

## Vorwort

Die Elektrodynamik befaßt sich mit dem Gesamtgebiet der elektrischen und magnetischen Erscheinungen. Soweit die beschriebenen Phänomene im Rahmen der klassischen Physik (als Gegensatz zur Quantentheorie) liegen, werden sie durch die von Ampère, Faraday und vor allem Maxwell erarbeitete Theorie beschrieben. Diese Theorie genügt den Forderungen der speziellen Relativitätstheorie. Die relativistische Elektrodynamik wurde vor der relativistischen Mechanik entwickelt. Das ist aber ein historischer Zufall und liegt nicht an der logischen Struktur dieser Theorien.

Die Elektrodynamik ist eine **Feldtheorie** (Nahewirkungstheorie): elektromagnetische Phänomene werden durch 6 Funktionen  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$  beschrieben, die nur von einem **Punkt** in Raum und Zeit abhängen (**lokale** Theorie) und die Komponenten zweier Vektoren, der elektrischen Feldstärke  $\mathbf{E}$  und der magnetischen Feldstärke  $\mathbf{B}$  bilden. Diese Felder werden durch ruhende bzw. bewegte Ladungen hervorgerufen. Die elektrische Kraftwirkung einer ruhenden Ladung 1 auf eine andere 2 an einer anderen Stelle beschreibt man z.B. in der Weise, daß man sich vorstellt, die eine Ladung rufe im ganzen Raum ein Feld  $\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{x}, t)$  hervor. Die Kraft auf die zweite Ladung wird dann durch den Wert von  $\mathbf{E}^{(1)}$  an der Stelle  $\mathbf{x}^{(2)}$  bedingt, also nur durch lokale Eigenschaften des Feldes. Da das Feld überall im Raum vorhanden sein soll, ist die Theorie die eines Kontinuums. Die **Feldgleichungen** (Maxwellsche Gleichungen) beschreiben die Änderungen der Feldstärken  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  in Raum und Zeit und ihre Wechselwirkung mit Ladungen und Strömen. Sie sind partielle Differentialgleichungen, d.h. das Verhalten der Feldstärken in einem Punkt wird nur von dessen infinitesimaler Umgebung beeinflußt. Die Ausbreitung von Wirkungen erfolgt von Punkt zu Punkt (Nahewirkung) über das Feld.

Wie bereits erwähnt, ist die klassische Elektrodynamik eine relativistische Theorie. Das bedeutet, daß die Ausbreitung von Wirkungen mit endlicher Geschwindigkeit (höchstens mit Lichtgeschwindigkeit) erfolgt. Außerdem muß es für den physikalischen Inhalt der Theorie gleichgültig sein, in welchem Inertialsystem man sie formuliert. Ihre physikalischen Aussagen dürfen sich also nicht ändern, wenn man von einem Bezugssystem  $\mathbf{x}, t$  zu einem anderen  $\mathbf{x}', t'$  übergeht, das aus dem ersten durch eine Lorentztransformation hervorgeht. Dabei zeigt sich aber, daß die Feldstärken  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  ineinander transformiert

(“vermischt”) werden. Die Aufspaltung in elektrische und magnetische Phänomene ist daher vom Bezugssystem (vom Bewegungszustand des Beobachters, der die Beschreibung vornimmt) abhängig und hat keine tiefere physikalische Bedeutung. Man sollte daher nur von elektromagnetischen Vorgängen sprechen.

Ein weiterer logisch wichtiger Punkt betrifft das Verhältnis der Elektrodynamik im Vakuum zu der in Materie. Wir wissen heute, daß die Materie eine atomare Struktur hat und nur an Stellen von relativ geringer Ausdehnung konzentriert ist. Selbst bei verhältnismäßig dichter Packung der Atome im Gitter eines Festkörpers ist der weitaus größte Teil des Volumens, das der Körper einnimmt, frei von geladenen Teilchen: diese sitzen in den Kernen und Hüllen der Atome, der Raum dazwischen ist leer. Die grundlegende Theorie ist daher die von elektrischen und magnetischen Feldern **im Vakuum**, wobei diese Felder durch mehr oder weniger gut lokalisierte Ladungs- und Stromverteilungen hervorgerufen werden. Elektromagnetische Felder in Materie kommen durch das Zusammenspiel von frei beweglichen und in den Atomen bzw. Molekülen gebundenen Ladungen zustande. Bis zu einem gewissen Grad läßt sich der Beitrag der gebundenen Ladungsträger in einige Materialkonstanten zusammenfassen (Dielektrizitätskonstante, Permeabilität), die man als phänomenologische Größen auffassen kann. Man kommt so zu einer Theorie von Feldern in Medien mit Materialeigenschaften. Das ist aber nur eine mehr oder weniger zweckmäßige Näherung, bei der man die diskrete Struktur durch ein Kontinuum ersetzt, das Mittelwerten entspricht. Eine Begründung für Größe und Verhalten der Materialkonstanten (die in Wirklichkeit nicht konstant sind) erhält man auf diese Weise nicht. Der Standpunkt “Elektrodynamik mit Materialkonstanten ist allgemeiner, die Theorie im Vakuum resultiert als Spezialfall” ist daher physikalisch unhaltbar. Eine konsequente Theorie der Materialkonstanten muß auf die atomistische Struktur der Materie Rücksicht nehmen und ist nur mit Hilfe der Quantentheorie der Festkörper, Flüssigkeiten und Gase zu leisten.

Die hier gewählte Darstellung versucht, dieser Struktur Rechnung zu tragen. Ausgangspunkt ist die Elektrostatik: für ruhende Ladungen ist die mathematische Struktur der Theorie relativ einfach, sie erlaubt trotzdem, alle wesentlichen Züge einer Feldtheorie zu erkennen. Das betreffende Kapitel 1 hat daher Modellcharakter für alle späteren Abschnitte. Mathematische Kenntnisse aus Vektoranalysis in drei Dimensionen und etwas Vertrautheit im Umgang mit der  $\delta$ -Distribution sind

zum Verständnis erforderlich. Dieses Rüstzeug ist in den Anhängen A1 und A2 kurz zusammengestellt. Die Verallgemeinerung zur Elektrodynamik wird mit Hilfe relativistischer Überlegungen in Kap.2 vollzogen. Als Voraussetzung sind Grundkenntnisse aus relativistischer Mechanik und Vertrautheit mit der relativistischen Tensoranalysis im Minkowski-raum (vgl. Anhang A3) erforderlich. Die wichtigsten Anwendungen der Theorie im Vakuum sind in Kap. 3 dargestellt. Die Medienelektrodynamik wird in Kap. 4 als phänomenologische Theorie anhand einzelner Problemkreise entwickelt. Da die Kenntnis der quantenmechanischen Theorie der Materie hier nicht vorausgesetzt werden soll, muß auf eine strenge Begründung auf fundamentalem Niveau verzichtet werden. Es wird aber wenigstens andeutungsweise versucht, auf das Zustandekommen der makroskopischen Phänomene und auf die Grenzen der phänomenologischen Beschreibung hinzuweisen. Aus den zahlreichen Anwendungen der Medienelektrodynamik wurde in Kap. 5 das Gebiet der Wellenausbreitung ausgewählt. Selbst dieser eingeschränkte Problemkreis umfaßt aber noch so viele Phänomene, daß er nur in begrenztem Umfang behandelt werden kann. Kap. 6 enthält einige Problemkreise, die über den Rahmen einer Grundvorlesung hinausreichen und in vielen Lehrbüchern zu kurz kommen. Der Anhang enthält einige mathematische Ergänzungen sowie einen kurzen Abriß der historischen Entwicklung.

Einige Bemerkungen sind noch über das verwendete Maßsystem angebracht. Die Verwendung geeigneter Einheiten ist eine Frage der Zweckmäßigkeit; was als zweckmäßig anzusehen ist, hängt davon ab, welche Zusammenhänge transparent erscheinen sollen. In einer Darstellung, in der besonderer Wert auf die den Phänomenen zugrundeliegende (mikroskopische und relativistische) Struktur gelegt wird, wäre es inkonsequent, die entsprechenden Zusammenhänge durch die gewählten Maßeinheiten zu verschleiern. Deswegen wurde dem Gaußschen Maßsystem der Vorzug gegeben. In diesem sind elektrische und magnetische Feldstärken (die bei Lorentztransformation ineinander transformiert werden) dimensionsgleich und relativistische Korrekturen sind stets als solche zu erkennen. Das Umschreiben der Grundgleichungen in das internationale Maßsystem wird an geeigneter Stelle angeführt. Dem Zwang zum Umschalten zwischen verschiedenen Maßsystemen wird sich niemand entziehen können, der die Fachliteratur lesen will.

Die vorliegende Ausarbeitung bildet den zweiten Teil einer viersemestrigen Kursvorlesung über Theoretische Physik für Hauptfachphy-

siker. Auf Begriffsbildungen und Methoden, die bereits im ersten Band “Mechanik” dieser Vorlesungsreihe besprochen wurden, wird gelegentlich (unter Angabe von Kapitel- und Abschnittsnummer, z.B. M 5.4 = Mechanik Kap. 5, Abschnitt 4) verwiesen. Gegenüber der früheren Auflage der “Elektrodynamik” wurde der enthaltene Lehrstoff gestrafft und auf den Umfang gekürzt, der in einer Kursvorlesung unterzubringen ist. Die Anzahl der Übungsbeispiele (deren selbständiges Durcharbeiten für das Verständnis wesentlich ist) wurde hingegen vergrößert.

Die vorliegende Ausarbeitung wurde mit dem Satzsystem  $\text{\TeX}$  erstellt. Ich danke Frau E. Murtinger für die rasche und gewissenhafte Ausführung der schwierigen Schreibaarbeit, Herrn Dr. F. Widder für Rat und Hilfe bezüglich  $\text{\TeX}$  und allen Assistenten, die in einer Reihe von Jahren an den Übungen zur Vorlesung mitgewirkt haben, für ihre Unterstützung.

Graz, im April 1998

*Heinrich Mitter*

# Inhaltsverzeichnis

## 1. Elektrostatik

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 1.1 | Grundtatsachen                                 | 1  |
| 1.2 | Das elektrische Feld                           | 4  |
| 1.3 | Feldgleichungen der Elektrostatik              | 7  |
| 1.4 | Einfache Methoden zur Feldberechnung           | 11 |
| 1.5 | Leiter in der Elektrostatik                    | 17 |
| 1.6 | Feldlinien, Äquipotentialflächen, Bildladungen | 18 |
| 1.7 | Multipolmomente und Multipolentwicklung        | 22 |
| 1.8 | Die Energie des elektrostatischen Feldes       | 26 |

## 2. Der Formalismus der Elektrodynamik

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 2.1 | Bewegte Ladungen, Ladungsbilanz                       | 33 |
| 2.2 | Transformationsverhalten der Ladungs- und Stromdichte | 34 |
| 2.3 | Transformationseigenschaften des elektrischen Feldes  | 38 |
| 2.4 | Der elektromagnetische Feldtensor                     | 43 |
| 2.5 | Die Maxwell'schen Gleichungen                         | 50 |
| 2.6 | Der Verschiebungsstrom                                | 53 |
| 2.7 | Elektrodynamische Potentiale                          | 56 |
| 2.8 | Lorentzgleichung und Strahlungsgleichung              | 59 |
| 2.9 | Energie- und Impulsbilanz                             | 66 |

## 3. Anwendungen

|     |   |     |
|-----|---|-----|
| 3.1 | Statische und stationäre Situationen                | 79  |
| 3.2 | Berechnung statischer Magnetfelder                  | 81  |
| 3.3 | Zur magnetischen Multipolentwicklung                | 87  |
| 3.4 | Elektromagnetische Wellen                           | 90  |
| 3.5 | Lösung der Maxwellgleichungen bei gegebenen Quellen | 103 |
| 3.6 | Die abgestrahlte Energie                            | 108 |
| 3.7 | Multipolstrahlung                                   | 112 |

|  |     |
|--|-----|
| <b>4. Elektrodynamik in materiellen Medien</b>             |     |
| 4.1 Grundsätzliche Struktur                                | 121 |
| 4.2 Elektromagnetische Felder in Materie                   | 124 |
| 4.3 Phänomenologische Ansätze                              | 128 |
| 4.4 Randbedingungen  | 130 |
| 4.5 Quasistationäre Ströme in Leitern                      | 135 |
| 4.6 Mikroskopische Ursachen der Polarisierung              | 140 |
| 4.7 Mikroskopische Ursachen des Magnetismus                | 147 |
| 4.8 Mikroskopische Ursachen der Leitfähigkeit              | 156 |
| 4.9 Phänomenologische Felder als Mittelwerte               | 163 |
| <b>5. Wellenausbreitung in materiellen Medien</b>          |     |
| 5.1 Zur Stoffauswahl                                       | 169 |
| 5.2 Wellen in homogenen Medien ohne Dispersion             | 170 |
| 5.3 Dielektrische Dispersion                               | 176 |
| 5.4 Kausalität und Dispersionsrelationen                   | 184 |
| 5.5 Reflexion und Brechung                                 | 190 |
| 5.6 Hohlraumresonatoren und Wellenleiter                   | 197 |
| <b>6. Ergänzungen zur Theorie</b>                          |     |
| 6.1 Relativistische Struktur der Elektrodynamik in Materie | 205 |
| 6.2 Invarianztransformationen der Maxwellgleichungen       | 209 |
| 6.3 Elektrodynamik als Lagrangesche Feldtheorie            | 215 |
| 6.4 Magnetische Monopole                                   | 225 |
| <b>Anhang</b>  |     |
| A1 Die $\delta$ -Funktion und verwandte Distributionen     | 231 |
| A2 Vektoranalysis in drei Dimensionen                      | 235 |
| A3 Dualität und Integralsätze in Minkowskiraum             | 239 |
| A4 Momente begrenzter Stromverteilungen                    | 242 |
| A5 Greensche Funktionen der Wellengleichung                | 243 |
| A6 Wellenpakete  | 246 |
| A7 Zur historischen Entwicklung                            | 250 |
| <b>Sachverzeichnis</b>                                     | 253 |

**Übungen**

| Beispiele   | Seite  |
|-------------|--------|
| 1.1 - 1.12  | 15 f.  |
| 1.13 - 1.18 | 21     |
| 1.19 - 1.24 | 25     |
| 1.25 - 1.29 | 30     |
| 2.1 - 2.4   | 42     |
| 2.5 - 2.11  | 49     |
| 2.12 - 2.18 | 64 f.  |
| 2.19 - 2.23 | 73     |
| 3.1 - 3.9   | 85 f.  |
| 3.10 - 3.14 | 89     |
| 3.15 - 3.20 | 101 f. |
| 3.21 - 3.29 | 118 f. |
| 4.1 - 4.5   | 134    |
| 4.6 - 4.11  | 139    |
| 4.12 - 4.13 | 146    |
| 4.14 - 4.17 | 155    |
| 4.18        | 162    |
| 5.1 - 5.3   | 175    |
| 5.4 - 5.7   | 182 f. |
| 5.8 - 5.12  | 189    |

**Zusammenfassungen**

|        |        |
|--------|--------|
| Kap. 1 | 21 f.  |
| Kap. 2 | 74 f.  |
| Kap. 4 | 167 f. |

# 1. Elektrostatik

## 1.1 Grundtatsachen

Als Ausgangspunkt unserer Untersuchungen notieren wir folgende Tatsachen, die aus den Resultaten vieler Experimente folgen:

(I) Ruhende geladene Körper üben aufeinander elektrische Kräfte aus. Die Kräfte hängen vom Betrag der Ladungen und von der Entfernung ab. Ladung ist also eine quantitative Größe, meßbar an der Stärke der Kräfte auf eine feste Probeladung bei festem Abstand. Zwischen zwei Ladungen  $q^{(1)}, q^{(2)}$  an den Punkten  $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}$  gilt das Coulombsche Gesetz

$$\mathbf{F}^{(2)} = \frac{kq^{(1)}q^{(2)}}{r_{12}^2} \mathbf{e}_{12}, \quad r_{12} = |\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)}|, \quad \mathbf{e}_{12}r_{12} = \mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)}.$$

$\mathbf{F}^{(2)}$  ist die Kraft auf die Ladung 2. Die Kraft erfüllt die Newtonsche Forderung  $\mathbf{F}^{(2)} = -\mathbf{F}^{(1)}$ . Der Wert der Dimensionskonstanten  $k$  hängt davon ab, welches Maßsystem man benützt. Wir werden stets das Gaußsche Maßsystem verwenden, in dem  $k = 1$  ist.

Das Coulombsche Gesetz gilt für zwei ruhende Ladungen, die so gut lokalisiert sind, daß ihr Abstand  $r_{12}$  definiert werden kann. Das bedeutet, daß die Ausdehnung der Ladungen klein gegen ihren Abstand sein muß. Daß die Kraft die Richtung der Verbindungslinie zwischen den Ladungen hat, ist logisch einleuchtend. Die Ladung  $q$  ist erfahrungsgemäß ein Skalar, d.h. die betrachteten Ladungen haben keine "eingebaute" Richtung,  $q$  hängt nicht von den Richtungen der Koordinatenachsen des Systems ab, in dem wir unsere Physik beschreiben. Im leeren Raum darf offenbar ebenfalls keine Richtung ausgezeichnet sein. Die einzige in unserem Problem ausgezeichnete Richtung ist daher die Verbindungslinie der Ladungen. Die Abhängigkeit  $\sim r^{-2}$  ist hingegen eine nichttriviale Aussage, die dem Experiment zu entnehmen ist.

Das Coulombsche Gesetz gilt bis zu Abständen der Größenordnung  $r_{min} \simeq 10^{-11}$  cm. Bei kleineren Abständen treten Abweichungen auf, die mit Hilfe der Quantenelektrodynamik verstanden werden können. Abweichungen bei großen Abständen  $r > r_{max}$  würden bedeuten, daß das Lichtquant eine von Null verschiedene Ruhemasse  $m \sim \hbar/cr_{max}$  hat



und das würde dazu führen, daß auch die anderen elektromagnetischen Gesetze bei großen Abständen nicht gelten. Aus der Messung der Abnahme des Magnetfeldes der Erde mit Satelliten weiß man, daß  $r_{max}$  größer als einige Erdradien ist. Aus der Messung der Eigenfrequenz des Kondensators, der aus der Erde und der Ionosphäre gebildet wird, erhält man etwa dieselbe Abschätzung. Die experimentelle Situation ist daher mit  $r_{max} = \infty$  verträglich.

(II) Es gibt anziehende und abstoßende Kräfte, also zwei Ladungsvorzeichen. Warum, ist unbekannt; aus dem Coulombschen Gesetz folgt das nicht: auch Gravitationskräfte genügen dem Coulombschen Gesetz, sie sind aber stets anziehend, es gibt keine “negative Masse”.

(III) Die gesamte Ladung eines abgeschlossenen Systems (die algebraische Summe der in ihm enthaltenen positiven und negativen Ladungen) ist konstant. Das heißt nicht, daß in dem System keine Ladungen entstehen können, sondern nur, daß mit jeder positiven Ladung, die entsteht, eine genau gleich große negative Ladung gebildet wird.

(IV) Ladung tritt in der Natur nicht kontinuierlich, sondern portionsweise (“quantisiert”) auf. Die kleinste bisher beobachtete Ladung ist die des Elektrons, die sog. **Elementarladung**

$$q_e = -e = -4.803242 \cdot 10^{-10} \text{ESE} = -1.6021892 \cdot 10^{-19} \text{Coulomb.}$$

Das Vorzeichen ist dabei eine Konvention. Nach aller bisherigen Erfahrung ist elektrische Ladung stets an geladene Elementarteilchen gebunden. Alle bisher beobachteten stabilen geladenen Elementarteilchen haben die Ladung  $\pm e$ . Gewisse instabile Teilchen sind mehrfach geladen. Zu jedem geladenen Elementarteilchen existiert ein entgegengesetzt geladenes Gegenstück (Antiteilchen) mit sonst gleichen Eigenschaften (z.B. gleiche Masse). Die Gleichheit der Ladung von Teilchen und Antiteilchen (bis auf das Vorzeichen) ist am genauesten für das Elektron und Positron gemessen worden, und zwar an der Struktur des Positroniumatoms (Atom aus  $e^+$  und  $e^-$ ), dessen Lebensdauer für eine Messung seiner Energieniveaus groß genug ist. Solche Messungen sind deshalb besonders wichtig, weil Abweichungen von der Ladungsgleichheit zu einer Verletzung der Ladungserhaltung führen würden. Daß die Ladung von Elektron und Proton bis auf das Vorzeichen gleich groß ist, kann z.B. aus der Beobachtung geschlossen werden, daß Strahlen aus neutralen Atomen in elektrischen Feldern nicht abgelenkt werden.

Durch die Steigerung der Präzision der Verfahren zur Prüfung der Ladungsgleichheit in den letzten Jahrzehnten ist diese für die wichtigsten Teilchen mit einer relativen Genauigkeit von  $10^{-20}$  gesichert.

In der Elementarteilchenphysik faßt man schwere Elementarteilchen als zusammengesetzte Gebilde aus Fundamentalbausteinen (den sog. Quarks) auf. Diese sollten drittelzahlige Ladungen ( $-\frac{1}{3}e, \frac{2}{3}e$ ) haben. Es wird vermutet, daß diese Gebilde in der Natur nicht als freie Teilchen auftreten können. Sie wurden bisher auch nicht beobachtet.

(V) Die Ausdehnung der geladenen Elementarteilchen ist klein. Die Ladung des Protons ist z.B. über ein Gebiet verteilt, dessen Abmessung kleiner als  $10^{-13}$  cm ist. Die anderen stabilen Elementarteilchen sind nicht größer. Für eine makroskopische Beschreibung kann man daher Elementarladungen als Punktladungen auffassen. Jedes geladene makroskopische Objekt besteht aus sehr vielen Elementarladungen, die sich an vielen Stellen des Objektes befinden. Die gesamte Ladung des Objektes

$$q = \sum_n q^{(n)}$$

besteht aus vielen Beiträgen, die nur an diskreten Stellen von Null verschieden und dort klein im Vergleich zu  $q$  sind. Es ist daher sinnvoll, anstelle dieser diskreten Beiträge eine kontinuierliche Verteilung der Ladung zu betrachten, die man durch Mittelung über kleine (aber nicht **zu** kleine) Teilgebiete des Objektes erhalten würde. Eine entsprechende Vorgangsweise wurde in der Mechanik für die Masse makroskopischer Körper benützt (vgl. M 3.1). Die gesamte Ladung eines makroskopischen Objektes ist dann das Integral

$$q = \int dq = \int \rho(\mathbf{x})d^3x,$$

wobei das Integral über das Volumen des Objektes zu erstrecken ist. Die Ladungsdichte  $\rho$  ist als Ladung pro Volumeinheit durch

$$dq = \rho(\mathbf{x})d^3x$$

als stetige Funktion des Ortes definiert. Formal kann man selbst einem punktförmigen Objekt eine solche Ladungsdichte zuordnen. Befindet sich eine solche Punktladung  $q^{(n)}$  an der Stelle  $\mathbf{x}^{(n)}$ , so kann man

$$\rho^{(n)}(\mathbf{x}) = q^{(n)}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(n)})$$

setzen.  $\delta$  bezeichnet dabei die Diracsche  $\delta$ -Funktion (vgl. Anhang A1). Die gesamte Ladungsdichte eines aus Punktladungen bestehenden Objektes ist dann

$$\rho(\mathbf{x}) = \sum_n \rho^{(n)}(\mathbf{x}) .$$

Durch Integration erhält man daraus die oben angegebene Form der Gesamtladung als Summe.

## 1.2 Das elektrische Feld

Ein wichtiges Faktum, das im Coulombschen Gesetz enthalten ist, ist die Additivität der Ladungen bzw. der Kräfte. Sind  $N + 1$  ruhende Ladungen  $q^{(0)}, q^{(1)}, \dots, q^{(N)}$  an den Raumpunkten  $\mathbf{x}^{(0)}, \dots, \mathbf{x}^{(N)}$  vorhanden, so stellt man experimentell fest, daß die Kraft auf eine herausgegriffene ( $q^{(0)}$ ) von ihnen durch die Summe

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{(0)} &= \frac{q^{(0)}q^{(1)}(\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}^{(1)})}{|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}^{(1)}|^3} + \frac{q^{(0)}q^{(2)}(\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}^{(2)})}{|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}^{(2)}|^3} + \dots \\ &= q^{(0)} \sum_{n=1}^N \frac{q^{(n)}(\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}^{(n)})}{|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}^{(n)}|^3} \end{aligned} \quad (1)$$

gegeben ist. Die Kraft zwischen **zwei** Ladungen (z.B.  $q^{(0)}$  und  $q^{(2)}$ ) hängt nicht von der Anwesenheit weiterer Ladungen ab, die Gesamtkraft, die eine Ladung ( $q^{(0)}$ ) spürt, ist die Summe von Paarkräften (vgl. M 1.6).

Das legt die Einführung des **Feldbegriffes** nahe. Dividiert man durch  $q^{(0)}$ , so erhält man einen Vektor, der nur von den Ladungen  $q^{(1)}, \dots, q^{(N)}$  und vom Ort  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(0)}$  abhängt, an dem sich unsere herausgegriffene Ladung  $q^{(0)}$  (wir nennen sie Probeladung) befindet, da die  $\mathbf{x}^{(n)}$  fest sind. Wir nennen diesen Vektor die elektrische Feldstärke

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^N \frac{q^{(n)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(n)})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(n)}|^3}$$

des von den Ladungen  $q^{(1)}, \dots, q^{(n)}$  erzeugten elektrischen Feldes. Kennt man  $\mathbf{E}$  in der unmittelbaren Umgebung von  $\mathbf{x}$ , so kann man die Kraft auf eine beliebige Ladung an der Stelle  $\mathbf{x}$  sofort angeben,

ohne sich darum kümmern zu müssen, wie die Ladungen verteilt sind, die das Feld hervorrufen. Wir haben also durch unsere Definition jedem Punkt  $\mathbf{x}$  des Raumes eine lokale Eigenschaft zugeordnet, die uns “alles” über die Verhältnisse an dieser Stelle aussagt.

Der Additivität der Kräfte entspricht das **Superpositionsprinzip**: die von verschiedenen Ladungen hervorgerufenen Felder überlagern sich nach den Regeln der Vektoraddition. Das Feld, das zwei Ladungen erzeugen, ist also gleich der Summe der Felder, die jede einzelne Ladung erzeugen würde. Dieses Prinzip ist sehr wichtig und alles eher als trivial. Es gibt quantenmechanische Effekte in elektromagnetischen Feldern, die (vom Standpunkt der klassischen Physik betrachtet) zu einer Verletzung des Prinzips bei sehr hohen Feldstärken führen. Wir sehen von diesen Effekten ab.

Ersetzt man die Summe im Coulombschen Gesetz durch ein Integral, so erhält man für das Feld einer Ladungsverteilung

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \int \frac{\rho(\mathbf{x}')(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x'. \quad (2)$$

Das Integral ist über den ganzen Raum zu erstrecken. Man kann damit bei gegebenem  $\rho$  das Feld ausrechnen.

Dieser Zusammenhang zwischen Ladung und Feld kann noch anders ausgedrückt werden (und es wird sich herausstellen, daß das sehr vorteilhaft ist). Wir betrachten den Fluß des Vektorfeldes  $\mathbf{E}$ , d.h. wir stellen uns eine geschlossene Fläche  $F$  im Feld vor, auf der ein Flächenelement  $d\mathbf{f}$  definiert sei, das nach außen gerichtet sein soll und betrachten (vgl. Fig.1.1)

$$\phi = \oint_F \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f}.$$

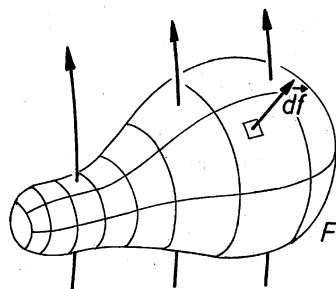


Fig. 1.1

Als einfachstes Beispiel betrachten wir das Feld einer Punktladung  $q$  und nehmen als Fläche eine Kugeloberfläche, in deren Zentrum die Ladung sitzt. Dann zeigt  $\mathbf{E}$  in jedem Punkt auf der Kugel radial nach außen (ist daher parallel zu  $d\mathbf{f}$ ) und hat auf der ganzen Fläche den konstanten Betrag  $q/r^2$ , wobei  $r$  der Kugelradius ist. Daher ist

$$\phi = \frac{q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = 4\pi q.$$

Der Fluß ist daher unabhängig von der Größe der Kugel. Betrachten wir nun eine beliebige Fläche  $F$ , in der die Kugel enthalten ist. Wir denken uns durch einen Kegel auf der Kugel und der Fläche zwei einander entsprechende kleine Flächenstücke ausgeschnitten (vgl Fig.1.2).

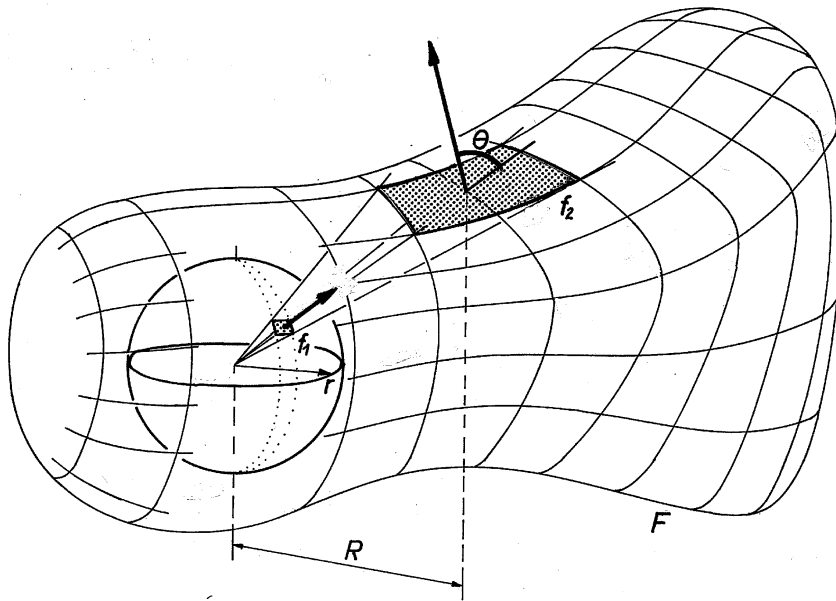


Fig. 1.2

Das Flächenstück  $f_2$  auf  $F$  ist dann wegen der größeren Entfernung vom Zentrum und infolge seiner Neigung um den Faktor  $R^2/r^2 \cos \theta$  größer:

$$f_2 = f_1 \left( \frac{R}{r} \right)^2 \frac{1}{\cos \theta}.$$

Das elektrische Feld ist in  $f_2$  wegen der größeren Entfernung schwächer. Der Fluß durch die beiden Flächen ist

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}_1 = |\mathbf{E}(\mathbf{r})| f_1 \\ \phi_2 &= \mathbf{E}(\mathbf{R}) \cdot \mathbf{f}_2 = |\mathbf{E}(\mathbf{R})| f_2 \cos \theta = \\ &= |\mathbf{E}(\mathbf{r})| \left( \frac{r}{R} \right)^2 \cdot f_1 \left( \frac{R}{r} \right)^2 \frac{1}{\cos \theta} \cdot \cos \theta = |\mathbf{E}(\mathbf{r})| f_1 = \phi_1. \end{aligned}$$

Jedes Flächenstück kann in derselben Weise mit einem entsprechenden Stück der Kugelfläche in Beziehung gesetzt werden. Der Fluß durch die **beliebige** Fläche  $F$  ist daher derselbe wie derjenige durch die Kugel (und dieser ist vom Radius der Kugel unabhängig). Der Satz ist anschaulich, wenn man sich vorstellt, daß wirklich "etwas fließt". Für die Gültigkeit ist aber die  $1/r^2$ -Abhängigkeit **wesentlich**.

Sind mehrere Ladungen vorhanden oder liegt eine kontinuierliche Ladungsverteilung vor, so tragen die einzelnen Ladungen zur rechten Seite additiv bei. Wegen des Superpositionsprinzips ist das auch für die von den Ladungen erzeugten Felder der Fall. Es gilt daher ganz allgemein das Gesetz von Gauß:

**Der Fluß des elektrischen Feldes durch eine beliebige geschlossene Fläche ist der eingeschlossenen Ladung proportional:**

$$\oint_F \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = 4\pi \int_V \rho(\mathbf{x}) d^3x. \quad (3)$$

Mit dieser Form des Coulombschen Gesetzes kann man die umgekehrte Aufgabe zu (2) lösen: ist das Feld auf einer Fläche vorgegeben, so kann man die von ihr umschlossene Ladung berechnen. Wir werden sehen, daß (3) etwas allgemeiner als (2) ist.

### 1.3 Feldgleichungen der Elektrostatik

Aus der Integralbeziehung kann man sofort eine differentielle Beziehung machen. Wenden wir den Gaußschen Satz (vgl. Anhang A2, Satz III) auf die linke Seite von (3) an, so erhalten wir

$$\oint_F \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} d^3x = 4\pi \int_V \rho(\mathbf{x}) d^3x.$$

Das gilt, ebenso wie das Gaußsche Gesetz (3), für ein beliebiges Volumen. Daher ist

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) = 4\pi\rho(\mathbf{x}). \quad (4)$$

Damit haben wir eine **Feldgleichung** für  $\mathbf{E}$  gefunden. Wir werden uns später davon überzeugen, daß diese Gleichung (ebenso wie (3)) im Gegensatz zu (2) oder (1) auch für nichtstatische Verhältnisse ( $\mathbf{E}$  und  $\rho$  zeitabhängig) gilt.

Zunächst wollen wir uns aber auf die Elektrostatik beschränken und die Feldgleichungen für  $\mathbf{E}$  vervollständigen. Die Divergenz  $\nabla \cdot$  ist nicht die einzige kovariante erste Ableitung eines Vektorfeldes, es gibt auch noch die Rotation  $\nabla \times$ . Um über sie etwas zu erfahren, müssen wir die Zirkulation von  $\mathbf{E}$  (d.h. das Linienintegral über eine geschlossene Kurve) untersuchen. Betrachten wir zunächst das Linienintegral entlang eines endlichen Kurvenstückes

$$A(1, 2) := - \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}.$$

Nach unserer Definition ist  $\mathbf{E}$  die Kraft, die auf die (punktförmig gedachte) Ladungseinheit ausgeübt wird.  $A(1, 2)$  ist das Wegintegral dieser Kraft, also die Arbeit, die aufgewendet werden muß, um die Ladungseinheit (gegen die elektrischen Kräfte, daher —) entlang der Kurve von 1 nach 2 zu transportieren.

Zunächst wird man erwarten, daß diese Arbeit bei festgehaltenen Punkten 1 und 2 davon abhängt, auf welchem Weg man die Probeladung transportiert. Wenn das der Fall ist, kann man dem Feld Energie entnehmen, indem man die Ladung erst auf einem bestimmten Weg von 1 nach 2 bringt und sie dann auf einem anderen Weg (der mehr Arbeitsaufwand kosten würde, für den also der Betrag des Integrals einen größeren Wert hat) wieder zurückbringt. Dagegen ist von der Physik her nichts einzuwenden, solche Situationen sind möglich; es könnte sein, daß man bei Bewegungen der Ladung Kräfte auf die Quellen des Feldes ausübt, denen sie folgen, wobei sie Energie verlieren. Die Energie könnte insgesamt erhalten bleiben, sie würde nur von den Quellen auf die Probeladung übertragen. Wir werden zeigen, daß das in der **Elektrostatik** nicht möglich ist (die Quellen sind fest!) und daß das Integral nicht vom Weg abhängt.

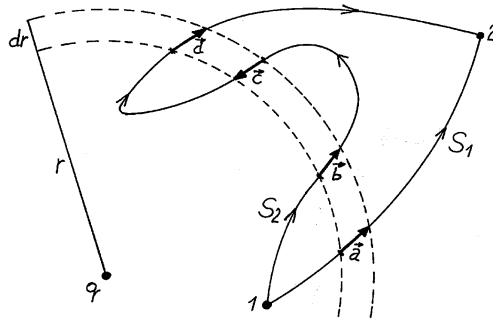


Fig. 1.3

Betrachten wir zunächst das Feld einer einzigen Punktladung  $q$  und vergleichen die Wege  $S_1$  und  $S_2$  (vgl. Fig.1.3).

Jede Kugelschale um  $q$  zwischen 1 und 2 muß von den Wegen  $S_1$  und  $S_2$  mindestens einmal gekreuzt werden. Der Beitrag zu  $A$  von den Kurvenstücken  $a$  und  $b$  ist derselbe: das elektrische Feld ist an beiden Stellen radial nach außen gerichtet und gleich groß (Betrag:  $E(r)$ ). Das Linienelement hat den Betrag  $ds = dr / \cos \theta$ , wenn  $\theta$  der Neigungswinkel der Kurve gegen die Radialrichtung ist (Winkel zwischen  $ds$  und  $E!$ ). Daher ist z.B. für  $a$

$$dA = -|E(r)| \frac{dr}{\cos \theta} \cos \theta = -|E(r)| dr$$

und genauso für  $b$ . Die Beiträge von  $c$  und  $d$  fallen gegeneinander weg, weil die Linienelemente entgegengesetzt gerichtet sind. Da diese Überlegung für jede Kugelschale und damit für jedes Teilstück der beiden Wege gilt, ist  $A$  entlang beider Wege gleich groß und hängt daher nur vom Anfangs- und Endpunkt ab. Für das Feld einer beliebigen Ladungsverteilung erhält man die Aussage wieder mit Hilfe des Superpositionsprinzips. Wir notieren daher: die Arbeit

$$A(1, 2) = - \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (5)$$

**hängt nicht vom Weg ab.** Für eine **beliebige** geschlossene Kurve erhält man daher keinen Beitrag: die Zirkulation von  $\mathbf{E}$  verschwindet

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0.$$



Wenden wir darauf den Stokesschen Satz (Anhang A2, Satz II) an, so erhalten wir

$$\int_F (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{f} = 0.$$

Da die Fläche  $F$  beliebig ist, können wir sie auch infinitesimal annehmen und erhalten als zweite Feldgleichung

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (6)$$

Das statische elektrische Feld ist daher **wirbelfrei**. Es gibt dann nach Anhang A2 ein **skalares** Feld  $\Phi(\mathbf{x})$ , dessen Gradient  $\mathbf{E}$  ist:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla\Phi(\mathbf{x}). \quad (7)$$

$\Phi$  heißt das (skalare) elektrische Potential (das Vorzeichen ist Konvention). Anstelle der drei Komponenten des Vektors  $\mathbf{E}$  kann man daher eine einzige skalare Größe  $\Phi(\mathbf{x})$  zur Beschreibung des Feldes benützen. Das bedeutet eine wesentliche mathematische Vereinfachung. Der Preis, den wir dafür entrichten müssen, besteht darin, daß wir differenzieren müssen, um Größen mit unmittelbarer physikalischer Bedeutung (nämlich Feldstärken, d.h. Kräfte) zu erhalten. Ändern wir  $\Phi$  um eine Konstante, so ändert sich  $\mathbf{E}$  (und damit die Physik) überhaupt nicht. Daher hat nur die Potential**differenz** physikalische Bedeutung. Das sieht man unmittelbar, wenn man (7) in (5) einsetzt: Mit Satz (I) aus Anhang A2 erhalten wir

$$A(1,2) = + \int_1^2 \nabla\Phi \cdot d\mathbf{s} = \Phi(\mathbf{x}_{(2)}) - \Phi(\mathbf{x}_{(1)}). \quad (8)$$

Wir untersuchen nun, welche Gleichungen für  $\Phi$  unseren Feldgleichungen (4) und (6)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho \\ \nabla \times \mathbf{E} &= 0 \end{aligned}$$

entsprechen. Die zweite Gleichung ist durch (7) automatisch erfüllt. Aus der ersten Gleichung erhalten wir durch Einsetzen die folgende Feldgleichung (Poisson-Gleichung) für das Potential

$$\Delta\Phi(\mathbf{x}) = -4\pi\rho(\mathbf{x}). \quad (9)$$

Das ist eine partielle Differentialgleichung 2. Ordnung zur Berechnung von  $\Phi$  bei gegebenem  $\rho$ .

Die Lösung dieser Gleichung können wir aus der Gleichung (2) für  $\mathbf{E}$  erraten: wir müssen einen Ausdruck finden, dessen negativer Gradient durch (2) gegeben ist. Das ist für das **Coulombpotential**

$$\Phi(\mathbf{x}) = \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' + C \quad (10)$$

der Fall, wie man leicht nachrechnet. Dabei ist  $C$  eine beliebige Konstante. Die physikalische Bedeutung des Potentials ist aus (8) bzw. (7) zu ersehen.  $\Phi(\mathbf{x})$  ist die Arbeit, die aufzuwenden ist, um die Ladungseinheit von einem festen Punkt an die Stelle  $\mathbf{x}$  zu transportieren, also die potentielle Energie, die die Ladungseinheit an dieser Stelle (relativ zu einem festen Punkt) hat. Üblicherweise wählt man als Referenzpunkt die Stelle  $|\mathbf{x}| = \infty$  (wobei man sich vorstellt, daß im Unendlichen keine Ladungen sitzen). Dann ist  $C = 0$ . Aus (10) sieht man, daß auch das Potential ein Superpositionsprinzip erfüllt: die von mehreren Ladungsverteilungen erzeugten Potentiale überlagern sich additiv. Das ist kein Wunder, da die Feldgleichungen linear sind.

Nun wollen wir kurz rekapitulieren, was wir erarbeitet haben. Wir haben aus dem empirisch gefundenen Coulombgesetz und dem darin enthaltenen Superpositionsprinzip gesehen, daß man alle elektrischen Phänomene durch ein Vektorfeld  $\mathbf{E}(\mathbf{x})$  beschreiben kann, das von den vorhandenen Ladungen erzeugt wird. Dieses Feld erfüllt die Feldgleichungen (4) und (6) und ist wirbelfrei. Es kann aus einem skalaren Potentialfeld  $\Phi(\mathbf{x})$  abgeleitet werden (vgl.(7)), das als Feldgleichung die Poissongleichung (9) erfüllt. Explizite Lösungen sind (2) für  $\mathbf{E}$  bzw.(10) für  $\Phi$ .

## 1.4 Einfache Methoden zur Feldberechnung

Für viele Anwendungen kommt es darauf an, das elektrische Feld einer vorgegebenen Ladungsverteilung zu berechnen. Dazu kann man z.B. so vorgehen, daß man die Poissongleichung (9) für vorgegebenes  $\rho$  löst und  $\mathbf{E}$  durch Bildung des Gradienten bestimmt. Die entsprechende mathematische Disziplin heißt Potentialtheorie. Die explizite Lösung (10) der Poissongleichung bzw. die entsprechende (2) für  $\mathbf{E}$  bildet dazu eine Alternative. Beide Wege sind nur dann einigermaßen einfach, wenn  $\rho$  Symmetrien aufweist. In solchen Fällen ist es aber meist noch einfacher, mit dem Gaußschen Gesetz (3) zu arbeiten. Da die Integrationsfläche  $F$  dabei beliebig ist (sie muß nur geschlossen sein), kann sie so

gewählt werden, daß die Rechnung einfach wird. Natürlich muß man sicherstellen, daß die zweite Feldgleichung für  $\mathbf{E}$  (d.h. Gleichung (6)) erfüllt ist. Beiden Gesichtspunkten kann man bei Beachtung vorliegender Symmetrien Rechnung tragen. Wir zeigen an einem Beispiel, wie man dabei vorgehen kann. Es soll das Feld einer geraden, langen Linie berechnet werden, die homogen geladen ist. Die Ladungsdichte (Ladung pro Längeneinheit) sei  $\lambda$ . Die Anordnung ist offensichtlich zylindersymmetrisch. Betrachten wir einen Zylinder mit festem Radius  $r$  mit der geladenen Linie als Achse. Die Symmetrie erfordert dann, daß in jedem Punkt des Zylinders die gleiche Feldstärke vorliegen muß. Außerdem muß die Richtung von  $\mathbf{E}$  senkrecht zur Zylinderfläche sein: hätte  $\mathbf{E}$  eine Komponente in Richtung der Zylinderachse, so wäre ein Umlaufsinn ausgezeichnet, was der Symmetrie widerspricht; außerdem würde man in diesem Fall durch Integration von  $\mathbf{E}$  entlang einer geeigneten geschlossenen Kurve in der Zylinderfläche eine Zirkulation  $\neq 0$  erhalten, was  $\nabla \times \mathbf{E} \neq 0$  entspricht. Daher ist  $\mathbf{E}$  auf dem Zylinder radial gerichtet (vgl. Fig. 1.4).

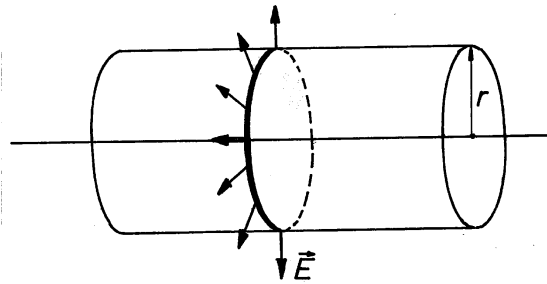


Fig. 1.4

Wählen wir als geschlossene Fläche im Gaußschen Gesetz die Oberfläche eines Zylinders mit der Höhe  $l$ , so tragen die Deckflächen wegen  $\mathbf{E} \perp d\mathbf{f}$  nichts bei. Die Ladung im Zylinder ist  $\lambda l$ . Aus dem Gaußschen Gesetz folgt daher

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = |\mathbf{E}| 2\pi r l = 4\pi \lambda l.$$

Also ist

$$|\mathbf{E}| = \frac{2\lambda}{r}.$$

Die Richtung von  $\mathbf{E}$  ist radial. Wählen wir die geladene Linie als  $z$ -Achse, so lauten die kartesischen Komponenten von  $\mathbf{E}$

$$\mathbf{E} = \frac{2\lambda}{x^2 + y^2} (x, y, 0).$$

In Zylinderkoordinaten ist

$$E_r = \frac{2\lambda}{r}, \quad E_\varphi = E_z = 0.$$

Das Potential ist

$$\Phi = -2\lambda \ln r + C,$$

wie man sich durch Differenzieren überzeugen kann. Als Referenzpunkt sollte man hier nicht die Stelle  $r = \infty$  nehmen: dann wäre  $C = \infty$ .

Einen weiteren wichtigen Gesichtspunkt zur Vereinfachung von Berechnungen bildet das Superpositionsprinzip. Es bedeutet, daß wir das von einer zusammengesetzten Ladungsverteilung hervorgerufene Feld durch Addition der von ihren Bestandteilen erzeugten Felder finden können. Das Feld ist also dann leicht zu berechnen, wenn es gelingt, die Ladungsverteilung in lauter Bestandteile zu zerlegen, deren Felder man leicht finden kann. Besonders einfach ist das natürlich dann, wenn man diese Felder schon berechnet hat. Als Beispiel betrachten wir das Feld von zwei parallelen Linien im Abstand  $2a$ , die mit verschiedenen Ladungsdichten ( $\lambda_1$  bzw.  $\lambda_2$ ) geladen sind. Wir legen den Ursprung unseres Koordinatensystems so, daß die Linie 1 die  $xy$ -Ebene an der Stelle  $(a, 0)$  schneidet. Ihr Feld  $\mathbf{E}^{(1)}$  finden wir aus dem früher gefundenen Resultat durch die Ersetzung  $x \rightarrow x - a$ ,  $\lambda \rightarrow \lambda_1$ . Analog erhalten wir  $\mathbf{E}^{(2)}$  durch  $x \rightarrow x + a$ ,  $\lambda \rightarrow \lambda_2$ . Das Feld beider Linien ist die Summe

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(1)} + \mathbf{E}^{(2)} = \left( \frac{2\lambda_1(x-a)}{(x-a)^2 + y^2} + \frac{2\lambda_2(x+a)}{(x+a)^2 + y^2}, \right. \\ \left. \frac{2\lambda_1 y}{(x-a)^2 + y^2} + \frac{2\lambda_2 y}{(x+a)^2 + y^2}, 0 \right).$$

Das zugehörige Potential ist

$$\Phi = -2(\lambda_1 \ln r_- + \lambda_2 \ln r_+) + C, \quad r_\pm = \sqrt{(x \pm a)^2 + y^2}.$$

Sind zwei geladene Linien vorhanden, so gibt es keine zur  $z$ -Achse parallele Richtung, um die Rotationssymmetrie herrscht. Für die Feldberechnung könnte man daher diese Symmetrie (die für eine Linie zur

einfachen Lösung geführt hat) nicht ausnützen. Mit Hilfe der Superposition ist es möglich, das Problem in zwei Teilprobleme zu zerlegen, von denen jedes symmetrisch ist. Eine Zerlegung in genügend einfache Teilprobleme ist in vielen Fällen vorteilhaft.

Weitere Methoden zur Feldberechnung werden in späteren Abschnitten beschrieben.

## Übungen

- 1) Berechne das Feld und das Potential im Außen- und Innenraum einer homogen geladenen Kugel (Radius  $R$ , Gesamtladung  $q$ ).
- 2) Berechne das Feld und das Potential im Außen- und Innenraum einer Kugel, deren Oberfläche geladen ist (Radius  $R$ , Gesamtladung  $q$ ).
- 3) Berechne die Feldstärke außerhalb und innerhalb von zwei parallelen Ebenen, die entgegengesetzt geladen sind (Flächenladungsdichte  $\pm\sigma$ ).
- 4) Zwei entgegengesetzt gleich geladene Kugeln befinden sich im Abstand  $\pm a/2$  auf der  $z$ -Achse ( $a$  sei größer als die Radien der Kugeln). Berechne das Potential im Außenraum und diskutiere den wichtigsten nichttrivialen Beitrag für große Abstände  $|\mathbf{x}| \gg a$ .
- 5) Berechne das Potential einer homogen geladenen Linie endlicher Länge (Linienladungsdichte  $\lambda$ , Länge  $2a$ ) mit Hilfe von (10). Die Linie soll entlang der  $z$ -Achse verlaufen, der Ursprung soll in der Mitte liegen. Diskutiere die Grenzfälle

$$a \gg z, \quad a \gg r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

bzw.

$$r \gg a, \quad r \gg z.$$

- 6) Das zeitgemittelte Potential eines Wasserstoffatoms ist gegeben durch

$$\Phi(r) = +e \frac{e^{-\beta r}}{r} \left(1 + \frac{\beta r}{2}\right),$$

wobei  $e$  die Elementarladung bedeutet und die Konstante  $\beta = 2/a_0$  durch den Bohrschen Radius  $a_0$  bestimmt ist. Berechne die zugehörige Ladungsverteilung und diskutiere das Ergebnis.

- 7) Die Ladungen einer Verteilung seien symmetrisch um die  $z$ -Achse (und symmetrisch zur  $xy$ -Ebene) so angeordnet, daß die Umgebung der  $z$ -Achse quellenfrei ist. Drücke das Potential in der Nähe der  $z$ -Achse durch das Potential auf der  $z$ -Achse aus.
- 8) Ein geladenes Teilchen befinde sich im leeren Raum in einem elektrostatischen Feld. Zeige mit Hilfe des Gaußschen Gesetzes, daß es keine Feldkonfiguration gibt, für die sich das Teilchen im stabilen Gleichgewicht befindet.
- 9) Betrachte eine geänderte Theorie, in der das Coulombgesetz die Form  $\mathbf{F} = q_1 q_2 \mathbf{e}(1, 2) / [r(1, 2)]^n$  haben möge.

- (a) Kann sich eine Probeladung  $q$  im Zentrum einer homogenen positiv geladenen Kugelschale im stabilen Gleichgewicht befinden? Diskutiere das Vorzeichen der Probeladung für  $n < 2$ ! Inwiefern ist der (realistische) Fall  $n = 2$  ausgezeichnet?
- (b) Gelten die Feldgleichungen

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad \text{bzw.} \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\text{für} \quad n \neq 2?$$

- 10) Eine sphärische Ladungsverteilung sei für  $r > R$  gleich Null und sonst beliebig. Berechne das Potential an der Stelle  $R$ .
- 11) Drücke das Potential einer beliebigen sphärischen Ladungsverteilung  $\rho = \rho(r)$ ,  $r = |\mathbf{x}|$  durch Radialintegrale aus.
- 12) Berechne mit Hilfe der in Beispiel 11 gefundenen Darstellung das Potential der folgenden Verteilungen
- (a) homogen geladene Kugel (Radius  $R$ , Gesamtladung  $q$ )
- (b) geladene Kugelschale (Radius  $R$ , Gesamtladung  $q$ )
- (c)  $\rho(r) = ae^{-\lambda r}$  (Gesamtladung  $q$ )
- und gib für diese Verteilungen den mittleren quadratischen Radius  $\langle r \rangle$  an, der durch

$$\langle r \rangle^2 := \frac{1}{q} \int \mathbf{x}^2 \rho(\mathbf{x}) d^3x$$

definiert ist.

## 1.5 Leiter in der Elektrostatik

Befassen wir uns nun mit dem statischen Feld in und um Leiter. In einem (idealen) Leiter sind Elektronen vorhanden, die leicht beweglich sind, aber den Leiter nicht verlassen können, wenn er von einem Isolator umgeben ist. Herrscht im Innern des Leiters ein elektrisches Feld, so werden die Elektronen in Bewegung gesetzt und diese Bewegung hält so lange an, bis die Quellen, die das Feld hervorgerufen haben, entladen sind, bis also im Leiterinnern kein Feld mehr vorhanden ist. **Erst dann** liegt aber die in der **Elektrostatik** betrachtete Situation vor. Diese ist daher dadurch gekennzeichnet, daß **das Feld im Innern des Leiters verschwindet**. Das bedeutet, daß im Innern eines Leiters der Potentialgradient verschwindet: im Innern eines Leiters ist

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi = 0.$$

Ein Leiter ist daher ein Gebiet konstanten Potentials, seine Oberfläche ist eine sog. **Äquipotentialfläche**. Wegen des Gaußschen Gesetzes können daher im Innern keine Ladungen sitzen: die Ladungsdichte im Innern eines Leiters ist Null. Das heißt, daß die Ladungen eines geladenen Leiters an der **Oberfläche** sitzen müssen, wo sie durch starke Kräfte am Verlassen des Leiters gehindert werden und daher **nicht** frei beweglich sind. Ladet man einen Leiter, so sammelt sich die Ladung an der Oberfläche (und zwar, wie man aus der Festkörperphysik weiß, in einer Schicht, deren Dicke 1-2 Atomradien beträgt).

An der Außenfläche eines Leiters muß die elektrische Feldstärke senkrecht zur Oberfläche sein, da diese eine Äquipotentialfläche ist. Wäre eine Tangentialkomponente vorhanden, so würde sie die Ladungen an der Oberfläche verschieben und es läge keine statische Situation vor. Der Wert der Feldstärke läßt sich wieder mit Hilfe des Gaußschen Gesetzes ermitteln. Ist die Flächenladungsdichte  $\sigma$  (ESE pro  $\text{cm}^2$  bzw. Coulomb pro  $\text{m}^2$ ), so findet man durch Integration über einen kleinen Zylinder, der von der Oberfläche geteilt wird:

$$\text{An der Außenfläche eines Leiters} \quad E_{\perp} = 4\pi\sigma, \quad E_{\text{tang}} = 0.$$

Das ist der doppelte Wert wie für eine geladene Fläche. Der Unterschied ist dadurch bedingt, daß die Feldstärke im Innern eines Leiters verschwindet. Dieses Resultat kommt durch die Wirkung aller Ladungen des ganzen Leiters zustande. An der Oberfläche des Leiters ist die



Normalkomponente der Feldstärke unstetig: ihr Wert ändert sich von  $4\pi\sigma$  (außen) auf Null (innen).

Betrachten wir nun das Feld im Innern eines von einem geladenen Leiter umschlossenen, leeren Hohlraumes. Wendet man das Gaußsche Gesetz auf eine geschlossene Fläche an, die ganz innerhalb des Leiters verläuft, so sieht man, daß die gesamte Ladung innerhalb der Fläche Null ist. Daher müssen über die Innenflächen gleich viele positive wie negative Ladungsträger verteilt sein (vgl. Fig.1.5).

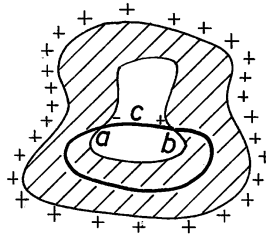


Fig. 1.5

Wären an einer Stelle mehr positive und an einer anderen Stelle mehr negative Ladungsträger konzentriert, so daß es also im Inneren ein elektrisches Feld gäbe, so wäre das Linienintegral entlang einer Feldlinie (d.h. entlang des im Hohlraum verlaufenden Teiles  $ab$  der Kurve  $c$  in Fig.1.5) von Null verschieden. Schließt man die Kurve durch ein im Leiter von  $b$  nach  $a$  verlaufendes Stück, so ist das Linienintegral entlang dieses Teiles Null, weil die Feldstärke im Leiter verschwindet. Insgesamt wäre

$$\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \neq 0 \quad \nabla \times \mathbf{E} \neq 0$$

im Widerspruch zu (6). Daher kann es diese Situation bei statischen Verhältnissen nicht geben: die Feldstärke im Innern eines solchen Hohlraumes muß verschwinden (Faradayscher Käfig!).

## 1.6 Feldlinien, Äquipotentialflächen, Bildladungen

Das elektrische Feld kann graphisch dargestellt werden, wobei man allerdings einige Vorsicht walten lassen muß. Wir zeichnen als **Feldlinien** gerichtete Kurven, die an positiven Ladungen beginnen und an negativen Ladungen enden und für die der  $\mathbf{E}$ -Vektor in jedem Punkt der

Tangentialvektor ist. Damit ist der Richtung von  $\mathbf{E}$  Rechnung getragen, nicht aber dem Betrag von  $\mathbf{E}$ . Diesen kann man darstellen, indem man die Linien bei größerem  $|\mathbf{E}|$  **dichter** zeichnet, d.h. man setzt die Zahl der Linien pro Flächeneinheit (auf einer Fläche senkrecht zu  $\mathbf{E}$ ) proportional  $|\mathbf{E}|$ . Das entspricht dem Gaußschen Gesetz, wenn die Linien außer an Ladungsträgern nirgends unterbrochen werden, sodaß die Zahl der gezeichneten Linien konstant ist.

Zeichnen wir nun Flächen, die überall senkrecht zu den Feldlinien liegen, so ist das Potential in jedem Punkt einer solchen Fläche das gleiche. Diese Äquipotentialflächen geben ein geometrisches Bild für den Verlauf von  $\Phi$ . Für zwei Punktladungen im Vakuum erhält man so z.B. die in Fig.1.6 gezeichnete Darstellung des Feldverlaufs. Die Äquipotentialflächen entsprechen dabei den unterbrochenen Linien.

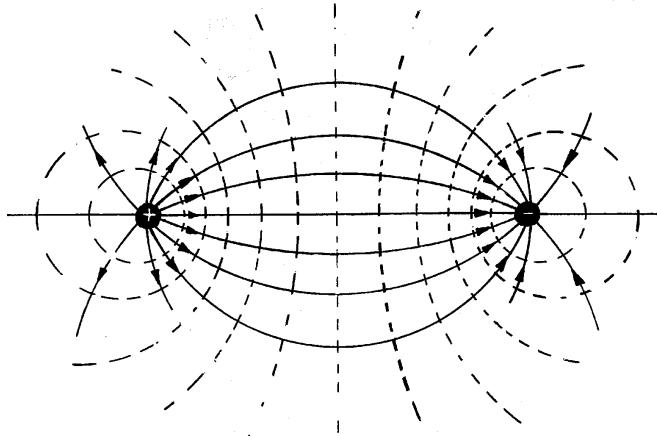


Fig. 1.6

Die gezeichnete Darstellung kann man **nicht** durch Übereinanderlegen der Darstellungen für zwei einzelne Punktladungen erhalten: das ist ein Nachteil der Darstellung! Die Darstellung liefert eine Methode, mit der man die Potentiale verschiedener Konfigurationen aufeinander zurückführen kann. Offenbar erhalten wir dieselbe Darstellung, wenn wir eine der Äquipotentialflächen durch eine Fläche aus leitendem Material ersetzen. So stellt das gezeichnete Bild z.B. auch das Potential einer Punktladung vor einer leitenden Ebene dar: Dazu muß man die senkrechte Äquipotentialebene durch ein leitendes Blatt ersetzen. Man darf dann sogar den ganzen Halbraum durch einen Leiter ersetzen, oh-

ne daß sich etwas ändert. Ebenso kann man eine andere Äquipotentialfläche durch eine entsprechende Leiterfläche ersetzen. Umgekehrt kann man das Potential einer Punktladung vor einer leitenden Ebene finden, indem man die entsprechende “Bildladung” sucht, die denselben Potentialverlauf im leeren Raum erzeugt. Entsprechendes gilt für andere elektrostatische Probleme. Diese “Methode der Bildladung” lernt man am besten anhand von Beispielen.

## Übungen

- 13) Eine homogen geladene Gerade (Linienladungsdichte  $\lambda$ ) bildet die Achse eines leitenden, geerdeten Hohlzylinders. Berechne das Potential und die Feldstärke im Inneren des Zylinders.
- 14) Zwei leitende Hohlzylinder (Radien  $R_1, R_2$ ) seien konzentrisch angeordnet. Der äußere Zylinder sei geerdet, der innere befinde sich auf dem Potential  $V$ . Berechne das Potential und die Feldstärke zwischen den Zylindern.
- 15) Eine Punktladung  $q$  befinde sich im Abstand  $a$  von einer leitenden, geerdeten Ebene. Berechne das Potential der Anordnung und die auf der Ebene induzierte Ladung.
- 16) Eine Punktladung  $q$  befinde sich im Abstand  $a$  vom Mittelpunkt einer geerdeten, leitenden Kugel (Radius  $R < a$ ). Berechne das Potential der Anordnung und die auf der Kugel induzierte Ladung.
- 17) Eine Punktladung  $q$  befinde sich in gleichem Normalabstand  $a$  von zwei zueinander senkrechten, leitenden, geerdeten Ebenen. Berechne das Potential der Anordnung und skizziere den Feldverlauf.
- 18) Auf einer Geraden durch den Mittelpunkt einer geerdeten, leitenden Kugel (Radius  $R$ ) befinden sich in symmetrischer Lage zum Mittelpunkt im Abstand  $a > R$  zwei Punktladungen  $\pm q$ . Berechne das Potential der Anordnung und diskutiere den Grenzfall  $a \gg R$ .

## 1.7 Multipolmomente und Multipolentwicklung

Die Anordnung von Masse in einem makroskopischen Körper konnte durch bestimmte Kombinationen von Momenten der Massendichte charakterisiert werden (vgl. M 3.1 und 3.2). Das von einem massiven Objekt erzeugte Gravitationspotential im Abstand  $r$  vom Schwerpunkt des Objektes konnte als Potenzreihe in  $1/r$  geschrieben werden, deren Koeffizienten im Wesentlichen die Momente der Massenverteilung waren (vgl. M 3.3). Eine analoge Begriffsbildung bzw. Entwicklung ist auch in der Elektrostatik möglich. Entsprechende Verallgemeinerungen sind in der Elektrodynamik von Interesse. Da die Begriffsbildung in der Mechanik ausführlich besprochen wurde, können wir uns hier auf die Diskussion der Unterschiede beschränken. Im Gegensatz zur Massendichte in der Mechanik ist die Ladungsdichte  $\rho(\mathbf{x})$  i.a. nicht positiv. Der mechanische Schwerpunkt als Massenmittelpunkt ist daher i.a. nicht der Ladungsmittelpunkt. Eine geeignete Definition für den Ortsvektor des Ladungsschwerpunktes ist

$$\mathbf{R}_q = \frac{\int |\rho(\mathbf{x})| \mathbf{x} d^3x}{\int |\rho(\mathbf{x})| d^3x}. \quad (11)$$

Die Integrale sind dabei über das Volumen des betrachteten geladenen Objektes zu erstrecken. Die elektrischen Multipolmomente kann man hingegen in gleicher Weise wie die mechanischen definieren. Die Gesamtladung ist das niedrigste Moment ("Monopolmoment")

$$q = \int \rho(\mathbf{x}) d^3x. \quad (12a)$$

Der Vektor

$$\mathbf{d} = \int \rho(\mathbf{x}) \mathbf{x} d^3x \quad (12b)$$

heißt Dipolmoment. Das ist i.a. ein ganz anderer Vektor als  $\mathbf{R}_q$ ! Die beiden Vektoren haben nur dann die gleiche Richtung, wenn die Verteilung nur aus Ladungen mit gleichem Vorzeichen besteht. Der symmetrische Tensor  $\mathbf{Q}$  mit den Komponenten

$$Q_{ik} = \int \rho(\mathbf{x}) (3x_i x_k - \mathbf{x}^2 \delta_{ik}) d^3x \quad (12c)$$

heißt das Quadrupolmoment. Wie in der Mechanik ist  $\mathbf{Q}$  spurfrei

$$Sp\mathbf{Q} = 0.$$

Wie in der Mechanik kann man mit Hilfe des im zweiten Term von  $\mathbf{Q}$  auftretenden skalaren Ausdrucks einen mittleren quadratischen Radius  $\langle r \rangle$  definieren (vgl. Beispiel 12):

$$\langle r \rangle^2 = \frac{1}{q} \int |\rho(\mathbf{x})| \mathbf{x}^2 d^3x. \quad (13)$$

Höhere Momente entsprechen Tensoren höherer Stufe.

Die Multipolentwicklung des Potentials (10) erhält man vollkommen analog wie in der Mechanik (s. M 3.3). Wählen wir den Ladungsschwerpunkt als Ursprung  $\mathbf{R}_q = (0, 0, 0)$ , so ist

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{r} + \frac{\mathbf{e} \cdot \mathbf{d}}{r^2} + \frac{\mathbf{e} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}}{2r^3} + \dots, \quad (14)$$

wobei  $\mathbf{r} = er$ ,  $e^2 = 1$  ist. Der erste Term (das "Monopolpotential") fällt am langsamsten ab und hat daher die größte Reichweite (sofern  $q \neq 0$  ist). Als nächster Term folgt das Dipolpotential  $\sim 1/r^2$ , das der wichtigste Beitrag für als Ganzes neutrale Körper ( $q = 0$ ) ist, sofern das Dipolmoment nicht verschwindet. Als nächster Term folgt das Quadrupolpotential  $\sim 1/r^3$  usw. Die elektrische Feldstärke findet man durch Gradientenbildung. Sie fällt mit einer um 1 höheren Potenz von  $r$  ab:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = q \frac{\mathbf{e}}{r^2} - \frac{1}{r^3} (\mathbf{d} - 3e\mathbf{d} \cdot \mathbf{e}) - \frac{1}{r^4} (2\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e} - 5ee \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}) + \dots \quad (15)$$

Nimmt man nicht den Ladungsschwerpunkt als Ursprung, so erhält man die entsprechenden Formeln durch Translation

$$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} - \mathbf{R}_q, \quad \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{R}_q.$$

Das Dipolmoment verschwindet für eine Verteilung, die nur aus Ladungen eines Vorzeichens besteht: in diesem Fall ist  $\rho = \pm|\rho|$  und  $\mathbf{d}$  wird bis auf einen Faktor mit  $\mathbf{R}_q$  identisch, das voraussetzungsgemäß der Nullvektor ist. Für jede kugelsymmetrische Verteilung (z.B. sphärischer Atomkern: $\alpha$ -Teilchen, Kern von  $O_{16}$  etc.) sind alle Multipolmomente Null, das Potential ist mit dem ersten Term der Entwicklung (14) identisch (vgl. M 3.3). Nichtsphärische Verteilungen aus Ladungen eines Vorzeichens (z.B. zigarren- oder pfannkuchenförmige Kerne) haben ein von Null verschiedenes Quadrupolmoment (und kein Dipolmoment,

s.o.). Natürlich sind auch Verteilungen denkbar, bei denen die Reihe mit dem Quadrupolterm beginnt.

Eine Anordnung, deren Potential bzw. Feld nur aus dem Dipolbeitrag besteht, heißt elektrischer (Punkt-)Dipol. Man kann ihn aus zwei ent-ge-gen-gesetzt gleichen Punktladungen in festem Abstand  $a$  erhalten, indem man bei festgehaltenem  $d = q \cdot a$  den Abstand gegen Null streben läßt. Entsprechend kann man einen elektrischen Quadrupol etc. definieren. Diese Begriffsbildungen sind als Modelle für die entsprechenden Terme in der Entwicklung des Potentials aufzufassen.

## Übungen

- 19) Berechne das Dipol- und das Quadrupolmoment für zwei entgegengesetzt gleiche Punktladungen im Abstand  $a$ .
- 20) Zeige, daß die Ladungsverteilung

$$\rho(\mathbf{x}) = -\mathbf{d} \cdot \nabla \delta(\mathbf{x})$$

das Feld eines Dipols im Koordinatenursprung erzeugt.

- 21) Konstruiere aus vier Punktladungen vom Betrag  $e$  eine Anordnung, die kein Monopol- und Dipolmoment, aber ein Quadrupolmoment besitzt. Berechne seine Komponenten.
- 22) Ein vereinfachtes Modell für ein Wassermolekül besteht aus einer Punktladung  $-2e$  (Sauerstoffion) und aus zwei Punktladungen  $+e$  (Wasserstoffionen), die an den Eckpunkten eines gleichschenkeligen Dreiecks angebracht sind. Der Abstand der H-Ionen vom O-Ion sei  $a$ , der Bindungswinkel (Winkel am Sauerstoffion)  $\varphi$ . Berechne das Dipolmoment der Anordnung. Welchen Wert erhält man für  $|\mathbf{d}|$  mit den realistischen Werten

$$a = 0.958 \cdot 10^{-8} \text{ cm} , \quad \varphi = 105^\circ ?$$

- 23) Betrachte die Anordnung von Beispiel 22 mit  $\varphi = 180^\circ$  und berechne die Komponenten des Quadrupolmoments.
- 24) Welche Komponenten des Quadrupolmomentes eines homogen geladenen Rotationsellipsoids sind von Null verschieden? Wie kann man aus den Komponenten die Form des Körpers erkennen?



### 1.8 Die Energie des elektrostatischen Feldes

Aus der physikalischen Bedeutung des elektrischen Potentials ist ersichtlich, daß man Arbeit leisten muß, um eine statische Ladungsverteilung (und damit ein elektrisches Feld) aufzubauen. In einem vorgegebenen Feld muß daher potentielle Energie enthalten sein, die wir als die gesamte Arbeit interpretieren können, die man aufwenden muß, um die entsprechende Ladungsverteilung zu "montieren". Wir berechnen nun diese Energie. Zunächst "montieren" wir ein System von  $n$  Punktladungen  $q^{(1)} \dots q^{(n)}$  an den Stellen  $\mathbf{x}^{(1)} \dots \mathbf{x}^{(n)}$ , indem wir die Ladungen der Reihe nach aus dem Unendlichen (Potential 0!) an die entsprechenden Stellen bringen. Der Transport der ersten Ladung "kostet nichts" (es ist vorher kein Feld vorhanden). Ist die Ladung nach  $\mathbf{x}^{(1)}$  gebracht, so erzeugt sie ein Feld, dessen Potential an der beliebigen Stelle  $\mathbf{x}$  den Wert

$$\Phi_1(\mathbf{x}) = \frac{q^{(1)}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(1)}|}$$

hat. Bringt man die Ladung  $q^{(2)}$  nach  $\mathbf{x}^{(2)}$ , so muß man (vgl. Def. des Potentials) die Arbeit

$$A_{21} = q^{(2)}\Phi_1(\mathbf{x}^{(2)}) = \frac{q^{(2)}q^{(1)}}{|\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)}|}$$

leisten. Die Anordnung erzeugt dann ein Feld mit dem Potential

$$\Phi_{1,2}(\mathbf{x}) = \frac{q^{(1)}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(1)}|} + \frac{q^{(2)}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(2)}|}.$$

Die Montage von  $q^{(3)}$  in  $\mathbf{x}^{(3)}$  kostet die Arbeit

$$A_{3,12} = \frac{q^{(3)}q^{(1)}}{|\mathbf{x}^{(3)} - \mathbf{x}^{(1)}|} + \frac{q^{(3)}q^{(2)}}{|\mathbf{x}^{(3)} - \mathbf{x}^{(2)}|} = \sum_{j=1}^2 \frac{q^{(3)}q^{(j)}}{|\mathbf{x}^{(3)} - \mathbf{x}^{(j)}|}$$

usw. Sind  $n - 1$  Ladungen montiert, so ist das Potential

$$\Phi_{1,1\dots n-1}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{q^{(j)}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(j)}|}.$$

Das Hinzufügen der  $n$ -ten Ladung kostet

$$A_{n,1\dots n-1} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{q^{(n)}q^{(j)}}{|\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x}^{(j)}|}.$$

Insgesamt mußten wir die Arbeit

$$\begin{aligned} W &= A_{21} + A_{3,12} + \dots + A_{n,12\dots n-1} \\ &= \sum_{i=2}^n \sum_{j<i} \frac{q^{(i)}q^{(j)}}{|\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(j)}|} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{q^{(i)}q^{(j)}}{|\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(j)}|} \quad (i \neq j) \end{aligned}$$

leisten, die als potentielle Energie in dem Feld enthalten ist. Verallgemeinern wir das auf eine kontinuierliche Ladungsverteilung (d.h. denken wir uns diese aus lauter differentiellen Ladungsdichten  $\rho(\mathbf{x})$  zusammengesetzt), so erhalten wir

$$W = \frac{1}{2} \iint \frac{\rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x d^3x'. \quad (16)$$

Eigentlich wäre die Stelle  $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$  auszuschließen, der im diskreten Fall der Term  $i = j$  entspricht. Das läßt sich im Integral nicht formulieren, da diese Stelle das Maß Null hat. Wir nehmen den Term daher mit (die Bedeutung wird unten diskutiert).

Wenn wir unserem feldtheoretischen Programm gerecht werden wollen, müssen wir diese Feldenergie durch **lokale** Größen (Potential bzw. Feldstärke) ausdrücken. Mit (10) und (9) erhalten wir

$$W = \frac{1}{2} \int \Phi(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x})d^3x = -\frac{1}{8\pi} \int \Phi(\mathbf{x})\Delta\Phi(\mathbf{x})d^3x. \quad (17)$$

Das Integral kann ohne Schaden über den ganzen Raum erstreckt werden. Wenn  $\rho$  nicht ganz ins Unendliche reicht (was wir stets annehmen wollen! Das Potential soll im Unendlichen Null sein!), sorgt  $\rho$  bzw.  $\Delta\Phi$  von selbst dafür, daß nicht "zuviel" mitgenommen wird. Wir formen den Integranden so um, daß die Feldstärke auftritt:

$$\begin{aligned} \Phi\Delta\Phi &= \Phi\nabla \cdot \nabla\Phi = \nabla \cdot (\Phi\nabla\Phi) - (\nabla\Phi) \cdot (\nabla\Phi) = \\ &= -\nabla(\Phi\mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}. \end{aligned}$$

Der erste Term trägt zum Integral nichts bei. Um das einzusehen, integrieren wir den Term über eine Kugel mit großem Radius  $R$ . Mit Hilfe des Gaußschen Satzes erhalten wir ein Integral über die Oberfläche der Kugel

$$\int \nabla(\Phi \mathbf{E}) d^3x = \int \Phi \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f}.$$

Für große  $R$  fällt aber  $\Phi \mathbf{E}$  mindestens wie  $1/R^3$  ab (vgl. 1.7), das Flächenelement ist proportional zu  $R^2$ , sodaß der Beitrag für  $R \rightarrow \infty$  verschwindet. Wir erhalten daher als Gesamtenergie des elektrischen Feldes

$$W = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{E}^2(\mathbf{x}) d^3x. \quad (18)$$

Die Formen (17) und (18) zeigen, daß sich  $W$  additiv aus Beiträgen jedes Volumelementes zusammensetzt. Wir können daher jedem Punkt  $\mathbf{x}$  eine **Energiedichte** zuordnen

$$W = \int w(\mathbf{x}) d^3x. \quad (19)$$

Die Energiedichte können wir in den Formen

$$\begin{aligned} w(\mathbf{x}) &= \frac{1}{8\pi} \mathbf{E}^2(\mathbf{x}) = -\frac{1}{8\pi} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \nabla \Phi(\mathbf{x}) \\ &= -\frac{1}{8\pi} \Phi(\mathbf{x}) \Delta \Phi(\mathbf{x}) + O.T. = \frac{1}{2} \Phi(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}) + O.T. \end{aligned} \quad (20)$$

schreiben, wobei die Oberflächenterme  $O.T.$  zum Integral nichts beitragen.

