

Kapitel 1

Elektrostatik

1.1 Das Coulombsche Gesetz, elektrostatisches Feld

Zur Einführung verschiedener Grundbegriffe betrachten wir zunächst einmal die Kraft, die zwischen zwei Ladungen q_1 an der Position \vec{r}_1 und q_2 an der Position \vec{r}_2 wirkt. Aus der Experimentalphysik ist das Coulombsche Gesetz für diese Kraft bekannt. Danach wirkt auf die Ladung q_1 durch die Wechselwirkung mit der Ladung q_2 die Kraft

$$\boxed{\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}} \quad (1.1.1)$$

Dieses Coulombsche Gesetz beinhaltet insbesondere die folgenden Aussagen:

- a) Die Stärke der Kraft ist proportional dem Produkt der beteiligten Ladungen:
 $|\vec{F}_{12}| \sim q_1 q_2$.
- b) Die Stärke der Kraft ist invers proportional zum Quadrat des Abstandes der beiden Ladungen: $|\vec{F}_{12}| \sim |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^{-2}$.
- c) Die Richtung der Kraft ist parallel beziehungsweise antiparallel zum Einheitsvektor in Richtung der Verbindungslinie von der Position \vec{r}_2 zur Position der Ladung, auf die die Kraft ausgeübt wird (\vec{r}_1 , siehe auch Abbildung 1.1: $\vec{F}_{12} \sim \hat{e}_{12} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$).
- d) Haben also beide Ladungen das gleiche Vorzeichen (die Proportionalitätskonstante k im Coulombschen Gesetz ist positiv), so wird die Ladung q_1 durch die Kraft \vec{F}_{12} abgestoßen. Haben die beiden Ladungen unterschiedliches Vorzeichen (sei z. B. q_1 die Ladung eines Elektrons, d. h. $q_1 < 0$, und q_2 die Ladung eines Protons, $q_2 > 0$), so wird die Ladung q_1 von der Ladung q_2 angezogen.

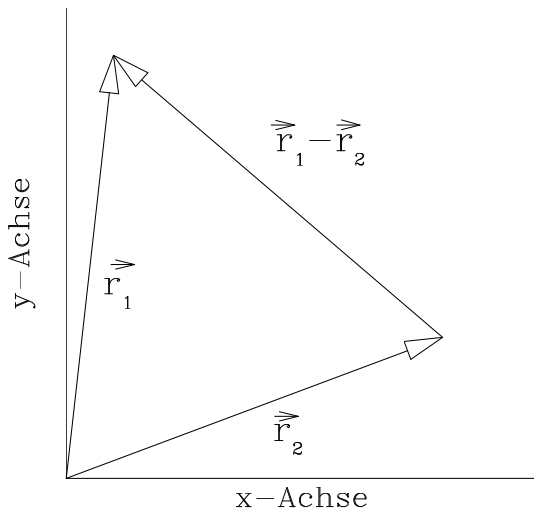


Abbildung 1.1: Kraft auf Ladung 1 von 2

Das Coulombsche Gesetz ist natürlich verträglich mit den Newtonschen Gesetzen der Mechanik. So gilt für die Kraft, die von der Ladung q_1 auf die Ladung q_2 ausgeübt wird („actio = reactio“)

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}. \quad (1.1.2)$$

Das Coulombsche Gesetz stellt eine Beziehung her zwischen mechanischen und elektrostatischen Größen. Daher kann diese Beziehung benutzt werden, um die Einheiten, in denen wir die die Ladungen angeben wollen, festzusetzen.

In dem von uns verwendeten *Gaußschen Maßsystem*, auch CGS-System (Centimeter-Gramm-Sekunde) genannt, nehmen wir dazu an, daß die Proportionalitätskonstante k in Beziehung (1.1.1) dimensionslos ist und setzen sie gleich eins: $k = 1$.

Aus (1.1.1) folgt

$$q_1 q_2 = \frac{|\vec{F}_{12}| |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2}{k} \quad (1.1.3)$$

Bezeichnen wir die Einheiten, in denen eine Größe x gemessen wird mit $[x]$, so ergibt sich, wenn wir die Kraft (=Masse mal Beschleunigung) in Gramm (g) Centimeter (cm) pro Sekunde (s) zum Quadrat angeben

$$\begin{aligned} [q_1 q_2] &= 1 \text{ g} \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} \text{ cm}^2 \\ \Rightarrow [q] &= 1 \sqrt{\text{g} \frac{\text{cm}^3}{\text{s}^2}} \\ &= 1 \text{ esu (electrostatical unit)}. \end{aligned}$$

In diesem Maßsystem besitzt z.B. ein Elektron die Ladung $q_e = -4,803 \cdot 10^{-10}$ esu.

Betrachtet man N Ladungen, die sich an den Stellen $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$ befinden, so gilt nach dem Superpositionsprinzip für die Kraft auf eine Probeladung q :

$$\vec{F}_q(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{qq_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}. \quad (1.1.4)$$

Ziel ist es, eine Meßgröße für das Kraftfeld zu finden, das durch die N Ladungen q_i an den Positionen \vec{r}_i erzeugt wird. Der Betrag dieser Kraft ist abhängig von der Größe der Probeladung q . Außerdem wird das Einbringen einer Probeladung die Verteilung der anderen Ladungen und damit das Feld der N Ladungen beeinflussen. Deshalb definiert man das *elektrische Feldes* \vec{E} an der Stelle \vec{r} :

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}_q(\vec{r})}{q}}. \quad (1.1.5)$$

Die Grenzwertbildung drückt aus, daß die Probeladung q verschwindend klein sein muß, um die Ladungsverteilung, die das Kraftfeld erzeugt, nicht zu stören.

Das elektrische Feld ist ein Vektorfeld, für das die aus der Mechanik bekannten Transformationseigenschaften gelten. Beispielsweise beschreibt man also die Transformation des elektrischen Feldes bei einer Drehung des Koordinatensystems durch die Multiplikation mit der zugehörigen Drehmatrix.

Graphisch darstellen läßt sich das elektrische Feld durch *Feldlinien*, die folgende Eigenschaften besitzen:

- a) Die Richtung der Feldlinien gibt die Richtung des \vec{E} -Feldes an der Position der Feldlinien an.
- b) Die Zahl der Feldlinien durch eine Einheitsfläche senkrecht zu ihnen ist ein Maß für den Betrag von \vec{E} an dieser Stelle.
- c) Da eine positive Probeladung von positiven Punktladungen abgestoßen wird, sind diese positiven Punktladungen Ausgangspunkte von Feldlinien. Entsprechend sind negative Punktladungen Endpunkte von Feldlinien. Man spricht auch von *Quellen* und *Senken* des elektrischen Feldes.

Das elektrische Feld von N Punktladungen berechnet sich nach dem Superpositionsprinzip zu

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}. \quad (1.1.6)$$

Statt diskreter Punktladungen treten oft kontinuierliche Ladungsverteilungen auf. An die Stelle der Summation tritt nun die Integration über die räumliche Verteilung der

Ladung. Diese bezeichnen wir als *Ladungsdichte* $\rho(\vec{r}')$, die die Ladung pro Volumen an \vec{r}' im infinitesimalen Volumenelement $d^3\vec{r}'$ angibt. Die Ladungsdichte wird also angegeben in Einheiten von Ladung pro Volumen. Wir erhalten für das elektrische Feld einer Ladungsverteilung:

$$\vec{E} = \int d^3\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (1.1.7)$$

Integriert man die Ladungsdichte über ein Volumen V , so erhält man die Gesamtladung in diesem Volumen:

$$\int_V d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}') = Q.$$

1.1.1 Die Delta-Funktion

Wie läßt sich die Ladungsdichte von einzelnen Punktladungen mathematisch beschreiben? Man benutzt dafür die *Delta-Funktion*, die von Paul Dirac in Analogie zum Kronecker-Symbol δ_{ik} als Verallgemeinerung für kontinuierliche Indizes eingeführt wurde. Es ergibt sich für die Ladungsdichte von Punktladungen:

$$\rho(\vec{r}') = \sum_i q_i \cdot \delta(\vec{r}' - \vec{r}_i),$$

wobei die \vec{r}_i die Orte bezeichnen, an denen die einzelnen Punktladungen angebracht sind.

Im folgenden soll auf die wichtigsten Eigenschaften der Delta-Funktion eingegangen werden. Genaugenommen ist sie weder eine *Funktion* im üblichen Sinne noch im Riemannschen Sinne integrierbar. Sie stellt jedoch ein wichtiges mathematisches Hilfsmittel dar und wird exakt im Rahmen der Distributionentheorie behandelt.

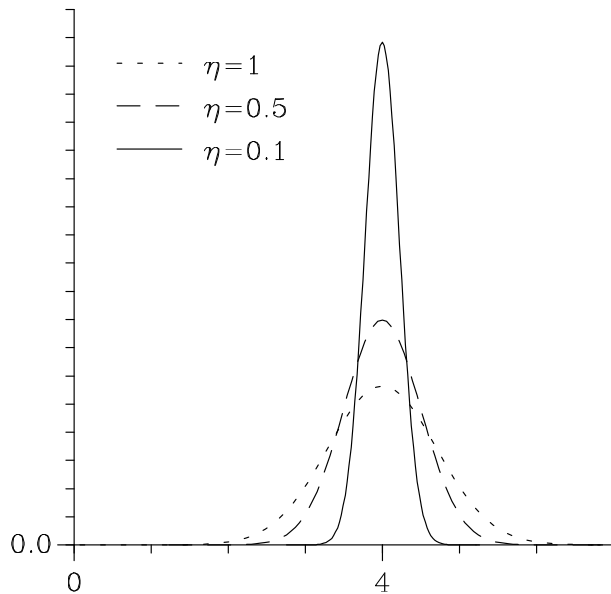
1. Betrachten wir zunächst den eindimensionalen Fall. Eine Definitionsgleichung für die Delta-Funktion lautet

$$\int_a^b dx \delta(x - x_0) f(x) = \begin{cases} f(x_0) & \text{falls } x_0 \in [a, b] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

2. Man kann sich die Delta-Funktion aus einer Folge von Gauß-Kurven entstanden denken, deren Halbwertsbreite η immer kleiner wird, der Flächeninhalt jedoch gleich bleibt (vgl. Figur 1.2):

$$\delta(x - a) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\pi\eta}} \cdot \exp\left(-\frac{(x - a)^2}{\eta}\right).$$

Der Vorfaktor $1/\sqrt{\pi\eta}$ ist ein Normierungsfaktor, der dafür sorgt, daß das Integral über die ganze reelle Achse für die jeweilige Gauß-Kurve immer auf 1 normiert ist.

Abbildung 1.2: δ Funktion als Grenzfall von Gauß Funktionen ($a=4$)

3. Ist das Argument der Delta-Funktion eine Funktion $y(x)$, die im betrachteten Intervall $[a, b]$ bei x_i eine einfache Nullstelle besitzt (d.h. $y(x_i) = 0, y'(x_i) \neq 0$), so gilt:

$$\delta(y(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{\left| \frac{d}{dx} y \right|_{x_i}}.$$

Beispiel: $y(x) = x^2 - a$, mit den Nullstellen $x_{1/2} = \pm\sqrt{a}$. Einsetzen:

$$\left| \frac{dy}{dx} \right| = |2x|_{x_{1/2}} = 2\sqrt{a}$$

$$\delta(x^2 - a) = \frac{1}{2\sqrt{a}} \left(\delta(x - \sqrt{a}) + \delta(x + \sqrt{a}) \right).$$

4. Im dreidimensionalen Fall gelten

$$\delta(\vec{r}' - \vec{r}) = \begin{cases} \infty & \text{falls } \vec{r} = \vec{r}' \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Stellt man die Vektoren im Argument der Delta-Funktion durch kartesische Koordinaten dar, so ergibt sich die Delta-Funktion im 3-dimensionalen Raum als Produkt

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \delta(x - x_0) \cdot \delta(y - y_0) \cdot \delta(z - z_0).$$

Die Darstellung ist etwas komplizierter im Fall von krummlinigen Koordinaten (u, v, w) . In diesem Fall betrachten wir einen Ansatz für die Delta-Funktion der Form:

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \Gamma(u, v, w) \delta(u - u_0) \cdot \delta(v - v_0) \cdot \delta(w - w_0). \quad (1.1.8)$$

Falls \vec{r}_0 im betrachteten Integrationsvolumen V liegt muß gelten

$$\begin{aligned} 1 &= \int_V d^3r \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \\ &= \int_V du dv dw \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \Gamma(u, v, w) \delta(u - u_0) \cdot \delta(v - v_0) \cdot \delta(w - w_0) \end{aligned}$$

Dabei erhalten wir durch die Anwendung der Substitutionsregel für das Volumenelement d^3r im zweiten Teil dieser Gleichung

$$d^3r = dx dy dz = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} du dv dw$$

die Funktionaldeterminante oder auch Jakobideterminante

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \partial_u x & \partial_v x & \partial_w x \\ \partial_u y & \partial_v y & \partial_w y \\ \partial_u z & \partial_v z & \partial_w z \end{vmatrix}$$

Dabei haben wir für die Ableitungen die abkürzende Schreibweise benutzt:

$$\partial_u x = \frac{\partial x}{\partial u}. \quad (1.1.9)$$

Es ist klar, daß die Gleichung (1.1.9) genau dann erfüllt wird, wenn wir in dem Ansatz (1.1.8) einsetzen

$$\Gamma(u, v, w) = \left(\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \Big|_{r_0} \right)^{-1}$$

Mit dieser Regel ergibt sich zum Beispiel für die Delta-Funktion in Kugelkoordinaten

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{1}{r_0^2 \sin \vartheta_0} \delta(r - r_0) \delta(\vartheta - \vartheta_0) \delta(\varphi - \varphi_0).$$

1.2 Differentialoperatoren und Integralsätze

Es sollen nun einige mathematische Voraussetzungen geschaffen werden, die für die Beschreibung elektrostatischer (und elektrodynamischer) Effekte notwendig sind.

Als **Beispiel** zur Motivation wollen wir zunächst die mathematische Beschreibung der Ladungserhaltung diskutieren: Sei V ein Volumen mit der Oberfläche O und der Raumladungsdichte $\varrho(\vec{r})$. Die Gesamtladung in diesem Volumen V ($Q(V)$) ist also das Integral der Ladungsdichte über das Volumen V :

$$Q(V) = \int_V \varrho(\vec{r}) dV$$

Ändert sich nun diese Ladung in V mit der Zeit ($dQ/dt \neq 0$), so kann dies wegen der Ladungserhaltung nur so geschehen, daß durch die Oberfläche von V ein Strom \vec{j} fließt. Übersetzt in die Sprache der Mathematik bedeutet dies:

$$\frac{d}{dt}Q(V) = \frac{d}{dt} \int_V \varrho(\vec{r}) dV = - \oint_O \vec{j} \cdot d\vec{f} \quad (1.2.10)$$

Das letzte Integral ist ein **Flächenintegral**, das als "Wächter" beobachtet, wieviel Ladung durch die Oberfläche in das Volumen hineinfließt (der Integrand $\vec{j} \cdot d\vec{f}$ muß dann negativ sein) oder aus diesem herausfließt (der Integrand ist in diesem Fall positiv, d.h. \vec{j} steht parallel zu $d\vec{f}$). Bei der Definition des Flächenintegrals sollte also der Vektor $d\vec{f}$ senkrecht zur Oberfläche stehen und nach außen weisen.

1.2.1 Das Flächenintegral

Mit dem Flächenintegral (auch Flußintegral)

$$\Phi = \int_F \vec{A} \cdot d\vec{f} \quad (1.2.11)$$

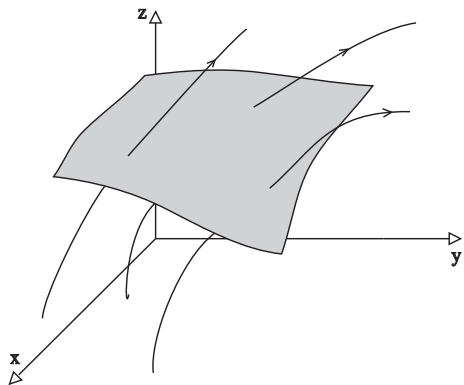


Abbildung 1.3: Flächenintegral eines Vektorfeldes

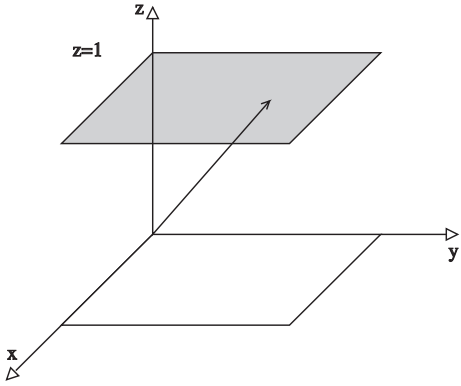


Abbildung 1.4: Parametrisierung der Abbildung des Einheitsquadrates

wird der Fluß von \vec{A} durch F beschrieben, wobei \vec{A} ein beliebiges Vektorfeld und F eine Fläche im dreidimensionalen Raum sein soll. (s. Abb 1.3). Dabei ist der Betrag von $d\vec{f}$ ein infinitesimales Flächenstück, dessen Richtung senkrecht zur Fläche steht. Zur Berechnung von Φ muß die Fläche parametrisiert und anschließend $d\vec{f}$ bestimmt werden.

a) Analog der Parametrisierung eines Linienintegrals wird auch hier die Fläche F parametrisiert dadurch daß wir die Ortsvektoren, die auf dieser Fläche enden, als Funktion von 2 Parametern darstellen:

$$F := \{\vec{r}(u, v); \quad u \in [u_0, u_1], \quad v \in [v_0, v_1]\} \quad (1.2.12)$$

Dabei ist die Parametrisierung $(\vec{r}(u, v))$ eine Abbildung der ebenen Fläche UV in die gekrümmte Fläche F im \mathcal{R}^3 .

Beispiele :

1. Sei F ein Einheitsquadrat parallel zur x - y -Ebene durch $z = 1$ (s. Abb. 1.4), so lautet die entsprechende Flächenparametrisierung

$$F_{\square} = \left\{ \vec{r} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} u \in [u_0, u_1] \\ v \in [v_0, v_1] \end{array} \right\}$$

2. Sei F_0 die Oberfläche einer Kugel mit Radius R , dann lautet die Flächenparametrisierung

$$F_0 = \left\{ \vec{r} = \begin{pmatrix} R \sin \vartheta \cos \varphi \\ R \sin \vartheta \sin \varphi \\ R \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \vartheta \in [0, \pi] \\ \varphi \in [0, 2\pi] \end{array} \right\}$$

b) Nachdem wir zunächst einmal die Fläche parametrisiert haben, wollen wir nun die Differentialform $d\vec{f}$ bestimmen. Dazu konstruieren wir zunächst einmal in jedem Punkt der Fläche 2 linear unabhängige Vektoren, $d\vec{a}$ und $d\vec{b}$, die tangential zur Fläche stehen:

$$\begin{aligned}d\vec{a} &= \vec{r}(u + du, v) - \vec{r}(u, v) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du \\d\vec{b} &= \vec{r}(u, v + dv) - \vec{r}(u, v) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dv.\end{aligned}$$

Damit ist

$$d\vec{f} = \pm d\vec{a} \times d\vec{b}. \quad (1.2.13)$$

Forderung : Das Vorzeichen soll so gewählt werden, daß $d\vec{f}$ bei geschlossenen Flächen nach außen zeigen soll.

Betrachten wir die Kugelfläche: Mit der Parametrisierung nach obigem Beispiel gilt

$$\begin{aligned}d\vec{a} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} d\vartheta = R \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi d\vartheta \\ -\sin \vartheta \end{pmatrix} d\vartheta, \\d\vec{b} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} d\varphi = R \begin{pmatrix} -\sin \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \cos \varphi d\varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi \\ \Rightarrow d\vec{f} &= \pm R^2 \begin{pmatrix} \sin^2 \vartheta \cos \varphi \\ \sin^2 \vartheta \sin \varphi d\vartheta \\ -\sin \vartheta \cos \varphi \end{pmatrix} d\vartheta d\varphi \\ &= +R^2 \sin \vartheta \hat{e}_x d\vartheta d\varphi.\end{aligned}$$

Das positive Vorzeichen ergibt sich mit der oben genannten Forderung.

c) Mit diesen Überlegungen folgt nun für das Flächenintegral über eine Kugelfläche O mit einem Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r}) = a\vec{r}$

$$\begin{aligned}\oint_O \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{f} &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi aR\hat{e}_r R^2 \sin \vartheta \hat{e}_r d\vartheta d\varphi \\ &= aR^3 \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= 4\pi aR^3.\end{aligned}$$

1.2.2 Divergenz

Mit dieser Definition des Flächenintegrals können wir nun Aussagen machen, an welchen Stellen ein Vektorfeld \vec{A} Quellen besitzen muß. Analog zu dem Beispiel, daß das Vektorfeld \vec{A} den Fluß einer Flüssigkeit beschreibt, sagen wir, daß das Vektorfeld \vec{A} in all den Volumina eine Quelle haben muß aus denen mehr herausfließt als hineinfließt. Bei diesen Volumina ist also das Integral des Vektorfeldes über die Oberfläche des Volumens positiv. Liefert dieses Oberflächenintegral einen negativen Wert, so sagen wir, daß das Vektorfeld in dem betrachteten Volumen eine Senke besitzt. Um die Quellen (Senken) genauer zu lokalisieren, betrachten wir eine Folge von Volumina ΔV , die alle einen Punkt \vec{r}_0 enthalten, und deren Volumen kleiner wird. Dies erlaubt uns die Quellstärke oder **Divergenz** des Vektorfeldes im Punkte \vec{r}_0 zu definieren als

$$\operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}_0) := \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_O \vec{A}(\vec{r}_0) \cdot d\vec{f}, \quad (1.2.14)$$

wobei das Integral jeweils über die Oberfläche von ΔV zu berechnen ist. Für diese Definition gilt also:

- $\operatorname{div} \vec{A}$ ist eine skalare Größe,
- $\operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}_0) > 0 \iff \vec{A}$ hat Quellen in \vec{r}_0 ,
- $\operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}_0) < 0 \iff \vec{A}$ hat Senken in \vec{r}_0 ,
- $\operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}_0) = 0 \iff \vec{A}$ ist quellenfrei in \vec{r}_0 .

Die Definition 1.2.14 ist natürlich sehr umständlich für eine explizite Berechnung der Quellstärke. Wie wir aber in der folgenden Behauptung sehen, gibt es sehr einfache Methoden zur Berechnung der Divergenz.

Behauptung: Beschreibt man das Vektorfeld \vec{A} in kartesischen Koordinaten und kartesischen Einheitsvektoren \hat{e}_i

$$\begin{aligned} \vec{A} &= A_x \hat{e}_x + A_y \hat{e}_y + A_z \hat{e}_z && \text{so gilt:} \\ \operatorname{div} \vec{A} &= \partial_x A_x + \partial_y A_y + \partial_z A_z \\ &= \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \cdot \vec{A} \\ &= \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \end{aligned}$$

auch hier haben wir zur Abkürzung für die Ableitungen die Schreibweise von (1.1.9) gewählt. Die Schreibweise der Divergenz mit dem Nabla Operator $\vec{\nabla}$ erinnert an die

Berechnung des Gradienten eines skalaren Feldes u in kartesischen Koordinaten:

$$\text{grad } u = \vec{\nabla} u = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} u$$

Beweis: Zum Beweis betrachten wir eine Folge von kubischen Volumina mit dem Punkt \vec{r}_0 in einer Ecke und Seiten gegeben durch die Intervalle $[x_0, x_0 + \Delta x]$, $[y_0, y_0 + \Delta y]$, $[z_0, z_0 + \Delta z]$ (siehe auch Figur 1.5). Das Volumen dieser Würfel ist $\Delta V = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$

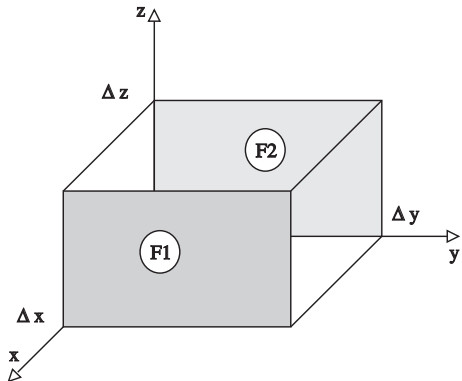


Abbildung 1.5: Das Volumen ΔV zum Berechnung der Divergenz in kartesischen Koordinaten

Das Integral des Vektorfeldes \vec{A} integriert über die Oberfläche O dieses Würfels läßt sich aufteilen in die Beiträge über die 6 Teilflächen des Würfels: F_i

$$\int_O \vec{A} \cdot d\vec{f} = \sum_i \int_{F_i} \vec{A} \cdot d\vec{f}, \quad F_i: \text{Oberflächen von } V.$$

Für die Flächen F_1 und F_2 (beide parallel zur yz Ebene) gilt nach geeigneter Parametrisierung:

$$\begin{aligned} \int_{F_1, F_2} \vec{A} \cdot d\vec{f} &= \int_{F_1} \vec{A}(x_0 + \Delta x, y, z) \cdot d\vec{f} + \int_{F_2} \vec{A}(x_0, y, z) \cdot d\vec{f} \\ &= \int_{z_0}^{z_0 + \Delta z} \int_{y_0}^{y_0 + \Delta y} A_x(x_0 + \Delta x, y, z) dy dz + \int_{z_0}^{z_0 + \Delta z} \int_{y_0}^{y_0 + \Delta y} -A_x(x_0, y, z) dy dz \\ &= \int_{z_0}^{z_0 + \Delta z} \int_{y_0}^{y_0 + \Delta y} \left[A_x(x_0, y, z) dx dz + \frac{\partial A_x(\vec{r}_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 A_x(\vec{r}_0)}{\partial x^2} (\Delta x)^2 + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + (-A_x(x_0, y, z)) \right] dy dz \end{aligned}$$

wobei in der letzten Zeile $A_x(x_0 + \Delta x, y, z)$ nach Taylor entwickelt wurde. Da $\Delta x \ll 1$ gelten soll, kann die Reihe nach der ersten Ordnung abgebrochen werden.

$$\begin{aligned} \implies \int_{F_1, F_2} \vec{A} \cdot d\vec{f} &= \int \frac{\partial}{\partial x} A_x(\vec{r}_0) \Delta x \, dy dz \\ &= \frac{\partial}{\partial x} A_x(\vec{r}_0) \Delta x \Delta y \Delta z \\ &= \frac{\partial}{\partial x} A_x(\vec{r}_0) \Delta V. \end{aligned}$$

Analog erhält man die Flächenintegrale für die vier weiteren Flächen. Eingesetzt in die Definition der Divergenz (1.2.14) folgt:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{A} &= \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_O \vec{A}(\vec{r}_0) \cdot d\vec{f} \\ &= \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \left(\frac{\partial}{\partial x} A_x(\vec{r}_0) + \frac{\partial}{\partial y} A_y(\vec{r}_0) + \frac{\partial}{\partial z} A_z(\vec{r}_0) \right) \Delta V \quad \square \end{aligned}$$

Achtung: Diese Darstellung der Divergenz gilt nur in kartesischen Koordinaten!

In Kugelkoordinaten gilt z.B.:

$$\text{mit } \vec{A} = A_r \hat{e}_r + A_\vartheta \hat{e}_\vartheta + A_\varphi \hat{e}_\varphi \quad (1.2.15)$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta A_\vartheta) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} A_\varphi. \quad (1.2.16)$$

Obwohl also die Divergenz in Kugelkoordinaten recht wüst aussieht, kann es sich als zweckmäßig herausstellen mit ihr zu rechnen.

Beispiel: Als Beispiel für die Berechnung der Divergenz in verschiedenen Koordinatensystemen betrachten wir die Kraft auf eine Probeladung $q = 1$ an der Position \vec{r} , die durch Ladung $q_1 = 1$ an der Position in $\vec{r}_1 = \vec{0}$ ausgeübt wird:

$$\vec{F} = \frac{q q_1}{|\vec{r}|^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

a) in kartesischen Koordinaten gilt:

$$F_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}; \quad F_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}; \quad F_z = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}.$$

Mit $\operatorname{div} \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x} F_x + \frac{\partial}{\partial y} F_y + \frac{\partial}{\partial z} F_z$ ist dann

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{3}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} - \frac{3(x^2+y^2+z^2)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^5} = 0.$$

Die letzte Gleichung gilt natürlich nur für Vektoren $\vec{r} \neq 0$, da im Fall $\vec{r} = 0$ auch der Nenner identisch 0 wird, die Divergenz von \vec{F} ist also in diesem Fall noch nicht definiert.

b) in Kugelkoordinaten gilt:

$$\vec{F} = F_r \hat{e}_r = \frac{1}{r^2} \hat{e}_r; \quad F_\vartheta = F_\varphi = 0!$$

Mit Glg.(1.2.16) ist also

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{1}{r^2} \right) = 0, \quad (1.2.17)$$

was offensichtlich einfacher zu rechnen ist. Auch hier ist natürlich der Vorbehalt zu machen, daß wir nur Vektoren $\vec{r} \neq 0$ betrachten; den Fall $\vec{r} = 0$ werden wir weiter unten noch einmal aufgreifen

1.2.3 Der Gaußsche Integralsatz

Sei O die Oberfläche eines Volumens V und $\vec{A}(\vec{r})$ ein Vektorfeld. Der Gaußsche Integralsatz ist nun eine Umrechnungsbeziehung zwischen Flächen- und Volumenintegral :

$$\boxed{\oint_O \vec{A} \cdot d\vec{f} = \int_V \operatorname{div} \vec{A} dV} \quad (1.2.18)$$

Die linke Seite der Gleichung stellt den Fluß des Vektorfeldes aus der geschlossenen Oberfläche O dar, die rechte Seite der Gleichung ist das Volumenintegral über die Divergenz des Vektorfeldes im ganzen Volumen V .

Beweis: Wegen der Linearität des Integrals gilt

$$\int_V \operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}) dV = \sum \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \int_{\Delta V_i} \operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}) dV \quad (1.2.19)$$

wo V in n Teile ΔV_i zerlegt wurde, die das ganze Volumen V ausschöpfen.

Dann folgt bei immer feinerer Zerlegung die Riemannsche-Summe (mit \vec{r}_i einem Punkt in V_i)

$$\begin{aligned} \int_V \operatorname{div} \vec{A} dV &= \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \sum_i \operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}_i) \Delta V_i \\ &\stackrel{\text{(Glg. 1.2.14)}}{=} \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \sum_i \frac{1}{\Delta V_i} \oint_O \vec{A} \cdot d\vec{f} \Delta V_i = \int_O \vec{A} \cdot d\vec{f}; \end{aligned}$$

letzteres, da sich die beiden Integrale über die gemeinsame Grenzfläche zweier aneinandergrenzender Volumina wegen ihrer antiparallelen Flächennormalen gegenseitig kompensieren. \square

Mit den nun gewonnenen mathematischen Kenntnissen noch einmal zurück zur Kontinuitätsgleichung (1.2.10), die wir zu Beginn dieses Abschnittes formuliert haben. Wir

hatten gesagt, daß die zeitliche Änderung der Ladung in einem Volumen V begleitet sein muß von einem entsprechenden Strom \vec{j} durch die Oberfläche des konstanten Volumens

$$\frac{d}{dt}Q(V) = \frac{d}{dt} \int_V \varrho(\vec{r}) dV = - \oint_O \vec{j} \cdot d\vec{f} = - \int_V \operatorname{div} \vec{j} dV, \quad (1.2.20)$$

wobei wir bei dem letzten Teil dieser Gleichung den Gaußschen Satz angewandt haben. Da diese Gleichung für all Volumina V gelten muß, können wir die Integranden der beiden Volumenintegrale in dieser Beziehung gleich setzen oder auch schreiben

$$\boxed{\frac{d}{dt} \varrho(\vec{r}) + \operatorname{div} \vec{j} = 0.} \quad (1.2.21)$$

Dies ist die **differentielle Form der Kontinuitätsgleichung**, die im übrigen nicht nur in der Elektrodynamik eine Rolle spielt.

Mit den oben eingeführten Werkzeugen läßt sich noch folgende interessante Behauptung beweisen:

Sei \vec{F} ein Vektorfeld mit $\vec{F} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} = \frac{1}{r^2} \hat{e}_r$, dann ist

$$\operatorname{div} \vec{F} = 4\pi \delta(\vec{r}). \quad (1.2.22)$$

Beweis: Bereits in Gleichung (1.2.17) haben wir gezeigt, daß $\operatorname{div} \vec{F}$ identisch 0 ist für alle Vektoren $\vec{r} \neq 0$. Betrachten wir nun eine Kugel mit Radius R , Volumen V um $\vec{r} = 0$, dann ist

$$\int_V \operatorname{div} \vec{F} dV \stackrel{\text{Gaußscher Satz}}{=} \oint_O \vec{F} \cdot d\vec{f} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{R^2} \hat{e}_r R^2 \sin \vartheta \hat{e}_r d\vartheta d\varphi = 4\pi$$

Wobei $R = r$ mit der Begründung benutzt wurde, daß die Kugeloberfläche in den Aufpunkt \vec{r} gelegt wird.

Mit der Definition der δ -Funktion folgt die Behauptung. \square

1.2.4 Die Rotation

Ähnlich wie bei dem oben definierten Flächenintegral müssen wir auch bei der Berechnung des Wegintegrals für ein Vektorfeld \vec{A} entlang eines Weges τ zunächst einmal den Weg parametrisieren, in dem wir die Folge von Vektoren, die unseren Weg τ definieren darstellen als Funktion einer Variablen t , unter die wir uns zB. die Zeit vorstellen

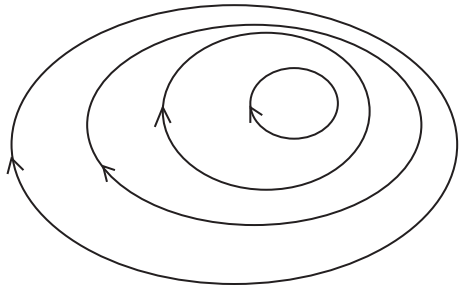


Abbildung 1.6: Nicht wirbelfreies Vektorfeld \vec{A}_1 : $\oint_{\tau} \vec{A}_1 \cdot d\vec{s} \neq 0$

können, die bei der “Wanderung” entlang des Weges vom Startwert t_0 bis zum Endwert t_1 anwächst:

$$\tau := \{\vec{r}(t); \quad t \in [t_0, t_1]\} \quad (1.2.23)$$

Mit dieser Parametrisierung berechnet sich das Wegintegral

$$\int_{\tau} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{A}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt \quad (1.2.24)$$

Solche Linienintegrale sind uns bereits in der Mechanik begegnet, ist zB. \vec{A} ein Kraftfeld, so ergibt das Integral in Gleichung (1.2.24) die Arbeit, die in diesem Kraftfeld entlang des Weges τ geleistet wird.

Ist das Vektorfeld \vec{A} charakterisiert durch geschlossene Feldlinien, wie das in Abbildung 1.6 der Fall ist, so sagt man das Vektorfeld \vec{A} besitzt Wirbel in Anlehnung zB. an das Strömungsfeld eines Flusses. In diesem Fall ist das Linienintegral des Vektorfeldes \vec{A} entlang des Weges, der durch die Feldlinie bezeichnet ist sicher von 0 verschieden (die Vektoren \vec{A} und $d\vec{r}$ sind stets parallel).

Dementsprechend definiert man die Wirbelstärke oder Rotation eines Vektorfeldes an einem Punkt \vec{r}_0 als einen Vektor $\text{rot}\vec{A}(\vec{r}_0)$, dessen Projektion in Richtung eines Einheitsvektors \hat{n} berechnet werden kann durch

$$\hat{n} \text{rot}\vec{A}(\vec{r}_0) := \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta F} \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{s} \quad (1.2.25)$$

wobei die Flächen ΔF eine Folge von Flächen bilden, die alle den Punkt \vec{r}_0 enthalten und deren Flächennormale in Richtung von \hat{n} weist. Das Integral in (1.2.25) ist dann das Linienintegral über den Rand der Fläche ΔF , wobei der Umlauf entsprechen der “rechten Hand Regel” so zu führen ist, daß die Flächennormale parallel zu \hat{n} steht.

Bei der Benutzung von kartesischen Koordinaten kann die Rotation einfach berechnet werden gemäß :

Behauptung:

$$\operatorname{rot}\vec{A}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y A_z - \partial_z A_y \\ \partial_z A_x - \partial_x A_z \\ \partial_x A_y - \partial_y A_x \end{pmatrix}$$

Beweis: den Beweis führen wir nur für die x -Komponente, für die anderen Komponenten ergibt sich der Beweis entsprechend: $(\vec{\nabla} \times \vec{A})_x = \hat{e}_x \operatorname{rot}\vec{A}$. (\hat{e}_x steht senkrecht auf der y - z -Ebene). Mit (1.2.25) folgt dann

$$\hat{e}_x \operatorname{rot}\vec{A} = \lim_{\Delta F_{yz} \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta F_{yz}} \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{s}$$

Betrachten wir nun die in Abbildung 1.7 dargestellte Parametrisierung der Fläche ΔF_{yz} , so ergibt sich

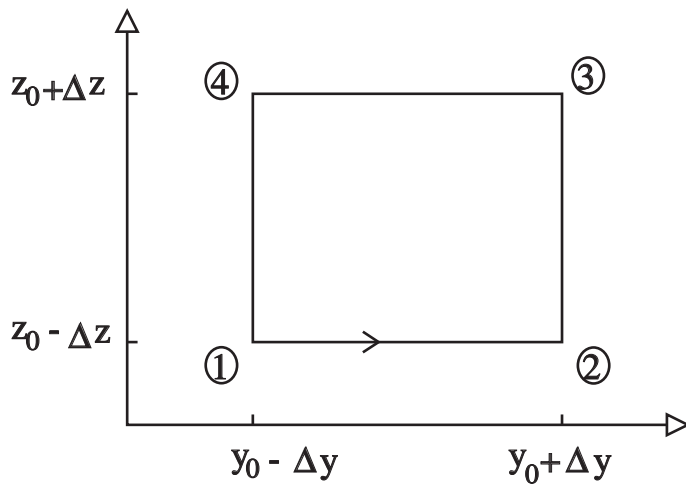


Abbildung 1.7: Parametrisierung der $x = x_0$ -Fläche

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_1^2 A_y dy + \int_2^3 A_z dz + \int_3^4 A_y dy + \int_4^1 A_z dz \quad (1.2.26)$$

$$\begin{aligned} \text{mit } \int_1^2 A_y dy &= \int_{y_0 - \Delta y}^{y_0 + \Delta y} A_y(x_0, y, z_0 - \Delta z) dy \\ &= \int_{y_0 - \Delta y}^{y_0 + \Delta y} \left[A_y(x_0, y, z_0) dy + (-\Delta z) \frac{\partial A_y}{\partial z} + \dots \right] dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{und } \int_3^4 A_y dy &= - \int_{y_0 - \Delta y}^{y_0 + \Delta y} A_y(x_o, y, z_o + \Delta z) dy \\ &= \int_{y_0 - \Delta y}^{y_0 + \Delta y} \left[A_y(x_o, y, z_o) dy + (\Delta z) \frac{\partial A_y}{\partial z} + \dots \right] dy. \end{aligned}$$

Analoges gilt für die Wege 2 nach 3 und 4 nach 1, wobei die Taylorentwicklung stets nach dem linearen Glied abgebrochen wurde.

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{s} &= \left[A_y(x_o, y, z_o) dy + (-\Delta z) \frac{\partial A_z}{\partial y} - A_y(x_o, y, z_o) dy + \Delta z \frac{\partial A_z}{\partial y} \right] dy \\ &+ \int_2^3 A_z dz + \int_4^1 A_z dz = \left(-\frac{\partial A_y}{\partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) 4\Delta y \Delta z \\ \iff \hat{e}_x \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \lim_{\Delta F_{yz} \rightarrow 0} \frac{4\Delta y \Delta z}{\Delta F_{yz}} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

Der Beweis für die y - und z - Komponente folgt auf die gleiche Weise.

Achtung:

Auch die Rotation sieht in anderen Koordinaten anders aus und muß entsprechend abgeändert werden!

1.2.5 Der Stokessche Integralsatz

Ähnlich wie der Gaußsche Integralsatz ein Volumen- in ein Flächenintegral umwandelt, verbindet der Stokessche Integralsatz Flächen- und Linienintegrale:

$$\boxed{\oint_{\tau} \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_F \text{rot} \vec{A} \cdot d\vec{f}} \quad (1.2.27)$$

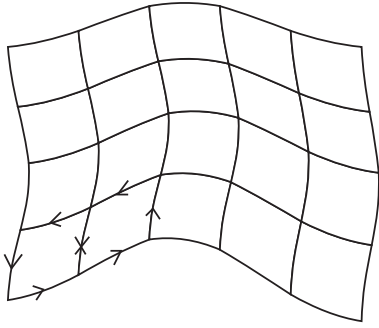
Mit τ als Rand der Fläche F ; $d\vec{f}$ und der Umlaufsinn von τ sind einander im Sinne einer Rechtsschraube zugeordnet.

Beweis: Wir denken uns F in kleine Flächenstücke ΔF_i zerlegt, also gilt (s. Abb. 1.8):

$$\int_F \text{rot} \vec{A} \cdot d\vec{f} = \sum_i \int_{\Delta F_i} \text{rot} \vec{A} \cdot d\vec{f}.$$

Man läßt nun die Flächenstücke ΔF_i immer kleiner werden, das bedeutet, daß die Wirbelstärke $\text{rot} \vec{A}$ in diesen Flächenelementen ΔF_i konstant gesetzt werden kann. Also läßt sich das Integral als Riemann-Summe schreiben:

$$\sum_i \int_{\Delta F_i} \text{rot} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{f} = \lim_{\Delta F_i \rightarrow 0} \sum_i \hat{n}_i \text{rot} \vec{A}(\vec{r}) \Delta F_i$$

Abbildung 1.8: Zerlegung einer gekrümmten Fläche in kleine Flächenelemente ΔF_i

$$= \lim_{\Delta F_i \rightarrow 0} \sum_i \Delta F_i \frac{1}{\Delta F_i} \oint_{\tau_i} \vec{A} d\vec{s}$$

letzteres gilt nach der Definition der Rotation nach Glg (1.2.25).

Beachtet man nun, daß sich an allen Grenzlinien zwischen 2 Flächen ΔF_i die Linienintegrale wegen der gegenläufigen Integrationsrichtung wegheben, so verbleibt nur das Linienintegral über den äußeren Rand der Gesamtfläche F . Damit ist (1.2.27) bewiesen.

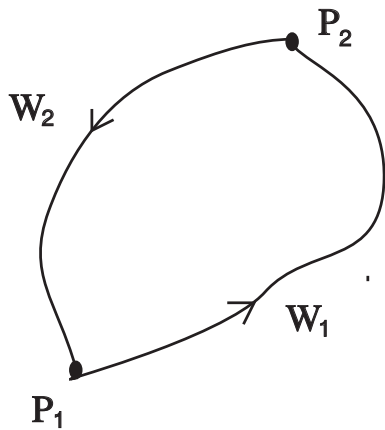
Mit der Definition der Rotation und dem Stokesschen Satz kann man nun auf einfache Weise nachweisen ob Kraftfelder konservativ sind.

$$\begin{aligned} \text{Sei } \vec{A}(\vec{r}) \text{ wirbelfrei} &\iff \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) = \vec{0} \\ &\implies \oint_{\tau} \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_F \text{rot} \vec{A} \cdot d\vec{f} = 0 \end{aligned}$$

Dabei ist F eine beliebige Fläche und τ der orientierte Rand dieser Fläche. Wähle nun zwei Punkte P_1 und P_2 auf dem Rand τ . Sei der Weg W_1 der Integrationsweg $W_1 \hat{=} P_1 \rightarrow P_2$ und $W_2 \hat{=} P_2 \rightarrow P_1$, wobei beide Weg in gleicher Richtung durchlaufen werden sollen wie entlang durch das Wegintegral über die geschlossene Kurve τ vorgegeben (siehe Abbildung 1.9). Dann gilt:

$$\begin{aligned} \oint_{\tau} \vec{A} \cdot d\vec{s} &= \int_{P_1, W_1}^{P_2} \vec{A} \cdot d\vec{s} + \int_{P_2, W_2}^{P_1} \vec{A} \cdot d\vec{s} \\ &= \int_{P_1, W_1}^{P_2} \vec{A} \cdot d\vec{s} - \int_{P_1, -W_2}^{P_2} \vec{A} \cdot d\vec{s}. \end{aligned}$$

Das Minuszeichen in der letzten Gleichung erhalten wir durch Umkehrung des Weges W_2 . Wir haben also gezeigt, daß bei wirbelfreien Feldern das Linienintegral vom Punkt

Abbildung 1.9: Zur Wegunabhängigkeit des Integrals über \vec{A}

P_1 zum Punkt P_2 unabhängig ist vom Weg den wir dabei wählen (Beachte, daß der Beweis gültig ist für alle Flächen F , d.h. für alle geschlossenen Wege τ). Hängt der Wert des Linienintegrals aber nur von den Endpunkten ab, so können wir eine Funktion Φ bestimmen mit:

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{A} \cdot d\vec{r} = -[\Phi(P_2) - \Phi(P_1)] = -\int_{P_1}^{P_2} d\Phi = -\int_{P_1}^{P_2} \text{grad}\Phi(\vec{r})d\vec{r}. \quad (1.2.28)$$

Damit haben wir also gezeigt, daß sich jedes wirbelfreie Vektorfeld \vec{A} als negativer Gradient eines Skalarfeldes darstellen läßt:

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\text{grad}\Phi(\vec{r}). \quad (1.2.29)$$

Das Minuszeichen in dieser Beziehung ist natürlich nur eine Frage der Konvention. Kraftfelder \vec{A} , die die Bedingung (1.2.29) erfüllen werden in der Mechanik “konservative Kraftfelder” genannt, weil bei der Bewegung eines Teilchens in einem solchen Kraftfeld die Energie erhalten bleibt.

Zur Vervollständigung wiederholen wir an dieser Stelle die wichtigsten Eigenschaften des Gradient Operators:

1. Mit dem Gradient Operator können wir das Differential $d\Phi$ umschreiben: $d\Phi = \text{grad}\phi \cdot d\vec{r}$.
2. $\text{grad}\Phi(\vec{r}_0)$ läßt sich als Vektor interpretieren, der am Punkt \vec{r}_0 in die Richtung weist, in der das skalare Feld Φ am stärksten ansteigt. Die Länge dieses Vektors entspricht dem Betrag dieses stärksten Anstiegs.

3. In der kartesischen Darstellung kann man den Gradienten berechnen

$$\text{grad}\Phi = \vec{\nabla}\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \Phi \quad (1.2.30)$$

Behauptung:

Wir wollen nun zeigen, daß aus der Definition 1) die Eigenschaften 2) und 3) folgen:

Beweis:

Es gilt: $d\Phi(\vec{r}) = \Phi(\vec{r} + d\vec{r}) - \Phi(\vec{r})$.

Taylorentwicklung bis zur zweiten Ordnung liefert

$$\begin{aligned} d\Phi(\vec{r}) &= \text{grad}\Phi \cdot d\vec{r} = \Phi(\vec{r}) + \frac{\partial\Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\Phi}{\partial z}dz - \Phi(\vec{r}) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \left| \begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial z} \end{pmatrix} \right| \cdot |d\vec{r}| \cdot \cos\alpha \end{aligned}$$

wobei der Winkel α der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{\nabla}\Phi$ und $d\vec{r}$ ist. Damit ist klar, daß der Anstieg von Φ , d.h. $d\Phi$ genau dann maximal ist, wenn der Vektor $d\vec{r}$ in Richtung von $\text{grad}\Phi$ weist. Damit ist der Beweis erbracht.

Zweimaliges Anwenden des Nabla-Operators führt auf den Laplace-Operator Δ :

$$\text{div} \cdot \text{grad}\Phi(\vec{r}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\Phi(\vec{r}) = \Delta\Phi(\vec{r}) \quad (1.2.31)$$

$$\iff \Delta \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \quad (1.2.32)$$

Achtung!

Wie bei dem Nabla-Operator muß auch der Laplace-Operator nach Wahl des Koordinatensystems angepaßt werden !

1.2.6 Die Greenschen Identitäten

Aus dem Gaußschen Integralsatz (Glg 1.2.18) lassen sich zwei nützliche Aussagen über Potentiale (1.2.28) ableiten.

Seien φ, ψ zweimal differenzierbare, skalare Felder, V ein Volumen mit Oberfläche O , so gilt

1. Erste Greensche Identität

$$\int_V (\phi\Delta\psi + (\vec{\nabla}\psi \cdot \vec{\nabla}\phi))dV = \oint_O \phi(\vec{\nabla}\psi)d\vec{f} \quad (1.2.33)$$

2. Zweite Greensche Identität

$$\int_V \phi(\Delta\psi) - \psi(\Delta\phi) dV = \oint_O (\varphi(\vec{\nabla}\psi) - \psi(\vec{\nabla}\varphi)) d\vec{f} \quad (1.2.34)$$

Beweis: Wir definieren ein Vektorfeld \vec{X} mit kartesischen Komponenten X_1, X_2, X_3

$$\vec{X} := \varphi(\vec{\nabla}\psi) = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}. \text{ Dann ist}$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{X} &= \frac{\partial}{\partial x} X_1 + \frac{\partial}{\partial y} X_2 + \frac{\partial}{\partial z} X_3 \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x} + \varphi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial y} + \varphi \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial z} + \varphi \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \\ &= \varphi \operatorname{div} \vec{\nabla} \psi + (\vec{\nabla} \varphi)(\vec{\nabla} \psi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{mit } \Delta\psi = \operatorname{grad} \vec{\nabla} \psi \text{ folgt } \int_V \operatorname{div} \vec{X} dV &= \int_V \varphi \Delta\psi + (\vec{\nabla} \varphi)(\vec{\nabla} \psi) dV \\ &= \int_O \vec{X} \cdot d\vec{f} = \int_O [\varphi \Delta\varphi + (\vec{\nabla} \varphi)(\vec{\nabla} \psi)] df, \end{aligned}$$

letzteres nach dem Gaußschen Satz. Die zweite Greensche Identität ergibt sich unter Verwendung von $\varphi = \psi$ und Abziehen der beiden so entstandenen Gleichungen voneinander.

1.2.7 Eindeutigkeitsatz

Zerlegungssatz, Eindeutigkeitsatz

Sei $\vec{A}(\vec{r})$ ein Vektorfeld, das mit genügend hoher Ordnung im Unendlichen verschwindet. Der Zerlegungssatz sagt nun: $\vec{A}(\vec{r})$ läßt sich in einen rotationsfreien (longitudinalen) Teil $\vec{A}_r(\vec{r})$ und einen divergenzfreien (transversalen) Teil $\vec{A}_d(\vec{r})$ zerlegen, wobei gilt:

$$1) \quad \vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}_r(\vec{r}) + \vec{A}_d(\vec{r}) \quad (1.2.35)$$

$$2) \quad \vec{\nabla} \times \vec{A}_r(\vec{r}) = 0; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A}_d(\vec{r}) = 0 \quad (1.2.36)$$

(auf den Beweis sei hier verzichtet).

Der **Eindeutigkeitsatz** besagt, daß jedes Vektorfeld eindeutig bestimmt ist, wenn

seine Divergenz (1.2.14) und seine Rotation (1.2.25) für **jeden** Raumpunkt \vec{r} bekannt ist (dies leuchtet nach dem Zerlegungssatz unmittelbar ein, da ein Vektorfeld in Divergenz und Rotation zerlegbar ist).

Beweis:

$\vec{A}_1(\vec{r})$ und $\vec{A}_2(\vec{r})$ seien zwei Vektorfelder, wobei gilt:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\vec{A}_1 &= \vec{\nabla}\vec{A}_1(\vec{r}) = \vec{\nabla}\vec{A}_2(\vec{r}) \text{ und} \\ \operatorname{rot}\vec{A}_1 &= \vec{\nabla}\times\vec{A}_1(\vec{r}) = \vec{\nabla}\times\vec{A}_2(\vec{r})\end{aligned}$$

sei $\vec{D} = \vec{A}_1(\vec{r}) - \vec{A}_2(\vec{r})$ so folgt

$$\operatorname{div}\vec{D} = \vec{\nabla}(\vec{A}_1(\vec{r}) - \vec{A}_2(\vec{r})) = \vec{\nabla}\vec{A}_1(\vec{r}) - \vec{\nabla}\vec{A}_2(\vec{r}) = 0 \text{ (n. V.)}.$$

Außerdem ist

$$\vec{\nabla}\times\vec{D} = \vec{\nabla}\times(\vec{A}_1(\vec{r}) - \vec{A}_2(\vec{r})) = \vec{\nabla}\times\vec{A}_1(\vec{r}) - \vec{\nabla}\times\vec{A}_2(\vec{r}) = 0 \text{ (n. V.)}.$$

Aus $\vec{\nabla}\times\vec{D} = 0$ (D ist wirbelfrei) folgt

$$\vec{D} = -\vec{\nabla}\psi.$$

Wegen $\vec{D} = -\vec{\nabla}\psi$ ist

$$\operatorname{div}\vec{D} = 0 = \vec{\nabla}\vec{D} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\psi) = \Delta\psi.$$

Unter Verwendung der 1. Greenschen Identität mit $\varphi = \psi$ folgt

$$\int [\psi\Delta\psi + (\vec{\nabla}\psi)^2] dV = \oint_{O\rightarrow\infty} \psi\vec{\nabla}\psi d\vec{f} = 0$$

da $\Delta\psi = 0$ bleibt davon noch

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{R}^3} (\vec{\nabla}\psi)^2 dV &= 0 = \int_{\mathcal{R}^3} \vec{D}^2 dV \\ \iff \vec{D}^2 = 0 &\implies \vec{D} = 0. \quad \square\end{aligned}$$

1.2.8 Zusammenfassung

Wir fassen noch einmal die wichtigsten Ergebnisse zusammen:

1.) $\operatorname{div}\vec{A}$: Aussage über die Quelledichte von \vec{A}

- 2.) $\int_V \vec{\nabla} \vec{A} d^3r = \oint_O \vec{A} d\vec{f}$: Gaußscher Integralsatz
- 3.) $\text{rot} \vec{A}$: Aussage über das Wirbelverhalten von \vec{A}
- 4.) $\int_F \vec{\nabla} \times \vec{A} d\vec{f} = \oint_\tau \vec{A} d\vec{s}$: Stokescher Integralsatz
- 5.) $\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0 \iff \vec{A} = \vec{\nabla} \psi \iff \vec{A}$ läßt sich als Gradientenfeld darstellen
- 6.) Ein Vektorfeld ist eindeutig charakterisiert durch seine Quelledichte ($\text{div} \vec{A}$) und die Wirbelstärke ($\text{rot} \vec{A}$).

1.3 Die Grundgleichungen des elektrostatischen Feldes

Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, daß eine Vektorfeld, wie zB. das elektrische Feld \vec{E} , charakterisiert ist durch seine Quellen und Wirbel. In diesem Abschnitt wollen wir nun die entsprechenden Feldgleichungen diskutieren für den Fall der Elektrostatik, das bedeutet: für den Fall, daß das elektrische Feld durch eine statische, zeitunabhängige Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ generiert wird. Wir nehmen also an, daß es keine Ströme gibt. In diesem Fall ist das elektrische Feld charakterisiert durch die folgenden Feldgleichungen:

- a) $\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho(\vec{r})$
- b) $\operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0}$
- c) $\vec{E} = -\operatorname{grad} \phi(\vec{r})$ mit $\phi(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3r'$.

Sie sollen im folgenden erläutert werden.

zu a)

- (i) Befinde sich bei $\vec{r} = 0$ eine Punktladung, dann erzeugt sie, wie wir bereits im Abschnitt 1.1 gesehen haben, das elektrische Feld

$$\vec{E}(\vec{r}) = q \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$$

Für dieses elektrische Feld gilt nach Gleichung (1.2.22)

$$\operatorname{div} \vec{E} = q \cdot \operatorname{div} \frac{\vec{r}}{r^3} = q \cdot 4\pi\delta(\vec{r} - 0).$$

- (ii) Betrachten wir nun eine Punktladung q_i , die sich nicht notwendigerweise im Ursprung, sondern an der Stelle \vec{r}_i befindet, dann gilt entsprechend nach einer Verschiebung des Koordinatensystems

$$\operatorname{div} \vec{E} = q_i \cdot 4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}_i).$$

- (iii) Befinden sich schließlich mehrere Punktladungen q_i an den verschiedenen Stellen \vec{r}_i , so gilt

$$\operatorname{div} \vec{E} = \sum_i 4\pi q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) = 4\pi\rho(\vec{r}).$$

Zur Interpretation: Betrachten wir das Volumenintegral der Divergenz des elektrischen Feldes über ein endliches Volumen V mit einer Oberfläche $\mathcal{O}(V)$

$$\begin{aligned} \int_V d^3\vec{r} \operatorname{div} \vec{E} &= \int d^3\vec{r} 4\pi\rho(\vec{r}) \\ &= 4\pi \cdot Q(V) \\ &= \oint_{\mathcal{O}(V)} \vec{E} d\vec{f} \end{aligned}$$

Das Volumenintegral über die Divergenz gibt also anschaulich die Zahl der auslaufenden vermindert um die Zahl der einlaufenden Feldlinien an. Die in V befindliche Ladung $Q(V)$, beziehungsweise ρ , bezeichnet also bis auf den Faktor 4π die Quellen bzw. die Senken des elektrischen Feldes.

zu c)

Es gilt

$$\nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad (1.3.37)$$

Dies können wir leicht nachvollziehen, wenn wir in kartesischen Koordinaten für die x-Komponente schreiben

$$\begin{aligned} \left(\nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)_x &= \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{2(x-x')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}^3} \\ &= -\frac{(\vec{r} - \vec{r}')_x}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \end{aligned}$$

Entsprechendes gilt natürlich auch für die y- und z-Komponente. Damit erhält man für das elektrische Feld

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \int d^3\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \\ &= -\nabla \int d^3\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= -\nabla \phi(\vec{r}). \end{aligned}$$

zu b)

Kann man aber nun das elektrische Feld als Gradienten eines Skalarfeldes Φ darstellen, so gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\operatorname{rot} \operatorname{grad} \Phi \\ &= -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \Phi \\ &= \begin{pmatrix} \partial_y \partial_z - \partial_z \partial_y \\ \partial_z \partial_x - \partial_x \partial_z \\ \partial_x \partial_y - \partial_y \partial_x \end{pmatrix} \Phi \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

wobei wir in der zweitletzten Zeile Rotation und Gradient in kartesischer Darstellung benutzt haben.

Für die explizite Berechnung des elektrischen Feldes aus einer vorgegebenen Ladungsverteilung betrachten wir nun den wichtigen Spezialfall, daß die Ladungsverteilung **kugelsymmetrisch** ist: Sei also $\rho(\vec{r})$ symmetrisch gegenüber einer Drehung um den Koordinatenursprung. Die Ladungsverteilung ρ hängt also nur vom Betrag von \vec{r} ab. Durch diese Ladungsverteilung ist keine Raumrichtung ausgezeichnet. Deshalb kann es auch für das elektrische Feld keine ausgezeichnete Richtung geben und es gilt

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(|\vec{r}|) \cdot \hat{e}_r.$$

Wie läßt sich $E(|\vec{r}|)$ aus der Ladungsverteilung $\rho(|\vec{r}|)$ bestimmen, ohne den „Umweg“ über die Berechnung des Potentials ϕ zu nehmen?

Zum einen gilt bei der Integration über die Oberfläche einer Kugel mit dem Radius r

$$\oint_{\text{Kugel}} \vec{E} d\vec{f} = E(|\vec{r}|) \cdot 4\pi r^2,$$

zum anderen gilt nach dem Satz von Gauß und den Feldgleichungen

$$\begin{aligned} \oint \vec{E} d\vec{f} &= \int_V \operatorname{div} \vec{E} d^3\vec{r} \\ &= 4\pi \cdot \int_V \rho(\vec{r}) d^3\vec{r} \\ &= 4\pi \cdot Q(V). \end{aligned}$$

Daraus erhält man das elektrische Feld

$$\vec{E}(|\vec{r}|) = \frac{Q(V)}{r^2}.$$

Wie das Ergebnis zeigt, ist das von ρ erzeugte Feld im Abstand r vom Koordinatenursprung identisch mit dem Punktladung $Q(V)$, die sich im Ursprung befindet. Die Ladung $Q(V)$ ist gerade die gesamte Ladung, die sich in der Kugel vom Radius r befindet.

Die Poisson-Gleichung

Wie wir gesehen haben sind die Quellen des \vec{E} -Feldes durch die Ladungsverteilung ρ gegeben und das elektrostatische Feld läßt sich als Gradient eines Skalarfeldes schreiben. Zusammengefaßt ergibt dies:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot (-\nabla \phi) = -\Delta \phi = 4\pi \rho.$$

Die Beziehung

$$\boxed{\Delta \phi = -4\pi \rho(\vec{r})} \quad (1.3.38)$$

wird als *Poisson-Gleichung* bezeichnet. In ladungsfreien Raumbereichen ($\rho = 0$) geht sie über in die *Laplace-Gleichung*

$$\boxed{\Delta \phi = 0.}$$

1.3.1 Bedeutung des elektrostatischen Potentials und Energieinhalt des elektrischen Feldes

Um die Bedeutung des Skalarfeldes Φ zu erläutern, berechnen wir die mechanische Arbeit, die aufgebracht werden muß, um eine Probeladung q von \vec{a} nach \vec{b} zu bringen:

$$\begin{aligned} W_{ab} &= - \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{s} \\ &= - \int_a^b q \cdot \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad \text{Definition von } \vec{E} \\ &= q \cdot \int_a^b \nabla \phi \cdot d\vec{s} \\ &= q \cdot \int_a^b d\phi \quad \text{Definition des grad} \\ &= q \cdot (\phi(b) - \phi(a)). \end{aligned}$$

Die aufzubringende Arbeit ist also nur von den Endpunkten der Verschiebung, nicht aber von dem zurückgelegten Weg abhängig. $q \cdot \phi(\vec{r})$ gibt die potentielle Energie einer Ladung q in einem Feld \vec{E} an der Position \vec{r} an.

Das Potential ϕ ist vergleichbar (bis auf die Ladung der Probeladung) mit dem bereits bekannten mechanischen Potential des konservativen Kraftfeldes.

Energieinhalt des elektrischen Feldes

Wir betrachten eine Verteilung von N Ladungen q_i , die sich an den Stellen \vec{r}_i befinden. Wie groß ist die Energie, die aufgebracht werden muß, um die Ladungen zu plazieren? Zur Beantwortung dieser Frage machen wir ein Gedankenexperiment und bringen die einzelnen Ladungen in der Reihenfolge ihrer Nummerierung an ihre Positionen.

Sei W_1 die benötigte Arbeit, um q_1 aus dem Unendlichen nach $\vec{r} = \vec{r}_1$ zu transportieren. Da der Raum bisher ladungsfrei ist, also noch kein \vec{E} -Feld vorhanden ist, kann man die Ladung kräftefrei verschieben, und somit gilt $W_1 = 0$. Ist aber die Ladung q_1 an der Position \vec{r}_1 so ergibt sich ein elektrostatisches Potential

$$\phi_1(\vec{r}) = \frac{q_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}.$$

Um die Ladung q_2 im Feld der Ladung q_1 nach \vec{r}_2 zu bringen, benötigt man die Arbeit

$$\begin{aligned} W_2 &= q_2 \cdot (\phi_1(\vec{r}_2) - \phi_1(\vec{r} \rightarrow \infty)) \\ &= q_2 \cdot \phi_1(\vec{r}_2), \end{aligned}$$

wobei wir das Potential so normieren daß es für $\vec{r} \rightarrow \infty$ verschwindet. Für die weiteren Ladungen ergibt sich

$$\begin{aligned} W_3 &= q_3 \cdot (\phi_1(\vec{r}_3) + \phi_2(\vec{r}_3)) \quad \text{mit} \quad \phi_2(\vec{r}_3) = \frac{q_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|} \\ &\vdots \\ W_n &= q_n \cdot (\phi_1(\vec{r}_n) + \dots + \phi_{n-1}(\vec{r}_n)). \end{aligned}$$

Somit erhält man die Gesamtenergie, die man aufwenden muß, um *alle* N Ladungen zu plazieren:

$$\begin{aligned} W &= \sum_{i=1}^N W_i \\ &= \sum_{i=2}^N q_i \left(\sum_{k=1}^{i-1} \frac{q_k}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{i=2}^N q_i \left(\sum_{k=1}^{i-1} \frac{q_k}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|} \right) \right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{i=2}^N q_i \left(\sum_{k=1}^{i-1} \frac{q_k}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{i=2}^N q_i \left(\sum_{k=1}^{i-1} \frac{q_k}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|} \right) \right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{k=1}^N q_k \left(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{q_i}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,k=1 \\ i \neq k}}^N \frac{q_i q_k}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|}. \end{aligned}$$

Beim Übergang von diskreten Ladungen zur einer stetigen Ladungsverteilung ρ wird die Summation durch eine Integration ersetzt:

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{1}{2} \int d^3 \vec{r} \int d^3 \vec{r}' \underbrace{\frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}_{= \phi(\vec{r})} \cdot \rho(\vec{r}) \\
 &= \frac{1}{2} \int d^3 \vec{r} \rho(\vec{r}) \cdot \phi(\vec{r}) \\
 &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\pi} \int d^3 \vec{r} \Delta \phi \cdot \phi \\
 &= -\frac{1}{8\pi} \int (\Delta \phi \cdot \phi + (\nabla \phi)^2 d^3 \vec{r}) + \frac{1}{8\pi} \int (\nabla \phi)^2 d^3 \vec{r} \\
 &= \underbrace{-\frac{1}{8\pi} \oint_{\mathcal{O}(V)} (\nabla \phi) \phi d\vec{f}}_{= 0 \text{ für } V \rightarrow \mathbf{R}^3} + \frac{1}{8\pi} \int (\nabla \phi)^2 d^3 \vec{r}.
 \end{aligned}$$

Beim Übergang von der zweiten zur dritten Zeile wurde die Poissongleichung 1.3.38 angewandt und beim Übergang von der vorletzten zur letzten Zeile wurde die erste Greensche Identität benutzt (Gleichung (1.2.33) mit $\varphi = \phi = \psi$). Der erste Summand der letzten Zeile verschwindet, da

$$\phi \sim \frac{1}{r} \text{ für } r \rightarrow \infty \quad \text{und} \quad \nabla \phi = \frac{\partial}{\partial r} \phi \sim \frac{1}{r^2}.$$

Für das Produkt von beiden gilt

$$\phi \cdot \nabla \phi \sim \frac{1}{r^3} \quad \text{und} \quad \phi \cdot \nabla \phi d\vec{f} \sim \frac{1}{r}.$$

Für $r \rightarrow \infty$ verschwindet der letzte Ausdruck. Man erhält also

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{1}{8\pi} \int (\nabla \phi)^2 d^3 \vec{r} \\
 &= \frac{1}{8\pi} \int \vec{E}^2 d^3 \vec{r}.
 \end{aligned} \tag{1.3.39}$$

Daraus folgt für die Energiedichte, also der Energieinhalt des elektrischen Feldes pro Volumen:

$$w = \vec{E}^2 / 8\pi. \tag{1.3.40}$$

1.4 Randwertprobleme

Wir haben gesehen, daß sich aus einer gegebenen Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}')$ das elektrostatische Potential $\phi(\vec{r})$ mit

$$\phi(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}'$$

berechnen läßt. Hierbei muß $\rho(\vec{r}')$ allerdings für *alle* $\vec{r}' \in \mathbf{R}^3$ bekannt sein.

