\vec{r})$ zu bestimmen, welche im Innern von ZR die sog. Poisson'sche Differentialgleichung $\nabla^2 = -\rho(\vec{r})/\epsilon_0$ erfüllt und auf dem Rand vorgegebene Werte annimmt: $\phi|_{\partial(ZR)} = f(\vec{r})$. Hierbei sind $\rho(\vec{r})$ und $f(\vec{r})$ gegeben. (Vom Dirichlet-Problem unterscheidet sich das Neumann-Problem nur geringfügig: Hier werden auf dem Rand vorgegebene Werte nicht für die Funktion $\phi(\vec{r})$ selbst, sondern für deren Normal-Ableitung $\text{grad } \phi \cdot \vec{n}$ gefordert.)

Man kann nun leicht zeigen, dass die Lösung des Dirichlet-Problems, falls existent, auf jeden Fall eindeutig ist. Der Beweis beruht wesentlich auf der *Linearität* des Problems:

Zunächst zeigen wir, dass eine harmonische Funktion im Innern von ZR kein lokales Maximum oder Minimum besitzen kann. Denn z.B. bei einem lokalen Maximum müssten (zweidimensional gesprochen) die Höhenlinien des Potentialgebirges in einem

⁹Wir erinnern uns, dass das Potential nur bis auf eine Konstante bestimmt ist. Es ist auf jeden Fall ratsam, die zweite Metallplatte zu „erden“, da andernfalls das Feld durch Aufladungseffekte in unkontrollierbarer Weise verändert werden kann.

Berg kulminieren und der Feldlinienverlauf (senkrecht von der Position des Gipfels nach außen gerichtet) wäre qualitativ derselbe wie bei einer Punktladung, also $\nabla^2\phi \neq 0$, im Widerspruch zur vorausgesetzten Harmonizität.

Angenommen, ein gegebenes Dirichlet-Problem habe zwei verschiedene Lösungen ϕ_1 bzw. ϕ_2 ; dann erfüllt die Differenz $w := \phi_2 - \phi_1$ im Innern von ZR die Differentialgleichung $\nabla^2 w(\vec{r}) = 0$, mit den Randwerten $w|_{\partial(ZR)} = 0$. Wegen der Nichtexistenz eines lokalen Maximums von w im Innern von ZR muss die Funktion also überall Null sein, also $\phi_2 \equiv \phi_1$, im Widerspruch zur Annahme.

Durch das Anlegen der Batteriespannung an die beiden Kondensatorplatten wird auf deren Oberfläche eine Ladung Q_1 (auf ∂V_1) bzw. Q_2 (auf ∂V_2) erzeugt. Wir zeigen, dass $Q_2 = -Q_1$ gilt, und zwar auf jeden Fall, d.h. auch dann, wenn nur die „Platte 1“ mit einem Pol der Batterie verbunden ist, während die zweite Platte nur „geerdet“ ist ($Q_2 \hat{=} \text{sog. „Influenzladung“}$). Der Beweis benutzt erneut ganz wesentlich das Gauß'sche Gesetz: In der Tat gilt nach diesem Gesetz (mit $E_n := \vec{E} \cdot \vec{n}$)

$$Q_1 + Q_2 = \oint_{\partial V_1 + \partial V_2} \epsilon_0 E_n d^2 A. \quad (46)$$

Es ist aber $\partial(ZR) = -\partial V_1 - \partial V_2$, weil die äußere Normale von ZR die innere Normale von $V_1 + V_2$ ist; ferner gilt nach dem Gauß'schen Integralsatz

$$\oint_{\partial(ZR)} E_n d^2 A = \iiint_{ZR} \text{div } \vec{E} dV; \quad (47)$$

wegen $\text{div } \vec{E} = 0$ ist also $Q_1 + Q_2 = 0$ wie behauptet.

Für den Kondensator ist auch das Neumann'sche Randwertproblem (nicht U , sondern Q ist bekannt) im Wesentlichen eindeutig lösbar:

Hier ist der Beweis der Eindeutigkeit der Lösung etwas subtiler: Zwei verschiedene Lösungen ϕ_i müssen beide $-\int \int_{\partial V_j} (\nabla \phi_i \cdot \vec{n}) d^2 A = Q_j$ erfüllen ($j = 1, 2$); ihre Differenz $w := \phi_2 - \phi_1$ erfüllt also $\int \int_{\partial V_j} \nabla w \cdot \vec{n} d^2 A = 0$, und da w auf ∂V_j konstant ist, gilt sogar $\int \int_{\partial(ZR)} (w \nabla w) \cdot \vec{n} d^2 A = 0$. Aber nach dem Gauß'schen Integralsatz folgt daraus $\int \int \int_{ZR} \nabla \cdot (w \nabla w) dV = 0$, also $\int \int \int_{ZR} [(\nabla w)^2 + w \nabla^2 w] dV = 0$. Wegen $\nabla^2 w = 0$ ist also $\int \int \int_{ZR} (\nabla w)^2 dV = 0$, also gilt fast überall $\nabla w \equiv 0$. Hier ist also nicht das Potential, sondern der Potentialgradient, also das elektrische Feld selbst, eindeutig bestimmt.

Wir kommen nun zur Definition der sog. „Kapazität“ eines Kondensators. Diese ist definiert als 'Ladungskapazität', nämlich als Verhältnis $C := \frac{Q}{U}$, wobei $Q = |Q_1|$ ist. Eine elementare Rechnung, die in allen Büchern steht, so dass ich auf die Wiedergabe verzichten kann, ergibt für den Plattenkondensator (mit Plattenfläche F und Plattenabstand d), den Kugelkondensator mit Innenradius R und Außenradius $R + \Delta R$, und für den Zylinderkondensator (mit der Zylinderlänge L und dem Innenradius R_\perp) die folgenden drei Resultate:

$$C = \epsilon_0 \frac{F}{d}, \quad C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R \cdot (R + \Delta R)}{\Delta R}, \quad C = 2\pi\epsilon_0 \frac{L}{\ln \frac{R_\perp + \Delta R_\perp}{R_\perp}}. \quad (48)$$

3.1.8 Numerische Berechnung elektrischer Felder

Der Eindeutigkeitsatz für das Dirichletproblem ist deshalb nützlich, weil er es erlaubt, eine (mit welchen Methoden und Ansätzen auch immer) gefundene Lösung sofort als „die Lösung“ zu akzeptieren.

Wenn alles andere nichts hilft, bleibt immer noch der numerische Zugang. Er ist gar nicht so schwer: Wenn man ein Würfelgitter der Kantenlänge a einführt, gilt in leicht verständlicher Weise bis auf einen kleinen Diskretisierungsfehler $\propto a^2$:

$$(\nabla^2 \phi)_{\vec{n}} = \frac{\sum_{j=1}^6 (\phi_{\vec{n}+\vec{\Delta}_j} - \phi_{\vec{n}})}{a^2}. \quad (49)$$

Dabei bezeichnen die sechs Vektoren $\vec{n} + \vec{\Delta}_j$ die sechs nächsten Nachbarn (rechts - links, hinten - vorne, oben - unten) des betrachteten Gitterpunkts ($\phi_{\vec{n}} := \phi(\vec{r}_{\vec{n}})$).

Bei einer harmonischen Funktion muss man also solange iterieren, bis an jedem Punkt des Würfelgitters $\phi_{\vec{n}} \equiv \frac{1}{6} \sum_{j=1}^6 \phi_{\vec{n}+\vec{\Delta}_j}$ ist.

3.2 Elektrostatische und magnetostatische Felder in polarisierbarer Materie

3.2.1 Dielektrika

sind Materialien, für die einfach die Dielektrizitätskonstante des Vakuums ϵ_0 durch das Produkt $\epsilon_0 \cdot \epsilon$ ersetzt ist, wobei ϵ die sog. „relative Dielektrizitätskonstante (‘DK’)“ des Materials ist, eine dimensionslose Konstante der Größenordnung 10 oder mehr.¹⁰

Wenn man z.B. in einem Plattenkondensator das „Vakuum“ zwischen den Platten durch ein dielektrisches Füllmaterial ersetzt, bekommt man eine (u.U. wesentliche) Erhöhung der Kondensatorkapazität: $C = \epsilon \epsilon_0 \frac{F}{d}$.

Anstelle von $\epsilon_0 \vec{E}(\vec{r})$ definiert man ferner den (aus historischen Gründen) als „dielektrische Verschiebung“ bezeichneten Vektor $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}$ und erhält als „Gauß’sches Gesetz“ die erste Maxwell’sche Gleichung $\int \int_{\partial V} \vec{D} \cdot \vec{n} d^2 A = Q(V)$ bzw. in differentieller Formulierung $\text{div } \vec{D} = \rho$.

Was ist die Ursache dieser Effekte ? Dazu holen wir etwas aus:

3.2.2 Dipolfelder

Einen sog. elektrischen Dipol am Ort \vec{r}' im Vakuum erhält man durch folgenden Limesprozess (sog. „Hantel-Approximation“): Man betrachtet zwei entgegengesetzt-gleiche Punktladungen der Ladungsstärke $\pm q$, die sich an den Stellen $\vec{r}' + (\vec{a}/2)$ bzw. $\vec{r}' - (\vec{a}/2)$ befinden sollen, und führt ganz zuletzt den Grenzübergang („Dipol-Limes“) $a \rightarrow 0$, $q \rightarrow \infty$ durch, so dass $q\vec{a} \rightarrow: \vec{p} \neq 0$, während z.B. $q a^2 \rightarrow 0$. Der Vektor \vec{p} wird als Dipolmoment der Ladungsanordnung bezeichnet.

¹⁰Manchmal wird das Produkt $\epsilon_0 \cdot \epsilon$ auch als „dimensionsbehaftete absolute Dielektrizitätskonstante ϵ des Materials“ bezeichnet; aber dieser Konvention wollen wir uns hier nicht anschließen, sondern unter ϵ immer die „relative DK“ verstehen, zumal ϵ_0 im *cgs-System* nicht vorkommt.

Das elektrostatische Potential ϕ ist also vor dem Grenzübergang

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}' - \frac{\vec{a}}{2}|} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}' + \frac{\vec{a}}{2}|} \right), \quad (50)$$

und mit einer Taylorentwicklung nach \vec{r} erhält man bei Vernachlässigung quadratischer Terme in $|\vec{a}|$:

$$\phi(\vec{r}) \cong -\frac{q\vec{a}}{4\pi\epsilon_0} \cdot \text{grad}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{q\vec{a}}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad (51)$$

Für das Potential ϕ_{Dp} eines elektrischen Dipols mit dem 'Dipol-Vektor' \vec{p} an der Stelle \vec{r}' erhält man also

$$\phi_{Dp}(\vec{r}) = \frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad (52)$$

eine Formel, die man sich merken sollte, ebenso wie das zugehörige elektrische Feld $\vec{E}_{Dp} = -\text{grad} \phi_{Dp}$, das bei vielen Problemen immer wieder vorkommt:

$$\vec{E}(\vec{r})_{Dp} = \frac{(3(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{p})(\vec{r} - \vec{r}') - |\vec{r} - \vec{r}'|^2 \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|^5}, \quad (53)$$

vor allem den charakteristischen „nierenförmigen“ Feldlinienverlauf (auch hier ist eine eigene Skizze zu empfehlen).

Eine entsprechende Rechnung kann man auch für eine Quadrupol-Ladungsanordnung durchführen. Die Quadrupol-Ladungsanordnung entspricht zwei entgegengesetzt-gleichen Dipolen, die um einen Vektor \vec{b} verschoben sind¹¹; hier muss man eine Taylorentwicklung bis zur zweiten Ordnung durchführen. Monopol-Potentiale, Dipolpotentiale bzw. Quadrupolpotentiale fallen also $\sim r^{-1}$, $\sim r^{-2}$ bzw. $\sim r^{-3}$ ab, die Felder $\propto r^{-2}$, $\propto r^{-3}$ bzw. $\propto r^{-4}$.

3.2.3 Die elektrische Polarisation

Wenn man es mit einem Gas oder einer Flüssigkeit dielektrischer Moleküle zu tun hat, „polarisiert“ ein von außen angelegtes elektrisches Feld \vec{E} diese Moleküle, d.h. anschaulich, dass sich der Ladungsschwerpunkt der (negativ geladenen) Elektronenschalen der Moleküle gegenüber dem Ladungsschwerpunkt der positiv geladenen Kernladungen verschiebt und ein molekulares Dipolmoment induziert wird. Wenn im Gasvolumen (Flüssigkeitsvolumen) ΔV insgesamt $\Delta N := n_V \Delta V$ Moleküle vorhanden sind, gilt für das elektrische Moment dieses Volumenelements: $\Delta \vec{p} \equiv \vec{P} \Delta V$, mit der sog. elektrischen Polarisation $\vec{P} := n_V \epsilon_0 \alpha \vec{E}$ und der sog. „molekularen Polarisierbarkeit α “, die quantenmechanisch zu berechnen ist. (Das molekulare Dipolmoment ist also $\vec{p}_{\text{Molek.}} = \epsilon_0 \alpha \vec{E}$.)

Für den Vektor $\vec{D} := \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, die sog. dielektrische Verschiebung, erhält man somit

$$\vec{D} = \epsilon_0 (1 + \chi) \vec{E}, \quad (54)$$

¹¹Ausgangspunkt ist also eine Anordnung alternierend-gleicher Ladungen auf den Ecken eines Parallelogramms.

wobei $\chi = n_V \alpha$ die sog. „elektrische Suszeptibilität“ ist, also $\epsilon = 1 + \chi$. (Warnung: Im cgs-System gilt anstelle von (54) die Beziehung: $\vec{D}' = \vec{E}' + 4\pi\vec{P}'$, und zwar mit $\vec{P}' = n_V \alpha \vec{E}'$ bei unverändertem α . Also ist $\epsilon = 1 + 4\pi\chi' = 1 + \chi$, d.h. $\chi = 4\pi\chi'$. Leider wird in Tabellenwerken gewöhnlich der Strich weggelassen, d.h. es ist u.U. nicht leicht zu erkennen, ob in einer Tabelle χ oder χ' tabelliert ist.)

3.2.4 Multipolmomente und Multipolentwicklung

Ausgangspunkt des folgenden allgemeineren Teilkapitels ist die Formel für das Potential $\phi(\vec{r})$ einer in einem Gebiet G' konzentrierten kontinuierlichen Ladungsverteilung im Vakuum, $\phi(\vec{r}) = \iiint_{G'} \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|}$. Wir nehmen an, dass für alle $\vec{r}' \in G'$ gilt, dass $|\vec{r}| \gg |\vec{r}'|$ ist, d.h. dass der Aufpunkt \vec{r} sehr weit von den Feldquellen entfernt ist. Dann kann man eine Taylor-Entwicklung nach \vec{r}' durchführen und erhält:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cong \frac{1}{r} + \sum_{i=1}^3 (-x'_i) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{r} + \frac{1}{2!} \sum_{i,k=1}^3 (-x'_i)(-x'_k) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \frac{1}{r} + \dots ; \quad (55)$$

Einsetzen von Gleichung (55) in die Formel für $\phi(\vec{r})$ ergibt schließlich

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{Q}{r} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^3 q_{i,k} \frac{3x_i x_k - r^2 \delta_{i,k}}{r^5} + \dots \right\}, \quad (56)$$

mit der

- Gesamtladung der Ladungsverteilung, $Q := \iiint_{G'} \rho(\vec{r}') dV'$, mit ihrem
- Dipolmoment, einem Vektor mit den drei Komponenten $p_i := \iiint_{G'} \rho(\vec{r}') x'_i dV'$, und mit ihrem
- Quadrupolmoment, einem zweistufigen symmetrischen Tensor mit den Komponenten $q_{i,k} = \iiint_{G'} \rho(\vec{r}') x'_i x'_k dV'$.

Höhere Multipolmomente q_{i_1, \dots, i_l} sind entsprechend zu bilden, d.h. bis zu Termen l -ter Ordnung ($l = 0, 1, 2, \dots$) ist

$$\phi(\vec{r}) \cong \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{i_1, \dots, i_l=1}^3 \frac{(-1)^l}{l!} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_{i_1, \dots, i_l} \frac{\partial^l}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_l}} \frac{1}{r}. \quad (57)$$

Von den vielen 2^l -Pol-Momenten q_{i_1, \dots, i_l} geht aber nur ein kleiner Teil, $2l + 1$ linear unabhängige Terme, wirklich in das Ergebnis ein; z.B. kann man leicht nachrechnen, dass man zum Quadrupoltensor zweiter Stufe einen beliebigen Diagonaltensor addieren darf, $q_{i,k} \rightarrow q_{i,k} + a \cdot \delta_{i,k}$, ohne das Potential zu ändern; man hat also nicht sechs, sondern nur $2l + 1 = 5$ linear unabhängige Quadrupolmomente $q_{i,k} = q_{k,i}$. Entsprechendes gilt auch für $l > 2$, und mit den speziellen sog. Kugelflächenfunktionen, den sog. 'spherical

harmonics' $Y_{lm}(\theta, \varphi)$, die in gängigen Formelsammlungen definiert sind, kann man mit geeigneten komplexen Vorfaktoren $c_{l,m}$ schreiben:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^{l+1}} \sum_{m=-l}^{+l} c_{l,m} Y_{l,m}(\theta, \varphi) . \quad (58)$$

(Wegen der 'Orthogonalität' der Kugelflächenfunktionen kann man übrigens die in Gleichung (58) auftretenden sog. „sphärischen Multipolmomente“ $c_{l,m}$ leicht berechnen: Es gilt (o.B.) mit den konjugiert-komplexen Funktionen $Y_{l,m}^*$:

$$c_{l,m} = \frac{4\pi}{2l+1} \int_0^{\infty} dr r^2 \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi \rho(\vec{r}) r^l Y_{l,m}^*(\theta, \varphi) . \quad (59)$$

3.2.5 Klassifizierung: Dielektrische, paraelektrische und ferroelektrische Systeme; wahre und effektive Ladungen

Bei dielektrischen Systemen ist das molekulare Dipolmoment nur *induziert*, $\vec{p}_{\text{Molek.}} = \epsilon_0 \alpha \vec{E}$; bei paraelektrischen Systemen hat man dagegen ein *permanentes* molekulares Dipolmoment, das aber bei räumlicher oder zeitlicher Mittelung verschwindet, $\langle \vec{p}_{\text{Molek.}} \rangle = 0$; der sog. 'Erwartungswert' der Polarisation ist bei diesen Systemen Null, obwohl die einzelnen Moleküle ein permanentes Dipolmoment besitzen (das ist z.B. bei einem stark verdünnten Gas aus HCl-Molekülen der Fall). Bei ferroelektrischen Systemen, z.B. BaTiO₃-Kristallen, hat man schliesslich unterhalb einer sog. *kritischen Temperatur* eine 'spontane Fernordnung' der elektrischen Polarisation, d.h. es ist auch ohne angelegtes Feld im ganzen Kristall der Erwartungswert der elektrischen Polarisation konstant und $\neq 0$.

Auf jeden Fall besagt bei $\vec{P} \neq 0$ das Gauß'sche Gesetz der Elektrodynamik nicht, dass $\oint_{\partial V} \epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{n} d^2 A = Q(V)$, sondern präzise, dass

$$\oint_{\partial V} \vec{D} \cdot \vec{n} d^2 A = Q(V) , \quad (60)$$

Oder in differentieller Formulierung: Es ist

$$\underline{\text{div } \vec{D} = \rho} , \quad \text{also präzise : } \text{div}(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho , \quad (61)$$

und nicht einfach $\text{div } \epsilon_0 \vec{E} = \rho$.

(Bei einem mit einem Dielektrikum gefüllten Plattenkondensator ist bei gegebener Ladung Q das elektrische Feld \vec{E} kleiner als im Vakuum, weil ein Teil der Ladung von der induzierten Polarisation „abkompensiert“ wird. Der Ausdruck $\text{div } \epsilon_0 \vec{E}$ entspricht nur der verbleibenden nicht-abkompensierten Ladung, $\rho_E := \rho - \text{div } \vec{P}$, s.u.).

Im Folgenden wird ρ auch als Dichte der *wahren Ladung* bezeichnet ($\rho \equiv \rho_w$), der Ausdruck $\rho_E := \epsilon_0 \text{div } \vec{E}$ wird dagegen auch als 'effektive Ladung' bezeichnet. Es gilt $\rho_E = \rho_w - \text{div } \vec{P}$.

3.2.6 Feldberechnung im Polarisationsbild und im Effektivladungsbild

- Im Polarisationsbild geht man von der Existenz 'wahrer Ladungen' und 'wahrer Dipole' aus und wendet das Superpositionsprinzip an. Dementsprechend hat man bei einer kontinuierlichen Ladungs- und Dipoldichte:

$$\phi(\vec{r}) = \iiint \frac{\rho(\vec{r}')dV'}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|} + \iiint \frac{dV' \vec{P}(\vec{r}') \cdot (\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3}. \quad (62)$$

Dies entspricht einfach der Superposition der Coulombfelder der 'wahren Ladungen' und der Dipolfelder der Dipole.

- Gleichung (62) kann direkt ins Effektivladungsbild umtransformiert werden, und man bekommt dann

$$\phi(\vec{r}) = \iiint \frac{\rho_E(\vec{r}')dV'}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|}. \quad (63)$$

Die elektrische Polarisation ist jetzt ganz wegtransformiert, aber statt der Dichte der 'wahren Ladungen' hat man jetzt nur die Dichte $\rho_E = \rho - \text{div } \vec{P}$ der (nicht abkompensierten) Effektivladungen, s.o. Hierbei haben wir zur Vereinfachung angenommen, dass an der Grenzfläche ∂K des betrachteten Körpers K Ladungsdichte und Polarisation nicht unstetig auf Null springen, sondern in differenzierbarer 'geglätteter Weise'. Andernfalls muss man zu Gleichung (63) noch eine effektive Oberflächenladungsdichte σ_E addieren und erhält

$$\phi(\vec{r}) = \iiint_K \frac{\rho_E(\vec{r}')dV'}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|} + \oint_{\partial K} \frac{\sigma_E(\vec{r}')d^2A'}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad (64)$$

Dabei ist die Gleichung $\rho_E = \rho - \text{div } \vec{P}$ zu ergänzen durch eine entsprechende Gleichung für die Grenzflächenladungsdichte $\sigma_E = \sigma + \vec{P} \cdot \vec{n}$.