Die eben gefundene Formel besagt, daß sogar einer einzelnen Punktladung eine elektrostatische Energie zukommt. Sitzt die Ladung im Koordinatenursprung, so ist der Betrag der Feldstärke im Punkt  $\mathbf{x}$

$$|\mathbf{E}(\mathbf{x})| = \frac{q}{r^2}, \quad r = |\mathbf{x}|.$$

Daher ist die Energiedichte

$$w(\mathbf{x}) = \frac{q^2}{8\pi r^4}.$$

Berechnen wir (19) in Polarkoordinaten, so erhalten wir

$$W = \frac{q^2}{8\pi} \int \frac{d^3x}{r^4} = \frac{q^2}{2} \int_0^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{2r} (r \rightarrow 0) = \infty.$$

Die Gesamtenergie ist also unendlich, und zwar divergiert sie linear. Dasselbe Ergebnis würde man auch direkt aus (17) mit  $\rho = q\delta(\mathbf{x})$  erhalten. Dieses Resultat hängt mit dem Übergang zum Kontinuum

zusammen, den wir zur Ableitung von (17) vorgenommen haben. Ursprünglich hatten wir nur von Energien zwischen Punktladungen, also nur von Wechselwirkungsenergie gesprochen und die Wechselwirkungsenergie einer Ladung mit sich selbst (d.h. ihre Energie in ihrem eigenen Feld, die sog. Selbstenergie) ausgeschlossen ( $i \neq j!$ ). In (17) haben wir die Wechselwirkung jeder infinitesimalen Ladung mit allen anderen infinitesimalen Ladungen mitgezählt (und das ist daher auch in (19) der Fall). Wenn wir damit die Energie einer (endlichen) Ladungsverteilung berechnen, so impliziert das die Vorstellung, daß wir die Verteilung aus infinitesimalen Elementen zusammensetzen. Aus dem Resultat für die Punktladung müssen wir schließen, daß der **feldtheoretische** Begriff der **Energiedichte** (also das feldtheoretische Konzept, daß infinitesimale Elemente Träger physikalischer Eigenschaften sind: die Lokalitätseigenschaft der Theorie) zu dem Begriff einer punktförmigen Quelle (Punktladung) im Widerspruch steht. Das kann also entweder bedeuten, daß der Begriff "Punktladung" sinnlos ist, d.h. daß alle Ladungen "in Wirklichkeit" ausgedehnt sind, oder daß der Feldbegriff (in diesem Fall: **Energiedichte**, das impliziert lokale Energieerhaltung) bei kleinen Abständen versagt.

Da es bei dieser Problematik um mikroskopische Eigenschaften geht (praktisch sind die kleinsten Ladungen Elementarteilchen von endlichem Radius!), ist die klassische Physik dabei sicher überfordert. Das Problem gehört aber auch im Rahmen der Quantenelektrodynamik noch immer zu den ungelösten Fragen. Die klassische Physik kann immerhin einen Zahlenwert liefern, der auch für die Abschätzung der Größenordnung quantenelektrodynamischer Effekte brauchbar ist. Stellen wir uns ein Elektron als geladene Kugel von endlicher Größe vor, so ist

$$W = \frac{e^2}{r_0},$$

wobei  $r_0$  ein für die Ladungsverteilung charakteristischer Radius ist (vgl. z.B. Aufgabe 12). Identifizieren wir diese Selbstenergie mit der Ruheenergie des Elektrons, d.h. nehmen wir an, daß die ganze Masse des Elektrons elektrostatische Selbstenergie ist, so erhalten wir

$$\frac{e^2}{r_0} = mc^2, \quad r_0 = \frac{e^2}{mc^2} \simeq 2.82 \cdot 10^{-13} \text{ cm.}$$

Dieser Wert heißt **klassischer Elektronenradius**. Natürlich erklärt diese Betrachtung nicht, warum das Elektron zusammenhält.

## Übungen

- 25) Ein Kondensator besteht aus zwei beliebig geformten, voneinander getrennten, geladenen Leitern im Vakuum. Die Ladungen auf den Leitern seien  $+Q$  bzw.  $-Q$ , das Potential auf den Leitern sei  $V_1$  bzw.  $V_2$ . Berechne die im elektrischen Feld enthaltene Energie.
- 26) Berechne die im elektrischen Feld enthaltene Energie für die drei Ladungsverteilungen von Beispiel 12.
- 27) Eine sphärische Ladungsverteilung sei für  $r > R$  gleich Null und sonst beliebig. Welche Energie ist im Feld außerhalb der Verteilung enthalten? Welcher Anteil ist für die ersten beiden Verteilungen von Beispiel 12 im Inneren der Verteilung enthalten?
- 28) Zwei Kugelschalen mit den Radius  $R_1$  bzw.  $R_2$  tragen die Oberflächenladungen  $q_1$  bzw.  $q_2$ . Der Abstand der Kugelmittelpunkte ist  $a > R_1 + R_2$ . Berechne die gesamte elektrostatische Energie der Anordnung.
- 29) Ein elektrischer Dipol befindet sich in einem homogenen elektrischen Feld  $\mathbf{E}$ . Berechne die elektrostatische Wechselwirkungsenergie zwischen Dipol und Feld.

## Zusammenfassung

Die Quellen elektrischer Felder sind **elektrische Ladungen**. Elektrische Ladung tritt in der Natur in Form geladener Elementarteilchen auf. Es gibt positive und negative Ladung. Die Ladung  $q$  eines zusammengesetzten Objektes ist die Summe der Ladungen der geladenen Teilchen, aus denen es besteht. Für makroskopische Objekte kann man die Ladung als Volumintegral einer Ladungsdichte  $\rho(\mathbf{x})$  schreiben, die durch Mittelung über genügend kleine Teilvolumina entsteht

$$q = \int \rho(\mathbf{x}) d^3x.$$

Die **elektrische Feldstärke**  $\mathbf{E}(\mathbf{x})$  wird durch die Kraft auf eine ruhende Probeladung  $q^{(0)}$  an der Stelle  $\mathbf{x}$  definiert

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{q^{(0)}} \mathbf{F}.$$

Das von einer Ladungsverteilung  $\rho(\mathbf{x})$  hervorgerufene elektrische Feld ist durch **Feldgleichungen** bestimmt, die entweder in Integralform oder als partielle Differentialgleichungen angegeben werden können.

Integralform:

- (a) Der Fluß des elektrischen Feldes durch eine geschlossene Fläche ist proportional der eingeschlossenen Ladung

$$\oint_{R(V)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = \kappa \int_V \rho d^3x, \quad \kappa = \text{konst.}$$

- (b) Die Zirkulation des Feldes verschwindet

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

Differentialform:

$$(a) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \kappa \rho \quad (b) \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0.$$

Anstelle von  $\mathbf{E}$  kann das (skalare, elektrische) Potential  $\Phi$  verwendet werden, aus dem  $\mathbf{E}$  durch Gradientenbildung folgt:

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi.$$

Durch diesen Ansatz wird (b) automatisch erfüllt. Die Feldgleichung für  $\Phi$  ist

$$\Delta\Phi = -\kappa\rho.$$

Eine Änderung des Potentials um eine beliebige Konstante  $C$

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \Phi + C$$

ist physikalisch irrelevant.

Die Lösung der Feldgleichung ist das Coulombpotential

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{\kappa}{4\pi} \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'.$$

Die im elektrischen Feld enthaltene gesamte **Energie**  $W$  ist das Volumintegral einer **Energiedichte**  $w(\mathbf{x})$

$$W = \int w(\mathbf{x}) d^3x$$

mit

$$w(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\kappa} \mathbf{E}^2(\mathbf{x}).$$

Der Wert der Konstanten  $\kappa$  hängt vom verwendeten Maßsystem ab. Im **Gaußschen Maßsystem** ist  $\kappa = 4\pi$ . Die Ladung bzw. das Potential haben die Dimensionen

$$[q] = \text{cm}^{3/2} \text{g}^{1/2} \text{s}^{-1}, \quad [\Phi] = \text{cm}^{1/2} \text{g}^{1/2} \text{s}^{-1}.$$

Die Maßeinheit für  $q$  heißt ESE, diejenige für  $\Phi$  heißt Ves. Im internationalen Maßsystem ist  $\kappa = 1/\epsilon_0$  mit

$$\epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \quad c = \text{Lichtgeschwindigkeit.}$$

Die Dimensionen von  $q$  bzw.  $\Phi$  sind

$$[q] = \text{As}, \quad [\Phi] = \frac{\text{m}^2 \text{kg}}{\text{As}^3}$$

Die Maßeinheit für  $q$  heißt Coulomb  $\text{C} = \text{A} \cdot \text{s}$ , die Maßeinheit für  $\Phi$  heißt Volt  $\text{V}$ .

$$\text{Umrechnung: } 1\text{C} = \frac{c}{10} \text{ESE}, \quad 1\text{V} = \frac{10^8}{c} \text{Ves.}$$

## 2. Der Formalismus der Elektrodynamik

### 2.1 Bewegte Ladungen, Ladungsbilanz

Elektrische Ströme werden durch den Transport von Ladungsträgern hervorgerufen. Ein Maß dafür ist die Zahl der pro Sekunde transportierten Ladungseinheiten  $I = nq/t$ , die wir die elektrische Stromstärke nennen. Ihre Einheit ist im Gaußschen Maßsystem 1 ESE/s. Die entsprechende SI-Einheit heißt Ampère:  $1\text{A} = 1\text{C/s}$  und entspricht einem Strom von rund  $6,2 \cdot 10^{18}$  Elektronen/Sekunde.

Die zugehörige lokale Größe ist die Strom**dichte**. Wir betrachten  $\rho$  Ladungsträger pro  $\text{cm}^3$ , die sich alle mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  bewegen sollen und fragen nach der Zahl  $dn$  der Ladungseinheiten, die in der Zeit  $dt$  durch ein Flächenstück von  $df$   $\text{cm}^2$  fließen, dessen Flächennormale  $d\vec{f}$  mit  $\vec{v}$  den Winkel  $\theta$  bilden soll (vgl. Fig. 2.1).

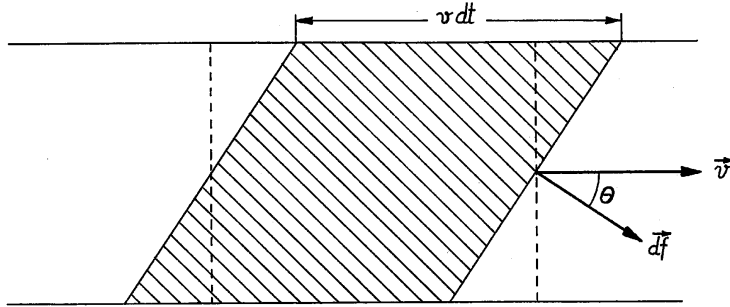


Fig. 2.1

Diese Zahl ist offenbar gleich der Zahl der Ladungsträger in dem zylindrischen Element, dessen Querschnitt schraffiert gezeichnet wurde. Sein Volumen ist  $df \cdot v \cos \theta \cdot dt$  und daher ist

$$dn = \rho df \cdot v \cdot \cos \theta dt = d\vec{f} \cdot \vec{v} \rho dt.$$

Pro Sekunde fließt dann durch  $df$  der Strom

$$dI = \frac{dn}{dt} = \rho \vec{v} \cdot d\vec{f} =: \vec{j} \cdot d\vec{f}.$$



Wir nennen  $\mathbf{j}$  die **Stromdichte** der bewegten Ladungsverteilung  $\rho$ :

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v} .$$

Dabei kann sowohl  $\rho$  als auch  $\mathbf{v}$  von  $t$  abhängen. Da wir elektrische Ströme als systematische Bewegung von Ladungsträgern interpretiert haben, ist diese Begriffsbildung der entsprechenden in der Hydrodynamik völlig analog: die Ladungsdichte entspricht der Massendichte der Hydrodynamik. Die Dimension der elektrischen Stromdichte ist Ladung pro Fläche und Sekunde. Integriert man die Stromdichte über eine Fläche, so erhält man eine Stromstärke.

Fließen aus einem Volumen Ladungsträger aus, ohne daß von einer Quelle im Innern solche nachgeliefert werden, so muß die im Volumen enthaltene Ladung abnehmen, da wegen der Ladungserhaltung keine Ladungsträger verschwinden können. Wir formulieren diese einfache Tatsache quantitativ als Bilanzgleichung für ein beliebiges Volumen  $V$  und dessen geschlossene Randfläche  $F$ . Die **Abnahme** der Ladung in  $V$  muß dem Fluß (=Strom) durch die Oberfläche gleich sein:

$$-\frac{d}{dt} \int_V \rho d^3x = \oint_F \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{j} d^3x .$$

Der letzte Schritt folgt aus dem Gaußschen Satz. Betrachten wir ein infinitesimales Volumen, so erhalten wir die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (1)$$

als lokalen (mikroskopischen) Ausdruck für die Ladungsbilanz.

## 2.2 Transformationsverhalten der Ladungs- und Stromdichte

Nun wollen wir das Verhalten elektrischer Größen bei Lorentztransformationen untersuchen. Als Ausgangspunkt benützen wir dabei die Ladungsbilanz. Damit wir das tun können, müssen wir erst einmal klarstellen, daß die gesamte Ladung  $q$  eines abgeschlossenen Systems unabhängig vom Bewegungszustand ist und sich daher bei Lorentztransformationen nicht ändert (Invarianz der Ladung). Das ist keineswegs trivial, sondern eine Erfahrungstatsache. Ein experimenteller Anhaltspunkt ist die mit hoher Präzision gemessene Ladungsgleichheit von Systemen, die aus gleich vielen Elementarteilchen in verschiedenem Bewegungszustand bestehen. Ein Beispiel dafür ist:

- (a) ein neutrales  $H_2$ -Molekül
- (b) ein neutrales He-Atom.

Beide Systeme bestehen aus den gleichen Ladungsträgern (2 Protonen, 2 Elektronen). Im He-Atom bewegen sich die Protonen mit kinetischen Energien im MeV-Bereich, im  $H_2$ -Molekül sind sie annähernd in Ruhe. Beide Systeme sind aber, wie man mit großer Genauigkeit messen kann, elektrisch neutral ( $q = 0$ ). Ein weiteres Beispiel wäre

- (a) ein einfach ionisiertes Deuteriummolekül
- (b) ein einfach ionisiertes He-Atom.

Hier ist in beiden Fällen  $q = 1$  Protonladung, obwohl auch hier der Bewegungszustand der Bestandteile verschieden ist. Man beachte, daß z.B. die Masse der betrachteten Systeme (a), (b) verschieden ist! Die Masse ist im Gegensatz zu  $q$  nicht invariant! Die Tatsache, daß ein neutraler, metallischer Leiter bei Erwärmung neutral bleibt, gibt einen weiteren Anhaltspunkt. Bei Änderung der Temperatur werden die Ionen des Metallgitters und die dazwischen frei beweglichen Leitungselektronen in verschiedene Bewegungszustände versetzt. Die Geschwindigkeiten infolge der Temperaturbewegung sind zwar klein gegen die Lichtgeschwindigkeit, aber die Anzahl der Ladungsträger ist sehr groß. Wäre die Ladung nicht invariant, so müßte es bei Erwärmung zu einer Aufladung kommen.

Weitere Anhaltspunkte wären Konsistenzbetrachtungen: alle Teilchenbeschleuniger sind z.B. so konstruiert, daß man dabei von der Invarianz der Teilchenladung ausgeht. Schon sehr kleine Abweichungen davon würden dazu führen, daß diese Maschinen nicht funktionieren. Da sie in Wirklichkeit sehr präzise funktionieren, muß die Ladung offenbar invariant sein.

Wir betrachten nun zwei Bezugssysteme  $\mathcal{I}$  und  $\mathcal{I}'$ , die durch eine Lorentztransformation zusammenhängen sollen. Man kann sich z.B. vorstellen, daß  $\mathcal{I}$  das Bezugssystem eines auf der Erde ruhenden Beobachters ist. Das System  $\mathcal{I}'$  ist dann das eines relativ zur Erde mit  $V$  bewegten Beobachters. Zunächst betrachten wir eine in  $\mathcal{I}$  ruhende Ladungsverteilung  $q$ , z.B. einen homogen geladenen kleinen Würfel (Kantenlänge  $a$ , Gesamtladung  $q$ ). Der Beobachter  $\mathcal{I}'$  "sieht" in seinem System dieselbe Gesamtladung, sie verteilt sich aber über ein kleineres Gebiet, denn der (für ihn bewegte) Würfel ist in Bewegungsrichtung um den Faktor  $1/\gamma(V) = \sqrt{1 - V^2/c^2}$  kontrahiert. Von  $\mathcal{I}'$  aus betrachtet ist daher die Ladungsdichte entsprechend höher:

$$\rho' = \gamma(V)\rho.$$

Außerdem sieht der Beobachter  $\mathcal{I}'$  eine bewegte Ladungsverteilung, die er als Strom interpretiert. Die Stromdichte hat für ihn die Komponenten

$$j'_{\parallel} = -\rho'V = -\gamma\rho V = -\gamma\beta c\rho \quad j'_{\perp} = \mathbf{j}_{\perp} = 0.$$

Dabei bedeutet  $\parallel$  die Komponente parallel zu  $V$ ,  $\perp$  bedeutet die dazu senkrechten Komponenten. Vergleichen wir das mit den Transformationsformeln eines Vierervektors  $a^{\mu} = (a^0, \mathbf{a})$

$$a'_0 = \gamma(a_0 - \beta a_{\parallel}) \quad a'_{\parallel} = \gamma(a_{\parallel} - \beta a_0) \quad \mathbf{a}'_{\perp} = \mathbf{a}_{\perp},$$

so sehen wir, daß diese Formeln zueinander passen, wenn wir annehmen, daß

$$j^{\mu} = (c\rho, \mathbf{j}) \quad (2)$$

ein Vierervektor ist, wobei in unserem Fall im System  $\mathcal{I}$   $\mathbf{j} = 0$  ist. Das mag noch nicht überzeugend erscheinen. Betrachten wir daher eine in  $\mathcal{I}$  **bewegte** Ladungsverteilung  $\rho$ ,  $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$ . Im bewegten System  $\mathcal{I}'$  wird man dann (sofern nicht zufällig  $\mathbf{v} = \mathbf{V}$  ist) ebenfalls eine bewegte Verteilung feststellen:  $\rho'$ ,  $\mathbf{j}' = \rho'\mathbf{v}'$ . Man könnte nun  $\mathbf{v}'$  mit Hilfe der relativistischen Geschwindigkeitsaddition aus  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{V}$  zusammensetzen. Damit hat man aber noch nichts über den Zusammenhang zwischen  $\rho'$  und  $\rho$  gelernt, von dem wir nur wissen, daß er sich für  $\mathbf{v} = 0$  auf den früher gefundenen reduzieren muß. Ein besseres Argument liefert uns die Kontinuitätsgleichung. Die im vorigen Abschnitt durchgeführte Bilanzbetrachtung läßt sich in beiden Systemen anstellen, d.h. es muß

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = \frac{\partial\rho'}{\partial t'} + \nabla' \cdot \mathbf{j}' = 0$$

sein, denn es war bei der Herleitung nichts über das Bezugssystem vorausgesetzt worden. Der Ausdruck

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (c\rho) + \nabla \cdot \mathbf{j}$$

ist daher forminvariant. Da  $\partial_{\mu} = (\partial/c\partial t, \nabla)$  ein Vierervektor ist, muß  $j^{\mu} = (c\rho, \mathbf{j})$  auch ein solcher sein. Durch Einsetzen der Formel für die Lorentztransformation sieht man, daß

$$\rho' = \gamma(V) \left( 1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{V}}{c^2} \right) \rho$$

ist.

Die Kontinuitätsgleichung lautet in vierdimensionaler Schreibweise

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \quad (3)$$

Integrieren wir diese Gleichung über ein Raumzeitvolumen, das von den beiden Hyperflächen  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$  begrenzt wird, die zusammen eine geschlossene Hyperfläche bilden, so erhalten wir mit Hilfe des Gaußschen Satzes in vier Dimensionen

$$\int_{\Sigma_1} j_\mu d\sigma^\mu = \int_{\Sigma_2} j_\mu d\sigma^\mu.$$

Das Integral ist daher unabhängig von der Hyperfläche, über die man integriert. Integrieren wir über eine Zeitebene (d.h. den **ganzen** Raum zu fester Zeit  $t$ ), so erhalten wir

$$\int_{t_1} j^0 d^3x = \int_{t_2} j^0 d^3x.$$

Daher ist die gesamte Ladung eines abgeschlossenen Systems

$$Q = \int \rho d^3x \quad (4)$$

zeitunabhängig

$$\frac{dQ}{dt} = 0. \quad (5)$$

Die Invarianz der Ladung, die Kontinuitätsgleichung, die Transformationseigenschaften von  $j^\mu$  und die Erhaltung der Gesamtladung sind daher eng miteinander verknüpft.

### 2.3 Transformationseigenschaften des elektrischen Feldes

Nun betrachten wir die elektrische Feldstärke einer Ladungsverteilung, die in einem Bezugssystem  $\mathcal{I}$  ruht und fragen nach ihrer Form in einem relativ dazu bewegten System  $\mathcal{I}'$ . Die Feldstärke  $\mathbf{E}$  im System  $\mathcal{I}$  kann mit Hilfe der (konstanten) Kraft  $\mathbf{F}^{(0)}$  auf eine in  $\mathcal{I}$  **ruhende** Probeladung  $q^{(0)}$  ausgemessen werden. Befindet sich diese Probeladung an der Stelle  $\mathbf{x}$ , so ist

$$\mathbf{F}^{(0)} = q^{(0)} \mathbf{E}(\mathbf{x}).$$

Betrachten wir nun die Kraft  $\mathbf{F}$  auf eine in  $\mathcal{I}$  mit konstanter Geschwindigkeit  $\mathbf{V}$  bewegte Probeladung  $q$  an der Stelle  $\mathbf{x}(t)$ . Diese Kraft hängt von der Zeit ab. In einem bestimmten Zeitpunkt  $t$  beträgt sie

$$\mathbf{F}(t) = q\mathbf{E}(\mathbf{x}, t).$$

Wir transformieren nun auf jenes System  $\mathcal{I}'$ , in dem die Probeladung  $q$  ruht. Die Kraft transformiert sich (vgl. M 5.5) gemäß

$$F'_{\parallel} = F_{\parallel}, \quad \mathbf{F}'_{\perp} = \gamma(V)\mathbf{F}_{\perp}.$$

Im System  $\mathcal{I}'$  bewegt sich die Ladungsverteilung, die das elektrische Feld hervorruft. Wir messen die Feldstärke in  $\mathcal{I}'$  mit der in diesem System ruhenden Probeladung  $q$  aus:

$$\mathbf{F}' = q\mathbf{E}'$$

und finden durch Vergleich die folgende Transformationseigenschaft:

$$E'_{\parallel} = E_{\parallel}, \quad \mathbf{E}'_{\perp} = \gamma(V)\mathbf{E}_{\perp}. \quad (6)$$

Dieses Resultat gilt **nur** für das Feld einer Ladungsverteilung, die in einem Bezugssystem **ruht**. Außerdem muß beachtet werden, daß sich  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{E}'$  auf **denselben** Raumpunkt beziehen.

Das Resultat kann an Beispielen direkt plausibel gemacht werden. Betrachten wir z.B. ein homogenes elektrisches Feld zwischen zwei parallelen Kondensatorplatten. Die Flächenladungsdichten seien  $\pm\sigma$ . Das elektrische Feld kann mit Hilfe des Gaußschen Gesetzes bestimmt werden, das man auf einen rechteckigen Behälter um eine der Platten anwendet. Wegen der Invarianz der Ladung gilt das Gaußsche Gesetz in jedem Lorentzsystem:

$$4\pi q = \oint_F \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = \oint_{F'} \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{f}'.$$

Ein ruhender Beobachter (System  $\mathcal{I}$ ) findet für die Feldstärke, daß sie senkrecht zu den Platten gerichtet ist und den Betrag

$$|\mathbf{E}| = 4\pi\sigma$$

hat. Ein parallel zu den Platten mit  $V$  bewegter Beobachter stellt in seinem Bezugssystem  $\mathcal{I}'$  eine **erhöhte** Flächenladungsdichte

$$\sigma' = \gamma(V)\sigma$$

fest (vgl. Transformationseigenschaften von  $\rho$ ). Aus Symmetriegründen ist auch für ihn die Feldstärke senkrecht zu den Platten und es ist

$$|\mathbf{E}'| = 4\pi\gamma(V)\sigma.$$

Daraus folgt

$$\mathbf{E}'_{\perp} = \gamma(V)\mathbf{E}_{\perp}.$$

Betrachtet man den Kondensator aus der Sicht eines Beobachters, der sich mit  $V$  senkrecht zu den Platten bewegt, so resultiert

$$E'_{\parallel} = E_{\parallel},$$

da die Flächenladungsdichte in Bewegungsrichtung unendlich “dünn” ist und daher nicht kontrahiert wird. Als Folge des Superpositionsprinzips muß die Überlegung auch für Bewegungen schräg zu den Kondensatorplatten gelten: man kann die Feldstärke stets in Komponenten parallel und senkrecht zur Bewegungsrichtung zerlegen und diese getrennt betrachten. Von der speziellen Feldgeometrie (Plattenkondensator) hängt das Resultat nicht ab, denn es gilt für die Feldstärke an einem (beliebigen) Punkt. Es ist daher nicht wesentlich, ob die Feldstärke an einem anderen Punkt denselben Betrag bzw. dieselbe Richtung hat (wie das zwischen Kondensatorplatten der Fall ist) oder nicht.

Die Formel  $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$  für die Kraft auf eine Probeladung  $q$  gilt also, wenn entweder die Probeladung oder die Quelle (=die das Feld hervorruftende Ladungsverteilung) ruht (oder beide). Wir wollen uns nun davon überzeugen, daß dies nicht mehr der Fall ist, wenn sich **sowohl** die Probeladung **als auch** die Quelle bewegt. Wir betrachten zunächst eine Ladungsverteilung, die in einem Bezugssystem  $\mathcal{I}$  ruht und in diesem System ein statisches Feld  $\mathbf{E}(\mathbf{x})$  hervorruft. Eine Probeladung  $q$  soll sich in  $\mathcal{I}$  mit beliebiger Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  bewegen. In einem bestimmten Zeitpunkt  $t$  befinde sich die Probeladung an der Stelle  $\mathbf{x}(t)$ . Sie erfährt dann in diesem Moment die Kraft

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}(\mathbf{x}).$$

Wir betrachten nun dieselbe Situation aus einem Bezugssystem  $\mathcal{I}'$ , das sich (von  $\mathcal{I}$  aus gesehen) mit der konstanten Geschwindigkeit  $\mathbf{V}$  bewegt. In diesem System hat die Probeladung die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}'$ , die man aus  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{V}$  durch Geschwindigkeitsaddition ausrechnen könnte. Der

Raumzeitpunkt, in dem wir die Kraft auf die Probeladung berechnet haben, ist nun  $\mathbf{x}'(t')$ . Wir berechnen die Kraft  $\mathbf{F}'$  an dieser Stelle in Termen von  $\mathbf{v}'$  und der Feldstärke  $\mathbf{E}'$ , die mit  $\mathbf{E}$  durch (6) zusammenhängt. Dazu gehen wir von den Umkehrformeln für die Einsteinkraft  $\mathbf{F}$  in Termen von  $\mathbf{F}'$  und  $\mathbf{v}'$  aus. Wir schreiben sie in der Form

$$\left(1 + \frac{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{V}}{c^2}\right) \gamma(V) \mathbf{F}_\perp = \mathbf{F}'_\perp$$

$$\left(1 + \frac{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{V}}{c^2}\right) F_\parallel = F'_\parallel + \frac{V}{c^2} (\mathbf{v}' \cdot \mathbf{F}').$$

Zerlegen wir in der zweiten Gleichung mit  $\mathbf{V} = e\mathbf{V}$

$$\mathbf{F}' = e(\mathbf{e} \cdot \mathbf{F}') + \mathbf{F}' - e(\mathbf{e} \cdot \mathbf{F}') = eF'_\parallel + \mathbf{F}'_\perp,$$

so nimmt diese Gleichung folgende Form an

$$\left(1 + \frac{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{V}}{c^2}\right) F_\parallel = \left(1 + \frac{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{V}}{c^2}\right) F'_\parallel + \frac{V}{c^2} (\mathbf{v}' \cdot \mathbf{F}'_\perp).$$

Nun setzen wir für  $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$  ein und beachten (6). Dann erhalten wir

$$\left(1 + \frac{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{V}}{c^2}\right) q\mathbf{E}'_\perp = \mathbf{F}'_\perp$$

$$\left(1 + \frac{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{V}}{c^2}\right) qE'_\parallel = \left(1 + \frac{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{V}}{c^2}\right) F'_\parallel + \frac{V}{c^2} (\mathbf{v}' \cdot \mathbf{F}'_\perp).$$

Wir multiplizieren die erste Gleichung skalar mit  $\mathbf{v}'$  und setzen in die zweite Gleichung ein. Der Faktor  $1 + (\mathbf{v}' \cdot \mathbf{V}/c^2)$  kann gekürzt werden und wir erhalten  $\mathbf{F}'$  in der gesuchten Form

$$\mathbf{F}'_\perp = q \left( \mathbf{E}'_\perp + \frac{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{V}}{c^2} \mathbf{E}'_\perp \right)$$

$$F'_\parallel = q \left( E'_\parallel - \frac{V}{c^2} (\mathbf{v}' \cdot \mathbf{E}'_\perp) \right).$$

Schreiben wir das in der Form

$$\mathbf{F}' = q \left( \mathbf{E}' + \frac{1}{c^2} \mathbf{K} \right),$$

so wird

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\perp} &= \mathbf{K} - e(\mathbf{e} \cdot \mathbf{K}) = (\mathbf{v}' \cdot \mathbf{V}) \mathbf{E}'_{\perp} \\ K_{\parallel} &= (\mathbf{e} \cdot \mathbf{K}) = -V(\mathbf{v}' \cdot \mathbf{E}'_{\perp}). \end{aligned}$$

Daraus finden wir

$$\mathbf{K} = (\mathbf{v}' \cdot \mathbf{V}) \mathbf{E}'_{\perp} - eV(\mathbf{v}' \cdot \mathbf{E}'_{\perp}) = -\mathbf{v}' \times (\mathbf{V} \times \mathbf{E}'_{\perp}) = -\mathbf{v}' \times (\mathbf{V} \times \mathbf{E}')$$

und wir erhalten für  $\mathbf{F}'$  die **Lorentzkraft**

$$\mathbf{F}' = q \left( \mathbf{E}' + \frac{1}{c} (\mathbf{v}' \times \mathbf{B}') \right) \quad (7)$$

mit

$$\mathbf{B}' = -\frac{1}{c} (\mathbf{V} \times \mathbf{E}'). \quad (8)$$

Bewegt sich daher sowohl die Quelle, als auch die Probeladung, so wirkt zusätzlich zur elektrischen Kraft  $q\mathbf{E}'$  noch eine magnetische Kraft  $q(\mathbf{v}' \times \mathbf{B}')/c$ . Das Magnetfeld erscheint von diesem Standpunkt aus betrachtet als "Hilfskonstruktion". Durch Übergang in das Ruhesystem  $\mathcal{I}$  der Quelle kann das Magnetfeld (8) wegtransformiert werden.

Natürlich darf aus dieser Überlegung weder der Schluß gezogen werden, daß **alle** Magnetfelder nur "Hilfskonstruktionen" sind, noch daß **jedes** Magnetfeld in der Form (8) mit (6) dargestellt werden kann. Diese Form resultiert nur dann, wenn die gesamte Ladungsverteilung (alle Elementarladungen, aus denen sie aufgebaut ist) auf Ruhe transformiert werden kann, sodaß in einem Bezugssystem eine statische Situation vorliegt.



## Übungen

- 1) Aus einer kugelförmigen Quelle strömen gleichförmig nach allen Seiten geladene Teilchen aus. Berechne die Änderung der in einer Kugel mit festem Radius  $r$  enthaltenen Ladung in Termen der Stromdichte auf der Kugel.
- 2)  $N$  Punktladungen  $q^{(n)}$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) bewegen sich auf vorgegebenen Bahnen  $\mathbf{x}^{(n)} = \mathbf{x}^{(n)}(t)$ . Finde einen Ausdruck für die Ladungs- und Stromdichte und zeige, daß die Kontinuitätsgleichung erfüllt ist.
- 3) Berechne das elektrische und das magnetische Feld einer Punktladung  $q$ , die sich mit konstanter Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  geradlinig bewegt. Diskutiere das Resultat ausführlich.
- 4) Eine Punktladung  $q$  soll zunächst im Ursprung ruhen. Zur Zeit 0 soll sie in vernachlässigbar kurzer Zeit so beschleunigt werden, daß sie mit konstanter Geschwindigkeit weiterfliegt. Diskutiere das elektrische Feld zu einem späteren Zeitpunkt als Funktion des Ortes (z.B. qualitativ mit Hilfe von Feldlinien). Wo ändert sich das Feld abrupt? Wie ändert sich diese Zone im Lauf der Zeit?

## 2.4 Der elektromagnetische Feldtensor

Die Überlegungen der vorherigen Abschnitte haben das Auftreten von magnetischen Feldern in bestimmten Situationen plausibel gemacht. Dabei sind wir aber stets von elektrostatischen Situationen ausgegangen. Für einen konsequenten Aufbau der Elektrodynamik reicht das natürlich nicht aus. Die erworbene Erfahrung ist aber groß genug, um den engen Zusammenhang zwischen elektrischen und magnetischen Phänomenen zu erkennen. Wir versuchen daher einen Aufbau der Elektrodynamik, der dieser Situation gerecht wird und im übrigen analog zu dem in der Elektrostatik gewählten Zugang ist, d.h. von einigen (letztlich empirisch zu rechtfertigenden) Grundannahmen ausgeht. Wir führen diese Voraussetzung (die z.T. schon in den vorhergehenden Abschnitten grundlegend waren) kurz an:

- (I) Die Gültigkeit des Relativitätsprinzips und der zugehörigen Raumzeitstruktur.
- (II) Die Erhaltung und Invarianz der Ladung (mit allen Konsequenzen für eine lokale Beschreibung durch eine Ladungs- und Stromdichte).
- (III) Die Existenz elektrischer und magnetischer Felder  $\mathbf{E}(t, \mathbf{x})$ ,  $\mathbf{B}(t, \mathbf{x})$  die durch Ladungs- und Stromverteilungen hervorgerufen werden.
- (IV) Die Gültigkeit des Superpositionsprinzips für elektrische und magnetische Felder.

Zu Punkt III ist zu bemerken, daß wir (wie in der Elektrostatik) damit noch nicht angeben müssen, welche Felder eine bestimmte Ladungs- und Stromverteilung hervorrufen: das ist Aufgabe der elektrodynamischen Feldgleichungen, die wir erst finden wollen. Es muß aber gesagt werden, wie man die Felder nachweist. In Analogie zur Elektrostatik verwenden wir dazu den Ausdruck für die Kraft, die eine Probeladung  $q$  in einem elektromagnetischen Feld spürt

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (9)$$

Diese Form (Lorentzkraft) ist für unseren Zugang als Ausgangspunkt anzusehen, der durch das Experiment zu rechtfertigen ist. Mit seiner Hilfe kann man  $\mathbf{E}$  durch die Kraft auf eine ruhende,  $\mathbf{B}$  durch die Kraft auf eine mit  $\mathbf{v}$  bewegte Probeladung ausmessen. Zur Sicherung von (9) muß man experimentell (in genügend vielen Versuchen) zeigen, daß man mit dieser Form auskommt. Als Theoretiker muß man zeigen, daß die aus (9) entwickelte Theorie konsistent ist und mit anderen möglichen Experimenten nicht in Konflikt steht.

Die angeführten Voraussetzungen reichen aus, um das relativistische Transformationsverhalten von  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  in voller Allgemeinheit zu finden. Zusammen mit dem (bereits bekannten) Transformationsverhalten von  $\rho, \mathbf{j}$  kann man dann die Feldgleichungen der Elektrodynamik aus den statischen Gleichungen herleiten (deren Gültigkeit man dazu voraussetzen muß).

Um die Transformationseigenschaften von  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  zu finden, schreiben wir (9) so um, daß anstelle der Einsteinkraft  $\mathbf{F}$  die Minkowskikraft  $f^\mu$  und anstelle der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  die Vierergeschwindigkeit  $u^\mu$  auftritt. Durch Multiplikation von (9) mit  $\gamma(v)$  erhalten wir

$$\mathbf{f} = \gamma \mathbf{F} = q\gamma(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = q(u^0 \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}).$$

Analog wird

$$f^0 = \frac{1}{c}\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \frac{q\gamma}{c}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B})) = q\mathbf{u} \cdot \mathbf{E}.$$

Da  $f^0$  die Zeitkomponente eines Vierervektors ist, muß dies auch für die rechte Seite der letzten Gleichung der Fall sein.  $E^k$  verhält sich bei Lorentztransformationen **nicht** wie der Raumteil eines Vierervektors, wie man aus (6) sehen kann. Wir setzen

$$E^k = : F^{k0}. \quad (10)$$

Dann sieht man aus dem Verhalten von  $f^0$ , daß der **zweite** Index die Zeitkomponente eines kovarianten Objektes anzeigen sollte. Bezüglich des **ersten** Index wissen wir zunächst nur, daß es sich um einen Dreiervektorindex handelt, denn  $E^k$  benimmt sich bei Drehungen wie ein Vektor,  $u^k$  ebenfalls und  $f^0$  ist dreihinvariant, wie das der Fall sein muß. Der Ausdruck

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{u} = \sum_k F^{k0} u^k = - \sum_k F^{k0} u_k$$

sieht zunächst nicht wie eine reine Zeitkomponente bei Lorentztransformationen aus. Das wäre hingegen der Fall für die Kombination

$$-F^{\nu 0} u_\nu = -F^{00} u_0 - \sum_k F^{k0} u_k.$$

Wegen  $u_0 \neq 0$  stimmt dieser Ausdruck mit dem in  $f^0$  auftretenden dann überein, wenn  $F^{00}$  identisch (d.h. in jedem Lorentzsystem) verschwindet. Das ist leicht zu erreichen: wir brauchen nur zu verlangen, daß

$$F^{\nu 0} = -F^{0\nu}$$

sein soll. Dann wird

$$f^0 = qF^{0\nu}u_\nu.$$

Die Raumkomponenten von  $f$  nehmen mit  $u^0 = u_0, u^k = -u_k$  die folgende Form an

$$f^k = q(F^{k0}u_0 - \sum_{lm} \epsilon^{klm} B^m u_l).$$

Die rechte Seite hat das gleiche Transformationsverhalten wie die linke, wenn wir für die noch fehlenden Komponenten

$$F^{kl} = -F^{lk} = -\sum_m \epsilon^{klm} B^m \quad (11)$$

ansetzen. Dann lautet die Lorentzkraft

$$f^\mu = qF^{\mu\nu}u_\nu \quad (12)$$

und man sieht, daß sich die Komponenten von

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} \quad (13)$$

bei Lorentztransformationen wie ein **Tensor** verhalten müssen

$$F^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta F^{\alpha\beta}. \quad (14)$$

Die Feldstärken  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$  sind also die 6 wesentlichen Komponenten eines antisymmetrischen Tensors 2. Stufe (Feldtensor). Explizit lautet er

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

Bei Spiegelungen verhält sich  $\mathbf{E}$  wie ein polarer,  $\mathbf{B}$  wie ein axialer Vektor. Der zu  $F^{\mu\nu}$  duale Tensor hat die Form

$$(\hat{F}^{\mu\nu}) := \left(\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -B^1 & -B^2 & -B^3 \\ B^1 & 0 & E^3 & -E^2 \\ B^2 & -E^3 & 0 & E^1 \\ B^3 & E^2 & -E^1 & 0 \end{pmatrix} \quad (16)$$

In ihm sind daher (bis auf ein Vorzeichen) die Rollen von  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  vertauscht.

Das Lorentztransformationsverhalten von  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  kann man durch Einsetzen der Matrizen  $\Lambda(V)$  ablesen:

$$\begin{aligned} E'_{\parallel} &= E_{\parallel}, & \mathbf{E}'_{\perp} &= \gamma(V)[\mathbf{E}_{\perp} + \frac{1}{c}(\mathbf{V} \times \mathbf{B}_{\perp})] \\ B'_{\parallel} &= B_{\parallel}, & \mathbf{B}'_{\perp} &= \gamma(V)[\mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c}(\mathbf{V} \times \mathbf{E}_{\perp})] \end{aligned} \quad (17)$$

Daraus sieht man, welche Komponenten “wegtransformiert” werden können. Die im vorigen Abschnitt gefundenen Formeln entsprechen dem Spezialfall  $\mathbf{B} = 0$ .

Der komplexe Tensor

$$f^{\mu\nu} := \frac{1}{2}(F^{\mu\nu} + i\hat{F}^{\mu\nu})$$

ist zu sich selbst dual

$$\hat{f}^{\mu\nu} = -if^{\mu\nu}$$

und hat daher nur drei unabhängige (komplexe) Komponenten, z.B.

$$f^{k0} =: \mathcal{F}^k \quad \mathcal{F} = \frac{1}{2}(\mathbf{E} + i\mathbf{B}).$$

Bei Lorentztransformationen ist

$$\mathcal{F}'_{\parallel} = \mathcal{F}_{\parallel}, \quad \mathcal{F}'_{\perp} = \gamma(V)[\mathcal{F}_{\perp} - \frac{i}{c}(\mathbf{V} \times \mathcal{F}_{\perp})].$$

Man kann sich davon überzeugen, daß spezielle Lorentztransformationen Drehungen des Vektors  $\mathcal{F}$  um imaginäre Winkel entsprechen; gewöhnliche Drehungen sind solche um reelle Winkel. Insgesamt entsprechen die allgemeinen Lorentztransformationen der Gesamtheit aller komplexen Rotationen von  $\mathcal{F}$  in einem dreidimensionalen Raum: die einzige Invariante ist dabei

$$\mathcal{F}^2 = \frac{1}{4}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2 + 2i\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}).$$

Ist diese Größe von Null verschieden, so kann man  $\mathcal{F}$  in der Form

$$\mathcal{F} = \mathcal{F} \cdot \mathbf{n}$$

darstellen, wobei  $\mathbf{n}$  ein komplexer Einheitsvektor ist. Durch eine komplexe Drehung kann man  $\mathbf{n}$  in die Richtung einer Koordinatenachse bringen und reell machen. Dann wird

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}(|\mathbf{E}| + i|\mathbf{B}|)$$

d.h.  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  sind parallel zueinander. Für  $\mathcal{F} \neq 0$  kann man daher stets eine Lorentztransformation finden, durch die  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  in einem vorgegebenen Punkt parallel gemacht werden. Aus der Invarianz von  $\mathcal{F}^2$  folgt, daß die einzigen unabhängigen Invarianten, die man aus den Feldstärken bilden kann, durch Real- bzw. Imaginärteil von  $\mathcal{F}^2$  gegeben sind. Durch  $F^{\mu\nu}$  bzw.  $\hat{F}^{\mu\nu}$  ausgedrückt, lauten diese Invarianten

$$S := -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \frac{1}{4}\hat{F}^{\mu\nu}\hat{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) \quad (18)$$

$$P := -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}\hat{F}_{\mu\nu} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}. \quad (19)$$

Mit ihrer Hilfe kann man weitere Aussagen über das Verhalten der Feldstärken bei Lorentztransformationen machen. Ist z.B. in einem Bezugssystem

$$|\mathbf{E}| > |\mathbf{B}|,$$

so ist dies in allen Bezugssystemen der Fall (ebenso für  $<$  oder  $=$ ). Ist der Winkel  $\alpha$  zwischen  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  in einem Bezugssystem

$$\alpha > \pi/2,$$

so ist dies in allen Systemen der Fall (ebenso für  $<$  oder  $=$ ). Verschwindet in einem Bezugssystem  $\mathbf{B}$  (bzw.  $\mathbf{E}$ ), so ist in allen Systemen  $\mathbf{E}$  senkrecht zu  $\mathbf{B}$ . Die Umkehrung dieses Satzes gilt nur für  $S \neq 0$ : Ist  $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$ , so läßt sich für

$$S \begin{cases} < 0 \\ > 0 \end{cases} \text{ ein Bezugssystem finden, in dem } \begin{cases} \mathbf{E} = 0 \\ \mathbf{B} = 0 \end{cases} \text{ ist.}$$

Für  $S = P = 0$  sind  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  in allen Systemen senkrecht zueinander und betragsgleich. Zur Erleichterung der Umrechnung von Formeln für  $F^{\mu\nu}$  in solche für  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$  und umgekehrt ist die folgende Formelsammlung nützlich.

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} = -\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\hat{F}_{\alpha\beta}$$

$$\hat{F}^{\mu\nu} = -\hat{F}^{\nu\mu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$$

$$E^k = F^{k0} = \frac{1}{2}\sum_{lm}\epsilon^{klm}\hat{F}^{lm} \quad \hat{F}^{kl} = \sum_m\epsilon^{klm}E^m$$

$$B^k = \hat{F}^{k0} = -\frac{1}{2}\sum_{lm}\epsilon^{klm}F^{lm} \quad F^{kl} = -\sum_m\epsilon^{klm}B^m$$

$$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = -\hat{F}^{\mu\nu}\hat{F}_{\mu\nu} = -2(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)$$

$$F^{\mu\nu}\hat{F}_{\mu\nu} = -4\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$$

$$\mathbf{E}^2 = F^{0\mu}F_{\mu}{}^0, \quad \mathbf{B}^2 = \hat{F}^{0\mu}\hat{F}_{\mu}{}^0$$

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = F^{0\mu}\hat{F}_{\mu}{}^0 = \hat{F}^{0\mu}F_{\mu}{}^0 = -\frac{1}{3}\sum_k F^{k\mu}\hat{F}_{\mu}{}^k = -\frac{1}{3}\sum_k \hat{F}^{k\mu}F_{\mu}{}^k$$

$$(\mathbf{E} \times \mathbf{B})^k = F^{0\mu}F_{\mu}{}^k = \hat{F}^{0\mu}\hat{F}_{\mu}{}^k = \frac{1}{2}\sum_{lm}\epsilon^{klm}\hat{F}^{lm}F_{\mu}{}^m$$

$$\hat{F}^{0\mu}F_{\mu}{}^k = F^{0\mu}\hat{F}_{\mu}{}^k = 0$$

## Übungen

- 5) In einem Bezugssystem  $\mathcal{I}$  sei  $\mathbf{E} \neq 0, \mathbf{B} \neq 0, \mathbf{E} \perp \mathbf{B}$ . Die Invariante  $S$  sei negativ. Finde das Bezugssystem, in dem  $\mathbf{E}$  verschwindet und berechne die Komponenten von  $\mathbf{B}$  im neuen System aus den ursprünglichen.
- 6) In einem Bezugssystem  $\mathcal{I}$  sei  $\mathbf{E} \neq 0, \mathbf{B} \neq 0, \mathbf{E} \perp \mathbf{B}$ . Die Invariante  $S$  sei positiv. Finde das Bezugssystem, in dem  $\mathbf{B}$  verschwindet und berechne die Komponenten von  $\mathbf{E}$  im neuen System aus den ursprünglichen.
- 7) Betrachte ein konstantes gekreuztes Feld

$$\mathbf{E} = \text{konst.}, \quad \mathbf{B} = \text{konst.}, \quad \mathbf{E} \perp \mathbf{B}, \quad \mathbf{E}^2 = \mathbf{B}^2.$$

Welches Feld stellt ein Beobachter fest, der sich mit konstanter Geschwindigkeit  $\mathbf{V}$  senkrecht zu  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  bewegt?

- 8) Ein Flugzeug fliegt mit 1000 km/h senkrecht zu einem homogenen Magnetfeld von 0.2 Gauß. Welches elektrische Feld (in V/m) stellt der Pilot fest?
- 9) Berechne die Ausdrücke

$$F^{k\mu} F_{\mu}{}^l, \quad \hat{F}^{k\mu} \hat{F}_{\mu}{}^l, \quad F^{k\mu} \hat{F}_{\mu}{}^l, \quad \hat{F}^{k\mu} F_{\mu}{}^l$$

in Termen von  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ . Bestimme damit

$$F^{\mu\alpha} F_{\alpha}{}^{\nu} - \hat{F}^{\mu\alpha} \hat{F}_{\alpha}{}^{\nu} \quad \text{und} \quad F^{\mu\alpha} \hat{F}_{\alpha}{}^{\nu} + \hat{F}^{\mu\alpha} F_{\alpha}{}^{\nu}.$$

- 10) Untersuche Tensoren 2. Stufe aus Produkten von  $n$  Faktoren  $F^{\mu\nu}$

$$C_{(n)}^{\mu\nu} = F^{\mu\alpha} F_{\alpha\beta} F^{\beta\gamma} \dots F_{\lambda}{}^{\nu}.$$

Welche allgemeinen Aussagen lassen sich über Bildungen dieser Art machen? Bestimme die Tensoren mit  $n \leq 5$ .

- 11) Betrachte die Eigenwertgleichung

$$F^{\mu\nu} b_{\nu} = \sigma b^{\mu}$$

für Eigenvektoren  $b^{\mu}$  des Feldtensors. Wieviele Eigenwerte und linear unabhängige Eigenvektoren gibt es bei gegebenen Werten der Invarianten  $S$  und  $P$ ?



## 2.5 Die Maxwell'schen Gleichungen

Mit Hilfe der Transformationseigenschaften von  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\rho$ ,  $\mathbf{j}$  ist es möglich, die Feldgleichungen der Elektrodynamik aus denen für eine statische Situation herzuleiten. Für die Elektrostatik hatten wir aus dem Gaußschen Gesetz

$$4\pi q = \oint_{R(V)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} d^3x$$

die Feldgleichungen

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$$

gefunden. Da das Gaußsche Gesetz wegen der Invarianz der Ladung in jedem Bezugssystem gelten muß

$$4\pi q = \oint_{R(V')} \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{f}' = \int_{V'} \nabla' \cdot \mathbf{E}' d^3x',$$

hat die Feldgleichung in einem lorentztransformierten Bezugssystem die Form

$$\nabla' \cdot \mathbf{E}' = 4\pi\rho'$$

d.h. sie ist **forminvariant**. Es muß sich daher um eine Gleichung zwischen Tensorkomponenten handeln, die einen vom Bezugssystem unabhängigen Sachverhalt ausdrückt. In vierdimensionaler Schreibweise lautet die Gleichung

$$\sum_l \partial'_l F'^{l0} - \frac{4\pi}{c} j'^0 = 0 = \partial'_\nu F'^{\nu 0} - \frac{4\pi}{c} j'^0.$$

Dabei haben wir

$$\partial'_0 F'^{00} \equiv 0$$

addiert. Wir können nun die Komponenten  $j'^0$ ,  $F'^{\nu 0}$ ,  $\partial'_\nu$  als Resultate einer Lorentztransformation aus einem anderen Bezugssystem auffassen:

$$\begin{aligned} x'^\mu &= \Lambda^\mu_\nu x^\nu, & \partial'_\nu &= \Lambda_\nu^\gamma \partial_\gamma \\ F'^{\nu 0} &= \Lambda^\nu_\alpha \Lambda^0_\beta F^{\alpha\beta}, & j'^0 &= \Lambda^0_\beta j^\beta. \end{aligned}$$

Damit wird

$$\begin{aligned} 0 &= \Lambda_\nu^\gamma \Lambda^\nu_\alpha \Lambda^0_\beta \partial_\gamma F^{\alpha\beta} - \frac{4\pi}{c} \Lambda^0_\beta j^\beta \\ &= \Lambda^0_\beta (\partial_\alpha F^{\alpha\beta} - \frac{4\pi}{c} j^\beta). \end{aligned}$$

Die konstanten Koeffizienten  $\Lambda^0_\beta$  sind i.a. von Null verschieden und unabhängig. Daher muß allgemein gelten

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} j^\beta.$$

Das sind bereits vier ( $\beta = 0, 1, 2, 3$ ) der Maxwell'schen Gleichungen.

Um die restlichen Gleichungen zu erhalten, brauchen wir eine Aussage über den Fluß des magnetischen Feldes

$$q_{(m)} = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} = \int \nabla \cdot \mathbf{B} d^3x.$$

Zunächst kann man leicht einsehen, daß ein Magnetfeld, das durch Lorentztransformation einer statischen Ladungsverteilung entsteht, divergenzfrei ist. Ein solches Magnetfeld hat nach (17) die Komponenten

$$B'_\parallel = 0, \quad \mathbf{B}'_\perp = -\frac{1}{c} \gamma(V) (\mathbf{V} \times \mathbf{E}_\perp),$$

wobei  $\mathbf{E}$  das elektrostatische Feld ist. Da sich  $\nabla$  als Raumkomponente eines Vierervektors transformiert, ist

$$\nabla'_\perp = \nabla_\perp$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned} \nabla' \cdot \mathbf{B}' &= \nabla'_\perp \cdot \mathbf{B}'_\perp = -\frac{1}{c} \gamma(V) \nabla_\perp \cdot (\mathbf{V} \times \mathbf{E}_\perp) \\ &= \frac{1}{c} \gamma(V) \mathbf{V} \cdot (\nabla_\perp \times \mathbf{E}_\perp) = 0. \end{aligned}$$

Das betrachtete Magnetfeld ist daher ein reines Wirbelfeld. Daß dieser Sachverhalt für **alle** Magnetfelder zutrifft, d.h. daß ganz allgemein

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{20}$$

gilt, ist keineswegs trivial, sondern eine Erfahrungstatsache: magnetische Felder werden nach allem bisherigen Wissen **nur** durch bewegte Ladungsträger hervorgerufen. Die Feldlinien jedes magnetischen Feldes sind als Folge von (20) geschlossene Kurven ohne Anfangs- oder Endpunkt, ganz im Gegensatz zu elektrischen Feldlinien, die an Ladungsträgern als Quellen des Feldes beginnen oder enden können. Die

Gleichung (20) drückt die **empirische** Tatsache aus, daß man magnetische Gegenstücke zu den elektrischen Ladungen (sog. magnetische Monopole,  $q_{(m)} \neq 0$ ) bisher nicht gefunden hat. Würden solche Monopole nachgewiesen, so müßte die Maxwell'sche Theorie abgeändert werden. Die entsprechend modifizierte Theorie wird später diskutiert. Hier wollen wir im Rahmen der Maxwell'schen Theorie bleiben, die sich bisher vielfach bewährt hat und gehen daher von (20) bzw.  $q_{(m)} = 0$  aus. Dieselbe Argumentation wie im elektrischen Fall (Invarianz von  $q_{(m)} = 0$ ) zeigt dann, daß auch (20) forminvariant ist, d.h. in einem anderen Lorentzsystem ist

$$\nabla' \cdot \mathbf{B}' = 0.$$

Daher ist auch diese Gleichung eine solche zwischen Tensorkomponenten. In vierdimensionaler Schreibweise lautet sie mit dem dualen Feldtensor (16)

$$\sum_l \partial'_l \hat{F}'^{l0} = \partial'_\nu \hat{F}'^{\nu 0} = 0.$$

Mit der früher verwendeten Argumentation erhält man durch Lorentztransformation

$$\partial_\alpha \hat{F}^{\alpha\beta} = 0.$$

Eine dazu äquivalente Form erhält man durch Einsetzen von (16) mit Hilfe der Symmetrieeigenschaften des  $\epsilon$ -Tensors. Sie lautet

$$\partial^\alpha F^{\beta\gamma} + \partial^\beta F^{\gamma\alpha} + \partial^\gamma F^{\alpha\beta} = 0.$$

Insgesamt lauten die Maxwell'schen Gleichungen also

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} j^\beta \quad (21)$$

$$\partial_\alpha \hat{F}^{\alpha\beta} = 0 \quad \text{oder} \quad \partial^\alpha F^{\beta\gamma} + \partial^\beta F^{\gamma\alpha} + \partial^\gamma F^{\alpha\beta} = 0. \quad (22)$$

Da  $F^{\alpha\beta}$  antisymmetrisch ist, folgt durch Differenzieren von (21) die Kontinuitätsgleichung für  $j^\beta$  als Identität

$$\partial_\alpha \partial_\beta F^{\alpha\beta} \equiv 0 = \frac{4\pi}{c} \partial_\beta j^\beta, \quad \partial_\alpha \partial_\beta \hat{F}^{\alpha\beta} \equiv 0,$$

sodaß die Maxwell'schen Gleichungen insgesamt ein System von 6 partiellen Differentialgleichungen bilden. Bei gegebenen Quellen  $j^\beta$  kann man durch Lösung des Systems die Feldstärken berechnen. In dreidimensionaler Schreibweise lauten die Gleichungen

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad (21a)$$

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (21b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (22a)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (22b)$$

Die ersten beiden Gleichungen (21a,b) heißen die inhomogenen, die restlichen beiden (22a,b) die homogenen Maxwellgleichungen. Man sieht, daß nur die Gleichungen (21b) und (22b) **dynamische** Gleichungen in dem Sinn sind, daß sie die zeitliche Änderung einer Situation beschreiben. Die anderen Gleichungen (21a), (22a) haben den Charakter von Nebenbedingungen, denen die Felder zu allen Zeiten unterworfen sind. Diese Gleichungen waren schon vor Maxwell bekannt. Die Gleichung (22b) heißt das **Induktionsgesetz**: sie beschreibt den quantitativen Zusammenhang zwischen der zeitlichen Änderung eines Magnetfeldes und dem zugehörigen elektrischen Feld und geht auf Faraday zurück. Maxwells eigentliche Entdeckung ist der erste Term in (21b), die Dichte des sogenannten **Verschiebungsstromes**  $\partial \mathbf{E}/4\pi \partial t$ . Die Gleichung ohne diesen Term gilt für stationäre Vorgänge und geht auf Ampère zurück. Maxwell bemerkte, daß die Kontinuitätsgleichung nur zu erfüllen ist, wenn man zur Stromdichte die Dichte des Verschiebungsstromes addiert.

## 2.6 Der Verschiebungsstrom

Der von Maxwell gefundene Term ist für die Elektrodynamik von außerordentlicher Bedeutung. Er ist nicht nur für die Verträglichkeit der Feldgleichungen mit der Ladungserhaltung wesentlich, sondern auch dafür maßgebend, daß sich elektromagnetische Wechselfelder als Wellen durch den Raum ausbreiten. Wir wollen daher die physikalische Bedeutung des Verschiebungsstromes diskutieren.

Eine anschauliche Formulierung der Maxwellgleichungen erhalten wir mit Hilfe der Begriffsbildungen des Flusses und der Zirkulation von Vektorfeldern. In Worten ausgedrückt, lauten dann die Gleichungen:

- (21a) Fluß des elektrischen Feldes durch eine geschlossene Fläche  $= 4\pi$  mal eingeschlossene Ladung
- (22a) Fluß des magnetischen Feldes durch eine geschlossene Fläche  $= 0$
- (21b) Zirkulation des magnetischen Feldes entlang einer geschlossenen Kurve  $= 4\pi/c$  mal (Konvektionsstrom + Verschiebungsstrom) durch die umschlossene Fläche. Der Verschiebungsstrom ist dabei proportional der Zunahme des Flusses des elektrischen Feldes durch die Fläche.
- (22b) Zirkulation des elektrischen Feldes entlang einer geschlossenen Kurve  $= 1/c$  mal zeitliche Abnahme des Flusses des magnetischen Feldes durch die umschlossene Fläche.
- (1) Fluß der Dichte des Konvektionsstromes durch eine geschlossene Fläche  $=$  zeitliche Abnahme der eingeschlossenen Ladung.

Damit kann man die in den Gleichungen enthaltene Information in Termen von Strömungsvorgängen (oder von Kraftlinienbildern) ausdrücken, die dem Feldverlauf qualitativ und sogar (grob) quantitativ Rechnung tragen. Diese anschauliche Vorstellungsweise ist älter als die mathematische Fassung in Termen von partiellen Differentialgleichungen, die i.W. erst durch Maxwell erfolgte. Ampère und Faraday haben die von ihnen gefundenen Gesetze im Rahmen dieser Vorstellungsweise formuliert. Die Interpretation des von Maxwell gefundenen Terms als Verschiebungs**strom** entspricht dieser Vorstellung. Man darf dabei allerdings nicht vergessen, daß nur der Konvektionsstrom einem wirklichen Strömungsvorgang von Ladungsträgern entspricht. Wir werden später sehen, daß auch dabei die wirkliche Bewegung der Ladungsträger wesentlich komplizierter ist, als es Stromlinienbilder andeuten.

Als Beispiel zur Veranschaulichung des Verschiebungsstromes betrachten wir einen Plattenkondensator mit kreisförmigen Platten, der gerade geladen wird. Die Ladung soll genügend langsam erfolgen, sodaß der Ladungsstrom  $I$  als stationär angesehen werden kann.

Dann ist  $I = dq/dt$ , wobei  $q$  die Gesamtladung auf den Platten ist. Wir denken uns um den Zuleitungsdraht in einer dazu senkrechten Ebene einen Kreis vom Radius  $r$  gezeichnet und untersuchen das Magnetfeld entlang des Kreises. Befindet sich der Kreis in genügend großem Abstand von den Kondensatorplatten (vgl. Fig. 2.2, Kreisfläche  $F_1$ ), so gibt es innerhalb des Kreises kein elektrisches Feld. Integrieren wir (21b) über den Kreis, so erhalten wir (vgl. auch die wörtliche Formulierung) die Zirkulation des Magnetfeldes, d.h. das Linienintegral von  $\mathbf{B}$  über den Kreisumfang  $u$ , die dann dem Konvektionsstrom gleich ist:

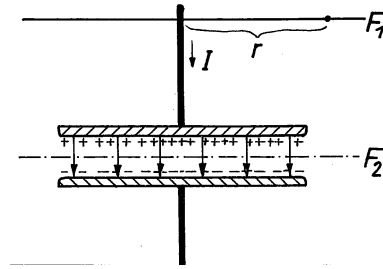


Fig. 2.2

$$\begin{aligned} \int_{F_1} (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{f} &= \oint_u \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi r B = \\ &= \frac{4\pi}{c} \int_{F_1} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f} = \frac{4\pi}{c} I. \end{aligned}$$

Die Richtung von  $\mathbf{B}$  ist tangential an den Kreis (Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters). Wenn wir die Kreisfläche in Richtung auf die Platten nach unten verlegen, wird sich daran solange nichts ändern, bis die Kreisfläche die obere Kondensatorplatte überquert. Wenn dies der Fall ist, ändert sich der Konvektionsstrom plötzlich auf den Wert Null, denn zwischen den Platten fließt kein Leitungsstrom. Es wäre seltsam, wenn sich das Magnetfeld ebenso abrupt änderte. Tatsächlich ist das **nicht** der Fall: betrachten wir die Kreisfläche  $F_2$ , so ist quer zu dieser ein elektrisches Feld vorhanden; der Fluß durch  $F_2$  ist in einem festen Zeitpunkt

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = 4\pi q.$$

Die Zirkulation von  $\mathbf{B}$  ist in diesem Fall gleich  $4\pi/c$  mal dem Verschiebungsstrom, dieser ist aber proportional der zeitlichen Zunahme des Flusses von  $\mathbf{E}$ . Daher erhalten wir für  $F_2$

$$2\pi r B = \frac{4\pi}{c} \frac{dq}{dt} = \frac{4\pi}{c} I$$

und das ist dasselbe Resultat wie oben.

## 2.7 Elektrodynamische Potentiale

Die Maxwellgleichungen sind ein System von partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung, aus denen man bei gegebenen Quellen die 6 Komponenten der Feldstärken berechnen kann. Diese Aufgabe wird wesentlich erleichtert, wenn man anstelle der Feldstärken andere Größen (Potentiale) einführt. Wir erinnern uns zu diesem Zweck an die analoge Situation in der Elektrostatik. Dort wurde die homogene Feldgleichung

$$\nabla \times \mathbf{E}_{St} = 0 \quad \text{oder} \quad \epsilon^{klm} \nabla^l E_{St}^m = 0$$

durch einen geeigneten Ansatz für  $\mathbf{E}$

$$\mathbf{E}_{St} = -\nabla \Phi_{St} \quad \text{oder} \quad E_{St}^k = -\nabla^k \Phi_{St}$$

automatisch erfüllt, weil die Rotation eines Gradienten identisch verschwindet

$$\sum_{l,m} \epsilon^{klm} \nabla^l \nabla^m \cdot \equiv 0.$$

Die wesentlichen Züge sind dabei

- (a) das Potential ist bezüglich des Transformationscharakters um eine Stufe einfacher als die Feldstärke:  $\mathbf{E}_{St}$  ist ein Vektor,  $\Phi_{St}$  ein Skalar.
- (b) Das Feld ist eine Ableitung des Potentials, die so eingeführt wird, daß die homogenen Feldgleichungen identisch erfüllt sind.

Dieser Trick läßt sich sofort auf die Elektrodynamik übertragen. Die homogenen Maxwellgleichungen sind

$$\partial_\mu \hat{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\mu F_{\alpha\beta} = 0. \quad (22)$$

$F^{\alpha\beta}$  ist ein Tensorfeld, also sollten wir als Potential nach (a) ein Vektorfeld  $A^\beta$  benützen, aus dem  $F^{\alpha\beta}$  durch Differentiation folgt. Da auch in vier Dimensionen

$$\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\mu \partial_\nu \cdot \equiv 0$$

ist, setzen wir

$$\hat{F}^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\alpha A_\beta = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha).$$

Damit ist (22) automatisch erfüllt. Für  $F^{\alpha\beta}$  bedeutet unser Ansatz

$$F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha. \quad (23)$$

Die inhomogenen Feldgleichungen sind dann gleichbedeutend mit

$$\square A^\beta - \partial^\beta \partial_\alpha A^\alpha = \frac{4\pi}{c} j^\beta. \quad (24)$$

Setzen wir für die vier Komponenten des Viererpotentials

$$A^\alpha = (\Phi, \mathbf{A}), \quad (25)$$

so lautet (23) in dreidimensionaler Schreibweise

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \Phi \quad (23a)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (23b)$$

Man sieht, daß sich  $\Phi$  im statischen Fall auf das skalare Potential der Elektrostatik reduziert.  $\mathbf{A}$  heißt das Vektorpotential. Der Ansatz (23b) bedeutet offenbar, daß  $\mathbf{B}$  ein reines Wirbelfeld ist, wie das aus (22a) folgt.

Wie in der Elektrostatik ist der Zusammenhang zwischen Potentialen und Feldstärken nur in einer Richtung eindeutig: bei gegebenem  $A^\alpha$  ist  $F^{\alpha\beta}$  eindeutig bestimmt, aber nicht umgekehrt. Addiert man zu  $A^\alpha$  die Ableitung einer beliebigen skalaren Funktion  $\psi(x)$

$$A^\alpha \rightarrow A'^\alpha = A^\alpha + \partial^\alpha \psi, \quad (26)$$

also

$$\Phi' = \Phi + \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (26a)$$

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \nabla \psi \quad (26b)$$

so ändern sich die Feldstärken **nicht**:

$$\begin{aligned} F'^{\alpha\beta} &= \partial^\alpha A'^\beta - \partial^\beta A'^\alpha \\ &= \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha + (\partial^\alpha \partial^\beta - \partial^\beta \partial^\alpha) \psi = F^{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Die Transformation (26) heißt **Eichtransformation**. Durch sie wird die mathematische Beschreibung abgeändert, ohne daß sich das auf physikalische Aussagen auswirkt: diese Aussagen sind in den Feldgleichungen enthalten, die sich durch  $F^{\alpha\beta}$  ausdrücken lassen und daher **invariant** bei Eichtransformationen sind.



Die infolge der Beliebigkeit von  $\psi$  vorhandene Willkür in den Potentialen ist sozusagen der Preis, den man für die erreichte Vereinfachung des Formalismus (vier Komponenten statt sechs) entrichten muß. In der Praxis ist das eher ein Vorteil als ein Nachteil. Man kann durch geeignete Wahl von  $\psi$  in vielen Fällen eine weitere Vereinfachung erreichen. Z.B. kann man die Eichung (also  $\psi$ ) so wählen, daß die Feldgleichungen (24) nicht mehr verkoppelt sind (s.u.) und/oder so, daß noch weniger als vier Funktionen zur Darstellung der Felder ausreichen.

Die Aussage, daß **nur** die Feldstärken physikalisch sinnvolle Größen seien, weil sie einer Messung zugänglich sind, erscheint etwas zu radikal. Es ist durchaus richtig, daß alle physikalischen Aussagen (und auch alle meßbaren Größen) **unabhängig von der Eichung** sein müssen. In vielen Fällen ist es jedoch nur unter sehr großem formalem Aufwand (und mit entsprechendem Verlust an Transparenz) möglich, einen Sachverhalt durch Feldstärken auszudrücken, der sich durch Potentiale einfach darstellen läßt. Die Potentiale erscheinen dann als das “physikalisch bessere” (weil verständlichere) Konzept: es ist durchaus legitim, jene Größen als “physikalisch bedeutsam” zu bezeichnen, durch die man die Natur in transparenter Weise beschreiben kann, auch wenn sie nicht direkt observabel sind. Man darf außerdem nicht vergessen, daß in die quantenmechanischen Bewegungsgleichungen geladener Teilchen (Schrödinger- bzw. Dirac- oder Klein-Gordongleichung) die Potentiale  $A^\alpha$  und nicht die Feldstärken  $F^{\alpha\beta}$  eingehen. Im Rahmen der Quantenmechanik können die  $A^\alpha$  genauso gut als “Observable” angesehen werden wie die  $F^{\alpha\beta}$ . Im Rahmen der Quantenfeldtheorie sind weder die  $A^\alpha$  noch die  $F^{\alpha\beta}$  direkt meßbar: mit realistischen Teilchen mißt man bestenfalls Mittelwerte von  $F^{\alpha\beta}$  über kleine Raumzeitgebiete aus. Mit Elektronenstrahlen kann man aber auch das Linienintegral von  $A^\alpha$  über eine geschlossene Kurve ausmessen. Die Tatsache, daß alle physikalischen Aussagen eichinvariant sein müssen, bleibt natürlich auch im Rahmen der Quantentheorie richtig.

## 2.8 Lorentzeichung und Strahlungseichung

Nun betrachten wir zwei Eichungen, in denen die inhomogenen Feldgleichungen besonders einfach werden. Streng genommen handelt es sich dabei um zwei **Klassen** von Eichungen: hat man die entsprechende Vereinfachung erreicht, so ist es in beiden Fällen noch möglich, weitere Eichtransformationen (mit speziellen Eichfunktionen  $\psi$ ) durchzuführen, ohne daß man die betrachtete Klasse verläßt (und ohne daß die Vereinfachung verloren geht). Die beiden Klassen können sich auch überlappen.

Als erstes betrachten wir die **Lorentzeichung** (Index  $L$ ). Sie ist dadurch charakterisiert, daß wir für das Potential die (lorentzinvariante) Bedingung

$$\partial_\alpha A_L^\alpha = 0 \quad \frac{\partial \Phi_L}{c \partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A}_L = 0 \quad (27)$$

fordern (sog. Lorentzbedingung). Die Feldgleichungen (24) sind dann nicht mehr verkoppelt. Sie lauten

$$\square A_L^\alpha = \frac{4\pi}{c} j^\alpha. \quad (28)$$

Das ist ein bedeutender Vorteil, denn man kann nun die Gleichungen für die einzelnen Komponenten unabhängig voneinander lösen. Natürlich muß man darauf achten, daß (27) bzw. die damit verknüpfte Kontinuitätsgleichung (1) erfüllt wird. Ist das Potential in einer beliebigen Eichung gegeben

$$A^\alpha \equiv A_B^\alpha,$$

so erhält man  $A_L^\alpha$  durch

$$A_L^\alpha = A_B^\alpha + \partial^\alpha \psi$$

mit

$$\square \psi = -\partial_\alpha A_B^\alpha.$$

Bei weiteren Eichtransformationen

$$A_L^\alpha \rightarrow A_L'^\alpha + \partial^\alpha \chi$$

bleibt man innerhalb der durch (27) definierten Klasse, wenn

$$\square \chi = 0$$

ist. Offenbar ist die Lorentzeichung unabhängig vom gewählten Inertialsystem.

Eine weitere wichtige Eichung ist die **Coulomb-** oder **Strahlungseichung** (Index  $S$ ). Wir beginnen mit dem Potential in einer beliebigen Eichung (Index  $B$ ) und zerlegen das skalare Potential in das **instantane** Coulombpotential  $\Phi_C$  der Ladungsverteilung  $\rho(t, \mathbf{x})$  zu einem bestimmten Zeitpunkt  $t$  und einen Restanteil

$$\Phi_B = \Phi_C - \lambda \quad (29)$$

$$\Delta\Phi_C(t, \mathbf{x}) = -4\pi\rho(t, \mathbf{x}) \quad (30)$$

bzw.

$$\Phi_C(t, \mathbf{x}) = \int \frac{\rho(t, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'. \quad (31)$$

Außerdem zerlegen wir das Vektorpotential in einen divergenzfreien (transversalen) Anteil  $\mathbf{A}_T$  und einen (longitudinalen) Restanteil  $\mathbf{A}_L$

$$\mathbf{A}_B = \mathbf{A}_T + \mathbf{A}_L \quad (32)$$

mit

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_T = 0. \quad (33)$$

Diese Zerlegung ist besonders bei Strahlungsproblemen zweckmäßig. Wir zeigen nun, daß es eine Eichung (die Strahlungseichung, Index  $S$ ) gibt, in der nur mehr  $\Phi_C$  und  $\mathbf{A}_T$  vorhanden sind:

$$A_S^\alpha = (\Phi_C, \mathbf{A}_T). \quad (34)$$

Wir suchen daher eine Eichfunktion  $\psi$ , mit der

$$A_S^0 = \Phi_C = \Phi_B + \frac{1}{c} \frac{\partial\psi}{\partial t}$$

$$\mathbf{A}_S = \mathbf{A}_T = \mathbf{A}_B - \nabla\psi$$

wird. Durch Vergleich mit der früher angegebenen Zerlegung sieht man, daß

$$\lambda = \frac{1}{c} \frac{\partial\psi}{\partial t}, \quad \mathbf{A}_L = \nabla\psi$$

ist. Aus der zweiten Gleichung folgt durch Anwendung von  $\nabla \cdot$

$$\Delta\psi = \nabla \cdot \mathbf{A}_L = \nabla \cdot \mathbf{A}_B.$$

Die Lösung dieser inhomogenen Laplacegleichung ist

$$\psi(t, \mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla' \cdot \mathbf{A}_B(t, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'. \quad (35)$$

Damit kann das gesuchte  $\psi$  aus  $\mathbf{A}_B$  berechnet werden. Wir untersuchen nun die Feldgleichungen für  $A_S^\alpha$ . Dazu gehen wir von der Form (24) aus, die in jeder Eichung gelten muß. Wir berechnen zunächst

$$\partial_\alpha A_S^\alpha = \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_C}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A}_T = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \Phi_C.$$

Durch Einsetzen in die Gleichung (24) überzeugt man sich leicht, daß für  $\beta = 0$  tatsächlich die Gl. (30) für das Coulombpotential übrigbleibt, die wir durch (31) bereits gelöst haben. Für die anderen drei Komponenten erhalten wir

$$\square \mathbf{A}_T = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_T, \quad (36)$$

wobei

$$\mathbf{j}_T = \mathbf{j} - \frac{1}{4\pi} \nabla \frac{\partial}{\partial t} \Phi_C \quad (37)$$

ist. Durch Differenzieren kann man sich davon überzeugen, daß  $\mathbf{j}_T$  divergenzfrei ist

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_T = \nabla \cdot \mathbf{j} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \Delta \Phi_C = \nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Man sieht aus (36), daß die Feldgleichungen in der Strahlungseichung ebenfalls entkoppelt sind. Außerdem ist eine der Feldgleichungen durch (31) bereits gelöst. Man muß daher nur drei Differentialgleichungen (36) lösen, wobei die Lösung die Bedingung (33) erfüllen muß. Ein Nachteil gegenüber der Lorentzeichung besteht darin, daß die Strahlungseichung nicht unabhängig vom Bezugssystem ist. Die Eichung zeichnet vielmehr eine Richtung im vierdimensionalen Raum aus, und zwar die Zeitrichtung, denn das skalare Potential (bzw.  $\rho$ ) nimmt eine Sonderstellung ein. Mit einigem Aufwand ist es möglich, die Eichung explizit kovariant zu formulieren. Dabei ist nicht mehr die Zeitrichtung, sondern eine beliebige zeitartige Richtung ausgezeichnet, die durch einen zeitartigen Einheitsvektor  $n^\mu$  vorgegeben wird. Der hier betrachtete Fall resultiert als Spezialfall für  $n^\mu = (1, 0, 0, 0)$ . Wir wollen jedoch den allgemeinen Fall nicht untersuchen.

Die Feldstärken sind (ebenso wie der Strom) von der Eichung unabhängig. Die beiden Terme, die zu  $\mathbf{E}$  beitragen, liefern aber in Strahlungsgleichung eine natürliche Aufspaltung in das elektrische Coulombfeld und einen divergenzfreien (=transversalen) Anteil

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \mathbf{E}_C + \mathbf{E}_T \\ \mathbf{E}_C &= -\nabla\Phi_C, \quad \mathbf{E}_T = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}_T}{\partial t}, \\ \nabla \times \mathbf{E}_C &= 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{E}_T = 0 \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}_T, \quad \mathbf{B}_T = \nabla \times \mathbf{A}_T, \quad \nabla \cdot \mathbf{B}_T = 0.\end{aligned}$$

Das Coulombfeld  $\mathbf{E}_C$  kann (trotz der Zeitabhängigkeit von  $\rho$ ) zu keinem zeitlich **veränderlichen** Magnetfeld Anlaß geben: aus dem Induktionsgesetz folgt für  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_C$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}_C = 0.$$

Die zeitabhängigen Anteile des Magnetfeldes sind daher ganz in  $\mathbf{A}_T$  enthalten. Hingegen kann  $\mathbf{B}_T$  auch ein **zeitkonstantes** Magnetfeld enthalten, das z.B. durch einen konstanten Strom hervorgerufen werden kann.

Zum Abschluß stellen wir die wesentlichen Formeln für beide Eichungen zusammen:

**Lorentzeichung:**

$$\begin{aligned}\partial_\alpha A_L^\alpha &= 0 \\ \square A_L^\alpha &= \frac{4\pi}{c} j^\alpha\end{aligned}$$

**Strahlungsgleichung:**

$$\begin{aligned}A_S^\alpha &= (\Phi_C, \mathbf{A}_T) \\ \Phi_C(t, \mathbf{x}) &= \int \frac{\rho(t, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \\ \nabla \cdot \mathbf{A}_T &= 0 \\ \square \mathbf{A}_T &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_T\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{j}_T &= 0 \\ \mathbf{j}_T &= \mathbf{j} - \frac{1}{4\pi} \nabla \frac{\partial}{\partial t} \Phi_C.\end{aligned}$$

Für Stromverteilungen, die auf ein endliches Gebiet beschränkt sind, kann der Quellstrom auch in der Form

$$\mathbf{j}_T = \frac{1}{4\pi} \nabla \times \left( \nabla \times \int d^3x' \frac{\mathbf{j}(t, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right)$$

geschrieben werden (vgl. Übungen).