Oftmals ist aber die Ladungsverteilung nur in einem begrenzten Volumen V bekannt. Ist außerdem noch eine Information über Eigenschaften des Potentials auf der Oberfläche dieses Volumens gegeben, so spricht man von einem *Randwertproblem der Elektrostatik*. Je nach der vorgegebenen Information über das Potential auf der Grenzfläche oder Randfläche des Volumens unterscheidet man zwei Fälle:

1. Neben der Ladungsverteilung im Volumen V ist auch der Wert des Potentials auf dem Rand vorgegeben. Dies bezeichnet man als das *Dirichletsche Randwertproblem*.
2. Ist dagegen neben der Ladungsverteilung in V die Komponente des Potentialgradienten, die senkrecht zur Oberfläche steht bekannt, bezeichnet man dies als *von Neumannsches Randwertproblem*. In diesem Fall ist also auf der Oberfläche von V die Komponente des elektrischen Feldes ($\vec{E} = -\text{grad}\Phi$) vorgegeben, die senkrecht zu dieser Oberfläche steht.

Ziel dieser Randwertprobleme ist es aus den vorgegebenen Informationen (Ladungsdichte in V plus Information über den Rand) das Potential ϕ und damit das elektrische Feld im gesamten Volumen V zu bestimmen. Weiter unten in diesem Paragraphen werden wir zeigen, daß die gerade definierten Randwertprobleme (Dirichlet und v. Neumann) eindeutige Lösungen besitzen.

1.4.1 Beispiele, Spiegelladungsmethode

Zunächst soll aber ein Beispiel für das Randwertproblem von Dirichlet betrachtet werden. Mit Hilfe der sogenannten *Spiegelladungsmethode* werden wir ein Potential finden, für das gilt:

$$\begin{aligned} \text{Poisson Gleichung} & \quad \Delta\phi(\vec{r}) = -4\pi\rho(\vec{r}), & \text{für alle } \vec{r} \text{ aus } V \\ \text{Randbedingung} & \quad \phi(\vec{r}') = \phi_{\text{Rand}}(\vec{r}') & \text{für alle } \vec{r}' \text{ des Randes} \end{aligned} \quad (1.4.41)$$

Als **Beispiel** betrachten wir eine Punktladung q , die sich an der Stelle $\vec{x}_0 = (x_0, 0, 0)$ befindet (Abb. 1.10) In der y - z -Ebene befindet sich eine unendlich weit ausgedehnte

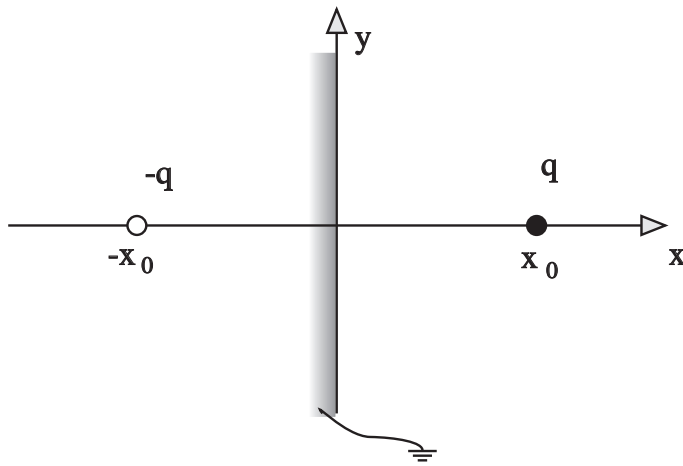


Abbildung 1.10: Beispiel für die Lösung eines Randwertproblems mit Hilfe einer Spiegelladung

Metallplatte vernachlässigbarer Dicke. Diese Metallplatte sei geerdet, also gilt $\phi = 0$ auf der Platte. Das betrachtete Volumen V ist also der Raum mit $x > 0$ und als Randbedingung geben wir vor, daß das Potential auf dem Rand (d.h. auf der Metallplatte und für $\vec{r} \rightarrow \infty$) gleich 0 wird.

Um den Potentialverlauf im ganzen rechten Halbraum und die auf der Metallplatte induzierte Ladung zu bestimmen, greifen wir auf die Spiegelladungsmethode zurück und behaupten, daß das Dirichletsche Randwertproblem gelöst ist, wenn wir der Ladung q eine Spiegelladung mit der Ladung $-q$ an der Position $-\vec{x}_0$ gegenüberstellen (siehe auch Abb. 1.10). Zu zeigen ist also, daß die Gleichungen (1.4.41) erfüllt werden durch den Ansatz für das Potential

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{|\vec{r} - \vec{x}_0|} - \frac{q}{|\vec{r} - (-\vec{x}_0)|}.$$

Der zweite Term kennzeichnet den Beitrag der *Spiegelladung* in $-\vec{x}_0$. Zu Überprüfen ist nun ob $\Delta\phi(\vec{r}) = -4\pi q\delta(\vec{r} - \vec{x}_0)$ für alle \vec{r} im rechten Halbraum erfüllt ist. Dazu betrachten wir zunächst einmal

$$\Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{x}_0|} \stackrel{\text{(eq.1.3.37)}}{=} -\text{div} \frac{(\vec{r} - \vec{x}_0)}{|\vec{r} - \vec{x}_0|^3} \stackrel{\text{(eq.1.2.22)}}{=} -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{x}_0). \quad (1.4.42)$$

Damit ergibt sich direkt

$$\begin{aligned} \Delta\phi(\vec{r}) &= -4\pi q\delta(\vec{r} - \vec{x}_0) - \underbrace{4\pi(-q)\delta(\vec{r} + \vec{x}_0)}_{=0 \text{ im rechten Halbraum}} \\ &= -4\pi\rho(\vec{r}). \end{aligned}$$

Die Poisson-Gleichung ist also erfüllt. Betrachten wir jetzt das Verhalten von ϕ auf dem Rand, also auf der Metallplatte (die Randbedingung für $\vec{r} \rightarrow \infty$ ist sicher erfüllt).

Es gilt

$$\begin{aligned}
 \phi \left(\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) &= \frac{q}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right|} - \frac{q}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -x_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right|} \\
 &= \frac{q}{\sqrt{x_0^2 + y^2 + z^2}} - \frac{q}{\sqrt{x_0^2 + y^2 + z^2}} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Damit ist auch die Randbedingung erfüllt. Mit der Spiegelladungsmethode ist es uns also gelungen, den Potentialverlauf zu finden. Allgemein besteht diese Methode darin, Ladungen außerhalb des betrachteten Bereiches so zu bestimmen, daß sie zusammen mit den vorgegebenen Ladungen innerhalb des betrachteten Bereiches ein Potential erzeugen, das die Randbedingungen erfüllt.

Durch das Vorhandensein der Ladung q in \vec{x}_0 werden in die Metallplatte Ladungen induziert. Ist also q positiv, so werden Elektronen in der Metallplatte durch die Coulombwechselwirkung in die Nähe der Ladung q gezogen. Da diese Ladungsträger in der Metallplatte frei beweglich sind und die Platte geerdet ist, können Elektronen zufließen. Es entsteht also eine induzierte negative Ladung in der Metallplatte. Die Effekte dieser induzierten Ladung werden durch die Spiegelladung dargestellt. Um uns von diesem Sachverhalt zu überzeugen, berechnen wir nun das elektrische Feld in der Nähe der Trennfläche:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \quad \text{für } \vec{r} = (0, y, z),$$

für die einzelnen Komponenten:

$$\begin{aligned}
 E_y &= -\frac{\partial}{\partial y} \phi \\
 &= -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q}{\sqrt{(x-x_0)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{q}{\sqrt{(x+x_0)^2 + y^2 + z^2}} \right) \\
 &= \frac{2yq}{\sqrt{(x-x_0)^2 + y^2 + z^2}^3} - \frac{2yq}{\sqrt{(x+x_0)^2 + y^2 + z^2}^3} \\
 \stackrel{x=0}{=} & \frac{2yq}{2\sqrt{x_0^2 + y^2 + z^2}^3} - \frac{2yq}{2\sqrt{x_0^2 + y^2 + z^2}^3} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Genau so gilt auch

$$E_z = 0$$

Hätte das elektrische Feld eine Komponente parallel zur Metalloberfläche, so würden die frei beweglichen Ladungsträger in der Metallfläche sich diesen Kraftkomponenten entsprechend bewegen. Für die x-Komponente gilt aber im rechten Halbraum:

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial}{\partial x} \phi \\ &= \frac{q(x-x_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + y^2 + z^2}^3} - \frac{q(x+x_0)}{\sqrt{(x+x_0)^2 + y^2 + z^2}^3} \\ &\stackrel{x=0}{=} -\frac{2qx_0}{\sqrt{x_0^2 + y^2 + z^2}^3} \end{aligned}$$

Da aber im linken Halbraum das elektrische Feld gleich Null ist enden diese Feldlinien senkrecht auf der Metallwand. In der Wand gibt es also Quellen beziehungsweise Senken des elektrischen Feldes. Diese Quellen und Senken sind die diskutierten induzierten Ladungen.

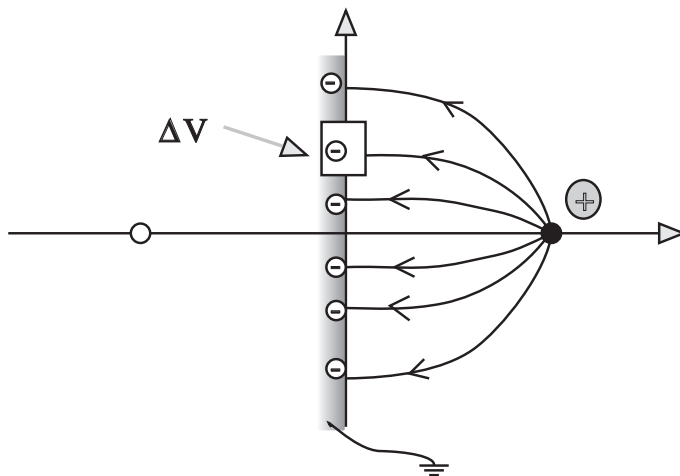


Abbildung 1.11: Zur Berechnung der induzierten Flächenladung

Wie groß ist nun diese Oberflächenladung σ ?

Um diese zu berechnen, wählen wir ein Volumenelement, ΔV (siehe auch Abb. 1.11), welches aus der Metallplatte ein infinitesimales Flächenstück ausschneidet und eine

Fläche ΔF parallel zur Metallfläche besitzt. Da es ein elektrisches Feld nur senkrecht zur rechten Fläche ΔF dieses Voulmenelementes gibt, gilt

$$\begin{aligned} \oint_{O(\Delta V)} \vec{E} d\vec{f} &= \int_{\Delta V} \operatorname{div} \vec{E} d^3\vec{r} \\ &= \int_{\Delta V} 4\pi\rho(\vec{r}) d^3\vec{r} \\ &= 4\pi \cdot \Delta F \cdot \sigma \\ \Rightarrow \sigma(\eta) &= \oint_{O(\Delta V)} \vec{E} d\vec{f} \cdot \frac{1}{4\pi\Delta F} \\ &= \frac{1}{4\pi\Delta F} \Delta F \cdot \left(-\frac{2qx_0}{\sqrt{x_0^2 + \eta^2}^3} \right), \end{aligned}$$

wobei $\eta = \sqrt{y^2 + z^2}$ den Abstand vom Ursprung bezeichnet. Man erkennt, daß die Flächenladungsdichte σ im Ursprung ein Maximum besitzt.

Als letztes soll die Gesamtladung berechnet werden, die in der Metallplatte induziert wird:

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \sigma(\eta) d\eta \eta d\phi \\ &= -\frac{2q}{4\pi} \int_0^\infty d\phi \int_0^\infty \frac{\eta \cdot x_0}{\sqrt{x_0^2 + \eta^2}^3} d\eta \\ &= -q. \end{aligned}$$

Die induzierte Ladung ist betragsmäßig gleich der Punktladung und auf der Wand „verteilt“.

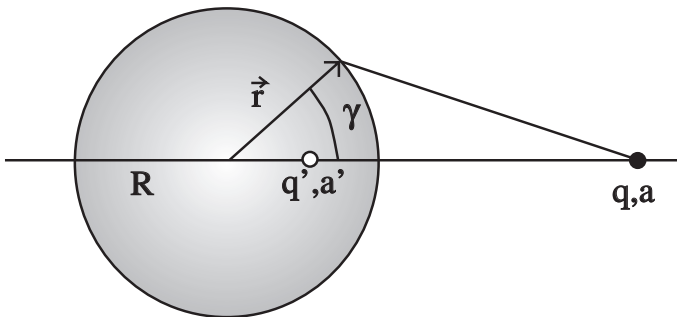


Abbildung 1.12: Beispiel Ladung vor einer geerdeten Kugel

Als zweites Beispiel betrachten wir eine Ladung q außerhalb einer geerdeten Metallkugel, deren Zentrum im Koordinatenursprung liegt (siehe Abb. 1.12). Dabei befindet

sich die Ladung q im Abstand a vom Zentrum der Kugel. Wieder wollen wir dieses Randwertproblem durch Annahme einer Spiegelladung q' im Abstand a' lösen. Damit die Spiegelladung außerhalb des im Randwertproblem betrachteten Volumens V (hier der Raum außerhalb der Kugel) liegt, muß der Betrag von a' kleiner als der Radius R der Kugel sein. Die Werte für q' und a' werden wieder so bestimmt, daß der Werte des Potentials, generiert durch Ladung plus Spiegelladung, für alle Punkte auf der Oberfläche der Metallkugel den Wert 0 annimmt. Ist \vec{r} der Ortsvektor für die Position auf der Metallkugel und γ der Winkel zwischen \vec{r} und \vec{a} (wie in Abb. 1.12), so muß also gelten:

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}) &= \frac{q}{|\vec{r} - \vec{a}|} + \frac{q'}{|\vec{r} - \vec{a}'|} \\ &= \frac{q}{a \sqrt{1 - 2\frac{R}{a} \cos \gamma + \frac{R^2}{a^2}}} + \frac{q'}{R \sqrt{1 - 2\frac{a'}{R} \cos \gamma + \frac{a'^2}{R^2}}} \\ &= 0\end{aligned}$$

Damit diese Bedingung erfüllt ist, muß also gelten

$$\frac{q'}{R} = -\frac{q}{a} \frac{\sqrt{1 - 2\frac{a'}{R} \cos \gamma + \frac{a'^2}{R^2}}}{\sqrt{1 - 2\frac{R}{a} \cos \gamma + \frac{R^2}{a^2}}} \quad (1.4.43)$$

Die linke Seite der Gleichung ist unabhängig vom Winkel γ . Damit auch die rechte Seite unabhängig von diesem Winkel wird muß gelten:

$$\frac{a'}{R} = \frac{R}{a} \quad (1.4.44)$$

beziehungsweise

$$a' = \frac{R^2}{a}. \quad (1.4.45)$$

Außerdem ist Gleichung 1.4.43 natürlich auch nur dann erfüllt, wenn gilt

$$q' = -\frac{qR}{a}. \quad (1.4.46)$$

Durch die Beziehungen 1.4.45 und 1.4.46 sind Position und Größe der Spiegelladung bestimmt. Der Wert für q' beschreibt die Quellstärke des elektrischen Feldes dargestellt durch die Spiegelladung, beziehungsweise die Quellstärke durch die Ladung, die auf die Kugeloberfläche induziert worden ist.

Wollen wir nun in einem weiteren Beispiel die Metallkugel nicht erden, sondern elektrisch neutral halten, so kann man auch dies mit Hilfe von Punktladungen im Inneren der Kugel machen, die die Ladungsverteilung auf der Oberfläche der Metallkugel repräsentieren sollen. In diesem Fall addieren wir eine zweite "Spiegelladung" mit der

Ladung $-q'$ in das Zentrum der Metallkugel. Wie man sich leicht überzeugen kann, führt dies zu einem elektrischen Feld mit einem konstanten Potential Φ auf der Kugeloberfläche. Dies ist erforderlich, da das Potential der Elektrostatik für jeden Leiter eine Konstante sein muß (jede Abweichung würde zu einem Strom führen). Außerdem sorgt die Ladung $-q'$ dafür, daß die gesamte Quellstärke der Kugel gleich 0 ist, was einer elektrisch neutralen Kugel entspricht.

1.4.2 Eindeutigkeit der Lösung des Randwertproblems

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, daß ein Potential ϕ , das eine Lösung des Randwertproblems von Dirichlet darstellt, stets eindeutig bestimmt ist. Bei der Lösung des v. Neumannschen Randwertproblems ist das Potential bis auf eine ortsunabhängige Konstante bestimmt.

Wie bereits zu Beginn dieses Paragraphen gesagt wurde, ist bei einem v. Neumannschen Problem die Normalenableitung des Potentials gegeben. Damit gelten für diese Randwertprobleme folgende Bestimmungsgleichungen:

- i) $\Delta\phi = -4\pi\rho(\vec{r})$ für $\vec{r} \in V$
- ii) $\partial\phi/\partial\hat{n} = -\vec{E} \cdot \hat{n}$, \hat{n} ist dabei der Normalenvektor auf dem Rand von V .

Haben wir nun ein Potential gefunden, das diese Anforderungen erfüllt, so werden wir zeigen, daß dieses Potential bis auf eine Konstante eindeutig ist. Da aber eine Konstante im Potential, das daraus berechnete Feld nicht beeinflußt ($\vec{E} = -\text{grad}\phi$), ist das \vec{E} -Feld eindeutig bestimmt.

Beweis: Seien ϕ_1 und ϕ_2 zwei Lösungen eines Dirichletschen oder v. Neumannschen Randwertproblems. Wir definieren $u = \phi_1 - \phi_2$. Nach Voraussetzung gilt dann:

$$\Delta u = \Delta\phi_1 - \Delta\phi_2 = -4\pi\rho(\vec{r}) + 4\pi\rho(\vec{r}) = 0, \quad \text{für alle } \vec{r} \in V.$$

Betrachten wir nun das Integral

$$\begin{aligned} \int_V \vec{\nabla} \cdot (u \vec{\nabla} u) d^3 \vec{r} &= \int_V (\vec{\nabla} u \vec{\nabla} u + u \underbrace{\Delta u}_{=0}) d^3 \vec{r} \\ &= \int_V (\vec{\nabla} u)^2 d^3 \vec{r} \\ &\stackrel{\text{Gauß}}{=} \oint_{\partial(V)} (u \vec{\nabla} u) d\vec{f} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Diese letzte Gleichung gilt im Fall des Dirichletschen Randwertproblems, da dann ja nach Voraussetzung $u = \phi_1 - \phi_2$ für alle Punkte auf dem Rand verschwindet also auch

das Integral über $u \vec{\nabla} u$ gleich 0 wird. Im Fall des v. Neumannschen Randwertproblems gilt aber für alle Randpunkte von V

$$\text{da } \vec{\nabla} u d\vec{f} = \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} df = \left[\frac{\partial \phi_1}{\partial \hat{n}} - \frac{\partial \phi_2}{\partial \hat{n}} \right] df = 0 \quad (1.4.47)$$

(Beachte: auf der rechten Seite dieser Gleichung stehen keine Vektoren) und damit verschwindet das Integral der Funktion $u \vec{\nabla} u$ integriert über die Oberfläche von V ebenfalls. Wir haben also in beiden Fällen gezeigt, daß

$$\int_V (\vec{\nabla} u)^2 d^3 \vec{r} = 0$$

Daraus folgt $\vec{\nabla} u = 0$ für alle \vec{r} in V . Also ist $u = \text{const.}$

Im Fall des Dirichlet-Problems wird diese Konstante 0, da ja u auf dem Rand bereits den konstanten Wert 0 annimmt. \square

1.5 Methode der Greenschen Funktionen

Im vorigen Abschnitt wurden *Dirichlet*- und *von Neumann*-Randwertprobleme nach der anschaulichen Methode der Spiegelladung behandelt und anschließend die Eindeutigkeit solcher Randwertprobleme gezeigt. Im Folgenden soll nun eine formale und allgemein anwendbare Methode zur Bestimmung von Potentialen bei Dirichlet- oder von Neumann-Problemen vorgestellt werden. Diese **Methode der Greenschen Funktionen** ist zur Behandlung der Elektrostatik nicht unbedingt nötig, ist aber für andere Theorien (wie z.B. Feldtheorien, Vielteilchentheorien) ein wichtiges Werkzeug, so daß es sich lohnt, sie schon jetzt näher zu betrachten.

Die Problemstellung ist die gleiche, wie im Abschnitt 1.4 : Es sind eine Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ in einem begrenzten Volumen V und eine Randbedingung vom Dirichlet-Typ (Potentialverteilung auf dem Rand dieses Volumens V bekannt) bzw. des v. Neumann-Typs ($\frac{\partial\Phi}{\partial n}$ auf dem Rand von V bekannt) vorgegeben. Das Ziel ist es, das Potential $\Phi(\vec{r})$ im ganzen Volumen V zu bestimmen. Als Ansatz wählt man dazu

$$\Phi(\vec{r}) = \int_V dV' G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') + \text{Information vom Rand} \quad (1.5.48)$$

und bezeichnet $G(\vec{r}, \vec{r}')$ als **Greensche Funktion**.

Es fällt auf:

1. Für das Problem ohne Randbedingungen läßt sich $\Phi(\vec{r})$ nach Abschnitt 1.3 schreiben als

$$\Phi(\vec{r}) = \int_{\mathcal{R}^3} dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

Da in diesem freien Fall keine Randinformation eingeht zeigt der Vergleich mit Glg. 1.5.48

$$G_{frei}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (1.5.49)$$

die sogenannte **freie Greensche Funktion**.

2. Die Greensche Funktion kann man interpretieren als eine Gewichtsfunktion. Sie hängt ab von 2 Ortsvektoren (\vec{r} und \vec{r}') und gibt an, welche Auswirkung eine Ladung an einem Punkt \vec{r}' des Raums (Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}')$) auf das Potential $\Phi(\vec{r})$ am Punkt \vec{r} hat (Das gesamte $\Phi(\vec{r})$ ergibt sich ja dann aus der Integration über alle "gewichteten" $\rho(\vec{r}')$).
3. Diese Fragestellung, welche Wirkung hat eine Ursache an der Position \vec{r}' auf eine Observable am Punkt \vec{r} tritt natürlich sehr häufig in der Physik auf. Dies erklärt

warum die Bestimmung einer Greenschen Funktion von einem so allgemeinen Interesse ist. Sehr oft stellt sich die Frage aber auch in der allgemeineren Form: Welche Wirkung hat eine Ursache am Punkt \vec{r}' zur Zeit t' auf eine Größe, die man zur Zeit t am Ort \vec{r} beobachtet. Dieser Zusammenhang wird dann durch eine zeitabhängige Greensche Funktion $G(\vec{r}, t; \vec{r}', t')$ beschrieben.

In einem ersten Schritt wollen wir uns auf das Dirichlet Problem konzentrieren und zeigen:

Behauptung: Bei einer Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$, die in einem Volumen V bekannt ist, sei auf der Oberfläche $S(V)$ dieses Volumens die Potentialverteilung $\Phi(\vec{r})$ bekannt (Dirichlet–Problem). Findet man nun eine Greensche Funktion $G(\vec{r}, \vec{r}')$ mit

$$(i) \quad \Delta' G(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad \forall \vec{r}, \vec{r}' \in V \quad \text{und} \quad (1.5.50)$$

$$(ii) \quad G(\vec{r}, \vec{r}') = 0 \quad \forall \vec{r}' \in S(V) \quad (1.5.51)$$

so ist das Potential $\Phi(\vec{r})$ im ganzen Raum V berechenbar. Dabei bezeichnet Δ' den Laplace Operator, der auf die gestrichelte Koordinate \vec{r}' der Greenschen Funktion wirkt. Ganz analog werden wir auch mit $\vec{\nabla}'$ den Gradienten oder die Divergenz bezeichnen, die sich auf gestrichelte Koordinaten beziehen.

Beweis: Setze in der 2. Greenschen Identität (s. Glg. 1.2.34)

$$\int_V (\varphi \Delta' \psi - \psi \Delta' \varphi) dV' = \oint_{S(V)} \varphi(\vec{\nabla}' \psi) - \psi(\vec{\nabla}' \varphi) \cdot d\vec{f}' \quad (1.5.52)$$

$$\psi(\vec{r}') := G(\vec{r}, \vec{r}'), \quad \varphi(\vec{r}') := \Phi(\vec{r}').$$

Mit Glg. 1.5.50 und der Poissongleichung (Glg. 1.3.38) $\Delta' \Phi = -4\pi\rho(\vec{r}')$ lautet Glg. 1.5.52 dann

$$\begin{aligned} & \int_V [\Phi(\vec{r}')(-4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}')) + G(\vec{r}, \vec{r}')4\pi\rho(\vec{r}')] dV' \\ &= -4\pi\Phi(\vec{r}) + 4\pi \int_V G(\vec{r}, \vec{r}')\rho(\vec{r}') dV' \\ & \stackrel{\text{Glg. 1.5.52}}{=} \oint_{S(V)} [\Phi(\vec{r}')\vec{\nabla}' G(\vec{r}, \vec{r}') - G(\vec{r}, \vec{r}')\vec{\nabla}' \Phi(\vec{r}')] \cdot d\vec{f}' \\ \Leftrightarrow \Phi(\vec{r}) &= \int_V G(\vec{r}, \vec{r}')\rho(\vec{r}') dV' \\ & \quad - \frac{1}{4\pi} \oint_{S(V)} [\Phi(\vec{r}')\vec{\nabla}' G(\vec{r}, \vec{r}') - G(\vec{r}, \vec{r}')\vec{\nabla}' \Phi(\vec{r}')] \cdot d\vec{f}' \quad (1.5.53) \end{aligned}$$

Da $G(\vec{r}, \vec{r}')$ nach Voraussetzung (s. Glg. 1.5.51) auf $S(V)$ verschwindet, ergibt sich damit für $\Phi(\vec{r})$

$$\Phi(\vec{r}) = \int_V G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') dV' - \frac{1}{4\pi} \oint_{S(V)} \left(\Phi(\vec{r}') \vec{\nabla}' G(\vec{r}, \vec{r}') \right) \cdot d\vec{f}' \quad (1.5.54)$$

Damit können wir also ein Randwertproblem mit Hilfe der Greenschen Funktionen allgemein nach dem folgenden Schema lösen:

- Für ein vorgegebenes Volumen V bestimmt man eine Green-Funktion, die die Bedingungen (1.5.50) und (1.5.51) erfüllt. Wenn man die entsprechende Greensche Funktion einmal gefunden hat lassen sich alle Randwertprobleme, die auf diesem Volumen V definiert sind sehr einfach lösen:
- Für eine konkret gegebene Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}')$ in V und Dirichletschen Randbedingungen für $\Phi(\vec{r}' \in S(V))$ läßt sich $\Phi(\vec{r})$ mit Gleichung (1.5.54) direkt bestimmen.

Diese Gleichung für $\Phi(\vec{r})$ entspricht dem Ansatz Glg. 1.5.48. Das Randwertproblem ist also jetzt auf die Aufgabe zurückgeführt, die Greensche Funktion mit den Bedingungen (1.5.50) und (1.5.51) zu konstruieren. Deshalb werden wir uns jetzt im folgenden mit der Frage beschäftigen: Wie bestimmt man die Greensche Funktion für eine Dirichlet-Randwertaufgabe bei einem vorgegebenen Volumen?

1.5.1 Bestimmung der Greenschen Funktion für ein Dirichlet-Randwertproblem

An die Greensche Funktion wurden die beiden Bedingungen Glg. 1.5.50 und Glg. 1.5.51 gestellt. Glg. 1.5.50 ist eine inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung in \vec{r}' :

$$\Delta' G(\vec{r}, \vec{r}') = \left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \right) G(\vec{r}, \vec{r}') \stackrel{!}{=} -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (1.5.55)$$

Der Ausdruck inhomogene Differentialgleichung bezieht sich darauf, daß in dieser Gleichung ein Term existiert, in dem die gesuchte Funktion nicht auftritt. Das ist in diesem Fall die rechte Seite der Gleichung (1.5.55). Die zugehörige homogene Differentialgleichung ist nun definiert als die Differentialgleichung, die aus der inhomogenen Differentialgleichung dadurch entsteht, daß man die Inhomogenität, also den Term in dem die gesuchte Funktion nicht vorkommt, wegläßt. In diesem Fall ist also die zu (1.5.55) zugehörige homogene Gleichung

$$\Delta' F(\vec{r}, \vec{r}') = 0 \quad (1.5.56)$$

Man kann sich nun leicht davon überzeugen, daß die allgemeine Lösung einer inhomogenen Differentialgleichung, bei der die gesuchte Funktion nur linear auftritt, gegeben ist als Summe aus einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung plus der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = G_{\text{speziell}}(\vec{r}, \vec{r}') + F(\vec{r}, \vec{r}'). \quad (1.5.57)$$

Wie kommt man nun zu so einer „speziellen“ Lösung $G_{\text{speziell}}(\vec{r}, \vec{r}')$? Nun, eine Green-Funktion, die Glg. 1.5.55 erfüllt kennen wir schon: die freie Green-Funktion (s. Glg. 1.5.49):

$$G_{\text{speziell}}(\vec{r}, \vec{r}') = G_{\text{frei}}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

(erfüllt Glg. 1.5.55 nach Glg.(1.4.42). Damit läßt sich die Green-Funktion allgemein schreiben als

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + F(\vec{r}, \vec{r}'), \quad (1.5.58)$$

wobei also $F(\vec{r}, \vec{r}')$ eine Lösung der homogenen Gleichung (1.5.56) sein muß. Außerdem muß nun noch die Dirichlet-Randbedingung

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = 0 = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + F(\vec{r}, \vec{r}') \quad \forall \vec{r}' \in S(V) \quad (1.5.59)$$

mit eingearbeitet werden. Mit Glg. 1.5.58, Glg. 1.5.56 und Glg. 1.5.59 läßt sich $G(\vec{r}, \vec{r}')$ nun bestimmen.

Beispiel: Es soll nun die Greensche Funktion gefunden werden für das Dirichlet-Randwertproblem einer Ladungsverteilung außerhalb einer Kugel (Radius R), auf deren Oberfläche das Potential vorgegeben sein soll. Zunächst betrachten wir dazu eine einzige Punktladung q im Abstand a zum Zentrum der Kugel (gleichzeitig auch der Ursprung unseres Koordinatensystems). Das Problem wurde in Abschnitt 1.4 schon mit der Methode der Spiegelladung behandelt: Es wurde eine „virtuelle Ladung“ $\tilde{q} = -\frac{qR}{a}$ an der Stelle $\tilde{\vec{r}} = \frac{R^2}{a^2}\vec{a}'$ plaziert, die die Effekte der Kugel simulierte. Für das Potential ergab sich

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{|\vec{r} - \vec{a}|} + \frac{\tilde{q}}{|\vec{r} - \frac{R^2}{a}\hat{a}|}$$

Dies Ergebnis können wir nun verallgemeinern: Für jede Ladung außerhalb der Kugel muß innerhalb der Kugel eine entsprechende Spiegelladung vorgesehen werden, damit die Randbedingungen erfüllt werden können. Daraus ergibt sich also die **Behauptung:**

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{R}{|\vec{r}'|} \frac{1}{|\vec{r} - \frac{R^2}{r'^2}\vec{r}'|} \quad (1.5.60)$$

ist die gesuchte Greensche Funktion.

Beweis: Die obige Green-Funktion hat die Form von Glg. 1.5.58 mit

$$F(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \frac{R^2}{r'^2} \vec{r}'|}.$$

Es muß nun gezeigt werden, daß die Bedingungen Glg. 1.5.56 und Glg. 1.5.59 erfüllt sind:

$$(i) \quad \Delta' F(\vec{r}, \vec{r}') = 4\pi \delta(\vec{r} - \frac{R^2}{r'^2} \vec{r}').$$

Wir interessieren uns für die Greensche Funktion beziehungsweise für $F(\vec{r}, \vec{r}')$ an Stellen \vec{r}' außerhalb der Kugel. Also ist $\frac{R^2 r'}{r'^2} \leq R$. Damit ist

$$\delta(\vec{r} - \frac{R^2}{r'^2} \vec{r}') \equiv 0 \quad \forall \vec{r} \in V$$

(V : Volumen außerhalb der Kugel!), also auch

$$\Delta' F(\vec{r}, \vec{r}') = 0 \quad \forall \vec{r} \in V \quad (\text{Bed. 1.5.56})$$

(ii) Für $G(\vec{r}, \vec{r}')$ auf dem Rand der Kugel gilt

$$\begin{aligned} G(\vec{r}, \vec{r}' \in S(V)) &= \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{R}{R} \frac{1}{|\vec{r} - \frac{R^2}{R^2} \vec{r}'|} \\ &= \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = 0 \quad (\text{Bed. 1.5.59}) \end{aligned}$$

Mit der Green-Funktion Glg. 1.5.60 und $\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r} - \vec{a})$ kann also das Potential durch

$$\Phi(\vec{r}) = \int_V G(\vec{r}, \vec{r}') q \delta(\vec{r} - \vec{a}) dV - \oint_{S(V)} \Phi(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') \cdot d\vec{f}'$$

beschrieben werden. Wenn wir nun den Fall betrachten, daß $\Phi(\vec{r}')$ auf dem Rand von V verschwindet, so bleibt noch

$$\Phi(\vec{r}) = G(\vec{r}, \vec{r}') q = q \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{a}'|} - \frac{R}{|\vec{a}'|} \frac{1}{|\vec{r} - \frac{R^2}{a'^2} \vec{a}'|} \right)$$

was mit dem in Abschnitt 1.4 gefundenen Ergebnis übereinstimmt (Nach Abschn. 1.5 muß die Lösung des Randwertproblems ja auch eindeutig sein).

1.5.2 Greensche Funktionen für ein v. Neumann Randwertproblem

Beim v. Neumann–Randwertproblem (s. Abschnitt 1.4) ist statt der Potentialverteilung auf dem Rand von V (Dirichlet–Problem) dessen Ableitung auf dem Rand ($\frac{\partial \phi}{\partial n}$ auf $S(V)$) bekannt. Wie im Dirichlet–Problem fordert man nun $\Delta' G(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}')$, was auf Glg. 1.5.53 führt. Beachtet man, daß

$$\vec{\nabla}' G(\vec{r}, \vec{r}') \cdot d\vec{f}' = \frac{\partial}{\partial n'} G(\vec{r}, \vec{r}') df'$$

gilt ($\frac{\partial}{\partial n'}$ ist die Ableitung nach der Koordinate, die als zugehörigen Einheitsvektor den Normalenvektor in Richtung der Flächennormalen $d\vec{f}'$ der Oberfläche $S(V)$), so lautet Glg. 1.5.53

$$\Phi(\vec{r}) = \int_V G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') dV' \quad (1.5.61)$$

$$- \frac{1}{4\pi} \oint_{S(V)} \left[\Phi(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial n'} G(\vec{r}, \vec{r}') - G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \Phi(\vec{r}') \right] df' . \quad (1.5.62)$$

Wie in 1.5.51 möchte man nun $\frac{\partial}{\partial n'} G(\vec{r}, \vec{r}') = 0$ fordern, was aber wegen

$$\begin{aligned} \oint_{S(V)} \frac{\partial}{\partial n'} G(\vec{r}, \vec{r}') \cdot d\vec{f}' &= \oint_{S(V)} \vec{\nabla}' G(\vec{r}, \vec{r}') \cdot d\vec{f}' \\ &\stackrel{Gau\beta}{=} \int_V \Delta' G(\vec{r}, \vec{r}') dV' = -4\pi \int_V \delta(\vec{r} - \vec{r}') dV' = -4\pi \\ &\implies \frac{\partial}{\partial n'} G(\vec{r}, \vec{r}') \neq 0 \end{aligned}$$

nicht geht. So wählt man z.B. den Ansatz:

$$\frac{\partial}{\partial n'} G(\vec{r}, \vec{r}') = const. = \frac{-4\pi}{F_{S(V)}} \quad \forall \vec{r}' \in S(V).$$

Hier und im folgenden steht $F_{S(V)}$ für die Größe der Oberfläche $S(V)$. Damit wird Glg. 1.5.62 zu

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}) &= \int_V G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') dV' \\ &+ \frac{1}{4\pi} \oint_{S(V)} G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \Phi(\vec{r}') df' - \frac{1}{4\pi} \left(\frac{-4\pi}{F_{S(V)}} \right) \oint_{S(V)} \Phi(\vec{r}') df' \end{aligned}$$

$$\Phi(\vec{r}) = \int_V G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') dV' + \frac{1}{4\pi} \oint_{S(V)} G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \Phi(\vec{r}') df' + \bar{\Phi}(\vec{r}')$$

mit dem Mittelwert des Potentials auf der Oberfläche

$$\bar{\Phi}(\vec{r}') = \frac{1}{F_{S(V)}} \oint_{S(V)} \Phi(\vec{r}') df'$$

Über diesen Mittelwert macht das v. Neumann–Problem keine Aussage. Wie wir oben gesehen haben ist die Lösung dieses Problems ja nur bis auf eine Konstante bestimmt. Entsprechend ist natürlich auch die Greensche Funktion zur Lösung des v. Neumann–Problems nur bis auf eine Konstante bestimmt.

1.6 Entwicklung nach orthogonalen Funktionen

Manchmal ist es geschickt eine vorgegebene Funktion $f(x)$, die definiert sei für die Variable x aus einem Intervall $[a, b]$ und komplexwertige Ergebnisse liefert ($f : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$), nach einem Satz von Basisfunktionen $u_n(x)$ zu entwickeln. Dabei bedeutet entwickeln, daß man versucht, die Funktion f "möglichst gut" als eine Linearkombination der u_n darzustellen:

$$f(x) \approx \sum_n a_n \cdot u_n(x)$$

Die a_n heißen Entwicklungskoeffizienten. Die Basisfunktionen sind ihrerseits Funktionen von $[a, b]$ nach \mathbf{C} . Eine solche Entwicklung bietet den Vorteil, daß man eine komplizierte Funktion wenigstens näherungsweise durch die Angabe von einer diskreten Zahl von Parametern, die Entwicklungskoeffizienten a_n , charakterisieren kann. Darüber hinaus besteht natürlich die Hoffnung, daß zumindest bei einer Summation mit unendlich vielen Gliedern, die betrachtete Funktion f exakt dargestellt wird.

Wird stattdessen nur über N Glieder summiert, so erhält man eine Näherung, die für großes N hinreichend genau sein soll. Ist nun die Funktion f eine unbekannte Lösung für ein mathematisches oder physikalisches Problem, so ist es in vielen Fällen einfacher, die Entwicklungskoeffizienten a_n zu bestimmen. Damit reduziert sich das Problem, die exakte Funktion zu finden, darauf, die gewünschte Zahl von Entwicklungskoeffizienten a_n zu bestimmen.

Beispiel: Ist $f(x)$ eine stetig differenzierbare Funktion in einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$, so läßt sie sich beispielsweise durch ein Polynom vom Grade N

$$f(x) = \sum_{n=0}^N a_n \cdot x^n$$

für $N \rightarrow \infty$ beliebig genau approximieren. In diesem Fall bilden also die Funktionen $u_n = x^n$ den Satz von Basisfunktionen.

1.6.1 Systeme von orthogonalen Funktionen

Versteht man die $u_n(x)$ als Basis eines Vektorraumes, dann ist $\sum a_n \cdot u_n(x)$ eine Linearkombination darin. Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ zwei Funktionen in diesem Vektorraum. Wir definieren nun ein *Skalarprodukt*:

$$\langle f|g \rangle = \int_a^b f^*(x) \cdot g(x) dx. \quad (1.6.63)$$

Diese Definition erfüllt alle Forderungen an ein Skalarprodukt, wie zum Beispiel die positive Definitheit:

$$\langle f|f \rangle = \int_a^b |f|^2 dx \geq 0,$$

und die Tatsache, daß $\langle f|f \rangle = 0$ nur für $f(x) \equiv 0$ erfüllt ist.

Um sicherzustellen, daß die Funktion f mit den u_n wiedergegeben werden kann, müssen die u_n eine *Basis* bilden. Damit die Entwicklungskoeffizienten a_n eindeutig bestimmt sind, ist es günstig, wenn die Basisvektoren paarweise orthogonal zueinander sind, also ein Orthogonalsystem (OGS) bilden. Dies ist genau dann erfüllt, wenn gilt:

$$\int_a^b u_i^*(x) \cdot u_j(x) dx = \langle u_i|u_j \rangle = \alpha_i \cdot \delta_{ij} = \alpha_i \cdot \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (1.6.64)$$

mit $\alpha_i = \langle u_i|u_i \rangle > 0$ für $u_i \neq 0$.

Aus praktischen Gründen normiert man die $u_n(x)$ und nennt sie $\tilde{u}_n(x)$:

$$\tilde{u}_i(x) := \frac{1}{\sqrt{\alpha_i}} u_i(x).$$

Also gilt nun: $\langle \tilde{u}_i|\tilde{u}_j \rangle = \delta_{ij}$; die \tilde{u}_n bilden ein Orthonormalsystem (ONS).

Beispiel für ein orthogonales Funktionensystem auf $[a, b] = [-\pi, \pi]$:

$$u_i(x) = \sin(ix),$$

wobei i hier nicht die imaginäre Einheit, sondern einen Laufindex, also eine natürliche Zahl, darstellt.

Behauptung: Die u_i sind orthogonal.

Beweis:

$$\begin{aligned} \langle u_i|u_j \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin ix \cdot \sin jx dx \\ &= \left[\sin ix \left(-\frac{1}{j} \cos jx \right) \right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} i \cos ix \cdot \frac{1}{j} \cos jx dx. \end{aligned} \quad (1.6.65)$$

Bei dem Übergang von der ersten zur zweiten Zeile haben wir die Regel der partiellen Integration angewandt. Berücksichtigt man weiter, daß $\sin(ix) = 0$ ist für $x = \pi$ und

$x = -\pi$ so verschwindet der erste Term in der zweiten Zeile und wir können das verbleibende Integral noch einmal partiell integrieren, was uns hinführt zu

$$\begin{aligned}\langle u_i | u_j \rangle &= \left[\frac{i}{j} \cos ix \cdot \frac{1}{j} \sin jx \right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{i^2}{j^2} \sin ix \cdot \sin jx \, dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{i^2}{j^2} \sin ix \cdot \sin jx \, dx\end{aligned}$$

Ein Vergleich der letzten Zeile mit der ersten von (1.6.65) ergibt:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin ix \cdot \sin jx \, dx = \frac{i^2}{j^2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin ix \cdot \sin jx \, dx. \quad (1.6.66)$$

Daraus folgt für das Integral:

a) im Falle $i = j$

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \sin ix \cdot \sin jx \, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 ix \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 ix \, dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 ix \, dx \\ &= \frac{1}{2} [x]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \pi.\end{aligned}$$

b) im Falle $i \neq j$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin ix \cdot \sin jx \, dx = 0,$$

da sich beide Seiten der Gleichung (1.6.66) nur um den Faktor i^2/j^2 unterscheiden. Die Gleichheit ist deswegen im Falle $i \neq j$ nur dann erfüllt, wenn der Wert des Integrals verschwindet.

Also gilt:

$$\langle u_i | u_j \rangle = \pi \cdot \delta_{ij}.$$

Damit wäre gezeigt, daß die $u_n(x)$ zueinander orthogonal sind. □

1.6.2 Vollständigkeit eines Funktionensystems

Wir betrachten die Funktion $f(x) : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$. Bilden $u_n(x)$ ein Orthonormalsystem auf $[a, b]$, so können wir eine Näherung der Funktion $f(x)$ durch Linearkombination der Basisvektoren u_n angeben:

$$f_N(x) = \sum_{n=1}^N a_n \cdot u_n(x).$$

Wie müssen nun diese Entwicklungskoeffizienten gewählt werden, um eine möglichst gute Approximation von $f(x)$ zu erhalten?

Um dies zu erreichen, muß $\langle f - f_N | f - f_N \rangle$ minimal werden:

$$\begin{aligned} \langle f - f_N | f - f_N \rangle &= \int_a^b |f - f_N|^2 dx \\ &= \int_a^b (f^* - f_N^*)(f - f_N) dx \\ &= \int_a^b (f^* f - f_N^* f - f^* f_N + f_N^* f_N) dx \\ &= \int_a^b f^* f dx - \sum_{n=1}^N a_n^* \int_a^b u_n^* f dx - \sum_{n=1}^N a_n \int_a^b f^* u_n dx \\ &\quad + \sum_{n,m} a_n^* a_m \underbrace{\int_a^b u_n^* u_m dx}_{\delta_{nm}} \\ &= \int_a^b f^* f dx - \sum_{n=1}^N a_n^* \int_a^b u_n^* f dx - \sum_{n=1}^N a_n \int_a^b f^* u_n dx + \sum_{n=1}^N a_n^* a_n \end{aligned}$$

Um diesen Ausdruck zu minimieren, müssen die partiellen Ableitungen nach a_n und a_n^* verschwinden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a_n} \langle f - f_N | f - f_N \rangle &= 0 = - \int_a^b f^* u_n dx + a_n^* \\ \frac{\partial}{\partial a_n^*} \langle f - f_N | f - f_N \rangle &= 0 = - \int_a^b u_n^* f dx + a_n \end{aligned}$$

Die Gleichungen sind erfüllt für

$$\begin{aligned} a_n^* &= \langle f | u_n \rangle \\ a_n &= \langle u_n | f \rangle. \end{aligned} \tag{1.6.67}$$

Werden die Entwicklungskoeffizienten in dieser Weise gewählt, erreicht man eine optimale Approximation von $f(x)$:

$$f_N(x) = \sum_{n=1}^N u_n(x) \underbrace{\langle u_n | f \rangle}_{a_n}. \quad (1.6.68)$$

Ein orthonormales Funktionensystem $u_n : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ heißt *vollständig* auf $[a, b]$, wenn für jede quadratintegrale Funktion f auf $[a, b]$ gilt:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^b |f - f_N|^2 dx = 0. \quad (1.6.69)$$

Jede Funktion, die auf $[a, b]$ quadratintegrale ist, muß sich also auf folgende Weise darstellen lassen:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x). \quad (1.6.70)$$

Wie es gerade auch in der Quantenmechanik üblich ist, verwenden wir auch hier die Dirac-Schreibweise für das Skalarprodukt (siehe Gl.(1.6.63)). Formal definieren wir das Skalarprodukt mit der δ Funktion durch

$$\begin{aligned} \langle x | f \rangle &= \int \delta(x' - x) f(x') dx' \\ &= f(x). \end{aligned} \quad (1.6.71)$$

Verwenden wir nun diese Schreibweise für $f(x)$ und $u_n(x)$, und benutzen außerdem Gleichung (1.6.67) für a_n , so schreibt sich Gleichung (1.6.70) für die Funktionswerte der Funktion f bei dem Argument x

$$f(x) = \langle x | f \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x | u_n \rangle \langle u_n | f \rangle. \quad (1.6.72)$$

Da diese Beziehung für alle Funktionen f und alle Argumente x aus dem vorgegebenen Intervall gilt, sieht man durch Vergleich des zweiten mit dem dritten Teil dieser Gleichung, daß

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n \rangle \langle u_n| = 1 \quad (1.6.73)$$

eine komplizierte Art ist, den Einsoperator in dem Vektorraum der Funktionen über das vorgegebene Intervall darzustellen. Da diese Relation nur für vollständige Funktionensysteme gilt, bezeichnet man auch die Relation (1.6.73) manchmal als Vollständigkeitsrelation.

Mit diesem Einsoperator kann Gleichung (1.6.72) nicht nur als Gleichung für die verschiedenen Funktionswerte sondern auch als Entwicklung der Funktion f dargestellt werden:

$$|f\rangle = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} |u_n\rangle \langle u_n|}_{1} f\rangle$$

Schließlich betrachten wir $f(x)$ noch einmal in der Darstellung (1.6.70) und setzen für die Entwicklungskoeffizienten die Integraldarstellung ((1.6.67),(1.6.63)) ein

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n^*(y) f(y) dy \cdot u_n(x) \\ &= \int_a^b f(y) \cdot \delta(x-y) dy. \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung gilt wegen der Eigenschaften der δ -Funktion. Diese Gleichung soll für alle f gelten. Durch Vergleich folgt nun:

$$\begin{aligned} \delta(x-y) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n^*(y) u_n(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle x | \underbrace{|u_n\rangle \langle u_n|}_1 | y \rangle \\ &= \langle x | y \rangle. \end{aligned} \tag{1.6.74}$$

Auch diese Beziehung wird manchmal als Vollständigkeitsrelation bezeichnet.

Zwei einfache Beispiele:

1. *Fourier-Reihen*: Sei $[a, b] = [-\pi, \pi]$ dann ist

$$u_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad u_i(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin ix, \quad \tilde{u}_i(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos ix$$

ein vollständiges Orthonormalsystem für alle $i = 1, \dots$. Jede Funktion f kann also dargestellt werden als

$$f(x) = c \cdot u_0 + \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx + b_n \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx \right).$$

Dies ist die Darstellung einer *Fourier-Reihe* mit den Fourier-Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_n &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx dx \\ b_n &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx dx. \end{aligned}$$

2. *Legendre-Polynome*: Seien $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$. Die folgenden Polynome seien wie folgt definiert:

$$(l+1)P_{l+1}(x) = (2l+1)xP_l(x) - lP_{l-1}(x). \quad (1.6.75)$$

Über diese Rekursionsformel sind sämtliche P_l definiert. Man sieht sofort, daß die so definierten Funktionen P_l Polynome vom Grade l sind. Für $l = 0$ und $l = 1$ wird das direkt aus der Definition deutlich. Nimmt man nun an, daß P_j ein Polynom vom Grade j ist für alle j von $j = 0$ bis $j = l$, so zeigt die Rekursionsrelation (1.6.75), daß damit P_{l+1} ein Polynom vom Grade $l+1$ ist. So haben wir also durch vollständige Induktion gezeigt, daß die P_l , die sogenannten *Legendre-Polynome* vom Grade l sind. Die P_l bilden ein vollständiges Orthogonalsystem auf dem Intervall $[-1,1]$. Es gilt:

$$\int_{-1}^1 P_l(x)P_k(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{lk}. \quad (1.6.76)$$

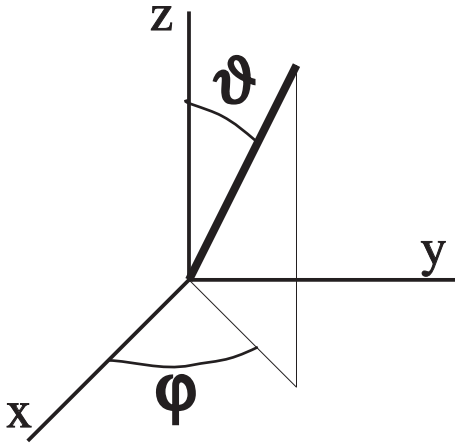
1.6.3 Entwicklung in Kugelkoordinaten

Die Art/Geometrie des Potentialproblems, welches wir zum Beispiel durch Entwicklung des gesuchten Potentials nach einem orthonormierten Funktionensystem lösen wollen, macht es oft sinnvoll zuvor ein geeignetes Koordinatensystem zu wählen. So empfiehlt es sich bei Problemen, die kugelsymmetrisch sind, bei denen also vom Koordinatenursprung aus gesehen keine Raumrichtung ausgezeichnet ist, die Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) zur Darstellung von Ortsvektoren zu benutzen. Im vorigen Abschnitt haben wir Funktionensysteme betrachtet, die auf einem Intervall $[a, b]$ in \mathcal{R} definiert sind. In diesem Abschnitt wollen wir nun diese Überlegungen anwenden auf ein Funktionensystem, das von 2 Variablen, $\vartheta \in [0, \pi]$ und $\varphi \in [0, 2\pi]$, abhängt. Diese Funktionen sind also gerade für das Intervall des \mathcal{R}^2 definiert, mit dem man in den Kugelkoordinaten die Oberfläche einer Kugel parametrisiert. Die Definition dieser Kugelkoordinaten ist in der Figur 1.13 skizziert. Wegen dieses Definitionsbereiches nennt man die uns interessierenden Funktionen $Y_{l,m}(\vartheta, \varphi)$ auch **Kugelflächenfunktionen**. Sie sind definiert für die Indexpaare (l, m) , wobei l eine natürliche Zahl ist ($l = 0, 1, 2, \dots$) und m bei vorgegebenem l die $(2l+1)$ Werte $m = -l, -l+1, \dots, l-1, l$ annehmen kann.

Im folgenden wollen wir einige Eigenschaften dieser Kugelflächenfunktionen $Y_{l,m}(\vartheta, \varphi)$ auflisten:

- 1.) Die Y_{lm} bilden ein Orthonormalsystem (ONS), d. h. mit dem entsprechenden Skalarprodukt gilt:

$$\langle l'm' | lm \rangle = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta Y_{l',m'}^*(\vartheta, \varphi) Y_{l,m}(\vartheta, \varphi) = \delta_{l',l} \delta_{m',m} \quad (1.6.77)$$

Abbildung 1.13: Definition der Kugelkoordinaten ϑ und φ

Für die Integration über die Winkelvariablen (ϑ, φ) werden wir manchmal die folgenden Abkürzungen benutzen:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \vartheta d\vartheta = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{+1} d(\cos \vartheta) = \int d\Omega. \quad (1.6.78)$$

- 2.) Die $Y_{l,m}$ bilden sogar ein vollständiges ONS, d. h. jede Funktion $\psi(\vartheta, \varphi)$ ist darstellbar (vergleiche Gl.(1.6.70))

$$\psi(\vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=+l} a_{lm} Y_{l,m}(\vartheta, \varphi), \quad (1.6.79)$$

wobei sich die Entwicklungskoeffizienten entsprechend der Gleichung (1.6.67) berechnen

$$a_{lm} = \langle lm | \psi \rangle = \int d\Omega Y_{lm}^*(\Omega) \psi(\Omega). \quad (1.6.80)$$

Die Vollständigkeitsrelation (1.6.73) schreibt sich nun:

$$1 = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=+l} |lm\rangle \langle lm|, \quad (1.6.81)$$

womit sich ergibt

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=+l} |lm\rangle \langle lm | \psi \rangle \\ \implies \langle \Omega | \Psi \rangle &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=+l} \langle \Omega | lm \rangle \langle lm | \Psi \rangle \end{aligned}$$

Diese letzte Gleichung entspricht natürlich der Gleichung (1.6.79), denn in der oben eingeführten Nomenklatur bezeichnet

$$\begin{aligned}\langle \Omega | \Psi \rangle &= \psi(\vartheta, \varphi) \\ \langle \Omega | lm \rangle &= Y_{lm}(\vartheta, \varphi)\end{aligned}$$

und $lm | \Psi \rangle$ ist in (1.6.80) definiert. Damit haben wir nun jede beliebige Funktion $\psi(\vartheta, \varphi)$, die auf der Oberfläche einer Kugel definiert ist entwickelt nach den Funktionen $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$. Wollen wir nun eine Funktion $\Psi(r, \vartheta, \varphi)$ betrachten, die im ganzen Raum \mathcal{R}^3 definiert ist, so können wir die Entwicklung (1.6.79) für jede Kugeloberfläche mit festgehaltenem Radius r wiederholen:

$$\Psi(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} a_{lm}(r) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \quad (1.6.82)$$

Die Funktion Ψ ist also durch die Entwicklungskoeffizienten $a_{lm}(r)$, die von r abhängen eindeutig definiert.

- 3.) Wir betrachten nun die Wirkung des Laplace Operators (hier dargestellt in Kugelkoordinaten) auf die Funktionen Y_{lm}

$$\Delta \cdot Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right\} Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

Da die Y_{lm} nach Konstruktion/Vorraussetzung nicht von r abhängen fällt der erste Term (also die Ableitung nach der r -Komponente) sofort heraus. Für die Ableitungen nach den Winkelvariablen ergibt sich:

$$\Delta \cdot Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \frac{-l(l+1)}{r^2} Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

In der Quantenmechanik hat dieses Ergebnis eine wichtige Bedeutung:

$$\longrightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2} Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

Die Größe $\frac{\hbar^2 l^2}{2mr^2}$ ist hierbei das Zentrifugalpotential bei vorgegebenem Drehimpuls l .

- 4.) Explizit kann man die $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ darstellen durch:

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi} \quad (1.6.83)$$

Die Kugelflächenfunktionen faktorisieren also in einen Anteil $e^{im\varphi}$, der vom Winkel φ abhängt und den Legendre-Funktionen, $P_l^m(\cos \vartheta)$. Für diese Legendre

Funktionen gibt es viele Rekursionsformeln, die eine Berechnung ermöglichen. Ein Beispiel ist die Rekursionsformel bei festgehaltenem m :

$$(l - m)P_l^m(x) = x(2l - 1)P_{l-1}^m(x) - (l + m - 1)P_{l-2}^m(x). \quad (1.6.84)$$

Für den Fall $m = 0$ ist diese Rekursionsformel idenetisch mit der entsprechenden Rekursionsformel (1.6.75) für die Legendre-Polynome. In der Tat sind die Legendre Funktion $P_l^{m=0}$ gerade die Legendre Polynome. Für $m > 0$ ergibt (1.6.84) aber auch für den allgemeinen Fall die Möglichkeit die Legendre Funktionen stabil auszurechnen. Die Rekursion wird dabei gestartet mit den Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} P_m^m(x) &= (-1)^m (2m - 1)!! (1 - x^2)^{m/2} \\ P_{m-1}^m(x) &= 0 \end{aligned}$$

Die zweite Beziehung ergibt sich automatisch aus der Bedingung, daß der Index l für P_l^m stets größer gleich dem Index m sein muß. Der Ausdruck $(2m - 1)!!$ bezeichnet das Produkt aller ungeraden natürlichen Zahlen von 1 bis $(2m - 1)$. Die Legendre-Funktionen für negative Werte des Index m ergeben sich dann aus der Beziehung

$$P_l^m(x) = (-1)^m P_l^{-m}(x) \quad (1.6.85)$$

5.) Damit ergibt sich für die Kugelflächenfunktionen die Beziehung:

$$Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi) = \overset{\text{Phasenfaktor}}{(-1)^m} Y_{l-m}(\vartheta, \varphi) \quad (1.6.86)$$

Sei die darzustellende Funktion $\psi(\vartheta, \varphi)$ reellwertig, so folgt mit dieser Symmetriebeziehung

$$\begin{aligned} \psi(\vartheta, \varphi) &= \sum_{lm} a_{lm} Y_{lm} \stackrel{!}{=} \psi^*(\vartheta, \varphi) \\ &= \sum_{lm} a_{lm}^* Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi) \\ &= \sum a_{lm}^* (-1)^m Y_{l-m} \end{aligned}$$

Da die Entwicklungskoeffizienten a_{lm} eindeutig sind, folgt damit in diesem Fall

$$a_{l-m} = (-1)^m a_{lm}^* \quad (1.6.87)$$

6.) Sei eine Zusatzbedingung, daß die darzustellende Funktion $\psi(\vartheta, \varphi)$ nur von ϑ abhängt, so vereinfachen sich die Ausdrücke für die Kugelflächenfunktionen in Gleichung 1.6.83. Da nur die Kugelflächenfunktionen mit $m = 0$ unabhängig von φ sind reduziert sich die Entwicklung (1.6.79) zu:

$$\begin{aligned} \psi(\vartheta) &= \sum_{l,(m=0)}^{\infty} a_{l0} Y_{l0}(\vartheta, \varphi) \\ &= \sum_{l,(m=0)}^{\infty} a_{l0} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l^0(\cos \vartheta) 1 \end{aligned}$$

Die Orthogonalitätsbeziehung (1.6.77) ergibt sich in diesem Fall der Kugelflächenfunktionen mit $m = 0$:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{+1} d(\cos \vartheta) \sqrt{\frac{2l'+1}{4\pi}} P_l^* \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l' = \delta_{ll'}$$

Dabei haben wir ausgenutzt, daß die Legendre-Funktionen mit dem Index $m = 0$ identisch sind mit den Legendre-Polynomen, so daß diese letzte Gleichung übereinstimmt mit der Orthogonalitätsrelation der Legendre-Polynome (1.6.76).

7.) **Behauptung:** Für die freie Greensche Funktion gilt

$$G_f(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos \vartheta) \quad (1.6.88)$$

mit $r_{<} = \min\{|\vec{r}|, |\vec{r}'|\}$, $r_{>} = \max\{|\vec{r}|, |\vec{r}'|\}$ und $\vartheta = \angle(\vec{r}, \vec{r}')$, d.h. ϑ ist der Winkel zwischen den Vektoren \vec{r} und \vec{r}'

Beweis: Sei $|\vec{r}| < |\vec{r}'|$, der Beweis für die andere Möglichkeit $|\vec{r}| > |\vec{r}'|$ verläuft analog. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \vartheta}} \\ &= \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r'^2}{r^2} - 2\frac{r'}{r} \cos \vartheta}} \\ &= \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l \left(\frac{r'}{r}\right) P_l(\cos \vartheta) \end{aligned} \quad (1.6.89)$$

In der letzten Zeile dieser Gleichung haben wir die Funktion, die von ϑ und dem Verhältnis r'/r abhängt entwickelt nach Legendre-Polynomen mit Entwicklungskoeffizienten $\alpha_l(r'/r)$. Da die Koeffizienten α_l unabhängig sind von ϑ können wir sie bestimmen aus dem Fall $\vartheta = 0$ (also $\cos \vartheta = 1$). Dabei gilt:

$$P_l(\cos \vartheta = 1) = 1 \quad (1.6.90)$$

Begründung mit (1.6.75):

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, \quad P_1(x) = x = 1 \\ P_{l+1}(x) &= [(2l+1)x P_l(x) - l P_{l-1}(x)] \frac{1}{l+1} \\ &= \frac{(2l+1)x P_l(x) - l P_{l-1}(x)}{l+1} \end{aligned}$$

mit der Induktionsvoraussetzung $P_l(1) = P_{l-1}(1) = 1$ folgt

$$P_{l+1}(x) = \frac{2l+1-1-l}{l+1} = 1 \quad (1.6.91)$$

damit ist also (1.6.90) durch Induktion nach l bewiesen. Eingesetzt in (1.6.89) ergibt sich:

$$\frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l \left(\frac{r'}{r}\right) \cdot 1 = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r(1 - \frac{r'}{r})} = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^l \quad (1.6.92)$$

die letzte Gleichung ergibt sich aus der geometrischen Reihe. Der Vergleich in dieser letzten Gleichung zeigt:

$$\implies \alpha\left(\frac{r'}{r}\right) = \left(\frac{r'}{r}\right)^l \quad (1.6.93)$$

Setzt man dies in (1.6.89) ein so ergibt sich sofort die Behauptung (1.6.88).

- 8.) Sei ein Vektor \vec{r} charakterisiert durch die Winkelvariablen ϑ und φ , entsprechend \vec{r}' durch ϑ' und φ' . Sei außerdem α der Winkel zwischen \vec{r} und \vec{r}' , so gilt das **Additionstheorem**:

$$P_l(\cos \alpha) = \sum_{m=-l}^{+l} \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi). \quad (1.6.94)$$

Eingesetzt in Gleichung (1.6.88) ergibt sich für die freie Greensche Funktion:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{r^{l+1}} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi). \quad (1.6.95)$$

1.7 Multipolentwicklung

Ziel der Multipolentwicklung ist es, das elektrische Feld einer Ladungsverteilung anzugeben, die nicht auf einem Punkt konzentriert ist sondern in einem kleinen Bereich um den Koordinatenursprung lokalisiert ist. Dies bedeutet, daß die Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ von null verschieden ist nur für Vektoren \vec{r} mit kleinem Betrag. Als Beispiel betrachten wir die Ladungsverteilung eines Atomkernes. Aus der Sicht der Elektronen, die diesen Atomkern in einem Atom umgeben, ist diese Ladungsverteilung in erster Näherung punktförmig und trägt die Gesamtladung Ze mit Z der Kernladungszahl, also der Zahl der Protonen im Kern, und e die Elementarladung eines Protons. Bei genauerer Untersuchung stellt sich aber heraus, daß die Ladung des Atomkernes nicht punktförmig ist. Berechnet man mit den Methoden der Quantenmechanik die stationären Lösungen der Schrödingergleichung für die Elektronen im Feld des Atomkernes, so hängen die Ergebnisse für die Energien dieser stationären Lösungen ein wenig ab von der genauen Form der Ladungsverteilung. Aus der charakteristischen Strahlung des Atoms erhält man die Information über die die Differenzen dieser Energien und damit im Prinzip auch Information über die Ladungsverteilung des Atomkernes. Genauere Daten ergeben erhält man aus Experimenten, bei denen Elektronen an der Ladungsverteilung des Kernes gestreut werden.

