

Inhaltsverzeichnis

I	Elektrodynamik und spezielle Relativitätstheorie	1
1	Empirische Grundlagen der Elektrodynamik	3
1.1	Relativistische Bewegungsgleichungen	4
1.2	Die homogenen MAXWELLSchen Gleichungen	7
	<i>Übungen</i>	11
1.3	Die inhomogenen MAXWELLSchen Gleichungen	16
1.4	Grundgleichungen der Elektrodynamik	18
1.5	Ladungs- und Stromdichte einer Punktladung	19
1.5.1	Distributionen im \mathbb{R}^n	20
2	Die kovariante Formulierung der MAXWELLSchen Gleichungen	23
2.1	Der MINKOWSKIraum	23
2.2	Der Feldstärketensor F	25
2.3	Die 4-dimensionale Form der Grundgleichungen der Elektrodynamik	26
2.4	LORENTZgruppe und POINCARÉgruppe	30
2.4.1	Transformationsgesetz für Tensorfelder	31
	<i>Übungen</i>	32
2.5	Operationen auf Tensorfeldern, die mit p^* vertauschen	36
2.5.1	Tensorprodukt	36
2.5.2	Permutation der Argumente	37
2.5.3	Kontraktion	37
2.5.4	Gradient ∇	38
2.5.5	Hochziehen eines Tensorindexes	39
2.5.6	Weitere invariante Operatoren	40
2.5.7	Nichtlineare invariante Operatoren	42
	<i>Übungen</i>	43
2.6	Relativistische Invarianz der elektrodynamischen Grundgleichungen	49
2.7	Passive LORENTZtransformationen: Koordinatenwechsel	53
	<i>Übungen</i>	56
2.8	LORENTZtransformationen, Bahnkurven und invariante Teilgebiete des MINKOWSKIraumes	59
2.9	Koordinatenwechsel und Feldstärketensor	61
	<i>Übungen</i>	63

2.10	Eine Bemerkung zu LORENTZtransformationen mit Zeitspiegelung . . .	67
3	Erhaltungsgrößen	69
3.1	Der Energie-Impuls-Tensor	74
	<i>Übungen</i>	80
4	NOETHERtheoreme und Prinzip der kleinsten Wirkung	86
4.1	Die elektromagnetischen Vektorpotentiale	86
	<i>Übungen</i>	88
4.2	Das Wirkungsfunktional der Elektrodynamik	90
5	Lösungen der MAXWELLSchen Gleichungen	98
5.1	Vektorpotentiale und Eichbedingungen	98
5.2	Die retardierten Potentiale	100
5.3	Die Vektorpotentiale einer bewegten Punktladung	106
5.4	Die Abstrahlung von Energie und Impuls durch eine beschleunigte Ladung	109
5.5	Die Strahlungsrückwirkung	115
	Literaturverzeichnis	119
	Verzeichnis der Übungen	120
	Index	121

TEIL I

ELEKTRODYNAMIK UND SPEZIELLE RELATIVITÄTSTHEORIE

1 Empirische Grundlagen der Elektrodynamik

Zur Notation

- $\langle x, y \rangle$ bezeichnet das Skalarprodukt zweier Vektoren im \mathbb{R}^3 .
- $[x, y]$ bezeichnet das Vektorprodukt zweier Vektoren im \mathbb{R}^3 .
- Für jede Funktion Φ auf \mathbb{R}^3 bezeichnet $\nabla\Phi$ den Vektor mit den Komponenten:

$$(\nabla\Phi)^i = \frac{\partial\Phi}{\partial x_i}$$

- Für jedes Vektorfeld B auf \mathbb{R}^3 ist $\operatorname{div} B$ die Funktion

$$\operatorname{div} B = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial B^i}{\partial x^i}$$

und $\operatorname{rot} B$ das Vektorfeld mit den Komponenten

$$(\operatorname{rot} B)^i = \sum_{l,k} \varepsilon^{ilk} \frac{\partial B^k}{\partial x^l}$$

mit

$$\varepsilon^{ilk} = \begin{cases} \varepsilon(\sigma), & \text{falls } (i, l, k) = (\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3)), \sigma \in S_3, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\varepsilon(\sigma)$ ist das Signum der Permutation σ

1.1 Relativistische Bewegungsgleichungen

In einem elektromagnetischen Feld wirkt auf einen geladenen Körper die LORENTZ-Kraft

$$K = q \left(E + \frac{1}{c} [\dot{x}(t), B] \right) \quad (1.1)$$

c ist die Lichtgeschwindigkeit,

q die Ladung des Körpers.

Das Vektorfeld E heißt elektrisches, das Vektorfeld B magnetisches Feld. E und B hängen von Ort und Zeit ab:

$$E = E(x, t); \quad B = B(x, t)$$

Die Bewegungsgleichung für den geladenen Körper lautet also

$$\frac{d}{dt}p = K. \quad (1.2)$$

Nach NEWTON ist $p = mv$, wobei m die Teilchenmasse ist. Für ein konstantes elektrisches Feld E allein folgt als Bewegungsgleichung somit

$$m\ddot{x} = qE. \quad (1.3)$$

Es ergibt sich sofort durch einfache Integration

$$\dot{x}(t) = \frac{q}{m}Et + v_0.$$

Somit gilt für $|\dot{x}(t)|$

$$|\dot{x}(t)| = \left| \frac{q}{m}Et + v_0 \right|.$$

Dies bedeutet, daß für große Zeiten die Geschwindigkeit beliebig groß wird. Der empirische Befund ergibt aber, daß alle Teilchengeschwindigkeiten stets kleiner als c sind. Nach EINSTEIN muß daher

$$p = mv / \left(1 - \frac{|v|^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.4)$$

gesetzt werden. Jetzt folgt aus der Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{m\dot{x}}{\left(1 - \frac{|\dot{x}|^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = qE \quad (1.5)$$

durch einfache Integration

$$\frac{\dot{x}/c}{\left(1 - \frac{|\dot{x}|^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{q}{mc}Et + \frac{v_0/c}{\left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = \lambda(t)$$

und damit

$$\dot{x}/c = \frac{\lambda(t)}{\left(1 + |\lambda(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Wie verlangt, ist jetzt $|\dot{x}| < c$ ($|\dot{x}| = c$ gilt nur für $t = \infty$).

Wir wollen uns davon überzeugen, daß dieses Resultat tatsächlich für ein allgemeines elektromagnetisches Feld gilt. Aus

$$\frac{d}{dt} \frac{m\dot{x}}{\left(1 - \frac{|\dot{x}|^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = q \left(E + \frac{1}{c} [\dot{x}, B] \right) \quad (1.6)$$

folgt durch Skalarproduktbildung

$$\left\langle \dot{x}, \frac{d}{dt} \frac{m\dot{x}}{\left(1 - \frac{|\dot{x}|^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \right\rangle = q \langle E, \dot{x} \rangle.$$

Die linke Seite ist gleich

$$\frac{d}{dt} \frac{mc^2}{\left(1 - \frac{|\dot{x}|^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}},$$

also

$$\frac{d}{dt} \frac{mc^2}{\left(1 - \frac{|\dot{x}|^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = q \langle E, \dot{x} \rangle. \quad (1.7)$$

Durch Integration ergibt sich

$$\frac{mc^2}{\left(1 - \frac{|\dot{x}(t)|^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{mc^2}{\left(1 - \frac{|v_0|^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} + \int_0^t d\tau q \langle E, \dot{x}(\tau) \rangle.$$

Die linke Seite wird für endliche Zeiten t nur für $|\dot{x}(t)| = c$ unendlich. Die rechte Seite kann nur unendlich werden, falls das E -Feld Singularitäten besitzt. Wird dies ausgeschlossen, so muß für endliche Zeiten $|\dot{x}(t)| < c$ gelten.

Offensichtlich stellt

$$q \int_0^t d\tau \langle E, \dot{x}(\tau) \rangle = \int_0^t d\tau \langle K, \dot{x}(\tau) \rangle$$

die geleistete Arbeit dar.

Um ein Teilchen auf Lichtgeschwindigkeit zu bringen, müßte somit eine unendliche Arbeit in endlicher Zeit geleistet werden, was physikalisch ausgeschlossen ist. Wir schließen hieraus, daß im allgemeinen elektromagnetischen Feld die Teilchengeschwindigkeiten tatsächlich kleiner als die Lichtgeschwindigkeit bleiben.

In der NEWTONSchen Theorie ist die geleistete Arbeit gleich der Änderung der kinetischen Energie:

$$\frac{m}{2} |\dot{x}(t)|^2 - \frac{m}{2} |v_0|^2 = \int_0^t d\tau \langle K, \dot{x}(\tau) \rangle$$

Wir haben stattdessen nun gefunden:

$$\frac{mc^2}{\left(1 - \frac{|\dot{x}(t)|^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{mc^2}{\left(1 - \frac{|v_0|^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = \int_0^t d\tau \langle K, \dot{x}(\tau) \rangle$$

Definieren wir die sogenannte relativistische kinetische Energie p^0 durch

$$p^0 := \frac{mc^2}{\left(1 - \frac{|\dot{x}|^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad (1.8)$$

so gilt nun analog zur NEWTONSchen Mechanik, daß die geleistete Arbeit gleich der Änderung der relativistischen kinetischen Energie ist.

p^0 hat die Eigenschaft, für $\dot{x} = 0$ nicht zu verschwinden, sondern gleich der sogenannten Ruheenergie zu werden:

$$p^0(\dot{x} = 0) = mc^2 \quad (1.9)$$

Für kleine $\frac{|v|}{c}$ gilt überdies

$$p^0 = mc^2 + \frac{m}{2} |\dot{x}|^2. \quad (1.10)$$

In dieser Näherung ist also p^0 gleich der Ruheenergie plus der NEWTONSchen kinetischen Energie.

1.2 Die homogenen MAXWELLSchen Gleichungen

Die Felder E und B genügen Gesetzen, die sich in der mathematischen Form partieller Differentialgleichungen ausdrücken lassen. Zunächst ergibt der empirische Befund die homogenen MAXWELLSchen Gleichungen

$$\operatorname{rot} E + \frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} = 0, \quad (1.11)$$

$$\operatorname{div} B = 0. \quad (1.12)$$

Für differenzierbare Vektorfelder K gelten allgemein die Integralsätze von GAUSS und STOKES:

STOKES: Sei \mathcal{F} eine 2-dimensionale Fläche im \mathbb{R}^3 , die durch die Kurve \mathcal{C} begrenzt wird, so gilt:

$$\int_{\mathcal{F}} \langle \overrightarrow{\operatorname{rot} K}, \overrightarrow{df} \rangle = \int_{\mathcal{C}} \langle \overrightarrow{K}, \overrightarrow{dc} \rangle \quad (1.13)$$

GAUSS: Sei \mathcal{G} ein Gebiet im \mathbb{R}^3 , das durch die Fläche \mathcal{F} begrenzt wird, so gilt:

$$\int_{\mathcal{G}} d^3x (\operatorname{div} B) = \int_{\mathcal{F}} \langle \overrightarrow{B}, \overrightarrow{df} \rangle \quad (1.14)$$

Die Erklärung der hier auftretenden Symbole und der Beweis der entsprechenden Identitäten sollen zunächst unterbleiben und stattdessen die entsprechenden Formeln für Kreisscheibe und Vollkugel angegeben werden.

Wir betrachten die Fläche

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= \{x \in \mathbb{R}^3; x = p + rx_0(\phi)\} \\ 0 \leq r \leq R, x_0(\phi) &= \cos \phi e_1 + \sin \phi e_2, 0 \leq \phi \leq 2\pi, \\ |e_i| &= 1, \langle e_1, e_2 \rangle = 0.\end{aligned}$$

Dies ist die Kreisscheibe mit dem Radius R um den Mittelpunkt p . Die Randkurve \mathcal{C} von \mathcal{F} ist durch die Punkte $c(\phi) = p + Rx_0(\phi)$ gegeben. Für jedes solche Vektorfeld K und jede solche Kreisscheibe gilt dann:

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{F}} \langle \overrightarrow{\text{rot } K}, \overrightarrow{df} \rangle &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \langle \text{rot } K(p + rx_0(\phi)), [e_1, e_2] \rangle r dr d\phi \\ \int_{\mathcal{C}} \langle \overrightarrow{K}, \overrightarrow{dc} \rangle &= \int_0^{2\pi} \langle K(p + Rx_0(\phi)), \dot{c}(\phi) \rangle d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \langle K(p + Rx_0(\phi)), x_0(\phi) \rangle R d\phi\end{aligned}$$

und der **STOKESSCHE SATZ FÜR KREISSCHEIBEN** lautet explizit

$$\begin{aligned}\int_0^R \int_0^{2\pi} \langle \text{rot } K(p + rx_0(\phi)), [e_1, e_2] \rangle r dr d\phi &= \\ = R \int_0^{2\pi} \langle K(p + Rx_0(\phi)), x_0(\phi) \rangle d\phi & \quad (1.15)\end{aligned}$$

Als nächstes betrachten wir die Vollkugel

$$\begin{aligned}\mathcal{G} &= \{x \in \mathbb{R}^3; x = p + rx_0(\theta, \phi)\} \\ 0 \leq r \leq R, 0 \leq \Theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi, \\ x_0(\theta, \phi) &= \sin \theta (\cos \phi e_1 + \sin \phi e_2) + \cos \theta e_3, \\ |e_i| &= 1, \langle e_i, e_j \rangle = 0 \text{ für } i \neq j.\end{aligned}$$

Die Randfläche von \mathcal{G} ist $\mathcal{F} = \{x \in \mathbb{R}^3; x = p + Rx_0(\theta, \phi)\}$, und jetzt gilt für jedes Vektorfeld K :

$$\int_{\mathcal{F}} \langle \vec{K}, \vec{df} \rangle = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \langle K(p + Rx_0(\theta, \phi)), x_0(\theta, \phi) \rangle R^2 \sin \theta \, d\phi \, d\theta \quad (1.16)$$

Der **GAUSSsche Satz für Vollkugeln** lautet jetzt explizit

$$\int_{\mathcal{G}} d^3x \operatorname{div} K = R^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \langle K(p + Rx_0(\theta, \phi)), x_0(\theta, \phi) \rangle \sin \theta \, d\phi \, d\theta \quad (1.17)$$

Mathematische Nebenbemerkung

In den Integranden beider Flächenintegrale tritt das Skalarprodukt des Vektorfeldes K mit einem Vektor $n(x)$ mit $|n(x)| = 1$ und $x \in \mathcal{F}$ auf. Für die Kreisscheibe ist dabei $n(x) = [e_1, e_2]$, für die Kugel $n(x) = x_0$. Dieses $n(x)$ steht in beiden Fällen senkrecht auf der jeweiligen Fläche.

Außerdem findet man in beiden Integralen die sogenannten Flächenelemente

$$df = r \, dr \, d\phi$$

$$df = R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi$$

Mit ihrer Hilfe können die Flächeninhalte $V(\mathcal{F}')$ von Teilgebieten $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ der Kreisscheibe, respektive der Kugel bestimmt werden:

$$\int_{\mathcal{F}'} df = V(\mathcal{F}')$$

In unseren beiden Beispielen gilt also

$$\int_{\mathcal{F}} \langle \vec{K}, \vec{df} \rangle = \int \langle K, n(x) \rangle df.$$

Tatsächlich gilt diese Formel bei geeigneter Definition der Flächennormale und des Flächenelements immer.

Anwendung auf die MAXWELL-Gleichungen

Die Anwendung des STOKESSchen Satzes auf Gleichung (1.11) auf Seite 7 ergibt

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{F}} \langle \vec{B}, \vec{d}\vec{f} \rangle = \int_{\mathcal{C}} \langle \vec{E}, \vec{d}\vec{c} \rangle$$

Die dabei auftretende Größe $\Phi := \int_{\mathcal{F}} \langle \vec{B}, \vec{d}\vec{f} \rangle$ heißt auch der Fluß von B durch die Fläche \mathcal{F} . Damit kann man Gleichung (1.11) auch folgendermaßen schreiben:

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \Phi = \int_{\mathcal{C}} \langle \vec{E}, \vec{d}\vec{c} \rangle \quad (1.18)$$

Wird die Kurve \mathcal{C} durch einen (ideal dimensionslosen) Draht realisiert, so ist die rechte Seite die Ringspannung im Draht, und wir erhalten das FARADAYSche Induktionsgesetz.

Offenbar folgt aus Gleichung (1.12) auf Seite 7 für jede Randfläche \mathcal{F}

$$\int_{\mathcal{F}} \langle \vec{B}, \vec{d}\vec{f} \rangle = 0, \quad (1.19)$$

das heißt, der gesamte magnetische Fluß durch eine geschlossene Fläche verschwindet.

Aus (1.18) und (1.19) folgen umgekehrt auch die Gleichungen (1.11) und (1.12) auf Seite 7. Wird in (1.18) das Kurvenintegral nach STOKES wieder in ein Flächenintegral umgerechnet, so ergibt sich

$$\int_{\mathcal{F}} \langle \vec{K}, \vec{d}\vec{f} \rangle = 0,$$

mit $K = \frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} + \text{rot } E$

Wir untersuchen diese Formel nun für den Spezialfall der Kreisscheibe:

$$0 = \int_0^R \int_0^{2\pi} \langle K(p + r x_0(\phi)), [e_1, e_2] \rangle r dr d\phi \quad (1.20)$$

Nehmen wir nun an, das Skalarprodukt $\langle K(p), [e_1, e_2] \rangle$ sei im Mittelpunkt p der Kreisscheibe größer (oder kleiner) als 0. Dann garantiert die Stetigkeit dieser Funktion, daß der Integrand in (1.20) auf hinreichend kleinen Kreisscheiben ebenfalls größer

(beziehungsweise kleiner) als 0 ist. In diesen hinreichend kleinen Gebieten wäre dann also auch das Integral von 0 verschieden und Gleichung (1.20) falsch. Deshalb muß $\langle K(p), [e_1, e_2] \rangle = 0$ gelten. e_1 und e_2 können aber (sofern man die Normierung und die Orthogonalität berücksichtigt) beliebig gewählt werden. Das hat zur Folge, daß die Aussage für jeden beliebigen Einheitsvektor $\hat{e} := [e_1, e_2]$ gelten muß, insbesondere auch für die Basisvektoren b_i einer Orthonormalbasis. Das Skalarprodukt eines beliebigen Vektors K mit einem solchen Basisvektor b_i ist aber gerade die i . Komponente des Vektors K in der entsprechenden Basis. Also gilt

$$0 = \langle K(p), b_i \rangle = K^i(p), \quad i = 1, 2, 3; \quad p \in \mathbb{R}^3,$$

was gleichbedeutend mit

$$K(p) = 0$$

und somit

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} B + \text{rot } E = 0$$

ist.

Analog schließen wir jetzt aus

$$\int_{\mathcal{F}} \langle \vec{B}, \vec{df} \rangle = 0$$

auf

$$\int_{\mathcal{G}} d^3x (\text{div } B) = 0. \tag{1.21}$$

Diesmal wählen wir für \mathcal{G} eine Vollkugel mit Mittelpunkt p und Radius R . Sei $\text{div } B(p) > 0$ (oder < 0), dann gilt wieder für alle x in \mathcal{G} , falls R nur hinreichend klein ist, $\text{div } B > 0$ (oder < 0) im Widerspruch zu (1.21). Also folgt (1.12) auf Seite 7. Die Gleichungen (1.18) und (1.19) sind also den Gleichungen (1.11) und (1.12) vollkommen äquivalent.

Übungen

Aufgabe 1.1 — Integralsätze

Sei $K : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld.

Kurvenintegrale

Sei $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Kurve mit $|\dot{c}(\tau)| \neq 0$. Die **Länge** von c ist durch

$$l(c) = \int_a^b \langle \dot{c}(\tau), \dot{c}(\tau) \rangle^{\frac{1}{2}} d\tau$$

gegeben. Das **Integral von K längs c** ist durch

$$\int_c \langle \vec{K}, \vec{dx} \rangle = \int_a^b \langle K(c(\tau)), \dot{c}(\tau) \rangle d\tau$$

erklärt. Mit $-c$ bezeichnen wir die Kurve $(-c)(\tau) = c(a + b - \tau)$.

Falls $\tau = f(\tilde{\tau})$ eine Reparametrisierung ist mit $f'(\tilde{\tau}) > 0$, so gilt für $\tilde{c}(\tilde{\tau}) = c(f(\tilde{\tau}))$

$$\int_{\tilde{c}} \langle \vec{K}, \vec{dx} \rangle = \int_c \langle \vec{K}, \vec{dx} \rangle, \quad \text{sowie} \quad l(\tilde{c}) = l(c).$$

Ist $f'(\tilde{\tau}) < 0$ so gilt:

$$\int_{\tilde{c}} \langle \vec{K}, \vec{dx} \rangle = - \int_c \langle \vec{K}, \vec{dx} \rangle \quad \text{und} \quad l(\tilde{c}) = l(c).$$

Es gilt ebenfalls:

$$\int_c \langle \vec{K}, \vec{dx} \rangle = - \int_{-c} \langle \vec{K}, \vec{dx} \rangle \quad \text{und} \quad l(-c) = l(c).$$

Ist $K = \text{grad } \Phi$, mit $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, dann gilt:

$$\int_c \langle \vec{K}, \vec{dx} \rangle = \Phi(c(b)) - \Phi(c(a)).$$

Flächenintegrale

Sei $F : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Abbildung mit $\left| \left[\frac{\partial F}{\partial \tau_1}(\tau_1, \tau_2), \frac{\partial F}{\partial \tau_2}(\tau_1, \tau_2) \right] \right| \neq 0$. Die Abbildung F sei überdies überall injektiv mit der möglichen Ausnahme von Rand-

punkten. $\text{Bild}(F)$ heißt **Fläche** in \mathbb{R}^3 parametrisiert durch F . Für den Flächeninhalt A gilt

$$A(\text{Bild}(F)) = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \left\| \left[\frac{\partial F}{\partial \tau_1}(\tau_1, \tau_2), \frac{\partial F}{\partial \tau_2}(\tau_1, \tau_2) \right] \right\| d\tau_1 d\tau_2.$$

Das **Integral von K über F** ist durch

$$\int_F \langle \vec{K}, d\vec{f} \rangle = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \left\langle K(F(\tau_1, \tau_2)), \left[\frac{\partial F}{\partial \tau_1}(\tau_1, \tau_2), \frac{\partial F}{\partial \tau_2}(\tau_1, \tau_2) \right] \right\rangle d\tau_1 d\tau_2 \quad (1.22)$$

definiert.

Mit $(-F)$ bezeichnen wir die Fläche $(-F) : [a_2, b_2] \times [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch $(-F)(\tau_1, \tau_2) = F(\tau_2, \tau_1)$.

Es folgt: Sei $f(\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2)$ eine Reparametrisierung mit $\det \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial \tilde{\tau}_j} \right\} > 0$, so ist für $\tilde{F}(\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2) = F(f(\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2))$

$$A(F) = A(\tilde{F}) \quad \text{und} \quad \int_{\tilde{F}} \langle \vec{K}, d\vec{f} \rangle = \int_F \langle \vec{K}, d\vec{f} \rangle.$$

Ist $\det \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial \tilde{\tau}_j} \right\} < 0$ dann gilt:

$$A(F) = A(F') \quad \text{und} \quad \int_{F'} \langle \vec{K}, d\vec{f} \rangle = \int_{-F} \langle \vec{K}, d\vec{f} \rangle.$$

Setzen wir:

$$\begin{aligned} c_1(\tau) &= F(\tau, a_2) & c_2(\tau) &= F(b_1, \tau) \\ (-c_3)(\tau) &= F(\tau, b_2) & (-c_4)(\tau) &= F(a_1, \tau) \end{aligned}$$

so gilt der **Satz von STOKES**:

$$\int_F \langle \overrightarrow{\text{rot } K}, d\vec{f} \rangle = \sum_{i=1}^4 \int_{c_i} \langle \vec{K}, d\vec{x} \rangle,$$

was wir mit der Randkurve $\partial F = \sum_{i=1}^4 c_i$ von F kurz schreiben können:

$$\int_F \langle \overrightarrow{\text{rot } \vec{K}}, \overrightarrow{df} \rangle = \int_{\partial F} \langle \vec{K}, \overrightarrow{dx} \rangle.$$

Volumenintegrale

Sei $G : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Abbildung mit $\det \left\{ \frac{\partial G_i}{\partial \tau_j} \right\} > 0$. Die Abbildung G sei überdies überall injektiv mit der möglichen Ausnahme von Randpunkten. Bild(G) heißt **Gebiet** in \mathbb{R}^3 parametrisiert durch G . Für den Volumeninhalt V gilt

$$V(\text{Bild}(G)) = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_3}^{b_3} \det \left\{ \frac{\partial G_i}{\partial \tau_j}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \right\} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3.$$

Das **Integral einer Funktion** $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ über G ist definiert durch

$$\int_G \Phi d^3x = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_3}^{b_3} \det \left\{ \frac{\partial G_i}{\partial \tau_j}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \right\} \Phi(G(\tau_1, \tau_2, \tau_3)) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3. \quad (1.23)$$

und diese Definition ist invariant unter Reparametrisierungen des Gebiets $\tau = f(\tau')$ mit $\det \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial \tau'_j} \right\} > 0$.

Wir betrachten jetzt die Flächen:

$$F_1(\tau_1, \tau_2) = G(b_1, \tau_1, \tau_2)$$

$$F_2(\tau_1, \tau_2) = G(\tau_1, b_2, \tau_2)$$

$$F_3(\tau_1, \tau_2) = G(\tau_1, \tau_2, b_3)$$

$$(-F_4)(\tau_1, \tau_2) = G(a_1, \tau_1, \tau_2)$$

$$(-F_5)(\tau_1, \tau_2) = G(\tau_1, a_2, \tau_2)$$

$$(-F_6)(\tau_1, \tau_2) = G(\tau_1, \tau_2, a_3).$$

Es gilt jetzt der **Satz von GAUSS**:

$$\int_G \operatorname{div} K \, d^3x = \sum_{i=1}^6 \int_{F_i} \langle \vec{K}, \vec{d}f \rangle = \int_{\partial G} \langle \vec{K}, \vec{d}f \rangle$$

wobei $\partial G = \sum_{i=1}^6 F_i$ der (orientierte) Rand von G ist.

- (a) Überprüfen Sie, daß die Definition (1.22) des Flächenintegrals für eine Kreisscheibe, mit der Parametrisierung

$$F_S : [0, R] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad | \quad F_S(r, \varphi) = a + r \cdot x_0(\varphi),$$

mit

$$x_0(\varphi) = \cos \varphi \, e_1 + \sin \varphi \, e_2.$$

und

$$a \in \mathbb{R}^3, \quad \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j}, \quad (i, j = 1, 2),$$

zu

$$\int_{F_S} \langle \vec{K}, \vec{d}f \rangle = \int_0^R r \, dr \int_0^{2\pi} d\varphi \langle K(a + r \cdot x_0(\varphi)), e_3 \rangle$$

führt, wobei $e_3 = [e_1, e_2]$ die Einheitsnormale der Kreisscheibe ist.

- (b) Zeigen Sie, daß die Definition (1.22) des Flächenintegrals für eine Kugelschale, mit der Parametrisierung

$$F_K : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad | \quad F_K(\vartheta, \varphi) = a + R \cdot x_0(\vartheta, \varphi),$$

mit

$$x_0(\vartheta, \varphi) = \sin \vartheta \cos \varphi \, e_1 + \sin \vartheta \sin \varphi \, e_2 + \cos \vartheta \, e_3,$$

und

$$R \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^3, \quad \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j}, \quad (i, j = 1, 2, 3) \text{ und } \det(e_1, e_2, e_3) = +1$$

zu

$$\begin{aligned} \int_{F_K} \langle \vec{K}, \vec{df} \rangle &= R^2 \int_0^\pi \sin \vartheta \, d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \langle K(F_K(\vartheta, \varphi)), x_0(\vartheta, \varphi) \rangle \\ &= R^2 \int_0^\pi \sin \vartheta \, d\vartheta \times \\ &\quad \times \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\sin \vartheta \left(\cos \varphi K^1(\vartheta, \varphi) + \sin \varphi K^2(\vartheta, \varphi) \right) + \cos \vartheta K^3(\vartheta, \varphi) \right) \end{aligned}$$

führt, wobei $K^i(\vartheta, \varphi) = \langle K(a + R \cdot x_0(\vartheta, \varphi)), e_i \rangle$, ($i = 1, 2, 3$) ist.

- (c) Überprüfen Sie auch, daß die Definition (1.23) des Volumenintegrals für eine Kugel, mit der Parametrisierung

$$G_K : [0, R] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid G_K(r, \vartheta, \varphi) = a + r \cdot x_0(\vartheta, \varphi),$$

mit

$$x_0(\vartheta, \varphi) = \sin \vartheta \cos \varphi e_1 + \sin \vartheta \sin \varphi e_2 + \cos \vartheta e_3,$$

und

$$a \in \mathbb{R}^3, \quad \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, 3) \text{ und } \det(e_1, e_2, e_3) = +1$$

zu

$$\int_{G_K} \Phi \, d^3x = \int_0^R r^2 \, dr \int_0^\pi \sin \vartheta \, d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \Phi(a + r \cdot x_0(\vartheta, \varphi))$$

führt.

1.3 Die inhomogenen MAXWELLSchen Gleichungen

Die Gleichungen (1.11) und (1.12) auf Seite 7 beschreiben den empirischen Befund noch nicht vollständig:

Man findet weiter die inhomogenen MAXWELLSchen Gleichungen

$$\operatorname{rot} B - \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} j, \quad (1.24)$$

$$\operatorname{div} E = 4\pi\rho. \quad (1.25)$$

j ist ein Vektorfeld und wird Stromdichte genannt. Für eine gegebene Fläche \mathcal{F} gibt $\int_{\mathcal{F}} \langle \vec{j}, \vec{d}\vec{f} \rangle$ die Ladung an, die pro Zeiteinheit durch die Fläche fließt.

ρ ist die Ladungsdichte, das heißt, für ein Gebiet \mathcal{G} ist $\int_{\mathcal{G}} \rho \, d^3x$ die Gesamtladung in diesem Gebiet. Das Vektorfeld j und die Dichte ρ sind im allgemeinen beide auch zeitabhängig.

Aus den beiden inhomogenen MAXWELLgleichungen ergibt sich direkt ein Zusammenhang zwischen den Größen ρ und j , der die physikalische Beziehung zwischen ihnen widerspiegelt. Denn wenn man die Divergenz von Gleichung (1.24) ausrechnet, so ergibt sich:

$$\frac{4\pi}{c} \operatorname{div} j = \operatorname{div} \operatorname{rot} B - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} E$$

Hierbei wurde im letzten Summanden die Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen verwendet, um die Divergenz in die Zeitableitung hineinzuziehen.

Für jedes Vektorfeld K gilt nun aber $\operatorname{div} \operatorname{rot} K = 0$, was man anhand der Definitionen von Seite 3 leicht nachrechnet. Also folgt

$$\frac{4\pi}{c} \operatorname{div} j = - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} E. \quad (1.26)$$

Dividiert man nun Gleichung (1.25) durch c und bildet die partielle Ableitung nach t , so erhält man

$$\frac{4\pi}{c} \frac{\partial}{\partial t} \rho = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} E \quad (1.27)$$

Addition der Gleichungen (1.26) und (1.27) ergibt dann die sogenannte Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \operatorname{div} j = 0 \quad (1.28)$$

Die physikalische Aussage dieser Beziehung wird deutlicher, wenn die Gleichung über ein kompaktes Gebiet \mathcal{G} mit der Randfläche \mathcal{F} integriert und der GAUSSsche Satz

angewendet wird:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{G}} \rho d^3x = - \int_{\mathcal{F}} \langle \vec{j}, \vec{df} \rangle$$

Es gilt also:

Zeitliche Änderung der Ladung in \mathcal{G} = - {Ladung, die aus \mathcal{G} herausfließt.}

1.4 Grundgleichungen der Elektrodynamik

Die Gleichungen (1.11) und (1.12) auf Seite 7, sowie (1.24) und (1.25) auf der vorhergehenden Seite sind die Grundgleichungen zur Beschreibung von elektromagnetischen Feldern und ihrer Wechselwirkung mit geladenen Teilchen:

MAXWELLgleichungen

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} E + \frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} &= 0, & \operatorname{div} B &= 0, \\ \operatorname{rot} B - \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} j, & \operatorname{div} E &= 4\pi \rho. \end{aligned}$$

Diese werden noch durch die **LORENTZ-EINSTEINSCHEN Bewegungsgleichungen** für eine Punktladung mit Masse m_i und Ladung q_i ergänzt:

$$m_i \frac{d}{dt} \frac{\dot{x}_i}{\left(1 - \frac{|\dot{x}_i|^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = q_i \left(E(x_i) + \frac{1}{c} [\dot{x}_i, B(x_i)] \right)$$

Gegenstand der theoretischen Elektrodynamik ist die Untersuchung

- i). der mathematischen Form der Grundgleichungen selbst. Dabei gilt das Interesse vor allem den Invarianzeigenschaften unter Symmetrietransformationen und dem Auftreten von Erhaltungsgrößen.
- ii). der Bewegungsformen geladener Teilchen im elektromagnetischen Feld.
- iii). der Lösungsstruktur und damit der Orts- und Zeitabhängigkeit elektromagnetischer Felder, die von den Grundgleichungen erzwungen wird. (Hierbei wird sich vor allem der Wellencharakter als besonders interessant erweisen).

- iv). Schließlich wird noch untersucht, wie sich diese Grundgleichungen verändern, wenn man die elektromagnetischen Felder nicht wie bisher im Vakuum betrachtet, sondern den Einfluß von materiellen Medien (Gasen, Flüssigkeiten oder Festkörpern) und ihren Eigenschaften berücksichtigt.

Bevor wir jedoch mit dem ersten Punkt dieser Liste beginnen, müssen wir noch unser Gleichungssystem vervollständigen. Denn bisher haben wir zwar ein gekoppeltes Gleichungssystem, in dem die Felder die Bewegung der geladenen Punktteilchen bestimmen, aber die Felder selbst werden aus den noch unspezifizierten Größen j und ρ abgeleitet. Erst wenn wir angeben können, wie ρ und j von den Punktteilchen abhängen, erhalten wir ein geschlossenes System von Differentialgleichungen, das weiter untersucht werden kann.

1.5 Ladungs- und Stromdichte einer Punktladung

Als erster Versuch kann der Beitrag einer Ladung q_i zur Ladungs- und Stromdichte in der Form

$$\rho(x) = q_i f(x - x_i)$$

$$j(x) = v_i q_i f(x - x_i)$$

geschrieben werden. Dabei bezeichnet $f(y)$ die Verteilung einer Einheitsladung um den Schwerpunkt x_i des Teilchens. Diese ist durch $\int d^3x f(x) = 1$ normiert, um die Beziehung zwischen $\rho(x)$ und der Gesamtladung zu erhalten.

Der Versuch, $f(y)$ für eine echte Punktladung anzugeben, führt allerdings zunächst auf ein mathematisches Problem. Wir können die Punktladung als Grenzfall einer homogen geladenen Kugel vom Radius a für $a \rightarrow 0$ ansetzen und erhalten damit für die Ladungsverteilung

$$f(y) = \lim_{a \rightarrow 0} f_a(y)$$

$$\text{mit } f_a(y) = \begin{cases} \frac{1}{\frac{4\pi}{3} a^3} & |y| \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int f(y) d^3y = \lim_{a \rightarrow 0} \int f_a(y) d^3y = 1$$

Das Problem ist nun, daß der Grenzwert $f(y) = \lim_{a \rightarrow 0} f_a(y)$ nicht als gewöhnliche Funktion erklärt werden kann, da für $f(y)$ gelten müßte, daß einerseits an allen Punkten $y \neq 0$ der Wert $f(y) = 0$ ist, andererseits aber das Integral $\int d^3x f(x) = 1$

sein muß, was jedoch für gewöhnliche Funktionen nicht möglich ist.

Dieses Problem tritt allgemein auf, wenn man versucht, Punktladungsdichten als Grenzwert von endlich ausgedehnten Ladungsdichten zu erhalten. Es ist also unabhängig von der speziellen Wahl der $f_a(y)$, die wir hier nur der größtmöglichen Einfachheit halber getroffen haben.

Die Idee zur Lösung dieses Problems ist, die gewöhnlichen Funktionen in einen größeren Raum \mathcal{D}' einzubetten, in dem der Grenzwert

$$f = \lim_{a \rightarrow 0} f_a$$

tatsächlich existiert.

1.5.1 Distributionen im \mathbb{R}^n

Allgemein definieren wir zunächst den Raum der temperierten Testfunktionen $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ durch

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n); \text{tr} f \text{ kompakt}\}. \quad (1.29)$$

Dabei bezeichnet $\text{tr} f$ den Träger der Funktion f , also die abgeschlossene Hülle aller Punkte $x \in \mathbb{R}^n$, für die $f(x) \neq 0$ gilt. Alle Funktionen $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ verschwinden also außerhalb eines endlichen Gebiets. Damit gilt dann auch, daß sämtliche Ableitungen der $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ nur auf einem endlichen Gebiet ungleich Null sind. $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ist offenbar ein Vektorraum unendlicher Dimension.

Wir betrachten jetzt eine lineare Abbildung $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ und wollen definieren, wann sie stetig ist:

Definition 1) $\{f_\nu \in \mathcal{D}\}$ heißt Nullfolge, falls es ein kompaktes Gebiet $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ gibt, so daß

i). $\forall \nu : \text{tr} f_\nu \subset \mathcal{A}$.

ii). f_ν und alle partiellen Ableitungen $(\frac{\partial}{\partial x^1})^{p_1} \cdots (\frac{\partial}{\partial x^n})^{p_n} f_\nu$ streben in \mathcal{A} gleichmäßig gegen Null.

Definition 2) T heißt stetig $\Leftrightarrow \{T f_a\}$ ist eine Nullfolge, wenn $\{f_a\}$ eine Nullfolge ist.

Definition 3) Eine stetige lineare Abbildung $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ heißt auch **Distribution** (oder stetiges, lineares Funktional auf $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$), und der Vektorraum der Distributionen wird mit \mathcal{D}' bezeichnet.

Nach diesen Vorbereitungen kehren wir zu unserem Problem, Strom- und Ladungsverteilung im \mathbb{R}^3 zu definieren, zurück und identifizieren die Funktionen f_a mit Elementen

\hat{f}_a aus dem Raum $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$:

$$\hat{f}_a(\phi) := \int_{\mathbb{R}^3} d^3x f_a(x) \phi(x)$$

für alle ϕ aus dem Raum $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$. Es gilt also:

$$\hat{f}_a(\phi) = \frac{1}{\frac{4\pi}{3}a^3} \int_{|x| \leq a} d^3x \phi(x)$$

für alle $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$.

Es folgt $\lim_{a \rightarrow 0} \hat{f}_a(\phi) = \phi(0)$, und wir erhalten für $T := \lim_{a \rightarrow 0} \hat{f}_a : T(\phi) = \phi(0)$ für alle $\phi \in \mathcal{D}$. Tatsächlich sind die Funktionen $\hat{f}_a, T : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ linear und stetig, also $\hat{f}_a, T \in \mathcal{D}'$.