## Übungen

- 12) Welches Vektorpotential  $\mathbf{A}$  mit drei nichttrivialen Komponenten führt zu einem konstanten Magnetfeld  $\mathbf{B}$ ? Mit welcher Eichfunktion  $\chi$  kann man eine Komponente des Vektorpotentials zum Verschwinden bringen? Wie lauten  $\mathbf{A}, \mathbf{A}'$  und  $\chi$  für  $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ ?
- 13) Finde Potentiale  $(\Phi, \mathbf{A})$ , die zu konstanten elektrischen und magnetischen Feldern  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$  führen. Mit welcher Eichfunktion kann man  $\Phi$  zum Verschwinden bringen? Betrachte als Spezialfall ein gekreuztes Feld

$$\mathbf{B} = (0, 0, B), \quad \mathbf{E} = (E, 0, 0).$$

Mit welcher Eichfunktion erhält man das einfachste Vektorpotential?

- 14) Betrachte das Viererpotential

$$A^\mu(x) = \sum_{i=1}^2 e_i^\mu a_i(k \cdot x).$$

Dabei ist  $k^\mu$  ein konstanter, lichtartiger Vektor ( $k^2 = 0$ ),  $e_i^\mu$  ( $i = 1, 2$ ) sind zwei zueinander und zu  $k$  orthogonale, raumartige Vektoren

$$(k \cdot e_i) = 0, \quad e_i \cdot e_j = -\delta_{ij}$$

und  $a_i$  sind beliebige Funktionen ihres Argumentes.

- (a) In welcher Klasse von Eichungen liegt  $A^\mu$ ?
- (b) Zeige, daß das Potential die quellenfreien Maxwellgleichungen  $j^\mu = 0$  löst.
- (c) Berechne die Feldstärken  $F^{\mu\nu}$  bzw.  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$  und charakterisiere ihre wesentlichen Eigenschaften.
- (d) Welche Funktionen  $a_i$  führen zu  $\mathbf{E}^2 = \text{konst.}$ ?
- (e) Wie kann man ein konstantes, gekreuztes Feld

$$\mathbf{E} = \text{konst.}, \mathbf{B} = \text{konst.}, \mathbf{E} \perp \mathbf{B}, \mathbf{E}^2 = \mathbf{B}^2$$

als Grenzfall erhalten?

- 15) Stelle den transversalen Strom  $\mathbf{j}_T$  als doppelte Rotation  $\nabla \times (\nabla \times)$  dar.
- 16) Betrachte den Ausdruck

$$\int_G S_\mu(x) A^\mu(x) d^4x,$$

wobei der Vierervektor  $S^\mu$  am Rand des Raumzeitvolumens  $G$  verschwindet. Welche Bedingung muß  $S^\mu$  erfüllen, damit der Ausdruck eichinvariant ist?

- 17) Betrachte den Ausdruck

$$G^\mu = (\partial^\mu - \kappa A^\mu)f(x)$$

wobei  $\kappa$  eine Konstante ist. Wie muß  $f(x)$  bei einer Eichtransformation geändert werden, wenn sich dabei  $G^\mu$  nur um einen skalaren Faktor  $\lambda(x)$  ändern soll? Berechne den Faktor in Termen der Eichfunktion  $\psi$ .

- 18) Die Invariante  $P$  aus (2.19) ist als Viererdivergenz eines Vierervektors  $K^\mu$  darstellbar. Wie lautet dieser Vierervektor? Wie ändert er sich bei einer Eichtransformation?



## 2.9 Energie- und Impulsbilanz

In der Maxwellschen Theorie werden elektromagnetische Vorgänge mit Hilfe von Feldgrößen (Feldstärken bzw. Potentialen) beschrieben, die Funktionen von  $\mathbf{x}$  und  $t$  sind. Die Übertragung von Kraftwirkungen wird über eine Nahewirkung zwischen Punkt und Nachbarpunkt beschrieben. Damit muß auch ein Transport von Energie und Impuls verbunden sein. Im elektromagnetischen Feld muß daher Energie und Impuls enthalten und in Form lokaler Dichten beschreibbar sein (vgl. Abschnitt 1.8). Wir interessieren uns nun für die Frage, wie die Energie- und Impulsbilanz zu formulieren ist.

Dazu betrachten wir zunächst die allgemeinere Fragestellung, wie eine solche Bilanz in einer lokalen relativistischen Theorie aussehen kann. In der Relativitätstheorie transformieren sich die Energie  $W$  und der Impuls  $\mathbf{P}$  eines Systems als Vierervektor

$$P^\nu := \left( \frac{W}{c}, \mathbf{P} \right). \quad (38)$$

Für ein **abgeschlossenes** System müssen die Komponenten dieses Vektors erhalten sein

$$\frac{dP^\nu}{dt} = 0. \quad (39)$$

In einer **lokalen** Theorie sollten sich Energie und Impuls additiv aus den Beiträgen kleiner Raumzeitgebiete zusammensetzen. Analog wie bei der Ladung sollten daher entsprechende Dichten  $w(x), \mathbf{g}(x)$  konstruierbar sein, mit denen

$$W = \int w(x) d^3x, \quad \mathbf{P} = \int \mathbf{g}(x) d^3x \quad (40)$$

wird. Die Dichten  $w, \mathbf{g}$  müssen wegen der relativistischen Invarianz kovariante Größen sein und der globale Erhaltungssatz für  $P^\nu$  sollte aus einer lokalen Bilanzgleichung für die Dichten folgen. Einen "Mechanismus" dafür haben wir bereits in 2.1 und 2.2 für die lokale Ladungsbilanz verwendet: man muß beachten, daß das Volumintegral zu fester Zeit eigentlich das Integral über eine raumartige Hyperfläche bedeutet

$$B^{\dots} = \int_{\Sigma} b^{\dots\mu}(x) d\sigma_{\mu}(x) \rightarrow \int_t b^{\dots 0}(x) d^3x,$$

denn für eine raumartige Ebene wird

$$\Sigma : t = \text{const}, \quad d\sigma^\mu = (d^3x, 0, 0, 0).$$

Damit das Integral nicht von der speziellen Integrationsfläche  $\Sigma$  (und damit auch nicht von  $t$ ) abhängt, muß die kovariante Dichte  $b^{\dots\mu}(x)$  einer Kontinuitätsgleichung genügen

$$\partial_\mu b^{\dots\mu}(x) = 0.$$

Für die Ladungsbilanz war  $B$  die (skalare) Gesamtladung  $q$  und  $b^{\dots\mu}$  der Stromdichtevektor  $j^\mu$ . Für die Energie-Impulsbilanz soll die globale Größe ein Vierervektor sein

$$B^{\dots} = P^\nu$$

Die Dichten  $w(x)$  und  $\mathbf{g}(x)$  müssen konsequenterweise Zeitkomponenten eines Tensors zweiter Stufe sein:

$$\frac{1}{c}w(x) = T^{00}(x), \quad g^k(x) = T^{k0}(x)$$

sodaß

$$P^\mu = \int_\Sigma T^{\mu\nu}(x) d\sigma_\nu(x)$$

ist, wobei  $T^{\mu\nu}$  die Kontinuitätsgleichung

$$\partial_\nu T^{\mu\nu}(x) = 0$$

erfüllen muß.

Bei vorgegebenem  $P^\nu$  ist  $T^{\mu\nu}$  nicht eindeutig festgelegt. Um das einzusehen, betrachten wir einen antisymmetrischen Tensor 3.Stufe

$$A^{\mu\nu\rho} = -A^{\mu\rho\nu}.$$

Seine zweite Ableitung verschwindet identisch

$$\partial_\nu \partial_\rho A^{\mu\nu\rho} \equiv 0.$$

Addieren wir daher zu  $T^{\mu\nu}$  die erste Ableitung von  $A$

$$T^{\mu\nu} \rightarrow T'^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \partial_\rho A^{\mu\nu\rho},$$

so erfüllt  $T'^{\mu\nu}$  dieselbe Kontinuitätsgleichung wie  $T^{\mu\nu}$ . Verlangt man außerdem, daß  $A^{\mu\nu\rho}$  im Unendlichen verschwindet, so kann man zeigen, daß der zu  $T$  hinzugefügte Term zu  $P^\nu$  nicht beiträgt. Durch geeignete

Wahl von  $A$  kann man stets erreichen, daß  $T'^{\mu\nu}$  symmetrisch wird. Wir werden den Energie-Impulstensor stets so konstruieren, daß er bereits symmetrisch ist (d.h. wir betrachten stets  $T'$  und lassen den Strich weg):

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}. \quad (41)$$

Insgesamt ist dann:

$$\begin{aligned} T^{00}(x) &= \frac{1}{c}w(x) && \text{Energiedichte}/c, \\ T^{0k}(x) &= T^{k0}(x) = g^k(x) && \text{Impulsdichte}, \\ T^{kl}(x) &= T^{lk}(x) && \text{Impulsstromdichte}/c. \end{aligned} \quad (42)$$

Die Kontinuitätsgleichung für  $T$

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0 \quad (43)$$

ist dann gleichbedeutend mit den vier Bilanzgleichungen

$$\frac{\partial w(x)}{\partial t} + c^2 \nabla \cdot \mathbf{g}(x) = 0 \quad (43a)$$

$$\frac{\partial g^k}{\partial t} + c \sum_l \nabla^l T^{lk} = 0. \quad (43b)$$

Die erste Gleichung (43a) drückt die lokale Energiebilanz aus. Der Vektor

$$\mathbf{S} = c^2 \mathbf{g} \quad (44)$$

beschreibt die Dichte des Energiestromes. Das Integral

$$\int_F \mathbf{S} \cdot d\mathbf{f}$$

gibt die Energie an, die pro Sekunde durch die Fläche  $F$  strömt. Wegen der Symmetrie von  $T^{\mu\nu}$  ist die Energiestromdichte bis auf den Faktor  $c^2$  mit der Impulsdichte identisch. In einer nichtrelativistischen Theorie wären diese Größen wesentlich voneinander verschieden. Gl.(43b) beschreibt die lokale Impulsbilanz.

Mit (41) und (43) kann man leicht zeigen, daß der Tensor

$$M^{\mu\nu\rho} = x^\mu T^{\nu\rho} - x^\nu T^{\mu\rho} = -M^{\nu\mu\rho} \quad (45)$$

ebenfalls eine Kontinuitätsgleichung erfüllt:

$$\partial_\rho M^{\mu\nu\rho} = 0. \quad (46)$$

Die zugehörigen globalen Größen

$$J^{\mu\nu} = \int M^{\mu\nu\rho} d\sigma_\rho \quad (47)$$

beschreiben den gesamten Drehimpuls

$$J^k = \frac{1}{2} \sum_{l,m} \epsilon^{klm} J^{lm}$$

bzw. den (Energie-)Schwerpunkt ( $J^{0k}$ ) des Systems (vgl. M 5.7).

Diese Zusammenhänge müssen für jedes relativistische, lokale System gelten, das abgeschlossen ist. Wir untersuchen nun die entsprechenden Konsequenzen für die Elektrodynamik. In dieser besteht ein abgeschlossenes System aus der (geladenen) Materie einschließlich ihrer Dynamik (also aus Ladungen und Strömen mit Einschluß des Mechanismus, der sie in Bewegung hält) und aus den von den Ladungs- und Stromdichten erzeugten Feldern. Beide Anteile werden zu  $T^{\mu\nu}$  beitragen. In Raumbereichen, in denen keine Quellen vorhanden sind (in denen also  $j^\mu = 0$  ist), bleibt nur das elektromagnetische Feld übrig. Es erscheint daher sinnvoll, aus  $T^{\mu\nu}$  einen Teil abzuspalten, der nur von den Feldstärken abhängt und außerhalb der Quellen übrig bleibt:

$$T^{\mu\nu} = T_{(em)}^{\mu\nu}(\mathbf{E}, \mathbf{B}) + T_{(mat)}^{\mu\nu}. \quad (48)$$

Der Rest  $T_{(mat)}^{\mu\nu}$  wird Anteile enthalten, die der Wechselwirkung von Ladungen mit dem Feld entsprechen (und daher von  $j^\mu$  **und** den Feldstärken abhängen): diese Anteile müssen für  $j^\mu = 0$  verschwinden. Außerdem kommen zu  $T_{(mat)}^{\mu\nu}$  noch Beiträge hinzu, die der nichtelektromagnetischen Dynamik der Materie Rechnung tragen (z.B. Beiträge der Teilchenfelder in der Quantenelektrodynamik, Beiträge der kinetischen Gastheorie in der Plasmaphysik, evtl. Beiträge des Gravitationsfeldes etc.). Die Kontinuitätsgleichung für  $T^{\mu\nu}$  wird in Strenge nur zu erfüllen sein, wenn alle Wechselwirkungen mitgenommen werden. Das Weglassen einzelner Beiträge kann aber für manche Phänomene eine sinnvolle Idealisierung darstellen.

Wir betrachten hier nur den ersten Term in (48). Ein Ansatz für diesen Tensor ist leicht zu erraten. Als Bestandteile, aus denen  $T_{(em)}^{\mu\nu}$

konstruiert werden kann, stehen die Tensoren  $F^{\mu\nu}$  und  $g^{\mu\nu}$  und als einzige Dimensionskonstante  $c$  zur Verfügung. Die Potentiale  $A^\mu$  sollten nicht verwendet werden, da  $T_{(em)}^{\mu\nu}$  eichinvariant sein muß. Aus einer einfachen Dimensionsbetrachtung folgt, daß  $cT_{(em)}^{\mu\nu}$  quadratisch in den Feldstärken sein muß: die Feldstärken haben in dem hier verwendeten Gaußschen Maßsystem die Dimension (vgl. Lorentzkraft!)

$$[F^{\mu\nu}] = \text{g}^{1/2} \text{cm}^{-1/2} \text{s}^{-1}$$

und  $cT^{00}$  muß die Dimension einer Energiedichte haben

$$[cT^{00}] = \text{gcm}^2 \text{s}^{-2} \text{cm}^{-3} = \text{gcm}^{-1} \text{s}^{-2}.$$

Aus quadratischen Ausdrücken in  $F^{\mu\nu}$  kann man aber nur zwei symmetrische Tensoren mit dem richtigen Spiegelungscharakter konstruieren, und zwar

$$F^{\mu\alpha} F_\alpha^\nu \quad \text{und} \quad g^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}.$$

Bildungen aus  $F \cdot \hat{F}$  kommen nicht in Frage, denn sie würden bei Raumspiegelungen das falsche Vorzeichen annehmen (die Energie ist ein Skalar und kein Pseudoskalar!). Bildungen aus  $\hat{F} \cdot \hat{F}$  lassen sich auf die angegebenen beiden Formen reduzieren. Ein allgemeiner Ansatz lautet daher

$$cT_{(em)}^{\mu\nu} = a(F^{\mu\alpha} F_\alpha^\nu + \frac{b}{4} g^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}).$$

Dabei sind  $a$  und  $b$  dimensionslose Konstanten. Zu ihrer Bestimmung betrachten wir die Energiedichte

$$w_{(em)} = cT_{(em)}^{00} = a\left(\left(1 - \frac{b}{2}\right) \mathbf{E}^2 + \frac{b}{2} \mathbf{B}^2\right).$$

Für  $j^\mu = 0$  (Vakuum) soll das die gesamte Energiedichte sein. In Abwesenheit von Quellen ist die Maxwelltheorie aber symmetrisch bei Vertauschen von  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$ . Daher muß  $b = 1$  sein. Ist nur ein statisches elektrisches Feld vorhanden, so muß  $w_{(em)}$  in den entsprechenden Ausdruck der Elektrostatik übergehen. Daraus folgt  $a = 1/4\pi$  und wir erhalten

$$T_{(em)}^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi c} (F^{\mu\alpha} F_\alpha^\nu + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}). \quad (49)$$

Man sieht, daß die Spur dieses Tensors verschwindet

$$T_{(em)\mu}^\mu = 0 \quad (50)$$

Die Komponenten von  $T_{(em)}$  lauten

$$w_{(em)}(x) = \frac{1}{8\pi}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) \quad (49a)$$

$$\mathbf{g}_{(em)}(x) = \frac{1}{4\pi c}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \frac{1}{c^2}\mathbf{S}_{(em)}. \quad (49b)$$

$$T_{(em)}^{kl}(x) = -\frac{1}{4\pi c}(E^k E^l + B^k B^l - \frac{1}{2}\delta^{kl}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)). \quad (49c)$$

Der Vektor  $\mathbf{S}$  in (49b) heißt der Poyntingvektor, der Tensor (49c) heißt Maxwell'scher Spannungstensor.

Um den Energie-Impulstensor der Materie anzugeben, braucht man ein Modell für die Dynamik der Materie. Selbst ohne ein solches kann man aber Bilanzgleichungen zwischen Feldern und Quellen angeben und damit eine Aussage über die Divergenz des Materietensors erhalten. Wir schreiben dazu (43) in der Form

$$\partial_\mu T_{(em)}^{\mu\nu} = -\partial_\mu T_{(mat)}^{\mu\nu}.$$

Mit Hilfe der Maxwellgleichungen erhält man nach etwas Rechnung die Formel

$$\partial_\mu T_{(em)}^{\mu\nu} = \frac{1}{c^2}j_\mu F^{\mu\nu}. \quad (51)$$

In Komponenten ausgeschrieben gibt das folgende Bilanzgleichungen

$$\frac{\partial w_{(em)}}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{S}_{(em)} - \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \quad (51a)$$

$$\frac{\partial g_{(em)}^k}{\partial t} = -c \sum_l \nabla^l T_{(em)}^{lk} - (\rho \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{j} \times \mathbf{B})^k. \quad (51b)$$

Der erste Term auf der rechten Seite von (51a) beschreibt den Energietransport durch das Feld (z.B. die in Form von elektromagnetischen Wellen ein- oder abgestrahlte Energie). Der letzte Term beschreibt die Energie, die pro Sekunde und  $\text{cm}^3$  an die Materie abgegeben bzw. von ihr geliefert wird (z.B. durch Beschleunigung oder Abbremsung von Ladungsträgern).

Daß diese Interpretation richtig ist, zeigt das folgende Beispiel: auf ein Teilchen, das sich im elektromagnetischen Feld bewegt, wirkt die Lorentzkraft

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

Bewegt sich das Teilchen entlang eines Weges von einem Punkt  $P$  zu einem anderen  $P'$ , so leistet das Feld die Arbeit

$$A_1 = \int_P^{P'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

Für ein kleines Wegstück ist die Arbeit

$$dA_1 = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt$$

erforderlich. Daher ist für ein Teilchen

$$\frac{dA_1}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}.$$

Bewegen sich im Feld pro Volumeinheit  $N$  Teilchen, so wird pro  $\text{cm}^3$  und Sekunde die Energie

$$\frac{dA_N}{dt} = \mathbf{E} \cdot Nq\mathbf{v} = \mathbf{E} \cdot \rho\mathbf{v} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}$$

aufgewendet, was der Bilanzgleichung (51a) entspricht. Die Impulsbilanz (51b) kann in analoger Weise interpretiert werden.

**Übungen**

- 19) Betrachte ein konstantes, gekreuztes Feld (vgl. Beispiele 7 und 13)

$$\mathbf{E} \perp \mathbf{B}, \quad \mathbf{E}^2 = \mathbf{B}^2 = \text{konst.}$$

Berechne den Poyntingvektor  $\mathbf{S}$  und den in einem Zylinder (Radius  $R$ , Länge  $L$ ) um die Richtung von  $\mathbf{S}$  enthaltenen Drehimpuls  $\mathbf{J}$ .

- 20) Berechne den Poyntingvektor  $\mathbf{S}$  und die Drehimpulsdichte für das in Beispiel 14 betrachtete Feld.  
 21) Beweise, daß die Integrale

$$\int P(x) d^3x, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} P(x) dx^0$$

verschwinden. Dabei ist  $P$  die in 2.5 betrachtete Invariante, das erste Integral ist über den gesamten Raum zu erstrecken. Die Feldstärken können dabei beliebig angenommen werden. Es ist lediglich notwendig, daß die Integrale existieren.

- 22) Betrachte die Momente

$$d^\nu = -x_\mu T^{\nu\mu}, \quad k^{\mu\nu} = T^\nu_\rho (-x^2 g^{\rho\mu} + 2x^\rho x^\mu)$$

des Energie-Impulstensors. Bestimme ihre Viererdivergenzen  $\partial_\nu d^\nu$  bzw.  $\partial_\nu k^{\mu\nu}$

(a) allgemein, (b) für  $T^{\mu\nu} = T_{(em)}^{\mu\nu}$ .

- 23) Berechne die in Beispiel 22 definierten Momente für das in Beispiel 14 betrachtete Feld.



## Zusammenfassung

Elektromagnetische Felder können durch die Komponenten  $F^{\mu\nu}(x)$  eines Tensors zweiter Stufe beschrieben werden, der antisymmetrisch ist:

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}.$$

Die sechs unabhängigen Komponenten des Tensors definieren das elektrische ( $\mathbf{E}$ ) bzw. magnetische Feld ( $\mathbf{B}$ )

$$\mathbf{E} = (F^{k0}), \quad \mathbf{B} = -\frac{1}{2} \sum_{lm} (\epsilon^{klm} F^{lm}) \quad k = 1, 2, 3.$$

Die Aufspaltung in elektrische bzw. magnetische Anteile hängt vom verwendeten Bezugssystem ab.

Der zu  $F$  duale Tensor

$$\hat{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$$

entsteht aus  $F$  durch die Ersetzung  $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{E}$ .

Die Feldstärken  $F^{\mu\nu}$  sind in jedem Raumzeitpunkt  $(x^\mu) = (ct, \mathbf{x})$  definiert und können aus der Kraft (Lorentzkraft) auf eine mit der Geschwindigkeit  $u^\mu$  bewegte Probeladung  $q$  bestimmt werden:

$$f^\mu = q F^{\mu\nu} u_\nu \quad \mathbf{F} = q \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right).$$

Elektromagnetische Felder werden von (ruhenden und/oder bewegten) Ladungsträgern hervorgerufen. Zur lokalen Beschreibung dieser Quellen (Ursachen) von Feldern wird ein Vierervektor  $j^\mu$  verwendet, dessen Komponenten die Ladungsdichte ( $\rho$ ) bzw. Stromdichte ( $\mathbf{j}$ ) bilden:

$$(j^\mu) = (c\rho, \mathbf{j}).$$

Der Transport von Ladung wird durch die Kontinuitätsgleichung

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

lokal beschrieben. Die gesamte Ladung

$$Q = \int \rho(x) d^3x$$

eines abgeschlossenen Systems ist erhalten.

Der Zusammenhang von Quellen und Feldern wird durch die Feldgleichungen (Maxwellsche Gleichungen) beschrieben:

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu} &= \frac{4\pi}{c} j^\nu & \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho \\ & & -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \\ \partial_\mu \hat{F}^{\mu\nu} &= 0 & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ & & \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} &= 0 . \end{aligned}$$

Zur Vereinfachung der Feldbeschreibung kann anstelle des Feldtensors  $F^{\mu\nu}$  das Viererpotential  $(A^\mu) = (\Phi, \mathbf{A})$  verwendet werden, aus dem  $F^{\mu\nu}$  durch Differenzieren gewonnen werden kann:

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu & \mathbf{E} &= -\nabla\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\ & & \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} . \end{aligned}$$

Die Maxwellgleichungen für  $\hat{F}^{\mu\nu}$  sind dann automatisch erfüllt. Den übrigen Feldgleichungen entspricht

$$\begin{aligned} \square A^\nu - \partial^\nu \partial^\mu A_\mu &= \frac{4\pi}{c} j^\nu & -\Delta\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} &= 4\pi\rho \\ & & \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A} + \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla\Phi &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} . \end{aligned}$$

Ändert man das Viererpotential durch eine Eichtransformation

$$\begin{aligned} A^\mu \rightarrow A'^\mu &= A^\mu + \partial^\mu \psi & \Phi' &= \Phi + \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} \\ & & \mathbf{A}' &= \mathbf{A} - \nabla\psi \end{aligned}$$

mit einer beliebigen Funktion  $\psi(x)$ , so ändern sich die Feldstärken **nicht**. Durch geeignete Wahl von  $\psi$  (Eichung von  $A^\mu$ ) können die Feldgleichungen für die Komponenten von  $A^\mu$  weiter vereinfacht werden. Alle physikalischen Aussagen der Theorie sind bei Eichtransformationen invariant.

Für gegebene Quellen  $j^\mu$  sind die Feldgleichungen linear in den Feldern (bzw. Potentialen). Diese Größen genügen daher dem Superpositionsprinzip: das von der Summe von zwei Quellen erzeugte Feld ist die Summe der beiden Felder, die von den einzelnen Summanden hervorgerufen werden.

Die Maxwelltheorie ist eine lokale Feldtheorie. Die Übertragung von Wirkung erfolgt in ihr von Punkt zu Nachbarpunkt in Raum und Zeit (Nahewirkung). Jedem Punkt  $x^\mu$  kann ein Tensor  $T_{(em)}^{\mu\nu}$  zugeordnet werden, der symmetrisch, spurfrei und bilinear in den Feldern ist:

$$T_{(em)}^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi c} (F^{\mu\alpha} F_\alpha{}^\nu + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta})$$

$$T_{(em)}^{\mu\nu} = T_{(em)}^{\nu\mu}, \quad T_{(em)\mu}{}^\mu = 0 .$$

Die Komponenten haben die physikalische Bedeutung von Dichten:

$$w_{(em)}(x) = cT_{(em)}^{00} = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) \quad \text{Energiedichte,}$$

$$\mathbf{S}_{(em)}(x) = c^2 \mathbf{g}_{(em)}(x) = c^2 (T_{(em)}^{0k}) = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$$

$\mathbf{S}_{(em)}(x)$  Energiestromdichte,  $\mathbf{g}_{(em)}(x)$  Impulsdichte,

$$T_{(em)}^{kl}(x) = -\frac{1}{4\pi c} (E^k E^l + B^k B^l - \frac{1}{2} \delta^{kl} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2))$$

$\mathbf{T}_{(em)} = (T_{(em)}^{kl})$  Maxwellscher Spannungstensor,

$c\mathbf{T}_{(em)}$  Impulsstromdichte.

Die Dichten beziehen sich nur auf den im Feld enthaltenen Anteil der entsprechenden physikalischen Größen. Eine Kontinuitätsgleichung ist daher für  $T_{(em)}^{\mu\nu}$  allein nicht erfüllt und die Raumintegrale der Dichten  $w_{(em)}$ ,  $\mathbf{g}_{(em)}$  sind i.a. nicht erhalten. Eine lokale Bilanz ist aber mit Hilfe von

$$\begin{aligned} \partial_\mu T_{(em)}^{\mu\nu} &= \frac{1}{c^2} j_\mu F^{\mu\nu} & \frac{\partial w_{(em)}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S}_{(em)} &= -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \\ & & \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} + c \nabla \cdot \mathbf{T}_{(em)} &= -(\rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B}) \end{aligned}$$

möglich. Eine Kontinuitätsgleichung (und damit globale Erhaltungsgrößen) erhält man erst, wenn man die Dynamik der Materie in die Betrachtung einbezieht, die für das Auftreten von  $j^\mu$  und die Wechselwirkung von geladener Materie mit den damit verbundenen Feldern maßgebend ist. Faßt man die Quellen als vorgegeben auf, so vernachlässigt man die Rückwirkung der Felder auf die Bewegung der Ladungsträger.

### Formeln im SI

Die als dreidimensionale Vektorgleichungen geschriebenen Feldgleichungen und die Lorentzkraft in Termen von Größen im internationalen Maßsystem (SI) erhält man aus den hier verwendeten durch folgende Ersetzungen:

| hier                                      | SI   |
|---|--|
| $(\rho, q, \mathbf{j}, \mathbf{E}, \Phi)$ | $\rightarrow \sqrt{4\pi\epsilon_0}(\rho, q, \mathbf{j}, \mathbf{E}, \Phi)$ |
| $(\mathbf{B}, \mathbf{A})$                | $\rightarrow c\sqrt{4\pi\epsilon_0}(\mathbf{B}, \mathbf{A}).$              |

Ersetzt man außerdem  $c$  durch  $1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ , so erhält man die Feldgleichungen in der SI-Form mit  $\epsilon_0$  und  $\mu_0$  (diese Form verschleiert allerdings das Auftreten der Naturkonstante  $c$ ). Bei relativistischer Schreibweise ist folgende Ersetzung durchzuführen:

$$(j^\mu, q, F^{\mu\nu}, A^\mu) \rightarrow \sqrt{4\pi\epsilon_0} (j^\mu, q, F^{\mu\nu}, A^\mu).$$

Dabei ist aber zu beachten, daß die Komponenten  $F^{\mu\nu}$  und  $A^\mu$  im SI anders aus  $(\mathbf{E}, \mathbf{B}, \Phi, \mathbf{A})$  zusammengesetzt sind, als im Gaußschen System. Die Komponenten im SI sind:

$$F^{k0} = E^k, \quad -\sum_{lm} \epsilon^{klm} F^{lm} = cB^k, \quad (A^\mu) = (\Phi, c\mathbf{A})$$

$\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  haben im SI verschiedene Dimension. Da die Aufspaltung in ein elektrisches und ein magnetisches Feld vom Bezugssystem abhängt, ist das irreführend.

### 3. Anwendungen

#### 3.1 Statische und stationäre Situationen

In diesem Kapitel sollen Lösungen der Maxwellgleichungen für spezielle Situationen untersucht werden. Als erstes Problem untersuchen wir die Frage, unter welchen Umständen die Gleichungen der Elektrostatik (und ihr magnetisches Gegenstück) als Spezialfall der Elektrodynamik resultieren können. Läßt man in den Maxwellgleichungen alle Zeitableitungen weg, so erhält man

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_{st} = 4\pi\rho_{st}, \quad (1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_{st} = 0, \quad (1b)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}_{st} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{st}, \quad (2a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_{st} = \nabla \cdot \mathbf{j}_{st} = 0. \quad (2b)$$

Die Gleichungssysteme (1) und (2) sind nicht verkoppelt, d.h. Elektrizität und Magnetismus sind voneinander unabhängige Phänomene. Das ist auch in der Formulierung mit Potentialen ersichtlich. Die Klasse der Lorentzgleichungen ist bei Weglassen von Zeitableitungen durch dieselbe Bedingung wie diejenige der Strahlungsgleichungen definiert, nämlich durch

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_{st} = 0, \quad \text{also } \mathbf{A}_{st} = \mathbf{A}_{st, T}. \quad (3)$$

Die Gleichungen für die Potentiale lauten

$$\Delta\Phi_{st} = -4\pi\rho_{st} \quad (4)$$

$$\Delta\mathbf{A}_{st} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{st} \quad (5)$$

und die zugehörigen Lösungen sind

$$\Phi_{st}(\mathbf{x}) = \int \frac{\rho_{st}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' + C \quad (6)$$

$$\mathbf{A}_{st}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}_{st}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' + \nabla\psi(\mathbf{x}) \quad (7)$$

wobei  $C$  eine willkürliche Konstante und  $\psi$  eine Lösung von  $\Delta\psi = 0$  ist. Bei Verwendung von (7) muß man darauf achten, daß der Strom divergenzfrei ist (vgl. (2b)). Andernfalls kann man in Konflikt mit (3) kommen. Die Feldstärken sind aus den Potentialen durch

$$\mathbf{E}_{st} = -\nabla\Phi_{st}, \quad \mathbf{B}_{st} = \nabla \times \mathbf{A}_{st} \quad (8)$$

zu berechnen.

Das Weglassen der Zeitableitungen ist erlaubt, wenn die Quellen  $\rho$ ,  $\mathbf{j}$  nicht von der Zeit abhängen: es ist einleuchtend, daß dann die Felder nicht zeitabhängig sein können. Die Gleichungen (1a,b) bzw. (4),(6) sind tatsächlich die in der Elektrostatik (Kap. 1) untersuchten. Die übrigen Gleichungen (2a,b) bzw. (5),(7) beschreiben das magnetische Gegenstück, die Magnetostatik. Streng genommen sollte man hier eigentlich bereits von einer stationären Situation sprechen. Zwar sind  $\mathbf{B}_{st}$ ,  $\mathbf{A}_{st}$ ,  $\mathbf{j}_{st}$  zeitunabhängig (d.h. statisch), aber auch eine konstante Stromdichte entspricht einem **Strömen** von Ladungsträgern (d.h. einer Bewegung); dabei ist die Geschwindigkeit zeitunabhängig (stationärer Strom).

Die oben betrachteten Gleichungen resultieren jedoch auch für zeitabhängige Quellen, wenn man  $_{st}$  als Abkürzung für den zeitlichen Mittelwert versteht

$$F_{st} = \langle F \rangle_t := \lim(T \rightarrow \infty) \frac{1}{T} \int_0^T F(\mathbf{x}, t) dt,$$

weil der Zeitmittelwert einer Zeitableitung i.a. verschwindet

$$\langle \frac{\partial}{\partial t} F \rangle_t = 0$$

(natürlich darf dabei  $F$  an den Grenzen des Integrationsbereiches nicht zu stark zunehmen).

Ohne Mittelwertbildung muß man im Prinzip mit den vollständigen Gleichungen arbeiten. Verwendet man trotzdem die Ausdrücke (6), (7) mit den allgemeinen (zeitabhängigen) Quellen  $\rho(\mathbf{x}, t)$  bzw.  $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$  im Integranden, so erhält man eine Näherungslösung (quasistationäre Näherung). Sie entspricht einer Situation, in der sich die Felder in räumlichen Richtungen viel stärker ändern, als im Lauf der Zeit: die Zeitableitungen müssen gegenüber den Raumableitungen vernachlässigt werden

können, damit man zu (1) bzw. (2) kommt. Diese Näherung ist in vielen Fällen praktisch brauchbar. Wir werden später darauf zurückkommen.

Die quasistationären Gleichungen für  $\mathbf{B}_{st}$  gehen aus denen für  $\mathbf{E}_{st}$  durch

$$\mathbf{E}_{st} \rightarrow \mathbf{B}_{st}, \quad \rho_{st} \rightarrow \frac{\mathbf{j}_{st}}{c}, \quad \nabla \cdot \rightarrow \nabla \times$$

hervor und umgekehrt. Diese Dualitätseigenschaft kann man zur Feldberechnung ausnützen. Hat man z.B. ein elektrostatisches Problem gelöst, so beherrscht man auch das dazu duale magnetostatische Problem.

### 3.2 Berechnung statischer Magnetfelder

In diesem Abschnitt betrachten wir ausschließlich statische Situationen. Wir lassen den (selbstverständlichen) Index  $_{st}$  weg. Das duale Gegenstück zum Gaußschen Gesetz erhält man, indem man beachtet, daß das duale Gegenstück zum Fluß die Zirkulation ist. Wir berechnen diese entlang einer geschlossenen Kurve  $C$ , die ein Flächenstück  $F$  umschließt. Mit Hilfe des Stokeschen Satzes erhalten wir

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_F (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{f} = \frac{4\pi}{c} \int_F \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f}.$$

Das Flächenintegral hängt nicht von der Form von  $F$  ab, sondern nur davon, daß  $F$  von  $C$  umschlossen wird. Das Flächenintegral ist daher der gesamte (stationäre) Strom  $I(C)$ , der von  $C$  eingegrenzt wird. Damit erhalten wir das Gesetz von Ampère

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{4\pi}{c} I(C). \quad (9)$$

In einfachen Fällen kann man damit  $\mathbf{B}$  aus  $I$  berechnen. Wie in der Elektrostatik funktioniert das jedoch nur dann, wenn die Symmetrie des Problems  $\mathbf{B}$  so weit festlegt, daß man sich um die zweite Feldgleichung  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  nicht zu kümmern braucht.

In komplizierteren Fällen kommt man nicht ohne diese Gleichung aus. Es ist dann zweckmäßiger, mit dem Vektorpotential zu arbeiten, z.B. mit der Integralform (7). Ein "automatisch" divergenzfreies (d.h. wie in dieser Eichung verlangt, transversales) Vektorpotential erhält man allerdings nur, wenn man im Integranden den transversalen Strom

(37) benützt. Wenn das zu kompliziert ist, muß man die Transversalitätsbedingung für  $\mathbf{A}$  verwenden. Eine Alternative besteht in der Verwendung einer Integralform für  $\mathbf{B}$ , die man aus (7) durch Bildung der Rotation erhält. Sie lautet

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x' . \quad (10)$$

Diese Form ist automatisch divergenzfrei. Das Integral ist allerdings komplizierter als das entsprechende für das Vektorpotential.

Wie in der Elektrostatik ist es auch in der Magnetostatik nützlich, die **Linearität** der Theorie zu verwenden, d.h. sich daran zu erinnern, daß die Lösung ( $\mathbf{A}$  oder  $\mathbf{B}$ ) für eine Linearkombination von Strömen die entsprechende Linearkombination der von den einzelnen Strömen hervorgerufenen Felder ist. Hat man Lösungen für bestimmte (z.B. genügend einfache) Stromverteilungen gefunden, so beherrscht man damit alle durch Linearkombination entstehenden Verteilungen (die vielleicht nicht mehr einfach sind) ohne weiteren Rechenaufwand. Es ist daher lohnend, zu überlegen, ob man eine vorgelegte Stromverteilung aus einfacheren Verteilungen zusammensetzen kann, deren Felder man kennt. Ebenso lohnend ist die Ausnützung der Tatsache, daß sich **Symmetrien** in der Stromverteilung im zugehörigen Feld wiederfinden lassen. Für die praktische Verwendung dieser beiden Aspekte (bzw. ihrer Kombination) vgl. die Übungen.

Eine Methode, die einen breiten Anwendungsbereich hat, ist die Berechnung von  $\mathbf{A}$  oder  $\mathbf{B}$  mit Hilfe der **Fouriertransformation**. Diese Methode ist auch in der Elektrostatik anwendbar. Ihr Verständnis ist eine gute Vorbereitung auf die allgemeine Lösung der Maxwellgleichungen, die wir in Abschnitt 3.5 untersuchen werden. Für die Zwecke der stationären Theorie betrachten wir die Fouriertransformation  $\tilde{f}(\mathbf{k})$  einer Funktion  $f(\mathbf{x})$ , die durch die folgenden beiden Formeln definiert ist:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \tilde{f}(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) d^3k \quad (11a)$$

$$\tilde{f}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int f(\mathbf{x}) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) d^3x . \quad (11b)$$

Die Integration läuft dabei über den gesamten Raum. Wir führen nun die Berechnung von  $\mathbf{A}$  auf ein Integral über die Fouriertransformation von  $\mathbf{j}$  zurück. Dazu gehen wir von (7) aus (wobei wir die Funktion  $\psi$



der Einfachheit halber weglassen), verwenden als Integrationsvariable  $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$  und setzen für  $\mathbf{j}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$  die Fouriertransformation (11a) ein:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{|\mathbf{y}|} d^3y = \frac{1}{c(2\pi)^{3/2}} \int \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) C(\mathbf{k}) d^3k .$$

Dabei ist der letzte Term  $C$  die Fouriertransformation des Coulombpotentials, die man berechnen kann (vgl. Übungen):

$$C(\mathbf{k}) = \int \frac{d^3y}{|\mathbf{y}|} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{y}) = \frac{4\pi}{k^2} .$$

Insgesamt erhalten wir für  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  die Fouriertransformation von  $\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{k})/k^2$ :

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int \frac{\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{k})}{k^2} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) d^3k . \quad (12)$$

Natürlich ist diese Formel nur dann besser als (7), wenn  $\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{k})$  berechnet werden kann und das Resultat nicht zu kompliziert ist. Ein Vorteil der Methode besteht darin, daß man Ableitungen nach  $\mathbf{x}$  durch Multiplikationen mit  $\mathbf{k}$  unter dem Integral ersetzen kann

$$\nabla(x) \int \dots = i \int \mathbf{k} \dots$$

Damit erhält man die Fourierformel für  $\mathbf{B}$  aus (12) durch Ersetzen von  $\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{k})$  durch  $i\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{k})$ .

Zuletzt betrachten wir eine schon recht alte Methode zur Feldberechnung, die für Elektromagnete brauchbar ist. In vielen Anordnungen fließt der Strom in einem verhältnismäßig dünnen Draht, also in einem Leiter, dessen Querschnitt im Verhältnis zu seiner Länge klein ist. Die Stromdichte kann über den Querschnitt  $F$  des Leiters als konstant angenommen werden. Führen wir ein Linienelement  $d\mathbf{s}'$  entlang des Leiters ein, das überall parallel zur Stromrichtung ist (also parallel zur Tangente an die Kurve, die den Draht beschreibt), so ist

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}') d^3x' = |\mathbf{j}'| F ds' = I ds' .$$

Dabei ist  $I$  die Stromstärke. Damit erhalten wir für  $\mathbf{A}$  die Formel

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{I}{c} \int \frac{d\mathbf{s}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'(s')|} . \quad (13)$$

Das Integral ist nun ein Kurvenintegral über die Bogenlänge der Kurve. Für  $\mathbf{B}$  erhält man in analoger Weise das Biot-Savartsche Gesetz

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = -\frac{I}{c} \int \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \times d\mathbf{s}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'(s')|^3}. \quad (14)$$

Diese Formeln sind für Spulenwicklungen brauchbar, bei denen die Form des bewickelten Körpers so beschaffen ist, daß das Bogenelement einfach ist.

## Übungen

- 1) Ein unendlich langer, zylindrischer Leiter (Radius  $R$ ) wird parallel zur Achse vom Strom  $I$  durchflossen. Die Stromdichte im Leiter ist konstant. Berechne das Magnetfeld innerhalb und außerhalb des Leiters.
- 2) Ein Koaxialkabel besteht aus einem zylindrischen Innenleiter (Radius  $R_i$ ) und einem konzentrisch angeordneten Hohlrohr mit dem Innendurchmesser  $2R_a$  und der Wandstärke  $d$ . Das Kabel ist unendlich lang, die Stromdichte in den Leitern ist konstant. Im Innenleiter fließt parallel zur Achse der Strom  $I$ , im Außenleiter der Rückstrom  $-I$ . Berechne das Magnetfeld innerhalb und außerhalb des Kabels.
- 3) Ein zylindrischer Leiter (Radius  $R$ ) hat parallel zur Achse im Abstand  $d$  eine zylindrische Bohrung mit dem Radius  $r$  ( $r + d < R$ ). Der Leiter wird parallel zur Achse von dem konstanten Strom  $I$  durchflossen. Die Stromdichte ist konstant. Berechne das Magnetfeld in der Bohrung und im Leiter. Diskutiere den Grenzfall eines Hohlzylinders.
- 4) Zwei unendlich lange, gerade, dünne Drähte sind im Abstand  $a$  parallel zueinander ausgespannt und werden im entgegengesetzten Sinn von einem konstanten Strom  $I$  durchflossen. Berechne die magnetische Feldstärke.
- 5) Eine unendlich lange, zylindrische Spule besteht aus einer Lage eines dünnen Drahtes, der dicht aufgewickelt ist ( $n$  Windungen pro Längeneinheit). Berechne das Magnetfeld innerhalb und außerhalb der Spule, wenn diese von einem konstanten Strom  $I$  durchflossen wird.
- 6) Eine kreisförmige Drahtschleife (Radius  $a$ ) wird von einem konstanten Strom  $I$  durchflossen. Berechne das Vektorpotential und das magnetische Feld. Welche Form nehmen beide Größen in großem Abstand von der Drahtschleife an?
- 7) Auf einen sehr langen Zylinder (Radius  $R$ , Länge  $L \rightarrow \infty$ ) werden zwei dünne Drähte in Form einer Schraubenlinie (Ganghöhe  $h$ ) so aufgewickelt, daß sie zueinander parallel liegen (konstanter Abstand  $a < h$ , sog. Bifilarwicklung). Die beiden Drähte werden an einem Spulenende miteinander verbunden und von einem konstanten Strom durchflossen. Berechne das Magnetfeld in der Nähe der Achse des Zylinders.

Anordnungen mit diesem Feldverlauf heißen magnetische Wiggler und sind ein wesentlicher Bestandteil von Synchrotronstrahlungsquellen und bestimmten Lasern.

- 8) Berechne die Fouriertransformation von  $1/|\boldsymbol{x}|$ .
- 9) Berechne die Fouriertransformation des transversalen Stromes  $\boldsymbol{j}_T$  (vgl. Abschnitt 2.8) in Termen von  $\tilde{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{k})$ .

### 3.3 Zur magnetischen Multipolentwicklung

In Analogie zur Elektrostatik (Abschnitt 1.7) untersuchen wir nun das von einer begrenzten Stromverteilung in großem Abstand hervorgerufene Vektorpotential bzw. Magnetfeld. Die Stromdichte  $\mathbf{j}(\mathbf{x})$  soll also außerhalb eines endlichen Gebietes verschwinden; zu berechnen ist  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  in Form einer Entwicklung nach Potenzen von  $1/r$ . Da  $\mathbf{j}$  ein Vektor ist, kann man erwarten, daß diese Entwicklung komplizierter als die für  $\Phi$  ausfällt. Wir werden nur den untersten nichttrivialen Term der Entwicklung betrachten. Die weiteren Terme der Reihe sind im Prinzip genauso zu finden, erfordern aber einen größeren Rechenaufwand.

Die Vorgangsweise ist analog zu der in der Elektrostatik (vgl. Abschnitt 1.7). Wir wählen einen geeigneten Punkt im Innern der begrenzten Stromverteilung als Ursprung und gehen von (7) (ohne Eichterm) aus. Mit der bereits in der Mechanik (s. M 3.3) verwendeten Entwicklung für  $1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$  erhalten wir

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{cr} \int \mathbf{j}(\mathbf{x}') d^3x' + \frac{1}{cr^2} \int (\mathbf{e} \cdot \mathbf{x}') \mathbf{j}(\mathbf{x}') d^3x' + \dots$$

Im Gegensatz zur Elektrostatik verschwindet der erste Term: das ist eine Folge von  $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ . Ein Beweis ist in Anhang A4 enthalten, in dem die Problematik für zeitabhängige Quellen untersucht wird. Für die Zwecke der Magnetostatik ersetzen wir in den in A4 betrachteten Formeln  $\partial\rho/\partial t$  durch Null. Die magnetische Multipolentwicklung beginnt also mit dem Dipolterm: es gibt keine magnetischen Monopole. Eine geeignete Form für das magnetische Dipolmoment erhalten wir, indem wir die in A4 betrachtete Umformung für das erste Moment von  $\mathbf{j}$  durchführen. Damit erhalten wir

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{r^2} (\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{e}) + \dots \quad (15)$$

mit dem magnetischen Dipolmoment

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2c} \int \mathbf{x}' \times \mathbf{j}(\mathbf{x}') d^3x' , \quad (16)$$

das unabhängig von der Wahl des Bezugspunktes (d.h. des Ursprunges) ist. Für das Magnetfeld erhält man durch Differenzieren

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{r^3} (-\boldsymbol{\mu} + 3\mathbf{e}(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{e})) + \dots \quad (17)$$

In großen Abständen nimmt also das Magnetfeld jeder begrenzten Stromverteilung mindestens wie  $1/r^3$  ab. Jede solche Verteilung wirkt (sofern  $\boldsymbol{\mu} \neq 0$  ist) bei großen Abständen wie ein magnetischer Dipol. Damit ist eine Stromverteilung gemeint, deren Feld nur aus dem Dipolterm besteht. Eine solche Verteilung kann man sich als eine kleine Stromschleife vorstellen (vgl. Übungen).

Die höheren Terme in den Entwicklungen (15) bzw. (17) sind wesentlich komplizierter. Für ihre Berechnung ist es erforderlich, die Entwicklung über die in M 3.3 ausgeschriebenen Terme hinaus fortzusetzen. Außerdem ist es notwendig, die in Anhang A4 angegebenen Sätze auf höhere Momente von  $\boldsymbol{j}$  zu verallgemeinern. Das würde den Rahmen einer Einführungsvorlesung überschreiten.

## Übungen

- 10) Berechne die Stromdichte, die ein reines magnetisches Dipolfeld hervorruft.
- 11) Eine zylindrische Spule (Radius  $R$ , Länge  $L$ ) besteht aus einer Lage eines dünnen Drahtes, der dicht aufgewickelt ist ( $n$  Windungen pro Längeneinheit). Die Spule wird von einem konstanten Strom  $I$  durchflossen. Berechne das magnetische Moment der Spule.
- 12) Eine Ladungsverteilung  $\rho$  rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um die  $z$ -Achse. Gib eine Formel für das magnetische Moment als Integral über das Volumen des Körpers an (kartesische, Zylinder- und Kugelkoordinaten). Berechne das magnetische Moment für folgende mit der Gesamtladung  $q$  (homogen) geladenen Gegenstände:
  - (a) Kreis, (b) Kreisscheibe (c) Kugeloberfläche, (d) Kugel (alle mit Radius  $R$ )
  - (e) Würfel (Kantenlänge  $a$ , Ursprung im Mittelpunkt,  $z$ -Achse parallel zu einer Kante)
  - (f) Punktladung im Abstand  $a$  vom Ursprung in der  $xy$ -Ebene.
- 13) Zwei kleine Stromschleifen mit gleicher Fläche liegen in zueinander parallelen Ebenen und werden in entgegengesetztem Sinn vom gleichen Strom  $I$  durchflossen. Der Abstand der Schleifen sei  $a$ . Berechne das Vektorpotential für  $|\mathbf{r}| \gg a$  und diskutiere das Resultat.
- 14) Eine dicht bewickelte zylindrische Spule (Länge  $L$ ) mit sehr kleinem Radius  $b$  ( $b \ll L$ ) wird von einem konstanten Strom  $I$  durchflossen. Die Spule ist mit einem Ende am Ursprung entlang der negativen  $z$ -Achse aufgestellt.
  - (a) Berechne das Vektorpotential und die magnetische Feldstärke außerhalb der Spule.
  - (b) Betrachte beide Größen im Grenzfall  $L \rightarrow \infty$ .
  - (c) Berechne in beiden Fällen die Azimutalkomponente des Vektorpotentials  $A_\varphi$ . Wo wird sie singulär?

Der Grenzfall  $L \rightarrow \infty$  hängt mit dem Verhalten eines magnetischen Monopols zusammen.

### 3.4 Elektromagnetische Wellen

Die Existenz elektromagnetischer Wellen bedeutet, daß die Maxwellgleichungen auch Situationen beschreiben müssen, in denen sich eine elektromagnetische Erregung mit der Geschwindigkeit  $c$  durch den ganzen (leeren) Raum ausbreitet. In Abschnitt 2.6 wurde bereits darauf hingewiesen, daß der dafür wesentliche Term der Verschiebungsstrom ist, der auch im leeren Raum von Null verschieden sein und dort die Rolle einer Quelle übernehmen kann. Wir betrachten nun Lösungen der Maxwellgleichungen, die elektromagnetischen Wellen entsprechen. Dazu betrachten wir einen Raumbereich, in dem keine Quellen vorhanden sind:

$$\rho(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}) = 0 .$$

Das soll **nicht** heißen, daß nie und nirgends (d.h. für kein  $t$  und  $\boldsymbol{x}$ ) Quellen vorhanden sein sollen: dann gäbe es natürlich keine Felder. Wir interessieren uns vielmehr für die Felder **außerhalb** der Quellenbereiche. Später werden wir die allgemeine Lösung der Maxwellgleichungen bei vorgegebenen Quellen untersuchen und zeigen, wie der Anschluß erfolgt.

In quellenfreien Gebieten kann das gesamte Feld außer elektromagnetischen Wellen auch Anteile enthalten, die von stationären Quellen hervorgerufen werden:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_{st}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{E}_R(t, \boldsymbol{x}) , \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_{st}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{B}_R(t, \boldsymbol{x}) .$$

Wegen des Superpositionsprinzips kann man die Anteile getrennt betrachten. Wir beschränken uns in diesem Abschnitt daher auf  $\boldsymbol{E}_R$ ,  $\boldsymbol{B}_R$ . Anstelle der Feldstärken verwenden wir die Potentiale in Strahlungseichung und brauchen dann nur das (transversale) Vektorpotential zu betrachten: das skalare Potential trägt nur zu  $\boldsymbol{E}_{st}$  bei. In  $\boldsymbol{A}_T$  spalten wir den stationären Anteil ab

$$\boldsymbol{A}_T(t, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}_{st}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{A}_R(t, \boldsymbol{x}) .$$

Zur Bestimmung des Vektorpotentials müssen wir dann die (homogene) Wellengleichung

$$\square \boldsymbol{A}_R = 0 \tag{18}$$

zusammen mit

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A}_R = 0 \tag{19}$$

lösen. Die Feldstärken findet man durch Differenzieren



$$\mathbf{E}_R = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}_R}{\partial t}, \quad \mathbf{B}_R = \nabla \times \mathbf{A}_R. \quad (20)$$

Daraus folgt, daß auch die Feldstärken der Wellengleichung genügen und transversal sind:

$$\square \mathbf{E}_R = \square \mathbf{B}_R = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{E}_R = \nabla \cdot \mathbf{B}_R = 0.$$

Die Feldstärken sind aber wegen der Maxwellgleichungen

$$\nabla \times \mathbf{E}_R = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}_R}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{B}_R = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_R}{\partial t}$$

miteinander verkoppelt. Arbeitet man mit dem Vektorpotential, so braucht man sich darum nicht zu kümmern.

Um einen Überblick zu erhalten, wie Lösungen der Wellengleichung aussehen, betrachten wir zunächst skalare Wellenvorgänge in einer Raumdimension, also Lösungen  $A(t, x)$  von

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) A = 0.$$

Durch Differenzieren kann man sofort einsehen, daß jede Funktion  $f(\xi)$  der Variablen  $\xi = ct - x$  die Gleichung löst:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} = f'(\xi) = -\frac{\partial}{\partial x} f(\xi), \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f'' - f'' = 0.$$

Eine solche Lösung beschreibt eine Erregung, die sich im Lauf der Zeit mit der Geschwindigkeit  $c$  in Richtung der positiven  $x$ -Achse weiterbewegt. Ist z.B.  $f$  zur Zeit  $t = 0$  nur in der Nähe des Ursprungs von Null verschieden und hat dort eine spezielle Form, so tritt diese zur Zeit  $t$  an der Stelle  $x = ct$  auf (vgl. Fig. 3.1).

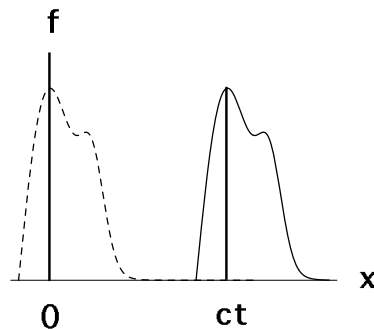


Fig. 3.1

Eine beliebige Funktion  $g(\eta)$  der Variablen  $\eta = ct + x$  ist ebenfalls eine Lösung der Wellengleichung und beschreibt einen Vorgang, der sich mit der Geschwindigkeit  $c$  in negativer  $x$ -Richtung bewegt. Durch die Überlagerung

$$A(t, x) = f(\xi) + g(\eta)$$

erhält man die allgemeine Lösung.

Die Überlegung läßt sich sofort auf drei Raumdimensionen übertragen. Ersetzen wir  $x$  durch  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}$ , wobei  $\mathbf{n}$  ein fester Einheitsvektor  $\mathbf{n}^2 = 1$  ist, so wird

$$\nabla f = -\mathbf{n}f' , \quad \Delta f = \mathbf{n}^2 f'' = f'' .$$

Jede Funktion von  $ct \mp \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}$  löst daher die Wellengleichung (18). Die Lösung entspricht einem Vorgang, der sich im Lauf der Zeit mit der Geschwindigkeit  $c$  in Richtung von  $\pm \mathbf{n}$  weiterbewegt. Wellen dieses Typs heißen **ebene** Wellen: zu  $\mathbf{n}$  senkrechte Ebenen entsprechen gleichen Werten von  $f$ . Insbesondere ist die Stirnfront der Erregung (die Fläche, in der zu einer bestimmten Zeit  $f$  von Null abzuweichen beginnt) eine Ebene senkrecht zu  $\mathbf{n}$ ; analog für Maxima bzw. Minima von  $f$  bzw. andere durch spezielle Werte von  $f$  bestimmte Wellenfronten (vgl. Fig. 3.2).

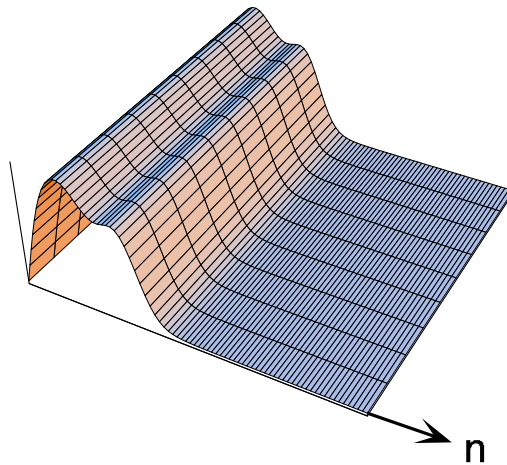


Fig. 3.2

Die Variablen  $ct \pm \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}$  können als Skalarprodukte im Minkowski-raum interpretiert werden. Setzen wir

$$u := \frac{1}{\sqrt{2}} (ct - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) = n_\mu x^\mu, \quad v := \frac{1}{\sqrt{2}} (ct + \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) = \hat{n}_\mu x^\mu, \quad (21)$$

so sind die beiden konstanten Vierervektoren  $n, \hat{n}$  durch

$$n^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, \mathbf{n}), \quad \hat{n}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, -\mathbf{n}) \quad (22)$$

gegeben. Durch Bildung des Skalarprodukts sieht man, daß

$$n_\mu n^\mu = \hat{n}_\mu \hat{n}^\mu = 0, \quad n_\mu \hat{n}^\mu = 1 \quad (23)$$

ist. Die Vektoren sind daher **lichtartige** Einheitsvektoren. Eine ebene Welle ist durch eine beliebige Funktion von  $u$  oder  $v$  gegeben. Konstante Werte von  $u$  bzw.  $v$  entsprechen lichtartigen Ebenen (Tangentialebenen an den Lichtkegel). Das Auftreten lichtartiger Richtungen  $n, \hat{n}$  ist für elektromagnetische Wellen charakteristisch.

Als Spezialfall betrachten wir nun periodische Funktionen  $f$  bzw.  $g$ . Das Muster (pattern, vgl. Fig. 3.1), das sich im Lauf der Zeit in Richtung  $\pm \mathbf{n}$  weiterbewegt, ist in diesem Fall eine periodische Figur. Jede periodische Funktion läßt sich aber als Überlagerung von Sinus- und Kosinus-schwingungen mit verschiedenen Frequenzen aufbauen. Der Prototyp für periodische Vorgänge ist also eine Sinus- oder Kosinusfunktion mit einer festen Frequenz  $\omega$ . Mit dem lichtartigen Vektor

$$k^\mu := \sqrt{2} \frac{\omega}{c} n^\mu = \frac{1}{c} (\omega, \omega \mathbf{n}), \quad k_\mu k^\mu = (k^0)^2 - \mathbf{k}^2 = 0 \quad (24)$$

wird

$$k_\mu x^\mu = \sqrt{2} \frac{\omega}{c} u = \omega t - \frac{\omega}{c} \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}$$

und wir können als Prototypen die monofrequenten Wellen

$$\sin(k_\mu x^\mu), \quad \cos(k_\mu x^\mu) \quad \text{oder} \quad \exp(\pm i k_\mu x^\mu) \quad (25)$$

betrachten. Der entsprechende Vorgang ist “unendlich ausgedehnt”: die trigonometrischen Funktionen verschwinden zwar an einzelnen Punkten, aber nicht in einem größeren zusammenhängenden Gebiet. Dabei ist festzuhalten, daß weder die Frequenz  $\omega$ , noch die Richtung  $\mathbf{n}$  durch die Wellengleichung bestimmt ist. Diese legt nur fest, daß die Kombination (24) ein lichtartiger Vektor ist. Daher ist jede Linearkombination (Überlagerung) von Lösungen (25) mit beliebigen Frequenzen

$\omega$  und Richtungen  $\mathbf{n}$  wieder eine Lösung der Wellengleichung. Die allgemeine Lösung erhält man durch Integration über  $\omega$  und über alle Richtungen  $\mathbf{n}$ . Wie sie aussieht, werden wir später für  $\mathbf{A}$  untersuchen.

Vorerst wollen wir nur festhalten, daß man durch Überlagerung von Lösungen mit verschiedenen  $\mathbf{n}$  auch solche mit nicht-ebenem Symmetriotyp finden kann, also solche, bei denen die Wellenfronten nicht Ebenen, sondern irgendwelche anderen Flächen sind. Als besonders wichtiges Beispiel betrachten wird nun Kugelwellen, also Vorgänge, bei denen die Wellenfronten konzentrische Kugeln sind. Wie eine solche Lösung aussieht, ist leicht zu finden. Wegen der Kugelsymmetrie darf die Lösung außer von der Zeit offenbar nur vom Betrag von  $\mathbf{x}$  abhängen. Für eine beliebige Funktion  $A(t, r = |\mathbf{x}|)$  ist

$$\nabla A = \mathbf{e} \frac{\partial A}{\partial r}, \quad \mathbf{e} = \frac{\mathbf{x}}{r}, \quad \mathbf{e}^2 = 1$$

$$\Delta A = \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial A}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rA)$$

Damit erhalten wir

$$\square A = \frac{1}{r} \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) (rA).$$

$A$  ist daher eine Lösung der Wellengleichung, wenn  $rA$  die entsprechende Gleichung in einer Raumdimension (hier  $r$ ) erfüllt. Solche Lösungen haben wir aber bereits gefunden; wir brauchen nur in  $\xi$  bzw.  $\eta$  (s.o.)  $x$  durch  $r$  zu ersetzen. Die Form

$$A_{aus} = \frac{f(ct - r)}{r} \quad (26)$$

mit einer beliebigen Funktion  $f$  ist daher eine kugelsymmetrische Lösung von (18). Sie entspricht einem Wellenvorgang, der sich von der Stelle  $r = 0$  **nach außen** ausbreitet (der Radius der Kugelfläche, die der Wellenfront entspricht, nimmt im Lauf der Zeit **zu**). Die Amplitude  $A$  nimmt mit wachsendem  $r$  so ab, daß der Ausdruck  $A^2 d^3x \sim A^2 r^2 dr$  für schwach veränderliches  $f$  konstant bleibt (das entspricht für elektromagnetische Vorgänge der Energieerhaltung). An der Stelle  $r = 0$  ist unsere Lösung singular, d.h. an dieser Stelle gilt unsere Ableitung nicht. Physikalisch ist das durchaus vernünftig: wenn sich von einem Punkt aus eine elektromagnetische Erregung ausbreiten soll, so muß es dort

Quellen geben, die sie hervorrufen. In der Quellenregion gilt aber die homogene Wellengleichung ohnehin nicht, mit der wir gerechnet haben.

Die Form

$$A_{ein} = \frac{g(ct + r)}{r} \quad (27)$$

ist ebenfalls eine Lösung von (18). Sie beschreibt einen kugelsymmetrischen Vorgang, der sich **nach innen** ausbreitet, d.h. die Welle läuft "zusammen". Mathematisch ist eine solche Lösung genau so sinnvoll wie eine "auseinanderlaufende". Empirisch beobachtet man aber, daß sich elektromagnetische Erregungen stets von der Quelle, die sie erzeugt, wegbewegen, wie das auch der Kausalität entspricht: erst die Ursache, dann die Wirkung. Eine "zusammenlaufende" Welle würde einem umgekehrten Kausalzusammenhang entsprechen: eine sphärische Erregung läuft aus dem Unendlichen auf die Ladungen zu und erreicht sie in dem Augenblick, in dem sie sich zu bewegen beginnen. Wenn es sich um Abstrahlung handelt, schließt man daher meist die "zusammenlaufenden" Lösungen aus physikalischen Gründen aus. Das heißt nicht, daß man sie nie verwendet: man kann z.B. eine ebene Welle als Überlagerung von auseinander- und zusammenlaufenden Kugelwellen schreiben. Außerdem kann man Anordnungen von Quellen betrachten, deren Feld insgesamt (näherungsweise) einer einlaufenden Kugelwelle entspricht. Die Welle kommt in diesem Fall "im Innern" der Quellenverteilung zustande. Ein Beispiel sind Anordnungen zur Kernfusion mit Lasern. Bei diesen wird ein kleines, kugelförmiges Stück Materie einem (infraroten) Laserpuls ausgesetzt. Die Anordnung ist so aufgebaut, daß das Materiestück im gleichen Zeitpunkt "von allen Seiten" (in Wirklichkeit aus 8 oder 16 Richtungen) von fokussierten Laserstrahlen getroffen wird.

Nun betrachten wir vektorielle Wellenfelder und untersuchen Lösungen von (18) und (19)

$$\square \mathbf{A}_R = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{A}_R = 0.$$

Wir beginnen mit ebenen Wellen und ergänzen  $\mathbf{n}$  durch zwei dazu orthogonale Einheitsvektoren  $\mathbf{e}_{(1)}$ ,  $\mathbf{e}_{(2)}$  zu einem orthogonalen Dreibein:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{(1)}^2 = \mathbf{e}_{(2)}^2 = \mathbf{n}^2 = 1, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_{(1)} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_{(2)} = \mathbf{e}_{(1)} \cdot \mathbf{e}_{(2)} = 0 \\ \mathbf{n} \times \mathbf{e}_{(1)} = \mathbf{e}_{(2)}, \quad \mathbf{n} \times \mathbf{e}_{(2)} = -\mathbf{e}_{(1)}, \quad \mathbf{e}_{(1)} \times \mathbf{e}_{(2)} = \mathbf{n} \end{aligned} \quad (28)$$

Spannen wir  $\mathbf{A}$  auf diese drei Vektoren auf

$$\mathbf{A}_R = \mathbf{e}_{(1)}a_{(1)} + \mathbf{e}_{(2)}a_{(2)} + \mathbf{n}a_{(3)},$$

so erhalten wir eine Lösung von  $\square \mathbf{A}_R = 0$ , wenn die Koeffizienten Funktionen von  $u$  sind  $a_{(i)} = a_{(i)}(u)$  (ebenso für Funktionen von  $v$ ). Die Transversalitätsbedingung  $\nabla \mathbf{A}_R = 0$  läßt sich leicht erfüllen. Mit

$$f_{(i)} = \frac{da_{(i)}}{du} \quad (29)$$

ist

$$\nabla a_{(i)} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{n} f_{(i)}$$

und wir erhalten wegen (28)

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_R = -f_{(3)}/\sqrt{2}.$$

Die Transversalität bedeutet also  $f_{(3)} = 0$ . Da ein konstanter Beitrag zu  $\mathbf{A}$  die Feldstärken nicht ändert und daher weggelassen werden kann, setzen wir

$$a_{(3)} = 0. \quad (30)$$

Damit erhalten wir

$$\mathbf{A}_R = \mathbf{e}_{(1)}a_{(1)}(u) + \mathbf{e}_{(2)}a_{(2)}(u). \quad (31)$$

Der Vektor  $\mathbf{A}_R$  ist daher senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. Für die Feldstärken erhält man

$$\mathbf{E}_R = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_{(1)}f_{(1)} + \mathbf{e}_{(2)}f_{(2)}), \quad \mathbf{B}_R = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_{(1)}f_{(2)} - \mathbf{e}_{(2)}f_{(1)}). \quad (32)$$

Die Richtung von  $\mathbf{E}_R$  liegt also in der Ebene senkrecht zu  $\mathbf{n}$  und ändert sich im Lauf der Zeit proportional zu  $f_{(1)}/f_{(2)}$ , analog für  $\mathbf{B}$ . Die Richtung von  $\mathbf{E}_R$  heißt die **Polarisationsrichtung** der Welle. Zwischen den Feldstärken gibt es einfache Relationen, die in jedem Punkt  $u$  gelten:

$$\mathbf{E}_R = \mathbf{B}_R \times \mathbf{n}, \quad \mathbf{B}_R = \mathbf{n} \times \mathbf{E}_R, \quad \mathbf{E}_R \cdot \mathbf{B}_R = 0.$$

Die Feldstärken sind also betragsgleich, zueinander senkrecht und bilden mit der Ausbreitungsrichtung ein orthogonales Dreibein. Für die Energiedichte bzw. den Poyntingvektor erhält man

$$w = \frac{1}{8\pi} (f_{(1)}^2 + f_{(2)}^2), \quad (33)$$

$$\mathbf{S} = \frac{c}{8\pi} \mathbf{n} (f_{(1)}^2 + f_{(2)}^2) = c\omega\mathbf{n}. \quad (34)$$

Die Energie strömt daher, wie zu erwarten war, in der Richtung  $\mathbf{n}$ , in der sich die Welle ausbreitet.

Ergänzt man die beiden Vektoren  $\mathbf{e}_{(1)}, \mathbf{e}_{(2)}$  durch die Zeitkomponente 0 zu zwei raumartigen Vierervektoren

$$e_{(i)}^\mu = (0, \mathbf{e}_{(i)}), \quad e_{(i)\mu}e_{(j)}^\mu = -\delta_{(i)(j)}, \quad i, j = 1, 2$$

so kann man das Vektorpotential kovariant schreiben

$$A_R^\mu = e_{(1)}^\mu a_{(1)}(u) + e_{(2)}^\mu a_{(2)}(u)$$

und sieht, daß es der Lorentzbedingung  $\partial_\mu A_R^\mu = 0$  genügt, die hier mit (19) identisch ist.  $A_R^\mu$  ist daher auch ein Potential in Lorentzzeichnung.

Eine Lösung, die in Richtung  $-\mathbf{n}$  läuft, entsteht durch Ersetzen von  $u$  durch  $v$ . Insgesamt bilden die vier Vektoren  $n^\mu, \hat{n}^\mu, e_{(i)}^\mu$  ein Vierbein im Minkowskiraum. Anstelle der kartesischen Koordinaten kann man daher die sogenannten **lichtartigen** Koordinaten

$$(u, v, x_\perp^i) \text{ mit } x_\perp^i = -e_{(i)}^\mu x_\mu \quad i = 1, 2$$

benützen, die der Wellenausbreitung besonders angepaßt sind. Sie sind auch außerhalb der Elektrodynamik verwendbar.

Nun betrachten wir als besonders einfachen Prototyp monofrequente ebene Wellen. Das bedeutet, daß die  $a_{(i)}$  trigonometrische Funktionen des Arguments

$$\phi = k_\mu x^\mu = \sqrt{2} \frac{\omega}{c} u = \omega t - \frac{\omega}{c} \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}$$

sind. Die Form

$$a_{(i)}(u) = b_{(i)} \cos(\phi + \delta_{(i)}) \quad i = 1, 2$$

mit konstanten Amplituden  $b_{(i)}$  und konstanten  $\delta_{(i)}$  (Phasenkonstanten) enthält alle Möglichkeiten. Der Polarisationsvektor einer solchen Welle dreht sich im Lauf der Zeit in der durch  $\mathbf{e}_{(1)}, \mathbf{e}_{(2)}$  bestimmten

Ebene, wobei er i.a. seine Länge ändert. Seine Spitze beschreibt eine Ellipse, die in Sonderfällen zu einem Kreis oder zu einer Geraden ausarten kann (vgl. Fig. 3.3). Die Darstellung ist so aufzufassen, daß man dabei in Richtung von  $\mathbf{n}$  schaut. Die gezeichneten Fälle entsprechen den folgenden Phasenunterschieden:

(a)  $\delta_{(1)} - \delta_{(2)} = \pi/4$  , (b)  $\delta_{(1)} - \delta_{(2)} = 0$  , (c)  $\delta_{(1)} - \delta_{(2)} = \pi/2$  .

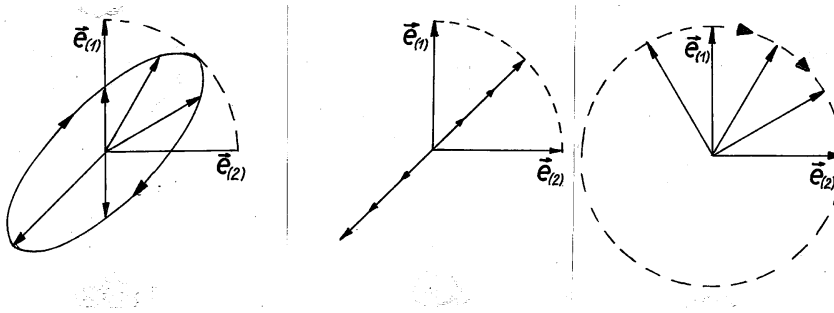


Fig. 3.3 (a) elliptische, (b) lineare, (c) rechtszirkulare Polarisation

Die allgemeine Lösung kann man aus diesen Prototypen aufbauen, indem man die Amplituden durch Funktionen von  $\omega$  und  $\mathbf{n}$  ersetzt

$$b_{(i)} = b_{(i)}(\omega, \mathbf{n})$$

und über alle (positiven) Werte von  $\omega$  sowie über alle möglichen Richtungen von  $\mathbf{n}$  integriert, also durch

$$\int_0^\infty d\omega \int d\Omega(\mathbf{n}) ,$$

wobei  $d\Omega$  das Flächenelement auf einer Kugel mit dem Radius 1 ist. Die Wellen mit  $\mathbf{n} \rightarrow -\mathbf{n}$ , also  $u \rightarrow v$  werden automatisch erfaßt, wenn über die ganze Kugel integriert wird. Man muß dabei aber beachten, daß die Vektoren  $e_{(i)}$  von der Richtung  $\mathbf{n}$  abhängen, mit der sie ein orthonormales Dreibein bilden müssen. Sie werden daher von der Winkelintegration betroffen. Die Integrationen über  $\omega$  und die Richtungen von  $\mathbf{n}$  können mit Hilfe von  $c\mathbf{k} = \omega\mathbf{n}$  als Integral über den  $\mathbf{k}$ -Raum geschrieben werden. Mit  $k = |\mathbf{k}|$  ist

$$d\omega d\Omega(\mathbf{n}) = cd^3k/k^2 .$$



Um den Integranden in kompakter Form angeben zu können, verwenden wir für den Kosinus die komplexe Darstellung

$$b_{(i)} \cos(\phi + \delta_{(i)}) = \frac{b_{(i)}}{2} \exp(-i\delta_{(i)}) \exp(-i\phi) + K.K.$$

Dabei bedeutet  $K.K.$  den durch komplexe Konjugation entstehenden Ausdruck. Benützen wir anstelle von  $b_{(i)}(\omega, \mathbf{n})$  die Kombination

$$A_{(i)}(\mathbf{k}) := \frac{c}{k} b_{(i)}(\omega, \mathbf{n}) \exp(-i\delta_{(i)}),$$

so erhalten wir für die allgemeine Lösung von (18), (19) die folgende Fourierdarstellung

$$\mathbf{A}_R(x) = \sum_{i=1}^2 \int \frac{d^3k}{2k} e_{(i)} (A_{(i)}(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - ikct) + K.K.) \quad (35)$$

Das Integral über den dreidimensionalen  $\mathbf{k}$ -Raum kann als Integral über den Zukunftskegel im vierdimensionalen  $k$ -Raum geschrieben werden. Dazu braucht man nur zu beachten, daß

$$\delta(k_\mu k^\mu) \Theta(k^0) = \frac{1}{2|k^0|} (\delta(k^0 - k) + \delta(k^0 + k)) \Theta(k^0) = \frac{\Theta(k)}{2k} \delta(k^0 - k)$$

ist. Damit erhält man

$$\int (\dots) \Theta(k^0) \delta(k_\mu k^\mu) d^4k = \int (\dots) \frac{d^3k}{2k}.$$

Mit den früher eingeführten Vierervektoren  $e_{(i)}^\mu$  kann man daher das Potential auch in explizit kovarianter Form schreiben:

$$A_R^\mu(x) = \sum_{i=1}^2 \int d^4k \delta(k_\mu k^\mu) \Theta(k^0) (e_{(i)}^\mu A_{(i)}(\mathbf{k}) \exp(-ik_\mu x^\mu) + K.K.). \quad (36)$$

Daß dieser Ausdruck der Lorentzbedingung und der Wellengleichung genügt, ist direkt abzulesen. Da  $x$  nur in der Exponentialfunktion vorkommt, ist

$$\partial_\mu \int (\dots) = \mp i \int k_\mu (\dots), \quad \square \int (\dots) = - \int k_\mu k^\mu (\dots).$$

Die Lorentzbedingung ist wegen  $k_\mu e_{(i)}^\mu = 0$  erfüllt, die Wellengleichung wegen  $k_\mu k^\mu \delta(k_\mu k^\mu) = 0$ . Analog kann man die entsprechenden Eigenschaften für (35) zeigen. Mit der gleichen Technik erhält man auch die Fourierdarstellungen für die Feldstärken.

Obwohl der Integrand nur aus ebenen Wellen zusammengesetzt ist, kann man mit geeigneten Koeffizienten  $A_{(i)}(\mathbf{k})$  alle möglichen Symmetrietypen herstellen: die **allgemeine** Lösung enthält wirklich "alles". Davon kann man sich durch spezielle Ansätze für  $A_{(i)}(\mathbf{k})$  überzeugen.