Im folgenden wollen wir eine lokalisierte Ladungsverteilung im feldfreien Raum betrachten. Für das elektrostatische Potential, das von dieser Ladungsverteilung erzeugt wird, gilt (siehe Abschnitt 1.3):

$$\phi(\vec{r}) = \int_V d^3\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

Da wir uns für das Potential an Stellen \vec{r} außerhalb der Ladungsverteilung, die am Koordinatenursprung lokalisiert sein soll, interessieren, gilt $r > r'$. Damit können wir die Entwicklung der freien Greenschen Funktion nach Gleichung (1.6.88) betrachten und es gilt für dieses Potential:

$$\phi(\vec{r}) = \int_V d^3r' \sum_l \frac{(r')^l}{r^{l+1}} \cdot P_l(\cos \vartheta) \cdot \rho(r').$$

Hierbei beschreibt ϑ den Winkel zwischen \vec{r} und \vec{r}' . Formt man die Legendrepolynome $P_l(\cos \vartheta)$ mit Hilfe des Additionstheorems (1.6.94) um, ergibt sich

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= \int_V d^3r' \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(r')^l}{r^{l+1}} \cdot \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{+l} Y_{l,m}^*(\vartheta', \varphi') Y_{l,m}(\vartheta, \varphi) \cdot \rho(\vec{r}') \\ &= \sum_l \sum_m \frac{4\pi}{2l+1} \frac{1}{r^{l+1}} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \cdot \int_V d^3r' \rho(\vec{r}') (r')^l Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi'). \end{aligned} \quad (1.7.96)$$

Diese Beschreibung des Potentials läßt sich nun aufteilen in die Summe von jeweils zwei Faktoren, wobei der erste vom Ort \vec{r} abhängig ist, an dem das Potential bestimmt wer-

den soll. Die zweiten Faktoren, die nur von der Form der Ladungsverteilung abhängen, nennen wir die *Multipolmomente* der Ladungsverteilung:

$$q_{l,m}^* = \int_V d^3 r' \rho(\vec{r}') (r')^l Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi'). \quad (1.7.97)$$

In diesen Multipolmomenten $q_{l,m}$ ist also die ganze Information über die Ladungsverteilung enthalten, und mit ihnen ist das Potential nun direkt berechenbar.

Diese Multipolentwicklung geordnet nach dem Summationsindex l in (1.7.96) konvergiert, da die Faktoren:

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{(r')^l}{r^l} \rightarrow 0.$$

Nun wollen wir die Multipolmomente für niedrige Werte von l explizit betrachten.

1.7.1 Monopolmoment

Das einfachste Multipolmoment erhält man für $l = 0$. Da m auf den Bereich $-l$ bis $+l$ beschränkt ist, kann m in diesem Fall nur den Wert $m = 0$ annehmen. Um das Monopolmoment zu berechnen, fehlt uns nur noch der Ausdruck für die Kugelflächenfunktionen $Y_{l,m}$ (siehe auch (1.6.83):

$$Y_{l,m}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l+m)!}{(l-m)!}} \exp(im\varphi) \cdot P_l^m(\cos \vartheta).$$

Setzt man jetzt ein, daß die Legendre Funktion für $l = m = 0$ gerade die 1 ist, erhalten wir:

$$Y_{0,0}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}.$$

So ergibt sich das Monopolmoment $q_{0,0}$ als

$$\begin{aligned} q_{0,0} &= \int d^3 \vec{r}' \rho(\vec{r}') \cdot r'^0 \cdot \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \cdot Q, \end{aligned}$$

mit Q der Gesamtladung der betrachteten Ladungsverteilung. Welchen Beitrag zum Potential ϕ leistet nun das Monopolmoment? Nach Gleichung (1.7.96) ist der Beitrag eines Monopolmomentes zum elektrostatischen Potential gegeben durch:

$$\phi(\vec{r}) = \sum_l \sum_m \frac{4\pi}{2l+1} \frac{1}{r^{l+1}} Y_{l,m}(\vartheta, \varphi) \cdot q_{l,m}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4\pi}{1} \frac{1}{r} \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \cdot Q \\
&= \frac{Q}{r}.
\end{aligned}$$

Das Potential, das durch ein reines Monopolmoment generiert wird, entspricht also dem Potentialverlauf einer Punktladungsverteilung mit der Gesamtladung Q bei $\vec{r} = 0$. Bei größeren Abständen $r \gg r'$ ist dieser Monopolbeitrag dominant. Die Ausdehnung der Ladungsverteilung kann dann als klein, bzw. punktförmig angesehen werden.

1.7.2 Dipolmoment

Bei $l = 1$ kann der Laufindex m drei mögliche Werte annehmen: $m = -1$, $m = 0$ und $m = +1$. Die jeweils dazugehörigen Kugelflächenfunktionen $Y_{l,m}$ haben die Form:

$$\begin{aligned}
Y_{1,0} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \vartheta \\
Y_{1,1} &= -\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin \vartheta \exp(i\varphi) \\
Y_{1,-1} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin \vartheta \exp(-i\varphi)
\end{aligned}$$

Die zugehörigen Multipolmomente $q_{1,m}$ bezeichnet man als Dipolkomponenten in der sphärischen Darstellung. Für die anschauliche Interpretation der Dipolmomente ist es aber geschickter Linearkombinationen dieser sphärischen Dipolkomponenten zu betrachten. Zunächst definieren wir

$$\begin{aligned}
d_z &= q_{1,0} \cdot \sqrt{\frac{4\pi}{3}} & (1.7.98) \\
&= \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int d^3 r' \rho(\vec{r}') r' \cos \vartheta' \\
&= \int d^3 r' \rho(\vec{r}') \cdot \underbrace{r' \cos \vartheta'}_{z'} \\
&= \int d^3 r' \rho(\vec{r}') z'
\end{aligned}$$

d_z gibt also das Integral der Ladungsverteilung an, gewichtet mit der z' -Komponente des Integrationsvektors. Entsprechendes gilt für die anderen kartesischen Komponenten, wenn wir definieren:

$$d_x = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \frac{1}{\sqrt{2}} (-q_{1,1} + q_{1,-1}) \quad (1.7.99)$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int d^3 r' \rho(\vec{r}') r' \sin \vartheta' \underbrace{(\exp(i\varphi') + \exp(-i\varphi'))}_{2 \cos \varphi'} \\
&= \frac{2}{2} \int d^3 r' \rho(\vec{r}') \underbrace{r' \sin \vartheta' \cos \varphi'}_{x'} \\
&= \int d^3 r' \rho(\vec{r}') x' \\
d_y &= \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \frac{1}{\sqrt{2}} i(q_{1,1} + q_{1,-1}) \tag{1.7.100} \\
&= \int d^3 r' \rho(\vec{r}') y'
\end{aligned}$$

Das Dipolmoment läßt sich also auch als Vektor in einer kartesischen Darstellung angeben:

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{pmatrix} = \int d^3 r' \rho(\vec{r}') \vec{r}'. \tag{1.7.101}$$

Die kartesische Darstellung des Dipolmomentes ist also durch drei reelle Zahlen, d_x , d_y , d_z , charakterisiert. Man sieht auch sofort, daß diese 3 Zahlen die kartesischen Komponenten eines Vektors sind. Dies bedeutet, daß man bei einer Drehung des Koordinatensystems die 3 kartesischen Komponenten des Dipolvektors

$$\vec{d}' = \begin{pmatrix} d'_x \\ d'_y \\ d'_z \end{pmatrix}$$

in diesem neuen Koordinatensystem aus den Komponenten d_j des ursprünglichen Systems direkt durch die orthogonale Transformation

$$d'_i = \sum_{j=x,y,z} A_{i,j} d_j \quad \text{für } i=x,y,z \tag{1.7.102}$$

berechnen kann. $A_{i,j}$ bezeichnet hier die 3×3 Matrix der zugehörigen orthogonalen Transformation. Entsprechendes gilt natürlich auch, wenn bei festgehaltenem Koordinatensystem die Ladungsverteilung gedreht wird.

Die Komponenten dieses Dipolvektors \vec{d}' werden angegeben in Einheiten

$$[\vec{d}] = \frac{\text{Ladung}}{\text{Volumen}} \cdot \text{Länge} \cdot \text{Volumen} = 1 \text{ C} \cdot 1 \text{ m}.$$

Es wurde soeben betont, daß der Dipolvektor durch die 3 kartesischen Komponenten d_x , d_y , d_z , also 3 reelle Zahlen definiert ist. Andererseits haben wir das Dipolmoment in

der sphärischen Darstellung durch die 3 Werte für $q_{1,m}$ beschrieben, die komplexwertig sind, wodurch 6 reelle Zahlen (jeweils 3 Real- und Imaginärteile) zur vollständigen Beschreibung nötig sind. Dieser scheinbare Widerspruch wird aber dadurch aufgelöst, daß bei der Entwicklung einer reellwertigen Funktion, wie der Ladungsverteilung, nach Kugelflächenfunktionen die Entwicklungskoeffizienten $q_{l,0}$ stets reell sind und die mit negativem Index m sich aus dem dazugehörigen Koeffizienten $q_{l,-m}$ mittels der Symmetriebeziehung (1.6.87) direkt bestimmen lassen. Also sind auch die $q_{1,m}$ bereits durch 3 reelle Zahlen eindeutig festgelegt.

Dies sieht man auch direkt aus den Transformationsgleichungen von der kartesischen Darstellung in die sphärische Darstellung, also der Umkehrtransformation zu den Gleichungen (1.7.98) - (1.7.100):

$$q_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} d_z \quad (1.7.103)$$

$$q_{1,1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} (-d_x - id_y) \quad (1.7.104)$$

$$q_{1,-1} = -q_{1,1}^* = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} (d_x - id_y) \quad (1.7.105)$$

Beispiel:

Eine lokalisierte Ladungsverteilung bestehe aus zwei Punktladungen. Die Ladung q_1 befinde sich auf der z-Achse bei $z_1 = a$, die Ladung $q_2 = -q_1$ sei ebenfalls auf der z-Achse bei $z_2 = -a$. Diese Verteilung besitzt keinen Monopolbeitrag:

$$q_{0,0} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} (q + (-q)) = 0.$$

Betrachtet man diese Ladungsverteilung aus großer Entfernung, so erscheint sie (in erster Näherung) als elektrisch neutrales Gebilde. Für den Dipolbeitrag ergibt sich nun in der kartesischen Darstellung:

$$\begin{aligned} d_x &= \int d^3 r' \rho(\vec{r}') x' = 0 \\ d_y &= \int d^3 r' \rho(\vec{r}') y' = 0, \end{aligned}$$

da die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ nur an solchen Stellen ungleich null ist, wo x' bzw. y' null sind. Bei d_z ergibt sich nun:

$$\begin{aligned} d_z &= \int d^3 r' \rho(\vec{r}') z' \\ &= q \cdot a + (-q)(-a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2q a \\
 \Rightarrow q_{1,0} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cdot 2q a.
 \end{aligned}$$

Wären die beiden Ladungen q_1 und q_2 gleich groß, und hätten sie auch dasselbe Vorzeichen, so wäre $d_z = 0$ — die Ladungsverteilung hätte also kein Dipolmoment (dafür dann ein Monopolmoment).

Wie sieht nun aber das Potential einer solchen zigarrenförmigen Ladungsverteilung aus? Nach (1.7.96) gilt

$$\begin{aligned}
 \phi(\vec{r}) &= \sum_{l=0}^1 \sum_{m=-l}^{+l} \frac{4\pi}{3} \frac{1}{r^2} Y_{l,m} q_{l,m}^* \\
 &= \frac{4\pi}{3} \frac{1}{r^2} Y_{1,0} q_{1,0}^* \\
 &= \frac{4\pi}{3} \frac{1}{r^2} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \vartheta \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cdot 2q a \\
 &= \frac{1}{r^2} \underbrace{\cos \vartheta \cdot 2q a}_{\vec{d} \cdot \hat{e}_r} \\
 &= \frac{1}{r^2} \vec{d} \cdot \hat{e}_r \tag{1.7.106}
 \end{aligned}$$

ϑ beschreibt den Winkel zwischen dem Dipolmoment \vec{d} und dem Einheitsvektor in Richtung des Beobachtungspunktes. In der Form von (1.7.106) stellt sich allgemein der Beitrag eines Dipolmomentes zum Potential eines elektrostatischen Feld unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems dar.

Wie wir gesehen haben, können wir ein Dipolmoment auf zwei verschiedene Arten darstellen:

- In der kartesischen Darstellung erscheint das Dipolmoment als Vektor \vec{d} mit den Komponenten d_x , d_y und d_z . \vec{d} wird also durch drei reelle Zahlen beschrieben.
- Bei der sphärischen Darstellung geben wir die Dipolmomente $q_{1,0}$, $q_{1,1}$ und $q_{1,-1}$ an. Hier wird also das Dipolmoment durch drei komplexe Zahlen (also 6 reelle Zahlen) charakterisiert, die aber wegen der Symmetrieeigenschaften der Kugelflächenfunktionen (1.6.86) nicht unabhängig voneinander sind. Da wegen dieser Symmetrieeigenschaften $q_{1,0}$ reell sein muß und $q_{1,-1} = -q_{1,1}^*$ ist das Dipolmoment auch in der sphärischen Darstellung durch 3 reelle Zahlen gegeben.
- Die Transformation von der sphärischen in die kartesische Darstellung wird durch die Gleichungen (1.7.98)-(1.7.100) beziehungsweise (1.7.103)-(1.7.105) beschrieben.

1.7.3 Quadrupolmomente

Die Quadrupolmomente lassen sich genauso herleiten wie die Mono- und Dipolmomente. Nach einfacher Rechnung ergibt sich für die Komponenten in der sphärischen Darstellung:

$$\begin{aligned}
 q_{20} &= \int d^3 r' \rho(\vec{r}') r'^2 \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left[\frac{3}{2} \cos^2 \vartheta' - \frac{1}{2} \right] \\
 &= \int d^3 r' \rho(\vec{r}') \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left[\frac{3}{2} z'^2 - \frac{1}{2} r'^2 \right] \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} Q_{zz}
 \end{aligned} \tag{1.7.107}$$

$$\begin{aligned}
 q_{21} &= - \int d^3 r' \rho(\vec{r}') r'^2 \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \vartheta' \cos \vartheta' e^{i\varphi'} \\
 &= - \int d^3 r' \rho(\vec{r}') \sqrt{\frac{15}{8\pi}} z' (x' + iy') \\
 &= -\frac{1}{3} \sqrt{\frac{15}{8\pi}} (Q_{xz} + iQ_{yz})
 \end{aligned} \tag{1.7.108}$$

$$\begin{aligned}
 q_{22} &= \int d^3 r' \rho(\vec{r}') r'^2 \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \vartheta' e^{i2\varphi'} \\
 &= \int d^3 r' \rho(\vec{r}') \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} (x' + iy')^2 \\
 &= \frac{1}{12} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} (Q_{xx} + i2Q_{xy} - Q_{yy})
 \end{aligned} \tag{1.7.109}$$

Dabei sind für diese 3 Beispiele auch wieder die Verbindungen zu der kartesischen Darstellung Q_{ij} angegeben. Wir sehen, auch für das Quadrupolmoment lassen sich wieder die beiden Darstellungen angeben:

- a) kartesisch: In der kartesischen Darstellung zeigt sich das Quadrupolmoment als Matrix Q_{ij} mit neun reellwertigen Einträgen:

$$Q_{ij} = \int d^3 r' \rho(\vec{r}') (3x'_i x'_j - \delta_{ij} r'^2) \tag{1.7.110}$$

Das Quadrupolmoment ist invariant gegenüber Vertauschungen von i und j :

$$Q_{ij} = Q_{ji}.$$

Also müssen aus Symmetriegründen nur sechs Einträge angegeben werden, die anderen drei ergeben sich aus ihnen. Da jedoch

$$\begin{aligned}
 Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz} &= \int d^3 r' \rho(\vec{r}') (3(x'^2 + y'^2 + z'^2) - (r'^2 + r'^2 + r'^2)) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

ist, die Spur von $Q_{ij} = 0$ ist, sind es nur fünf unabhängige reelle Zahlen, die das Quadrupolmoment charakterisieren.

- b) sphärisch: Hier werden die fünf Quadrupolmomente $q_{2,m}$ angegeben. Da aber $q_{2,0}$ reell ist und für die anderen Quadrupolmomente gilt:

$$q_{2,m} = (-1)^m q_{2,-m}^*$$

wird auch hier die ganze Information durch fünf reelle Zahlen wiedergegeben.

- c) Tensoreigenschaft: Die Darstellung des Quadrupolmomentes in Form einer 3×3 Matrix mit den kartesischen Komponenten in (1.7.110) erinnert sehr stark an die Definition des Trägheitstensors in der klassischen Mechanik

$$\Theta_{ij} = \int d^3 r' \rho_{\text{Masse}}(\vec{r}') (\delta_{ij} r'^2 - x'_i x'_j)$$

Für die mathematischen Eigenschaften ist es natürlich gleichgültig ob die Funktion $\rho(\vec{r}')$ für die Ladungsverteilung steht wie im Fall des Quadrupolmomentes der Elektrostatik oder für die Massenverteilung wie beim Trägheitstensor. Um die mathematischen Eigenschaften, insbesondere das Verhalten unter einer Drehung des Koordinatensystems, der Matrix für das Quadrupolmoment zu untersuchen, nehmen wir identische Dichtefunktionen in der Definition des Quadrupolmomentes und des Trägheitstensors an. Damit gilt:

$$Q_{i,j} = -3 \Theta_{ij} + 2\delta_{ij} \int d^3 r' \rho(\vec{r}') r'^2$$

Der letzte Term in dieser Gleichung ist die Einheitsmatrix multipliziert mit einer Konstanten. Diese Einheitsmatrix ist in jedem Koordinatensystem gleich. Vom Trägheitstensor wissen wir, daß er sich bei einer Drehung des Koordinatensystems wie ein Tensor zweiter Stufe transformiert. Daraus können wir schließen, daß sich die Matrix $Q_{i,j}$, die das Quadrupolmoment definiert, wie ein solcher Tensor zweiter Stufe transformiert. Dies bedeutet, daß sich die entsprechende Matrix im gedrehten Koordinatensystem $Q'_{i,j}$, beziehungsweise die Matrix für die entsprechend gedrehte Ladungsverteilung, aus der ursprünglichen Matrix berechnen läßt über die Transformationsgleichungen eines Tensors zweiter Stufe:

$$Q'_{i,j} = \sum_{k,l} A_{i,k} A_{j,l} Q_{k,l} = (AQA^t)_{i,j}$$

dabei bezeichnet A wie in (1.7.102) die Matrix der entsprechenden orthogonalen Transformation. Wegen dieser Eigenschaft spricht man auch häufig vom Quadrupoltensor.

Auch hierzu ein Beispiel:

Wir betrachten eine lokalisierte Ladungsverteilung aus 2 Ladungen. Dabei befindet sich auf der z -Achse ($x_\alpha = y_\alpha = 0$) bei $z_1 = a$ die Ladung ρ_1 , bei $z_2 = -a$ die Ladung $\rho_2 = \rho_1$. Bei der Multipolentwicklung erhalten wir das Monopolmoment

$$q_{0,0} = \frac{2\rho}{\sqrt{4\pi}}.$$

Im Gegensatz zum vorhergehenden Beispiel verschwindet hier das Dipolmoment:

$$q_{1,m} = 0.$$

In kartesischer Darstellung müssen wir nun die Tensoreinträge einzeln betrachten. Zunächst einmal die Diagonalelemente:

$$\begin{aligned} Q_{zz} &= \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} (3z_{\alpha}^2 - r_{\alpha}^2) = +4\rho a^2 \\ Q_{xx} &= \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} (3x_{\alpha}^2 - r_{\alpha}^2) = -2\rho a^2 \\ Q_{yy} &= \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} (3y_{\alpha}^2 - r_{\alpha}^2) = -2\rho a^2 \end{aligned}$$

(Probe: Spur $Q_{ij} = \sum_i Q_{ii} = 0$.) Wie anschaulich auch leicht zu verstehen ist, verschwinden die ganzen Nichtdiagonalelemente:

$$Q_{xy} = Q_{xz} = \dots = 0.$$

Sind nun alle diese Multipolmomente in der kartesischen Darstellung bekannt, kann man die entsprechenden q_{2m} der sphärischen Darstellung über die Transformationsgleichungen (1.7.107) - (1.7.108) berechnen und daraus das Potential ϕ angeben:

$$\phi = \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{1}{r^{l+1}} Y_{l,m}(\vartheta, \varphi) \cdot q_{l,m}^*.$$

In unserem Beispiel ist nur q_{20} ungleich 0. Daraus resultiert das elektrische Feld

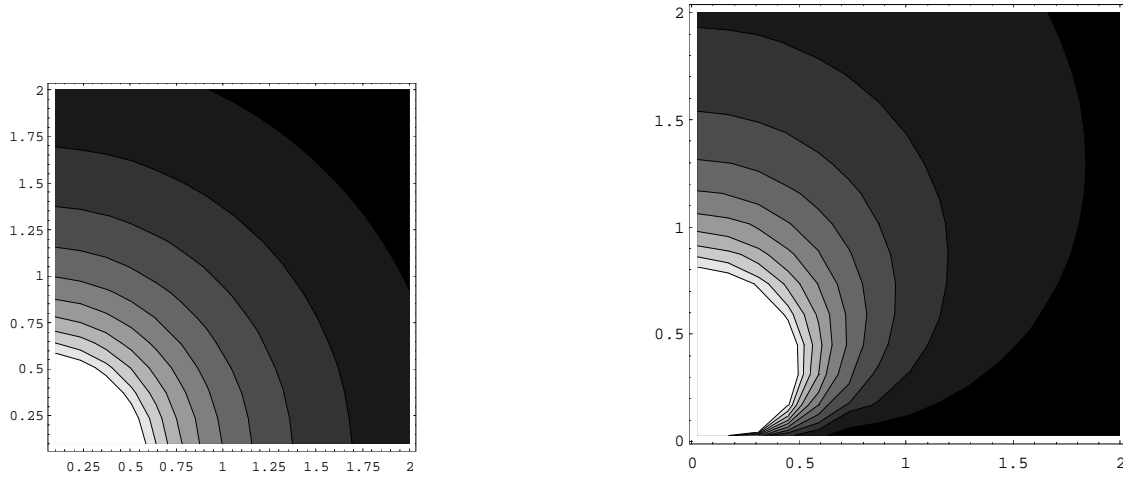
$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi.$$

Zur Illustration sind in den Bildern 1.14 und 1.15 Kontourplots oder Höhenlinien für die elektrostatischen Potentiale eines elektrischen Monopols, Dipols und Quadrupolmoments in einem Ausschnitt der $x-z$ Ebene aufgetragen. Diese Illustrationen sollen nur einen Eindruck vermitteln und es wird deshalb auf eine genauere Angabe der Einheiten usw. verzichtet.

Wie gelingt es uns nun, die Energie einer solchen lokalisierten Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ anzugeben, die sich in einem äußeren \vec{E} -Feld befindet? Wir bleiben bei dem am Anfang dieses Abschnittes diskutierten Beispiel eines Atomkerns, den wir jetzt betrachten im elektrostatischen Feld, das durch die Elektronen generiert wird.

Wie wir bereits im Abschnitt 1.3.1 gesehen haben, kann die potentielle Energie einer Ladung q an der Position \vec{r} in einem elektrischen Feld durch $W = q\phi(\vec{r})$ angegeben werden. Bei mehreren diskreten Ladungen bedeutet dies

$$W = \sum_i q_i \phi(\vec{r}_i).$$



Monopolmoment

Dipolmoment

Abbildung 1.14: Potential elektrischer Multipole in der $x - z$ Ebene

Bei unserer stetigen Ladungsverteilung gilt entsprechend

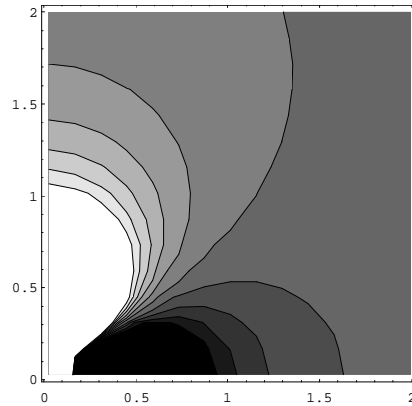
$$W = \int_V d^3\vec{r} \rho(\vec{r}) \phi(\vec{r}),$$

wobei $\rho(\vec{r})$ die Ladungsverteilung im Kern angibt, $\phi(\vec{r})$ dagegen das Potential, das durch die Elektronen der Atomhülle erzeugt wird. Da $\rho(\vec{r})$ auf einen kleinen Bereich beschränkt ist, also nur für kleine $|\vec{r}|$ $\rho(\vec{r}) \neq 0$ gilt, können wir das Potential des elektrischen Feldes der Elektronen durch Taylor-Entwicklung um den Koordinatenursprung annähern:

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= \phi(0) + \vec{\nabla}\phi\Big|_{r=0} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} x_i x_j \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{r=0} + \dots \\ &= \phi(0) - \vec{r} \cdot \vec{E} - \frac{1}{6} \sum_{i,j} 3x_i x_j \frac{\partial E_i}{\partial x_j} \\ &= \phi(0) - \vec{r} \cdot \vec{E} - \frac{1}{6} \sum_{i,j} 3(x_i x_j - \vec{r}^2 \delta_{ij}) \frac{\partial E_i}{\partial x_j}. \end{aligned}$$

Endlich haben wir nun alle Bestimmungsstücke, um die Energie zu berechnen. Wie oben schon angedeutet, lautet die Gleichung für die Energie:

$$\begin{aligned} W &= \int d^3\vec{r} \rho(\vec{r}) \phi(\vec{r}) \\ &= \int d^3\vec{r} \rho(\vec{r}) \cdot \left(\phi(0) - \vec{r} \cdot \vec{E} - \frac{1}{6} \sum_{i,j} 3(x_i x_j - \vec{r}^2 \delta_{ij}) \frac{\partial E_i}{\partial x_j} \Big|_{r=0} \right) \end{aligned}$$



Quadrupolmoment

Abbildung 1.15: Potential elektrischer Multipole in der $x - z$ Ebene

$$= Q \cdot \phi(0) - \vec{d} \cdot \vec{E} - \frac{1}{6} \sum_{i,j} Q_{ij} \left. \frac{\partial E_i}{\partial x_j} \right|_{r=0} \quad (1.7.111)$$

Diese drei Ausdrücke beschreiben die Beiträge des Monopol-, Dipol- und Quadrupolmomentes zur Energie der Ladungsverteilung im elektrischen Feld, das zum Potential ϕ gehört.

- (i) $Q \cdot \phi(0)$ entspricht dem Monopolbeitrag.
- (ii) $-\vec{d} \cdot \vec{E}$ korrigiert den Energiebetrag durch Berücksichtigung des Dipolterms. Für $\vec{d} \parallel \vec{E}$ nimmt der Dipolbeitrag den größten Wert an. Da der Atomkern jedoch nur positive Ladungen enthält, ist sein Dipolmoment identisch null, es gibt also in diesem Beispiel keine entsprechende Energiekorrektur.
- (iii) Der Energieterm der Quadrupolmomente lautet

$$-\frac{1}{6} \sum_{i,j} Q_{ij} \left. \frac{\partial E_i}{\partial x_j} \right|_{r=0} .$$

Dieser (im Fall des Atomkernes) erste Energiekorrektur zum Fall der Punktladung (Monopolapproximation) kann experimentell gemessen werden. Wie wir aus der Gleichung für die Energiekorrektur sehen, können aus dieser Messung Informationen über die Quadrupoldeformation der Kernladung gezogen werden, wenn das elektrische Feld der Atomhülle, insbesondere seine partiellen Ableitungen $\partial E_i / \partial x_j$ bei $\vec{r} = 0$ zugänglich sind. Ist andererseits aus anderen Experimenten das Quadrupolmoment des Atomkerns bekannt können über die Energiekorrektur Aussagen zu den partiellen Ableitungen gewonnen werden.

Beispiele:

- a) Wir wollen nun das \vec{E} -Feld betrachten, das durch ein reines Dipolmoment erzeugt wird. Dieser Dipol sei so plaziert, daß das Zentrum der Ladungsverteilung in dem Ursprung unseres Koordinatensystems fällt. Außerdem drehen wir das Koordinatensystem so, daß das Dipolmoment \vec{d} parallel zur z -Achse steht, die Ladungsverteilung also rotationssymmetrisch zur z -Achse gegeben ist. Daraus folgt:

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad d_x = d_y = 0.$$

Für d_z gilt dann:

$$d_z = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} q_{1,0}.$$

Zur Berechnung des Potentials muß folglich nicht lange summiert werden, da es ja nur einen von null verschiedenen Summanden gibt:

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= \frac{4\pi}{3} \frac{1}{r^2} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \vartheta \cdot q_{1,0}^* \\ &= q_{1,0} \cdot \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \cdot \frac{\cos \vartheta}{r^2}. \end{aligned}$$

Damit ist der Weg frei zur Berechnung der Feldstärke \vec{E} :

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= -\vec{\nabla} \phi \\ &= -\left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \hat{\vartheta} + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \hat{\varphi} \right) \\ &= \underbrace{-\sqrt{\frac{4\pi}{3}} \cdot q_{1,0}}_{d_z} \left(-\frac{2 \cos \vartheta}{r^3} \hat{r} - \frac{\sin \vartheta}{r^3} \hat{\vartheta} + 0 \right) \\ &= \frac{1}{r^3} (3\hat{r} (\hat{r} \cdot \vec{d}) - \vec{d}) \\ &= \frac{1}{r^5} (3\vec{r} (\vec{r} \cdot \vec{d}) - r^2 \vec{d}) \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet \hat{r} den Einheitsvektor in Richtung \vec{r} . Die Darstellung für das elektrische Feld \vec{E} in den beiden letzten Zeilen ist unabhängig vom gewählten Koordinatensystem und gilt für alle Dipolvektoren \vec{d} .

Das elektrische Feld für einen elektrischen Dipol im Koordinatenursprung in Richtung der z -Achse ist durch die Vektorpfeile in Figur 1.16 skizziert. An einigen willkürlich ausgewählten Punkten in der x - z Ebene geben die Vektorpfeile die Stärke und die Richtung des elektrischen Feldes an.

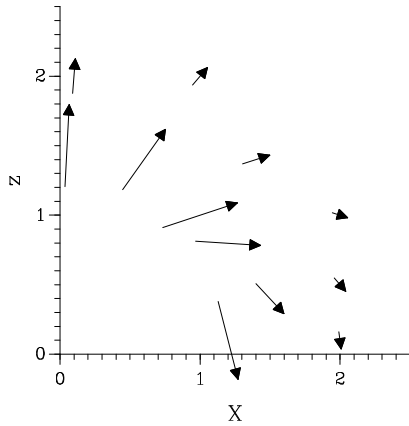


Abbildung 1.16: Elektrisches Feld eines Dipols in z-Richtung

- b) Diesmal liege der Dipol \vec{d}_1 an der Stelle \vec{x}_1 im Raum. Zur Berechnung des \vec{E} -Feldes an der Stelle \vec{x}_2 müssen wir lediglich den Vektor \vec{r} durch $(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) = |\vec{x}_2 - \vec{x}_1| \cdot \hat{e}_x$ ersetzen. So erhalten wir:

$$\vec{E}(\vec{x}_2) = \frac{3\hat{e}_x \cdot \vec{d}_1 - \vec{d}_1}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|^3}.$$

In dieses elektrische Feld des Dipol \vec{d}_1 wollen wir einen zweiten Dipol \vec{d}_2 an die Stelle \vec{x}_2 einbringen. Dann ergibt sich für den Wert der potentiellen Energie der Wechselwirkung zwischen den beiden Dipolen \vec{d}_1 und \vec{d}_2 nach (1.7.111):

$$\begin{aligned} W &= \underbrace{Q \cdot \phi(\vec{x}_2)}_{=0} - \vec{d}_2 \cdot \vec{E}(\vec{x}_2) - \underbrace{\frac{1}{6} \sum_{i,j} Q_{ij} \frac{\partial E_i}{\partial x_j}}_{=0} \Big|_{\vec{r}=\vec{x}_2} \\ &= -\vec{d}_2 \cdot \vec{E}(\vec{x}_2) \\ &= -\frac{3(\hat{e}_x \cdot \vec{d}_2)(\hat{e}_x \cdot \vec{d}_1) - (\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3} \end{aligned} \quad (1.7.112)$$

Man sieht also, daß die Energie der Wechselwirkung mit dem Abstand der beiden Dipole hoch -3 abnimmt. Sind die Dipole beide senkrecht zum Verbindungsvektor \hat{e}_x ausgerichtet, so ist die Energie positiv, wenn die beiden Dipole parallel und negativ wenn sie antiparallel zueinander stehen.

1.8 Makroskopische Elektrostatik

1.8.1 Polarisation, dielektrische Verschiebung

In den vorangegangenen Abschnitten hatten wir die beiden Grundgleichungen der Elektrostatik

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{E} &= 0 \\ \operatorname{div} \vec{E} &= 4\pi\rho\end{aligned}$$

kennengelernt. Diese Gleichungen helfen uns aber zunächst nur, wenn wir die Ladungsdichte ρ vollständig kennen. In diese Ladungsdichte ρ muß auch die Verteilung der atomaren Ladungen aufgenommen werden, wenn wir z.B. das elektrische Feld einer makroskopischen Ladungsverteilung in einem Medium berechnen wollen. Zwar mag dieses Medium zunächst einmal elektrisch neutral sein, es gibt gleich viel positive wie negative Ladungen. Wird aber durch die makroskopischen Ladungen ein elektrisches Feld erzeugt, so werden sich auch die Ladungsverteilungen auf atomarem Niveau nach diesem makroskopischen Feld ausrichten. Die Atome werden polarisiert (siehe Figur 1.18): Die eventuell vorhandenen Dipolmomente richten sich nach dem makroskopischen elektrischen Feld aus oder werden erst durch dieses Feld induziert. Ziel der folgenden Überlegungen ist es, die Effekte dieser Polarisation des Mediums auf das resultierende elektrische Feld zu bestimmen.

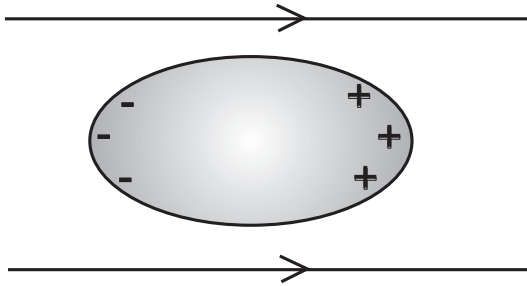


Abbildung 1.17: Polarisation der elektrischen Ladungsverteilung eines Atoms durch ein elektrisches Feld

Betrachten wir zunächst den Beitrag der Ladungsverteilung eines Moleküls j , lokalisiert an der Stelle \vec{r}_j , auf das elektrostatische Potential ϕ an der Stelle \vec{r} . Der Vektor \vec{r}' bezeichne die Position einer Ladung im betrachteten Molekül relativ zum Zentrum des Moleküls \vec{r}_j . Damit berechnet sich der Beitrag der molekularen Ladungen zum Potential:

$$\phi_j(\vec{r}) = \int_V \frac{\rho_j(\vec{r}')}{|\vec{r} - (\vec{r}_j + \vec{r}')|}.$$

Da die Abstände der einzelnen Ladungen des Moleküls von dessen Zentrum, $|\vec{r}'|$ sehr viel kleiner sind als der typische makroskopische Abstand des Beobachterpunktes \vec{r}

von der Position des Moleküls \vec{r}_j : $|\vec{r}'| \ll |\vec{r} - \vec{r}_j|$ wird eine Taylor-Entwicklung des Integranden um $\vec{r}' = 0$ sehr rasch konvergieren:

$$\begin{aligned}\phi_j(\vec{r}) &= \int d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}') \cdot \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} + \vec{r}' \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}_j} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} + \dots \right) \\ &= \frac{q_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} + \vec{\nabla}_{\vec{r}_j} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} \underbrace{\int d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}') \vec{r}'}_{\vec{d}_j} + \dots,\end{aligned}$$

wobei $\vec{\nabla}_{\vec{r}_j}$ der Gradientoperator ist, dessen Ableitungen auf den Vektor \vec{r}_j bezogen sind. \vec{d}_j bezeichnet das Dipolmoment des Moleküls j (vergleiche (1.7.101)). Nun können wir den Beitrag aller Moleküle j zum Gesamtpotential ausrechnen:

$$\phi_{\text{Gesamt}}(\vec{r}) = \sum_j \frac{q_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} + \sum_j \vec{\nabla}_{\vec{r}_j} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} \vec{d}_j + \dots$$

Vernachlässigen wir im folgenden die Beiträge höherer Ordnung in der Taylor-Entwicklung und ersetzen wir die Summation über die einzelnen Atome j durch eine Integration über die entsprechende Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}')$, beziehungsweise die Dipoldichte $\vec{d}(\vec{r}')$, berechnet sich:

$$\begin{aligned}\phi_{\text{Gesamt}}(\vec{r}) &= \int d^3\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \int d^3\vec{r}' \vec{d}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= \int d^3\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \int d^3\vec{r}' \left[\vec{\nabla}' \cdot \vec{d}(\vec{r}') \right] \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= \int d^3\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}') - \vec{\nabla}' \cdot \vec{d}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\end{aligned}$$

Beim Übergang von der ersten zur zweiten Zeile wurde partielle Integration verwendet. Dies ist das Potential einer Ladungsverteilung $\tilde{\rho}(\vec{r}') = \rho(\vec{r}') - \vec{\nabla}' \cdot \vec{d}(\vec{r}')$. $\tilde{\rho}$ enthält also sowohl die Information über die Ladungsdichte als auch über die Effekte durch die Polarisation des Mediums. Diese effektive Ladungsdichte $\tilde{\rho}$ ist die Quelle für das elektrische Feld \vec{E} . Wir können also schreiben:

$$\begin{aligned}\text{div } \vec{E} &= 4\pi\tilde{\rho} = 4\pi(\rho - \text{div } \vec{d}(\vec{r})) \\ \Rightarrow \text{div } \underbrace{(\vec{E} + 4\pi\vec{d}(\vec{r}))}_{=: \vec{D}} &= 4\pi\rho.\end{aligned}$$

Dabei haben wir die *dielektrische Verschiebung* \vec{D} definiert durch

$$\vec{D}(\vec{r}) := \vec{E}(\vec{r}) + 4\pi\vec{d}(\vec{r}) \quad (1.8.113)$$

Nun können wir die Grundgleichung für das elektrische Feld mit Materie angeben:

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho.} \quad (1.8.114)$$

Die Ladungsverteilung ρ der makroskopischen Ladungen gibt also die Quellen für die dielektrische Verschiebung an.

Eigenschaften des Mediums:

1. Das Medium ist elektrisch neutral. Die Beiträge zur Ladungsverteilung ρ werden explizit angegeben.
2. Falls keine Richtung der Polarisation ausgezeichnet ist, ist $\vec{d} = 0$. Liegt aber ein \vec{E} -Feld vor, so wird die Materie polarisiert (siehe Figur 1.17). Diese Polarisierung wächst im Allgemeinen proportional zum \vec{E} -Feld: Für die Dipoldichte gilt also $\vec{d} = \chi\vec{E}$. χ heißt elektrische Suszeptibilität und ist eine Materialkonstante.
3. Die Suszeptibilität muß kein Skalar sein. In elektrisch anisotropen Materialien ist sie ein Tensor. In diesem Fall sind \vec{d} und \vec{E} nicht mehr unbedingt parallel.
4. In elektrisch isotropen Materialien gilt:

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\chi\vec{E} = \underbrace{(1 + 4\pi\chi)}_{=: \varepsilon} \vec{E}.$$

ε ist die *Dielektrizitätskonstante* des Mediums. Es gilt: $\varepsilon \geq 1$. Daraus folgt wiederum $|\vec{D}| \geq |\vec{E}|$: Bei gleichen Quellen ist im Vakuum und in einem Medium die dielektrische Verschiebung gleich. Das \vec{E} -Feld und damit die Kraft auf eine Probeladung zur Messung des elektrischen Feldes wird jedoch in Materie infolge der Polarisation abgeschwächt.

1.8.2 Grenzbedingungen der Elektrostatik

Betrachten wir zwei Medien mit den Dielektrizitätskonstanten ε_1 und ε_2 . Wie verhält sich das \vec{E} -Feld an der Grenzfläche zwischen diesen beiden Medien?

Wir nehmen zur Vereinfachung an, daß die Grenzfläche ladungsfrei sei. In Gedanken legen wir um die Grenzfläche eine „Schachtel“, deren Außenfläche parallel zur Grenzfläche die Größe ΔF habe und deren andere Außenflächen verschwindend klein sein sollen — es soll also eine „flache“ Schachtel sein (siehe Skizze in Figur 1.18). Eine Integration über das Volumen der Schachtel kann mit Hilfe des Gauß'schen Satzes umgeschrieben werden

$$\int_V \operatorname{div} \vec{D} d^3\vec{r} = \oint_{\partial(V)} \vec{D} d\vec{f}$$

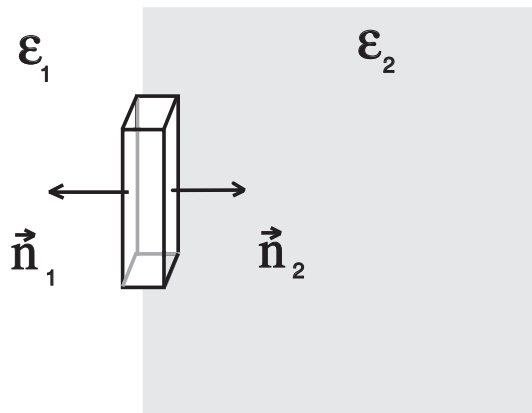


Abbildung 1.18: Skizze des Volumens zur Berechnung der Normalenkomponente des elektrischen Feldes an der Grenzfläche zwischen 2 Medien

$$\begin{aligned}
 &= \Delta F \vec{D}_2 \cdot \hat{n}_2 + \Delta F \vec{D}_1 \cdot \hat{n}_1 \\
 &= \Delta F (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \hat{n}_2.
 \end{aligned}$$

Dabei ist \hat{n}_i der Einheitsvektor der Flächennormalen für die beiden Flächen im Medium i , die parallel zur Grenzfläche liegen. Wir betrachten den Fall, daß die Fläche ΔF groß ist gegen die anderen Flächen der Schachtel. Umformen liefert

$$\begin{aligned}
 (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \Delta F \hat{n}_2 &= 4\pi\sigma \Delta F \stackrel{\sigma \equiv 0}{=} 0 \\
 \Rightarrow \vec{D}_2 \cdot \hat{n}_2 &= \vec{D}_1 \cdot \hat{n}_1.
 \end{aligned}$$

In diesen Gleichungen steht σ für die Flächenladungsdichte auf der Grenzfläche, sodaß $\Delta F \sigma$ die Gesamtladung in dem betrachteten Volumen bezeichnet. Die Normalkomponente der dielektrischen Verschiebung ist also (unter der Voraussetzung von Ladungsfreiheit der Grenzfläche: $\sigma = 0$) in beiden Medien gleich, während die Normalkomponente des \vec{E} -Feldes, E_{\perp} um den Betrag $\varepsilon_1/\varepsilon_2$ „springt“:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_2 E_{2\perp} &= \varepsilon_1 E_{1\perp} \\
 \Rightarrow E_{2\perp} &= \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} E_{1\perp}.
 \end{aligned}$$

Wie verhalten sich die Tangentialkomponenten von \vec{D} und \vec{E} ? — Wieder sollen zwei Medien mit unterschiedlichen Dielektrizitätskonstanten aneinanderstoßen, doch ist der Integrationsbereich diesmal kein Volumen, sondern eine „Schleife“ mit zwei langen und zwei sehr kurzen Seiten. Dabei sind die langen Seiten parallel zur Grenzfläche und die kurzen Seiten senkrecht dazu (siehe Figur 1.19). Integriert man \vec{E} entlang dieses

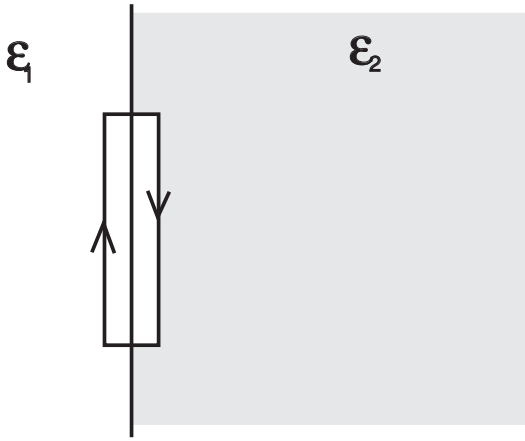


Abbildung 1.19: Skizze des Fläche zur Berechnung der Tangentialkomponente des elektrischen Feldes an der Grenzfläche zwischen 2 Medien

geschlossenen Weges, so gilt

$$\begin{aligned} \oint \vec{E} d\vec{s} &= E_2 \Delta \hat{e}_{\parallel} + E_1 \Delta(-\hat{e}_{\parallel}) \\ \Rightarrow (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \Delta \hat{e}_{\parallel} &= 0 \\ \Rightarrow \vec{E}_{2\parallel} &= \vec{E}_{1\parallel} \end{aligned}$$

Die Normalkomponente von \vec{E} bleibt also beim Übergang von Medium 1 zu Medium 2 gleich. Durch eine analoge Rechnung läßt sich zeigen, daß der Betrag der dielektrischen Verschiebung um den Betrag $\varepsilon_1/\varepsilon_2$ springt.

1.8.3 Energieinhalt des elektrischen Feldes im Medium

Zur Berechnung des Energieinhaltes eines elektrischen Feldes im Medium betrachten wir die Ladungsverteilung, die die Quelle dieses elektrischen Feldes ist, ρ , und vergrößern diese sukzessive: $\rho(\vec{r}) \rightarrow \rho(\vec{r}) + \delta\rho$. $\delta\rho$ stellt eine infinitesimale Veränderung der Ladungsverteilung dar.

Aus einer Veränderung von ρ resultiert eine Veränderung des \vec{E} -Feldes, also auch der Energie. Die Zusatzenergie, die aufzuwenden ist, um $\delta\rho$ in das Feld einzubringen, beträgt

$$\delta W = \int \delta\rho(\vec{r}) \phi(\vec{r}) d^3\vec{r}.$$

ϕ ist dabei das von ρ erzeugte Potential. Da auch $\delta\rho$ eine Quelle der dielektrischen Polarisation darstellt, gilt

$$4\pi\delta\rho = \text{div } \delta\vec{D}.$$

Einsetzen liefert:

$$\begin{aligned}
 \delta W &= \int_{\mathbf{R}^3} \frac{1}{4\pi} (\vec{\nabla} \cdot \delta \vec{D}(\vec{r})) \phi(\vec{r}) d^3 \vec{r} \\
 &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbf{R}^3} \delta \vec{D}(\vec{r}) \cdot (\vec{\nabla} \phi(\vec{r})) d^3 \vec{r} \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbf{R}^3} \delta \vec{D}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}) d^3 \vec{r}.
 \end{aligned}$$

Beim Übergang von der ersten zur zweiten Zeile wurde partiell integriert und ausgenutzt, daß der Beitrag an der Oberfläche verschwindet. Dies ist also die Zusatzenergie, die aufzuwenden ist, um die Zusatzladung $\delta\rho$ zu plazieren. Die Gesamtenergie erhält man durch Aufintegration (der Index f bedeutet „final“, also den Endzustand der Ladungsverteilung):

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbf{R}^3} d^3 \vec{r} \int_0^{D_f} \underbrace{d\vec{D}(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r})}_{\varepsilon d\vec{E}(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r})} \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbf{R}^3} d^3 \vec{r} \frac{1}{2} \varepsilon \vec{E}_f^2(\vec{r}) \\
 &= \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbf{R}^3} d^3 \vec{r} \vec{D}_f(\vec{r}) \vec{E}_f(\vec{r}) \\
 &= \int_{\mathbf{R}^3} d^3 \vec{r} w(\vec{r}).
 \end{aligned}$$

w ist die Energiedichte im Medium — vergleiche die entsprechende Herleitung für das Vakuum. Im Medium ist die Energie W folglich größer als im Vakuum ($D_f^2(\vec{r}) > E_f^2(\vec{r})$), denn es muß zusätzliche Energie aufgebracht werden, um das Medium zu polarisieren.

Betrachten wir ein Medium mit der Dielektrizitätskonstanten ε_0 , das den gesamten \mathbf{R}^3 ausfüllen soll. In ihm soll das von Ladungen erzeugte elektrische Feld $\vec{E}_0(\vec{r})$ herrschen.

In dieses Medium soll nun ein Volumen V mit der von ε_0 verschiedenen Dielektrizitätskonstanten ε_1 eingebracht, an den Ladungen aber nichts verändert werden. Wir wollen im folgenden die elektrische Feldenergie vor und nach Einbringen des Mediums betrachten.

Die Arbeit, die notwendig ist, das Volumen einzubringen, beträgt

$$\Delta W = \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbf{R}^3} d^3 \vec{r} (\vec{E} \vec{D} - \vec{E}_0 \vec{D}_0).$$

Wichtig ist, daß auch hier über den gesamten \mathbf{R}^3 integriert wird. Nach einer „geschickten Addition von null“ lassen sich die Energiebeiträge in zwei Teile aufspalten:

$$\begin{aligned}\Delta W &= \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbf{R}^3} d^3\vec{r} (\vec{E}\vec{D} - \vec{E}_0\vec{D}_0 + \vec{E}_0\vec{D} - \vec{E}\vec{D}_0 - \vec{E}\vec{D}_0 + \vec{E}\vec{D}_0) \\ &= \underbrace{\frac{1}{8\pi} \int_{\mathbf{R}^3} d^3\vec{r} (\vec{E} + \vec{E}_0)(\vec{D} + \vec{D}_0)}_{I_1} + \underbrace{\frac{1}{8\pi} \int_{\mathbf{R}^3} d^3\vec{r} (\vec{E}\vec{D}_0 - \vec{D}\vec{E}_0)}_{I_2}.\end{aligned}$$

Aufgrund der Wirbelfreiheit des elektrostatischen Feldes gilt

$$\vec{E} + \vec{E}_0 = -\vec{\nabla}\phi - \vec{\nabla}\phi_0 = -\vec{\nabla}\tilde{\phi}.$$

Einsetzen in das Integral I_1 liefert:

$$\begin{aligned}I_1 &= -\frac{1}{8\pi} \int_{\mathbf{R}^3} d^3\vec{r} \vec{\nabla}\tilde{\phi}(\vec{D} - \vec{D}_0) \\ &= -\frac{1}{8\pi} \int_{\mathbf{R}^3} d^3\vec{r} (\vec{\nabla}(\tilde{\phi}(\vec{D} - \vec{D}_0)) - \underbrace{\tilde{\phi} \vec{\nabla}(\vec{D} - \vec{D}_0)}_0),\end{aligned}$$

wie man leicht durch Anwenden der Produktregel überprüfen kann. Der zweite Term verschwindet, da $\vec{\nabla}(\vec{D} - \vec{D}_0) = 4\pi\rho - 4\pi\rho_0$. Laut Voraussetzung soll aber durch das Einbringen des Volumens V an den Ladungen nichts verändert werden, so daß $\rho = \rho_0$ gilt.

Mit Hilfe des Satzes von Gauß wandelt man das Volumenintegral über den \mathbf{R}^3 in ein Oberflächenintegral um:

$$I_1 = -\frac{1}{8\pi} \oint_{\mathcal{O}(\mathbf{R}^3)} d\vec{f} \tilde{\phi}(\vec{D} - \vec{D}_0).$$

Dieses Oberflächenintegral verschwindet aber, wie folgende Betrachtung zeigt:

$$\oint d\vec{f} \sim R^2; \quad \phi \sim \frac{1}{R}; \quad D \sim \frac{1}{R^2}.$$

Nachdem wir zeigten, daß das Integral I_1 in der Formel zur Berechnung von ΔW verschwindet, bleibt nur noch das Integral I_2 zu berechnen. Mit $\varepsilon_0\vec{E}_0 = \vec{D}_0$ und $\varepsilon\vec{E} = \vec{D}$ erhält man

$$\Delta W = \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbf{R}^3} d^3\vec{r} (\vec{E}\vec{D}_0 - \vec{D}\vec{E}_0)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbf{R}^3} d^3\vec{r} \vec{E} \vec{E}_0 (\varepsilon_0 - \varepsilon) \\
&= \frac{1}{8\pi} \int_V d^3\vec{r} \vec{E} \vec{E}_0 (\varepsilon_0 - \varepsilon) \\
&= -\frac{1}{2} \int_V d^3\vec{r} \vec{E} \vec{E}_0 \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{4\pi}
\end{aligned}$$

Setzen wir nun $\varepsilon_0 = 1$, nehmen wir also an, daß unser den \mathbf{R}^3 ausfüllendes Medium das Vakuum ist, dann folgt mit

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \vec{E} = \vec{d}$$

für die aufzubringende Arbeit:

$$\Delta W = -\frac{1}{2} \int_V d^3\vec{r} \vec{E}_0 \vec{d}.$$

\vec{d} bezeichnet die Dipolpolarisation des eingebrachten Mediums im Feld \vec{E} . ΔW , die Arbeit, die notwendig ist um das Medium in das elektrische Feld zu transportieren, ist folglich identisch mit der aufintegrierten Energiedichte dieser Dipoldichte im elektrischen Feld \vec{E}_0 .

1.9 Kontrollfragen zum Kapitel I

1. Charakterisieren Sie die Dirac'sche δ Funktion. Wie berechnet sich $\int_a^b f(x)\delta(x - x_0) dx$ und $\delta(y(x))$?
2. Was ist ein Flächenintegral ?
3. Wie sind Divergenz und Rotation eines Vektorfeldes definiert? Warum sind gerade diese Größen charakteristisch für ein Vektorfeld? Wie berechnet man Divergenz und Rotation?
4. Was ist der Gradient eines Skalarfeldes?
5. Integralsätze von Gauß und Stokes
6. Was ist ein vollständiges, orthogonales Funktionensystem? Wie entwickelt man Funktionen in einem solchen System? Vollständigkeitsrelation, Beispiele
7. Wie kann man das Gesetz der Ladungserhaltung mathematisch formulieren?
8. Was ist eine Ladungsdichte? Wie berechnet sich die Ladungsdichte von N Punktladungen q_i an Positionen \vec{r}_i ?
9. Definition des elektrischen Feldes
10. Warum ist ein elektrostatisches Feld durch ein Potential bestimmt? Wie berechnet sich dieses Potential? Ist das Potential eindeutig?
11. Wie lautet das Potential einer homogen geladenen Kugel (Radius R , Gesamtladung Q)?
12. Wie berechnet sich die Energie eines elektrostatischen Feldes? (in einem dielektrischen Medium?)
13. Was sind Randwertprobleme? Bedeutung, Eindeutigkeit
14. Methoden zur Lösung von Dirichletschen Randwertproblemen
15. Was versteht man unter induzierter Ladung? Wie kann man sie berechnen?
16. Was bedeutet die Greensche Funktion in der Elektrostatik? Wie wird sie bestimmt?
17. Was versteht man unter einer Multipolentwicklung einer Ladungsverteilung? Wann ist eine solche Entwicklung von Interesse?
18. Was ist ein Monopolmoment?

19. Wie berechnet sich ein Dipolmoment? Transformationseigenschaften? Das elektrische Feld eines Dipols?
20. Was ist ein Quadrupolmoment? Durch wie viele Zahlen ist ein Quadrupol definiert? Berechnung, Transformationseigenschaften
21. Besitzen kugelsymmetrische Ladungsverteilungen ein Dipol- oder Quadrupolmoment?
22. Wie berechnet sich die Energie eines elektrischen Dipols in einem elektrischen Feld? Wechselwirkungsenergie zweier Dipole?
23. Was ist die Dielektrische Verschiebung? Feldgleichungen der Elektrostatik im Medium? Welche Kraft wirkt auf eine Punktladung im elektrischen Feld in einem Medium?
24. Verhalten von elektrischen Feldern an Randflächen zwischen 2 Medien

Kapitel 2

Magnetostatik

2.1 Gesetze von Biot-Savart und Ampere

Zunächst soll auf erste Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen dem elektrischen Feld und der magnetischen Flußdichte hingewiesen werden.

In der Elektrostatik definiert man die elektrische Feldstärke durch den Quotienten der Kraft auf eine Probeladung dividiert durch die Größe dieser Ladung. Versucht man, dieses Meßprinzip auf magnetische Felder zu übertragen, stößt man sofort auf die aus der Experimentalphysik bekannte Tatsache, daß nämlich keine magnetischen Monopole existieren. Die Definition einer „magnetischen Feldstärke“ durch die Kraft auf einen magnetischen Monopol ist somit unmöglich. Deswegen greift man auf die *magnetischen Dipolmomente* \vec{m} als Grundbausteine einer magnetischen „Ladungsverteilung“ zurück. Hier sehen wir zugleich den Hauptunterschied zwischen elektro- und magnetostatischen Feldern: Die Definition der elektrischen Feldstärke erfolgt über Monopole. Wollen wir entsprechende magnetischen Felder definieren, so müssen wir auf magnetische Dipolmomente zurückgreifen und die entsprechende Feldgröße, die *magnetische Flußdichte* \vec{B} , in Anlehnung an den Zusammenhang zwischen dem elektrischen Feld und der elektrischen Dipolmomenten definieren.

Das elektrische Dipolmoment einer lokalisierten Ladungsverteilung ist definiert durch (vergleiche 1.7.101)

$$\vec{d} = \int_V \rho(\vec{r}') \vec{r}' d^3 \vec{r}'.$$

Nehmen wir nun an, daß sich diese Ladungsverteilung am Koordinatenursprung befindet, so ist das elektrische Feld am Ort \vec{r} gegeben durch (siehe 1.7.101)

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{3(\vec{d} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{d}}{r^5}$$

Aus der Experimentalphysik ist bekannt, daß magnetische Dipolmomente \vec{m} durch *Ströme*, also bewegte Ladungen, erzeugt werden. In Analogie zum elektrischen Feld definieren wir nun die magnetische Flußdichte aus der Forderung, daß der Zusammenhang zwischen \vec{m} und \vec{B} der gleiche sein soll wie zwischen \vec{d} und \vec{E} . Damit ergibt sich also die magnetische Flußdichte an der Position \vec{r} , die erzeugt wird durch ein magnetisches Dipolmoment \vec{m} am Koordinatenursprung als

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{m}}{r^5}.$$

Eine entsprechende Analogie fordern wir nun noch für die Energie der Wechselwirkung zwischen 2 elektrischen beziehungsweise magnetischen Dipolen: An den Stellen \vec{r}_1 und \vec{r}_2 sollen sich zwei Dipole \vec{d}_1 und \vec{d}_2 bzw. \vec{m}_1 und \vec{m}_2 befinden. \hat{e} soll ein Einheitsvektor in Richtung der Verbindungslinie zwischen beiden Dipolen sein ($\hat{e} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)/|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$). Wir erhalten (vergleiche 1.7.112):

$$W_{el} = -\frac{3(\hat{e}\vec{d}_1)(\hat{e}\vec{d}_2) - \vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$$

$$W_{mag} = -\frac{3(\hat{e}\vec{m}_1)(\hat{e}\vec{m}_2) - \vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$$

Die Forderung nach der Analogie zwischen \vec{m} und \vec{d} sowie zwischen \vec{B} und \vec{E} legt die Dimension, d.h. die Einheiten fest, in denen die magnetischen Dipolmomente \vec{m} und die magnetische Flußdichte definiert sein sollen:

$$[m] = [d] = 1 \text{ esu} \cdot \text{cm}$$

$$[\vec{E}] = [\vec{B}] = 1 \frac{\text{esu}}{\text{cm}^2}.$$

Dabei steht “esu” für die im Abschnitt 1.1 eingeführte Einheit der Ladung, die “electrostatical unit”.

2.1.1 Das Gesetz von Biot-Savart

Aus der Experimentalphysik ist bekannt, daß elektrische Ströme Magnetfelder verursachen. Das Gesetz von Biot-Savart gibt an, welchen Beitrag $d\vec{B}$ ein infinitesimales Stück $d\vec{l}$ einer Leiterschleife, durch die ein Strom I fließt, zu magnetischen Flußdichte \vec{B} an einer bestimmten Position liefert (siehe auch Abbildung 2.1):

$$d\vec{B} \sim I \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}.$$

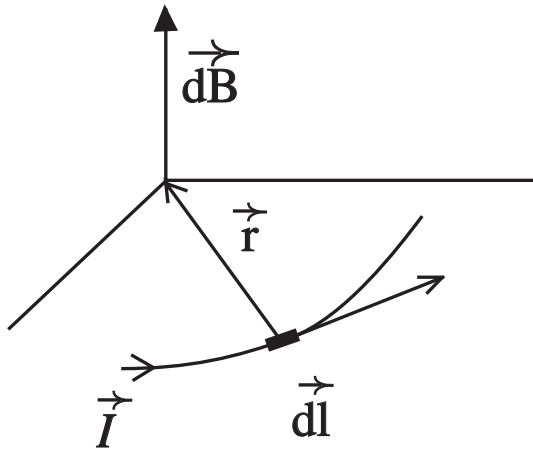


Abbildung 2.1: Beitrag eines stromdurchflossenen Leiterelementes $d\vec{l}$ zur magnetischen Induktionsdichte

Dabei steht $d\vec{l}$ für den betrachteten infinitesimalen Teil des stromdurchflossenen Leiters. Dabei ist die Richtung dieses infinitesimalen Vektors gegeben durch den Tangentialvektor an die Leiterschleife, der in Richtung des Stromes I zeigt. Außerdem steht in diesem Biot-Savart'schen Gesetz \vec{r} für den Verbindungsvektor vom Leiterstück $d\vec{l}$ zum Punkt, an dem wir die magnetische Induktionsdichte berechnen wollen, und r ist der Betrag dieses Vektors. Das zunächst als Proportionalität formulierte Gesetz beinhaltet Information sowohl über die Stärke als auch über die Richtung des vom Stromelement $I d\vec{l}$ erzeugten Magnetfeldes:

$$|d\vec{B}| \sim I, dl, \frac{1}{r^2}$$

Richtung von $d\vec{B} \sim d\vec{l} \times \vec{r}$.

Die Richtung von $d\vec{B}$ steht also senkrecht auf der von $d\vec{l}$ und dem Abstandsvektor \vec{r} aufgespannten Ebene („rechte-Hand-Regel“).

Um die obige Beziehung in eine Gleichung zu verwandeln, multiplizieren wir die rechte Seite mit einem Proportionalitätsfaktor k :

$$d\vec{B} = k \cdot I \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}.$$

Die Dimension von k beträgt

$$[k] = \left[\frac{B \cdot l}{I} \right] = 1 \frac{\text{esu} \cdot \text{cm} \cdot \text{s}}{\text{cm}^2 \cdot \text{esu}} = \frac{1}{\text{cm/s}}.$$

Dies ist die reziproke Dimension einer Geschwindigkeit. Wir wollen zunächst einmal akzeptieren, daß k gerade dem Kehrwert der *Lichtgeschwindigkeit* c entspricht ($k =$

1/c), und dann später zeigen, daß diese Annahme mit den oben angestellten Analogiebetrachtungen zur Definition von \vec{B} verträglich ist. Damit können wir das Gesetz von Biot-Savart schreiben

$$\boxed{d\vec{B} = \frac{I}{c} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}}. \quad (2.1.1)$$

Dieses Gesetz hat eine grundlegende Bedeutung, da es den Zusammenhang zwischen Strömen und den von diesen Strömen erzeugten Magnetfeldern angibt.

Beispiele:

1. Gegeben sei ein unendlich langer Draht, durch den ein Strom I fließt. Mit Hilfe des Biot-Savart-Gesetzes soll nun die magnetische Flußdichte \vec{B} im Abstand R berechnet werden. Wir definieren unser Koordinatensystem so, daß der Draht entlang der z -Achse liegt und der Punkt, an dem wir die magnetische Induktionsdichte berechnen wollen in der $x - y$ Ebene liegt also die kartesische Komponente $z = 0$ besitzt. Da der Draht unendlich lang ist, müssen die Beträge der Stromelemente $I d\vec{l} = I \hat{e}_z dz$, die sich am Ort \vec{r} befinden, summiert werden durch eine Integration über die z -Achse:

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \int d\vec{B} \\ &= \frac{I}{c} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{R \hat{e}_z \times \hat{e}_R}{\sqrt{z^2 + R^2}^3} \\ &= \hat{e}_\perp \cdot \frac{I}{c} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{R}{\sqrt{z^2 + R^2}^3} \\ &= \hat{e}_\perp \frac{IR}{c} \frac{2}{R^2}. \end{aligned}$$

\hat{e}_\perp ist also der Einheitsvektor, der senkrecht zur z -Achse und zur Verbindungslinie vom Leiter (Koordinatenursprung) zum Punkt, an dem wir \vec{B} berechnen wollen, steht.

2. Nun soll eine einzelne Ladungen q , die sich mit einer Geschwindigkeit \vec{v} bewegt, betrachtet werden. Das Stromelement $I d\vec{l}$ in (2.1.1) wird ersetzt durch das Produkt $q \cdot \vec{v}$; man erhält für den Beitrag jeder einzelnen Ladung zum Magnetfeld

$$d\vec{B} = \frac{q}{c} \frac{\vec{v} \times \vec{r}}{r^3}.$$

Für mehrere Ladungen ergibt sich das gesamte \vec{B} durch Summation.

Der Begriff Magnetostatik scheint einen Widerspruch in sich selbst zu enthalten. Wir haben bereits diskutiert, daß Magnetfelder durch Ströme, also bewegte Ladungen, erzeugt werden. Was beinhaltet also die Einschränkung Magnetostatik?