Auf das Auftreten solcher Grenzfächendivergenzen und Grenzfächenrotationen wird später noch gesondert eingegangen. Im Wesentlichen hängen sie mit der mehr oder weniger elementaren Feststellung zusammen, dass die formale Ableitung der Einheitsstufenfunktion, der sog. Heavisidefunktion, gleich der Dirac'schen δ -Funktion ist: $\frac{dH(x)}{dx} = \delta(x)$.

Die Äquivalenz von (63) zu (62) ist einfach zu beweisen; sie folgt durch partielle Integration mit der Beziehung $\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = +\nabla_{\vec{r}'} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$. Man wälzt nun die Differentiation nach links über und erhält aus dem zweiten Term in (62) den Ausdruck $-\iiint \frac{\nabla_{\vec{r}'} \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|} dV'$. Zusammen mit dem ersten Term ergibt dies die Behauptung.

3.2.7 Magnetostatik

Schon die Chinesen wussten, dass es neben den elektrischen Feldern und elektrischen Dipolen magnetische Felder (vor allem das Erdmagnetfeld) und magnetische Dipole gibt („Magnetnadeln“), welche Kräfte und Drehmomente aufeinander ausüben, analog

zum elektrischen Fall, so dass diese 'magnetischen Dipole' als „Magnetkompass“ dienen können.

So ist das Drehmoment $\vec{\mathcal{M}}$, welches auf einen magnetischen Dipol in einem Magnetfeld \vec{H} ausgeübt wird, gleich $\vec{\mathcal{M}} = \vec{m} \times \vec{H}$ und die auf den Dipol in einem inhomogenen Magnetfeld ausgeübte Kraft \vec{F} ist analog zum elektrischen Fall gegeben durch die Formel $\vec{F} = (\vec{m} \cdot \text{grad})\vec{H}$ (s.u.); andererseits erzeugt ein magnetischer Dipol am Ort \vec{r}' selbst ein Magnetfeld nach der Formel¹² $\vec{H}(\vec{r}) = -\text{grad} \phi_m$, mit $\phi_m = \frac{\vec{m} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\mu_0 |\vec{r} - \vec{r}'|^3}$.

Aber: Es gibt anscheinend keine magnetischen Ladungen, so sehr man auch danach gesucht hat. Wenn man also analog zur elektrischen Polarisation \vec{P} eine sog. 'magnetische Polarisation' \vec{J} einführt, welche analog zum elektrischen Fall durch die Beziehung $\Delta\vec{m} = \vec{J}\Delta V$ gegeben ist, kann man durch die Definition $\vec{B} := \mu_0\vec{H} + \vec{J}$ eine Größe definieren, die sog. 'Magnetische Induktion', welche analog ist zur 'Dielektrischen Verschiebung' $\vec{D} := \epsilon_0\vec{E} + \vec{P}$; aber anstelle von $\text{div} \vec{D} = \rho$ gilt $\text{div} \vec{B} = 0$. Dies ist die zweite Maxwell'sche Gleichung, die wie alle Maxwell'schen Gleichungen einen experimentellen Erfahrungssatz mathematisiert. Bei Beachtung dieser Gleichung kann man (bei Abwesenheit von elektrischen Strömen (!)) das Magnetfeld \vec{H} aus einem 'Magnetischen Potential' ϕ_m ableiten, das nach Gleichungen analog zu (62) bzw. (64) berechnet werden kann. Schreiben Sie diese Gleichungen selbst auf, damit Sie nachprüfen können, ob Ihnen an dieser Stelle alles klar ist.

Lösung: Es gilt auf jeden Fall $\vec{H}(\vec{r}) = -\text{grad} \phi_m(\vec{r})$, mit den beiden äquivalenten Formeln

- Dipolbild magnetisierter Körper:

$$\phi_m(\vec{r}) = \iiint_G dV' \frac{\vec{J}(\vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\mu_0 |\vec{r} - \vec{r}'|^3}; \quad (65)$$

- Effektivladungsbild magnetisierter Körper:

$$\phi_m(\vec{r}) = \iiint_G dV' \frac{-(\text{div} \vec{J})(\vec{r}')}{4\pi\mu_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} + \iint_{\partial G} d^2A' \frac{\vec{J}(\vec{r}') \cdot \vec{n}(\vec{r}')}{4\pi\mu_0 |\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (66)$$

3.2.8 Kräfte und Drehmomente auf elektrische und magnetische Dipole

Das Ergebnis wurde bereits erwähnt. Hier folgt noch die Herleitung: Zunächst berechnen wir die Kräfte auf einen elektrischen Dipol, indem wir von der üblichen 'Hantel-Approximation' ausgehen: Demnach ist die Kraft auf die Hantel

$$\vec{F} = q \cdot \left(\vec{E}(\vec{r} + \frac{\vec{a}}{2}) - \vec{E}(\vec{r} - \frac{\vec{a}}{2}) \right) \cong q \sum_{i=1}^3 (a_i \frac{\partial}{\partial x_i}) \vec{E}(\vec{r}) \rightarrow (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E}(\vec{r}). \quad (67)$$

(Im Dipol-Limes ($q \rightarrow \infty$, $a_i \rightarrow 0$, aber $q \cdot a_i \rightarrow p_i = \text{finit}$, während $qa_i a_j \rightarrow 0$) erhält man wie angegeben die Aussage $\vec{F} = (\vec{p} \cdot \text{grad}) \vec{E}(\vec{r})$.)

¹²Leider gibt es äquivalente unterschiedliche Konventionen: Manche Autoren schreiben $\vec{\mathcal{M}} = \vec{m}_B \times \vec{B}$ und definieren \vec{m}_B als *magnetisches Moment*, d.h. $\vec{m}_B = \vec{m}/\mu_0$, wobei der Index $_B$ weggelassen wird.

Ebenso ergibt sich die Formel für das Drehmoment:

$$\vec{\mathcal{M}} = q \left[\left(\vec{r} + \frac{\vec{a}}{2} \right) \times \vec{E} \left(\vec{r} + \frac{\vec{a}}{2} \right) - \left(\vec{r} - \frac{\vec{a}}{2} \right) \times \vec{E} \left(\vec{r} - \frac{\vec{a}}{2} \right) \right] \rightarrow \vec{p} \times \vec{E}(\vec{r}). \quad (68)$$

Im magnetischen Fall muss man nur \vec{p} durch \vec{m} und \vec{E} durch \vec{H} ersetzen.

3.2.9 Die Feldenergie

Wir berechnen jetzt verschiedene äquivalente Ausdrücke für die (elektrische) Feldenergie, die wir später gebrauchen. Zunächst gehen wir aus von einem elektrischen Kondensator, der mit einem Dielektrikum der relativen Dielektrizitätskonstante ('DK') ϵ gefüllt ist. Wir befördern eine infinitesimale Ladungsmenge ΔQ von der unteren Metallplatte zur oberen Metallplatte, wo sich bereits eine Kondensatorspannung $U(Q) = \frac{Q}{C}$ aufgebaut hat; die nötige (infinitesimale) Energie für die Verschiebung ist also $\Delta E = \Delta Q U(Q)$. Indem wir die gesamte Ladungsmenge so transportieren, erhalten wir insgesamt $E = \int_0^Q d\tilde{Q} \cdot U(\tilde{Q})$, mit $U(\tilde{Q}) = \frac{\tilde{Q}}{C}$, also

$$1.) \quad E = \frac{1}{2} U \cdot Q = \frac{Q^2}{2C} = \frac{C}{2} U^2. \quad (69)$$

Nur scheinbar allgemeiner ist der Ausdruck

$$2.) \quad E = \frac{1}{2} \iiint \phi(\vec{r}) \rho(\vec{r}) dV. \quad (70)$$

Denn da im Kondensatorzwischenraum $\rho = 0$ gilt, während an der unteren Kondensatorplatte $\phi = 0$ und an der oberen Platte $\phi \equiv U$ gilt und ρdV durch σd^2A (mit $\sigma = \vec{D} \cdot \vec{n}$) zu ersetzen ist ($\hat{=}$ 'cum grano salis'), erhält man so dasselbe Resultat. Indem man nun in Gleichung (70) das Resultat $\phi(\vec{r}) = \iiint dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|}$ einsetzt, erhält man (ebenso *cum grano salis*) den dritten Ausdruck für die Feldenergie als „Abstoßungsenergie der Ladungen an den Orten \vec{r}' und \vec{r}'' “:

$$3.) \quad E = \frac{1}{2} \iiint_{\vec{r}} \iiint_{\vec{r}'} dV dV' \frac{\rho(\vec{r}')\rho(\vec{r})}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|}. \quad (71)$$

(Der überall auftretende Faktor $\frac{1}{2}$ findet hier seine natürliche Begründung: Bei der Wechselwirkung darf jedes Ladungspaar (\vec{r}, \vec{r}') nur einmal gezählt werden.)

Schließlich bleibt noch der vielleicht wichtigste Ausdruck, der aus der zweiten Darstellung der Feldenergie, (70), durch partielle Integration entsteht: Wir ersetzen in dieser Gleichung $\rho = \nabla \cdot \vec{D}$ und „wälzen die ∇ -Differentiation nach links über“, wobei ein Minuszeichen entsteht. Dadurch erhalten wir mit $-\nabla\phi = \vec{E}$ das Resultat

$$4.) \quad E = \frac{1}{2} \iiint_{ZR} dV \vec{E} \cdot \vec{D}. \quad (72)$$

Es ist klar, dass man hier nur über den Zwischenraum zwischen den Kondensatorplatten integrieren muss, weil im Innern der Metallstücke V_1 und V_2 ja $\vec{E} \equiv 0$ ist.

Die Feldenergiedichte w_e zum Aufbau eines elektrischen Feldes zwischen zwei Kondensatorplatten ist also $w_e(\vec{r}) := \frac{\epsilon\epsilon_0}{2} \vec{E}(\vec{r})^2$. Entsprechend gilt (o.B.) im magnetischen Fall, dass die Feldenergiedichte w_m zum Aufbau eines Magnetfeldes im Innern einer Spule, die mit einem Eisenkern der relativen Permeabilität μ gefüllt ist, gleich $w_m(\vec{r}) = \frac{\mu\mu_0}{2} \vec{H}(\vec{r})^2$ ist.

3.2.10 Der Entmagnetisierungstensor

Mit den oben angegebenen Formeln (62) bzw. (64) kann man auf jeden Fall das elektrostatische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ bzw. das magnetostatische Feld $\vec{H}(\vec{r})$ eines elektrisch oder magnetisch polarisierten Körpers an jeder Stelle \vec{r} im Raume berechnen, aber die Berechnung ist i.a. schwierig und das Ergebnis unübersichtlich, außer wenn es sich um *Ellipsoide* handelt. Denn dann hat man außerhalb des Körpers exakt ein Dipolfeld, und zwar mit dem Dipolmoment $\vec{p} = \vec{P} \Delta V$, wobei ΔV das Volumen des Ellipsoides ist, und innerhalb des Ellipsoides hat man ein noch einfacheres Ergebnis, nämlich ein *homogenes* Feld mit den drei Komponenten $E_i = -\frac{1}{\epsilon_0} \sum_{k=1}^3 N_{ik} P_k$ (o.B.). Die drei Eigenwerte des sog. 'Entelektrisierungstensors' N_{ik} (im analogen magnetischen Fall nennt man ihn 'Entmagnetisierungstensor') sind dabei eindeutige Funktionen der Hauptachsenverhältnisse des Ellipsoides, und es ist immer die Identität $\sum_{i=1}^3 N_{ii} \equiv 1$ erfüllt. Die Eigenwerte des Entmagnetisierungstensors heißen Entmagnetisierungsfaktoren. Bei einer Kugel haben sie also den Wert $\frac{1}{3}$, bei einem unendlich-langen Kreiszyylinder haben zwei von ihnen den Wert $\frac{1}{2}$, und bei einer sehr dünnen ausgedehnten Schicht hat der einzige relevante Entmagnetisierungsfaktor den Wert 1.

3.2.11 Unstetigkeiten an Grenzflächen

An Grenzflächen sind die Felder i.a. unstetig. Die Integralformulierungen der Maxwell'schen Gleichungen gelten aber beispielsweise auch für stückweise-stetige Funktionen. Aus dem Gauß'schen Gesetz der Elektrostatik kann man durch Anwendung auf eine sog. „Gauß'sche Grenzflächendose“, das ist ein sehr flaches dosenförmiges Gebilde, dessen „Deckelfläche“ (bzw. die „Unterbodenfläche“) parallel zur Grenzfläche ganz im Außengebiet (bzw. Innengebiet) verläuft, während der Flächeninhalt der Seitenflächen vernachlässigbar klein ist, folgenden Zusammenhang herleiten

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}^{(+)} - \vec{D}^{(-)}) = \sigma. \quad (73)$$

Dabei ist $\vec{D}^{(\pm)}$ der Wert des Feldes an der Außenseite (bzw. der Innenseite) der Grenzfläche und σ die Grenzflächenladungsdichte.

Die linke Seite von Gleichung (73) wird auch als Grenzflächendivergenz bezeichnet; man erhält sie indem man in der Beziehung $\text{div } \vec{v}$ formal den vektoriellen Differentialoperator $\nabla \cdot \dots$ durch den in Gleichung (73) auftretenden Differenzenoperator $\vec{n} \cdot \dots$ ersetzt.

Ebenso verfährt man mit der Rotation: Durch Berechnung der Zirkulation eines Vektorfeldes entlang einer sog. „Stokes'schen Schleife“, das ist eine sehr schmale geschlossene

Kurve, deren Außenseite (bzw. Innenseite) parallel zur Grenzfläche, und zwar oberhalb (bzw. unterhalb) derselben, verläuft, ergibt sich analog zu $\text{rot } \vec{E} = \nabla \times \vec{E} = 0$, dass

$$\vec{n} \times (\vec{E}^{(+)} - \vec{E}^{(-)}) = 0. \quad (74)$$

Aus den zwei Gleichungen (73) und (74) kann man das Brechungsgesetz der \vec{E} -Feldlinien an der Grenzfläche zwischen zwei Dielektrika herleiten: Es ergibt sich aus der Tatsache, dass die Tangentialkomponente von \vec{E} stetig sein muss, während die Normalkomponenten $\vec{n} \cdot \vec{E}^{(i)}$ sich umgekehrt proportional zu den ϵ_i verhalten. Die Standardformulierung des \vec{E} -Feldlinienbrechungsgesetzes, die sich daraus ergibt, ist $\frac{\tan \alpha_2}{\tan \alpha_1} \equiv \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$, mit dem Normalenwinkel α_i . Für $\epsilon_2/\epsilon_1 \rightarrow \infty$ erhält man Verhältnisse wie an einer Metalloberfläche, $\alpha_2 \rightarrow 90^\circ$, $\alpha_1 \rightarrow 0$. (Machen Sie sich selbst für den allgemeinen Fall eine Zeichnung !)

4 Magnetfelder stationärer Ströme

4.1 Das Ampère'sche „Durchflutungsgesetz“

Jahrhundertlang hatte man angenommen, dass die elektrischen und magnetischen Phänomene nichts miteinander zu tun haben. Deshalb war es quasi eine Sensation, als der dänische Physiker Ørsted 1818 nachwies, dass elektrische Ströme ebenfalls Magnetfelder erzeugen, und als wenig später Ampère quantitativ zeigte, dass für die „Zirkulation des Magnetfeldes \vec{H} entlang einer geschlossenen Kurve ∂F “ folgendes einfache Gesetz gilt:

$$\oint_{\partial F} \vec{H}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = I(F), \quad (\text{Ampère'sches Gesetz}). \quad (75)$$

Dabei ist $I(F)$ der Fluss des elektrischen Stromes durch eine der in die geschlossene Kurve ∂F eingespannte Fläche¹³

$$I(F) := \iint_F \vec{j} \cdot \vec{n} \, d^2A; \quad (76)$$

$\vec{j} := \rho(\vec{r}) \vec{v}(\vec{r})$ ist der sog. Stromdichtevektor (Dimension: Coulomb/(cm² sec)).

Die differentielle Formulierung des Ampereschen Durchflutungsgesetzes (75) ist folglich (mit dem Stokes'schen Integralsatz):

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}. \quad (77)$$

Im Spezialfall eines geraden Drahtes, der sich entlang der z -Achse von $(-\infty)$ bis $(+\infty)$ erstreckt und von einem stationären elektrischen Strom der Stromstärke I durchflossen werden soll, gilt in Zylinderkoordinaten einfach

$$\vec{H}_{\text{Draht}} = \vec{e}_\varphi \frac{I}{2\pi r_\perp}. \quad (78)$$

¹³Die Fläche F ist durch ∂F gar nicht eindeutig bestimmt, weil man verschiedene Flächen in dieselbe geschlossene Kurve einspannen kann. Damit hängt die später diskutierte „Eichfreiheit“ des Vektorpotentials zusammen.

Genauso wie das elektrische Feld einer Punktladung eine (dreidimensionale) δ -Divergenz besitzt: $\operatorname{div} \left(\frac{q\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \right) = q \delta(x, y, z)$, gilt entsprechendes für die Rotation des Magnetfeldes des oben angegebenen stromdurchflossenen Drahtes: $\operatorname{rot} \vec{H}_{\text{Draht}}(x, y, z) = I \delta(x, y) \vec{e}_z$.

Oder allgemeiner („auf Schulniveau“) formuliert:

Die Ladungen sind die Quellen des elektrischen Feldes, die Ströme ergeben Wirbel des magnetischen Feldes.

Hier heisst es mit Absicht nicht 'die Wirbel', denn es gibt Wirbel des magnetischen Feldes, die nicht durch 'Kreisströme' erzeugt werden (s.u., \rightarrow *Spinmagnetismus*).

4.1.1 Eine Anwendung: Oberflächenströme in Supraleitern. Der Meissner-Effekt

Wie bereits in Kapitel 3.2.11 besprochen, entspricht der Ampère'schen Gleichung $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}$ an Grenzflächen die Formulierung $\vec{n} \times (\vec{H}^+ - \vec{H}^-) = \vec{j}_s$, wobei \vec{j}_s eine an der Grenzfläche lokalisierte Oberflächenstromdichte ist (Dimension: A/cm, nicht A/cm²; $\vec{j}_s = \sigma \vec{v}$, analog zu $\vec{j} := \rho \vec{v}$). Diese Formulierung ergibt, wie wir gleich sehen werden, eine einfache Erklärung des Meissner-Effekts, das ist die Verdrängung des Magnetfeldes aus dem Innern eines Supraleiters durch (verlustlose) Oberflächen(supra)ströme, die an der Oberfläche eines Supraleiters quer zum Magnetfeld in einer sehr dünnen Oberflächenschicht der typischen Breite $\lambda \approx 10$ nm fließen, und zwar gerade in solcher Stärke, dass ein externes Magnetfeld (tangential zur Grenzfläche) genau kompensiert wird:

Wir betrachten o.B.d.A. als Grenzfläche die Ebene $x \equiv 0$; der Supraleiter erstreckt sich in der positiven Halbebene $x > 0$, das 'Vakuum' in der negativen Halbebene $x < 0$. Das Magnetfeld sei außerhalb des Supraleiters konstant $\neq 0$ (und zwar o.B.d.A. $\vec{H}^- = H \vec{e}_z$) und im Innern des Supraleiters, d.h. für $x > \lambda$, gleich Null, also $\vec{H}^+ \equiv 0$; an der Oberfläche fließt in der sehr dünnen Schicht $0 \leq x < \lambda$ ein Oberflächensuprastrom in y-Richtung, also ebenfalls tangential, aber quer zum Magnetfeld: $\vec{j}_s = j_s^{(0)} \vec{e}_y$. Dann erfordern die Bedingungen $\vec{H}^+ \equiv 0$ und $\vec{H}^- \equiv H \vec{e}_z$ und die Gleichung $\vec{n} \times (\vec{H}^+ - \vec{H}^-) = \vec{j}_s$ wegen $\vec{n} = \vec{e}_x$ und $\vec{j}_s = j_s^{(0)} \vec{e}_y$, dass $j_s^{(0)}$ genau $\equiv H$ ist.

Grund für das Auslöschung des Magnetfeldes im Supraleiter ist die Einsparung magnetischer Feldenergie im Inneren des Supraleiters, u.a. auf Kosten der kinetischen Energie zur Erzeugung des Oberflächensuprastromes \vec{j}_s . Auf weitere Einzelheiten kann ich an dieser Stelle nicht eingehen.

4.2 Das Vektorpotential; Umeichung

Da $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}$ ist, also $\neq 0$, kann das Magnetfeld jetzt nicht mehr aus einem skalaren Potential berechnet werden. Denn aus $\vec{H}(\vec{r}) = -\operatorname{grad} \phi_m(\vec{r})$ würde ja $\operatorname{rot} \vec{H} = 0$ folgern, weil $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \phi_m(\vec{r}) \equiv 0$ für beliebige skalare Funktionen $\phi_m(\vec{r})$ gilt ($\nabla \times (\nabla \phi_m)$ ist formal ein Vektorprodukt mit zwei gleichen Vektoren und folglich $\equiv 0$). Zum Glück gilt aber $\operatorname{div} \vec{B}(\vec{r}) \equiv 0$, so dass man ansetzen kann: $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r})$, denn es gilt ebenso, dass $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{v}(\vec{r}) \equiv 0$ ist, für alle Vektorfelder $\vec{v}(\vec{r})$, wie man leicht nachrechnet (formal ist $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{v}$ ein sog. „Spatprodukt“ (Dreier-Determinante) mit zwei gleichen Vektoren, $\nabla \cdot [\nabla \times \vec{v}]$ und folglich ebenfalls Null).

In der Tat besagt das sog. Poincaré'sche Lemma, dass für Gebiete G mit zusammenhängendem Rand aus der Divergenzfreiheit eines Vektorfeldes \vec{v} in G die Existenz eines Vektorpotentials \vec{A} mit $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ folgt. Dieses sog. Lemma ist erfreulicherweise auch konstruktiv, d.h. ein geeignetes \vec{A} wird explizit angegeben. Man muss dabei bedenken, dass \vec{A} ganz und gar nicht eindeutig bestimmt ist: Denn wenn man zu \vec{A} ein beliebiges Gradientenfeld addiert, ändert sich $\text{rot } \vec{A}$ nicht.