## Übungen

- 15) Wieviele Perioden einer monochromatischen ebenen Welle mit der Wellenlänge  $\lambda = 1\mu\text{m}$  entsprechen einem Zeitintervall von einer Picosekunde?
- 16) Eine Quelle bewegt sich in Bezug auf einen ruhenden Beobachter  $B$  mit konstanter Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$ . Sie sendet eine monochromatische, skalare, ebene Welle aus, die im Ruhesystem der Quelle durch die Frequenz  $\omega'$  und die Ausbreitungsrichtung  $\mathbf{n}'$  charakterisiert sei. Zeige, daß  $B$  ebenfalls eine monochromatische ebene Welle sieht. Berechne die von  $B$  beobachtete Frequenz und diskutiere die Grenzfälle  $\mathbf{n} \perp \mathbf{v}$ ,  $\mathbf{n} \parallel \mathbf{v}$ .
- 17) Betrachte die folgende Fourierdarstellung für eine skalare ebene Welle:

$$A(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\omega a(\omega) \exp(-i\omega(t - \frac{x}{c})) + K.K.$$

- (a) Stelle die Welle als Integral über negative und positive Werte von  $\omega$  dar.
- (b) Berechne  $A(t, x)$  für

$$a(\omega) = \frac{a_0}{\omega^2 - \omega_0^2 - \Gamma^2 - 2i\Gamma\omega} \quad (a_0, \omega_0 > 0, \Gamma \text{ reelle Konst.})$$

und diskutiere das Resultat für  $x - ct > 0$  für beide Vorzeichen von  $\Gamma$ .

- 18) Betrachte die im vorhergehenden Beispiel angegebene Fourierdarstellung für  $A(t, \mathbf{n} \cdot \mathbf{x})$  und untersuche die Überlagerung

$$\int A(t, \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) d\Omega(\mathbf{n})$$

Welchem Symmetrietyp entspricht sie? Welche einfachen Bestandteile sind enthalten?

- 19) Betrachte zwei skalare, ebene Wellen mit gleicher spektraler Zusammensetzung  $a(\omega)$ , aber verschiedenen Ausbreitungsrichtungen
- (a) Berechne die durch

$$I(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt |A(t, \mathbf{x})|^2$$

definierte Intensität der Überlagerung der beiden Wellen.

- (b) Betrachte für die Verteilung

$$|a|^2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{a_0^2}{\Delta} \exp\left(-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\Delta^2}\right)$$

$$\omega > 0, \omega_0 > 0, \Delta \ll \omega_0$$

die Intensität entlang einer Geraden, die in der durch die beiden Ausbreitungsrichtungen definierten Ebene senkrecht zur Winkelsymmetralen der beiden Richtungen steht und berechne die Interferenzmaxima.

- 20) Überlagere die Vektorpotentiale von zwei monochromatischen, ebenen Wellen mit gleicher Amplitude und Frequenz, aber entgegengesetzter Ausbreitungsrichtung. Die Wellen sollen

- (a) im gleichen,  
 (b) im entgegengesetzten Sinn

zirkular polarisiert sein. Welches Muster zeigt die Überlagerung?

Bei welchen (Kombinationen von) Transformationen in Raum und/oder Zeit ist das resultierende Vektorpotential invariant?

### 3.5 Lösung der Maxwellgleichungen bei gegebenen Quellen

Nun gehen wir daran, die Maxwellgleichungen im allgemeinen Fall zu “lösen”, d.h. die Felder beliebiger vorgegebener Ladungs- und Stromverteilungen zu berechnen. Streng genommen sollte man hier nicht von einer Lösung der Gleichungen sprechen, sondern von einer **Auflösung** nach den Feldern bzw. Potentialen. In Wirklichkeit haben wir es prinzipiell mit einem Wechselwirkungsproblem zu tun: die Gleichungen beschreiben die **Wechselwirkung** von Ladungs- und Stromdichten mit den von ihnen erzeugten Feldern, d.h. auch die Rückwirkung der Felder auf den Mechanismus, der für das Zustandekommen der Ladungs- und Stromdichten verantwortlich ist. Eine konsistente, abgeschlossene Theorie muß auch diesen Mechanismus (und seine Dynamik) umfassen: dann sind aber die Ladungs- und Stromdichten (die Quellen der Felder) nicht beliebig vorgebar, sondern müssen ebenso aus der gesamten Dynamik bestimmt werden, wie die Felder. Auf mikroskopischem, fundamentalem Beschreibungsniveau geschieht das in der Quantenelektrodynamik. Für manche physikalischen (und sogar technischen) Vorgänge ist es jedoch auch auf dem Beschreibungsniveau der klassischen Physik nötig, ein echtes Wechselwirkungsproblem im beschriebenen Sinn zu lösen (z.B. in der Plasmaphysik). Die folgende Auflösung kann dann höchstens ein (mehr oder minder zweckmäßiger) Schritt zur Lösung des betreffenden Problems sein.

Wir führen die Auflösung für die Potentiale durch und benutzen die Lorentzgleichung. Dann haben wir die Gleichungen (2.27) und (2.28) zu betrachten:

$$\square A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu, \quad \partial_\mu A^\mu = 0.$$

Wir konstruieren eine Lösung der inhomogenen Wellengleichung mit Hilfe einer entsprechenden Greenschen Funktion, d.h. einer Lösung  $D_G(x)$  der Gleichung

$$\square D_G(x) = \delta(x). \quad (37)$$

Dabei bedeutet  $\delta$  die vierdimensionale  $\delta$ -Funktion. Form und Eigenschaften dieser Greenschen Funktionen sind in Anhang A5 dargestellt. Der Ausdruck

$$A^\mu(x) = \frac{4\pi}{c} \int D_G(x-x') j^\mu(x') d^4x' \quad (38)$$

erfüllt dann die inhomogene Wellengleichung. Daß er auch der Lorentzbedingung genügt, kann man durch Translation

$$\int D_G(x - x') j^\mu(x') d^4 x' = \int D_G(z) j^\mu(x - z) d^4 z$$

sehen: die Bedingung reduziert sich auf die Kontinuitätsgleichung für  $j^\mu$ . Der angegebene Ausdruck (38) ist aber noch nicht eindeutig festgelegt, solange wir nicht sagen, **welche** Greensche Funktion wir betrachten. Addiert man zu dem Ausdruck eine beliebige Lösung der homogenen Wellengleichung, so erhält man ebenfalls eine Lösung der inhomogenen Gleichung. Die allgemeine Lösung erhält man durch Kombination von (38) mit einer speziellen Funktion  $D_G$  und der allgemeinen Überlagerung (36). In physikalischen Anwendungen ist man nicht an der so entstandenen (riesigen) Lösungsmannigfaltigkeit interessiert, sondern an einer möglichst engen Auswahl. Welche man trifft (d.h. welche von den Greenfunktionen und welche homogene Lösung man betrachtet), hängt von der physikalischen Problemstellung ab.

Verlangen wir, daß die Strahlung außerhalb der Quellen nur auslaufende Kugelwellen enthalten soll, so müssen wir  $D_{(ret)}$  nehmen und erhalten die Lösung

$$A_{(ret)}^\mu(x) = \frac{4\pi}{c} \int d^4 x' D_{(ret)}(x - x') j^\mu(x'). \quad (39)$$

Mit der expliziten Darstellung aus (A5. T1) erhält man durch Ausführen des Zeitintegrals

$$A_{(ret)}^\mu(x) = \frac{1}{c} \int d^3 x' \frac{j^\mu(c\tau', \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad \tau' = t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}. \quad (40)$$

Diese Ausdrücke ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ) heißen die **retardierte Potentiale**. Vergleichen wir den Ausdruck für das skalare Potential  $A^0 = \Phi$  mit dem instantanen Coulombpotential (2.31), so sehen wir, daß hier das Potential zur Zeit  $t$  durch die Ladungsdichte zu **früheren** Zeiten  $\tau' < t$  hervorgerufen wird. Dasselbe gilt für die Feldstärken, die man durch Differentiation erhält. Die anschauliche Bedeutung kann am Beispiel einer bewegten Punktladung (Übung 2.4) diskutiert werden. Die Retardierungseffekte bringen die relativistische Kausalität zum Ausdruck: die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist **endlich** und gleich  $c$ , eine **instantane** Wirkung ist mit der Relativitätstheorie nicht verträglich (sie entspricht  $c \rightarrow \infty$ ). Die Vernachlässigung der Retardierung kann aber unter Umständen eine brauchbare Näherung darstellen.

Man beachte, daß die relativistischen Effekte auch in der Coulombgleichung auftreten müssen, denn sie treten in den Feldstärken auf, die eichinvariant (d.h. für jede Eichung dieselben) sind. In dem Ausdruck für die elektrische Feldstärke  $\mathbf{E} = -\partial\mathbf{A}/c\partial t - \nabla\Phi$  ändern sich bei Umeichung zwar die Beiträge der beiden Terme, die Summe bleibt aber stets dieselbe. Die nichtinstantanen Beiträge sind in der Coulombgleichung in  $\mathbf{A}_T$  enthalten. Mit derselben Argumentation wie oben sieht man, daß die Lösung durch  $\mathbf{A}_T = \mathbf{A}_{(ret)}$  mit dem transversalen Strom (2.37) gegeben ist.

Die eventuell zu addierende homogene Lösung muß im Prinzip aus den Anfangsbedingungen bestimmt werden. Nehmen wir z.B. an, daß  $j^\mu(x)$  **alle** möglichen Quellen elektromagnetischer Felder enthält, die zu einer frühen Zeit  $t_1 (\rightarrow -\infty)$  plötzlich eingeschaltet werden. Dann sind am Anfang (d.h. für  $t < t_1$ ) keine Felder vorhanden. Diese Anfangsbedingung bedeutet, daß zu dieser Zeit  $A^\mu$  die Viererdivergenz einer skalaren Funktion sein muß:

$$A^\mu (t < t_1) = \partial^\mu A .$$

Man kann überlegen, daß man durch Eichtransformation  $A = 0$  erreichen kann (und zwar so, daß man dadurch innerhalb der Klasse der Lorentzeichungen oder Strahlungseichungen bleibt). Daher ist die Lösung für diese Anfangsbedingung  $A^\mu = A_{(ret)}^\mu$  **ohne Zusätze**.

In vielen Problemen ist jedoch eine andere Situation vorgelegt. An einer Stelle sind Quellen vorhanden, die eine genau bekannte Strahlung aussenden (z.B. ein Radiosender oder eine Lichtquelle). In großer Entfernung vom Sender gibt es weitere Ladungsträger (z.B. in der Empfangsantenne bzw. in einem Stück Materie, an dem das Licht gebeugt wird). Man interessiert sich dabei nicht für die Details, die für die Erzeugung der primären Strahlung maßgebend sind, sondern faßt diese als vorgegebene einfallende Welle  $A_{(-)}^\mu$  bzw.  $F_{(-)}^{\mu\nu}$  auf, die eine Lösung der quellenfreien Maxwellgleichungen  $\square A_{(-)}^\mu = \partial_\mu A_{(-)}^\mu = 0$  ist. Das Wort "einfallend" darf nicht mißverstanden werden: es muß sich nicht um eine einlaufende Kugelwelle handeln; jede freie Lösung ist denkbar, z.B. auch eine ebene Welle. Was in diesem Zusammenhang interessiert, ist der Einfluß der **nicht** zum Sender gehörigen Quellen auf die einfallende Welle. Man wird dann **nur** diese Quellen in  $j^\mu$  aufnehmen. Die einfallende Welle ist dann die Lösung der homogenen Gleichung und die ganze Lösung lautet

$$F^{\mu\nu} = F_{(-)}^{\mu\nu} + F_{(ret)}^{\mu\nu}, \quad F_{(ret)}^{\mu\nu} = \partial^\mu A_{(ret)}^\nu - \partial^\nu A_{(ret)}^\mu. \quad (41)$$

$F_{(-)}^{\mu\nu}$  ist dann der Anteil von  $F^{\mu\nu}$ , der in der fernen Vergangenheit ( $t < t_1$ , vor "Einschalten" der **nicht zum Sender gehörigen** Quellen) übrigbleibt. Mathematisch heißt das, daß wir aus dem asymptotischen Verhalten zu **frühen** Zeiten  $F^{\mu\nu}(t < t_1) = F_{(-)}^{\mu\nu}$  die Lösung  $F^{\mu\nu}$  zu **späteren** Zeiten bestimmen.

Es ist möglich und logisch durchaus sinnvoll, das umgekehrte Problem zu betrachten. Wir denken uns die nicht zum Sender gehörigen Quellen zu sehr später Zeit  $t = t_2 (\rightarrow +\infty)$  ausgeschaltet. Dann bleibt eine Lösung der freien Maxwellgleichung  $F_{(+)}^{\mu\nu}$  übrig. Wir können die Lösung zu einem **früheren** Zeitpunkt aus diesem asymptotischen Verhalten für **große** Zeiten zurückgewinnen. Dazu müssen wir lediglich beachten, daß es sich dabei um den zeitlich gespiegelten Prozeß handelt (bewegungsumgekehrter Vorgang: er entspricht einem umgekehrt ablaufenden Film). Das heißt, daß wir in diesem Fall das **avancierte** Potential verwenden müssen, denn  $D_{(ret)}$  und  $D_{(av)}$  vertauschen dabei ihre Rollen. Daher ist

$$F^{\mu\nu} = F_{(+)}^{\mu\nu} + F_{(av)}^{\mu\nu}, \quad F_{(av)}^{\mu\nu} = \partial^\mu A_{(av)}^\nu - \partial^\nu A_{(av)}^\mu \quad (42)$$

$$A_{(av)}^\mu(x) = \frac{4\pi}{c} \int D_{(av)}(x - x') j^\mu(x') d^4 x' = \frac{1}{c} \int \frac{j^\mu(c\hat{r}', \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x' \quad (43)$$

$$\hat{r}' = t + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}.$$

Diese avancierten Potentiale  $A_{(av)}^\mu$  bzw. die zugehörigen Felder  $F_{(av)}^{\mu\nu}$  können (ohne Vorstellung eines umgekehrten Kausalzusammenhanges) anschaulich interpretiert werden: es handelt sich um den von den Quellen  $j^\mu$  absorbierten Anteil des gesamten Feldes  $F^{\mu\nu}$ . Die Lösung (43) **ohne** Zusatzterme entspricht einer Situation, in der nur absorbierende Stromverteilungen  $j^\mu$  (die man dann nicht Quellen, sondern Senken nennen sollte) vorhanden sind. Sollen mit  $j^\mu$  wirklich **alle** Ursachen elektromagnetischer Felder erfaßt werden, so ist das nach aller Erfahrung eine nicht realisierbare Situation. Als Idealisierung könnte man sie allenfalls heranziehen, wenn man die Absorption durch ein Target beschreiben will, das einer einlaufenden Kugelwelle ausgesetzt wird (vgl. Abschnitt 3.4). Weitaus wichtiger sind die avancierten Potentiale aber in einem ganz anderen Zusammenhang. Dazu betrachten wir die in



(41) bzw. (42) betrachtete Situation, in der  $j^\mu$  nicht **alle** Ursachen von Feldern enthält. In ferner Vergangenheit ist  $F^{\mu\nu}$  gleich  $F_{(-)}^{\mu\nu}$ , in ferner Zukunft gleich  $F_{(+)}^{\mu\nu}$ . Die Differenz dieser beiden Felder heißt **Strahlungsfeld**

$$F_{(str)}^{\mu\nu} = F_{(+)}^{\mu\nu} - F_{(-)}^{\mu\nu} = F_{(ret)}^{\mu\nu} - F_{(av)}^{\mu\nu} . \quad (44)$$

Das zugehörige Viererpotential hat die Form

$$A_{(str)}^\mu(x) = \frac{4\pi}{c} \int D(x - x') j^\mu(x') d^4x' \quad (45)$$

mit der Funktion  $D = D_{(ret)} - D_{(av)}$  (vgl. Anhang 5), die eine Lösung der homogenen Wellengleichung ist. Das Strahlungsfeld ist daher im ganzen Raum und für alle Zeiten eine Lösung der quellenfreien Maxwellgleichungen. Physikalisch beschreibt es den Unterschied zwischen den herausgekommenen Wellen ( $F_{(+)}^{\mu\nu}$ ) und den hineingelaufenen ( $F_{(-)}^{\mu\nu}$ ) oder mit anderen Worten den "Nettoeinfluß" der in  $j^\mu$  enthaltenen Quellen: den Anteil, den sie emittieren ( $F_{(ret)}^{\mu\nu}$ ) minus dem Anteil, den sie absorbieren ( $F_{(av)}^{\mu\nu}$ ). Bei einer Reihe von Problemen ist man direkt an diesem Feld interessiert. Selbst wenn das nicht der Fall ist, kann man u.U. mit dem Strahlungsfeld auskommen. Ein solcher Fall liegt z.B. vor, wenn man nur am asymptotischen Verhalten von  $F^{\mu\nu}$  zu sehr späten Zeiten interessiert ist. In diesem Bereich ist  $F_{(av)}^{\mu\nu} = 0$  und man kann daher das gesuchte Verhalten mit  $F_{(str)}^{\mu\nu}$  statt mit  $F_{(ret)}^{\mu\nu}$  (d.h. mit  $D$  statt  $D_R$ ) berechnen. Natürlich darf man dabei eine einfallende Welle (sofern es sie gibt) nicht vergessen: das gesamte asymptotische Feld für späte Zeiten ist

$$F_{(+)}^{\mu\nu} = F_{(str)}^{\mu\nu} + F_{(-)}^{\mu\nu} .$$

Der einfallende Anteil wird i.A. auch für späte Zeiten "überleben", wie man am Beispiel einer ebenen Welle sehen kann, die es zu allen Zeiten gibt (die daher eine "durchlaufende" Welle ist).

Ist in einem konkreten Problem das Feld gesucht, das eine gegebene Quellenverteilung hervorruft (bzw. modifiziert), so müssen die retardierten Potentiale durch Berechnung des Integrals ermittelt und daraus die Feldstärken durch Differenzieren bestimmt werden. Im Abschnitt 3.7 werden wir eine Reihenentwicklung untersuchen, mit der das Feld einer begrenzten Verteilung in großem Abstand bestimmt werden kann. Bei Problemen, in denen die Reihe nicht brauchbar ist, muß man mit der Integralform "leben".

Durch Anwendung der Fouriertransformation (in vier Dimensionen) kann man das Integral in ein solches über die fouriertransformierte Stromdichte umformen. Das ist besonders zweckmäßig, wenn es um das Strahlungsfeld geht, weil die Fouriertransformation von  $D$  besonders einfach ist: die enthaltene  $\delta$ -Funktion ermöglicht die Ausführung einer der Integrationen.

### 3.6 Die abgestrahlte Energie

Hat man es mit der Abstrahlung elektromagnetischer Wellen durch eine Quellenverteilung zu tun, so interessiert man sich nicht direkt für die Feldstärken, sondern für die Intensität der ausgesandten Strahlung. Eine damit zusammenhängende Größe ist die Verteilung der Intensität auf die Raumrichtungen (die Winkelverteilung: wieviel wird pro Raumwinkelement  $d\Omega$  emittiert). Außerdem kann man sich dafür interessieren, wie sich die gesamte Intensität auf die ausgestrahlten Frequenzen verteilt (die Spektralverteilung: wieviel wird pro Frequenzintervall  $d\omega$  emittiert). Ein Maß für "wieviel", d.h. für die Intensität liefert die in einem bestimmten Bereich auftretende Energiestromdichte  $\mathbf{S} = \mathbf{S}_{(em)}$ . Betrachten wir ein Raumwinkelement  $d\Omega$  um die Richtung  $\mathbf{e}$  ( $\mathbf{e} = \mathbf{x}/r$ ) so strömt pro Sekunde durch dieses Flächenstück die Energie

$$dN = \mathbf{S} \cdot d\mathbf{f} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{e} r^2 d\Omega . \quad (46)$$

Für Kugelwellen (als typisches Beispiel von Wellen, die von elektromagnetischen Quellen emittiert werden) nimmt  $\mathbf{S}$  mit dem Quadrat des Abstandes  $r$  von den Quellen ab. Der betrachtete Ausdruck bleibt daher auch bei großen Abständen endlich. Die Größe  $dN$  ist somit ein vernünftiges Maß für die Strahlungsintensität.  $N$  hat die Dimension einer Leistung (Energie/Zeit). Die Winkelverteilung ist durch  $dN/d\Omega$  gegeben. Um  $dN$  zu berechnen, muß man im Prinzip die Feldstärken berechnen und aus dem Resultat den Poyntingvektor

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$$

bestimmen. Das ist praktisch nur dann möglich, wenn die Integrale (40) einigermaßen einfach sind.

Eine Alternative besteht darin, die gesamte im Feld enthaltene Energie  $W_{(em)}$  zu berechnen. Diese ist das Zeitintegral der Leistung

$$W_{(em)} = \int N dt .$$

Wenn es gelingt,  $W_{(em)}$  als Integral über Frequenzen  $\omega$  und Richtungen zu schreiben

$$W_{(em)} = \int U(\omega, \mathbf{n}) d\omega d\Omega , \quad (47)$$

so kennt man die ganze im Lauf der Zeit ausgestrahlte Leistung und kann daraus Aussagen über die Spektral- und Winkelverteilung der Strahlung gewinnen. Die folgende Betrachtung liefert eine Vorgangsweise zur Ermittlung der differentiellen Verteilung  $U$ .

Wir betrachten die Situation, in der  $j^\mu$  alle Quellen enthält, sodaß es keine einfallende Welle gibt: wir interessieren uns also nur für die von gegebenen Quellen  $j^\mu$  emittierte Strahlung, d.h. für die Lösung (40) (eine Ausdehnung auf andere Situationen ist möglich, soll aber hier nicht untersucht werden; die betrachtete Situation ist wohl die wichtigste). Wir nehmen außerdem an, daß die Quellen auf ein endliches Gebiet beschränkt bleiben. Als Ausgangspunkt betrachten wir den gesamten Viererimpuls des elektromagnetischen Feldes (2.49)

$$P_{(em)}^\nu = \oint T_{(em)}^{\mu\nu} d\sigma_\mu .$$

In der folgenden Überlegung ist mit  $P^\nu$  bzw.  $T^{\mu\nu}$  stets der auf das Feld entfallende Anteil gemeint; wir lassen den Index  $(em)$  weg. Als Randhyperflächen des (geschlossenen) Integrationsbereiches betrachten wir zwei Hyperflächen zu sehr später bzw. sehr früher Zeit:

$$\oint = \int_{\Sigma_2} - \int_{\Sigma_1} \quad \Sigma_2 : t \rightarrow +\infty , \quad \Sigma_1 : t \rightarrow -\infty .$$

$T^{\mu\nu}$  ist mit den retardierten Feldstärken zu bilden, was wir durch

$$T^{\mu\nu} = T_{(ret)}^{\mu\nu}$$

andeuten. Die Randfläche  $\Sigma_1$  gibt dann keinen Beitrag, weil auf ihr  $F_{(ret)}^{\mu\nu}$  verschwindet. Für Quellen, die (lt. Annahme) auf ein endliches Gebiet beschränkt sind, verschwindet  $j^\mu$  auf dem gesamten Rand ( $\Sigma_1, \Sigma_2$ ). Mit dem Gaußschen Satz in vier Dimensionen und mit (2.51) erhalten wir

$$cP^\nu = c \oint T_{(ret)}^{\mu\nu} d\sigma_\mu = c \int \partial_\mu T_{(ret)}^{\mu\nu} d^4x = \frac{1}{c} \int j_\mu(x) F_{(ret)}^{\mu\nu}(x) d^4x .$$

Im Integranden führen wir die Potentiale ein und formen um:

$$\begin{aligned} j_\mu F^{\mu\nu} &= j_\mu \partial^\mu A_{(ret)}^\nu - j_\mu \partial^\nu A_{(ret)}^\mu = \\ &= \partial^\mu (j_\mu A_{(ret)}^\nu) - A_{(ret)}^\nu \partial^\mu j_\mu - j_\mu \partial^\nu A_{(ret)}^\mu \end{aligned}$$

Im Integral “überlebt” nur der letzte Term: der erste Ausdruck gibt ein Integral über den Rand, auf dem  $j_\mu$  verschwindet, der zweite verschwindet wegen der Kontinuitätsgleichung für  $j_\mu$ . Mit der Lösung (39) erhalten wir

$$cP^\nu = -\frac{4\pi}{c^2} \int j_\mu(x) j^\mu(y) \partial^\nu D_{(ret)}(x-y) d^4x d^4y .$$

Ersetzen wir im Integranden

$$\partial^\nu D_{(ret)}(x-y) \rightarrow \frac{1}{2} (\partial^\nu(x) D_{(ret)}(x-y) + \partial^\nu(y) D_{(ret)}(y-x))$$

so bedeutet das nur ein Umtaufen der Integrationsvariablen, bei der sich  $j_\mu(x) j^\mu(y)$  nicht ändert. Mit

$$\partial^\nu(y) D_{(ret)}(y-x) = -\partial^\nu(x) D_{(av)}(x-y)$$

und

$$D_{(ret)} - D_{(av)} = D$$

(vgl. Anhang A5) erhält man die Form

$$cP^\nu = -\frac{2\pi}{c^2} \int j_\mu(x) j^\mu(y) \partial^\nu D(x-y) d^4x d^4y .$$

Durch Einsetzen der Fourierdarstellung aus (A5.T2) wird daraus

$$cP^\nu = -\frac{1}{4\pi^2 c^2} \int d^4k \epsilon(k^0) \delta(k^2) k^\nu \tilde{j}_\mu(k) \tilde{j}^\mu(-k) . \quad (48)$$

Dabei bedeutet  $\tilde{j}$  das vierdimensionale Fourierintegral

$$\tilde{j}_\mu(k) = \int j_\mu(x) \exp(ik \cdot x) d^4x, \quad \tilde{j}_\mu(-k) = \tilde{j}_\mu^*(k) .$$

Wir formen das Skalarprodukt der Stromdichten  $\tilde{j}_\mu$  etwas um. Dazu beachten wir, daß die Kontinuitätsgleichung für  $j_\mu(x)$  der Beziehung

$$k^\mu \tilde{j}_\mu(k) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \tilde{j}^0 = (\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{j}})/k^0$$

entspricht. Eliminiert man damit  $\tilde{j}^0$  und beachtet, daß die  $\delta$ -Funktion in (48) für  $(k^0)^2 = \mathbf{k}^2$  sorgt, so erhält man

$$\tilde{j}_\mu(k)\tilde{j}^\mu(-k) = -|(\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{j}}(k))|^2, \quad \mathbf{n} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|.$$

Mit Hilfe der  $\delta$ -Funktion kann die Integration über  $k^0$  ausgeführt werden. Anstelle von  $|\mathbf{k}|$  benützen wir die Frequenz, d.h. wir setzen

$$|\mathbf{k}| = \frac{\omega}{c}, \quad d^3k = \frac{\omega^2 d\omega d\Omega}{c^3}.$$

Damit erhalten wir  $W = cP^0$  als Integral über  $d\omega d\Omega$ . Der Integrand lautet in Termen von  $\mathbf{j}(t, \mathbf{x})$

$$\begin{aligned} \frac{dW}{d\omega d\Omega} &= U(\omega, \Omega) = \\ &= \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^3} \left| \int dt d^3x (\mathbf{n} \times \mathbf{j}(t, \mathbf{x})) \exp\left(i\omega\left(t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{c}\right)\right) \right|^2. \end{aligned} \quad (49)$$

Diese Formel ist dann brauchbar, wenn man das enthaltene Fourierintegral berechnen kann. Eine Bemerkung zur Zeitintegration in (49) erscheint angebracht. Wir haben bei der Herleitung angenommen, daß die Quellen auch in der Zeit auf einen endlichen Bereich beschränkt sind. Je länger sie eingeschaltet sind, desto mehr Energie wird abgestrahlt. Es ist daher physikalisch sinnvoll, anstelle von  $W$  die Strahlungsrate zu betrachten, die man erhält, indem man durch die ganze Zeit  $T$  dividiert, in der die Quelle wirkt. Das entspricht dem zeitlichen Mittelwert der Strahlungsleistung

$$R = \frac{W}{T} = \frac{1}{T} \int_0^T N dt = \langle N \rangle = \frac{1}{T} \int U d\omega d\Omega. \quad (50)$$

Mit (47) bzw. (49) erhält man als Spektralverteilung

$$\frac{dR}{d\omega} = \frac{1}{T} \int U d\Omega \quad (51)$$

und als Winkelverteilung

$$\frac{dR}{d\Omega} = \frac{1}{T} \int U d\omega \quad (52)$$

Im Gegensatz zu  $dW$  ist die Strahlungsrate in vielen Fällen selbst für große Zeiten ein sinnvoller Ausdruck.

Nach der Quantentheorie besteht elektromagnetische Strahlung mit der Frequenz  $\omega$  aus Photonen mit der Energie  $\hbar\omega$ . Die Zahl  $dN_{Ph}$  der ausgesandten Photonen ist daher pro Frequenz

$$dN_{Ph} = dN/\hbar\omega$$

Das darf aber nicht darüber hinwegtäuschen, daß die Formel, mit der  $dN$  berechnet wurde, eine klassische Formel ist.

### 3.7 Multipolstrahlung

Als Anwendung der im Abschnitt (3.6) untersuchten Lösung betrachten wir nun eine Situation, in der die Quellen  $j^\mu(x)$  zu allen Zeiten auf ein endliches Gebiet beschränkt bleiben. Ein Maß für die Ausdehnung des Gebietes sei  $a$ . Für die von Teilchen (Molekülen, Atomen, Kernen usw.) emittierte Strahlung ist  $a$  ein für das betrachtete Teilchen charakteristischer Radius, für die Strahlung eines Radiosenders die Länge der Antenne etc. Wir betrachten das Feld in **großem** Abstand von der Quelle und gehen dazu von (40) aus. Legen wir den Ursprung des Koordinatensystems in das Innere der Verteilung, so bedeuten große Abstände

$$r = |\mathbf{x}| \gg a \sim |\mathbf{x}'|. \quad (53)$$

Durch Entwicklung von  $1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$  erhalten wir für das Vektorpotential (vgl. Abschnitt 3.3)

$$\mathbf{A}_{(ret)}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{cr} \int \mathbf{j}(\tau', \mathbf{x}') d^3x' + \frac{1}{cr^2} \int (\mathbf{e} \cdot \mathbf{x}') \mathbf{j}(\tau', \mathbf{x}') d^3x' + \dots \quad (54)$$

Dabei ist  $r$  im Zeitargument  $\tau'$  noch enthalten:

$$\tau' = t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c} = t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{e} \cdot \mathbf{x}'}{c} + O\left(\frac{x'^2}{r}\right) = \tau + \frac{\mathbf{e} \cdot \mathbf{x}'}{c} + \dots$$

Für eine beliebige Bewegung der Ladungsträger in der Quelle muß man mit den in (54) auftretenden Integralen weiterrechnen. Zu einer einfacheren Form für große Abstände kann man hingegen kommen, wenn  $\mathbf{e} \cdot \mathbf{x}'/c$  klein gegen  $\tau$  ist. Das bedeutet, daß die **relativen** Retardierungen der einzelnen Punkte der Quelle nicht zu groß sein dürfen. Die Ladungsträger, aus denen die Quelle besteht, dürfen sich also nicht zu schnell bewegen. Ein Kriterium dafür erhält man, wenn man an die Entwicklung von  $\mathbf{j}$  denkt. Diese ist offenbar erlaubt, wenn sich  $\mathbf{j}$  in der

Zeit  $e \cdot \mathbf{x}'/c$  nicht wesentlich ändert. Ist  $T$  eine für die Änderung von  $\mathbf{j}$  charakteristische Zeit, so soll also

$$\frac{e \cdot \mathbf{x}'}{c} \sim \frac{a}{c} \ll T \text{ bzw. } \frac{a}{T} \ll c \quad (55a)$$

sein. Das bedeutet, daß die Geschwindigkeit  $v \sim a/T$  der Ladungsträger klein gegen  $c$  sein muß: die Bewegung der Ladungsträger muß i.W. **nichtrelativistisch** erfolgen. Bei Schwingungen entspricht  $cT \sim \lambda$  der Wellenlänge  $\lambda$ . Das Kriterium bedeutet dann

$$\lambda \gg a . \quad (55b)$$

Ist (55b) erfüllt, so dürfen wir  $\mathbf{j}$  entwickeln

$$\mathbf{j}(\tau', \mathbf{x}') = \mathbf{j}(\tau, \mathbf{x}') + \frac{e \cdot \mathbf{x}'}{c} \frac{\partial \mathbf{j}(\tau, \mathbf{x}')}{\partial \tau} + \dots \quad (56)$$

Diese Entwicklung setzen wir nun in (54) ein. Damit die ganze Entwicklung auch bezüglich  $(e \cdot \mathbf{x}')/c$  konsequent ist, dürfen wir allerdings im zweiten Term von (54) nur den ersten Term von (56) mitnehmen. Wir betrachten damit Terme  $\sim 1/rc$ ,  $1/rc^2$ ,  $1/r^2c$  und vernachlässigen solche  $\sim 1/r^2c^2$ . Die Entwicklung für  $\mathbf{A}$  lautet dann

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{(ret)}(t, \mathbf{x}) &= \frac{1}{rc} \int \mathbf{j}(\tau, \mathbf{x}') d^3x' + \\ &+ \frac{1}{r^2c} \int (e \cdot \mathbf{x}') \left( 1 + \frac{r}{c} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \mathbf{j}(\tau, \mathbf{x}') d^3x' + \dots \end{aligned}$$

Nun verwenden wir die in Anhang A4 angegebenen Umformungen, mit denen wir Momente von  $\mathbf{j}$  in Zeitableitungen der Momente von  $\rho$  umwandeln können. Als Zeitargument tritt dabei stets die retardierte Zeit  $\tau = t - r/c$  auf. Um das Resultat übersichtlich schreiben zu können, bezeichnen wir die Ableitung nach  $\tau$  mit einem Punkt. Damit lautet die Entwicklung

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{(ret)}(t, \mathbf{x}) &= \frac{1}{rc} \dot{\mathbf{d}} + \frac{1}{r^2} \left( \boldsymbol{\mu} + \frac{r}{c} \dot{\boldsymbol{\mu}} \right) \times \mathbf{e} + \\ &+ \frac{1}{6r^2c} \left( \dot{\mathbf{Q}} + \frac{r}{c} \ddot{\mathbf{Q}} \right) \cdot \mathbf{e} + \frac{e}{6r^2c} \left( \dot{\mathbf{Q}} + \frac{r}{c} \ddot{\mathbf{Q}} \right) + \dots \end{aligned} \quad (57)$$

Die Dipolmomente  $\mathbf{d}$  bzw.  $\boldsymbol{\mu}$  und das Quadrupolmoment  $\mathbf{Q}$  sind dabei wie im statischen Fall definiert (vgl. (1.12b), (1.12c) und (16)), wobei aber jetzt  $\rho = \rho(\tau, \mathbf{x}')$ ,  $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\tau, \mathbf{x}')$  zu betrachten ist. Der Skalar

$$Q(\tau) = \int \rho(\tau, \mathbf{x}') \mathbf{x}'^2 d^3x'$$

tritt im statischen Fall nicht auf. Er entspricht einem zeitabhängigen mittleren quadratischen Radius der Ladungsverteilung, also einem Vorgang, bei dem die Ladungsverteilung in radialen Richtungen wächst oder schrumpft. Ein entsprechender Schwingungsvorgang würde einem periodischen "Ein- und Ausatmen" der Verteilung entsprechen (breathing mode). Es läßt sich zeigen, daß die Beiträge von  $Q(\tau)$  zu den Feldstärken verschwinden. Durch eine Eichtransformation kann man alle Beiträge von  $Q(\tau)$  zu  $A_{(ret)}^\mu$  wegbringen, und zwar so, daß man dabei innerhalb der Klasse der Lorentzzeichnungen bleibt. Solche "Atemschwingungen" führen daher zu keinem Strahlungsfeld.

Aus (57) kann man das Magnetfeld durch Differenzieren berechnen. Für das elektrische Feld braucht man aber auch das skalare Potential. Eine genaue Überlegung zeigt, daß man dabei die Entwicklung für  $\tau'$  weiter treiben muß, wenn man  $\rho$  mit gleicher Konsequenz wie  $\mathbf{j}$  entwickeln will. Diese mühsame Rechnung kann man sich ersparen. Da wir in Lorentzzeichnung rechnen, ist

$$\frac{\partial \Phi_{(ret)}}{\partial t} = -c \nabla \cdot \mathbf{A}_{(ret)}$$

Daraus kann man  $\Phi_{(ret)}$  durch Integration finden. Die Integration ist trivial, weil alle Terme in  $\nabla \cdot \mathbf{A}_{(ret)}$  Zeitableitungen enthalten. Integrationskonstanten dürfen weggelassen werden: sie würden zeitunabhängigen Feldern entsprechen, an denen wir nicht interessiert sind, da es hier um Multipol**strahlung** geht. Der einzige Aspekt, den man beachten muß, ist die Tatsache, daß  $\mathbf{A}_{(ret)}$  auch über  $\tau$  vom Ort abhängt. Mit den Formeln

$$\begin{aligned} \nabla f(r)g(\tau) &= \mathbf{e} \left( f'g - \frac{1}{c} f\dot{g} \right) \\ \nabla^i e^k f g &= e^i e^k \left( f'g - \frac{1}{c} f\dot{g} \right) + \frac{1}{r} (\delta^{ik} - e^i e^k) f g \end{aligned}$$

erhält man

$$\begin{aligned} \Phi_{(ret)}(t, \mathbf{x}) &= \frac{1}{r^2} \mathbf{e} \cdot \left( \mathbf{d} + \frac{r}{c} \dot{\mathbf{d}} \right) + \\ &+ \frac{1}{6r^3} \mathbf{e} \cdot \left( 3\mathbf{Q} + 3\frac{r}{c} \dot{\mathbf{Q}} + \frac{r^2}{c^2} \ddot{\mathbf{Q}} \right) \cdot \mathbf{e} + \frac{\ddot{Q}}{6rc^2} + \dots \end{aligned} \quad (58)$$



Die Berechnung der Feldstärken ist (unter Beachtung der Tatsache, daß die angegebenen Potentiale auch über  $\tau$  von  $r$  abhängen) zwar nur eine Differenzierübung, erfordert aber doch einige Mühe. Wir betrachten daher zwei Grenzfälle, die verschiedenen Abstandsbereichen entsprechen. In unserer Entwicklung kommen drei Längen vor:

- (1) die Ausdehnung  $a$  der Ladungsverteilung,
- (2) die Wellenlänge  $\lambda$  der emittierten Welle (bei nichtperiodischen Vorgängen: die in der für die Verteilung charakteristischen Zeit  $T$  zurückgelegte Strecke  $cT$ ),
- (3) der Abstand  $r$  zwischen der Verteilung und dem Punkt, in dem wir das Feld berechnen.

Für den Gültigkeitsbereich der Entwicklung muß

$$r \gg a \quad , \quad \lambda \gg a$$

sein. Damit ist noch nichts über die relative Größenbeziehung zwischen  $r$  und  $\lambda$  ausgesagt. Da  $\lambda$  und  $a$  für eine gegebene Verteilung  $j_\mu$  fixiert sind, kann man drei Zonen unterscheiden:

- (a) sehr große Abstände  $r \gg \lambda \gg a$  (Fernzone, Wellenzone)
- (b) einen Bereich "mittlerer" Entfernungen  $r \approx \lambda \gg a$ ,
- (c) Abstände, die klein gegen die Wellenlänge sind  $\lambda \gg r \gg a$  (quasi-statischer Bereich; gelegentlich wird dafür die Bezeichnung "Nahzone" verwendet, was aber in dem hier betrachteten Zusammenhang irreführend ist:  $r$  ist immer noch groß gegen  $a$ !).

Wir berechnen die Feldstärken nur in den Bereichen (a) bzw. (c).

In der **Wellenzone** ist die Retardierung wegen  $r \gg cT$  ein wichtiger Effekt. Man muß daher stets das Argument  $\tau$  verwenden. Bei der Berechnung der Feldstärken sind die Ableitungen nach  $\tau$  wichtiger als die Ableitungen nach  $\mathbf{x}$ , vgl. z.B.

$$\nabla \frac{1}{r} g(\tau) = -\frac{\mathbf{e}}{r^2} g(\tau) - \frac{\mathbf{e}}{cr} \dot{g}(\tau) = -\frac{\mathbf{e}}{r^2} \left( g + \frac{r}{c} \dot{g} \right) \approx -\frac{1}{r} \frac{\mathbf{e}}{c} \dot{g}(\tau)$$

weil  $r/cT \gg 1$  ist (analog für alle Ausdrücke in (57)).

Wir können daher  $\mathbf{B}$  in diesem Bereich mit der einfachen Formel

$$\mathbf{B}_{(w)} = -\frac{1}{c} \left( \mathbf{e} \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \tau} \right)$$

berechnen. Das gibt

$$\mathbf{B}_{(w)} = \frac{1}{rc^2} \left( \ddot{\mathbf{d}} + \dot{\boldsymbol{\mu}} \times \mathbf{e} + \frac{1}{6c} \mathbf{e} \cdot \ddot{\mathbf{Q}} \right) \times \mathbf{e} \quad r \gg \lambda \gg a \quad (59)$$

Für das elektrische Feld erhält man

$$\mathbf{E}_{(w)} = \mathbf{B}_{(w)} \times \mathbf{e} \quad r \gg \lambda \gg a \quad (60)$$

In der Wellenzone sind daher  $\mathbf{E}_{(w)}$  und  $\mathbf{B}_{(w)}$  senkrecht zu  $\mathbf{e}$ , senkrecht zueinander  $\mathbf{E}_{(w)} \cdot \mathbf{B}_{(w)} = 0$  und betragsgleich  $\mathbf{E}_{(w)}^2 = \mathbf{B}_{(w)}^2$ . Das Feld nimmt verhältnismäßig langsam ( $\sim 1/r$ ) ab. Der Poyntingvektor ist

$$\mathbf{S}_{(w)} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{e} \mathbf{B}_{(w)}^2 \quad r \gg \lambda \gg a. \quad (61)$$

Daraus sieht man, daß die Intensität (46) für einen festen Wert von  $\tau$  unabhängig von  $r$  ist.

In der Praxis ist meist die elektrische Dipolstrahlung (erster Term in (59)) am wichtigsten: die anderen Terme sind relativ dazu durch einen Faktor  $1/c$  verkleinert (im zweiten Term ist dieser in der Definition von  $\boldsymbol{\mu}$  enthalten). Es gibt jedoch auch Fälle, in denen  $\ddot{\mathbf{d}}$  verschwindet. Ein drastisches Beispiel sind Systeme, die aus Teilchen mit gleichem Verhältnis von Ladung zu Masse bestehen. In diesem Fall ist  $\mathbf{d}$  proportional zum Ortsvektor des Schwerpunktes und  $\boldsymbol{\mu}$  proportional zum Gesamtdrehimpuls. Wegen der entsprechenden Erhaltungssätze verschwinden  $\ddot{\mathbf{d}}$  und  $\dot{\boldsymbol{\mu}}$  und es gibt nur Quadrupolstrahlung.

Betrachten wir nun noch kurz die **quasistatische Zone**. In diesem Bereich ist die Retardierung eine kleine Korrektur und wir können nach Potenzen von  $1/c$  entwickeln. Im Dipolterm von (58) erhalten wir

$$\mathbf{d}(\tau) + \frac{r}{c} \dot{\mathbf{d}}(\tau) \approx \mathbf{d}(t) - \frac{r}{c} \frac{\partial \mathbf{d}(t)}{\partial t} + \frac{r}{c} \frac{\partial \mathbf{d}(t)}{\partial t} + \dots$$

Die unterste Retardierungskorrektur zum ersten Term kompensiert daher den unretardierte zweiten Term, d.h. die Näherung ist um eine Ordnung in  $1/c$  besser, als man zunächst vermuten würde. Dieser Effekt tritt auch in anderen Termen von (57) bzw. (58) auf. Bis auf Terme  $\sim 1/c^2$  erhalten wir damit die Entwicklungen

$$\Phi_{(ret)} = \frac{1}{r^2} \mathbf{e} \cdot \mathbf{d}(t) + \frac{1}{2r^3} \mathbf{e} \cdot \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{e} + \dots \quad \lambda \gg r \gg a \quad (62)$$

$$\mathbf{A}_{(ret)} = \frac{1}{r^2} \boldsymbol{\mu}(t) \times \mathbf{e} + \frac{1}{rc} \dot{\mathbf{d}}(t) + \frac{1}{6r^2c} \dot{\mathbf{Q}}(t) \cdot \mathbf{e} + \dots \quad \lambda \gg r \gg a \quad (63)$$

Die Terme ohne Ableitungen würde man aus den statischen Multipolentwicklungen (1.14) bzw. (3.15) erhalten, indem man die statischen Momente durch zeitabhängige ersetzt. In unterster Ordnung in  $1/r$  "überlebt" nur der elektrische Dipolbeitrag in (62) und (63). Das elektrische Feld ist das (quasistatische) Dipolfeld aus (1.15), das mit  $1/r^3$  abnimmt. Das zugehörige magnetische Feld erhält man aus dem zweiten Term in (63). Es ist um eine Ordnung in  $1/c$  kleiner als das elektrische Feld, nimmt aber langsamer (nämlich mit  $1/r^2$ ) ab. Beide Aspekte sind von den Maxwellgleichungen her qualitativ einleuchtend. Ein zeitabhängiges elektrisches Feld führt zu einem Magnetfeld, wobei  $\mathbf{B}$  mit  $\partial\mathbf{E}/c\partial t$  verknüpft ist. Dieses Magnetfeld muß langsam genug abnehmen, sonst kann in der Fernzone kein "ganz langsam" abnehmendes Strahlungsfeld übrigbleiben. Trotzdem ist festzustellen, daß die quasistatischen Beiträge von  $\mathbf{d}$  rascher abnehmen, als die entsprechenden Terme im Fernfeld. Die Änderung im Abstandsverhalten passiert im Bereich "mittlerer" Abstände über relativistische Effekte. In nichtrelativistischer Näherung (d.h. in niedrigster Ordnung in  $1/c$ ) gehört zum elektrischen Dipolfeld kein Magnetfeld.

## Übungen

Strahlungslose Moden:

- 21) Finde eine Eichfunktion  $\psi$ , mit der die Beiträge des Skalars  $Q$  zu den Potentialen weggeeicht werden können. Zeige, daß die entsprechende Eichtransformation innerhalb der Klasse der Lorentz-eichungen liegt.
- 22) Eine kugelsymmetrische Ladungsverteilung bleibt auf ein endliches Gebiet  $r < R$  beschränkt und soll innerhalb dieses Bereiches Bewegungen ausführen, bei denen die Kugelsymmetrie erhalten bleibt (z.B. Radialschwingungen). Zeige, daß das Feld außerhalb des Bereiches statisch ist.

Multipolstrahlung:

- 23) Betrachte einen in der Richtung  $\mathbf{n}$  liegenden Dipol, dessen Ladungen  $\pm q$  in dieser Richtung harmonisch schwingen (Frequenz  $\omega$ ). Berechne den Poyntingvektor  $\mathbf{S}$  in der Wellenzone bzw. in der quasistatistischen Zone. Für welche Winkel  $\theta$  zwischen  $\mathbf{n}$  und der Richtung  $\mathbf{e}$  des Ortsvektors ist  $|\mathbf{S}|$  am größten bzw. am kleinsten?
- 24) Ein elektrischer Dipol liegt in der  $xy$ -Ebene im Ursprung und rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um die  $z$ -Achse. Berechne das Magnetfeld in der Wellenzone und die gesamte ausgestrahlte Leistung.
- 25) Entlang eines Kreises mit dem Radius  $a$  fließt ein Wechselstrom  $I(t) = I_0 \sin \omega t$ . Berechne das Magnetfeld in der Wellenzone und die gesamte ausgestrahlte Leistung.
- 26) Ein magnetischer Dipol (statisches Dipolmoment  $\boldsymbol{\mu}$ ) ist relativ zu einer Achse um den festen Winkel  $\alpha$  geneigt und rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um diese Achse. Berechne das Magnetfeld und den Poyntingvektor in der Wellenzone. Diskutiere seine Winkel- und Zeitabhängigkeit. Berechne die gesamte ausgestrahlte Leistung.

- 27) Ein schwingender Quadrupol besteht aus einer ruhenden Ladung  $-2e$  im Ursprung und zwei schwingenden Ladungen  $+e$  in den Abständen  $z_1 = -z_2 = a \cos \omega t/2$ . Berechne das Magnetfeld in der Wellenzone und den Zeitmittelwert der gesamten ausgestrahlten Leistung.

Kompliziertere Quellen:

- 28) Zentral gespeiste Antenne: In einer linearen Antenne, die sich längs der  $z$ -Achse von  $-d/2$  bis  $d/2$  erstreckt, fließt ein Wechselstrom mit der Stromdichte

$$j_z(t, \mathbf{x}) = I_0 \delta(x) \delta(y) \cos(\omega_0 t) \sin\left(\frac{\omega_0}{c} \left(\frac{d}{2} - |z|\right)\right)$$

- a) Berechne die Winkelverteilung der mittleren Strahlungsleistung bei relativ großen Abständen ( $r \gg d$ ) für beliebige Frequenzen  $\omega_0$ .
- b) Berechne die gesamte mittlere Strahlungsleistung für kleine Frequenzen.
- 29) Synchrotronstrahlung: Ein Teilchen (Ladung  $q$ ) bewegt sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit auf einer Kreisbahn. Berechne die Spektral- und die Winkelverteilung der ausgesandten Strahlung.

## 4. Elektrodynamik in materiellen Medien

### 4.1 Grundsätzliche Struktur

Die bisher formulierte Theorie war ganz eine solche im Vakuum. Wir sind davon ausgegangen, daß die Quellen elektromagnetischer Felder geladene Teilchen mit sehr kleiner Ausdehnung sind. Durch Mittelwertbildung über kleine Volumina (die aber immer noch viele Ladungsträger enthalten müssen) haben wir eine Kontinuumstheorie der Ladung erhalten, in der die Quellen durch eine lokale Ladungs- bzw. Stromdichte beschrieben werden. Dann haben wir die von diesen Quellen im Vakuum hervorgerufenen Felder untersucht. Diese Theorie entspricht (abgesehen

von der Idealisierung, die eine Kontinuumstheorie der Ladung darstellt) weitgehend der **mikroskopischen** Struktur der Welt, in der wir leben: in normaler Materie wird nur ein kleiner Teil des Raumes von Atomkernen und Elektronen eingenommen, der Rest ist Vakuum. Selbst auf diesem mikroskopischen Beschreibungsniveau wird unsere Theorie aber nicht überall gelten. Wollten wir z.B. eine Theorie des Wasserstoffatoms versuchen, indem wir die Bahnbewegung eines Elektrons um ein Proton im Rahmen der klassischen Mechanik mit Hilfe der Coulombkraft beschreiben, so erhielten wir kein stabiles Atom: ein stabiles statisches System ist nicht möglich (vgl. Beispiel 1.8), bewegt sich aber das Elektron, so strahlt es Energie in Form elektromagnetischer Wellen ab und muß daher in den Kern stürzen. Es ist klar, daß für diese Probleme die Quantentheorie herangezogen werden muß.

Auf **makroskopischem** Niveau wird unsere Theorie nur dann anwendbar sein, wenn die Voraussetzungen wenigstens näherungsweise erfüllt sind. Das bedeutet, daß die Materie nur in Form frei beweglicher Ladungsträger vorkommen darf, die man im oben skizzierten Sinn durch gegebene Ladungs- und Stromdichten beschreiben kann. Es ist aber naheliegend, für Medien, in denen das nicht der Fall ist, immer noch eine analoge Theorie (d.h. eine lokale Feldtheorie mit Gleichungen vom Maxwell-Typ) zu versuchen, wobei man an Stelle von  $\mathbf{E}$  bzw.  $\mathbf{B}$  eine Art "effektiver" Felder  $\mathbf{D}$  bzw.  $\mathbf{H}$  im Medium einführt und deren Zusammenhang mit  $\mathbf{E}$  bzw.  $\mathbf{B}$  durch möglichst einfache empirische Gesetze beschreibt. In diese Gesetze gehen die Materialeigenschaften des Mediums in Form einiger Materialparameter (z.B. Dielektrizitätskonstante, Permeabilität) ein, die das elektromagnetische Verhalten des Mediums charakterisieren und auf diesem Beschreibungsniveau als empirisch gegeben aufgefaßt werden müssen. Eine solche Theorie ist also eine phänomenologische Theorie und hat daher vorläufigen Charakter. Selbst wenn diese Beschreibung in weiten Bereichen gut funktioniert, wird man erst zufrieden sein dürfen, wenn man aus einer Beschreibung auf einem fundamentaleren Niveau begründen kann, warum die Theorie so gut ist, warum die auftretenden empirischen Parameter die gemessenen Werte haben und wo die Grenzen der phänomenologischen Beschreibung liegen.

Da wir wissen, daß die Materie aus Atomen besteht und ihre makroskopischen Eigenschaften durch die mikroskopische Struktur bedingt sind, muß eine solche fundamentale Beschreibung mit Hilfe der Quantentheorie erfolgen. Infolge des Fortschrittes der mit ihrer Hilfe

entwickelten modernen Physik der Festkörper, Flüssigkeiten und Gase steht heute eine auch in quantitativer Hinsicht zufriedenstellende, fundamentale Theorie der elektromagnetischen Eigenschaften zur Verfügung. Ihre Entwicklung würde aber den Rahmen dieser Vorlesung weit überschreiten.

Trotzdem soll hier das Schwergewicht nicht allein auf die phänomenologische Theorie gelegt werden, sondern wenigstens angedeutet werden, in welchem Maß sie durch die mikroskopischen Vorstellungen gestützt erscheint. Dadurch wird hier bewußt von der in vielen Lehrbüchern gewählten Darstellung abgewichen, in denen die phänomenologische Theorie einen verhältnismäßig breiten Raum einnimmt. Diese Stellung entspricht der historischen Entwicklung. Die phänomenologische Theorie geht auf Maxwell zurück und ist daher zu einer Zeit entstanden, in der man über die atomistische Struktur der Materie noch keine detaillierten Kenntnisse hatte, sodaß der phänomenologische Charakter der Theorie kaum bewußt werden konnte. Vom heutigen Wissensstand beurteilt, führte das zu einer kaum zu rechtfertigenden Überbetonung der Bedeutung dieser Theorie, die zu lange als "grundlegend" angesehen wurde. Das ändert aber nichts daran, daß die Theorie große praktische Bedeutung hat.

In den folgenden Abschnitten werden wir die Theorie nicht als geschlossenes System entwickeln (das sie grundsätzlich nicht ist), sondern einzelne Phänomene untersuchen, weil das der tatsächlichen Struktur entspricht: Materie wird uns von der Natur nicht als abstraktes "Medium" geliefert, sondern in Form konkreter Materialien mit unterschiedlicher atomarer Struktur. Verschiedene elektromagnetische Eigenschaften sind durch Unterschiede in dieser Struktur bedingt. In den Gleichungen äußert sich das zunächst in den **Quell**termen, in denen eine Aufteilung in leicht bewegliche und in den Atomen gebundene Ladungsträger vorzunehmen ist. Erst wenn man die (strukturabhängigen) Auswirkungen der gebundenen Ladungsträger zum Feld zählt und nur die frei beweglichen (und damit von außen kontrollierbaren) Ladungsträger als Quellen betrachtet, erhält man ein "effektives" Feld ( $\mathbf{D}$  bzw.  $\mathbf{H}$ ) im Material. Die homogenen Feldgleichungen bleiben aber ein Zusammenhang zwischen  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$ . Um die Felder bei vorgegebenen Ladungs- und Stromdichten (der kontrollierbaren Ladungsträger) bestimmen zu können, braucht man daher einen Zusammenhang zwischen  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$  und  $(\mathbf{D}, \mathbf{H})$ , der durch einfache phänomenologische Ansätze hergestellt wird. Die mikroskopische Begründung dafür werden wir an-

hand einfacher Modellvorstellungen erläutern, die gut genug sind, um die Größenordnung von Effekten richtig wiederzugeben. Auf diese Weise werden wir zu (phänomenologischen) Maxwellgleichungen gelangen, die eine Beschreibung elektromagnetischer Vorgänge in materiellen Medien liefern. Ihre Lösung hängt wesentlich von der geometrischen Struktur des Problems ab. Da sich die Felder an Grenzflächen verschiedener Medien stark ändern, sind hier Randbedingungen (d.h. die Werte der Komponenten der Feldstärken an den Randflächen) besonders wichtig. Diese Randbedingungen werden wir mit Hilfe der integrierten Maxwellgleichungen untersuchen. Die Annahme einer “unendlich dünnen” Grenzfläche und die damit zusammenhängende unstetige Änderung der Feldstärken ist natürlich eine Idealisierung der Wirklichkeit.

Man sollte bei diesem Zugang beachten, daß die wirkliche mikroskopische Basis der Theorie (die z.B. Auskunft über die Werte der phänomenologischen Parameter und über die Grenzen der phänomenologischen Beschreibung liefert) durch die Quantenmechanik der Materie gegeben ist, und das ist eine nichtrelativistische Theorie. Trotzdem kann man zu einer relativistischen Fassung der Medienelektrodynamik kommen, wenn man im Auge behält, daß eine Aufteilung in den Quelltermen vorzunehmen ist und sich daher auf den Vierervektor der Stromdichte bezieht. Man kann so einen Rahmen für eine relativistische Beschreibung abstecken (der allerdings erst durch eine fundamentale relativistische Theorie voll ausgefüllt werden könnte). Dieser Rahmen wird in einem späteren Kapitel kurz beschrieben.

## 4.2 Elektromagnetische Felder in Materie

In Materie sind Ladungen nicht nur in Form mehr oder weniger frei beweglicher Ladungsträger (Elektronen, Ionen) vorhanden, sondern auch als gebundene Ladungen in Substrukturen des Materials, die als Ganzes nach außen elektrisch neutral sind. In Gasen oder Flüssigkeiten sind diese Substrukturen Atome bzw. Moleküle, in isolierenden Festkörpern Moleküle oder daraus aufgebaute Kristallzellen, jedenfalls handelt es sich aber um kleine Bereiche. Die folgende Überlegung gilt jedoch auch, wenn die Substrukturen makroskopische Bereiche sind. Man könnte z.B. an Metallstücke denken, die in einen Isolator eingeschlossen sind: in diesem Fall sind auch die Ladungsträger in den Metallstücken als “gebunden” anzusehen. Jedenfalls werden zum Feld im Inneren des Mediums



auch diese gebundenen Ladungsträger beitragen. Auf dem phänomenologischen Beschreibungsniveau werden diese Beiträge berücksichtigt, indem man in den Quelltermen der inhomogenen Maxwellgleichungen eine Aufteilung in “freie” und “gebundene” Anteile vornimmt und über die letzteren nur pauschale Aussagen macht. Die homogenen Maxwellgleichungen behalten hingegen ihre ursprüngliche Form. Um die Aufteilung durchzuführen, müssen wir uns überlegen, welche Felder infolge der gebundenen Ladungsträger auftreten können. Die Substrukturen sind elektrisch neutral, sie können aber trotzdem nach außen elektrische Felder aufweisen, die von einer unsymmetrischen Anordnung der Ladungen herrühren (z.B. von Dipolmomenten). Außerdem zeigen Atome bzw. Moleküle als Folge der Bahnbewegungen und Spins der Elektronen und Kerne magnetische Eigenschaften, ebenso eingebettete Metallstücke. Wir beginnen mit den elektrischen Eigenschaften. Ihre Quelle ist eine Ladungsdichte  $\rho_p(\mathbf{x})$ , von der wir ohne Kenntnis ihrer genauen Form nur wissen, daß die zugehörige Gesamtladung verschwinden muß, weil die gebundenen Ladungsträger in neutralen Substrukturen sitzen:

$$\int \rho_p(x) d^3x = 0. \quad (1)$$

Das Integrationsgebiet muß dabei nur den Bereich einer Substruktur umfassen. Integriert man über das ganze Medium, so erhält man natürlich auch den Wert Null. Das legt nahe,  $\rho_p$  als Divergenz eines Vektorfeldes anzusetzen:

$$\rho_p(x) = -\nabla \cdot \mathbf{P}(x). \quad (2)$$

Damit besagt (1), daß der Fluß von  $\mathbf{P}$  durch eine geschlossene Fläche verschwindet, die das Medium einschließt. Das Feld  $\mathbf{P}(x)$  heißt die Polarisation des Mediums und ist ein lokales Feld, das als Ersatz für die komplizierten Verhältnisse innerhalb des Mediums dient.  $\mathbf{P}$  ist als makroskopisches Feld anzusehen, das die mittleren Verhältnisse in dem in (1) betrachteten Integrationsgebiet beschreibt. In genügend kleinen Bereichen werden die tatsächlichen Verhältnisse durch  $\mathbf{P}$  sicher nicht korrekt wiedergegeben. Man kann sich  $\mathbf{P}$  als eine Dipoldichte (Dipolmoment pro Volumen) vorstellen: das von  $\rho_p$  erzeugte Dipolmoment ist

$$\mathbf{d} = \int \rho_p(x) \mathbf{x} d^3x = -\int \mathbf{x} (\nabla \cdot \mathbf{P}(x)) d^3x = \int \mathbf{P}(x) d^3x.$$

Die letzte Form folgt durch partielle Integration; außerhalb des Mediums verschwindet  $\mathbf{P}$ , daher trägt der Randterm nichts bei. Die Maxwellgleichung für das elektrische Feld enthält als Quellen sowohl  $\rho_p$  als

auch die Dichte der frei beweglichen (und damit von außen zugänglichen) Ladungsträger:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho = 4\pi(\rho_a(x) + \rho_p(x)).$$

Mit (2) kann die Feldgleichung in der Form

$$\nabla(\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}) = 4\pi\rho_a \quad (3)$$

geschrieben werden: als Quellterm tritt hier formal nur  $\rho_a$  auf. Für das auf der linken Seite auftretende Feld hat sich die Abkürzung

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} \quad (4)$$

eingebürgert, die “elektrische Verschiebung” oder “elektrische Induktion” heißt. Die Aufteilung der Ladungsträger, die (3) zugrundeliegt, mag willkürlich erscheinen. Sie entspricht aber experimentellen Situationen, bei denen man die mikroskopische Struktur nicht auflöst.

Als nächstes führen wir eine entsprechende Aufteilung in der Stromdichte durch. Werden gebundene Ladungsträger verschoben (z.B. in einem von außen angelegten elektrischen Feld), so dürfen sie dabei nicht von den Substrukturen abgetrennt werden, wenn die ganze Aufteilung ihren Sinn behalten soll. Es ist daher plausibel, wenn wir für solche Vorgänge die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho_p}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_p = 0 \quad (5)$$

verlangen und die Stromdichte  $\mathbf{j}_p$  als definierten (abtrennbaren) Anteil von  $\mathbf{j}$  ansehen: die Gl. (5) garantiert dann die Zeitkonstanz des Integrals (1). Vergleichen wir (5) mit (2) so erhalten wir

$$\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{j}_p$$

und folgern daraus

$$\mathbf{j}_p = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}. \quad (6)$$

Dieser Strom ist aber nicht der einzige Beitrag der Ladungsträger in den Substrukturen. Wir müssen auch den Magnetismus der Materie berücksichtigen. Schon Ampère hat vermutet, daß für den Magnetismus mikroskopische Kreisströme verantwortlich sein müssen und daß

es keine elementaren “magnetischen Ladungen” (magnetische Monopole) gibt. Die moderne Atomphysik hat dies bestätigt. Wir können daher dem Magnetismus Rechnung tragen, indem wir eine lokale Stromdichte  $\mathbf{j}_m$  einführen, die wir als Quelle für die magnetischen Felder der Substrukturen ansehen. Wie bei  $\rho_p$  versuchen wir, ohne Aussagen über ihre genaue Struktur auszukommen. Wir setzen also

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_a + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mathbf{j}_m. \quad (7)$$

Der erste Term ist der Beitrag der von außen zugänglichen Ladungsträger. Die Aufteilung erscheint im Grund ebenfalls willkürlich, kann aber hier von der Praxis her besser gestützt werden: in realistischen Anordnungen entspricht der erste Term einem Leitungsstrom in einem Draht, der meßbar und verfügbar ist; bei elektrischen Vorgängen mißt man hingegen meist nicht Ladungsdichten, sondern Potentialdifferenzen und kontrolliert damit  $\mathbf{E}$  und nicht  $\mathbf{D}$ . Wenn die Stromdichte  $\mathbf{j}_m$  keinem Stromtransport über größere Distanzen, sondern einem mikroskopischen Kreisstrom entsprechen soll, so muß ihr Flächenintegral über eine Fläche  $F$  verschwinden, sofern diese nicht zu klein ist:

$$\int_F \mathbf{j}_m \cdot d\mathbf{f} = 0. \quad (8)$$

Das legt nahe,  $\mathbf{j}_m$  aus einem Vektorfeld  $\mathbf{M}$  abzuleiten:

$$\mathbf{j}_m = c \nabla \times \mathbf{M}. \quad (9)$$

Das Verschwinden des Flächenintegrals bedeutet dann, daß die Zirkulation von  $\mathbf{M}$  über die geschlossene Randkurve von  $F$  verschwindet. Als weitere Folge des Ansatzes trägt  $\mathbf{j}_m$  zur Kontinuitätsgleichung nicht bei.  $\mathbf{M}$  heißt die Magnetisierung und kann als magnetisches Moment pro Volumen interpretiert werden: das von  $\mathbf{M}$  hervorgerufene magnetische Moment ist

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2c} \int (\mathbf{x} \times \mathbf{j}_m) d^3x = \frac{1}{2} \int (\mathbf{x} \times (\nabla \times \mathbf{M})) d^3x = \int \mathbf{M}(x) d^3x.$$

Dabei wurde wieder partiell integriert; der Randterm trägt nichts bei. Analog wie  $\mathbf{P}$  ist auch  $\mathbf{M}$  ein lokales, makroskopisches Feld.

Nun setzen wir (7) in die zweite inhomogene Maxwellgleichung ein

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_a + \frac{4\pi}{c} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + 4\pi \nabla \times \mathbf{M}$$

oder

$$\nabla \times (\mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_a. \quad (10)$$

Führen wir die Abkürzung

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M} \quad (11)$$

ein, so lauten die Maxwellgleichungen in Materie

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= 4\pi\rho_a & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_a & \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

In diesen Gleichungen sind nicht nur  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$  sondern auch  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  als lokale, aber makroskopische Felder (im Sinn von Mittelwerten) aufzufassen: wir haben Situationen betrachtet, in denen die äußeren Quellen makroskopischen Ladungs- und Stromdichten entsprechen.  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{H}$  sind als die effektiven Felder zu betrachten, die durch von außen verfügbare Quellen ( $\rho_a$ ,  $\mathbf{j}_a$ ) hervorgerufen werden.

Aus den Feldgleichungen lassen sich jedoch die Felder bei gegebenen Quellen  $\rho_a$ ,  $\mathbf{j}_a$  **nicht** bestimmen, solange wir den Zusammenhang von  $\mathbf{P}$  (oder  $\mathbf{D}$ ) und  $\mathbf{M}$  (oder  $\mathbf{H}$ ) mit  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  nicht kennen. Um ihn herzustellen, müßte man die mikroskopischen Mechanismen beherrschen. Auf phänomenologischem Niveau wird man an dieser Stelle einen Ansatz versuchen und sehen, in welchem Maße er experimentell zu rechtfertigen ist.

### 4.3 Phänomenologische Ansätze

Nun wollen wir überlegen, wie die Polarisation  $\mathbf{P}$  bzw. die Magnetisierung  $\mathbf{M}$  mit  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  zusammenhängen könnten. Dazu denken wir uns ein Stück Material als Medium in die Umgebung einer Ladungs- bzw. Stromverteilung  $(\rho_a, \mathbf{j}_a)$  gebracht, die wir kontrollieren können. Ein Beispiel wäre ein Stück Material zwischen geladenen Kondensatorplatten oder in einer stromdurchflossenen Spule. Wir schalten die Quellen  $(\rho_a, \mathbf{j}_a)$  und damit das an die Probe angelegte Feld ganz langsam ein. Wird kein Feld angelegt, so gibt es keine Polarisation und keine Magnetisierung: wir wollen hier keine ferroelektrischen oder ferromagnetischen Stoffe betrachten. Daher ist

$$\mathbf{P}(\mathbf{E} = 0, \mathbf{B} = 0) = 0, \quad \mathbf{M}(\mathbf{E} = 0, \mathbf{B} = 0) = 0 .$$

Eine Entwicklung nach Potenzen von  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  beginnt daher mit den linearen Termen. Betrachten wir eine Probe, die keine "eingebaute" Richtung hat (isotropes Medium). Die Richtungen von  $\mathbf{P}$  und  $\mathbf{E}$  bzw.  $\mathbf{M}$  und  $\mathbf{B}$  sollten dann übereinstimmen. Beschränken wir uns auf die linearen Terme so erhalten wir

$$\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{D} = (1 + 4\pi\chi_e)\mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E} \quad (13)$$

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{B} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{H} = (1 - 4\pi\chi_m)\mathbf{B} , \quad (14)$$

wobei  $\chi_e$  und  $\chi_m$  Konstanten sind. Ein Term  $\sim \mathbf{B}$  in  $\mathbf{P}$  bzw. ein solcher  $\sim \mathbf{E}$  in  $\mathbf{M}$  ist wegen des falschen Spiegelungsverhaltens auszuschließen: nach unserer Definition muß die Divergenz von  $\mathbf{P}$  ein echter Skalar  $\rho_p$  und die Rotation von  $\mathbf{M}$  ein polarer Vektor  $\mathbf{j}_a$  sein.

Die Materialkonstante  $\chi_e$  heißt elektrische Suszeptibilität,  $\epsilon$  heißt Dielektrizitätskonstante. Empirisch ist festzustellen, daß der Ansatz (13) für die meisten Substanzen in einem ziemlich weiten Feldstärkebereich und sogar für Wechselfelder mit nicht zu hoher Frequenz möglich ist, wobei stets  $\chi_e > 0$ ,  $\epsilon > 1$  ist. Das bedeutet physikalisch, daß ein Dielektrikum das Feld einer Ladung abschirmt. Um das einzusehen, betrachten wir eine Ladung  $q$ , die von einem Dielektrikum umgeben ist und berechnen den Fluß von  $\mathbf{E}$  durch eine geschlossene Fläche um die Ladung. Nach dem Gaußschen Gesetz erhalten wir

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = \frac{1}{\epsilon} \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{f} = \frac{4\pi q}{\epsilon} .$$

Im Vakuum würden wir den größeren Wert  $4\pi q$  erhalten. In einem inhomogenen elektrischen Feld wirkt auf ein Stück aus dielektrischem Material eine Kraft in Richtung zunehmender Feldstärke: es wird in das Feld hineingezogen.

Für sehr hohe Feldstärken gibt es Abweichungen von der Linearität, d.h.  $\chi_e$  bzw.  $\epsilon$  hängen von der Feldstärke ab. Für anisotrope Substanzen (Kristalle) ist  $\chi_e$  durch einen symmetrischen Tensor  $\chi_e = (\chi_e^{kl})$  zu ersetzen

$$\mathbf{P} = \chi_e \cdot \mathbf{E} ,$$

der von der Kristallstruktur abhängt. Für Wechselfelder höherer Frequenz ist  $\chi_e$  (bzw.  $\chi_e$  bei anisotropen Substanzen) keine Konstante, sondern eine Funktion von Raum und Zeit. Ein allgemeiner Ansatz wäre

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}, t) = \int d^3x' dt' \chi_e(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, t') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}', t') .$$

Die damit verbundenen Phänomene heißen (räumliche bzw. zeitliche) Dispersionsphänomene.

In dieser Vorlesung wollen wir uns der Einfachheit halber auf isotrope Substanzen beschränken. Wir untersuchen zunächst die Konsequenzen des Ansatzes mit konstanter Suszeptibilität bzw. Dielektrizitätskonstante. Das bedeutet eine Beschränkung auf quasistationäre Vorgänge: bei Wechselfeldern darf die Frequenz nicht zu hoch sein. Auf mögliche Korrekturen kommen wir später zurück.

Die Magnetisierung kann in analoger Weise diskutiert werden. Der lineare Ansatz mit konstanter Suszeptibilität ist für die meisten Substanzen in einem weiten Feldstärkebereich möglich. Im Gegensatz zu  $\chi_e > 0$  findet man für  $\chi_m$  beide Vorzeichen. Bei normalen Temperaturen ist für die meisten anorganischen und organischen Verbindungen  $\chi_m < 0$ . Solche Substanzen heißen diamagnetisch. In einem inhomogenen Magnetfeld werden sie in Richtung abnehmender Feldstärke gezogen. Wegen des verschiedenen Vorzeichens in (13) und (14) wirken Diamagnetika auf das Feld einer Stromschleife abschirmend und sind in diesem Sinn das magnetische Analogon zu den Dielektrika. Für eine Reihe von Stoffen, die aus Atomen und Ionen aufgebaut sind, sowie für Metalle bei normalen Temperaturen ist  $\chi_m > 0$ . Diese Stoffe heißen paramagnetisch. In beiden Fällen ist der Betrag der magnetische Suszeptibilität sehr viel kleiner als jener der elektrischen (was als Folge der

Tatsache angesehen werden kann, daß die Magnetisierung eine relativistische Korrektur zweiter Ordnung ist). Ausnahmen sind einerseits Supraleiter, die als "perfekte" Diamagneten ( $\chi_m \rightarrow -\infty$ ) wirken, und andererseits Ferromagneten, für die  $\chi_m$  positiv und sehr groß ist. In beiden Fällen ist das eine Folge makroskopischer Auswirkungen der Quantentheorie, auf die wir später zurückkommen werden. Vorerst betrachten wir solche Substanzen nicht.

Die Verallgemeinerung auf einen Suszeptibilitätstensor für anisotrope Substanzen bzw. auf Dispersionsphänomene kann wie im elektrischen Fall erfolgen. Auch hier wollen wir uns vorerst auf eine konstante Suszeptibilität (und damit auf quasistationäre Vorgänge) beschränken.

Es hat sich eingebürgert, den Zusammenhang zwischen  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{H}$  in der Form

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (15)$$

zu schreiben, sodaß die sog. Permeabilität  $\mu$  mit  $\chi_m$  durch

$$\mu = \frac{1}{1 - 4\pi\chi_m} \quad (16)$$

zusammenhängt. Diese Auszeichnung des  $\mathbf{H}$ -Feldes ist zwar praktisch zu rechtfertigen, denn  $\mathbf{H}$  ist durch Messung der freien Ströme direkt zugänglich. Logisch ist das aber irreführend: das "wirkliche" Feld (das gemittelte mikroskopische Feld) im Medium ist  $\mathbf{B}$  und nicht  $\mathbf{H}$ . Das kann man von der mikroskopischen Theorie her begründen und auch experimentell nachweisen (s.u.). In der Festkörperphysik sind die mikroskopisch zu bestimmenden Größen  $\chi_m$  bzw.  $1/\mu$  (deshalb haben wir hier  $\chi_m$  und nicht  $1 - \mu$  als magnetische Suszeptibilität bezeichnet).

#### 4.4 Randbedingungen

An der Grenzfläche von zwei Medien gibt es Randbedingungen für die Feldstärken, die man den Maxwellschen Gleichungen zu entnehmen hat. Wir zeigen an der ersten Gleichung, wie man vorzugehen hat. Wir integrieren die Gleichungen über einen kleinen dünnen Kreiszyylinder  $Z$  (Höhe  $h$ ), zwischen dessen Boden- und Deckfläche ein Stück  $\delta F$  der Grenzfläche liegt (vgl. Fig. 4.1). Mit Hilfe des Gaußschen Satzes erhalten wir links den Fluß von  $\mathbf{D}$  durch die Zylinderoberfläche  $O(Z)$ , rechts die gesamte im Zylinder enthaltene (freie) Ladung:

$$\oint_{O(Z)} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{f} = 4\pi \int_Z \rho_a d^3x.$$

Lassen wir nun  $h \rightarrow 0$  gehen, so geben die Seitenflächen keinen Beitrag. Rechts erhalten wir die freie Ladung, die in dem vom Zylinder ausgeschnittenen Flächenstück  $\delta F$  enthalten ist, das ist  $\sigma_{fl} \cdot \delta F$ , wenn  $\sigma_{fl}$  die (freie) Flächenladungsdichte an der Grenzfläche ist. Links erhalten wir wegen  $d\mathbf{f} = \mathbf{n} \cdot d\mathbf{f}$  ( $\mathbf{n}$  Einheitsvektor normal zur Grenzfläche) das Integral der Normalkomponente ( $\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}$ ) von  $\mathbf{D}$  über die Deck- und Bodenfläche, wobei die Normale nach außen gerichtet ist. Für ein genügend kleines Stück  $\delta F$  wird das

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{f} &= \int_{(2)} \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} d\mathbf{f} - \int_{(1)} \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} d\mathbf{f} = \delta F (\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}^{(2)} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}^{(1)}) \\ &= 4\pi \delta F \cdot \sigma_{fl} \end{aligned}$$

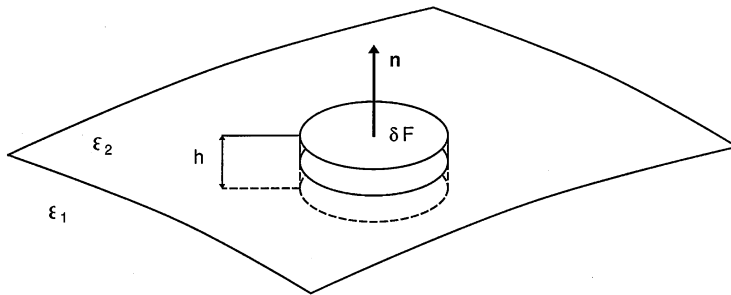


Fig. 4.1

Dabei ist  $\mathbf{D}^{(1,2)}$  die elektrische Verschiebung im Medium (1) bzw. (2). Daher ist die Randbedingung

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}^{(2)} - \mathbf{D}^{(1)}) = 4\pi \sigma_{fl}. \quad (17)$$

Die Normalkomponente von  $\mathbf{D}$  ist daher an der Grenzoberfläche unstetig; ihre Änderung ist durch  $\sigma_{fl}$  bestimmt. Eine Randbedingung für die Normalkomponente von  $\mathbf{E}$  erhält man daraus mit (13). Dabei ist zu beachten, daß (17) auch dann gilt, wenn (13) nicht stimmt!