Unter „Magnetostatik“ sollen im folgenden solche Magnetfelder verstanden werden, die durch *stationäre Ströme* verursacht sind. Betrachten wir zur Definition eines stationären Stromes ein Volumen V , durch das ein Strom \vec{j} fließt. Damit es im Volumen keine „Stauungen“ gibt, d.h. damit es in V keine Ladungsänderungen gibt, soll der durch die Oberfläche einfließende Strom gleich dem ausfließenden sein. Für die Oberfläche von V gilt also:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial(V)} \vec{j} d\vec{f} &= 0 \\ &= \int_V \operatorname{div} \vec{j} d^3\vec{r}, \end{aligned}$$

wobei die letzte Zeile durch Anwenden des Gaußschen Satzes gewonnen wurde. Da diese Forderung für alle Volumina V erfüllt sein soll muß also für die Ströme der Magnetostatik gelten:

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{j} = 0.} \quad (2.1.2)$$

Ein Strom durch einzelne bewegte Ladungsträger ist damit zunächst einmal nicht stationär. In entsprechend kurzen Zeitintervallen bewegen sich einzelne Ladungsträger in bestimmte Volumina hinein ohne, daß andere sich hinausbewegen. Betrachtet man die Phänomene aber gemittelt über eine entsprechende Zeitperiode kann es auch für die Bewegung einzelner Ladungsträger, also auch im mikroskopischen Bereich stationäre Ströme geben, die (2.1.2) erfüllen.

2.1.2 Das erste Amperesche Gesetz

Welche *Kräfte* werden durch die magnetische Induktion auf stromdurchflossene Leiter erzeugt? Wieder betrachten wir eine Stromschleife, durch die der Strom I_1 fließt. Sie soll sich in einem Magnetfeld \vec{B} befinden. Experimentell findet man, daß der infinitesimale Anteil der Kraft, $d\vec{F}$, auf ein infinitesimales Leiterlement $d\vec{l}$ der Schleife gegeben ist durch:

$$d\vec{F} = \frac{1}{c} I_1 d\vec{l} \times \vec{B}, \quad (2.1.3)$$

wobei \vec{B} für die magnetische Induktionsdichte am Ort des infinitesimalen Leiterelementes steht. Diese Beziehung bezeichnet man als das erste Amperesche Gesetz. Auch dieses Gesetz beinhaltet eine Aussage über die Stärke und die Richtung der Kraft auf das Leiterelement:

$$\begin{aligned} |d\vec{F}| &\sim I_1, |d\vec{l}|, |\vec{B}| \\ d\vec{F} &\sim d\vec{l} \times \vec{B}. \end{aligned}$$

Die Kraft, die auf die gesamte Stromschleife ausgeübt wird, erhält man durch Aufintegrieren der einzelnen Beiträge der Stromelemente:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \frac{1}{c} \int I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{B} \\ &= \frac{1}{c} \int \vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}) d^3\vec{r}.\end{aligned}$$

Wie groß ist die Kraft auf *eine* mit der Geschwindigkeit \vec{v} bewegte Ladung q ? Ersetzt man im ersten Ampereschen Gesetz das Produkt $I_1 d\vec{l}$ durch $q \cdot \vec{v}$, erhält man

$$\vec{F} = \frac{1}{c} q \vec{v} \times \vec{B}, \quad (2.1.4)$$

Dies ist die *Lorentz-Kraft* auf ein mit der Geschwindigkeit \vec{v} bewegtes Teilchen der Ladung q . Man erkennt, daß durch das Kreuzprodukt nur Geschwindigkeiten, die eine Komponente senkrecht zum Magnetfeld haben, einen Beitrag zur Lorentz-Kraft leisten.

Schickt man elektrisch geladene Teilchen in ein Magnetfeld, so wirkt auf sie die Lorentz-Kraft, die stets senkrecht auf ihrer Bewegungsrichtung steht. Aus der klassischen Mechanik ist bekannt, daß Körper, bei denen stets eine Kraft senkrecht zur Bewegungsrichtung wirkt, auf Kreisbahnen gezwungen werden. Im stationären Fall ist die Zentrifugalkraft dieser Kreisbewegung der geladenen Teilchen dann gleich der Lorentz-Kraft. Daraus erhält man den Radius R dieser Kreisbahn:

$$\frac{q}{c} v_{\perp} B = \frac{mv_{\perp}^2}{R} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{mv_{\perp}}{q} \frac{c}{B}. \quad (2.1.5)$$

Dabei bezeichnet v_{\perp} die Komponente der Geschwindigkeit des geladenen Teilchens, die senkrecht zur magnetischen Induktionsdichte \vec{B} steht. Die Komponente von \vec{v} , die parallel zu \vec{B} steht, v_{\parallel} , hat ja keinen Einfluß auf die Lorentzkraft. Die geladenen Teilchen bewegen sich also insgesamt mit dieser Geschwindigkeit v_{\parallel} parallel zu den Magnetfeldlinien. Wegen der Lorentzkraft wird diese Bewegungskomponente überlagert durch die Bewegung auf der kreisförmigen Bahn um die Magnetfeldlinien herum. Wirkt also neben der Kraft des Magnetfeldes keine weitere Kraft auf das geladene Teilchen, so bewegt es sich insgesamt auf eine schrauben- oder spiralförmigen Bahn entlang den Magnetfeldlinien.

Im folgenden sollen drei Anwendungsbeispiele für die Bewegung von geladenen Teilchen im Magnetfeld betrachtet werden.

1. Das **Magnetspektrometer**: Schickt man einen Ionenstrom unbekannter Zusammensetzung in ein homogenes Magnetfeld, so werden die Ionen auf Kreisbahnen abgelenkt. Gemäß (2.1.5) ist der Radius dieser Kreisbahn $R \sim (mv_{\perp})/q$. Es ergibt sich also eine Aufspaltung der Bahnen nach dem Quotienten Impuls/Ladung der Ionen statt. Auf diese Weise lassen sich verschiedene Ionensorten klassifizieren.

2. Der **Fusionsreaktor**: Im Gegensatz zur Kernspaltung, bei der durch Spalten von schweren Atomkernen Energie gewonnen wird, kann man durch Fusion von zwei leichten Kernen (Deuterium (^2H) plus Tritium (^3H) fusionieren zu einem Alph-Teilchen (^4He) plus einem Neutron) ebenfalls Energie gewinnen. Dieser Vorgang und ähnliche Reaktionen laufen im Innern der Sonne ab. Damit solche Fusionsprozesse stattfinden, müssen die Reaktionspartner bei großem Druck und Temperatur zusammengebracht werden. Nur so kann die langreichweitige Coulombabstoßung der Wasserstoffkerne überwunden werden, so daß diese so nahe zusammenkommen, daß die starke kurzreichweitige starke Wechselwirkung eine Fusion ermöglicht. In der Sonne sorgt die Gravitation für den hohen Druck und die Temperatur wird durch die Fusionsreaktion selbst hoch gehalten. Bei den hohen Temperaturen sind die Wasserstoffatome ionisiert und liegen als *Plasma* von freien Elektronen und Atomkernen vor.

Nun würde jede andere Materie, mit dem Plasma in Berührung gebracht, augenblicklich verdampfen. Das Plasma kann also nicht in einem „Gefäß“ aufbewahrt werden. Man hält das Plasma deshalb z.B. in einem Magnetfeld „gefangen“: In einem Tokamak wird durch spezielle Spulen ein ringförmiges Magnetfeld erzeugt, in dem die ionisierten Plasmateilchen auf Spiralbahnen um die Feldlinien des Magnetfeldes kreisen und wegen der ringförmigen Anordnung in diesem Ring bleiben. Auf diese Weise lassen sich Wechselwirkungen mit der Wand weitgehend ausschalten.

3. Magnetische „**Wände**“ oder „**Spiegel**“: Mit einem Magnetfeld, das zu einer Grenzlinie hin kontinuierlich stärker wird, lassen sich geladene Teilchen zur „Umkehr“ bewegen. Wegen (2.1.5) wird der Radius der Kreisbahn mit zunehmenden Magnetfeld, also je näher das Teilchen an die Grenzfläche gelangt kleiner. So werden Teilchenbahnen, die weit weg von der Grenzfläche bei kleinem B nur eine leichte Krümmung zeigen in der Nähe der Grenzfläche um 180 Grad umgelenkt.

Wechselwirkung zwischen zwei Stromschleifen

Im folgenden soll die Kraft berechnet werden, die eine stromdurchflossene Leiterschleife auf eine andere ausübt (vgl. Abbildung 2.2).

Um zunächst die Kraft auf das Leiterelement an \vec{r}_1 zu berechnen, muß man das Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r}_1)$ kennen, das von dem Leiterelement des anderen Leiters an \vec{r}_2 erzeugt wird. Mit dem Gesetz von Biot-Savart (2.1.1) erhält man durch Integration über die gesamte Leiterschleife 2:

$$\vec{B}(\vec{r}_1) = \frac{I_2}{c} \oint \frac{d\vec{l}_2 \times \vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|^3}.$$

Mit dem ersten Ampereschen Gesetz (2.1.3) erhält man nun die Kraft auf das Element

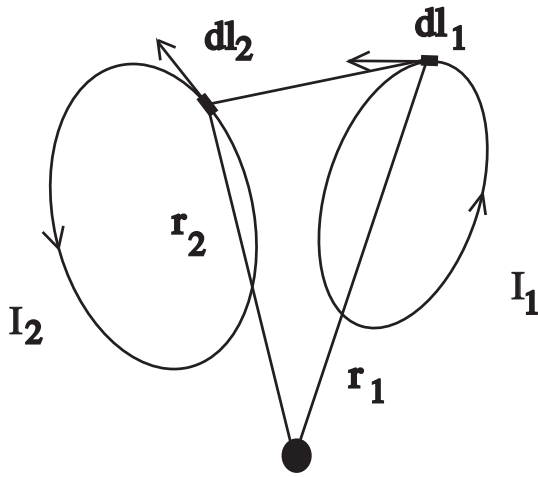


Abbildung 2.2: Wechselwirkung zwischen zwei Leiterschleifen

$d\vec{l}_1$ der Leiterschleife 1:

$$d\vec{F}_{12} = \frac{1}{c} I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{B}(\vec{r}_1).$$

Die Kraft auf den gesamten Stromkreis 1, hervorgerufen durch das Magnetfeldes des Kreises 2 erhält man auch in diesem Fall durch Aufintegration:

$$\vec{F}_{12} = \frac{I_1}{c} \underbrace{\oint_1 d\vec{l}_1}_{\vec{a}} \times \frac{I_2}{c} \underbrace{\oint_2 \frac{d\vec{l}_2 \times \vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|^3}}_{(\vec{b} \times \vec{c})}. \quad (2.1.6)$$

Mit der Rechenregel für das doppelte Vektorprodukt $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$ erhält man

$$\vec{F}_{12} = \frac{I_1 I_2}{c^2} \oint \oint \left(d\vec{l}_2 \underbrace{\frac{d\vec{l}_1 \cdot \vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|^3}}_{=: x} - \vec{r}_{12} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{|\vec{r}_{12}|^3} \right).$$

Zunächst soll der Term x betrachtet werden. Es gilt, wie wir im ersten Kapitel (1.3.37) bewiesen haben,

$$\begin{aligned} x &= d\vec{l}_1 \cdot \left(\underbrace{-\vec{\nabla}_1 \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}}_{=: \vec{A}} \right) \\ &= d\vec{l}_1 \cdot \vec{A}(\vec{r}_1), \end{aligned}$$

dabei bedeutet $\vec{\nabla}_1$, daß die Ableitungen im Gradient Operator auf die Koordinaten von \vec{r}_1 zu beziehen sind. Für $\text{rot } \vec{A}$ erhält man

$$\text{rot } \vec{A} = -\vec{\nabla}_1 \times \vec{\nabla}_1 \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = 0$$

da die Rotation eines Vektorfeldes, das sich als Gradient eines Skalars darstellen läßt, verschwindet. Damit ergibt sich

$$\oint d\vec{l}_1 \vec{A}(\vec{r}_1) = \int_F \text{rot } \vec{A} d\vec{f} = 0$$

Der erste Term (2.1.6), bezeichnet mit x , verschwindet also. Übrig bleibt also von (2.1.6)

$$\vec{F}_{12} = -\frac{I_1 I_2}{c^2} \oint d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2 \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|^3}.$$

Die Kraft auf den Stromkreis 2, hervorgerufen durch Kreis 1, erhalten wir dadurch, daß wir in der gerade durchgeführten Rechnung die Rolle der beiden Stromkreise vertauschen. Daraus ergibt sich

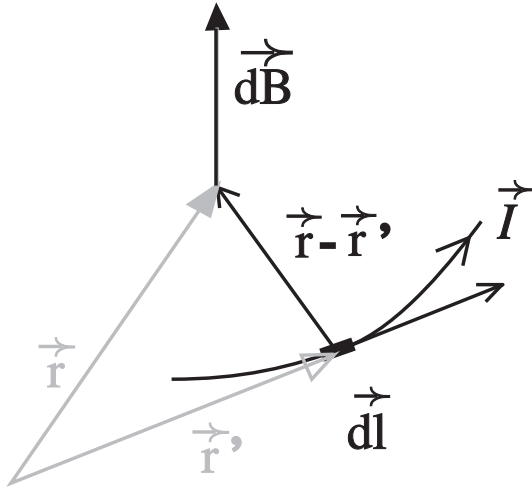
$$\vec{F}_{21} = -\frac{I_1 I_2}{c^2} \oint d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2 \frac{\vec{r}_{21}}{|\vec{r}_{21}|^3}.$$

Mit $\vec{r}_{12} = -\vec{r}_{21}$ erkennt man, daß auch hier das Newtonsche Prinzip

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

(actio=reactio) gilt.

Aus dem Gesetz von Biot-Savart und dem ersten Ampereschen Gesetz sollen in den folgenden Abschnitten die Grundgleichungen des magnetostatischen Feldes hergeleitet werden.

Abbildung 2.3: vom Stromelement $I d\vec{l}$ erzeugtes Feld $d\vec{B}$

2.2 Die Differentialgleichungen der Magnetostatik

Ähnlich den Feldgleichungen des elektrostatischen Feldes (s. Abschn. 1.3) soll nun das Vektorfeld der magnetischen Induktionsdichte der Magnetostatik durch seine Quellen ($\text{div}\vec{B}$) und Wirbel ($\text{rot}\vec{B}$) charakterisiert werden. Im vorigen Abschnitt haben wir das **Biot–Savartsche Gesetz** behandelt:

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{I d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{1}{c} \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

für den Beitrag eines Elementes $d\vec{l}$ (an der Position \vec{r}') einer Leiterschleife, durch die ein Strom I fließt, zur magnetischen Induktionsdichte \vec{B} an der Stelle \vec{r} (s. Abb. 2.3).

Integration über alle Stromelemente $I d\vec{l}$ ergibt dann das gesamte Magnetfeld \vec{B} (erzeugt durch I , bzw. \vec{j}) an der Stelle \vec{r} :

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' = -\frac{1}{c} \int \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \times \vec{j}(\vec{r}') dV' \\ &= \vec{\nabla} \times \frac{1}{c} \int \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{j}(\vec{r}') dV' \end{aligned}$$

letzteres, da $\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$ (siehe (1.3.37), die Ableitungen in $\vec{\nabla}$ beziehen sich hier auf die Koordinaten von \vec{r} , nicht von \vec{r}' sodaß $\vec{\nabla}$ vor das Integral gezogen werden kann) gilt. Damit haben wir gezeigt, daß

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}), \quad (2.2.7)$$

mit dem **Vektorpotential**

$$\vec{A}(\vec{r}) := \frac{1}{c} \int \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{j}(\vec{r}') dV' \quad (2.2.8)$$

Daraus können wir nun direkt die Grundgleichungen der Magnetostatik für die Quellen und die Wirbel, d.h. die Divergenz und die Rotation von \vec{B} herleiten:

1. Für die Divergenz gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{B} &= \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \\ &= \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_x(\vec{r}) \\ A_y(\vec{r}) \\ A_z(\vec{r}) \end{pmatrix} \right] \\ &= \partial_x[\partial_y A_z - \partial_z A_y] + \partial_y[\partial_z A_x - \partial_x A_z] + \partial_z[\partial_x A_y - \partial_y A_x] \\ &= 0; \end{aligned}$$

wobei wir mit $\partial_x, \partial_y, \partial_z$ die partiellen Ableitungen nach den kartesischen Koordinaten des Ortsvektors \vec{r} und mit A_x, A_y und A_z die kartesischen Komponenten des Vektorfeldes \vec{A} bezeichnet haben. Zusammengefaßt ergibt sich also:

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{B} = 0} \quad (2.2.9)$$

Das heißt:

- Da die Divergenz für die Quellstärke steht, gibt es keine magnetischen Quellen oder Senken (Im Gegensatz zur Elektrostatik !)
- also gibt es auch keine Startpunkte (bzw. Endpunkte) für Magnetfeldlinien.
- Diese Differentialgleichung für das Vektorfeld \vec{B} beinhaltet also, daß es in der Magnetostatik keine magnetischen Ladungen oder Monopole gibt, die den elektrischen Ladungen der Elektrostatik entsprechen.

Glg. 2.2.9 ist die erste Differentialgleichung der Magnetostatik. Sie entspricht $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$ in der Elektrostatik.

2. Für die Berechnung der Rotation wenden wir den Grassmannschen Entwicklungssatz

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad (2.2.10)$$

auf die Vektoren $\vec{\nabla}$ und \vec{A} . Im Gegensatz zu einfachen Vektoren muß allerdings in diesem Fall der Vektoroperatoren $\vec{\nabla}$ auf die Reihenfolge der Faktoren geachtet werden; die partiellen Ableitungen in $\vec{\nabla}$ wirken auf die rechts stehenden

Komponenten von \vec{A}

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{B} &= \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} \\ &= \underbrace{\frac{1}{c} \vec{\nabla} \int \vec{j}(\vec{r}') \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'}_a) - \underbrace{\frac{1}{c} \int \vec{j}(\vec{r}') \Delta_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'}_b)\end{aligned}$$

wobei $\vec{\nabla}$ und Δ an (\vec{r}') "vorbeigezogen" werden konnte, da $\vec{j}(\vec{r}')$, also unabhängig von \vec{r} ist. Ferner wurde in dem mit b) gekennzeichneten Term die Definition des Laplace-Operators benutzt. Betrachten wir nun die beiden Summanden a) und b) getrennt:

- mit $\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ ($\vec{\nabla}'$ bezieht sich nun auf $\vec{r}'!$) und der Produktregel ist

$$\begin{aligned}a) &= -\frac{1}{c} \vec{\nabla} \int \vec{j}(\vec{r}') \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV \\ &= -\frac{1}{c} \vec{\nabla} \left\{ \int \vec{\nabla}' \left(\vec{j}(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV' - \int (\vec{\nabla}' \vec{j}(\vec{r}')) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \right\}.\end{aligned}$$

Das zweite Integral verschwindet, da $\vec{\nabla}' \vec{j}(\vec{r}') = \text{div} \vec{j}(\vec{r}') = 0$ in der Magnetostatik (stationäre Ströme (2.1.2)). Setzt man im ersten Integral

$$\vec{x}(\vec{r}') := \vec{j}(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

so ist

$$a) = -\frac{1}{c} \vec{\nabla} \int \text{div} \vec{x}(\vec{r}') dV' \stackrel{\text{Gauß}}{=} -\frac{1}{c} \vec{\nabla} \oint_{S(V)} \vec{x}(\vec{r}') \cdot d\vec{f}' = 0$$

(der Integrand \vec{x} verschwindet an den „Grenzen des Universums“).

- Beachtet man im Summanden b)

$$\Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

(s.auch Gleichung (1.4.42)),

so folgt für die Rotation von \vec{B}

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r})}. \quad (2.2.11)$$

Dies ist die zweite Differentialgleichung der Magnetostatik. Zum Vergleich: in der Elektrostatik gilt $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$.

Diese Differentialgleichung (2.2.11) läßt sich auch integral darstellen: Integrieren wir dazu die magnetische Induktionsdichte entlang eines geschlossenen Weges, der den Rand einer Fläche F darstellt:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_F \text{rot} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{f} \stackrel{\text{Glg. 2.2.11}}{=} \frac{4\pi}{c} \oint_F \vec{j} \cdot d\vec{f} \quad (2.2.12)$$

Es gilt also das **Amperesche Durchflutungsgesetz**:

$$\boxed{\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{4\pi}{c} I} \quad (2.2.13)$$

wobei I der gesamte Strom ist, der durch die Fläche, über deren Rand integriert wird, fließt. Man sieht also:

- $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} \neq 0$: es gibt geschlossene Feldlinien in der Magnetostatik (im Gegensatz zur Elektrostatik!). Aus der Diskussion der Quellen der magnetischen Induktionsdichte wissen wir ja, daß \vec{B} -Felder keine Anfangs- und Endpunkte besitzen. Das \vec{B} -Feld wird also ausschließlich durch geschlossene Feldlinien dargestellt.
- Ströme erzeugen um sich herum die geschlossenen Feldlinien des \vec{B} -Feldes. Dabei ist nach dem Ampereschen Durchflutungsgesetz das Linienintegral der magnetischen Induktionsdichte über den Rand einer Fläche proportional zum Gesamtstrom, der durch diese Fläche fließt.

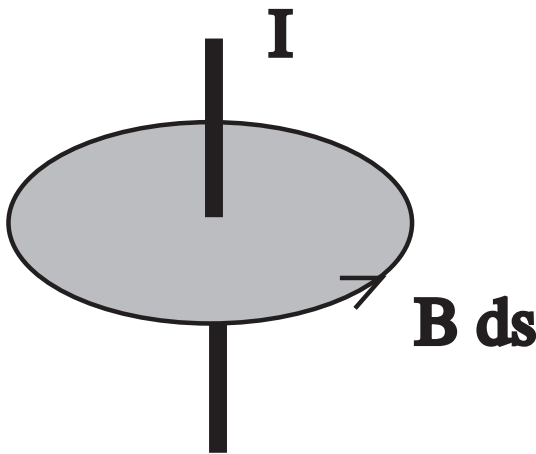


Abbildung 2.4: Zur Berechnung der magnetischen Induktionsdichte bei einer symmetrischen Stromverteilung

Das Amperesche Durchflutungsgesetz kann benutzt werden um in sehr einfacher Weise die magnetische Induktionsdichte für eine Stromverteilung zu berechnen, die rotations-symmetrisch um die Richtung des Stromes ist. Sei diese Richtung und das Zentrum

dieser Stromverteilung gegeben durch die z -Achse unseres Koordinatensystems. Wir betrachten nun einen Kreis um diese z -Achse mit dem Zentrum bei $x = y = 0$, einer Flächennormalen parallel zu z -Achse und einem Radius R (siehe Abb. 2.4). Wegen der Symmetrie des Problems besitzt die magnetische Induktionsdichte auf diesem Kreis nur eine Komponente in Richtung der Tangente an diesem Kreis. Außerdem muß der Betrag dieser Azimutalkomponente von B für alle Punkte auf diesem Kreis gleich sein. Mit dem Ampereschen Durchflutungsgesetz (2.2.13) können wir also schreiben

$$\begin{aligned} \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} &= 2\pi R B \\ &= \frac{4\pi}{c} \int \vec{j}(\vec{r}) d\vec{f} \\ &= \frac{4\pi}{c} I \end{aligned}$$

wobei I den Gesamtstrom durch die Kreisfläche bezeichnet. Aus dieser Gleichung können wir also direkt

$$B = \frac{2I}{cR} \quad (2.2.14)$$

bestimmen.

Eichtransformation von Potentialen

Mit Glg. 2.2.8 wurde das Vektorpotential \vec{A} eingeführt, aus dem sich das \vec{B} -Feld berechnen läßt durch $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. Dies ist analog zur Elektrostatik, wo wir das skalare Potential Φ eingeführt haben, aus dem sich das \vec{E} -Feld über $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$ berechnen ließ. Dabei war das elektrostatische Potential nicht eindeutig bestimmt. Jedes Potential $\tilde{\Phi} := \Phi + \text{const.}$ liefert wegen $\vec{\nabla}(\text{const.}) = 0$ wieder das gleiche elektrische Feld \vec{E} . Durch Hinzuaddieren einer Konstanten wurde das Potential umgeëicht. $\Phi \rightarrow \tilde{\Phi}$ ist eine **Eichtransformation**, die das meßbare elektrische Feld unverändert läßt.

Analog kann man für das Vektorpotential \vec{A} eine Eichtransformation ausführen: Für

$$\tilde{\vec{A}} := \vec{A} + \vec{\nabla}\Psi(\vec{r}) \quad (\Psi(\vec{r}): \text{skalare Funktion}) \quad (2.2.15)$$

gilt wegen

$$\begin{aligned} \tilde{\vec{B}} &= \text{rot}\tilde{\vec{A}} = \vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{\nabla}\Psi(\vec{r})) \\ &\text{und} \quad \vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\Psi(\vec{r}) = 0 \\ &\tilde{\vec{B}} = \vec{B}. \end{aligned}$$

Eine spezielle Eichung ist die **Coulomb-Eichung**: Bilde mit Glg. 2.2.15 eine Eichtransformation, so daß $\text{div}\tilde{\vec{A}} = 0$ gilt. Damit ist dann

$$\text{rot}\tilde{\vec{B}} = \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \tilde{\vec{A}} \right) \stackrel{\text{Glg. 2.2.10}}{=} \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \tilde{\vec{A}} \right) - \Delta\tilde{\vec{A}} = -\Delta\tilde{\vec{A}}.$$

Andererseits gilt für $\text{rot}\vec{B}$ Glg. 2.2.11, also ist

$$\Delta\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r}). \quad (2.2.16)$$

Für jede der 3 Vektorkomponenten hat diese Gleichung die gleiche Form wie die Poissongleichung $\Delta\Phi = -4\pi\rho$ für das elektrostatische Potential (1.3.38). Analog zum elektrostatischen Randwertproblem kann man nun das Problem der Magnetostatik lösen, wo $\vec{j}(\vec{r})$ in einem interessierenden Raumbereich V vorgegeben ist mit Randbedingungen auf $S(V)$ und das Potential \vec{A} (und damit \vec{B}) gesucht ist. \vec{A} ergibt sich dann aus Glg. 2.2.16 (drei Differentialgleichungen 2. Ordnung in \vec{A}).

Gegenüberstellung der Elektro- und Magnetostatischen Grundgleichungen

	Elektrostatik	Magnetostatik
Quellen	$\text{div}\vec{E} = 4\pi\rho$	$\text{div}\vec{B} = 0$
Wirbel	$\text{rot}\vec{E} = 0$	$\text{rot}\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$
Potential	$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$ $\Phi = \int \frac{\rho(\vec{r}')}{ \vec{r}-\vec{r}' } dV'$	$\vec{B} = \text{rot}\vec{A} (= \vec{\nabla} \times \vec{A})$ $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{ \vec{r}-\vec{r}' } dV'$
Für ist	$\tilde{\Phi} = \Phi + \text{const.}$ $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi = -\vec{\nabla}\tilde{\Phi}$	$\tilde{\vec{A}}(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r}) + \vec{\nabla}\Psi(\vec{r})$ $\vec{B} = \text{rot}\tilde{\vec{A}} = \text{rot}\vec{A}$

2.3 Das magnetische Feld einer lokalisierten Stromverteilung

In den vorhergehenden Abschnitten haben wir gesehen, daß die Gleichung für das Vektorfeld der Magnetostatik \vec{A} (siehe Gl. (2.2.8))

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int d^3 r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (2.3.17)$$

in der Struktur der Bestimmungsgleichung für das Potential $\Phi(\vec{r})$ der Elektrostatik (siehe Abschnitt 1.7)

$$\Phi(\vec{r}) = \int d^3 r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

sehr ähnlich ist. Von der mathematischen Struktur her entspricht die Bestimmungsgleichung für jede kartesische Komponente von \vec{A} aus der entsprechenden kartesischen Komponente der Stromdichte \vec{j} der Bestimmungsgleichung für das elektrostatische Potential Φ aus der Ladungsverteilung ρ .

In diesem Paragraph wollen wir nun das Magnetfeld einer lokalisierten Stromverteilung betrachten. Dies sollte also weitgehend dem Problem entsprechen, das wir im Abschnitt 1.7 diskutiert haben, der Multipolentwicklung des elektrischen Feldes, das durch eine lokalisierte Ladungsverteilung erzeugt wurde. Ganz entsprechend wollen wir auch den Ursprung des Koordinatensystems so legen, daß die lokalisierte Stromverteilung, die das Magnetfeld erzeugt nur in der Nähe des Koordinatenursprungs von Null verschieden ist. Uns interessiert dabei das Magnetfeld, beziehungsweise das Vektorfeld \vec{A} , das dieses Magnetfeld charakterisiert, an Beobachtungspunkten \vec{r} weit außerhalb der Stromverteilung. Solche Bedingungen herrschen etwa in einem Atom, in welchem die Elektronen, die um den Atomkern im Koordinatenursprung "herumsausen", für eine Stromverteilung sorgen, die auf einen Bereich mit Ausmaßen von einigen Angstrom lokalisiert ist. Die lokale Ladungsverteilung eines elektrischen Feldes haben wir über die Multipolentwicklung

$$\Phi(\vec{r}) = \sum_{lm} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{1}{r^{l+1}} q_{lm}^* Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \quad (2.3.18)$$

berechnet. Nachdem wir uns gerade überzeugt haben, daß die Berechnung der kartesischen Komponenten des Vektorfeldes der Magnetostatik einer ganz ähnlichen Gleichung genügt, wie die der Berechnung des elektrostatischen Potentials, ist es klar, daß auch für die kartesischen Komponenten von \vec{A} eine Multipolentwicklung existiert, die der von (2.3.18) entspricht.

Für die Berechnung der Multipolentwicklung in der Magnetostatik wollen wir aber einen etwas anderen Weg gehen und uns in Erinnerung rufen, daß nach Gleichung

(1.6.88) gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \vartheta}} \\ &= \sum_{lm} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos \vartheta) \end{aligned} \quad (2.3.19)$$

wobei hier $r_{>} = r$ und $r_{<} = r'$.

Die Summe in (2.3.19) entsteht dabei durch die Entwicklung der Abhängigkeit des Ausdruckes von dem Cosinus des Winkels ϑ zwischen den Vektoren \vec{r} und \vec{r}' nach dem Vollständigen Funktionensystemen der Legendre-Polynome. Wir wollen diese Entwicklung nun in die Gleichung für $\vec{A}(\vec{r})$ (2.3.17) einsetzen und haben deshalb auch in den Bezeichnungen $r_{<} = r'$, $r_{>} = r$ zum Ausdruck gebracht, daß der Abstand des Beobachtungspunktes \vec{r} vom Koordinatenursprung deutlich größer ist als der Abstand der Punkte \vec{r}' , an denen die erzeugende Stromverteilung von Null verschieden ist. Wir können uns also in der Entwicklung (2.3.19) auf die Terme mit niedrigem l beschränken. Dadurch ergibt sich also

$$\begin{aligned} &\frac{1}{r} + \frac{r'}{r^2} \cos(\vartheta) + \frac{r'^2}{r^3} P_2(\cos \vartheta) + \dots \\ \implies A(\vec{r}) &= \frac{1}{rc} \int \vec{j}(\vec{r}') dr' + \frac{1}{cr} \int \vec{j}(\vec{r}') (\vec{r} \cdot \vec{r}') d^3 r' + \dots \end{aligned} \quad (2.3.20)$$

mit $P_0 = 1$ und $P_1(x) = x$ und $r' \cos \vartheta = (\vec{r} \cdot \vec{r}')/r$.

Bevor wir diese Entwicklung weiter analysieren, betrachten und beweisen wir die folgende

Behauptung:

Seien f und g zwei von \vec{r} abhängige skalare Funktionen und bezeichne $\vec{j}(\vec{r})$ eine lokalisierte Stromverteilung der Magnetostatik ($\text{div} \vec{j} = 0$), so gilt:

$$\int \left(f(\vec{r}') \vec{j}(\vec{r}') \vec{\nabla}' g(\vec{r}') + g(\vec{r}') \vec{j}(\vec{r}') \vec{\nabla}' f(\vec{r}') \right) d^3 r' \stackrel{!}{=} 0 \quad (2.3.21)$$

Beweis:

Zu Beginn dieses Beweises betrachten wir folgenden Zusammenhang

$$\int \vec{\nabla}' (f \vec{j} g) d^3 r' = \int (\vec{\nabla}' (f \vec{j})) g d^3 r' + \int f \vec{j} \vec{\nabla}' g d^3 r', \quad (2.3.22)$$

der sich einfach durch Anwenden der Produktregel für den $\vec{\nabla}$ Operator im Integranden ergibt. Diese Beziehung können wir umschreiben in

$$\int f \vec{j} \vec{\nabla}' g d^3 r' = \underbrace{\int \vec{\nabla}' (f \vec{j} g) d^3 r'}_{\text{Term 1}} - \underbrace{\int (\vec{\nabla}' (f \vec{j})) g d^3 r'}_{\text{Term 2}} \quad (2.3.23)$$

Wir betrachten nun die beiden Terme 1 und 2 einzeln:

Term 1:

$$\int \operatorname{div}(f \vec{j} g) d^3 r \stackrel{\text{Gau\ss}}{=} \oint_F f \vec{j} g d\vec{F} = 0 \quad (2.3.24)$$

Das Oberflächenintegral auf der rechten Seite dieser Gleichung ergibt den Wert 0, da ja unsere Stromverteilung lokalisiert ist und der Strom \vec{j} , damit also auch das Produkt $f \vec{j} g$ auf der Oberfläche identisch null ist. Für den **2. Term** folgt mit der Produktregel

$$\text{Term 2} = \int (\vec{\nabla}' f) \vec{j} g d^3 r' + \int f (\vec{\nabla}' \vec{j}) g d^3 r'$$

Wegen der Forderung nach stationären Strömen in der Magnetostatik ist $\operatorname{div} \vec{j} = 0$ und der 2. Summand in dieser Gleichung verschwindet. Setzen wir nun die Ergebnisse für Term 1 und Term 2 wieder in (2.3.23) ein, so ergibt sich

$$\int f \vec{j} \vec{\nabla}' g d^3 r' = - \int (\vec{\nabla}' f) \vec{j} g d^3 r' \quad (2.3.25)$$

und damit die Behauptung (2.3.21).

Als Anwendung dieses Ergebnisses der Gleichung (2.3.21) zwei Beispiele :

1. Sei $f = 1$; $g = x'$ (die x-Komponente des Vektors \vec{r}') $\implies \vec{\nabla}' f = 0$; $\vec{\nabla}' g = \hat{e}_x$, der Einheitsvektor in Richtung der x-Achse.

Einsetzen in (2.3.21) ergibt

$$\begin{aligned} \int \vec{j}(\vec{r}') \hat{e}_x d^3 r' &= 0 \\ &= \int j_x(\vec{r}') d^3 r'. \end{aligned}$$

Ganz analog verfährt man für die y- und z-Komponente! Also:

$$\int \vec{j}(\vec{r}') dx' dy' dz' = \vec{0} \quad (2.3.26)$$

Dies bedeutet also, daß das Volumenintegral über eine lokalisierte stationäre Stromverteilung verschwindet. Dies Ergebnis läßt sich auch intuitiv leicht nachvollziehen: Wäre das Integral von Null verschieden, so müßte sich die Stromverteilung ja in Richtung des Ergebnisvektors verlagern. Nach einer gewissen Zeit wäre die Stromverteilung also nicht mehr in der Nähe des Koordinatenursprungs lokalisiert. Dies widerspräche aber der Stationarität der Stromverteilung.

2. Sei $f = x'_i$; $g = x'_l$; wobei x'_i und x'_j beliebige kartesische Komponenten des Vektors \vec{r}' bezeichnen sollen. Mit (2.3.21) folgt

$$\int (x'_i \underbrace{\vec{j} \hat{e}_l}_{j_l} + x'_l \underbrace{\vec{j} \hat{e}_i}_{j_i}) d^3 r' = 0 \quad (2.3.27)$$

Damit können wir nun berechnen

$$\int x'_l j'_i d^3 r' \stackrel{\text{Gl. 2.3.27}}{=} \frac{1}{2} \left\{ \int x'_l j'_i d^3 r' - \int x'_i j'_l d^3 r' \right\}$$

Multiplizieren wir nun diese Gleichung mit der kartesischen Komponente a_l eines beliebigen Vektors \vec{a} und summieren wir anschließend über diesen kartesischen Index l , erhalten wir:

$$\begin{aligned} \sum_l a_l \int x'_l j'_i d^3 r' &= \sum_l \frac{1}{2} a_l \left\{ \int x'_l j'_i d^3 r' - \int x'_i j'_l d^3 r' \right\} \\ &\stackrel{!}{=} -\frac{1}{2} \left[\vec{a} \times \int \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}') d^3 r' \right]_{i\text{-Komponente}} \end{aligned} \quad (2.3.28)$$

Diese letzte Gleichung kann man leicht verifizieren, indem man z.B. die linke Seite für $i = x$ -Komponente berechnet und auch im Vektorprodukt auf der rechten Seite die x -Komponente ausrechnet.

Benennen wir nun noch in (2.3.28) die Integrationsvariable \vec{r}' um in \vec{r} , so folgt sofort:

$$\int \vec{a} \vec{r}' j_x d^3 r' = \frac{1}{2} \int \left[\vec{a} \times (\vec{r}' \times \vec{j}) \right]_x d^3 r' \quad (2.3.29)$$

Nun zurück zum $\vec{A}(\vec{r})$ in der Entwicklung von (2.3.20)

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{1}{c} \frac{1}{r} \cdot 0 - \frac{1}{c} \frac{1}{r^3} \int \vec{r}' \vec{r}' j(\vec{r}') d^3 r' + \dots \\ &= -\frac{1}{c} \frac{1}{2r^3} \vec{r}' \times \int \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}') d^3 r' + \dots \end{aligned} \quad (2.3.30)$$

In der ersten Zeile haben wir ausgenutzt, daß das Volumenintegral über einen lokalisierten stationären Strom verschwindet (2.3.26), und in der 2. Zeile haben wir (2.3.29) angewandt. Die Näherung von Gl.(2.3.30) entspricht der Dipolnäherung für das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$. Gleichzeitig sehen wir, daß der Monopolbeitrag zum Vektorpotential verschwindet (siehe 1. Zeile von (2.3.30))

Wir definieren das **magnetische Dipolmoment** $\vec{\mu}$ einer Stromverteilung

$$\vec{\mu} := \frac{1}{2c} \int \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}') d^3 r', \quad (2.3.31)$$

und bezeichnen den Integranden dieser Definition als magnetisches Dipolmoment. Aus (2.3.30) sieht man, daß das Vektorfeld eines magnetischen Dipols gegeben ist durch

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{r^3} \vec{\mu} \times \vec{r} \quad (2.3.32)$$

Zum Vergleich erinnern wir uns noch kurz an die Definition des elektrischen Dipolmomentes einer Ladungsverteilung

$$\vec{d} = \int \vec{r}' \varrho(\vec{r}') d^3r' \quad (2.3.33)$$

und den Beitrag eines Dipols zum elektrostatischen Potential Φ

$$\Phi = \frac{\vec{d} \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \quad (2.3.34)$$

und vergleichen dann die Ergebnisse der letzten Betrachtungen mit den schon bekannten Ergebnissen aus der Elektro-Statik, so ergeben sich folgende „Entsprechungen“:

- $\varrho \implies \vec{j}/c$ also für die Einheiten gilt $[\varrho] = [\vec{j}/c]$
- wegen des Vektorcharakters von \vec{j} geht bei der Definition des Dipolmomentes die Multiplikation $\vec{r}\varrho$ im elektrostatischen Fall über in das Vektorprodukt $\vec{r} \times \vec{j}$ im magnetischen Fall. Ähnliches gilt für den Zusammenhang von Dipolmoment und Potential (Vergleiche (2.3.32) und (2.3.34)).
- Auch aus den Maßeinheiten lassen sich die prinzipiellen Ähnlichkeiten der beiden Felder erkennen:
 - $[\vec{d}] = [\vec{\mu}]$
 - $[\Phi] = [A]$
 - $[\vec{E}] = [\vec{B}]$

Wir haben also das erste Ziel unserer Diskussion im Abschnitt 2.1 erreicht und eine Größe zur Charakterisierung des Magnetfeldes, die magnetische Induktionsdichte \vec{B} , bestimmt, die analog zum elektrischen Feld zu sehen ist und sich auch in entsprechender Weise aus einem Dipolmoment herleiten läßt.

Im nächsten Teil dieses Abschnittes wollen wir nun diese Begriffe und Zusammenhänge durch die Anwendungen in 2 Beispielen vertiefen:

Beispiel 1.: Kreistrom

Ein Kreisstrom für einen Kreis mit dem Radius R in der x - y -Ebene um den Koordinatenursprung ist mathematisch gegeben durch:

$$\vec{j}(\vec{r}') = I \frac{\delta(|\vec{r}'| - R)}{R} \delta(\cos \vartheta) \hat{e}_\varphi \quad (2.3.35)$$

Diese Darstellung mag zunächst etwas verwunderlich sein, wir wollen sie kurz erläutern:

1. Die Richtung des Stromvektors \vec{j} ist durch den Einheitsvektor \hat{e}_φ der Kugelkoordinaten, also in tangentialer Richtung an den Kreis in der x - y -Ebene (und damit in Richtung des Stromflusses) gegeben.
2. $\delta(|\vec{r}'| - R)\delta(\cos \vartheta)$ begrenzt den Strom auf die Kreisbahn.

Zur Bestätigung des Vorfaktors I/R berechnen wir nun den Gesamtstrom durch die y - z -Fläche:

$$\int_{-1}^1 \int_0^\infty I \frac{\delta(r' - R)}{R} \delta(\cos \vartheta') r' dr' d\cos \vartheta' = I$$

Für den Kreisstrom (2.3.35) können wir nun mit der Definition (2.3.31) das magnetische Dipolmoment dieses Kreisstromes berechnen:

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2c} \int I \frac{\delta(r' - R)}{R} \delta(\cos \vartheta') \hat{e}_{r'} \times \hat{e}_{\varphi'} d^3 r'.$$

Damit haben wir sofort die Richtung des magnetischen Momentes: Für die Vektoren \vec{r}' , für die der Integrand nicht verschwindet (also in der x - y -Ebene) steht $\hat{e}_{r'} \times \hat{e}_{\varphi'}$ und damit auch $\vec{\mu}$ parallel zur z -Achse! Wie sieht der Wert von $|\vec{\mu}|$ aus?

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2R} \frac{1}{c} \hat{e}_z \int I \delta(r' - R) \delta(\cos \vartheta') \underbrace{r'^2 dr' d\cos \vartheta' d\varphi}_{d^3 r' \text{ in Kugelk.}} \quad (2.3.36)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2R} \frac{1}{c} \hat{e}_z 2\pi \int_0^\infty r'^2 I \delta(r' - R) dr' \\ &= \hat{e}_z \frac{\pi}{c} R^2 I = \vec{F} \frac{I}{c} \end{aligned} \quad (2.3.37)$$

Das Dipolmoment eines Ringstromes ergibt sich also als das Produkt aus dem Strom und der vom Stromkreis umschlossenen Fläche dividiert durch die Lichtgeschwindigkeit c .

Betrachten wir nun den Fall für ganz beliebige Leiterschleifen in der Ebene. In diesem Fall müssen wir über die geschlossene Kurve der Leiterschleife integrieren und das magnetische Moment für den Fall, daß die Leiterschleife von einem Strom I durchflossen wird, ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} \vec{\mu} &= \frac{1}{2c} I \oint_{\tau} \vec{r}' \times d\vec{s} \\ &= \frac{1}{c} I \int_F d\vec{a} = \frac{I}{c} \vec{F} \end{aligned}$$

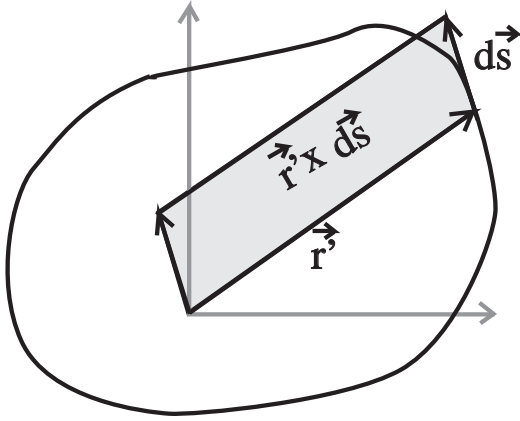


Abbildung 2.5: Zur Berechnung des magnetischen Dipolmomentes einer Stromschleife

Bei dem Übergang zur 2. Zeile dieser Gleichung haben wir ausgenutzt, daß das Vektorprodukt aus \vec{r}' und dem Linienelement $d\vec{s}$ gerade die doppelte Fläche ergibt, die bei Änderung des Integrationsvektors auf dem Rand vom Vektor \vec{r}' überstrichen wird (siehe Abbildung 2.5). Also gilt auch im allgemeinen Fall, daß das magnetische Moment eines Stromes I durch eine Leiterschleife gerade gegeben ist als das Produkt aus Fläche mal Strom durch c .

Beispiel 2.: Strom aus Punktladungen

Betrachten wir nun einen Strom, der durch Punktladungen q_i an Positionen \vec{r}_i mit Geschwindigkeiten \vec{v}_i gegeben ist. Die Stromdichte ergibt sich dann zu

$$\vec{j}(\vec{r}) = \sum_i q_i \vec{v}_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$$

Setzt man diese Stromdichte in die Definition des magnetischen Momentes (2.3.31) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \vec{\mu} &= \frac{1}{2c} \sum_i q_i \int \vec{r} \times \vec{v}_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) d^3r \\ &= \frac{1}{2c} \sum_i q_i \frac{m_i}{m_i} \vec{r}_i \times \vec{v}_i \\ &= \frac{1}{2c} \sum_i q_i \frac{1}{m_i} \vec{l}_i; \end{aligned}$$

wobei $m_i \cdot \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \vec{l}_i$, der Drehimpuls der Punktladung ist!

$$\vec{\mu} = \sum \frac{q_i \vec{l}_i}{2c m_i}$$

In der Atomphysik steht q_i dann für die e^- , die Elementarladung des Elektrons, das den Atomkern umkreist. Besitzt dieses umlaufende Elektron den Drehimpuls l_i , so ergibt

sich ein Beitrag zum magnetischen Moment des Atoms:

$$\begin{aligned}\vec{\mu}_{e^-} &= \frac{e^- \vec{l}_i}{2c m_{e^-}} \\ |\vec{\mu}_{e^-}| &= \frac{e^-}{2c m_{e^-}} \hbar \sqrt{l(l+1)} := \mu_B * \sqrt{l(l+1)}\end{aligned}$$

μ_B ist das sogenannte Bohrsche Magneton und für den Betrag des Drehimpulses haben wir den quantenmechanischen Wert $\hbar \sqrt{l(l+1)}$ eingesetzt, wobei die Werte l für den Drehimpuls entsprechend den Orbitalen die Werte $0, 1, 2, \dots$ annehmen kann.

Zum Abschluß dieses Abschnittes wollen wir nun noch einmal am Beispiel des Kreisstromes die Berechnung des zugehörigen Vektorpotentials \vec{A} und die entsprechende Dipolnäherung diskutieren. Dabei gehen wir noch einmal aus von der mathematischen Beschreibung des Kreisstromes in (2.3.35) wollen aber jetzt die einzelnen kartesischen Komponenten von \vec{j} betrachten

$$\begin{pmatrix} j_x(\vec{r}') \\ j_y(\vec{r}') \\ j_z(\vec{r}') \end{pmatrix} = I \frac{\delta(|\vec{r}'| - R)}{R} \delta(\cos \vartheta') \begin{pmatrix} -\sin \varphi' \\ \cos \varphi' \\ 0 \end{pmatrix}$$

wobei wir \hat{e}_φ durch die kartesischen Komponenten dargestellt haben. Berechnen wir nun mit Hilfe von (2.3.17) das Vektorpotential an einem Punkt \vec{r} in der $x - z$ Ebene, d.h.:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r \sin \vartheta \\ 0 \\ r \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir für die x-Komponente des Vektorfeldes

$$\begin{aligned}A_x(\vec{r}) &= \frac{1}{c} \int d^3 r' \frac{j_x}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= \frac{1}{c} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int -1^1 d\vartheta' \int_0^\infty r'^2 dr' I \frac{\delta(|\vec{r}'| - R)}{R} \delta(\cos \vartheta') \frac{-\sin \varphi'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= \frac{1}{c} \int_0^{2\pi} d\varphi' IR \frac{-\sin \varphi'}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2Rr \sin \vartheta \cos \varphi'}}\end{aligned}\quad (2.3.38)$$

Dieses Integral ergibt den Wert 0, wie wir leicht sehen können wenn wir es vereinfacht darstellen in der Form

$$\begin{aligned}A_x &= \frac{-1}{c} \left[\int_0^\pi d\varphi' \frac{\sin \varphi'}{\sqrt{a - b \cos \varphi'}} + \int_\pi^{2\pi} d\varphi' \frac{\sin \varphi'}{\sqrt{a - b \cos \varphi'}} \right] \\ &= \frac{1}{c} \left[\int_{-1}^1 \frac{d\xi}{\sqrt{a - b\xi}} + \int_1^{-1} \frac{d\xi}{\sqrt{a - b\xi}} \right] \\ &= 0\end{aligned}$$

wo wir die Substitution $\xi = \cos \varphi'$ vorgenommen haben. Außerdem sieht man natürlich auch sofort, daß

$$j_z = 0 \implies A_z = 0.$$

Etwas schwieriger gestaltet sich die Berechnung von A_y . Ganz ähnlich wie in (2.3.38) können wir auch den Ausdruck für A_y auf die Form

$$A_y = \frac{IR}{c} \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{\cos \varphi'}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2Rr \sin \vartheta \cos \varphi'}}$$

bringen. Im Gegensatz zu (2.3.38) können wir aber dieses Integral nicht so einfach berechnen. Wir bringen es deshalb auf die Form

$$\frac{c}{IR} A_y = \int_0^{2\pi} dx \frac{\cos x}{\sqrt{a - b \cos x}}$$

mit

$$\begin{aligned} a &= r^2 + R^2 \\ b &= 2rR \sin \vartheta \end{aligned}$$

Dieses Integral können wir nun z.B. mit dem Computerprogramm für symbolisches Rechnen **Mathematica** auswerten, indem wir den Befehl

```
Integrate[ Sin[x]/(a-b*Cos[x])^(1/2), { x,0,2*Pi} ]
```

eingeben. Als Ergebnis erhalten wir dann:

$$Out = \frac{b\pi \text{Hypergeometric2F1}\left[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}, 2, \frac{b^2}{a^2}\right]}{2a^{3/2}}$$

wobei eine bestimmte “hypergeometrische konfluente” Funktion ${}_2F_1$ zum Argument

$$y = \frac{b^2}{a^2} = \left(\frac{2rR \sin \vartheta}{r^2 + R^2} \right)^2$$

eingeht. Uns interessiert diese Funktion für Punkte \vec{r}' , die weit weg sind von der lokalisierten Stromverteilung, also: $r \gg R$. Das heißt das oben definierte Argument y ist klein gegenüber 1: $y \ll 1$. Deshalb reicht es also aus, wenn wir uns die Taylorentwicklung der Funktion ${}_2F_1$ um den Wert $y = 0$ ansehen. **Mathematica** liefert uns diese Entwicklung bis zu Termen dritter Ordnung durch Eingabe des Befehls

```
Series[ Hypergeometric2F1[ 3/4, 5/4, 2, y], {y,0,3} ]
```

Als Ergebnis erhalten wir

$$Out = 1 + \frac{15}{32}y + \frac{315}{1024}y^2 + \frac{15015}{65536}y^3 + O[y^4]$$

Wenn wir jetzt diese Entwicklung durch den ersten Term ${}_2F_1 = 1$ approximieren und die Definitionen der Hilfsvariablen zurückverfolgen, erhalten wir für

$$\begin{aligned} A_y &= \frac{RI}{c} \frac{2rR\pi \sin \vartheta}{2(r^2 + R^2)^{3/2}} \\ &\approx \frac{I\pi R^2 \sin \vartheta}{c} \frac{1}{r^2} \end{aligned}$$

Beim Übergang zur zweiten Zeile haben wir im Nenner wieder $R^2 \ll r^2$ ausgenutzt. Dieses Ergebnis für A_x , A_y und A_z bei Beobachtungspunkten \vec{r} in der $x-z$ Ebene läßt sich für beliebige Beobachtungspunkte mit $r \gg R$ verallgemeinern zu

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{I\pi R^2}{cr^2} \sin \vartheta \hat{e}_\varphi \quad (2.3.39)$$

wobei \hat{e}_φ wie üblich für den Einheitsvektor zur entsprechenden Kugelkoordinate steht. Dieses Ergebnis, das wir jetzt durch direkte Berechnung des Vektorpotentials unter Benutzung mathematischer Näherungen für $r \gg R$ erhalten haben, hätten wir auch einfacher aus der Multipolentwicklung für \vec{A} bekommen können. Wie wir in (2.3.37) gesehen haben berechnet sich das magnetische Dipolmoment eines Kreisstromes zu

$$\vec{\mu} = \frac{\pi}{c} R^2 I \hat{e}_z$$

Eingesetzt in (2.3.32) ergibt sich also

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{1}{r^3} \vec{\mu} \times \vec{r} = \frac{1}{r^2} \vec{\mu} \times \hat{e}_r \\ &= \frac{I\pi R^2}{cr^2} \underbrace{\hat{e}_z \times \hat{e}_r}_{\sin \vartheta \hat{e}_\varphi} \end{aligned}$$

das gleiche Ergebnis wie in (2.3.39). Ausgedrückt in Kugelkoordinaten ergibt sich also das Vektorpotential eines solchen Kreisstromes, beziehungsweise eines magnetischen Dipolmomentes $\mu \hat{e}_z$, zu

$$A_r = A_\vartheta = 0 \quad \text{und} \quad A_\varphi = \underbrace{\frac{I\pi R^2}{c}}_\mu \frac{\sin \vartheta}{r^2}$$

Berechnen wir damit die magnetische Induktionsdichte durch

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

in Kugelkoordinaten, so erhält man

$$\begin{aligned} B_r &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta A_\varphi) - \frac{\partial}{\partial \varphi} A_\vartheta \right] = \frac{2 \cos \vartheta}{r^3} \mu \\ B_\vartheta &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} A_r - \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right] = \frac{\sin \vartheta}{r^3} \mu \\ B_\varphi &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\vartheta) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} A_r = 0 \end{aligned} \quad (2.3.40)$$

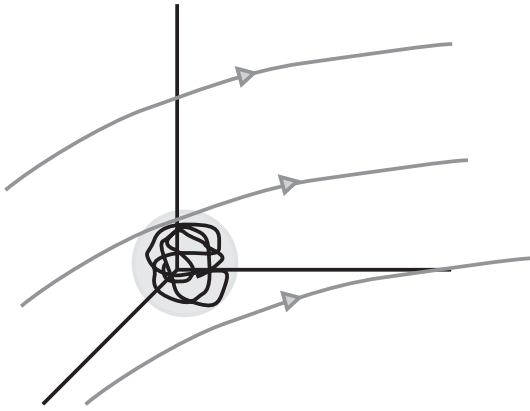


Abbildung 2.6: lokalisierte Stromverteilung im äußeren Magnetfeld

2.4 Kraft auf magnetische Dipole in einem äußeren Magnetfeld

Es soll nun diskutiert werden, was für Kräfte und Drehmomente auf eine lokalisierte Stromverteilung $\vec{j}(\vec{r})$ in einem äußeren Magnetfeld \vec{B} wirken. Dabei soll die Stromverteilung in einem engen Bereich um den Koordinatenursprung lokalisiert sein und die Ströme, die die magnetische Induktionsdichte \vec{B} erzeugen sollen weit weg sein von der lokalisierten Stromverteilung, auf die die Kraft ausgeübt wird (siehe Abbildung 2.6). Demzufolge ändert sich \vec{B} im Bereich der Stromverteilung nur wenig und wir können die magnetische Induktionsdichte für den Bereich, in dem die Stromdichte \vec{j} von Null verschieden ist, in eine Taylorreihe entwickeln. Für die kartesische Komponente B_k der magnetischen Induktionsdichte schreiben wir die Taylorentwicklung:

$$\begin{aligned} B_k(\vec{r}) &= B_k(\vec{0}) + \sum_{l=1}^3 \frac{d}{dx_l} B_k|_{\vec{r}=\vec{0}} x_l + \dots \\ &= \vec{B}(\vec{0}) + (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}(\vec{0}) + \dots \end{aligned} \quad (2.4.41)$$

Nach dem ersten Ampereschen Gesetz gilt für die Kraft \vec{F} eines Magnetfeldes auf eine Stromverteilung (2.1.3):

$$\begin{aligned} \vec{F} = \int d\vec{F} &= \frac{1}{c} \int I d\vec{l} \times \vec{B} = \frac{1}{c} \int \vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}) dV \\ &= \frac{1}{c} \int \left[\vec{j}(\vec{r}) \times \underbrace{(\vec{B}(\vec{0}))}_{a)} + \underbrace{(\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}(\vec{0})}_{b)} + \dots \right] dV \end{aligned} \quad (2.4.42)$$

Dabei haben wir in der 2. Zeile dieser Gleichung die Taylorentwicklung (2.4.41) für die magnetische Induktionsdichte eingefügt. Betrachte die Terme a) und b) in (2.4.42) getrennt:

$$a) \quad \vec{F}_a = \frac{1}{c} \int [\vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{0})] dV = -\vec{B}(\vec{0}) \times \frac{1}{c} \int \vec{j}(\vec{r}) dV = \vec{0}$$

da das Volumenintegral über $\vec{j}(\vec{r})$ für lokale Stromverteilungen verschwindet (siehe (2.3.26)).

$$\text{b) } \vec{F}_b = \frac{1}{c} \int [\vec{j}(\vec{r}) \times (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}(\vec{0})] dV$$

läßt sich mit Hilfe der folgenden Nebenrechnungen auswerten:

N.R.(1): Da die Ströme, die das Magnetfeld \vec{B} verursachen weit weg sind vom Koordinatenursprung (siehe Voraussetzung, die wir zu Beginn dieses Abschnittes diskutiert haben), gilt in der Nähe des Koordinatenursprunges $\text{rot}\vec{B} = 0$. Damit ist auch

$$\vec{r} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{0}.$$

Mit dem Grassmannschen Entwicklungssatz (s. Glg. 2.2.10) ist also auch

$$\begin{aligned} \left[\underbrace{\vec{\nabla}(\vec{B} \cdot \vec{r})}_{\vec{\nabla}(\vec{B} \cdot \vec{r})} - (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} \right] \Big|_{\vec{x}=\vec{0}} &= 0 \\ \Leftrightarrow \underbrace{\vec{\nabla}(\vec{B} \cdot \vec{r})}_{\vec{\nabla}(\vec{B} \cdot \vec{r})} &= (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} \end{aligned}$$

Dabei bedeutet die Unterklammerung an, daß sich die Ableitungen im Nabla Operator nur auf die betreffende Größe, also hier \vec{B} bezieht.

Also ist

$$\vec{F}_b = \frac{1}{c} \int \left[\vec{j}(\vec{r}) \times \underbrace{\vec{\nabla}(\vec{B} \cdot \vec{r})}_{\vec{\nabla}(\vec{B} \cdot \vec{r})} \right] dV.$$

Das läßt sich nun mit der folgenden Nebenrechnung weiter vereinfachen:

N.R.(2): Für die x-Komponente von \vec{F}_b gilt

$$\begin{aligned} c[\vec{F}_b]_x &= \left[\int \left\{ \vec{j}(\vec{r}) \times \underbrace{\vec{\nabla}(\vec{B} \cdot \vec{r})}_{\vec{\nabla}(\vec{B} \cdot \vec{r})} \right\} dV \right]_x \\ &= \int \left\{ j_y \underbrace{\partial_z(\vec{B} \cdot \vec{r})}_{\partial_z(\vec{B} \cdot \vec{r})} - j_z \underbrace{\partial_y(\vec{B} \cdot \vec{r})}_{\partial_y(\vec{B} \cdot \vec{r})} \right\} dV \\ &= - \left[\int \left\{ \underbrace{\partial_y(\vec{B} \cdot \vec{r})}_{\partial_y(\vec{B} \cdot \vec{r})} j_z \right\} dV - \int \left\{ \underbrace{\partial_z(\vec{B} \cdot \vec{r})}_{\partial_z(\vec{B} \cdot \vec{r})} j_y \right\} dV \right], \end{aligned}$$

wobei ∂_z als Abkürzung für die Ableitung d/dz stehen soll. Die vorstehende Gleichung gilt für die y- und z-Komponente entsprechend.

Mit der Definition des Kreuzprodukts erhält man dann $\vec{F}_b(\vec{r})$ zu

$$\vec{F}_b(\vec{r}) = -\frac{1}{c} \underbrace{\vec{\nabla} \times \int (\vec{B} \cdot \vec{r}) \vec{j}(\vec{r}) dV}_{\text{Kreuzprodukt}}$$

Mit der Vektoridentität (2.3.29)

$$\int (\vec{a} \cdot \vec{r}) \vec{j}(\vec{r}) dV = -\frac{1}{2} \vec{a} \times \int (\vec{r} \times \vec{j}(\vec{r})) dV$$

und der Definition des magnetischen Momentes $\vec{\mu} = \frac{1}{2c} \int \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}') dV'$ ist dann schließlich

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{2c} \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{B}}_{\text{Kreuzprodukt}} \times \int (\vec{r} \times \vec{j}(\vec{r})) dV = \vec{\nabla} \times (\vec{B}(\vec{x}) \times \vec{\mu}) \Big|_{\vec{x}=\vec{0}}$$

$$\boxed{\vec{F} = \vec{\nabla} \times (\vec{B} \times \vec{\mu})}$$

Mit dem Grassmannschen Entwicklungssatz (s. Glg. 2.2.10) gilt

$$\vec{F} = (\vec{\mu} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \vec{\mu} = (\vec{\mu} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}$$

(letzteres, da $\text{div} \vec{B}$ verschwindet). Da für stationäre, nahezu konstante \vec{B} -Felder (d.h. keine Wirbel) $\text{rot} \vec{B} = 0$ ($\Rightarrow \partial_i B_l = \partial_l B_i$) gilt und $\vec{\mu}$ eine Konstante ist, gilt

$$\begin{aligned} (\vec{\mu} \cdot \vec{\nabla}) B_l &= \sum_{i=1}^3 \mu_i \partial_i B_l = \sum_{i=1}^3 \mu_i \partial_l B_i = [\vec{\nabla}(\vec{\mu} \cdot \vec{B})]_l \\ \Rightarrow \vec{F} &= \vec{\nabla}(\vec{\mu} \cdot \vec{B}). \end{aligned}$$

\vec{F} läßt sich also in der Form

$$\boxed{\vec{F} = -\vec{\nabla} U} \quad \text{mit} \quad U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

schreiben. Genau so ist aber ein konservatives Kraftfeld definiert. Seine potentielle Energie lautet somit

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}. \quad (2.4.43)$$

Die Energie eines magnetischen Momentes $\vec{\mu}$ ist also minimal, wenn $\vec{\mu}$ parallel zur magnetischen Induktionsdichte ausgerichtet ist. Auf diesem Prinzip beruht der klassische Magnetnadelkompass: Das magnetische Moment der Magnetnadel richtet sich parallel zum Magnetfeld aus. Im allgemeinen sind \vec{B} und $\vec{\mu}$ nicht parallel, auf die Stromverteilung wirkt also ein **Drehmoment** \vec{N} , welches im Folgenden berechnet werden soll: allgemein gilt

$$\vec{N} = \int \vec{r}' \times d\vec{F}(\vec{r}')$$

wo $d\vec{F}(\vec{r}')$ die Kraft auf ein Volumenelement bei \vec{r}' ist. Mit dem Ampereschen Gesetz (2.1.3) und dem Grassmannschen Entwicklungssatz (s. Glg. 2.2.10) ist dann

$$\begin{aligned}\vec{N} &= \frac{1}{c} \int \vec{r}' \times [\vec{j}(\vec{r}') \times \vec{B}(\vec{r}')] dV \\ &= \frac{1}{c} \int [\vec{r}' \cdot \vec{B}(\vec{r}')] \vec{j}(\vec{r}') dV' - \frac{1}{c} \int [\vec{r}' \vec{j} \cdot (\vec{r}')] \vec{B}(\vec{r}') dV' .\end{aligned}$$

Betrachte zuerst den zweiten Summanden: Mit der Produktregel gilt

$$\vec{\nabla} (r^2 \vec{j}) = (\vec{\nabla} r^2) \vec{j} + r^2 \vec{\nabla} \vec{j} = 2\vec{r} \cdot \vec{j}$$

(beachte: $\text{div} \vec{j} = 0$ in der Magnetostatik). Betrachtet man die Taylorentwicklung von $\vec{B}(\vec{r}')$ (2.4.41) nur bis zur ersten Ordnung (also $\vec{B}(\vec{r}') = \vec{B}(\vec{0})$), dann erhält man für den zweiten Summanden mit dem Gaußschen Satz:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{c} \int [\vec{r}' \vec{j}(\vec{r}')] \vec{B}(\vec{r}') dV &= -\frac{1}{2c} \vec{B}(\vec{0}) \int \vec{\nabla} (r^2 \vec{j}) dV' \\ &= -\frac{1}{2c} \vec{B}(\vec{0}) \oint r^2 \vec{j}(\vec{r}') d\vec{f}' = 0\end{aligned}$$

(letzteres, da $\vec{j}(\vec{r}')$ an der „Oberfläche des \mathcal{R}^3 “ verschwindet). Damit gilt für \vec{N} (mit der Vektoridentität 2.3.29):

$$\vec{N} = \frac{1}{c} \int (\vec{B}(\vec{0}) \cdot \vec{r}') \vec{j}(\vec{r}') = -\vec{B}(\vec{0}) \times \frac{1}{2c} \int \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}') dV' .$$

Mit der Definition des Magnetischen Moments $\vec{\mu} = \frac{1}{2c} \int \vec{r}' \times \vec{j} dV$ Ist dann also

$$\boxed{\vec{N} = \vec{\mu} \times \vec{B}(\vec{0})} . \quad (2.4.44)$$

2.5 Das magnetische Feld in Materie

Wie wir in den vorangegangenen Kapiteln bereits gesehen haben, wird die magnetische Induktionsdichte \vec{B} durch ein Vektorpotential \vec{A} charakterisiert, das aus der Stromverteilung berechnet werden kann nach:

$$\vec{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 \vec{r}'.$$

In dieser Bestimmungsgleichung gehen wir davon aus, daß die Stromverteilung \vec{j} vollständig bekannt ist. Bei der Untersuchung der magnetischen Phänomene in Materie werden wir aber normalerweise die mikroskopischen Ströme, das sind die Ströme auf atomarem Niveau durch die Bewegung der Elektronen um die Atomkerne, nicht explizit kennen. Deshalb erhalten wir zu dem Vektorpotential, das von den makroskopischen Strömen generiert wird, einen Beitrag durch diese mikroskopischen Ströme. Dadurch ergibt sich das Vektorpotential zu

$$\vec{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 \vec{r}' + \vec{A}_{mikro}.$$

Dieses mikroskopische Potential stellt sich dar als Summe der Beiträge der einzelnen Moleküle oder Atome

$$\begin{aligned} \vec{A}_{mikro} &= \sum_{\text{Molekül } i} \vec{A}_i \\ &= \sum_i \frac{\vec{\mu}_i \times (\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}, \end{aligned}$$

wobei $\vec{\mu}_i$ das magnetische Moment des Moleküls i und \vec{r}_i dessen Position bezeichnet, so daß sich nach Gl. (2.3.32) der obige Ausdruck ergibt. Da der Abstand zwischen dem Beobachtungspunkt \vec{r} und der Position \vec{r}_i im Allgemeinen sehr groß sein wird im Vergleich zu den atomaren Abmessungen, auf die die Ströme eines Moleküls lokalisiert sind, reicht es aus, daß wir bei der Multipolentwicklung dieser mikroskopischen Strombeiträge nur den Dipolanteil berücksichtigen. Die magnetischen Multipolmomente höherer Ordnung können vernachlässigt werden. Ersetzt man diese Summe über die vielen Moleküle durch ein Integral über die magnetische Dipoldichte $\vec{M}(\vec{r}')$, die also das lokal gemittelte magnetische Moment der Atome pro Volumeneinheit darstellt, so erhält man insgesamt für das Vektorpotential

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 \vec{r}' + \int \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3 \vec{r}' \\ &= \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 \vec{r}' + \int \vec{M}(\vec{r}') \times \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 \vec{r}'. \end{aligned} \quad (2.5.45)$$

Beim Übergang zur zweiten Zeile haben wir Gl. (1.3.37) ausgenutzt. Hier und im folgenden bezeichnen wir mit \vec{M} die magnetische Dipoldichte bzw. *Magnetisierung*.

