

Elektrodynamik

J. Schnakenberg

Rheinisch–Westfälische Technische Hochschule

Aachen

März 2000

Inhaltsverzeichnis

1	Das elektrische Feld und seine Wirbel	15
1.1	Warum ist eine Feldtheorie erforderlich?	15
1.2	Die Coulomb–Wechselwirkung und das elektrische Feld	17
1.2.1	Die Gravitationswechselwirkung	17
1.2.2	Die Coulomb–Wechselwirkung	19
1.2.3	Einheiten, Stärke der Wechselwirkung	20
1.2.4	Das elektrische Feld	21
1.3	Potential und Wirbel des elektrischen Feldes	23
1.3.1	Das elektrische Potential	23
1.3.2	Summationskonvention, Transformationen	25
1.3.3	Rotation und Wirbel des elektrischen Feldes	29
1.4	Der Stokessche Integralsatz	33
1.4.1	Das Potential als Linienintegral	33
1.4.2	Der Stokessche Integralsatz	35
1.4.3	Nachweis des Stokesschen Integralsatzes	38

2	Die Quellen des elektrischen Feldes	41
2.1	Die Divergenz des elektrischen Feldes einer Punktladung	41
2.2	Der Gaußsche Integralsatz	43
2.2.1	Der Gaußsche Integralsatz	43
2.2.2	Schreibweise mit der Diracschen δ -Funktion	45
2.2.3	Nachweis des Gaußschen Integralsatzes	48
2.3	System von Punktladungen	51
2.4	Kontinuierliche Ladungsverteilungen	53
2.4.1	Die Ladungsdichte	53
2.4.2	Formulierung der Feldgleichungen	54
2.4.3	Glatte Ladungsverteilungen	57
2.4.4	Feldlinien	58
3	Feldenergie, Multipole, Kräfte und Momente	61
3.1	Feldenergie	61
3.1.1	Potentielle Energie	61
3.1.2	Feldenergie und ihre Dichte	63
3.1.3	Der kontinuierliche Fall	65
3.1.4	Alternative Herleitung des kontinuierlichen Falls	66
3.2	Multipolentwicklung	67
3.2.1	Die Entwicklung	67
3.2.2	Vektoren und Tensoren: das Quadrupolmoment als Tensor	71
3.3	Ladungsverteilungen in äußeren Feldern	74
3.3.1	Energie	74
3.3.2	Kräfte	76
3.3.3	Drehmomente	78
3.3.4	Induzierte Dipole	79

	5
4 Elektrostatik	81
4.1 Elektrische Leiter und Kapazitäten	82
4.1.1 Elektrische Leiter	82
4.1.2 Die Kapazität eines Leiters	85
4.1.3 Die Kapazität eines Systems von Leitern	88
4.1.4 Die Feldenergie in einem System von Leitern	91
4.2 Die Methode der Spiegelladungen	93
4.3 Das allgemeine Randwert-Problem	96
4.3.1 Die Greenschen Identitäten	96
4.3.2 Die formale Lösung des Randwert-Problems	98
4.3.3 Dirichletsche und Neumannsche Randbedingungen, Eindeutigkeit der Lösung	99
4.4 Lösung mit der Greenschen Funktion	101
5 Elektrischer Strom und magnetische Flussdichte	105
5.1 Erhaltung der elektrischen Ladung	105
5.1.1 Die elektrische Flussdichte	105
5.1.2 Die Erhaltung der elektrischen Ladung	108
5.1.3 Konvektive Flussdichten und totale Zeitableitung	110
5.2 Lorentz-Kraft und magnetische Induktion	112
5.2.1 Formulierung der Lorentz-Kraft und der magnetischen Induktion	112
5.2.2 Einheiten	114
5.3 Drahtförmige elektrische Leiter, Biot-Savartsches Gesetz	116
5.3.1 Biot-Savartsches Gesetz	117
5.3.2 Kraft auf einen stromdurchflossenen Draht	119

6		
6	Magnetostatische Feldgleichungen	121
6.1	Das Vektor-Potential und die Divergenz der magnetischen Induktion	121
6.1.1	Das Vektor-Potential	121
6.1.2	Die Divergenz der magnetischen Induktion	123
6.1.3	Vektor-Potential für quellenfreie Felder	123
6.2	Die Wirbel der magnetischen Induktion	125
6.2.1	Die Feldgleichung	125
6.2.2	Magnetische Feldlinien	128
6.2.3	Anwendung: Lange Spule	130
6.3	Eichung des Vektor-Potentials	131
6.4	Zerlegungssatz	133
6.5	Magnetische Multipol-Entwicklung	135
6.5.1	Die Entwicklung, Monopol-Term	135
6.5.2	Magnetischer Dipol	137
6.5.3	Beispiel: Ebene Leiterschleife	139
6.5.4	Bewegte Ladungen	140
6.6	Stromverteilungen in äußeren Feldern	142
6.6.1	Kräfte	143
6.6.2	Drehmomente	147

7 Die Maxwell'schen Gleichungen	149
7.1 Zeit-, Ladungs- und Paritäts-Umkehr	149
7.1.1 Zeit-Umkehr	149
7.1.2 Ladungs-Umkehr	151
7.1.3 Paritäts-Umkehr	153
7.2 Formulierung der Maxwell'schen Gleichungen	156
7.2.1 Der statische Grenzfall	157
7.2.2 Linearität	157
7.2.3 Felder als vollständige Variablen	158
7.2.4 Invarianz gegen T, C und P	158
7.2.5 Erhaltung der Ladung	159
7.2.6 Relativität und Lorentz-Kraft	160
7.3 Integrale Formen und Lenzsche Regel	162
7.3.1 Verallgemeinertes Gesetz von Biot-Savart und Verschiebungsstrom	162
7.3.2 Faradaysches Induktionsgesetz	163
7.3.3 Lenzsche Regel	165
7.4 Potentiale und Wellengleichung	166
7.4.1 Existenz der Potentiale und Eichtransformation	167
7.4.2 Die Wellen-Gleichung	169
7.4.3 Die Lorentz-Eichung	171

8	Bilanz–Gleichungen	173
8.1	Elektrische Ladung und das Schema der Bilanz–Gleichungen	173
8.2	Bilanz der Energie	174
8.2.1	Herleitung	174
8.2.2	Diskussion	176
8.3	Bilanzen des Impulses und des Drehimpulses	178
8.3.1	Impuls–Bilanz	178
8.3.2	Bilanz des Drehimpulses	182
8.4	Erhaltung von Energie, Impuls und Drehimpuls	184
9	Freie elektromagnetische Wellen	187
9.1	Ebene Wellen	188
9.1.1	Ebene Wellen in z –Richtung	188
9.1.2	Allgemeine ebene Wellen	190
9.2	Monochromatische ebene Wellen	194
9.2.1	Einzelne monochromatische ebene Welle	194
9.2.2	Überlagerung monochromatischer ebener Wellen	198
9.3	Wellenpakete, Phasen– und Gruppen–Geschwindigkeit	201
9.4	Modenzerlegung freier Felder	205
9.4.1	Eichung	205
9.4.2	Lösungen der Wellengleichung und Randbedingungen	207
9.4.3	Die Feldenergie	209
9.4.4	Transformation auf kanonische Koordinaten	211

10 Die inhomogene Wellengleichung, Ausstrahlung	217
10.1 Lösung der inhomogenen Wellengleichung	217
10.1.1 Die Greensche Funktion	217
10.1.2 Die Berechnung der Greenschen Funktion	220
10.1.3 Diskussion	225
10.2 Die Lienard–Wiechert–Potentiale	227
10.3 Dynamische Multipol–Entwicklung	229
10.3.1 Die Entwicklung des Vektor–Potentials	231
10.3.2 Berechnung des skalaren Potentials, Diskussion	235
10.4 Hertzscher Dipol	237
10.4.1 Fernfeld–Näherung	237
10.4.2 Diskussion und Energie–Bilanz	239
10.4.3 Ausstrahlung eines magnetischen Dipols	242
11 Grundlagen der Relativitätstheorie	245
11.1 Inertialsysteme	245
11.2 Lorentz–Transformation	248
11.3 4–Vektoren, Transformationen	252
11.3.1 4–Vektoren	252
11.3.2 4–Transformationen	254
11.3.3 Die 4–Geschwindigkeit und 4–Beschleunigung	256
11.3.4 Der 4–Gradient	257
11.4 4–Tensoren	259
11.4.1 Gewöhnliche Tensoren	259
11.4.2 Pseudo–Tensoren	261

12 Lorentz–Kovarianz der Elektrodynamik	265
12.1 4–Strom und 4–Potential	265
12.1.1 4–Strom	265
12.1.2 4–Potential	267
12.1.3 Lorentz–Eichung, Umeichung	268
12.2 Der Feld–Tensor	269
12.2.1 Definition	269
12.2.2 Lorentz–Transformation der Felder	271
12.3 4–Schreibweise der Maxwell’schen Gleichungen	273
12.3.1 Die inhomogenen Gleichungen	273
12.3.2 Die homogenen Maxwell’schen Gleichungen	274
12.3.3 Diskussion	277
12.4 Lagrange–Dichte für die Teilchen–Feld–Wechselwirkung	278
12.4.1 Die relativistische Punktmechanik	279
12.4.2 Die Teilchen–Feld–Wechselwirkung	282
12.4.3 Die homogenen Maxwell’schen Gleichungen	285
12.4.4 Lagrange–Funktion und Hamilton’sche Beschreibung	286
12.5 Ladungs–Erhaltung und Eich–Invarianz	288
12.5.1 Kontinuierliche Massen– und Ladungs–Verteilung	288
12.5.2 Eich–Transformation	290
12.6 Das Wirkungs–Integral für das Feld	292

	11
13 Elektrische und Magnetische Felder in Materie	297
13.1 Phänomenologische Beschreibung	298
13.1.1 Elektrische Polarisierung	298
13.1.2 Magnetisierung	301
13.2 Grenzbedingungen für die Felder	304
13.2.1 Grenzbedingungen für die Normal-Komponenten	305
13.2.2 Grenzbedingungen für die Tangential-Komponenten	306
13.2.3 Nachweis der verwendeten Version des Gaußschen Integralsatzes	309
13.3 Mikroskopische und makroskopische Beschreibung von Feldern in Ma- terie	310
13.3.1 Mikroskopische Ladungs- und Flussdichte	310
13.3.2 Mittelung	312
13.3.3 Mikroskopische Multipol-Entwicklung	314
13.3.4 Die Maxwell'schen Gleichungen in Materie	318
14 Phänomenologische Material-Relationen, Suszeptibilitäten	321
14.1 Material-Relationen	321
14.2 Lineare Relationen, Suszeptibilitäten	324
14.2.1 Suszeptibilitäten	324
14.2.2 Ohmsches Gesetz, Hall-Effekt	325
14.3 Fourier-Transformation	327
14.3.1 Zeitliche und räumliche Homogenität	327
14.3.2 Fourier-Transformation	328

14.3.3	Kramers–Kronig–Relationen	330
14.4	Modelle	335
14.4.1	Thomsonsches Atom–Modell	335
14.4.2	Suszeptibilität und Polarisierbarkeit	339
14.4.3	Das Drude–Modell	342
14.5	Clausius–Mosotti–Relation	344
A	Krummlinige Koordinaten	349
A.1	Das Transformationsschema	349
A.2	Die Differentiale	352
A.3	Die Differentialoperatoren	354
A.3.1	Der Gradient	354
A.3.2	Die Divergenz	355
A.3.3	Die Rotation	358
A.4	Zylinder– und Kugelkoordinaten	360
A.4.1	Zylinderkoordinaten	360
A.4.2	Kugelkoordinaten	361
B	Die Integralsätze	365
B.1	Der Gaußsche Integralsatz	365
B.2	Der Stokessche Integralsatz	369

C Die Diracsche δ-Funktion	375
C.1 Die 1-dimensionale Delta-Funktion und die Darstellung durch einen Grenzübergang	376
C.2 Nachweis von (C.9)	378
C.3 Die Fourier-Transformation	380
C.4 Darstellung der 3-dimensionalen δ -Funktion durch einen Grenzüber- gang	382
D Der Levi-Civita-Tensor in 3 und 4 Dimensionen	385
D.1 Produktausdrücke von zwei 3-dimensionalen Levi-Civita-Tensoren .	385
D.1.1 Die Rechenregeln	385
D.1.2 Anwendungen	388
D.2 Produktausdrücke von zwei 4-dimensionalen Levi-Civita-Tensoren .	391
E Formeln der Vektor-Analyse	395
E.1 Vektor-Algebra	395
E.2 Gradient, Divergenz, Rotation	395
E.3 Laplace-Operator	396
E.4 Partielle Integration	397
E.5 Integralsätze	397

Kapitel 1

Das elektrische Feld und seine Wirbel

1.1 Warum ist eine Feldtheorie erforderlich?

Zwischen Körpern bestehen *Wechselwirkungen*. Am besten vertraut sind uns die *Gravitationswechselwirkung*, nämlich aus der Mechanik, und die *Coulomb-Wechselwirkung* zwischen elektrisch geladenen Körpern, von der in diesem Text noch ausführlich die Rede sein wird. Man kennt noch zwei weitere Wechselwirkungen in der Physik, und zwar die sogenannte *schwache* und die sogenannte *starke Wechselwirkung*. Die letzteren beiden treten aber nur bei sehr kurzen Entfernungen zwischen Teilchen auf, z.B. in Atomkernen, und sie sind nur quantentheoretisch in einer geeigneten *Quantenfeldtheorie* beschreibbar. Die in diesem Text zu entwickelnde Elektrodynamik ist eine klassische Feldtheorie, die keinen Gebrauch von der Quantentheorie macht. Allerdings gibt es von ihr eine Quantenversion, die sogenannte Quantenelektrodynamik. Wir werden sie im weiteren Verlauf dieses Textes immerhin einmal streifen, jedoch nicht vertiefen.

Alle beobachtbaren Wechselwirkungsphänomene zwischen Körpern lassen sich auf die genannten vier Wechselwirkungen zurückführen. In der makroskopischen Physik, d.h. in der Physik unserer menschlichen Dimensionen, spielen ausschließlich Gravitation und Coulomb-Wechselwirkung eine Rolle, unter irdischen Verhältnissen auch nur die Coulomb-Wechselwirkung zwischen elektrischen Ladungen, wenn wir von der allgegenwärtigen Schwerkraft aller Körper auf der Erde aufgrund der Gravitation einmal absehen. Auf der Coulomb-Wechselwirkung zwischen elektrischen Ladungen beruhen z.B. gegenseitige Deformation, Stoßen, Wärmeübergang bei Kontakt,

Reiben, Haften, Kleben usw. Die elektrischen Ladungen, die dabei eine Rolle spielen, sind diejenigen der Elektronen und Atomkerne im mikroskopischen Gefüge der jeweiligen Materialien. Die Gravitation ist für die Bewegung der Himmelskörper verantwortlich.

Wir wollen jetzt verstehen, dass Wechselwirkungen immer notwendigerweise auf die Vorstellung von "Feldern" führen, für die dann natürlich Feldtheorien entwickelt werden müssen. Wir betrachten eine sehr einfache Situation: zwei Körper 1 und 2 mit den Massen m_1 und m_2 sollen miteinander wechselwirken, z.B. aufgrund von elektrischen Ladungen, die sie tragen. Es sei \mathbf{F}_{12} diejenige Kraft, die auf den Körper 1 von dem Körper 2 vermöge der Wechselwirkung ausgeübt wird, umgekehrt \mathbf{F}_{21} diejenige Kraft, die auf den Körper 2 von dem Körper 1 ausgeübt wird. Wir setzen voraus, dass keine weiteren Kräfte auf die beiden Körper einwirken. Dann lauten deren Newtonsche Bewegungsgleichungen

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_{12}, \quad m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_{21}. \quad (1.1)$$

\mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_2 sind die Orte, $\ddot{\mathbf{r}}_1$ und $\ddot{\mathbf{r}}_2$ die Beschleunigungen der beiden Körper. Nun besagt das 3. Newtonsche Prinzip "actio=reactio", dass die beiden Wechselwirkungskräfte entgegengesetzt gleich sind, also

$$\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = 0. \quad (1.2)$$

Wenn wir die beiden Bewegungsgleichungen in (1.1) addieren, finden wir somit

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = 0, \quad m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \dot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{P} = \text{const.} \quad (1.3)$$

Der Gesamtimpuls \mathbf{P} der beiden Körper ist erhalten.

Nun ist jedoch das Prinzip "actio=reactio" in (1.2) physikalisch problematisch. Es macht nämlich eine Aussage über zwei Kräfte \mathbf{F}_{12} und \mathbf{F}_{21} an zwei verschiedenen Orten \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_2 , aber zur gleichen Zeit. Das setzt voraus, dass physikalische Information *instantan* vom Ort \mathbf{r}_1 zum Ort \mathbf{r}_2 übertragen werden kann. Wenn etwa der Körper 1 am Ort \mathbf{r}_1 durch eine kurzzeitige Einwirkung einer äußeren Kraft eine Lageänderung erfährt, so dass die im allgemeinen vom Ort abhängige Wechselwirkungskraft \mathbf{F}_{12} geändert wird, dann soll sich das im gleichen Augenblick auf die Kraft \mathbf{F}_{21} am Ort \mathbf{r}_2 auswirken. Diese Voraussetzung widerspricht dem empirischen Befund, dass es eine maximale Ausbreitungsgeschwindigkeit

$$\boxed{c = 299\,792\,458 \text{ m/s}} \quad (1.4)$$

für physikalische Wirkungen gibt. (Dass dieses die Geschwindigkeit des Lichtes ist und was Licht eigentlich ist, werden wir im weiteren Verlauf des Textes lernen.) Wir müssen also unsere obige Herleitung der Erhaltung des Gesamtimpulses aufgeben. Es stellt sich sogar die Frage, ob wir überhaupt den Satz von der Erhaltung des Impulses aufgeben müssen. Diesen Satz zeigt man in der Mechanik als Konsequenz des sogenannten Noetherschen Theorems: die Erhaltung des Impulses ist äquivalent zur räumlichen Translationsinvarianz eines abgeschlossenen Systems. Es handelt sich also um eine physikalisch sehr grundlegende Aussage, die man nicht ohne größte Not wird aufgeben wollen. Wenn wir aber an der Erhaltung des Gesamtimpulses festhalten und die Impulssumme $\mathbf{P} = m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \dot{\mathbf{r}}_2$ der beiden Körper allein nicht mehr erhalten ist, muss bei der Übertragung der Wechselwirkung zwischen den beiden Körpern ein "Medium" existieren, das wir "Feld" nennen und das Impuls aufnehmen und abgeben kann. Es leuchtet ein, dass wir analoge Aussagen für die weiteren Erhaltungsgrößen Energie und Drehimpuls machen können. Das "Feld" überträgt also Wechselwirkungen zwischen den Körpern, und es kann Impuls, Energie und Drehimpuls tragen. Damit hat das "Feld" dieselbe physikalische Realität, die wir auch den beiden Körpern zuschreiben.

Es stellt sich nun die Aufgabe, Eigenschaften des Feldes aus der Kenntnis der Struktur der Wechselwirkung zu erschließen, also eine Feldtheorie zu entwerfen. Solange wir stationäre, also zeitunabhängige Situationen betrachten, wird das Feld lediglich ein nützlicher Hilfsbegriff sein, denn stationär kommt es ja nicht zu dem obigen Widerspruch zwischen "actio=reactio" und der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit physikalischer Information, d.h., wir könnten weiter mit Wechselwirkungskräften arbeiten. Das physikalische Konzept des Feldes wird seine entscheidende Bewährung erfahren, wenn wir zeitlich veränderliche Situationen einschließen. Schon jetzt können wir die Forderung formulieren, dass die dynamische Feldtheorie mit dem Prinzip einer universellen maximalen Ausbreitungsgeschwindigkeit physikalischer Wirkungen verträglich sein muss.

1.2 Die Coulomb–Wechselwirkung und das elektrische Feld

1.2.1 Die Gravitationswechselwirkung

Im Sinne einer Vorbemerkung erinnern wir an die Gravitationswechselwirkung, die uns aus der Mechanik bekannt ist. Zwei Körper mit den Massen m_1 und m_2 an den

Orten \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_2 üben eine Wechselwirkung aufeinander aus, so dass die Kraft \mathbf{F}_{12} auf den Körper 1 von dem Körper 2

$$\mathbf{F}_{12} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{r_{12}}, \quad r_{12} := |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|, \quad (1.5)$$

lautet, und nach dem stationär weiterhin unproblematischen "actio=reactio" $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$. Der Betrag der Wechselwirkungskräfte $|\mathbf{F}_{12}| = |\mathbf{F}_{21}|$ ist also proportional zu beiden (stets positiven) Massen m_1 und m_2 der Körper und umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstands r_{12} zwischen den beiden Körpern. Die Schreibweise in (1.5) benutzt den Einheitsvektor $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)/r_{12}$ in der Richtung vom Körper 2 zum Körper 1. Die Richtung der Wechselwirkungskraft ist also die der Verbindungslinie zwischen den beiden Körpern.

Wenn wir zuvor Messvorschriften und Einheiten für Massen (kg=Kilogramm) und Kräfte (N=Newton=kg m/s²) festgelegt haben, dann ist das Kraftgesetz (1.5) durch ein Experiment zu bestätigen und insbesondere die Proportionalitätskonstante γ , die sogenannte *Gravitationskonstante* zu bestimmen:

$$\gamma = 6,672 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}. \quad (1.6)$$

Da $\gamma > 0$ und auch die Massen m_1 und m_2 stets positiv sind, ist die Wechselwirkungskraft \mathbf{F}_{12} dem Verbindungsvektor $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ vom Körper 2 zum Körper 1 entgegengesetzt, d.h., die Gravitationswechselwirkung ist stets anziehend.

Wir schreiben die Gravitationskraft \mathbf{F}_{12} auf den Körper 1 vom Körper 2 in die Form

$$\mathbf{F}_{12} = m_1 \mathbf{G}_2(\mathbf{r}_1), \quad \mathbf{G}_2(\mathbf{r}) = -\gamma \frac{m_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|} \quad (1.7)$$

um und interpretieren diese Darstellung folgendermaßen:

- $\mathbf{G}_2(\mathbf{r})$ ist das *Gravitationsfeld*, das von der am Ort \mathbf{r}_2 befindlichen Masse m_2 am Ort \mathbf{r} erzeugt wird.
- Die Kraft auf den Körper 1 ist das Produkt seiner Masse m_1 und des Gravitationsfeldes $\mathbf{G}_2(\mathbf{r}_1)$, das von m_2 am Ort \mathbf{r}_1 des Körpers 1 erzeugt wird.

Die Darstellung $\mathbf{F}_{12} = m_1 \mathbf{G}_2(\mathbf{r}_1)$ teilt die Kraftwirkung auf den Körper 1 in eine individuelle Eigenschaft des Körpers 1, nämlich seine Masse m_1 , und ein vom Körper 1 unabhängiges Feld auf. Selbstverständlich lässt die Kraft \mathbf{F}_{21} auf den Körper 2 vom Körper 1 eine völlig analoge Darstellung zu.

Konsequenterweise wäre nun eine Feldtheorie für Gravitationsfelder $\mathbf{G}(\mathbf{r})$ zu entwickeln, die von irgendeiner Massenverteilung erzeugt werden. Diese Theorie existiert auch, ist jedoch sehr viel komplizierter (nicht-linear, allgemein relativistisch invariant) als die in diesem Text zu entwickelnde Elektrodynamik. Letztere ist darum nicht nur wegen ihrer Bedeutung in der "gewöhnlichen" makroskopischen Physik, sondern wegen ihrer einfacheren Struktur *das* Modell für eine klassische Feldtheorie, das begrifflich am Anfang stehen sollte.

1.2.2 Die Coulomb–Wechselwirkung

Masse ist die für die Gravitation verantwortliche Eigenschaft von Körpern. Eine andere Eigenschaft von Körpern, die zu Wechselwirkungen zwischen ihnen führt, ist die der *elektrischen Ladung*. Dass es diese Eigenschaft von Körpern gibt, setzen wir als eine empirische Tatsache an den Anfang der Entwicklung der Feldtheorie Elektrodynamik.

Während Masse in unserer physikalischen Anschauung untrennbar mit einem Körper verbunden ist und nicht verändert werden kann, ohne den Körper selbst zu verändern, kann elektrische Ladung zwischen Körpern ausgetauscht werden, wie wir später noch lernen werden. Dass elektrische Ladung aber dennoch eine zur Masse analoge Eigenschaft ist, erkennen wir am besten im Fall von atomaren oder subatomaren Teilchen: ein Elektron etwa besitzt neben seiner charakteristischen Masse ebenso eine charakteristische elektrische Ladung, und beide Eigenschaften sind mit dem Elektron als Teilchen untrennbar verbunden.

Als eine weitere empirische Tatsache haben wir zur Kenntnis zu nehmen, dass es im Gegensatz zur Masse zwei verschiedene Arten von elektrischer Ladung gibt. Die Bezeichnung der beiden Arten von elektrischer Ladung ist natürlich beliebig; wir könnten sie etwa grün und rot nennen. Weiterhin ist empirisch festzustellen, dass gleichnamige Ladungen zu einer Abstoßung führen, ungleichnamige Ladungen zu einer Anziehung, wobei die Form der Wechselwirkung zwischen elektrisch geladenen Körpern, also der Kräfte \mathbf{F}_{12} bzw. \mathbf{F}_{21} auf die beiden Körper, dieselbe ist wie bei der Gravitation. Wir schreiben deshalb

$$\mathbf{F}_{12} = \kappa_{12} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{r_{12}}, \quad (1.8)$$

sowie $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$. Hier bezeichnen q_1 und q_2 die Menge der elektrischen Ladungen der Körper 1 und 2 und κ_{12} ist eine Proportionalitätskonstante analog zur Gravitationskonstante γ , jedoch mit der Besonderheit, dass $\kappa_{12} > 0$ für gleichnamige Ladungen (Abstoßung) und $\kappa_{12} < 0$ für ungleichnamige Ladungen (Anziehung).

Wir können eine erhebliche Vereinfachung der Schreibweise von \mathbf{F}_{12} in (1.8) erreichen, wenn wir eine spezielle Bezeichnung für elektrische Ladungen einführen, nämlich die eine Art, z.B. "grün", als *positiv*, entsprechend $q > 0$, und die andere Art, z.B. "rot", als *negativ*, entsprechend $q < 0$. Dann vereinfacht sich (1.8) zu

$$\mathbf{F}_{12} = \kappa \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{r_{12}}. \quad (1.9)$$

Die Sprechweise von positiver und negativer elektrischer Ladung nimmt eine Eigenschaft der elektrischen Ladung sprachlich vorweg, die physikalisch im Zusammenhang dieses Kapitels noch überhaupt keine Rolle spielt: gleiche Mengen von positiver und negativer elektrischer Ladung kompensieren einander. Bei ungleichen Mengen bleibt ein Überschuss entweder von positiver oder negativer Ladung. Die allgemeinere Ausdrucksweise ist, dass die Summe von (positiver und negativer) Ladung erhalten bleibt. In der Sprechweise von "grüner" und "roter" Ladung hieße der Erhaltungssatz, dass die *Differenz* von "grüner" und "roter" Ladung erhalten bleibt.

1.2.3 Einheiten, Stärke der Wechselwirkung

Die in (1.9) verbleibende Proportionalitätskonstante κ hängt von der Wahl der Einheiten für die Ladungen q_1 und q_2 ab. Eine sehr naheliegende Einheitenwahl setzt $\kappa = 1$ und definiert dadurch die Einheit von Ladung, weil ja die Einheiten aller anderen in (1.9) auftretenden Größen bereits festgelegt sind, nämlich Abstände (in m) und Kraft (in $\text{N} = \text{kg m/s}^2$). Diese in der älteren Literatur der theoretischen Physik übliche Einheitenwahl, die sogenannten *cgs-Einheiten*, führt mit der Verwendung des Gramms (g) statt kg für Masse und cm statt m für Länge auf

$$\text{el. Ladung} \cong \sqrt{\text{Kraft} \cdot \text{Abstand}} \cong \text{g}^{1/2} \text{cm}^{3/2} \text{s}^{-1}.$$

Einer der Nachteile dieser Einheitenwahl besteht darin, dass man später in der Magnetostatik, wenn man eine weitere Version von Wechselwirkung zwischen elektrischen Ladungen in die Theorie einschließt, nämlich die zwischen bewegten Ladungen bzw. Strömen, zu einer anderen Einheitenwahl für elektrische Ladungen kommt.