Nun untersuchen wir die Tangentialkomponenten. Dazu integrieren wir das Induktionsgesetz über ein Rechteck, das die Grenzfläche enthält und die Seiten  $h$ ,  $\delta l$  hat (vgl. Fig. 4.2):



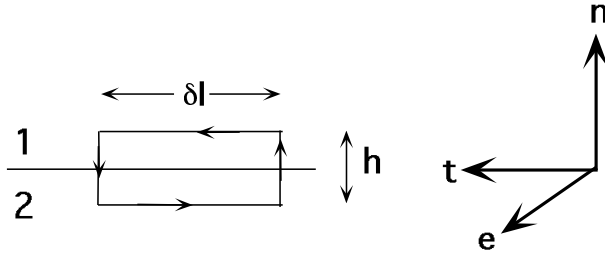


Fig. 4.2

$$-\frac{1}{c} \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{f} = \int (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{f} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} .$$

Die Flächennormale  $\mathbf{e}$  des Rechtecks liegt in der Tangentialebene an die Grenzfläche (senkrecht zur Zeichenebene). Zusammen mit den Einheitsvektoren  $\mathbf{n}$  (Normale zur Grenzfläche) und  $\mathbf{t}$  (parallel zu den längeren Seiten des Rechtecks, tangential zur Grenzfläche, vgl. Fig. 4.2) erhalten wir ein orthogonales Dreiein. Das Flächenelement ist

$$d\mathbf{f} = \mathbf{e} \delta l \cdot h .$$

Entlang der längeren Seiten des Rechtecks ist

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \pm \delta l \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} = \pm \delta l (\mathbf{e} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{E} = \pm \delta l \mathbf{e} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) .$$

Der Beitrag der Schmalseiten verschwindet für kleines  $h$ . Daher erhalten wir

$$\delta l \mathbf{e} \cdot \left( \mathbf{n} \times \mathbf{E}^{(2)} - \mathbf{n} \times \mathbf{E}^{(1)} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot h \right) = 0 .$$

Für  $h \rightarrow 0$  verschwindet der letzte Term, sofern  $\partial \mathbf{B} / \partial t$  nicht divergiert. Da die Richtung von  $\mathbf{e}$  in der Tangentialebene der Grenzfläche willkürlich ist, wird

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}^{(2)} - \mathbf{E}^{(1)}) = 0 . \quad (18)$$

Die Tangentialkomponenten von  $\mathbf{E}$  sind daher an der Grenzfläche stetig (unabhängig von der Gültigkeit von (13)). Die entsprechende Bedingung für  $\mathbf{D}$  erhält man mit (13).

Die Randbedingungen für  $\mathbf{H}$  können in analoger Weise gewonnen werden. Dazu braucht man nur dieselben Integrationen auf die Gleichungen

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

bzw.

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_a + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

anzuwenden. Man erhält

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}^{(2)} - \mathbf{B}^{(1)}) = 0. \quad (19)$$

Die Normalkomponente von  $\mathbf{B}$  ist also an der Grenzfläche stetig. Die entsprechende Gleichung für  $\mathbf{H}$  folgt aus (14). Für die Tangentialkomponenten erhält man

$$\delta l \mathbf{e} \cdot \left( \mathbf{n} \times (\mathbf{H}^{(2)} - \mathbf{H}^{(1)}) - \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_a \cdot h \right) = 0,$$

da der Verschiebungsstrom bei endlichem  $\partial \mathbf{D} / \partial t$  für  $h \rightarrow 0$  nichts beiträgt. Der freie Strom kann aber einen Beitrag liefern, denn es kann ein endlicher Flächenstrom

$$\mathbf{j}_{fl} = \lim_{h \rightarrow 0, j_a \rightarrow \infty} \mathbf{j}_a \cdot h$$

übrigbleiben. Wir erhalten also

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}^{(2)} - \mathbf{H}^{(1)}) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{fl}. \quad (20)$$

Die Tangentialkomponenten von  $\mathbf{H}$  sind daher unstetig. Die Aussage gilt unabhängig von (14). Die entsprechende Gleichung für  $\mathbf{B}$  folgt wieder mit (14).

## Übungen

- 1) Ein beliebig geformter, homogener Gegenstand aus dielektrischem Material mit der Dielektrizitätskonstanten (DK)  $\epsilon_1$  ist von einem homogenen Dielektrikum (DK  $\epsilon_2$ ) umgeben. Vergleiche das elektrostatische Feld in der Anordnung mit dem einer Situation, in der sich ein gleicher Gegenstand mit der DK  $\epsilon_1/\epsilon_2$  im Vakuum befindet.
- 2) Eine dielektrische Kugel (Radius  $R$ , DK  $\epsilon$ ) wird im Vakuum in ein homogenes elektrisches Feld  $\mathbf{E}^{(0)}$  gebracht. Berechne das Feld  $\mathbf{E}$  innerhalb und außerhalb der Kugel. Welchen Beitrag leistet die Polarisierung der Kugel zum Innenfeld?
- 3) Im Inneren einer leitenden Hohlkugel (Innenradius  $a$ ) befindet sich eine leitende Kugel (Radius  $b < a$ ) in konzentrischer Anordnung. Der Raum zwischen den Kugeln wird zur Hälfte mit einem Dielektrikum (DK  $\epsilon$ ) gefüllt. Die Kugeln werden entgegengesetzt gleich aufgeladen (Ladung  $\pm q$ ). Bestimme
  - (a) das elektrische Feld zwischen den Kugeln,
  - (b) die Flächenladungsdichte und
  - (c) die Polarisationsladungsdichte auf der inneren Kugel.
- 4) Ein Permanentmagnet kann als Material beschrieben werden, in dem eine statische Magnetisierung  $\mathbf{M}(\mathbf{x})$  vorgegeben ist und die äußere Stromdichte verschwindet.
  - (a) Zeige, daß  $\mathbf{H}$  aus einem skalaren Potential  $\Psi$  ableitbar ist und drücke dieses durch  $\mathbf{M}$  aus.
  - (b) Beweise  $\int \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} d^3x = 0$ .
  - (c) Berechne  $\Psi$  in großem Abstand vom Magneten.
  - (d) Mit dem der Magnetisierung entsprechenden Strom  $\mathbf{j}_m$  ist  $\mathbf{B}$  aus einem statischen Vektorpotential ableitbar. Zeige mit Hilfe dieser Darstellung und mit (a), daß  $\mathbf{B} - \mathbf{H} = 4\pi\mathbf{M}$  ist.
- 5) Ein Zylinder (Radius  $R$ , Länge  $L$ ) sei parallel zur Achse homogen magnetisiert. Berechne das skalare Potential aus Beispiel 4 auf der Zylinderachse, und zwar innerhalb und außerhalb des Zylinders.

#### 4.5 Quasistationäre Ströme in Leitern

Ladungstransport kann auf verschiedene Arten zustandekommen. So stellt z.B. die mechanische Bewegung eines geladenen Isolierbandes in einem Van de Graaff-Generator einen Strom dar. Ein wichtiger Mechanismus, durch den ein Strom zustandekommen kann, ist die Kraftwirkung, der Ladungsträger in einem elektrischen Feld unterliegen. Fließt in einem ruhenden leitenden Medium ein Strom, so muß es ein elektrisches Feld geben, das die Ladungsträger in Bewegung bringt. Dieses Feld kann entweder durch eine an den Leiter angelegte Spannung einer Batterie oder durch Induktion infolge eines veränderlichen Magnetfeldes erzeugt werden. Jedenfalls muß es aber einen einfachen Zusammenhang zwischen dem elektrischen Feld im Leiter und der hervorgerufenen Stromdichte  $\mathbf{j}_L$  geben. Der einfachste Ansatz ist eine lineare Beziehung

$$\mathbf{j}_L = \sigma \mathbf{E} , \quad (21)$$

wobei  $\sigma$  eine phänomenologische Materialkonstante ist.  $\sigma$  heißt die **Leitfähigkeit** des Materials: bei gegebenem  $\mathbf{E}$  ist die Stromdichte umso größer, je größer  $\sigma$  ist.

Der Ansatz bedeutet offenbar, daß bei dem betrachteten Problem außer der Richtung von  $\mathbf{E}$  keine weitere Richtung ausgezeichnet ist. Das ist für **isotrope** Leiter der Fall. Für anisotrope Materialien (z.B. für Kristalle) wird die Leitfähigkeit durch einen symmetrischen Tensor beschrieben. Ist ein Magnetfeld vorhanden, so werden die Ladungsträger infolge der Lorentzkraft abgelenkt (was z.B. im Halleffekt beobachtet werden kann). Auch in diesem Fall braucht man einen Leitfähigkeitstensor, der aber nicht symmetrisch ist und von  $\mathbf{B}$  abhängt. Wir wollen uns auch hier der Einfachheit halber auf isotrope Verhältnisse und damit auf eine skalare Leitfähigkeit beschränken.

Der Ansatz (21) ist ein solcher für eine mittlere Stromdichte und für ein mittleres Feld im Leiter. Er stellt also eine **makroskopische** Beziehung dar. Obwohl er zunächst nur für konstante Ströme plausibel erscheint, erweist er sich auch für Wechselströme in einem breiten Frequenzbereich als zutreffend, d.h. für quasistationäre Verhältnisse. Die Grenzen der Anwendbarkeit folgen aus mikroskopischen Betrachtungen. Ein Vorgang wird dann als quasistationär anzusehen sein, wenn zeitliche Änderungen langsam im Vergleich zur Trägheit des Mechanismus erfolgen, der für das Zustandekommen der Leitfähigkeit verantwortlich

ist. Wir werden später mikroskopische Leitfähigkeitsmechanismen betrachten, aus denen der Gültigkeitsbereich verständlich wird.

Nun wollen wir die Konsequenzen von (21) untersuchen. Eine unmittelbare Folge ist das Ohmsche Gesetz. Wir betrachten einen Leiter der Länge  $l$  mit konstantem Querschnitt  $F$ , an den eine Spannung  $U$  angelegt ist, so daß im Leiter der Strom  $I$  fließt. Dieser Strom ist dem Betrag nach

$$I = \int_F \mathbf{j}_L \cdot d\mathbf{f} = j_L \cdot F = \sigma EF .$$

Die angelegte Spannung ist die negative Potentialdifferenz zwischen den Leiterenden, die wir aus dem Linienintegral von  $\mathbf{E}$  berechnen können

$$U = \Phi^{(1)} - \Phi^{(2)} = \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = El$$

und wir erhalten

$$\frac{U}{I} = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{F} = : R .$$

Der Widerstand  $R$  hängt daher nur von den Abmessungen des Leiters und den Materialeigenschaften ab.  $1/\sigma$  heißt der spezifische Widerstand des Materials. Wir werden später sehen, daß der spezifische Widerstand durch eine Art "Reibungsmechanismus" zustandekommt. Soll in dem Leiter ein Strom aufrechterhalten werden, so muß die Stromquelle (und damit das  $\mathbf{E}$ -Feld) an den Ladungsträgern mechanische Arbeit leisten, die als Stromwärme (Erwärmung des Leiters) in Erscheinung tritt. Die pro  $\text{cm}^3$  und Sekunde geleistete Arbeit ist (vgl. Abschnitt 2.9)

$$\frac{dA}{dt} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}_L = \sigma \mathbf{E}^2 = \frac{\mathbf{j}_L^2}{\sigma}$$

(Joule-Lenzsches Gesetz). Für den oben betrachteten Leiter mit konstantem Querschnitt gibt das die Joulesche Stromwärme

$$\frac{dA}{dt} = \frac{UI}{lF} = \frac{UI}{V} ,$$

wobei  $V$  das Volumen des Leiters ist.

Aus dem Ohmschen Gesetz folgt, daß es im Inneren eines homogenen Leiters keine zeitlich konstante Verteilung freier Ladungen geben kann. Überläßt man eine anfängliche Ladungsverteilung  $\rho_0(\mathbf{x})$  sich

selbst, so nimmt sie mit der Zeit exponentiell ab (vgl. Beispiel 6), wobei die Zeitkonstante für alle Materialien mit Ausnahme sehr schlechter Leiter sehr klein ist, und zwar unabhängig vom angelegten  $\mathbf{E}$ -Feld. Da die Ladung wegen der Kontinuitätsgleichung nicht verschwinden kann, verteilt sie sich über den Leiter und sammelt sich als Flächenladung an der Leiteroberfläche an. Da die gesamte Ladung erhalten ist, setzt die Aufladung der Oberfläche in dem Moment ein, in dem man die Ladungsverteilung sich selbst überläßt.

Für eine genaue Analyse elektromagnetischer Vorgänge müssen die Maxwellgleichungen zusammen mit (21) betrachtet werden. Wir werden später darauf zurückkommen. Vorläufig wollen wir nur in einem einfachen und stark idealisierten Fall untersuchen, wie die Randbedingungen (17)-(20) an Leiteroberflächen aussehen. Wir betrachten einen Leiter aus homogenem Material, der einen scharfen Rand hat und in ein nichtleitendes Medium eingebettet ist. Der Leiter soll das in (17)-(20) mit <sup>(1)</sup> bezeichnete Medium bilden, sodaß  $\mathbf{n}$  die nach außen gerichtete Normale zur Leiteroberfläche ist. Wir nehmen an, daß die Leitfähigkeit sehr groß gegen 1 ist und betrachten den Grenzwert  $\sigma \rightarrow \infty$  (perfekter Leiter). Bei gegebener Stromdichte  $\mathbf{j}_L$  wird nach (21)  $\mathbf{E}$  im Leiter umso kleiner, je größer  $\sigma$  wird. In einem perfekten Leiter ist daher

$$\mathbf{E}^{(1)} = 0 .$$

Damit erhalten wir aus (17) bzw. (18) für das Außenfeld am Rand des Leiters

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}^{(2)} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}^{(2)} = 4\pi\sigma_{fl} . \quad (22)$$

Man kann sich überlegen, daß es im Inneren eines perfekten Leiters auch kein Magnetfeld geben sollte. Eine Argumentation dafür geht wie folgt. Aus  $\mathbf{E}^{(1)} = 0$  und dem Induktionsgesetz folgt, daß ein solches Feld zeitunabhängig sein müßte. Der für dieses Feld verantwortliche konstante Strom darf die Leiteroberfläche nicht aufladen, daher müssen seine Normalkomponenten verschwinden. Aus der inhomogenen Maxwellgleichung (12) für  $\mathbf{H}$  und  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  folgt, daß das Magnetfeld auch räumlich konstant bleiben muß. Das Zustandekommen einer nicht verschwindenden Feldstärke wäre schwer verständlich. Wir nehmen daher

$$\mathbf{B}^{(1)} = 0$$

an. Aus (19) bzw. (20) folgt dann für das Außenfeld am Rand

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}^{(2)} = 0, \quad \mathbf{n} \times \mathbf{H}^{(2)} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{fl}. \quad (23)$$

Im Medium verschwinden daher bei Annäherung an die Oberfläche eines **perfekten** Leiters die Normalkomponente von  $\mathbf{B}$  und die beiden Tangentialkomponenten von  $\mathbf{E}$ . Die Normalkomponente von  $\mathbf{D}$  und die Tangentialkomponenten von  $\mathbf{H}$  können auch in unmittelbarer Nähe der Oberfläche von 0 verschieden sein. Diese Bedingungen stellen eine Idealisierung der wirklichen Verhältnisse in guten Leitern dar. An der Oberfläche eines imperfekten Leiters ist in Wirklichkeit  $\mathbf{H}$  stetig und es gibt keinen Flächenstrom. Das Magnetfeld dringt jedoch nur eine kleine Strecke  $\delta$  in den Leiter ein. Die Komponenten von  $\mathbf{H}$  fallen innerhalb dieser Strecke stark ab. Der Oberflächenstrom  $\mathbf{j}_{fl}$  simuliert diesen Effekt für  $\delta \rightarrow 0$ .

## Übungen

- 6) In einen homogenen, endlich großen Leiter werden Ladungsträger injiziert, sodaß bei Beendigung der Injektion in der Umgebung eines Punktes  $\boldsymbol{x}$  eine Ladungsdichte  $\rho_0(\boldsymbol{x})$  entstanden ist. Zeige, daß diese Ladungsdichte mit der Zeit exponentiell abnimmt und bestimme die Abfallskonstante in Termen der Leitfähigkeit. Wie groß ist sie
  - (a) für ein Metall mit  $\sigma = 5 \cdot 10^7$  Siemens/m,
  - (b) für Meerwasser mit  $\sigma = 4,8$  Siemens/m,  $\epsilon = 80$ ,
  - (c) für Porzellan mit  $\sigma = 3 \cdot 10^{-13}$  Siemens/m,  $\epsilon = 5$ .
- 7) Ein unendlich langer zylindrischer Leiter (Radius  $R$ , Leitfähigkeit  $\sigma$ ) wird parallel zur Achse von einem konstanten Strom  $I$  durchflossen. Berechne den Poyntingvektor an der Oberfläche des Leiters und begründe seine Richtung.
- 8) Ein Stromkreis besteht aus einer Batterie, die durch zwei lange, parallele, dünne Drähte mit einem Verbraucher in Form eines zylindrischen Widerstandsdrahtes verbunden ist (vgl. Beispiel 7). Der Widerstand der Drähte wird vernachlässigt. Diskutiere (qualitativ) den Verlauf des Poyntingvektors für die Anordnung.
- 9) Finde eine Differentialgleichung für die Stromdichte in einem isotropen Leiter ( $\sigma$ ,  $\mu$  konstant) bei quasistationären Verhältnissen (Vernachlässigung des Verschiebungsstromes).
- 10) Bestimme die radiale Strom- und Feldverteilung für einen langen, zylindrischen Leiter (Radius  $R$ ), der von einem quasistationären Wechselstrom  $I_0 \exp(i\omega t)$  durchflossen wird (Skinneffekt). Verwende dazu die vorige Aufgabe.
- 11) Diskutiere das Resultat der vorigen Aufgabe für niedrige und hohe Frequenzen. Betrachte ein konkretes Metall und untersuche die Größenordnung der relevanten Parameter.



#### 4.6 Mikroskopische Ursachen der Polarisation

Nun wollen wir versuchen, das Zustandekommen der phänomenologischen Theorie und die Grenzen ihrer Anwendbarkeit von der mikroskopischen Struktur her zu verstehen. Wir untersuchen dazu die grundsätzlichen Phänomene (elektrische Polarisation, Magnetismus, Stromleitung) einzeln und betrachten, da es in erster Linie um ein qualitatives Verständnis geht, Materialien mit besonders einfacher Struktur. Als erstes betrachten wir die Polarisation in einem Dielektrikum. Wir untersuchen eine Substanz, die als Ansammlung einzelner Moleküle beschrieben werden kann. Das ist für gasförmige und flüssige Stoffe sicher sinnvoll; bei Festkörpern gilt die Betrachtung *mutatis mutandis* für kubische Kristalle. Wir stellen uns vor, daß die Substanz zwischen die Platten eines Kondensators gebracht wird. Als einfachstes Modell eines neutralen Atoms stellen wir uns dieses als einen punktförmigen, positiv geladenen Kern vor, um den sich eine Ladungsverteilung von Elektronen befindet. Wenn wir Zeitintervalle betrachten, die groß gegen diejenigen sind, die für den "inneren Mechanismus" des Atoms (für die Bewegung der Elektronen) verantwortlich sind, können wir diese Ladungsverteilung als stationär ansehen. Als eine solche charakteristische Zeit können wir  $10^{-14}$  Sekunden annehmen (das entspricht etwa der Schwingungsdauer von optischem Licht). Die Ausdehnung der Ladungsverteilung entspricht etwa der Größe des Atoms, d.h. sie wird von der Größenordnung  $10^{-8}$  cm sein. Im Grundzustand ist die Ladungsverteilung kugelsymmetrisch, d.h. sie hat kein Dipolmoment. Für Moleküle können wir ein ähnliches Bild benützen, nur wird die Ladungsverteilung in diesem Fall anders aussehen. In einem angelegten elektrischen Feld wird die Ladungsverteilung verzerrt werden: der Kern wird in Feldrichtung verschoben, die Elektronen in entgegengesetzter Richtung. Dadurch wird ein Dipolmoment induziert, dessen Größenordnung wir mit einem besonders einfachen Modell abschätzen. Wir nehmen an, daß die Ladungsverteilung der Elektronen kugelsymmetrisch bleibt (sie kommt durch Mittelung über eine rasche Bewegung zustande, die sich gegen das äußere Feld genügend "steif" verhält) und nur der Kern gegen den Mittelpunkt der Verteilung um ein Stück  $a$  verschoben wird. Das Feld im Inneren ist dann

$$E_{innen} = \frac{q}{R^3} a$$

wobei  $R$  der Radius unseres Atoms ist. Im Gleichgewicht muß die Kraft, mit der der Kern durch dieses Feld in den Mittelpunkt gezogen wird,

gleich derjenigen sein, mit der ihn das äußere Feld  $E$  wegzieht. Daher ist  $E = E_{innen}$  und wir erhalten durch Auflösen

$$a = \frac{ER^3}{q} .$$

Diese Verschiebung ist für realistische Feldstärken sehr klein. Sie beträgt z.B. für Wasserstoff bei einer Feldstärke  $E = 30 \text{ kV/cm} = 100 \text{ ESE/cm}$  nur  $a = 2 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$ . Das **induzierte** Dipolmoment ist dann

$$\mathbf{d}_{ind} = q\mathbf{a} = R^3\mathbf{E} .$$

Man sieht, daß es der Feldstärke proportional ist. In Wirklichkeit werden die Verhältnisse komplizierter sein. Für kleine Störungen der Ladungsverteilung (und diese sind, wie das Modell zeigt, für realistische Feldstärken wirklich klein) wird man aber immer noch

$$\mathbf{d}_{ind} = \alpha\mathbf{E}$$

setzen dürfen, wobei die Konstante  $\alpha$  von der Größenordnung des Atomvolumens  $\sim 10^{-24} \text{ cm}^3$  sein wird. Realistische Werte für die atomare Polarisierbarkeit  $\alpha$  sind aus der Quantentheorie zu berechnen bzw. zu messen. Einige Werte (in Einheiten von  $10^{-24} \text{ cm}^3$ ) sind.

|      |     |    |     |     |     |    |     |    |
|------|-----|----|-----|-----|-----|----|-----|----|
| H    | He  | Li | Be  | C   | Ne  | Na | Ar  | K  |
| 0,66 | 0,2 | 12 | 9,3 | 1,5 | 0,4 | 27 | 1,6 | 34 |

Die besonders großen Werte der Alkalimetalle sind auf das Valenzelektron zurückzuführen: für die entsprechenden Ionen ist der Wert um mehr als 2 Größenordnungen kleiner. Bei Molekülen herrschen ähnliche Verhältnisse. Hier kommt aber zu der betrachteten elektrischen Polarisierbarkeit noch eine ionische dazu, die darauf zurückzuführen ist, daß unter dem Einfluß des angelegten Feldes geladene Ionen im Molekül gegeneinander verschoben werden. Für das verhältnismäßig symmetrische Molekül  $\text{CH}_4$  ist z.B.  $\alpha = 2,6 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^3$ . Dieser Wert ist kleiner als die Summe der atomaren Polarisierbarkeiten der enthaltenen Atome. Die molekulare Polarisierbarkeit ist daher für die Molekularstruktur charakteristisch (Bedeutung in der Chemie). Für sehr unsymmetrische Moleküle (z.B. Kohlendioxid O-C-O) hängt das induzierte Dipolmoment von der Richtung von  $\mathbf{E}$  relativ zu den "inneren" Richtungen des Moleküls ab und wir erhalten  $\mathbf{d} = \alpha \cdot \mathbf{E}$  mit einem molekularen Polarisationsensor  $\alpha$ .

In neutralen Atomen oder Molekülen wird also durch ein elektrisches Feld ein **induziertes** Dipolmoment hervorgerufen, das der Feldstärke proportional ist. Im Mittel wird man die von den Atomen hervorgebrachten elektrischen Effekte durch eine Dipoldichte beschreiben. Sind in dem Medium  $N$  Atome pro  $\text{cm}^3$  vorhanden, so ist die Dipolstärke in einem Volumelement  $d^3x$ , das viele Dipole enthält, gleich  $N d d^3x$ . Das elektrische Feld, das diese Dipole in einigem Abstand hervorrufen, wird dann durch die Dipoldichte

$$\mathbf{P} = N \mathbf{d}_{ind} = N \alpha \mathbf{E}$$

bestimmt, die dem Feld proportional ist. Für die Suszeptibilität bedeutet das

$$\chi_e = N \alpha . \quad (23)$$

Es gibt aber auch Moleküle, die von sich aus (ohne äußeres Feld) ein Dipolmoment haben, weil die Ladungsverteilung im Molekül genügend unsymmetrisch ist. Man nennt solche Moleküle mit **eingepprägtem** (permanentem) Dipolmoment polare Moleküle. Jedes zweiatomige Molekül, das aus ungleichen Atomen besteht (z.B. HCl), gehört in diese Kategorie, manche drei- oder mehratomige Moleküle haben sogar besonders große Momente (z.B. Wasser  $\text{H}_2\text{O}$ , Methylalkohol  $\text{CH}_3\text{OH}$ , Ammoniak  $\text{NH}_3$ ). Das Dipolmoment kommt dadurch zustande, daß die zu den leichteren Atomen gehörigen Elektronen im Molekül auch vom Kern des schwereren Atoms angezogen werden und sich daher bevorzugt auf der diesem zugewandten Seite der leichteren Atome aufhalten, was im Mittel zu einer unsymmetrischen Ladungsverteilung führt. Man kann so z.B. die Richtung des Dipolmoments des Wassermoleküls aus seiner geometrischen Gestalt verstehen (vgl. Beispiel 1.2). Die Quantentheorie liefert die Begründung sowohl für die geometrische Form als auch für Größe und Richtung des Dipolmoments von Molekülen. Die gesamte Polarisierbarkeit eines Moleküls setzt sich aus einem elektronischen, einem ionischen und einem durch das eingepprägte Dipolmoment bewirkten Anteil zusammen. Da die eingepprägten Dipolmomente polarer Moleküle durch die Wirkung der Coulombfelder in atomaren Bereichen zustandekommen, die sehr stark sind ( $\sim e/(10^{-8} \text{ cm})^2 \sim 10^9 \text{ V/cm}$ ), sind sie viel größer als die durch realistische Felder induzierten: ein Feld von  $30 \text{ kV/cm}$  induziert in Wasserstoff nur ein Dipolmoment  $d_{ind} \sim 10^{-22} \text{ ESE}$ ; das eingepprägte Dipolmoment des Wassermoleküls ist um 4 Zehnerpotenzen größer. Daher können die induzierten gegenüber dem eingepprägten Dipolmoment meist vernachlässigt werden. Normalerweise

werden die Richtungen der Dipolmomente der einzelnen Moleküle eines polaren Mediums statistisch verteilt sein. Legt man ein äußeres Feld an, so erfahren die Dipolmomente ein Drehmoment (die positiven Ladungen werden in Feldrichtung, die negativen gegen die Feldrichtung gezogen). Daher werden die Dipolmomente in einem bestimmten Maß ausgerichtet und man erhält qualitativ dasselbe Resultat wie für unpolare Moleküle: im Mittel können die elektrischen Effekte durch eine der Feldstärke proportionale Dipoldichte  $\mathbf{P}$  beschrieben werden.

Damit haben wir verständlich gemacht, wie  $\mathbf{P}$  zustandekommt und daß der phänomenologische Ansatz plausibel ist. Es muß aber noch gezeigt werden, daß aus der mikroskopischen Theorie bei Mittelung die phänomenologischen Gleichungen (12) resultieren. Wir werden darauf weiter unten zurückkommen und uns nun mit der Frage befassen, wie gut die gegebene Beschreibung ist. Einige grobe quantitative Aspekte sind unmittelbar abzulesen, z.B. erwarten wir, daß die Dielektrizitätskonstanten von Substanzen, die aus polaren Molekülen bestehen, viel größer sein werden als bei unpolaren Molekülen. Das ist tatsächlich der Fall (Wasser:  $\epsilon = 80$ , Methylalkohol:  $\epsilon = 33$ , unpolare Substanzen:  $\epsilon \sim 1 - 2$ ).

Eine genaue Theorie der Dielektrizitätskonstanten unpolarer Substanzen muß den Zusammenhang zwischen der atomaren oder molekularen Polarisierbarkeit der in der Materialstruktur gebundenen Bestandteile und der Suszeptibilität herstellen. Unsere einfache Formel (23) haben wir unter der Annahme gefunden, daß die Bestandteile in der Substanz gleichmäßig verteilt sind und sich gegenseitig nicht beeinflussen. Sie wird daher nur für Gase bei normalen Bedingungen gute Resultate liefern. Sie zeigt aber, daß man damit die atomare bzw. molekulare Polarisierbarkeit durch Messung der Dielektrizitätskonstanten bestimmen kann. Streng ist die Formel nicht richtig, denn es wurde bei ihrer Herleitung angenommen, daß das Feld, das ein Atom polarisiert, das ganze (makroskopische) Feld ist. In Wirklichkeit ist dafür das Feld aller übrigen Ladungsverteilungen im System (also der äußeren Ladungen und der Ladungsverteilungen aller anderen Atome ohne diejenige des betrachteten Atoms) einzusetzen, wodurch der Zusammenhang komplizierter wird (vgl. Übungen).

Für polare Substanzen muß auf den Mechanismus der Ausrichtung der Dipole Rücksicht genommen werden. Infolge der Temperaturbewegung kommt es nie zu einer vollständigen Ausrichtung aller Mo-

leküle. Für ein Molekül ist diese ausgerichtete Lage zwar energetisch am günstigsten, es wird aber durch Stöße daran gehindert, sie dauernd einzunehmen. Im zeitlichen Mittel wird sein Dipolmoment jedoch länger in als gegen die Feldrichtung zeigen. Daher ist bei normalen Temperaturen und Feldstärken nur ein kleiner Teil der Moleküle ausgerichtet und die Dielektrizitätskonstante polarer Substanzen nimmt mit steigender Temperatur ab. Diese Abhängigkeit kann mit Hilfe der statistischen Thermodynamik berechnet werden. Das Resultat ist

$$P = N(CE + d \cdot L(A)) . \quad (24)$$

Dabei ist  $C$  der elektronische und ionische Beitrag und  $d = |\mathbf{d}|$  der Betrag des eingepprägten Dipolmoments.  $L$  ist die Langevinfunktion

$$L(A) = \coth A - \frac{1}{A}$$

mit

$$A = \frac{Ed}{k_B T}$$

( $k_B$  Boltzmannkonstante,  $T$  Temperatur). Für kleine  $A$  ist  $P$  proportional zu  $E$  und man erhält für die Suszeptibilität

$$\chi_e \approx N \left( C + \frac{d^2}{3k_B T} \right)$$

(Langevin-Debye-Formel). Für  $A > 1$  treten Abweichungen vom linearen Verhalten auf, die aber experimentell schwer zugänglich sind: für  $d = 10^{-18}$  ESE (das ist die zutreffende Größenordnung für viele Moleküle) erhält man für ein Feld von 30 kV/cm bei Zimmertemperatur den Wert  $A = 0.024$ . Für  $A \gg 1$  strebt  $L$  gegen einen konstanten Wert und man würde Sättigungserscheinungen erwarten.

Wir betrachten nun noch kurz die Verhältnisse in Wechselfeldern. Bei Substanzen aus Atomen oder Molekülen ohne eingepprägtes Dipolmoment wird unsere quasistationäre Betrachtungsweise über einen großen Frequenzbereich gültig bleiben. Abweichungen werden erst auftreten, wenn die Frequenz des Feldes, das die Polarisation hervorruft, so hoch wird, daß sie mit "inneren" Eigenfrequenzen des Atoms oder Moleküls vergleichbar wird. Für Atome liegen diese im optischen, für Moleküle im infraroten Spektralgebiet. Die bei diesen Frequenzen auftretenden Resonanzphänomene sind interessant, können aber nur

quantenmechanisch voll verstanden werden. Bei polaren Substanzen wird die Grenze der Anwendbarkeit schon früher erreicht, hier müssen die verhältnismäßig trägen Moleküle hin- und hergedreht werden. Bei höheren Frequenzen können die Moleküle der Oszillation des Feldes nicht mehr folgen (sie "hinken" nach), wodurch die Amplitude ihrer Schwingungen kleiner wird, d.h. die Dielektrizitätskonstante nimmt mit wachsender Frequenz ab und erreicht schließlich Werte, wie sie für nichtpolare Substanzen charakteristisch sind. Die Frequenzen, bei denen diese Effekte auftreten, hängen sehr stark von der betrachteten Substanz ab. Bei den meisten Substanzen beginnt der Abfall von  $\epsilon$  bei Frequenzen zwischen 10 MHz und 1 GHz (also im UHF- bis Mikrowellenbereich). Die mit dem Abfall von  $\epsilon$  verbundenen Dispersionserscheinungen werden wir im Kap. 5 untersuchen.

Betrachtet man immer höhere Frequenzen, so wird schließlich ein Gebiet erreicht, in dem sich die Atome der Substanz "unendlich träge" verhalten, d.h. es wird kein Moment induziert. Das bedeutet, daß für extrem hohe Frequenzen  $\chi_e = 0$ ,  $\epsilon = 1$ ,  $\mathbf{D} = \mathbf{E}$  zu setzen ist. Was in diesem Zusammenhang "extrem hoch" bedeutet, kann man mit Hilfe einer einfachen Betrachtung grob abschätzen. Dazu muß man sich vor Augen halten, daß sich als Folge der Maxwell'schen Gleichungen jedes zeitlich veränderliche Feld auch räumlich ändern muß. Für eine elektromagnetische Welle bildet die Wellenlänge  $\lambda \sim c/\omega$  ein Maß für das Gebiet, in dem wesentliche räumliche Änderungen der Feldstärken auftreten. Damit eine Suszeptibilität als makroskopischer Mittelwert überhaupt einen Sinn hat, muß die Wellenlänge groß gegen die charakteristische Abmessung  $a$  eines Atoms sein ( $\lambda \gg a$ ), denn für  $\lambda \sim a$  würde die Welle kein makroskopisches Gebiet "sehen". Mit dem Bohrschen Radius  $a \sim 10^{-8}$  cm erhält man aus  $\lambda \sim a$  Frequenzen im Röntgenbereich ( $\sim 3 \cdot 10^{18}$  Hz). Praktisch wird  $\epsilon$  schon unterhalb dieses Bereiches gleich 1. Insgesamt ist aber der Frequenzbereich, in dem eine makroskopische Beschreibung möglich ist, recht breit.

## Übungen

- 12) Um das **lokale** Feld am Ort eines Atoms in einem isotropen, homogen polarisierten Dielektrikum zu erhalten, denke man sich bei festgehaltener Polarisierung eine kugelförmige Öffnung ausgespart. Berechne das Feld im Mittelpunkt der Öffnung in Termen der Polarisierung und des (mittleren) Feldes  $E$  im Dielektrikum (vgl. auch Beispiel 2).
- 13) Verwende das Resultat von Beispiel 12 zu einer verbesserten Formel für die DK von Medien mit induzierter Polarisierung, die den Einfluß der Umgebung berücksichtigt (Clausius-Mossotti-Formel).

Die Idee, die der Lösung dieser beiden Beispiele zugrunde liegt, kann in einer Reihe analoger Problemstellungen in anderen Bereichen der Physik verwendet werden. Sie heißt "Methode des mittleren Feldes" oder "Molekularfeldmethode".

### 4.7 Mikroskopische Ursachen des Magnetismus

Grundsätzlich kann jeglicher Magnetismus von Materie nur mit Hilfe der Quantentheorie voll verstanden werden. Mit Hilfe der statistischen Mechanik kann nämlich gezeigt werden, daß es in einem rein klassischen makroskopischen System durch ein angelegtes Magnetfeld im thermischen Gleichgewicht kein induziertes magnetisches Moment und daher keinen Dia- oder Paramagnetismus geben kann. Der Ferromagnetismus ist klassisch erst recht nicht erklärbar. In gewissem Ausmaß kann man aber das Zustandekommen der magnetischen Erscheinungen mikroskopisch verstehen, wenn man gewisse Modellvorstellungen benützt, die zwar auf klassischen Überlegungen aufbauen, deren Resultate jedoch auch im Rahmen der Quantentheorie richtig bleiben. Das soll nun versucht werden.

Dazu müssen wir erst untersuchen, welche magnetischen Eigenschaften ein einzelnes Atom hat. Wir versuchen es mit dem Bohrschen Modell und betrachten ein Elektron, das sich auf einer Kreisbahn (Radius  $r$ ) mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $v/r$  um einen Kern bewegt. Der zugehörige elektrische Strom ist durch die Ladung gegeben, die pro Zeiteinheit einen bestimmten Punkt der Bahn passiert, also durch die Ladung mal Anzahl der Umläufe pro Zeiteinheit:

$$I = -e \frac{v}{2\pi r} .$$

Das zugehörige magnetische Moment erhalten wir durch Multiplikation von  $I/c$  mit der Kreisfläche. Die Richtung  $\mathbf{n}$  ist senkrecht zur Bahnfläche. So erhalten wir

$$\boldsymbol{\mu}_L = \frac{1}{c} I r^2 \pi \mathbf{n} = -\frac{e}{2c} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = -\frac{e}{2mc} \mathbf{L} ,$$

wobei  $\mathbf{L}$  der Bahndrehimpuls ist. Diese Beziehung zwischen  $\boldsymbol{\mu}_L$  und  $\mathbf{L}$  gilt auch in der Quantentheorie. Das Verhältnis

$$\frac{|\boldsymbol{\mu}_L|}{|\mathbf{L}|} = \frac{e}{2mc}$$

heißt das gyromagnetische (oder magnetomechanische) Verhältnis. Außer dem Bahndrehimpuls haben Elektronen noch einen Spin  $\mathbf{S}$ , der zu einem magnetischen Moment des einzelnen Elektrons führt. Das entsprechende gyromagnetische Verhältnis ist doppelt so groß:



$$\boldsymbol{\mu}_S = -\frac{e}{mc}\mathbf{S}.$$

Der Spin des Elektrons ist eine quantenmechanische Variable ohne klassisches Gegenstück. Die vom Spin herrührenden Phänomene können klassisch nicht verstanden werden.

Für ein Atom setzen sich die magnetischen Bahn- und Spinnomente der einzelnen Elektronen in komplizierter Weise zu einem Gesamtmoment zusammen. Dieses Gesamtmoment ist dem gesamten Drehimpuls  $\mathbf{J}$  des Atoms proportional:

$$\boldsymbol{\mu}_J = -\frac{e}{2mc}g\mathbf{J}.$$

Der Faktor  $g$  ist von der Größenordnung 1 und heißt Landéfaktor. Er kann mit Hilfe der Quantentheorie berechnet und durch die Quantenzahlen von  $\mathbf{J}$ ,  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{S}$  ausgedrückt werden.

Als nächstes untersuchen wir, was passiert, wenn ein Atom in ein äußeres Magnetfeld gebracht wird. Wir betrachten ein konstantes, homogenes Feld  $\mathbf{B}$ : im Vergleich mit den für ein Atom charakteristischen Skalen (Abmessung  $10^{-8}$  cm, Zeitskala  $10^{-14}$  s) ist das eine sehr gute Näherung für makroskopische Felder.

Am einfachsten lassen sich die Auswirkungen des Feldes verfolgen, wenn man vom Larmorschen Satz ausgeht. Dieser bezieht sich auf die (nichtrelativistische) Bewegung von Teilchen mit gleichem Verhältnis von Ladung/Masse in einem elektrischen Zentralfeld (Coulombfeld eines Kerns) und einem homogenen Magnetfeld  $\mathbf{B}$ . Der Satz besagt, daß sich die Bewegung in erster Ordnung in  $\mathbf{B}$  (d.h. für ein nicht zu starkes Feld) von der feldfreien Bewegung nur um eine Präzessionsbewegung des gesamten Bahndrehimpulses um die Feldrichtung unterscheidet, die mit der Frequenz  $\omega_L = qB/2mc$  (Larmorfrequenz) erfolgt. Der Satz kann mit Hilfe der klassischen Mechanik bewiesen werden. Er ist plausibel, wenn man sich daran erinnert, daß der magnetische Teil der Lorentzkraft in der Bewegungsgleichung eines Teilchens die Form einer Corioliskraft hat:

$$\frac{q}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B} = -\frac{q}{mc}\mathbf{B} \times \mathbf{p} = 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{p}, \quad \boldsymbol{\Omega} = -\frac{q}{2mc}\mathbf{B}.$$

Durch Transformation auf ein mit  $\boldsymbol{\Omega}$  rotierendes Bezugssystem (vgl. M 1.15) kann dieser Term weggebracht werden. Wie bei der Rotation

eines starren Körpers (vgl. M 3.6) ergibt sich in dieser Weise die Larmorpräzession. Daß das Resultat nur für schwaches Feld gilt, sieht man am Fehlen eines Analogons zur Zentrifugalkraft (vgl. M 1.15), die mit der angegebenen Form von  $\Omega$  von zweiter Ordnung in  $B$  ist.

Nun benützen wir den Larmorsatz zu einer Berechnung des durch  $B$  induzierten magnetischen Moments. Den zur Larmorpräzession gehörigen Strom erhalten wir wie früher aus der Ladung mal der Anzahl der Umläufe pro Zeiteinheit. Für  $Z$  Elektronen gibt das

$$\frac{1}{c} I_P = -Ze \frac{|\omega_L|}{2\pi c} = -\frac{Ze^2 B}{4\pi mc^2}.$$

Das zugehörige Moment erhalten wir durch Multiplikation mit der von der Stromschleife umschlossenen Fläche  $\pi r_{\perp}^2$ . Dabei ist  $r_{\perp}$  der Radius der Schleife in der zu  $B$  senkrechten Ebene (für eine weniger "gelehrte" Herleitung des Resultats vgl. Beispiel 2). Die klassische Betrachtung sagt über die Lage der einzelnen Elektronenbahnen nichts aus. Wir ersetzen daher  $r_{\perp}^2$  durch den Mittelwert über alle Bahnen. Wählen wir die Feldrichtung als  $z$ -Achse, so ist

$$\langle r_{\perp}^2 \rangle = \langle x^2 + y^2 \rangle = \langle r^2 \rangle - \langle z^2 \rangle,$$

wobei  $\langle r^2 \rangle$  der mittlere quadratische Bahnradius ist. Für ein kugelsymmetrisches Atom ist

$$\langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle = \langle z^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle r^2 \rangle, \quad \langle r_{\perp}^2 \rangle = \frac{2}{3} \langle r^2 \rangle.$$

Damit erhalten wir

$$\mu_{ind} = -\frac{Ze^2}{6mc^2} B \langle r^2 \rangle.$$

Dieses klassische Resultat wurde von Langevin gefunden. Im Rahmen der Quantentheorie bleibt es richtig, wenn man  $\langle \rangle$  als quantenmechanischen Mittelwert versteht. Das negative Vorzeichen entspricht der Lenzschen Regel.

Quantitativ ist das induzierte Moment selbst für starke Felder klein gegen das atomare Moment  $\mu_J$ . Die meisten Atome haben jedoch im Grundzustand den Gesamtdrehimpuls Null, sodaß ohne äußeres Feld kein magnetisches Moment vorhanden ist. Aus solchen Atomen aufgebaute Substanzen benehmen sich daher **diamagnetisch**. Für  $N$  Atome pro  $\text{cm}^3$  erhalten wir

$$\mathbf{M} = N\boldsymbol{\mu}_{ind} = \chi_m \mathbf{B}$$

mit

$$\chi_m = -\frac{NZe^2}{6mc^2} \langle r^2 \rangle \quad (25)$$

(Langevin). Für die meisten Diamagnetika liegt  $\chi_m$  zwischen  $10^{-5}$  und  $10^{-7}$ . Es gibt aber auch einige "anomale" Diamagnetika mit Werten, die um ein bis zwei Zehnerpotenzen höher liegen (z.B. Wismut, Graphit). In Leitern tragen auch die Leitungselektronen zum Diamagnetismus bei. Auch für Moleküle sind die Verhältnisse komplizierter. Die Annahme einer kugelsymmetrischen Atomstruktur bedeutet eine zu grobe Vereinfachung der Wirklichkeit.

Ist der Gesamtdrehimpuls im Grundzustand von Null verschieden, so überwiegt jedenfalls das atomare Moment  $\mu_J$ . Bringt man aus solchen Atomen aufgebaute Substanzen in ein Magnetfeld, so trachtet dieses, die magnetischen Momente der Atome auszurichten, wodurch das Magnetfeld verstärkt wird: die Substanz benimmt sich **paramagnetisch**. Die Wärmebewegung verhindert (wie bei der elektrischen Polarisation) eine totale Ausrichtung aller atomaren Momente bei endlicher Temperatur. Eine quantitative Beschreibung des Paramagnetismus ist nur mit Hilfe der Quantentheorie möglich. Das atomare Moment kann nur diskrete Werte annehmen

$$|\boldsymbol{\mu}_J| = \mu_B g \sqrt{J(J+1)}. \quad (26)$$

Dabei ist  $J$  die Quantenzahl des Betrages von  $\mathbf{J}$ , d.h.  $\mathbf{J}^2 \rightarrow \hbar^2 J(J+1)$  und

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2mc}$$

ist das Bohrsche Magneton. Der Landèfaktor hat mit den Quantenzahlen  $L$ ,  $S$  (Bahndrehimpuls bzw. Spin) die Form

$$g = 1 + \frac{J(J+1) - L(L+1) + S(S+1)}{2J(J+1)}$$

Bei Berechnung der Temperaturabhängigkeit muß man die diskrete Anzahl der Einstellmöglichkeiten des Drehimpulses relativ zum Feld berücksichtigen. Das Resultat der statistischen Rechnung für die Magnetisierung ist für  $N$  Atome pro  $\text{cm}^3$

$$M = N\mu_B JgF_B(\Lambda, J) \quad (27)$$

mit der Brillouinfunktion

$$F_B(\Lambda, J) = \frac{2J+1}{2J} \coth\left(\frac{(2J+1)\Lambda}{2J}\right) - \frac{1}{2J} \coth\left(\frac{\Lambda}{2J}\right) \quad (28)$$

und

$$\Lambda = \frac{g\mu_B JB}{k_B T} \quad (29)$$

( $k_B$  Boltzmannkonstante,  $T$  Temperatur). Für normale Temperaturen ist  $\Lambda$  klein: bei Zimmertemperatur erhält man für  $B = 1$  Tesla =  $10^4$  Gauß und  $gJ = 2$  den Wert  $\Lambda = 0,0044$ . Entwickelt man  $F_B$  für kleine  $\Lambda$ , so erhält man einen linearen Zusammenhang zwischen  $M$  und  $B$  und damit eine konstante Suszeptibilität

$$\chi_m = \frac{C}{T} \quad \text{Curiesches Gesetz .} \quad (30)$$

Für starke Felder und/oder tiefere Temperaturen (d.h. größere Werte von  $\Lambda$ ) treten nichtlineare Terme auf. Für  $\Lambda \gg 1$  erhält man eine Sättigung: die Magnetisierung strebt gegen einen konstanten Wert  $M \rightarrow N\mu_J$ , der einer Ausrichtung aller Momente entspricht.

Das Elektronengas in Leitern benimmt sich ebenfalls paramagnetisch (Paulischer Paramagnetismus). Die zugehörige Suszeptibilität ist unabhängig von  $B$  und (für nicht zu hohe Temperatur) temperaturunabhängig. Durch das magnetische Kernmoment tragen auch die Atomkerne zum Paramagnetismus bei. Da die Kernmomente um einen Faktor  $10^3$  kleiner als die atomaren Momente sind, ist der nukleare Paramagnetismus sehr schwach.

Der **Ferromagnetismus** ist ein rein quantentheoretischer Effekt der Festkörperphysik. Er kommt dadurch zustande, daß in ferromagnetischen Substanzen eine regelmäßige Anordnung der magnetischen Spinnomente vorliegt, die zu einem spontanen, makroskopischen magnetischen Moment (sog. Sättigungsmoment) und damit zu spontaner Magnetisierung führt. Diese verschwindet bei einer bestimmten Temperatur  $T_C$  (Curietemperatur). Oberhalb dieser Temperatur tritt Paramagnetismus auf. Die Curietemperatur von Eisen beträgt  $1043^\circ\text{K}$ . Die Ausrichtung der Spins ist eine Folge der quantenmechanischen Austauschwechselwirkung (Heisenberg 1928), die alle anderen magnetischen Wechselwirkungen zwischen den Atomen dominiert. Außer in der unmittelbaren Nähe des Curiepunktes kann die Magnetisierung (bei gegebener Temperatur) als Konstante behandelt werden. Das bedeutet, daß

eine lineare Beziehung zwischen  $B$  und  $H$  unterhalb der Curietemperatur sinnlos ist: bei  $T = T_C$  wird die Suszeptibilität unendlich und  $M$  bleibt auch für verschwindendes äußeres Feld endlich, d.h. unterhalb von  $T_C$  sind praktisch alle Spinmomente ausgerichtet. Eine einfache Theorie dieses Phasenüberganges kann man mit der Methode des mittleren Feldes erhalten (vgl. Beispiel 11). Man ersetzt die Wirkung aller Spinmomente auf ein herausgegriffenes durch ein mittleres Feld  $B_m$ , das der Magnetisierung proportional ist (vgl. das in Beispiel 4 verwendete Modell für einen Permanentmagneten). Die Proportionalitätskonstante wird so bestimmt, daß oberhalb von  $T_C$  ein Paramagnet resultiert, der dem Curiegesetz gehorcht, wobei die Curiekonstante für Elektronen ( $J = S$ ,  $L = 0$ ,  $g = 2$ ) zu verwenden ist. Damit erhält man für  $T > T_C$  das Verhalten

$$\chi_m = \frac{C}{T - T_C} \quad (31)$$

(Curie-Weiss-Gesetz, vgl. Beispiel 14). Mit der gleichen Methode kann man für  $T < T_C$  die Temperaturabhängigkeit der Sättigungsmagnetisierung bestimmen (vgl. Beispiel 15).

Ferromagneten haben als Ganzes meist ein kleineres Moment als das Sättigungsmoment, das erst nach Anlegen eines äußeren Magnetfeldes erreicht wird. Dieses Phänomen kommt dadurch zustande, daß ein solcher Ferromagnet aus einer Vielzahl von kleineren Domänen (Weissche Bezirke) besteht, innerhalb derer die lokale Magnetisierung gesättigt ist, wobei aber die Richtungen der Magnetisierung der Domänen nicht übereinstimmen müssen. In einem äußeren Feld wächst das Volumen der günstig orientierten Domänen auf Kosten desjenigen der ungünstig orientierten. In starken Feldern dreht sich außerdem die effektive Magnetisierung in einer Weise, die von der Vorgeschichte abhängt, sodaß die Funktion  $B(H)$  in gewissen Bereichen zweideutig wird (Hystereseschleife).

Der Ferromagnetismus wird vor allem bei den Metallen Eisen, Kobalt und Nickel beobachtet. Bei benachbarten Elementen (z.B. Chrom) und bei gewissen Legierungen ferromagnetischer Stoffe stellt man eine vom mikroskopischen Standpunkt verwandte Eigenschaft fest, den **Antiferromagnetismus**. Dabei ist die Austauschwechselwirkung so beschaffen, daß die energetisch günstigere Anordnung eine ist, bei der die Spins benachbarter Atome im Gitter entgegengesetzt gerichtet sind (vgl. Fig. 4.3).

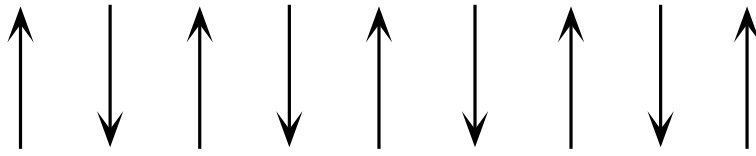


Fig. 4.3

Man kann das als zwei gegeneinander verschobene, entgegengesetzt magnetisierte ferromagnetische Gitter auffassen. Nach außen tritt keine Magnetisierung auf. Man kann die Existenz der Struktur aber am Auftreten einer Curietemperatur nachweisen, bei der die geordnete Phase in die ungeordnete übergeht. Der Phasenübergang äußert sich z.B. (wie auch bei Ferromagnetika) in einer unstetigen Änderung der spezifischen Wärme.

Durch Einbau geeigneter Substanzen in eine Kristallstruktur (Spinnell) kann man eine Anordnung erreichen, die trotz einer intern antiferromagnetischen Struktur nach außen ferromagnetisch wirkt, weil die beiden verschobenen Gitter unterschiedlich stark magnetisiert sind (vgl. Fig. 4.4).

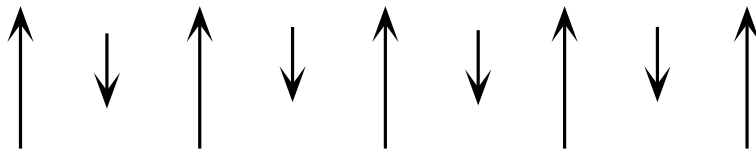


Fig. 4.4

Diese **Ferrite** haben zwar weniger hohe Permeabilitäten als die ferromagnetischen Metalle, sind aber im Gegensatz zu diesen Nichtleiter und daher für technische Anwendungen sehr brauchbar. Weitere Einzelheiten über das große Gebiet magnetischer Phänomene in festen Stoffen sind der Festkörperphysik zu entnehmen.

Die bisher angestellten Überlegungen waren im Wesentlichen auf statische Felder beschränkt, werden aber auch für Wechselfelder von nicht zu hoher Frequenz gültig bleiben. Gültigkeitsgrenzen werden dort erreicht, wo die Schwingungsdauer des Wechselfeldes nicht mehr groß gegen die Zeitkonstante des mikroskopischen Mechanismus ist, der für

die betreffenden magnetischen Phänomene verantwortlich ist. Im Vergleich mit den dielektrischen Phänomenen wird diese Grenze wesentlich früher erreicht. Die kleinste Zeitkonstante hat der für den Diamagnetismus verantwortliche Mechanismus. Damit ein induziertes Moment überhaupt definiert ist, muß das induzierende Feld so lange dauern, daß einige Umläufe von Hüllenelektronen stattfinden. Die entsprechende Zeitkonstante im Bohrschen Modell (charakteristische Umlaufsdauer) entspricht einer Frequenz von

$$E_R/h \sim 3 \cdot 10^{15} \text{ Hz}, \quad E_R = \text{Rydbergenergie} = 13,6 \text{ eV} .$$

Die Zeitkonstanten für Übergänge zwischen atomaren bzw. molekularen Energieniveaus sind größer, sie entsprechen optischen bzw. infraroten Frequenzen. Für Wechselfelder mit vergleichbarer Frequenz hat eine Suszeptibilität keinen Sinn, d.h. in diesem Bereich ist bereits  $\mathbf{H} = \mathbf{B}$ , die Permeabilität  $\mu$  ist 1.

Für den atomaren Paramagnetismus ist die Zeitkonstante wesentlich größer, weil die verhältnismäßig trägen Atome hin- und hergedreht werden müssen. Die entsprechende Suszeptibilität verliert ihren Sinn daher schon bei wesentlich niedrigeren Frequenzen als die diamagnetische. Bei Ferromagnetika geht es um makroskopische Bereiche, deren magnetisches Moment im Wechselfeld hin- und hergedreht werden soll. Die entsprechenden magnetischen Dispersionsphänomene können durch einen frequenzabhängigen Permeabilitätstensor beschrieben werden und treten bei niedrigen Frequenzen auf.

## Übungen

- 14) Ein Elektron bewegt sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit auf einer Kreisbahn (Radius  $r$ ) um ein Proton. Senkrecht zur Bahnebene wird ein homogenes Magnetfeld angelegt, dessen Feldstärke langsam von Null auf  $B$  gesteigert wird. Berechne die dadurch insgesamt bewirkte Änderung des Bahndrehimpulses mit Hilfe des Induktionsgesetzes und bestimme das induzierte magnetische Moment.
- 15) Berechne die Konstante  $C$  im Curieschen Gesetz für den Paramagnetismus aus der Brillouinfunktion.
- 16) Führe die im Text angedeutete Methode des mittleren Feldes für die Suszeptibilität eines Ferromagneten oberhalb der Curietemperatur durch. Bestimme die Proportionalitätskonstante für Eisen.
- 17) Bestimme mit der gleichen Methode die Temperaturabhängigkeit der Sättigungsmagnetisierung  $M_S$  (graphisch bzw. numerisch).



#### 4.8 Mikroskopische Ursachen der Leitfähigkeit

Um die bei Leitern beobachteten Widerstandsphänomene verstehen zu können, betrachten wir nun einen einfachen mikroskopischen Mechanismus der Leitfähigkeit, der auf P. Drude (1900) zurückgeht. Wir betrachten ein Medium, in dem zwei Sorten von frei beweglichen Ladungsträgern vorhanden sein sollen, die sich im Ladungsvorzeichen (Ladung  $\pm q$ ) und in der Masse ( $m_+$ ,  $m_-$ ) unterscheiden. Man kann dabei an positive Ionen und negative Ionen oder Elektronen denken. Pro  $\text{cm}^3$  mögen  $N_+$  bzw.  $N_-$  Teilchen vorhanden sein. Die Stromdichte ist dann durch die mittlere Geschwindigkeit der Ladungsträger bestimmt.

Legt man ein konstantes, homogenes Feld  $\mathbf{E}$  an, so erfährt jeder Ladungsträger die konstante Kraft  $q\mathbf{E}$  und erhält daher eine konstante **Beschleunigung** (und nicht eine konstante **Geschwindigkeit**, wie sie dem Ohmschen Gesetz entspräche). Wenn dieses Gesetz daher stimmen soll, muß die mittlere Geschwindigkeit proportional der **Kraft** sein, d.h. die Ladungsträger können sich nicht frei bewegen, sondern es muß ein Mechanismus vorhanden sein, der ihre Bewegung im elektrischen Feld bremst. Diese Bremsung wird durch Zusammenstöße der Ionen miteinander und mit anderen Teilchen des Mediums hervorgerufen. Um dafür ein Modell zu haben, stellen wir uns das Medium als ein normales Gas vor (etwa  $10^{19}$  Teilchen/ $\text{cm}^3$ ), in dem außer den Ionen auch neutrale Teilchen vorhanden sind, und zwar in Überzahl. Ist kein elektrisches Feld vorhanden, so werden sich die Teilchen irregulär durcheinander bewegen, wobei ihre mittlere kinetischen Energie durch die Temperatur bestimmt ist. Durch Stöße ändert ein Teilchen seine Geschwindigkeitsrichtung in verhältnismäßig kurzer Zeit völlig, sodaß keine Korrelation zwischen den Geschwindigkeiten zu einem Zeitpunkt  $t$  und einem späteren Zeitpunkt  $t+\tau$  besteht.  $\tau$  ist dabei eine für das System charakteristische Relaxationszeit. Beschreibt man die Stöße z.B. als solche zwischen elastischen Kugeln, so geht die Geschwindigkeitskorrelation schon bei einem einzigen Stoß verloren und  $\tau$  ist die Zeit  $\langle t \rangle$ , die im Mittel zwischen zwei Stößen verstreicht. Ein Maß für diese Zeit wird durch die mittlere freie Weglänge geliefert. Hat nun das  $j$ te Ion nach einem Stoß die Geschwindigkeit  $\mathbf{u}_{(j)}$  und das elektrische Feld ist eingeschaltet, so beträgt sein Impuls zur Zeit  $t_{(j)}$  nach dem Stoß

$$\mathbf{p}_{(j)} = m\mathbf{u}_{(j)} + q\mathbf{E}t_{(j)}$$

Der erste Term ist der Impuls, den das Ion beim letzten Stoß erhalten hat. Er stammt daher von dem anderen daran beteiligten Teilchen und

das ist in der überwiegenden Zahl der Fälle ein neutrales Teilchen. Deswegen sind die Richtungen von  $\mathbf{u}_{(j)}$  statistisch verteilt und haben keine Korrelation mit der Feldrichtung. Bezieht man die geladenen Teilchen als Stoßpartner ein, so wird die von positiven Teilchen "eingeschleppte" Bevorzugung der Feldrichtung von der entgegengesetzten der negativen Teilchen kompensiert (das gilt natürlich nicht mehr, wenn hauptsächlich Ionen eines Ladungsvorzeichens vorhanden sind). Der zweite Term ist der Impuls, den das Teilchen vom Feld erhält. Ist dieser Beitrag klein gegen den ersten, so wird sich die mittlere Zeit zwischen zwei Stößen nicht wesentlich von derjenigen im feldfreien Fall ( $\langle t \rangle$ ) unterscheiden, d.h. für nicht zu starke Felder ist  $\langle t \rangle$  unabhängig von  $\mathbf{E}$ . Beim nächsten Stoß (im Mittel nach  $\langle t \rangle$  Sekunden) ändert sich der Impuls des Teilchens und es geht dabei auch die Korrelation mit der Feldrichtung verloren. Für die Berechnung des mittleren Impulses aller  $N_+$  positiven Ionen kommt es daher nur auf die Zeiten  $t_{(j)}$  an, die für jedes einzelne Teilchen seit dem letzten Stoß verstrichen sind, d.h. dieser mittlere Impuls ist

$$\langle \mathbf{p}_+ \rangle = \langle m_+ \mathbf{u}_{(j)} + q \mathbf{E} t_{(j)} \rangle_{(j)} .$$

Da die Richtungen der  $\mathbf{u}_{(j)}$  statistisch verteilt sind, ist der Mittelwert des ersten Terms Null. Im zweiten Term ist  $q \mathbf{E}$  konstant und wir erhalten den Mittelwert aller seit dem letzten Stoß verstrichenen Zeiten, das ist aber offenbar die mittlere Zeit zwischen zwei Stößen (weil die Stöße unabhängig voneinander in irregulären Zeitpunkten erfolgen). Daher ist die mittlere Geschwindigkeit von Null verschieden und beträgt

$$\langle \mathbf{u}_+ \rangle = \frac{1}{m_+} q \mathbf{E} \langle t_+ \rangle$$

und das ist proportional der Kraft, die der betrachtete Ladungsträger spürt. Für die negativen Teilchen gilt dieselbe Überlegung und wir erhalten für die Stromdichte

$$\mathbf{j} = N_+ \cdot q \cdot \frac{q \mathbf{E} \langle t_+ \rangle}{m_+} + N_- \cdot (-q) \cdot \frac{(-q) \mathbf{E} \langle t_- \rangle}{m_-} = \sigma \mathbf{E}$$

Das ist das Ohmsche Gesetz, wobei hier die Leitfähigkeit die Konstante

$$\sigma = q^2 \left( \frac{N_+ \langle t_+ \rangle}{m_+} + \frac{N_- \langle t_- \rangle}{m_-} \right) \quad (32)$$

ist.

Man sieht, daß die elektrische Leitung normalerweise nur durch eine leichte systematische Driftbewegung zustandekommt, die der thermischen Bewegung überlagert ist. Die Geschwindigkeit  $\langle \mathbf{u} \rangle$  des Ladungstransports unterscheidet sich daher sehr stark von der eines einzelnen Ladungsträgers. Die speziellen Annahmen unseres Modells gehen nur über die Zeiten  $\langle t_{\pm} \rangle$  ein. **Jedes** System, in dem die Zahl der freien Ladungsträger pro Volumeinheit konstant ist und in dem die Wechselwirkungen im System dazu führen, daß die Bewegung der Ladungsträger genügend rasch statistisch wird, wird daher für nicht zu starke Felder das Ohmsche Gesetz erfüllen. Die Leitfähigkeit wird der Dichte der freien Ladungsträger und einer charakteristischen Zeit proportional sein, in der die Richtungskorrelation verlorenght. Eine detaillierte Theorie der Leitfähigkeit besteht in der Berechnung dieser Zeitkonstante aus der Dynamik des Systems.

Betrachtet man einen Festkörper als quantenmechanisches System, so stellt man fest, daß die Zustände der Elektronen nicht diskrete Energieniveaus sind, sondern Energiebänder, d.h. es gibt erlaubte Energiebereiche, die durch verbotene Energielücken voneinander getrennt sind. Diese Struktur ist eine Folge des periodischen Potentials der Ionen, die das Kristallgitter bilden. Als Folge des Pauliprinzips kann jeder mögliche Zustand nur mit einem Elektron besetzt werden. Die Elektronen füllen daher die erlaubten Energiebänder von unten her an. Der Unterschied von Leitern und Isolatoren ist durch die Besetzung der obersten gefüllten Bänder bedingt (vgl. Fig. 4.5).

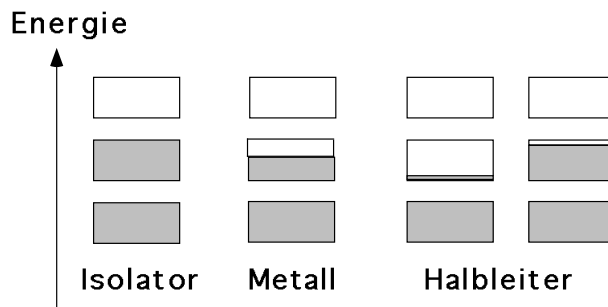


Fig. 4.5

Bei Isolatoren ist das oberste gefüllte Band vollständig besetzt, das nächstfolgende Band ist ganz leer. Um Elektronen “in Marsch zu set-

zen”, muß man so viel Energie zuführen, daß sie in das leere Band gehoben werden. Das ist nur bei sehr starken Feldern möglich und äußert sich als Durchschlag des Isolators. Bei Metallen ist das oberste besetzte Band (Leitfähigkeitsband) nur teilweise aufgefüllt (zu 10 - 90%), so daß die Elektronen durch Zuführen einer sehr kleinen Energie in Bewegung gesetzt werden können. Sind alle gefüllten Bänder bis auf die obersten vollständig besetzt, die letzteren aber entweder fast ganz besetzt oder fast ganz leer, so bezeichnet man das Material als Halbleiter. Wir betrachten nun ein leitendes Metall. In diesem sind die Elektronen des Leitfähigkeitsbandes frei beweglich (sie werden durch die Gitterionen nicht behindert, denn die Bandstruktur kommt gerade durch das Gitter zustande!) und wir können sie in guter Näherung als nahezu freie Teilchen auffassen. Der Leiter besteht dann aus einem Elektronengas von Leitungselektronen, in dem die Gitteratome “wie Knödel in einer Suppe” liegen. Wir müssen dabei aber beachten, daß dieses Gas aus Teilchen besteht, die dem Pauliprinzip genügen. Ein Zustand eines freien Elektrons wird durch den Impuls  $\mathbf{p}$  und die Spineinstellung  $s(=\uparrow$  oder  $\downarrow)$  vorgegeben. Die Energie ist  $\epsilon(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^2/2m$ . Ein solcher Zustand kann nur von einem Elektron eingenommen werden. In einem freien Elektronengas besetzen die Elektronen daher alle diese Zustände bis zu einem Grenzimpuls  $p_F$  mit der zugehörigen Grenzenergie  $\epsilon_F$ . Diese Energie (Fermienergie) entspricht in etwa der Energie, bis zu der das Leitfähigkeitsband gefüllt ist und ist durch die Dichte der Elektronen bestimmt. Die Impulse der Elektronen liegen innerhalb einer Kugel mit dem Radius  $p_F$  (Fermikugel). Legt man zur Zeit  $t = 0$  ein elektrisches Feld an, so wird die Fermikugel verschoben: nach der Zeit  $t$  haben alle Elektronen den zusätzlichen Impuls  $\delta\mathbf{p} = -e\mathbf{E} \cdot t$  erhalten.

Diese Verschiebung (und damit die Geschwindigkeit bzw. der Strom im Leiter) ist nicht stationär. Damit ein endlicher Widerstand resultiert, muß es (wie im früher betrachteten Gasmodell) eine Wechselwirkung geben, die einen “Reibungsmechanismus” liefert und aus dem Gas eine Art Flüssigkeit macht. Wie bereits oben bemerkt wurde, kann das (ruhende, ideale) Gitter dafür nicht verantwortlich gemacht werden. Das **wirkliche** Gitter sieht aber anders aus. Infolge der Temperaturbewegung schwingen die Ionen statistisch um eine Gleichgewichtslage; die Elektronen erfahren eine Wechselwirkung mit den Gitterschwingungen; bei jedem Zusammenstoß mit einem Gitteratom wird auf das (vielleichtere) Elektron so viel Impuls übertragen, daß die Korrelation mit der Feldrichtung verloren geht und in unserer Formel (32) wieder nur

die konstante mittlere Zeit  $\langle t \rangle$  seit dem letzten Stoß auftritt. Die Wechselwirkung der Elektronen mit den Gitterschwingungen liefert also einen temperaturabhängigen Beitrag zum spezifischen Widerstand, der bei normalen Temperaturen dominiert und proportional der Temperatur ist. Außerdem werden die Elektronen an Inhomogenitäten des Gitters (Strukturdefekte, Fremdatome) gestreut. Das gibt einen temperaturunabhängigen Beitrag zum spezifischen Widerstand, der bei niedrigen Temperaturen als Restwiderstand übrigbleibt. Durch Herstellen sehr reiner Kristalle kann dieser Widerstand klein gemacht werden. Die Streuung der Elektronen aneinander ist im Vergleich zur Wechselwirkung mit den Gitterschwingungen von geringer Bedeutung. Das ist i.W. eine Folge des Pauliprinzips. Um das einzusehen, betrachten wir den Zusammenstoß eines (geringfügig) angeregten Elektrons (Niveau knapp außerhalb der Fermikugel) mit einem Elektron innerhalb der Fermikugel: dieser Fall wird am häufigsten auftreten. Damit der Prozeß möglich ist, müssen beide Elektronen nach dem Stoß in Niveaus außerhalb der Fermikugel liegen (die anderen Niveaus sind besetzt). Wegen der Erhaltung von Energie und Impuls kommen dann jedoch für das anfangs vorhandene Leitungselektron nur relativ wenige Elektronen innerhalb der Kugel als Stoßpartner in Betracht. Dadurch wird die Wahrscheinlichkeit für die Streuung bedeutend herabgesetzt und die mittlere freie Weglänge für Elektron-Elektronstöße wird relativ groß (bei Zimmertemperatur ist sie etwa 30mal so groß wie diejenige für die Wechselwirkung der Elektronen mit den Gitterschwingungen).

Bei sehr tiefen Temperaturen tritt ein qualitativ neues Phänomen auf. Unterhalb einer bestimmten (materialabhängigen) Temperatur  $T_C$  (Sprungtemperatur) verschwindet der spezifische Widerstand vieler Metalle und Legierungen völlig: das Material wird supraleitend. Die Supraleitung ist ein rein quantenmechanischer Festkörpereffekt. Er kommt dadurch zustande, daß die Wechselwirkung der Elektronen mit den Gitterschwingungen zu einer effektiven Wechselwirkung der Elektronen untereinander führt, die anziehend ist. Dadurch ist der energetisch günstigste Zustand einer, in dem die Elektronen paarweise aneinander gebunden sind (Cooper-Paare). Dieser Zustand ist durch eine endliche Energielücke von den Anregungszuständen des Systems (Elektronen + Gitter) getrennt. Führt man dem System einen kleineren Energiebeitrag zu, so kann das System nur so angeregt werden, daß die Paare kinetische Energie erhalten: sie können sich dann "reibungsfrei" durch das Metall bewegen, d.h. die Leitung erfolgt widerstandsfrei und die La-

Leitungsträger haben die Ladung  $-2e$ . Erst wenn die Energielücke überschritten wird, können die Paare aufgebrochen werden und es kommt zum normalen Leitungsmechanismus. Trotz der quantenmechanischen Natur der Supraleitung kann man in gewissen Grenzen eine phänomenologische Elektrodynamik für Supraleiter entwickeln, für die allerdings der Ansatz  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$  nicht brauchbar ist.

Nun wollen wir noch untersuchen, wo die Grenzen des Ohmschen Gesetzes für normale Leiter zu suchen sind. Für **sehr starke Felder** wird man nichtlineare Korrekturen erwarten, wenn die Zeitkonstante  $\langle t \rangle$  von  $\mathbf{E}$  abhängig wird. Das kann offenbar nur dann der Fall sein, wenn die Ladungsträger vom Feld einen Impuls erhalten, der mit dem vergleichbar ist, den sie durch thermische Stöße (mit schwingenden Gitteratomen im Metall, mit neutralen Teilchen im Gas) erhalten. In verdünnten Gasen ist die freie Weglänge sehr groß und man kann schon bei relativ kleinen Feldstärken Nichtlinearitäten beobachten. Ein Zusammenbruch des Ohmschen Gesetzes ist außerdem dann zu erwarten, wenn sich die Zahl der Ladungsträger ändert. Das kann in Gasen dann vorkommen, wenn die anfangs vorhandenen Ladungsträger durch das Feld einen so hohen Impuls erhalten, daß sie bei Stößen neutrale Atome ionisieren. Die Zahl der Ladungsträger steigt dann lawinenartig an und es kommt zu einer Funkenentladung. Eine weitere Gültigkeitsgrenze wird für Wechselfelder genügend hoher Frequenz erreicht. Unsere für konstante Felder angestellten Überlegungen bleiben für Wechselfelder dann gültig, wenn sich das Feld in der charakteristischen Zeit  $\langle t \rangle$  nicht beträchtlich ändert. Für ein ionisiertes Gas beträgt die mittlere freie Weglänge bei normalen Verhältnissen  $\sim 10^{-6}$  cm; das entspricht für Ionen einer Zeit von  $\langle t \rangle \sim 10^{-10}$  Sekunden. In Metallen hat die mittlere freie Weglänge der Leitungselektronen bei normaler Temperatur ebenfalls die Größenordnung von  $10^{-6}$  cm. Wegen der höheren Geschwindigkeit der Elektronen ist die charakteristische Zeit jedoch bedeutend kleiner  $\langle t \rangle \sim 10^{-13} - 10^{-14}$  Sekunden. Das Ohmsche Gesetz bleibt daher für quasistationäre Vorgänge in einem relativ großen Frequenzbereich gültig. Abweichungen wird man bei ionisierten Gasen im Ultrakurzwellenbereich erwarten. In Metallen sollten sie erst im Infrarotbereich knapp unterhalb des sichtbaren Spektralbereiches auftreten.

**Übung**

- 18) In einem leitenden Medium soll nur eine Sorte von Ladungsträgern (Ladung  $q$ , Masse  $m$ , mittlere Relaxationszeit  $\tau$ ) zur Stromleitung beitragen. Die Formel (32) für die Stromdichte kann dann in der Form

$$\mathbf{j}_L = \frac{q\tau}{m}\rho\mathbf{E}$$

geschrieben werden, wobei  $\rho = Nq$  die Ladungsdichte ist. Verallgemeinere die Formel für eine Situation, in der außerdem ein konstantes Magnetfeld  $\mathbf{B} = eB$ ,  $e^2 = 1$  vorhanden ist (Halleffekt).

- (a) Finde eine Beziehung zwischen  $\mathbf{j}_L$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ .  
 (b) Löse sie nach  $\mathbf{j}_L$  auf.  
 (c) Betrachte die Darstellung

$$\sigma_{ik} = e_i e_k \sigma_{\parallel} + (\delta_{ik} - e_i e_k) \sigma_{\perp} + \sum_l \epsilon_{ikl} e_l \sigma_H$$

für den Leitfähigkeitstensor und bestimme die enthaltenen Konstanten.

#### 4.9 Phänomenologische Felder als Mittelwerte

Aus den bisher angestellten Betrachtungen war bereits ersichtlich, daß die phänomenologische Theorie nur einen beschränkten Gültigkeitsbereich hat. Um zu verstehen, daß sie überhaupt funktioniert, kann man versuchen, sie von der mikroskopischen Struktur her zu begründen, ohne sich um zu viele Details der mikroskopischen Mechanismen zu kümmern. Dadurch sollte man auch einen Einblick in allgemeinere Grenzen der Anwendbarkeit der phänomenologischen Theorie erhalten. Eine solche **Herleitung** der phänomenologischen Theorie muß von den Maxwellgleichungen **für  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$**  (im Vakuum, mit Quellen) ausgehen, wobei in die Quellen **alle** Ladungsträger (auch die in Atomen gebundenen) aufzunehmen sind, also von

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E}_{(m)} &= 4\pi\rho_{(m)} \\ \nabla \times \mathbf{B}_{(m)} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_{(m)}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{(m)} \\ \nabla \cdot \mathbf{B}_{(m)} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E}_{(m)} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}_{(m)}}{\partial t} &= 0.\end{aligned}$$

Der Index  $(m)$  soll dabei andeuten, daß es sich um mikroskopische Größen handelt. Mit Hilfe eines geeigneten Mittelungsverfahrens muß man dann beweisen, daß daraus in einem makroskopischen Medium die Gleichungen

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= 4\pi\rho_a \\ \nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_a \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0\end{aligned}$$

folgen, wobei der Zusammenhang zwischen den mikroskopischen und den makroskopischen Größen hergestellt werden muß.

Einen solchen Nachweis hat als erster H. Lorentz in der sogenannten "Elektronentheorie" 1902 erbracht. Zu dieser Zeit wußte man nicht, wie Atome aufgebaut sind; weder die Relativitäts- noch die Quantentheorie waren formuliert. Die Problematik wurde daher später wiederholt aufgegriffen und mit moderneren Hilfsmitteln untersucht. Da die



Beweisführung nicht einfach ist, wenn man auch nur einige Ansprüche an ihre Qualität stellt, wollen wir uns hier auf eine kurze Beschreibung ihrer Grundlagen beschränken.

