

Theoretische Physik: Elektrodynamik  
- Skriptum zur Vorlesung -

Prof. Dr. H.-J. Kull

Fraunhofer Institut für Lasertechnik  
und  
Lehr- und Forschungsgebiet Laserphysik  
Institut für Theoretische Physik A  
Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule  
Aachen

31. August 2006

# Vorbemerkungen

## Voraussetzungen und Zielsetzungen:

Die Vorlesung wendet sich an die Studentinnen und Studenten des Diplomstudien-ganges Physik. Vorausgesetzt werden Grundkenntnisse in Analysis (Differential- und Integralrechnung) und in linearer Algebra (Vektor- und Tensorrechnung). Die Vorlesung umfaßt eine Einführung in die klassische Elektrodynamik. Dabei sollen eine systematische Orientierung geboten, methodische Vorgehensweisen erlernt und grundlegende physikalische Inhalte vermittelt werden.

**Skriptum zur Vorlesung:** Das Skriptum ist auf der Homepage

<http://llp.ilt.fhg.de>

zugänglich. Ausdrücke sind auf eigene Kosten vorzunehmen.

## Literaturhinweise:

Es gibt viele sehr gute Darstellungen der Elektrodynamik, z.B.

- T. Fließbach: Elektrodynamik (Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1997)
- E. Rebhan: Theoretische Physik, Band 1 (Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1999)
- Feynman Lectures on Physics II (Addison-Wesley, New York, 1963)
- L.D. Landau, E.M. Lifschitz: Lehrbuch der Theoretischen Physik II u. VIII (Akademie-Verlag, Berlin, 1981)
- J.D. Jackson: Classical Electrodynamics (John Wiley, New York, 1962)

Eine gute Einführung in die mathematischen Methoden gibt

- S. Großmann: Mathematischer Einführungskurs für die Physik (Teubner Studienbücher Physik, Stuttgart, 1991)

Eine umfassende geschichtliche Darstellung findet man in

- F. Hund: Geschichte der physikalischen Begriffe (BI, Mannheim, 1972)

**Maßsysteme:**

In der Elektrodynamik sind 2 Maßsysteme weit verbreitet, das SI-System und das Gaußsche Maßsystem. Das SI-System hat den Vorteil, daß man die numerischen Werte der physikalischen Größen unmittelbar in praktischen Einheiten (MKSA) angeben kann. Es empfiehlt sich daher besonders im Experiment und in der Computersimulation.

In der Theoretischen Physik ist es zweckmäßig Variablensubstitutionen so vorzunehmen, daß die Gleichungen möglichst einfach und einprägsam ausschauen. Hierin liegt die Stärke des Gaußschen Maßsystems. In diesen Einheiten besitzt z.B. das elektrische und das magnetische Feld dieselbe Dimension, so daß die Vereinheitlichung der Felder im elektromagnetischen Feldtensor sichtbar wird.

In diesem Skriptum wird das Gaußsche Maßsystem verwendet, Die Umrechnung ins SI-System erfolgt, indem man für die Ladungen und die Felder, bzw. die Potentiale, die Substitutionen

$$e \longrightarrow 1/\sqrt{4\pi\epsilon_0} e$$

$$\mathbf{E} \longrightarrow \sqrt{4\pi\epsilon_0} \mathbf{E}$$

$$\Phi \longrightarrow \sqrt{4\pi\epsilon_0} \Phi$$

$$\mathbf{B} \longrightarrow \sqrt{4\pi\epsilon_0} c\mathbf{B}$$

$$\mathbf{A} \longrightarrow \sqrt{4\pi\epsilon_0} c\mathbf{A}$$

vornimmt.

**Übung 0.1** Schreiben Sie i) die Maxwell'schen Gleichungen, ii) das Coulombsche Gesetz vom Gaußschen System ins SI-System um. Berechnen sie den Wert des atomaren elektrischen Feldes im Wasserstoff auf der ersten Bohrschen Bahn.

Tabelle 1: Physikalische Konstanten

---

Gravitationskonstante	$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}^2$
Fallbeschleunigung	$g = 9.81 \text{ m/s}^2$ (bei 50 Grad geogr. Breite)
Erdradius	$r_{\text{Äquator}} = 6378 \text{ km}$
Erdmasse	$m_{\text{Erde}} = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$
Sonnenradius	$r_{\text{Sonne}} = 695300 \text{ km}$
Sonnenmasse	$m_{\text{Sonne}} = 1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$
Lichtgeschwindigkeit	$c = 2.997(9) \times 10^8 \text{ m/sec}$
Elektrische Feldkonstante	$\epsilon_0 = 10^7/(4\pi c^2) = 8.854(1) \times 10^{-12} \text{ Asec}/(\text{Vm})$
Magnetische Feldkonstante	$\mu_0 = 1/(\epsilon_0 c^2) = 4\pi \times 10^{-7} = 1.256(6) \times 10^{-6} \text{ Vsec}/(\text{Am})$
Elektrische Elementarladung	$e = 1.602(1) \times 10^{-19} \text{ As}$
Elektronenruhemasse	$m_e = 9.109(5) \times 10^{-31} \text{ kg}$
Protonenruhemasse	$m_p = 1.672(6) \times 10^{-27} \text{ kg}$
Boltzmann-Konstante	$k_B = 1.380(6) \times 10^{-23} \text{ J/K}$
Stefan-Boltzmann-Konstante	$\sigma = 5.670(5) \times 10^{-8} \text{ W}/(\text{K}^4\text{m}^2)$
Plancksches Wirkungsquantum	$h = 6.626(1) \times 10^{-34} = 2\pi \cdot 1.054(5) \times 10^{-34} \text{ Jsec}$
Bohrscher Radius	$a_0 = 0.529(1) \times 10^{-10} \text{ m}$

---

Tabelle 2: Zehnerpotenzen

---

$10^{-3}$	Milli (m)	$10^3$	Kilo (k)
$10^{-6}$	Mikro ( $\mu$ )	$10^6$	Mega (M)
$10^{-9}$	Nano (n)	$10^9$	Giga (G)
$10^{-12}$	Piko (p)	$10^{12}$	Tera (T)
$10^{-15}$	Femto (f)	$10^{15}$	Peta (P)

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Elektromagnetische Erscheinungen . . . . .	1
1.2	Historische Entwicklung . . . . .	1
1.3	Elektromagnetisches Feld . . . . .	2
1.4	Maxwell-Gleichungen . . . . .	3
1.5	Wechselwirkungen in der Physik . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Mathematische Grundlagen</b>	<b>7</b>
2.1	Skalare, Vektoren und Tensoren . . . . .	7
2.2	Differentiation von Vektorfeldern . . . . .	9
2.3	Integration von Vektorfeldern . . . . .	13
2.3.1	Gradient . . . . .	13
2.3.2	Divergenz . . . . .	14
2.3.3	Rotation . . . . .	16
2.4	Potentiale . . . . .	18
2.4.1	Skalares Potential . . . . .	18
2.4.2	Vektorpotential . . . . .	19
2.5	Delta-Funktion . . . . .	21
2.6	Wirbelfreie Vektorfelder . . . . .	26
2.7	Quellenfreie Vektorfelder . . . . .	29
2.8	Allgemeine Vektorfelder . . . . .	30
2.8.1	Eindeutigkeitssatz . . . . .	30
2.8.2	Fundamentalsatz der Vektoranalysis . . . . .	31
2.9	Taylor-Reihe einer Funktion mit mehreren unabhängigen Variablen . . . . .	31

<b>3</b>	<b>Elektrostatik</b>	<b>33</b>
3.1	Grundgleichungen der Elektrostatik . . . . .	33
3.1.1	Feld einer Punktladung . . . . .	34
3.1.2	Feld eines Systems von Punktladungen . . . . .	35
3.1.3	Feldgleichungen . . . . .	35
3.2	Kraftwirkung elektrostatischer Felder . . . . .	37
3.2.1	Volumenkräfte . . . . .	37
3.2.2	Oberflächenkräfte . . . . .	39
3.3	Energie elektrostatischer Felder . . . . .	41
3.3.1	Punktladung im elektrostatischen Feld . . . . .	41
3.3.2	Wechselwirkungsenergie von Punktladungen . . . . .	42
3.3.3	Energie stetiger Ladungsverteilungen . . . . .	43
3.3.4	Feldenergie . . . . .	43
3.3.5	Feldenergie zusammengesetzter Systeme . . . . .	44
3.4	Multipolfelder . . . . .	44
3.4.1	Physikalischer Dipol . . . . .	44
3.4.2	Mathematischer Dipol . . . . .	46
3.4.3	Multipolentwicklung . . . . .	51
3.5	Leiter . . . . .	54
3.5.1	Ohmsches Gesetz . . . . .	54
3.5.2	Gleichgewicht im Innern des Leiters . . . . .	54
3.5.3	Randbedingungen an der Leiteroberfläche . . . . .	55
3.5.4	Kraft auf die Leiteroberfläche . . . . .	57
3.5.5	Energie eines Systems von Leitern . . . . .	58
3.5.6	Plattenkondensator . . . . .	59
3.6	Lösungsmethoden für Randwertprobleme . . . . .	61
3.6.1	Methode der Bildladungen . . . . .	61
3.6.2	Methode der Green-Funktion . . . . .	64
3.6.3	Separation in Kugelkoordinaten . . . . .	65
3.7	Dielektrika . . . . .	76
3.7.1	Dielektrizitätskonstante . . . . .	76
3.7.2	Polarisation . . . . .	77

3.7.3	Feldgleichungen	80
3.7.4	Plattenkondensator mit Dielektrikum	82
3.7.5	Polarisierbarkeit von Atomen und Molekülen	82
<b>4</b>	<b>Magnetostatik</b>	<b>85</b>
4.1	Stromdichte	85
4.1.1	Makroskopische Definition	85
4.1.2	Ladungserhaltung	85
4.1.3	Mikroskopische Definition	86
4.1.4	Linienströme	88
4.2	Feldgleichungen	88
4.2.1	Magnetischer Fluß	88
4.2.2	Magnetfelder vorgegebener Stromdichten	89
4.2.3	Beispiel: Gerader stromdurchflossener Leiter	91
4.2.4	Beispiel: Ebener stromdurchflossener Leiter	93
4.3	Magnetisches Dipolmoment	94
4.4	Kraftwirkung von Magnetfeldern	97
4.5	Magnetfelder in Materie	98
<b>5</b>	<b>Maxwell-Gleichungen</b>	<b>100</b>
5.1	Zeitentwicklung elektromagnetischer Felder	100
5.1.1	Entwicklungsgleichungen	100
5.1.2	Zwangsbedingungen	101
5.1.3	Elektromagnetische Potentiale	101
5.2	Induktionsgesetz	103
5.3	Erhaltungssätze	104
5.3.1	Energieerhaltung	105
5.3.2	Magnetische Energie	106
5.3.3	Impulserhaltung	109
5.4	Elektromagnetische Wellen	110
5.4.1	Elektromagnetische Wellen im Vakuum	110
5.4.2	Wellen im Medium	113
5.4.3	Reflexion an einer ebenen Grenzfläche	117

<b>6</b>	<b>Relativistische Mechanik</b>	<b>121</b>
6.1	Relativitätsprinzip	121
6.1.1	Galileisches Relativitätsprinzip	121
6.1.2	Einsteinisches Relativitätsprinzip	123
6.2	Lorentztransformation	123
6.3	Der Abstand von Ereignissen	125
6.3.1	Raumzeit	125
6.3.2	Längenkontraktion	127
6.3.3	Zeitdilatation	127
6.3.4	Eigenzeit	128
6.3.5	Gleichzeitigkeit	129
6.3.6	Additionstheorem der Geschwindigkeiten	130
6.4	Metrik	131
6.4.1	Lorentz-Minkowski-Metrik	131
6.4.2	Lorentz-Poincaré-Gruppe	132
6.4.3	Tensoranalysis	134
6.5	Relativistische Mechanik	138
6.5.1	Kovarianz	138
6.5.2	Kovariante Bewegungsgleichung	139
6.6	Kovariante Form der Elektrodynamik	141
6.6.1	Viererstromdichte	141
6.6.2	Viererpotential	143
6.6.3	Tensor des elektromagnetischen Feldes	143
6.6.4	Kovariante Form der Lorentzkraft	144
6.6.5	Kovariante Form der Maxwellgleichungen	145
6.6.6	Lorentztransformation der Felder	147

# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Elektromagnetische Erscheinungen

Beispiele elektrischer und magnetischer Erscheinungen in der Natur sind:

- Reibungselektrizität (Bernstein)
- Magnetismus (Magnetstein), Erdmagnetismus
- Entladungen (Blitz, Zitterrochen)
- Elektrische Ströme (Leiter, Elektrolyte)
- Influenz von Ladungen und Induktion von Strömen
- Elektromagnetische Strahlung (Licht)
- Aufbau der Atome und Moleküle

### 1.2 Historische Entwicklung

Elektrische und magnetische Erscheinungen waren teilweise schon im Altertum und zu Beginn der Neuzeit bekannt (Gilbert: “de magnete“, “corpora electrica“, 1600). Elektron bedeutet auf altgriechisch Bernstein. Im 18. Jahrhundert führten systematische Untersuchungen zur Kenntnis positiver und negativer elektrischer Ladungen (DuFay, 1735) und ihrer gegenseitigen Kraftwirkungen (Coulomb, 1785). Ebenso wurde zwischen Leitern und Nichtleitern unterschieden (Gray, 1730). Im 19. Jahrhundert wurde der Begriff des elektrischen Stromes geprägt (Ampère, um 1820) und die Kraftwirkungen zwischen Leitern wurden erforscht (Ampère, Biot, Savart, Laplace). Die Verbindung elektrischer und magnetischer Erscheinungen wurde erkannt (Ørstedt 1820, Faraday, 1831). Am Ende dieser Entwicklung und gestützt auf

parallele Fortschritte bei der Mathematisierung (Analytische Mechanik, Kontinuumsmechanik) steht die Theorie des elektromagnetischen Feldes (Maxwell, 1864). Sie bildet die Grundlage der klassischen Elektrodynamik. Ende des 19. Jahrhunderts wurden als Träger der negativen Elementarladung das Elektron (Thomson, 1897 u.a.) und als Träger der positiven Elementarladung das Proton (Rutherford, 1920) entdeckt.

### 1.3 Elektromagnetisches Feld

Gegenstand der Elektrodynamik ist die elektromagnetische Wechselwirkung elektrischer Ladungen. In der klassischen Elektrodynamik wird diese Wechselwirkung durch ein elektromagnetisches Feld beschrieben.

Eine Zuordnung,

$$\mathbf{r} \rightarrow A(\mathbf{r}) \quad (1.1)$$

die an jedem Punkt eines Gebietes den Wert einer Größe  $A$  definiert, nennt man ein *Feld* (Fig.1.1). Ist  $\mathbf{A}$  ein Vektor, nennt man  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  ein *Vektorfeld*. Der Begriff des Vektorfeldes ist grundlegend für die Elektrodynamik. Vektorfelder spielen hier eine ähnliche Rolle, wie die Teilchenkoordinaten  $(q_i, p_i)$  in der Mechanik. Im Gegensatz zu dem diskreten Teilchenindex  $i$  ist der Ortsvektor  $\mathbf{r}$  hier aber eine kontinuierliche Variable. Im allgemeinen können Felder auch zeitabhängig sein, was durch ein zusätzliches Argument,  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ , angedeutet wird.

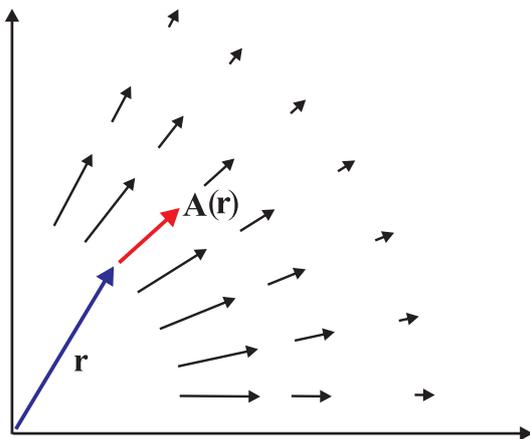


Abbildung 1.1: Vektorfeld  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$

Das elektrische Feld  $\mathbf{E}$  wird durch die Kraft auf eine ruhende Probeladung  $q$  definiert,

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}. \quad (1.2)$$

Die elektrische Feldstärke bezeichnet somit die Kraft pro Ladungseinheit. Sie ist von der Anwesenheit der Probeladung unabhängig. Verschiebt man die Probeladung, so kann man jedem Ortsvektor  $\mathbf{r}$  einen Vektor  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  zuordnen.

Eine Probeladung ist streng genommen eine Idealisierung. Vernachlässigt wird hierbei die endliche Ausdehnung der Ladung sowie die Rückwirkung der Ladung auf das elektrische Feld. Eine solche Rückwirkung kann durch die Beeinflussung der restlichen Ladungen oder durch die Selbstwechselwirkung der Ladung mit dem eigenen Strahlungsfeld zustande kommen. Diese Effekte sind aber meist vernachlässigbar klein, so daß die Annahme punktförmiger Ladungen in einem vorgegeben äußeren Feld eine gute Näherung darstellt.

Neben der elektrischen Kraft gibt es auch eine magnetische Kraft, die auf bewegte Ladungen wirkt. Das magnetische Feld  $\mathbf{B}$  wird in Abwesenheit eines elektrischen Feldes durch die Kraft auf eine Probeladung  $q$  definiert, die sich mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  bewegt,

$$\mathbf{F} = \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (1.3)$$

Hierbei bezeichnet  $c$  die Lichtgeschwindigkeit. Die magnetische Kraft unterscheidet sich von der elektrischen durch ihre Geschwindigkeitsabhängigkeit. Sie steht senkrecht auf der Bewegungsrichtung und verschwindet für eine ruhende Ladung. Das magnetische Feld bildet ebenfalls ein Vektorfeld  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ , dessen Eigenschaften unabhängig sind von der Anwesenheit der Probeladung.

Die allgemeine Form der Kraft auf eine Ladung in einem äußeren elektrischen und magnetischen Feld ist

$$\mathbf{F} = q \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right). \quad (1.4)$$

Sie wird als *allgemeine Lorentz-Kraft* bezeichnet. Durch die Lorentz-Kraft auf eine Probeladung wird das elektromagnetische Feld als Messgröße definiert.

## 1.4 Maxwell-Gleichungen

Die Bewegungsgleichungen eines zeitabhängigen Feldes werden als Feldgleichungen bezeichnet. Die Feldgleichungen des elektromagnetischen Feldes sind die Maxwell-Gleichungen:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (1.5)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \varrho \quad (1.8)$$

Hierbei bezeichnet  $\varrho(\mathbf{r}, t)$  die Ladungsdichte,  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$  die Stromdichte und für die Einheiten wird das Gaußsche Maßsystem verwendet. Für vorgegebene Ladungs- und Stromdichten bestimmen die Maxwell-Gleichungen die elektrischen und magnetischen Felder. In der Vektoranalysis lernt man genauer wie Vektorfelder durch die Angabe sogenannter Quellen und Wirbel für verschiedene Randwertprobleme bestimmt werden können. Die Maxwellgleichungen geben eine inhaltliche Ausdeutung dieser Sätze. Da es sich um physikalische Naturgesetze handelt, ist die inhaltliche Bedeutung nicht beweisbar. Im Rahmen der Elektrodynamik lernt man mit diesen Gleichungen umzugehen und sie auf unterschiedliche Fragestellungen anzuwenden.

Die Elektrostatik und die Magnetostatik sind Teilgebiete der Elektrodynamik. Für statische Felder,  $\partial_t \mathbf{E} = 0$  und  $\partial_t \mathbf{B} = 0$ , entkoppeln die Maxwell-Gleichungen und man erhält die Grundgleichungen der Elektrostatik bzw. der Magnetostatik,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \varrho, \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (1.9)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (1.10)$$

Ein anderer Spezialfall sind die Maxwell-Gleichungen für elektromagnetische Felder im Vakuum. Setzt man  $\varrho = 0$  und  $\mathbf{j} = 0$ , so ergeben sich gekoppelte Gleichungen für  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$ , die die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen beschreiben

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.11)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.12)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.13)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (1.14)$$

In Materie sind die Ladungs- und Stromdichten i.a. von den lokalen elektrischen und magnetischen Feldern abhängig. Zur Bestimmung des elektromagnetischen Feldes in Materie werden zusätzliche Materiegleichungen benötigt. Damit ergibt sich eine Vielzahl von Anwendungen zur Beschreibung elektrischer, magnetischer und optischer Eigenschaften von makroskopischen Systemen.

## 1.5 Wechselwirkungen in der Physik

In der Physik werden vier Arten der Wechselwirkung unterschieden:

Wechselwirkung	Träger
Gravitation	Masse, Energie
Elektromagnetische Wechselwirkung	elektrische Ladungen
Starke Wechselwirkung	Quarks
Schwache Wechselwirkung	Quarks und Leptonen

In der Newtonschen Mechanik und in der Elektrostatik werden Wechselwirkungen von Massen bzw. Ladungen zunächst durch einfache statische Kraftgesetze beschrieben (Newtonsches Gravitationsgesetz, Coulombsches Kraftgesetz). Diese Kraftgesetze haben den Charakter von Fernwirkungskräften, da die Kräfte instantan über eine endliche Entfernung wirken.

In klassischen Feldtheorien (Elektrodynamik, Allgemeine Relativitätstheorie) werden die Kräfte dagegen durch Felder vermittelt (Nahwirkungskräfte), die sich in Raum und Zeit mit endlicher Geschwindigkeit ausbreiten. Nach dem *Einsteinschen Relativitätsprinzip* breiten sich elektromagnetische Wellen im Vakuum in jedem Inertialsystem mit Lichtgeschwindigkeit aus. Die Elektrodynamik genügt dem Einsteinschen Relativitätsprinzip. Tatsächlich sind die Maxwell-Gleichungen *lorentzinvariant* und somit auch im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie gültig.

In Quantenfeldtheorien werden den Feldern Teilchen zugeordnet. Die Kraftwirkung wird durch Teilchenaustausch beschrieben. Die Quantentheorie des elektromagnetischen Feldes wird als Quantenelektrodynamik (QED) bezeichnet. Die QED führt Photonen als Quanten des Strahlungsfeldes ein. Das grundlegende Problem der QED ist die Wechselwirkung von Photonen mit Elektronen und Positronen. Die Wechselwirkung des Elektrons mit seinem eigenen Strahlungsfeld modifiziert z.B. seine Wechselwirkung mit einem äußeren Magnetfeld (anomales magnetisches Moment) oder mit dem elektrischen Feld eines Atomkerns (Lambshift). QED Korrekturen konnten in einigen Fällen mit sehr hoher Genauigkeit berechnet und durch Experimente überprüft werden. Daher gilt die QED heute als eine der am besten bestätigten Theorien der Physik.

Weitere Quantenfeldtheorien sind die Quantenflavordynamik (QFD) der elektroschwachen Wechselwirkung und die Quantenchromodynamik (QCD) der starken Wechselwirkung. In der QFD wird die elektromagnetische und die schwache Wechselwirkung zu einer einheitlichen Theorie der elektroschwachen Wechselwirkung zusammengefasst. QFD und QCD bilden zusammen das Standardmodell der Elementarteilchenphysik. Es ist naheliegend zu vermuten, dass sich weitere Wechselwirkungen in diesem Sinne vereinheitlichen lassen. Am Ende dieser Entwicklung könnte eine einheitliche Feldtheorie aller bekannten fundamentalen Wechselwirkungen der Physik stehen, die auch die starke Wechselwirkung und die Gravitation miteinschließt.

Im Rahmen dieser Vorlesung befassen wir uns mit der klassischen Elektrodynamik, insbesondere mit den Teilgebieten Elektrostatik, Magnetostatik und mit elektromagnetischen Wellen.

# Kapitel 2

## Mathematische Grundlagen

Die Maxwell-Gleichungen sind ein System partieller Differentialgleichungen für Vektorfelder. Die Differentiation und Integration von Vektorfeldern ist Gegenstand der Vektoranalysis. Besondere Bedeutung für die Elektrodynamik haben der *vektorielle Differentialoperator Nabla*, die *Integralsätze von Gauß und Stokes*, sowie der *Helmholtzsche Hauptsatz der Vektoranalysis*. Als Quellen von Vektorfeldern treten oft Ladungsdichten von Punktladungen auf. Diese werden mathematisch durch eine Distribution, die Delta-Funktion, dargestellt.

### 2.1 Skalare, Vektoren und Tensoren

Skalare, Vektoren und Tensoren werden durch das Transformationsverhalten bei Drehungen und Spiegelungen der Koordinatenachsen unterschieden.

#### Orthogonale Transformationen

Drehungen und Spiegelungen können durch eine orthogonale Transformation ausgedrückt werden,

$$x'_i = \sum_k \alpha_{ik} x_k, \quad x_j = \sum_k \alpha_{kj} x'_k. \quad (2.1)$$

Hierbei bezeichnen  $x'_i$  die neuen,  $x_j$  die alten Koordinaten und  $\alpha_{ik}$  eine orthogonale Matrix. Eine Matrix  $\alpha$  heißt orthogonal, falls die Umkehrmatrix gleich der transponierten Matrix ist.

$$\alpha^{-1} = \alpha^T, \quad \alpha \cdot \alpha^T = \alpha^T \cdot \alpha = \mathbf{I}. \quad (2.2)$$

## Summenkonvention

Im folgenden wird die Einsteinsche Summenkonvention verwendet: In Produkten wird über paarweise vorkommende Indizes summiert, ohne dass das Summationszeichen explizit angegeben wird. Die Orthogonalitätsbedingung (2.2) lautet dann z.B.

$$\alpha_{ik}\alpha_{jk} = \alpha_{ki}\alpha_{kj} = \delta_{ij}, \quad (2.3)$$

wobei über  $k$  summiert wird. Die Zeilen einer orthogonalen Matrix sind paarweise orthogonal zueinander, dasselbe gilt für die Spalten.

## Skalare

Im einfachsten Fall sind Skalare Konstanten, wie z.B. die Lichtgeschwindigkeit, die sich auf ein ganzes System beziehen. Es gibt aber auch skalare Größen,  $S(\mathbf{r})$ , deren Werte vom Ort abhängen und die ein skalares Feld bilden. Zum Beispiel kann die Temperatur eines Körpers von Ort zu Ort variieren. Die gemessene Temperaturverteilung ist aber unabhängig vom verwendeten Koordinatensystem. Nach einer Drehung des Koordinatensystems liegt im selben Raumpunkt immer noch dieselbe Temperatur vor. Größen, die invariant sind gegenüber orthogonalen Transformationen werden als Skalare (skalare Felder) bezeichnet,

$$S'(x'_i) = S(x_j). \quad (2.4)$$

## Vektoren

Einen Vektor  $\mathbf{a}$  kann man als eine geradlinige Verschiebung eines Punktes auffassen und graphisch durch einen Verschiebungspfeil darstellen. Vektoren sind durch einen Betrag und eine Richtung festgelegt. Daher ergibt sich bei orthogonalen Transformationen ein ganz bestimmtes Transformationsverhalten.

Die Koordinatendarstellung eines Verschiebungspfeils ist

$$\begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

wobei  $\Delta x_i$  die Koordinatendifferenzen zwischen dem Endpunkt und dem Anfangspunkt der Verschiebung bezeichnen. Bei einer orthogonalen Transformation transformieren sich Koordinatendifferenzen wie die Koordinaten, da es sich um eine lineare Abbildung handelt

$$\Delta x'_i = \alpha_{ik}\Delta x_k. \quad (2.6)$$

Allgemein sind Vektoren definiert als dreikomponentige Größen  $a_i$ , die sich wie die Koordinatendifferenzen transformieren,

$$a'_i = \alpha_{ik} a_k . \quad (2.7)$$

Das Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren ist ein Skalar. Die Invarianz gegenüber orthogonalen Transformationen folgt hier aus dem Transformationsgesetz für die Vektoren,

$$a'_i b'_i = \alpha_{ik} \alpha_{il} a_k b_l = \delta_{kl} a_k b_l = a_k b_k . \quad (2.8)$$

## Tensoren

Allgemeiner definiert man Tensoren  $n$ -ter Stufe als  $n$ -fach indizierte Größen  $T_{ijk\dots}$  mit dem Transformationsverhalten

$$T'_{ijk\dots} = \alpha_{il} \alpha_{im} \alpha_{in} \dots T_{lmn\dots} \quad (2.9)$$

Ein Vektor ist also ein Tensor 1-ter Stufe. Ein Skalar, d.h. eine nichtindizierte invariante Größe, ein Tensor 0-ter Stufe. Einen Tensor 2-ter Stufe erhält man z.B. durch das direkte Produkt zweier Vektoren,  $T_{ij} = a_i b_j$ .

## 2.2 Differentiation von Vektorfeldern

Bei der Differentiation von Feldern ergeben sich zwei Fragestellungen. Erstens muß man klären, wie Funktionen von mehreren unabhängigen Variablen differenziert werden und zweitens welche Ableitungen von Feldern Tensorcharakter haben.

### Ableitung von Funktionen mit mehreren unabhängigen Veränderlichen

Wir betrachten zuerst ein skalares Feld  $f(\mathbf{r})$ . Die Funktion  $f(\mathbf{r})$  ist an der Stelle  $\mathbf{a}$  differenzierbar, falls ihre Änderung in einer Umgebung von  $\mathbf{a}$  durch eine lineare Abbildung approximiert werden kann. In Koordinatendarstellung besitzt diese lineare Abbildung die Form

$$\begin{aligned} df &= f(a_1 + dx_1, a_2 + dx_2, a_3 + dx_3) - f(a_1, a_2, a_3) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3 . \end{aligned} \quad (2.10)$$

Man nennt  $df$  das totale Differential der Funktion  $f$  und

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \left. \frac{df}{dx_1} \right|_{dx_2=0, dx_3=0}$$

die partielle Ableitung von  $f$  nach der Koordinate  $x_1$ . Die partielle Ableitung bezeichnet also die Ableitung nach einer Koordinate  $x_i$  bei festgehaltenen Werten der restlichen Koordinaten. Für partielle Ableitungen gibt es viele unterschiedliche Schreibweisen, z.B. auch

$$\partial_{x_i} f, \quad \partial_i f, \quad f_{x_i}, \quad f_{,i} .$$

Differenziert man die partielle Ableitung nach  $x_i$  noch einmal partiell nach  $x_k$ , so erhält man eine zweite partielle Ableitung. Dabei können  $x_i$  und  $x_k$  gleiche oder verschiedene Koordinaten bezeichnen. Analog definiert man die  $n$ -te partielle Ableitungen,

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n} \cdots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_n}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} f . \quad (2.11)$$

## Nabla-Operator

Partielle Ableitungen besitzen i.a. bei orthogonalen Transformationen keinen Tensorcharakter. Die partielle Ableitung eines skalaren Feldes ist z.B. kein skalares Feld:

$$f'(x', y', z') = f(x, y, z), \quad \text{aber} \quad \partial_{x'} f'(x', y', z') \neq \partial_x f(x, y, z) . \quad (2.12)$$

Hierbei handelt es sich um Ableitungen der Funktion  $f$  im selben Raumpunkt aber in verschiedene Richtungen.

Man kann jedoch die partiellen Ableitungen eines skalaren Feldes als Komponenten eines Vektorfeldes

$$\nabla f = e_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (2.13)$$

zusammenfassen. Da die Funktion  $f$  hier beliebig ist definiert man den Ableitungsoperator Nabla

$$\nabla := e_i \frac{\partial}{\partial x_i} . \quad (2.14)$$

Man beachte, dass über  $i$  summiert wird.

Zum Beweis der Vektoreigenschaft von  $\nabla$  ist zu zeigen, dass sich die partiellen Ableitungen wie Vektorkomponenten transformieren. Dies folgt aus

$$\frac{\partial f'(x'_i)}{\partial x'_i} = \frac{\partial f(x_k)}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial x'_i} = \alpha_{ik} \frac{\partial f(x_k)}{\partial x_k} .$$

mit

$$\frac{\partial x_k}{\partial x'_i} = \frac{\alpha_{jk} x'_j}{\partial x'_i} = \alpha_{jk} \delta_{ij} = \alpha_{ik}$$

Allgemeiner kann man die drei partiellen Ableitungen eines Tensorfeldes n-ter Stufe  $T_{jkl\dots}$  als ein Tensorfeld (n+1)-ter Stufe mit den Komponenten  $\partial_{x_i} T_{jkl\dots}$  auffassen. Auch hier gilt das richtige Transformationsgesetz für die Tensorkomponenten

$$\begin{aligned} \frac{\partial T'_{jkl}(x'_i)}{\partial x'_i} &= \alpha_{jr} \alpha_{ks} \alpha_{lt} \frac{\partial T_{rst}(x_q)}{\partial x_q} \frac{\partial x_q}{\partial x'_i} \\ &= \alpha_{iq} \alpha_{jr} \alpha_{ks} \alpha_{lt} \frac{\partial T_{rst}(x_q)}{\partial x_q} . \end{aligned} \quad (2.15)$$

Bei der Anwendung des Nablaoperators müssen gleichzeitig die Regeln der Differentiation und der Vektormultiplikation beachtet werden. In Verbindung mit der Skalar-Multiplikation mit einem skalaren Feld  $f$  oder dem Skalarprodukt bzw. Vektorprodukt mit einem Vektorfeld  $\mathbf{A}$  erhält man die folgenden Ableitungsoperationen. Sie werden hier koordinatenabhängig formuliert. Ihre koordinatenunabhängige Bedeutung wird durch die nachfolgenden Integralsätze deutlich.

**Gradient:**

$$\nabla f = \sum_i \mathbf{e}_i \frac{\partial f}{\partial x_i} . \quad (2.16)$$

**Divergenz:**

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \sum_i \frac{\partial A_i}{\partial x_i} . \quad (2.17)$$

**Rotation:**

$$\nabla \times \mathbf{A} = \sum_{jk} \frac{\partial A_k}{\partial x_j} \mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial x_j} \mathbf{e}_i \quad (2.18)$$

Die Komponenten des Kreuzproduktes werden durch die Werte des Epsilon-Tensors

$$\epsilon_{ijk} = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k) = \begin{cases} 1, & \text{ijk ist zyklische Vertauschung von 123} \\ -1, & \text{ijk ist antizyklische Vertauschung von 123} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

bestimmt.

**Zweite Ableitungen:**

$$\nabla \cdot (\nabla f) = \Delta f, \quad \Delta f = \sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}, \quad \text{Laplace-Operator}$$

$$\nabla \times (\nabla f) = 0, \quad \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}$$

## Orthogonale Transformationen

### Basisvektoren:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_i &= \sum_k \alpha_{ik} \mathbf{e}_k; & \alpha_{ik} &= \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_k \\ \mathbf{e}_i &= \sum_k \alpha_{ik}^{-1} \mathbf{e}'_k; & \alpha_{ik}^{-1} &= \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}'_k = \alpha_{ki} \end{aligned}$$

### Orthonormalitätsbedingungen:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j &= \sum_k \alpha_{ik} \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}'_j = \sum_k \alpha_{ik} \alpha_{jk} = \delta_{ij} \\ \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j &= \sum_k \alpha_{ki} \mathbf{e}'_k \cdot \mathbf{e}_j = \sum_k \alpha_{ki} \alpha_{kj} = \delta_{ij} \\ \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) &= +1; & \mathbf{e}'_1 \cdot (\mathbf{e}'_2 \times \mathbf{e}'_3) &= \det|\alpha| = \pm 1 \\ &+ : \text{Rechtssystem (Drehung)} \\ &- : \text{Linkssystem (Spiegelung)} \end{aligned}$$

### Skalare:

$$S' = S$$

### Vektoren:

$$\begin{aligned} a'_i &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}'_i = \sum_k \alpha_{ik} \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_k = \sum_k \alpha_{ik} a_k \\ a_i &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i = \sum_k \alpha_{ki} \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}'_k = \sum_k a'_k \alpha_{ki} \end{aligned}$$

### Tensoren:

$$T'_{ij\dots k} = \sum_{mn\dots o} \alpha_{im} \alpha_{jn} \dots \alpha_{ko} T_{mn\dots o}$$

### Nabla:

$$\begin{aligned} x_k &= \sum_i x'_i \alpha_{ik}; & \frac{\partial x_k}{\partial x'_i} &= \alpha_{ik} \\ \frac{\partial}{\partial x'_i} &= \sum_k \frac{\partial x_k}{\partial x'_i} \frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_k \alpha_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k} \end{aligned}$$

## 2.3 Integration von Vektorfeldern

Im folgenden werden der Gradient, die Divergenz und die Rotation koordinatenunabhängig definiert. Aus diesen Definitionen ergeben sich unmittelbar Integralsätze für diese Ableitungsoperationen.

### 2.3.1 Gradient

Die Differenz eines skalaren Feldes  $f(\mathbf{r})$  in zwei Punkten  $\mathbf{r}_1$  und  $\mathbf{r}_2$  ist unabhängig vom Koordinatensystem,

$$\Delta f = f(\mathbf{r}_2) - f(\mathbf{r}_1). \quad (2.19)$$

Für dicht benachbarte Punkte mit den Koordinatendifferenzen  $dx_i$  folgt in linearer Approximation

$$f(x_i + dx_i) - f(x_i) = df = \partial_{x_i} f(x_i) dx_i = \nabla f \cdot d\mathbf{r} \quad (2.20)$$

Das totale Differential kann also als Skalarprodukt zweier Vektoren geschrieben werden. Der Vektor  $\nabla f$  wird als der Gradient der Funktion  $f$  bezeichnet. Die Änderung  $df$  ist am größten, wenn die Spanne  $d\mathbf{r}$  in Richtung des Gradienten weist. Setzt man  $d\mathbf{r} = ds \mathbf{t}$  mit einem Einheitsvektor  $\mathbf{t}$  entlang des Wegelementes, so gilt

$$\mathbf{t} \cdot \nabla f = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta s}. \quad (2.21)$$

Der Gradient wird koordinatenunabhängig durch die Ableitung des Feldes in Richtung seiner stärksten Änderung definiert.

**Kurvenintegral über Gradientenfelder:** Summiert man die infinitesimalen Änderungen der Funktion  $f$  vom Anfangspunkt 1 bis zum Endpunkt 2 einer Kurve, so erhält man das Kurvenintegral

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} d\mathbf{r} \cdot \nabla f = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} df = f(\mathbf{r}_2) - f(\mathbf{r}_1). \quad (2.22)$$

Das Kurvenintegral eines Gradientenfeldes ist gleich der Differenz der Werte des Feldes in den Endpunkten der Kurve. Es ist unabhängig von der Form des Weges zwischen den Endpunkten und es verschwindet für eine geschlossene Kurve.

Wählt man eine Parameterdarstellung  $\mathbf{r}(s)$  der Kurve mit der Weglänge  $s$  als Kurvenparameter, so kann das Linienintegral als gewöhnliches eindimensionales Integral der Tangentialkomponente des Vektorfeldes dargestellt werden

$$f(2) - f(1) = \int_0^s (\mathbf{t} \cdot \nabla f) ds, \quad ds = \sqrt{d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}}, \quad \mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds}. \quad (2.23)$$

Wählt man kartesische Koordinaten, so erfolgt die Integration entlang der Koordinatenachsen,

$$f(2) - f(1) = \int_{x_{i,1}}^{x_{i,2}} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i . \quad (2.24)$$

### 2.3.2 Divergenz

Der Fluß eines Vektorfeldes  $\mathbf{A}$  durch eine Oberfläche  $S$  wird durch das Oberflächenintegral

$$\Phi = \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.25)$$

definiert. Das vektorielle Flächenelement  $d\mathbf{S}$  hat den Betrag des skalaren Flächenelementes und die Richtung der nach außen gerichteten Flächennormalen. Die Bezeichnung Fluß kommt von der Anwendung auf die Strömung einer Flüssigkeit mit Geschwindigkeit  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  und Teilchendichte  $n(\mathbf{r})$ . Setzt man  $\mathbf{A} = n\mathbf{v}$ , so bezeichnet  $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}dt$  die Zahl der Teilchen, die im Zeitintervall  $dt$  durch das Flächenelement  $d\mathbf{S}$  hindurchtreten.

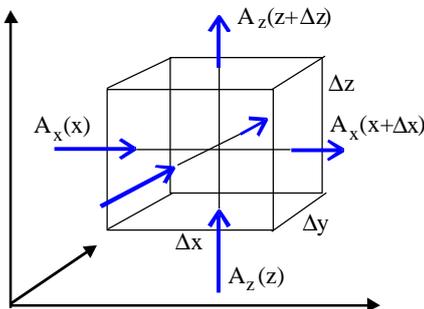


Abbildung 2.1: Fluß von  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  durch die Oberfläche eines Volumenelementes  $\Delta x \Delta y \Delta z$ .

Wir betrachten zunächst den Fluß durch die Oberfläche eines Volumenelementes  $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$  eines kartesischen Koordinatensystems. Die sechs Seitenflächen des Quaders ergeben zum Fluß die Beiträge

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= \Phi_x(x + \Delta x) - \Phi_x(x) + \\ &\quad \Phi_y(y + \Delta y) - \Phi_y(y) + \\ &\quad \Phi_z(z + \Delta z) - \Phi_z(z) \end{aligned} \quad (2.26)$$

wobei

$$\Phi_x = A_x \Delta y \Delta z, \quad \Phi_y = A_y \Delta z \Delta x, \quad \Phi_z = A_z \Delta x \Delta y . \quad (2.27)$$

gesetzt wurde. Entwickelt man für einen festen Index  $f$  (keine Summenkonvention) die Funktion  $\Phi_f(x_f + \Delta x_f)$  bis zur ersten Ordnung in  $\Delta x_f$ ,

$$\Phi_f(x_f + \Delta x_f) = \Phi_f(x_f) + \partial_{x_f} \Phi_f(x_f) \Delta x_f, \quad (2.28)$$

so erhält man aus (2.26) und (2.27) (mit Summenkonvention)

$$\Delta \Phi = \partial_{x_i} \Phi_i \Delta x_i = \partial_{x_i} A_i \Delta V = (\nabla \cdot \mathbf{A}) \Delta V. \quad (2.29)$$

Die Divergenz eines Vektorfeldes kann damit koordinatenunabhängig definiert werden,

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.30)$$

Die Divergenz eines Vektorfeldes ist gleich der Dichte des Flusses durch die Oberfläche eines Volumenelementes.

**Integralsatz von Gauß:** Durch Integration von (2.29) über ein endliches Volumen  $V$  mit der Oberfläche  $S$  folgt der Integralsatz von Gauß,

$$\int_V dV \nabla \cdot \mathbf{A} = \int_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{A}. \quad (2.31)$$

Bei der Integration des Flusses addieren sich die Beiträge von den Flächen der Volumenelemente innerhalb des Volumens zu Null und es bleibt nur noch die Integration über die Oberfläche des Volumens übrig.

**Integralsätze von Green:** Die Integralsätze von Green sind einfache Folgerungen aus dem Gaußschen Satz. Für zwei Funktionen  $\phi(\mathbf{r})$  und  $\psi(\mathbf{r})$  gilt nach der Produktregel,

$$\nabla \cdot (\phi \nabla \psi) = \nabla \phi \cdot \nabla \psi + \phi \Delta \psi \quad (2.32)$$

$$\nabla \cdot (\phi \nabla \psi) - \nabla \cdot (\psi \nabla \phi) = \phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi. \quad (2.33)$$

Integriert man (2.33) über ein Volumen  $V$  so folgt mit (2.31) der *erste Greensche Satz*,

$$\int_V dV (\phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi) = \int_S d\mathbf{S} \cdot (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \quad (2.34)$$

Entsprechend erhält man mit (2.32) den *zweiten Greenschen Satz*,

$$\int_V dV (\phi \Delta \psi) = - \int_V dV (\nabla \phi \cdot \nabla \psi) + \int_S d\mathbf{S} \cdot (\phi \nabla \psi). \quad (2.35)$$

Die Numerierung der Greenschen Sätze ist historisch bedingt. Der erste Greensche Satz wird zur Lösung von Randwertproblemen in Abschnitt (2.6), der zweite Greensche Satz zum Eindeutigkeitsbeweis in Abschnitt (2.8.1) benötigt.