Das bedeutet: Die Funktionen f_a konvergieren zwar gegen keine Funktion, aber die zugehörigen Distributionen \hat{f}_a konvergieren gegen eine wohldefinierte Distribution T . Genau diese Distribution wollen wir als die Ladungsverteilung einer Punktladung definieren.

Die Physiker führten hierfür das Symbol $\delta(x)$ ein und schreiben die Distribution T damit als

$$T(\phi) = \int d^3x \delta(x) \phi(x) := \phi(0). \quad (1.30)$$

$\delta(x)$ nennt man auch „Deltafunktion“. Diese Schreibweise erinnert stärker an die Grenzwertbildung

$$\delta(x) = \lim_{a \rightarrow 0} f_a(x),$$

die ursprünglich angestrebt wurde, und wir behalten sie bei, weil sie überdies sehr praktisch ist. (Natürlich ist die δ -Funktion selbst unabhängig von der obigen Grenzwertbildung $\hat{f}_a \rightarrow \delta$ erklärt.)

Wenn wir nun das Argument in $\delta(x)$ verschieben, so gilt formal:

$$\int d^3x \delta(x-a) \phi(x) \stackrel{y:=x-a}{=} \int d^3y \delta(y) \phi(y+a) = \phi(a)$$

Damit erklären wir die Distribution $\delta(x-a)$.

Die Gleichung (1.30) zeigt, wie allgemein die δ -Funktion in n Dimensionen zu erklären ist. Für $\phi \in D(\mathbb{R}^n)$ setzen wir einfach

$$\int d^n x \delta_n(x) \phi(x) : = \phi(0)$$

und entsprechend

$$\int d^n x \delta_n(x - a) \phi(x) : = \phi(a).$$

Da wir zunächst nur $\delta_3(x)$ benutzen, verabreden wir die Schreibweise $\delta = \delta_3$.

Für ein bewegtes Punktteilchen (Bahnkurve $x(t)$) können wir jetzt Ladungs- und Stromdichte definieren:

$$\rho(y) = q \delta(y - x(t))$$

$$j(y) = q \dot{x}(t) \delta(y - x(t))$$

Für ein System von n Teilchen bedeutet das also:

$$\rho(y) = \sum_{i=1}^n q_i \delta(y - x_i(t)) \quad (1.31)$$

$$j(y) = \sum_{i=1}^n q_i \dot{x}_i(t) \delta(y - x_i(t)) \quad (1.32)$$

2 Die kovariante Formulierung der MAXWELLSchen Gleichungen

2.1 Der MINKOWSKIRAUM

Wir setzen $x^0 = ct$ und definieren einen Raumzeitpunkt durch das 4-Tupel

$$\boldsymbol{x} := \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

bestehend aus x^0 und den drei cartesischen Raumkoordinaten. Die Menge der Punkte \boldsymbol{x} bildet den Vektorraum $V = \mathbb{R}^4$. Mit V^* wird dann der Dualraum, das heißt der Vektorraum der linearen Funktionen von V , bezeichnet.

Tensoren

Ein k -fach ko- und l -fach kontravarianter Tensor (kurz (k, l) -Tensor) der Stufe $(k + l)$ ist eine multilineare Abbildung

$$\omega : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k\text{-mal}} \times \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{l\text{-mal}} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (2.2)$$

das heißt, für $h_i \in V$, $h_i^* \in V^*$ ist $\omega(h_1, \dots, h_k, h_1^*, \dots, h_l^*)$ in jedem Argument linear. ω ist durch seine Werte auf einer Basis e_μ von V und der dazu dualen Basis e^μ (definiert durch $e^\mu(e_\nu) = \delta_\nu^\mu$, $[\mu, \nu = 0, 1, 2, 3]$) von V^* festgelegt, das heißt durch die Zahlen $\omega_{\mu_1 \dots \mu_k}^{\nu_1 \dots \nu_l}$ (Tensorkomponenten) mit

$$\omega_{\mu_1 \dots \mu_k}^{\nu_1 \dots \nu_l} := \omega(e_{\mu_1}, \dots, e_{\mu_k}, e^{\nu_1}, \dots, e^{\nu_l}) \quad (2.3)$$

$$h_i = h_i^\mu e_\mu \quad h_i^* = h_{i\nu}^* e^\nu$$

$$\omega(h_1, \dots, h_k, h_1^*, \dots, h_l^*) = \omega_{\mu_1 \dots \mu_k}^{\nu_1 \dots \nu_l} h_1^{\mu_1} \cdots h_k^{\mu_k} h_{1\nu_1}^* \cdots h_{l\nu_l}^*.$$

Hierbei ist zu beachten, daß wir hier, wie im folgenden immer, die EINSTEINSche Summenkonvention benutzen:

EINSTEINSche Summenkonvention

Über gleiche gegenständige griechische Indices wird von 0 bis 3 summiert.

Die Menge dieser Tensoren bildet einen Vektorraum V_{kl} mit der Dimension 4^{k+l} , wie aus dem eben gesagtten leicht zu sehen ist.

Die MINKOWSKImetrik

Auf V definieren wir für je zwei Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ den 2-fach kovarianten Tensor 2. Stufe η durch:

$$\eta(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := a^0 b^0 - \sum_{i=1}^3 a^i b^i = a^0 b^0 - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \quad (2.4)$$

η ist symmetrisch, das heißt $\eta(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \eta(\mathbf{b}, \mathbf{a})$, und nicht ausgeartet, das heißt, wenn für festes \mathbf{a} und alle $\mathbf{b} \in V$ $\eta(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ gilt, ist $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

- Definitionen:**
- η heißt **MINKOWSKImetrik** in V .
 - Wir schreiben auch $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle := \eta(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ und nennen dies **MINKOWSKIskalarprodukt**.
 - (V, η) heißt **MINKOWSKIRAUM**.

Bemerkung: η definiert *keine* euklidische Norm, denn $\eta(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a^0 b^0 - \sum_{i=1}^3 a^i b^i$ ist indefinit.

⇒ Die Geometrie des MINKOWSKIRAUMS ist nicht euklidisch.

Es folgt, daß für eine Basis $\eta_{\mu\nu} = \eta(e_\mu, e_\nu)$ eine umkehrbare Matrix ist. Wir bezeichnen mit $\eta^{\mu\nu}$ die Matrixelemente der dazu inversen Matrix und fassen diese Zahlen als die Komponenten eines kontravarianten Tensors 2-ter Stufe auf.

Definition: $\{e_\mu\}$ heißt *Orthonormalbasis* von $V \Leftrightarrow \eta(e_\mu, e_\nu) = \epsilon_\mu \delta_{\mu\nu}$ mit $\epsilon_0 = 1$ und $\epsilon_i = -1$ ($i = 1, 2, 3$).

Offenbar ist die Standardbasis eine Orthonormalbasis. *Numerisch* gilt also in diesem Fall für die Komponenten: $\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \epsilon_\mu \delta_{\mu\nu}$.

2.2 Der Feldstärketensor F

Ein (k, l) -Tensorfeld in V ist eine Abbildung $T : V \rightarrow V_{kl}$, das heißt, $T(\mathbf{x})$ ist für jedes $\mathbf{x} \in V$ ein (k, l) -Tensor und damit durch

$$T(\mathbf{x})_{\mu_1 \dots \mu_k}^{\nu_1 \dots \nu_l} = T(\mathbf{x})(e_{\mu_1}, \dots, e_{\mu_k}, e^{\nu_1}, \dots, e^{\nu_l}) \quad (2.5)$$

eindeutig bestimmt. Für eine feste Basis und variables \mathbf{x} erhalten wir also Funktionen von \mathbf{x} , und diese Funktionen bestimmen das Tensorfeld eindeutig.

Betrachten wir nun die Funktionen

$$F_{i0}(\mathbf{x}) = -F_{0i}(\mathbf{x}) := -E^i(x, t) \quad i = 1, 2, 3; \quad (2.6)$$

$$F_{il}(\mathbf{x}) := -\sum_{m=1}^3 \varepsilon_{ilm} B^m(x, t) \quad i, l = 1, 2, 3; \quad (2.7)$$

$$F_{00}(\mathbf{x}) := 0, \quad (2.8)$$

wobei E^i und B^i die Komponenten des elektrischen und magnetischen Feldes sind.

Wir bestimmen durch diese Funktionen eindeutig ein kovariantes Tensorfeld zweiter Stufe, indem wir verlangen, daß für die *Standardbasis*

$$F_{\mu\nu}(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x})(e_\mu, e_\nu) \quad (2.9)$$

gilt. Wegen $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ ist $F(\mathbf{x})$ antisymmetrisch. F heißt in der Physik kurz der **Feldstärketensor**.

Wir bleiben in der Folge bei der Standardbasis und bilden

$$F^\mu{}_\nu(\mathbf{x}) := \eta^{\mu\kappa} F_{\kappa\nu}(\mathbf{x}) \quad (2.10)$$

$$F^{\mu\nu}(\mathbf{x}) := \eta^{\mu\kappa} F_\kappa{}^\nu(\mathbf{x}) = \eta^{\mu\kappa} \eta^{\nu\lambda} F_{\kappa\lambda}(\mathbf{x}). \quad (2.11)$$

Jetzt fassen wir die Funktionen $F^\mu{}_\nu(\mathbf{x})$ als Komponenten eines $(1, 1)$ -Tensorfeldes und die Funktionen $F^{\mu\nu}(\mathbf{x})$ als Komponenten eines $(0, 2)$ -Tensorfeldes auf, und zwar stets bezüglich der Standardbasis und der dazu dualen Basis von V^* . Mit Hilfe der MINKOWSKIMETRIK können wir also aus dem Tensorfeld F ein einfach ko- und einfach kontravariantes, sowie ein zweifach kontravariantes Tensorfeld bilden.

Aus den partiellen Ableitungen von $F_{\mu\nu}(\mathbf{x})$ bilden wir jetzt noch zwei weitere Tensorfelder:

- i). Das einfach kontravariante Tensorfeld (das heißt das Vektorfeld) $\operatorname{div} F$ mit den Komponenten⁽ⁱ⁾:

$$((\operatorname{div} F)(\mathbf{x}))^\nu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} F^{\mu\nu}(\mathbf{x}) \quad (2.12)$$

- ii). Das 3-fach kovariante schiefe Tensorfeld dF , für dessen Komponenten gilt:

$$\begin{aligned} ((dF)(\mathbf{x}))_{\mu_{\sigma(1)}\mu_{\sigma(2)}\mu_{\sigma(3)}} &: = \epsilon(\sigma) ((dF)(\mathbf{x}))_{\mu_1\mu_2\mu_3}, \text{ für } \sigma \in S_3 \\ ((dF)(\mathbf{x}))_{\mu_1\mu_2\mu_3} &: = \frac{\partial F_{\mu_2\mu_3}(\mathbf{x})}{\partial x^{\mu_1}} - \frac{\partial F_{\mu_1\mu_3}(\mathbf{x})}{\partial x^{\mu_2}} + \frac{\partial F_{\mu_1\mu_2}(\mathbf{x})}{\partial x^{\mu_3}}, \\ &\text{ falls } 0 \leq \mu_1 < \mu_2 < \mu_3 \leq 3. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Ausgedrückt durch E und B ergibt sich nun

$$\begin{aligned} (\operatorname{div} F)^0 &= \operatorname{div} E, \\ (\operatorname{div} F)^i &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} E^i + (\operatorname{rot} B)^i, \end{aligned} \quad (2.14)$$

sowie

$$\begin{aligned} (dF)_{123} &= -\operatorname{div} B, \\ (dF)_{0ik} &= -\sum_{l=1}^3 \varepsilon_{ikl} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} B^l + (\operatorname{rot} E)^l \right). \end{aligned} \quad (2.15)$$

2.3 Die 4-dimensionale Form der Grundgleichungen der Elektrodynamik

Wir fassen nun noch ρ und j zu einem einfach kontravarianten Tensorfeld (oder Vektorfeld) in V zusammen, indem wir

$$J^0(\mathbf{x}) = c\rho(\mathbf{x}) \quad (2.16)$$

$$\text{und } J^i(\mathbf{x}) = j^i(\mathbf{x}) \quad (2.17)$$

⁽ⁱ⁾ Beachten Sie, daß die partielle Ableitung nach x^μ eine kovariante Komponente ist, daß also der Index μ dort *unten* steht. In dieser Formel muß also entsprechend der EINSTEINSchen Summenkonvention über μ summiert werden

als Komponenten des Vektorfeldes $J(\boldsymbol{x})$ in der Standardbasis ansehen. $J(\boldsymbol{x})$ heißt dann *Viererstromdichte*.

Mit dieser Definition gilt dann offenbar für die MAXWELLgleichungen:

Homogene MAXWELLgleichungen

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{rot} E + \frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} = 0 \\ \operatorname{div} B = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow dF = 0 \quad (2.18)$$

und entsprechend

Inhomogene MAXWELLgleichungen

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{rot} B - \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{j} \\ \operatorname{div} E = 4\pi\rho \end{array} \right\} \Leftrightarrow \operatorname{div} F = \frac{4\pi}{c} J. \quad (2.19)$$

Komplizierter ist es, die vierdimensionale Form der Bewegungsgleichung abzuleiten. Für ein geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld gilt die Bewegungsgleichung

$$m \frac{d}{dt} \frac{\dot{x}}{\left(1 - \frac{|\dot{x}|^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = q \left(E(x) + \frac{1}{c} [\dot{x}, B(x)] \right), \quad (1.6)$$

woraus

$$\frac{d}{dt} \frac{mc^2}{\left(1 - \frac{|\dot{x}|^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = q \langle E, \dot{x} \rangle \quad (1.7)$$

folgt. $x(t)$ ist die Bahnkurve des Teilchens im \mathbb{R}^3 als Funktion der Zeit.

Wir parametrisieren diese Bahnkurve jetzt in *willkürlicher* Weise um, indem wir $x^0 = ct$ als Funktion eines neuen Parameters s ansehen, wobei $\frac{dx^0(s)}{ds} > 0$ sein soll. Es folgt, daß x eine Funktion von s wird. Für die Differentiation nach s gilt also die Kettenregel ($x^{0'}$: Ableitung von x^0 nach s)

$$\frac{d}{ds} = \frac{x^{0'}}{c} \frac{d}{dt} \quad (2.20)$$

oder

$$\frac{d}{dt} = \frac{c}{x^{0'}} \frac{d}{ds}. \quad (2.21)$$

Aus (1.6) folgt dann (x' : Ableitung von x nach s)

$$\frac{mc}{x^{0'}} \frac{d}{ds} \frac{cx'}{\left(1 - \frac{|x'|^2}{x^{0'^2}}\right)^{\frac{1}{2}}} = q \left(E(x, t) + \frac{1}{x^{0'}} [x', B(x, t)] \right)$$

oder

$$mc \frac{d}{ds} \frac{x'}{\left(x^{0'^2} - |x'|^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{q}{c} \left(E(x, t) x^{0'} + [x', B(x, t)] \right).$$

Für (1.7) auf der vorhergehenden Seite gilt dann

$$\frac{c}{x^{0'}} \frac{d}{ds} \frac{mc^2}{\left(1 - \frac{|x'|^2}{(x^{0'})^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{qc}{x^{0'}} \langle E, x' \rangle$$

oder

$$mc \frac{d}{ds} \frac{x^{0'}}{\left(x^{0'^2} - |x'|^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{q}{c} \langle E, x' \rangle.$$

Wir haben aber die Raumzeitpunkte durch

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

eingeführt. Offenbar beschreibt also

$$\mathbf{x}(s) = \begin{pmatrix} x^0(s) \\ x^1(s) \\ x^2(s) \\ x^3(s) \end{pmatrix}$$

jetzt eine Kurve in der Raumzeit. Mit Hilfe der MINKOWSKIMetrik ergibt sich zunächst

$$\langle \mathbf{x}', \mathbf{x}' \rangle = \eta(\mathbf{x}', \mathbf{x}') = x^{0'2} - |\mathbf{x}'|^2.$$

Weiter folgt

$$mc \frac{d}{ds} \frac{1}{\langle \mathbf{x}', \mathbf{x}' \rangle^{\frac{1}{2}}} \frac{d}{ds} \mathbf{x}^\mu = K^\mu,$$

wobei

$$K^0 : = \frac{q}{c} \langle E, \mathbf{x}' \rangle$$

$$\text{und } K^i : = \frac{q}{c} \left(E^i x^{0'} + [\mathbf{x}', B]^i \right)$$

K^μ läßt sich vollständig durch den Feldstärketensor und $\frac{d}{ds} \mathbf{x}$ ausdrücken. Denn durch Einsetzen der Definitionen (Gleichungen (2.6) bis (2.11)) überprüft man leicht die Identität

$$K^\mu = \frac{q}{c} F^\mu_\nu(\mathbf{x}(s)) \frac{d}{ds} x^\nu(s)$$

für $\mu = 0, 1, 2, 3$.

Zweckmäßigerweise definieren wir jetzt noch für jeden Vektor \mathbf{a} die lineare Abbildung $(F(\mathbf{x}) \mathbf{a})^\mu := F^\mu_\nu(\mathbf{x}) a^\nu$. Für die Bahnkurve in $V = \mathbb{R}^4$ gilt dann in kompakter Schreibweise:

Relativistische Bewegungsgleichung

$$mc \frac{d}{ds} \frac{1}{\langle \mathbf{x}', \mathbf{x}' \rangle^{\frac{1}{2}}} \frac{d}{ds} \mathbf{x}(s) = \frac{q}{c} F(\mathbf{x}(s)) \left(\frac{d}{ds} \mathbf{x}(s) \right) \quad (2.22)$$

Definition: $\frac{d}{ds} \mathbf{x}(s)$ heißt **Vierergeschwindigkeit**.

In dieser Bewegungsgleichung ist jetzt noch die Wurzel aus dem Quadrat der Vierergeschwindigkeit im Nenner störend. Allerdings hatten wir ja die Parametrisierung der Bahnkurven durch s bis auf die Positivität der Ableitung vollkommen willkürlich gewählt. Diese Freiheit können wir nun nutzen, um $\left\langle \frac{d}{ds} \mathbf{x}(s), \frac{d}{ds} \mathbf{x}(s) \right\rangle$ beliebig vorzuschreiben. Danach liegt dann allerdings die Parametrisierung fest!

Hierzu sind zwei Vorschriften allgemein in Gebrauch:

i). s ist die Bogenlänge der Kurve

$$:\Leftrightarrow \left\langle \frac{d}{ds} \mathbf{x}(s), \frac{d}{ds} \mathbf{x}(s) \right\rangle \equiv 1 \quad (2.23)$$

ii). Alternativ wird der Parameter $\tau = \frac{s}{c}$ benutzt. Dann nennt man τ die *Eigenzeit*.

Wir verwenden die Konvention (2.23) und erhalten als Bewegungsgleichung eines geladenen Teilchens im elektromagnetischen Feld F :

$$mc \frac{d^2}{ds^2} \mathbf{x}(s) = \frac{q}{c} F(\mathbf{x}(s)) \left(\frac{d}{ds} \mathbf{x}(s) \right)$$

mit $\left\langle \frac{d}{ds} \mathbf{x}(s), \frac{d}{ds} \mathbf{x}(s) \right\rangle \equiv 1$

2.4 LORENTZgruppe und POINCARÉgruppe

Wir betrachten den MINKOWSKIRAUM V mit dem metrischen Tensor η . Eine lineare Abbildung Λ , die η invariant läßt, für die also gilt, daß für alle $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$: $\eta(\Lambda \mathbf{a}, \Lambda \mathbf{b}) = \eta(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ ist, heißt **LORENTZtransformation**. Die Menge der LORENTZtransformationen bildet eine Gruppe, die sogenannte **LORENTZgruppe**, und wird mit \mathcal{L} bezeichnet. Falls e_μ eine Basis von V ist, gilt

$$\Lambda e_\mu = \Lambda_\mu^\nu e_\nu \quad (2.24)$$

und aus der Invarianz von η folgt

$$\Lambda_\mu^\nu \Lambda_{\mu'}^{\nu'} \eta_{\nu\nu'} = \eta_{\mu\mu'}. \quad (2.25)$$

Für die duale Basis e^μ ergibt sich daraus

$$\Lambda^* e^\mu = \Lambda_\nu^\mu e^\nu. \quad (2.26)$$

Für $\mathbf{x} \in V$ definieren wir $\eta(\mathbf{x}) \in V^*$ durch $\eta(\mathbf{x})(\mathbf{a}) := \eta(\mathbf{x}, \mathbf{a})$ für alle $\mathbf{a} \in V$ und erhalten so eine lineare Abbildung⁽ⁱ⁾ $\eta : V \rightarrow V^*$. $\eta(\mathbf{x})$ ist linear in \mathbf{x} und, da η nicht ausgeartet ist, ein Vektorraumisomorphismus. Es existiert also das Inverse

⁽ⁱ⁾ Die wir mit dem gleichen Buchstaben bezeichnen.

$\eta^{-1} : V^* \rightarrow V$. Speziell folgt $\eta(e_\mu) = \eta_{\mu\nu} e^\nu$ und $\eta^{-1}(e^\mu) = \eta^{\mu\nu} e_\nu$. Nun gilt

$$\eta(\Lambda \mathbf{x})(\mathbf{a}) = \eta(\Lambda \mathbf{x}, \mathbf{a}) = \eta\left(\mathbf{x}, \overset{-1}{\Lambda} \mathbf{a}\right) = \left(\overset{-1}{\Lambda} \eta(\mathbf{x})\right)(\mathbf{a}),$$

das heißt

$$\eta \cdot \Lambda = \overset{-1}{\Lambda} \cdot \eta. \quad (2.27)$$

Durch Bildung des Inversen folgt:

$$\overset{-1}{\Lambda} \cdot \overset{-1}{\eta} = \overset{-1}{\eta} \cdot \Lambda^*. \quad (2.28)$$

Das cartesische Produkt $\mathcal{L} \times V$ versehen wir jetzt mit einer Gruppenstruktur, indem wir das Produkt der Elemente $p_1 := (\Lambda_1, \mathbf{a}_1)$ und $p_2 := (\Lambda_2, \mathbf{a}_2)$ durch die Formel

$$p_1 \circ p_2 = (\Lambda_1 \Lambda_2, \Lambda_1 \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1) \quad (2.29)$$

definieren. Offenbar ist $(\mathbb{I}, 0)$ die Gruppeneins und

$$\overset{-1}{p} = \left(\overset{-1}{\Lambda}, -\overset{-1}{\Lambda} \mathbf{a}\right) \quad (2.30)$$

das Inverse von $p := (\Lambda, \mathbf{a})$. Die so definierte Gruppe heißt POINCARÉgruppe und wird von uns mit \mathcal{P} bezeichnet. \mathcal{P} operiert auf V in folgender Weise: Für $p \in \mathcal{P}$ setzen wir

$$p_*(\mathbf{x}) = \Lambda \mathbf{x} + \mathbf{a} \quad (2.31)$$

Daraus folgt $p_{1*} \circ p_{2*} = (p_1 p_2)_*$. Der Beweis ist einfach:

$$(p_{1*} \circ p_{2*})(\mathbf{x}) = p_{1*}(\Lambda_2 \mathbf{x} + \mathbf{a}_2) = \Lambda_1 \Lambda_2 \mathbf{x} + \Lambda_1 \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1 = (p_1 p_2)_*(\mathbf{x})$$

q.e.d.

2.4.1 Transformationsgesetz für Tensorfelder

Ziel ist es zu zeigen, daß die MAXWELLSchen Gleichungen und die Bewegungsgleichung geladener Teilchen invariant unter diesen Transformationen sind. Hierzu ist zunächst zu definieren, wie die POINCARÉgruppe auf Tensorfeldern und reellwertigen Funktionen in V operiert. Wir verabreden zunächst, daß ein Tensorfeld nullter Stufe eine reellwertige Funktion ist, um damit diese beiden Fälle gemeinsam zu behandeln. Für jedes beliebige (k, l) -Tensorfeld und $p \in \mathcal{P}$, $p = (\Lambda, \mathbf{a})$ definieren wir dann

ein neues (k, l) -Tensorfeld $p^*\omega$ durch

$$\begin{aligned} (p^*\omega)(\mathbf{x})(\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_k, \mathbf{h}_1^*, \dots, \mathbf{h}_l^*) &:= \\ &:= \omega(p_*\mathbf{x}) \left(\Lambda \mathbf{h}_1, \dots, \Lambda \mathbf{h}_k, \Lambda^{*-1} \mathbf{h}_1^*, \dots, \Lambda^{*-1} \mathbf{h}_l^* \right) \end{aligned} \quad (2.32)$$

Es folgt hieraus, daß p^* in ω linear ist, daß also für zwei Tensorfelder gleicher Stufe $p^*(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2) = \alpha p^*\omega_1 + \beta p^*\omega_2$ gilt. Außerdem folgt

$$p_1^* p_2^* = (p_2 p_1)^* . \quad (2.33)$$

Wir können leicht die Komponenten von $p^*\omega$ durch die Komponenten von ω ausdrücken. Beachten wir (2.24) und (2.26) auf Seite 30, so folgt

$$\begin{aligned} (p^*\omega)(\mathbf{x})^{\nu_1 \dots \nu_l}_{\mu_1 \dots \mu_k} &= \\ &= (p^*\omega)(\mathbf{x})(e_{\mu_1}, \dots, e_{\mu_k}, e^{\nu_1}, \dots, e^{\nu_l}) \\ &= \omega(p_*\mathbf{x}) \left(\Lambda e_{\mu_1}, \dots, \Lambda e_{\mu_k}, \Lambda^{*-1} e^{\nu_1}, \dots, \Lambda^{*-1} e^{\nu_l} \right) \\ &= \omega(p_*\mathbf{x}) \left(e_{\mu'_1}, \dots, e_{\mu'_k}, e^{\nu'_1}, \dots, e^{\nu'_l} \right) \Lambda^{\mu'_1}_{\mu_1} \dots \Lambda^{\mu'_k}_{\mu_k} \left(\Lambda^{-1} \right)^{\nu_1}_{\nu'_1} \dots \left(\Lambda^{-1} \right)^{\nu_l}_{\nu'_l} \\ &= \omega^{\nu'_1, \dots, \nu'_l}_{\mu'_1, \dots, \mu'_k}(p_*\mathbf{x}) \Lambda^{\mu'_1}_{\mu_1} \dots \Lambda^{\mu'_k}_{\mu_k} \left(\Lambda^{-1} \right)^{\nu_1}_{\nu'_1} \dots \left(\Lambda^{-1} \right)^{\nu_l}_{\nu'_l} \end{aligned} \quad (2.34)$$

Übungen

Aufgabe 2.1 — Teilchenbewegung in einem konstanten elektromagnetischen Feld

Die Bewegungsgleichung für ein Punktteilchen der Masse m und Ladung q in einem konstanten elektromagnetischen Feld F ist gegeben durch

$$\mathbf{x}''(\tau) = \frac{q}{mc} F \mathbf{x}'(\tau), \quad (2.35)$$

wobei $\mathbf{x}'(\tau) = \frac{d\mathbf{x}}{d\tau}(\tau)$ und $\mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$ die Bahnkurve, parametrisiert durch die Eigenzeit τ ist, das heißt

$$c\tau = \int \langle \mathbf{x}'(\lambda), \mathbf{x}'(\lambda) \rangle^{\frac{1}{2}} d\lambda.$$

Hierbei ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ die MINKOWSKI-Metrik und F ist eine konstante lineare Abbildung, die durch die Komponenten F^μ_ν des Feldstärketensors wie folgt definiert ist:

$$(F\mathbf{h})^\mu = F^\mu_\nu \mathbf{h}^\nu$$

Einmalige Integration von (2.35) liefert natürlich

$$\mathbf{x}'(\tau) = \alpha F \mathbf{x}(\tau) + \mathbf{x}'_0, \text{ mit } \mathbf{x}'_0 = \text{const.} \in \mathbb{R}^4 \text{ und } \alpha = \frac{q}{mc}.$$

(a) Zeigen Sie, daß

$$\mathbf{x}(\tau) = \exp(\tau \alpha F) \left(\mathbf{x}_0 + \int_0^\tau d\lambda \exp(-\lambda \alpha F) \mathbf{x}'_0 \right),$$

eine Lösung der Bewegungsgleichung (2.35) für die Anfangsbedingung

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 = \text{const.} \in \mathbb{R}^4, \mathbf{x}'(0) = \mathbf{x}'_0$$

ist.

(b) Zeigen Sie, daß $G(\tau) = \exp(\tau \alpha F)$ für alle τ eine LORENTZ-Transformation ist. **Hinweis:** Zeigen Sie:

$$\frac{d}{d\tau} \langle G(\tau)\mathbf{h}, G(\tau)\mathbf{k} \rangle = 0$$

für alle $\mathbf{h}, \mathbf{k} \in \mathbb{R}^4$.

(c) Berechnen Sie $\mathbf{x}(\tau)$ für die Spezialfälle:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & E & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -B \\ 0 & 0 & B & 0 \end{pmatrix} \text{ und } F = \begin{pmatrix} 0 & B & 0 & 0 \\ B & 0 & -B & 0 \\ 0 & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Berechnen Sie $\exp(\tau \alpha F)$ durch Entwicklung in eine Potenzreihe.

Bemerkung:

Man kann zeigen, daß der allgemeine Fall eines konstanten Feldes durch geeignete LORENTZtransformationen auf diese beiden Fälle zurückzuführen ist.

Aufgabe 2.2 — Teilchenbewegung in einer elektromagnetischen Welle

Wir betrachten einen elektromagnetischen Feldstärketensor der Form

$$F(\mathbf{x})(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = A (\langle \mathbf{k}, \mathbf{a} \rangle \langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle - \langle \mathbf{n}, \mathbf{a} \rangle \langle \mathbf{k}, \mathbf{b} \rangle) \sin(\langle \mathbf{k}, \mathbf{x} \rangle + \delta) \quad (2.36)$$

für alle $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^4$,

wobei $\langle \mathbf{k}, \mathbf{n} \rangle = 0$. $A \in \mathbb{R}$ heißt die **Amplitude**, $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^4$ mit $\langle \mathbf{k}, \mathbf{k} \rangle = 0$ heißt der (lichtartige) **Wellenvektor**, $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^4$ mit $\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = -1$ heißt der (raumartige) **Polarisationsvektor** und $\delta \in \mathbb{R}$ heißt die **Phase**. Hierbei ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ die MINKOWSKI-Metrik.

- (a) Berechnen Sie die Tensorkomponenten $F_{\mu\nu}$ von (2.36) in der Standardbasis.
 (b) Zeigen Sie, daß F aus (2.36) eine Lösung der MAXWELLGleichungen in Vakuum (das heißt für die Ladungs–Stromdichte gilt $J(\mathbf{x}) = 0$):

$$(\operatorname{div} F)(\mathbf{x}) = 0, \quad (dF)(\mathbf{x}) = 0,$$

darstellt.

- (c) Zeigen Sie, daß für das elektrische Feld E , dessen Komponenten durch

$$E^i(x, t) = F_{0i}(\mathbf{x}), \quad (i = 1, 2, 3)$$

gegeben sind und für das magnetische Feld B , dessen Komponenten durch

$$B^k(x, t) = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \varepsilon_{ijk} F_{ij}(\mathbf{x}), \quad (k = 1, 2, 3)$$

gegeben sind, gilt:

$$E \perp k, \quad B \perp k, \quad E \perp B, \quad |E| = |B|.$$

Hierbei ist k der Vektor mit den Komponenten k^i , ($i = 1, 2, 3$).

Wir transformieren jetzt die elektromagnetische Welle (2.36) mittels einer LORENTZ-

Transformation:

$$(\Lambda^* F)(\mathbf{x})(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = F(\Lambda \mathbf{x})(\Lambda \mathbf{a}, \Lambda \mathbf{b})$$

(d) Zeigen Sie, daß $(\Lambda^* F)(\mathbf{x})$ wieder die Form (2.36) besitzt, wobei der Wellenvektor durch $\Lambda^{-1} \mathbf{k}$ und der Polarisationsvektor durch $\Lambda^{-1} \mathbf{n}$ gegeben ist.

Die Bewegungsgleichung für ein Punktteilchen der Masse m und Ladung q in dem elektromagnetischen Feld F der Gleichung (2.36) lautet

$$\mathbf{x}''(\tau) = \frac{Aq}{mc} (\mathbf{k} \langle \mathbf{n}, \mathbf{x}' \rangle - \mathbf{n} \langle \mathbf{k}, \mathbf{x}' \rangle) \sin(\langle \mathbf{k}, \mathbf{x} \rangle + \delta), \quad (2.37)$$

wobei $\mathbf{x}'(\tau) = \frac{d}{d\tau} \mathbf{x}(\tau)$ und $\mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$ die Bahnkurve, parametrisiert durch die Eigenzeit τ ist, das heißt,

$$c\tau = \int_0^\tau \langle \mathbf{x}'(\lambda), \mathbf{x}'(\lambda) \rangle^{\frac{1}{2}} d\lambda.$$

(e) Zeigen Sie, daß aus (2.37)

$$\langle \mathbf{k}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{k}, \mathbf{x}'_0 \rangle \tau + \langle \mathbf{k}, \mathbf{x}_0 \rangle, \text{ mit } \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0) \text{ und } \mathbf{x}'_0 = \mathbf{x}'(0),$$

folgt.

(f) Zeigen Sie, daß der Fall $\langle \mathbf{k}, \mathbf{x}'_0 \rangle = 0$ ausgeschlossen ist.

Wegen $\langle \mathbf{k}, \mathbf{x}'_0 \rangle \neq 0$ können wir $\mathbf{x}(\tau) = \mathbf{y}(\xi(\tau))$ mit $\xi(\tau) = \langle \mathbf{k}, \mathbf{x}(\tau) \rangle = \langle \mathbf{k}, \mathbf{x}'_0 \rangle \tau + \langle \mathbf{k}, \mathbf{x}_0 \rangle$ schreiben.

(g) Zeigen Sie, daß aus (2.37)

$$\mathbf{y}''(\xi) = \frac{qA}{mc \langle \mathbf{k}, \mathbf{x}'_0 \rangle} (\langle \mathbf{n}, \mathbf{y}'(\xi) \rangle \mathbf{k} - \mathbf{n}) \sin(\xi + \delta), \quad (2.38)$$

wobei $\mathbf{y}'(\xi) = \frac{d}{d\xi} \mathbf{y}(\xi)$ ist, folgt.

(h) Zeigen Sie jetzt, daß aus (2.38)

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{y}'(\xi) \rangle = - \frac{qA}{mc \langle \mathbf{k}, \mathbf{x}'_0 \rangle} \cos(\xi + \delta) + \alpha,$$

mit $\alpha = \text{const.} \in \mathbb{R}$, folgt.

- (i) Setzen Sie das Resultat aus (h) in (2.38) ein, und zeigen Sie, daß die Lösung der Bewegungsgleichung (2.37) durch

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\tau) = \frac{qA}{mc \langle \mathbf{k}, \mathbf{x}'_0 \rangle} & \left\{ \left[\frac{1}{8} \frac{qA}{mc \langle \mathbf{k}, \mathbf{x}'_0 \rangle} \sin (2 (\langle \mathbf{k}, \mathbf{x}'_0 \rangle \tau + \langle \mathbf{k}, \mathbf{x}_0 \rangle + \delta)) \right] \mathbf{k} \right. \\ & \left. + (\mathbf{n} - \alpha \mathbf{k}) \sin (\langle \mathbf{k}, \mathbf{x}'_0 \rangle \tau + \langle \mathbf{k}, \mathbf{x}_0 \rangle + \delta) \right\} \\ & + \beta (\langle \mathbf{k}, \mathbf{x}'_0 \rangle \tau + \langle \mathbf{k}, \mathbf{x}_0 \rangle) + \gamma \end{aligned}$$

gegeben ist, wobei $\beta, \gamma \in \mathbb{R}^4$ mit $\langle \mathbf{k}, \beta \rangle = 1$, $\langle \mathbf{k}, \gamma \rangle = 0$ und $\langle \mathbf{n}, \beta \rangle = \alpha$. Versuchen Sie auch, dieses Resultat zu interpretieren.

2.5 Operationen auf Tensorfeldern, die mit p^* vertauschen

Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, Operatoren zu finden, die mit der Aktion der POINCARÉgruppe vertauschen. Denn wenn wir wissen, daß eine Gleichung für Tensorfelder nur aus solchen Operatoren aufgebaut ist (wie sich herausstellen wird, gilt dies für die MAXWELLgleichungen), so folgt daraus, daß man eine Lösung der Gleichung nur noch POINCARÉtransformieren muß, um weitere Lösungen zu finden.

Als Beispiel dafür nehmen wir die Operatoren $F \rightarrow dF$ und $F \rightarrow \operatorname{div} F$, die wir in Abschnitt 2.2 rein formal eingeführt haben. Wir werden zeigen:

$$p^* d = d p^*$$

$$p^* \operatorname{div} = \operatorname{div} p^*$$

Um diese Aussagen beweisen zu können, führen wir die Operatoren auf fünf grundlegende, einfach strukturierte Operationen zurück, die mit der Operation der POINCARÉgruppe vertauschen, die also POINCARÉinvariant sind. Aus diesen Operatoren können dann fast alle anderen POINCARÉinvarianten Operatoren aufgebaut werden. Wir beginnen mit dem

2.5.1 Tensorprodukt

Für die (k, l) respektive (k', l') Tensorfelder ω und ω' ist das Tensorprodukt als das $(k + k', l + l')$ -Tensorfeld

$$\omega \otimes \omega' (\mathbf{x}) (\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{k+k'}, \mathbf{h}_1^*, \dots, \mathbf{h}_{l+l'}^*) := \quad (2.39)$$

$$: = \omega(\mathbf{x})(\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_k, \mathbf{h}_1^*, \dots, \mathbf{h}_l^*) \omega'(\mathbf{x})(\mathbf{h}_{k+1}, \dots, \mathbf{h}_{k+k'}, \mathbf{h}_{l+1}^*, \dots, \mathbf{h}_{l+l'}^*)$$

definiert. Die Tensorkomponenten werden also einfach multipliziert.

Wie leicht zu erkennen ist, gilt

$$p^*(\omega \otimes \omega') = p^*\omega \otimes p^*\omega', \quad (2.40)$$

wenn man die Definition von p^* explizit einsetzt.

2.5.2 Permutation der Argumente

Sei ω ein (k, l) -Tensorfeld und seien $\sigma \in S_k, \sigma' \in S_l$. Wir setzen

$$\begin{aligned} (P_{\sigma\sigma'}\omega)(\mathbf{x})(\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_k, \mathbf{h}_1^*, \dots, \mathbf{h}_l^*) &: = \\ &: = \omega(\mathbf{x})(\mathbf{h}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{h}_{\sigma(k)}, \mathbf{h}_{\sigma'(1)}^*, \dots, \mathbf{h}_{\sigma'(l)}^*) \end{aligned} \quad (2.41)$$

und erhalten ein neues Tensorfeld derselben Stufe. Es ist leicht zu sehen, daß auch für diese Operation $p^*P_{\sigma\sigma'} = P_{\sigma\sigma'}p^*$ für $p \in \mathcal{P}$ gilt, wenn man wieder nur die Definition von p^* (Gleichung (2.32) auf Seite 32) einsetzt.