Grundsätzlich muß man zur Beweisführung ein Mittelungsverfahren definieren. Außerdem muß man die Aufteilung in freie und gebundene Ladungsträger in den Quelltermen von der Dynamik der mikroskopischen Ladungsträger her begründen: von außen betrachtet sind Atome, Moleküle oder daraus aufgebaute Substrukturen der Materie "Teilchen" mit elektromagnetischer Struktur; es muß definiert werden, von welchen Strukturen man bei der Aufteilung ausgeht. Das kann mit Hilfe einer Multipolentwicklung erfolgen, durch die man definieren kann, was als elektromagnetische Struktur eines "Teilchens" anzusehen ist. Eine Beschränkung auf endlich viele Terme erscheint allerdings nur für genügend "dünn" verteilte Teilchen sinnvoll; andernfalls gibt es keinen Bereich, in dem die Entwicklung konvergiert. Die einzelnen Beweise unterscheiden sich voneinander sowohl in der Form der Mittelwertbildung als auch in der Anzahl der berücksichtigten Multipolterme. Die meisten Untersuchungen verwenden – wie schon Lorentz – eine Mittelung über ein kleines, aber immer noch genügend viele Atome enthaltendes Raumzeitgebiet. Dadurch werden die von der atomaren Struktur herrührenden Feldschwankungen ausgeglichen. Aus dem elektrischen Dipolterm in der Multipolentwicklung der Quellterme erhält man  $\mathbf{P}$  als (mittlere) Dipoldichte, analog ergibt sich  $\mathbf{M}$  aus dem magnetischen Dipolterm. Die höheren Momente tragen jedoch ebenfalls bei. Außerdem werden elektrische und magnetische Beiträge durch die Retardierungseffekte verkoppelt. Die meisten älteren Untersuchungen sind bezüglich der Multipolentwicklung kritisierbar, denn sie verwenden keine konsequente Entwicklung nach Potenzen von  $1/c$ . Eine in diesem Sinn auch relativistisch korrekte Analyse wurde von de Groot und Suttorp durchgeführt. Dabei wurde als Mittelungsverfahren nicht die Raumzeitmittelung verwendet, sondern die in der statistischen Physik übliche Methode. Mit dieser erhält man makroskopische Größen durch Mittelung über eine (klassische oder quantentheoretische) statistische Gesamtheit, deren Mitglieder sich nur mikroskopisch voneinander unterscheiden. De Groot und Suttorp haben sowohl ein klassisches Ensemble von Teilchen mit elektromagnetischer Struktur (das sogar relativistisch sein kann) untersucht, als auch ein (nichtrelativistisches) quantenmechanisches Ensemble im Rahmen der quasiklassischen Näherung. Polarisation bzw. Magnetisierung resultieren als statistische

Mittelwerte mikroskopischer Größen, die relativistischen Korrekturen sind (zumindest im Sinn einer Entwicklung nach Potenzen von  $1/c$ ) erfaßbar. Die makroskopische Theorie wird dadurch auf dem Niveau der statistischen Physik strukturierter Teilchen begründet, die Berechnung der phänomenologischen Parameter wird auf die Berechnung von Ensemblemittelwerten mikroskopisch definierter Momente zurückgeführt. Für Details vgl. das Buch B. R. De Groot, L. G. Suttorp, *Foundations of Electrodynamics*, North Holland, Amsterdam 1972.

Ein gemeinsames Resultat aller dieser Untersuchungen soll hier festgehalten werden. Die "wirklichen" makroskopischen Felder im Medium (d.h. die gemittelten mikroskopischen Feldstärken) sind **nicht**  $\mathbf{D}$  bzw.  $\mathbf{H}$ , sondern  $\mathbf{E}$  bzw.  $\mathbf{B}$ :

$$\langle \mathbf{E}_{(m)} \rangle = \mathbf{E}, \quad \langle \mathbf{B}_{(m)} \rangle = \mathbf{B}$$

Die Größen  $\mathbf{P}$  bzw.  $\mathbf{M}$  kommen von den Quelltermen, wie das in den vorhergehenden Abschnitten stets angedeutet wurde. Die Frage, ob das "wirkliche" Feld  $\mathbf{B}$  oder  $\mathbf{H}$  ist, hat zu Diskussionen geführt (was nur verständlich ist, wenn man sich vor Augen hält, wie lange man an  $\mathbf{H}$  gewöhnt war). Das Problem kann rein experimentell untersucht werden. Dazu betrachtet man den Durchgang von Teilchen durch magnetische Materialien und sieht nach, ob die ablenkende magnetische Kraft  $\mathbf{B}$  oder  $\mathbf{H}$  entspricht. Bei Versuchen mit geladenen Teilchen stellt sich heraus, daß diese bei genügend hohen Geschwindigkeiten tatsächlich dem  $\mathbf{B}$ -Feld "folgen", daß also in die Lorentzkraft  $\mathbf{B}$  und nicht  $\mathbf{H}$  eingeht. Bei kleineren Geschwindigkeiten "bemerken" die Teilchen nicht, daß die mikroskopischen Ströme Ampèresche Kreisströme sind, weil sie die atomaren Stromschleifen nicht durchdringen. Die letzten Zweifel wurden durch entsprechende Versuche mit Neutronen ausgeräumt. Da Neutronen ungeladen sind, bilden die Elektronenhüllen für sie kein Hindernis. Infolge ihres magnetischen Moments "spüren" sie aber magnetische Felder (u.zw.  $\mathbf{B}$ , nicht  $\mathbf{H}$ ).

Grenzen der Anwendbarkeit der phänomenologischen Theorie werden erreicht, wenn man sich für die Änderung der Feldstärken in Bereichen interessiert, die so klein sind, daß in ihnen keine makroskopische Anzahl von Teilchen enthalten ist. Eine mittlere Feldstärke, Polarisati-on etc. ist (z.B. als Ensemblemittelwert) zwar stets definierbar, sie ist aber für die Beschreibung der **lokalen** Phänomene in kleinen Bereichen irrelevant. Die relevanten Feldgleichungen sind dann diejenigen für die

**mikroskopischen** Größen  $\mathbf{E}_{(m)}$ ,  $\mathbf{B}_{(m)}$  d.h. die Maxwellgleichungen für die Felder im Vakuum mit den mikroskopischen Ladungs- und Stromdichten. Die Benützung von Begriffen wie Suszeptibilitäten oder von  $\mathbf{D}$ - bzw.  $\mathbf{H}$ -Feldern in solchen Bereichen wäre sinnlos. Bei der Diskussion der einzelnen mikroskopischen Mechanismen in den vorhergehenden Abschnitten wurde bereits auf diese Grenzen der phänomenologischen Theorie hingewiesen.

Außerdem ist festzuhalten, daß die phänomenologische Theorie nicht nur eine makroskopische Theorie im Sinn von Mittelwerten ist, sondern auch eine "klassische" Theorie, die von der Quantentheorie bestenfalls im Sinn einer quasiklassischen Näherung begründet werden kann. Schon im Bereich der nichtrelativistischen Physik ist die quasiklassische Näherung nur für Systeme erlaubt, die in gewissem Sinn als "verdünnt" zu betrachten sind. Die Frage, was als "verdünnt" zu betrachten ist, hängt u.a. auch von der Temperatur ab (bei genügend niedriger Temperatur sind alle Systeme "dicht") und wird in Band 4 dieser Vorlesungreihe untersucht werden. In der Physik der kondensierten Materie gibt es makroskopische Systeme, die sich typisch quantenmechanisch benehmen und im Rahmen der quasiklassischen Näherung überhaupt nicht erfaßt werden können. In einzelnen Fällen kann man trotzdem zu einer phänomenologischen Beschreibung kommen, die dann jedoch ganz anders aussieht, als die in diesem Kapitel betrachtete.

### Zusammenfassung

(Die links stehenden Gleichungen beziehen sich auf das Gaußsche Maßsystem, die rechts stehenden auf das SI).

In makroskopischen Substanzen kommen als Quellen elektromagnetische Felder nicht nur Ladungsträger in Frage, die beweglich und daher von außen verfügbar sind, sondern auch solche, die in Atomen, Molekülen oder daraus aufgebauten größeren Strukturen gebunden sind. Für viele Zwecke ist es ausreichend, die Auswirkungen der gebundenen Ladungsträger in Form einer elektrischen Polarisierung  $\mathbf{P}$  und einer Magnetisierung  $\mathbf{M}$  zu den Feldern zu zählen und durch

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} & \mathbf{D} &= \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P} \\ \mathbf{H} &= \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M} & \mathbf{H} &= \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} - \mathbf{M} = c^2\epsilon_0\mathbf{B} - \mathbf{M} \end{aligned}$$

“effektive” Felder  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$  im Medium einzuführen. Die Feldgleichungen für diese Felder sind

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= 4\pi\rho_a & \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_a \\ \nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_a & \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \mathbf{j}_a \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 & \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 \end{aligned}$$

Die Quellen  $(\rho_a, \mathbf{j}_a)$  entsprechen den äußeren Ladungsträgern und erfüllen die Kontinuitätsgleichung. Die in den Feldgleichungen enthaltenen Feldstärken sind lokale Größen, haben aber makroskopischen Charakter im Sinn von Mittelwerten.

An der Grenzfläche von verschiedenen Medien sind Randbedingungen zu beachten. An einer (als unendlich dünne Schicht idealisierten) Grenzfläche sind die Tangentialkomponenten von  $\mathbf{E}$  und die Normalkomponente von  $\mathbf{B}$  stetig, die Normalkomponenten von  $\mathbf{H}$  und die Tangentialkomponente von  $\mathbf{D}$  sind unstetig. Der Unterschied in den unstetigen Komponenten an der Grenzfläche folgt aus den Feldgleichungen.

Durch die angeführten Feldgleichungen sind die Felder bei vorgegebenen Quellen  $(\rho_a, \mathbf{j}_a)$  nur dann bestimmt, wenn der Zusammenhang zwischen  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{M}$  (oder  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$ ) und  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  bekannt ist. Durch geeignete

Ansätze in Termen von Materialparametern (Suszeptibilitäten) kommt man zu einer phänomenologischen Beschreibung. Für **quasistationäre, nicht zu starke** Felder in **isotropen** Substanzen können lineare Beziehungen angenommen werden:

$$\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E}, \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{B} \quad \mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}, \mu_0 \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{B}$$

Für  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$  bedeutet das

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad \mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E}, \mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}$$

mit

$$\epsilon = 1 + 4\pi\chi_e, \mu = \frac{1}{1 - 4\pi\chi_m} \quad \epsilon = 1 + \chi_e, \mu = \frac{1}{1 - \chi_m}$$

Die Suszeptibilität  $\chi_e \geq 0$  (oder die Dielektrizitätskonstante  $\epsilon \geq 1$ ) charakterisiert das elektrische Verhalten von Nichtleitern. Die Suszeptibilität  $\chi_m$  (oder die Permeabilität  $\mu$ ) charakterisiert das magnetische Verhalten von diamagnetischen ( $\chi_m < 0$ ) bzw. paramagnetischen ( $\chi_m > 0$ ) Materialien.

In **normalen, isotropen** Leitern führt bei **quasistationären** Verhältnissen der Ansatz

$$\mathbf{j}_L = \sigma \mathbf{E}$$

für den Leitungsstrom  $\mathbf{j}_L$  zu einer phänomenologischen Beschreibung in Termen einer Leitfähigkeit  $\sigma$  als materialabhängigem Parameter. Der Ansatz entspricht dem Ohmschen Gesetz. Einfache Randbedingungen an (idealisierten) Grenzflächen von Leitern ergeben sich nur für ideale Leiter ( $\sigma \rightarrow \infty$ ).

Die in der phänomenologischen Theorie enthaltenen makroskopischen Feldgrößen geben nur innerhalb gewisser Grenzen eine zutreffende Beschreibung der Wirklichkeit. Sie verlieren ihren Sinn, wenn die von den äußeren Quellen erfaßten Bereiche so klein sind, daß ein Mittelwert nicht mehr sinnvoll ist. In diesem Fall ist die relevante Theorie die Maxwelltheorie mit mikroskopischen Feldern ( $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ) und Quellen ( $\rho$ ,  $\mathbf{j}$ ).

Grenzen für die linearen Beziehungen zwischen ( $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ) und ( $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$ ) werden i.a. schon wesentlich früher erreicht und hängen stark von der betrachteten Situation ab (vgl. Abschnitte 4.5 - 4.8).

## 5. Wellenausbreitung in materiellen Medien

### 5.1 Zur Stoffauswahl

Wie bereits an der Elektrodynamik im Vakuum deutlich wurde, ist die Existenz elektromagnetischer Wellen eine besonders charakteristische Konsequenz der Maxwell'schen Theorie: durch Einführung des Verschiebungsstromes wird aus der Laplacegleichung für elektromagnetische Felder im Vakuum die Wellengleichung; ohne den entsprechenden Term wäre die Existenz und Ausbreitung von Wellenvorgängen nicht möglich. Wegen der enormen physikalischen und technischen Bedeutung der elektromagnetischen Wellen wollen wir uns nun mit Wellenvorgängen in Medien befassen. Dabei treten eine Reihe von neuen Phänomenen auf, die wir an einfachen und exemplarischen Beispielen deutlich machen werden. Um die Resultate überschaubar zu halten, müssen wir einschränkende Annahmen über die Struktur der betrachteten Medien machen. Diese Einschränkungen sollen zunächst in übersichtlicher Form angegeben werden.

- (1) Wir betrachten nur Substanzen, die über genügend große Bereiche **homogen** und **isotrop** sind. Medien mit Kristallstruktur sind dadurch ausgeschlossen. Soweit "geschichtete" Medien betrachtet werden, beschränken wir uns auf geometrisch **einfache Grenzflächen**. Andernfalls wäre die Lösung der Maxwellgleichungen infolge der Randbedingungen wesentlich komplizierter, ohne daß man dadurch qualitativ neue Einsichten erhalten würde.
- (2) Wir beschränken uns auf den Gültigkeitsbereich der **makroskopischen** Beschreibung in Termen von **skalaren** Materialparametern ( $\epsilon, \mu, \sigma$ ). Das bedeutet eine Einschränkung für die zulässigen Frequenzen  $\omega$  bzw. Wellenlängen  $\lambda$ : die Welle muß ein Gebiet "sehen", das groß genug ist, um die Definition von Mittelwerten zu erlauben ( $\lambda \gg$  Abmessung der Atome, Moleküle etc.). Die Beschränkung auf skalare Parameter bedeutet, daß wir z.B. Medien mit Kristallstruktur nicht betrachten können.
- (3) Wir betrachten nur den Bereich, in dem der Zusammenhang zwischen  $(\mathbf{D}, \mathbf{H})$  und  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$  **linear** ist und für Leiter das Ohmsche

Gesetz gilt. Das bedeutet eine Beschränkung auf nicht zu hohe Feldstärken. Die Beeinflussung von elektromagnetischen Wellen durch starke konstante Felder sowie nichtlineare Phänomene für intensive Wellenfelder (nichtlineare Optik) können hier nicht untersucht werden.

Selbst innerhalb dieser Einschränkungen ist der mögliche Problembereich so groß, daß er innerhalb des Rahmens einer Grundvorlesung nicht umfassend behandelt werden kann. Die hier getroffene Auswahl beschränkt sich auf wenige exemplarische Situationen. Wir untersuchen zunächst die Wellenausbreitung im Frequenzbereich unterhalb des Dispersionsgebietes, d.h. für konstante Materialparameter, wobei wir nur ein ungeschichtetes Medium betrachten. Als typisches Beispiel für Dispersionsvorgänge betrachten wir anschließend die mit der Frequenzabhängigkeit von  $\epsilon$  zusammenhängenden Phänomene, wobei wir  $\mu = 1$  setzen. Die magnetische Permeabilität verliert ihren Sinn für wesentlich niedrigere Frequenzen als die elektrische. Die untersuchten Bereiche decken daher insgesamt einen relativ großen Frequenzbereich ab. Nur der verhältnismäßig schmale Bereich magnetischer Dispersionsphänomene wird nicht erfaßt. Die Brechung und Reflexion an einer Trennebene von zwei Medien dient als Anwendung. Als Beispiel für die Ausbreitung von Wellen in Anwesenheit leitender "Hindernisse" betrachten wir schließlich die Wellenleitung in einem Hohlrohr.

## 5.2 Wellen in homogenen Medien ohne Dispersion

Als erstes betrachten wir ein unendlich ausgedehntes, homogenes Medium in einem Frequenzbereich, in dem die Materialkonstanten  $\epsilon, \mu, \sigma$  noch keine Frequenzabhängigkeit zeigen. Wir können wie im Vakuum anstelle der Feldstärken Potentiale  $\Phi, \mathbf{A}$  einführen, aus denen die Feldstärken gemäß

$$\mathbf{D} = -\epsilon \left( \nabla \Phi + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right), \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} (\nabla \times \mathbf{A})$$

berechnet werden können. Wir benützen wieder die Strahlungseichung (vgl. Abschnitt 2.8)

$$\Phi = \Phi_C, \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}_T, \quad \nabla \cdot \mathbf{A}_T = 0.$$

Anstelle der inhomogenen Wellengleichung (2.36) erhalten wir jedoch

$$\frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}_T}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{A}_T = \frac{4\pi\mu}{c} \mathbf{j}_{a,T} . \quad (1)$$

Dabei ist  $\mathbf{j}_{a,T}$  der transversale Anteil des Stromes, vgl. (2.37). Wir nehmen nun an, daß die Stromdichte  $\mathbf{j}_a$  nur in leitenden Bereichen von Null verschieden ist, in denen das Ohmsche Gesetz

$$\mathbf{j}_a = \sigma \mathbf{E}$$

erfüllt ist. Der transversale Anteil von  $\mathbf{E}$  ist jedoch aus  $\mathbf{A}_T$  zu berechnen ( $\mathbf{E} = -\partial \mathbf{A}_T / c \partial t$ , vgl. Abschnitt 2.8). Damit erhalten wir die verallgemeinerte Wellengleichung ("Telegraphengleichung")

$$\frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}_T}{\partial t^2} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial \mathbf{A}_T}{\partial t} - \Delta \mathbf{A}_T = 0 . \quad (2)$$

Beschränken wir uns auf das Strahlungsfeld ( $\mathbf{E}_T, \mathbf{B} = \mathbf{B}_T$ ), so kommen wir mit den Lösungen dieser Gleichung (d.h. ohne das skalare Coulombpotential  $\Phi_C$ ) aus. Wegen des Superpositionsprinzips (das in dem hier betrachteten **linearen** Bereich gilt) können andere Felder getrennt betrachtet und allenfalls superponiert werden, ohne daß das Strahlungsfeld davon beeinflusst wird.

Die verallgemeinerte Wellengleichung (2) hat – ebenso wie ihr Analogon im Vakuum (3.18) – viele Lösungen mit verschiedenem Symmetriotyp. Es gibt jedoch, wie man durch Vergleich sieht, zwei Unterschiede. Schon wegen des Faktors bei dem vom Verschiebungsstrom herrührenden ersten Term ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Erregungen (die Geschwindigkeit, mit der sich Flächen gleicher Phase ausbreiten, die sog. Phasengeschwindigkeit) nicht mehr die Lichtgeschwindigkeit  $c$  im Vakuum. Außerdem verursacht der Beitrag des Leitungsstroms (zweiter Term in (2)) in Leitern eine Schwächung der Wellen.

Wir beschränken uns auf die Betrachtung einer monochromatischen, ebenen Welle: wegen der Linearität können wir die allgemeine Lösung analog zu (3.35) aus monochromatischen Wellen superponieren. Für eine monochromatische Welle hat  $\mathbf{A}_T$  in Analogie zum Integranden von (3.35) die Form

$$\mathbf{A}_T = \sum_{i=1}^2 \mathbf{e}_{(i)}(a_{(i)}(\omega, \mathbf{n}) \exp(i\phi) + K.K.), \quad \phi = \mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t , \quad (3)$$



wobei die drei Einheitsvektoren  $\mathbf{e}_{(1)}, \mathbf{e}_{(2)}$  und  $\mathbf{n} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$  ein orthogonales Dreibein bilden. Aus (2) erhält man für den Betrag  $k = |\mathbf{k}|$  des Ausbreitungsvektors

$$k^2 = \epsilon\mu \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 + i \frac{4\pi\sigma}{\epsilon\omega} \right) . \quad (4)$$

Der Ausbreitungsvektor ist daher als Folge des Leitungsstromes komplex. Zerlegen wir  $k$  in Real- und Imaginärteil

$$k = \alpha + i\beta , \quad \mathbf{k} = (\alpha + i\beta)\mathbf{n} , \quad (5)$$

so erhalten wir

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2} \pm 1} . \quad (6)$$

Die Wurzelvorzeichen folgen dabei aus physikalischen Überlegungen. Damit  $k$  für  $\sigma = 0$  (Nichtleiter, z.B. Vakuum  $\epsilon\mu = 1$ ) positiv ist, muß für  $\alpha$  das positive Vorzeichen der Wurzeln genommen werden. Das Vorzeichen für  $\beta$  folgt aus der Phase

$$i\phi = i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t = i(\alpha\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - \omega t) - \beta\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} \quad (7)$$

Damit die Energie endlich bleibt, darf  $\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2$  für große  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}$  nicht exponentiell anwachsen. Das überträgt sich auf  $\mathbf{A}$  und ist nur zu erreichen, wenn  $\beta$  positiv ist. Die Phase der konjugiert komplexen Exponentialfunktion fällt dann ebenfalls ab und man erhält eine abnehmende Amplitude. Die Phasengeschwindigkeit ist

$$v = \frac{\omega}{\alpha} . \quad (8)$$

Für die Feldstärken erhält man

$$\mathbf{E}_T = \mathbf{E}_0 \exp(i\phi) + K.K.$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \exp(i\phi) + K.K.$$

mit

$$\mathbf{E}_0 = i \frac{\omega}{c} (\mathbf{e}_{(1)} a_{(1)} + \mathbf{e}_{(2)} a_{(2)})$$

$$\mathbf{H}_0 = \frac{c}{\mu\omega} (\alpha + i\beta)(\mathbf{n} \times \mathbf{E}_0)$$

Durch geeignete Wahl der Koeffizienten  $a_{(i)}$  kann man wie im Vakuum alle möglichen Polarisationsformen erhalten.

In **Isolatoren** ( $\sigma = 0$ ) breiten sich elektromagnetische Wellen ungeschwächt aus ( $\beta = 0$ ). Die elektrische und die magnetische Feldstärke schwingen in Phase. Die Phasengeschwindigkeit

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} < c$$

ist kleiner als die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum, weil  $\mu$  in dia- und paramagnetischen Substanzen von 1 nur wenig abweicht und  $\epsilon > 1$  ist. Die Wellenlänge

$$\lambda = \frac{2\pi v}{\omega} = \frac{2\pi c}{\omega} \cdot \frac{v}{c} = \lambda_{vac} \cdot \frac{v}{c}$$

ist daher kleiner als im Vakuum. Das Verhältnis

$$n := \frac{c}{v} = \frac{\lambda_{vac}}{\lambda} = \sqrt{\epsilon\mu} > 1 \quad (9)$$

heißt der (absolute) Brechungsindex des Mediums. Für alle nichtleitenden Stoffe sollte  $n \approx \sqrt{\epsilon}$  sein. Bereits Maxwell hat aus (9) geschlossen, daß Licht ein elektromagnetischer Wellenvorgang ist. Systematische Messungen zur Überprüfung der Maxwellschen Beziehung wurden bereits 1872 - 74 von Boltzmann in Graz durchgeführt. Das experimentelle Problem war dabei die (elektrostatische) Messung der Dielektrizitätskonstante für Stoffe mit bekanntem (optischem) Brechungsindex. Die Ausweitung auf niedrigere als optische Frequenzen konnte erst wesentlich später erfolgen: die Radiowellen wurden erst 1888 durch H. Hertz entdeckt. Für eine Reihe von Medien ist die Beziehung für optische Frequenzen nicht mehr erfüllt, weil in diesem Bereich die Trägheit des atomaren Polarisationsmechanismus zu Dispersionsphänomenen führt (worauf bereits Boltzmann hingewiesen hat).

In **Leitern** ist die Phasengeschwindigkeit durch (8) gegeben und nimmt mit wachsender Frequenz zu. Der Schwächungsfaktor  $\beta$  nimmt ebenfalls mit wachsender Frequenz zu. Diese Frequenzabhängigkeiten sind aber nur erfüllt, solange keine Dispersionsphänomene auftreten. Die Schwächung bedeutet, daß die Amplitude einer elektromagnetischen Welle nach der Strecke  $1/\beta$  (sog. Eindringtiefe) auf den  $e$ -ten Teil abgenommen hat. Die Schwingungen von  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{H}$  erfolgen phasenverschoben. Der Phasenunterschied  $\theta$  von  $\mathbf{H}$  gegenüber  $\mathbf{E}$  ist aus

$$k = \alpha + i\beta = |k|e^{i\theta}$$

zu ermitteln. Nach etwas Rechnung erhält man

$$|k| = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon\mu} \sqrt[4]{1 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2} \quad (10)$$

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan \frac{4\pi\sigma}{\epsilon\omega} .$$

Die angegebenen Formeln vereinfachen sich beträchtlich, wenn die Wurzeln entwickelt werden können. Der wichtigste Fall ist

$$\frac{4\pi\sigma}{\epsilon\omega} \gg 1 . \quad (11)$$

Der Grenzfall für kleine Frequenzen bedeutet, daß man den **Verschiebungsstrom gegen den Leitungsstrom vernachlässigt**. Für Metalle ist (11) bis zu ultravioletten Frequenzen erfüllt, d.h. im ganzen Gültigkeitsbereich unserer Betrachtung: die Leitfähigkeit von Kupfer beträgt z.B.  $5,8 \cdot 10^{17} \text{ sec}^{-1}$ . Mit (11) wird  $\alpha \approx \beta$ , das magnetische Feld ist dem Betrag nach groß gegen das elektrische und der Phasenunterschied beträgt  $\pi/4$ . Die Eindringtiefe wird

$$\frac{1}{\beta} \approx \frac{c}{\sqrt{2\pi\omega\mu\sigma}} .$$

Für nichtferromagnetische Metalle erhält man bei 100 Hz Werte zwischen 0,5 und einigen cm. Hochfrequenzfelder breiten sich daher in Metallen nicht weit aus. Der andere Grenzfall

$$\frac{4\pi\sigma}{\epsilon\omega} \ll 1 \quad (12)$$

bedeutet **Vernachlässigung des Leitungsstromes gegen den Verschiebungsstrom**. Für destilliertes Wasser gilt (12) vom Kurzwellenbereich an. Mit (12) wird  $\alpha \gg \beta$  und die Eindringtiefe wird unabhängig von  $\omega$

$$\frac{1}{\beta} \approx \frac{c}{2\pi\sigma} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} .$$

## Übungen

- 1) Betrachte die Ausbreitung von Radiowellen ( typische Frequenzen: 20 kHz bzw. 10 MHz) in Meerwasser ( $\sigma = 4,8$  Siemens/m,  $\epsilon = 80$ ,  $\mu = 1$ ).
- 2) Stelle den Zusammenhang der hier untersuchten Form der Wellenausbreitung in Leitern mit der Theorie des Skin效ektes bei hohen Frequenzen aus Beispiel (4.11) her.
- 3) Untersuche die einfachste Kugelwelle in einem Medium mit konstanten  $\epsilon, \mu, \sigma$ . Diskutiere die physikalischen Aspekte von ein- bzw. auslaufenden monofrequenten Kugelwellen.

### 5.3 Dielektrische Dispersion

Eine Erklärung von Dispersionsphänomenen auf mikroskopischer Basis ist nur mit Hilfe der Quantentheorie möglich, da es dabei u.a. um Trägheitsmechanismen geht, die durch die innere Dynamik von Atomen bzw. Molekülen zustandekommen. Ähnlich wie für quasistationäre Vorgänge ist es jedoch auch hier möglich, zu einer makroskopischen Beschreibung zu kommen, die in einem verhältnismäßig großen Bereich brauchbar ist. Wir betrachten – wie bereits in Abschnitt 1 erwähnt – homogene, isotrope Medien bei nicht zu hohen Feldstärken (linearer Zusammenhang zwischen Polarisation und elektrischer Feldstärke). Außerdem setzen wir  $\mathbf{B} = \mathbf{H}$ ,  $\mu = 1$ : oberhalb des Frequenzbereiches, in dem magnetische Dispersionsphänomene eine Rolle spielen, ist das streng gerechtfertigt; unterhalb ist das eine Näherung, die für die meisten dia- bzw. paramagnetischen Stoffe erlaubt ist. Weiters nehmen wir an, daß die Polarisation nur von  $\mathbf{E}$  abhängt; das wäre z.B. für Medien mit natürlicher optischer Aktivität nicht erlaubt, der Einfluß von  $\mathbf{B}$  auf die Polarisation ist jedoch auch in diesem Fall sehr gering. Eine makroskopische Beschreibung setzt voraus, daß die Wellenlänge  $\lambda$  groß gegen die Abmessung  $a$  der Atome ist, aus denen die Substanz besteht:  $\lambda \gg a$ . Das ist bis über den optischen Frequenzbereich hinaus erlaubt. Andererseits sind die Relaxationszeiten atomarer bzw. molekularer Polarisationsmechanismen (vgl. Abschnitt 4.6) groß genug, um ein breites Frequenzgebiet zu ermöglichen, in dem die Trägheit eine Rolle spielt, sodaß Dispersionsphänomene auftreten. Eine lineare Beziehung zwischen  $\mathbf{P}$  und  $\mathbf{E}$  kann dann in folgender Form angesetzt werden:

$$4\pi\mathbf{P}(t, \mathbf{x}) = \int_0^\infty f(\tau)\mathbf{E}(t - \tau, \mathbf{x})d\tau . \quad (13)$$

Dabei haben wir vorausgesetzt, daß nur die **zeitliche** Vorgeschichte für den Relaxationsmechanismus wichtig ist. Das Feld ist über den Bereich eines Atoms als genügend homogen angenommen, **räumliche** Dispersionsphänomene (vgl. Abschnitt 4.3) betrachten wir **nicht**. Der Ansatz (13) berücksichtigt außerdem die **Kausalität** des Polarisationsmechanismus: ein Effekt kann nicht auftreten, **bevor** die Atome das polarisierende Feld gespürt haben; die Integration beginnt daher bei 0. Die Nachwirkungsfunktion  $f(\tau)$  bringt den Relaxationsmechanismus zum Ausdruck und sollte daher nur in einem Gebiet von der Größenordnung der Relaxationszeit des Mediums merklich von Null abweichen. Für normale

Dielektrika muß  $f(\tau)$  für  $\tau \rightarrow \infty$  verschwinden, weil die Werte von  $\mathbf{E}$  in unendlicher Vergangenheit keinen Einfluß auf  $\mathbf{P}$  haben können.

Wir zerlegen nun  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$  spektral nach Frequenzen

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\omega (\mathbf{e}(\omega, \mathbf{x}) \exp(-i\omega t) + K.K.) \\ \mathbf{D}(t, \mathbf{x}) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\omega (\mathbf{d}(\omega, \mathbf{x}) \exp(-i\omega t) + K.K.) .\end{aligned}\quad (14)$$

Mit (13) erhalten wir daraus

$$\mathbf{d}(\omega, \mathbf{x}) = \epsilon(\omega) \mathbf{e}(\omega, \mathbf{x}) , \quad (14)$$

wobei  $\epsilon(\omega)$  durch die Nachwirkungsfunktion bestimmt ist

$$\epsilon(\omega) = 1 + \int_0^\infty d\tau f(\tau) \exp(i\omega\tau) . \quad (15)$$

Wir erhalten also für jede Frequenz einen anderen Wert von  $\epsilon$ . Die Abhängigkeit  $\epsilon = \epsilon(\omega)$  heißt Dispersionsgesetz der betrachteten Substanz. Eigentlich handelt es sich um zwei Gesetze, denn  $\epsilon(\omega)$  ist i.a. **komplex**. Mit Hilfe der aus (15) ablesbaren Beziehung

$$\epsilon^*(\omega) = \epsilon(-\omega)$$

kann man  $\epsilon$  zu negativen Frequenzen analytisch fortsetzen, wovon wir später Gebrauch machen werden. Zerlegen wir  $\epsilon$  in Real- und Imaginärteil

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_R + i\epsilon_J(\omega) ,$$

so ist der Realteil gerade und der Imaginärteil ungerade:

$$\epsilon_R(\omega) = \epsilon_R(-\omega) , \quad \epsilon_J(\omega) = -\epsilon_J(-\omega) .$$

Wir betrachten nun das Verhalten für niedrige Frequenzen. In Nichtleitern bleibt für  $\omega \rightarrow 0$  nur der Realteil übrig, den wir mit der statischen Dielektrizitätskonstante  $\epsilon_R(0) \equiv \epsilon_{stat}$  identifizieren. Die Entwicklung von  $\epsilon(\omega)$  für kleine  $\omega$  ist daher für **Nichtleiter**

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_{stat} + i\omega\epsilon'_J(0) + \frac{\omega^2}{2}\epsilon''_R(0) + \dots \quad (16a)$$

Die komplex dielektrische Funktion  $\epsilon(\omega)$  ist aber allgemein genug, um auch eine Behandlung von Leitern zu ermöglichen. Verlangen wir für Leiter

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \epsilon_J(\omega) = \frac{4\pi\sigma}{\omega},$$

so wird für kleine Frequenzen

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \rightarrow \frac{\epsilon_R(0)}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sigma \mathbf{E}$$

und wir erhalten daher den Leitungsstrom automatisch. De facto sind also die untersten Terme einer Entwicklung für kleine  $\omega$  in **Leitern**

$$\epsilon(\omega) = i \frac{4\pi\sigma}{\omega} + \epsilon_R(0) + \dots \quad (16b)$$

Der Gültigkeitsbereich der Entwicklung ist der des Ohmschen Gesetzes. Daraus folgt, daß für Leiter nicht  $f(\tau)$ , sondern  $f(\tau) - 4\pi\sigma$  für  $\tau \rightarrow \infty$  verschwindet: wir erhalten schon ohne Polarisationsmechanismus einen Beitrag zu  $\mathbf{D}$ .

Die Beschreibung von Metallen durch eine komplexe dielektrische Funktion  $\epsilon(\omega)$  ist ein Näherungskonzept, das nicht immer durchzuhalten ist. Das Konzept ist nur dann sinnvoll, wenn die Auswirkungen der zeitlichen Feldschwankungen groß gegen die der räumlichen Schwankungen sind. Andernfalls muß man in (13) eine Funktion  $f$  einführen, die auch vom Ort abhängt und über diesen integrieren. An die Stelle von (14) tritt dann eine volle Fourieranalyse und man muß mit einer dielektrischen Funktion  $\epsilon(\mathbf{k}, \omega)$  arbeiten, die auch von der Wellenzahl  $\mathbf{k}$  des Feldes abhängt. In (16b) ist dann nur der erste Term sinnvoll. Für die höheren Glieder ist die Abhängigkeit von  $\mathbf{k}$  u.U. wichtiger als die von  $\omega$ . Selbst wenn die Abhängigkeit von  $\mathbf{k}$  vernachlässigt werden kann, ist die Bedeutung von  $\epsilon_R(0)$  für Leiter und Nichtleiter streng genommen nicht dieselbe, denn bei statischen Verhältnissen gibt es in letzteren keinen Verschiebungsstrom. Manchmal wird der Zusammenhang (16b) für alle  $\omega$  in der Form  $\epsilon_J(\omega) = 4\pi\sigma(\omega)/\omega$  geschrieben, indem man eine frequenzabhängige Leitfähigkeit einführt. Das ist zwar rein formal möglich, aber physikalisch nicht überzeugend.

Weitere wichtige Aussagen folgen für das Verhalten von  $\epsilon(\omega)$  für hohe Frequenzen. Es erscheint physikalisch plausibel anzunehmen, daß  $\epsilon(\omega \rightarrow \infty) = 1$  ist: erfolgt die Änderung des Feldes genügend schnell, so kann der Polarisationsmechanismus darauf überhaupt nicht reagieren.

Den nächsten Korrekturterm für hohe Frequenzen kann man für Leiter und Isolatoren berechnen, indem man die Elektronen als freie Teilchen behandelt. Diese Näherung ist erlaubt, wenn die Frequenz groß gegen die Eigenfrequenzen aller atomaren Mechanismen ist. Die mittlere Geschwindigkeit  $v$  der Elektronen im Atom bzw. im Metallgitter ist i.a. klein gegen  $c$ . Im Lauf einer Schwingung legen sie daher eine Strecke  $\sim v/\omega$  zurück, die klein gegen die Wellenlänge  $\lambda \sim c/\omega$  ist. Sie "sehen" daher ein räumlich homogenes Wechselfeld, in dem sie sich näherungsweise frei bewegen. Daraus erhält man (vgl. Übungen) für hohe Frequenzen

$$\epsilon(\omega) \approx 1 - \left(\frac{\omega_P}{\omega}\right)^2 \quad (17)$$

Die charakteristische Frequenz  $\omega_P$  heißt **Plasmafrequenz**. Ihr Quadrat ist proportional zur Teilchendichte. Für Isolatoren, die aus leichten Elementen bestehen, ist (17) vom fernen Ultraviolettbereich an erfüllt, für solche aus schweren Elementen erst für Röntgenfrequenzen. Für ein Elektronengas gilt (17) exakt.

Qualitativ ist festzuhalten, daß die Funktion  $\epsilon_R(\omega) - 1$  für Nichtleiter bei kleinen Frequenzen positiv, bei großen Frequenzen hingegen negativ ist. Dazwischen muß es daher eine ungerade Anzahl von Nullstellen geben.

Nun müssen wir noch klären, welche physikalische Bedeutung der Imaginärteil von  $\epsilon$  hat. Dazu erinnern wir uns an die energetische Bedeutung des Ohmschen Gesetzes in Leitern (vgl. Abschnitt 4.5): das elektrische Feld leistet an den Ladungsträgern Arbeit und das führt zu einer Aufzehrung (Dissipation) von Energie, die sich als Erwärmung des Leiters bemerkbar macht. Die dissipierte Energie ist durch  $\sigma \mathbf{E}^2$  gegeben. In dem hier betrachteten Fall ist aber  $\sigma$  ein Bestandteil von  $\epsilon_J(\omega)$ . Es ist daher plausibel, daß  $\epsilon_J \neq 0$  mit einer Energiedissipation im Medium zusammenhängt, wobei

$$\epsilon_J(\omega) > 0 \quad (18)$$

sein muß, wie das auch für  $\sigma$  der Fall ist (andernfalls würde der Leiter abgekühlt statt erwärmt). Daß dieser Zusammenhang tatsächlich besteht und daher (18) gelten muß, kann durch Berechnung von  $-\nabla \cdot \mathbf{S}_{(em)}$  und Integration über die Zeit gezeigt werden (vgl. Übungen).  $\epsilon_J \neq 0$  **bedeutet also Absorption**. Ist in einem Frequenzbereich  $\epsilon_J \ll \epsilon_R$ , so wird



wenig absorbiert, die Substanz verhält sich transparent. Der betreffende Frequenzbereich heißt ein Transparenzgebiet der Substanz.

Betrachten wir kurz eine monochromatische ebene Welle in einem dispersiven Medium. Aus den Maxwellgleichungen folgt mit (14) und der entsprechenden Zerlegung für  $\mathbf{B}$

$$-i\frac{\omega}{c}\epsilon(\omega)\mathbf{e}(\omega, \mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{b}(\omega, \mathbf{x})$$

$$i\frac{\omega}{c}\mathbf{b}(\omega, \mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{e}(\omega, \mathbf{x})$$

und wir erhalten durch Elimination die Wellengleichung

$$\Delta \mathbf{e} + \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon(\omega)\mathbf{e} = 0 .$$

Dieselbe Gleichung resultiert für  $\mathbf{b}$ . Eine ebene Welle erhalten wir mit dem Ansatz

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(\omega, \mathbf{x}) &= \mathbf{e}_0 \exp(ik(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x})) , & \mathbf{b}(\omega, \mathbf{x}) &= \mathbf{b}_0 \exp(ik(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x})) \\ \mathbf{n}^2 &= 1 . \end{aligned} \quad (19)$$

Aus der Wellengleichung folgt

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon(\omega) . \quad (20)$$

Daher ist sowohl  $k$  als auch der Wellenvektor  $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$  frequenzabhängig und komplex. Die Maxwellgleichungen sind erfüllt, wenn

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_0 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{b}_0 = 0 , \quad \mathbf{b}_0 = \frac{kc}{\omega}(\mathbf{n} \times \mathbf{e}_0) \quad (21)$$

ist. Definiert man einen Brechungsindex  $n(\omega)$  durch

$$k = \frac{\omega}{c}n(\omega) , \quad (22)$$

so ist

$$n(\omega) = \sqrt{\epsilon(\omega)} = n_R(\omega) + in_J(\omega) \quad (23)$$

und der Brechungsindex ist i.a. **frequenzabhängig** und **komplex**.  $\epsilon$  und  $n$  hängen durch die folgenden Relationen zusammen:

$$\begin{aligned}\epsilon_R(\omega) &= n_R^2 - n_J^2 \quad , \quad \epsilon_J = 2n_R n_J \\ n_R &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{\epsilon_R^2 + \epsilon_J^2} + \epsilon_R} \quad , \quad n_J = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{\epsilon_R^2 + \epsilon_J^2} - \epsilon_R} .\end{aligned}\quad (24)$$

Wegen (23) nimmt die Amplitude der Welle für  $n_J \neq 0$  ab, die Welle wird also geschwächt.  $n_J$  heißt Absorptionskoeffizient des Mediums und bestimmt die Strecke, nach der die Amplitude auf den  $e$ -ten Teil abgeklungen ist. Gelegentlich wird in der Optik ein linearer Absorptionskoeffizient  $\gamma$  bzw. eine zugehörige Absorptionslänge  $l = 1/\gamma$  verwendet. Diese Größen beziehen sich auf die entsprechende Abnahme in der Energie und sind somit ebenfalls ein Maß für die Absorption im Medium. Der Zusammenhang zwischen den Absorptionskoeffizienten ist

$$\gamma = \frac{1}{l} = \frac{\omega}{c} \epsilon_J = 2 \frac{\omega}{c} n_R n_J . \quad (25)$$

Zu beachten ist, daß es auch ohne Energiedissipation (also ohne "echte" Absorption) zu einer Schwächung der Welle kommen kann: aus  $\epsilon_J = 0$  folgt nicht  $n_J = 0$ . Für  $\epsilon_J(\omega) = 0$  erhalten wir  $n_J \neq 0$ , wenn für die entsprechenden Frequenzen  $\epsilon_R(\omega) < 0$  ist.

Für Metalle ist

$$\epsilon_J \approx \frac{4\pi\sigma}{\omega} \gg \epsilon_R$$

(vgl. (11)) und wir erhalten

$$n_R \approx n_J \approx \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\omega}} .$$

Ein Wellenpaket kann aus (19) durch Überlagerung aufgebaut werden. Ist das Medium transparent (d.h. schwache Absorption, kleiner Imaginärteil) und  $n$  nur schwach frequenzabhängig, so bewegt sich das ganze Paket mit der Geschwindigkeit

$$u = \frac{c}{n + \omega \frac{dn}{d\omega}} \quad (26)$$

weiter.  $u$  heißt Gruppengeschwindigkeit und ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit von "Signalen" im Medium. Für eine Diskussion von Wellenpaketen vgl. Anhang A 6.

## Übungen

- 4) Ein Elektronengas besteht aus  $N$  Elektronen pro  $\text{cm}^3$ . Die Elektronen sollen sich in einem elektrischen Wechselfeld bewegen, das räumlich homogen ist und harmonisch von der Zeit abhängt (Frequenz  $\omega$ ). Berechne die induzierte Polarisierung und die dielektrische Funktion  $\epsilon(\omega)$ . Bestimme die Plasmafrequenz  $\omega_P$  in Termen der Dichte  $N$ .
- 5) Betrachte die lokale Energiebilanz (2.51a) in einem dispersiven Medium mit  $\mu = 1$  und komplexem  $\epsilon(\omega)$ . Berechne die im Lauf der Zeit dissipierte Energie

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} dt \nabla \cdot \mathbf{S}_{(em)}$$

und begründe damit die Interpretation von  $\epsilon_J \neq 0$  als Absorption.

- 6) Klassisches Dispersionsmodell: Ein Medium soll aus geladenen Teilchen (Massen  $m_{(i)}$ , Ladungen  $q_{(i)}$ ) bestehen, die durch lineare Federkräfte (Federkonstanten  $k_{(i)}$ ) an ihre Ruhelagen gebunden sind. Insgesamt sollen  $N$  Teilchen pro  $\text{cm}^3$  vorhanden sein. Die Teilchen sollen unter Einfluß eines räumlich homogenen, harmonischen elektrischen Wechselfeldes (vgl. Beispiel 4) erzwungene Schwingungen um ihre Ruhelagen ausführen. Diese Schwingungen können durch die Eigenfrequenzen  $\omega_{(i)}$  und sog. Oszillatorstärken

$$f_{(i)} = \frac{m}{e^2} \frac{q_{(i)}^2}{m_{(i)}}$$

charakterisiert werden, die angeben, wie stark sich der einzelne Oszillator von einem Elektron unterscheidet. Berechne die dielektrische Funktion  $\epsilon(\omega)$  in Termen von  $f_{(i)}$  und  $\omega_{(i)}$ . Diskutiere ihr Verhalten für niedrige und hohe Frequenzen. Welche Summenformel ergibt sich für die Oszillatorstärken?

Anmerkung: Dieses Modell (insbes. die Summenformel von Thomas, Reiche und Kuhn) war für die Entwicklung der Quantenmechanik von entscheidender Bedeutung.

- 7) Die dielektrische Funktion aus Beispiel 6 divergiert an den Resonanzstellen  $\omega = \omega_{(i)}$ . Ändere das Modell durch Einführung von Reibungstermen so ab, daß die Schwingungen gedämpft erfolgen. Berechne die dielektrische Funktion und diskutiere ihr Verhalten, insbes. in der Umgebung der Resonanzstellen.

Anmerkung: Das Verhalten von  $\epsilon(\omega)$  stimmt qualitativ mit realistischen Dispersionsgesetzen überein. Die korrekte quantenmechanische Dispersionsformel für Medien aus Atomen bzw. Molekülen wurde durch Korrespondenzüberlegungen aus diesem Modell noch vor Entdeckung des quantenmechanischen Formalismus gefunden (Kramers, Heisenberg 1924).

## 5.4 Kausalität und Dispersionsrelationen

Wir wollen nun Beziehungen zwischen dem Real- und Imaginärteil von  $\epsilon$  herleiten. Diese Beziehungen heißen **Dispersionsrelationen** und wurden für die Elektrodynamik zuerst von de Kronig und Kramers 1926/27 abgeleitet. Sie folgen im Wesentlichen nur aus der Kausalität (no output before input) und bleiben daher auch in der Quantentheorie gültig. Analoge Relationen sind in vielen Gebieten der Physik von der Nachrichtentechnik bis zur Hochenergiephysik von großer Bedeutung. Gemeinsame Aspekte sind z.B. in der Arbeit von J. Toll, Phys.Rev. **104**, 1760 (1956) betont.

Da die Herleitung exemplarischen Charakter hat, formulieren wir die Voraussetzungen für die Gültigkeit von Dispersionsrelationen etwas allgemeiner, als das für die hier betrachtete Anwendung nötig ist. Wir betrachten die Funktion (15)

$$g(\omega) = \epsilon(\omega) - 1 = \int_0^{\infty} d\tau f(\tau) \exp(i\omega\tau) .$$

Im Abschnitt (5.3) wurde bereits darauf hingewiesen, daß  $f$  die Bedeutung einer **Nachwirkungsfunktion** hat und daß die untere Integrationsgrenze 0 Ausdruck der Kausalität ist. Als mathematische Voraussetzung lautet die Kausalitätsforderung für  $g$ :

**V1:**  $g(\omega)$  ist die Fouriertransformierte einer Funktion  $f(\tau)$ , die auf der negativen reellen Achse verschwindet.

Eine weitere Voraussetzung betrifft das Verhalten für große  $\tau$  und lautet:

**V2:**  $f(\tau)$  wächst für große  $\tau$  nicht stärker als ein Polynom  $p(\tau)$  endlichen Grades

$$p(\tau) = c_0 + \tau c_1 + \dots + \tau^n c_n .$$

Die Funktion  $g(\tau) - p(\tau)$  verschwindet dann für große  $\tau$ . Die Konstanten  $c_0, c_1, \dots, c_n$  des Polynoms heißen Subtraktionskonstanten und müssen aus physikalischen Überlegungen bestimmt werden. Im hier betrachteten Fall ist für Nichtleiter keine Subtraktion erforderlich ( $p(\tau) = 0$ ), für Leiter reduziert sich das Polynom auf einen Term  $p(\tau) = c_0 = 4\pi\sigma$  (es gibt also eine Subtraktionskonstante).

Die Dispersionsrelationen können dann als Ausdruck eines mathematischen Satzes aufgefaßt werden, der besagt, daß unter den Voraussetzungen V1, V2 der Realteil und der Imaginärteil von  $g$  im

Wesentlichen (d.h. bis auf einen gegebenen Ausdruck, der mit dem Subtraktionspolynom zusammenhängt) zueinander konjugierte Hilbert-Transformierte sind. In dieser Form findet man einen geeigneten Satz z.B. in dem grundlegenden Buch von Titchmarsh, *Theory of Fourier Integrals*, 2.A. Oxford 1948.

Wir wollen den Satz in der hier benötigten Form (eine Subtraktionskonstante) beweisen. Dazu betrachten wir  $g$  als Funktion einer komplexen Variablen  $\zeta$ , d.h. wir denken uns die Frequenz in die komplexe Ebene fortgesetzt. Als Konsequenz von V1, V2 ist dann  $g(\zeta)$  in der ganzen oberen Halbebene mit Ausnahme der reellen Achse regulär: Für  $\text{Im } \zeta > 0$  ist der Integrand exponentiell gedämpft,  $f$  ist eine endliche Funktion, die höchstens wie eine endliche Potenz anwächst, daher konvergiert das Integral. Strebt  $\zeta$  entlang eines beliebigen Weges in der oberen Halbebene gegen  $\infty$ , so verschwindet  $g(\zeta)$ : Für  $\text{Im } \zeta \rightarrow +\infty$  folgt das aus dem Abfall der  $e$ -Funktion, für  $\text{Re } \zeta \rightarrow \infty$  bei festem  $\text{Im } \zeta > 0$  oszilliert die Exponentialfunktion unendlich rasch und  $g$  strebt ebenfalls gegen Null. Auf der reellen Achse hat  $g(\zeta)$  eine Singularität bei  $\zeta = 0$ , die in unserem Fall (eine Subtraktion) ein einfacher Pol ist, vgl. (16b) (bei mehrfacher Subtraktion können Pole höherer Ordnung auftreten). Integrieren wir daher die Funktion  $g(\zeta)/(\zeta - \omega)$  über einen beliebigen geschlossenen Weg  $C$ , der ganz in der oberen Halbebene liegt, so erhalten wir Null, da auch diese Funktion in der oberen Halbebene regulär ist:

$$\oint_C \frac{g(\zeta)}{\zeta - \omega} d\zeta = 0 .$$

Nun wählen wir als Integrationsweg einen Halbkreisbogen mit sehr großem Radius und schließen diesen entlang der reellen Achse, wobei wir die singulären Punkte  $\zeta = 0$  und  $\zeta = \omega$  durch kleine Halbkreisbögen aussparen (vgl. Fig. 5.1). Lassen wir den Radius des großen Kreisbogens gegen  $\infty$  streben, so liefert der Bogen keinen Beitrag zum Integral, denn  $g(\zeta)/(\zeta - \omega)$  strebt stärker als linear gegen Null (s.o.). Strebt der Radius  $r$  der beiden kleinen Halbkreise gegen Null, so tragen diese Pole das  $(-\pi i)$ fache des Residuums von  $g/(\zeta - \omega)$  an den Stellen  $\zeta = 0$  bzw.  $\zeta = \omega$  bei. Insgesamt erhalten wir

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left( \int_{-\infty}^{-r} + \int_r^{\omega-r} + \int_{\omega+r}^{\infty} \right) \frac{g(\zeta)}{\zeta - \omega} d\zeta = \pi i (R(0) + R(\omega)) .$$

Berechnung der Residuen  $R$  gibt

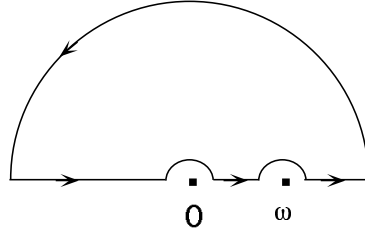


Fig. 5.1

$$R(0) = \left( \text{Res} \frac{g(\zeta)}{\zeta - \omega} \right)_{\zeta=0} = -\frac{4\pi i \sigma}{\omega},$$

$$R(\omega) = \left( \text{Res} \frac{g(\zeta)}{\zeta - \omega} \right)_{\zeta=\omega} = g(\omega).$$

Der Grenzwert ist die Definition des Cauchyschen Hauptwertintegrals. Damit erhalten wir die Formel

$$g(\omega) = i \frac{4\pi \sigma}{\omega} + \frac{1}{i\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\zeta)}{\zeta - \omega} d\zeta.$$

Bilden wir den Real- bzw. Imaginärteil, so erhalten wir die Dispersionsrelationen von de Kronig und Kramers

$$\epsilon_R(\omega) - 1 = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\epsilon_J(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \quad (27a)$$

$$\epsilon_J(\omega) = \frac{4\pi \sigma}{\omega} - \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\epsilon_R(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \quad (27b).$$

Das entspricht dem Satz von Titchmarsh: die Hilberttransformation  $\mathcal{H}$  ist durch

$$G(y) = \mathcal{H}(F) := \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(x)}{x - y} dx, \quad -F(y) = \mathcal{H}(G)$$

definiert. Für ein Subtraktionspolynom  $n$ -ter Ordnung verläuft der Beweis des Satzes analog, wobei man von  $g/\zeta^n(\zeta - \omega)$  ausgehen muß.

Für physikalische Anwendungen ist es zweckmäßig, die Integration in den Dispersionsrelationen auf das Intervall  $(0, \infty)$  umzuschreiben.

Das gelingt mit Hilfe des in Abschnitt 5.3 erwähnten Verhaltens von  $\epsilon_R$  bzw.  $\epsilon_J$  bei  $\omega \rightarrow -\omega$ . Das Resultat lautet

$$\epsilon_R(\omega) - 1 = \frac{2}{\pi} P \int_0^\infty \frac{\omega' \epsilon_J(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' \quad (28a)$$

$$\epsilon_J(\omega) = \frac{4\pi\sigma}{\omega} - \frac{2\omega}{\pi} P \int_0^\infty \frac{\epsilon_R(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' . \quad (28b)$$

Da mit  $\epsilon(\omega)$  auch  $n(\omega) = \sqrt{\epsilon(\omega)}$  die Voraussetzungen V1, V2 erfüllt bestehen analoge Dispersionsrelationen zwischen  $n_R$  und  $n_J$ .

Die Dispersionsrelationen folgen aus ganz wenigen und physikalisch plausiblen Voraussetzungen. Ihre Gültigkeit ist daher weitgehend unabhängig von der detaillierten Theorie, mit der man mikroskopische Polarisationsmechanismen beschreibt. Insbesondere bleiben sie auch im Rahmen der Quantentheorie gültig. Gleiches gilt für alle Aussagen, die man ohne zusätzliche Annahmen über die mikroskopische Struktur der Materie aus ihnen gewinnen kann. Wir untersuchen daher einige Konsequenzen.

Von den Formeln (28a, b) ist insbesondere die erste von praktischer Bedeutung. Sie erlaubt die Berechnung von  $\epsilon_R$  bei bekanntem  $\epsilon_J$ . Selbst wenn man rechts nur eine Näherung für  $\epsilon_J$  einsetzt (die natürlich die physikalisch notwendige Forderung  $\epsilon_J > 0$  erfüllen muß), erhält man ein physikalisch sinnvolles Resultat. Für die zweite Relation ist das nicht immer der Fall, denn man ist nicht sicher, daß bei ungenau bekanntem  $\epsilon_R$  ein positives  $\epsilon_J$  herauskommt.

Wir betrachten nun die Grenzfälle niedriger bzw. hoher Frequenzen. In diesen Fällen erhalten wir Formeln eines Typs, der unter dem Namen "Summenregel" bekannt ist. Für **niedrige** Frequenzen erhalten wir aus (28a)

$$\epsilon_R(0) - 1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\epsilon_J(\omega')}{\omega'} d\omega' . \quad (29)$$

Zunächst gilt diese Formel für Nichtleiter. Für Leiter muß man wegen der Singularität von  $\epsilon_J$  bei  $\omega' = 0$  von  $\epsilon_J(\omega') - 4\pi\sigma/\omega'$  ausgehen: solange  $\omega \neq 0$  ist, trägt der abgezogene Term zum Hauptwertintegral nicht bei. Die Formel liefert Abschätzungen für  $\epsilon_R(0)$ .

Für **hohe** Frequenzen können wir im Nenner  $\omega'$  gegen  $\omega$  vernachlässigen und erhalten die Näherung



$$\epsilon_R(\omega) - 1 \approx \frac{-2}{\pi\omega^2} \int_0^\infty \omega' \epsilon_J(\omega') d\omega' .$$

Das Verhalten für hohe Frequenzen haben wir aber bereits früher untersucht (vgl. (17)). Durch Vergleich erhalten wir eine Beziehung zwischen der Plasmafrequenz (bzw. der Dichte) und dem linearen Absorptionskoeffizienten (25)

$$\omega_P^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \omega' \epsilon_J(\omega') d\omega' = \frac{2c}{\pi} \int_0^\infty \gamma(\omega') d\omega' . \quad (30)$$

Weitere Konsequenzen aus den Dispersionsrelationen folgen für Transparenzgebiete. In solchen ist (vgl. Abschnitt 5.3)  $\epsilon_J \ll \epsilon_R$ . Zum Dispersionsintegral (27a) tragen dann nur Frequenzen  $\omega'$  außerhalb der Transparenzgebiete bei, d.h. der Punkt  $\omega' = \omega$  liegt außerhalb des Integrationsgebietes. Durch Differenzieren von (28a) und  $\omega^2 \cdot (28a)$  kann man Ungleichungen erhalten, die sich auf den Brechungsindex  $n \approx n_R(\omega)$  und die Gruppengeschwindigkeit (26) übertragen lassen. Damit läßt sich zeigen, daß die Gruppengeschwindigkeit kleiner als die Phasengeschwindigkeit  $c/n$  und stets kleiner als  $c$  ist (vgl. Übungen).

Bereiche, in denen  $n$  monoton zunimmt, heißen solche mit **normaler Dispersion**. Die Transparenzgebiete sind stets solche Bereiche. Tritt Absorption auf, so wird die Dispersion **anomal**, d.h.  $n_R$  nimmt ab. Die Gruppengeschwindigkeit wird größer als die Phasengeschwindigkeit und kann u.U. sogar größer als  $c$  werden. Ein Widerspruch zur Relativitätstheorie tritt jedoch nicht auf, weil die Gruppengeschwindigkeit in diesem Fall ihre physikalische Bedeutung verliert.

Es ist interessant, daß der Zusammenhang zwischen Kausalität und Dispersionseigenschaften zuerst in umgekehrter Richtung aufgedeckt wurde. Sommerfeld, Brillouin und Voigt haben schon 1914 nachgewiesen, daß sich in einem Dielektrikum kein Signal mit größerer Geschwindigkeit als mit  $c$  ausbreiten kann, wobei sie einen frequenzabhängigen Brechungsindex benützten, der die Dispersionsrelationen erfüllt. Kramers hat dann 1926 denselben Nachweis mit Hilfe der Fortsetzung zu komplexen Frequenzen geführt und de Kronig zeigte ein Jahr später, daß die Dispersionsrelationen notwendig und hinreichend für die Kausalität sind. Die modernere Entwicklung wurde durch die Dissertation von J.S. Toll (Princeton 1952) in Gang gebracht, von der leider nur ein kleiner Teil (l.c.) allgemein zugänglich ist.

**Übungen**

8) Beweise die folgenden Ungleichungen für ein Transparenzgebiet:

$$\text{a) } \frac{dn}{d\omega} > 0, \quad \text{b) } \frac{u}{c} < \frac{1}{n}, \quad \text{c) } \frac{u}{c} < n$$

Dabei bedeutet  $n$  den (reellen) Brechungsindex und  $u$  die Gruppengeschwindigkeit.

9) Als einfaches Modell für ein absorbierendes Medium soll angenommen werden, daß der Imaginärteil von  $\epsilon(\omega)$  nur in einem bestimmten Bereich  $\omega_2 > \omega > \omega_1$  von Null verschieden und dort konstant ist. Berechne den Realteil und zeichne ein Diagramm der Frequenzabhängigkeit. Wo ist die Dispersion normal bzw. anomal?

10) Untersuche die Problemstellung von Beispiel 9 für

$$\epsilon_J(\omega) = \frac{a\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}$$

mit positiven Konstanten  $a, \gamma, \omega_0 > \gamma/2$ .

11) Berechne für die in Beispiel 10 gesuchte Funktion  $\epsilon(\omega)$  die Nachwirkungsfunktion. Welche Bedeutung hat die Konstante  $\gamma$ ?

12) Berechne den Mittelwert von  $\epsilon_R$

$$\langle \epsilon_R \rangle = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x \epsilon_R(\omega) d\omega .$$

## 5.5 Brechung und Reflexion

Um einen Einblick in den Mechanismus der Wellenausbreitung in geschichteten Medien zu erhalten, betrachten wir als einfachstes, aber typisches Beispiel zwei Schichten mit ebener Trennfläche. Das eine Medium (1) soll ein transparentes Dielektrikum sein ( $\epsilon_1(\omega)$  reell). Für das andere (2) kann die Dielektrizitätskonstante auch komplex sein. An der Trennfläche sind dann die Randbedingungen (4.17 - 20) zu beachten, die zu erheblichen Einschränkungen für die Feldstärken führen. Wir legen das Koordinatensystem so, daß die Trennebene die  $xy$ -Ebene ist. Das transparente Medium (1) soll unterhalb ( $z \leq 0$ ) liegen. In diesem Medium soll eine monochromatische, ebene Welle so auf die Trennebene treffen, daß ihr Wellenvektor  $\mathbf{k}$  mit der  $z$ -Achse den Winkel  $\theta$  bildet. An der Grenzschicht werden von der eintreffenden Welle Ladungsträger zu Schwingungen angeregt. Das führt dazu, daß sich sowohl eine Welle in das Medium 2 hinein ausbreitet (gebrochene Welle, Wellenvektor  $\mathbf{k}'$ , Winkel mit der  $z$ -Achse  $\theta'$ ), als auch eine Welle in das Medium 1 zurückläuft (reflektierte Welle, Wellenvektor  $\mathbf{k}''$ , Winkel mit der negativen  $z$ -Achse  $\theta''$ ), vgl. Fig. 5.2.

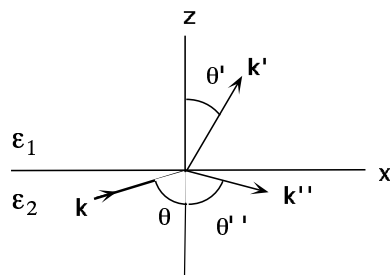


Fig. 5.2

Wegen der (vorausgesetzten) Homogenität und Isotropie der beiden Medien hat die betrachtete Konfiguration eine außerordentlich symmetrische Struktur: in allen zur Trennebene parallelen Ebenen ist kein Punkt und keine Richtung ausgezeichnet. Daraus kann man schließen, daß sowohl die gebrochene, als auch die reflektierte Welle eben sein muß, wenn die einfallende Welle diese Struktur hat. Außerdem müssen die  $x$ - und die  $y$ -Komponenten der drei Wellenvektoren gleich sein: die Abhängigkeit der Feldstärken  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  von  $(x, y)$  muß überall dieselbe sein. Die drei Wellenvektoren liegen also in einer Ebene (der sog. Einfallsebe-

ne). Wir wählen sie als  $xz$ -Ebene, sodaß die  $y$ -Komponenten der Wellenvektoren verschwinden. Eine weitere Konsequenz der Symmetrie ist, daß die drei Wellen gleiche Frequenzen haben müssen (was man z.B. durch Betrachtung der Ebene  $z = 0$  sieht). Die Wellenvektoren  $\mathbf{k}$  und  $\mathbf{k}''$  sind daher betragsgleich. Damit erhält man (vgl. Fig. 5.2)

$$\begin{aligned} k_x &= k \sin \theta = k'_x = k \sin \theta'' \\ k_z &= k \cos \theta = -k'_z = k \cos \theta'' . \end{aligned}$$

Daraus folgt  $\theta = \theta''$  (Einfallswinkel = Reflexionswinkel). Die  $z$ -Komponente von  $\mathbf{k}$  bzw.  $\mathbf{k}'$  ist reell

$$k_z = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_1} \cos \theta . \quad (31)$$

Die  $z$ -Komponente von  $\mathbf{k}'$  erhält man mit  $k'_x = k_x$  :

$$k'_z = \sqrt{\mathbf{k}'^2 - k_x'^2} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2 \theta} . \quad (32)$$

Sie ist daher i.a. komplex. Das Wurzelvorzeichen muß so gewählt werden, daß der Imaginärteil von  $k'_z$  positiv ist (Schwächung der Welle im Medium 2).

Durch die aus der Symmetrie folgenden Einschränkungen haben wir dafür gesorgt, daß die Phasen der Wellen in den beiden Medien an der Trennfläche  $z = 0$  übereinstimmen. Die Randbedingungen liefern aber auch Einschränkungen für die Amplituden. Um die Rechnung möglichst einfach zu halten, betrachten wir eine linear polarisierte einfallende Welle und diskutieren die beiden Fälle

( $\perp$ ) Polarisation senkrecht zur Einfallsebene

( $\parallel$ ) Polarisation parallel zur Einfallsebene

getrennt. Der allgemeine Fall kann daraus durch Superposition gefunden werden. In beiden Spezialfällen ist eine Betrachtung der Tangentialkomponenten der Feldstärken ausreichend. Wir bezeichnen den Amplitudenvektor in  $\mathbf{E}$  mit  $\mathbf{E}_{(0)}$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{(0)} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{x} - i\omega t) + K.K.$$

analog für  $\mathbf{B}, \mathbf{E}', \mathbf{B}', \mathbf{E}'', \mathbf{B}''$ . Für senkrechte Polarisation ist  $\mathbf{E}_{(0)}$  parallel zur  $y$ -Achse

$$\perp \quad \mathbf{E}_{(0)} = (0, E_{(0)y}, 0)$$

und hat daher keine Komponente normal zur Trennebene.  $\mathbf{B}_{(0)}$  ist dazu senkrecht. Verlangen wir

$$\perp \quad \mathbf{B}_{(0)} = \frac{c}{\omega}(\mathbf{k} \times \mathbf{E}_{(0)}) = \frac{c}{\omega}(-k_z, 0, k_x)E_{(0)y} ,$$

so ist  $\mathbf{B}$  divergenzfrei und beide Felder erfüllen die Maxwellgleichungen. Man sieht, daß die Betrachtung der Tangentialkomponenten  $E_{(0)y}, B_{(0)x}$  ausreicht. Mit den entsprechenden Ansätzen für die beiden anderen Wellen erhält man

$$\begin{aligned} E_{(0)y} + E''_{(0)y} &= E'_{(0)y} \\ k_z(E_{(0)y} - E''_{(0)y}) &= k'_z E'_{(0)y} . \end{aligned}$$

Durch Auflösen der beiden Gleichungen und Einsetzen von (30), (31) erhält man

$$\perp \quad \left( \frac{E'}{E} \right)_{(0)y} = \frac{2k_z}{k_z + k'_z} \quad (32)$$

$$\perp \quad \left( \frac{E''}{E} \right)_{(0)y} = \frac{k_z - k'_z}{k_z + k'_z} . \quad (33)$$

Für die Praxis ist es zweckmäßiger, anstelle der Amplituden die Intensitäten zu betrachten. Dazu berechnet man für jede der drei Wellen den Zeitmittelwert des Poyntingvektors über eine Periode  $\tau = 2\pi/\omega$

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{c}{4\pi} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt(\mathbf{E} \times \mathbf{B})$$

und definiert einen Reflexionskoeffizienten  $R$  bzw. Transmissionskoeffizienten  $T$  durch das entsprechende Verhältnis der  $z$ -Komponenten

$$R = \frac{\langle S''_z \rangle}{\langle S_z \rangle} , \quad T = \frac{\langle S'_z \rangle}{\langle S_z \rangle} .$$

Mit (30) - (33) erhält man nach etwas Rechnung die folgenden Resultate:

$$R_\perp = \left| \frac{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta - \sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2 \theta}}{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta + \sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2 \theta}} \right|^2 \quad (34)$$

$$T_\perp = \frac{2\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta (\sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2 \theta} + K.K.)}{|\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta + \sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2 \theta}|^2} . \quad (35)$$

Für parallele Polarisation ist  $\mathbf{B}_{(0)}$  parallel zur  $y$ -Achse und hat daher keine Komponente normal zur Trennebene.  $\mathbf{E}_{(0)}$  hat in diesem Fall zwei

Komponenten, die man durch die  $y$ -Komponente von  $\mathbf{B}_{(0)}$  ausdrücken kann. Man eliminiert in diesem Fall  $\mathbf{E}_{(0)}$  zugunsten von  $\mathbf{B}_{(0)}$ . Für  $R$  bzw.  $T$  erhält man

$$R_{\parallel} = \left| \frac{\epsilon_2 \cos \theta - \sqrt{\epsilon_1} \sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2 \theta}}{\epsilon_2 \cos \theta + \sqrt{\epsilon_1} \sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2 \theta}} \right|^2 \quad (36)$$

$$R_{\perp} = \frac{2\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta \left( \frac{\sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2 \theta}}{\epsilon_2} + K.K. \right) |\epsilon_2|^2}{|\epsilon_2 \cos \theta + \sqrt{\epsilon_1} \sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2 \theta}|^2} . \quad (37)$$

Verläuft der einfallende Strahl senkrecht zur Trennebene ( $\theta = 0$ ), so sind die beiden Polarisationsformen ununterscheidbar

$$R_{\perp}(\theta = 0) = R_{\parallel}(\theta = 0), \quad T_{\perp}(\theta = 0) = T_{\parallel}(\theta = 0) = 1 - R(\theta = 0).$$

Nun betrachten wir die erhaltenen Formeln für zwei transparente Medien (auch  $\epsilon_2$  reell). In diesem Fall ist  $k'$  reell und  $k'_x = k' \sin \theta'$ . Aus  $k'_x = k_x$  erhalten wir das Brechungsgesetz von Snellius

$$\frac{\sin \theta'}{\sin \theta} = \frac{\sqrt{\epsilon_1}}{\sqrt{\epsilon_2}}. \quad (38)$$

Der Brechungswinkel  $\theta'$  ist nur für  $\epsilon_1 < \epsilon_2$  (Reflexion am optischen dichteren Medium, gebrochener Strahl im dichteren Medium) immer reell. Für  $\epsilon_1 > \epsilon_2$  erhält man für  $\sin \theta > \sqrt{\epsilon_2}/\sqrt{\epsilon_1}$  keinen reellen Winkel. Wir behandeln diesen Fall (Totalreflexion) später und schließen ihn vorerst aus. Die Verhältnisse der Amplituden sind in diesem Fall durch die aus der Optik bekannten Fresnelschen Formeln gegeben. Aus (32), (33) erhält man z.B.

$$\perp \quad \left( \frac{E'}{E} \right)_{(0)y} = \frac{2 \cos \theta \sin \theta'}{\sin(\theta + \theta')}, \quad \left( \frac{E''}{E} \right)_{(0)y} = \frac{\sin(\theta' - \theta)}{\sin(\theta' + \theta)}.$$

Die Reflexions- bzw. Transmissionskoeffizienten sind

$$R_{\perp} = 1 - T_{\perp} = \frac{\sin^2(\theta' - \theta)}{\sin^2(\theta' + \theta)} \quad (39)$$

$$R_{\parallel} = 1 - T_{\parallel} = \frac{\tan^2(\theta' - \theta)}{\tan^2(\theta' + \theta)}. \quad (40)$$

Im Allgemeinen entsteht durch Reflexion bzw. Brechung aus einer linear polarisierten Welle wieder eine solche, deren Polarisationsrichtung aber gegenüber derjenigen der einfallenden Welle gedreht ist. Aus einer unpolarisierten Welle entsteht eine mit elliptischer Polarisation. Für einen speziellen Einfallswinkel wird  $\theta + \theta' = \pi/2$  und damit  $R = 0$ . Dieser Winkel heißt **Brewster-Winkel**  $\theta_B$  und ist durch

$$\tan \theta_B = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \quad (41)$$

gegeben. Die reflektierte Welle ist dann in jedem Fall (auch wenn die einfallende Welle unpolarisiert ist) streng linear polarisiert, und zwar senkrecht zur Einfallsebene.

Wir betrachten nun die Reflexion am optisch dünneren Medium  $\epsilon_2 < \epsilon_1$ . Lassen wir  $\theta$  von 0 (senkrechter Einfall) an zunehmen, so wird für den Winkel  $\theta_G$  (Grenzwinkel der **Totalreflexion**) mit

$$\sin \theta_G = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \quad (42)$$

der Brechungswinkel  $\theta' = \pi/2$ , d.h. die gebrochene Welle verläuft in der Trennebene. Außerdem wird

$$R_{\perp} = R_{\parallel} = 1, \quad T_{\perp} = T_{\parallel} = 0. \quad (43)$$

Für alle größeren Winkel  $\theta > \theta_G$  wird  $k'_z$  rein imaginär:

$$k'_z = id(\theta), \quad d(\theta) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_1 \sin^2 \theta - \epsilon_2} > 0. \quad (44)$$

Die Reflexionskoeffizienten behalten für  $\theta > \theta_G$  den Wert 1, die Transmissionskoeffizienten verschwinden. Es tritt also im Mittel kein Energiestrom durch die Grenzfläche in das Medium (2) und die Welle wird **total reflektiert**. Eine Untersuchung der Polarisation zeigt, daß die reflektierte Welle selbst dann elliptisch polarisiert ist, wenn die einfallende Welle linear polarisiert ist, sofern die Polarisationssebene der einfallenden Welle schräg zur Einfallsebene liegt. Totalreflexion heißt nicht, daß im Medium (2) keine Welle erregt wird. Betrachten wir dazu die elektrische Feldstärke im Medium (2):

$$\mathbf{E}' = \exp(-zd(\theta)) (\mathbf{E}'_{(0)} \exp(ik'_x x - i\omega t) + K.K.) .$$

In  $z$ -Richtung erfolgt eine Schwächung, in  $x$ -Richtung eine Oszillation. Da die  $x$ -Komponente von  $\mathbf{E}'_{(0)}$  i.a. nicht verschwindet, handelt es sich um eine nicht-transversale Erregung, die auf eine dünne Oberflächenschicht beschränkt ist.

Ist das Medium (2) ein Leiter, so werden die Formeln sehr kompliziert, weil  $\epsilon_2$  komplex wird. Die Welle im Medium (2) wird in der  $z$ -Richtung geschwächt, denn  $k'_z$  ist komplex und  $k'_x$  reell. Diese Schwächung ist mit einem mittleren Energiestrom in den Leiter hinein verknüpft. Da für ein komplexes  $\epsilon_2$  echte Absorption vorliegt, ist das physikalisch verständlich. Für eine quantitative Theorie muß man den tatsächlichen Verlauf von  $\epsilon(\omega)$  genau beachten. Es kann auch einen Bereich geben, in dem die makroskopische Theorie nicht anwendbar ist: das ist dann der Fall, wenn die durch  $\text{Im } k'$  bestimmte Eindringtiefe mit der mittleren freien Weglänge der Leitungselektronen vergleichbar wird; die räumliche Veränderlichkeit des Feldes ist dann wichtig. Eine durchgehende Beschreibung gelingt mit Hilfe der sog. Oberflächenimpedanz. Wir können auf diese Beschreibung hier nicht eingehen. Stattdessen betrachten wir zwei Grenzfälle.

Für niedrige Frequenzen ist nach (16b)

$$\epsilon_2 = i \frac{4\pi\sigma}{\omega} + \epsilon_{2R}(0) + \dots$$

Schreibt man den Reflexionskoeffizienten für senkrechten Einfall ( $\theta = 0$ ) in der Form

$$R = \frac{1 - S}{1 + S}$$

und entwickelt  $S$  für kleine  $\omega$ , so wird

$$S \approx \sqrt{\frac{\omega\epsilon_1}{2\pi\sigma}} \ll 1$$

und man erhält die Formel von Hagen und Rubens

$$R(0) \approx 1 - \sqrt{\frac{2\omega\epsilon_1}{\pi\sigma}}.$$

Ein idealer Leiter ( $\sigma \rightarrow \infty$ ) wirkt nach dieser Formel als idealer Reflektor ( $R = 1$ ). Für endliche, aber große Werte von  $\sigma$  entspricht die mit dieser Näherung erhaltene Eindringtiefe der in Abschnitt 5.2 angegebenen. In Wirklichkeit darf man die Dispersionseigenschaften nicht immer



vergessen. Immerhin gibt die Formel von Hagen und Rubens für die meisten Metalle bis zu infraroten Frequenzen gute Resultate. Bei höheren Frequenzen ist die Formel (16b) nicht mehr anwendbar. Natürlich kann man die mit (16b) gefundenen Resultate formal benützen, die aus Messungen erhaltenen Werte für  $\sigma$  stimmen aber nicht mehr mit der statischen Leitfähigkeit überein. Das ist kein Wunder: bei höheren Frequenzen kommt man in den Resonanzbereich; dort erhält der Imaginärteil von  $\epsilon_2$  große Beiträge, die von dem Leitfähigkeitsterm nicht notwendig dominiert werden. Für Details kommt es auf das genaue Resonanzverhalten an.