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' := \vec{A} + \text{grad } f(\vec{r}) \quad , \quad \text{sog. } \underline{\text{Eichtransformation}} \quad , \quad (79)$$

mit beliebigem $f(\vec{r})$, impliziert $\text{rot } \vec{A} \equiv \text{rot } \vec{A}'$, weil $\text{rot } \text{grad } f \equiv 0$.

4.3 Die Biot-Savart'sche Formel

Die Nebenbedingung $\text{div } \vec{A}(\vec{r}) = 0$ kann man wegen der erwähnten „Eichfreiheit“ von \vec{A} erfüllen (s.u.). Ferner ergibt sich aus dem Ampère'schen Gesetz $\text{rot } \vec{H} = \vec{j}$ mit $\vec{B} := \mu_0 \vec{H} + \vec{J}$, dass $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \text{rot } \vec{J} =: \mu_0 \vec{j}_B$ ist, mit dem Effektivstrom $\vec{j}_B := \vec{j} + \text{rot } \vec{M}$, mit der sog. 'Magnetisierung' $\vec{M} := \frac{\vec{J}}{\mu_0}$ ($\vec{J} :=$ sog. 'magnetische Polarisation'). Nun gilt allgemein die Identität

$$\text{rot } \text{rot } \vec{A} \equiv \underline{\text{grad } \text{div } \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}} \quad . \quad (80)$$

Daher erfüllt \vec{A} wegen $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_B$ komponentenweise eine 'Poisson'sche Gleichung': $-\nabla^2 A_i = \mu_0 \cdot (j_B)_i$, für $i = x, y, z$. Lösung dieser Gleichung ist analog zum elektrostatischen Problem

$$\underline{\vec{A}(\vec{r})} = \iiint dV' \frac{\mu_0 \vec{j}_B(\vec{r}')}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} \quad . \quad (81)$$

Mit der üblichen partiellen Integration kann man leicht zeigen, dass mit diesem Resultat auch die Gleichung $\text{div } \vec{A} \equiv 0$ erfüllt ist, weil $\text{div } \vec{j}_B = 0$ ist, wie wir später im Zusammenhang mit der sog. „Kontinuitätsgleichung“ sehr viel allgemeiner beweisen werden.

Aus Gleichung (81) folgt durch Rotationsbildung die Formel von Biot und Savart

$$\vec{B}(\vec{r}) = \iiint dV' \frac{\mu_0 \vec{j}_B(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad . \quad (82)$$

Hier hat man im Integranden dieselbe Abstandsabhängigkeit wie beim Coulombgesetz, nur ergänzt durch die spezielle „Rechte-Hand-Regel“ zwischen Strom- und Feldrichtung. (Die zugrunde liegende Formel (81) für das Vektorpotential ist auf jeden Fall leichter zu merken als (82).)

4.4 Die Ampère'sche Kreisstrom-Hypothese

Das folgende Kapitel ist besonders wichtig. Wir stellen zunächst (ohne Beweis!) fest, dass die von einer stromdurchflossenen geschlossenen Kurve $\Gamma = \partial F$ (Stromstärke: I) erzeugte magnetische Induktion $\vec{B}(\vec{r})$ quantitativ genau dem Magnetfeld entspricht, das von einer in die Kurve eingespannten magnetischen Dipolschicht erzeugt würde: Und zwar gilt für die fiktiven (infinitesimalen) Dipolmomente dieser Schicht: $d\vec{m} \equiv \mu_0 I \vec{n} d^2A$.

- Im ersten Fall hat man also nach der Biot-Savart'schen Formel

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\partial F} d\vec{r}' \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (83)$$

- Im zweiten Fall hat man außerhalb der (fiktiven!) Dipolschicht das äquivalente Ergebnis $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$, mit

$$\vec{H}(\vec{r}) = -\text{grad} \frac{I}{4\pi} \iint_F d^2 A' \frac{\vec{n}(\vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (84)$$

(Der Beweis der Äquivalenz der beiden Resultate geht analog zum Stokes'schen Satz. Da er im Detail etwas mühsam ist, deuten wir ihn nur in einer Fußnote an¹⁴. In der folgenden Abbildung wird ein suggestives Beispiel dargestellt.

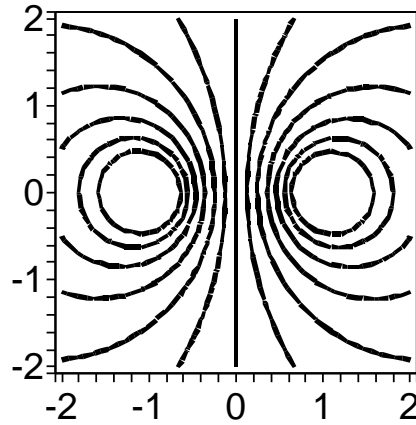


Abbildung 3: Die magnetischen Feldlinien einer Stromschleife :

Es werden die Feldlinien des Magnetfeldes $\vec{H}(x, z)$ dargestellt, das von zwei unendlich-langen geraden Drähten produziert wird, die sich in $\pm y$ -Richtung erstrecken, mit den Durchstoßungspunkten $x = \pm 1, z = 0$, und die von zwei entgegengesetzt-gleichen Strömen $\pm I$ durchflossen werden. Genau dieselbe magnetische Induktion $\vec{B} (= \mu_0 \vec{H})$ wird von einer Schicht magnetischer Dipole erzeugt, die in die Stromschleife eingespannt wird, mit der quantitativen Beziehung zwischen Stromstärke und Dipolmoment, die oben im Text angegeben ist.

Wir merken uns ferner in diesem Zusammenhang zwei nützliche Identitäten, nämlich die Formel $\vec{A} = \vec{m} \times \frac{\vec{r}}{4\pi r^3}$ für das Vektorpotential eines magnetischen Dipols und die Beziehung $\text{rot}(\vec{m} \times \frac{\vec{r}}{r^3}) = \vec{m} \text{div} \frac{\vec{r}}{r^3} - \text{grad} \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{r^3}$, vgl. Übungsaufgabe 5.)

¹⁴Wir benutzen im Folgenden den total-antisymmetrischen Einheitstensor e_{ijk} und die Einstein'sche Summenkonvention. Damit wird der Stokes'sche Satz: $\oint_{\partial F} E_j dx_j = \int \int_F e_{jlm} \partial_l E_m n_j d^2 A$. Es folgt nunmehr die Gleichungskette $\oint_{\partial F} e_{ijk} \frac{dx_j (x_k - x'_k)}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\equiv \oint_{\partial F} dx'_j e_{jki} \partial'_k \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}) = \int \int_F e_{jlm} \partial'_l e_{mki} \partial'_k \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} n_j d^2 A' = - \int \int_F e_{ikm} e_{jlm} \partial'_{lk} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} n_j d^2 A'$. Mit der fundamentalen Identität $e_{ikm} e_{jlm} = \delta_{ij} \delta_{kl} - \delta_{il} \delta_{kj}$ und den beiden simplen Beziehungen $\partial'_i \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\partial_i \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ und $\partial_{kk} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = 0$ (für $\vec{r}' \neq \vec{r}$) folgt schließlich die Behauptung.

Aufgrund der erwähnten Äquivalenz liegt es nahe, zu vermuten, dass alle magnetischen Dipolmomente auf diese Weise durch Kreisströme erzeugt werden: *In dieser verschärften Form wäre die so formulierte „Ampère’sche Kreisstromhypothese“ allerdings explizit falsch: Denn es gibt magnetische Momente, die nicht durch Kreisströme erzeugt sein können, sondern die mit dem sog. „Spin“ der Elektronen zusammenhängen:*

4.5 Das Gyromagnetische Verhältnis und der Spin-Magnetismus

Ein Elektron, das im Atom auf einer Kreisbahn mit Radius R mit der Geschwindigkeit $v = \omega R$ umläuft (Umlaufzeit $T = \frac{2\pi}{\omega}$), hat einen Bahndrehimpuls vom Betrag $L = R \cdot m_e v = m_e \omega R^2$ und nach der Ampère’schen Kreisstrom-Äquivalenz ein effektives magnetisches Dipolmoment $m = \mu_0 \frac{e}{T} \pi R^2 = \frac{\mu_0 e \omega R^2}{2}$, wobei wir $I = \frac{e}{T}$ benutzt haben (m_e ist die Masse des Elektrons).

Also ist das Gyromagnetische Verhältnis $\frac{m}{L}$ bei Ampère’schen Kreisströmen $\frac{\mu_0 e}{2m_e}$.

Einstein und de Haas haben aber in den zwanziger Jahren des vorigen Jahrhunderts in grundlegenden Experimenten gezeigt, dass bei den üblichen ferromagnetischen Materialien, z.B. bei Legierungen aus Fe, Co und Ni, das gemessene gyromagnetische Verhältnis doppelt so groß ist, wie eben vorhergesagt. Bei diesen Systemen hat man es in der Tat mit (fast reinem) Spinnmagnetismus zu tun: Der Drehimpuls ist kein Bahndrehimpuls wie in der obigen Herleitung, sondern 'Spindrehimpuls', eine Eigenschaft, die man erst im Rahmen einer relativistischen Quantenmechanik besser verstehen würde.

In der Schule wird immer gesagt, dass der Spindrehimpuls eine Art 'Eigendrehimpuls' des Elektrons sei; das ist richtig. Wenn der Schüler aber anschließend glaubt (oder gesagt bekommt), dass Elektronen sich wie 'geladene Kreisel' verhalten, ist das wieder falsch, denn dann hätte das gemessene gyromagnetische Verhältnis den oben hergeleiteten klassischen Wert. Man kommt also hier nicht darum herum, zuzugeben, dass die Verhältnisse an dieser Stelle sehr unverständlich-kompliziert werden; alles Andere wäre unehrlich und Vortäuschung falscher Tatsachen.

5 Die allgemeinen Maxwell’schen Gleichungen I: Induktionsgesetz, Kontinuitätsgleichung und „Maxwell’sche Ergänzung“

Die erste und zweite Maxwell’sche Gleichung, $\text{div } \vec{D} = \rho$ und $\text{div } \vec{B} = 0$ – also die Gauß’schen Gesetze für die elektrischen bzw. die (nicht existenten) magnetischen Ladungen – gelten unverändert auch bei zeitabhängigen elektrodynamischen Feldern. Anders ist es mit der dritten und vierten Maxwell’schen Gleichung: Wir geben zunächst ihre endgültige Form an:

- das Faraday’sche Induktionsgesetz (Faraday 1832)

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (85)$$

und

- das Amperè'sche Gesetz mit der Maxwell'schen Ergänzung

$$\underline{\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}. \quad (86)$$

Die beiden letzten Gesetze besprechen wir der Reihe nach in den folgenden Unterkapiteln und schieben dabei zur Begründung der 'Maxwell'schen Ergänzung', das ist der letzte Term in Gleichung (86), ein eigenes Unterkapitel über die sog. „Kontinuitätsgleichung“ ein. Hinter der Kontinuitätsgleichung verbirgt sich ein wichtiger Erhaltungssatz, und das Verfahren, aus solchen Erhaltungssätzen ähnliche „Kontinuitätsgleichungen“ herzuleiten, ist sehr allgemein.

5.1 Das Induktionsgesetz und die Lorentzkraft; Generatorspannung

Faraday stellte 1832 fest, dass zeitliche Änderungen des sog. magnetischen Flusses $\phi_B(F) = \iint_F \vec{B} \cdot \vec{n} \, d^2A$ durch eine in eine geschlossene Stromschleife eingespannte Fläche F zu sog. „elektromotorischen Kräften“ (gleich „ladungstrennenden Kräften“) führen, wie sie in ähnlicher Form auch in einer Batterie auftreten (sog. „elektrochemische Kräfte“). Dies führt zum Auftreten einer Generatorspannung zwischen den Polen einer Batterie. Dabei fließt im Innern der Batterie der Strom vom Minuspol zum Pluspol (!) und erst anschließend im Verbraucherkreis von Plus nach Minus.

Das Faradaysche Induktionsgesetz besagt quantitativ, dass die Induktions(generator)-spannung $U_i = \oint_{\vec{r}_-}^{\vec{r}_+} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ zwischen (beliebigen) Anfangspunkten \vec{r}_- bzw. (fast) identischen Endpunkten \vec{r}_+ einer orientierten¹⁵ (fast) geschlossenen Kurve $\Gamma = \partial F$ gegeben ist durch das Gesetz

$$\underline{U_i(t) = -\frac{d\phi_B(F)}{dt}}. \quad (87)$$

Anfangspunkt und Endpunkt der Kurve liegen dabei nur infinitesimal auseinander und entsprechen dem Minuspol bzw. Pluspol der Generatorspannung U_i . Es kommt dabei weder darauf an, an welcher Stelle der geschlossenen Kurve die Spannung abgegriffen wird, noch kommt es darauf an, ob die Änderung des magnetischen Flusses (i) durch Änderung der Form der Schleife (d.h. $F \equiv F(t)$) oder (ii) durch Änderung von \vec{B} (d.h. $\vec{B} \equiv \vec{B}(\vec{r}, t)$) bzw. durch Kombination beider Effekte zustande kommt. Man erkennt also, dass in diesem kurz – und gleichzeitig etwas umständlich – formulierten Gesetz eine immense Fülle experimenteller Erfahrungen enthalten ist. Insbesondere ahnt man schon hier die später noch zu zeigende relativistische Invarianz der Elektrodynamik.

Im zweiten Fall, (ii), also bei konstantem F , bekommt man mit dem Stokes'schen Integralsatz aus der Integralformulierung $\oint_{\partial F} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\iint_F \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} \, d^2A$ die differentielle Formulierung (85):

$$\underline{\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}.$$

Um auch den ersten Fall, (i), quasi „herzuleiten“, gehen wir von der sog. Lorentzkraft auf ein geladenes Teilchen im Magnetfeld aus: Nach diesem Kraftgesetz, das erst nach Faraday von H.A. Lorentz in Leiden formuliert wurde¹⁶, gilt:

¹⁵Die Orientierung von ∂F muss dabei zur äußeren Normalen \vec{n} der Fläche F passen.

¹⁶von ihm stammen auch die berühmten „Lorentztransformationen“, s.u.

- Die Lorentzkraft \vec{F}_L auf ein geladenes Teilchen, das sich im Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r})$ mit der Geschwindigkeit \vec{v} bewegt, ist $\vec{F}_L = q \vec{v} \times \vec{B}$.

Wir betrachten nun ein Linienelement $d\vec{r}$ (z.B. $dl \vec{e}_y$) der Stromschleife ∂F und bewegen dieses Linienelement für die kurze Zeitspanne δt mit der Geschwindigkeit \vec{v} (z.B. in x -Richtung); dann überstreicht das oben angegebene Linienelement in der Zeit δt die Fläche $(\vec{v} \delta t) \times d\vec{r}$, die Änderung des Magnetflusses ist also $\delta \phi_B = \delta t [\vec{v} \times d\vec{r}] \cdot \vec{B} = -\delta t d\vec{r} \cdot [\vec{v} \times \vec{B}]$. Man berechnet nun das Integral dieses Ausdrucks vom Anfangspunkt

bis zum Endpunkt der Kurve, also $\int_{\vec{r}_-}^{\vec{r}_+} d\vec{r} \cdot \vec{F}_L$. Aber es ist $\vec{F}_L = q \cdot \vec{E}$. Also haben wir $U_i \equiv \oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{\delta \phi_B}{\delta t}$.

Die Integralformulierung des Induktionsgesetzes ist also deutlich inhaltsreicher als die differentielle Formulierung : Sie enthält nicht nur Gleichung (85), also Schritt (ii), sondern u.A. auch die Lorentzkraft, also (i).

5.2 Die Kontinuitätsgleichung

Der Erhaltungssatz, von dem oben die Rede war, ist die Erhaltung der Gesamtladung $Q_{\text{total}} := \iiint_{\infty} dV \rho(\vec{r})$, wobei über den gesamten Raum integriert wird. Dies impliziert, dass die in einem endlichen Volumen V enthaltene Ladung $Q(V) := \iiint_V dV \rho(\vec{r})$ nur dadurch zunehmen kann, dass von außen Ladung in das Volumen hineinströmt, also

$$\frac{dQ(V)}{dt} = - \oiint_{\partial V} \vec{j} \cdot \vec{n} d^2 A. \quad (88)$$

Nun ist bei konstantem Volumen $\frac{dQ(V)}{dt} = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$ und es gilt nach dem Gauß'schen Integralsatz $-\oiint_{\partial V} \vec{j} \cdot \vec{n} d^2 A = -\iiint_V \text{div} \vec{j} dV$. Also haben wir $\iiint_V \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} \right\} dV \equiv 0$, also nicht $\text{div} \vec{j} \equiv 0$, sondern die sog. Kontinuitätsgleichung

$$\text{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \equiv 0. \quad (89)$$

Diese Gleichung, einschließlich ihrer Herleitung, merken wir uns u.a. deshalb, weil entsprechende Kontinuitätsgleichungen auch für andere Erhaltungssätze gelten.

5.3 Das Ampère'sche Gesetz mit der Maxwell'schen Ergänzung

Wegen der Kontinuitätsgleichung (89) kann das Ampère'sche Gesetz $\text{rot} \vec{H} = \vec{j}$ bei zeitlich veränderlichem elektromagnetischen Feld nicht gültig bleiben, weil $\text{div} \text{rot} \vec{H}$ null ist, während nach (89) $\text{div} \vec{j} \neq 0$ gilt. Maxwell hat die richtige Ergänzung erraten: $\text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$. Denn wegen der Vertauschbarkeit partieller Ableitungen, $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x}$ u.s.w., gilt $\text{div} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \vec{D}$, und nach der ersten Maxwell'schen Gleichung ist $\text{div} \vec{D} = \rho$, also $\text{div} \left\{ \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right\} \equiv 0$, wie es sein muss.

Die vierte Maxwell'sche Gleichung lautet also wie oben angegeben:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (90)$$

In der zugehörigen Integralformulierung (s.u.) betrachtet man einen Metallkondensator, in dessen eine Platte von links ein starker Strom hinienfließt, während von der gegenüberliegenden Platte ein ebenso starker Strom nach rechts abfließt. Im Zwischenraum zwischen den Kondensatorplatten fließt gar kein Strom, aber das \vec{D} -Feld muss sich zeitlich ändern, denn die Wirbel des magnetischen Feldes, von denen der Strom im Zuflussbereich und im Abflussbereich des Kondensators umgeben ist, können im Zwischenbereich zwischen den Kondensatorplatten nicht aufhören. (Bitte machen Sie sich an dieser Stelle selbst eine Zeichnung.)

Wie beim Induktionsgesetz ist auch hier die Integralformulierung der vierten Maxwell-Gleichung allgemeiner als die differentielle Formulierung (man beachte auch hier das Auftreten der Zeitableitung vor dem Integral) :

$$\oint_{\partial F} \vec{H} \cdot d\vec{r} = \iint_F \vec{j} \cdot \vec{n} d^2 A + \frac{d}{dt} \iint_F \vec{D} \cdot \vec{n} d^2 A \quad (\text{Maxwell IV; integral version}). \quad (91)$$

5.4 Anwendungen: Selbst- und Gegeninduktivitäten; der Transformator; Wechselstromwiderstände; *RLC*-Resonanz

- Induktivitäten: Wir betrachten eine Spule mit Weicheisenkern der relativen Permeabilität μ . Die Länge der Spule sei l , der Radius des kreisförmigen Querschnittes sei r_0 ; die Zahl der Windungen sei N_1 .

Der gesamte Induktionsfluss durch die Spule ist dann $\phi_B = N_1 \cdot \mu \mu_0 H \cdot \pi r_0^2$.

Das Ampère'sche Durchflutungsgesetz $\oint_{\partial F} \vec{H} \cdot d\vec{r} = I(F)$ impliziert bei Anwendung auf eine sehr lange, alle Windungen umlaufende Schleife, dass für das Magnetfeld H im Innern der Spule gilt: $H = \frac{N_1 I}{l}$, wenn I die stationäre oder langsam periodisch veränderliche Stromstärke ist. Also $\phi_B = \mu \mu_0 \frac{N_1^2}{l} \pi r_0^2 \cdot I$, d.h. $\phi_B \equiv L \cdot I$, mit der sog. (Selbst-)Induktivität

$$L =: L_{1,1} = \mu \mu_0 \frac{N_1^2}{l} \pi r_0^2. \quad (92)$$

Die Feldenergie des Magnetfeldes im Innern der Spule ist nach der früher angegebenen Formel gleich $E_{\text{mag}} = \frac{\mu \mu_0}{2} H^2 \cdot \pi r_0^2 l$. Mit $H = \frac{N_1}{l} \cdot I$ ergibt sich das äquivalente Resultat $E_{\text{mag}} = \frac{L}{2} I^2$, also $\frac{dE_{\text{mag}}}{dt} = L \cdot I \frac{dI}{dt} = L \frac{dI}{dt} I = -U_i \cdot I$, wie es sein muss.

- Transformator: Wir haben die Windungszahl mit einem Index 1 versehen, $N \rightarrow N_1$, weil wir im Folgenden eine zweite Spule gleicher Länge betrachten wollen, die mit einem nur geringfügig größeren Querschnittsradius r_0 , aber deutlich abweichender Windungszahl N_2 um denselben Kern herum gewickelt ist. Die Enden dieser Spule sollen offen bleiben; die zweite Spule soll also nicht von einem Strom

durchflossen werden. Das Magnetfeld \vec{H} im Innern der Spule ist also unverändert $H = \frac{N_1 I_1}{l}$, wobei wir auch noch die Stromstärke mit dem Index 1 versehen haben. Der Induktionsfluss durch die zweite Spule ist also $(\phi_B)_2 = L_{2,1} \cdot I_1$, mit der sog. Gegeninduktivität $L_{2,1} = L_{1,1} \frac{N_2}{N_1}$.

Wenn also die Spule 1 von einem (niederfrequenten)¹⁷ Wechselstrom der Frequenz ω durchflossen wird, verhalten sich die an den Enden der Spule 1 bzw. 2 abgegriffenen Induktionswechselspannungen dieser Frequenz wie die Windungszahlen: $(U_i)_2 : (U_i)_1 = N_2 : N_1$. – Dies ist das Funktionsprinzip des Transformators.