Bemerkung: Für ein rein kovariantes $(k, 0)$ oder rein kontravariantes $(0, l)$ Tensorfeld schreibt man auch einfach P_σ mit $\sigma \in S_k$ respektive $\sigma \in S_l$, da ja keine weiteren Argumente vertauscht werden können.

2.5.3 Kontraktion

Sei ω ein (k, l) -Tensorfeld, dann bezeichnet man das $(k-1, l-1)$ -Tensorfeld

$$\begin{aligned} (K\omega)(\mathbf{x})(\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{k-1}, \mathbf{h}_1^*, \dots, \mathbf{h}_{l-1}^*) &: = \\ &: = \omega(\mathbf{x})(e_\mu, \mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{k-1}, e^\mu, \mathbf{h}_1^*, \dots, \mathbf{h}_{l-1}^*) \end{aligned} \quad (2.42)$$

als **Kontraktion** von ω .

Für die Komponenten der Kontraktion von ω gilt offenbar:

$$(K\omega)(\mathbf{x})_{\mu_1, \dots, \mu_{k-1}}^{\nu_1, \dots, \nu_{l-1}} : = \omega(\mathbf{x})_{\mu, \mu_1, \dots, \mu_{k-1}}^{\mu, \nu_1, \dots, \nu_{l-1}}$$

Es ist wieder leicht zu sehen, daß $p^*K = Kp^*$ gilt:

$$\begin{aligned} Kp^*\omega(\mathbf{x})(\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{k-1}, \mathbf{h}_1^*, \dots, \mathbf{h}_{l-1}^*) &= \\ &= p^*\omega(\mathbf{x})(e_\mu, \mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{k-1}, e^\mu, \mathbf{h}_1^*, \dots, \mathbf{h}_{l-1}^*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \omega(p_* \mathbf{x}) \left(\Lambda e_\mu, \Lambda \mathbf{h}_1, \dots, \Lambda \mathbf{h}_{k-1}, \Lambda^* e^\mu, \Lambda^* \mathbf{h}_1^*, \dots, \Lambda^* \mathbf{h}_{l-1}^* \right) \\
&= \omega(p_* \mathbf{x}) \left(e_\alpha, \Lambda \mathbf{h}_1, \dots, \Lambda \mathbf{h}_{k-1}, e^\beta, \Lambda^* \mathbf{h}_1^*, \dots, \Lambda^* \mathbf{h}_{l-1}^* \right) \Lambda^\alpha_\mu \left(\Lambda^{-1} \right)^\mu_\beta \\
&= \omega(p_* \mathbf{x}) \left(e_\alpha, \Lambda \mathbf{h}_1, \dots, \Lambda \mathbf{h}_{k-1}, e^\alpha, \Lambda^* \mathbf{h}_1^*, \dots, \Lambda^* \mathbf{h}_{l-1}^* \right) \\
&= K \omega(p_* \mathbf{x}) \left(\Lambda \mathbf{h}_1, \dots, \Lambda \mathbf{h}_{k-1}, \Lambda^* \mathbf{h}_1^*, \dots, \Lambda^* \mathbf{h}_{l-1}^* \right) \\
&= p^* K \omega(\mathbf{x}) (\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{k-1}, \mathbf{h}_1^*, \dots, \mathbf{h}_{l-1}^*)
\end{aligned}$$

Im vorvorletzten Schritt wurde dabei $\Lambda^\alpha_\mu (\Lambda^{-1})^\mu_\beta = \delta^\alpha_\beta$ benutzt.

2.5.4 Gradient ∇

Sei ω ein (k, l) -Tensorfeld, dann definieren wir das $(k+1, l)$ -Tensorfeld $\nabla \omega$ durch

$$\begin{aligned}
(\nabla \omega)(\mathbf{x}) (\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{k+1}, \mathbf{h}_1^*, \dots, \mathbf{h}_l^*) &:= \tag{2.43} \\
&:= \left. \frac{d}{dt} \omega(\mathbf{x} + t \mathbf{h}_1) (\mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_{k+1}, \mathbf{h}_1^*, \dots, \mathbf{h}_l^*) \right|_{t=0}
\end{aligned}$$

und nennen dieses Tensorfeld den Gradienten von ω .

Die Komponenten des Gradienten lassen sich aus den Komponenten von ω leicht berechnen, wenn man für h_i und h_i^* die Basisvektoren e_{μ_i}, e^{ν_i} einsetzt. Es folgt sofort:

$$(\nabla \omega)(\mathbf{x})^{\nu_1, \dots, \nu_l}_{\mu_1, \dots, \mu_{k+1}} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} \omega(\mathbf{x})^{\nu_1, \dots, \nu_l}_{\mu_2, \dots, \mu_{k+1}}$$

Für den Gradienten gilt nun

$$\begin{aligned}
\nabla p^* \omega(\mathbf{x}) (\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{k+1}, \mathbf{h}_1^*, \dots, \mathbf{h}_l^*) &= \\
&= \left. \frac{d}{dt} (p^* \omega)(\mathbf{x} + t \mathbf{h}_1) (\mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_{k+1}, \mathbf{h}_1^*, \dots, \mathbf{h}_l^*) \right|_{t=0} \\
&= \left. \frac{d}{dt} \omega(p_*(\mathbf{x} + t \mathbf{h}_1)) \left(\Lambda \mathbf{h}_2, \dots, \Lambda \mathbf{h}_{k+1}, \Lambda^* \mathbf{h}_1^*, \dots, \Lambda^* \mathbf{h}_l^* \right) \right|_{t=0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{d}{dt} \omega(\Lambda \mathbf{x} + \mathbf{a} + t\Lambda \mathbf{h}_1) \left(\Lambda \mathbf{h}_2, \dots, \Lambda \mathbf{h}_{k+1}, \Lambda^{-1} \mathbf{h}_1^*, \dots, \Lambda^{-1} \mathbf{h}_l^* \right) \Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} \omega(p_* \mathbf{x} + t\Lambda \mathbf{h}_1) \left(\Lambda \mathbf{h}_2, \dots, \Lambda \mathbf{h}_{k+1}, \Lambda^{-1} \mathbf{h}_1^*, \dots, \Lambda^{-1} \mathbf{h}_l^* \right) \Big|_{t=0} \\
&= \nabla \omega(p_* \mathbf{x}) \left(\Lambda \mathbf{h}_1, \dots, \Lambda \mathbf{h}_{k+1}, \Lambda^{-1} \mathbf{h}_1^*, \dots, \Lambda^{-1} \mathbf{h}_l^* \right) \\
&= p^* \nabla \omega(\mathbf{x}) (\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{k+1}, \mathbf{h}_1^*, \dots, \mathbf{h}_l^*) \\
&\Rightarrow \nabla p^* = p^* \nabla
\end{aligned}$$

Also ist auch der Gradient POINCARÉinvariant.

2.5.5 Hochziehen eines Tensorindexes

Sei ω ein (k, l) -Tensorfeld. Wir definieren $H\omega$ durch das $(k-1, l+1)$ -Tensorfeld

$$\begin{aligned}
(H\omega)(\mathbf{x})(\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{k-1}, \mathbf{h}_1^*, \dots, \mathbf{h}_{l+1}^*) &:= \\
&:= \omega(\mathbf{x}) \left(\overset{-1}{\eta}(\mathbf{h}_1^*), \mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{k-1}, \mathbf{h}_2^*, \dots, \mathbf{h}_{l+1}^* \right). \tag{2.44}
\end{aligned}$$

Die Operation $\omega \rightarrow H\omega$ bezeichnen wir als Hochziehen eines Index. Diese Bezeichnung wird sofort klar, wenn man sich die Komponenten von $H\omega$ ansieht:

$$(H\omega)(\mathbf{x})_{\mu_1, \dots, \mu_{k-1}}^{\nu_1, \dots, \nu_{l+1}} = \omega(\mathbf{x})_{\nu, \mu_1, \dots, \mu_{k-1}}^{\nu_2, \dots, \nu_{l+1}} \eta^{\nu_1 \nu}$$

Entsprechend kann man das Herunterziehen von Indizes als Inverses von H definieren (ω' sei ein $(k-1, l+1)$ -Tensorfeld):

$$\begin{aligned}
\left(\overset{-1}{H} \omega' \right)(\mathbf{x})(\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_k, \mathbf{h}_1^*, \dots, \mathbf{h}_l^*) &:= \\
&:= \omega'(\mathbf{x})(\mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_k, \eta(\mathbf{h}_1), \mathbf{h}_1^*, \dots, \mathbf{h}_l^*) \tag{2.45}
\end{aligned}$$

Auch für diese Operation gilt $p^* H = H p^*$, woraus sofort $p^* H^{-1} = H^{-1} p^*$ folgt.

Beweis:

$$(p^* H\omega)(\mathbf{x})(\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{k-1}, \mathbf{h}_1^*, \dots, \mathbf{h}_{l+1}^*) =$$

$$\begin{aligned}
&= (H\omega)(p_*\mathbf{x}) \left(\Lambda \mathbf{h}_1, \dots, \Lambda \mathbf{h}_{k-1}, \overset{-1}{\Lambda}^* \mathbf{h}_1^*, \dots, \overset{-1}{\Lambda}^* \mathbf{h}_{l+1}^* \right) \\
&= \omega(p_*\mathbf{x}) \left(\overset{-1}{\eta} \left(\overset{-1}{\Lambda}^* \mathbf{h}_1^* \right), \Lambda \mathbf{h}_1, \dots, \Lambda \mathbf{h}_{k-1}, \overset{-1}{\Lambda}^* \mathbf{h}_2^*, \dots, \overset{-1}{\Lambda}^* \mathbf{h}_{l+1}^* \right) \\
&\stackrel{(2.28)}{=} \omega(p_*\mathbf{x}) \left(\Lambda \overset{-1}{\eta}(\mathbf{h}_1^*), \Lambda \mathbf{h}_1, \dots, \Lambda \mathbf{h}_{k-1}, \overset{-1}{\Lambda}^* \mathbf{h}_2^*, \dots, \overset{-1}{\Lambda}^* \mathbf{h}_{l+1}^* \right) \\
&= p^*\omega(\mathbf{x}) \left(\overset{-1}{\eta}(\mathbf{h}_1^*), \mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{k-1}, \mathbf{h}_2^*, \dots, \mathbf{h}_{l+1}^* \right) \\
&= (Hp^*\omega)(\mathbf{x}) (\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{k-1}, \mathbf{h}_1^*, \dots, \mathbf{h}_{l+1}^*)
\end{aligned}$$

□

2.5.6 Weitere invariante Operatoren

Da die Operatoren $H, H^{-1}, P_{\sigma\sigma'}, \nabla$ und K mit der Operation der POINCARÉgruppe kommutieren, gilt das natürlich auch für Operatoren, die aus Summen und Produkten dieser Operatoren bestehen.

Mit $O_i \in \{H, H^{-1}, K, \nabla, P_{\sigma\sigma'}\}$ ($i=1, \dots, m$) gilt also für $O := \prod_{i=1}^m O_i$ auch $p^*O = Op^*$.

Beispiele:

Wir haben in Gleichung (2.9) auf Seite 25 den Feldstärketensor F mit den Tensorkomponenten $F_{\mu\nu}(\mathbf{x})$ eingeführt, das heißt ein $(2, 0)$ -Tensorfeld komponentenweise definiert. Hierzu treten, ebenfalls komponentenweise definiert,

- i). das $(1, 1)$ -Tensorfeld mit den Komponenten $F^\mu_\nu(\mathbf{x}) = \eta^{\mu\alpha} F_{\alpha\nu}(\mathbf{x})$ und
- ii). das $(0, 2)$ -Tensorfeld mit den Komponenten $F^{\mu\nu}(\mathbf{x}) = \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} F_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$.

Der Vergleich der Tensorkomponenten zeigt:

- i). Mit $F^\nu_\mu(\mathbf{x})$ haben wir genau die Tensorkomponenten von HF definiert, das heißt $HF(\mathbf{x})(e_\mu, e^\nu) = F^\nu_\mu(\mathbf{x})$,
- ii). und mit $F^{\mu\nu}(\mathbf{x})$ wurden die Tensorkomponenten von $-H^2F$ eingeführt, das heißt $F^{\mu\nu}(\mathbf{x}) = -H^2F(\mathbf{x})(e^\mu, e^\nu)$.

Hieraus wurden außerdem noch zwei weitere Tensorfelder gebildet:

iii). Das schiefe $(3, 0)$ -Tensorfeld dF mit den Komponenten (vergleiche Gleichung (2.13) auf Seite 26):

$$\begin{aligned} ((dF)(\mathbf{x}))_{\mu_{\sigma(1)}\mu_{\sigma(2)}\mu_{\sigma(3)}} &:= \epsilon_{\sigma} ((dF)(\mathbf{x}))_{\mu_1\mu_2\mu_3} \\ ((dF)(\mathbf{x}))_{\mu_1\mu_2\mu_3} &:= \frac{\partial F_{\mu_2\mu_3}(\mathbf{x})}{\partial x^{\mu_1}} - \frac{\partial F_{\mu_1\mu_3}(\mathbf{x})}{\partial x^{\mu_2}} + \frac{\partial F_{\mu_1\mu_2}(\mathbf{x})}{\partial x^{\mu_3}} \\ &\text{falls } 0 \leq \mu_1 < \mu_2 < \mu_3 \leq 3 \end{aligned}$$

iv). Das $(0, 1)$ -Tensorfeld $\operatorname{div} F$ mit den Komponenten (vergleiche Gleichung (2.12) auf Seite 26):

$$((\operatorname{div} F)(\mathbf{x}))^{\nu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} F^{\mu\nu}(\mathbf{x})$$

Wir behaupten nun, daß sich auch diese Operatoren auf die angegebenen POINCARÉinvarianten Operatoren zurückführen lassen:

i). $dF = \frac{1}{2} \sum_{\sigma \in S_3} \epsilon_{\sigma} P_{\sigma} \nabla F$

Für die Tensorkomponenten gilt nämlich

$$\begin{aligned} \left(\sum_{\sigma \in S_3} \epsilon_{\sigma} P_{\sigma} \nabla F(\mathbf{x}) \right)_{\mu_1\mu_2\mu_3} &= \sum_{\sigma \in S_3} \epsilon_{\sigma} (\nabla F(\mathbf{x}))_{\mu_{\sigma(1)}\mu_{\sigma(2)}\mu_{\sigma(3)}} \\ &= \sum_{\sigma \in S_3} \epsilon_{\sigma} \frac{\partial}{\partial x^{\mu_{\sigma(1)}}} F(\mathbf{x})_{\mu_{\sigma(2)}\mu_{\sigma(3)}} \\ &= 2 \left(\frac{\partial F_{\mu_2\mu_3}(\mathbf{x})}{\partial x^{\mu_1}} - \frac{\partial F_{\mu_1\mu_3}(\mathbf{x})}{\partial x^{\mu_2}} + \frac{\partial F_{\mu_1\mu_2}(\mathbf{x})}{\partial x^{\mu_3}} \right) \end{aligned}$$

□

ii). $\operatorname{div} F = -K \nabla H^2 F$

Auch dies kann wieder komponentenweise nachgerechnet werden:

$$\begin{aligned} (K \nabla H^2 F(\mathbf{x}))^{\mu} &= (\nabla H^2 F(\mathbf{x})) (e^{\nu}, e^{\nu}, e^{\mu}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} (H^2 F(\mathbf{x})) (e^{\nu}, e^{\mu}) \end{aligned}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x^\nu} F^{\nu\mu}(\mathbf{x})$$

□

Indem wir nun dF und $\operatorname{div} F$ als Produkte dieser Operatoren geschrieben haben, ist sofort klar, daß

$$p^* \operatorname{div} = \operatorname{div} p^*, \quad (2.46)$$

$$p^* d = dp^* \quad (2.47)$$

gilt.

2.5.7 Nichtlineare invariante Operatoren

Die im letzten Abschnitt betrachteten Operatoren sind alle linear. Wir können mit Hilfe des Tensorprodukts auch nichtlineare Operatoren auf Tensorfeldern, die der Bedingung $p^* A = A p^*$ genügen, konstruieren.

Beispiele:

- i). $A(F) = F \otimes F$ macht aus dem (2,0)-Tensorfeld ein (4,0)-Tensorfeld. Dafür gilt dann

$$p^* A(F) = p^*(F \otimes F) = p^* F \otimes p^* F = A(p^* F)$$

□

- ii). $A(F) = K(F \otimes HF)$, was in Komponenten $A(F)_{\mu\nu} = F_{\alpha\mu} F_{\beta\nu} \eta^{\alpha\beta}$ bedeutet. In diesem Fall bleibt die Stufe des Tensorfeldes erhalten.

Auch hier gilt wieder

$$\begin{aligned} p^* A(F) &= p^* K(F \otimes HF) = \\ &= K p^*(F \otimes HF) = K(p^* F \otimes p^* HF) = \\ &= K(p^* F \otimes H p^* F) = A(p^* F) \end{aligned}$$

□

iii). Die Funktion $A(F) = -K^2(F \otimes H^2F)$, die sich aus den Tensorkomponenten als $A(F)(x) = F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$ ergibt.

Die POINCARÉinvarianz zeigt man wieder genauso wie in Beispiel ii).

Bemerkung :

In der Praxis schreibt niemand die oben definierten Operationen K, H, ∇, \otimes und so weiter wirklich explizit aus, sondern es werden nur die Endprodukte in der Form von Tensorkomponenten benutzt.

Beispiel:

$$A(F)_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$$

Am Indexbild erkennt man sofort: Dieses $(1, 0)$ -Tensorfeld wird durch zweifache Anwendung von H auf F , Tensorieren mit F , zweifache Kontraktion und anschließende Bildung des Gradienten erzeugt. Also gilt

$$A(p^*F) = p^*A(F).$$

Für kompliziertere Tensorfelder gilt dies natürlich auch. Es bedarf nur einer gewissen Übung, um aus den Tensorkomponenten die einzelnen Operationen herauszulesen.

Übungen

Aufgabe 2.3 — Multilineare Algebra

Sei V ein n -dimensionaler (reeller oder komplexer) Vektorraum. Der Raum der linearen Funktionen auf V (mit Werten in \mathbb{R} oder \mathbb{C}) wird mit V^* bezeichnet und stellt wieder einen Vektorraum gleicher Dimension dar. V^* heißt **Dualraum zu V** . Falls $A : V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung ist und $x^* \in V^*$, so setzen wir für alle $h \in V$

$$(A^*x^*)(h) = x^*(Ah).$$

(a) Zeigen Sie:

- (i) A^* definiert eine lineare Abbildung $A^* : V^* \rightarrow V^*$;
- (ii) Es gilt: $(AB)^* = B^*A^*$ und
- (iii) $A^{*-1} = A^{-1*}$.

A^* heißt die zu A **adjungierte Abbildung**.

Sei $e_\mu, \mu = 1, \dots, n$ eine Basis von V . Die zu e_μ duale Basis $e^\mu, \mu = 1, \dots, n$ von V^* ist durch

$$e^\mu(e_\nu) = \delta_\nu^\mu, \text{ wobei } \delta_\nu^\mu = \begin{cases} 1 & \text{falls } \mu = \nu \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

eindeutig definiert.

(b) Sei $Ae_\mu = A_\mu^\nu e_\nu$ (EINSTEINSche Summenkonvention!). Berechnen Sie A^*e^μ .

Wir untersuchen jetzt den Raum der linearen Funktionen auf V^* , das heißt den Raum V^{**} . Sei $h \in V$. Wir setzen für alle $x^* \in V^*$: $h^{**}(x^*) = x^*(h)$.

(c) Zeigen Sie: Die Abbildung $h \rightarrow h^{**} \in V^{**}$ ist ein linearer Isomorphismus.

Wir werden vermöge dieses Isomorphismus die Räume V und V^{**} , das heißt die Elemente $h \in V$ und $h^{**} \in V^{**}$, in der Folge stets identifizieren. Ein Vektor $h \in V$ repräsentiert somit stets ein Vektor $h^{**} \in V^{**}$ und umgekehrt.

Tensoren

Eine Funktion

$$\omega : \underbrace{V \times V \times \dots \times V}_{k\text{-mal}} \times \underbrace{V^* \times V^* \times \dots \times V^*}_{l\text{-mal}} \rightarrow \mathbb{R}$$

heißt k -fach kovarianter und l -fach kontravarianter Tensor auf V oder kurz (k, l) -Tensor, falls für alle $h_i \in V, h_i^* \in V^*$ $\omega(h_1, \dots, h_k, h_1^*, \dots, h_l^*)$ in jedem Argument linear ist. Sei ω' ein (k', l') -Tensor. Wir setzen:

$$\begin{aligned} & (\omega \otimes \omega')(h_1, \dots, h_k, h_{k+1}, \dots, h_{k+k'}, h_1^*, \dots, h_l^*, h_{l+1}^*, \dots, h_{l+l'}^*) \\ &= \omega(h_1, \dots, h_k, h_1^*, \dots, h_l^*) \cdot \omega'(h_{k+1}, \dots, h_{k+k'}, h_{l+1}^*, \dots, h_{l+l'}^*) \end{aligned}$$

und erhalten einen $(k + k', l + l')$ -Tensor.

(d) Zeigen Sie: Es gilt $(\omega \otimes \omega') \otimes \omega'' = \omega \otimes (\omega' \otimes \omega'')$.

(e) Zeigen Sie:

$$\omega = \omega^{\mu_1 \dots \mu_l}_{\nu_1 \dots \nu_k} e^{\nu_1} \otimes \dots \otimes e^{\nu_k} \otimes e_{\mu_1} \otimes \dots \otimes e_{\mu_l},$$

wobei

$$\omega^{\mu_1 \dots \mu_l}_{\nu_1 \dots \nu_k} = \omega(e_{\nu_1}, \dots, e_{\nu_k}, e^{\mu_1}, \dots, e^{\mu_l}).$$

Die Zahlen $\omega^{\mu_1 \dots \mu_l}_{\nu_1 \dots \nu_k}$ heißen die **Tensorkomponenten von ω** .

(f) Zeigen Sie: Diese (k,l) -Tensoren bilden einen Vektorraum der Dimension n^{k+l} .

Sei $A : V \rightarrow V$ umkehrbar und linear. Wir setzen:

$$(A^* \omega)(h_1, \dots, h_k, h_1^*, \dots, h_l^*) = \omega(Ah_1, \dots, Ah_k, A^{*-1} h_1^*, \dots, A^{*-1} h_l^*).$$

(g) Zeigen Sie: A^* stellt eine lineare Transformation des Raumes der (k, l) -Tensoren dar und es gilt:

- (i) $(AB)^* = B^* A^*$;
- (ii) $A^{*-1} = A^{-1*}$ und
- (iii) $A^*(\omega \otimes \omega') = (A^* \omega) \otimes (A^* \omega')$.

Berechnen Sie die Tensorkomponenten von $A^* \omega$.

Kontraktion

Sei ω ein (k, l) -Tensor und e_μ , $(\mu = 1, \dots, n)$ eine Basis von V . Wir setzen:

$$\dot{\omega}(h_1, \dots, h_{k-1}, h_1^*, \dots, h_{l-1}^*) = \omega(h_1, \dots, e_\mu, \dots, h_{k-1}, h_1^*, \dots, e^\mu, \dots, h_{l-1}^*).$$

(Beachte: $\dot{\omega}$ hängt von der Position von e_μ und e^μ in den Argumenten ab!)

(h) Zeigen Sie: $\dot{\omega}$ hängt *nicht* von der Wahl der Basis ab, und es gilt: $A^* \dot{\omega} = (A^* \omega)$.

Sei g ein symmetrischer, kovarianter Tensor zweiter Stufe, das heißt $g(x, y) = g(y, x)$, und g ist **nicht ausgeartet**, das heißt, daß aus $g(x, h) = 0$ für alle $h \in V$, folgt $x = 0$.

(i) Zeigen Sie: Die Abbildung $g : V \rightarrow V^*$, definiert durch $g(x)(h) = g(x, h)$ für alle $h \in V$, ist ein linearer Isomorphismus.

Transformationen von ko- und kontravarianten Tensoren vermittelt durch g

Sei ω ein (k, l) -Tensor. Wir setzen

$$\omega'(h_1, \dots, h_{k+1}, h_1^*, \dots, h_{l-1}^*) := \omega(h_1, \dots, \widehat{h_i}, \dots, h_{k+1}, h_1^*, \dots, g(h_i), \dots, h_{l-1}^*)$$

und erhalten einen $(k + 1, l - 1)$ -Tensor. ($\widehat{h_i}$ bedeutet, daß dieses Argument fehlt). Ebenso ist

$$\begin{aligned} \omega''(h_1, \dots, h_{k-1}, h_1^*, \dots, h_{l+1}^*) &:= \\ &:= \omega(h_1, \dots, g^{-1}(h_i^*), \dots, h_{k-1}, h_1^*, \dots, \widehat{h_i^*}, \dots, h_{l+1}^*) \end{aligned}$$

ein $(k - 1, l + 1)$ -Tensor. Weiterhin sei e_μ eine Basis von V und $g_{\mu\nu} = g(e_\mu, e_\nu)$.

- (j) Berechnen Sie die Tensorkomponenten von ω' und ω'' .
- (k) Zeigen Sie: Falls A eine Isometrie von g ist, das heißt, $g(Ax, Ay) = g(x, y)$ für alle $x, y \in V$, so gilt: $(A^*\omega)' = A^*\omega'$ und $(A^*\omega)'' = A^*\omega''$.

Sei jetzt V reeller n -dimensionaler Vektorraum und g ein symmetrischer nicht ausgearteter Tensor zweiter Stufe auf V . Es gibt eine Basis e_μ von V mit $g(e_\mu, e_\nu) = \epsilon_\mu \delta_{\mu\nu}$, wobei

$$\begin{aligned} \epsilon_i &= 1 & 1 \leq i \leq m \\ \epsilon_i &= -1 & m < i \leq n \end{aligned}$$

e_μ heißt **Orthonormalbasis** von V .

- (l) Berechnen Sie die Tensorkomponenten von ω' und ω'' bezüglich dieser speziellen Orthonormalbasis.

Aufgabe 2.4 — Schiefe Tensoren

Sei V ein n -dimensionaler Vektorraum. Die Abbildung

$$\omega : \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{k\text{-mal}} \rightarrow \mathbb{R}$$

heißt schiefer, kovarianter Tensor der Stufe k , falls $\omega(h_1, \dots, h_k)$ in jedem Argument h_i ($i = 1, \dots, k$) linear ist und für jede Permutation $\sigma \in S_k$ (S_k ist die Menge der Permutationen von k Elementen) gilt:

$$\omega(h_{\sigma(1)}, \dots, h_{\sigma(k)}) = \epsilon(\sigma) \omega(h_1, \dots, h_k),$$

wobei $\epsilon(\sigma)$ das Signum der Permutation σ ist.

Man kann zeigen, daß die Menge dieser Tensoren ω einen Vektorraum A_k der Dimension $\binom{n}{k}$ bildet. Für $\omega \in A_k$ und $\omega' \in A_{k'}$ ist das \wedge -Produkt wie folgt erklärt: $\omega \wedge \omega' \in A_{k+k'}$ und

$$\begin{aligned} (\omega \wedge \omega')(h_1, \dots, h_{k+k'}) &= \\ &= \sum_{\sigma \in S_{k+k'}} \frac{\epsilon(\sigma)}{k!k'!} \omega(h_{\sigma(1)}, \dots, h_{\sigma(k)}) \omega'(h_{\sigma(k+1)}, \dots, h_{\sigma(k+k')}). \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

- (i) $\omega \wedge \omega' = (-1)^{k \cdot k'} \omega' \wedge \omega$;
- (ii) $\omega \wedge (\omega' \wedge \omega'') = (\omega \wedge \omega') \wedge \omega''$;
- (iii) Falls e^μ ($\mu = 1, \dots, n$) eine Basis des Dualraumes V^* von V ist, so ist

$$e^{\mu_1} \wedge \dots \wedge e^{\mu_k}, \quad (\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_k)$$

eine Basis von A_k .

Aufgabe 2.5 — Wichtige Tensorfelder, die aus dem Feldstärketensor abgeleitet werden können

- (a) Wir fassen die Metrik η als konstantes $(2, 0)$ -Tensorfeld zweiter Stufe auf. Zeigen Sie, daß $p^* \eta = \eta$ gilt, wobei $p = (\Lambda, \mathbf{a})$ ein Element der POINCARÉ-Gruppe ist.

Im MINKOWSKI-Raum V betrachten wir die schiefen, kovarianten Tensoren 4-ter Stufe. Diese bilden einen 1-dimensionalen reellen Vektorraum. Sei e_μ , ($\mu = 0, 1, 2, 3$) eine Orthonormalbasis von V , das heißt $\eta(e_\mu, e_\nu) = \epsilon_\mu \delta_{\mu\nu}$ mit $\epsilon_0 = 1, \epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = -1$.

- (b) Zeigen Sie: Es gibt genau einen schiefen, kovarianten Tensor ε 4-ter Stufe mit $\varepsilon(e_0, e_1, e_2, e_3) = -1$, und für jede andere Orthonormalbasis e'_μ , ($\mu = 0, 1, 2, 3$) gilt:

$$\varepsilon(e'_0, e'_1, e'_2, e'_3) = \pm \varepsilon(e_0, e_1, e_2, e_3).$$

- (c) Wir fassen ε als konstantes $(4, 0)$ -Tensorfeld auf. Zeigen Sie, daß für die Komponenten von ε

$$\varepsilon_{\mu_0 \mu_1 \mu_2 \mu_3} = \begin{cases} 0 & \text{falls } (\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3) \text{ keine Permutation von} \\ & (0, 1, 2, 3) \text{ ist,} \\ -\varepsilon(\sigma) & \text{falls } \mu_\alpha = \sigma(\alpha), \text{ wobei } \sigma \in S_4 \text{ eine Permutation} \\ & \text{von } (0, 1, 2, 3) \text{ mit Signatur } \varepsilon(\sigma) \text{ ist,} \end{cases}$$

gilt. Ebenso definieren wir ein konstantes $(0, 4)$ -Tensorfeld mittels

$$\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} = \eta^{\mu\mu'} \eta^{\nu\nu'} \eta^{\kappa\kappa'} \eta^{\lambda\lambda'} \varepsilon_{\mu'\nu'\kappa'\lambda'}.$$

Bemerkung: Diese etwas unnatürliche Definition von ε wurde gewählt, weil in den meisten Physiklehrbücher $\varepsilon^{0123} = +1$ gesetzt wird.

Sei F der Feldstärketensor. Wir setzen

$$(*F)_{\mu\nu}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\kappa\lambda} F^{\kappa\lambda}(\mathbf{x}).$$

- (d) Zeigen Sie: Die Funktionen $(*F)_{\mu\nu}$ stellen die Komponenten eines $(2, 0)$ -Tensorfeldes $*F$ dar und es gilt:

$$p^>(*F) = \det(\Lambda) * (p^*F)$$

Berechnen Sie $(*F)_{0i}$, $(*F)_{ik}$ ($i, k = 1, 2, 3$), und stellen Sie den Zusammenhang mit den Komponenten des elektrischen Feldes E^i und des magnetischen Feldes B^i dar. **Bemerkung:** $(*F)$ heißt der **duale Feldstärketensor**. In den meisten Physiklehrbücher wird dieser Tensor mit \tilde{F} bezeichnet.

- (e) Berechnen Sie $(*F)_{\mu\kappa} F^{\kappa\nu}$, und zeigen Sie, daß $(*F)_{\mu\kappa} F^{\kappa\mu} = 4 \langle E, B \rangle$. Zeigen Sie auch, daß $F_{\mu\kappa} F^{\kappa\mu} = - (*F)_{\mu\kappa} (*F)^{\kappa\mu} = 2 (|E|^2 - |B|^2)$.
- (f) Zeigen Sie:

$$dF = 0$$

gilt dann und nur dann, wenn

$$\operatorname{div}(*F) = 0$$

gilt.

Wir definieren die Komponenten des sogenannten **Energie-Impuls-Tensors** $T(F)$ durch:

$$(T(F))_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left[F_{\mu\lambda} F^{\lambda\nu} + \frac{1}{4} F_{\kappa\lambda} F^{\kappa\lambda} \eta_{\mu\nu} \right].$$

- (g) Zeigen Sie, daß $T(p^*F) = p^*T(F)$ gilt.
- (h) Zeigen Sie:

$$(\operatorname{div} T)_\nu = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{2} F^{\kappa\lambda} (dF)_{\kappa\lambda\nu} + (\operatorname{div} F)^\lambda F_{\lambda\nu} \right].$$

Anregung: Berechnen Sie die Komponenten $(T(F))_{\mu\nu}$ für die elektromagnetische Welle mit dem Feldstärketensor

$$F(\mathbf{x})(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = A (\langle \mathbf{k}, \mathbf{a} \rangle \langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle - \langle \mathbf{n}, \mathbf{a} \rangle \langle \mathbf{k}, \mathbf{b} \rangle) \sin(\langle \mathbf{k}, \mathbf{x} \rangle + \delta)$$

für alle $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^4$.

2.6 Relativistische Invarianz der elektrodynamischen Grundgleichungen

Das Interesse an diesen invarianten Operatoren kommt aus den MAXWELLSchen Gleichungen selbst.

Denn wir können nun mit Hilfe dieses Formalismus folgende bemerkenswerte Tatsache beweisen:

Kovarianz der MAXWELL-LORENTZ-EINSTEIN-Gleichungen

Sei F ein elektromagnetischer Feldstärketensor und seien $\mathbf{x}_i(s_i)$ die Bahnkurven von N geladenen Teilchen. F genüge den MAXWELLSchen Gleichungen für die Viererstromdichte, die durch die N Punktladungen erzeugt wird, und für jedes Teilchen gelten die EINSTEIN-LORENTZschen Bewegungsgleichungen mit dem Feldstärketensor F .

Dann genügt p^*F den MAXWELLSchen Gleichungen für eine Viererstromdichte, die durch N Teilchen mit den Bahnkurven $\tilde{\mathbf{x}}_i(s_i) = p_*^{-1}\mathbf{x}_i(s_i)$ erzeugt wird. Die neuen Bahnkurven erfüllen ferner die EINSTEIN-LORENTZschen Bewegungsgleichungen mit dem Feldstärketensor p^*F .

Diesen Sachverhalt bezeichnet man auch als Kovarianz der MAXWELL-EINSTEIN-LORENTZ-Gleichungen.

Wir haben also folgenden Satz von Gleichungen, dessen Kovarianz wir zeigen wollen:

$$dF(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.18)$$

$$\operatorname{div} F(\mathbf{x}) = \frac{4\pi}{c} J(\mathbf{x}), \quad (2.19)$$

mit

$$J^0(x, t) = c\rho(\mathbf{x}) = c \sum_{i=1}^N q_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)) \quad (1.31)$$

und

$$J^i(x, t) = j^i(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N q_i \delta(x - x_i(t)) \dot{x}(t), \quad (1.32)$$

sowie

$$m_i c \frac{d}{ds_i} \frac{1}{\langle \mathbf{x}'_i, \mathbf{x}'_i \rangle^{\frac{1}{2}}} \frac{d}{ds_i} \mathbf{x}_i(s_i) = \frac{q_i}{c} F(\mathbf{x}_i(s_i)) \frac{d}{ds_i} \mathbf{x}_i(s_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.22)$$

$$\text{mit } (F(\mathbf{x}) h)^\mu = F^\mu_\nu(\mathbf{x}) h^\nu \text{ für alle } h.$$

Betrachten wir zunächst die MAXWELLSchen Gleichungen (2.18) und (2.19). Aus (2.46) und (2.47) auf Seite 42 folgt dann, wenn man mit p^* auf beiden Seiten der Gleichungen operiert,

$$\text{div } p^* F = \frac{4\pi}{c} p^* J \text{ und } dp^* F = 0. \quad (2.48)$$

Damit haben wir schon gezeigt, daß der transformierte Feldstärketensor die homogenen MAXWELLSchen Gleichungen erfüllt. Um die Aussage über die inhomogenen überprüfen zu können, müssen wir $p^* J$ noch genauer untersuchen, aber zuvor wollen wir uns erst noch die Bewegungsgleichungen (2.22) ansehen.

Wenn wir in diesen $\mathbf{x}_i(s_i)$ durch $\tilde{\mathbf{x}}_i(s_i) := p_*^{-1} \mathbf{x}_i(s_i)$ ersetzen, erkennen wir zunächst

$$\tilde{\mathbf{x}}'_i(s_i) = \Lambda^{-1} \mathbf{x}'_i(s_i), \quad \mathbf{x}'_i(s_i) = \frac{d}{ds_i} \mathbf{x}_i(s_i)$$

$$\langle \tilde{\mathbf{x}}'_i, \tilde{\mathbf{x}}'_i \rangle = \langle \mathbf{x}'_i, \mathbf{x}'_i \rangle, \text{ weil } \Lambda \text{ eine Isometrie ist.}$$

Damit ist die linke Seite von Gleichung (2.22) gleich

$$\Lambda^{-1} \left(m_i c \frac{d}{ds_i} \frac{1}{\langle \mathbf{x}'_i, \mathbf{x}'_i \rangle^{\frac{1}{2}}} \frac{d}{ds_i} \mathbf{x}_i(s_i) \right).$$

Ersetzen wir nun noch auf der rechten Seite F durch $p^* F$ und \mathbf{x}_i durch $\tilde{\mathbf{x}}_i$, so ergibt sich $\frac{q_i}{c} \Lambda^{-1} F(\mathbf{x}(s_i)) \mathbf{x}'(s_i)$, also

$$\frac{q_i}{c} p^* F(\tilde{\mathbf{x}}(s_i)) \tilde{\mathbf{x}}'(s_i) = \frac{q_i}{c} \Lambda^{-1} F(\mathbf{x}(s_i)) \mathbf{x}'(s_i),$$

was leicht durch Einsetzen nachzurechnen ist.

Also haben wir insgesamt

$$\Lambda^{-1} \left(m_i c \frac{d}{ds_i} \frac{1}{\langle \mathbf{x}'_i, \mathbf{x}'_i \rangle^{\frac{1}{2}}} \frac{d\mathbf{x}_i(s_i)}{ds_i} \right) = \frac{q_i}{c} \Lambda^{-1} F(\mathbf{x}(s_i)) \mathbf{x}'(s_i),$$

was wegen Gleichung (2.22) bedeutet, daß auch die neuen Bahnkurven $\tilde{\mathbf{x}}_i(s_i) := p_*^{-1} \mathbf{x}_i(s_i)$ den EINSTEIN-LORENTZschen Bewegungsgleichungen genügen.

Nun bleibt nur noch zu zeigen, daß $p^* J$ genau die Viererstromdichte ist, die von Punktladungen mit den neuen Bahnkurven $\tilde{\mathbf{x}}_i(s_i)$ erzeugt wird:

$$p^* J(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) \stackrel{!}{=} J\left(\mathbf{x}, \overset{-1}{p} * \mathbf{x}_1, \dots, \overset{-1}{p} * \mathbf{x}_N\right) \quad (2.49)$$

Wir sind offenbar gezwungen, J^0 und J^i als Distributionen im MINKOWSKIraum aufzufassen, das heißt, für jede Testfunktion $\phi \in \mathbb{R}^4$ sind die Distributionen $\delta(x - x_i(t))$ und $\delta(x - x_i(t)) v_i^k(t)$ zu untersuchen.