Heute werden durchweg die sogenannten MKSI-Einheiten verwendet, die übrigens ja auch gesetzlich festgeschrieben sind. In ihnen erhält die elektrische Stromstärke, also die pro Zeiteinheit transportierte elektrische Ladung, eine neue, nicht abgeleitete Einheit, nämlich das Ampere (abgekürzt A). Die elektrische Ladung selbst erhält damit die Einheit Amperesekunde (As), auch Coulomb (C) genannt. Dann wird die Proportionalitätskonstante κ in (1.9) eine experimentell bestimmbare Größe. Sie wird in der Form $\kappa = 1/(4\pi\epsilon_0)$ geschrieben, und ϵ_0 , die sogenannte *Influenzkonstante*, ergibt sich zu

$$\epsilon_0 = 8,859 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N m}^2}. \quad (1.10)$$

Die Coulomb-Wechselwirkung erhält damit die Form

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{r_{12}}. \quad (1.11)$$

Die formale Ähnlichkeit von Gravitations- und Coulomb-Wechselwirkung legt einen Vergleich ihrer "Stärken" nahe. Wir vergleichen den Betrag der Gravitationsanziehung F_G zwischen zwei Protonen (Masse $m_P \approx 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg) mit dem Betrag ihrer Coulomb-Abstoßung F_E (Elementarladung $e \approx 1,60 \cdot 10^{-19}$ C) im gleichen Abstand und finden

$$\frac{F_G}{F_E} = 4\pi\epsilon_0 \gamma \left(\frac{m_P}{e}\right)^2 \approx 8 \cdot 10^{-37}.$$

1.2.4 Das elektrische Feld

Ganz analog wie im Fall der Gravitationswechselwirkung in (1.7) schreiben wir die Coulomb-Kraft \mathbf{F}_{12} auf den mit q_1 elektrisch geladenen Körper 1 um in die Form

$$\mathbf{F}_{12} = q_1 \mathbf{E}_2(\mathbf{r}_1), \quad \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|}. \quad (1.12)$$

$\mathbf{E}_2(\mathbf{r})$ ist das *elektrische Feld* am Ort \mathbf{r} , erzeugt von der Ladung q_2 , die sich am Ort \mathbf{r}_2 befindet. Die Kraft \mathbf{F}_{12} auf den Körper 1 ist also das Produkt des elektrischen

Feldes am Ort \mathbf{r}_1 und der individuellen Eigenschaft der elektrischen Ladung q_1 des Körpers 1.

Die Schreibweise in (1.12) führt zugleich zu einer Messvorschrift für das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ am Ort \mathbf{r} :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\Delta q} \mathbf{F}_{\Delta q}(\mathbf{r}). \quad (1.13)$$

Man bringt einen mit Δq geladenen Körper an den Ort \mathbf{r} und misst die Kraft $\mathbf{F}_{\Delta q}$ auf den Körper. Diese sogenannte *Probeladung* Δq übt natürlich ihrerseits Wechselwirkungskräfte auf diejenigen felderzeugenden Ladungen aus, deren Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ es zu messen gilt. Sie könnte dadurch Änderungen der Positionen der felderzeugenden Ladungen bewirken, was möglichst ausgeschlossen werden soll. Die Probeladung Δq muss demnach hinreichend klein sein, was durch die Schreibweise

$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta q} \mathbf{F}_{\Delta q}(\mathbf{r})} \quad (1.14)$$

statt (1.13) ausgedrückt wird. (1.13) oder (1.14) weisen darauf hin, dass das elektrische Feld im Rahmen der hier zunächst formulierten Elektrostatik äquivalent durch die aus der Mechanik bekannten Kräfte ausgedrückt werden kann. Das wird sich aber grundlegend ändern, wenn wir später dynamische, also zeitabhängige Vorgänge einschließen. Auch die Überlegungen im vorangehenden Abschnitt 1.1 zeigten ja, dass der Feldbegriff erst im dynamischen Fall zwingend wird. Gleichwohl wird uns die Verwendung des Feldbegriffs in der statischen Theorie bereits Anlass zum Studium einer Fülle von physikalischen und mathematischen Begriffen und Techniken geben.

Aus (1.12) und der Angabe (1.10) für ϵ_0 entnehmen wir die physikalische Einheit für das elektrische Feld:

$$\begin{aligned} \text{elektrisches Feld } \mathbf{E} &\cong \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\text{el. Ladung}}{(\text{Abstand})^2} \cong \frac{\text{N m}^2}{\text{C}^2} \frac{\text{C}}{\text{m}^2} = \frac{\text{kg m}}{\text{C s}^2} =: \frac{\text{V}}{\text{m}}, \\ \text{V} &= \text{Volt} := \frac{\text{kg m}^2}{\text{C s}^2} = \frac{\text{J}}{\text{C}} = \frac{\text{W}}{\text{A}} \end{aligned} \quad (1.15)$$

mit J (Joule)=W s (Wattsekunden). Nach der Einführung der Einheit A (Ampere) für die elektrische Stromstärke ist die Einheit V (Volt) eine "abgeleitete" Einheit, d.h., ihre Definition benutzt nur bereits bekannte Einheiten.

1.3 Potential und Wirbel des elektrischen Feldes

Der Gegenstand unserer weiteren Untersuchungen ist das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ am Ort \mathbf{r} , das von einer Ladung q erzeugt wird. Der Ort der Ladung q ist wegen der Homogenität des physikalischen Raumes offensichtlich beliebig. Um eine möglichst einfache Schreibweise zu erhalten, setzen wir die Ladung q an den Ort $\mathbf{r} = 0$, also in den Ursprung eines beliebigen Koordinatensystems, so dass

$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}} \quad (1.16)$$

1.3.1 Das elektrische Potential

In (1.16) ist

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \quad (1.17)$$

der Abstand des Punktes

$$\mathbf{r} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 = \sum_{\alpha=1}^3 x_\alpha \mathbf{e}_\alpha \quad (1.18)$$

vom Ursprung $\mathbf{r} = 0$ des Koordinatensystems. x_1, x_2, x_3 heißen die Koordinaten des Punktes, der durch den Ortsvektor \mathbf{r} gekennzeichnet ist, oder einfach die *Komponenten* des Vektors \mathbf{r} bezüglich des verwendeten Koordinatensystems. Die Vektoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ sind die normierten Basisvektoren des Koordinatensystems, die paarweise senkrecht aufeinander stehen. Das lässt sich sehr kompakt durch das Skalarprodukt

$$\mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta = \delta_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3, \quad (1.19)$$

ausdrücken. $\delta_{\alpha\beta}$ ist das *Kronecker-Symbol*: $\delta_{\alpha\beta} = 1$, wenn $\alpha = \beta$, und $\delta_{\alpha\beta} = 0$, wenn $\alpha \neq \beta$. Koordinatensysteme mit der Eigenschaft (1.19) nennt man auch *kartesisch*. Berechnen wir nun $\mathbf{r}^2 \equiv r^2$ unter Verwendung von (1.18) und (1.19), so erhalten wir

$$r^2 = \mathbf{r}^2 = \sum_{\alpha, \beta=1}^3 x_\alpha x_\beta \underbrace{\mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta}_{=\delta_{\alpha\beta}} = \sum_{\alpha, \beta=1}^3 x_\alpha x_\beta \delta_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha=1}^3 x_\alpha^2.$$

Beim Ausmultiplizieren von $\mathbf{r}^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}$ müssen wir natürlich verschiedene Summationsindizes α und β verwenden. Die β -Summe über Summanden $\sim \delta_{\alpha\beta}$ liefert nur Beiträge für $\beta = \alpha$. Durch Bildung der Quadratwurzel erhalten wir wieder (1.17). Dieser Zusammenhang gibt Anlass zur Schreibweise $|\mathbf{r}| := r$.

Wenn wir nun r in (1.17) nach irgendeiner der Komponenten x_α differenzieren, erhalten wir nach einer elementaren Rechnung

$$\frac{\partial r}{\partial x_\alpha} = \frac{x_\alpha}{r}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (1.20)$$

und daraus weiter unter Benutzung der Kettenregel

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{1}{r} = \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \right) \frac{\partial r}{\partial x_\alpha} = -\frac{1}{r^2} \frac{x_\alpha}{r}, \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (1.21)$$

Wir führen jetzt eine in der Elektrodynamik (und in vielen anderen Theorien der Physik) sehr oft verwendete formale Schreibweise ein:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} := \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} = \sum_{\alpha=1}^3 \mathbf{e}_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}. \quad (1.22)$$

Diese Schreibweise soll bedeuten, dass wir die Ableitungen z.B. von r oder von $1/r$ nach den x_1, x_2, x_3 nacheinander ausführen und die Ergebnisse zu einem Vektor, dem sogenannten *Gradienten* $\partial/\partial \mathbf{r}$ zusammenfassen, der auch durch das Symbol "grad" bezeichnet wird. Für die genannten Beispiele erhalten wir also aus den Ergebnissen (1.20) und (1.21)

$$\frac{\partial r}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (1.23)$$

Die rechte Seite der zweiten Beziehung in (1.23) hat dieselbe Struktur wie das elektrische Feld der Ladung q in (1.16). Wir können also schreiben

$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} = -\frac{\partial\Phi(\mathbf{r})}{\partial\mathbf{r}}, \quad \Phi(\mathbf{r}) := \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}.} \quad (1.24)$$

$\Phi(\mathbf{r})$ heißt das *Potential* des elektrischen Feldes, in unserem speziellen Fall das Potential der Ladung q bei $\mathbf{r} = 0$. Die Existenz eines Potentials hat weitreichende Konsequenzen für das Feld, wie wir in diesem Abschnitt feststellen werden.

1.3.2 Summationskonvention, Transformationen

Ausdrücke wie

$$\mathbf{r} = \sum_{\alpha=1}^3 x_\alpha \mathbf{e}_\alpha \quad \text{oder} \quad \frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} = \sum_{\alpha=1}^3 \mathbf{e}_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \quad (1.25)$$

kommen nun so oft in der Elektrodynamik vor, dass man sich zu einer sehr platz- und zeitsparenden Abkürzung, der sogenannten *Summationskonvention* entschließt. Statt (1.25) schreiben wir vereinfachend

$$\mathbf{r} = x_\alpha \mathbf{e}_\alpha \quad \text{oder} \quad \frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} = \mathbf{e}_\alpha \partial_\alpha. \quad (1.26)$$

Es werden in dieser vereinfachenden Schreibweise die Summen über die Koordinaten-Indizes $\alpha = 1, 2, 3$ in *Produktausdrücken* mit zwei Indizes α fortgelassen, aber es wird vereinbart, dass dennoch die Summen ausgeführt werden sollen. Das Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} schreibt sich mit dieser Abkürzung

$$\mathbf{a} \mathbf{b} = a_\alpha b_\alpha \quad \left(= \sum_{\alpha=1}^3 a_\alpha b_\alpha \right).$$

Außerdem haben wir in (1.26) die abkürzende Schreibweise

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \equiv \partial_\alpha$$

verwendet.

Wir wenden die Schreibweise der Summationskonvention auf Transformationen zwischen verschiedenen Koordinatensystemen an. Es seien \mathbf{e}_α und \mathbf{e}'_α die Basisvektoren zweier kartesischer Koordinatensysteme:

$$\mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta = \delta_{\alpha\beta}, \quad \mathbf{e}'_\alpha \mathbf{e}'_\beta = \delta_{\alpha\beta}. \quad (1.27)$$

Die Ursprünge der beiden Systeme wählen wir einfachheitshalber gleich, womit Translationen ausgeschlossen sind. Nun müssen sich die Basisvektoren \mathbf{e}_α auch durch die \mathbf{e}'_α (und umgekehrt) auf lineare Weise darstellen lassen:

$$\mathbf{e}_\alpha = U_{\alpha\beta} \mathbf{e}'_\beta \quad \left(= \sum_{\beta=1}^3 U_{\alpha\beta} \mathbf{e}'_\beta \right). \quad (1.28)$$

Wenn wir diese Gleichung skalar mit einem \mathbf{e}'_γ multiplizieren, erhalten wir

$$\mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}'_\gamma = U_{\alpha\beta} \underbrace{\mathbf{e}'_\beta \mathbf{e}'_\gamma}_{=\delta_{\beta\gamma}} \left(= \sum_{\beta=1}^3 U_{\alpha\beta} \underbrace{\mathbf{e}'_\beta \mathbf{e}'_\gamma}_{=\delta_{\beta\gamma}} \right) = U_{\alpha\gamma}.$$

Natürlich können wir die Indizes auch wieder umbenennen und z.B.

$$U_{\alpha\beta} = \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}'_\beta \quad (1.29)$$

schreiben.

Die Matrix $U_{\alpha\beta}$ beschreibt die Transformation zwischen den Koordinatensystemen \mathbf{e}_α und \mathbf{e}'_α . Mit ihr können wir auch die Koordinaten x_α bzw. x'_α bzw. die Komponenten von \mathbf{r} in den beiden Systemen ineinander umrechnen. Zunächst sei

$$\mathbf{r} = x_\alpha \mathbf{e}_\alpha = x'_\alpha \mathbf{e}'_\alpha. \quad (1.30)$$

Wir multiplizieren skalar mit \mathbf{e}_β :

$$\begin{aligned}x_\alpha \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta &= x'_\alpha \mathbf{e}'_\alpha \mathbf{e}_\beta, \\x_\beta &= U_{\beta\alpha} x'_\alpha,\end{aligned}$$

und durch Vertauschung der Bezeichnungen α und β auch

$$x_\alpha = U_{\alpha\beta} x'_\beta. \quad (1.31)$$

Wenn wir in (1.30) mit \mathbf{e}'_β statt \mathbf{e}_β multipliziert hätten, dann hätten wir die Umkehrung von (1.31) erhalten, nämlich

$$x'_\alpha = U_{\beta\alpha} x_\beta. \quad (1.32)$$

Die beiden Relationen (1.31) und (1.32) kann man auch in Matrizen-Schreibweise formulieren:

$$x = U x', \quad x' = U^T x. \quad (1.33)$$

x und x' sind die Spaltenvektoren aus den Komponenten x_α bzw. x'_α , U ist die Matrix der $U_{\alpha\beta}$ und U^T deren Transponierte, d.h. das Element $(\alpha\beta)$ von U^T ist $U_{\beta\alpha}$. Aus (1.33) entnehmen wir, dass

$$U^T = U^{-1}, \quad U U^T = U^T U = 1, \quad (1.34)$$

worin "1" auf der rechten Seite die Einheitsmatrix ist, deren Elemente die Kronecker-Symbole $\delta_{\alpha\beta}$ sind. Diese Beziehung können wir auch in der Komponenten-Schreibweise herleiten, indem wir in (1.31) x'_β durch die Umkehr-Transformation (1.32) ersetzen. Letztere müssen wir allerdings in der Form

$$x'_\beta = U_{\gamma\beta} x_\gamma$$

verwenden, um nicht eine Indexbezeichnung mehrfach zu benutzen. Die Einsetzung führt auf

$$x_\alpha = U_{\alpha\beta} U_{\gamma\beta} x_\gamma.$$

Dieses ist eine identische Transformation, d.h. es muss

$$U_{\alpha\beta} U_{\gamma\beta} = \delta_{\alpha\gamma}$$

sein, was gleichbedeutend mit der Matrixgleichung $U U^T = 1$ ist. Entsprechend erhalten wir auch $U^T U = 1$, wenn wir x_α in (1.32) durch (1.31) ersetzen.

Matrizen U mit der Eigenschaft (1.34) nennt man *orthogonal*: Transformationen zwischen kartesischen Koordinatensystemen werden durch orthogonale Matrizen beschrieben.

Schließlich bestimmen wir noch das Transformationsverhalten des Gradienten $\partial/\partial\mathbf{r}$ mit den Komponenten ∂_α , vgl. (1.26). Unter Verwendung der Kettenregel der Differentialrechnung wird

$$\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial x'_\beta}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial x'_\beta} \left(= \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial x'_\beta}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial x'_\beta} \right).$$

Aus der Transformation (1.32) entnehmen wir, wenn wir dort die Bezeichnungen α und β vertauschen,

$$\frac{\partial x'_\beta}{\partial x_\alpha} = U_{\alpha\beta},$$

so dass

$$\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} = U_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x'_\beta} = U_{\alpha\beta} \partial'_\beta. \quad (1.35)$$

Auf analoge Weise finden wir dazu die Umkehrformel

$$\partial'_\alpha = U_{\beta\alpha} \partial_\beta. \quad (1.36)$$

Wir vergleichen mit (1.31) und (1.32) und stellen fest, dass sich die Ableitungen ∂_α auf dieselbe Weise transformieren wie die Komponenten x_α des Vektors \mathbf{r} . Aus diesem Grund stellt der Gradient $\partial/\partial\mathbf{r}$ tatsächlich einen *Vektoroperator* dar, d.h., wir können mit $\partial/\partial\mathbf{r}$ wie mit einem Vektor umgehen und rechnen. Wir werden dafür sogleich Beispiele kennenlernen.

Der Hintergrund zu der letzteren Bemerkung ist ein Umkehrschluss. Wir haben die Transformationsformeln (1.31) und (1.32) aus der Annahme gewonnen, dass die x_α bzw. x'_α die Komponenten eines Vektors \mathbf{r} sind, vgl. (1.30). Von jetzt an werden wir sagen, dass die drei Komponenten a_α , $\alpha = 1, 2, 3$, einen Vektor darstellen sollen, wenn sie sich wie (1.31) bzw. (1.32) transformieren, d.h., wenn sie

$$a_\alpha = U_{\alpha\beta} a'_\beta, \quad a'_\alpha = U_{\beta\alpha} a_\beta \quad (1.37)$$

für eine beliebige orthogonale Matrix $U_{\alpha\beta}$ erfüllen. In diesem Sinn beschreiben die Ableitungen ∂_α einen "Vektor", nämlich einen Vektoroperator.

1.3.3 Rotation und Wirbel des elektrischen Feldes

Wir schließen direkt an die Bemerkung an, dass wir mit dem Vektoroperator $\partial/\partial\mathbf{r}$ wie mit einem gewöhnlichen Vektor umgehen können. Die Darstellung des elektrischen Feldes $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ durch das elektrische Potential $\Phi(\mathbf{r})$ in (1.24),

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} \Phi(\mathbf{r}),$$

können wir auf der rechten Seite so lesen wie die Multiplikation eines Vektors, nämlich von $\partial/\partial\mathbf{r}$, mit einem Skalar, nämlich mit dem skalaren Potential $\Phi(\mathbf{r})$. Weil es sich aber bei $\partial/\partial\mathbf{r}$ um einen Operator handelt, müssen wir bei dieser Multiplikation auf die Reihenfolge achten. In Komponenten lautet diese Aussage

$$E_\alpha(\mathbf{r}) = -\partial_\alpha \Phi(\mathbf{r}). \quad (1.38)$$

Wir können den Vektoroperator $\partial/\partial\mathbf{r}$ aber auch skalar mit einem Vektor multiplizieren. Das macht nur Sinn, wenn dieser Vektor von \mathbf{r} abhängt, weil das Ergebnis

sonst verschwinden würde. Wir betrachten also ein beliebiges *Vektorfeld* $\mathbf{C}(\mathbf{r})$, z.B. das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, und bilden

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{C}(\mathbf{r}) = \partial_\alpha C_\alpha(\mathbf{r}) \left(= \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial C_\alpha(\mathbf{r})}{\partial x_\alpha} \right).$$

Das Ergebnis ist offensichtlich ein Skalar, die sogenannte *Divergenz* von $\mathbf{C}(\mathbf{r})$, auch durch das Symbol "div" bezeichnet. Sie wird eine sehr wichtige Rolle bei der Formulierung der Quellen des elektrischen Feldes im folgenden Kapitel bilden. In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit einer weiteren Möglichkeit, dem Vektorprodukt oder Kreuzprodukt von $\partial/\partial \mathbf{r}$ mit dem Vektorfeld $\mathbf{C}(\mathbf{r})$:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{C}(\mathbf{r}).$$

Das Ergebnis ist wieder ein Vektor, im allgemeinen ein Vektorfeld, die sogenannte *Rotation*, auch durch das Symbol "rot" bezeichnet.

Wir erinnern zunächst an die Definition des Kreuzprodukts zweier gewöhnlicher Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} :

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{e}_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2) + \mathbf{e}_2 (a_3 b_1 - a_1 b_3) + \mathbf{e}_3 (a_1 b_2 - a_2 b_1). \quad (1.39)$$

Man kann sich diese Definition am besten dadurch merken, dass die Indizes auf der rechten Seite ein zyklisches Schema bilden. Eine andere Möglichkeit ist die Darstellung durch eine Determinante:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \quad (1.40)$$

Die Komponenten des Kreuzprodukts lassen sich nicht unmittelbar in der Schreibweise der Summationskonvention darstellen. Das wird jedoch möglich, wenn wir den sogenannten (3-dimensionalen) *Levi-Civita-Tensor* $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ benutzen. Dieser ist definiert durch

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma} = \begin{cases} +1 & (\alpha\beta\gamma) = \text{gerade Permutation von } (1, 2, 3) \\ -1 & (\alpha\beta\gamma) = \text{ungerade Permutation von } (1, 2, 3) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (1.41)$$

äquivalent mit dieser Definition ist

$$\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = +1, \quad \epsilon_{213} = \epsilon_{132} = \epsilon_{321} = -1$$

und $\epsilon_{\alpha\beta\gamma} = 0$ für alle anderen Kombinationen von Indizes, d.h insbesondere ist $\epsilon_{\alpha\beta\gamma} = 0$, wenn zwei oder drei Indizes übereinstimmen. Der Tensor $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ ist in allen seinen Indizes antisymmetrisch. Er wird uns als ein sehr effektives Hilfsmittel dienen, um die zahlreichen Beziehungen der Vektoranalysis, die in der Elektrodynamik benutzt werden, auf sehr einfache Weise herzuleiten. So lässt sich z.B. schon die Determinante in (1.39) wie folgt mit dem Tensor $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ ausdrücken:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \mathbf{e}_\alpha a_\beta b_\gamma \left(= \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^3 \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \mathbf{e}_\alpha a_\beta b_\gamma \right). \quad (1.42)$$

Hier wird die Summationskonvention wirksam, weil jeder der Indizes α, β, γ paarweise in einem Produktausdruck auftritt. (1.42) ist nichts anderes als die Definition einer 3×3 -Determinante unter Verwendung von $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$. Vergleichen wir nun (1.42) mit der Definition (1.39) des Kreuzproduktes, dann lesen wir für die α -Komponente von $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ direkt ab, dass

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} a_\beta b_\gamma. \quad (1.43)$$

Unter Verwendung von (1.43) können wir sehr einfach zeigen, dass $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$. Es ist nämlich gemäß (1.43)

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{a})_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} a_\beta a_\gamma.$$

Auf der rechten Seite führen wir zwei Schritte aus: (1) Vertauschung von β und γ in $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$. Dabei wird $\epsilon_{\alpha\beta\gamma} = -\epsilon_{\alpha\gamma\beta}$, weil $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ in allen Indizes antisymmetrisch ist.

(2) Vertauschung der Bezeichnungen von β und γ . Das ist möglich, weil (per Summationskonvention) über beide Indizes summiert wird. Dabei ändert sich natürlich nichts. Das Ergebnis lautet

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma} a_\beta a_\gamma = -\epsilon_{\alpha\gamma\beta} a_\beta a_\gamma = -\epsilon_{\alpha\beta\gamma} a_\beta a_\gamma.$$

Wenn ein Ausdruck mit seinem Negativen übereinstimmt, muss er verschwinden, womit der erwünschte Nachweis geführt ist.

Im Anhang D gehen wir ausführlich auf den Levi–Civita–Tensor ein und leiten eine Reihe von Rechenregeln her, auf die wir im weiteren Verlauf dieses Textes immer wieder zurückgreifen werden. Auch die Bezeichnung *Tensor* bedarf noch eines besonderen Nachweises, denn wir werden in Analogie zur Definition eines *Vektors* durch sein Transformationsverhalten im Abschnitt 1.3.2 auch einen Tensor durch ein entsprechendes Transformationsverhalten definieren.

Jetzt kommen wir zurück auf die Rotation eines Vektorfeldes $\mathbf{C}(\mathbf{r})$. Unter Verwendung des Tensors $\epsilon_{\alpha\beta\gamma} a_\beta a_\gamma$ können wir analog zu (1.43) schreiben

$$\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{C}(\mathbf{r}) \right)_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \partial_\beta C_\gamma(\mathbf{r}). \quad (1.44)$$

Wir berechnen die Rotation des elektrischen Feldes $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ und beachten dabei, dass gemäß (1.38) $E_\alpha(\mathbf{r}) = -\partial_\alpha \Phi(\mathbf{r})$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) \right)_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \partial_\beta E_\gamma(\mathbf{r}) = -\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \partial_\beta \partial_\gamma \Phi(\mathbf{r}) = 0, \quad (1.45)$$

denn es ist $\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \partial_\beta \partial_\gamma = 0$ aus demselben Grund wie $\epsilon_{\alpha\beta\gamma} a_\beta a_\gamma = 0$.

Das Fazit ist, dass

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0.} \quad (1.46)$$

Die Rotation des elektrischen Feldes verschwindet. In der physikalischen Ausdrucksweise bezeichnet man die Rotation auch als *Wirbel*: die Wirbel des elektrischen Feldes verschwinden. Dieses ist die erste der elektrostatischen Feldgleichungen. Wir weisen jetzt schon darauf hin, dass diese Aussage im dynamischen, also zeitabhängigen Fall modifiziert werden wird.

1.4 Der Stokessche Integralsatz

Im vorhergehenden Abschnitt haben wir aus der Existenz eines Potentials für das elektrische Feld geschlossen, dass seine Rotation verschwindet:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \Phi(\mathbf{r}) \quad \succ \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0. \quad (1.47)$$

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, dass auch das Umgekehrte gilt: aus dem Verschwinden der Rotation folgt die Existenz eines Potentials. Wir werden dabei einen wichtigen Integralsatz kennenlernen, den sogenannten *Stokesschen Integralsatz*, auf den wir im weiteren Verlauf des Textes immer wieder zurückgreifen werden.

Übrigens sind (1.47) und seine Umkehrung bereits aus der Theoretischen Mechanik bekannt. Genau dann, wenn ein Kraftfeld konservativ ist, d.h., wenn es als Gradient einer potentiellen Energie darstellbar ist, verschwindet seine Rotation.

1.4.1 Das Potential als Linienintegral

Es sei ein beliebiges Vektorfeld $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ gegeben. Wir definieren dazu ein Potential $\phi(\mathbf{r})$ durch ein *Linienintegral*:

$$\phi(\mathbf{r}) := -\int_{\mathbf{r}_0, W}^{\mathbf{r}} d\mathbf{r}' \mathbf{a}(\mathbf{r}'). \quad (1.48)$$

Zunächst ist das Linienintegral auf der rechten Seite zu erklären. Es sei W ein Weg (eine Kurve) im Raum, der von einem Punkt \mathbf{r}_0 zum Punkt \mathbf{r} führt. Wir approximieren W durch einen Polygonzug mit den Kanten $\Delta \mathbf{r}'_i$, $i = 1, 2, \dots, N$, vgl. Abbildung 1.1. In einem beliebigen Punkt \mathbf{r}'_i auf jeder Kante, z.B. in einem ihrer Endpunkte, bilden wir das Skalarprodukt des Feldes $\mathbf{a}(\mathbf{r}'_i)$ mit $\Delta \mathbf{r}'_i$ und addieren diese Skalarprodukte über $i = 1, 2, \dots, N$. Schließlich führen wir den Limes $N \rightarrow \infty$ aus, so dass jedes $|\Delta \mathbf{r}'_i| \rightarrow 0$:

$$\int_{\mathbf{r}_0, W}^{\mathbf{r}} d\mathbf{r}' \mathbf{a}(\mathbf{r}') = \lim_{|\Delta \mathbf{r}'_i| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N \Delta \mathbf{r}'_i \mathbf{a}(\mathbf{r}'_i). \quad (1.49)$$

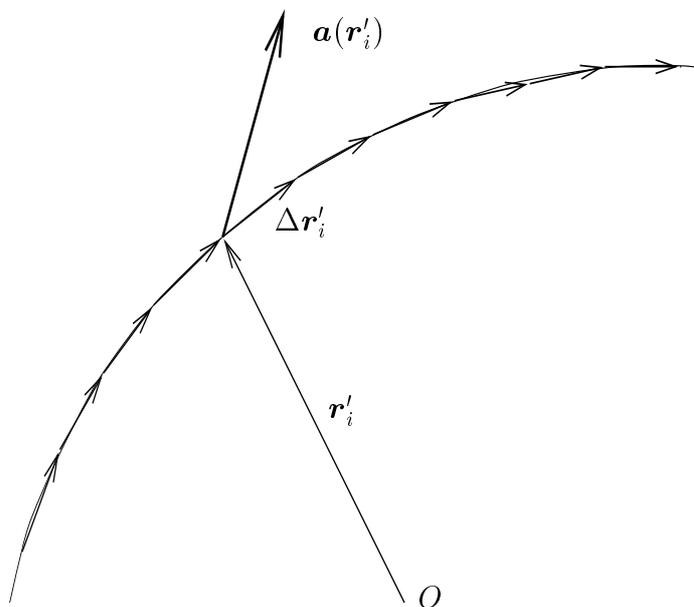


Abbildung 1.1: Zur Definition des Linienintegrals

Der Limes auf der rechten Seite konvergiert im Sinne des Riemannsches Integralbegriffs, wenn z.B. das Feld $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ und der Weg W stetig sind.

