

Vorlesung Theoretische Physik II (Elektrodynamik)

gehalten von R. Schlickeiser

Reinhard Schlickeiser
Institut für Theoretische Physik
Lehrstuhl IV: Weltraum- und Astrophysik

3. korrigierte Auflage

Inhaltsverzeichnis

0	Einleitung	1
0.1	Vorbemerkung	1
1	Einführung	3
1.1	Vier Bereiche der Mechanik	3
1.2	Vier Grundkräfte der Natur	3
1.3	Historische Entwicklung der Elektrodynamik	4
1.4	Eigenschaften der elektrischen Ladungen	5
1.5	Einheiten	5
2	Mathematische Vorüberlegungen	7
2.1	Differentiation und Integration von Vektoren	7
2.1.1	Differentiation von Vektoren	7
2.1.2	Integration von Vektoren	8
2.2	Koordinatensysteme	8
2.2.1	Koordinatenlinien und Koordinatenflächen	9
2.2.2	Festlegung von Einheitsvektoren	9
2.2.3	Beispiel: Zylinderkoordinaten	10
2.3	Vektorielle Differentialoperatoren	12
2.3.1	Gradient	12
2.3.2	Der Nabla-Operator $\vec{\nabla}$	15
2.3.3	Divergenz	15
2.3.4	Rotation	17
2.4	Rechenregeln für vektorielle Differentialoperatoren	19
2.4.1	Summenregeln	19
2.4.2	Produktregeln	19
2.4.3	Quotientenregeln	19
2.4.4	Kombination verschiedener vektorieller Differentialoperatoren	20
2.5	Differentialoperatoren in krummlinigen Koordinaten	21
2.5.1	Grundgleichungen	21
2.5.2	Gradient	21
2.5.3	Divergenz	23
2.5.4	Rotation	24
2.5.5	Laplace-Operator	24
2.5.6	Beispiel: Kugelkoordinaten	25
2.6	Integralrechnung mit Vektoren	26

Inhaltsverzeichnis

2.6.1	Integration von Gradienten	26
2.6.2	Integration von Divergenzen	28
2.6.3	Integration von Rotationen	30
2.6.4	Sätze von Green	32
2.7	Dirac's Delta-Funktion	33
2.7.1	Divergenz von \vec{e}_r/r^2	33
2.7.2	Die eindimensionale Delta-Funktion $\delta(x - x_0)$	34
2.7.3	Einschub: Mittelwertsatz der Differentialrechnung	36
2.7.4	Eigenschaften der δ -Funktion	37
2.7.5	Die dreidimensionale Delta-Funktion	38
2.8	Helmholtz-Theorem	39
2.9	Skalare Potentiale und Vektorpotentiale	42
2.10	Die Maxwellschen Gleichungen	42
3	Elektrostatik	43
3.1	Coulomb-Gesetz	43
3.2	Elektrische Feldstärke	44
3.3	Differentielle Feldgleichungen	45
3.3.1	Feldlinien	47
3.4	Integralform der Feldgleichungen	47
3.5	Anwendung des Gauß-Gesetzes	49
3.5.1	Feld einer homogenen geladenen Kugel	49
3.5.2	Feldverhalten an Grenzflächen	52
3.6	Elektrostatische Feldenergie	53
3.6.1	Energie einer Punktladungsverteilung	54
3.6.2	Kontinuierliche Ladungsverteilungen	55
3.7	Leiter und Isolatoren	55
3.7.1	Leiter	56
3.7.2	Isolatoren	58
3.7.3	Leiter im elektrostatischen Feld	58
3.8	Randwertprobleme	59
3.8.1	Formulierung des Randwertproblems	59
3.8.2	Partikuläre und homogene Lösung	59
3.8.3	Eindeutigkeit der Lösung	60
3.8.4	Greensfunktion	61
3.9	Entwicklung des skalaren Potentials einer statischen, begrenzten Ladungsverteilung nach Multipolen	62
3.9.1	Multipole	62
3.9.2	Eigenschaften der Legendre-Polynome	63
3.9.3	Multipolentwicklungen	68
3.9.4	Beispiel: Der physikalische Dipol	70
3.10	Spiegelungsmethode oder Methode der Bildladungen	72
3.10.1	Beispiel: Punktladung vor geerdeter, unendlich ausgedehnter Metallplatte	72

3.11	Methode der konformen Abbildung bei ebenen Problemen	75
3.11.1	Ebenes Feld	75
3.11.2	Methode der konformen Abbildung	77
3.11.3	Beispiel: Gerader geladener Draht durch den Ursprung und senkrecht zur Ebene	78
3.12	Lösung der Laplace-Gleichung durch Separationsansatz	80
3.12.1	Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten	80
3.12.2	Zylindersymmetrie	82
3.12.3	Entwicklung nach Legendre-Polynomen	82
3.12.4	Zylindersymmetrisches Beispiel: Leitende Kugel im homogenen Feld	84
3.12.5	Assoziierte Legendre-Polynome	86
3.12.6	Inneres und äußeres Dirichletproblem für die Kugel	89
4	Magnetostatik	91
4.1	Strom und Stromdichte	91
4.1.1	Stromdichte und Stromfaden	91
4.1.2	Mikroskopische Definition	92
4.1.3	Kontinuitätsgleichung	93
4.2	Ampère-Gesetz	94
4.3	Magnetische Induktion und Biot-Savart-Gesetz	95
4.3.1	Beispiel: Lorentz-Kraft	96
4.3.2	Beispiel: Magnetfeld eines geraden Leiters	97
4.4	Differentielle Feldgleichungen	98
4.5	Integralform der Feldgleichungen	102
4.6	Feldverhalten an Grenzflächen	103
4.7	Multipolentwicklung für das Vektorpotential	105
4.7.1	Hilfssatz	106
4.7.2	Magnetisches Dipolmoment	107
4.7.3	Magnetisches Moment eines geschlossenen, ebenen Stromkreises	109
4.7.4	Magnetisches Moment eines Systems von Punktladungen	109
4.8	Beispiel: Magnetfeld durch Gleichstrom im Koaxialkabel	110
5	Maxwell-Gleichungen	117
5.1	Induktionsgesetz	117
5.2	Feldgleichungen vor Maxwell für zeitabhängige Felder	118
5.3	Verschiebungsstrom (oder: wie Maxwell das Ampere-Gesetz reparierte)	119
5.4	Elektromagnetische Potentiale	120
5.5	Eichtransformationen	121
5.5.1	Lorenz-Eichung	122
5.5.2	Coulomb-Eichung	124
5.6	Energiesatz der Elektrodynamik	125
5.7	Impulssatz der Elektrodynamik	128
5.8	Lagrange- und Hamilton-Funktion eines geladenen Teilchens im elektroma- netischen Feld	131

6	Elektromagnetische Wellen und Strahlung	133
6.1	Elektromagnetische Wellen im Vakuum	133
6.1.1	Ebene Wellen	134
6.1.2	Ebene, monochromatische Welle	136
6.1.3	Linearkombination von ebenen, monochromatischen Wellen	136
6.1.4	Potentiale und Felder von ebenen, monochromatischen Wellen	137
6.1.5	Energiedichte und Poynting-Vektor der ebenen, monochromatischen Welle	139
6.1.6	Polarisation	140
6.2	Inhomogene Wellengleichung	143
6.2.1	Singuläre Funktionen der Elektrodynamik	143
6.2.2	Viererpotential einer bewegten Punktladung	152
6.2.3	Elektrische Feldstärke einer bewegten Punktladung	154
6.2.4	Magnetische Feldstärke einer bewegten Punktladung	160
6.3	Energieabstrahlung einer bewegten Punktladung	163
6.3.1	Larmor-Formel	164
6.3.2	Bremsstrahlung	165
6.3.3	Kreisbewegung	167
6.4	Der Hertzsche Dipol	167
7	Kovariante Formulierung der Maxwell-Theorie	177
7.1	Die Lorentz-Transformation	177
7.2	Minkowski-Raum	179
7.2.1	Vierer-Skalare, Vierer-Vektoren und Vierer-Tensoren	180
7.3	Relativistische Formulierung der Elektrodynamik	181
7.3.1	Vierer-Potential	181
7.3.2	Kovariante Maxwellgleichungen und Feldstärketensor	183
7.3.3	Lorentz-Transformation der Feldstärken	184
7.4	Lagrange- und Hamilton-Formalismus für Felder	185
7.4.1	Lagrange-Dichte und Hamilton-Dichte	186
7.4.2	Klein-Gordon-Lagrange-Dichte für ein skalares (Spin 0) Feld	187
7.4.3	Proca-Lagrange-Dichte für ein Vektor-Feld (Spin 1)	188
7.4.4	Maxwell-Lagrange-Dichte für ein masseloses Vektor-Feld mit Quelle j^μ	189
7.4.5	Bemerkung	189
8	Elektrodynamik in Materie	191
8.1	Dielektrika im elektrostatischen Feld	191
8.1.1	Polarisation	191
8.1.2	Feld eines polarisierten Objekts	193
8.1.3	Beispiel: Elektrisches Feld einer gleichförmig polarisierten Kugel vom Radius R	195
8.1.4	Elektrische Verschiebung	198
8.1.5	Lineare Dielektrika	199

8.1.6	Beispiel: Kugel aus linearem dielektrischen Material im gleichförmigen elektrischen Feld	200
8.2	Magnetisierte Medien	204
8.2.1	Suszeptibilität und Permeabilität	207
8.3	Maxwell-Gleichungen in Materie	208
8.3.1	Maxwell-Gleichungen in integraler Form	208
8.3.2	Maxwell-Gleichungen in differentieller Form	209
A	Anhang	211
A.1	Mathematischer Anhang	211
A.1.1	Näherungsformeln	211
A.1.2	Eulersche Formeln und Umkehrung	211
A.1.3	Darstellung des $\vec{\nabla}$ -Operators in verschiedenen Koordinatensystemen	211
A.1.4	Rechenregeln für den $\vec{\nabla}$ -Operator	212
A.2	Empfohlene Literatur	213
A.2.1	Bücher zur Theoretischen Elektrodynamik:	213
A.2.2	Bücher für mathematische Formeln ("Grundausstattung"):	213
A.2.3	Bücher für mathematische Physik ("Grundausstattung"):	213

Inhaltsverzeichnis

0 Einleitung

0.1 Vorbemerkung

Dieses Vorlesungsskript basiert auf Vorlesungen, die ich in den Sommersemestern 2001 und 2003 an der Ruhr-Universität Bochum für Studierende des Diplomstudiengangs Physik im 4. Semester gehalten habe. Besonders danken möchte ich

- Herrn Dipl.-Phys. Urs Schaefer-Rolffs, der die grafischen Illustrationen zum Skript beigetragen hat,
- Frau Angelika Schmitz für ihren unermüdlichen Einsatz beim Korrigieren und Erstellen des Skripts in PDF-LATEX,
- Frau Hanna Döring und Frau Maria Laukert für die Hinweise auf viele Fehler in den früheren Versionen.

Ich hoffe, dass dieses Skript vielen Studierenden beim Erlernen der Theoretischen Elektrodynamik hilft.

Reinhard Schlickeiser

Bochum, im März 2009

0 Einleitung

1 Einführung

1.1 Vier Bereiche der Mechanik

In Bezug auf die Geschwindigkeit und die Größe von physikalischen Objekten, kann man, wie in Tabelle 1.1 skizziert, die Mechanik in vier Bereiche aufteilen. Die Newtonsche Mechanik

Tabelle 1.1: Bereiche der Mechanik

	\Rightarrow	kleinere Abstände
↓ höhere Geschwindigkeit	klassische Mechanik (Newton)	Quantenmechanik (Schrödinger, Heisenberg, Bohr u.a.)
	Relativistische Mechanik (Einstein)	Quantenfeldtheorie (Dirac, Pauli, Schwinger, Feynman u.a.)

funktioniert gut im "alltäglichen Leben", versagt aber zum einen für Objekte, die sich mit Geschwindigkeiten nahe der Lichtgeschwindigkeit bewegen, deren Dynamik mit der speziellen und der allgemeinen Relativitätstheorie beschrieben werden muss. Zum anderen versagt die Newtonsche Mechanik auch bei der Anwendung auf sehr kleine Objekte auf der atomaren Größenskala, die mit der Quantenmechanik beschrieben werden müssen. Für Objekte, die klein *und* schnell sind, gilt die Quantenfeldtheorie, an deren Ausarbeitung seit 1930 gearbeitet wird. Im Rahmem dieser Vorlesung werden wir vorwiegend im Bereich der klassischen Mechanik bleiben.

1.2 Vier Grundkräfte der Natur

Es ist die Aufgabe der Mechanik, das Verhalten von physikalischen Systemen unter Einwirkung einer gegebenen *Kraft* zu beschreiben. Man unterscheidet heute zwischen vier Grundkräften, die nach abnehmender Stärke als

1 Einführung

1. Starke Kraft
2. Elektromagnetische Kraft
3. Schwache Kraft
4. Gravitationskraft

bezeichnet werden.

Von diesen haben die starke und die schwache Kraft nur sehr geringe Reichweiten auf der Größenskala von Elementarteilchen und lassen sich daher nicht klassisch behandeln. Die Theorie des Gravitationsfeldes gehört zur klassischen Feldtheorie, wird aber umfassend in gesonderten Vorlesungen zur allgemeinen Relativitätstheorie behandelt. Damit verbleibt für die klassische Beschreibung nur das elektromagnetische Feld, die weitreichend über makroskopische Abstände wirkt.

Die obige Einteilung in nur vier unterschiedliche Kräfte erscheint kurz. Es ist aber zu bedenken, dass die elektromagnetischen Kräfte auch Reibungskräfte und sämtliche Arten von chemischen Kräften, die die Moleküle zusammenhalten, umfassen. Damit sind die elektromagnetischen Kräfte die dominierenden Kräfte des täglichen Lebens und die einzigen, die vollständig verstanden sind. Die Theorie der elektromagnetischen Kräfte war und ist Vorbild für die Theorie der schwachen Wechselwirkung und für die Theorie der starken Wechselwirkung ("Chromodynamik"). Es fehlt uns heute noch, trotz umfangreicher Bemühungen, eine quantenmechanische Theorie der Gravitation, obwohl die klassische Theorie der Gravitation (Newton) und deren relativistische Verallgemeinerung (Einstein) vorliegen.

1.3 Historische Entwicklung der Elektrodynamik

Anfänglich waren *Elektrizität* (Katzenfell, Batterien, Ströme, Elektrolyse, Blitze u.ä.) und *Magnetismus* (Stabmagneten, Kompassnadel, Nordpol u. ä.) getrennte Disziplinen. 1820 aber entdeckte Oersted, dass elektrische Ströme magnetische Kompassnadeln beeinflussen. Kurz danach behauptete Ampere richtigweise, dass *alle* magnetischen Phänomene auf sich bewegenden elektrischen Ladungen basieren. 1831 entdeckte Faraday, dass ein bewegter Magnet einen elektrischen Strom verursacht. Als dann Maxwell und Lorentz die endgültige Theorie formulierten, waren Elektrizität und Magnetismus eng verbunden als Elektromagnetismus.

Faraday hatte schon vermutet, dass Licht elektrischen Ursprungs ist, was durch die Gleichungen von Maxwell nach Einführung des Verschiebungsstroms theoretisch begründet wurde. Die Entwicklung der *Optik*, Untersuchung von Linsen, Spiegeln, Prismen, Interferenz und Beugung) vollzog sich dann als Teil des Elektromagnetismus. Die bahnbrechenden Versuche von Heinrich Hertz im Jahr 1888 brachten dann die entscheidende Bestätigung der Theorie. Die damaligen Hauptbetätigungsfelder der Physik (Elektrizität, Magnetismus und Optik) waren damit um das Jahr 1900 in einer einzigen Theorie vereinheitlicht.

Seit dieser Zeit träumen viele Physiker von weiteren Vereinheitlichungen, angefangen mit Einstein, der die Gravitation mit der Elektrodynamik vereinheitlichen wollte. Seit ca. 1960 existiert die elektroschwache Theorie von Glashow, Weinberg und Salam, die die schwachen

und elektromagnetischen Kräfte verbindet. Über die Grand Unified Theories (schwach, elektromagnetisch und stark) seit ca. 1970 gelangte man um 1980 zur Superstring Theory, die alle vier Grundkräfte in einer einzigen Theorie für alles ("theory of everything") beschreiben möchte. Die Vereinheitlichung der Kräfte ist nachwievor ein zentrales Arbeitsgebiet der theoretischen Physik, eingeleitet durch die erfolgreich gelungene Formulierung der theoretischen Elektrodynamik.

1.4 Eigenschaften der elektrischen Ladungen

Der Elektromagnetismus behandelt die Dynamik und Wechselwirkungen von elektrischen Ladungssystemen. Es ist daher sinnvoll, sich deren Haupteigenschaften in Erinnerung zu rufen:

1. *Es gibt immer zwei Ladungsarten:* es gibt immer zwei Arten von Ladungen, die wir als positiv (+) und negativ (-) bezeichnen, und die sich in ihren Effekten aufheben. Warum gibt es nicht 8 oder 10 verschiedene Arten?
2. *Ladung ist erhalten:* Sie kann nicht erzeugt oder vernichtet werden; was jetzt vorhanden ist, war auch schon früher da. Eine positive Ladung kann eine negative Ladung annihilieren, aber eine positive Ladung kann nicht allein verschwinden. Die gesamte Ladung des Universums ist für alle Zeiten festgelegt.
3. *Ladung ist quantisiert:* elektrische Ladungen sind immer ganzzahlige Vielfache der Elementarladung e : das Proton hat $+e$, das Elektron $-e$, das Positron $+e$, das Neutron ist ungeladen, die Pi-Mesonen haben die Ladung $+e$, 0 , $-e$, der Kohlenstoffkern die Ladung $+6e$. Niemals haben wir $5.831e$ oder $e/2$. Wir wissen aber, dass Protonen und Neutronen jeweils aus drei Quarks mit den Ladungen $\pm 2/3e$ und $\pm 1/3e$ bestehen, allerdings scheinen *freie* Quarks nicht in der Natur zu existieren. Aber selbst dieser Befund würde an der Quantisierung der Ladungen nichts ändern: wie würden dann ($e/3$) als Elementarladung nehmen. Da die Elementarladung sehr klein ist, braucht man diese Quantisierung bei vielen makroskopischen Anwendungen nicht zu berücksichtigen.

1.5 Einheiten

Eine Plage der Elektrodynamik sind die verschiedenen Einheitensysteme, die die Verständigung zwischen Physikern erschwert. Dies ist weit schlimmer als in der klassischen Mechanik, wo das zweite Newtonsche Gesetz immer $\vec{F} = m\vec{a}$ ist, egal in welchen Einheiten die Kraft \vec{F} , die Masse m oder die Beschleunigung \vec{a} gemessen werden.

Dies ist aber nicht der Fall in der Elektrodynamik, wo je nach Einheitensystem die Gleichungen anders lauten. Betrachten wir das Coulomb-Gesetz, das die Kraft zwischen zwei Ladungen q_1 und q_2 im Abstand $\vec{r} = r\vec{e}_r$ angibt. Im Gauss-System (CGS) gilt

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{e}_R \quad \text{CGS .}$$

1 Einführung

Im SI-System (MKS) gilt

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{e}_R \quad \text{SI}$$

und im Heaviside-Lorentz-System der Elementarteilchenphysik

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{e}_R \quad \text{HL .}$$

Das CGS-System hat theoretische Vorteile und wird deshalb auch im folgenden benutzt. Das SI-System verwendet gebräuchliche Einheiten aus dem täglichen Leben wie Volt, Ampere und Watt. Auch die Lehrbücher verfahren hier nicht einheitlich, also Vorsicht bei der Konsultation anderer Literatur!

2 Mathematische Vorüberlegungen

Hinsichtlich der Definition von Skalaren und Vektoren, den Vektoroperationen wie Addition, Subtraktion und Multiplikationen insbesondere Skalarprodukt, Kreuzprodukt und Spatprodukt verweise ich auf das Kap. 1 des Mechanik-Skripts. Ich setze dessen Inhalt im folgenden voraus und wiederhole hier die für die Elektrodynamik wichtigen Aspekte.

2.1 Differentiation und Integration von Vektoren

2.1.1 Differentiation von Vektoren

Der Vektor \vec{A} kann eine Funktion des skalaren Parameters u sein, d.h. $\vec{A} = \vec{A}(u)$. In Komponentenschreibweise gilt dann

$$\vec{A}(u) = A_x(u)\vec{e}_1 + A_y(u)\vec{e}_2 + A_z(u)\vec{e}_3. \quad (2.1)$$

Da die kartesischen Einheitsvektoren \vec{e}_i nicht variabel sind, definiert man das **Differential** des Vektors als

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{A}(u)}{du} &\equiv \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\vec{A}(u + \Delta u) - \vec{A}(u)}{\Delta u} \\ &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \left[\frac{A_x(u + \Delta u) - A_x(u)}{\Delta u} \vec{e}_1 \right. \\ &\quad \left. + \frac{A_y(u + \Delta u) - A_y(u)}{\Delta u} \vec{e}_2 + \frac{A_z(u + \Delta u) - A_z(u)}{\Delta u} \vec{e}_3 \right] \end{aligned} \quad (2.2)$$

so dass

$$\frac{d\vec{A}(u)}{du} = \frac{dA_x(u)}{du} \vec{e}_1 + \frac{dA_y(u)}{du} \vec{e}_2 + \frac{dA_z(u)}{du} \vec{e}_3. \quad (2.3)$$

Analog ergeben sich höhere Ableitungen zu

$$\frac{d^n \vec{A}(u)}{du^n} = \frac{d^n A_x(u)}{du^n} \vec{e}_1 + \frac{d^n A_y(u)}{du^n} \vec{e}_2 + \frac{d^n A_z(u)}{du^n} \vec{e}_3. \quad (2.4)$$

Es gelten folgende Regeln, die man leicht über die Komponentendarstellung (2.1) beweist:

(a)
$$\frac{d}{du} (\vec{A} + \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{du} + \frac{d\vec{B}}{du} \quad (2.5)$$

(b)
$$\frac{d}{du} (\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot \frac{d\vec{B}}{du} + \frac{d\vec{A}}{du} \cdot \vec{B} \quad (2.6)$$

(c)
$$\frac{d}{du} (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A} \times \frac{d\vec{B}}{du} + \frac{d\vec{A}}{du} \times \vec{B}. \quad (2.7)$$

2 Mathematische Vorüberlegungen

(d) Falls $\Phi(u)$ eine skalare Funktion bezeichnet gilt

$$\frac{d}{du} (\Phi \vec{A}) = \Phi \frac{d\vec{A}}{du} + \frac{d\Phi}{du} \vec{A}. \quad (2.8)$$

Wichtige physikalische Vektoren, die als Ableitungen von Vektoren definiert sind, sind die Geschwindigkeit

$$\vec{v}(t) \equiv \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{\vec{r}}(t) \quad (2.9)$$

als Zeitableitung des Ortsvektors $\vec{r}(t)$ eines Punktteilchens und die Beschleunigung

$$\vec{a}(t) \equiv \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}(t) \quad (2.10)$$

als Zeitableitung des Geschwindigkeitsvektors $\vec{v}(t)$ und somit als zweite zeitliche Ableitung des Ortsvektors $\vec{r}(t)$.

2.1.2 Integration von Vektoren

Analog zur Definition der Ableitung (2.2) eines Vektors definiert man das Integral eines Vektors $\vec{A}(u)$ über die Integrale seiner Komponenten

$$\begin{aligned} \int du \vec{A}(u) &\equiv \int du [A_x(u)\vec{e}_1 + A_y(u)\vec{e}_2 + A_z(u)\vec{e}_3] \\ &= \int du A_x(u) \vec{e}_1 + \int du A_y(u) \vec{e}_2 + \int du A_z(u) \vec{e}_3. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Als **Beispiel** betrachten wir den Vektor $\vec{A}(u) = (3u^2 - 1, 2u - 3, 6u^2 - 4u)$ und berechnen das Integral $\int_0^2 du \vec{A}(u)$. Entsprechend der Definition (2.11) ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_0^2 du \vec{A}(u) &= \int_0^2 du (3u^2 - 1, 2u - 3, 6u^2 - 4u) \\ &= [u^3 - u, u^2 - 3u, 2u^3 - 2u^2]_0^2 = (6, -2, 8). \end{aligned} \quad (2.12)$$

2.2 Koordinatensysteme

Wir beginnen mit den **kartesischen Koordinaten** x, y, z . x, y, z eines Punktes P sind definiert als die Projektionen des Ortsvektors $\vec{r} = \overline{OP}$ auf die Achsen $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, d.h.

$$\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3, \quad \text{mit} \quad |\vec{e}_i| = 1, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.13)$$

Wir betrachten jetzt zusätzlich **neue Koordinatensysteme** q_1, q_2, q_3 mit den Transformationsgleichungen

$$q_1 = q_1(x, y, z), \quad q_2 = q_2(x, y, z), \quad q_3 = q_3(x, y, z) \quad (2.14)$$

und der Umkehrtransformation

$$x = x(q_1, q_2, q_3), \quad y = y(q_1, q_2, q_3), \quad z = z(q_1, q_2, q_3). \quad (2.15)$$

Der Ortsvektor \vec{r} des Punktes P kann dann mittels Gleichung (2.15) als Funktion der krummlinigen Koordinaten q_i aufgefasst werden:

$$\vec{r}(q_1, q_2, q_3) = (x(q_1, q_2, q_3), \quad y(q_1, q_2, q_3), \quad z(q_1, q_2, q_3)). \quad (2.16)$$

2.2.1 Koordinatenlinien und Koordinatenflächen

Hält man zwei dieser drei neuen Koordinaten konstant und variiert man nur die dritte neue Koordinate, so erhält man drei **Koordinatenlinien**:

$$\begin{aligned} L_1 : \quad \vec{r} &= \vec{r}(q_1, q_2 = c_2, q_3 = c_3) \\ L_2 : \quad \vec{r} &= \vec{r}(q_1 = c_1, q_2, q_3 = c_3) \\ L_3 : \quad \vec{r} &= \vec{r}(q_1 = c_1, q_2 = c_2, q_3). \end{aligned}$$

Ist eine dieser Koordinatenlinien keine Gerade, so spricht man von **krummlinigen Koordinaten**.

Hält man nur eine neue Koordinate fest und variiert jeweils die beiden anderen, so erhält man **Koordinatenflächen**:

$$\begin{aligned} F_1 : \quad \vec{r} &= \vec{r}(q_1 = c_1, q_2, q_3) \\ F_2 : \quad \vec{r} &= \vec{r}(q_1, q_2 = c_2, q_3) \\ F_3 : \quad \vec{r} &= \vec{r}(q_1, q_2, q_3 = c_3). \end{aligned}$$

Die Koordinatenlinien L_i entstehen durch Schnitt von je zwei dieser Koordinatenflächen.

2.2.2 Festlegung von Einheitsvektoren

Als normierten Basisvektor oder Einheitsvektor \vec{e}_{q_1} im Punkt P wählen wir einen Vektor vom Betrag 1 tangential zur Koordinatenlinie L_1 ($q_2 = c_2, q_3 = c_3$) im Punkt P . Seine Richtung soll dem Durchlaufsinne der Koordinatenlinie bei wachsendem q_1 entsprechen:

$$\vec{e}_{q_1} \equiv \frac{\partial \vec{r} / \partial q_1}{|\partial \vec{r} / \partial q_1|} \quad (2.17)$$

oder für $i = 1, 2, 3$

$$\partial \vec{r} / \partial q_i = h_i \vec{e}_{q_i} \quad (2.18)$$

mit dem Skalenfaktor

$$h_i = |\partial \vec{r} / \partial q_i|. \quad (2.19)$$

Dies führen wir am Beispiel der Zylinderkoordinaten vor.

2.2.3 Beispiel: Zylinderkoordinaten

Gemäß Abbildung 2.1 werden als neue Koordinaten gewählt:

- ϕ : der Winkel zwischen der Projektion des Ortsvektors auf die $x - y$ -Ebene und der x -Achse,
- ρ : der Abstand des Punktes P von der z -Achse,
- z : die Länge der Projektion des Ortsvektors auf die z -Achse.

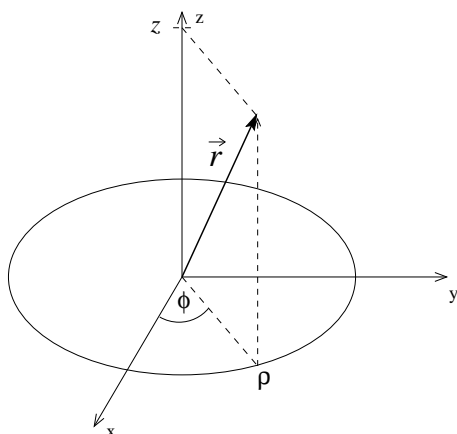


Abbildung 2.1: Zur Einführung der Zylinderkoordinaten

Aus Abbildung 2.1 erhalten wir als Transformationsgleichungen

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \phi = \arctan(y/x), \quad z = z \quad (2.20)$$

und als Umkehrtransformation

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad z = z \quad (2.21)$$

mit den Einschränkungen $\rho \geq 0$ und $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Man erkennt, dass jedem Tripel (ρ, ϕ, z) exakt nur ein Raumpunkt zugeordnet ist. Abbildung 2.2 zeigt, dass die Koordinatenfläche für $\rho = \text{const.}$ einem Kreiszyylinder um die z -Achse entspricht. Die Koordinatenfläche für $\phi = \text{const.}$ ergibt eine Halbebene, die die z -Achse enthält, während die Koordinatenfläche für $z = \text{const.}$ eine Ebene parallel zur $x - y$ -Ebene ergibt.

Gemäß der Definition (2.18) erhalten wir mit $\vec{r} = (x, y, z) = (\rho \cos \phi, \rho \sin \phi, z)$ für die drei Einheitsvektoren

$$\vec{e}_\rho = \frac{\partial \vec{r} / \partial \rho}{|\partial \vec{r} / \partial \rho|} = (\cos \phi, \sin \phi, 0) \quad (2.22)$$

$$\vec{e}_\phi = \frac{\partial \vec{r} / \partial \phi}{|\partial \vec{r} / \partial \phi|} = (-\sin \phi, \cos \phi, 0) \quad (2.23)$$

$$\vec{e}_z = \frac{\partial \vec{r} / \partial z}{|\partial \vec{r} / \partial z|} = (0, 0, 1) . \quad (2.24)$$

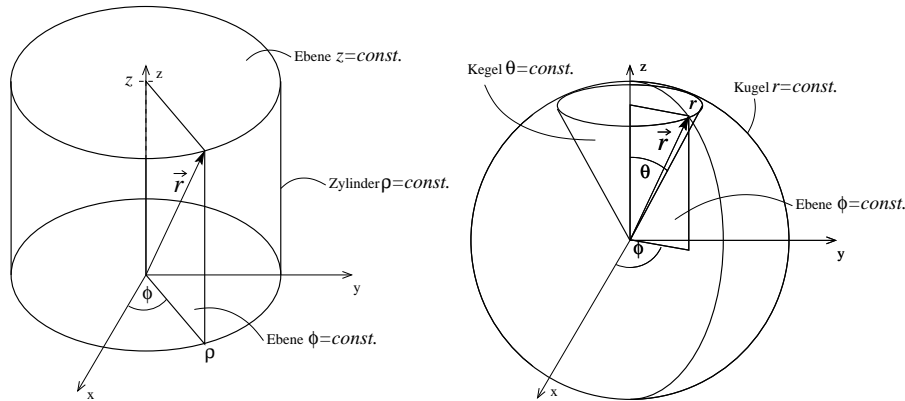


Abbildung 2.2: Koordinatenflächen und Koordinatenlinien für Zylinderkoordinaten und Kugelkoordinaten

Offensichtlich ist \vec{e}_ρ parallel zur $x-y$ -Ebene und zeigt weg von der z -Achse; \vec{e}_ϕ ist ebenfalls parallel zur $x-y$ -Ebene und ist die Tangente an den Kreis $z = const.$ und $\rho = const.$; \vec{e}_z entspricht dem kartesischen Einheitsvektor \vec{e}_3 .

Aus den Beziehungen (2.22)–(2.23) erhält man

$$\vec{e}_1 = \vec{e}_\rho \cos \phi - \vec{e}_\phi \sin \phi, \quad \vec{e}_2 = \vec{e}_\rho \sin \phi + \vec{e}_\phi \cos \phi. \quad (2.25)$$

Durch Berechnung des Spatprodukts

$$\vec{e}_\rho \cdot (\vec{e}_\phi \times \vec{e}_z) = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1$$

lässt sich sofort überprüfen, dass die Zylinderkoordinaten ein orthogonales Koordinatensystem mit variablen Einheitsvektoren bilden.

Aufgrund der Variabilität der Einheitsvektoren folgt für die totalen zeitlichen Ableitungen

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \phi} \frac{d\phi}{dt} + \frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial z} \frac{dz}{dt} = 0 + (-\sin \phi, \cos \phi) \dot{\phi} + 0 = \dot{\phi} \vec{e}_\phi, \quad (2.26)$$

$$\frac{d\vec{e}_\phi}{dt} = 0 + (-\cos \phi, -\sin \phi) \dot{\phi} + 0 = -\dot{\phi} \vec{e}_\rho \quad (2.27)$$

$$\frac{d\vec{e}_z}{dt} = 0. \quad (2.28)$$

Gleichungen (2.26)–(2.28) stimmen mit dem allgemeinen Ergebnis

$$\frac{d\vec{e}_j}{dt} \perp \vec{e}_j \quad (2.29)$$

überein, das sofort aus $\vec{e}_j \cdot \vec{e}_j = const.$ durch Differentiation nach t folgt:

$$\frac{d\vec{e}_j}{dt} \cdot \vec{e}_j = 0 \quad (2.30)$$

2 Mathematische Vorüberlegungen

Übungsaufgabe:

A 2.2.1) Berechnen Sie die Einheitsvektoren sowie den Geschwindigkeitsvektor und Beschleunigungsvektor in Kugelkoordinaten $x = r \cos \phi \sin \theta$, $y = r \sin \phi \sin \theta$, $z = r \cos \theta$. Drücken Sie \vec{e}_r , \vec{e}_θ und \vec{e}_ϕ als Funktion der kartesischen Einheitsvektoren \vec{e}_1 , \vec{e}_2 , \vec{e}_3 aus.

Verifizieren Sie dabei folgende Ergebnisse:

$$\vec{e}_r = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \quad (2.31)$$

$$\vec{e}_\theta = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta) \quad (2.32)$$

$$\vec{e}_\phi = (-\sin \phi, \cos \phi, 0) \quad (2.33)$$

$$\vec{v}(t) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r \sin \theta \dot{\phi}\vec{e}_\phi \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) = & (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r \sin^2 \theta \dot{\phi}^2)\vec{e}_r + \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) - r \sin \theta \cos \theta \dot{\theta}^2 \right] \vec{e}_\theta \\ & + \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{d}{dt} (r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}) \right] \vec{e}_\phi. \end{aligned} \quad (2.35)$$

2.3 Vektorielle Differentialoperatoren

2.3.1 Gradient

Wir definieren zunächst skalare Felder und vektorielle Felder.

Definition: Skalare Felder: Unter einem skalaren Feld versteht man eine skalare Funktion $\psi(x, y, z)$, die jedem Punkt $P(x_0, y_0, z_0)$ den skalaren Wert $\psi(x_0, y_0, z_0)$ zuordnet, wie z. B. Temperaturfelder, Massendichte und Ladungsdichte.

Definition: Vektorielle Felder: Unter einem vektoriellen Feld versteht man eine Vektorfunktion $\vec{A}(x, y, z)$, die jedem Punkt $P(x_0, y_0, z_0)$ den Vektor $\vec{A}(x_0, y_0, z_0)$ zuordnet, wie z. B. Geschwindigkeitsfelder in Flüssigkeiten und Feldstärkevektoren \vec{E} , \vec{H} in der Elektrodynamik. Gegeben sein nun ein Punkt $P(x_0, y_0, z_0)$ und ein Skalarfeld $\psi(x, y, z)$.

Definition: Gradient: $\text{grad } \psi(x_0, y_0, z_0) = \vec{\nabla} \psi(x_0, y_0, z_0)$ ist der Vektor, der in Richtung des stärksten Anstiegs der Funktion ψ zeigt und dessen Betrag die Änderung von ψ pro Wegstrecke in Richtung des stärksten Anstiegs im Punkt $P(x_0, y_0, z_0)$ ist. (Beispiel: Höhenlinien auf Wanderkarten) Jedem Punkt eines Skalarfeldes ordnet man so einen Gradientenvektor zu. Die Gesamtheit aller Gradientenvektoren bildet ein dem Skalarfeld zugeordnetes Vektorfeld, dass sich mathematisch durch

$$\vec{A}(x, y, z) = \text{grad } \psi(x, y, z) = \vec{\nabla} \psi(x, y, z) = \vec{e}_1 \frac{\partial \psi}{\partial x} + \vec{e}_2 \frac{\partial \psi}{\partial y} + \vec{e}_3 \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (2.36)$$

darstellen lässt. Wir können also den Nabla-Operator $\vec{\nabla}$ schreiben als

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_2 \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_3 \frac{\partial}{\partial z}. \quad (2.37)$$

Beweis: Zum Beweis der Beziehungen (2.36) und (2.37) berechnen wir das totale Differential der Funktion ψ , dass sich durch Taylor-Entwicklung der Funktion $\psi(x+dx, y+dy, z+dz)$

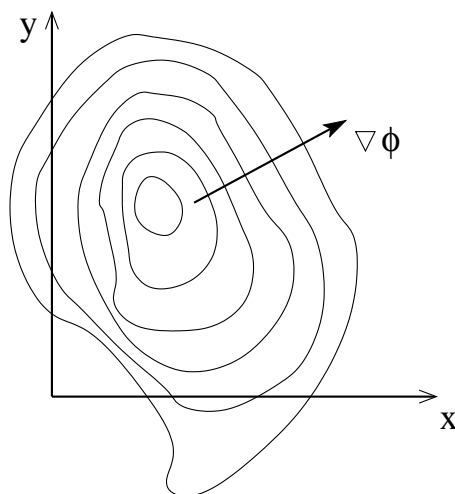


Abbildung 2.3: Gradient in einer Höhenlinienkarte

bis zur ersten Ordnung ergibt:

$$d\psi = \psi(x + dx, y + dy, z + dz) - \psi(x, y, z) \simeq \frac{\partial\psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\psi}{\partial y} dy + \frac{\partial\psi}{\partial z} dz .$$

Mit $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$ lässt sich $d\psi$ auch als Skalarprodukt schreiben

$$d\psi = \vec{\nabla}\psi \cdot d\vec{r} = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y}, \frac{\partial\psi}{\partial z} \right) \cdot (dx, dy, dz) = \frac{\partial\psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\psi}{\partial y} dy + \frac{\partial\psi}{\partial z} dz \quad (2.38)$$

womit die Behauptungen bewiesen sind. Q.E.D.

Definition: Äquipotentialfläche: Flächen, auf denen $\psi(x, y, z) = \text{const.}$ ist, werden als Äquipotentialflächen bezeichnet.

$\psi(x, y, z) = \text{const.}$ ist äquivalent zu einem verschwindendem totalen Differential ($d\psi = 0$), so dass mit Gleichung (2.38) für Äquipotentialflächen folgt

$$d\psi = 0 = \vec{\nabla}\psi \cdot d\vec{r}_{AF} . \quad (2.39)$$

Es folgt der für die klassische Mechanik wichtige Satz: **Der Gradient von ψ steht stets senkrecht auf den Äquipotentialflächen von ψ :**

$$\vec{\nabla}\psi \perp d\vec{r}_{AF} . \quad (2.40)$$

Der Gradientenvektor $\vec{\nabla}\psi$ zeigt immer in Richtung des stärksten Zuwachses von ψ , weil dann der Zuwachs $d\psi$ parallel zu $d\vec{r}$ ist, so dass das Skalarprodukt $\vec{\nabla}\psi \cdot d\vec{r}$ maximal ist.

Bildet man das Skalarprodukt des Gradientenvektor mit einem beliebigen zweiten Vektor \vec{B} , so erhält man den neuen Operator

$$\left(\vec{B} \cdot \vec{\nabla} \right) = \sum_{i=1}^3 B_i \frac{\partial}{\partial x_i} . \quad (2.41)$$

2 Mathematische Vorüberlegungen

Angewandt auf ein Skalarfeld Φ erhält man das skalare Feld $\vec{B} \cdot (\vec{\nabla}\Phi)$:

$$(\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \Phi = \sum_{i=1}^3 B_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Phi = \sum_{i=1}^3 B_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla}\Phi). \quad (2.42)$$

Angewandt auf den Vektor \vec{C} erhält man

$$(\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{C} = \sum_{i=1}^3 B_i \frac{\partial}{\partial x_i} \vec{C} = \left(\sum_{i=1}^3 B_i \frac{\partial C_1}{\partial x_i}, \sum_{i=1}^3 B_i \frac{\partial C_2}{\partial x_i}, \sum_{i=1}^3 B_i \frac{\partial C_3}{\partial x_i} \right) \quad (2.43)$$

einen neuen Vektor.

Bei der Rechnung (2.43) ist die Reihenfolge wichtig:

$$(\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{C} \neq \vec{C} (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}).$$

Der Ausdruck $\vec{B} \cdot (\vec{\nabla}\vec{C})$ ist nicht definiert.

Neben der skalaren Verknüpfung (2.41) können wir auch das Kreuzprodukt bilden:

$$(\vec{B} \times \vec{\nabla})_i = \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} B_j \frac{\partial}{\partial x_k}. \quad (2.44)$$

Die Anwendung dieses Operators auf ein Skalarfeld Φ ergibt

$$\left[(\vec{B} \times \vec{\nabla}) \Phi \right]_i = \left[\vec{B} \times (\vec{\nabla}\Phi) \right]_i = \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} B_j \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}. \quad (2.45)$$

Die Zweifachanwendung des Gradienten-Operators

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \equiv \nabla^2 \equiv \Delta \quad (2.46)$$

ergibt den skalaren sogenannten **Laplace-Operator** Δ , der sowohl auf Skalare als auch auf Vektoren angewandt werden kann:

$$\Delta \Phi = \nabla^2 \Phi = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i^2}, \quad (2.47)$$

$$\Delta \vec{B} = \nabla^2 \vec{B} = \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 B_1}{\partial x_i^2}, \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 B_2}{\partial x_i^2}, \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 B_3}{\partial x_i^2} \right). \quad (2.48)$$

2.3.2 Der Nabla-Operator $\vec{\nabla}$

Der Vektor-Operator (2.37)

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_2 \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_3 \frac{\partial}{\partial z}$$

erhält Bedeutung, wenn er auf irgendetwas wirken kann. $\vec{\nabla}T$ ist kein Produkt, sondern eine Vorschrift zur Ableitung des Skalars $T(\vec{r})$, d.h. $\vec{\nabla}$ **ist ein Vektor-Operator, der auf T wirkt**. $\vec{\nabla}$ verhält sich dann wie ein normaler Vektor, wenn wir "Produkt" mit "wirkt auf" ersetzen.

Es existieren drei Möglichkeiten der Multiplikation eines Vektors \vec{a} :

1. Produkt mit einem Skalar p : $p\vec{a}$,
2. Skalarprodukt mit einem anderen Vektor \vec{b} : $\vec{a} \cdot \vec{b}$,
3. Kreuzprodukt mit einem anderen Vektor \vec{b} : $\vec{a} \times \vec{b}$.

Entsprechend kann der Nabla-Operator auf drei Weisen wirken:

1. auf eine skalare Funktion $T(\vec{r})$: $\vec{\nabla}T(\vec{r})$ ("Gradient"),
2. auf eine Vektorfunktion \vec{A} über das Skalarprodukt: $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ ("Divergenz"),
3. auf eine Vektorfunktion \vec{v} über das Kreuzprodukt: $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ ("Rotation").

Der Gradient wurde bereits ausführlich diskutiert, so dass wir nun die Divergenz und die Rotation näher untersuchen.

2.3.3 Divergenz

Sei das Vektorfeld $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z) = (A_1, A_2, A_3)$ gegeben.

Definition: Divergenz: Als $\text{div } \vec{A}$ bezeichnet man das Skalarprodukt zwischen dem Nabla-Operator und dem Vektor \vec{A} :

$$\text{div } \vec{A} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} A_i = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial A_i}{\partial x_i}. \quad (2.49)$$

Es folgt sofort mit Gleichung (2.46), dass man den Laplace-Operator als

$$\Delta = \text{div grad} = \text{div } \vec{\nabla} \quad (2.50)$$

darstellen kann.

Physikalisch interpretieren kann man die Divergenz eines Vektorfeldes als den Fluss eines Vektorfeldes durch ein Volumenelement dV . $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$ repräsentiere die Flussrate (pro Einheitsfläche) einer Strömung durch eine Seitenfläche (siehe Abbildung 2.4). Wir

2 Mathematische Vorüberlegungen

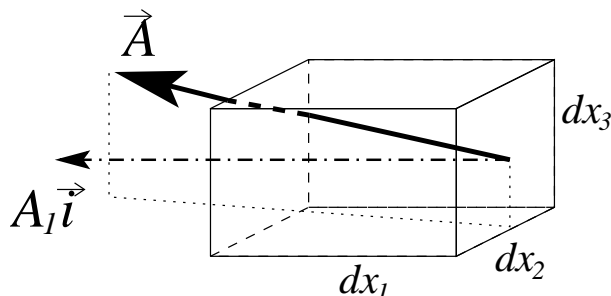


Abbildung 2.4: Zur physikalischen Deutung der Divergenz

betrachten die Flussrate in x -Richtung durch den infinitesimal kleinen Quader mit den Seitenlängen dx_1, dx_2 und dx_3 , die gegeben ist aus dem Produkt aus A_1 und der Seitenfläche $dx_2 dx_3$. Am Ort x_1 ist die Flussrate gleich $A_1 dx_2 dx_3$ und am Ort $x_1 + dx_1$ gleich

$$\left(A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial x_1} \right) dx_2 dx_3 .$$

Der Nettofluss ergibt sich als Differenz der beiden Flussraten zu

$$\left(A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial x_1} \right) dx_2 dx_3 - A_1 dx_2 dx_3 = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} dV .$$

Analog berechnet man den Nettofluss in y - und z -Richtung und nach Addition findet man für den Gesamtfluss durch den Quader

$$dV \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} \right) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial A_i}{\partial x_i} dV = (\operatorname{div} \vec{A}) dV .$$

Das Volumenelement dV stellt eine "Quelle" des Vektorfeldes dar falls $\operatorname{div} \vec{A} > 0$; es stellt eine "Senke" des Vektorfeldes dar falls $\operatorname{div} \vec{A} < 0$.

Geometrisch kann man die Divergenz als Maß für das Auseinanderlaufen eines Vektors an einem Punkt P interpretieren. Betrachten wir als erstes Beispiel die Vektorfunktion

$$\vec{A}_1 = \vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 , \quad (2.51)$$

die in Abbildung 2.5a schematisch dargestellt ist. Wir erhalten sofort einen relativ hohen Wert für die Divergenz,

$$\operatorname{div} \vec{A}_1 = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 3 .$$

Als zweites Beispiel betrachten wir den Einheitsvektor in z -Richtung:

$$\vec{A}_2 = 1\vec{e}_3 , \quad (2.52)$$

die in Abbildung 2.5b schematisch dargestellt ist. Hier verschwindet die Divergenz

$$\operatorname{div} \vec{A}_2 = \frac{\partial}{\partial x}(0) + \frac{\partial}{\partial y}(0) + \frac{\partial}{\partial z}(1) = 0 .$$

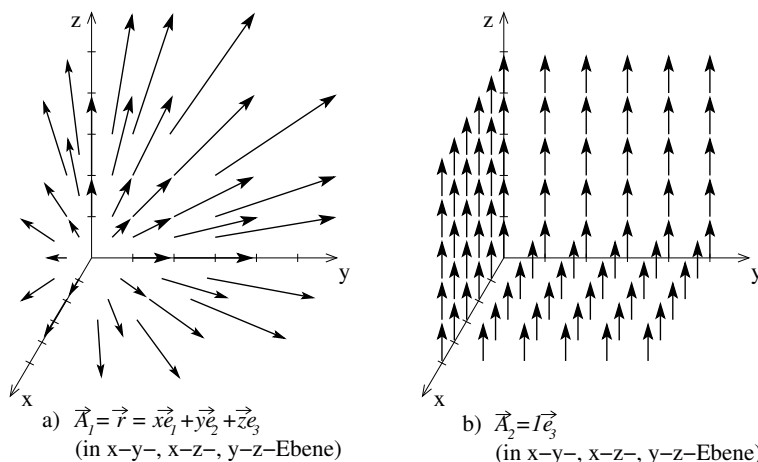


Abbildung 2.5: Divergenz zweier spezieller Vektorfunktionen

2.3.4 Rotation

Sei wieder das Vektorfeld $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z) = (A_1, A_2, A_3)$ gegeben.

Definition: Rotation: Als $\text{rot } \vec{A}$ (in englischer Literatur auch oft $\text{curl } \vec{A}$) bezeichnet man das Kreuzprodukt zwischen dem Nabla-Operator und dem Vektor \vec{A} :

$$\text{rot } \vec{A} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (2.53)$$

so dass für die i -Komponente des resultierenden Vektors

$$[\text{rot } \vec{A}]_i = \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial x_j} = \epsilon_{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial x_j} \quad (2.54)$$

wobei beim letzten Schritt die Summenkonvention benutzt wurde.

Mit Gleichung (2.54) schreibt sich Gleichung (2.53) als

$$\text{rot } \vec{A} = \epsilon_{ijk} \vec{e}_i \frac{\partial A_k}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}. \quad (2.55)$$

Die Rotation lässt sich geometrisch als ein Maß für die Wirbelstärke (Rotation) eines Vektorfeldes \vec{A} im Punkt P interpretieren. Betrachten wir als Beispiel die Vektorfunktion

$$\vec{A}_3 = -y\vec{e}_1 + x\vec{e}_2,$$

die in Abbildung 2.6 schematisch skizziert ist. Nach Gleichung (2.55) erhalten wir für die

2 Mathematische Vorüberlegungen

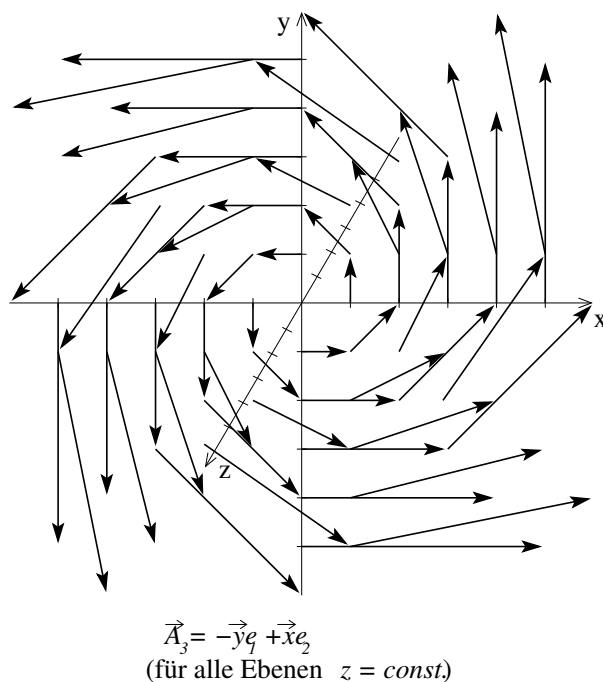


Abbildung 2.6: Rotation einer speziellen Vektorfunktion

Rotation dieses Vektorfeldes

$$\text{rot } \vec{A}_3 = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\vec{e}_3 .$$

Ebenso weist man leicht nach, dass für die Beispiele (2.51) und (2.52) die Rotation jeweils verschwindet.

Übungsaufgaben:

A2.3.1) Zeigen Sie, dass die Definition (2.53) äquivalent ist zur Darstellung

$$\vec{n} \cdot \text{rot } \vec{A} = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{A} \cdot d\vec{s}}{\Delta F} , \quad (2.56)$$

wobei \vec{n} den Einheits-Normalenvektor bezeichnet, der senkrecht auf der von der Kurve s umrandeten Fläche ΔF steht.

A2.3.2) Berechnen Sie die Rotation des Vektorfeldes

$$\vec{g} = 3x^2y\vec{e}_1 + yz^2\vec{e}_2 - xz\vec{e}_3 .$$

2.4 Rechenregeln für vektorielle Differentialoperatoren

2.4.1 Summenregeln

Aus den Definitionen der vektoriellen Differentialoperatoren folgen die Summenregeln

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}(f+g) &= \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g \\ \vec{\nabla} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) &= \vec{\nabla} \cdot \vec{a} + \vec{\nabla} \cdot \vec{b} \\ \vec{\nabla} \times (\vec{a} + \vec{b}) &= \vec{\nabla} \times \vec{a} + \vec{\nabla} \times \vec{b}\end{aligned}$$

2.4.2 Produktregeln

Hier ist zu bedenken, dass es zwei Arten von Skalaren aus dem Produkt fg zweier Skalare und aus dem Produkt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ zweier Vektoren geben kann. Ebenso kann es zwei Arten von Vektoren aus den Produkten $f\vec{a}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$ geben. Daher existieren sechs verschiedene Produktregeln: jeweils zwei für Gradienten, Divergenzen und Rotationen:

$$\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f \quad (2.57)$$

$$\vec{\nabla}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \times (\vec{\nabla} \times \vec{b}) + \vec{b} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}) + (\vec{a} \cdot \vec{\nabla})\vec{b} + (\vec{b} \cdot \vec{\nabla})\vec{a} \quad (2.58)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (f\vec{a}) = f(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) + \vec{a} \cdot (\vec{\nabla}f) \quad (2.59)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{b}) \quad (2.60)$$

$$\vec{\nabla} \times (f\vec{a}) = f(\vec{\nabla} \times \vec{a}) + (\vec{\nabla}f) \times \vec{a} \quad (2.61)$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{b} \cdot \vec{\nabla})\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{\nabla})\vec{b} + \vec{a}(\vec{\nabla} \cdot \vec{b}) - \vec{b}(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) \quad (2.62)$$

Diese Regeln lassen sich leicht mit der Komponentendarstellung der Vektoren beweisen.

2.4.3 Quotientenregeln

Mit Hilfe der Produktregeln erhalten wir

$$\vec{\nabla} \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{g\vec{\nabla}f - f\vec{\nabla}g}{g^2} \quad (2.63)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{a}}{g} \right) = \frac{g(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\vec{\nabla}g)}{g^2} \quad (2.64)$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{a}}{g} \right) = \frac{g(\vec{\nabla} \times \vec{a}) + \vec{a} \times (\vec{\nabla}g)}{g^2} \quad (2.65)$$

2.4.4 Kombination verschiedener vektorieller Differentialoperatoren

$\vec{\nabla}\Phi$ ist ein Vektor. Von diesem Vektor können wir die Divergenz $\text{div } \vec{\nabla}\Phi$ und die Rotation $\text{rot } \vec{\nabla}\Phi$ berechnen.

$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ ist ein Skalar, dessen Gradient wir bilden können.

$\vec{\nabla} \times \vec{A}$ ist ein Vektor, dessen Divergenz $\text{div } (\vec{\nabla} \times \vec{A})$ und Rotation $\text{rot } (\vec{\nabla} \times \vec{A})$ wir berechnen können.

Mehr Kombinationsmöglichkeiten gibt es nicht! Aber nicht alle ergeben etwas Neues, wie wir jetzt zeigen werden.

Für die Kombination verschiedener vektorielle Differentialoperatoren beweisen wir die folgenden wichtigen Rechenregeln:

(a) Wir wiederholen Gleichung (2.58):

$$\text{div grad } \Phi = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}\Phi) = \nabla^2\Phi = \Delta\Phi . \quad (2.66)$$

(b) Ein Gradientenfeld ist wirbelfrei:

$$\text{rot grad } \Phi = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\Phi) = \vec{e}_i \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} = 0 . \quad (2.67)$$

(c) Ein Rotationsfeld besitzt keine Quellen und Senken, denn

$$\begin{aligned} \text{div rot } \vec{g} &= \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{g}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ g_x & g_y & g_z \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial g_z}{\partial y} - \frac{\partial g_y}{\partial z} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial g_z}{\partial x} - \frac{\partial g_x}{\partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial g_y}{\partial x} - \frac{\partial g_x}{\partial y} \right] = 0 . \end{aligned} \quad (2.68)$$

(d) Unter Ausnutzung des dreifache Kreuzprodukts gilt

$$\text{rot } (\text{rot } \vec{g}) = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{g}) = \text{grad } (\text{div } \vec{g}) - \Delta \vec{g} \quad (2.69)$$

$$(e) \quad \text{div } (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\text{rot } \vec{B}) - \vec{B} \cdot (\text{rot } \vec{C}) . \quad (2.70)$$

Beweis : Es ist

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) &= \frac{\partial}{\partial x} (B_y C_z - B_z C_y) + \frac{\partial}{\partial y} (B_z C_x - B_x C_z) + \frac{\partial}{\partial z} (B_x C_y - B_y C_x) \\ &= C_x \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) + C_y \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) + C_z \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \\ &\quad - B_x \left(\frac{\partial C_z}{\partial y} - \frac{\partial C_y}{\partial z} \right) - B_y \left(\frac{\partial C_x}{\partial z} - \frac{\partial C_z}{\partial x} \right) - B_z \left(\frac{\partial C_y}{\partial x} - \frac{\partial C_x}{\partial y} \right) \\ &= \vec{C} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) - \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{C}) . \end{aligned}$$

Q.E.D.

2.5 Differentialoperatoren in krummlinigen Koordinaten

2.5.1 Grundgleichungen

Neben den kartesischen Koordinaten $x_i = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$ betrachten wir die allgemeinen krummlinigen Koordinaten $q_i = (q_1, q_2, q_3)$. Nach Kap. (2.2.2) bilden wir die neuen Einheitsvektoren

$$\vec{e}_{q_i} = \frac{1}{h_i} \partial \vec{r} / \partial q_i, \quad (2.71)$$

mit dem Skalenfaktor

$$h_i = |\partial \vec{r} / \partial q_i|. \quad (2.72)$$

Wir nehmen an, dass die neuen Einheitsvektoren \vec{e}_{q_1} , \vec{e}_{q_2} und \vec{e}_{q_3} ein rechtshändiges orthogonales Koordinatensystem bilden, d.h.

$$\vec{e}_{q_\nu} \cdot \vec{e}_{q_\mu} = \delta_{\nu\mu}, \quad \mu, \nu = 1, 2, 3. \quad (2.73)$$

Aus $\vec{r} = \vec{r}(q_i)$ folgt mit Gleichung (2.18)

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= (\partial \vec{r} / \partial q_1) dq_1 + (\partial \vec{r} / \partial q_2) dq_2 + (\partial \vec{r} / \partial q_3) dq_3 \\ &= h_1 dq_1 \vec{e}_{q_1} + h_2 dq_2 \vec{e}_{q_2} + h_3 dq_3 \vec{e}_{q_3} = \sum_{i=1}^3 h_i dq_i \vec{e}_{q_i}. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Für das Quadrat der Bogenlänge erhalten wir dann unter Ausnutzung von Gleichung (2.73)

$$\begin{aligned} (ds)^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} &= \sum_{\nu=1}^3 \sum_{\mu=1}^3 h_\nu h_\mu dq_\nu dq_\mu \vec{e}_{q_\nu} \cdot \vec{e}_{q_\mu} \\ &= \sum_{\mu=1}^3 h_\mu^2 dq_\mu^2 = h_1^2 dq_1^2 + h_2^2 dq_2^2 + h_3^2 dq_3^2, \end{aligned} \quad (2.75)$$

während für das Volumenelement gilt

$$\begin{aligned} dV = d^3r &= |h_1 dq_1 \vec{e}_{q_1} \cdot [h_2 dq_2 \vec{e}_{q_2} \times h_3 dq_3 \vec{e}_{q_3}]| \\ &= h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3 |\vec{e}_{q_1} \cdot (\vec{e}_{q_2} \times \vec{e}_{q_3})| \\ &= h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3. \end{aligned} \quad (2.76)$$

2.5.2 Gradient

Gemäß Gleichung (2.38) gilt

$$d\psi = \vec{\nabla} \psi \cdot d\vec{r} = \frac{\partial \psi}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \psi}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \psi}{\partial q_3} dq_3. \quad (2.77)$$

Nach Gleichung (2.74) gilt

$$d\vec{r} = h_1 dq_1 \vec{e}_{q_1} + h_2 dq_2 \vec{e}_{q_2} + h_3 dq_3 \vec{e}_{q_3}. \quad (2.78)$$

2 Mathematische Vorüberlegungen

Wir setzen als Ansatz an

$$\vec{\nabla}\psi = \lambda_1\vec{e}_{q_1} + \lambda_2\vec{e}_{q_2} + \lambda_3\vec{e}_{q_3} \quad (2.79)$$

und bestimmen die Werte der λ_i durch Einsetzen von (2.78) und (2.79) in die Beziehung (2.77):

$$\frac{\partial\psi}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial\psi}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial\psi}{\partial q_3}dq_3 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1dq_1 \\ h_2dq_2 \\ h_3dq_3 \end{pmatrix} = h_1\lambda_1dq_1 + h_2\lambda_2dq_2 + h_3\lambda_3dq_3 .$$

Der Koeffizientenvergleich in dieser Gleichung ergibt

$$\lambda_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial\psi}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.80)$$

und somit für die Ansatzgleichung (2.79):

$$\vec{\nabla}\psi = \vec{e}_{q_1} \frac{1}{h_1} \frac{\partial\psi}{\partial q_1} + \vec{e}_{q_2} \frac{1}{h_2} \frac{\partial\psi}{\partial q_2} + \vec{e}_{q_3} \frac{1}{h_3} \frac{\partial\psi}{\partial q_3} .$$

Wir finden also für den Gradienten in den krummlinigen Koordinaten die Darstellung

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_{q_1} \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial q_1} + \vec{e}_{q_2} \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial q_2} + \vec{e}_{q_3} \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial q_3} . \quad (2.81)$$

Angewandt auf die speziellen Skalare q_1, q_2 und q_3 folgt

$$\vec{\nabla}q_1 = \frac{\vec{e}_{q_1}}{h_1}, \quad \vec{\nabla}q_2 = \frac{\vec{e}_{q_2}}{h_2}, \quad \vec{\nabla}q_3 = \frac{\vec{e}_{q_3}}{h_3}, \quad (2.82)$$

wobei für den Betrag gilt

$$|\vec{\nabla}q_\nu| = \frac{1}{h_\nu}, \quad \nu = 1, 2, 3 . \quad (2.83)$$

Weiterhin gilt

$$\vec{e}_{q_1} = h_2h_3\vec{\nabla}q_2 \times \vec{\nabla}q_3, \quad \vec{e}_{q_2} = h_3h_1\vec{\nabla}q_3 \times \vec{\nabla}q_1, \quad \vec{e}_{q_3} = h_1h_2\vec{\nabla}q_1 \times \vec{\nabla}q_2 . \quad (2.84)$$

Beweis: Zum Beweis von (2.84) nutzen wir Gleichungen (2.82) aus:

$$h_2h_3\vec{\nabla}q_2 \times \vec{\nabla}q_3 = h_2h_3 \left(\frac{\vec{e}_{q_2}}{h_2} \times \frac{\vec{e}_{q_3}}{h_3} \right) = \vec{e}_{q_2} \times \vec{e}_{q_3} = \vec{e}_{q_1}$$

Q.E.D.

2.5.3 Divergenz

Zur Berechnung von

$$\operatorname{div} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot (A_1 \vec{e}_{q_1} + A_2 \vec{e}_{q_2} + A_3 \vec{e}_{q_3}) = \vec{\nabla} \cdot (A_1 \vec{e}_{q_1}) + \vec{\nabla} \cdot (A_2 \vec{e}_{q_2}) + \vec{\nabla} \cdot (A_3 \vec{e}_{q_3})$$

benutzen wir die Darstellungen (2.84). Wir erhalten für

$$\vec{\nabla} \cdot (A_1 \vec{e}_{q_1}) = \vec{\nabla} \cdot (A_1 h_2 h_3 \vec{\nabla} q_2 \times \vec{\nabla} q_3) .$$

Mit der Produktregel (2.59) folgt

$$\vec{\nabla} \cdot (A_1 \vec{e}_{q_1}) = \left[\vec{\nabla} (A_1 h_2 h_3) \right] \cdot (\vec{\nabla} q_2 \times \vec{\nabla} q_3) + A_1 h_2 h_3 \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} q_2 \times \vec{\nabla} q_3) .$$

Der zweite Term in dieser Gleichung verschwindet, denn nach Anwendung der Produktregel (2.60) gilt

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} q_2 \times \vec{\nabla} q_3) = \vec{\nabla} q_3 \cdot \operatorname{rot} \operatorname{grad} q_2 - \vec{\nabla} q_2 \cdot \operatorname{rot} \operatorname{grad} q_3 = 0$$

gemäß Gleichung (2.67). Es verbleibt unter Ausnutzung von (2.82)

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (A_1 \vec{e}_{q_1}) &= \left[\vec{\nabla} (A_1 h_2 h_3) \right] \cdot (\vec{\nabla} q_2 \times \vec{\nabla} q_3) \\ &= \left[\vec{\nabla} (A_1 h_2 h_3) \right] \cdot \left(\frac{\vec{e}_{q_2}}{h_2} \times \frac{\vec{e}_{q_3}}{h_3} \right) \\ &= \left[\vec{\nabla} (A_1 h_2 h_3) \right] \cdot \frac{\vec{e}_{q_1}}{h_2 h_3} . \end{aligned}$$

Jetzt benutzen wir die Darstellung (2.81) für $\operatorname{grad} (A_1 h_2 h_3)$ und erhalten aufgrund der Orthogonalitätsrelation (2.73)

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (A_1 \vec{e}_{q_1}) &= \left[\vec{e}_{q_1} \frac{1}{h_1} \frac{\partial (A_1 h_2 h_3)}{\partial q_1} + \vec{e}_{q_2} \frac{1}{h_2} \frac{\partial (A_1 h_2 h_3)}{\partial q_2} + \vec{e}_{q_3} \frac{1}{h_3} \frac{\partial (A_1 h_2 h_3)}{\partial q_3} \right] \cdot \frac{\vec{e}_{q_1}}{h_2 h_3} \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial q_1} (A_1 h_2 h_3) . \end{aligned} \quad (2.85)$$

Ebenso berechnen wir

$$\vec{\nabla} \cdot (A_2 \vec{e}_{q_2}) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial q_2} (A_2 h_1 h_3)$$

und

$$\vec{\nabla} \cdot (A_3 \vec{e}_{q_3}) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial q_3} (A_3 h_1 h_2) ,$$

so dass

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (A_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (A_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_3} (A_3 h_1 h_2) \right] . \quad (2.86)$$

2.5.4 Rotation

Zur Berechnung von

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{\nabla} \times (A_1 \vec{e}_{q_1} + A_2 \vec{e}_{q_2} + A_3 \vec{e}_{q_3}) = \vec{\nabla} (A_1 \vec{e}_{q_1}) + \vec{\nabla} (A_2 \vec{e}_{q_2}) + \vec{\nabla} (A_3 \vec{e}_{q_3})$$

benutzen wir die Darstellungen (2.82). Wir erhalten für

$$\vec{\nabla} \times (A_1 \vec{e}_{q_1}) = \vec{\nabla} \times (A_1 h_1 \vec{\nabla} q_1) = \vec{\nabla} (A_1 h_1) \times \vec{\nabla} q_1 + A_1 h_1 \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} q_1,$$

wobei wir die Produktregel (2.61) nutzen. Der zweite Term in dieser Gleichung verschwindet gemäß Gleichung (2.67) und mit Gleichung (2.82a) folgt

$$\vec{\nabla} \times (A_1 \vec{e}_{q_1}) = \vec{\nabla} (A_1 h_1) \times \frac{\vec{e}_{q_1}}{h_1}$$

Jetzt benutzen wir die Darstellung (2.81) für $\operatorname{grad} (A_1 h_1)$ und erhalten

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (A_1 \vec{e}_{q_1}) &= \left[\vec{e}_{q_1} \frac{1}{h_1} \frac{\partial (A_1 h_1)}{\partial q_1} + \vec{e}_{q_2} \frac{1}{h_2} \frac{\partial (A_1 h_1)}{\partial q_2} + \vec{e}_{q_3} \frac{1}{h_3} \frac{\partial (A_1 h_1)}{\partial q_3} \right] \times \frac{\vec{e}_{q_1}}{h_1} \\ &= \frac{\vec{e}_{q_2}}{h_1 h_3} \frac{\partial (A_1 h_1)}{\partial q_3} - \frac{\vec{e}_{q_3}}{h_1 h_2} \frac{\partial (A_1 h_1)}{\partial q_2}. \end{aligned} \quad (2.87)$$

Ebenso verfahren wir mit $\vec{\nabla} \times (A_2 \vec{e}_{q_2})$ und $\vec{\nabla} \times (A_3 \vec{e}_{q_3})$ und erhalten

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{A} &= \frac{\vec{e}_{q_1}}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_2} (A_3 h_3) - \frac{\partial}{\partial q_3} (A_2 h_2) \right] \\ &\quad + \frac{\vec{e}_{q_2}}{h_1 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_3} (A_1 h_1) - \frac{\partial}{\partial q_1} (A_3 h_3) \right] \\ &\quad + \frac{\vec{e}_{q_3}}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (A_2 h_2) - \frac{\partial}{\partial q_3} (A_1 h_1) \right] \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{pmatrix} h_1 \vec{e}_{q_1} & h_2 \vec{e}_{q_2} & h_3 \vec{e}_{q_3} \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ A_1 h_1 & A_2 h_2 & A_3 h_3 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.88)$$

2.5.5 Laplace-Operator

Mit Gleichung (2.66) und der Gradientendarstellung (2.81) gilt für den Laplace-Operator

$$\Delta \psi = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \psi) = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{e}_{q_1}}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} + \frac{\vec{e}_{q_2}}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} + \frac{\vec{e}_{q_3}}{h_3} \frac{\partial \psi}{\partial q_3} \right). \quad (2.89)$$

Die Anwendung der Divergenzdarstellung (2.86) für

$$A_\nu = \frac{1}{h_\nu} \frac{\partial \psi}{\partial q_\nu}$$

ergibt dann

$$\Delta \psi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \psi}{\partial q_3} \right) \right]. \quad (2.90)$$

Nach diesen allgemeinen Herleitungen betrachten wir nun als Beispiel Kugelkoordinaten.