### 2.3.3 Rotation

Die Zirkulation eines Vektorfeldes  $\mathbf{A}$  um eine Fläche  $S$  wird durch das Linienintegral

$$C = \oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \quad (2.36)$$

entlang der geschlossenen Randkurve  $\Gamma$  der Fläche definiert. Das Wegelement  $d\mathbf{r}$  ist so orientiert, dass die Fläche mit Bezug auf die Flächennormale im mathematisch positiven Sinn umlaufen wird (Rechtsschraube).

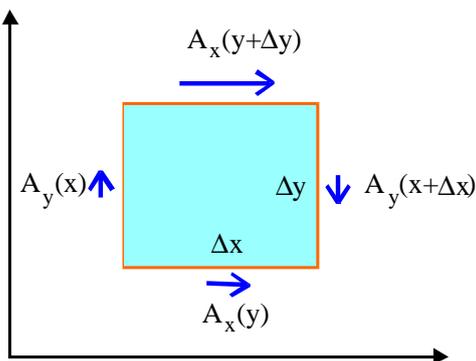


Abbildung 2.2: Zirkulation von  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  entlang dem Umfang eines Flächenelementes  $\Delta x \Delta y$

Wir betrachten zunächst die Zirkulation um ein Flächenelement  $\Delta S = \Delta x \Delta y$ , dessen Normalenrichtung in z-Richtung orientiert sei. Die vier Seiten der Fläche ergeben zur Zirkulation die Beiträge

$$\begin{aligned} \Delta C &= C_x(y) - C_x(y + \Delta y) + \\ & C_y(x + \Delta x) - C_y(x) + \end{aligned} \quad (2.37)$$

mit

$$C_x = A_x \Delta x, \quad C_y = A_y \Delta y. \quad (2.38)$$

Entwickelt man die Funktionen  $C_g(x_f + \Delta x_f)$  bis zur ersten Ordnung in  $\Delta x_f$ ,

$$C_g(x_f + \Delta x_f) = C_g(x_f) + \partial_{x_f} C_g(x_f) \Delta x_f, \quad (2.39)$$

so erhält man aus (2.37) und (2.38)

$$\Delta C = (\partial_x A_y - \partial_y A_x) \Delta S = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} \Delta S . \quad (2.40)$$

Hierbei bezeichnet  $\mathbf{n}$  den Einheitsvektor in Richtung der Flächennormalen. Die koordinatenunabhängige Definition der Rotation ist daher

$$(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta C}{\Delta S} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint \mathbf{dr} \cdot \mathbf{A} . \quad (2.41)$$

Dies entspricht der Flächendichte der Zirkulation um ein Flächenelement. Die Rotation zeigt in Richtung der Flächennormale des Flächenelementes mit der größten Zirkulation.

**Integralsatz von Stokes:** Durch Integration von (2.40) über eine endliche Fläche  $S$  mit der Randkurve  $\Gamma$  folgt der Integralsatz von Stokes,

$$\int_S \mathbf{dS} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \oint_{\Gamma} \mathbf{dr} \cdot \mathbf{A} . \quad (2.42)$$

Bei der Integration der Zirkulation addieren sich die Beiträge von den Seiten der Flächenelemente innerhalb der Fläche zu Null und es bleibt nur noch die Integration über den Rand der Fläche übrig.

## Zusammenfassung

Gradient	Änderung	Kurvenintegral
$\mathbf{t} \cdot \nabla f = \frac{df}{ds}$	$df = f(\mathbf{r} + \mathbf{t}ds) - f(\mathbf{r})$	$f(\mathbf{r}_2) - f(\mathbf{r}_1) = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{dr} \cdot \nabla f$
Divergenz	Fluß	Gaußscher Satz
$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{d\Phi}{dV}$	$d\Phi = \int_{\partial V} \mathbf{A} \cdot \mathbf{dS}$	$\int_{\partial V} \mathbf{dS} \cdot \mathbf{A} = \int_V dV \nabla \cdot \mathbf{A}$
Rotation	Zirkulation	Stokesscher Satz
$\mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \frac{dC}{dS}$	$dC = \oint_{\partial S} \mathbf{dr} \cdot \mathbf{A}$	$\oint_{\partial S} \mathbf{dr} \cdot \mathbf{A} = \int_S \mathbf{dS} \cdot (\nabla \times \mathbf{A})$

## 2.4 Potentiale

Wirbelfreie Vektorfelder können durch ein skalares Potential, quellenfreie Vektorfelder durch ein Vektorpotential dargestellt werden. Dies zeigt man anschaulich durch Anwendung der Integralsätze.

### 2.4.1 Skalares Potential

**Satz:** Sei  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  ein Vektorfeld in einem Gebiet  $G \subseteq \mathbb{R}^3$ . Dann gilt

a) Ist  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  aus einem skalaren Potential  $\phi(\mathbf{r})$  ableitbar, dann ist  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  wirbelfrei:

$$\mathbf{v} = -\nabla\phi \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \mathbf{v} = 0 .$$

b) Ist  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  wirbelfrei und  $G$  einfach zusammenhängend, dann ist  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  aus einem skalaren Potential  $\phi(\mathbf{r})$  ableitbar:

$$\nabla \times \mathbf{v} = 0, \quad G \text{ einfach zusammenhängend} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = -\nabla\phi .$$

**Beweis:**

a) Sei  $\mathbf{v} = -\nabla\Phi$  und  $d\mathbf{S}$  ein beliebiges infinitesimales Flächenelement mit Randkurve  $\Gamma$  an einem Punkt  $\mathbf{r}$  von  $G$ . Dann gilt:

$$d\mathbf{S} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = \oint_{\Gamma} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = - \oint_{\Gamma} d\mathbf{r} \cdot \nabla\Phi = -(\Phi(\mathbf{r}_0) - \Phi(\mathbf{r}_0)) = 0.$$

Hierbei ist  $\mathbf{r}_0$  ein Punkt auf  $\Gamma$ , der zugleich als Anfangs- und Endpunkt des geschlossenen Kurvenintegrals gewählt wird. Der Vektor  $\nabla \times \mathbf{v}$  ist also orthogonal zu dem beliebigen Vektor  $d\mathbf{S}$  und muss daher der Nullvektor sein,  $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ .  $\square$

b) Da das Gebiet einfach zusammenhängend ist, umschließt jede geschlossene Kurve  $\Gamma$  eine Fläche  $S$  in  $G$ , auf der nach Voraussetzung  $\nabla \times \mathbf{v} = 0$  gilt. Daher verschwindet jedes geschlossene Kurvenintegral,

$$\oint_{\Gamma} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = \int_S d\mathbf{S} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = 0 .$$

Unterteilt man die geschlossene Kurve in zwei Teilstücke so gilt

$$\oint_{\Gamma} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = \int_{\Gamma_1} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} + \int_{\Gamma_2} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = 0,$$

oder äquivalent dazu

$$\int_{\Gamma_1} d\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{v} = \int_{-\Gamma_2} d\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{v},$$

wenn das zweite Teilstück rückwärts durchlaufen wird,  $d\mathbf{r}_{1,2} = \pm d\mathbf{r}$ . Das Kurvenintegral ist somit wegunabhängig und kann durch die Randwerte einer neuen Funktion  $\phi$  dargestellt werden

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r}_0) - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}.$$

Hält man den Anfangspunkt  $\mathbf{r}_0$  fest, so ist  $\phi(\mathbf{r})$  eine eindeutige Funktion des Endpunktes  $\mathbf{r}$ . Für das Differential dieser Funktion zu einer beliebigen Spanne  $d\mathbf{r}$  erhält man

$$d\phi(\mathbf{r}) = \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = -\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$$

Wegen  $(\mathbf{v} + \nabla\phi) \cdot d\mathbf{r} = 0$  für einen beliebigen Vektor  $d\mathbf{r}$  ist  $\mathbf{v} + \nabla\phi$  der Nullvektor und damit  $\mathbf{v} = -\nabla\phi$ . Das Potential ist nicht eindeutig durch das Vektorfeld bestimmt, da die Konstante  $\phi(\mathbf{r}_0)$  beliebig gewählt werden kann.  $\square$

## 2.4.2 Vektorpotential

**Satz:** Sei  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  ein Vektorfeld in einem Gebiet  $G \subseteq \mathbb{R}^3$ . Dann gilt

a) Ist  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  aus einem Vektorpotential  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  ableitbar, dann ist  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  quellenfrei:

$$\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

b) Ist  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  quellenfrei und läßt sich jede geschlossene Oberfläche  $S$  in  $G$  auf einen Punkt zusammenziehen, dann ist  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  aus einem Potential  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  ableitbar:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad S \text{ in } G \text{ "zusammenziehbar"} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

**Beweis:**

a) Sei  $\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{A}$  und  $dV$  ein beliebiges infinitesimales Volumenelement mit Oberfläche  $S$  an einem Punkt  $\mathbf{r}$  von  $G$ . Dann gilt:

$$dV(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \int_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{v} = \int_S d\mathbf{S} \cdot \nabla \times \mathbf{A} = \oint_{\partial S} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} = 0.$$

Im letzten Schritt wurde verwendet, daß die Randkurve  $\partial S$  einer geschlossenen Oberfläche die Länge Null besitzt. Eine geschlossene Oberfläche kann man sich als Grenzfall einer offenen Oberfläche vorstellen, deren Rand auf einen Punkt zusammengezogen wird. Da  $dV$  ungleich Null ist gilt  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ .  $\square$

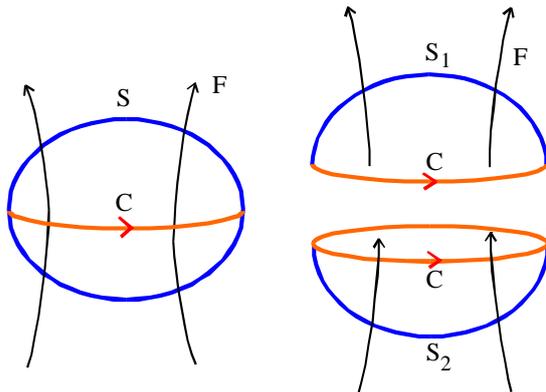


Abbildung 2.3: Fluß durch eine geschlossene Oberfläche  $S$  und durch die beiden von einer geschlossenen Kurve  $C$  berandeten Teilflächen  $S_1$  und  $S_2$ . Für ein quellenfreies Feld  $\mathbf{F}$  hängt der Fluß durch eine Teilfläche nur von der Lage der Randkurve  $C$  ab.

b) Nach Voraussetzung umschließt jede geschlossene Oberfläche  $S$  ein Volumen  $V$  in  $G$  in dem  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  gilt. Daher verschwindet jedes geschlossene Oberflächenintegral,

$$\int_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{v} = \int_V dV \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 .$$

Unterteilt man die geschlossene Oberfläche entlang einer Randkurve  $\Gamma$  in zwei Teilflächen (Abb. 2.3) so gilt

$$\int_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{v} = \int_{S_1} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{v} + \int_{S_2} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{v} = 0 ,$$

oder äquivalent dazu

$$\int_{S_1} d\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{v} = \int_{S_2} d\mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{v} ,$$

wenn  $d\mathbf{S}_{1,2} = \pm d\mathbf{S}$  gesetzt wird. Das Oberflächenintegral ist somit flächenunabhängig und kann als Kurvenintegral eines neuen Vektorfeldes  $\mathbf{A}$  entlang der Randkurve dargestellt werden

$$\oint_{\Gamma} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} = \int_{S_1} d\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{v}$$

Durch Anwendung des Stokesschen Satzes folgt

$$\int_{S_1} d\mathbf{S}_1 \cdot (\mathbf{v} - \nabla \times \mathbf{A}) = 0 .$$

Da die Oberfläche beliebig ist, muss der Integrand verschwinden und man erhält  $\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{A}$ . Das Vektorpotential ist nicht eindeutig durch das Vektorfeld bestimmt, da ein beliebiges Gradientenfeld  $\nabla\phi(\mathbf{r})$  zu  $\mathbf{A}$  addiert werden kann ohne dessen Zirkulation zu ändern.  $\square$

## 2.5 Delta-Funktion

Der Versuch für punktförmige Ladungen eine Dichte zu definieren führt auf die Delta-Funktion. Diese ist jedoch nicht auf Punktladungen beschränkt. In der Mechanik wird die Delta-Funktion z.B. als Impulsfunktion zur Behandlung von Kraftstößen verwendet. In der Quantenmechanik werden mit der Delta-Funktion Skalarprodukte orthonormaler Basisvektoren in Hilberträumen dargestellt. Sie wurde ursprünglich für die Zwecke der Quantenmechanik von Dirac eingeführt. In der Theorie der Distributionen wird die Delta-Funktion als spezielles Funktional mathematisch begründet.

### Ladungsdichte

Sei  $dQ$  die Ladung eines Volumenelementes  $dV$  am Ort  $\mathbf{r}$ . Dann definiert

$$\boxed{\varrho(\mathbf{r}) = \frac{dQ}{dV}} \quad (2.43)$$

die Ladungsdichte am Punkt  $\mathbf{r}$ . Beim Übergang von diskreten zu kontinuierlichen Ladungsverteilungen werden Summen über Ladungen mit Hilfe der Ladungsdichte durch Volumenintegrale ersetzt

$$\sum_i f(\mathbf{r}_i) \quad \rightarrow \quad \int dV \varrho(\mathbf{r}) f(\mathbf{r}) . \quad (2.44)$$

Befindet sich ein Körper mit der Ladungsdichte  $\varrho(\mathbf{r})$  in einem elektrischen Feld  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ , so wirkt auf jedes Volumenelement die Kraft  $d\mathbf{F} = dQ\mathbf{E}$ . Die gesamte auf den Körper wirkende Kraft ist

$$\mathbf{F} = \int dV \varrho(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) . \quad (2.45)$$

## Punktladung

Die Ladungsdichte für eine Punktladung  $q$  am Ort  $\mathbf{a}$  sei

$$\varrho(\mathbf{r}) = q \delta(\mathbf{r} - \mathbf{a}) . \quad (2.46)$$

Hierbei bezeichnet  $\delta(\mathbf{r})$  die Ladungsdichte einer Punktladung  $q = 1$  am Koordinatenursprung  $\mathbf{a} = 0$ . Da es sich um eine Punktladung handelt ist  $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{a}) = 0$  für  $\mathbf{r} \neq \mathbf{a}$ . Am Ort  $\mathbf{r} = \mathbf{a}$  divergiert die Dichte. Diese Divergenz muss so gewählt werden, dass sich die richtige Gesamtkraft auf die Ladung ergibt,

$$\mathbf{F} = \int dV \varrho(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) = q \int dV \delta(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) = q \mathbf{E}(\mathbf{a}) .$$

Durch  $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{a})$  wird dem Vektorfeld  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  der Wert  $\mathbf{E}(\mathbf{a})$  an einer Stelle  $\mathbf{a}$  zugewiesen. Diese Eigenschaft dient zur Definition der Delta-Funktion.

**Definition:** Die Delta-Funktion  $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{a})$  besitzt die Eigenschaft

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{a}) = \begin{cases} 0 & \mathbf{r} \neq \mathbf{a} \\ \infty & \mathbf{r} = \mathbf{a} \end{cases}$$

Das unbestimmte Verhalten an der Stelle  $\mathbf{r} = \mathbf{a}$  wird für eine beliebige Funktion  $f$  durch die Vorschrift

$$f(\mathbf{a}) = \int dV f(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{a}) . \quad (2.47)$$

definiert. Die Schreibweise ist symbolisch zu verstehen. In der Mathematik wird die Delta-Funktion als Funktional eingeführt. Funktionale sind Abbildungen von einem Funktionenraum in den Zahlenkörper. Das Funktional  $\delta_{\mathbf{a}}$  wird durch die Eigenschaft  $\delta_{\mathbf{a}}[f] = f(\mathbf{a})$  definiert. In der Physik ist die Schreibweise als Funktion  $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{a})$  üblich. Entscheidend ist, dass durch die Delta-Funktion einer Funktion  $f$  der Wert  $f(\mathbf{a})$  an der Stelle  $\mathbf{a}$  zugeordnet wird.

## Eigenschaften der Delta-Funktion

**Kartesische Koordinaten:** In kartesischen Koordinaten kann die dreidimensionale Delta-Funktion durch ein Produkt von eindimensionalen Delta-Funktionen dargestellt werden.

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{a}) = \delta(x - a_x) \delta(y - a_y) \delta(z - a_z), \quad dV = dx dy dz$$

**Krummlinige Koordinaten:**

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{a}) = \frac{1}{J} \delta(x' - a'_x) \delta(y' - a'_y) \delta(z' - a'_z), \quad dx dy dz = J dx' dy' dz', \quad J = \det \left| \frac{\partial x_i}{\partial x'_j} \right|$$

**Flächenladungsdichte:** Sei

$$\varrho(x) = \sigma \delta(x - a)$$

Dann ist

$$\sigma = \int dx \varrho(x)$$

die Flächenladungsdichte der Fläche  $x = a$ .

**Limes-Darstellungen:** Setzt man in (2.47)  $f(x) = 1$ , so ergibt sich für das Integral über die Delta-Funktion die Normierungsvorschrift

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(x - a) = 1 .$$

Die Delta-Funktion kann als Grenzfall stetiger Funktionen  $\delta_\epsilon(x - a)$  dargestellt werden, die dieser Normierungsvorschrift genügen und die für  $\epsilon \rightarrow 0$  außerhalb einer Umgebung der Stelle  $a$  verschwinden,

$$\delta_a[f] = f(a) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int dx f(x) \delta_\epsilon(x - a)$$

Der Grenzübergang  $\epsilon \rightarrow 0$  darf jedoch erst nach der Integration ausgeführt werden.

Beispiele:

$$\delta_\epsilon(x) = \begin{cases} 0 & |x| > \frac{\epsilon}{2} \\ \frac{1}{\epsilon} & |x| < \frac{\epsilon}{2} \end{cases}$$

$$\delta_\epsilon(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2}$$

$$\delta_\epsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon}} e^{-\frac{x^2}{2\epsilon^2}}$$

**Fourierdarstellung:** Die Fourierdarstellung einer Funktion  $f(x)$  mit der Fouriertransformierten  $\tilde{f}(k)$  wird definiert durch

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \tilde{f}(k) e^{ikx}$$

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) e^{-ikx}$$

Wendet man diese Definition auf die Delta-Funktion an, so erhält man die Darstellung,

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ikx} \quad (2.48)$$

mit der Fouriertransformierten  $\tilde{\delta}(k) = 1$ .

**Substitutionsregeln:** Durch Substitution der Integrationsvariablen zeigt man folgende Regeln

$$\begin{aligned} \delta(-x) &= \delta(x) \\ \delta(ax) &= \frac{1}{|a|} \delta(x) \\ \delta(f(x)) &= \sum_i \frac{1}{|f'(x_i)|} \delta(x - x_i), \quad f(x_i) = 0, \quad f'(x_i) \neq 0 \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet  $f(x)$  eine Funktion die nur einfache Nullstellen an den Punkten  $x = x_i$  besitzt.

**Ableitungen der Delta-Funktion:** Ableitungen der Delta-Funktion können durch partielle Integration auf die auszuwertende Funktion übertragen werden:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \delta^{(n)}(x) = (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} dx f^{(n)}(x) \delta(x) = (-1)^n f^{(n)}(a) .$$

**Differentialgleichungen mit der Delta-Funktion:** Differentialgleichungen, die die Delta-Funktion in einem Koeffizienten oder als Inhomogenität enthalten, können abschnittsweise gelöst werden. Man sucht zunächst die Lösung in den Intervallen, in denen die Delta-Funktion verschwindet. Danach leitet man Sprungbedingungen für die Lösung an den Intervallgrenzen her.

1. Beispiel: Gesucht sei die Lösung  $y(x)$  des Anfangswertproblems.

$$\frac{dy}{dx} = \delta(x), \quad y(-\infty) = 0 .$$

Für  $x \neq 0$  gilt  $\frac{dy}{dx} = 0$ . Mit der Anfangsbedingung  $y(-\infty) = 0$  und einer Konstante  $C$  lautet die allgemeine Lösung

$$y = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ C & x > 0 \end{cases} .$$

Da  $\delta(x)$  an der Stelle  $x = 0$  nicht definiert ist, kann man dies auch von  $y(x)$  nicht erwarten. Es kann lediglich ein Sprungverhalten an dieser Stelle abgeleitet werden.

Integriert man die obige Gleichung von  $-\epsilon$  nach  $+\epsilon$ , so erhält man für  $\epsilon \rightarrow 0$ ,

$$y(0+) - y(0-) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} dx \delta(x) = 1$$

Die Delta-Funktion in der Ableitung bewirkt also einen Sprung der Höhe 1 in der Stammfunktion. Das Ergebnis ist

$$y = \Theta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

wobei  $\Theta(x)$  als Theta-Funktion bezeichnet wird.

2. Beispiel: Gesucht ist die radialsymmetrische Lösung  $G(r)$  der Gleichung

$$\Delta G(r) = \delta(r), \quad \lim_{r \rightarrow \infty} G(r) = 0 .$$

Für  $r \neq 0$  lautet die Gleichung

$$\frac{1}{r^2} \partial_r r^2 \partial_r G(r) = 0 .$$

Sie besitzt die allgemeine Lösung

$$G(r) = \frac{A}{r} + B \tag{2.49}$$

mit beliebigen Integrationskonstanten  $A$  und  $B$ . Wegen der Randbedingung  $G(\infty) = 0$  muss  $B = 0$  gewählt werden. Die Konstante  $A$  wird durch das Verhalten im Ursprung bestimmt. Integriert man die Gleichung über eine Kugel um den Koordinatenursprung mit Volumen  $V$ , Oberfläche  $S$  und beliebig kleinem Radius, so folgt mit dem Gaußschen Satz

$$\int_V dV \Delta G = \int_V dV \nabla \cdot \nabla G = \int_S dS \mathbf{e}_r \cdot \nabla G = 1 .$$

Die Delta-Funktion bewirkt hier einen Fluß von  $\nabla G$  aus dem Ursprung von der Größe 1. Dies liefert für  $A$  die Bestimmungsgleichung

$$4\pi r^2 \left( -\frac{A}{r^2} \right) = -4\pi A = 1, \quad A = -\frac{1}{4\pi} .$$

Damit erhält man das Ergebnis

$$G(r) = -\frac{1}{4\pi r} . \tag{2.50}$$

Durch eine Verschiebung des Koordinatenursprungs erhält man die allgemeinere Form,

$$\Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (2.51)$$

Diese Darstellung der Delta-Funktion ist für die Lösung von Randwertproblemen in der Elektrostatik von besonderer Bedeutung. Lösungen von Differentialgleichungen, deren Quellterm die Delta-Funktion ist, werden als Green-Funktionen bezeichnet.

## 2.6 Wirbelfreie Vektorfelder

Sei  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  ein wirbelfreies Vektorfeld mit einer Quelledichte  $s(\mathbf{r})$  in einem einfach zusammenhängenden Gebiet  $G$  mit Oberfläche  $S$ :

$$\nabla \times \mathbf{v} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = s, \quad \mathbf{r} \text{ in } G. \quad (2.52)$$

Da  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  wirbelfrei ist, kann es nach Abschnitt (2.4.1) aus einem skalaren Potential  $\phi$  abgeleitet werden und es gilt

$$\mathbf{v} = -\nabla\phi, \quad \Delta\phi = -s, \quad \mathbf{r} \text{ in } G. \quad (2.53)$$

### Randwertprobleme

Auf dem Rand des Gebietes können noch Randbedingungen vorgegeben werden. Man unterscheidet die folgenden Randwertprobleme:

a) Unendliches Gebiet: Die Quelledichte  $s(\mathbf{r})$  soll im Unendlichen hinreichend schnell abfallen, so daß das Potential asymptotisch mindestens wie  $r^{-1}$  abfällt:

$$s(\mathbf{r}) \rightarrow 0, \quad \phi = O(r^{-1}), \quad r \rightarrow \infty.$$

b) Endliches Gebiet mit Dirichlet-Randbedingung: Auf  $S$  ist  $\phi$  vorgegeben:

$$\phi = f(\mathbf{r}) \quad \mathbf{r} \text{ auf } S. \quad (2.54)$$

c) Endliches Gebiet mit Neumann-Randbedingung: Auf  $S$  ist die Ableitung von  $\phi$  in Richtung der Flächennormale  $\mathbf{n}$  vorgegeben:

$$\partial_n \phi = \mathbf{n} \cdot \nabla \phi = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = g(\mathbf{r}) \quad \mathbf{r} \text{ auf } S. \quad (2.55)$$

Mit Hilfe des ersten Greenschen Satzes (2.34) und der Green-Funktion kann eine Integraldarstellung des Potentials durch seine Quellen und Randwerte angegeben werden.

## Integraldarstellungen

Ersetzt man im ersten Greenschen Satz (2.34) die Integrationsvariable  $\mathbf{r}$  durch  $\mathbf{r}'$  und die beliebigen Funktionen  $\phi$  und  $\psi$  durch die Lösungen der Gleichungen

$$\Delta' \phi' = -s', \quad \Delta' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

so folgt

$$\begin{aligned} \int d^3 r' \phi' \Delta' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Delta' \phi' &= \int dS' \phi' \partial_{n'} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \partial_{n'} \phi' \\ \int d^3 r' \phi' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') s' &= \int dS' \phi' \partial_{n'} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \partial_{n'} \phi' . \end{aligned}$$

Mit der Eigenschaft (2.47) der Delta-Funktion erhält man,

$$\phi(\mathbf{r}) = - \int d^3 r' s'(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \int dS' \phi' \partial_{n'} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \partial_{n'} \phi' . \quad (2.56)$$

a) Für den unendlichen Raum wird die Green-Funktion durch (2.51) definiert. Die Green-Funktion und das Potential fallen mindestens wie  $r^{-1}$ , der Integrand des Oberflächenintegrals wie  $r^{-3}$  ab. Daher verschwindet das Oberflächenintegral und man erhält

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3 r' \frac{s(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} , \quad (2.57)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = -\nabla \phi = \frac{1}{4\pi} \int d^3 r' \frac{s(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} . \quad (2.58)$$

Für diese zunächst formale Darstellung muß die Konvergenz noch nachgewiesen werden. Setzt man voraus, dass die Quelledichte nur in einem endlichen Raumbereich ungleich Null ist, so ist der Integrationsbereich endlich. Dann ist nur die Konvergenz in dem singulären Punkt  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$  nachzuweisen, wenn das Potential innerhalb der Quellenverteilung ausgewertet wird. Durch die Substitution  $\mathbf{u} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$  und dem Übergang zu Kugelkoordinaten mit Radius  $u$  und Raumwinkel  $\Omega$  folgt,

$$\phi = \int d\Omega \int du u^2 \frac{s(\mathbf{r} - \mathbf{u})}{u} = \int d\Omega \int du u s(\mathbf{r} - \mathbf{u}) .$$

Die Stelle  $u = 0$  ist nur scheinbar singulär und das Integral existiert auch in diesem Fall. Entsprechend zeigt man auch die Konvergenz des Ausdruckes für  $\mathbf{v}$ .

Ist die Ladungsdichte auf ein endliches Raumgebiet beschränkt, so gilt

$$\phi \rightarrow \frac{1}{4\pi r} \int dV' s(\mathbf{r}'), \quad \text{für } r \rightarrow \infty.$$

Das Potential fällt wie  $r^{-1}$  ab. Damit ist diese Voraussetzung nachträglich verifiziert.

b) Für ein endliches Gebiet mit Dirichlet-Randbedingungen bestimmt man die Green-Funktion als Lösung des Randwertproblems,

$$\begin{aligned} \Delta' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), & \mathbf{r}' \text{ in } G, \\ G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= 0, & \mathbf{r}' \text{ auf } \partial G. \end{aligned}$$

Die Green-Funktion hängt jetzt vom Gebiet ab. Das Dirichlet-Randwertproblem (2.54) besitzt damit nach (2.56) die Lösung

$$\phi(\mathbf{r}) = - \int d^3r' s'(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \int dS' f(\mathbf{r}') \partial_n' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'). \quad (2.59)$$

c) Für ein endliches Gebiet mit Neumann-Randbedingungen bestimmt man die Green-Funktion als Lösung des Randwertproblems,

$$\begin{aligned} \Delta' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), & \mathbf{r}' \text{ in } G, \\ \partial_n G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{1}{S}, & \mathbf{r}' \text{ auf } \partial G. \end{aligned}$$

Die Normalenableitung wird hierbei als konstant angenommen, wobei die Konstante so gewählt wird, daß der Fluß von  $\nabla' G$  durch die Oberfläche  $S$  gleich 1 ist. Das Neumann-Randwertproblem (2.55) besitzt damit nach (2.56) die Lösung

$$\phi(\mathbf{r}) = - \int d^3r' s'(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \phi_0 - \int dS' g(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (2.60)$$

mit einer Konstanten

$$\phi_0 = \frac{1}{S} \int dS' \phi'.$$

Das Vektorfeld  $\mathbf{v} = -\nabla\phi$  ist unabhängig von dieser Konstanten. Es wird eindeutig durch die Quellen  $s$  und die Randwerte  $g$  bestimmt.

## 2.7 Quellenfreie Vektorfelder

Sei  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  ein im gesamten unendlichen Raum quellenfreies Vektorfeld mit einer Wirbelichte  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r})$ :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}. \quad (2.61)$$

Da  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  quellenfrei ist, kann es nach Abschnitt (2.4.1) aus einem Vektorpotential  $\mathbf{A}$  abgeleitet werden und es gilt

$$\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} = \boldsymbol{\omega}. \quad (2.62)$$

Wählt man die Eichung  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ , so vereinfacht sich diese Gleichung zu,

$$\Delta \mathbf{A} = -\boldsymbol{\omega}. \quad (2.63)$$

Jede Komponente von  $\mathbf{A}$  erfüllt dieselbe Gleichung, wie das skalare Potential in (2.52). Wir können daher die Lösung dieser Gleichung übernehmen und erhalten für das Vektorpotential eines quellenfreien Feldes die Darstellung

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi} \int d^3r' \frac{\boldsymbol{\omega}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (2.64)$$

Diese Lösung erfüllt wegen  $\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$  bereits die Eichung von  $\mathbf{A}$ ,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{4\pi} \int d^3r' \boldsymbol{\omega}' \cdot \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= \frac{-1}{4\pi} \int d^3r' \boldsymbol{\omega}' \cdot \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= \frac{1}{4\pi} \int d^3r' \frac{\nabla' \cdot \boldsymbol{\omega}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = 0. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Das zugehörige Vektorfeld ergibt sich durch Bildung der Rotation,

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{4\pi} \int d^3r' \nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \times \boldsymbol{\omega}' \\ &= \frac{1}{4\pi} \int d^3r' \frac{\boldsymbol{\omega}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \end{aligned} \quad (2.66)$$

## 2.8 Allgemeine Vektorfelder

Sei  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  ein Vektorfeld, dessen Quellen  $s(\mathbf{r})$  und Wirbel  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r})$  durch

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = s, \quad \nabla \times \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}, \quad (2.67)$$

vorgegeben sind.

### 2.8.1 Eindeutigkeitsatz

Das Vektorfeld  $\mathbf{v}$  wird durch (2.67) und eine der folgenden Randbedingungen eindeutig bestimmt:

- a) Unendlich ausgedehnter Raum mit  $v = O(r^{-2})$  für  $r \rightarrow \infty$ .
- b) Auf dem Rand des Gebietes ist die Normalkomponente  $v_n$  von  $\mathbf{v}$  vorgegeben.
- c) Auf dem Rand des Gebietes ist die Tangentialkomponente  $v_t$  von  $\mathbf{v}$  vorgegeben.

**Beweis:** Seien  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{v}'$  zwei Lösungen des Randwertproblems. Dann genügt  $\delta\mathbf{v} = \mathbf{v}' - \mathbf{v}$  den Gleichungen  $\nabla \cdot \delta\mathbf{v} = 0$ ,  $\nabla \times \delta\mathbf{v} = 0$ , mit den Randbedingungen

- a)  $\delta v = O(r^{-2})$ ,
- b)  $\delta v_n = 0$ ,
- c)  $\delta v_t = 0$ .

Da  $\delta\mathbf{v}$  wirbelfrei ist, kann  $\delta\mathbf{v} = -\nabla\psi$  gesetzt werden. Da  $\delta\mathbf{v}$  auch quellenfrei ist genügt das Potential der Laplace-Gleichung

$$\Delta\psi = 0. \quad (2.68)$$

Setzt man im zweiten Greenschen Satz (2.35)  $\phi = \psi$ , so folgt

$$\int \psi \Delta\psi = - \int dV \delta v^2 + \int dS \psi \delta v_n. \quad (2.69)$$

Wegen (2.68) verschwindet die linke Seite. Aufgrund der Randbedingungen verschwindet das Oberflächenintegral:

- a) Mit  $\psi \sim r^{-1}$ ,  $\delta v_n \sim r^{-2}$  ergibt sich für das Oberflächenintegral die Abschätzung  $\sim r^{-1}$ . Die Eindeutigkeit der Lösung läßt sich auch unter der wesentlich schwächeren Voraussetzung zeigen, daß das Feld höchstens wie  $\ln r$  ansteigt und an einer Stelle einen vorgegebenen Wert besitzt (siehe S. Großmann, S.299).
- b) Für  $\delta v_n = 0$  verschwindet das Oberflächenintegral, da der Integrand Null ist.
- c) Für  $\delta v_t = 0$  ist  $\psi$  auf dem Rand konstant und es gilt

$$\int d\mathbf{S} \cdot (\psi \delta\mathbf{v}) = \text{const} \int d\mathbf{S} \cdot \delta\mathbf{v} = \text{const} \int dV \nabla \cdot \delta\mathbf{v} = 0. \quad (2.70)$$

In allen drei Fällen gilt wegen (2.69)

$$\int dV \delta v^2 = 0 .$$

Da der Integrand nicht negativ ist, muß  $\delta v = 0$  sein. Daraus folgt die Eindeutigkeit der Lösung,  $\mathbf{v} = \mathbf{v}'$ .  $\square$

## 2.8.2 Fundamentalsatz der Vektoranalysis

Für ein Vektorfeld  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  seien die Quellen und Wirbel gemäß (2.67) vorgegeben. Als hinreichende Voraussetzung gelte  $s \rightarrow 0$ ,  $\boldsymbol{\omega} \rightarrow 0$  und  $v = O(r^{-2})$  für  $r \rightarrow \infty$ . Dann läßt sich das Vektorfeld durch seine Quellen und Wirbel in folgender Form darstellen

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_s + \mathbf{v}_\omega \quad (2.71)$$

mit

$$\mathbf{v}_s = \frac{1}{4\pi} \int d^3r' \frac{s(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (2.72)$$

und

$$\mathbf{v}_\omega = \frac{1}{4\pi} \int d^3r' \frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} . \quad (2.73)$$

Der Fundamentalsatz gilt in leicht modifizierter Form auch unter schwächeren Voraussetzungen (siehe S. Großmann). Er wird auch als Hauptsatz von Helmholtz bezeichnet. Eine frühe Formulierung geht auf Stokes zurück.

**Beweis:** Die Zerlegungseigenschaft (2.71) ergibt sich, wenn man  $\mathbf{v}_s$  durch die Quellen und  $\mathbf{v}_\omega$  durch die Wirbel von  $\mathbf{v}$  definiert,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v}_s &= \varrho, & \nabla \times \mathbf{v}_s &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{v}_\omega &= 0, & \nabla \times \mathbf{v}_\omega &= \boldsymbol{\omega}. \end{aligned}$$

Die Summe der Felder  $\mathbf{v}_s + \mathbf{v}_\omega$  genügt den Bestimmungsgleichungen (2.67) des Vektorfeldes  $\mathbf{v}$ . Die Darstellung von  $\mathbf{v}_s$  folgt unmittelbar aus (2.58), die von  $\mathbf{v}_\omega$  aus (2.66).  $\square$

## 2.9 Taylor-Reihe einer Funktion mit mehreren unabhängigen Variablen

Sei  $f = f(x_i)$  eine hinreichend oft differenzierbare Funktion der unabhängigen Variablen  $x_i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$ . Für  $x_i \rightarrow 0$  kann die Funktion nach Potenzen der Variablen

$x_i$  entwickelt werden. Bis zur quadratischen Ordnung lautet diese Entwicklung

$$f(x_i) = f(0) + \sum_i x_i \frac{\partial f(0)}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} x_i x_j \frac{\partial^2 f(0)}{\partial x_i \partial x_j} + O(x_i^3) . \quad (2.74)$$

**Beweis:** Eine allgemeine Entwicklung der Funktion  $f$  nach Potenzen von  $x_i$  lautet,

$$f(x_i) = c + \sum_i c_i x_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} c_{ij} x_i x_j + O(x_i^3) . \quad (2.75)$$

Die Entwicklungskoeffizienten  $c$ ,  $c_i$ ,  $c_{ij}$  stellen noch zu bestimmende Konstanten dar. Die Matrix  $c_{ij}$  kann ohne Einschränkung symmetrisch ( $c_{ij} = c_{ji}$ ) gewählt werden, da der antisymmetrische Anteil bei der Summation über die symmetrische Matrix  $x_i x_j$  verschwindet. Die ersten und zweiten partiellen Ableitungen von (2.75) sind

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_k} &= c_k + \frac{1}{2} \sum_j c_{kj} x_j + c_{jk} x_j + O(x_i^2) = c_k + \sum_j c_{kj} x_j + O(x_i^2) , \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} &= c_{ki} + O(x_i) . \end{aligned} \quad (2.76)$$

Aus (2.75) und (2.76) ergeben sich die Entwicklungskoeffizienten

$$c = f(0) , \quad c_i = \frac{\partial f(0)}{\partial x_i} , \quad c_{ij} = \frac{\partial^2 f(0)}{\partial x_i \partial x_j} \quad (2.77)$$

in Übereinstimmung mit der Reihenentwicklung (2.74).

# Kapitel 3

## Elektrostatik

Von ruhenden Ladungen werden zeitunabhängige elektrische Felder hervorgerufen. Die Grundgesetze der Elektrostatik bestimmen das elektrische Feld zu einer beliebigen vorgegebenen Ladungsverteilung. Für makroskopische Körper sind zusätzliche Annahmen erforderlich, da die genaue Verteilung der Ladungen hier nicht bekannt ist. Man unterscheidet hierbei grundsätzlich zwischen der Elektrostatik von Leitern und der von Nichtleitern. Letztere werden auch als Dielektrika bezeichnet.

### 3.1 Grundgleichungen der Elektrostatik

#### Gültigkeitsbereich

Der Gültigkeitsbereich der Elektrostatik wird im engeren Sinne durch folgende Bedingungen definiert:

- a) Keine Magnetfelder ( $\mathbf{B} = 0$ ),
- b) Statische elektrische Felder ( $\partial_t \mathbf{E} = 0$ ) und ruhende Ladungen ( $\mathbf{j} = 0$ ).

Allgemeiner wird der Ausdruck elektrostatisch als Abgrenzung zu elektromagnetisch verstanden. Dann ist der magnetfeldfreie Fall a) ohne die Zusatzbedingung b) gemeint. In diesem erweiterten Sinn können elektrostatische Felder zeitabhängig sein und durch Ströme oder Ladungsdichteänderungen erzeugt werden. Die wesentliche Einschränkung ist nur, daß sie wirbelfrei sind. Wir beschränken uns hier auf die Elektrostatik zeitunabhängiger Felder.

#### Coulomb-Gesetz

Um die Quellen und Wirbel des elektrostatischen Feldes physikalisch zu bestimmen, gehen wir vom empirischen Kraftgesetz für Punktladungen aus. Auf eine Ladung  $q_i$  am Ort  $\mathbf{r}_i$  wird durch eine Ladung  $q_j$  am Ort  $\mathbf{r}_j$  die Kraft,

$$\mathbf{F}_{ij} = q_i q_j \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3}, \quad (\text{Coulomb, 1785}). \quad (3.1)$$

ausgeübt. Die Coulomb-Kraft ist entlang der Verbindungslinie der Ladungen gerichtet und umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstandes zwischen den Ladungen. Ladungen gleichen Vorzeichens stoßen sich ab, Ladungen entgegengesetzten Vorzeichens ziehen sich an:

$$\text{i) } F_{ij} \propto q_i q_j, \quad \text{ii) } F_{ij} \propto 1/r_{ij}^2, \quad \text{iii) } \mathbf{F}_{ij} \parallel q_i q_j \mathbf{r}_{ij}, \quad \text{iv) } \mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}.$$

Im Gaußschen Maßsystem wird das Coulomb-Gesetz zur Definition der Einheit der Ladung verwendet. Die elektrostatische Einheit (ESE) wird definiert durch zwei gleiche Ladungen, die im Abstand von 1 cm die Kraft 1 dyn aufeinander ausüben,

$$1 \text{ dyn} = \frac{1 \text{ ESE}^2}{1 \text{ cm}^2}, \quad 1 \text{ ESE} = 1 \frac{\text{cm}^{3/2} \text{g}^{1/2}}{\text{s}}.$$

Für die Elementarladung erhält man den Wert

$$e = 4.803 \cdot 10^{-10} \text{ ESE}.$$

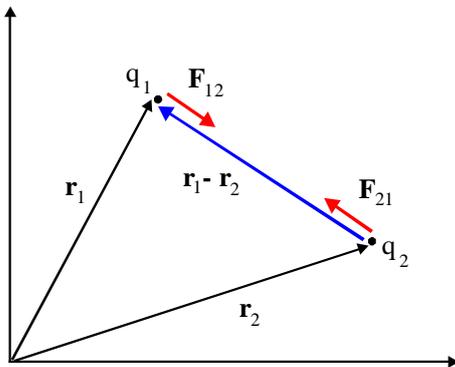


Abbildung 3.1: Richtung der Coulomb-Kraft zwischen zwei Ladungen  $q_1, q_2$  mit entgegengesetztem Vorzeichen.

### 3.1.1 Feld einer Punktladung

Ersetzt man im Coulomb-Gesetz die Ladung  $q_i$  durch eine Probeladung  $q_i = 1$  an einem beliebigen Ort  $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}$ , so erhält man das von der Ladung  $q_j$  erzeugte

elektrische Feld,

$$\mathbf{E}_j(\mathbf{r}) = q_j \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^3}. \quad (3.2)$$

Das elektrische Feld (3.2) ist aus einem Potential ableitbar, denn es gilt  $\mathbf{E}_j(\mathbf{r}) = -\nabla\phi_j(\mathbf{r})$  mit

$$\phi_j(\mathbf{r}) = \frac{q_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|}. \quad (3.3)$$

### 3.1.2 Feld eines Systems von Punktladungen

Wirken auf eine Probeladung die Kräfte mehrerer Punktladungen ein, so addieren sich die elektrischen Felder vektoriell,

$$\mathbf{E} = \sum_j \mathbf{E}_j = \sum_j q_j \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^3}. \quad (3.4)$$

Dieses Gesetz wird als Superpositionsprinzip bezeichnet. Zusammen mit dem Coulomb-Gesetz bestimmt es das elektrostatische Feld einer beliebigen vorgegebenen Anordnung von Ladungen. Da jeder Summand aus einem Potential ableitbar ist, gilt dies auch für das resultierende Feld,  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$  mit

$$\phi = \sum_j \phi_j = \sum_j \frac{q_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|}. \quad (3.5)$$

### 3.1.3 Feldgleichungen

Obwohl elektrostatische Felder im Prinzip durch das Coulomb-Gesetz und das Superpositionsprinzip bestimmt werden, erweist sich dieser Weg in allgemeineren Fällen als kompliziert. Eine allgemeine Methode elektromagnetische Felder zu bestimmen geht von den Feldgleichungen aus. Diese sind z.B. auch dann anwendbar, wenn (i) an das Feld Randbedingungen gestellt werden, (ii) die Ladungsdichten vom Feld abhängen und (iii) wenn Retardierungseffekte aufgrund der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit des elektromagnetischen Feldes berücksichtigt werden müssen.