Zur Vereinfachung dieses Ausdrucks führen wir eine Nebenrechnung durch und zeigen zunächst einmal:

$$\int \vec{\nabla}' \times \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 \vec{r}' = 0. \quad (2.5.46)$$

Zum Beweis dieser Vektorgleichung betrachten wir die x -Komponente:

$$\begin{aligned} \left[\int \vec{\nabla}' \times \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 \vec{r}' \right]_x &= \int \frac{\partial}{\partial y'} \frac{M_z}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dx' dy' dz' - \int \frac{\partial}{\partial z'} \frac{M_y}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dx' dy' dz' \\ &= \int \frac{M_z}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \Big|_{y'=-\infty}^{+\infty} dx' dz' - \int \frac{M_y}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \Big|_{z'=-\infty}^{+\infty} dx' dy' \\ &= 0 \quad \text{da } \frac{M}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \text{ für } \vec{r}' \rightarrow \infty \text{ verschwindet.} \end{aligned}$$

Wenden wir nun die Produktregel für den $\vec{\nabla}$ Operator in (2.5.46) so erhalten wir

$$0 = \int (\vec{\nabla}' \times \vec{M}) \cdot \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 \vec{r}' + \int \left(\vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \times \vec{M} d^3 \vec{r}'$$

Somit läßt sich der Potentialanteil, resultierend aus den mikroskopischen Strömen, in (2.5.45) darstellen als:

$$\int \vec{M}(\vec{r}') \times \left(\vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) d^3 \vec{r}' = \int (\vec{\nabla}' \times \vec{M}) \cdot \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 \vec{r}'.$$

Das Gesamtpotential \vec{A} in (2.5.45) erhält so die Form

$$\boxed{\vec{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') + c \cdot \text{rot } \vec{M}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 \vec{r}'} \quad (2.5.47)$$

Die mikroskopischen Ströme werden also durch $\vec{j}_{\text{mikro}} = c \cdot \text{rot } \vec{M}$ dargestellt.

Wir können also nun die Wirbel der magnetischen Induktionsdichte \vec{B} ausrechnen mit Hilfe von Gl. (2.2.11) wenn wir für den Strom die gesamte Stromdichte

$$\vec{j}_{\text{gesamt}} = \vec{j} + \vec{j}_{\text{mikro}} = \vec{j} + c \cdot \text{rot } \vec{M}$$

einsetzen:

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{4\pi}{c} (\vec{j} + c \cdot \text{rot } \vec{M}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_{\text{makro}} + 4\pi \cdot \text{rot } \vec{M}$$

Stellt man diese Gleichung um, so erhält man

$$\operatorname{rot} (\vec{B} - 4\pi\vec{M}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j} =: \operatorname{rot} \vec{H}. \quad (2.5.48)$$

Durch diese Gleichung haben wir also eine **magnetische Feldstärke** $\vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{M}$ definiert, so daß die Wirbel dieser magnetischen Feldstärke, $\operatorname{rot} \vec{H}$ ausschließlich durch die makroskopische Stromdichte \vec{j} gegeben ist. Im Vakuum gilt $\vec{B} = \vec{H}$, da ohne Materie keine Magnetisierung existiert: $\vec{M} = 0$. Es zeigt sich, daß bei den meisten Materialien, die magnetische Dipoldichte \vec{M} proportional zur magnetischen Feldstärke ist (siehe auch die Diskussion der verschiedenen Materialien weiter unten): $\vec{M} = \chi \cdot \vec{H}$. Der Proportionalitätsfaktor χ (Chi) wird als magnetische Suszeptibilität bezeichnet und ist eine Materialkonstante. Damit ergibt sich:

$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M} = \underbrace{(1 + 4\pi\chi)}_{=: \mu} \vec{H}. \quad (2.5.49)$$

Zur Vereinfachung wird der Proportionalitätsfaktor zwischen \vec{B} und \vec{H} als *Permeabilität* μ bezeichnet.

2.5.1 Magnetische Materialeigenschaften

Materie läßt sich aufgrund ihres Verhaltens im magnetischen Feld in drei Gruppen einteilen, die sich in den Werten der Suszeptibilität χ , beziehungsweise der Permeabilität μ unterscheiden.

1. *Paramagnetismus* ($\chi > 0$).

Sämtliche Moleküle paramagnetischer Materie besitzen ein permanentes magnetisches Dipolmoment \vec{m}_i . Betrachten wir die Verteilung der magnetischen Momente im Zustand $T = 0$, also beim Verschwinden jeglicher thermischer Energie, so werden sich all diese molekularen Elementarmagnete in die energetisch günstigste Richtung orientieren, d.h. sie werden sich parallel zu einem externen Magnetfeld \vec{H} beziehungsweise \vec{B} orientieren (siehe den Ausdruck für die Energie eines magnetischen Dipols im äußeren Magnetfeld (2.4.43)). In diesem Fall ist also die gesamte magnetische Induktionsdichte, die ja aus der Summe der makroskopischen plus molekularen Ströme resultiert maximal.

Mit zunehmender Temperatur unterliegen die Moleküle der thermischen Bewegung, die die Ausrichtung der Dipole parallel zum externen Feld stört. Um dies quantitativ zu erfassen, betrachten wir zunächst die Wahrscheinlichkeit eines Systems in einem Wärmebad mit der Temperatur T , einen Zustand mit der Energie ε einzunehmen:

$$w(\varepsilon) = \alpha \cdot \exp(-\varepsilon/kT),$$

wobei k die Boltzmann-Konstante bezeichnet. Damit ist also die Wahrscheinlichkeit, daß ein magnetisches Dipolmoment \vec{m}_i eine bestimmte Orientierung relativ zu einem externen Magnetfeld \vec{B} einnimmt (vergl. (2.4.43)) gegeben durch

$$\begin{aligned} w(\vec{m}_i) &= \alpha \cdot \exp(\vec{B} \cdot \vec{m}_i/kT) \\ &= \alpha \cdot \exp(Bm_z/kT) \end{aligned} \quad (2.5.50)$$

Hierbei haben wir vorausgesetzt, daß das \vec{B} -Feld in z -Richtung orientiert ist, d. h. $\vec{B} = B\hat{e}_z$, so daß m_z die z -Komponente des magnetischen Momentes \vec{m}_i bezeichnet. Bei atomaren Systemen ist das magnetische Momente mit den Drehimpulsen der Elektronen bei ihrer Bewegung um den Atomkern verknüpft und wir erhalten für

$$m_z = g\mu_B j_z \quad \text{mit} \quad j_z = -j, -j+1 \dots j$$

wobei μ_B das Bohrsche Magneton ist, g das gyromagnetische Verhältnis bezeichnet und entsprechend den Gesetzen der Quantenmechanik j_z die z -Komponente des Drehimpulses die Werte $-j, -j+1 \dots j$ annehmen kann, wenn j den Betrag des Gesamtdrehimpulses bezeichnet. Nun ist klar, daß die Summe der Wahrscheinlichkeiten, also $w(\vec{m}_i)$ summiert über alle Möglichkeiten der Orientierung Eins ergibt:

$$\sum_{j_z} \alpha \cdot \exp(Bg\mu_B j_z/kT) = 1.$$

Aus dieser Normierungsbedingung ergibt sich die Konstante α beziehungsweise die sogenannte Zustandssumme

$$\mathcal{Z} = \frac{1}{\alpha} = \sum_{j_z} \exp(Bg\mu_B j_z/kT)$$

Führen wir nun die Abkürzung

$$\eta = \frac{Bg\mu_B}{kT}$$

ein, so können wir diese Zustandssumme leicht aufsummieren und man erhält

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= e^{-\eta j} + e^{-\eta(j-1)} + \dots + e^{\eta j} \\ &= e^{-\eta j} [1 + e^{\eta} + \dots + e^{2\eta j}] \\ &= e^{-\eta j} \frac{1 - e^{(2j+1)\eta}}{1 - e^{\eta}} \\ &= \frac{e^{-\eta j} - e^{\eta(j+1)}}{1 - e^{\eta}} \\ &= \frac{\sinh((j + \frac{1}{2})\eta)}{\sinh(\frac{1}{2}\eta)} \end{aligned} \quad (2.5.51)$$

Wenn wir nun den Mittelwert für die z -Komponente des magnetischen Momentes eines Atomes ausrechnen wollen, müssen wir über alle mögliche Orientierungen des magnetischen Momentes summieren und den jeweiligen Wert für m_z mit der entsprechenden Wahrscheinlichkeit multiplizieren

$$\begin{aligned}\bar{m}_z &= \frac{1}{Z} \sum_{j_z} g\mu_B j_z \exp(Bg\mu_B j_z / kT) \\ &= \frac{1}{Z} kT \frac{\partial}{\partial B} Z\end{aligned}$$

Setzen wir nun in diese Gleichung das Ergebnis (2.5.51) für die Zustandsgleichung Z ein, und entwickeln wir das Ergebnis für kleine Werte von η , so erhalten wir

$$\bar{m}_z = g\mu_B j \frac{j+1}{3} \eta \sim \frac{B}{T}$$

Damit ist also die Magnetisierungsdichte M , also dieser Wert \bar{m}_z multipliziert mit der Zahl der Atome pro Einheitsvolumen ebenfalls proportional dem Verhältnis H/T . Nach (2.5.49) ist aber

$$M = \chi H \sim \frac{H}{T}$$

und damit die Suszeptibilität χ unabhängig von H und χ fällt mit wachsender Temperatur proportional $1/T$ ab. Dieses Gesetz, das als *Curiesches Gesetz* bekannt ist, kann man für viele Materialien beobachten. Bei unserer Herleitung ging ja nur ein, daß $\eta \ll 1$, eine Bedingung, die bei Zimmertemperatur im Allgemeinen erfüllt ist.

2. Ferromagnetismus ($\chi \gg 1$).

Auch bei ferromagnetischen Stoffen besitzen die Atome ein permanentes magnetisches Moment. In diesem Fall richten sich aber die einzelnen Atome nicht unabhängig voneinander, gestört durch die thermische Bewegung aus. Es wirken bei diesen ferromagnetischen Materialien Kräfte zwischen den Atomen, die im Kristallgitter auf benachbarten Plätzen sitzen. Diese Kräfte führen dazu, daß benachbarte Atome ihre Spins und damit ihre magnetischen Momente parallel zueinander orientieren. Dies führt zu den sogenannten *Weißschen Bezirken*, Domänen, in denen alle atomaren magnetischen Momente parallel orientiert sind. Die thermische Energie reicht nun nicht aus, diese makroskopischen Domänen aus der Vorzugsrichtung also parallel zum externen Magnetfeld wegzudrehen. So läßt sich eine homogene Ausrichtung aller Momente erreichen, und die Magnetisierung wird sehr groß werden. Erst bei höheren Temperaturen wird diese Ordnung der Magnetisierung gestört. Oberhalb einer Curie Temperatur geht ein solches ferromagnetisches Material in einen Paramagneten über.

Weiterhin wird nach Abschalten des externen Magnetfeldes die Ausrichtung der Momente zum Teil erhalten bleiben, der Stoff zeigt eine Restmagnetisierung (Remanenz). Zu den Stoffen, die bei Zimmertemperatur ferromagnetische Eigenschaften zeigen, zählen Eisen, Kobalt und Nickel.

3. *Diagnagnetismus* ($\chi < 0$).

Hier besitzen die Moleküle kein magnetisches Moment. Durch das Anlegen eines externen Magnetfeldes, werden magnetische Dipolmomente auf atomarer Ebene induziert. Diese induzierten magnetischen Momente orientieren sich bevorzugt antiparallel zum erzeugenden Feld.

2.5.2 Das Verhalten von \vec{B} und \vec{H} an Grenzflächen

Wie in der Elektrostatik im Abschnitt 1.8.2, so wollen wir auch in diesem Abschnitt das Verhalten der Felder an Grenzflächen zwischen 2 Medien diskutieren. Wir betrachten also das Verhalten von Magnetfeldern bei dem Übergang von einem Medium I, charakterisiert durch die Permeabilität μ_1 , zu einem Medium II mit μ_2 . Wir werden dazu jetzt zeigen, daß

1. Bei einem Übergang von einem Material zu einem anderen ändert sich die Komponente der magnetischen Induktionsdichte \vec{B} , die senkrecht zur Grenzfläche steht (also parallel zur Flächennormalen \hat{n}), nicht.
2. Fließt in der Grenzfläche kein elektrischer Strom, so bleibt bei einem solchen Übergang auch die Tangentialkomponente des Magnetfeldes \vec{H} , also die Komponente parallel zur Grenzfläche, erhalten

Zum Beweis der Behauptung 1 betrachten wir ein Volumen auf der Grenzfläche zwischen den 2 Medien, das wie in Figur 1.18 dargestellt einer flachen Schachtel gleicht, bei der alle Grenzflächen klein sind mit Ausnahme der beiden Flächen parallel zur Grenzfläche, die die Größe ΔF haben sollen. Da die magnetische Induktionsdichte quellfrei ist (siehe Gl. (2.2.9))

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

ergibt natürlich auch das Integral von $\operatorname{div} \vec{B}$ integriert über das Volumen V dieser Schachtel den Wert 0. Durch Anwendung des Gaußschen Satzes erhalten wir also

$$\begin{aligned} 0 &= \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B} dV \\ &\stackrel{\text{Gauß}}{=} \oint_O \vec{B} d\vec{f} \\ &= (\vec{B}_{II} \cdot \vec{n} - \vec{B}_I \cdot \vec{n}) \Delta F \end{aligned}$$

Bei dem Übergang zur letzten Zeile haben wir ausgenutzt, daß nur die beiden Randflächen der Schachtel parallel zur Grenzfläche zum Integral über die Oberfläche beitragen (die anderen 4 Flächen sind verschwindend klein, da die Ausdehnung der Schachtel in Richtung senkrecht zur Grenzfläche infinitesimal klein sein soll), diese Flächen die

Größe ΔF besitzen und der Vektor des Oberflächenelementes jeweils nach außen zeigt, also im Fall der Grenzfläche im Medium II parallel zur Flächennormale \hat{n} , im Fall der Grenzfläche im Medium I antiparallel zu \hat{n} . Daraus ergibt sich also das behauptete Grenzverhalten für die magnetische Induktionsdichte

$$\vec{B}_{II} \cdot \vec{n} = \vec{B}_I \cdot \vec{n} \quad (2.5.52)$$

Zum Beweis der oben aufgeführten Behauptung 2 über das Grenzverhalten starten wir von der Grundgleichung der Magnetostatik im Medium (2.5.48)

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

Nach unserer Voraussetzung soll die Stromdichte \vec{j} an der Grenzfläche verschwinden, so daß ein Integral von $\text{rot} \vec{H}$ über eine Fläche der Form in Figur 1.19 ebenfalls den Wert 0 ergeben muß

$$\begin{aligned} 0 &= \int_F (\text{rot} \vec{H}) \cdot d\vec{f} \\ &\stackrel{\text{Stokes}}{=} \oint_S \vec{H} \cdot d\vec{s} \\ &= (\vec{H}_{II} - \vec{H}_I) \cdot \hat{e}_{\parallel} \Delta \end{aligned}$$

Bei dem Übergang von der ersten zur zweiten Zeile haben wir den Stokeschen Integralsatz angewandt. Der Übergang zur dritten Zeile ergibt sich aus der Geometrie des betrachteten Rechtecks: Die Seiten senkrecht zur Grenzfläche sind infinitesimal und tragen zum Integral über den Rand nicht bei, die Seiten parallel haben jeweils die Länge Δ und werden bei der Integration parallel (im Medium II) beziehungsweise antiparallel (im Medium I) zum Einheitsvektor \hat{e}_{\parallel} , der parallel zur Grenzfläche orientiert ist, durchlaufen. Damit ergibt sich also auch die 2. Behauptung für das Verhalten an Grenzflächen:

$$\vec{H}_{II} \cdot \hat{e}_{\parallel} = \vec{H}_I \cdot \hat{e}_{\parallel} \quad (2.5.53)$$

beziehungsweise für die magnetische Induktionsdichte

$$\frac{1}{\mu_2} \vec{B}_{II} \cdot \hat{e}_{\parallel} = \frac{1}{\mu_1} \vec{B}_I \cdot \hat{e}_{\parallel}.$$

Beispiel: Magnetfeld einer homogen magnetisierten Kugel

Als ein Anwendungsbeispiel für das Verhalten der Magnetfelder an Grenzflächen wollen wir nun eine Kugel mit einem Radius R betrachten, die z.B. aus einem ferromagnetischen Material besteht und homogen magnetisiert sein soll. In der Kugel gibt es also eine homogene Magnetisierungsdichte, die in z -Richtung ausgerichtet sein soll: $\vec{M} = M_0 \hat{e}_z$

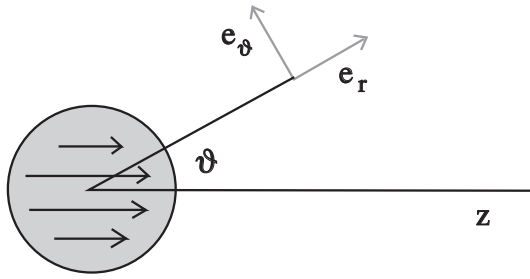


Abbildung 2.7: Beispiel einer Kugel, homogen magnetisiert in z-Richtung

(siehe auch Abb. 2.7). Die Kugel befindet sich im Vakuum, d.h.: Im Außenbereich ist $\vec{B}_a = \vec{H}_a$ und da dort keine Ströme existieren gilt

$$\text{rot}\vec{B}_a = \text{rot}\vec{H}_a = \vec{0}$$

Da also die magnetische Induktionsdichte \vec{B}_a wirbelfrei ist können wir sie als Gradienten eines skalaren Feldes Ψ schreiben

$$\vec{B}_a = -\vec{\nabla}\Psi_a \quad (2.5.54)$$

Da natürlich die magnetische Induktionsdichte auch in diesem Fall quellfrei ist gilt:

$$\text{div}B_a = -\text{div}(\vec{\nabla}\Psi_a) = -\Delta\Psi_a = 0 \quad (2.5.55)$$

Diese Gleichung für Ψ_a entspricht der Poissongleichung für das Potential der Elektrostatik im ladungsfreien Fall (1.3.38). Da unser Problem symmetrisch um die z -Achse ist, sollte auch dieses Feld Ψ_a nur von den Kugelkoordinaten r und ϑ abhängen, nicht aber vom Azimuthwinkel φ . Wir entwickeln also Ψ_a nach dem vollständigen System der Legendrepolynome und schreiben:

$$\Psi_a(r, \vartheta) = \sum_l \alpha_l(r) P_l(\cos \vartheta) \quad (2.5.56)$$

Gehen wir mit diesem Ansatz in die Gleichung (2.5.55) und benutzen den Laplaceoperator Δ in Kugelkoordinaten, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \Delta\Psi_a(r, \vartheta) &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Psi_a}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \Psi_a}{\partial \vartheta} \right) \\ &= \sum_l \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \alpha_l}{\partial r} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \alpha_l \right] P_l(\cos \vartheta) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Bei dem Übergang von der ersten zur zweiten Zeile haben wir eine Eigenschaft der Legendre Polynome ausgenutzt. Wegen der Orthogonalität der Legendre Polynome ist

die gesamte Summe in der zweiten Zeile genau dann gleich null, wenn alle Koeffizienten vor den jeweiligen P_l identisch 0 sind. Daraus ergeben sich also für die Funktionen $\alpha_l(r)$ die Differentialgleichungen

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \alpha_l}{\partial r} \right) = \frac{l(l+1)}{r^2} \alpha_l$$

mit den Lösungen

$$\alpha_l(r) = r^l \quad \text{und} \quad \alpha_l(r) = \frac{1}{r^{l+1}}$$

Für die Funktion Ψ_a , die ja im Außenbereich der Kugel definiert ist, interessieren nur die Lösungen, die in diesem Außenraum regulär sind, wir erhalten also eingesetzt in unseren Ansatz (2.5.56)

$$\Psi_a(r, \vartheta) = \sum_l \frac{a_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \vartheta) \quad (2.5.57)$$

Im Inneren der Kugel wird die magnetische Induktionsdichte durch die Magnetisierung \vec{M} dominiert und wir erhalten:

$$\begin{aligned} \vec{B}_i &= B_0 \hat{e}_z \\ \vec{H}_i &= \vec{B}_i - 4\pi \vec{M} = (B_0 - 4\pi M_0) \hat{e}_z \end{aligned} \quad (2.5.58)$$

Für die Diskussion des Verhaltens an der Grenzfläche bemerken wir, daß der Normalenvektor für die Kugeloberfläche gleich dem Einheitsvektor \hat{e}_r der Kugelkoordinaten ist, während der Einheitsvektor \hat{e}_ϑ tangential zur Kugeloberfläche steht (siehe auch Abb. 2.7). Damit lauten also die Randbedingung (2.5.52)

$$\begin{aligned} \vec{B}_i \cdot \hat{e}_r &= \vec{B}_a \cdot \hat{e}_r \\ B_0 \cos \vartheta &= \left(-\vec{\nabla} \Psi_a \right) \cdot \hat{e}_r = -\frac{\partial \Psi_a}{\partial r} \Big|_{r=R} \\ B_0 P_1(\cos \vartheta) &= \sum_l \frac{(l+1)a_l}{R^{l+2}} P_l(\cos \vartheta) \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich vor den Legendre Polynomen in dieser letzten Zeile liefert:

$$a_l = \begin{cases} \frac{R^3 B_0}{2} & \text{für } l = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.5.59)$$

Andererseits liefert die Randbedingung (2.5.53)

$$\begin{aligned} \vec{H}_i \cdot \hat{e}_\vartheta &= \vec{H}_a \cdot \hat{e}_\vartheta \\ -(B_0 - 4\pi M_0) \sin \vartheta &= \left(-\vec{\nabla} \Psi_a \right) \cdot \hat{e}_\vartheta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_a}{\partial \vartheta} \Big|_{r=R} \\ &= -\frac{R^3 B_0}{2} \frac{1}{R^3} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \cos \vartheta = \frac{B_0}{2} \sin \vartheta \end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Zeile für Ψ_a den Ansatz (2.5.57) mit den Koeffizienten (2.5.59) eingesetzt haben. Es ergibt sich also

$$B_0 = \frac{8\pi M_0}{3}$$

und

$$\Psi_a = \frac{8\pi M_0 R^3 \cos \vartheta}{3 \cdot 2 r^2}$$

Damit ergibt sich also über (2.5.54) für das Magnetfeld im Außenraum

$$\begin{aligned} \vec{B}_a \cdot \hat{e}_r &= -\frac{\partial \Psi_a}{\partial r} = \frac{8\pi M_0 R^3}{3r^3} \cos \vartheta \\ \vec{B}_a \cdot \hat{e}_\vartheta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_a}{\partial \vartheta} = \frac{4\pi M_0 R^3}{3r^3} \sin \vartheta \end{aligned}$$

Wie ein Vergleich mit (2.3.40) zeigt ist dies genau das Feld eines magnetischen Dipols mit der über die Kugel integrierten magnetischen Dipoldichte

$$\vec{\mu} = M_0 \frac{4\pi}{3} R^3 \hat{e}_z$$

2.6 Kontrollfragen zum Kapitel II

1. Was sind stationäre Ströme ?
2. Wie berechnet sich die magnetische Kraft zwischen 2 stromdurchflossenen Leiterschleifen?
3. Wie ist die magnetische Induktionsdichte definiert ?
4. Warum läßt sich die magnetische Induktionsdichte B als Rotation eines Vektorfeldes darstellen? (Zusammenhang mit dem Biot-Savart'schen Gesetz)
5. Wie lautet das Amperesche Durchflutungsgesetz? (Zusammenhang mit dem Biot-Savart'schen Gesetz)
6. Beschreibe das Magnetfeld eines geraden stromdurchflossenen Leiters
7. Wie berechnet sich das Magnetische Dipolmoment einer Stromverteilung?
8. Zusammenhang zwischen einem Strom aus Punktladungen und dem Drehimpuls
9. Magnetfeld eines magnetischen Dipols: Vektorpotential A , Magnetfeld B , Analogie zur Elektrostatik
10. Energie eines magnetischen Dipols in einem Magnetfeld
11. Magnetfeld in einem Medium: Was versteht man unter Magnetisierung, Magnetfeld und magnetischer Induktion?
12. Wie unterscheiden sich paramagnetische, ferromagnetische und diamagnetische Materialien?
13. Randbedingungen für die magnetischen Felder an der Grenze zweier Medien

Kapitel 3

Maxwellsche Gleichungen

3.1 Das Faradaysche Induktionsgesetz

In den vorhergehenden Kapiteln haben wir die Phänomene der Elektrostatik und Magnetostatik weitgehend unabhängig voneinander behandelt. Dabei haben wir gesehen, daß Ladungen zu elektrischen Feldern führen, während Ströme die Ursache von Magnetfeldern sind. Wenn wir nun in diesem Kapitel die Diskussion auf Ladungsverteilungen, die zeitabhängig sind, und Ströme, die nicht stationär sind, erweitern wollen, so ist klar, daß die Änderungen der Ladungsdichte über die Kontinuitätsgleichung mit der Stromdichte verknüpft ist. Daraus folgt aber auch, daß elektrische und magnetische Felder nicht unabhängig voneinander betrachtet werden können.

Zunächst wollen wir uns in diesem Abschnitt der Frage widmen, wie Magnetfelder elektrische Phänomene induzieren können. Das Biot-Savart'sche Gesetz (2.2.11) beschreibt, wie elektrische Ströme Wirbel einer Magnetischen Induktionsdichte \vec{B} hervorrufen. Der Physiker Michael Faraday befaßte sich um 1830 mit der Frage, ob umgekehrt mit Hilfe von Magnetfeldern auch elektrische Ströme erzeugt werden können. Seine Experimente zur Erzeugung von Strömen in zeitlich veränderlichen Magnetfeldern führten zu dem Faraday'schen Induktionsgesetz, daß wir zunächst einmal an dem in Figur 3.1 skizzierten Beispiel diskutieren wollen.

Wir betrachten eine Leiterschleife, die sich in einem homogenen Magnetfeld befindet, dessen Feldlinien senkrecht zu der Zeichenebene und zwar in die Ebene hinein zeigen sollen. Dieses Feld sei auf einen Raumbereich begrenzt. In der Figur ist dies dadurch gekennzeichnet, daß nur in einem Bereich Feldlinien von \vec{B} durch x Zeichen dargestellt sind.

Zieht man nun die Leiterschleife mit der Geschwindigkeit \vec{v} senkrecht zum Magnetfeld aus diesem heraus, so stellt man fest, daß während dieser Bewegung eine Spannung U induziert wird, die dann zu einem Strom in dem Leiter führt. Um nun dieses Gesetz zu formulieren, definieren wir den von der Leiterschleife umschlossenen *magnetischen*

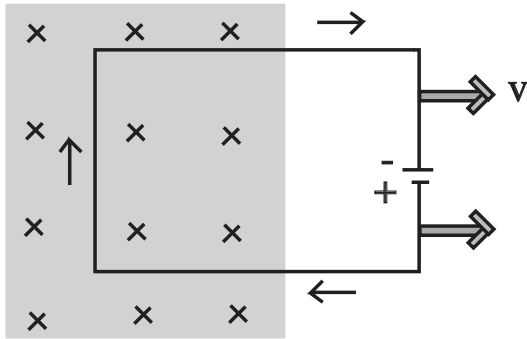


Abbildung 3.1: Beispiel zur Diskussion des Faraday'schen Induktionsgesetzes

Fluß Φ :

$$\Phi := \int_F \vec{B} d\vec{f}. \quad (3.1.1)$$

Zu integrieren ist dabei über eine Fläche F , deren Rand die Leiterschleife bildet. Die Orientierung des Randes und die Richtung des Flächenvektors sind dabei über die "Rechte-Hand Regel" miteinander verknüpft. Dies bedeutet: Halten wir unsere rechte Hand so, daß die Finger parallel zum Rand zeigen und zwar in Richtung der Orientierung des Randes, d.h.: in die Richtung in die wir bei eine Integration über den Rand integrieren wollen, so zeigt der ausgestreckte Daumen in die Richtung der Flächennormalen. Der Fluß hängt nicht von der Form der Fläche, sondern nur von deren Berandung ab, wie folgende Überlegung zeigt: Betrachten wir zwei Flächen, die einen gemeinsamen Rand haben, ansonsten aber unterschiedlich sind. Die Abbildung 3.2 zeigt einen Querschnitt durch eine solche Anordnung mit einem gemeinsamen Rand und den Flächen mit den Flächennormalen \vec{F}_1 und \vec{F}_2 . Betrachten wir nun den magnetischen Fluß durch die Fläche F_1

$$\int_{F_1} \vec{B} d\vec{f} = \int_{F_1} \vec{B} d\vec{f} - \int_{F_2} \vec{B} d\vec{f} + \int_{F_2} \vec{B} d\vec{f}$$

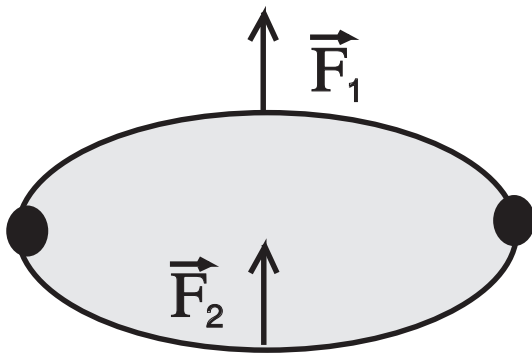


Abbildung 3.2: Zwei Flächen mit gleichem Rand (Punkte links und rechts)

$$\begin{aligned}
&= \oint_{F_1 \circ F_2} \vec{B} d\vec{f} + \int_{F_2} \vec{B} d\vec{f} \\
&= \int_V \underbrace{\operatorname{div} \vec{B}}_{=0} dV + \int_{F_2} \vec{B} d\vec{f}.
\end{aligned}$$

Beim Übergang zur zweiten Zeile haben wir ausgenutzt, daß das Integral über die Fläche F_1 minus dem Integral über die Fläche F_2 , beziehungsweise dem Integral über F_2 mit umgekehrter Flächennormale, insgesamt ein Integral über die Oberfläche des Volumens V gibt, das von diesen beiden Flächen umschlossen ist. Die Anwendung des Gaußschen Satzes auf dieses Oberflächenintegral liefert die dritte Zeile. Da die Divergenz des \vec{B} -Feldes verschwindet, ist die Behauptung, daß der Wert des magnetischen Flusses nur vom Rand der Fläche abhängt, bewiesen.

Faraday fand nun heraus, daß eine zeitliche Änderung des magnetischen Flusses in der Leiterschleife einen elektrischen Strom induziert. Die Ursache für den Stromfluß ist ein längs der Leiterschleife bestehendes elektrisches Feld. Integriert man dieses elektrische Feld längs der Leiterschleife, erhält man die *Induktionsspannung*:

$$-U_{ind} = \oint \vec{E} d\vec{s} = -k \frac{d\Phi}{dt}. \quad (3.1.2)$$

Dies ist das Induktionsgesetz von Faraday. Es besagt, daß diese induzierte Spannung proportional zur Änderung des magnetischen Flusses ist.

Zu bestimmen ist noch die Proportionalitätskonstante in dem bisher nur vorläufig formulierten Gesetz. Wir wollen uns nun im Folgenden durch die Diskussion des in Abbildung 3.1 skizzierten Beispieles davon überzeugen, daß die Proportionalitätskonstante nur

$$k = 1/c$$

sein kann.

Beweis: Auf eine in der Leiterschleife befindlichen Ladung q wirkt durch die Geschwindigkeit, die durch die Bewegung des Leiters hervorgerufen wird, die Lorentz-Kraft:

$$\vec{F} = \frac{q}{c} \vec{v} \times \vec{B}.$$

Mit Hilfe der Definition der elektrischen Feldstärke $\vec{E} = \vec{F}/q$ wirkt diese Kraft wie ein \vec{E} -Feld, das für die Beschleunigung der Ladungsträger verantwortlich ist:

$$\vec{E} = \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B}.$$

Integrieren wir nun diese Kraft oder das entsprechende E -Feld über die Leiterschleife, wie in der Abbildung dargestellt, so ergibt sich

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = \oint \left(\frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} \right) d\vec{s}. \quad (3.1.3)$$

Durch die Bewegung der Leiterschleife über einen Zeitraum Δt ändert sich die vom Magnetfeld durchdrungene Fläche um

$$\begin{aligned}\Delta \vec{F} &= -\vec{s} \times (\vec{v} \Delta t) \\ &= - \int_{\text{linker Rand}} (d\vec{s} \times \vec{v}) \Delta t,\end{aligned}$$

wobei \vec{s} der Vektor ist mit der Länge des linken Randes und der Richtung parallel zur angedeuteten Integrationsrichtung. Deshalb können wir diese Fläche auch durch die Integration in der zweiten Zeile berechnen. Das negative Vorzeichen gibt an, daß die vom Magnetfeld durchdrungene Fläche kleiner wird. Die Flächennormale von $\Delta \vec{F}$ steht parallel zum Magnetfeld (also in die Bildebene hinein). So ergibt sich

$$\vec{B} \cdot \Delta \vec{F} = - \int_{\text{linker Rand}} \vec{B} \cdot (d\vec{s} \times \vec{v}) \Delta t.$$

Dieses Produkt $\vec{B} \cdot \Delta \vec{F}$ gibt gerade die Änderung des magnetischen Flusses $\Delta \Phi$ in der Leiterschleife im Zeitintervall Δt an. Das Integral auf der rechten Seite können wir ohne Änderung des Wertes ergänzen zu einem Integral über die ganze Schleife: Im unteren und oberen Abschnitt stehen \vec{v} und $d\vec{s}$ parallel, so daß $\vec{v} \times d\vec{s} = 0$, auf der rechten Seite des Rechtecks ist $\vec{B} = 0$. Wir erhalten also

$$\Delta \Phi = \vec{B} \cdot \Delta \vec{F} = - \int_{\text{gesamter Rand}} d\vec{s} \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) \Delta t.$$

Dabei haben wir die Vektorrelation $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$ benutzt. Daraus ergibt

$$\oint d\vec{s} \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \Rightarrow -\frac{d\Phi}{dt}$$

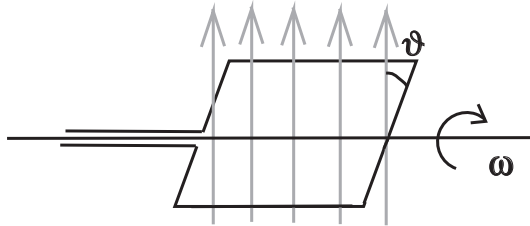
Ein Vergleich mit (3.1.3) liefert

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = \frac{1}{c} \oint (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}.$$

Damit haben wir gezeigt, daß die Proportionalitätskonstante k in (3.1.2) tatsächlich den reziproken Wert der Lichtgeschwindigkeit hat, und wir können nun das Faradaysche Induktionsgesetz in endgültiger Weise formulieren:

$$\boxed{\oint \vec{E} d\vec{s} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}.} \quad (3.1.4)$$

Als Beispiel zum Induktionsgesetz betrachten wir ein einfaches Modell eines *Generators* für elektrischen Strom: eine Leiterschleife, die sich in einem homogenen \vec{B} -Feld dreht (siehe Abb. 3.3).

Abbildung 3.3: Generator: Leiterschleife im homogenen \vec{B} Feld

Die Ebene der Leiterschleife bilde zum betrachteten Zeitpunkt mit dem \vec{B} -Feld den Winkel ϑ und drehe sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω um eine Drehachse senkrecht zum Magnetfeld. Damit gilt also: $\vartheta = \omega t$. Für den durchsetzenden magnetischen Fluß durch die Leiterschleife gilt

$$\begin{aligned}\Phi &= \int \vec{B} \cdot d\vec{f} \\ &= \vec{B} \cdot \vec{F} \\ &= B \cdot F \cdot \cos \vartheta \\ &= B \cdot F \cdot \cos \omega t.\end{aligned}$$

Nach dem Induktionsgesetz beträgt dann die Induktionsspannung

$$\begin{aligned}U_{ind} &= \frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} \\ &= \frac{1}{c} B \cdot F (-\sin \omega t) \omega \\ &= - \underbrace{\frac{BF\omega}{c}}_{U_{max}} \sin \omega t\end{aligned}$$

U_{max} ist die maximale Induktionsspannung. Sie kann durch die Verwendung von mehr Windungen erhöht werden. Betrachten wir nun die vom Generator erzeugte elektrische Leistung P_{el} :

$$\begin{aligned}P_{el} &= U_{ind} \cdot I \\ &= \frac{U_{ind}^2}{R} \\ &= \frac{B^2 F^2 \omega^2}{c^2 R} \sin^2 \omega t.\end{aligned}\tag{3.1.5}$$

Wie üblich bezeichnet I den Strom in dem Leiter, R den elektrischen Widerstand der Leiterschleife und bei dem Übergang von der ersten zur zweiten Zeile haben wir das

Ohmsche Gesetz angewandt. Um diese elektrische Leistung bereitzustellen, muß mechanische Arbeit geleistet werden. Zur Berechnung der mechanischen Leistung betrachten wir das magnetische Moment der stromdurchflossenen Leiterschleife (2.3.37):

$$\begin{aligned} |\vec{\mu}| &= \frac{IF}{c} \\ &= \frac{(U_{ind}/R)F}{c} \\ &= \frac{BF^2\omega}{c^2R} \sin \omega t. \end{aligned}$$

Das Drehmoment, das nötig ist um die Leiterschleife und damit das zugehörige magnetische Moment im externen Magnetfeld zu drehen, ist gegeben durch (siehe (2.4.44))

$$\begin{aligned} |\vec{N}| &= |\vec{\mu} \times \vec{B}| \\ &= \left(\frac{B^2 F^2 \omega}{c^2 R} \sin \omega t \right) \sin \omega t \\ &= \frac{B^2 F^2 \omega}{c^2 R} \sin^2 \omega t. \end{aligned}$$

Entsprechend beträgt die mechanische Arbeit, die Leiterschleife um den infinitesimalen Winkel $d\vartheta$ zu drehen, $dw = |\vec{N}| d\vartheta$. Daraus ergibt sich für die mechanische Leistung:

$$\begin{aligned} P_{mech} &= \frac{dw}{dt} \\ &= |\vec{N}| \frac{d\vartheta}{dt} \\ &= |\vec{N}| \omega \\ &= \frac{B^2 F^2 \omega^2}{c^2 R} \sin^2 \omega t. \end{aligned}$$

Der Vergleich mit der in (3.1.5) berechneten elektrischen Leistung zeigt:

$$P_{mech} = P_{el},$$

die mechanische Leistung oder Arbeit, die dem Generator zugeführt wird, wird vollständig (jedenfalls in diesem idealisierten Beispiel, bei dem wir Reibungskräfte vernachlässigen) in elektrische Leistung beziehungsweise Arbeit umgesetzt.

Abschließend wollen wir in diesem Abschnitt das Faradaysche Induktionsgesetz in seine differentielle Form “übersetzen”: Wir betrachten eine beliebige Fläche mit zugehörigem Rand. Für das Integral des elektrischen Feldes über diesen geschlossenen Rand der

Fläche erhalten wir:

$$\begin{aligned}\oint \vec{E} d\vec{s} &= \int_F (\vec{\nabla} \times \vec{E}) d\vec{f} \\ &= -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int \vec{B} d\vec{f}.\end{aligned}$$

Dabei wurde in der ersten Zeile der Satz von Stokes angewandt; beim Übergang zur zweiten Zeile wurde das Faraday'sche Induktionsgesetz (3.1.4) für diesen Fall vorausgesetzt. Da wir nun die Fläche F festhalten, wird die Änderung des magnetischen Flusses durch F ausschließlich durch die Änderung des Magnetfeldes bewirkt und wir erhalten:

$$\int (\vec{\nabla} \times \vec{E}) d\vec{f} = -\frac{1}{c} \int \left(\frac{d}{dt} \vec{B} \right) d\vec{f}.$$

Da die letzte Beziehung für alle Flächen gelten soll, folgt

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \vec{B}.} \quad (3.1.6)$$

3.2 Maxwell'scher Verschiebungsstrom

Bisher haben wir die Gleichungen über die Quellen und Wirbel der elektrischen und magnetischen Felder und damit die eindeutigen Bestimmungsgleichungen für diese Vektorfelder $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ und $\vec{B} = \mu \vec{H}$ in der folgenden Form kennengelernt:

- Das Coulomb'sche Gesetz (1.8.114):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi \varrho \quad (3.2.7)$$

- Das Faraday'sche Induktionsgesetz (3.1.6):

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{d\vec{B}}{dt} \quad (3.2.8)$$

- Das Fehlen magnetischer Monopole (2.2.9):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.2.9)$$

- Das Ampere'sche Durchflutungsgesetz (2.5.48)

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (3.2.10)$$

Wir können uns aber nun leicht davon überzeugen, daß das Ampere'sche Durchflutungsgesetz in dieser Form (3.2.10) nur für zeitunabhängige Probleme, eben der Magnetostatik gültig sein kann. Für ein beliebiges Vektorfeld \vec{A} , das zweimal stetig differenzierbar ist, gilt nämlich

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \partial_x \partial_y A_z - \partial_x \partial_z A_y + \partial_y \partial_z A_x - \partial_y \partial_x A_z + \partial_z \partial_x A_y - \partial_z \partial_y A_x = 0.$$

Wenn wir nun aber den Divergenz-Operator auf (3.2.10) anwenden erhalten wir:

$$0 = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \frac{4\pi}{c} \vec{\nabla} \cdot \vec{j} \quad (3.2.11)$$

eine Gleichung, die offensichtlich nur bei den stationären Strömen der Magnetostatik mit $\text{div} \vec{j} = 0$ erfüllt wird. Dieser Fehler kann nun dadurch behoben werden, daß wir in (3.2.11) ersetzen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{d\rho}{dt} \quad (3.2.12)$$

Die Kontinuitätsgleichung (1.2.21) sorgt dann dafür, daß (3.2.11) stets erfüllt bleibt. Außerdem erhalten wir im Grenzfall der stationären Problemen wieder die ursprüngliche Gleichung zurück. Schließlich können wir nun noch die Ableitung der Ladungsdichte ρ nach der Zeit über das Coulombsche Gesetz umschreiben in

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{d\vec{D}}{dt} \right).$$

Setzen wir diese Identität in (3.2.12) ein und nehmen die dort angedeutete Ersetzung in (3.2.11) vor so erhalten wir

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \frac{4\pi}{c} \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{d\vec{D}}{dt} \right).$$

Wenn wir nun also ausschließlich das Argument des Divergenz Operators $\vec{\nabla} \cdot$ auf beiden Seiten dieser Gleichung vergleichen erhalten wir

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \left(\vec{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{d\vec{D}}{dt} \right), \quad (3.2.13)$$

die Wirbel im Magnetfeld \vec{H} werden also durch die Stromdichte \vec{j} plus dem sogenannten *Maxwellschen Verschiebungsstrom*

$$\vec{j}_{MV} = \frac{1}{4\pi} \frac{d\vec{D}}{dt} \quad (3.2.14)$$

erzeugt. Die Bedeutung dieses Maxwellschen Verschiebungsstroms können wir uns am Beispiel der Entladung eines Kondensators verdeutlichen (siehe Abb. 3.4). Ein Kondensator soll entsprechend der linken Skizze in dieser Abbildung mit elektrischen Ladungen “geladen” sein. Zwischen den beiden Platten besteht also ein elektrisches Feld bzw. eine dielektrische Verschiebung \vec{D} . Wird der Stromkreis, der die beiden Kondensatorplatten verbindet geschlossen, so fließt ein Strom, der natürlich zu einem entsprechenden Magnetfeld (Wirbel um den Leiter) führt. Im Dielektrikum zwischen den beiden Kondensatorplatten fließt kein Strom. Dort ändert sich aber das \vec{D} Feld, (es geht zurück auf 0), was also zum Maxwellschen Verschiebungsstrom (3.2.14), beziehungsweise ebenfalls zu einem entsprechende \vec{H} Feld auch in diesem Bereich führt.

Damit können wir die Maxwellschen Gleichungen zusammenfassen und sie in folgender Form darstellen:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (3.2.15)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{d\vec{B}}{dt} = 0 \quad (3.2.16)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi \rho \quad (3.2.17)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{d\vec{D}}{dt} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (3.2.18)$$

Die ersten zwei dieser vier Gleichungen bezeichnet man als die homogenen Gleichungen, da in diesen beiden Gleichungen nur die elektromagnetischen Felder \vec{B} und \vec{E} bzw. auch \vec{D} und \vec{H} vorkommen. Die dritte und vierte Gleichung sind die inhomogenen Maxwell Gleichungen, da in ihnen neben den elektromagnetischen Feldern auch

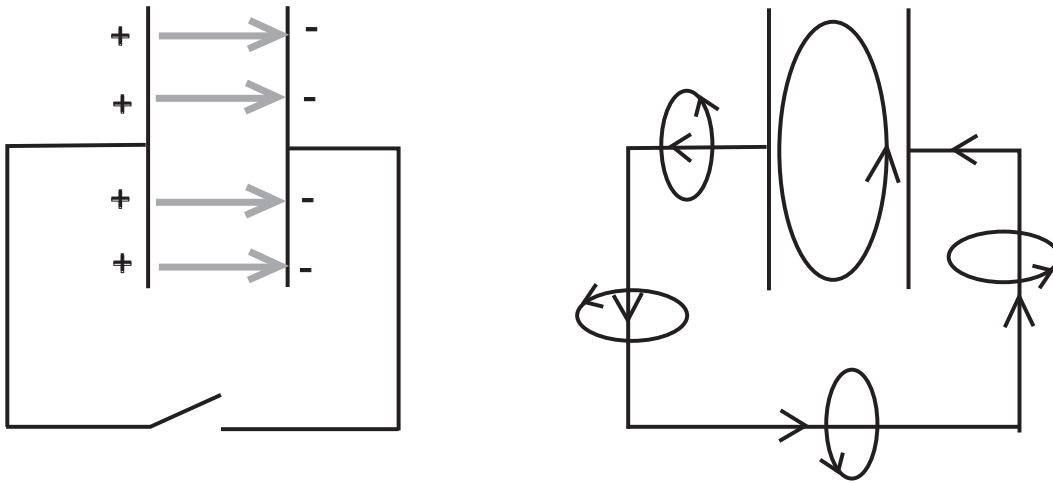


Abbildung 3.4: Maxwellscher Verschiebungsstrom beim Entladen eines Kondensators

die Ladungsdichte ρ und die Stromdichte j vorkommen. Wir haben diese Gleichungen so geschrieben, daß diese Inhomogenitäten auf der rechten Seite auftauchen.

Zum Abschluß dieses Abschnittes wollen wir noch einige Konsequenzen der Maxwellgleichungen zusammenfassen:

- Die positiven und negativen Ladungen im Raum sind die Quellen und Senken des Elektrischen Feldes.
- Es existieren *keine* magnetischen Monopole (Ladungen) und damit auch keine Quellen und Senken für die magnetische Induktionsdichte
- Die Wirbel des \vec{E} -Feldes entstehen durch zeitlich veränderliche \vec{B} -Felder.
- Elektrische Ströme und zeitlich veränderlich \vec{E} -Felder erzeugen Wirbel des Magnetischen Feldes.
- Die Maxwellgleichungen sind 8 gekoppelte Differentialgleichungen (jeweils 3 Gleichungen verbergen sich hinter den Vektorgleichungen (3.2.16) und (3.2.18)) für die Bestimmung der elektrischen und magnetischen Felder \vec{E} und \vec{B} , bzw. \vec{D} und \vec{H} .
- Ist das Problem stationär, sind also die Ladungsverteilungen und Ströme zeitunabhängig, so werden die Gleichungen für die elektrischen und magnetischen Felder voneinander entkoppelt und reduzieren sich auf die Grundgleichungen der *Elektrostatik* und der *Magnetostatik*.

3.3 Potentiale der Elektrodynamik

Die Maxwell-Gleichungen (3.2.15) - (3.2.18) bilden zusammen mit den Materialgleichungen $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ und $\vec{B} = \mu \vec{H}$ die Grundsäulen der Elektrodynamik. Aus den beiden homogenen Maxwell-Gleichungen können wir nun herleiten, daß sich die elektromagnetischen Felder aus Potentialen Φ und \vec{A} berechnen lassen. Aus der Tatsache, daß die magnetische Induktionsdichte \vec{B} quellfrei ist (3.2.15) folgt nämlich, daß sich \vec{B} als Rotation eines Vektorfeldes \vec{A} berechnen läßt

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (3.3.19)$$

Diese Beziehung aus der Magnetostatik (2.2.7) ist also auch im allgemeinen zeitabhängigen Fall gültig. Wenn wir nun diese Darstellung von \vec{B} in die andere homogene Maxwell-Gleichung (3.2.16) einsetzen erhalten wir

$$\text{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{d(\text{rot} \vec{A})}{dt} = \text{rot} \underbrace{\left(\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{d\vec{A}}{dt} \right)}_{:= \vec{X}} = 0.$$

Das im zweiten Teil dieser Gleichung definierte Vektorfeld \vec{X} ist also wirbelfrei und läßt sich als (negativer) Gradient eines Skalarfeldes Φ darstellen

$$\begin{aligned} \vec{X} = -\text{grad} \Phi &= \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{d\vec{A}}{dt} \\ \vec{E} &= -\text{grad} \Phi - \frac{1}{c} \frac{d\vec{A}}{dt} \end{aligned} \quad (3.3.20)$$

Aus diesen Gleichungen (3.3.19) und (3.3.20), die wir ja aus den homogenen Maxwell-Gleichungen erhalten haben, sehen wir also, daß die elektromagnetischen Felder eindeutig aus den dem skalaren Potential Φ und dem Vektorpotential \vec{A} bestimmt werden können. Dies führt zu einer signifikanten Reduktion der Information, die zur Festlegung der elektromagnetischen Felder erforderlich ist: Zur Darstellung der \vec{B} und \vec{E} Felder, muß man für jeden Raum - Zeitpunkt (\vec{r}, t) 6 Größen angeben, die 3 kartesischen Komponenten von \vec{E} und die 3 kartesischen Komponenten von \vec{B} . Die Potential sind aber bereits durch 4 Werte für jeden Raum - Zeitpunkt definiert (einer für Φ und 3 für \vec{A}). Die elektromagnetischen Felder enthalten also redundante Information

Während die homogenen Maxwell-Gleichungen (3.2.16) und (3.2.15) den Zusammenhang zwischen den elektromagnetischen Feldern und den Potentialen Φ und \vec{A} liefern, führen uns die inhomogenen Maxwell-Gleichungen (3.2.17) und (3.2.18) zu Bestimmungsgleichungen für diese elektromagnetischen Potentialfelder. Betrachten wir dazu noch einmal (3.2.17)

$$\text{div} \vec{D} = \epsilon \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$$

$$\begin{aligned}
&= \epsilon \left(-\Delta\Phi - \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right) \\
&= 4\pi\rho
\end{aligned} \tag{3.3.21}$$

In der ersten Zeile haben wir $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$ ersetzt und angenommen, daß die Dielektrizitätskonstante ortsunabhängig ist. Beim Übergang zur zweiten Zeile wurde (3.3.20) angewandt. Die zweite inhomogene Maxwellgleichung (3.2.17) führt uns auf

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\vec{H} - \frac{1}{c} \frac{d\vec{D}}{dt} &= \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\epsilon}{c} \frac{d\vec{E}}{dt} \\
&= \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + \frac{\epsilon}{c} \left\{ \vec{\nabla} \frac{d\Phi}{dt} + \frac{1}{c} \frac{d^2\vec{A}}{dt^2} \right\} \\
&= \frac{4\pi}{c} \vec{j}
\end{aligned} \tag{3.3.22}$$

Bei dem Übergang von der ersten zur zweiten Zeile haben wir die Felder \vec{B} und \vec{E} durch die entsprechenden Potentiale (3.3.19) und (3.3.20) ersetzt. Den Term $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{A})$ in dieser Gleichung können wir in Analogie zu der Vektorrelation

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

umformen zu

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A}$$

eingesetzt in (3.3.22) erhalten wir

$$-\frac{1}{\mu} \Delta\vec{A} + \frac{\epsilon}{c^2} \frac{d^2\vec{A}}{dt^2} + \vec{\nabla} \left[\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{\epsilon}{c} \frac{d\Phi}{dt} \right] = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \tag{3.3.23}$$

Die Gleichungen (3.3.21) und (3.3.23) sind 4 gekoppelte Differentialgleichungen 2. Ordnung in den Ableitungen nach Ort und Zeit zur Bestimmung der Potentialfelder \vec{A} und Φ . Diese 4 Differentialgleichungen zweiter Ordnung bestimmen die Lösungen aber natürlich nicht eindeutig. Auch eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für eine gesuchte Funktion $f(x)$ besitzt ja zwei linear unabhängige Lösungen. Wir werden uns auch jetzt sofort überzeugen, daß die physikalischen Observablen keine eindeutige Lösung für diese Potentialfelder erwarten lassen. Beobachten können wir im Experiment nur die Kräfte, die in einem elektromagnetischen Feld auf Testladungen ausgeübt werden. Diese Kräfte werden aber durch die Felder \vec{E} und \vec{B} bestimmt. Nehmen wir einmal an, daß wir bereits einen Satz von Potentialen \vec{A} und Φ kennen, die uns über (3.3.19) und (3.3.20) die physikalisch beobachtbaren Felder liefern. Wir können dann einen anderen Satz von Potentialfeldern \vec{A}' und Φ' definieren

$$\left. \begin{aligned} \vec{A}' &= \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda \\ \Phi' &= \Phi - \frac{1}{c} \frac{d\Lambda}{dt} \end{aligned} \right\} \quad \text{Eichtransformation} \tag{3.3.24}$$

mit einem beliebigen skalaren *Eichfeld* $\Lambda(\vec{r}, t)$. Die über diese *Eichtransformation* bestimmten Potentiale \vec{A}' und Φ' liefern das gleiche Ergebnis für \vec{B} und \vec{E} wie die ursprünglichen Potentiale. Dies können wir leicht verifizieren:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{A}' &= \vec{\nabla} \times \vec{A} + \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \Lambda}_{=0} \\ &= \vec{B} \\ -\vec{\nabla} \Phi' - \frac{1}{c} \frac{d\vec{A}'}{dt} &= -\vec{\nabla} \Phi + \vec{\nabla} \frac{1}{c} \frac{d\Lambda}{dt} - \frac{1}{c} \frac{d\vec{A}}{dt} - \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \vec{\nabla} \Lambda \\ &= -\vec{\nabla} \Phi - \frac{1}{c} \frac{d\vec{A}}{dt} \\ &= \vec{E}\end{aligned}$$

Es liegt also nahe, die Eichung so geschickt zu wählen, daß die durchzuführenden Rechnungen möglichst einfach sind. Wir wollen hier zwei Eichbedingungen etwas näher diskutieren:

1. **Lorentz-Eichung** Wähle die Eichtransformation so, daß

$$\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \cdot \vec{A}' + \frac{\epsilon}{c} \frac{d\Phi'}{dt} = 0 \quad (3.3.25)$$

Um zu ermitteln, wie das Eichfeld Λ aussehen muß, setzen wir die Eichtransformation (3.3.24) in diese Bedingung ein und erhalten:

$$\Delta \Lambda - \frac{\mu\epsilon}{c^2} \frac{d^2 \Lambda}{dt^2} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{A} - \frac{\mu\epsilon}{c} \frac{d\Phi}{dt}$$

Wir sehen also, daß es möglich ist zu einem vorgegebenen Satz von Potentialfeldern \vec{A} , Φ durch Lösung dieser Gleichung ein Eichfeld Λ zu finden, sodaß die aus der Umeichung resultierenden Potentiale die Bedingung der Lorentzeichung erfüllen. Da die Lösung für dieses Λ nicht eindeutig ist, sehen wir auch, daß selbst in der Lorentzeichung die Potentiale nicht eindeutig gegeben sind.

Durch die Lorentzeichung werden die Differentialgleichungen zur Bestimmung der Potentialfelder (3.3.21) und (3.3.23) vereinfacht. Fordern wir für die gesuchten Potential \vec{A} und Φ die Lorentzeichung, so ist der Term in den Klammern [] in (3.3.23) gleich null. Außerdem können wir in (3.3.21) $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ über die Bedingung der Lorentzeichung ersetzen und erhalten

$$\begin{aligned}-\Delta \Phi + \frac{\mu\epsilon}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} \Phi &= \frac{4\pi}{\epsilon} \rho \\ -\Delta \vec{A} + \frac{\mu\epsilon}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} \vec{A} &= \mu \frac{4\pi}{c} \vec{j}\end{aligned} \quad (3.3.26)$$

Die Gleichungen für Φ und \vec{A} sind also entkoppelt und haben eine sehr symmetrische Gestalt, wie wir bei der Diskussion der relativistischen Formulierung der Elektrodynamik noch sehen werden.

2. **Coulomb Eichung:** Im Fall der Coulomb Eichung fordert man

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (3.3.27)$$

Damit vereinfacht sich die Gleichung zur Bestimmung des skalaren Potentials Φ (3.3.21) zur Poisson Gleichung der Elektrostatik (1.3.38)

$$\Delta\Phi(\vec{r}, t) = -4\pi\rho(\vec{r}, t)$$

allerdings mit der Komplikation, daß ρ und damit auch Φ zeitabhängig sein können. Die Lösungen dieser Gleichung ergeben sich (falls keine Randbedingungen vorliegen) genau so wie im Fall der Elektrostatik

$$\Phi(\vec{r}, t) = \int \frac{\rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \quad (3.3.28)$$

müssen aber auch für jede Zeit t neu berechnet werden. Das Problem reduziert sich also im ersten Schritt auf das reine Coulomb Problem. Mit diesem Ergebnis kann man dann im zweiten Schritt die Gleichung (3.3.23) zur Bestimmung von \vec{A} lösen.

- Aus den homogenen Maxwellgleichungen können wir herleiten, daß die elektromagnetischen Felder aus Potentialfelder, einem skalaren Feld Φ und einem Vektorfeld \vec{A} , berechnen lassen.
- Diese Potentiale sind nicht eindeutig bestimmt. Bei einer Eichtransformation der Potentiale ändern sich die daraus berechneten \vec{E} und \vec{B} Felder nicht.
- Die Potentiale können durch Lösen von gekoppelten Differentialgleichungen aus den Ladung- und Stromverteilungen berechnet werden.
- Durch Eichbedingungen können diese gekoppelten Differentialgleichungen entkoppelt und vereinfacht werden

3.4 Energie und Impuls der Felder

Bereits in der Elektrostatik haben wir gesehen, daß elektrische Felder einen Energieinhalt besitzen, nämlich die Energie die erforderlich ist diese Felder beziehungsweise die entsprechende Ladungsverteilung aufzubauen. Andererseits wirken elektromagnetische Felder auf Ladungen: Über die entsprechenden Kräfte werden Ladungen beschleunigt, es werden Energie und Impuls auf diese Ladungen übertragen. Diese übertragene Energie muß natürlich den Feldern entnommen werden. Die Kraft, die in einem elektromagnetischen Feld auf eine Punktladung q an der Position \vec{r} mit der Geschwindigkeit \vec{v} wirkt ist gegeben durch

$$\vec{F} = q\vec{E}(\vec{r}) + \frac{q}{c}\vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}) \quad (3.4.29)$$

Durch diese Krafteinwirkung wird die kinetische Energie \mathcal{T} dieser Punktladung geändert (m ist die Masse der Punktladung)

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{T}}{dt} &= \frac{d}{dt} \frac{m}{2} \vec{v}^2 \\ &= m\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{F} \\ &= q\vec{v} \cdot \vec{E} + \underbrace{\frac{q}{c}\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{B})}_{=0} \end{aligned} \quad (3.4.30)$$

dabei haben wir in der zweiten Zeile dieser Gleichung die Newtonschen Bewegungsgleichung “Kraft gleich Masse mal Beschleunigung” benutzt und in der dritten Zeile die Kraft \vec{F} aus (3.4.29) eingesetzt. Man sieht an dieser dritten Zeile, daß eine Änderung der kinetischen Energie, also ein wirklicher Energieübertrag, nur über das elektrische Feld \vec{E} erfolgt. Der Beitrag der Lorentzkraft zu dieser Änderung verschwindet, da ja die Lorentzkraft stets senkrecht zur Bewegungsrichtung \vec{v} wirkt. Die Kraft durch das magnetische Feld \vec{B} bewirkt also ausschließlich eine Änderung des Impulses der Ladung. Gehen wir nun von einer einzelnen Punktladung zu einer kontinuierlichen Ladungsverteilung über, so müssen wir bei dieser Betrachtung ersetzen:

$$\begin{aligned} q &\rightarrow \rho && \text{Ladungsdichte} \\ q\vec{v} &\rightarrow \vec{j} && \text{Stromdichte} \\ \mathcal{T} &\rightarrow \tau && \text{Mechanische Energiedichte} \end{aligned}$$

Die Änderung der mechanischen Energiedichte berechnet sich also nach diesen Ersetzungen entsprechend (3.4.30) zu

$$\frac{d}{dt}\tau = \vec{j} \cdot \vec{E} \quad (3.4.31)$$

Wir wollen beschreiben, wie diese Änderung der mechanischen Energiedichte τ kompensiert wird durch die Änderung der Energiedichte des elektromagnetischen Feldes.

Deshalb ersetzen wir die Stromdichte \vec{j} in dieser Gleichung durch die Feldstärken und schreiben entsprechend der Maxwellschen Gleichung (3.2.18)

$$\vec{j} = \frac{c}{4\pi} \vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{1}{4\pi} \frac{d\vec{D}}{dt}$$

eingesetzt in (3.4.31) erhalten wir

$$\frac{d}{dt} \tau = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) - \frac{1}{4\pi} \vec{E} \cdot \frac{d\vec{D}}{dt} \quad (3.4.32)$$

Zur Umformung des ersten Termes auf der rechten Seite dieser Gleichung betrachten wir

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) &= \underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H})}_{\vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E})} + \underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H})}_{-\vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H})} \\ &= \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) , \end{aligned}$$

dabei haben wir in der ersten Zeile die Produktregel für die Differentialoperatoren im Divergenzoperator $\vec{\nabla}$ angewandt, angedeutet durch die geschweiften Klammern, die anzeigen, daß diese Ableitungsoperatoren auf der rechten Seite der Gleichung nur auf das \vec{E} , beziehungsweise \vec{H} Feld wirken. Bei dem Übergang zur zweiten Zeile haben wir ausgenutzt, daß die Vektorrelationen

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = -\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c})$$

auch für den Nabla Operator gelten, wenn man beachtet, daß die Felder auf die der Differentialoperator wirkt, rechts von ihm stehen. Damit können wir also in (3.4.32) einsetzen

$$\vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H})$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tau &= \frac{c}{4\pi} \vec{H} \cdot \underbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{E})}_{=-\frac{1}{c} \frac{d\vec{B}}{dt}} - \frac{c}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) - \frac{1}{4\pi} \vec{E} \cdot \frac{d\vec{D}}{dt} \\ &= -\frac{1}{8\pi} \frac{d}{dt} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) - \frac{c}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) \end{aligned}$$

In dieser Umwandlung haben wir die Maxwell Gleichung (3.2.15) benutzt und angenommen, daß die Materialkonstanten ϵ und μ zeitunabhängig sind, also z.B. gilt

$$\vec{E} \cdot \frac{d\vec{D}}{dt} = \epsilon \vec{E} \cdot \frac{d\vec{E}}{dt} = \epsilon \frac{1}{2} \frac{d(\vec{E} \cdot \vec{E})}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d(\vec{E} \cdot \vec{D})}{dt}$$

Insgesamt können wir also die Gleichung für die Energierhaltung (3.4.32) auf die Form bringen

$$\frac{d}{dt} \tau + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{8\pi} \vec{E} \cdot \vec{D} + \frac{1}{8\pi} \vec{H} \cdot \vec{B} \right) = -\frac{c}{4\pi} \operatorname{div} (\vec{E} \times \vec{H}) . \quad (3.4.33)$$

Diese Gleichung kann man nun leicht interpretieren: Auf der linken Seite der Gleichung steht die zeitliche Änderung ($\frac{d}{dt}$) der totalen Energiedichte. Diese Energiedichte besteht einerseits aus der kinetischen Energiedichte der Massenpunkte τ plus der potentiellen Energiedichte beziehungsweise ausgedrückt als Feldenergiedichte der elektrischen und magnetischen Felder. Die Feldenergiedichte für elektrische Felder hatten wir ja bereits im Abschnitt 1.8.3 hergeleitet und der Beitrag $1/8\pi\vec{H} \cdot \vec{B}$ ist einfach die entsprechende Ergänzung für die Magnetfelder. Ist also die zeitliche Änderung der gesamten Energiedichte (also rechte Seite von (3.4.33)) von Null verschieden, so muß wegen der Energieerhaltung diese lokale Änderung der Energiedichte begleitet sein von einem entsprechenden Zu- oder Abfluß von Energie. Wir haben also wie bei der Erhaltung der Ladung, die dargestellt wird durch die Kontinuitätsgleichung, auch hier eine Kontinuitätsgleichung für die Energie zu erwarten. In der Tat stellt ja die Gleichung (3.4.33) gerade eine solche Kontinuitätsgleichung dar und wir sehen, daß der sogenannte

$$\text{Poyntingvektor} \quad \vec{S} := \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H} \quad (3.4.34)$$

die Funktion des Energieflusses übernimmt. Integrieren wir also (3.4.33) über ein bestimmtes Volumen V , so ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \left[\tau + \frac{1}{8\pi} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) \right] d^3r &= - \int \text{div} \vec{S} d^3r \\ &\stackrel{\text{Gauß}}{=} - \oint_{O_V} \vec{S} \cdot d\vec{f} \end{aligned} \quad (3.4.35)$$

Die Änderung der gesamten Energie im Volumen V , mechanische plus Feldenergie, wird also begleitet durch einen entsprechenden Energiefluß \vec{S} durch die Oberfläche des Volumens.