2.5.6 Beispiel: Kugelkoordinaten

Mit Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) gilt für den Ortsvektor

$$\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = r \sin \theta \cos \phi \vec{e}_1 + r \sin \theta \sin \phi \vec{e}_2 + r \cos \theta \vec{e}_3 = \vec{r}(r, \theta, \phi) \quad (2.91)$$

mit $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$ und $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Als neue Koordinaten wählen wir also $q_1 = r$, $q_2 = \theta$ und $q_3 = \phi$.

Zur Berechnung der neuen Einheitsvektoren (2.71) und Skalenfaktoren (2.72) benötigen wir

$$\begin{aligned} \partial \vec{r} / \partial r &= (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta), \\ \partial \vec{r} / \partial \theta &= r(\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta) \\ \text{und} \quad \partial \vec{r} / \partial \phi &= r(-\sin \theta \sin \phi, \sin \theta \cos \phi, 0), \\ \text{so dass} \quad h_1 &= h_r = |\partial \vec{r} / \partial r| = 1, \\ h_2 &= h_\theta = |\partial \vec{r} / \partial \theta| = r, \\ h_3 &= h_\phi = |\partial \vec{r} / \partial \phi| = r \sin \theta \end{aligned} \quad (2.92)$$

$$\begin{aligned} \text{und} \quad \vec{e}_{q_1} &= \vec{e}_r = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta), \\ \vec{e}_{q_2} &= \vec{e}_\theta = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta), \\ \vec{e}_{q_3} &= \vec{e}_\phi = (-\sin \phi, \cos \phi, 0). \end{aligned} \quad (2.93)$$

Durch Einsetzen dieser Ergebnisse in den allgemeinen Ausdruck (2.81) erhalten wir für den Gradienten in Kugelkoordinaten

$$\vec{\nabla} \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \vec{e}_\phi. \quad (2.94)$$

Gemäß Gleichung (2.86) ergibt sich für die Divergenz in Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} (A_r r^2 \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta r \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \phi} (A_\phi r) \right] \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (A_r r^2) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (A_\phi), \end{aligned} \quad (2.95)$$

während Gleichung (2.88) für die Rotation in Kugelkoordinaten auf

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{A} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{pmatrix} \vec{e}_r & r\vec{e}_\theta & r \sin \theta \vec{e}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_r & A_\theta r & A_\phi r \sin \theta \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi r \sin \theta) - \frac{\partial}{\partial \phi} (A_\theta r) \right) \vec{e}_r \right. \\ &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial \phi} (A_r) - \frac{\partial}{\partial r} (A_\phi r \sin \theta) \right) r \vec{e}_\theta \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial}{\partial r} (A_\theta r) - \frac{\partial}{\partial \theta} (A_r) \right) r \sin \theta \vec{e}_\phi \right] \end{aligned} \quad (2.96)$$

2 Mathematische Vorüberlegungen

führt.

Gemäß Gleichung (2.90) erhalten wir für den Laplace-Operator in Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned}\Delta\psi &= \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin\theta \frac{\partial\psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \right) + \frac{\partial}{\partial\phi} \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial\psi}{\partial\phi} \right) \right] \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}\end{aligned}\quad (2.97)$$

Übungsaufgaben:

A2.5.1) Berechnen Sie den Gradienten, die Divergenz, die Rotation und den Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten.

A2.5.2) Berechnen Sie den Gradienten, die Divergenz, die Rotation und den Laplace-Operator in parabolischen Zylinderkoordinaten.

2.6 Integralrechnung mit Vektoren

Für skalare stetige Funktionen gilt, dass das Integral einer Ableitung über das Intervall $[a, b]$ durch den Wert der Funktion an den Endpunkten gegeben ist:

$$\int_a^b \left(\frac{df}{dx} \right) dx = f(b) - f(a). \quad (2.98)$$

Bei Vektoren gibt es, wie angesprochen, drei Arten von Ableitungen (Gradient, Divergenz und Rotation) und jede hat seine eigene Integrationsvorschrift.

2.6.1 Integration von Gradienten

Wir betrachten die skalare Funktion $T(x, y, z)$ in den drei Variablen x, y und z . Wir beginnen am Punkt $a = (a_x, a_y, a_z)$ und bewegen uns eine kleine Strecke $d\vec{l}_1$ von ihm weg in Richtung zum Punkt $b = (b_x, b_y, b_z)$. Gemäß Gleichung (2.38) ist der Zuwachs dann durch $dT = (\vec{\nabla}T) \cdot d\vec{l}_1$ gegeben. Gehen wir ein kleines Stück $d\vec{l}_2$ weiter, ergibt sich der Zuwachs zu $dT = (\vec{\nabla}T) \cdot d\vec{l}_2$. Wir fahren fort, bis wir den Punkt b erreicht haben. Für die gesamte Änderung der Funktion T auf dem Weg von a nach b erhalten wir dann

$$\int_{Weg\ a}^b (\vec{\nabla}T) \cdot d\vec{l} = T(b) - T(a). \quad (2.99)$$

Weil der Wert der rechten Seite dieser Gleichung unabhängig vom eingeschlagenen Weg ist, folgt

1. $\int_a^b (\vec{\nabla}T) \cdot d\vec{l}$ ist unabhängig vom Weg von a nach b

und

2.

$$\oint (\vec{\nabla}T) \cdot d\vec{l} = 0 \quad (2.100)$$

bei geschlossenem Weg, weil die Endpunkte gleich sind $T(b) - T(a) = 0$.

Als *Beispiel* betrachten wir die Funktion $T = xy^2$ und die Punkte $a = (0, 0, 0)$ und $b = (2, 1, 0)$. Obwohl das Integral wegunabhängig ist, müssen wir einen Integrationsweg festlegen. Wie in Abbildung 2.7 skizziert, gehen wir zunächst entlang der x-Achse (1. Schritt) und dann parallel zur y-Achse (2. Schritt). Nun ist $d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$. Desweiteren ist für unser Beispiel $\vec{\nabla}T = y^2\vec{i} + 2xy\vec{j}$. Im 1. Schritt verändert sich x von $0 \rightarrow 2$, während $y = 0$ bleibt,

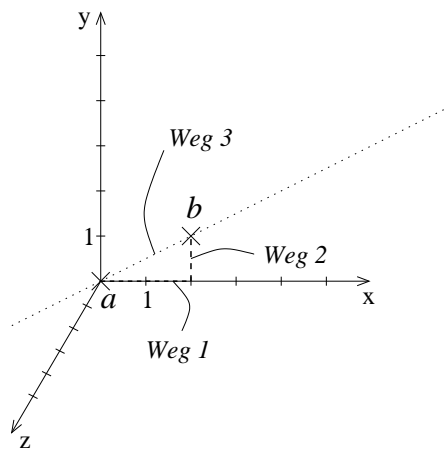


Abbildung 2.7: Zur Integration von $\vec{\nabla}T$

so dass $dy = dz = 0$. Damit folgt $\vec{\nabla}T \cdot d\vec{l} = y^2 dx = 0$, wegen $y = 0$ auf diesem Abschnitt, und $\int_1 \vec{\nabla}T \cdot d\vec{l} = 0$.

Im 2. Schritt verändert sich y von $0 \rightarrow 1$, während $x = 2$ bleibt, so dass $dx = dz = 0$. Damit folgt $\vec{\nabla}T \cdot d\vec{l} = 2xy dy = 4y dy$, weil $x = 2$ auf diesem Abschnitt, und $\int_2 \vec{\nabla}T \cdot d\vec{l} = \int_0^1 4y dy = [2y^2]_0^1 = 2$.

Addieren wir beide Integrale auf, so folgt

$$\int_a^b \vec{\nabla}T \cdot d\vec{l} = \int_1 \vec{\nabla}T \cdot d\vec{l} + \int_2 \vec{\nabla}T \cdot d\vec{l} = 2.$$

Das Ergebnis stimmt überein mit $T(b) - T(a) = 2 - 0 = 2$.

Um die Wegunabhängigkeit zu illustrieren, integrieren wir entlang des Wegs 3 in Abbildung 2.7, der der geraden Linie $y = x/2$ von a nach b entspricht. Dabei ändert sich x von $0 \rightarrow 2$ und y gemäß der Ableitung $dy = dx/2$, so dass

$$\vec{\nabla}T \cdot d\vec{l} = y^2 dx + 2xy dy = \frac{1}{4}x^2 dx + 2x(x/2) \left(\frac{1}{2} dx\right) = \frac{3}{4}x^2 dx$$

so dass

$$\int_3 \vec{\nabla}T \cdot d\vec{l} = \int_0^2 \frac{3}{4}x^2 dx = \left[\frac{1}{4}x^3\right]_0^2 = 2.$$

2 Mathematische Vorüberlegungen

Ebenso hätten wir auch $x = 2y$ als Funktion von y ausdrücken können, um dann über die Variable y zu integrieren.

2.6.2 Integration von Divergenzen

Das *Gauss*-Theorem für die Volumen-Integration von Divergenzen lautet

$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) d\tau = \oint_S \vec{v} \cdot d\vec{a}. \quad (2.101)$$

Das Integral einer Divergenz über ein Gebiet (hier ein Volumen) ist gleich dem Wert der Funktion am Rand des Gebiets (hier die Oberfläche des Volumens). Dabei ist $d\tau = dx dy dz$ und

$$\int_V d\tau = \int dx \int dy \int dz.$$

Anders als vorher, ist der Randterm selbst ein Integral, hier speziell das Oberflächenintegral

$$\oint_S \vec{v} \cdot d\vec{a}. \quad (2.102)$$

So wie der Rand eines Weges durch die beiden Endpunkte des Wegs bestimmt ist, ist hier der Rand des Volumens die ganze Oberfläche des Volumens. $d\vec{a}$ repräsentiert ein infinitesimales Element der Oberfläche: $d\vec{a}$ ist der Vektor mit dem Absolutwert gleich dem infinitesimalen Flächenelement da und der Richtung *normal* zur Oberfläche nach außen.

Dies illustrieren wir am Beispiel des in Abb. 2.8 gezeigten Einheitsquaders mit dem Volumenelement $d\tau = dx dy dz$. Für die Vorderseite des Quaders gilt $d\vec{a}_1 = (dy dz)\vec{i}$, für die rechte Seite $d\vec{a}_2 = (dx dz)\vec{j}$, und für den Boden $d\vec{a}_3 = (dy dz)(-\vec{k})$.

Das Integral (2.102) enthält die Normalkomponente des Vektors \vec{v} integriert über eine Oberfläche (das Skalarprodukt "pickt" die Normalkomponente heraus) und wird als *Fluss* von \vec{v} durch diese Oberfläche bezeichnet. Sei \vec{v} etwa die Geschwindigkeit einer Strömung, dann ist der Fluss von \vec{v} einfach die gesamte Menge der Strömung, die pro Zeiteinheit durch die Oberfläche fließt. Die Divergenz wurde als Maß für das "Auseinanderfließen" eines Vektors interpretiert. Je divergenter (d.h. je stärker der Vektor auseinanderfließt) desto größer ist der Fluss durch die Oberfläche.

Beispiel: Wir überprüfen den Gaußschen Satz für die Funktion

$$\vec{v} = y^2 \vec{i} + (2xy + z^2) \vec{j} + 2yz \vec{k}$$

im Einheitsquader. In diesem Fall ist

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 + 2x + 2y = 2(x + y),$$

so dass

$$\begin{aligned} \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) d\tau &= 2 \int_0^1 dz \int_0^1 dy \left[\int_0^1 dx (x + y) \right] = \\ 2 \int_0^1 dz \int_0^1 dy \left[\frac{1}{2} + y \right] &= 2 \int_0^1 dz \left[\frac{y}{2} + \frac{y^2}{2} \right]_0^1 = 2[z]_0^1 = 2. \end{aligned} \quad (2.103)$$

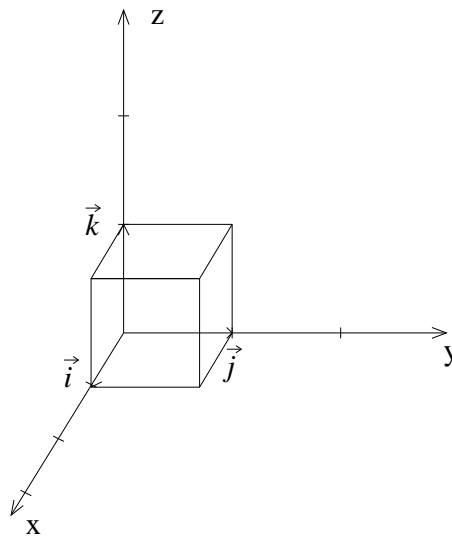


Abbildung 2.8: Der Einheitsquader

Um das Oberflächenintegral gemäß der rechten Seite von Gleichung (2.101) zu bestimmen, betrachten wir getrennt alle sechs Seiten des Einheitsquaders (Abbildung 2.8):

(i) Auf der Vorderseite gilt $d\vec{a} = dydz\vec{i}$ und $x = 1$, so dass $\vec{v} \cdot d\vec{a} = y^2 dydz$ und wir erhalten

$$\int_{(i)} \vec{v} \cdot d\vec{a} = \int_0^1 dz \int_0^1 y^2 dy = \frac{1}{3}.$$

(ii) Auf der Rückseite gilt $d\vec{a} = -dydz\vec{i}$ und $x = 0$, so dass $\vec{v} \cdot d\vec{a} = -y^2 dydz$ und wir erhalten

$$\int_{(ii)} \vec{v} \cdot d\vec{a} = - \int_0^1 dz \int_0^1 y^2 dy = -\frac{1}{3}.$$

(iii) Auf der rechten Seite gilt $d\vec{a} = dx dz \vec{j}$ und $y = 1$, so dass $\vec{v} \cdot d\vec{a} = (2xy + z^2) dx dz|_{y=1} = (2y + z^2) dx dz$ und wir erhalten

$$\begin{aligned} \int_{(iii)} \vec{v} \cdot d\vec{a} &= \int_0^1 dz \int_0^1 dx (2y + z^2) \\ &= \int_0^1 dz [x^2 + z^2 x]_0^1 \\ &= \int_0^1 dz [1 + z^2] = \left[z + \frac{z^3}{3} \right]_0^1 = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

(iv) Auf der linken Seite gilt $d\vec{a} = -dx dz \vec{j}$ und $y = 0$, so dass $\vec{v} \cdot d\vec{a} = -(2xy + z^2) dx dz|_{y=0} = -z^2 dx dz$ und wir erhalten

$$\int_{(iv)} \vec{v} \cdot d\vec{a} = - \int_0^1 dz \int_0^1 dx z^2 = - \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^1 = -\frac{1}{3}.$$

2 Mathematische Vorüberlegungen

(v) Auf dem Deckel gilt $d\vec{a} = dx dy \vec{k}$ und $z = 1$, so dass $\vec{v} \cdot d\vec{a} = 2yz dx dy|_{z=1} = 2y dx dy$ und wir erhalten

$$\int_{(v)} \vec{v} \cdot d\vec{a} = 2 \int_0^1 dx \int_0^1 dy y = 2 \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^1 = 1.$$

(vi) Auf dem Boden gilt $d\vec{a} = -dx dy \vec{k}$ und $z = 0$, so dass $\vec{v} \cdot d\vec{a} = 2yz dx dy|_{z=0} = 0$ und wir erhalten

$$\int_{(vi)} \vec{v} \cdot d\vec{a} = 0.$$

Für den Gesamtfluss durch die Oberfläche erhalten wir dann

$$\oint_S \vec{v} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{4}{3} - \frac{1}{3} + 1 - 0 = 2,$$

in Übereinstimmung mit dem Ergebnis (2.103).

Übungsaufgabe:

A2.6.1) Prüfen Sie den Gaußschen Satz für die Funktion $\vec{v} = (xy)\vec{i} + (2yz)\vec{j} + (3zx)\vec{k}$ für einen Quader mit den Seitenlängen 2.

2.6.3 Integration von Rotationen

Das *Stokes*-Theorem für die Oberflächen-Integration von Rotationen lautet

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot d\vec{a} = \oint_R \vec{v} \cdot d\vec{l}. \quad (2.104)$$

Das Integral über eine Ableitung (hier die Rotation) über einen Bereich (hier einen Teil der Oberfläche) ist gleich dem Wert der Funktion am Rand (hier die Begrenzung des Oberflächen-teils). Wie im Fall des Divergenz-Theorems ist der Randterm wieder ein Integral, speziell ein geschlossenes Linienintegral. Für die Richtungswahl des geschlossenen Wegs über den Rand gilt die Rechte-Hand-Regel (Abbildung 2.9): zeigen die Finger in Richtung des Linienintegrals, dann zeigt der Daumen in Richtung von $d\vec{a}$.

Beispiel: Wir überprüfen den Stokeschen Satz für die Funktion

$$\vec{v} = (2xz + 3y^2)\vec{j} + (4yz^2)\vec{k}$$

und der in Abbildung 2.10 gezeigten Einheitsfläche. Hier gilt

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & (2xz + 3y^2) & (4yz^2) \end{pmatrix} = \vec{i}(4z^2 - 2x) - \vec{j}(0 - 0) + \vec{k}(2z) = (4z^2 - 2x)\vec{i} + 2z\vec{k}$$

und $d\vec{a} = dy dz \vec{i}$, womit die Integrationsrichtung als im Gegenuhrzeigersinn festgelegt ist (Rechte-Hand-Regel). Auf der Integrationsoberfläche gilt $x = 0$, so dass

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot d\vec{a} = \int_0^1 dy \int_0^1 dz (4z^2 - 2x)|_{x=0} = 4 \int_0^1 dy \int_0^1 dz z^2 = \frac{4}{3}. \quad (2.105)$$

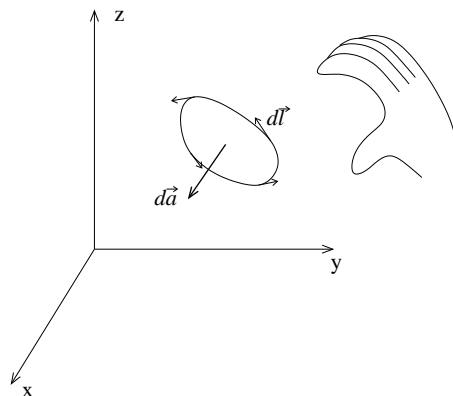


Abbildung 2.9: Wahl des Integrationsweges bei geschlossenen Linienintegralen nach der Rechten-Hand-Regel

Das Wegintegral auf der rechten Seite von Gleichung (2.103) besteht aus den in Abbildung 2.10 gezeigten vier Anteilen (i)–(iv), die wir getrennt berechnen:

(i) Auf diesem Wegstück gilt $x = 0$ und $z = 0$ während $y : 0 \rightarrow 1$ von 0 bis 1 läuft, wobei $dl = dy$ ist. Folglich ist hier $\vec{v} \cdot d\vec{l} = v_y dy|_{x=0, z=0} = 3y^2 dy$ und wir erhalten

$$\int_{(i)} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_0^1 dy 3y^2 = 1.$$

(ii) Auf diesem Wegstück gilt $x = 0$ und $y = 1$ während $z : 0 \rightarrow 1$ von 0 bis 1 läuft, wobei $dl = dz$ ist. Folglich ist hier $\vec{v} \cdot d\vec{l} = v_z dz|_{x=0, y=1} = 4yz^2 dz|_{x=0, y=1} = 4z^2 dz$ und wir erhalten

$$\int_{(ii)} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_0^1 dz 4z^2 = \frac{4}{3}.$$

(iii) Auf diesem Wegstück gilt $x = 0$ und $z = 1$ während $y : 1 \rightarrow 0$ von 1 bis 0 läuft, wobei $dl = dy$ ist. Folglich ist hier $\vec{v} \cdot d\vec{l} = v_y dy|_{x=0, z=1} = (2xz + 3y^2)|_{x=0, z=1} dy = 3y^2 dy$ und wir erhalten

$$\int_{(iii)} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_1^0 dy 3y^2 = -1.$$

(iv) Auf diesem Wegstück gilt $x = 0$ und $y = 0$ während $z : 1 \rightarrow 0$ von 1 bis 0 läuft, wobei $dl = dz$ ist. Folglich ist hier $\vec{v} \cdot d\vec{l} = v_z dz|_{x=0, y=0} = 4yz^2 dz|_{x=0, y=0} = 0$ und wir erhalten

$$\int_{(iv)} \vec{v} \cdot d\vec{l} = 0.$$

Für das gesamte Wegintegral erhalten wir dann

$$\oint_R \vec{v} \cdot d\vec{l} = 1 + \frac{4}{3} - 1 + 0 = \frac{4}{3},$$

2 Mathematische Vorüberlegungen

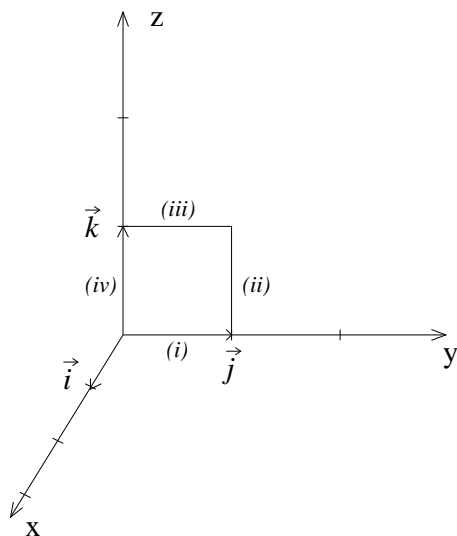


Abbildung 2.10: Die $y - z$ -Einheitsfläche

in Übereinstimmung mit dem Ergebnis (2.105).

Übungsaufgabe:

A2.6.2) Prüfen Sie den Stokesschen Satz für die Funktion $\vec{v} = (xy)\vec{i} + (2yz)\vec{j} + (3zx)\vec{k}$ auf der in Abbildung 2.11 gezeigten dreieckigen Oberfläche.

2.6.4 Sätze von Green

Die beiden Greenschen Sätze folgen aus dem Gauß-Theorem (2.101). Seien u and v zwei skalare Funktionen. Es gilt nach Gleichung (2.59)

$$\vec{\nabla} \cdot (u\vec{\nabla}v) = u\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}v) + (\vec{\nabla}u) \cdot (\vec{\nabla}v) . \quad (2.106)$$

Wir integrieren diese Gleichung über das Volumen V und wenden den Gaußschen Satz (2.101) an:

$$\begin{aligned} \int_V dV \vec{\nabla} \cdot (u\vec{\nabla}v) &= \int_F d\vec{F} \cdot (u\vec{\nabla}v) \\ &= \int_V dV [u\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}v) + (\vec{\nabla}u) \cdot (\vec{\nabla}v)] \\ &= \int_V dV [u\Delta v + (\vec{\nabla}u) \cdot (\vec{\nabla}v)] , \end{aligned}$$

wobei der Laplace-Operator (2.66) eingeführt wurde. Es ergibt sich also der 1. Greensche Satz zu

$$\begin{aligned} \int_F d\vec{F} \cdot (u\vec{\nabla}v) &= \int_V dV [u\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}v) + (\vec{\nabla}u) \cdot (\vec{\nabla}v)] \\ &= \int_V dV [u\Delta v + (\vec{\nabla}u) \cdot (\vec{\nabla}v)] . \end{aligned} \quad (2.107)$$

Vertauschen wir u und v in Gleichung (2.106), so erhalten wir

$$\vec{\nabla} \cdot (v\vec{\nabla}u) = v\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}u) + (\vec{\nabla}v) \cdot (\vec{\nabla}u) . \quad (2.108)$$

Für die Differenz aus Gleichung (2.106) und Gleichung (2.108) folgt dann

$$\vec{\nabla} \cdot [u\vec{\nabla}v - v\vec{\nabla}u] = u\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}v) - v\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}u) .$$

Integrieren wir diese Gleichung über das Volumen V und wenden den Gauß-Satz (2.101) an, so folgt der 2. Greensche Satz:

$$\begin{aligned} \int_V dV [u\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}v) - v\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}u)] &= \int_V dV [u\Delta v - v\Delta u] \\ &= \int_F d\vec{F} \cdot [u\vec{\nabla}v - v\vec{\nabla}u] . \end{aligned} \quad (2.109)$$

2.7 Dirac's Delta-Funktion

2.7.1 Divergenz von \vec{e}_r/r^2

Wir betrachten die spezielle Vektorfunktion $\vec{v} = \vec{e}_r/r^2$, wobei $\vec{e}_r = \vec{r}/r$ den Einheitsvektor in r -Richtung kennzeichnet. Nach der Skizze in Abbildung 2.11 sollte diese Funktion eine sehr große positive Divergenz haben, da sie an allen Punkten radial nach außen auseinanderfließt. Berechnet man diese aber mit Gleichung (2.95) der Divergenz in Kugelkoordinaten, so folgt

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{1}{r^2} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (1) = 0 . \quad (2.110)$$

Mit dem Gauß-Theorem (2.101) erhalten wir für das Oberflächenintegral der Kugel mit dem Radius R um den Ursprung

$$\oint \vec{v} \cdot d\vec{a} = \int \left(\frac{1}{R^2} \vec{e}_r \right) \cdot (R^2 \sin \theta d\theta d\phi \vec{e}_r) = \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi = 4\pi , \quad (2.111)$$

während das Volumenintegral mit (2.110)

$$\int_V dV \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$$

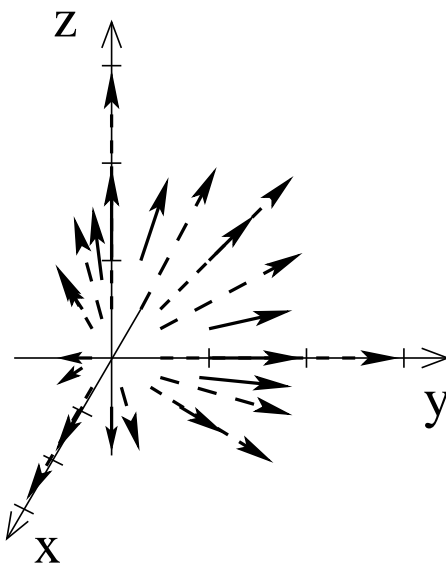


Abbildung 2.11: Die Funktion $\vec{v} = \vec{e}_r / r^2$

ergibt. Was ist hier falsch? Das Problem ist der Punkt $r = 0$, wo die Funktion \vec{v} divergiert, und wo wir in (2.110) durch Null geteilt haben.

Der Wert des Oberflächenintegrals (2.111) ist unabhängig vom Wert des Kugelradius R ; nach dem Gauß-Theorem sollten wir für jeden Wert von R

$$\int_V dV \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 4\pi$$

erhalten. Offensichtlich kommt der ganze Beitrag durch den Punkt $r = 0$ zustande! $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$ hat die bizarre Eigenschaft, dass es überall außer bei einem Punkt verschwindet, und dass sein Integral über jedes Volumen, das diesen Punkt enthält, gleich 4π ist. Keine normale Funktion verhält sich so! Andererseits gibt es eine physikalische Größe, die sich ebenso verhält: die Dichte (Masse pro Einheitsvolumen) eines Punktteilchens. Sie ist Null außer am exakten Ort des Teilchens, und ihr Integral ist endlich und gerade gleich der Masse des Teilchens.

Um dieses Phänomen zu erfassen, benötigen wir den mathematischen Begriff der Diracschen Delta-Funktion. Diese können wir als die Verallgemeinerung des Kronecker-Symbols $\delta_{ij} = 1$ für $i = j$ und $\delta_{ij} = 0$ für $i \neq j$ für kontinuierliche Systeme verstehen.

2.7.2 Die eindimensionale Delta-Funktion $\delta(x - x_0)$

Die δ -Funktion ist eine kurze Schreibweise für einen komplizierten Grenzwert-Prozess. Die δ -Funktion hat nur eine Bedeutung, wenn sie in einem Integral auftaucht mit folgendem Effekt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta(x) = f(0), \quad (2.112)$$

wobei $f(x)$ stetig bei $x = 0$ ist. Speziell für $f(x) = 1$ folgt dann

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) = 1. \quad (2.113)$$

Liegt der singuläre Punkt beim Wert x , so gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x') \delta(x' - x) = f(x). \quad (2.114)$$

Man kann sich die eindimensionale δ -Funktion vorstellen als unendlich hohe, unendlich schmale Spitze mit der Fläche 1 (siehe Abbildung 2.12), d.h.

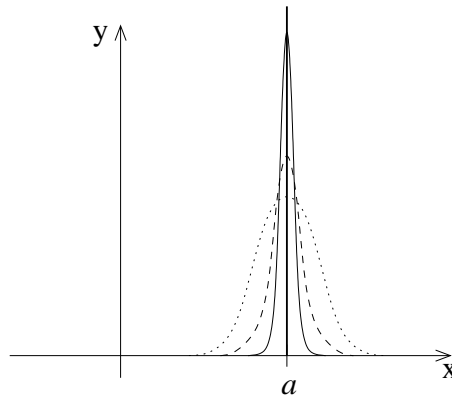


Abbildung 2.12: Approximation der Diracschen δ -Funktion

$$\delta(x - a) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq a \\ \infty & \text{für } x = a \end{cases} \quad (2.115)$$

mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) dx = 1.$$

Dies kann aber keine Funktion im üblichen Sinn sein: sie hat nur Bedeutung unterhalb eines Integrals mit der Eigenschaft (2.114). mathematisch spricht man von einer *Distribution* oder einer *verallgemeinerten Funktion*.

Man kann die eindimensionale Delta-Funktion mit Funktionen $\delta_n(x)$ approximieren durch

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta_n(x). \quad (2.116)$$

Als Darstellungen bieten sich an

$$\delta_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq -\frac{1}{2n} \\ n & \text{für } -\frac{1}{2n} < x < \frac{1}{2n} \\ 0 & \text{für } x \geq \frac{1}{2n} \end{cases}, \quad (2.117)$$

oder

$$\delta_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 x^2}. \quad (2.118)$$

2 Mathematische Vorüberlegungen

Beweis der Darstellung (2.116):

Zunächst gilt $\forall x \neq 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(x) = 0.$$

Weiterhin erhalten wir $\forall n$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta_n(x) = n \int_{-1/2n}^{1/2n} dx = 1,$$

d.h. die Funktion $\delta_n(x)$ ist definiert $\forall n \neq 0$ und der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta_n(x) = 1$$

ist definiert und gleich 1.

Weiterhin gilt mit $c = \frac{1}{n}$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta_n(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_{-1/2n}^{1/2n} dx f(x) \\ &= \lim_{c \rightarrow 0} \frac{1}{c} \int_{-c/2}^{c/2} dx f(x). \end{aligned} \quad (2.119)$$

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung (siehe Einschub 2.7.3) ist

$$\int_{-c/2}^{c/2} dx f(x) = f(\xi c) \int_{-c/2}^{c/2} dx = c f(\xi c) \quad (2.120)$$

mit $-1/2 \leq \xi \leq 1/2$. Setzen wir dieses Ergebnis auf der rechten Seite von Gleichung (2.119) ein, so folgt für den Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta_n(x) = \lim_{c \rightarrow 0} f(\xi c) = f(0)$$

womit nach Gleichung (2.112) die Approximation (2.116) bewiesen ist.

2.7.3 Einschub: Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Für jede beliebige stetige Funktion $F(x)$ im Intervall $a \leq x \leq b$ existiert ein Punkt t mit $a \leq t \leq b$ derart, dass

$$F'(t) = \frac{dF}{dx} \Big|_{x=t} = \frac{F(b) - F(a)}{b - a}. \quad (2.121)$$

Ist nun $F(x) = \int^x f(s) ds$ die Stammfunktion von $f(x)$, so ist $F'(t) = f(t)$ und $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$. Aus Gleichung (2.121) folgt dann

$$f(t) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx$$

Setzen wir in dieser Gleichung $a = -c/2$, $b = c/2$ und $t = c\xi$, so folgt

$$f(c\xi) = \frac{1}{c} \int_{-c/2}^{c/2} f(x) dx$$

oder

$$\int_{-c/2}^{c/2} f(x) dx = cf(c\xi),$$

die in Gleichung (2.120) benutzte Identität, mit $-(c/2) \leq c\xi \leq (c/2)$, d.h. $-(1/2) \leq \xi \leq (1/2)$.

Übungsaufgabe:

A2.7.1) Beweisen Sie, dass $\delta_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \exp(-n^2 x^2)$ eine Approximation der eindimensionalen Delta-Funktion ist.

2.7.4 Eigenschaften der δ -Funktion

(a) *Symmetrie:* Offensichtlich gilt

$$\delta(-x) = \delta(x). \quad (2.122)$$

(b) *Ableitung:* Mit partieller Integration erhalten wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta'(x-a) = - \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{df(x)}{dx} \delta(x-a) = - \frac{df(x)}{dx} \Big|_{x=a} = -f'(a). \quad (2.123)$$

(c) *Integral:* Für das Integral der δ -Funktion

$$\int_{-\infty}^x dt \delta(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < a \\ 1 & \text{für } x > a \end{cases} = H[x-a] \quad (2.124)$$

ergibt sich gerade die Sprungfunktion von Heaviside. Umgekehrt dürfen wir im Distributionssinn die δ -Funktion als Ableitung der Sprungfunktion auffassen:

$$\delta(x-a) = H'[x-a] \quad (2.125)$$

auffassen.

(d) *Fourier-Transformation:* Die eindimensionale Fourier-Transformation $g(k)$ einer beliebigen Funktion $f(x)$ ist durch

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \exp(-ikx) \quad (2.126)$$

definiert. Für die Umkehrtransformation gilt

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk g(k) \exp(ikx). \quad (2.127)$$

2 Mathematische Vorüberlegungen

Setzen wir $g(k)$ nach Gleichung (2.126) in Gleichung (2.127) ein und benutzen wir die Darstellung (2.114) für $f(x)$ durch die δ -Funktion, so folgt mit Gleichung (2.122)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 f(x_0) \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp(ik(x-x_0)) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 f(x_0) \delta(x-x_0) \end{aligned}$$

$$\text{oder} \quad \delta(x-x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp(ik(x-x_0)) . \quad (2.128)$$

Speziell für $x_0 = 0$ gilt dann

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp(ikx) , \quad (2.129)$$

d.h. durch Vergleich mit (2.126) folgt, dass $g(k) = (2\pi)^{-1/2}$ die Fouriertransformierte der eindimensionalen Delta-Funktion ist.

(e) *Delta-Funktion mit allgemeinerem Argument:* Ohne Beweis vermerken wir, dass für eine beliebige Funktion $h(x)$ im Argument der Delta-Funktion gilt

$$\delta[H(x)] = \frac{\sum_n \delta(x-x_n)}{\left| \frac{dh}{dx} \right|} = \sum_n \frac{\delta(x-x_n)}{\left| \frac{dh}{dx}(x=x_n) \right|} , \quad (2.130)$$

wobei die x_n durch die Nullstellen $h(x_n) = 0$ der Funktion $h(x)$ gegeben sind.

Als Spezialfälle folgen sofort die Beziehungen

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$$

$$\text{und} \quad \delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|} [\delta(x-a) + \delta(x+a)] .$$

2.7.5 Die dreidimensionale Delta-Funktion

Wir verallgemeinern die eindimensionale auf die dreidimensionale Delta-Funktion durch

$$\delta^3(\vec{r}) \equiv \delta(x)\delta(y)\delta(z) , \quad (2.131)$$

wobei $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ der Ortsvektor vom Ursprung $(0,0,0)$ zum Punkt $P(x,y,z)$ ist. Die dreidimensionale Delta-Funktion $\delta^3(\vec{r})$ ist überall gleich Null außer im Ursprung $(0,0,0)$. Das Volumenintegral über den gesamten Raum ist

$$\int_{\text{Gesamter Raum}} dV \delta^3(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz \delta(x)\delta(y)\delta(z) = 1 .$$

In Verallgemeinerung von Gleichung (2.114) gilt für den festen Punkt \vec{r}_0

$$\int_{\text{Gesamter Raum}} dV f(\vec{r}) \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0) = f(\vec{r}_0) . \quad (2.132)$$

Jetzt können wir auch die Diskrepanz bei der Berechnung der Divergenz von \vec{e}_r/r^2 (siehe Kap. 2.7.1) auflösen: es war

- (1) $\text{div}(\vec{e}_r/r^2)$ gleich Null überall außer am Ursprung und
- (2) das Integral über jedes Volumen, das den Ursprung enthielt, war gleich der Konstanten 4π .

Das sind genau die Eigenschaften der dreidimensionalen Delta-Funktion, multipliziert mit dem Faktor 4π , also

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{e}_r}{r^2} = 4\pi\delta^3(\vec{r}) \quad , \quad (2.133)$$

oder allgemeiner mit $\vec{R} \equiv \vec{r} - \vec{r}_0$, $\hat{R} = \vec{R}/|\vec{R}|$

$$\vec{\nabla}_r \cdot \frac{\hat{R}}{|\vec{R}|^2} = \vec{\nabla}_r \cdot \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|^3} = \vec{\nabla}_r \cdot \frac{\vec{R}}{R^3} = 4\pi\delta^3(\vec{R}) \quad , \quad (2.134)$$

wobei sich der Gradient auf die Ableitung nach \vec{r} bezieht.

Benutzen wir Beziehung (2.94) für $\psi = 1/R$, d.h.

$$\vec{\nabla}_r \left(\frac{1}{R} \right) = \vec{\nabla}_r \left(\frac{1}{r - r_0} \right) = -\frac{\hat{R}}{(r - r_0)^2} = -\frac{\vec{R}}{R^3} \quad , \quad (2.135)$$

so folgt
$$\vec{\nabla}_r^2 \frac{1}{R} = -4\pi\delta^3(\vec{R}) \quad . \quad (2.136)$$

2.8 Helmholtz-Theorem

Ist durch Festlegung der Divergenz und der Rotation eines Vektorfeldes dieses eindeutig bestimmt?

Sei z.B: $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = D$ und sei $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{C}$ mit $\vec{\nabla} \cdot \vec{C} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0$. Können wir damit das Vektorfeld \vec{F} eindeutig festlegen, d.h. existiert eine Lösung und ist sie eindeutig?

Der Beweis der Existenz geschieht durch Konstruktion der Lösung durch

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U + \vec{\nabla} \times \vec{W} \quad (2.137)$$

mit der skalaren Funktion

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V dV' \frac{D(\vec{r}')}{R} \quad (2.138)$$

und der Vektorfunktion

$$\vec{W}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V dV' \frac{\vec{C}(\vec{r}')}{R} \quad (2.139)$$

mit

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' \quad . \quad (2.140)$$

2 Mathematische Vorüberlegungen

Damit erhalten wir unter Benutzung von Gleichung (2.135)

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}_r \cdot \vec{F} = -\vec{\nabla}_r^2 U &= -\frac{1}{4\pi} \int_V dV' D(\vec{r}') \vec{\nabla}_r^2 \left(\frac{1}{R} \right) \\ &= +\frac{1}{4\pi} \int_V dV' D(\vec{r}') 4\pi \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') = D(\vec{r}) ,\end{aligned}$$

d.h. die Anwendung der Divergenz auf die konstruierte Lösung (2.137) ergibt das richtige Ergebnis.

Ebenso berechnen wir

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = -\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} U) + \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{W}) = 0 + \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{W}) ,$$

weil $\text{rot div } U = 0$ nach Beziehung (2.67). Mit Beziehung (2.69), $\text{rot rot} = \text{grad div} - \Delta$ folgt

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = -\vec{\nabla}^2 \vec{W} + \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{W}) . \quad (2.141)$$

Mit der Lösung (2.137) folgt für den 1. Term

$$\begin{aligned}-\vec{\nabla}^2 \vec{W} &= -\frac{1}{4\pi} \int_V dV' \vec{C}(\vec{r}') \vec{\nabla}_r^2 \left(\frac{1}{R} \right) \\ &= \int_V dV' \vec{C}(\vec{r}') \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') = \vec{C}(\vec{r}) ,\end{aligned}$$

d.h. die Anwendung der Rotation auf die konstruierte Lösung (2.137) ergibt das richtige Ergebnis, wenn wir zeigen können, dass der 2. Term in Gleichung (2.141) verschwindet.

Betrachten wir diesen genauer. Mit Gleichung (2.139) gilt

$$\begin{aligned}4\pi \vec{\nabla}_r \cdot \vec{W} &= \int_V dV' \vec{C}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}_r \left(\frac{1}{r - r'} \right) \\ &= - \int_V dV' \vec{C}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}_{r'} \left(\frac{1}{r - r'} \right) ,\end{aligned} \quad (2.142)$$

wobei wir $\vec{\nabla}_r(1/r - r') = -\vec{\nabla}_{r'}(1/r - r')$ benutzen. Den verbleibenden Ausdruck integrieren wir partiell. Gemäß Beziehung (2.58) gilt

$$\vec{\nabla} \cdot (f \vec{A}) = f (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} f) ,$$

so dass unter Verwendung des Gauß-Theorems

$$\begin{aligned}\int_V dV f (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) &= - \int_V dV \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} f) + \int_V dV \vec{\nabla} \cdot (f \vec{A}) \\ &= - \int_V dV \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} f) + \oint_S f \vec{A} \cdot d\vec{a} .\end{aligned} \quad (2.143)$$

Setzen wir $\vec{A} = \vec{C}$, $f = 1/(r - r')$ und $dV = dV'$, so gilt nach (2.143)

$$\begin{aligned} & - \int_V dV' \vec{C}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}_{r'} \left(\frac{1}{r - r'} \right) \\ & = \int_V dV' \frac{1}{r - r'} \vec{\nabla}_{r'} \cdot \vec{C}(\vec{r}') - \oint_{S'} \frac{1}{r - r'} \vec{C} \cdot d\vec{a} \end{aligned}$$

und nach Einsetzen in Gleichung (2.142)

$$4\pi \vec{\nabla}_r \cdot \vec{W} = \int_V dV' \frac{1}{r - r'} \vec{\nabla}_{r'} \cdot \vec{C}(\vec{r}') - \oint_{S'} \frac{1}{r - r'} \vec{C} \cdot d\vec{a} = 0,$$

denn der 1. Term verschwindet nach Annahme wegen $\vec{\nabla}_{r'} \cdot \vec{C} = 0$. Das Oberflächenintegral verschwindet wegen des Faktors $1/(r - r')$, wenn bei genügend großem Abstand (Integration über den gesamten Raum) ausgeführt wird und \vec{C} genügend stark für große Abstände abfällt. Q.E.D.

Abschließend noch zwei Anmerkungen:

1. Der Beweis nimmt an, dass die Integrale (2.138) und (2.139) existieren; sonst würden die Funktionen U und \vec{W} nicht existieren. Für große Werte von r' ist $R \simeq r'$ und beide Integrale sind von der Art (mit $dV' = 4\pi(r')^2 dr'$)

$$\int_{-\infty}^{\infty} dr' \frac{X(r')}{r'} (r')^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dr' X(r') r',$$

wobei X für die Komponenten von \vec{C} und die Funktion D steht. Damit diese Integrale existieren, müssen die Funktionen $X(r')$ stärker als $1/(r')^2$ abfallen.

2. Hinsichtlich der Eindeutigkeit der Lösung (2.137) ist anzumerken, dass diese zunächst nicht eindeutig erscheint, da wir auf der rechten Seite von (2.137) jede Vektorfunktion dazuaddieren können, deren Divergenz und Rotation verschwindet. Dann ist immer noch $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = D$ und $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{C}$. **Aber:** es existiert keine Vektorfunktion mit verschwindender Divergenz und Rotation, die bei ∞ gegen Null strebt.

Wenn wir also zusätzlich fordern, dass $\vec{F} \rightarrow 0$ für $|\vec{r}| \rightarrow \infty$, dann ist die Lösung (2.137) eindeutig und es gilt der Satz von Helmholtz:

Helmholtz'scher Satz: Sind die Divergenz $D(\vec{r})$ und die Rotation $\vec{C}(\vec{r})$ einer Vektorfunktion $\vec{F}(\vec{r})$ bekannt, gehen beide stärker als $(1/r^2)$ gegen Null für $r \rightarrow \infty$, und geht $\vec{F}(\vec{r}) \rightarrow 0$ für $r \rightarrow \infty$, dann ist $\vec{F}(\vec{r})$ eindeutig durch Gleichung (2.137) gegeben.

Folgerung: Jede (differenzierbare) Vektorfunktion $\vec{F}(\vec{r})$, die stärker als $(1/r)$ gegen Null strebt für $r \rightarrow \infty$, kann als Gradient eines Skalars plus der Rotation eines Vektors dargestellt werden:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} \left(\frac{1}{4\pi} \int_V dV' \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{F}'(\vec{r}')}{R} \right) + \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{4\pi} \int_V dV' \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{F}'(\vec{r}')}{R} \right). \quad (2.144)$$

2.9 Skalare Potentiale und Vektorpotentiale

Unser bisheriges Wissen können wir in zwei Theoremen zusammenfassen.

Satz 1 über rotationsfreie Felder: Folgende Bedingungen sind zueinander äquivalent:

- (a) $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ überall.
- (b) $\int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{l}$ ist unabhängig vom Weg für alle gegebenen Anfangs- und Endpunkte.
- (c) $\oint \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$ für jeden geschlossenen Weg.
- (d) $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$ ist der Gradient einer skalaren Funktion U . U heißt *skalares Potential* von \vec{F} , ist aber nicht eindeutig, da wir jede Konstante dazu addieren können.

Satz 2 über divergenzfreie Felder: Folgende Bedingungen sind zueinander äquivalent:

- (a) $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0$ überall.
- (b) $\int_{\text{Oberfläche}} \vec{F} \cdot d\vec{a}$ ist unabhängig vom der Oberfläche für jede gebene Randlinie.
- (c) $\oint_{\text{Oberfläche}} \vec{F} \cdot d\vec{a} = 0$ für jede geschlossene Oberfläche.
- (d) $\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{W}$ ist die Rotation eines Vektors \vec{W} . \vec{W} heißt *Vektorpotential* des Feldes \vec{F} , ist aber nicht eindeutig, da wir den Gradienten $\vec{\nabla}m$ einer beliebigen Funktion m dazuaddieren können.

2.10 Die Maxwell'schen Gleichungen

Gemäß der Aussage des Helmholtz-Theorems müssen wir zur vollständigen Bestimmung des elektrischen Feldes \vec{E} und des magnetischen Feldes \vec{B} die vier Funktionen $\text{div}\vec{E}$, $\text{rot}\vec{E}$, $\text{div}\vec{B}$ und $\text{rot}\vec{B}$ kennen. Dazu benötigen wir mindestens vier unabhängige experimentelle Befunde.

3 Elektrostatik

Wir beginnen mit Feldern, die von stationären, ruhenden geladenen (mit positiver ($q > 0$) und negativer ($q < 0$) Ladung) Massenpunkten im Vakuum herrühren.

3.1 Coulomb-Gesetz

1. *Experimentelles Fundamentalgesetz (Coulomb-Gesetz):* Zwei ruhende geladene Massenpunkte an den Stellen \vec{r}_1 und \vec{r}_2 mit den Ladungen q_1 und q_2 üben im Vakuum die Kraft

$$\vec{K}_1 = kq_1q_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \quad (3.1)$$

aufeinander aus. k ist dabei eine Proportionalitätskonstante, deren Wert von der Festlegung der Einheit der Ladungen q_1 und q_2 abhängt.

Wir folgern aus dem Coulomb-Gesetz:

- (a) Die Coulomb-Kraft (3.1) ist eine Zentralkraft, d.h. sie wirkt in Richtung der Verbindungslinie zweier Ladungen.
- (b) Es gilt Actio = Reactio, d.h. die Kraft auf die erste Ladung durch die zweite Ladung und die Kraft auf die zweite Ladung durch die erste Ladung sind entgegengesetzt gleich groß: $\vec{K}_2 = -\vec{K}_1$.
- (c) Die Coulombkraft ist proportional zum Produkt q_1q_2 . Da die Ladungen positiv oder negativ sind, stoßen sich gleichnamige Ladungen ab, ungleichnamige Ladungen ziehen sich an.
- (d) Für die Coulombkräfte gilt das Superpositionsprinzip. Die resultierende Kraft auf eine Ladung Q am Ort \vec{r} ergibt sich aus der Summe der Coulombkräfte zwischen dieser Ladung und allen anderen Ladungen q_n :

$$\vec{K}_n = kQ \sum_n q_n \frac{\vec{r} - \vec{r}_n}{|\vec{r} - \vec{r}_n|^3}. \quad (3.2)$$

Definition der elektrostatischen Ladungseinheit im CGS-System: Zwei elektrostatische Ladungseinheiten (Le) üben im Abstand von 1 cm aufeinander die Kraft 1 dyn = 1 g cm s⁻² aus. Dimensionsmäßig besagt das Coulombgesetz dann dyn = (Le)² cm⁻² oder

$$1 \text{ Le} = 1 \text{ cm dyn}^{1/2} = 1 \text{ g}^{1/2} \text{ cm}^{3/2} \text{ s}^{-1}. \quad (3.3)$$

3 Elektrostatik

Damit wird die Proportionalitätskonstante $k = 1$ im Coulombgesetz (3.1):

$$\vec{K}_1 = q_1 q_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \quad (3.4)$$

Als 1. Deutung des Coulombgesetzes besagt die *Fernwirkungstheorie*: Teilchen 2 wirkt gemäß Gleichung (3.4) direkt auf Teilchen 1 ohne Mitwirkung des dazwischenliegenden Raums (momentane Ausbreitung der Wirkung).

3.2 Elektrische Feldstärke

Wir gehen von der Kraft \vec{K} aus, die eine Ladung q_1 auf eine möglichst kleine Probeladung q ausübt:

$$\vec{K} = q q_1 \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} . \quad (3.5)$$

Als die von q_1 am Ort \vec{r} der Ladung q hervorgerufene elektrische Feldstärke definieren wir den Quotienten

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{K}}{q} . \quad (3.6)$$

Da i.a. die Punktladung q das elektrische Feld verändert, gehen wir zum Grenzfall einer verschwindend kleinen Ladung über:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{K}}{\Delta q} = \frac{d\vec{K}}{dq} . \quad (3.7)$$

Dies führt auf die 2. Deutung des Coulombgesetzes (*Feldwirkung*): Das geladene Teilchen 1 verändert den Zustand des leeren Raums in seiner Umgebung durch Aufbau des elektrischen Felds \vec{E} ; dieses wirkt auf andere geladene Teilchen.

Mit dem Coulombgesetz (3.5) folgt für das Feld einer Punktladung q_1 :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q_1 (\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} . \quad (3.8)$$

Wie in Abbildung 3.1 skizziert, ist dieses für $q_1 > 0$ radial nach außen gerichtet und für $q_1 < 0$ radial nach innen gerichtet.

Für eine Summe von Punktladungen folgt nach Gleichung (3.2)

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_n \frac{q_n (\vec{r} - \vec{r}_n)}{|\vec{r} - \vec{r}_n|^3} = \sum_n \vec{E}_n(\vec{r}) . \quad (3.9)$$

Für eine *kontinuierliche Ladungsverteilung* müssen wir von der Summation über Punktladungen zur Integration über die räumliche Ladungsverteilung übergehen. Setzen wir an Stelle der Punktladung q_i das Ladungselement $\rho(\vec{r}') dV'$, wobei ρ die Ladungsdichte und $dV' = d^3 r'$ das Volumenelement sind, so folgt

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int dV' \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} . \quad (3.10)$$

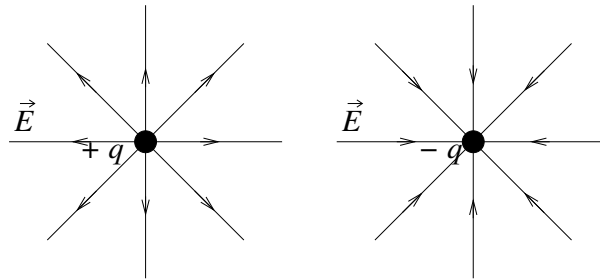


Abbildung 3.1: Die elektrischen Felder einer positiven und einer negativen Punktladung

Die Gesamtkraft auf eine Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ ist dann

$$\vec{K} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r \rho(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}) \quad (3.11)$$

und die Gesamtladung Q ist

$$Q = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r \rho(\vec{r}) \quad (3.12)$$

Die Einheit der elektrischen Feldstärke

$$\vec{E}(\vec{r}) \text{ ist } [\vec{E}] = \frac{[\vec{K}]}{[q]} = \frac{\text{dyn}}{\text{Le}} = \text{dyn}^{1/2} \text{ cm}^{-1} = 1 \text{ Gau\ss}$$

im CGS-System.

Mit der δ -Funktion (wir schreiben kurz $\delta(\vec{x}) = \delta^3(\vec{x})$) erhalten wir aus der Beziehung (3.10) wieder Gleichung (3.9), denn Einsetzen von

$$\rho(\vec{r}') = \sum_{n=1}^N q_n \delta(\vec{r}' - \vec{r}_n)$$

liefert sofort

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{n=1}^N \int d^3r' q_n \delta(\vec{r}' - \vec{r}_n) \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \sum_{n=1}^N \frac{q_n (\vec{r} - \vec{r}_n)}{|\vec{r} - \vec{r}_n|^3} = \sum_n \vec{E}_n(\vec{r}) .$$

3.3 Differentielle Feldgleichungen

Mit Beziehung (2.135),

$$\text{grad}_r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \vec{\nabla}_r \left(\frac{1}{r - r'} \right) = - \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} ,$$

3 Elektrostatik

folgt für Gleichung (3.10)

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int d^3r' \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = -\text{grad}_r \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\text{grad}_r \Phi(\vec{r}) \quad (3.13)$$

mit dem "skalaren Potential" oder "elektrostatischen Potential"

$$\Phi(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \text{const.} = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (3.14)$$

da die Konstante ohne Bedeutung für die Berechnung des \vec{E} -Feldes ist.

Das elektrische Feld kann nach dem Helmholtz-Satz aus der Festlegung seiner Quellen ($\text{div } \vec{E}$) und Wirbel ($\text{rot } \vec{E}$) berechnet werden. Die Anwendung von Gleichung (2.136),

$$\vec{\nabla}_r^2 \frac{1}{r - r'} = \Delta_r \frac{1}{r - r'} = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}'),$$

auf Gleichung (3.14) ergibt

$$\Delta_r \Phi(\vec{r}) = \int d^3r' \rho(\vec{r}') \vec{\nabla}_r^2 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -4\pi \int d^3r' \rho(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') = -4\pi \rho(\vec{r}). \quad (3.15)$$

Damit ist dann nach Gleichung (3.13)

$$\text{div } \vec{E} = -\text{div grad } \Phi = -\vec{\nabla}^2 \Phi = -\Delta \Phi = 4\pi \rho$$

$$\text{und} \quad \text{rot } \vec{E} = -\text{rot grad } \Phi = 0$$

und wir erhalten die *differentiellen Feldgleichungen der Elektrostatik*

$$\text{div } \vec{E}(\vec{r}) = 4\pi \rho(\vec{r}) \quad (3.16)$$

$$\text{und} \quad \text{rot } \vec{E}(\vec{r}) = 0. \quad (3.17)$$

Gemäß Gleichungen (3.15) und (3.13) können wir diese Grundgleichungen alternativ auch für das skalare Potential formulieren:

$$\Delta \Phi(\vec{r}) = -4\pi \rho(\vec{r}) \quad (3.18)$$

$$\text{und} \quad \vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad } \Phi(\vec{r}). \quad (3.19)$$

Gleichung (3.18) wird als *Poisson-Gleichung* bezeichnet.

Im Spezialfall $\rho(\vec{r}) = 0$ reduziert sich die Poisson-Gleichung auf die *Laplace-Gleichung*

$$\Delta \Phi(\vec{r}) = 0 \quad (3.20)$$

Die Formulierungen (3.18) und (3.20) für das skalare Potential $\Phi(\vec{r})$ haben den Vorteil, dass man nur eine skalare Funktion $\Phi(\vec{r})$ statt der drei Komponenten der Vektorfunktion $\vec{E}(\vec{r})$ benötigt.

Das *Grundproblem der Elektrostatik* besteht darin, aus der gegebenen Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ das Potential $\Phi(\vec{r})$ oder die elektrische Feldstärke $\vec{E}(\vec{r})$ aus den formalen Lösungen (3.14) oder (3.10) zu berechnen.

3.3.1 Feldlinien

Unter Äquipotentiallinien oder Äquipotentialflächen versteht man den geometrischen Ort aller Punkte mit dem gleichen Wert des Potentials $\phi(\vec{r})$:

$$\text{Äquipotentialfläche } \Phi(\vec{r}) = \text{const.} \quad (3.21)$$

Die Flächennormalen zeigen in Richtung von $\text{grad } \Phi = -\vec{E}$ und werden als *Feldlinien* bezeichnet.

So folgt z.B. für eine Summe von Punktladungen $\rho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$ aus Gleichung (3.14)

$$\Phi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}.$$

Für zwei Ladungen ($N = 2$) mit $q_1 = -q_2 = q$ ergibt sich für die Äquipotentiallinien dann

$$\Phi(r) = \frac{q}{r - r_1} - \frac{q}{r - r_2} = \text{const.}$$

In Abbildung 3.2 sind für dieses Beispiel die Äquipotentiallinien und die Feldlinien skizziert.

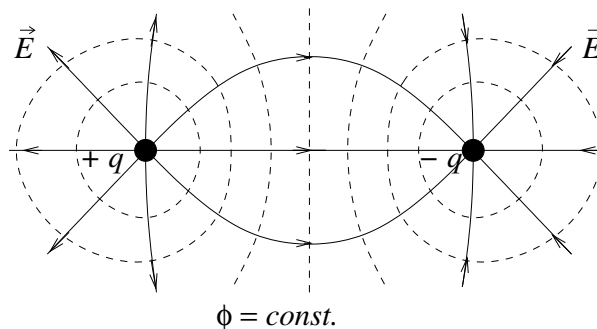


Abbildung 3.2: Elektrisches Feld und Äquipotentialflächen (gestrichelte Kurven) zwischen positiver und negativer Punktladung

Übungsaufgabe:

Berechnung der Äquipotentiallinien und der Feldlinien für zwei gleichnamige Ladungen ($q_1 = q_2 = q$.)

3.4 Integralform der Feldgleichungen

(Die Aussagen dieses Abschnitts lassen sich auch kurz mit dem in Kap. 2.9 formulierten Satz 1 für rotationsfreie Vektorfelder begründen.)

3 Elektrostatik

Die Anwendung des Gauß-Theorems auf die inhomogene differentielle Feldgleichung (3.16),

$$\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) = 4\pi\rho(\vec{r}) ,$$

ergibt für das Integral über das Volumen V mit der Oberfläche O

$$4\pi \int_V d^3r \rho(\vec{r}) = 4\pi Q_V = \int_V d^3r \operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) = \oint_O d\vec{F} \cdot \vec{E}(\vec{r}) ,$$

oder

$$\oint d\vec{F} \cdot \vec{E} = 4\pi Q_V . \quad (3.22)$$

Das Oberflächenintegral über \vec{E} ist gleich 4π mal der im Volumenelement eingeschlossenen Ladung Q_V . Gleichung (3.22) wird als *Gauß-Gesetz* bezeichnet.

Integriert man die homogene differentielle Feldgleichung (3.17)

$$\operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}) = 0 ,$$

über eine Fläche F mit der Berandung C , so folgt nach dem Stokes-Theorem

$$0 = \int_F d\vec{f} \cdot [\operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r})] = \oint_C d\vec{s} \cdot \vec{E}(\vec{r}) ,$$

oder

$$\oint d\vec{s} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 0 \quad (3.23)$$

für die Integration über beliebig geschlossene Wege. Insbesondere folgt, dass es in der Elektrostatik keine geschlossenen Feldlinien gibt.

In Abbildung 3.3 fassen wir die abgeleiteten integralen und differentiellen elektrostatischen Feldgleichungen zusammen, die den Zusammenhang zwischen der elektrischen Feldstärke \vec{E} , der Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ und dem elektrostatischen Potential $\Phi(\vec{r})$ vermitteln.

Um alle Zusammenhänge zu beweisen, betrachten wir die formale Ableitung der Beziehung

$$\Phi(P) = - \int_O^P d\vec{s} \cdot \vec{E}(\vec{r}) \quad (3.24)$$

des Potentials $\Phi(P)$ am Punkt P , wobei O einen beliebigen Referenzpunkt kennzeichnet. Gemäß Gleichung (3.24) gilt dann für die Potentialdifferenz an zwei Punkten a und b :

$$\begin{aligned} \Phi(b) - \Phi(a) &= - \int_O^b d\vec{s} \cdot \vec{E} + \int_O^a d\vec{s} \cdot \vec{E} = - \int_O^b d\vec{s} \cdot \vec{E} - \int_a^O d\vec{s} \cdot \vec{E} \\ &= - \left[\int_a^O d\vec{s} \cdot \vec{E} + \int_O^b d\vec{s} \cdot \vec{E} \right] = - \int_a^b d\vec{s} \cdot \vec{E} . \end{aligned}$$

Nach Gleichung (2.99) gilt für den Gradienten

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b (\vec{\nabla}\Phi) \cdot d\vec{s} ,$$

so dass

$$\int_a^b (\vec{\nabla}\Phi) \cdot d\vec{s} = - \int_a^b d\vec{s} \cdot \vec{E}$$

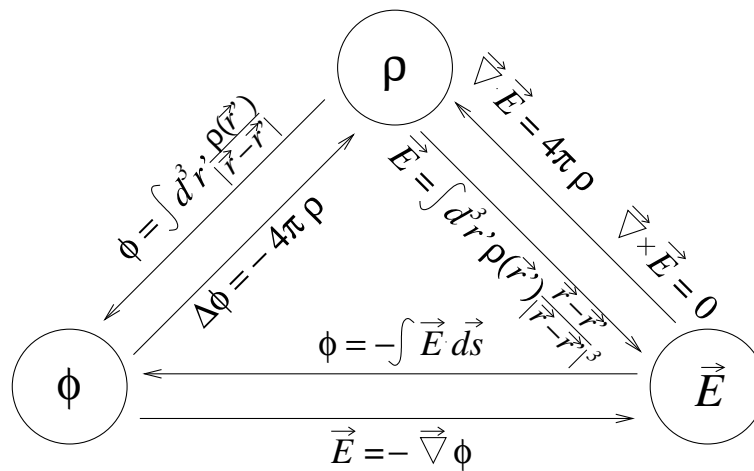


Abbildung 3.3: Die elektrostatischen Feldgleichungen

für alle beliebigen Punkte a und b gilt. Dann folgt

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi,$$

im Einklang mit Gleichung (3.13), d.h. die Beziehung (3.24) ist in der Tat die Integralform von Gleichung (3.13).

3.5 Anwendung des Gauß-Gesetzes

Bei geeigneter Symmetrie ist das integrale Gauß-Gesetz (3.22) die schnellste und leichteste Methode, um elektrische Feldstärken \vec{E} zu berechnen.

3.5.1 Feld einer homogenen geladenen Kugel

Die Ladungsdichte einer homogenen geladenen Kugel ist

$$\rho(\vec{r}) = \rho(r) = \begin{cases} \rho_0 & \text{für } r \leq a \\ 0 & \text{für } r > a \end{cases} \quad (3.25)$$

mit $\rho_0 = \text{const.}$ Wegen der Symmetrie verwenden wir Kugelkoordinaten r, θ, ϕ , und das Potential kann nur vom Abstand r abhängen.

Als 1. Lösungsverfahren verwenden wir das Gauß-Gesetz. Wir werten Gleichung (3.22) aus für eine Kugeloberfläche $F = 4\pi r^2$ mit dem Radius r . Weil $d\vec{F} \parallel \vec{E}$ mit $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$, gilt

$$\oint d\vec{F} \cdot \vec{E} = \int |\vec{E}| dF = |\vec{E}| \int dF = 4\pi r^2 E(r).$$

3 Elektrostatik

Gleichzeitig gilt mit der Ladungsdichte (3.25)

$$4\pi Q_V = 4\pi \int_0^r 4\pi (r')^2 dr' \rho(r') = \begin{cases} 16\pi^2 \rho_0 \int_0^r dr' (r')^2 = \frac{16\pi^2}{3} \rho_0 r^3 & \text{für } r \leq a \\ 16\pi^2 \rho_0 \int_0^a dr' (r')^2 = \frac{16\pi^2}{3} \rho_0 a^3 & \text{für } r > a \end{cases}$$

Mit der Gesamtladung der Kugel $Q = 4\pi\rho_0 a^3/3$ folgt

$$4\pi r^2 E(r) = \begin{cases} 4\pi Q \frac{r^3}{a^3} & \text{für } r \leq a \\ 4\pi Q & \text{für } r > a \end{cases},$$

so dass

$$E(r) = \begin{cases} \frac{Qr}{a^3} & \text{für } r \leq a \\ \frac{Q}{r^2} & \text{für } r > a \end{cases}. \quad (3.26)$$

Man beachte: das Feld außerhalb der Kugel ist exakt das gleiche, als wenn die gesamte Ladung im Zentrum $r = 0$ konzentriert wäre.

Das dazugehörige Potential berechnen wir durch Integration von

$$\frac{d\Phi}{dr} = -E(r)$$

mit $\Phi(\infty) = 0$ zu

$$\Phi(r) = \begin{cases} \frac{Q}{a} \left[\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2a^2} \right] & \text{für } r \leq a \\ \frac{Q}{r} & \text{für } r > a \end{cases}, \quad (3.27)$$

wobei wir die Stetigkeit des Potentials an der Stelle $r = a$ ausnutzen.

Das 2. Lösungsverfahren beruht auf der Poisson-Gleichung (3.18), wobei wir nach (2.97) den Radialanteil des Laplace-Operators in Kugelkoordinaten verwenden:

$$\Delta\Phi(r) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = -4\pi\rho(r). \quad (3.28)$$

Für $r > a$ folgt mit der Ladungsverteilung (3.25):

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = 0$$

oder

$$r^2 \frac{d\Phi}{dr} = C_1$$

und daraus

$$\Phi = -\frac{C_1}{r} + C_2$$

mit den Integrationskonstanten C_1 und C_2 . Mit $\Phi(\infty) = 0$ folgt $C_2 = 0$, so dass

$$\Phi(r > a) = -\frac{C_1}{r}.$$

Für $r \leq a$ gilt

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = -4\pi\rho_0 r^2,$$

so dass
$$r^2 \frac{d\Phi}{dr} = -\frac{4\pi}{3}\rho_0 r^3 + C_3$$

oder
$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{C_3}{r^2} - \frac{4\pi}{3}\rho_0 r.$$

Nach Integration erhalten wir

$$\Phi(r \leq a) = C_4 - \frac{C_3}{r} - \frac{2\pi}{3}\rho_0 r^2$$

Der Term $-C_3/r$ entspricht wegen $\Delta(C_3/r) = -4\pi C_3 \delta^3(\vec{r})$ einer Punktladung bei $\vec{r} = 0$, die es nicht gibt, so dass wir $C_3 = 0$ setzen. Für das Potential erhalten wir dann

$$\Phi(r) = \begin{cases} -\frac{C_1}{r} & \text{für } r > a \\ C_4 - \frac{Qr^2}{2a^3} & \text{für } r \leq a \end{cases}. \quad (3.29)$$

Die rechte Seite der Poisson-Gleichung (3.28) hat einen Sprung bei $r = a$, also hat auch die linke Seite $d/dr(r^2 d\Phi/dr)$ einen Sprung. Daraus folgt, dass $r^2 d\Phi/dr$ einen Knick hat bei $r = a$; daher sind Φ und $d\Phi/dr$ stetig bei $r = a$ (zur Begründung siehe Kap. 3.5.2). Die Stetigkeit von Φ liefert

$$\frac{-C_1}{a} = C_4 - \frac{Q}{2a};$$

die Stetigkeit von $d\Phi/dr$ liefert

$$\frac{C_1}{a^2} = -\frac{Q}{a^2}$$

oder
$$C_1 = -Q \text{ und } C_4 = \frac{3Q}{2a}.$$

Eingesetzt in Gleichung (3.29) folgt dann

$$\Phi(r) = \begin{cases} \frac{Q}{a} \left[\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2a^2} \right] & \text{für } r \leq a \\ \frac{Q}{r} & \text{für } r > a \end{cases}$$

das gleiche Ergebnis wie Gleichung (3.27). Zur Bestimmung dieser Lösung brauchten wir vier Konstanten aus vier Randbedingungen:

- (a) $\Phi(0)$ endlich, d.h. keine Punktladung bei $r = 0$;
- (b) $\Phi(r)$ stetig bei $r = a$;
- (c) $d\Phi/dr$ stetig bei $r = a$;
- (d) $\Phi(\infty) = 0$ als willkürlichen Referenzpunkt.