### Differentielle Form

Statische Vektorfelder können durch die Angabe ihrer Quellen und Wirbel festgelegt werden. Das elektrostatische Feld ist ein wirbelfreies Vektorfeld, dessen Queldichte durch die Ladungsdichte  $\varrho(\mathbf{r})$  bestimmt wird. Die entsprechenden Feldgleichungen der Elektrostatik lauten

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\varrho. \quad (3.6)$$

Als wirbelfreies Vektorfeld kann  $\mathbf{E}$  aus einem Potential abgeleitet werden. Daraus folgt die Potentialgleichung

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi, \quad \Delta\phi = -4\pi\varrho. \quad (3.7)$$

Die homogene Gleichung ( $\varrho(\mathbf{r}) = 0$ ) wird als Laplace-Gleichung, die inhomogene ( $\varrho(\mathbf{r}) \neq 0$ ) als Poisson-Gleichung bezeichnet. Zusammen mit geeigneten Randbedingungen definieren die Feldgleichungen das elektrostatische Feld einer vorgegebenen Ladungsdichte.

Die bekannten Gesetze für Punktladungen genügen den Feldgleichungen. Da das von den Punktladungen erzeugte Feld (3.4) aus einem Potential ableitbar ist gilt:  $\nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times (-\nabla\phi) = 0$ . Die Queldichte des Feldes erhält man mit Hilfe von (3.5) und (2.51)

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\Delta\phi = \sum_j q_j \Delta \left( \frac{-1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|} \right) = \sum_j q_j 4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) = 4\pi\varrho.$$

mit der Ladungsdichte

$$\varrho = \sum_j q_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j).$$

□

### Integrale Form

Die Aussage der differentiellen Feldgleichungen wird durch deren integrale Form besonders anschaulich. Die Zirkulation des Feldes entlang jeder geschlossenen Kurve, die eine Fläche  $S$  berandet, verschwindet

$$\oint d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} = \int d\mathbf{S} \cdot \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (3.8)$$

Der Fluß des elektrischen Feldes durch eine beliebige geschlossene Oberfläche  $S$  eines Volumens  $V$  ist das  $4\pi$ -fache der eingeschlossenen Ladung

$$\int_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{E} = \int_V dV \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi Q, \quad Q = \int_V dV \varrho. \quad (3.9)$$

### Integraldarstellung

Für eine vorgegebene im endlichen lokalisierte Ladungsverteilung  $\varrho$  kann die Lösung der Feldgleichungen nach (2.57) als Integraldarstellung angegeben werden. Ersetzt man dort die Quelledichte  $s$  durch  $s = 4\pi\varrho$  so folgt

$$\phi(\mathbf{r}) = \int d^3r' \frac{\varrho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (3.10)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi = \int d^3r' \frac{\varrho(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (3.11)$$

Durch diese Darstellung wird das Superpositionsprinzip für Punktladungen (3.4), (3.5) auf stetige Ladungsdichten verallgemeinert.

## 3.2 Kraftwirkung elektrostatischer Felder

Die Kraftwirkung elektrostatischer Felder auf Punktladungen ist durch (1.2) und (3.1) definiert. Das Kraftgesetz für Punktladungen kann auf stetige Ladungsdichten verallgemeinert werden. Die Kraftwirkung kann sowohl als Volumenintegral als auch als Oberflächenintegral dargestellt werden.

### 3.2.1 Volumenkräfte

#### Kraftdichte

Die Kraft auf die Ladung  $dQ = \varrho dV$  eines Volumenelements  $dV$  ist  $d\mathbf{F} = dQ \mathbf{E} = dV \mathbf{f}$  mit der Kraftdichte

$$\mathbf{f} = \varrho \mathbf{E}. \quad (3.12)$$

### Gesamtkraft

Durch Integration über ein beliebiges Volumen  $V$  erhält man die Gesamtkraft auf die in  $V$  eingeschlossene Ladung,

$$\mathbf{F} = \int_V dV \mathbf{f}(\mathbf{r}) = \int_V dV \varrho(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}). \quad (3.13)$$

Das elektrische Feld kann in ein externes Feld und ein Eigenfeld aufgeteilt werden, wobei das externe Feld  $\mathbf{E}_{ext}$  von den Ladungen außerhalb von  $V$  und das Eigenfeld  $\mathbf{E}_s$  von den Ladungen innerhalb von  $V$  erzeugt wird,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{ext} + \mathbf{E}_s, \quad \mathbf{E}_s = \int_V dV' \varrho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}.$$

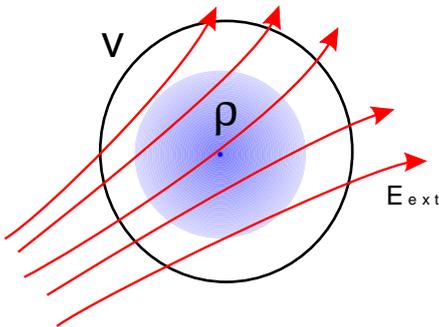


Abbildung 3.2: Die Kraft auf die Ladung im Volumen  $V$  kann als Integral über die Kraftdichte  $\varrho \mathbf{E}_{ext}$  im externen Feld berechnet werden, da die Ladung in  $V$  auf sich selbst keine resultierende Gesamtkraft ausübt.

Das Eigenfeld übt keine resultierende Kraft auf die Ladung in  $V$  aus:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_s &= \int_V dV \varrho(\mathbf{r}) \mathbf{E}_s(\mathbf{r}) \\ &= \int_V dV \int_V dV' \varrho(\mathbf{r}) \varrho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\ &= \int dV' \int dV \varrho(\mathbf{r}') \varrho(\mathbf{r}) \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3} \\ &= -\mathbf{F}_s. \end{aligned}$$

Im ersten Schritt wurde das Feld der Ladungsverteilung eingesetzt, im zweiten wurden die Integrationsvariablen umbenannt:  $\mathbf{r} \leftrightarrow \mathbf{r}'$ . Aus  $\mathbf{F}_s = -\mathbf{F}_s$  folgt  $\mathbf{F}_s = 0$ . Daher kann man die Volumenkraft (3.13) auch als Kraft auf die Ladungsdichte im externen Feld berechnen (Abb.3.2)

$$\mathbf{F} = \int_V dV \varrho(\mathbf{r}) \mathbf{E}_{ext}(\mathbf{r}) . \quad (3.14)$$

Entsprechend erhält man für das Gesamtdrehmoment um den Koordinatenursprung auf die Ladungen in  $V$  den Ausdruck

$$\mathbf{N} = \int_V dV \mathbf{r} \times (\varrho(\mathbf{r}) \mathbf{E}_{ext}(\mathbf{r})) . \quad (3.15)$$

### 3.2.2 Oberflächenkräfte

Die Volumenkraft (3.13) kann alternativ als Oberflächenkraft

$$\mathbf{F} = \int_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{T} \quad (3.16)$$

über die Oberfläche  $S$  von  $V$  berechnet werden. Man bezeichnet  $\mathbf{T}$  als Spannungstensor des elektrostatischen Feldes. Seine Elemente sind,

$$T_{ij} = \frac{1}{4\pi} E_i E_j - \frac{1}{8\pi} E^2 \delta_{ij} . \quad (3.17)$$

Der Spannungstensor ist symmetrisch,  $T_{ji} = T_{ij}$ . Das Element  $T_{ij}$  bezeichnet die  $i$ -te Komponente der Kraft, die pro Flächeneinheit auf ein Flächenelement mit der Normalenrichtung  $\mathbf{e}_j$  wirkt. Wählt man als Volumen das von der Ladungsdichte selbst eingenommene Volumen, so kann man  $d\mathbf{F} = \mathbf{T} \cdot d\mathbf{S}$  als Kraft auf ein Element der Oberfläche des Körpers auffassen. Das elektrische Feld ist dabei an der Oberfläche außerhalb des Körpers auszuwerten. In dieser Form wird die Kraft durch das gesamte elektrische Feld an der Oberfläche des Körpers bestimmt.

**Beweis:** Mit Hilfe der Feldgleichungen (3.6) und der Identitäten

$$\nabla \cdot (\mathbf{E}\mathbf{E}) = \mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) + (\mathbf{E} \cdot \nabla)\mathbf{E}, \quad \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \frac{1}{2} \nabla E^2 - \mathbf{E} \cdot \nabla \mathbf{E} = 0$$

läßt sich die Kraftdichte (3.12) in die Divergenz des Spannungstensors umformen

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \mathbf{E}\varrho = \frac{1}{4\pi}\mathbf{E}(\nabla\cdot\mathbf{E}) \\ &= \frac{1}{4\pi}[\nabla\cdot(\mathbf{E}\mathbf{E}) - (\mathbf{E}\cdot\nabla)\mathbf{E}] \\ &= \frac{1}{4\pi}\nabla\cdot(\mathbf{E}\mathbf{E} - \frac{1}{2}E^2\mathbf{I}) = \nabla\cdot\mathbf{T} \end{aligned}$$

Durch Integration über das Volumen  $V$  und Anwendung des Gaußschen Satzes folgt dann

$$\mathbf{F} = \int_V dV \nabla\cdot\mathbf{T} = \int_S d\mathbf{S}\cdot\mathbf{T} .$$

□

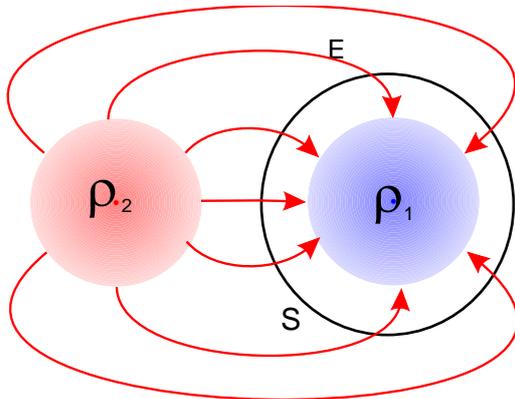


Abbildung 3.3: Die Kraft auf die Ladung  $\varrho_1$  kann als Integral des Spannungstensors des Gesamtfeldes über die Oberfläche  $S$  berechnet werden.

**Beispiel:** Gegeben seien zwei sich nicht überlappende Ladungsdichten  $\varrho_1(\mathbf{r})$  und  $\varrho_2(\mathbf{r})$  (Abb.3.3). Die Kraft die das Feld  $\mathbf{E}_2$  von  $\varrho_2$  auf  $\varrho_1$  ausübt, ist nach (3.14)

$$\mathbf{F}_{12} = \int_{\mathbb{R}^3} \varrho_1(\mathbf{r})\mathbf{E}_2(\mathbf{r}) .$$

Sei  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ ,  $\varrho = \varrho_1 + \varrho_2$ , und  $V$  ein beliebiges Volumen das die Ladungsdichte  $\varrho_1$  vollständig einschließt, die Ladungsdichte  $\varrho_2$  vollständig ausschließt. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{12} &= \int_{\mathbb{R}^3} \varrho_1(\mathbf{r})\mathbf{E}_2(\mathbf{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} \varrho_1(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ &= \int_V \varrho_1(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_V \varrho(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_S d\mathbf{S}\cdot\mathbf{T} . \end{aligned}$$

Im ersten Schritt kann  $\mathbf{E}_2$  durch  $\mathbf{E}$  ersetzt werden, da das Eigenfeld  $\mathbf{E}_1$  keinen Beitrag liefert. Im zweiten Schritt kann das Integrationsvolumen auf  $V$  eingeschränkt

werden, da  $\varrho_1$  außerhalb von  $V$  verschwindet. Im dritten Schritt kann  $\varrho_1$  durch  $\varrho$  ersetzt werden, da  $\varrho_2$  innerhalb von  $V$  verschwindet. Im Integranden stehen nun das Gesamtfeld und die gesamte Ladungsdichte, dafür ist das Integrationsvolumen auf  $V$  eingeschränkt worden. Damit kann, wie oben gezeigt, das Volumenintegral in ein Oberflächenintegral umgeformt werden.

### 3.3 Energie elektrostatischer Felder

#### 3.3.1 Punktladung im elektrostatischen Feld

Die potentielle Energie einer Ladung  $q$  in einem elektrischen Potential  $\phi$  ist  $U = q\phi$ . Das Potential bestimmt die Feldstärke und die Kraft durch

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi, \quad \mathbf{F} = q\mathbf{E} = -\nabla U \quad (3.18)$$

Zur genaueren Unterscheidung bezeichnet man  $\phi$  als Feldstärkepotential und  $U$  als Kraftpotential.

Um eine Ladung gegen die Kraft  $\mathbf{F}$  von  $\mathbf{a}$  nach  $\mathbf{b}$  zu bewegen, muß die Arbeit

$$W = - \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \nabla U(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = U(\mathbf{b}) - U(\mathbf{a}). \quad (3.19)$$

verrichtet werden. Da die Kraft konservativ ist hängt die Arbeit nicht vom Weg ab, sondern nur von der Differenz der Potentiale in den Endpunkten.

Bringt man die Ladung aus dem Unendlichen an den Ort  $\mathbf{r}$  und wählt das Potential im Unendlichen gleich Null, so verrichtet man die Arbeit

$$W = U(\mathbf{r}) = q\phi(\mathbf{r}) . \quad (3.20)$$

**Beispiel (Punktladung):** Wird das elektrostatische Feld durch eine Punktladung  $q_1$  am Ort  $\mathbf{r}_1 = 0$  erzeugt, dann gilt für die an  $q$  verrichtete Arbeit

$$W = - \int_{\infty}^{\mathbf{r}} \frac{qq_1 \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}}{r^3} = -qq_1 \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2} = q\phi(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r}) , \quad \phi(\mathbf{r}) = \frac{q_1}{r}. \quad (3.21)$$

**Beispiel (System von Punktladungen):** Um  $N$  Punktladungen  $q_i$  an den Orten  $\mathbf{r}_i$  eine weitere Punktladung  $q$  am Ort  $\mathbf{r}$  hinzuzufügen, benötigt man die Energie

$$U = q\phi = q \sum_{i=1}^N \phi_i = \sum_{i=1}^N \frac{qq_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} . \quad (3.22)$$

**Beispiel (Stetige Ladungsverteilung):** Um einer Ladungsverteilung  $\rho(\mathbf{r})$  eine Punktladung  $q$  am Ort  $\mathbf{r}$  hinzuzufügen benötigt man die Energie

$$W = q\phi(\mathbf{r}) = q \int_V d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} . \quad (3.23)$$

### 3.3.2 Wechselwirkungsenergie von Punktladungen

Die Wechselwirkungsenergie eines Systems von Punktladungen ist

$$U = \sum_{j < i} U_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} U_{ij}, \quad U_{ij} = q_i \phi_j(\mathbf{r}_i) = \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} . \quad (3.24)$$

Hierbei wird über  $i$  und  $j$  summiert jedoch mit der Einschränkung, daß die Wechselwirkungsenergie  $U_{ij}$  von jedem Teilchenpaar nur einfach gezählt wird.

Die Wechselwirkungsenergie kann als Aufladungsarbeit des Systems gedeutet werden. Um jeder Ladung  $\lambda q_i$  eine infinitesimale Ladungsmenge  $d(\lambda q_i)$  hinzuzufügen benötigt man nach (3.22) die Energie

$$dU = \sum_{i=1}^N d(\lambda q_i) \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{\lambda q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}$$

Durch Integration von  $\lambda = 0$  bis  $\lambda = 1$  folgt die gesamte Aufladungsarbeit,

$$U = \sum_{i \neq j} U_{ij} \int_0^1 d\lambda \lambda = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} U_{ij} . \quad (3.25)$$

Man kann die Ladungen auch nacheinander aus dem Unendlichen an ihre Plätze bringen. Sind bereits  $i - 1$  Ladungen an ihren Plätzen, so benötigt man für die  $i$ -te Ladung die Arbeit

$$U_i = \sum_{j=1}^{i-1} U_{ij}$$

Die Summe über alle Ladungen ergibt dann dasselbe Ergebnis,

$$U = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{i-1} U_{ij} = \sum_{j < i} U_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} U_{ij} .$$

### 3.3.3 Energie stetiger Ladungsverteilungen

Die Energie einer Ladungsverteilung in einem externen Feld ist

$$U = \int dV \varrho \phi_{ext} \quad (3.26)$$

Die Energie einer Ladungsverteilung im eigenen Feld ist

$$U = \frac{1}{2} \int d^3r \int d^3r' \frac{\varrho(\mathbf{r})\varrho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{2} \int d^3r \varrho(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}). \quad (3.27)$$

Diesen Ausdruck erhält man aus (3.24), wenn die Summationen durch Integrationen ersetzt werden. Aufgrund der Bedingung  $i \neq j$  sollten die Punkte  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$  eigentlich aus dem Integrationsbereich ausgeschlossen werden. Da aber an diesen Stellen nur eine scheinbare Singularität vorliegt, ergibt ein beliebig kleines Kugelvolumen um diese Stellen keinen Beitrag zum Integral.

### 3.3.4 Feldenergie

Die Energie einer Ladungsverteilung in ihrem eigenen Feld kann als Volumenintegral über eine elektrische Energiedichte ausgedrückt werden

$$U = \int dV u(\mathbf{r}), \quad u(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi} E(\mathbf{r})^2. \quad (3.28)$$

Die Energiedichte  $u(\mathbf{r})$  wird durch das gesamte elektrische Feld am Ort  $\mathbf{r}$  bestimmt.

**Beweis:** Ersetzt man die Ladungsdichte in (3.27) durch (3.6) so folgt

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int d^3r \frac{1}{4\pi} (\nabla \cdot \mathbf{E}) \Phi = \frac{1}{8\pi} \int d^3r \nabla \cdot (\Phi \mathbf{E}) + \frac{1}{8\pi} \int d^3r E^2 \\ &= \int d^3r \frac{1}{8\pi} E^2. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Hierbei wurde über den gesamten Raum integriert und das Verschwinden des Oberflächenintegrals,

$$\int d\mathbf{S} \cdot (\Phi \mathbf{E}) \rightarrow 0,$$

im Unendlichen vorausgesetzt.

### 3.3.5 Feldenergie zusammengesetzter Systeme

Besteht ein System aus mehreren Teilsystemen, so kann es nützlich sein, die Feldenergie des Gesamtsystems in die Feldenergien der einzelnen Teilsysteme und in deren Wechselwirkungsenergie aufzuteilen. Sei  $\varrho = \varrho_1 + \varrho_2$  die Ladungsdichte und  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$  das elektrische Feld eines aus zwei Teilen zusammengesetzten Systems. Dann erhält man für die Feldenergie die Anteile

$$U = U_1 + U_2 + U_{12} \quad (3.30)$$

mit

$$U = \int dV \frac{E^2}{8\pi}, \quad U_{1,2} = \int dV \frac{E_{1,2}^2}{8\pi}, \quad U_{12} = \int dV \frac{\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2}{4\pi}.$$

Hierbei bezeichnen  $U_{1,2}$  die Feldenergien der getrennten Teilsysteme und

$$U_{12} = U - (U_1 + U_2)$$

bezeichnet die Wechselwirkungsenergie der zusammengesetzten Teilsysteme. Wie in (3.29) zeigt man, daß

$$U_{12} = U_{21} = \int dV \varrho_1 \phi_2 = \int dV \varrho_2 \phi_1$$

jeweils durch die Energie einer Ladungsdichte im Feld der anderen ausgedrückt werden kann.

Die Anwendung des Feldenergiebegriffs auf Punktladungen führt zu Schwierigkeiten, da die Feldenergie einer einzelnen Punktladung divergiert. Jedoch ist auch in diesem Fall die Wechselwirkungsenergie  $U_{12}$  zweier Punktladungen endlich und stimmt mit der Coulomb-Wechselwirkungsenergie der Punktladungen überein.

## 3.4 Multipolfelder

Die Felder einer lokalisierten Ladungsverteilung können in großer Entfernung durch Multipolmomente der Ladungsdichte dargestellt werden. Die untersten Multipolmomente sind das Monopolmoment, das Dipolmoment und die Quadrupolmomente. Zuerst werden allgemeine Eigenschaften von Dipolfeldern angegeben, dann wird die kartesische Darstellung der untersten Multipolmomente abgeleitet.

### 3.4.1 Physikalischer Dipol

Eine Anordnung aus zwei Punktladungen mit endlichem Abstand  $d$  und entgegengesetzt gleicher Ladung bezeichnet man als physikalischen Dipol. Da die Gesamtladung verschwindet, ist das Dipolfeld in großen Abständen von den Ladungen wesentlich verschieden vom Coulombfeld.

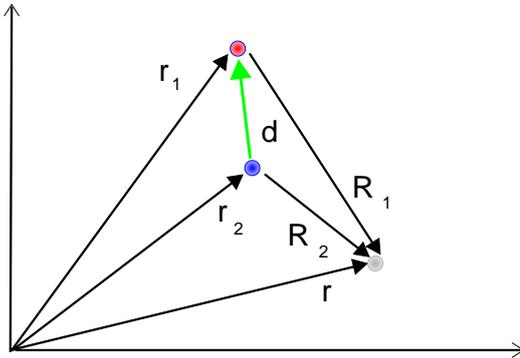


Abbildung 3.4: Ortsvektoren der Ladungen und des Beobachtungspunktes und Abstandsvektoren zwischen diesen.

### Dipolmoment

Die positive Ladung  $q_1 = q > 0$  befinde sich am Ort  $\mathbf{r}_1$ , die negative  $q_2 = -q$  am Ort  $\mathbf{r}_2$ . Das Dipolmoment wird definiert als

$$\mathbf{p} = q_1 \mathbf{r}_1 + q_2 \mathbf{r}_2 = q \mathbf{d}, \quad \mathbf{d} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 . \quad (3.31)$$

Es zeigt von der negativen zur positiven Ladung.

### Dipolfeld

Sei  $\mathbf{r}$  der Ortsvektor zum Beobachtungspunkt und  $\mathbf{R}_{1,2} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_{1,2}$  die von den Ladungen zum Beobachtungspunkt gerichteten Vektoren (Abb.3.4). Die Ladungsdichte, das Potential und das elektrische Feld des Dipols folgen aus dem Superpositionsprinzip für die beiden Punktladungen,

$$\begin{aligned} \varrho(\mathbf{r}) &= q (\delta(\mathbf{R}_1) - \delta(\mathbf{R}_2)) \\ \phi(\mathbf{r}) &= q \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= q \left( \frac{\mathbf{R}_1}{R_1^3} - \frac{\mathbf{R}_2}{R_2^3} \right) \end{aligned} \quad (3.32)$$

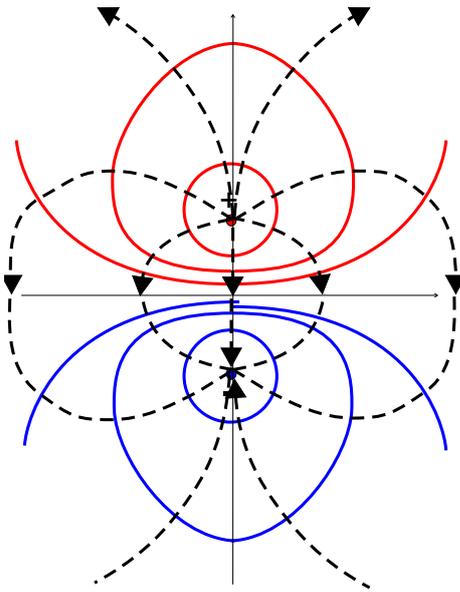


Abbildung 3.5: Schematische Darstellung des Feldes eines physikalischen Dipols. Die Äquipotentiallinien sind Kurven die jeweils eine Ladung umschließen. Die Feldlinien gehen von der positiven Ladung zur negativen und stehen überall senkrecht zu den Äquipotentiallinien. Das Feld ist zylindersymmetrisch bezüglich der Dipolachse.

Ist der Dipol symmetrisch zur Ebene  $z = 0$  entlang der  $z$ -Achse gerichtet, so gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{1,2} &= \pm a \mathbf{e}_z, & \mathbf{d} &= 2a \mathbf{e}_z \\ \mathbf{R}_{1,2} &= x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + (z \mp a) \mathbf{e}_z \\ R_{1,2} &= \sqrt{\rho^2 + (z \mp a)^2}, & \rho^2 &= x^2 + y^2. \end{aligned}$$

In der Symmetrieebene  $z = 0$  ist  $R_1 = R_2$  und daher

$$\phi = 0, \quad E_x = 0, \quad E_y = 0, \quad E_z = \frac{-p}{(\rho^2 + a^2)^{3/2}} \quad (3.33)$$

In großem Abstand von der Dipolachse verhält sich das Feld wie

$$E_z(\rho \rightarrow \infty, z = 0) = -\frac{p}{\rho^3}.$$

und fällt damit schneller ab als das Coulomb-Feld. Auf der Dipolachse wird das Feld durch die Volumendichte des Dipolmoments innerhalb einer Kugel mit Radius  $a$  bestimmt

$$E_z(\rho = 0, z = 0) = -\frac{p}{a^3}, \quad \int E_z(\rho = 0, z = 0) dV = -\frac{4\pi}{3} p, \quad V = \frac{4\pi}{3} a^3$$

Im Grenzfall  $a \rightarrow 0$  bei konstantem  $p$  divergiert dieses Feld stärker als das Coulomb-Feld, das Volumenintegral bleibt jedoch endlich.

### 3.4.2 Mathematischer Dipol

Ein mathematischer Dipol ist ein Dipol zweier unendlich großer Ladungen mit infinitesimal kleinem Abstand und endlichem Dipolmoment.

### Grenzübergang

Die Felder (3.32) des physikalischen Dipols haben die Differenzenform

$$G_{phys} = q[F(\mathbf{R}_1) - F(\mathbf{R}_2)]$$

wobei  $qF$  das entsprechende Feld einer Punktladung darstellt. Wählt man den Mittelpunkt der Dipolachse im Koordinatenursprung,  $\mathbf{r}_{1,2} = \pm \mathbf{d}/2$ , so gilt

$$\mathbf{R}_{1,2} = \mathbf{r} \mp \frac{1}{2}\mathbf{d}, \quad \mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2 - \mathbf{d} .$$

Der mathematische Dipol wird definiert durch den Grenzübergang  $d \rightarrow 0$ ,  $q \rightarrow \infty$ ,  $p = qd = \text{const.}$  Dabei können die Differenzen durch Differentiale

$$F(\mathbf{R}_1) - F(\mathbf{R}_2) \rightarrow dF = -\mathbf{d} \cdot \nabla F(\mathbf{r})$$

approximiert werden. Nach Multiplikation dieser infinitesimal kleinen Größe mit der unendlich großen Ladung erhält man den endlichen Grenzwert

$$G_{math} = -\mathbf{p} \cdot \nabla F(\mathbf{r}) . \quad (3.34)$$

Daraus ergibt sich die einfache Regel: Aus dem Feld  $qF$  für eine Punktladung erhält man das entsprechende Feld  $G$  des mathematischen Dipols durch die Substitution

$$\boxed{q \rightarrow -\mathbf{p} \cdot \nabla} \quad (3.35)$$

Formal gilt auch für die Delta-Funktion,

$$\delta(\mathbf{r} - \boldsymbol{\epsilon}) - \delta(\mathbf{r}) = -\boldsymbol{\epsilon} \cdot \nabla \delta(\mathbf{r}) .$$

Die Gültigkeit dieser Beziehung erkennt man bei Anwendung beider Seiten auf eine beliebige Testfunktion  $f(\mathbf{r})$

$$\begin{aligned} \int dV f(\mathbf{r}) [\delta(\mathbf{r} - \boldsymbol{\epsilon}) - \delta(\mathbf{r})] &= \int dV f(\mathbf{r}) [-\boldsymbol{\epsilon} \cdot \nabla \delta(\mathbf{r})] \\ f(\boldsymbol{\epsilon}) - f(0) &= \int dV \delta(\mathbf{r}) [\boldsymbol{\epsilon} \cdot \nabla f(\mathbf{r})] = \boldsymbol{\epsilon} \cdot \nabla f(0) \end{aligned}$$

### Felder des mathematischen Dipols

Nach (3.35) ergeben sich für den mathematischen Dipol die Felder,

$$\varrho = -\mathbf{p} \cdot \nabla \delta(\mathbf{r}) \quad (3.36)$$

$$\phi = -\mathbf{p} \cdot \nabla \frac{1}{r} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} . \quad (3.37)$$

$$\mathbf{E} = -\mathbf{p} \cdot \nabla \left( \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})\mathbf{r} - r^2 \mathbf{p}}{r^5} . \quad (3.38)$$

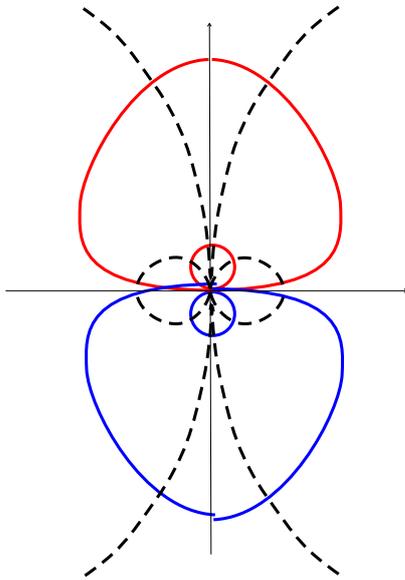


Abbildung 3.6: Schematische Darstellung des Feldes eines mathematischen Dipols. Die Äquipotentiallinien sind geschlossene Kurven in der oberen und unteren Halbebene, die Feldlinien geschlossene Kurven in der linken und rechten Halbebene. Im Ursprung besitzt das elektrische Feld eine Singularität in Dipolrichtung. Das Feld ist zylindersymmetrisch bezüglich der Dipolachse.

Das elektrische Feld kann auch aus dem Potential abgeleitet werden. Zunächst erhält man dabei

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi = -\nabla\left(\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^3}\right).$$

Die Äquivalenz zum obigen Feld folgt aus der Identität

$$\mathbf{p} \times \left(\nabla \times \frac{\mathbf{r}}{r^3}\right) = \nabla \left(\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^3}\right) - \mathbf{p}\cdot\nabla \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right) = 0.$$

Wählt man Kugelkoordinaten,  $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{p} = p\mathbf{e}_z$ ,  $\mathbf{e}_z\cdot\mathbf{e}_r = \cos\theta$ , so folgt

$$\phi(r, \theta) = \frac{p \cos \theta}{r^2}, \quad (3.39)$$

$$E_z(r, \theta) = \frac{3p \cos^2 \theta - p}{r^3} \quad (3.40)$$

$$E_\rho(r, \theta) = \frac{3p \cos \theta \sin \theta}{r^3} \quad (3.41)$$

wobei die  $z$ -Richtung in Richtung des Dipols zeigt und  $E_\rho$  die Komponente in der radialen Richtung in der  $xy$ -Ebene bezeichnet. Die Äquipotentialflächen,  $\phi = \text{const}$ , genügen der Gleichung

$$r^2 = C \cos \theta, \quad C = \frac{p}{\phi} = \text{const}.$$

Die Singularität des Dipolfeldes im Ursprung hat die Form

$$\mathbf{E} = -\frac{4\pi}{3}\mathbf{p}\delta(\mathbf{r}), \quad r \rightarrow 0. \quad (3.42)$$

**Beweis:** Nach Definition der Delta-Funktion ist zu zeigen,

$$\int dV \mathbf{E} = -\frac{4\pi}{3} \mathbf{p},$$

wobei die Integration über eine beliebig kleine Kugel um den Koordinatenursprung erfolgt. Das Volumenintegral kann mit dem Feld aus (3.36) nicht direkt ausgeführt werden. Da es aber als Divergenz darstellbar ist, kann es durch einen Fluß durch die Oberfläche der Kugel ersetzt werden,

$$\int dV \mathbf{E} = - \int dV \nabla \cdot \left( \mathbf{p} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = - \int d\mathbf{S} \cdot \mathbf{p} \left( \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right).$$

Die Integration in Kugelkoordinaten ergibt

$$- \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta p \cos \theta \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2\pi p \int_{-1}^{+1} dx x^2 \end{pmatrix} = -\frac{4\pi}{3} \mathbf{p}. \quad \square$$

## Energie

Mit der Ladungsdichte aus (3.36) kann die Energie eines Dipols in einem externen Feld  $\mathbf{E}_{ext} = -\nabla \phi_{ext}$  nach (3.26) berechnet werden,

$$U = \int dV [-\mathbf{p} \cdot \nabla \delta(\mathbf{r})] \phi_{ext} = \int dV \delta(\mathbf{r}) \mathbf{p} \cdot \nabla \phi_{ext} = \mathbf{p} \cdot \nabla \phi_{ext}, \quad (3.43)$$

oder

$$U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_{ext}. \quad (3.44)$$

wobei die Felder am Ort des Dipols auszuwerten sind. Die Energie ist minimal, wenn das Dipolmoment in Richtung des elektrischen Feldes ausgerichtet ist.

## Kraft

In gleicher Weise folgt aus der Integration über die Kraftdichte die Gesamtkraft,

$$\mathbf{F} = \int dV \varrho \mathbf{E}_{ext} = \mathbf{p} \cdot \nabla \mathbf{E}_{ext}. \quad (3.45)$$

Wegen der Identität

$$\mathbf{p} \times (\nabla \times \mathbf{E}_{ext}) = \nabla (\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_{ext}) - \mathbf{p} \cdot \nabla \mathbf{E}_{ext} = 0$$

kann die Kraft auch als konservative Kraft angegeben werden,

$$\mathbf{F} = -\nabla U = \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_{ext}) . \quad (3.46)$$

Eine Kraftwirkung ergibt sich nur in inhomogenen Feldern. Sie ist dann entgegen dem Gradienten von  $U$  gerichtet.

### Drehmoment

Durch Integration über die Drehmomentdichte folgt das Gesamtdrehmoment

$$\mathbf{N} = \int dV \varrho \mathbf{r} \times \mathbf{E}_{ext} = \mathbf{p} \cdot \nabla (\mathbf{r} \times \mathbf{E}_{ext}) .$$

Durch Anwendung der Produktregel und Substitution von (3.45) ergeben sich die beiden Anteile

$$\mathbf{N} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}_{ext} + \mathbf{r} \times \mathbf{F} . \quad (3.47)$$

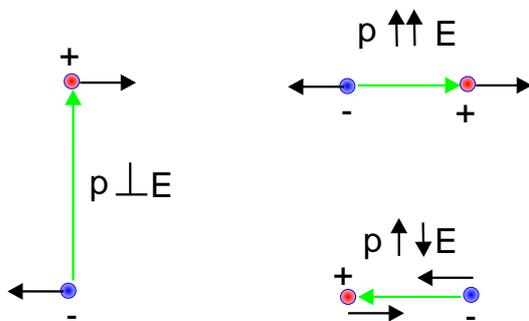


Abbildung 3.7: Kraft auf die Ladungen des Dipols bei senkrechter, paralleler und antiparalleler Ausrichtung zum elektrischen Feld.

Der erste Anteil beschreibt das Drehmoment der beiden Ladungen in einem homogenen Feld. Ein solches Drehmoment versucht den Dipol parallel zum Feld auszurichten (Abb. 3.7). Der zweite Anteil ist das Drehmoment des Dipols aufgrund der Kraftwirkung im inhomogenen Feld.

## Zusammenfassung

	Punktladung	Mathematischer Dipol	
<b>Eigenfeld</b>	$q \rightarrow -\mathbf{p} \cdot \nabla$		
$\varrho$	$q\delta(\mathbf{r})$	$-\mathbf{p} \cdot \nabla\delta(\mathbf{r})$	
$\phi$	$q\frac{1}{r}$	$-\mathbf{p} \cdot \nabla\frac{1}{r} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$	
$\mathbf{E}$	$q\frac{\mathbf{r}}{r^3}$	$-\mathbf{p} \cdot \nabla\frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{(3\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - r^2\mathbf{p}}{r^5}$	=
<b>Externes Feld</b>	$q \rightarrow +\mathbf{p} \cdot \nabla$		
$U$	$q\phi_{ext}$	$\mathbf{p} \cdot \nabla\phi_{ext} = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_{ext}$	
$\mathbf{F}$	$q\mathbf{E}_{ext}$	$\mathbf{p} \cdot \nabla\mathbf{E}_{ext} = -\nabla U$	
$\mathbf{N}$	$q\mathbf{r} \times \mathbf{E}_{ext}$	$\mathbf{p} \cdot \nabla(\mathbf{r} \times \mathbf{E}_{ext}) = \mathbf{p} \times \mathbf{E}_{ext} + \mathbf{r} \times \mathbf{F}$	

## 3.4.3 Multipolentwicklung

Das Potential einer lokalisierten Ladungsverteilung kann in großem Abstand von der Ladungsverteilung durch Multipolfelder dargestellt werden. In kartesischen Koordinaten lautet die Multipolentwicklung

$$\phi = \frac{Q}{r} + \sum_i p_i \frac{x_i}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} Q_{ij} \frac{x_i x_j}{r^5} + O\left(\frac{1}{r^4}\right) \quad (3.48)$$

mit

$$\begin{aligned} Q &= \int dV \varrho(\mathbf{r}), \\ p_i &= \int dV \varrho(\mathbf{r}) x_i, \\ Q_{ij} &= \int dV \varrho(\mathbf{r}) (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}). \end{aligned}$$

Der erste Summand ist das Monopolfeld einer Punktladung  $Q$ , der zweite Summand das Dipolfeld eines Dipolmoments  $\mathbf{p}$ , der dritte Summand das Quadrupolfeld eines Quadrupoltensors  $\mathbf{Q}$  mit den Elementen  $Q_{ij}$ . Der Quadrupoltensor ist symmetrisch und spurfrei,

$$Q_{ij} = Q_{ji}, \quad \sum_i Q_{ii} = 0 .$$

Daher sind von den 9 Elementen nur 5 unabhängig. Wählt man als Koordinatensystem das Hauptachsensystem des symmetrischen Tensors, so sind von den 3 Diagonalelementen nur 2 unabhängig.

**Herleitung:** Sei  $\mathbf{r}'$  der Ortsvektor eines Punktes der Ladungsverteilung (Quellpunkt),  $\mathbf{r}$  der Ortsvektor des Beobachtungspunktes (Aufpunkt) und  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$  der vom Quellpunkt zum Aufpunkt gerichtete Abstandsvektor. Das Potential der Ladungsverteilung besitzt die allgemeine Integraldarstellung

$$\phi(\mathbf{r}) = \int dV' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{R} . \quad (3.49)$$

Für  $r \gg r'$  kann die Funktion  $\frac{1}{R}$  bezüglich der Koordinaten  $x'_i$  des Quellpunktes in eine Taylorreihe (Abschnitt 2.9) entwickelt werden:

$$\frac{1}{R} = c + \sum_i c_i x'_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} c_{ij} x'_i x'_j + O(x_i^3) . \quad (3.50)$$

Die Entwicklungskoeffizienten lauten:

$$c = \left. \frac{1}{R} \right|_{\mathbf{r}'=0} = \frac{1}{r} \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} c_i &= \left. \frac{\partial}{\partial x'_i} \frac{1}{R} \right|_{\mathbf{r}'=0} = - \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{R} \right)_{\mathbf{r}'=0} = - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{r} \\ &= - \left( -\frac{1}{r^2} \right) \frac{x_i}{r} = \frac{x_i}{r^3} \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \left. \frac{\partial^2}{\partial x'_j \partial x'_i} \frac{1}{R} \right|_{\mathbf{r}'=0} = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} \frac{1}{r} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( -\frac{x_i}{r^3} \right) \\ &= 3 \frac{x_i x_j}{r^5} - \frac{\delta_{ij}}{r^3} \end{aligned} \quad (3.53)$$

Die Matrix  $c_{ij}$  ist spurfrei. Dies folgt entweder aus der expliziten Darstellung der Koeffizienten oder mit Hilfe der Eigenschaften der Green-Funktion (2.50),

$$\sum_i c_{ii} = \sum_i \left( \frac{3x_i^2}{r^5} - \frac{\delta_{ii}}{r^3} \right) = 0 , \quad (3.54)$$

$$\sum_i c_{ii} = \Delta' \left. \frac{1}{R} \right|_{\mathbf{r}'=0} = \Delta \frac{1}{r} = 0 . \quad (3.55)$$

Setzt man (3.50) in (3.49) ein, so ergibt sich eine Entwicklung des Potentials nach Multipolen der Ladungsverteilung

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{r}) &= \Phi_0(\mathbf{r}) + \Phi_1(\mathbf{r}) + \Phi_2(\mathbf{r}) + \dots & (3.56) \\ \Phi_0(\mathbf{r}) &= c \int d^3r' \varrho(\mathbf{r}') \\ \Phi_1(\mathbf{r}) &= \sum_i c_i \int d^3r' \varrho(\mathbf{r}') x'_i \\ \Phi_2(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} c_{ij} \int d^3r' \varrho(\mathbf{r}') x'_i x'_j\end{aligned}$$

$\Phi_n(\mathbf{r})$  ist von der Ordnung  $r^{-(n+1)}$ . Die ersten beiden Multipolordnungen ergeben

$$\Phi_0(\mathbf{r}) = \frac{Q}{r}, \quad \Phi_1(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \quad (3.57)$$

Den Tensor des Quadrupolmoments  $Q_{ij}$  erhält man, indem man ausnutzt, daß  $c_{ij}$  spurfrei ist:

$$\begin{aligned}\Phi_2 &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} c_{ij} \int d^3r' x'_i x'_j \varrho(\mathbf{r}') \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} c_{ij} \int d^3r' \left( x'_i x'_j - \frac{1}{3} r'^2 \delta_{ij} \right) \varrho(\mathbf{r}') \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} c_{ij} \frac{1}{3} Q_{ij}.\end{aligned} \quad (3.58)$$

Da die Spur  $\sum_i Q_{ii}$  des Quadrupoltensors verschwindet folgt

$$\begin{aligned}\Phi_2 &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left( 3 \frac{x_i x_j}{r^5} - \frac{\delta_{ij}}{r^3} \right) \frac{1}{3} Q_{ij} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} Q_{ij} \frac{x_i x_j}{r^5}.\end{aligned}$$

### Ursprungsabhängigkeit der Multipolmomente:

Die Multipolmomente hängen im allgemeinen vom Ursprung des Koordinatensystems ab. Das unterste nicht verschwindende Multipolmoment einer Ladungsverteilung ist jedoch ursprungsunabhängig. Bei einer Verschiebung des Koordinatenursprungs  $\mathbf{r} = \tilde{\mathbf{r}} + \mathbf{a}$  bleibt die Gesamtladung immer invariant,

$$Q = \int dV \varrho(\mathbf{r}) = \int d\tilde{V} \tilde{\varrho}(\tilde{\mathbf{r}}) = \tilde{Q}, \quad dV = d\tilde{V}, \quad \varrho(\mathbf{r}) = \varrho(\tilde{\mathbf{r}} + \mathbf{a}) = \tilde{\varrho}(\tilde{\mathbf{r}})$$

Das Dipolmoment transformiert sich wie

$$\mathbf{p} = \int dV \varrho(\mathbf{r}) \mathbf{r} = \int dV \varrho(\mathbf{r}) (\tilde{\mathbf{r}} + \mathbf{a}) = \tilde{\mathbf{p}} + Q \mathbf{a} .$$

Gilt  $Q = 0$ , so ist  $\mathbf{p}$  ursprungsunabhängig. Für den Quadrupoltensor findet man entsprechend das Transformationsgesetz

$$Q_{ij} = \tilde{Q}_{ij} + 3\tilde{p}_i a_j + 3\tilde{p}_j a_i - 2\mathbf{a} \cdot \tilde{\mathbf{p}} \delta_{ij} + \tilde{Q}(3a_i a_j - a^2 \delta_{ij}).$$

Gilt  $Q = 0$  und  $\mathbf{p} = 0$ , so ist  $Q_{ij}$  ursprungsunabhängig.