Betrachten wir zunächst

$$\begin{aligned} \int d^4 \mathbf{x} \phi(\mathbf{x}) \delta(x - x_i(t)) &= \int dx^0 \int d^3 \mathbf{x} \phi(x, x^0) \delta\left(x - x_i\left(\frac{x^0}{c}\right)\right) \\ &= \int dx^0 \phi\left(x_i\left(\frac{x^0}{c}\right), x^0\right). \end{aligned}$$

Wir parametrisieren jetzt um: $x^0 = x_i^0(s_i)$; $x_i = x_i(s_i)$

$$\begin{aligned} \int d^4 \mathbf{x} \phi(\mathbf{x}) \delta(x - x_i(t)) &= \int ds_i x_i^{0'}(s_i) \phi(x_i(s_i), x_i^0(s_i)) \\ &= \int ds_i x_i^{0'}(s_i) \phi(\mathbf{x}_i(s_i)) \\ &= \int ds_i \int d^4 \mathbf{x} x_i^{0'}(s_i) \delta_4(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(s_i)) \phi(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Analog folgt:

$$\begin{aligned} \int d^4 \mathbf{x} \phi(\mathbf{x}) \dot{x}_i^k(t) \delta(x - x_i(t)) &= c \int ds_i x_i^{k'}(s_i) \phi(\mathbf{x}_i(s_i)) \\ &= c \int ds_i \int d^4 \mathbf{x} x_i^{k'}(s_i) \delta_4(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(s_i)) \phi(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Wir können deshalb den Beitrag des i -ten Teilchens zum Viererstrom in der Form

$$q_i c \int ds_i \mathbf{x}'_i(s_i) \delta_4(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(s_i)) \quad (2.50)$$

schreiben, wobei $\mathbf{x}_i(s_i)$ die Bahnkurven im MINKOWSKIraum in beliebiger Parametrisierung darstellt. Für die totale Viererstromdichte gilt dann

$$J(\mathbf{x}) = c \sum_i q_i \int ds_i \mathbf{x}'_i(s_i) \delta_4(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(s_i)). \quad (2.51)$$

Wir untersuchen nun $p^* J$ für $p \in \mathcal{P}$:

$$\begin{aligned} p^* J(\mathbf{x}) &= \Lambda^{-1} J(\Lambda \mathbf{x} + \mathbf{a}) \\ &= c \sum_i q_i \int ds_i \delta_4(\Lambda \mathbf{x} + \mathbf{a} - \mathbf{x}_i(s_i)) \Lambda^{-1} \mathbf{x}'_i(s_i) \end{aligned} \quad (2.52)$$

Nun gilt aber das Lemma: $\delta_4(\Lambda \mathbf{x} - \mathbf{b}) = \delta_4(\mathbf{x} - \Lambda^{-1} \mathbf{b})$.

Beweis: Nach Variablentransformation $\mathbf{y} = \Lambda \mathbf{x}$ gilt, wegen $|\det \Lambda| = 1$,

$$\begin{aligned} \int d^4 \mathbf{x} \delta_4(\Lambda \mathbf{x} - \mathbf{b}) \phi(\mathbf{x}) &= \int d^4 \mathbf{y} \delta_4(\mathbf{y} - \mathbf{b}) \phi\left(\Lambda^{-1} \mathbf{y}\right) \\ &= \phi\left(\Lambda^{-1} \mathbf{b}\right) \\ &= \int d^4 \mathbf{x} \delta_4\left(\mathbf{x} - \Lambda^{-1} \mathbf{b}\right) \phi(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

□

Hieraus folgt dann:

$$\begin{aligned} p^* J(\mathbf{x}) &= c \sum_i q_i \int ds_i \delta_4(\Lambda \mathbf{x} + \mathbf{a} - \mathbf{x}_i(s_i)) \Lambda^{-1} \mathbf{x}'_i(s_i) \\ &= c \sum_i q_i \int ds_i \delta_4\left(\mathbf{x} + \Lambda^{-1} \mathbf{a} - \Lambda^{-1} \mathbf{x}_i(s_i)\right) \frac{d}{ds_i} \left[\Lambda^{-1} \mathbf{x}_i(s_i)\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= c \sum_i q_i \int ds_i \delta_4 \left(\mathbf{x} - \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ \Lambda \end{smallmatrix} \mathbf{x}_i(s_i) - \begin{smallmatrix} -1 \\ \Lambda \end{smallmatrix} \mathbf{a} \right) \right) \frac{d}{ds_i} \left[\begin{smallmatrix} -1 \\ \bar{p} \end{smallmatrix} * \mathbf{x}_i(s_i) \right] \\
&= c \sum_i q_i \int ds_i \delta_4 \left(\mathbf{x} - \begin{smallmatrix} -1 \\ \bar{p} \end{smallmatrix} * \mathbf{x}_i(s_i) \right) \frac{d}{ds_i} \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ \bar{p} \end{smallmatrix} * \mathbf{x}_i(s_i) \right)
\end{aligned}$$

Das bedeutet gerade, daß $p^* J(\mathbf{x})$ genau die Viererstromdichte ist, die von Teilchen mit den Bahnkurven $p^{-1} * \mathbf{x}(s_i)$ erzeugt wird.

Wir haben also in der Tat gefunden, daß Lösungen der MAXWELL-EINSTEIN-LORENTZ-Gleichungen durch POINCARÉtransformationen wieder in Lösungen dieser Gleichungen überführt werden.

2.7 Passive

LORENTZtransformationen: Koordinatenwechsel

Bisher haben wir Bewegungsgleichungen und Feldgleichungen stillschweigend in $V = \mathbb{R}^4$ mit festen Standardkoordinaten x^μ beschrieben. Bezüglich der Standardbasis e_μ gilt

$$\eta(e_\mu, e_\nu) = \epsilon_\mu \delta_{\mu\nu} \quad (2.53)$$

sowie

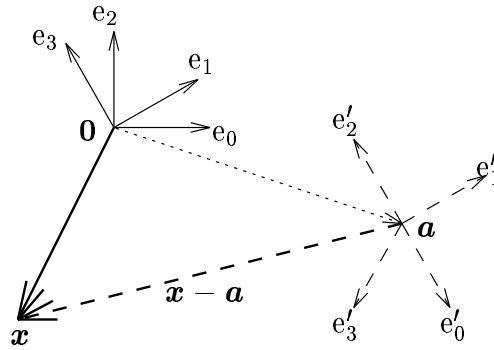
$$x^\mu(\mathbf{x}) = \epsilon_\mu \eta(e_\mu, \mathbf{x}) \text{ für alle } \mathbf{x} \in V. \quad (2.54)$$

Wir betrachten nun ein anderes Koordinatensystem x'^μ , das wie folgt entsteht: Der Nullpunkt in V wird um \mathbf{a} verschoben und die neuen Koordinaten werden analog zu (2.54) bezüglich einer Orthonormalbasis $\{e'_\mu\}$ definiert, das heißt

$$\eta(e'_\mu, e'_\nu) = \epsilon_\mu \delta_{\mu\nu}$$

sowie

$$x'^\mu(\mathbf{x}) = \epsilon_\mu \eta(e'_\mu, \mathbf{x} - \mathbf{a}) \text{ für alle } \mathbf{x} \in V.$$



Es gibt eine eindeutig bestimmte LORENTZTRANSFORMATION Λ mit $e'_\mu = \Lambda e_\mu$ und somit gilt

$$x'^\mu(\mathbf{x}) = \epsilon_{\mu\eta} \left(e_\mu, \Lambda^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \right) = x^\mu \left(\Lambda^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \right) = x^\mu \left(\begin{matrix} -1 \\ p \end{matrix} * \mathbf{x} \right) \quad (2.55)$$

mit $p = (\Lambda, \mathbf{a}) \in \mathcal{P}$.

Die neuen Koordinaten gehen also durch die zu p inverse POINCARÉTRANSFORMATION aus den alten Koordinaten hervor, und der oben beschriebene Koordinatenwechsel entspricht der zu p inversen POINCARÉTRANSFORMATION. Für Felder und Bahnkurven bedeutet dies nach den Resultaten des letzten Abschnitts, daß Bewegungsgleichungen und Feldgleichungen auch in den gestrichelten Koordinaten erfüllt sind, wenn dies in den ungestrichelten Koordinaten zutrifft. Mathematisch ist der Koordinatenwechsel deshalb uninteressant und wird wie im letzten Abschnitt beschrieben, allerdings mit der Ersetzung $p \rightarrow p^{-1}$. Der Koordinatenwechsel wird jedoch durch folgende Überlegungen physikalisch interessant:

Beide Koordinaten müssen durch Messungen entstanden sein und zwar durch zwei Beobachter, die sich die Punkte $\mathbf{0}$ beziehungsweise \mathbf{a} als Koordinatenursprung zuweisen. Winkel und Längen messen beide mit Ortskoordinaten x^i, x'^i bezüglich je drei räumlichen Achsen e_i beziehungsweise e'_i , sowie mit Zeitkoordinaten x^0 beziehungsweise x'^0 , die durch zwei im allgemeinen verschiedene Uhren definiert sind und formal durch Zeitachsen e_0 und e'_0 ausgedrückt werden.

Wir wollen den Koordinatenwechsel nun etwas detaillierter untersuchen. Unter den oben auftretenden POINCARÉTRANSFORMATIONEN finden sich wohlvertraute Transformationen wieder

- i). die räumliche Translation,
- ii). die zeitliche Translation,
- iii). Drehungen des dreidimensionalen Raums.

Interessanter ist das folgende Beispiel

$$p = (\Lambda(\alpha), 0) \text{ mit}$$

$$\Lambda(\alpha) = \left(\begin{array}{cc|cc} \cosh \alpha & \sinh \alpha & 0 & 0 \\ \sinh \alpha & \cosh \alpha & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (2.56)$$

$\Lambda(\alpha)$ ist für alle α eine LORENTZtransformation, das heißt, für alle $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ ist $\eta(\Lambda(\alpha)\mathbf{a}, \Lambda(\alpha)\mathbf{b}) = \eta(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Ferner läßt $\Lambda(\alpha)$ die e_2 - und e_3 -Achse unverändert. Überdies gilt $\Lambda(\alpha)^{-1} = \Lambda(-\alpha)$. Setzt man dies in die Formel für die neuen Koordinaten ein, so ergibt sich, nach x^i aufgelöst:

$$x^0 = (\cosh \alpha) x'^0 + (\sinh \alpha) x'^1 \quad (2.57)$$

$$x^1 = (\sinh \alpha) x'^0 + (\cosh \alpha) x'^1 \quad (2.58)$$

$$x^i = x'^i, \quad (i = 2, 3). \quad (2.59)$$

Der Beobachter mit $x'^i = 0$ ($i = 1, 2, 3$) liest an seiner Uhr die Zeit $t' = x'^0/c$ ab. In den gestrichenen Koordinaten befindet er sich in Ruhe ($x'^i = 0$!). In den ursprünglichen Koordinaten scheint er sich jedoch zu bewegen, und zwar mit der Geschwindigkeit

$$\frac{x^1}{x^0} = \frac{x^1}{ct} = \frac{v}{c} = \frac{\sinh \alpha}{\cosh \alpha} = \tanh \alpha. \quad (2.60)$$

Hieraus folgt

$$\cosh \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (2.61)$$

$$\sinh \alpha = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2.62)$$

Wir sind deshalb versucht zu schließen, daß die Transformation $\Lambda(\alpha)$ die Koordinaten eines gleichförmig bewegten Beobachters beschreibt. Allerdings gilt zusätzlich bei dieser Transformation

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (2.63)$$

das heißt, die Zeit des bewegten Beobachters ist kleiner als die Zeit des unbewegten und zwar um den geschwindigkeitsabhängigen Faktor $1/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} > 1$.

Die Uhr des bewegten Beobachters scheint also langsamer zu gehen. Dies ist ein entscheidender Unterschied zu den GALILEITransformationen der klassischen Mechanik, die ebenfalls die Koordinaten eines bewegten Beobachters beschreiben, aber die Zeitkoordinaten immer fest lassen. Solche Transformationen lassen nun aber die MAXWELL-Gleichungen gerade nicht invariant. Sie können deshalb keine erlaubten Koordinatenwechsel sein und müssen durch die eben geschilderten LOR-ENTZtransformationen ersetzt werden.

Anders ausgedrückt: Die Struktur der Gesetze der Elektrodynamik erzwingt eine grundlegende Änderung unserer Vorstellung von Raum und Zeit, wie sie in der NEWTONschen Mechanik ausgebildet wurde. Sie führt auf die Redefinition des Begriffs des gleichförmig bewegten Beobachters und beschreibt diesen durch Koordinatenwechsel, die durch LORENTZtransformationen erzeugt werden.

Übungen

Aufgabe 2.6 — Die LORENTZtransformationen

Wir versehen den \mathbb{R}^4 mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$:

$$\langle \mathbf{h}, \mathbf{k} \rangle := \sum_{\mu=0}^3 g_{\mu\nu} h^\mu k^\nu$$

wobei

$$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} h^0 \\ h^1 \\ h^2 \\ h^3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} k^0 \\ k^1 \\ k^2 \\ k^3 \end{pmatrix}; \quad g_{\mu\nu} = 0 \ (\mu \neq \nu), \quad g_{00} = 1, \quad g_{ii} = -1 \ (i = 1, 2, 3).$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ heißt **MINKOWSKImetrik**.

Definition: \mathbf{h} heißt **lichtartig**, falls $\langle \mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle = 0$ und $\mathbf{h} \neq 0$,
 \mathbf{h} heißt **zeitartig**, falls $\langle \mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle > 0$,
 \mathbf{h} heißt **raumartig**, falls $\langle \mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle < 0$.

Für die Standardbasis e_μ

$$e_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

gilt also

e_0 ist zeitartig,

e_i ist raumartig ($i = 1, 2, 3$).

Im \mathbb{R}^4 definiert $\Delta = e^0 \wedge e^1 \wedge e^2 \wedge e^3$ die Determinantenfunktion $\Delta(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4)$ mit $\Delta(e_0, e_1, e_2, e_3) = +1$. Die **LORENTZGRUPPE** L ist die Gruppe aller linearen Transformationen $\Lambda : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ mit $\langle \Lambda \mathbf{h}, \Lambda \mathbf{k} \rangle = \langle \mathbf{h}, \mathbf{k} \rangle$.

(a) Zeigen Sie: Falls $\Lambda e_0 = e_0$, so gilt:

$$\Lambda = \tilde{O} P^k \quad (k = 1, 2), \quad \text{wobei } \tilde{O} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & & O \\ 0 & & & \end{array} \right)$$

und $P^1 = P$ die Raumspiegelung bezeichnet, mit $P^2 = \mathbb{I}$, und $O \in SO(3)$ eine Drehung ist.

(b) Zeigen Sie: Durch

$$(\Lambda(\alpha)\mathbf{h})^0 = \cosh(\alpha) h^0 + \sinh(\alpha) h^1$$

$$(\Lambda(\alpha)\mathbf{h})^1 = \sinh(\alpha) h^0 + \cosh(\alpha) h^1$$

$$(\Lambda(\alpha)\mathbf{h})^2 = h^2$$

$$(\Lambda(\alpha)\mathbf{h})^3 = h^3$$

wird eine LORENTZtransformation $\Lambda(\alpha)$, ($\alpha \in \mathbb{R}$) mit $\det \Lambda(\alpha) = +1$ erklärt.

(c) Zeigen Sie, daß mit

$$\sinh(\alpha) = \frac{|v|/c}{\sqrt{1 - (|v|/c)^2}}, \quad \cosh(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1 - (|v|/c)^2}},$$

mit $v \in \mathbb{R}^3$ und $h^0 = x^0 = ct$, $h^i = x^i$ für $c \rightarrow \infty$ die LORENTZtransformation $\Lambda(\alpha)$ in eine GALILEItransformation übergeht.

Sei Λ eine LORENTZtransformation und \mathbf{p} der 4-Vektor mit

$$\Lambda \mathbf{e}_0 = \mathbf{p} = \begin{pmatrix} p^0 \\ p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{pmatrix}$$

und sei O eine Drehung mit

$$\begin{pmatrix} p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{pmatrix} = \text{sign}(p^0) O \begin{pmatrix} |p| \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei $|p| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (p^i)^2}$. Setze $\alpha = \text{arsinh}(|p|)$.

(d) Zeigen Sie:

$$\mathbf{p} = \text{sign}(p^0) \tilde{O} \Lambda(\alpha) \mathbf{e}_0 = \Lambda \mathbf{e}_0.$$

(e) Zeigen Sie: Es gibt zwei Drehungen \tilde{O}_1 und \tilde{O}_2 , so daß

$$\Lambda = \text{sign}(p^0) \tilde{O}_1 \Lambda(\alpha) \tilde{O}_2 P^k,$$

mit $k=1$ für $\det(\Lambda) = -1$ und $k=2$ für $\det(\Lambda) = +1$.

Durch $-P$ wird die Zeitspiegelung und durch $-\mathbb{I}$ die Raumzeitspiegelung erklärt. Diejenigen Elemente Λ , die keine Spiegelungen enthalten, bilden eine Untergruppe L_+ von L , die **Gruppe der eigentlich orthochronen LORENTZtransformationen**.

Die Generatoren von L_+ :

Sei $A : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ linear und schief bezüglich der MINKOWSKI-Metrik $\langle \cdot, \cdot \rangle$, das heißt, für alle $\mathbf{h}, \mathbf{k} \in \mathbb{R}^4$ gilt:

$$\langle \mathbf{h}, A\mathbf{k} \rangle = -\langle A\mathbf{h}, \mathbf{k} \rangle.$$

Sei \hat{L} die Menge dieser linearen, schiefen Transformationen. Wir setzen

$$\omega_{\mu\nu} \mathbf{h} = e_\mu \langle e_\nu, \mathbf{h} \rangle - e_\nu \langle e_\mu, \mathbf{h} \rangle, \quad 0 \leq \mu < \nu \leq 3.$$

Weiterhin wird der **Kommutator** von A und B definiert durch

$$[A, B]_- := AB - BA \text{ f\"ur alle } A, B \in \hat{L}.$$

- (f) Zeigen Sie: \hat{L} ist ein 6-dimensionaler Vektorraum mit Basis $\omega_{\mu\nu}$.
- (g) Zeigen Sie $[A, B]_- \in \hat{L}$ f\"ur $A, B \in \hat{L}$.
- (h) Berechnen Sie die Kommutatoren $[\omega_{\mu\nu}, \omega_{\kappa\lambda}]_-$.
- (i) Zeigen Sie: $\Lambda = \exp(\tau A) \in L_+$. Deswegen hei\u00dfen $\omega_{\mu\nu}$ die **Generatoren** von L_+ .
- (j) Berechnen Sie $\exp(\tau\omega_{\mu\nu})\mathbf{x}$ f\"ur beliebiges \mathbf{x} .

2.8 LORENTZTRANSFORMATIONEN, BAHNKURVEN UND INVARIANTE TEILGEBIETE DES MINKOWSKIRAUMES

Mit Hilfe der oben betrachteten LORENTZTRANSFORMATION $\Lambda(\alpha)$ [vergleiche Gleichung (2.56) auf Seite 55], k\u00f6nnen s\u00e4mtliche anderen LORENTZTRANSFORMATIONEN beschrieben werden. Es gilt f\"ur beliebiges Λ :

Λ l\u00e4\u00dft sich stets in der Form

$$\Lambda = \epsilon(\Lambda) O_1 \Lambda(\alpha) O_2 P^k \quad (2.64)$$

schreiben, wobei $\epsilon(\Lambda) = \text{sign}(\eta(\mathbf{e}_0, \Lambda\mathbf{e}_0))$ und \mathbf{e}_0 der Einheitsvektor in Zeitrichtung ist. O_1 und O_2 sind zwei Raumdrehungen. P bezeichnet die Raumspiegelung und k ist entweder gleich 1 oder 2. $T = -P$ hei\u00dft Zeitspiegelung und $PT = -\mathbb{I}$ Raumzeitspiegelung. Wir erkennen, da\u00df jede LORENTZTRANSFORMATION die Form

$$\Lambda = O_1 \Lambda(\alpha) O_2 P_i, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (2.65)$$

mit $P_1 = \mathbb{I}$, $P_2 = P$, $P_3 = T$, $P_4 = PT$ besitzt. Die Gruppenelemente, die keine Spiegelung enthalten, bilden eine Untergruppe, die Gruppe der eigentlich orthochronen LORENTZTRANSFORMATIONEN L_+ .

Der MINKOWSKIRAUM selbst l\u00e4\u00dft sich in disjunkte Teilgebiete zerlegen, die invariant unter den eigentlich orthochronen Lorentztransformationen sind. Diese sind (sehen Sie bitte auch Abbildung 2.1 auf der n\u00e4chsten Seite):

$$T_+ = \{\mathbf{x} \in V; \eta(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0, x^0 > 0\} \quad (2.66)$$

$$K_+ = \{\mathbf{x} \in V; \eta(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0, x^0 > 0\} \quad (2.67)$$

$$R = \{\mathbf{x} \in V; \eta(\mathbf{x}, \mathbf{x}) < 0\} \quad (2.68)$$

$$K_- = \{ \mathbf{x} \in V; \eta(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0, x^0 < 0 \} \quad (2.69)$$

$$T_- = \{ \mathbf{x} \in V; \eta(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0, x^0 < 0 \} \quad (2.70)$$

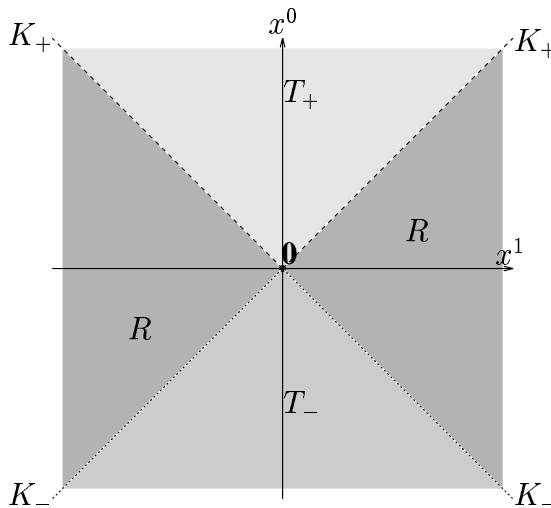


Abbildung 2.1: Invariante Unterräume des MINKOWSKIRAUMS unter der eigentlich orthochronen LORENTZgruppe. Für die Bezeichnungen beachten Sie bitte die Gleichungen (2.66) bis (2.70) und den darauf folgenden Text.

Die Vereinigung dieser Gebiete ergibt zusammen mit dem Nullvektor den gesamten MINKOWSKIRAUM. Bei Zeitspiegelungen werden T_+ und K_+ in T_- beziehungsweise K_- transformiert (und umgekehrt). Vektoren in R heißen raumartig, Vektoren in K_+ und K_- lichtartig und zwar positiv beziehungsweise negativ lichtartig, je nachdem ob sie in K_+ oder K_- liegen. Vektoren in T_+ und T_- nennt man zeitartig und zwar wieder positiv oder negativ, wenn sie aus T_+ oder T_- sind.

Für positiv zeitartige Vektoren \mathbf{a} und raumartige \mathbf{b} gibt es stets jeweils mindestens eine eigentlich orthochrone LORENTZtransformation Λ mit

$$\Lambda \mathbf{a} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle^{\frac{1}{2}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.71)$$

beziehungsweise

$$\Lambda \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ (-\eta(\mathbf{b}, \mathbf{b}))^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}. \quad (2.72)$$

Für die von uns betrachteten Bahnkurven $\mathbf{x}_i(s_i)$ haben wir stets vorausgesetzt, daß $\eta(\mathbf{x}'_i(s_i), \mathbf{x}'_i(s_i)) > 0$ und $\mathbf{x}'_i{}^0(s_i) > 0$ gilt, das heißt, der Tangentenvektor $\mathbf{x}'_i(s_i)$ liegt stets in T_+ . Falls wir $\mathbf{x}_i(s_i)$ durch die Bogenlänge parametrisieren, gilt $\eta(\mathbf{x}'_i(s_i), \mathbf{x}'_i(s_i)) = 1$ und $\tau_i = s_i/c$ heißt die Eigenzeit. Der Grund für diese Bezeichnung liegt in folgender Tatsache: In der Nähe des Parameterwertes s_0 gilt für $\mathbf{x}_i(s_i)$ die lineare Approximation

$$\mathbf{x}_i(s_0 + \Delta s) \approx \mathbf{x}_i(s_0) + \Delta s \mathbf{x}'_i(s_0).$$

Nach der Bemerkung zu Formel (2.71) auf der gegenüberliegenden Seite gibt es eine eigentlich orthochrone LORENTZTRANSFORMATION Λ mit

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i(s_0 + \Delta s) &\approx \mathbf{x}_i(s_0) + \Lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \Delta s \\ &= p_* \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \Delta s \right] = p_* \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot c\Delta\tau \right], \end{aligned}$$

wobei $p = (\Lambda, \mathbf{x}_i(s_0))$ eine POINCARÉTRANSFORMATION ist. Interpretieren wir p als Koordinatenwechsel, so besagt die letzte Gleichung, daß wir **lokal** (das heißt für jedes feste s_0 bei hinreichend kleinem Δs) für jede Bahnkurve ein Beobachtungssystem finden können, in dem das Teilchen ruht und seine Uhr die Zeit $\Delta\tau$ angibt. Natürlich stellt dies nur eine Näherung der tatsächlichen Bewegung dar, die um so schlechter ist, je stärker das Teilchen beschleunigt wird.

2.9 Koordinatenwechsel und Feldstärketensor

Wir wollen nun untersuchen, welche Konsequenzen unsere Koordinatenwechsel für den Feldstärketensor selbst haben. Wir beschränken uns auf reine LORENTZTRANSFORMATIONEN Λ . Im Standardkoordinatensatz gilt also

$$x^\mu(\mathbf{x}) = \epsilon_\mu \eta(e_\mu, \mathbf{x}) \quad (2.54)$$

und für die gestrichelten Koordinaten gilt:

$$x'^\mu(\mathbf{x}) = \epsilon_\mu \eta(e'_\mu, \mathbf{x}) = x^\mu \begin{pmatrix} -1 \\ \Lambda \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad (2.73)$$

Die beiden Basen werden ferner durch

$$e'_\mu = \Lambda e_\mu \quad (2.74)$$

ineinander transformiert.

Im ersten Koordinatensatz ist der Feldstärketensor komponentenweise durch

$$F(\mathbf{x})(e_\mu, e_\nu) = F_{\mu\nu}(x^0, x^1, x^2, x^3), \quad (2.9)$$

$$\text{mit } F_{i0} = -F_{0i} = -E^i(x^0, x^1, x^2, x^3), \quad (2.6)$$

$$\text{sowie } F_{il} = -\varepsilon_{ilk} B^k(x^0, x^1, x^2, x^3) \quad (2.7)$$

definiert worden. Im zweiten Satz wird ein anderer Feldstärketensor $G(\mathbf{x})$

$$G(\mathbf{x})(e'_\mu, e'_\nu) = F'_{\mu\nu}(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) \quad (2.75)$$

komponentenweise durch

$$F'_{i0} = -F'_{0i} = -E'^i(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) \quad (2.76)$$

$$F'_{il} = -\varepsilon_{ilk} B'^k(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) \quad (2.77)$$

erklärt. Wir fordern, daß in beiden Koordinatensystemen das gleiche Tensorfeld definiert wird und lediglich die Form seiner Komponenten in den verschiedenen Koordinaten verändert erscheint.

Es muß also $F = G$ gelten, und wir erhalten sofort, wegen

$$e'_\mu = \Lambda e_\mu = \Lambda^\nu{}_\mu e_\nu, \quad (2.74)$$

$$F_{\mu\nu}(x^0, x^1, x^2, x^3) = F'_{\alpha\beta}(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) \begin{pmatrix} -1 \\ \Lambda \end{pmatrix}^\alpha{}_\mu \begin{pmatrix} -1 \\ \Lambda \end{pmatrix}^\beta{}_\nu. \quad (2.78)$$

Neben den veränderten Koordinaten erkennen wir aus dieser Formel noch eine zweite bemerkenswerte Tatsache, daß nämlich auch die Komponenten des Feldstärketensors bei Koordinatenwechsel ineinander transformiert werden. Was ein elektrisches oder was ein magnetisches Feld ist, hängt vom Beobachtungssystem ab. Wir wählen zur Illustration ein konstantes elektrisches Feld im gestrichenen System mit $E'^3 = E > 0$ und $E'^i = B'^j = 0$ sonst, sowie $\Lambda = \Lambda(\alpha)$ wie in Formel (2.56) auf Seite 55. Es ergibt sich durch Einsetzen in die Formel (2.78) sofort:

$$E^3 = F_{03} = \cosh \alpha E \quad (2.79)$$

$$B^2 = F_{13} = -\sinh \alpha E \quad (2.80)$$

$$E^i = B^j = 0 \quad \text{sonst} \quad (2.81)$$

Das für den bewegten Beobachter (gestrichene Koordinaten) konstante, rein elektrische Feld erscheint dem unbewegten Beobachter in Begleitung eines Magnetfeldes.

Eine weitere Konsequenz unserer Koordinatentransformation betrifft die Beschreibung von elektromagnetischen Wellen. Koordinatenfrei werden diese als spezielle Lösung der stromfreien MAXWELLSchen Gleichungen durch folgende Tensorfelder ausgedrückt:

$$F(\mathbf{x})(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = A(\eta(\mathbf{k}, \mathbf{a}) \eta(\mathbf{n}, \mathbf{b}) - \eta(\mathbf{k}, \mathbf{b}) \eta(\mathbf{n}, \mathbf{a})) \cos(\eta(\mathbf{k}, \mathbf{x}) + \alpha) \quad (2.36)$$

Die Amplitude A und die Phase α sind reelle Zahlen, \mathbf{k} ein positiver lichtartiger Vektor und \mathbf{n} raumartig mit $\eta(\mathbf{n}, \mathbf{n}) = -1$. Wir setzen $k_\mu = \eta(\mathbf{k}, \mathbf{e}_\mu)$, $n_\mu = \eta(\mathbf{n}, \mathbf{e}_\mu)$, $k'_\mu = \eta(\mathbf{k}, \mathbf{e}'_\mu)$, $n'_\mu = \eta(\mathbf{n}, \mathbf{e}'_\mu)$ und erhalten für zwei Koordinatensysteme, die allgemein durch $x'^\mu(\mathbf{x}) = x^\mu(\Lambda^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{a}))$ in Beziehung stehen:

$$F(\mathbf{x})(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu) = F_{\mu\nu}(x^0, x^1, x^2, x^3) = A(k_\mu n_\nu - k_\nu n_\mu) \cos(k_\beta x^\beta + \alpha),$$

$$F(\mathbf{x})(\mathbf{e}'_\mu, \mathbf{e}'_\nu) = F'_{\mu\nu}(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) = A(k'_\mu n'_\nu - k'_\nu n'_\mu) \cos(k'_\beta x'^\beta + \alpha'),$$

mit $\alpha' = \alpha + k_\mu a^\mu$.

Interessanterweise ändert sich nicht die Form der Feldstärketensorkomponenten in den beiden Koordinatensystemen, lediglich die Werte der auftretenden Parameter sind verschieden. Von besonderem Interesse ist die Kreisfrequenz

$$\omega := k_0 c \quad (2.82)$$

mit der (bei festen räumlichen Koordinaten) die ebene Welle zeitlich oszilliert. Offensichtlich ist dies ebenfalls eine Größe, die vom Beobachter abhängt: In den gestrichenen Koordinaten gilt offenbar $\omega' = k'_0 c \neq k_0 c$.

Übungen

Aufgabe 2.7 — Der Feldstärketensor des COULOMBFeldes

Wir betrachten einen elektromagnetischen Feldstärketensor der Form

$$F(\mathbf{x})(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = Q(-\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{l}, \mathbf{x} \rangle^2)^{-\frac{3}{2}} (\langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle \langle \mathbf{l}, \mathbf{b} \rangle - \langle \mathbf{l}, \mathbf{a} \rangle \langle \mathbf{x}, \mathbf{b} \rangle) \quad (2.83)$$

für alle $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^4$. Hierbei ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ die MINKOWSKI-Metrik und $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^4$ ist ein zeitartiger Einheitsvektor, das heißt $\langle \mathbf{l}, \mathbf{l} \rangle = 1$.

- (a) Berechnen Sie die Tensorkomponenten $F_{\mu\nu}$ von (2.83) in der Standardbasis.
 (b) Berechnen Sie die Komponenten des elektrischen Feldes E , die gegeben sind durch

$$E^i(x, t) = F_{0i}(\mathbf{x}), \quad (i = 1, 2, 3)$$

sowie die Komponenten des magnetischen Feldes, die gegeben sind durch

$$B^k(x, t) = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \varepsilon_{ijk} F_{ij}(\mathbf{x}), \quad (k = 1, 2, 3).$$

Zeigen Sie, daß insbesondere gilt:

$$B(x, t) = \frac{1}{i_0} [\mathbf{l}, E(x, t)]$$

Hierbei ist $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^3$ der Vektor mit den Komponenten l^i , ($i = 1, 2, 3$).

- (c) Sei nun speziell $\mathbf{l} = \mathbf{e}_0$. Zeigen Sie, daß in diesem Fall E dem elektrostatischen COULOMBFeld einer Punktladung Q im Koordinatenursprung entspricht und das magnetische Feld B verschwindet.

Wir transformieren jetzt den Feldstärketensor des COULOMBFeldes (2.83) mittels einer (aktiven) LORENTZ-Transformation:

$$(\Lambda^* F)(\mathbf{x})(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = F(\Lambda \mathbf{x})(\Lambda \mathbf{a}, \Lambda \mathbf{b})$$

- (d) Zeigen Sie, daß $(\Lambda^* F)(\mathbf{x})$ wieder die Form (2.83) besitzt, wobei der zeitartige Vektor durch $\Lambda^{-1} \mathbf{l}$ gegeben ist.
 (e) Wir betrachten nun speziell den Boost des statischen COULOMBFeldes aus (c) in 1-Richtung \mathbf{e}_1 , also den Fall $\mathbf{l} = \Lambda(\alpha)^{-1} \mathbf{e}_0$. Berechnen Sie für diesen Fall das elektrische Feld E und das magnetische Feld B . Zeigen Sie, daß dieses Feld dem einer bewegten Punktladung entspricht, und geben Sie die Richtung und Geschwindigkeit der Ladung an.

Aufgabe 2.8 — Elektromagnetische Wellen

Wir beschreiben eine elektromagnetische Welle durch den Feldstärketensor mit den Komponenten

$$F_{\mu\nu}(\mathbf{x}) = A (k_\mu n_\nu - k_\nu n_\mu) \cos(k_\lambda x^\lambda + \alpha); \quad (2.84)$$

$A \in \mathbb{R}$ heißt Amplitude, $\alpha \in \mathbb{R}$ heißt Phase, $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^4$ heißt Wellenvektor und $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^4$ Polarisationsvektor. Es gilt: $k_\mu k^\mu = 0 = k_\mu n^\mu$, $n_\mu n^\mu = -1$ und eine Welle dieser Form heißt **linear polarisiert**. Seien $A', \alpha' \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{n}' \in \mathbb{R}^4$ ein zweiter Vektor mit $n'_\mu n'^\mu = -1$ und $k_\mu n'^\mu = 0 = n'_\mu n'^\mu$ und

$$F'_{\mu\nu}(\mathbf{x}) = A' (k_\mu n'_\nu - k_\nu n'_\mu) \cos(k_\lambda x^\lambda + \alpha') \quad (2.85)$$

der Feldstärketensor einer zweiten ebenen Welle. Sie ist wieder eine Lösung der MAXWELL-Gleichungen bei verschwindender Viererstromdichte, und das gleiche gilt auch für

$$G_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} + F'_{\mu\nu}.$$

(a) Zeigen Sie, daß $G_{\mu\nu}$ eindeutig in der Form

$$G_{\mu\nu} = F^+_{\mu\nu} + F^-_{\mu\nu}$$

mit

$$F^\pm_{\mu\nu} = A_\pm k_\mu \left[n_\nu \cos(k_\lambda x^\lambda + \alpha_\pm) \pm n'_\nu \sin(k_\lambda x^\lambda + \alpha_\pm) \right] - (\mu \leftrightarrow \nu)$$

geschrieben werden kann, wobei

$$4A_\pm^2 = A^2 + A'^2 \pm 2AA' \sin(\alpha - \alpha'), \quad \tan \alpha_\pm = \frac{A \sin \alpha \pm A' \cos \alpha'}{A \cos \alpha \mp A' \sin \alpha'}.$$

(b) Begründen Sie, daß F^\pm die stromfreien MAXWELL-Gleichungen erfüllt. Zeigen Sie, daß das elektrische Feld, das zu F^\pm gehört, für feste Raumpunkte x als Funktion der Zeit auf einem Kreis liegt. F^\pm heißt deshalb **zirkular polarisierte Welle** und zwar wird F^+ rechts- und F^- links-zirkularpolarisiert genannt.

(c) Setzen Sie jetzt: $\alpha_\pm = \alpha_0 \pm \delta$. Zeigen Sie, daß $G_{\mu\nu}$ in der Form

$$G_{\mu\nu} = A^{(1)} \left(k_\mu n_\nu^{(1)} - k_\nu n_\mu^{(1)} \right) \cos(k_\lambda x^\lambda + \alpha_0) + \\ + A^{(2)} \left(k_\mu n_\nu^{(2)} - k_\nu n_\mu^{(2)} \right) \sin(k_\lambda x^\lambda + \alpha_0)$$

geschrieben werden kann, wobei

$$A^{(1)} = A_+ + A_- \quad \mathbf{n}^{(1)} = \cos \delta \mathbf{n} + \sin \delta \mathbf{n}'$$

$$A^{(2)} = A_+ - A_- \quad \mathbf{n}^{(2)} = -\sin \delta \mathbf{n} + \cos \delta \mathbf{n}',$$

das heißt, es gilt: $\langle \mathbf{n}^{(i)}, \mathbf{n}^{(j)} \rangle = -\delta_{ij}$, ($i, j = 1, 2$). Berechnen Sie das elektrische Feld, das zu G gehört und zeigen Sie, daß dies für feste Raumpunkte x als Funktion der Zeit auf einer Ellipse liegt. G heißt deshalb **elliptisch polarisierte Welle**.