- Wechselstromwiderstände: Wir nehmen an, dass wir es im Folgenden mit monochromatischen Wechselströmen $I(t) = I^{(0)} \cdot \cos(\omega t - \alpha)$ bzw. Generatorspannungen $U_G(t) = U_G^{(0)} \cdot \cos(\omega t)$ zu tun haben: Der Strom ist also in der Phase α gegenüber der Spannung verschoben (bei positivem α sind z.B. die Maxima des Stroms in der Zeit gegenüber den Maxima der Generatorspannung 'verspätet').

Es bietet sich nunmehr eine komplexe Rechnung an, indem man die bekannte Relation von Moivre:

$$\underline{e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)} \quad (93)$$

benutzt, mit der Gauß'schen imaginären Einheit i , $i^2 = -1$.

Es ist also $U_G(t) = \text{Re}(\mathcal{U}_G e^{i\omega t})$ und $I(t) = \text{Re}(\mathcal{J} e^{i\omega t})$, wobei die komplexen Größen $\mathcal{U} \equiv U_G^{(0)}$ und $\mathcal{J} \equiv (I^{(0)} e^{-i\alpha})$ alles beinhalten, d.h. sowohl Amplituden als auch Phasen, und man die Realteilbildung auf 'ganz zuletzt' verschieben darf¹⁸.

Mit den Größen $e^{i\omega t}$ kann man nunmehr sehr bequem rechnen: Man definiert zunächst nach der Vorschrift $\underline{\mathcal{U}_G = \mathcal{R}\mathcal{J}}$ ¹⁹ einen komplexen Wechselstromwiderstand, den es bei gegebener Generatorspannung \mathcal{U}_G auszurechnen gilt: Der komplexe Gesamtwiderstand einer Schaltung (Serienschaltung, Parallelschaltung usw.) ist dann nach den üblichen Gesetzen aus drei Standardelementen, nämlich

- (positiv-reellen) Ohmschen Widerständen,
- (negativ-imaginären) kapazitiven Widerständen
- (positiv-imaginären) induktiven Widerständen

zusammengesetzt²⁰.

- *Ohm'sche Widerstände* werden durch das bekannte Kastensymbol und den Buchstaben R gekennzeichnet. Der zugehörige komplexe Widerstand ist einfach $\underline{\mathcal{R}_R = R}$.
- *Kapazitive Widerstände* werden durch das bekannte Kondensatorplattensymbol und den Buchstaben C gekennzeichnet. Der zugehörige Wechselstromwiderstand ist $\underline{\mathcal{R}_C = \frac{1}{i\omega C}}$.

¹⁷Wir werden erst später sehen, was in diesem Zusammenhang 'niederfrequent' heißt.

¹⁸fast möchte man sagen, aber das wäre nicht mehr richtig: 'auf den St.-Nimmerleinstag'.

¹⁹Eselsbrücke: 'Uri, Schwyz und Unterwalden', die drei Urkantone der Schweiz

²⁰Bei den imaginären komplexen Widerständen spricht man oft von „Impedanzen“.

Dafür eine kurze Begründung: $U_C(t) = \frac{Q(t)}{C}$, also $\dot{U}_C(t) = \frac{I(t)}{C}$. Aber mit dem Ansatz $U_C(t) \propto e^{i\omega t}$ wird $\dot{U}_C(t) \equiv i\omega U_C(t)$.

- Induktive Widerstände schließlich werden durch das bekannte Spulensymbol und den Buchstaben L gekennzeichnet. Der zugehörige Wechselstromwiderstand ist $\mathcal{R}_L = i\omega L$.

Auch hierfür eine kurze Begründung: Der induktive Spannungsabfall im 'Verbraucher' ergibt sich aus der Beziehung $U_L(t) = L \cdot \frac{dI(t)}{dt}$, also $U_L(t) = L \cdot \dot{I}(t)$. Aber mit dem Ansatz $I(t) \propto e^{i\omega t}$ wird $\dot{I}(t) \equiv i\omega I(t)$.

Auch bei Gegeninduktivitäten („Transformatoren“) kann man entsprechend vorgehen²¹.

- RLC-Resonanz: Bei einer RLC -Serienschaltung, angeschlossen als „Verbraucher“ an einen Wechselstromgenerator $U_G(t) = U_G^{(0)} \cdot \cos(\omega t)$, ist also $\frac{\mathcal{I}}{\mathcal{U}} = \frac{1}{\mathcal{R}} = (R + i(\omega L - \frac{1}{\omega C}))^{-1}$, woraus $I(t) = I^{(0)} \cdot \cos(\omega t - \alpha)$, mit $\frac{I^{(0)}}{U_G^{(0)}} = |\frac{1}{\mathcal{R}}| = \frac{1}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$ und $\tan \alpha = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$ folgen.

Dies ergibt bei hinreichend kleinem R eine sehr scharfe Resonanz bei der Resonanzfrequenz $\omega_0 := \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$. Bei dieser Frequenz sind Strom und Spannung genau in Phase, während bei höheren Frequenzen der Strom hinter der Spannung zurückbleibt (induktives Verhalten) und bei niedrigeren Frequenzen die Spannung hinter dem Strom (kapazitives Verhalten). Bei der Resonanzfrequenz hat der Strom ein sehr scharfes Maximum der Höhe $U_G^{(0)}/R$ und sinkt bei schwacher Dämpfung (d.h. bei hinreichend kleinen Werten von R) bei ganz kleinen Abweichungen von dieser Frequenz mit Zunahme der Abweichungen sehr rasch ab: An den Stellen $\omega_{\pm} := \omega_0 \pm \frac{R}{2L}$ ist er bereits auf 70% des Maximalwertes abgefallen (präziser z.B. von 1 auf $\frac{1}{\sqrt{2}}$). Das Verhältnis $G := \frac{\omega_0}{R/L}$ wird als Gütefaktor der Resonanz bezeichnet; es kennzeichnet die Schärfe der Resonanz und erreicht Werte über 1000.

An dieser Stelle empfiehlt es sich, Aufgabe 12 vom Sommersemester 2002 zu lösen, die im Internet zu finden ist²². Diese Übung bringt zugleich eine Einführung in die Plot-Möglichkeiten von MAPLE.

In der Vorlesung wurde anschließend die Leistungsbilanz mit den Begriffen „Blind- und Verlustleistung“ besprochen, mit der Gleichungskette $(dE/dt)(t) = U_G(t) \cdot I(t) = U_G^{(0)} \cdot I^{(0)} \cos \omega t \cdot \cos(\omega t - \alpha) \equiv U_G^{(0)} \cdot I^{(0)} \cdot [\cos \alpha \cdot (\cos \omega t)^2 + \sin \alpha \cdot \cos \omega t \cdot \sin \omega t]$. Bei Mittelung über eine Periode ergibt der erste Summand $U_G^{(0)} \cdot I^{(0)} \frac{1}{2} \cdot \cos \alpha$, der zweite Summand, der dem Imaginärteil des komplexen Wechselstromwiderstandes entspricht, mittelt sich weg. Bei der komplexen Rechnung muss der Faktor $\frac{1}{2}$ *explizit* eingebaut werden: der erwähnte Periodenmittelwert ist $\overline{(dE/dt)(t)} = \text{Re} \left(\frac{1}{2} \cdot \mathcal{U}_G e^{i\omega t} \mathcal{I}^* \cdot e^{-i\omega t} \right)$.

²¹Die Eingangs(verbraucher)speisung des Transformators ist z.B. durch die Gleichung $\mathcal{U}_{\text{Tr}}^{(1)} = i\omega L_{1,2} \mathcal{I}_2$ gekennzeichnet, die Ausgangs(generator)speisung dagegen durch $\mathcal{U}_{\text{Tr}}^{(2)} = -i\omega L_{2,1} \mathcal{I}_1$.

²²Siehe <http://www.physik.uni-regensburg.de/forschung/krey/uebungen/uebss02/ueb6ss02.html>

6 Die allgemeinen Maxwell'schen Gleichungen II: Elektromagn. Wellen

6.1 Energiesatz; Poynting-Vektor

Der sog. Poyntingvektor ist definiert als

$$\vec{S} := \vec{E} \times \vec{H} . \quad (94)$$

Er hat fundamentale Bedeutung, nämlich als Energiestromdichte: $\vec{j}_{\text{Energie}} \equiv \vec{S}$. Denn zunächst gilt die mathematische Identität $\text{div} [\vec{E} \times \vec{H}] = \vec{H} \cdot \text{rot } \vec{E} - \vec{E} \cdot \text{rot } \vec{H}$, wie man mit der Beziehung $\text{div} [\vec{E} \times \vec{H}] = \partial_i e_{i,j,k} E_j H_k = \dots$ beweisen kann. Mit den Maxwell'schen Gleichungen $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ und $\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ entsteht aus dieser Identität die zum Energiesatz gehörige Kontinuitätsgleichung

$$\text{div} [\vec{E} \times \vec{H}] + \vec{E} \cdot \vec{j} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \equiv 0 , \quad (95)$$

also

$$\text{div } \vec{j}_{\text{Energie}} + \frac{\partial w_{\text{Energie}}}{\partial t} = -\vec{j} \cdot \vec{E} , \quad (96)$$

mit der Zeitableitung der Energiedichte $\frac{\partial w_{\text{Energie}}}{\partial t} = \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ und mit der sog. Joule'schen Verlustwärme $-\vec{j} \cdot \vec{E}$. In der Tat gilt bei Ohmschem Verhalten des Materials: $\vec{j} = \frac{1}{\kappa} \vec{E}$, mit dem spezifischen Widerstand κ ²³, also $-\vec{j} \cdot \vec{E} = -\frac{E^2}{\kappa}$.

Die elektromagnetische Feldenergie bleibt also bei Ohmschem Material nicht erhalten, sondern nimmt durch „Joule'sche Wärmeverluste“ ab.

Hier wurden in der Vorlesung anschließend die Themen *Der Poyntingvektor bei der Batterie mit angeschlossenem Ohmschem Verbraucher*²⁴ und die *Drude-Theorie der elektrischen Leitfähigkeit*²⁵ besprochen.

6.2 Die sog. retardierten Potentiale und Vektorpotentiale I: Die d'Alembert-Gleichung

Bei gegebenen elektromagnetischen Feldern $\vec{E}(\vec{r}, t)$ und $\vec{B}(\vec{r}, t)$ kann man zunächst die zweite und dritte Maxwell'sche Gleichung, nämlich das 'Induktionsgesetz' $\text{rot } \vec{E} \equiv -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ und die Gleichung $\text{div } \vec{B} \equiv 0$, mit dem Ansatz

$$\vec{E} = -\text{grad } \phi(\vec{r}, t) - \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad \text{und} \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \text{rot } \vec{A}(\vec{r}, t) \quad (97)$$

²³Der Widerstand eines Drahtes der Länge l mit der Querschnittsfläche F ist also $R = \kappa \frac{l}{F}$.

²⁴Der Poyntingvektor fließt radial aus der Batterie ins Vakuum hinaus und aus dem Vakuum in den Ohm'schen Verbraucher hinein.

²⁵Diese Theorie kulminiert in der bekannten Formel $\vec{j} = \sigma \vec{E}$, mit der spezifischen Gleichstromleitfähigkeit $\sigma(\omega = 0) \equiv n_v e^2 \tau / m$ bzw. der Wechselstromleitfähigkeit $\sigma(\omega) \equiv \sigma(0) / (1 + i\omega\tau)$; n_v ist die Volumendichte der Ladungsträger, z.B. Elektronen; e ist ihre Ladung; m_e ihre Masse und τ eine phänomonologische Relaxationszeit.

identisch erfüllen. Skalares Potential $\phi(\vec{r}, t)$ und Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r}, t)$ müssen jetzt also gleichzeitig betrachtet werden. Sie sind aber nicht eindeutig festgelegt, sondern können noch 'umgeichtet' werden, ohne dass sich die Felder ändern, und zwar

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r}, t) &\rightarrow \vec{A}'(\vec{r}, t) := \vec{A}(\vec{r}, t) + \text{grad } f(\vec{r}, t), \\ \phi(\vec{r}, t) &\rightarrow \phi'(\vec{r}, t) := \phi(\vec{r}, t) - \frac{\partial f(\vec{r}, t)}{\partial t}.\end{aligned}\quad (98)$$

Dabei ist die in Gleichung (98) auftretende differenzierbare Funktion $f(\vec{r}, t)$ beliebig. (Der Beweis, dass sich bei dieser Umzeichnung weder $\vec{E}(\vec{r}, t)$ noch $\vec{B}(\vec{r}, t)$ ändern, benutzt erneut die Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge, z.B. $\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial t}$.)

Wir benutzen im Folgenden diese Eichfreiheit, indem wir die sog. Lorenz-Eichung wählen²⁶:

$$\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \equiv 0. \quad (99)$$

Nach einer kurzen Rechnung bekommen wir dann aus den beiden verbleibenden Maxwell-Gleichungen, $\text{div } \vec{D} = \rho$ und $\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ die sog. d'Alembert-Poisson-Gleichungen:

$$\begin{aligned}-\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2}\right) \phi(\vec{r}, t) &= \rho_E(\vec{r}, t)/\epsilon_0 \quad \text{und} \\ -\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2}\right) \vec{A}(\vec{r}, t) &= \mu_0 \vec{j}_B(\vec{r}, t).\end{aligned}\quad (100)$$

Dabei ist c die Vakuumlichtgeschwindigkeit, und ρ_E und \vec{j}_B sind die durch elektrische bzw. magnetische Polarisationsbeiträge korrigierte Ladungsdichten und Stromdichten, nämlich

$$\rho_E(\vec{r}, t) := \rho(\vec{r}, t) - \text{div } \vec{P}(\vec{r}, t) \quad (101)$$

und

$$\vec{j}_B(\vec{r}, t) := \vec{j}(\vec{r}, t) + \frac{\vec{J}(\vec{r}, t)}{\mu_0} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}. \quad (102)$$

Im Folgenden eine Herleitung der beiden d'Alembert-Poisson-Gleichungen:

$\text{div } \vec{D} = \rho$, $\rightarrow \epsilon_0 \text{div } \vec{E} = \rho - \text{div } \vec{P} =: \rho_E$, $\rightarrow -\nabla^2 \phi - \text{div } \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \rho_E/\epsilon_0$. Mit $\text{div } \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{A}$ und der Lorenz-Eichung (99) ergibt sich die erste d'Alembert-Poisson-Gleichung.

Die zweite ergibt sich so: $\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \rightarrow \text{rot } \vec{B} - \text{rot } \vec{J} = \mu_0 \cdot \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}\right)$; $\rightarrow \text{rot rot } \vec{A} = \mu_0 \left(\vec{j} + \text{rot } \frac{\vec{J}}{\mu_0} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}\right) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. Hier setzt man jetzt $\text{rot rot } \vec{A} = \text{grad}(\text{div } \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$ und $\vec{E} = -\text{grad } \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ ein und erhält mit $\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$ den Gradienten eines Ausdrucks, der aufgrund der Lorenz-Eichung verschwindet. Die verbleibenden Terme ergeben gerade die zweite d'Alembert-Poisson-Gleichung.

Im folgenden Kapitel suchen wir 'freie Lösungen' (bzw. 'Fundamentallösungen', s.u.) der d'Alembert-Gleichungen, d.h. mit verschwindender rechter Seite (bzw. $\propto \delta(\vec{r})$). Dies sind gerade *ebene* elektromagnetische Wellen bzw. *Kugelwellen*.

²⁶benannt nach L. Lorenz, nicht nach H.A. Lorentz

6.3 Ebene elektromagnetische Wellen; Kugelwellen

Der in den d'Alembert-Poisson-Gleichungen (100) auftretende Operator

$$\square := (\nabla^2 - \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2}) \quad (103)$$

wird als d'Alembert-Operator bezeichnet (oder manchmal auch als „Quabla-Operator“).

Allgemeine Lösungen der freien d'Alembert-Gleichung $\square \phi(\vec{r}, t) \equiv 0$ sind, wie man leicht explizit nachrechnet, die nach rechts laufenden ebenen Wellen der Art $\phi_+(\vec{r}, t) \equiv g(x-ct)$. Dabei ist $g(x)$ eine zweimal stetig-differenzierbare, auf der ganzen x -Achse definierte beliebige Funktion, die das „Profil“ der mit der Geschwindigkeit c nach rechts laufenden sog. „Wanderwelle“ beschreibt. Die Auszeichnung der x -Richtung ist natürlich willkürlich; im allgemeinen Fall ersetzen wir x durch $\hat{k} \cdot \vec{r}$, mit der Ausbreitungsrichtung $\hat{k} := \vec{k}/|\vec{k}|$.

Eine nach links laufende entsprechende „Wanderwelle“ wird durch $\phi_-(\vec{r}, t) \equiv g(x+ct)$ beschrieben.

Alles dies kann man, wie schon gesagt, leicht explizit nachrechnen: Bei den elektromagnetischen Wellen muss man noch die Polarisationsrichtung beachten, d.h. insbesondere die Transversalität der elektromagnetischen Wellen (s.u.): Die ersten zwei Maxwell'schen Gleichungen, $\text{div } \vec{E} \equiv 0$ und $\text{div } \vec{B} \equiv 0$, implizieren nämlich (sofern die Felder nur von x und t abhängen), dass die x -Komponenten E_x und B_x konstant sein müssen, o.B.d.A. also Null. Es verbleiben also nur noch die Gleichungen $\text{rot } \vec{E} \equiv -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ und $\text{rot } \vec{B} \equiv \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, also $\equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, die o.B.d.A. durch $\vec{E} \equiv g(x-ct) \vec{e}_y$ und $\vec{B} \equiv c^{-1} g(x-ct) \vec{e}_z$ gelöst werden, mit ein-und-derselben, beliebigen *Profilfunktion*, s.o., $g(x)$. (Für eine *nach links laufende* ebene elektromagnetische Welle erhält man ebenso $\vec{E} \equiv g(x+ct) \vec{e}_y$ und $\vec{B} \equiv -c^{-1} g(x+ct) \vec{e}_z$.)

Die Ausbreitungsrichtung \hat{k} und die Vektoren \vec{E} und \vec{B} bilden also ein rechtshändig orientiertes Dreibein analog zu den Vektoren \vec{e}_x , \vec{e}_y und \vec{e}_z . Die Amplitudenfunktionen von \vec{E} und $c\vec{B}$, im cgs-System: von \vec{E}' und \vec{B}' , sind identisch.

Identisch sind auch die Dichten der elektromagnetischen Feldenergie: $w_E = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \equiv w_B := \frac{B^2}{2\mu_0}$. Der Poyntingvektor $\vec{S} := [\vec{E} \times \vec{H}]$ hängt mit der gesamten Feldenergiedichte $w_{\text{total}} := w_E + w_B$ des elektromagnetischen Feldes wie folgt zusammen: $\vec{S} \equiv c \hat{k} \cdot w_{\text{total}}$, so wie man es von einer mit Lichtgeschwindigkeit propagierenden Energiestromdichte erwartet.

Auch die auslaufenden Kugelwellen

$$\Phi_+(r, t) := \frac{g(t - \frac{r}{c})}{r} \quad (104)$$

sind für $r > 0$ Lösungen der freien d'Alembert-Gleichung. Dies rechnet man leicht mit der Identität $\nabla^2 f(r) = r^{-1} \frac{d^2(r \cdot f(r))}{dr^2}$ nach. Wenn man noch das singuläre Verhalten der Funktion $1/r$ bei $r = 0$ durch Ausschluss einer kleinen Kugel um die Singularität berücksichtigt, erhält man mit der Standarddefinition $\text{div } \vec{v} := \lim_{V \rightarrow 0} (\frac{1}{V} \oint_{\partial V} \vec{v} \cdot \vec{n} d^2 A)$ bei hinreichend vernünftigem Verhalten der Funktion $\ddot{g}(t)$:

$$\square \frac{g(t - \frac{r}{c})}{r} \equiv (\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \frac{g(t - \frac{r}{c})}{r} = -4\pi \delta(\vec{r}) g(t - \frac{r}{c}). \quad (105)$$

Dies ist analog zu der entsprechenden Gleichung in der Elektrostatik: $\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi \delta(\vec{r})$. Das bedeutet, dass es sich bei den auslaufenden Kugelwellen um sog. Fundamentallösungen der d'Alembert-Poisson-Gleichungen handelt.

(Die entsprechenden „einlaufenden Kugelwellen“ $\Phi_-(r, t) := \frac{g(t+\frac{r}{c})}{r}$ sind dagegen i.a. unphysikalisch, außer wenn man es mit ganz speziellen Anfangsbedingungen zu tun hat, z.B. mit dem gezielten Laserbeschuss eines Targets aus allen Richtungen, zur Erzeugung einer thermonuklearen Fusionsreaktion.)

6.4 Die sog. retardierten Potentiale und Vektorpotentiale II: Das Superpositionsprinzip mit Retardierung

Mit der Gleichung (105) sind wir jetzt in der Lage, die Lösungen der d'Alembert-Poisson-Gleichungen (100) explizit hinzuschreiben, nämlich

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}, t) &= \iiint dV' \frac{\rho_E(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}-\vec{r}'|}, \\ \vec{A}(\vec{r}, t) &= \iiint dV' \frac{\mu_0 \vec{j}_B(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})}{4\pi |\vec{r}-\vec{r}'|}.\end{aligned}\quad (106)$$

Dies ist ein im Grunde sehr anschauliches Ergebnis: Es besagt, dass die Wirkungen der einzelnen Ladungen

- einerseits wie in der Elektrostatik beim Coulomb'schen Gesetz einfach superponiert werden können, dass aber
- andererseits die Retardierung zwischen Ursache und Wirkung berücksichtigt werden muss.
- Das Huyghen'sche Prinzip²⁷ der Überlagerung von Kugelwellen ist ebenfalls in den Gleichungen (106) explizit in quantitativer Form enthalten.
- Die wechselseitigen Einflüsse breiten sich dabei nach (106) mit der Vakuum-Lichtgeschwindigkeit aus, und zwar auch in der Materie.