3.5.2 Feldverhalten an Grenzflächen

Das Verhalten des elektrostatischen Feldes $\vec{E}(\vec{r})$ an Grenzflächen, die eine Flächenladung σ tragen, folgt aus den integralen Feldgleichungen. Dazu legen wir, wie in Abbildung 3.4

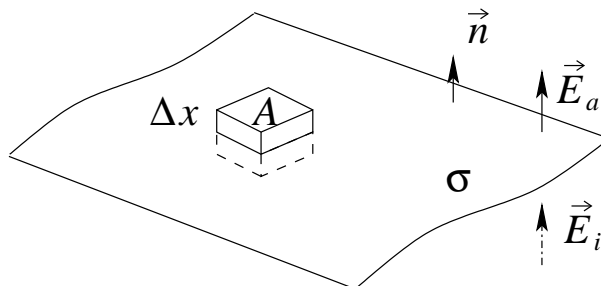


Abbildung 3.4: Das Gaußsche Kästchen um eine Fläche A mit Oberflächenladung σ

skizziert, um die Fläche ein sogenanntes *Gaußsches Kästchen* mit dem Volumen ΔV . Die Kästchenkante senkrecht zur Grenzfläche habe die Länge Δx , die wir in einem Grenzprozess gegen Null gehen lassen. Nach dem Gauß-Theorem gilt dann

$$\int_{\Delta V} d^3r \operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) = \oint_{S(\Delta V)} d\vec{a} \cdot \vec{E}(\vec{r}) \rightarrow A\vec{n} \cdot (\vec{E}_a - \vec{E}_i), \quad (3.30)$$

denn das Oberflächenelement $d\vec{a}$ hat dann die Normalenrichtung \vec{n} und die Fläche A . \vec{E}_a und \vec{E}_i bezeichnen die Normalkomponenten des elektrischen Feldes außerhalb (oben) und innerhalb (unten) der Grenzfläche.

Andererseits gilt nach dem Gauß-Gesetz (3.22)

$$\int_{\Delta V} d^3r \operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) = 4\pi \int_{\Delta V} d^3r \rho(\vec{r}) = 4\pi\sigma A. \quad (3.31)$$

Der Vergleich mit Gleichung (3.30) ergibt

$$\vec{n} \cdot (\vec{E}_a - \vec{E}_i) = 4\pi\sigma, \quad (3.32)$$

d.h. die Normalkomponente des elektrischen Feldes verhält sich an der Grenzfläche unstetig wenn $\sigma \neq 0$ ist.

Die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes dagegen ist immer stetig. Dies folgt aus der Anwendung von Gleichung (3.23)

$$\oint d\vec{s} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 0,$$

auf die in Abbildung 3.5 gezeigte dünne rechtwinklige Schleife, die durch die Grenzfläche geht. Die Enden $\Delta x \rightarrow 0$ ergeben keinen Beitrag und die Seiten mit der Länge l ergeben

$$E_{\parallel,a}l - E_{\parallel,i}l = 0$$

oder

$$E_{\parallel,a} = E_{\parallel,i}, \quad (3.33)$$

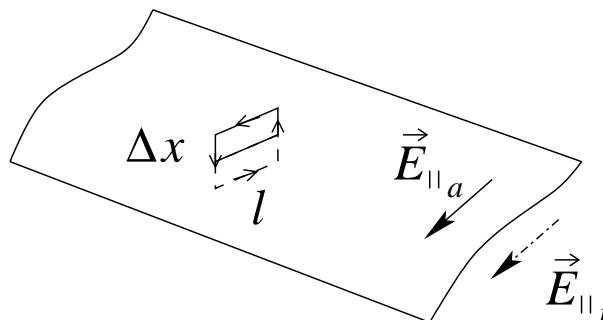


Abbildung 3.5: Die Stokessche Fläche an einer Grenzfläche

wobei $E_{\parallel} \perp \vec{n}$ die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes parallel zur Grenzfläche kennzeichnet.

Die Ergebnisse (3.32) und (3.33) können kombiniert werden zu

$$\vec{E}_a - \vec{E}_i = 4\pi\sigma\vec{n}, \quad (3.34)$$

wobei \vec{n} der Einheitsvektor senkrecht zur Grenzfläche ist.

Das elektrostatistische Potential Φ ist stetig an jeder Grenzfläche, weil nach Gleichung (3.24)

$$\Phi_a - \Phi_i = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{s}.$$

Für verschwindend kleine Weglänge $ds \rightarrow 0$ folgt dann

$$\Phi_a = \Phi_i. \quad (3.35)$$

Aber der Gradient von Φ besitzt wegen $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$ die Unstetigkeit von \vec{E} . Mit Gleichung (3.34) gilt

$$\vec{\nabla}\Phi_a - \vec{\nabla}\Phi_i = -4\pi\sigma\vec{n},$$

$$\text{oder} \quad \frac{\partial\Phi_a}{\partial n} - \frac{\partial\Phi_i}{\partial n} = -4\pi\sigma \quad (3.36)$$

$$\text{wobei} \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n} = \vec{\nabla}\Phi \cdot \vec{n} \quad (3.37)$$

die "Normalen-Ableitung" von Φ ist (d.h. die Änderung von Φ in Richtung senkrecht zur Oberfläche).

Gleichung (3.36) begründet die in Kap. 3.5.1 angenommenen Stetigkeit von $d\Phi/dr$ bei der homogenen Kugel, da diese keine Flächenladung an der Grenzfläche aufweist.

3.6 Elektrostatistische Feldenergie

Nach Gleichung (3.6) wird im elektrischen Feld $\vec{E}(\vec{r})$ am Ort \vec{r} auf die Punktladung q die Kraft $\vec{K}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r})$ ausgeübt. Um die Punktladung im Feld \vec{E} von Punkt a nach Punkt b

3 Elektrostatik

zu verschieben, muss die Arbeit W_{ab} mit der Gegenkraft $-\vec{K}$ geleistet werden:

$$W_{ab} = - \int_a^b \vec{K} \cdot d\vec{r} = -q \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r}.$$

Unter Verwendung von Gleichung (3.24) erhalten wir unabhängig vom Weg

$$W_{ab} = q[\Phi(b) - \Phi(a)] = qU_{b,a} = -qU_{a,b},$$

wobei die Potentialdifferenz $U_{b,a} = \Phi(b) - \Phi(a)$ als *Spannung* bezeichnet wird. Die Arbeit ist dann $W_{ab} = -qU_{a,b}$. Umgekehrt kann man sagen: Die Potentialdifferenz zwischen den Punkten a und b ist gleich der Arbeit pro Einheitsladung, die man aufwenden muss, um das Ladungsteilchen von a nach b zu transportieren.

3.6.1 Energie einer Punktladungsverteilung

Wir berechnen die Arbeit, die nötig ist, um eine Ladung q_n im Feld der Punktladungen q_1, \dots, q_{n-1} an den Stellen $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_{n-1}$ von ∞ nach \vec{r}_n zu bringen. Das Potential der $n-1$ Punktladungen lautet

$$\phi(\vec{r}) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{q_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|}.$$

Damit ergibt sich nach Gleichung (3.6) diese Arbeit zu

$$A_n = q_n [\Phi(\vec{r}_n) - \Phi(\infty)] = q_n \Phi(\vec{r}_n) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{q_n q_j}{|\vec{r}_n - \vec{r}_j|} \quad (3.38)$$

(3.38) ist die Arbeit, die notwendig ist, um die Ladung q_n von Unendlich zum Ort \vec{r}_n zu bringen.

Stellen wir uns nun vor, dass wir nacheinander die Ladungen $n_1, n_2, n_3, \dots, n_N$ von Unendlich nach \vec{r}_n bringen. Die aufzuwendende Arbeit erhalten wir durch Summation von Beziehung (3.38) zu

$$A = \sum_{n=2}^N A_n(\vec{r}_n) = \sum_{n=2}^N \sum_{j=1}^{n-1} \frac{q_n q_j}{|\vec{r}_n - \vec{r}_j|}. \quad (3.39)$$

Der Transport der 1. Ladung braucht keine Arbeit, weil noch kein Feld vorhanden ist, gegen das die Arbeit geleistet werden muss.

Die Doppelsumme (3.39) werten wir so aus, dass wir jedes Paar doppelt zählen und daher durch 2 teilen müssen, d.h.

$$A = \frac{1}{2} \sum_{n,j,n \neq j}^N \frac{q_n q_j}{|\vec{r}_n - \vec{r}_j|} \equiv W_e. \quad (3.40)$$

Die aufzuwendende Arbeit ist gleich der potentiellen Energie W_e des Systems aus N Punktladungen.

3.6.2 Kontinuierliche Ladungsverteilungen

Für *kontinuierliche* Ladungsverteilungen $\rho(\vec{r})$ benutzt man in Verallgemeinerung von Gleichung (3.40) die Definition

$$W_e \equiv \frac{1}{2} \int d^3r \rho(\vec{r}) \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (3.41)$$

Mit Gleichung (3.14)

$$\Phi(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|},$$

erhalten wir

$$W_e = \frac{1}{2} \int \rho(\vec{r}) \Phi(\vec{r}) d^3r.$$

Benutzen wir die Poissongleichung (3.18) in der Form

$$\rho(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \Delta\Phi = -\frac{1}{4\pi} \vec{\nabla}^2\Phi,$$

und integrieren partiell, so folgt unter Verwendung von (3.13)

$$W_e = -\frac{1}{8\pi} \int d^3r (\vec{\nabla}^2\Phi) \Phi(\vec{r}) = \frac{1}{8\pi} \int d^3r (\vec{\nabla}\Phi)^2 = \frac{1}{8\pi} \int d^3r |\vec{E}(\vec{r})|^2, \quad (3.42)$$

da es keine Randterme bei $r \rightarrow \infty$ gibt. Es ist dann naheliegend,

$$w_e(\vec{r}) \equiv \frac{1}{8\pi} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r})$$

als Energiedichte des elektrischen Feldes zu interpretieren.

3.7 Leiter und Isolatoren

Man teilt Materialien grob in zwei Klassen ein:

- (1) *Isolatoren (Nichtleiter)*: Stoffe (wie Glas oder Gummi), bei denen jedes Elektron an ein bestimmtes Atom angelagert ist, so dass sich die Ladungsträger auch bei Anlegen eines elektrischen Feldes nicht verschieben lassen.
- (2) *Leiter*: Stoffe, in denen sich eins oder mehrere Elektronen pro Atom frei verschieben lassen (z.B. Elektronen eines nicht vollständig gefüllten Energiebands in einem Festkörper). Ein perfekter Leiter wäre ein Material mit unbegrenzt vielen freien Elektronen.

3.7.1 Leiter

Aus diesen Definitionen folgen sofort die grundlegenden elektrostatischen Eigenschaften von idealen Leitern:

- (1) $\vec{E} = 0$ **innerhalb des Leiters**: Würde man einen Leiter in ein äußeres Feld \vec{E}_0 legen (siehe Abbildung 3.6), würden alle freien positiven Ladungen nach rechts und alle freien negativen Ladungen nach links laufen, und diese *induzierten* Ladungen produzieren ihr eigenes Feld \vec{E}_1 , das entgegengesetzt zu \vec{E}_0 zeigt. Die Ladungen fließen solange im Leiter, bis die induzierten Ladungen das äußere Feld innerhalb des Leiters aufheben.

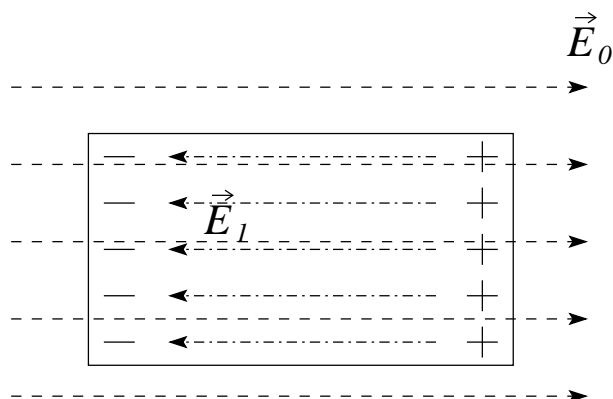


Abbildung 3.6: Ladungen und \vec{E} -Feld innerhalb eines Leiters in einem äußeren \vec{E} -Feld

- (2) $\rho = 0$ **innerhalb des Leiters**: Dies folgt aus der Feldgleichung $\text{div } \vec{E} = 4\pi\rho$ als Konsequenz von $\vec{E} = 0$ innerhalb des Leiters. Es sind zwar Ladungen vorhanden, aber exakt gleich viele positive wie negative.
- (3) **Jede Netto-Ladung sitzt auf der Oberfläche**: Dies ist der einzige Ort, wo sie sein können.
- (4) **Das Potential Φ ist konstant im Leiter**: Nach Gleichung (3.24) gilt für zwei Punkte a und b im Leiter oder auf der Oberfläche des Leiters

$$\Phi(b) - \Phi(a) = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 ,$$

oder $\Phi(b) = \Phi(a)$, d.h. die Oberfläche eines Leiters ist immer eine Äquipotentialfläche. Da die Feldlinien senkrecht zu den Äquipotentialflächen verlaufen, folgt

- (5) \vec{E} **steht immer senkrecht auf der Oberfläche** direkt außerhalb des Leiters (siehe Abbildung 3.7). Wenn nicht, würden, wie unter Punkt (1) notiert, sofort Ladungen fließen, bis alle tangentialen \vec{E} -Felder verschwinden.

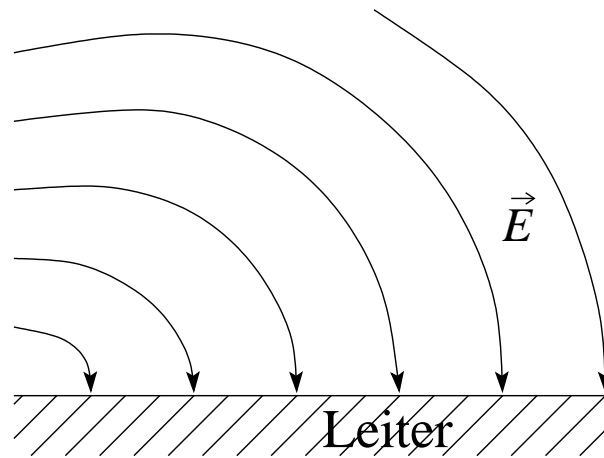


Abbildung 3.7: Das \vec{E} -Feld steht stets senkrecht auf der Leiteroberfläche

- (6) **Faraday-Käfig:** Aus Punkt (1), $\vec{E} = 0$ innerhalb des Leiters, folgt mit dem Gaußsatz, dass das Innere eines elektrischen Leiters stets ladungsfrei ist (siehe Punkt (2) oben). Daran ändert sich auch nichts, wenn wir den Leiter aushöhlen: das dadurch entstehende Loch bleibt feldfrei (sog. *Faradayscher Käfig*).

Bringen wir einen Leiter in ein externes elektrostatisches Feld, so verschieben sich die freien Ladungsträger so lange, bis das resultierende Feld senkrecht auf der Leiteroberfläche steht; das externe Feld wird deformiert. Weil die Normalkomponente des inneren Feldes $E_i^{(n)} = 0$, folgt nach Gleichung (3.32), dass die Normalkomponente des Feldes unmittelbar außerhalb

$$E_a^{(n)} = 4\pi\sigma$$

oder mit Beziehung (3.36)

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \left. \frac{\partial\Phi}{\partial n} \right|_R \quad (3.43)$$

am Rand R ist, dass sich also eine passende Oberflächenladungsdichte σ gebildet haben muss. Das äußere Feld *influenziert* Ladungen an der Leiteroberfläche gemäß Gleichung (3.43)! Wir illustrieren dies am in Abbildung 3.8 skizzierten *Beispiel*: Wir setzen eine positive Punktladung $q > 0$ in das Zentrum eines sphärischen Hohlleiters. Wieviel negative Ladung wird an die innere Oberfläche gezogen? Ladungen fließen solange, bis das Netto-Feld im Leiter (durch q und die induzierten Ladungen) gleich Null ist. Weil das Feld einer gleichförmigen kugelförmigen Oberflächenladung gleich dem ist, wenn es im Zentrum der Kugel lokalisiert wäre (siehe Kap. 3.5.1), tritt das auf, wenn sich die Ladungsmenge $-q$ bei $r = a$ angesammelt hat. Also ist die induzierte Oberflächenladung dort $\sigma_a = -q/(4\pi a^2)$. Gleichzeitig verteilt sich die übrige Ladung $+q$ auf der äußeren Oberfläche mit der Oberflächenladungsdichte $\sigma_b = q/(4\pi b^2)$. (Aufgabe: Berechnen Sie für diese Anordnung den radialen Verlauf von \vec{E} und Φ in den Bereichen $r \leq a$, $a < r < b$ und $r \geq b$.)

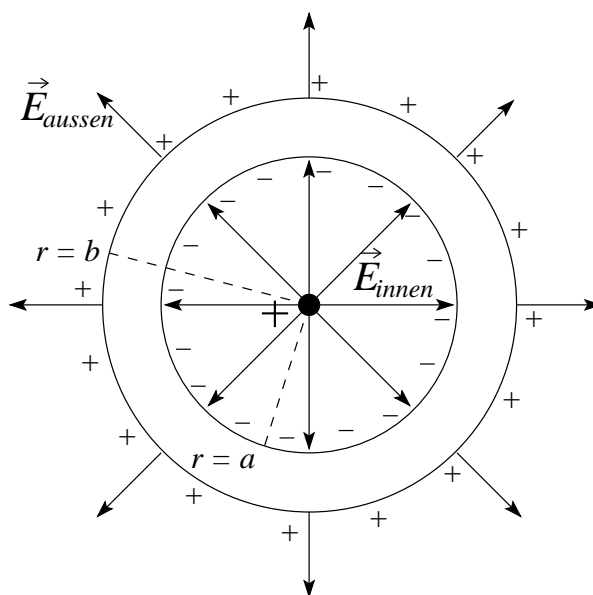


Abbildung 3.8: Die \vec{E} -Felder und Ladungen eines sphärischen Hohlleiters

3.7.2 Isolatoren

Isolatoren enthalten positive und negative Ladungen in gleicher Anzahl, die nicht frei beweglich und damit nicht zu trennen sind. Man kann sie aber um kurze Strecken gegeneinander verschieben. Die damit verbundenen Polarisation der Atome bzw. Moleküle im Feld führen zu einem induzierten Dipolmoment, dessen Effekte wir im Kap. 8 detaillierter untersuchen werden.

3.7.3 Leiter im elektrostatischen Feld

Die Diskussion des Verhaltens von Leitern führt uns zu einer *Umformulierung des Hauptproblems der Elektrostatik*: *Gesucht wird die Lösung der Poisson-Gleichung $\Delta\Phi = 4\pi\rho$ mit der Randbedingung, dass alle Leiteroberflächen Äquipotentialflächen sind.*

Dazu existieren im wesentlichen zwei Lösungsmethoden, die wir in den folgenden Abschnitten ausführlich behandeln:

- (a) *Methode von Green*: Es muss eine Greensfunktion bestimmt werden, die den Randbedingungen angepasst ist.
- (b) *Spiegelungsmethode*: Es wird versucht, die durch Influenz entstandenen Oberflächenladungen durch fiktive Ladungen im Inneren des Leiters zu ersetzen, die im Außenraum dasselbe Feld wie die Oberflächenladungen erzeugen.

3.8 Randwertprobleme

3.8.1 Formulierung des Randwertproblems

Nach der Diskussion der physikalischen Randbedingungen im letzten Abschnitt formulieren wir das zu lösende Problem mathematisch: ein zusammenhängendes Volumen V werde durch eine oder mehrere Metalloberflächen (Leiteroberflächen) begrenzt. Der Rand von V besteht aus mehreren Rändern von getrennten Metallkörpern, also $R = (R_1, R_2, \dots)$. Im Volumen V ist das Potentialfeld $\phi(\vec{r})$ gesucht. Es gelten die Randbedingungen

$$\Phi|_{R_i} = \Phi_i = \text{const.} \quad (3.44)$$

und
$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_R = -4\pi\sigma \quad (3.45)$$

mit
$$\frac{\partial}{\partial n} = \vec{n} \cdot \vec{\nabla} .$$

Die Vorgabe der Potentialwerte am Rand (wie in Gleichung (3.44)) wird *Dirichlet-Randbedingung* genannt:

$$\text{Dirichlet-Randbedingung} \quad \Phi|_R = \Phi_0(\vec{r}) . \quad (3.46)$$

Gleichung (3.46) ist etwas allgemeiner als Gleichung (3.44), weil ϕ_0 eine Funktion von \vec{r} sein kann und nicht, (wie bei einem Leiter) auf jedem R_i konstant sein soll.

Die Vorgabe der Normalkomponente auf dem Rand (wie in Gleichung (3.45)) wird *von Neumann-Randbedingung* genannt:

$$\text{von Neumann-Randbedingung} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_R = -4\pi\sigma(\vec{r}) . \quad (3.47)$$

Im allgemeinen sind die Oberflächenladungen nicht bekannt, sondern die Potentialwerte $\Phi_0(\vec{r})$ auf den einzelnen Metallkörpern. Wir erhalten dann das *Randwertproblem mit Dirichlet-Randbedingung* zu:

$$\Delta \Phi(\vec{r}) = -4\pi\rho(\vec{r}) \quad \text{in } V \quad (3.48)$$

$$\Phi(\vec{r}) = \Phi_0(\vec{r}) \quad \text{auf } R , \quad (3.49)$$

wobei $\rho(\vec{r})$ und $\Phi_0(\vec{r})$ gegeben sind und $\Phi(\vec{r})$ gesucht wird.

Aus der Lösung $\Phi(\vec{r})$ kann dann gemäß Gleichung (3.47) die Oberflächenladung bestimmt werden;

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_R .$$

3.8.2 Partikuläre und homogene Lösung

Jede lineare inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung mit Quellterm kann als Summe einer speziellen (partikulären) Lösung und der homogenen Lösung geschrieben werden:

$$\Phi(\vec{r}) = \Phi_{part}(\vec{r}) + \Phi_{hom}(\vec{r}) \quad (3.50)$$

mit der homogenen Lösung
$$\Delta \Phi_{hom}(\vec{r}) = 0 \quad (3.51)$$

und der partikulären Lösung
$$\Delta \Phi_{part}(\vec{r}) = -4\pi\rho(\vec{r}) . \quad (3.52)$$

3 Elektrostatik

Gemäß Kap. 3.3 ist Gleichung (3.52) äquivalent zu

$$\Phi_{part}(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (3.53)$$

Aus der Randbedingung (3.49) folgt

$$\begin{aligned} \Phi_{part}|_R + \Phi_{hom}|_R &= \Phi_0(\vec{r}) \\ \text{oder} \quad \Phi_{hom}|_R &= (\Phi_0 - \Phi_{part})|_R. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Mit (3.53) erhalten wir für die Lösung (3.50)

$$\Phi(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \Phi_{hom}(\vec{r})$$

Im *Spezialfall*, dass keine Metalloberflächen vorhanden sind, ist das Volumen V der gesamte Raum und die Randbedingung lautet $\Phi(\infty) = 0$. Wegen $\Phi_{part}(\infty) = 0$ folgt aus (3.54) $\Phi_{hom}(\infty) = 0$ und damit $\Phi_{hom}(\vec{r}) = 0$.

3.8.3 Eindeutigkeit der Lösung

Seien $\Phi_1(\vec{r})$ und $\Phi_2(\vec{r})$ zwei beliebige Lösungen des Potentialproblems (3.48)–(3.49). Für die Differenz

$$\psi(\vec{r}) = \Phi_1(\vec{r}) - \Phi_2(\vec{r}) \quad (3.55)$$

gilt dann

$$\Delta\psi = \Delta\Phi_1 - \Delta\Phi_2 = -4\pi(\rho - \rho) = 0$$

also

$$\Delta\psi = 0 \quad \text{in } V \quad (3.56)$$

und

$$\psi|_R = \Phi_1|_R - \Phi_2|_R = \Phi_0 - \Phi_0 = 0. \quad (3.57)$$

Benutzen wir den 1. Greenschen Satz (2.6.10) für die skalaren Funktionen $u = v = \psi$, so gilt

$$\int_V dV \left[\psi \Delta\psi + (\vec{\nabla}\psi)^2 \right] = \int_R dF \psi \frac{\partial\psi}{\partial n}. \quad (3.58)$$

Wegen (3.57) $\psi|_R = 0$ verschwindet die rechte Seite von (3.58). Setzen wir auf der linken Seite gemäß Gleichung (3.56) $\Delta\psi = 0$ ein, so folgt

$$\int_V dV (\vec{\nabla}\psi)^2 = 0$$

oder

$$\vec{\nabla}\psi = 0,$$

so dass

$$\psi(\vec{r}) = \text{const.}, \quad (3.59)$$

d.h. die beiden möglichen Lösungen $\Phi_1(\vec{r})$ und $\Phi_2(\vec{r})$ können sich nur um eine Konstante unterscheiden.

Für die Dirichlet-Randbedingung $\psi|_R = 0$ muss die Konstante gleich Null sein. Für die von-Neumann-Randbedingung ist die Lösung bis auf diese unwesentliche Konstante festgelegt.

3.8.4 Greensfunktion

Die partikuläre Lösung in (3.50) lässt sich mithilfe der Greensfunktion $G(\vec{r}, \vec{r}')$ konstruieren, die die Poisson-Gleichung mit Punktquelle am Ort \vec{r}' erfüllt:

$$\Delta_r G(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}') . \quad (3.60)$$

Die partikuläre Lösung $\Phi_{part}(\vec{r})$ ist dann durch

$$\Phi_{part}(\vec{r}) = \int d^3r' G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') \quad (3.61)$$

gegeben, weil

$$\begin{aligned} \Delta_r \Phi_{part}(\vec{r}) &= \int d^3r' \rho(\vec{r}') \Delta_r G(\vec{r}, \vec{r}') \\ &= -4\pi \int d^3r' \rho(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') = -4\pi\rho(\vec{r}) \end{aligned}$$

gemäß (3.52) Q.E.D.

Aufgrund der Beziehung (2.136) (siehe auch Kap. 3.3)

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}') = -\frac{1}{4\pi} \Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} , \quad (3.62)$$

wissen wir, dass eine Lösung von (3.60) durch

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (3.63)$$

gegeben ist. Allgemein ist

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + f(\vec{r}, \vec{r}') , \quad (3.64)$$

wobei f die Laplace-Gleichung $\Delta f = 0$ erfüllt. Die Greensfunktion bei vorgegebenen Randbedingungen lässt sich also mithilfe der homogenen Lösungen $\Delta f = 0$ der Laplace-Gleichung und den vorausgesetzten Randbedingungen konstruieren. In Kap. 3.10 kommen wir auf diese allgemeine Darstellung zurück.

Eine einfache Lösung von Gleichung (3.53) für das partikuläre Potential einer beliebigen Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}')$, d.h.

$$\Phi_{part}(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

wird man nur bei Vorliegen von symmetrischen Ladungsverteilungen angeben können. Daher sind *Näherungsmethoden* von Interesse, wie z.B. die Entwicklung nach Multipolen, die wir als nächstes besprechen.

3.9 Entwicklung des skalaren Potentials einer statischen, begrenzten Ladungsverteilung nach Multipolen

Wir untersuchen die in Abbildung 3.9 gezeigte auf das Gebiet G begrenzte Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}')$. Den Vektor

$$\vec{r}_S = \frac{\int_G d^3r' \vec{r}' \rho(\vec{r}')}{\int_G d^3r' \rho(\vec{r}')} \quad (3.65)$$

bezeichnet man als *Ladungsschwerpunktsvektor*. Das Koordinatensystem sei so gewählt, dass $\vec{r}_S = \vec{0}$ erfüllt ist.

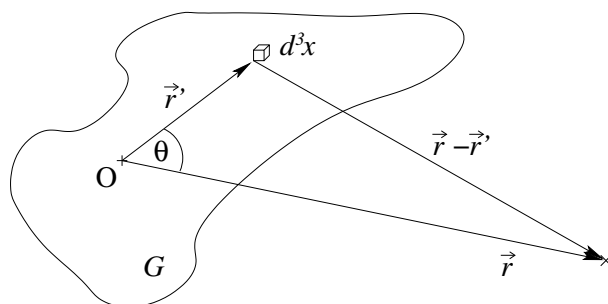


Abbildung 3.9: Begrenzte Ladungsverteilung mit Ladungsschwerpunkt $\vec{r}_S = \vec{0}$

3.9.1 Multipole

Gemäß Gleichung (3.53) berechnen wir das im Punkt \vec{r} durch diese Ladungsverteilung hervorgerufene Potential $A_0(\vec{r}) \equiv \Phi_{part}(\vec{r})$ zu

$$A_0(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

durch Entwicklung nach Multipolen für $r > r'$.

Mit

$$\cos \theta = \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{|\vec{r}| |\vec{r}'|}$$

folgt aus Abbildung 3.9 mit dem Kosinussatz

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(\vec{r} - \vec{r}')^2} = \sqrt{r^2 - 2rr' \cos \theta + (r')^2},$$

$$\text{also } |\vec{r} - \vec{r}'| = r \sqrt{1 - 2 \frac{r'}{r} \cos \theta + \left(\frac{r'}{r}\right)^2}. \quad (3.66)$$

3.9 Entwicklung des skalaren Potentials einer statischen, begrenzten Ladungsverteilung nach Multipolen

Wir definieren $\mu = \cos \theta$ und $s = r'/r$. Damit lautet Gleichung (3.66)

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = r\sqrt{1 - 2s\mu + s^2},$$

so dass wir für das Potential (3.9.1) erhalten:

$$A_0(\vec{r}) = \frac{1}{r} \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{\sqrt{1 - 2s\mu + s^2}}, \quad \text{mit } s = \frac{r'}{r}. \quad (3.67)$$

Jetzt nutzen wir die Definition der *Legendre-Polynome* $P_l(\mu)$ über deren *erzeugende Funktion*

$$T(\mu, s) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2s\mu + s^2}} \equiv \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\mu) s^l, \quad (3.68)$$

d.h. die Legendre-Polynome werden als Entwicklungskoeffizienten der Potenzreihenentwicklung von $T(\mu, s)$ definiert.

Mit $s = r'/r$ folgt dann für das Potential (3.67) die Multipolentwicklung

$$\begin{aligned} A_0(\vec{r}) &= \frac{1}{r} \int d^3r' \sum_{l=0}^{\infty} \rho(\vec{r}') P_l(\mu) \left(\frac{r'}{r}\right)^l \\ &= \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^l} \int d^3r' P_l(\mu) (r')^l \rho(\vec{r}'), \end{aligned}$$

$$\text{also} \quad A_0(\vec{r}) = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{Q_l}{r^l} \quad (3.69)$$

mit den *Multipolen*

$$Q_l = \int d^3r' \rho(\vec{r}') P_l(\mu) (r')^l. \quad (3.70)$$

Die Multipole Q_l müssen mit den Legendre-Polynomen $P_l(\mu)$ ausgerechnet werden.

3.9.2 Eigenschaften der Legendre-Polynome

Rekursionsbeziehungen: Wir bilden mit Gleichung (3.68) die partielle Ableitung bezüglich s :

$$\frac{\partial T}{\partial s} = \sum_{l=0}^{\infty} l P_l(\mu) s^{l-1} = -\frac{\frac{1}{2}(-2\mu + 2s)}{(1 - 2\mu s + s^2)^{3/2}},$$

$$\text{oder} \quad \sum_{l=0}^{\infty} l P_l(\mu) s^{l-1} = \frac{\mu - s}{(1 - 2\mu s + s^2)^{3/2}}.$$

3 Elektrostatik

Wir multiplizieren diese Gleichung mit $(1 - 2\mu s + s^2)$ und nutzen auf der rechten Seite erneut Gleichung (3.68):

$$\begin{aligned} (1 - 2\mu s + s^2) \sum_{l=0}^{\infty} l P_l(\mu) s^{l-1} &= (\mu - s) \frac{1}{(1 - 2\mu s + s^2)^{1/2}} \\ &= (\mu - s) \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\mu) s^l, \end{aligned}$$

d.h. wir erhalten die Beziehung

$$(1 - 2\mu s + s^2) \sum_{l=0}^{\infty} l P_l(\mu) s^{l-1} + (s - \mu) \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\mu) s^l = 0. \quad (3.71)$$

Wir schreiben diese Identität etwas anders:

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} m P_m(\mu) s^{m-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2\mu n P_n(\mu) s^n + \sum_{l=0}^{\infty} l P_l(\mu) s^{l+1} \\ + \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\mu) s^{l+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \mu P_n(\mu) s^n = 0. \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich für jede Potenz von s mit $m = n + 1$ und $l = n - 1$ ergibt

$$(n + 1)P_{n+1}(\mu) - 2\mu n P_n(\mu) + (n - 1)P_{n-1}(\mu) + P_{n-1}(\mu) - \mu P_n(\mu) = 0$$

$$\text{oder} \quad (n + 1)P_{n+1}(\mu) - (2n + 1)\mu P_n(\mu) + n P_{n-1}(\mu) = 0.$$

Als erste Rekursionsbeziehung erhalten wir

$$(2n + 1)\mu P_n(\mu) = (n + 1)P_{n+1}(\mu) + n P_{n-1}(\mu). \quad (3.72)$$

Differentialgleichung der Legendre-Polynome: Wir bilden mit Gleichung (3.68) die partielle Ableitung bezüglich μ :

$$\frac{\partial T}{\partial \mu} = \sum_{l=0}^{\infty} P'_l(\mu) s^l = \frac{-\frac{1}{2}(-2s)}{(1 - 2\mu s + s^2)^{3/2}} = \frac{s}{(1 - 2\mu s + s^2)^{3/2}}$$

$$\text{oder} \quad (1 - 2\mu s + s^2) \sum_{l=0}^{\infty} P'_l(\mu) s^l = \frac{s}{(1 - 2\mu s + s^2)^{1/2}} = s \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\mu) s^l.$$

Dabei ist $P'_l(\mu) = dP_l(\mu)/d\mu$. Wir erhalten also die Identität

$$(1 - 2\mu s + s^2) \sum_{l=0}^{\infty} P'_l(\mu) s^l - s \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\mu) s^l = 0.$$

Wir schreiben diese Identität wieder etwas anders:

$$\sum_{m=0}^{\infty} P'_m(\mu) s^m - \sum_{n=0}^{\infty} 2\mu P'_n(\mu) s^{n+1} + \sum_{l=0}^{\infty} P'_l(\mu) s^{l+2} - \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\mu) s^{n+1} = 0.$$

3.9 Entwicklung des skalaren Potentials einer statischen, begrenzten Ladungsverteilung nach Multipolen

Der Koeffizientenvergleich für jede Potenz von s mit $m = n + 1$ und $l = n - 1$ ergibt

$$P'_{n+1}(\mu) - 2\mu P'_n(\mu) + P'_{n-1}(\mu) - P_n(\mu) = 0$$

oder

$$P'_{n+1}(\mu) + P'_{n-1}(\mu) = 2\mu P'_n(\mu) + P_n(\mu). \quad (3.73)$$

Wir multiplizieren diese Gleichung mit $(2n + 1)$:

$$(a) \quad (2n + 1)P'_{n+1}(\mu) + (2n + 1)P'_{n-1}(\mu) = 2(2n + 1)\mu P'_n(\mu) + (2n + 1)P_n(\mu).$$

Wir differenzieren die Rekursionsbeziehung (3.72) nach μ :

$$(2n + 1)P_n(\mu) + (2n + 1)\mu P'_n(\mu) = (n + 1)P'_{n+1}(\mu) + nP'_{n-1}(\mu)$$

und multiplizieren das Ergebnis mit dem Faktor 2:

$$(b) \quad 2(2n + 1)P_n(\mu) + 2(2n + 1)\mu P'_n(\mu) = 2(n + 1)P'_{n+1}(\mu) + 2nP'_{n-1}(\mu).$$

Die Addition der Gleichungen (a) und (b) ergibt

$$\begin{aligned} (2n + 1)P'_{n+1} + (2n + 1)P'_{n-1} + 2(2n + 1)P_n + 2\mu(2n + 1)P'_n \\ = 2\mu(2n + 1)P'_n + (2n + 1)P_n + 2(n + 1)P'_{n+1} + 2nP'_{n-1} \end{aligned}$$

oder nach Ordnen

$$\begin{aligned} [2(2n + 1) - (2n + 1)] P_n &= [2(n + 1) - (2n + 1)] P'_{n+1} \\ &\quad + [2n - (2n + 1)] P'_{n-1}, \end{aligned}$$

$$\text{also} \quad (2n + 1)P_n(\mu) = P'_{n+1}(\mu) - P'_{n-1}(\mu). \quad (3.74)$$

Lösen wir diese Gleichung nach P'_{n+1} auf,

$$P'_{n+1} = (2n + 1)P_n + P'_{n-1},$$

und setzen nach (3.73)

$$P'_{n-1} = 2\mu P'_n + P_n - P'_{n+1}$$

ein, so folgt

$$\begin{aligned} 2P'_{n+1} &= 2(n + 1)P_n + 2\mu P'_n \\ \text{oder} \quad P'_{n+1}(\mu) &= (n + 1)P_n(\mu) + \mu P'_n(\mu). \end{aligned} \quad (3.75)$$

Ebenso können wir Gleichung (3.74) auch nach P'_{n-1} auflösen,

$$P'_{n-1} = P'_{n+1} - (2n + 1)P_n,$$

und nach (3.75) P'_{n+1} einsetzen:

$$P'_{n-1} = (n + 1)P_n + \mu P'_n - (2n + 1)P_n = \mu P'_n - nP_n.$$

3 Elektrostatik

Wir erhalten also

$$P'_{n-1}(\mu) = -nP_n(\mu) + \mu P'_n(\mu). \quad (3.76)$$

Wir setzen in dieser Gleichung $n = k + 1$, so dass gilt

$$P'_k(\mu) = -(k+1)P_{k+1}(\mu) + \mu P'_{k+1}(\mu).$$

Im letzten Term setzen wir nach (3.75)

$$P'_{k+1} = (k+1)P_k + \mu P'_k$$

ein und erhalten

$$\begin{aligned} P'_k &= -(k+1)P_{k+1} + \mu^2 P'_k + \mu(k+1)P_k \\ \text{oder} \quad (1-\mu^2)P'_k &= (k+1)\mu P_k - (k+1)P_{k+1}. \end{aligned}$$

Für den letzten Term dieser Gleichung gilt mit der Rekursionsbeziehung (3.72)

$$\begin{aligned} (k+1)P_{k+1} &= (2k+1)\mu P_k - kP_{k-1}, \\ \text{so dass folgt} \quad (1-\mu^2)P'_k &= kP_{k-1} + \mu P_k [(k+1) - (2k+1)] \\ &= kP_{k-1} - k\mu P_k. \end{aligned}$$

Setzen wir wieder $k = n$, so erhalten wir

$$(1-\mu^2)P'_n(\mu) = -n\mu P_n(\mu) + nP_{n-1}(\mu) \quad (3.77)$$

Wir differenzieren diese Beziehung nach μ :

$$\begin{aligned} (1-\mu^2)P''_n - 2\mu P'_n &= -nP_n - n\mu P'_n + nP'_{n-1} \\ &= -nP_n - n\mu P'_n + n(-nP_n + \mu P'_n) = -nP_n - n^2 P_n, \end{aligned}$$

wobei wir für P'_{n-1} Gleichung (3.76) benutzt haben. Das Umstellen dieser Gleichung ergibt die *Legendresche Differentialgleichung*

$$\begin{aligned} (1-\mu^2)P''_n(\mu) - 2\mu P'_n(\mu) + n(n+1)P_n(\mu) &= \\ \frac{d}{d\mu} \left[(1-\mu^2) \frac{d}{d\mu} P_n(\mu) \right] + n(n+1)P_n(\mu) &= 0, \end{aligned} \quad (3.78)$$

die eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung 2. Ordnung ist.

Mit $\mu = \cos \theta$ schreibt sich Gleichung (3.78) als

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP_n}{d\theta} \right) + n(n+1)P_n = 0. \quad (3.79)$$

Ohne Beweis (Übungsaufgabe) geben wir an, dass die zweimalige Anwendung des Binomialsatzes

$$(1+x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m!}{n!(m-n)!} x^n$$

3.9 Entwicklung des skalaren Potentials einer statischen, begrenzten Ladungsverteilung nach Multipolen

auf die erzeugende Funktion $T(\mu, s)$ die folgende Darstellung ergibt:

$$P_n(\mu) = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} \mu^{n-2k} \quad (3.80)$$

wobei
$$[n/2] = \begin{cases} n/2 & \text{für } n \text{ gerade} \\ (n-1)/2 & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases} .$$

Ohne Beweis geben wir auch die *Formel von Rodrigues* an:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n . \quad (3.81)$$

Mit diesen Darstellungen ergibt sich sofort für $n = 0, 1$, dass

$$P_0(\mu) = (-1)^0 \frac{0!}{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} \mu^0 = 1 \quad (3.82)$$

$$P_1(\mu) = (-1)^0 \frac{2!}{2 \cdot 1 \cdot 1! \cdot 1!} \mu = \mu . \quad (3.83)$$

Aus der Rekursionsbeziehung (3.72) folgen daraus alle höheren Legendre-Polynome für $n \geq 2$; z. B. finden wir aus (3.72) mit $n = 1$:

$$2P_2 = 3\mu P_1 - P_0 = 3\mu^2 - 1 ,$$

d.h.
$$P_2(\mu) = \frac{1}{2} (3\mu^2 - 1) . \quad (3.84)$$

Mit $n = 2$ ergibt diese Rekursionsbeziehung

$$3P_3 = 5\mu P_2 - 2P_1 = \frac{5\mu}{2} (3\mu^2 - 1) - 2\mu ,$$

oder
$$P_3(\mu) = \frac{1}{2} (5\mu^3 - 3\mu) . \quad (3.85)$$

In Abbildung 3.10 sind die ersten 4 Legendre-Polynome gezeichnet.

Orthogonalität: Wir starten von der Legendreschen Differentialgleichung (3.78) für den Index n ,

$$\frac{d}{d\mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{d}{d\mu} P_n(\mu) \right] + n(n+1) P_n(\mu) = 0 ,$$

und für den Index $l \neq n$,

$$\frac{d}{d\mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{d}{d\mu} P_l(\mu) \right] + l(l+1) P_l(\mu) = 0 .$$

Wir multiplizieren die erste Gleichung mit $P_l(\mu)$ und die zweite Gleichung mit $P_n(\mu)$ und bilden dann die Differenz der Ergebnisse:

$$\begin{aligned} & [n(n+1) - l(l+1)] P_l(\mu) P_n(\mu) \\ &= P_l(\mu) \frac{d}{d\mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{d}{d\mu} P_n(\mu) \right] - P_n(\mu) \frac{d}{d\mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{d}{d\mu} P_l(\mu) \right] \\ &= \frac{d}{d\mu} \left[(1 - \mu^2) P_l(\mu) \frac{dP_n(\mu)}{d\mu} - (1 - \mu^2) P_n(\mu) \frac{dP_l(\mu)}{d\mu} \right] . \end{aligned}$$

3 Elektrostatik

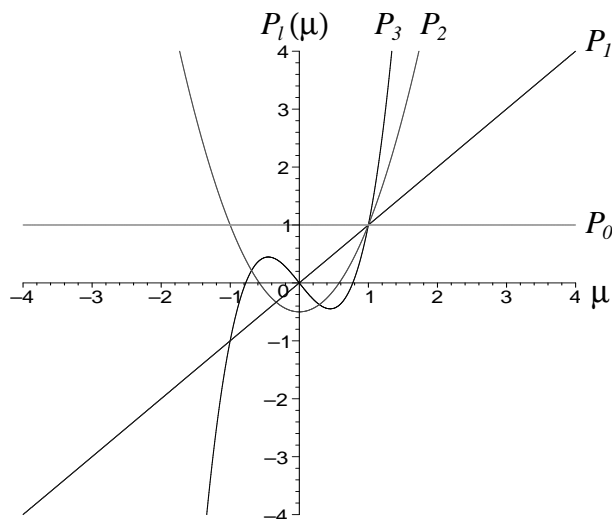


Abbildung 3.10: Die Legendre-Polynome $P_l(\mu)$ für $l = 0 \dots 3$

Integrieren wir diese Gleichung über μ , so folgt

$$\begin{aligned}
 & [n(n+1) - l(l+1)] \int_{-1}^1 d\mu P_l(\mu) P_n(\mu) \\
 &= \int_{-1}^1 d\mu \frac{d}{d\mu} \left[(1-\mu^2) P_l(\mu) \frac{dP_n(\mu)}{d\mu} - (1-\mu^2) P_n(\mu) \frac{dP_l(\mu)}{d\mu} \right] \\
 &= \left[(1-\mu^2) \left[P_l(\mu) \frac{dP_n(\mu)}{d\mu} - P_n(\mu) \frac{dP_l(\mu)}{d\mu} \right] \right]_{-1}^1 = 0
 \end{aligned}$$

aufgrund des Faktors $(1-\mu^2)$. Für $l \neq n$ folgt daher die *Orthogonalitätsrelation*

$$\int_{-1}^1 d\mu P_l(\mu) P_n(\mu) = 0. \quad (3.86)$$

Übungsaufgabe:

Beweisen Sie die Orthonormalitätsrelation

$$\int_{-1}^1 d\mu P_n^2(\mu) = \frac{2}{2n+1}. \quad (3.87)$$

3.9.3 Multipolentwicklungen

Da wir nun die Legendre-Polynome explizit kennen, können wir die Multipole (3.70) Q_l berechnen. Wir erhalten für den Multipol niedrigster Ordnung

$$Q_0 = \int d^3r' \rho(\vec{r}') \cdot 1 = \int d^3r' \rho(\vec{r}') = Q \quad \text{Gesamtladung} \quad (3.88)$$

3.9 Entwicklung des skalaren Potentials einer statischen, begrenzten Ladungsverteilung nach Multipolen

gerade die Gesamtladung unserer Ladungsverteilung.

Den Multipol 1. Ordnung

$$Q_1 = \int d^3r' \rho(\vec{r}') \mu r' \quad (3.89)$$

bezeichnet man als *Dipolmoment*.

Den Multipol 2. Ordnung

$$Q_2 = \int d^3r' \rho(\vec{r}') \frac{1}{2} (3\mu^2 - 1) (r')^2 \quad (3.90)$$

bezeichnet man als *Quadrupolmoment*. Die Multipolentwicklung (3.69) lautet dann

$$A_0(\vec{r}) = \frac{Q_0}{r} + \frac{Q_1}{r^2} + \frac{Q_2}{r^3} + \dots \quad (3.91)$$

Für große Entfernungen dominiert der erste Term $Q_0/r!$ Bei großen Abständen verhält sich die Ladungsverteilung also wie eine Punktladung im Ursprung mit der Gesamtladung $q = Q$. Enthält die Ladungsverteilung gleichviel positive wie negative Ladungsträger, ist die Gesamtladung $Q = 0$. In diesem Fall ist das Dipolmoment in der Potentialentwicklung (3.91) der dominante Term für große Entfernungen (falls nicht auch dieser bei entsprechender symmetrischer Ladungsanordnung gleich Null ist), also

$$A_0(\vec{r}, r \gg 1) \simeq \frac{Q_1}{r^2} = \frac{1}{r^2} \int d^3r' \rho(\vec{r}') \mu r' = A_{Dipol}(\vec{r}) \quad (3.92)$$

Mit $\mu = \cos \theta$, $\theta = \angle(\vec{r}, \vec{r}')$ gilt

$$r' \cos \theta = \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r},$$

so dass das Dipolpotential (3.92) lautet

$$A_{Dipol}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \int d^3r' r' \rho(\vec{r}') \quad (3.93)$$

Dies schreiben wir als

$$A_{Dipol}(\vec{r}) = \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{r^3} \quad (3.94)$$

mit der alternativen Darstellung des Dipolmoments durch

$$\vec{p} = \int d^3r' r' \rho(\vec{r}') \quad (3.95)$$

Das Dipolmoment (3.95) hängt von der Geometrie (Größe, Form und Dichte) der Ladungsverteilung ab.

3.9.4 Beispiel: Der physikalische Dipol

Als Beispiel betrachten wir die Dipolladungsverteilung

$$\rho(\vec{r}) = q\delta\left(\vec{r} - \frac{1}{2}\vec{a}\right) - q\delta\left(\vec{r} + \frac{1}{2}\vec{a}\right), \quad (3.96)$$

dessen Gesamtladung $Q = \int d^3r \rho(\vec{r}) = q - q = 0$ verschwindet. In diesem Fall erhalten wir für das Dipolmoment (3.95)

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \int d^3r' \vec{r}' \rho(\vec{r}') = q \int d^3r' \vec{r}' \delta\left(\vec{r}' - \frac{1}{2}\vec{a}\right) \\ &- q \int d^3r' \vec{r}' \delta\left(\vec{r}' + \frac{1}{2}\vec{a}\right) = \frac{q}{2}\vec{a} - q\left(-\frac{1}{2}\vec{a}\right) = q\vec{a}, \end{aligned} \quad (3.97)$$

so dass nach Gleichung (3.94)

$$A_{Dipol}(\vec{r}) = \frac{q\vec{a} \cdot \vec{r}}{r^3}. \quad (3.98)$$

Für große Entfernungen $r \gg a$ stimmt dieses Ergebnis mit der entsprechenden Näherung für das exakte Potential überein. Führen wir nach Abbildung 3.11 die Abstände r_+ und r_- zur positiven und negativen Ladung ein, so lautet nach Gleichung (3.9.1) und (3.96) das exakte Potential

$$A_E = \frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-}. \quad (3.99)$$

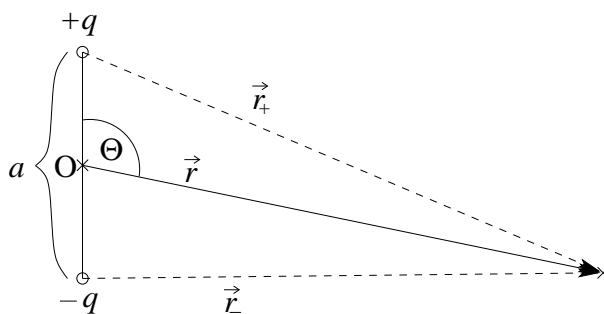


Abbildung 3.11: Zur Berechnung des Dipolfeldes

Nach Abbildung 3.11 ergibt der Kosinussatz

$$\begin{aligned} r_+^2 &= r^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - ra \cos \Theta, \\ r_-^2 &= r^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - ra \cos(\pi - \Theta) = r^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + ra \cos \Theta \end{aligned}$$

3.9 Entwicklung des skalaren Potentials einer statischen, begrenzten Ladungsverteilung nach Multipolen

und wir erhalten für das exakte Potential (3.99)

$$A_E(r) = \frac{q}{r} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a}{r} \cos \Theta + \frac{a^2}{4r^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a}{r} \cos \Theta + \frac{a^2}{4r^2}}} \right). \quad (3.100)$$

Für große Abstände $r \gg a$ vernachlässigen wir den Term $(a^2/4r^2) \ll 1$ und nutzen die Näherung $(1 - \epsilon)^{-1/2} \simeq 1 + (\epsilon/2)$ für $\epsilon \ll 1$, so dass

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{a}{r} \cos \Theta\right)^{-1/2} &\simeq 1 + \frac{a}{2r} \cos \Theta, \\ \left(1 + \frac{a}{r} \cos \Theta\right)^{-1/2} &\simeq 1 - \frac{a}{2r} \cos \Theta. \end{aligned}$$

Für große Abstände $r \gg a$ ergibt sich dann für das exakte Potential (3.100) die Näherung

$$A_E(r \gg a) \simeq \frac{q}{r} \left(1 + \frac{a}{2r} \cos \Theta - \left(1 - \frac{a}{2r} \cos \Theta\right)\right) = \frac{qa \cos \Theta}{r^2} = \frac{q\vec{a} \cdot \vec{r}}{r^3} \quad (3.101)$$

in Übereinstimmung mit Gleichung (3.98).

Aus den Ergebnissen (3.97) und (3.98) oder (3.101),

$$A(r, \Theta) = \frac{qa \cos \Theta}{r^2} = \frac{p \cos \Theta}{r^2}$$

folgt mit $\vec{E} = -\vec{\nabla}A(r, \Theta)$ in Kugelkoordinaten (siehe Gleichung 2.94) das elektrische Feld des Dipolanteils:

$$\begin{aligned} E_r &= -\frac{\partial A}{\partial r} = \frac{2p \cos \Theta}{r^3}, \\ E_\Theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \Theta} = \frac{p \sin \Theta}{r^3}, \\ E_\phi &= -\frac{1}{r \sin \Theta} \frac{\partial A}{\partial \phi} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{also} \quad \vec{E}_{Dipol} = \frac{p}{r^3} (2 \cos \Theta \vec{e}_r + \sin \Theta \vec{e}_\Theta), \quad (3.102)$$

das proportional zu r^{-3} abfällt. Dieses Feld ist in Abbildung 3.12 skizziert.

Übungsaufgabe:

1. Zeigen Sie, dass das elektrische Feld eines physikalischen Dipols koordinatenunabhängig als

$$\vec{E}_{Dipol} = \frac{1}{r^3} \left[\frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^2} - \vec{p} \right] \quad (3.103)$$

ausgedrückt werden kann.

2. Berechnen Sie Potential und elektrisches Feld eines Quadrupols.

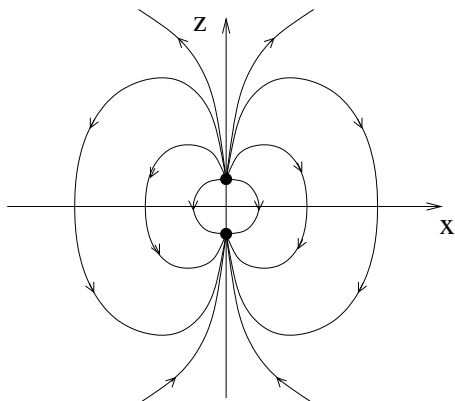


Abbildung 3.12: Das elektrische Feld eines Dipols

3.10 Spiegelungsmethode oder Methode der Bildladungen

In Kap. 3.8 haben wir bemerkt, dass die allgemeine Form der Greensfunktion der Poisson-Gleichung durch Gleichung (3.64) gegeben ist:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + f(\vec{r}, \vec{r}')$$

mit

$$\Delta_r f = 0 \quad \forall \vec{r}, \vec{r}' \in V. \quad (3.104)$$

Wir können die Funktion $f(\vec{r}, \vec{r}')$ physikalisch interpretieren als das Potential einer fiktiven Ladungsverteilung *außerhalb* des Volumens V , das zusammen mit dem Potential $1/|\vec{r} - \vec{r}'|$ der Punktladung $q = 1$ bei \vec{r}' für die gegebenen Randbedingungen auf R sorgt.

Diese Interpretation ist der Ausgangspunkt für die *Spiegelungsmethode* (oder *Methode der Bildladungen*): man bringt außerhalb des betrachteten Volumens V an von der Geometrie des Problems abhängigen Stellen fiktive Ladungen – sogenannte *Bildladungen* – an, durch die die geforderten Randbedingungen erfüllt werden. Da diese Bildladungen außerhalb von V liegen, stören sie die Poisson-Gleichung innerhalb von V nicht. Wir ersetzen also $\rho(\vec{r}')$ **plus Randbedingungen** durch $\rho(\vec{r}')$ **plus Bildladungen ohne Randbedingungen!**

3.10.1 Beispiel: Punktladung vor geerdeter, unendlich ausgedehnter Metallplatte

Wir untersuchen die in Abbildung 3.13 skizzierte Anordnung einer Punktladung im Abstand a vor einer geerdeten (d.h. Potential $\Phi(x = 0) = 0$), unendlich ausgedehnten Metallplatte am Ort $x = 0$. Wir suchen das Potential $\Phi(x)$ dieser Anordnung im Halbraum $x < 0$ und die Influenzladungen auf der Metallplatte. Zu lösen ist ein Dirichletsches Randwertproblem mit

$$\Delta\Phi(x) = -4\pi q\delta(\vec{r} - (-a\vec{e}_x)) \quad \text{für } x < 0 \quad \text{entspricht } V \quad (3.105)$$

und

$$\Phi|_R = \Phi(x = 0, y, z) = 0 \quad \forall y, z. \quad (3.106)$$

3.10 Spiegelungsmethode oder Methode der Bildladungen

Die Randbedingung (3.106) auf der $y - z - Ebene$ bei $x = 0$ realisieren wir durch eine Bildladung q_B außerhalb von V , d.h. im Bereich $x > 0$. Aus Symmetriegründen liegt es nahe, diese Bildladung auf die positive x -Achse zu setzen. Für das Potential setzen wir dann an

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{|\vec{r} + a\vec{e}_x|} + \frac{q_b}{|\vec{r} - b\vec{e}_x|}. \quad (3.107)$$

Die Werte von q_b und b werden so bestimmt, dass die Randbedingung (3.106) erfüllt ist, d.h. $\Phi(\vec{r}) = 0 \quad \forall \vec{r} = (0, y, z)$, also

$$0 = \frac{q}{\sqrt{y^2 + z^2 + (-a)^2}} + \frac{q_b}{\sqrt{y^2 + z^2 + b^2}}. \quad (3.108)$$

Als Lösung erhalten wir $q_b = -q$ und $b = a$ und damit für Gleichung (3.107):

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{|\vec{r} + a\vec{e}_x|} - \frac{q}{|\vec{r} - a\vec{e}_x|}. \quad (3.109)$$

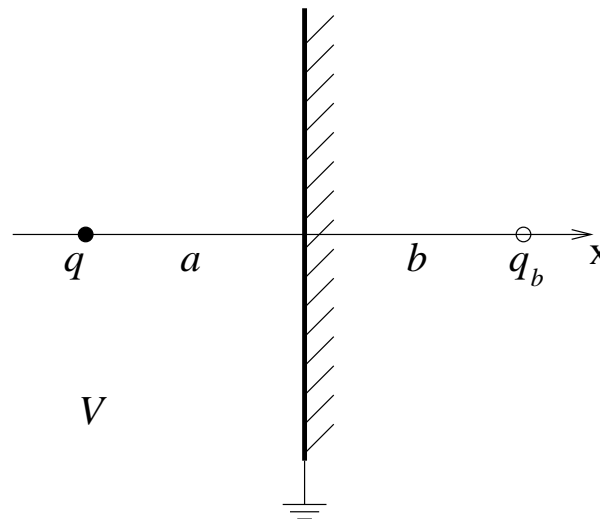


Abbildung 3.13: Punktladung und Bildladung bei der geerdeten Metallplatte

Wegen (siehe Gleichung (3.62))

$$\Delta_r \frac{1}{|\vec{r} - a\vec{e}_x|} = -4\pi\delta(\vec{r} - a\vec{e}_x) = 0 \quad \forall \vec{r} \in V$$

ist Gleichung (3.109) die Lösung der Poisson-Gleichung mit der Randbedingung $\Phi = 0$ auf R . Für das elektrische Feld im Halbraum in V ($x < 0$) erhalten wir damit

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\Phi = q \left[\frac{\vec{r} + a\vec{e}_x}{|\vec{r} + a\vec{e}_x|^3} - \frac{\vec{r} - a\vec{e}_x}{|\vec{r} - a\vec{e}_x|^3} \right]. \quad (3.110)$$

3 Elektrostatik

Gemäß Gleichung (3.47) ergibt sich die influenzierte Oberflächenladung auf der Metallplatte zu

$$\begin{aligned}
 \sigma(y, z) &= -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_R = -\frac{1}{4\pi} \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \Phi \Big|_R \\
 &= -\frac{1}{4\pi} \left(\vec{\nabla} \Phi \right)_x \Big|_R = -\frac{1}{4\pi} E_x(x=0, y, z) \\
 &= -\frac{q}{4\pi} \left[\frac{a}{(y^2 + z^2 + a^2)^{3/2}} + \frac{a}{(y^2 + z^2 + a^2)^{3/2}} \right] \\
 &= -\frac{qa}{2\pi (y^2 + z^2 + a^2)^{3/2}} . \tag{3.111}
 \end{aligned}$$

Die Oberflächenladung ist maximal am Punkt $(y, z) = (0, 0)$ auf der Metallplatte und nimmt mit wachsendem Abstand $s = \sqrt{y^2 + z^2}$ ab. Der Verlauf der elektrischen Feldlinien und der Oberflächenladung ist in Abbildung 3.14 skizziert.

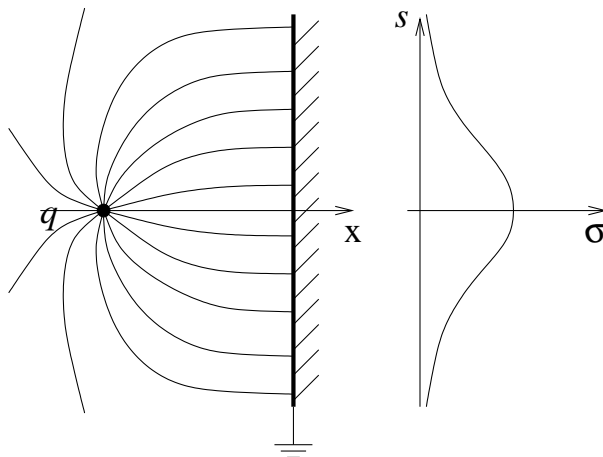


Abbildung 3.14: Verlauf des elektrischen Feldes und der Oberflächenladung σ einer Punktladung vor Metallplatte

Die Gesamtladung auf der Metallplatte ist mit Polarkoordinaten

$$\begin{aligned}
 q_{Infl} &= \int_{x=0} df \sigma(y, z) = 2\pi \int_0^\infty ds s \sigma(s) = -qa \int_0^\infty ds \frac{s}{(a^2 + s^2)^{3/2}} \\
 &= qa \int_0^\infty ds \frac{d}{ds} (a^2 + s^2)^{-1/2} = qa \left[(a^2 + s^2)^{-1/2} \right]_0^\infty = -q . \tag{3.112}
 \end{aligned}$$

Über die Influenzladung üben die Metallplatte und die Punktladung Kräfte aufeinander aus: Die Kraft auf die Punktladung ist $\vec{K} = q\vec{E}'$, wobei \vec{E}' das Feld aller Ladungen außer der Punktladung selbst ist, d.h. \vec{E}' ist gleich dem Feld der Bildladung, also nach (3.110)

$$\vec{E}' = -q \frac{\vec{r} - a\vec{e}_x}{|\vec{r} - a\vec{e}_x|^3} .$$

3.11 Methode der konformen Abbildung bei ebenen Problemen

Für $\vec{r} = (-a, 0, 0)$ folgt

$$\vec{K} = -q\vec{E}' = q^2 \frac{-2a\vec{e}_x}{(-2a)^3} = \frac{q^2}{4a^2}\vec{e}_x. \quad (3.113)$$

Auf die Platte wirkt eine entgegengesetzt gleichgroße Kraft.

Übungsaufgabe:

Punktladung vor geerdeter Metallkugel: Berechnung von \vec{E} , σ und \vec{K} .

3.11 Methode der konformen Abbildung bei ebenen Problemen

Das Problem der Potentialtheorie besteht in der Lösung der Laplace-Gleichung in Raumbereichen außerhalb der Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$. In diesen Bereichen folgt gemäß der elektrostatischen Feldgleichungen (3.16) und (3.17)

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0, \quad (3.114)$$

wobei weiterhin gilt

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0, \quad (3.115)$$

so dass \vec{E} durch das Potential A_0 ausgedrückt werden kann:

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} A_0(\vec{r}). \quad (3.116)$$

Setzt man Gleichung (3.116) in Beziehung (3.114) ein, so folgt die Laplace-Gleichung (vergleiche mit (3.20)).

$$\Delta A_0 = \operatorname{div} \operatorname{grad} A_0 = 0, \quad (3.117)$$

wobei A_0 gegebene Randbedingungen erfüllen muss.

3.11.1 Ebenes Feld

Wir beschränken uns hier auf *ebene Felder*, die nur von zwei kartesischen Koordinaten abhängen. Aufgrund Gleichung (3.114) lässt sich \vec{E} wegen $\operatorname{div} \operatorname{rot} = 0$ auch durch

$$\vec{E} = \operatorname{rot} \vec{A}' \quad (3.118)$$

ein anderes *elektrostatisches Vektor-Potential* $A' = (A'_x, A'_y, A'_z)$ darstellen.

Bei ebenen Problemen ist o.B.d.A.

$$E_x = E_x(x, y), \quad E_y = E_y(x, y), \quad E_z = 0. \quad (3.119)$$

Gemäß der Darstellung (3.118) gilt aber auch

$$E_x = \frac{\partial A'_z}{\partial y} - \frac{\partial A'_y}{\partial z},$$

$$E_y = \frac{\partial A'_x}{\partial z} - \frac{\partial A'_z}{\partial x},$$

und

$$E_z = \frac{\partial A'_y}{\partial x} - \frac{\partial A'_x}{\partial y}.$$

3 Elektrostatik

Aus $E_z = 0$ folgt dann

$$\frac{\partial A'_y}{\partial x} = \frac{\partial A'_x}{\partial y}$$

und speziell

$$A'_x = A'_y = 0, \quad (3.120)$$

was wir als Zusatzforderung an das elektrostatische Vektorpotential für ebene Probleme auffassen. Wir erhalten also einfach

$$\vec{A} = (0, 0, A(x, y)) \quad \text{mit} \quad A = A'_z. \quad (3.121)$$

Damit haben wir einerseits nach Gleichung (3.116) $\vec{E} = -\text{grad } A_0$ und andererseits nach Gleichung (3.118) $\vec{E} = \text{rot } \vec{A}$, oder in unserem Fall

$$E_x = \begin{cases} -\frac{\partial A_0}{\partial x} \\ \frac{\partial A}{\partial y} \end{cases}$$

und

$$E_y = \begin{cases} -\frac{\partial A_0}{\partial y} \\ -\frac{\partial A}{\partial x} \end{cases},$$

so dass gelten muss

$$\frac{\partial A}{\partial y} = -\frac{\partial A_0}{\partial x}, \quad \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial A_0}{\partial y}, \quad (3.122)$$

Die Gleichungen (3.122) fasst man als Cauchy-Riemannsche-Differentialgleichungen für die komplexe Funktion

$$w(\eta) = A_0 - iA, \quad \eta = x + iy \quad (3.123)$$

auf. Die Gültigkeit der Cauchy-Riemannschen-Differentialgleichungen für den Real- und Imaginärteil der komplexen Funktion $w(\eta)$ besagt, dass $w(\eta)$ eine analytische Funktion des komplexen Arguments $\eta = x + iy$ ist. Analytisch heißt: In jedem Punkt η der komplexen Ebene besitzt $w(\eta)$ eine eindeutige Ableitung, unabhängig von der Richtung, in der diese gewählt wird. Die analytische Funktion $w(\eta)$ vermittelt eine konforme (d.h. winkeltreue) Abbildung der komplexen η -Ebene auf die komplexe w -Ebene (siehe Abbildung 3.15).

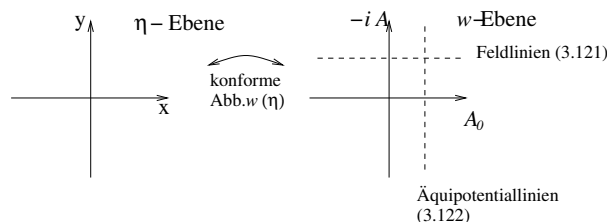


Abbildung 3.15: Zur konformen Abbildung w

Bedeutung von A und A_0 : Die Kraftlinien des elektrischen Feldes werden in der η -Ebene durch die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{E_y}{E_x}$$

3.11 Methode der konformen Abbildung bei ebenen Problemen

beschrieben, d.h.

$$E_x dy = E_y dx . \quad (3.124)$$

Mit $E_y = -\partial_x A$ und $E_x = \partial_y A$ folgt dann nach Einsetzen in Gleichung (3.124)

$$\frac{\partial A(x, y)}{\partial y} dy + \frac{\partial A(x, y)}{\partial x} dx = dA(x, y) = 0 ,$$

oder
$$A(x, y) = const. \quad (3.125)$$

in der w -Ebene, d.h. die Feldlinien werden durch die Gleichung $A = const.$ beschrieben. Weil die Äquipotentiallinien senkrecht zu den Feldlinien stehen, entsprechen die Äquipotentiallinien der Gleichung

$$A_0(x, y) = const. \quad (3.126)$$

Also sind die Äquipotentiallinien durch die Gleichung $\Re w(\eta) = const.$ und die Feldlinien durch die Gleichung $\Im w(\eta) = const.$ bestimmt.

3.11.2 Methode der konformen Abbildung

Sowohl der Realteil (A_0) als auch der Imaginärteil ($-A$) der analytischen Funktion $w(\eta)$ genügen der Poissongleichung im ladungsfreien Raum, denn nach Gleichungen (3.122) folgt aus

dass
$$\frac{\partial A}{\partial y} = -\frac{\partial A_0}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 A_0}{\partial y \partial x} , \quad (3.127)$$

und aus
$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial A_0}{\partial y}$$

folgt
$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 A_0}{\partial x \partial y} . \quad (3.128)$$

Die Summe der Gleichungen (3.127) und (3.128) liefert dann sofort

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = 0$$

oder
$$\Delta(-A) = 0 .$$

Analog zeigt man $\Delta A_0 = 0$.