Die Definition (1.48) des Potentials $\phi(\mathbf{r})$ ist eindeutig, wenn das Linienintegral auf der rechten Seite unabhängig von dem Weg W ist, der von \mathbf{r}_0 nach \mathbf{r} führt. Wenn das der Fall ist, dann bilden wir auf beiden Seiten von (1.48) jeweils das vollständige Differential. Nach den Regeln der Differentialrechnung erhalten wir

$$\begin{aligned} d\phi(\mathbf{r}) &= \phi(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{r}) = \\ &= \frac{\partial\phi(\mathbf{r})}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial\phi(\mathbf{r})}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial\phi(\mathbf{r})}{\partial x_3} dx_3 = \partial_\alpha \phi(\mathbf{r}) dx_\alpha, \\ d\left(\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} d\mathbf{r}' \mathbf{a}(\mathbf{r}')\right) &= d\mathbf{r} \mathbf{a}(\mathbf{r}) = a_\alpha(\mathbf{r}) dx_\alpha, \end{aligned}$$

so dass wegen der Unabhängigkeit der Differentiale dx_α mit (1.48) folgt, dass

$$a_\alpha(\mathbf{r}) = -\partial_\alpha \phi(\mathbf{r}) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{a}(\mathbf{r}) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \phi(\mathbf{r}). \quad (1.50)$$

Wenn also das Linienintegral unabhängig vom Weg W ist, dann hat die dadurch definierte Funktion $\phi(\mathbf{r})$ die Eigenschaften eines Potentials. Jetzt wenden wir uns der Frage zu, *wann* das Linienintegral von \mathbf{r}_0 nach \mathbf{r} unabhängig von dem verwendeten Weg W ist. Es sei W' ein zweiter Weg, der von \mathbf{r}_0 nach \mathbf{r} führt. Es stellt sich die Frage, wann

$$\int_{\mathbf{r}_0, W}^{\mathbf{r}} d\mathbf{r}' \mathbf{a}(\mathbf{r}') = \int_{\mathbf{r}_0, W'}^{\mathbf{r}} d\mathbf{r}' \mathbf{a}(\mathbf{r}') \quad (1.51)$$

für alle Paare von Wegen W, W' von \mathbf{r}_0 nach \mathbf{r} . Wenn wir einen der Wege in umgekehrter Richtung orientieren, erhalten wir offensichtlich den negativen Wert des betreffenden Integrals. (1.51) ist also äquivalent mit

$$\int_{\mathbf{r}_0, W}^{\mathbf{r}} d\mathbf{r}' \mathbf{a}(\mathbf{r}') + \int_{\mathbf{r}_0, -W'}^{\mathbf{r}} d\mathbf{r}' \mathbf{a}(\mathbf{r}') = 0,$$

oder

$$\int_{W+(-W')} d\mathbf{r}' \mathbf{a}(\mathbf{r}') = 0,$$

worin $-W'$ die Umkehrung der Orientierung des Weges W' bedeuten soll. Die Wegfolge $W+(-W')$ bildet aber eine geschlossene Kurve. Also ist das Verschwinden der Linienintegrale über alle geschlossenen Wege,

$$\oint d\mathbf{r} \mathbf{a}(\mathbf{r}) = 0, \quad (1.52)$$

hinreichend dafür, dass die Definition des Potentials $\phi(\mathbf{r})$ in (1.48) eindeutig ist.

1.4.2 Der Stokessche Integralsatz

Das hinreichende Kriterium (1.52) für die Unabhängigkeit des Linienintegrals vom Weg können wir mit dem *Stokesschen Integralsatz* durch die Rotation von $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ ausdrücken:

$$\boxed{\oint_{\partial F} d\mathbf{r} \mathbf{a}(\mathbf{r}) = \int_F d\mathbf{f} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{a}(\mathbf{r})}. \quad (1.53)$$

(Eine Beweisskizze geben wir im folgenden Unterabschnitt.) Hier ist F ein Flächenstück im 3-dimensionalen Raum und ∂F seine Berandung. Letztere bildet einen geschlossenen Weg, möglicherweise auch mehrere geschlossene Wege, wenn F mehrfach zusammenhängt, z.B. "Löcher" enthält. Das Integral auf der rechten Seite ist ein Flächenintegral vom Typ

$$\int_F d\mathbf{f} \mathbf{b}(\mathbf{r}).$$

In (1.53) ist das Vektorfeld $\mathbf{b}(\mathbf{r})$ die Rotation von $\mathbf{a}(\mathbf{r})$. Wir erklären zunächst, wie das Flächenintegral über ein Vektorfeld $\mathbf{b}(\mathbf{r})$ zu bilden ist. Wir approximieren das Flächenstück F durch eine polyedrische Fläche, d.h., durch ein zusammenhängendes Gebilde von jeweils ebenen Vielecken, die wir mit $i = 1, 2, \dots, N$ durchzählen, vgl. Abbildung 1.2. Das ist z.B. mit einem zusammenhängenden Gebilde von Dreiecken immer möglich (sogenannte "Triangulierung" einer Fläche). Jedem der Vielecke $i = 1, 2, \dots, N$ ordnen wir einen Vektor $\Delta \mathbf{f}_i$ mit den folgenden Eigenschaften zu:

1. $\Delta \mathbf{f}_i$ steht senkrecht auf der Fläche des Vielecks,
2. Die Länge $\Delta f_i := |\Delta \mathbf{f}_i|$ des Vektors $\Delta \mathbf{f}_i$ ist gleich der Fläche des Vielecks,
3. Alle Vektoren $\Delta \mathbf{f}_i$ des Flächenstücks F zeigen in dieselbe der beiden noch möglichen Richtungen relativ zu F , die sogenannte *Normalenrichtung*. Im Stokesschen Integralsatz in (1.53) ist angenommen, dass der Rand ∂F die Fläche F im mathematisch positiven, also Gegenuhrzeigersinn umläuft, wenn die Kreuzprodukte bzw. die Rotation des Feldes $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ im Sinne der "Rechten-Hand-Regel" definiert werden. Letzteres bedeutet nichts anderes als $\epsilon_{123} = +1$.

Es sei $\mathbf{b}(\mathbf{r}_i)$ das Vektorfeld $\mathbf{b}(\mathbf{r})$ in einem beliebigen Punkt $\mathbf{r} = \mathbf{r}_i$ auf dem i -ten Vieleck. Wir bilden nun das Skalarprodukt $\Delta \mathbf{f}_i \mathbf{b}(\mathbf{r}_i)$, addieren die Ergebnisse für $i = 1, 2, \dots, N$ und führen den Limes $N \rightarrow \infty$ mit $\Delta f_i := |\Delta \mathbf{f}_i| \rightarrow 0$ für alle $i = 1, 2, \dots, N$ aus:

$$\int_F d\mathbf{f} \mathbf{b}(\mathbf{r}) := \lim_{\Delta f_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N \Delta \mathbf{f}_i \mathbf{b}(\mathbf{r}_i). \quad (1.54)$$

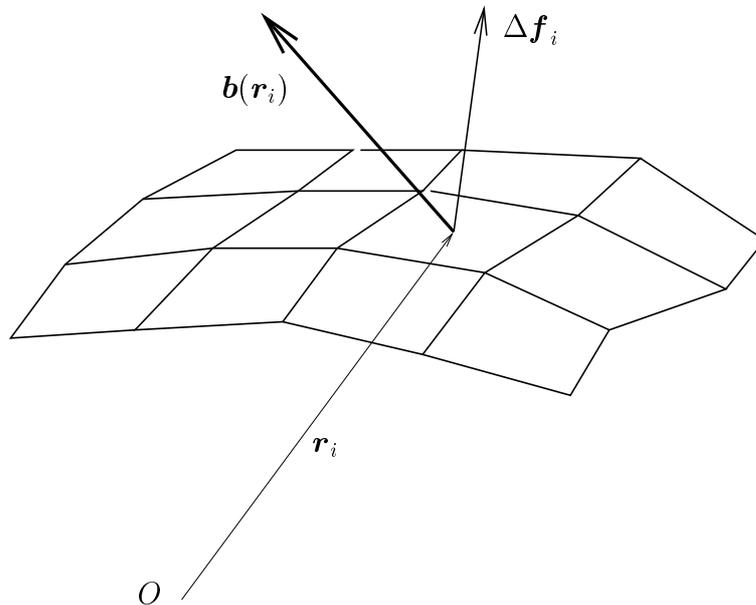


Abbildung 1.2: Zur Definition des Flächenintegrals

Der Limes auf der rechten Seite konvergiert im Sinne des Riemannsches Integralbegriffs, wenn z.B. $\mathbf{b}(\mathbf{r})$ und das Flächenstück F stetig sind.

Wenden wir nun den Stokesschen Integralsatz (1.53) auf das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ an, dann erhalten wir

$$\oint_{\partial F} d\mathbf{r} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_F d\mathbf{f} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad (1.55)$$

und damit die Eindeutigkeit des durch

$$\Phi(\mathbf{r}) = - \int_{r_0}^r d\mathbf{r}' \mathbf{E}(\mathbf{r}') \quad (1.56)$$

definierten elektrischen Potentials, wenn die Wirbel des elektrischen Feldes verschwinden. Damit ist die Umkehrung von (1.47) gezeigt. Wir beachten, dass weder (1.47) noch seine Umkehrung in (1.55) und (1.56) von der speziellen Form von $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ abhängen, also nicht etwa nur für elektrische Felder einer Ladung q , sondern für beliebige elektrische Felder mit den genannten Voraussetzungen gelten.

1.4.3 Nachweis des Stokesschen Integralsatzes

Wir weisen den Stokesschen Integralsatz zunächst für den Fall nach, dass das Flächenstück F ein ebenes Rechteck ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wählen wir die Rechteckebene als (x_1, x_2) -Ebene eines Koordinatensystems und eine Ecke des Rechtecks als dessen Ursprung, vgl. Abbildung 1.3, so dass

$$d\mathbf{f} = dx_1 dx_2 \mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{e}_3 \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{a}(\mathbf{r}) \right) = \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{a}(\mathbf{r}) \right)_3 = \frac{\partial a_2(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2}.$$

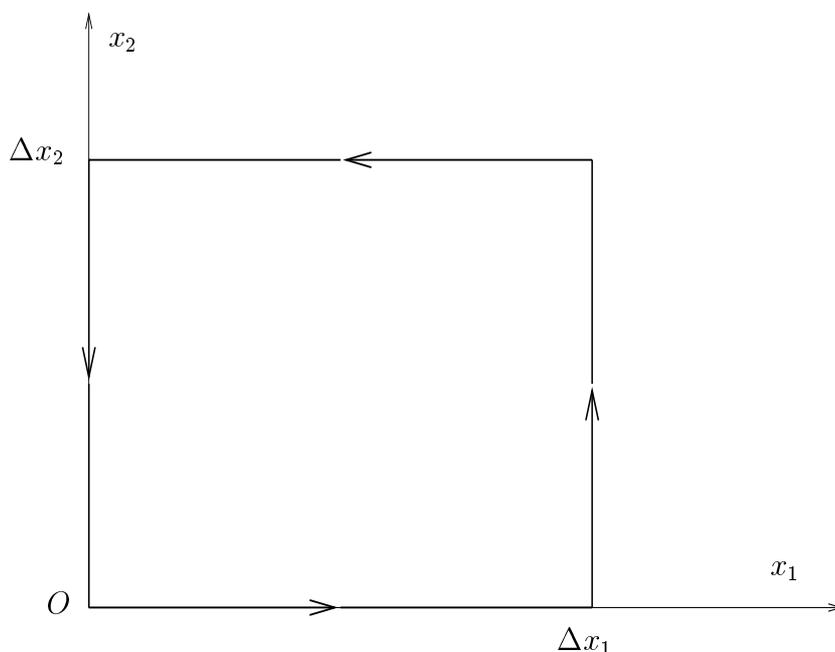


Abbildung 1.3: Zum Nachweis des Stokesschen Integralsatzes

Alle nun folgenden Integrationen finden in der Ebene $x_3 = 0$ statt, so dass wir die Variable x_3 nicht mehr mitschreiben.

$$\int_F d\mathbf{f} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{a}(\mathbf{r}) \right) =$$

$$= \int_0^{\Delta x_1} dx_1 \int_0^{\Delta x_2} dx_2 \left(\frac{\partial a_2(x_1, x_2)}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\Delta x_2} dx_2 \int_0^{\Delta x_1} dx_1 \frac{\partial a_2(x_1, x_2)}{\partial x_1} - \int_0^{\Delta x_1} dx_1 \int_0^{\Delta x_2} dx_2 \frac{\partial a_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} \\
&= \int_0^{\Delta x_2} dx_2 [a_2(\Delta x_1, x_2) - a_2(0, x_2)] - \\
&\quad - \int_0^{\Delta x_1} dx_1 [a_1(x_1, \Delta x_2) - a_1(x_1, 0)] \\
&= \int_0^{\Delta x_1} dx_1 a_1(x_1, 0) + \int_0^{\Delta x_2} dx_2 a_2(\Delta x_1, x_2) + \\
&\quad + \int_{\Delta x_1}^0 dx_1 a_1(x_1, \Delta x_2) + \int_{\Delta x_2}^0 dx_2 a_2(0, x_2) \\
&= \oint_{\partial F} d\mathbf{r} \mathbf{a}(\mathbf{r}). \tag{1.57}
\end{aligned}$$

In der vorletzten Zeile haben wir die Integrationen so angeordnet, dass sich gerade das Linienintegral über die Rechteck-Kanten im Gegenuhrzeigersinn ergibt, vgl. Abbildung 1.3.

Das Flächenintegral auf der linken Seite von (1.57) können wir mit einem entsprechend verallgemeinerten Mittelwertsatz der Integralrechnung in die Form

$$\int_{\Delta f} d\mathbf{f} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{a}(\mathbf{r}) \right) = \Delta \mathbf{f} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{a}(\mathbf{r}) \right)_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0}$$

bringen, worin $\Delta \mathbf{f} = \Delta x_1 \Delta x_2 \mathbf{e}_3$, $\Delta f = |\Delta \mathbf{f}|$ und \mathbf{r}_0 ein Punkt auf $\Delta \mathbf{f}$ ist. Wenn wir die genaue Lage des Punktes \mathbf{r}_0 unberücksichtigt lassen, erhalten wir einen Fehler der Ordnung $\Delta f O(\Delta f)$, wobei $O(\xi)$ bedeutet, dass $O(\xi) \rightarrow 0$ für $\xi \rightarrow 0$. Also können wir auch schreiben, dass

$$\Delta \mathbf{f} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{a}(\mathbf{r}) \right) = \oint_{\partial(\Delta f)} d\mathbf{r} \mathbf{a}(\mathbf{r}) + \Delta f O(\Delta f). \tag{1.58}$$

gilt. Diese Form des Stokesschen Satz begründet eigentlich erst die Sprechweise "Wirbel" für Rotation. Wenn das Linienintegral über einen geschlossenen Weg auf der rechten Seite nicht verschwindet, sagt man, dass das Feld $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ dort einen Wirbel besitzt. Dieser wird dargestellt durch die Komponente der Rotation von $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ senkrecht zu $\Delta \mathbf{f}$ bzw. in Richtung von $\Delta \mathbf{f}$.

Die Aussage des Stokesschen Integralsatz in (1.57) oder (1.58) ist nicht auf ebene Rechtecke beschränkt, sondern lässt sich verallgemeinern. Sei F ein beliebiges, aber

zunächst noch ebenes Flächenstück. F lässt sich durch zusammenhängende Rechtecke Δf_i , $i = 1, 2, \dots, N$ beliebig genau approximieren. Wir formulieren (1.58) für jedes der Δf_i und bilden die Summe über $i = 1, 2, \dots, N$. Bei der i -Summe der Linienintegrale auf der rechten Seite heben sich alle Beiträge von inneren Kanten auf, weil jede innere Kante zweimal mit entgegengesetzten Orientierungen durchlaufen wird. Es verbleibt rechts also das Linienintegral nur über die äußeren Kanten. Mit $N \rightarrow \infty$, so dass jedes $\Delta f_i \rightarrow 0$, erhalten wir so den Stokesschen Integralsatz in der Form von (1.57) für beliebige ebene Flächenstücke F .

Für den Fall gekrümmter Flächenstücke F greifen wir auf die Konstruktion zur Definition des Flächenintegrals im vorhergehenden Unterabschnitt zurück. Dort hatten wir solche Flächenstücke durch eine polyedrische Fläche, d.h., durch ein zusammenhängendes Gebilde von jeweils ebenen Vielecken approximiert. Für jedes von ihnen gilt gemäß unserer obigen Überlegung der Stokessche Integralsatz. Wieder bilden wir die Summe über alle ebenen Vielecke und wieder heben sich die Linienintegrale über die inneren Kanten gegenseitig auf. Im Limes Anzahl der Vielecke $N \rightarrow \infty$, so dass für die Fläche Δf_i jedes der Vielecke $\Delta f_i \rightarrow 0$, erhalten wir dann den Stokesschen Integralsatz auch für beliebig gekrümmte Flächenstücke F .

Im Anhang B geben wir einen Nachweis für den Stokesschen Integralsatz ohne Verwendung von approximierenden ebenen Vielecken.

Kapitel 2

Die Quellen des elektrischen Feldes

Die physikalische Charakterisierung von Feldern beruht auf den beiden Eigenschaften "Wirbel" und "Quellen". Die Wirbel eines Feldes $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ sind durch seine Rotation definiert. Im Kapitel 1 haben wir nachgewiesen, dass ein Feld keine Wirbel besitzt, wenn es als Gradient eines Potentials darstellbar ist, und umgekehrt. In diesem Kapitel werden wir nun den anderen grundlegenden Begriff zur physikalischen Charakterisierung von Feldern kennenlernen, nämlich die Quellen.

2.1 Die Divergenz des elektrischen Feldes einer Punktladung

Bereits in 1.3.3 hatten wir die Möglichkeit erwähnt, den Vektoroperator $\partial/\partial\mathbf{r}$ im Sinne eines Skalarprodukts auf ein Vektorfeld $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ anzuwenden:

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} \mathbf{a}(\mathbf{r}) = \partial_\alpha a_\alpha(\mathbf{r}) \quad \left(= \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial a_\alpha(\mathbf{r})}{\partial x_\alpha} \right). \quad (2.1)$$

Dieses Skalarprodukt von $\partial/\partial\mathbf{r}$ mit $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ nennt man auch die *Divergenz* von $\mathbf{a}(\mathbf{r})$. Wir berechnen nun die Divergenz des elektrischen Feldes einer Punktladung q am Ort $\mathbf{r} = \mathbf{0}$. Dieses ist gemäß 1.3.1 durch ein Potential $\Phi(\mathbf{r})$ darstellbar:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \Phi(\mathbf{r}), \quad \Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad (2.2)$$

Wir führen die Rechnung in der Komponentenschreibweise unter Verwendung der Summationskonvention aus, vgl. (2.1):

$$\frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} = \partial_\alpha E_\alpha(\mathbf{r}) = -\partial_\alpha \partial_\alpha \Phi(\mathbf{r}) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \partial_\alpha \partial_\alpha \frac{1}{r}. \quad (2.3)$$

Da das Potential und das Feld bei $r = 0$ bzw. $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ eine Singularität, nämlich einen Pol 1. bzw. 2. Ordnung besitzen, müssen wir die folgenden Rechnungen auf $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$ beschränken. Wir beachten, dass der Operator $\partial_\alpha \partial_\alpha$ mit der Summationskonvention die Gestalt

$$\partial_\alpha \partial_\alpha = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} =: \Delta \quad (2.4)$$

besitzt. Der Operator Δ wird auch *Laplace-Operator* genannt. Als Skalarprodukt von zwei Vektoroperatoren, nämlich von ∂_α mit sich selbst, ist der Operator Δ wie z.B. auch $r^2 = r^2 = x_\alpha x_\alpha$ invariant gegen orthogonale Koordinatentransformationen, vgl. auch 1.3.2. Nun ist

$$\partial_\alpha \frac{1}{r} = -\frac{x_\alpha}{r^3},$$

vgl. (1.21), und weiter unter Verwendung der Produktregel und der Kettenregel der Differentiation

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \partial_\alpha \frac{1}{r} &= -\partial_\alpha \left(\frac{x_\alpha}{r^3} \right) = -\frac{\partial_\alpha x_\alpha}{r^3} - x_\alpha \partial_\alpha \frac{1}{r^3}, \\ \partial_\alpha x_\alpha &= \frac{\partial x_1}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial x_2} + \frac{\partial x_3}{\partial x_3} = 3, \\ \partial_\alpha \frac{1}{r^3} &= \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r^3} \right) \frac{\partial r}{\partial x_\alpha} = -\frac{3}{r^4} \frac{x_\alpha}{r} = -\frac{3 x_\alpha}{r^5}, \\ x_\alpha \partial_\alpha \frac{1}{r^3} &= -\frac{3 x_\alpha x_\alpha}{r^5} = -\frac{3}{r^3}, \end{aligned}$$

worin wir $x_\alpha x_\alpha = r^2$ benutzt haben. Also wird

$$\Delta \frac{1}{r} = \partial_\alpha \partial_\alpha \frac{1}{r} = -\frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^3} = 0 \quad \text{für} \quad \mathbf{r} \neq \mathbf{0} \quad (2.5)$$

bzw. auch

$$\frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} = 0 \quad \text{für} \quad \mathbf{r} \neq \mathbf{0}. \quad (2.6)$$

2.2 Der Gaußsche Integralsatz

Über die Divergenz eines elektrischen Feldes einer Punktladung q am Ort $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ konnten wir in 2.1 nur Aussagen im Bereich $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$, also nur außerhalb des Ortes der Ladung machen. Wir wollen nun versuchen, auch eine Aussage über den Ort $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ der Ladung einzuschließen. Dafür verwenden wir einen zweiten wichtigen Integralsatz, nämlich den Gaußschen Integralsatz.

2.2.1 Der Gaußsche Integralsatz

Es sei $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ ein beliebiges (differenzierbares) Vektorfeld und V ein 3-dimensionaler Raumbereich mit der Grenzfläche ("Einhüllenden") ∂V . Letztere bildet eine geschlossene Oberfläche, möglicherweise auch mehrere geschlossene Oberflächen, wenn V z.B. "Löcher" enthält. Der Gaußsche Integralsatz besagt nun, dass

$$\boxed{\oint_{\partial V} d\mathbf{f} \mathbf{a}(\mathbf{r}) = \int_V d^3r \frac{\partial \mathbf{a}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}}.} \quad (2.7)$$

(Eine Beweisskizze dieses Satzes geben wir in 2.2.3.) Auf der linken Seite steht ein uns bereits aus 1.48 bekanntes Flächenintegral über das Vektorfeld $\mathbf{a}(\mathbf{r})$. Die Besonderheit ist hier, dass der Integrationsbereich eine in sich geschlossene Fläche ∂V ist, während wir im Kapitel 1 allgemeiner mit Flächenintegralen über beliebige Flächenstücke F zu tun hatten. Auf der rechten Seite von (2.7) steht ein *Volumenintegral* über eine skalare Funktion

$$f(\mathbf{r}) := \frac{\partial \mathbf{a}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}}.$$

Diese Art von Integral bedarf keiner weiteren Erläuterung. Wir können es uns als ein dreifaches Integral über die Koordinatenrichtungen

$$\int_V d^3 r f(\mathbf{r}) = \int \int \int_V dx_1 dx_2 dx_3 f(x_1, x_2, x_3)$$

vorstellen.

Wir wollen nun den Gaußschen Integralsatz auf das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ einer Punktladung q bei $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ anwenden. Wenn das Integrationsvolumen V den Ort der Ladung, d.h., den Punkt $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ *nicht* enthält, ist

$$\oint_{\partial V} d\mathbf{f} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_V d^3 r \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} = 0, \quad (\mathbf{r} = \mathbf{0}) \notin V, \quad (2.8)$$

weil $\partial \mathbf{E}(\mathbf{r})/\partial \mathbf{r} = 0$ in $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$, vgl. (2.6). Wenn dagegen das Integrationsvolumen V den Punkt $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ enthält, stoßen wir auf ein Problem, weil $\partial \mathbf{E}(\mathbf{r})/\partial \mathbf{r}$ in $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ nicht definiert, sondern sogar singulär ist, vgl. Abschnitt 2.1. Das Flächenintegral links in (2.8) lässt sich aber auch dann sinnvoll berechnen, wenn das Integrationsvolumen V den Punkt $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ enthält. Wir wählen für V eine Kugel K_r mit dem Radius r und dem Mittelpunkt bei $\mathbf{r} = \mathbf{0}$. Als Flächenelemente $d\mathbf{f}$ auf der Kugeloberfläche ∂K_r wählen wir Flächenstücke, die zu einem Raumwinkelement $d\Omega$ gehören, so dass

$$d\mathbf{f} = d\Omega r^2 \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Wir erhalten damit

$$\oint_{\partial K_r} d\mathbf{f} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \oint_{4\pi} d\Omega r^2 \frac{\mathbf{r}}{r} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_{4\pi} d\Omega = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (2.9)$$

Diese Rechnung lässt sich sogar auf beliebige Volumina V erweitern, die den Punkt $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ enthalten. Wir wählen eine Kugel K_r , die noch ganz in V liegt. Das ist durch eine geeignete Wahl des Radius r immer möglich, falls $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ wirklich *innerhalb* von

V , d.h., nicht auf der Grenzfläche ∂V von V liegt. Das Volumen V besteht dann aus zwei Teilen: $V = K_r + V'$, wobei das Restvolumen V' den Punkt $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ *nicht* enthält, also $\partial \mathbf{E}(\mathbf{r})/\partial \mathbf{r} = 0$ in V' :

$$\int_{V'} d^3 r \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} = 0. \quad (2.10)$$

V' ist nun ein zweifach zusammenhängendes Volumen mit den beiden Einhüllenden ∂V nach außen und ∂K_r nach innen. Die Anwendung des Gaußschen Integralsatzes (2.7) auf das Integral links in (2.10) ergibt also

$$\int_{V'} d^3 r \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} = \oint_{\partial V} d\mathbf{f} \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \oint_{\partial K_r} d\mathbf{f} \mathbf{E}(\mathbf{r}). \quad (2.11)$$

Das negative Vorzeichen vor dem Flächenintegral über ∂K_r erklärt sich dadurch, dass die Flächenelemente $d\mathbf{f}$ auf ∂K_r von K_r und V' aus bei einer beliebigen Festlegung der Normalenrichtung immer entgegengesetzt zueinander sind. (2.10) und (2.11) ergeben zusammen das behauptete Ergebnis

$$\oint_{\partial V} d\mathbf{f} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \oint_{\partial K_r} d\mathbf{f} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{\epsilon_0}, \quad (\mathbf{r} = \mathbf{0}) \in V. \quad (2.12)$$

2.2.2 Schreibweise mit der Diracschen δ -Funktion

Wir wollen jetzt eine formale Schreibweise einführen, die es erlaubt, den Gaußschen Integralsatz (2.7) auf das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ einer Punktladung q bei $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ für beliebige Integrationsvolumina V anzuwenden, also auch dann, wenn V den Punkt $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ enthält. (2.8) und (2.12) würden dann auf die folgenden Aussagen führen:

$$\int_V d^3 r \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} = \begin{cases} q/\epsilon_0 & (\mathbf{r} = \mathbf{0}) \in V, \\ 0 & (\mathbf{r} = \mathbf{0}) \notin V, \end{cases} \quad (2.13)$$

obwohl $\frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} = 0$ in $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$.

Das ist mit den gewöhnlichen Begriffen des Riemannschen Integralbegriffs nicht verträglich. Wir würden erwarten, dass ein Integral über V , dessen Integrand in V

bis auf den Punkt $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ überall verschwindet, selbst verschwindet. Tatsächlich soll (2.13) auch nur eine formale Schreibweise darstellen, die zusammen mit der formalen Anwendung des Gaußschen Integralsatzes die Ergebnisse der Flächenintegrationen im Abschnitt 2.2.1 reproduziert. Man drückt diese formale Schreibweise auch durch die sogenannte *Diracsche δ -Funktion* $\delta(\mathbf{r})$ aus,

$$\frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} = \frac{q}{\epsilon_0} \delta(\mathbf{r}), \quad (2.14)$$

worin $\delta(\mathbf{r})$ die formalen Eigenschaften

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{r}) &= 0 && \text{in } \mathbf{r} \neq \mathbf{0}, \\ \int_V d^3r \delta(\mathbf{r}) &= \begin{cases} 1 & (\mathbf{r} = \mathbf{0}) \in V, \\ 0 & (\mathbf{r} = \mathbf{0}) \notin V, \end{cases} \end{aligned} \quad (2.15)$$

besitzt. Im Anhang C gehen wir ausführlich auf die δ -Funktion ein, wollen hier aber noch eine wichtige und sehr oft verwendete ihrer Eigenschaften kennenlernen und damit zugleich erfahren, dass wir mit ihr formal ebenso rechnen können wie mit einer gewöhnlichen Funktion. Wir zeigen, dass für eine differenzierbare Funktion $\phi(\mathbf{r})$

$$\int_V d^3r \phi(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r}) = \begin{cases} \phi(\mathbf{0}) & (\mathbf{r} = \mathbf{0}) \in V, \\ 0 & (\mathbf{r} = \mathbf{0}) \notin V, \end{cases} \quad (2.16)$$

gilt. Diese Aussage ist anschaulich klar: wenn $\delta(\mathbf{r}) = 0$ für $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$, dann können wir die differenzierbare Funktion $\phi(\mathbf{r})$ an der Stelle $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ vor das Integral ziehen und (2.15) verwenden. Für $(\mathbf{r} = \mathbf{0}) \notin V$ ist die Aussage in (2.16) trivial, weil $\delta(\mathbf{r}) = 0$ für $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$. Für $(\mathbf{r} = \mathbf{0}) \in V$ führen wir den formalen Nachweis unter Verwendung der Darstellung

$$\delta(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \Delta \frac{1}{r} = -\frac{1}{4\pi} \partial_\alpha^2 \frac{1}{r}, \quad (2.17)$$

die aus (2.14) zusammen mit (2.3) folgt. Wir setzen diese Darstellung in das Integral links in (2.16) ein und führen nach der Produktregel der Differentiation die folgende Umformung durch:

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{r}) \Delta \frac{1}{r} &= \phi(\mathbf{r}) \partial_\alpha^2 \frac{1}{r} = \partial_\alpha \left(\phi(\mathbf{r}) \partial_\alpha \frac{1}{r} \right) - (\partial_\alpha \phi(\mathbf{r})) \partial_\alpha \frac{1}{r} = \\ &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\phi(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{1}{r} \right) - \frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{1}{r}.\end{aligned}$$

Damit wird

$$\begin{aligned}\int_V d^3r \phi(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r}) &= \\ &= \int_V d^3r \phi(\mathbf{r}) \left(-\frac{1}{4\pi} \Delta \frac{1}{r} \right) \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_V d^3r \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\phi(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{4\pi} \int_V d^3r \frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{1}{r}.\end{aligned}\quad (2.18)$$

Wir beachten, dass wegen $\delta(\mathbf{r}) = 0$ in $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$ das Integrationsvolumen V beliebig verformt werden kann, solange der Punkt $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ entweder immer in V oder immer außerhalb von V liegt. Für $(\mathbf{r} = \mathbf{0}) \in V$ wählen wir $V = K_r$, worin K_r wieder eine Kugel mit dem Mittelpunkt im Ursprung $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ und mit dem Radius r ist, und führen den Limes $r \rightarrow 0$ aus. Für das erste Integral in (2.18) erhalten wir damit durch formale Anwendung des Gaußschen Integralsatzes

$$\begin{aligned}-\frac{1}{4\pi} \int_V d^3r \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\phi(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{1}{r} \right) &= \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{4\pi} \right) \int_{K_r} d^3r \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\phi(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{1}{r} \right) \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{4\pi} \right) \oint_{\partial K_r} d\mathbf{f} \phi(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{1}{r} \\ &= \phi(\mathbf{0}) \lim_{r \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{4\pi} \right) \oint_{\partial K_r} d\mathbf{f} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{1}{r} \\ &= \phi(\mathbf{0}) \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi} \oint_{4\pi} d\Omega r^2 \frac{\mathbf{r}}{r} \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \phi(\mathbf{0}),\end{aligned}\quad (2.19)$$

worin wir die aus der Differenzierbarkeit von $\phi(\mathbf{r})$ folgende Stetigkeit und im letzten Schritt das Ergebnis der Rechnung zu (2.9) verwendet haben. Wir müssen jetzt noch zeigen, dass das zweite Integral in (2.18) verschwindet. Dazu nehmen wir an, dass $|\partial \phi(\mathbf{r}) / \partial \mathbf{r}| < C$, also beschränkt ist. Dann wird mit $V = K_r$

$$\left| \int_{K_r} d^3 r \frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{1}{r} \right| < C \int_0^r dr' 4 \pi r'^2 \frac{1}{r'^2} = 4 \pi r, \quad (2.20)$$

woraus mit $r \rightarrow 0$ die Behauptung folgt. Hier haben wir $d^3 r = 4 \pi r^2 dr$ für rotationsymmetrische Integranden gesetzt, vgl. auch Anhang A.