(Dass stationäre elektrische Wellen in dielektrischer und permeabler Materie mit verminderter Lichtgeschwindigkeit propagieren ($c^2 \rightarrow c^2/(\epsilon\mu)$), widerspricht dieser Feststellung nicht, weil sich diese stationären elektromagnetischen Wellen wie bei angetriebenen Vorgängen erst nach einer endlichen *Einschwingzeit* ausbilden: Dies ist eines der fundamentalen Probleme, die A. Sommerfeld, der Lehrer von W. Heisenberg, geklärt hat.)

Die Materie-Eigenschaften machen sich in den retardierten Potentialen explizit nur in der Abweichung der Effektivladungs- und Effektivstromdichten (101) bzw. (102) von den „wahren Ladungs- und Stromdichten“ bemerkbar, mit denen sie nur im Vakuum übereinstimmen.

²⁷Siehe Optik

6.5 Der Hertz'sche Dipol (Elektrische Dipolstrahlung, 'Handy')

Das spezielle elektromagnetische Feld

$$\begin{aligned}\vec{B}(\vec{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \operatorname{rot} \frac{\dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c})}{r} \\ \vec{E}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \frac{\vec{p}(t - \frac{r}{c})}{r},\end{aligned}\quad (107)$$

mit einem beliebigen zeitabhängigen elektrischen Dipolvektor $\vec{p}(t)$ im Ursprung unseres Koordinatensystems, für $t \in (-\infty, \infty)$, löst – wie man relativ leicht explizit nachrechnen kann – alle vier Maxwell'schen Gleichungen und entspricht in der Tat dem von einem zeitabhängigen Dipol bei $\vec{r}' = 0$ erzeugten elektromagnetischen Feld.

Dieser zeitabhängige sog. Hertz'sche Dipol kann z.B. näherungsweise durch die Antenne eines Senders oder eines 'Handys' repräsentiert werden, die mit Wechselstrom der Kreisfrequenz ω gespeist wird. Für den zugeführten Strom gilt unter diesen Umständen explizit $I(t) = |\dot{\vec{p}}(t)|$, so dass sich für das retardierte Vektorpotential die in (107) explizit benutzte Formel $\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c})$ ergibt, im Einklang mit Gleichung (106). Mit $\vec{B}(\vec{r}, t)$ ist vermöge der Maxwell'schen Gleichungen auch $\vec{E}(\vec{r}, t)$ festgelegt, und zwar wie oben angegeben.

Speziell kann man relativ leicht den Feldverlauf im Nahbereich und im Fernbereich angeben:

- Im Nahbereich (konkret z.B. für $r \ll \lambda$, wobei λ die zur Kreisfrequenz ω gehörige Vakuumlichtwellenlänge ist, $\lambda = \frac{c}{\omega}$), kann man z.B. $\frac{\vec{p}(t - \frac{r}{c})}{r}$ durch $\frac{\vec{p}(t)}{r}$ approximieren und erhält nach einigen elementaren Umformungen mit der Identität $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{v} \equiv (\operatorname{grad} \operatorname{div} - \nabla^2) \vec{v}$ und mit der obigen (Kugel-)Wellengleichung:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) \cong \frac{3(\vec{p}(t) \cdot \vec{r}) \vec{r} - r^2 \vec{p}(t)}{4\pi\epsilon_0 r^5}, \quad (108)$$

also das schon bekannte *quasistatische* Ergebnis $\propto r^{-3}$ für $r \rightarrow 0$, während gleichzeitig $\vec{B}(\vec{r}, t) \cong \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \dot{\vec{p}}(t) \times \vec{r}$ ist, also $\propto r^{-2}$ für $r \rightarrow 0$ und damit weniger stark divergent und somit für $r \rightarrow 0$ vernachlässigbar.

- Im Fernbereich (also konkret z.B. für $r \gg \lambda$) dominiert dagegen die Ortsabhängigkeit des Zählers, z.B. $\nabla \times \vec{p}(t - \frac{r}{c}) \cong -\frac{1}{c} [\hat{r} \times \dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c})]$, mit $\hat{r} = \vec{r}/r$.

Hier bekommt man asymptotisch für $r \gg \lambda$:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}, t) &\cong \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} [\hat{r} \times [\hat{r} \times \ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c})]] \quad \text{und} \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &\cong -\frac{\mu_0}{4\pi c r} [\hat{r} \times \ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c})],\end{aligned}\quad (109)$$

also

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \cong \hat{r} \frac{(\sin \theta)^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} \{\ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c})\}^2. \quad (110)$$

Dabei ist θ der Winkel zwischen \vec{p} und \hat{r} .

Der Ausbreitungsvektor $\hat{r} := \vec{r}/r$ und die Vektoren \vec{E} und \vec{B} bilden also analog zu den ebenen Wellen ein rechtshändiges Dreibein, wobei noch zusätzlich \vec{E} asymptotisch im Fernbereich immer in der durch \vec{p} und \vec{r} aufgespannten Ebene liegt. (\rightarrow eigene Zeichnung!)

Die Feldamplituden sowohl von \vec{E} als auch von \vec{B} sind im Fernbereich auf jeden Fall $\propto \omega^2 r^{-1} \sin \theta$; der Poyntingvektor ist also $\propto \omega^4 r^{-2} (\sin \theta)^2 \hat{r}$. Die über eine Kugeloberfläche integrierte gesamte Energieabstrahlung ist also $\propto \omega^4$ (!!), und, wie es sein muss, unabhängig vom Kugelradius:

Hochfrequente elektromagnetische Strahlung ist also „biologisch sehr schädlich“, während niederfrequente „biologisch sehr harmlos“ ist. Die Grenzfrequenz der biologischen Schädlichkeit liegt (hoffentlich) deutlich oberhalb der Trägerfrequenz der heute gebräuchlichen 'Handies' ($\omega \approx$ einige 10^9 Hertz).

6.6 Magnetische Dipolstrahlung; Synchrotronstrahlung

Bei verschwindenden Ladungen und Strömen besitzen die Maxwell'schen Gleichungen, ähnlich wie die kanonischen Gleichungen der klassischen Mechanik ($\dot{q} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}$; $\dot{p} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}$), eine sog. 'symplektische Invarianz': sie ändern sich nicht, wenn man \vec{E} in $c\vec{B}$ und \vec{B} in $-c^{-1}\vec{E}$ überführt ($(\vec{E}, c\vec{B}) \rightarrow \begin{pmatrix} 0, +1 \\ -1, 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{E} \\ c\vec{B} \end{pmatrix}$).

Präziser: Wenn man in Gleichung (107) \vec{B} in $-\vec{D}$ und \vec{E} in \vec{H} überführt, gleichzeitig ϵ_0 und μ_0 vertauscht und das elektrische Dipolmoment durch das magnetische Dipolmoment ersetzt (entsprechend $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{J}$, $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$), erhält man das elektromagnetische Feld eines zeitlich veränderlichen magnetischen Dipols. Für den Poyntingvektor im Fernfeld ergibt sich so anstelle von Gleichung (110):

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \cong \hat{r} \frac{(\sin \theta_m)^2}{16\pi^2 \mu_0 c^3 r^2} \left\{ \ddot{\vec{m}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right\}^2. \quad (111)$$

Dabei ist θ_m der Winkel zwischen \vec{m} und \hat{r} .

Wir zeigen nun, dass magnetische Dipolstrahlung bei nichtrelativistischen Teilchen im Verhältnis $\sim \frac{v^2}{c^2}$ gegenüber der elektrischen Dipolstrahlung vernachlässigt werden kann: Es werde ein Elektron betrachtet, das sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω in der $x-y$ -Ebene auf einer Kreisbahn vom Radius R bewegt. Das zugehörige elektrische Dipolmoment ist $\vec{p}(t) = eR \cdot (\cos(\omega t), \sin(\omega t), 0)$, hat also im Mittel die Amplitude $p_0 = eR$; das zugehörige magnetische Dipolmoment hat im Mittel die Amplitude $m_0 = \mu_0 \pi R^2 \frac{e\omega}{2\pi}$, wobei wir – wie bei der Berechnung des gyromagnetischen Faktors – erneut $I = \frac{e\omega}{2\pi}$ benutzt haben. Mit $\omega = \frac{v}{R}$ wird also $m_0 = \frac{1}{2} e v R$. Wenn also $\vec{p}(t)$ und $\vec{m}(t)$ mit den jeweiligen Amplituden p_0 bzw. m_0 mit gleicher Frequenz ω wie $\cos \omega t$ oszillieren würden, ergäbe sich im Mittel für das Verhältnis der Amplituden der Poynting-Vektoren $|\vec{S}_m|/|\vec{S}_e|$ von magnetischer bzw. elektrischer Dipolstrahlung:

$$\frac{|\vec{S}_m|}{|\vec{S}_e|} = \frac{m_0^2 \epsilon_0}{p_0^2 \mu_0} = \frac{v^2}{4c^2}. \quad (112)$$

Bei den gegenwärtig vielbenutzten Synchrotronstrahlungsquellen zur gezielten Erzeugung von Elektromagnetischer Strahlung für physikalische und biophysikalische Untersuchungen (z.B. BESSY II in Berlin, HASYLAB in Hamburg, ESRF in Grenoble, ALS in Berkeley (Cal., USA), ELETTRA bei Triest) durchlaufen die Elektronen (fast) mit Lichtgeschwindigkeit eine Kreisbahn, in der sie abgelenkt und folglich beschleunigt werden, so dass sie sog. „Synchrotronstrahlung“ erzeugen. Zur besonders intensiven Lichterzeugung durchlaufen sie zusätzlich spezielle in die Bahn eingebaute Ablenkungsmagnetstrukturen, sog. „Wiggler“ und „Undulatoren“, in denen sie wellenförmig räumlich-periodisch abgelenkt werden.

6.7 Allgemeine Multipolstrahlung

Die Ergebnisse folgen direkt aus den Resultaten (107) für die elektrische Dipolstrahlung ('Hertz'scher Dipol') bzw. aus den entsprechenden Formeln für magnetische Dipolstrahlung (siehe Abschnitt 6.6): Man erhält einen Quadrupol durch Grenzübergang aus der Differenz zweier um den Vektor \vec{b}_2 (nicht-kollinear) verschobener entgegengesetztgleicher Dipole, einen Oktupol aus der Differenz zweier um einen Vektor \vec{b}_3 (nicht-koplanar) verschobener entgegengesetztgleicher Quadrupole, u.s.w., also ergibt sich z.B. das elektromagnetische Feld der elektrischen Oktupolstrahlung durch Anwendung des Differentialoperators $(\vec{b}_3 \cdot \nabla)(\vec{b}_2 \cdot \nabla)$ auf das elektromagnetische Feld des Hertz'schen Dipols.

- Im Nahbereich, d.h. für $r \ll \lambda$, erhält man also z.B. für das \vec{E} -Feld eines elektrischen 2^l -Pols das *quasistatische Ergebnis* $\vec{E} = -\text{grad } \phi(\vec{r}, t)$, mit

$$\phi(\vec{r}, t) \cong \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^{l+1}} \sum_{m=-l}^l c_{l,m}(t) Y_{l,m}(\theta, \phi), \quad (113)$$

mit den bereits erwähnten Kugelflächenfunktionen. Die Koeffizienten in dieser Entwicklung hängen von den Vektoren $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_l$ und von der Zeit ab.

- Im Fernbereich, d.h. für $r \gg \lambda$, kann man die Ausdrücke $(\vec{b}_i \cdot \nabla) \left\{ \frac{\vec{f}(t - \frac{r}{c})}{r} \right\}$ durch $\frac{1}{r} (\vec{b}_l \cdot \hat{r}) \left(\frac{-\partial}{c\partial t} \right)^l \vec{f}(t - \frac{r}{c})$ approximieren²⁸ und erhält für elektrische 2^l -Pol-Strahlung asymptotisch

$$\vec{E} \propto \frac{1}{r} \cdot \left(\prod_{\nu=2}^l (\vec{b}_\nu \cdot \hat{r}) \right) \cdot \left(\frac{-\partial}{c\partial t} \right)^l [\hat{r} \times \vec{p}(t - \frac{r}{c})], \quad (114)$$

$c\vec{B} \cong \hat{r} \times \vec{E}$ und $\vec{S} \equiv \vec{E} \times \vec{H}$, also für $\vec{p}(t) = \vec{p}_0 \cos \omega t$ im zeitlichen Mittel :

$$\vec{S}(\vec{r}) \propto \frac{\omega^{2(l+1)}}{r^2} \left(\prod_{\nu=2}^{l+1} \frac{(\vec{b}_\nu \cdot \hat{r})^2}{c^2} \right) (\hat{r} \times \vec{p}_0)^2 \hat{r}. \quad (115)$$

Dabei ist $l = 1, 2, 3$ für Dipolstrahlung, Quadrupolstrahlung, Oktupolstrahlung.

²⁸Hierbei ist zu beachten, dass der Vektor $\vec{f}(t - \frac{r}{c})$ immer senkrecht auf \hat{r} steht, vgl. (109).

Die Abstandsabhängigkeit und die Frequenzabhängigkeit der Multipolstrahlung ist einfach, nur die Winkelabhängigkeit ist kompliziert. Auch hier bilden \hat{r} , \vec{E} und \vec{B} ein rechtshändiges Dreibein, aber die Richtung von \vec{E} ist nicht einfach festgelegt. Für magnetische Multipolstrahlung gelten analoge Ergebnisse.

6.8 Relativistische Invarianz der Elektrodynamik

Die Newton'sche Mechanik musste nach den bahnbrechenden Arbeiten von A. Einstein zur speziellen Relativitätstheorie (1905) modifiziert werden, um die neuen Phänomene (z.B. Zeitdilatation, Längenkontraktion u.a.) zu berücksichtigen. Die Maxwell'sche Theorie ist dagegen bereits relativistisch invariant. Man kann daher gewissermaßen sagen, dass A. Einstein die Maxwell'sche Theorie (im Gegensatz zur großen Mehrheit seiner Zeitgenossen) ernster genommen hat als die Newton'schen Theorien einschließlich sämtlicher Vorstellungen zu Raum und Zeit, die ihr zugrunde lagen.

Was sind die Haupterkenntnisse der speziellen Relativitätstheorie? Diese Frage kann hier natürlich nicht vollständig behandelt werden, da dies eine eigene Vorlesung erfordern würde:

Hauptforderung war zunächst das Einstein'sche Postulat, dass in der ganzen Physik, nicht nur in der Newton'schen Mechanik, wie man vor Einstein glaubte, Inertialsysteme äquivalent sein müssen.

Ein Inertialsystem ist dabei so definiert, dass bei Kräftefreiheit in kartesischen Koordinaten die Newton'schen Bewegungsgleichungen einfach die Form $\ddot{x}_i = 0$ haben, für $i = 1, 2, 3$. Der Übergang zwischen verschiedenen Inertialsystemen erfolgt – so glaubte man – wie in der Newton'schen Mechanik durch die sog. Galilei-Transformationen, s.u., die auf der Vorstellung beruhten, dass der Raum quasi vorgegeben sei, und zwar als dreidimensionaler euklidischer Raum, während die Zeit davon *losgelöst* sei („absolut“, i.Ggs. zu „relativ“). Also

$$\text{Galileitransformationen : } x_i = x'_i + vt; \quad t \equiv t' . \quad (116)$$

Man wusste, dass die Maxwell'schen Gleichungen gegen solche Transformationen nicht invariant sind, und glaubte, dass ein ausgezeichnetes Inertialsystem existiere, der sog. „Lichtäther“, in dem die Maxwell'schen Gleichungen genau die oben angegebene Form besäßen und insbesondere die Lichtgeschwindigkeit den Wert $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ habe, während sie in anderen Inertialsystemen nach dem „Additionsverhalten der Geschwindigkeiten“ einen hiervon verschiedenen Wert haben könne (z.B. $c \rightarrow c+v$). Einstein dagegen nahm den negativen Ausgang der (von Maxwell²⁹ selbst vorgeschlagenen) Experimente von Michelson und Morley ernst: Diese hatten 1881 herausgefunden, dass die Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen im Rahmen der damals schon sehr hohen experimentellen Genauigkeit ein-und-denselben Wert hat. H.A. Lorentz in Leiden hatte schon vor Einstein erkannt, dass dies mit den nach ihm benannten sog. Lorentztransformationen

²⁹geb. 1831, gest. 1879

verträglich sei, die Raum und Zeit wie folgt verknüpfen:

$$\text{Lorentztransformationen : } x = \frac{x' + \frac{v}{c}ct'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad ct = \frac{ct' + \frac{v}{c}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad y = y'; \quad z = z'. \quad (117)$$

(Die Galilei-Transformationen ergeben sich formal für $c \rightarrow \infty$. Die Umkehrung der Transformation (117) erhält man durch $v \rightarrow (-v)$. Man rechnet insbesondere leicht nach, dass aus $x^2 = c^2t^2$ folgt, dass auch $(x')^2 = c^2 \cdot (t')^2$ gilt, und umgekehrt.) Aber vor A. Einstein hat man dies als „mathematische Kuriosität“ gewertet, weil seit Newton und Kant das Vorurteil bestand, dass die Physik im euklidischen Raum stattfindet und die Zeit mit dem Raum nicht verknüpft sei. Erst heutzutage kann man so genau messen, dass man auch experimentell bestätigen kann, dass die Lorentztransformation – und nicht die Galileitransformation – auch den Gang zweier Uhren bestimmt, von denen eine in einem Flugzeug die Erde umrundet, während die zweite (gleichartige) am Flughafen verbleibt: Die von der ‚mitbewegten Uhr‘ gemessene Zeit (*Eigenzeit* $d\tau$) ist signifikant kürzer³⁰ als die von der am Startort verbliebenen Uhr gemessene Zeit dt ;

$$\text{Eigenzeit : } d\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt. \quad (118)$$

Auch das von der „Additivität“ abweichende Gesetz der Geschwindigkeitstransformation $u = (u' + v)/(1 + (u' \cdot v/c^2))$ folgt direkt aus den Lorentztransformationen, und zwar mit den Definitionen $u := \frac{dx}{dt}$ und $u' := \frac{dx'}{dt'}$ (sic !). Wenn man hier auf der rechten Seite $u' = c$ einsetzt, erhält man erneut auch auf der linken Seite $u = c$.

Herrmann Minkowski hat 1908 in Göttingen die von A. Einstein 1905 abgeleiteten epochalen Ergebnisse durch Einführung eines pseudo-euklidischen vierdimensionalen Vektorraumes \mathcal{M}_4 mit drei reellen und einer imaginären Dimension, des sog. Minkowski-Raumes, mathematisiert. Dieser besteht aus sog. Vierervektoren \tilde{v} mit drei reellen und einer imaginären Komponente³¹, $\tilde{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$, mit $v_j \in \mathcal{R}$ für $j = 1, 2, 3$ und $v_4 \in i\mathcal{R}$, z.B. $\tilde{x} := (x, y, z, ict)$. Die erweiterten Lorentztransformationen oder Pseudo-Drehungen, das sind sog. „Lorentz-Boosts“ der Form (117) verknüpft mit Drehungen im dreidimensionalen Unterraum der reellen Komponenten, spielen im \mathcal{M}_4 eine ähnliche Rolle wie gewöhnliche Drehungen in reellen euklidischen Räumen: Sie lassen die sog. Pseudo-Länge invariant :

$$(\text{invariante Pseudo - Länge})^2 : \quad \tilde{x}^2 := \vec{r}^2 + (ict)^2 \equiv \vec{r}^2 - c^2t^2. \quad (119)$$

³⁰Für Physiker „um Größenordnungen überzeugender“ ist vielleicht das in diesem Zusammenhang früher meist genannte Standardbeispiel der in der Höhenstrahlung in 30 km Höhe erzeugten μ -Teilchen, die nachweislich nur eine „Eigenlebensdauer“ von etwa 10^{-6} Sekunden haben und in dieser Zeit selbst bei Lichtgeschwindigkeit nur 300 m zurücklegen würden: Von einem auf der Erdoberfläche „ruhenden“ Inertialsystem aus gemessen ist jedoch die Lebensdauer $dt = d\tau/(1 - v^2/c^2)$ sehr viel länger, weil sich die Teilchen fast mit Lichtgeschwindigkeit auf die Erde zubewegen. In der Tat erreichen die in der Höhenstrahlung erzeugten Myonen nachweislich (fast) vollständig die Erdoberfläche.

³¹Man kann das Auftreten der imaginären Komponente durch Verwendung verschiedener, meist komplizierterer Konventionen, mit sog. *kovarianten* bzw. *kontravarianten* Komponenten, vermeiden bzw. „verschleiern“, aber dadurch ist im Grunde wenig gewonnen.

Die invariante Pseudo-Länge \tilde{v}^2 anderer Minkowski-Vierervektoren und die entsprechenden Lorentztransformationen werden analog definiert. Je nachdem, ob $\tilde{v}^2 > 0, = 0,$ oder < 0 ist, unterscheidet man *raumartige, lichtartige, oder zeitartige Vierervektoren*.

Die relativistische Invarianz der Maxwell'schen Elektrodynamik sieht man am einfachsten durch explizite Minkowski-Viererformulierung ein: Zunächst definiert man einen Vierergradienten $\tilde{\nabla} := (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial ict}) = (\nabla, \frac{\partial}{\partial ict})$. Ebenso wie in euklidischen Räumen der Laplace'sche Operator ∇^2 invariant gegen Drehungen ist, gilt im Minkowski-Raum \mathcal{M}_4 , dass der d'Alembert-Operator $\tilde{\nabla}^2$ gegen Pseudo-Drehungen invariant ist, und ebenso wie in drei Dimensionen der Gradient einer Funktion und die Divergenz eines Vektors bezüglich der Drehungen koordinatenunabhängige Bedeutung haben, gilt entsprechendes auch im Minkowski-Raum bezüglich der Pseudo-Drehungen (s.u.).

Speziell kann man Stromdichte und Ladungsdichte sowie das Vektorpotential und das skalare Potential zu Minkowski-Vierervektoren zusammenfassen, nämlich

$$\tilde{j} := (\vec{j}, ic\rho); \quad \tilde{A} := (\vec{A}, i\frac{\phi}{c}), \quad (120)$$

und kann die Kontinuitätsgleichung, $\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, dann einfacher wie folgt formulieren:

$$\text{Viererformulierung der Kontinuitätsgleichung :} \quad \tilde{\nabla} \cdot \tilde{j} := \sum_{\nu=1}^4 \frac{\partial j_{\nu}}{\partial x_{\nu}} = 0. \quad (121)$$

Analog kann man Umeichungen der Art ' $\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \text{grad } g(\vec{r}, t)$, $\phi \rightarrow \phi - \frac{\partial g(\vec{r}, t)}{\partial t}$ ', einfach als $\tilde{A}(\tilde{x}) \rightarrow \tilde{A}(\tilde{x}) + \tilde{\nabla} g(\tilde{x})$ formulieren.