Es liegt jetzt natürlich nahe zu untersuchen, ob es neben dieser Kontinuitätsgleichung für die Energieerhaltung nicht auch eine entsprechende Kontinuitätsgleichung für die Impulserhaltung gibt. In Analogie zur Gleichung (3.4.35) würde also eine solche Kontinuitätsgleichung für die kartesische Komponente i ($i \in \{x, y, z\}$) lauten

$$\frac{d}{dt} \int_V \left[p_i^{\text{Mech}} + p_i^{\text{Feld}} \right] d^3r = - \oint_{O_V} \vec{T}_i \cdot d\vec{f} \quad (3.4.36)$$

Dabei stehen p_i^{Mech} und p_i^{Feld} für die Impulsdichten der Partikelteilchen beziehungsweise der elektromagnetischen Felder und der Vektor \vec{T}_i bezeichnet den Impulsfluß der kartesischen Komponente i durch eine Fläche mit der Flächennormalen parallel zu der Richtung von \vec{T}_i . Zerlegen wir nun noch den Vektor \vec{T}_i in seine kartesischen Komponenten

$$\vec{T}_i = T_{x,i} \hat{e}_x + T_{y,i} \hat{e}_y + T_{z,i} \hat{e}_z$$

so sehen wir daß der Impulsfluß $T_{j,i}$ insgesamt durch einen Tensor zweiter Stufe gegeben ist. Dabei bezieht sich der erste der Indices, j , auf die Richtung des Flusses, in

der Impulsdichte zu- beziehungsweise abfließt, während der zweite Index i bezeichnet, welche Komponente des Impulses betrachtet wird. Um nun zu einer Gleichung vom Typ (3.4.36) zu gelangen, betrachten wir die Änderung des gesamten mechanischen Impulses im Volumen V , die ja nach der Newton'schen Bewegungsgleichung verbunden ist mit der integrierten Kraftdichte \vec{F}

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{P}^{\text{Mech}} &= \frac{d}{dt} \int_V \vec{p}^{\text{Mech}} d^3r \\ &\stackrel{\text{Newton}}{=} \int_V \vec{F} d^3r \\ &= \int_V \left(\rho \vec{E} + \frac{1}{c} (\vec{j} \times \vec{B}) \right) d^3r \end{aligned} \quad (3.4.37)$$

wobei wir in der letzten Zeile für die Kraftdichte \vec{F} den entsprechenden Ausdruck für die Kraft von elektromagnetischen Feldern auf eine Strom- und Ladungsverteilung eingesetzt haben. Ersetzen wir nun wieder ρ und \vec{j} durch Anwendung der inhomogenen Maxwellgleichungen, so erhalten wir

$$\frac{d}{dt} \vec{P}^{\text{Mech}} = \int_V \frac{1}{4\pi} \left\{ (\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) \vec{E} + (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{d\vec{D}}{dt} \times \vec{B} \right\} d^3r \quad (3.4.38)$$

Zu dem Integranden auf der rechten Seite dieser Gleichung können wir noch die nullwertigen Funktionen

$$\frac{1}{4\pi} \vec{H} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) = \frac{1}{4\pi} \vec{D} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{d\vec{B}}{dt} \right) = 0$$

hinzuaddieren und erhalten nach einer kleinen Umformung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \left[\vec{p}^{\text{Mech}} + \frac{1}{4\pi c} (\vec{D} \times \vec{B}) \right] d^3r &= \frac{1}{4\pi} \int_V \left\{ (\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) \vec{E} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \vec{H} + (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \times \vec{D} \right. \\ &\quad \left. + (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \times \vec{B} \right\} d^3r \end{aligned} \quad (3.4.39)$$

Zur Umformung des Integranden auf der rechten Seite dieser Gleichung betrachten wir als Beispiel die x-Komponente von

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \vec{H} + (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \times \vec{B}$$

die sich ergibt zu

$$\begin{aligned} [\dots]_x &= \frac{1}{\mu} \left[\left(\sum_j \partial_j B_j \right) B_x + (\partial_z B_x - \partial_x B_z) B_z - (\partial_x B_y - \partial_y B_x) B_y \right] \\ &= \frac{1}{\mu} \left[-\frac{1}{2} \partial_x \left(\sum_k B_k^2 \right) + \sum_j \partial_j (B_j B_x) \right] \end{aligned}$$

oder verallgemeinert für die kartesische Komponente i

$$[\dots]_i = \frac{1}{\mu} \sum_j \partial_j \left\{ B_j B_i - \frac{1}{2} \delta_{ij} \sum_k B_k^2 \right\} \quad (3.4.40)$$

In ganz analoger Weise können auch die Terme mit den elektrischen Feldern auf der rechten Seite von (3.4.39) umgeschrieben werden, sodaß man für die i -te kartesische Komponente dieser rechten Seite insgesamt schreiben kann

$$\begin{aligned} \int_V \left\{ \sum_j \partial_j T_{ji} \right\} d^3r &= \int_V d^3r \vec{\nabla} \cdot \vec{T}_i \\ &\stackrel{\text{Gauss}}{=} \oint_{O_V} d\vec{f} \cdot \vec{T}_i \end{aligned}$$

mit dem Maxwell'schen Spannungstensor

$$T_{ji} = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{B_i B_j}{\mu} + \frac{D_i D_j}{\epsilon} - \delta_{ij} \frac{1}{2} \sum_k \left(\frac{B_k^2}{\mu} + \frac{D_k^2}{\epsilon} \right) \right\} \quad (3.4.41)$$

Dieser Maxwell'sche Spannungstensor verhält sich unter Transformation des Koordinatensystems offensichtlich wie ein Tensor zweiter Stufe, er ist symmetrisch bezüglich des Austausches der Indices

$$T_{ij} = T_{ji}$$

und wir können mit diesem Spannungstensor die Kontinuitätsgleichung für die Impulserhaltung (3.4.39) auf die Form bringen

$$\frac{d}{dt} \int_V \left[\vec{p}_i^{\text{Mech}} + \underbrace{\frac{1}{4\pi c} (\vec{D} \times \vec{B})_i}_{\text{Feldimpulsdichte}} \right] d^3r = \oint_{O_V} d\vec{f} \cdot \vec{T}_i \quad (3.4.42)$$

Aus dem Vergleich mit (3.4.36) sehen wir, daß wir die Größe

$$\frac{1}{4\pi c} (\vec{D} \times \vec{B}) = \frac{\mu\epsilon}{c^2} \vec{S} \quad (3.4.43)$$

mit der Impulsdichte des elektromagnetischen Feldes identifizieren können. In dieser Gleichung haben wir auch den Bezug zum Poynting Vektor \vec{S} aus (3.4.34) hergestellt. Aus dieser Gegenüberstellung sehen wir also, daß jeder Energiefluß eines elektromagnetischen Feldes (dargestellt durch den Poyntingvektor \vec{S}) automatisch mit einer Impulsdichte verknüpft ist.

Die Bedeutung des Maxwell'schen Spannungstensors sei am Beispiel des in Figur 3.5 skizzierten Plattenkondensators veranschaulicht. In diesem Beispiel

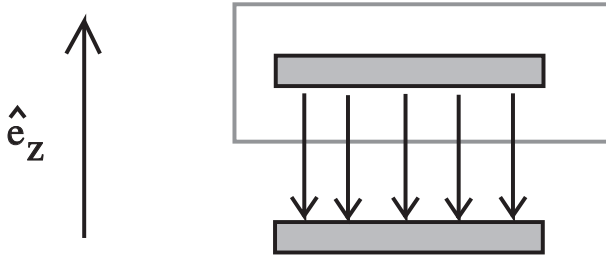


Abbildung 3.5: Skizze zur Diskussion des Maxwell'schen Spannungstensors bei einem Plattenkondensator

haben wir ausschließlich ein elektrostatisches Feld zwischen den Kondensatorplatten in Richtung der z -Achse vorliegen. Da also die magnetische Induktionsdichte \vec{B} gleich Null ist, ist auch die Impulsdichte des elektromagnetischen Feldes (3.4.43) gleich null. Auch die Matrixelemente des Maxwell'schen Spannungstensor T_{ij} verschwinden alle bis auf die Komponente

$$T_{zz} = \frac{1}{8\pi\epsilon} D_z^2$$

Berechnen wir jetzt das Integral des Maxwell'schen Spannungstensors über die Oberfläche, die in Abb. 3.5 skizziert ist und die eine Platte des Kondensators umschließt, so erhalten wir als Ergebnis eine Kraft (siehe auch (3.4.37)), die auf die vom Integrationsvolumen umschlossene Kondensatorplatte wirkt:

$$\begin{aligned} \vec{K} &= \hat{e}_z \oint_{O_V} d\vec{f} \cdot \hat{e}_z T_{zz} \\ &= -\hat{e}_z \frac{1}{8\pi\epsilon} D_z^2 \Delta F \end{aligned}$$

wobei ΔF die Fläche der umschlossenen Kondensatorplatte beschreibt. Wir sehen also, daß die Dimension des Maxwell'schen Spannungstensors die Dimension einer Kraft pro Fläche, also die Dimension eines Druckes ist.

3.5 Quasistationäre Ströme

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit einer Näherung zu den Maxwellgleichungen befassen, die von großer Bedeutung in vielen technischen Anwendungen ist. Wir wollen in den Maxwellgleichungen die Effekte des Maxwell'schen Verschiebungsstroms vernachlässigen. Dies bedeutet, daß wir bei der Bestimmung der Wirbel der magnetischen Felder die Beiträge des Verschiebungsstromes, also Beiträge proportional zu der zeitlichen Ableitung der dielektrischen Verschiebung D , gegenüber der Stromdichte \vec{j} vernachlässigen. Wir nehmen also an, daß sich \vec{D} , beziehungsweise die Ladungsdichte ρ , die ja die Quellen der dielektrischen Verschiebung darstellen, sich nur relativ langsam mit der Zeit verändert. Was bedeutet nun relativ langsam veränderliche Ladungsdichte? Betrachten wir dazu einmal einen Stromkreis der Elektrotechnik: Dies bedeutet, wir haben es mit elektrischen Leitungen von einer Länge von einigen Metern zu tun und wenn wir nun eine Wechselspannung mit 50 Hertz an dieses Leitungssystem anlegen, so werden Ladungen, die sich bei einem bestimmten Vorzeichen der Wechselspannung .z.B. auf Platten eines Kondensators ansammeln, also 50 mal pro Sekunde diese Strecken von einigen Metern zurücklegen. Diese Geschwindigkeiten sind aber sehr klein verglichen mit der Lichtgeschwindigkeit c , also die Geschwindigkeit die ja für die Ausbreitung von elektromagnetischen Feldern charakteristisch ist. Die Zeit, die eine Ausbreitung von elektromagnetischen Feldern mit Lichtgeschwindigkeit benötigt um die Grenzen des Systems zu erreichen sind sehr viel kleiner als die Zeiten (50 mal pro Sekunde) die wir den Ladungen zur Verfügung stellen um sich zu reorganisieren.

Aus dieser Abschätzung wird deutlich, daß es für solche technischen Anwendungen eine brauchbare Näherung ist, die Ladungsverteilungen und Ströme quasistationär zu behandeln, was gerade bedeutet, den Maxwell'schen Verschiebungsstrom, der ja zum Erhalt der Kontinuitätsgleichung bei nichtstationären Strömen eingeführt werden mußte zu vernachlässigen. Wir betrachten also in diesem Kapitel die Maxwellgleichungen in der folgenden Näherung

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= 4\pi\rho & , & & \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{d\vec{B}}{dt} &= 0 & , & & \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} \end{aligned} \quad (3.5.44)$$

Hinzu kommen noch die Materialgleichungen

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon \vec{E} & , & & \vec{B} &= \mu \vec{H} \\ \vec{j} &= \sigma \vec{E} & , & & & \text{Ohmsches Gesetz} \end{aligned} \quad (3.5.45)$$

Diese letzte Gleichung, das *Ohmsche Gesetz* besagt, daß in einem leitenden Material, charakterisiert durch die Leitfähigkeit σ , durch ein angelegtes elektrisches Feld \vec{E} eine Stromdichte in Richtung des \vec{E} Feldes erzeugt wird. Den Zusammenhang dieser Darstellung der Leitfähigkeit eines Materials mit dem konventionellen Ohmschen Gesetz

$$R = \frac{U}{I} \quad (3.5.46)$$

für den Widerstand R eines Leiters, durch den bei einer angelegten Spannung U ein Strom I fließt, können wir leicht mit der folgenden Überlegung herstellen: Betrachten wir also unseren Leiter mit dem Querschnitt Δf und einer Länge von Δl . Legen wir an dieser Länge Δl die Spannung U an, so erhalten wir ein elektrisches Feld der Stärke $E = U/\Delta l$. Wegen des Ohmschen Gesetzes (3.5.45) ist damit in dem leitenden Material eine Stromdichte $j = \sigma U/\Delta l$ verknüpft. Es fließt also über den ganzen Querschnitt des Leiters der Strom

$$\begin{aligned} I &= j\Delta f \\ &= \sigma \frac{\Delta f}{\Delta l} U \\ &= \frac{1}{R} U \end{aligned}$$

mit dem Widerstand für das leitende Materialstück

$$R = \frac{\Delta l}{\sigma \Delta f}.$$

3.5.1 Gegen- und Selbstinduktion

Wir wollen im folgenden verschiedene Stromkreise betrachten, die sich gegenseitig beeinflussen können. An jedem dieser Kreise k soll eine zeitlich veränderliche Spannung U_k angelegt werden, daraus ergibt sich dann ein Strom I_k in der Stromschleife k . Durch diesen Strom werden Magnetfelder erzeugt, die sich mit der Zeit ändern. Diese zeitlich veränderlichen Magnetfelder induzieren dann über das Faraday'sche Induktionsgesetz (3.1.2) eine Spannung in alle betrachteten Stromkreise. Für den Stromkreis k gilt also unter Berücksichtigung des Ohmschen Widerstandes R_k dieser Schleife:

$$I_k R_k = U_k + U_k^{\text{ind}} \quad (3.5.47)$$

mit einer induzierten Spannung nach dem Faraday'schen Induktionsgesetz (3.1.2)

$$U_k^{\text{ind}} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi_k}{dt} \quad (3.5.48)$$

und dem magnetischen Fluß durch die Stromschleife k

$$\begin{aligned} \Phi_k &= \int_{F_k} \vec{B} \cdot d\vec{f} \\ &= \int_{F_k} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{f} \\ \stackrel{\text{Stokes}}{=} &= \oint_K \vec{A}(\vec{r}_k) \cdot d\vec{r}_k \end{aligned} \quad (3.5.49)$$

Dabei haben wir ausgenutzt, daß man \vec{B} als Rotation eines Vektorfeldes \vec{A} schreiben kann, und beim Übergang zur dritten Zeile den Stokeschen Satz benutzt. Bei den Maxwell'schen Gleichungen in der quasistationären Näherung (3.5.44) berechnen sich die magnetischen Felder genau so wie in der Magnetostatik direkt aus den Stromdichten. Deshalb läßt sich das Vektorfeld \vec{A} wie in (2.2.8) schreiben

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \\ &= \frac{\mu}{c} \sum_m I_m \oint_m \frac{d\vec{r}_m}{|\vec{r} - \vec{r}_m|}\end{aligned}\quad (3.5.50)$$

In dieser Gleichung haben wir die Permeabilität μ berücksichtigt: Der Zusammenhang zwischen Stromstärke ergibt sich aus der Maxwellgleichung zunächst für \vec{H} , entsprechend muß bei einem Material die Gleichung für das Vektorpotential (2.2.8) mit der Permeabilität multipliziert werden. Bei dem Übergang zur zweiten Zeile haben wir dann ausgenutzt, daß Ströme I_m nur in den entsprechenden Leiterschleifen m fließen sollen. Damit ergibt sich nun für den magnetischen Fluß der Schleife k nach (3.5.49)

$$\begin{aligned}\frac{1}{c} \Phi_k &= \frac{\mu}{c^2} \sum_m I_m \oint_k \oint_m \frac{d\vec{r}_m \cdot d\vec{r}_k}{|\vec{r}_k - \vec{r}_m|} \\ &= \sum_m L_{mk} I_m\end{aligned}\quad (3.5.51)$$

Dabei bezeichnen die **Induktionskoeffizienten**

$$L_{mk} = \frac{\mu}{c^2} \oint_k \oint_m \frac{d\vec{r}_m \cdot d\vec{r}_k}{|\vec{r}_k - \vec{r}_m|}\quad (3.5.52)$$

den magnetischen Einfluß der Schleife m auf den magnetischen Fluß Φ_k der Schleife k . Aus diesem Ausdruck für die Induktionskoeffizienten wird die Symmetrie

$$L_{mk} = L_{km}$$

deutlich. Natürlich gibt es auch die Selbstbeeinflussung über die Selbstinduktionskoeffizienten L_{kk} .

Mit der Darstellung des magnetischen Flusses nach (3.5.51) können wir die Induktionsspannung nach (3.5.48) ausrechnen und in die Gleichung für den Stromkreis k (3.5.47) einsetzen und erhalten

$$\begin{aligned}U_k &= I_k R_k - \frac{d}{dt} \left[\sum_m L_{mk} I_m \right] \\ &= I_k R_k - \sum_m L_{mk} \frac{d}{dt} I_m - \underbrace{\sum_m I_m \frac{d}{dt} L_{mk}}_{=0}\end{aligned}\quad (3.5.53)$$

wobei der letzte Term immer dann verschwindet, wenn sich die Induktionskoeffizienten nicht mit der Zeit ändern, wenn also die Leitungen, durch die der Strom fließt, nicht verbogen werden.

Die Induktionskoeffizienten L_{mk} sind auch sehr hilfreich bei der Berechnung des Energieinhaltes der Magnetfelder von solchen stromdurchflossenen Leitern. Nach unseren Überlegungen zum Energieinhalt elektromagnetischer Felder (siehe (3.4.33)) ist der Energieinhalt der Magnetfelder gegeben durch

$$W_{\text{Magn}} = \frac{1}{8\pi} \int \vec{H} \cdot \vec{B} d^3r = \frac{1}{8\pi} \int \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) d^3r$$

wobei wir ausnutzen, daß sich die magnetische Induktionsdichte als Rotation eines Vektorfeldes \vec{A} schreiben läßt. Der Integrand $\vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A})$ läßt sich umschreiben auf die Form

$$W_{\text{Magn}} = \frac{1}{8\pi} \int \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) d^3r + \frac{1}{8\pi} \int \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{H}) d^3r$$

Der Integrand des zweiten Termes auf der rechten Seite ist die Divergenz des Vektorfeldes $(\vec{A} \times \vec{H})$, wir können also den Gaußschen Satz anwenden, und uns so davon überzeugen, daß dieser zweite Term verschwindet (Wir integrieren über den gesamten Raum und nehmen an, daß das Oberflächenintegral für das Kreuzprodukt der Felder \vec{A} und \vec{H} verschwindet). Ersetzen wir $\text{rot} \vec{H}$ durch die entsprechende Maxwellgleichung (3.5.44) so ergibt sich für die magnetische Energie

$$\begin{aligned} W_{\text{Magn}} &= \frac{1}{8\pi} \int \vec{A} \cdot \frac{4\pi}{c} \vec{j} \\ &= \frac{1}{2c} \sum_k I_k \oint_k \vec{A} \cdot d\vec{r}_k \\ &\stackrel{(3.5.49)}{=} \frac{1}{2c} \sum_k I_k \Phi_k \\ &\stackrel{(3.5.51)}{=} \frac{1}{2} \sum_{k,m} I_k L_{km} I_m \end{aligned} \tag{3.5.54}$$

3.5.2 An- und Abschalten eines Stromkreises

Zur Erläuterung der Bedeutung des Selbstinduktionskoeffizienten, wollen wir nun als Beispiel betrachten, wie sich der Strom in einer Leiterschleife entwickelt, wenn wir zu einer Zeit $t = 0$ plötzlich eine Spannung U anlegen. Der Stromkreis ist charakterisiert durch den Selbstinduktionskoeffizienten $L_{kk} = L$ (dargestellt durch eine Spirale im Schaltbild der Figur 3.6) und durch den Ohmschen Widerstand R (dargestellt durch den schwarzen Kasten). Spezialisieren wir also die Gleichungen (3.5.53) auf diesen Fall

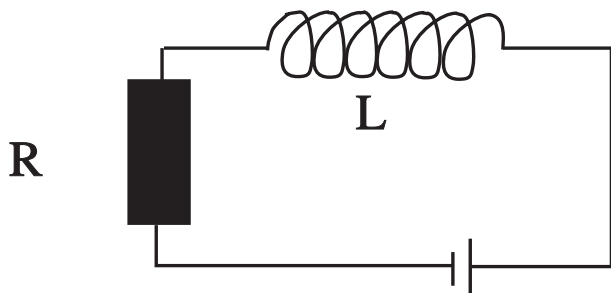


Abbildung 3.6: Schaltbild eines Stromkreises mit einem Ohmschen Widerstand R und Selbstinduktion L

eines Kreises, so erhalten wir

$$0 = RI - U + L \frac{d}{dt} I = R \underbrace{\left(I - \frac{U}{R} \right)}_{=\mathcal{I}} + L \frac{d}{dt} I \quad (3.5.55)$$

Da die angelegte Spannung U genauso wie der Ohmschen Widerstand R unabhängig von der Zeit sind gilt

$$\frac{d}{dt} \mathcal{I} = \frac{d}{dt} \left(I - \frac{U}{R} \right) = \frac{d}{dt} I$$

und wir können die Differentialgleichung (3.5.55) umschreiben in

$$\frac{d}{dt} \mathcal{I} = -\frac{R}{L} \mathcal{I} \quad (3.5.56)$$

mit der allgemeinen Lösung

$$\mathcal{I}(t) = \mathcal{I}_0 \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) = I(t) - \frac{U}{R}$$

Die Konstante \mathcal{I}_0 müssen wir dabei so wählen, daß die Randbedingungen erfüllt sind, d.h. zur Zeit des Anschaltens ($t = 0$) der Strom $I(t = 0) = 0$ ist. Dies erreichen wir durch die Wahl $\mathcal{I}_0 = -U/R$, sodaß wir insgesamt schreiben können

$$\begin{aligned} I(t) &= \mathcal{I}_0 \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) + \frac{U}{R} \\ &= \frac{U}{R} \left(1 - \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) \right) \end{aligned} \quad (3.5.57)$$

Die entsprechende Funktion $I(t)$ ist in der Abb. 3.7 dargestellt (für $t \leq 12$, der Zeit des Abschaltens). Man sieht, daß ein stationärer Strom $I = U/R$ erst nach einer Einschwingphase erreicht wird. Die Länge dieser Einschwingphase wird durch das Verhältnis L/R bestimmt. Je größer der Selbstinduktionskoeffizient L im Vergleich

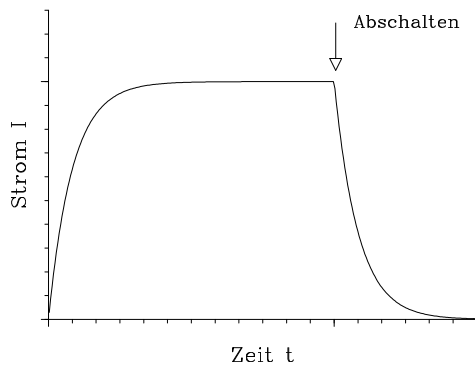


Abbildung 3.7: Strom beim Ein- und Abschalten der Spannung in einem Stromkreis mit Widerstand R und Selbstinduktion L . Die Zeitskala ist dabei so gewählt, daß das Verhältnis $R/L = 1$ und das Abschalten bei $t = 12$ erfolgt.

zum Widerstand R ist je länger dauert die Einschwingphase. Um die Vorgänge in dieser Einschwingphase aus einer etwas anderen Blickrichtung zu sehen, multiplizieren wir (3.5.55) mit dem Strom $I(t)$ und erhalten

$$\begin{aligned} UI &= RI^2 + IL \frac{d}{dt} I \\ &= RI^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} LI^2 \right) \end{aligned} \quad (3.5.58)$$

Die linke Seite dieser Gleichung UI beschreibt die Energie pro Zeiteinheit, also die Leistung, die in der Spannungsquelle erbracht wird, denn $UI = U\rho/t$ bezeichnet die Arbeit, die geleistet wird, um pro Zeiteinheit t eine Ladung ρ auf ein Spannungsniveau U anzuheben. In der zweiten Zeile von (3.5.58) steht einmal die zeitliche Änderung von $1/2LI^2$, also nach (3.5.54) die zeitliche Änderung des Energieinhaltes des Magnetfeldes um die Leiterschleufe. Der erste Term RI^2 bezeichnet die Energie, die pro Zeiteinheit am Ohmschen Widerstand R bei einem Strom I verbraucht und in Wärme umgesetzt wird. Die Gleichung (3.5.58) beschreibt also wie die von der Spannungsquelle zugeführte Energie im Stromkreis dadurch verbraucht wird, daß das Magnetfeld aufgebaut wird und Wärme am Ohmschen Widerstand erzeugt wird. Erst wenn das volle Magnetfeld aufgebaut ist, erreicht man den stationären Grenzfall und die zugeführte Leistung wird vollständig am Ohmschen Widerstand “verbraten”. Ist der Selbstinduktionskoeffizient L groß, so ist die Energie des Magnetfeldes groß und es dauert entsprechend lange, bis der stationäre Zustand erreicht wird.

Wenn man nun nach Erreichen des stationären Zustandes die externe Spannungsquelle abschaltet, also von außen keine Energie mehr zuführt, so enthält die Stromschleufe

aber immer noch die Energie des Magnetfeldes, $1/2LI^2$. Diese magnetische Energie wird dann umgesetzt am Ohmschen Widerstand. Es gilt die in (3.5.58) dargestellte Leistungsbilanz mit $U = 0$, also

$$RI^2 = -\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}LI^2 \right)$$

Dieser Abschaltvorgang wird durch die Differentialgleichung für den Strom $I(t)$ (3.5.55) mit $U = 0$ beschrieben. Die Lösung dieser Differentialgleichung mit der Randbedingung, daß zur Zeit des Abschaltens $t = t_{\text{absch.}}$ der stationäre Strom $I = U/R$ fließt, lautet

$$I(t) = \frac{U}{R} \exp \left(-\frac{R}{L}(t - t_{\text{absch.}}) \right)$$

Auch dieses exponentielle Abklingen des Stromes wird durch das Verhältnis L/R bestimmt und ist in Figur 3.7 dargestellt.

3.5.3 Stromkreis mit externer Wechselspannung

Als weiteres Beispiel wollen wir uns nun überlegen, was passiert, wenn an dem Stromkreis mit Selbstinduktion L und Widerstand R , der in Abb. 3.6 dargestellt ist, eine externe Wechselspannung angelegt ist, also eine externe Spannung der Form

$$U(t) = U_0 \cos \omega t = U_0 \text{Real} \{ \exp(i\omega t) \} \quad (3.5.59)$$

dabei wird es sich bei den folgenden Überlegungen als sehr nützlich erweisen, wenn wir diese Wechselspannung mit der komplexwertigen e Funktion darstellen und erst am Schluß der Rechnung den Übergang auf den Realteil vornehmen. Setzen wir diese zeitabhängige externe Spannung in die Differentialgleichung (3.5.55) für den Strom ein, so können wir diese inhomogene Differentialgleichung für den Strom $I(t)$ in die Form bringen

$$RI(t) + L \frac{d}{dt} I(t) = U_0 \exp(i\omega t) \quad (3.5.60)$$

wobei wir die Inhomogenität, das ist der Term, der die gesuchte Funktion $I(t)$ und deren Ableitungen nicht enthält, auf die rechte Seite gebracht haben. Wir können uns nun leicht davon überzeugen, daß

$$I_{\text{sp}}(t) = \frac{U_0}{R + i\omega L} \exp(i\omega t) \quad (3.5.61)$$

eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (3.5.60) darstellt. Dazu müssen wir einfach nur $I_{\text{sp}}(t)$ in die Gleichung (3.5.60) einsetzen und verifizieren, daß damit diese Gleichung tatsächlich erfüllt wird. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (3.5.60) ergibt sich dann als Summe dieser speziellen Lösung plus

der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung, das ist die Differentialgleichung bei der die Inhomogenität, also in diesem Fall die rechte Seite von (3.5.60) identisch null gesetzt wird:

$$\begin{aligned} I(t) &= I_{\text{sp}}(t) + I_{\text{hom}}(t) \\ &= \frac{U_0}{R + i\omega L} \exp(i\omega t) + C \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) \end{aligned} \quad (3.5.62)$$

Die Konstante C vor der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung wird dann durch die Anfangsbedingungen für unseren Stromkreis festgelegt. Nach einer entsprechenden Einschwingphase ist aber der Beitrag dieser Lösung der homogenen Gleichung gegenüber der speziellen Lösung vernachlässigbar und der Strom wird die Form annehmen

$$\begin{aligned} I(t) &\rightarrow \frac{U_0}{R^2 + (\omega L)^2} (R - i\omega L) \exp(i\omega t) \\ &= \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} (\cos \delta - i \sin \delta) \exp(i\omega t) \\ &= \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \exp(i\omega t - i\delta) \end{aligned} \quad (3.5.63)$$

mit

$$\tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \frac{\omega L}{R}$$

Den physikalisch fließenden Strom erhalten wir nun als den Realteil der Funktion $I(t)$ aus (3.5.63). Wir sehen also, daß auch der Strom in Form einer Cosinus - Funktion mit der Zeit variiert. Dabei ergibt sich jedoch gegenüber der angelegten Spannung $U(t)$ eine Phasenverzögerung um den Phasenwinkel δ . Die Amplitude dieses Wechselstromes ergibt sich als Quotient der Amplitude der angelegten Spannung U_0 und des Betrages des komplexen Widerstandswertes

$$I_0 = \frac{U_0}{|R + i\omega L|} = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

Im nächsten Schritt wollen wir nun den Stromkreis aus Abb. 3.6 noch erweitern durch Hinzufügen eines Kondensators mit der Kapazität C (siehe Abb. 3.8). Auch in diesem Fall sei eine externe Wechselspannung der Form (3.5.59) angelegt. Die Spannung, die nun an dem Widerstand und der Selbstinduktion anliegt ergibt sich aus der extern angelegten Spannung minus dem Spannungsabfall am Kondensator $U_C = Q/C$, wobei Q die Ladung des Kondensators und C die Kapazität bezeichnet. Setzen wir also die resultierende Spannung in (3.5.60) ein, so erhalten wir

$$RI(t) + L \frac{d}{dt} I(t) = U_0 \exp(i\omega t) - \frac{Q}{C}$$

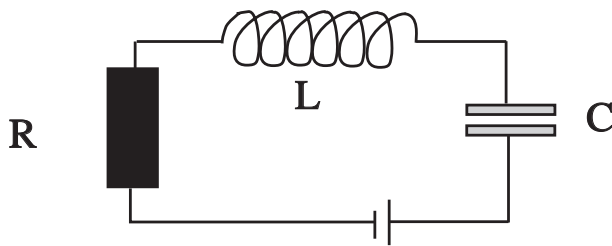


Abbildung 3.8: Schaltbild eines Stromkreises mit einem Ohmschen Widerstand R , einem Kondensator mit der Kapazität C und einer Selbstinduktion L

Diese Gleichung leiten wir nun nach der Zeit ab und berücksichtigen, daß die Änderung der Ladung auf dem Kondensator dQ/dt wegen der Kontinuitätsgleichung für die Ladung gleich dem abfließenden Strom ist. Damit ergibt sich

$$i\omega U_0 \exp(i\omega t) = \frac{d}{dt}I(t) + L \frac{d^2}{dt^2}I(t) + \frac{1}{C}I(t) \quad (3.5.64)$$

Dieser Differentialgleichung zweiter Ordnung hat die gleiche Struktur wie die Bewegungsgleichung für eine erzwungene Schwingung in der Mechanik bei einem harmonischen Oszillator mit Stokescher Reibung und externer Kraft F_{ext} :

$$F_{\text{ext}}(t) = \alpha \frac{d}{dt}x(t) + m \frac{d^2}{dt^2}x(t) + kx(t) \quad (3.5.65)$$

Dabei bezeichnet m die Masse des Körpers, an den die externe Kraft angreift, k die Konstante der harmonischen Rückstellkraft bei einer Auslenkung $x(t)$ aus der Ruhelage und α den Koeffizienten der geschwindigkeitsabhängigen Reibungskraft. Hat nun die antreibende Kraft F_{ext} als Funktion der Zeit die Form einer Cosinusschwingung mit Winkelfrequenz ω , so zeigt nach einer Einschwingzeit auch die Auslenkung einen Cosinusförmigen Verlauf mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit und einer gewissen Phasenverschiebung. Die Amplitude dieser erzwungenen Auslenkung hängt davon ab, wie nahe die externe Frequenz ω der Resonanzfrequenz des ungedämpften Oszillators

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

kommt, denn man erhält die Lösung

$$x(t) = \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\alpha^2 \omega^2}{m^2}}} \cos(\omega t + \delta) \quad (3.5.66)$$

Da die mathematische Struktur der Schwingungsgleichung der Mechanik (3.5.65) identisch ist mit der Gleichung für den Strom $I(t)$ (3.5.64) erwarten wir natürlich auch eine entsprechende Lösung. Für unser intuitives Verständnis der "Parameter" in der Gleichung unseres Stromkreises ist der Koeffizientenvergleich zwischen (3.5.65) und (3.5.64)

sehr hilfreich. Danach übernimmt also die Selbstinduktion des Stromkreises L die Rolle der Masse m im mechanischen Schwingungsproblem. Die Größe der harmonischen Rückstellkraft k wird im elektromagnetischen Schwingkreis von der inversen Kapazität übernommen. Damit erwarten wir also eine Resonanzfrequenz für den Schwingkreis von

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{CL}} \quad (3.5.67)$$

Die Rolle des Reibungskoeffizienten in der Mechanik α übernimmt in der Elektrodynamik der Ohmsche Widerstand R .

Nun wollen wir aber auch noch direkt die Lösung von (3.5.64) bestimmen und betrachten dazu, motiviert durch die Analogie aus der Mechanik (3.5.66), den Ansatz

$$I(t) = I_0 \exp(i\omega t) = |I_0| \exp(i(\omega t - \delta))$$

Die Amplitude I_0 ist also eine komplexe Zahl, die in der Euler Darstellung durch den Betrag $|I_0|$ und eine Phase δ bestimmt ist. Setzen wir diesen Ansatz in (3.5.64) ein, so ergibt sich

$$i\omega U_0 \exp(i\omega t) = \left\{ i\omega R I_0 - \omega^2 L I_0 + \frac{I_0}{C} \right\} \exp(i\omega t)$$

woraus sich sofort

$$U_0 = \left\{ R + i\omega L - \frac{i}{\omega C} \right\} I_0$$

ergibt. Aufgelöst nach I_0 erhalten wir also

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{U_0}{R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \\ &= \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \exp(-i\delta) \\ &\text{mit } \delta \approx \tan \delta = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \end{aligned} \quad (3.5.68)$$

Der Zusammenhang zwischen Spannung und Strom wird also durch einen komplexwertigen Widerstand \mathcal{Z} bestimmt

$$U_0 = \mathcal{Z} I_0 \quad \text{mit} \quad \mathcal{Z} = R + i\omega L - \frac{i}{\omega C}$$

Der Betrag dieses komplexen Widerstandes bestimmt das Verhältnis zwischen der Amplitude der Spannung und des Stromes

$$|\mathcal{Z}| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \frac{U_0}{|I_0|}$$

und die Phase δ gibt an, um welche Phase die harmonische Schwingung des Stromes der entsprechenden Schwingung der Spannung "nachläuft".

Die Darstellung des Ohmschen Widerstandes, der Selbstinduktion und des kapazitiven Widerstandes durch einen komplexen Widerstand \mathcal{Z} erleichtert auch die Betrachtung von komplizierteren Schaltungen. Werden z.B. zwei Systeme, die durch komplexe Widerstände \mathcal{Z}_1 und \mathcal{Z}_2 beschrieben werden, in einem Stromkreis hintereinander geschaltet, so addieren sich die Spannungsabfälle an diesen Widerständen und der gesamte komplexwertige Widerstand der Konfiguration ergibt sich einfach als die Summe der Einzelwiderstände

$$\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_1 + \mathcal{Z}_2$$

Werden hingegen die beiden komplexen Widerstände parallel geschaltet, so addieren sich die Ströme in den beiden Zweigen zum Gesamtstrom und der gesamte Widerstand ergibt sich aus

$$\frac{1}{\mathcal{Z}} = \frac{1}{\mathcal{Z}_1} + \frac{1}{\mathcal{Z}_2}$$

3.6 Kontrollfragen zum Kapitel III

1. Wie lautet das Faraday'sche Induktionsgesetz in integraler und differentieller Form? Wie kann man dieses Gesetz experimentell beobachten ?
2. Was versteht man unter dem Maxwell'schen Verschiebungsstrom ? Warum ist diese Ergänzung der Maxwell'schen Gleichungen notwendig ?
3. Wie lauten die Maxwell'schen Gleichungen ?
4. Wie lassen sich die Elektromagnetischen Felder durch Potentiale darstellen? Leiten Sie die Bestimmungsgleichungen für diese Potentiale her.
5. Was versteht man unter einer Eichtransformation? Beschreiben Sie die Coulomb Eichung und die Lorentz Eichung.
6. Formulieren Sie die Energieerhaltung in der Elektrodynamik. Was versteht man unter dem Poyntingvektor ?
7. Was beschreibt der Maxwell'sche Spannungstensor ?
8. Wie lautet das Ohm'sche Gesetz als Materialgleichung ?
9. Was versteht man unter der quasistationären Näherung? Wie lauten die Maxwell Gleichungen in dieser Näherung ?
10. Was versteht man unter Induktionskoeffizienten ?
11. Welcher Differentialgleichung genügt der elektrische Strom in einer Leiterschleife mit einer Selbstinduktivität, einem Kondensator und einem Ohm'schen Widerstand ?
12. Was versteht man unter einem komplexen Widerstand eines Stromkreises? Wie ergibt sich daraus der Zusammenhang zwischen Strom und angelegter Spannung ?
13. Wie baut sich der Strom in einem Stromkreis aus Ohm'schen Widerstand und Selbstinduktivität auf nach Einschalten einer Gleichspannung? Was passiert beim Ausschalten?

Kapitel 4

Elektromagnetische Wellen

4.1 Lösung der Maxwell'schen Gleichungen in einem Isolator

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit der Lösung der Maxwell Gleichungen in einem Isolator beschäftigen. Wir betrachten also ein Medium, in dem es keine freien Ladungen gibt (Ladungsdichte $\rho = 0$) und auch keine elektrischen Ströme (Stromdichte $\vec{j} = 0$). Damit nehmen also die Maxwell Gleichungen die Form

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0 = \operatorname{div} \vec{E} \quad (4.1.1)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 = \operatorname{div} H \quad (4.1.2)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{d\vec{B}}{dt} = 0 \quad (4.1.3)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{d\vec{D}}{dt} = 0 \quad (4.1.4)$$

an und werden ergänzt durch die Materialgleichungen

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad \text{und} \quad \vec{B} = \mu \vec{H}. \quad (4.1.5)$$

Die jeweils zweite Gleichung in (4.1.1) und (4.1.2) ergibt sich weil wir ein homogenes Medium betrachten wollen, in dem die Dielektrizitätskonstante ϵ und die Suszeptibilität μ nicht vom Ort abhängen. Multiplizieren wir die Gleichung (4.1.4) mit der Suszeptibilität μ und wenden außerdem den Rotationsoperator an, so erhalten wir

$$\operatorname{rot} (\operatorname{rot} \vec{B}) - \frac{\mu\epsilon}{c} \frac{d\operatorname{rot} \vec{E}}{dt} = 0.$$

Benutzen wir dann die Identität

$$\operatorname{rot} (\operatorname{rot} \vec{B}) = \operatorname{grad} \underbrace{(\operatorname{div} \vec{B})}_{=0 \text{ siehe 4.1.2}} - \Delta \vec{B}$$

und ersetzen $\text{rot}\vec{E}$ gemäß (4.1.3), so erhalten wir

$$\Delta\vec{B} - \frac{\mu\epsilon}{c^2} \frac{d^2\vec{B}}{dt^2} = 0, \quad (4.1.6)$$

also partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung in den Ortskoordinaten (x, y, z) sowie in der Zeit t für die drei kartesischen Komponenten der Magnetischen Induktionsdichte \vec{B} . In ganz analoger Weise können wir auch für das elektrische Feld \vec{E} verfahren. Wir wenden den Rotationsoperator auf die Maxwellgleichung (4.1.3) an und erhalten

$$\text{rot}(\text{rot}\vec{E}) + \frac{1}{c} \frac{d\text{rot}\vec{B}}{dt} = \text{grad}(\text{div}\vec{E}) - \Delta\vec{E} + \frac{\mu}{c} \frac{d\text{rot}\vec{H}}{dt} = 0$$

Wegen (4.1.1) ist $\text{div}\vec{E} = 0$. Ersetzen wir $\text{rot}\vec{H}$ gemäß (4.1.4), so erhalten wir

$$\Delta\vec{E} - \frac{\mu\epsilon}{c^2} \frac{d^2\vec{E}}{dt^2} = 0. \quad (4.1.7)$$

Diese Differentialgleichung für das elektrische Feld hat also die gleiche Struktur wie Gleichung (4.1.6) für das \vec{B} -Feld und wir wollen uns deshalb zunächst mit den mathematischen Eigenschaften der Lösungen der sogenannten *homogenen Wellengleichungen* vom Typ (4.1.6) und (4.1.7) beschäftigen.

4.1.1 Wellengleichung für skalare Funktion in einer Dimension

Um die Eigenschaften der Lösungen der homogenen Wellengleichungen zu verdeutlichen, wollen wir die Gleichungen zunächst in zweifacher Hinsicht vereinfachen:

- An Stelle der vektorwertigen Funktionen \vec{E} und \vec{B} in (4.1.7) bzw. (4.1.6) betrachten wir eine skalarwertige Funktion f .
- Außerdem nehmen wir an, daß diese Funktion nicht im 3-dimensionalen Raum, also als Funktion von \vec{r} , definiert ist, sondern nur von einer Raumkoordinate x abhängt: $f(x, t)$.

Damit vereinfacht sich also die Differentialgleichung vom Typ (4.1.6) auf die Form

$$\frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{\mu\epsilon}{c^2} \frac{d^2 f}{dt^2} = 0. \quad (4.1.8)$$

Zunächst wollen wir uns davon überzeugen, daß jede zweimal stetig differenzierbare Funktion f , die nicht von den zwei unabhängigen Variablen x und t sondern nur von den Linearkombination

$$f(x, t) = f(u_{\pm}) \quad \text{mit} \quad u_{\pm}(x, t) = x \pm \tilde{c}t \quad (4.1.9)$$

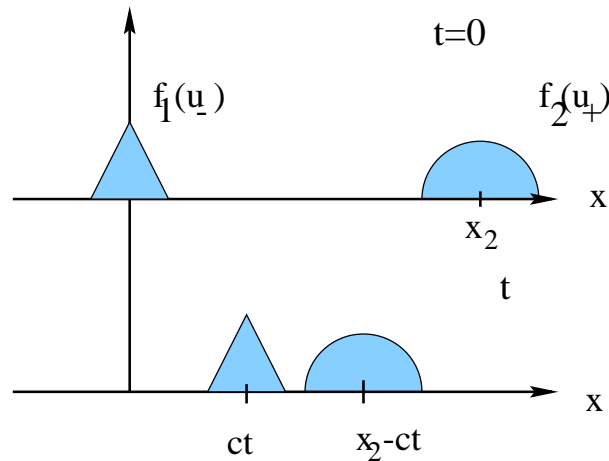


Abbildung 4.1: Lösungen der eindimensionalen Wellengleichung zur Zeit $t = 0$ (oberer Teil) und zu einem späteren Zeitpunkt t .

mit

$$\tilde{c} = \frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}} \tag{4.1.10}$$

eine Lösung der Differentialgleichung (4.1.8) ist. Um diese Behauptung zu verifizieren berechnen wir z.B.

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{df}{du} \frac{du_-}{dt} = -\tilde{c} \frac{df}{du} \\ \frac{d^2 f}{dt^2} &= -\tilde{c} \frac{d^2 f}{du^2} \frac{du_-}{dt} = (-\tilde{c})^2 \frac{d^2 f}{du^2} \end{aligned}$$

Entsprechend ergibt sich

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d^2 f}{du_-^2} \tag{4.1.11}$$

Eingesetzt in (4.1.8) erkennt man, daß jede Funktion der Form $f(u_-)$ eine Lösung dieser Gleichung ist, unabhängig davon wie die Funktion f von u_- abhängt. Entsprechendes gilt natürlich auch für $f(u_+)$ in (4.1.9).

Was beschreiben nun die Lösungen vom Typ (4.1.9)? Als erstes betrachten wir eine Funktion $f_1(u_-)$, dargestellt durch die dreieckige Form in Fig. 4.1. Das Maximum der Funktion f_1 , also die Spitze des Dreiecks, befindet sich bei dem Wert des Argumentes $u = 0$. Zur Zeit $t = 0$ gilt $u_- = x$ und das Maximum der Funktion f_1 befindet sich also bei $x = 0$. Zu einem späteren Zeitpunkt t gilt $u_- = x - \tilde{c}t$. Die Struktur definiert durch f_1 behält also ihre Form, sie bewegt sich aber mit der Geschwindigkeit \tilde{c} nach rechts, das Maximum liegt also bei $x = \tilde{c}t$. Für eine Funktion $f_2(u_+)$, dargestellt durch den Halbkreis in Fig. 4.1, gilt entsprechend, daß sich die Struktur, sie durch f_2 definiert ist

nach links zu kleineren x bewegt. Auch hier ist die Geschwindigkeit durch \tilde{c} gegeben. Man nennt diese in (4.1.10) definierte Geschwindigkeit die Phasengeschwindigkeit.

Die Differentialgleichung (4.1.8) ist eine lineare Gleichung. Sind aber $f_1(u_-)$ und $f_2(u_+)$ Lösungen dieser Differentialgleichung, so gilt das auch für jede Linearkombination $g = \alpha f_1 + \beta f_2$. Insbesondere ist also auch

$$g(x, t) = f_1(u_-) + f_2(u_+) = f_1(x - \tilde{c}t) + f_2(x + \tilde{c}t) \quad (4.1.12)$$

eine Lösung. Die zeitliche Entwicklung von $g(x, t)$ entspricht der Entwicklung der Gesamtfunktion $f_1 + f_2$ in Abb. 4.1. Die Gesamtstruktur ändert sich also mit der Zeit. Um die zeitliche Entwicklung einer beliebigen Lösung von (4.1.8) vorherzusagen, reicht es nicht aus die Funktion $g(x, t = 0)$ zu kennen, man benötigt auch noch die Information über die zeitliche Ableitung dieser Funktion zur Zeit $t = 0$ beziehungsweise die Aufspaltung in den Anteil, der von u_+ und den der von u_- abhängt.

Beschränken wir uns im Augenblick auf die Lösungen vom Typ $f(x - \tilde{c}t)$. Ein Spezialfall dieser Lösungen sind die ebenen Wellen in der Form

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \text{Real} \{ A \exp(ik(x - \tilde{c}t)) \} \\ &= |A| \cos(kx - k\tilde{c}t + \varphi) . \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

Bei dem Übergang zur zweiten Zeile haben wir benutzt, daß man die komplexe Amplitude A durch den Betrag $|A|$ und eine Phase φ ($A = |A|e^{i\varphi}$) darstellen kann. Die ebenen Wellen sind von besonderem Interesse, da sie ein vollständiges Funktionensystem bilden, so daß man jede beliebige andere Funktion nach diesen ebenen Wellen mit verschiedenen Wellenzahlen k entwickeln kann.

Die ebenen Wellen in einer Dimension sind charakterisiert durch die **Wellenzahl** k , beziehungsweise die **Wellenlänge** λ . Diese Wellenlänge λ bezeichnet dabei den Abstand zweier Koordinaten x , für die sich die Cosinus Funktion in (4.1.13) periodisch wiederholt. Es gilt also:

$$k\lambda = 2\pi \quad \text{bzw.} \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} . \quad (4.1.14)$$

Die Funktion (4.1.13) ist also bei festgehaltenem Parameter Zeit eine periodische Funktion in x mit der Periodizitätslänge λ . Bei festgehaltener Ortskoordinate ist (4.1.13) aber auch eine periodische Funktion in der Zeit. Für die Periodendauer T gilt

$$k\tilde{c}T = 2\pi \quad \text{also} \quad T = \frac{2\pi}{k\tilde{c}} = \frac{2\pi}{\omega} , \quad (4.1.15)$$

mit der **Winkelgeschwindigkeit** $\omega = k\tilde{c}$.

Als nächstes betrachten wir nun die Lösung der Differentialgleichung vom Typ (4.1.7) für eine skalare Funktion f , die in 3 Raumdimensionen definiert ist

$$\Delta f(\vec{r}, t) - \frac{\mu\epsilon}{c^2} \frac{d^2 f}{dt^2} = 0 . \quad (4.1.16)$$

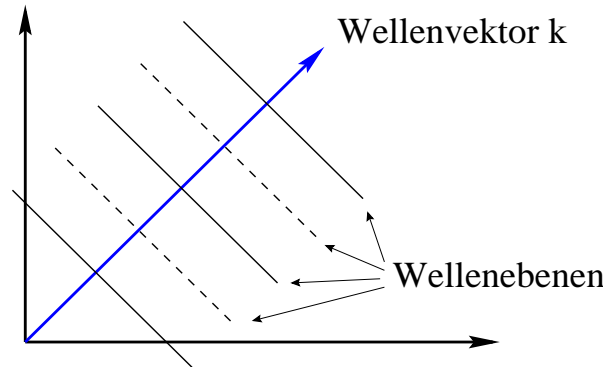


Abbildung 4.2: Darstellung einer ebenen Welle

Man überzeugt sich leicht davon, daß auch in diesem Fall die ebenen Wellen

$$f(\vec{r}, t) = \text{Real} \left\{ A \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \right\}, \quad (4.1.17)$$

spezielle Lösungen sind. Diese Lösungen sind jetzt durch 3 Wellenzahlen, k_x , k_y und k_z , beziehungsweise einen **Wellenvektor** \vec{k} definiert. Die Differentialgleichung wird genau dann gelöst, wenn (4.1.15) entsprechend der Zusammenhang

$$\omega = \pm \frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}} |\vec{k}| \quad (4.1.18)$$

gewährleistet ist. Als Funktion des Ortsvektors \vec{r} ist die Funktion $f(\vec{r}, t)$ an allen Orten identisch, für die gilt $\vec{r} \cdot \vec{k} = \text{const.}$ Die entsprechenden Gebiete, an denen also $f(\vec{r}, t)$ z.B. einen Maximalwert annimmt sind Flächen senkrecht zu dem Wellenvektor \vec{k} , wie das auch in der Abb. 4.2 dargestellt ist. Als Funktion der Zeit bewegen sich dann diese Ebenen konstanter Funktionswerte in Richtung des Wellenvektors \vec{k} . Deshalb spricht man auch von "ebenen Wellen" mit der Ausbreitungsrichtung \vec{k} .

Eine beliebige Funktion $f(\vec{r}, t)$ läßt sich mit Hilfe einer 4-dimensionalen Fouriertransformation darstellen in der Form

$$f(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi^4}} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{f}(\vec{k}, \omega) \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \quad (4.1.19)$$

(siehe auch Abschnitt 1.6). Die Fouriertransformierte $\tilde{f}(\vec{k}, \omega)$ ist dabei berechenbar durch

$$\tilde{f}(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi^4}} \int d^3r \int_{-\infty}^{\infty} dt f(\vec{r}, t) \exp(-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \quad (4.1.20)$$

Die Funktion $f(\vec{r}, t)$ ist eine Lösung der Differentialgleichung (4.1.17) wenn die Fouriertransformierte $\tilde{f}(\vec{k}, \omega)$ in (4.1.19) nur ungleich null ist für Kombinationen von Wellenvektor \vec{k} und Winkelgeschwindigkeit ω , die die Gleichung (4.1.18) erfüllen.

4.1.2 Ebene Wellen in der Elektrodynamik

Nach dieser Vorbereitung kehren wir nun zu der Lösung der Differentialgleichungen (4.1.6) und (4.1.7) zurück. Aus dem vorhergehenden Abschnitt ist klar, daß z.B. die Differentialgleichung (4.1.7) für das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r}, t)$ gelöst wird durch ebene Wellen für die 3 kartesischen Komponenten von \vec{E}

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} E_x^0 \\ E_y^0 \\ E_z^0 \end{pmatrix} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t), \quad (4.1.21)$$

wobei wieder (4.1.18) erfüllt sein muß. Die Differentialgleichung (4.1.7) hatten wir aus den Maxwellgleichungen für einen Isolator (4.1.1) - (4.1.4) hergeleitet. Wir untersuchen nun, ob die Maxwellgleichungen noch weitere Bedingungen an die elektromagnetischen Felder stellen. Dazu wenden wir (4.1.1) auf den Ansatz (4.1.21) an

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{dE_x}{dx} + \frac{dE_y}{dy} + \frac{dE_z}{dz} \\ &= (-k_x E_x^0 - k_y E_y^0 - k_z E_z^0) \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Diese Gleichung kann nur dann für alle \vec{r} und Zeiten t erfüllt sein, wenn der Amplitudenvektor \vec{E}^0 und damit auch der Vektor des elektrischen Feldes \vec{E} in (4.1.21) stets senkrecht zum Ausbreitungsvektor \vec{k} steht: $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$.

In ganz entsprechender Weise können wir auch für die magnetische Induktionsdichte \vec{B} mit (4.1.2) zeigen, daß auch \vec{B} senkrecht zu dem Wellenvektor \vec{k} stehen muß. Deshalb bezeichnet man die elektromagnetischen Felder in einem Isolator, als **transversal polarisiert**. Im Gegensatz dazu steht der Feldvektor von longitudinal polarisierten Wellenfeldern parallel zum Wellenvektor \vec{k} .

Bei dem Ansatz (4.1.21) ändert sich die Polarisationsrichtung von \vec{E} nicht als Funktion von Ort und Zeit, lediglich die Amplitude ist variabel. In diesem Fall spricht man von linear polarisierten Wellen. Es gibt aber auch transversal polarisierte Wellen, die nicht linear polarisiert sind. Dazu betrachten wir zwei linear polarisierte Wellen für das elektrische Feld:

$$\vec{E}_\alpha(\vec{r}, t) = \operatorname{Real} \left\{ \hat{e}_\alpha E_\alpha \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \right\}. \quad (4.1.22)$$

Dabei steht \hat{e}_α für jeweils einen Einheitsvektor in Richtung des \vec{E}_α Feldes, also senkrecht zu \vec{k} . Da \vec{E}_1 und \vec{E}_2 jeweils linear polarisierte Lösungen der Wellengleichung (4.1.7) sind, ist auch die Summe dieser beiden Lösungen eine Lösung

$$\vec{E} = \hat{e}_1 E_1 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) + \hat{e}_2 E_2 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi) \quad (4.1.23)$$

und zwar für beliebige Phasenwinkel φ . Im Fall $\varphi = 0$ ist auch (4.1.23) wieder eine linear polarisierte Welle in Richtung $\hat{e}_1 E_1 + \hat{e}_2 E_2$. Ist aber $\varphi = \pi/2$, und bilden \hat{e}_1, \hat{e}_2

und \hat{e}_k ein Dreibein, so ergibt sich

$$\vec{E} = \hat{e}_1 E_1 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) - \hat{e}_2 E_2 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

eine elliptisch, beziehungsweise für $E_1 = E_2$ eine zirkular polarisierte Welle. Der Vektor des elektrischen Feldes zirkuliert um den Ausbreitungsvektor wie eine Rechtsschraube. Man spricht in diesem Fall von zirkularer Polarisation mit positiver Helizität. Wählt man in (4.1.23) $\varphi = -\pi/2$, so ergibt sich eine Linksschraube, zirkulare Polarisation mit negativer Helizität.

Es gibt aber auch noch eine weitere Bedingung für die Polarisierung der elektromagnetischen Felder. Zur Herleitung dieser Bedingung wenden wir die Maxwellgleichung (4.1.3) auf den Ansatz der ebenen Wellen für $\vec{E}(\vec{r}, t)$ und $\vec{B}(\vec{r}, t)$ an

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{E} &= \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_x^0 \\ E_y^0 \\ E_z^0 \end{pmatrix} \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \\ &= \begin{pmatrix} ik_x \\ ik_y \\ ik_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_x^0 \\ E_y^0 \\ E_z^0 \end{pmatrix} \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \\ &= i\vec{k} \times \vec{E}^0 \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{B}(\vec{r}, t) &= \frac{d}{dt} \vec{B}^0 \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \\ &= -i\omega \vec{B}^0 \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \\ &= -i\omega \vec{B}(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

Somit erhält man

$$\text{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = i\vec{k} \times \vec{E}(\vec{r}, t) - \frac{i\omega}{c} \vec{B}(\vec{r}, t)$$

Mit der Maxwellgleichung (4.1.3) ergibt sich also

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{c}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}(\vec{r}, t)}. \quad (4.1.24)$$

Also steht \vec{B} immer senkrecht auf \vec{k} und \vec{E} : \vec{k} , \vec{E} und \vec{B} bilden ein rechtshändiges Dreibein. Setzt man in Glg. (4.1.24) die Beziehung (4.1.18), $\omega = \frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}} |\vec{k}|$ ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{c}{c} \sqrt{\mu\epsilon} \frac{1}{|\vec{k}|} |\vec{k}| \hat{e}_k \times \vec{E} = \sqrt{\mu\epsilon} \hat{e}_k \times \vec{E} \\ &\Rightarrow \boxed{|\vec{B}| = \sqrt{\mu\epsilon} |\vec{E}|} \end{aligned} \quad (4.1.25)$$

also eine feste Beziehung zwischen den Amplituden für das elektrische und magnetische Feld.

Mit diesen Beziehungen können wir nun Energie und Impuls der elektromagnetischen Wellenfelder berechnen. Als erstes betrachten wir den Poynting Vektor \vec{S} . Nach (3.4.34) ergibt sich

$$\begin{aligned}\vec{S} &= \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{H}) \\ &= \frac{c}{4\pi\mu} |\vec{E}| |\vec{B}| \hat{e}_k.\end{aligned}\quad (4.1.26)$$

Bei dem Übergang zur zweiten Zeilen wurde ausgenutzt, daß \vec{E} , \vec{B} und \vec{k} ein Dreibein bilden (4.1.24). Der Poyntingvektor und damit die entsprechende Energieflußdichte weist also in Richtung des Wellen- oder Ausbreitungsvektors \vec{k} . Betrachten wir nun eine linear polarisierte Welle und benutzen außerdem (4.1.25) so ergibt sich für den Betrag des Poyntingvektors

$$|\vec{S}| = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_0^2 \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

Hält man also die Position fest und berechnet den zeitlich gemittelten Energiefluß, so ergibt sich

$$\bar{S} = \frac{1}{2} \frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_0^2 \quad (4.1.27)$$

Zum Vergleich können wir auch die zeitlich gemittelte Energiedichte der elektromagnetischen Felder berechnen. Nach (3.4.33) ergibt sich

$$\begin{aligned}\bar{W} &= \frac{1}{8\pi} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) \\ &= \frac{1}{8\pi} \left(\frac{\epsilon}{2} E_0^2 + \frac{1}{2\mu} B_0^2 \right) \\ &= \frac{1}{8\pi} \epsilon E_0^2\end{aligned}\quad (4.1.28)$$

Auch hier stehen die Querstriche für die zeitliche Mittelung der entsprechenden Größen. Bei dem Übergang zur letzten Zeile wurde wieder (4.1.25) benutzt, wodurch sich ergab, daß die Energiedichte durch die Magnetfelder genau so groß ist wie die der elektrischen. Vergleicht man (4.1.27) und (4.1.28) so ergibt sich

$$\bar{S} = \frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}} \bar{W},$$

die gemittelte Energieflußdichte \bar{S} der elektromagnetische Welle entspricht gerade ihrer Energiedichte \bar{W} multipliziert mit der Phasengeschwindigkeit \tilde{c} . Die Phasengeschwindigkeit ist also die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Energiedichte.

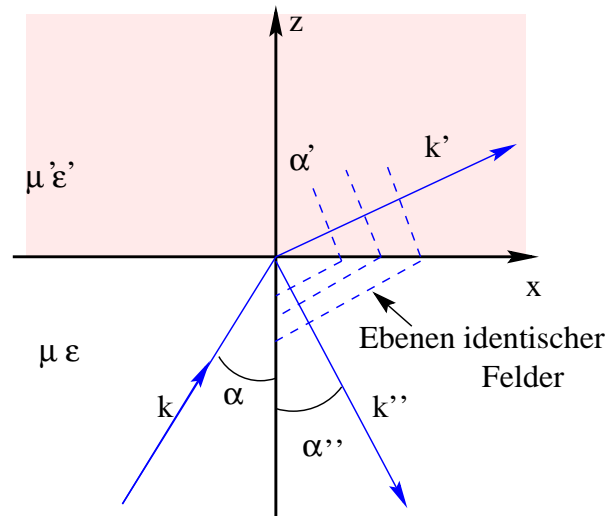


Abbildung 4.3: Geometrie und Nomenklatur für die Beschreibung von elektromagnetischen Wellen an einer Grenzfläche.

4.2 Reflexion und Brechung einer ebenen Welle

In diesem Abschnitt wird das Verhalten von ebenen elektromagnetischen Wellen an einer Grenzfläche zwischen zwei Isolatoren mit verschiedenen Materialkonstanten ε und μ beschrieben. Dabei wird insbesondere die Reflexion und die Brechung einer solchen elektromagnetischen Welle betrachtet. Wir werden sehen, wie die einfachen Reflexionsgesetze (Einfallswinkel gleich Ausfallwinkel) und der Zusammenhang zwischen dem Winkel eines einfallenden und des gebrochenen Lichtstrahls, das Snellius'sche Brechungsgesetz, direkt mit den Eigenschaften der elektromagnetischen Felder zusammenhängt.

Die Geometrie des Problems und die Nomenklatur, die hier benutzt werden soll, sind in der Abb. 4.3 dargestellt. Wir betrachten 2 Isolatoren mit einer ebenen Grenzschicht. Das Koordinatensystem ist so gewählt, daß diese Grenzschicht mit der xy -Ebene, also $z = 0$, zusammenfällt. Für $z < 0$ nehmen wir die Materialkonstanten ε und μ an, während für den Bereich $z > 0$ die Materialkonstante ε' und μ' gelten. Im Bereich $z < 0$ haben wir die einlaufende Welle mit dem Wellenzahlvektor \vec{k} und die reflektierte Welle mit \vec{k}'' . Diese Vektoren bilden mit der Normalen zur Grenzfläche den Winkel α beziehungsweise α'' . Im Bereich $z > 0$ beobachten wir die "gebrochene" elektromagnetische Welle mit einem Wellenzahlvektor \vec{k}' und einem entsprechenden Winkel α' .