## 3.5 Leiter

In Leitern (z.B. Metalle, Elektrolyte, Plasmen) gibt es frei bewegliche Elektronen, die im elektrischen Feld einen Strom hervorrufen. Im Gleichgewicht verteilen sich die Elektronen so, daß das elektrische Feld innerhalb des Leiters verschwindet. Die Aufgabe besteht dann in der Bestimmung des elektrostatischen Feldes außerhalb des Leiters und der Ladungsverteilung auf der Leiteroberfläche.

### 3.5.1 Ohmsches Gesetz

Die Stromdichte ist i.a. in jedem Punkt des Leiters proportional zum elektrischen Feld

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}. \quad (3.59)$$

Die Proportionalitätskonstante wird als elektrische Leitfähigkeit bezeichnet. Sie ist materialabhängig.

### 3.5.2 Gleichgewicht im Innern des Leiters

Im Gleichgewicht verschwindet die Stromdichte. Im Innern des Leiters gilt dann

$$\begin{aligned} \mathbf{j} = 0 & \Rightarrow \mathbf{E} = 0, \\ \mathbf{E} = -\nabla\phi & \Rightarrow \phi = \text{const}, \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\varrho & \Rightarrow \varrho = 0 . \end{aligned}$$

Die Ladungsdichte und das elektrische Feld verschwinden, das elektrische Potential ist konstant.

### 3.5.3 Randbedingungen an der Leiteroberfläche

Die Ladungen, die das Feld im Inneren des Leiters zum Verschwinden bringen, müssen an dessen Oberfläche verteilt sein. Die Oberflächenladungsdichte eines Flächenelementes  $dS$  mit der Ladung  $dQ$  wird definiert als

$$\sigma = \frac{dQ}{dS}. \quad (3.60)$$

Für die Tangentialkomponente  $E_t$  und die Normalenkomponente  $E_n$  des elektrischen Feldes gelten an der Oberfläche des Leiters die Randbedingungen

$$E_t = 0, \quad E_n = 4\pi\sigma \quad (3.61)$$

Ein tangenciales elektrisches Feld kann nicht vorhanden sein, da die Ladungen sonst entlang der Oberfläche beschleunigt würden. Die Normalkomponente des elektrischen Feldes bestimmt die Gesamtladung  $Q$  des Leiters,

$$Q = \int dS \sigma = \frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{S} \cdot \mathbf{E}. \quad (3.62)$$

#### Herleitung der Randbedingungen

Die Oberfläche des Leiters ist eine dünne Grenzschicht innerhalb der sich die physikalischen Größen in der Normalenrichtung sehr schnell ändern. Dagegen sind die Änderungen in tangentialer Richtung nur sehr langsam. Abbildung 3.8 zeigt schematisch den Verlauf der Massendichte  $\gamma$ , der Ladungsdichte  $\rho$  und des elektrischen Feldes  $E_n$  innerhalb der Grenzschicht  $-\epsilon < x_n < +\epsilon$ .

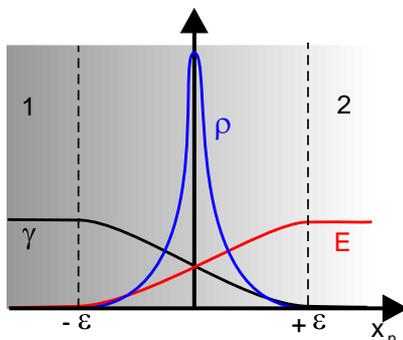


Abbildung 3.8: Schematischer Verlauf der Massendichte  $\gamma$ , der Feldstärke  $E$  und der Ladungsdichte  $\rho$  innerhalb der Oberflächengrenzschicht zwischen dem Leiter 1 und dem Vakuum 2.

**Grenzübergang:**

Im Grenzfall  $\epsilon \rightarrow 0$  wird folgendes Verhalten vorausgesetzt:

$$\mathbf{E}, \partial_t \mathbf{E} = O(1) \text{ und } \partial_n E_n, \rho = O(\epsilon^{-1})$$

Das elektrische Feld  $\mathbf{E}$  und seine Ableitungen in tangentialer Richtung  $\partial_t \mathbf{E}$  können zwar unstetig sein, sie bleiben aber beschränkt. Die Normalenableitung des elektrischen Feldes  $\partial_n E_n$  und die Ladungsdichte  $\rho$  divergieren, sie sind aber integabel wie eine Delta-Funktion.

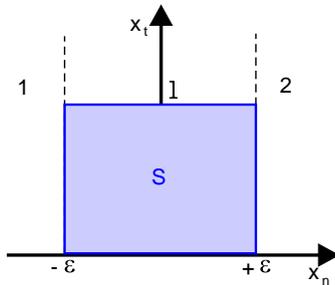


Abbildung 3.9: Rechteck zur Herleitung der Sprungbedingung für die Tangentialkomponente.

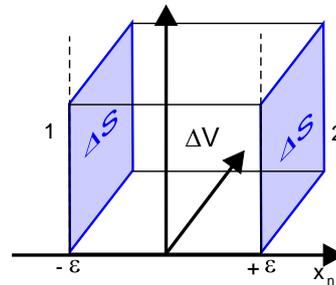


Abbildung 3.10: Volumen zur Herleitung der Sprungbedingung für die Normalenkomponente.

**Tangentialkomponente**

Sei  $S$  ein rechteckiges Flächenelement  $-\epsilon < x_n < +\epsilon, 0 < x_t < l$  (Abb. 3.9). Da  $\mathbf{E}$  im ganzen Raum wirbelfrei ist, gilt nach dem Stokeschen Satz

$$\int_S d\mathbf{S} \cdot \nabla \times \mathbf{E} = \oint_{\partial S} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} = 0 \tag{3.63}$$

Die Auswertung des Umlaufintegrals ergibt

$$E_t^2 - E_t^1 = \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} dx_n \frac{1}{l} \left( E_n|_{x_t=0} - E_n|_{x_t=l} \right) = \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} dx_n \partial_t E_n \rightarrow 0.$$

Da der Integrand nach Voraussetzung beschränkt ist, verschwindet das Integral im Grenzfall  $\epsilon \rightarrow 0$ . Die Tangentialkomponente  $E_t$  ist also stetig. Da im Innenraum  $E_t^1 = 0$  gilt, muss auch im Außenraum an der Oberfläche des Leiters  $E_t^2 = 0$  gelten.

### Normalkomponente

Sei  $\Delta V$  ein quaderförmiges Volumenelement das zwei oberflächenparallele Flächenelemente  $\Delta S$  bei  $x_n = -\epsilon$  und bei  $x_n = +\epsilon$  miteinander verbindet (Abb. 3.10). Ist die in  $\Delta V$  eingeschlossene Ladung  $\Delta Q$  so, gilt nach dem Gaußschen Satz

$$\int_{\Delta V} dV \nabla \cdot \mathbf{E} = \int_{\partial \Delta V} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{E} = 4\pi \Delta Q$$

Im Grenzfall  $\epsilon \rightarrow 0$  tragen nur die beiden Flächenelemente  $\Delta S$  zum Fluß durch die Oberfläche des Volumens bei und man erhält

$$E_n^2 - E_n^1 = 4\pi \frac{\Delta Q}{\Delta S} = 4\pi\sigma .$$

Da im Innenraum  $E_n^1 = 0$  gilt, muß im Außenraum  $E_n^2 = 4\pi\sigma$  gelten.  $\square$

### 3.5.4 Kraft auf die Leiteroberfläche

Welche Kraft wirkt auf einen Leiter im elektrischen Feld? Entsprechend den Grundprinzipien aus Abschnitt 3.2 kann die Kraft entweder als Oberflächenkraft oder als Volumenkraft berechnet werden, wobei im ersten Fall das Gesamtfeld, im zweiten das externe außerhalb des Leiters erzeugte Feld maßgeblich ist. Diese beiden Ansätze werden jetzt auf ein Flächenelement  $d\mathbf{S}$  des Leiters mit der Ladung  $dQ$  angewandt.

Die Kraft auf ein vektoriell Oberflächen-element ist nach Definition des Spannungstensors (3.17)

$$d\mathbf{F} = d\mathbf{S} \cdot \mathbf{T} . \quad (3.64)$$

Da das elektrische Feld an der Oberfläche des Leiters nur eine Normalkomponente besitzt vereinfacht sich der Spannungstensor zu

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \frac{1}{4\pi} E_n^2 \mathbf{n}\mathbf{n} - \frac{1}{8\pi} E_n^2 \mathbf{I} , \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} &= \frac{1}{4\pi} E_n^2 \mathbf{n} - \frac{1}{8\pi} E_n^2 \mathbf{n} = \frac{1}{8\pi} E_n^2 \mathbf{n} \end{aligned}$$

Damit wirkt auf  $d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS$  die Kraft

$$d\mathbf{F} = \frac{1}{8\pi} E_n^2 d\mathbf{S} . \quad (3.65)$$

Unabhängig vom Vorzeichen der Ladung ist sie in Richtung der Flächennormale gerichtet. Auf den Leiter wird ein Zug in Richtung der Feldlinien ausgeübt. Wird

das Flächenelement von der Kraft ein Wegstück  $d\mathbf{r}$  bewegt, so ist die vom Feld verrichtete Arbeit

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{8\pi} E_n^2 d\mathbf{S} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{8\pi} E_n^2 dV .$$

Diese Arbeit ist gleich der im überstrichenen Volumen  $dV$  enthaltenen Feldenergie. Mit Hilfe der Randbedingung (3.61) kann die Kraft auf die Ladung  $dQ = \sigma dS$  des Flächenelements angegeben werden

$$d\mathbf{F} = \frac{1}{8\pi} E_n^2 dS \mathbf{n} = \frac{1}{2} \sigma E_n dS \mathbf{n} = \frac{1}{2} dQ \mathbf{E} . \quad (3.66)$$

Hier ist der Faktor  $1/2$  zu beachten, der daher rührt, daß das Gesamtfeld  $\mathbf{E}$  auch das Eigenfeld des Flächenelements enthält. Das Eigenfeld des Flächenelements definieren wir als dasjenige Feld, das von der unendlich ausgedehnten Tangentialebene am Ort des Flächenelementes mit derselben Flächenladungsdichte erzeugt wird. Diese Definition ist notwendig, da die Ladung nicht wie in Abb. 3.2 eindeutig separierbar ist und das Eigenfeld nicht von der speziellen Form oder Größe des Flächenelementes abhängen soll. Das Eigenfeld  $\mathbf{E}_S$  übt keine Kraftwirkung auf das Flächenelement aus. Es steht senkrecht zur Tangentialebene und ist auf beiden Seiten entgegengesetzt gleich. Außerdem erfüllt auch das Eigenfeld am Oberflächenelement die Sprungbedingung (3.61). Daher gilt

$$\mathbf{E}_S = \begin{cases} +2\pi\sigma\mathbf{n} & ; \quad x_n = +\epsilon \\ -2\pi\sigma\mathbf{n} & ; \quad x_n = -\epsilon \end{cases}$$

Die Kraftwirkung auf  $dQ$  rührt vom externen Feld

$$\mathbf{E}_{ext} = \mathbf{E} - \mathbf{E}_S = \left\{ \begin{array}{l} 4\pi\sigma - 2\pi\sigma \\ 0 - (-2\pi\sigma) \end{array} \right\} \mathbf{n} = 2\pi\sigma\mathbf{n}$$

her. Es ist stetig und nur halb so groß wie das Gesamtfeld im Vakuum. Die Kraft auf das Oberflächenelement kann daher auch in der Form einer Volumenkraft nach (3.14) angegeben werden,

$$d\mathbf{F} = dQ \mathbf{E}_{ext}, \quad \mathbf{E}_{ext} = 2\pi\sigma\mathbf{n} \quad (3.67)$$

### 3.5.5 Energie eines Systems von Leitern

Gegeben sei ein System von  $N$  Leitern mit Ladungen  $Q_i$  und konstanten Potentialen  $\phi_i$ . Die Ladungen sind nicht unabhängig von den Potentialen. Sie können aus diesen

mit linearen Beziehungen berechnet werden. Allgemein gilt der Zusammenhang,

$$Q_i = \sum_{j=1}^N C_{ij} \phi_j . \quad (3.68)$$

Die Konstanten  $C_{ij}$  werden als Kapazitätskoeffizienten bezeichnet. Die Energie des Systems kann nach (3.27) einfach berechnet werden, da die Ladungsdichte außerhalb der Leiter verschwindet und das Potential innerhalb der Leiter konstant ist,

$$U = \frac{1}{2} \int dV \varrho \phi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \phi_i \int_{V_i} dV \varrho = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \phi_i Q_i = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N C_{ij} \phi_i \phi_j . \quad (3.69)$$

### 3.5.6 Plattenkondensator

Ein Kondensator besteht aus zwei räumlich getrennten Leitern mit entgegengesetzten Ladungen  $Q_1 = +Q > 0$  und  $Q_2 = -Q < 0$ . Das elektrische Feld ist von der positiven Ladung zur negativen Ladung gerichtet. Das Potential  $\phi = -\int d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}$  nimmt vom Potential  $\phi_1$  des positiv geladenen Leiters zum Potential  $\phi_2$  des negativ geladenen Leiters ab. Die Kapazität  $C$  und die Spannung  $V$  des Kondensators werden definiert durch

$$Q = CV, \quad V = \phi_1 - \phi_2 . \quad (3.70)$$

Die Spannung ist immer positiv. Die Kapazität bestimmt die Ladung, die bei vorgegebener Spannung von den Leitern aufgenommen werden kann und hängt nur von der Geometrie der Anordnung ab.

Ein Plattenkondensator besteht aus zwei parallelen ebenen Platten mit der Fläche  $S$  und dem Abstand  $d$ . Wenn man Randeffekte vernachlässigt, kann man die Platten als unendlich ausgedehnt annehmen. Die Ebene  $x = 0$  sei die Oberfläche der positiv geladenen, die Ebene  $x = d$  die der negativ geladenen Platte. An diesem Beispiel lassen sich die allgemeinen Grundkonzepte der Elektrostatik von Leitern einfach demonstrieren (Abb. 3.11).

#### Dirichlet Randwertproblem für den Plattenkondensator

Sind die Potentiale  $\phi_{1,2}$  auf den Platten vorgegeben, so erhält man für das Potential ein Dirichlet Randwertproblem

$$\partial_x^2 \phi(x) = 0, \quad 0 < x < d; \quad \phi(0) = \phi_1, \quad \phi(d) = \phi_2 .$$

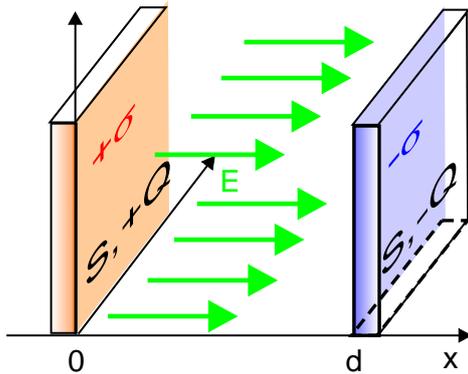


Abbildung 3.11: Plattenkondensator mit Oberflächenladungsdichten  $\pm\sigma$  auf den Oberflächen  $x = 0, d$ . Die Feldberechnung erfolgt für unendlich ausgedehnte Platten. Die Ladung  $Q$  wird für eine beliebige endliche Querschnittsfläche  $S$  des unendlich ausgedehnten Systems definiert.

Es besitzt die eindeutig bestimmte Lösung

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \phi_1\left(1 - \frac{x}{d}\right) + \phi_2\frac{x}{d}, \\ E(x) &= -\partial_x\phi(x) = \frac{\phi_1 - \phi_2}{d} = \frac{V}{d}.\end{aligned}$$

Die Ladungen auf einer beliebigen endlichen Teilfläche  $S$  der Ebenen können nach (3.62) aus den Normalkomponenten des Feldes berechnet werden,

$$\begin{aligned}Q_1 &= \sigma_1 S = \frac{E(0)S}{4\pi} = \frac{VS}{4\pi d} = Q \\ Q_2 &= \sigma_2 S = -\frac{E(d)S}{4\pi} = -Q\end{aligned}$$

### Neumann Randwertproblem für den Plattenkondensator

Sind die Flächenladungsdichten  $\sigma_1 = \sigma$ ,  $\sigma_2 = -\sigma$ ,  $\sigma = Q/S$  auf den Platten vorgegeben, so erhält man nach (3.61) ein Neumann Randwertproblem

$$\begin{aligned}\partial_x^2\phi(x) &= 0, & 0 < x < d; \\ \partial_x\phi(0) &= \partial_x\phi(d) = -4\pi\sigma.\end{aligned}$$

Es bestimmt das elektrische Feld eindeutig und das Potential bis auf eine beliebige Konstante,

$$E(x) = 4\pi\sigma, \quad \phi(x) = \phi_1 - 4\pi\sigma x.$$

Die Spannung ist auch hier eindeutig bestimmt durch

$$V = \phi_1 - \phi_2 = 4\pi\sigma d = \frac{4\pi Qd}{S}.$$

### Kapazität, Energie und Kraft

Die Kapazität (3.70) und die Kapazitätskoeffizienten (3.68) sind

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{S}{4\pi d}, \quad C_{11} = C_{22} = -C_{12} = -C_{21} = C. \quad (3.71)$$

Für die Energie (3.69) des Plattensystems folgt

$$U = \frac{1}{2}(\phi_1 Q_1 + \phi_2 Q_2) = \frac{1}{2} Q V = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2C} Q^2. \quad (3.72)$$

Diese Energie kann auch als Aufladungsarbeit berechnet werden. Für eine infinitesimale Aufladung  $dQ$  benötigt man die Arbeit

$$dU = dQ\phi_1 + (-dQ)\phi_2 = dQV = \frac{1}{C} Q dQ,$$

da hierbei die Potentiale als vorgegeben betrachtet werden können. Für eine endliche Aufladung  $Q$  erhält man durch Integration den Ausdruck (3.72). Die Kraft auf eine Fläche  $S$  der Platte 1 ist nach (3.65), (3.66) und (3.67)

$$F_1 = \frac{E^2}{8\pi} S = \frac{1}{2} Q_1 E = Q_1 (2\pi\sigma).$$

## 3.6 Lösungsmethoden für Randwertprobleme

Das Randwertproblem des Plattenkondensators mit unendlich ausgedehnten Oberflächen ist aufgrund der eindimensionalen Geometrie einfach zu lösen. In allgemeineren Fällen kann oft eine der folgenden Methoden angewandt werden.

### 3.6.1 Methode der Bildladungen

Die Grundidee der Methode der Bildladungen besteht darin, die i.a. komplizierte Oberflächenladung des Leiters durch eine oder mehrere Punktladungen innerhalb des Leiters zu ersetzen. Diese fiktiven Ladungen werden Bildladungen genannt, da sie im einfachsten Fall, bei einer ebenen Oberfläche, Spiegelbilder der wahren Ladungen vor der Oberfläche sind. Ziel ist es, die Bildladungen so zu bestimmen, daß die Leiteroberfläche mit einer Äquipotentialfläche des Punktladungssystems zusammenfällt. Gelingt dies, dann wurde das Randwertproblem für den Leiter gelöst.

#### Geladene leitende Kugel

Gesucht sei das Feld im Außenraum einer geladenen leitenden Kugel mit Radius  $R$  und Oberflächenladungsdichte  $\sigma$ . Aus Symmetriegründen wird man eine Bildladung

$q$  im Mittelpunkt der Kugel anbringen. Das Potential der Bildladung,  $\phi(r) = q/r$ , genügt an der Kugeloberfläche den Randbedingungen,

$$\phi(R) = \frac{q}{R} = \text{const}, \quad E(R) = q/R^2 = 4\pi\sigma.$$

Wählt man  $q = 4\pi R^2\sigma$ , dann ist das Bildladungspotential im Außenraum ( $r > R$ ) eine Lösung der gestellten Randwertaufgabe. Im Innenraum der Kugel ist das Potential konstant und das elektrische Feld verschwindet.

### Punktladung vor leitender Platte

Als nächste Fragestellung bietet es sich an zu untersuchen, welche Randwertprobleme mit dem Feld des physikalischen Dipols behandelt werden können. Die Äquipotentialflächen sind hier geschlossene Oberflächen, die jeweils eine der beiden Ladungen umschließen (Abb. 3.12). Ersetzt man eine Äquipotentialfläche durch die Oberfläche eines Leiters mit demselben Potential, so ist die eingeschlossene Ladung eine Bildladung, die andere eine wahre Ladung im Außenraum des Leiters.

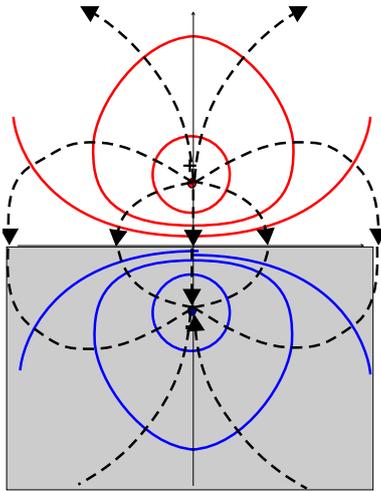


Abbildung 3.12: Das Potential einer Punktladung  $+q$  vor der leitenden Ebene  $z = 0$  ist im Halbraum  $z > 0$  identisch mit dem Dipolpotential. Die Ladung  $-q$  des Dipols dient als Bildladung um die Randbedingung  $\phi = 0$  in der Ebene  $z = 0$  zu erfüllen.

Ein einfacher Spezialfall liegt vor, wenn die Symmetrieebene  $z = 0$  als Oberfläche einer ebenen Platte mit dem Potential  $\phi = 0$  gewählt wird. Die wahre Ladung  $q$  befinde sich auf der  $z$ -Achse im Abstand  $a$  von der Ebene, die Bildladung  $q' = -q$  spiegelbildlich dazu an der Stelle  $z = -a$ . In einem beliebigen Punkt  $P$  mit dem Abstand  $r$  zur Ladung  $q$  und  $r'$  zu Bildladung  $q'$  wird das Dipolfeld durch,

$$\Phi = \frac{q}{r} - \frac{q}{r'}, \quad r^2 = (z - a)^2 + \varrho^2, \quad r'^2 = (z + a)^2 + \varrho^2 \quad (3.73)$$

gegeben, wobei  $\varrho$  den Abstand des Punktes  $P$  von der  $z$ -Achse bezeichnet. Auf der Oberfläche  $z = 0$  gilt  $r = r'$ . Daher erfüllt (3.73) die Randbedingung  $\Phi = 0$  für  $z = 0$ .

### Influenzladung

Die Ladung  $q$  ruft auf der Oberfläche des ungeladenen Leiters Ladungen mit entgegengesetztem Vorzeichen hervor. Diese werden Influenzladungen genannt. Das elektrische Feld an der Plattenoberfläche (3.33) bestimmt die Flächenladungsdichte

$$\sigma = \frac{E_z}{4\pi} = \frac{1}{4\pi} \frac{-p}{(a^2 + \rho^2)^{3/2}}. \quad (3.74)$$

Die gesamte Influenzladung kann als Oberflächenintegral berechnet werden. Es ist aber einfacher, das Oberflächenintegral mit Hilfe des Gaußschen Satzes in ein Volumenintegral über den Halbraum  $z < 0$  umzuformen,

$$q_{inf} = \int_{z=0} dS \sigma = \frac{1}{4\pi} \int_{z=0} dS E_z = \frac{1}{4\pi} \int_{z<0} dV \nabla \cdot \mathbf{E} = -q. \quad (3.75)$$

Der Fluß des elektrischen Feldes im Unendlichen verschwindet. Im Halbraum  $z < 0$  wurde nicht das physikalische Feld ( $\mathbf{E} = 0$ ) sondern das Dipolfeld verwendet, dessen einzige Quelle dort die Bildladung ist. Dies ist zulässig, da das Dipolfeld an der Oberfläche den richtigen Randwert besitzt. Auf diese Weise sieht man, daß die Influenzladung mit der Bildladung übereinstimmen muß.

### Bildkraft und Potentielle Energie

Durch die Platte wird eine Kraft auf die Ladung  $q$  ausgeübt, die durch das elektrische Feld am Ort der Ladung bestimmt wird:

$$F_1 = q E = -\frac{q^2}{(2a)^2}$$

Diese Kraft entspricht der Coulomb-Kraft, welche die Bildladung  $q'$ , im Abstand  $2a$  auf die Ladung  $q$  ausübt.

Die Platte erfährt im Feld der Punktladung eine gleich große Gegenkraft in  $z$ -Richtung. Diese kann, wie in (3.75), durch die Kraft ausgedrückt werden, welche die Ladung  $q$  auf die Bildladung  $q'$  ausübt,

$$\begin{aligned} F_2 &= \int_{z=0} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_z = \int_{z<0} dV \nabla \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_z \\ &= \int_{z<0} dV \varrho E_z = \int_{z<0} dV \varrho E_{z,ext} = \frac{q^2}{(2a)^2}. \end{aligned}$$

Eine Ladung vor einer Metalloberfläche wird von der Bildkraft angezogen. Bewegt sich die Ladung zur Metalloberfläche, so nimmt ihre potentielle Energie ab. Setzt

man  $U(\infty) = 0$ , so ist die potentielle Energie im Abstand  $a$  von der Platte

$$U = - \int_{\infty}^a F_1(a') da' = -\frac{q^2}{4a} .$$

### 3.6.2 Methode der Green-Funktion

Allgemeine Randwertproble der Potentialtheorie können auf die Bestimmung einer Green-Funktion zurückgeführt werden. Kennt man die Green-Funktion, so läßt sich die Lösung des Randwertproblems als Integraldarstellung angeben.

#### Dirichlet-Randwertproblem für das Potential

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= -4\pi\rho, & \mathbf{r} \text{ im Volumen} \\ \phi &= \phi_i, & \mathbf{r} \text{ auf dem } i\text{-ten Leiter} \end{aligned} \quad (3.76)$$

#### Dirichlet-Randwertproblem für die Green-Funktion

$$\begin{aligned} \Delta'G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) &= \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), & \mathbf{r}' \text{ im Volumen} \\ G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) &= 0, & \mathbf{r}' \text{ auf dem } i\text{-ten Leiter} \end{aligned} \quad (3.77)$$

Die Dirichlet-Green-Funktion ist also das Potential einer Punktladung  $q = -1/(4\pi)$  am Ort  $\mathbf{r}$ , das auf den Leitern den Wert Null annimmt.

#### Integraldarstellung der Lösung

Aus (2.60) erhält man mit der Substitution  $s = 4\pi\rho$  die Integraldarstellung

$$\phi(\mathbf{r}) = -4\pi \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \sum_i \phi_i \int dS'_i \partial_{n'} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') . \quad (3.78)$$

#### Beispiel

Das Beispiel einer Punktladung vor einer ebenen Platte kann auch mit der Green-Funktion gelöst werden. Die Green-Funktion ist hier das Potential einer Ladung  $q = -1/(4\pi)$  am Ort  $\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho} + z\mathbf{e}_z$  und einer Bildladung  $q_B = -q$  am Ort  $\mathbf{r}_B = \boldsymbol{\rho} - z\mathbf{e}_z$ ,

$$G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = \frac{-1}{4\pi} \left( \frac{1}{|\boldsymbol{\rho} + z\mathbf{e}_z - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\boldsymbol{\rho} - z\mathbf{e}_z - \mathbf{r}'|} \right) \quad (3.79)$$

Ist das Potential einer Ladung  $q$  am Ort  $\mathbf{r} = a\mathbf{e}_z$  gesucht, das für  $z = 0$  den Wert  $\phi_i = 0$  besitzt, so erhält man diese Lösung aus (3.78)

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{r}) &= -4\pi \int d^3r' q\delta(\mathbf{r}' - a\mathbf{e}_z) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ &= q \left( \frac{1}{|\boldsymbol{\rho} + (z - a)\mathbf{e}_z|} - \frac{1}{|\boldsymbol{\rho} - (z + a)\mathbf{e}_z|} \right).\end{aligned}\quad (3.80)$$

### 3.6.3 Separation in Kugelkoordinaten

Die Laplace-Gleichung ist in speziellen Koordinatensystemen separierbar, d.h. das Lösen der partiellen Differentialgleichung ist auf Eigenwertprobleme gewöhnlicher Differentialgleichungen zurückführbar. Diese Methode wird an dem wichtigen Beispiel der Separation in Kugelkoordinaten dargestellt. Sie ist immer dann anwendbar, wenn die Laplacegleichung im Volumen innerhalb einer Kugelschale gelöst werden soll und Randwerte auf den inneren und äußeren Kugeloberfläche vorgegeben sind. Dabei kann die innere Oberfläche auch im Koordinatenursprung, die äußere im Unendlichen liegen.

#### Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten

In Kugelkoordinaten  $r, \theta, \varphi$  lautet die Laplacegleichung

$$\Delta\phi = \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \right) \phi = 0.\quad (3.81)$$

Es ist zweckmäßig die Winkelvariable  $\theta$  im Intervall  $[0, \pi]$  durch die Variable  $x = \cos\theta$  im Intervall  $[-1, +1]$  zu ersetzen,

$$\frac{\partial\phi(r, \cos\theta, \varphi)}{\partial\theta} = \frac{dx}{d\theta} \frac{\partial\phi(r, x, \varphi)}{\partial x} = -\sin\theta \frac{\partial\phi(r, x, \varphi)}{\partial x}, \quad \sin^2\theta = 1 - x^2.$$

In  $r, x, \varphi$ -Koordinaten ergibt sich dann die Darstellung

$$\Delta = \frac{1}{r^2} (D^2 - L^2)\quad (3.82)$$

mit

$$\begin{aligned}D^2 &= \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} = r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial}{\partial r} \\ L^2 &= -\frac{\partial}{\partial x} (1 - x^2) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{1 - x^2} L_z^2, \\ L_z^2 &= -\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\end{aligned}\quad (3.83)$$

### Bezug zur Quantenmechanik

In der Quantenmechanik werden physikalischen Observablen mathematische Operatoren zugeordnet. Die Operatoren für das Betragsquadrat des Drehimpulses und das Betragsquadrat seiner  $z$ -Komponente sind zu den hier definierten Operatoren proportional

$$L_{QM}^2 = \hbar^2 L^2, \quad L_{z, QM}^2 = \hbar^2 L_z^2, \quad \hbar = h/(2\pi).$$

Hierbei bezeichnet  $h$  das Plancksche Wirkungsquantum. Die Eigenwertprobleme dieser Operatoren werden in der Quantenmechanik mit Operatormethoden detailliert behandelt. Unser Ziel ist es, die Eigenfunktionen zu definieren und ihre Eigenschaften anzugeben. Außerdem soll ein Grundverständnis für die Entwicklung von Funktionen nach vollständigen Funktionensystemen erreicht werden.

### Separationsansatz

Die Methode der Variablenseparation besteht darin mit einem Produktansatz

$$\phi(r, \theta, \varphi) = R(r)Y(\theta, \varphi), \quad Y(\theta, \varphi) = P(x)Q(\varphi) \quad (3.84)$$

spezielle Lösungen der partiellen Differentialgleichung zu bestimmen. Diese speziellen Lösungen erweisen sich in gewisser Weise als vollständig, so daß die allgemeine Lösung als Linearkombination dieser speziellen Lösungen dargestellt werden kann.

### Radialanteil R

Durch Einsetzen des Ansatzes (3.84) in die Laplace-Gleichung und Division durch  $\phi$  läßt sich die Variable  $r$  von den Variablen  $x$  und  $\varphi$  in folgender Weise separieren,

$$\frac{D^2 R}{R} = \frac{L^2 Y}{Y} = l(l+1) = \text{const} \quad (3.85)$$

Die linke Seite hängt nur von  $r$  die rechte Seite nur von  $x$  und  $\varphi$  ab. Daher müssen beide Seiten gleich einer Konstanten sein, die hier mit  $l(l+1)$  bezeichnet wird. Der Radialanteil  $R(r)$  genügt der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$r^2 R'' + 2rR' - l(l+1)R = 0, \quad (3.86)$$

wobei Striche Ableitungen nach dem Argument der Funktion bezeichnen. Ein Potenzansatz  $R = r^n$  ergibt die Bedingung

$$n(n-1) + 2n - l(l+1) = n(n+1) - l(l+1) = 0$$

mit den möglichen Lösungen  $n = l$  oder  $n = -(l + 1)$ . Die allgemeine Lösung für den Radialanteil ist die Linearkombination

$$R = a_l r^l + \frac{b_l}{r^{l+1}}, \quad (3.87)$$

mit beliebigen ( $l$ -abhängigen) Integrationskonstanten. Diese können z.B. durch Randbedingungen auf zwei Kugeloberflächen bestimmt werden. Für  $l = 0$  erhält man die radialsymmetrische Lösung (2.49).

### Winkelanteil $Q$

Nach (3.85) sind die Winkelfunktionen  $Y(\theta, \varphi)$  Eigenfunktionen des Operators  $L^2$  zum Eigenwert  $l(l + 1)$ ,

$$L^2 Y = l(l + 1) Y. \quad (3.88)$$

In (3.88) lassen sich analog die Variablen  $\varphi$  und  $x$  separieren,

$$\frac{L_z^2 Q}{Q} = (1 - x^2) \frac{[(1 - x^2) P']' + l(l + 1)}{P} = m^2 = \text{const}. \quad (3.89)$$

Die Separationskonstante wurde hier mit  $m^2$  bezeichnet. Da die Lösung im Raum eindeutig sein soll, ergibt sich für die Winkelfunktion  $Q(\varphi)$  das Eigenwertproblem

$$L_z^2 Q = m^2 Q, \quad Q(\varphi + 2\pi) = Q(\varphi). \quad (3.90)$$

Die Differentialgleichung besitzt die Lösungen  $e^{\pm im\varphi}$ . Die Periodizitätsbedingung,

$$e^{im(\varphi+2\pi)} = e^{im\varphi} \quad \iff \quad e^{i(2\pi m)} = 1$$

wird aber nur durch ganzzahlige  $m$  erfüllt. Die möglichen Lösungen des Eigenwertproblems (3.90) sind daher die trigonometrischen Funktionen

$$Q_m(\varphi) = e^{im\varphi}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (3.91)$$

Diese Funktionen bilden ein sogenanntes vollständiges Orthonormalsystem im Funktionenraum der periodischen Funktionen, ähnlich einer vollständigen Orthonormalbasis in einem endlich-dimensionalen Vektorraum. Die Orthonormalität wird durch das Skalarprodukt

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi f^*(\varphi) g(\varphi) \quad (3.92)$$

definiert. Damit erfüllen die Funktionen  $Q_m$  die Orthonormalitätsbedingung

$$(Q_m, Q_n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi e^{i(n-m)\varphi} = \delta_{mn} . \quad (3.93)$$

Die Vollständigkeit des Funktionensystems wird durch die formale Beziehung

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} Q_m^*(\varphi') Q_m(\varphi) = \delta(\varphi' - \varphi) \quad (3.94)$$

ausgedrückt.

Eine beliebige periodische Funktionen  $f(\varphi)$  kann nach trigonometrischen Funktionen entwickelt werden.

$$f(\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m e^{im\varphi}, \quad c_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi f(\varphi) e^{-im\varphi} . \quad (3.95)$$

Diese Darstellung wird als Fourierreihe mit den Fourierkoeffizienten  $c_m$  bezeichnet. Die Form der Fourierkoeffizienten ergibt sich aus (3.93),

$$(Q_m, f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (Q_m, Q_n) = c_m .$$

Setzt man die Fourierkoeffizienten in die Fourierreihe ein, so ergibt sich wegen der Vollständigkeitsbeziehung (3.94) wieder die Funktion  $f$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m e^{im\varphi} &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' f(\varphi') e^{-im\varphi'} \right) e^{im\varphi} \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi' \left( \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} Q_m^*(\varphi') Q_m(\varphi) \right) f(\varphi') \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi' \delta(\varphi - \varphi') f(\varphi') = f(\varphi) \end{aligned}$$

### Winkelanteil P

Nun bleibt noch der Winkelanteil  $P(x)$  zu bestimmen. Dieser genügt nach (3.89) der Differentialgleichung,

$$\left[ (1-x^2) P' \right]' + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P = 0. \quad (3.96)$$

Zunächst beschränken wir uns auf den Spezialfall  $m = 0$ . Er beschreibt zylindersymmetrische Lösungen,  $\phi = \phi(r, \theta)$ , die nicht von der Koordinate  $\varphi$  abhängen. Hier reduziert sich (3.96) auf die Legendre-Differentialgleichung

$$\left[ (1-x^2) P' \right]' + l(l+1)P = 0. \quad (3.97)$$

Diese Differentialgleichung hat singuläre Punkte an den Intervallgrenzen  $x = \pm 1$ . Nur für die Werte  $l = 0, 1, 2, 3, \dots$  gibt es reguläre Lösungen. Dies sind die Legendre-Polynome  $P_l(x)$  vom Grad  $l$ . Damit lautet die allgemeine zylindersymmetrische Lösung der Laplacegleichung

$$\phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left( a_l r^l + \frac{b_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta). \quad (3.98)$$

Die wichtigsten Eigenschaften der Legendre Polynome sind

1. Skalierung:  $P_l(1) = 1$

2. Geschlossene Form:

$$P_0(x) = 1, \quad P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l, \quad l = 1, 2, 3, \dots$$

3. Beispiele:

$$P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

4. Rekursionsformel:

$$(l+1)P_{l+1}(x) = (2l+1)xP_l(x) - lP_{l-1}(x)$$

5. Erzeugende Funktion:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2ux+u^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)u^n, \quad u < 1$$

6. Orthonormalität:

$$(P_l, P_{l'}) = \frac{2l+1}{2} \int_{x=-1}^{+1} dx P_l(x) P_{l'}(x) = \delta_{ll'}$$

7. Vollständigkeit

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} P_l(x') P_l(x) = \delta(x' - x)$$

Auch die Legendre-Polynome bilden ein vollständige Orthonormalsystem. Die Entwicklung einer im Intervall  $-1 < x < +1$  definierten Funktion  $f(x)$  nach Legendre-Polynomen lautet

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l P_l(x), \quad c_l = (P_l, f) = \frac{2l+1}{2} \int_{x=-1}^{+1} dx P_l(x) f(x). \quad (3.99)$$

Aufgrund der Vollständigkeit konvergiert auch diese Reihe bezüglich der Norm gegen die Funktion  $f$ .