Für einen bewegten Beobachter sei der Feldstärketensor durch

$$F'_{\mu\nu}(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) = A (k'_{\mu} n'_{\nu} - k'_{\nu} n'_{\mu}) \cos(k'_{\lambda} x'^{\lambda} + \alpha)$$

gegeben. Der unbewegte Beobachter sieht deshalb den Feldstärketensor

$$F_{\mu\nu}(x^0, x^1, x^2, x^3) = A (k_{\mu} n_{\nu} - k_{\nu} n_{\mu}) \cos(k_{\lambda} x^{\lambda} + \alpha)$$

wobei

$$k_{\mu} = \Lambda^{-1}_{\mu}{}^{\nu} k'_{\nu}, \quad n_{\mu} = \Lambda^{-1}_{\mu}{}^{\nu} n'_{\nu} \quad \text{und} \quad x_{\mu} = \Lambda^{-1}_{\mu}{}^{\nu} x'_{\nu}.$$

Für jeden Beobachter wird die Kreisfrequenz der Welle durch $\omega = k_0 \cdot c$, beziehungsweise $\omega' = k'_0 \cdot c$ erklärt. Sei jetzt $\Lambda_1^0 = \Lambda_0^1 = \sinh \alpha$, $\Lambda_0^0 = \Lambda_1^1 = \cosh \alpha$, $\Lambda_2^2 = \Lambda_3^3 = 1$ und $\Lambda_{\nu}^{\mu} = 0$ sonst. Die Geschwindigkeit des bewegten Beobachters ist dann durch $v = c \tanh \alpha \mathbf{e}_1$ gegeben.

(d) Zeigen Sie, daß allgemein gilt:

$$\omega = \gamma \omega' (1 - \beta \cos \vartheta), \quad \text{mit } \beta = \frac{|v|}{c} \quad \gamma = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}},$$

wobei ϑ der Winkel zwischen v und k' ist. Zeigen Sie, daß insbesondere

$$\omega = \omega' \sqrt{\frac{1 \mp \beta}{1 \pm \beta}}$$

für $v \parallel k$ ($\vartheta = 0$, beziehungsweise π), und

$$\omega = \gamma \omega',$$

für $v \perp k$ gilt. Dies nennt man den **linearen**, beziehungsweise **quadratischen**

DOPPLER-Effekt. Erläutern Sie diese Bezeichnung, indem Sie den Grenzfall $|v| \ll c$ diskutieren.

Hinweis:

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

2.10 Eine Bemerkung zu LORENTZtransformationen mit Zeitspiegelung

Eine POINCARÉtransformation $p = (\Lambda, \mathbf{a})$ kann im allgemeinen eine LORENTZtransformation Λ mit einer Zeitspiegelung enthalten. Allgemein gilt ja $\Lambda = \Lambda_0 P_i$ wobei

$$P_1 = \mathbb{I},$$

$$P_2 = P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{Raumspiegelung,}$$

$$P_3 = T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{Zeitspiegelung,}$$

$$P_4 = PT = -\mathbb{I}$$

und Λ_0 eine eigentlich orthochrone LORENTZtransformation ist. P_3 und P_4 treten genau dann auf, wenn für die feste Zeitachse \mathbf{e}_0 ($\eta(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_0) > 0$) die Größe $\epsilon(\Lambda) = \text{sign}(\eta(\mathbf{e}_0, \Lambda \mathbf{e}_0))$ gleich -1 ist. Bei der Transformation der Bahnkurve in $p^{-1} * \mathbf{x}_i(s_i)$ ist in diesem Fall die zeitliche Komponente des zugehörigen Tangentenvektors negativ:

$$\left(\left(\begin{matrix} -1 \\ p * \mathbf{x}_i \end{matrix} \right)' (s_i) \right)^0 < 0$$

Bei der Herleitung der vierdimensionalen Bahngleichung haben wir darauf achten müssen, daß diese Komponente immer positiv sein soll. Zunächst bedeutet dies, daß

die Bahnkurven $p^{-1} *_i \mathbf{x}_i(s_i)$ physikalisch nicht erlaubt sind, also Zeitspiegelungen in der oben beschriebenen Form nicht stattfinden dürfen. Wir können aber zusätzlich die Spiegelung des Kurvenparameters $s_i \rightarrow -s_i$ vornehmen; danach gilt wieder: $\tilde{\mathbf{x}}_i(s_i) := p^{-1} *_i \mathbf{x}_i(-s_i)$ hat $(\tilde{\mathbf{x}}'_i(s_i))^0 > 0$ und stellt eine physikalisch erlaubte Bahnkurve dar. Für die Eigenzeit bedeutet diese zusätzliche Transformation, daß sie ebenfalls gespiegelt wird. Offenbar ist dies physikalisch auch sinnvoll, bedeutet jedoch, daß $p^* F$ nicht mehr zusammen mit $\tilde{\mathbf{x}}_i(s_i) = p^{-1} *_i \mathbf{x}_i(-s_i)$ die MAXWELLSchen Gleichungen und die EINSTEIN-LORENTZschen Bewegungsgleichungen erfüllt. Dies leistet aber jetzt gerade $-p^* F$. Der allgemeine Fall einer POINCARÉtransformation p des Feldes F und der Bahnkurven $\mathbf{x}_i(s_i)$ läßt sich also physikalisch korrekt so definieren:

Ist $p = (\Lambda, \mathbf{a})$, so gehen F in $\epsilon(\Lambda) p^* F$ und die Bahnkurven $\mathbf{x}_i(s_i)$ in $p^{-1} *_i \mathbf{x}_i(\epsilon(\Lambda) s_i)$ über. Wichtig in diesen Formeln ist die folgende Tatsache:

Wegen $\epsilon(\Lambda_1 \cdot \Lambda_2) = \epsilon(\Lambda_1) \cdot \epsilon(\Lambda_2)$ gilt wieder, daß die Hintereinanderschaltung zweier Transformationen p_1^* und p_2^* wie bisher der Transformation $(p_2 \cdot p_1)^*$ entspricht.

3 Erhaltungsgrößen

Wir haben im letzten Kapitel die Invarianz der MAXWELLSchen Gleichungen unter der Aktion der POINCARÉgruppe studiert. Diese Gruppe wird durch 10 reelle Parameter beschrieben und ersetzt die GALILEIgruppe der klassischen Mechanik. Bekanntlich führt die GALILEIinvarianz auf zehn Erhaltungsgrößen: Energie, sowie die jeweils drei Komponenten von Impuls, Drehimpuls und Schwerpunkt. Analog ist die Situation in der MAXWELL-EINSTEIN-LORENTZ-Theorie. Allerdings tritt die Schwierigkeit auf, daß hier die elektromagnetischen Felder zusätzlich zu den Erhaltungsgrößen beitragen. Diese Beiträge sind durch Integrale über räumliche Flächen im MINKOWSKIraum V definiert, und wir wollen uns erst mit solchen Integralen näher bekannt machen.

Zunächst sei $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion und \mathcal{G} ein offenes Gebiet in V . Falls p eine POINCARÉtransformation mit $p = (\Lambda, \mathbf{a})$ ist, so gilt wegen $\det \Lambda = \pm 1$

$$\int_{\mathcal{G}} p^* \phi = \int_{p(\mathcal{G})} \phi.$$

$p(\mathcal{G})$ ist das POINCARÉtransformierte Gebiet, das heißt jedes $\mathbf{x} \in \mathcal{G}$ geht über in $p_* \mathbf{x}$.

Sei $K^\mu(\mathbf{x})$ ein kontravariantes Vektorfeld, \mathcal{F} eine 3-dimensionale Fläche in V und die Punkte in \mathcal{F} seien (fast überall) eindeutig parametrisiert durch $\mathbf{x}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ mit $\alpha_i \in [a_i, b_i] \subset \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, 3$).

Das Integral von K über \mathcal{F} ist durch die Formel

$$\int_{\mathcal{F}} K = - \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_3}^{b_3} \varepsilon \left(K(\mathbf{x}), \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \alpha_2}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \alpha_3} \right) d\alpha_3 d\alpha_2 d\alpha_1 \quad (3.1)$$

erklärt. Dieser Ausdruck ist invariant unter Reparametrisierung. ε ist der kovariante, schiefe Tensor aus der Aufgabe 2.5 auf Seite 47, und $\omega = -\varepsilon$ heißt die Volumenform von V .

Beispiel: Eine **raumartige** Fläche \mathcal{F} ist wie folgt definiert: Seien $\mathbf{x}_0, \mathbf{p} \in V$ fest, $\eta(\mathbf{p}, \mathbf{p}) = 1$, $p^0 > 0$, dann ist:

$$\mathcal{F} = \{ \mathbf{x} \in V; \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle = 0 \} \quad (3.2)$$

Wir setzen $e'_0 := \mathbf{p}$ und ergänzen e'_0 zu einer Orthonormalbasis: $e'_0 = \mathbf{p}$, e'_i mit $\eta(e'_\mu, e'_\nu) = \epsilon_\mu \delta_{\mu\nu}$ und $\varepsilon(e'_0, e'_1, e'_2, e'_3) = -1$. Für $\mathbf{x} \in \mathcal{F}$ gilt dann die Parametrisierung

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \sum_{i=1}^3 \alpha_i e'_i \quad \alpha_i \in \mathbb{R}$$

$$\int_{\mathcal{F}} K = - \iiint_{-\infty}^{+\infty} d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 \varepsilon \left(K \left(\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \sum_{i=1}^3 e'_i \alpha_i \right), e'_1, e'_2, e'_3 \right)$$

wegen $K(\mathbf{x}) = K^\mu(\mathbf{x}) e'_\mu$ ist das gleich

$$\begin{aligned} &= - \iiint_{-\infty}^{+\infty} d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 K^0 \left(\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \sum_{i=1}^3 e'_i \alpha_i \right) \varepsilon(e'_0, e'_1, e'_2, e'_3) \\ &= \iiint_{-\infty}^{+\infty} d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 K^0(\mathbf{x}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)) \quad (3.3) \\ &= \iiint_{-\infty}^{+\infty} d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 \eta(K(\mathbf{x}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)), \mathbf{p}) \end{aligned}$$

Falls $p = (\Lambda, \mathbf{a})$ POINCARÉtransformation und Λ eigentlich orthochron ist, gilt überdies

$$\int_{\mathcal{F}} p^* K = \int_{p(\mathcal{F})} K \quad (3.4)$$

Sei \mathcal{G} ein offenes Gebiet mit Randfläche \mathcal{F} . Es gilt dann der

GAUSSsche Satz in 4 Dimensionen

Sei $\operatorname{div} K = \frac{\partial K^\mu}{\partial x^\mu}$ und $\mathcal{G} \subset V$ ein Gebiet mit Randfläche \mathcal{F} , dann gilt:

$$\int_{\mathcal{G}} \operatorname{div} K = \int_{\mathcal{F}} K \quad (3.5)$$

Wir betrachten ein Gebiet, dessen Randfläche durch zwei raumartige Flächen \mathcal{F}_1 und \mathcal{F}_2 sowie durch eine Fläche \mathcal{F}_3 gegeben ist, für deren Punkte $(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 > R \in \mathbb{R}$ gilt (siehe Abbildung 3.1), es gilt dann

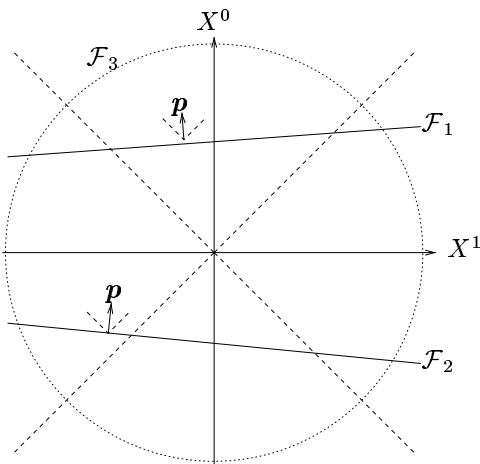


Abbildung 3.1: Gebiet \mathcal{G} im Minkowski-Raum.

$$\int_{\mathcal{F}} K = \int_{\mathcal{F}_1} K - \int_{\mathcal{F}_2} K + \int_{\mathcal{F}_3} K.$$

Falls $K^\mu(\mathbf{x})$ genügend rasch für $x^\mu \rightarrow \infty$ verschwindet, gilt $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{F}_3} K = 0$. Unter dieser Voraussetzung folgt somit

$$\int_{\mathcal{G}} \operatorname{div} K = \int_{\mathcal{F}_1} K - \int_{\mathcal{F}_2} K, \quad (3.6)$$

wobei \mathcal{G} durch die raumartigen Flächen \mathcal{F}_1 und \mathcal{F}_2 begrenzt wird.

Ist überdies $\operatorname{div} K = 0$, so gilt für zwei beliebige raumartige Flächen:

$$\int_{\mathcal{F}_1} K = \int_{\mathcal{F}_2} K \quad (3.7)$$

Wählen wir nun speziell

$$\mathcal{F}_1 = \{ \mathbf{x} \in V; x^0 = ct_1 \}$$

$$\mathcal{F}_2 = \{ \mathbf{x} \in V; x^0 = ct_2 \}$$

mit konstantem t_i , so gilt nach Formel (3.3) auf Seite 70 mit $\alpha_i = x_i$

$$\int_{\mathcal{F}_i} K = \int d^3x K^0(\mathbf{x})|_{x^0=ct_i}$$

sowie

$$\int d^3x K^0(\mathbf{x})|_{x^0=ct_1} = \int d^3x K^0(\mathbf{x})|_{x^0=ct_2}$$

Die Größe $\int d^3x K^0(\mathbf{x})|_{x^0=ct}$ hängt also nicht von der Zeit ab, sie ist eine Erhaltungsgröße. Überdies ist sie POINCARÉinvariant: Zunächst finden wir

$$\int d^3x (p^*K)^0(\mathbf{x})|_{x^0=ct} = \int_{\mathcal{F}} p^*K = \int_{p(\mathcal{F})} K, \quad (3.8)$$

wobei \mathcal{F} wieder die Fläche mit $x^0 = ct$ ist und $p(\mathcal{F})$ die POINCARÉtransformierte Fläche. Letztere ist auch wieder raumartig. \mathcal{F} und $p(\mathcal{F})$ begrenzen daher ein Gebiet \mathcal{G} , wie oben aufgeführt, und es folgt

$$\int_{\mathcal{F}} K - \int_{p(\mathcal{F})} K = \int_{\mathcal{G}} \operatorname{div} K = 0$$

Die beiden letzten Formeln zeigen, daß in der Tat die Identität

$$\int d^3x K^0(\mathbf{x})|_{x^0=ct} = \int d^3x (p^*K)^0(\mathbf{x})|_{x^0=ct} \quad (3.9)$$

gilt.

Wir betrachten die Viererstromdichte als Beispiel:

Beispiel: $K = J(\mathbf{x}) = c \sum_{i=1}^N q_i \int \delta_4(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(s_i)) \mathbf{x}'_i(s_i) ds_i$.

Es gilt $\operatorname{div} J = 0$, denn

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\mu} J^\mu &= c \sum_{i=1}^N q_i \int \mathbf{x}'_i{}^\mu(s_i) \frac{\partial}{\partial x^\mu} \delta_4(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(s_i)) ds_i \\ &= -c \sum_{i=1}^N q_i \int \frac{d}{ds_i} \delta_4(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(s_i)) ds_i \\ &= -c \sum_{i=1}^N q_i \left(\underbrace{\delta_4(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(\infty))}_{=0} - \underbrace{\delta_4(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(-\infty))}_{=0} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Wir setzen

$$\begin{aligned} Q(t) &= \frac{1}{c} \int J^0(ct, x^1, x^2, x^3) d^3x \\ &= \sum_{i=1}^N q_i \int d^3x \int \delta_4(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(s_i)) \mathbf{x}'_i{}^0(s_i) ds_i \\ &= \sum_{i=1}^N q_i \int d^3x \int_{-\infty}^{\infty} dx_i^0 \delta_4(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(x_i^0)). \end{aligned}$$

Nach der Variablentransformation

$$\begin{aligned} y_i &= x_i - x_i(x_i^0) \\ y_i^0 &= x_i^0 - \underbrace{ct}_{=x^0} \end{aligned}$$

folgt dann

$$Q(t) = \sum_{i=1}^N q_i \int d^4y \delta_4(y) = \sum_{i=1}^N q_i,$$

das heißt, die Gesamtladung Q ist nicht von der Zeit abhängig und (natürlich) POINCARÉinvariant.

Wir verschaffen uns jetzt ein solches kontravariantes Vektorfeld K nach einem speziellen Rezept. Sei $T(\mathbf{x})$ ein kovariantes symmetrisches Tensorfeld 2. Stufe mit Komponenten $T_{\mu\nu}(\mathbf{x})$ für das gelte⁽ⁱ⁾:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} T^{\mu\nu}(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.10)$$

$$T_{\mu\nu}(\mathbf{x}) = T_{\nu\mu}(\mathbf{x}) \text{ (Symmetrie)} \quad (3.11)$$

Sei $Y(\mathbf{x})$ ein Vektorfeld mit

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} Y_\beta(\mathbf{x}) + \frac{\partial}{\partial x^\beta} Y_\alpha(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.12)$$

Dann gilt:

$$K^\mu(\mathbf{x}) = T^{\mu\nu}(\mathbf{x}) Y_\nu(\mathbf{x}) \quad (3.13)$$

erfüllt $\text{div } K = 0$. Denn:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (T^{\mu\nu}(\mathbf{x}) Y_\nu(\mathbf{x})) &= \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} T^{\mu\nu}(\mathbf{x}) \right)}_{=0} Y_\nu(\mathbf{x}) + T^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} Y_\nu(\mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{2} T^{\mu\nu} \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} Y_\nu(\mathbf{x}) + \frac{\partial}{\partial x^\nu} Y_\mu(\mathbf{x}) \right)}_{=0} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Damit liefert $\int K^0(\mathbf{x})|_{x^0=ct} d^3x$ wieder eine Erhaltungsgröße.

Für die Elektrodynamik werden wir nun genau ein solches Tensorfeld T und die entsprechenden Vektorfelder Y konstruieren.

3.1 Der Energie-Impuls-Tensor

Zunächst führen wir den Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes ein:

$$(T_{\text{el}})_{\mu\nu} := \frac{1}{4\pi} \left[F_{\mu\lambda} F_\nu^\lambda + \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \eta_{\mu\nu} \right] \quad (3.14)$$

⁽ⁱ⁾ Heben der Indices sei, wie eingeübt, mit Hilfe der Metrik definiert und ausgeführt.

Er erfüllt

$$(\operatorname{div} T_{\text{el}})_{\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{2} F^{\kappa\lambda} (\operatorname{d}F)_{\kappa\lambda\nu} + (\operatorname{div} F)^{\lambda} F_{\lambda\nu} \right). \quad (3.15)$$

Beachten wir die MAXWELLSchen Gleichungen und heben den Index ν , so folgt

$$\begin{aligned} (\operatorname{div} T_{\text{el}})^{\nu}(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{c} F_{\lambda}^{\nu}(\mathbf{x}) J^{\lambda}(\mathbf{x}) \\ &= -\sum_{i=1}^N q_i \int F_{\lambda}^{\nu}(\mathbf{x}) \delta_4(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(s_i)) x'^{\lambda}(s_i) \operatorname{d}s_i \end{aligned}$$

Wegen der δ_4 -Funktion können wir \mathbf{x} in F_{λ}^{ν} durch $\mathbf{x}_i(s_i)$ ersetzen, und die Bewegungsgleichungen liefern dann zusätzlich

$$\begin{aligned} (\operatorname{div} T_{\text{el}})^{\nu}(\mathbf{x}) &= \\ &= -\sum_{i=1}^N m_i c^2 \int \operatorname{d}s_i \delta_4(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(s_i)) \frac{\operatorname{d}}{\operatorname{d}s_i} \frac{1}{\langle \mathbf{x}'_i(s_i), \mathbf{x}'_i(s_i) \rangle^{\frac{1}{2}}} x_i'^{\nu}(s_i). \end{aligned}$$

Hier kann partiell integriert werden, und man erhält, wegen

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{d}}{\operatorname{d}s_i} \delta_4(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(s_i)) &= -x_i'^{\alpha}(s_i) \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \delta_4(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(s_i)), \\ (\operatorname{div} T_{\text{el}})^{\nu}(\mathbf{x}) &= -\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} T_{\text{m}}^{\mu\nu}(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (3.16)$$

mit

$$T_{\text{m}}^{\mu\nu} := \sum_{i=1}^N m_i c^2 \int \operatorname{d}s_i \delta_4(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(s_i)) \frac{x_i'^{\mu}(s_i) x_i'^{\nu}(s_i)}{\langle \mathbf{x}'_i(s_i), \mathbf{x}'_i(s_i) \rangle^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.17)$$

T_{m} heißt der Energie-Impuls-Tensor der materiellen Teilchen und mit

$$T_{\text{tot}} := T_{\text{el}} + T_{\text{m}} \quad (3.18)$$

wird der Energie-Impuls-Tensor des Gesamtsystems aus Teilchen und Feld bezeichnet. Erhaltungsgrößen erhalten wir jetzt mit Hilfe des speziellen Vektorfeldes

$$Y^{\mu}(\mathbf{x}) := a^{\mu} + \omega_{\nu}^{\mu} x^{\nu}, \quad (3.19)$$

wobei a^μ konstant und ω_ν^μ konstant mit $\omega_{\mu\nu}$ schief ist. In diesem Falle gilt offenbar in der Tat

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} Y_\beta(\mathbf{x}) + \frac{\partial}{\partial x^\beta} Y_\alpha(\mathbf{x}) = 0.$$

Setzen wir $K^\mu = T_{\text{tot}}^{\mu\nu} Y_\nu$, so ist, falls T_{tot} genügend rasch im Unendlichen verschwindet,

$$\begin{aligned} \hat{K} &= \int K^0(\mathbf{x})|_{x^0=ct} d^3x \\ &= \int T_{\text{tot}}^{0\kappa}(\mathbf{x}) Y_\kappa(\mathbf{x})|_{x^0=ct} dx^1 dx^2 dx^3 \end{aligned} \quad (3.20)$$

unabhängig von der Zeit, das heißt eine Erhaltungsgröße.

Setzen wir den Ausdruck für Y explizit ein, so lautet (3.20) voll ausgeschrieben

$$\begin{aligned} \hat{K} &= \int d^3x \left(T_{\text{tot}}^{0\mu}(\mathbf{x}) a_\mu + T_{\text{tot}}^{0\mu}(\mathbf{x}) x^\nu \omega_{\mu\nu} \right)_{x^0=ct} \\ &= \int d^3x \left(T_{\text{tot}}^{0\mu}(\mathbf{x}) a_\mu + \frac{1}{2} \left(T_{\text{tot}}^{0\mu}(\mathbf{x}) x^\nu - T_{\text{tot}}^{0\nu}(\mathbf{x}) x^\mu \right) \omega_{\mu\nu} \right)_{x^0=ct}. \end{aligned}$$

a_μ und $\omega_{\mu\nu}$ waren völlig beliebig gewählt. Wir schließen hieraus: Die folgenden Größen sind **unabhängig** von der Zeit ($i, k = 1, 2, 3$)

$$P^0(t) = \int d^3x T_{\text{tot}}^{00}(\mathbf{x})|_{x^0=ct} \quad (3.21)$$

$$P^i(t) = \int d^3x T_{\text{tot}}^{0i}(\mathbf{x})|_{x^0=ct} \quad (3.22)$$

$$M^{0i}(t) = -M^{i0}(t) = \int d^3x \left(T_{\text{tot}}^{00}(\mathbf{x}) x^i - T_{\text{tot}}^{0i}(\mathbf{x}) x^0 \right)_{x^0=ct} \quad (3.23)$$

$$M^{ik}(t) = -M^{ki}(t) = \int d^3x \left(T_{\text{tot}}^{0i}(\mathbf{x}) x^k - T_{\text{tot}}^{0k}(\mathbf{x}) x^i \right)_{x^0=ct} \quad (3.24)$$

Wir bemerken nochmals: Auf der rechten Seiten ergeben sich **konstante** Werte. Jetzt können wir uns davon überzeugen, daß die klassischen Erhaltungssätze für Energie, Impuls, Schwerpunkt und Drehimpuls in der Tat weiter gelten. Sie erscheinen allerdings in modifizierter Form und werden maßgeblich dadurch beeinflusst, daß das elektromagnetische Feld zu den Erhaltungsgrößen beiträgt.

Wir betrachten zunächst den Beitrag des Materietensors zu den Erhaltungsgrößen und drücken ihn durch die Bahnkurven im \mathbb{R}^3 als Funktion der Zeit aus. Die 3-dimensionale Integration eliminiert dabei die δ_4 -Funktion, und man erhält nach einiger Rechnung:

$$P_m^0 = \sum_{k=1}^N \frac{m_k c^2}{\left(1 - \left(\frac{|v_k(t)|}{c}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$P_m^i = c \sum_{k=1}^N \frac{m_k v_k^i(t)}{\left(1 - \left(\frac{|v_k(t)|}{c}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$M_m^{0i} = c^2 \sum_{k=1}^N \frac{m_k}{\left(1 - \left(\frac{|v_k(t)|}{c}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}} (x_k^i(t) - t v_k^i(t))$$

$$M_m^{ij} = c \sum_{k=1}^N \frac{m_k}{\left(1 - \left(\frac{|v_k(t)|}{c}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}} (v_k^i(t) x_k^j(t) - v_k^j(t) x_k^i(t))$$

Für den Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes, ausgedrückt durch E und B , findet man zunächst

$$T_{\text{el}}^{00} = \frac{1}{8\pi} (|E|^2 + |B|^2),$$

$$T_{\text{el}}^{0i} = T_{\text{el}}^{i0} = \frac{1}{4\pi} [E, B]^i,$$

$$T_{\text{el}}^{ij} = -\frac{1}{4\pi} \left(E^i E^j + B^i B^j - \frac{1}{2} \delta_{ij} (|E|^2 + |B|^2) \right).$$

Sein Beitrag zu den Erhaltungsgrößen ist

$$P_{\text{el}}^0 = \frac{1}{8\pi} \int d^3x (|E(\mathbf{x})|^2 + |B(\mathbf{x})|^2)_{x^0=ct},$$

$$P_{\text{el}}^i = \frac{1}{4\pi} \int d^3x [E(\mathbf{x}), B(\mathbf{x})]_{x^0=ct}^i,$$

$$M_{\text{el}}^{0i} = \frac{1}{4\pi} \int d^3x \left(x^i \frac{|E(\mathbf{x})|^2 + |B(\mathbf{x})|^2}{2} - x^0 [E(\mathbf{x}), B(\mathbf{x})]^i \right)_{x^0=ct},$$

$$M_{\text{el}}^{ij} = \frac{1}{4\pi} \int d^3x \left([E(\mathbf{x}), B(\mathbf{x})]^i x^j - [E(\mathbf{x}), B(\mathbf{x})]^j x^i \right)_{x^0=ct}.$$

Wir finden somit, $P_{\text{m}}^0 = \sum_{k=1}^N T_k$ ist die Summe der relativistischen Bewegungsenergien der einzelnen Teilchen. Sie ist selbst **keine** Erhaltungsgröße. Addiert man jedoch den Beitrag $P_{\text{el}}^0 = \frac{1}{8\pi} \int d^3x \left(|E|^2 + |B|^2 \right)_{x^0=ct}$, so ist die Summe zeitlich konstant:

$$P^0 = P_{\text{m}}^0 + P_{\text{el}}^0 = \text{const.}$$

P_{el}^0 ist demzufolge natürlich als Energiebeitrag des elektromagnetischen Feldes zu interpretieren. Dieser erscheint als Integral über $W : = \frac{1}{8\pi} \left(|E|^2 + |B|^2 \right)$. Diese Funktion wird auch als Energiedichte des Feldes bezeichnet.

Die Komponenten P_{m}^i/c und P_{el}^i/c faßt man am besten zu jeweils einem Vektor P_{m} beziehungsweise P_{el} zusammen, für die dann gilt

$$P_{\text{m}} = \sum_{i=1}^N p_i,$$

$$P_{\text{el}} = \frac{1}{4\pi c} \int d^3x [E, B].$$

p_i ist der uns wohlbekannte relativistische Teilchenimpuls und somit P_{m} der Gesamtimpuls aller Teilchen. Er allein ist wieder nicht zeitlich konstant. Addiert man aber P_{el} , so gilt

$$P = P_{\text{m}} + P_{\text{el}} = \text{const.}$$

Wieder liegt die Interpretation von P_{el} auf der Hand: P_{el} ist der Impuls des elektromagnetischen Feldes.

Wir setzen jetzt noch

$$R_{\text{m}} := \sum_{k=1}^N \frac{m_k}{\left(1 - \left(\frac{|v_k(t)|}{c} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}} x_k, \quad (3.25)$$

$$R_{\text{el}} := \frac{1}{8\pi c^2} \int d^3x x \left(|E(\mathbf{x})|^2 + |B(\mathbf{x})|^2 \right). \quad (3.26)$$

Aus der zeitlichen Konstanz von $M_m^{0i} + M_{\text{el}}^{0i}$ folgt

$$(R_m + R_{\text{el}}) - Pt = R_0 = \text{const.} \quad (3.27)$$

R_m ist offenbar bis auf einen Faktor der relativistische Schwerpunkt der Teilchen, und somit ist R_{el} als Schwerpunkt des elektromagnetischen Feldes anzusehen. Gleichung (3.27) ist dann nichts anderes als der verallgemeinerte Schwerpunktsatz.

Aus den restlichen Erhaltungsgrößen $M^{ij} := M_m^{ij} + M_{\text{el}}^{ij}$ folgt:

$$L := \sum_{k=1}^N [x_k, p_k] + \frac{1}{4\pi c} \int d^3x [x, [E, B]] \quad (3.28)$$

ist eine Erhaltungsgröße. Der erste Term ist offenbar der gesamte Teilchendreimpuls, und wie bei den anderen Erhaltungsgrößen liegt die Interpretation des zweiten Terms wieder auf der Hand: Es ist der Drehimpuls des Feldes selbst. Addiert man ihn zum Teilchendreimpuls, erhält man eine Erhaltungsgröße L .

Wir betrachten jetzt die transformierten Bahnkurven $\tilde{\mathbf{x}}_k = p^{-1} * \mathbf{x}_k$ sowie die transformierten Felder p^*F . Wir haben auf den Seiten 51 bis 53 gezeigt, daß $p^*J(\mathbf{x})$ der zu den transformierten Bahnkurven gehörende Strom ist. Analog gilt dies bei exakter Kopie des Beweises auch für p^*T_m . Gleichfalls ist⁽ⁱ⁾ p^*T_{el} der Energie-Impuls-Tensor des transformierten elektromagnetischen Feldes p^*F . Hieraus folgt: p^*T_{tot} ist der Energie-Impuls-Tensor zum Feld p^*F und zu den Bahnkurven $p^{-1} * \mathbf{x}_k$. Sei $K^\mu = T^{\mu\nu} Y_\nu$ wie zuvor. Nach (3.9) auf Seite 72 gilt für $\int d^3x K^0(\mathbf{x})|_{x^0=ct}$ die POINCARÉinvarianz

$$\int d^3x K^0(\mathbf{x})|_{x^0=ct} = \int d^3x (p^*K)^0(\mathbf{x})|_{x^0=ct}. \quad (3.9)$$

Andererseits ist

$$(p^*K)^\mu = (p^*T)^{\mu\nu} (p^*Y)_\nu. \quad (3.29)$$

Für $(p^*Y)_\nu$ gilt aber, wegen $Y_\nu(\mathbf{x}) = a_\nu + \omega_{\nu\alpha} x^\alpha$ und $p = (\Lambda, \mathbf{b})$,

$$p^*Y_\nu = \Lambda^\beta{}_\nu (a_\beta + \omega_{\beta\alpha} (\Lambda^\alpha{}_\gamma x^\gamma + b^\alpha)) \quad (3.30)$$

$$= a'_\nu + \omega'_{\nu\gamma} x^\gamma, \quad (3.31)$$

wobei

$$a'_\nu := \Lambda^\beta{}_\nu (a_\beta + \omega_{\beta\alpha} b^\alpha),$$

⁽ⁱ⁾ Beweis siehe Aufgabe 2.5 auf Seite 47.

$$\omega'_{\nu\gamma} := \Lambda^\beta{}_\nu \Lambda^\alpha{}_\gamma \omega_{\beta\alpha}.$$

(3.9) und (3.29) auf der vorhergehenden Seite implizieren für die Erhaltungsgrößen P'^μ und $M'^{\mu\nu}$, die zu den transformierten Feldern und Teilchenbahnen gehören, daß

$$P'^\mu a'_\mu + M'^{\mu\nu} \omega'_{\mu\nu} = P^\mu a_\mu + M^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu}.$$

Hieraus folgt sofort

$$P'^\mu \Lambda^\alpha{}_\mu = P^\alpha \quad (3.32)$$

$$M'^{\alpha\beta} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta + \frac{1}{2} (P'^\alpha \Lambda^\mu{}_\alpha b^\nu - P'^\alpha \Lambda^\nu{}_\alpha b^\mu) = M^{\mu\nu} \quad (3.33)$$

oder

$$M'^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 \\ \Lambda \end{pmatrix}^\alpha{}_\mu \begin{pmatrix} -1 \\ \Lambda \end{pmatrix}^\beta{}_\nu \left(M^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (b^\nu P^\mu - P^\nu b^\mu) \right). \quad (3.33)$$

Wegen (3.32) und $\eta(\mathbf{P}, \mathbf{P}) > 0$ kann man nun immer ein Beobachtungssystem finden, in dem $P'^i = 0$ ($i = 1, 2, 3$) gilt. Außerdem kann auf Grund von (3.33) der Ursprung des Beobachtungssystems immer so gelegt werden, daß sich $M'^{0i} = 0$ ($i = 1, 2, 3$) ergibt. Eine dann noch verbleibende Drehung kann so gewählt werden, daß nur $M'^{12} \neq 0$, aber sonst $M'^{ik} = 0$ ist.

Ein solches Beobachtungssystem, in dem nur die Gesamtenergie $P'^0 \neq 0$ und eine Drehimpulskomponente $M'^{12} \neq 0$ nicht verschwinden und alle anderen Erhaltungsgrößen gleich Null sind, nennt man das Schwerpunktssystem (englisch **C**enter of **M**ass **S**ystem oder kurz **CMS**). Solche Koordinaten sind natürlich für die Rechnung sehr günstig, da sehr viele Größen schon ohne langwieriges Rechnen als 0 bekannt sind.

Übungen

Aufgabe 3.1 — Energie-Impuls-Tensor

Der Energie-Impuls-Tensor wurde definiert durch:

$$(T(F))_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left[F_{\mu\lambda} F^\lambda{}_\nu + \frac{1}{4} F_{\kappa\lambda} F^{\kappa\lambda} \eta_{\mu\nu} \right].$$

- (a) Zeigen Sie, daß mit den Feldern E und B die **Energiedichte** $\mathcal{E}(x, t) := T^{00}$ gegeben ist durch:

$$\mathcal{E}(x, t) = \frac{1}{8\pi} (|E(x, t)|^2 + |B(x, t)|^2)$$

- (b) Zeigen Sie auch, daß

$$T^{0i} = \frac{1}{c} \mathcal{S}^i,$$

wobei $\mathcal{S} \in \mathbb{R}^3$ mit den Komponenten

$$\mathcal{S}^i = \frac{c}{4\pi} [E(x, t), B(x, t)]^i$$

der **POYNTING-VEKTOR** genannt wird. Dieser hat die physikalische Bedeutung einer Energiestromdichte.

Der Energie-Impuls-Tensor einer Punktladung der Masse m , die sich auf einer Bahnkurve $x(\tau)$ bewegt, wobei τ die Eigenzeit mit $\langle \mathbf{x}'(\tau), \mathbf{x}'(\tau) \rangle = c^2$ ist, wird definiert durch:

$$T_m^{\mu\nu}(\mathbf{y}) = mc \int_{-\infty}^{\infty} d\tau x'^{\mu}(\tau) x'^{\nu}(\tau) \delta^{(4)}(\mathbf{y} - \mathbf{x}(\tau)).$$

- (c) Zeigen Sie, daß für die Komponenten T_m^{00} beziehungsweise T_m^{i0} des Energie-Impuls-Tensors der Punktladung

$$T_m^{00}(y, t) = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{|\dot{x}(t)|^2}{c^2}}} \delta(y - x(t)),$$

beziehungsweise

$$\frac{1}{c} T_m^{k0}(y, t) = \frac{m\dot{x}^k(t)}{\sqrt{1 - \frac{|\dot{x}(t)|^2}{c^2}}} \delta(y - x(t))$$

gilt. Hierbei ist $x'(\tau) = \frac{dx}{d\tau}(\tau)$ und $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}(t)$.

Aufgabe 3.2 — Relativistische Zweiteilchenkinematik

In der Vorlesung wurde gezeigt, daß im feldfreien Fall die Erhaltungsgrößen

$$P^\alpha = \frac{1}{c} \int d^3x T_m^{0\alpha}(\mathbf{x}) \Big|_{x^0=ct}$$

einen Vierervektor $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} P^0 \\ \mathbf{P} \end{pmatrix}$ bilden, wobei

$$P^0 = \frac{1}{c} \sum_{i=1}^N T_i \text{ mit } T_i = \frac{m_i c^2}{\left(1 - \frac{|v_i(t)|^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i \text{ mit } \mathbf{p}_i = \frac{m_i \mathbf{v}}{\left(1 - \frac{|v_i(t)|^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Hierbei ist T_i , beziehungsweise \mathbf{p}_i die (relativistische) kinetische Energie, respektive der (relativistische) Impuls des i -ten Teilchens. Für $T_m(\mathbf{x}) \rightarrow T'_m(\mathbf{x}) = (p^* T_m)(\mathbf{x})$ wurde gezeigt, daß \mathbf{P} sich wie ein kontravarianter Tensor 1. Stufe transformiert, das heißt

$$P^\mu \rightarrow P'^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu_\nu P^\nu.$$

(a) Zeigen Sie: $\eta(\mathbf{P}, \mathbf{P})$ ist eine POINCARÉ-Invariante und es gilt für ein einzelnes Teilchen:

$$\eta(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_i) = m_i^2 \cdot c^2$$

und

$$T_i = \sqrt{m_i^2 c^4 + c^2 |\mathbf{p}_i|^2}.$$

(b) Zeigen Sie, daß \mathbf{P} ein zeitartiger Vektor ist, das heißt $\eta(\mathbf{P}, \mathbf{P}) > 0$, so daß es ein Bezugssystem (das “**(C)enter of (M)ass (S)ystem**”) gibt, in dem \mathbf{P} die Form $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} T^{cms} \\ 0 \end{pmatrix}$ besitzt. Wir schreiben auch: $T^{cms} = c \sqrt{\eta(\mathbf{P}, \mathbf{P})}$, das heißt, $\eta(\mathbf{P}, \mathbf{P})$ ist das Quadrat der gesamten kinetischen Energie in CM-System.

Wir betrachten jetzt die elastische Zweiteilchenreaktion

$$(m_1, \mathbf{p}_1) + (m_2, \mathbf{p}_2) \rightarrow (m_3, \mathbf{p}_3) + (m_4, \mathbf{p}_4)$$

wofür die Energie-Impuls-Erhaltung gilt:

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4 \quad (3.34)$$

Die LORENTZ-invarianten MANDELSTAM-Variablen sind definiert durch

$$s := \eta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = \eta(\mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4, \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4)$$

$$t := \eta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3) = \eta(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_4, \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_4)$$

$$u := \eta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_4, \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_4) = \eta(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3).$$

(c) Berechnen Sie s, t, u (in Termen von m_i, p_i, T_i) und zeigen Sie, daß

$$s + t + u = c^2 (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2),$$

das heißt, s, t, u sind *nicht* unabhängig.