Anstatt eine Lösung der Potentialgleichung zu berechnen, sucht man aus der Klasse der analytischen Funktionen diejenige heraus, die die Randbedingungen des betreffenden physikalischen Problems erfüllt. Die Linien konstanten Realteils ergeben dann, wie bewiesen, die Äquipotentiallinien, die Linien konstanten Imaginärteils ergeben die Feldlinien.

Die Suche der analytischen Funktionen $w(\eta)$ geschieht meist durch intelligentes Raten.

3.11.3 Beispiel: Gerader geladener Draht durch den Ursprung und senkrecht zur Ebene

Wir betrachten einen geraden geladenen Draht durch den Ursprung und senkrecht zur $x-y$ -Ebene (siehe Abb. 3.16). Wir führen ebene Polarkoordinaten durch $x = r \cos \phi$ und $y = r \sin \phi$ ein.

Wegen der Rotationssymmetrie sind die Äquipotentiallinien durch $r = \text{const.}$ gegeben. Damit liegen die Feldlinien orthogonal dazu, $\phi = \text{const.}$. Für die Feldlinien in der komplexen η -Ebene gilt also $\phi = \text{const.}$, aber r variabel. Da die Feldlinien in der w -Ebene durch die Linien $A = \text{const.}$ bestimmt sind, darf die z -Komponente des skalaren Vektorpotentials A nicht von r abhängen, d.h. $A = A(\phi)$.

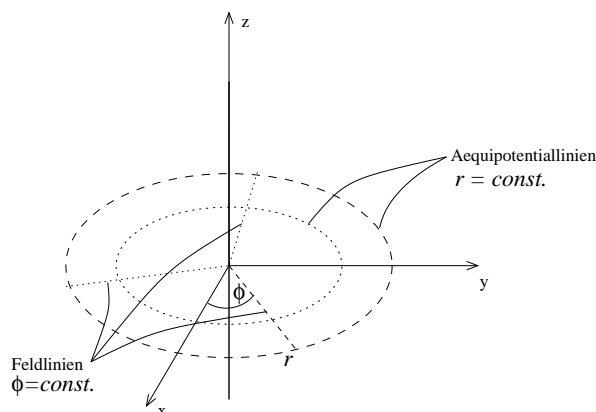


Abbildung 3.16: Gerader Draht mit Äquipotential- und Feldlinien

Ebenso gilt: für die Äquipotentiallinien in der komplexen η -Ebene ist $r = \text{const.}$, aber ϕ variabel. Da die Äquipotentiallinien in der w -Ebene durch die Linien $A_0 = \text{const.}$ bestimmt sind, darf A_0 nicht von ϕ abhängen, d.h. $A_0 = A_0(r)$.

Wir suchen daher eine analytische Funktion

$$w(\eta) = A_0(r) - \imath A(\phi), \quad (3.129)$$

die konzentrische Kreise um den Ursprung O in der η -Ebene auf $\Re w = \text{const.}$ und Geraden durch O in der η -Ebene auf $\Im w = \text{const.}$ abbildet.

Mit den Umkehrtransformationen $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $\phi = \arctan(y/x)$ erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \phi} = \cos \phi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \phi} = \sin \phi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi}.$$

3.11 Methode der konformen Abbildung bei ebenen Problemen

Damit folgt für die erste Cauchy-Riemannsche-Gleichung (3.122a)

$$\begin{aligned} \frac{\partial A(\phi)}{\partial y} &= \frac{\cos \phi}{r} \frac{\partial A(\phi)}{\partial \phi} = -\frac{\partial A_0(r)}{\partial x} = -\cos \phi \frac{\partial A_0(r)}{\partial r}, \\ \text{oder} \quad \frac{\partial A(\phi)}{\partial \phi} &= -r \frac{\partial A_0(r)}{\partial r}. \end{aligned} \quad (3.130)$$

Für die zweite Cauchy-Riemannsche-Gleichung (3.122b)

$$\frac{\partial A(\phi)}{\partial x} = -\frac{\sin \phi}{r} \frac{\partial A(\phi)}{\partial \phi} = \frac{\partial A_0(r)}{\partial y} = \sin \phi \frac{\partial A_0(r)}{\partial r}$$

folgt ebenfalls Gleichung (3.130). Für alle r und ϕ muss die nur von ϕ abhängige linke Seite dieser Gleichung gleich der nur von r abhängigen rechten Seite sein. Beide Seiten müssen deshalb gleich einer Konstanten c sein:

$$r \frac{\partial A_0(r)}{\partial r} = -\frac{\partial A(\phi)}{\partial \phi} = c.$$

Als Lösungen erhalten wir

$$A_0(r) = c_1 + c \ln r, \quad A(\phi) = c_2 - c\phi$$

mit den Integrationskonstanten c_1 und c_2 , die wir gleich Null setzen $c_1 = c_2 = 0$, d.h.

$$A_0(r) = c \ln r, \quad A(\phi) = -c\phi. \quad (3.131)$$

Gemäß Gleichung (3.129) folgt dann

$$w(\eta) = c(\ln r + i\phi) = c \ln \eta, \quad (3.132)$$

mit $\eta = r \exp(i\phi) = r(\cos \phi + i \sin \phi) = x + iy$. Für das elektrische Feld folgt dann

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} A_0(r) = -\frac{c}{r} \vec{e}_r.$$

Die Bestimmungsgleichungen für die Feldlinien und Äquipotentiallinien erhalten wir aus der Umkehrung der Transformation (3.132)

$$\begin{aligned} \eta &= x + iy = \exp\left(\frac{w(\eta)}{c}\right) = \exp\left(\frac{A_0 - iA}{c}\right) \\ &= \exp\left(\frac{A_0}{c}\right) \exp\left(-\frac{iA}{c}\right) \\ &= \exp\left(\frac{A_0}{c}\right) \left[\cos\left(-\frac{A}{c}\right) + i \sin\left(-\frac{A}{c}\right) \right], \end{aligned}$$

so dass

$$\begin{aligned} x &= \exp\left(\frac{A_0}{c}\right) \cos\left(\frac{A}{c}\right), \\ y &= -\exp\left(\frac{A_0}{c}\right) \sin\left(\frac{A}{c}\right). \end{aligned} \quad (3.133)$$

3 Elektrostatik

Daraus folgt

$$x^2 + y^2 = \exp\left(\frac{2A_0}{c}\right),$$

so dass sich für $A_0 = \text{const.}$ tatsächlich konzentrische Kreise als Äquipotentiallinien ergeben. Aus den Gleichungen (3.133) folgt weiterhin

$$\frac{y}{x} = -\tan \frac{A}{c},$$

so dass sich für $A = \text{const.}$ tatsächlich Geraden durch den Ursprung als Feldlinien ergeben.

3.12 Lösung der Laplace-Gleichung durch Separationsansatz

Entsprechen die Randbedingungen den Koordinatenflächen in einem orthogonalen Koordinatensystem, so bietet sich die Lösung durch Separationsansatz in diesen Koordinaten an.

3.12.1 Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten

Mit Gleichung (2.97) für den Laplace-Operator in Kugelkoordinaten erhalten wir für die Laplace-Gleichung

$$\Delta A_0(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial A_0}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \hat{D} A_0 = 0, \quad (3.134)$$

mit dem Winkelanteil

$$\hat{D} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \quad (3.135)$$

Durch den Separationsansatz

$$A_0(r, \theta, \phi) = R(r)Y(\theta, \phi) \quad (3.136)$$

erhalten wir für die Laplace-Gleichung (3.134)

$$\begin{aligned} & \frac{Y(\theta, \phi)}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) + \frac{R(r)}{r^2} \hat{D} Y(\theta, \phi) = 0, \\ \text{oder} \quad & -\frac{1}{Y(\theta, \phi)} \hat{D} Y(\theta, \phi) = \frac{1}{R(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) = l(l+1) \end{aligned} \quad (3.137)$$

gleich der Separationskonstanten $l(l+1)$. Diese spezielle Schreibweise der Separationskonstanten wird sich gleich als sehr sinnvoll erweisen.

Für den Radialteil $R(r)$ gilt nach (3.137) die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = l(l+1)R,$$

3.12 Lösung der Laplace-Gleichung durch Separationsansatz

mit der allgemeinen Lösung ($A, B = \text{const.}$)

$$R(r) = Ar^l + Br^{-(l+1)}. \quad (3.138)$$

Für den Winkelanteil $Y(\theta, \phi)$ gilt nach (3.137) die Differentialgleichung

$$\hat{D}Y(\theta, \phi) + l(l+1)Y(\theta, \phi) = 0,$$

oder ausgeschrieben

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y(\theta, \phi)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y(\theta, \phi)}{\partial \phi^2} + l(l+1)Y(\theta, \phi) = 0. \quad (3.139)$$

Führen wir $\mu = \cos \theta$ ein, so gilt

$$\frac{\partial}{\partial \mu} = \frac{1}{\frac{\partial \mu}{\partial \theta}} \frac{\partial}{\partial \theta} = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta},$$

so dass
$$\frac{\partial}{\partial \theta} = -\sin \theta \frac{\partial}{\partial \mu} = -\sqrt{1-\mu^2} \frac{\partial}{\partial \mu},$$

und Gleichung (3.139) reduziert sich auf

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left[(1-\mu^2) \frac{\partial Y}{\partial \mu} \right] + \frac{1}{1-\mu^2} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} + l(l+1)Y = 0$$

oder
$$(1-\mu^2) \left(\frac{\partial}{\partial \mu} \left[(1-\mu^2) \frac{\partial Y}{\partial \mu} \right] + l(l+1)Y \right) = -\frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2}. \quad (3.140)$$

Zur Lösung von Gleichung (3.140) machen wir erneut einen Separationsansatz

$$Y(\mu, \phi) = P(\mu)Q(\phi) \quad (3.141)$$

und erhalten damit aus Gleichung (3.140)

$$\frac{1-\mu^2}{P(\mu)} \left(\frac{\partial}{\partial \mu} \left[(1-\mu^2) \frac{\partial P}{\partial \mu} \right] + l(l+1)P \right) = -\frac{1}{Q(\phi)} \frac{\partial^2 Q(\phi)}{\partial \phi^2} = m^2 \quad (3.142)$$

mit der Separationskonstanten m^2 , da die linke Seite der Gleichung (3.142) nur von μ abhängt und die rechte Seite nur von ϕ abhängt.

Für den ϕ -Anteil finden wir dann

$$\frac{d^2 Q(\phi)}{d\phi^2} + m^2 Q(\phi) = 0$$

mit der Lösung
$$Q(\phi) = A_1 \exp(im\phi)$$

O.B.d.A. setzen wir $A_1 = 1$, so dass

$$Q(\phi) = \exp(im\phi). \quad (3.143)$$

3 Elektrostatik

Die Forderung der Periodizität $Q(\phi + 2\pi) = Q(\phi)$ an diese Lösung führt auf die Bedingung

$$\exp(i2\pi m) = \cos 2\pi m + i \sin 2\pi m = 1$$

und damit auf die Werte

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \text{ ganzzahlig} \quad (3.144)$$

für die Separationskonstante.

Für den μ -Anteil finden wir aus Gleichung (3.142)

$$\frac{d}{d\mu} (1 - \mu^2) \frac{dP}{d\mu} + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1 - \mu^2} \right] P(\mu) = 0. \quad (3.145)$$

3.12.2 Zylindersymmetrie

Wir beschränken uns zunächst auf den Fall, dass die Lösung (3.136)

$$A_0 = R(r)P(\mu)Q(\phi)$$

nicht von ϕ abhängt, d.h. nach Gleichung (3.143) $m = 0$. Dann reduziert sich Gleichung (3.145) auf die Legendresche Differentialgleichung (vergl. mit (3.78))

$$\frac{d}{d\mu} (1 - \mu^2) \frac{dP}{d\mu} + l(l+1)P(\mu) = 0, \quad (3.146)$$

$$\text{d.h.} \quad P(\mu) = P_l(\mu) \quad (3.147)$$

mit $l = 0, 1, 2, 3, \dots$: Die allgemeine Lösung (3.136) lautet dann mit Gleichung (3.138)

$$A_0(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + B_l r^{-(l+1)} \right) P_l(\cos \theta). \quad (3.148)$$

Die Konstanten A_l und B_l werden mit Hilfe der Orthogonalitätsrelation (3.86) der Legendre-Polynome aus den Randbedingungen für das Potential A_0 bestimmt.

3.12.3 Entwicklung nach Legendre-Polynomen

Die Gleichungen (3.86) und (3.87) lassen sich zur *Orthonormalitätsrelation*

$$\int_{-1}^1 d\mu P_l(\mu) P_n(\mu) = \int_0^\pi d\theta \sin \theta P_l(\theta) P_n(\theta) = \frac{2}{2n+1} \delta_{n,l} \quad (3.149)$$

zusammenfassen.

Während Gleichung (3.149) für $n \neq l$ bereits in Kap. 3.9.2 bewiesen wurde, beweisen wir jetzt zunächst diese Relation für den Fall $n = l$: Mit der erzeugenden Funktion (3.68) folgt

$$\frac{1}{1 - 2tx + t^2} = \left[\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n \right]^2.$$

3.12 Lösung der Laplace-Gleichung durch Separationsansatz

Integrieren wir diese Beziehung über x und nutzen die Orthogonalität (3.86) aus, so folgt

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 \frac{dx}{1-2tx+t^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{m=0}^{\infty} t^m \int_{-1}^1 dx P_n(x) P_m(x) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{m=0}^{\infty} t^m \int_{-1}^1 dx P_n^2(x) \delta_{n,m} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} \int_{-1}^1 dx P_n^2(x). \tag{3.150}
 \end{aligned}$$

Auf der linken Seite dieser Gleichung substituieren wir

$$y = 1 + t^2 - 2tx,$$

d.h. in Umkehrung
$$x = \frac{1+t^2-y}{2t},$$

so dass
$$\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{2t}$$

und für $x = -1$ ist $y = 1 + t^2 + 2t = (1+t)^2,$

und für $x = +1$ ist $y = 1 + t^2 - 2t = (1-t)^2.$

Damit erhalten wir

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{1-2tx+t^2} = \frac{1}{2t} \int_{(1-t)^2}^{(1+t)^2} \frac{dy}{y} = \frac{1}{2t} \ln \left(\frac{1+t}{1-t} \right)^2 = \frac{1}{t} \ln \frac{1+t}{1-t}.$$

Die rechte Seite dieser Beziehung entwickeln wir in eine Potenzreihe im Bereich $-1 \leq t \leq 1$ (Übungsaufgabe) mit dem Ergebnis

$$\frac{1}{t} \ln \frac{1+t}{1-t} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{2n+1}.$$

Eingesetzt in Gleichung (3.150)

$$2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} \int_{-1}^1 dx P_n^2(x),$$

folgt die Behauptung

$$\int_{-1}^1 dx P_n^2(x) = \frac{2}{2n+1}$$

Q.E.D.

Mit der Orthonormalitätsrelation (3.149) können wir jede beliebige stetige Funktion $f(\mu)$ im Intervall $-1 \leq \mu \leq 1$ nach Legendre-Polynomen entwickeln:

$$f(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\mu), \tag{3.151}$$

3 Elektrostatik

wobei die Entwicklungskoeffizienten a_n mit Hilfe der Orthonormalitätsrelation (3.149) berechnet werden. Es gilt offensichtlich

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 d\mu f(\mu) P_l(\mu) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{-1}^1 d\mu P_n(\mu) P_l(\mu) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \delta_{n,l} \int_{-1}^1 d\mu P_l^2(\mu) = \frac{2a_l}{2l+1} \end{aligned}$$

oder
$$a_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 d\mu f(\mu) P_l(\mu) .$$

Benutzen wir wieder den Index n , so folgt

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 d\mu f(\mu) P_n(\mu) . \quad (3.152)$$

Es gilt also die Entwicklung

$$f(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} P_n(\mu) \int_{-1}^1 d\mu f(\mu) P_n(\mu) . \quad (3.153)$$

3.12.4 Zylindersymmetrisches Beispiel: Leitende Kugel im homogenen Feld

Als Beispiel betrachten wir, wie in Abbildung 3.17 skizziert, eine leitende Kugel vom Radius r_0 in einem vorher homogenen Feld $\vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_z$ mit $E_0 = \text{const.}$, d.h.

$$A_0(r \rightarrow \infty) = -E_0 z .$$

Drücken wir $z = r \cos \theta = r\mu$ durch Kugelkoordinaten aus, so gilt mit Gleichung (3.83) als Randbedingung

$$A_0(r \rightarrow \infty) = -E_0 r \mu = -E_0 r P_1(\mu) . \quad (3.154)$$

Die allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung (3.148) im Außenraum $r \geq r_0$

$$A_0(r \geq r_0, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n P_n(\mu) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n r^{-(n+1)} P_n(\mu)$$

muss für $r \rightarrow \infty$ gleich der Randbedingung (3.154) sein. Daraus folgt, dass

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0 \quad \forall n > 1$$

und $a_1 = -E_0$. Wir finden also

$$A_0(r \geq r_0, \mu) = \frac{b_0}{r} + \left(\frac{b_1}{r^2} - E_0 r \right) P_1(\mu) + \sum_{n=2}^{\infty} b_n \frac{P_n(\mu)}{r^{n+1}} . \quad (3.155)$$

3.12 Lösung der Laplace-Gleichung durch Separationsansatz

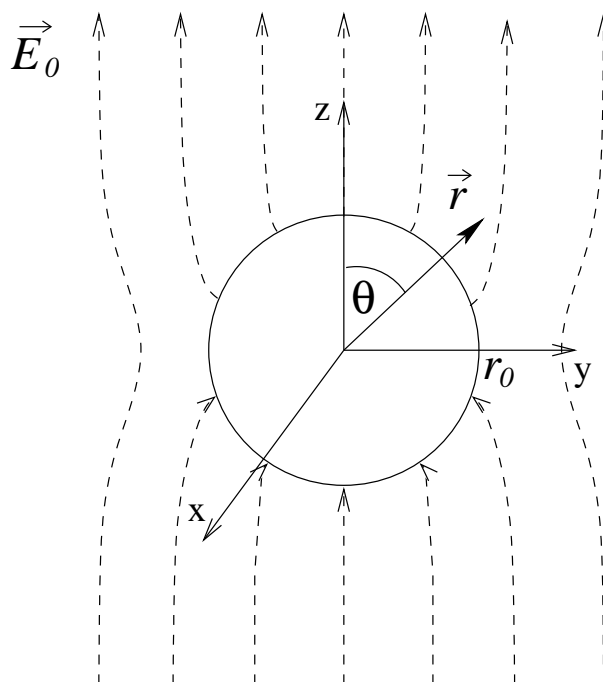


Abbildung 3.17: Leitende Kugel im homogenen \vec{E} -Feld

Wir wählen das Potential auf dem Rand der leitenden Kugel zu

$$V_0 = A_0(r_0) = 0 \quad \forall \mu .$$

Gemäß Gleichung (3.155) folgt dann aus der Forderung

$$A_0(r_0) = \frac{b_0}{r_0} + \left(\frac{b_1}{r_0^2} - E_0 r_0 \right) P_1(\mu) + \sum_{n=2}^{\infty} b_n \frac{P_n(\mu)}{r_0^{n+1}} = 0$$

für alle μ , dass $b_0 = 0$, $b_n = 0$ für $n \geq 2$

und $b_1 = E_0 r_0^3$. Mit den nicht-verschwindenden Koeffizienten a_1 und b_1 folgt für das Potential im Außenraum

$$A_0(r \geq r_0, \mu) = \left(\frac{E_0 r_0^3}{r^2} - E_0 r \right) P_1(\mu) = -E_0 r P_1(\mu) \left(1 - \frac{r_0^3}{r^3} \right). \quad (3.156)$$

Für die induzierte Ladung auf der Kugeloberfläche erhält man

$$\begin{aligned} \sigma &= -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial A_0}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = -\frac{P_1(\mu)}{4\pi} \left(-2 \frac{E_0 r_0^3}{r^3} - E_0 \right)_{r=r_0} \\ &= \frac{3E_0 P_1(\mu)}{4\pi} = \frac{3E_0 \cos \theta}{4\pi}. \end{aligned} \quad (3.157)$$

3 Elektrostatik

σ ist positiv in der oberen Halbkugel $0 \leq \theta \leq \pi/2$ und negativ in der unteren Halbkugel $-\pi/2 \leq \theta < 0$.

Übungsaufgabe:

Auf der Oberfläche der Kugel sei die spezielle Ladungsdichte $\sigma_0(\theta)$ aufgebracht. Man berechne das entsprechende Potential im Außenraum für die Fälle

1. (a) $\sigma_0(\theta) = K \cos \theta$,
2. (b) $\sigma_0(\theta) = K \cos 3\theta$ und
3. (c) $\sigma_0(\theta) = K$, wobei K eine Konstante ist.

3.12.5 Assoziierte Legendre-Polynome

Bei Fallentlassen der Beschränkung auf Zylindersymmetrie ($m \neq 0$ in Lösung (3.143)) wird der Winkelanteil durch Gleichung (3.145) beschrieben,

$$\frac{d}{d\mu}(1-\mu^2)\frac{dP}{d\mu} + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-\mu^2}\right]P(\mu) = 0,$$

die symmetrisch in m ist. Für die Lösung setzen wir an

$$P(\mu) = P^m(\mu) = (1-\mu^2)^{m/2} w_m(\mu), \quad (3.158)$$

so dass

$$\frac{dP^m}{d\mu} = (1-\mu^2)^{m/2} \frac{dw_m}{d\mu} - m\mu (1-\mu^2)^{(m/2)-1} w_m(\mu).$$

Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\mu} \left[(1-\mu^2)^{(m/2)+1} \frac{dw_m}{d\mu} - m\mu (1-\mu^2)^{m/2} w_m \right] + \\ \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-\mu^2} \right] (1-\mu^2)^{m/2} w_m = 0, \end{aligned}$$

oder nach Ausdifferenzieren

$$\begin{aligned} \frac{m+2}{2} (1-\mu^2)^{m/2} (-2\mu) \frac{dw_m}{d\mu} + (1-\mu^2)^{(m/2)+1} \frac{d^2 w_m}{d\mu^2} - \\ m (1-\mu^2)^{m/2} w_m - \mu \frac{m^2}{2} (1-\mu^2)^{(m/2)-1} (-2\mu) w_m - m\mu (1-\mu^2)^{m/2} \frac{dw_m}{d\mu} + \\ \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-\mu^2} \right] (1-\mu^2)^{m/2} w_m = 0. \end{aligned}$$

Wir dividieren durch den Faktor

$$(1-\mu^2)^{(m/2)-1}$$

3.12 Lösung der Laplace-Gleichung durch Separationsansatz

und erhalten

$$(1 - \mu^2)^2 \frac{d^2 w_m}{d\mu^2} - (m+2)\mu(1 - \mu^2) \frac{dw_m}{d\mu} - \mu m(1 - \mu^2) \frac{dw_m}{d\mu} + w_m [-m(1 - \mu^2) + m^2\mu^2 + l(l+1)(1 - \mu^2) - m^2] = 0 ,$$

oder

$$(1 - \mu^2)^2 \frac{d^2 w_m}{d\mu^2} - \mu(1 - \mu^2)(m+2+m) \frac{dw_m}{d\mu} + (1 - \mu^2) w_m [l(l+1) - m^2 - m] = 0 .$$

Nach Division durch $(1 - \mu^2)$ ergibt sich

$$(1 - \mu^2) \frac{d^2 w_m}{d\mu^2} - 2(m+1)\mu \frac{dw_m}{d\mu} + [l(l+1) - m(m+1)] w_m = 0 . \quad (3.159)$$

Für $m = 0$ reduziert sich diese Gleichung auf die Legendresche Differentialgleichung (3.78) für $w_0(\mu)$

$$(1 - \mu^2) \frac{d^2 w_0}{d\mu^2} - 2\mu \frac{dw_0}{d\mu} + l(l+1)w_0 = 0 ,$$

also $w_0(\mu) = P_l(\mu)$ und $P^0(\mu) = P_l(\mu)$. (3.160)

Differenzieren wir Gleichung (3.159) nach μ , so erhalten wir mit der Notation

$$w'_m = \frac{dw_m}{d\mu} , \quad w''_m = \frac{d^2 w_m}{d\mu^2} \text{ usw. ,}$$

$$(1 - \mu^2)w'''_m - 2\mu w''_m - 2(m+1)\mu w''_m - 2(m+1)w'_m + [l(l+1) - m(m+1)]w'_m =$$

$$(1 - \mu^2)w'''_m - 2\mu[1+m+1]w''_m + [l(l+1) - m(m+1) - 2(m+1)]w'_m = 0 ,$$

oder

$$(1 - \mu^2)w'''_m - 2(m+2)\mu w''_m + [l(l+1) - (m+1)(m+2)]w'_m = 0 ,$$

d.h. die Funktion w'_m erfüllt die Differentialgleichung (3.159) für w_{m+1} für $m > 0$:

$$(1 - \mu^2)w''_{m+1} - 2(m+2)\mu w'_{m+1} + [l(l+1) - (m+1)(m+2)]w_{m+1} = 0 .$$

Es ist also

$$w_{m+1} = w'_m = \frac{dw_m}{d\mu} . \quad (3.161)$$

Mit Gleichung (3.160) finden wir dann

$$w_1 = \frac{dw_0}{d\mu} = \frac{dP_l(\mu)}{d\mu} ,$$

$$w_2 = \frac{dw_1}{d\mu} = \frac{d^2 P_l(\mu)}{d\mu^2}$$

und allgemein

$$w_m = \frac{d^m P_l(\mu)}{d\mu^m} .$$

3 Elektrostatik

Gemäß Gleichung (3.158) erhalten wir als Lösung für $m \neq 0$ die *assozierten oder zugeordneten Legendre-Polynome*

$$P_l^m(\mu) (\equiv P^m(\mu)) = (1 - \mu^2)^{|m|/2} \frac{d^m P_l(\mu)}{d\mu^m}, \quad (3.162)$$

die sich aus den Legendre-Polynomen berechnen lassen.

Mit der Formel von Rodrigues (3.81) für $P_l(\mu)$,

$$P_l(\mu) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{d\mu^l} (\mu^2 - 1)^l,$$

folgt die auch für negative Werte von m , $-l \leq m \leq l$ gültige Beziehung

$$P_l^m(\mu) = \frac{(1 - \mu^2)^{|m|/2}}{2^l l!} \frac{d^{m+l}}{d\mu^{m+l}} (\mu^2 - 1)^l. \quad (3.163)$$

Unter Ausnutzung der Leibnitz-Formel

$$\frac{d^n}{dt^n} [A(t)B(t)] = \sum_{s=0}^{\infty} \binom{n}{s} \left[\frac{d^{n-s}}{dt^{n-s}} A(t) \right] \left[\frac{d^s}{dt^s} B(t) \right],$$

wobei

$$\binom{n}{s} = \frac{n!}{(n-s)!s!}$$

zeigt man (Übungsaufgabe), dass

$$P_l^{-m}(\mu) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\mu). \quad (3.164)$$

Weiterhin gilt die Orthonormalitätsrelation (Übungsaufgabe) für zugeordnete Legendre-Polynome

$$\int_{-1}^1 dx P_p^m(x) P_q^m(x) = \frac{2}{2q+1} \frac{(q+m)!}{(q-m)!} \delta_{p,q}. \quad (3.165)$$

Für den Winkelanteil (3.141) erhalten wir mit den Lösungen (3.143) und (3.163) die sogenannten *Kugelflächenfunktionen*

$$Y_{l,m}(\mu, \phi) = N_{l,m} P_l^m(\mu) \exp(im\phi) = N_{l,m} P_l^m(\cos \theta) \exp(im\phi) \quad (3.166)$$

mit m und l ganzzahlig und $-l \leq m \leq l$. $N_{l,m}$ ist ein Normierungsfaktor derart, dass

$$\int d\Omega |Y_{l,m}(\mu, \phi)|^2 = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d\mu |Y_{l,m}(\mu, \phi)|^2 = 1.$$

Man erhält (Übungsaufgabe)

$$N_{l,m} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}}. \quad (3.167)$$

3.12 Lösung der Laplace-Gleichung durch Separationsansatz

Damit gilt die Orthonormalitätsrelation (Übungsaufgabe) für Kugelflächenfunktionen

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d\mu Y_{l,m}(\mu, \phi) Y_{l',m'}^*(\mu, \phi) = \delta_{l,l'} \delta_{m,m'} . \quad (3.168)$$

Die allgemeine Lösung (3.136) der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten lautet damit

$$A_0(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-(l+1)} \right) Y_{l,m}(\theta, \phi) . \quad (3.169)$$

3.12.6 Inneres und äußeres Dirichletproblem für die Kugel

Das *innere Dirichlet-Problem* ist gegeben durch

$$\Delta A_0(r, \theta, \phi) = 0, \quad \text{für } 0 \leq r \leq R \quad (3.170)$$

mit der Randbedingung

$$A_0(R, \theta, \phi) = h(\theta, \phi) . \quad (3.171)$$

Weil die Lösung (3.169) auch für $r \rightarrow 0$ endlich sein soll, müssen alle Koeffizienten $B_{lm} = 0$ sein, d.h.

$$A_0(r \leq R, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm} r^l Y_{l,m}(\theta, \phi)$$

Die Randbedingung (3.171) liefert

$$h(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm} R^l Y_{l,m}(\theta, \phi) ,$$

und über die Orthonormalitätsrelation (3.168) der Kugelflächenfunktionen berechnen sich die Entwicklungskoeffizienten A_{lm} zu

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d\mu Y_{k,s}^*(\theta, \phi) h(\theta, \phi) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm} R^l \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d\mu Y_{k,s}^*(\theta, \phi) Y_{l,m}(\theta, \phi) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm} R^l \delta_{k,l} \delta_{s,m} = A_{ks} R^k . \end{aligned}$$

Nach Umbenennung der Indizes ergibt sich also

$$A_{lm} = R^{-l} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d\mu Y_{l,m}^*(\theta, \phi) h(\theta, \phi) , \quad (3.172)$$

so dass wir als Lösung erhalten:

$$A_0(r \leq R, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(\frac{r}{R} \right)^l \left[\int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d\mu Y_{l,m}^*(\mu, \phi) h(\mu, \phi) \right] Y_{l,m}(\mu, \phi) , \quad (3.173)$$

3 Elektrostatik

wobei

$$Y_{l,m}(\mu, \phi) = N_{lm} P_l^m(\mu) e^{im\phi}, \quad N_{l,m} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}}.$$

Beim *äußeren Dirichlet-Problem* müssen alle Koeffizienten $A_{lm} = 0$ verschwinden, um eine endliche Lösung bei $r \rightarrow \infty$ zu erhalten. Es ergibt sich in analoger Weise

$$A_0(r \geq R, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(\frac{r}{R}\right)^{-(l+1)} \left[\int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d\mu Y_{l,m}^*(\mu, \phi) h(\mu, \phi) \right] Y_{l,m}(\mu, \phi). \quad (3.174)$$

4 Magnetostatik

Der Ausgangspunkt der Elektrostatik ist das Coulomb-Gesetz: Ruhende elektrische Ladungen üben aufeinander Kräfte aus. In der Magnetostatik gilt ein markanter Unterschied, es gibt keine magnetischen Ladungen. Es existiert kein magnetischer Monopol analog zur elektrischen Ladung. Magnetische Ladungen kommen immer nur in engster Kombination mit der magnetischen Gegenladung, d.h. als *magnetische Dipole* vor.

Wir gehen aus vom experimentellen Befund von Oersted, dass ein zeitlich konstanter Strom von elektrischen Ladungen zeitunabhängige Magnetfelder erzeugt, wobei eine Kompassnadel die Richtung dieses Magnetfeldes anzeigt. Ähnlich wie in der Elektrostatik, wo *stationäre elektrische Ladungen auf konstante elektrische Felder* führten, führen in der Magnetostatik *konstante Ströme elektrischer Ladungen auf konstante Magnetfelder*.

4.1 Strom und Stromdichte

4.1.1 Stromdichte und Stromfaden

Die Stromdichte \vec{j} ist der Fluss einer Ladungsmenge dq durch die Fläche dF in der Zeit dt :

$$j = |\vec{j}| = \frac{dq}{dF dt} . \quad (4.1)$$

Die Stromdichte \vec{j} ist der Vektor in Richtung der Bewegungsrichtung der positiven Ladungsträger mit dem Betrag (4.1).

Die zeitliche Ableitung in Gleichung (4.1) soll als einzige nicht verschwinden, damit ein stationärer Strom existieren kann. Unter einem stationären Strom verstehen wir also das Fließen von elektrischen Ladungen, das immer gleich stark vonstatten geht: niemals anwachsend, niemals abfallend und niemals richtungsändernd. Einen solchen Zustand gibt es in der Praxis natürlich nicht. Wir meinen damit den Grenzfall, in dem zeitliche Änderungen viel kleiner als räumliche Änderungen des physikalischen Systems sind.

Eine bewegte Punktladung kann daher keinen stationären Strom erzeugen, da sie sich zu einem Moment an einem Ort und im nächsten Moment an einem anderen Ort befindet. Die Situation ist also gänzlich anders als in der Elektrostatik: dort waren wir von einer Punktladung ausgegangen und hatten mit dem Superpositionsprinzip auf beliebige Ladungsverteilungen erweitert. Hier geht das so nicht, da eine bewegte Punktladung kein statisches Feld erzeugt.

Das Integral der Stromdichte über die Fläche dF mit dem Normalenvektor \vec{n} ergibt den elektrischen Strom

$$I = \int_F \vec{j} \cdot \vec{n} dF = \int_F \vec{j} \cdot d\vec{F} , \quad (4.2)$$

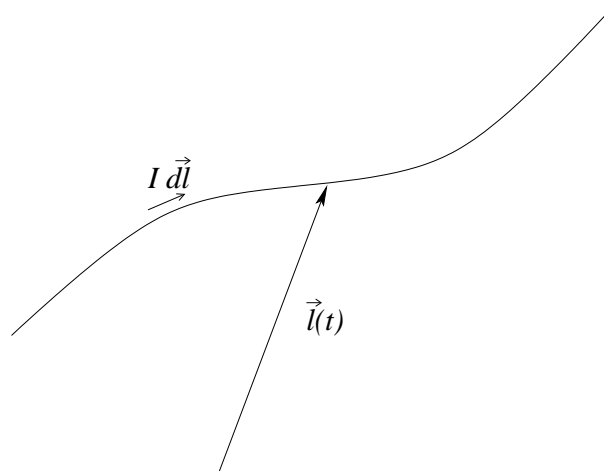


Abbildung 4.1: Der Stromfaden

d.h. der Strom ist Ladung pro Zeiteinheit.

Wir führen jetzt den Begriff des *Stromfadens* ein (siehe Abbildung 4.1): dazu betrachten wir einen dünnen Draht mit der Querschnittsfläche ΔF . $\vec{l}(t)$ beschreibt die Länge des Drahts in Abhängigkeit von dem Bahnparameter t . Die Stromdichte dieses dünnen Drahts ist dann

$$\vec{j} = \frac{I}{\Delta F} \frac{d\vec{l}}{dl},$$

weil jedes Wegelement der Kurve \vec{l} mit $I d\vec{l}$ zur Stromdichte beiträgt. Mit $\Delta F dl = \Delta V = d^3r$ ergibt sich

$$\vec{j}(\vec{r}, t) d^3r = I d\vec{l}. \quad (4.3)$$

Mit Gleichung (4.3) können wir ausgedehnte Stromverteilungen durch Überlagerung von stromdurchflossenen Drahtelementen oder Stromfäden repräsentieren. Gleichung (4.3) ist das Analogon von ausgedehnten Ladungsverteilungen in der Elektrostatik ($dq = \rho d^3r$). In der Magnetostatik beschränken wir uns auf zeitunabhängige Ströme $\vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{j}(\vec{r})$.

4.1.2 Mikroskopische Definition

In einer mikroskopischen klassischen Beschreibung gehen wir von N Punktladungen q_i , $i = 1, \dots, N$ aus mit den jeweiligen Ortsvektoren $\vec{r}_i(t)$ und Geschwindigkeitsvektoren $\vec{v}_i(t) = \dot{\vec{r}}_i(t)$. Damit erhalten wir als atomare Ladungsdichte

$$\rho_{at}(\vec{r}, t) = \sum_{i=1}^N q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \quad (4.4)$$

und als atomare Stromdichte

$$\vec{j}_{at}(\vec{r}, t) = \sum_{i=1}^N q_i \vec{v}_i(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_i). \quad (4.5)$$

Durch räumliche Mittelung dieser atomaren Größen über ein Volumen ΔV erhalten wir die mittleren Ladungs- und Stromdichten:

$$\rho(\vec{r}, t) = \frac{\int_{\Delta V} d^3r \rho_{at}(\vec{r}, t)}{\int_{\Delta V} d^3r} = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} d^3r \sum_{i=1}^N q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} q_i$$

und

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} d^3r \vec{j}_{at}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} q_i \vec{v}_i(t).$$

Sind alle Ladungen gleich $q_i = q$, gilt

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \frac{q}{\Delta V} \sum_{\Delta V} \vec{v}_i(t) \quad (4.6)$$

und

$$\rho(\vec{r}, t) = \frac{q}{\Delta V} \Delta N,$$

oder

$$\frac{q}{\Delta V} = \rho(\vec{r}, t) \frac{1}{\Delta N}, \quad (4.7)$$

wobei ΔN die Anzahl der Ladungen in ΔV ist. Setzen wir (4.7) in Gleichung (4.6) folgt der Zusammenhang

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \frac{1}{\Delta N} \sum_{\Delta V} \vec{v}_i(t) = \rho(\vec{r}, t) \vec{V}(t), \quad (4.8)$$

wobei

$$\vec{V}(t) = \frac{1}{\Delta N} \sum_{\Delta V} \vec{v}_i(t)$$

die mittlere Geschwindigkeit der Ladungen in ΔV ist. Die Stromdichte \vec{j} ist über die Ladungsdichte ρ mit dem Geschwindigkeitsfeld \vec{V} verknüpft.

Beispiel eines stromdurchflossenen Metalldrahts: Ein Metall besteht aus einem Gitter von positiven Ionen und freien Elektronen. Da die mittlere Geschwindigkeit der Ionen gleich Null ist, leisten diese keinen Beitrag zur Stromdichte. Bei angelegter Spannung haben nur die Elektronen eine von Null verschiedene mittlere Geschwindigkeit.

4.1.3 Kontinuitätsgleichung

Gemäß Gleichung (4.2) ist die Stromdichte \vec{j} gleich Strom pro Fläche, so dass $\oint_{O(V)} \vec{j} \cdot d\vec{F}$ der Strom durch die Oberfläche O des Volumens V ist. Ist ρ die Ladungsdichte, dann ist

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V d^3r \rho$$

die zeitliche Änderung der Ladung im Volumen V . Diese Änderung der Ladung im Volumen V muss gleich dem Ladungsstrom durch die Oberfläche sein:

$$0 = \int_V d^3r \frac{\partial \rho}{\partial t} + \oint_{O(V)} \vec{j} \cdot d\vec{F}. \quad (4.9)$$

4 Magnetostatik

Wenden wir das Gauß-Theorem auf den zweiten Term dieser Gleichung an, so erhalten wir

$$0 = \int_V d^3r \frac{\partial \rho}{\partial t} + \int_V d^3r \operatorname{div} \vec{j} = \int_V d^3r \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} \right]$$

für beliebige Volumina V , so dass die *Kontinuitätsgleichung*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0 \quad (4.10)$$

folgt.

Im statischen Fall der Magnetostatik ($\partial \rho / \partial t = 0$) folgt speziell die *magnetostatische Kontinuitätsgleichung*

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0. \quad (4.11)$$

4.2 Ampère-Gesetz

Das Ampère-Gesetz beschreibt die Wechselwirkung zwischen zwei Stromfäden L_1 und L_2 (siehe Abbildung 4.2).

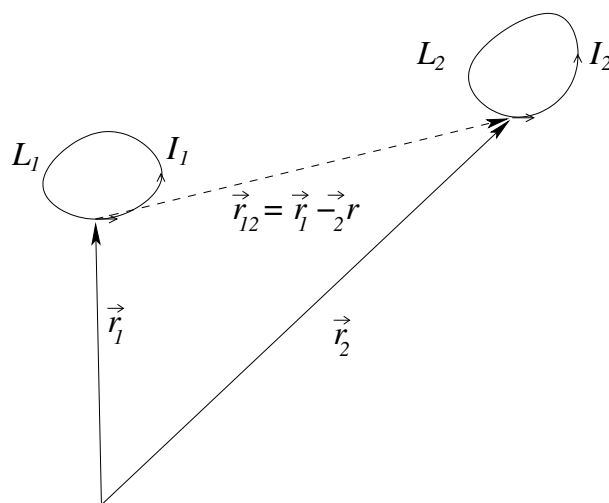


Abbildung 4.2: Die Kraft zwischen zwei Stromfäden

2. *experimentelles Fundamentalgesetz (Ampère-Gesetz): Werden die Stromfäden L_1 und L_2 von den stationären Strömen I_1 und I_2 durchflossen, so treten zwischen L_1 und L_2 Kraftwirkungen auf, die durch*

$$\vec{F}_{12} = K_2 I_1 I_2 \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{d\vec{r}_1 \times (d\vec{r}_2 \times \vec{r}_{12})}{r_{12}^3} \quad (4.12)$$

mit $\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ beschrieben werden können.

4.3 Magnetische Induktion und Biot-Savart-Gesetz

Im CGS-System ist die Proportionalitätskonstante $K_2 = 1/c^2$ festgelegt, so dass

$$\vec{F}_{12} = \frac{I_1 I_2}{c^2} \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{d\vec{r}_1 \times (d\vec{r}_2 \times \vec{r}_{12})}{r_{12}^3}. \quad (4.13)$$

Mit der Identität des dreifachen Kreuzprodukts

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$$

für $\vec{a} = d\vec{r}_1$, $\vec{b} = d\vec{r}_2$ und $\vec{c} = \vec{r}_{12}$ erhalten wir für

$$d\vec{r}_1 \times (d\vec{r}_2 \times \vec{r}_{12}) = (d\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_{12}) \cdot d\vec{r}_2 - (d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2) \cdot \vec{r}_{12},$$

so dass

$$\vec{F}_{12} = \frac{I_1 I_2}{c^2} \left[\oint_{L_2} d\vec{r}_2 \oint_{L_1} d\vec{r}_1 \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} - \oint_{L_1} \oint_{L_2} d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2 \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \right].$$

Der erste Term verschwindet, da mit $\vec{r}_{12}/r_{12}^3 = -\text{grad}(1/r_{12})$

$$\oint_{L_1} d\vec{r}_1 \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} = - \oint_{L_1} d\vec{r}_1 \cdot \text{grad} \frac{1}{r_{12}} = - \int_{O(L_1)} d\vec{f}_1 \cdot \text{rot grad} \frac{1}{r_{12}} = 0,$$

wobei wir das Stokes-Theorem (2.104) und die Beziehung (2.67), $\text{rot grad} = 0$, ausgenutzt haben. Es verbleibt

$$\vec{F}_{12} = -\frac{I_1 I_2}{c^2} \oint_{L_1} \oint_{L_2} d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2 \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \quad (4.14)$$

mit der Eigenschaft Actio=Reactio

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad (4.15)$$

wegen $\vec{r}_{12} = -\vec{r}_{21}$.

4.3 Magnetische Induktion und Biot-Savart-Gesetz

Analog zum Coulomb-Gesetz interpretiert man das Ampère-Gesetz mittels des Feldbegriffs: der Stromfaden L_1 befindet sich in dem vom Stromfaden L_2 erzeugten Kraftfeld, d.h. wir schreiben das Ampère-Gesetz (4.13) als

$$\vec{F}_{12} = \frac{I_1}{c} \oint_{L_1} d\vec{r}_1 \times \vec{B}_2(\vec{r}_1) \quad (4.16)$$

oder

$$\vec{F}_{21} = \frac{I_2}{c} \oint_{L_2} d\vec{r}_2 \times \vec{B}_1(\vec{r}_2), \quad (4.17)$$

mit der *magnetischen Induktion*

$$\vec{B}_i(\vec{r}) \equiv \frac{I_i}{c} \oint_{L_i} \frac{d\vec{r}_i \times (\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}, \quad (4.18)$$

d.h.

$$\vec{B}_2(\vec{r}_1) \equiv \frac{I_2}{c} \oint_{L_2} \frac{d\vec{r}_2 \times \vec{r}_{12}}{r_{12}^3}$$

und

$$\vec{B}_1(\vec{r}_2) \equiv \frac{I_1}{c} \oint_{L_1} \frac{d\vec{r}_1 \times \vec{r}_{21}}{r_{21}^3}.$$

4 Magnetostatik

Gleichung (4.18) wird als *Biot-Savart-Gesetz* bezeichnet. Die Dimension der magnetischen Induktion \vec{B} im CGS-System ist $\text{dyn} (\text{Le})^{-1} = \text{dyn}^{1/2} \text{cm}^{-1} = 1 \text{ Gauss}$, d.h. \vec{E} und \vec{B} haben im CGS-System die gleiche Dimension.

Analog zum elektrischen Feld gilt für das Magnetfeld das Superpositionsprinzip der Kraftwirkungen: das Magnetfeld von stationären Stromkreisen $L_i, i = 1, \dots, n$ entsteht durch Superposition der Einzelfelder der Stromkreise:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^n \vec{B}_i(\vec{r}) = \sum_{i=1}^n \frac{I_i}{c} \oint_{L_i} \frac{d\vec{r}_i \times (\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}. \quad (4.19)$$

Mit Gleichung (4.3), $\vec{j}(\vec{r})d^3r = I d\vec{l}$, gehen wir auf beliebige Stromdichten über und erhalten

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int d^3r' \vec{j}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (4.20)$$

Gleichung (4.20) vergleicht sich mit der Beziehung (3.10) der Elektrostatik

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int d^3r' \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}.$$

Anstelle des Produkts aus ρ und dem Vektor $\vec{r} - \vec{r}'$ haben wir in der magnetostatischen Gleichung (4.20) das Kreuzprodukt aus Stromdichte \vec{j} und dem Vektor $\vec{r} - \vec{r}'$.

Verwenden wir Gleichung (4.3) in der Form $\vec{j}(\vec{r})d^3r = I_1 d\vec{r}_1$, in Beziehung (4.16), so erhalten wir die Kraft

$$\vec{F} = \frac{1}{c} \int d^3r \left[\vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}) \right], \quad (4.21)$$

die auf eine Stromdichte \vec{j} von einem durch eine *andere* Stromdichte erzeugten \vec{B} -Feld ausgeübt wird.

Das durch die Kraft (4.21) ausgeübte Drehmoment um den Ursprung ist

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{1}{c} \int d^3r \vec{r} \times \left[\vec{j} \times \vec{B} \right]. \quad (4.22)$$

Ist der Stromkreis an anderer Stelle fixiert, muss das Drehmoment analog bezüglich dieser Stelle berechnet werden.

4.3.1 Beispiel: Lorentz-Kraft

Als *Beispiel* betrachten wir den magnetischen Anteil der Lorentz-Kraft: für eine Punktladung $\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$ ist $\vec{j}(\vec{r}) = q\vec{v}\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$. Eingesetzt in Gleichung (4.21) erhalten wir

$$\vec{F}_B = \frac{q}{c} \vec{v}(\vec{r}_0) \times \vec{B}(\vec{r}_0). \quad (4.23)$$

Zusammen mit der Coulomb-Kraft (3.6) folgt für die gesamte Lorentz-Kraft

$$\vec{F}_L = \vec{K}_E + \vec{F}_B = q \left[\vec{E} + \frac{\vec{v} \times \vec{B}}{c} \right] \quad (4.24)$$

4.3 Magnetische Induktion und Biot-Savart-Gesetz

und die Bewegungsgleichungen für ein geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld lauten

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q \left[\vec{E} + \frac{\vec{v} \times \vec{B}}{c} \right], \quad \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v} = \frac{\vec{p}}{m\gamma}, \quad (4.25)$$

mit dem Lorentzfaktor $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$.

4.3.2 Beispiel: Magnetfeld eines geraden Leiters

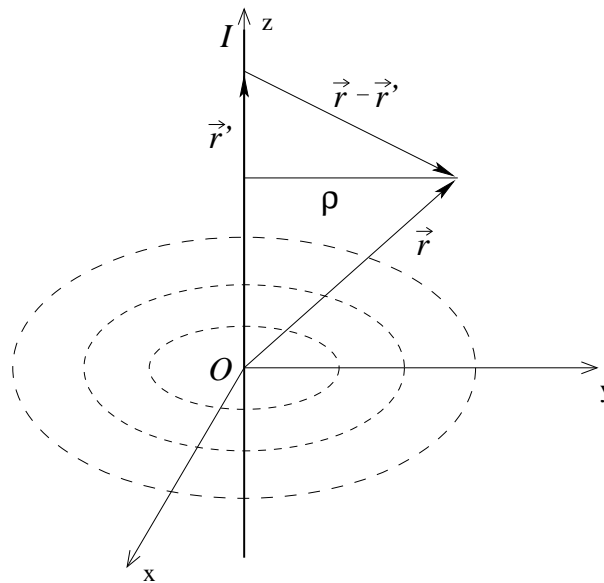


Abbildung 4.3: Der unendlich lange stromdurchflossene Leiter durch den Ursprung

Als weiteres Beispiel berechnen wir das Magnetfeld eines geraden Leiters durch den Ursprung parallel zur z -Achse (siehe Abbildung 4.3) mit dem Strom I . Verwenden wir Zylinderkoordinaten (ρ, ϕ, z) , so ist $\vec{r}' = z' \vec{e}_z$, $d\vec{r}' = dz' \vec{e}_z$ und es gilt

$$\vec{r} - \vec{r}' = \rho \vec{e}_\rho + (z - z') \vec{e}_z.$$

Damit folgt für Gleichung (4.18)

$$\begin{aligned} B(\vec{r}) &= \frac{I}{c} \oint_L \frac{d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \\ &= \frac{I}{c} \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{\vec{e}_z \times [\rho \vec{e}_\rho + (z - z') \vec{e}_z]}{[\rho^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \\ &= \frac{I\rho}{c} (\vec{e}_z \times \vec{e}_\rho) J_1 = \frac{I\rho}{c} \vec{e}_\phi J_1, \end{aligned} \quad (4.26)$$

4 Magnetostatik

mit dem Integral

$$J_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{[\rho^2 + (z - z')^2]^{3/2}}.$$

Substituieren wir $z - z' = \rho t$, so folgt

$$J_1 = \frac{\rho}{\rho^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(1 + t^2)^{3/2}} = \frac{2}{\rho^2} \int_0^{\infty} \frac{dt}{(1 + t^2)^{3/2}}$$

und mit der Substitution $y = t^2$

$$J_1 = \frac{1}{\rho^2} \int_0^{\infty} dy y^{-1/2} (1 + y)^{-3/2}.$$

Die Beta-Funktion hat die Integral-Darstellung

$$B(x, w) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(w)}{\Gamma(x+w)} = \int_0^{\infty} dy y^{x-1} (1+y)^{-(x+w)}$$

und wir erhalten mit $x = 1/2$ und $w = 1$

$$\int_0^{\infty} dy y^{-1/2} (1+y)^{-3/2} = B\left(\frac{1}{2}, 1\right) = \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(1)}{\Gamma(3/2)} = 2,$$

so dass

$$J_1 = \frac{2}{\rho^2}.$$

Für Gleichung (4.26) folgt dann die ursprüngliche Form des Biot-Savart-Gesetzes

$$B(\vec{r}) = \frac{2I}{c\rho} \vec{e}_\phi$$

des Magnetfelds eines geraden Leiters. Die Feldlinien ergeben sich als konzentrische Kreise um den geraden Leiter, wobei der Betrag der magnetischen Induktion proportional zur Stromstärke I ist und umgekehrt proportional zum senkrechten Abstand ρ zum Leiter ist.

4.4 Differentielle Feldgleichungen

Mit der Identität (2.135)

$$\vec{\nabla}_r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3},$$

folgt für Gleichung (4.20)

$$\begin{aligned}
 \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{1}{c} \int d^3 r' \vec{j}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \\
 &= -\frac{1}{c} \int d^3 r' \vec{j}(\vec{r}') \times \left(\vec{\nabla}_r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \\
 &= \frac{1}{c} \int d^3 r' \left(\vec{\nabla}_r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \times \vec{j}(\vec{r}') \\
 &= \frac{1}{c} \vec{\nabla}_r \times \int d^3 r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \text{rot } \vec{A}(\vec{r}) , \tag{4.27}
 \end{aligned}$$

mit dem *Vektorpotential*

$$\vec{A}(\vec{r}) \equiv \frac{1}{c} \int d^3 r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \text{grad } \Lambda(\vec{r}) . \tag{4.28}$$

Wegen $\text{rot grad} = 0$ kann zum 1. Integral ein beliebiges Gradientenfeld dazuaddiert werden, ohne dass sich das Magnetfeld (4.27) ändert (Eichung des Potentials). Wählen wir speziell $\Lambda = 0$, so gilt

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int d^3 r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} . \tag{4.29}$$

Wir berechnen die Divergenz des Potentials (4.29):

$$\begin{aligned}
 \text{div}_r \vec{A}(\vec{r}) = \vec{\nabla}_r \cdot \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{1}{c} \int d^3 r' \vec{\nabla}_r \cdot \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\
 &= \frac{1}{c} \int d^3 r' \vec{j}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}_r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} .
 \end{aligned}$$

Mit

$$\vec{\nabla}_r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\vec{\nabla}_{r'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \tag{4.30}$$

ergibt sich nach partieller Integration unter Ausnutzung der magnetostatischen Kontinuitätsgleichung (4.11)

$$\begin{aligned}
 \text{div}_r \vec{A} &= -\frac{1}{c} \int d^3 r' \vec{j}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}_{r'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \\
 &= \frac{1}{c} \int d^3 r' \frac{\text{div}_{r'} \vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = 0
 \end{aligned}$$

oder

$$\text{div } \vec{A} = 0 , \tag{4.31}$$

was als *Coulomb-Eichung* bezeichnet wird.

4 Magnetostatik

Weil $\operatorname{div} \operatorname{rot} = 0$, folgt aus Gleichung (4.27) sofort

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (4.32)$$

und wegen $\operatorname{rot} \operatorname{rot} = \operatorname{grad} \operatorname{div} - \Delta$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{B} &= \frac{1}{c} \vec{\nabla}_r \times \vec{\nabla}_r \times \int d^3 r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= \frac{1}{c} \vec{\nabla}_r \int d^3 r' \vec{j}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}_r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{c} \int d^3 r' \vec{j}(\vec{r}') \Delta_r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} . \end{aligned}$$

Im ersten Integral verwenden wir Beziehung (4.30), im zweiten Integral Beziehung (2.136)

$$\Delta_r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}') .$$

Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{B} &= \frac{4\pi}{c} \int d^3 r' \vec{j}(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') - \frac{1}{c} \vec{\nabla}_r \int_V d^3 r' \vec{j}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}_{r'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} , \\ \text{also } \operatorname{rot} \vec{B} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}) - \frac{1}{c} \vec{\nabla}_r \int_V d^3 r' \vec{j}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}_{r'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} . \end{aligned} \quad (4.33)$$

Nun ist mit der Produktregel (2.59) und der magnetostatischen Kontinuitätsgleichung (4.11)

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}_{r'} \cdot \left(\vec{j}(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) &= \vec{j}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}_{r'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \operatorname{div} \vec{j}(\vec{r}') \\ &= \vec{j}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}_{r'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} . \end{aligned}$$

Für den 2. Term in Gleichung (4.33) folgt dann mit dem Gauß-Theorem (2.101)

$$\begin{aligned} T_2 &= -\frac{1}{c} \vec{\nabla}_r \int_V d^3 r' \vec{j}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}_{r'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= -\frac{1}{c} \vec{\nabla}_r \int_V d^3 r' \vec{\nabla}_{r'} \cdot \left(\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \\ &= -\frac{1}{c} \vec{\nabla}_r \oint_{O(V)} d\vec{f}' \cdot \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = 0 , \end{aligned}$$

weil das Oberflächenintegral im Unendlichen ($r' \rightarrow \infty$) verschwindet.
Nach Gleichung (4.33) verbleibt

$$\operatorname{rot} \vec{B}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}) .$$

4.4 Differentielle Feldgleichungen

Alternativ können wir die differentielle Feldgleichung (4.4) auch kurz und elegant aus dem Helmholtz-Theorem (2.144) ableiten: setzen wir $\vec{F} = \vec{B}$ so folgt mit (4.32), $\text{div } \vec{B} = 0$, dass

$$\vec{B} = \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla}_r \times \int_V d^3r' \frac{\vec{\nabla}_{r'} \times \vec{B}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

Der Vergleich mit Beziehung (4.20)

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int_V d^3r' \vec{j}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

liefert sofort

$$\frac{1}{4\pi} \vec{\nabla}_{r'} \times \vec{B}(\vec{r}') = \frac{1}{c} \vec{j}(\vec{r}')$$

oder

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

Q.E.D.

Als *differentielle Feldgleichungen der Magnetostatik* erhalten wir damit

$$\text{div } \vec{B}(\vec{r}) = 0 \quad (4.34)$$

$$\text{und} \quad \text{rot } \vec{B}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}). \quad (4.35)$$

Mit $\vec{B}(\vec{r}) = \text{rot } \vec{A}(\vec{r})$ folgt alternativ für das Vektorpotential unter Coulombbeziehung

$$\Delta \vec{A}(\vec{r}) = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}) \quad (4.36)$$

$$\text{und} \quad \text{div } \vec{A}(\vec{r}) = 0, \quad (4.37)$$

weil $\text{rot rot } \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A} = -\Delta \vec{A}$.

Die Potentialgleichung (4.36) besteht aus drei Gleichungen für die Komponenten des Vektorpotentials $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$. Das Integral (4.29) ist die Lösung der Feldgleichung (4.36). Das *Grundproblem der Magnetostatik* besteht darin, aus der gegebenen Stromdichteverteilung \vec{j} in einem interessierenden Raumbereich V und den gegebenen Randbedingungen auf der Oberfläche $O(V)$ dieses Volumens die Komponenten des Vektorpotentials \vec{A} zu bestimmen, die sich aus der Lösung der partiellen, inhomogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung (4.36) ergeben.

Formal haben wir das gleiche mathematische Problem wie bei der Lösung der Poisson-Gleichung der Elektrostatik. Die in Kapitel 3 entwickelten Lösungsverfahren finden auch hier ihre Anwendung. Bevor wir diese illustrieren, betrachten wir zunächst die Integralform der magnetostatischen Feldgleichungen und das Verhalten von Magnetfeldern an Grenzflächen (Randbedingungen).

4.5 Integralform der Feldgleichungen

Die Anwendung des Gauß-Theorems auf die differentielle Feldgleichung (4.34), $\text{div } \vec{B} = 0$, ergibt

$$\int_V d^3r \text{div } \vec{B} = \oint_{O(V)} d\vec{F} \cdot \vec{B} = \phi_m = 0 . \tag{4.38}$$

Der magnetische Fluss ϕ_m durch die Oberfläche $O(V)$ eines beliebigen Volumens verschwindet. Anschaulich heißt das: es gehen ebenso viele magnetische Feldlinien in ein beliebiges Volumen V hinein wie heraus; deshalb sind magnetische Feldlinien immer geschlossen.

Die Anwendung des Stokes-Theorems auf die zweite differentielle Feldgleichung (4.35), $\text{rot } \vec{B} = 4\pi\vec{j}/c$, d.h. die Integration über eine Fläche F mit der Berandung C , ergibt das *integrale Ampère-Gesetz*:

$$\int_F [\text{rot } \vec{B}] \cdot d\vec{f} = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \frac{4\pi}{c} \int_F \vec{j} \cdot d\vec{f} = \frac{4\pi}{c} I_f . \tag{4.39}$$

Das geschlossenen Linienintegral über \vec{B} ergibt den durch die umschlossene Fläche fließenden Strom multipliziert mit dem Faktor $(4\pi/c)$.

Bei der Berechnung des Stroms I_f haben wir Beziehung (4.3) benutzt: mit $\vec{j} = I/\Delta F d\vec{l}/dl$ und $d\vec{f} = \Delta F d\vec{l}/dl$ folgt

$$\vec{j} \cdot d\vec{f} = \frac{I}{\Delta F} \frac{d\vec{l}}{dl} \cdot \Delta F \frac{d\vec{l}}{dl} = I = I_f .$$

In Abbildung 4.4 fassen wir die abgeleiteten integralen und differentiellen magnetostatischen Feldgleichungen zusammen, die den Zusammenhang zwischen der magnetischen Feldstärke \vec{B} , der Stromdichte \vec{j} und dem Vektorpotential \vec{A} vermitteln.

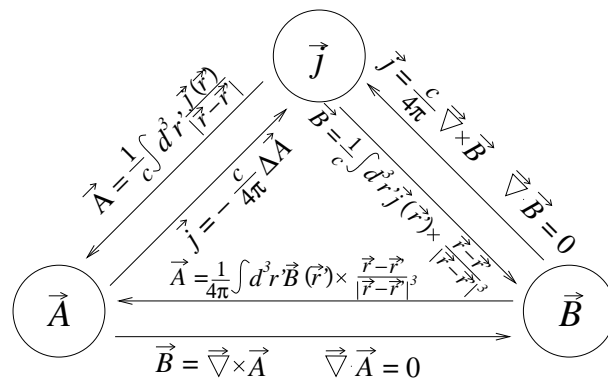


Abbildung 4.4: Die magnetostatischen Feldgleichungen

4.6 Feldverhalten an Grenzflächen

Das Magnetfeld ist unstetig an einer stromdurchflossenen Oberfläche. Anders als in der Elektrostatik betrifft es hier die Tangentialkomponente des Magnetfeldes.

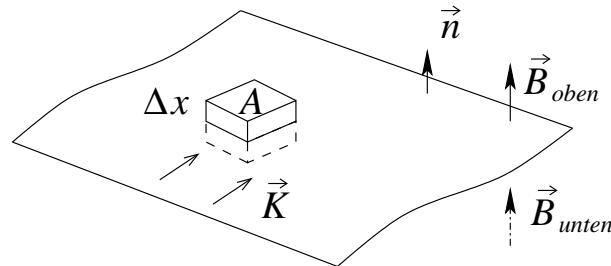


Abbildung 4.5: Das Gaußsche Kästchen um eine Fläche A mit dem Strom \vec{K}

Wir wenden, wie in Abbildung 4.5 illustriert, die integrale Feldgleichung (4.38) auf ein Gaußsches Kästchen in einer Oberfläche mit dem Strom \vec{K} an. Das Gaußsche Kästchen habe die Fläche A und die Seitenlänge Δx . Im Grenzfall $\Delta x \rightarrow 0$ folgt

$$\int_{\Delta V} d^3r \operatorname{div} \vec{B} = \oint_{O(A)} d\vec{a} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = a\vec{n} \cdot [\vec{B}_{\perp, \text{oben}} - \vec{B}_{\perp, \text{unten}}] = 0,$$

also

$$\vec{B}_{\perp, \text{oben}} = \vec{B}_{\perp, \text{unten}}, \quad (4.40)$$

d.h. die Normalkomponente des Magnetfeldes ist stetig.

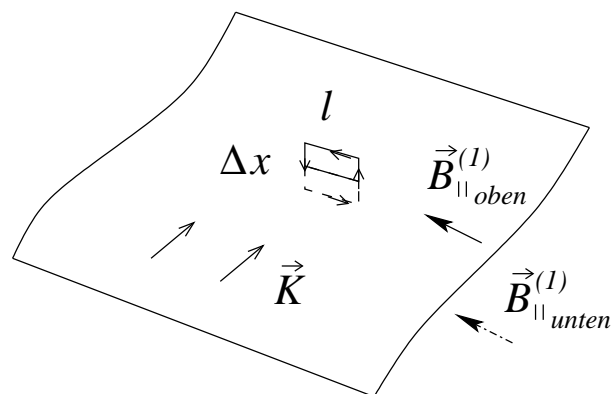


Abbildung 4.6: Die Stokesche Fläche an einer Grenzfläche senkrecht zu einem Strom \vec{K}

Um das Verhalten der Tangentialkomponente zu untersuchen, setzen wir die in Abbildung 4.6 gezeigte dünne Schleife mit der Länge l und Enden $\Delta x \rightarrow 0$ senkrecht zum Strom \vec{K} .

4 Magnetostatik

Mit dem Ampère-Gesetz (4.39) folgt

$$\oint_{\text{Schleife}} \vec{B} \cdot d\vec{r} = [B_{\parallel, \text{oben}}^{(1)} - B_{\parallel, \text{unten}}^{(1)}] l = \frac{4\pi}{c} I_{\text{eingeschlossen}} = \frac{4\pi}{c} K l ,$$

oder

$$B_{\parallel, \text{oben}}^{(1)} - B_{\parallel, \text{unten}}^{(1)} = \frac{4\pi}{c} K . \quad (4.41)$$

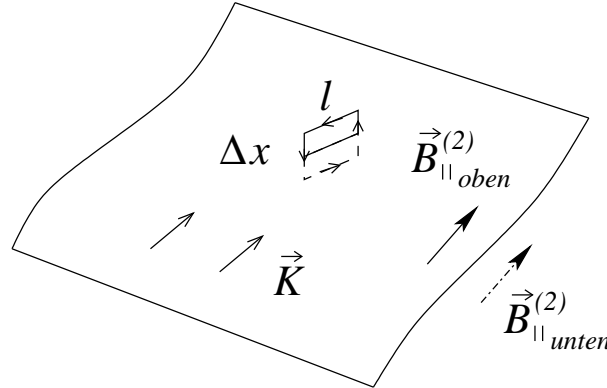


Abbildung 4.7: Die Stokessche Fläche an einer Grenzfläche parallel zu einem Strom \vec{K}

Setzen wir die dünne Schleife *parallel* zum Strom \vec{K} (Abbildung 4.7), so folgt

$$\oint_{\text{Schleife}} \vec{B} \cdot d\vec{r} = [B_{\parallel, \text{oben}}^{(2)} - B_{\parallel, \text{unten}}^{(2)}] l = 0 ,$$

oder

$$B_{\parallel, \text{oben}}^{(2)} = B_{\parallel, \text{unten}}^{(2)} . \quad (4.42)$$

Die Beziehungen (4.40)–(4.42) können wir in einer Gleichung zusammenfassen zu

$$\vec{B}_{\text{oben}} - \vec{B}_{\text{unten}} = \frac{4\pi}{c} (\vec{K} \times \vec{n}) , \quad (4.43)$$

wobei der Einheitsnormalenvektor \vec{n} senkrecht auf der Oberfläche steht und in den Abbildungen nach oben zeigt.

Das Vektorpotential \vec{A} ist stetig an jeder Grenzfläche:

$$\vec{A}_{\text{oben}} = \vec{A}_{\text{unten}} , \quad (4.44)$$

denn mit $\text{div } \vec{A} = 0$ folgt

$$\int_{\Delta V} d^3r \text{div } \vec{A} = 0 = \oint_{O(\Delta)} d\vec{a} \cdot \vec{A}(\vec{r}) = a\vec{n} \cdot [\vec{A}_{\text{oben}} - \vec{A}_{\text{unten}}]$$

zum einen die Stetigkeit der Normalkomponente von \vec{A} . Zum anderen gilt wegen $\text{rot } \vec{A} = \vec{B}$

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_F \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{f} = \int_F \vec{B} \cdot d\vec{f} = \phi_m = 0$$

4.7 Multipolentwicklung für das Vektorpotential

die Stetigkeit der Tangentialkomponenten von \vec{A} (der genaue Beweis erfolgt in Analogie zur Herleitung von Gleichungen (4.41) und (4.42), wobei die rechten Seiten der Gleichungen jetzt jeweils gleich Null sind).

Allerdings ist die Normalenableitung von \vec{A} unstetig mit

$$\frac{\partial \vec{A}_{oben}}{\partial n} - \frac{\partial \vec{A}_{unten}}{\partial n} = -\frac{4\pi}{c} \vec{K}, \quad (4.45)$$

mit $\partial/\partial n = \vec{n} \cdot \vec{\nabla}$.

Übungsaufgabe:

Beweisen Sie die Beziehungen (4.44) und (4.45).

4.7 Multipolentwicklung für das Vektorpotential

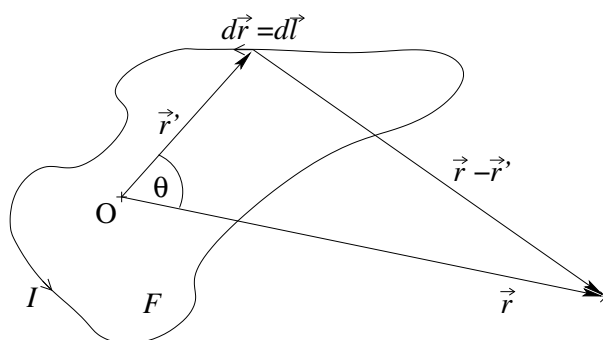


Abbildung 4.8: Lokalisierte Stromverteilung mit Stromschwerpunkt $r_S = 0$

Wir untersuchen die in Abbildung 4.8 auf die Fläche F lokalisierte Stromverteilung $\vec{j}(\vec{r})$ und berechnen approximativ das Vektorpotential im Punkt P für große Abstände. Wir wählen das Koordinatensystem so, dass der "Stromschwerpunkt"

$$\vec{r}_S \equiv \frac{\int d^3r \vec{r} |\vec{j}(\vec{r})|}{\int d^3r |\vec{j}(\vec{r})|}$$

im Ursprung liegt.