Im allgemeinen Fall  $m \neq 0$  kann die Lösung auf folgende Weise angegeben werden. Die regulären Lösungen der verallgemeinerten Legendre-Gleichung (3.96) sind die zugeordneten Legendre-Polynome

$$P_l^m(x) \quad l = 0, 1, 2, 3, \dots \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l. \quad (3.100)$$

Die möglichen  $m$ -Werte werden für jedes  $l$  auf die ganzen Zahlen mit  $|m| \leq l$  eingeschränkt. Die geschlossene Form dieser Polynome lautet

$$\begin{aligned} P_l^0(x) &= P_l(x) \\ P_l^m(x) &= (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_l(x)}{dx^m}, \quad m > 0 \\ P_l^{-m}(x) &= (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x), \quad m > 0 \end{aligned}$$

## Kugelfunktionen

Das Produkt von  $P_l^m(\cos \theta)$  mit  $Q_m(\varphi)$  definiert eine Funktion auf einer Kugeloberfläche. Mit einer geeigneten Normierung definiert man die Kugelfunktionen

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad (3.101)$$

für  $l = 0, 1, 2, \dots$  und  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$ . Sie bilden ein vollständiges Orthonormalsystem für alle Funktionen, deren Definitionsgebiet die Oberfläche einer Kugel mit Radius 1 ist. Die allgemeine Lösung der Laplacegleichung lautet damit

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \left( a_{lm} r^l + \frac{b_{lm}}{r^{l+1}} \right) Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (3.102)$$

Einige Eigenschaften der Kugelfunktionen sind:

1. Eigenwertgleichungen

$$L^2 Y_{lm} = l(l+1) Y_{lm}, \quad L_z^2 Y_{lm} = m^2 Y_{lm}$$

2.  $l = 0$  und  $l = 1$

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta, \quad Y_{1,\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\varphi} \quad (3.103)$$

3. Spezielle  $m$  Werte

$$Y_{l0} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta), \quad Y_{l,-m} = (-1)^m Y_{lm}^*$$

4. Orthonormalität

$$\int d\Omega Y_{lm}^* Y_{l'm'} = \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad \int d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{+1} d \cos \theta$$

5. Vollständigkeit

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) = \delta(\Omega' - \Omega) = \delta(\varphi' - \varphi) \delta(\cos \theta' - \cos \theta).$$

6. Entwicklung von  $f(\theta, \varphi)$  nach Kugelfunktionen

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} c_{lm} Y_{lm}, \quad c_{lm} = \int d\Omega Y_{lm}^*(\theta, \varphi) f(\theta, \varphi)$$

**Beispiel: Verschobenes Coulomb-Potential ( $m = 0$ )**

Gesucht sei die Reihenentwicklung des Potentials einer Punktladung  $q$  in Kugelkoordinaten, wenn sich diese an einem Ort  $\mathbf{r}_0$  außerhalb des Koordinatenursprungs befindet. Wählt man ein Koordinatensystem, dessen  $z$ -Achse zur Punktladung gerichtet ist und mit dem Beobachtungspunkt  $\mathbf{r}$  den Winkel  $\theta$  einschließt, so gilt

$$\phi(r, \theta) = \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \frac{q}{\sqrt{r^2 - 2rr_0 \cos \theta + r_0^2}}. \quad (3.104)$$

Das Potential ist zylindersymmetrisch und erfüllt für  $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0$  die Laplacegleichung. Der Punkt  $\mathbf{r}_0$  ist auszuschließen. Man kann daher Reihenentwicklungen der Form (3.98) innerhalb und außerhalb einer Kugel mit Radius  $r_0$  angeben. Da das Potential im Ursprung endlich bleibt und im Unendlichen verschwindet gilt  $b_l = 0$  für  $r < r_0$  und  $a_l = 0$  für  $r > r_0$ . Somit findet man

$$\phi(r, \theta) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} a_l r^l P_l(\cos \theta) & r < r_0 \\ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{b_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta) & r > r_0 \end{cases}.$$

Aus Dimensionsgründen können die Koeffizienten zweckmäßiger Weise in der Form

$$a_l = A_l \frac{q}{r_0^{l+1}}, \quad b_l = B_l q r_0^l$$

gewählt werden. Außerdem ist das Potential für  $r \rightarrow r_0$  stetig. Wegen der Orthogonalität der Kugelfunktionen muß dies für jeden Summand der Reihe gelten,

$$a_l r_0^l = b_l r_0^{-l-1} \quad \Longleftrightarrow \quad A_l = B_l.$$

Damit lautet die Entwicklung

$$\phi(r, \theta) = \begin{cases} \frac{q}{r_0} \sum_{l=0}^{\infty} A_l \left(\frac{r}{r_0}\right)^l P_l(\cos \theta) & r < r_0 \\ \frac{q}{r} \sum_{l=0}^{\infty} A_l \left(\frac{r_0}{r}\right)^l P_l(\cos \theta) & r > r_0 \end{cases}. \quad (3.105)$$

Die Berechnung der Entwicklungskoeffizienten gelingt am einfachsten, wenn man die Potentialwerte auf der  $z$ -Achse vorgibt,

$$\phi(r, 0) = \frac{q}{|r - r_0|}$$

Der Betrag von  $r - r_0$  lässt sich ohne explizite Fallunterscheidung auflösen, wenn man

$$|r - r_0| = r_> - r_<, \quad r_> = \max\{r, r_0\}, \quad r_< = \min\{r, r_0\} \quad (3.106)$$

setzt. Mit Hilfe der geometrischen Reihe folgt,

$$\phi(r, 0) = \frac{q}{r_> - r_<} = \frac{q}{r_>} \frac{1}{1 - r_</r_>} = \frac{q}{r_>} \sum_{l=0}^{\infty} \left( \frac{r_<}{r_>} \right)^l \quad (3.107)$$

Ein Koeffizientenvergleich mit (3.105) für  $\theta = 0$ ,  $\cos \theta = 1$  und  $P_l(1) = 1$  ergibt

$$A_l = 1 .$$

Als Ergebnis erhält man für beliebige Winkel und beliebige Abstände mit  $r \neq r_0$  die Entwicklung

$$\phi(r, \theta) = \frac{q}{\sqrt{r^2 - 2rr_0 \cos \theta + r_0^2}} = q \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos \theta) . \quad (3.108)$$

### Beispiel: Vershobenes Coulomb-Potential ( $m \neq 0$ )

Die Punktladung  $q$  befinde sich nun an einem beliebigen Punkt  $\mathbf{r}'$  mit einem endlichem Abstand von der z-Achse. Bezüglich der z-Achse ist das Potential nicht mehr zylindersymmetrisch. Man benötigt daher die allgemeine Entwicklung (3.102) nach Kugelfunktionen. Analog zu (3.105) kann man Entwicklungen für  $r < r'$  und  $r > r'$  mit dimensionslosen Entwicklungskoeffizienten angeben,

$$\phi(r, \Omega) = \begin{cases} \frac{q}{r'} \sum_{l,m} \left( \frac{r}{r'} \right)^l A_{lm} Y_{lm}(\Omega) & r < r' \\ \frac{q}{r} \sum_{l,m} \left( \frac{r'}{r} \right)^l A_{lm} Y_{lm}(\Omega) & r > r' \end{cases} . \quad (3.109)$$

Die Koeffizienten  $A_{lm}$  sind im Prinzip durch das vorgegebene Potential auf der Kugeloberfläche  $r = r'$  bestimmt und hängen i.a. von den gestrichenen Koordinaten  $(r', \Omega')$  ab. Es ist jedoch einfacher die Koeffizienten aus der Forderung zu bestimmen, daß das Potential eine Lösung der Poisson-Gleichung für die Punktladung darstellen soll. In Kugelkoordinaten lautet diese

$$D^2 \phi - L^2 \phi = -4\pi q \delta(r - r') \delta(\Omega - \Omega') \quad (3.110)$$

wobei (3.82) und

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{r^2} \delta(r - r') \delta(\Omega - \Omega')$$

verwendet wurde. Da die gesuchten Koeffizienten nicht von  $r$  abhängen kann man ohne Einschränkung über  $r$  integrieren. Der erste Term aus (3.110) ergibt dann nur

einen Beitrag von der Kugelfunktion  $Y_{00}$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dr D^2 \phi &= r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_0^\infty \\ &= q \sum_{l,m} A_{lm} Y_{lm} \left[ -(l+1) \left( \frac{r'}{r} \right)^l \Big|_{r \rightarrow \infty} - l \left( \frac{r}{r'} \right)^{l+1} \Big|_{r=0} \right] \\ &= -q A_{00} Y_{00} . \end{aligned}$$

Im zweiten Term kann auf jeden Summand der Reihe (3.88) angewandt werden. Dabei verschwindet der Summand mit  $Y_{00}$ . Die restlichen Summanden ergeben,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dr L^2 \phi &= q \sum_{l \neq 0, m \neq 0} l(l+1) A_{lm} Y_{lm} \left[ \frac{1}{l+1} \left( \frac{r}{r'} \right)^{l+1} \Big|_0^{r'} - \frac{1}{l} \left( \frac{r}{r'} \right)^l \Big|_{r'}^\infty \right] \\ &= q \sum_{l \neq 0, m \neq 0} (2l+1) A_{lm} Y_{lm} . \end{aligned}$$

Insgesamt erhält man nach der  $r$ -Integration und Division durch  $-4\pi q$  die Gleichung

$$\sum_{k,n} \frac{(2k+1)}{4\pi} A_{kn}(\Omega') Y_{kn}(\Omega) = \delta(\Omega - \Omega') .$$

wobei die Summe jetzt wieder die Werte  $k = 0$ ,  $n = 0$  einschließt. Zunächst sieht man, daß die Koeffizienten nur von  $\Omega'$  abhängen, da  $r'$  nicht mehr in der Gleichung auftritt. Multipliziert man die Gleichung mit  $Y_{lm}^*(\Omega)$  und integriert über  $d\Omega$  so folgt mit Hilfe der Orthonormalitätsbedingung der Kugelfunktionen

$$\frac{(2l+1)}{4\pi} A_{lm}(\Omega') = Y_{lm}^*(\Omega')$$

oder

$$A_{lm}(\Omega') = \frac{4\pi}{(2l+1)} Y_{lm}^*(\Omega') .$$

Das Potential einer Punktladung mit den Kugelkoordinaten  $(r', \Omega')$  in einem Punkt mit den Kugelkoordinaten  $(r, \Omega)$  besitzt damit die Reihenentwicklung

$$\phi(r, \Omega, r', \Omega') = 4\pi q \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{1}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\Omega') Y_{lm}(\Omega) \quad (3.111)$$

Hierbei ist  $r_{<} = \min(r, r')$  und  $r_{>} = \max(r, r')$ .

### Additionstheorem der Kugelfunktionen

Durch Koeffizientenvergleich der Darstellungen (3.108) und (3.111) für das Potential einer Punktladung erhält man das sogenannte Additionstheorem der Kugelfunktionen

$$P_l(\vartheta) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}^*(\Omega') Y_{lm}(\Omega) . \quad (3.112)$$

Hierbei ist  $\vartheta$  der Winkel, der von den Richtungen  $\Omega$  und  $\Omega'$  eingeschlossen wird.

### Multipolentwicklung mit Kugelfunktionen

Die in Abschnitt 3.4.3 durchgeführte Berechnung der Multipolmomente in kartesischen Koordinaten ist nur bis zum Quadrupolmoment einfach durchführbar. Dagegen ermöglicht eine Entwicklung des Potentials nach Kugelfunktionen in Kugelkoordinaten eine relativ einfache Berechnung der Multipolmomente beliebiger Ordnung.

Die Ladungsverteilung  $\varrho(\mathbf{r}')$  sei vollständig im Innenraum einer Kugel enthalten, der Beobachtungspunkt  $\mathbf{r}$  liege im Außenraum der Kugel. Das Potential im Beobachtungspunkt ist

$$\phi(\mathbf{r}) = \int dV' \frac{\varrho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Der Abstand zum Beobachtungspunkt ist immer größer als die Abstände zu den Punkten der Ladungsverteilung. Daher kann man die Entwicklung (3.111) mit  $r_< = r'$ ,  $r_> = r$  und  $q = 1$  anwenden,

$$\phi(\mathbf{r}) = \int dV' \varrho(\mathbf{r}') \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r'^l}{r^{l+1}} Y_{lm}^*(\Omega') Y_{lm}(\Omega) \quad (3.113)$$

Im Integranden sind die Koordinaten der Ladungselemente und die des Beobachtungspunktes vollständig faktorisiert. Definiert man die sphärischen Multipolmomente durch die Integrale

$$q_{lm} = \int dV' \varrho(\mathbf{r}') r'^l Y_{lm}^*(\Omega') \quad (3.114)$$

so lautet die Multipolentwicklung

$$\phi = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{q_{lm} Y_{lm}(\Omega)}{r^{l+1}} \quad (3.115)$$

Entsprechend der Multipolentwicklung in kartesischen Koordinaten ist dies eine Reihe, in der der  $l$ -te Summand mit  $1/r^{l+1}$  abfällt. Zu jeder Ordnung  $l$  gibt es  $2l + 1$  sphärische Multipolmomente. Die kartesischen Multipolmomente der Ordnung  $l$  lassen sich durch die  $2l + 1$  sphärischen Momente ausdrücken. So entsprechen den 5 sphärischen Multipolmomenten der Ordnung  $l = 2$  gerade die 5 unabhängigen Elementen des symmetrischen spurfreien Quadrupoltensors. Für die niedrigsten Multipolmomente erhält man mit (3.103)

$$\begin{aligned}
 q_{00} &= \int dV \varrho Y_{00}^* = \frac{Q}{\sqrt{4\pi}} \\
 q_{10} &= \int dV \varrho r Y_{10}^* = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int dV \varrho z = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} p_z \\
 q_{11} &= \int dV \varrho r Y_{11}^* = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int dV \varrho (x - iy) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} (p_x - ip_y) \\
 q_{1,-1} &= -q_{11}^* = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} (p_x + ip_y) \\
 q_{20} &= \int dV \varrho r^2 Y_{20}^* = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \int dV \varrho \frac{1}{2} (3z^2 - r^2) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} Q_{zz}
 \end{aligned}$$

## 3.7 Dielektrika

Leiter sind Stoffe, die aufgrund freier Ladungsträger den elektrischen Strom leiten. Im elektrostatischen Gleichgewicht sind die Ladungen so an der Oberfläche verteilt, daß das elektrische Feld im Leiter verschwindet.

Nichtleiter sind dagegen alle Stoffe, in denen die Ladungsträger an feste Plätze (Atom, Elementarzelle, Molekül) gebunden sind, so daß kein Strom fließen kann. Sie werden auch Isolatoren oder Dielektrika genannt. In Nichtleitern können elektrostatische Felder auftreten. Diese können durch kleine Verschiebungen der Ladungsträger Dipolmomente induzieren (elektronische Polarisierung), oder vorhandene Dipolmomente ausrichten (Orientierungspolarisation). Die Polarisierung des Dielektrikums muß bei der Bestimmung des elektrostatischen Feldes berücksichtigt werden.

### 3.7.1 Dielektrizitätskonstante

Der Effekt der Polarisierung wurde von Faraday entdeckt, der beobachtete daß sich die Kapazität eines Plattenkondensators ändert, wenn man in den Raum zwischen den Platten ein Dielektrikum einbringt. Die Kapazität mit Dielektrikum kann empirisch durch ein Gesetz

$$C = \epsilon \frac{A}{4\pi d}, \quad (3.116)$$

angegeben werden, wobei  $\epsilon$  eine Materialkonstante darstellt, die von der Plattenfläche  $A$  und vom Plattenabstand  $d$  unabhängig ist. Sie wird als Dielektrizitätskonstante bezeichnet. Dieser Kapazität entspricht bei einer festen Kondensatorladung  $Q$  ein elektrisches Feld

$$E = \frac{Q}{Cd} = \frac{4\pi\sigma}{\epsilon}, \quad \sigma = \frac{Q}{A}$$

im Kondensator. Einer Erhöhung der Kapazität um einen Faktor  $\epsilon > 1$  entspricht damit eine Erniedrigung des elektrischen Feldes und der Flächenladung um einen Faktor  $1/\epsilon$ . Die Ladung auf den Platten wird durch entgegengesetzte Polarisationsladungen auf den Oberflächen des Dielektrikums teilweise abgeschirmt.

Luft	1,0005
Petroleum	2,1
Glas	5-8
Wasser	81

Tabelle 3.1:  $\epsilon$  bei  $20^0$  C und Normaldruck

### 3.7.2 Polarisation

#### Polarisationsvektor

Beim Anlegen eines elektrischen Feldes werden die Ladungen in jedem Punkt  $\mathbf{r}$  eines Dielektrikums verschoben. Diese Verschiebung wird makroskopisch durch den Polarisationsvektor  $\mathbf{P}(\mathbf{r})$  angegeben. Die Richtung von  $\mathbf{P}$  ist parallel zur Ladungsverschiebung, der Betrag gibt die Ladungsmenge  $dQ_{\perp}$  an, die pro Flächeneinheit durch ein Flächenelement  $dS_{\perp}$  senkrecht zur Verschiebungsrichtung hindurchtritt,  $P = dQ_{\perp}/dS_{\perp}$ .

#### Oberflächenpolarisation

Die Ladungsmenge  $dQ$ , die durch ein beliebig orientiertes Flächenelement  $d\mathbf{S}$  mit der Normalenrichtung  $\mathbf{n}$  hindurchtritt, wird durch die Normalenkomponente  $P_n = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$  des Polarisationsvektors bestimmt,

$$dQ = P_n dS = \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}. \quad (3.117)$$

Die Tangentialkomponente beschreibt Verschiebungen parallel zur Oberfläche, die keinen Beitrag zu  $dQ$  liefern. Die Normalenkomponente von  $\mathbf{P}$  gibt die Flächenla-

dungsdichte der Polarisationsladungen an,

$$P_n = \sigma_p = \frac{dQ}{dS}. \quad (3.118)$$

In einem kartesischen Koordinatensystem gibt die Komponente  $P_i$  die Ladungsmenge an, die durch ein Flächenelement mit der Normalenrichtung  $i$  verschoben wird. Die gesamte Polarisationsladung auf der Oberfläche eines Dielektrikums ist

$$Q_p = \int_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{P}. \quad (3.119)$$

### Volumenpolarisation

Durch eine beliebige geschlossene Oberfläche innerhalb eines Dielektrikums tritt die Ladungsmenge

$$Q = \int d\mathbf{f} \cdot \mathbf{P} = \int dV \nabla \cdot \mathbf{P} \quad (3.120)$$

hindurch. Die Ladung innerhalb des Volumens hat dabei um  $-Q$  abgenommen. Da das Volumen beliebig gewählt werden kann, ergibt sich in jedem Volumenelement eine Ladungsdichte

$$\varrho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad (3.121)$$

der Polarisationsladungen. Für eine konstante Polarisation ist  $\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$ . Alle Polarisationsladungen befinden sich dann an der Oberfläche.

### Dichte des Dipolmoments

Besitzt ein Dielektrikum in jedem Volumenelement ein mittleres Dipolmoment

$$\tilde{\mathbf{P}} dV \quad (3.122)$$

so wird dadurch eine Polarisation  $\mathbf{P} = \tilde{\mathbf{P}}$  erzeugt. Der Polarisationsvektor kann damit auch als mittlere Dipolmomentdichte physikalisch gedeutet werden. Um dies zu zeigen, betrachtet man das Potential, welches durch das Dipolmoment in  $d^3r'$

erzeugt wird,

$$\begin{aligned}
 d\Phi(\mathbf{r}) &= \frac{\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3r' = \tilde{\mathbf{P}} \cdot \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' \\
 &= \nabla' \cdot \left( \tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d^3r' - \frac{\nabla' \cdot \tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' \\
 &= \int d\mathbf{f} \cdot \tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{-\nabla' \cdot \tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r'. \quad (3.123)
 \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde die Definition der Divergenz als Fluß durch die Oberfläche des Volumenelementes verwendet. Dieses Potential ist das einer Polarisationsladungsdichte  $\varrho_P = -\nabla \cdot \tilde{\mathbf{P}}$  innerhalb des Volumens und  $\sigma_P = \tilde{P}_n$  auf der Oberfläche des Volumenelements.

Durch die lokale Polarisation  $\mathbf{P}$  des Mediums wird ein globales elektrisches Feld  $\mathbf{E}_p$  erzeugt, das von der genauen Verteilung der Polarisationsladungen im Volumen und auf der Oberfläche abhängt. Als Beispiel vergleichen wir die elektrischen Felder einer homogen polarisierten Schicht und einer homogen polarisierten Kugel.

### Homogene Polarisation einer ebenen Schicht

Verschiebt man in einer homogenen ebenen Schicht  $0 < x < d$  die Ladungsdichte  $\varrho^+$  der positiven Ladungen um eine kleine Strecke  $\delta$  gegenüber der Ladungsdichte  $\varrho^- = -\varrho^+$  der negativen Ladungen, so tritt durch jede feste Querschnittsfläche  $A$  die Ladung  $\varrho^+ \delta A$ . Die Polarisation ist definitionsgemäß die Flächenladungsdichte

$$P = \varrho^+ \delta .$$

Da die Polarisation homogen ist, treten innerhalb der Schicht keine Polarisationsladungen auf. Die Polarisationsladungen an den Oberflächen werden durch die Flächenladungsdichten  $\sigma^+ = P$  bei  $x = d$  und  $\sigma^- = -P$  bei  $x = \delta \approx 0$  bestimmt.

Das durch die Polarisationsladungen im Innern der Schicht erzeugte elektrische Feld erhält man nach dem Superpositionsprinzip aus den Feldern der positiven und negativen Ladungsdichten,

$$\begin{aligned}
 E_p &= E^+ + E^- = -4\pi\varrho^+\delta = -4\pi P , \quad (3.124) \\
 E^+ &= 4\pi\varrho^+(x - \delta - d/2) , \quad \delta < x < d + \delta \\
 E^- &= 4\pi\varrho^-(x - d/2) , \quad 0 < x < d
 \end{aligned}$$

### Homogene Polarisation einer Kugel

Verschiebt man in einer homogenen Kugel  $0 < r < R$  die Ladungsdichte  $\varrho^+$  der positiven Ladungen um einen kleinen Vektor  $\boldsymbol{\delta}$  gegenüber der Ladungsdichte  $\varrho^- = -\varrho^+$

der negativen Ladungen, so tritt durch jedes Flächenelement die Ladung  $\varrho^+ \boldsymbol{\delta} \cdot d\mathbf{f}$ . Der Polarisationsvektor ist daher

$$\mathbf{P} = \varrho^+ \boldsymbol{\delta} .$$

Es treten auch hier keine Volumenladungen auf. Die Oberflächenladung eines Flächenelementes mit Normalenrichtung  $\mathbf{n}$  am Rand der Kugel ist

$$\sigma = P_n = \varrho^+ \boldsymbol{\delta} \cdot \mathbf{n} = P \cos \Theta ,$$

Sie hängt vom Winkel  $\Theta$  ab, den der Polarisationsvektor mit der Flächennormalen bildet. Der Betrag der Flächenladung ist in der Polarisationsrichtung maximal und verschwindet in den dazu senkrechten Richtungen.

Addiert man die von den positiven und negativen Ladungsdichten erzeugten Felder, so erhält man im Innern der Kugel das elektrische Feld

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_p &= \mathbf{E}^+ + \mathbf{E}^- = -\frac{4\pi}{3} \varrho^+ \boldsymbol{\delta} = -\frac{4\pi}{3} \mathbf{P} , \\ \mathbf{E}^+ &= \frac{4\pi}{3} \varrho^+ (\mathbf{r} - \boldsymbol{\delta}) , \quad 0 < |\mathbf{r} - \boldsymbol{\delta}| < R \\ \mathbf{E}^- &= \frac{4\pi}{3} \varrho^- \mathbf{r} , \quad 0 < r < R \end{aligned} \quad (3.125)$$

Das Feld ist homogen. Wegen der richtungsabhängigen Oberflächenladung ist das Feld jedoch gegenüber (3.124) um den Faktor 1/3 reduziert.

### 3.7.3 Feldgleichungen

Addiert man die Polarisationsladungsdichte (3.121) zur externen Ladungsdichte  $\varrho$  so folgt,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi(\varrho_p + \varrho) \quad \iff \quad \nabla \cdot (\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}) = 4\pi\varrho . \quad (3.126)$$

Die externe Ladungsdichte ist demnach die Quelle des Vektorfeldes

$$\boxed{\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P},} \quad (3.127)$$

das als dielektrische Verschiebung bezeichnet wird. Damit lauten die Feldgleichungen für Dielektrika

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\varrho , \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0 .} \quad (3.128)$$

### Dielektrizitätskonstante

Für hinreichend kleine elektrische Felder kann die Polarisation als lineare Funktion des elektrischen Feldes angenommen werden. Nimmt man außerdem ein isotropes Medium an, so ist der Polarisationsvektor in Richtung des elektrischen Feldes gerichtet. Mit diesen Näherungen ergeben sich die linearen Beziehungen,

$$\mathbf{P} = \chi \mathbf{E}, \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \epsilon = 1 + 4\pi\chi . \quad (3.129)$$

Man nennt  $\chi$  die elektrische Suszeptibilität und  $\epsilon$  die Dielektrizitätskonstante. Dies sind Materialkonstanten, die entweder experimentell gemessen oder mit Hilfe theoretischer Modelle abgeleitet werden können.

### Homogenes Dielektrikum

Für ein homogenes Dielektrikum ( $\epsilon = konst$ ) lauten die Feldgleichungen

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \frac{\rho}{\epsilon}. \quad (3.130)$$

Die Ladungsdichten im homogenen Dielektrikum sind um den Faktor  $1/\epsilon$  reduziert. Dies erklärt die oben beschriebene Felderniedrigung bzw. Kapazitätserhöhung im Plattenkondensator mit eingeschobenen Dielektrikum.

### Randbedingungen

An Grenzflächen zwischen zwei Dielektrika gelten die Randbedingungen

$$\begin{aligned} [E_t] &= (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{t} = 0, \\ [D_n] &= [\epsilon E_n] = (\epsilon_2 \mathbf{E}_2 - \epsilon_1 \mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{n} = 4\pi\sigma . \end{aligned} \quad (3.131)$$

Hierbei bezeichnet  $\mathbf{n}$  den Normalenvektor,  $\mathbf{t}$  einen Tangentenvektor und  $\sigma$  die Flächenladungsdichte der Grenzfläche. Der Normalenvektor ist senkrecht zur Grenzfläche vom Medium 1 zum Medium 2 gerichtet. Die Herleitung der Randbedingungen ist analog zu der in Abschnitt 3.5.3.

### Brechungsgesetz für Feldlinien

Sei  $\alpha$  der Winkel, der von  $\mathbf{E}$  und dem Normalenvektor  $\mathbf{n}$  der Oberfläche eingeschlossen wird,

$$\tan \alpha = \frac{E_t}{E_n}.$$

An einer Grenzfläche ohne Flächenladung ( $\sigma = 0$ ) gilt für die Feldlinien das Brechungsgesetz

$$\frac{\tan \alpha_2}{\tan \alpha_1} = \frac{E_{n,1}}{E_{n,2}} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \quad (3.132)$$

### 3.7.4 Plattenkondensator mit Dielektrikum

In einen Plattenkondensator mit vorgegebenen Flächenladungen  $\pm\sigma$  wird ein Dielektrikum mit der Dielektrizitätskonstanten  $\epsilon$  so eingeschoben, daß es den gesamten Raum zwischen den Platten bei  $x = 0$  und  $x = d$  homogen ausfüllt. Aus den Gleichungen  $\partial_x D = 4\pi\rho$ ,  $D = \epsilon E$  folgt mit der Randbedingung  $D(x < 0) = 0$ ,

$$\begin{aligned} D &= 0, & E &= 0, & x < 0, & x > d, \\ D &= 4\pi\sigma, & E &= 4\pi\sigma/\epsilon, & 0 < x < d. \end{aligned}$$

Die Kapazität wird durch das Dielektrikum um den Faktor  $\epsilon$  erhöht,

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\sigma S}{Ed} = \epsilon C_0, \quad C_0 = \frac{S}{4\pi d}. \quad (3.133)$$

Setzt man  $D = E + 4\pi P$ , so folgt für die Polarisation des Mediums

$$P = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} E = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \sigma \quad (3.134)$$

Da die Polarisation homogen ist, treten die Polarisationsladungen nur als Flächenladungen auf. An der Oberfläche  $x = 0$  gilt  $\sigma_p = P_n = -P$ . Die gesamte Flächenladung wird um den Faktor  $1/\epsilon$  erniedrigt

$$\sigma_g = \sigma + \sigma_p = \sigma - \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \sigma = \frac{\sigma}{\epsilon}. \quad (3.135)$$

### 3.7.5 Polarisierbarkeit von Atomen und Molekülen

#### Verschiebungspolarisation

In einem Gas aus unpolaren Atomen oder Molekülen kann ein elektrisches Feld durch Ladungsverschiebungen Dipolmomente induzieren und damit eine Polarisation des Mediums bewirken. Das mittlere induzierte Dipolmoment eines Teilchens kann in vielen Fällen proportional zum elektrischen Feld,

$$\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}, \quad (3.136)$$

angenommen werden. Die Proportionalitätskonstante  $\alpha$  wird als atomare Polarisierbarkeit bezeichnet. Sie hat die Dimension eines Volumens und die Größenordnung des Atomvolumens. Wählt man den Bohrschen Radius  $a_B$  als atomare Längeneinheit, so erhält man

$$\alpha = c a_B^3, \quad a_B = \frac{\hbar^2}{m e^2} = 0.5 \times 10^{-8} \text{ cm} \quad (3.137)$$

wobei  $c$  eine dimensionslose Konstante von der Größenordnung 1 darstellt. Die Polarisation, die Suszeptibilität und die Dielektrizitätskonstante können durch die Teilchendichte und die Polarisierbarkeit in folgender Weise ausgedrückt werden:

$$\mathbf{P} = n \mathbf{p} = n \alpha \mathbf{E}, \quad \chi = n \alpha, \quad \epsilon = 1 + 4\pi \chi = 1 + 4\pi n \alpha. \quad (3.138)$$

Ein ideales Gas besitzt unter Normalbedingungen ( $0^\circ\text{C}$ , 1 Atmosphäre) eine Teilchendichte von  $n = 2.7 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ . Die Abweichungen der Dielektrizitätskonstanten vom Vakuumwert 1 sind dann relativ klein,

$$\epsilon - 1 = c \times 0.4 \times 10^{-4}. \quad (3.139)$$

Dies stimmt mit dem gemessenen Wert für Luft ( $\epsilon = 1.0005$ ) größenordnungsmäßig überein. Die Konstante  $c$  muß quantenmechanisch berechnet werden.

### Orientierungspolarisation

Die permanenten Dipolmomente polarer Moleküle (z.B.  $H_2O$ ) können durch ein elektrisches Feld ausgerichtet werden und dadurch eine Polarisation des Mediums bewirken. Für die mittlere Dichte der Dipole, die bei der Temperatur  $T$  mit dem Feld den Winkel  $\Theta$  bilden, nehmen wir eine Boltzmann-Verteilung

$$n(\theta) = C e^{-U(\Theta)/k_B T}, \quad U(\Theta) = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} = -pE \cos \Theta \quad (3.140)$$

mit der Boltzmann-Konstante  $k_B$  und einer Normierungskonstanten  $C$  an. In der statistischen Physik wird gezeigt, daß diese Verteilung vorliegt, wenn sich ein System mit der potentiellen Energie  $U(\Theta)$  mit einem Wärmebad der Temperatur  $T$  im Gleichgewicht befindet. Für kleine Wechselwirkungsenergien,  $U \ll k_B T$ , kann man die Boltzmannverteilung näherungsweise durch

$$n(\theta) = \frac{n_0}{4\pi} \left( 1 - \frac{U(\theta)}{k_b T} \right), \quad n_0 = \int d\Omega n(\theta)$$

ersetzen, wobei  $n_0$  die gesamte Dichte der Moleküle bezeichnet. Integriert man die Komponente des Dipolmomentes in Feldrichtung,  $p \cos \Theta$ , über diese Verteilung, so

ergibt sich die Polarisation

$$\begin{aligned}
 P &= \int d\Omega n(\theta) p \cos \theta \\
 &= \int d\Omega \frac{n_0}{4\pi} \left(1 + \frac{pE \cos \theta}{k_B T}\right) p \cos \theta \\
 &= \frac{2\pi n_0}{4\pi} \int_{-1}^{+1} d \cos \theta \frac{pE \cos \theta}{k_B T} p \cos \theta \\
 &= \frac{n_0 p^2 E}{2k_B T} \int_{-1}^{+1} d \cos \theta \cos^2 \theta = \frac{n_0 p^2}{3k_B T} E .
 \end{aligned} \tag{3.141}$$

Die Suszeptibilität

$$\chi = \frac{n_0 p^2}{3k_B T} \tag{3.142}$$

ist umgekehrt proportional zur Temperatur (Curie-Gesetz). Bei hohen Temperaturen überwiegt die elektronische Polarisation, bei niedrigen Temperaturen dominiert bei polaren Molekülen die Orientierungspolarisation. Die Dielektrizitätskonstante lautet entsprechend

$$\epsilon = 1 + \frac{4\pi}{3} \frac{n_0 p^2}{k_B T}. \tag{3.143}$$

### Polarisation in nichtpolaren Flüssigkeiten

In dichten Medien müssen bei der Berechnung der Polarisierbarkeit Lokalfeldefeffekte berücksichtigt werden. Das lokale elektrische Feld  $\mathbf{E}_L$  welches in der Umgebung eines Atoms für dessen Polarisation wirksam ist, unterscheidet sich von dem mittleren elektrischen Feld  $\mathbf{E}$  im Medium. Für isotrope Flüssigkeiten kann das Lokalfeld näherungsweise durch das Feld innerhalb eines sphärischen Hohlraums im Dielektrikum mit der Polarisation  $\mathbf{P}$  ersetzt werden. Das lokale Feld des Hohlraums  $\mathbf{E}_L$  muß, nach dem Superpositionsprinzip, zusammen mit dem Feld einer homogen polarisierten Kugel  $\mathbf{E}_K$  das mittlere Feld im Dielektrikum ergeben,  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_L + \mathbf{E}_K$ . Mit (3.125) erhält man damit das lokale Feld

$$\mathbf{E}_L = \mathbf{E} - \mathbf{E}_K = \mathbf{E} + \frac{4\pi}{3} \mathbf{P} . \tag{3.144}$$

Aus der Gleichung  $\mathbf{P} = n\mathbf{p} = n\alpha\mathbf{E}_L$  ergibt sich die Polarisation zu

$$\mathbf{P} = \frac{n\alpha}{1 - \frac{4\pi}{3} n\alpha} \mathbf{E}. \tag{3.145}$$

Für die Dielektrizitätskonstante folgt die Clausius-Mosotti-Gleichung:

$$\boxed{\epsilon = 1 + \frac{4\pi n\alpha}{1 - \frac{4\pi}{3} n\alpha}, \quad \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{4\pi}{3} n\alpha .} \tag{3.146}$$

# Kapitel 4

## Magnetostatik

Die Magnetostatik behandelt die Eigenschaften *zeitunabhängiger Magnetfelder*. Diese werden durch eine divergenzfreie Stromdichte erzeugt. Von besonderem Interesse sind Magnetfelder von Linienströmen und magnetische Dipolfelder sowie die Kraftwirkung, die im Magnetfeld auf Ströme bzw. Dipole ausgeübt wird. Magnetfelder in Materie können analog zur Polarisation durch eine Magnetisierung des Mediums beschrieben werden.

### 4.1 Stromdichte

#### 4.1.1 Makroskopische Definition

Bewegte Ladungen erzeugen Ströme. Die Stromdichte  $\mathbf{j}$  ist ein Vektor, der in Stromrichtung zeigt und dessen Betrag den Strom pro Flächeneinheit durch ein zur Stromrichtung senkrechtes Flächenelement angibt. Der Strom durch ein beliebig orientiertes Flächenelement wird durch die Komponente der Stromdichte in Richtung der Flächennormale bestimmt,

$$dI = \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} . \quad (4.1)$$

#### 4.1.2 Ladungserhaltung

Sei  $V$  ein beliebiges festes Volumen, das zu einem Zeitpunkt  $t$  die Ladung  $Q(t)$  einschließt und durch dessen Oberfläche  $S$  ein Strom  $I(t)$  austritt. Die Ladungserhaltung für dieses Volumen kann definitionsgemäß durch eine Bilanzgleichung

$$\frac{dQ}{dt} = -I, \quad Q = \int_V dV \varrho(\mathbf{r}, t), \quad I = \int_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \quad (4.2)$$

angegeben werden. Die Zeitableitung kann als partielle Zeitableitung der Ladungsdichte berechnet werden, das Oberflächenintegral kann in ein Volumenintegral umgewandelt werden. Damit folgt,

$$\int_V dV (\partial_t \varrho(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot \mathbf{j}) = 0 .$$

Da das Volumen beliebig gewählt werden kann muß der Integrand verschwinden und man erhält als lokale Form der Ladungserhaltung die Kontinuitätsgleichung

$$\partial_t \varrho(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 . \quad (4.3)$$

In der Statik ist die Dichte zeitunabhängig, die Stromdichte daher divergenzfrei,

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0 . \quad (4.4)$$

### 4.1.3 Mikroskopische Definition

Für ein System von Punktladungen wird die Stromdichte definiert durch

$$\mathbf{j} = \sum_i q_i \mathbf{v}_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) . \quad (4.5)$$

Mit dieser Definition wird die Bilanzgleichung für die Ladungserhaltung erfüllt,

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= \frac{d}{dt} \int dV \sum_i q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \\ &= \int dV \sum_i q_i \frac{\partial}{\partial t} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \\ &= \int dV \sum_i q_i \mathbf{v}_i \cdot \nabla_{\mathbf{r}_i} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \\ &= - \int dV \sum_i q_i \mathbf{v}_i \cdot \nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \\ &= - \int dV \nabla \cdot \sum_i q_i \mathbf{v}_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \\ &= - \int d\mathbf{S} \cdot \mathbf{j} = -I . \end{aligned} \quad (4.6)$$

Die makroskopische Stromdichte erhält man aus (4.5) durch eine Mittelung über makroskopisch kleine Teilvolumina, die aber eine genügend große Anzahl von Teilchen

enthalten, so daß Schwankungen um den Mittelwert klein sind. Sei  $f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d^3r d^3v$  die mittlere Anzahl der Teilchen am Ort  $\mathbf{r}$  mit Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  und Ladung  $q_\alpha$  im Volumenelement  $d^3r d^3v$ . Dann ist die Stromdichte gegeben durch

$$\mathbf{j} = \sum_\alpha q_\alpha \int d^3v \mathbf{v} f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}). \quad (4.7)$$

Die Ladung die durch ein Flächenelement  $d\mathbf{S}$  in einem Zeitintervall  $dt$  hindurchtritt ist nach Abbildung 4.1,

$$dQ = \sum_\alpha q_\alpha \int d^3v f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}) (d\mathbf{v}) \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} dt. \quad (4.8)$$

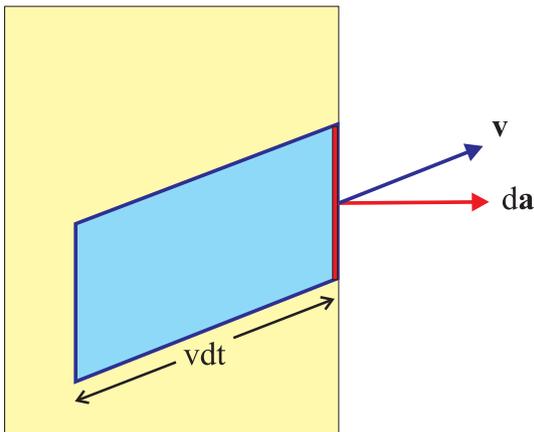


Abbildung 4.1: Volumenelement  $d\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} dt$ , aus dem die Teilchen mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  während der Zeit  $dt$  durch das Oberflächenelement  $d\mathbf{a}$  austreten.

### Volumenintegral von Stromdichten

Für eine beliebige Funktion  $h(\mathbf{r})$  gilt mit (4.5)

$$\int dV \mathbf{j} h(\mathbf{r}) = \sum_i q_i \mathbf{v}_i h(\mathbf{r}_i). \quad (4.9)$$

Diese Formel ist nützlich um entsprechende Summen über Ladungen durch Volumenintegrale zu ersetzen. Ist  $h(\mathbf{r})$  über das Mittelungsvolumen konstant, so kann dieselbe Substitution auch mit der makroskopischen Stromdichte vorgenommen werden.

#### 4.1.4 Linienströme

Für dünne Leiter ist die Stromdichte parallel zum Linienelement  $d\mathbf{l} = dl\mathbf{n}$  entlang des Leiters bzw. zur Normalenrichtung  $\mathbf{n}$  der Querschnittsfläche. Dann können Volumenintegrale über die Stromdichte durch Linienintegrale ersetzt werden,

$$\int dV \mathbf{j} h(\mathbf{r}) = \int dS dl j \mathbf{n} h(\mathbf{r}) = I \int d\mathbf{l} h(\mathbf{l}) . \quad (4.10)$$

Für dicke Leiter ist die Stromdichte normalerweise immer noch proportional zu einer konstanten Stromstärke. Setzt man  $\mathbf{j} = I\mathbf{i}$ , so kann man die Stromstärke vor das Integral ziehen

$$\int dV \mathbf{j} h(\mathbf{r}) = I \int dV \mathbf{i}(\mathbf{r}) h(\mathbf{r}) . \quad (4.11)$$

## 4.2 Feldgleichungen

Magnetische Felder werden durch die Angabe ihrer Quellen und Wirbel bestimmt. Die entsprechenden *Grundgleichungen der Magnetostatik* lauten

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (4.12)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (4.13)$$

Hierbei bezeichnet  $\mathbf{j}$  die Stromdichte und  $c$  die Lichtgeschwindigkeit. Das Verhältnis  $\mathbf{j}/c$  besitzt die Dimension einer Ladungsdichte. Damit besitzt  $\mathbf{B}$  in dem hier verwendeten Gaußschen Maßsystem dieselbe Dimension wie  $\mathbf{E}$ .

### 4.2.1 Magnetischer Fluß

Die Aussage der ersten Gleichung (4.12) ist, daß Magnetfelder grundsätzlich *quellenfrei* sind. Dies entspricht der Erfahrungstatsache, daß magnetische Monopole nicht beobachtet werden. Diese Gleichung gilt nicht nur im Rahmen der Magnetostatik sondern auch allgemein für zeitabhängige Magnetfelder.

Als quellenfreie Felder, besitzen magnetische Feldlinien *keine Anfangs- oder Endpunkte*: Aufgrund der Definition der Divergenz verschwindet der magnetische Fluß durch die Oberfläche eines beliebigen infinitesimalen Volumenelementes. Ein Magnetfeld besitzt daher keine Punkte, in deren Nachbarschaft alle Feldlinien radial nach außen oder radial nach innen gerichtet sind.

Zur Veranschaulichng quellenfreier Felder ist es hilfreich, den Fluß zu betrachten, der durch eine gegebene Querschnittsfläche hindurchtritt. Die Feldlinien, die vom Rand dieser Fläche ausgehen, bilden eine sogenannte *Flußröhre*, deren Mantel wird als *magnetische Oberfläche* bezeichnet. Durch eine beliebige Querschnittsfläche der

Flußröhre tritt immer derselbe magnetische Fluß hindurch: Dies folgt aus Gl.(4.12), wenn man diese über das Volumen einer Flußröhre integriert, die von zwei Querschnittsflächen  $S_1$  und  $S_2$  begrenzt wird. Die Flächennormale der Querschnittsflächen sei in jedem Punkt parallel zum Magnetfeld gerichtet. Die Flächennormale der magnetischen Oberfläche ist definitionsgemäß überall senkrecht zum Magnetfeld. Nach dem Gaußschen Satz gilt dann,

$$\int_V dV \nabla \cdot \mathbf{B} = \int_{\partial V} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B} = \int_{S_2} dS_2 B - \int_{S_1} dS_1 B = 0. \quad (4.14)$$

Eine wichtige Klasse von Magnetfeldern besitzt Flußröhren, die in sich selbst geschlossen sind. Die magnetische Oberfläche einer in sich geschlossenen Flußröhre bildet einen *Torus*. Magnetische Feldlinien, die auf dem Torus umlaufen können entweder *geschlossen* oder *offen* sein. Im ersten Fall kehrt eine Feldlinie nach einer endlichen Anzahl von Umläufen um den Torus zu ihrem Ausgangspunkt zurück. Im allgemeinen Fall sind die Feldlinien offen und überdecken die gesamte Torusfläche.

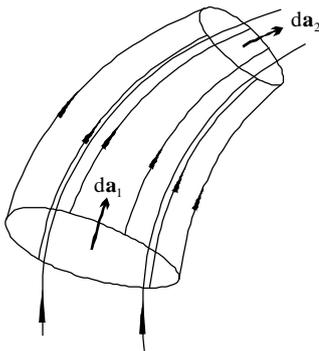


Abbildung 4.2: Feldlinien einer Flußröhre

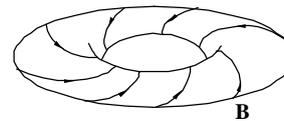


Abbildung 4.3: Feldlinien auf einem Torus

## 4.2.2 Magnetfelder vorgegebener Stromdichten

Die zweite Grundgleichung (4.13) bestimmt das Magnetfeld divergenzfreier Stromdichten. Bildet man die Divergenz dieser Gleichung, so folgt  $\nabla \cdot \mathbf{j}=0$ , in Übereinstimmung mit der Annahme (4.4).

### Ampèresches Gesetz

Integriert man (4.13) über eine Fläche  $S$  mit einer Randkurve  $\Gamma$ , so erhält man die integrale Form der Feldgleichung, die als Ampèresches Gesetzes bezeichnet wird,

$$\oint_{\Gamma} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} I, \quad I = \int_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{j}. \quad (4.15)$$

### Vektorpotential

Da Magnetfelder quellenfrei sind, können sie nach Abschnitt 2.7 aus einem Vektorpotential abgeleitet werden,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (4.16)$$

Das Vektorpotential genügt in der Coulomb-Eichung der Gleichung

$$\Delta \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (4.17)$$

### Integraldarstellung

Für eine lokalisierte Stromdichte im unendlichen Raum erhält man für  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  die Integraldarstellungen

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (4.18)$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \int d^3r' \left( \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \times \mathbf{j}(\mathbf{r}') = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (4.19)$$

### Biot-Savart-Gesetz

Für einen dünnen Leiter mit vernachlässigbarem Querschnitt kann die Integration über die Querschnittsfläche näherungsweise bei konstantem  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  durchgeführt

werden. Mit (4.10) ergibt sich für das Magnetfeld eines beliebig geformten Leiters das *Biot-Savart-Gesetz*,

$$\mathbf{B} = \frac{I}{c} \int \frac{d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{l})}{|\mathbf{r} - \mathbf{l}|^3} . \quad (4.20)$$

Im Mittelpunkt ( $r = 0$ ) eines kreisförmigen Leiters mit Radius  $s$  ergibt das Biot-Savart-Gesetz das Magnetfeld  $B = 2\pi I/(cs)$ .