Als zweiten Grenzfall betrachten wir das Dispersionsgesetz (17) für ein Plasma, das für hohe Frequenzen das richtige Verhalten liefert:

$$\epsilon_2(\omega) = 1 - \left(\frac{\omega_P}{\omega}\right)^2 .$$

Für Frequenzen oberhalb der Plasmafrequenz  $\omega > \omega_P$  ist  $\epsilon_2$  reell und das Medium ist transparent. Für  $\omega < \omega_P$  ist  $\epsilon_2 < 0$  und damit wird  $k'_z$  rein imaginär: wir erhalten den gleichen Ausdruck (44) wie bei der Totalreflexion. Unterhalb der Plasmafrequenz reflektiert das Plasma daher für alle Winkel total und die Welle im Plasma verläuft ohne Energie-dissipation in einer Oberflächenschicht.

Dieser Effekt hat große praktische Bedeutung. Er erklärt z.B. qualitativ die Reflexion von Radiowellen an der Ionosphäre. In dieser beträgt die Elektronendichte

$$N \simeq 10^4 - 10^6 \text{ Elektronen/cm}^3$$

und das entspricht Plasmafrequenzen im Ultrakurzwellenbereich

$$\omega_P \simeq 6 \cdot 10^6 - 6 \cdot 10^7 \text{ Hz} .$$

Für eine quantitative Erklärung muß man allerdings beachten, daß die Elektronen auch das Magnetfeld der Erde spüren und sich in diesem bewegen. Die entsprechende Umlauffrequenz (Zyklotronfrequenz)

$$\omega_B = \frac{eB}{mc}$$

liegt für das Magnetfeld der Erde ebenfalls bei etwa  $10^6$  Hz. Für eine zirkular polarisierte Welle, die sich in Richtung des Magnetfeldes ausbreitet, kann man dann die Dispersionsformel

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_P^2}{\omega(\omega \pm \omega_B)}$$

verwenden (die Vorzeichen entsprechen den beiden Möglichkeiten für zirkulare Polarisation) und die Ionosphäre wirkt doppeltbrechend.

Ein anderes wichtiges Phänomen, das durch dieses Verhalten beeinflusst wird, ist das Reflexions- bzw. Transparenzverhalten von Metallen. Um einen Überblick zu erhalten, notieren wir einige Zahlenwerte:

| Dichte<br>(Elektr./cm <sup>3</sup> ) | 10 <sup>22</sup>    | 10 <sup>18</sup>    | 10 <sup>14</sup>    | 10 <sup>10</sup> |
|--------------------------------------|---------------------|---------------------|---------------------|------------------|
| $\omega_P$ (Hz)                      | $5,7 \cdot 10^{15}$ | $5,7 \cdot 10^{13}$ | $5,7 \cdot 10^{11}$ | $5,7 \cdot 10^9$ |
| $\lambda_P$ (cm)                     | $3,3 \cdot 10^{-5}$ | $3,3 \cdot 10^{-3}$ | 0,33                | 33               |

Für Alkalimetalle liegen die Plasmawellenlängen zwischen 155 nm (Li) und 340 nm (Rb). Man kann daher verstehen, daß diese Metalle im optischen Bereich reflektieren und im Ultraviolettbereich transparent werden (Wood-Zener-Effekt). Von der Ursache her ist also die Lichtreflexion an Metalloberflächen eher mit der Reflexion von Radiowellen an der Ionosphäre verwandt, als mit der an Leiteroberflächen. Bei anderen Metallen stimmen die mit dem Dispersionsgesetz (17) erhaltenen Aussagen im optischen Bereich quantitativ nicht mehr so gut. Für die Praxis muß man außerdem beachten, daß das Reflexionsverhalten durch die Verhältnisse in einer dünnen Oberflächenschicht bedingt ist. Das Aussehen der wirklichen Oberfläche (Rauhigkeit, Verunreinigungen) ist daher für das Reflexionsverhalten entscheidend.

## 5.6 Hohlraumresonatoren und Wellenleiter

Je komplizierter die Grenzfläche von Medien mit verschiedenen Eigenschaften sind, desto schwieriger wird es, den Randbedingungen Rechnung zu tragen. Selbst der Einfluß eines Hindernisses auf die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in einem Medium (also die Beugung oder Streuung der Wellen am Hindernis) ist nur für sehr spezielle geometrische Formen einer strengen Behandlung zugänglich, vor allem, wenn man auf den Vektorcharakter der Feldstärken – also auf die Polarisationsphänomene – Rücksicht nehmen will. Wir wollen uns aus diesen Gründen hier darauf beschränken, einen Problemkreis kurz zu besprechen, bei dem ein Dielektrikum von einem guten Leiter umgeben ist.

Die Wellenausbreitung im Dielektrikum untersuchen wir ohne Berücksichtigung von Dispersionsphänomenen, d.h. wir betrachten  $\epsilon$  und  $\mu$  als konstant. Die Betrachtung gilt also entweder für genügend hohe Frequenzen (weit oberhalb des Dispersionsgebietes) mit  $\epsilon = \mu = 1$  (ebenso natürlich im Vakuum für alle Frequenzen) oder für genügend niedrige Frequenzen mit  $\epsilon, \mu \neq 1$ . Das leitende Medium behandeln wir außerdem als perfekten Leiter (vgl. Abschnitt 4.5), d.h. wir nehmen an, daß im Inneren des Leiters kein elektrisches und magnetisches Feld vorhanden sein soll. Das bedeutet eine Idealisierung: in Wirklichkeit wird das Feld der betrachteten Welle ein wenig in den Leiter eindringen, es kommt zu einem Energiestrom in den Leiter. Die damit zusammenhängende Energiedissipation (endliche Leitfähigkeit: Widerstandsverluste) führt zu einer Dämpfung der Welle im Dielektrikum, die wir vernachlässigen. Die Randbedingungen (4.22), (4.23) führen dann dazu, daß die Felder im Dielektrikum dicht an der Leiteroberfläche ein sehr spezielles Aussehen haben: das elektrische Feld muß stets normal, das magnetische parallel zur Leiteroberfläche sein. Mit diesen Randbedingungen müssen die Maxwellgleichungen (4.12) im Dielektrikum gelöst werden, die für konstante Materialparameter die Form

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{\mu\epsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} & \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned}$$

haben. Setzen wir eine Lösung mit einer festen Frequenz  $\omega$  in der Form

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}(\omega, \mathbf{x}) \exp(-i\omega t) + K.K., \quad \mathbf{B} = \mathbf{b}(\omega, \mathbf{x}) \exp(-i\omega t) + K.K. \quad (45)$$

an, so erhalten wir aus den dynamischen Gleichungen

$$\nabla \times \mathbf{b} = -i\mu\epsilon \frac{\omega}{c} \mathbf{e} \quad (46a)$$

$$\nabla \times \mathbf{e} = -i\frac{\omega}{c} \mathbf{b}. \quad (46b)$$

Durch Elimination entsteht eine Schwingungsgleichung

$$\left( \Delta + \mu\epsilon \frac{\omega^2}{c^2} \right) \mathbf{e} = 0, \quad \left( \Delta + \mu\epsilon \frac{\omega^2}{c^2} \right) \mathbf{b} = 0. \quad (47)$$

Die Nebenbedingungsgleichungen geben

$$\nabla \cdot \mathbf{e} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{b} = 0. \quad (48)$$

Man kann also z.B. einen der Feldvektoren aus der Schwingungsgleichung + Nebenbedingungen berechnen und den anderen daraus durch Bildung der Rotation bestimmen.

Die Einschränkung der Lösungen durch die Randbedingungen ist besonders groß, wenn die Leiteroberfläche einen erheblichen Teil des Raumes begrenzt, in dem das Feld betrachtet wird. Wir betrachten zunächst als Extremfall das Feld in einem Dielektrikum, das von allen Seiten von einem Leiter begrenzt wird. Infolge der Randbedingungen gibt es in diesem Fall überhaupt keine laufenden Wellen, sondern nur ganz bestimmte Schwingungstypen. Sie heißen **Eigenschwingungen** oder **Moden**. Ihre Berechnung ist nur dann einfach, wenn die geometrische Form der Begrenzung einfach genug ist. Wir betrachten als besonders einfache Form einen rechteckigen Kasten mit den Seitenlängen  $(A, B, C)$  und legen das Koordinatensystem so, daß die Achsen mit drei Kanten zusammenfallen. Die Schwingungsgleichung kann mit dem Ansatz

$$e_i = a_i f_{(i)}(x) g_{(i)}(y) h_{(i)}(z) \quad i = 1, 2, 3$$

in kartesischen Koordinaten separiert werden. Für die Funktionen  $f, g, h$  erhält man die Differentialgleichungen

$$f''_{(i)} + k_1^2 f_{(i)} = 0, \quad g''_{(i)} + k_2^2 g_{(i)} = 0, \quad h''_{(i)} + k_3^2 h_{(i)} = 0$$

mit drei Konstanten  $k_1, k_2, k_3$ , die der Bedingung

$$\mu\epsilon \frac{\omega^2}{c^2} = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$$

genügen müssen.  $f, g, h$  sind daher Sinus- bzw. Kosinusfunktionen ihrer Argumente. Aus  $\nabla \cdot \mathbf{e} = 0$  sieht man, daß  $h'_{(3)}/h_{(1)}$ ,  $g'_{(2)}/g_{(1)}$  und  $f'_{(1)}/f_{(2)}$  konstant sein müssen. Die Randbedingungen bedeuten, daß die Tangentialkomponenten am Rand des Kastens verschwinden müssen. Das bedeutet

$$\begin{aligned} f_{(3)} g_{(3)} h_{(3)} &= 0 \quad \text{für } x = 0, A \text{ und } y = 0, B \\ f_{(2)} g_{(2)} h_{(2)} &= 0 \quad \text{für } z = 0, C \text{ und } x = 0, A \\ f_{(1)} g_{(1)} h_{(1)} &= 0 \quad \text{für } z = 0, C \text{ und } y = 0, B. \end{aligned}$$

Die neun Funktionen  $f, g, h$  sind durch diese Bedingungen bis auf drei ganze Zahlen  $(l, m, n)$  festgelegt. Insgesamt ist

$$e_1 = a_1 \cos\left(\frac{l\pi x}{A}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{B}\right) \sin\left(\frac{n\pi z}{C}\right) \quad (49a)$$

$$e_2 = a_2 \sin\left(\frac{l\pi x}{A}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{B}\right) \sin\left(\frac{n\pi z}{C}\right) \quad (49b)$$

$$e_3 = a_3 \sin\left(\frac{l\pi x}{A}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{B}\right) \cos\left(\frac{n\pi z}{C}\right), \quad (49c)$$

wobei der Amplitudenvektor  $\mathbf{a}$  der Gleichung

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{a} = 0 \text{ mit } \mathbf{k} = \pi \left( \frac{l}{A}, \frac{m}{B}, \frac{n}{C} \right) \quad (50)$$

genügt und

$$\mathbf{k}^2 = \pi^2 \left( \frac{l^2}{A^2} + \frac{m^2}{B^2} + \frac{n^2}{C^2} \right) = \mu\epsilon \frac{\omega^2}{c^2} \quad (51)$$

ist. Die ganzen Zahlen können dabei die Werte  $0, 1, 2, \dots$  annehmen. Es sind also nur ganz bestimmte Eigenfrequenzen  $\omega = \omega(l, m, n)$  möglich, deren Abstand von den Abmessungen des Hohlraumes abhängt. Je größer dieser ist, desto niedriger ist die unterste Eigenfrequenz und desto dichter ist das Spektrum. Für leere Hohlräume ( $\epsilon = \mu = 1$ ) von "zivilen" Abmessungen (Größenordnung 1cm - 1m) liegen die Eigenfrequenzen im Ultrakurzwellenbereich. Damit ein nichttriviales Feld resultiert, müssen mindestens zwei der drei ganzen Zahlen  $l, m, n$  von Null verschieden sein. Die magnetische Feldstärke kann aus (46b) berechnet werden. Sie erfüllt die entsprechenden Randbedingungen und ist senkrecht zu  $\mathbf{e}$  und  $\mathbf{k}$ . Die Richtung von  $\mathbf{e}$  ist durch (50) i.a. nicht eindeutig festgelegt, sondern es gibt zwei linear unabhängige Polarisationsrichtungen. Verschwindet eine der drei Zahlen ( $l, m, n$ ), so gibt es nur eine solche Richtung. Die allgemeine Lösung erhält man als Summe über alle möglichen Eigenschwingungen (49) mit geeigneten Koeffizienten. Das "Gewicht", mit dem eine einzelne Eigenschwingung auftritt, hängt davon ab, wie man den Hohlraum anregt. Bei anderen geometrischen Formen liegen analoge Verhältnisse vor. Eine Berechnung der Eigenschwingungen ist i.a. nur dann einfach, wenn die Wellengleichung in geeigneten Koordinaten separiert werden kann. Bei Hohlräumen mit nicht-orthogonaler Begrenzung sind die mathematischen Schwierigkeiten beträchtlich.

Nun betrachten wir einen zylinderförmigen Hohlraum mit beliebiger Querschnittsform, der in  $z$ -Richtung unendlich lang ist, also ein unendlich langes Hohlrohr. Aus der vorgeführten Rechnung für den Kasten

sieht man sofort, daß die Feldstärken dann nur in  $xy$ -Richtung “eingespannt” sind, während durch das Fehlen der Randbedingungen für spezielle  $z$ -Werte Lösungen zu erwarten sind, die in axialer ( $z$ -)Richtung laufenden Wellen entsprechen. Ein Hohlraum wirkt daher als **Wellenleiter**. Die in einem Wellenleiter möglichen Wellen können in zwei Klassen eingeteilt werden:

- (a) TM-Wellen (transversal **m**agnetische Wellen, Wellen vom elektrischen Typ, E-Wellen): für sie ist  $B_z = 0$ ,
- (b) TE-Wellen (transversal **e**lektrische Wellen, Wellen vom magnetischen Typ, H-Wellen): für sie ist  $E_z = 0$ .

Auf den Beweis, daß diese Einteilung möglich ist, muß hier verzichtet werden (er geht auf Rayleigh 1897 zurück). Die Lösung der Maxwellgleichungen ist besonders einfach, wenn man sie für jede der beiden Klassen extra untersucht. In beiden Fällen erhält man aus (47) durch die Ersetzung

$$\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{e}(x, y) \exp(izk_3), \quad \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{b}(x, y) \exp(izk_3)$$

die zweidimensionale Schwingungsgleichung

$$(\Delta(x, y) + \kappa^2)\mathbf{e}(x, y) = 0, \quad (\Delta(x, y) + \kappa^2)\mathbf{b}(x, y) = 0, \quad (52)$$

wobei

$$\kappa^2 = \mu\epsilon \frac{\omega^2}{c^2} - k_3^2 \quad (53)$$

ist. Mit Hilfe von (46) kann man außerdem alle Komponenten der Felder durch eine einzige und ihre Ableitungen ausdrücken, sodaß die Schwingungsgleichung (52) nur für eine Komponente gelöst werden muß. Für TM-Wellen ist diese Komponente  $e_3$ , für TE-Wellen  $b_3$ . Als Bestimmungsgleichungen für diese Felder erhält man die folgenden Beziehungen

(a) TM-Wellen:

$$\begin{aligned} (e_1, e_2) &= \frac{ik_3}{\kappa^2} \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) e_3 \\ (b_1, b_2) &= \frac{i\mu\omega}{c\kappa^2} \left( -\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x} \right) e_3, \quad b_3 = 0 \\ (\Delta(x, y) + \kappa^2)e_3 &= 0 \\ e_3 &= 0 \text{ am Rand des Querschnitts.} \end{aligned}$$

(b) TE-Wellen:

$$\begin{aligned}(b_1, b_2) &= \frac{ik_3}{\kappa^2} \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) b_3 \\(e_1, e_2) &= \frac{i\mu\omega}{c\kappa^2} \left( \frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial x} \right) b_3, \quad e_3 = 0 \\(\Delta(x, y) + \kappa^2)b_3 &= 0 \\(\mathbf{n} \cdot \nabla)b_3 &= 0 \text{ am Rand des Querschnitts.}\end{aligned}$$

$\mathbf{n}$  bedeutet dabei die Normale zur Zylinderfläche.

Als Folge der Randbedingungen hat die Schwingungsgleichung für  $e_3$  bzw.  $b_3$  nur für spezielle Werte (Eigenwerte) von  $\kappa^2$  nichttriviale Lösungen. Die zugehörigen Frequenzen sind aber im Gegensatz zu denen geschlossener Hohlräume außerdem durch den kontinuierlichen Parameter  $k_3$  ( $0 < k_3 < \infty$ ) charakterisiert. Die Geschwindigkeit, mit der die Wellen in Richtung der Zylinderachse laufen, ist die Gruppengeschwindigkeit

$$u_z = \frac{d\omega}{dk_3} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} \frac{k_3}{\sqrt{k_3^2 + \kappa^2}}.$$

Bei gegebenem Eigenwert  $\kappa$  liegt sie zwischen Null ( $k_3 = 0$ ) und  $c/\sqrt{\epsilon\mu}$  ( $k_3 = \infty$ ). Unter den Eigenwerten gibt es stets einen kleinsten  $\kappa_{min} \neq 0$ . Daraus folgt, daß es eine kleinste Frequenz (Grenzfrequenz, Abschneidefrequenz)

$$\omega_{min} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} \kappa_{min}$$

gibt. Nur oberhalb dieser Frequenz tritt überhaupt Wellenleitung auf. Für kleinere Frequenzen wird  $k_3$  rein imaginär und die Welle klingt mit  $z$  exponentiell ab. Bei gegebener Betriebsfrequenz  $\omega > \omega_{min}$  wird nur eine endliche Anzahl von Eigenfrequenzen übertragen.

Untersuchen wir nun als Beispiel die Lösungen für einen rechteckigen Hohlleiter (Abmessungen wie früher, aber keine Begrenzung in  $z$ -Richtung). Für **TM-Wellen** erhalten wir analog wie vorhin

$$\text{TM: } e_3 = a_3 \sin \frac{\pi l x}{A} \sin \frac{\pi m y}{B}, \quad \kappa^2 = \pi^2 \left( \frac{l^2}{A^2} + \frac{m^2}{B^2} \right).$$

Damit  $e_3$  nicht verschwindet, müssen die beiden ganzen Zahlen  $l, m$  von Null verschieden sein. Für **TE-Wellen** müssen an den Grenzflächen

$x = 0, A$  bzw.  $y = 0, B$  die Normalableitungen von  $b_3$  verschwinden. Wir erhalten

$$\text{TE : } b_3 = c_3 \cos \frac{\pi l x}{A} \cos \frac{\pi m y}{B}, \quad \kappa^2 = \pi^2 \left( \frac{l^2}{A^2} + \frac{m^2}{B^2} \right).$$

Ein nichttriviales Feld resultiert hier schon, wenn nur eine der ganzen Zahlen  $l, m$  ungleich Null ist. Der kleinste **aller** Eigenwerte gehört für  $A > B$  zur TE-Welle mit  $l = 1, m = 0$  (TE<sub>10</sub>). Die Grenzfrequenz ist daher

$$\omega_{min} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} \frac{\pi}{A}.$$

Für einen leeren Hohlleiter mit  $A = 15$  cm entspricht das einer Frequenz von 1000 MHz (Wellenlänge 30 cm). Füllt man den Hohlleiter mit einem Dielektrikum, so wird die Grenzfrequenz kleiner. Für andere Querschnitte sind die auftretenden Phänomene ähnlich. Qualitative Unterschiede treten für mehrfach zusammenhängende Hohlleiter (z.B. Koaxialkabel) auf. Wir können auf diese Phänomene nicht näher eingehen.

## 6. Ergänzungen zur Theorie

### 6.1 Relativistische Struktur der Elektrodynamik in Materie

Die relativistische Struktur der phänomenologischen Feldtheorie ist von praktischem Interesse, wenn man zu einer Elektrodynamik in Medien kommen will, die sich als Ganzes relativ zu einem Inertialsystem mit konstanter Geschwindigkeit bewegen. Aussagen über diese Struktur kann man erhalten, indem man die in 4.2 entwickelte Theorie als eine solche im Ruhesystem des Mediums auffaßt und überlegt, wie sich die relevanten Größen bei einem Lorentzboost verhalten könnten. Grundlegende Untersuchungen dieser Art wurden bereits von Minkowski durchgeführt. Die entsprechende formale Argumentation gibt Aufschluß darüber, wie eine relativistische Medienelektrodynamik aussehen **sollte**. Aus den (kovarianten) mikroskopischen Gleichungen kann



diese Theorie nur begründet werden, wenn das entsprechende Mittelungsverfahren kovariant ist. In 4.9 wurde kurz darauf hingewiesen, daß solche Verfahren für makroskopische Materie bisher nur im Rahmen beschränkter Modellvorstellungen formuliert wurden. Außerhalb der dadurch bedingten Grenzen läßt die Begründung zu wünschen übrig.

Hier wollen wir nur kurz diskutieren, wie die Theorie aussehen sollte, die man mit einem kovarianten Mittelungsverfahren  $\langle \rangle$  aus der mikroskopischen Theorie (Index  $(m)$ ) erhält. Wir betrachten dazu die Mittelwerte

$$F^{\mu\nu} = \langle F_{(m)}^{\mu\nu} \rangle = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad A^\mu = \langle A_{(m)}^\mu \rangle$$

und gehen von den gemittelten mikroskopischen Gleichungen

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \square A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = \frac{4\pi}{c} \langle j_{(m)}^\nu \rangle, \quad \partial_\mu \hat{F}^{\mu\nu} = 0$$

aus. Teilt man nun den gesamten Strom in einen Beitrag von frei beweglichen und einen solchen von gebundenen Ladungsträgern auf

$$j_{(m)}^\nu = j_{(f)}^\nu + j_{(geb)}^\nu,$$

so entspricht der Mittelwert des ersten Terms dem von außen zugänglichen Strom und der Mittelwert des zweiten Terms ist für die Polarisationsphänomene verantwortlich:

$$\langle j_{(f)}^\nu \rangle = j_a^\nu, \quad \langle j_{(geb)}^\nu \rangle = j_{(pol)}^\nu.$$

Verlangt man, daß die Kontinuitätsgleichung für jeden der beiden Anteile getrennt erfüllt sein soll (was bedeutet, daß sich die Zahl der frei beweglichen Ladungsträger nicht ändert), so kann das für den Polarisationsterm durch den Ansatz

$$j_{(pol)}^\nu = -c \partial_\mu P^{\mu\nu}, \quad P^{\mu\nu} = -P^{\nu\mu} \quad (1)$$

gesichert werden. Mit dem antisymmetrischen Tensor

$$H^{\mu\nu} = F^{\mu\nu} + 4\pi P^{\mu\nu} \quad (2)$$

können die gemittelten Gleichungen in der Form

$$\partial_\mu H^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j_a^\nu, \quad \partial_\mu \hat{F}^{\mu\nu} = 0 \quad (3)$$

geschrieben werden. Diese Gleichungen bilden eine relativistische Fassung von (4.12). Der Tensor  $(H^{\mu\nu})$  ist in gleicher Weise aus  $(\mathbf{D}, \mathbf{H})$  aufgebaut, wie  $(F^{\mu\nu})$  aus  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ . Die Komponenten  $P^{\mu\nu}$  entsprechen der Polarisierung bzw. Magnetisierung:

$$\mathbf{P} = (P^{k0}), \quad \mathbf{M} = (-\hat{P}^{k0}) = \frac{1}{2} \left( \sum_{l,m} \epsilon^{klm} P^{lm} \right). \quad (4)$$

Zu einer relativistischen Fassung für phänomenologische Ansätze (vgl. Abschnitt 4.3) kann man nur kommen, wenn man Annahmen über das relativistische Transformationsverhalten der betreffenden Materialparameter macht (diese Annahmen müßten streng genommen von der mikroskopischen Theorie her gerechtfertigt werden). Wir beschränken uns auf einen linearen Zusammenhang mit konstanten Suszeptibilitäten, also konstantem  $\epsilon$  und  $\mu$ . Das bedeutet, daß wir nur Materialien, Feldstärke- und Frequenzbereiche betrachten, für die diese Näherung (im Ruhesystem des Mediums) erlaubt ist. Die relativistische Verallgemeinerung von (4.13), (4.14) lautet dann

$$H^{\mu\nu} u_\nu = \epsilon F^{\mu\nu} u_\nu, \quad \mu \hat{H}^{\mu\nu} u_\nu = \hat{F}^{\mu\nu} u_\nu. \quad (5)$$

Dabei ist  $u^\mu = \gamma(1, \mathbf{v}/c)$  die Vierergeschwindigkeit (vgl. M 5.5) des Mediums und es wird **vorausgesetzt**, daß  $\epsilon$  und  $\mu$  lorentzinvariant sind. Für ein ruhendes Medium reduzieren sich diese Beziehungen auf (4.13), (4.14). Für ein bewegtes Medium erhält man nach Zerlegen in Komponenten parallel ( $\parallel$ ) bzw. senkrecht ( $\perp$ ) zu  $\mathbf{v}$  und Auflösen mit  $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$

$$D_{\parallel} = \epsilon \mathbf{E}_{\parallel} \quad (6a)$$

$$\mathbf{D}_{\perp} = \epsilon \mathbf{E}_{\perp} + \frac{\epsilon\mu - 1}{\mu(1 - \beta^2)} (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}_{\perp} + \beta^2 \mathbf{E}_{\perp}) \quad (6b)$$

$$H_{\parallel} = \frac{1}{\mu} B_{\parallel} \quad (7a)$$

$$\mathbf{H}_{\perp} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B}_{\perp} + \frac{\epsilon\mu - 1}{\mu(1 - \beta^2)} (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}_{\perp} - \beta^2 \mathbf{B}_{\perp}). \quad (7b)$$

Bei geschichteten Medien muß außerdem auf die Randbedingungen geachtet werden, die man aus den in Abschnitt 4.4 gefundenen durch Lorentztransformation erhalten kann. Eine Ausweitung von (5) auf kompliziertere Zusammenhänge zwischen  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$  und  $(\mathbf{D}, \mathbf{H})$  ist möglich. Mit einer ähnlichen formalen Argumentation wie oben könnte man auch

zu einer relativistischen Fassung des Ohmschen Gesetzes (4.21) kommen.

Formale Argumentation hat ihre Vorzüge, kann aber auch zu Fehlinterpretationen führen, wenn man die physikalische Bedeutung der phänomenologischen Theorie zu wenig beachtet. Ein Beispiel dafür bildet die Problematik der Energie-Impulsbilanz für materielle Medien und die viel untersuchte Frage, wie ein Energie-Impulstensor für das elektromagnetische Feld in Materie aussehen könnte. Ausgangspunkt für solche Überlegungen ist ein Analogon zur Bilanzgleichung (2.51). Eine geeignete Form ist

$$\frac{1}{4\pi} \left( \partial_\mu (H^{\mu\alpha} F_\alpha^\nu) + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} H_{\alpha\beta} \partial_\mu F^{\alpha\beta} \right) = \frac{1}{c} j_{a\mu} F^{\mu\nu} . \quad (8)$$

Durch Ausführen der Ableitungen und Verwendung der Feldgleichungen (3) kann man sich von der Richtigkeit von (8) überzeugen. Für die Zeitkomponente ( $\nu = 0$ ) erhält man

$$\frac{1}{4\pi} \left( \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + c \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \right) = -\mathbf{j}_a \cdot \mathbf{E} . \quad (9)$$

Die entsprechende Gleichung für die Raumkomponenten wollen wir nicht anschreiben, da es hier nur auf einen Überblick ankommt. Wie man aus (8) und (9) sieht, haben wir es hier – anders als in (2.51) – nicht mit lokalen Bilanzgleichungen zu tun: die linke Seite von (8) ist keine Viererdivergenz, der erste Term von (9) ist keine reine Zeitableitung. Das erscheint wenig verwunderlich, wenn man an die mikroskopischen Mechanismen denkt, die der phänomenologischen Theorie zugrundeliegen. Wir betrachten (9) als Beispiel für die Energiebilanz. Rechts steht die in den “äußeren” Stromkreisen in Joulesche Wärme dissipierte Energie. Energiedissipation kann es aber auch in Nichtleitern geben. So wird z.B. in einem dispersiven Dielektrikum elektromagnetische Strahlung absorbiert (vgl. Abschnitt 5.3) und daher Energie dissipiert. In einem magnetischen Medium mit Hysteresiseigenschaften kommt es ebenfalls zur Energiedissipation. Außer der Änderung der im Feld enthaltenen Energiedichte beschreiben die beiden ersten Terme in (9) auch diese Energiedissipation. Eine echte Bilanzgleichung resultiert hingegen für ein **lineares Medium** mit **konstantem**  $\epsilon, \mu$ . In diesem Fall gibt es keine Energiedissipation. Mit

$$H_{\alpha\beta} \partial_\mu F^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \partial_\mu (H_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta})$$

(das gilt auch für anisotrope Medien, wenn die Tensoren  $\epsilon$  und  $\mu$  konstant und symmetrisch sind) erhalten wir aus (8)

$$\partial_\mu T_{(Mi)}^{\mu\nu} = \frac{1}{c^2} j_{\alpha\mu} F^{\mu\nu} \quad (10)$$

mit dem auf Minkowski zurückgehenden Tensor

$$T_{(Mi)}^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi c} \left( H^{\mu\alpha} F_\alpha{}^\nu + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} H^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right). \quad (11)$$

Dieser Tensor ist spurfrei, aber nicht symmetrisch

$$T_{(Mi)}{}^\mu{}_\mu = 0 \quad T_{(Mi)}^{\mu\nu} \neq T_{(Mi)}^{\nu\mu}.$$

Die für die Energiebilanz relevanten Komponenten sind

$$cT_{(Mi)}^{00} = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}), \quad c^2(T_{(Mi)}^{0k}) = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}).$$

Die Unsymmetrie von  $T_{(Mi)}^{\alpha\beta}$  hat in der Literatur zu zahlreichen Untersuchungen Anlaß gegeben und es sind viele Alternativen zu (11) angegeben worden. Bei der Diskussion der Frage muß man die physikalische Bedeutung einer lokalen Energie-Impulsbilanz beachten. Grundsätzlich muß lediglich der gesamte Energie-Impulstensor eines abgeschlossenen Systems symmetrisch sein. Eine Aufteilung in einen Feld- und einen Materieanteil ist nur eindeutig, wenn man mit ersterem den Anteil des Vakuumfeldes ( $T_{(em)}^{\mu\nu}$ ) aus (2.49) meint: das ist der Teil des gesamten Tensors, der bei Abwesenheit **aller** Quellen übrigbleibt (also in Raumbereichen, in denen es keine Materie gibt). Versucht man, aus dem gesamten Energie-Impulstensor einen Anteil abzuspalten, der “zum Feld im Medium” gehört, so enthält dieser auch Beiträge “der Materie”. Seine Unsymmetrie bedeutet nur, daß das betrachtete Teilsystem nicht abgeschlossen ist, was niemanden wundern sollte.

In eine konsequente mikroskopische Betrachtung muß die **gesamte** Dynamik der Materie einbezogen werden, d.h. man muß spezielle Modelle für geladene Materie betrachten. Man kann auf diese Weise zu makroskopischen Gleichungen kommen, die echte Bilanzgleichungen sind und (für diese Materiemodelle) eine “natürliche” Aufteilung in einen Materie- und Feldanteil liefern, wobei der Feldanteil (für isotrope Medien) u.U. sogar symmetrisch ist (vgl. de Groot und Suttorp 1.c.). Der

so erhaltene Feldanteil unterscheidet sich aber völlig von (11). Die gemittelte mikroskopische Bilanzgleichung unterscheidet sich von (8). Das erscheint wenig verwunderlich, wenn man bedenkt, daß bereits  $T_{(em)}^{\mu\nu}$  in den Feldern quadratisch ist (das Quadrat des Mittelwertes einer Größe ist i.a. vom Mittelwert ihres Quadrates verschieden) und daß eine echte Bilanzgleichung auch eine Bilanz für die Abweichung vom Mittelwert enthalten muß. Alle Versuche, zu einer solchen Gleichung ohne detaillierte Dynamik der Materie zu kommen, erscheinen daher wenig sinnvoll. Wenn man über diese Dynamik keine Aussagen machen will, muß man versuchen, mit den im Anwendungsbereich der makroskopischen Theorie gültigen Formeln (8) bzw. (9) auszukommen.

## 6.2 Invarianztransformationen der Maxwellgleichungen

Die Elektrodynamik ist bei einer verhältnismäßig großen Klasse von Transformationen invariant. Diese Tatsache hat viele physikalische Konsequenzen und kann für die praktische Lösung von Problemen ausgenützt werden. Bevor wir auf diese Fragen eingehen, wollen wir allgemein untersuchen, was mit "Invarianz" gemeint ist.

Wir betrachten eine Transformation der Koordinaten, der Felder und der Quellen

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu, \quad F^{\mu\nu}(x) \rightarrow F'^{\mu\nu}(x'), \quad j^\mu(x) \rightarrow j'^\mu(x').$$

Die Transformation muß durch Angabe von Formeln vorgegeben werden, mit denen man die neuen Koordinaten und Feldvariablen durch die alten ausdrücken kann

$$x'^\mu = f^\mu(x), \quad j'^\mu(x') = J^\mu(j(x)), \quad F'^{\mu\nu}(x') = \phi^{\mu\nu}(F(x)).$$

Wir nehmen an, daß die Umkehrtransformation existiert. Die Feldgleichungen heißen invariant, wenn aus den Gleichungen für die neuen Größen

$$\partial'_\mu F'^{\mu\nu}(x') = \frac{4\pi}{c} j'^\nu(x'), \quad \partial'_\mu \hat{F}'^{\mu\nu}(x') = 0$$

diejenigen für die alten

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = \frac{4\pi}{c} j^\nu(x), \quad \partial_\mu \hat{F}^{\mu\nu}(x) = 0$$

folgen und umgekehrt. Invarianz bedeutet also auch hier Forminvarianz. Wie immer kann eine vorliegende Invarianz vom passiven Standpunkt aus interpretiert werden (Beschreibung desselben physikalischen Prozesses durch verschiedene Beobachter, die verschiedene Bezugssysteme verwenden) oder vom aktiven Standpunkt aus (Zuordnung, durch die man im gleichen Bezugssystem aus einem Prozeß einen anderen erhält, also aus bekannten Lösungen der Gleichungen neue findet), vgl. dazu M 1.11. Bei beiden Standpunkten muß man darauf achten, wie bei der Transformation Anfangs- bzw. Randbedingungen beeinflußt werden. Bei manchen Transformationen kann z.B. aus einer retardierten Lösung eine avancierte werden und umgekehrt. Sind die Anfangs- und/oder Randwerte auf Mannigfaltigkeiten vorgegeben, die ihre Struktur bei der Transformation stark verändern, so wird man für das dadurch definierte Problem aus der Invarianz wenig Nutzen ziehen können. Es ist aber auch denkbar, daß trotz einer vorliegenden Invarianz der Gleichungen in der Natur eine Situation vorliegt, die ein bestimmtes System (z.B. ein Bezugssystem) auszeichnet. Hat man ein Prinzip, aus dem man schließen kann, daß alle durch die Transformation verknüpften Systeme äquivalent sind, so wird man die Auszeichnung eines Systems auf Anfangsbedingungen zurückführen.

Aus der Form, in der die Theorie hier entwickelt wurde, ist klar, daß die **Lorentztransformationen**

$$\begin{aligned}
 x'^{\mu} &= \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}, \quad j'^{\mu}(x') = \Lambda^{\mu}_{\nu} j^{\nu}(x), \quad F'^{\mu\nu}(x') = \Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta} F^{\alpha\beta}(x) \\
 \Lambda^{\mu}_{\nu} &= \text{konst.}, \quad \Lambda^{\rho}_{\mu} \Lambda^{\mu}_{\sigma} = g^{\rho}_{\sigma}
 \end{aligned} \quad (12)$$

Invarianztransformationen sind (man kann das auch leicht nachrechnen). Der Unterschied der Standpunkte wird aus einem einfachen Beispiel klar. Wir betrachten eine ruhende Punktladung im Ursprung:

$$\rho(x) = q\delta(\mathbf{x}), \quad \mathbf{j}(x) = 0, \quad \Phi(x) = \frac{q}{|\mathbf{x}|}, \quad \mathbf{A}(x) = 0.$$

Durch einen Boost in  $x^1$ -Richtung

$$x'^0 = \gamma(x^0 - \beta x^1), \quad x'^1 = \gamma(x^1 - \beta x^0), \quad x'^2 = x^2, \quad x'^3 = x^3$$

entsteht

$$\begin{aligned}
 \rho'(x') &= \gamma\rho(x), \quad \mathbf{j}'(x') = (-\beta\gamma c\rho(x), 0, 0) \\
 \Phi'(x)(x') &= \gamma\Phi(x), \quad \mathbf{A}'(x') = (-\beta\gamma\Phi(x), 0, 0).
 \end{aligned}$$

Vom passiven Standpunkt aus haben wir das als **dieselbe** Situation (ruhende Punktladung) aus der Sicht eines entlang der  $x^1$ -Achse fliegenden **Beobachters** zu verstehen. Vom aktiven Standpunkt aus erhält man aus der ursprünglichen Situation (ruhende Punktladung) eine **neue** (bewegte Punktladung). Durch Einsetzen der Umkehrtransformation

$$x^0 = \gamma(x'^0 + \beta x'^1), \quad x^1 = \gamma(x'^1 + \beta x'^0), \quad x^2 = x'^2, \quad x^3 = x'^3$$

erhält man die zugehörige **neue** Lösung explizit

$$\rho'(x') = \gamma q \delta(\gamma(x'^1 + \beta x'^0)) \delta(x'^2) \delta(x'^3)$$

$$\Phi'(x') = \frac{q}{\sqrt{(x'^1 + \beta x'^0)^2 + (1 - \beta^2)(x'^2 + x'^3)^2}},$$

entsprechend für  $\mathbf{j}'(x')$ ,  $\mathbf{A}'(x')$ .

Da die Theorie in Termen von Vierervektoren bzw. Tensoren formuliert wurde, ist sie auch invariant gegen raumzeitliche **Translationen**.

$$\begin{aligned} x'^{\mu} &= x^{\mu} + a^{\mu} \\ j'^{\mu}(x') &= j^{\mu}(x), \quad \text{analog für } F \text{ und } A. \end{aligned} \quad (13)$$

Die Transformation bedeutet, daß man den Ursprung des verwendeten Koordinatensystems und den Anfangspunkt der Zeitzählung beliebig wählen kann. Davon wurde an vielen Stellen bereits Gebrauch gemacht.

Die Translationen und Lorentztransformationen bilden eine kontinuierliche Gruppe (Poincarégruppe). Jede ihrer Transformationen ist durch 10 Parameter charakterisiert: 4 für die Translationen ( $a^{\mu}$ ) und 6 für die Lorentztransformationen ( $\Lambda^{\mu}_{\nu}$ , mit  $\Lambda^{\rho}_{\mu} \Lambda^{\mu}_{\sigma} = g^{\rho}_{\sigma}$ ), davon 3 für räumliche Drehungen und 3 für spezielle Lorentztransformationen (boosts).

Nun betrachten wir einige einfache diskrete Transformationen. Die Invarianz der Maxwellgleichungen ist in allen Fällen sehr leicht nachzurechnen. Das einfachste Beispiel ist die **Ladungsumkehr**  $e \rightarrow -e$  (d.h. die Umkehr des Vorzeichens **aller** Ladungen). Sie entspricht einer Vorzeichenänderung von  $j^{\mu}$ : da sich das Vorzeichen von  $\rho$  umkehrt, ändert sich auch das Vorzeichen von  $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ . Diese Änderung kann durch eine Umkehr des Vorzeichens der Felder kompensiert werden. Das bedeutet Invarianz bei

$$x'^{\mu} = x^{\mu}, j'^{\mu}(x') = -j^{\mu}(x), A'^{\mu}(x') = -A^{\mu}(x), F'^{\mu\nu}(x') = -F^{\mu\nu}(x). \quad (14)$$

Ein weiteres Beispiel bildet die **Raumspiegelung**  $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$  (Paritätstransformation, vgl. M A1). Dabei ändern sich die Größen nicht, die sich bei Drehungen als Skalar bzw. Axialvektor verhalten (z.B.  $\rho, \Phi, \mathbf{B}$ ). Polare Vektoren (z.B.  $\mathbf{A}, \mathbf{E}$ ) ändern das Vorzeichen. Die Maxwellgleichungen sind invariant bei

$$\begin{aligned} x'^{\mu} &= (x^0, -\mathbf{x}), j'^{\mu}(x') = (c\rho(x), -\mathbf{j}(x)) \\ A'^{\mu}(x') &= (\Phi(x), -\mathbf{A}(x)), \mathbf{E}'(x') = -\mathbf{E}(x), \mathbf{B}'(x') = \mathbf{B}(x). \end{aligned} \quad (15)$$

Als letztes Beispiel betrachten wir die **Zeitspiegelung**  $t \rightarrow -t$ . Natürlich kann man in der wirklichen Welt den Zeitablauf nicht umkehren. Physikalisch bedeutet die Transformation eine Umkehr aller Bewegungsabläufe, die man z.B. erhält, indem man einen Vorgang filmt und den Film verkehrt ablaufen läßt. Dabei kehren sich alle Geschwindigkeiten um (und damit auch  $\mathbf{j}$ ). Die Maxwellgleichungen sind invariant bei

$$\begin{aligned} x'^{\mu} &= (-x^0, \mathbf{x}), j'^{\mu}(x') = (c\rho(x), -\mathbf{j}(x)) \\ A'^{\mu}(x') &= (\Phi(x), -\mathbf{A}(x)), \mathbf{E}'(x') = \mathbf{E}(x), \mathbf{B}'(x') = -\mathbf{B}(x). \end{aligned} \quad (16)$$

Außer bei Lorentztransformationen ist die Maxwelltheorie noch bei weiteren kontinuierlichen Transformationen invariant. Diese Tatsache ist seit langer Zeit bekannt (E. Cunningham, H. Bateman 1910), aber man hat noch nicht sehr viel Nutzen daraus gezogen. Eine dieser Transformationen ist die (raumzeitliche) **Skalentransformation** (Dilatation)

$$x'^{\mu} = \tau x^{\mu} \quad (17a)$$

mit einem reellen Parameter  $\tau$ . Mit

$$j'^{\mu}(x') = \frac{1}{\tau^3} j^{\mu}(x), A'^{\mu}(x') = \frac{1}{\tau} A^{\mu}(x), F'^{\mu\nu}(x') = \frac{1}{\tau^2} F^{\mu\nu}(x) \quad (17b)$$

sind die Feldgleichungen invariant. Als letztes Beispiel einer Invarianztransformation betrachten wir spezielle **konforme Transformationen** in Raum und Zeit, die durch einen konstanten Vierervektor  $b^{\mu}$  charakterisiert sind (sog. konforme Beschleunigungen). Die Transformation bzw. ihre Umkehr ist

$$x'^{\mu} = \frac{x^2}{\sigma(x, b)} \left( \frac{x^{\mu}}{x^2} + b^{\mu} \right), \quad x^{\mu} = \frac{x'^2}{\sigma(x', -b)} \left( \frac{x'^{\mu}}{x'^2} - b^{\mu} \right). \quad (18a)$$



Dabei bedeutet  $x^2 = x_\alpha x^\alpha$  und  $\sigma$  die Form

$$\sigma(x, b) = 1 + 2b \cdot x + b^2 x^2 = b^2 \left( x^\alpha + \frac{b^\alpha}{b^2} \right) \left( x_\alpha + \frac{b_\alpha}{b^2} \right) .$$

Die Maxwellgleichungen sind invariant, wenn sich Quellen bzw. Felder wie folgt verhalten:

$$\begin{aligned} j'^\mu(x') &= \sigma^2(x, b) C^{\mu\nu}(x, b) j_\nu(x), \quad A'^\mu(x') = C^{\alpha\mu}(x, b) A_\alpha(x) \\ F'^{\mu\nu}(x') &= C^{\alpha\mu}(x, b) C^{\beta\nu}(x, b) F_{\alpha\beta}(x) . \end{aligned} \quad (18b)$$

Dabei bedeutet  $C$  die Form

$$\begin{aligned} C^{\alpha\beta}(x, b) &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta} = \sigma^2(x, b) \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\alpha} = \\ &= \sigma(x, b) (g^{\alpha\beta} + 2x^\alpha x^\beta) - 2x^2 b^2 \left( x^\alpha + \frac{b^\alpha}{b^2} \right) \left( \frac{x^\beta}{x^2} + \frac{b^\beta}{b^2} \right) . \end{aligned}$$

Einige nützliche Formeln sind

$$\begin{aligned} C^{\mu\alpha} C^\nu_\alpha &= \sigma^2 g^{\mu\nu} \\ x'^2 &= \frac{1}{\sigma(x, b)} x^2, \quad \frac{x'^\mu}{x'^2} = \frac{x^\mu}{x^2} + b^\mu \\ \partial'^\mu &= C^{\nu\mu}(x, b) \partial_\nu \\ \square' &= \sigma^2 \square - 4\sigma b^2 \left( x^\alpha + \frac{b^\alpha}{b^2} \right) \partial_\alpha \\ \partial'_\mu (C^{\alpha\mu} C^{\beta\nu} - C^{\beta\mu} C^{\alpha\nu}) &= 0 . \end{aligned}$$

Die konformen Transformationen entsprechen einer Abfolge von drei einfacheren Transformationen. Bezeichnen wir die Transformation  $x^\mu \rightarrow x'^\mu$  mit (18a) durch  $\mathcal{K}(b)$ , so ist

$$\mathcal{K}(b) = \mathcal{I} \cdot \mathcal{T}(b) \cdot \mathcal{I}$$

wobei  $\mathcal{I}$  die Inversion

$$\mathcal{I} : x^\mu \rightarrow x'^\mu = -\frac{x^\mu}{x^2}$$

und  $\mathcal{T}(b)$  die Translation (13) um  $b^\mu$  bedeutet.  $\mathcal{I}$  und  $\mathcal{T}$  sind nicht vertauschbar.

Man beachte, daß diese konformen Transformationen für beliebiges  $b$  die Zeit enthalten (es kommt  $x_\lambda x^\lambda$  vor) und daher eine statische Situation in eine nichtstatische verwandeln. Wenn man genauer verfolgt, welcher Bewegung die transformierte Situation entspricht, so sieht man, daß es sich i.a. um eine beschleunigte Bewegung handelt: Ein Punkt, der sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, wird in einen beschleunigt bewegten Punkt übergeführt, wobei aber die Lichtgeschwindigkeit nicht überschritten wird. Das sieht man, indem man die Bewegungsgleichung  $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{v}t$  in den neuen Koordinaten  $\boldsymbol{x}'$  anschreibt und nach  $\boldsymbol{x}'$  auflöst. Dabei muß man eine quadratische Gleichung lösen und erhält bei gegebenem  $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}$  nicht mehr für jedes  $b^\mu$  eine reelle Lösung. "Ungünstige" Parameter  $b^\mu$  entsprechen also keiner physikalischen Situation im neuen System. Für gewisse Parameterbereiche kann es zu einer Umkehr des Zeitablaufes kommen bzw. kann ein raumartiges Gebiet in ein zeitartiges übergeführt werden (der letztere Sachverhalt stört in der Elektrodynamik nicht, weil die Lösungen ihren Träger am Lichtkegel haben). Auf der Fläche  $\sigma = 0$  wird die Transformation singulär.

Bei allen formalen Untersuchungen von Invarianztransformationen kommt man um die Frage nicht herum, welche physikalische Bedeutung ihnen wirklich zukommt. Dabei muß man darauf achten, daß die Maxwellgleichungen allein keine vollständige Beschreibung der Wirklichkeit liefern. Zu einer solchen gehört eine Dynamik der Materie, die u.a. Aufschluß über die Bewegung und Anordnung der Ladungsträger gibt. Wie bereits erwähnt wurde, handelt es sich dabei stets um ein echtes Wechselwirkungsproblem, d.h. in der Dynamik der Materie werden die Feldstärken ebenso vorkommen, wie die dynamischen Variablen der Materie in  $j^\mu$ . Eine Invarianz kann in der Natur nur dann vorliegen, wenn die **gesamte** Dynamik invariant ist. Für die Lorentztransformationen wird man das wegen der grundlegenden Bedeutung des Relativitätsprinzips wohl annehmen müssen. Bei den Skalentransformationen und konformen Beschleunigungen kann die Invarianz bestenfalls näherungsweise erfüllt sein, denn es gibt in der Natur nichtelektromagnetische "Maßstäbe" (z.B. Massen von Elementarteilchen), die bei Skalentransformationen so geändert werden, daß die Dynamik der Materie nicht skaleninvariant ist.

Immerhin ist die **freie** Maxwelltheorie bei der vollen 15-parametrischen konformen Gruppe invariant, die aus den Translationen, Lorentztransformationen, Skalentransformationen und konformen Beschleunigungen besteht. Für die betrachtete Theorie mit fest vorgegebenen Quellen

stellt die Invarianz eine formale Eigenschaft dar, deren Nutzen davon abhängt, ob die transformierten Quellen einer physikalischen Situation entsprechen oder nicht.

### 6.3 Elektrodynamik als Lagrangesche Feldtheorie

Der Erfolg des Lagrangeschen Zugangs zur Mechanik wirft die Frage auf, ob auch die Feldgleichungen der Elektrodynamik als Eulersche Gleichungen eines Hamiltonschen Prinzips aufgefaßt werden können. Ein solcher Zugang ist für grundlegende Untersuchungen geeignet und wird vor allem in der Quantenfeldtheorie verwendet. Hier soll er etwas näher untersucht werden, ohne über den Rahmen der klassischen Physik hinauszugehen. Ausgangspunkt ist ein bestimmter Ausdruck für die Wirkung  $S$  als Funktional der dynamischen Variablen. Die Feldgleichungen sollen dann aus dem Variationsprinzip

$$\delta S = 0$$

folgen. In der Lagrangeschen Mechanik treten die generalisierten Koordinaten  $q_{(\alpha)}(t)$  und ihre Zeitableitungen  $\dot{q}_{(\alpha)}(t)$  als dynamische Variable auf. Die Wirkung ist das Zeitintegral der Lagrangefunktion, die von den dynamischen Variablen abhängt:

$$S = \int L(q, \dot{q}, t) dt .$$

In einer Feldtheorie sollten als dynamische Variable Feldgrößen  $q_{(\alpha)}$  auftreten, die Funktionen von Raum und Zeit sind

$$q_{(\alpha)} = q_{(\alpha)}(\mathbf{x}, t)$$

(in der Elektrodynamik wäre die elektrische Feldstärke  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$  ein Beispiel). Die Wirkung sollte dann das Raumzeitintegral einer Lagrange-dichte  $L$  sein, die von  $q_{(\alpha)}$  und seinen Ableitungen  $\partial_{\mu} q_{(\alpha)}$  abhängt:

$$S = \int L(q, \partial q, x) d^4 x .$$

Bevor wir darauf eingehen, welche Feldgrößen wir als dynamische Variable wählen, soll eine "Stenographie" eingeführt werden, die für Feldtheorien (in beliebig vielen Dimensionen) zweckmäßig ist. Durch das

angeschriebene Integral im oben angegebenen Ausdruck wird einer bestimmten Anzahl von Funktionen  $q_{(\alpha)}$  (und ihren Ableitungen) eine Zahl  $S$  zugeordnet. Eine solche Zuordnung definiert ein **Funktional**. Wir drücken die funktionale Abhängigkeit durch eine eckige Klammer aus

$$S = S[q] = S[q_{(\alpha)}(x)] .$$

In der letzten Form ist  $(x) = (ct, \mathbf{x})$  nur als “stummes” Argument aufzufassen:  $S$  ist eine Zahl und keine Funktion von  $x$  ( $x$  ist eine Variable, über die integriert wird). Gleiches gilt für den Index  $(\alpha)$ , der in  $L$  i.a. als Summationsindex auftritt. Daß im Funktional auch Ableitungen von  $q$  vorkommen können, wird in der Schreibweise als “selbstverständlich” angenommen und daher nicht extra angeführt. Für den folgenden Kalkül ist dabei irrelevant, ob nur die ersten oder auch höhere Ableitungen auftreten. Wir definieren nun als **Funktionalableitung** eines Funktionals  $F[q]$  den Ausdruck

$$\frac{\delta F[q]}{\delta q_{(\alpha)}(x)} = \lim(\epsilon \rightarrow 0) \frac{1}{\epsilon} (F[q_{(\alpha)}(x') + \epsilon \delta_{\alpha\beta} \delta(x' - x)] - F[q_{(\beta)}(x')]) .$$

Diese Funktionalableitung ist eine Funktion von  $x$  ( $x$  ist kein stummes Argument), analog ist  $\alpha$  kein stummer Index. Für diese Ableitung gelten die üblichen Regeln der Differentialrechnung (Summenregel, Leibnizsche Produktregel, Formel für Differentiation bei impliziter Abhängigkeit). Das einfachste Beispiel ist

$$F[q] = \int q(x) f(x) d^4 x , \quad \frac{\delta F[q]}{\delta q(x)} = f(x) .$$

Für die oben für das Wirkungsintegral angegebene Form erhält man hingegen

$$\frac{\delta S[q]}{\delta q_{(\alpha)}(x)} = \frac{\partial L}{\partial q_{(\alpha)}(x)} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu q_{(\alpha)}(x))} + \dots$$

Die Punkte stehen dabei für Terme, die höhere Ableitungen enthalten. Hängt  $L$  nur von  $q$  und seinen ersten Ableitungen ab, so kommt man mit den angeschriebenen Termen aus.

Nimmt man als dynamische Variable die generalisierten Koordinaten  $q_\alpha(t)$ , so entspricht das der in den Lagrangeschen Gleichungen auftretenden Kombination (vgl. M 4.3). Aus dem Wirkungsprinzip

$$\delta S[q] = 0$$

erhält man mit

$$\delta S = \sum_{\alpha} \int \frac{\delta S}{\delta q_{\alpha}(t)} \delta q_{\alpha}(t) dt$$

bei unabhängiger Variation  $\delta q_{\alpha}$  die Lagrangeschen Gleichungen.

Die Verallgemeinerung auf Felder ist leicht durchzuführen. Um Schreibarbeit zu sparen, führen wir durch die Vorschrift

$$A \cdot B := \sum_{\alpha, \beta, \dots} \int A_{\alpha\beta\dots}(x) B^{\alpha\beta\dots}(x) d^4x$$

ein verallgemeinertes Skalarprodukt ein. Wir betrachten eine Theorie der Wechselwirkung von geladener Materie mit elektromagnetischen Feldern. Die Konsequenzen des Wirkungsprinzips

$$\delta S = 0 \quad (19)$$

müssen daher sowohl die Maxwellschen Gleichungen als auch die Bewegungsgleichungen der Materie umfassen. Als dynamische Variable sollten daher sowohl die Feldgrößen  $A = A^{\mu}(x), F = F^{\mu\nu}(x)$  als auch Materievariablen  $\xi$  auftreten, die wir nicht näher spezifizieren, da sie davon abhängen, welches Materiemodell man betrachtet. Für geladene Teilchen könnte man z.B. deren Koordinaten  $\mathbf{x}_{(n)}(t)$  nehmen; es gibt aber auch feldtheoretische Materiemodelle, bei denen die Variablen kontinuierliche Raumzeitfunktionen sind. Die Wirkung ist ein Funktional dieser Variablen

$$S = \int_G L d^4x = S[A, F, \xi] . \quad (20)$$

Ihre Änderung ist

$$\delta S = \frac{\delta S}{\delta A} \cdot \delta A + \frac{\delta S}{\delta F} \cdot \delta F + \frac{\delta S}{\delta \xi} \cdot \delta \xi . \quad (21)$$

Werden die Variablen im betrachteten Gebiet  $G$  unabhängig voneinander so variiert, daß die Änderungen auf dem Rand von  $G$  verschwinden, so folgen aus (19) und (20) die Gleichungen

$$\frac{\delta S}{\delta A_{\mu}(x)} = 0 , \quad \frac{\delta S}{\delta F_{\mu\nu}(x)} = 0 , \quad \frac{\delta S}{\delta \xi} = 0 . \quad (22)$$

In diesen Gleichungen müssen die elektromagnetischen Feldgleichungen und die Bewegungsgleichungen der Materie enthalten sein.

Nun suchen wir nach geeigneten Ansätzen für  $S$ . Sollen die Maxwell'schen Gleichungen resultieren, so muß angenommen werden, daß in der entsprechenden Dichte nur  $A, \partial A$  und  $F$  auftreten. Kämen höhere Ableitungen vor, so könnte man sie als weitere dynamische Variable einführen: der Variationsformalismus läßt sich stets so formulieren, daß man mit den angeschriebenen Termen in der Variationsableitung auskommt. Dann könnte aber das elektromagnetische Feld in einem Raumzeitpunkt nicht mehr durch  $F$  allein beschrieben werden und man erhielte eine andere als die Maxwell'sche Theorie (Feldgleichungen mit höheren Ableitungen!). Dieser Schluß ist analog zu einem entsprechenden in der Mechanik: da die Bewegung eines Teilchensystems in jedem Zeitpunkt durch Angabe der Koordinaten und Geschwindigkeiten bestimmt ist, dürfen in  $L$  nur diese Größen auftreten. Da die elektromagnetischen Felder lokale (d.h. auf einen Raumzeitpunkt bezogene) Größen sind, müssen sich alle Terme in  $S$ , die  $A$  bzw.  $F$  enthalten, als Integrale von entsprechenden Dichten über ein Raumzeitgebiet schreiben lassen. Wir spalten von der gesamten Wirkung einen Term ab, der sich auf das elektromagnetische Feld bezieht

$$S = S_{(em)}[A, F] + S_{(mat)}[A, \xi] , \quad (23)$$

wobei

$$S_{(em)} = \frac{1}{c} \int L_{(em)} d^4x \quad (24)$$

ist. Eine solche Aufspaltung sollte möglich sein: die Maxwelltheorie im Vakuum (ohne Quellen) ist eine sinnvolle Theorie, die durch  $S_{(em)}$  allein beschreibbar sein sollte. Für die Lagrangedichte  $L_{(em)}$  des elektromagnetischen Feldes (Dimension Energie/Volumen) setzen wir folgenden Ausdruck an:

$$L_{em} = -\frac{1}{8\pi} \left[ (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] . \quad (25)$$

Dann wird

$$4\pi c \frac{\delta S_{(em)}}{\delta A_\beta} = \partial_\alpha F^{\alpha\beta} , \quad 8\pi c \frac{\delta S_{(em)}}{\delta F_{\alpha\beta}} = F^{\alpha\beta} - (\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha) .$$

Wenn wir (wie in (23) angedeutet wurde) annehmen, daß  $S_{(mat)}$  nicht von  $F$  abhängt, so folgt aus der zweiten Gleichung (22) der Zusammenhang zwischen Potentialen und Feldstärken

$$F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha .$$

Daraus folgt, daß  $F$  eichinvariant ist und die homogenen Maxwellgleichungen

$$\partial_\alpha \hat{F}^{\alpha\beta} = 0$$

erfüllt. Aus der ersten Gleichung (22) erhält man die inhomogenen Maxwellgleichungen

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} j^\beta ,$$

wobei die Stromdichte durch

$$j^\beta(x) = -c^2 \frac{\delta S_{(mat)}}{\delta A_\beta(x)} \quad (26)$$

definiert ist. Da  $S_{(mat)}$  auch die Materievariablen enthält, kann man über die Quellen erst etwas aussagen, wenn man die Dynamik der Materie durch Angabe von  $S_{(mat)}$  festlegt. Die Materievariablen werden dann in den inhomogenen Maxwellgleichungen ebenso vorkommen, wie die Feldgrößen in den Materiegleichungen (dritte Gleichung (22)), d.h. man muß das gekoppelte System von Materie- und Feldgleichungen lösen, wie das einer Theorie mit Wechselwirkung entspricht. Es gibt aber eine Einschränkung, der alle möglichen Ansätze für  $S_{(mat)}$  genügen müssen. Aus den inhomogenen Maxwellgleichungen folgt als Konsequenz der Antisymmetrie von  $F$  die Kontinuitätsgleichung

$$\partial_\beta j^\beta = 0 ,$$

die wegen (26) eine Einschränkung für  $S_{(mat)}$  darstellt. Wir zeigen, daß diese Einschränkung aus der Eichinvarianz von  $S_{(mat)}$  folgt und daher als deren Konsequenz aufzufassen ist. Dazu betrachten wir eine Eichtransformation

$$A_\alpha \rightarrow A_\alpha + \delta A_\alpha \text{ mit } \delta A_\alpha(x) = \partial_\mu \Lambda(x)$$

und nehmen an, daß  $\Lambda$  am Rand von  $G$  verschwindet. Wir berechnen

$$\begin{aligned}\delta_A S_{(mat)} &= \frac{\delta S_{(mat)}}{\delta A} \cdot \delta A = -\frac{1}{c^2} \int_G j^\alpha(x) \partial_\alpha \Lambda(x) d^4x = \\ &= \frac{1}{c^2} \int_G \Lambda(x) \partial_\alpha j^\alpha(x) d^4x .\end{aligned}$$

Die letzte Form folgt durch partielle Integration. Die Eichinvarianz von  $S_{(mat)}$  bedeutet  $\delta S_{(mat)} = 0$  für beliebiges  $\Lambda$  und daraus folgt die Kontinuitätsgleichung für  $j$ .

Im Rahmen einer Lagrangetheorie folgen aus der Invarianz der Wirkung bei kontinuierlichen Transformationen der Koordinaten Kontinuitätsgleichungen für bestimmte lokale Dichten. Man könnte zu ihrer Herleitung die in Abschnitt 6.1 untersuchten Koordinatentransformationen (Translationen, Lorentztransformationen, Dilatationen, konforme Transformationen) einzeln der Reihe nach untersuchen. Auf diese Weise wurden die Erhaltungssätze der Elektrodynamik von E. Bessel-Hagen 1921 aufgestellt. Wir betrachten hier einen anderen Zugang, der eleganter ist, aber eine Verallgemeinerung erfordert. In Analogie zur Mechanik wird man erwarten, daß die mit der Invarianz gegen Koordinatentranslationen zusammenhängenden Erhaltungsgrößen die Energie und der Impuls sind. In einer lokalen Theorie sind diese Größen Integrale von Dichten, die Komponenten des Energie-Impulstensors  $T^{\mu\nu}$  sind (vgl. Abschnitt 2.9). In der **allgemeinen** Relativitätstheorie ist der Energie-Impulstensor der Quellterm in den Einsteinschen Feldgleichungen des Gravitationsfeldes, für das die Metrik  $g^{\mu\nu}$  die Rolle des "Potentials" spielt. In vollkommener Analogie zu (26) kann man daher  $T^{\mu\nu}$  als Reaktion eines Teils der Wirkung auf Änderungen der Metrik  $g^{\mu\nu} \rightarrow g^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu}$  definieren. Dabei ist jener Teil der gesamten Wirkung zu betrachten, der sich nicht auf das **reine** Gravitationsfeld bezieht und das ist unser gesamter Ausdruck (23). Der so resultierende Energie-Impulstensor ist automatisch symmetrisch und erfüllt eine Kontinuitätsgleichung, die aus der Invarianz der Wirkung gegen allgemeine Koordinatentransformationen folgt (auch hier ist die Schlußweise analog zu der eben vorgeführten für die Stromdichte!). Um diese Definition von  $T^{\mu\nu}$  für eine Berechnung ausnutzen zu können, muß man allerdings vorher die Wirkung so umschreiben, daß sie die entsprechende Invarianzeigenschaft hat. Das ist aber recht einfach. Ein "Kochrezept" dafür ist das folgende:

- (1) Man schreibt alle Skalarprodukte so, daß nur eine Sorte von Komponenten der Variablen vorkommt, die man als dynamische Va-



riablen auffaßt (z.B. nur die  $F_{\alpha\beta}$  mit unteren Indizes). Die anderen Komponenten werden mit Hilfe der Metrik durch diese Sorte ausgedrückt, wodurch die Metrik explizit auftritt (z.B.  $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = F_{\mu\nu}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}$ ). Für welche Sorte von Komponenten man sich als dynamische Variable entscheidet, ist egal, nur muß man die Entscheidung für alle dynamischen Variablen in konsistenter Weise treffen.

(2) Man ersetzt alle vierdimensionalen Volumelemente gemäß

$$d^4x \rightarrow d^4x\sqrt{-g} \text{ mit } g := \text{Det}(g^{\mu\nu}) .$$

(3) Man ersetzt alle partiellen Ableitungen  $\partial_\mu$  durch kovariante Ableitungen  $D_\mu$  im Sinn der allgemeinen Relativitätstheorie.

Jeder lorentzinvariante Ausdruck wird dadurch automatisch invariant gegen allgemeine Koordinatentransformationen, wenn  $g^{\alpha\beta}$  als Riemannmetrik verstanden wird. Die Definition von  $T_{\mu\nu}$  als Reaktion auf infinitesimale Änderungen der Metrik lautet dann

$$\delta_g S =: \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} T_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} =: -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} T^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} .$$

Damit wird

$$T_{\alpha\beta} = 2 \frac{\delta S}{\delta g^{\alpha\beta}} \text{ bzw. } T^{\alpha\beta} = -2 \frac{\delta S}{\delta g_{\alpha\beta}} . \quad (28)$$

Der Tensor erfüllt die Kontinuitätsgleichung

$$D^\mu T_{\mu\nu} = 0 . \quad (29)$$

Ist  $S$  in Termen von  $g^{\alpha\beta}$  gegeben, so kann man mit Hilfe des vorne angegebenen Variationskalküls den Energieimpulstensor aus (28) ausrechnen. Dabei darf man bei der Bildung der Variationsableitung die Ableitung von  $\sqrt{-g}$  nicht vergessen

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} .$$

Für einen typischen Ausdruck

$$f[g] = L[g^{\alpha\beta}] \sqrt{-g} d^4x$$

erhält man z.B.

$$\delta f = (\delta L \sqrt{-g} + L \delta \sqrt{-g}) d^4 x = \left( \frac{\delta L}{\delta g^{\mu\nu}} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} L \right) \delta g^{\mu\nu} d^4 x \sqrt{-g} .$$

Die kovariante Ableitung  $D^\mu$  enthält über die Christoffelsymbole Ableitungen der Metrik. Für die hier betrachtete Lagrangefunktion (25) bedeutet das keine Komplikation, weil nur eine antisymmetrische Kombination der ersten Ableitungen eines Vektorfeldes eingeht. In dieser Kombination ist die kovariante Ableitung mit der partiellen Ableitung identisch

$$D_\mu A_\nu - D_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu ,$$

sodaß wir die Vorschrift (3) unseres “Kochrezeptes” nicht anwenden müssen (für ein skalares Feld  $\phi$  würde das wegen  $D_\mu \phi = \partial_\mu \phi$  ebenfalls gelten).

Nach Berechnung von  $T_{\mu\nu}$  aus (28) kann man wieder zur Minkowski-Metrik zurückkehren, d.h. man kann im gefundenen Ausdruck für  $T_{\mu\nu}$  die Ersetzungen (1) - (3) in umgekehrter Reihenfolge vornehmen. Aus (29) entsteht so die Kontinuitätsgleichung  $\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0$  (vgl. Abschnitt 2.9). Sie ist natürlich ebenso wie die Symmetrie nur dann garantiert, wenn bei der Herleitung von  $T$  die **gesamte** Wirkung betrachtet wurde, d.h. der zu nicht abgeschlossenen Teilsystemen gehörige Anteil von  $T$  kann unsymmetrisch sein und wird allein keine Kontinuitätsgleichung erfüllen.

Führt man das “Kochrezept” für den elektromagnetischen Teil (24) der Wirkung durch, so stellt man fest, daß in der Lagrangefunktion (25) nach der Umschreibung (1) keine Ableitungen von  $g^{\alpha\beta}$  auftreten, sodaß  $\delta L_{(em)}/\delta g^{\mu\nu}$  durch  $\partial L_{(em)}/\partial g^{\mu\nu}$  ersetzt werden darf. Man erhält nahezu ohne weitere Rechnung die in (2.49) angegebene Form für  $T_{(em)}^{\mu\nu}$ .

Nun befassen wir uns kurz mit den Erhaltungsgrößen, die zu den in Abschnitt 1 angeführten kontinuierlichen Koordinatentransformationen gehören. Wir verwenden dazu den in Abschnitt 2.9 formulierten “Mechanismus”, der zu einer Erhaltungsgröße führt, wenn eine lokale Dichte einer Kontinuitätsgleichung genügt. Um die Dichten für die einzelnen Transformationen zu finden, gehen wir von (27) aus. Allgemein ändert sich die Metrik bei einer Koordinatentransformation gemäß

$$g'^{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\rho} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\sigma} g^{\rho\sigma} .$$

Für eine infinitesimale Änderung

$$x'^{\alpha} = x^{\alpha} + \delta x^{\alpha}$$

erhält man

$$\delta g^{\alpha\beta} = \partial^{\beta} \delta x^{\alpha} + \partial^{\alpha} \delta x^{\beta} .$$

Wegen der Symmetrie von  $T_{\alpha\beta}$  erhält man aus (27)

$$\delta_g S = \int d^4x \sqrt{-g} T_{\alpha\beta} \partial^{\beta} \delta x^{\alpha} .$$

Im Minkowskiraum ist  $\sqrt{-g} = 1$  und  $\partial^{\beta} T_{\alpha\beta} = 0$ . Daher kann die Reaktion der Wirkung auf infinitesimale Koordinatentransformationen in der Form

$$\delta S = \int d^4x \partial^{\beta} (T_{\alpha\beta} \delta x^{\alpha})$$

geschrieben werden. Ist die Wirkung (für ein beliebiges Integrationsgebiet) invariant ( $\delta S = 0$ ), so folgt die Kontinuitätsgleichung

$$\partial^{\beta} (T_{\alpha\beta} \delta x^{\alpha}) = 0 . \quad (30)$$

Um die einzelnen lokalen Dichten zu bestimmen, muß man lediglich die entsprechenden Koordinatenänderungen  $\delta x^{\alpha}$  bei infinitesimalen Transformationen ausrechnen. Für Translationen ist

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \delta a^{\mu} , \quad \delta x^{\mu} = \delta a^{\mu} = \text{konst.}$$

$$\partial^{\beta} (T_{\alpha\beta} \delta a^{\alpha}) = \delta a^{\alpha} \partial^{\beta} T_{\alpha\beta} .$$

Da  $\delta a^{\alpha}$  beliebig ist, folgt aus der Translationsinvarianz (nocheinmal) die Kontinuitätsgleichung für  $T_{\alpha\beta}$ . Bei infinitesimalen Lorentztransformationen

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = g^{\mu}_{\nu} + \delta \Lambda^{\mu}_{\nu} , \quad \delta \Lambda^{\mu}_{\nu} = \text{konst.}$$

muß man beachten, daß aus  $\Lambda^{\rho}_{\mu} \Lambda^{\mu}_{\sigma} = g^{\rho}_{\sigma}$  die Antisymmetrie von  $\delta \Lambda$  folgt

$$\delta \Lambda^{\mu\nu} = -\delta \Lambda^{\nu\mu} .$$

Mit der gleichen Schlußweise wie bei Translationen erhält man die Kontinuitätsgleichung (3.46) für den Momententensor (3.45). Für infinitesimale Dilatationen (17a) ist

$$\delta x^{\alpha} = x^{\alpha} \delta \tau , \quad \delta \tau = \text{konst.}$$

Aus der Invarianz der Wirkung folgt die Kontinuitätsgleichung

$$\partial^\beta d_\beta = 0$$

mit der Dichte

$$d_\beta = -x^\alpha T_{\alpha\beta} \quad (31)$$

(vgl. Übungsbeispiel (3.22)). Mit der Kontinuitätsgleichung für  $T_{\alpha\beta}$  erhält man durch Differenzieren

$$\partial^\beta d_\beta = -T_\alpha{}^\alpha .$$

Die Kontinuitätsgleichung ist daher nur dann erfüllt, wenn die Spur des Energie-Impulstensors verschwindet

$$T_\alpha{}^\alpha = 0 . \quad (32)$$

Deshalb ist das Raumintegral von  $d^0$

$$\int d^0 d^3x = \int \mathbf{x} \cdot \mathbf{g} d^3x - tW$$

nur bei Gültigkeit von (32) eine Erhaltungsgröße. Für eine infinitesimale konforme Beschleunigung (18a) ist

$$\delta x^\mu = x^2 \delta b^\mu - 2x^\mu (x \cdot \delta b) , \quad \delta b^\mu = \text{konst.}$$

und man erhält die Kontinuitätsgleichung

$$\partial^\beta k_{\alpha\beta} = 0$$

mit

$$k_{\alpha\beta} = (2x_\alpha x^\lambda - x^2 g_\alpha{}^\lambda) T_{\lambda\beta} \quad (33)$$

(vgl. Übungsbeispiel (3.22)). Auch in diesem Fall ist die Kontinuitätsgleichung nur bei Gültigkeit von (32) erfüllt. Für die freie Elektrodynamik ( $j^\mu = 0$ ) ist der Energie-Impulstensor spurfrei (vgl. (3.50)). Für Theorien, die eine Wechselwirkung mit geladener Materie beschreiben, ist hingegen i.a. die Spur des materiellen Anteils von  $T_{\alpha\beta}$  von Null verschieden und die Invarianz bei konformen Transformationen geht verloren.

### 6.4 Magnetische Monopole

Wie bereits in Kap. 2 festgestellt wurde, ist die Frage, ob es magnetische Monopole gibt oder nicht, nur empirisch zu entscheiden: bisher hat man keine gefunden. Wenn es doch welche gibt, hat die Maxwell'sche Theorie eine ästhetisch attraktive symmetrische Form, die immer wieder Theoretiker fasziniert hat. Dirac hat 1931 erkannt, daß in dieser Theorie die Quantisierung der elektrischen Ladung als Folge der Quantisierung des Drehimpulses verstanden werden kann. Das ist bisher die einzige Theorie, in der man erklären kann, weshalb die elektrische Ladung nicht beliebige Werte annimmt. Außerdem hat die besondere topologische Struktur der symmetrischen Maxwelltheorie das Interesse der Teilchenphysiker gefunden. Das alles läßt es gerechtfertigt erscheinen, diese Theorie kurz zu skizzieren, selbst wenn es sich dabei um reine Spekulation handelt, die bisher keine experimentelle Rechtfertigung gefunden hat.