Nach Gleichung (4.29) gilt

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Mit

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r^2 - 2rr' \cos \theta + (r')^2} = r \sqrt{1 - 2s\mu + s^2},$$

4 Magnetostatik

wobei $\mu = \cos \theta$, $s = r'/r$ folgt

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r}) &= \frac{1}{rc} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{\sqrt{1 - 2s\mu + s^2}} \\ &= \frac{1}{rc} \sum_{l=0}^{\infty} \int d^3r' P_l(\mu) \vec{j}(\vec{r}') \left(\frac{r'}{r}\right)^l, \\ \text{oder} \quad \vec{A}(\vec{r}) &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{cr^{l+1}} \int d^3r' P_l(\mu) \vec{j}(\vec{r}') (r')^l, \quad (4.46)\end{aligned}$$

wobei wir die Darstellung (3.68) der Legendre-Polynome $P_l(\mu)$ ausgenutzt haben.

4.7.1 Hilfssatz

Seien $f(\vec{r})$ und $g(\vec{r})$ stetig differenzierbare skalare Felder. Dann gilt in der Magnetostatik für den Ausdruck

$$M = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r \left[f(\vec{r}) \vec{j} \cdot \vec{\nabla} g(\vec{r}) + g(\vec{r}) \vec{j} \cdot \vec{\nabla} f(\vec{r}) \right] = 0. \quad (4.47)$$

Zum Beweis benutzen wir Gleichung (2.59) mit der Kontinuitätsgleichung $\text{div } \vec{j} = 0$:

$$\text{div} (gf\vec{j}) = gf \text{div } \vec{j} + \vec{j} \cdot \text{grad} (fg) = \vec{j} \cdot \text{grad} (fg).$$

Mit Gleichung (2.57) folgt

$$\text{div} (gf\vec{j}) = f (\vec{j} \cdot \vec{\nabla} g) + g (\vec{j} \cdot \vec{\nabla} f).$$

Integrieren wir diese Gleichung über den ganzen Raum, so folgt mit dem Gauß-Theorem

$$\begin{aligned}M &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3r \left[f\vec{j} \cdot \vec{\nabla} g + g\vec{j} \cdot \vec{\nabla} f \right] \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3r \text{div} (gf\vec{j}) = \oint_{O(\mathbb{R}^3)} d\vec{f} \cdot (gf\vec{j}) = 0,\end{aligned}$$

weil die Stromdichte \vec{j} im Unendlichen verschwindet. Q.E.D.

Speziell für $f = 1$, $g = x, y, z$ folgt aus dem Hilfssatz (4.47)

$$\int d^3r \vec{j} \cdot \vec{e}_{x,y,z} = 0 \quad \text{oder kurz} \quad \int d^3r \vec{j} = 0. \quad (4.48)$$

4.7.2 Magnetisches Dipolmoment

Für die ersten beiden Terme der Multipolentwicklung (4.46) erhalten wir mit $P_0 = 1$ und $P_1 = \mu$

$$\vec{A}(\vec{r}) \simeq \frac{1}{cr} \left[\int d^3r' \vec{j}(\vec{r}') + \frac{1}{r} \int d^3r' \vec{j}(\vec{r}') \mu r' \right].$$

Gemäß Gleichung (4.48) verschwindet der erste Term und das Vektorpotential wird für große Abstände $r \gg r'$ durch den Dipolanteil bestimmt:

$$\vec{A}(\vec{r}) \simeq \vec{A}_{dipol}(\vec{r}) = \frac{1}{cr^2} \int d^3r' \vec{j}(\vec{r}') \mu r'.$$

Mit $\mu r' = \vec{r} \cdot \vec{r}' / r$ folgt

$$\vec{A}(\vec{r}) \simeq \vec{A}_{dipol}(\vec{r}) = \frac{1}{cr^3} \int d^3r' \vec{r} \cdot \vec{r}' \vec{j}(\vec{r}'). \quad (4.49)$$

Wir verwenden nochmals die Hilfsformel (4.47) für $f = x_i$, $g = x_k$ mit $x_i, x_k \in (x, y, z)$. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= \int d^3r [x_i j_k + x_k j_i], \\ \text{oder} \quad \int d^3r r x_i j_k &= - \int d^3r x_k j_i. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Für einen beliebigen Vektor \vec{a} folgt dann

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \int d^3r' \vec{r}' j_i(\vec{r}') &= \sum_k a_k \int d^3r' x'_k j_i \\ &= \frac{1}{2} \sum_k a_k \int d^3r' [x'_k j_i + x'_i j_k] \\ &= \frac{1}{2} \sum_k a_k \int d^3r' [x'_k j_i - x'_i j_k], \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt Gleichung (4.50) verwandt haben. Wir erhalten also

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \int d^3r' \vec{r}' j_i(\vec{r}') &= -\frac{1}{2} \sum_k a_k \int d^3r' [x'_i j_k - x'_k j_i] \\ &= -\frac{1}{2} \sum_k \sum_n \epsilon_{ikn} a_k \int d^3r' (\vec{r}' \times \vec{j})_n, \\ \text{oder} \quad \int d^3r' (\vec{a} \cdot \vec{r}') \vec{j}(\vec{r}') &= -\frac{1}{2} \left[\vec{a} \times \int d^3r' (\vec{r}' \times \vec{j}) \right]. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Mit $\vec{a} = \vec{r}$ gilt für Gleichung (4.51)

$$\int d^3r' (\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{j}(\vec{r}') = -\frac{1}{2} \left[\vec{r} \times \int d^3r' (\vec{r}' \times \vec{j}) \right].$$

4 Magnetostatik

Verwenden wir dieses Ergebnis in Gleichung (4.49), so erhalten wir für den Dipolanteil des Vektorpotentials

$$\vec{A}_{dipol}(\vec{r}) = -\frac{1}{2cr^3} \vec{r} \times \int d^3 r' \left(\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}') \right).$$

Wir definieren das *magnetische Moment* als

$$\vec{m} \equiv \frac{1}{2c} \int d^3 r' \left(\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}') \right) \quad (4.52)$$

und erhalten damit
$$\vec{A}_{dipol}(\vec{r}) = \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}. \quad (4.53)$$

Im Vergleich zum entsprechenden Dipolanteil des elektrostatischen Potentials (3.94) sehen wir, dass neben dem Kreuzprodukt jetzt das magnetische Moment \vec{m} die Rolle des elektrostatischen Dipolmoments (3.95) einnimmt.

Aus dem Potential (4.53) können wir durch $\text{rot } \vec{A}_{dipol}$ den Dipolanteil des Magnetfelds berechnen. Dazu verwenden wir die Identitäten (2.61) und (2.62)

$$\begin{aligned} \text{rot}(\vec{a}f) &= f \text{rot } \vec{a} - \vec{a} \times \vec{\nabla} f, \\ \text{rot}(\vec{a} \times \vec{b}) &= (\vec{b} \cdot \vec{\nabla}) \vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \vec{b} + \vec{a} \text{div } \vec{b} - \vec{b} \text{div } \vec{a}. \end{aligned}$$

Aus Gleichung (4.53) folgt

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{A}_{dipol} &= \frac{1}{r^3} \text{rot}(\vec{m} \times \vec{r}) - (\vec{m} \times \vec{r}) \times \vec{\nabla} \frac{1}{r^3} \\ &= \frac{3}{r^5} (\vec{m} \times \vec{r}) \times \vec{r} + \frac{1}{r^3} \text{rot}(\vec{m} \times \vec{r}) \\ &= \frac{3}{r^5} (\vec{m} \times \vec{r}) \times \vec{r} + \frac{1}{r^3} \left[(\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \vec{m} - (\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) \vec{r} + \vec{m} \text{div } \vec{r} - \vec{r} \text{div } \vec{m} \right]. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Speziell für *konstantes* magnetisches Moment $\vec{m} = \text{const}$ gilt $\text{div } \vec{m} = 0$ und $\partial \vec{m} / \partial x_i = 0$, so dass sich Gleichung (4.54) enorm vereinfacht. Mit der Regel für das zweifache Kreuzprodukt im ersten Term ergibt sich

$$\text{rot } \vec{A}_{dipol} = \frac{3}{r^5} [\vec{r}(\vec{m} \cdot \vec{r}) - r^2 \vec{m}] - \frac{1}{r^3} (\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) \vec{r} + \frac{1}{r^3} \vec{m} \text{div } \vec{r}.$$

Mit $(\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) \vec{r} = \vec{m}$ und $\text{div } \vec{r} = 3$ folgt

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{A}_{dipol} &= \frac{3}{r^5} [\vec{r}(\vec{m} \cdot \vec{r}) - r^2 \vec{m}] - \frac{\vec{m}}{r^3} + \frac{3\vec{m}}{r^3} = -\frac{\vec{m}}{r^3} + \frac{3}{r^5} \vec{r}(\vec{m} \cdot \vec{r}), \\ \text{also } \vec{B}_{dipol} &= \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3}. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Von der Form her hat Gleichung (4.55) dieselbe Form wie der Dipolanteil des elektrischen Felds (3.103), wobei das konstante magnetische Moment \vec{m} die Rolle des elektrostatischen Dipolmoments \vec{p} einnimmt.

Für zwei Beispiele berechnen wir das magnetische Moment (4.52).

4.7 Multipolentwicklung für das Vektorpotential

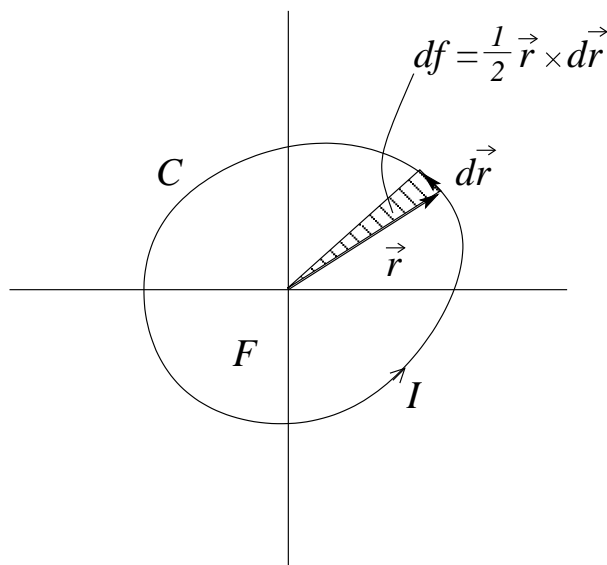


Abbildung 4.9: Ein Stromkreis als geschlossener ebener Stromfaden

4.7.3 Magnetisches Moment eines geschlossenen, ebenen Stromkreises

Wir fassen den in Abbildung 4.9 gezeigten Stromkreis als Stromfaden mit $\vec{j}d^3r = Id\vec{r}$ auf. Aus Gleichung (4.52) folgt dann

$$\vec{m} = \frac{I}{2c} \int_C (\vec{r} \times d\vec{r}) .$$

Wie aus der Abbildung ersichtlich, ist $d\vec{f} = 1/2(\vec{r} \times d\vec{r})$ gerade ein Flächenelement in der Ebene des Stromkreises, und wir erhalten

$$\vec{m} = \frac{I}{c} \int_C d\vec{f} = \frac{I}{c} \vec{F} . \quad (4.56)$$

Mit der Rechten-Hand-Regel folgt, dass \vec{m} senkrecht auf der Leiterebene steht.

4.7.4 Magnetisches Moment eines Systems von Punktladungen

Die Stromdichte \vec{j} sei hervorgerufen durch N Teilchen mit identischer Ladung q und Masse M , so dass

$$\vec{j}(\vec{r}) = q \sum_{i=1}^N \vec{v}_i \delta(\vec{r} - \vec{R}_i) .$$

Für das magnetische Moment (4.52) folgt dann

$$\vec{m} = \frac{q}{2c} \sum_{i=1}^N \int d^3r (\vec{r} \times \vec{v}_i) \delta(\vec{r} - \vec{R}_i) = \frac{q}{2c} \sum_{i=1}^N (\vec{R}_i \times \vec{v}_i) .$$

4 Magnetostatik

Führen wir den Bahndrehimpuls des i -ten Teilchens $\vec{l}_i = \vec{R}_i \times \vec{p}_i = M(\vec{R}_i \times \vec{v}_i)$ ein, so folgt

$$\vec{m} = \frac{q}{2Mc} \sum_{i=1}^N \vec{l}_i = \frac{q\vec{L}}{2Mc}, \quad (4.57)$$

wobei $\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{l}_i$ der Gesamtdrehimpuls des Systems ist. Für das *gyromagnetische Verhältnis* erhalten wir dann

$$\frac{|\vec{m}|}{|\vec{L}|} = \frac{q}{2Mc}, \quad (4.58)$$

das auch im atomaren Bereich bei Bahnbewegungen gültig ist.

4.8 Beispiel: Magnetfeld durch Gleichstrom im Koaxialkabel

Durch einen zylindrischen, unendlich langen Draht mit kreisförmigen Querschnitt (Radius a) als Innenleiter fließe ein Gleichstrom. Dazu gebe es einen koaxialen zylindrischen Rückleiter mit dem Querschnitt eines Kreisrings vom inneren Radius b und äußeren Radius D (siehe Abbildung 4.10). Die Richtung der Achse sei \vec{e}_z .

Im Innenleiter fließt also der konstante Strom mit der Stromdichte $\vec{j} = j_0\vec{e}_z$ mit $j_0 = \text{const.}$. Für den Gesamtstrom im Innenleiter ($0 \leq r \leq a$) gilt dann

$$\vec{I} = \pi a^2 \vec{j} = \pi a^2 j_0 \vec{e}_z. \quad (4.59)$$

Der Rückleiter ($b \leq r \leq D$) wird dann in negativer \vec{e}_z -Richtung vom Strom $-\vec{I}$ durchflossen:

$$-\vec{I} = \pi (D^2 - b^2) \vec{j}_- = -\pi (D^2 - b^2) j_- \vec{e}_z. \quad (4.60)$$

Im Hohlraum ($a < r < b$) und im Außenraum ($r > D$) ist kein Strom vorhanden, also verschwindet dort die Stromdichte

$$\vec{j} = 0, \quad a < r < b, \quad r > D. \quad (4.61)$$

Das Magnetfeld im Außenraum $r > D$ verschwindet; das entsprechende konstante Vektorpotential wird gleich Null gesetzt. Wegen der unendlichen Ausdehnung in z -Richtung hängt das Vektorpotential für $r \leq D$ nur vom Radius r ab, d.h. $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}(r)$. Wir unterscheiden zwischen den drei Raumbereichen:

- Innenleiter: $0 \leq r \leq a$
- Hohlraum: $a < r < b$
- Rückleiter: $b \leq r \leq D$

In jedem Bereich gilt $\text{div } \vec{B} = 0$ oder $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ und das Ampère-Gesetz $\text{rot } \vec{B} = 4\pi\vec{j}/c$, oder kombiniert die Potentialgleichung

$$\Delta \vec{A}(r) = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (4.62)$$

4.8 Beispiel: Magnetfeld durch Gleichstrom im Koaxialkabel

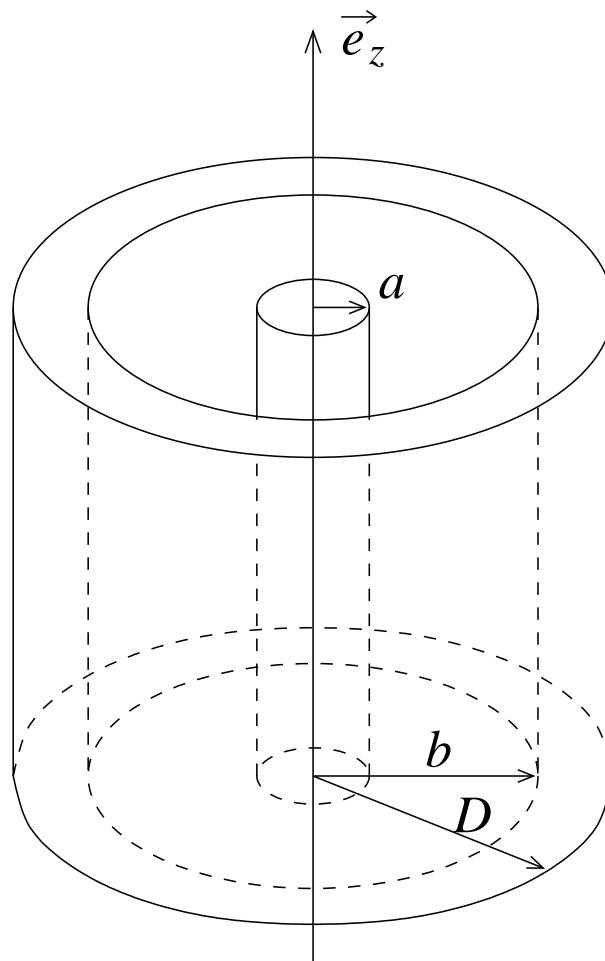


Abbildung 4.10: Schematischer Aufbau eines koaxialen Leiters

Im Innenleiter: Mit Gleichung (4.59) folgt für die drei Komponenten des Vektorpotentials nach Gleichung (4.62)

$$\Delta A_z^{(i)}(r) = -\frac{4\pi}{c} j_0, \quad \Delta A_x^{(i)}(r) = 0, \quad \Delta A_y^{(i)}(r) = 0.$$

Wir wählen speziell $A_x^{(i)} = A_y^{(i)} = 0$, so dass nur $A_z^{(i)} \neq 0$ ist.

Im Hohlraum: Mit Gleichung (4.61) folgt für die drei Komponenten des Vektorpotentials nach Gleichung (4.62)

$$\Delta A_z^{(h)}(r) = \Delta A_x^{(h)}(r) = \Delta A_y^{(h)}(r) = 0.$$

Auch hier wählen wir speziell $A_x^{(h)} = A_y^{(h)} = 0$.

4 Magnetostatik

Im Rückleiter: Mit Gleichung (4.60) folgt für die drei Komponenten des Vektorpotentials nach Gleichung (4.62)

$$\Delta A_z^{(R)}(r) = -\frac{4\pi}{c}j_-, \quad \Delta A_x^{(R)}(r) = \Delta A_y^{(R)}(r) = 0.$$

Auch hier wählen wir speziell $A_x^{(R)} = A_y^{(R)} = 0$.

Mit dem Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten folgen als nichttriviale Gleichungen:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) A_z^{(i)}(r) = -\frac{4\pi}{c}j_0, \quad (4.63)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) A_z^{(h)}(r) = 0 \quad (4.64)$$

und
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) A_z^{(R)}(r) = \frac{4\pi}{c}j_- . \quad (4.65)$$

Die Lösung im Innenleiter von Gleichung (4.63) ist mit den Integrationskonstanten a_i und b_i

$$A_z^{(i)}(r) = a_i \ln r + b_i - \frac{\pi j_0}{c} r^2, \quad (4.66)$$

denn mit
$$\frac{\partial A_z^{(i)}(r)}{\partial r} = \frac{a_i}{r} - \frac{2\pi j_0}{c} r$$

folgen
$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} A_z^{(i)}(r) = \frac{a_i}{r^2} - \frac{2\pi j_0}{c}$$

und
$$\frac{\partial^2 A_z^{(i)}(r)}{\partial r^2} = -\frac{a_i}{r^2} - \frac{2\pi j_0}{c},$$

so dass die linke Seite von (4.63) zu

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) A_z^{(i)}(r) = -\frac{a_i}{r^2} - \frac{2\pi j_0}{c} + \frac{a_i}{r^2} - \frac{2\pi j_0}{c} = -\frac{4\pi j_0}{c}$$

wird.

Für die Lösungen von Gleichungen (4.64) und (4.65) setzen wir an

$$A_z^{(h)}(r) = a_h \ln r + b_h \quad (4.67)$$

und
$$A_z^{(R)}(r) = a_R \ln r + b_R + \frac{\pi j_-}{c} r^2. \quad (4.68)$$

Die Integrationskonstanten a_i , a_h , a_R , b_i , b_h und b_R müssen mithilfe der Randbedingungen bestimmt werden. Aus der Forderung der Endlichkeit von $A_z^{(i)}(r)$ für $r \rightarrow 0$ folgt sofort $a_i = 0$, so dass sich Gleichung (4.66) auf

$$A_z^{(i)}(r) = b_i - \frac{\pi j_0}{c} r^2 \quad (4.69)$$

reduziert.

4.8 Beispiel: Magnetfeld durch Gleichstrom im Koaxialkabel

Aus den Potentialen (4.67) – (4.69) berechnen wir die entsprechenden Magnetfelder gemäß

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = \frac{\partial A_z}{\partial y} \vec{e}_x - \frac{\partial A_z}{\partial x} \vec{e}_y \quad (4.70)$$

Mit den Einheitsvektoren in Zylinderkoordinaten gilt (Gleichungen (2.25))

$$\vec{e}_x = \cos \phi \vec{e}_r - \sin \phi \vec{e}_\phi, \quad \vec{e}_y = \sin \phi \vec{e}_r + \cos \phi \vec{e}_\phi,$$

so dass wir für Gleichung (4.70) erhalten

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{\partial A_z}{\partial y} (\cos \phi \vec{e}_r - \sin \phi \vec{e}_\phi) - \frac{\partial A_z}{\partial x} (\sin \phi \vec{e}_r + \cos \phi \vec{e}_\phi) \\ &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} \cos \phi - \frac{\partial A_z}{\partial x} \sin \phi \right) \vec{e}_r - \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} \sin \phi + \frac{\partial A_z}{\partial x} \cos \phi \right) \vec{e}_\phi. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \phi} = \cos \phi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \phi} = \sin \phi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \end{aligned}$$

und der Tatsache, dass alle Potentiale $A_z(r)$ nur von r abhängig sind, so dass

$$\frac{\partial A_z(r)}{\partial x} = \cos \phi \frac{\partial A_z(r)}{\partial r}, \quad \frac{\partial A_z(r)}{\partial y} = \sin \phi \frac{\partial A_z(r)}{\partial r},$$

folgt für Gleichung (4.71)

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{\partial A_z(r)}{\partial r} (\cos \phi \sin \phi - \sin \phi \cos \phi) \vec{e}_r \\ &\quad - \frac{\partial A_z(r)}{\partial r} (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) \vec{e}_\phi = -\frac{\partial A_z(r)}{\partial r} \vec{e}_\phi, \end{aligned} \quad (4.72)$$

d.h. das Magnetfeld ist überall tangential ausgerichtet, insbesondere an den Leiteroberflächen. Mit den Potentialen (4.67)–(4.69) ergibt sich

$$\begin{aligned} \vec{B}^{(i)} &= \frac{2\pi j_0}{c} r \vec{e}_\phi, \\ \vec{B}^{(h)} &= -\frac{a_h}{r} \vec{e}_\phi \end{aligned}$$

und

$$\vec{B}^{(R)} = -\left[\frac{a_R}{r} + \frac{2\pi j_-}{c} r \right] \vec{e}_\phi.$$

4 Magnetostatik

Gemäß Beziehung (4.43) sind die Tangentialkomponenten der Magnetfelder an den Grenzflächen stetig, da kein Oberflächenstrom fließt: es gelten also die Randbedingungen

$$(1) \quad B_{\phi}^{(i)}|_{r=a} = B_{\phi}^{(h)}|_{r=a} ,$$

$$\text{so dass} \quad \frac{2\pi j_0}{c} a = -\frac{a_h}{a}$$

$$\text{oder} \quad a_h = -\frac{2\pi j_0}{c} a^2$$

$$(2) \quad B_{\phi}^{(h)}|_{r=b} = B_{\phi}^{(R)}|_{r=b} ,$$

$$\text{so dass} \quad -\frac{a_h}{b} = \frac{2\pi j_0 a^2}{cb} = -\left[\frac{a_R}{b} + 2\pi j_- cb \right]$$

$$\text{oder} \quad a_R = -\frac{2\pi j_0 a^2}{c} - \frac{2\pi j_- b^2}{c} = -\frac{2\pi}{c} [j_- b^2 + j_0 a^2] .$$

Damit erhalten wir für die Magnetfelder

$$\vec{B}^{(i)} = \frac{2\pi j_0}{c} r \vec{e}_{\phi} ,$$

$$\vec{B}^{(h)} = \frac{2\pi j_0}{c} \frac{a^2}{r} \vec{e}_{\phi}$$

$$\text{und} \quad \vec{B}^{(R)} = \frac{2\pi}{c} \left[\frac{j_- b^2 + j_0 a^2}{r} - j_- r \right] \vec{e}_{\phi} .$$

(3) Da das Magnetfeld im Außenraum verschwindet, gilt

$$B_{\phi}^{(R)}|_{r=D} = 0 ,$$

$$\text{so dass} \quad \frac{j_- b^2 + j_0 a^2}{D} = j_- D$$

oder mit Beziehung (4.59)

$$j_- = \frac{j_0 a^2}{D^2 - b^2} = \frac{I}{\pi (D^2 - b^2)} .$$

Der Rückstrom stellt sich also gemäß dieser Randbedingung ein. Für die Magnetfeldkomponenten folgt mit $I = \pi j_0 a^2$ letztendlich

$$\vec{B}^{(i)}(r) = \frac{2I}{a^2 c} r \vec{e}_{\phi} , \quad (4.73)$$

$$\vec{B}^{(h)}(r) = \frac{2I}{cr} \vec{e}_{\phi} , \quad (4.74)$$

$$\vec{B}^{(R)}(r) = \frac{2I}{cr} \frac{D^2 - r^2}{D^2 - b^2} \vec{e}_{\phi} \quad (4.75)$$

und $\vec{B}(r \geq D) = 0$. Der radiale Verlauf dieser Tangentialkomponenten ist in Abbildung 4.11 skizziert.

4.8 Beispiel: Magnetfeld durch Gleichstrom im Koaxialkabel

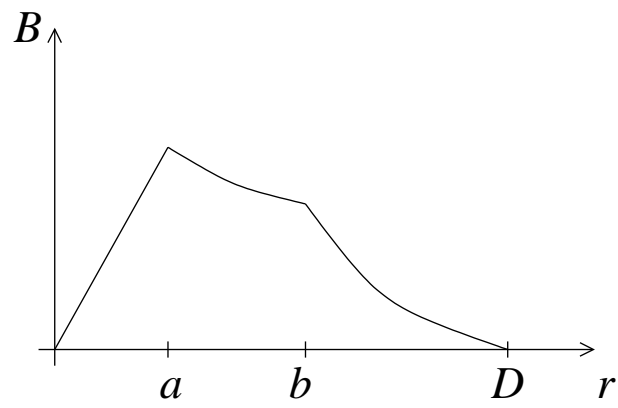


Abbildung 4.11: Verlauf der Tangentialkomponenten des Magnetfeldes im Koaxialkabel

4 *Magnetostatik*

5 Maxwell-Gleichungen

5.1 Induktionsgesetz

Bisher haben wir in der Elektrostatik ruhende Punktladungen und in der Magnetostatik stationäre Ströme von elektrischen Ladungen untersucht. In der Elektrostatik gilt: befindet sich eine Ladungsanordnung unter dem Einfluss eines elektrischen Feldes, so verursacht jede Veränderung des elektrischen Feldes wegen der veränderten Kräfte eine Ladungsbewegung. Deshalb fragen wir uns jetzt: befindet sich ein stationärer Strom unter dem Einfluss eines äußeren Magnetfeldes, wie wirkt sich die Veränderung des magnetischen Feldes auf das Stromsystem aus?

Wir starten vom magnetischen Fluss (4.38) eines geschlossenen Stromkreises L

$$\phi_m(F) = \int_{F(L)} d\vec{f} \cdot \vec{B}, \quad (5.1)$$

wobei L die Fläche F berandet. Der magnetische Fluss ϕ_m ist durch L eindeutig bestimmt, d.h. er hängt nicht von der speziell gewählten Fläche F ab, denn mit $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ und dem Stokes-Theorem folgt, dass

$$\phi_m = \int_{F(L)} d\vec{f} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \int_L \vec{A} \cdot d\vec{s}$$

nur von L abhängt.

Wir nehmen jetzt an, dass das Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r}, t)$ auch zeitlich veränderlich ist: Gemäß Gleichung (5.1) ist dann auch ϕ_m zeitlich veränderlich. Es gilt dann das

3. *Experimentelle Fundamentalgesetz (Induktionsgesetz, Faraday-Gesetz): Die totale zeitliche Änderung des magnetischen Flusses ϕ_m erzeugt eine induzierte elektrische Randspannung U^J in L , die der zeitlichen Änderung von ϕ_m proportional ist:*

$$-K_3 \frac{d}{dt} \phi_m(t) = \int_L \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{s} = U^J. \quad (5.2)$$

Aufgrund dieser Randspannung entsteht im Leiter ein sog. Induktionsstrom. Dieser erzeugt seinerseits ein Magnetfeld.

Zunächst formulieren wir Gleichung (5.2) mit Hilfe von Gleichung (5.1) und dem Stokes-Theorem in ein differentielles Gesetz um:

$$-K_3 \frac{d}{dt} \int_{F(L)} d\vec{f} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = \int_L \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{s} = \int_{F(L)} d\vec{f} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t)).$$

5 Maxwell-Gleichungen

Diese Beziehung gilt für beliebig geformte Leiterkreise L . Lässt man L unbewegt ($\partial L/\partial t = 0$), so folgt

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -K_3 \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}. \quad (5.3)$$

Im CGS-System haben \vec{B} und \vec{E} dieselbe Dimension. Also hat die Proportionalitätskonstante K_3 die Einheit Geschwindigkeit⁻¹. Es folgt experimentell $K_3 = 1/c$, wobei c die Vakuumlichtgeschwindigkeit bezeichnet. Wir erhalten dann als differentielles Induktionsgesetz oder *differentielles Faradaysches-Induktionsgesetz*

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}. \quad (5.4)$$

5.2 Feldgleichungen vor Maxwell für zeitabhängige Felder

Für eine Gesamtbeschreibung von zeitabhängigen elektrischen und magnetischen Feldern bietet es sich an, die bisher angegebenen elektrischen und magnetischen Gesetze mit stationären ρ und \vec{j} auf zeitabhängige Ladungsverteilungen $\rho(\vec{r}, t)$ und zeitabhängige Stromverteilungen $\vec{j}(\vec{r}, t)$ zu verallgemeinern. Zusätzlich verwenden wir das Faraday-Gesetz (5.4) und die Ladungserhaltung (4.10). Dann erhalten wir

$$\text{aus der Elektrostatik: } \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = 4\pi\rho(\vec{r}, t) \quad \text{Coulomb-Gesetz,} \quad (5.5)$$

$$\text{aus der Magnetostatik: } \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}, t) \quad \text{Ampere-Gesetz,} \quad (5.6)$$

$$\text{aus der Magnetostatik: } \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 \quad \text{keine Monopole,} \quad (5.7)$$

$$\text{Induktionsgesetz: } \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (5.8)$$

$$\text{und Ladungserhaltung: } \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) + \frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0. \quad (5.9)$$

Wir haben natürlich keine Gewähr, dass diese Verallgemeinerung richtig ist.

Und in der Tat: Maxwell erkannte, dass das zeitabhängige Ampere-Gesetz in der Form (5.6) nicht mit der Ladungserhaltung (5.9) verträglich ist! Wenden wir die Divergenz-Operation auf (5.6) an, so folgt

$$\frac{4\pi}{c} \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \cdot [\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t)] = 0,$$

so dass nach (5.9) folgen würde

$$\frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0,$$

im Widerspruch zu den Voraussetzungen, da stationäre Ladungsbewegungen ($\dot{\rho} = 0$) hier ausgeschlossen sind.

5.3 Verschiebungsstrom (oder: wie Maxwell das Ampere-Gesetz reparierte)

Maxwells Ausweg aus der Inkonsistenz war eine Modifikation des zeitabhängigen Ampere-Gesetzes (5.6) durch den Ansatz

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\chi}(\vec{r}, t), \quad (5.10)$$

so dass
$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t)) = \vec{\nabla} \cdot \vec{\chi}(\vec{r}, t) = 0 \quad (5.11)$$

gelten muss. Man muss also eine divergenzfreie (wegen (5.11)) Vektorfunktion $\vec{\chi}$ finden, die für *stationäre* Ströme in das Ampere-Gesetz $\text{rot } \vec{B} = 4\pi\vec{j}/c$ der Magnetostatik übergeht. Ein sinnvoller Ansatz für $\vec{\chi}$ ist

$$\vec{\chi}(\vec{r}, t) \equiv \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad (5.12)$$

denn zum einen ist dann bei Verwendung des Coulomb-Gesetzes (5.5)

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{\chi}(\vec{r}, t) &= \frac{4\pi}{c} (\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t)) + \frac{1}{c} \frac{\partial (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t))}{\partial t} \\ &= \frac{4\pi}{c} (\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t)) + \frac{4\pi}{c} \frac{\partial (\rho(\vec{r}, t))}{\partial t} \\ &= \frac{4\pi}{c} \left[\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) + \frac{\partial (\rho(\vec{r}, t))}{\partial t} \right] = 0, \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Ladungserhaltung (5.9) verwandt wurde. Zum anderen führen im stationären Grenzfall ($\partial/\partial t \rightarrow 0$) Gleichungen (5.10) und (5.12) direkt auf das Ampere-Gesetz der Magnetostatik:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}).$$

Setzen wir im allgemeinen Fall (5.12) in Beziehung (5.10) ein, so erhalten wir als *richtige Verallgemeinerung des Ampere-Gesetzes*:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t}. \quad (5.13)$$

Der Term $(1/c)\partial\vec{E}/\partial t$ wird *Verschiebungsstrom* genannt. Mit seiner Einführung gelangen wir zur endgültigen Form der elektromagnetischen Feldgleichungen im Vakuum, den sogenannten *Maxwell-Gleichungen*

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0, \quad (5.14)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = 4\pi\rho(\vec{r}, t), \quad (5.15)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}, t), \quad (5.16)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0. \quad (5.17)$$

5 Maxwell-Gleichungen

Dabei handelt es sich um ein vollständig gekoppeltes System linearer partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung zur Beschreibung der zeitabhängigen Felder $\vec{E}(\vec{r}, t)$ und $\vec{B}(\vec{r}, t)$ bei vorgegebenen Ladungs- und Stromverteilungen $\rho(\vec{r}, t)$ bzw. $\vec{j}(\vec{r}, t)$.

Die Existenz des Verschiebungsstroms wurde experimentell von Hertz bestätigt. Wie wir sehen werden, führt das Vorhandensein des Verschiebungsstroms zur Interpretation von Licht als elektromagnetische Wellen.

Aus den Maxwell-Gleichungen (5.15) und (5.16) folgt die Kontinuitätsgleichung, denn die Anwendung der Divergenz-Operation auf (5.16) ergibt

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) - \frac{1}{c} \frac{\partial (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})}{\partial t} = 0 - \frac{1}{c} \frac{\partial (4\pi\rho)}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{\nabla} \cdot \vec{j},$$

oder

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (5.18)$$

Zusammen mit der Lorentz-Kraft

$$\vec{F} = q \left[\vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{\vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}, t)}{c} \right] \quad (5.19)$$

erhalten wir eine vollständige Beschreibung elektromagnetischer Phänomene in Vakuum. Die Maxwell-Gleichungen zeigen uns, wie Ladungsverteilungen und Ströme von Ladungen elektromagnetische Felder produzieren. Die Lorentz-Kraft zeigt uns, wie diese elektromagnetischen Felder auf Ladungen wirken. Ergänzt wird dieses System von Gleichungen noch durch mathematische Randbedingungen, je nach konkreter Problemstellung.

5.4 Elektromagnetische Potentiale

In Analogie zur Elektrostatik und Magnetostatik versuchen wir durch Einführung von Potentialen das vollständig gekoppelte Gleichungssystem der Maxwellgleichungen zu vereinfachen und zu entkoppeln.

Gleichung (5.17) erlaubt wieder die Einführung des *Vektorpotentials*

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \text{rot } \vec{A}(\vec{r}, t). \quad (5.20)$$

Setzen wir diese Beziehung in Gleichung (5.14) ein, so folgt

$$\text{rot} \left[\vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t} \right] = 0. \quad (5.21)$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist wegen $\text{rot grad} = 0$ gegeben durch

$$\vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\text{grad } \Phi(\vec{r}, t),$$

so dass

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla} \Phi(\vec{r}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t}. \quad (5.22)$$

Gleichung (5.22) ist die Potentialdarstellung des elektrischen Feldes mit dem *skalaren Potential* $\Phi(\vec{r}, t)$ und dem Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r}, t)$. Im statischen Fall ($\partial/\partial t = 0$) reduziert sich Gleichung (5.22) auf Gleichung (3.13) für das elektrostatische Potential $\Phi(\vec{r})$.

Mit den Potentialdarstellungen (5.20) und (5.22) sind die *homogenen* (d.h. quellfreien) Maxwell-Gleichungen (5.14) und (5.17) automatisch erfüllt. Es verbleiben noch die *inhomogenen* Maxwell-Gleichungen (5.15) und (5.16) zur Bestimmung der Potentiale aus den gegebenen Ladungs- und Stromverteilungen $\rho(\vec{r}, t)$ und $\vec{j}(\vec{r}, t)$. Durch Einsetzen der Darstellungen (5.20) und (5.22) erhalten wir für Gleichung (5.15)

$$-\vec{\nabla}^2 \Phi(\vec{r}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t))}{\partial t} = 4\pi\rho(\vec{r}, t)$$

oder

$$\Delta\Phi(\vec{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t))}{\partial t} = -4\pi\rho(\vec{r}, t) . \quad (5.23)$$

Für Gleichung (5.16) folgt ebenso

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}, t)) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\vec{\nabla} \Phi(\vec{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t} \right] = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}, t) .$$

Mit $\text{rot rot} = \text{grad div} - \Delta$ erhalten wir

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t)) - \Delta \vec{A}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} + \vec{\nabla} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi(\vec{r}, t)}{\partial t} \right) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}, t)$$

Wir definieren den *d'Alembert-Operator* oder *Quabla* durch

$$\square \equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \quad (5.24)$$

und erhalten damit

$$\square \vec{A}(\vec{r}, t) + \vec{\nabla} \left[\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi(\vec{r}, t)}{\partial t} \right] = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}, t) . \quad (5.25)$$

Die Gleichungen (5.23) und (5.25) sind vier Gleichungen für die vier Potentialfunktionen A_x, A_y, A_z und Φ , die aber noch gekoppelt sind.

5.5 Eichtransformationen

Zur Entkoppelung der Potentialgleichungen (5.23) und (5.25) nutzen wir aus, dass \vec{B} und \vec{E} durch die Beziehungen (5.20) und (5.22) nicht eindeutig mit \vec{A} und Φ verknüpft sind. Diese Mehrdeutigkeit verwenden wir, um bei fest vorgegeben Maxwell-Gleichungen verschiedene Gleichungen für die Potentiale herzuleiten. Diese Möglichkeit wird *Eichung* der Potentiale genannt.

Die Transformation

$$\vec{A}(\vec{r}, t) \rightarrow \vec{A}'(\vec{r}, t) = \vec{A}(\vec{r}, t) + \text{grad } \Lambda(\vec{r}, t) \quad (5.26)$$

5 Maxwell-Gleichungen

ändert das magnetische Feld \vec{B} nicht, weil wegen ($\text{rot grad} = 0$)

$$\text{rot } \vec{A}' = \text{rot } \vec{A} + \text{rot grad } \Lambda = \text{rot } \vec{A}.$$

Damit auch das elektrische Feld \vec{E} gemäß Gleichung (5.22) unverändert bleibt, muss gleichzeitig auch das skalare Potential mittransformiert werden

$$\Phi(\vec{r}, t) \rightarrow \Phi'(\vec{r}, t) = \Phi(\vec{r}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad (5.27)$$

denn dann ist

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi' - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\vec{\nabla}\Phi + \frac{1}{c} \vec{\nabla} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial t} \right) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla}\Lambda) = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

Die Gleichungen (5.26) und (5.27) bilden eine *Eichtransformation*: die \vec{E} - und \vec{B} -Felder ändern sich nicht unter dieser Transformation mit einem beliebigen skalaren Feld $\Lambda(\vec{r}, t)$.

5.5.1 Lorenz-Eichung

Wir behaupten: \vec{A}' und Φ' können so gewählt werden, dass sich die Potentialgleichungen (5.23) und (5.25) reduzieren auf

$$\square \Phi'(\vec{r}, t) = 4\pi\rho(\vec{r}, t) \quad (5.28)$$

$$\text{und} \quad \square \vec{A}'(\vec{r}, t) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}, t), \quad (5.29)$$

mit der Lorenz-Bedingung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}'(\vec{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi'(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0. \quad (5.30)$$

Beweis: Nach Gleichungen (5.26) und (5.27) ist

$$\vec{A} = \vec{A}' - \vec{\nabla}\Lambda, \quad \Phi = \Phi' + \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \quad (5.31)$$

Setzen wir dies in die gekoppelten Potentialgleichungen (5.23) und (5.25) ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} \Delta \Phi' + \frac{1}{c} \frac{\partial (\Delta \Lambda)}{\partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A}' - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}\Lambda) &= \\ \Delta \Phi' + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A}' &= -4\pi\rho \end{aligned} \quad (5.32)$$

$$\text{und} \quad \square \vec{A}' - \square (\vec{\nabla}\Lambda) + \vec{\nabla} \left[\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi'}{\partial t} \right] = \frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (5.33)$$

Wir nehmen ferner an, dass \vec{A} und Φ als Lösungen von (5.23) und (5.25) bekannt sind. Dann kann die skalare Funktion Λ so gewählt werden, dass es die Lösung der inhomogenen Gleichung

$$\square \Lambda = \left[\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi'}{\partial t} \right] \quad (5.34)$$

ist, deren rechte Seite bekannt ist. Gleichung (5.34) besitzt bei geeigneten Randbedingungen und Anfangsbedingungen für Λ eindeutige Lösungen. Mit Gleichung (5.34) reduziert sich Gleichung (5.33) auf

$$\square \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j},$$

d.h. wir haben die zweite Behauptung (5.29) bewiesen. Gleichung (5.32) bleibt zunächst unverändert

$$\Delta \Phi' + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -4\pi\rho.$$

Mithilfe von Beziehung (5.31) erhalten wir für die Summe

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= \left(\operatorname{div} \vec{A} - \Delta \Lambda \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi'}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} \\ &= \operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi'}{\partial t} + \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} - \Delta \Lambda \right) \\ &= \operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi'}{\partial t} + \square \Lambda, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt den Quabla-Operator (5.24) benutzt haben. Nach Gleichung (5.34) ist die linke Seite dieser Gleichung gleich $\square \Lambda$, so dass die Lorenz-Bedingung (5.30) folgt:

$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi'}{\partial t} = 0.$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$\operatorname{div} \vec{A} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi'}{\partial t},$$

die wir in Gleichung (5.32) einsetzen:

$$\Delta \Phi' + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi'}{\partial t} \right) = \Delta \Phi' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial t^2} = -\square \Phi' = -4\pi\rho,$$

d.h. wir haben auch die erste Behauptung (5.28) bewiesen. Q.E.D.

Lassen wir jetzt die Strich-Bezeichnung in den Gleichungen (5.28)–(5.30) fallen, so lauten unter Lorenz-Eichung

$$\operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0 \quad (5.35)$$

die Potentialgleichungen

$$\square \Phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi(\vec{r}, t)}{\partial t^2} - \Delta \Phi(\vec{r}, t) = 4\pi\rho(\vec{r}, t) \quad (5.36)$$

und

$$\square \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} - \Delta \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}, t). \quad (5.37)$$

5 Maxwell-Gleichungen

Wir erhalten also vier *entkoppelte* lineare partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung für die Potentialfelder $\Phi(\vec{r}, t)$, $A_x(\vec{r}, t)$, $A_y(\vec{r}, t)$ und $A_z(\vec{r}, t)$. Aufgrund der Lorenz-Eichung (5.35) sind nur drei dieser vier Felder unabhängig voneinander.

Jede Komponente der Gleichung (5.37) hat dieselbe *Wellen-Gleichungsstruktur* wie die skalare Gleichung (5.36). Wir können die Diskussion der Lösungen daher auf Gleichung (5.36) beschränken. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (5.36) ist gleich der Summe aus einer partikulären Lösung Φ_{part} von (5.36) und der homogenen Lösung Φ_{hom} :

$$\Phi(\vec{r}, t) = \Phi_{\text{hom}}(\vec{r}, t) + \Phi_{\text{part}}(\vec{r}, t), \quad (5.38)$$

wobei Φ_{hom} die zu (5.36) homogene Gleichung

$$\Delta\Phi_{\text{hom}}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi_{\text{hom}}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (5.39)$$

genügt.

5.5.2 Coulomb-Eichung

Eine andere nützliche Eichung der Potentiale ist die *Coulomb-Eichung*

$$\text{div } \vec{A}(\vec{r}, t) = 0. \quad (5.40)$$

Damit wird Gleichung (5.23) für das skalare Potential sehr einfach zur Poisson-Gleichung

$$\Delta\Phi(\vec{r}, t) = -4\pi\rho(\vec{r}, t) \quad (5.41)$$

mit der Lösung (siehe Gleichung (3.14))

$$\Phi(\vec{r}, t) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (5.42)$$

Φ ist das *instantane* Coulomb-Potential der Ladungsdichte ρ (daher auch der Name Coulomb-Eichung).

Der *Nachteile* der Coulomb-Eichung ist die verbleibende komplizierte Gleichung für das Vektorpotential, denn nach Gleichung (5.25) und (5.40) gilt

$$\square\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c} \vec{\nabla} \frac{\partial\Phi(\vec{r}, t)}{\partial t}. \quad (5.43)$$

Setzen wir die Lösung (5.42) ein, erhalten wir mit der Ladungserhaltungsgleichung (5.18)

$$\begin{aligned} \square\vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c} \vec{\nabla}_r \int d^3r' \frac{\partial\rho(\vec{r}', t)}{\partial t} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c} \vec{\nabla}_r \int d^3r' \frac{\text{div } \vec{j}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Nach dem Helmholtzschen Zerlegungssatz (2.144) lässt sich die Stromdichte \vec{j} als Summe zweier Terme darstellen: dem Gradient eines Skalars (*longitudinaler Anteil*) plus der Rotation eines Vektors (*transversaler Anteil*)

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{j}_l(\vec{r}, t) + \vec{j}_t(\vec{r}, t) \quad (5.45)$$

mit
$$\vec{j}_l(\vec{r}, t) = -\frac{1}{4\pi} \vec{\nabla}_r \int d^3r' \frac{\text{div } \vec{j}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

und
$$\vec{j}_t(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla}_r \times \int d^3r' \frac{\text{rot } \vec{j}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} . \quad (5.46)$$

In Gleichung (5.44) taucht \vec{j}_l als zweiter Term auf der rechten Seite auf, d.h.

$$\begin{aligned} \square \vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}, t) - \frac{4\pi}{c} \vec{j}_l(\vec{r}, t) \\ &= \frac{4\pi}{c} \left(\vec{j}_l(\vec{r}, t) + \vec{j}_t(\vec{r}, t) \right) - \frac{4\pi}{c} \vec{j}_l(\vec{r}, t) \\ &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}_t(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

also
$$\square \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_t(\vec{r}, t) . \quad (5.47)$$

Unter Coulomb-Eichung ist das Vektorpotential vollständig durch die transversale Stromdichte \vec{j}_t bestimmt. Deshalb wird die Coulomb-Eichung auch als *transversale Eichung* bezeichnet.

Die Coulomb-Eichung spielt eine wichtige Rolle in der Quantenelektrodynamik und im *quellfreien* Fall ($\rho = 0, \vec{j} = 0$). Dann ist $\Phi = 0$ eine Lösung und nach Gleichung (5.43) erfüllt das Vektorpotential die homogene Wellengleichung

$$\square \vec{A}(\vec{r}, t) = 0 . \quad (5.48)$$

Die elektromagnetischen Felder sind dann einfach durch $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ und $\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ gegeben.

5.6 Energiesatz der Elektrodynamik

Als erste wichtige Konsequenz der Maxwell-Gleichungen behandeln wir den Energiesatz der Elektrodynamik. Dazu betrachten wir zunächst ein Teilchen mit der Ladung q , das im elektromagnetischen Feld der Lorenz-Kraft (5.19) unterliegt:

$$\vec{F} = q \left[\vec{E} + \frac{\vec{v} \times \vec{B}}{c} \right] .$$

Bei der Verschiebung des geladenen Teilchens um die Strecke $d\vec{r} = \vec{v} dt$ leistet das Feld am Teilchen Arbeit. Zählt man diese positiv, so ist

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{v} dt = q \vec{E} \cdot \vec{v} dt .$$

5 Maxwell-Gleichungen

Diese Feldenergie wird in kinetische Teilchenenergie umgewandelt. Die entsprechende Leistung ist

$$\frac{dW}{dt} = q\vec{E} \cdot \vec{v}.$$

Nur der elektrische Anteil der Lorentz-Kraft beteiligt sich am Energieaustausch zwischen Teilchen und Feld, weil die magnetische Kraftkomponente $\perp \vec{v}$ steht.

Dieselben Aussagen gelten auch für kontinuierliche Ladungsverteilungen $\rho(\vec{r}, t)$ mit dem Geschwindigkeitsfeld $\vec{V}(\vec{r}, t)$, die im Feld die *Kraftdichte* (Kraft pro Volumenelement)

$$\begin{aligned} \vec{f}(\vec{r}, t) &= \rho(\vec{r}, t) \left[\vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{\vec{V}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t)}{c} \right] \\ &= \rho(\vec{r}, t) \vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{\vec{j}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t)}{c} \end{aligned} \quad (5.49)$$

erfahren. Die Leistungsdichte

$$\vec{f}(\vec{r}, t) \cdot \vec{V}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \vec{V}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{j}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t)$$

ist allein durch das elektrische Feld \vec{E} und die Stromdichte \vec{j} bestimmt. Die gesamte Arbeitsleistung des Feldes im Volumen V ist dann

$$\frac{dW_V}{dt} = \int_V d^3r \vec{f}(\vec{r}, t) \cdot \vec{V}(\vec{r}, t) = \int_V d^3r \vec{j}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t). \quad (5.50)$$

Im folgenden berechnen wir diese Arbeitsleistung. Dazu multiplizieren wir die Maxwell-Gleichung (5.14) skalar mit \vec{B} :

$$\vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) + \frac{1}{c} \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0. \quad (5.51)$$

Ebenso multiplizieren wir die Maxwell-Gleichung (5.16) skalar mit \vec{E} :

$$\vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) - \frac{1}{c} \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \cdot \vec{E}. \quad (5.52)$$

Wir bilden die Differenz dieser beiden Gleichungen:

$$\vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \frac{1}{2c} \frac{\partial B^2}{\partial t} + \frac{1}{2c} \frac{\partial E^2}{\partial t} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} \cdot \vec{E}.$$

Gemäß Beziehung (2.60) ist

$$\vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}),$$

so dass

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) + \frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} (E^2 + B^2) = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} \cdot \vec{E},$$

oder nach Multiplikation mit dem Faktor $(c/4\pi)$

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = -\frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} (E^2 + B^2) - \frac{c}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}). \quad (5.53)$$

5.6 Energiesatz der Elektrodynamik

Wir definieren die *Energiedichte des elektromagnetischen Feldes* durch

$$u_{em}(\vec{r}, t) = \frac{1}{8\pi} (E^2(\vec{r}, t) + B^2(\vec{r}, t)) \quad (5.54)$$

und den *Poynting-Vektor* oder die *Energiestromdichte*

$$\vec{S}(\vec{r}, t) = \frac{c}{4\pi} \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t) . \quad (5.55)$$

Damit schreibt sich Gleichung (5.53) als *differentielles Poynting-Theorem*

$$\frac{\partial u_{em}}{\partial t} + \text{div } \vec{S} = -\vec{j} \cdot \vec{E} . \quad (5.56)$$

Setzen wir Gleichung (5.56) ein in Gleichung (5.50), so erhalten wir unter Ausnutzung des Gauß-Theorems das *integrale Poynting-Theorem*

$$\begin{aligned} \frac{dW_V}{dt} &= -\frac{d}{dt} \int_V d^3r u_{em}(\vec{r}, t) - \int_V d^3r \vec{\nabla} \cdot \vec{S}(\vec{r}, t) \\ &= -\frac{d}{dt} \int_V d^3r u_{em}(\vec{r}, t) - \oint_{O(V)} d\vec{f} \cdot \vec{S}(\vec{r}, t) . \end{aligned} \quad (5.57)$$

Die Leistung des elektromagnetischen Feldes an Ladungen im Volumen V ist gleich der Abnahme der gesamten elektromagnetischen Energie $\int_V d^3r u_{em}$ im Volumen V minus dem Energiestrom $\oint_{O(V)} d\vec{f} \cdot \vec{S}$ durch die Oberfläche des Volumens.

Mit der mechanischen Energiedichte u_M :

$$W_V = \int_V d^3r u_M(\vec{r}, t)$$

folgt nach Gleichung (5.50)

$$\frac{dW_V}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V d^3r u_M(\vec{r}, t) = \int_V d^3r \vec{j}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) ,$$

oder
$$\vec{j}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} u_M(\vec{r}, t) ,$$

so dass nach Beziehung (5.56) gilt

$$\text{div } \vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t} (u_M + u_{em}) . \quad (5.58)$$

5.7 Impulssatz der Elektrodynamik

Wir eliminieren in der Lorentz-Kraftdichte (5.49),

$$\vec{f} = \rho \vec{E} + \frac{\vec{j} \times \vec{B}}{c},$$

ρ und \vec{j} durch die Maxwell-Gleichungen (5.15) und (5.16)

$$\rho = \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}, \quad \vec{j} = \frac{c}{4\pi} \left[\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right]$$

und erhalten

$$\vec{f} = \frac{1}{4\pi} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \vec{E} + \frac{1}{4\pi} \left[(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} \right]. \quad (5.59)$$

Es ist

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} + \vec{E} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

und mit dem Induktionsgesetz (5.14) $\partial \vec{B} / \partial t = -c \vec{\nabla} \times \vec{E}$, so dass

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) + c \vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}). \quad (5.60)$$

Einsetzen dieser Beziehung in Gleichung (5.59) ergibt

$$\begin{aligned} \vec{f} = & \frac{1}{4\pi} \left[(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \vec{E} - \vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \right] \\ & - \frac{1}{4\pi} \left[\vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \right] - \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}). \end{aligned}$$

Damit es symmetrischer aussieht, führen wir den Term $(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \vec{B} = 0$ in die zweite eckige Klammer ein mit dem Ergebnis

$$\begin{aligned} \vec{f} = & \frac{1}{4\pi} \left[(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \vec{E} - \vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \right] \\ & - \frac{1}{4\pi} \left[\vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \vec{B} \right] - \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}). \end{aligned} \quad (5.61)$$

Gemäß der Produktregel (2.58)

$$\vec{\nabla} (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \times (\vec{\nabla} \times \vec{b}) + \vec{b} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}) + (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \vec{b} + (\vec{b} \cdot \vec{\nabla}) \vec{a}$$

gilt für

$$\vec{a} = \vec{b} = \vec{E} :$$

$$\vec{\nabla} (E^2) = 2\vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) + 2(\vec{E} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}$$

und ebenso für

$$\vec{a} = \vec{b} = \vec{B} :$$

$$\vec{\nabla} (B^2) = 2\vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + 2(\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) &= \frac{1}{2} \vec{\nabla} (E^2) - (\vec{E} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}, \\ \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) &= \frac{1}{2} \vec{\nabla} (B^2) - (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}\end{aligned}$$

und Gleichung (5.61) reduziert sich auf

$$\begin{aligned}\vec{f} &= \frac{1}{4\pi} \left[(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \vec{E} + (\vec{E} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} \right] \\ &\quad - \frac{1}{8\pi} \vec{\nabla} (E^2 + B^2) - \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}).\end{aligned}\quad (5.62)$$

Wir definieren den *Maxwellschen Spannungstensor*

$$\hat{T} = T_{ij} \equiv \frac{1}{4\pi} \left[E_i E_j + B_i B_j - \frac{1}{2} (E^2 + B^2) \delta_{ij} \right] \quad (5.63)$$

mit $i, j \in [1, 2, 3]$; $E_1 = E_x$, $E_2 = E_y$

und $E_3 = E_z$.

Das Skalarprodukt dieses Tensors mit einem Vektor \vec{a} ergibt wieder einen Vektor:

$$(\vec{a} \cdot \hat{T})_j = \sum_{i=x,y,z} a_i T_{ij}.$$

Speziell gilt

$$\begin{aligned}(\vec{\nabla} \cdot \hat{T})_j &= \sum_{i=x,y,z} \frac{\partial}{\partial x_i} T_{ij} \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) E_j + (\vec{E} \cdot \vec{\nabla}) E_j + (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) B_j \right. \\ &\quad \left. + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) B_j - \frac{1}{2} \nabla_j (E^2 + B^2) \right],\end{aligned}$$

so dass für Gleichung (5.62) mit dem Poynting-Vektor (5.55) folgt

$$\vec{f} = \vec{\nabla} \cdot \hat{T} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{S}}{\partial t}. \quad (5.64)$$

Die Gesamtkraft im Volumen V ist dann

$$\begin{aligned}\vec{F} = \int_V d^3r \vec{f} &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_V d^3r \vec{S} + \int_V d^3r (\vec{\nabla} \cdot \hat{T}) \\ &= -\frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int_V d^3r \vec{S} + \oint_{O(V)} d\vec{f} \cdot \hat{T},\end{aligned}$$

$$\text{also} \quad \vec{F} = \oint_{O(V)} d\vec{f} \cdot \hat{T} - \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int_V d^3r \vec{S}. \quad (5.65)$$

5 Maxwell-Gleichungen

Nach dem zweiten Newtonschen Gesetz ist die Kraft auf ein Objekt gleich der zeitlichen Änderung seines Impulses $\vec{F} = d\vec{p}/dt$, so dass

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \oint_{O(V)} d\vec{f} \cdot \hat{T} - \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int_V d^3r \vec{S}. \quad (5.66)$$

Diese Gleichung hat eine ähnliche Struktur wie das integrale Poynting-Theorem (5.57) und erlaubt eine ähnliche Interpretation. Mit dem *Impuls des elektromagnetischen Feldes*

$$\vec{p}_{em} = \frac{1}{c^2} \int_V d^3r \vec{S} \quad (5.67)$$

und der Einführung der *Impulsdichte*

$$\vec{p}_{em} = \int_V d^3r \vec{g}_{em}(\vec{r}, t) \quad (5.68)$$

gilt

$$\vec{g}_{em} = \frac{\vec{S}}{c^2} = \frac{1}{4\pi c} \vec{E} \times \vec{B}. \quad (5.69)$$

Definieren wir noch die *mechanische Impulsdichte* durch

$$\vec{p} = \int_V d^3r \vec{p}_M(\vec{r}, t),$$

können wir Gleichung (5.64) auch schreiben als

$$\frac{\partial}{\partial t} [\vec{p}_M(\vec{r}, t) + \vec{g}_{em}(\vec{r}, t)] = \frac{\partial}{\partial t} \left[\vec{p}_M(\vec{r}, t) + \frac{\vec{S}(\vec{r}, t)}{c^2} \right] = \vec{\nabla} \cdot \hat{T}. \quad (5.70)$$

Elektromagnetische Felder tragen also neben Energie mit der Energiedichte (5.54),

$$u_{em} = \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2),$$

auch Impuls mit der Impulsdichte (5.69)

$$\vec{g}_{em} = \frac{\vec{S}}{c^2} = \frac{1}{4\pi c} \vec{E} \times \vec{B}.$$

Sie besitzen deshalb auch Drehimpuls mit der Drehimpulsdichte

$$\vec{l}_{em} = \vec{r} \times \vec{g}_{em} = \frac{1}{4\pi c} \vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{B}). \quad (5.71)$$

5.8 Lagrange- und Hamilton-Funktion eines geladenen Teilchens im elektromagnetischen Feld

Auf ein Teilchen der Ladung e im elektromagnetischen Feld wirkt die Lorentz-Kraft (5.19)

$$\vec{F} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{v} \times \vec{B}, \quad (5.72)$$

wobei \vec{E} die elektrische Feldstärke, \vec{B} die magnetische Feldstärke, \vec{v} die Teilchengeschwindigkeit und c die Lichtgeschwindigkeit darstellen. Die Feldstärken

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad (5.73)$$

lassen sich durch das skalare Potential $\Phi(\vec{r}, t)$ und das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r}, t)$ darstellen. Setzt man die Gleichungen (5.73) in Gleichung (5.72) ein, so folgt für die Lorentz-Kraft

$$\vec{F} = e \left(-\vec{\nabla}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \frac{1}{c}\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \right). \quad (5.74)$$

Um diesen Ausdruck zu vereinfachen, betrachten wir die x -Komponente des letzten Terms:

$$\begin{aligned} T_3 = \left[\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \right]_x &= v_y \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - v_z \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \\ &= v_y \frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial A_z}{\partial x} - v_y \frac{\partial A_x}{\partial y} - v_z \frac{\partial A_x}{\partial z}. \end{aligned}$$

Nun addieren wir $0 = v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} - v_x \frac{\partial A_x}{\partial x}$

und erhalten mit $\frac{dA_x}{dt} = \frac{\partial A_x}{\partial t} + \left(v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial A_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial A_x}{\partial z} \right)$

dass $T_3 = v_y \frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial A_z}{\partial x} + v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} - v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} - v_y \frac{\partial A_x}{\partial y} - v_z \frac{\partial A_x}{\partial z}$
 $= \frac{\partial}{\partial x} (\vec{v} \cdot \vec{A}) - \frac{dA_x}{dt} + \frac{\partial A_x}{\partial t}.$

Damit erhalten wir für die x -Komponente der Lorentz-Kraft

$$\begin{aligned} F_x/e &= -\frac{\partial\Phi}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial x} (\vec{v} \cdot \vec{A}) - \frac{1}{c}\frac{dA_x}{dt} + \frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} \\ &= -\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial x} (\vec{v} \cdot \vec{A}) - \frac{1}{c}\frac{dA_x}{dt}. \end{aligned}$$

Weil $\vec{A}(\vec{r}, t)$ nicht von der Geschwindigkeit \vec{v} abhängt, gilt

$$\begin{aligned} A_x &= \frac{\partial}{\partial v_x} (A_x v_x) = \frac{\partial}{\partial v_x} (\vec{A} \cdot \vec{v}), \\ \text{so dass} \quad F_x/e &= -\frac{\partial}{\partial x} \left[\Phi - \frac{1}{c}\vec{v} \cdot \vec{A} \right] - \frac{1}{c}\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial v_x} (\vec{A} \cdot \vec{v}) \right). \end{aligned} \quad (5.75)$$

5 Maxwell-Gleichungen

Da das skalare Potential $\phi(\vec{r}, t)$ ebenfalls nicht von der Geschwindigkeit \vec{v} abhängt, dürfen wir schreiben

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial v_x} \quad (5.76)$$

mit dem generalisierten Potential
$$U \equiv e\Phi - \frac{e}{c} \vec{A} \cdot \vec{v}. \quad (5.77)$$

Entsprechendes gilt für die y - und z -Komponente der Lorentz-Kraft, d.h.

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial v_y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial v_z},$$

so dass allgemein

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}_{\vec{r}} U + \frac{d}{dt} \left(\vec{\nabla}_{\vec{v}} U \right). \quad (5.78)$$

Die Gleichungen (5.76) und (5.78) erfüllen genau die in der Mechanik-Vorlesung (siehe dort Gleichung 3.13.1)) gestellten Anforderungen an das verallgemeinerte Potential V^* .

Für die Lagrange-Funktion eines Teilchens im elektromagnetischen Feld $L = T - V^*$ folgt mit $V^* = U$:

$$L = T - e\Phi + \frac{e}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} = \frac{m}{2} v^2 - e\Phi + \frac{e}{c} \vec{A} \cdot \vec{v}. \quad (5.79)$$

Da keine Zwangsbedingungen vorliegen, sind die verallgemeinerten Koordinaten q_k gleich den natürlichen Koordinaten x_k . Es gilt dann für den kanonisch konjugierten Impuls

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial T}{\partial \vec{v}} + \frac{e}{c} \vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{v}} = m\vec{v} + \frac{e}{c} \vec{A}, \quad (5.80)$$

d.h. ein Teilchen im Magnetfeld ändert seinen Linearimpuls um $e/c\vec{A}$. Dies ist ein Beispiel dafür, dass der kanonisch konjugierte Impuls nicht mit dem mechanischen Linearimpuls $m\vec{v}$ übereinstimmt.

Die Hamilton-Funktion eines Teilchens im elektromagnetischen Feld erhalten wir aus der Lagrange-Funktion (5.79) durch

$$H(\vec{x}, \vec{p}, t) = \vec{p} \cdot \vec{v} - L(\vec{x}, \vec{v}, t) \quad (5.81)$$

und Einsetzen von \vec{v} aus der Gleichung (5.80) für den kanonisch konjugierten Impuls:

$$\vec{v} = \frac{1}{m} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right). \quad (5.82)$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} H &= \frac{\vec{p}}{m} \cdot \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) - \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + e\Phi - \frac{e}{mc} \vec{A} \cdot \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \\ &= e\Phi + \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \cdot \left[\frac{\vec{p}}{m} - \frac{\vec{p}}{2m} + \frac{e}{2mc} \vec{A} - \frac{e}{mc} \vec{A} \right] \\ &= \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + e\Phi. \end{aligned} \quad (5.83)$$

6 Elektromagnetische Wellen und Strahlung

Zu den bedeutendsten Erfolgen der Maxwell-Theorie gehört die Erkenntnis, dass sich elektromagnetische Felder unabhängig von irgendwelchen Ladungen oder Strömen selbst im Vakuum mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten können. Das bedeutet, dass die Felder nicht nur mathematische Hilfsgrößen zur Beschreibung von Wechselwirkungsprozessen zwischen Ladungen bzw. Strömen von elektrischen Ladungen darstellen – so hatten wir sie zunächst eingeführt –, sondern eine eigenständige physikalische Realität besitzen.

6.1 Elektromagnetische Wellen im Vakuum

In *freien* Raumbereichen, d.h. Raumbereichen ohne Ladungen ($\rho = 0$) und Ströme ($\vec{j} = 0$), gelten für die elektromagnetischen Potentiale in Lorenz-Eichung nach Gleichungen (5.36)–(5.37) die homogenen Wellengleichungen

$$\square \Phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi(\vec{r}, t)}{\partial t^2} - \Delta \Phi(\vec{r}, t) = 0$$

und

$$\square \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} - \Delta \vec{A}(\vec{r}, t) = 0$$

und für die Felder $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$, $\vec{E} = -\text{grad } \Phi - (1/c)\partial \vec{A}/\partial t$ ebenfalls

$$\square \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 \tag{6.1}$$

und

$$\square \vec{E}(\vec{r}, t) = 0. \tag{6.2}$$

Die Gleichungen (6.1) und (6.2) lassen sich auch direkt aus den quelfreien Maxwell-Gleichungen im Vakuum (5.14)–(5.17) ableiten:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \tag{6.3}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \tag{6.4}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0, \tag{6.5}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \tag{6.6}$$

6 Elektromagnetische Wellen und Strahlung

Bilden wir die Rotation von Gleichung (6.3), so folgt mit Gleichungen (6.4) und (6.5) und $\text{rot rot} = \text{grad div} - \Delta$

$$\text{rot rot } \vec{E} = \text{grad div } \vec{E} - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E} = -\text{rot } \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\text{oder} \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \Delta \vec{E} = \square \vec{E} = 0.$$

Bilden wir ebenso die Rotation von Gleichung (6.5), so folgt mit Gleichungen (6.6) und (6.3)

$$\begin{aligned} \text{rot rot } \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial (\text{rot } \vec{E})}{\partial t} &= \text{grad div } \vec{B} - \Delta \vec{B} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \\ &= -\Delta \vec{B} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{oder} \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \Delta \vec{B} = \square \vec{B} = 0$$

Q.E.D.

Im Vakuum erfüllt jede Komponente von \vec{E} und \vec{B} dann die Gleichung

$$\Delta f = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \quad (6.7)$$

Diese beschreibt, wie wir zeigen werden, Wellen, die sich mit der Geschwindigkeit c ausbreiten. Diese Erkenntnis, dass Licht eine elektromagnetische Welle darstellt, war ein großer Triumph für Maxwell. In seinen Worten: "We can scarcely avoid the interference that light consists in the transverse modulations of the same medium which is the cause of electric and magnetic phenomena."

Eine wichtige Rolle bei dieser Erkenntnis kommt dem von Maxwell eingeführten Verschiebungsstrom $(1/c)\partial\vec{E}/\partial t$ (siehe Kap. 5.3) im Ampere-Gesetz zu: ohne diesen hätten wir keine Wellengleichung für \vec{E} herleiten können, sondern nur für \vec{B} .