### 4.2.3 Beispiel: Gerader stromdurchflossener Leiter

Am Beispiel eines Stromes durch einen geradlinigen Leiter werden die unterschiedlichen Berechnungsmöglichkeiten für Magnetfelder dargestellt. Der Leiter befinde sich auf der  $z$ -Achse. Durch ihn fließt der Strom

$$I = \int dS j = 2\pi \int d\varrho \varrho j .$$

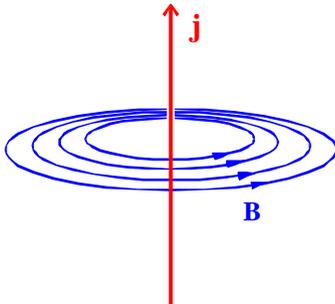


Abbildung 4.4: Magnetfeldlinien eines stromdurchflossenen Leiters

#### Lösung der Feldgleichungen

Wegen der Zylindersymmetrie hat das Magnetfeld die Form  $\mathbf{B} = B(\varrho)\mathbf{e}_\varphi$ . Dieser Ansatz erfüllt (4.12),

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\partial}{\varrho \partial \varphi} B(\varrho) = 0 .$$

Die  $z$ -Komponente von (4.13) ergibt

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho}(\varrho B) &= \frac{4\pi}{c} j \\ \varrho B &= \frac{4\pi}{c} \int d\varrho \varrho j \\ B &= \frac{2I}{c\varrho} .\end{aligned}\tag{4.21}$$

### Anwendung des Stokeschen Integralsatzes

Die Anwendung des Stokeschen Satzes auf einen Kreis mit Radius  $\varrho$  in der  $xy$ -Ebene ergibt nach (4.15),

$$2\pi\varrho B(\varrho) = \frac{4\pi}{c} I, \quad B(\varrho) = \frac{2I}{c\varrho} .\tag{4.22}$$

### Vektorpotential

Setzt man  $\mathbf{A} = A(\varrho)\mathbf{e}_z$  so folgt aus (4.23) und (4.17)

$$B_\varrho = -\frac{\partial A}{\partial \varrho}, \quad -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \varrho \frac{\partial A}{\partial \varrho} \right) = -\frac{4\pi}{c} j\tag{4.23}$$

Beide Gleichungen zusammen ergeben wiederum (4.21).

### Anwendung des Biot-Savart-Gesetzes

Mit  $\mathbf{r} = \varrho\mathbf{e}_\varrho$  und  $\mathbf{l} = l\mathbf{e}_z$  folgt aus (4.20)

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \frac{I}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} dl \frac{\mathbf{e}_z \times (\varrho\mathbf{e}_\varrho - l\mathbf{e}_z)}{(\varrho^2 + l^2)^{3/2}} \\ &= \frac{I}{c} \varrho\mathbf{e}_\varphi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dl}{(\varrho^2 + l^2)^{3/2}} \\ &= \frac{I}{c} \varrho\mathbf{e}_\varphi \left. \frac{l}{\varrho^2 \sqrt{\varrho^2 + l^2}} \right|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{2I}{c\varrho} \mathbf{e}_\varphi\end{aligned}\tag{4.24}$$

#### 4.2.4 Beispiel: Ebener stromdurchflossener Leiter

Ein weiteres Beispiel ist das Magnetfeld einer *ebenen unendlich dünnen Schicht* mit einer Stromdichte

$$\mathbf{j} = \lambda \delta(x) \mathbf{e}_z. \quad (4.25)$$

Hierbei bezeichnet  $\lambda$  den Strom, der in  $y$ -Richtung pro Längeneinheit durch die Querschnittsfläche der Schicht fließt. Aus Symmetriegründen hängt das Magnetfeld nur von der  $x$ -Richtung ab und die  $z$ -Komponente der Gl.(4.13) lautet,

$$\partial_x B_y = \frac{4\pi}{c} \lambda \delta(x). \quad (4.26)$$

Daraus ergibt sich beim Durchgang durch die Schicht ein Sprung der  $y$ -Komponente des Magnetfeldes:

$$[B_y] = 4\pi \frac{\lambda}{c}. \quad (4.27)$$

Auf beiden Seiten der Schicht ist das Magnetfeld homogen. Dasselbe Ergebnis erhält man, wenn man das Ampèresche Gesetz (4.15) auf eine Rechteckfläche anwendet, deren Längsseiten parallel zur Schicht verlaufen und deren Breitseiten beliebig klein gewählt werden.

Wählt man *zwei parallele Schichten* mit entgegengesetzten Stromrichtungen  $\lambda$  und  $-\lambda$ , so kann man die Randbedingung erfüllen, daß das Magnetfeld im Außenraum verschwindet. Die Lösung im Innenraum, d.h. im Gebiet zwischen den Schichten, ist dann gerade das Magnetfeld (4.27). Eine solche Doppelschicht stellt ein einfaches Modell für das Magnetfeld im Innern einer Spule dar. Für eine Spule mit  $n$  Windungen pro Längeneinheit, die von einem Strom  $I$  durchflossen wird ist  $\lambda = nI$ . Das *Magnetfeld im Innern einer Spule* ist demnach

$$B = 4\pi \frac{nI}{c}. \quad (4.28)$$

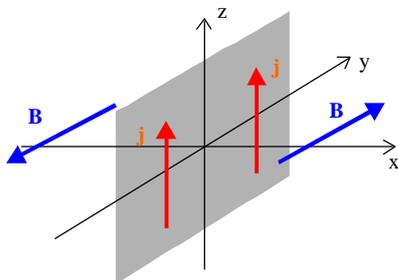


Abbildung 4.5: Magnetfeld einer stromführenden Schicht

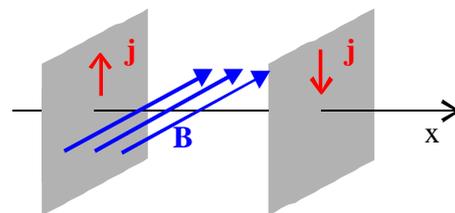


Abbildung 4.6: Magnetfeld zwischen zwei stromführenden Schichten

### 4.3 Magnetisches Dipolmoment

Das Magnetfeld in großem Abstand von der Stromdichteverteilung kann analog zur Elektrostatik durch eine Multipolentwicklung angegeben werden. Da keine magnetischen Monopole existieren, beginnt die Entwicklung mit dem Dipolfeld.

Für die Multipolentwicklung wird der folgende Hilfssatz für die Stromdichte benötigt: Sei  $\mathbf{j}$  quellenfrei und nur innerhalb eines Volumens  $V$  ungleich Null. Dann gilt für jede kartesische Komponente  $i, k$ :

$$\int dV j_i = 0 \quad \text{und} \quad \int dV x_i j_k = - \int dV x_k j_i. \quad (4.29)$$

Der Beweis ergibt sich aus den folgenden beiden Oberflächenintegralen, die jeweils verschwinden, da die Stromdichte nach Voraussetzung auf der Oberfläche  $\partial V$  des Volumens verschwindet:

$$\int_{\partial V} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{j} x_i = \int_V \nabla \cdot (x_i \mathbf{j}) = \int_V j_i = 0, \quad (4.30)$$

$$\int_{\partial V} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{j} x_i x_k = \int_V \nabla \cdot (x_i x_k \mathbf{j}) = \int_V (x_k j_i + x_i j_k) = 0. \quad (4.31)$$

Unter Verwendung der Reihenentwicklung

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} + (-\mathbf{r}') \cdot \nabla \frac{1}{r} + \dots = \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \dots \quad (4.32)$$

erhält man für das Vektorpotential (4.18) bis zur Ordnung  $O(r'/r)$ ,

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cr} \int d^3 r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') + \frac{1}{cr^3} \int d^3 r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r} \quad (4.33)$$

Der erste Term verschwindet wegen (4.30). Der zweite Term kann wegen (4.31) zu einem doppelten Kreuzprodukt ergänzt werden,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{1}{cr^3} \int d^3 r' \frac{1}{2} [\mathbf{j}(\mathbf{r}')(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r}'(\mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{r})] \\ &= \frac{1}{2cr^3} \int d^3 r' \mathbf{r} \times (\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \mathbf{r}') \end{aligned}$$

Definiert man das *magnetische Dipolmoment*

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int d^3 r \mathbf{r} \times \mathbf{j}(\mathbf{r}) \quad (4.34)$$

so erhält man das Dipolfeld

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{m}) - r^2\mathbf{m}}{r^5}. \quad (4.35)$$

Bei der Berechnung der Rotation in Gl.(4.35) wurden folgende Umformungen verwendet:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \mathbf{r}/r^3 \\ \nabla \cdot \mathbf{X} &= 0, \quad \mathbf{m} \times (\nabla \times \mathbf{X}) = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{X}) - \mathbf{m} \cdot \nabla \mathbf{X} = 0 \\ \nabla \times (\mathbf{m} \times \mathbf{X}) &= \mathbf{m} \nabla \cdot \mathbf{X} - \mathbf{m} \cdot \nabla \mathbf{X} = -\nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{X}). \end{aligned} \quad (4.36)$$

Für einen *Ringstrom* mit der Stromstärke  $I$ , der eine Fläche  $A$  umschließt, erhält man mit (??) das magnetische Moment

$$\mathbf{m} = \frac{I}{2c} \oint \mathbf{s} \times d\mathbf{l} = \frac{IA}{c} \mathbf{n} \quad (4.37)$$

wobei  $\mathbf{n}$  den Einheitsvektor in Richtung der Flächennormale darstellt.

Für eine *starr rotierende Ladungsverteilung* ist das magnetische Moment proportional zum Drehimpuls

$$\mathbf{m} = \gamma \mathbf{L} \quad (4.38)$$

wobei  $\gamma$  als gyromagnetisches Verhältnis bezeichnet wird. Macht man den Ansatz  $q\mathbf{n}\mathbf{v}$  für die Stromdichte und  $m\mathbf{n}\mathbf{v}$  für die Impulsdichte so folgt,

$$\mathbf{m} = \frac{q}{2c} \int dV n\mathbf{r} \times \mathbf{v}, \quad \mathbf{L} = m \int dV n\mathbf{r} \times \mathbf{v}, \quad \gamma = \frac{q}{2mc}. \quad (4.39)$$

Für das magnetische Moment von Elementarteilchen schreibt man das gyromagnetische Verhältnis in der Form,

$$\gamma = \frac{q}{2mc} g \quad (4.40)$$

wobei der  $g$ -Faktor für unterschiedliche Elementarteilchen verschiedene Werte annehmen kann, z.B.  $g = 2$  für Elektronen,  $g = 2.79$  für Protonen und  $g = -1.91$  für Neutronen.

Auf ein magnetisches Dipolmoment wirkt in einem *konstanten* Magnetfeld ein *Drehmoment*

$$\mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \quad (4.41)$$

und in einem *inhomogenen* Magnetfeld eine *Kraft*

$$\mathbf{F} = -\nabla U, \quad \text{mit} \quad U = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B} \quad (4.42)$$

Diese Formeln sind analog zu denen eines elektrischen Dipols.

Zur Herleitung von (4.41) berechnen wir das Gesamtdrehmoment auf eine Stromdichteverteilung,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T} &= \frac{1}{c} \int dV \mathbf{r} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \\
 &= \frac{1}{2c} \int dV \mathbf{r} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) - \mathbf{j} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{B}) \\
 &= \frac{1}{2c} \int dV [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B})\mathbf{j} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{j})\mathbf{B} - (\mathbf{j} \cdot \mathbf{B})\mathbf{r} + (\mathbf{j} \cdot \mathbf{r})\mathbf{B}] \\
 &= \frac{1}{2c} \int dV \mathbf{B} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{r}) \\
 &= \mathbf{m} \times \mathbf{B}
 \end{aligned} \tag{4.43}$$

In der zweiten Zeile wurde (4.29) ausgenutzt, in der letzten Zeile wurde das Magnetfeld als konstant angenommen.

Als Beispiel berechnen wir das Drehmoment auf einen rechteckigen stromdurchflossenen Leiter mit den Seitenlängen  $a$  und  $b$ . Das Rechteck sei um eine Achse drehbar, die parallel zur Seite  $b$  durch die Mitte der Seite  $a$  geht und senkrecht zum Magnetfeld  $B$  gerichtet ist. Die Flächennormale bilde mit dem Magnetfeld den Winkel  $\vartheta$ . Auf die beiden achsenparallelen Seiten des Rechtecks wirken die Kräfte  $F_{1,2} = \pm \frac{1}{c} I b B$  und damit die Drehmomente  $T_{1,2} = \pm (a/2) F_{1,2} \sin \vartheta$ . Das gesamte Drehmoment ist demnach  $T = T_1 + T_2 = \frac{1}{c} a b I B \sin \vartheta = m B \sin \vartheta$ .

Zur Herleitung von (4.42) berechnen wir die Gesamtkraft auf eine Stromdichteverteilung in einer Umgebung des Ortes  $\mathbf{r}$  und entwickeln das Magnetfeld  $\mathbf{B}(\mathbf{r}')$  am Ort  $\mathbf{r}'$  bis zur linearen Ordnung in  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ ,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F} &= \frac{1}{c} \int dV' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \mathbf{B}(\mathbf{r}') \\
 &= \frac{1}{c} \int dV' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) + \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \cdot \nabla \mathbf{B}(\mathbf{r}).
 \end{aligned}$$

Unter Verwendung von (4.29) erhält man daraus

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F} &= \frac{1}{2c} \int dV' [\mathbf{j}(\mathbf{r}')(\mathbf{r}' \cdot \nabla) - \mathbf{r}'(\mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla)] \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) \\
 &= \frac{1}{2c} \int dV' [\nabla \times (\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \mathbf{r}')] \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) \\
 &= (\mathbf{m} \times \nabla) \times \mathbf{B} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{m}(\nabla \cdot \mathbf{B}) = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}).
 \end{aligned}$$

## 4.4 Kraftwirkung von Magnetfeldern

### Kraft auf Punktladungen

Auf ein System von Punktladungen wirkt im Magnetfeld die Lorentzkraft

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c} \sum_i q_i \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_i) \quad (4.44)$$

### Kraftdichte auf Stromdichte

Ersetzt man die Summe über Punktladungen mit der Regel (4.9) durch ein Volumenintegral, so erhält man

$$\mathbf{F} = \int dV \mathbf{f}, \quad \mathbf{f} = \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (4.45)$$

### Kraft auf Linienstrom

Mit (4.10) erhält man die Kraft auf einen dünnen Leiter, bzw auf ein Linienelement,

$$\mathbf{F} = \frac{I}{c} \int d\mathbf{l} \times \mathbf{B}, \quad d\mathbf{F} = \frac{I}{c} d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (4.46)$$

### Kraft zwischen zwei parallelen Drähten

Gesucht ist die Kraft auf einen Leiter 1 auf der  $z$ -Achse, die von einem parallelen Leiter 2 im Abstand  $d$  ausgeübt wird. Die Kraft auf ein Linienelement  $d\mathbf{l}_1$  von Leiter 1 ist

$$d\mathbf{F}_1 = \frac{I_1}{c} d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{B}_2 = \frac{2I_1 I_2}{c^2} \frac{d\mathbf{l}_1}{d} \mathbf{e}_\varrho, \quad \mathbf{B}_2 = \frac{2I_2}{cd} \mathbf{e}_\varphi$$

Im MKSA-Maßsystem wird die Einheit der Stromstärke, das Ampère (A), durch die Kraftwirkung zwischen parallelen stromdurchflossenen Leitern festgelegt. Im Gaußschen Maßsystem wird demgegenüber die Einheit der Ladung durch die Kraftwirkung zwischen Ladungen nach dem Coulomb-Gesetz festgelegt.

## 4.5 Magnetfelder in Materie

Durch Magnetfelder werden in Materie magnetische Momente induziert bzw. orientiert. Ist  $n$  die Dichte der Dipole mit magnetischem Moment  $\mathbf{m}$ , so erhält man eine Dipoldichte,

$$\mathbf{M} = n\mathbf{m}, \quad (4.47)$$

die als Magnetisierung bezeichnet wird. Die Magnetisierung definiert makroskopisch den Ringstrom um ein Linienelement,

$$dI_m = c\mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}. \quad (4.48)$$

Der gesamte Ringstrom entlang einer geschlossenen Kurve  $\Gamma$  definiert eine Stromdichte innerhalb der eingeschlossenen Fläche,

$$I_m = c \oint d\mathbf{l} \cdot \mathbf{M} = \int d\mathbf{S} \cdot \mathbf{j}_m, \quad \mathbf{j}_m = c\nabla \times \mathbf{M}, \quad (4.49)$$

Die Feldgleichungen in Materie erhält man, indem man zur externen Stromdichte die Magnetisierungsstromdichte addiert. Definiert man die magnetische Erregung

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M} \quad (4.50)$$

so erhält man die Gleichungen

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (4.51)$$

In vielen Fällen gilt ein linearer Zusammenhang

$$\mathbf{M} = \kappa\mathbf{B}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\mathbf{B}, \quad \mu = \frac{1}{1 - 4\pi\kappa}, \quad (4.52)$$

wobei  $\kappa$  als magnetische Suszeptibilität und  $\mu$  als magnetische Permeabilität bezeichnet wird. Nach der magnetischen Permeabilität unterscheidet man Diamagnetika ( $\mu < 1$ ), Paramagnetika ( $\mu > 1$ ) und Ferromagnetika ( $\mu \gg 1$ ).

## Feldbezeichnungen

<i>E</i>	<i>D</i>	<i>B</i>	<i>H</i>
elektrisches Feld	dielektrische Verschiebung	magnetisches Feld	magnetische Erregung
elektrische Feldstärke	dielektrische Verschiebung	magnetische Induktion / Flußdichte	magnetische Feldstärke

Im Skriptum werden die Bezeichnungen der ersten Zeile verwendet. In vielen Lehrbüchern sind die Bezeichnungen der zweiten Zeile üblich.

# Kapitel 5

## Maxwell-Gleichungen

Die allgemeinen Grundgleichungen des elektromagnetischen Feldes sind die Maxwell-Gleichungen. Sie beschreiben neben der Elektrostatik und Magnetostatik auch zeitabhängige Felder, die z.B. bei der Induktion von Strömen durch Magnetfelder und bei der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen auftreten.

### 5.1 Zeitentwicklung elektromagnetischer Felder

#### 5.1.1 Entwicklungsgleichungen

Zur Vervollständigung der Gleichungen für das elektromagnetische Feld benötigt man Terme, die die Zeitentwicklung der Felder angeben. Nimmt man an, daß die Zeitentwicklung der Felder bereits durch ihren Anfangswert festgelegt ist, so genügt es ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung,

$$\frac{1}{c}\partial_t \mathbf{E} = \alpha(\nabla \times \mathbf{B} - \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}) \quad (5.1)$$

$$\frac{1}{c}\partial_t \mathbf{B} = \beta \nabla \times \mathbf{E} \quad (5.2)$$

anzugeben. Die Form der rechten Seite ergibt sich aus den naheliegenden Annahmen, daß (i) das Superpositionsprinzip gültig bleibt (Linearität), (ii) im Grenzfall zeitunabhängiger Felder daraus die statischen Vektorgleichungen resultieren und (iii) die Zeitentwicklung von  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  miteinander gekoppelt ist. Durch Vergleich mit bekannten Gesetzen (Ladungserhaltung, Induktionsgesetz) erhält man  $\alpha = -\beta = 1$ . Damit lauten die Entwicklungsgleichungen des elektromagnetischen Feldes

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c}\partial_t \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \quad (5.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\partial_t \mathbf{B} \quad (5.4)$$

### 5.1.2 Zwangsbedingungen

Zusätzlich zu den Entwicklungsgleichungen müssen die Gleichungen

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (5.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho. \quad (5.6)$$

zu jedem Zeitpunkt erfüllt sein. Diese Gleichungen stellen Zwangsbedingungen an die Entwicklungsgleichungen dar. Tatsächlich genügt es die Zwangsbedingungen zum Anfangszeitpunkt zu erfüllen, da sie dann als Folge der Entwicklungsgleichungen für alle Zeiten erfüllt bleiben. Man sagt, die Zwangsbedingungen sind in Involution mit den Entwicklungsgleichungen. Um dies zu zeigen bildet man die Divergenz der Entwicklungsgleichungen und erhält,

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{B} = -c \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = 0 \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{E} + 4\pi \nabla \cdot \mathbf{j} = c \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = 0 \quad (5.8)$$

Unter Annahme der Kontinuitätsgleichung (6.95) für die Ladungserhaltung folgt

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = f, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} - 4\pi\rho = g \quad (5.9)$$

wobei  $f$  und  $g$  zeitunabhängige Felder sind. Setzt man zum Anfangszeitpunkt  $f = 0$  und  $g = 0$  so sind die Zwangsbedingungen auch zu allen anderen Zeitpunkten erfüllt.

Von Maxwell wurde der sogenannte Verschiebungsstrom  $\partial_t \mathbf{E}$  in Gleichung (5.3) eingeführt, der zur Ladungserhaltung führt. Die Prä-Maxwell-Gleichungen, ohne Verschiebungsstrom, gelten nur für quellenfreie Ströme.

### 5.1.3 Elektromagnetische Potentiale

Die Maxwell-Gleichungen können in die homogenen Gleichungen

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (5.10)$$

und die inhomogenen Gleichungen

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (5.11)$$

unterteilt werden. Aufgrund der homogenen Gleichungen können die Felder aus einem Vektorpotential  $\mathbf{A}$  und einem skalaren Potential  $\phi$  abgeleitet werden. Das Magnetfeldes ist quellenfrei und kann wie in der Statik aus einem Vektorpotential abgeleitet werden (Abschnitt 2.4.2). Setzt man diesen Ansatz in die zweite homogene Gleichung ein so folgt,

$$\nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$$

Der Klammerausdruck ist ein wirbelfreies Vektorfeld, das aus einem skalaren Potential abgeleitet werden kann (Abschnitt 2.4.1). Damit folgt für die Felder die Darstellung,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi. \quad (5.12)$$

### Eichtransformationen

Die Potentiale sind nicht eindeutig bestimmt. Transformationen der Potentiale, die die Felder invariant lassen werden als Eichtransformationen bezeichnet. Diese besitzen die Form,

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f, \quad \phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (5.13)$$

wobei  $f(\mathbf{r}, t)$  eine beliebige Funktion der räumlichen Koordinaten und der Zeit darstellt. Die Invarianz der Felder gegenüber (5.13) ergibt sich aus

$$\begin{aligned} \mathbf{B}' &= \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times (\mathbf{A} + \nabla f) = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \\ \mathbf{E}' &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} - \nabla \phi' = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \nabla f}{\partial t} + \nabla \left( \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} \right) = \mathbf{E} \end{aligned}$$

Spezielle Eichungen der Potentiale erhält man durch eine Zusatzbedingung, z.B.

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad \text{Coulomb-Eichung} \quad (5.14)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad \text{Lorentz-Eichung} \quad (5.15)$$

### Feldgleichungen für die Potentiale

Ersetzt man in den inhomogenen Maxwell-Gleichungen (5.11) die elektrischen und magnetischen Felder durch (5.12), so ergeben sich für die Potentiale die Feldgleichungen

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{A} - \nabla \left( \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \partial_t \phi \right) &= -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \\ \Delta \phi - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \phi + \frac{1}{c} \partial_t \left( \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \partial_t \phi \right) &= -4\pi \rho \end{aligned} \quad (5.16)$$

In Lorentz-Eichung erhält man die symmetrischere Form der Gleichungen

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{A} &= -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \\ \Delta \phi - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \phi &= -4\pi \rho. \end{aligned} \quad (5.17)$$

## 5.2 Induktionsgesetz

Nach dem Ampèreschen Gesetz können Ströme Magnetfelder erzeugen. Umgekehrt können auch Magnetfelder Ströme induzieren. Dabei muß man zwei Fälle unterscheiden, die Induktion eines Stromes in einem bewegten Leiter im statischen Magnetfeld und die Induktion eines Stromes in einem ruhenden Leiter im zeitlich veränderlichen Magnetfeld. Beide Fälle können durch dasselbe *Faradaysche Induktionsgesetz*,

$$V = -\frac{1}{c} \frac{d\phi}{dt}, \quad V = \oint_{\partial S} d\mathbf{s}' \cdot \mathbf{E}', \quad \phi = \int_S d\mathbf{a} \cdot \mathbf{B}, \quad (5.18)$$

beschrieben werden. Hierbei bezeichnet  $V$  die in einem Draht ring induzierte Spannung,  $\mathbf{E}'$  das elektrische Feld im momentanen Ruhesystem des Drahtelements  $d\mathbf{s}'$  und  $\phi$  den magnetischen Fluß durch die Querschnittsfläche des Ringes. Die induzierte Spannung hängt nur von der zeitlichen Änderung des magnetischen Flußes ab, unabhängig davon, ob der Draht oder der Magnet bewegt wird. Das Induktionsgesetz gilt für eine beliebige Fläche  $S$  und ihre Randkurve  $\partial S$  unabhängig von der Anwesenheit eines Leiters.

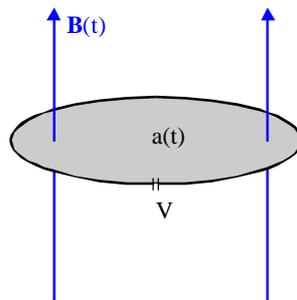


Abbildung 5.1: Induzierte Spannung an einer Leiterschleife im Magnetfeld

Zur Herleitung des Induktionsgesetzes berechnen wir die zeitliche Änderung des magnetischen Flußes,

$$\frac{d\phi}{dt} = \left. \frac{d\phi}{dt} \right|_{S=const} + \left. \frac{d\phi}{dt} \right|_{\mathbf{B}=const}, \quad (5.19)$$

wobei im ersten Term die Fläche im zweiten das Magnetfeld konstant gehalten werden. Der erste Term ergibt mit der Maxwellgleichung (5.4) das Induktionsgesetz eines ruhenden Leiters,

$$\left. \frac{d\phi}{dt} \right|_{S=const} = \int_S d\mathbf{a} \cdot \partial_t \mathbf{B} = -c \int_S d\mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = -c \oint_{\partial S} d\mathbf{s} \cdot \mathbf{E}. \quad (5.20)$$

Zeitliche Änderungen von Magnetfeldern rufen damit eine Zirkulation des elektrischen Feldes hervor. Dies ist eine wesentliche Erweiterung der Elektrostatik, in der elektrische Felder wirbelfrei sind.

Bewegt sich das Drahtelement am Ort  $\mathbf{s}$  mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$ , so ergibt sich im Zeitintervall  $dt$  an dieser Stelle eine Flächenänderung

$$d\mathbf{a} = dt \mathbf{v} \times d\mathbf{s}. \quad (5.21)$$

Aufgrund dieser Bewegung ergibt sich eine Flußänderung

$$\left. \frac{d\phi}{dt} \right|_{\mathbf{B}=\text{const}} = \oint_{\partial S} (\mathbf{v} \times d\mathbf{s}) \cdot \mathbf{B} = - \oint_{\partial S} d\mathbf{s} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (5.22)$$

Sie wird durch die Arbeit bestimmt, die die Lorentzkraft an den Ladungen entlang der bewegten Randkurve leistet.

Die gesamte Flußänderung (5.19) ist demnach,

$$\frac{d\phi}{dt} = -c \oint_{\partial S} d\mathbf{s} \cdot \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) \quad (5.23)$$

Für den Übergang vom Laborsystem ins bewegte Ruhesystem des Drahtelementes beschränken wir uns auf den nichtrelativistischen Grenzfall. Hier gelten die Transformationsgesetze  $d\mathbf{s}' = d\mathbf{s}$  und  $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ . Damit folgt aus (5.23) das Induktionsgesetz (5.18).

Als Beispiel für die Induktion eines Stromes in einem bewegten Leiter betrachten wir ein Rechteck in einem homogenen Magnetfeld  $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ , dessen untere linke Ecke im Koordinatenursprung liegt und dessen obere rechte Ecke  $(x, y)$  sich mit der Geschwindigkeit  $(v_x, v_y)$  bewegt (Abb.5.2). Aufgrund der Bewegung des Leiters wirkt auf eine Ladung  $q$  die Lorentzkraft  $\frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ . Bei einem Umlauf um die Drahtschleife verrichtet die Lorentzkraft an der Ladung die Arbeit

$$\begin{aligned} qV &= \frac{q}{c} \oint d\mathbf{s} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \\ &= \frac{q}{c} \left( \int_0^y dy (-v_x B) + \int_x^0 (v_y B) \right) \\ &= -\frac{q}{c} (v_x y + v_y x) B = -\frac{q}{c} \frac{d\phi}{dt}, \end{aligned}$$

mit dem magnetischen Fluß  $\phi = xyB$ .

### 5.3 Erhaltungssätze

Die Maxwell-Gleichungen beinhalten Erhaltungssätze für die Ladung, die Energie und den Impuls. Die Ladungserhaltung (6.95) ergibt sich aus der Divergenz von 5.3.

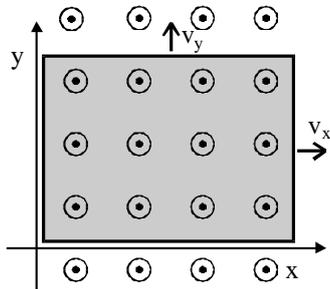


Abbildung 5.2: Rechteckige Drahtschleife mit bewegten Seiten im konstanten Magnetfeld

### 5.3.1 Energieerhaltung

Die Arbeitsleistung des elektromagnetischen Feldes an den Ladungen führt zu einer Änderung der kinetischen Energie  $T$

$$\frac{dT}{dt} = \sum_i \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_i = \sum_i q_i (\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v}_i = \sum_i q_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{E} = \int dV \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}. \quad (5.24)$$

Das Magnetfeld verrichtet keine Arbeit. Beim Aufbau eines Magnetfeldes werden jedoch elektrische Felder induziert, die Energieänderungen bewirken. Die Dichte der Arbeitsleistung des elektrischen Feldes ist  $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ . Einer Zunahme der kinetischen Energie der Ladungen muß eine gleich große Abnahme der Energie des elektromagnetischen Feldes entsprechen. Aufgrund von (5.3) erhält man

$$-\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = -\frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) + \partial_t \left( \frac{1}{8\pi} E^2 \right). \quad (5.25)$$

Diese Gleichung enthält im letzten Term die Energiedichte des elektrischen Feldes. Eine entsprechende Gleichung mit der Energiedichte des magnetischen Feldes folgt aus (5.4),

$$\frac{c}{4\pi} \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) + \partial_t \left( \frac{1}{8\pi} B^2 \right) = 0. \quad (5.26)$$

Durch Addition beider Gleichungen folgt der Energiesatz

$$\partial_t w + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \quad (5.27)$$

Hierbei bezeichnet  $w$  die Energiedichte und  $\mathbf{S}$  die Energiestromdichte des elektromagnetischen Feldes. Man nennt  $\mathbf{S}$  auch den Poynting-Vektor und bezeichnet (5.27) als Poynting-Theorem.

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2) \\ \mathbf{S} &= \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \end{aligned}$$

Die Bilanzgleichung für die Gesamtenergie eines Volumens  $V$  ist

$$\frac{d}{dt} (T + W) = - \int_{\partial V} d\mathbf{a} \cdot \mathbf{S} \quad (5.28)$$

Die Energie setzt sich aus der kinetischen Energie  $T$  der geordneten und ungeordneten Bewegung (Wärme) der Ladungen sowie aus der Feldenergie

$$W = \int dV w$$

zusammen. Diese Energie ändert sich durch den elektromagnetischen Energiestrom durch die Oberfläche.

### 5.3.2 Magnetische Energie

#### Feldenergie

Die Energiedichte  $w_m$  und die Feldenergie  $W_m$  des Magnetfeldes ergeben sich aus dem Poynting-Theorem zu

$$W_m = \int dV w_m, \quad w_m = \frac{1}{8\pi} B^2 \quad (5.29)$$

#### Potentielle Energie

Analog zur potentiellen Energie einer Ladungsdichte im elektrostatischen Feld kann man die potentielle Energie einer Stromdichte im magnetostatischen Feld angeben

$$W_m = \frac{1}{2c} \int dV \mathbf{A} \cdot \mathbf{j} \quad (5.30)$$

Man erhält diesen Ausdruck aus der Feldenergie (5.29) unter Verwendung von (4.23) und (4.13)

$$\begin{aligned}
 W_m &= \frac{1}{8\pi} \int dV B^2 \\
 &= \frac{1}{8\pi} \int dV (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} \\
 &= \frac{1}{8\pi} \int dV \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \\
 &= \frac{1}{8\pi} \int d\mathbf{S} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{2c} \int dV \mathbf{A} \cdot \mathbf{j} \\
 &= \frac{1}{2c} \int dV \mathbf{A} \cdot \mathbf{j}. \quad \square
 \end{aligned} \tag{5.31}$$

Hierbei wurde die Energiedichte über den gesamten Raum integriert und der Beitrag des Oberflächenintegral im Unendlichen vernachlässigt.

### Energie einer Stromdichte

Verwendet man für das Vektorpotential die Integraldarstellung (4.18) so erhält man aus (5.30) für die Energie einer Stromdichte im eigenen Feld den Ausdruck,

$$W_m = \frac{1}{2c^2} \int dV \int dV' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \tag{5.32}$$

### Energie eines Systems von Leitern

Für ein System von Leitern besitzt die Stromdichte nach (4.11) die Form

$$\mathbf{j} = \sum_k \mathbf{j}_k = \sum_k I_k \mathbf{i}_k \tag{5.33}$$

wobei  $I_k$  die konstante Stromstärke im  $k$ -ten Leiterkreis bezeichnet. Definiert man die Induktionskoeffizienten

$$L_{mn} = \frac{1}{c^2} \int dV_m \int dV_n \frac{\mathbf{i}_m \cdot \mathbf{i}_n}{|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_n|} \tag{5.34}$$

so erhält man für die Energie eines Systems stromdurchflossener Leiter

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{m,n} L_{mn} I_m I_n \tag{5.35}$$

Für  $m \neq n$  werden die Koeffizienten als Gegeninduktivitäten für  $n = m$  als Selbstinduktivitäten bezeichnet.

### Magnetischer Fluß durch Leiterkreis

Die Induktionskoeffizienten bestimmen nicht nur die Energie eines Leiterkreises sondern auch den magnetischen Fluß  $\phi$  durch den Leiterkreis. Für einen Leiterkreis mit der Selbstinduktivität  $L$  gilt

$$\boxed{\frac{1}{c}\phi = LI} \quad (5.36)$$

Dies folgt aus,

$$\begin{aligned} \phi &= \int d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B} = \int d\mathbf{l} \cdot \mathbf{A} \\ &= \frac{1}{c} \int d\mathbf{l} \cdot \int dV' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= \frac{I}{c} \int dV \int dV' \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{i}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= cLI \end{aligned} \quad (5.37)$$

### Induktionsgesetz für Leiterkreis

Gegeben sei ein Leiterkreis mit einer Spannungsquelle. Innerhalb der Spannungsquelle ist das elektrische Feld vom positiv geladenen Pol zum negativ geladenen Pol gerichtet und die Spannung ist

$$V_e = \int_{+}^{-} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{E}_e$$

Außerhalb der Spannungsquelle ist das elektrische Feld ebenfalls vom positiv geladenen Pol zum negativ geladenen Pol gerichtet und man erhält längs des Leiters den Spannungsabfall

$$V_L = \int_{+}^{-} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{E}_L = \int d\mathbf{l} \cdot \mathbf{j}/\sigma = IR, \quad R = \int_{+}^{-} \frac{d\mathbf{l}}{A\sigma} .$$

Er wird durch die Stromstärke  $I$  und den Widerstand  $R$  des Leiters bestimmt. Hierbei wurde das Ohmsche Gesetz (3.59) verwendet und angenommen, daß die Stromdichte entlang des Drahtes gerichtet ist und betragsmäßig die Form  $j = I/A$  besitzt, wobei  $A$  die Querschnittsfläche des Drahtes bezeichnet. Insgesamt erhält man längs des Leiterkreises

$$\oint d\mathbf{l} \cdot \mathbf{E} = \int_{+}^{-} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{E}_L + \int_{-}^{+} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{E}_e = V_L - V_e = IR - V_e . \quad (5.38)$$

Mit (5.38) und (5.37) lautet das Induktionsgesetz (5.18) für einen unbewegten Leiterkreis

$$IR + L \frac{dI}{dt} = V_e \quad (5.39)$$

Sei  $V_e = \text{const}$  und  $I_0$  die Stromstärke zur Zeit  $t = 0$ . Dann erhält man für die zeitliche Entwicklung der Stromstärke

$$I(t) = (I_0 - I_\infty) e^{-(R/L)t} + I_\infty, \quad I_\infty = V_e/R. \quad (5.40)$$

Asymptotisch wird für Zeiten  $t \gg L/R$  der stationäre Strom  $I_\infty$  erreicht, der nach (5.38) einem wirbelfreien elektrischen Feld entspricht.

### 5.3.3 Impulserhaltung

Die Ladungen im elektromagnetischen Feld erfahren eine Impulsänderung durch die Lorentzkraft,

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_i q_i \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) = \int dV \left( \rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B} \right). \quad (5.41)$$

Mit den Maxwell-Gleichungen (5.3)-(5.6) erhält man für die Kraftdichte die Ausdrücke,

$$\begin{aligned} 4\pi \rho \mathbf{E} &= (\nabla \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} = \nabla \cdot (\mathbf{E}\mathbf{E}) - (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E} \\ &= \nabla \cdot \left( \mathbf{E}\mathbf{E} - \frac{1}{2} E^2 \mathbf{I} \right) + \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) \\ &= \nabla \cdot \left( \mathbf{E}\mathbf{E} - \frac{1}{2} E^2 \mathbf{I} \right) - \frac{1}{c} \mathbf{E} \times \partial_t \mathbf{B}, \\ \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B} &= \left( \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{E} \right) \times \mathbf{B} \\ &= -\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) - \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{E} \times \mathbf{B} \\ &= \nabla \cdot \left( \mathbf{B}\mathbf{B} - \frac{1}{2} B^2 \mathbf{I} \right) - \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{E} \times \mathbf{B}, \end{aligned} \quad (5.42)$$

wobei  $\mathbf{I}$  den Einheitstensor und  $\mathbf{E}\mathbf{E}$  das Tensorprodukt mit den Komponenten  $E_i E_j$  bezeichnet.

Die Summe dieser Beiträge ergibt den Impulserhaltungssatz

$$\partial_t \Pi + \mathbf{f} = \nabla \cdot \mathbf{T}. \quad (5.43)$$

Hierbei bezeichnet  $\Pi$  die Impulsdichte des elektromagnetischen Feldes,  $\mathbf{f}$  die Kraftdichte auf die Ladungen und  $\mathbf{T}$  wird als Maxwell'scher Spannungstensor bezeichnet.

Die integrale Impulsbilanz für ein Volumen  $V$  lautet

$$\frac{d}{dt} \left( \mathbf{P} + \int_V dV \Pi \right) = \int_{\partial V} d\mathbf{a} \cdot \mathbf{T} \quad (5.44)$$

$$\Pi = \mathbf{S}/c^2 = \frac{1}{4\pi c} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$$

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B}$$

$$\mathbf{T} = \frac{1}{4\pi} \left[ \mathbf{E}\mathbf{E} + \mathbf{B}\mathbf{B} - \frac{1}{2}(E^2 + B^2) \right]$$

## 5.4 Elektromagnetische Wellen

Die Maxwell-Gleichungen besitzen Lösungen, die die Ausbreitung elektromagnetischer Felder im Vakuum und in Medien beschreiben.

### 5.4.1 Elektromagnetische Wellen im Vakuum

#### Wellengleichung

Zur Beschreibung elektromagnetischer Wellen im Vakuum ist es hilfreich die Potentiale durch die Strahlungseichung

$$\phi = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (5.45)$$

festzulegen. Die Bedingung  $\phi = 0$  kann durch eine allgemeine Eichtransformation (5.13) erfüllt werden. Danach kann die Bedingung  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  noch durch eine zeitunabhängige Eichtransformation erfüllt werden, denn es gilt im Vakuum

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \nabla \cdot \mathbf{A} = 0.$$

Die Strahlungseichung erfüllt auch die Lorentz-Eichung (5.15). Aus (5.17) folgt damit für das Vektorpotential im Vakuum die Wellengleichung

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{A} = 0. \quad (5.46)$$

## Ebene Wellen

Die Wellengleichung besitzt Lösungen der allgemeinen Form

$$\mathbf{A} = A(x - vt)\mathbf{e} . \quad (5.47)$$

Hierbei ist  $\mathbf{e}$  ein konstanter Einheitsvektor, der die Polarisationsrichtung der Welle angibt, und  $v$  ist eine konstante Ausbreitungsgeschwindigkeit. Das Argument  $\xi = x - vt$  hängt nur von der  $x$ -Richtung ab. Mit wachsender Zeit verschiebt sich ein Punkt  $\xi = \text{const}$  entlang der  $x$ -Achse mit der Geschwindigkeit  $v$ . Da  $A$  in der  $yz$ -Ebene  $x = \xi + vt$  jeweils konstant ist, nennt man diesen Ansatz eine ebene Welle. Die Funktion  $A(\xi)$  ist beliebig und kann z.B. in Form eines Wellenpaketes gewählt werden.

Aus (5.45) und (5.46) erhält man

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)A'' = 0, \quad (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e})A' = 0$$

wobei Ableitungen nach  $\xi$  durch einen Strich dargestellt sind. Für eine allgemeine Funktion  $A(\xi)$  müssen die Lösbarkeitsbedingungen

$$v = \pm c, \quad \mathbf{e} \perp \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} = \pm \mathbf{e}_x ,$$

erfüllt werden. Die Ausbreitungsrichtung  $\mathbf{n}$  ist senkrecht zur Polarisationsrichtung  $\mathbf{e}$  (Transversale Welle), die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist die Lichtgeschwindigkeit. Die allgemeine Lösung besteht aus einer Superposition zweier Wellen, die sich jeweils in  $x$  und  $-x$ -Richtung ausbreiten,

$$A = A_1(x - ct) + A_2(x + ct) .$$

Wir betrachten jetzt die sich in der positiven  $x$ -Richtung ausbreitende Welle,  $A = A_1(x - ct)$ . Die elektrischen und magnetischen Felder folgen aus (5.12),

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\partial_t \mathbf{A} = A'\mathbf{e} = E\mathbf{e} \quad (5.48)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \nabla A \times \mathbf{e} = A'\mathbf{n} \times \mathbf{e} = B\mathbf{b}. \quad (5.49)$$

Hierbei gilt

$$E = B = A', \quad \mathbf{b} = \mathbf{n} \times \mathbf{e}$$

Die Einheitsvektoren  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{e}$  und  $\mathbf{b}$  bilden ein rechtshändiges Orthonormalsystem. Die skalaren Felder  $E$  und  $B$  sind gleich. Für die Energiedichte und die Energiestromdichte der Welle erhält man die Ausdrücke

$$w = \frac{1}{8\pi}(E^2 + B^2) = \frac{1}{4\pi}E^2 \quad (5.50)$$

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{c}{4\pi}E^2\mathbf{e} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{e}) = cwn \quad (5.51)$$

Die Impulsdichte und der Spannungstensor der Welle sind

$$\mathbf{p} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S} = \frac{w}{c} \mathbf{n}, \quad (5.52)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \frac{1}{4\pi} \left( E^2 \mathbf{e}\mathbf{e} + B^2 \mathbf{b}\mathbf{b} - \frac{1}{2} (E^2 + B^2) (\mathbf{e}\mathbf{e} + \mathbf{b}\mathbf{b} + \mathbf{n}\mathbf{n}) \right) \\ &= -\frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2) \mathbf{n}\mathbf{n} = -w \mathbf{n}\mathbf{n}. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Energie und Impuls des Feldes erfüllen die Beziehung  $w = pc$ , die sich in der speziellen Relativitätstheorie für masselose Teilchen ergibt. Fällt die Welle senkrecht auf eine Oberfläche (z.B.  $x = 0$  mit Normale  $-\mathbf{n}$ ) und wird von der Oberfläche vollständig absorbiert, so ist der Strahlungsdruck auf diese Oberfläche gleich

$$p_S = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = w = \frac{S}{c}.$$

### Monochromatische ebene Wellen

Ein Spezialfall einer ebenen Welle ist die monochromatische ebene Welle

$$\mathbf{A} = A\mathbf{e}, \quad A = A_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t}.$$

Sie wird durch einen Polarisationsvektor  $\mathbf{e}$ , einen Wellenvektor  $\mathbf{k}$ , eine Kreisfrequenz  $\omega$  und eine Amplitude  $A_0$  festgelegt. Da es sich um ein lineares Gleichungssystem handelt, wird ein komplexer Lösungsansatz gewählt. Die physikalischen Felder sind durch den Realteil der komplexen Lösung definiert. Aus (5.45) und (5.46) folgt,

$$-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{e} = 0,$$

oder

$$\mathbf{k} = k_0 \mathbf{n}, \quad k_0 = \omega/c, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{e} = 0$$

Der Betrag des Wellenvektors, die Vakuumwellenzahl  $k_0$ , wird durch die Frequenz bestimmt, die Ausbreitungsrichtung ist in einer Ebene senkrecht zur Polarisationsrichtung frei wählbar.