(d) Zeigen Sie, daß $s = \frac{1}{c^2} (T^{cms})^2$.

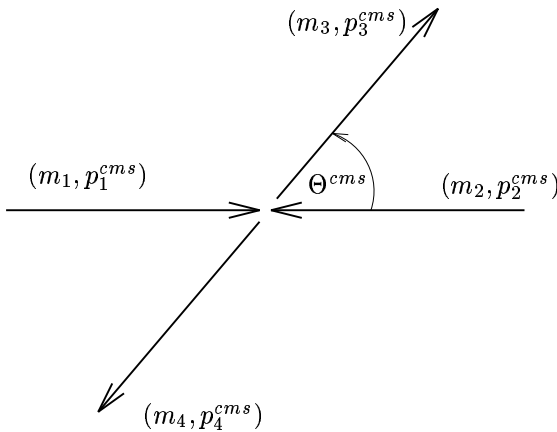


Abbildung 3.2: Zweiteilchenstoß im CM-System

Um den Streuprozess kinematisch festzulegen, muß neben der Schwerpunktsenergie $T^{cms} = c\sqrt{s}$ auch noch der Streuwinkel θ^{cms} im Schwerpunktsystem angegeben werden, siehe Abbildung 3.2. Diese Ablenkung drückt man durch die 4-er-Impulsüberträge $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3$ von Teilchen 1 auf 3 aus.

(e) Zeigen Sie, daß gilt:

$$t = t_0 - 4 \sin^2 \frac{\theta^{cms}}{2} |p_1^{cms}| |p_3^{cms}|,$$

wobei

$$t_0 = \frac{1}{c^2} (T_1^{cms} - T_3^{cms})^2 - (|p_1^{cms}| - |p_3^{cms}|)^2$$

Für die Teilchen 1 und 4 gelten die entsprechenden Formeln mit der Invarianten u .

(f) Berechnen Sie mit Hilfe der Invarianten s , m_1 und m_2 die kinetischen Energien T_1^{cms} und T_2^{cms} der Teilchen 1 und 2 im Schwerpunktsystem:

$$\frac{1}{c} T_1^{cms} = \frac{s + m_1^2 c^2 - m_2^2 c^2}{2\sqrt{s}}$$

$$\frac{1}{c} T_2^{cms} = \frac{s + m_2^2 c^2 - m_1^2 c^2}{2\sqrt{s}}$$

Zeigen Sie, daß entsprechend die Impulsbeträge $|p_1^{cms}|$ und $|p_2^{cms}|$ mit Hilfe der Invarianten geschrieben werden können als

$$|p_1^{cms}| = |p_2^{cms}| = \frac{(s - (m_1 + m_2)^2 c^2)^{\frac{1}{2}} (s - (m_1 - m_2)^2 c^2)^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{s}}$$

(g) In einem 2-Teilchen-Stoßexperiment befindet sich oft eines der Teilchen (Teilchen 2) anfangs im Labor in Ruhe. Stellen Sie die kinetische Energie T_1^{lab} sowie den Impulsbetrag $|p_1^{lab}|$ des bewegten Teilchens (Teilchen 1) mit Hilfe der Invarianten s , m_1 und m_2 dar:

$$\frac{1}{c} T_1^{lab} = \frac{s - m_1^2 c^2 - m_2^2 c^2}{2m_2 c}$$

$$|p_1^{lab}| = \frac{(s - (m_1 + m_2)^2 c^2)^{\frac{1}{2}} (s - (m_1 - m_2)^2 c^2)^{\frac{1}{2}}}{2m_2 c}$$

Wir betrachten nun den Zerfall eines Teilchens der Masse M in zwei Teilchen mit den Massen m_1 und m_2 :

$$(M, p) \rightarrow (m_1, p_1) + (m_2, p_2)$$

Es gilt die Energie-Impuls-Erhaltung:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \quad (3.35)$$

- (h) Wann ist ein solcher Zerfall kinematisch möglich? Zeigen Sie, daß im Ruhesystem der Masse M die Zerfallsenergien T_1 und T_2 der Teilchen 1 und 2 folgendermaßen durch die Massen M , m_1 und m_2 bestimmt sind:

$$\frac{1}{c}T_1 = \frac{M^2c^2 + m_1^2c^2 - m_2^2c^2}{2Mc}$$

$$\frac{1}{c}T_2 = \frac{M^2c^2 + m_2^2c^2 - m_1^2c^2}{2Mc}$$

- (i) Zeigen Sie, daß in diesem Bezugssystem ebenfalls die Impulsbeträge $|p_1|$ und $|p_2|$ durch die Massen M , m_1 und m_2 bestimmt sind:

$$|p_1| = |p_2| = \frac{(M^2c^2 - (m_1 + m_2)^2c^2)^{\frac{1}{2}}(M^2c^2 - (m_1 - m_2)^2c^2)^{\frac{1}{2}}}{2Mc}$$

4 NOETHERtheoreme und Prinzip der kleinsten Wirkung

4.1 Die elektromagnetischen Vektorpotentiale

Das Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ ist ein Tensorfeld 1. Stufe, das der Bedingung

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} A_\nu - \frac{\partial}{\partial x^\nu} A_\mu \quad (4.1)$$

genügt.

Seine Existenz folgt aus

$$dF = 0. \quad (2.18)$$

\mathbf{A} kann explizit wie folgt konstruiert werden:

$$\mathbf{A}_\nu(\mathbf{x}) = \int_0^1 d\tau \tau x^\mu F_{\mu\nu}(\tau \mathbf{x}) \quad (4.2)$$

\mathbf{A} ist durch (4.1) nicht eindeutig bestimmt: Mit \mathbf{A} erfüllt auch

$$\tilde{\mathbf{A}}_\mu = \mathbf{A}_\mu + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \lambda(\mathbf{x}) \quad (4.3)$$

mit einer beliebigen Funktion $\lambda : V \rightarrow \mathbb{R}$ die Gleichung (4.1). Die Transformation

$$\mathbf{A}_\mu \rightarrow \tilde{\mathbf{A}}_\mu = \mathbf{A}_\mu + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \lambda(\mathbf{x}) \quad (4.4)$$

heißt Eichtransformation.

Die oben abgeleiteten Beziehungen werden mathematisch gerne im sogenannten Formenkalkül dargestellt. Zunächst heißt ein schiefes $(k, 0)$ -Tensorfeld ω im \mathbb{R}^n auch

Differentialform k -ter Stufe. Setzen wir

$$\begin{aligned}
 (d\omega)_{\mu_1 \dots \mu_{k+1}} &:= \frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} \omega_{\mu_2 \dots \mu_{k+1}} - \frac{\partial}{\partial x^{\mu_2}} \omega_{\mu_1 \mu_3 \dots \mu_{k+1}} + \dots + \\
 &\qquad\qquad\qquad + (-1)^k \frac{\partial}{\partial x^{\mu_{k+1}}} \omega_{\mu_1 \dots \mu_k} \\
 &= \sum_{l=1}^{k+1} (-1)^{l+1} \frac{\partial}{\partial x^{\mu_l}} \omega_{\mu_1 \dots \hat{\mu}_l \dots \mu_{k+1}}, \tag{4.5}
 \end{aligned}$$

so wird komponentenweise eine Differentialform $d\omega$ der Stufe $k+1$ erklärt.

Es gilt

$$d^2 = 0, \tag{4.6}$$

sowie speziell im \mathbb{R}^4

$$p^*d = dp^*. \tag{2.47}$$

Falls $d\omega = 0$, heißt ω **geschlossen**. Falls $\omega = d\omega'$ ist, so heißt ω **exakt**. Wegen $d^2 = 0$ ist jede exakte Form auch geschlossen. Im \mathbb{R}^n gilt für singularitätenfreie Differentialformen stets auch die Umkehrung:

POINCARÉ-Lemma

Falls $d\omega = 0$ gilt, so gibt es eine Differentialform ω' ($k-1$)-ter Stufe mit

$$\omega = d\omega'. \tag{4.7}$$

Ohne Beweis geben wir hier eine Formel für ω' an

$$\omega'_{\mu_1 \dots \mu_{k-1}}(\mathbf{x}) = \int_0^1 d\tau \omega_{\mu_0 \mu_1 \dots \mu_{k-1}}(\tau \mathbf{x}) \tau^{k-1} x^{\mu_0}. \tag{4.8}$$

Beispiele:

i). $k=1$, ω' ist die Funktion

$$\omega'(\mathbf{x}) = \int_0^1 d\tau \omega_\mu(\tau \mathbf{x}) x^\mu$$

ii). $k=2$, ω' ist die 1-Form

$$\omega'_\nu(\mathbf{x}) = \int_0^1 d\tau \omega_{\mu\nu}(\tau\mathbf{x}) \tau x^\mu$$

Allgemein ist ω' nicht eindeutig bestimmt. Es gilt: Mit ω' erfüllt wegen $d^2=0$ auch $\tilde{\omega}=\omega'+d\omega''$ die Gleichung $\omega=d\tilde{\omega}$, wobei ω'' eine $(k-2)$ -Form ist.

Der Zusammenhang zwischen Vektorpotential \mathbf{A} und Feldstärketensor F kann also kurz in der Form

$$F = d\mathbf{A} \quad (4.9)$$

und die Eichtransformation in der Form

$$\mathbf{A} \rightarrow \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + d\lambda \quad (4.10)$$

dargestellt werden.

Der Zusammenhang zwischen E , B und \mathbf{A} wird üblicherweise durch die kontravarianten Komponenten A^μ von \mathbf{A} dargestellt: Man setzt $A^0 = \Phi$ und bildet aus den A^i ein dreidimensionales Vektorfeld A . Dann gilt

$$E = -\frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} - \nabla \Phi \quad (4.11)$$

$$B = \text{rot } A. \quad (4.12)$$

Übungen

Aufgabe 4.1 — Das Vektorpotential

Sei $\omega_k(\mathbf{x})$ eine schiefes, kovariantes Tensorfeld der Stufe k und $D_h\omega_k$ die **Richtungsableitung** von ω_k nach h , das heißt

$$D_h\omega_k(\mathbf{x})(\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_k) = \frac{d}{dt} \omega_k(\mathbf{x} + t\mathbf{h})(\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_k)|_{t=0}.$$

Dann wird durch

$$(d\omega_k)(\mathbf{x})(\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{k+1}) = \sum_{\sigma \in S_{k+1}} \frac{\epsilon(\sigma)}{k!} (D_{h_{\sigma(1)}}\omega_k)(\mathbf{x})(\mathbf{h}_{\sigma(2)}, \dots, \mathbf{h}_{\sigma(k+1)})$$

ein Tensorfeld $d\omega_k$ der Stufe $(k + 1)$ erklärt. Die lineare Abbildung d heißt die **äußere Ableitung** und es gilt:

$$d^2\omega_k = 0.$$

Für die Komponenten gilt:

$$(d\omega)_{\mu_1 \dots \mu_{k+1}} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} \omega_{\mu_2 \dots \mu_{k+1}} - \frac{\partial}{\partial x^{\mu_2}} \omega_{\mu_1 \mu_3 \dots \mu_{k+1}} + \dots + (-1)^k \frac{\partial}{\partial x^{\mu_{k+1}}} \omega_{\mu_1 \dots \mu_k}.$$

Wir definieren für einen Feldstärketensor ein **Vektorpotential** durch

$$A_\mu(\mathbf{x}) = \int_0^1 d\tau \tau x^\rho F_{\rho\mu}(\tau \mathbf{x}).$$

Bemerkung: Diese Formel gilt nur dann, falls F keine Singularitäten besitzt! Dies schließt insbesondere das COULOMB-Feld aus.

(a) Zeigen Sie, daß gilt:

$$F(\mathbf{x}) = (dA)(\mathbf{x}).$$

(b) Zeigen Sie, daß für das elektrische Feld

$$E(x, t) = -\text{grad } \Phi(x, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} A(x, t)$$

und für das magnetische Feld

$$B(x, t) = \text{rot } A(x, t)$$

gilt, wobei $\Phi(x, t) = A^0(\mathbf{x})|_{x^0=ct}$ und $A(x, t)$ das Vektorfeld mit den Komponenten $A^i(\mathbf{x})|_{x^0=ct}$, ($i = 1, 2, 3$) ist.

(c) Berechnen Sie das Vektorpotential $A(x, t)$ für

- (i) ein homogenes elektrisches Feld $E(x, t) = E^{(0)}$;
- (ii) ein homogenes Magnetfeld $B(x, t) = B^{(0)}$;
- (iii) die elektromagnetische Welle

$$F_{\mu\nu}(\mathbf{x}) = A (k_\mu n_\nu - k_\nu n_\mu) \sin(k_\lambda x^\lambda + \alpha).$$

(d) Erraten Sie ein Vektorpotential für das COULOMB-Feld mit dem Feldstärketensor

$$\langle \mathbf{l}, \mathbf{l} \rangle = 1)$$

$$F_{\mu\nu}(\mathbf{x}) = Q \frac{x_\mu l_\nu - x_\nu l_\mu}{(\langle \mathbf{x}, \mathbf{l} \rangle^2 - \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle)^{\frac{3}{2}}}.$$

4.2 Das Wirkungsfunktional der Elektrodynamik

In der Mechanik stellt das Prinzip der kleinsten Wirkung ein besonders wirksames theoretisches Hilfsmittel dar. Aus ihm können die Bewegungsgleichungen abgeleitet werden und mit Hilfe der NOETHER-Theoreme das Verhalten der Lösungen unter Symmetrietransformationen, sowie die Konstruktion von Erhaltungsgrößen studiert werden.

Wir formulieren jetzt ein Wirkungsfunktional S für Teilchen und Felder in der Elektrodynamik mit Hilfe eines Vektorpotentials \mathbf{A} mit $F = d\mathbf{A}$. Zunächst beachten wir, daß wegen $F = d\mathbf{A}$ die homogenen MAXWELLGleichungen automatisch erfüllt sind, das heißt, es gilt

$$dF = 0. \quad (2.18)$$

Dem Wirkungsfunktional geben wir jetzt die Form⁽ⁱ⁾

$$\begin{aligned} S(\mathbf{A}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) &= \\ &= - \sum_{i=1}^N \int ds_i \left(\langle \mathbf{x}'_i(s_i), \mathbf{x}'_i(s_i) \rangle^{\frac{1}{2}} m_i c + \frac{q_i}{c} A_\mu(\mathbf{x}_i(s_i)) x_i'^\mu(s_i) \right) \\ &\quad - \frac{1}{16\pi c} \int d^4x F_{\mu\nu}(\mathbf{x}) F^{\mu\nu}(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Wir verlangen: Die tatsächlichen Bahnkurven $\mathbf{x}_i(s_i)$ sind Extrema dieses Funktionals, das heißt, für beliebige Variationen $\delta\mathbf{x}_i(s_i)$, die nur in einem endlichen Parameterbereich von Null verschieden sein sollen, gelte mit der Abkürzung $\mathbf{y}_{i\alpha} := \mathbf{x}_i + \alpha\delta\mathbf{x}_i$

$$\frac{d}{d\alpha} S(\mathbf{A}, \mathbf{y}_{1\alpha}, \dots, \mathbf{y}_{N\alpha})_{\alpha=0} = 0. \quad (4.14)$$

Analog fordern wir: Für beliebige Variation $\delta\mathbf{A}$, die nur in einem beschränkten Raumgebiet von Null verschieden sein sollen, gelte mit der Abkürzung $\mathbf{A}(\alpha)$:

⁽ⁱ⁾ Beachten Sie $F_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} A_\nu - \frac{\partial}{\partial x^\nu} A_\mu$.

$$= \mathbf{A} + \alpha \delta \mathbf{A}$$

$$\frac{d}{d\alpha} S(\mathbf{A}(\alpha), \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)_{\alpha=0} = 0. \quad (4.15)$$

Hieraus folgen die EULER-LAGRANGE-Gleichungen für Teilchen **und** Felder. Nach Gleichung (4.14) auf der vorherigen Seite gilt zunächst mit

$$\mathcal{L}_i = - \left(\langle \mathbf{x}'_i, \mathbf{x}'_i \rangle^{\frac{1}{2}} m_i c + \frac{q_i}{c} A_\mu(\mathbf{x}_i) x_i'^\mu \right) \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\alpha} S \Big|_{\alpha=0} = - \sum_{i=1}^N \int ds_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial x_i^\mu} \delta x_i^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial x_i'^\mu} \delta x_i'^\mu \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \int ds_i \left\{ \delta x_i^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial x_i^\mu} - \left(\frac{d}{ds_i} \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial x_i'^\mu} \right) \right) + \frac{d}{ds_i} \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial x_i'^\mu} \delta x_i'^\mu \right\}. \end{aligned}$$

Der letzte Term liefert keinen Beitrag, da $\delta x_i'^\mu$ außerhalb eines endlichen Intervalls verschwinden soll. Da δx_i^μ eine völlig beliebige Funktion ist, kann auch das restliche Integral nur verschwinden, falls

$$\frac{d}{ds_i} \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial x_i'^\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial x_i^\mu} \quad \mu = 0, 1, 2, 3. \quad (4.17)$$

Werten wir diese Gleichung für den expliziten Ausdruck für \mathcal{L}_i aus, so finden wir

$$m_i c \frac{d}{ds_i} \frac{1}{\langle \mathbf{x}'_i, \mathbf{x}'_i \rangle^{\frac{1}{2}}} x_i'^\mu = \frac{q_i}{c} \left(\frac{\partial}{\partial x_i^\mu} A_\nu x_i'^\nu - \frac{d}{ds_i} A_\mu \right) \quad (4.18)$$

$$= \frac{q_i}{c} F_{\mu\nu} x_i'^\nu \quad (4.19)$$

oder

$$m_i c^2 \frac{d}{ds_i} \frac{1}{\langle \mathbf{x}'_i, \mathbf{x}'_i \rangle^{\frac{1}{2}}} \mathbf{x}'_i = q_i F(\mathbf{x}_i) \mathbf{x}'_i. \quad (4.20)$$

Das heißt aber, daß die EULER-LAGRANGE-Gleichungen, die zu unserer Wirkung gehören, tatsächlich unsere alten Bewegungsgleichungen in 4-dimensionaler Form sind.

Variieren wir nun das Feld selbst nach Gleichung (4.15) auf der vorhergehenden Seite, so finden wir

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{d\alpha} S(\mathbf{A}(\alpha), \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)_{\alpha=0} \\
&= - \sum_{i=1}^N \int ds_i \frac{q_i}{c} \delta A_\mu(\mathbf{x}_i(s_i)) \mathbf{x}'_i{}^\mu(s_i) \\
&\quad - \frac{1}{8\pi c} \int d^4x \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \delta A_\nu - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \delta A_\mu \right) F^{\mu\nu}(\mathbf{x}) \\
&= - \frac{1}{c} \int d^4x \delta A_\nu(\mathbf{x}) \times \\
&\quad \times \left(\sum_{i=1}^N q_i \int [\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(s_i)) \mathbf{x}'_i{}^\nu(s_i)] ds_i - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x^\mu} F^{\mu\nu}(\mathbf{x}) \right) \\
&\quad - \frac{1}{4\pi c} \int d^4x \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\delta A_\nu F^{\mu\nu}(\mathbf{x}))
\end{aligned}$$

$\delta \mathbf{A}$ verschwindet nun nach Voraussetzung außerhalb eines beschränkten Gebietes. Das letzte Integral können wir deshalb nach dem GAUSSSchen Satz in ein Flächenintegral umwandeln, wobei die Fläche unser Gebiet umschließt. Der Integrand des Flächenintegrals verschwindet aber, da $\delta \mathbf{A}$ dort Null ist. Beachten wir nun, daß δA_μ eine völlig beliebige Funktion ist, so kann das erste Integral nur identisch verschwinden, wenn tatsächlich

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu(\mathbf{x}) \tag{2.19}$$

mit

$$J(\mathbf{x}) = c \sum_{i=1}^N q_i \int ds_i \delta_4(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \mathbf{x}'_i \tag{2.51}$$

gilt. Wir erkennen die inhomogenen MAXWELLgleichungen mit dem korrekten Ausdruck für den Viererstrom wieder.

Sei p eine POINCARÉtransformation. Im Wirkungsfunktional ersetzen wir nun \mathbf{x}_i durch $p^{-1} \mathbf{x}_i$ und \mathbf{A} durch $p^* \mathbf{A}$. Es gilt zunächst $dp^* \mathbf{A} = p^* d\mathbf{A}$ und somit

$F(p^* \mathbf{A}) = p^* F(\mathbf{A})$. Ebenfalls ist $p^* F_{\mu\nu} p^* F^{\mu\nu} = p^* (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})$ und damit

$$\int d^4x p^* F_{\mu\nu} p^* F^{\mu\nu} = \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (4.21)$$

Weiter gilt

$$\left\langle \frac{d}{ds_i} p^* \mathbf{x}_i, \frac{d}{ds_i} p^* \mathbf{x}_i \right\rangle = \langle \mathbf{x}'_i, \mathbf{x}'_i \rangle \quad (4.22)$$

sowie

$$(p^* A)_\mu \left(p^* \mathbf{x}_i \right) \left(p^* \mathbf{x}_i \right)^{\prime\mu} = A_\mu(\mathbf{x}_i) x_i^{\prime\mu}. \quad (4.23)$$

Somit finden wir insgesamt

$$S \left(p^* \mathbf{A}, p^* \mathbf{x}_1, \dots, p^* \mathbf{x}_N \right) = S(\mathbf{A}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N). \quad (4.24)$$

Hieraus folgt das

1. NOETHERtheorem

Sind der Feldstärketensor F und die Bahnkurven \mathbf{x}_i Lösungen der MAXWELL-EINSTEIN-LORENTZ-Gleichungen, so gilt dies auch für $p^* F$ und $p^* \mathbf{x}_i$.

Beweis: F und die Bahnkurven \mathbf{x}_i sind Extrema der Wirkung S . Wegen der Invarianz der Wirkung unter der Substitution $\mathbf{x}_i \rightarrow p^* \mathbf{x}_i$, $F \rightarrow p^* F$ gilt dies auch für die transformierten Felder und Bahnkurven; sie sind ebenfalls Extrema. Damit gelten auch für diese die EULER-LAGRANGE-Gleichungen, die andererseits gleich den MAXWELL-EINSTEIN-LORENTZ-Gleichungen sind.

Die Größe \mathcal{L}_i nennt man LAGRANGEFUNKTION des i -ten Teilchens und

$$\mathcal{L}_{\text{el}}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{16\pi c} F_{\mu\nu}(\mathbf{x}) F^{\mu\nu}(\mathbf{x}) \quad (4.25)$$

heißt LAGRANGEDICHTE des elektromagnetischen Feldes.

Die totale LAGRANGEDICHTE wird durch

$$\mathcal{L}_{\text{tot}}(\mathbf{x}) = \mathcal{L}_{\text{el}}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^N \int \mathcal{L}_i(\mathbf{x}) \delta_4(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(s_i)) ds_i \quad (4.26)$$

definiert. Sie hängt implizit von den Bahnkurven \mathbf{x}_i und dem Feld \mathbf{A} ab:

$$\mathcal{L}_{\text{tot}}(\mathbf{x}) = \mathcal{L}_{\text{tot}}(\mathbf{x}, \mathbf{A}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) \quad (4.27)$$

Und man überprüft wie oben leicht die Identität

$$(p^* \mathcal{L}_{\text{tot}})(\mathbf{x}, \mathbf{A}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) = \mathcal{L}_{\text{tot}}\left(\mathbf{x}, p^* \mathbf{A}, \overset{-1}{p} \mathbf{x}_1, \dots, \overset{-1}{p} \mathbf{x}_N\right). \quad (4.28)$$

Sei nun p_α eine einparametrische Schar von POINCARÉtransformationen mit $p_0 = \mathbb{I}$. Speziell können wir die Form

$$p_{\alpha*} \mathbf{x} = \alpha \mathbf{a} + \exp(\omega \alpha) \mathbf{x} \quad (4.29)$$

mit $\omega_{\beta\gamma} = -\omega_{\gamma\beta}$ annehmen. Es folgt

$$\overset{-1}{p} p_{\alpha*} \mathbf{x} = \exp(-\alpha \omega) (\mathbf{x} - \alpha \mathbf{a}), \quad (4.30)$$

sowie

$$\left. \frac{d}{d\alpha} p_{\alpha*} \mathbf{x} \right|_{\alpha=0} = \mathbf{a} + \omega \mathbf{x} = Y(\mathbf{x}), \quad (4.31)$$

$$\left. \frac{d}{d\alpha} \overset{-1}{p} p_{\alpha*} \mathbf{x} \right|_{\alpha=0} = -(\mathbf{a} + \omega \mathbf{x}) = -Y(\mathbf{x}). \quad (4.32)$$

Offenbar gilt

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} Y_\beta(\mathbf{x}) + \frac{\partial}{\partial x^\beta} Y_\alpha(\mathbf{x}) = 0. \quad (3.12)$$

Wir differenzieren jetzt beide Seiten von (4.28) nach α und setzen α gleich Null. Mit den Bezeichnungen

$$\dot{\mathbf{A}} := \left. \frac{d}{d\alpha} p_\alpha^* \mathbf{A} \right|_{\alpha=0} \quad (4.33)$$

$$\dot{F} := \left. \frac{d}{d\alpha} p_\alpha^* F \right|_{\alpha=0} \quad (4.34)$$

ergibt sich

$$Y^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \mathcal{L}_{\text{tot}}(\mathbf{x}) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^N \int \frac{m_i c \langle Y(\mathbf{x}_i)', \mathbf{x}_i' \rangle}{\langle \mathbf{x}_i', \mathbf{x}_i' \rangle^{\frac{1}{2}}} \delta_4(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) ds_i \\
&+ \sum_{i=1}^N \int \frac{q_i}{c} \left[A_\mu(\mathbf{x}_i) Y^\mu(\mathbf{x}_i)' + Y^\kappa(\mathbf{x}_i) \frac{\partial}{\partial x^\kappa} A_\mu(\mathbf{x}_i) x_i'^\mu \right] \delta_4(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) ds_i \\
&+ \sum_{i=1}^N \int ds_i \mathcal{L}_i(\mathbf{x}) Y^\mu(\mathbf{x}_i) \frac{\partial}{\partial x^\mu} \delta_4(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \\
&- \dot{A}_\mu(\mathbf{x}) J^\mu(\mathbf{x}) - \frac{1}{8\pi c} \dot{F}_{\mu\nu}(\mathbf{x}) F^{\mu\nu}(\mathbf{x})
\end{aligned}$$

Die Ableitung von Y kann durch partielle Integration eliminiert werden; benutzt man zusätzlich die Bewegungsgleichungen, so folgt

$$\begin{aligned}
Y^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \mathcal{L}_{\text{tot}}(\mathbf{x}) &= \\
&= \sum_{i=1}^N \int ds_i \left(\frac{\langle Y(\mathbf{x}_i), \mathbf{x}_i' \rangle}{\langle \mathbf{x}_i', \mathbf{x}_i' \rangle^{\frac{1}{2}}} m_i c + \frac{q_i}{c} A_\mu(\mathbf{x}_i) Y^\mu(\mathbf{x}_i) \right) \frac{d}{ds_i} \delta_4(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \\
&+ \sum_{i=1}^N \int ds_i \mathcal{L}_i(\mathbf{x}) Y^\mu(\mathbf{x}_i) \frac{\partial}{\partial x^\mu} \delta_4(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \\
&- \dot{A}_\mu(\mathbf{x}) J^\mu(\mathbf{x}) - \frac{1}{8\pi c} \dot{F}_{\mu\nu}(\mathbf{x}) F^{\mu\nu}(\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned}
\dot{A}_\mu(\mathbf{x}) &= Y^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} A_\mu + A_\beta \omega_\mu^\beta \\
&= -F_{\mu\nu} Y^\nu + \frac{\partial}{\partial x^\mu} A_\alpha Y^\alpha
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\dot{F}_{\mu\nu}(\mathbf{x}) &= Y^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta} F_{\mu\nu} + F_{\beta\nu} \omega_\mu^\beta + F_{\nu\beta} \omega_\mu^\beta \\
&= -\frac{\partial}{\partial x^\mu} F_{\nu\beta} Y^\beta + \frac{\partial}{\partial x^\nu} F_{\mu\beta} Y^\beta
\end{aligned}$$

und

$$Y^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta} \mathcal{L}_{\text{tot}}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \int ds_i \mathcal{L}_i Y^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \delta_4(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) - \frac{1}{8\pi c} Y^\beta \left(\frac{\partial}{\partial x^\beta} F_{\mu\nu}(\mathbf{x}) \right) F^{\mu\nu}(\mathbf{x}).$$

Setzt man alles in die letzte Gleichung ein und bringt alle Terme auf eine Seite, so ergibt sich

$$0 = - \sum_{i=1}^N \int ds_i \frac{x_i'^\mu, x_i'^\nu}{\langle \mathbf{x}'_i, \mathbf{x}'_i \rangle^{\frac{1}{2}}} m_i c Y_\mu(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x^\nu} \delta_4(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) - \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{c} \int ds_i \left[\left(\frac{d}{ds_i} A_\mu Y^\mu \right) \delta_4(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) + A_\mu Y^\mu \frac{d}{ds_i} \delta_4(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \right] + F_{\mu\nu} Y^\nu J^\mu + \frac{1}{4\pi c} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} F_{\nu\beta} Y^\beta \right) F^{\mu\nu} - \frac{1}{16\pi c} Y^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

Die zweite Zeile verschwindet identisch und der Rest kann mit Hilfe der inhomogenen MAXWELLgleichungen in der Form

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial x^\mu} T_{\text{tot}}^{\mu\nu}(\mathbf{x}) Y_\nu(\mathbf{x}) = 0 \quad (4.35)$$

mit dem uns wohlvertrauten Energie-Impuls-Tensor von Teilchen und Feld geschrieben werden.

Wir haben soeben bewiesen:

2. NOETHERtheorem

Ist p_α eine einparametrische Schar von POINCARÉtransformationen, so gilt

$$(p_\alpha^* \mathcal{L}_{\text{tot}})(\mathbf{x}, \mathbf{A}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) = \mathcal{L}_{\text{tot}}(\mathbf{x}, p_\alpha^* \mathbf{A}, p_\alpha^{-1} \mathbf{x}_1, \dots, p_\alpha^{-1} \mathbf{x}_N) \quad (4.28)$$

und hieraus folgt

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} T_{\text{tot}}^{\mu\nu}(\mathbf{x}) Y_\nu(\mathbf{x}) = 0 \quad (4.35)$$

Wie wir aus dieser Beziehung Erhaltungsgrößen durch Integration über raumartige Flächen erhalten und wie sich diese Erhaltungsgrößen transformieren, ist aus Kapitel 3

bekannt.

Neben den POINCARÉTRANSFORMATIONEN lassen auch die Eichtransformationen die Wirkung invariant. Es gilt nämlich für eine Funktion $\lambda(\mathbf{x})$, die im Unendlichen verschwindet, mit $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + d\lambda$:

$$\begin{aligned} S(\tilde{\mathbf{A}}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) &= S(\mathbf{A}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) - \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{c} \int ds_i \frac{\partial}{\partial x^\mu} \lambda(\mathbf{x}) x_i'^\mu \\ &= S(\mathbf{A}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) - \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{c} (\lambda(\mathbf{x}_i(\infty)) - \lambda(\mathbf{x}_i(-\infty))) \end{aligned}$$

Die Summe auf der rechten Seite ist aber nach Voraussetzung Null. Mit \mathbf{A} ist also auch $\tilde{\mathbf{A}}$ Extremum der Wirkung, was natürlich so sein muß, da \mathbf{A} generell nur bis auf eine Eichtransformation bestimmt ist. Setzen wir $\tilde{\mathbf{A}}_\alpha = \mathbf{A} + \alpha d\lambda$, so erhalten wir eine einparametrische Schar von Eichtransformationen. Aus der Extremalbedingung

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\alpha} S(\tilde{\mathbf{A}}_\alpha, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) \Big|_{\alpha=0} = - \int d^4x \frac{\partial \lambda(\mathbf{x})}{\partial x^\mu} J^\mu(\mathbf{x}) \\ &= \int d^4x \lambda(\mathbf{x}) \operatorname{div} J(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

schließen wir, da $\lambda(\mathbf{x})$ völlig beliebig gewählt werden kann, daß $\operatorname{div} J(\mathbf{x})$ gleich Null ist. $\operatorname{div} J(\mathbf{x}) = 0$ bedeutet, wie wir bereits gesehen haben, daß der Viererstrom eine Erhaltungsgröße, nämlich die Gesamtladung des Systems, erzeugt.

5 Lösungen der MAXWELLSchen Gleichungen

5.1 Vektorpotentiale und Eichbedingungen

In diesem Kapitel wollen wir uns damit beschäftigen, bei vorgegebener Strom- und Ladungsdichte Lösungen der MAXWELLSchen Gleichungen zu finden. Die homogenen MAXWELLSchen Gleichungen sind durch den Ansatz

$$F = d\mathbf{A}, \quad (5.1)$$

mit dem in Kapitel 4 die Vektorpotentiale eingeführt wurden, sofort erfüllt.

Wie wir in Kapitel 4 gesehen haben, ist die Existenz der Vektorpotentiale durch das POINCARÉ-Lemma garantiert. Allerdings können wir \mathbf{A} noch einer Eichtransformation

$$\mathbf{A} \rightarrow \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + d\lambda \quad (5.2)$$

mit einer willkürlichen Funktion λ unterwerfen, ohne den Feldstärketensor F zu ändern, denn es gilt

$$d\tilde{\mathbf{A}} = d\mathbf{A} + d^2\lambda = F,$$

wegen

$$d^2 = 0. \quad (5.3)$$

Diese Eichfreiheit bedeutet, daß die Vektorpotentiale einer zusätzlichen Bedingung unterworfen werden können. Wir fordern speziell

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} A^\mu = 0 \quad (5.4)$$

Falls diese Bedingung gilt, sprechen wir von der LORENTZzeichnung der Vektorpotentiale. Sie ist stets erfüllbar. Denn wenn A^μ nicht direkt dieser Bedingung genügt, so gilt für $\tilde{A} = A + d\lambda$

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \tilde{A}^\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} A^\mu + \square \lambda, \quad (5.5)$$

wobei

$$\square := \eta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \quad (5.6)$$

den D'ALEMBERT-Operator bezeichnet. Mit Hilfe des LAPLACEoperators

$$\Delta = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x^{i2}} \quad (5.7)$$

läßt sich dieser offenbar auch in der Form

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x^{02}} - \Delta \quad (5.8)$$

schreiben. In Gleichung (5.5) läßt sich λ stets so wählen, daß

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \tilde{A}^\mu = 0$$

gilt. Gleichzeitig sehen wir, daß die Bedingung (5.11) auf der nächsten Seite noch immer Eichtransformationen mit Funktionen λ erlaubt, die der Gleichung

$$\square \lambda = 0$$

genügen.

Die inhomogenen MAXWELLSchen Gleichungen werden jetzt zu Bestimmungsgleichungen für die Vektorpotentiale. Es ergibt sich unmittelbar:

$$\square A^\mu - \eta^{\mu\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\beta} A^\beta = \frac{4\pi}{c} J^\mu \quad (5.9)$$

Liegt das Potential in LORENTZzeichnung vor, so verschwindet der zweite Term der linken Seite und wir erhalten in diesem Fall

$$\square A^\mu = \frac{4\pi}{c} J^\mu \quad (5.10)$$

Der D'ALEMBERT-Operator kommutiert mit der Aktion der POINCARÉgruppe. Ebenso ist die Eichbedingung

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} A^\mu = 0 \quad (5.11)$$

manifest POINCARÉinvariant. Die Gleichung (5.10) auf der vorhergehenden Seite stellt also eine POINCARÉinvariante Beziehung zwischen der Viererstromdichte und dem Vektorpotential dar.

Bei anderer Wahl der Eichbedingung ist dies nicht der Fall. Wir betrachten die sogenannte COULOMBbeingung:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^i} A^i = 0$$

Sie ist offensichtlich nicht POINCARÉinvariant. Dementsprechend ergeben die inhomogenen MAXWELLSchen Gleichungen jetzt:

$$-\Delta A^0 = \frac{4\pi}{c} J^0 \quad (5.12)$$

$$\square A^i = \frac{4\pi}{c} J^i - \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^0} A^0 \quad (5.13)$$

5.2 Die retardierten Potentiale

In der Folge nehmen wir nun wieder an, daß die Vektorpotentiale in LORENTZbezeichnung vorliegen. Die Viererstromdichte schreiben wir in der Form

$$J^\mu = J^\mu(x, x^0),$$

um die Abhängigkeit von der Zeit besonders zu isolieren.

Wir wollen nun beweisen, daß durch die Formel

$$A_{\text{ret}}^\mu(x, x^0) = \frac{1}{c} \int J^\mu(y, x^0 - |x - y|) / |x - y| d^3y \quad (5.14)$$

eine spezielle Lösung der Gleichung (5.10) auf der vorhergehenden Seite definiert ist, falls für jedes feste x^0 die Stromdichte $J^\mu(x, x^0)$ für $|x| > R$ verschwindet. R ist hierbei eine hinreichend große, endliche Konstante.

Der Beweis bedarf einiger Vorbereitungen:

Zunächst wählen wir eine beliebige Funktion $\phi(u)$ in einer reellen Variablen u und setzen für ein festes $y \in \mathbb{R}^3$:

$$\Psi(x, x^0) := \phi(x^0 - |x - y|) / |x - y| \quad (5.15)$$

Dann überzeugt man sich leicht, daß jetzt für alle $x \neq y$ stets

$$\square \Psi = 0$$

gilt. Speziell für $\Psi = 1$ folgt hieraus

$$-\Delta \frac{1}{|x - y|} = 0 \quad (5.16)$$

für $x \neq y$.

In einem zweiten Schritt studieren wir die Lösungsfunktionen $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ der sogenannten POISSONGleichung

$$-\Delta f = 4\pi g. \quad (5.17)$$

$g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ist dabei eine vorgegebene Funktion, von der wir annehmen wollen, daß sie für hinreichend großes $|x|$ identisch verschwindet, das heißt, es gilt

$$g(x) = 0 \quad \text{für alle } |x| > R.$$

Setzen wir

$$f(x) = \int d^3y g(y) / |x - y|$$

wobei über den gesamten \mathbb{R}^3 zu integrieren ist, so gilt offenbar

$$f(x) = \int d^3y g(y + x) / |y|.$$

Benutzen wir jetzt die oben gefundene Identität $\Delta \frac{1}{|y|} = 0$ für $y \neq 0$, so folgt

$$\begin{aligned} \Delta f(x) &= \int d^3y \Delta g(y + x) / |y| \\ &= \int d^3y \left[\Delta g(y + x) / |y| - g(y + x) \Delta \frac{1}{|y|} \right] \\ &= \int d^3y \operatorname{div} K(y). \end{aligned}$$

Für festes x ist das Vektorfeld K in \mathbb{R}^3 durch

$$K(y) := \frac{\nabla g(y+x)}{|y|} - g(x+y) \nabla \frac{1}{|y|}$$

definiert.