Die Aussage (2.16) lässt sich auf jeden beliebigen Punkt \mathbf{r}_0 übertragen, d.h., es gilt auch

$$\int_V d^3 r \phi(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \begin{cases} \phi(\mathbf{r}_0) & \mathbf{r}_0 \in V, \\ 0 & \mathbf{r}_0 \notin V, \end{cases} \quad (2.21)$$

Wir führen den Nachweis durch die Substitution $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$, wobei $d^3 r = d^3 r'$. Das Integrationsgebiet V verschiebt sich in das Gebiet V' , und V' enthält den Punkt $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ genau dann, wenn V den Punkt \mathbf{r}_0 enthält:

$$\int_V d^3 r \phi(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \int_{V'} d^3 r' \phi(\mathbf{r}' + \mathbf{r}_0) \delta(\mathbf{r}') = [\phi(\mathbf{r}' + \mathbf{r}_0)]_{\mathbf{r}'=\mathbf{0}} = \phi(\mathbf{r}_0),$$

wenn $\mathbf{r}_0 \in V$, anderenfalls verschwindet das Integral.

2.2.3 Nachweis des Gaußschen Integralsatzes

Wir gehen wie in 1.4.3 vor und weisen den Gaußschen Integralsatz zunächst für ein quaderförmiges Volumen V nach. Wir wählen ein Koordinatensystem mit dem Ursprung in einer der Ecken des Quaders und mit den Achsen $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ parallel zu den Kanten des Quaders. Dessen Kantenlängen seien $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$, vgl. Abbildung 2.1. Es seien F_α^\pm , $\alpha = 1, 2, 3$ die beiden Quaderflächen senkrecht zu den Richtungen von \mathbf{e}_α .

Es ist

$$\begin{aligned} \int_V d^3 r \frac{\partial \mathbf{a}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} &= \\ &= \int_0^{\Delta x_1} dx_1 \int_0^{\Delta x_2} dx_2 \int_0^{\Delta x_3} dx_3 \left(\frac{\partial a_1(\mathbf{r})}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2(\mathbf{r})}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3(\mathbf{r})}{\partial x_3} \right), \end{aligned}$$

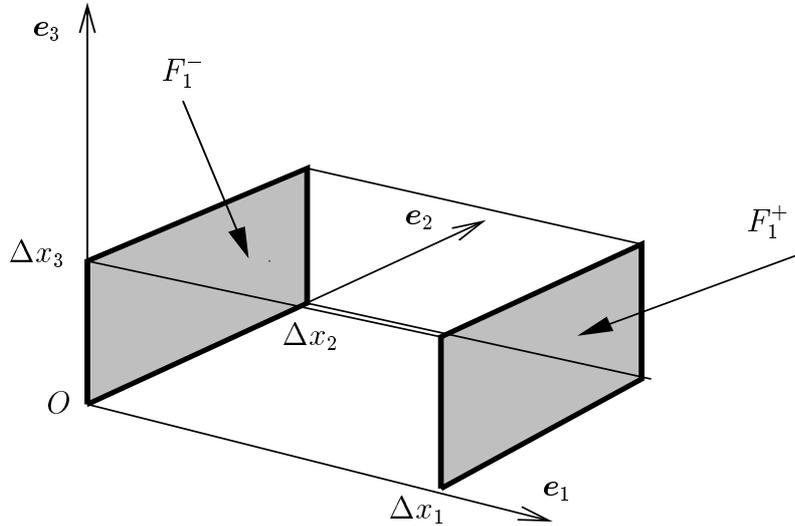


Abbildung 2.1: Zum Nachweis des Gaußschen Integralsatzes

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\Delta x_1} dx_1 \int_0^{\Delta x_2} dx_2 \int_0^{\Delta x_3} dx_3 \frac{\partial a_1(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1} = \\
 & = \int_0^{\Delta x_2} dx_2 \int_0^{\Delta x_3} dx_3 \underbrace{\int_0^{\Delta x_1} dx_1 \frac{\partial a_1(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1}}_{= a_1(\Delta x_1, x_2, x_3) - a_1(0, x_2, x_3)} \\
 & = \int_{F_1^+} df_1 a_1(\Delta x_1, x_2, x_3) - \int_{F_1^-} df_1 a_1(0, x_2, x_3) \\
 & = \int_{F_1^+} d\mathbf{f} \mathbf{a}(\mathbf{r}) + \int_{F_1^-} d\mathbf{f} \mathbf{a}(\mathbf{r}).
 \end{aligned}$$

Hier haben wir benutzt, dass die Flächenelemente $d\mathbf{f}$ auf den Flächen F_1^\pm die Gestalt

$$d\mathbf{f} = \pm dx_2 dx_3 \mathbf{e}_1 \quad \text{auf} \quad F_1^\pm$$

haben. Mit der Vereinbarung, dass die Normalenrichtung der $d\mathbf{f}$ aus dem Volumen V nach außen weist, haben die $d\mathbf{f}$ auf F_1^+ die Richtung der positiven x_1 -Achse, auf F_1^- die der negativen x_1 -Achse. Dadurch ist das veränderte Vorzeichen in dem Integral über F_1^- begründet. Wenn wir die obige Rechnung analog auch über die F_2^\pm und F_3^\pm durchführen, erhalten wir insgesamt für den Quader V

$$\begin{aligned}
\int_V d^3r \frac{\partial \mathbf{a}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} &= \int_{F_1^+} d\mathbf{f} \mathbf{a}(\mathbf{r}) + \int_{F_1^-} d\mathbf{f} \mathbf{a}(\mathbf{r}) + \\
&+ \int_{F_2^+} d\mathbf{f} \mathbf{a}(\mathbf{r}) + \int_{F_2^-} d\mathbf{f} \mathbf{a}(\mathbf{r}) + \\
&+ \int_{F_3^+} d\mathbf{f} \mathbf{a}(\mathbf{r}) + \int_{F_3^-} d\mathbf{f} \mathbf{a}(\mathbf{r}) + \\
&= \int_{\partial V} d\mathbf{f} \mathbf{a}(\mathbf{r}). \tag{2.22}
\end{aligned}$$

Wenn wir den Gaußschen Integralsatz für ein kleines Volumen ΔV statt V formulieren, dann können wir das Volumenintegral auf der linken Seite mit einem entsprechend verallgemeinerten Mittelwertsatz der Integralrechnung in die Form

$$\int_{\Delta V} d^3r \frac{\partial \mathbf{a}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} = \Delta V \left(\frac{\partial \mathbf{a}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \right)_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0} \tag{2.23}$$

bringen, worin \mathbf{r}_0 ein Punkt in dem Volumen ΔV ist. Wenn wir die genaue Lage des Punktes \mathbf{r}_0 unberücksichtigt lassen, erhalten wir einen Fehler der Ordnung $\Delta V O(\Delta V)$, so dass der Gaußsche Satz auch

$$\Delta V \frac{\partial \mathbf{a}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} = \int_{\partial \Delta V} d\mathbf{f} \mathbf{a}(\mathbf{r}) + \Delta V O(\Delta V) \tag{2.24}$$

lautet. Diese Form des Gaußschen Satzes begründet erst die Sprechweise "Quelle" für die Divergenz. Das Integral über die geschlossene Fläche $\partial \Delta V$ auf der rechten Seite lässt sich als der gesamte *Fluss* des Vektorfeldes aus dem Volumen ΔV deuten. Ein solcher Fluss kann nur auftreten, wenn sich in dem Volumen ΔV eine "Quelle" (oder "Senke") befindet.

Wir verallgemeinern die Aussage des Gaußschen Integralsatzes von einem Quader auf beliebige Volumina V , indem wir dieses beliebig genau durch einander berührende Quader ΔV_i , $i = 1, 2, \dots, N$ approximieren. Wir formulieren (2.22) für jedes der ΔV_i und bilden die Summe über $i = 1, 2, \dots, N$. Bei der i -Summe der Flächenintegrale auf der rechten Seite heben sich alle Beiträge von inneren Flächen auf, weil über jede solche Fläche zweimal mit entgegengesetzten Orientierungen integriert wird. Mit $N \rightarrow \infty$, so dass jedes $\Delta V_i \rightarrow 0$, erhalten wir so den Gaußschen Integralsatz für beliebige Volumina V in der Form (2.7).

Im Anhang B geben wir einen Nachweis für den Gaußschen Integralsatz ohne Verwendung von approximierenden Quader.

2.3 System von Punktladungen

Bisher haben wir das elektrische Feld einer einzelnen Punktladung diskutiert. Wir wollen unsere Überlegungen nunmehr auf den Fall verallgemeinern, dass wir es mit einem System von N Punktladungen q_i , $i = 1, 2, \dots, N$ zu tun haben, die sich jeweils an festen Orten \mathbf{r}_i befinden sollen. Von dieser Situation ausgehend werden wir im folgenden Abschnitt auch kontinuierliche Ladungsverteilungen betrachten.

Wenn es nur eine einzelne Punktladung q_i am Ort \mathbf{r}_i gäbe, dann könnten wir sofort unsere bisherigen Ergebnisse aus dem Kapitel 1 und den vorhergehenden Abschnitten dieses Kapitels durch eine Translation $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} - \mathbf{r}_i$ übernehmen: wir hätten den Abstandsvektor \mathbf{r} zum bisherigen Ort $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ einer Punktladung durch den Abstandsvektor $\mathbf{r} - \mathbf{r}_i$ vom Ort \mathbf{r}_i einer Punktladung q_i zu ersetzen. Für das elektrische Feld $\mathbf{E}_i(\mathbf{r})$ am Ort \mathbf{r} erhielten wir somit

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \Phi_i(\mathbf{r}), \\ \Phi_i(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|},\end{aligned}\tag{2.25}$$

vgl. (1.24) im Abschnitt 1.3.1. Aus der Existenz eines Potentials folgt $\Phi_i(\mathbf{r})$ wiederum, dass die Wirbel des Feldes $\mathbf{E}_i(\mathbf{r})$ verschwinden,

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = 0,\tag{2.26}$$

vgl. (1.44) im Abschnitt 1.3.3. Ebenso folgt für die Quellen des Feldes $\mathbf{E}_i(\mathbf{r})$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = \frac{q_i}{\epsilon_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i),\tag{2.27}$$

vgl. (2.14) im Abschnitt 2.2.2.

Von diesen Formulierungen aus können wir auf das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ des gesamten Systems von Punktladungen q_i , $i = 1, 2, \dots, N$ schließen, indem wir auf eine Überlegung im Abschnitt 1.2.4 zurückgreifen, gemäß der wir das elektrische Feld am Ort \mathbf{r} durch die Kraft $\mathbf{F}_{\Delta q}(\mathbf{r})$ auf eine Probeladung Δq am Ort \mathbf{r} messen wollten:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta q} \mathbf{F}_{\Delta q}(\mathbf{r}),$$

vgl. 1.14. Jetzt benutzen wir das vierte Newtonsche Prinzip, nach dem sich die Gesamtkraft auf einen Körper additiv, nämlich im Sinne der Vektoraddition, aus den einzelnen Kräften auf diesen Körper zusammensetzt. Als Körper stellen wir uns den Träger der Probeladung Δq vor, als die einzelnen Kräfte diejenigen, die die einzelnen Ladungen q_i auf Δq ausüben. Damit überträgt sich das vierte Newtonsche Prinzip offensichtlich von den Kräften auf die elektrischen Felder, d.h., das Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ des Gesamtsystems der Ladungen setzt sich additiv aus den einzelnen $\mathbf{E}_i(\mathbf{r})$ zusammen, so dass durch Summation von (2.25) über $i = 1, 2, \dots, N$ folgt:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \Phi(\mathbf{r}), \\ \Phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Nach wie vor existiert ein Potential $\Phi(\mathbf{r})$, so dass die Wirbel von $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ verschwinden. Außerdem summieren wir auch die Quellengleichung (2.27) über $i = 1, 2, \dots, N$ und erhalten für $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ die Feldgleichungen

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{\epsilon_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i). \quad (2.29)$$

Um uns die Aussage der Quellengleichung in (2.29) zu veranschaulichen, integrieren wir sie über ein beliebiges Volumen V :

$$\int_V d^3r \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{\epsilon_0} \int_V d^3r \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i). \quad (2.30)$$

Auf der linken Seite wenden wir den Gaußschen Integralsatz an, auf der rechten Seite ist offensichtlich

$$\int_V d^3r \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) = \begin{cases} 1 & \mathbf{r}_i \in V, \\ 0 & \mathbf{r}_i \notin V. \end{cases}$$

Damit wird aus (2.30)

$$\int_{\partial V} d\mathbf{f} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{q_i \in V} q_i = Q_V. \quad (2.31)$$

Q_V ist die gesamte, in dem Volumen V enthaltene elektrische Ladung.

Die Verwendung des vierten Newtonschen Prinzips zur Verallgemeinerung des elektrischen Feldes einer einzelnen Punktladung auf ein System von Punktladungen bedarf einer kritischen Diskussion. Durch die Übertragung des vierten Newtonschen Prinzips, das naheliegenderweise auch *Superpositionsprinzip* genannt wird, auf das elektrische Feld wird die durch die Gleichungen (2.29) beschriebene Feldtheorie für das Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ zu einer *linearen* Feldtheorie: das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ hängt *linear* mit den elektrischen Ladungen q_i zusammen. Eine Vervielfachung der Ladungen um einen beliebigen Faktor λ führt zu einer Vervielfachung des Feldes um denselben Faktor λ . Es zeigt sich also, dass das vierte Newtonsche Prinzip zwar eine Aussage über Kräfte macht, die in der Mechanik als Ursachen von Bewegungen von Körpern betrachtet werden, dass es jedoch in seinen Konsequenzen über den Bereich der Mechanik hinausgeht, nämlich eine Aussage über das Verhalten von Feldern macht. Folglich könnte man das vierte Newtonsche Prinzip auch in der Form "*Feldtheorien sind linear*" aussprechen, jedoch ist diese Aussage keinesfalls zutreffend. Schon die Feldtheorie für die Gravitationskräfte stellt sich als nicht-linear heraus, desgleichen z.B. die Quantenfeldtheorie der sogenannten *starken Wechselwirkung*, die etwa den Zusammenhalt von Nukleonen im Kern beschreibt.

Konsequenter wäre es gewesen, wenn wir beim Übergang von der Feldtheorie einer einzelnen Punktladung in (2.26) und (2.27) zur Feldtheorie eines Systems von Punktladungen in (2.29) *gefordert* hätten, dass wir eine lineare Feldtheorie entwerfen wollten. Die Berechtigung dieser Forderung müssen wir, wie immer bei Forderungen für physikalische Theorien, auf das Experiment stützen. Tatsächlich zeigt das Experiment, dass elektrische Felder sich im Sinne der Vektoraddition addieren bzw. überlagern.

2.4 Kontinuierliche Ladungsverteilungen

2.4.1 Die Ladungsdichte

In einer weiteren Verallgemeinerung wollen wir übergehen von einem System von Punktladungen q_i zu einer *kontinuierlichen Ladungsverteilung*. Wir zeigen nun zunächst, dass

$$\boxed{\rho(\mathbf{r}) := \sum_i q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)} \quad (2.32)$$

die Bedeutung einer räumlichen *Ladungsdichte* hat. Dazu integrieren wir (2.32) über ein Volumenelement ΔV :

$$\int_{\Delta V} d^3 r \rho(\mathbf{r}) = \sum_i q_i \int_{\Delta V} d^3 r \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) = Q_{\Delta V}, \quad (2.33)$$

worin $Q_{\Delta V}$ die in ΔV enthaltene elektrische Ladung ist, vgl. (2.30) im vorhergehenden Abschnitt. Aus (2.33) folgt mit $\Delta V \rightarrow 0$ auch

$$\rho(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{Q_{\Delta V}}{\Delta V}, \quad (2.34)$$

worin \mathbf{r} der Ort des Volumenelements ΔV ist. Mit (2.33) oder (2.34) ist der erwünschte Nachweis erbracht.

2.4.2 Formulierung der Feldgleichungen

Unter Verwendung der Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$ können wir nun den Ausdruck (2.28) für das Potential eines Systems von Punktladungen wie folgt umformen:

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \\ &= \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \sum_i \int d^3 r' \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i) \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \int d^3 r' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \sum_i q_i \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i) \\ &= \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \int d^3 r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Die Volumenintegration erfolgt über die Ortsvariable \mathbf{r}' , die die Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r}')$ "abtastet". Der Ort \mathbf{r} , der sogenannte *Aufpunkt*, ist der Ort, an dem das Potential

$\Phi(\mathbf{r})$ bestimmt wird. Alle Punkte \mathbf{r}' mit einer nichtverschwindenden Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r}')$ tragen zum Potential $\Phi(\mathbf{r})$ am Ort \mathbf{r} bei.

Mit einer völlig analogen Umformung finden wir für das elektrische Feld den Ausdruck

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (2.36)$$

Nach wie vor gilt auch

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \Phi(\mathbf{r}), \quad (2.37)$$

denn es ist

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \Phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \left(-\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \end{aligned}$$

Darin können wir den Operator $\partial/\partial \mathbf{r}$ in das Integral "hineinziehen", weil dieses über \mathbf{r}' und nicht über \mathbf{r} integriert. Außerdem haben wir die aus (1.23) im Abschnitt 1.3.1 durch Translation um $-\mathbf{r}'$ folgende Relation

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

benutzt. Es existiert also weiterhin ein Potential für das elektrische Feld, so dass dessen Wirbel wie bisher verschwinden. Die Aussage über die Quellen des elektrischen Feldes können wir direkt aus (2.29) im vorhergehenden Abschnitt unter Verwendung der Definition der Ladungsdichte in (2.32) übernehmen. Insgesamt erhalten wir so als Feldgleichungen

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}).} \quad (2.38)$$

Jede dieser beiden Feldgleichungen enthält eine Differentiation 1. Ordnung des Feldes, nämlich Rotation und Divergenz. Die Feldgleichungen (2.38) sind also zwei Differentialgleichungen 1. Ordnung für das elektrische Feld. Diese lassen sich zu einer Differentialgleichung 2. Ordnung kombinieren. Wenn wir nämlich die aus dem Verschwinden der Rotation folgende Potentialdarstellung (2.37) in die Quellengleichung in (2.38) einsetzen, erhalten wir

$$-\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \Phi(\mathbf{r}) \right) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}).$$

Die auf der linken Seite auftretende Operatorkombination schreiben wir in folgender Weise um:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \Phi(\mathbf{r}) \right) = \partial_\alpha \partial_\alpha \Phi(\mathbf{r}) = \Delta \Phi(\mathbf{r}),$$

vgl. den Abschnitt 2.1. Δ ist wiederum der Laplace-Operator, nicht zu verwechseln mit der oben verwendeten Schreibweise ΔV . Wir erhalten also aus den beiden Feldgleichungen (2.38) die äquivalente Gleichung

$$\Delta \Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}), \quad (2.39)$$

auch *Poisson-Gleichung* genannt. Da der Laplace-Operator zwei Differentiationen enthält, ist die Poisson-Gleichung in der Tat eine Differentialgleichung 2. Ordnung.

Das Problem der durch die Feldgleichungen (2.38) oder durch die Poisson-Gleichung beschriebenen Elektrostatik besteht darin, aus einer vorgegebenen Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$ das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ bzw. sein Potential $\Phi(\mathbf{r})$ zu berechnen. Zur Lösung dieses Problems sind *Randbedingungen* vorzugeben, z.B. das Verhalten von $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ bzw. von $\Phi(\mathbf{r})$ für $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$. Wir werden auf einige der Lösungstechniken der Elektrostatik im weiteren Verlauf des Textes eingehen. Dabei werden wir auch andere als die eben genannten Randbedingungen kennenlernen.

Diese letztere Bemerkung gibt Anlass zu einer Rückschau auf unsere bisherige Vorgehensweise in diesem und im vorhergehenden Kapitel. Was die Lösungen der elektrostatischen Feldgleichungen bzw. der Poisson-Gleichung betrifft, so kennen wir ja bereits eine solche Lösung, nämlich $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ aus (2.36) bzw. $\Phi(\mathbf{r})$ aus (2.35). Diese beiden Lösungen erfüllen als Randbedingung $\mathbf{E}(\mathbf{r}) \rightarrow 0$ bzw. $\Phi(\mathbf{r}) \rightarrow 0$ für $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$. (Hierzu müssen wir die physikalisch sinnvolle Voraussetzung machen, dass die Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$ nur in einem endlichen Bereich des Raumes nichtverschwindende Beiträge liefert.) Tatsächlich sind wir sogar umgekehrt vorgegangen: aus der Lösung $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ für eine einzelne Punktladung $\rho(\mathbf{r}) = q \delta(\mathbf{r})$ haben wir auf die Feldgleichungen geschlossen, nämlich auf das Verschwinden der Wirbel im Kapitel 1 und auf die Ladung als Quelle des Feldes in diesem Kapitel. Diese Vorgehensweise erscheint problematisch: aus einer speziellen Lösung schließen wir auf die Art der Feldgleichungen, um aus diesen später weitere Lösungen zu anderen Randbedingungen zu gewinnen und für physikalisch real zu halten. Die spezielle Lösung für eine Punktladung erfüllt natürlich auch andere Gleichungen als die in (2.38) formulierten Feldgleichungen, sogar beliebig viele andere Gleichungen. Es ist zu begründen, warum wir die Wirbel und Quellen des Feldes zur Formulierung einer Feldtheorie heranziehen. Ein wesentliches Argument dafür ist, dass Rotation und Divergenz geometrisch invariante Operationen sind, d.h., dass die mit ihnen formulierten Feldgleichungen unter Koordinatentransformationen, wie wir sie in den Abschnitten 1.3.2 und 1.3.3 betrachtet haben, ihre Form behalten, d.h., *forminvariant* sind. Das müssen wir selbstverständlich von einer physikalisch realen Feldtheorie fordern, dass ihre Form nicht von dem verwendeten Koordinatensystem abhängt. Diesen Invarianzgedanken werden wir später bei der relativistischen Formulierung der Feldtheorie verwenden, um dort einen ganz anderen Weg ihrer physikalischen Begründung zu finden. Vorerst müssen wir nochmals darauf verweisen, dass das physikalische Experiment die Formulierung der Feldgleichungen in (2.38) bestätigt.

2.4.3 Glatte Ladungsverteilungen

Die in (2.32) bzw. (2.34) definierte räumliche Ladungsdichte

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_i q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{Q_{\Delta V}}{\Delta V} \quad (2.40)$$

besitzt nur am Ort der Ladungen q_i nichtverschwindende Werte, ist also eine sehr unstetige "Funktion", vgl. Abschnitt 2.2.2. Wir könnten uns vorstellen, dass die Ladungen q_i diejenigen von Teilchen wie Elektronen, Atome oder Moleküle sind. Dann wäre $\rho(\mathbf{r})$ eine auf der *mikroskopischen* Längenskala, d.h. auf der Längenskala

der Teilchenabstände sehr unstetige Funktion. Auf einer *makroskopischen* Längenskala, die typischerweise immer nur über sehr viele Teilchen variiert, erwarten wir aber einen glatten Verlauf der Ladungsdichte. Diese Glättung können wir dadurch erreichen, dass wir den Limes $\Delta V \rightarrow 0$ in (2.40) fallenlassen, also

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{Q_{\Delta V}}{\Delta V} \quad (2.41)$$

schreiben und ΔV so wählen, dass es

- einerseits immer noch sehr viele mikroskopische Teilchen enthält, aber
- andererseits hinreichend klein ist, um noch Änderungen der Ladungsdichte auf einer makroskopischen Längenskala zu erfassen.

Hierzu müssen wir voraussetzen, dass es ein entsprechendes "Fenster" zwischen der mikroskopischen und der makroskopischen Längenskala gibt, wodurch die sinnvoll beschreibbaren Änderungen der Ladungsdichte eingeschränkt werden, nämlich auf solche, die sich über viele Teilchenabstände erstrecken. Wir werden auf diese Problematik ausführlicher zurückkommen, wenn wir das Verhalten von Materie in Feldern beschreiben werden.

2.4.4 Feldlinien

Feldlinien sind ein anschauliches Hilfsmittel, um sich den Verlauf von Feldern vorzustellen. Mit der Angabe eines Feldes $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ wird jedem Punkt \mathbf{r} des Raumes ein Vektor \mathbf{E} zugeordnet, d.h. ein "Pfeil" bestimmter Länge und bestimmter Richtung. Diese Zuordnung lässt sich grafisch, z.B. schon in zwei Dimensionen, nur sehr schwer darstellen. Die Feldlinie ist eine vereinfachte Darstellung des Feldes. Sie wird so konstruiert, dass sie von einem beliebigen Punkt \mathbf{r}_0 ausgehend immer in die jeweilige Feldrichtung fortgesetzt wird, d.h., dass die Linien-Elemente $d\mathbf{r}$ am Ort \mathbf{r} immer parallel zu $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ sein sollen. Denken wir uns die Feldlinie in Parameterform dargestellt, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, dann soll

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{E}(\mathbf{r}(s)) \quad (2.42)$$

sein, bzw. die Feldlinie $\mathbf{r}(s)$ soll eine Lösung der vektoriellen Differential-Gleichung (2.42) sein. Dabei soll s ein beliebiger Parameter sein, z.B. die Bogenlänge. Die

Feldlinie charakterisiert nur die Richtung des Feldes, zunächst jedoch nicht seine Stärke, also nicht seinen Betrag $|\mathbf{E}(\mathbf{r})|$. Das ergibt sich bereits aus der Beliebigkeit der Parameterwahl für s .

Wenn wir die isolierten Punkte ausschließen, in denen $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$, dann ist eine Feldlinie durch Vorgabe eines Punktes \mathbf{r}_0 , z.B. $\mathbf{r}(s=0) = \mathbf{r}_0$, eindeutig bestimmt. Das folgt insbesondere aus der physikalisch begründeten Annahme, dass $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ jedem Punkt \mathbf{r} nur einen Wert des Feldes und damit nur eine Feldrichtung zuordnet. Folglich können sich Feldlinien nicht schneiden.

Eine entscheidende Frage ist, ob die Feldlinien einen Anfang und ein Ende besitzen oder ob sie in sich geschlossene Linien sind. Um diese Frage zu beantworten, betrachten wir den Ausdruck

$$\oint_{\partial V} d\mathbf{f} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_V d^3r \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}),$$

worin wir den Gaußschen Integralsatz verwendet haben und V ein beliebiges Volumen mit der Randfläche ∂V sei. Wir setzen auf der linken Seite die Differentialgleichung (2.42) ein, auf der rechten Seite die Feldgleichung (2.38) für die Divergenz des elektrischen Feldes und erhalten

$$\oint_{\partial V} d\mathbf{f} \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V d^3r \rho(\mathbf{r}) = \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad (2.43)$$

worin Q die Ladung in V ist. Das Flächen-Integral auf der linken Seite liefert einen positiven Beitrag, wenn eine Feldlinie das Volumen V verlässt, d.h., die Richtung von $d\mathbf{f}$ besitzt, und einen negativen Beitrag, wenn eine Feldlinie in das Volumen V eintritt. Das bedeutet, dass eine Feldlinie nur dann in V beginnen oder enden kann, wenn das Volumen V eine elektrische Ladung besitzt, bzw. dass Feldlinien des elektrischen Feldes bei positiven Ladungen beginnen und bei negativen Ladungen enden.