Die Phase der Welle besitzt die Form

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t = k_0 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - ct)$$

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit monochromatischer Wellen im Vakuum ist unabhängig von der Frequenz gleich der Lichtgeschwindigkeit  $c$ . Die elektrischen und magnetischen Felder sind

$$\mathbf{E} = ik_0 \mathbf{A}, \quad \mathbf{B} = ik_0 (\mathbf{n} \times \mathbf{A}).$$

Elektromagnetische Wellen werden nach ihrer Wellenlänge  $\lambda = 2\pi/k_0$  in unterschiedliche Spektralbereiche eingeteilt:

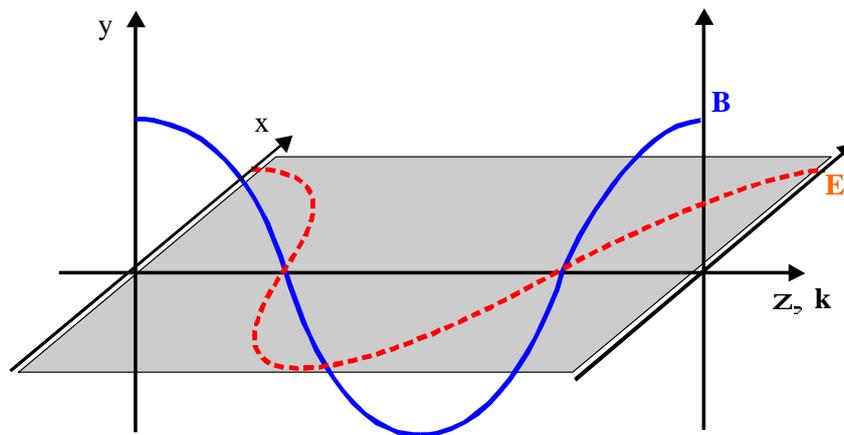


Abbildung 5.3: Linear polarisierte Welle im Vakuum

Wellenlänge	Spektralbereich
< 0.1 nm	Röntgenstrahlung (X)
0.1-30 nm	Ultraweiche Röntgenstrahlung (XUV)
30-185 nm	Vakuumultraviolett (VUV)
185-400nm	Nahes Ultraviolett (NUV)
400-800nm	Sichtbares Licht
800nm-1mm	Infrarot (IR)
1nm-1cm	Mikrowellen
1cm-100km	Radiowellen

### 5.4.2 Wellen im Medium

Bei der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in Materie werden die Elektronen zu erzwungenen Schwingungen angeregt, die eine zeitabhängige makroskopische Polarisation  $\mathbf{P}$  erzeugen. Die resultierende Stromdichte muß bei der Lösung der Maxwell'schen Gleichungen berücksichtigt werden.

## Wellengleichung

In einem dielektrischen Medium lauten die Entwicklungsgleichungen

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{D} \quad (5.54)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{B} \quad (5.55)$$

Aus diesem Gleichungssystem kann das Magnetfeld eliminiert werden, indem man von der zweiten Gleichung die Rotation bildet und die Rotation von  $\mathbf{B}$  durch die erste Gleichung ersetzt. Dies ergibt

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) &= -\frac{1}{c} \partial_t \nabla \times \mathbf{B} = -\frac{1}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{D} \\ \Delta \mathbf{E} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{D} &= 0. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Für eine monochromatische Welle besitzt das elektrische Feld die Form,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}, \omega) \exp(-i\omega t). \quad (5.57)$$

Für hinreichend kleine Auslenkungen der Elektronen sind die Polarisation  $\mathbf{P}$ , die dielektrische Verschiebung  $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$  und die Stromdichte  $\mathbf{j} = \dot{\mathbf{P}}$  jeweils proportional zum elektrischen Feld,

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \chi(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}, \\ \mathbf{D} &= \epsilon(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}, \\ \mathbf{j} &= \sigma(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (5.58)$$

Die Proportionalitätskonstanten sind i.a. orts- und frequenzabhängig und genügen den Relationen

$$\sigma = -i\omega\chi, \quad \epsilon = 1 + 4\pi\chi = 1 + \frac{4\pi\sigma}{-i\omega}. \quad (5.59)$$

Hierbei wurde vorausgesetzt, daß die anregende Welle monochromatisch ist und die Proportionalität lokal gültig ist. Außerdem wurde ein isotropes Medium angenommen, bei dem die im Medium erzeugten Felder parallel zum elektrischen Feld sind. Für anisotrope Medien müssen die Skalare durch Tensoren ersetzt werden. Die dielektrische Funktion  $\epsilon(\mathbf{r}, \omega)$  ist im allgemeinen komplexwertig. Sie beschreibt die optischen Materialeigenschaften.

Mit den Ansätzen (5.57) und (5.58) vereinfachen sich die Maxwellgleichungen zu,

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= -ik_0(\epsilon\mathbf{E}), \\ \nabla \times \mathbf{E} &= ik_0\mathbf{B}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \cdot (\epsilon\mathbf{E}) &= 0. \end{aligned} \quad (5.60)$$

Aus (5.56) folgt für das elektrische Feld die allgemeine Wellengleichung

$$\Delta \mathbf{E} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) + k_0^2 \epsilon \mathbf{E} = 0. \quad (5.61)$$

### Homogene Medien

In einem homogenen Medium ist die Dielektrizitätsfunktion räumlich konstant aber i.a. noch eine Funktion der Frequenz,  $\epsilon = \epsilon(\omega)$ .

### Longitudinale Schwingungen

Eine mögliche Lösung des Gleichungssystems (5.60) erhält man für diejenigen Frequenzen, die den Nullstellen der Dielektrizitätsfunktion,  $\epsilon(\omega) = 0$ , entsprechen. In diesem Fall ist,

$$\mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{E} = -\nabla\phi, \quad \varrho = \frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \mathbf{E} \neq 0 \quad (5.62)$$

d.h. es handelt sich um elektrostatische Schwingungen der Ladungsdichte des Mediums, die kein Magnetfeld erzeugen. Da das elektrische Feld in Ausbreitungsrichtung ( $\nabla\phi$ ) zeigt, spricht man von longitudinalen Schwingungen.

### Transversale Wellen

Im homogenen Medium können die Lösungen immer noch in der Form ebener Wellen,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t), \quad (5.63)$$

gesucht werden. Aus der Wellengleichung (5.61) erhält man ein algebraisches Gleichungssystem

$$-k^2 \mathbf{E} + \mathbf{k}\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} + k_0^2 \epsilon \mathbf{E} = 0. \quad (5.64)$$

Setzt man  $\mathbf{k} = k_0 \mathbf{n}$  und  $\mathbf{n} \parallel \mathbf{e}_z$  so folgt nach Division durch  $k_0^2$

$$\mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{\Lambda} = \mathbf{n}\mathbf{n} + (\epsilon - n^2)\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \epsilon - n^2 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon - n^2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix}. \quad (5.65)$$

Das homogene lineare Gleichungssystem besitzt nur dann eine nichtverschwindende Lösung, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix verschwindet,

$$\det |\mathbf{\Lambda}| = 0 \quad \iff \quad \epsilon(\epsilon - n^2)^2 = 0. \quad (5.66)$$

Die Lösungen für  $\epsilon = 0$  entsprechen den longitudinalen Schwingungen. Weitere Lösungen erhält man für  $n^2 = \epsilon$  und  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$ . Dies sind transversale elektromagnetische Wellen mit der Wellenzahl,

$$k = k_0 n = k_0 \sqrt{\epsilon} . \quad (5.67)$$

Man bezeichnet  $n$  als Brechungsindex.

Der Realteil  $n_r$  bestimmt die Phasengeschwindigkeit  $v_{ph} = c/n_r$  der Welle im Medium. Der Imaginärteil  $n_i$  bestimmt die Amplitudenänderung  $\exp(-n_i k_0 s)$  bei der Ausbreitung der Welle entlang eines Weges der Länge  $s$ .

### Lorentz-Modell

Wesentliche Eigenschaften der Dielektrizitätsfunktion und des zugehörigen Brechungsindex können im Rahmen des sogenannten Lorentz-Modells verstanden werden. Nimmt man an, daß alle Dipolmomente unabhängig voneinander schwingen, so genügen sie in linearer Näherung einer harmonischen Schwingungsgleichung,

$$\ddot{\mathbf{d}} + \omega_0^2 \mathbf{d} = \frac{q^2}{m} \mathbf{E} . \quad (5.68)$$

Die spezielle Lösung dieser Gleichung, die proportional ist zum anregenden Feld, lautet,

$$\mathbf{d}(t) = \alpha(\omega) \mathbf{E}(t) . \quad (5.69)$$

mit der Polarisierbarkeit

$$\alpha(\omega) = \frac{q^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2} . \quad (5.70)$$

Falls die Dipole mit einer Dichte  $n(\mathbf{r})$  räumlich verteilt sind, ergibt sich die Polarisation  $\mathbf{P} = n(\mathbf{r})\mathbf{d}(t)$ . Daraus folgt die Dielektrizitätsfunktion

$$\epsilon(\omega) = 1 + 4\pi n \alpha = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad \omega_p^2 = \frac{4\pi q^2 n}{m} . \quad (5.71)$$

Hierbei ist  $\omega_0$  die Eigenfrequenz der gebundenen Elektronen,  $\omega$  die Lichtfrequenz und  $\omega_p$  wird als Plasmafrequenz bezeichnet. Für niedrige Frequenzen,  $\omega \ll \omega_0$ , ist die Dielektrizitätskonstante größer als 1 und nimmt, ausgehend vom statischen Grenzwert  $\epsilon(0) = 1 + \omega_p^2/\omega_0^2$ , quadratisch mit der Frequenz zu,

$$\epsilon \rightarrow \epsilon(0) + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^4} \omega^2 . \quad (5.72)$$

Bei hohen Frequenzen,  $\omega \gg \omega_0$ , erhält man die Dielektrizitätskonstante freier Elektronen,

$$\epsilon \rightarrow 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad (5.73)$$

die sich asymptotisch dem Vakuumwert 1 von unten her annähert. Von besonderem Interesse sind die Resonanzstellen und die Nullstellen der Dielektrizitätsfunktion. Im vorliegenden Modell tritt eine Resonanz bei der Eigenfrequenz  $\omega_0$  und eine Nullstelle bei der Plasmafrequenz  $\omega_p$  auf. Das Verhalten nahe der Resonanzfrequenz wird hier nur unvollständig wiedergegeben, da die Breite und Höhe der Resonanz durch die vernachlässigte Dämpfung der Schwingungen bestimmt werden. In der Regel tritt an Resonanzstellen auch eine verstärkte Absorption auf. Die Nullstellen der Dielektrizitätsfunktion entsprechen Punkten an denen Reflexion auftritt, da sich die Wellen gemäß (5.67) in Gebiete mit  $\epsilon < 0$  nicht ausbreiten können.

### 5.4.3 Reflexion an einer ebenen Grenzfläche

An der Grenzfläche zwischen zwei Medien mit unterschiedlichen Dielektrizitätskonstanten  $\epsilon_1$  und  $\epsilon_2$  wird eine einfallende Welle teilweise reflektiert und teilweise transmittiert. Wir betrachten eine ebene Grenzfläche, die durch einen Sprung in der Dielektrizitätsfunktion an der Stelle  $z = 0$ ,

$$\epsilon(z) = \begin{cases} \epsilon_1 & z < 0 \\ \epsilon_2 & z > 0 \end{cases} \quad (5.74)$$

dargestellt wird. Dieses Stufenmodell ist anwendbar, falls die Dicke der Grenzschicht sehr viel kleiner ist als die Wellenlänge.

Bei senkrechtem Einfall kann das elektrische Feld der Welle in x-Richtung gewählt werden. Setzt man

$$\mathbf{E} = (E_x(z), 0, 0) \exp(-i\omega t), \quad (5.75)$$

so vereinfacht sich die allgemeine Wellengleichung (5.61) zu

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + k_0^2 \epsilon(z) E_x = 0. \quad (5.76)$$

Diese Gleichung kann zunächst abschnittsweise in den beiden Halbräumen gelöst werden. Nimmt man an, daß die eingestrahlte Welle im Halbraum  $z < 0$  einläuft, so erhält man

$$E_x = \begin{cases} A [ \exp(ik_1 z) + r \exp(-ik_1 z) ] & ; z < 0 \\ A t \exp(ik_2 z) & ; z > 0 \end{cases} \quad (5.77)$$

mit  $k_{1,2} = k_0 \sqrt{\epsilon_{1,2}}$ . Hierbei bezeichnet  $A$  die Amplitude der einlaufenden,  $rA$  die Amplitude der reflektierten und  $tA$  die Amplitude der transmittierten Welle.

Um eine Lösung der Differentialgleichung (5.76) vom linken Halbraum in den rechten Halbraum fortsetzen zu können, benötigt man Anschlußbedingungen für die Funktion  $E_x$  und ihre Ableitung  $\partial_z E_x$  an der Stelle  $z = 0$ . Dazu integrieren wir (5.76) über eine beliebig dünne Schicht von  $0-$  nach  $0+$  und erhalten,

$$[\partial_z E_x] = \partial_z E_x(0+) - \partial_z E_x(0-) = -k_0^2 \int_{0-}^{0+} dz \epsilon(z) E_x(z) \rightarrow 0. \quad (5.78)$$

Im Grenzübergang strebt das Integral gegen Null, da der Integrand beschränkt bleibt. Mit der Stetigkeit der Ableitung ist auch die Funktion selbst stetig,

$$[E_x] = 0, \quad [\partial_z E_x] = 0. \quad (5.79)$$

Durch Einsetzen von (5.77) in (5.79) erhält man Bestimmungsgleichungen für die Koeffizienten  $r$  und  $t$ ,

$$\begin{aligned} 1 + r &= t, \\ k_1(1 - r) &= k_2 t. \end{aligned} \quad (5.80)$$

Deren Auflösung ergibt

$$\begin{pmatrix} r \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{k_1 + k_2} \begin{pmatrix} k_1 - k_2 \\ 2k_1 \end{pmatrix}. \quad (5.81)$$

Das Reflexionsvermögen  $R$  der Grenzfläche wird durch das Verhältnis der Intensität der reflektierten zur Intensität der einfallenden Welle definiert. Da sich beide Wellen im selben Medium ausbreiten, können die Intensitäten durch die Betragsquadrate der Amplituden ersetzt werden,

$$R = |r|^2 = \left| \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right|^2 = \left| \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right|^2. \quad (5.82)$$

Vollständige Reflexion erhält man z.B. für eine Grenzfläche bei der  $n_1$  reell und  $n_2$  rein imaginär ist. Im Zähler und Nenner von (5.85) stehen dann konjugiert komplexe Zahlen, deren Betrag gleich groß ist.

Ähnlich kann man auch das Reflexionsvermögen bei schrägem Einfall behandeln. In diesem Fall wird durch den Wellenvektor der einfallenden Welle und den Normalenvektor der Grenzfläche eine Ebene definiert, die man als Einfallsebene bezeichnet. Wir wählen die  $yz$ -Ebene als Einfallsebene. Man muß nun zwischen zwei unterschiedlichen Polarisationsrichtungen unterscheiden, je nachdem ob das elektrische Feld senkrecht oder parallel zur Einfallsebene steht. Mit s-Polarisation bezeichnet

man die Ausrichtung des elektrischen Feldes senkrecht, mit p-Polarisation die Ausrichtung parallel zur Einfallsebene. Die entsprechenden Feldkomponenten sind,

$$\begin{aligned}
 \text{s-Polarisation:} \quad \mathbf{E} &= (E_x(z), 0, 0) \exp(ik_y y - i\omega t), \\
 \mathbf{B} &= (0, B_y(z), B_z(z)) \exp(ik_y y - i\omega t) \\
 &\hspace{15em} (5.83) \\
 \text{p-Polarisation:} \quad \mathbf{E} &= (0, E_y(z), E_z(z)) \exp(ik_y y - i\omega t), \\
 \mathbf{B} &= (B_x, 0, 0) \exp(ik_y y - i\omega t)
 \end{aligned}$$

Für s-Polarisation erfüllt die Komponente  $E_x$  des elektrischen Feldes die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + k_z^2 E_x = 0, \quad k_z^2 = k_0^2 \epsilon(z) - k_y^2. \quad (5.84)$$

Dies entspricht Gleichung (5.76), wenn man dort die Wellenzahl  $k$  durch die Komponente  $k_z$  ersetzt. Mit der entsprechenden Substitution erhält man aus (5.82) das Reflexionsvermögen für den schrägen Einfall von s-polarisiertem Licht,

$$R_{\parallel} = \left| \frac{k_{z,1} - k_{z,2}}{k_{z,1} + k_{z,2}} \right|^2 \quad (5.85)$$

Für p-Polarisation kann man die Komponente  $B_x$  betrachten, die in den beiden Halbräumen ebenfalls die Gleichung (5.84) erfüllt, jedoch bei  $z = 0$  anderen Stetigkeitsbedingungen genügt. Wegen der Stetigkeit der Tangentialkomponenten

$$B_x, \quad E_y = -\frac{1}{ik_0 \epsilon} \partial_z B_x \quad (5.86)$$

sind in diesem Fall  $B_x$  und  $\partial_z B_x / \epsilon$  stetig. Die Lösung für  $B_x$  besitzt dieselbe Form wie (5.77) während die Stetigkeitsbedingung für die Ableitung einen zusätzlichen Faktor  $\epsilon$  enthält. Man kann daher die entsprechenden Formeln durch die Substitution  $k_z \rightarrow k_z / \epsilon$  erhalten. Damit ergibt sich für p-Polarisation das Reflexionsvermögen

$$R_{\perp} = \left| \frac{\frac{k_{z,1}}{\epsilon_1} - \frac{k_{z,2}}{\epsilon_2}}{\frac{k_{z,1}}{\epsilon_1} + \frac{k_{z,2}}{\epsilon_2}} \right|^2 = \left| \frac{\epsilon_2 k_{z,1} - \epsilon_1 k_{z,2}}{\epsilon_2 k_{z,1} + \epsilon_1 k_{z,2}} \right|^2. \quad (5.87)$$

Die Formeln für das Reflexionsvermögen werden auch Fresnelsche Formeln genannt.

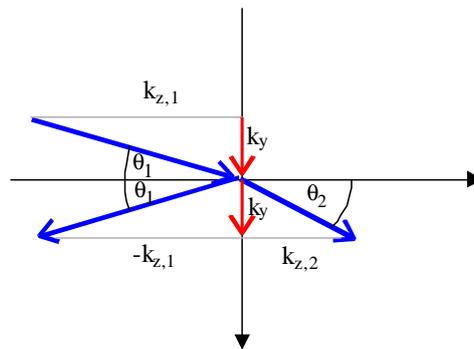


Abbildung 5.4: Reflexion und Brechung an einer Oberfläche

# Kapitel 6

## Relativistische Mechanik

### 6.1 Relativitätsprinzip

Nach den Maxwell-Gleichungen breitet sich Licht im Vakuum immer mit Lichtgeschwindigkeit aus. Nach der klassischen Mechanik würde man jedoch erwarten, daß sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit ändert, wenn man den Vorgang in einem Bezugssystem betrachtet, das sich in Ausbreitungsrichtung des Lichtes (gleichförmig) bewegt. Dieser Widerspruch wurde von Einstein durch die Formulierung eines neuen Relativitätsprinzips behoben. Das Einsteinsche Relativitätsprinzip ersetzt das Galileische Relativitätsprinzip der Mechanik. Das Galileische Relativitätsprinzip behält seine Gültigkeit nur noch als Grenzfall wenn die Geschwindigkeiten der beteiligten Körper sehr viel kleiner sind als die Lichtgeschwindigkeit.

#### 6.1.1 Galileisches Relativitätsprinzip

Ein Bezugssystem, in dem sich ein kräftefreier Körper geradlinig und gleichförmig bewegt heißt Inertialsystem. Die besondere Rolle der Inertialsysteme wird in der Newtonschen Mechanik durch das Galileische Relativitätsprinzip zum Ausdruck gebracht:

- (G1) Alle Inertialsysteme sind gleichberechtigt.
- (G2) Gegeben seien zwei Inertialsysteme  $S$  und  $S'$  mit parallelen Koordinatenachsen. Das System  $S'$  bewege sich bezüglich dem System  $S$  mit der Geschwindigkeit  $v$  in Richtung der  $x$ -Achse (Abb.6.1). Dann besitzt ein Punkt mit den Koordinaten  $(x, t)$  in  $S$  in  $S'$  die Koordinaten

$$x' = x - vt, \quad t' = t . \quad (6.1)$$

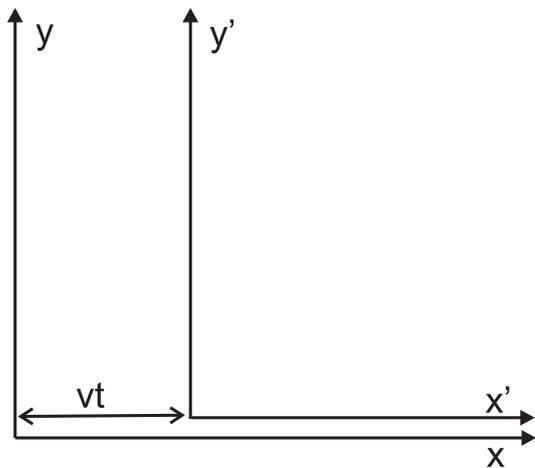


Abbildung 6.1: *Bewegtes Koordinatensystem  $S'$ . Der Ursprung von  $S'$  ist gegenüber  $S$  um  $vt$  verschoben.*

Die Newtonsche Bewegungsgleichung ist forminvariant gegenüber der Transformation (6.4). Transformationen, welche die Newtonsche Bewegungsgleichung forminvariant lassen werden als Galileitransformationen bezeichnet. Die Geschwindigkeiten transformieren sich bei der Galileitransformation (6.4) gemäß

$$\frac{x'}{t'} = \frac{x}{t} - v . \quad (6.2)$$

Im Gegensatz zum Galileischen Relativitätsprinzip breitet sich eine ebene Lichtwelle (5.47) nach den Maxwell'schen Gleichungen im Vakuum immer mit Lichtgeschwindigkeit aus. Zunächst wurde vermutet, daß das Postulat (G1) durch die Lichtausbreitung verletzt würde. Gibt es ein absolutes Bezugssystem, in dem sich das Licht genau mit der Lichtgeschwindigkeit ausbreitet? Als materieller Träger dieses Bezugssystems wurde ein Lichtäther vermutet, in dem sich die Lichtwellen analog zum Schall in der Luft ausbreiten. Die Ätherhypothese wurde aber durch das Experiment von Michelson und Morely (1887) widerlegt. Seither gilt es als Erfahrungstatsache, daß die Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen unabhängig von deren relativer Bewegung gleich groß ist:

$$c = 2.998 \cdot 10^8 \frac{m}{s} \approx 300\,000 \frac{km}{s} . \quad (6.3)$$

## 6.1.2 Einsteinsches Relativitätsprinzip

Einstein hat die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit als physikalisches Grundprinzip postuliert und die Galileitransformation (G2) durch eine allgemeinere Transformation ersetzt. Das Einsteinsche Relativitätsprinzip lautet

(E1) Alle Inertialsysteme sind gleichwertig.

(E2) Die Lichtgeschwindigkeit ist in allen Inertialsystemen gleich groß:

$$x^2 - c^2 t^2 = x'^2 - c^2 t'^2 = 0. \quad (6.4)$$

Transformation zwischen Inertialsystemen, die dem Einsteinschen Relativitätsprinzip genügen, nennt man Lorentztransformationen. Physikalische Gesetze, die gegenüber Lorentztransformationen invariant sind, nennt man lorentzinvariant oder relativistisch.

## 6.2 Lorentztransformation

Als Verallgemeinerung der Galileitransformation wird eine allgemeine lineare Transformation der Koordinaten angenommen:

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & \Lambda^0_1 \\ \Lambda^1_0 & \Lambda^1_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

Koordinaten in S :  $(ct, x) \equiv (x^0, x^1)$

Koordinaten in S' :  $(ct', x') \equiv (x^{0'}, x^{1'})$

Die 4 Konstanten  $\Lambda^\alpha_\beta$  hängen nur von  $v$  ab. Sie werden durch folgende Forderungen bestimmt:

1. **Ursprung von S'**:  $x^{1'} = 0$ ;  $x^1 = vt = \beta x^0$ ;  $\beta = \frac{v}{c}$

$$x^{1'} = \Lambda^1_0 x^0 + \Lambda^1_1 x^1 = 0$$

$$\frac{x^1}{x^0} = -\frac{\Lambda^1_0}{\Lambda^1_1} \stackrel{!}{=} \beta \quad (6.6)$$

2. **Ursprung von S**:  $x^1 = 0$ ;  $x^{1'} = -vt' = -\beta x^{0'}$

$$\frac{x^{1'}}{x^{0'}} = \frac{\Lambda^1_0}{\Lambda^0_0} \stackrel{!}{=} -\beta \quad (6.7)$$

3. **Invarianz der Lichtgeschwindigkeit:**  $x^{1'} = x^{0'}$ ,  $x^1 = x^0$

$$\frac{x^{1'}}{x^{0'}} = \frac{\Lambda^1_0 + \Lambda^1_1}{\Lambda^0_0 + \Lambda^0_1} = 1 \quad (6.8)$$

Damit sind 3 der 4 Konstanten festgelegt. Setzt man  $\gamma(v) := \Lambda^0_0$  für die verbleibende Konstante, so gilt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}' &= \gamma(v) \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}, \\ \Lambda^1_1 &= \Lambda^0_0 = \gamma; \quad \Lambda^1_0 = \Lambda^0_1 = -\beta\gamma. \end{aligned} \quad (6.9)$$

4. **Isotropie des Raumes:** Eine Raumspiegelung  $x^1 \rightarrow -x^1$ ,  $x^{1'} \rightarrow -x^{1'}$  ist äquivalent zu einer Umkehr der Geschwindigkeit  $v \rightarrow -v$ . Führt man gleichzeitig eine Raumspiegelung und eine Geschwindigkeitsumkehr durch, so muß sich das ursprüngliche Transformationsgesetz ergeben.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x^0 \\ -x^1 \end{pmatrix}' &= \gamma(-v) \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ -x^1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}' &= \gamma(-v) \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\gamma(v) = \gamma(-v). \quad (6.10)$$

5. **Gleichwertigkeit der Inertialsysteme:** Die inverse Transformation

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\gamma(v)} \frac{1}{1 - \beta^2} \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}' \quad (6.11)$$

muß äquivalent sein zu einer Transformation mit der Geschwindigkeit  $-v$ . Daraus folgt:

$$\gamma(-v) = \frac{1}{\gamma(v)} \frac{1}{1 - \beta^2}. \quad (6.12)$$

Aus (6.10) und (6.12) folgt

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (6.13)$$

Die gesuchte Lorentz-Transformation ist,

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}' = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad \beta = \frac{v}{c} \quad (6.14)$$

In expliziter Form lautet sie:

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (6.15)$$

Für kleine Geschwindigkeiten,  $v^2/c^2 \ll 1$ , geht die Lorentz-Transformation (6.15) in die Galileitransformation (6.4) über.

Die Koordinatenachsen ( $x^{0'} = 0$ ,  $x^{1'} = 0$ ) des bewegten Systems  $S'$  erscheinen im Inertialsystem  $S$  gegeneinander verdreht (Abb. 6.2). Punkte  $t > 0$ , die in  $S$  am Ort  $x = 0$  beobachtet werden, erscheinen in  $S'$  entlang der negativen  $x'$ -Achse. Punkte  $x > 0$ , die in  $S$  zur Zeit  $t = 0$  beobachtet werden, erscheinen in  $S'$  zu früheren Zeiten  $t' < 0$ .

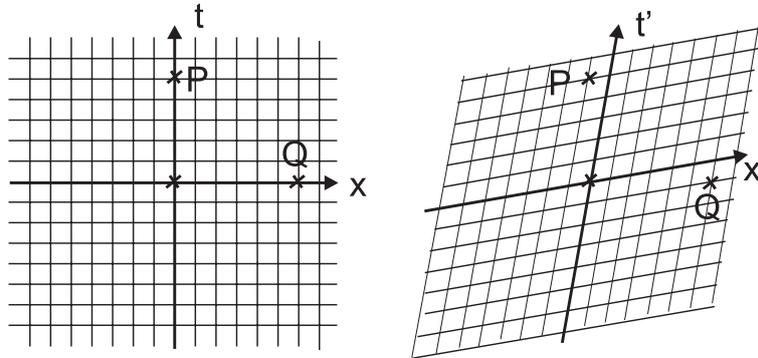


Abbildung 6.2: Koordinatenlinien  $x^{0'} = \text{const}$ ,  $x^{1'} = \text{const}$  eines bewegten Inertialsystems  $S'$  (rechts) im Inertialsystem  $S$  (links).

## 6.3 Der Abstand von Ereignissen

### 6.3.1 Raumzeit

**Ereignis:** Die Ortskoordinaten  $x^1, x^2, x^3$  und die Zeitkoordinate  $x^0 = ct$  eines Inertialsystems bilden einen 4-dimensionalen Raum. Die Punkte  $(x^0, x^1, x^2, x^3)$  dieses Raumes nennt man Ereignisse. Betrachtet man nur Relativbewegungen in einer Koordinatenrichtung ( $x^1$ ), so können die Ereignisse  $(x^0, x^1)$  in einer Ebene dargestellt werden.

**Weltlinien:** Die Bahnkurve eines Teilchens im 4-dimensionalen Raum heißt Weltlinie (Abb. 6.3). Die Weltlinien eines Photons, welches sich zur Zeit  $t = 0$  im Ursprung befindet, liegen auf dem Lichtkegel  $ct = r$ . Die Weltlinie  $x = vt$  eines Teilchens mit der Geschwindigkeit  $v < c$  liegt innerhalb des Lichtkegels. Ereignisse innerhalb des

Lichtkegels können vom Ursprung aus durch ein Signal, welches sich mit einer Geschwindigkeit  $v < c$  ausbreitet, erreicht werden. Ereignisse außerhalb des Lichtkegels sind so weit vom Ursprung entfernt, daß sie durch kein Signal mit  $v \leq c$  erreicht werden können.

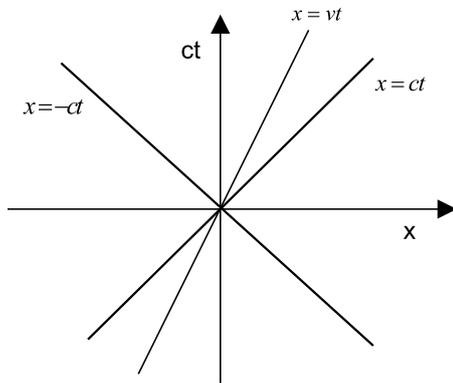


Abbildung 6.3: Die Weltlinie eines Teilchens mit der Geschwindigkeit  $v$ .

**Abstand:** In Analogie zum 3-dimensionalen Abstandsquadrat  $r^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$  definiert man das 4-dimensionale Abstandsquadrat

$$s^2 = (x^0)^2 - r^2. \quad (6.16)$$

Im Unterschied zur euklidischen Geometrie ist das **Vorzeichen** beim räumlichen Abstand **negativ**. Damit wird das Abstandsquadrat unabhängig von der Wahl des Inertialsystems. Nach dem Relativitätsprinzip gilt für ein Photon  $r = x^0$  und damit  $s^2 = 0$  für alle Inertialsysteme. Aufgrund der Lorentz-Transformation sind auch Abstände  $s^2 \neq 0$  unabhängig vom Inertialsystem:

$$\begin{aligned} s'^2 = (x^{0'})^2 - (x^{1'})^2 &= \gamma^2 [(x^0 - \beta x^1)^2 - (x^1 - \beta x^0)^2] \\ &= +(x^0)^2 - (x^1)^2 = s^2. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Nach dem Vorzeichen von  $s^2$  unterscheidet man:

$$\begin{aligned} s^2 = 0 &: \text{Lichtartiger Abstand} \\ s^2 < 0 &: \text{Raumartiger Abstand} \\ s^2 > 0 &: \text{Zeitartiger Abstand} \end{aligned} \quad (6.18)$$

Da  $s^2$  invariant ist, ist diese Unterscheidung unabhängig vom Inertialsystem. Bei raumartigen Abständen kann ein Koordinatensystem gefunden werden, in dem das Ereignis  $(x^0, x^1)$  gleichzeitig zum Ereignis  $(0, 0)$  stattfindet:

$$x^{0'} = \gamma(x^0 - \beta x^1) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{x^0}{x^1} < 1. \quad (6.19)$$

Bei zeitartigen Abständen kann ein Koordinatensystem gefunden werden, in dem das Ereignis  $(x^0, x^1)$  am selben Ort wie das Ereignis  $(0, 0)$  stattfindet:

$$x^{1'} = \gamma(x^1 - \beta x^0) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{x^1}{x^0} < 1. \quad (6.20)$$

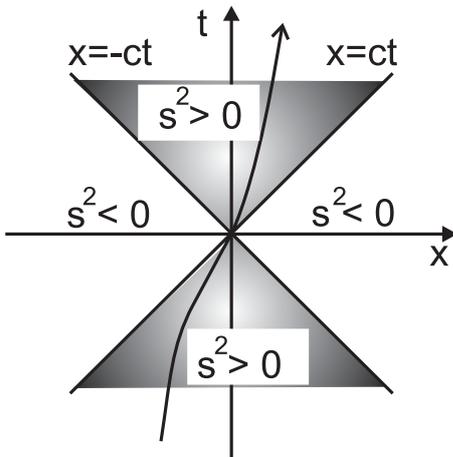


Abbildung 6.4: Der Lichtkegel trennt raumartige von zeitartigen Abständen.

### 6.3.2 Längenkontraktion

Ein Stab bewege sich im Laborsystem  $S$  mit der Geschwindigkeit  $v$  in  $x$ -Richtung (Abb.6.5a).

Längenmessung in  $S$ : Die Positionen  $x_1, x_2$  der Stabenden werden in  $S$  zur gleichen Zeit  $t_1 = t_2$  gemessen:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = l, \quad \Delta t = t_2 - t_1 = 0 \quad (6.21)$$

Der Stab ruht in einem mit  $v$  bewegten Inertialsystem. Die Länge

$$\Delta x' = x'_2 - x'_1 = l_0 \quad (6.22)$$

im Ruhesystem ist die Eigenlänge des Stabes.

Lorentz-Transformation:

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) \quad (6.23)$$

Mit  $\Delta x' = l_0$ ,  $\Delta x = l$  und  $\Delta t = 0$  folgt

$$l = \sqrt{1 - v^2/c^2} l_0 \quad (6.24)$$

Die Ereignisse der Messung der Stabenden finden in  $S'$  zu verschiedenen Zeiten statt

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right) = -\frac{v}{c^2}l_0 \quad (6.25)$$

### 6.3.3 Zeitdilatation

Eine Uhr bewege sich in  $S$  mit der Geschwindigkeit  $v$  in  $x$ -Richtung. Zu den Zeitpunkten  $t_1$  und  $t_2$  wird der Stand der Uhr mit Uhren in  $S$  an den Orten  $x_1$  bzw.  $x_2 = x_1 + v(t_2 - t_1)$  verglichen (Abb.6.5b).

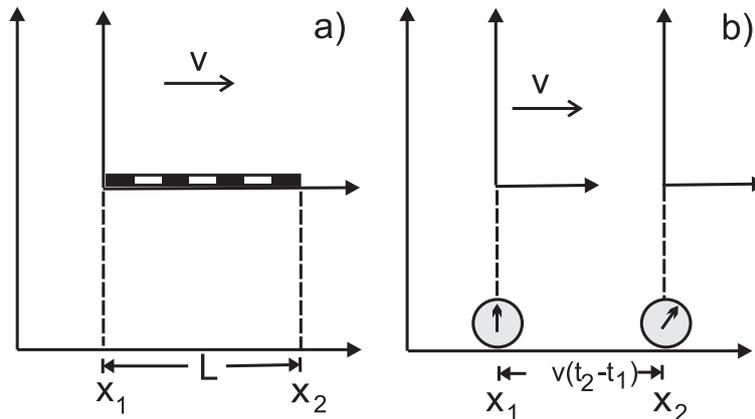


Abbildung 6.5: a) bewegte Maßstäbe erscheinen verkürzt b) bewegte Uhren gehen langsamer.

Zeitintervall im Ruhesystem  $S'$  der Uhr:

$$\Delta t' = \Delta \tau, \quad \Delta x' = 0 \quad (6.26)$$

Zeitmessung in  $S$ :

$$\Delta t; \quad \Delta x = v \Delta t \quad (6.27)$$

Lorentz-Transformation

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v \Delta t) \quad (6.28)$$

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x\right) \quad (6.29)$$

Die Uhr wird in  $S$  an verschiedenen Orten abgelesen.

$$\Delta x' = 0 \Rightarrow \Delta x = v \Delta t. \quad (6.30)$$

Damit gilt:

$$\Delta \tau = \gamma\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \Delta t = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta t. \quad (6.31)$$

Die bewegte Uhr geht gegenüber den Uhren, die im Laborsystem ruhen nach (Zeitdehnung oder Zeitdilatation).

### 6.3.4 Eigenzeit

Die Eigenzeit  $\tau$  einer Uhr wird definiert als die Zeit im Ruhesystem der Uhr:

$$v = 0 \Rightarrow ds^2 = c^2 d\tau^2; \quad \tau_2 - \tau_1 = \frac{1}{c}(s_2 - s_1) \quad (6.32)$$

Die Eigenzeit ist unabhängig vom Inertialsystem, da der Abstand  $s_2 - s_1$  lorentzinvariant ist.

**Zeit einer bewegten Uhr:** Zur Zeit  $t$  bewege sich die Uhr in  $S$  mit Geschwindigkeit  $v(t)$ . Im infinitesimalen Zeitintervall  $dt$  bewegt sie sich mit der momentanen Geschwindigkeit  $v(t)$  über eine Strecke  $dx = v(t)dt$ . In einem Inertialsystem  $S'$ , welches sich mit der konstanten Geschwindigkeit  $v_0 = v(t)$  bewegt ist die Uhr momentan in Ruhe. Dem Zeitintervall  $dt$  entspricht das Eigenzeitintervall

$$\begin{aligned} d\tau &= \frac{1}{c}ds = \frac{1}{c}\sqrt{c^2dt^2 - dx^2} \\ &= \sqrt{1 - v^2(t)/c^2}dt \end{aligned} \quad (6.33)$$

Für ein endliches Zeitintervall von  $t_1$  bis  $t_2$  gilt daher

$$\tau = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}} dt. \quad (6.34)$$

Eine in  $S$  bewegte Uhr geht daher langsamer als eine in  $S$  ruhende Uhr.

Um den Zeitvergleich der beiden Uhren zur Zeit  $t_1$  und  $t_2$  ausführen zu können, müssen sich die Uhren zu diesen Zeitpunkten am selben Ort befinden. Dies ist nur möglich, falls die bewegte Uhr im Zeitintervall zwischen  $t_1$  und  $t_2$  beschleunigt wurde. Da in beschleunigten Bezugssystemen andere Gesetze gelten, ist die angezeigte Zeitdifferenz der Uhren nicht im Widerspruch zum Relativitätsprinzip. Diejenige der beiden Uhren, die beschleunigt wurde, geht nach.

(Zwillingsparadoxon, Lebensdauer schneller Myonen).

### 6.3.5 Gleichzeitigkeit

Nach dem Galileischen Relativitätsprinzip können sich die Zeiten  $t$  und  $t'$  in zwei Inertialsystemen nur durch eine Konstante  $t_0$  unterscheiden:

$$t' = t + t_0 \quad (6.35)$$

Daher sind Zeitdifferenzen zwischen 2 Ereignissen in allen Inertialsystemen gleich groß:

$$\Delta t' = \Delta t \quad (6.36)$$

Zwei Ereignissen, die in einem Inertialsystem gleichzeitig stattfinden,  $\Delta t = 0$ , sind dann auch in jedem anderen Inertialsystem gleichzeitig:  $\Delta t' = 0$ . Durch das Einsteinsche Relativitätsprinzip wird Gleichzeitigkeit zu einem relativen Begriff, der vom Inertialsystem des Beobachters abhängt.

Zwei gleichzeitige Ereignisse ( $\Delta t = 0$ ), die in  $S$  im Abstand  $\Delta x$  voneinander stattfinden, treten in einem bewegten Inertialsystem  $S'$  im zeitlichen Abstand

$$\Delta t' = \gamma \left( \Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x \right) = -\gamma \frac{v}{c^2} \Delta x \quad (6.37)$$

voneinander auf. Mit

$$\Delta x' = \gamma (\Delta x - v \Delta t) = \gamma \Delta x \quad (6.38)$$

erhält man in  $S'$  die Zeitdifferenz

$$\Delta t' = -\frac{v}{c} \frac{\Delta x'}{c}. \quad (6.39)$$

Eine absolute Bedeutung hat nur das Abstandsquadrat  $\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2$ .

### 6.3.6 Additionstheorem der Geschwindigkeiten

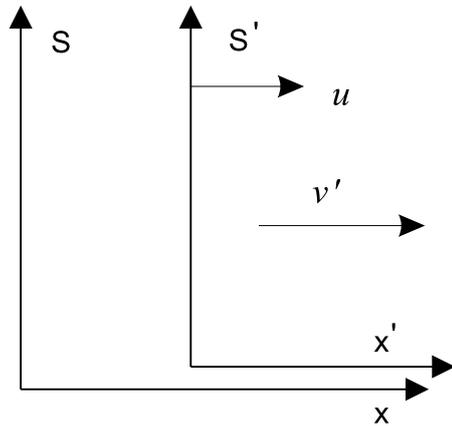


Abbildung 6.6: Ein Teilchen bewege sich in dem Inertialsystem  $S'$  mit der Geschwindigkeit  $v'$ .

Ein Teilchen bewege sich in mit der Geschwindigkeit  $v'$  in einem bewegten Bezugssystem  $S'$  und mit der Geschwindigkeit  $v$  im Laborsystem  $S$ .  $S'$  bewege sich mit der Geschwindigkeit  $u$  in  $S$ . Dann gilt für die Transformation der Geschwindigkeit

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - ut) \\ t' &= \gamma \left( t - \frac{ux}{c^2} \right) \\ v' &= \frac{x'}{t'} = \frac{x - ut}{t - \frac{ux}{c^2}} = \frac{v - u}{1 - \frac{uv}{c^2}} \end{aligned} \quad (6.40)$$

In umgekehrter Richtung gilt

$$\begin{aligned} x &= \gamma(x' + ut') \\ t &= \gamma \left( t' + \frac{ux'}{c^2} \right) \\ v &= \frac{x}{t} = \frac{x' + ut'}{t' + \frac{ux'}{c^2}} = \frac{v' + u}{1 + \frac{uv'}{c^2}}. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Für  $uv' \ll c^2$  erhält man näherungsweise das klassische Additionstheorem  $v = u + v'$ . Für  $u \rightarrow c$  oder  $v' \rightarrow c$  gilt immer  $v \rightarrow c$ , so dass die Lichtgeschwindigkeit nicht überschritten wird.