Ist $\mathcal{G}(r_1, r_2)$ das Gebiet

$$\mathcal{G}(r_1, r_2) := \{y \in \mathbb{R}^3; |y| < r_1 \wedge |y| > r_2\}$$

mit den Randflächen

$$\mathcal{F}_1 := \{y \in \mathbb{R}^3; |y| = r_1\}$$

$$\mathcal{F}_2 := \{y \in \mathbb{R}^3; |y| = r_2\},$$

so gilt offenbar

$$\begin{aligned} \Delta f(x) &= \lim_{\substack{r_1 \rightarrow \infty \\ r_2 \rightarrow 0}} \int_{\mathcal{G}(r_1, r_2)} d^3y \operatorname{div} K(y) \\ &= \lim_{r_1 \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{F}_1} \vec{K} \cdot \vec{d}f - \lim_{r_2 \rightarrow 0} \int_{\mathcal{F}_2} \vec{K} \cdot \vec{d}f. \end{aligned}$$

$K(y)$ verschwindet ebenso wie $g(y)$ identisch für hinreichend große $|y|$. Der erste Grenzwert liefert somit keinen Beitrag. Der zweite Term ergibt nach Formel (1.16) auf Seite 9

$$\lim_{r_2 \rightarrow 0} \int_{\mathcal{F}_2} \vec{K} \cdot \vec{d}f = \lim_{r_2 \rightarrow 0} r_2^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \langle K(x + r_2 y_0), y_0 \rangle \sin \theta \, d\phi \, d\theta$$

mit

$$y_0 = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Explizites Einsetzen von K ergibt

$$\lim_{r_2 \rightarrow 0} \int_{\mathcal{F}_2} \vec{K} \cdot \vec{d}\vec{f} = g(x) \cdot \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \theta \, d\phi \, d\theta = 4\pi g(x)$$

und damit

$$\Delta f = -4\pi g.$$

f ist also eine spezielle Lösung der POISSONGleichung.

Die Tatsache, daß $g(y)$ für $|y| > R$ identisch verschwindet, bedeutet, daß im Integral

$$f(x) = \int d^3y g(y) / |x - y|$$

die Integration nur über ein endliches Gebiet zu erstrecken ist. Deshalb bleiben für alle hinreichend großen Beträge von x die Funktion

$$\phi(x) = |x| f(x)$$

und ihre ersten Ableitungen beschränkt.

Nun gilt aber: Liegt eine andere Lösung f' der POISSONGleichung mit der gleichen Eigenschaft vor, so muß sie mit f identisch sein.

Wir skizzieren den Beweis: Die Differenz

$$\lambda := f - f'$$

erfüllt

$$\Delta \lambda = 0.$$

Hieraus folgt für festes x , daß für $y \neq x$ das Vektorfeld K mit

$$K(y) = \frac{1}{|y-x|} \nabla \lambda(y) - \lambda(y) \nabla \frac{1}{|y-x|}$$

die Gleichung $\operatorname{div} K = 0$ erfüllt. Zum Beweis wird $\Delta \frac{1}{|y-x|} = 0$ sowie $\Delta \lambda = 0$ benutzt.

Mit f und f' genügt auch λ dem oben genannten Beschränktheitskriterium. Hieraus läßt sich durch explizite Rechnung zeigen, daß das Flächenintegral von K über die Kugel \mathcal{F}_1 vom Radius r_1 im Limes $r_1 \rightarrow \infty$ gegen Null strebt, das heißt

$$\lim_{r_1 \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{F}_1} \vec{K} \cdot \vec{d}\vec{f} = 0$$

Für eine Kugel um x mit Radius r_2 gilt im Limes $r_2 \rightarrow 0$ analog wie oben ausgeführt:

$$\lim_{r_2 \rightarrow 0} \int_{\mathcal{F}_2} \vec{K} \cdot \vec{d}\vec{f} = 4\pi\lambda(x)$$

Auf Grund des GAUSSSchen Satzes finden wir deshalb:

$$\begin{aligned} -4\pi\lambda(x) &= \lim_{r_1 \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{F}_1} \vec{K} \cdot \vec{d}\vec{f} - \lim_{r_2 \rightarrow 0} \int_{\mathcal{F}_2} \vec{K} \cdot \vec{d}\vec{f} \\ &= \int d^3y \operatorname{div} K(y) = 0 \end{aligned}$$

Die Differenz unserer beiden Lösungen muß also in der Tat verschwinden, die Lösungen sind identisch.

Jetzt sind wir in der Lage zu zeigen, daß durch die Formel (5.14) auf Seite 100 eine Lösung von (5.10) auf Seite 99 gegeben ist. Zunächst teilen wir in (5.14) das Integrationsgebiet auf

$$\begin{aligned} A_{\text{ret}}^\mu(x, x^0) &= \frac{1}{c} \int_{|x-y| < \epsilon} d^3y J^\mu(y, x^0 - |x-y|) / |x-y| \\ &\quad + \frac{1}{c} \int_{|x-y| > \epsilon} d^3y J^\mu(y, x^0 - |x-y|) / |x-y| \end{aligned}$$

Wenden wir den Operator \square jetzt auf A_{ret}^μ an, so darf er im zweiten Summanden unter das Integral gezogen werden und annihiliert, wie zu Anfang des Abschnitts gezeigt wurde, den Integranden. Es gilt somit

$$\square A_{\text{ret}}^\mu = \square \frac{1}{c} \int_{|x-y| < \epsilon} d^3y J^\mu(y, x^0 - |x-y|) / |x-y| \quad (5.18)$$

Das Hilfsfeld

$$B^\mu(x, x^0) = \frac{1}{c} \int d^3y J^\mu(y, x^0) / |x - y| \quad (5.19)$$

ist Lösung der POISSONgleichung

$$-\Delta B^\mu = \frac{4\pi}{c} J^\mu \quad (5.20)$$

und man schließt in vollständiger Analogie zu (5.18) auf der vorherigen Seite

$$-\Delta B^\mu = -\Delta \frac{1}{c} \int_{|x-y|<\epsilon} d^3y J^\mu(y, x^0) / |x - y| \quad (5.21)$$

Aus (5.18), (5.20) und (5.21) folgt damit

$$\square A_{\text{ret}}^\mu(x) - \frac{1}{c} J^\mu(x) = \quad (5.22)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^{02}} \frac{1}{c} \int_{|x-y|<\epsilon} d^3y J^\mu(y, x^0 - |x - y|) / |x - y| - \quad (5.23)$$

$$-\Delta \frac{1}{c} \int_{|x-y|<\epsilon} d^3y (J^\mu(y, x^0 - |x - y|) - J^0(y, x^0)) / |x - y|$$

Im ersten Summanden kann die zeitliche Differentiation unter das Integral gezogen werden. Der Integrand bleibt regulär und verschwindet deshalb für $\epsilon \rightarrow 0$. Im zweiten Summanden sorgt nun die Differenz im Integranden dafür, daß dieser auch für $x = y$ regulär bleibt. Deshalb darf hier wieder die Differentiation unter das Integral gezogen werden und das Resultat verschwindet ebenfalls für $\epsilon \rightarrow 0$. Nun muß die Gleichung (5.18) auf der gegenüberliegenden Seite offensichtlich auch im Grenzwert $\epsilon \rightarrow 0$ gelten, woraus sofort

$$\square A_{\text{ret}}^\mu = \frac{4\pi}{c} J^\mu$$

folgt.

Die durch die Gleichung (5.14) auf Seite 100 definierten speziellen Lösungen werden als retardierte Potentiale bezeichnet. Der Grund dafür liegt darin, daß ihre Werte am Raumzeitpunkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ durch Integration der Viererstromdichte über Raumzeitpunkte

\mathbf{y} gewonnen werden, die zeitlich früher liegen. Präzise gilt offenbar für diese Raumzeitpunkte

$$y^0 = x^0 - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$$

woraus $\eta(\mathbf{y} - \mathbf{x}, \mathbf{y} - \mathbf{x}) = 0$ folgt. Die Raumzeitpunkte, die zum Wert von $A_{\text{ret}}^\mu(\mathbf{x})$ beitragen, liegen also auf dem von \mathbf{x} aus in die Vergangenheit gerichteten Lichtkegel.

Abschließend wollen wir noch verifizieren, daß A_{ret} die LORENTZbedingung erfüllt. Wir finden durch einfache Variablentransformation des Integrals in (5.14) auf Seite 100, daß A_{ret} alternativ in der Form

$$A_{\text{ret}}^\mu(x, x^0) = \frac{1}{c} \int d^3y J^\mu(y + x, x^0 - |\mathbf{y}|) / |\mathbf{y}|$$

dargestellt wird. Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\mu} A_{\text{ret}}^\mu(x, x^0) &= \frac{1}{c} \int d^3y (\text{div } J)(y + x, x^0 - |\mathbf{y}|) / |\mathbf{y}| \\ &= 0 \end{aligned}$$

als unmittelbare Konsequenz der Divergenzfreiheit des Viererstroms.

5.3 Die Vektorpotentiale einer bewegten Punktladung

Die Ergebnisse des letzten Abschnitts erlauben uns, die Vektorpotentiale einer bewegten Punktladung direkt zu berechnen. Nach Gleichung (2.51) auf Seite 92 hat die Viererstromdichte einer Punktladung q die Form

$$J^\mu(\mathbf{y}) = cq \int ds z'^\mu(s) \delta_4(\mathbf{y} - \mathbf{z}(s)).$$

$\mathbf{z}(s)$ beschreibt die Bahnkurve der Ladung im \mathbb{R}^4 mit einer beliebigen Parametrisierung durch s . Setzen wir dies in die Gleichung (5.14) auf Seite 100 ein, so ergibt sich zunächst, wenn wir wieder die Zeitabhängigkeit isolieren,

$$\begin{aligned} A^\mu(x, x^0) &= \\ &= q \int ds d^3y z'^\mu(s) \delta_3(\mathbf{y} - \mathbf{z}(s)) \delta_1(x^0 - |\mathbf{x} - \mathbf{y}| - z^0(s)) / |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \end{aligned}$$

$$= q \int ds z'^{\mu}(s) \delta_1(x^0 - |x - z(s)| - z^0(s)) / |x - z(s)|$$

Besitzt $f(s)$ an der Stelle s_0 seine einzige Nullstelle, so gilt die allgemeine Formel

$$\int ds \phi(s) \delta_1(f(s)) = \frac{\phi(s_0)}{|f'(s_0)|}$$

mit $f(s_0) = 0$. In unserem Fall ist $f(s) = x^0 - |x - z(s)| - z^0(s)$. Hieraus folgt für A^μ :

$$A^\mu(x, x^0) = qz'^{\mu}(\tau_r) / \left[|x - z(\tau_r)| \left(z'^0(\tau_r) - \frac{\langle x - z(\tau_r), z'(\tau_r) \rangle}{|x - z(\tau_r)|} \right) \right]$$

mit

$$x^0 - |x - z(\tau_r)| - z^0(\tau_r) : = 0.$$

Beachtet man die letzte Bedingung, so kann dem Vektorpotential die manifest kovariante Form:

$$A^\mu(\mathbf{x}) = qz'^{\mu}(\tau_r) / \eta(\mathbf{x} - \mathbf{z}(\tau_r), \mathbf{z}'(\tau_r)) \quad (5.24)$$

mit

$$x^0 - |x - z(\tau_r)| - z^0(\tau_r) : = 0 \quad (5.25)$$

gegeben werden.

A^μ hängt also in zweifacher Weise von \mathbf{x} ab: \mathbf{x} erscheint einmal explizit in (5.24) und wieder implizit durch die Funktion $\tau_r(\mathbf{x})$, die man erhält, wenn (5.25) nach τ_r für festes \mathbf{x} aufgelöst wird.

Die gefundenen Vektorpotentiale heißen auch **LIÉNARD-WICHERT-Potentiale** einer bewegten Ladung. Sie bestimmen den Feldstärketensor 0

$$F_{\mu\nu}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x^\mu} A_\nu - \frac{\partial}{\partial x^\nu} A_\mu.$$

Man findet hier, daß nur die implizite \mathbf{x} -Abhängigkeit (über τ_r) zu $F_{\mu\nu}$ beiträgt. Es gilt daher

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial \tau_r}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial \tau_r} A_\nu - \frac{\partial \tau_r}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial \tau_r} A_\mu,$$

sowie

$$\frac{\partial}{\partial \tau_r} A_\mu = \left[z''_\mu - z'_\mu \frac{\eta(\mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{z}'')}{\eta(\mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{z}')} + z'_\mu \frac{\eta(\mathbf{z}', \mathbf{z}')}{\eta(\mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{z}')} \right] / \eta(\mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{z}')$$

Die Bedingung (5.25) impliziert

$$\eta(\mathbf{x} - \mathbf{z}(\tau_r), \mathbf{x} - \mathbf{z}(\tau_r)) = 0.$$

Differenziert man nach x^μ , so folgt hieraus

$$x_\mu - z_\mu(\tau_r) - \eta(\mathbf{x} - \mathbf{z}(\tau_r), \mathbf{z}'(\tau_r)) \frac{\partial \tau_r}{\partial x^\mu} = 0$$

oder

$$\frac{\partial \tau_r}{\partial x^\mu} = (x_\mu - z_\mu(\tau_r)) / \eta(\mathbf{x} - \mathbf{z}(\tau_r), \mathbf{z}'(\tau_r)).$$

Wir können deshalb $F_{\mu\nu}$ in der Form

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \frac{q}{\eta(\mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{z}')^2} [(x_\mu - z_\mu) a_\nu - (x_\nu - z_\nu) a_\mu] + \\ &+ \frac{q\eta(\mathbf{z}', \mathbf{z}')}{\eta(\mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{z}')^3} [(x_\mu - z_\mu) z'_\nu - (x_\nu - z_\nu) z'_\mu] \end{aligned} \quad (5.26)$$

schreiben, wobei

$$a_\mu = z''_\mu - z'_\mu \frac{\eta(\mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{z}'')}{\eta(\mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{z}')} \quad (5.27)$$

gesetzt wurde. \mathbf{z} , \mathbf{z}' , \mathbf{z}'' sind dabei Funktionen von τ_r , und τ_r selbst wird durch Auflösen von (5.25) eine Funktion von \mathbf{x} . Bei bekannter Bahnkurve $\mathbf{z}(s)$ ist damit das von der Punktladung erzeugte elektromagnetische Feld vollständig bestimmt.

Wir untersuchen jetzt den Feldstärketensor etwas näher. Dazu nehmen wir o.B.d.A. an, daß \mathbf{z} durch die Bogenlänge s parametrisiert ist, das heißt es gilt $\eta(\mathbf{z}', \mathbf{z}')=1$. Ferner wollen wir zunächst die gleichförmige Bewegung der Ladung q voraussetzen:

$$\mathbf{z}(s) = \mathbf{l}s$$

und somit $\mathbf{z}' = \mathbf{l}$. Die Berechnung von τ_r ergibt nach (5.25)

$$\tau_r(\mathbf{x}) = - \left[\eta(\mathbf{l}, \mathbf{x})^2 - \eta(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \right]^{\frac{1}{2}} + \eta(\mathbf{l}, \mathbf{x}).$$

Gleichung (5.26) liefert deshalb das Feld

$$F_{\mu\nu} = \frac{q}{\left[\eta(\mathbf{l}, \mathbf{x})^2 - \eta(\mathbf{x}, \mathbf{x})\right]^{\frac{3}{2}}} [x_\mu l_\nu - x_\nu l_\mu], \quad (5.28)$$

das wegen $z'' = 0$ nur durch den zweiten Term in (5.26) gegeben ist.

Speziell für die ruhende Ladung ist $l_0 = 1$ und $l_i = 0$. Das magnetische Feld verschwindet ($F_{ik} = 0$, $i, k = 1, 2, 3$) und das elektrische Feld besitzt die räumlichen Komponenten

$$E^i = F_{0i} = qx^i / |x|^3$$

Wir erhalten also das wohlbekanntes COULOMBFeld einer ruhenden Punktladung.

Für eine bewegte Punktladung verschwindet das magnetische Feld nicht. In Übung 2.7 haben wir aber gezeigt, daß die LORENTZtransformation, die eine ruhende Ladung in eine gleichförmige Bewegung $z(s) = \mathbf{l}s$ überführt, gleichfalls das COULOMBFeld in den Feldstärketensor (5.28) transformiert.

Betrachtet man das Feld einer ruhenden oder bewegten Ladung bei großen Distanzen ($|x| \rightarrow \infty$), so fallen in beiden Fällen die Komponenten des Feldstärketensors proportional zu $\frac{1}{|x|^2}$ ab.

Diese Situation ändert sich schlagartig, wenn die Ladung eine Beschleunigung erfährt. Neben dem zweiten Beitrag in (5.26), der die Beschleunigung nicht enthält und soeben für die gleichförmige Bewegung mit dem gewöhnlichen COULOMBFeld identifiziert wurde, enthält der erste Beitrag zu $F_{\mu\nu}$ einen Term, der der Beschleunigung direkt proportional ist. Außerdem produziert dieser Beitrag ein elektrisches Feld E und ein magnetisches Feld B , die immer senkrecht aufeinander stehen und beide für $|y| \rightarrow \infty$ wie $\frac{1}{|y|}$ abfallen. Bei großen räumlichen Abständen von der Ladung überwiegt also dieser Feldanteil den COULOMBbeitrag bei weitem. Umgekehrt ist natürlich bei sehr kleinen Abständen der COULOMBanteil dominant.

Der durch die Beschleunigung hervorgerufene Anteil des Feldes heißt Strahlungsfeld, und im nächsten Abschnitt wollen wir die bemerkenswerte Tatsache, daß das Strahlungsfeld bei großen Abständen dominiert, weiter untersuchen.

5.4 Die Abstrahlung von Energie und Impuls durch eine beschleunigte Ladung

Sei $T_{\text{tot}}^{\mu\nu}$ der Energie-Impuls-Tensor eines Systems von felderzeugenden Ladungen und ihrem elektromagnetischen Feld. Wir wollen den Energie-Impuls-Inhalt einer beliebigen dreidimensionalen Fläche \mathcal{F} im \mathbb{R}^4 definieren. Die Punkte \mathbf{x} in der Fläche

\mathcal{F} sind durch drei reelle Parameter $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ parametrisiert. Für festes α betrachten wir das Vektorfeld $\mathbf{K}^{(\alpha)}$ mit den Komponenten

$$\mathbf{K}^{(\alpha)\mu} = T^{\mu\alpha} \quad (5.29)$$

und setzen

$$\begin{aligned} P^\mu(\mathcal{F}) &= \\ &= \iiint d\alpha^1 d\alpha^2 d\alpha^3 \omega \left(\mathbf{K}^{(\alpha)} \left(\mathbf{x}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \alpha^1}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \alpha^2}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \alpha^3} \right) \right). \end{aligned} \quad (5.30)$$

$P^\mu(\mathcal{F})$ ist also nach Kapitel 3 nichts anderes als das Flächenintegral von $\mathbf{K}^{(\alpha)}$ und unabhängig von der speziell gewählten Parametrisierung. In der Notation von Kapitel 3 gilt wegen (5.29) explizit

$$P^\mu(\mathcal{F}) = - \iiint d\alpha^1 d\alpha^2 d\alpha^3 \epsilon_{\mu_0 \mu_1 \mu_2 \mu_3} T^{\mu_3 \alpha} \frac{\partial \alpha_1}{\partial x^{\mu_1}} \frac{\partial \alpha_2}{\partial x^{\mu_2}} \frac{\partial \alpha_3}{\partial x^{\mu_3}}.$$

Weiter erzwingt nach Kapitel 3 der GAUSSsche Satz wegen

$$\operatorname{div} \mathbf{K}^{(\alpha)} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} T^{\mu\alpha} = 0,$$

daß $P^\alpha(\mathcal{F})$ verschwindet.

Durch die Formel (5.30) wird komponentenweise jeder Fläche ein Vektor $\mathbf{P}(\mathcal{F})$ zugeordnet. Speziell für die Fläche, deren Punkte die zeitliche Komponente $x^0 = ct$ besitzen, haben wir in Kapitel 3 diesen Vektor mit dem Gesamtimpuls unseres Systems identifiziert. In Analogie hierzu wollen wir durch die Formel (5.29) den Viererimpulsinhalt einer beliebigen dreidimensionalen Fläche erklären.

In der Folge soll ein einzelnes geladenes Teilchen zusammen mit seinem nach Formel (5.26) erzeugten Feld vorliegen. Die Teilchenbahn sei durch $\mathbf{z}(s)$ beschrieben und wir nehmen an, daß s die Bogenlänge ist und damit $\eta(\dot{\mathbf{z}}, \dot{\mathbf{z}}) = 1$ gilt.

Das vierdimensionale Gebiet \mathcal{G}

$$\mathcal{G} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4; x^0 = z^0 + |x - \mathbf{z}(s)|, |x| \leq r, \tau_1 \leq s \leq \tau_2 \}$$

wird durch die Randfläche

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\tau_1}^r + \mathcal{F}_{\tau_2}^r + \mathcal{F}_0^r$$

begrenzt, wobei offenbar gilt:

$$\mathcal{F}_{\tau_{1/2}}^r := \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4; x^0 = z^0(\tau_{1/2}) + |\mathbf{x} - \mathbf{z}(\tau_{1/2})|, |\mathbf{x}| \leq r \} \quad (5.31)$$

$$\mathcal{F}_0^r := \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4; x^0 = z^0(s) + |\mathbf{x} - \mathbf{z}(s)|, |\mathbf{x}| = r, \tau_1 \leq s \leq \tau_2 \} \quad (5.32)$$

\mathcal{F} ist geschlossen und für der Gesamtviererimpulsinhalt gilt deshalb $\mathbf{P}(\mathcal{F}) = 0$, woraus

$$\mathbf{P}(\mathcal{F}_{\tau_2}^r) - \mathbf{P}(\mathcal{F}_{\tau_1}^r) = \mathbf{P}(\mathcal{F}_0^r)$$

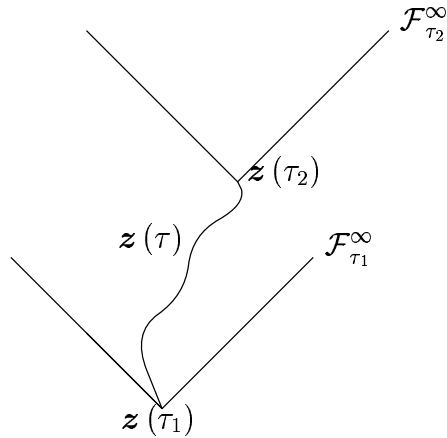
folgt. Im Limes $r \rightarrow \infty$ gilt

$$\mathbf{P}(\mathcal{F}_{\tau_2}^\infty) - \mathbf{P}(\mathcal{F}_{\tau_1}^\infty) = \lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\mathcal{F}_0^r) \quad (5.33)$$

Die Punkte \mathbf{x} der Flächen $\mathcal{F}_{\tau_{1/2}}^\infty$ erfüllen nach (5.31)

$$\eta(\mathbf{x} - \mathbf{z}(\tau_{1/2}), \mathbf{x} - \mathbf{z}(\tau_{1/2})) = 0$$

und weisen zu positiven Zeiten hin. $\mathcal{F}_{\tau_{1/2}}^\infty$ stellt also im \mathbb{R}^4 einen Kegel von lichtartigen Vektoren dar, der in die Zukunft weist und seine Spitze in $\mathbf{z}(\tau_{1/2})$ besitzt:



Die Formel (5.33) beschreibt die Differenz zwischen dem Viererimpulsinhalt von $\mathcal{F}_{\tau_1}^\infty$ und $\mathcal{F}_{\tau_2}^\infty$ als ein Integral über die Fläche \mathcal{F}_0^r , die für große r sowohl ins räumliche als auch ins zeitliche Unendliche wandert. Dieses Integral wollen wir nun im Limes $r \rightarrow \infty$ berechnen.

Dazu seien die Punkte in \mathcal{F}_0^r durch den räumlichen Anteil

$$\mathbf{x} = r \mathbf{n}(\Theta, \phi) = r \begin{pmatrix} \sin \Theta \cos \phi \\ \sin \Theta \sin \phi \\ \cos \Theta \end{pmatrix}$$

und durch

$$x^0 = x^0(s) + |\mathbf{x} - \mathbf{x}(s)|$$

dargestellt, das heißt $\mathbf{x} \in \mathcal{F}_0^r$ wird durch s und räumliche Polarkoordinaten parametrisiert.

Die Formel (5.30) ergibt in dieser Parametrisierung für \mathcal{F}_0^r explizit:

$$P^\mu(\mathcal{F}_0^r) = r^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} ds d\Theta d\phi \sin \Theta \frac{\dot{z}^0 - \langle \mathbf{x} - \mathbf{z}(s), \dot{\mathbf{z}}(s) \rangle}{|\mathbf{x} - \mathbf{z}(s)|} \left(\sum_{i=1}^3 T^{i\mu} n^i \right) \quad (5.34)$$

Für $r \rightarrow \infty$ trägt der Energie-Impuls-Tensor des Teilchens natürlich nicht bei. Für das elektromagnetische Feld des Teilchens selbst ist die Formel (5.26) mit $\tau_r = s$ zu benutzen und \mathbf{x} in der obigen Parametrisierung einzusetzen. Für $r \rightarrow \infty$ fällt nur der Beitrag proportional zur Beschleunigung $\ddot{\mathbf{z}}$ wie $\frac{1}{r}$ ab. Der andere Beitrag verschwindet mit einer höheren Potenz. Der Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes in (5.34) ist also für $r \rightarrow \infty$ nur mit Hilfe des beschleunigungsabhängigen Feldanteils zu berechnen. Für große r ergibt sich deshalb

$$T^{\mu\nu} \approx \frac{-q^2}{4\pi r^2} n^\mu n^\nu \left(\eta(\ddot{\mathbf{z}}, \ddot{\mathbf{z}}) + \left(\frac{\eta(\mathbf{n}, \ddot{\mathbf{z}})}{\eta(\mathbf{n}, \dot{\mathbf{z}})} \right)^2 \right) / \eta(\mathbf{n}, \dot{\mathbf{z}})^4,$$

wobei \mathbf{n} den Vierervektor mit $n^0 = 1$ und dem räumlichen Anteil $n(\Theta, \phi)$ wie oben darstellt. Wir erhalten hiermit aus (5.34)

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\mathcal{F}_0^r) &= \quad (5.35) \\ &= -\frac{q^2}{4\pi} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} ds d\Theta d\phi \sin \Theta \mathbf{n} \left(\eta(\ddot{\mathbf{z}}, \ddot{\mathbf{z}}) + \left(\frac{\eta(\mathbf{n}, \ddot{\mathbf{z}})}{\eta(\mathbf{n}, \dot{\mathbf{z}})} \right)^2 \right) / \eta(\mathbf{n}, \dot{\mathbf{z}})^3 \end{aligned}$$

Wir schreiben deshalb

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\mathcal{F}_0^\mu) = -\frac{q^2}{4\pi} \int_{\tau_1}^{\tau_2} ds \mathbf{a}(s) \eta(\dot{\mathbf{z}}, \ddot{\mathbf{z}}) \quad (5.36)$$

mit

$$\mathbf{a}(s) := \int_0^\pi \int_0^{2\pi} d\Theta d\phi \sin \Theta \mathbf{n} \left(1 - \left(\frac{\eta(\mathbf{n}, \ddot{\mathbf{z}})}{|\eta(\dot{\mathbf{z}}, \ddot{\mathbf{z}})|^{\frac{1}{2}} \eta(\mathbf{n}, \dot{\mathbf{z}})} \right)^2 \right) / \eta(\mathbf{n}, \dot{\mathbf{z}})^3, \quad (5.37)$$

wobei zu beachten ist, daß aus $\eta(\dot{\mathbf{z}}, \dot{\mathbf{z}}) = 1$ auch $\eta(\dot{\mathbf{z}}, \ddot{\mathbf{z}}) = 0$ folgt und damit $\ddot{\mathbf{z}}$ ein raumartiger Vektor (mit $\eta(\ddot{\mathbf{z}}, \ddot{\mathbf{z}}) < 1$) ist. Sei nun Λ eine LORENTZTRANSFORMATION mit

$$\Lambda \dot{\mathbf{z}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{e}^0$$

$$\Lambda \frac{\ddot{\mathbf{z}}}{|\eta(\dot{\mathbf{z}}, \dot{\mathbf{z}})|^{\frac{1}{2}}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_3.$$

Wir setzen

$$\mathbf{n}' = \Lambda \mathbf{n} / \eta(\Lambda \mathbf{n}, \mathbf{e}_0)$$

\mathbf{n}' ist ein lichtartiger Vektor mit $n'^0 = 1$, genau wie \mathbf{n} selbst. Wir können deshalb den räumlichen Anteil \mathbf{n}' , der ein Einheitsvektor ist, mit neuen Polarkoordinaten Θ', ϕ' in der Form

$$\mathbf{n}' = \begin{pmatrix} \sin \Theta' \cos \phi' \\ \sin \Theta' \sin \phi' \\ \cos \Theta' \end{pmatrix} \quad (5.38)$$

schreiben. Aus (5.37) folgt dann durch Variablentransformation

$$\Lambda \mathbf{a}(s) := \int_0^\pi \int_0^{2\pi} d\Theta' d\phi' \mathbf{n}' \left(1 - \eta(\mathbf{n}', \mathbf{e}_3)^2 \right)^2 \cdot A \quad (5.39)$$

mit

$$A := \sin \Theta \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \Theta'} \frac{\partial \phi}{\partial \phi'} - \frac{\partial \Theta}{\partial \phi'} \frac{\partial \phi}{\partial \Theta'} \right) / \eta (\Lambda \mathbf{n}, \mathbf{e}_0)^2$$

Überraschenderweise ist $A = \sin \Theta'$!

Beweis: Man überzeugt sich zunächst explizit davon, daß die Gleichungen

$$\omega \left(\mathbf{e}_0, \mathbf{n}, \frac{\partial}{\partial \Theta} \mathbf{n}, \frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{n} \right) = \sin \Theta$$

$$\text{und } \omega \left(\mathbf{e}_0, \mathbf{n}', \frac{\partial}{\partial \Theta'} \mathbf{n}', \frac{\partial}{\partial \phi'} \mathbf{n}' \right) = \sin \Theta'$$

gelten. ω ist das schiefe Tensorfeld aus Kapitel 3 und invariant gegenüber LORENTZtransformationen. Hieraus folgt zunächst

$$\begin{aligned} \sin \Theta' &= \omega \left(\Lambda^{-1} \mathbf{e}_0, \mathbf{n}, \frac{\partial}{\partial \Theta'} \mathbf{n}, \frac{\partial}{\partial \phi'} \mathbf{n} \right) / \eta (\Lambda \mathbf{n}, \mathbf{e}_0)^3 \\ &= \omega \left(\Lambda^{-1} \mathbf{e}_0, \mathbf{n}, \frac{\partial}{\partial \Theta} \mathbf{n}, \frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{n} \right) \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \Theta'} \frac{\partial \phi}{\partial \phi'} - \frac{\partial \Theta}{\partial \phi'} \frac{\partial \phi}{\partial \Theta'} \right) \eta (\Lambda \mathbf{n}, \mathbf{e}_0)^{-3} \\ &= \omega \left(\mathbf{e}_0, \mathbf{n}, \frac{\partial}{\partial \Theta} \mathbf{n}, \frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{n} \right) \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \Theta'} \frac{\partial \phi}{\partial \phi'} - \frac{\partial \Theta}{\partial \phi'} \frac{\partial \phi}{\partial \Theta'} \right) / \eta (\Lambda \mathbf{n}, \mathbf{e}_0)^2 \\ &= \sin \Theta \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \Theta'} \frac{\partial \phi}{\partial \phi'} - \frac{\partial \Theta}{\partial \phi'} \frac{\partial \phi}{\partial \Theta'} \right) / \eta (\Lambda \mathbf{n}, \mathbf{e}_0)^2 \end{aligned}$$

□

Aus (5.38) auf der vorhergehenden Seite und (5.39) ergibt sich jetzt sofort, daß der räumliche Anteil von $\Lambda \mathbf{a}(s)$ verschwindet und nur der zeitliche Anteil gleich $8\pi/3$ ist, das heißt

$$\Lambda \mathbf{a}(s) = \frac{8\pi}{3} \mathbf{e}_0$$

oder

$$\mathbf{a}(s) = \frac{8\pi}{3} \Lambda^{-1} \mathbf{e}_0 = \frac{8\pi}{3} \dot{\mathbf{z}}(s)$$

eingesetzt in (5.36) auf der vorhergehenden Seite und (5.33) auf Seite 111 ergibt dies

$$\mathbf{P}(\mathcal{F}_{\tau_2}^\infty) - \mathbf{P}(\mathcal{F}_{\tau_1}^\infty) = -\frac{2}{3} q^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} ds \dot{\mathbf{z}}(s) \eta(\ddot{\mathbf{z}}(s), \ddot{\mathbf{z}}(s)) \quad (5.40)$$

Durch Differentiation nach τ_2 folgt sofort

$$\frac{d}{d\tau_2} \mathbf{P}(\mathcal{F}_{\tau_2}^\infty) = -\frac{2}{3} q^2 \dot{\mathbf{z}}(\tau_2) \eta(\ddot{\mathbf{z}}(\tau_2), \dot{\mathbf{z}}(\tau_2)),$$

ein Ergebnis, das wir noch einmal in anderen Worten zusammen mit den Annahmen, unter denen es hergeleitet wurde, zusammenfassen wollen:

Ein Teilchen der Ladung q mit einer Bahnkurve $\mathbf{z}(s)$, die durch die Eigenzeit parametrisiert ist, erzeugt ein elektromagnetisches Feld, dessen Form durch (5.26) auf Seite 108 bestimmt ist. Für jedes s sei $\mathbf{P}(s)$ der Energie-Impuls-Inhalt des zukunftsorientierten Lichtkegels mit Kegelspitze in $\mathbf{z}(s)$ (das heißt $\mathbf{P}(s) = \mathbf{P}(\mathcal{F}_{\tau_2}^\infty)$ mit $s = \tau_2$). Dann gilt die **LARMORSche Formel**:

$$\frac{d}{ds} \mathbf{P}(s) = -\frac{2}{3} q^2 \dot{\mathbf{z}}(s) \eta(\ddot{\mathbf{z}}(s), \dot{\mathbf{z}}(s)) \quad (5.41)$$

Es wird also über das vom Teilchen erzeugte Feld Energie und Impuls abgestrahlt, wobei die Rate, mit der diese Energie-Impuls-Änderung vonstatten geht, durch Gleichung (5.41) bestimmt ist.

5.5 Die Strahlungsrückwirkung

Die Tatsache, daß ein beschleunigtes Teilchen Impuls abstrahlt, wirft sofort die Frage auf, wie dieser abgestrahlte Impuls kompensiert wird, um die Energie-Impuls-Erhaltung zu gewährleisten, die wir ja allgemein in Kapitel 3 bewiesen haben. Offenbar muß dies durch eine entsprechende Impulsänderung des Teilchens selbst bewirkt werden. Diese ist (mit der Bogenlänge s)

$$\frac{d}{ds} P^\mu = mc^2 \frac{d^2}{ds^2} \dot{x}^\mu = q F_{\nu}^\mu(\mathbf{x}(\tau)) \dot{x}^\nu \quad (5.42)$$

Hier tritt nun eine bedeutende Schwierigkeit auf. Der Feldstärketensor F enthält neben einem möglicherweise zusätzlich angelegten Feld F_a immer auch einen Beitrag F_s , der vom Teilchen selbst erzeugt wird, und durch die Formel (5.26) bestimmt ist. Bildet man nun nach Formel (5.42) $K^\mu = F_{s\nu}^\mu(\mathbf{x}(s)) \dot{x}^\nu(s)$, so ist dieser Ausdruck zunächst nicht wohldefiniert, weil das Feld F_s am Punkt $\mathbf{x}(s)$ unendlich groß wird.

K^μ muß also durch einen geeigneten Grenzprozeß definiert werden, beispielsweise

$$K^\mu = \lim_{\mathbf{a} \rightarrow 0} F_{s\nu}^\mu(\mathbf{x}(s) + \mathbf{a}) \dot{x}^\nu(s). \quad (5.43)$$

Zu erwarten ist, daß dieser Grenzprozeß weitere Ableitungen von $\mathbf{x}(s)$ erzeugt. Wir können also annehmen, daß K^μ von \mathbf{x} und seinen höheren Ableitungen abhängt. Auf Grund der Translationsinvarianz kann eine direkte Abhängigkeit von \mathbf{x} sofort

ausgeschlossen werden. Falls $\dot{\mathbf{x}}$, $\ddot{\mathbf{x}}$ und $\ddot{\ddot{\mathbf{x}}}$ linear unabhängig sind, was bei allgemeiner Form der Bewegung angenommen werden kann, so bilden diese Vektoren, zusammen mit dem Vektor

$$a_\mu = \epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} \dot{x}^\alpha \ddot{x}^\beta \ddot{\ddot{x}}^\gamma$$

eine Basis im \mathbb{R}^4 . Wir können deshalb K^μ in der Form

$$K^\mu = \alpha \dot{x}^\mu + \beta \ddot{x}^\mu + \gamma \ddot{\ddot{x}}^\mu + \delta a^\mu$$

schreiben. Dabei müssen α , β , γ und δ LORENTZinvariante Funktionen der Ableitungen von \mathbf{x} sein. Überdies muß α bei Raumspiegelungen das Vorzeichen wechseln. Nimmt man an, daß eine Abhängigkeit von den ersten drei Ableitungen alleine besteht, so ergibt sich zunächst

$$\delta = 0$$

aus der einfachen Tatsache, daß keine LORENTZinvariante Funktion aus drei Vektoren gebildet werden kann, die bei Raumspiegelung das Vorzeichen wechselt.

Wenn wir nun die physikalisch sinnvolle Forderung stellen, daß K^μ den im letzten Abschnitt errechneten Strahlungsverlust exakt kompensiert, so folgt

$$\alpha = + \frac{2}{3} q^2 \eta(\ddot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}})$$

Außerdem muß offensichtlich

$$K^\mu \dot{x}_\mu = 0$$

gelten. Wegen

$$\eta(\dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}) = 1, \quad \eta(\dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}) = 0$$

und (daraus folgend)

$$\eta(\dot{\mathbf{x}}, \ddot{\ddot{\mathbf{x}}}) = -\eta(\ddot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}})$$

findet man

$$\gamma = \frac{2}{3} q^2$$

und somit

$$K^\mu = \frac{2}{3} q^2 (\eta(\ddot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}) \dot{x}^\mu - \ddot{\ddot{x}}^\mu) + \beta \ddot{x}^\mu$$

Gleichung (5.42) geht somit über in

$$(mc^2 - \beta) \ddot{x}^\mu = qF_{\alpha\nu}^\mu \dot{x}^\nu + \frac{2}{3}q^2 (\eta(\ddot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}) \dot{x}^\mu - \ddot{\dot{x}}^\mu) \quad (5.44)$$

In dieser neuen Bewegungsgleichung ist offenbar das vom Teilchen selbst erzeugte Feld und insbesondere sein Strahlungsverlust berücksichtigt. Sie enthält einen Term auf der rechten Seite, der der dritten Ableitung von $\mathbf{x}(s)$ proportional ist, sowie auf der linken Seite als Koeffizienten der Viererbeschleunigung einen Faktor

$$m_{\text{R}}c^2 = mc^2 - \beta,$$

der formal als eine Änderung der Teilchenmasse gedeutet werden kann. Streng genommen ist dies natürlich nur richtig, wenn β eine endliche Konstante ist. In diesem Fall hätten wir gefunden, daß die sogenannte **Strahlungsrückwirkung**, das heißt die Wirkung des vom Teilchen selbst erzeugten Feldes auf die Bewegung des Teilchens, auch zu einer Änderung der Teilchenmasse führt. m wäre somit gar nicht die beobachtete Masse, sondern m_{R} . Für letztere allein wäre der experimentell bestimmte Wert einzusetzen.