Wir fragen weiter, ob es auch in sich geschlossene elektrische Feldlinien geben kann. Dazu betrachten wir den Ausdruck

$$\oint_{\partial F} d\mathbf{r} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_F d\mathbf{f} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}),$$

worin wir den Stokesschen Integralsatz verwendet haben und F ein beliebiges Flächenstück mit der geschlossenen Randlinie ∂F ist. Wiederum setzen wir links

die Differential-Gleichung (2.42) ein, auf der rechten Seite die Feldgleichung (2.38) für die Rotation des elektrischen Feldes und erhalten

$$\oint_{\partial F} d\mathbf{r} \frac{d\mathbf{r}}{ds} = 0. \quad (2.44)$$

Wir führen jetzt einen Widerspruchs-Beweis. Es sei L eine in sich geschlossene Feldlinie, die wir als Randlinie eines entsprechenden Flächenstücks F wählen können. Dann folgt

$$\oint_L d\mathbf{r} \frac{d\mathbf{r}}{ds} = 0. \quad (2.45)$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass der Parameter s die Bogenlänge sei, so dass $(d\mathbf{r})^2 = (ds)^2$. Dann wird aus (2.45)

$$\oint_L ds = 0. \quad (2.46)$$

Auf der linken Seite steht die Bogenlänge von L . Diese kann aber für eine endliche, in sich geschlossene Linie nicht verschwinden: es gibt also keine elektrischen Feldlinien, die in sich geschlossen sind.

Kapitel 3

Feldenergie, Multipole, Kräfte und Momente

In diesem Kapitel geht es darum, welche *Feldenergie* das von einer Ladungsverteilung erzeugte elektrische Feld enthält, wie sich eine Ladungsverteilung charakterisieren lässt, welche Energie eine Ladungsverteilung in einem äußeren, also nicht von ihr selbst erzeugten Feld besitzt und welche Kräfte und Drehmomente sie in dem Feld erfährt.

3.1 Feldenergie

3.1.1 Potentielle Energie

Wir betrachten eine elektrische Ladung q in einem Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, das von anderen Ladungen erzeugt sein soll. Die Ladung q erfährt in dem Feld eine Kraft

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -q \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \Phi(\mathbf{r}) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} V(\mathbf{r}), \quad (3.1)$$

worin

$$V(\mathbf{r}) := q \Phi(\mathbf{r}) \quad (3.2)$$

offensichtlich die Bedeutung einer potentiellen Energie der Ladung q im Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ besitzt. $V(\mathbf{r})$ ist nur bis auf eine Konstante bestimmt, so dass nur Differenzen eine physikalisch reale Aussage machen können: $V(\mathbf{r}_B) - V(\mathbf{r}_A)$ ist die Energie, die aufzubringen ist oder abgegeben wird, wenn die Ladung q von \mathbf{r}_A nach \mathbf{r}_B im Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ verschoben wird.

Wir wollen nun die potentielle Energie eines Systems von Ladungen q_i bestimmen. Jede der Ladungen q_i besitzt im Feld der anderen Ladungen $q_j, j \neq i$, eine potentielle Energie W_{ij} . Zunächst ist

$$\Phi_j(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|}$$

das Potential am Ort \mathbf{r} , das von einer Ladung q_j am Ort \mathbf{r}_j erzeugt wird. Folglich ist

$$W_{ij} = q_i \Phi_j(\mathbf{r}_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \quad (3.3)$$

die potentielle Energie der Ladung q_i am Ort \mathbf{r}_i in dem elektrischen Feld, das von der Ladung q_j erzeugt wird. Dieser Ausdruck ist offensichtlich symmetrisch in den beiden Ladungen, so dass W_{ij} auch die potentielle Energie der Ladung q_j in dem elektrischen Feld ist, das von der Ladung q_i erzeugt wird. Ferner gilt $W_{ij} \rightarrow 0$, wenn entweder $|\mathbf{r}_i| \rightarrow 0$ oder $|\mathbf{r}_j| \rightarrow 0$. Wir können also W_{ij} als die Energie interpretieren, die aufzubringen ist oder abgegeben wird, wenn die Ladung q_i aus dem unendlich Fernen bei festgehaltenem \mathbf{r}_j an den Ort \mathbf{r}_i gebracht wird, oder auch umgekehrt.

Wir bauen nun das System von Ladungen auf, indem wir zunächst q_1 aus dem unendlich Fernen an den Ort \mathbf{r}_1 bringen. Dabei findet kein Energieaustausch statt, weil noch kein elektrisches Feld vorhanden ist. In einem zweiten Schritt bringen wir q_2 aus dem unendlich Fernen bei festgehaltenem \mathbf{r}_1 an den Ort \mathbf{r}_2 . Dazu ist die Energie W_{21} aufzubringen bzw. wird die Energie W_{21} frei. Im nächsten Schritt wird q_3 aus dem unendlich Fernen bei festgehaltenen \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_2 an den Ort \mathbf{r}_3 gebracht. Dabei treten die Energiebeiträge W_{31} und W_{32} hinzu usw. Die gesamte potentielle Energie des Systems von Ladungen $q_i, i = 1, 2, \dots, N$ lautet also

$$W = \sum_{i,j (i>j)}^N W_{ij} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i,j (i>j)}^N \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \quad (3.4)$$

oder, weil $W_{ij} = W_{ji}$, auch

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i,j (i \neq j)}^N W_{ij} = \frac{1}{8 \pi \epsilon_0} \sum_{i,j (i \neq j)}^N \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}. \quad (3.5)$$

Der Faktor $1/2$ ist einzufügen, weil in (3.5) über jedes Paar von Indizes i, j doppelt summiert wird.

3.1.2 Feldenergie und ihre Dichte

Den Ausdruck W für die potentielle Energie des Systems von Ladungen q_i in (3.5) formen wir wie folgt um:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \sum_{j (j \neq i)}^N \frac{q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \Phi(\mathbf{r}_i) \\ &= \frac{1}{2} \int d^3r \sum_{i=1}^N q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \Phi(\mathbf{r}) \\ &= \frac{1}{2} \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Hier ist

$$\Phi(\mathbf{r}_i) = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \sum_{j (j \neq i)}^N \frac{q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}$$

das für q_i wirksame Potential. Es wird von den Ladungen q_j mit $j \neq i$ gebildet. Damit sind energetische Beiträge einer Selbstwechselwirkung von q_i mit sich selbst ausgeschlossen. Außerdem haben wir den Ausdruck (2.32),

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_i q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \quad (3.7)$$

für die räumliche Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$ eines Systems von Punktladungen aus dem Abschnitt 2.4.1 verwendet.

In einem weiteren Schritt ersetzen wir die Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$ in (3.6) durch die Quellgleichung

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r})$$

und führen eine *partielle Integration* aus:

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \right] \Phi(\mathbf{r}) = -\frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r \mathbf{E}(\mathbf{r}) \frac{\partial \Phi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}}. \quad (3.8)$$

Die partielle Integration geht wie im Fall eines eindimensionalen Integrals von einer Produktregel aus, nämlich

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} [\mathbf{E}(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r})] = \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \right] \Phi(\mathbf{r}) + \mathbf{E}(\mathbf{r}) \frac{\partial \Phi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}}. \quad (3.9)$$

Diese folgt aus der gewöhnlichen Produktregel der Differentiation nach einer Variablen. Das erkennen wir, wenn wir (3.9) in der Komponentenschreibweise (einschließlich Summationskonvention) formulieren,

$$\partial_\alpha [E_\alpha \Phi] = [\partial_\alpha E_\alpha] \Phi + E_\alpha \partial_\alpha \Phi,$$

wobei wir zur Vereinfachung der Schreibweise das Argument \mathbf{r} fortgelassen haben.

Wenn wir nun die Produktregel (3.9) über ein Volumen V integrieren und auf der linken Seite den Gaußschen Integralsatz verwenden, erhalten wir

$$\int_{\partial V} d\mathbf{f} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}) = \int_V d^3r \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \right] \Phi(\mathbf{r}) + \int_V d^3r \mathbf{E}(\mathbf{r}) \frac{\partial \Phi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}}. \quad (3.10)$$

Jetzt soll das Integrationsvolumen V den gesamten Raum umfassen. Wenn wir nun als Randbedingung voraussetzen, dass das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ im unendlich Fernen, also für $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$ verschwindet, dann verschwindet offensichtlich das Flächenintegral über ∂V auf der linken Seite von (3.10). Die dann verbleibende Aussage ist

gerade die in (3.8) verwendete partielle Integration. Partielle Integrationen werden in diesem Text noch häufiger und auch in anderen Kombinationen vorkommen.

Wenn wir in (3.8) $\mathbf{E} = -\partial\Phi/\partial\mathbf{r}$ beachten, können wir den Ausdruck für die potentielle Energie W in der Form

$$\boxed{W = \int d^3r w(\mathbf{r}), \quad w(\mathbf{r}) := \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2(\mathbf{r})} \quad (3.11)$$

schreiben. Hier hat $w(\mathbf{r})$ offensichtlich die Bedeutung der *räumlichen Dichte* der Energie des Systems von Ladungen q_i . Wenn wir die beiden Ausdrücke (3.5) und (3.11) nebeneinander schreiben,

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i,j (i \neq j)}^N \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} = \int d^3r w(\mathbf{r}), \quad (3.12)$$

erkennen wir, dass wir die Energie W alternativ als potentielle Energie der Ladungen q_i untereinander oder als eine inhärente Eigenschaft des Feldes $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ mit einer räumlichen Dichte $w(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \mathbf{E}^2(\mathbf{r})/2$ interpretieren können.

3.1.3 Der kontinuierliche Fall

Für den Übergang von einem System punktförmiger Ladungen q_i zu einer kontinuierlichen Ladungsverteilung mit der räumlichen Dichte $\rho(\mathbf{r})$ benutzen wir nochmals die Definition (3.7) von $\rho(\mathbf{r})$ wie schon in der letzten Zeile von (3.6) und erhalten für W

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i,j}^N \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \\ &= \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int d^3r \int d^3r' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \sum_i q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \sum_j q_j \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_j) \\ &= \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int d^3r \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Alle anderen Umformungen und Überlegungen folgen dem Schema ab der Gleichung (3.6). Auch die Überlegungen zur Glättung der Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$ von Punktladungen zu makroskopisch glatten Ladungsverteilungen können wir aus dem Abschnitt 2.4.3 übertragen.

Wenn wir die obige Umformung in (3.13) von unten nach oben verfolgen, erkennen wir, dass in der Summe über die i, j der Fall $i = j$ nicht mehr ausgeschlossen ist. Die kontinuierliche Version der Feldenergie W enthält also auch energetische Beiträge von Selbstwechselwirkungen. Wir müssten sie in dem Doppelintegral über \mathbf{r} und \mathbf{r}' konsequenterweise durch die Nebenbedingung $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$ ausschließen. Wenn das Doppelintegral aber überhaupt konvergiert, würde die Nebenbedingung $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$ keinen endlichen Beitrag zum Wert des Integrals leisten.

3.1.4 Alternative Herleitung des kontinuierlichen Falls

Wegen der soeben erwähnten Probleme beim Übergang vom Fall punktförmiger Ladungen zu einer kontinuierlichen Ladungsverteilung geben wir hier noch eine alternative Herleitung der Dichte der Feldenergie im kontinuierlichen Fall. Wir wollen die Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$ und das durch sie erzeugte Potential $\Phi(\mathbf{r})$ bzw. Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ in infinitesimalen Schritten $\delta\rho(\mathbf{r}), \delta\Phi(\mathbf{r}), \delta\mathbf{E}(\mathbf{r})$ aufbauen. Dieses Vorgehen entspricht dem im Abschnitt 3.1.1, wo wir das System aus Punktladungen schrittweise durch Einbringen der Ladungen q_1, q_2, q_3, \dots aufgebaut haben. Das soll jetzt an jedem Ort \mathbf{r} geschehen. Die Differentiale $\delta \dots$ sind also unabhängig von den Raumelementen d^3r . Wie im Abschnitt 3.1.1 begründet, ist das Einbringen einer zusätzlichen Ladung $\delta\rho(\mathbf{r})$ aus dem unendlich Fernen an den Ort \mathbf{r} mit einer potentiellen Energie

$$\delta w(\mathbf{r}) = \delta\rho(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}) \quad (3.14)$$

verbunden, wo $\Phi(\mathbf{r})$ das Potential der bereits vorhandenen Ladungen ist. Für den gesamten Raum ist also die potentielle Energie

$$\delta W = \int d^3r \delta\rho(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}) \quad (3.15)$$

aufzubringen. Wegen der Linearität der Feldgleichungen erfüllt die mit $\delta\rho(\mathbf{r})$ verknüpfte Änderung des Potentials $\delta\Phi(\mathbf{r})$ die Poisson-Gleichung

$$\Delta\delta\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta\rho(\mathbf{r}), \quad (3.16)$$

worin

$$\Delta = \partial_\alpha \partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}$$

wiederum der Laplace-Operator ist. Wir setzen diese Darstellung von Δ in (3.16) ein, führen eine partielle Integration aus und beachten, dass

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \Phi(\mathbf{r}), \quad \delta \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \delta \Phi(\mathbf{r}).$$

Auf diese Weise erhalten wir

$$\begin{aligned} \delta W &= -\epsilon_0 \int d^3r [\Delta \delta \Phi(\mathbf{r})] \Phi(\mathbf{r}) \\ &= -\epsilon_0 \int d^3r \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left[\frac{\partial \delta \Phi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \right] \Phi(\mathbf{r}) \\ &= \epsilon_0 \int d^3r \frac{\partial \delta \Phi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \Phi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \\ &= \epsilon_0 \int d^3r \delta \mathbf{E}(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}). \end{aligned} \tag{3.17}$$

Jetzt denken wir uns die Integration bezüglich des Differentials δ , also den schrittweisen infinitesimalen Aufbau der Ladungsverteilung und des Feldes durchgeführt. Wie bei der gewöhnlichen Integration über eine skalare Variable ergibt sich daraus

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r \mathbf{E}^2(\mathbf{r}), \tag{3.18}$$

gleichlautend mit (3.11)

3.2 Multipolentwicklung

3.2.1 Die Entwicklung

Die *Multipolentwicklung* erlaubt eine sehr einfache Berechnung des Potentials

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (3.19)$$

und des daraus folgenden Feldes $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\partial\Phi(\mathbf{r})/\partial\mathbf{r}$, wenn die Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r}')$ auf die Umgebung eines Punktes \mathbf{r}_0 konzentriert ist, also $\rho(\mathbf{r}') \neq 0$ nur in $|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0| < R$, und wenn der Aufpunkt \mathbf{r} , für den $\Phi(\mathbf{r})$ und $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ berechnet werden sollen, hinreichend weit von \mathbf{r}_0 entfernt ist, $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \gg R$. Man kann \mathbf{r}_0 als den *Ladungsschwerpunkt* von $\rho(\mathbf{r}')$ bezeichnen und z.B. durch

$$\mathbf{r}_0 := \frac{\int d^3r' \mathbf{r}' |\rho(\mathbf{r}')|}{\int d^3r' |\rho(\mathbf{r}')|}$$

definieren. Anders als beim Massenschwerpunkt ist in dieser Definition $|\rho(\mathbf{r}')|$ statt $\rho(\mathbf{r}')$ selbst zu verwenden, weil $\rho(\mathbf{r}')$ zum Unterschied von der Massendichte positiv oder negativ werden kann.

Zur Vereinfachung der Schreibweise wollen wir aber annehmen, dass $\mathbf{r}_0 = 0$, was durch eine Translation immer erreichbar ist. Da die Integrationsvariable \mathbf{r}' in (3.19) auf den Bereich $|\mathbf{r}'| < R$ beschränkt ist, entwickeln wir $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ im Integranden in eine Taylor-Reihe nach \mathbf{r}' bzw. nach dessen Komponenten x'_α :

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} - x'_\alpha \partial_\alpha \frac{1}{r} + \frac{1}{2} x'_\alpha x'_\beta \partial_\alpha \partial_\beta \frac{1}{r} + O(|\mathbf{r}'|^3), \quad (3.20)$$

worin $r = |\mathbf{r}|$. Außerdem gilt wiederum die Summationskonvention als vereinbart. Nun ist

$$\partial_\alpha \frac{1}{r} = -\frac{x_\alpha}{r^3},$$

vgl. Abschnitt 2.1, und durch nochmalige Differentiation nach x_β

$$\partial_\alpha \partial_\beta \frac{1}{r} = \partial_\beta \left(-\frac{x_\alpha}{r^3} \right) = \frac{3x_\alpha}{r^4} \partial_\beta r - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{r^3} = \frac{3x_\alpha x_\beta}{r^5} - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{r^3},$$

so dass die Entwicklung (3.20)

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{x_\alpha x'_\alpha}{r^3} + \frac{1}{2} x'_\alpha x'_\beta \left(\frac{3 x_\alpha x_\beta}{r^5} - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{r^3} \right) + O(|\mathbf{r}'|^3). \quad (3.21)$$

lautet. Diese Entwicklung setzen wir in den Ausdruck (3.19) für $\Phi(\mathbf{r})$ ein und erhalten eine Reihe, deren Terme, wie wir sogleich erkennen werden, sich $\sim 1/r^n$ mit $n = 1, 2, \dots$ verhalten:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi^{(0)}(\mathbf{r}) + \Phi^{(1)}(\mathbf{r}) + \Phi^{(2)}(\mathbf{r}) + \dots \quad (3.22)$$

Der *Monopolterm* hat die Form

$$\Phi^{(0)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}. \quad (3.23)$$

Hier ist

$$Q := \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \quad (3.24)$$

die gesamte Ladung der Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$. Als Funktion des Abstands r des Aufpunktes vom Ort der Ladungsverteilung ist $\Phi^{(0)}(\mathbf{r}) \sim 1/r$.

Der *Dipolterm* hat die Form

$$\begin{aligned} \Phi^{(1)}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x_\alpha}{r^3} \int d^3r' x'_\alpha \rho(\mathbf{r}') = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x_\alpha p_\alpha}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Hier ist

$$p_\alpha := \int d^3r' x'_\alpha \rho(\mathbf{r}') \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{p} := \int d^3r' \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \quad (3.26)$$

das sogenannte *Dipolmoment* der Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$. Für $|\mathbf{r}| = r \rightarrow \infty$ verhält sich das Skalarprodukt wie $|\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}| \sim r$, so dass $\Phi^{(1)}(\mathbf{r}) \sim 1/r^2$.

Im *Quadrupolterm*

$$\Phi^{(2)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \int d^3r' x'_\alpha x'_\beta \left(\frac{3x_\alpha x_\beta}{r^5} - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{r^3} \right) \rho(\mathbf{r}') \quad (3.27)$$

führen wir die folgende Umformung im zweiten Teil durch:

$$x'_\alpha x'_\beta \frac{\delta_{\alpha\beta}}{r^3} = \frac{x'_\alpha x'_\alpha}{r^3} = \frac{r'^2}{r^3} = \frac{r'^2}{r^5} x_\alpha x_\alpha = \frac{r'^2}{r^5} x_\alpha x_\beta \delta_{\alpha\beta}.$$

Damit lässt sich der Quadrupolterm $\Phi^{(2)}(\mathbf{r})$ wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} \Phi^{(2)}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2r^5} \int d^3r' \left(3x'_\alpha x'_\beta - r'^2 \delta_{\alpha\beta} \right) \rho(\mathbf{r}') x_\alpha x_\beta = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2r^5} D_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Hier ist

$$D_{\alpha\beta} := \int d^3r' \left(3x'_\alpha x'_\beta - r'^2 \delta_{\alpha\beta} \right) \rho(\mathbf{r}') \quad (3.29)$$

das sogenannte *Quadrupolmoment* der Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$. Für $|\mathbf{r}| = r \rightarrow \infty$ verhält sich $D_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta \sim r^2$, so dass $\Phi^{(2)}(\mathbf{r}) \sim 1/r^3$. Entsprechend sind die in (3.22) nicht explizit mitgeschriebenen Restterme $\sim 1/r^4$.

Wir schreiben die Multipol-Entwicklung noch einmal geschlossen auf,

$$\boxed{\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2r^5} D_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta + \dots,} \quad (3.30)$$

und erkennen, dass die Ladungsverteilung aus sehr großen Entfernungen gesehen so wirkt, als sei ihre gesamte Ladung Q in einem Punkt vereinigt. Verschwindet die gesamte Ladung Q , d.h., ist die Ladungsverteilung elektrisch neutral, dann besitzt sie aus sehr großen Entfernungen gesehen das Potential eines Dipols \mathbf{p} . Während

sich das Monopol-Potential wie $\sim 1/r$ verhält, gilt für das Dipol-Potential $\sim 1/r^2$. Verschwindet auch das Dipolmoment der Ladungsverteilung, dann wirkt sie aus sehr großen Entfernungen gesehen wie ein Quadrupol mit einem Potential $\sim 1/r^3$.

Aus (3.30) können wir das zugehörige elektrische Feld durch Bildung des Gradienten berechnen. Wir führen diese Rechnung bis einschließlich des Dipolterms durch:

$$E_\alpha(\mathbf{r}) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \partial_\alpha \frac{1}{r} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \partial_\alpha \frac{p_\beta x_\beta}{r^3} + \dots \quad (3.31)$$

Es ist $\partial_\alpha r^{-1} = -x_\alpha/r^3$, s.o., und

$$\partial_\alpha \frac{p_\beta x_\beta}{r^3} = -3 \frac{p_\beta x_\beta}{r^4} \partial_\alpha r + \frac{p_\alpha}{r^3} = -3 \frac{p_\beta x_\beta x_\alpha}{r^5} + \frac{p_\alpha}{r^3},$$

eingesetzt in (3.31)

$$\begin{aligned} E_\alpha(\mathbf{r}) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x_\alpha}{r^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3p_\beta x_\beta x_\alpha - r^2 p_\alpha}{r^5} + \dots, \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r} - r^2 \mathbf{p}}{r^5} + \dots \end{aligned} \quad (3.32)$$

3.2.2 Vektoren und Tensoren: das Quadrupolmoment als Tensor

Wir kommen auf eine Bemerkung am Ende des Abschnitts 1.3.2 zurück, dass wir indizierte "Objekte" a_α mit $\alpha = 1, 2, 3$ dann einen Vektor nennen wollten, wenn diese sich unter einer orthogonalen Transformation $U_{\alpha\beta}$ wie

$$a_\alpha = U_{\alpha\beta} \tilde{a}_\beta \quad \text{bzw.} \quad \tilde{a}_\alpha = U_{\beta\alpha} a_\beta \quad (3.33)$$

transformieren. (Wir benutzen hier für die transformierten Variablen das Symbol \tilde{a} statt a' , weil wir im vorhergehenden Abschnitt x'_α bereits als Integrationsvariable benutzt haben.) Wir hatten nachgewiesen, dass sich die Komponenten x_α des Ortsvektors wie (3.33) transformieren, desgleichen die Komponenten ∂_α des Gradienten,

d.h., dass der Operator $\partial/\partial\mathbf{r}$ Vektorcharakter besitzt. Aus dieser Bemerkung folgt bereits, dass das elektrische Feld wegen

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\Phi(\mathbf{r}) \quad \text{bzw.} \quad E_\alpha = -\partial_\alpha\Phi$$

ein Vektor ist, denn das Potential $\Phi = \Phi(\mathbf{r})$ ist ein *Skalar*, der invariant gegen orthogonale Transformationen ist.

Dass auch das Dipolmoment p_α ein Vektor ist, geht bereits direkt aus seiner Definition in (3.26) hervor, denn dort überträgt sich der Vektorcharakter des Ortsvektors x'_α auf die p_α . Wir führen die Rechnung explizit aus. Die Transformation des Ortsvektors lautet

$$x'_\alpha = U_{\alpha\beta}\tilde{x}'_\beta, \quad (3.34)$$

vgl. (3.33), eingesetzt in die Definition (3.26) für die p_α :

$$p_\alpha = \int d^3\tilde{r}' U_{\alpha\beta}\tilde{x}'_\beta\rho(\tilde{\mathbf{r}}') = U_{\alpha\beta}\tilde{p}_\beta, \quad \tilde{p}_\beta = \int d^3\tilde{r}' \tilde{x}'_\beta\rho(\tilde{\mathbf{r}}'). \quad (3.35)$$

In dieser Umformung haben wir auch das Volumenelement d^3r' transformiert. Als Skalar ist es gegen orthogonale Transformationen wie Längen und Winkel invariant, d.h. $d^3r' = d^3\tilde{r}'$.

Das in (3.29) definierte Quadrupolmoment $D_{\alpha\beta}$ ist ein Objekt mit zwei Indizes α, β , also zunächst einmal eine Matrix. Wir zeigen nun, dass auch $D_{\alpha\beta}$ ein bestimmtes Verhalten unter orthogonalen Transformationen besitzt, sich nämlich wie das Produkt $x'_\alpha x'_\beta$ von zwei Vektorkomponenten transformiert. Ein solches Produkt nennt man auch ein *äußeres Produkt*, zum Unterschied vom (invarianten) Skalarprodukt $x'_\alpha x'_\alpha$, in dem über α summiert wird. Zum Nachweis dieser Behauptung gehen wir aus von

$$x'_\alpha x'_\beta = U_{\alpha\gamma}U_{\beta\kappa}\tilde{x}'_\gamma\tilde{x}'_\kappa, \quad (3.36)$$

was direkt aus (3.34) folgt. Außerdem benutzen wir, dass wegen der Orthogonalität der $U_{\alpha\beta}$

$$\delta_{\alpha\beta} = U_{\alpha\gamma} U_{\beta\gamma} = U_{\alpha\gamma} U_{\beta\kappa} \delta_{\gamma\kappa}. \quad (3.37)$$

Damit formen wir $D_{\alpha\beta}$ aus (3.29) wie folgt um:

$$\begin{aligned} D_{\alpha\beta} &= \int d^3 r' \left(3 x'_\alpha x'_\beta - r'^2 \delta_{\alpha\beta} \right) \rho(\mathbf{r}') \\ &= \int d^3 \tilde{r}' U_{\alpha\gamma} U_{\beta\kappa} \left(3 \tilde{x}'_\gamma \tilde{x}'_\kappa - \tilde{r}'^2 \delta_{\gamma\kappa} \right) \rho(\tilde{\mathbf{r}}') = U_{\alpha\gamma} U_{\beta\kappa} \tilde{D}_{\gamma\kappa}, \quad (3.38) \\ \tilde{D}_{\gamma\kappa} &= \int d^3 \tilde{r}' \left(3 \tilde{x}'_\gamma \tilde{x}'_\kappa - \tilde{r}'^2 \delta_{\gamma\kappa} \right) \rho(\tilde{\mathbf{r}}'). \end{aligned}$$

Hier haben wir außerdem $r'^2 = \tilde{r}'^2$ benutzt, also die Invarianz einer Länge gegen orthogonale Transformationen.

Matrizen, die sich unter orthogonalen Transformationen wie $D_{\alpha\beta}$ in (3.38), also wie das äußere Produkt von Vektorkomponenten transformieren, heißen *Tensoren*. Das Quadrupolmoment einer Ladungsverteilung ist demnach ein Tensor. Im allgemeinen ist eine Matrix kein Tensor, z.B. transformiert sich $A_{\alpha\beta} := x_\alpha + x_\beta$ nicht wie ein äußeres Produkt. Wir werden später auch Tensoren mit mehr als zwei Indizes kennenlernen. Man bezeichnet deshalb $D_{\alpha\beta}$ als Tensor 2. Stufe. Entsprechend ist ein Vektor dann ein Tensor 1. Stufe. übrigens lässt sich die Beziehung (3.37) auch so lesen, dass sich das Kronecker-Symbol $\delta_{\alpha\beta}$ wie ein Tensor transformiert, jedoch stets dieselbe Form behält.

Das Quadrupolmoment hat weitere spezielle Eigenschaften. Wir bilden die Summe über seine Diagonalelemente $\alpha = \beta$. Wir übertragen die Summationskonvention auch auf Matrizen. In dem Ausdruck $D_{\alpha\alpha}$ soll also über $\alpha = 1, 2, 3$ summiert werden. Wir erhalten damit

$$D_{\alpha\alpha} = \int d^3 r' \left(3 x'_\alpha x'_\alpha - r'^2 \delta_{\alpha\alpha} \right) \rho(\mathbf{r}') = 0, \quad (3.39)$$

weil $x'_\alpha x'_\alpha = r'^2$ und $\delta_{\alpha\alpha} = 3$. $D_{\alpha\alpha}$ ist wie ein Skalarprodukt $x'_\alpha x'_\alpha$ invariant gegen orthogonale Transformationen. Man nennt $D_{\alpha\alpha}$ auch die *Spur* des Tensors $D_{\alpha\beta}$. Die Spur des Quadrupoltensors verschwindet also.

Aus der Definition (3.29) folgt auch, dass $D_{\alpha\beta} = D_{\beta\alpha}$, d.h., dass der Tensor des Quadrupolmoments *symmetrisch* ist. Für symmetrische (und reelle) Matrizen gilt nun der Satz, dass es eine orthogonale Transformation gibt, unter der die Matrix

diagonal wird. Dieser Satz gilt dann natürlich auch für Tensoren. Wir können uns vorstellen, dass $D_{\alpha\beta}$ bereits diagonal ist, d.h., $D_{\alpha\beta} = 0$ für $\alpha \neq \beta$. Dann ist das Quadrupolmoment einer Ladungsverteilung nur durch die drei Diagonalelemente bestimmt. Da, wie wir soeben gesehen haben, aber die Spur verschwindet, also $D_{11} + D_{22} + D_{33} = 0$, ist das Quadrupolmoment einer Ladungsverteilung tatsächlich nur durch zwei unabhängige Größen bestimmt.