Aus den Überlegungen des vorhergehenden Abschnittes wissen wir, daß wir z.B. die einlaufende ebene Welle beschreiben können durch

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t))$$

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}|\vec{k}| \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= \sqrt{\mu\varepsilon} \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{|\vec{k}|}\end{aligned}\quad (4.2.29)$$

Entsprechende Gleichungen gelten für die gebrochene Welle $(\vec{E}', \vec{B}', \omega')$ und die reflektierte Welle $(\vec{E}'', \vec{B}'', \omega'')$. Aus der Elektrostatik und der Magnetostatik, wissen wir, daß die elektrischen und magnetischen Felder bei dem Übergang von einem Medium zum anderen Stetigkeitsbedingungen erfüllen müssen. So gilt z.B., daß die Komponenten des magnetischen Induktionsdichte \vec{B} , die senkrecht zur Grenzfläche bei $z = 0$ liegen in beiden Isolatoren identisch sein müssen, siehe (2.5.52). Dies gilt aber nicht nur zu einem Zeitpunkt, sondern dies muß für alle Zeiten gelten. Daraus folgt, daß die Konstanten ω , die die zeitliche Entwicklung der verschiedenen Wellen beschreiben für die 3 Teilwellen identisch sein müssen:

$$\omega = \omega' = \omega'' \quad (4.2.30)$$

beziehungsweise wegen (4.2.29) auch

$$\begin{aligned}|\vec{k}| &= \frac{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}{c} = |\vec{k}''|, \\ |\vec{k}'| &= \frac{\omega\sqrt{\mu'\varepsilon'}}{c} = \frac{\sqrt{\mu'\varepsilon'}}{\sqrt{\mu\varepsilon}}|\vec{k}|\end{aligned}\quad (4.2.31)$$

Außerdem muß aber auch für alle Vektoren in der $z = 0$ Ebene \vec{r}_z gelten, daß die Phasen der 3 Wellen identisch sind.

$$\vec{k} \cdot \vec{r}_z = \vec{k}' \cdot \vec{r}_z = \vec{k}'' \cdot \vec{r}_z \quad (4.2.32)$$

Wäre nämlich z.B. die Phase der gebrochenen Welle, $\vec{k}' \cdot \vec{r}_z$, an einer Stelle \vec{r}_z so, daß die Wellenfunktion für \vec{B}' an dieser Stelle ein Maximum besitzt, so muß auch die Wellenfunktion der Felder \vec{B} und \vec{B}'' an dieser Stelle ein Maximum besitzen. Anderenfalls könnten die Grenzbedingungen nicht für \vec{r}_z und benachbarte Orte erfüllt sein. Aus diesem Ergebnis (4.2.32) folgt aber auch direkt:

- **Die Wellenvektoren \vec{k} , \vec{k}' und \vec{k}'' liegen in einer Ebene**, wir können also das Koordinatensystem so wählen, daß $k_y = k'_y = k''_y = 0$ ist, wie ja bereits in Abb. 4.3 angenommen. Zum Beweis dieser Behauptung nehmen wir an, daß $k_y = 0$ und betrachten Vektoren in der $z = 0$ Ebene $\vec{r}_z = (0, y, 0)$. Damit ist also $\vec{k} \cdot \vec{r}_z = 0$. Damit (4.2.32) erfüllt ist muß aber auch $\vec{k}' \cdot \vec{r}_z = k'_y y = \vec{k}'' \cdot \vec{r}_z = k''_y y = 0$ sein, es gilt also $k'_y = k''_y = 0$. Mit den Bezeichnungen von Abb. 4.3 können wir also schreiben

$$\vec{k} = k \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ 0 \\ \cos \alpha \end{pmatrix} \quad \vec{k}' = k' \begin{pmatrix} \sin \alpha' \\ 0 \\ \cos \alpha' \end{pmatrix} \quad \vec{k}'' = k'' \begin{pmatrix} \sin \alpha'' \\ 0 \\ \cos \alpha'' \end{pmatrix} \quad (4.2.33)$$

- **Es gilt das Reflexionsgesetz: Einfallswinkel α gleich Reflexionswinkel α'' .** Zum Beweis dieser Behauptung betrachten wir einen Vektor \vec{r}_z in der $z = 0$ Ebene, der nur eine x -Komponente besitzt $\vec{r}_z = (r, 0, 0)$. Für einen solchen Vektor liefert (4.2.32) zusammen mit (4.2.33)

$$rk \sin \alpha = rk' \sin \alpha' = rk'' \sin \alpha'' \quad (4.2.34)$$

Wegen (4.2.31) ist $k = k''$ und es gilt also $\sin \alpha = \sin \alpha''$, was ja gerade die Behauptung ist.

- **Es gilt das Snellius'sche Brechungsgesetz:**

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} = \frac{k'}{k} = \frac{\sqrt{\mu' \varepsilon'}}{\sqrt{\mu \varepsilon}} = \frac{n'}{n}, \quad (4.2.35)$$

wobei wir den **Brechungsindex** mit

$$n = \sqrt{\mu \varepsilon} \quad (4.2.36)$$

eingeführt haben. Auch das Snellius'sche Brechungsgesetz (4.2.35) ergibt sich direkt aus (4.2.34) unter Einbeziehung von (4.2.31).

Über diese einfachen Reflexions- und Brechungsgesetze hinaus können wir aber auch noch weitere Details aus den Grenzbedingungen der elektrischen und magnetischen Felder extrahieren. Dazu schreiben wir zunächst die in den Abschnitten 1.8 und 2.5 hergeleiteten Beziehungen für den hier betrachteten Fall auf. Zunächst die Stetigkeit der Normalenkomponenten von \vec{D} :

$$\{\varepsilon (\vec{E}_0 + \vec{E}_0'') - \varepsilon' \vec{E}_0'\} \cdot \hat{e}_z = 0 \quad (4.2.37)$$

und \vec{B} , wobei wir die Darstellung der magnetischen Induktionsdichten nach (4.2.29) benutzen:

$$\{\vec{k} \times \vec{E}_0 + \vec{k}'' \times \vec{E}_0'' - \vec{k}' \times \vec{E}_0'\} \cdot \hat{e}_z = 0 \quad (4.2.38)$$

Die Stetigkeit der Tangentialkomponente von \vec{E}

$$\{\vec{E}_0 + \vec{E}_0'' - \vec{E}_0'\} \times \hat{e}_z = 0 \quad (4.2.39)$$

und \vec{H}

$$\left\{ \frac{1}{\mu} (\vec{k} \times \vec{E}_0 + \vec{k}'' \times \vec{E}_0'') - \frac{1}{\mu'} \vec{k}' \times \vec{E}_0' \right\} \times \hat{e}_z = 0 \quad (4.2.40)$$

Außerdem zerlegen wir die Amplituden \vec{E}_0 in eine Komponente \vec{E}_{\parallel} , die in der in Abb. 4.3 dargestellten xz -Ebene liegt und eine Komponente \vec{E}_{\perp} die senkrecht dazu, d.h. parallel zu $-\hat{e}_y$ liegt

$$\vec{E}_0 = \vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp}. \quad (4.2.41)$$

Entsprechende Aufteilungen werden auch für \vec{E}' und \vec{E}'' vorgenommen. Die Stetigkeitsbedingungen für die Felder an der Grenzfläche müssen für beide Komponenten getrennt erfüllt sein. Deshalb betrachten wir zunächst die Gleichungen (4.2.37) bis (4.2.40) für die Komponenten $\vec{E}_\perp = -\hat{e}_y E_\perp$. Aus (4.2.39) folgt

$$\{\vec{E}_\perp + \vec{E}_\perp'' - \vec{E}_\perp'\} \times \hat{e}_z = -\hat{e}_x \{E_\perp + E_\perp'' - E_\perp'\} = 0$$

Es gilt also

$$E_\perp + E_\perp'' - E_\perp' = 0 \quad (4.2.42)$$

Zur weiteren Rechnung betrachten wir

$$\hat{e}_z \times (\vec{k} \times \vec{E}_\perp) = \vec{k} \underbrace{(\hat{e}_z \cdot \vec{E}_\perp)}_{=0} - \vec{E}_\perp (\hat{e}_z \cdot \vec{k})$$

und die entsprechenden Beziehungen für E' and E'' . Eingesetzt in (4.2.40) ergibt sich

$$-\hat{e}_y \left[\frac{1}{\mu} (E_\perp k \cos \alpha + E_\perp'' k (-\cos \alpha)) - \frac{1}{\mu'} E_\perp' k' \cos \alpha' \right] = 0$$

Ersetzt man die Wellenvektoren nach (4.2.31) ergibt dies

$$\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cos \alpha (E_\perp - E_\perp'') - \sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu'}} \cos \alpha' E_\perp' = 0$$

Ersetzt man nach (4.2.42) E_\perp' ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{E_\perp''}{E_\perp} &= \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cos \alpha - \sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu'}} \cos \alpha'}{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cos \alpha + \sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu'}} \cos \alpha'} \\ &= \frac{1 - \frac{\mu}{\mu'} \frac{\tan \alpha}{\tan \alpha'}}{1 + \frac{\mu}{\mu'} \frac{\tan \alpha}{\tan \alpha'}} \end{aligned} \quad (4.2.43)$$

Bei dem Übergang zur zweiten Zeile wurde das Snellius'sche Brechungsgesetz (4.2.35) ausgenutzt. Bezieht man sich dann auf Materialien, die nicht ferromagnetisch sind, so daß $\mu \approx 1 \approx \mu'$ so ergibt sich für das Verhältnis zwischen reflektierter und eingestrahler Amplitude im Fall der Komponente senkrecht zur Ebene der Wellenvektoren

$$\frac{E_\perp''}{E_\perp} = \frac{\sin(\alpha' - \alpha)}{\sin(\alpha' + \alpha)} \quad (4.2.44)$$

Das Quadrat dieses Verhältnisses der Amplituden spiegelt die Intensität des reflektierten Strahls relativ zum einlaufenden Strahl und wird häufig als Reflexionskoeffizient bezeichnet.

$$R_\perp = \left(\frac{E_\perp''}{E_\perp} \right)^2 \quad (4.2.45)$$

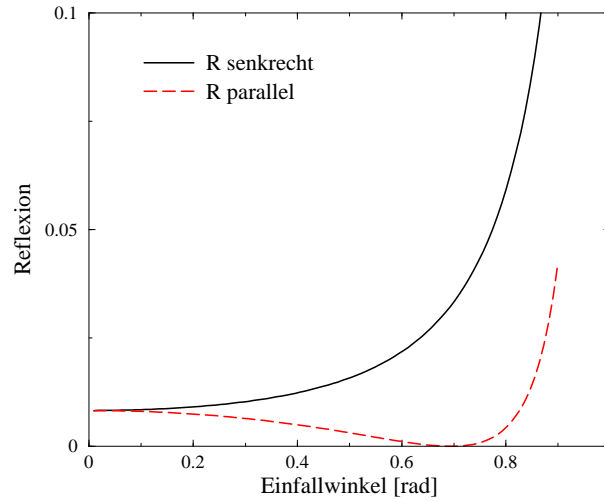


Abbildung 4.4: Reflexionskoeffizient (siehe Gl.4.2.45) für die Komponente senkrecht zu xz Ebene und in der xz Ebene für $n/n' = 1.2$.

Dieser Reflexionskoeffizient spiegelt also das Verhältnis des Poyntingvektors oder auch der Energiedichte des einlaufenden zum reflektierten Strahl. Ergebnisse für diesen Reflexionskoeffizienten sind in der Abb. 4.4 dargestellt.

Als nächstes betrachten wir nun die Komponente mit dem elektrischen Feldvektor in der xz Ebene der Wellenvektoren. Aus (4.2.39) ergibt sich

$$-E_{\parallel} \cos \alpha + E''_{\parallel} \cos \alpha + E'_{\parallel} \cos \alpha' = 0 \quad (4.2.46)$$

Die Vektoren $\vec{k} \times \vec{E}_{\parallel}$, $\vec{k}' \times \vec{E}'_{\parallel}$ und $\vec{k}'' \times \vec{E}''_{\parallel}$ stehen parallel oder antiparallel zur y -Achse. So ergibt sich aus (4.2.40) für die entsprechenden Amplituden

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{k}{\mu} (E_{\parallel} + E''_{\parallel}) - \frac{k'}{\mu'} E'_{\parallel} \\ &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (E_{\parallel} + E''_{\parallel}) - \sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu'}} E'_{\parallel} \end{aligned} \quad (4.2.47)$$

Bei dem Übergang zur zweiten Zeile wurden die Beträge der Wellenvektoren nach (4.2.31) ersetzt. Löst man diese Gleichung nach E'_{\parallel} auf und setzt das Ergebnis in (4.2.46) ein, so ergibt sich

$$\frac{E''_{\parallel}}{E_{\parallel}} = \frac{\cos \alpha - \sqrt{\frac{\varepsilon \mu'}{\varepsilon' \mu}} \cos \alpha'}{\cos \alpha + \sqrt{\frac{\varepsilon \mu'}{\varepsilon' \mu}} \cos \alpha'} \quad (4.2.48)$$

Beschränken wir uns wieder auf Materialien mit $\mu \approx 1 \approx \mu'$ und benutzen wir das Snellius'sche Brechungsgesetz, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{E''_{\parallel}}{E_{\parallel}} &= \frac{\cos \alpha - \frac{\sin \alpha'}{\sin \alpha} \cos \alpha'}{\cos \alpha + \frac{\sin \alpha'}{\sin \alpha} \cos \alpha'} \\ &= \frac{\tan(\alpha - \alpha')}{\tan(\alpha + \alpha')} \end{aligned} \quad (4.2.49)$$

Auch für diese Komponente ist der Reflexionskoeffizient als Funktion des Einfallswinkels für ein Beispiel in Abb. 4.4 dargestellt. Man sieht aus dieser Abbildung aber auch aus (4.2.49), daß für einen bestimmten Einfallswinkel, dem sogenannten Brewster Winkel α_{Brew} mit

$$\alpha_{Brew} + \alpha'_{Brew} = \frac{\pi}{2} \quad (4.2.50)$$

der Nennner des Verhältnisses (4.2.49), $\tan(\alpha_{Brew} + \alpha'_{Brew})$ gegen ∞ geht, der Reflexionskoeffizient für die parallele Komponente also bei diesem Brewster Winkel null wird. Dies bedeutet, daß bei Reflexion einer elektromagnetischen Welle, die mit dem Brewster Winkel einfällt, die reflektierte Welle nur die Komponente \vec{E}''_{\perp} enthält. Die reflektierte Welle ist also linear polarisiert mit einem elektrischen Feldvektor senkrecht zu der Ebene, die durch die Wellenvektoren aufgespannt ist.

4.3 Lösung der inhomogenen Wellengleichungen

Zu Beginn dieses Abschnittes sollen zunächst noch einmal die Maxwellgleichungen in einer etwas anderen Form dargestellt werden. Wir beschränken uns dabei auf die Maxwellgleichungen ohne Materie, also $\vec{D} = \vec{E}$ und $\vec{H} = \vec{B}$. Zunächst schreiben wir noch einmal die sogenannten homogenen Maxwellgleichungen auf in der Form

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot}\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{d\vec{B}}{dt} &= 0\end{aligned}\quad (4.3.51)$$

Diese Gleichungen sind unabhängig von möglichen Ladungs- und Stromverteilungen. Es handelt sich um partielle Differentialgleichungen nach den Ortskoordinaten und der Zeit. Man bezeichnet diese Maxwellgleichungen als homogene Differentialgleichungen, da keine Terme auftreten, die die gesuchten Felder \vec{E} und \vec{B} nicht enthalten (siehe auch (3.2.15)). Außerdem haben wir die inhomogenen Maxwellgleichungen (3.2.18)

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{d\vec{E}}{dt} &= \frac{4\pi}{c}\vec{j} \\ \operatorname{div}\vec{E} &= 4\pi\rho\end{aligned}\quad (4.3.52)$$

die den Zusammenhang zwischen den elektromagnetischen Feldern und den erzeugenden Ladungsdichten $\rho(\vec{r}, t)$ und Stromdichten $\vec{j}(\vec{r}, t)$ herstellen.

Wir haben bereits im Abschnitt 3.3 gesehen, daß die homogenen Maxwellgleichungen dazu führen, daß man die Elektromagnetischen Felder durch die Potentiale Φ und \vec{A} darstellen kann. Es gilt (siehe (3.3.19) und (3.3.20))

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \operatorname{rot}\vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \\ \vec{E} &= -\operatorname{grad}\Phi - \frac{1}{c}\frac{d\vec{A}}{dt}\end{aligned}\quad (4.3.53)$$

Diese Potentiale sind nicht eindeutig definiert, wir haben z.B. die Möglichkeit die Eichbedingung für die Lorentzgleichung (3.3.25) zu fordern. Ersetzt man in den inhomogenen Maxwellgleichungen (4.3.52) die Felder durch die Potentiale nach (4.3.53) und benutzt die Bedingung der Lorentzgleichung, so ergibt sich (siehe (3.3.26))

$$\begin{aligned}\Delta\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{d^2}{dt^2}\Phi &= -4\pi\rho \\ \Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{d^2}{dt^2}\vec{A} &= -\frac{4\pi}{c}\vec{j}\end{aligned}\quad (4.3.54)$$

Wir haben also vier Gleichungen (eine für Φ , drei für die Komponenten von \vec{A}) vom Typ

$$\square\Psi(\vec{r}, t) = -4\pi\alpha(\vec{r}, t)\quad (4.3.55)$$

Dabei stehen Ψ stellvertretend für eines der Potentiale und α für die zugehörige Inhomogenität in (4.3.54). Außerdem haben wir mit

$$\square := \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} \quad (4.3.56)$$

den sogenannten d'Alembert Operator eingeführt. Der d'Alembert Operator (mit 4 Ecken) ist eine Erweiterung des Laplace Operators Δ (3 Ecken), indem zu den zweiten Ableitungen nach den Drei Raumkoordinaten noch die zweite Ableitung nach der vierten Koordinate der Zeit hinzukommt. Wie wir weiter unten sehen werden, ist das Minuszeichen vor der Zeitableitung konsistent mit der Metrik des vierdimensionalen Minkowski Raumes der Relativitätstheorie.

Die Gleichungen (4.3.54) entsprechen den Wellengleichungen für die elektromagnetischen Felder, haben allerdings im Gegensatz zu (4.1.6) und (4.1.7) eine Inhomogenität, die rechte Seite ist ungleich null. Man bezeichnet deshalb auch (4.3.54), beziehungsweise (4.3.55), als inhomogene Wellengleichungen.

Reduziert man nun z.B. die inhomogene Wellengleichung für das skalare Potential Φ auf den Fall zeitunabhängiger Ladungsverteilungen und Potentiale, so erhalten wir

$$\Delta\Phi = -4\pi\rho$$

die Poissongleichung der Elektrostatik (1.3.38). Eine Methode zur Lösung dieser Poissongleichung ist die Bestimmung von Green'schen Funktion, die wir im Abschnitt 1.5 für die Elektrostatik betrachtet haben (Hier wollen wir uns allerdings auf den Fall ohne Randbedingungen beschränken.) Danach sucht man eine Green'sche Funktion G als Lösung der Differentialgleichung (1.5.55)

$$\Delta G(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

und bestimmt damit das Potential aus einer gegebenen Ladungsverteilung mit

$$\Phi(\vec{r}) = \int G(\vec{r}, \vec{r}')\rho(\vec{r}')d^3r'$$

In Erweiterung dieses Konzeptes für zeitunabhängige Green'sche Funktionen liegt es nahe eine zeitabhängige Green'sche Funktion $G(\vec{r}t, \vec{r}'t')$ zu definieren mit

$$\square G(\vec{r}t, \vec{r}'t') = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}')\delta(t - t') \quad (4.3.57)$$

um damit zu definieren

$$\Psi(\vec{r}, t) = \int d^3r' \int dt' G(\vec{r}t, \vec{r}'t')\alpha(\vec{r}', t') \quad (4.3.58)$$

Wendet man nämlich auf diesen Ansatz für die Potentialfunktion Ψ den d'Alembert Operator an, so erhält man mit (4.3.57)

$$\begin{aligned} \square\Psi(\vec{r}, t) &= \square \int d^3r' \int dt' G(\vec{r}t, \vec{r}'t')\alpha(\vec{r}', t') \\ &= -4\pi \int d^3r' \int dt' \delta(\vec{r} - \vec{r}')\delta(t - t')\alpha(\vec{r}', t') \\ &= -4\pi\alpha(\vec{r}, t), \end{aligned}$$

Ψ ist also in der Tat eine Lösung der inhomogenen Wellengleichung (4.3.55). Aus (4.3.58) können wir eine Interpretation für die zeitabhängige Green'sche Funktion ablesen: $G(\vec{r}t, \vec{r}'t')$ gibt an, mit welchem Gewicht die Ursache $\alpha(\vec{r}, t)$ am Ort \vec{r}' zur Zeit t' das Ergebnis $\Psi(\vec{r}, t)$ also am Ort \vec{r} zur Zeit t beeinflusst.

Wie sieht eine solche zeitabhängige Green'sche Funktion aus und welche Eigenschaften besitzt sie? Zunächst machen wir uns klar, daß die freie Green'sche Funktion, d.h. ohne Berücksichtigung von Randbedingungen nur von den Differenzen $\vec{r} - \vec{r}'$ und $t - t'$ abhängen kann. Danach betrachten wir die Fourier-Transformation z.B. der Abhängigkeit der Green'schen Funktion von $x - x'$, der Differenz der x -Koordinaten. Die **Fourier-Transformation** kann man als eine Entwicklung nach einem vollständigen Funktionensystem verstehen, so wie im Abschnitt 1.6 behandelt. Die Funktionen

$$f_k(x) = \langle x|k \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(ikx) \quad (4.3.59)$$

bilden ein vollständiges Funktionensystem auf dem Intervall $[-\infty, \infty]$. Die Funktionen, charakterisiert durch die Wellenzahl k , sind orthogonal (vergleiche z.B. (1.6.64)), d.h. es gilt

$$\begin{aligned} \langle k'|k \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx f_{k'}^*(x) f_k(x) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(i(k - k')x) \\ &= \delta(k - k') \end{aligned} \quad (4.3.60)$$

Außerdem gilt die Vollständigkeitsrelation (vergl. (1.6.74))

$$\begin{aligned} \delta(x - y) &= \int_{-\infty}^{\infty} dk f_k^*(y) f_k(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dk \langle y|k \rangle \langle k|x \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp(ik(x - y)) \end{aligned} \quad (4.3.61)$$

Das bedeutet also, daß man jede beliebige Funktion $F(x)$ nach dem Funktionensystem entwickeln kann

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} dk \langle x|k \rangle \langle k|F \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp(ikx) \tilde{F}(k) \end{aligned} \quad (4.3.62)$$

Die Entwicklungskoeffizienten $\tilde{F}(k)$ bilden eine Funktion der Wellenzahl k und heißen die Fouriertransformierte der Funktion $F(x)$. Diese Fouriertransformierte berechnet

sich als das Skalarprodukt der Funktion $F(x)$ mit dem entsprechenden Element des Funktionensystems $f_k(x)$

$$\begin{aligned}\tilde{F}(k) &= \langle k|F\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx F(x) \exp(-ikx)\end{aligned}\quad (4.3.63)$$

Ganz entsprechend der Entwicklung (4.3.62) können wir nun auch die Green'sche Funktion als Funktion der vier Raum und Zeitkoordinaten in einer vier-dimensionalen Entwicklung darstellen als

$$G(\vec{r} - \vec{r}', t - t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^4} \int d^3k \int d\omega \exp(i\vec{k}(\vec{r} - \vec{r}')) \exp(-i\omega(t - t')) \tilde{G}(\vec{k}, \omega) \quad (4.3.64)$$

Dabei ist zu beachten, daß die drei kartesischen Raumkoordinaten jeweils transformiert sind in eine entsprechende Koordinate des Vektors \vec{k} , und daß wir bei der Fouriertransformation der Zeit die zugehörige Variable mit $-\omega$ bezeichnet haben.

Mit dieser Fouriertransformation allein ist natürlich noch nichts gewonnen, denn jetzt muß die Funktion $\tilde{G}(\vec{k}, \omega)$ bestimmt werden. Dazu setzen wir die Darstellung (4.3.64) in die linke Seite der Bestimmungsgleichung der Green'schen Funktion (4.3.57) ein

$$\begin{aligned}\square G(\vec{r} - \vec{r}', t - t') &= \square \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3k \int d\omega \exp(i\vec{k}(\vec{r} - \vec{r}')) \exp(-i\omega t) \tilde{G}(\vec{k}, \omega) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3k \int d\omega \left(-\vec{k}^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \\ &\quad \times \exp(i\vec{k}(\vec{r} - \vec{r}')) \exp(-i\omega t) \tilde{G}(\vec{k}, \omega)\end{aligned}\quad (4.3.65)$$

Die rechte Seite der Gleichung (4.3.57) lautet:

$$-4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t') = -4\pi \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k \int d\omega \exp(i\vec{k}(\vec{r} - \vec{r}')) \exp(-i\omega t) \quad (4.3.66)$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung habe wir die vierdimensionale δ Funktion entsprechend der Vollständigkeitsrelation (4.3.61) dargestellt. Da die Exponentialfunktionen $\exp(ikx)$ ein Orthonormalsystem bilden, müssen die Entwicklungskoeffizienten einer beliebigen Funktion eindeutig sein. Da (4.3.65) und (4.3.66) die zwei Seiten der Gleichung (4.3.57) darstellen, müssen die jeweiligen Faktoren vor $\exp(i\vec{k}(\vec{r} - \vec{r}')) \exp(-i\omega t)$ identisch sein. Dies bedeutet

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2\pi)^2} \left(-\vec{k}^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \tilde{G}(\vec{k}, \omega) &= -\frac{4\pi}{(2\pi)^4} \\ \tilde{G}(\vec{k}, \omega) &= \frac{c^2}{\pi} \frac{1}{c^2 \vec{k}^2 - \omega^2}\end{aligned}\quad (4.3.67)$$

Setzt man diesen Ausdruck für \tilde{G} in (4.3.64) ergibt sich

$$G(\vec{r} - \vec{r}', t - t') = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{c^2}{\pi} \int d^3k \int d\omega \frac{\exp\left(i\left[\vec{k}(\vec{r} - \vec{r}')\right] - \omega(t - t')\right)}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (4.3.68)$$

wobei wir die Abkürzung

$$\omega_0 = c|\vec{k}| \quad (4.3.69)$$

eingeführt haben. Wir wollen uns nun speziell die Zeitabhängigkeit der Green'schen Funktion bzw. die Abhängigkeit von ω ansehen. Dazu schreiben wir

$$\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{1}{2\omega_0} \left(\frac{1}{\omega + \omega_0} - \frac{1}{\omega - \omega_0} \right)$$

und betrachten diese Abhängigkeit in der Form

$$\frac{1}{2\omega_0} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp(-i\omega(t - t')) \left(\frac{1}{\omega + \omega_0} - \frac{1}{\omega - \omega_0} \right) \quad (4.3.70)$$

Dabei wollen wir uns darauf beschränken, daß die Zeit der Ursache t' in (4.3.58) vor der Zeit der Wirkung t liegt, also $t - t' > 0$. Andernfalls soll die Green'sche Funktion identisch 0 sein. Dies erreicht man dadurch, daß wir zu der sogenannten retardierten Green'schen Funktion übergehen, die aus der allgemeinen Funktion G durch die Multiplikation mit der entsprechenden Stufenfunktion Θ entsteht

$$G(\vec{r} - \vec{r}', t - t') \quad \Longrightarrow \quad G(\vec{r} - \vec{r}', t - t') \Theta(t - t') \quad (4.3.71)$$

Wir werden uns nun davon überzeugen, daß diese Beschränkung auf $t - t' > 0$ in (4.3.70) dadurch erreicht wird, daß wir die dort auftretenden Pole um einen infinitesimalen Wert ε von der Achse der reellen Zahlen weg in den Bereich der komplexen Zahlen mit negativem Imaginärteil schieben, sodaß sie bei $\omega = \pm\omega_0 - i\varepsilon$ auftreten (siehe auch Abb. 4.5). Wir betrachten also

$$\frac{1}{2\omega_0} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp(-i\omega(t - t')) \left(\frac{1}{\omega + \omega_0 + i\varepsilon} - \frac{1}{\omega - \omega_0 + i\varepsilon} \right) \quad (4.3.72)$$

und unterscheiden die beiden Fälle $t - t' < 0$ and $t - t' > 0$.

- **Im Fall** $t - t' < 0$ kann das Integral (4.3.70) über die Achse der realen Werten für ω hinaus in eine Konturintegral in der komplexen Ebene ergänzt werden, indem man den Integrationsweg in der oberen Halbebene der komplexen Zahlen also mit positivem Imaginärteil für ω schließt (siehe gestrichelte Linie in der Abb. 4.5). Für große positive Werte des Imaginärteils von ω enthält nämlich der Integrand den Faktor

$$\exp(-i(\omega + i\infty)(t - t')) \quad \rightarrow \quad \exp(\infty(t - t')) \quad \rightarrow \quad \exp(-\infty)$$

wird also vernachlässigbar in diesem Fall $t - t' < 0$. Die Fläche, die von diesem Integrationsweg in der komplexen Ebene umschlossen wird, enthält keine Pole, sodaß das Integral (4.3.70) in diesem Fall identisch 0 wird.

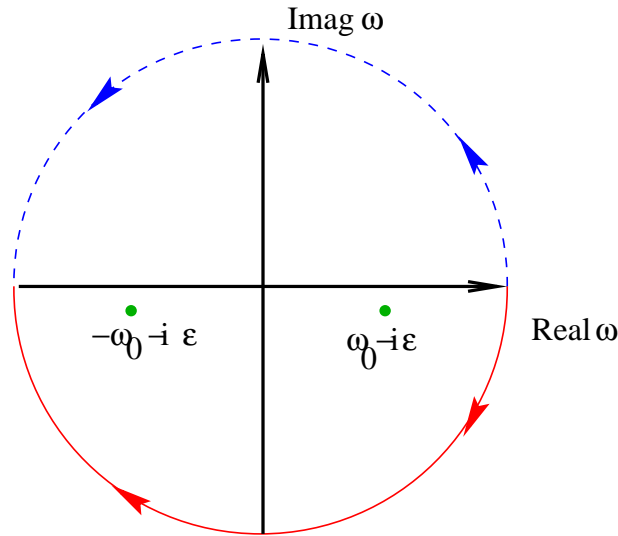


Abbildung 4.5: Integrationswege für (4.3.70)

- **Im Fall** $t - t' > 0$ muß das Integral (4.3.70) ergänzt werden durch den Integrationsweg, der in Abb. 4.5 durch die durchgezogene Linie dargestellt ist. Für große negative Werte des Imaginärteils in ω enthält der Integrand den Faktor

$$\exp(-i(\omega - i\infty)(t - t')) \quad \rightarrow \quad \exp(-\infty(t - t')) \quad \rightarrow \quad \exp(-\infty)$$

wird also vernachlässigbar für positive Werte von $t - t'$. In diesem Fall enthält die vom Integrationsweg umschlossene Fläche die beiden Pole bei $\omega = \pm\omega_0$ und der Residuensatz liefert

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\omega_0} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp(-i\omega(t - t')) \left(\frac{1}{\omega + \omega_0} - \frac{1}{\omega - \omega_0} \right) = \\ -\frac{2\pi i}{2\omega_0} [\exp(i\omega_0(t - t')) - \exp(-i\omega_0(t - t'))] \end{aligned} \quad (4.3.73)$$

Durch die Verschiebung der Pole in (4.3.72) wird also die Green'sche Funktion identisch null für $t < t'$ und nimmt im Fall $t > t'$ die Form an

$$\begin{aligned} G(\vec{r} - \vec{r}', t - t') = \\ -\frac{2\pi i}{(2\pi)^2} \frac{c^2}{\pi} \int d^3k \frac{\exp(i\vec{k}(\vec{r} - \vec{r}'))}{2ck} [\exp(ick(t - t')) - \exp(-ick(t - t'))] \\ = -\frac{ic}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk k \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 d\xi \exp(ik|\vec{r} - \vec{r}'|\xi) \\ \quad \times [\exp(ick(t - t')) - \exp(-ick(t - t'))] \end{aligned}$$

In der ersten Zeile wurde $\omega_0 = ck$ ersetzt und in der zweiten Zeile das Integrale über d^3k in Kugelkoordinaten umgeschrieben. Dabei bezeichnet ξ den Cosinus des Winkels zwischen \vec{k} und dem Vektor $\vec{r} - \vec{r}'$. Führt man die Integrationen über die Winkelvariablen ϕ (liefert einen Faktor 2π) und ξ aus, so ergibt sich weiter

$$\begin{aligned}
 G(\vec{r} - \vec{r}', t - t') &= -\frac{ic}{(2\pi)} \int_0^\infty dk k \left[\frac{\exp(ik|\vec{r} - \vec{r}'|\xi)}{ik|\vec{r} - \vec{r}'|} \right]_{\xi=-1}^{\xi=1} \\
 &\quad \times [\exp(ick(t-t')) - \exp(-ick(t-t'))] \\
 &= -\frac{c}{(2\pi)} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \int_0^\infty dk \{ \exp(ik|\vec{r} - \vec{r}'|) - \exp(-ik|\vec{r} - \vec{r}'|) \} \\
 &\quad \times [\exp(ick(t-t')) - \exp(-ick(t-t'))] \\
 &= -\frac{c}{(2\pi)} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \int_{-\infty}^\infty dk \exp(ik[|\vec{r} - \vec{r}'| + c(t-t')]) \\
 &\quad - \exp(ik[|\vec{r} - \vec{r}'| - c(t-t')]) \\
 &= -\frac{c}{|\vec{r} - \vec{r}'|} [\delta(|\vec{r} - \vec{r}'| + c(t-t')) - \delta(|\vec{r} - \vec{r}'| - c(t-t'))]
 \end{aligned}$$

Bei dem Übergang zur letzten Zeile wurde zwei mal die Gleichung (4.3.61) ausgenutzt. Man kann sich nun leicht davon überzeugen, daß für den Fall $t-t' > 0$, der ja allein hier in Frage kommt, die erste δ Funktion irrelevant ist (da das Argument niemals gleich null sein kann). Damit erhalten wir

$$G(\vec{r} - \vec{r}', t - t') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta\left(\frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} - (t - t')\right) \quad (4.3.74)$$

Die zeitabhängige Green'sche Funktion entspricht also der freien Green'schen Funktion der Elektrostatik mutlipliziert mit einer δ Funktion in der Zeit, die dafür sorgt, daß Zum Zeitpunkt t am Ort \vec{r} die Ursache zur Wirkung kommt, die zur Zeit $t' = t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c$ am Ort \vec{r}' präsent war. Die Wirkung erfolgt also mit einer Zeitverzögerung, die gerade dem Abstand $|\vec{r} - \vec{r}'|$ dividiert durch die Lichtgeschwindigkeit c entspricht. Anders ausgedrückt: die Übertragungsgeschwindigkeit von einer Ladung oder Strom am Ort \vec{r}' auf die Wirkung elektromagnetisches Potential am Ort \vec{r} is gerade die Lichtgeschwindigkeit c . Als Lösung der inhomogenen Wellengleichung (4.3.55) erhalten wir also mit (4.3.74) eingesetzt in (4.3.58)

$$\begin{aligned}
 \Psi(\vec{r}, t) &= \int d^3r' \int dt' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta\left(\frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} - (t - t')\right) \alpha(\vec{r}', t') \\
 &= \int d^3r' \frac{\alpha(\vec{r}', t' = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (4.3.75)
 \end{aligned}$$

Entsprechend ergibt sich für die elektromagnetischen Potentiale in der Lorentzzeichnung

$$\Phi(\vec{r}, t) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}', t' = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}', t' = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{c|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (4.3.76)$$

4.4 Lokalisierte, oszillierende Quellen

In diesem Abschnitt soll die Entstehung und die Emission von elektromagnetischen Wellen beschrieben werden. Die Quelle dieser elektromagnetischen Welle sei eine auf einem kleinen Raum lokalisierte, oszillierende Ladungs- und Stromverteilung

$$\begin{aligned}\rho(\vec{r}', t) &= \rho(\vec{r}') \exp(-i\omega t) \\ \vec{j}(\vec{r}', t) &= \vec{j}(\vec{r}') \exp(-i\omega t)\end{aligned}\quad (4.4.77)$$

Auch hier wird wieder die komplexe Schreibweise benutzt, da damit einzelne Rechenschritte vereinfacht werden. Letzendlich interessiert natürlich nur der Realteil dieser Größen. Natürlich sind auch andere Zeitabhängigkeiten denkbar als die in (4.4.77) angenommen Oszillation mit einer konstanten Frequenz. Solche komplexeren Oszillationen können aber über die Fourierentwicklung stets als Überlagerung von den harmonischen Oszillationen aus (4.4.77) dargestellt werden.

Realisierung solcher lokalisierten Quellen sind z.B. Antennen für Radiowellen oder aber auch einzelne Atome und Moleküle, die ja elektromagnetische Wellen in Form von Licht, Röntgenstrahlung oder auch in anderen Frequenzbereichen emittieren können.

Nach den Überlegungen im Abschnitt 4.3 kann man das Vektorfeld \vec{A} als Folge einer zeitlich veränderlichen Stromverteilung berechnen als (siehe (4.3.76))

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{c} \int d^3 r' \frac{\vec{j}(\vec{r}', t' = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= \exp(-i\omega t) \underbrace{\frac{1}{c} \int d^3 r' \frac{\vec{j}(\vec{r}') \exp(ik|\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}_{=: \vec{A}(\vec{r})}\end{aligned}\quad (4.4.78)$$

wobei für die zeitliche Änderung der Stromdichte (4.4.77) benutzt wurde und die Winkelgeschwindigkeit ω gemäß der Beziehung $ck = \omega$ durch die entsprechende Wellenzahl ersetzt wurde. Man sieht also, daß auch das durch \vec{j} erzeugte Vektorpotential mit der Frequenz ω oszilliert.

Beschränken wir uns nun auf die elektromagnetischen Felder außerhalb der erzeugenden Quellen in einem Bereich \vec{r} , in dem Stromdichte und Ladungsverteilung identisch null sind, so sind mit dem Vektorpotential \vec{A} die elektromagnetischen Felder festgelegt. Es gilt ja stets

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \text{rot} \vec{A}(\vec{r}, t) = \exp(-i\omega t) \text{rot} \vec{A}(\vec{r}) \quad (4.4.79)$$

Das elektrische Feld ergibt sich durch Anwenden der Maxwellgleichung in diesem Bereich mit $\vec{j} = 0$

$$\mu \left[\text{rot} \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{d\vec{D}}{dt} \right] = 0$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{B} - \frac{\mu\varepsilon}{c} \frac{d\vec{E}}{dt} &= 0 \\ \frac{d\vec{E}}{dt} &= \frac{c}{\mu\varepsilon} \operatorname{rot} \vec{B} \\ &= \exp(-i\omega t) \frac{c}{\mu\varepsilon} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r}) \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich also für das elektrische Feld

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{i}{\omega} \frac{c}{\mu\varepsilon} \exp[-i\omega t] \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r}) \quad (4.4.80)$$

Bei unseren Überlegungen spielen drei Längenskalen eine Rolle. Da ist einmal die Ausdehnung der Quelle, die z.B. durch einen Radius der Größe d charakterisiert sein soll. Die zweite Längenskala ist der Abstand des Beobachtungspunktes von der Quelle. Nehmen wir an, daß die Quelle sich im Koordinatenursprung befindet, so ist dieser Abstand identisch mit dem Betrag des Vektors \vec{r} . Die dritte Längenskala ist die Wellenlänge λ der elektromagnetischen Welle, die nach (4.1.14) mit der Wellenzahl k oder auch der Winkelfrequenz ω verknüpft ist

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega}$$

Wir nehmen an, daß die Ausdehnung der Quelle sehr klein ist gegenüber den beiden anderen Längen und unterscheiden dann

$$\begin{aligned} \text{Nahbereich:} & \quad d \ll r \ll \lambda \\ \text{Fernbereich:} & \quad d \ll \lambda \ll r \end{aligned} \quad (4.4.81)$$

In beiden Fällen gilt aber daß die Länge des Vektors \vec{r}' in (4.4.78) im relevanten Integrationsbereich klein ist gegenüber r . Wir können also den Abstand entwickeln

$$\begin{aligned} |\vec{r} - \vec{r}'| &= \sqrt{r^2 - 2\vec{r}'\vec{r} + r'^2} \\ &= r \sqrt{1 - 2\hat{e}_r \frac{\vec{r}'}{r} + \underbrace{\frac{r'^2}{r^2}}_{\approx 0}} \\ &\approx r \left(1 - \hat{e}_r \frac{\vec{r}'}{r} \right) \end{aligned} \quad (4.4.82)$$

wobei \hat{e}_r für den Einheitsvektor in Richtung \vec{r} steht. Damit können wir nähern

$$\begin{aligned} \exp(ik|\vec{r} - \vec{r}'|) &\approx \exp(ikr) \exp(-ik\hat{e}_r\vec{r}') \\ &\approx \exp(ikr) (1 - ik\hat{e}_r\vec{r}') \end{aligned} \quad (4.4.83)$$

und

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &\approx \frac{1}{r} \frac{1}{1 - \hat{e}_r \frac{\vec{r}'}{r}} \\ &\approx \frac{1}{r} \left(1 + \hat{e}_r \frac{\vec{r}'}{r} \right) \end{aligned} \quad (4.4.84)$$

womit sich insgesamt ergibt

$$\begin{aligned} \frac{\exp(ik|\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &\approx \frac{\exp(ikr)}{r} (1 - ik\hat{e}_r\vec{r}') \left(1 + \hat{e}_r \frac{\vec{r}'}{r} \right) \\ &\approx \frac{\exp(ikr)}{r} \left[1 + \hat{e}_r\vec{r}' \left(\frac{1}{r} - ik \right) \right] \end{aligned} \quad (4.4.85)$$

Setzt man diese Näherung in die Definition von $\vec{A}(\vec{r})$ in (4.4.78) so ergibt sich

$$\vec{A}(\vec{r}) \approx \underbrace{\frac{\exp(ikr)}{rc} \int d^3r' \vec{j}(\vec{r}')}_{\text{elektr. Dipol}} + \frac{\exp(ikr)}{rc} \left(\frac{1}{r} - ik \right) \int d^3r' \vec{j}(\vec{r}') \hat{e}_r \vec{r}' \quad (4.4.86)$$

Den ersten Term auf der rechten Seite diese Gleichung bezeichnet man als den **elektrischen Dipolanteil** zum Vektorfeld. Der zweite Term, der ja der Entwicklung entsprechend im Allgemeinen weniger stark sein sollte, enthält den **elektrischen Quadrupol** und den **magnetischen Dipolanteil**.

Warum bezeichnet man den ersten dieser beiden Terme als den elektrischen Dipolanteil, beziehungsweise die daraus resultierende elektromagnetische Strahlung als elektrische Dipolstrahlung? Zur Beantwortung dieser Frage benutzen wir

$$\operatorname{div}(x\vec{j}(\vec{r})) = x \operatorname{div}\vec{j} + \vec{j} \cdot \vec{\nabla} x = x \operatorname{div}\vec{j} + j_x$$

Damit ergibt sich für das Integral

$$\begin{aligned} \int d^3r j_x(\vec{r}) &= \int_V d^3r \operatorname{div}(x\vec{j}) - \int d^3r x \operatorname{div}\vec{j} \\ &= \underbrace{\int_{O_V} d\vec{f} x\vec{j}}_{=0} - \int d^3r x \operatorname{div}\vec{j} \end{aligned}$$

Beim Übergang zur zweiten Zeile wurde der Gaußsche Integralsatz (1.2.18) benutzt. Der erste Term ist dann identisch null, da an der Oberfläche des Integrationsvolumens der Strom der lokalisierten Stromverteilung \vec{j} verschwinden soll. Entsprechendes gilt natürlich auch für die anderen kartesischen Komponenten j_y und j_z der Stromdichte. Damit erhält man

$$\begin{aligned} \int d^3r \vec{j}(\vec{r}) &= - \int d^3r \vec{r} \operatorname{div}\vec{j} \\ &= -i\omega \underbrace{\int d^3r \vec{r} \rho(\vec{r}, t)}_{=\vec{d}(t)} \end{aligned} \quad (4.4.87)$$

Der Übergang zur zweiten Zeile ergibt sich durch die Anwendung der Kontinuitätsgleichung auf die Strom- und Ladungsdichte von (4.4.77)

$$\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{d\rho}{dt} = -i\omega\rho(\vec{r}, t)$$

Das Integral in (4.4.87) entspricht also gerade dem Dipolmoment $\vec{d}(t)$ der Ladungsverteilung zur Zeit t multipliziert mit $-i\omega$. Dementsprechend ist der elektrische Dipolbeitrag in (4.4.86) gegeben durch

$$\vec{A}_{ED}(\vec{r}) = -i\omega \frac{\exp(ikr)}{rc} \vec{d}(t) \quad (4.4.88)$$

Solche zeitabhängigen elektrischen Dipolmomente findet man z.B. in einem Antennenstab, in dem elektrische Ladungen zwischen den Enden oszillieren oder auch in einem Atom, in dem die negative Ladung der Elektronen relativ zur positiven Ladung der Protonen schwingt.

Zur Analyse des zweiten Terms in (4.4.86) benutzen wir

$$\hat{e}_r \times (\vec{r}' \times \vec{j}) = \vec{r}'(\hat{e}_r \vec{j}) - \vec{j}(\hat{e}_r \vec{r}')$$

und schreiben den Integranden in diesem zweiten Term um

$$\begin{aligned} \vec{j}(\hat{e}_r \vec{r}') &= \frac{1}{2} \vec{j}(\hat{e}_r \vec{r}') + \frac{1}{2} [\vec{r}'(\hat{e}_r \vec{j}) - \hat{e}_r \times (\vec{r}' \times \vec{j})] \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} (\vec{r}' \times \vec{j}) \times \hat{e}_r}_{\text{magn. Dipol}} + \underbrace{\frac{1}{2} \{ \vec{r}'(\hat{e}_r \vec{j}) + \vec{j}(\hat{e}_r \vec{r}') \}}_{\text{elek. Quadrup.}} \end{aligned}$$

Wir wollen nur den als **magnetischer Dipolterm** bezeichneten Beitrag weiter verfolgen. Eingesetzt in (4.4.86) ergibt sich

$$\vec{A}_{MD}(\vec{r}) = -\left(\frac{1}{r} - ik\right) \frac{\exp(ikr)}{r} \hat{e}_r \times \underbrace{\frac{1}{2c} \int d^3r' (\vec{r}' \times \vec{j})}_{=\vec{m}(t)} \quad (4.4.89)$$

Das mit $\vec{m}(t)$ gekennzeichnete Integral bezeichnet gerade das magnetische Dipolmoment der Stromverteilung zur Zeit t (vergl. (2.3.31)).

Bei einer punktförmigen Strahlungsquelle dominiert also im Allgemeinen der elektrische Dipolbeitrag zum Vektorfeld (4.4.88). Nur bei den Strahlungsquellen, bei denen keine zeitlich veränderliches Dipolmoment \vec{d} vorliegt, dominiert der magnetische Dipolbeitrag

$$\vec{A}_{MD}(\vec{r}) = -\left(\frac{1}{r} - \frac{i2\pi}{\lambda}\right) \frac{\exp(ikr)}{r} \hat{e}_r \times \vec{m}(t) \quad (4.4.90)$$

oder der elektrische Quadrupolbeitrag.

Im nächsten Schritt behandeln wir die elektrische Dipolstrahlung im Detail. Das Magnetfeld ergibt sich zu

$$\begin{aligned}
 \vec{B} &= \text{rot} \vec{A}_{ED} = \text{rot} \left(-i\omega \frac{\exp(ikr)}{rc} \vec{d} \right) \\
 &= \frac{i\omega}{c} \vec{d} \times \vec{\nabla} \frac{\exp(ikr)}{r} \\
 &= \frac{i\omega}{c} \vec{d} \times \hat{e}_r \frac{d}{dr} \frac{\exp(ikr)}{r} \\
 &= (\hat{e}_r \times \vec{d}) k^2 \left(1 - \frac{1}{ikr} \right) \frac{\exp(ikr)}{r}. \tag{4.4.91}
 \end{aligned}$$

Das Magnetfeld ist also eine transversal polarisierte Kugelwelle. Das bedeutet, daß die Richtung des Magnetfeldvektors stets senkrecht zum Einheitsvektor \hat{e}_r steht. Das elektrische Feld ergibt sich entsprechend (4.4.80) für $\mu = \varepsilon = 1$ zu

$$\begin{aligned}
 \vec{E} &= \frac{ic}{\omega} \text{rot} \text{rot} \vec{A}_{ED} \\
 &= \frac{i}{k} \text{rot} \left[(\hat{e}_r \times \vec{d}) k^2 \left(1 - \frac{1}{ikr} \right) \frac{\exp(ikr)}{r} \right] \\
 &= k^2 (\hat{e}_r \times \vec{d}) \times \hat{e}_r \frac{\exp(ikr)}{r} + [3\hat{e}_r(\hat{e}_r \vec{d}) - \vec{d}] \left(\frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2} \right) \exp(ikr) \tag{4.4.92}
 \end{aligned}$$

Der Übergang zur letzten Zeile erfordert eine etwas umfangreichere Rechnung. Im Fernbereich (siehe (4.4.81)) gilt

$$\begin{aligned}
 kr &\gg 1 \\
 \frac{k^2}{r} &\gg \frac{1}{r^3}, \quad \frac{k}{r^2} \\
 1 &\gg \frac{1}{ikr}
 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich also für die elektromagnetischen Felder der Dipolstrahlung im Fernbereich

$$\begin{aligned}
 \vec{B} &\approx k^2 (\hat{e}_r \times \vec{d}) \frac{\exp(ikr)}{r} \\
 \vec{E} &\approx k^2 (\hat{e}_r \times \vec{d}) \times \hat{e}_r \frac{\exp(ikr)}{r} \\
 &= \vec{B} \times \hat{e}_r \tag{4.4.93}
 \end{aligned}$$

Die Felder \vec{E} und \vec{B} stehen also senkrecht aufeinander und auch senkrecht zur jeweiligen Ausbreitungsrichtung \hat{e}_r , wie wir das ja bereits allgemein für elektromagnetische Wellen gezeigt haben (siehe (4.1.24)).

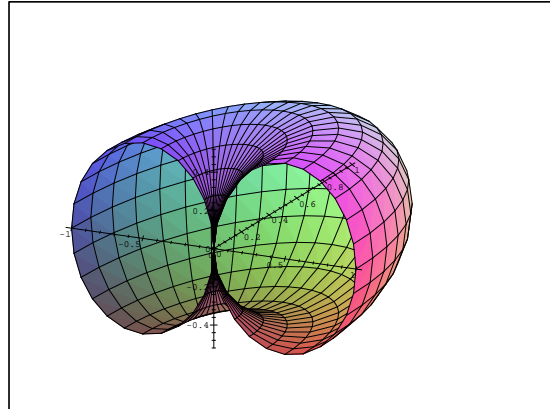


Abbildung 4.6: Abstrahlung eines elektrischen Dipols. Dargestellt ist ein Ausschnitt aus einer Fläche, auf der die abgestrahlte Energie konstant ist.

Schließlich berechnen wir noch den Poynting Vektor, also die Energieflußdichte dieser elektromagnetischen Dipolstrahlung im Fernbereich

$$\begin{aligned}
 \vec{S} &= \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B} \\
 &= \frac{c}{4\pi} \hat{e}_r |\vec{B}|^2 \\
 &= \frac{c}{4\pi} \hat{e}_r \frac{k^4}{r^2} \sin^2 \theta |\vec{d}|^2
 \end{aligned} \tag{4.4.94}$$

mit θ dem Winkel zwischen der Richtung des ausstrahlenden Dipolmomentes \vec{d} und der betrachteten Ausbreitungsrichtung \hat{e}_r . Man sieht, daß die Energieabstrahlung in Richtung \hat{e}_r also radial nach außen erfolgt. Die Energieflußdichte fällt ab mit $1/r^2$ und erfolgt anisotrop. In Richtung parallel zur Richtung des sendenden Dipols ($\sin \theta = 0$) ist die Abstrahlung identisch Null, während sie senkrecht dazu maximal ist. Die Abb. 4.6 stellt die Fläche dar, auf der die Flußdichte konstant ist.

Es ist außerdem interessant festzustellen, daß die abgestrahlte Energie proportional zu $k^4 \propto \omega^4 \propto \lambda^{-4}$ ist. Kurzwelliges Licht wird also mit größerer Intensität abgestrahlt und auch absorbiert, beziehungsweise gestreut. Dieser Mechanismus der sogenannten **Rayleigh Streuung** gilt für Sender, Absorber oder Streuzentren, die klein sind gegenüber der Wellenlänge λ , wie das ja hier angenommen wurde (siehe (4.4.81)) abgestrahlt und entsprechend auch stärker absorbiert. Dementsprechend ist z.B. die Eindringtiefe von Sonnenlicht in unsere Atmosphäre

$$l \approx 160 \lambda^4$$

mit λ angegeben in μm und l in Kilometer. Dies bedeutet $l \approx 4$ km für violettes Licht ($\lambda 0.4 \mu\text{m}$) und 65 km für rotes Licht ($\lambda 0.8 \mu\text{m}$). Da die dichte Atmosphäre etwa 8 km hoch ist, wird tagsüber bei steilem Sonnenstand vor allen Dingen blaues Licht gestreut, was zu der blauen Farbe des Himmels führt. Bei auf- und untergehender Sonne ist der Weg des Lichtes durch die Atmosphäre entsprechend länger, sodaß auch rotes Licht gestreut wird (Abendrot).

4.5 Wellen in einem leitenden Medium

Unter einem leitenden Medium verstehen wir ein System, in dem wir keine ruhenden Ladungen berücksichtigen, aber Ströme, die nach dem Ohmschen Gesetz (3.5.45) durch ein elektrisches Feld verursacht werden. Wir nehmen also an

$$\begin{aligned}\rho(\vec{r}, t) &= 0 \\ \vec{j}(\vec{r}, t) &= \sigma \vec{E}(\vec{r}, t)\end{aligned}$$

mit der Leitfähigkeit σ als charakteristische Materialkonstante. Nehmen wir außerdem an, daß die Materialparameter ε und μ Konstanten, also unabhängig von \vec{r} und t , sind, so lassen sich die Maxwellgleichungen in der Form schreiben

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{D} &= \operatorname{div} \vec{E} = 0 \\ \operatorname{div} \vec{B} &= \operatorname{div} \vec{H} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{d\vec{B}}{dt} = -\frac{\mu}{c} \frac{d\vec{H}}{dt} \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{1}{c} \frac{d\vec{D}}{dt} + \frac{4\pi}{c} \vec{j} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{d\vec{E}}{dt} + \frac{4\pi}{c} \sigma \vec{E}\end{aligned}\quad (4.5.95)$$

Auch zur Lösung dieser Gleichung betrachten wir den Ansatz von Vektorfeldern, die als Funktion der Zeit harmonisch oszillieren

$$\begin{aligned}\text{Ansatz : } \vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{E}(\vec{r}) \exp(i\omega t) \\ \vec{H}(\vec{r}, t) &= \vec{H}(\vec{r}) \exp(i\omega t)\end{aligned}\quad (4.5.96)$$

Die Maxwellgleichungen für die Wirbelstärken liefern mit diesem Ansatz

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{E} &= i\omega \frac{\mu}{c} \vec{H} \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= -i\omega \frac{\varepsilon}{c} \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \sigma \vec{E} = -i\omega \frac{\eta}{c} \vec{E}\end{aligned}\quad (4.5.97)$$

wobei wir definiert haben

$$\eta = \varepsilon + i \frac{4\pi\sigma}{\omega}\quad (4.5.98)$$

Die Maxwellgleichungen in einem leitenden Medium sind also fast identisch zu den Maxwellgleichungen in einem Isolator ($\sigma = 0$) mit den Unterschieden

- Die Dielektrizitätskonstante ε ist zu ersetzen durch die komplexwertige Variable η , definiert in (4.5.98).
- Diese komplexwertige "Dielektrizitätsfunktion" η hängt ab von der Frequenz der oszillierenden Felder ω .

Im Folgenden werden wir also ω festhalten und erwarten dann auch für die Lösungen der Maxwellgleichungen im leitenden Medium, Lösungen in der Form von ebenen Wellen

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{E}_0 \exp(i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)) \\ \vec{H}(\vec{r}, t) &= \vec{H}_0 \exp(i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)).\end{aligned}\quad (4.5.99)$$

Aus den Maxwellgleichungen zur Quellstärke der Felder erhalten wir die Bedingungen

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\vec{E} = i\vec{k}\vec{E} &= 0 &\Rightarrow &\vec{k} \perp \vec{E} \\ \operatorname{div}\vec{H} = i\vec{k}\vec{H} &= 0 &\Rightarrow &\vec{k} \perp \vec{H}\end{aligned}\quad (4.5.100)$$

Auch in den leitenden Medien sind also die elektromagnetischen Felder senkrecht zum Wellenvektor \vec{k} , sie sind also auch hier transversal polarisiert. Ein Unterschied tritt aber auf bei der Betrachtung der beiden anderen Maxwellgleichungen

$$\begin{aligned}\frac{1}{i}\operatorname{rot}\vec{H} &= \vec{k} \times \vec{H} = -\frac{\omega}{c}\eta\vec{E} \\ \frac{1}{i}\operatorname{rot}\vec{E} &= \vec{k} \times \vec{E} = \frac{\omega}{c}\mu\vec{H}\end{aligned}\quad (4.5.101)$$

Multipliziert man die erste dieser beiden Gleichungen von links mit $\vec{k} \times$ so ergibt sich unter Einbeziehung der zweiten Gleichung

$$\begin{aligned}\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{H}) &= \vec{k} \underbrace{(\vec{k}\vec{H})}_{=0} - k^2\vec{H} \\ &= \vec{k} \times \left(-\frac{\omega}{c}\eta\vec{E}\right) = -\frac{\omega^2}{c^2}\eta\mu\vec{H}\end{aligned}$$

Der erste Term auf der rechten Seite der ersten Zeile dieser Gleichung verschwindet wegen der Eigenschaft (4.5.100), daß \vec{H} transversal polarisiert ist. Damit können wir diese Gleichung zusammenfassen zu

$$k^2\vec{H} = \frac{\omega^2}{c^2}\eta\mu\vec{H}$$

beziehungsweise mit der Definition von η in (4.5.98) zu

$$k^2 = \mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + i\frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon}\right)\quad (4.5.102)$$

Das Quadrat der Wellenzahl, und damit natürlich auch die Wellenzahl k sind komplex, sodaß man den Wellenzahlvektor schreiben kann

$$\vec{k} = \hat{e}_k (\alpha + i\beta),\quad (4.5.103)$$

mit α und β als Bezeichnung für den Real- und Imaginärteil von k , während \hat{e}_k den Einheitsvektor in Richtung k bezeichnet. Aus dem Vergleich von

$$k^2 = (\alpha^2 - \beta^2) + i 2\alpha\beta$$

mit (4.5.102) ergibt sich

$$\begin{aligned} (\alpha^2 - \beta^2) &= \mu\varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} \\ 2\alpha\beta &= \frac{4\pi\mu\omega}{c^2}\sigma \end{aligned} \quad (4.5.104)$$

4.5.1 Der Skineffekt

Mit der komplexen Wellenzahl erhält man z.B. für die Welle des elektrischen Feldes in (4.5.99)

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \left(\vec{E}_0 \exp(i(\alpha\hat{e}_k\vec{r} - \omega t)) \right) \exp(-\beta\hat{e}_k\vec{r}) \quad (4.5.105)$$

und einen entsprechenden Ausdruck für das Magnetfeld \vec{H} . Für positive Werte von β ergibt sich eine Welle, deren Amplitude entlang der Ausbreitungsrichtung \hat{e}_k exponentiell abnimmt. Verfolgt man die Welle über eine Wegstrecke der Länge

$$\tau = \frac{1}{\beta} \quad (4.5.106)$$

so fällt die Amplitude um den Faktor $1/e$ ab. Man bezeichnet die Größe τ deshalb als Eindringtiefe oder **Skinkonstante**, d.h. die Dicke der Haut ("Skin") des leitenden Mediums, in die elektromagnetische Wellen in das leitende Medium eindringen können.

Wie groß ist diese Skinkonstante und wie stark hängt sie von der Frequenz ab? Dazu die folgende Abschätzung: Im Fall von Materialien mit hoher Leitfähigkeit σ wird der Imaginärteil von k^2 , der ja wie aus (4.5.104) ersichtlich proportional zu σ ist, sehr viel größer sein als der Realteil. Wir können also annehmen, daß

$$\alpha^2 - \beta^2 \approx 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx \beta \quad (4.5.107)$$

Damit ergibt sich also

$$2\alpha\beta \approx 2\beta^2 \approx \frac{4\pi\mu\omega}{c^2}\sigma$$

und für die Skinkonstante (4.5.106)

$$\tau = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\mu\omega}} \quad (4.5.108)$$

Die Eindringtiefe ist also insbesondere bei Materialien mit sehr hoher Leitfähigkeit und bei hohen Frequenzen ω sehr klein. In diesem Fall wird die Energie der elektromagnetischen Welle sehr rasch auf das leitende Material übertragen und die Welle entsprechend gedämpft.

Wegen dieses Skineffektes sind leitende Materialien weitgehend undurchlässig für elektromagnetische Wellen. Insbesondere lassen sie kein Licht durch (relativ großes ω) und dämpfen auch Wellen im Bereich der Radiofrequenzen sehr stark.

Die komplexwertige Wellenzahl hat aber auch noch eine weitere Konsequenz. Nach (4.5.101) gilt

$$\frac{c}{\mu\omega}k(\hat{e}_k \times \vec{E}) = \vec{H}$$

Für die Amplitude des magnetischen Feldes in (4.5.99) gilt also damit

$$\vec{H}_0 = \frac{c}{\mu\omega}|k|\exp(i\phi)(\hat{e}_k \times \vec{E}_0)$$

wobei wir die komplexe Zahl k über den Betrag und eine Phase ϕ dargestellt haben. Nach unseren Überlegungen zu (4.5.107) ist ϕ bei guten Leitern etwa gleich $\pi/4$ oder 45 Grad. Die Welle des Magnetfeldes ist also damit um diesen Winkel phasenverschoben zur Welle des elektrischen Feldes, sie *hinkt entsprechend nach*.

4.5.2 Frequenzabhängigkeit Dielektrizitätskonstante

Bisher wurde der Einfluß des Mediums auf das elektrische Feld dadurch berücksichtigt, daß wir eine Polarisation des Mediums annahmen, $\vec{P} = \chi\vec{E}$ (siehe (1.8.113)) und damit z.B. die dielektrische Verschiebung definiert haben als

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} = \varepsilon\vec{E}$$

mit der Dielektrizitätskonstante $\varepsilon = 1 + 4\pi\chi$. Dabei geht man davon aus, daß sich die Polarisation des Mediums zeitgleich mit dem elektrischen Feld ändert. Das elektrische Feld ändert sich also so langsam, daß die Elektronen im atomaren Bereich, die für die Polarisation verantwortlich sind, jeder Feldänderung instantan folgen können. Dies ist natürlich in der Elektrostatik eine vernünftige Annahme, die auch bei langsam variierenden Feldern noch gültig ist. Wie verhält es sich aber bei Feldern mit hohen Frequenzen ω ?

Zur Untersuchung dieser Frage betrachten wir die Bewegungen der atomaren Ladungen, also der Elektronen, um die Gleichgewichtslage in einem Atom ohne externes Feld. Die makroskopischen Felder bilden nur eine kleine Störung der starken atomaren Felder. Deshalb ist es eine gute Näherung die Auslenkung aus der Ruhelage in der harmonischen Näherung zu behandeln, also mit einer Rückstellkraft die proportional zur Auslenkung \vec{r} mit einer Konstanten K beschrieben wird

$$\text{Rückstellkraft: } -K\vec{r} = -m\omega_0^2\vec{r}$$

dabei bezeichnet m den Massenparameter der atomaren Ladung und $\omega_0^2 = K/m$ entspricht der Frequenz dieser harmonischen Schwingung, ist also ein Charakteristikum

des Materials. Außerdem können wir annehmen, daß es eine Reibungs- oder Dämpfungskraft proportional zur Geschwindigkeit der bewegten Ladung gibt und eben die Kraft durch das externe Feld, $q\vec{E}$, mit q für die Ladung. Die Bewegungsgleichung ergibt sich also als

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -m\omega_0^2 \vec{r} - \gamma m \frac{d\vec{r}}{dt} + q\vec{E} \quad (4.5.109)$$

Multipliziert man diese Bewegungsgleichung mit q/m und ersetzt $q\vec{r}$ durch das Dipolmoment \vec{d} , so ergibt sich

$$\frac{d^2 \vec{d}}{dt^2} + \gamma \frac{d\vec{d}}{dt} + \omega_0^2 \vec{d} = q\vec{E} \quad (4.5.110)$$

Im Fall der Elektrostatik ($d\vec{d}/dt = 0$) erhält man also

$$\vec{d} = \frac{q^2}{\omega_0^2 m} \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = N \vec{d} = \frac{Nq^2}{\omega_0^2 m} \vec{E} = \chi \vec{E}$$

mit N die Dichte der Atome. Damit ergibt sich also für die elektrische Suszeptibilität χ , beziehungsweise für die Dielektrizitätskonstante

$$\chi = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} = \frac{Nq^2}{\omega_0^2 m} \quad (4.5.111)$$

Im nächsten Schritt nehmen wir an, daß das externe elektrische Feld \vec{E} mit einer Frequenz ω schwingt und auch der Ladungsverteilung beziehungsweise dem Dipolmoment \vec{d} die entsprechende Frequenz aufzwingt (siehe Mechanik von erzwungenen Schwingungen)

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(-i\omega t) \quad \text{und} \quad \vec{d} = \vec{d}_0 \exp(-i\omega t)$$

Geht man mit diesen Ansatz in (4.5.110)

$$(-\omega^2 - i\gamma\omega + \omega_0^2) \vec{d} = \frac{q^2}{m} \vec{E}$$

ergibt sich daraus nach Abspalten des gemeinsamen Faktors $\exp(-i\omega t)$

$$\vec{d}_0 = \frac{q^2}{m\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \vec{E}_0 = \frac{\chi(\omega)}{N} \vec{E}_0 \quad (4.5.112)$$

Die elektrische Suszeptibilität χ und damit auch die Dielektrizitätskonstante ε nehmen komplexe Werte an und hängen von der Frequenz des elektrischen Feldes ω ab mit

$$\begin{aligned} \text{Real } \chi &= N \frac{q^2}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \\ \text{Imag } \chi &= N \frac{q^2}{m} \frac{\gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \end{aligned} \quad (4.5.113)$$

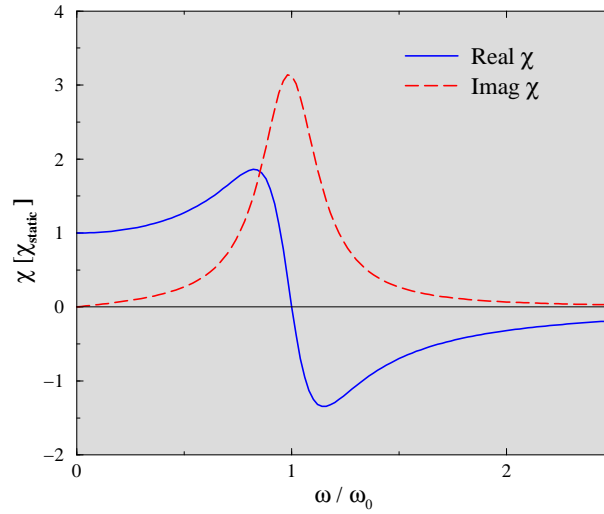


Abbildung 4.7: Real- und Imaginärteil der elektrischen Suszeptibilität nach (4.5.113).