6.1.1 Ebene Wellen

Eine Lösung $f(x, t)$ der Gleichung (6.7), die nur von *einer* Raumkoordinate (hier x) abhängt, wird als *ebene* Welle bezeichnet. Die Wellengleichung lautet dann

$$\left(\partial_x^2 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right) f(x, t) = 0 \quad (6.8)$$

$$\text{oder} \quad \left(\partial_x - \frac{1}{c} \partial_t \right) \left(\partial_x + \frac{1}{c} \partial_t \right) f(x, t) = 0, \quad (6.9)$$

$$\text{wobei wir kurz} \quad \partial_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$$

schreiben. Gleichung (6.9) vereinfacht sich weiter mit den Substitutionen

$$\begin{aligned} & \xi = x - ct, & \eta &= x + ct, \\ \text{oder} & x = \frac{1}{2}(\eta + \xi), & ct &= \frac{1}{2}(\eta - \xi), \\ \text{zu} & \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} f(\xi, \eta) = 0, \end{aligned} \quad (6.10)$$

$$\begin{aligned} \text{denn} & \quad \partial_\xi = \frac{\partial x}{\partial \xi} \partial_x + \frac{\partial(ct)}{\partial \xi} \frac{1}{c} \partial_t = \frac{1}{2} \left(\partial_x - \frac{1}{c} \partial_t \right) \\ \text{und} & \quad \partial_\eta = \frac{\partial x}{\partial \eta} \partial_x + \frac{\partial(ct)}{\partial \eta} \frac{1}{c} \partial_t = \frac{1}{2} \left(\partial_x + \frac{1}{c} \partial_t \right), \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung von Gleichung (6.10) kann als Summe von beliebigen Funktionen $f_1(\xi)$ und $f_2(\eta)$ geschrieben werden:

$$\begin{aligned} f(\xi, \eta) &= f_1(\xi) + f_2(\eta) \\ \text{oder} & \quad f(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct). \end{aligned} \quad (6.11)$$

In Abbildung 6.1 skizzieren wir einen möglichen Verlauf der Funktion $f_1(x - ct)$ zu einem festen Zeitpunkt $t = t_1$ (Momentaufnahme). Zu einer späteren Zeit $t = t_2 > t_1$ ist dieser um die Strecke $c(t_2 - t_1)$ in positiver x -Richtung verschoben. Die ebene Welle breitet sich also, ohne ihre Form zu ändern, mit der Geschwindigkeit c in positiver x -Richtung aus.

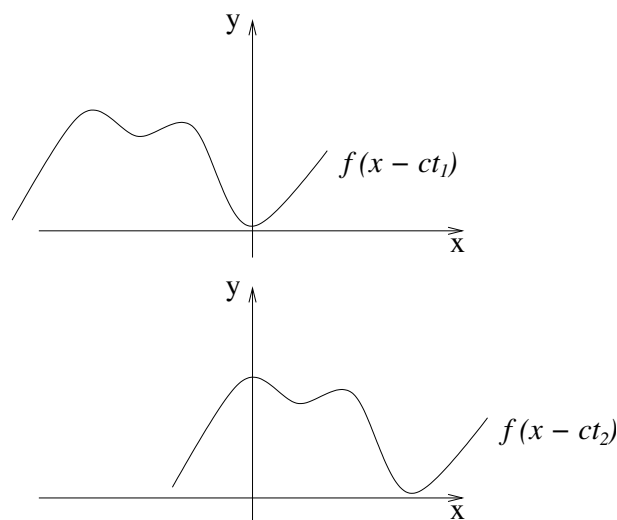


Abbildung 6.1: Verlauf der Funktion $f(x - ct)$

Analog beschreibt $f_2(x + ct)$ eine ebene Welle, die in negativer x -Richtung mit der Geschwindigkeit c fortschreitet.

6.1.2 Ebene, monochromatische Welle

Ein Spezialfall liegt vor, wenn $f(x, t)$ durch eine harmonische (d.h. periodische) Funktion gegeben ist, d.h. in komplexer Schreibweise

$$f_1(x - ct) \propto e^{ik(x-ct)} \quad (6.12)$$

und $f_2(x + ct) = 0$. Eine solche Lösung heißt *ebene, monochromatische Welle*. Die Größe k heißt *Wellenzahl*. Definiert man durch die *Dispersionsrelation* für das Vakuum die Kreisfrequenz $\omega^2 = k^2 c^2$ so schreibt sich Gleichung (6.12) mit $\omega = kc$ auch als

$$f_1(x - ct) \propto e^{i(kx - \omega t)} . \quad (6.13)$$

$\nu = \omega/2\pi$ ist die Frequenz und $\lambda = 2\pi/k$ die Wellenlänge der ebenen, monochromatischen Welle.

Wird die Ausbreitungsrichtung durch den Einheitsvektor $\vec{\kappa}_0$ vorgegeben, so kann mithilfe des *Wellenzahlvektors*

$$\vec{k} = k\vec{\kappa}_0 \quad (6.14)$$

die ebene, monochromatische Welle durch

$$f_1(\vec{\kappa}_0 \cdot \vec{r} - ct) \propto e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (6.15)$$

dargestellt werden.

6.1.3 Linearkombination von ebenen, monochromatischen Wellen

Obwohl (6.15) nur eine spezielle Wellenform darstellt, so ist sie wichtig, da man jede Welle als Überlagerung von monochromatischen Wellen beschreiben kann, d.h. wir setzen die allgemeine Lösung von Gleichung (6.8) an als

$$f(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk A(k) \exp [i(kx - \omega t)] , \quad (6.16)$$

wobei $A(k)$ eine zunächst beliebige Funktion der Wellenzahl k ist. Die Lösung (6.16) heißt *Wellenpaket*.

Mit dem Ansatz (6.16) folgen sofort

$$\begin{aligned} \partial_x f &= \int_{-\infty}^{\infty} dk ikA(k) \exp [i(kx - \omega t)] , \\ \partial_x^2 f &= \int_{-\infty}^{\infty} dk (-k^2) A(k) \exp [i(kx - \omega t)] \end{aligned} \quad (6.17)$$

$$\begin{aligned} \text{und} \quad \partial_t f &= \int_{-\infty}^{\infty} dk (-i\omega)A(k) \exp [i(kx - \omega t)] , \\ \partial_t^2 f &= \int_{-\infty}^{\infty} dk (-\omega^2)A(k) \exp [i(kx - \omega t)] . \end{aligned} \quad (6.18)$$

Einsetzen von (6.17) und (6.18) in Gleichung (6.8) liefert

$$\left(\partial_x^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right) f(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \left[-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right] A(k) \exp[i(kx - \omega t)] = 0,$$

so dass für Werte von ω und k , die die Dispersionsrelation

$$\omega^2 = k^2 c^2 \quad (6.19)$$

erfüllen, der Ansatz (6.16) tatsächlich die Lösung von Gleichung (6.8) ist

Die Amplitudenfunktion $A(k)$ kann aus den Anfangsbedingungen $f(x, t = 0)$ und $\dot{f}(x, t = 0)$ erschlossen werden.

6.1.4 Potentiale und Felder von ebenen, monochromatischen Wellen

Aus Gleichung (6.15) erhält man die Potentiale und Felder in einer ebenen, monochromatischen Welle, die sich in Richtung \vec{k}_0 ausbreitet zu

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \vec{A} &= \Re\left(\vec{A}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right), \\ \text{(b)} \quad \Phi &= \Re\left(\Phi_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right), \\ \text{(c)} \quad \vec{E} &= \Re\left(\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right), \\ \text{(d)} \quad \text{und} \quad \vec{B} &= \Re\left(\vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right). \end{aligned} \quad (6.20)$$

In formalen Rechnungen werden wir das Realteilzeichen \Re oft weggelassen und den Übergang jeweils dann vollziehen, wenn physikalisch relevante Größen berechnet werden. Für die Maxwell-Gleichung (6.3)

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c}\partial_t \vec{B}, \quad (6.21)$$

erhalten wir für die linke Seite aus (6.20c) mit $\vec{k}\cdot\vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z = k_m x_m$ und Summenkonvention

$$\begin{aligned} \left(\text{rot } \vec{E}\right)_j &= \left(\text{rot } \vec{E}_0 e^{i(k_m x_m - \omega t)}\right)_j = \epsilon_{jmn} \partial_m E_{0,n} e^{i(k_m x_m - \omega t)} \\ &= \epsilon_{jmn} i k_m E_{0,n} e^{i(k_m x_m - \omega t)} = i \left(\vec{k} \times \vec{E}\right)_j \end{aligned}$$

also $\text{rot } \vec{E} = i\vec{k} \times \vec{E}.$

Für die rechte Seite von (6.21) folgt aus (6.20d)

$$-\frac{1}{c}\partial_t \vec{B} = -\frac{1}{c}\vec{B}_0(-i\omega)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} = \frac{i\omega}{c}\vec{B}.$$

Gleichung (6.21) ergibt dann

$$\begin{aligned} i\vec{k} \times \vec{E}_0 &= \frac{i\omega}{c}\vec{B}_0 \\ \text{oder} \quad \frac{\omega}{c}\vec{B}_0 &= \vec{k} \times \vec{E}_0. \end{aligned} \quad (6.22)$$

6 Elektromagnetische Wellen und Strahlung

Mit der Dispersionsrelation (6.19) folgt dann für die Beträge

$$|\vec{B}_0| = |\vec{E}_0| . \quad (6.23)$$

Für die Maxwell-Gleichung (6.4) folgt mit (6.20c)

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= \vec{E}_0 \cdot \vec{\nabla} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = \vec{E}_0 \cdot \left[i \vec{\nabla} (\vec{k} \cdot \vec{r}) \right] e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = \\ &= i \vec{E}_0 \cdot [\operatorname{grad} (k_x x + k_y y + k_z z)] e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = \\ &= i \vec{E}_0 \cdot \vec{k} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = 0 , \\ \text{oder} \quad & \vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0 . \end{aligned} \quad (6.24)$$

Ebenso folgt aus der Maxwell-Gleichung (6.5)

$$\vec{k} \cdot \vec{B}_0 = 0 \quad (6.25)$$

Wie in Abbildung 6.2 skizziert, bilden die Vektoren \vec{E} , \vec{B} und \vec{k} der ebenen, monochromatischen Welle ein orthogonales Rechtssystem, d. h. \vec{E} und \vec{B} stehen immer und überall senkrecht auf \vec{k} und aufeinander (*transversale Wellen*). Weiterhin sind in dieser transversalen Welle $|\vec{B}| = |\vec{E}|$ betragsmäßig gleich.

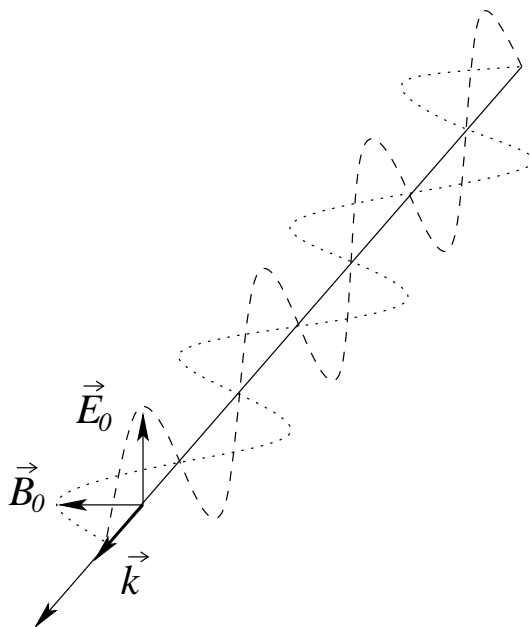


Abbildung 6.2: Orientierung der Vektoren $\vec{E}_0, \vec{B}_0, \vec{k}$

6.1.5 Energiedichte und Poynting-Vektor der ebenen, monochromatischen Welle

Die Energiedichte der monochromatischen Welle ergibt sich aus dem zeitlichen Mittel der Summe der Quadrate der Feldstärke \vec{E} und der Induktion \vec{B} . Bei der Berechnung der Quadrate müssen wir beachten, dass nur die Realteile von \vec{E} und \vec{B} quadriert werden dürfen. Das Zeitmittel bezeichnet die Mittelung der Größe $a(t)$

$$\bar{a}(t) = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} dt' a(t')$$

über eine Periode $\tau = 2\pi/\omega$.

Wir betrachten das Skalarprodukt der Realteile zweier komplexer Vektoren \vec{a} und \vec{b} :

$$(\Re \vec{a}) \cdot (\Re \vec{b}) = \frac{\vec{a} + \vec{a}^*}{2} \cdot \frac{\vec{b} + \vec{b}^*}{2} = \frac{1}{4} [\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{b}^* + \vec{a}^* \cdot \vec{b} + \vec{a}^* \cdot \vec{b}^*] . \quad (6.26)$$

Mit

$$\vec{a}(\vec{r}, t) = \vec{a}_0(\vec{r}) e^{-i\omega t}$$

und

$$\vec{b}(\vec{r}, t) = \vec{b}_0(\vec{r}) e^{-i\omega t}$$

folgt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}_0 \cdot \vec{b}_0 e^{-2i\omega t} ,$$

so dass

$$\begin{aligned} \overline{\vec{a} \cdot \vec{b}} &= \frac{\vec{a}_0 \cdot \vec{b}_0}{\tau} \int_t^{t+\tau} dt' \exp(-2i\omega t') \\ &= \frac{i}{2\omega\tau} \vec{a}_0 \cdot \vec{b}_0 \left[\exp(-2i\omega t') \right]_t^{t+\tau} \\ &= \frac{i}{2\omega\tau} \vec{a}_0 \cdot \vec{b}_0 \exp(-2i\omega t) [\exp(-2i\omega\tau) - 1] = 0 \end{aligned}$$

mit

$$\omega\tau = 2\pi .$$

Ebenso folgt aus

$$\overline{\vec{a}^* \cdot \vec{b}^*} = \vec{a}_0^* \cdot \vec{b}_0^* e^{2i\omega t} ,$$

dass

$$\overline{\vec{a}^* \cdot \vec{b}^*} = 0 .$$

Dagegen sind

$$\vec{a} \cdot \vec{b}^* = \vec{a}_0 \cdot \vec{b}_0^*$$

und

$$\vec{a}^* \cdot \vec{b} = \vec{a}_0^* \cdot \vec{b}_0 ,$$

so dass

$$\overline{\vec{a} \cdot \vec{b}^*} = \overline{\vec{a}_0 \cdot \vec{b}_0^*} = \frac{1}{\tau} \vec{a}_0 \cdot \vec{b}_0^* \int_t^{t+\tau} dt' = \vec{a}_0 \cdot \vec{b}_0^*$$

und

$$\overline{\vec{a}^* \cdot \vec{b}} = \vec{a}_0^* \cdot \vec{b}_0 .$$

Damit erhalten wir für das zeitliche Mittel von Gleichung (6.26)

$$\overline{\Re \vec{a} \cdot \Re \vec{b}} = \frac{1}{4} (\vec{a}_0 \cdot \vec{b}_0^* + \vec{a}_0^* \cdot \vec{b}_0) = \frac{1}{2} \Re (\vec{a}_0 \cdot \vec{b}_0^*) .$$

6 Elektromagnetische Wellen und Strahlung

Wir erhalten für die Energiedichte der monochromatischen Welle

$$\bar{u}_{em} = \frac{1}{8\pi} [\overline{E^2} + \overline{B^2}] = \frac{1}{16\pi} \Re [\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0^* + \vec{B}_0 \cdot \vec{B}_0^*] = \frac{1}{16\pi} [E_0^2 + B_0^2]$$

und mit Beziehung (6.23)

$$\bar{u}_{em} = \frac{E_0^2}{8\pi} = \frac{B_0^2}{8\pi}. \quad (6.27)$$

Ganz analog findet man für das Kreuzprodukt

$$\overline{\Re \vec{a}(t) \times \Re \vec{b}(t)} = \frac{1}{2} \Re (\vec{a}_0 \times \vec{b}_0^*) = \frac{1}{2} \Re (\vec{a}_0^* \times \vec{b}_0),$$

so dass für den Poynting-Vektor der monochromatischen Welle folgt

$$\overline{\vec{S}(\vec{r}, t)} = \frac{c}{4\pi} \overline{\vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t)} = \frac{c}{8\pi} \Re (\vec{E}_0 \times \vec{B}_0^*). \quad (6.28)$$

Aus Gleichung (6.22) folgt

$$\vec{B}_0^* = \frac{c}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}_0^*.$$

Eingesetzt in Gleichung (6.28) folgt mit (6.24)

$$\vec{E}_0 \times (\vec{k} \times \vec{E}_0^*) = E_0^2 \vec{k} - \vec{E}_0^* (\vec{E}_0 \cdot \vec{k}) = E_0^2 \vec{k},$$

so dass

$$\overline{\vec{S}(\vec{r}, t)} = \frac{c^2}{8\pi\omega} \Re [\vec{E}_0 \times (\vec{k} \times \vec{E}_0^*)] = \frac{c^2}{8\pi\omega} E_0^2 \vec{k}. \quad (6.29)$$

Zusammen mit Beziehung (6.27) erhalten wir

$$\overline{\vec{S}} = \frac{c^2}{\omega} \bar{u}_{em} \vec{k} \quad (6.30)$$

und mit der Dispersionsrelation $\omega = kc$

$$\overline{\vec{S}} = c \bar{u}_{em} \frac{\vec{k}}{k}. \quad (6.31)$$

Der Energietransport in der ebenen, monochromatischen Welle erfolgt in Richtung des Ausbreitungsvektors.

6.1.6 Polarisation

Wir führen in Richtung von \vec{E}_0 und $\vec{B}_0 \perp \vec{E}_0$ die zwei zueinander senkrecht stehenden, konstanten Einheitsvektoren \vec{e}_1 und \vec{e}_2 ein (siehe Abbildung 6.2). Diese spannen die Ebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtung \vec{k} auf, die sog. *Polarisationsebene*. Dann erfüllen die beiden Lösungen

$$\vec{E}_1(\vec{r}, t) = \vec{e}_1 E_1 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad E_1 = |E_1| e^{i\alpha_1}$$

und

$$\vec{E}_2(\vec{r}, t) = \vec{e}_2 E_2 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad E_2 = |E_2| e^{i\alpha_2}$$

6.1 Elektromagnetische Wellen im Vakuum

die Wellengleichung (6.2). Die Amplitudenfaktoren E_1 und E_2 können komplexwertig sein und werden jeweils durch ihren Absolutwert und ihre Phase bestimmt.

Die allgemeine Lösung der Wellengleichung (6.2) ist durch die Linearkombination

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = (\vec{e}_1 E_1 + \vec{e}_2 E_2) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} . \quad (6.32)$$

gegeben.

Linear polarisierte Welle: In diesem Fall haben E_1 und E_2 dieselbe Phase $\alpha_1 = \alpha_2$, so dass

$$\vec{E}_{linear}(\vec{r}, t) = (\vec{e}_1 |E_1| + \vec{e}_2 |E_2|) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \alpha_1)} . \quad (6.33)$$

Elliptisch polarisierte Welle: In diesem Fall haben E_1 und E_2 unterschiedliche Phasen $\alpha_1 \neq \alpha_2$, so dass mit der Phasenverschiebung $\phi = \alpha_2 - \alpha_1$

$$\vec{E}_{ellipt}(\vec{r}, t) = \left[\vec{e}_1 |E_1| e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + \vec{e}_2 |E_2| e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi)} \right] e^{i\alpha_1} . \quad (6.34)$$

Zirkular polarisierte Welle: In diesem Fall sind die Absolutwerte der Amplitudenfaktoren $E_1 = E_2 = E_0$ gleichgroß und die Phasendifferenz $\phi = \pm\pi/2$, so dass

$$\vec{E}_{zirk}(\vec{r}, t) = E_0 (\vec{e}_1 \pm i\vec{e}_2) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} . \quad (6.35)$$

Betrachten wir den Fall zirkular polarisierter Wellen genauer: o.B.d.A. sei $\vec{k} \parallel \vec{e}_z$, so dass $\vec{e}_1 = \vec{e}_x$, $\vec{e}_2 = \vec{e}_y$ und

$$\vec{E}_{zirk} = E_0 (\vec{e}_x \pm i\vec{e}_y) e^{i(kz - \omega t)} .$$

Für den Realteil des elektrischen Felds der zirkular polarisierten Welle erhalten wir dann

$$\begin{aligned} \Re \vec{E}_{zirk} &= \frac{E_0}{2} \left[(\vec{e}_x \pm i\vec{e}_y) e^{i(kz - \omega t)} + (\vec{e}_x \mp i\vec{e}_y) e^{-i(kz - \omega t)} \right] \\ &= \frac{E_0}{2} \left[\vec{e}_x \left(e^{i(kz - \omega t)} + e^{-i(kz - \omega t)} \right) \pm i\vec{e}_y \left(e^{i(kz - \omega t)} - e^{-i(kz - \omega t)} \right) \right] \\ &= \frac{E_0}{2} \left[\vec{e}_x 2 \cos(kz - \omega t) \pm 2i^2 \vec{e}_y \sin(kz - \omega t) \right] \\ &= E_0 [\vec{e}_x \cos(kz - \omega t) \mp \vec{e}_y \sin(kz - \omega t)] \\ \text{oder} \quad E_{zirk,x} &= E_0 \cos(kz - \omega t) = E_0 \cos(\omega t - kz) , \\ E_{zirk,y} &= \mp E_0 \sin(kz - \omega t) = \pm E_0 \sin(\omega t - kz) . \end{aligned} \quad (6.36)$$

Für festes z ist Gleichung (6.36) die Parameterdarstellung eines Kreises mit dem Radius E_0 in der Polarisationssebene, denn

$$E_{zirk,x}^2 + E_{zirk,y}^2 = E_0^2 .$$

Der \vec{E} -Vektor einer zirkular polarisierten Welle hat den konstanten Betrag E_0 und rotiert in der Polarisationssebene mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω (siehe Abbildung 6.3), die durch

$$\begin{aligned} \tan \Theta &= \frac{E_{zirk,y}}{E_{zirk,x}} = \frac{\pm \sin(\omega t - kz)}{\cos(\omega t - kz)} \\ &= \pm \tan(\omega t - kz) = \tan(\pm(\omega t - kz)) , \\ \text{also} \quad \Theta &= \pm(\omega t - kz) \end{aligned} \quad (6.37)$$

6 Elektromagnetische Wellen und Strahlung

gegeben ist.

Bei Blickrichtung auf die entgegenkommende Welle, also in negativer z -Richtung dreht sich der \vec{E} -Vektor in Abbildung 6.3 für $+$ -Vorzeichen in Gleichung (6.37) mit fortlaufender Zeit t links herum (*linkshändig zirkular polarisierte Welle*) und für $-$ -Vorzeichen in Gleichung (6.37) rechts herum (*rechtshändig zirkular polarisierte Welle*).

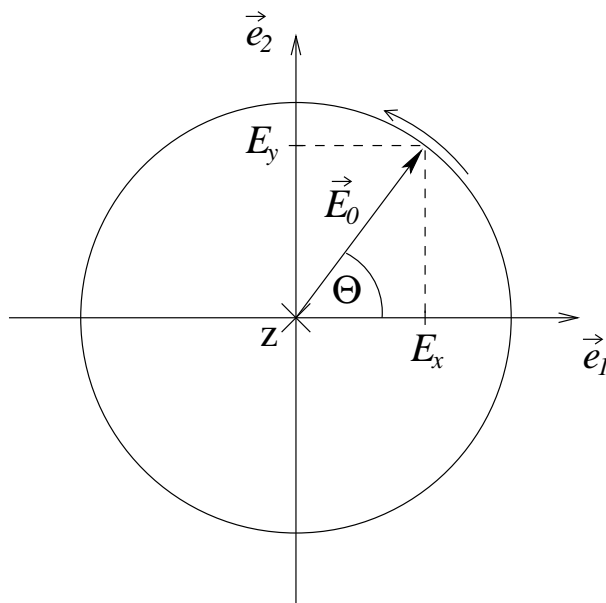


Abbildung 6.3: Linkshändig zirkular polarisierte Welle

Für den Fall elliptisch polarisierter Wellen mit der Phasendifferenz $\phi = \pm\pi/2$ gilt

$$\vec{E}_{\text{ellipt}} = (E_{01}\vec{e}_x \pm iE_{02}\vec{e}_y) e^{i(kz - \omega t)}.$$

Mit $E_{01} \neq E_{02}$ ist $\Re\vec{E}_{\text{ellipt}} = E_x\vec{e}_x + E_y\vec{e}_y$ mit

$$E_x(z, t) = E_{01} \cos(\omega t - kz), \quad E_y(z, t) = \pm E_{02} \sin(\omega t - kz). \quad (6.38)$$

Für festes z ist Gleichung (6.38) die Parameterdarstellung einer Ellipse mit den Halbachsen E_{01} und E_{02} in der Polarisationssebene (siehe Abbildung 6.4), denn

$$\left(\frac{E_x}{E_{01}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{02}}\right)^2 = 1.$$

Im allgemeinen elliptischen Fall beliebiger Phase ϕ und für $E_{01} \neq E_{02}$ ist die Ellipse noch gegenüber dem (x, y) -Koordinatenachsen gedreht. Die elliptisch polarisierte Welle kann durch die Überlagerung zweier zirkular polarisierter Wellen mit unterschiedlichem Amplitudenfaktor dargestellt werden.

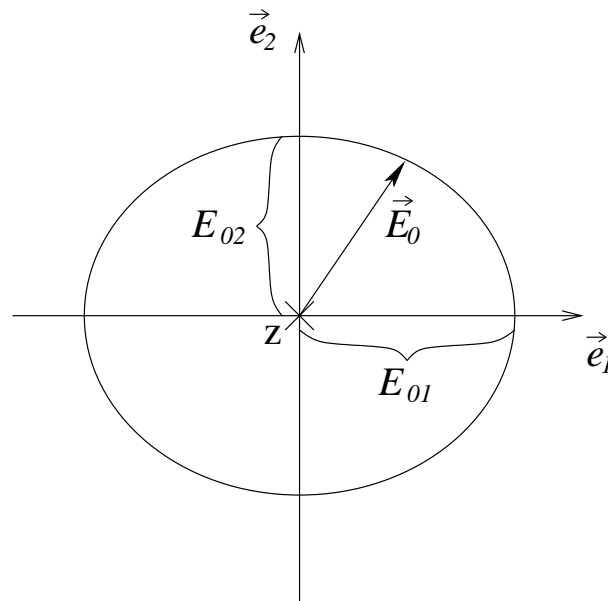


Abbildung 6.4: Elliptisch polarisierte Welle

6.2 Inhomogene Wellengleichung

Die bisherigen Rechnungen für den Vakuumfall haben gezeigt, dass die homogenen Maxwell-Gleichungen mit $\rho = 0$ und $\vec{j} = 0$ freie elektromagnetische Wellen als Lösungen erlauben, die in der ansonst leeren Welt propagieren. Es bleibt allerdings unklar, wie derartige Wellen erzeugt werden können. Zur Klärung dieser Frage müssen wir $\rho \neq 0$ und $\vec{j} \neq 0$ zulassen, und die inhomogenen Wellengleichungen (5.36) und (5.37) in Lorenz-Eichung (5.35) untersuchen:

$$\square \Phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi(\vec{r}, t)}{\partial t^2} - \Delta \Phi(\vec{r}, t) = 4\pi \rho(\vec{r}, t), \quad (6.39)$$

$$\square \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} - \Delta \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}, t), \quad (6.40)$$

mit

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0. \quad (6.41)$$

6.2.1 Singuläre Funktionen der Elektrodynamik

Die Gleichungen (6.39)–(6.40) haben die Struktur

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi(\vec{r}, t)}{\partial t^2} - \Delta \psi(\vec{r}, t) = 4\pi f(\vec{r}, t), \quad (6.42)$$

wobei $f(\vec{r}, t)$ eine bekannte Quellverteilung ist.

6 Elektromagnetische Wellen und Strahlung

Wie in der Elektrostatik wird die lineare partielle Differentialgleichung (6.42) mit Hilfe der Methode der Green-Funktion gelöst, d.h.

$$\psi(\vec{r}, t) = \int D(\vec{r}, \vec{r}', t, t') f(\vec{r}', t') dr' dt' , \quad (6.43)$$

wobei die jetzt vierdimensionale Green-Funktion als Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 D(\vec{r}, \vec{r}', t, t')}{\partial t^2} - \Delta D(\vec{r}, \vec{r}', t, t') = 4\pi \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t') \quad (6.44)$$

definiert ist und vorgegebene Randbedingungen erfüllt.

Es ist sinnvoll, die Definitionen und Eigenschaften dieser D -Funktionen (*singuläre Funktionen der Elektrodynamik*) vorab zu behandeln. Wir wählen dazu einen heuristischen, nicht strengen Zugang, d.h. die Existenz der involvierten Integrale und die Frage nach der Vertauschbarkeit von Differentiation und Integration wird nicht weiter untersucht (dies geschieht streng in der mathematischen Theorie der Distributionen).

Dazu definieren wir die vierdimensionale Delta-Funktion

$$\delta^4(X^\mu) = \delta^3(\vec{r}) \delta(x_0) , \quad (6.45)$$

wobei $x_0 = ct$ die vierte Koordinate im Minkowski-Welt-Raum ist (vergl. Mechanik-Skript Kap. 7.2). Setzen wir o.B.d.A. $\vec{r}' = 0, t' = 0$, so lautet Gleichung (6.44)

$$\square D(X^\mu) = 4\pi c \delta^4(X^\mu) , \quad (6.46)$$

mit dem kontravarianten Ortsvektor

$$X^\mu = (x_0, x, y, z) = (ct, x, y, z) .$$

Mit dem kovarianten Ortsvektor

$$X_\mu = (x_0, -x, -y, -z) = (ct, -x, -y, -z)$$

ist der Quabla-Operator

$$\square = \frac{\partial}{\partial X_\mu} \frac{\partial}{\partial X^\mu} = \partial_0^2 - \partial_1^2 - \partial_2^2 - \partial_3^2 \quad (6.47)$$

ein Lorentz-Skalar . Wir definieren weiterhin den vierdimensionalen kontravarianten Wellenvektor durch

$$k^\mu = (k_0, \vec{k}) , \quad (6.48)$$

wobei $k_0 = \omega/c$. Dann gilt

$$\begin{aligned} X_\mu X^\mu &= x_0^2 - r^2 = c^2 t^2 - r^2 , \\ k_\mu k^\mu &= k_0^2 - k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 , \\ X_\mu k^\mu &= k_0 x_0 - \vec{k} \cdot \vec{r} . \end{aligned}$$

Wir kennen die Integraldarstellung (2.129) der eindimensionalen δ -Funktion; entsprechend gilt

$$\delta(X^\mu) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 k^\mu \exp(-ik^\mu X_\mu) . \quad (6.49)$$

Deshalb stellen wir $D(X^\mu)$ ebenfalls dar als

$$D(X^\mu) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 k^\mu g(k) \exp(-ik^\mu X_\mu) \quad (6.50)$$

Setzen wir die Darstellungen (6.49) und (6.50) in Gleichung (6.46) ein, so folgt mit

$$\begin{aligned} \square D(X^\mu) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 k^\mu g(k) \square \exp(-ik^\mu X_\mu) \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 k^\mu g(k) k_\mu k^\mu \exp(-ik^\mu X_\mu) \\ \text{dass} \quad &-\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 k^\mu g(k) k_\mu k^\mu \exp(-ik^\mu X_\mu) \\ &= \frac{4\pi c}{(2\pi)^4} \int d^4 k^\mu \exp(-ik^\mu X_\mu) . \end{aligned}$$

Für die Fourier-Transformation $g(k)$ von D gilt also

$$g(k) = -\frac{4\pi c}{k_\mu k^\mu} = \frac{4\pi c}{k^2 - k_0^2} . \quad (6.51)$$

Für Gleichung (6.50) folgt dann

$$\begin{aligned} D(X^\mu) &= \frac{4\pi c}{(2\pi)^4} \int d^4 k^\mu \frac{\exp(-ik^\mu X_\mu)}{k^2 - k_0^2} \\ &= \frac{4\pi c}{(2\pi)^4} \int d^3 k \frac{\exp(i\vec{k} \cdot \vec{r})}{2|\vec{k}|} \int_C dk^0 e^{-ik_0 x_0} \left[\frac{1}{k_0 + |\vec{k}|} - \frac{1}{k_0 - |\vec{k}|} \right] , \end{aligned} \quad (6.52)$$

wobei C den Integrationsweg in der komplexen k_0 -Ebene bezeichnet.

Die Darstellung (6.52) ist formaler Natur, da für $k^2 = k_0^2$ der Integrand eine Singularität hat, d.h. es existieren Pole bei $k_0 = \pm|\vec{k}| = \pm k$. Das Integral (6.52) ist an diesen Stellen nicht definiert und solange bedeutungslos, bis Regeln zur Behandlung dieser Singularität gegeben werden. Diese Regeln können jedoch nicht aus der Mathematik kommen, sondern müssen aus physikalischen Betrachtungen abgeleitet werden.

Wir benutzen hier einen phänomenologischen Weg, um das Integral (6.52) auszuwerten: Im singulären k_0 -Integral werden die Integrationswege deformiert, um der Singularität auszuweichen, und danach wird der Grenzübergang vollzogen. Wir betrachten in Abbildung 6.5 die komplexe k_0 -Ebene und zeichnen dort die möglichen Umgehungswege ein, d.h. um die Pole werden kleine Kreise mit dem Radius ρ ausgeschnitten. Es gibt dann die Abbildung 6.6 gezeigten vier Integrationswege C_1, C_2, C_3 und C_4 . Nachdem auf diesen Wegen die Integration

6 Elektromagnetische Wellen und Strahlung

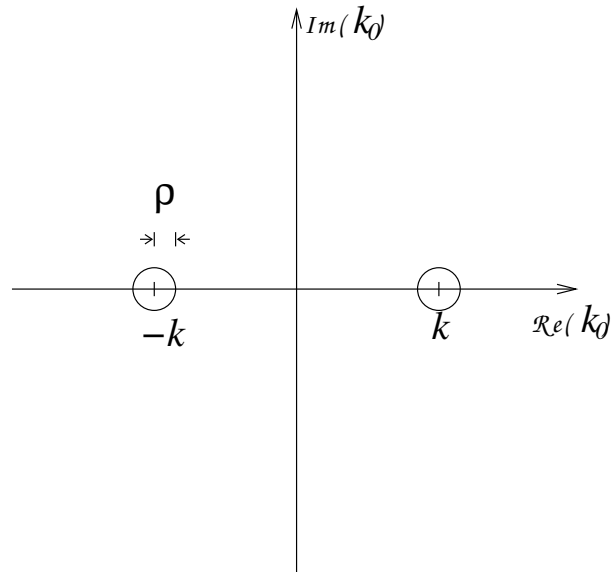


Abbildung 6.5: Die Polstellen in der komplexen k_0 -Ebene mit den Umgebungskreisen

durchgeführt wurde, kann der Grenzübergang $\rho \rightarrow 0$ vollzogen werden. Alle möglichen Wege, d.h. alle Grenzprozesse, besitzen eine mathematisch-physikalische Bedeutung. Entsprechend den vier möglichen Wegen, ergeben sich vier verschiedene D -Funktionen.

Weg 1: ist wichtig und ergibt die sog. *retardierte Green-Funktion*

$$\begin{aligned} D_1(X^\mu) &= \frac{4\pi c}{(2\pi)^4} \int d^3k \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) \int_{C_1} dk^0 \frac{e^{-ik_0 x_0}}{k^2 - k_0^2} \\ &= \frac{c}{4\pi^3} \int d^3k \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) \int_{C_1} dk^0 F(k, k_0) \end{aligned} \quad (6.53)$$

mit ($k = |\vec{k}|$)

$$F(k, k_0) = \frac{e^{-ik_0 x_0}}{k^2 - k_0^2} = \frac{1}{2k} \left[\frac{1}{k_0 + k} - \frac{1}{k_0 - k} \right] e^{-ik_0 x_0}. \quad (6.54)$$

Wir unterscheiden die zwei Fälle (a) $x_0 < 0$ und (b) $x_0 > 0$:

(a) im ersten Fall $x_0 = -|x_0| < 0$ ist die Funktion $F(k, k_0)$ exponentiell gedämpft für $\Im(k_0) > 0$, denn

$$F(k, k_0) \propto e^{-ik_0 x_0} = e^{i|x_0|k_0} = e^{i|x_0|(\Re(k_0) + i\Im(k_0))} \propto e^{-\Im(k_0)|x_0|} \rightarrow 0$$

für $\Im(k_0) \rightarrow \infty$. Deshalb schließen wir den Integrationsweg in der oberen ($\Im(k_0) > 0$)-Ebene (siehe Abbildung 6.7).

Auf dem Halbkreis T_1 gilt für $R \rightarrow \infty$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{T_1} dk^0 F(k, k_0) = 0,$$

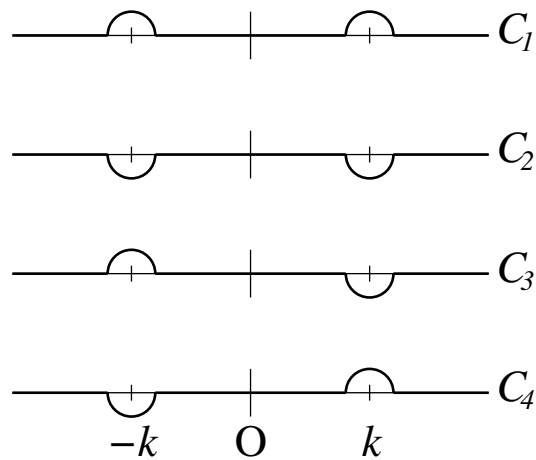


Abbildung 6.6: Die vier Möglichkeiten, die Polstellen $\pm k$ zu umgehen

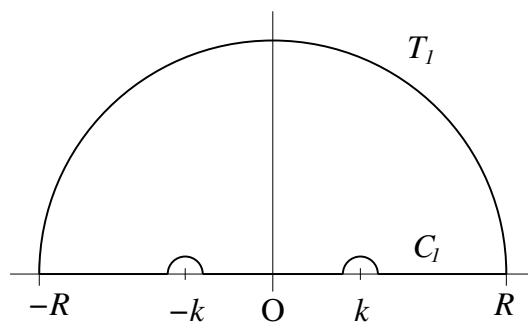


Abbildung 6.7: Fall (a): Integration in der positiven Halbebene

so dass das Integral über den *geschlossenen* Integrationsweg $C_1 + T_1$ gleich der Summe der Residuen der eingeschlossenen Pole ist:

$$\int_{C_1} dk^0 F(k, k_0) = \int_{C_1+T_1} dk^0 F(k, k_0) = 2\pi i \sum \text{Res } F(k, k_0),$$

wobei die Pole im Gegenuhrzeigersinn umfahren werden müssen. Weil $F(k, k_0)$ im Inneren von $C_1 + T_1$ polfrei ist, folgt

$$\int_{C_1} dk^0 F(k, k_0) = 0$$

oder
$$D_1(x) = 0 \quad \text{für } x_0 < 0 \tag{6.55}$$

(b) im zweiten Fall $x_0 = |x_0| > 0$ schließen wir den Integrationsweg in der unteren ($\Im(k_0) < 0$) Halbebene, weil dort $e^{\Im(k_0)x_0} \rightarrow 0$ für $R \rightarrow \infty$ (siehe Abbildung 6.8).

6 Elektromagnetische Wellen und Strahlung

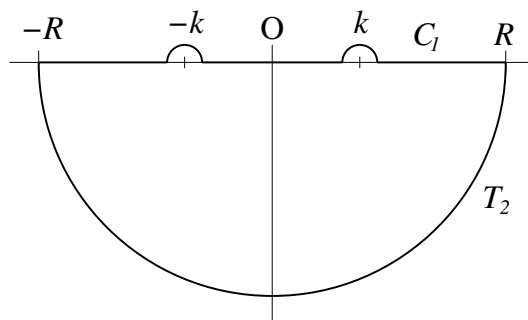


Abbildung 6.8: Fall (b): Integration in der negativen Halbebene

Diesmal liegen die Pole innerhalb des Integrationsgebiets C_1+T_2 und werden im Uhrzeigersinn (negativen Sinn) umfahren. Es folgt

$$\int_{C_1} dk^0 F(k, k_0) = \int_{C_1+T_2} dk^0 F(k, k_0) = -2\pi i \sum \text{Res} F(k, k_0)$$

oder mit Gleichung (6.54)

$$\int_{C_1} dk^0 F(k, k_0) = \frac{1}{2k} \int_{C_1+T_2} dk_0 f(k_0) \quad (6.56)$$

mit

$$f(k_0) = \left[\frac{1}{k_0 + k} - \frac{1}{k_0 - k} \right] e^{-ik_0 x_0} . \quad (6.57)$$

Hat eine beliebige komplexe Funktion $f(z)$ einen Pol der Ordnung m für $z = a$, so ist das Residuum an der Stelle durch

$$\text{Res}_a f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-a)f(z)] \quad (6.58)$$

gegeben (siehe z.B. C.R. Wiley: Advanced Engineering Mathematics, S. 806).

Die Funktion (6.57) hat zwei Pole erster ($m = 1$) Ordnung an den Stellen $k_0 = \pm k$, und die Anwendung der Formel (6.58) liefert

$$\begin{aligned} \text{Res}_{k_0=-k} f(k_0) &= \lim_{k_0 \rightarrow -k} [(k_0 - (-k))f(k_0)] \\ &= \lim_{k_0 \rightarrow -k} \left[e^{-ik_0 x_0} \left(1 - \frac{k_0 + k}{k_0 - k} \right) \right] = e^{ikx_0} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \text{Res}_{k_0=k} f(k_0) &= \lim_{k_0 \rightarrow k} [(k_0 - k)f(k_0)] \\ &= \lim_{k_0 \rightarrow k} \left[e^{-ik_0 x_0} \left(\frac{k_0 - k}{k_0 + k} \right) - 1 \right] = -e^{-ikx_0} . \end{aligned}$$

Es folgt für das Integral (6.56)

$$\begin{aligned}
 \int_{C_1} dk^0 F(k, k_0) &= -\frac{1}{2k} 2\pi i [\text{Res}_{k_0=-k} f(k_0) + \text{Res}_{k_0=k} f(k_0)] \\
 &= -\frac{\pi i}{k} [e^{ikx_0} - e^{-ikx_0}] \\
 &= -\frac{\pi i}{k} 2i \sin(kx_0) = \frac{2\pi}{|\vec{k}|} \sin(|\vec{k}| x_0) .
 \end{aligned} \tag{6.59}$$

Das Ergebnis (6.59) ist unabhängig vom Radius ρ , so dass der Grenzübergang $\rho \rightarrow 0$ vollzogen werden kann, und wir erhalten mit Beziehung (6.53)

$$D_1(X^\mu) = \begin{cases} \frac{c}{2\pi^2} \int d^3k e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \frac{\sin(|\vec{k}|x_0)}{|\vec{k}|} & \text{für } x_0 > 0 \\ 0 & \text{für } x_0 < 0 \end{cases} . \tag{6.60}$$

Die Integration über d^3k wird durch Einführung von Kugelkoordinaten im k -Raum (k, θ, ϕ) durchgeführt, wobei $\theta = \angle(\vec{k}, \vec{r})$ ist. Mit $d^3k = k^2 dk \sin\theta d\theta d\phi = k^2 dk d\mu d\phi$, wobei $\mu = \cos\theta$, folgt für $x_0 > 0$

$$\begin{aligned}
 D_1(X^\mu) &= \frac{c}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d\mu \int_0^\infty dk k^2 e^{ikr\mu} \frac{\sin(kx_0)}{k} \\
 &= \frac{c}{\pi} \int_0^\infty dk k \sin(kx_0) \int_{-1}^1 d\mu e^{ikr\mu} \\
 &= \frac{c}{\pi} \int_0^\infty dk k \sin(kx_0) \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{ikr} \\
 &= \frac{c}{i\pi r} \int_0^\infty dk \sin(kx_0) (e^{ikr} - e^{-ikr}) \\
 &= \frac{c}{i\pi r} \frac{1}{2i} \int_0^\infty dk (e^{ikr} - e^{-ikr}) (e^{ikx_0} - e^{-ikx_0}) \\
 &= -\frac{c}{2\pi r} \left(\int_0^\infty dk [e^{ik(x_0+r)} - e^{ik(x_0-r)}] \right. \\
 &\quad \left. - \int_0^\infty dk [e^{-ik(x_0-r)} - e^{-ik(x_0+r)}] \right) .
 \end{aligned}$$

Substituieren wir im zweiten Integral $k = -k'$ so folgt

$$\begin{aligned}
 D_1(X^\mu) &= -\frac{c}{2\pi r} \left(\int_0^\infty dk [e^{ik(x_0+r)} - e^{ik(x_0-r)}] \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^{-\infty} dk' [e^{ik'(x_0-r)} - e^{ik'(x_0+r)}] \right) \\
 &= -\frac{c}{2\pi r} \int_{-\infty}^\infty dk [e^{ik(x_0+r)} - e^{ik(x_0-r)}] .
 \end{aligned} \tag{6.61}$$

6 Elektromagnetische Wellen und Strahlung

Mit der Integraldarstellung (2.129) der ein-dimensionalen δ -Funktion,

$$\delta(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikz},$$

folgt für Gleichung (6.61)

$$D_1(X^\mu) = -\frac{c}{r} [\delta(x_0 + r) - \delta(x_0 - r)].$$

Weil $x_0 > 0$, kann $x_0 + r$ nicht verschwinden, so dass der erste Term keinen Beitrag ergibt. Wir erhalten

$$D_1(X^\mu) = \frac{c\delta(x_0 - r)}{r} = \frac{c\delta(x_0 - |\vec{r}|)}{|\vec{r}|} = \frac{c\delta(ct - |\vec{r}|)}{|\vec{r}|} = \frac{1}{|\vec{r}|} \delta\left(t - \frac{|\vec{r}|}{c}\right) \quad (6.62)$$

für $t > 0$.

Bei Aufgabe der Annahmen $\vec{r}' = 0$ und $t' = 0$ verallgemeinern sich Gleichungen (6.60) und (6.62) zu

$$D_1(\vec{r}, \vec{r}', t, t') = \begin{cases} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta\left(t - t' - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right) & \text{für } t > t' \\ 0 & \text{für } t < t' \end{cases}. \quad (6.63)$$

Die Lösung (6.63) wird wie folgt physikalisch interpretiert: zur Zeit $t = t'$ wird am Ort \vec{r}' eine Quelle für eine infinitesimal kurze Zeit angeschaltet. Die von dieser Punktquelle ausgehende Störung breitet sich als Kugelwelle von \vec{r}' nach anderen Orten \vec{r} aus, was gleichbedeutend mit einer von \vec{r}' auslaufenden (retardierten) Welle ist. Aus der physikalischen Anschauung ergeben sich dann folgende Forderungen:

- (1) Die Welle muss für Zeiten $t < t'$ verschwinden, weil zu diesen Zeiten noch keine Erregung vorhanden war (*Kausalitätsforderung*).
- (2) Die Welle muss am Ort \vec{r} zur Zeit $t = t' + |\vec{r} - \vec{r}'|/c$ ankommen, da sich im Vakuum die elektromagnetischen Wellen mit Lichtgeschwindigkeit c ausbreiten.
- (3) Da die Energie der Welle auf einer Kugelschale verteilt ist, sollte für $|\vec{r}| \rightarrow \infty$ die Amplitude gegen Null gehen, um Energieerhaltung zu gewährleisten.

Die Lösung (6.63) erfüllt diese Forderungen. Man nennt sie die *retardierte Green-Funktion*.

Weg 2: Mit analogen Überlegungen wie für Weg 1 erhält man für

$$t < t' : \quad D_2(\vec{r}, \vec{r}', t, t') = \frac{\delta\left(t - t' + \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (6.64)$$

und für $t > t' : \quad D_2 = 0$.

Dies entspricht gerade der zeitgespiegelten (d.h. Vertauschen von t und t') Lösung (6.63). Bei dieser Zeitspiegelung wird die auslaufende Welle in eine einlaufende Welle umgewandelt,

die sich von ∞ kommend auf den Punkt (\vec{r}', t') zusammenzieht. D_2 heißt *avancierte Green-Funktion*.

Mit völlig analogen Überlegungen behandelt man Weg 3 und Weg 4. Man erhält Green-Funktionen, die in der klassischen Physik nicht benutzt werden können, die jedoch in der Quantenfeldtheorie als kausale und antikausale Feynman-Propagatoren Verwendung finden. Nachdem wir die Green-Funktionen kennen, sind wir in der Lage, die inhomogenen Wellengleichungen (6.39) und (6.40) zu lösen. Wegen der Kausalitätsbedingung ist D_1 die richtige Green-Funktion. Die Lösungen lauten

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}, t) &= \int d^3\vec{r}' \int dt' D_1(\vec{r}, \vec{r}', t, t') \rho(\vec{r}', t') \\ &= \int d^3\vec{r}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \int dt' \rho(\vec{r}', t') \delta\left(t - t' - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right), \\ \text{also} \quad \Phi(\vec{r}, t) &= \int d^3\vec{r}' \frac{\rho\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \end{aligned} \quad (6.65)$$

$$\begin{aligned} \text{und} \quad \vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{c} \int d^3\vec{r}' \int dt' D_1(\vec{r}, \vec{r}', t, t') \vec{j}(\vec{r}', t') \\ &= \frac{1}{c} \int d^3\vec{r}' \frac{\vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \end{aligned} \quad (6.66)$$

Wir prüfen nach, ob die Darstellungen (6.65) und (6.66) die Lorenz-Eichung (6.41) erfüllen: Es ist

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{A} = \vec{\nabla}_r \cdot \vec{A} &= \frac{1}{c} \int d^3\vec{r}' \int dt' \left(\vec{\nabla}_r \cdot D_1(\vec{r}, \vec{r}', t, t') \right) \vec{j}(\vec{r}', t') \\ &= -\frac{1}{c} \int d^3\vec{r}' \int dt' \left(\vec{\nabla}_{r'} \cdot D_1(\vec{r}, \vec{r}', t, t') \right) \vec{j}(\vec{r}', t'). \end{aligned}$$

Integrieren wir diese Gleichung partiell, so ergibt sich mit $D_1 = 0$ für $|\vec{r} - \vec{r}'| \rightarrow \infty$, dass

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{c} \int d^3\vec{r}' \int dt' D_1(\vec{r}, \vec{r}', t, t') \left(\vec{\nabla}_{r'} \cdot \vec{j}(\vec{r}', t') \right) \quad (6.67)$$

$$\begin{aligned} \text{Ebenso ist} \quad \frac{1}{c} \partial_t \Phi &= \frac{1}{c} \int d^3\vec{r}' \int dt' \left(\partial_t D_1(\vec{r}, \vec{r}', t, t') \right) \rho(\vec{r}', t') \\ &= -\frac{1}{c} \int d^3\vec{r}' \int dt' \left(\partial_{t'} D_1(\vec{r}, \vec{r}', t, t') \right) \rho(\vec{r}', t'). \end{aligned} \quad (6.68)$$

Integrieren wir diese Gleichung partiell, so ergibt sich mit $D_1 = 0$ für $|\vec{r} - \vec{r}'| \rightarrow \infty$, dass

$$\frac{1}{c} \partial_t \Phi = \frac{1}{c} \int d^3\vec{r}' \int dt' D_1(\vec{r}, \vec{r}', t, t') \left(\partial_{t'} \rho(\vec{r}', t') \right). \quad (6.69)$$

6 Elektromagnetische Wellen und Strahlung

Die Summe von Gleichungen (6.67) und (6.69) ergibt dann

$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \partial_t \Phi = \int d^3 \vec{r}' \int dt' D_1(\vec{r}, \vec{r}', t, t') \left[\vec{\nabla}_{\vec{r}'} \cdot \vec{j} + \partial_{t'} \rho \right] = 0$$

aufgrund der Ladungserhaltungsgleichung (5.18). Q.E.D.

6.2.2 Viererpotential einer bewegten Punktladung

Wir bestimmen die Potentiale des elektromagnetischen Felds, das von einer sich auf der Bahnkurve $\vec{r} = \vec{r}_0(t)$ mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_0(t) = d\vec{r}_0(t)/dt$ bewegenden Ladung Q hervorgerufen wird. Die Ladungsdichte und Stromdichte sind dann durch

$$\rho(\vec{r}, t) = Q \delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t)) \quad (6.70)$$

und
$$\vec{j}(\vec{r}, t) = Q \vec{v}_0(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t)) \quad (6.71)$$

gegeben.

Gemäß Gleichung (6.65) erhalten wir für das skalare Potential

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}, t) &= \int d^3 \vec{r}' \int dt' \frac{Q}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta(\vec{r}' - \vec{r}_0(t')) \delta\left(t' - \left[t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right]\right) \\ &= Q \int dt' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|} \delta\left(t' - \left[t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}{c}\right]\right). \end{aligned} \quad (6.72)$$

Mit der Abkürzung

$$F(t') \equiv t' - t + \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}{c} \quad (6.73)$$

gilt gemäß Gleichung (2.130)

$$\delta[F(t')] = \sum_s \frac{\delta(t' - s)}{\left|\frac{dF}{dt'}\right|}$$

mit den s Nullstellen $F(s) = 0$. Offensichtlich ist

$$\frac{dF}{dt'} = 1 + \frac{1}{c} \frac{dR(t')}{dt'},$$

mit $R = |\vec{R}(t')|$, $\vec{R}(t') = \vec{r} - \vec{r}_0(t')$, so dass

$$\left|\frac{dF}{dt'}\right| = 1 + \frac{1}{c} \frac{dR(t')}{dt'}. \quad (6.74)$$

Damit erhalten wir für Gleichung (6.72)

$$\Phi(\vec{r}, t) = Q \sum_s \int dt' \frac{\delta(t' - s)}{R(t') \left[1 + \frac{1}{c} \frac{dR(t')}{dt'} \right]} \quad (6.75)$$

Es ist

$$\begin{aligned} \frac{dR(t')}{dt'} &= \frac{d}{dt'} |\vec{r} - \vec{r}_0(t')| \\ &= \frac{d}{dt'} \sqrt{(\vec{r} - \vec{r}_0(t'))^2} = \frac{1}{\sqrt{(\vec{r} - \vec{r}_0(t'))^2}} (\vec{r} - \vec{r}_0(t')) \left(-\frac{d\vec{r}_0(t')}{dt'} \right) \\ &= -\frac{\vec{r} - \vec{r}_0(t')}{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|} \cdot \vec{v}_0(t') = -\vec{n} \cdot \vec{v}_0(t') \end{aligned}$$

mit dem Einheitsvektor

$$\vec{n} \equiv \frac{\vec{R}(t')}{R(t')} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_0(t')}{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}. \quad (6.76)$$

Für das skalare Potential (6.75) folgt

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}, t) &= Q \sum_s \int dt' \frac{\delta(t' - s)}{R(t') \left[1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}_0(t')}{c} \right]} \\ &= Q \sum_s \int dt' \frac{\delta(t' - s)}{R(t') - \frac{\vec{R}(t') \cdot \vec{v}_0(t')}{c}} \\ &= \sum_s \frac{Q}{R(t') - \frac{\vec{R}(t') \cdot \vec{v}_0(t')}{c}} \Big|_{t'=s, F(s)=0}. \end{aligned}$$

Nach (6.73) ergibt sich die Nullstelle von $F(s) = 0$ zu

$$s = t' = t - \frac{R(t')}{c},$$

so dass

$$\Phi(\vec{r}, t) = \frac{Q}{R(t') - \frac{\vec{R}(t') \cdot \vec{v}_0(t')}{c}} \Big|_{t'=t-\frac{R(t')}{c}}. \quad (6.77)$$

Die Größen auf der rechten Seite dieser Gleichung müssen zur retardierten Zeit $t' = t - R(t')/c$ genommen werden.

6 Elektromagnetische Wellen und Strahlung

Analog findet man für das Vektorpotential

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{Q}{c} \frac{\vec{v}_0(t')}{R(t') - \frac{\vec{R}(t') \cdot \vec{v}_0(t')}{c}} \Big|_{t'=t-\frac{R(t')}{c}} \quad (6.78)$$

Die Gleichungen (6.77) und (6.78) bezeichnet man als *Lienard-Wiechert-Potentiale*.

6.2.3 Elektrische Feldstärke einer bewegten Punktladung

Die elektrische und magnetische Feldstärke einer bewegten Punktladung ergibt sich aus den Lienard-Wiechert-Potentiale gemäß

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } \Phi, \quad \vec{B} = \text{rot } \vec{A}.$$

Wir benutzen nicht die ausintegrierten Potentiale (6.77) und (6.78), sondern Gleichung (6.72):

$$\Phi(\vec{r}, t) = Q \int dt' \frac{\delta\left(t' - \left[t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}{c}\right]\right)}{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}$$

und analog
$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{Q}{c} \int dt' \frac{\vec{v}_0(t') \delta\left(t' - \left[t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}{c}\right]\right)}{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}.$$

Mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \left[\left(|\vec{r} - \vec{r}_0(t')| \right)^{-1/2} \right] &= -\frac{1}{2} \left[\left(|\vec{r} - \vec{r}_0(t')| \right)^2 \right]^{-3/2} 2 \left(\vec{r} - \vec{r}_0(t') \right) \\ &= -\frac{\vec{r} - \vec{r}_0(t')}{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|^3} = -\frac{\vec{R}(t')}{R^3(t')} \end{aligned}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}_r \left(\frac{\delta\left(t' - \left[t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}{c}\right]\right)}{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|} \right) &= -\frac{\vec{R}(t')}{R^3(t')} \delta\left(t' - \left[t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}{c}\right]\right) \\ &\quad + \frac{1}{R(t')} \delta' \left(t' - \left[t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}{c} \right] \right) \frac{1}{c} \vec{\nabla}_r R(t'), \end{aligned}$$

wobei δ' die Ableitung der δ -Funktion nach ihrem Argument bezeichnet. Mit

$$\vec{\nabla}_r R(t') = \vec{\nabla}_r \left[\left(\vec{r} - \vec{r}_0(t') \right)^2 \right]^{1/2} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_0(t')}{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|} = \frac{\vec{R}(t')}{R(t')}$$

folgt für

$$\begin{aligned} \text{grad } \Phi(\vec{r}, t) &= Q \int dt' \left(-\frac{\vec{R}(t')}{R^3(t')} \delta \left(t' - \left[t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}{c} \right] \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\vec{R}(t')}{cR^2(t')} \delta' \left(t' - \left[t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}{c} \right] \right) \right). \end{aligned} \quad (6.79)$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \delta' \left(t' - \left[t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}{c} \right] \right) &= \frac{\partial}{\partial \left(t' - t + \frac{R}{c} \right)} \delta \left(t' - t + \frac{R}{c} \right) \\ &= \frac{1}{\frac{\partial \left(t' - t + \frac{R}{c} \right)}{\partial t'}} \frac{\partial}{\partial t'} \delta \left(t' - t + \frac{R}{c} \right) \\ &= \frac{1}{\frac{\partial F(t')}{\partial t'}} \frac{\partial}{\partial t'} \delta \left(t' - t + \frac{R}{c} \right) \\ &= \frac{1}{\kappa(\vec{r}', t')} \frac{\partial}{\partial t'} \delta \left(t' - t + \frac{R}{c} \right), \end{aligned}$$

wobei

$$\kappa(\vec{r}', t') \equiv \frac{\partial F(t')}{\partial t'} = 1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_0(t').$$

Es folgt für Beziehung (6.79)

$$\begin{aligned} \text{grad } \Phi(\vec{r}, t) &= -Q \int dt' \frac{\vec{R}(t')}{R^3(t')} \delta \left(t' - \left[t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}{c} \right] \right) \\ &\quad + Q \int dt' \frac{\vec{R}(t')}{cR^2(t') \kappa(\vec{r}', t')} \frac{\partial}{\partial t'} \delta \left(t' - \left[t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}{c} \right] \right). \end{aligned}$$

6 Elektromagnetische Wellen und Strahlung

Wir integrieren das zweite Integral partiell und erhalten

$$\begin{aligned} \text{grad } \Phi(\vec{r}, t) &= -Q \int dt' \delta \left(t' - \left[t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}{c} \right] \right) \\ &\quad \times \left[\frac{\vec{R}(t')}{R^3(t')} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{\vec{R}(t')}{R^2(t') \kappa(\vec{r}', t')} \right) \right] \\ &\quad + \left[\frac{Q \vec{R}(t')}{c R^2(t') \kappa(\vec{r}', t')} \delta \left(t' - \left[t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}{c} \right] \right) \right]_{-\infty}^{\infty}, \end{aligned}$$

so dass mit dem Einheitsvektor (6.76) folgt

$$\begin{aligned} \text{grad } \Phi(\vec{r}, t) &= -Q \int dt' \delta \left(t' - \left[t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}{c} \right] \right) \\ &\quad \times \left[\frac{\vec{n}}{R^2(t')} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{\vec{n}}{R(t') \kappa(\vec{r}', t')} \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.80)$$

Ebenso berechnen wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{Q}{c} \int dt' \frac{\vec{v}_0(t')}{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|} \frac{\partial \left(t' - t + \frac{R(t')}{c} \right)}{\partial t} \\ &\quad \times \delta' \left(t' - \left[t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}{c} \right] \right) \\ &= -\frac{Q}{c} \int dt' \frac{\vec{v}_0(t')}{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|} \delta' \left(t' - \left[t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}{c} \right] \right) \\ &= -\frac{Q}{c} \int dt' \frac{\vec{v}_0(t')}{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|} \frac{1}{\kappa(\vec{r}, t')} \\ &\quad \times \left(\frac{\partial}{\partial t'} \delta \left(t' - \left[t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}{c} \right] \right) \right) \end{aligned}$$

und nach partieller Integration

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{Q}{c} \int dt' \delta \left(t' - t + \frac{R(t')}{c} \right) \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{\vec{v}_0(t')}{\kappa(\vec{r}, t') R(t')} \right). \quad (6.81)$$

Mit Gleichungen (6.80) und (6.81) folgt

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \Phi = -\frac{Q}{c^2} \int dt' \delta \left(t' - t + \frac{R(t')}{c} \right) \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{\vec{v}_0(t')}{\kappa R} \right) \\ &\quad + Q \int dt' \delta \left(t' - t + \frac{R(t')}{c} \right) \left[\frac{\vec{n}}{R^2} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{\vec{n}}{\kappa R} \right) \right] \\ &= Q \int dt' \delta \left(t' - t + \frac{R(t')}{c} \right) \left[\frac{\vec{n}}{R^2} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{1}{\kappa R} \left(\vec{n} - \frac{\vec{v}_0}{c} \right) \right) \right].\end{aligned}$$

Mit

$$\delta [F(t')] = \frac{1}{|\kappa|} \delta(t' - s)$$

und der Nullstelle $s = t - (R/c)$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\vec{E} &= Q \int dt' \frac{\delta(t' - s)}{|\kappa|} \left[\frac{\vec{n}}{R^2} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{1}{\kappa R} \left(\vec{n} - \frac{\vec{v}_0}{c} \right) \right) \right] \\ &= \frac{Q}{|\kappa|} \left[\frac{\vec{n}}{R^2} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{1}{\kappa R} \left(\vec{n} - \frac{\vec{v}_0}{c} \right) \right) \right]_{t'=t-\frac{R(t')}{c}} \\ &= \frac{Q}{|\kappa|} \left[\frac{\vec{n}}{R^2} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{1}{\kappa R} \left(\vec{n} - \frac{\vec{v}_0}{c} \right) \right) \right]_{ret},\end{aligned}\tag{6.82}$$

wobei der Index *ret* die Berechnung zur retardierten Zeit $t' = t - R(t')/c$ kennzeichnet, und zur Erinnerung

$$\kappa(\vec{r}, t') = 1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}_0}{c}, \quad \vec{n} = \frac{\vec{R}}{R}, \quad \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_0(t').$$

Nun ist

$$\begin{aligned}\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \vec{n} &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}_0(t')}{\sqrt{(\vec{r} - \vec{r}_0(t'))^2}} \right) \\ &= \frac{1}{cR^2} \left[R(0 - \dot{\vec{r}}_0(t')) - (\vec{r} - \vec{r}_0(t')) \frac{1}{2} \frac{2(\vec{r} - \vec{r}_0(t')) \cdot (-\dot{\vec{r}}_0(t'))}{\sqrt{(\vec{r} - \vec{r}_0(t'))^2}} \right] \\ &= \frac{1}{cR^2} \left[-R\dot{\vec{v}}_0(t') + \frac{\vec{R}}{R} (\vec{R} \cdot \dot{\vec{v}}_0(t')) \right] = \frac{\vec{R}(\vec{R} \cdot \dot{\vec{v}}_0(t'))}{cR^3} - \frac{\dot{\vec{v}}_0(t')}{cR} \\ &= \frac{1}{cR} \left[\vec{n}(\vec{n} \cdot \dot{\vec{v}}_0(t')) - \dot{\vec{v}}_0(t') \right]\end{aligned}$$

6 Elektromagnetische Wellen und Strahlung

und Gleichung (6.82) wird zu

$$\begin{aligned}
 \vec{E} &= \frac{Q}{|\kappa|} \left[\frac{\vec{n}}{R^2} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\vec{n}}{\kappa R} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\vec{v}_0}{c\kappa R} \right]_{ret} \\
 &= \frac{Q}{|\kappa|} \left[\frac{\vec{n}}{R^2} + \frac{1}{c\kappa R} \frac{\partial \vec{n}}{\partial t'} + \frac{\vec{n}}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \frac{1}{\kappa R} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\vec{v}_0}{c\kappa R} \right]_{ret} \\
 &= \frac{Q}{|\kappa|} \left[\frac{\vec{n}}{R^2} + \frac{1}{c\kappa R^2} [\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{v}_0) - \vec{v}_0] + \frac{\vec{n}}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \frac{1}{\kappa R} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\vec{v}_0}{c\kappa R} \right]_{ret}. \quad (6.83)
 \end{aligned}$$

Aus $\kappa = 1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_0/c$ folgt $c\kappa = c - \vec{n} \cdot \vec{v}_0$, so dass

$$\frac{\vec{n}}{R^2} = \frac{\vec{n}}{R^2} \frac{c\kappa}{c\kappa} = \frac{\vec{n}}{c\kappa R^2} (c - \vec{n} \cdot \vec{v}_0).$$

Für die ersten beide Terme in der eckigen Klammer von Gleichung (6.83) ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
 \frac{\vec{n}}{R^2} + \frac{1}{c\kappa R^2} [\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{v}_0) - \vec{v}_0] &= \frac{1}{c\kappa R^2} [c\vec{n} - \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{v}_0) + \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{v}_0) - \vec{v}_0] \\
 &= \frac{1}{\kappa R^2} \left[\vec{n} - \frac{\vec{v}_0}{c} \right].
 \end{aligned}$$

Für Gleichung (6.83) folgt dann

$$\vec{E} = \frac{Q}{|\kappa|} \left[\frac{\vec{n} - \frac{\vec{v}_0}{c}}{\kappa R^2} + \frac{\vec{n}}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \frac{1}{\kappa R} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\vec{v}_0}{c\kappa R} \right]_{ret}$$

oder mit $\vec{\beta} \equiv \frac{\vec{v}_0}{c}$, (6.84)

dass $\vec{E} = \frac{Q}{|\kappa|} \left[\frac{\vec{n} - \vec{\beta}}{\kappa R^2} + \frac{\vec{n}}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{1}{\kappa R} \right) - \frac{1}{c\kappa R} \frac{\partial}{\partial t'} \vec{\beta} - \frac{\vec{\beta}}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{1}{\kappa R} \right) \right]_{ret}$

$$= \frac{Q}{|\kappa|} \left[\frac{\vec{n} - \vec{\beta}}{\kappa R^2} + \frac{\vec{n} - \vec{\beta}}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{1}{\kappa R} \right) - \frac{\dot{\vec{\beta}}}{c\kappa R} \right]_{ret}. \quad (6.85)$$

Mit $\kappa = 1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_0/c$ erhalten wir für

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} (\kappa R) &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \left(R - \frac{R}{c} \vec{n} \cdot \vec{v}_0 \right) \\
 &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \left(\sqrt{(\vec{r} - \vec{r}_0(t'))^2} - \frac{\vec{R} \cdot \vec{v}_0}{c} \right) \\
 &= \frac{1}{c} \frac{\vec{R} \cdot (-\vec{v}_0)}{R} - \frac{1}{c^2} \vec{v}_0 \cdot \frac{\partial \vec{R}}{\partial t'} - \frac{\vec{R} \cdot \dot{\vec{v}}_0}{c^2} \\
 &= -\frac{\vec{n} \cdot \vec{v}_0}{c} + \frac{v_0^2}{c^2} - \frac{\vec{R} \cdot \dot{\vec{v}}_0}{c^2} \\
 &= \beta^2 - \vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}} - \frac{R}{c} \vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}}
 \end{aligned} \quad (6.86)$$

so dass

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{1}{\kappa R} \right) &= -\frac{1}{c\kappa^2 R^2} \frac{\partial}{\partial t'} (\kappa R) \\ &= -\frac{1}{\kappa^2 R^2} \left[\beta^2 - \vec{n} \cdot \vec{\beta} - \frac{R}{c} \vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}} \right]. \end{aligned} \quad (6.87)$$

Außerdem ist

$$\frac{\vec{n} - \vec{\beta}}{\kappa R^2} = \frac{\kappa (\vec{n} - \vec{\beta})}{\kappa^2 R^2} = \frac{(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}) (\vec{n} - \vec{\beta})}{\kappa^2 R^2}. \quad (6.88)$$

Das Einsetzen von Gleichung (6.87) und (6.88) ergibt für Gleichung (6.85) mit $\kappa > 0$

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{Q}{\kappa} \left[\frac{\vec{n} - \vec{\beta}}{\kappa^2 R^2} - \frac{\vec{n} \cdot \vec{\beta} (\vec{n} - \vec{\beta})}{\kappa^2 R^2} - \frac{\vec{n} - \vec{\beta}}{\kappa^2 R^2} \left(\beta^2 - \vec{n} \cdot \vec{\beta} - \frac{R}{c} \vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}} \right) - \frac{\dot{\vec{\beta}}}{c\kappa R} \right]_{ret} \\ &= \frac{Q}{\kappa} \left[\frac{(\vec{n} - \vec{\beta}) (1 - \beta^2)}{\kappa^2 R^2} + \frac{(\vec{n} - \vec{\beta}) (\vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}})}{c\kappa^2 R} - \frac{\dot{\vec{\beta}}}{c\kappa R} \right]_{ret} \\ &= Q \left[\frac{(\vec{n} - \vec{\beta}) (1 - \beta^2)}{\kappa^3 R^2} \right]_{ret} + \frac{Q}{c\kappa^3 R} \left[(\vec{n} - \vec{\beta}) (\vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}}) - \kappa \dot{\vec{\beta}} \right]_{ret}. \end{aligned} \quad (6.89)$$

Der zweite Term in Gleichung (6.89) lässt sich mit $\kappa = 1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}$ umformen unter Ausnutzung von

$$\begin{aligned} \vec{n} \times [(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}] &= (\vec{n} - \vec{\beta}) (\vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}}) - \dot{\vec{\beta}} \\ [\vec{n} \cdot (\vec{n} - \vec{\beta})] &= (\vec{n} - \vec{\beta}) (\vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}}) - \dot{\vec{\beta}} \\ [1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}] &= (\vec{n} - \vec{\beta}) (\vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}}) - \kappa \dot{\vec{\beta}} \end{aligned}$$

und es folgt letztendlich

$$\vec{E} = Q \left[\frac{(\vec{n} - \vec{\beta}) (1 - \beta^2)}{\kappa^3 R^2} \right]_{ret} + \frac{Q}{c} \left[\frac{\vec{n}}{\kappa^3 R} \times [(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}] \right]_{ret}, \quad (6.90)$$

wobei

$$\begin{aligned} \kappa &= 1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}, & \vec{n} &= \frac{\vec{R}}{R}, \\ \vec{R} &= \vec{r} - \vec{r}_0, & \vec{\beta} &= \vec{v}_0/c, & ret : t' &= t - \left(\frac{R}{c} \right). \end{aligned}$$

Das elektrische Feld (6.90) setzt sich aus zwei Anteilen zusammen: der erste *Nahfeld*-Term ist beschleunigungsunabhängig, invers proportional zum Quadrat des Abstands ($\propto R^{-2}$) und kann daher für große Abstände vernachlässigt werden; der zweite *Fernfeld*-Term ist beschleunigungsabhängig, invers proportional zum Abstand ($\propto R^{-1}$) und dominiert das elektrische Feld daher bei großen Abständen. Man erkennt, dass der Fernfeld-Anteil, oder auch *Strahlungsanteil* genannt, senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung \vec{n} steht.