3.3 Ladungsverteilungen in äußeren Feldern

Im vorhergehenden Abschnitt haben wir eine Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$ auf ihre Rolle als *felderzeugende* Ladung untersucht. Falls die Ladungsverteilung hinreichend eng begrenzt ist bzw. aus sehr weiter Entfernung betrachtet wird, kann das elektrische Feld, das durch sie als Quelle erzeugt wird, als Überlagerung der Felder einer Gesamtladung, eines Dipols, eines Quadrupols usw. betrachtet werden. In diesem Abschnitt wollen wir eine ganz andere Situation untersuchen, nämlich, wie sich eine Ladungsverteilung in einem *äußeren* elektrischen Feld verhält, also in einem Feld, das nicht durch das betrachtete $\rho(\mathbf{r})$, sondern von anderen, hinreichend weit entfernten Ladungen erzeugt wird. Wir wollen diese Situation durch folgende Verabredungen präzisieren: es sei $\rho(\mathbf{r}')$ eine Ladungsverteilung in der Umgebung des Ladungsschwerpunktes \mathbf{r} , d.h., $\rho(\mathbf{r}') \neq 0$ in $|\mathbf{r}' - \mathbf{r}| \leq R$. Außerdem sei $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ für $\rho(\mathbf{r}')$ ein äußeres elektrisches Feld:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} \mathbf{E}(\mathbf{r}') = 0 \quad \text{im Bereich} \quad \rho(\mathbf{r}') \neq 0. \quad (3.40)$$

Durch die Einwirkung des äußeren elektrischen Feldes soll die Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r}')$ nur translatorisch verschoben oder gegen die Feldrichtung gedreht werden können. Ihre innere Struktur soll dabei ungeändert bleiben, insbesondere soll das Dipolmoment dem Betrage nach konstant bleiben: $|\mathbf{p}| = \text{const.}$

3.3.1 Energie

Gemäß (3.2) hat eine Ladung q in einem äußeren Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ mit dem Potential $\Phi(\mathbf{r})$ die Energie $q\Phi(\mathbf{r})$. Folglich hat die Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r}')$ die Energie

$$W = \int d^3 r' \rho(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}'). \quad (3.41)$$

Wir nehmen an, dass wir das äußere Potential $\Phi(\mathbf{r}')$ um den Ort \mathbf{r} der Ladungsverteilung in eine Taylor-Reihe entwickeln können. Diese Entwicklung lautet in Komponentenschreibweise

$$\Phi(\mathbf{r}') = \Phi(\mathbf{r}) + (x'_\alpha - x_\alpha) \partial_\alpha \Phi(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} (x'_\alpha - x_\alpha) (x'_\beta - x_\beta) \partial_\alpha \partial_\beta \Phi(\mathbf{r}) + \dots \quad (3.42)$$

Es ist $\partial_\alpha \Phi(\mathbf{r}) = -E_\alpha(\mathbf{r})$. Außerdem verwenden wir die Umformung

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (x'_\alpha - x_\alpha) (x'_\beta - x_\beta) \partial_\alpha \partial_\beta \Phi &= \\ &= -\frac{1}{2} (x'_\alpha - x_\alpha) (x'_\beta - x_\beta) \partial_\beta E_\alpha \\ &= -\frac{1}{6} \left[3 (x'_\alpha - x_\alpha) (x'_\beta - x_\beta) - \delta_{\alpha\beta} (\mathbf{r}' - \mathbf{r})^2 \right] \partial_\alpha E_\beta - \frac{1}{6} (\mathbf{r}' - \mathbf{r})^2 \partial_\alpha E_\alpha, \end{aligned}$$

worin wir zur Vereinfachung der Schreibweise die Argumente \mathbf{r} fortgelassen haben. Einsetzen in die Entwicklung (3.42) und in das Integral in (3.41) ergibt unter Beachtung von $\partial_\alpha E_\alpha = 0$, vgl. (3.40),

$$\boxed{W = Q \Phi(\mathbf{r}) - \mathbf{p} \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \frac{1}{6} D_{\alpha\beta} \partial_\alpha E_\beta + \dots} \quad (3.43)$$

Hier haben wir die Definitionen der Gesamtladung Q , des Dipolmoments \mathbf{p} und des Quadrupolmoments $D_{\alpha\beta}$ der Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r}')$ aus dem vorhergehenden Abschnitt übernommen, allerdings nunmehr für einen nichtverschwindenden Ladungsschwerpunkt bei \mathbf{r} :

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \int d^3 r' (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}'), \\ D_{\alpha\beta} &= \int d^3 r' \left[3 (x'_\alpha - x_\alpha) (x'_\beta - x_\beta) - (\mathbf{r}' - \mathbf{r})^2 \delta_{\alpha\beta} \right] \rho(\mathbf{r}'). \end{aligned}$$

Wir interpretieren dieses Ergebnis wie folgt:

- (1) Wenn die Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r}')$ eine Gesamtladung $Q \neq 0$ besitzt, dann beschreibt der führende Term in (3.43) die uns bereits bekannte potentielle Energie $W = Q \Phi(\mathbf{r})$ einer Ladung Q in einem äußeren Potential $\Phi(\mathbf{r})$.
- (2) Wenn $Q = 0$, ist der führende Term der Dipolterm $W = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})$. Dieser Ausdruck wird sehr häufig auf die Situation angewendet, dass der Ort \mathbf{r} des Dipols konstant bleibt, dass aber \mathbf{p} seine Orientierung relativ zum Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ (bei $|\mathbf{p}| = \text{const}$) ändern kann. Dann können wir auch

$$W = -|\mathbf{p}| |\mathbf{E}(\mathbf{r})| \cos \theta \quad (3.44)$$

schreiben, worin θ der von \mathbf{p} und $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ eingeschlossene Winkel ist. Die potentielle Energie des Dipols ist minimal, wenn dieser sich in Richtung von $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ orientiert.

Wenn das elektrische Feld homogen ist, also $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \text{const}$, hat der Dipol offensichtlich an jeder Stelle des Feldes dieselbe potentielle Energie. Wir erwarten deshalb, dass es nur dann einen Dipolbeitrag zur Kraft auf eine Ladungsverteilung gibt, wenn das äußere Feld nicht homogen ist.

- (3) Wenn $Q = 0$ und $\mathbf{p} = 0$, ist der führende Term der Quadrupolterm. Er leistet nur in inhomogenen Feldern $\partial_\alpha E_\beta \neq 0$ einen Beitrag. Da das Quadrupolmoment symmetrisch ist, $D_{\alpha\beta} = D_{\beta\alpha}$, lässt sich der Quadrupolbeitrag zur Energie auch in symmetrisierter Form

$$-\frac{1}{6} D_{\alpha\beta} \partial_\alpha E_\beta = -\frac{1}{12} D_{\alpha\beta} (\partial_\alpha E_\beta + \partial_\beta E_\alpha) \quad (3.45)$$

schreiben.

3.3.2 Kräfte

Eine Ladung q erfährt in einem äußeren Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ die Kraft $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q \mathbf{E}(\mathbf{r})$. Folglich erfährt die Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r}')$ die Kraft

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \int d^3 r' \rho(\mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}') \quad \text{bzw.} \quad F_\alpha(\mathbf{r}) = \int d^3 r' \rho(\mathbf{r}') E_\alpha(\mathbf{r}'). \quad (3.46)$$

Jetzt nehmen wir an, dass sich das Feld $E_\alpha(\mathbf{r}')$ um den Ort \mathbf{r} der Ladungsverteilung in eine Taylorreihe entwickeln können:

$$E_\alpha(\mathbf{r}') = E_\alpha(\mathbf{r}) + (x'_\beta - x_\beta) \partial_\beta E_\alpha(\mathbf{r}) + \dots \quad (3.47)$$

Wir setzen in die Entwicklung (3.46) ein und erhalten

$$\begin{aligned} F_\alpha(\mathbf{r}) &= \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') [E_\alpha(\mathbf{r}) + (x'_\beta - x_\beta) \partial_\beta E_\alpha(\mathbf{r}) + \dots] \\ &= Q E_\alpha(\mathbf{r}) + p_\beta \partial_\beta E_\alpha(\mathbf{r}) + \dots, \\ \mathbf{F}(\mathbf{r}) &= Q \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \left(\mathbf{p} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \dots \end{aligned} \quad (3.48)$$

$Q \mathbf{E}(\mathbf{r})$ ist wieder der uns bekannte Monopolterm: in niedrigster Ordnung verhält sich die Ladungsverteilung wie die Gesamtladung Q als Punktladung. Der Dipolbeitrag enthält den sogenannten *Vektorgradienten*

$$\mathbf{p} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = p_\alpha \partial_\alpha, \quad (3.49)$$

der allerdings ein skalarer Operator ist. Seine Anwendung auf das Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ ist zu vergleichen mit der Multiplikation des Feldes mit einem Skalar. Wir benutzen nun die im Anhang D hergeleitete Hilfsformel

$$\mathbf{C} \times \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{D}(\mathbf{r}) \right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\mathbf{C} \mathbf{D}(\mathbf{r})) - \left(\mathbf{C} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{D}(\mathbf{r}), \quad (3.50)$$

worin \mathbf{C} ein konstanter Vektor und $\mathbf{D}(\mathbf{r})$ ein beliebiges (differenzierbares) Vektorfeld sei. Wir setzen $\mathbf{C} = \mathbf{p}$ und $\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r})$ und erhalten unter Beachtung von

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$$

die Identität

$$\left(\mathbf{p} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\mathbf{p} \mathbf{E}(\mathbf{r})), \quad (3.51)$$

eingesetzt in (3.48)

$$\boxed{\mathbf{F}(\mathbf{r}) = Q \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (-\mathbf{p} \mathbf{E}(\mathbf{r})) + \dots} \quad (3.52)$$

Der Dipolbeitrag lässt sich also als Gradient des Dipol-Potentials $W_{\mathbf{p}} = -\mathbf{p} \mathbf{E}(\mathbf{r})$ schreiben. Der Gradient $\partial/\partial \mathbf{r}$ ist hier aber mit einer Translation des Ortes \mathbf{r} des Dipols zu bilden, nicht etwa mit einer Änderung seiner Orientierung. Wir erkennen auch, dass es wie erwartet nur in einem inhomogenen Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ überhaupt einen Dipolbeitrag zur Kraft gibt.

3.3.3 Drehmomente

Analog zum Fall der Kraft in (3.46) erfährt eine Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r}')$ bezogen auf ihren Ladungsschwerpunkt bei \mathbf{r} das Drehmoment

$$\boldsymbol{\tau} = \int d^3 r' \rho(\mathbf{r}') (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \times \mathbf{E}(\mathbf{r}') \quad (3.53)$$

Wieder verwenden wir die Taylor-Reihe (3.47) für $\mathbf{E}(\mathbf{r}')$ und finden in niedrigster nichtverschwindender Ordnung

$$\boxed{\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \dots} \quad (3.54)$$

Im Drehmoment tritt kein Monopolterm auf.

Auch das Dipol-Drehmoment $\boldsymbol{\tau}$ lässt sich als "Gradient" des Dipol-Potentials $W_{\mathbf{p}} = -\mathbf{p} \mathbf{E}$ schreiben, allerdings nicht in Bezug auf den Ladungsschwerpunkt wie bei den Kräften, sondern in Bezug auf den Winkel von \mathbf{E} nach \mathbf{p} bei $|\mathbf{p}| = \text{const.}$ Es sei $\mathbf{n} = \boldsymbol{\tau}/|\boldsymbol{\tau}|$ der Einheitsvektor in Richtung von $\boldsymbol{\tau}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \boldsymbol{\tau} &= \mathbf{n} (\mathbf{p} \times \mathbf{E}) = -\mathbf{n} (\mathbf{E} \times \mathbf{p}) = -|\mathbf{p}| |\mathbf{E}| \sin \phi = \\ &= \frac{d}{d\phi} (|\mathbf{p}| |\mathbf{E}| \cos \phi) = -\frac{dW_{\mathbf{p}}}{d\phi}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Hier ist ϕ der von der \mathbf{E} -Richtung aus zu messende Winkel zwischen \mathbf{E} und \mathbf{p} , da sich das Dipolmoment \mathbf{p} und nicht das Feld \mathbf{E} drehen soll.

3.3.4 Induzierte Dipole

Bisher haben wir in diesem Abschnitt den Fall betrachtet, dass die Ladungsverteilungen $\rho(\mathbf{r}')$ in einem äußeren Feld sich nur translatorisch bewegen oder gegen die Richtung des Feldes \mathbf{E} drehen können sollten. Im übrigen aber sollte das Feld die Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r}')$ nicht verändern können. So sollte das Dipolmoment dem Betrage nach konstant bleiben: $|\mathbf{p}| = \text{const}$. Jetzt betrachten wir eine ganz andere Situation: durch die Einwirkung des äußeren Feldes \mathbf{E} soll überhaupt erst ein Dipolmoment entstehen, bzw. *induziert* werden. Es soll also $\mathbf{p} = 0$ sein, wenn $\mathbf{E} = 0$. Eine solche Situation tritt dann auf, wenn sich neutrale Teilchen, z.B. Atome oder Moleküle, in einem äußeren Feld befinden und dort durch Ladungstrennung, z.B. Verschiebung der negativen Elektronen gegen die positiven Atomrümpfe, *polarisiert* werden. Dieser Vorgang ist einer der elementaren Prozesse für das Verhalten von Materie in elektrischen Feldern. Wir werden später in diesem Text ausführlich darauf eingehen und wollen hier nur die energetischen Beziehungen betrachten und von den bisher diskutierten Situationen zu unterscheiden lernen.

Sehr häufig findet man, dass die Dipolmomente dem elektrischen Feld, durch das sie induziert werden, proportional sind, dass also

$$\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E} \quad (3.56)$$

gilt. Die Proportionalitätskonstante α heißt dann die *Polarisierbarkeit*. Wir wollen jetzt die Bildung eines induzierten Dipols in infinitesimalen Schritten $\delta\mathbf{p}$ verfolgen. Bei jedem solchen Schritt ändert sich die Feldenergie des Dipols um $\delta W = -\mathbf{E} \delta\mathbf{p}$. Das folgt aus (3.43), wenn wir Ladungsneutralität annehmen, also $Q = 0$, und nur den Dipolbeitrag berücksichtigen. Nun kann sich das Dipolmoment von induzierten Dipolen nur durch Änderungen $\delta\mathbf{E}$ des Feldes verändern, wobei gemäß (3.56) $\delta\mathbf{p} = \alpha \delta\mathbf{E}$ gilt. Somit ist

$$\delta W = -\mathbf{E} \delta\mathbf{p} = -\frac{1}{\alpha} \mathbf{p} \delta\mathbf{p},$$

und durch Integration über $\delta\mathbf{p}$

$$W = -\frac{1}{2\alpha} \mathbf{p}^2 = -\frac{1}{2} \mathbf{p} \mathbf{E}. \quad (3.57)$$

Gegenüber dem Fall des gedrehten Dipols mit $|\mathbf{p}| = \text{const}$ tritt ein Faktor 1/2 auf: der induzierte Dipol gewinnt nur die Hälfte der Energie des gedrehten Dipols.

Kapitel 4

Elektrostatik

Das Grundproblem der Elektrostatik besteht darin, die Poisson-Gleichung

$$\Delta\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\mathbf{r}) \quad (4.1)$$

für eine vorzugebende Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$ zu lösen. Die Poisson-Gleichung ist eine partielle Differential-Gleichung, deren Lösung nur dann eindeutig wird, wenn außerdem *Randbedingungen* vorgegeben werden. Eine besonders einfache Randbedingung ist die Forderung, dass das Potential $\Phi(\mathbf{r})$ im Unendlichen verschwinden soll:

$$|\mathbf{r}| \rightarrow \infty : \quad \Phi(\mathbf{r}) \rightarrow 0. \quad (4.2)$$

Die partielle Differential-Gleichung (4.1) zusammen mit einer Randbedingung wie (4.2) nennt man auch ein *Randwert-Problem*. Für das obige Randwert-Problem ist uns die Lösung bereits aus dem Kapitel 3 bekannt, nämlich

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (4.3)$$

Die Theorie der Randwert-Probleme der Elektrostatik (und ebenfalls der später in diesem Text noch einzuführenden Magnetostatik) befasst sich mit sehr verschiedenen Typen von Randbedingungen, insbesondere im Endlichen, und stellt ein eigenständiges und sehr umfangreiches Kapitel der Elektrodynamik dar, das wir im

Rahmen dieses Textes nur sehr begrenzt behandeln können. Wir werden in diesem Kapitel einige typische elektrostatische Situationen behandeln und auch kurz auf die allgemeine Problematik eingehen.

Wir erwähnen an dieser Stelle noch eine einfache Folgerung aus der Poisson-Gleichung für den Fall verschwindender Ladungsdichte. Wenn in einem Bereich B des Raumes $\rho(\mathbf{r}) = 0$, also auch $\Delta\Phi(\mathbf{r}) = 0$, dann kann das Potential $\Phi(\mathbf{r})$ im Inneren von B kein relatives Extremum besitzen. Wenn es nämlich ein solches relatives Extremum an einem Ort $\mathbf{r}_e \in B$ gäbe, dann existierte wegen der Differenzierbarkeit von $\Phi(\mathbf{r})$ auch eine Kugel $K_e \in B$ mit dem Mittelpunkt in \mathbf{r}_e , so dass $\partial\Phi(\mathbf{r})/\partial\mathbf{r}$ überall auf der Grenzfläche ∂K_e von K_e nach innen (relatives Maximum) oder nach außen (relatives Minimum) zeigte. Dann wäre aber

$$\oint_{\partial K_e} d\mathbf{f} \frac{\partial\Phi(\mathbf{r})}{\partial\mathbf{r}} \neq 0, \quad \succ \quad \int_{K_e} d^3r \Delta\Phi(\mathbf{r}) \neq 0,$$

im Widerspruch zur Annahme $\Delta\Phi(\mathbf{r}) = 0$ in B .

4.1 Elektrische Leiter und Kapazitäten

4.1.1 Elektrische Leiter

Elektrische Leiter sind eine Klasse von Materialien mit einem speziellen Verhalten in elektrischen Feldern. Das Verhalten von Materialien in elektrischen Feldern werden wir später allgemein in einem besonderen Kapitel behandeln. Elektrische Leiter im Besonderen sind aber sehr einfach zu beschreiben und führen zu interessanten und sehr oft auftretenden Randwert-Problemen, so dass wir sie bereits hier vorwegnehmen wollen.

Elektrische Leiter zeichnen sich dadurch aus, dass in ihnen frei bewegliche elektrisch geladene Teilchen, sogenannte *elektrische Ladungsträger* existieren. Unter den elektrischen Leitern befinden sich vor allem die *Metalle*, in denen Elektronen als Ladungsträger frei beweglich sind. In Halbleitern können aber auch sogenannte Elektronen-Löcher als freie Ladungsträger auftreten, und in Ionen-Leitern auch Ionen. Eine Folge der Existenz von freien Ladungsträgern besteht darin, dass im Inneren von Leitern offenbar keine elektrischen Felder auftreten können:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{im Inneren von Leitern.} \quad (4.4)$$

Gäbe es dort nämlich ein $\mathbf{E}(\mathbf{r}) \neq 0$, dann würde eine Kraft $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q \mathbf{E}(\mathbf{r}) \neq 0$ auf die Ladungsträger (mit der Ladung q) auftreten und diese verschieben. Das geschieht so lange, bis die Ladungsträger insgesamt eine räumliche Konfiguration angenommen haben, die zu einem Gegenfeld $\mathbf{E}'(\mathbf{r}) = -\mathbf{E}(\mathbf{r})$ führt und somit das ursprüngliche Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ kompensiert. (Dass tatsächlich eine solche Endsituation zustande kommt und nicht etwa eine fortwährende Schwingung der Ladungsträger, liegt daran, dass die Bewegung der Ladungsträger gedämpft ist, also Bewegungs-Energie in Form von Wärme an den Leiter abgibt.)

Die Folge von $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$ im Inneren von Leitern ist, dass wegen $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\partial\Phi(\mathbf{r})/\partial\mathbf{r}$ das elektrische Potential dort konstant ist: $\Phi(\mathbf{r}) = \text{const}$. Diese Aussage reicht vom Inneren des Leiters aus bis an seine Randfläche, denn anderenfalls könnten Felder im inneren Randbereich auftreten. Folglich ist die Randfläche eines Leiters eine *Äquipotentialfläche*:

$$\boxed{\Phi(\mathbf{r}) = \text{const auf der Randfläche eines Leiters.}} \quad (4.5)$$

Aus der Feldgleichung

$$\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}) \quad (4.6)$$

folgt dann weiter, dass $\rho(\mathbf{r}) = 0$ im Inneren des Leiters. Diese Aussage gilt nicht notwendig für seine Randfläche, weil im Äußeren des Leiters $\mathbf{E}(\mathbf{r}) \neq 0$ sein kann, so dass die Ableitung auf der Randfläche, z.B. in Normalen-Richtung, einen von Null verschiedenen Wert liefern kann. Eine weitere Folgerung aus dieser Feststellung ist, dass Leiter eine elektrische Ladung nur auf ihrer Randfläche tragen können. In Analogie zur räumlichen Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$, die wir im Kapitel 3 definiert hatten, beschreiben wir die Ladung auf Randflächen von Leitern durch eine *Flächendichte* $\sigma(\mathbf{r})$ (=Ladung pro Fläche) der elektrischen Ladung.

Wir werden jetzt eine wichtige Relation zwischen $\sigma(\mathbf{r})$ und dem elektrischen Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ außerhalb des Leiters herleiten. Dazu benutzen wir die in der Elektrodynamik noch häufiger vorkommende *Pillendosen-Konstruktion*, die in der Abbildung 4.1 skizziert ist. Dort ist ein Ausschnitt aus einer Randfläche S eines Leiters gezeigt. In diese denken wir uns einen Zylinder der Höhe $2\Delta s$ mit seiner Achse senkrecht zu S eingesetzt, so dass sich jeweils ein Stück der Höhe Δs des Zylinders im Inneren und

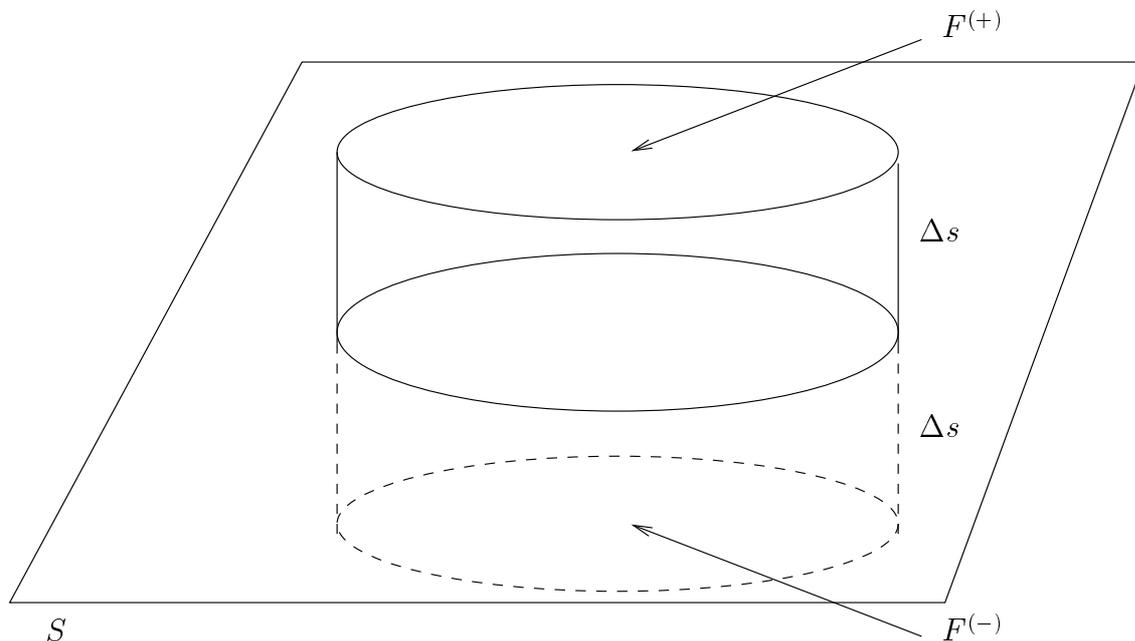


Abbildung 4.1: Pillendosen-Konstruktion

im Äußeren des Leiters befindet. Es seien weiterhin $F^{(+)}$ und $F^{(-)}$ die Stirnflächen des Zylinders im Äußeren und im Inneren. Wir integrieren die Feldgleichung (4.6) über das Zylinder-Volumen V :

$$\epsilon_0 \int_V d^3 r \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_V d^3 r \rho(\mathbf{r}) \quad (4.7)$$

Die linke Seite formen wir mit dem Gaußschen Integralsatz um. Unter Beachtung von $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$ im Inneren, also auf $F^{(-)}$, finden wir

$$\begin{aligned} \epsilon_0 \int_V d^3 r \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \epsilon_0 \oint_{\partial V} d\mathbf{f} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ &= \epsilon_0 \int_{F^{(+)}} d\mathbf{f} \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \epsilon_0 \int_{F^{(-)}} d\mathbf{f} \mathbf{E}(\mathbf{r}) + O(\Delta s) \\ &= \epsilon_0 \int_{F^{(+)}} d\mathbf{f} \mathbf{E}(\mathbf{r}) + O(\Delta s) \\ &= \epsilon_0 \int_{F^{(+)}} d\mathbf{f} \mathbf{n} \mathbf{E}(\mathbf{r}) + O(\Delta s), \end{aligned} \quad (4.8)$$

worin $O(\Delta s)$ die Größenordnung der Integral-Beiträge von der Mantelfläche und \mathbf{n} die (nach außen gerichtete) Normalen-Richtung des Zylinders bezeichnen. Da sich Ladung nur auf der Randfläche des Leiters befindet, finden wir für die rechte Seite von (4.7)

$$\int_V d^3r \rho(\mathbf{r}) = \int_F df \sigma(\mathbf{r}), \quad (4.9)$$

worin F das von dem Zylinder auf der Randfläche S des Leiters ausgeschnittene Flächenstück ist. Jetzt führen wir den Grenzübergang $\Delta s \rightarrow 0$ aus. Dabei wird $F^{(+)} \rightarrow F$. Indem wir (4.8) und (4.9) in (4.7) einsetzen, finden wir

$$\epsilon_0 \int_F df \mathbf{n} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_F df \sigma(\mathbf{r}), \quad (4.10)$$

und weil das Flächenstück F auf S beliebig ist, auch

$$\epsilon_0 \mathbf{n} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sigma(\mathbf{r}). \quad (4.11)$$

Auf der Randfläche S des Leiters muss das Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ die Normalen-Richtung \mathbf{n} besitzen, weil jede Tangential-Komponente durch Bewegung freier Ladungsträger im Leiter kompensiert wird. Damit folgt schließlich aus (4.11)

$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma(\mathbf{r}) \mathbf{n}.} \quad (4.12)$$

Das elektrische Feld an der Randfläche des Leiters ist durch die Flächendichte der Ladung des Leiters bestimmt.

4.1.2 Die Kapazität eines Leiters

Es sei im Raum ein einzelner Leiter L mit seiner Randfläche S vorhanden. Der Leiter trage die elektrische Ladung Q , und sein elektrisches Potential sei Φ_L . Das elektrostatische Problem dieser Anordnung lautet

$$\begin{aligned}
\Delta\Phi(\mathbf{r}) &= 0 && \text{für } \mathbf{r} \notin L, \\
\Phi(\mathbf{r}) &\rightarrow \Phi_L && \text{für } \mathbf{r} \rightarrow S, \\
\Phi(\mathbf{r}) &\rightarrow 0 && \text{für } |\mathbf{r}| \rightarrow \infty.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

($\mathbf{r} \notin L$ bedeutet, dass der Ort \mathbf{r} weder in dem Leiter L noch auf seiner Randfläche S liegt.) Da das Problem linear ist, machen wir den Ansatz

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_L f(\mathbf{r}). \tag{4.14}$$

Die dimensionslose Funktion $f(\mathbf{r})$ ist dann zu bestimmen aus

$$\begin{aligned}
\Delta f(\mathbf{r}) &= 0 && \text{für } \mathbf{r} \notin L, \\
f(\mathbf{r}) &\rightarrow 1 && \text{für } \mathbf{r} \rightarrow S, \\
f(\mathbf{r}) &\rightarrow 0 && \text{für } |\mathbf{r}| \rightarrow \infty.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Wir denken uns das Problem gelöst und bestimmen die elektrische Ladung Q des Leiters, indem wir die Relation (4.12) verwenden:

$$\begin{aligned}
Q &= \oint_S df \sigma = \epsilon_0 \oint_S df \mathbf{n} \mathbf{E} = \epsilon_0 \oint_S d\mathbf{f} \mathbf{E} = \\
&= -\epsilon_0 \oint_S d\mathbf{f} \left(\frac{\partial\Phi(\mathbf{r})}{\partial\mathbf{r}} \right)_{+S} = -\Phi_L \epsilon_0 \oint_S d\mathbf{f} \left(\frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial\mathbf{r}} \right)_{+S}.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Der Index $+S$ soll bedeuten, dass der Gradient von $\Phi(\mathbf{r})$ bzw. von $f(\mathbf{r})$ auf der Randfläche S des Leiters nach außen zu bilden ist. Es ist ja

$$d\mathbf{f} \left(\frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial\mathbf{r}} \right)_{+S} = df \mathbf{n} \left(\frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial\mathbf{r}} \right)_{+S},$$

so dass

$$\mathbf{n} \left(\frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \right)_{+S}$$

als *Normalen-Ableitung* von $f(\mathbf{r})$ (nach außen), also senkrecht zu S , interpretiert werden kann.