Diese Abhängigkeit des Real- und Imaginärteiles von χ von der Frequenz ω sind in Abb. 4.7 dargestellt. Im Grenzfall ω ergibt sich wieder die reelle Suszeptibilität χ der Elektrostatik. Bei der Resonanzfrequenz $\omega = \omega_0$ ist der Imaginärteil von χ und damit auch der Imaginärteil von ε maximal. Weiter oben in diesem Abschnitt haben wir gesehen, daß ein komplexer Wert von ε ein Zeichen für die Dämpfung und Absorption der elektromagnetischen Welle ist. Also werden die elektromagnetischen Wellen stets dann in einem Material besonders stark absorbiert werden, wenn die Frequenz in der Nähe einer Resonanzfrequenz ω_0 des Materials ist.

In diesem Bereich $\omega \approx \omega_0$ zeigt auch der Realteil von χ eine ausgeprägte Frequenzabhängigkeit. Für $\omega = \omega_0$ gilt $\chi = 0$. Für Werte von ω , die leicht oberhalb der Resonanzfrequenz liegen wird χ negativ, sodaß ε Werte kleiner als 1 annimmt. Dies bedeutet aber daß die Phasengeschwindigkeit (4.1.10) größer als die Lichtgeschwindigkeit ist. Auf dem ersten Blick scheint es also die Möglichkeit zu geben, daß Informationen mit Geschwindigkeiten oberhalb der Lichtgeschwindigkeit verbreitet werden können. An dieser Stelle soll zu diesem Thema nur angemerkt werden, daß für die Ausbreitung von Information nicht die Phasengeschwindigkeit sondern die Gruppengeschwindigkeit eines Wellenpaketes relevant ist. Außerdem sei darauf hingewiesen, daß χ nur für solche Werte von ω negativ wird, für die die Absorption, dargestellt durch den Imaginärteil von χ groß ist.

Aus der Abb. 4.7 können wir weiter entnehmen, daß die Suszeptibilität χ und damit auch die Dielektrizitätskonstante ε und auch der Brechungsindex $n = \sqrt{\mu\varepsilon}$ (siehe (4.2.36)) über weite Bereiche von ω mit ω und damit auch mit der Wellenzahl k anwächst. Es gilt also $dn/d\omega > 0$. Man spricht in diesem Fall von **normaler Disper-**

sion. Im Bereich der Resonanzfrequenzen ω_0 gibt es aber auch Bereiche anormaler Dispersion mit $dn/d\omega < 0$.

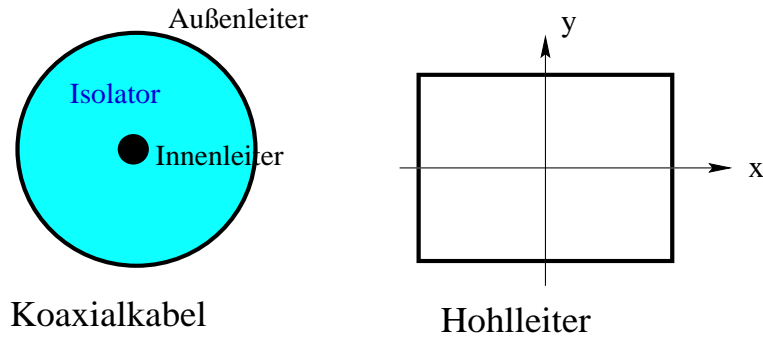


Abbildung 4.8: Querschnitt eines üblichen Koaxialkabels und eines Hohlleiters.

4.6 Wellenausbreitung in Hohlleitern

Hochfrequente elektromagnetische Felder breiten sich sehr schlecht in leitenden Medien aus. Deshalb werden solche elektromagnetischen Felder in der Regel auch nicht mit einfachen Kupferkabeln übertragen, sondern man benutzt Koaxialkabel oder Hohlleiter mit einem Querschnitt senkrecht zur Ausbreitungsrichtung, die wir hier mit z bezeichnen wollen, so wie in Abb. 4.8 dargestellt. Wie lassen sich diese Wellen mathematisch beschreiben? Ziel ist es eine Lösung für das elektrische und magnetische Feld im Isolatormaterial des Koaxialkabels oder auch im Innern des Hohlleiters (ebenfalls ein Isolator) zu finden, die den entsprechenden Maxwellgleichungen genügt, Randbedingungen auf den metallischen Oberflächen erfüllt und eine Welle in z -Richtung ergibt. Dazu machen wir den Ansatz

$$\begin{aligned}\vec{E}(x, y, z, t) &= \vec{E}_0(x, y) \exp(i(kz - \omega t)) \\ \vec{B}(x, y, z, t) &= \vec{B}_0(x, y) \exp(i(kz - \omega t)).\end{aligned}\quad (4.6.114)$$

Geht man nun mit diesem Ansatz in die homogenen Wellengleichungen eines Isolators (4.1.7) so ergibt sich also z.B. für das elektrische Feld

$$\begin{aligned}0 &= \Delta \vec{E} - \frac{\mu\epsilon}{c^2} \frac{d^2 \vec{E}}{dt^2} \\ &= \left\{ -k^2 + \underbrace{\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} \right)}_{:= \Delta_t} + \frac{\mu\epsilon}{c^2} \omega^2 \right\} \vec{E}_0(x, y) \exp(i(kz - \omega t))\end{aligned}\quad (4.6.115)$$

und eine entsprechende Gleichung für das Magnetfeld \vec{B} . Dabei haben wir den transversalen Operator Δ_t definiert als den Teil des Laplace Operators, der auf die transversalen Koordinaten x und y , also senkrecht zur Ausbreitungsrichtung z , wirkt.

Jeder beliebige Vektor \vec{a} kann eindeutig in seine Komponente parallel zu einer vorgegebenen Achse, hier die z -Achse, und die transversale Komponente zerlegt werden

$$\vec{a} = a_z \hat{e}_z + \vec{a}_t. \quad (4.6.116)$$

wobei die transversale Komponente \vec{a}_t in diesem Fall gerade die x und y Komponente des Vektors \vec{a} enthält. Diese Aufspaltung können wir für die Feldvektoren \vec{E} und \vec{B} aber auch für den Nabla Operator vornehmen.

Im folgenden soll gezeigt werden, daß die transversalen Komponenten der elektromagnetischen Felder im Ansatz (4.6.114) gestgelegt sind, wenn die zugehörigen longitudinalen Komponenten bekannt sind. Es gilt insbesondere

$$\begin{aligned} \vec{E}_t &= \frac{1}{\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\omega^2 - k^2} \left\{ \vec{\nabla}_t \frac{dE_z}{dz} + \frac{i\omega}{c} \vec{\nabla}_t \times \vec{B}_z \right\} \\ \vec{B}_t &= \frac{1}{\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\omega^2 - k^2} \left\{ \vec{\nabla}_t \frac{dB_z}{dz} - \frac{i\omega}{c} \mu\varepsilon \vec{\nabla}_t \times \vec{E}_z \right\}. \end{aligned} \quad (4.6.117)$$

Dabei steht \vec{E}_z für $E_z \hat{e}_z$ und

$$\vec{\nabla}_t = \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} \\ \frac{d}{dy} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{\nabla}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{d}{dz} \end{pmatrix}$$

Zum Beweis gehen wir von der Maxwellgleichung

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{d\vec{B}}{dt}$$

aus und zerlegen die auftretenden Felder sowie den Nabla Operator im Operator für die Rotation in die transversalen und longitudinalen Komponenten

$$(\vec{\nabla}_t + \vec{\nabla}_z) \times (\vec{E}_t + \vec{E}_z) = \frac{i\omega}{c} (\vec{B}_t + \vec{B}_z).$$

Auf der rechten Seite der Gleichung wurde bereits die Zeitabhängigkeit des \vec{B} Feldes entsprechend (4.6.114) berücksichtigt. Zerlegt man diese Gleichung in den Vektoranteil parallel zu \hat{e}_z , und den transversalen Anteil, so ergeben sich die zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} \parallel \hat{e}_z : \quad \vec{\nabla}_t \times \vec{E}_t &= \frac{i\omega}{c} \vec{B}_z \\ \perp \hat{e}_z : \quad \vec{\nabla}_t \times \vec{E}_z + \vec{\nabla}_z \times \vec{E}_t &= \frac{i\omega}{c} \vec{B}_t \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung multiplizieren wir mit $\vec{\nabla}_z \times$

$$\vec{\nabla}_z \times (\vec{\nabla}_t \times \vec{E}_z) + \vec{\nabla}_z \times (\vec{\nabla}_z \times \vec{E}_t) = \frac{i\omega}{c} \vec{\nabla}_z \times \vec{B}_t \quad (4.6.118)$$

Der erste Term auf der rechten Seite dieser Gleichung wird umgeschrieben in

$$\vec{\nabla}_t(\vec{\nabla}_z \vec{E}_z) - \underbrace{(\vec{\nabla}_t \vec{\nabla}_z)}_{=0} \vec{E}_z = \vec{\nabla}_t \frac{dE_z}{dz}$$

und der zweite Term in (4.6.118) lautet

$$\vec{\nabla}_z \underbrace{(\vec{\nabla}_z \vec{E}_t)}_{=0} - (\vec{\nabla}_z \vec{\nabla}_z) \vec{E}_t = -\frac{d^2}{dz^2} \vec{E}_t = k^2 \vec{E}_t$$

wobei in der letzten Gleichung der Ansatz (4.6.114) ausgenutzt wurde. Setzt man diese Umrechnungen in (4.6.118) ein, ergibt sich

$$k^2 \vec{E}_t + \vec{\nabla}_t \frac{dE_z}{dz} = \frac{i\omega}{c} \vec{\nabla}_z \times \vec{B}_t \quad (4.6.119)$$

Zur weiteren Rechnung benutzen wir die Maxwellgleichung im Isolator

$$\text{rot} \vec{B} = -i \frac{\mu \varepsilon \omega}{c} \vec{E} \quad (4.6.120)$$

zerlegen wieder den Operator $\vec{\nabla}$ und die Vektorfelder in longitudinale und transversale Komponenten und erhalten für den transversalen Anteil von (4.6.120)

$$\vec{\nabla}_t \times \vec{B}_z + \vec{\nabla}_z \times \vec{B}_t = -\frac{i\omega}{c} \mu \varepsilon \vec{E}_t \quad (4.6.121)$$

Aus dieser Gleichung erhalten wir einen Ausdruck für $\vec{\nabla}_z \times \vec{B}_t$, der in (4.6.119) eingesetzt werden kann

$$k^2 \vec{E}_t + \vec{\nabla}_t \frac{dE_z}{dz} = \frac{\omega^2}{c^2} \mu \varepsilon \vec{E}_t - \frac{i\omega}{c} \vec{\nabla}_t \times \vec{B}_z$$

Löst man diese Gleichung nach \vec{E}_t auf so erhält man den Beweis für die erste Zeile von (4.6.117). Der Beweis für die zweite Zeile ergibt sich in ganz analoger Weise, wenn man $\vec{\nabla}_z \times$ auf (4.6.121) anwendet.

Mit dem Ansatz (4.6.114) für die elektromagnetischen Wellen im isolierenden Material im Innern eines Hohlleiters, so wie etwa in Abb. 4.8 dargestellt, ergeben sich also die folgenden Bedingungen

1. Die Vektorfelder \vec{E}_0 und \vec{B}_0 müssen Lösungen der Wellengleichungen sein, z.B.:

$$\left[\left(k^2 - \frac{\mu \varepsilon \omega^2}{c^2} \right) - \Delta_t \right] \vec{B}_0(x, y) = 0 \quad (4.6.122)$$

2. Aus den longitudinalen Komponenten von \vec{E}_0 und \vec{B}_0 kann man auch die transversalen Komponenten berechnen. Aus (4.6.117) ergibt sich direkt

$$\begin{aligned}\vec{E}_{0t} &= \frac{1}{\gamma^2} \left\{ \vec{\nabla}_t \frac{dE_{0z}}{dz} + \frac{i\omega}{c} \vec{\nabla}_t \times \vec{B}_{0z} \right\} \\ \vec{B}_{0t} &= \frac{1}{\gamma^2} \left\{ \vec{\nabla}_t \frac{dB_{0z}}{dz} - \frac{i\omega}{c} \mu\varepsilon \vec{\nabla}_t \times \vec{E}_{0z} \right\}.\end{aligned}\quad (4.6.123)$$

mit

$$\gamma^2 = \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \omega^2 - k^2 \quad (4.6.124)$$

3. Das isolierende Material ist mit einem idealen Leiter umgeben. Das bedeutet, daß in diesem Leiter kein elektrisches Feld existieren kann. Wegen der Stetigkeit der Tangentialkomponente des elektrischen Feldes bei dem Übergang zwischen zwei Medien (siehe (1.8.115)) ist damit auch die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes direkt am Rand identisch null. Es gilt also insbesondere

$$E_z = 0 \quad \text{am Rand des Isolators} \quad (4.6.125)$$

Im vorhergehenden Abschnitt haben wir außerdem gesehen, daß in einem idealen Leiter auch jedes zeitlich oszillierende Magnetfeld absorbiert wird. Da an einer Grenzfläche die Komponente der magnetischen Induktionsdichte parallel zur Flächennormalen \hat{n} stetig ist (siehe (2.5.52)), gilt also auch

$$\hat{n} \vec{B}_z = 0 \quad \text{am Rand des Isolators} \quad (4.6.126)$$

Diese drei Bedingungen müssen von allen elektromagnetischen Wellen in einem Hohlleiter erfüllt werden. Darüber hinaus unterscheidet man noch:

- **Transversal-Elektro-Magnetische Wellen, TEM:** Bei diesen Wellen soll überall im Isolator gelten:

$$B_{0z} = E_{0z} = 0$$

Sowohl das elektrische als auch das magnetische Feld sind transversal, d.h. senkrecht zur Ausbreitungsrichtung \hat{e}_z , polarisiert, genau so wie eine freie elektromagnetische Welle. Wegen (4.6.123) sind dann aber auch die transversalen Komponenten von \vec{E}_0 und \vec{B}_0 identisch Null, oder es muß gelten

$$\gamma^2 = 0 = \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \omega^2 - k^2$$

In diesem Fall gibt es also eine feste Beziehung zwischen der Wellenzahl k in Ausbreitungsrichtung und der Frequenz ω . Berücksichtigt man diese Beziehung in (4.6.122) ergibt sich außerdem

$$\Delta_t \vec{E}_0(x, y) = 0 \quad (4.6.127)$$

Das elektrische Feld \vec{E}_0 muß also die Gleichung eines elektrostatischen Feldes erfüllen mit der Randbedingung eines vorgegebenen Potentials Φ auf dem leitenden Rand. Wäre nun der leitende Rand zusammenhängend, wie bei dem Hohlleiter im rechten Teilbild von Abb. 4.8, so wäre das Potential konstant auf dem gesamten Rand. Dies bedeutet wiederum, daß \vec{E}_0 identisch Null sein müßte. Ein Hohlleiter mit einem zusammenhängenden Rand kann keine TEM Welle leiten. Anders ist das im Fall des Koaxialkabels im linken Teil der Abb. 4.8. Hier ist eine Potentialdifferenz zwischen dem Innenleiter und dem Außenleiter möglich, es gibt also eine nichttriviale Lösung von (4.6.127), sodaß sich eine TEM Welle bilden kann.

- **Transversal Magnetische Welle, TM:** Bei diesen Wellen soll überall im Isolator gelten:

$$B_{0z} = 0$$

In diesem Fall wäre also auch die transversale Komponente von \vec{E}_0 wegen (4.6.123) bereits allein durch E_{0z} festgelegt. Als Beispiel betrachten wir nun einen Hohlleiter mit rechteckigem Querschnitt (wie im rechten Teilbild von Abb. 4.8) und der Ausdehnung a in x -Richtung sowie b in y -Richtung. Da $E_{0z} = 0$ auf dem Rand erfüllt sein muß, können wir E_{0z} als Linearkombination von Komponenten der Form

$$E_{0z}(x, y) = E \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (4.6.128)$$

schreiben. Betrachten wir dazu die Wellengleichung (4.6.122), so muß für diese Komponente gelten:

$$k^2 = \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\omega^2 - \gamma_{mn}^2 \quad (4.6.129)$$

mit

$$\gamma_{mn}^2 = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)$$

Damit sich die TM Welle ausbreiten kann, muß die Wellenzahl k reell sein, wegen (4.6.129) muß also gelten

$$\omega^2 > \frac{c^2}{\mu\varepsilon} \gamma_{mn}^2$$

Für jede Mode, charakterisiert durch die natürlichen Zahlen m und n , gibt es eine Grenzfrequenz ω_{mn} , sodaß diese Mode erst für Frequenzen oberhalb dieser Grenzfrequenz transportiert wird. Das Verhältnis k/ω als Funktion von ω für solche Moden ist entsprechend (4.6.129) in Abb. 4.9 skizziert. Im Frequenzbereich zwischen ω_{10} und ω_{11} in dieser Abbildung würde dieser Hohlleiter im "single-mode" Betrieb betrieben. Entsprechende Moden gibt es natürlich auch bei Hohlleitern mit anderen Querschnitten.

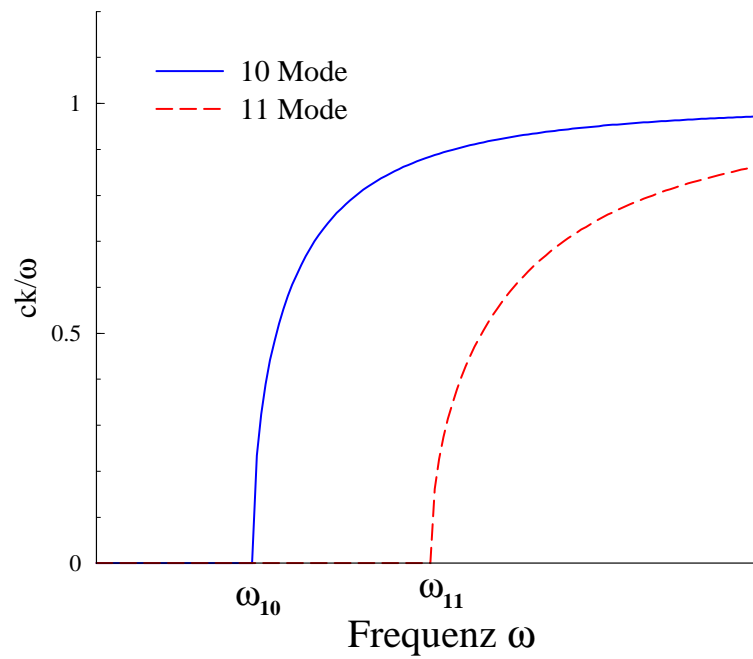


Abbildung 4.9: Wellenzahlen k einer TM Welle in einem rechteckigen Hohlleiter nach (4.6.129).

- **Transversal Elektrische Welle, TE:** Bei diesen Wellen soll überall im Isolator gelten:

$$E_{0z} = 0$$

Auf eine weitere Diskussion dieser TE Wellen soll hier verzichtet werden.

4.7 Kontrollfragen zum Kapitel IV

1. Warum sind elektromagnetische Wellen in einem Isolator transversal polarisiert?
2. Wie stehen bei einer elektromagnetischen Welle in einem Isolator Ausbreitungsrichtung, elektrischer Feldvektor und magnetische Feldvektor zueinander?
3. Was versteht man unter homogenen und inhomogenen Wellengleichungen?
4. Was sind die Charakteristika bei der Reflexion und Brechung einer elektromagnetischen Welle am Übergang zwischen zwei isolierenden Materialien? Was ist der Brewster Winkel?
5. Was versteht man unter der retardierten, zeitabhängigen Green'schen Funktion?
6. Inwieweit dominiert bei der Abstrahlung von elektromagnetischen Wellen die elektrische Dipolstrahlung?
7. Welche Eigenschaften besitzt diese elektrische Dipolstrahlung?
8. Welche Beiträge ergeben sich über diesen Dipolbeitrag hinaus?
9. Warum ist der Himmel blau?
10. Wie breiten sich elektromagnetische Wellen in einem leitenden Medium aus?
11. Was versteht man unter normaler und anormaler Dispersion? In welchen Frequenzbereichen erwarte man anormale Dispersion?
12. Welche Eigenschaften erfüllen elektromagnetische Wellen, die durch Hohlleiter übertragen werden?
13. Was versteht man unter einer TEM Welle?

Kapitel 5

Maxwellgleichungen und Relativitätstheorie

5.1 Relativistische Mechanik - Nomenklatur

Um die Grundüberlegungen der relativistischen Mechanik in Erinnerung zu rufen, betrachten wir ein Gedankenexperiment, bei dem die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit eine entscheidende Rolle spielt. Wir stellen uns dazu vor, daß wir zwei Gruppen von Beobachtern haben mit unterschiedlichen Koordinatensystemen. Die eine Gruppe, A, steht am Gleis der Bundesbahn in Tübingen. Der Koordinatenursprung des Beobachtungssystems A befindet sich am Hauptbahnhof Tübingen und die Beobachter der Gruppe A haben sich in regelmäßigen Abständen am Bahngleis aufgestellt, um ihre Beobachtung entlang dieser Koordinatenrichtung Bahngleis zu registrieren. Die zweite Beobachtergruppe B hat sich in einem Zug, der mit einer Geschwindigkeit v durch den Bahnhof fährt über die gesamte Länge des Zuges verteilt. Das Koordinatensystem dieser Beobachtergruppe ist am Zug fixiert, es bewegt sich also relativ zu A mit der Geschwindigkeit v . Wir definieren den Beginn des Experimentes als den Zeitpunkt, an dem die Koordinatenursprünge sich gerade am gleichen Ort befinden. Zu diesem Zeitpunkt $t = 0$ wird ein Lichtblitz gezündet (siehe auch Abb. 5.1). Ein Beobachter des Teams A, der sich im Abstand x_a vom Koordinatenursprung befindet, sieht diesen Lichtblitz und schließt wegen

$$c t_A - x_a = 0 \tag{5.1.1}$$

daß das Ereignis "Lichtblitz gezündet" um eine Zeitdifferenz t_A vor dem Beobachtungszeitpunkt stattgefunden hat. Ein Beobachter des Teams B, der sich praktisch mit dem Kollegen aus Team A am gleichen Ort befindet, empfängt das Lichtsignal natürlich zum identischen Zeitpunkt wie der Kollege des Teams A. Sein Abstand vom Koordinatenursprung des Teams B, x_B , ist aber wegen der Geschwindigkeit des Zuges anders

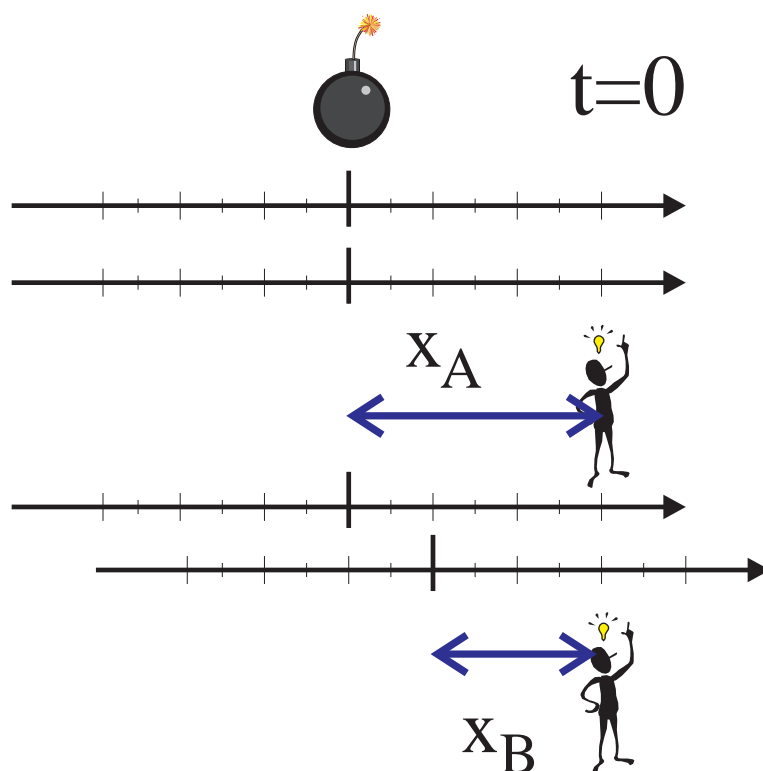


Abbildung 5.1: Darstellung des im Text geschilderten Gedankenexperimentes zur Beobachtung eines Lichtblitzes in zueinander bewegten Koordinatensystemen.

als x_A

$$x_B = x_A - vt_A$$

(siehe wiederum Abb. 5.1). Da die Lichtgeschwindigkeit c in allen Koordinatensystemen identisch ist, schließt er wegen

$$c t_B - x_B = 0, \quad (5.1.2)$$

daß das Ereignis ‐Lichtblitz gezündet‐ vor einer Zeit t_B stattgefunden hat, die kürzer ist als t_A . Die Zeitmessung im System B liefert also ein anderes Ergebnis als in A. Bei einer Koordinatentransformation zwischen zwei Bezugssystemen, die sich mit einer Geschwindigkeit relativ zueinander bewegen, müssen nicht nur die drei raumartigen Koordinaten eines Ereignispunktes transformiert werden sondern als vierte oder nullte Koordinate auch die Zeit.

Wir definieren deshalb in einem Koordinatensystem einen Raumzeitpunkt durch den

4-dimensionalen, **kontravarianten Vektor**

$$x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (5.1.3)$$

Die nullte Komponente, $x^0 = ct$, ist die in diesem Koordinatensystem gemessene Zeit und die Komponenten x^1 bis x^3 sind die kartesischen Koordinaten, x, y, z , dieses Raumzeitpunktes. Deshalb nennt man die nullte Komponente auch die **zeitartige Komponente** des Vierervektors x^μ und bezeichnet die anderen als **raumartige Komponenten**. Betrachtet man nun den gleichen Raumzeitpunkt aus einem Koordinatensystem, das den gleichen Koordinatenursprung in Raum und Zeit hat, aber zum ersten mit einer Geschwindigkeit bewegt ist, so haben die Raum- und Zeitkoordinaten dieses Ereignispunktes andere Werte

$$x^\mu \longrightarrow \tilde{x}^\mu. \quad (5.1.4)$$

Wegen der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit (siehe Gleichungen (5.1.1) und (5.1.2) im oben diskutierten Beispiel muß aber gelten

$$(x^0)^2 - \sum_{i=1}^3 (x^i)^2 = (\tilde{x}^0)^2 - \sum_{i=1}^3 (\tilde{x}^i)^2. \quad (5.1.5)$$

Um diese Forderung mathematisch zu formulieren, definieren wir zu jedem kontravarianten Vektor (Kennzeichen: Index der Komponenten ist als oberer Index angebracht) einen **kovarianten Vektor** (Kennzeichen: Index unten) über die Beziehung

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ -x^1 \\ -x^2 \\ -x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad (5.1.6)$$

Das Skalarprodukt eines kontravarianten Vektors mit seinem kovarianten Partner ist dann definiert als

$$\begin{aligned} |x|^2 &= x^\mu x_\mu = x^0 x_0 + x^1 x_1 + x^2 x_2 + x^3 x_3 \\ &= (x^0)^2 - \sum_{i=1}^3 (x^i)^2. \end{aligned} \quad (5.1.7)$$

Die Forderung (5.1.5), die sich aus der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit ergab ist also äquivalent damit, daß bei einer Koordinatentransformation das in (5.1.7) definierte Skalarprodukt seinen Wert behält.

In der ersten Zeile von (5.1.7) haben wir die sogenannte Einstein'sche Summenkonvention eingeführt. Danach wird über gleichnamige Indices (hier der Index μ) von 0 bis 3 summiert, ohne daß dies explizit angegeben wird. Mit dieser Summenkonvention schreibt sich z.B. die Definition des kovarianten Vektors in (5.1.6) in der kompakten Form

$$x_\nu = g_{\nu\mu} x^\mu. \quad (5.1.8)$$

Dabei bezeichnet $g_{\nu\mu}$ den **Metrischen Tensor**, das ist die 4×4 Matrix, die in (5.1.6) explizit angegeben ist mit den Diagonalelementen 1 für $\mu = \nu = 0$, -1 für $\mu = \nu \in (1, 2, 3)$ und dem Wert 0 in allen nichtdiagonalen Elementen. In (5.1.8) ist der Zeilenindex ν von g identisch mit dem Zeilenindex von x_ν und der Spaltenindex μ läuft parallel zum Zeilenindex von x^μ von 0 bis 3. Durch die Positionierung der Indices wird angedeutet, daß durch Anwendung von $g_{\nu\mu}$ auf x^μ der obere Index des kontravarianten Vektors x^μ in die unteren Indices des kovarianten Vektors x_ν "umgewandelt" wird.

Als Standardbeispiel für eine **Lorentztransformation** zwischen 2 Koordinatensystemen betrachten wir den Fall, daß das Koordinatensystem, in dem die Koordinaten mit \tilde{x}^μ angegeben werden sich relativ zu dem Koordinatensystem mit den Koordinatenbezeichnungen x^μ mit einer Geschwindigkeit v in Richtung der x-Achse bewegen soll. Dabei sollen zum Zeitpunkt $t = \tilde{t} = 0$ die Koordinatenursprünge am gleichen Ort sein und auch die 3 Achsen der beiden Systeme jeweils parallel orientiert sein. Diese Lorentztransformation ist durch eine 4×4 Transformationsmatrix gegeben gemäß

$$\tilde{x}^\mu = c^\mu_\nu x^\nu$$

mit der expliziten Darstellung

$$c^\mu_\nu \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.1.9)$$

Dabei wurden die Abkürzungen benutzt:

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{v}{c} \\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned} \quad (5.1.10)$$

Wie sieht nun die entsprechende Transformationsmatrix für die zugehörigen kovarianten Vektoren aus? Dazu berechnen wir:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_\alpha &= g_{\alpha\mu} x^\mu \\ &= g_{\alpha\mu} c^\mu_\nu x^\nu \\ &= g_{\alpha\mu} c^\mu_\nu g^{\nu\beta} x_\beta \\ &= c_\alpha^\beta x_\beta \end{aligned} \quad (5.1.11)$$

Aus den beiden letzten Zeilen erhalten wir also die Definition der Transformationsmatrix

$$\begin{aligned}
c_\alpha^\beta &= g_{\alpha\mu} c_\nu^\mu g^{\nu\beta} \\
\Leftrightarrow &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.1.12}
\end{aligned}$$

Die kontravarianten und kovarianten Vierervektoren sind durch ihr Transformationsverhalten unter einer Lorentztransformation bestimmt und transformieren sich in dem Spezialfall der von uns behandelten Koordinatentransformation wie in (5.1.9) beziehungsweise (5.1.12) angegeben. Dies gilt nicht nur für die Koordinatenvektoren x^μ beziehungsweise x_ν sondern auch für andere Größen, A^μ , die sich zu einem Vierervektor zusammenfassen lassen. Dies ist eine konsistente Erweiterung zum Fall der 3-dimensionalen Ortsvektoren: Auch hier bilden z.B. die drei kartesischen Komponenten eines elektrischen Feldes einen Vektor, \vec{E} , da sich diese Komponenten etwa bei einer Rotation des Koordinatensystems genau so transformieren wie die drei kartesischen Komponenten eines Ortsvektors \vec{r} .

Seien nun c_ν^μ beziehungsweise c_μ^ν die Transformationsmatrizen einer Lorentztransformation für kontravariante, beziehungsweise kovariante Vierervektoren. Da das Skalarprodukt invariant unter dieser Lorentztransformation sein soll, muß für einen beliebigen Vierervektor gelten

$$\tilde{A}^\alpha \tilde{A}_\alpha = c_\beta^\alpha c_\alpha^\gamma A^\beta A_\gamma = A^\beta A_\beta$$

Damit ist also

$$c_\beta^\alpha c_\alpha^\gamma = g_\beta^\gamma \tag{5.1.13}$$

die Einheitsmatrix. Beachte, daß durch "Anheben" des Indexes γ aus dem Metrischen Tensor $g_{\beta\gamma}$ die Einheitsmatrix wird, gemäß

$$g_\beta^\gamma = g_{\beta\mu} g^{\mu\gamma}.$$

Die Gleichung (5.1.13) sagt also aus, daß die Matrix der Transformation der kovarianten Vektoren c_α^γ gerade die Umkehrtransformation der Transformation der kontravarianten Vektoren ist in dem Sinne, daß

$$A^\gamma = c_\alpha^\gamma \tilde{A}^\alpha. \tag{5.1.14}$$

Damit betrachten wir nun die Ableitung einer Größe Φ , die von den Koordinaten x^μ beziehungsweise im alternativen Bezugssystem \tilde{x}^α abhängt. Es gilt

$$\frac{d\Phi}{d\tilde{x}^\alpha} = \frac{d\Phi}{dx^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tilde{x}^\alpha} = \frac{d\Phi}{dx^\mu} \frac{d}{d\tilde{x}^\alpha} (c_\beta^\mu \tilde{x}^\beta),$$

wobei wir gemäß der Summenkonvention über β summieren und in der zweiten Gleichung die Transformationsgleichung (5.1.14) für x^μ benutzt haben. Berücksichtigen wir nun, daß

$$\frac{d\tilde{x}^\beta}{d\tilde{x}^\alpha} = \delta_{\alpha\beta}$$

ist so ergibt sich daraus

$$\frac{d\Phi}{d\tilde{x}^\alpha} = c_\alpha^\mu \frac{d\Phi}{dx^\mu}$$

Der Vergleich mit (5.1.11) zeigt also, daß die Ableitungen

$$\partial_\mu := \frac{d}{dx^\mu} \quad (5.1.15)$$

nach den kontravarianten Koordinaten x^μ einen Vierevektor bilden, der sich unter einer Lorentztransformation wie ein kovarianter Vierervektor transformiert. Deshalb wird auch in der Definitionsgleichung des Ableitungsoperators ∂_μ in (5.1.15) ein unterer Index benutzt. Entsprechend gilt, daß

$$\partial^\mu := \frac{d}{dx_\mu}$$

einen kontravarianten Vierevektor definiert. Daraus ergeben sich einige interessante Konsequenzen:

- Da die vier Operatoren ∂^μ aus (5.1.15) zu einem kontravarianten Vektor zusammengefaßt sind, gilt dies natürlich auch für den Operator $p^\mu = i\hbar\partial^\mu$, da ja ∂^μ nur mit den Konstanten $i = \sqrt{-1}$ und \hbar multipliziert worden ist. Die raumartigen Komponenten dieses Vierevektors entsprechen gerade den kartesischen Komponenten des Impulsoperators in der Ortsdarstellung der Quantenmechanik (deshalb auch die Bezeichnung p^μ). Insgesamt erhalten wir für den Vierevektor

$$\begin{aligned} p^\mu = i\hbar\partial^\mu &= i\hbar \begin{pmatrix} \frac{d}{dct} \\ \frac{d(-x)}{d} \\ \frac{d(-y)}{d} \\ \frac{d(-z)}{d} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} i\hbar \frac{d}{dct} \\ \hbar \nabla \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Das Produkt des kontravarianten Vektors ∂^μ mit dem kovarianten Vektor ∂_μ ergibt einen Skalar

$$\partial_\mu\partial^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{d^2}{d^2t} - \Delta = -\square.$$

Man sieht also das der in (4.3.56) definierte d'Alembert Operator \square bis auf das Vorzeichen diesem Skalarprodukt entspricht. Damit ist also auch \square ein skalarer

Operator, der in jedem Lorentztransformierten Koordinatensystem das gleiche Ergebnis ergibt.

- Gilt schließlich, daß die Anwendung des Vierervektors ∂_μ auf ein Tupel von vier Funktionen $A^\mu(\vec{r}, t)$ in der Form

$$\partial_0 A^0 + \partial_1 A^1 + \partial_2 A^2 + \partial_3 A^3 = \partial_\mu A^\mu = \text{Skalar} \quad (5.1.16)$$

als Ergebnis eine skalare Größe gibt, die also unabhängig von einer Lorentztransformation des Koordinatensystems ist, so bilden auch die A^μ einen kontravarianten Vierervektor

Als eine besonders interessante Anwendung betrachten wir den Tuppel J^μ aus den vier Feldern

$$\begin{aligned} J^0(\vec{r}, t) &= c\rho(\vec{r}, t) & (5.1.17) \\ J^1(\vec{r}, t) &= j_x(\vec{r}, t), & J^2(\vec{r}, t) = j_y(\vec{r}, t), & J^3(\vec{r}, t) = j_z(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

J^0 entspricht also bis auf dem Faktor c gerade der Ladungsdichte eines Systems, während die Komponenten J^1, J^2, J^3 mit den kartesischen Komponenten der zugehörigen Stromdichte \vec{j} identifiziert werden. Berechnen wir damit

$$\begin{aligned} \partial_\mu J^\mu &= \frac{d}{dct} c\rho + \frac{d}{dx} j_x + \frac{d}{dy} j_y + \frac{d}{dz} j_z \\ &= \frac{d}{dt} \rho + \text{div} \vec{j} = 0 \end{aligned} \quad (5.1.18)$$

Wegen der Kontinuitätsgleichung (1.2.21) ergibt sich in der letzten Zeile das Ergebnis 0, was natürlich ein Lorentzskalar ist. Damit ist also gezeigt, daß J^μ , so wie in (5.1.17) definiert, in der Tat ein kontravarianter Vektor ist. Dabei hat natürlich die zeitartige Komponente J^0 , gleich der Ladungsdichte multipliziert mit der Lichtgeschwindigkeit, die gleiche physikalische Dimension wie die raumartigen Komponente von J^μ , der Stromdichte.

5.2 Kovarianz der Maxwellgleichungen

Wie ändern sich elektrische und magnetische Felder, wenn wir sie aus verschiedenen Koordinatensystemen betrachten. Als Beispiel stellen wir uns vor, daß wir eine zeitlich konstante Ladungsverteilung vorliegen haben. Wir haben also den Fall der Elektrostatik und beobachten ausschließlich ein elektrisches Feld; das Magnetfeld ist in diesem Fall identisch null. Betrachtet man die gleiche Ladungsverteilung aus einem Koordinatensystem, das sich relativ zu der Ladungsverteilung bewegt, so beobachtet man in diesem Koordinatensystem eine Ladungsverteilung, die ihre Position mit der Zeit ändert und natürlich auch einen Strom. Die Transformation einer Ladungsverteilung in einem Koordinatensystem in eine Ladungs- und Stromverteilung aus der Sicht des dazu bewegten Koordinatensystems wird mit Hilfe der Lorentztransformation beschrieben

$$\tilde{J}^\mu = c^\mu{}_\nu J^\nu$$

da ja Ladungs- und Stromdichte über die Definition (5.1.17) zu einem kontravarianten Vierervektor zusammengefaßt sind. Ist also in dem einen Koordinatensystem nur $J^0 = c\rho$ von Null verschieden, so ergibt sich eben für das dazu in x -Richtung bewegte Koordinatensystem (wir betrachten also wieder die Beispiel Lorentztransformation aus (5.1.9)):

$$\begin{aligned}\tilde{J}^0 &= c\tilde{\rho} = \gamma J^0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} c\rho \\ \tilde{J}^1 &= \tilde{j}_x = -\beta\gamma J^0 = \frac{-v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \rho\end{aligned}\quad (5.2.19)$$

Der Beobachter mit dem Koordinatensystem \tilde{x} beobachtet also auch einen Strom in x -Richtung \tilde{j}_x . Damit verknüpft erwartet man aber natürlich auch ein Magnetfeld. Die Situation, die für den ersten Beobachter ausschließlich zu einem elektrischen Feld führt, ergibt für den zweiten Beobachter ein elektrisches Feld und ein Magnetfeld. Es erhebt sich die Frage: Wie können elektrische und magnetische Felder zwischen verschiedenen Koordinatensystemen transformiert werden?

Bevor wir diese Frage beantworten, betrachten wir zunächst einmal die Potentiale Φ und \vec{A} , aus denen man ja nach (3.3.19) und (3.3.20) die elektromagnetischen Felder \vec{E} und \vec{B} berechnen kann. Nehmen wir weiterhin an, daß die Potentiale in der Lorentzzeitung vorliegen, so gilt ja

$$0 = \frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \partial_\mu A^\mu \quad (5.2.20)$$

Dabei gilt die zweite Gleichung wenn wir definieren

$$A^\mu \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \Phi \\ \vec{A} \end{pmatrix} \quad (5.2.21)$$

also die nullte Komponente von A^0 mit Φ und die raumartigen mit \vec{A} identifizieren. Da die linke Seite der Gleichung (5.2.20), 0, sicher ein Lorentzskalar ist, gilt also wegen (5.1.16), daß der Potentialvektor A^μ ein kontravarianter Vierervektor ist. Die Gleichung (5.2.20) beweist dies aber zunächst nur für die Potentiale in der Lorentzzeichnung. Daß diese Eigenschaft aber auch für andere Eichungen gilt, sieht man, wenn man die Gleichungen für eine Umeichung (3.3.24) in die relativistische Formulierung umschreibt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Phi' \\ \vec{A}' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \Phi \\ \vec{A} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \frac{d\Lambda}{dt} \\ -\nabla\Lambda \end{pmatrix} \\ (A')^\mu &= A^\mu - \partial^\mu \Lambda \end{aligned} \quad (5.2.22)$$

Dabei steht Λ für das skalare Feld, das die Umeichung definiert. $\partial^\mu \Lambda$ ist ein kontravarianter Vektor. Ist also A^μ ein kontravarianter Vektor, etwa die Potentiale in der Lorentzzeichnung, so ist, wie in der zweiten Zeile von (5.2.22) deutlich wird, auch $(A')^\mu$ ein kontravarianter Vektor gebildet aus den Potentialen in anderer Eichung.

Mit diesen Potentialvektoren definieren wir den **antisymmetrischen Feldstärketensor**

$$F^{\alpha\beta} := \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha. \quad (5.2.23)$$

Man kann diese Ausdrücke $F^{\alpha\beta}$ in einer 4×4 Matrix darstellen, wobei der erste Index die Zeile und der zweite die Spalte (jeweils gezählt von 0 bis 3) bezeichnen soll. Diese Matrix ist antisymmetrisch, da, wie aus der Definition sofort ersichtlich ist, gilt

$$F^{\beta\alpha} = -F^{\alpha\beta} \quad (5.2.24)$$

Die Matrixelemente, die durch Vertauschen von Zeilen- und Spaltenindex miteinander verknüpft sind, unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen. Damit müssen die Elemente in der Diagonalen identisch Null sein, $F^{\alpha\alpha} = 0$. Der antisymmetrische Feldstärketensor enthält also insgesamt 6 unabhängige Einträge.

Unter einer Lorentztransformation werden die beiden Vektoren ∂^α und A^β , die die ja $F^{\alpha\beta}$ definieren, gemäß (5.1.4) wie kontravariante Vektoren transformiert. Insgesamt gilt also für $F^{\alpha\beta}$

$$\begin{aligned} \tilde{F}^{\mu\nu} &= \tilde{\partial}^\mu \tilde{A}^\nu - \tilde{\partial}^\nu \tilde{A}^\mu \\ &= c^\mu_\alpha c^\nu_\beta (\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha) \\ &= c^\mu_\alpha c^\nu_\beta F^{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (5.2.25)$$

man sagt, daß sich $F^{\alpha\beta}$ unter einer Lorentztransformation wie ein Tensor zweiter Stufe transformiert. Vierervektoren wären in dieser Nomenklatur Tensoren erster Stufe. Dieses Transformationsverhalten erklärt auch den Namen Feldstärketensor für $F^{\alpha\beta}$.

Wie sehen die einzelnen Einträge in dieser 4×4 Matrix $F^{\alpha\beta}$ aus? Als erstes Beispiel berechnen wir

$$F^{01} = \partial^0 A^1 - \partial^1 A^0$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{d}{dct} A_x - \frac{d}{d(-x)} \Phi \\
&= -E_x
\end{aligned}$$

wobei wir (3.3.20) benutzt haben. Das Element des Feldstärketensors in der ersten Zeile und zweiten Spalte, F^{01} , entspricht also dem negativen Wert der x-Komponente des elektrischen Feldes. Wegen (5.2.24) ist dann $F^{10} = E_x$. Ganz analog läßt sich leicht zeigen

$$F^{20} = E_y \quad \text{und} \quad F^{30} = E_z$$

Als zweites Beispiel betrachten wir

$$\begin{aligned}
F^{23} &= \partial^2 A^3 - \partial^3 A^2 \\
&= \frac{d}{(-y)} A_z - \frac{d}{d(-z)} A_y \\
&= -B_x
\end{aligned}$$

und ganz analog

$$F^{13} = B_y \quad \text{und} \quad F^{12} = -B_z$$

Insgesamt ergibt sich also

$$F^{\alpha\beta} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (5.2.26)$$

Die kartesischen Komponenten der elektrischen und magnetischen Felder transformieren sich also unter einer Lorentztransformation wie die Komponenten eines Tensors zweiter Stufe nach (5.2.25).

Als Beispiel betrachten wir die Lorentztransformation für die Bewegung des Koordinatensystems in x -Richtung mit der Geschwindigkeit v aus (5.1.9). Damit berechnet sich z.B. die y -Komponente des elektrischen Feldes im bewegten System

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_y = \tilde{F}^{20} &= c^2 c^0_\alpha c^0_\mu F^{\alpha\mu} = c^0_\mu F^{2\mu} \\
&= \gamma F^{20} - \beta\gamma F^{21} = \gamma E_y - \beta\gamma B_z.
\end{aligned}$$

Zur weiteren Betrachtung ist es hilfreich die **Jacobi Identität** zu formulieren und zu beweisen. Bezeichnen α, β und γ wie üblich Indices im 4-dimensionalen Minkowski-raum, so gilt für den Feldstärketensor $F^{\beta\gamma}$ die Jacobi Identität

$$\partial^\alpha F^{\beta\gamma} + \partial^\beta F^{\gamma\alpha} + \partial^\gamma F^{\alpha\beta} = 0 \quad (5.2.27)$$

Der Beweis dieser Identität ergibt sich sehr einfach durch Einsetzen der Definition (5.2.23) für $F^{\alpha\beta}$.

Damit können wir uns der Formulierung der Maxwellgleichungen in der Nomenklatur des Feldstärketensors zuwenden. Zunächst die homogenen Maxwellgleichungen wie

$$\begin{aligned}
 0 &= \operatorname{div} \vec{B} \\
 &= \frac{d}{dx} B_x + \frac{d}{dy} B_y + \frac{d}{dz} B_z \\
 &= \partial_1 F^{32} + \partial_2 F^{13} + \partial_3 F^{21} \\
 &= -\partial^1 F^{32} - \partial^2 F^{13} - \partial^3 F^{21} \\
 &= \partial^1 F^{23} + \partial^2 F^{31} + \partial^3 F^{21} .
 \end{aligned}$$

Damit ist also diese Maxwellgleichung identisch mit der Jacobi Identität für $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 2, 3)$. Auch die x -Komponente der zweiten homogenen Maxwellgleichung

$$\begin{aligned}
 0 &= \left(\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{d}{dct} \vec{B} \right)_x \\
 &= \partial_2 F^{30} - \partial_3 F^{20} + \partial_0 F^{32} \\
 &= \partial^2 F^{03} + \partial^3 F^{20} + \partial^0 F^{32} ,
 \end{aligned}$$

ist eine Jacobi Identität, hier für die Indices $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 3, 2)$. Entsprechendes gilt für die beiden anderen kartesischen Komponenten dieser Maxwellgleichung. Auf dem ersten Blick scheinen also die homogenen Maxwellgleichungen eine rein mathematische Folge der Jacobi Identität, also ohne jeden physikalischen Informationsgehalt zu sein. Dies ist aber natürlich nicht richtig. Die homogenen Maxwellgleichungen haben uns ja erst dazu gebracht, daß wir die elektromagnetischen Felder über die Potentiale definieren konnten. Aus den homogenen Maxwellgleichungen folgte also die Darstellung der elektromagnetischen Felder als Elemente des Feldstärketensors. Die Umschreibung der homogenen Maxwellgleichungen in Form von Jacobi Identitäten sind also lediglich ein Beleg für die Konsistenz.

Bleiben also noch die inhomogenen Maxwellgleichungen. Als erste betrachten wir

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \vec{E} &= 4\pi \rho \\
 \partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} + \underbrace{\partial_0 F^{00}}_{=0} &= \frac{4\pi}{c} \underbrace{c\rho}_{=J^0} \\
 \partial_\mu F^{\mu 0} &= \frac{4\pi}{c} J^0 .
 \end{aligned} \tag{5.2.28}$$

Danach explizit die x -Komponente der zweiten inhomogenen Maxwellgleichung

$$\begin{aligned}
 \left(\operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \vec{E} \right)_x &= \frac{4\pi}{c} j_x \\
 \partial_2 B_z - \partial_3 B_y - \partial_0 E_x &= \partial_2 F^{21} - \partial_3 F^{13} - \partial_0 F^{10}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} + \partial_0 F^{01} + \underbrace{\partial_1 F^{11}}_{=0} &= \frac{4\pi}{c} j_x \\ \partial_\mu F^{\mu 1} &= \frac{4\pi}{c} J^1. \end{aligned} \quad (5.2.29)$$

Entsprechende Beziehungen gelten für die y und z -Komponenten. Die inhomogenen Maxwellgleichungen in der Form (5.2.28) und (5.2.29) können also zusammengefaßt werden zu

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\alpha} = \frac{4\pi}{c} J^\alpha.} \quad (5.2.30)$$

Diese Darstellung der inhomogenen Maxwellgleichung ist nicht nur sehr kompakt und damit sehr elegant. Sie zeigt auch, daß die Maxwellgleichungen bei einer Lorentztransformation ihre Form bewahren. Die linke wie die rechte Seite der Gleichung transformieren sich ja wie die Komponenten eines Lorentzvektors.

5.3 Ladungen im elektromagnetischen Feld

In diesem Abschnitt sollen die Bewegungsgleichungen für Punktladungen, die sich in einem elektromagnetischen Feld bewegen, untersucht werden. Dabei beginnen wir in der klassischen, nichtrelativistischen Mechanik. Die Kraft auf eine Punktladung q am Ort \vec{r} mit der Geschwindigkeit \vec{v} setzt sich zusammen aus der Coulomb-Kraft des elektrischen Feldes \vec{E} an diesem Ort \vec{r} und dem Beitrag der geschwindigkeitsabhängigen Lorentzkraft

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} \right) \quad (5.3.31)$$

Ersetzt man die elektromagnetischen Felder durch die sie definierenden Potentiale ergibt sich

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -q \vec{\nabla} \Phi - \frac{q}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{q}{c} \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \\ &= -q \vec{\nabla} \Phi - \frac{q}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{q}{c} (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + \frac{q}{c} \vec{\nabla} (\vec{v} \cdot \vec{A}) \end{aligned}$$

Hier und im folgenden müssen wir zwischen partiellen Ableitungen (dargestellt durch ∂) und totalen Ableitungen unterscheiden. So steht in dieser Gleichung die partielle Ableitung des Vektorpotentials \vec{A} nach der Zeit, womit lediglich die explizite Zeitabhängigkeit von $\vec{A}(\vec{r}, t)$ bei der Zeitableitung berücksichtigt wird. Bei der totalen Ableitung $d\vec{A}/dt$ wird hingegen auch berücksichtigt, daß sich die betrachtete Ladung mit der Zeit bewegt. Damit ist also auch das Argument des Ortsvektors der Ladung, \vec{r} , in \vec{A} zeitabhängig. Zur weiteren Verdeutlichung schreiben wir explizit die x -Komponente der Kraft

$$\begin{aligned} F_x &= -q \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{q}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{q}{c} \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) A_x + \frac{q}{c} \frac{\partial}{\partial x} (\vec{v} \cdot \vec{A}) \\ &= -q \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{q}{c} \frac{dA_x}{dt} + \frac{q}{c} \frac{\partial}{\partial x} (\vec{v} \cdot \vec{A}) \end{aligned} \quad (5.3.32)$$

Definiert man also ein geschwindigkeitsabhängiges Potential in der Form

$$U(\vec{r}, \vec{v}, t) = q \left(\Phi(\vec{r}, t) - \frac{1}{c} \vec{v} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) \right) \quad (5.3.33)$$

und berechnet nach den Gesetzen der Mechanik die generalisierte Kraft für die generalisierte Koordinate $q_i = x$ und $dq_i/dt = v_x$ als

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial v_x}$$

so ist diese Kraftkomponente gerade mit der Darstellung von F_x in (5.3.32) identisch. Entsprechendes gilt natürlich auch für die anderen Komponenten F_y und F_z . Die Bewegung eines Massenpunktes, Masse m , mit einer Ladung q in einem elektromagnetischen

Feld kann also im Rahmen der nichtrelativistischen Mechanik beschrieben werden durch die Lagrangefunktion

$$L(\vec{r}, \vec{v}, t) = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 - U(\vec{r}, \vec{v}, t) \quad (5.3.34)$$

mit dem geschwindigkeitsabhängigen Potential $U(\vec{r}, \vec{v}, t)$ aus (5.3.33).

Wie muß dieses Verfahren erweitert werden, um die Kinematik der Relativitätstheorie zu berücksichtigen? Im ersten Schritt dahin, definieren wir zunächst einen Geschwindigkeitsvektor, der sich wie ein kontravarianter Vierervektor unter einer Lorentztransformation verhält. Die naive Definition

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{dt} = c \frac{dx^\mu}{dx^0} = \partial_0 x^\mu \quad (5.3.35)$$

eignet sich dazu nicht, da ja auch die Größe nach der abgeleitet wird, die Zeit t , sich bei einer Lorentztransformation ändert. Die in (5.3.35) definierte Geschwindigkeit v^μ besitzt also eigentlich zwei Indices, μ und 0, verhält sich also bei einer Lorentztransformation, wie 4 Komponenten eines Tensors zweiter Stufe.

Zur Definition eines Vierervektors Geschwindigkeit benötigt man also eine zeitartige Größe, die ein Lorentzskalar ist. Kandidat für diese zeitartige Größe ist die **Eigenzeit**

$$\tau := \frac{1}{c} \sqrt{r^\mu r_\mu} = \frac{1}{c} \sqrt{c^2 t^2 - \vec{r}^2} \quad (5.3.36)$$

wobei r^μ , beziehungsweise t und \vec{r} , der Relativvektor zwischen zwei Raumzeitpunkten a und b ist, $r^\mu = r_b^\mu - r_a^\mu$. Die so definierte Eigenzeit besitzt, wie man sich leicht überlegen kann, die folgenden Eigenschaften:

- Die Eigenzeit τ ist ein Lorentzskalar
- Die Eigenzeit τ ist die Zeit, die in dem Koordinatensystem gemessen wird, daß sich mit dem Ereignis mitbewegt, so daß $\vec{r} = \vec{r}_b - \vec{r}_a = 0$. Daher auch der Name Eigenzeit.
- τ ist reell für alle zeitartigen Prozesse mit $c^2 t^2 \geq \vec{r}^2$. Die Eigenzeit, und damit auch die Geschwindigkeit $dr^\mu/d\tau$ wird imaginär, wenn man den Relativvektor zwischen 2 raumartigen Punkten betrachtet. Dies reflektiert die Eigenschaft, daß sich 2 raumartige Punkte nicht gegenseitig beeinflussen können, da dies einen Informationsaustausch erfordert, der mit einer Geschwindigkeit größer als Lichtgeschwindigkeit erfolgen müsste.

Während also in dem mit dem Ereignis mitbewegten Koordinatensystem für den Relativvektor zweier Ereignispunkt a und b , die Eigenzeit τ gemessen wird und die raumartigen Koordinaten des Ereignisses stets 0 sind, wird in einem anderen Koordinatensystem, das sich mit der Geschwindigkeit v relativ zum Eigensystem bewegt (z.B. in

x -Richtung) die Zeit

$$t = \gamma\tau - \frac{1}{c}\beta\gamma 0 = \gamma\tau = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\tau \quad (5.3.37)$$

gemessen (Vergleiche dazu etwa die Lorentztransformation (5.1.9)). Die Zeit im mitbewegten Koordinatensystem τ ist also um den Faktor $1/\gamma$ kürzer als die in dem nicht mitbewegten System t .¹

Mit dieser Eigenzeit τ kann man nun einen kontravarianten Geschwindigkeitsvektor definieren

$$u^\mu := \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (5.3.38)$$

In dem mit Geschwindigkeit v zum Ereignis bewegten Koordinatensystem haben wir also (siehe (5.3.37))

$$\begin{aligned} u^0 &= \frac{dct}{d\tau} = \gamma c \\ u^1 &= \frac{dx}{d\tau} = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma v_x \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich also

$$u^\mu \Leftrightarrow \gamma \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix}. \quad (5.3.39)$$

Weiter stellt sich die Frage, wie sieht die relativistische Lagrangefunktion für ein freies Teilchen aus? Dazu ist es hilfreich zu wissen, welches Transformationsverhalten die Lagrangefunktion besitzen sollte. Zur Beantwortung dieser Frage erinnern wir uns an die Mechanik, wo ja die Bewegungsgleichungen aus dem Hamiltonschen Prinzip hergeleitet wurden. Das Hamiltonsche Prinzip besagte aber, daß der Weg zurückgelegt wird, auf dem das Wirkungsintegral

$$\int_{t_a}^{t_b} L dt = \int_{\tau_a}^{\tau_b} L \gamma d\tau$$

einen minimalen Wert ergibt. Dieses Variationsprinzip muss natürlich invariant unter einer Lorentztransformation sein, der Integrand also ein Lorentzskalar sein. Da $d\tau$ ein Lorentzskalar ist folgt also aus der obigen Gleichung, daß auch γL ein Lorentzskalar sein sollte.

Wir werden uns nun davon überzeugen, daß

$$L_{\text{frei}} = -m c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (5.3.40)$$

¹Dies führt ja auch zu dem bekannten Zwillingparadoxon, nach dem einer der Zwillinge, der sich mit großer Geschwindigkeit auf eine Reise begibt und dann wieder zurückkehrt, für diese Reise mit seiner mitgeführten Uhr eine kürzere Zeit misst als der andere Zwilling, der sich nicht mitbewegt hat. Der reisende Zwilling altert also weniger als der zu Hause gebliebene.

die Lagrangefunktion für ein freies Teilchen der Masse m mit der Geschwindigkeit \vec{v} in relativistische Kinematik ist. Man sieht sofort, daß $\gamma L_{\text{frei}} = -mc^2$ ein Skalar ist. Andererseits ist der generalisierte Impuls gegeben durch

$$\frac{\partial L_{\text{frei}}}{\partial v_i} = -mc^2 \frac{-v_i}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m\gamma v_i = mu^i = p_{\text{frei}}^i \quad (5.3.41)$$

entspricht also gerade den raumartigen Komponenten der Vierergeschwindigkeit u^μ multipliziert mit der Ruhemasse m des Teilchens. Dies ist aber gerade der relativistische Impuls. Die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen besagen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_{\text{frei}}}{\partial v_i} = \frac{d}{dt} mu^i = \frac{\partial L_{\text{frei}}}{\partial x_i} = 0,$$

was bedeutet, daß der relativistische Impuls eine Konstante der Bewegung ist. Das ist aber genau das Verhalten, das durch die relativistische Lagrangefunktion gegeben sein sollte.

Die Lagrangefunktion für ein Teilchen mit der Masse m und der Ladung q in einem elektromagnetischen Feld ergibt sich dann als Differenz zwischen der kinetischen Energien, bzw. der Lagrangefunktion des freien Teilchens und dem verallgemeinerten Potential U aus (5.3.33) zu

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - q \left(\Phi(\vec{r}, t) - \frac{1}{c} \vec{v} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) \right) \quad (5.3.42)$$

Zur Kontrolle wollen wir verifizieren, daß auch $-\gamma U$ ein Lorentzskalar ist, sodaß damit auch γL ein Lorentzskalar ist:

$$\begin{aligned} -\gamma U &= -\frac{q}{c} \underbrace{\gamma c}_{u_0} \underbrace{\Phi}_{A^0} + \frac{q}{c} \gamma \vec{v} \cdot \vec{A} \\ &= -\frac{q}{c} u_\mu A^\mu \end{aligned}$$

γU ist also bis auf den Faktor q/c das Produkt aus dem kovarianten Geschwindigkeitsvektor u_μ und dem kontravarianten Potentialvektor A^μ , damit also ein Skalar.

Die kartesischen Komponenten des verallgemeinerten Impulses ergeben sich damit zu

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial v_i} = m\gamma v_i + \frac{q}{c} A_i \quad (5.3.43)$$

beziehungsweise

$$\vec{p} = \vec{p}_{\text{frei}} + \frac{q}{c} \vec{A}. \quad (5.3.44)$$

Ausgehend von (5.3.43) stellen wir nun die kartesischen Komponenten der Geschwindigkeit v_i durch die Komponenten des generalisierten Impulse p_i dar

$$\begin{aligned}
 mv_i &= \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left(p_i - \frac{q}{c} A_i \right) \\
 m^2 v_i^2 c^2 &= (c^2 - v^2) \left[p_i - \frac{q}{c} A_i \right]^2 \\
 m^2 v^2 c^2 &= (c^2 - v^2) \left[\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \right]^2 \\
 v^2 &= \frac{c^2}{m^2 c^2 + \left[\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \right]^2} \left[\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \right]^2
 \end{aligned} \tag{5.3.45}$$

Mit

$$v_i = \frac{c}{\sqrt{m^2 c^2 + \left[\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \right]^2}} \left(p_i - \frac{q}{c} A_i \right) \tag{5.3.46}$$

wird sowohl die erste als auch die letzte Gleichung von (5.3.45) richtig aufgelöst. Damit können wir die Hamiltonfunktion berechnen

$$\begin{aligned}
 H(\vec{p}, \vec{r}) &= \vec{p} \cdot \vec{v} - L \\
 &= \frac{c}{\sqrt{m^2 c^2 + \left[\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \right]^2}} \left\{ \vec{p} \cdot \vec{p} - \frac{q}{c} \vec{p} \cdot \vec{A} \right\} + mc^2 \sqrt{1 - \frac{\left(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2}{m^2 c^2 + \left[\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \right]^2}} \\
 &\quad - \frac{q}{c} \frac{c}{\sqrt{m^2 c^2 + \left[\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \right]^2}} \left(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \right) \cdot \vec{A} + q\Phi \\
 &= c \sqrt{m^2 c^2 + \left[\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \right]^2} + q\Phi
 \end{aligned} \tag{5.3.47}$$

Identifizieren wir den Wert der Hamiltonfunktion mit der Energie E so können wir diesen letzten Ausdruck umschreiben in

$$\begin{aligned}
 m^2 c^2 &= \left(\frac{E}{c} - \frac{q}{c} \Phi \right)^2 - \left(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2 \\
 &= \tilde{p}_\mu \tilde{p}^\mu
 \end{aligned} \tag{5.3.48}$$

Die linke Seite der ersten Gleichung ist definitiv ein Lorentzskalar und wir können auch leicht die rechte Seite als ein Skalarprodukt eines kovarianten Vektors \tilde{p}_μ mit seinem kontravarianten Partner identifizieren mit

$$\tilde{p}^\mu \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} \frac{E}{c} - \frac{q}{c} \Phi \\ \vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \end{array} \right). \tag{5.3.49}$$

Die raumartige Komponente entspricht gerade dem freien Impuls (p_{frei} , siehe (5.3.44)) mit der Ergänzung der zeitartigen Komponente $E/c - q\Phi/c$. Im Grenzfall des freien Teilchens (Φ und \vec{A} gleich 0), reduziert sich dieser Vierervektor auf den Impuls in den raumartigen Komponenten und der Energie dividiert durch die Lichtgeschwindigkeit in der zeitartigen Komponente. Aus (5.3.48) ergibt sich dann die berühmte Energie-Impulsbeziehung für das freie Teilchen

$$\boxed{E^2 = m^2 c^4 + c^2 \vec{p}^2} . \quad (5.3.50)$$

Außerdem sehen wir, daß die Energie beziehungsweise der Wert der Hamiltonfunktion dividiert durch die Lichtgeschwindigkeit als nullte Komponente zusammen mit dem Impuls als raumartige Komponente einen kontravarianten Vierervektor bilden.

Zum Abschluß wollen wir ausgehend von der relativistischen Form der Hamiltonfunktion in (5.3.47) den nichtrelativistischen Grenzfall für die Hamiltonfunktion bestimmen. Wir entwickeln dazu die Wurzel

$$mc^2 \sqrt{1 + \frac{[\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}]^2}{m^2 c^2}} = mc^2 \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{[\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}]^2}{m^2 c^2} + \dots \right\}$$

Die Terme höherer Ordnung sind im nichtrelativistischen Grenzfall $|\vec{p} - q/c\vec{A}| \ll mc$ vernachlässigbar. Setzt man diese Entwicklung in (5.3.47) ein und subtrahiert die Konstante mc^2 so erhalten wir die Hamiltonfunktion für den nichtrelativistischen Fall

$$H_{nr} = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}(\vec{r}, t) \right)^2 + q\Phi(\vec{r}, t) \quad (5.3.51)$$

Der Impuls ist also lediglich ergänzt durch Subtraktion von $q/c\vec{A}$ und als Potential wird allein $q\Phi$ addiert. Diese Darstellung wird auch als **minimale Substitution** bezeichnet. In der Ortsdarstellung der Quantenmechanik erhält man entsprechend den Hamiltonoperator dadurch, daß man ersetzt

$$\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}(\vec{r}, t) \Rightarrow \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A}(\vec{r}, t) .$$