6.2.4 Magnetische Feldstärke einer bewegten Punktladung

Zur Berechnung der magnetischen Induktion $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ benötigen wir zwei Hilfsformeln.

Hilfsformel 1:

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{R}{R - \vec{R} \cdot \frac{\vec{v}_0}{c}} = \frac{R}{R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}}. \quad (6.91)$$

Beweis: mit $R(t) = c(t - t')$ folgt

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \begin{cases} c \left(1 - \frac{\partial t'}{\partial t}\right) \\ \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial R}{\partial t'} \end{cases}.$$

Das Gleichsetzen der beiden Ausdrücke liefert

$$\begin{aligned} \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial R}{\partial t'} &= c - c \frac{\partial t'}{\partial t}, \\ \text{so dass} \quad \left(c + \frac{\partial R}{\partial t'}\right) \frac{\partial t'}{\partial t} &= c \\ \text{oder} \quad \frac{\partial t'}{\partial t} &= \frac{c}{c + \frac{\partial R}{\partial t'}} = \frac{c}{c + \frac{1}{2R} \frac{\partial R^2}{\partial t'}} = \frac{c}{c + \frac{1}{R} \vec{R} \cdot \frac{\partial \vec{R}}{\partial t'}}, \\ \text{weil mit} \quad R^2 &= (\vec{R})^2 \\ \frac{\partial R^2}{\partial t'} &= 2\vec{R} \cdot \frac{\partial \vec{R}}{\partial t'}. \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{R}}{\partial t'} &= \frac{\partial}{\partial t'} [\vec{r} - \vec{r}_0(t')] = -\vec{v}_0(t') \\ \text{folgt} \quad \frac{\partial t'}{\partial t} &= \frac{c}{c - \frac{1}{R} \vec{R} \cdot \vec{v}_0(t')} = \frac{cR}{cR - c\vec{R} \cdot \vec{\beta}} = \frac{R}{R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}}, \end{aligned}$$

die Behauptung Q.E.D.

Hilfsformel 2:

$$\vec{\nabla}_{rt'} = -\frac{\vec{R}}{c(R - \vec{R} \cdot \vec{\beta})}. \quad (6.92)$$

Beweis: mit

$$\begin{aligned}
 t' &= t - \frac{R(t')}{c} = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}{c} = t - \frac{1}{c} \sqrt{(\vec{r} - \vec{r}_0(t'))^2} \\
 \text{folgt } \vec{\nabla}_r t' &= 0 - \frac{1}{c} \vec{\nabla}_r R(t') = -\frac{1}{c} \frac{(\vec{r} - \vec{r}_0(t')) \cdot (1 - \vec{\nabla}_r \vec{r}_0(t'))}{\sqrt{(\vec{r} - \vec{r}_0(t'))^2}} \\
 &= -\frac{1}{cR} \left[\vec{R} - \vec{R} \cdot \frac{\partial \vec{r}_0(t')}{\partial t'} \vec{\nabla}_r t' \right] \\
 &= -\frac{1}{cR} \left[\vec{R} - \vec{R} \cdot \vec{v}_0(t') \vec{\nabla}_r t' \right] = \frac{\vec{R}}{R} \cdot \vec{\beta} \vec{\nabla}_r t' - \frac{\vec{R}}{cR},
 \end{aligned}$$

oder nach Umstellen

$$\begin{aligned}
 \left[1 - \frac{\vec{R} \cdot \vec{\beta}}{R} \right] \vec{\nabla}_r t' &= -\frac{\vec{R}}{cR}, \\
 \text{so dass } \vec{\nabla}_r t' &= -\frac{\vec{R}}{cR \left[1 - \frac{\vec{R} \cdot \vec{\beta}}{R} \right]} = -\frac{\vec{R}}{c \left[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta} \right]}
 \end{aligned}$$

Q.E.D.

Wir berechnen das Magnetfeld mit Hilfe von

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\vec{\nabla}_r t' \right) \times \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t'} \right). \quad (6.93)$$

Nun ist

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } \Phi = -\frac{1}{c} \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t'} - \left(\vec{\nabla}_r t' \right) \frac{\partial \Phi}{\partial t'},$$

so dass unter Verwendung der Hilfsformeln 1 und 2

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \vec{A}}{\partial t'} &= -\frac{c\vec{E}}{\left(\frac{\partial t'}{\partial t} \right)} - \frac{c\vec{\nabla}_r t' \partial \Phi}{\left(\frac{\partial t'}{\partial t} \right) \partial t'} \\
 &= -\frac{R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}}{R} c\vec{E} - \frac{R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}}{R} c \left(\vec{\nabla}_r t' \right) \frac{\partial \Phi}{\partial t'} \\
 &= -\frac{R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}}{R} c\vec{E} + \frac{R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}}{R} \frac{\vec{R}}{\left[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta} \right]} \frac{\partial \Phi}{\partial t'} \\
 &= -\frac{R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}}{R} c\vec{E} + \frac{\vec{R}}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial t'}.
 \end{aligned}$$

6 Elektromagnetische Wellen und Strahlung

Dieses Ergebnis setzen wir in Gleichung (6.93) ein und erhalten unter nochmaliger Verwendung von Hilfsformel 2

$$\vec{B} = \left(\vec{\nabla}_{r,t'} \right) \times \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t'} \right) = -\frac{1}{c \left[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta} \right]} \vec{R} \times \left[-\frac{R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}}{R} c \vec{E} + \frac{\vec{R}}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial t'} \right].$$

Wegen $\vec{R} \times \vec{R} = 0$ ergibt der zweite Term keinen Beitrag und wir erhalten

$$\vec{B} = \frac{\vec{R}}{R} \times \vec{E} = \vec{n} \times \vec{E}, \quad (6.94)$$

d.h. elektrisches und magnetisches Feld stehen senkrecht aufeinander. Zusätzlich steht \vec{B} senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung \vec{n} .

Mit dem Ergebnis (6.94) erhalten wir für den Poynting-Vektor (5.55) des Energiestroms

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \left[\vec{E} \times \vec{B} \right] = \frac{c}{4\pi} \left[\vec{E} \times \left(\vec{n} \times \vec{E} \right) \right] = \frac{c}{4\pi} \left[E^2 \vec{n} - \vec{E} \left(\vec{E} \cdot \vec{n} \right) \right]. \quad (6.95)$$

Speziell für den Fernfeld-Anteil oder Strahlungs-Anteil mit $\vec{E}_{str} \perp \vec{n}$ erfolgt der Energietransport in Ausbreitungsrichtung:

$$\vec{S}_{str} = \frac{c E_{str}^2}{4\pi} \vec{n}. \quad (6.96)$$

Gleichung (6.96) ergibt den Energiestrom pro Zeiteinheit und Flächeneinheit in Richtung \vec{n} . Daraus berechnet sich die abgestrahlte Intensität pro Raumwinkelelement ($d\Omega$) einer bewegten Punktladung am Beobachtungsort durch

$$dI = \frac{dt}{dt'} \vec{S} \cdot d\vec{\sigma}, \quad (6.97)$$

wobei $d\vec{\sigma} = |d\vec{\sigma}| \vec{n}$ das Kugeloberflächenelement mit der Fläche $|d\vec{\sigma}| = R^2 d\Omega$ kennzeichnet. Mit Hilfsformel 1 in der Form

$$\frac{\partial t}{\partial t'} = \frac{R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}}{R} = 1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta} = \kappa$$

und Gleichung (6.96) folgt

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi} \kappa R^2 E_{str}^2. \quad (6.98)$$

6.3 Energieabstrahlung einer bewegten Punktladung

Setzen wir den Strahlungsanteil des elektrischen Felds (6.90) in Gleichung (6.98) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{dI}{d\Omega} &= \frac{c}{4\pi} \kappa R^2 \frac{Q^2}{c^2} \left[\frac{\vec{n}}{\kappa^3 R} \times \left[(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}} \right] \right]^2 \\ &= \frac{Q^2}{4\pi c} \frac{1}{\kappa^5} \left[\vec{n} \times \left[(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}} \right] \right]^2.\end{aligned}\quad (6.99)$$

Mit

$$\vec{n} \times \left[(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}} \right] = (\vec{n} - \vec{\beta}) (\vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}}) - \dot{\vec{\beta}} (\vec{n} \cdot (\vec{n} - \vec{\beta}))$$

folgt

$$\begin{aligned}\frac{dI}{d\Omega} &= \frac{Q^2}{4\pi c \kappa^5} \left[(\dot{\vec{\beta}})^2 (\vec{n} \cdot (\vec{n} - \vec{\beta}))^2 - 2 (\vec{n} \cdot (\vec{n} - \vec{\beta})) (\vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}}) (\vec{n} - \vec{\beta}) \cdot \dot{\vec{\beta}} \right. \\ &\quad \left. + (\vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}})^2 (1 - 2\vec{\beta} \cdot \vec{n} + \beta^2) \right] \\ &= \frac{Q^2}{4\pi c \kappa^5} \left[(\dot{\vec{\beta}})^2 (1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})^2 + (\vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}})^2 (1 + \beta^2 - 2\vec{\beta} \cdot \vec{n} - 2\vec{n} \cdot (\vec{n} - \vec{\beta})) \right. \\ &\quad \left. + 2\vec{n} \cdot (\vec{n} - \vec{\beta}) (\vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}}) (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}}) \right] \\ &= \frac{Q^2}{4\pi c \kappa^5} \left[(\dot{\vec{\beta}})^2 \kappa^2 + (\vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}})^2 (1 + \beta^2 - 2\vec{\beta} \cdot \vec{n} - 2 + 2\vec{n} \cdot \vec{\beta}) \right. \\ &\quad \left. + 2\kappa (\vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}}) (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}}) \right] \\ &= \frac{Q^2}{4\pi c \kappa^5} \left[(\dot{\vec{\beta}})^2 \kappa^2 - (\vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}})^2 (1 - \beta^2) + 2\kappa (\vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}}) (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}}) \right],\end{aligned}$$

also

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{Q^2}{4\pi c} \left[\frac{(\dot{\vec{\beta}})^2}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^3} + \frac{2 (\vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}}) (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}})}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^4} - \frac{(\vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}})^2}{\gamma^2 (1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^5} \right] \quad (6.100)$$

mit dem Lorentz-Faktor der Punktladung $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$.

Für relativistische Teilchen ist $\beta \simeq 1$ und $\gamma \gg 1$. Aufgrund der hohen negativen Potenzen des Faktors $1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n}$ tritt das Maximum der abgestrahlten Intensität in Richtungen auf, bei denen $1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n}$ klein ist.

Mit $\vec{\beta} \cdot \vec{n} = \beta \cos \psi$ folgt für kleine Winkel $\psi \ll 1$

$$1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n} = 1 - \beta \cos \psi \simeq 1 - \beta \left(1 - \frac{\psi^2}{2} \right) = 1 - \beta + \frac{\beta}{2} \psi^2.$$

Mit

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \simeq 1 - \frac{1}{2\gamma^2}$$

6 Elektromagnetische Wellen und Strahlung

erhalten wir dann

$$1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n} \simeq 1 - \left(1 - \frac{1}{2\gamma^2}\right) + \frac{\psi^2}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \psi^2\right).$$

Für die Intensität (6.100) ergibt sich

$$\frac{dI}{d\Omega} \simeq \frac{Q^2}{4\pi c} \left[\frac{2^3 (\dot{\vec{\beta}})^2}{\left(\frac{1}{\gamma^2} + \psi^2\right)^3} + \frac{2^5 (\vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}}) (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}})}{\left(\frac{1}{\gamma^2} + \psi^2\right)^4} - \frac{2^5 (\vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}})^2}{\gamma^2 \left(\frac{1}{\gamma^2} + \psi^2\right)^5} \right]. \quad (6.101)$$

Für Winkel $\psi < 1/\gamma$ sind die Nenner klein und konstant, weil $\gamma^{-2} + \psi^2 \simeq \gamma^{-2}$. Für Winkel $\psi > 1/\gamma$ werden die Nenner $\propto \psi^2$ groß. Es ergibt sich, dass der Hauptteil der Strahlung eines relativistischen Teilchens in einen Winkel der Größenordnung $(1/\gamma)$ in Bewegungsrichtung abgestrahlt wird (siehe Abbildung 6.9).

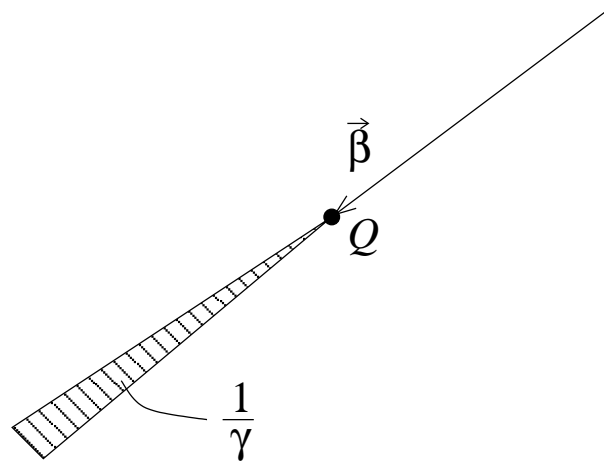


Abbildung 6.9: Abstrahlung eines relativistischen Teilchens

6.3.1 Larmor-Formel

Wir untersuchen jetzt die Abstrahlung einer nichtrelativistischen beschleunigten Ladung. Mit $|\vec{\beta}| = v/c \ll 1$ ist in Gleichung (6.99) $|\vec{\beta}| \ll |\vec{n}| = 1$, so dass

$$\frac{dI}{d\Omega} \simeq \frac{Q^2}{4\pi c \kappa^5} \left[\vec{n} \times \left[\vec{n} \times \dot{\vec{\beta}} \right] \right]^2. \quad (6.102)$$

Außerdem ist $\kappa = 1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta} \simeq 1$.

Mit $\theta = \angle(\vec{n}, \dot{\vec{\beta}})$ gilt

$$\vec{n} \times [\vec{n} \times \dot{\vec{\beta}}] = \vec{n} (\vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}}) - \dot{\vec{\beta}} (\vec{n} \cdot \vec{n}) = \dot{\beta} \cos \theta \vec{n} - \dot{\vec{\beta}},$$

$$\begin{aligned} \text{so dass } [\vec{n} \times (\vec{n} \times \dot{\vec{\beta}})]^2 &= [\dot{\beta} \cos \theta \vec{n} - \dot{\vec{\beta}}]^2 = (\dot{\beta})^2 \cos^2 \theta - 2\dot{\beta} \cos \theta \vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}} + (\dot{\beta})^2 \\ &= (\dot{\beta})^2 [\cos^2 \theta - 2 \cos^2 \theta + 1] = (\dot{\beta})^2 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Wir erhalten dann für Gleichung (6.102)

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{Q^2}{4\pi c} (\dot{\beta})^2 \sin^2 \theta = \frac{Q^2}{4\pi c^3} (\dot{v})^2 \sin^2 \theta \quad (6.103)$$

mit der charakteristischen $\sin^2 \theta$ -Abhängigkeit.

Durch Integration über alle Raumwinkel $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi = d\mu d\phi$ mit $\mu = \cos \theta$ folgt für die totale abgestrahlte Leistung

$$P_{tot} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d\mu \frac{dI}{d\Omega} = \frac{2\pi Q^2}{4\pi c^3} (\dot{v})^2 \int_{-1}^1 d\mu (1 - \mu^2),$$

$$\text{also } P_{tot} = \frac{2}{3} \frac{Q^2 (\dot{v})^2}{c^3}. \quad (6.104)$$

Gleichung (6.104) wird als *Larmor-Formel* bezeichnet.

Die abgeleiteten Gleichungen (6.90) und (6.94) für das elektrische und magnetische Feld einer bewegten Punktladung bilden auch den Ausgangspunkt für die Berechnung der *Synchrotronstrahlung*, d.i. die Strahlung eines geladenen Teilchens in einem homogenen Magnetfeld: dazu muss die entsprechende Bahngleichung eines geladenen Teilchens im homogenen Feld $\vec{r}_0(t)$ in die Gleichungen (6.90) und (6.94) eingesetzt werden.

6.3.2 Bremsstrahlung

Bei der Bremsstrahlung wird das geladene Teilchen in Bewegungsrichtung abgebremst. Daher ist $\dot{\vec{\beta}}$ parallel zu $\vec{\beta}$ und deshalb $\dot{\vec{\beta}} \times \vec{\beta} = 0$. Gemäß Gleichung (6.99) folgt

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\Omega_{brems}} &\simeq \frac{Q^2}{4\pi c \kappa^5} [\vec{n} \times [\vec{n} \times \dot{\vec{\beta}}]]^2 = \frac{Q^2}{4\pi c \kappa^5} [\vec{n} (\vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}}) - \dot{\vec{\beta}} (\vec{n} \cdot \vec{n})]^2 \\ &= \frac{Q^2}{4\pi c \kappa^5} [\dot{\beta} \cos \theta \vec{n} - \dot{\vec{\beta}}]^2 = \frac{Q^2}{4\pi c \kappa^5} [(\dot{\beta})^2 (1 - \cos^2 \theta)] \\ &= \frac{Q^2}{4\pi c \kappa^5} (\dot{\beta})^2 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Mit $\kappa = 1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta} = 1 - \beta \cos \theta$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\Omega_{brems}} &= \frac{Q^2 (\dot{\beta})^2 \sin^2 \theta}{4\pi c (1 - \beta \cos \theta)^5} \\ &= \frac{Q^2 (\dot{\beta})^2}{4\pi c} \frac{1 - \mu^2}{(1 - \beta \mu)^5} = \frac{Q^2 (\dot{\beta})^2}{4\pi c} i(\mu) \end{aligned} \quad (6.105)$$

6 Elektromagnetische Wellen und Strahlung

mit der Winkelabhängigkeit

$$i(\mu) = \frac{1 - \mu^2}{(1 - \beta\mu)^5}.$$

Das Extremum (Maximum) der Abstrahlung tritt bei $\mu = \mu_E$ auf, wobei μ_E durch

$$\left. \frac{di(\mu)}{d\mu} \right|_{\mu_E} = 0 \quad (6.106)$$

bestimmt ist. Für die erste Ableitung gilt

$$\begin{aligned} \frac{di(\mu)}{d\mu} &= \frac{1}{(1 - \beta\mu)^{10}} \left[(1 - \beta\mu)^5 (-2\mu) - (1 - \mu^2) 5 (1 - \beta\mu)^4 (-\beta) \right] \\ &= \frac{1}{(1 - \beta\mu)^6} [5\beta (1 - \mu^2) - 2\mu (1 - \beta\mu)] = \frac{5\beta - 2\mu - 3\beta\mu^2}{(1 - \beta\mu)^6}. \end{aligned}$$

Gleichung (6.106) führt dann auf die quadratische Bestimmungsgleichung

$$5\beta - 2\mu_E - 3\beta\mu_E^2 = 0$$

mit den beiden Lösungen

$$\mu_{E1,E2} = \pm \frac{1}{3\beta} \sqrt{1 + 15\beta^2} - \frac{1}{3\beta},$$

von denen allerdings nur eine sinnvoll (weil $|\mu_E| \leq 1$) ist:

$$\mu_E = \cos \theta_{max} = \frac{1}{3\beta} \left[\sqrt{1 + 15\beta^2} - 1 \right]. \quad (6.107)$$

Durch Berechnung der zweiten Ableitung $d^2i(\mu)/d\mu^2|_{\mu_E} < 0$ zeigt man, dass μ_E tatsächlich einem Maximum entspricht.

Für *nichtrelativistische* Teilchen mit $\beta \ll 1$ reduziert sich Gleichung (6.107) auf

$$\mu_E \simeq \frac{1}{3\beta} \frac{15\beta^2}{2} = \frac{5\beta}{2} \ll 1,$$

so dass $\theta_{max} \simeq \pi/2$. Ein nichtrelativistisches Teilchen emittiert seine Bremsstrahlung vorwiegend senkrecht zur Bewegungsrichtung!

Für *relativistische* Teilchen mit $\beta \simeq 1$ approximieren wir Gleichung (6.107) durch

$$\mu_E \simeq \frac{1}{3\beta} \left[\sqrt{1 + 15} - 1 \right] = 1,$$

so dass $\theta_{max} \simeq 0$. Die Bremsstrahlung relativistischer Teilchen erfolgt vorwiegend in Bewegungsrichtung! Dieses Ergebnis ist konsistent mit unserer obigen Diskussion nach Gleichung (6.101).

6.3.3 Kreisbewegung

Dieser Fall ist wichtig für die Abstrahlung von geladenen Teilchen in Beschleunigern mit Speicherring. Hier gilt $\dot{\vec{\beta}} \perp \vec{\beta}$, d. h. $\dot{\vec{\beta}} \cdot \vec{\beta} = 0$. Dann verschwindet der 2. Term in Gleichung (6.100), so dass

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{Q^2}{4\pi c} \frac{1}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^3} \left[(\dot{\vec{\beta}})^2 - \frac{(\vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}})^2}{\gamma^2 (1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^2} \right].$$

Mit $\theta = \angle(\vec{\beta}, \vec{n})$, also $\vec{\beta} \cdot \vec{n} = \beta \cos \theta$, und $\alpha = \angle(\dot{\vec{\beta}}, \vec{n})$, also $\dot{\vec{\beta}} \cdot \vec{n} = \dot{\beta} \cos \alpha$, folgt

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{Q^2 (\dot{\beta})^2}{4\pi c (1 - \beta \cos \theta)^3} \left[1 - \frac{(1 - \beta^2) \cos^2 \alpha}{(1 - \beta \cos \theta)^2} \right]. \quad (6.108)$$

6.4 Der Hertzsche Dipol

Wir betrachten jetzt die Anwendung der Lienard-Wiechert-Potentiale, die zuerst von Heinrich Hertz untersucht wurde: einen schwingenden elektrischen Dipol mit dem Dipolmoment $\vec{p} = \vec{p}(t)$ (siehe Abbildung 6.10).

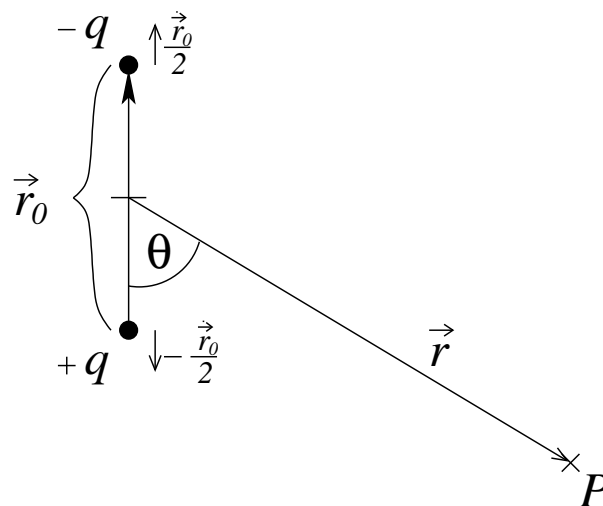


Abbildung 6.10: Zum Hertzschen Dipol

\vec{r} bezeichnet den konstanten Ortsvektor vom Dipol zum Beobachter im Punkt P , θ sei der Winkel zwischen der Schwingungsachse und dem Ortsvektor.

6 Elektromagnetische Wellen und Strahlung

Der Dipol wird aus einem Paar von Punktladungen mit den Ladungen $\pm e$ gebildet, die einen momentanen Abstand $\vec{r}_0 = \vec{r}_0(t)$ voneinander haben. Deshalb ist

$$Q\vec{v}_0(t) = -e\frac{\dot{\vec{r}}_0(t)}{2} + e\left(\frac{-\dot{\vec{r}}_0(t)}{2}\right) = -e\dot{\vec{r}}_0(t) = \dot{\vec{p}}(t)$$

Der Vektor $\vec{r}_0(t)/2$ zeigt vom Ursprung zur negativen Ladung, so dass das Dipolmoment $\vec{p}(t) = -e\vec{r}_0(t)$ ist.

Wir starten mit den Lienard-Wiechert-Potentialen (6.77) und (6.78):

$$\begin{aligned}\Phi(\vec{r}, t) &= \frac{Q}{R(t') - \frac{\vec{R}(t') \cdot \vec{v}_0(t')}{c}} \Big|_{t'=t-\frac{R(t')}{c}}, \\ \vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{Q}{c} \frac{\vec{v}_0(t')}{R(t') - \frac{\vec{R}(t') \cdot \vec{v}_0(t')}{c}} \Big|_{t'=t-\frac{R(t')}{c}}.\end{aligned}$$

Wir definieren die Abstandsvektoren zwischen dem Beobachtungspunkt P und der negativen bzw. der positiven Ladung,

$$\vec{r}_-(t') = \vec{r} - \frac{\vec{r}_0(t')}{2}, \quad \vec{r}_+(t') = \vec{r} + \frac{\vec{r}_0(t')}{2}, \quad (6.109)$$

und erhalten damit

$$\begin{aligned}\Phi(\vec{r}, t) &= \frac{-e}{|\vec{r}_-(t')| - \vec{r}_-(t') \cdot \frac{(+\dot{\vec{r}}_0(t'))}{2c}} \Big|_{t'=t-\frac{|r_-(t')|}{c}} \\ &+ \frac{e}{|\vec{r}_+(t')| - \vec{r}_+(t') \cdot \frac{(-\dot{\vec{r}}_0(t'))}{2c}} \Big|_{t'=t-\frac{|r_+(t')|}{c}}, \quad (6.110)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{-\frac{e}{c} \frac{(\dot{\vec{r}}_0(t'))}{2}}{|\vec{r}_-(t')| - \vec{r}_-(t') \cdot \frac{(\dot{\vec{r}}_0(t'))}{2c}} \Big|_{t'=t-\frac{|r_-(t')|}{c}} \\ &+ \frac{\frac{e}{c} \frac{(-\dot{\vec{r}}_0(t'))}{2}}{|\vec{r}_+(t')| - \vec{r}_+(t') \cdot \frac{(-\dot{\vec{r}}_0(t'))}{2c}} \Big|_{t'=t-\frac{|r_+(t')|}{c}}.\end{aligned} \quad (6.111)$$

Für große Abstände $r \gg r_0$ sind die Näherungen

$$r_{\pm}(t') = \vec{r} \pm \frac{\vec{r}_0(t')}{2} \simeq \vec{r}$$

gut erfüllt, so dass die retardierten Zeiten $t' \simeq t - r/c$ in allen Termen gleich sind.

Bei einer harmonischen Schwingung der Frequenz ω gilt als Abschätzung

$$\frac{v}{c} \simeq \frac{2r_0^{max}}{Tc} = \frac{r_0^{max}\omega}{\pi c} = \frac{2r_0^{max}}{\lambda}. \quad (6.112)$$

Machen wir die zusätzliche Annahme langer Wellenlängen der Schwingungsbewegung $\lambda \gg r_0^{max}$, so ist nach der Abschätzung (6.112) $v/c \ll 1$ vernachlässigbar klein. Deshalb vernachlässigen wir Terme der Größenordnung $(v/c)^2$ bei der Entwicklung der Nenner der Gleichungen (6.110) und (6.111). Für das Vektorpotential (6.111) erhalten wir dann

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}, t) &\simeq -\frac{\frac{\epsilon}{c} \dot{\vec{r}}_0(t')}{2|\vec{r}'|} \Big|_{t'=t-\frac{r}{c}} - \frac{\frac{\epsilon}{c} \dot{\vec{r}}_0(t')}{2|\vec{r}'|} \Big|_{t'=t-\frac{r}{c}} \\ &= -\frac{e \dot{\vec{r}}_0(t')}{cr} \Big|_{t'=t-\frac{r}{c}} = \frac{\dot{\vec{p}}(t')}{cr} \Big|_{t'=t-\frac{r}{c}} = \frac{\dot{\vec{p}}(t-\frac{r}{c})}{cr}. \end{aligned} \quad (6.113)$$

Nach der Lorenz-Eichung ist

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{A} = 0,$$

so dass aus Gleichung (6.113) folgt

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -c \operatorname{div} \vec{A} = -\operatorname{div} \left(\frac{\dot{\vec{p}}(t-\frac{r}{c})}{r} \right).$$

Weil r zeitunabhängig ist, erhalten wir

$$\Phi = -\vec{\nabla} \cdot \frac{1}{r} \int dt \dot{\vec{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) = -\vec{\nabla} \cdot \left[\frac{\vec{p}(t-\frac{r}{c})}{r} \right]. \quad (6.114)$$

Mit $\operatorname{div}(f\vec{a}) = (\operatorname{grad} f) \cdot \vec{a} + f \operatorname{div} \vec{a}$ folgt

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \left[\frac{\vec{p}(t-\frac{r}{c})}{r} \right] &= \left(\vec{\nabla} \frac{1}{r} \right) \cdot \vec{p} + \frac{1}{r} \left[\vec{\nabla} \cdot \vec{p} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \\ &= -\frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} + \frac{1}{r} \left[\vec{\nabla} \cdot \vec{p} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.115)$$

Im Sinn einer Fourier-Transformation ist

$$\begin{aligned} \vec{p} \left(t - \frac{r}{c} \right) &= \int d\omega \vec{p}_\omega \exp \left(-i\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right) \\ &= \int d\omega \vec{p}_\omega \exp \left(i \left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t \right) \right) \end{aligned} \quad (6.116)$$

6 Elektromagnetische Wellen und Strahlung

mit $\omega = kc$ und $kr = \vec{k} \cdot \vec{r}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{p}(t - \frac{r}{c})}{\partial t} &= \int d\omega (-i\omega) \vec{p}_\omega \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) , \\ \text{rot } \vec{p}(t - \frac{r}{c}) &= \int d\omega i(\vec{k} \times \vec{p}_\omega) \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \\ &= i \frac{\vec{r}}{r} \times \int d\omega k \vec{p}_\omega \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \\ \text{und} \quad \text{div } \vec{p}(t - \frac{r}{c}) &= \int d\omega i(\vec{k} \cdot \vec{p}_\omega) \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \\ &= i \frac{\vec{r}}{r} \cdot \int d\omega k \vec{p}_\omega \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \end{aligned}$$

Setzen wir in die beiden letzten Gleichungen $k = \omega/c$ ein, erhalten wir für die sogenannten *retardierten Ableitungen*

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{p}(t - \frac{r}{c}) &= \frac{i \vec{r}}{c r} \times \int d\omega \omega \vec{p}_\omega \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \\ &= -\frac{1}{c r} \vec{r} \times \dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c}) \end{aligned} \quad (6.117)$$

$$\begin{aligned} \text{und} \quad \text{div } \vec{p}(t - \frac{r}{c}) &= \frac{i \vec{r}}{c r} \cdot \int d\omega \omega \vec{p}_\omega \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \\ &= -\frac{1}{c r} \vec{r} \cdot \dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c}) . \end{aligned} \quad (6.118)$$

Die Verwendung der letzten Beziehung (6.118) liefert für Gleichung (6.115)

$$\vec{\nabla} \cdot \left[\frac{\vec{p}(t - \frac{r}{c})}{r} \right] = -\frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} - \frac{1}{cr^2} \left[\vec{r} \cdot \dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c}) \right]$$

und damit für das Potential (6.114)

$$\Phi = \frac{\dot{\vec{p}} \cdot \vec{r}}{cr^2} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} . \quad (6.119)$$

Die direkte Berechnung des Potentials ϕ aus Gleichung (6.110) wäre schwieriger, weil der erste Entwicklungsterm in (v/c) verschwindet.

Gleichung (6.119) besteht aus zwei Anteilen: der erste Term ($\propto r^{-1}$) folgt aus der Retardierung und kann in der Nahzone ($r \ll \lambda$) gegenüber dem zweiten Term ($\propto r^{-2}$) vernachlässigt werden. Dieser zweite Term ergibt dann das bekannte (siehe Kap. 3.9.4) statische Dipolmoment ($\vec{p} \cdot \vec{r}/r^3$).

Bei großen Entfernungen ($r \gg \lambda$) überwiegt der Retardierungsanteil

$$\Phi(r \gg \lambda) \simeq \frac{\dot{\vec{p}} \cdot \vec{r}}{cr^2} \propto r^{-1} .$$

Im allgemeinen Fall ergibt das Einsetzen des Potentials (6.113) in die Gleichung (5.20) für das Magnetfeld

$$\begin{aligned}\vec{B} = \text{rot } \vec{A} &= \text{rot} \left[\frac{\dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c})}{cr} \right] = \frac{1}{cr} \text{rot} \left[\dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c}) \right] - \frac{1}{c} \dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) \\ &= -\frac{1}{c^2 r^2} \vec{r} \times \ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c}) + \frac{1}{cr^3} \dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{r},\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt Gleichung (6.117) verwandt haben. Wir erhalten also

$$\vec{B} = \frac{\ddot{\vec{p}} \times \vec{r}}{c^2 r^2} + \frac{\dot{\vec{p}} \times \vec{r}}{cr^3}. \quad (6.120)$$

Gemäß Gleichung (5.22) erhalten wir für das elektrische Feld durch Einsetzen der Potentiale (6.113) und (6.119)

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \Phi = -\frac{\ddot{\vec{p}}}{c^2 r} - \vec{\nabla} \left(\frac{\dot{\vec{p}} \cdot \vec{r}}{cr^2} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \right).$$

Wir benutzen

$$\begin{aligned}\text{grad} \left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \right) &= \frac{1}{r^3} \text{grad} (\vec{p} \cdot \vec{r}) + (\vec{p} \cdot \vec{r}) \text{grad} (r^{-3}) \\ &= \frac{1}{r^3} \text{grad} (\vec{p} \cdot \vec{r}) - \frac{3}{r^5} (\vec{p} \cdot \vec{r}) \vec{r}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{und} \quad \text{grad} \left(\frac{\dot{\vec{p}} \cdot \vec{r}}{r^2} \right) &= \frac{1}{r^2} \text{grad} (\dot{\vec{p}} \cdot \vec{r}) + (\dot{\vec{p}} \cdot \vec{r}) \text{grad} (r^{-2}) \\ &= \frac{1}{r^2} \text{grad} (\dot{\vec{p}} \cdot \vec{r}) - \frac{2}{r^4} (\dot{\vec{p}} \cdot \vec{r}) \vec{r},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{so dass} \quad \vec{E} &= -\frac{\ddot{\vec{p}}}{c^2 r} + \frac{3}{r^5} (\vec{p} \cdot \vec{r}) \vec{r} + \frac{2}{cr^4} (\dot{\vec{p}} \cdot \vec{r}) \vec{r} \\ &\quad - \frac{1}{cr^2} \text{grad} (\dot{\vec{p}} \cdot \vec{r}) - \frac{1}{r^3} \text{grad} (\vec{p} \cdot \vec{r}).\end{aligned} \quad (6.121)$$

Die Anwendung von Gleichung (2.58),

$$\text{grad} (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \times (\vec{\nabla} \times \vec{b}) + \vec{b} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}) + (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \vec{b} + (\vec{b} \cdot \vec{\nabla}) \vec{a},$$

ergibt

$$\begin{aligned}\text{grad} (\vec{p} \cdot \vec{r}) &= \vec{p} \times (\vec{\nabla} \times \vec{r}) + \vec{r} \times (\vec{\nabla} \times \vec{p}) + (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{r} + (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \vec{p} \\ &= \vec{p} + \vec{r} \times (\vec{\nabla} \times \vec{p}) + (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \vec{p},\end{aligned} \quad (6.122)$$

weil $\vec{\nabla} \times \vec{r} = 0$ und

$$(\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{r} = (p_x \partial_x + p_y \partial_y + p_z \partial_z) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \vec{p}.$$

6 Elektromagnetische Wellen und Strahlung

Zur Berechnung des letzten Terms verwenden wir die Fourier-Transformation (6.116), so dass

$$\begin{aligned}
 (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \vec{p} &= (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \int d\omega \vec{p}_\omega \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \\
 &= \int d\omega \vec{p}_\omega \left[(\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \right] \\
 &= i \int d\omega \vec{p}_\omega (\vec{k} \cdot \vec{r}) \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \\
 &= \frac{ir}{c} \int d\omega \vec{p}_\omega \omega \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \\
 &= -\frac{r}{c} \dot{\vec{p}} = -\frac{1}{rc} (\vec{r} \cdot \vec{r}) \dot{\vec{p}}.
 \end{aligned}$$

Wir erhalten für Gleichung (6.122)

$$\text{grad} (\vec{p} \cdot \vec{r}) = \vec{p} + \vec{r} \times (\vec{\nabla} \times \vec{p}) - \frac{1}{rc} (\vec{r} \cdot \vec{r}) \dot{\vec{p}}.$$

Den zweiten Term dieser Beziehung formen wir mit Gleichung (6.117) um zu

$$\vec{r} \times (\vec{\nabla} \times \vec{p}) = -\frac{1}{rc} \vec{r} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{p}}) = -\frac{1}{rc} \left[(\vec{r} \cdot \dot{\vec{p}}) \vec{r} - (\vec{r} \cdot \vec{r}) \dot{\vec{p}} \right],$$

so dass folgt

$$\text{grad} (\vec{p} \cdot \vec{r}) = \vec{p} - \frac{1}{rc} (\vec{r} \cdot \dot{\vec{p}}) \vec{r}.$$

Mit analoger Rechnung erhalten wir

$$\text{grad} (\dot{\vec{p}} \cdot \vec{r}) = \dot{\vec{p}} - \frac{1}{rc} (\vec{r} \cdot \ddot{\vec{p}}) \vec{r}.$$

Für das elektrische Feld (6.121) gilt dann

$$\begin{aligned}
 \vec{E} &= -\frac{\ddot{\vec{p}}}{c^2 r} + \frac{3}{r^5} (\vec{p} \cdot \vec{r}) \vec{r} + \frac{2}{cr^4} (\dot{\vec{p}} \cdot \vec{r}) \vec{r} - \frac{\vec{p}}{r^3} + \frac{1}{cr^4} (\dot{\vec{p}} \cdot \vec{r}) \vec{r} \\
 &\quad - \frac{\dot{\vec{p}}}{cr^2} + \frac{1}{c^2 r^3} (\ddot{\vec{p}} \cdot \vec{r}) \vec{r}
 \end{aligned}$$

und nach Ordnen

$$\vec{E} = -\frac{\ddot{\vec{p}}}{c^2 r} - \frac{\dot{\vec{p}}}{cr^2} + \frac{3}{cr^4} (\dot{\vec{p}} \cdot \vec{r}) \vec{r} + \frac{(\ddot{\vec{p}} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{c^2 r^3} + \frac{3}{r^5} (\vec{p} \cdot \vec{r}) \vec{r} - \frac{\vec{p}}{r^3}. \quad (6.123)$$

Im Nahfeld $r \ll \lambda$ sind nach Gleichungen (6.120) und (6.123) die retardierten Terme für das elektrische Feld vernachlässigbar klein und es gilt

$$\vec{E}_N \simeq \frac{3}{r^5} (\vec{p} \cdot \vec{r}) \vec{r} - \frac{\vec{p}}{r^3}, \quad \vec{B}_N \simeq \frac{\dot{\vec{p}} \times \vec{r}}{cr^3}. \quad (6.124)$$

Das elektrische Feld entspricht dem statischen Dipolanteil (3.103).

Im Fernfeld $r \gg \lambda$ vernachlässigen wir Terme mit hohen Potenzen von r im Nenner und erhalten

$$\vec{E}_F \simeq -\frac{\ddot{\vec{p}}}{c^2 r} + \frac{(\ddot{\vec{p}} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{c^2 r^3} = \frac{1}{c^2 r^3} (\ddot{\vec{p}} \times \vec{r}) \times \vec{r}, \quad (6.125)$$

$$\begin{aligned} \text{denn} \quad (\ddot{\vec{p}} \times \vec{r}) \times \vec{r} &= -\vec{r} \times (\ddot{\vec{p}} \times \vec{r}) = -\left[(\vec{r} \cdot \vec{r}) \ddot{\vec{p}} - (\vec{r} \cdot \ddot{\vec{p}}) \vec{r} \right] \\ &= -r^2 \ddot{\vec{p}} + (\ddot{\vec{p}} \cdot \vec{r}) \vec{r}, \end{aligned}$$

$$\text{und} \quad \vec{B}_F \simeq \frac{\ddot{\vec{p}} \times \vec{r}}{c^2 r^2}. \quad (6.126)$$

An den Beziehungen (6.125) und (6.126) erkennt man direkt, dass

$$\vec{E}_F = \vec{B}_F \times \frac{\vec{r}}{r}, \quad (6.127)$$

woraus folgt

$$\frac{\vec{r}}{r} \times \vec{E}_F = \frac{\vec{r}}{r} \times \left(\vec{B}_F \times \frac{\vec{r}}{r} \right) = \left(\frac{\vec{r}}{r} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \right) \vec{B}_F - \left(\vec{B}_F \cdot \frac{\vec{r}}{r} \right) \frac{\vec{r}}{r} = \vec{B}_F,$$

weil $\vec{B}_F \perp \vec{r}$, so dass

$$\vec{B}_F = -\vec{E}_F \times \frac{\vec{r}}{r}. \quad (6.128)$$

Es folgt, dass in der Fernzone \vec{E}_F und \vec{B}_F den gleichen Betrag haben und senkrecht aufeinander stehen, d.h. sie laufen als Kugelwelle nach außen.

Für den **Poynting-Vektor in der Fernzone** erhalten wir mit Gleichung (6.127)

$$\begin{aligned} \vec{S}_F &= \frac{c}{4\pi} \vec{E}_F \times \vec{B}_F = \frac{c}{4\pi} \left[\left(\vec{B}_F \times \frac{\vec{r}}{r} \right) \times \vec{B}_F \right] \\ &= \frac{c}{4\pi} \left[B_F^2 \frac{\vec{r}}{r} - \left(\vec{B}_F \cdot \frac{\vec{r}}{r} \right) \frac{\vec{r}}{r} \right] = \frac{c}{4\pi} B_F^2 \frac{\vec{r}}{r} \end{aligned}$$

weil $\vec{B}_F \perp \vec{r}$. Setzen wir Gleichung (6.126) ein, so folgt

$$\vec{S}_F = \frac{c}{4\pi} \frac{(\ddot{\vec{p}} \times \vec{r})^2}{c^4 r^4} \frac{\vec{r}}{r} = \frac{(\ddot{\vec{p}} \times \vec{r})^2}{4\pi c^3 r^5} \vec{r}. \quad (6.129)$$

Mit

$$(\ddot{\vec{p}} \times \vec{r})^2 = |\ddot{\vec{p}}|^2 r^2 \sin^2 \theta$$

ergibt sich die in Abbildung 6.11 gezeigte Strahlungscharakteristik im Fernfeld

$$|\vec{S}_F| = \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{4\pi c^3 r^2} \sin^2 \theta. \quad (6.130)$$

6 Elektromagnetische Wellen und Strahlung

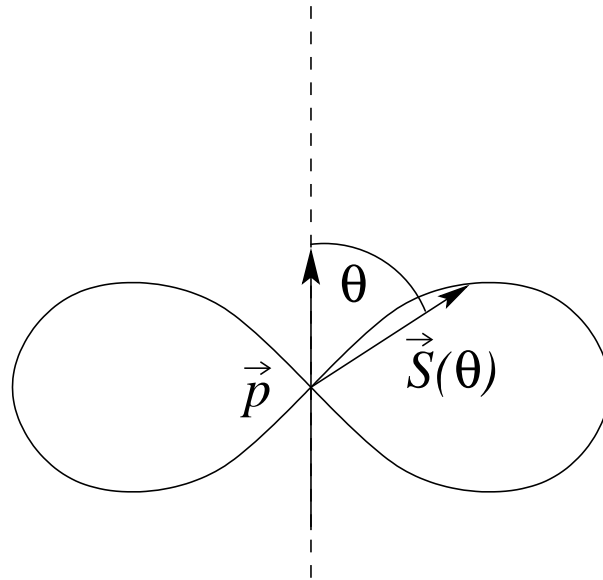


Abbildung 6.11: Abstrahlung des Dipols im Fernfeld

In Richtung der Dipolschwingungsachse ($\theta = 0$) erfolgt keine Abstrahlung. Die Abstrahlung ist maximal senkrecht zur Dipolschwingungsachse ($\theta = \pi/2$). Abstrahlung erfolgt nur, wenn eine Beschleunigung $\ddot{\vec{p}} \propto \ddot{\vec{r}}_0$ vorliegt. Der Energiestrom (6.129) fließt in radiale Richtung und fällt mit wachsendem Abstand proportional zu $\propto r^{-2}$ ab.

Der Gesamtbetrag der abgestrahlten Energie pro Zeiteinheit berechnet sich aus dem Betrag des Poynting-Vektors (6.130) des Fernfelds. Die mittlere Energie der Strahlung, die der Dipol während einer Schwingungsperiode T durch die Oberfläche einer Kugel mit dem Radius R abstrahlt, ist

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E} &= \frac{1}{T} \int_0^T dt \int d\Omega \left| \vec{S}_F \right| R^2 \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \left[\frac{(\ddot{p})^2}{4\pi c^3 R^2} \sin^2 \theta \right] R^2 \\
 &= \frac{2\pi}{4\pi c^3 T} \int_0^T dt \left(\ddot{p} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right)^2 \int_{-1}^1 d\mu (1 - \mu^2) \\
 &= \frac{2}{3c^3 T} \int_0^T dt \left(\ddot{p} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right)^2 .
 \end{aligned}$$

Für monochromatische Abstrahlung bei der Frequenz ω ist $p(t) = p_0 \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right)$, so dass

$$\ddot{p}(t) = -p_0 \omega^2 \sin \left(\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right) ,$$

und wir erhalten

$$\mathcal{E} = \frac{2p_0^2\omega^4}{3c^3T} \int_0^T dt \sin^2\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) = \frac{p_0^2\omega^4}{3c^3},$$

weil mit $\omega = 2\pi/T$

$$\int_0^T dt \sin^2\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) = \frac{T}{2}.$$

Es gilt also

$$\mathcal{E} = \frac{p_0^2\omega^4}{3c^3} = \frac{16\pi^4}{3} \frac{p_0^2}{c^3T^4} = \frac{16\pi^4}{3} \frac{cp_0^2}{\lambda^4} \propto \lambda^{-4}. \quad (6.131)$$

Wendet man diese Formel auf atomare Dipole an, so erkennt man, dass Licht bei kurzen Wellenlängen stärker gestreut wird als bei langen Wellenlängen. Dabei nutzt man, dass der Dipol so absorbiert wie er emittiert. Dieser Befund erklärt die blaue Frabe des Himmels, weil die blaue (kurzwellige) Komponente des Sonnenlichts am stärksten durch die Dipole in der Erdatmosphäre gestreut wird.

Der Ausdruck für den **Poynting-Vektor in der Nahzone** ist weit komplizierter. Mit Gleichungen (6.124) gilt

$$\begin{aligned} \vec{S}_N &= \frac{c}{4\pi} \vec{E}_N \times \vec{B}_N = \frac{c}{4\pi} \left[\frac{(3\vec{p} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right] \times \left[\frac{\dot{\vec{p}} \times \vec{r}}{cr^3} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi r^8} [3(\vec{p} \cdot \vec{r}) \vec{r} - r^2 \vec{p}] \times [\dot{\vec{p}} \times \vec{r}] \\ &= \frac{1}{4\pi r^8} [3(\vec{p} \cdot \vec{r}) \vec{r} \times (\dot{\vec{p}} \times \vec{r}) - r^2 \vec{p} \times (\dot{\vec{p}} \times \vec{r})] \\ &= \frac{1}{4\pi r^8} [3(\vec{p} \cdot \vec{r}) [r^2 \dot{\vec{p}} - (\vec{r} \cdot \dot{\vec{p}}) \vec{r}] - r^2 [(\vec{r} \cdot \vec{p}) \dot{\vec{p}} - (\vec{p} \cdot \dot{\vec{p}}) \vec{r}]] \\ &= \frac{1}{4\pi r^8} [2(\vec{p} \cdot \vec{r}) r^2 \dot{\vec{p}} + \vec{r} [r^2 (\vec{p} \cdot \dot{\vec{p}}) - 3(\vec{p} \cdot \vec{r}) (\dot{\vec{p}} \cdot \vec{r})]] \end{aligned}$$

Mit $\vec{p} \cdot \vec{r} = pr \cos \theta$, $\dot{\vec{p}} \cdot \vec{r} = \dot{p}r \cos \theta$ folgt

$$\begin{aligned} \vec{S}_N &= \frac{1}{4\pi r^8} [2pr^3 \dot{\vec{p}} \cos \theta + [r^2 p \dot{p} - 3p \dot{p} r^2 \cos^2 \theta] \vec{r}] \\ &= \frac{1}{4\pi r^6} [2pr \dot{\vec{p}} \cos \theta + p \dot{p} [1 - 3 \cos^2 \theta] \vec{r}]. \quad (6.132) \end{aligned}$$

6 *Elektromagnetische Wellen und Strahlung*

7 Kovariante Formulierung der Maxwell-Theorie

Als Grundlage der speziellen Relativitätstheorie (siehe Kap. 7 Mechanik-Skript) stellte Einstein zwei Postulate auf:

- I In allen gleichförmig gegeneinander bewegten Systemen gelten die gleichen Naturgesetze.
- II Die Geschwindigkeit des Lichts hat in allen gleichförmig gegeneinander bewegten Systemen den gleichen Betrag, unabhängig von der Geschwindigkeit der Quelle relativ zum Beobachter.

Postulat I heißt, dass wir die Naturgesetze *kovariant* formulieren müssen.

Aus Postulat II folgt, dass der Übergang zwischen zwei Systemen durch die Lorentztransformation beschrieben wird.

7.1 Die Lorentz-Transformation

Man denke sich zwei Bezugssysteme K und K' , die sich in x -Richtung mit einer konstanten Relativgeschwindigkeit \vec{V} zueinander bewegen. Aufgrund der Isotropie des Raums ist keine Richtung besonders ausgezeichnet, so dass wir die x -Achse parallel zu $\vec{V} = \vec{\beta}c$ wählen können.

Wie in der Mechanik-Vorlesung gezeigt, gilt für die *Lorentz-Transformation*

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} \quad (7.1)$$

$$\text{und} \quad \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix}. \quad (7.2)$$

Im Grenzfall $\beta \ll 1$ folgt sofort mit $\gamma \simeq 1 + (\beta^2/2) \simeq 1$ aus Gleichung (7.1) die Galilei-Transformation $x' \simeq x - Vt$ und $t' \simeq t$.

Für manche Anwendungen ist es nützlich, die Transformationsformeln auch für den allgemeinen Fall, dass die Relativgeschwindigkeit \vec{V} nicht in Richtung der x -Achse zeigt, zu kennen. Man erhält diese, indem man den Ortsvektor

$$\vec{r} = \vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp} \quad (7.3)$$

7 Kovariante Formulierung der Maxwell-Theorie

in einen Anteil $\vec{r}_{\parallel} \parallel \vec{V}$ und $\vec{r}_{\perp} \perp \vec{V}$ aufspaltet. Aus Gleichungen (7.1) folgt dann

$$\vec{r}'_{\perp} = \vec{r}_{\perp}, \quad \vec{r}'_{\parallel} = \gamma \left(\vec{r}_{\parallel} - \vec{V}t \right), \quad t' = \gamma \left(t - \frac{\vec{V} \cdot \vec{r}_{\parallel}}{c^2} \right). \quad (7.4)$$

Weil aber

$$\vec{r}_{\parallel} = \frac{(\vec{r} \cdot \vec{V}) \vec{V}}{V^2}, \quad \vec{r}_{\perp} = \vec{r} - \vec{r}_{\parallel}$$

folgen mit Gleichungen (7.4)

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= \vec{r}'_{\perp} + \vec{r}'_{\parallel} = \vec{r}_{\perp} + \gamma \left(\vec{r}_{\parallel} - \vec{V}t \right) \\ &= \vec{r} - \frac{(\vec{r} \cdot \vec{V}) \vec{V}}{V^2} + \gamma \left(\frac{(\vec{r} \cdot \vec{V}) \vec{V}}{V^2} - \vec{V}t \right) \\ &= \vec{r} + \frac{\gamma - 1}{V^2} (\vec{r} \cdot \vec{V}) \vec{V} - \gamma \vec{V}t \end{aligned} \quad (7.5)$$

$$\text{und} \quad t' = \gamma \left(t - \frac{\vec{V} \cdot \frac{(\vec{r} \cdot \vec{V}) \vec{V}}{V^2}}{c^2} \right) = \gamma \left(t - \frac{\vec{r} \cdot \vec{V}}{c^2} \right) \quad (7.6)$$

als allgemeine Transformationsgleichungen.

Wir betrachten zunächst die Invarianz der skalaren Wellengleichung (6.7)

$$\vec{\nabla}^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi = 0 \quad (7.7)$$

bei Lorentz-Transformation. Es gilt für die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t'} = \gamma \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{V\gamma}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'}, \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'} = -V\gamma \frac{\partial}{\partial x'} + \gamma \frac{\partial}{\partial t'}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y'}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'}. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2}{\partial y'^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial z'^2}, \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \left(\gamma \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{V\gamma}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} \right) \left(\gamma \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{V\gamma}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} \right) \\ &= \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{V^2 \gamma^2}{c^4} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - 2 \frac{V\gamma^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'} \\ \text{und} \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} &= \left(\gamma \frac{\partial}{\partial t'} - V\gamma \frac{\partial}{\partial x'} \right) \left(\gamma \frac{\partial}{\partial t'} - V\gamma \frac{\partial}{\partial x'} \right) \\ &= \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial t'^2} + V^2 \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - 2\gamma^2 V \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'}. \end{aligned}$$

Mit den beiden letzten Ergebnissen folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} &= \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{V^2 \gamma^2}{c^4} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \\ &\quad - 2 \frac{V \gamma^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'} - \frac{\gamma^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - \frac{V^2 \gamma^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{2 \gamma^2 V}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'} \\ &= \gamma^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \left(\frac{V^2}{c^2} - 1 \right) \frac{\gamma^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2}. \end{aligned}$$

Damit ist die Forminvarianz der skalaren Wellengleichung bei Lorentz-Transformation bewiesen.

7.2 Minkowski-Raum

Die Prüfung physikalischer Gesetze auf Kovarianz, d.h. auf Forminvarianz gegenüber der Lorentz-Transformation, wird sehr erleichtert, wenn man formal eine vierte Koordinate ct einführt. Der *Minkowski-Raum* (auch als *Welt-Raum* bezeichnet) besteht dann aus den drei Dimensionen des gewöhnlichen Ortsraums und einer vierten Dimension, die proportional zur Zeit t ist.

Ein Punkt in diesem vierdimensionalen Raum erhält dann eine Darstellung in

$$\text{kontravarianten Komponenten: } (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (ct, x, y, z) \quad (7.8)$$

und eine Darstellung in

$$\text{kovarianten Komponenten: } (x_0, x_1, x_2, x_3) \equiv (ct, -x, -y, -z), \quad (7.9)$$

die durch Stellung der Indizes unterschieden werden. Ein Vektor im Minkowski-Raum mit griechischen Indizes erhält die Bezeichnung

$$(x_\mu) \equiv (x_0, x_1, x_2, x_3), \quad (x^\mu) \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3).$$

Man verwendet die Einsteinsche Summenkonvention, dass in einem Produkt über gleiche griechische Indizes automatisch über diese von 0 bis 3 summiert wird, d.h.

$$x_\mu x^\mu \equiv \sum_{\mu=0}^3 x_\mu x^\mu.$$

Zwischen den kovarianten und kontravarianten Komponenten besteht die Beziehung

$$(x^\mu) = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \equiv (g^{\mu\nu} x_\nu) \quad (7.10)$$

Das Quadrat des Abstands im Minkowski-Raum wird definiert durch

$$\tau^2 \equiv \frac{1}{c^2} x_\mu x^\mu. \quad (7.11)$$

7 Kovariante Formulierung der Maxwell-Theorie

Gemäß Gleichung (7.10) gilt

$$\tau^2 = \frac{1}{c^2} x_\mu g^{\mu\nu} x_\nu ,$$

d.h. $g^{\mu\nu}$ definiert den Abstand und wird daher *metrischer Tensor* oder einfach *Metrik* genannt.

Gehen wir jetzt auf infinitesimale Abstände über, so ist das Quadrat des Abstands von zwei nahe benachbarten Ereignissen durch

$$(d\tau^2) = \frac{1}{c^2} (dx_\mu) (dx^\mu) = \frac{1}{c^2} [c^2(dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2] . \quad (7.12)$$

Für $ds = cd\tau = 0$ ist ebenfalls auch $ds' = cd\tau' = 0$ im relativ bewegten System erfüllt. Es folgt, dass $ds = ads'$, und weil weder das ruhende noch das bewegte System ausgezeichnet sind, auch $ds' = ads$. Daher muss $a^2 = 1$ oder $a = 1$ sein und

$$ds = cd\tau = ds' = cd\tau' \quad (7.13)$$

ist invariant unter Lorentz-Transformation.

Zur anschaulichen Bedeutung von Gleichung (7.11) bemerken wir, dass im Ursprung des Koordinatensystems

$$\tau^2 = \frac{1}{c^2} x_\mu x^\mu = \frac{1}{c^2} [c^2 t^2 - (x=0)^2 - (y=0)^2 - (z=0)^2] = t^2 \quad (7.14)$$

ist, d.h. τ entspricht der systemeigenen Zeit (*Eigenzeit*, *Weltzeit*).

Mit diesen Bezeichnungen gilt

$$x_\mu x^\mu = x'_\mu x'^\mu \quad (7.15)$$

und die Lorentztransformation lautet

$$x'_\mu = \Lambda_\mu^\nu x_\nu \quad (7.16)$$

mit

$$\Lambda_\mu^\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \quad (7.17)$$

7.2.1 Vierer-Skalare, Vierer-Vektoren und Vierer-Tensoren

In Analogie zur Definition von Skalaren, Vektoren und Tensoren im dreidimensionalen Ortsraum definieren wir einen Vierer-Vektor (oder einen Tensor 1. Ordnung) als eine Menge von vier Komponenten, die sich gemäß Gleichung (7.16) transformieren, also das gleiche Transformationsverhalten zeigen wie der Vierer-Ortsvektor (7.8).

Ebenso ist ein Vierer-Tensor 2. Ordnung eine Größe mit 16 Komponenten, die sich gemäß

$$T'_{\mu\nu} (x'_\mu) = \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\eta T_{\alpha\eta} (x_\mu) \quad (7.18)$$

transformieren.

7.3 Relativistische Formulierung der Elektrodynamik

Ein Vierer-Skalar ist demnach ein Vierer-Tensor 0. Ordnung und ist invariant unter Lorentz-Transformation, d.h.

$$S'(x'_\mu) = S(x_\mu) . \quad (7.19)$$

Das Abstandselement $(d\tau)^2$ ist ein Vierer-Skalar.
Gemäß dieser Definitionen bilden

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right) \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} \equiv \partial^\mu \quad (7.20)$$

die kontravarianten Komponenten und

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right) \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu \quad (7.21)$$

die kovarianten Komponenten eines Vierer-Vektors.

Wenn sich Vierer-Vektoren wie der Vierer-Ortsvektor transformieren, dessen Abstandselement ein Vierer-Skalar ist, dann ist auch das Skalarprodukt eines beliebigen Vierer-Vektors $Q_\mu = (Q_0, -Q_1, -Q_2, -Q_3)$ mit sich selbst ebenfalls invariant unter Lorentztransformation, d.h.

$$Q^2 = Q_\mu Q^\mu = Q_0^2 - Q_1^2 - Q_2^2 - Q_3^2 = \text{const.} . \quad (7.22)$$

Ebenfalls folgt für zwei Vierer-Vektoren Q_μ und R_μ mit Gleichung (7.22)

$$(Q_\mu + R_\mu)^2 = Q_\mu Q^\mu + 2Q_\mu R^\mu + R_\mu R^\mu = Q^2 + R^2 + 2Q_\mu R^\mu = \text{const.} ,$$

dass das Skalarprodukt

$$Q_\mu R^\mu = Q'_\mu R'^\mu \quad (7.23)$$

invariant ist.

Gelingt es, die physikalischen Gesetze mithilfe von Vierer-Tensoren gleicher Ordnung zu formulieren, ist die Kovarianz besonders leicht zu erkennen.

7.3 Relativistische Formulierung der Elektrodynamik

7.3.1 Vierer-Potential

Die Kontinuitätsgleichung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

schreiben wir in der Form

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} + \frac{\partial c\rho}{\partial ct} = 0 . \quad (7.24)$$

Führen wir die 4-fach induzierte Größe

$$j^\alpha = (c\rho, j_x, j_y, j_z) \quad (7.25)$$

7 Kovariante Formulierung der Maxwell-Theorie

ein, schreibt sich Gleichung (7.24) mit der kovarianten Ableitung (7.21) als

$$\partial_\mu j^\mu = 0 . \quad (7.26)$$

Nach dem Postulat I der speziellen Relativitätstheorie gilt die Beziehung (7.26) in allen Inertialsystemen,

$$\partial'_\mu j'^\mu = \partial_\mu j^\mu = 0 , \quad (7.27)$$

d.h. $\partial_\mu j^\mu$ ist ein Lorentzskalar. Weil gemäß Gleichung (7.21) ∂_μ ein kovarianter Vierervektor ist, ist dann die *Viererstromdichte* (7.25) ein kontravarianter Vierervektor mit dem Transformationsverhalten (7.16), also

$$j'^\mu = \Lambda^\mu_\alpha j^\alpha . \quad (7.28)$$

Die Potentialgleichungen (5.36)–(5.37)

$$\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \Delta \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (7.29)$$

und

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \Delta \Phi = 4\pi\rho \quad (7.30)$$

mit der Lorenz-Eichung (5.35)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad (7.31)$$

legen es nahe, das *Vierer-Potential*

$$A^\mu \equiv (\Phi, A_x, A_y, A_z) \quad (7.32)$$

einzuführen. Damit lassen sich mit Gleichung (7.25) die Gleichungen (7.29) und (7.30) in einer Gleichung zusammenzufassen:

$$\square A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu , \quad (7.33)$$

wobei der d'Alembert-Operator

$$\square = \partial_\nu \partial^\nu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \quad (7.34)$$

verwendet wurde. Man bezeichnet Gleichung (7.33) als *kovariante Maxwellgleichungen für die Potentiale*.

Der d'Alembert-Operator (oder Quabla-Operator) ist ein Lorentzskalar, weil die Ableitungen ∂_μ und ∂^μ kovariante bzw. kontravariante Vierer-Vektoren sind (vergl. Gleichungen (7.19) und (7.20)). Weil j^μ ein kontravarianter Vierer-Vektor ist, muss nach Beziehung (7.33) auch A^μ ein kontravarianter Vierer-Vektor sein. Damit ist $\partial_\mu A^\mu$ ein Lorentzskalar, so dass die Lorenz-Eichung (7.31) in der Form

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad (7.35)$$

in jedem Inertialsystem gilt.

7.3.2 Kovariante Maxwellgleichungen und Feldstärketensor

Mit dem d'Alembert-Operator $\square = \partial_\nu \partial^\nu$ schreiben wir Beziehung (7.33)

$$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu . \quad (7.36)$$

Aus der Lorenz-Eichung (7.35) $\partial_\nu A^\nu = 0$ folgt

$$\partial^\mu \partial_\nu A^\nu = \partial_\nu \partial^\mu A^\nu = 0 .$$

Subtrahieren wir diese Gleichung von Gleichung (7.36), erhalten wir

$$\begin{aligned} \partial_\nu (\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu) &= \frac{4\pi}{c} j^\mu , \\ \text{oder} \quad \partial_\nu F^{\nu\mu} &= \frac{4\pi}{c} j^\mu , \end{aligned} \quad (7.37)$$

wobei wir den *kontravarianten Feldstärketensor* einführen

$$F^{\nu\mu} \equiv \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} . \quad (7.38)$$

Weil die rechte Seite von Gleichung (7.37) und ∂_ν kontravariante bzw. kovariante Vierervektoren sind, muss $F^{\nu\mu}$ ein kontravarianter Lorentztensor 2. Stufe sein.

Der Feldstärketensor (7.38) entspricht der Berechnung der elektrischen und magnetischen Feldstärken aus den Potentialen durch

$$\vec{E} = -\text{grad } \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \text{rot } \vec{A} .$$

Aus der Definition (7.38) folgt sofort, dass $F^{\nu\mu}$ invariant unter der Eichtransformation

$$A^\mu \rightarrow A^\mu - \partial^\mu \lambda \quad (7.39)$$

ist, wobei λ eine beliebige skalare Funktion bezeichnet.