## 6.4 Metrik

Die Relativitätstheorie zeigt, daß sich Raum und Zeit nicht unabhängig voneinander transformieren. Es liegt daher nahe, den dreidimensionalen Raum zu einer vierdimensionalen Raumzeit zu erweitern. Die Geometrie der vierdimensionalen Raumzeit erweist sich als die grundlegende Eigenschaft zur Beschreibung der Gravitation. Die spezielle Relativitätstheorie beschreibt die Geometrie der Raumzeit ohne Gravitation. Der Einfluß der Gravitation wird in der allgemeinen Relativitätstheorie behandelt.

Die Geometrie eines Raumes wird mathematisch durch seine Metrik dargestellt. Die in der speziellen Relativitätstheorie gültige Metrik der Raumzeit heißt Lorentz-Minkowski-Metrik.

### 6.4.1 Lorentz-Minkowski-Metrik

In einem euklidischen Raum mit den kartesischen Koordinaten  $x_i$  gilt für das Abstandsquadrat infinitesimal benachbarter Punkte,

$$ds^2 = \sum_i dx_i^2 . \quad (6.42)$$

In einem nichteuklidischen Raum mit krummlinigen Koordinaten  $q_n$  ist der Verschiebungsvektor zwischen infinitesimal benachbarten Punkten

$$d\mathbf{x} = \sum_n \mathbf{a}_n dq_n, \quad \mathbf{a}_n = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_n} . \quad (6.43)$$

Die Vektoren  $\mathbf{a}_n$  bilden hierbei eine lokale Basis. Die Basisvektoren sind aber im allgemeinen weder normiert noch orthogonal zueinander. Daher besitzt das Abstandsquadrat die allgemeine Form

$$ds^2 = \sum_{n,m} g_{nm} dq_n dq_m, \quad g_{nm} = \mathbf{a}_n \cdot \mathbf{a}_m \quad (6.44)$$

Die symmetrische Matrix  $g_{nm}$  wird als Metrik bezeichnet. Sie bestimmt die Geometrie des Raumes.

Das Abstandsquadrat (6.16) in der vierdimensionalen Raumzeit kann in diesem Sinne durch eine Metrik, die Lorentz-Minkowski-Metrik, dargestellt werden. Die Komponenten des vierdimensionalen Ortsvektors  $\mathbf{x}$  werden mit oberen griechischen Indizes bezeichnet, die die Werte 0, 1, 2, 3 durchlaufen,

$$\mathbf{x} = (x^\alpha) = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (6.45)$$

Außerdem wird die Einsteinsche Summenkonvention verwendet: Über paarweise auftretende obere und untere Indizes wird summiert. Dann gilt

$$ds^2 = -\eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad \eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (6.46)$$

wobei  $\eta_{\alpha\beta}$  die Lorentz-Minkowski-Metrik bezeichnet. Das Vorzeichen von  $\eta_{\alpha\beta}$  ist Konvention.

## 6.4.2 Lorentz-Poincaré-Gruppe

Nachdem die Geometrie der Raumzeit eines Inertialsystems festgelegt wurde, lassen sich Lorentztransformationen als Koordinatentransformationen zwischen Inertialsystemen einführen. Eine Lorentztransformation ist eine lineare Koordinatentransformation,

$$x'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta x^\beta, \quad (6.47)$$

die ein Inertialsystem  $S$  in ein neues Inertialsystem  $S'$  überführt. Dabei bleiben Abstandsquadrate zwischen beliebigen Ereignispunkten invariant. Da die Matrix  $\Lambda^\alpha_\beta$  unabhängig von  $x^\alpha$  ist, gilt für alle Koordinatendifferenzen und Koordinatendifferentiale dasselbe Transformationsgesetz (6.47). Es genügt daher die Invarianz des Abstandsquadrates für infinitesimal benachbarte Punkte zu betrachten,

$$ds'^2 = ds^2, \quad (6.48)$$

$$\begin{aligned} ds'^2 &= -\eta_{\alpha\beta} dx'^\alpha dx'^\beta = -\eta_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu dx^\mu dx^\nu \\ ds^2 &= -\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \end{aligned}$$

Aus einem Vergleich dieser Ausdrücke für beliebige  $dx^\mu$  folgt für eine Lorentztransformation die Bedingung,

$$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu. \quad (6.49)$$

Lorentztransformationen stellen eine Verallgemeinerung der orthogonalen Transformationen dar. Wie diese bilden sie eine Gruppe. Die Gruppe der orthogonalen Transformationen (Drehungen, Spiegelungen) ist eine Untergruppe der Lorentzgruppe. Die Abgeschlossenheit der Elemente der Lorentzgruppe zeigt man in der folgenden Weise. Seien  $\Lambda$  und  $\Lambda'$  zwei Lorentztransformationen. Dann ist auch das Produkt  $\Lambda''^{\alpha}_{\beta} = \Lambda'^{\alpha}_{\sigma} \Lambda^{\sigma}_{\beta}$  eine Lorentztransformation:

$$\eta_{\alpha\beta} \Lambda''^{\alpha}_{\mu} \Lambda''^{\beta}_{\nu} = \eta_{\alpha\beta} \Lambda'^{\alpha}_{\rho} \Lambda^{\rho}_{\mu} \Lambda'^{\beta}_{\sigma} \Lambda^{\sigma}_{\nu} = \eta_{\alpha\beta} \Lambda'^{\alpha}_{\rho} \Lambda'^{\beta}_{\sigma} \Lambda^{\rho}_{\mu} \Lambda^{\sigma}_{\nu} = \eta_{\rho\sigma} \Lambda^{\rho}_{\mu} \Lambda^{\sigma}_{\nu} = \eta_{\mu\nu}. \square$$

## Lorentz-Boost

Lorentztransformationen von einem Inertialsystem S in ein bewegtes Inertialsystem S' mit parallelen Achsen werden als Boost (Vorschub) bezeichnet. In dem speziellen Koordinatensystem in dem die Geschwindigkeit von S' entlang der  $x^1$ -Achse gerichtet ist, gilt

$$\begin{aligned} x'^0 &= \gamma(x^0 - \beta x^1) \\ x'^1 &= \gamma(x^1 - \beta x^0) \\ x'^2 &= x^2 \\ x'^3 &= x^3. \end{aligned} \quad (6.50)$$

Ersetzt man hier  $x_1$  durch die Parallelkomponente des Ortsvektors  $\mathbf{r}$  zum Vektor  $\boldsymbol{\beta}$

$$x^1 = \frac{\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r})}{\beta^2}$$

und schreibt

$$x'^1 = x^1 + (\gamma - 1)x^1 - \gamma\beta x^0$$

so folgt

$$\begin{aligned} x'^0 &= \gamma(x^0 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r}) \\ \mathbf{r}' &= \mathbf{r} + (\gamma - 1) \frac{\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r})}{\beta^2} - \gamma\boldsymbol{\beta}x^0. \end{aligned} \quad (6.51)$$

Diese vektorielle Form des Lorentz-Boosts ist unabhängig von den Raumkoordinaten und gilt daher auch bei beliebiger Orientierung von  $\boldsymbol{\beta}$  relativ zu den Koordinatenachsen. Die zugehörige Abbildungsmatrix ist

$$\Lambda(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta^1 & -\gamma\beta^2 & -\gamma\beta^3 \\ -\gamma\beta^1 & & & \\ -\gamma\beta^2 & \delta_{ij} + \frac{\beta_i\beta_j(\gamma-1)}{\beta^2} & & \\ -\gamma\beta^3 & & & \end{pmatrix}. \quad (6.52)$$

## Poincaré-Transformation

Eine Koordinatentransformation

$$x'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}_{\beta} x^{\beta} + a^{\alpha}, \quad (6.53)$$

wird als Poincaré-Transformation bezeichnet. Hierbei wird der Ursprung  $x^{\alpha} = 0$  von  $S$  auf einen beliebigen Bezugspunkt  $x'^{\alpha} = a^{\alpha}$  abgebildet. Aus der Invarianz des Abstandsquadrats gegenüber Poincaré-Transformationen ergibt sich dieselbe Bedingung wie in (6.49). Man bezeichnet auch Transformationen mit  $a^{\alpha} = 0$  als homogene Lorentztransformationen und Transformationen mit  $a^{\alpha} \neq 0$  als inhomogene Lorentztransformationen.

### 6.4.3 Tensoranalysis

Physikalische Gesetze sollten sich unabhängig vom Bezugssystem mit Hilfe von Skalaren, Vektoren und Tensoren formulieren lassen. Diese Größen werden durch ihr Transformationsverhalten bei Lorentztransformationen definiert.

#### Vierervektoren

Vierervektoren (4er-Vektoren) sind 4-komponentige Größen, die sich bei Lorentztransformationen wie Koordinatendifferentiale transformieren. Die Koordinatendifferentiale stellen den Verbindungsvektor zwischen infinitesimal benachbarten Ereignissen im Minkowski-Raum dar,

$$d\mathbf{x} = (dx^{\alpha}) = \begin{pmatrix} dx^0 \\ dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{pmatrix}. \quad (6.54)$$

Bei einer Lorentztransformation der Form (6.53) transformieren sie sich gemäß

$$dx'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}_{\beta} dx^{\beta}. \quad (6.55)$$

Ein 4er-Vektor ist eine 4-komponentige Größe, die sich bei einer Lorentztransformation wie die Koordinatendifferentiale transformiert,

$$\mathbf{a} = (a^{\alpha}), \quad a'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}_{\beta} a^{\beta}. \quad (6.56)$$

Ein Beispiel ist der Vektor der 4er-Geschwindigkeit,

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{x}}{d\tau}. \quad (6.57)$$

Hierbei ist  $d\mathbf{x}$  der Verschiebungsvektor entlang der Weltlinie eines Teilchens und  $d\tau$  das Eigenzeitintervall, das im Ruhesystem des Teilchens gemessen wird. Da das Eigenzeitintervall lorentzinvariant ist, gilt bei Lorentztransformation,

$$u'^{\alpha} = \frac{dx'^{\alpha}}{d\tau'} = \frac{\Lambda^{\alpha}_{\beta} dx^{\beta}}{d\tau} = \Lambda^{\alpha}_{\beta} u^{\beta}. \quad (6.58)$$

Die Komponenten der 4er-Geschwindigkeit können durch die Teilchengeschwindigkeit  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$  und die Lichtgeschwindigkeit  $c = dx^0/dt$  ausgedrückt werden,

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \gamma \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \gamma \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}. \quad (6.59)$$

Der 4er-Impuls wird definiert durch

$$\mathbf{p} = m\mathbf{u}, \quad (6.60)$$

wobei  $m$  die Masse im Ruhesystem des Teilchen ist. Da  $m$  lorentzinvariant ist, ist auch der 4er-Impuls ein 4er-Vektor.

## Skalare

Größen, die invariant sind gegenüber Lorentz-Transformationen heißen Lorentz-Skalare. Beispiele sind die Lichtgeschwindigkeit  $c$ , die Ruhemasse  $m$ , das Abstand-sintervall  $ds$  bzw. das Eigenzeitintervall  $d\tau$ .

Für zwei 4er-Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  definiert man das Skalarprodukt

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \eta_{\alpha\beta} a^{\alpha} b^{\beta} = -a^0 b^0 + a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3. \quad (6.61)$$

Das Skalarprodukt ist ein Lorentz-Skalar, denn es gilt wegen (6.49)

$$\eta_{\alpha\beta} a'^{\alpha} b'^{\beta} = \eta_{\alpha\beta} \Lambda^{\alpha}_{\mu} \Lambda^{\beta}_{\nu} a^{\mu} b^{\nu} = \eta_{\mu\nu} a^{\mu} b^{\nu}. \quad (6.62)$$

Nachfolgend einige Beispiele für Skalarprodukte mit der 4er-Geschwindigkeit. Man berechnet sie am einfachsten im Ruhesystem mit  $u^0 = c$  und  $u^1 = u^2 = u^3 = 0$ :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = -c^2, \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{p} = -c^2 m, \quad \mathbf{u} \cdot d\mathbf{x} = -c^2 d\tau. \quad (6.63)$$

### Kovariante und kontravariante Vektorkomponenten

Vektorkomponenten  $a^\alpha$  mit oberem Index werden als kontravariante Komponenten bezeichnet und von den kovarianten Vektorkomponenten mit unterem Index unterschieden. Die kovarianten Komponenten definiert man durch,

$$a_\alpha = \eta_{\alpha\beta} a^\beta = \begin{pmatrix} -a^0 \\ a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}. \quad (6.64)$$

Umgekehrt erhält man aus den kovarianten Komponenten die kontravarianten durch

$$a^\alpha = \eta^{\alpha\beta} a_\beta = \begin{pmatrix} -a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad (6.65)$$

wobei  $(\eta^{\alpha\beta})$  die zu  $(\eta_{\alpha\beta})$  inverse Matrix bezeichnet. Für die spezielle Form der Metrik ist  $\eta^{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ , denn es gilt

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit kann das Skalarprodukt in der üblichen Weise als Produkt eines kovarianten Zeilenvektors mit einem kontravarianten Spaltenvektor geschrieben werden

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \eta_{\alpha\beta} a^\alpha b^\beta = a_\beta b^\beta = (a_0, a_1, a_2, a_3) \cdot \begin{pmatrix} b^0 \\ b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix}. \quad (6.66)$$

Auch die kovarianten Komponenten besitzen ein definiertes Transformationsverhalten,

$$a'_\alpha = \Lambda_\alpha^\beta a_\beta. \quad (6.67)$$

Die Transformationsmatrix  $\Lambda_\alpha^\beta$  der kovarianten Vektorkomponenten erhält man aus  $\Lambda^\alpha_\beta$  durch herauf- und herabziehen der Indizes,

$$\Lambda_\alpha^\beta = \eta_{\alpha\mu} \eta^{\beta\nu} \Lambda^\mu_\nu. \quad (6.68)$$

Die transponierte Matrix der Transformationsmatrix  $\Lambda_\alpha^\beta$  ist die inverse Matrix der Transformationsmatrix  $\Lambda^\alpha_\beta$ :

$$(\Lambda^T)_\alpha^\beta = \Lambda_\beta^\alpha = (\Lambda^{-1})^\alpha_\beta . \quad (6.69)$$

**Beweis:**

$$\begin{aligned} a'_\alpha &= \eta_{\alpha\beta} a'^\beta = \eta_{\alpha\beta} \Lambda^\beta_\gamma a^\gamma = \eta_{\alpha\beta} \Lambda^\beta_\gamma \eta^{\gamma\delta} a_\delta = \Lambda_\alpha^\delta a_\delta . & \square \\ a'_\alpha b'^\beta &= \Lambda_\alpha^\mu \Lambda^\alpha_\nu a_\mu b^\nu = a_\mu b^\mu . & \square \end{aligned}$$

## Tensoren

Eine Größe mit einer beliebigen Zahl an oberen und unteren Indizes wird als Tensor bezeichnet, wenn sich jeder obere Index wie ein kontravarianter und jeder untere Index wie ein kovarianter Vektorindex transformiert. So besitzt z.B. der Tensor  $T^{\alpha\beta}_\gamma{}^\delta$  das Transformationsverhalten

$$T'^{\alpha\beta}_\gamma{}^\delta = \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu \Lambda_\gamma{}^\rho \Lambda^\delta{}_\sigma T^{\mu\nu}{}_\rho{}^\sigma . \quad (6.70)$$

Vektoren und Skalare sind Tensoren mit nur einem bzw. mit gar keinem Index.

## Vierergradient

Ein Beispiel einer Größe mit kovarianten Komponenten ist der 4er-Gradient einer Funktion  $f(x^\mu)$ . Das totale Differential

$$df = \partial_{x_\mu} f dx^\mu$$

ist ein lorentzinvarianter Skalar. Man kann daher die rechte Seite als Skalarprodukt des 4er-Vektors  $d\mathbf{x}$  mit dem 4er-Gradienten  $\nabla f$  auffassen,

$$df = \nabla f \cdot d\mathbf{x} .$$

Nach Definition des Skalarproduktes besitzt der Gradient kovariante Komponenten

$$\nabla f = (\partial_{x_\mu} f) = (\partial_\mu f) = (f_{,\mu}) = \left( \begin{array}{c} \partial_{x_0} f \\ \nabla f \end{array} \right) \quad (6.71)$$

Die Kurzschreibweisen  $\partial_\mu f$  und  $f_{,\mu}$  verdeutlichen, daß es sich um eine Komponente mit unterem Index handelt. Die kontravarianten Komponenten des Gradienten sind nach (6.65),

$$(f'^{\mu}) = (\eta^{\mu\nu} f_{,\nu}) = \left( \begin{array}{c} -\partial_{x_0} f \\ \nabla f \end{array} \right) . \quad (6.72)$$

Die 4er-Divergenz eines 4er-Vektors  $\mathbf{a}$  wird definiert als

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = a^\mu{}_{,\mu} = \partial_{x_0} a^0 + \nabla \cdot \mathbf{a} . \quad (6.73)$$

Als Skalarprodukt von 4er-Vektoren ist sie ein Lorentz-Skalar.

Der d'Alembert-Operator wird definiert als 4-dimensionale Verallgemeinerung des Laplace-Operators,

$$\square = \nabla \cdot \nabla = -\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} = \Delta - \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} . \quad (6.74)$$

Die Anwendung des d'Alembert-Operators auf eine skalare Funktion  $f(x^\mu)$  ergibt den skalaren Ausdruck,

$$\square f = f'^{\mu}{}_{,\mu} = \left( \Delta - \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} \right) f . \quad (6.75)$$

## 6.5 Relativistische Mechanik

### 6.5.1 Kovarianz

Gleichungen zwischen Skalaren, Vektoren oder allgemeiner Tensoren in der 4-dimensionalen Raumzeit sind gegenüber Lorentz-Transformationen forminvariant. Man nennt solche Gleichungen auch kovariant. Eine kovariante Gleichung ist z.B.

$$a^\mu = b^\mu . \quad (6.76)$$

In einem anderen Inertialsystem  $S'$  gilt dann entsprechend

$$a^{\mu'} = b^{\mu'} \quad (6.77)$$

für die transformierten Komponenten

$$a^{\mu'} = \Lambda^\mu{}_{\nu'} a^\nu, \quad b^{\mu'} = \Lambda^\mu{}_{\nu'} b^\nu . \quad (6.78)$$

Aus dem Einsteinschen Relativitätsprinzip ergibt sich die weitreichende Forderung, dass die Newtonsche Bewegungsgleichung revidiert und durch eine kovariante Bewegungsgleichung ersetzt werden muß.

## 6.5.2 Kovariante Bewegungsgleichung

Verallgemeinert man die Newtonsche Bewegungsgleichung auf 4er-Vektoren dann lautet sie,

$$\boxed{\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \mathbf{F} .} \quad (6.79)$$

Die Ableitung eines 4er-Impulses nach der Eigenzeit ist ein 4er-Vektor, der einer 4er-Kraft  $\mathbf{F}$  gleichzusetzen ist. Die Komponenten der Viererkraft kann man im momentanen Ruhesystem  $S'$  des Teilchens bestimmen, da dort die nichtrelativistische Form gültig sein muss. In  $S'$  erhält man aus (6.79)

$$\frac{dmc}{dt'} = 0, \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt'} = \mathbf{K}$$

wobei  $\mathbf{K}$  die Newtonsche Kraft darstellt. Damit besitzt die 4er-Kraft im momentanen Ruhesystem die Komponenten

$$F'^0 = 0, \quad \mathbf{F}' = \mathbf{K}$$

In  $S'$  bewegt sich das Laborsystem  $S$  mit der Geschwindigkeit  $-\mathbf{v}$ . Die Komponenten der 4er-Kraft im Laborsystem  $S$  erhält man mit (6.51),

$$\begin{aligned} F^0 &= \gamma(F'^0 + \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{F}') = \gamma\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{K} \\ \mathbf{F} &= \mathbf{F}' + (\gamma - 1)\frac{\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{F}')}{\beta^2} + \gamma\boldsymbol{\beta}F'^0 = \mathbf{K} + (\gamma - 1)\frac{\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{K})}{v^2} . \end{aligned} \quad (6.80)$$

Zusammengefasst gilt: Bewegt sich ein Teilchen in einem Inertialsystem  $S$  momentan mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  so wirkt auf das Teilchen die momentante 4er-Kraft,

$$\boxed{\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \gamma \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{K}}{c} \\ \mathbf{K}_{\perp} + \gamma \frac{\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{K})}{v^2} \end{pmatrix} .} \quad (6.81)$$

Hierbei bezeichnet  $\mathbf{K}$  die Newtonsche Kraft im momentanen Ruhesystem  $S'$  und  $\mathbf{K}_{\perp}$  ihre Komponente senkrecht zur Bewegungsrichtung.

## Komponenten der Bewegungsgleichung

Die kovariante Bewegungsgleichung besitzt 4-Komponenten, die man in einem Inertialsystem  $S$  auf folgende Weise angeben kann. Dabei ist zu beachten, dass das Eigenzeitintervall  $d\tau$  mit dem Koordinatenzeitintervall  $dt$  gemäß (??) zusammenhängt.

**0-Komponente:**

$$\gamma \frac{d}{dt}(m\gamma c) = \gamma \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{K}}{c}, \quad \frac{d\gamma mc^2}{dt} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{K}. \quad (6.82)$$

**Komponente  $\parallel \mathbf{v}$ :**

$$\gamma \left[ \frac{d}{dt}(m\gamma \mathbf{v}) \right]_{\parallel} = \gamma K_{\parallel}, \quad \left[ \frac{d}{dt} \mathbf{p} \right]_{\parallel} = K_{\parallel}. \quad (6.83)$$

**Komponente  $\perp \mathbf{v}$ :**

$$\gamma \left[ \frac{d}{dt}(m\gamma \mathbf{v}) \right]_{\perp} = \mathbf{K}_{\perp}, \quad \left[ \frac{d}{dt} \mathbf{p} \right]_{\perp} = \frac{1}{\gamma} \mathbf{K}_{\perp}. \quad (6.84)$$

Man definiert die relativistische Energie  $E$  und den relativistischen Impuls  $\mathbf{p}$  durch

$$E = \gamma mc^2, \quad \mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}. \quad (6.85)$$

Die zeitliche Komponente der Bewegungsgleichung stellt den Energiesatz, die räumlichen Komponenten den Impulssatz dar.

## Lorentz-Kraft

Die Bewegungsgleichung einer Ladung  $q$  im elektrischen Feld  $\mathbf{E}$  und Magnetfeld  $\mathbf{B}$  erhält man in folgender Weise. Das elektrische Feld im momentanen Ruhesystem sei  $\mathbf{E}'$ . Die Kraft auf eine ruhende Ladung wird ausschließlich durch das elektrische Feld bestimmt,

$$\mathbf{K} = q \mathbf{E}'. \quad (6.86)$$

Wie später gezeigt wird (Gl.(6.116)) transformiert sich das elektrische Feld beim Übergang von  $S$  nach  $S'$  gemäß

$$E'_{\parallel} = E_{\parallel}, \quad \mathbf{E}'_{\perp} = \gamma \left( \mathbf{E}_{\perp} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) \quad (6.87)$$

Damit erhält man die Komponenten der 4er-Kraft

$$\mathbf{F} = \gamma \begin{pmatrix} \frac{1}{c} q \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} \\ q \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) \end{pmatrix}. \quad (6.88)$$

Der Energie- und Impulssatz lautet in diesem Fall

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m\gamma c^2) &= q \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}. \\ \frac{d}{dt}(m\gamma \mathbf{v}) &= q \left( \mathbf{E} + \frac{v}{c} \times \mathbf{B} \right). \end{aligned} \quad (6.89)$$

## Energie-Impulsbeziehung

Der relativistische Impuls  $\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v}$  und die relativistische Energie  $E = m\gamma c^2$  sind Komponenten des 4er-Impulses,

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}. \quad (6.90)$$

Die Energie im Ruhesystem,  $E_R = mc^2$ , heißt Ruheenergie,  $E - E_R = m(\gamma - 1)c^2$  heißt kinetische Energie. Zwischen Energie und Impuls besteht die relativistische Energie-Impulsbeziehung:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} &= -\frac{E^2}{c^2} + p^2 = -m^2c^2 \\ E &= \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} \rightarrow \begin{cases} mc^2 + \frac{p^2}{2m} & ; p \ll m \\ pc & ; p \gg m \end{cases} \end{aligned} \quad (6.91)$$

Bei der Bewegung eines einzelnen Teilchens ist die Ruheenergie nur eine additive Konstante. Ihre wichtige Rolle erkennt man jedoch bei Reaktionen die zur Umwandlung von Teilchen führen. Als Beispiel betrachte man ein ruhendes Teilchen mit der Masse  $M$ , das in zwei Teilchen mit den Ruhemassen  $m_1$  und  $m_2$  zerfällt. Beim Zerfall ist die relativistische Energie erhalten,

$$E = Mc^2 = m_1c^2 + m_1c^2 + m_1(\gamma_1 - 1)c^2 + m_2(\gamma_2 - 1)c^2. \quad (6.92)$$

Die Ruhemasse ist dagegen keine Erhaltungsgröße,

$$M = m_1 + m_2 + \Delta m, \quad \Delta m = m_1(\gamma_1 - 1) + m_2(\gamma_2 - 1). \quad (6.93)$$

Der Massendefekt  $\Delta m$  ist auf die unterschiedlich starken Bindungsenergien der einzelnen Teilchen zurückzuführen (Kernspaltung).

## 6.6 Kovariante Form der Elektrodynamik

### 6.6.1 Viererstromdichte

Die Quellen in den Maxwellgleichungen sind die Ladungsdichte  $\varrho$  und die Stromdichte  $\mathbf{j}$ . Diese Größen lassen sich als Komponenten einer 4er-Stromdichte zusammenfassen,

$$\mathbf{j} = (j^\mu) = \begin{pmatrix} \varrho c \\ \mathbf{j} \end{pmatrix}. \quad (6.94)$$

Aufgrund der Ladungserhaltung erfüllen die Ladungs- und Stromdichten die Kontinuitätsgleichung,

$$\partial_t \varrho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 . \quad (6.95)$$

Die linke Seite der Gleichung läßt sich als 4er-Divergenz der 4er-Stromdichte umschreiben

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = j^\mu{}_{,\mu} = 0 . \quad (6.96)$$

Da diese Beziehung in jedem Inertialsystem gültig ist, muß die 4er-Stromdichte ein 4er-Vektor sein,

$$j'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu j^\nu .$$

**Beweis:**

$$\begin{aligned} \partial_{x'_\mu} j'^\mu &= \partial_{x_\nu} j^\nu \\ \partial_{x'_\mu} j'^\mu &= \Lambda_\mu{}^\nu \partial_{x_\nu} j^\mu \\ \Lambda_\mu{}^\nu j'^\mu &= j^\nu \\ j'^\mu &= \Lambda^\sigma{}_\nu \Lambda_\mu{}^\nu j'^\mu = \Lambda^\sigma{}_\nu j^\nu \quad \square \end{aligned}$$

In der ersten Gleichung wird die Invarianz der Ladungserhaltung gegenüber Lorentztransformationen gefordert, in der zweiten Gleichung wird die bekannte Transformationsmatrix (6.68) für die kovarianten Komponenten des 4er-Gradienten verwendet. Daraus ergibt sich durch Koeffizientenvergleich die inverse Lorentztransformation in der dritten Gleichung, und mit (6.69) die Lorentztransformation der Komponenten der 4er-Stromdichte in der letzten Gleichung.

**Beispiel:** Bei einem Lorentz-Boost in  $x$ -Richtung transformieren sich die Ladungs- und Stromdichten in der Form,

$$\begin{aligned} \varrho' &= \gamma(\varrho - v j_x / c^2) \\ j'_x &= \gamma(j_x - v \varrho) . \end{aligned} \quad (6.97)$$

Eine ruhende Ladungsdichte  $\varrho_0$  erzeugt in ihrem Ruhesystem keine Stromdichte, d.h.  $j_0 = 0$ . Eine in der  $x$ -Richtung mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegte Ladungsdichte besitzt im Laborsystem (Geschwindigkeit  $-v$  bezüglich des Ruhesystems) die Ladungs- und Stromdichten,

$$\varrho = \gamma \varrho_0 \quad j_x = \gamma \varrho_0 v = \varrho v . \quad (6.98)$$

Das bewegte Längenelement  $\Delta x$  erscheint lorentzkontrahiert und man erhält daher eine entsprechende Erhöhung der bewegten Ladungsdichte. Die Stromdichte ist die Stromdichte dieser erhöhten Ladungsdichte. Mit der Vierergeschwindigkeit  $u^\mu$  des Ruhesystems gilt für die 4er-Stromdichte von  $\varrho_0$

$$j^\mu = \begin{pmatrix} \varrho c \\ \mathbf{j} \end{pmatrix} = \varrho_0 \gamma \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \varrho_0 u^\mu . \quad (6.99)$$

### 6.6.2 Viererpotential

Mit dem skalaren Potential  $\phi$  und dem Vektorpotential  $\mathbf{A}$  definiert man das 4er-Potential

$$\mathbf{A} = (A^\mu) = \begin{pmatrix} \phi \\ \mathbf{A} \end{pmatrix}. \quad (6.100)$$

Die Potentiale werden durch die Feldgleichungen (5.16) bzw. in Lorentzzeichnung durch die Feldgleichungen (5.17) bestimmt. Letztere können einfach als Bestimmungsgleichung für das 4er-Potential zusammengefasst werden,

$$\square \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (6.101)$$

Da die 4er-Stromdichte ein 4er-Vektor, der d'Alembert-Operator ein 4er-Skalar ist, transformiert sich das 4er-Potential wie ein 4er-Vektor. Die allgemeinen Feldgleichungen (5.16), bei denen keine spezielle Eichung vorausgesetzt wurde, lauten mit (6.72) in kovarianter Form

$$\square \mathbf{A} - \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (6.102)$$

### 6.6.3 Tensor des elektromagnetischen Feldes

Die sechs Komponenten des elektrischen und magnetischen Feldes können durch die sechs unabhängigen Elemente des antisymmetrischen Tensor

$$F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha \quad (6.103)$$

dargestellt werden. Wegen der Antisymmetrie des Tensors verschwinden die Diagonalelemente,  $F_{\alpha\alpha} = 0$ . Die Nichtdiagonalelemente ergeben

$$F_{0i} = -F_{i0} = -E_i, \quad F_{ij} = -F_{ji} = \epsilon_{ijk} B_k \quad (6.104)$$

wobei lateinische Indizes die Werte 1, 2, 3 annehmen. Umgekehrt können die Feldkomponenten aus den Elementen des Feldtensors bestimmt werden,

$$E_i = F_{i0}, \quad B_k = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F_{ij}. \quad (6.105)$$

Die Matrix des Feldtensors lautet damit

$$F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.106)$$

**Beweis:** In (6.103) werden die kovarianten Komponenten des Gradienten und des Potentials verwendet,

$$(\partial_\mu) = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\partial_t \\ \nabla \end{pmatrix}, \quad (A_\mu) = \begin{pmatrix} -\phi \\ \mathbf{A} \end{pmatrix}.$$

Durch Vergleich von (6.103) mit (5.12) erhält man

$$\begin{aligned} F_{i0} &= \partial_i A_0 - \partial_0 A_i = \partial_i(-\phi) - \partial_0 A_i \\ &= -\partial_{x_i}\phi - \frac{1}{c}\partial_t A_i = E_i \\ F_{ik} &= \partial_i A_k - \partial_k A_i \\ &= (\delta_{im}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{km})\partial_m A_n \\ &= \epsilon_{ikj}\epsilon_{jmn}\partial_m A_n \\ &= \epsilon_{ikj}B_j. \quad \square \end{aligned}$$

Die kontravarianten Komponenten des Feldtensors berechnet man durch Heraufziehen der Indizes mit der Metrik,

$$\begin{aligned} F^{\alpha\beta} &= A^{\beta'\alpha} - A^{\alpha'\beta} \\ &= \eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu}F_{\mu\nu} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.107)$$

#### 6.6.4 Kovariante Form der Lorentzkraft

Die Lorentzkraft wurde in (6.88) als 4er-Kraft angegeben. In kovarianter Form lautet sie

$$F_L^\mu = \frac{q}{c}F^{\mu\nu}u_\nu \quad (6.108)$$

wobei  $F^{\mu\nu}$  den Feldtensor und  $u_\nu$  die Vierergeschwindigkeit der Ladung bezeichnet.

**Beweis:** Mit (6.104) erhält man

$$\begin{aligned}
 F_L^0 &= \frac{q}{c} [F^{00}u_0 + F^{0i}u_i] \\
 &= \frac{q}{c} \gamma (E_i v_i) \\
 &= q\gamma \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E} \\
 \\ 
 F_L^i &= \frac{q}{c} [F^{i0}u_0 + F^{ik}u_k] \\
 &= \frac{q}{c} \gamma [(-E_i)(-c) + \epsilon_{ikl} v_k B_l] \\
 &= q\gamma (\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B})_i, \quad \square
 \end{aligned}$$

### 6.6.5 Kovariante Form der Maxwellgleichungen

Mit dem Feldtensor können die Maxwellgleichungen in kovarianter Form geschrieben werden. Damit wird die relativistische Gültigkeit dieser Gleichungen explizit bestätigt.

#### Homogene Maxwellgleichungen

Die kovariante Form der homogenen Maxwellgleichungen (5.10) lautet

$$\boxed{F_{\alpha\beta,\gamma} + F_{\gamma\alpha,\beta} + F_{\beta\gamma,\alpha} = 0} \quad (6.109)$$

**Beweis:** Der Ausdruck der linken Seite ist vollständig antisymmetrisch in den Indizes  $\alpha\beta\gamma$ . Daher verschwindet die linke Seite identisch, wenn jeweils 2 Indizes übereinstimmen. Außerdem erhält man äquivalente Gleichungen, wenn die Indizes zyklisch oder antizyklisch vertauscht werden. Es genügt daher die Fälle zu betrachten, bei denen alle Indizes verschieden und in einer beliebigen Reihenfolge angeordnet sind, z.B.

$$\alpha\beta\gamma \in \{123, 012, 023, 031\} .$$

Der erste Fall ergibt die erste Maxwell-Gleichung aus (5.10)

$$F_{12,3} + F_{31,2} + F_{23,1} = \partial_z B_z + \partial_y B_y + \partial_x B_x = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Die restlichen Fälle entsprechen den drei Komponenten der zweiten Maxwell-Gleichung aus (5.10)

$$\begin{aligned}
 F_{12,0} + F_{01,2} + F_{20,1} &= \frac{1}{c} \partial_t B_z - \partial_y E_x + \partial_x E_y \\
 F_{23,0} + F_{02,3} + F_{30,2} &= \frac{1}{c} \partial_t B_x - \partial_z E_y + \partial_y E_z \\
 F_{31,0} + F_{03,1} + F_{10,3} &= \frac{1}{c} \partial_t B_y - \partial_x E_z + \partial_z E_x \quad \square
 \end{aligned}$$

Eine alternative Form von (6.112) lautet

$$\boxed{\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_\beta F_{\gamma\delta} = 0} \quad (6.110)$$

mit dem vierdimensionalen  $\epsilon$ -Tensor,

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} +1 & \alpha\beta\gamma\delta \text{ ist gerade Permutation von } 0123 \\ -1 & \alpha\beta\gamma\delta \text{ ist ungerade Permutation von } 0123 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} . \quad (6.111)$$

**Beweis:** Man sieht unmittelbar, daß es nur vier Gleichungen für die unterschiedlichen Werte von  $\alpha$  gibt. Hält man  $\alpha$  fest, so gibt es nur Beiträge, wenn  $\beta\gamma\delta$  alle verschieden und ungleich  $\alpha$  sind. Zyklische Vertauschungen von  $\beta\gamma\delta$  entsprechen geraden Permutationen, antizyklische Vertauschungen ungeraden Permutationen. Damit erhält man dieselben Summanden wie in (5.10), z.B. für  $\alpha = 0$ ,

$$\begin{aligned} 0 &= \epsilon^{0\beta\gamma\delta} \partial_\beta F_{\gamma\delta} \\ &= \epsilon^{0123} \partial_1 F_{23} + \epsilon^{0312} \partial_3 F_{12} + \epsilon^{0231} \partial_2 F_{31} + \epsilon^{0213} \partial_2 F_{13} + \epsilon^{0321} \partial_3 F_{21} + \epsilon^{0132} \partial_1 F_{32} \\ &= \partial_1 F_{23} + \partial_3 F_{12} + \partial_2 F_{31} - (\partial_2 F_{13} + \partial_3 F_{21} + \partial_1 F_{32}) \\ &= 2(\partial_1 F_{23} + \partial_3 F_{12} + \partial_2 F_{31}) . \quad \square \end{aligned}$$

### Inhomogene Maxwellgleichungen

Die kovariante Form der inhomogenen Maxwellgleichungen (5.11) lautet

$$\boxed{F^{\alpha\beta}{}_{,\alpha} = -\frac{4\pi}{c} j^\beta} . \quad (6.112)$$

**Beweis:** Der Feldtensor mit kontravarianten Indizes ist definiert durch

$$F^{\alpha\beta} = A^{\beta'\alpha} - A^{\alpha'\beta}$$

Mit Hilfe der Feldgleichung für das 4er-Potential (6.102) erhält man

$$F^{\alpha\beta}{}_{,\alpha} = A^{\beta'\alpha}{}_{,\alpha} - A^{\alpha'\beta}{}_{,\alpha} = \square A^\beta - \partial^\beta (\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{4\pi}{c} j^\beta . \quad \square$$

### 6.6.6 Lorentztransformation der Felder

Bei einer Lorentztransformation transformiert sich der Feldtensor gemäß der Tensorregel (6.70),

$$F'^{\alpha\beta} = \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu F^{\mu\nu} . \quad (6.113)$$

Für den Lorentz-Boost in x-Richtung, (6.50), erhält man in Matrixschreibweise,

$$\begin{aligned} F'^{\alpha\beta} &= \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma\beta E_1 & \gamma E_1 & \gamma(E_2 - \beta B_3) & \gamma(E_3 + \beta B_2) \\ -\gamma E_1 & -\gamma\beta E_1 & \gamma(B_3 - \beta E_2) & -\gamma(B_2 + \beta E_3) \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & E_1 & \gamma(E_2 - \beta B_3) & \gamma(E_3 + \beta B_2) \\ -E_1 & 0 & \gamma(B_3 - \beta E_2) & -\gamma(B_2 + \beta E_3) \\ -\gamma(E_2 - \beta B_3) & -\gamma(B_3 - \beta E_2) & 0 & B_1 \\ -\gamma(E_3 + \beta B_2) & \gamma(B_2 + \beta E_3) & -B_1 & 0 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Die Elemente des Tensors  $F'^{\alpha\beta}$  bestimmen die transformierten Komponenten des elektromagnetischen Feldes,

$$E'_1 = E_1, \quad E'_2 = \gamma(E_2 - \beta B_3), \quad E'_3 = \gamma(E_3 + \beta B_2) \quad (6.114)$$

$$B'_1 = B_1, \quad B'_2 = \gamma(B_2 + \beta E_3), \quad B'_3 = \gamma(B_3 - \beta E_2) . \quad (6.115)$$

Die Feldkomponenten parallel zur Bewegungsrichtung bleiben unverändert. Die Transformationsgleichungen können auch vektoriell zusammenfaßt werden,

$$\mathbf{E}' = \gamma(\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) + (1 - \gamma) \frac{(\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta}}{\beta^2} \quad (6.116)$$

$$\mathbf{B}' = \gamma(\mathbf{B} - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}) + (1 - \gamma) \frac{(\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta}}{\beta^2} \quad (6.117)$$

#### Beispiel

Die Grundgesetze der Magnetostatik sind nicht unabhängig von denen der Elektrostatik, da Strom- und Ladungsdichten bezugssystemabhängig sind.

Wir betrachten hierzu eine Probeladung  $q$  im Feld eines stromdurchflossenen Leiters der entlang der  $z$ -Achse gerichtet ist (Abb.6.7). Im Laborsystem  $S$  sei der Leiter ungeladen ( $\rho = 0$ ) und es fließe der Strom  $I = \int dS j$ . Die Probeladung befinde sich

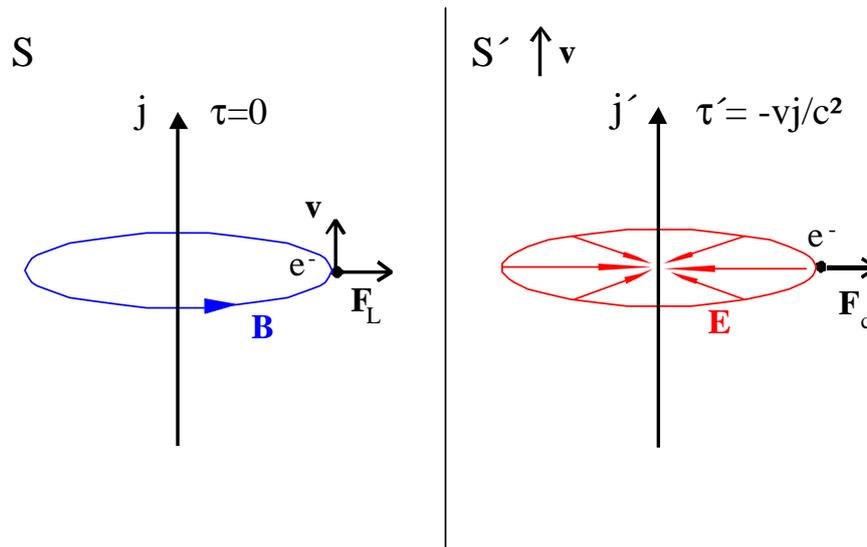


Abbildung 6.7: Transformation vom Laborsystem ins Ruhesystem der Ladung

im Abstand  $r$  vom Leiter und bewege sich mit einer Geschwindigkeit  $v$  in  $z$ -Richtung. Aufgrund des Magnetfeldes (4.21) wirkt auf die bewegte Probeladung eine Kraft

$$F = -\frac{q}{c}vB = -\frac{2qvI}{rc^2} \quad (6.118)$$

in radialer Richtung. Wir betrachten nun denselben Vorgang im Ruhesystem  $S'$  der Probeladung. Da die Geschwindigkeit der Probeladung hier verschwindet, übt das Magnetfeld keine Kraftwirkung aus. Stattdessen wirkt auf die ruhende Ladung das elektrostatische Feld eines geladenen Drahtes. Im Rahmen der nichtrelativistischen Mechanik ist  $\gamma \approx 1$ . Die Ladung des Drahtes pro Längeneinheit ergibt sich aus der Lorentztransformation (6.97) mit  $\varrho = 0$  zu

$$\lambda = \int dS \varrho' = -\frac{vI}{c^2}. \quad (6.119)$$

Das elektrische Feld eines dünnen geladenen Drahtes ist

$$E = \frac{2\lambda}{r}.$$

Die elektrostatische Kraft im Ruhesystem der Ladung ist daher

$$F = qE = \frac{2q\lambda}{r} = -\frac{2qvI}{rc^2}. \quad (6.120)$$

Die Kräfte sind in beiden Bezugssystemen gleich. Das durch das Ampèresche Gesetz bestimmte Magnetfeld eines stromdurchflossenen Drahtes ist somit konsistent mit dem durch die Poisson-Gleichung bestimmten elektrostatischen Feld eines geladenen Drahtes.