Es bleibt die explizite Viererformulierung der Maxwell'schen Gleichungen: Die homogenen Gleichungen ' $\text{div } \vec{B} = 0$; $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ ', erfüllt man durch Einführung eines *schiefssymmetrischen Feldstärketensors* $F_{\mu\nu} := \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}$, mit $\mu, \nu = 1, \dots, 4$; dies ist analog zur Darstellung von \vec{E} und \vec{B} durch skalares Potential und Vektorpotential. Die verbleibenden 'inhomogenen Maxwell-Gleichungen' $\text{div } \vec{E} \equiv \rho_E/\epsilon_0$ und $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_B$ ergeben dann mit der Einstein'schen Summationskonvention³² einfach $\partial_{\mu} F_{\nu\mu} = \partial_{\mu} \partial_{\nu} A_{\mu} - \partial_{\mu} \partial_{\mu} A_{\nu} = \mu_0 j_{\nu}$. Mit der Lorenz-Eichung $\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \hat{=} \partial_{\nu} A_{\nu} = 0$ ergibt sich so einfach die d'Alembert-Poisson-Gleichung $-\tilde{\nabla}^2 \tilde{A} = \mu_0 \tilde{j}$.

Aus der Lorentztransformationseigenschaft für die x - und t -Komponenten des Viererpotentials \tilde{A} beim Übergang zwischen verschiedenen Inertialsystemen ergeben sich (etwas mühsam) die *Lorentztransformationsformeln für die Felder*: Die longitudinalen Komponenten E_x und B_x sind ungeändert, während für die transversalen Komponenten gilt:

$$\vec{B}_{\perp}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{B}'_{\perp}(\vec{r}', t') + \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}'(\vec{r}', t')}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \vec{E}_{\perp}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{E}'_{\perp}(\vec{r}', t') - \vec{v} \times \vec{B}'(\vec{r}', t')}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (122)$$

³²über doppelt vorkommende Indizes wird summiert.

Daraus kann man leicht, wie in der Vorlesung skizziert, das *Feld einer bewegten Punktladung* berechnen; skizzieren Sie es bitte selbst (es ist Standard-Prüfungsstoff bei den Teilchenphysikern).

6.9 „Fragestunde“

Zum Abschluss des Kapitels einige mehr oder minder aktuelle „Schüler-Fragen“:

- Warum ist der Himmel blau (und nicht grün oder rot) ? Antwort in etwa: Weil die von der Sonne eintreffende elektrische Strahlung die Luftmoleküle zum Aussenden elektrischer Dipolstrahlung anregt, und deren Energieabstrahlung ist $\propto \omega^4$, begünstigt also *blau*.
- Warum geht die Sonne *rot* unter ? Antwort in etwa: Weil der Lichtweg sich beim Untergang enorm verlängert, so dass die ausgesandte blaue Strahlung absorbiert wird und nur die rot ausgesandte übrig bleibt.
- Macht es Sinn, zu sagen, dass die magnetische Induktion gleich stark wie das elektrische Feld sei ? Antwort: Ja, dass die magnetische Induktion \vec{B} gleich stark wie das elektrische Feld ist, gilt z.B. für ebene elektromagnetische Wellen im folgenden Sinne: Es ist $c|\vec{B}| = |\vec{E}|$, und die magnetische Feldenergiedichte, $w_m := \frac{(\vec{B})^2}{2\mu_0}$ ist gleich der elektrischen, $w_e := \frac{\epsilon_0 \vec{E}^2}{2}$. Auch an die Formel für die Lorentzkraft sollte man in diesem Zusammenhang denken : $\vec{F}_L = e \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right)$. Hier ist der zweite Ausdruck 'gleich stark wie der erste', wenn – wie bei einer Lichtwelle – $|\vec{v}| = c$ ist.
- Warum gibt es keine elektrische Monopolstrahlung ? Ungefähre Antwort: Monopolstrahlung der Frequenz ω erwartet man z.B. im Fall einer pulsierenden geladenen Kugelschale. Aber das Außenfeld dieser Feldquelle sieht so aus, als wäre die Gesamtladung im Zentrum der Kugel vereinigt, bleibt also konstant, auch wenn der Radius der Kugel pulsiert.
- Inwiefern ist bei Gravitationswellen die Energieabstrahlung $\propto \omega^6$ (statt $\propto \omega^4$) ? Ungefähre Antwort: Bei Gravitationswellen gibt es im Gegensatz zu den elektromagnetischen Wellen keine Dipolwellen, sondern nur Quadrupolschwingungen, weil die Gravitationsladungsdichte stets positives Vorzeichen hat. Bei Quadrupolwellen ist aber $\vec{S} \propto \omega^6 r^{-2}$.
- Wie hängt die Impuls-Stromdichte $\vec{\pi}$ des elektromagnetischen Feldes mit der Energie-Stromdichte \vec{S} (dem sog. Poyntingvektor) zusammen ? Antwort: Es ist $\vec{\pi} = \frac{\vec{S}}{c}$.
- Warum gilt bei der Lagangefunktion $\mathcal{L} \equiv T - V$, während doch $\mathcal{H} = T + V$ ist ? Die Antwort ist subtil und zeigt, dass dafür letzten Endes die spezielle Relativitätstheorie verantwortlich ist. Der elektromagnetische Feldtensor $F_{\mu,\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ hat z.B. reelle \vec{B} -Einträge (z.B. $F_{1,2} = B_3$), aber imaginäre \vec{E} -Einträge (z.B. $F_{1,4} =$

$-i \frac{E_1}{c}$), und die Lagrangedichte ist die Lorentz-Invariante $\sum_{\nu,\mu=1}^4 F_{\nu,\mu}^2 \propto \vec{B}^2 - \frac{\vec{E}^2}{c^2}$. Je nachdem, ob diese Invariante > 0 , $\equiv 0$ oder < 0 ist, unterscheidet man *wesentlich magnetische*, *wesentlich lichtartige* und *wesentlich elektrische* elektromagnetische Felder.

D.h. die Aussage, dass man es z.B. bei einer bewegten Punktladung im Wesentlichen mit einem elektrischen Phänomen zu tun hat, bleibt richtig, obwohl das elektromagnetische Feld dieses Systems auch nicht unwesentliche magnetische Anteile besitzt.

7 Anwendungen der Elektrodynamik in der Optik

7.1 Einführung; Wellengleichungen; Dispersionskurven; Gruppen- und Phasengeschwindigkeit

Wir erinnern zunächst an die Beziehung zwischen Frequenz $\nu = \frac{2\pi}{\omega}$ und Wellenlänge $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ (k = „Wellenzahl“) einer elektromagnetischen Welle im Vakuum: $\omega = 2\pi\nu = c \cdot k = c \cdot \frac{2\pi}{\lambda}$, also $\lambda \cdot \nu = c$.

Daran schließt die Feststellung an, dass elektromagnetische Wellen einen sehr weiten Spektralbereich überdecken: Radiowellen haben z.B. im Langwellenbereich Wellenlängen der Größenordnung 1 km oder mehr, im Mittelwellenbereich 300 m, im Kurzwellenbereich 50 m, u.s.w.; daran schließt der UKW-, Fernseh- und 'Handy'-Bereich mit Frequenzen bei ≈ 100 MHz bis 10 GHz an, dann der Radar-, der Lichtwellenbereich, der Röntgenbereich und der Bereich der sog. γ -Strahlen. Es ist sinnvoll, sich zu merken, dass der Wellenlängenbereich des sichtbaren Lichts zwischen $\lambda \approx 8000 \text{ \AA}$ („rot“), und $\approx 4000 \text{ \AA}$ („violett“) liegt, und dass sich außerhalb dieses Bereichs daran der Bereich der sog. „Infrarot“- bzw. „Ultraviolettstrahlung“ anschließt.

Im Zusammenhang mit Röntgen- und γ -Strahlung ist es drittens sinnvoll, sich daran zu erinnern, dass diese nach der Formel $\Delta E = E_i - E_f \equiv h\nu$ durch Übergänge zwischen kontinuierlichen bzw. diskreten Anfangsenergien E_i (höhere Werte) und diskreten End-Energien E_f (niedrigere Werte) des betrachteten Systems entstehen (\rightarrow kontinuierliche „Röntgen-Bremsstrahlung“ bzw. diskrete „Linienstrahlung“, $i \hat{=} initial$, $f \hat{=} final$; h = „Planck'sches Wirkungsquantum“ = $6,625 \cdot 10^{-34} \text{ W s}^2 = 4,136 \cdot 10^{-15} \text{ eVs}$) und dass man es bei Röntgenstrahlung mit typischen Energien der Elektronenhülle der Atome zu tun hat, also $\Delta E \approx 10 \text{ keV}$ bis $\approx 1 \text{ MeV}$, während man es bei γ -Strahlung mit Anregungsenergien der Atomkerne zu tun hat, also ΔE etwa 1MeV bis 1GeV. (Die Ruheenergie des Protons und Neutrons sind bekanntlich von der Größenordnung $mc^2 \approx 1 \text{ GeV}$).

Viertens erinnern wir an die Planck'sche Strahlungsformel: Die Gesamt-Anregungsenergie der bei der Kelvin-Temperatur T in einem Hohlraumstrahler vom Volumen V vorhandenen elektromagnetischen Felder ist $U(T) = V \int_0^\infty d\nu u(\nu)$, mit der spektralen Energiedichte

$$u(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_b T}} - 1}. \quad (123)$$

Diese Funktion hat bei der Oberflächentemperatur der Sonne, $T \approx 6000$ K, ein ausgeprägtes Maximum im Grünen, $\lambda \approx 6000 \text{ \AA}$.

Dies wird durch Abbildung 4 unterstützt :

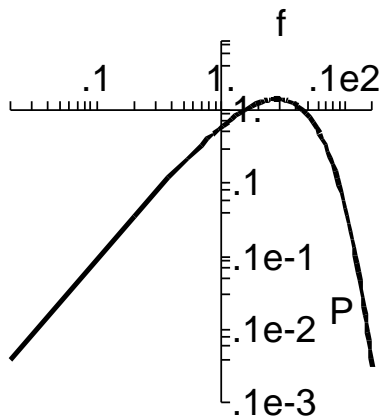


Abbildung 4: Zur Planck'schen Strahlungsformel :

In einem doppelt-logarithmischen Plot ist die Funktion $P(\nu) := \nu^3/(\exp \nu - 1)$ dargestellt. Sie hat ein ausgeprägtes Maximum bei $\nu \approx 2$.

Die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit ist $c_0 := (\epsilon_0 \mu_0)^{-\frac{1}{2}}$. Die Lichtgeschwindigkeit in Materie ist kleiner: $c_m = \frac{c_0}{n}$. Dabei ist n der sog. „Brechungsindex“ oder die sog. „Brechzahl“ des Systems. In optisch-dichten lichtdurchlässigen Medien (z.B. Glas oder Wasser) ist sie signifikant > 1 , was zu den bekannten Brechungsphänomenen Anlass gibt, die u.a. durch das Snellius'sche Brechungsgesetz beschrieben werden: Demnach beschreibt die Formel $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}$ die Brechung der Lichtstrahlen beim Übergang vom Vakuum ins optisch-dichtere Medium (Vakuum-Auftreff-Normalwinkel α_1 ; $n_1 = 1$, $n_2 > 1$).

Der Brechungsindex hängt mit der relativen Dielektrizitätskonstante ϵ_r und der relativen Permeabilität μ_r wie folgt zusammen und ist daher i.a. sowohl ortsabhängig als auch frequenzabhängig: $n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$. Dieser Zusammenhang ergibt sich für dielektrische und permeable Materie aus den Maxwell'schen Gleichungen bei Ladungs- und Stromfreiheit (d.h. für $\rho \equiv \vec{j} \equiv 0$): $\text{div } \vec{B} = 0$; $\text{div } \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} = \rho \equiv 0$; $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$; $\text{rot } \frac{\vec{B}}{\mu_r \mu_0} = \vec{j} + \epsilon_r \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

Durch Anwendung der Operation rot auf die dritte und vierte dieser Gleichungen folgt mit der Identität $\text{rot rot } \vec{v} = \text{grad div } \vec{v} - \nabla^2 \vec{v}$ die Behauptung, nämlich die Wellengleichungen $\left(\nabla^2 - \frac{1}{c_m^2}(\partial_t)^2\right) \vec{E} = 0$ und $\left(\nabla^2 - \frac{1}{c_m^2}(\partial_t)^2\right) \vec{B} = 0$, mit c_m wie oben.

Ähnliche Wellengleichungen sind auch in anderen Fällen erfüllt, z.B. bei den transversalen Schallwellen („Scherwellen, \rightarrow transversale Phononen“) braucht man nur \vec{E} bzw. \vec{B} durch die transversalen Auslenkungen der Atome aus ihren Gleichgewichtslagen und die Lichtgeschwindigkeit c_m durch die transversale Schallgeschwindigkeit $c_{\perp}^{(s)}$ zu ersetzen und erhält dieselbe Wellengleichung in ganz anderer Bedeutung. Es gibt

auch longitudinale Schallwellen³³ („Kompressionswellen, \rightarrow longitudinale Phononen“) mit einer deutlich höheren Schallgeschwindigkeit $c_1^{(s)}$.

Den Zusammenhang $\omega = \omega(\vec{k})$ zwischen Frequenz ω und Wellenzahlvektor \vec{k} der Welle³⁴ wird als Dispersionskurve der Welle bezeichnet. Bei den Vakuum-Lichtwellen ist dieser Zusammenhang ganz einfach³⁵, nämlich $\omega = c_0 \cdot |k|$. In Materie haben Lichtwellen nur scheinbar im Wesentlichen die gleiche Dispersion: Es gilt zwar $\omega = c_m \cdot |k|$, aber die Materie-Lichtgeschwindigkeit $c_m = \sqrt{\epsilon_r(\omega) \cdot \mu_r(\omega)}$ ist u.U. selbst frequenzabhängig³⁶, so dass es hier auf jeden Fall Sinn macht, die sog. „Phasengeschwindigkeit“ $\vec{v}_{\text{Phase}} = \left(\frac{\omega}{k}\right) \vec{e}_{\vec{k}}$ von der sog. „Gruppengeschwindigkeit“ $\vec{v}_{\text{Gruppe}} = \text{grad}_{\vec{k}} \omega(\vec{k})$ zu unterscheiden. Die Komponenten der Gruppengeschwindigkeit \vec{v}_g sind also wie folgt zu berechnen

$$(v_g)_i = \frac{\partial \omega(\vec{k})}{\partial k_i}. \quad (124)$$

Die Gruppengeschwindigkeit kann also u.U. eine ganz andere Richtung als der Wellenvektor \vec{k} haben (s.u. „Strahlgeschwindigkeit“ bei der Doppelbrechung).

Als konkretes Beispiel für die Abweichung von Phasen- und Gruppengeschwindigkeit behandeln wir transversale Schallwellen in einem Idealkristall kubischer Symmetrie mit der Gitterkonstante a . Es sei \vec{k} parallel zu einer der Kantenrichtungen. Dann erhält man transversale elastische ebene Wellen mit einer Dispersion der folgenden Art

$$\omega(\vec{k}) = c_{\perp}^{(s)} \frac{\sin\left(\frac{k \cdot a}{2}\right)}{\left(\frac{a}{2}\right)}; \quad (125)$$

d.h. wenn die Wellenlänge λ sehr groß ist im Vergleich zur Gitterkonstanten a , d.h. für $k \cdot a \ll 1$, gilt wie erwartet, $\omega = c_{\perp}^{(s)} k$, und die Gruppengeschwindigkeit ist identisch mit der Phasengeschwindigkeit $c_{\perp}^{(s)}$, aber für $k \cdot a \rightarrow \pi$, d.h. bei abnehmendem $\lambda \rightarrow 2a$, geht die Gruppengeschwindigkeit $\frac{\partial \omega}{\partial k} \rightarrow 0$.

Die Bedeutung der Gruppengeschwindigkeit geht aus ihrem Namen hervor: Wenn man mit Wellengruppen zu tun hat, die durch Überlagerung ebener Wellen mit unterschiedlichen k -Vektoren entstehen, $\Psi(x, t) = \int_{\Delta k} dk a(k) e^{i(k \cdot x - \omega(k) \cdot t)}$, erhält man Schwebungen

(Englisch „beats“), die man durch eine Taylorentwicklung wie folgt behandeln kann: Es sei im Folgenden K_0 der Mittelpunkt des Intervall Δk , also $k = K_0 + k'$, mit $k' \in \left[-\frac{K_0}{2}, +\frac{K_0}{2}\right]$, dann ist $a(k) \approx a(K_0)$ und $\omega(k) \cdot t \approx \omega(K_0) \cdot t + k' \frac{d\omega}{dk} \cdot t + \dots$, also

$$\Psi(x, t) \approx a(K_0) e^{i(K_0 x - \omega(K_0) \cdot t)} \int_{-\frac{K_0}{2}}^{\frac{K_0}{2}} dk' e^{ik' \cdot (x - v_g t)}. \text{ Hier beschreibt der Vorfaktor un-}$$

mittelbar vor dem Integral, der auch in der Form $e^{iK_0 \cdot (x - v_p t)}$, d.h. mit der Phasengeschwindigkeit v_p , geschrieben werden kann, die *rasche Oszillation des Vorfaktors der*

³³In Flüssigkeiten und Gasen kommen nur die Kompressionswellen vor.

³⁴Es ist $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{e}_{\vec{k}}$, wobei λ die Wellenlänge und $\vec{e}_{\vec{k}}$ die Ausbreitungsrichtung der ebenen Welle ist, d.h. entsprechend dem üblichen Ansatz $\Psi \propto \text{Re} \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t))$.

³⁵die Mathematiker würden „trivial“ sagen

³⁶Die Frequenzabhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit betrifft u.U. nicht nur deren Betrag, sondern auch die Richtung, s.u.

Welle. Das Integral selbst beschreibt dagegen die (u.U. *sehr viel langsamere*) *Wellenbewegung der „Einhüllenden“ bei der Schwebung*³⁷. Letztere schreitet nicht mit Phasengeschwindigkeit, sondern mit der Gruppengeschwindigkeit v_g voran; insbesondere ist

$$|\Psi(x, t)|^2 \propto |a(K_0)|^2 \cdot \left| \int_{-\frac{K_0}{2}}^{\frac{K_0}{2}} dk' e^{ik' \cdot (x - v_g t)} \right|^2.$$

Nach Einstein erfolgt der Energietransport einer Wellengruppe nicht mit der Phasengeschwindigkeit, sondern mit der Gruppengeschwindigkeit, und es gilt die Einschränkung, dass $|v_g|$ (aber nicht $|v_P|$!) stets $\leq c$ sein muss.

Der Unterschied zwischen Phasen- und Gruppengeschwindigkeit wird an einer elektromagnetischen Hohlleiterwelle klar, die zwischen zwei parallel zur Ebene $z \equiv 0$ verlaufenden planparallelen Metallplatten hin- und her-reflektiert wird. Diese Hohlleiterwelle – eine „geführte elektromagnetische Welle“ – schreitet insgesamt in x -Richtung fort, und zwar mit der Phasengeschwindigkeit $(v_p)_x = \frac{c}{\cos \theta}$; diese ist $> c$. Die Gruppengeschwindigkeit ist dagegen $(v_g)_x = c \cdot \cos \theta$, also $\leq c$, wie es sein muss. Dabei ist θ der Glanzwinkel, unter dem die ebene Welle auf die Metallplatte auftrifft.

Im Zusammenhang mit der Behandlung von Phasen- und Gruppengeschwindigkeit erwähnen wir nochmals die Planck'sche Strahlungsformel, mit der zugleich der jahrhundertelange Streit, ob das Licht ein Teilchen- oder ein Wellen-Phänomen sei (Newton bzw. Huyghens und Young), im „Welle-Teilchen-Dualismus“ der damals gerade entstehenden Quantenphysik aufgelöst wurde: Nach A. Einstein (1905, \rightarrow Nobelpreis) erfolgt die Aussendung elektromagnetischer Wellen in Form einzelner Lichtquanten („Photonen“), denen man eine Energie $E = h\nu$, einen Impuls $p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c}$ und die Ruhemasse 0 zuordnen muss. Die Innere Energie $U(T)$ des elektromagnetischen Feldes in einem großen Hohlraum vom Volumen V bei der Kelvin-Temperatur T ergibt sich (o.B.) damit zu

$$\text{Planck'sche Strahlungsformel} : \quad U(T) = V \cdot \int_{\nu=0}^{\infty} \frac{8\pi\nu^2 d\nu}{c^3} \cdot \frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1}, \quad (126)$$

d.h. der Vorfaktor $V \cdot \frac{8\pi\nu^2 d\nu}{c^3}$ ist die Zahl der Wellen mit $\nu \in d\nu$, $h\nu$ ist die Energie eines einzelnen Photons der Wellenlänge $\frac{c}{\nu}$, und der thermische Erwartungswert

$$\langle n \rangle_\nu \text{ der Photonenzahl ist } \langle n \rangle_\nu = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot e^{-n \frac{h\nu}{k_B T}}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n \frac{h\nu}{k_B T}}} = \left(\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1 \right)^{-1}. \quad (\text{Hierbei ist } k_B$$

die Boltzmann'sche Konstante). Wenn man in dieser Formel die Integrationsvariable $\frac{8\pi\nu^2 d\nu}{c^3}$ durch den allgemeineren Ausdruck $e_f \cdot \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}$ ersetzt, wobei für Photonen der Entartungsfaktor e_f den Wert 2 hat und explizit die Dispersionsrelation $\omega(\vec{k}) = c \cdot k$ eingesetzt wird, ist die Planck'sche Strahlungsformel übertragbar: Für andere *photonenartige Quasiteilchen*, z.B. die „Phononen“ bzw. die sog. „Magnonen“ – das sind die Quanten der Schallwellen bzw. der sog. Spinwellen – oder die sog. „Plasmonen“ – das sind die Quanten der Ladungsdichtewellen in Plasmen, hat man *andere Dispersionskurven* (z.B.