Der kovariante Feldstärketensor ergibt sich mit dem metrischen Tensor gemäß Gleichung (7.10) zu

$$F_{\alpha\eta} = g_{\alpha\nu} g_{\eta\mu} F^{\nu\mu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} . \quad (7.40)$$

Die inhomogenen Maxwellgleichungen lassen sich aus den kovarianten Maxwellgleichungen (7.37) ableiten. Für $\mu = 1$ folgt mit $j^1 = c\rho$

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{c} j^1 &= 4\pi\rho = \partial_\nu F^{\nu 1} = \partial_1 F^{11} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} + \partial_4 F^{41} \\ &= 0 + \partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z = \text{div } \vec{E} , \end{aligned}$$

also $\text{div } E = 4\pi\rho .$

7 Kovariante Formulierung der Maxwell-Theorie

Für $\mu = 2$ folgt mit $j^2 = j_x$

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{c} j^2 &= \frac{4\pi}{c} j_x = \partial_\nu F^{\nu 2} \\ &= \partial_1 F^{12} + \partial_2 F^{22} + \partial_3 F^{32} + \partial_4 F^{42} \\ &= -\partial_{ct} E_x + 0 + \partial_y B_z - \partial_z B_y \\ &= -\partial_{ct} E_x + [\text{rot } B]_x, \end{aligned}$$

also
$$[\text{rot } B]_x - \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} j_x.$$

Für $\mu = 3$ und $\mu = 4$ erhalten wir entsprechend

$$[\text{rot } B]_y - \frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} j_y$$

und
$$[\text{rot } B]_z - \frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} j_z,$$

so dass
$$\text{rot } \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}.$$

Die homogenen Maxwell-Gleichungen folgen aus der Eigenschaft der Jacobi-Identität des Feldstärketensors

$$\partial^\lambda F^{\nu\mu} + \partial^\nu F^{\mu\lambda} + \partial^\mu F^{\lambda\nu} = 0. \quad (7.41)$$

7.3.3 Lorentz-Transformation der Feldstärken

Wie oben gezeigt, ist der Feldstärketensor (7.38) ein Lorentztensor zweiter Stufe. Dann gilt gemäß Gleichung (7.18) das Transformationsverhalten

$$F'^{\alpha\eta}(x') = \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\eta F^{\mu\nu}(x)$$

Unter Verwendung der Transformationsmatrix (7.17),

$$\Lambda_\mu^\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

berechnen wir explizit das Transformationsverhalten einzelner Matrixelemente des Feldstärketensors. So folgt für

$$\begin{aligned} -E'_x = F'^{12} &= \Lambda_\mu^1 \Lambda_\nu^2 F^{\mu\nu} = \gamma \Lambda_\nu^2 F^{1\nu} - \beta\gamma \Lambda_\nu^2 F^{2\nu} \\ &= -\beta\gamma^2 F^{11} + \gamma^2 F^{12} + \beta^2 \gamma^2 F^{21} - \beta\gamma^2 F^{22} \\ &= 0 + \gamma^2 F^{12} + \beta^2 \gamma^2 F^{21} + 0 \\ &= -\gamma^2 E_x + \beta^2 \gamma^2 E_x = -\gamma^2 (1 - \beta^2) E_x = -E_x, \end{aligned} \quad (7.42)$$

7.4 Lagrange- und Hamilton-Formalismus für Felder

$$\begin{aligned}
 -E'_y &= F'^{13} = \Lambda_\mu^1 \Lambda_\nu^3 F^{\mu\nu} = \gamma \Lambda_\nu^3 F^{1\nu} - \beta \gamma \Lambda_\nu^3 F^{2\nu} \\
 &= \gamma F^{13} - \beta \gamma F^{23} = \gamma (F^{13} - \beta F^{23}) = \gamma (-E_y + \beta B_z) , \quad (7.43)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -E'_z &= F'^{14} = \Lambda_\mu^1 \Lambda_\nu^4 F^{\mu\nu} = \gamma \Lambda_\nu^4 F^{1\nu} - \beta \gamma \Lambda_\nu^4 F^{2\nu} \\
 \gamma F^{14} - \beta \gamma F^{24} &= \gamma (F^{14} - \beta F^{24}) = \gamma (-E_z - \beta B_y) , \quad (7.44)
 \end{aligned}$$

$$B'_x = F'^{43} = \Lambda_\mu^4 \Lambda_\nu^3 F^{\mu\nu} = \Lambda_\nu^3 F^{4\nu} = F^{43} = B_x , \quad (7.45)$$

$$\begin{aligned}
 B'_y &= F'^{24} = \Lambda_\mu^2 \Lambda_\nu^4 F^{\mu\nu} \\
 &= -\beta \gamma \Lambda_\nu^4 F^{1\nu} + \gamma \Lambda_\nu^4 F^{2\nu} = -\beta \gamma F^{14} + \gamma F^{24} \\
 &= \gamma (F^{24} - \beta F^{14}) = \gamma (B_y + \beta E_z) \quad (7.46)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{und } B'_z = F'^{32} &= \Lambda_\mu^3 \Lambda_\nu^2 F^{\mu\nu} = \Lambda_\nu^2 F^{3\nu} \\
 &= -\beta \gamma F^{31} + \gamma F^{32} = \gamma (B_z - \beta E_y) . \quad (7.47)
 \end{aligned}$$

Insgesamt gilt also

$$E'_x = E_x , \quad E'_y = \gamma (E_y - \beta B_z) , \quad E'_z = \gamma (E_z + \beta B_y) , \quad (7.48)$$

$$\text{und } B'_x = B_x , \quad B'_y = \gamma (B_y + \beta E_z) , \quad B'_z = \gamma (B_z - \beta E_y) . \quad (7.49)$$

In vektorieller Form lauten die Transformationsgleichungen

$$\begin{aligned}
 E'_\parallel &= E_\parallel , \\
 B'_\parallel &= B_\parallel , \\
 \vec{E}'_\perp &= \gamma \left(\vec{E}_\perp + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right) , \\
 \vec{B}'_\perp &= \gamma \left(\vec{B}_\perp - \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{E} \right) . \quad (7.50)
 \end{aligned}$$

Beim Übergang zwischen zwei Inertialsystemen werden die Komponenten \vec{E} und \vec{B} des Feldstärketensors gemischt transformiert. Ein reines elektrisches Feld im ungestrichenen System wird als Gemisch von elektrischem und magnetischem Feld im gestrichenen System erscheinen.

7.4 Lagrange- und Hamilton-Formalismus für Felder

In Kap. 5.8 haben wir gezeigt, dass sich die Lorentz-Kraft und damit die Bewegungsgleichung für Ladungen im elektromagnetischen Feld aus der Lagrange-Funktion (5.79) oder der Hamilton-Funktion (5.83) ableiten lässt. Aus der Mechanik-Vorlesung wissen wir, dass sich die Lagrange-Gleichungen und die kanonischen Bewegungsgleichungen aus dem Hamilton-Prinzip der kleinsten Wirkung,

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) dt = 0 , \quad (7.51)$$

7 Kovariante Formulierung der Maxwell-Theorie

ergeben.

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, wie sich die Maxwell-Gleichungen für das elektromagnetische Feld selbst aus einem entsprechend verallgemeinerten Lagrange- und Hamilton-Formalismus für Felder ergeben.

7.4.1 Lagrange-Dichte und Hamilton-Dichte

Im Rahmen einer Feldtheorie führen wir die *Lagrange-Dichte* \mathcal{L} durch das Volumenintegral

$$L = \iiint \mathcal{L} dx dy dz \quad (7.52)$$

ein, wobei das Integrationsvolumen beliebig ist. Die Lagrange-Dichte \mathcal{L} ist dabei eine Funktion von einer oder mehreren Funktionen $u_r(x, y, z, t)$ und deren ersten partiellen Ableitungen $\partial u_r / \partial x$, $\partial u_r / \partial y$, $\partial u_r / \partial z$ und $\partial u_r / \partial t$.

Das Variationsprinzip (7.51) lautet dann

$$\delta \iiint \mathcal{L} dx dy dz dt = 0, \quad (7.53)$$

wobei die willkürlichen Variationen δu_r an den Randflächen des beliebigen durch x , y , z und t beschriebenen vierdimensionalen Raum-Zeit-Volumens verschwinden sollen. Unter einer Lorentz-Transformation sorgen die Längenkontraktion (siehe Mechanik-Vorlesung Kap. 7.1.5) und die Zeitdilatation (siehe Mechanik-Vorlesung Kap. 7.1.6) dafür, dass das vierdimensionale Volumenelement $dx dy dz dt$ invariant ist. Weil das Integrationsvolumen von Gleichung (7.53) beliebig ist, führt eine Lorentz-invariante Lagrange-Dichte \mathcal{L} dann auf Lorentz-invariante Feldgleichungen.

In Analogie zur klassischen Mechanik definieren wir die *Hamilton-Dichte* durch

$$\mathcal{H} \equiv \sum_r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_r} \dot{u}_r - \mathcal{L} \quad (7.54)$$

und die Hamilton-Funktion ergibt sich durch Integration dieser Dichte über das drei-dimensionale Raumelement

$$H = \iiint \mathcal{H} dx dy dz \quad (7.55)$$

Wir führen jetzt die Variation gemäß Gleichung (7.53) aus, d.h.

$$\iiint \delta \mathcal{L} dx dy dz dt = 0. \quad (7.56)$$

Mit der δ -Notation (siehe Mechanik-Vorlesung Kap. 3.11.1) gilt

$$\delta \mathcal{L} = \sum_r \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_r} \delta u_r + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial u_r}{\partial x}} \delta \frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial u_r}{\partial y}} \delta \frac{\partial u_r}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial u_r}{\partial z}} \delta \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial u_r}{\partial t}} \delta \frac{\partial u_r}{\partial t} \right) \quad (7.57)$$

Weil die beliebigen Variationen unabhängig vom Ableitungsprozess sind, gilt

$$\delta \frac{\partial u_r}{\partial x} = \frac{\partial(\delta u_r)}{\partial x}, \quad \delta \frac{\partial u_r}{\partial y} = \frac{\partial(\delta u_r)}{\partial y}, \quad \delta \frac{\partial u_r}{\partial z} = \frac{\partial(\delta u_r)}{\partial z}, \quad \delta \frac{\partial u_r}{\partial t} = \frac{\partial(\delta u_r)}{\partial t},$$

so dass z.B. nach partieller Integration

$$\begin{aligned} & \iiint \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial u_r}{\partial x}} \delta \frac{\partial u_r}{\partial x} dx dy dz dt \\ &= \iiint \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial u_r}{\partial x}} \frac{\partial(\delta u_r)}{\partial x} dx dy dz dt \\ &= \int dy \int dz \int dt \int dx \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial u_r}{\partial x}} \frac{\partial(\delta u_r)}{\partial x} \\ &= \int dy \int dz \int dt \left(\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial u_r}{\partial x}} \delta u_r \right]_{\text{Rand von } x} \right. \\ &\quad \left. - \int dx \delta u_r \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial u_r}{\partial x}} \right] \right) \\ &= - \iiint \delta u_r \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial u_r}{\partial x}} \right] dx dy dz dt, \end{aligned} \quad (7.58)$$

weil der Randterm verschwindet aufgrund der Annahme $\delta u_r|_{\text{Rand von } x} = 0$. Verfährt man ebenso mit den anderen Termen von Gleichung (7.57), erhält man für Gleichung (7.56)

$$\iiint \sum_r \delta u_r \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_r} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial u_r}{\partial x}} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial u_r}{\partial y}} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial u_r}{\partial z}} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial u_r}{\partial t}} \right) = 0$$

Weil die Variationen δu_r beliebig sind, gilt für jede Feldfunktion u_r

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_r} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial u_r}{\partial x}} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial u_r}{\partial y}} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial u_r}{\partial z}} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial u_r}{\partial t}} = 0 \quad (7.59)$$

zu jedem Zeitpunkt und an jedem Punkt des betrachteten Raum-Zeit-Gebiets. Die Gleichungen (7.59) werden als *Euler-Lagrange-Gleichungen* bezeichnet. Mit der kovarianten Ableitung (7.21) und der Einsteinschen Summenkonvention schreiben sich die Euler-Lagrange-Gleichungen (7.59) kurz als

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu u_r)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_r}, \quad r = 1, 2, 3, \dots \quad (7.60)$$

7.4.2 Klein-Gordon-Lagrange-Dichte für ein skalares (Spin 0) Feld

Als erste Anwendung diskutieren wir den Fall einer einzelnen skalaren Feldfunktion $u_1 = \Phi$ mit der invarianten Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \Phi) (\partial^\mu \Phi) - \frac{1}{2} \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \Phi^2, \quad (7.61)$$

7 Kovariante Formulierung der Maxwell-Theorie

wobei die Einsteinsche Summenkonvention verwandt wird. Ausgeschrieben lautet die Dichte (7.60) also

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\partial_0 \Phi \partial_0 \Phi - \partial_1 \Phi \partial_1 \Phi - \partial_2 \Phi \partial_2 \Phi - \partial_3 \Phi \partial_3 \Phi \right] - \frac{1}{2} \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \Phi^2 ,$$

wobei der Summationsindex hier von 0 bis 3 läuft.

Gemäß der Euler-Lagrange-Gleichung (7.60) berechnen wir

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \Phi)} = \partial_0 \Phi = \partial^0 \Phi ,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_1 \Phi)} = -\partial_1 \Phi = \partial^1 \Phi ,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_2 \Phi)} = -\partial_2 \Phi = \partial^2 \Phi ,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_3 \Phi)} = -\partial_3 \Phi = \partial^3 \Phi ,$$

und

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} = - \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \Phi .$$

Damit erhalten wir in diesem Fall als Euler-Lagrange-Gleichung

$$\partial_\mu \partial^\mu \Phi + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \Phi = 0 \quad (7.62)$$

die *Klein-Gordon-Gleichung*, die in der Quantentheorie Teilchen mit Spin 0 und Masse m beschreibt.

7.4.3 Proca-Lagrange-Dichte für ein Vektor-Feld (Spin 1)

Als nächstes untersuchen wir den Fall einer Vierer-Vektor-Feldfunktion $u_1 = A^\mu$ mit der invarianten Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + \frac{1}{8\pi} \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 A^\nu A_\nu . \quad (7.63)$$

Mit dem Feldstärketensor (7.38) schreibt sich diese Lagrange-Dichte als

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{8\pi} \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 A^\nu A_\nu . \quad (7.64)$$

Gemäß der Euler-Lagrange-Gleichung (7.60) berechnen wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} &= \frac{\partial}{\partial A_\nu} \left[\frac{1}{8\pi} \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 A^\nu A_\nu \right] \\ &= \frac{1}{8\pi} \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \frac{\partial}{\partial A_\nu} \left[(A_0)^2 - (A_1)^2 - (A_2)^2 - (A_3)^2 \right] \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 A^\nu \end{aligned}$$

und (Übungsaufgabe)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = -\frac{1}{4\pi} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = -\frac{1}{4\pi} F^{\mu\nu} . \quad (7.65)$$

Damit erhalten wir in diesem Fall als Euler-Lagrange-Gleichung

$$\partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A^\nu = \partial_\mu F^{\mu\nu} + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A^\nu = 0 \quad (7.66)$$

die *Proca-Gleichung*, die in der Quantentheorie Teilchen mit Spin 1 und Masse m beschreibt. Im Fall $m = 0$ ergibt die Proca-Gleichung (7.66) gerade die quellfreien Maxwell-Gleichungen (7.37) mit $j^\mu = 0$.

7.4.4 Maxwell-Lagrange-Dichte für ein masseloses Vektor-Feld mit Quelle j^μ

Wir betrachten die invariante Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{c} j^\mu A_\mu \quad (7.67)$$

mit dem Feldstärketensor (7.38) und der vorgegebenen Viererstrom-Funktion j^μ .

Mit

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = -\frac{1}{c} j^\nu$$

und der Beziehung (7.65) erhalten wir als Feldgleichung

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu \quad (7.68)$$

gerade die inhomogenen Maxwell-Gleichungen (7.37), die das elektromagnetische Feld beschreiben, das durch die Viererstromdichte j^μ erzeugt wird.

Aus der Feldgleichung (7.68) folgt

$$\frac{4\pi}{c} \partial_\nu j^\nu = \partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$$

oder

$$\partial_\nu j^\nu = 0 . \quad (7.69)$$

Aus Konsistenzgründen muss deshalb die Viererstromfunktion j^μ in der Lagrange-Dichte (7.67) so gewählt werden, dass sie die Kontinuitätsgleichung (7.69) erfüllt. Damit ist die Ladungserhaltung innerhalb der klassischen Elektrodynamik immer erfüllt.

7.4.5 Bemerkung

Die korrekte Herleitung der Maxwell-Gleichungen aus der Lagrange-Dichte (7.67) durch das Eulersche Variationsverfahren (7.53) hatte weitreichende Konsequenzen für das Vorgehen der Theoretischen Physik. Während in der klassischen Mechanik der Dynamik von Massenpunkten die Lagrange-Funktion $L = T - V$ noch aus der Differenz von kinetischer und potentieller

7 Kovariante Formulierung der Maxwell-Theorie

Energie berechnet wurde, wird die Lagrange-Dichte \mathcal{L} in der relativistischen Feldtheorie axiomatisch angesetzt und, bis auf die Forderung der Invarianz unter Lorentz-Transformation, frei gewählt. Wann immer das Problem auftritt, Gleichungen zu formulieren, die ein physikalisches Problem relativistisch beschreiben, konstruiert man eine invariante Lagrange-Dichte und leitet die zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen ab. Der Vergleich mit den empirischen Befunden entscheidet dann über die Güte der Konstruktion.

Diese Vorgehensweise hat sich als äußerst fruchtbar erwiesen. So gelang es, die quell- und wechselwirkungsfreie Dirac-Gleichung der relativistischen Quantenelektrodynamik für Spin $1/2$, die als nichtrelativistischen Grenzfall die Schrödinger-Gleichung enthält, aus einer entsprechend konstruierten freien Dirac-Lagrange-Dichte für ein Spinor-Feld abzuleiten. Die Forderung nach lokaler Eichinvarianz dieser freien Dirac-Lagrange-Dichte erfordert dann die zusätzliche Einführung eines masselosen Eichfeldes A_μ , das dann in der Tat die Viererstromfunktion j^μ in der Maxwell-Lagrange-Dichte (7.67) inklusive der Ladungserhaltung liefert. Die Forderung nach lokaler Eichinvarianz generiert damit die gesamte Elektrodynamik und spezifiziert die Ströme und Ladungen durch Spin $1/2$ Teilchen. Details dieser Herleitung sprengen den Rahmen dieser Vorlesung.

8 Elektrodynamik in Materie

8.1 Dielektrika im elektrostatischen Feld

Unter *Isolatoren* oder *Dielektrika* verstehen wir Materialien, bei denen im Gegensatz zu Leitern nicht alle Ladungen frei beweglich sind, weil die Elektronen an die Atome und Moleküle gebunden sind. Unter dem Einfluss eines äußeren elektrischen Felds werden sie um kurze Strecken gegeneinander verschoben, was zur *Polarisation* der Atome und Moleküle im Feld führt.

8.1.1 Polarisation

Wenn das \vec{E} -Feld nicht so stark ist, dass es zu einer Ionisation des Atoms kommt, wird der positive Kern des **neutralen Atoms** in Feldrichtung verschoben und die Elektronen in die entgegengesetzte Richtung. Aufgrund dieser Ladungsseparation ziehen sich der positive Kern und die Elektronen wieder an. Es bildet sich ein Gleichgewicht mit einem polarisierten Atom, das ein kleines durch \vec{E} induziertes Dipolmoment $\vec{p} \parallel \vec{E}$ hat, das in Richtung von \vec{E} zeigt:

$$\vec{p} = \alpha \vec{E}. \quad (8.1)$$

Die Proportionalitätskonstante α wird *atomare dielektrische Suszeptibilität* genannt und ist materialabhängig. Benutzt man die Berechnung des Dipolmoments einer leitenden Kugel im elektrischen Feld (Kap. 3.9.4), so gilt $p \simeq R^3 E$. Mit einem typischen Atomradius von $R \simeq 10^{-8}$ cm ergibt sich größenordnungsmäßig $\alpha \simeq 10^{-24}$ cm³.

Bei **Molekülen** ist die Sachlage komplizierter als Gleichung (8.1), da diese unterschiedlich in verschiedene Richtungen polarisieren. Man erhält hier einen Polarisationsensor α_{ij} mit

$$\begin{aligned} p_x &= \alpha_{xx} E_x + \alpha_{xy} E_y + \alpha_{xz} E_z, \\ p_y &= \alpha_{yx} E_x + \alpha_{yy} E_y + \alpha_{yz} E_z, \\ p_z &= \alpha_{zx} E_x + \alpha_{zy} E_y + \alpha_{zz} E_z. \end{aligned}$$

Polare Moleküle, wie zum Beispiel Wasser (siehe Abb. 8.1), besitzen bereits ein intrinsisches Dipolmoment. Deshalb löst Wasser andere Substanzen. Setzt man ein polares Molekül in ein homogenes elektrisches Feld (Abb. 8.2), so ist die an einem Ende wirkende Kraft $\vec{F}_+ = q\vec{E}$ entgegengesetzt gleich der am anderen Ende wirkenden Kraft $\vec{F}_- = -q\vec{E}$, so dass das Drehmoment

$$\vec{N} = \left(\vec{r}_+ \times \vec{F}_+ \right) + \left(\vec{r}_- \times \vec{F}_- \right) = \left(\frac{\vec{s}}{2} \times q\vec{E} \right) + \left[\frac{-\vec{s}}{2} \times (-q\vec{E}) \right] = q\vec{s} \times \vec{E}$$

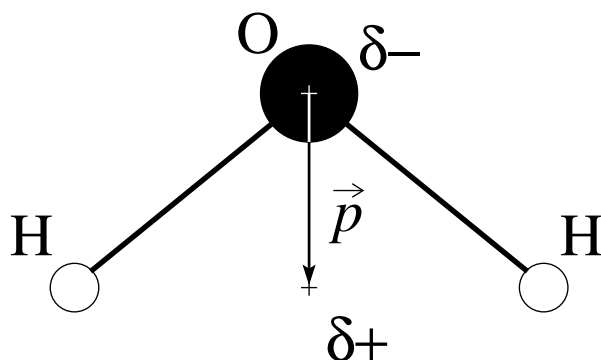


Abbildung 8.1: Das polare Wasser-Molekül mit den Dipolladungen δ^- und δ^+

entsteht. Der Dipol \vec{p} erfährt im homogenen elektrischen Feld das Drehmoment

$$\vec{N} = \vec{p} \times \vec{E}.$$

Dieses richtet bei freier Rotation das polare Molekül in Richtung $\vec{p} \parallel \vec{E}$ aus, weil dann $\vec{N} = 0$ verschwindet.

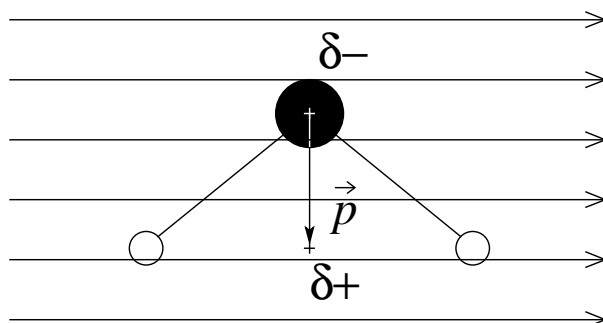


Abbildung 8.2: Der Dipol im homogenen elektrischen Feld

Überträgt man diese Überlegungen für individuelle Atome und Moleküle auf ein ganzes Stück von dielektrischem Material im elektrischen Feld, so gilt:

- besteht dieses aus neutralen Atomen, so wird in jedem Atom ein kleines Dipolmoment induziert, das in Richtung des angelegten \vec{E} -Felds zeigt,
- besteht dieses aus polaren Molekülen, erfährt jeder intrinsischer Dipol ein Drehmoment, der das Dipolmoment parallel zu \vec{E} ausrichtet.

Beide Mechanismen führen zum gleichen Ergebnis: *viele kleine Dipole, die entlang der Feldrichtung zeigen.* Das Dielektrikum wird polarisiert. Als Maß für diesen Effekt gilt der Polarisationsvektor $\vec{P} = \vec{p}/dV$, der als Dipolmoment pro Einheitsvolumen definiert wird.

8.1.2 Feld eines polarisierten Objekts

Was ist nun das elektrische Feld eines polarisierten Materials mit der Polarisation \vec{P} ? Wir wollen also das elektrische Feld berechnen, das durch den gegebenen Polarisationsvektor \vec{P} erzeugt wird, also nicht das äußere Feld, das zur Polarisation des Mediums geführt hat.

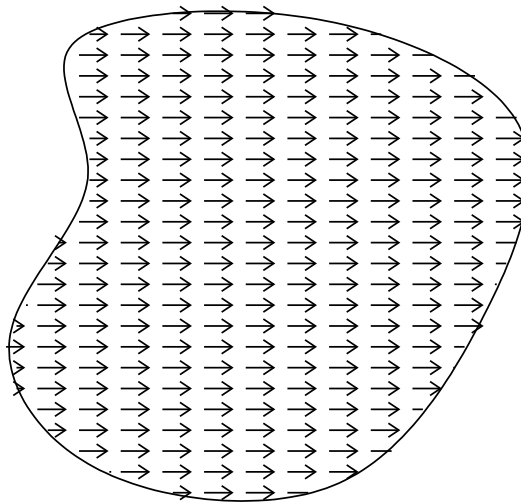


Abbildung 8.3: Überlagerung der infinitesimalen Dipole

Aus Kap. (3.9.4) kennen wir das elektrische Feld eines einzelnen Dipols. Weil das dielektrische Material durch die Überlagerung von vielen infinitesimalen Dipolen entsteht, integrieren wir über das Volumen des dielektrischen Materials (siehe Abb. 8.3). Man rechnet leichter mit dem elektrostatischen Potential (3.98) eines einzelnen Dipols

$$A_{dipol} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}.$$

Mit $\vec{p} = \vec{P}dV = \vec{P}d^3x'$ folgt

$$A(\vec{x}) = \int_V d^3x' \frac{\vec{P}(x') \cdot \vec{r}}{r^3} = \int_V d^3x' \frac{\vec{P}(x') \cdot (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}.$$

Wir benutzen

$$\vec{\nabla}_x \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = -\frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3},$$

so dass

$$A = -\int_V d^3x' \vec{P}(x') \cdot \vec{\nabla}_x \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \int_V d^3x' \vec{P}(x') \cdot \vec{\nabla}_{x'} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}.$$

8 Elektrodynamik in Materie

Es gilt

$$\operatorname{div} [a\vec{P}] = a \operatorname{div} \vec{P} + \vec{P} \cdot \vec{\nabla} a,$$

d.h. hier

$$\vec{P}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla}_{\vec{x}'} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \vec{\nabla}_{\vec{x}'} \cdot \left[\frac{\vec{P}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right] - \left[\frac{\vec{\nabla}_{\vec{x}'} \cdot \vec{P}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right].$$

Es folgt

$$A = \int_V d^3x' \vec{\nabla}_{\vec{x}'} \cdot \left[\frac{\vec{P}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right] - \int_V d^3x' \frac{\vec{\nabla}_{\vec{x}'} \cdot \vec{P}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}.$$

Mit Hilfe des Gauß-Theorems wandeln wir das erste Volumenintegral in ein Oberflächenintegral um und erhalten

$$A(\vec{x}) = \oint_{O(V)} d\vec{a} \cdot \frac{\vec{P}}{r} - \int_V d^3x' \frac{1}{r} (\vec{\nabla}_{\vec{x}'} \cdot \vec{P}). \quad (8.2)$$

Führen wir das Potential der Volumenladung

$$\rho_b \equiv -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad (8.3)$$

und das Potential der Oberflächenladung als

$$\sigma_b \equiv \vec{P} \cdot \vec{n} \quad (8.4)$$

ein, wobei \vec{n} den Oberflächennormalenvektor kennzeichnet, so folgt für das Potential (8.2)

$$A = \oint_{O(V)} da \frac{\sigma_b}{r} + \int_V d^3x' \frac{\rho_b}{r}. \quad (8.5)$$

Das Potential eines polarisierten Materials ist dasselbe wie das durch eine Volumenladungsdichte $\rho_b = -\operatorname{div} \vec{P}$ plus dem durch die Oberflächenladungsdichte $\sigma_b = \vec{P} \cdot \vec{n}$ erzeugte Potential.

Anstatt also über die Beiträge der infinitesimalen Dipole zu integrieren, brauchen wir nur ρ_b und σ_b zu berechnen, und können damit die Felder so wie bisher aus Oberflächenladungen und Volumenladungsdichten berechnen.

Das Zustandekommen von Volumenladungen und Oberflächenladungen durch die Polarisation lässt sich einfach physikalisch verstehen:

- Bei **homogener** Polarisation ist $\operatorname{div} \vec{P} = 0$, und wir können uns das dielektrische Material als parallele Aufeinanderreihung von langen Ketten von einzelnen Dipolen vorstellen (siehe Abb. 8.4). Die Wirkung der positiven und negativen Ladungen heben sich im Innern gerade auf und es bleiben nur die Ladungen am Rand übrig, so dass insgesamt nur die Oberflächenladung σ_b nicht verschwindet.
- Bei **inhomogener** Polarisation ist örtlich $\operatorname{div} \vec{P} \neq 0$, so dass in jedem Volumenelement eine Nettoladung übrig bleibt, die sich als Volumenladungsdichte $\rho_b = -\operatorname{div} \vec{P}$ beschreiben lässt. Diese tritt dann zusätzlich zu der Oberflächenladung auf.

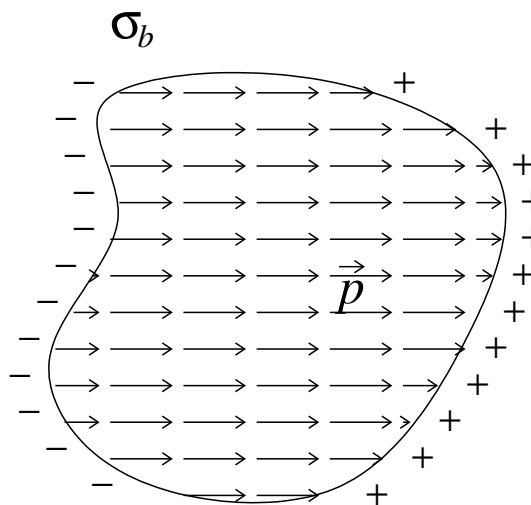


Abbildung 8.4: Als resultierende Ladung einer homogenen Polarisation \vec{P} ergibt sich die Oberflächenladung σ_b

8.1.3 Beispiel: Elektrisches Feld einer gleichförmig polarisierten Kugel vom Radius R

Wir legen die z -Achse unseres Koordinatensystems parallel zur Polarisationsrichtung der Kugel (siehe Abb. 8.5). Die Volumenladung ist $\rho_b = 0$, weil bei gleichförmiger Polarisation $|\vec{P}| = \text{const.}$, so dass $\text{div } \vec{P} = 0$.

Für die Oberflächenladung ergibt sich $\sigma_b = \vec{P} \cdot \vec{n} = P \cos \theta$. Wir müssen also wie in Kap. 3.12.4 das elektrische Feld einer Kugel mit der Oberflächenladung $\sigma_b = P \cos \theta$ bestimmen. Gemäß Gleichung (3.148) gilt für die Lösung der allgemeinen zylindersymmetrischen Laplace-Gleichung

$$A_0(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n r^n + b_n r^{-(n+1)} \right) P_n(\cos \theta). \quad (8.6)$$

Für das Potential innerhalb der Kugel ($r \leq R$) folgt mit $\mu = \cos \theta$

$$V_i(r, \mu) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\mu), \quad r \leq R$$

und im Außenraum ($r > R$)

$$V_a(r, \mu) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\mu), \quad r > R.$$

Für die Randbedingungen an der Oberfläche gilt:

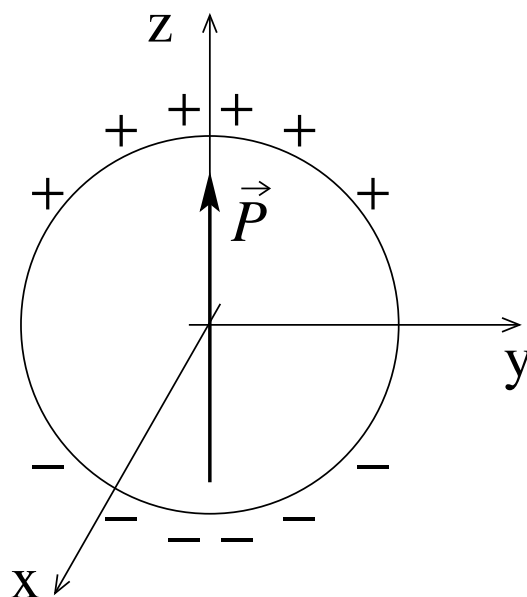


Abbildung 8.5: Die homogen polarisierte Kugel

- (1) Das Potential ist stetig: $V_i(R, \mu) = V_a(R, \mu)$, d.h.

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l R^l P_l(\mu) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{R^{l+1}} P_l(\mu) .$$

Mit den Orthonormalitätsrelationen der Legendre-Polynome folgt dann

$$\begin{aligned} A_m R^m &= B_m R^{-m-1} , \\ \text{oder} \quad B_l &= A_l R^{2l+1} . \end{aligned} \tag{8.7}$$

- (2) Die radiale Ableitung des Potentials ist unstetig an der Oberfläche gemäß Gleichung (3.47):

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial V}{\partial n} \right|_R &= -4\pi\sigma , \\ \text{so dass hier gilt} \quad \left(\frac{\partial V_a}{\partial r} - \frac{\partial V_i}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} &= -4\pi\sigma_b(\mu) . \end{aligned}$$

Wir erhalten mit Gleichung (8.7)

$$\begin{aligned}
 -\sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l(l+1)}{R^{l+2}} P_l(\mu) - \sum_{l=0}^{\infty} l A_l R^{l-1} P_l(\mu) &= \\
 -\sum_{l=0}^{\infty} (l+1) A_l R^{l-1} P_l(\mu) - \sum_{l=0}^{\infty} l A_l R^{l-1} P_l(\mu) &= -4\pi\sigma_b(\mu),
 \end{aligned}$$

oder

$$\sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) A_l R^{l-1} P_l(\mu) = 4\pi\sigma_b(\mu).$$

Mit den Orthonormalitätsrelationen der Legendre-Polynome folgt

$$\begin{aligned}
 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) A_l R^{l-1} \int_{-1}^1 d\mu P_l(\mu) P_m(\mu) &= \\
 = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) A_l R^{l-1} \frac{2}{2l+1} \delta_{l,m} &= \\
 = 2A_m R^{m-1} = 4\pi \int_{-1}^1 d\mu \sigma_b(\mu) P_m(\mu), &
 \end{aligned}$$

also

$$A_l = \frac{2\pi}{R^{l-1}} \int_{-1}^1 d\mu \sigma_b(\mu) P_l(\mu). \quad (8.8)$$

Speziell für $\sigma_b(\mu) = P \cos \theta = P\mu = P P_1(\mu)$ erhalten wir $A_l = 0 \forall l \neq 1$

$$A_1 = 2\pi P \int_{-1}^1 d\mu P_1^2(\mu) = 2\pi P \int_{-1}^1 d\mu \mu^2 = \frac{4\pi}{3} P,$$

und damit nach Gleichung (8.7) $B_l = 0 \forall l \neq 1$ und

$$B_1 = A_1 R^3 = \frac{4\pi}{3} P R^3.$$

Für das Potential folgt damit

$$V_i(r, \mu) = \frac{4\pi P}{3} r \cos \theta, \quad r \leq R \quad (8.9)$$

und

$$V_a(r, \mu) = \frac{4\pi P R^3}{3r^2} \cos \theta, \quad r > R. \quad (8.10)$$

Weil $r \cos \theta = z$ ist das elektrische Feld innerhalb der Kugel gleichförmig,

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\frac{4\pi P}{3} \vec{e}_z = -\frac{4\pi}{3} \vec{P}, \quad r \leq R. \quad (8.11)$$

Außerhalb der Kugel ist das Potential identisch zu dem eines Dipols im Ursprung,

$$V_a = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

mit dem Dipolmoment $\vec{p} = 4\pi R^3 \vec{P}/3$. Der Verlauf der Feldlinien des elektrischen Felds ist in Abb. 8.6 skizziert.

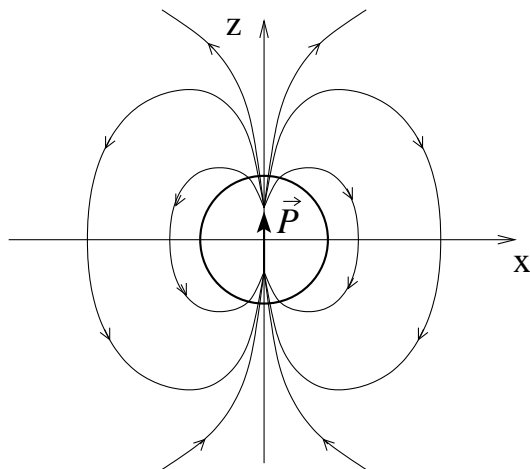


Abbildung 8.6: Das Dipolfeld der homogen polarisierten Kugel

8.1.4 Elektrische Verschiebung

Die Polarisation sorgt für Polarisationsladungen $\rho_b = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$ innerhalb des Dielektrikums und Oberflächenladungen $\sigma_b = \vec{P} \cdot \vec{n}$ auf der Oberfläche. Daneben gibt es auch weiterhin freie Ladungen ρ_f , die nicht durch Polarisation zustande kommen. Innerhalb des Dielektrikums ist die Gesamtladungsdichte dann

$$\rho = \rho_f + \rho_b ,$$

und es gilt für das gesamte elektrische Feld

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho = 4\pi(\rho_f + \rho_b) = 4\pi\rho_f - 4\pi \operatorname{div} \vec{P} ,$$

so dass

$$\operatorname{div} (\vec{E} + 4\pi\vec{P}) = 4\pi\rho_f . \quad (8.12)$$

Wir definieren den *elektrischen Verschiebungsvektor*

$$\vec{D} \equiv \vec{E} + 4\pi\vec{P} . \quad (8.13)$$

Dann folgt für Gleichung (8.12)

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho_f , \quad (8.14)$$

d.h. die Divergenz des elektrischen Verschiebungsvektors ist proportional zur freien Ladungsdichte ρ_f .

Aus Beziehung (8.14) folgt, dass die Normalkomponente D_n kontinuierlich an jeder Oberfläche ist, die keine *freien* Oberflächenladungen enthält. Im Gegensatz dazu wird die Normalkomponente E_n dort unstetig sein.

Im Rahmen der Elektrostatik ($\operatorname{rot} \vec{E} = 0$) gilt weiterhin

$$\vec{\nabla} \times \vec{D} = \vec{\nabla} \times \vec{E} + 4\pi\vec{\nabla} \times \vec{P} = 4\pi\vec{\nabla} \times \vec{P} , \quad (8.15)$$

d.h. die Tangentialkomponente \vec{D}_t von \vec{D} ist unstetig an dieser Oberfläche, während die Tangentialkomponente \vec{E}_t von \vec{E} dort stetig ist.

Die Integralform von Gleichung (8.14) lautet nach Anwendung des Gauß-Theorems

$$\int_V dV \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \oint_{O(V)} \vec{D} \cdot d\vec{a} = 4\pi \int_V dV \rho_f = 4\pi Q_f, \quad (8.16)$$

wobei Q_f die im Volumen eingeschlossene freie Ladung bezeichnet.

8.1.5 Lineare Dielektrika

Für einfache Materialien gilt die lineare Materialgleichung

$$\vec{P} = \chi_e \vec{E}, \quad (8.17)$$

wobei die *elektrische Suszeptibilität* $\chi_e = \text{const.}$ ist. Gemäß Beziehung (8.13) folgt dann die Materialgleichung

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\chi_e \vec{E} = \epsilon \vec{E} \quad (8.18)$$

mit der *Dielektrizitätskonstanten*

$$\epsilon \equiv 1 + 4\pi\chi_e. \quad (8.19)$$

Wir erhalten damit für die Polarisationsladungsdichte

$$\begin{aligned} \rho_b = -\text{div } \vec{P} &= -\text{div} \left(\chi_e \vec{E} \right) = -\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\chi_e}{\epsilon} \vec{D} \right) \\ &= -\frac{\chi_e}{1 + 4\pi\chi_e} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = -\frac{4\pi\chi_e \rho_f}{1 + 4\pi\chi_e}, \end{aligned}$$

dass diese proportional zur freien Ladungsdichte im Dielektrikum ist.

Als *Grundgleichungen der Elektrostatik im Dielektrikum* erhalten wir also

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (8.20)$$

und

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi\rho_f. \quad (8.21)$$

Mit Gleichung (8.18) schreibt sich Gleichung (8.21) im linearen Dielektrikum auch als

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{4\pi}{\epsilon} \rho_f. \quad (8.22)$$

Gleichung (8.20) liefert die Darstellung $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$ durch das elektrostatische Potential Φ . Eingesetzt in Gleichung (8.22) ergibt sich die Poisson-Gleichung im linearen Dielektrikum zu

$$\Delta\Phi = -\frac{4\pi}{\epsilon} \rho_f. \quad (8.23)$$

Im Vergleich zum Vakuum ist die rechte Seite dieser Gleichung um den Faktor ϵ schwächer. Die *Grenzbedingungen* haben wir bereits in Kap. 8.1.4 erörtert. An den Grenzflächen ist im allgemeinen $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \neq 0$; allerdings folgt aus $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ die Stetigkeit der Tangentialkomponente \vec{E}_t an den Grenzflächen. Wegen $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi\rho_f$ ist die Normalkomponente D_n stetig, wenn auf der Grenzfläche nur Polarisationsladungen (also $\rho_f = 0$) vorhanden sind.

In Abb. 8.7 vergleichen wir das Randwertproblem der Elektrostatik für einen Leiter im Feld und einen linearen Isolator im Feld. Der Fall des Leiters lässt sich als Grenzfall des Dielektrikums für $\epsilon \rightarrow \infty$ auffassen.

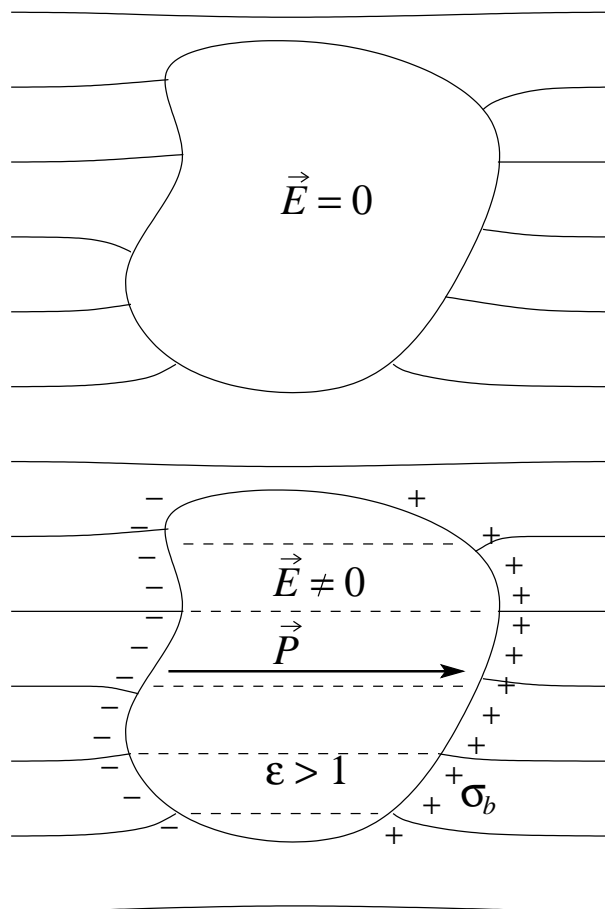


Abbildung 8.7: Vergleich zwischen Leiter und Isolator im homogenen \vec{E} -Feld

8.1.6 Beispiel: Kugel aus linearem dielektrischen Material im gleichförmigen elektrischen Feld

Als Beispiel betrachten wir, wie in Abb. 8.8 skizziert, eine Kugel aus linearem dielektrischen Material vom Radius R in einem vorher homogenen Feld $\vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_z$ mit $E_0 = \text{const.}$, d.h.

$$\Phi(r \rightarrow \infty) = -E_0 z = -E_0 r \mu. \quad (8.24)$$

Innerhalb und außerhalb der Kugel existieren keine freien Ladungen, so dass sich die Poisson-Gleichung (8.23) auf die zylindersymmetrische Laplace-Gleichung $\Delta\Phi = 0$ reduziert. Deren allgemeine Lösung ist durch Gleichung (8.6) gegeben,

$$\Phi(r, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n r^n + b_n r^{-(n+1)} \right) P_n(\mu).$$

Als Randbedingungen fordern wir:

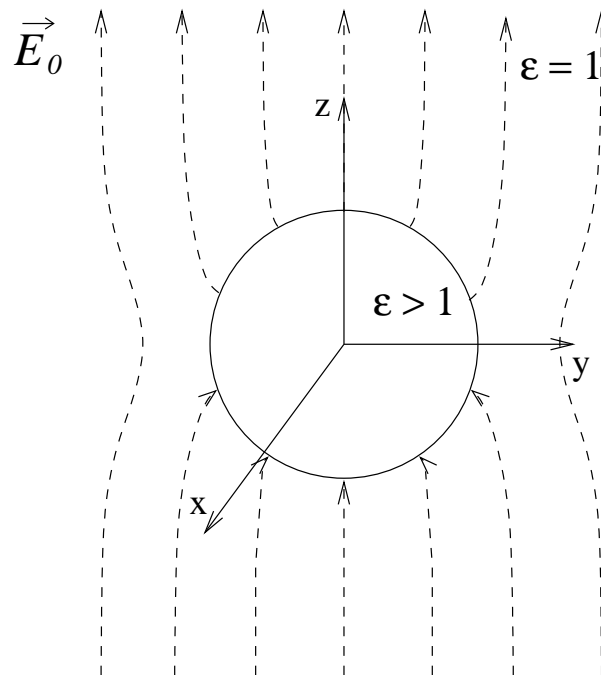


Abbildung 8.8: Ansatz für den Feldverlauf der linear-dielektrischen Kugel

R1 Für $r \rightarrow \infty$ ist das Potential durch Gleichung (8.24) gegeben.

R2 Φ ist endlich für $r \rightarrow 0$.

R3 Die Tangentialkomponente \vec{E}_t ist stetig bei $r = R$.

R4 Die Normalkomponente D_n ist stetig bei $r = R$.

Die Randbedingung R2 liefert für das Potential innerhalb der Kugel $r \leq R$

$$\Phi_i(r \leq R) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n P_n(\mu) . \quad (8.25)$$

Außerhalb der Kugel $r \geq a$ gilt

$$\Phi_o(r \geq R) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[b_n r^n + c_n r^{-(n+1)} \right] P_n(\mu) .$$

8 Elektrodynamik in Materie

Aufgrund der Randbedingung R1

$$\begin{aligned} \Phi_o(r \rightarrow \infty) &= -E_0 r \mu \\ \text{folgt} \quad b_n &= 0 \quad \forall n \neq 1 \\ \text{und} \quad b_1 &= -E_0, \\ \text{so dass} \quad \Phi_o(r \geq R) &= -E_0 r \mu + \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^{-(n+1)} P_n(\mu). \end{aligned} \quad (8.26)$$

Die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes ist

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}.$$

Die Randbedingung R3 erfordert für $r = R$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_i}{\partial \theta} \Big|_{r=R} &= \frac{\partial \Phi_o}{\partial \theta} \Big|_{r=R} \\ \text{oder} \quad \frac{\partial \Phi_i}{\partial \mu} \Big|_{r=R} &= \frac{\partial \Phi_o}{\partial \mu} \Big|_{r=R}. \end{aligned}$$

Gemäß Gleichungen (8.25) und (8.26) folgt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \frac{dP_n}{d\mu} = -E_0 R + \sum_{n=0}^{\infty} c_n R^{-(n+1)} \frac{dP_n}{d\mu}.$$

Für $n = 1$ erhalten wir mit $P_1 = \mu$

$$\begin{aligned} a_1 R &= -E_0 R + c_1 R^{-2} \\ \text{oder} \quad a_1 &= -E_0 + \frac{c_1}{R^3}. \end{aligned} \quad (8.27)$$

Für $n \neq 1$ bleibt dann

$$\begin{aligned} a_n R^n &= c_n R^{-(n+1)} \\ \text{oder} \quad a_n &= c_n R^{-(2n+1)}. \end{aligned} \quad (8.28)$$

Die Randbedingung R4 ergibt mit

$$\begin{aligned} D_n &= \epsilon E_n \quad \text{innerhalb} \quad r \leq R \\ \text{und} \quad E_n &= -\frac{\partial \Phi}{\partial r} \\ -\epsilon \frac{\partial \Phi_i}{\partial r} \Big|_{r=R} &= -\frac{\partial \Phi_o}{\partial r} \Big|_{r=R}, \\ \text{so dass} \quad \epsilon \sum_{n=0}^{\infty} a_n n R^{n-1} P_n &= -E_0 \mu - \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+1) R^{-(n+2)} P_n. \end{aligned}$$

Für $n = 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \epsilon a_1 &= -E_0 - 2c_1 R^{-3} \\ \text{oder} \quad a_1 &= -\frac{1}{\epsilon} \left[E_0 + \frac{2c_1}{R^3} \right]. \end{aligned} \quad (8.29)$$

Für $n \neq 1$ folgt

$$\begin{aligned} \epsilon n a_n R^{n-1} &= -(n+1)c_n R^{-(n+2)} \\ \text{oder} \quad a_n &= -\frac{c_n(n+1)}{\epsilon n} R^{-(2n+1)}. \end{aligned} \quad (8.30)$$

Die Gleichungen (8.28) und (8.30) lassen sich nur erfüllen für

$$a_n = c_n = 0, \quad \forall n \neq 1. \quad (8.31)$$

Aus Gleichungen (8.27) und (8.29) ergeben sich

$$c_1 = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} R^3 E_0, \quad a_1 = -\frac{3E_0}{\epsilon + 2}.$$

Damit folgt für die Potentiale

$$\Phi_i(r \leq R) = -\frac{3}{\epsilon + 2} E_0 r \mu = -\frac{3}{\epsilon + 2} E_0 z \quad (8.32)$$

$$\begin{aligned} \text{und} \quad \Phi_o(r \geq R) &= -E_0 r \mu + \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} E_0 \frac{R^3}{r^2} \mu \\ &= -E_0 z + \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} E_0 \frac{R^3 \mu}{r^2}. \end{aligned} \quad (8.33)$$

Innerhalb der Kugel beschreibt das Potential (8.32) ein konstantes elektrisches Feld parallel zu \vec{E}_0 mit der Stärke

$$E_i = E_{i,z} = -\frac{\partial \Phi_i}{\partial z} = \frac{3E_0}{\epsilon + 2} < E_0 \quad (8.34)$$

für $\epsilon > 1$.

Im Außenraum ist das Feld gleich dem angelegten Feld $\vec{E}_0 \parallel \vec{e}_z$ plus dem Feld eines Dipols im Ursprung mit Stärke

$$\left| \vec{E} \right| = \frac{p \mu r}{r^3},$$

d.h. dem Dipolmoment

$$p = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} R^3 E_0. \quad (8.35)$$

Der Dipol ist in \vec{E}_0 -Richtung orientiert.

Aus Gleichungen (8.17) und (8.34) folgt für die Polarisation der Kugel

$$\vec{P} = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} \vec{E}_i = \frac{3}{4\pi} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \vec{E}_0, \quad (8.36)$$

in Übereinstimmung mit dem Dipolmoment (8.35), denn

$$p = \int_{Kugel} dV |\vec{P}| = \frac{4\pi}{3} R^3 P = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} R^3 E_0 .$$

Das Potential der Oberflächenladung ist dann

$$\sigma_b = \vec{P} \cdot \vec{n} = \vec{P} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \frac{3}{4\pi} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \frac{\vec{E}_0 \cdot \vec{r}}{r} = \frac{3}{4\pi} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} E_0 \mu . \quad (8.37)$$

Dieses sorgt für das innere Feld, das dem äußeren Feld entgegenwirkt, so dass sich gerade $E_{i,z} = 3E_0/\epsilon + 2$ innerhalb der Kugel einstellt (zur Illustration siehe Abb. 8.9). Im Gegensatz zum Leiter (Kap. 3.12.4) bewirken die Oberflächenladungen hier nur eine teilweise Aufhebung des inneren Feldes! Im Leitergrenzfall $\epsilon \rightarrow \infty$ erhalten wir wieder $E_{i,z} \rightarrow 0$.

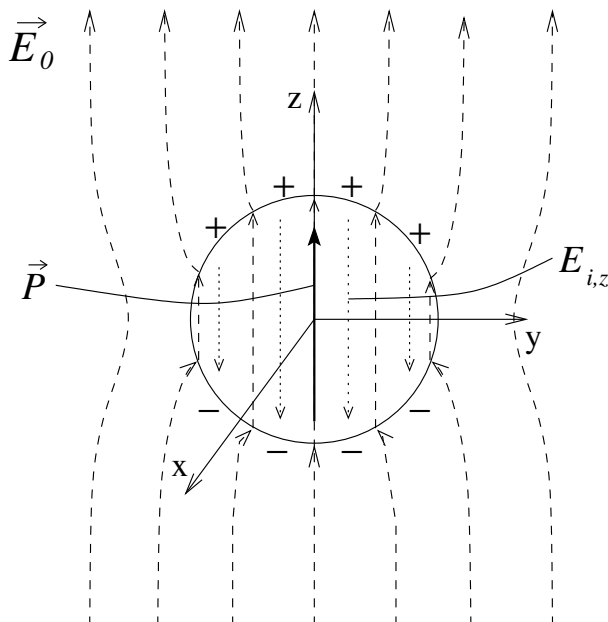


Abbildung 8.9: Das sich ausbildende innere $E_{i,z}$ -Feld resultierend aus dem äußeren Feld und dem entgegengesetzten Feld der Oberflächenladung σ_b

8.2 Magnetisierte Medien

Mittels des Biot-Savart-Gesetzes haben wir im Vakuumfall Magnetfelder aus vorgegebenen Stromdichten berechnet. In Medien bilden die Elektronen komplexe, rasch fluktuierende, mikroskopische Ströme, mit denen magnetische Momente verknüpft sind, die dann zu Magnetfeldern führen. Auf makroskopischer Skala sind die Stromfäden so klein, dass wir sie als magnetische Dipole beschreiben können (siehe Kap. 4.7 zur Multipolentwicklung für große Entfernungen).

Im Rahmen der makroskopischen Beschreibung mitteln wir die mikroskopischen Feldgleichungen über makroskopische Volumina. Weil $\text{div } \vec{B}_{\text{mikro}} = 0$ gilt auch

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (8.38)$$

für das makroskopisch gemittelte Feld. Deshalb dürfen wir auch weiterhin die Vektorpotentialdarstellung $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ benutzen.

Die große Zahl von Molekülen und Atomen pro Volumenelement, jedes mit dem magnetischen Moment \vec{m}_i führt auf die *gemittelte, makroskopische Magnetisierung* der Dichte des magnetischen Moments

$$\vec{M}(\vec{r}) = \sum_i N_i(\vec{r}) \langle \vec{m}_i \rangle, \quad (8.39)$$

wobei N_i die mittlere Zahl der Moleküle vom Typ i pro Volumenelement am Ort \vec{r} ist.

Existiert neben dieser materiellen Magnetisierung noch eine makroskopische Stromdichte \vec{j} durch die Bewegung freier Ladungen im Medium, so ist das Vektorpotential am Punkt \vec{r} aus einem Volumenelement V am Ort \vec{r}' gegeben durch (vgl. Gleichungen (4.29) und (4.53))

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{1}{c} \int_V d^3r' \frac{\vec{j}_{\text{Gesamt}}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= \frac{1}{c} \int_V d^3r' \left[\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{c\vec{M}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right]. \end{aligned} \quad (8.40)$$

Wir formen den Magnetisierungsterm um mit

$$\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = -\vec{\nabla}_r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \vec{\nabla}_{r'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\text{zu} \quad \int_V d^3r' \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \int_V d^3r' \vec{M}(\vec{r}') \times \vec{\nabla}_{r'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

Nach partieller Integration unter Ausnutzung von Gleichung (2.61),

$$\vec{a} \times (\vec{\nabla} f) = -\vec{\nabla} \times (f\vec{a}) + f(\vec{\nabla} \times \vec{a}),$$

$$\begin{aligned} \text{folgt} \quad \int_V d^3r' \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} &= - \int_V d^3r' \vec{\nabla}_{r'} \times \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &\quad + \int_V d^3r' \frac{\vec{\nabla}_{r'} \times \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \end{aligned} \quad (8.41)$$

Mathematische Zwischenbetrachtung: Das erste Integral in Beziehung (8.41) kann in ein Oberflächenintegral transformiert werden, das zu Null wird unter der Annahme, dass die Magnetisierung \vec{M} räumlich beschränkt ist:

$$\int_V d^3r' \vec{\nabla}_{r'} \times \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = - \oint_{O(V)} \frac{\vec{M} \times d\vec{F}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = 0. \quad (8.42)$$

Zum Beweis: Sei \vec{b} ein beliebiges Vektorfeld. Die zu beweisende Behauptung ist

$$\int_V d^3r \vec{\nabla} \times \vec{b} = \oint_{O(V)} \vec{n} \times \vec{b} dF .$$

Mit einem beliebigen anderen **konstanten** Vektor \vec{C} bilden wir das Vektorfeld $\vec{a} = \vec{b} \times \vec{C}$ und wenden das Gauß-Theorem auf $\text{div } \vec{a}$ an:

$$\int_V d^3r \vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \int_V d^3r \vec{\nabla} \cdot (\vec{b} \times \vec{C}) = \oint_{O(V)} (\vec{b} \times \vec{C}) \cdot \vec{n} dF . \quad (8.43)$$

Es ist

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{b} \times \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{b}) - \vec{b} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{b}) ,$$

weil \vec{C} konstant ist, und das Spatprodukt

$$(\vec{b} \times \vec{C}) \cdot \vec{n} = (\vec{C} \times \vec{n}) \cdot \vec{b} = (\vec{n} \times \vec{b}) \cdot \vec{C} .$$

Für Beziehung (8.43) folgt dann

$$\int_V d^3r \vec{C} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{b}) = \oint_{O(V)} \vec{C} \cdot (\vec{n} \times \vec{b}) dF ,$$

oder wegen der Konstanz von \vec{C}

$$\vec{C} \cdot \int_V d^3r \vec{\nabla} \times \vec{b} = \vec{C} \cdot \oint_{O(V)} (\vec{n} \times \vec{b}) dF .$$

Weil \vec{C} beliebig ist, erhalten wir

$$\int_V d^3r \vec{\nabla} \times \vec{b} = \oint_{O(V)} (\vec{n} \times \vec{b}) dF = \oint_{O(V)} d\vec{F} \times \vec{b}$$

Q.E.D.

Gemäß Gleichungen (8.40) und (8.41) folgt dann

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{1}{c} \int_V d^3r' \left[\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{c \vec{\nabla}_{r'} \times \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \\ &= \frac{1}{c} \int_V d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}') + c \vec{\nabla}_{r'} \times \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} . \end{aligned} \quad (8.44)$$

Der makroskopischen Magnetisierung entspricht offensichtlich ein Strom, der sogenannte *Magnetisierungsstrom*

$$\vec{j}_M(\vec{r}) = c \text{rot } \vec{M}(\vec{r}) . \quad (8.45)$$

Die Summe $\vec{j} + \vec{j}_M$ muss dann in die makroskopische magnetostatische Ampère-Gleichung (vgl. Gleichung (4.35)) eingehen, d.h.

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} (\vec{j} + \vec{j}_M) = \frac{4\pi}{c} (\vec{j} + c \operatorname{rot} \vec{M}) . \quad (8.46)$$

Diese Beziehung kann umgeformt werden in

$$\operatorname{rot} (\vec{B} - 4\pi\vec{M}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j} . \quad (8.47)$$

Zusätzlich zur magnetischen Induktion \vec{B} definieren wir die *magnetische Feldstärke*

$$\vec{H} \equiv \vec{B} - 4\pi\vec{M} . \quad (8.48)$$

In magnetisierten Medien lauten die magnetostatischen Feldgleichungen dann

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (8.49)$$

und
$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 . \quad (8.50)$$

Die magnetische Feldstärke \vec{H} ersetzt bei Anwesenheit von Materie die magnetische Induktion \vec{B} . Im Vakuum sind beide gleich $\vec{H} = \vec{B}$.

Die Einführung von \vec{H} als makroskopisches magnetisches Feld ist völlig analog zur Einführung der elektrischen Verschiebung \vec{D} für das elektrostatische Feld im Dielektrikum mit $\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho_f$ und $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$.

Die fundamentalen Felder sind \vec{E} und \vec{B} . \vec{D} und \vec{H} wurden eingeführt, um die Beiträge von atomaren Ladungen und Strömen in Materie zu berücksichtigen.

8.2.1 Suszeptibilität und Permeabilität

Die experimentelle Erfahrung zeigt, dass es eine Proportionalität

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad (8.51)$$

zwischen der Magnetisierung \vec{M} von Materialien und der magnetischen Feldstärke \vec{H} gibt. Der Proportionalitätsfaktor χ_m wird *Suszeptibilität* genannt. Bei vielen Materialien ist diese konstant, manchmal ist $\chi_m = \chi_m(\vec{H})$, oder \vec{M} ist nicht parallel zu \vec{H} , so dass χ_m ein Tensor ist.

Mit Gleichung (8.51) folgt für Gleichung (8.48)

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \vec{B} - 4\pi\chi_m \vec{H} , \\ \text{oder} \quad (1 + 4\pi\chi_m) \vec{H} &= \vec{B} , \\ \text{so dass} \quad \vec{B} &= \mu \vec{H} \end{aligned} \quad (8.52)$$

mit der *Permeabilität*

$$\mu = 1 + 4\pi\chi_m . \quad (8.53)$$

Nach dem Wert von μ bzw. χ_m klassifiziert man magnetisierte Medien als:

8 Elektrodynamik in Materie

- Diamagnetika: $\mu < 1, \chi_m < 0$
- Paramagnetika: $\mu > 1, \chi_m > 0$
- Ferromagnetika: $\mu \gg 1, \mu = \mu(H)$

8.3 Maxwell-Gleichungen in Materie

Die Maxwell-Gleichungen in Materie beruhen auf folgenden Erfahrungstatsachen:

- (a) Elektrische Ladungen sind Quellen und Senken des Vektorfeldes der dielektrischen Verschiebungsdichte \vec{D} . Für den dielektrischen Verschiebungsfluss durch eine die Ladungen umhüllende Fläche gilt dann

$$\frac{1}{4\pi} \oint \vec{D} \cdot \vec{n} dF = Q = \int_V dV \rho ,$$

was aus dem Coulomb-Gesetz abgeleitet werden kann.

- (b) Faraday'sches Induktionsgesetz:

$$V = \oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_m}{\partial t}$$

mit dem magnetischen Fluss $\Phi_m = \int_F \vec{B} \cdot \vec{n} dF$.

- (c) Es existieren keine isolierten magnetischen Monopole, d.h. die magnetische Induktion ist quellfrei.

- (d) Ampère-Gesetz:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{r} = \frac{4\pi}{c} I = \frac{4\pi}{c} \int \vec{j} \cdot \vec{n} dF .$$

8.3.1 Maxwell-Gleichungen in integraler Form

Aus diesen Erfahrungstatsachen folgen die integralen Maxwell-Gleichungen zu

$$\oint \vec{D} \cdot \vec{n} dF = 4\pi \int_V dV \rho , \quad (8.54)$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_F \vec{B} \cdot \vec{n} dF , \quad (8.55)$$

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{n} dF = 0 \quad (8.56)$$

und
$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{r} = \frac{4\pi}{c} \left(\int \vec{j} \cdot \vec{n} dF + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \oint \vec{D} \cdot \vec{n} dF \right) . \quad (8.57)$$

Dabei ist der eingeführte Maxwellsche Verschiebungsstrom (2. Term auf der rechten Seite von Gleichung (8.57)) nötig zur Erfüllung der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{d}{dt} \int_V dV \rho + \int \vec{j} \cdot \vec{n} dF = 0 . \quad (8.58)$$

8.3.2 Maxwell-Gleichungen in differentieller Form

Mithilfe des Gauß-Theorems und des Stokes-Theorems wandelt man die integralen Gleichungen (8.54)–(8.57) in die differentiellen makroskopischen Maxwell-Gleichungen um:

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho, \quad (8.59)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (8.60)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (8.61)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (8.62)$$

mit der differentiellen Kontinuitätsgleichung

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (8.63)$$

Das Kraftgesetz

$$\vec{f} = \rho\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B} \quad (8.64)$$

vermittelt die Verbindung zur Mechanik.

Vervollständigt werden die Maxwell-Gleichungen durch die *Verknüpfungsgleichungen*

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} \quad (8.65)$$

$$\text{und} \quad \vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M}, \quad (8.66)$$

wobei \vec{P} der Vektor der elektrischen Polarisation und \vec{M} der Magnetisierungsvektor sind. Damit können wir Gleichung (8.62) umschreiben zu einer Gleichung für \vec{E} und \vec{B} :

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \operatorname{rot} (\vec{B} - 4\pi\vec{M}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} + 4\pi\vec{P}),$$

$$\text{so dass} \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} (\vec{j} + \dot{\vec{P}} + c \operatorname{rot} \vec{M}) + \frac{1}{c} \dot{\vec{E}}. \quad (8.67)$$

Für isotrope, normal polarisierbare Substanzen in statischen Feldern gelten die *Materialgleichungen*

$$\vec{D} = \epsilon\vec{E} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} = (1 + 4\pi\chi_e) \vec{E} \quad (8.68)$$

$$\text{und} \quad \vec{B} = \mu\vec{H} = \vec{H} + 4\pi\vec{M} = (1 + 4\pi\chi_m) \vec{H}. \quad (8.69)$$

Die differentiellen Maxwell-Gleichungen (8.59)–(8.62) sind partielle, *lineare* gekoppelte Differentialgleichungen 1. Ordnung. Wegen der Linearität gilt insbesondere das Superpositionsprinzip für die Lösungen dieser Gleichungen.

A Anhang

A.1 Mathematischer Anhang

A.1.1 Näherungsformeln

Taylor-Entwicklung um den Punkt x_0 :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n .$$

Für Werte $x \ll 1$ gelten folgende Näherungen aus der Taylor-Entwicklung:

$$\begin{aligned} \sin x &\simeq x, & \cos x &\simeq 1, & \tan x &\simeq x \\ \sqrt{1 \pm x} &\simeq 1 \pm \frac{1}{2}x \\ \frac{1}{1 \mp x} &\simeq 1 \pm x \\ \text{und allgemein} & & (1+x)^\alpha &\simeq 1 + \alpha x . \end{aligned}$$

A.1.2 Eulersche Formeln und Umkehrung

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \cos x + i \sin x & \cos x &= \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}) \\ e^{-ix} &= \cos x - i \sin x & \sin x &= \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix}) . \end{aligned}$$

A.1.3 Darstellung des $\vec{\nabla}$ -Operators in verschiedenen Koordinatensystemen

$$\begin{aligned} \text{I. kartesisch:} & \quad \vec{\nabla} = \vec{e}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_2 \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_3 \frac{\partial}{\partial z} \\ \text{II. zylindrisch:} & \quad \vec{\nabla} = \vec{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \vec{e}_\phi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \\ \text{III. sphärisch:} & \quad \vec{\nabla} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} . \end{aligned}$$

A.1.4 Rechenregeln für den $\vec{\nabla}$ -Operator

I. Summenregeln

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}(f+g) &= \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g \\ \vec{\nabla} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) &= \vec{\nabla} \cdot \vec{a} + \vec{\nabla} \cdot \vec{b} \\ \vec{\nabla} \times (\vec{a} + \vec{b}) &= \vec{\nabla} \times \vec{a} + \vec{\nabla} \times \vec{b}.\end{aligned}$$

II. Produktregeln

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}(fg) &= f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f \\ \vec{\nabla}(\vec{a} \cdot \vec{b}) &= \vec{a} \times (\vec{\nabla} \times \vec{b}) + \vec{b} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}) + (\vec{a} \cdot \vec{\nabla})\vec{b} + (\vec{b} \cdot \vec{\nabla})\vec{a} \\ \vec{\nabla} \cdot (f\vec{a}) &= f(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) + \vec{a} \cdot (\vec{\nabla}f) \\ \vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) &= \vec{b} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{b}) \\ \vec{\nabla} \times (f\vec{a}) &= f(\vec{\nabla} \times \vec{a}) + \vec{a} \times (\vec{\nabla}f) \\ \vec{\nabla} \times (\vec{a} \times \vec{b}) &= (\vec{b} \cdot \vec{\nabla})\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{\nabla})\vec{b} + \vec{a}(\vec{\nabla} \cdot \vec{b}) - \vec{b}(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}).\end{aligned}$$

III. Quotientenregeln

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \left(\frac{f}{g} \right) &= \frac{g\vec{\nabla}f - f\vec{\nabla}g}{g^2} \\ \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{a}}{g} \right) &= \frac{g(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\vec{\nabla}g)}{g^2} \\ \vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{a}}{g} \right) &= \frac{g(\vec{\nabla} \times \vec{a}) + \vec{a} \times (\vec{\nabla}g)}{g^2}\end{aligned}$$

IV. Kombination vektorieller Differentialoperatoren

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \operatorname{grad} f &= \vec{\nabla}^2 f = \Delta f \\ \operatorname{rot} \operatorname{grad} f &= 0 \\ \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a} &= 0 \\ \operatorname{rot} (\operatorname{rot} \vec{a}) &= \operatorname{grad} (\operatorname{div} \vec{a}) - \Delta \vec{a} \\ \operatorname{div} (\vec{a} \times \vec{b}) &= \vec{b} \cdot (\operatorname{rot} \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\operatorname{rot} \vec{b})\end{aligned}$$

V. Für eine Funktion f , die nur vom Betrag $r = |\vec{x}|$ eines Vektors \vec{x} abhängt, gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(r) = f'(r) \frac{\partial r}{\partial x_i} = f'(r) \frac{x_i}{r}$$

und

$$\vec{\nabla} f(r) = f'(r) \frac{\vec{x}}{r}.$$

A.2 Empfohlene Literatur

A.2.1 Bücher zur Theoretischen Elektrodynamik:

Jackson: Klassische Elektrodynamik

D. J. Griffith: Introduction to Electrodynamics

Fließbach

A.2.2 Bücher für mathematische Formeln (“Grundausstattung”):

K. Rottmann, Mathematische Formelsammlung

I. N. Bronstein, K. A. Semedjajew, G. Musiol, H. Mühlig: Taschenbuch der Mathematik, Harri Deutsch Verlag

M. Abramowitz, I. A. Stegun: Handbook of Mathematical Functions, National Bureau of Standards (oder Dover Publ.)

I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik: Tabeles of Integrals, Series and Products (deutsche Übersetzung: Harri Deutsch Verlag)

A.2.3 Bücher für mathematische Physik (“Grundausstattung”):

G. Arfken: Mathematical Methods for Physicists, Academic Press

C. R. Wylie: Advanced Engineering Mathematics, McGraw-Hill

P. M. Morse, H. Feshbach: Methods of Theoretical Physics, Vol. I and II, McGraw-Hill