Als *Kapazität* des Leiters wird definiert

$$C = \frac{Q}{\Phi_L} = -\epsilon_0 \oint_S d\mathbf{f} \left(\frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \right)_{+S}. \quad (4.17)$$

Wir erkennen, dass die Kapazität C des Leiters nicht von Φ_L und Q abhängt, sondern nur noch von der Geometrie des Leiters, die ja in das Randwert-Problem für $f(\mathbf{r})$ in (4.15) eingeht. Wir können auch nachweisen, dass $C > 0$ sein muss. Die Funktion $f(\mathbf{r})$ muss nämlich von dem Wert $f(\mathbf{r}) = 1$ auf der Randfläche $\mathbf{r} \in S$ auf den Wert $f(\mathbf{r}) = 0$ für $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$ abfallen. Dieser Abfall muss monoton sein, weil $f(\mathbf{r})$ anderenfalls im Außenraum des Leiters ein relatives Extremum haben müsste. Das ist aber nicht möglich, weil $f(\mathbf{r})$ dort $\Delta f(\mathbf{r}) = 0$ erfüllt, vgl. den Nachweis in der Einleitung zu diesem Kapitel. Der Gradient $\partial f(\mathbf{r})/\partial \mathbf{r}$ zeigt an der Randfläche S in den Leiter hinein.

Die Einheit der Kapazität lautet

$$\text{Kapazität } C \cong \frac{\text{el. Ladung}}{\text{Potential}} \cong \frac{\text{C}}{\text{V}} = \frac{\text{As}}{\text{V}} =: \text{F} = \text{Farad}. \quad (4.18)$$

Beispiel: Kugelkondensator

Ein kugelförmiger Leiter mit dem Radius R (und dem Mittelpunkt im Ursprung 0) trage die Ladung Q . Wir integrieren die Feldgleichung (4.6) über eine mit dem Leiter konzentrische Kugel V mit einem Radius $r > R$

$$\epsilon_0 \int_V d^3r \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \underbrace{\int_V d^3r \rho(\mathbf{r})}_{=Q}. \quad (4.19)$$

Die linke Seite formen wir mit dem Gaußschen Integralsatz um:

$$\int_V d^3r \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \oint_{\partial V} d\mathbf{f} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi r^2 \frac{\mathbf{r}}{r} \mathbf{E}(\mathbf{r}),$$

eingesetzt in (4.19):

$$4\pi r^2 \frac{\mathbf{r}}{r} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = Q. \quad (4.20)$$

(Auf der Kugel-Randfläche ist der Normalen-Vektor gegeben durch $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$.) Aus der Kugel-Symmetrie folgt, dass das Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ Normalen-Richtung besitzt, also

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} = -\frac{\partial\Phi(\mathbf{r})}{\partial\mathbf{r}}, \quad \Phi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad r > R. \quad (4.21)$$

Auf der Randfläche der Kugel, $r = R$, besitzt das Potential also den Wert $\Phi_L = Q/(4\pi\epsilon_0 R)$, so dass sich für die Kapazität

$$C = \frac{Q}{\Phi_L} = 4\pi\epsilon_0 R \quad (4.22)$$

ergibt.

4.1.3 Die Kapazität eines Systems von Leitern

Wir verallgemeinern die obigen Überlegungen auf ein System von Leitern L_α , $\alpha = 1, 2, \dots$. Es seien S_α die Randflächen der Leiter, Q_α ihre Ladungen und Φ_α ihre Potentiale. Zu lösen ist das Randwert-Problem

$$\begin{aligned} \Delta\Phi(\mathbf{r}) &= 0 && \text{für } \mathbf{r} \notin L_\alpha, \\ \Phi(\mathbf{r}) &\rightarrow \Phi_\alpha && \text{für } \mathbf{r} \rightarrow S_\alpha, \\ \Phi(\mathbf{r}) &\rightarrow 0 && \text{für } |\mathbf{r}| \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (4.23)$$

($\mathbf{r} \notin L_\alpha$ bedeutet, dass \mathbf{r} in keinem der Leiter L_α und auch nicht auf deren Randflächen S_α liegen soll.) Wierum machen wir von der Linearität des Problems Gebrauch und setzen für die Lösung $\Phi(\mathbf{r})$ an

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{\beta} \Phi_{\beta} f_{\beta}(\mathbf{r}). \quad (4.24)$$

(Auch die Indizes β bezeichnen die Leiter L_{β} .) Dieser Ansatz wird zu einer Lösung von (4.23), wenn die $f_{\beta}(\mathbf{r})$ die folgenden Forderungen erfüllen:

$$\begin{aligned} \Delta f_{\beta}(\mathbf{r}) &= 0 && \text{für } \mathbf{r} \notin L_{\alpha}, \\ f_{\beta}(\mathbf{r}) &\rightarrow 1 && \text{für } \mathbf{r} \rightarrow S_{\beta}, \\ f_{\beta}(\mathbf{r}) &\rightarrow 0 && \text{für } \mathbf{r} \rightarrow S_{\alpha}, \quad \alpha \neq \beta, \\ f_{\beta}(\mathbf{r}) &\rightarrow 0 && \text{für } |\mathbf{r}| \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Für die Flächendichte σ_{α} der Ladung auf L_{α} folgt aus (4.12)

$$\sigma_{\alpha} = \epsilon_0 (\mathbf{n} \mathbf{E}(\mathbf{r}))_{S_{\alpha}} = -\epsilon_0 \left(\mathbf{n} \frac{\partial \Phi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \right)_{S_{\alpha}},$$

und daraus weiter für die Ladung Q_{α} unter Verwendung des Ansatzes (4.24) für $\Phi(\mathbf{r})$:

$$\begin{aligned} Q_{\alpha} &= \oint_{S_{\alpha}} d\mathbf{f} \sigma_{\alpha} = -\epsilon_0 \oint_{S_{\alpha}} d\mathbf{f} \mathbf{n} \frac{\partial \Phi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} = -\epsilon_0 \oint_{S_{\alpha}} d\mathbf{f} \frac{\partial \Phi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} = \\ &= \sum_{\beta} \left\{ -\epsilon_0 \oint_{S_{\alpha}} d\mathbf{f} \frac{\partial f_{\beta}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \right\} \Phi_{\beta} = \sum_{\beta} C_{\alpha\beta} \Phi_{\beta}, \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$C_{\alpha\beta} = -\epsilon_0 \oint_{S_{\alpha}} d\mathbf{f} \frac{\partial f_{\beta}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}}. \quad (4.27)$$

An die Stelle der Kapazität C eines einzelnen Leiters tritt die *Kapazitäts-Matrix* $C_{\alpha\beta}$. Im folgenden Unterabschnitt werden wir nachweisen, dass die Kapazitätsmatrix *symmetrisch* ist: $C_{\alpha\beta} = C_{\beta\alpha}$.

Beispiel: Plattenkondensator

Das System von Leitern bestehe aus zwei parallelen metallischen Platten der Fläche F im Abstand a . Das lineare Gleichungs-System (4.26) lautet hier

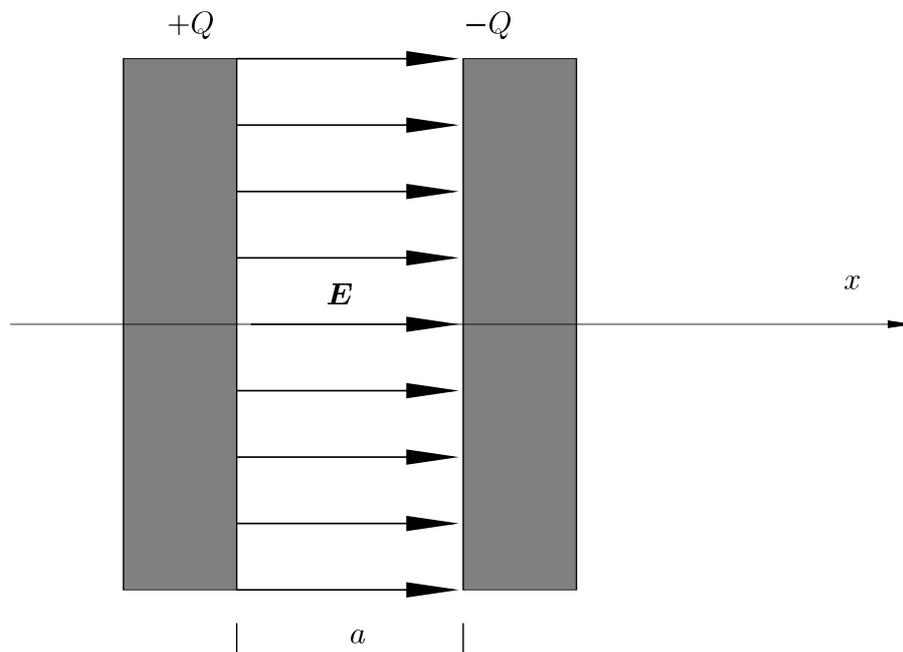


Abbildung 4.2: Idealisierter Plattenkondensator

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= C_{11} \Phi_1 + C_{12} \Phi_2 \\ Q_2 &= C_{21} \Phi_1 + C_{22} \Phi_2 \end{aligned} \right\} \quad (4.28)$$

Da die $C_{\alpha\beta}$ wiederum unabhängig von den Ladungen und Potentialen sind, nämlich nur von der Geometrie der Anordnung abhängen, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $Q_2 = -Q_1 =: Q$. Ferner ist aus Gründen der Symmetrie zwischen den beiden Platten $C_{11} = C_{22} =: C$. Damit wird aus (4.28)

$$\left. \begin{aligned} Q &= C \Phi_1 + C_{12} \Phi_2 \\ -Q &= C_{21} \Phi_1 + C \Phi_2 \end{aligned} \right\} \quad (4.29)$$

Diese beiden Gleichungen müssen offensichtlich äquivalent sein, woraus folgt, dass $C_{12} = C_{21} = -C$, und somit

$$Q = C (\Phi_1 - \Phi_2), \quad C = \frac{Q}{\Phi_1 - \Phi_2}. \quad (4.30)$$

Der Plattenkondensator ist in der Abbildung 4.2 skizziert. Wir nehmen an, dass das Feld den Raum zwischen den Platten homogen erfüllt, was natürlich nur dann

der Fall ist, wenn die Fläche F der Platten in jeder Richtung $\rightarrow \infty$ geht. Da der Raum zwischen den Platten ladungsfrei ist, ist das Feld \mathbf{E} dort räumlich konstant und hat die Richtung senkrecht zu den Platten, in der Abbildung die x -Richtung. Bei endlichen Flächen treten an den Rändern der Platten Verzerrungen auf, die aus Dimensionsgründen von der Ordnung $O(a^2/F)$ sein werden. Diese Verzerrungen werden vernachlässigt.

Wir integrieren die Feldgleichung (4.6) über ein Volumen V , das die linke Platte als Quader umschließen soll:

$$\epsilon_0 \int_V d^3r \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \oint_{\partial V} d\mathbf{f} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = Q. \quad (4.31)$$

Da das Feld \mathbf{E} die Randfläche ∂V nur über die Plattenfläche F durchdringt, hat das Integral auf der linken Seite den Wert $\epsilon_0 F E$, worin E die x -Komponente des Feldes \mathbf{E} ist. Da das Feld zwischen den Platten konstant sein sollte, ist das Potential eine lineare Funktion in x , nämlich $\Phi(x) = -E x + \text{const}$, und $\Phi_1 - \Phi_2 = E a$. Damit folgt aus (4.31) für C aus (4.30)

$$C = \frac{Q}{\Phi_1 - \Phi_2} = \frac{\epsilon_0 F E}{E a} = \epsilon_0 \frac{F}{a}. \quad (4.32)$$

Dieses C wird auch als *die* Kapazität des Plattenkondensators bezeichnet.

4.1.4 Die Feldenergie in einem System von Leitern

Wir berechnen die Energie des elektrischen Feldes $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ in einem System von Leitern. Es sei im Folgenden V das Volumen außerhalb der Leiter L_α , so dass in V keine elektrischen Ladungen auftreten. Im Übrigen werden alle Bezeichnung aus dem vorhergehenden Unterabschnitt übernommen. Die Feldenergie lautet gemäß Kapitel 3

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V d^3r \mathbf{E}^2(\mathbf{r}) = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V d^3r \left(\frac{\partial \Phi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \right)^2. \quad (4.33)$$

Wir formen um unter Benutzung der Produkt-Regel der Differentiation für den Gradienten:

$$\left(\frac{\partial\Phi(\mathbf{r})}{\partial\mathbf{r}}\right)^2 = \frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\left(\Phi(\mathbf{r})\frac{\partial\Phi(\mathbf{r})}{\partial\mathbf{r}}\right) - \Phi(\mathbf{r})\Delta\Phi(\mathbf{r}),$$

vgl. auch 2.2.2. Nun ist $\Delta\Phi(\mathbf{r}) = 0$ in V , so dass sich die Feldenergie W aus (4.33) mit dieser Umformung und unter Benutzung des Gaußschen Integralsatzes in der Form

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V d^3r \frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} \left(\Phi(\mathbf{r}) \frac{\partial\Phi(\mathbf{r})}{\partial\mathbf{r}} \right) = \frac{\epsilon_0}{2} \oint_{\partial V} d\mathbf{f} \Phi(\mathbf{r}) \frac{\partial\Phi(\mathbf{r})}{\partial\mathbf{r}} \quad (4.34)$$

schreiben lässt. Die Randfläche ∂V von V besteht aus

- (1) der ∞ -fernen Randfläche, auf der $\Phi(\mathbf{r}) = 0$ und somit auch $\partial\Phi(\mathbf{r})/\partial\mathbf{r} = 0$,
- (2) und aus allen Randflächen S_α der Leiter L_α , allerdings mit einer Normalen-Richtung, die von V aus gesehen in die Leiter L_α hineinzeigt. Wie bisher wollen wir aber Flächen-Integrale über die Randflächen S_α mit einer Normalen-Richtung aus dem Leiter L_α in das Volumen V hinein notieren, wodurch ein Vorzeichen wechselt.

Wir beachten außerdem, dass $\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_\alpha$ auf der Randfläche S_α . Insgesamt erhalten wir damit

$$W = -\frac{\epsilon_0}{2} \sum_\alpha \oint_{S_\alpha} d\mathbf{f} \frac{\partial\Phi(\mathbf{r})}{\partial\mathbf{r}}. \quad (4.35)$$

Schließlich setzen wir den linearen Ansatz (4.24) in der Gestalt

$$\frac{\partial\Phi(\mathbf{r})}{\partial\mathbf{r}} = \sum_\beta \Phi_\beta \frac{\partial f_\beta(\mathbf{r})}{\partial\mathbf{r}}$$

in den Ausdruck für W ein und erhalten

$$W = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} \left\{ -\epsilon_0 \oint_{S_\alpha} d\mathbf{f} \frac{\partial f_\beta(\mathbf{r})}{\partial\mathbf{r}} \right\} \Phi_\alpha \Phi_\beta = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} C_{\alpha\beta} \Phi_\alpha \Phi_\beta, \quad (4.36)$$

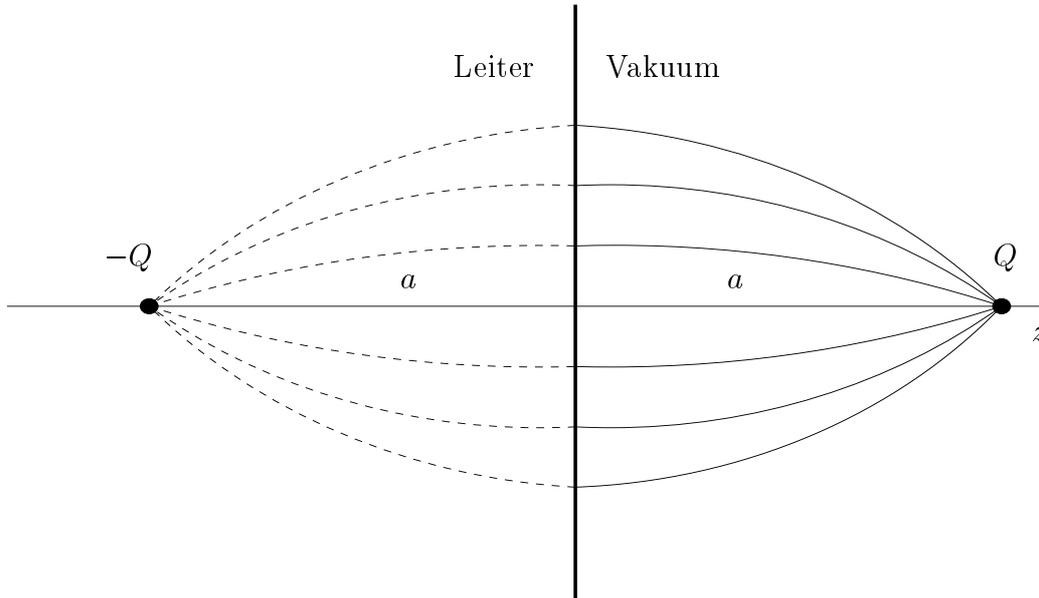


Abbildung 4.3: Spiegelladung hinter einer Grenzfläche Leiter–Vakuum

worin wir die Definition (4.27) benutzt haben. Die Feldenergie W ist also eine quadratische Funktion der Potentiale Φ_α auf den Randflächen der Leiter. Aus (4.36) folgt auch

$$C_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 W}{\partial \Phi_\alpha \partial \Phi_\beta}, \quad (4.37)$$

und daraus bereits die schon früher behauptete Symmetrie $C_{\alpha\beta} = C_{\beta\alpha}$, denn W als quadratische Funktion der Φ_α ist sicher zweimal stetig differenzierbar, so dass die Ableitungen nach Φ_α und Φ_β in (4.37) vertauschbar sind.

4.2 Die Methode der Spiegelladungen

Die Methode der Spiegelladungen ist eine Konstruktion zur Bestimmung des elektrischen Feldes bei Anwesenheit von Leitern. Wir erläutern diese Methode für den einfachsten Fall, dass sich eine elektrische Ladung Q im Abstand a vor einer ebenen und ∞ -weit ausgedehnten Randfläche eines Leiters befindet. Wir wählen ein Koordinatensystem, so dass dessen x - y -Ebene die Randfläche des Leiters beschreibt und

die z -Richtung senkrecht zur Randfläche steht, vgl. Abbildung 4.3. Die Ladung Q habe die Koordinaten $\mathbf{r}_1 \cong (0, 0, +a)$. Das Potential $\Phi(\mathbf{r})$ dieser Anordnung ist wie folgt zu bestimmen:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}) = -\frac{Q}{\epsilon_0} \delta(\mathbf{r}) \quad \text{in } z \geq 0, \\ \Phi(x, y, z = 0) &= \text{const.} \end{aligned} \quad (4.38)$$

Die erste Bedingung in (4.38) drückt aus, dass die Punktladung Q an der Stelle \mathbf{r}_1 die Quelle des Feldes ist, und die zweite Bedingung fordert, dass die x - y -Ebene, also $z = 0$ als Randfläche des Leiters eine Äquipotentialfläche ist.

Wir zeigen jetzt, dass diese beiden Bedingungen dadurch zu erfüllen sind, dass wir uns eine fiktive Ladung $-Q$ spiegelbildlich zu $+Q$ hinter der Randfläche des Leiters, also am Ort $\mathbf{r}_2 \cong (0, 0, -a)$ angebracht denken und das Potential in $z \geq 0$ als von den beiden Ladungen $+Q$ bei \mathbf{r}_1 und $-Q$ bei \mathbf{r}_2 erzeugt denken:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|} \right) \quad z \geq 0. \quad (4.39)$$

Zunächst ist klar, dass dieses Potential die Poisson-Gleichung (4.38) in $z \geq 0$ löst, denn

$$\Delta\Phi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\underbrace{\Delta \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}}_{=-4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)} - \underbrace{\Delta \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|}}_{=-4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_2)=0} \right), \quad (4.40)$$

weil

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2| = \sqrt{x^2 + y^2 + (z + a)^2} > 0$$

in $z \geq 0$, also $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) = 0$ in $z \geq 0$. Wegen

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2} > 0$$

ist für $z = 0$ $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|$, also $\Phi(\mathbf{r}) = 0$, womit auch die zweite Bedingung in (4.38), dass die Ebene $z = 0$ eine Äquipotentialfläche sein soll, erfüllt ist.

Wie im vorhergehenden Abschnitt begründet, kann sich die elektrische Ladung eines Leiters nur an seiner Randfläche befinden. In unserem Fall *muss* sich dort auch Ladungen befinden, weil Feldlinien von der Randfläche ausgehen. Diese Ladung heißt auch *Influenzladung*. Wir berechnen die Flächendichte der Ladung auf der Randfläche des Leiters, indem wir (4.11) verwenden:

$$\sigma(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})|_{z=+0} = -\epsilon_0 \mathbf{n} \cdot \left(\frac{\partial \Phi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \right)_{z=+0} = -\epsilon_0 \left(\frac{\partial \Phi(\mathbf{r})}{\partial z} \right)_{z=+0}. \quad (4.41)$$

Es ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{1,2}|} &= \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z \mp a)^2}} = -\frac{z \mp a}{[x^2 + y^2 + (z \mp a)^2]^{3/2}}, \\ \sigma(x, y) &= -\frac{Q a}{2 \pi} \frac{1}{[x^2 + y^2 + a^2]^{3/2}} \end{aligned} \quad (4.42)$$

Wir berechnen nun die gesamte Influenzladung Q' :

$$\begin{aligned} Q' &= \int df' \sigma(x, y) = -\frac{Q a}{2 \pi} \int_0^\infty \frac{2 \pi r' dr'}{[r'^2 + a^2]^{3/2}} = \\ &= Q a \left\{ [r'^2 + a^2]^{-1/2} \right\}_{r'=0}^{r'=\infty} = -Q. \end{aligned} \quad (4.43)$$

(In dieser Umrechnung haben wir $r'^2 = x^2 + y^2$, $df = 2 \pi r' dr'$ substituiert.) Auf der Randfläche des Leiters, die der Ladung Q zugewandt ist, wird also insgesamt die Ladung $Q' = -Q$ influenziert. Wenn der Leiter vor dem Einbringen der Ladung Q neutral (=ungeladen) war, muss sich die Gegenladung zur Influenzladung auf einer ∞ -entfernten Randfläche des Leiters befinden.

4.3 Das allgemeine Randwert–Problem

Zur Lösung der Poisson–Gleichung

$$\Delta\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}) \quad (4.44)$$

für eine vorgegebene Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$ ist die Vorgabe von *Randbedingungen* erforderlich. Für einen speziellen Fall, nämlich $\rho(\mathbf{r}) = 0$ in Anwesenheit von Leitern, haben wir das bereits im Abschnitt 4.1 gesehen. Den allgemeinen Fall formulieren wir wie folgt: es ist die Poisson–Gleichung (4.44) zu lösen, wobei die Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$ innerhalb eines Volumens V vorgegeben sei und die Lösung $\Phi(\mathbf{r})$ auf der Randfläche ∂V von V gewisse Bedingungen erfüllen soll. Diese Problemstellung nennt man das *Randwert–Problem* der Elektrostatik. Welche Bedingungen $\Phi(\mathbf{r})$ auf ∂V erfüllen soll, werden wir später formulieren. Eine spezielle Version des elektrostatischen Randwert–Problems ist der Fall, dass V das gesamte Volumen ist und dass die Lösung $\Phi(\mathbf{r})$ auf der ∞ -fernen Randfläche von V verschwinden soll. Die Lösung dieses Randwert–Problems ist uns aus 2.4.2 bekannt:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (4.45)$$

Um Aussagen über das allgemeine Randwert–Problem machen zu können, benötigen wir zwei wichtige Integralsätze, die sogenannten *Greenschen Identitäten*.

4.3.1 Die Greenschen Identitäten

Ausgangspunkt ist der Gaußsche Satz

$$\int_V d^3r \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{a}(\mathbf{r}) = \oint_{\partial V} d\mathbf{f} \mathbf{a}(\mathbf{r}), \quad (4.46)$$

in den wir

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \psi(\mathbf{r})$$

einsetzen. Dann ist unter Benutzung einer Umformung aus 3.1.2

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{a}(\mathbf{r}) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\phi(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \psi(\mathbf{r}) \right) = \\ &= \partial_\alpha (\phi \partial_\alpha \psi) = (\partial_\alpha \phi) (\partial_\alpha \psi) + \partial_\alpha^2 \psi = \\ &= \frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} + \phi(\mathbf{r}) \Delta \psi(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

Mit diesen Definitionen und Umformungen wird aus dem Gaußschen Satz (4.46)

$$\int_V d^3 r \left(\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}} + \phi \Delta \psi \right) = \oint_{\partial V} d\mathbf{f} \phi \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}}. \quad (4.47)$$

(Aus Gründen der Übersichtlichkeit haben wir die Argumente \mathbf{r} in ϕ und ψ fortgelassen.) Es ist $d\mathbf{f} = \mathbf{n} df$, worin \mathbf{n} der Einheitsvektor in der Normalenrichtung von ∂V (nach außen) ist, so dass

$$d\mathbf{f} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}} = df \left(\mathbf{n} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \psi.$$

$\mathbf{n} \partial / \partial \mathbf{r}$ hat die Bedeutung einer *Normalen-Ableitung* der Funktion ψ , also ihres Gradienten in Normalenrichtung. Hierfür ist die Schreibweise

$$\left(\mathbf{n} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \psi =: \frac{\partial \psi}{\partial n}, \quad (4.48)$$

üblich, die allerdings missverständlich ist, weil nicht etwa nach dem Normalenvektor, sondern nach dem senkrechten Abstand von der Randfläche ∂V abgeleitet wird. Setzen wir nun (4.48) in (4.47) ein, so erhalten wir die *erste Greensche Identität*

$$\boxed{\int_V d^3 r \left(\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}} + \phi \Delta \psi \right) = \oint_{\partial V} df \phi \frac{\partial \psi}{\partial n}} \quad (4.49)$$

Wir denken uns die erste Greensche Identität (4.49) mit ϕ statt ψ und umgekehrt hingeschrieben und bilden die Differenz der beiden Identitäten. Dabei fällt das Produkt der Gradienten von ϕ und ψ heraus, und wir erhalten die *zweite Greensche Identität*

$$\boxed{\int_V d^3r (\phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi) = \oint_{\partial V} df \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right)}. \quad (4.50)$$

4.3.2 Die formale Lösung des Randwert-Problems

Wir denken uns die zweite Greensche Identität (4.50) mit der Variablen \mathbf{r}' statt \mathbf{r} formuliert und wählen $\phi(\mathbf{r}') = \Phi(\mathbf{r}')$ = elektrisches Potential sowie $\psi(\mathbf{r}') = 1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$. Dabei benutzen wir, dass

$$\begin{aligned} \Delta' \phi(\mathbf{r}') &= \Delta' \Phi(\mathbf{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}'), \\ \Delta' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \end{aligned}$$

Die erste dieser Beziehungen ist wieder die Poisson-Gleichung, die zweite haben wir ausführlich in 2.2.2 hergeleitet. (Δ' ist der Laplace-Operator mit der Variablen \mathbf{r}' statt \mathbf{r} .) Mit diesen Vereinbarungen und den obigen Beziehungen erhalten wir aus der zweiten Greenschen Identität

$$\begin{aligned} \int_V d^3r' \left(-4\pi \Phi(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) &= \\ = \oint_{\partial V} df' \left(\Phi(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}')}{\partial n'} \right). \end{aligned} \quad (4.51)$$

(Alle gestrichenen Variablen beziehen sich auf \mathbf{r}' .) Wir betrachten den Fall, dass der Punkt \mathbf{r} *innerhalb* von V liegt. Dann liefert das Integral über den Term mit der δ -Funktion $-4\pi \Phi(\mathbf{r})$, und wir erhalten

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}) = & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \\ & + \oint_{\partial V} df' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{\partial\Phi(\mathbf{r}')}{\partial n'} - \Phi(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right). \end{aligned} \quad (4.52)$$

Wenn in (4.51) der Punkt \mathbf{r} *außerhalb* von V gewählt wird, erhalten wir offensichtlich die Aussage, dass der Ausdruck auf der rechten Seite von (4.52) verschwindet.

Offensichtlich ist (4.52) noch keine explizite Lösung des Problems, weil das gesuchte elektrische Potential $\Phi(\mathbf{r})$ auf beiden Seiten der Gleichung auftritt. (4.52) ist eine *Integral-Gleichung*, die äquivalent zu dem anfangs gestellten Randwert-Problem ist. Nun tritt das gesuchte elektrische Potential $\Phi(\mathbf{r})$ auf der rechten Seite aber nur auf der Randfläche ∂V auf. Das legt den Schluss nahe, (4.52) tatsächlich als explizite Lösung zu interpretieren, wenn das Potential $\Phi(\mathbf{r})$ und seine Normal-Ableitung $\partial\Phi(\mathbf{r})/\partial n$ auf der Randfläche ∂V als Randbedingungen vorgegeben sind. Eine solche Vorgabe nennt man auch *Cauchysche Randbedingungen*. Wir werden im folgenden Unterabschnitt lernen, dass diese Randbedingungen eine Überbestimmung darstellen und im Allgemeinen nicht miteinander verträglich sind.

Aus (4.52) geht die Lösung (4.45) hervor, wenn wir das Volumen V als den gesamten Raum, ∂V also als die ∞ -entfernte Randfläche wählen und annehmen, dass

$$\frac{\partial\Phi(\mathbf{r}')}{\partial n'} = -\mathbf{n}' \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}'),$$

also die (negative) Normal-Komponente des elektrischen Feldes mit $|\mathbf{r}'| \rightarrow \infty$ schneller als $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ verschwindet.