³⁷Im Englischen: Schwebung = 'beat'

$\omega(k) = D \cdot k^2$ bei den „Magnonen“ und $\omega(k) = \omega_p + E \cdot k^2$ bei den „Plasmonen“, mit der in einer Übungsaufgabe behandelten Plasmafrequenz ω_p), so dass der Faktor $\frac{8\pi\nu^2 d\nu}{c^3}$ im obigen Integral abzuändern ist, wodurch man auf analoge Weise andere Ergebnisse für die Innere Energie $U(T)$ des Quasiteilchengases bzw. des zugehörigen Wellenfeldes erhält.

Man erkennt hier jedenfalls die wichtige Rolle der Dispersionskurven (nicht nur) für die Optik.

Auch die Schrödinger'schen Materiewellen sind in diesem Zusammenhang zu nennen, obwohl sie nicht unter dem oben genannten Thema zu subsumieren sind (\rightarrow eigene Vorlesungen über Quantenmechanik).

7.2 Von der Wellenoptik zur geometrischen Optik (Strahlenoptik); Fermat'sches Prinzip

Bei Vermeidung abrupter Änderungen, d.h. z.B., dass im Folgenden Größen wie $|\lambda \cdot \text{grad } A(\vec{r})|$ vernachlässigt werden, kommt man wie folgt von der Wellenoptik zur geometrischen Optik („Strahlenoptik“):

Man startet von der Wellengleichung

$$\left(\nabla^2 - \left(\frac{1}{c_m} \right)^2 (\partial_t)^2 \right) \Psi(\vec{r}, t) = 0, \quad (127)$$

wobei Ψ eine der kartesischen Komponenten der elektromagnetischen Felder oder eine der äquivalenten betrachteten Wellengrößen ist³⁸. Diese versucht man mit dem Ansatz $\Psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}) \cdot e^{-i\omega t}$ zu lösen (ggf. mit Realteilbildung), und erhält

$$(\nabla^2 + k^2(\vec{r})) \psi(\vec{r}) = 0, \quad (128)$$

mit $k(\vec{r}) = \frac{\omega}{c_m} = k_0 \cdot n(\vec{r})$, wobei $k_0 = \frac{\omega}{c_0}$ und $n(\vec{r})$ der (reelle) Brechungsindex ist (bei dielektrischen Verlusten, z.B. bei Ohm'schem Verhalten, ist nach Übungsblatt 8 die Größe $n(\vec{r})$ durch den komplexen Brechungsindex $\tilde{n} := n + i\kappa$ zu ersetzen, wo κ die reziproke Absorptionslänge ist). Man macht nun den Ansatz $\psi(\vec{r}) := A(\vec{r}) \cdot \exp ik_0 \cdot S(\vec{r})$, mit der sog. „Eikonalfunktion“ $S(\vec{r})$. Diese ist für die geometrische Optik maßgebend und hat die Dimension einer effektiven Länge, nämlich des Abstandes zweier äquivalenter Wellenfronten. Man nimmt nun an, dass bei der Bildung der zweiten Ableitungen die mit k_0^2 gehenden Terme dominieren, z.B. $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \approx -k_0^2 \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 \psi + \dots$, wobei die ... vernachlässigte Terme andeuten, die nicht proportional zu k_0^2 , sondern nur zur ersten oder nullten Potenz von k_0 sind. Auf diese Weise erhält man aus der Wellengleichung (128) die Eikonalnäherung

$$\underline{(\text{grad } S(\vec{r}))^2 \approx n(\vec{r})^2}. \quad (129)$$

Hier beschreiben die Flächen $S(\vec{r}) = \text{konst.}$ die Wellenfronten und deren Gradient die Strahlrichtung (\rightarrow eigene Zeichnung).

³⁸Hier ist die Vernachlässigung des vektoriiellen Charakters der elektromagnetischen Felder bereits eine Näherung, die sog. *Skalare Näherung*

Die Eikonalgleichung ist die Grundlage der gesamten geometrischen Optik, insbesondere folgt daraus das Fermat'sche Prinzip der „Kürzesten Optischen Weglänge“:

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} dl n(\vec{r}) = \min \quad (130)$$

für den tatsächlich durchlaufenen Weg des Lichtstrahls.

Auf weitere Einzelheiten gehe ich nicht ein, möchte aber doch erwähnen, dass man das Snellius'sche Brechungsgesetz (s.o.) und damit letzten Endes die gesamte Linsenoptik einschließlich der optischen Mikroskopie aus dem Fermat'schen Prinzip herleiten kann, siehe z.B. T. Fließbach, Übungsaufgabe 36.2 auf Seite 379.

Die Eikonalnäherung beinhaltet zugleich auch den Übergang vom Wellenbild (mit der grundlegenden Interferenzfähigkeit, \rightarrow „Holographie“) zum Teilchenbild der Lichtwellen, wie es vor allem von Newton propagiert wurde. In diesem Bild, also bei Verlust der Interferenzfähigkeit, interpretiert man die Lichtstrahlen, also ∇S , als Teilchenbahnen und die Wellenfronten $S(\vec{r})$ als rein fiktive mathematische Größen. Dies ist analog zum Übergang von der Quantenmechanik zur klassischen Mechanik: Man versucht, die Schrödingergleichung $-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V(\vec{r})\psi = E\psi$, die einer Materiewellengleichung entspricht, durch eine Art „Eikonal-Ansatz“ zu lösen: $\psi(\vec{r}) := A(\vec{r}) \cdot \exp \frac{i}{\hbar} S(\vec{r})$. ($S(\vec{r})$ hat hier die Dimension einer „Wirkung“; \hbar ist die Planck'sche Wirkungskonstante geteilt durch (2π) .) Eine Entwicklung nach Potenzen von $\frac{1}{\hbar}$ führt bei Mitnahme nur der führenden Terme, d.h. analog zum 'Eikonal-Ansatz', auf die sog. Hamilton-Jakobi-Gleichungen der klassischen Mechanik, nämlich $\frac{(\text{grad } S)^2}{2m} + V(\vec{r}) \equiv E$. In der Hamilton-Jakobi-Gleichung ist die gesamte klassische Mechanik enthalten, auch das „Hamilton'sche Prinzip der kleinsten Wirkung“, das letzten Endes dem Fermat'schen Prinzip entspricht³⁹.

7.3 Kristalloptik und Doppelbrechung

In Fluiden (Gasen und Flüssigkeiten), in polykristallinen oder amorphen Systemen und in kubischen Kristallen ist bei linearem dielektrischem Verhalten die dielektrische Verschiebung \vec{D} einfach proportional zu \vec{E} , also wie bisher angenommen: $\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}$. Bei nicht-kubischen Kristallen, und das sind z.B. alle Kristalle unter massivem uniaxialen Druck, sind aber die Verhältnisse komplizierter: Für $i = 1, 2, 3$ gilt hier

$$D_i = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{i,k} \epsilon_0 E_k . \quad (131)$$

³⁹Die Äquivalenz ist relativ einfach zu zeigen: Das Hamilton-Prinzip besagt: $\int_{t_1}^{t_2} dt \mathcal{L} = \text{Extremum}$ bei Variation aller virtueller Bahnen im Ortsraum bei gegebenem Anfangs- und Endpunkt (die Impulse $p_i = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{q}_i$ ergeben sich implizit). Man ersetzt nun mit einer Legendretransformation $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i) \rightarrow \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{H}$, mit der Hamiltonfunktion $\mathcal{H}(p_i, q_k)$, wobei jetzt Ort- und Impuls im Phasenraum unabhängig variiert werden, und substituiert \mathcal{H} anschließend durch die Konstante E , d.h. es wird nicht über alle Bahnen im Phasenraum variiert, sondern nur über solche mit konstantem $\mathcal{H} = E$. Man erhält so das sog. Maupertuis-Prinzip (\rightarrow Landau-Lifschitz I, Sektion 44) der klassischen Mechanik, das in der Optik in das Fermat'sche Prinzip übergeht.

Hier ist $\epsilon_{i,k}$ der symmetrische Tensor der Dielektrizitätskonstanten; wir nehmen im Folgenden immer an, dass wir es mit nichtmagnetischem Material zu tun haben, so dass die relative Permeabilität Eins ist.

Der Tensor $\epsilon_{i,k}$ ist dann durch eine Drehung diagonalisierbar, hat also in der Diagonalbasis die Form

$$\epsilon_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & , & 0 & , & 0 \\ 0 & , & \epsilon_2 & , & 0 \\ 0 & , & 0 & , & \epsilon_3 \end{pmatrix} \quad (132)$$

das heißt, die quadratische Form $w_e = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} \equiv \frac{\epsilon_0}{2} \sum_{i,k=1}^3 \epsilon_{i,k} E_i E_k$ ist in der Eigenvektorbasis diagonal, d.h. man hat *analoge Verhältnisse wie in der Mechanik bei der Rotationsbewegung starrer Körper*: Die Beziehung $w_e = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}$ für die elektrische Feldenergiedichte entspricht in der Tat der Beziehung $T_{\text{Rot}} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}$, und die Beziehung $L_i = \sum_{k=1}^3 \Theta_{i,k} \omega_k$, mit den Komponenten $\Theta_{i,k}$ des Trägheitstensors, entspricht der Beziehung $D_i/\epsilon_0 = \sum_k \epsilon_{i,k} E_k$, d.h. der Drehvektor $\vec{\omega}$ entspricht \vec{E} , der Drehimpuls \vec{L} entspricht \vec{D}/ϵ_0 , und das Trägheitsellipsoid entspricht dem $\epsilon_{i,k}$ -Ellipsoid.

Aber wie es in der Mechanik neben dem Trägheitsellipsoid ($\vec{\omega}$ -Ellipsoid) ein zweites Ellipsoid gibt, das sog. Binet-Ellipsoid (\vec{L} -Ellipsoid), mit dem man bei Bedarf die Rotationsenergie in der gewohnten Ellipsoid-Form $2 \cdot T_{\text{Rot}} = \Theta_1 \omega_1^2 + \Theta_2 \omega_2^2 + \Theta_3 \omega_3^2 = \frac{L_1^2}{\Theta_1} + \frac{L_2^2}{\Theta_2} + \frac{L_3^2}{\Theta_3}$ ausdrücken kann, so auch in der Kristall-Optik: Hier gebraucht man einerseits, wenn \vec{E} und der Poynting-Vektor $\vec{S} (= \vec{E} \times \vec{H})$ im Vordergrund stehen, das sog. Fresnel-Ellipsoid (\vec{E} -Ellipsoid) als auch andererseits, wenn \vec{D} und der Ausbreitungsvektor \vec{k} im Vordergrund stehen, das sog. Indexellipsoid (\vec{D} -Ellipsoid). Es gilt:

$$w_e = \frac{\epsilon_0}{2} \cdot (\epsilon_1 E_1^2 + \epsilon_2 E_2^2 + \epsilon_3 E_3^2) = \frac{1}{2\epsilon_0} \cdot \left(\frac{D_1^2}{\epsilon_1} + \frac{D_2^2}{\epsilon_2} + \frac{D_3^2}{\epsilon_3} \right). \quad (133)$$

Die Richtung des Vektors \vec{D} bei gegebenem \vec{E} ergibt sich analog zur Mechanik: Dort ist die Richtung des Vektors \vec{L} bei gegebenem $\vec{\omega}$ durch 'Poinsot-Konstruktion' zu bestimmen: \vec{L} hat die Richtung des Normalenvektors der zu $\vec{\omega}$ gehörenden Tangentialfläche des Trägheitsellipsoides. Analog ist die Richtung von \vec{D} durch Flächennormalkonstruktion aus dem \vec{E} -Ellipsoid zu bestimmen, und umgekehrt. Der Vektor \vec{E} ist also i.a. gegenüber \vec{D} in der Richtung verdreht. Um genau denselben Drehwinkel ist zugleich der Vektor \vec{S} gegenüber dem Vektor \vec{k} verdreht. Die drei Vektoren \vec{S} , \vec{E} und \vec{H} bilden ein rechtshändiges Dreibein ($\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$), genauso wie die drei Vektoren \vec{k} , \vec{D} und \vec{H} . Dies folgt aus den Maxwell'schen Gleichungen: Denn mit dem üblichen „monochromatischen Ansatz“ $\vec{D} \propto \vec{D}_{\vec{k}} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$ und analogen Ansätzen für die anderen Vektoren folgt aus $\text{div } \vec{D} = 0$, dass $\vec{k} \cdot \vec{D}_{\vec{k}} = 0$ ist; ebenso folgt aus $\text{div } \vec{B} = 0$, dass $\vec{k} \cdot \vec{H}_{\vec{k}} = 0$; ferner folgt aus $\text{rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$, dass $\vec{k} \times \vec{H}_{\vec{k}} = -\omega \vec{D}_{\vec{k}}$, und aus $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, dass $\vec{k} \times \vec{E}_{\vec{k}} = \mu_0 \omega \vec{H}_{\vec{k}}$.

Die vier Vektoren \vec{D} , \vec{E} , \vec{k} und \vec{S} liegen also alle in der gleichen Ebene senkrecht zu \vec{H} . Die Vektoren \vec{D} und \vec{k} sowie \vec{E} und \vec{S} sind zueinander senkrecht; \vec{E} geht aus

\vec{D} und \vec{S} aus \vec{k} durch eine Drehung um den gleichen Drehwinkel mit \vec{H} als Drehachse hervor⁴⁰.

Man unterscheidet dementsprechend zwischen der auf den Vektor \vec{k} bezogenen sog. Phasengeschwindigkeit v_P und der auf \vec{S} bezogenen sog. Strahlgeschwindigkeit

In den meisten Fällen ist eine der drei Hauptachsen des Tensors der Dielektrizitätskonstanten, die sog. „c-Achse“, kristallographisch ausgezeichnet, und die dazu orthogonalen Achsen sind äquivalent; d.h. man hat es mit einem Rotationsellipsoid zu tun. Das gilt z.B. für tetragonale, hexagonale, rhomboedrische⁴¹ Kristallsymmetrie. Nur bei orthorhombischer⁴², monokliner und trikliner Kristallsymmetrie sind alle drei Eigenwerte verschieden. Im ersten Fall spricht man von optisch -einachsigen, im zweiten Fall von optisch -zweiachsigen Kristallen (*optically uniaxial* bzw. *biaxial* crystals im Englischen).

Wir kommen nun zu dem Phänomen der Doppelbrechung und betrachten dazu als einfachstes Problem das senkrechte Auftreffen einer linear-polarisierten monochromatischen elektromagnetischen Welle mit Ausbreitungsrichtung \vec{k} aus dem Vakuum auf eine ebene Kristalloberfläche eines nicht-kubischen Kristalls. In dessen Innern muss \vec{k} zur Erfüllung der Randbedingungen ebenfalls senkrecht zur Oberfläche gerichtet sein. Bei vorgegebenem \vec{k} müssen wir mit dem \vec{D} -Ellipsoid („Indexellipsoid“) arbeiten, das „schräg“ zur Einfallrichtung liegen soll. Die mit dem vorgegebenem \vec{k} -Vektor verträglichen Werte $\vec{D}_{\vec{k}}$ liegen alle auf der Schnitt-Ellipse des Indexellipsoides mit der Schnittebene senkrecht zu \vec{k} durch den Nullpunkt. Der Vektor \vec{E} muss einerseits (nach Poincot-Konstruktion) senkrecht auf dem Indexellipsoid stehen, andererseits der Ebene durch \vec{D} und \vec{k} angehören; das geht nur (wie man sich klar machen kann), wenn die Richtung von \vec{D} Hauptachsenrichtung der Schnitt-Ellipse ist. Es kommen also nur zwei (zueinander orthogonale) Polarisationsrichtungen von \vec{D} in Frage; damit sind auch die Dielektrizitätskonstanten bekannt; sie sind i.a. verschieden, ebenso wie die zugehörigen Phasengeschwindigkeiten $c_P = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon(\vec{D})}}$. (Zusätzlich sind i.a. die Strahlgeschwindigkeiten von den Phasengeschwindigkeiten verschieden, s.u.; auch bei den Strahlgeschwindigkeiten treten zwei Werte auf.)

Da die auftreffende Welle i.a. beide Polarisationsrichtungen enthält, entsteht aus einer im Vakuum eindeutig linear-polarisierten senkrecht auftreffenden ebenen elektromagnetischen Welle im Innern eine Überlagerung zweier orthogonal polarisierter ebener Welle, die mit unterschiedlichen Phasengeschwindigkeiten propagieren.

Besonders einfach wird das Phänomen, wenn man es mit einem optisch-einachsigen System zu tun hat: Das diskutierte Indexellipsoid ist in diesem Fall ein *Rotationsellipsoid*, d.h. mit zwei gleichen Dielektrizitätskonstanten $\epsilon_1 = \epsilon_2$ und einem davon verschiedenen Wert ϵ_3 . Unter diesen Umständen kann man eine der beiden Polarisationsrichtungen des Vektors \vec{D} sofort angeben, und zwar die Richtung zu $\vec{k} \times \vec{e}_3$, d.h. die Richtung der Ebene, die durch die Rotationsachse \vec{e}_3 des Rotationsellipsoides und durch \vec{k} aufgespannt wird: In diesem Fall ist zugleich $\vec{E} \sim \vec{D}$, also auch $\vec{S} \sim \vec{k}$, d.h.

⁴⁰Mit dieser etwas laxen Formulierung ist gemeint, dass der Einheitsvektor \hat{E} aus \hat{D} durch Drehung hervorgeht.

⁴¹Dies entspricht der Symmetrie eines entlang einer Raumdiagonalen auseinandergezogenen Würfels; die c-Achse ist dann diese Diagonale, und in den Ebenen senkrecht zu dieser Achse hat man dreizählige Symmetrie

⁴²Dies entspricht der Symmetrie eines in allen drei Kantenrichtungen unterschiedlich verlängerten Würfels

man hat es mit ganz normalen Verhältnissen wie im Vakuum zu tun (sog. „ordentlicher Strahl“). Bei der anderen Polarisationsrichtung sind dagegen die Richtungen von \vec{E} und \vec{D} bzw. von \vec{S} und \vec{k} verschieden, so dass man von einem „außerordentlichen Strahl“ spricht.

Wenn z.B. der Vektor \vec{k} in der (x_1, x_3) -Ebene liegt, ist i.A. der in dieser Ebene polarisierte Strahl „ordentlich“, der senkrecht zu dieser Ebene polarisierte Strahl dagegen „außerordentlich“. In den Grenzfällen $\vec{k} \sim \vec{e}_3$ bzw. $\sim \vec{e}_1$ sind dagegen *beide* Strahlen „ordentlich“ bzw. „außerordentlich“.

”

Ordentlicher“ bzw. anaußerordentlicher Strahl propagieren i.A. unterschiedlich schnell.

Bei optisch-zweiachsigen Medien sind i.A. beide Strahlen „außerordentlich“.

Es bleibt zu erwähnen, dass für außerordentliche Strahlen nicht nur die Richtungen, sondern i.a. auch der *Betrag* von Phasen- und Strahlgeschwindigkeit verschieden sind, nämlich $\vec{v}_P \propto \vec{k}$, mit $|\vec{v}_P| = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon(\vec{D})}}$ im ersten Fall, bzw. $\vec{v}_S \propto \vec{S}$ (mit $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$) und $|\vec{v}_S| = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon(\vec{E})}}$ im zweiten Fall. Im ersten Fall ist mit dem \vec{D} -Ellipsoid (Indexellipsoid), im zweiten Fall mit dem \vec{E} -Ellipsoid (Fresnel-Ellipsoid) zu arbeiten.

7.4 Beugungstheorie

Damit die Begriffe nicht durcheinander gebracht werden, hier noch einmal die Übersetzung ins Englische: Reflektion = Reflection, Brechung = Refraction, Beugung = Diffraction; das ist nicht leicht auseinander zu halten, und die Engländer haben es da eher noch schwerer. ” *The significance of diffraction in the investigation of faults*” heißt also „Die Bedeutung der Beugung bei der Untersuchung von Störungen“: Es handelt sich hier um den Titel einer Veröffentlichung aus der angewandten Seismik (Erdbebenwellenforschung), einer Sparte der Geophysik; ”faults” sind Gesteinsschichtversetzungen und andere Lagerungsstörungen, in denen sich oft Erdölvorräte ansammeln, so dass sich im Bereich großer Gesteinsschichtversetzungen u.U. eine Erdölbohrung lohnt.

Beugung ist also ein wichtiges Phänomen der Optik und ähnlicher interdisziplinärer Gebiete, und auf das angesprochene interdisziplinäre Problem komme ich unten zurück. Es soll vorweg nur erwähnt werden, dass es bei der Reflexion und Brechung um „geometrische Optik“ geht, also um Strahlenoptik, bei dem Begriff Beugung (*Diffraction*) dagegen um die Einflüsse der zugrunde liegenden „Wellenoptik“ (s.u.).

Nun zu den Details: Wir beginnen mit dem Kirchhoff’schen Gesetz. Dieses benutzt wesentlich den sog. Zweiten Green’schen Integralsatz, eine Variante des Gauß’schen Integralsatzes. Und zwar ist $\{u(\vec{r})\nabla^2 v(\vec{r}) - v(\vec{r})\nabla^2 u(\vec{r})\} \equiv \nabla \cdot (u\nabla v - v\nabla u)$, also

$$(\text{„2. Green’scher Satz“}) : \iiint_V dV \{u\nabla^2 v - v\nabla^2 u\} \equiv \oint_{\partial V} d^2 A \vec{n} \cdot (u\nabla v - v\nabla u) . \quad (134)$$

Dies gilt für alle zweimal stetig-differenzierbaren reellen Funktionen $u(\vec{r})$ und $v(\vec{r})$, und es gilt auch noch, wenn man auf der linken Seite dieser Gleichung (134) den Operator ∇^2 durch ähnliche Operatoren ersetzt, z.B. $\nabla^2 \rightarrow \nabla^2 + k^2$. Dann erhält man das Kirchhoff’sche Gesetz, indem man in Gleichung(134) $u(\vec{r}) = \frac{\exp(ik|\vec{r}-\vec{r}'|)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ und $v(\vec{r}) :=$

$\psi(\vec{r})$ setzt. Dabei soll \vec{r}' ein beliebiger Punkt im Innern des Hohlraumes V sein. Es gilt also $(\nabla^2 + k^2)v(\vec{r}) \equiv 0$ und $(\nabla^2 + k^2)u(\vec{r}) \equiv -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}')$.