Nun ergibt aber jeder Versuch, K^μ streng durch einen geeigneten Grenzprozeß wie in (5.43) zu definieren, für β bestenfalls eine unendliche Zahl. Deshalb wurde auch in diesem Abschnitt auf eine wesentlich mathematischere strengere Herleitung der Strahlungsrückwirkung verzichtet.

Will man dennoch der Gleichung (5.44) einen praktischen Sinn verleihen, so muß in jedem Fall zu dem physikalischen Kunstgriff Zuflucht genommen werden, m_{R} mit der experimentell bestimmten Masse zu identifizieren, ungeachtet der Tatsache, daß diese Größe einen endlichen Beitrag enthält. Dieser Kunstgriff wird als **Massenrenormierung** bezeichnet. Wenn wir ihn akzeptieren und m_{R} wieder durch m ersetzen, aber darunter die experimentelle Masse verstehen, so erhalten wir als neue Bewegungsgleichung die sogenannte **ABRAHAM-LORENTZ-Gleichung**

$$mc^2 \ddot{x}^\mu = qF_{\alpha\nu}^\mu \dot{x}^\nu + \frac{2}{3}q^2 (\eta(\ddot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}) \dot{x}^\mu - \ddot{\dot{x}}^\mu) \quad (5.45)$$

Allgemein kann zu dieser Gleichung gesagt werden, daß ihre Lösungsmannigfaltigkeit durch mehr Parameter bestimmt ist, als sie die ursprüngliche Bewegungsgleichung besitzt. Weil sie ein Differentialgleichung dritter Ordnung ist, ist eine Lösung nicht nur durch Vorgabe von $\mathbf{x}(s_0)$ und $\dot{\mathbf{x}}(s_0)$, sondern zusätzlich noch durch den Wert der Beschleunigung $\ddot{\mathbf{x}}(s_0)$ für einen festen Wert von s_0 bestimmt. Der Effekt wird besonders deutlich, wenn das angelegte Feld verschwindet. In diesem Fall ist für $\ddot{\mathbf{x}}(s_0) = 0$ die allgemeine Lösung durch

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(s_0) + (s - s_0) \dot{\mathbf{x}}(s_0),$$

das heißt durch die allgemeine Form einer gleichförmigen Bewegung gegeben. Man verifiziert dies direkt durch Einsetzen in (5.45). Ebenso findet man aber auch, daß

$$\dot{\mathbf{x}}(s) = \begin{pmatrix} \cosh(\tau_0 a e^{s/\tau_0}) \\ \sinh(\tau_0 a e^{s/\tau_0}) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } \tau_0 := \frac{2}{3} \frac{q^2}{mc^2}$$

die Gleichung (5.45) erfüllt. Für $a=0$ beschreibt dies ein ruhendes Teilchen; für $a \neq 0$ erhält man eine Bewegung mit exponentiell anwachsender Beschleunigung! Diese unphysikalische, sogenannte **„Run-away“-Lösung**, kann durch Wahl der Anfangsbedingung $\ddot{\mathbf{x}}(0)$ offenbar ausgeschlossen werden. Man sieht jedoch, daß im Fall eines angelegten Feldes die entsprechende Bestimmung der korrekten Anfangsbedingungen keinesfalls leicht fällt. Dazu betrachten wir ein angelegtes Feld, das nur in einem endlichen Raumzeitgebiet von Null verschieden ist (siehe Abbildung 5.1). Ein Teil-

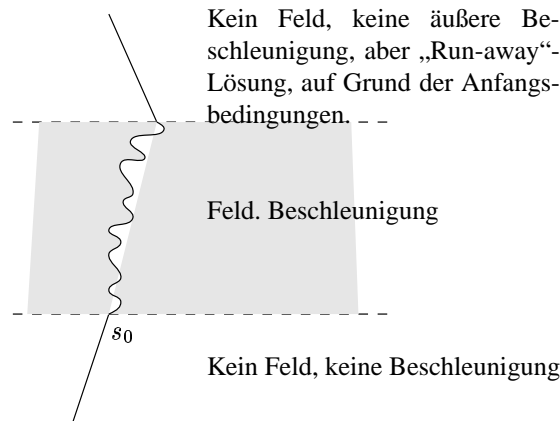


Abbildung 5.1: Eine Ladung passiert ein räumlich und zeitlich beschränktes Feld, und erhält dabei eine Beschleunigung, die anschließend zu einer „Run-away“-Lösung führt.

chen wird mit gleichförmiger Bewegung in ein solches Gebiet einlaufen, und es ist $\ddot{\mathbf{x}}(s_0) = 0$ bei Eintritt in das Gebiet. Beim Verlassen des Gebiets muß aber $\ddot{\mathbf{x}}(s)$ keinesfalls mehr verschwinden. Es kann danach also eine unphysikalische exponentiell anwachsende Beschleunigung auftreten. Die Gleichung (5.45) ist also von eingeschränkter Aussagekraft. Tatsächlich muß wohl gesagt werden, daß im Rahmen der *klassischen Elektrodynamik* die Strahlungsrückwirkung nicht widerspruchsfrei beschrieben werden kann. Dies gelingt erst in der *Quantenelektrodynamik*.

Literaturverzeichnis

Verzeichnis der "Übungen

1.1	Integralsätze	11
2.1	Teilchenbewegung in einem konstanten elektromagnetischen Feld . .	32
2.2	Teilchenbewegung in einer elektromagnetischen Welle	34
2.3	Multilineare Algebra	43
2.4	Schiefe Tensoren	46
2.5	Wichtige Tensorfelder, die aus dem Feldstärketensor abgeleitet werden können	47
2.6	Die LORENTZtransformationen	56
2.7	Der Feldstärketensor des COULOMBFeldes	63
2.8	Elektromagnetische Wellen	64
3.1	Energie-Impuls-Tensor	80
3.2	Relativistische Zweiteilchenkinematik	81
4.1	Das Vektorpotential	88

Index

Fette Seitenzahlen bezeichnen die Definition des entsprechenden Begriffes. Kleine Seitenzahlen verweisen auf Bilder. *Geneigte* Seitenzahlen sind in den "Übungen.

- Abbildung
 - Adjungierte 43
 - Multilineare 23
- Abfallverhalten
 - Des Feldstärketensors
 - Gleichförmige Bewegung . 109
 - Ruhende Ladung 109
- Ableitung
 - Äußere **87**, 89
 - Komponenten 89
 - POINCARÉinvarianz 87
 - Richtungs- 88
- ABRAHAM-LORENTZ-Gleichung **117**
 - Aussagekraft 118
- Abstrahlung beschleunigter Ladungen 109 ff.
- Achse
 - Zeit- 67
- Äußere Ableitung **87**, 89
 - Komponenten 89
 - POINCARÉinvarianz 87
- Allgemeine Erhaltungsgröße **74**
- Amplitude
 - Elektromagnetische Welle 34, 65
- Anfangsbedingungen 118
- Antisymmetrie
 - Des Feldstärketensors 25
- Arbeit
 - Im elektromagnetischen Feld .. **6**
 - Klassisch 6
 - Relativistisch 6
- Bahnkurve 61, 90, 106, 110
 - Bogenlänge **30**, 61
 - Eigenzeit **30**, 33, 35, 61
 - Extremalprinzip **90**
 - Im MINKOWSKIraum **29**
 - Parametrisierung 29
 - Im \mathbb{R}^3 22, 27
 - Reparametrisierung 27
 - Tangentenvektor **61**
 - Transformation 67
 - Variation **90**
 - Zeitspiegelung **68**
- Basis
 - Des \mathbb{R}^4
 - Dynamische 116
 - Duale **23**, 44
 - Orthonormal- **24**, 46 f., 70
 - Standard- 57

- Beobachter 54
 Gleichförmig bewegter **55**
 Beobachtungssystem 62, 80
 Beschleunigte Ladungen
 Abstrahlung 109 ff.
 Beschleunigungsabhängiges Feld 112
 Bewegung
 Gleichförmige 55
 Bewegungsgleichung
 Klassische
 Für den geladenen Körper ... **4**
 Mit Strahlungsverlust 117
 Relativistische 5
 Für den geladenen Körper 5, 27
 Kovariante Form **29**, 91
 Kovarianz 51
 Punktteilchen 32
 Bogenlänge **30**, 61, 110
 Boost
 Eines COULOMBFeldes 64
 Eines Elektrischen Feldes 63
 Geschwindigkeit **55**
 In x -Richtung **55**, 57

 Center of Mass System **80**, 82
 Streuwinkel 83
 COULOMBbeziehung **100**
 Inhomogene
 MAXWELLgleichungen **100**
 COULOMBFeld 64, 89, 109
 Boost 64
 Feldstärketensor 63 f.

 \wedge -Produkt 46

 D'ALEMBERT-Operator **99**
 Deltafunktion **21**
 im \mathbb{R}^4 **52**
 Determinantenfunktion 57
 $dF(\boldsymbol{x})$ **26**, 41
 Dichte
 Energie- 81
 Energiestrom- 81
 Differential
 Kovarianz 42
 Differentialform **87**
 Exakte **87**
 Geschlossene **87**
 Differentielle Form
 Der homogenen
 MAXWELLgleichungen **7**
 Der inhomogenen
 MAXWELLgleichungen **17**
 Dilatation
 Zeit- 55
 Distribution **20**, 20 f.
 Divergenz
 Eines Vektorfeldes **3**
 Kovarianz 42
 Von $F(\boldsymbol{x})$ **26**, 41
 Divergenz der Selbstwechselwirkung
 115
 $d\omega$ **87**, 89
 Komponenten 89
 POINCARÉinvarianz 87
 DOPPLER-Effekt 67
 Linearer 67
 Quadratischer 67

- Drehimpuls 69
 Elektromagnetisches Feld . **78**, 79
 Gesamt- **76, 79**
 Der Materie **77**, 79
 Drehung 54
 Raum- **57, 59**
 3-D Fläche
 Energie-Impuls-Inhalt. 109
 Viererimpulsinhalt. **110**
 Duale Basis **23**, 44
 Dualer Feldstärketensor 48
 Dualraum 43, 47
 Dynamische Basis
 \mathbb{R}^4 116
- Effekt
 DOPPLER- 67
 Linearer 67
 Quadratischer 67
- Eichbedingungen
 Für Vektorpotentiale 98-100
 Eichtransformation **86**, 88, 97 f.
 Einparametrische Schar 97
 Invarianz von F 98
- Eichung
 COULOMB- **100**
 LORENTZ- **98**
 POINCARÉinvarianz 100
- Eigentlich orthochrone LORENTZ-
 transformation 58
 Generatoren 58 f.
- Eigentlich orthochrone LORENTZ-
 transformation **59**, 67
 Eigenzeit **30**, 33, 35, 61, **61**
 Zeitspiegelung **68**
- Eindeutigkeit
 Der Lösung
 Der POISSONGleichung . 103 f.
- Einparametrische Schar
 Eichtransformationen 97
 POINCARÉtransformationen . . 94,
 96
- EINSTEINSche Summenkonvention **24**,
 26, 44
- Elastische Zweiteilchenreaktion . . . 83,
 82-85
- Elektrisches Feld **4**
 Boost 63
- Elektrisches Potential 88, 89
- Elektrodynamik
 Klassische
 Strahlungsrückwirkung . . . 118
 Quanten-
 Strahlungsrückwirkung . . . 118
 Relativistische Invarianz . . **49**, 93
 Elektromagnetische Viererkraft . . . **29**

- Elektromagnetische Welle 34, **63**,
 64-67
 Amplitude 34, 65
 Elliptisch polarisierte 66
 Energie-Impuls-Tensor 49
 Feldstärketensor
 Linear polarisiert 65
 Kreisfrequenz **63**, 66
 Linear polarisierte 65
 Linkszirkular polarisierte 65
 Phase 34, **63**, 65
 Polarisationsvektor 34, 65
 Rechtszirkular polarisierte 65
 Transformation 35, **63**
 Wellenvektor 34, 65
 Zirkular polarisierte 65
 Elektromagnetisches Feld
 Arbeit im 6
 Drehimpuls **78**, 79
 Einer Punktladung **108**
 Energie 78, **78**
 Energie-Impuls-Tensor 48, **74**,
 80 f.
 Komponenten 77
 Transformation 48
 Energiedichte **78**
 Impuls 78, **78**
 LAGRANGEDichte **93**
 Schwerpunkt **78**
 Schwerpunktskoordinaten **79**
 Elektrostatisches COULOMBFeld . . 64
 Boost 64
 Elliptisch polarisierte elektro-
 magnetische Welle 66
 Energie 69
 Elektromagnetisches Feld . 78, **78**
 Gesamt- **76**, **78**
 Klassische Kinetische 6
 Relativistische Kinetische . . 6, **82**
 Ruhe- **7**
 Schwerpunkts- 83
 Energie-Impuls-Beziehung
 Relativistische 82
 Energie-Impuls-Erhaltung 83, 115
 Energie-Impuls-Inhalt
 Einer 3-D Fläche 109
 Energie-Impuls-Tensor
 Der materiellen Teilchen **75**, 81 f.
 Elektromagnetische Welle 49
 Elektromagnetisches Feld . 48, **74**,
 80 f.
 Komponenten 77
 Transformation 48
 Totaler **75**, 109
 Energiedichte 81
 Elektromagnetisches Feld **78**
 Energiestromdichte 81
 ε -Tensor 69
 In 3 Dimensionen **3**
 In 4 Dimensionen 47
 Erhaltung
 Der Gesamtladung 73
 Energie-Impuls- 83, 115
 Erhaltungsgröße 18, 72, 90, 97
 Allgemeine **74**
 Der Elektrodynamik **76**
 POINCARÉinvarianz 72
 Transformation **80**
 Erstes NOETHER Theorem **93**

- EULER-LAGRANGE-Gleichungen . 91, 93
- Exakte Differentialform **87**
- Experimentelle Teilchenmasse . . . 117
- Extremalprinzip 90, 97
- Für Bahnkurven **90**
- Für Vektorpotentiale **91**
- FARADAYsches Induktionsgesetz. . 10
- Feld
- Arbeit im elektromagnetischen . **6**
- Beschleunigungsabhängiges . 112
- COULOMB- 89, 109
- Elektrisches **4**
- Boost 63
- Elektromagnetisches
- Drehimpuls **78, 79**
- Einer Punktladung **108**
- Energie 78, **78**
- Energie-Impuls-Tensor . 48, **74**, 77, 80 f.
- Energiedichte **78**
- Impuls 78, **78**
- LAGRANGEDichte **93**
- Schwerpunkt **78**
- Schwerpunktskoordinaten . . **79**
- Impulsänderung eines Teilchens im 115
- Magnetisches **4**
- Strahlungs- **109**
- Tensor- **25**, 47, 86
- Schiefes 87, 88
- Vektor- 12, **26**
- Feldstärketensor **25**, 33, 41, 47-49, 86, 88, 89, 98
- Abfallverhalten
- Gleichförmige Bewegung . 109
- Ruhende Ladung 109
- Antisymmetrie 25
- COULOMBfeld 63 f.
- Der Elektromagnetischen Welle
- Linear polarisiert 65
- Differential **26**, 41
- Divergenz **26**, 41
- Dualer 48
- Gemischter **25**, 41
- Komponenten **25**, 62
- Transformation **62**
- Kontravarianter **25**, 41
- Zeitspiegelung **68**
- Fernfeld 109
- Fläche 13 f.
- Dreidimensionale
- Energie-Impuls-Inhalt 109
- Viererimpulsinhalt **110**
- Parametrisierung 110
- Raumartige **70**, 97
- Parametrisierung 70
- Flächenelement 9
- Flächeninhalt 9, 13
- Flächenintegral 12-14, **69**, 97
- Kreisscheibe 15
- Kugel 16
- Reparametrisierung 13
- Transformation 70
- Flächennormale 9
- Fluß **10**
- Form
- Differential- **87**

- Formel
 LARMORSche **115**
 Formenkalkül 86-88
 Funktional
 Stetigkeit **20**
 Wirkungs- 90
 Transformation 93

 GALILEIinvarianz 69
 GALILEItransformation 56, 58
 GAUSS
 Satz von **7**, 7-11, 15, 92, 104, 110
 4 dimensional 71
 Gebiet 14
 Vierdimensionales
 Viererimpulsinhalt 111
 Geladener Körper
 Bewegungsgleichung **4**
 Kovariante **29**
 Kovarianz 51
 Relativistische 5, 27
 Gemischter Feldstärketensor ... **25**, 41
 Gemischter Tensor **23**
 Gesamtdrehimpuls **76, 79**
 Gesamtenergie **76, 78**
 Gesamtimpuls **76, 78**, 110
 Gesamtladung **17**
 Erhaltung 73, 97
 POINCARÉinvarianz 73
 Gesamtsystem
 Energie-Impuls-Tensor **75**
 Geschlossene Differentialform ... **87**
 Geschwindigkeit
 Beim Boost **55**
 Vierer- **29**

 Geschwindigkeitstransformation
 *siehe* Boost
 Gleichförmige Bewegung 55
 Feldstärketensor
 Abfallverhalten 109
 Gleichung
 ABRAHAM-LORENTZ- **117**
 Aussagekraft 118
 Bewegungs-
 Mit Strahlungsverlust 117
 Gleichungen
 EULER-LAGRANGE- 91, 93
 Gradient
 Eines Tensorfeldes **38**
 POINCARÉinvarianz 39
 GREENSche Funktion
 Der POISSONGleichung ... 101
 Grenzfall
 Nichtrelativistischer 7
 Gruppe
 LORENTZ- **30**, 57
 POINCARÉ- **31**, 47

 Herunterziehen
 Eines Tensorfeldindex **39**
 Eines Tensorindex 45 *f.*
 Hochziehen
 Eines Tensorfeldindex **39**
 Eines Tensorindex 45 *f.*
 Homogene MAXWELLGleichungen 86,
 90
 Differentielle Form 7
 Integralform **10**
 Kovariante Form **27**
 POINCARÉinvarianz 50

- Impuls 69
 Elektromagnetisches Feld . 78, **78**
 Gesamt- **76, 78**, 110
 Der Materie **77**, 78
 Nichtrelativistischer **4**
 Relativistischer **4**, 82
 Vierer-
 POINCARÉinvarianz 82
 Zeitartigkeit 82
 Impuls-Erhaltung 115
 Impuls-Inhalt
 Einer 3-D Fläche 109
 Vierer-
 Einer 3-D Fläche **110**
 Eines 4-D Gebiets **111**
 Impuls-Tensor
 Energie-
 Totaler 109
 Impulsänderung
 Eines Teilchens im Feld 115
 Induktionsgesetz 10
 Inhomogene MAXWELLgleichungen
 Differentielle Form **17**
 Für Vektorpotentiale **99**
 In COULOMBbeichung **100**
 In LORENTZbeichung **99**
 Kovariante Form **27**, 92
 POINCARÉinvarianz 50-53
- Integral
 Flächen- 12-14, **69**, 97, 110
 Kreisscheibe 15
 Kugel 16
 Reparametrisierung 13
 Transformation 70
 Kurven- 12
 Reparametrisierung 12
 Volumen- 14 f.
 Kugel 16
 Reparametrisierung 14
 Integralform der homogenen
 MAXWELLgleichungen **10**
 Integralsatz
 GAUSS **7**, 7-11, 92, 104
 4 dimensional 71
 STOKES **7**, 7-11
 Invarianz 18
 GALILEI- 69
 POINCARÉ- 36
 Relativistische
 Der Elektrodynamik **49**, 93
 Translations- 115
 Isometrie 46
- Kinematik
 Relativistische 82-85
 Kinetische Energie
 Der Materie **77**, 78
 Klassische 6
 Relativistische **6**, 82
 Klassische Elektrodynamik
 Strahlungsrückwirkung 118
 Kleinste Wirkung
 Prinzip 90

- Körper
- Bewegungsgleichung. **4**
 - Klassische 4
 - Kovariante **29, 91**
 - Relativistische. 5
 - Relativistische im Feld 27
- Kommutator 59
- Komponenten
- Der Äußeren Ableitung 89
 - Des Energie-Impuls-Tensors
 - Des elektromagnetischen Feldes 77
 - Des Feldstärketensors **25, 62**
 - Transformation **62**
 - Eines Tensorfeldes **25**
 - Eines Vierervektors **53**
 - Tensor- **24, 45**
- Kontinuitätsgleichung **17**
- Kontraktion
- Eines Tensorfeldes **37**
 - Eines Tensors 45
- Kontravarianter Feldstärketensor . . **25,**
41
- Kontravarianter Tensor **23**
- Koordinaten
- Polar-
 - Räumliche 112
- Koordinatentransformation 53, **54,** 54,
62
- Kovariante Form
- Der homogenen MAXWELL-gleichungen **27**
 - Der inhomogenen MAXWELL-gleichungen **27, 92**
 - Der Viererstromdichte **52, 92**
- Kovarianter Tensor **23**
- Kovarianz
- Der relativistischen Bewegungsgleichung 51
- Kraft
- LORENTZ- **4**
 - Vierer- **29**
- Kreisfrequenz **63, 66**
- Kreisscheibe 8, 15
- Flächenelement. **9**
 - Flächenintegral 15
 - Normalenvektor **9, 15**
- Kugel
- Flächenelement. **9**
 - Flächenintegral 16
 - Normalenvektor **9**
 - Volumenintegral 16
- Kurve 12
- Bogenlänge 12, **30**
 - Eigenzeit **30**
- Kurvenintegral 12
- Reparametrisierung 12
- Kurvenparameter
- Retardierter **107**
- Laborsystem 84
- Ladung 4
- Abstrahlung beschleunigter 109 ff.
 - Gesamt- **17**
 - Gesamt-
 - Erhaltung 97
 - Ladungsdichte **17, 22,** 19-22
- LAGRANGE-Gleichungen
- EULER- 91, 93

- LAGRANGEDichte
 Elektromagnetisches Feld . . . **93**
 Totale **94**
 POINCARÉtransformation . . 94
- LAGRANGEFunktion
 Eines Teilchens **93**
- LAPLACE-Operator **99**
- LARMORSche Formel **115**
- Lemma
 POINCARÉ **87, 98**
- Lichtartiger Vektor 56, **60**, 60
- Lichtgeschwindigkeit 4
- Lichtkegel
 Negativer 106
 Positiver 115
- LIÉNARD-WICHERT-Potential . . **107**
- Linear polarisierte elektromagnetische Welle 65
- Linearer DOPPLER-Effekt 67
- Linkszirkular polarisierte elektromagnetische Welle 65
- Lösung
 Der MAXWELLgleichungen 98-118
 Der POISSONGleichung
 Spezielle 103, 105
 „Run-away“- **118**
- LORENTZ-Gleichung
 ABRAHAM- **117**
 Aussagekraft 118
- LORENTZbedingung 106
- LORENTZzeichnung **98**
 Inhomogene MAXWELLgleichungen **99**
 POINCARÉinvarianz 100
- LORENTZgruppe **30, 57**
- LORENTZkraft **4**
- LORENTZtransformation . . **30, 33, 35,**
 56-59, 59, 64, 67, 114
 Eigentlich orthochrone 58, **59**, 67
 Generatoren 58 f.
 Eines Flächenintegrals 70
- Magnetisches Feld **4**
- Magnetisches Potential 88, 89
- MANDELSTAM-Variablen . . **83, 83 f.**
- Masse
 Teilchen- 117
 Experimenteller Wert 117
- Massenrenormierung **117**
- Materielle Teilchen
 Energie-Impuls-Tensor . **75, 81 f.**
 Gesamtdrehimpuls **77, 79**
 Gesamtenergie **77, 78**
 Gesamtimpuls **77, 78**
 Schwerpunkt **77**
 Schwerpunktskoordinaten **79**
- MAXWELLgleichungen
 Homogene 86, 90
 Differentielle Form **7**
 Integralform **10**
 Kovariante Form **27**
 POINCARÉinvarianz 50
- Inhomogene
 Differentielle Form **17**
 Für Vektorpotentiale **99**
 In COULOMBeichung **100**
 In LORENTZzeichnung **99**
 Kovariante Form **27, 92**
 POINCARÉinvarianz 50-53
- Lösungen 98-118

- Mechanik
 NEWTONSche 56
- Metrik
 MINKOWSKI- . . **24**, 29, 33 f., 47, 56, 58, 64
- Metrischer Tensor **24**
- MINKOWSKIMetrik . . 33 f., 47, 56, 58, 64
- MINKOWSKIraum **24**, 47, 60, 60
 Bahnkurve **29**
 Bogenlänge **30**, 61
 Eigenzeit **30**, 61
 Parametrisierung 29
 POINCARÉgruppe **31**
- MINKOWSKISKalarprodukt . . . **24**, 56
- Multilineare Abbildung 23
- ∇ -Operator **3**
- Nahfeld 109
- Negativ lichtartiger Vektor **60**, 60
- Negativ zeitartiger Vektor **60**, 60
- Negativer Lichkegel 106
- NEWTONSche Mechanik 56
- Nichtlineare Operatoren 42
- Nichtrelativistischer Grenzfall 7
- Nichtrelativistischer Impuls **4**
- NOETHER-Theorem
 Erstes **93**
 Zweites **96**
- NOETHER-Theoreme 90
- Normalenvektor
 Kreisscheibe **9**, 15
 Kugel **9**
- Nullfolge
 In \mathcal{D} **20**
- Operation
 Der POINCARÉgruppe
 Auf dem Tensorprodukt **37**
 Auf Tensorfeldern **32**
 Im MINKOWSKIraum **31**
- Operator
 D'ALEMBERT- **99**
 LAPLACE- **99**
- Operatoren
 Nichtlineare 42
 POINCARÉinvariante 49
- Orthochrone LORENTZtransformation
 Eigentlich 58, **59**, 67
 Generatoren 58 f.
- Orthonormalbasis **24**, 46 f., 70
- Parametrisierung
 Einer Fläche 110
- Parametrisierung von Bahnkurven
 Im MINKOWSKIraum 29
 Durch Bogenlänge **30**, 61
 Durch Eigenzeit . **30**, 33, 35, 61
- Permutation
 Der Argumente eines Tensors . 46
 Der Argumente eines Tensorfeldes **37**
 Signum 46
- Phase
 Elektromagnetische Welle . 34, **63**, 65
- POINCARÉ-Lemma **87**, 98

- POINCARÉgruppe **31**, 47
- Operation
- Auf dem Tensorprodukt **37**
- Auf Tensorfeldern **32**
- Im MINKOWSKIraum **31**
- POINCARÉinvariante Operatoren 49
- POINCARÉinvarianz 36
- Der äußeren Ableitung 87
- Von $d\omega$ 87
- Der Erhaltungsgrößen 72
- Der Gesamtladung 73
- Der homogenen MAXWELL-
gleichungen 50
- Der inhomogenen MAXWELL-
gleichungen 50-53
- LORENTZzeichnung 100
- Des Gradienten 39
- Des Viererimpuls 82
- POINCARÉtransformation 67, 92
- Der totalen LAGRANGEDichte 94
- Der Viererstromdichte 51, 53
- Eines Flächenintegrals 70
- Einparametrische Schar 94, 96
- POISSONGleichung **101**
- Eindeutigkeit der Lösung 103 f.
- GREENSche Funktion 101
- Spezielle Lösung 103, 105
- Polarisationsvektor
- Elektromagnetische Welle 34, 65
- Polarisierte elektromagnetische Welle
- Elliptisch 66
- Linear 65
- Linkszirkular 65
- Rechtszirkular 65
- Zirkular 65
- Polarkoordinaten
- Räumliche 112
- Positiv lichtartiger Vektor **60**, 60
- Positiv zeitartiger Vektor **60**, 60
- Positiver Lichtkegel 115
- Potential
- Elektrisches 88, 89
- LIÉNARD-WICHERT- **107**
- Magnetisches 88, 89
- Retardiertes **100**, **105**
- Vektor- **86**, 88, 88-90, 90, 98
- Extremalprinzip **91**
- Transformation 92
- Variation **90**, 92
- POYNTING-Vektor 81
- Prinzip der kleinsten Wirkung 90
- Produkt
- \wedge - 46
- Tensor- 44
- Punktladung 19-22
- Elektromagnetisches Feld **108**
- Vektorpotential **107**, 106 f.
- Viererstromdichte 106
- Punktteilchen 19
- Relativistische
 Bewegungsgleichung 32
- Quadratischer DOPPLER-Effekt 67
- Quantenelektrodynamik
- Strahlungsrückwirkung 118
- \mathbb{R}^3
- Skalarprodukt 3
- Vektorprodukt 3

- \mathbb{R}^4
 Dynamische Basis 116
 Räumliche Polarkoordinaten 112
 Räumliche Translation 54
 Raum
 Dual- 47
 MINKOWSKI- **24**
 Raumartige Fläche **70, 97**
 Parametrisierung 70
 Raumartiger Vektor 56, **60**, 60, 61
 Raumdrehung 57, **59**
 Raumspiegelung 57, **59, 67**, 116
 Raumzeit . . . *siehe* MINKOWSKIraum
 Raumzeitpunkte. . . *siehe* Vierervektor
 Raumzeitspiegelung 58, **59, 67**
 Rechtszirkular polarisierte elektro-
 magnetische Welle 65
 Relativistische Bewegungsgleichung
 Für den geladenen Körper . . . 5, 27
 Kovariante Form **29, 91**
 Kovarianz 51
 Relativistische Invarianz der
 Elektrodynamik **49, 93**
 Relativistische Kinematik 82-85
 Relativistische Kinetische Energie . . **6**,
 82
 Relativistische
 Energie-Impuls-Beziehung 82
 Relativistischer Impuls **4, 82**
 Renormierung
 Massen- **117**
 Reparametrisierung
 Bahnkurve 27
 Flächenintegral 13
 Kurvenintegral 12
 Volumenintegral 14
 Retardierter Kurvenparameter **107**
 Retardiertes Potential **100, 105**
 Richtungsableitung 88
 Rotation eines Vektorfeldes **3**
 Ruheenergie **7**
 Ruhende Ladung
 Feldstärketensor
 Abfallverhalten 109
 Ruhesystem 55, 61, 85
 „Run-away“-Lösung **118**
 Satz
 GAUSS . **7**, 7-11, 15, 92, 104, 110
 4 dimensional 71
 NOETHER 90
 Erster **93**
 Zweiter **96**
 Schwerpunkts- **79**
 STOKES **7**, 7-11, 13
 Schar
 Einparametrig
 Eichtransformationen 97
 POINCARÉtransformationen 94,
 96
 Schiefe Transformation 58
 Schiefer Tensor 46 *f.*
 Vektorraum 46
 Schiefes Tensorfeld 87, 88
 Schwerpunkt 69, **76**
 Der Materie **77**
 Elektromagnetisches Feld **78**
 Schwerpunktsenergie 83
 Schwerpunktskoordinaten
 Der Materie **79**
 Elektromagnetischen Feld **79**

- Schwerpunktssatz **79**
- Schwerpunktssystem **80, 82**
 Streuwinkel 83
- Selbstwechselwirkung
 Divergenz 115
- Signum
 Einer Permutation 46
- Skalarprodukt
 Im \mathbb{R}^3 3
 MINKOWSKI- **24, 56**
- Spiegelung
 Raum- 57, **59, 67**, 116
 Raumzeit- 58, **59, 67**
 Zeit- 58, **59**, 60, **67**, 67 f.
 Der Eigenzeit **68**
 Des Feldstärketensors **68**
 Von Bahnkurven **68**
- Standardbasis 57
- Stetigkeit
 Von Funktionalen **20**
- STOKES
 Satz von 7, 7-11, 13
- Strahlungsfeld **109**
- Strahlungsrückwirkung .. 115 ff., **117**
 Einfluß auf die Teilchenmasse 117
- In der Klassischen
 Elektrodynamik 118
 In der Quantenelektrodynamik
 118
- Streuwinkel 83
- Stromdichte **17, 22**, 19-22
 Energie- 81
 Vierer- **27**, 73, 97
- Summenkonvention
 EINSTEINSche **24**, 26, 44
- Symmetrietransformation 18, 90
- System
 Beobachtungs- 62
- Tangentenvektor einer Bahnkurve . **61**
- Teilchen
 Impulsänderung im Feld 115
 LAGRANGEfunktion **93**
 Materielle
 Energie-Impuls-Tensor **75**, 81 f.
 Gesamtdrehimpuls **77**, 79
 Gesamtenergie **77**, 78
 Gesamtimpuls **77**, 78
 Schwerpunkt **77**
 Schwerpunktskoordinaten . . **79**
- Teilchenmasse 117
 Einfluß der
 Strahlungsrückwirkung 117
 Experimenteller Wert 117
- Teilchenzerfall 84

- Tensor **23**, 44-47
- Energie-Impuls-
 - Der materiellen Teilchen ... **75**,
81 f.
 - Elektromagnetische Welle .. 49
 - Elektromagnetisches Feld .. 48,
74, 77, 80 f.
 - Totaler **75**, 109
 - ε - 47, 69
 - Feldstärke-
 - Antisymmetrie 25
 - Feldstärke- **25**, 33, 41, 47-49, 62,
86, 88, 89, 98
 - COULOMBFeld 63 f.
 - Differential **26**, 41
 - Divergenz **26**, 41
 - Gemischter **25**, 41
 - Kontravarianter **25**, 41
 - Transformation **62**
 - Zeitspiegelung **68**
 - Herunterziehen eines Index . 45 f.
 - Hochziehen eines Index 45 f.
 - Kontraktion 45
 - Metrischer **24**
 - Permutation der Argumente .. 46
 - Schiefer 46 f.
 - Vektorraum 46
 - Transformation 45
 - Vektorraum 45
- Tensorfeld **25**, 47, 86
- Gradient **38**
 - Herunterziehen eines Index ... **39**
 - Hochziehen eines Index **39**
 - Kontraktion **37**
 - Nullter Stufe **31**
 - Operation der POINCARÉ-
gruppe **32**
 - Permutation der Argumente ... **37**
 - Schiefes 87, 88
- Tensorkomponenten **24**, 45
- Eines Tensorfeldes **25**
- Tensorprodukt **37**, 44
- Testfunktionen 20
- Theorem
- NOETHER- 90
 - Erstes **93**
 - Zweites **96**
- Totale LAGRANGEDichte **94**
- POINCARÉtransformation 94
- Totaler Energie-Impuls-Tensor ... **75**
- Totaler Energie-Impuls-Tensor ... 109

Transformation

- Der Erhaltungsgrößen **80**
- Der Viererstromdichte 51
- Des Vektorpotentials 92
- Des Wirkungsfunktional 93
- Eich- **86**, 88, 97 f.
- Eines Flächenintegrals 70
- Eines Tensors 45
- Elektromagnetische Welle. 35, **63**
- GALILEI- 56, 58
- Koordinaten- 53, **54**, 54
- LORENTZ- . **30**, 33, 35, 56-59, 59,
64, 67, 114
- POINCARÉ- 67, 92
- Schiefe 58
- Symmetrie- 90
- Von Bahnkurven 67

Translation

- Räumliche 54
- Zeitliche 54

Translationsinvarianz 115

Umeichung

- Invarianz von F 98

Variablen

- MANDELSTAM- **83**, 83 f.

Variation

- Der Bahnkurve **90**
- Des Vektorpotentials **90**, 92

Vektor

Im \mathbb{R}^3

- Skalarprodukt 3
- Vektorprodukt 3

POYNTING- 81

Vierer- *siehe* VierervektorVektorfeld 12, **26**, 110Flächenintegral **69**, 110

Transformation 70

Vektorpotential . **86**, 88, 88-90, 90, 98

Eichbedingungen 98-100

Einer Punktladung . . . **107**, 106 f.Extremalprinzip **91**Inhomogene MAXWELL-
gleichungen **99**

Transformation 92

Variation **90**, 92

Vektorprodukt

Im \mathbb{R}^3 3

Vektorraum 43

Der schiefen Tensoren 46

Der Tensoren 45

Vierdimensionaler Satz von GAUSS 71

4-D Gebiet

Viererimpulsinhalt **111**Vierergeschwindigkeit **29**

Viererimpuls

POINCARÉinvarianz 82

Zeitartigkeit 82

Viererimpulsinhalt

Einer 3-D Fläche **110**Eines 4-D Gebiets **111**

Viererimpulsübertrag 83

Viererkraft

Elektromagnetische **29**

- Viererstrom 73
- Viererstromdichte 27, 97
- Einer Punktladung 106
- Kovariante Form 52, 92
- Transformation 51, 53
- Vierervektor 23
- Komponenten 53
- Lichtartiger 56, 60, 60
- Raumartiger 56, 60, 60, 61
- Skalarprodukt 24, 56
- Zeitartiger 56, 60, 60, 61, 64
- Vollkugel 9
- Volumenform 69, 114
- Volumeninhalt 14
- Volumenintegral 14 f.
- Kugel 16
- Reparametrisierung 14
- Welle
- Elektromagnetische 34, 63, 64-67
- Amplitude 34, 65
- Elliptisch polarisierte 66
- Energie-Impuls-Tensor 49
- Feldstärketensor 65
- Kreisfrequenz 63, 66
- Linear polarisierte 65
- Linkszirkular polarisierte . . 65
- Phase 34, 63, 65
- Polarisationsvektor 34, 65
- Rechtszirkular polarisierte . 65
- Transformation 35, 63
- Wellenvektor 34, 65
- Zirkular polarisierte 65
- Wellenvektor
- Elektromagnetische Welle 34, 65
- WICHERT-LIÉNARD-Potential . . . 107
- Wirkung
- Prinzip der kleinsten 90
- Wirkungsfunktional 90
- Transformation 93
- Zeitachse 67
- Zeitartiger Vektor . . 56, 60, 60, 61, 64
- Zeitartigkeit
- Des Viererimpuls 82
- Zeitdilatation 55
- Zeitliche Translation 54
- Zeitspiegelung . . . 58, 59, 60, 67, 67 f.
- Der Eigenzeit 68
- Des Feldstärketensors 68
- Von Bahnkurven 68
- Zerfall eines Teilchens 84
- Zerfallsenergien 85
- Ziel 31
- Zirkular polarisierte elektro-
magnetische Welle 65
- Links- 65
- Rechts- 65
- Zweiteilchenreaktion
- Elastisch 83, 82-85
- Zweites NOETHER Theorem 96