In Abwesenheit von Quellen ( $j^\mu = 0$ ) sind die Maxwell'schen Gleichungen invariant bei  $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{E}$ . Diese Invarianz kann verallgemeinert werden. Man sieht unmittelbar, daß die Gleichungen bei der Transformation

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} \rightarrow F'^{\mu\nu} &= F^{\mu\nu} \cos \lambda + \hat{F}^{\mu\nu} \sin \lambda \\ \hat{F}^{\mu\nu} \rightarrow \hat{F}'^{\mu\nu} &= -F^{\mu\nu} \sin \lambda + \hat{F}^{\mu\nu} \cos \lambda \end{aligned} \quad (34)$$

mit einem beliebigen Winkel  $\lambda$  invariant sind (sog. duale Rotationen). Ist  $j^\mu \neq 0$ , so geht die Invarianz verloren. Das ist eine Folge der Abwesenheit magnetischer Monopole, die zu  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  bzw.  $\partial_\mu \hat{F}^{\mu\nu} = 0$  führt. Gibt man diese Hypothese auf, so kann man die Maxwellgleichungen in symmetrischer Form schreiben. Man muß dazu außer der elektrischen Stromdichte

$$j_{(e)}^\mu := j^\mu$$

ein magnetisches Gegenstück

$$j_{(m)}^\mu = (c\rho_{(m)}, \mathbf{j}_{(m)})$$

einführen. Diese Größe beschreibt die Dichte bzw. Stromdichte von magnetischen "Elementarladungen" (Monopolen). Die Maxwellgleichungen haben dann die Form

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j_{(e)}^\nu, \quad \partial_\mu \hat{F}^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j_{(m)}^\nu. \quad (35)$$

In dreidimensionaler Schreibweise bedeutet das

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho_{(e)}, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 4\pi\rho_{(m)} \\ -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{(e)}, & -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{E} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{(m)}.\end{aligned}$$

Beide Ströme erfüllen die Kontinuitätsgleichung

$$\partial_\mu j_{(e)}^\mu = \partial_\mu j_{(m)}^\mu = 0. \quad (36)$$

Bei dualen Rotationen (34) bleiben die Gleichungen invariant, wenn sich dabei die Quellen wie folgt verhalten:

$$\begin{aligned}j_{(e)}^\mu &\rightarrow j'^\mu_{(e)} = j_{(e)}^\mu \cos \lambda + j_{(m)}^\mu \sin \lambda \\ j_{(m)}^\mu &\rightarrow j'^\mu_{(m)} = -j_{(e)}^\mu \sin \lambda + j_{(m)}^\mu \cos \lambda.\end{aligned} \quad (37)$$

Der Winkel  $\lambda = \pi/2$  entspricht einer Vertauschung von Elektrizität und Magnetismus

$$(\mathbf{E}, \mathbf{B}) \rightarrow (\mathbf{B}, -\mathbf{E}), \quad (j_{(e)}^\mu, j_{(m)}^\mu) \rightarrow (j_{(m)}^\mu, -j_{(e)}^\mu).$$

Eine Darstellung mit Hilfe von Potentialen ist möglich, wenn man (2.23) entsprechend verallgemeinert. Ein geeigneter Ansatz lautet

$$\begin{aligned}F^{\mu\nu}(x) &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu - \frac{4\pi}{c} \epsilon^{\mu\nu}_{\alpha\beta} \int d^4x' f^\alpha(x-x') j_{(m)}^\beta(x') \\ \hat{F}^{\mu\nu}(x) &= \epsilon^{\mu\nu}_{\alpha\beta} \partial^\alpha A^\beta + \frac{4\pi}{c} \int d^4x' (f^\mu(x-x') j_{(m)}^\nu(x') - \\ &\quad - f^\nu(x-x') j_{(m)}^\mu(x'))\end{aligned}$$

bzw. in dreidimensionaler Schreibweise

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\nabla\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \int d^4x' \mathbf{f}(x-x') \times \mathbf{j}_{(m)}(x') \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} + 4\pi \int d^4x' \left( \mathbf{f}(x-x') \rho_{(m)}(x') - \frac{1}{c} f^0(x-x') \mathbf{j}_{(m)}(x') \right).\end{aligned}$$

Die Funktion  $f^\alpha(x)$  muß dabei die Beziehungen

$$\partial_\alpha f^\alpha(x) = \delta(x), \quad f^\alpha(-x) = -f^\alpha(x)$$

erfüllen, durch die sie jedoch nicht eindeutig festgelegt ist. Außer der Möglichkeit,  $A^\mu$  durch Eichtransformation abzuändern, ist also hier

auch in  $f^\alpha$  ein gewisses Maß an Willkür enthalten.  $f^\alpha$  kann als Linienintegral dargestellt werden

$$f^\alpha(x) = \int_K d\xi^\alpha \delta(x - \xi) .$$

Dabei ist  $K$  eine beliebige Kurve, die vom Ursprung nach  $\infty$  läuft. Daß im Vektorpotential eine singuläre Kurve (sog. Dirac string) auftreten muß, sieht man am Beispiel eines im Ursprung ruhenden magnetischen Monopols. In Analogie zum Coulombfeld einer Punktladung ist

$$\mathbf{B}_M = g \frac{\mathbf{x}}{r^3} , \quad (38)$$

wobei  $g$  die magnetische "Ladung" ist. Integrieren wir  $\mathbf{B}_M$  über eine geschlossene Fläche, die den Monopol enthält, so erhalten wir

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} = 4\pi g .$$

Wäre  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , so würde das Integral verschwinden. Daher kann  $\mathbf{A}$  nicht auf der ganzen Fläche endlich sein, sondern es muß (mindestens) in einem Punkt eine Singularität auftreten. Vergrößert man die Fläche, so gilt derselbe Schluß. Aus Stetigkeitsgründen müssen diese Punkte eine Kurve bilden, die vom Monopol bis  $\infty$  läuft. Daß man mit einer Kurve auskommt (also keinen dicken Strang braucht), sieht man aus Beispiel (3.14). Das Vektorpotential der dort betrachteten Spule ist entlang der negativen  $z$ -Achse singulär. Das zugehörige Magnetfeld  $\mathbf{B}$  (Spule) unterscheidet sich von  $\mathbf{B}_M$  um den Beitrag des Innenfeldes der Spule, und das ist ein Term, der nur auf der negativen  $z$ -Achse vorhanden und dort singulär ist, also einen string-Beitrag darstellt:

$$\mathbf{B} (\text{Spule}) = \mathbf{B}_M + \mathbf{B} (\text{string}) .$$

Daher ist

$$\mathbf{B}_M = \nabla \times \mathbf{A} (\text{Spule}) - \mathbf{B} (\text{string})$$

und man sieht, daß zusätzlich zu  $\nabla \times \mathbf{A}$  ein string-Beitrag auftreten muß.

Um Diracs Überlegungen zur Ladungsquantisierung verständlich zu machen, betrachten wir die Bewegung von punktförmigen Objekten (Teilchen) in vorgegebenen Feldern  $F^{\mu\nu}, \hat{F}^{\mu\nu}$ . Für ein Teilchen, das sowohl eine elektrische Ladung  $q$  als auch eine magnetische "Ladung"  $g$  hat (sog. Dyon), lauten die Bewegungsgleichungen

$$m \frac{dp^\mu}{d\tau} = (qF^{\mu\nu} + g\hat{F}^{\mu\nu})u_\nu, \quad p^\mu = mcu^\mu, \quad u^\mu = \frac{1}{c} \frac{dx^\mu}{d\tau}.$$

Dabei ist  $\tau$  die Eigenzeit und  $u^\mu$  die Vierergeschwindigkeit des Teilchens (vgl. M 5.5). In der Bewegungsgleichung für  $p^\mu$  tritt die Lorentzkraft und ihr duales Gegenstück auf. Wir wollen die Bewegung solcher Teilchen bzw. ihre Wechselwirkung hier nicht untersuchen, sondern nur einen einfachen Spezialfall betrachten: ein Monopol  $g$  sei im Ursprung fixiert, ein rein elektrisch geladenes Teilchen bewegt sich in seinem Feld (38), die Bewegung erfolgt nichtrelativistisch. Dann ist

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{q}{mc} (\mathbf{p} \times \mathbf{B}_M) = \frac{qg}{cr^3} (\dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{x}).$$

Das Feld ist zwar zentralsymmetrisch, aber die Kraft ist nichtzentral. Der Drehimpuls des Teilchens  $\mathbf{x} \times \mathbf{p}$  ist daher nicht erhalten. Man kann jedoch nachrechnen, daß der Drehimpuls des Systems (Teilchen + Feld) erhalten ist:

$$\mathbf{J} = \mathbf{x} \times \mathbf{p} + \frac{1}{4\pi c} \int \mathbf{x}' \times (\mathbf{E}(\mathbf{x}') \times \mathbf{B}_M(\mathbf{x}')) d^3x' = \text{konst.}$$

$\mathbf{E}(\mathbf{x}')$  ist dabei das elektrische Feld im Abstand  $\mathbf{x}' - \mathbf{x}$ :

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}') = q \frac{(\mathbf{x}' - \mathbf{x})}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3}.$$

Das Integral läßt sich mit einigen Tricks berechnen. Man erhält schließlich

$$\mathbf{J} = \mathbf{x} \times \mathbf{p} - \frac{qg}{c} \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Mit Hilfe der Erhaltungssätze für  $\mathbf{J}$  und die kinetische Energie  $\mathbf{p}^2/2m$  kann man die Bewegungsgleichungen lösen. Das geladene Teilchen bewegt sich spiralenförmig entlang eines Kegels vom Monopol weg, wobei die Winkelgeschwindigkeit im Lauf der Zeit abnimmt. Elektrische und magnetische Ladungen stoßen daher einander ab.

Interessanter wird die Sache, wenn wir die Quantentheorie benützen. ■ In dieser sollten die Komponenten von  $\mathbf{J}$  den allgemeinen Vertauschungsrelationen für Drehimpulse genügen und daher Eigenwerte haben, die ganzzahlige Vielfache von  $\hbar/2$  sind. Da die Eigenwerte des Bahndrehimpulses ganzzahlige Vielfache von  $\hbar$  sind, muß

$$\frac{qg}{c} = \frac{n}{2} \hbar \quad (39)$$



mit ganzzahligem  $n$  sein. Das ist die von Dirac aufgestellte Quantenbedingung, die man auch aus einer konsequenten relativistischen Quantenfeldtheorie mit magnetischen und elektrischen Ladungen erhält. Sie gilt unter der Voraussetzung, daß ein Teilchen **entweder** elektrische **oder** magnetische Ladungen besitzt, aber **nicht beides**. Nimmt man nun an, daß es in der Welt nur solche Teilchen gibt (also nur rein elektrische Monopole mit Ladungen  $q_i$  und rein magnetische Monopole mit magnetischen Ladungen  $g_i$ , keine Dyonen), so kann man zeigen, daß alle diese Ladungen ganzzahlige Vielfache von elementaren Ladungen  $q_0, g_0$  sind, die ebenfalls der Diracschen Bedingung genügen müssen

$$\frac{q_0 g_0}{c} = n_0 \frac{\hbar}{2} \quad \text{mit festem, ganzzahligem } n_0 . \quad (40)$$

Der Beweis gelingt mit einfachen zahlentheoretischen Argumenten. Allgemein lautet die Diracbedingung

$$\frac{q_i g_j}{c} = \frac{n_{ij}}{2} \hbar \quad n_{ij} \text{ ganz .}$$

Betrachten wir einen festen Wert von  $g_j$ , so ist

$$q_i = n_{ij} \frac{\hbar c}{g_j} = n_i n_{0j} \frac{\hbar c}{g_j} = n_i q_0 , \quad q_0 = n_{0j} \frac{\hbar c}{g_j} .$$

Dabei ist  $n_{0j}$  der größte gemeinsame Teiler von  $n_{ij}$ . Da  $n_i$  ganz ist, sind alle  $q_i$  ganzzahlige Vielfache von  $q_0$ . Nun muß aber  $n_{0j}$  eine Linearkombination von  $n_{ij}$  mit ganzen Koeffizienten sein (die auch negativ sein können; vgl. den Euklidischen Algorithmus zur Konstruktion des größten gemeinsamen Teilers). Da die Kombination von Ladungen einen Zustand mit der Summe der kombinierten Ladungen liefert, aus dem man durch Ladungsumkehr den entgegengesetzt geladenen Zustand erhalten kann, ist  $q_0$  die Ladung eines Zustandes, den man in dieser Weise realisieren kann. Für  $g_j$  kann man genauso schließen, indem man von einem festen  $q_i$  ausgeht.  $q_0$  und  $g_0$  sind dadurch bis auf ein Vorzeichen festgelegt und erfüllen (40).

Der in der Natur realisierte Wert von  $q_0$  führt in der Praxis dazu, daß die Kräfte zwischen Monopolen wesentlich stärker als die zwischen elektrisch geladenen Teilchen sind. Vergleichen wir die Coulombkraft zwischen zwei elektrischen Elementarladungen  $q_0^2/r^2$  mit der zwischen zwei Monopolen  $g_0^2/r^2$ . Das Verhältnis ist

$$R = \frac{g_0^2}{q_0^2} = \frac{n_0^2}{4} \left( \frac{\hbar c}{q_0} \right)^2 .$$

Nehmen wir für  $q_0$  die Elementarladung  $q_0 = e$ , so ist

$$\frac{\hbar c}{e^2} = \frac{1}{\alpha} \simeq 137$$

und das Verhältnis wird

$$R \simeq 4.7 \cdot 10^3 n_0^2 ,$$

was selbst für  $n_0 = 1$  beträchtlich ist. Entsprechend ist die “magnetische Feinstrukturkonstante”

$$\frac{g_0^2}{\hbar c} = \frac{g_0^2}{e^2} \cdot \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{n_0^2}{4\alpha} \simeq 34.25 n_0^2 .$$

Magnetische Monopole sollten daher, wenn es sie gibt, wesentlich schwerer als Elektronen sein. Die Paarerzeugung sollte daher nur bei entsprechend hohen Energien möglich sein.

Die Symmetrie der Theorie bei dualen Rotationen wird durch die Annahme verletzt, daß alle Teilchen **entweder** elektrische **oder** magnetische Ladungen haben. Es ist jedoch möglich, eine entsprechend symmetrische Theorie zu formulieren, wenn man von der Annahme ausgeht, daß alle Elementarteilchen Dyonen sind, die sowohl magnetische, als auch elektrische Ladung haben. Die entsprechende Theorie stammt von Schwinger. Ein interessantes Resultat der Theorie ist, daß man trotz der Symmetrie einsehen kann, daß die “wirkliche” Welt unsymmetrisch sein kann. Da bisher weder für die Existenz von Monopolen, noch von Dyonen experimentelle Anhaltspunkte gefunden wurden, wollen wir auf weitere Details nicht eingehen.

## Anhang

### A1 Die $\delta$ -Funktion und verwandte Distributionen

Wie in allen Kontinuumstheorien ist es auch in der Elektrodynamik außerordentlich zweckmäßig, die  $\delta$ -Funktion zu benützen. Trotz des Namens handelt es sich dabei nicht um eine gewöhnliche Funktion, sondern um eine Distribution (verallgemeinerte Funktion). Wir geben in diesem Anhang die wichtigsten Formeln für  $\delta$  und einige damit zusammenhängende andere Distributionen an. Für eine Begründung muß auf die mathematische Literatur verwiesen werden, vgl. z.B. I. M. Gelfand, G. E. Schilow, Verallgemeinerte Funktionen (Distributionen) I, Deutscher Verlag der Wissensch. Berlin 1960.

Einige Bemerkungen über Distributionen seien vorausgeschickt. Distributionen sind spezielle lineare Funktionale, das sind Bildungen, durch die einer Funktion  $\phi(x)$  von  $n$  Variablen  $x = (x_1, x_2 \dots x_n)$  ein Zahlenwert  $F[\phi]$  zugeordnet wird, und zwar so, daß für 2 Zahlen  $c_1, c_2$

$$F[c_1\phi_1 + c_2\phi_2] = c_1F[\phi_1] + c_2F[\phi_2]$$

ist. Ein Beispiel dafür ist

$$F[\phi] = \int g(x)\phi(x)d^n x = : (g, \phi)$$

(Integration über den ganzen  $n$ -dimensionalen Raum). Bei Distributionen  $g$  sind als Argumente Testfunktionen  $\phi(x)$  zu nehmen, die beliebig oft stetig differenzierbar sind und außerhalb eines endlichen Gebietes (das von  $\phi$  abhängen darf) verschwinden. Alle Formeln für Distributionen gelten dann unter dem Integral. Z.B. bedeutet

$$g(x) = 0 \text{ in einem Gebiet } G_1 ,$$

daß

$$(g, \phi) = \int g(x)\phi(x)d^n x = 0$$

für jede Testfunktion erfüllt ist, die außerhalb eines Gebietes  $G_2$  verschwindet, das zusammen mit  $G_1$  den ganzen  $x$ -Raum bedeckt. Die Dimensionszahl  $n$  ist dabei beliebig (muß aber endlich sein). Die **Ableitung** einer Distribution  $g$  ist dadurch **definiert**, daß sie auf die Testfunktion übergewälzt werden kann

$$(\partial(x_i)g, \phi) = \left( \frac{\partial g}{\partial x_i}, \phi \right) = -(g, \partial(x_i)\phi) ,$$

analog für höhere Ableitungen

$$(\partial^k(x_i)g, \phi) = (-1)^k(g, \partial^k(x_i)\phi) .$$

Der **Träger** von  $g(x)$  heißt die abgeschlossene Menge von  $x$ -Werten, auf deren Komplement  $g(x)$  verschwindet, das ist also der Bereich, in dem  $g$  von Null verschieden ist. **Produkte** von Distributionen mit **gleichem** Träger sind i.A. **nicht definiert**.

Die  $\delta$ -Funktion in  $n$  Dimensionen ist definiert durch

$$(\delta_n(x - x'), \phi(x')) = \phi(x) ,$$

also

$$\int \delta_n(x - x')\phi(x')d^n x' = \phi(x) .$$

Sie entspricht daher der Verallgemeinerung des Kroneckersymbols auf das Kontinuum. Der Träger von  $\delta_n(x - x')$  ist der Punkt

$$x_k - x'_k = 0 \quad k = 1, 2 \dots n .$$

Wir werden den Index  $n$  weglassen, wenn dies zu keinen Mißverständnissen führt. Gelegentlich werden wir die Bezeichnung

$$\delta(x) = \delta_1(x), \quad \delta(\mathbf{x}) = \delta_3(x), \quad \delta(x^\mu) = \delta_4(x)$$

verwenden.

In  $n$  Dimensionen gelten dann folgende Formeln:

$$\begin{aligned} \delta_n(x) &= \delta_n(-x) = |c|^n \delta_n(cx) && (c \text{ reelle Zahl}) \\ \phi(x)\delta_n(x - x') &= \phi(x')\delta_n(x - x') \\ \phi(x' \pm x)\delta_n(x) &= \phi(x')\delta_n(x) \\ x_i \delta_n(x) &= (x_i)^2 \delta_n(x) = \dots = 0 \quad i = 1, \dots, n \\ \delta_n(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int \exp(ik \cdot x) d^n k . \end{aligned}$$

Dabei bedeutet  $k \cdot x$  das Skalarprodukt im  $n$ -dimensionalen Raum, also  $kx$  für  $n = 1$ ,  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$  für  $n = 3$ ,  $k_\mu x^\mu$  für  $n = 4$  etc. Die  $n$ -dimensionale  $\delta$ -Funktion kann als Produkt von  $n$  eindimensionalen  $\delta$ -Funktionen geschrieben werden:

$$\delta_n(x) = \delta_1(x_1)\delta_1(x_2) \dots \delta_1(x_n) .$$

Die Multiplikation ist hier erlaubt, da die Träger der Faktoren verschieden sind. Insbesondere ist für  $n = 3$

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z')$$

in kartesischen Komponenten  $\mathbf{x} = (x, y, z)$ . Analoge Formeln gelten in anderen Koordinaten. So ist z.B. in Zylinderkoordinaten

$$\mathbf{x} = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z)$$

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{1}{r} \delta(r - r') \delta(\varphi - \varphi') \delta(z - z')$$

bzw. in Polarkoordinaten

$$\mathbf{x} = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta)$$

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{1}{r^2} \delta(r - r') \delta(\cos \theta - \cos \theta') \delta(\varphi - \varphi') .$$

Ferner ist

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = -\frac{1}{4\pi} \Delta \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

$$\delta(r - a) = \frac{a}{2\pi^2} \int \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \frac{\sin ak}{k} d^3k$$

mit  $r = |\mathbf{x}|$ ,  $k = |\mathbf{k}|$ . In vier Dimensionen ist

$$\delta(x^\mu - x'^\mu) = \delta(x_\mu - x'_\mu) = \delta(x_0 - x'_0) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{1}{c} \delta(t - t') \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') .$$

Gelegentlich braucht man die Distribution  $\delta(f(x, x'))$ , wobei  $f$  eine Funktion der (**e**indimensionalen) Variablen  $x, x'$  ist. Eine brauchbare Formel für diese Größe erhält man nur, wenn  $f(x, x')$  eine Funktion mit  $N$  **einfachen** Nullstellen ist:

$$f(x, x') = 0 \quad \text{für} \quad x' = \xi_{(i)}(x) \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Dann ist

$$\delta(f(x, x')) = \sum_{i=1}^N \frac{\delta(x' - \xi_{(i)})}{\left| \frac{\partial f(x, x')}{\partial x'} \right|_{x'=\xi_{(i)}}} .$$

Die Nullstellen  $\xi_i(x)$  müssen dabei durch Auflösen der Gleichung  $f = 0$  nach  $x'$  bestimmt werden. Ein einfaches Beispiel ist

$$\delta(x_\mu x^\mu) = \delta(x_0^2 - \mathbf{x}^2) = \frac{1}{2|\mathbf{x}|}(\delta(x_0 - |\mathbf{x}|) + \delta(x_0 + |\mathbf{x}|)) .$$

Die folgende Formelsammlung gilt für die **e**indimensionale  $\delta$ -Funktion und einige damit verwandte Distributionen.

Grenzwertdarstellungen:

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim(\epsilon \rightarrow 0) \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \lim(\epsilon \rightarrow 0) \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\epsilon}\right)$$

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim(\nu \rightarrow \infty) \frac{\sin(\nu x)}{x} = \frac{1}{\pi} \lim(\nu \rightarrow \infty) \frac{\sin^2(\nu x)}{\nu x^2} .$$

Stufenfunktionen:

$$\theta(x) = (1 \text{ für } x > 0, 0 \text{ für } x < 0)$$

$$\epsilon(x) = (1 \text{ für } x > 0, -1 \text{ für } x < 0)$$

$$\epsilon(x) = \theta(x) - \theta(-x) = \frac{d|x|}{dx}, \quad \theta(x) = \frac{1}{2}(1 + \epsilon(x))$$

$$\delta(x) = \frac{d\theta(x)}{dx} = \frac{1}{2} \frac{d\epsilon(x)}{dx} = \frac{1}{2} \frac{d^2|x|}{dx^2} .$$

Randwerte bei komplexer Fortsetzung:

Für die folgenden Formeln bedeutet  $f(x \pm i0)$  den Grenzwert  $\lim(\epsilon \rightarrow 0) f(x \pm i\epsilon)$ , wobei der Grenzwert "zuletzt" (d.h. nach allen Integrationen mit Testfunktionen) auszuführen ist. Die Distribution  $P(1/x)$  ist im Sinn des Cauchyschen Hauptwertintegrals definiert

$$\left(P\frac{1}{x}, \phi\right) = \lim(\epsilon \rightarrow 0) \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{\infty}\right) \frac{\phi(x)}{x} dx .$$

Damit ist

$$\ln(x \pm i0) = \ln|x| \pm i\pi\theta(x)$$

$$\frac{1}{x \pm i0} = P\frac{1}{x} \mp i\pi\delta(x) = : \mp 2\pi i\delta_{\pm}(x)$$

$$\delta_{\pm}(-x) = \delta_{\mp}(x)$$

$$x\delta_{\pm}(x) = \mp \frac{1}{2\pi i}$$

$$\delta_+(x) + \delta_-(x) = \delta(x), \quad \delta_+(x) - \delta_-(x) = \frac{i}{\pi} P\frac{1}{x}$$

$$P\frac{1}{x} = \lim(\epsilon \rightarrow 0) \frac{x}{x^2 + \epsilon^2}$$

Fourierdarstellungen:

$$\begin{aligned}\delta(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dk \\ \delta_{\pm}(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} \theta(\pm k) dk \\ P \frac{1}{x} &= \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} \epsilon(k) dk \\ \theta(\pm x) &= \pm \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{k \mp i0} dk, \quad \epsilon(x) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} P \frac{1}{k} dk \\ \delta'(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} ike^{ikx} dk \quad (\text{entsprechend für höhere Ableitungen}).\end{aligned}$$

## A2 Vektoranalysis in drei Dimensionen

In diesem Abschnitt betrachten wir die Verallgemeinerung der Analysis auf skalare und vektorielle Felder. Damit sind Abbildungen gemeint, bei denen jedem Punkt  $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$  des dreidimensionalen Raumes ein Skalar  $\phi = \phi(\boldsymbol{x})$  bzw. ein Vektor  $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$  zugeordnet wird. Für die Anwendungen in der Physik ist dabei **wesentlich**, daß die Begriffe Skalar bzw. Vektor im geometrischen Sinn gemeint (d.h. durch das entsprechende Verhalten bei Drehungen definiert) sind. Ein Beispiel für ein Skalarfeld ist das Gravitationspotential in der Newtonschen Mechanik (vgl. M 3.3). Beispiele für Vektorfelder wären das aus dem Gravitationspotential abgeleitete Schwerkraftfeld, das Geschwindigkeitsfeld einer strömenden Flüssigkeit etc. Das letztere Beispiel hat die Namen für die in der Vektoranalysis benützten Begriffe (Fluß, Zirkulation, Divergenz, Rotation) geprägt.

Ableitungen von Feldern lassen sich mit Hilfe des Vektoroperators

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$$

so schreiben, daß der Transformationscharakter bei Drehungen transparent erscheint: dabei verhält sich  $\nabla$  als Vektor. Durch Anwendung von  $\nabla$  auf ein Skalarfeld  $\phi(\boldsymbol{x})$  erhält man ein Vektorfeld  $\boldsymbol{F}$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \nabla\phi(\mathbf{x}) = \text{grad}\phi = \left( \frac{\partial\phi}{\partial x_1}, \frac{\partial\phi}{\partial x_2}, \frac{\partial\phi}{\partial x_3} \right).$$

Auf ein Vektorfeld kann man  $\nabla$  in verschiedener Weise anwenden. Durch skalare Multiplikation erhält man aus  $\mathbf{a}$  das Skalarfeld

$$f(\mathbf{x}) = \nabla \cdot \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \text{div}\mathbf{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3}.$$

Für das Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{v}$  einer strömenden Flüssigkeit bedeutet  $\nabla \cdot \mathbf{v}$  die aus einem (infinitesimalen) Volumelement ausströmende Flüssigkeitsmenge pro Volumen. Durch vektorielle Multiplikation erhält man aus einem polaren Vektorfeld  $\mathbf{a}$  ein axiales Vektorfeld

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \text{rot } \mathbf{a}.$$

Für eine strömende Flüssigkeit ergibt sich ebenfalls eine anschauliche Bedeutung. Strömt eine Flüssigkeit so im Kreis, daß sich ein Wirbel bildet, so fließt durch ein Volumelement im Wirbelmittelpunkt nichts. Auch für diese Situation braucht man aber eine lokale Charakterisierung. Diese muß die Umlaufsrichtung enthalten: das geschieht durch die Richtung von  $\text{rot } \mathbf{v}$ , die senkrecht zur Umlaufsrichtung ist und mit dieser eine Rechtsschraube definiert. Auch das Spiegelungsverhalten (Axialvektor!) ist mit der physikalischen Situation im Einklang. Erklären wir als Maß für den quantitativen Ablauf die **Zirkulation** als das Integral von  $\mathbf{v}$  über eine geschlossene Kurve, die ein Flächenstück umfaßt, in dem die Flüssigkeit zirkuliert, so ist der Betrag von  $\text{rot } \mathbf{v}$  die Zirkulation pro Flächeneinheit im Grenzfall eines infinitesimalen Flächenstücks.

Höhere Ableitungen können durch wiederholte Anwendung von  $\nabla$  gebildet werden. Der Laplaceoperator  $\Delta$  entsteht durch skalare Multiplikation

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} = \text{div grad}.$$

Durch Anwendung auf ein Skalarfeld entsteht wieder ein solches, ebenso für ein Vektorfeld. Die folgenden Kombinationen verschwinden identisch:

$$(\nabla \times \nabla) = \text{rot grad} \equiv 0, \quad \nabla \cdot (\nabla \times) = \text{div rot} \equiv 0.$$

Hingegen sind die Vektorfelder



$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) = \text{grad div } \mathbf{a}$$

und

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \text{rot rot } \mathbf{a}$$

nicht trivial. Zwischen den drei zweiten Ableitungen eines Vektorfeldes  $\mathbf{a}$  besteht die Beziehung

$$\Delta \mathbf{a} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) \text{ bzw. } \text{div grad} = \text{grad div} - \text{rot rot} .$$

Wir notieren zwei wichtige Sätze der Vektoranalysis für spezielle Vektorfelder, deren Inhalt anschaulich verständlich ist, wenn man an die Hydrodynamik denkt.

- (1) Ein wirbelfreies Vektorfeld läßt sich als Gradient eines Skalarfeldes darstellen: ist  $\nabla \times \mathbf{a} = 0$ , so existiert ein Feld  $\phi$ , für das  $\mathbf{a} = \nabla \phi$  ist.
- (2) Ein divergenzfreies Vektorfeld läßt sich als Rotation eines Vektorfeldes darstellen: ist  $\nabla \cdot \mathbf{a} = 0$ , so existiert ein Feld  $\mathbf{c}$ , für das  $\mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{c}$  ist.

Nun betrachten wir kurz einige **Integralsätze** der Vektoranalysis, die den Integrationsregeln in der gewöhnlichen Analysis entsprechen. Als erstes betrachten wir das Linienintegral eines Gradienten entlang einer Kurve. Wir definieren ein vektorielles Linienelement  $d\mathbf{s}$  als den Verbindungsvektor benachbarter Kurvenpunkte in Richtung des Durchlaufungssinns der Kurve. Ist diese durch die Parameterdarstellung  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u)$  gegeben, so ist

$$d\mathbf{s} = \frac{d\mathbf{x}}{du} du .$$

Der entsprechende Integralsatz lautet

$$\int_{\mathbf{x}_{(1)}}^{\mathbf{x}_{(2)}} \nabla \phi \cdot d\mathbf{s} = \phi(\mathbf{x}_{(2)}) - \phi(\mathbf{x}_{(1)}) . \quad (I)$$

Als nächsten Fall betrachten wir das Flächenintegral einer Rotation über eine Fläche  $F$ , die von einer geschlossenen Kurve  $C$  eingegrenzt wird. Ist die Fläche  $F$  durch die Parameterdarstellung  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$  gegeben, so ist das Flächenelement  $d\mathbf{f}$  der Vektor

$$d\mathbf{f} = \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right) dudv .$$

Der entsprechende Integralsatz (Stokesscher Satz) lautet

$$\int_F (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{f} = \oint \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s} . \quad (II)$$

Als dritten Fall betrachten wir das Volumintegral einer Divergenz über ein Volumen  $V$ , das von einer geschlossenen Fläche  $F$  begrenzt wird. Dabei soll das Flächenelement  $d\mathbf{f}$  stets nach außen gerichtet sein. Der entsprechende Integralsatz (Gaußscher Satz) lautet

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{a} d^3x = \oint_F \mathbf{a} \cdot d\mathbf{f} . \quad (III)$$

Ein Spezialfall davon ist der Greensche Satz für das Volumintegral einer speziellen Kombination zweiter Ableitungen von zwei Skalarfeldern  $\phi, \psi$ :

$$\int_V (\phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi) d^3x = \oint_F (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \cdot d\mathbf{f} . \quad (IV)$$

Die Integralsätze haben gemeinsam, daß sie Integrale über Ableitungen von Feldern mit den Werten der Felder am Rand des Integrationsgebietes verknüpfen und damit das Ausführen einer Integration ermöglichen. Aus der Form, in der wir sie angeschrieben haben, ist ersichtlich, daß sie dreihinvariante Aussagen darstellen.

### A3 Dualität und Integralsätze im Minkowskiraum

Außer dem metrischen Tensor ( $g^{\mu\nu}$ ) gibt es im Minkowskiraum noch einen konstanten Tensor vierter Stufe ( $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ ), der total antisymmetrisch ist und nur die Komponenten  $\pm 1$  und  $0$  hat. Wir verwenden die Definition

$$\begin{aligned} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} &= +1 \text{ wenn } (\alpha\beta\gamma\delta) \text{ eine gerade Permutation von } (0123) \text{ ist} \\ &= -1 \text{ wenn } (\alpha\beta\gamma\delta) \text{ eine ungerade Permutation von } (0123) \text{ ist} \\ &= 0 \text{ für zwei oder mehr gleiche Indizes.} \end{aligned}$$

Damit wird  $\epsilon^{0ikl} = \epsilon^{ikl}$ . Für Produkte von zwei  $\epsilon$ -Tensoren gelten folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned}
\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} &= 24 \\
\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon^{\mu}_{\beta\gamma\delta} &= 6g^{\alpha\mu} \\
\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon^{\mu\nu}_{\gamma\delta} &= 2(g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu} - g^{\alpha\nu}g^{\beta\mu}) \\
\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon^{\mu\nu\rho}_{\delta} &= -g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}g^{\gamma\rho} + g^{\alpha\nu}g^{\beta\mu}g^{\gamma\rho} - g^{\alpha\rho}g^{\beta\mu}g^{\gamma\nu} + \\
&\quad + g^{\alpha\mu}g^{\beta\rho}g^{\gamma\nu} - g^{\alpha\nu}g^{\beta\rho}g^{\gamma\mu} + g^{\alpha\rho}g^{\beta\nu}g^{\gamma\mu}
\end{aligned}$$

Mit Hilfe des  $\epsilon$ -Tensors kann man eine Dualität definieren, durch die Tensoren  $a$  duale Gegenstücke  $\hat{a}$  zugeordnet werden. Zu einem Tensor mit den Komponenten  $a^{\mu\nu}$  ist das duale Gegenstück mit den Komponenten  $\hat{a}^{\mu\nu}$  durch

$$\hat{a}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}a_{\gamma\delta} ,$$

definiert. Insgesamt besteht der Tensor  $\hat{a}$  aus denselben Komponenten wie der antimetrische Teil  $(a^{\mu\nu} - a^{\nu\mu})/2$  von  $a$ , die aber in anderer Anordnung auftreten

$$\hat{a}^{0k} = \frac{1}{2}(a^{lm} - a^{ml}), \quad \hat{a}^{kl} = \frac{1}{2}(a^{m0} - a^{0m}), \quad \hat{a}^{00} = \hat{a}^{11} = \hat{a}^{22} = \hat{a}^{33} = 0.$$

Dabei ist  $(klm)$  eine zyklische Permutation von  $(123)$ . Einem Vektor  $a^\alpha$  wird der dazu duale (total antisymmetrische) Tensor mit den Komponenten

$$\hat{a}^{\alpha\beta\gamma} = \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}a_\delta$$

zugeordnet, einem Tensor dritter Stufe  $(a^{\alpha\beta\gamma})$  der dazu duale Vektor mit den Komponenten

$$\hat{a}^\alpha = -\frac{1}{6}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}a_{\beta\gamma\delta} .$$

Zu einem Tensor vierter Stufe  $(a^{\alpha\beta\gamma\delta})$  ist das duale Gegenstück ein Skalar

$$\hat{a} = \frac{1}{24}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}a_{\alpha\beta\gamma\delta} .$$

Wie das dreidimensionale Gegenstück  $\epsilon^{klm}$  enthält  $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$  einen Drehsinn. Die dualen Größen  $\hat{a}^{\dots}$  haben daher bei Raumspiegelungen das entgegengesetzte Verhalten (zusätzlicher Faktor  $-1$ ) wie die ursprünglichen  $a^{\dots}$ , denen sie zugeordnet sind.

Zur Formulierung der Integralsätze benützen wir die folgenden Differentiale:

$$\text{Linielement } dx^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} ds$$

$$\text{Flächenelement } d\hat{f}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial u} \frac{\partial x_\beta}{\partial v} dudv$$

$$\text{Hyperflächenelement } d\sigma^\mu = -\frac{1}{6} \epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} \frac{\partial x_\alpha}{\partial u} \frac{\partial x_\beta}{\partial v} \frac{\partial x_\gamma}{\partial w} dudv dw$$

$$\text{Volumenelement } d^4x = \frac{1}{24} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial u} \frac{\partial x_\beta}{\partial v} \frac{\partial x_\gamma}{\partial w} \frac{\partial x_\delta}{\partial z} dudv dw dz$$

Bezeichnen wir den geschlossenen Rand eines Gebietes  $G$  mit  $R(G)$ , so können die Integralsätze in folgender Form geschrieben werden

$$\int_V d^4x \partial^\mu \bullet = \oint_{R(V)} d\sigma^\mu \bullet \quad (A)$$

$$\frac{1}{2} \int_\Sigma (d\sigma^\mu \partial^\nu - d\sigma^\nu \partial^\mu) \bullet = \oint_{R(\Sigma)} d\hat{f}^{\mu\nu} \bullet \quad (B)$$

$$\int_F d\hat{f}^{\mu\nu} \partial_\nu \bullet = \oint_{R(F)} dx^\mu \bullet \quad (C)$$

$\bullet$  bedeutet dabei die Komponenten eines Feldes. (A) ist das vierdimensionale Gegenstück zum Gaußschen Integralsatz (A2 III). In allen im Text vorkommenden Anwendungen ist  $\Sigma$  eine raumartige Hyperfläche, d.h. ein dreidimensionales Gebiet, dessen Punkte zueinander raumartig liegen. Das Hyperflächenelement  $d\sigma^\mu$  ist dann ein zeitartiger Vektor

$$d\sigma^\mu = n^\mu d\sigma \quad , \quad n^\mu n_\mu = 1$$

der am Rand  $R(V)$  überall nach außen orientiert sein muß.

Wir betrachten nun ein Feld  $X^{\mu\dots}$ , dessen Viererdivergenz verschwindet:

$$\partial^\mu X_{\mu\dots} = 0 .$$

Aus (A) erhält man dann für ein beliebiges Volumen  $V$

$$\oint_{R(V)} d\sigma^\mu X_{\mu\dots} = 0 \quad \text{oder} \quad \int_{\Sigma_1} d\sigma^\mu X_{\mu\dots} = \int_{\Sigma_2} d\sigma^\mu X_{\mu\dots}$$

Dabei sollen  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$  zusammen den geschlossenen Rand von  $V$  bilden. In der zweiten Formel wurde dabei die Richtung der Flächennormale  $n^\mu$  umgekehrt. Mit  $V$  können auch die Randflächen  $\Sigma_1, \Sigma_2$

beliebig gewählt werden. Das Flächenintegral ist daher unabhängig davon, über welche raumartige Fläche man integriert. Wir können daher Hyperebenen nehmen

$$\Sigma_1 : x^0 = ct_1 \quad d\sigma^\mu = (d^3x, 0, 0, 0)$$

(analog  $\Sigma_2$ ) und erhalten

$$\int d^3x X^{0\dots}(t = t_1) = \int d^3x X^{0\dots}(t = t_2)$$

d.h. das Integral  $\int d^3x X^{0\dots}$  ist eine Erhaltungsgröße.

Eine weitere Anwendung folgt aus (B). Verschwindet eine Größe  $X$  auf einem (zweidimensionalen) Rand von  $\Sigma$  (z.B. für großes raumartiges Argument  $\mathbf{x}^2 \rightarrow \infty$ ), so ist

$$\int_{\Sigma} d\sigma^\mu \partial^\nu X = \int_{\Sigma} d\sigma^\nu \partial^\mu X .$$

Zuletzt notieren wir noch als Minkowski-Analogon zum Greenschen Satz (A2 IV) die Formel

$$\int_V d^4x (f \square g - g \square f) = \int_{R(V)} d\sigma^\mu (f \partial_\mu g - g \partial_\mu f) . \quad (D)$$

#### A4 Momente begrenzter Stromverteilungen

Für die Multipolentwicklung begrenzter Stromverteilungen ist es zweckmäßig, die Momente der Stromdichte durch solche der Ladungsdichte auszudrücken. Wir zeigen für die untersten beiden Momente, wie man dabei vorzugehen hat. Die Betrachtung kann auf höhere Momente ausgedehnt werden, wobei allerdings der Komplikationsgrad rasch zunimmt. Wir betrachten Stromverteilungen  $\mathbf{j}(t, \mathbf{x})$ , die am Rand und außerhalb eines endlichen Raumbereiches  $G$  verschwinden. Bei Integration über  $G$  dürfen dann Oberflächenterme wie z.B.

$$\int_G \nabla \cdot (\mathbf{j} x^k) d^3x = \oint_{R(G)} d\mathbf{f} \cdot (\mathbf{j} x^k) , \quad \int_G \nabla \cdot (\mathbf{j} x^k x^l) d^3x \text{ etc.}$$

weggelassen werden.

Wir beginnen mit  $j^k$  und schreiben diesen Ausdruck so, daß entsprechende Ableitungen auftreten:

$$j^k = \sum_i (\nabla^i (x^k j^i) - x^k \nabla^i j^i) .$$

Mit der Kontinuitätsgleichung

$$-\nabla \cdot \mathbf{j} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

erhalten wir nach Integration über  $G$

$$\int_G j^k(t, \mathbf{x}) d^3x = \int_G x^k \frac{\partial \rho(t, \mathbf{x})}{\partial t} d^3x .$$

Für stationäre Verhältnisse verschwindet die rechte Seite und wir erhalten (vgl. Abschnitt 3.3)

$$\int \mathbf{j}(\mathbf{x}) d^3x = 0 .$$

Für zeitabhängige Situationen erhalten wir die in Abschnitt 3.7 verwendete Beziehung zwischen dem Integral von  $\mathbf{j}$  und der Zeitableitung des elektrischen Dipolmomentes.

Das erste Moment von  $\mathbf{j}$  muß in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Anteil zerlegt werden, weil die entsprechende Umschreibung mit Ableitungen nur für den symmetrischen Teil möglich ist. Der antisymmetrische Teil kann als doppeltes Kreuzprodukt geschrieben werden:

$$\begin{aligned} x^k j^l &= \frac{1}{2} (x^k j^l + x^l j^k) + \frac{1}{2} (x^k j^l - x^l j^k) \\ &= \frac{1}{2} \sum_i (\nabla^i (x^k x^l j^i) - x^k x^l \nabla^i j^i) + \frac{1}{2} \sum_{i,r,s} \epsilon^{kli} \epsilon^{irs} x^r j^s . \end{aligned}$$

Mit der Kontinuitätsgleichung erhalten wir bei Integration über  $G$

$$\int x^k j^l(t, \mathbf{x}) d^3x = \frac{1}{2} \int x^k x^l \frac{\partial \rho}{\partial t} d^3x + \frac{1}{2} \sum_i \epsilon^{kli} \int (\mathbf{x} \times \mathbf{j})^i d^3x .$$

Der zweite Term enthält das magnetische Moment, der erste die Zeitableitung des elektrischen Quadrupolmomentes. Die Beziehung wird in Abschnitt 3.3 bzw. 3.7 verwendet.

### A5 Greensche Funktionen der Wellengleichung

Als solche bezeichnet man Distributionen, die Lösungen der Gleichung

$$\square D_G(x) = \delta(x)$$

sind. Am einfachsten findet man sie über die Fourierdarstellung. Mit dem Ansatz

$$D_G(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \tilde{D}_G(k) \exp(-ik \cdot x)$$

und der entsprechenden Darstellung aus A1 für die (vierdimensionale)  $\delta$ -Funktion erhält man aus der Differentialgleichung

$$-k^2 \tilde{D}_G(k) = 1$$

also

$$\tilde{D}_G(k) = -\frac{1}{k^2} = \frac{-1}{k_0^2 - \mathbf{k}^2}.$$

Dieser Ausdruck hat zwei Pole  $k_0 = \pm|\mathbf{k}|$  auf der reellen  $k_0$ -Achse. Bei Ausführen des Fourierintegrals muß entschieden werden, wie der Integrationsweg in der komplexen  $k_0$ -Ebene um diese Pole herumgeführt wird. Stattdessen kann man auch die Pole durch Anbringen von kleinen Imaginärteilen  $i\epsilon$  von der reellen Achse wegschieben und  $D_G$  als Randwert ( $\epsilon \rightarrow 0$ ) der entsprechenden analytischen Funktion auffassen. Das entspricht genau der in A1 skizzierten Vorschrift  $\pm i0$  bei Distributionen. Für  $\tilde{D}_G(k)$  gibt es i.W. vier verschiedene Möglichkeiten für das Verschieben der Pole (beide nach oben, beide nach unten, je einen nach oben und den anderen nach unten). Es gibt daher vier linear unabhängige Funktionen  $D_G$ . Zusammen mit dem Resultat der Fourierintegration sind die entsprechenden Distributionen  $D_{(ret)}$ ,  $D_{(av)}$ ,  $D_{(c)}$ ,  $D_{(ac)}$  und eine der möglichen Linearkombinationen  $D_{(P)}$  in der Tabelle T1 angeführt.

**Tabelle T1 Greensche Funktionen der Wellengleichung**

| Name        | $\tilde{D}_G(k)$                         | $D_G(x)$  |
|-------------|--|---|
| $D_{(ret)}$ | $\frac{-1}{(k_0 - i0)^2 - \mathbf{k}^2}$ | $\frac{1}{2\pi}\theta(x_0)\delta(x^2) = \frac{\theta(x_0)}{4\pi \mathbf{x}}\delta(x_0 -  \mathbf{x} )$  |
| $D_{(av)}$  | $\frac{-1}{(k_0 + i0)^2 - \mathbf{k}^2}$ | $\frac{1}{2\pi}\theta(-x_0)\delta(x^2) = \frac{\theta(x_0)}{4\pi \mathbf{x}}\delta(x_0 +  \mathbf{x} )$ |
| $D_{(P)}$   | $P\frac{-1}{k^2}$                        | $\frac{1}{4\pi}\delta(x^2)$   |
| $D_{(c)}$   | $\frac{-1}{k^2 + i0}$                    | $\frac{-i}{4\pi^2}\frac{1}{x^2 - i0}$   |
| $D_{(ac)}$  | $\frac{-1}{k^2 - i0}$                    | $\frac{i}{4\pi^2}\frac{1}{x^2 + i0}$  |

Aus der Tabelle können die folgenden Eigenschaften abgelesen werden.  $D_{(ret)}$ ,  $D_{(av)}$ ,  $D_P$  sind reell,  $D_{(c)}$  und  $D_{(ac)}$  sind zueinander konjugiert komplex. Der Träger von  $D_{(ret)}$  ist der Zukunftslichtkegel, die Funktion entspricht einer auslaufenden Kugelwelle. Der Träger von  $D_{(av)}$  ist der Vergangenheitslichtkegel, die Funktion entspricht einer einlaufenden Kugelwelle. Der Träger von  $D_{(P)}$  ist der ganze Lichtkegel. Bei Raumspiegelungen  $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$  sind alle Funktionen der Tabelle invariant. Bei Bewegungsumkehr (= Zeitspiegelung  $x_0 \rightarrow -x_0$ ) sind  $D_{(P)}$ ,  $D_{(c)}$  und  $D_{(ac)}$  invariant. Hingegen vertauschen  $D_{(ret)}$  und  $D_{(av)}$  ihre Rolle:

$$D_{(ret)}(-x_0, \mathbf{x}) = D_{(av)}(x_0, \mathbf{x}) .$$

Die Funktion  $D_{(P)}$  ist eine einfache Linearkombination:

$$D_{(P)} = \frac{1}{2}(D_{(ret)} + D_{(av)}) = \frac{1}{2}(D_{(c)} + D_{(ac)}) .$$



**Tabelle T2 Lösungen der Wellengleichung**

| Name      | $\tilde{D}_L(k)$                   | $D_L(x)$  |
|-----------|------------------------------------|---|
| $D$       | $2\pi i \epsilon(k_0) \delta(k^2)$ | $\frac{1}{2\pi} \epsilon(x_0) \delta(x^2)$  |
| $D_{(1)}$ | $2\pi \delta(k^2)$                 | $-\frac{1}{2\pi^2} P \frac{1}{x^2}$   |
| $D^{(+)}$ | $2\pi i \theta(k_0) \delta(k^2)$   | $\frac{1}{4\pi} \left( \epsilon(x_0) \delta(x^2) + \frac{i}{\pi} P \frac{1}{x^2} \right)$ |
| $D^{(-)}$ | $-2\pi i \theta(-k_0) \delta(k^2)$ | $\frac{1}{4\pi} \left( \epsilon(x_0) \delta(x^2) - \frac{i}{\pi} P \frac{1}{x^2} \right)$ |

Die Differenz von zwei Greenschen Funktionen ist eine Lösung der Wellengleichung. Tabelle T2 enthält vier solche Lösungen, die mit den Greenschen Funktionen eng verknüpft sind. Hier sind  $D$  und  $D_{(1)}$  reell,  $D^{(+)}$  und  $D^{(-)}$  zueinander konjugiert komplex.  $D^{(+)}$  enthält nur positive Frequenzen,  $D^{(-)}$  nur negative. Alle Lösungen der Tabelle sind bei Raumpiegelungen invariant. Bei Bewegungsumkehr ist  $D_{(1)}$  invariant,  $D$  wechselt dabei das Vorzeichen. Einige nützliche Beziehungen lauten

$$\begin{aligned}
D &= D^{(+)} + D^{(-)} = D_{(ret)} - D_{(av)} \\
iD_{(1)} &= D^{(+)} - D^{(-)} = D_{(c)} - D_{(ac)} \\
D_{(ret)} &= \theta(x_0)D = D_{(c)} + D^{(-)} = D_{(ac)} + D^{(+)} \\
D_{(av)} &= -\theta(-x_0)D = D_{(c)} - D^{(+)} = D_{(ac)} - D^{(-)} \\
D_{(P)} &= \frac{1}{2} \epsilon(x_0)D \\
D_{(c)} &= \theta(x_0)D^{(+)} - \theta(-x_0)D^{(-)} = D_{(P)} + \frac{i}{2} D_{(1)} \\
D_{(ac)} &= \theta(x_0)D^{(-)} - \theta(-x_0)D^{(+)} = D_{(P)} - \frac{i}{2} D_{(1)}
\end{aligned}$$

Die Ableitung der  $D$ -Funktion

$$\delta^\mu(x) = \partial^\mu D(x)$$

wirkt als  $\delta$ -Funktion bei Integration über raumartige Hyperflächen

$$\int_{\Sigma(y)} d\sigma_\mu(y) \delta^\mu(x-y) f = f|_{\Sigma(x)} \cdot$$

Für eine Lösung  $F$  der Wellengleichung  $\square F = 0$  kann man damit die Darstellung

$$F(x) = \int_{\Sigma} d\sigma_{\mu}(y) (D(x-y) \partial^{\mu}(y) F(y) - F(y) \partial^{\mu}(y) D(x-y))$$

finden, mit der man die Funktionswerte an einer Stelle  $x$  durch die Werte von  $F$  und seiner ersten Ableitungen auf einer Hyperfläche ausdrücken kann.

## A6 Wellenpakete

Hier sollen charakteristische Eigenschaften der Wellenausbreitung in einem dispersiven Medium untersucht werden, die nicht mit der Absorption zusammenhängen. Dazu betrachten wir ein Transparenzgebiet des Mediums und vernachlässigen den Imaginärteil von  $\epsilon(\omega)$ . Wir betrachten einen Frequenzbereich mit positivem Realteil (normale Dispersion, vgl. 5.4). Dann ist der Brechungsindex  $n(\omega) = \sqrt{\epsilon(\omega)}$  reell. Eine monochromatische ebene Welle ist dann durch eine Exponentialfunktion

$$\exp(ik(\omega)\mathbf{n} \cdot \mathbf{x})$$

charakterisiert (vgl. (5.19)). Dabei ist  $\mathbf{n}$  die Ausbreitungsrichtung und  $k(\omega) = \omega n(\omega)/c$  die Wellenzahl. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle ist die Phasengeschwindigkeit

$$v = \frac{\omega}{k(\omega)} = \frac{c}{n(\omega)}.$$

Wir betrachten nun die Ausbreitung einer **Wellengruppe**, d.h. einer Überlagerung von monochromatischen Wellen mit verschiedenen Frequenzen (aus dem oben angeführten Bereich). Da sich jeder ihrer Bestandteile mit einer anderen Phasengeschwindigkeit ausbreitet, wird sich das entstehende Muster und seine Ausbreitung vom entsprechenden Verhalten einer monochromatischen Welle unterscheiden. Um die charakteristischen Eigenschaften zu erfassen, betrachten wir eine feste Ausbreitungsrichtung  $\mathbf{n}$ , die wir als  $z$ -Achse wählen ( $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = z$ ). Die Richtung von  $\mathbf{E}$  bzw.  $\mathbf{B}$  ist dann ebenfalls fixiert und wir können uns auf die Betrachtung eines skalaren Vorgangs (eine Komponente von  $\mathbf{E}$  oder  $\mathbf{B}$ ) beschränken. Wir setzen die entsprechende Wellenfunktion  $C(t, z)$  gemäß (5.14) als Überlagerung ebener Wellen mit verschiedenen

Frequenzen an. Der zur Exponentialfunktion  $\exp(ikz - i\omega t)$  konjugiert komplexe Ausdruck entspricht wegen  $\epsilon_R(\omega) = \epsilon_R(-\omega)$ ,  $k(-\omega) = -k(\omega)$  der Ersetzung  $\omega \rightarrow -\omega$ . Die Überlagerung kann daher als Integral über positive und negative Frequenzen geschrieben werden

$$C(t, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega a(\omega) \exp(ik(\omega)z - i\omega t) .$$

Die (komplexe) Amplitudenfunktion  $a(\omega)$  gibt an, mit welchem Gewicht die entsprechende Frequenz  $\omega$  in der Überlagerung enthalten ist. Mit  $a^*(\omega) = a(-\omega)$  erhält man ein reelles  $C$ . Will man ohne diese Bedingung auskommen, so muß man den Realteil bilden, um einen als Feldstärke brauchbaren Ausdruck zu erhalten. Statt einer Überlagerung in  $\omega$  kann man auch eine solche in  $k$  verwenden. Das bedeutet, daß man  $\omega$  als Funktion von  $k$  auffaßt, also die Umkehrfunktion von  $k(\omega)$  benützt. Die entsprechende Form lautet

$$C(t, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk b(k) \exp(ikz - i\omega(k)t) .$$

Die Amplitudenfunktionen sind bis auf einen Faktor dieselben

$$b(k) = \frac{d\omega(k)}{dk} a(\omega(k)) \text{ bzw. } a(\omega) = \frac{dk(\omega)}{d\omega} b(k(\omega)) .$$

Welche Form zweckmäßiger ist, hängt von der Problemstellung ab.

Durch Umkehr des Fourierintegrals erhält man

$$a(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt C(t, 0) \exp(i\omega t)$$

$$b(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dz C(0, z) \exp(-ikz) .$$

Die Amplitudenfunktion ist daher durch das Zeitverhalten der Welle bei  $z = 0$  bzw. durch das "Anfangsmuster" bei  $t = 0$  festgelegt. Ein wichtiger Sachverhalt aus der Theorie der Fourierintegrale besteht nun darin, daß die Verteilungen  $a(\omega)$  und  $C(t, 0)$  "entgegengesetzt" aussehen: einer breiten Verteilung  $C(t, 0)$  entspricht ein schmales Frequenzband  $a(\omega)$ , einem kurzzeitigen Puls (schmale Verteilen  $C(t, 0)$ ) entspricht ein breiter Frequenzbereich  $a(\omega)$ . Für das Paar  $C(0, z)$ ,  $b(k)$  ist der Zusammenhang analog. Eine einfache Illustration liefern die folgenden drei

Beispiele, für die das Fourierintegral in geschlossener Form berechnet werden kann:

$$C(0, z) = C_0 \text{ (unendlich breit)}, \quad b(k) = \frac{C_0}{2\pi} \delta(k) \text{ (unendlich scharf)}$$

$$C(0, z) = C_0 \delta(z) \text{ (unendlich scharf)}, \quad b(k) = \frac{C_0}{2\pi} \text{ (unendlich breit)}$$

$$C(0, z) = C_0 \exp(ik_0 z) \exp\left(-\frac{z^2}{d^2}\right), \quad b(k) = \frac{C_0 d}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-(k - k_0)^2 \frac{d^2}{4}\right).$$

Im letzten Fall sind die Breiten der entsprechenden Gaußverteilungen zueinander reziprok. Daraus sieht man bereits, worauf es ankommt.

Betrachten wir nun das ‘‘Schicksal’’ eines Wellenpaketes. Damit ist eine Wellengruppe gemeint, die zu einer Anfangszeit ( $t = 0$ ) auf einen beschränkten Raumbereich konzentriert ist.  $C(0, z)$  soll also außerhalb eines beschränkten Bereiches von  $z$  sehr klein sein. Ein Beispiel dafür ist die oben betrachtete Gaußverteilung, die auf die Umgebung von  $z = 0$  konzentriert ist. Die entsprechende Amplitude ist ebenfalls auf einen endlichen Bereich konzentriert. Soll dieser einigermaßen schmal ausfallen, so darf man allerdings die Halbwertsbreite  $d$  von  $C(0, z)$  nicht zu klein wählen. Zunächst betrachten wir ein Wellenpaket  $C(t, z)$  unter der Voraussetzung, daß  $\omega$  nur eine schwache Abhängigkeit von  $k$  zeigt (langsam veränderliche Funktion). Wir können dann  $\omega(k)$  in der Nähe des Maximums  $k_0$  von  $b(k)$  entwickeln:

$$\omega(k) \approx \omega(k_0) + (k - k_0)u(k_0) \text{ mit } u(k) = \frac{d\omega(k)}{dk}.$$

Die Phase kann dann in der folgenden Form geschrieben werden:

$$kz - \omega(k)t = k_0 z - \omega(k_0)t + (k - k_0)(z - ut) + \dots$$

und wir erhalten nach Einsetzen

$$C(z, t) \approx C_0 \exp\left(-\frac{(z - ut)^2}{d^2}\right) \exp(ik_0 z - i\omega(k_0)t).$$

Das entspricht einer ebenen Welle mit fester Frequenz  $\omega(k_0)$  und Wellenzahl  $k_0$ , deren Amplitude sich mit der konstanten Geschwindigkeit  $u(k_0)$  weiterbewegt. Die Intensität  $|C|^2$  breitet sich ebenfalls mit  $u$  aus. Diese Geschwindigkeit heißt die **Gruppengeschwindigkeit** und hängt mit dem Brechungsindex durch

$$u(k) = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{n(\omega) + \omega \frac{dn}{d\omega}}$$

zusammen. Für Abschätzungen vgl. Beispiel (5.8).

Ändert sich  $\omega$  mit  $k$  in dramatischer Weise (was für genügend hohe Frequenzen sicher der Fall ist), so verliert die Gruppengeschwindigkeit ihre physikalische Bedeutung, weil das Wellenpaket nicht mehr stabil bleibt, sondern seine Form im Lauf der Zeit verändert. Um das einzusehen, betrachten wir als Beispiel eine quadratische Abhängigkeit

$$\omega(k) = \omega_0 + \frac{A}{4}k^2 .$$

Das ist keine ganz unrealistische Annahme: dieses Verhalten resultiert z.B. in einem Elektronengas für Frequenzen in der Nähe der Plasmafrequenz  $\omega_P$  (dabei ist  $\omega_0 = \omega_P$ ,  $A = 2c^2/\omega_P^2$ ). Wir betrachten wieder die schon früher verwendete Gaußverteilung (und zwar der Einfachheit halber mit  $k_0 = 0$ ). Das Fourierintegral über  $k$  muß in diesem Fall nicht berechnet werden: es entsteht aus dem oben betrachteten, indem man im Exponenten

$$d^2 \rightarrow d^2 + iAt$$

ersetzt. Damit erhält man

$$C(t, z) = \frac{C_0 d}{\sqrt{d^2 + iAt}} \exp(-i\omega_0 t) \exp\left(-\frac{z^2}{d^2 + iAt}\right) = : R \exp(i\psi) .$$

Der Betrag wird

$$R(t, z) = \frac{c_0 d}{\sqrt[4]{d^4 + A^2 t^2}} \exp\left(-\frac{z^2 d^2}{d^2 + A^2 t^2}\right) .$$

Im Lauf der Zeit wird die Amplitude infolge des Nenners im ersten Faktor immer kleiner. Synchron damit wird das Paket infolge des Nenners im Exponenten immer breiter, es fließt also "auseinander". Die qualitative Eigenschaft des Auseinanderfließens tritt nicht nur für die betrachtete quadratische Frequenzabhängigkeit auf, sondern sie ist sozusagen der Normalfall für das Verhalten von Wellenpaketen (der Ausnahmefall ist eine lineare Abhängigkeit  $\omega(k)$ ). Ebenso wie das "entgegengesetzte" Verhalten einer Verteilung und ihrer Fouriertransformation handelt es sich um eine allgemeine mathematische Eigenschaft von Fourierintegralen. Die quantitativen Details hängen natürlich von der genauen Form von  $\omega = \omega(k)$  ab.

## A7 Zur historischen Entwicklung

Schon in der Antike war bekannt, daß durch Reibung aufgeladene Stücke von Bernstein (gr. elektron) Kräfte ausüben können. Ebenso wußte man von der Kraftwirkung natürlicher magnetischer Mineralien (Magnetit, gr. magnes). Genauere Untersuchungen begannen jedoch erst in der Barockzeit. Den Anstoß dazu gab W. Gilbert (1544 - 1603), der beide Kräfte untersuchte und auf ein "Ausströmen" zurückführte. Die Strömungslinien, die er zur Veranschaulichung benützte, würden wir als Feldlinien auffassen. Gilbert erkannte, daß die Erde ein Magnet sein muß, damit der Kompaß funktioniert: dieses Gerät war von den Chinesen im 11. Jh. erfunden und von den Arabern in Europa bekanntgemacht worden; es wurde von allen Seeleuten benützt. Gilberts Buch "De Magnete magnetisque Corporibus et de magno Magnete Tellure" war das erste Werk, in dem Magnetismus und Elektrizität frei von Mystik auf experimenteller Grundlage untersucht wurden (daß es heute - 400 Jahre später - immer noch Leute gibt, für die der Magnetismus mystisch und geheimnisumwittert ist, muß man leider zur Kenntnis nehmen). Gilberts Untersuchungen wurden in der Folge von anderen aufgegriffen. N. Cabeus (1585 - 1650) fand 1629 vermutlich als erster heraus, daß die elektrischen Kräfte nicht nur anziehend, sondern auch abstoßend sein können. O. Guericke (1602 - 86) erzeugte um 1672 Reibungselektrizität mit einer handgetriebenen "Maschine". St. Gray (1670 - 1736) entdeckte um 1729, daß auch isolierte Metallstücke aufgeladen werden können und daß die elektrischen Kräfte in die Ferne wirken. B. Franklin (1706 - 90) vermutete bereits 1747, daß es nicht zwei, sondern "nur eine Sorte Elektrizität" gibt, daß also die Ladung erhalten bleibt. Nach der Erfindung des Kondensators (Leydener Flasche 1745) wurde die Elektrostatik durch J. Priestley (1733 - 1804) und vor allem H. Cavendish (1731 - 1810) entwickelt, der als eigentlicher Pionier des Gebietes gelten kann. Priestley (1766) und Cavendish (1771, veröffentlicht erst 1879) fanden, daß die Kraft zwischen geladenen Körpern mit dem Quadrat des Abstandes abnimmt. Die genaue Form des Gesetzes ermittelte C.A. de Coulomb (1736 - 1806) mit seiner Drehwaage 1784 - 89. Die Untersuchung elektrischer Ströme wurde durch L. Galvani (1737 - 98) in Gang gebracht, der 1793 aus dem Zucken von Froschschenkeln auf eine Art "tierischer Elektrizität" schloß. Dies bildete den Anstoß für die Untersuchungen von A. Volta (1745 - 1827) zur Stromleitung. 1801 baute er die erste Batterie, 1802 fand er das "Ohmsche" Gesetz. Im gleichen Jahr wurde das Gesetz außerdem von J.W. Ritter (1776 -

1810) entdeckt. G.S. Ohm (1787 - 1854) hat die Stromleitungsgesetze viel später untersucht; er fand 1827 die "Kirchhoffschen" Gesetze für die Stromverzweigung. Der erste Kontakt zwischen Elektrizität und Magnetismus wurde durch H.Ch. Oerstedt (1777 - 1851) und A.M. Ampère (1775 - 1836) hergestellt, die um 1820 die magnetischen Wirkungen stromdurchflossener Leiter feststellten. Ampère entwickelte eine Theorie der Kraftwirkung zwischen stromdurchflossenen Leitern und erkannte, daß Ströme magnetische Kraftfelder hervorrufen, deren Feldlinien geschlossen sind. Er argumentierte dafür, daß alle magnetischen Felder diese Eigenschaft haben müssen, daß es daher keine "magnetischen Ladungen" geben sollte. Als Ursache für den permanenten Magnetismus vermutete er mikroskopische Kreisströme in den kleinsten Bestandteilen der Materie (was aus heutiger Sicht wirklichkeitsnah erscheint). Mit diesen Resultaten konnte man die beobachteten Phänomene (Elektrostatik, Magnetostatik, stationäre Ströme) verstehen.

Den ersten entscheidenden Schritt zur Erfassung zeitabhängiger Vorgänge und damit zur Elektrodynamik verdankt man M. Faraday (1791 - 1867). Bereits 1822 schrieb er in sein Notizbuch: *convert magnetism into electricity*. Im Jahr 1831 gelang ihm sein Vorhaben. Mit einer Vorrichtung, die eine Urform eines Transformators darstellt, konnte er zeigen, daß zeitlich veränderliche Magnetfelder zu elektrischen Feldern mit geschlossenen Feldlinien führen (Induktionsgesetz). Elektrische und magnetische Erscheinungen sind dadurch grundsätzlich und in beiden Richtungen miteinander verknüpft, Elektrizität und Magnetismus bedingen einander. Durch das Induktionsgesetz wurde der Weg zur technischen Nutzung der Elektrodynamik eröffnet. Die ersten Maschinen hat Faraday selbst entwickelt, W.v. Siemens (1816 - 92) erfand den Dynamo 1866. Die elektrische Telegrafie war schon durch die Erkenntnisse Oerstedts und Ampères möglich geworden, das Telefon wurde ab 1860 entwickelt.

Was fehlte, war eine quantitativ faßbare Theorie elektromagnetischer Felder in mathematisch präziser Form. Zwar konnte man sich Felder als Kraftfelder gut vorstellen und in Form von Feldlinien zeichnen. Vor allem Faraday hat diese Vorstellungsweise entwickelt, indem er Gilberts Linien als gerichtete Kraftlinien interpretierte. Den ersten Anstoß zu einer mathematischen Beschreibung gab C.F. Gauß (1777 - 1855) mit der feldtheoretischen Fassung des Coulombgesetzes 1839. Die weitere Entwicklung bis zur fertigen Theorie erfolgte durch J.C. Maxwell (1831 - 79). Den Ausgangspunkt bildete eine mathematische Ana-

lyse von Faradays Kraftlinien (1856). Es folgte eine präzise mathematische Fassung des Induktionsgesetzes und der Gesetze von Ampère. Maxwell stellte fest, daß die Beziehung zwischen Strom und Magnetfeld abgeändert werden muß, damit die Gleichungen auch zeitabhängige Felder richtig beschreiben. Der von ihm eingeführte Zusatzterm hat außerordentlich wichtige Konsequenzen: er führt dazu, daß sich Felder in Form transversaler Wellen durch den Raum ausbreiten. Maxwell hat alle Konsequenzen daraus selbst gezogen, er erkannte das Licht als elektromagnetischen Wellenvorgang und konnte die Existenz anderer elektromagnetischer Wellen vorhersagen. Maxwell hat seine Gleichungen im Alter von 33 Jahren gefunden und veröffentlicht. Sein berühmt gewordenes Buch "A Treatise on Electricity and Magnetism" erschien 1873. Es enthält eine vollständige und systematische Darstellung der Elektrodynamik mit vielen Anwendungen. Der Form nach hat Maxwell die Theorie als Elektrodynamik in Medien mit konstanten Materialparametern  $\epsilon, \mu$  entwickelt.

Experimentell wurden elektromagnetische Wellen mit den vorhergesagten Eigenschaften erst nach Maxwells Tod gefunden, und zwar 1888 durch H. Hertz (1857 - 94). Von da an bis zur technischen Nutzung dauerte es nicht mehr lange.

Von allen bedeutenden Erkenntnissen der Physik hat die Maxwelltheorie die Welt wohl am stärksten verändert: Elektrisches Licht, Elektromotoren, Dynamos, Telekommunikation (vom Radio über das Fernsehen bis zur Bildübertragung aus dem Weltraum), Röntgen- und Gammastrahlen, Computer usw. – das alles funktioniert nach Maxwells Gleichungen und wurde durch diese erst möglich. Die Gleichungen sind bis heute die "richtigen" Gleichungen für die Beschreibung elektromagnetischer Vorgänge geblieben: Die Relativitätstheorie war eine Konsequenz davon, in der Quantenelektrodynamik bleiben die Gleichungen als solche ebenfalls ungeändert. Sie formulieren daher einen Zusammenhang, der zu den wichtigsten der ganzen Physik gehört.

## Sachverzeichnis

|              |     |
|--------------|-----|
| Absorption   | 179 |
| skoeffizient | 181 |
| Ampère, A.M. | 42  |
| Gesetz von   | 53  |



|                          |                    |
|--------------------------|--------------------|
| Antenne                  | 119                |
| Antiferromagnetismus     | 152                |
| Äquipotentialfläche      | 17                 |
| Avancierte Potentiale    | 106                |
| Bateman, H.              | 212                |
| Bessel-Hagen, E.         | 220                |
| Bewegungsumkehr          | 212                |
| Biot-Savartsches Gesetz  | 84                 |
| Boltzmann, L.            | 173                |
| Brechung                 | 190 f.             |
| index                    | 173, 180           |
| Brewsterwinkel           | 194                |
| Brillouin, L.            | 188                |
| funktion                 | 151                |
| Clausius-Mossottiformel  | 146                |
| Cooperpaare              | 160                |
| Coulomb, C.A.            | 14                 |
| sches Gesetz             | 1                  |
| eichung                  | 62                 |
| Cunningham, E.           | 112                |
| Curie, P.                | 154                |
| sches Gesetz             | 151                |
| temperatur               | 151                |
| Curie-Weiss-Gesetz       | 152                |
| de Groot, S.R.           | 164                |
| de Kronig, R.            | 186                |
| Diamagnetismus           | 129, 149           |
| Dielektrische Funktion   | 177 f.             |
| Dielektrizitätskonstante | 122, 128, 143, 177 |
| Dipol, elektrischer      | 24                 |
| magnetischer             | 87                 |

|                               |                     |
|-------------------------------|---------------------|
| Dipolmoment, atomares         | 148                 |
| elektrisches                  | 22                  |
| magnetisches                  | 87                  |
| eingepprägtes                 | 142, 148            |
| induziertes                   | 141, 149            |
| Dispersion                    | 129                 |
| dielektrische                 | 176 f.              |
| magnetische                   | 154                 |
| sgesetz                       | 177                 |
| srelationen                   | 184 f., 187         |
| Dirac, P.A.M.                 | 225                 |
| $\delta$ -Funktion            | 231 f.              |
| string                        | 227                 |
| bedingung                     | 229                 |
| Distribution                  | 231 f.              |
| Drehimpuls                    | 69                  |
| Driftbewegung                 | 158                 |
| Drude, P.                     | 156                 |
| Duale Rotationen              | 226 f.              |
| Dualität                      | 81, 239             |
| Dyon                          | 228                 |
| Eichinvarianz                 | 57, 220             |
| transformation                | 57                  |
| Eigenschwingungen             | 199                 |
| Eindringtiefe                 | 173 f.              |
| Elektronenradius, klassischer | 29                  |
| Elektronentheorie             | 163                 |
| Elementarladung               | 2                   |
| Energie, abgestrahlte         | 108 f.              |
| bänder                        | 158                 |
| dichte                        | 28, 66, 71          |
| impulstensor                  | 68, 70, 208, 222 f. |
| schwerpunkt                   | 69                  |
| stromdichte                   | 68, 71              |

|                                   |                 |
|-----------------------------------|-----------------|
| Faraday, M.                       | 78              |
| scher Käfig                       | 18              |
| Feld, elektrisches                | 4               |
| magnetisches                      | 41, 43          |
| effektives                        | 122             |
| wirkliches                        | 165             |
| Feldgleichungen, elektrostatische | 8, 10           |
| magnetostatische                  | 79              |
| Maxwellsche                       | 52, 53, 54, 219 |
| invarianten                       | 47              |
| linien                            | 18 f.           |
| tensor                            | 43 f.           |
| dualer                            | 46              |
| Fermienergie                      | 159             |
| Fernzone                          | 115             |
| Ferrit                            | 153             |
| Ferromagnetismus                  | 151             |
| Flächenladungsdichte              | 17              |
| stromdichte                       | 133             |
| Fluß                              | 5, 236          |
| Forminvarianz                     | 50, 210         |
| Fouriertransformation             | 82              |
| Funktional, lineares              | 231             |
| ableitung                         | 216             |
| Gauß, C.F.                        | 14              |
| sches Gesetz                      | 7               |
| scher Satz                        | 238             |
| Gebundene Ladungen                | 123             |
| Greensche Funktionen              | 163, 243        |
| scher Satz                        | 238             |
| Grenzfrequenz                     | 202             |
| Gruppengeschwindigkeit            | 181, 248        |
| Gyromagnetisches Verhältnis       | 147 f.          |

|                             |             |
|-----------------------------|-------------|
| Hagen-Rubens, Formel von    | 195         |
| Halbleiter                  | 159         |
| Halleffekt                  | 135, 162    |
| Heisenberg, W.              | 151, 183    |
| Hertz, H.                   | 100, 173    |
| Hilberttransformation       | 186         |
| Hohlraumresonator           | 197 f.      |
| Impulsdichte                | 66, 68, 71  |
| stromdichte                 | 68, 71      |
| Integralsätze               | 238, 240    |
| Invarianz                   | 210 f.      |
| Inversion                   | 214         |
| Joule-Lenz-Gesetz           | 136         |
| Kausalität                  | 176, 184 f. |
| Konforme Transformation     | 213         |
| Kontinuitätsgleichung       | 34, 37, 67  |
| Kramers, H.A.               | 183, 186    |
| Ladung                      | 1           |
| frei bewegliche, gebundene  | 123, 124 f. |
| Invarianz der               | 34          |
| sbilanz                     | 34          |
| sdichte                     | 3           |
| sschwerpunkt                | 22          |
| sumkehr                     | 212         |
| Landéfaktor                 | 150         |
| Langevin, P.                | 146         |
| funktion, -Debyeformel      | 144         |
| Larmorfrequenz, -präzession | 148         |
| Leiter                      | 17, 135     |
| Leitfähigkeit               | 135, 156 f. |
| Leitungsband                | 159         |
| Lorentz, H.A.               | 42          |
| eichung                     | 59, 62      |
| kraft                       | 41, 43      |
| sche Elektronentheorie      | 163         |

|                                  |                       |
|----------------------------------|-----------------------|
| Magnetfeld                       | 41, 127               |
| Magnetisches Moment              | 87, 127, 147          |
| Magnetisierung                   | 126, 150, 206         |
| Magnetismus                      | 126, 147 f.           |
| Magnetohydrodynamik              | 205                   |
| Materialparameter                | 122, 128, 135         |
| Maxwell, J.C.                    | 78                    |
| beziehung                        | 173                   |
| gleichungen                      | 52 f., 127            |
| Minkowski, H.                    | 205                   |
| tensor                           | 208                   |
| Mittelwerte                      | 80, 127, 163 f.       |
| Mittleres Feld                   | 146                   |
| Moden                            | 118, 199              |
| Monopole, magnetische            | 51, 52, 226 f.        |
| Multipolentwicklung, elektrische | 22 f.                 |
| magnetische                      | 87 f.                 |
| Nachwirkungsfunktion             | 176                   |
| Ohmsches Gesetz                  | 136, 157, 161         |
| Paramagnetismus                  | 129, 150              |
| Paritätstransformation           | 212                   |
| Paulischer Paramagnetismus       | 151                   |
| prinzip                          | 159                   |
| Permeabilität                    | 122, 130              |
| Permanentmagnet                  | 134                   |
| Phänomenologische Theorie        | 122                   |
| Phasengeschwindigkeit            | 171, 246              |
| Phasenübergang                   | 152                   |
| Plasmafrequenz                   | 179, 182, 188, 196    |
| Polarisation (von Wellen)        | 96 f.                 |
| (elektrische)                    | 125 f., 140, 142, 206 |
| Polarisierbarkeit, atomare       | 141                   |
| Potential, Coulomb-              | 11                    |
| elektrisches, skalares           | 10                    |
| magnetisches, skalares           | 134                   |
| Vektor-                          | 57                    |
| Vierer-                          | 56                    |

|                                      |                         |
|--------------------------------------|-------------------------|
| Poyntingvektor                       | 71, 108                 |
| Probeladung                          | 1                       |
| Punktladung                          | 3                       |
| Quadrupolmoment                      | 22                      |
| Quantenelektrodynamik                | 1                       |
| Quantentheorie                       | 121, 142, 147, 150, 166 |
| Quarks                               | 3                       |
| Quasistatische Zone                  | 116                     |
| Quellen                              | 52, 124                 |
| Randbedingungen an Isolatoren        | 130 f.                  |
| an Leitern                           | 137 f.                  |
| Raumspiegelung                       | 212                     |
| Reflexionskoeffizient                | 192                     |
| Retardierte Potentiale               | 104                     |
| Rydbergenergie                       | 154                     |
| Sättigung                            | 144, 152                |
| Schwinger, J.                        | 230                     |
| SI (Internat. Maßsystem), Formeln im | 32, 77, 167             |
| Skalares Potential                   | 10, 134                 |
| Skalentransformation                 | 212 f.                  |
| Skineffekt                           | 139, 175                |
| Snellius, Gesetz von                 | 193                     |
| Sommerfeld, A.                       | 188                     |
| Spin                                 | 148                     |
| Sprungtemperatur                     | 160                     |
| Statik, Elektro-                     | 1 f., 79                |
| Magneto-                             | 79, 81 f.               |
| stationär                            | 79                      |
| Stirnfront                           | 92                      |
| Stokesscher Satz                     | 238                     |
| Strahlungseichung                    | 60, 62                  |
| feld                                 | 107                     |
| intensität, -leistung                | 108 f.                  |
| rate                                 | 111                     |
| String                               | 227                     |
| Stromdichte                          | 33                      |
| wärme                                | 136                     |
| Subtraktionskonstanten               | 184                     |

|                              |                       |
|------------------------------|-----------------------|
| Summenregel                  | 182, 187              |
| Superpositionsprinzip        | 5, 13                 |
| Supraleitung                 | 160                   |
| Suttorp, L.G.                | 164                   |
| Suszeptibilität, elektrische | 128 f.                |
| magnetische                  | 129 f., 151 f.        |
| Synchrotronstrahlung         | 169                   |
| TE-Wellen                    | 201                   |
| Titchmarsh, E.C.             | 185                   |
| TM-Wellen                    | 201                   |
| Toll, J.S.                   | 188                   |
| Totalreflexion               | 194                   |
| Transmissionskoeffizient     | 192                   |
| Transversalität              | 60, 96, 105           |
| Vektorpotential              | 57                    |
| Verschiebung, elektrische    | 125                   |
| sstrom                       | 53 f.                 |
| Voigt, W.                    | 188                   |
| Wellen, ebene                | 92                    |
| elektromagnetische           | 90 f., 169 f., 176 f. |
| Kugel-                       | 94 f.                 |
| TE-, TM-                     | 201                   |
| leiter                       | 201                   |
| pakete                       | 246                   |
| zone                         | 115                   |
| Widerstand, spezifischer     | 135, 160              |
| Winkelverteilung             | 108                   |
| Wirkung                      | 215 f., 218           |
| Zeitspiegelung               | 212                   |
| Zirkulation                  | 9, 236                |