Das 2. Kirchhoff'sche Gesetz lautet also streng

$$\psi(\vec{r}') \equiv \oint_{\partial V} d^2A \vec{n}(\vec{r}) \cdot \left(\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} \nabla\psi(\vec{r}) - \psi(\vec{r}) \nabla \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) \quad (135)$$

Wir erinnern daran, dass V von Außen beleuchtet wird und dass die Randfläche von V eine Öffnung enthalten soll; außerhalb der Öffnung besteht die Randfläche des Hohlraums aus *Blenden*, die das Wellenfeld (fast) vollständig „abschatten“. Es ist deshalb plausibel, mit Kirchhoff die folgenden Näherungsannahmen zu treffen⁴³:

- Nur die Öffnung trägt zum Integral auf der rechten Seite von Gleichung (135) bei, und
- Innerhalb der Öffnung kann $\psi(\vec{r}) \approx \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}_Q|}}{|\vec{r}-\vec{r}_Q|}$ gesetzt werden: Dabei ist \vec{r}_Q der Ort einer außerhalb des Körpers befindlichen *Punktquelle* („Fresnel'sche Beugung“), von der aus die Öffnung beleuchtet wird. (Im oben angesprochenen Fall der „Seismik“ handelt es sich um eine Punktquelle von Erdbebenwellen, die an dem unterirdischen Schichtsystem reflektiert und gebrochen werden.)

Es ist dann

$$\psi(\vec{r}_P) \approx \frac{-ikB}{2\pi} \iint_{\text{Öffnung}} d^2A \frac{e^{ikr_Q}}{r_Q} \cdot \frac{e^{ikr_P}}{r_P}. \quad (136)$$

Dabei sind r_Q und r_P die Abstände zwischen Quellpunkt \vec{r}_Q und Integrationspunkt \vec{r} , bzw. zwischen Integrationspunkt \vec{r} und Beobachtungspunkt $\vec{r}_P \equiv \vec{r}'$; B ist eine uninteressante Konstante.

- Besonders einfach wird die Situation, wenn es sich um eine ebene Öffnung handelt und diese von einer einfallenden *ebenen Welle* $\propto e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}}$ beleuchtet wird („Fraunhofer'sche Beugung“). Dabei soll $|\vec{k}_0| = k$ sein. Dann ist für den Beobachtungspunkt $\vec{r}' = \vec{r}_P$ hinter der Öffnung

$$\psi(\vec{r}_P) \approx B e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}} \iint_{\text{Öffnung}} d^2A \frac{\exp(ik|\vec{r}-\vec{r}_P|)}{|\vec{r}-\vec{r}_P|} \quad (137)$$

Hier ist B erneut eine (uninteressante) Konstante. Gleichung (137) ist eine besonders einfache Form des Huyghens'schen Prinzips: Von jedem Punkt der Öffnung gehen Kugelwellen aus, die sich in der Wirkung superponieren.

Zwei Standardprobleme werden hier erwähnt:

1. Die Fraunhofer'sche Beugung am Spalt (mit Interferenz: am Doppelspalt). Darauf gehe ich erst weiter unten ein, u.a. deshalb, weil dies in allen Lehrbüchern steht.
2. Die Fresnel'sche Beugung an einer Kante, die auch in der Reflexionsseismik vorkommt, wenn im Untergrund eine der wesentlichen reflektierenden Schichten, oder das ganze Schichtpaket, plötzlich verschoben ist (\rightarrow „fault“).

⁴³Voraussetzung ist, dass die beteiligten Abstände $\gg \lambda$ sind.

7.4.1 Fresnel'sche Kantenbeugung; Nahfeldmikroskopie ("SNOM")

Wir betrachten im Folgenden das Problem 2, also die Fresnel'sche Kantenbeugung: Die abschattende Fläche sei die untere Halbebene $x \equiv 0$, $y \in (-\infty, \infty)$, $z \in (-\infty, 0]$. Diese werde genau auf der Höhe der Kante senkrecht vom Punkt $\vec{r}_Q := (-x_Q, y_Q, 0)$ aus beleuchtet, d.h. x_Q sei der positive, senkrechte Abstand des Beleuchtungspunktes von der Kante; ferner werde angenommen, dass $y_Q^2 \ll x_q^2$ (während für den Beobachtungspunkt, s.u., $y_P \equiv 0$ ist).

In der Tat : Der Beobachtungspunkt hinter der Kante sei $\vec{r}_P := (x_P, 0, z_P)$, wobei $x_P > 0$ ist, während z_P negativ sein kann: In diesem Fall liegt der Beobachtungspunkt im Schattengebiet, für $z_P > 0$ liegt er dagegen im beleuchteten Gebiet. Alle Abstände sollen $\gg \lambda$ sein.

Dann ist also für kleine y - und z -Werte:

$$\psi(\vec{r}_P) \sim \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_0^{\infty} dz \exp \left[i k \cdot \left(x_Q + \frac{(y - y_Q)^2 + z^2}{2x_q} + x_P + \frac{y^2 + (z - z_P)^2}{2x_p} \right) \right], \quad (138)$$

also bis auf einen konstanten komplexen Faktor

$$\psi(\vec{r}_P) \sim \int_0^{\infty} dz \exp \left[i k \cdot \left(\frac{z^2}{2x_Q} + \frac{(z - z_P)^2}{2x_P} \right) \right]. \quad (139)$$

Dieses Ergebnis läßt sich, bis auf einen komplexen Faktor vom Betrag 1, durch Substitution auf folgende Form bringen⁴⁴

$$\psi(\vec{r}_P) \sim \int_{-w}^{\infty} d\eta e^{i\eta^2}, \quad (140)$$

mit dem w-Parameter

$$w := z_P \cdot \sqrt{\frac{k \cdot x_q}{2x_P(x_P + x_Q)}}. \quad (141)$$

Für die Intensität im Beobachtungspunkt \vec{r}_P erhält man also

$$I = \frac{I_0}{2} \left| \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-w}^{\infty} d\eta e^{i\eta^2} \right|^2. \quad (142)$$

Real- und Imaginärteil des in Gleichung (142) auftretenden Integrals definieren die sog. Fresnel'schen Integrale $C(w)$ und $S(w)$: $C(w) + \frac{1}{2} := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-w}^{\infty} \cos(\eta^2) d\eta$ und $S(w) + \frac{1}{2} := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-w}^{\infty} \sin(\eta^2) d\eta$ (oder $C(w) := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^w \cos(\eta^2) d\eta$ und $S(w) := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^w \sin(\eta^2) d\eta$)

⁴⁴Landau-Lifschitz Bd. II („Feldtheorie“ (sic!)), Kapitel 60

bzw. die sog. Cornu'sche Spirale, die man erhält, indem man $S(w)$ gegen $C(w)$ aufträgt, wobei w als Kurvenparameter dient; siehe A. Sommerfeld, „Optik“, oder Pedrotti *al.*, Optik, Abb. 18.17 ⁴⁵. Eine u.a. in dem oben zitierten Band II des Lehrbuches von Landau und Lifschitz durchgeführte asymptotische Entwicklung des Integrals (142) ergibt

$$\frac{I(w)}{I_0} \cong \begin{cases} \frac{1}{4\pi|w^2|} & \text{für } w \ll 0 \\ 1 + \sqrt{\frac{1}{\pi} \frac{\sin(w^2 - \frac{\pi}{4})}{w^2}} & \text{für } w \gg 0 \end{cases} \quad (143)$$

Bei genauerer Rechnung ergibt sich eine glatte Funktion, die bei Überschreiten der Schattengrenze nicht abrupt von 1 auf 0 springt, sondern von $(I/I_0) = 0$ bei $w = -\infty$ etwa wie $(\sim 1/|w^2|)$ bis zu einer Maximalamplitude $(I/I_0) \approx 1.37$ bei $w \approx \sqrt{\frac{3\pi}{4}}$ monoton ansteigt (die charakteristische Länge für diesen monotonen Anstieg ist von der Größenordnung einer halben Wellenlänge), und dann mit abnehmender Amplitude und abnehmender Periode um den asymptotischen Wert 1 herum oszilliert, (\rightarrow 'fringes' („Fransen“), vgl. Abb. 12 in Sektion 60 in Band II des Lehrbuches von Landau und Lifschitz), und zwar mit einer charakteristischen Länge Δz_P für die Einhüllende, welche sich aus der Gleichung $\frac{(\Delta z_P)^2 x_Q}{\lambda 2x_P \cdot (x_P + x_Q)} \equiv 1$ ergibt und daher nicht ganz klein ist, sondern gleich $\Delta z_P := \sqrt{2\lambda \cdot (x_Q + x_P) \cdot \frac{x_P}{x_Q}}$. Selbst wenn also die Kante der abblendenden Ebene atomar scharf wäre, ist in diesem Fall das optische Bild der Kante durch diese und ähnliche Beugungseffekte *nicht* wie erwartet, nur auf eine (für sonstige Fälle) typische Abfall-Länge $\frac{\lambda}{2}$ (d.h. etwa eine halbe Lichtwellenlänge) genau definiert (das ist die charakteristische Länge des monotonen Anstieges; wegen des Faktor $\frac{1}{2}$ s.u.), sondern die typische Abfall-Länge Δz_P für die 'Fransen' ist signifikant größer, und es kommt zu einer „Verfremdung“ des Übergangs. (In dem oben erwähnten Fall aus der Angewandten Seismik kann man die gesuchten „faults“ gerade durch diese 'Fransen' lokalisieren; d.h. man hat einen Nachteil in einen Vorteil verkehrt.)

Dass die Genauigkeit Δx bei der optischen Abbildung durch die halbe Lichtwellenlänge begrenzt ist, folgt letzten Endes aus den oben angegebenen Beziehungen. Demnach sollte sich in Ausdrücken der Form $\exp(ik \cdot \Delta x)$ die Phase um π unterscheiden, wenn zwei Punkte, die um Δx auseinander liegen, bei der optischen Abbildung noch getrennt werden; mit $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ führt dies auf $\Delta x \approx \frac{\lambda}{2}$.

Letzten Endes beruht diese Begrenzung der Genauigkeit bei der optischen Mikroskopie darauf, dass man nur den Fernfeld-Bereich der elektromagnetischen Wellen ausnutzt. Größere Genauigkeit kann man bei optischen Methoden nur mit der Nahfeld-Mikroskopie erreichen („SNOM = Scanning Near-field Optical Microscopy“). Bei dieser Methode, die den Vorteil der höheren Auflösung durch andere, schwerwiegende Nachteile kompensiert, muss man die Oberfläche mit einem feinen Stift sorgfältig abrastern (auf Neudeutsch: abscannen): Aus der atomar-scharfen Spitze des Stiftes treten elektromagnetische Felder aus, die im Fernbereich elektromagnetischen Wellen der Fernfeld-Wellenlänge λ entsprechen, aber im Nahbereich auf viel kürzeren Längenskalen variieren.

⁴⁵Etwas unterschiedliche, aber äquivalente Definitionen werden von E. Hecht in 'Schaum's outline of Theory and Problems of Optics' benutzt; siehe z.B. Seite 190 ff, z.B. Fig. 7-30.

7.4.2 Fraunhofer'sche Beugung an der Rechtecköffnung und an der Kreisöffnung; Auflösungsvermögen

Wir behandeln jetzt die Fraunhofer-Beugung zunächst sehr allgemein, und zwar wollen wir zeigen, dass hierbei (in transversaler Richtung) eine Fouriertransformation durchgeführt wird. Und zwar ist Gleichung (137) für Abstände, die $\gg \lambda$ sind, identisch mit

$$\psi(\vec{r}_P) \propto \iint_{\text{Öffnung}} d^2\vec{r} e^{i(\vec{k}_0 - \vec{k}_P) \cdot \vec{r}}. \quad (144)$$

(Wenn die Öffnung mit einer sog. „Pupillenfunktion“ $P(\vec{r})$ gefüllt ist, erhält man statt (144) einen nur geringfügig allgemeineren Ausdruck: $\psi(\vec{r}_P) \propto \iint_{\text{Öffn.}} d^2\vec{r} P(\vec{r}) e^{i(\vec{k}_0 - \vec{k}_P) \cdot \vec{r}}$.)

Dabei ist \vec{k}_P der Vektor, der den Betrag k und die Richtung von \vec{r}_P hat. Es gilt nämlich für $r_p \gg r$, dass $\exp(i k |\vec{r} - \vec{r}_P|) \cong \exp[ik r_p - i(\vec{r}_p \cdot \vec{r})/r_p]$, so dass sich, bis auf einen komplexen Faktor, (137) zur Fourier-Darstellung (144) vereinfacht.

Im Spezialfall der senkrecht beleuchteten Rechteck-Öffnung in der (y,z)-Ebene setzt man $\vec{k}_0 = k \cdot (1, 0, 0)$ und $\vec{k}_P = k \cdot (\sqrt{1 - \sin^2 \theta_2 - \sin^2 \theta_3}, \sin \theta_2, \sin \theta_3)$ und hat dann elementare Integrale der Form $\int_{-a_j/2}^{a_j/2} dy_j e^{-i(\sin \theta_j) \cdot y_j}$ auszuwerten. Man erhält so

$$\psi(\vec{r}_P) \propto a_2 a_3 \cdot \prod_{j=2}^3 \frac{(\sin \theta_j) \cdot \frac{a_j \pi}{\lambda}}{\frac{a_j \pi}{\lambda}}. \quad (145)$$

Die Intensität ergibt sich durch Bildung von $\psi \cdot \psi^*$.

Bei einer kreisförmigen Öffnung mit Radius a erhält man ein nur geringfügig komplizierteres Resultat, nämlich

$$\psi(\vec{r}_P) \propto \pi a^2 \cdot \frac{2J_1[2\pi \cdot (\sin \theta) \cdot \frac{a}{\lambda}]}{2\pi \cdot (\sin \theta) \cdot \frac{a}{\lambda}}. \quad (146)$$

Dabei ist $J_1[x]$ die Besselfunktion. Die Intensität hat in diesem Fall ein sehr scharfes Maximum bei $\sin \theta = 0$ und ein erstes Minimum bei dem sehr kleinen Wert $\sin \theta = 0,61 \frac{\lambda}{a}$, so dass das Winkelauflösungsvermögen bei einem Fernrohr mit Öffnungsradius a durch das Abbe'sche Ergebnis $\sin \theta \geq 0,61 \frac{\lambda}{a}$ begrenzt ist.

Auch hier bestimmt also aufgrund von Beugungseffekten ungefähr die halbe Wellenlänge das Auflösungsvermögen.

7.5 Holographie

Bisher haben wir noch nicht die Interferenzfähigkeit elektromagnetischer Wellen ausgenutzt: $|\sum_j \psi_j|^2 \equiv |\sum_{j,k} \psi_j^* \psi_k|$, und nicht einfach $= \sum_j |\psi_j|^2$. Die letzte Formel –

Addition der Intensitäten – würde nur gelten, wenn die Phasen und/oder Amplituden der komplexen Summanden ψ_j unkorrelierte Zufallszahlen wären, so dass von der

Doppelsumme $\sum_{j,k} \psi_j^* \psi_k$ nur die Diagonalterme übrig blieben. Wenn die räumliche und zeitliche Korrelationsfunktion zweier Wellenfelder,

$$\langle (\psi^{(1)})^*(\vec{r}_1, t_1) \psi^{(2)}(\vec{r}_2, t_2) \rangle := \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2} (c_{\vec{k}_1}^{(1)})^* e^{-i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1 - \omega t_1)} c_{\vec{k}_2}^{(2)} e^{i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2 - \omega t_2)} \quad (147)$$

mit wachsendem räumlichen und zeitlichem Abstand $\propto e^{-\left(\frac{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}{l_c} + \frac{(t_1 - t_2)}{\tau_c}\right)}$ abfallen, heißen die Länge l_c und die Zeit τ_c Kohärenzlänge bzw. Kohärenzzeit der Wellen.

Mit der Erfindung des Lasers hat man Lichtquellen mit makroskopischen Kohärenzlängen und Kohärenzzeiten gewonnen, worauf ich hier aber nicht weiter eingehen kann.

Bei der photographischen Aufnahme ist die Schwärzung der *Intensität* proportional, man verliert also die Information, die in der *Phase* des Wellenfeldes steckt. Der britische Physiker Dennis Gabor hat sich schon 1948, also lange bevor der Laser eingeführt wurde, Gedanken gemacht, wie man durch kohärente Superposition mit einer Referenzwelle die Phaseninformation, die in einem Gegenstandswellenfeld⁴⁶ $\psi_G(\vec{r}, t)$ enthalten ist, rekonstruieren kann. Aber erst 1962 haben E. Leith und J. Upatnieks an der Universität von Michigan dazu Laserlicht benutzt und für die sog. Referenzwelle (s.u.) die sog. 'off-axis-Technik' („schräge Beleuchtung“) eingeführt, die heute noch üblich ist.

An dieser Stelle folgt in der Vorlesung eine Zeichnung über die gebräuchliche Anordnung zur Aufnahme von Hologrammen (Die Zeichnung entspricht Abb. 13.2 in dem bereits mehrfach zitierten Buch von Pedrotti *et al.*). Das Hologramm (die ohne jede Linse erfolgende photographische Aufnahme) misst die Schwärzungsfunktion einer sowohl von der Gegenstandswelle als auch von der Referenzwelle bestrahlten Photoplatte. Es entspricht also der Intensität der (kohärenten) Superposition von Gegenstandswellenfeld ψ_G und Referenzwelle $e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}}$, also $I \propto |\psi_G + a_0 \exp(i(\vec{k}_0 \cdot \vec{r}))|^2$ und hängt nicht von der Zeit ab, da alle Wellenfelder $\propto e^{-i\omega t}$ sind. Wenn die Terme $\propto a_0$, $\propto a_0^*$ und $\propto |a_0|^2$ dominieren, erhält man also

$$I \propto |a_0|^2 + \underline{a_0 e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}} \psi_G(\vec{r})} + a_0^* e^{-i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}} \psi_G^*(\vec{r}) \quad (\rightarrow I_{\text{Hologramm}}), \quad (148)$$

wobei noch mit der Schwärzungsfunktion der Photoplatte zu multiplizieren ist.

Auf der rechten Seite von (148) beinhaltet der 2. Term genau das Gegenstandswellenfeld und der dritte Term das sog. 'konjugierte Gegenstandsfeld' oder 'Zwillingsfeld', das ein stark verfremdetes Bild des Gegenstandes gibt (z.B. werden durch den Übergang zum konjugiert-komplexen, $e^{i\Phi(\vec{r})} \rightarrow e^{-i\Phi(\vec{r})}$, Punkte mit geringerem Abstand ('Täler') und solche mit höherem Abstand ('Berge') vertauscht.

Es kommt also darauf an, bei der Betrachtung des Hologramm aus der Aufnahme, d.h. aus $I_{\text{Hologramm}}$, das Gegenstandswellenfeld zu rekonstruieren. Das geschieht, indem man bei der Betrachtung das Hologramm mit einer zusätzlichen sog. Rekonstruktionswelle $\propto e^{-i\vec{k}_1 \cdot \vec{r}}$ (z.B. ungefähr aus der Gegenrichtung der Referenzwelle, $\vec{k}_1 \approx \vec{k}_0$) beleuchtet. Bei Kohärenz sieht man also

$$I_{\text{Betrachtung}} \propto |a_0|^2 e^{-i\vec{k}_1 \cdot \vec{r}} + \underline{a_0 \psi_G(\vec{r}) e^{i(\vec{k}_0 - \vec{k}_1) \cdot \vec{r}}} + a_0^* \psi_G^*(\vec{r}) e^{-i(\vec{k}_0 + \vec{k}_1) \cdot \vec{r}}. \quad (149)$$

⁴⁶Das heißt, dieses Wellenfeld $\psi_G(\vec{r}, t)$ soll durch Beleuchtung eines Gegenstandes mit kohärentem Licht entstehen.

Bei geeigneter Betrachtung sieht man nur den zweiten Term auf der rechten Seite, also genau das Gegenstandswellenfeld.

Über die vielfältigen Anwendungen und Varianten der Holographie braucht man an dieser Stelle kein Wort zu verlieren, zumal das Gebiet nach wie vor sehr zukunftssträftig ist. Wir notieren nur einige Begriffe, über die man sich anhand der Spezialliteratur informieren kann: Farbhologramme, Volumenhologramme, verteilte Information, Filterung, holographische Datenspeicherung und holographische Mustererkennung. Es sollte ferner zum Schluss explizit erwähnt werden, dass man hier im Grunde 'angewandtes optisches Quantencomputing' realisiert⁴⁷.

8 Schlusswort

In dieser Vorlesung wurden (nicht nur für Lehramtler) die Grundlagen der theoretischen Elektrodynamik und einige sich daraus ergebende Aspekte der Optik besprochen (die Optik ist zu einem wesentlichen Teil einfach 'Angewandte Elektrodynamik'). Wenn es zu Maxwells Lebzeiten schon einen Nobelpreis gegeben, hätte er ihn sicher bekommen; denn seine Theorie ist nach allem wirklich revolutionierend gewesen. Es ist nicht zufällig, dass Einstein mehrfach auf dieser Theorie aufbaut, und ohne es zu wissen, hat Maxwell bereits in seiner Theorie die Newton'schen Vorstellungen von der Struktur der Raumzeit zugunsten der späteren Einstein'schen Resultate gestürzt. Außerdem – *last but not least* – beruht fast unsere gesamte gegenwärtige Kultur und 'Unkultur' auf angewandter Elektrodynamik (z.B. dem Hertz'schen Dipol), wie bereits in der Einleitung betont wurde.

Ende der Vorlesung

⁴⁷Beim Quantencomputing geht es um kohärente Superposition von Schrödinger'schen Materiewellen, wobei man sich bisher hauptsächlich auf quantenmechanische Zweiniveau-Systeme beschränkt. In der Optik ist man im Grunde mit der Erfindung des Lasers und der Holographie viel weiter.