Schließlich formulieren wir (4.52) für den Fall, dass das Innere von V ladungsfrei ist, also $\rho(\mathbf{r}') = 0$:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \oint_{\partial V} df' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{\partial\Phi(\mathbf{r}')}{\partial n'} - \Phi(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right). \quad (4.53)$$

4.3.3 Dirichletsche und Neumannsche Randbedingungen, Eindeutigkeit der Lösung

Wir zeigen jetzt, dass die Lösung des elektrostatischen Randwert-Problems

$$\Delta \Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}) \quad (4.54)$$

in einem Volumen V eindeutig ist, wenn entweder

- (1) *Dirichletsche Randbedingung:*
das Potential $\Phi(\mathbf{r})$ auf der Randfläche ∂V oder
- (2) *Neumannsche Randbedingung:*
die Normal-Ableitung $\partial\Phi(\mathbf{r})/\partial n$ des Potentials $\Phi(\mathbf{r})$ auf der Randfläche ∂V vorgegeben ist.

Wir führen den Nachweis durch einen Widerspruchsbeweis. Es seien $\Phi_1(\mathbf{r})$ und $\Phi_2(\mathbf{r})$ zwei Lösungen von (4.54), die dieselben Randbedingungen, also Dirichletsche oder Neumannsche, erfüllen. Es sei $U(\mathbf{r}) := \Phi_1(\mathbf{r}) - \Phi_2(\mathbf{r})$ die Differenz zwischen den beiden Lösungen. Dann ist U (Argument \mathbf{r} nicht mehr mitgeschrieben) offensichtlich Lösung des folgenden Randwert-Problems:

$$\Delta U = 0 \text{ in } V, \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{entweder } U = 0 \\ \text{oder } \partial U/\partial n = 0 \end{array} \right\} \text{ auf } \partial V. \quad (4.55)$$

Jetzt verwenden wir die erste Greensche Identität (4.49) mit der Wahl $\phi = \psi = U$:

$$\int_V d^3r \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} + U \Delta U \right) = \oint_{\partial V} df U \frac{\partial U}{\partial n}.$$

Da $\Delta U = 0$ in V und entweder $U = 0$ oder $\partial U/\partial n = 0$ auf ∂V , folgt

$$\int_V d^3r \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} = \int_V d^3r \left| \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \right|^2 = 0 : \succ \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} = 0.$$

Φ_1 und Φ_2 können sich also nur um eine Konstante unterscheiden. Im Fall der Dirichletschen Randbedingung muss diese Konstante sogar den Wert 0 haben, weil $U = 0$ auf ∂V . In jedem Fall liefern Φ_1 und Φ_2 dasselbe elektrische Feld.

Wenn also die Vorgabe entweder von Φ oder von $\partial\Phi/\partial n$ auf der Randfläche ∂V die Lösung Φ des Randwert-Problems schon eindeutig macht, dann wird die Vorgabe von Cauchyschen Randbedingungen, also Φ und $\partial\Phi/\partial n$ auf der Randfläche ∂V , im Allgemeinen eine Überbestimmung darstellen.

Alle obigen Überlegungen sind auf den Fall von *gemischten Randbedingungen* übertragbar, bei denen auf Teilen von ∂V das Potential Φ und auf dem verbleibenden Teil von ∂V die Normal-Ableitung $\partial\Phi/\partial n$ des Potentials vorgegeben sind.

4.4 Lösung mit der Greenschen Funktion

Eine *Greensche Funktion* $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ soll definiert sein als eine Lösung von

$$\Delta' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (4.56)$$

Es ist zu beachten, dass der Laplace-Operator Δ' auf die Variable \mathbf{r}' in $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ wirkt. Man kann $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ als Potential am Ort \mathbf{r}' betrachten, das von einer punktförmigen Einheitsladung $Q = 1$ am Ort \mathbf{r} erzeugt wird, wobei die Randbedingungen zunächst offen bleiben. Aus 2.2.2 kennen wir eine spezielle Lösung von (4.56), nämlich

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Hier ist es offenbar gleichgültig, ob Δ oder Δ' auf $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ angewendet wird. Die allgemeine Lösung von (4.56) können wir in der Form

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + H(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad \text{mit} \quad \Delta' H(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0 \quad (4.57)$$

schreiben. Ziel dieses Abschnitts ist es, die Freiheit bei der Wahl von $H(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ zu nutzen, um die Integral-Gleichung (4.52) für die Lösung $\Phi(\mathbf{r})$ eines Randwert-Problems so umzuschreiben, dass sie nur noch eine der beiden möglichen Randwert-Vorgaben enthält, nämlich die Dirichletsche für $\Phi(\mathbf{r})$ oder die Neumannsche für $\partial\Phi(\mathbf{r})/\partial n$ auf ∂V .

Wir führen jetzt eine Umformung durch, der derjenigen in 4.3.2 völlig analog ist. Wir greifen also wieder auf die zweite Greensche Identität (4.50) zurück, denken uns diese mit \mathbf{r}' statt \mathbf{r} als Integrations-Variable formuliert und wählen $\phi(\mathbf{r}') = \Phi(\mathbf{r}')$ sowie $\psi(\mathbf{r}') = G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$. Wir erhalten damit

$$\begin{aligned} \int_V d^3 r' (\Phi(\mathbf{r}') \Delta' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Delta' \Phi(\mathbf{r}')) &= \\ &= \oint_{\partial V} df' \left(\Phi(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \Phi(\mathbf{r}') \right). \end{aligned}$$

Wir beachten nun, dass $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ die Beziehung (4.56) und $\Phi(\mathbf{r}')$ die Poisson-Gleichung (4.54) (mit \mathbf{r}' statt \mathbf{r}) erfüllt. Außerdem nehmen wir an, dass der Ort \mathbf{r} im Volumen V liegt. Wir erhalten dann nach dem Vorbild von (4.52)

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}) = & \int d^3 r' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') + \\ & + \epsilon_0 \oint_{\partial V} df' \left(G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \Phi(\mathbf{r}') - \Phi(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right). \end{aligned} \quad (4.58)$$

Jetzt trennen sich die Wege für die beiden Typen von Randbedingungen.

Dirichletsche Randbedingung:

Wir wählen als Randbedingung für die Greensche Funktion $G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$ auf dem Rand $\mathbf{r}' \in \partial V$. (Index D für Dirichletsche Randbedingung.) Dann wird aus (4.58)

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int d^3 r' G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') - \epsilon_0 \oint_{\partial V} df' \Phi(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}'). \quad (4.59)$$

Die Bedeutung dieses Ergebnisses liegt darin, dass wir nur noch ein einziges Dirichletsches Randwert-Problem lösen müssen, nämlich

$$\Delta' G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad \text{in } V, \quad G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0 \quad \text{auf } \mathbf{r}' \in \partial V, \quad (4.60)$$

d.h. für eine Punktladung und verschwindenden Randwert auf ∂V , und damit die Lösung $\Phi(\mathbf{r})$ für alle Dirichletschen Randwert-Probleme

$$\Delta \Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}) \quad (4.61)$$

und vorgegebenem $\Phi(\mathbf{r})$ auf ∂V ausdrücken können.

Neumannsche Randbedingung:

Wir können hier nicht völlig analog zum Dirichletschen Fall vorgehen, weil wir als Randbedingung nicht etwa $\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')/\partial n' = 0$ auf ∂V fordern können. Das erkennen

wir, wenn wir die Definitions-Beziehung (4.56) für Greensche Funktionen über ein Volumen V integrieren,

$$\int_V d^3r' \Delta' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0} \int_V d^3r' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

auf der linken Seite den Gaußschen Integralsatz anwenden,

$$\begin{aligned} \int_V d^3r' \Delta' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \int_V d^3r' \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \\ &= \oint_{\partial V} d\mathbf{f}' \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \oint_{\partial V} df' \frac{\partial}{\partial n'} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \end{aligned}$$

außerdem annehmen, dass der Ort \mathbf{r} in V liegt, so dass

$$\int_V d^3r' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = 1.$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\oint_{\partial V} df' \frac{\partial}{\partial n'} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0},$$

und diese Beziehung ist im Allgemeinen mit $\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')/\partial n' = 0$ für $\mathbf{r}' \in \partial V$ nicht verträglich. Sie besagt aber, dass wir

$$\frac{\partial}{\partial n'} G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{1}{|\partial V|} \quad (4.62)$$

als Neumannsche Randbedingung fordern können, worin $|\partial V|$ den Flächeninhalt der Randfläche ∂V bedeutet. Setzen wir diese Randbedingung in (4.58) ein, so erhalten wir

$$\Phi(\mathbf{r}) = \langle \Phi \rangle_{\partial V} + \int d^3r' G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') + \epsilon_0 \oint_{\partial V} df' G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \Phi(\mathbf{r}'), \quad (4.63)$$

worin

$$\langle \Phi \rangle_{\partial V} := \frac{1}{|\partial V|} \oint_{\partial V} df' \Phi(\mathbf{r}')$$

der (räumlich konstante) Mittelwert des Potentials auf der Randfläche ∂V ist. Jetzt müssen wir also nur noch das einzige Neumannsche Randwert-Problem

$$\Delta' G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad \text{in } V \quad (4.64)$$

mit dem Randwert (4.62) lösen und können damit die Lösungen $\Phi(\mathbf{r})$ für alle Neumannschen Randwert-Probleme

$$\Delta \Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}) \quad (4.65)$$

und vorgegebenem $\partial\Phi(\mathbf{r})/\partial n$ auf ∂V ausdrücken. Im Übrigen fällt die Konstante $\langle \Phi \rangle_{\partial V}$ bei der Bildung des elektrischen Feldes heraus.

Die Möglichkeit, alle Dirichletschen und Neumannschen Randwert-Probleme auf zwei Typen von Greenschen Funktionen G_D und G_N zu reduzieren, beruht entscheidend auf der *Linearität* der Poisson-Gleichung. Die Bestimmung dieser beiden Greenschen Funktionen gelingt allerdings nur für recht einfache Randflächen ∂V .

Kapitel 5

Elektrischer Strom und magnetische Flussdichte

Diese Einführung in die Elektrodynamik geht – zunächst – von empirischen Befunden aus. Die Coulomb–Wechselwirkung zwischen elektrischen Ladungen gab Anlass zur Einführung des Begriffs des elektrischen Feldes und zur Formulierung von Feldgleichungen. Auch die Einführung des magnetischen Feldes und die Formulierung von Feldgleichungen dafür werden wir auf einen weiteren empirischen Befund gründen. Tatsächlich jedoch sind die beiden grundlegenden empirischen Befunde nicht unabhängig, und elektrisches und magnetisches Feld werden sich in der später zu formulierenden nicht–statischen Theorie als miteinander verknüpft erweisen. Hinweise darauf werden wir bereits in diesem Kapitel erhalten, obwohl es auch hier zunächst um die Formulierung einer statischen Theorie des magnetischen Feldes geht.

5.1 Erhaltung der elektrischen Ladung

5.1.1 Die elektrische Flussdichte

Wie wir bereits im Unterabschnitt 1.2.2 bemerkt hatten, ist elektrische Ladung eine charakteristische Eigenschaft gewisser Teilchen, z.B. von Elektronen oder Protonen. Wenn sich solche Teilchen bewegen, kommt es offensichtlich zum Transport von elektrischer Ladung, allgemeiner ausgedrückt, zu einem *elektrischen Strom*. Wir wollen hier von vornherein die kontinuierliche Betrachtungsweise wählen, die wir für die Beschreibung der elektrischen Ladung durch eine räumliche Dichte $\rho(\mathbf{r})$ im Kapitel

2.4 begründet hatten. Wir stellen uns vor, dass sich die elektrische Ladung durch Veränderung ihres Orts im Raum bewegt. Eine erste Konsequenz daraus ist, dass sich dann im Allgemeinen die elektrische Ladung pro Volumen, die von einem Beobachter an einem festen Ort registriert wird, also die Ladungsdichte auch *zeitlich* ändern wird. Wir werden deshalb die elektrische Ladungsdichte nicht nur wie bisher als Funktion des Ortes \mathbf{r} , sondern auch als Funktion der *Zeit* schreiben: $\rho(\mathbf{r}, t)$.

Die Bewegung der elektrischen Ladung beschreiben wir nun durch eine elektrische *Flussdichte* $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$, die ebenfalls vom Ort und von der Zeit abhängen kann. Diese Flussdichte wird wie folgt definiert:

- (1) $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ soll die Richtung der Ladungsbewegung am Ort \mathbf{r} zur Zeit t haben.
- (2) Es sei df_n ein differentielles Flächen-Element am Ort \mathbf{r} mit der Normalen-Richtung parallel zu $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$. Dann soll

$$dQ = |\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)| df_n dt \quad (5.1)$$

die Ladungsmenge sein, die dort in der Richtung von $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ durch df_n im Zeitintervall dt transportiert wird.

Die Einheit der elektrischen Flussdichte ist

$$\text{Flussdichte} \quad \mathbf{j} \cong \frac{\text{Ladung}}{\text{Fläche} \cdot \text{Zeit}} \cong \frac{\text{A}}{\text{m}^2}.$$

Wir bestimmen jetzt den elektrischen Strom dI durch ein Flächen-Element $d\mathbf{f}$ mit beliebiger Normalen-Richtung $\mathbf{n} = d\mathbf{f}/df$, $df = |d\mathbf{f}|$. Es soll dI als die elektrische Ladung definiert sein, die pro Zeit durch $d\mathbf{f}$ fließt. In der Abbildung 5.1 ist eine "Röhre" mit einer Querschnitts-Fläche df_n und der Achsenrichtung parallel zu \mathbf{j} skizziert. (Der Querschnitt muss nicht notwendig kreisförmig sein). Die "Röhre" schneide aus einer Fläche ein Flächenstück $d\mathbf{f}$ aus, das eine beliebige Orientierung habe, so dass α der Winkel zwischen $d\mathbf{f}$ und \mathbf{j} ist. Der Strom durch die Querschnittsfläche df_n ist derselbe wie durch $d\mathbf{f}$, also

$$dI = |\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)| df_n = |\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)| |d\mathbf{f}| \cos \alpha = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{f}. \quad (5.2)$$

Wenn die Bewegung der Ladungsträger durch ein Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ beschrieben werden kann, d.h., durch die Geschwindigkeit $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, die ein geladenes

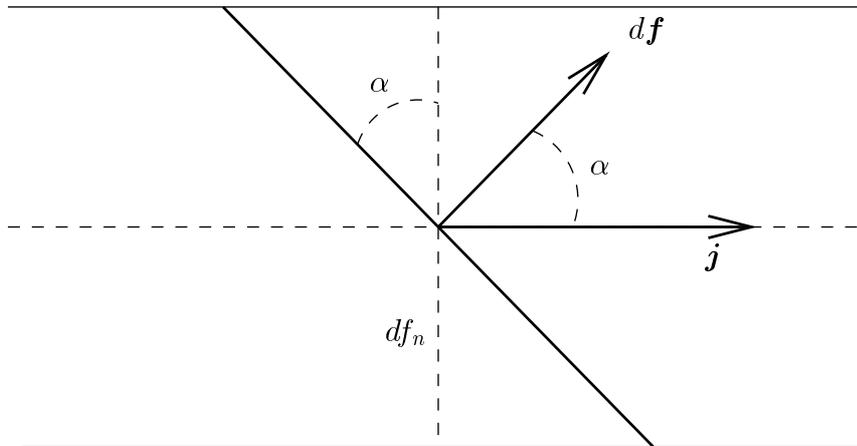


Abbildung 5.1: Stromdichte und Stromfluss

Teilchen zur Zeit t am Ort \mathbf{r} besitzt, dann ist das entsprechende $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ parallel zu $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$. Während des differentiellen Zeitintervalls dt schiebt sich dann durch einen Querschnitt der "Röhre" in Abbildung 5.1 diejenige Ladungsmenge dQ , die in dem Volumen $df_n |\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)| dt$ enthalten ist, also

$$dQ = \rho(\mathbf{r}, t) df_n |\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)| dt = \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{f} dt,$$

worin $\rho(\mathbf{r}, t)$ wieder die Ladungsdichte ist. Dem entspricht ein Strom

$$dI = \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{f}.$$

Durch den Vergleich mit (5.2) erkennen wir, dass die entsprechende Flussdichte

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \quad (5.3)$$

lautet. Diesen Ausdruck nennt man auch eine *konvektive* Flussdichte. Nicht immer lässt sich eine Flussdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ sinnvollerweise als konvektive Flussdichte beschreiben. Für die Elektronen in einem Leiter z.B. ist deren Geschwindigkeit eine statistisch verteilte Größe, so dass auf der rechten Seite von (5.3) ein Mittelwert zu bilden wäre. In solchen Fällen ist es einfacher, nur mit der phänomenologischen Flussdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ zu arbeiten.

5.1.2 Die Erhaltung der elektrischen Ladung

Mit der in 1.2.2 vereinbarten Bezeichnung der beiden Arten von elektrischer Ladung als "positiv" und "negativ" haben wir jetzt bewirkt, dass sich dieselbe Bewegung derselben Absolutmenge von Ladung der beiden Arten durch ein Vorzeichen in der Flussdichte \mathbf{j} unterscheidet. Diese Bezeichnung hat zur Folge, dass die Bewegung der einen Art von Ladung und die räumlich entgegengesetzte Bewegung der anderen Art von Ladung in dem Sinne äquivalent sind, dass sie durch gleiche Flussdichten \mathbf{j} beschrieben werden. Eine solche Folgerung darf natürlich nicht nur durch eine spezielle Bezeichnungsweise begründet sein. Das ließe sich nur dadurch verhindern, dass wir bei der Bezeichnung *grün* und *rot* für die beiden Arten von elektrischer Ladung geblieben wären. Wir hätten dann also immer auch zwei Ladungsdichten $\rho_{\text{grün}}$ und ρ_{rot} sowie zwei Flussdichten $\mathbf{j}_{\text{grün}}$ und \mathbf{j}_{rot} mitführen müssen. Bis zum jetzigen Stand unserer Überlegungen würden sich die beiden Arten von Ladungen, "grüne" und "rote" unabhängig voneinander durch den Raum bewegen können. Diese Bemerkung ist wichtig, um die Tragweite der jetzt einzuführenden Erhaltung von elektrischer Ladung zu ermessen.

Wir führen an dieser Stelle einen weiteren, grundlegenden empirischen Befund in die Theorie ein, der im Allgemeinen in der folgenden Form ausgesprochen wird: *Die elektrische Ladung ist erhalten.* In der Bezeichnungsweise "grün" und "rot" für die beiden Arten von Ladungen müsste dieser Befund so ausgedrückt werden: gleiche Absolutmengen jeweils "grüner" und "roter" Ladungen können sich vernichten (kompensieren), und ebenso können nur gleiche Absolutmengen jeweils "grüner" und "roter" Ladungen gebildet werden. Jetzt bewährt sich die Zählung der beiden Arten von Ladungen als "positiv" und "negativ" erneut, weil bereits mit dieser Zählung der Satz von der Erhaltung der Ladung auf elegante Weise berücksichtigt werden kann. Nochmals: die Zählung "positiv" und "negativ" für die beiden Arten von Ladungen begründet nicht etwa die Erhaltung von Ladung, sondern die Erhaltung erlaubt die Zählung von Ladung als "positiv" und "negativ".

Wir wollen den Satz von der Erhaltung der Ladung in eine Aussage über die Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r}, t)$ und die Flussdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ umformen. Dazu betrachten wir die Ladung Q (positiv oder negativ) in einem beliebigen Volumen V . Wir nehmen an, dass die Form und die Position des Volumens V zeitlich konstant sind. Dann lässt sich Q und seine zeitliche Änderung wie folgt durch die Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r}, t)$ ausdrücken:

$$Q = \int_V d^3r \rho(\mathbf{r}, t), \quad \frac{dQ}{dt} = \int_V d^3r \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t). \quad (5.4)$$

Die Zeitableitung kann durch das Raum-Integral "hindurchgezogen" werden, weil das Integrationsgebiet V verabredungsgemäß zeitlich konstant sein sollte. Sie muss innerhalb des Integral aber als partielle Zeitableitung geschrieben werden, weil der Ort \mathbf{r} als Integrationsvariable in V nicht von der Zeitableitung betroffen ist. Wir werden im folgenden Unterabschnitt die Bedeutung einer *totalen* Zeitableitung $d\rho(\mathbf{r}, t)/dt$ kennen lernen.

Der Satz von der Erhaltung der Ladung kann nun auch so ausgedrückt werden: die Ladung Q in V kann sich nur dadurch ändern, dass ein Überschuss von Ladung durch die Randfläche ∂V von V in V hinein- oder aus V herausfließt. Wir formulieren das in der Form

$$\frac{dQ}{dt} = - \oint_{\partial V} dI. \quad (5.5)$$

Die dI sollen die Ströme durch die Flächen-Elemente df von ∂V sein. $dI > 0$ soll bedeuten, dass der Strom in Normalen-Richtung fließt, d.h. für positive Ladung von innen nach außen oder äquivalent für negative Ladung von außen nach innen, entsprechend $dI < 0$. Diese Vereinbarung begründet das negative Vorzeichen auf der rechten Seite. In jedem Fall wird durch das Integral auf der rechten Seite die *Bilanz* aller Ladungstransporte über die Randfläche ∂V gebildet und damit gesagt, dass sich positive und negative Ladung kompensieren. Wenn das Integral auf der rechten Seite von (5.5) verschwindet, kompensieren sich sämtliche Ladungstransporte über ∂V (oder es fließt überhaupt kein Strom) und es ist $dQ/dt = 0$.

Unter Verwendung von (5.2) und des Gaußschen Integralsatzes kann das Integral auf der rechten Seite von (5.5) wie folgt geschrieben werden:

$$\oint_{\partial V} dI = \oint_{\partial V} d\mathbf{f} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \int_V d^3r \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t). \quad (5.6)$$

Wir setzen diese Umformung sowie dQ/dt aus (5.4) in (5.5) ein und fassen die beiden Volumen-Integrale zusammen:

$$\int_V d^3r \left(\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \right) = 0. \quad (5.7)$$

Diese Aussage gilt für beliebige Volumina V . Das ist nur möglich, wenn der Integrand an jedem Ort \mathbf{r} verschwindet:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0.} \quad (5.8)$$

Diese Gleichung, die sogenannte *Kontinuitäts-Gleichung*, ist die *lokale Version* des Satzes von der Erhaltung der Ladung. Weil sich die obigen Umformungen auch in umgekehrter Richtung durchführen lassen, ist die Kontinuitäts-Gleichung äquivalent zu allen anderen Formulierungen des Erhaltungssatzes für die Ladung.

Wir werden im weiteren Verlauf dieses Textes zunächst die *stationäre* Theorie formulieren. Sie ist dadurch definiert, dass sämtliche Feldgrößen einschließlich der Dichten von Ladung und Fluss *zeitunabhängig* sind: $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r})$, $\rho = \rho(\mathbf{r})$ usw., aber auch $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r})$. Aus der Kontinuitäts-Gleichung (5.8) folgt dann

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{für stationäre Flussdichten.} \quad (5.9)$$

Durch Integration über ein beliebiges Volumen V folgt daraus, dass sich im stationären Fall die Ströme durch beliebige geschlossene Flächen immer kompensieren müssen.

5.1.3 Konvektive Flussdichten und totale Zeitableitung

Wir nehmen an, dass die Bewegung der Ladungsträger durch ein Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ beschrieben sei, wie wir das bereits im vorhergehenden Unterabschnitt erläutert hatten, so dass $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, vgl. (5.3). Wir denken uns nun einen Beobachter, der ausgehend von einem beliebigen Ort \mathbf{r}_0 mit den Ladungsträgern "mitschwimmt". Das soll bedeuten, dass der Ortsvektor $\mathbf{r}(t)$ dieses mitbewegten Beobachters bei vorzugeschobenem Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ aus der Differential-Gleichung

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \quad (5.10)$$

für eine Anfangs-Position \mathbf{r}_0 z.B. zur Zeit $t = 0$ zu lösen ist. Wenn dieser mitbewegte Beobachter eine vorgegebene Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r}, t)$ messend verfolgt, wird er nicht nur eine zeitliche Änderung aufgrund der expliziten Zeitabhängigkeit in $\rho(\mathbf{r}, t)$ feststellen, sondern auch aufgrund seiner eigenen Ortsänderung im Ort \mathbf{r} . Die von dem mitbewegten Beobachter gemessene Zeitableitung wird zur Unterscheidung von

$\partial/\partial t$ mit d/dt bezeichnet. Für sie gilt in Bezug auf $\rho(\mathbf{r}, t)$ unter Beachtung der Kettenregel der Differentiation

$$\frac{d}{dt} \rho(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \rho(\mathbf{r}, t) \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \rho(\mathbf{r}, t), \quad (5.11)$$

vgl. auch (5.10). Wenn wir nun andererseits $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ in die Kontinuitäts-Gleichung (5.8) einsetzen und dort die Produkt-Regel für die Divergenz von $\rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ ausführen, (Argumente (\mathbf{r}, t) zur Vereinfachung der Schreibweise nicht mehr mitgeschrieben)

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\rho \mathbf{v}) = \partial_\alpha (\rho v_\alpha) = (\partial_\alpha \rho) v_\alpha + \rho (\partial_\alpha v_\alpha) = \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \rho + \rho \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{v},$$

vgl. auch (2.2.2), dann erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \rho + \rho \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{v} = 0,$$

bzw. unter Beachtung von (5.11)

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{v} = 0. \quad (5.12)$$

Dieses ist die Form der lokalen Version der Ladungserhaltung für den *mitbewegten* Beobachter, oft auch die *substantielle* Version zum Unterschied von der *expliziten* Version (5.8) genannt. Wenn der mitbewegte Beobachter keine zeitliche Änderung der Ladungsdichte beobachtet, also $d\rho/dt = 0$, dann folgt dort, wo überhaupt Ladung vorhanden ist, also wo $\rho \neq 0$, dass die Divergenz der Geschwindigkeit verschwindet: $\partial \mathbf{v} / \partial \mathbf{r} = 0$. Ein solches Geschwindigkeitsfeld nennt man auch *inkompressibel*. Wie wir aus (5.11) ablesen, sind die Bedingungen $d\rho/dt = 0$ für die Inkompressibilität und $\partial \rho / \partial t = 0$ für die Stationarität *keinesfalls äquivalent*.

Die Beziehung (5.11) gilt offensichtlich für jede beliebige skalare Funktion $\rho(\mathbf{r}, t)$ und wird deshalb allgemein in der "Operatorform"

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \quad (5.13)$$

geschrieben. Man nennt d/dt auch die *totale Zeitableitung* im Gegensatz zur partiellen Zeitableitung $\partial/\partial t$.

5.2 Lorentz–Kraft und magnetische Induktion

Ausgangspunkt der Theorie elektrischer Felder war die Coulomb–Wechselwirkung zwischen elektrischen Ladungen. Aus Gründen z.B. bereits der Galilei–Invarianz von Inertial–Systemen, die sich relativ zueinander mit konstanter Geschwindigkeit bewegen, muss es auch eine Wechselwirkung zwischen bewegten Ladungen, also zwischen elektrischen Flussdichten geben. Eine statische Ladungs–Verteilung $\rho(\mathbf{r}, t)$ in einem Inertial–System muss ja als eine Flussdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ in einem anderen Inertial–System auftreten, die Wechselwirkung zwischen den statischen Ladungen im ersten System also als Wechselwirkung zwischen Flüssen im zweiten System. Wenn uns die korrekte Relativitäts–Theorie der Elektrodynamik bekannt wäre, dann müssten wir mit ihrer Hilfe aus der Coulomb–Wechselwirkung zwischen Ladungen auf die gesuchte Wechselwirkungen zwischen Flüssen schließen können. (Tatsächlich fällt, wie wir später lernen werden, die korrekte Relativitäts–Theorie der Elektrodynamik nur bei sehr kleinen Relativ–Geschwindigkeiten mit der Galilei–Relativität der Newtonschen Mechanik zusammen.)

5.2.1 Formulierung der Lorentz–Kraft und der magnetischen Induktion

Wir werden hier zunächst einen anderen Weg gehen, nämlich die Wechselwirkung zwischen elektrischen Strömen bzw. Flussdichten als einen weiteren empirischen Befund in die Theorie einführen. Wir betrachten zwei Ladungen q und q' an den Orten \mathbf{r} bzw. \mathbf{r}' . Diese beiden Ladungen sollen sich mit den Geschwindigkeiten \mathbf{v} bzw. \mathbf{v}' bewegen. Dann übt q' die sogenannte *Lorentz–Kraft*

$$\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}), \quad (5.14)$$

auf q aus. Darin ist $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ die sogenannte *magnetische Induktion* (auch magnetische Flussdichte genannt), die von der bewegten Ladung q' erzeugt wird und die folgende Form hat:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} q' \mathbf{v}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (5.15)$$

μ_0 ist die sogenannte *magnetische Feldkonstante* (auch magnetische Permeabilität des Vakuums genannt), über die sogleich noch etwas zu sagen ist. Wenn wir $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ aus

(5.15) in (5.14) einsetzen, dann erhalten wir für die "magnetische" Wechselwirkung zwischen q und q' den Ausdruck

$$\mathbf{F}_{qq'}^{(m)} = \frac{\mu_0}{4\pi} q q' \mathbf{v} \times \left(\mathbf{v}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right), \quad (5.16)$$

der das Analogon zur Coulomb-Wechselwirkung

$$\mathbf{F}_{qq'}^{(e)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q q' \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (5.17)$$

darstellt. Ebenso ist offensichtlich das elektrische Feld

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q' \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (5.18)$$

einer Punktladung q' am Ort \mathbf{r}' das Analogon zu $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ in (5.15).

Wir können sogleich auch vom Fall diskreter Punktladungen zu kontinuierlichen Ladungsverteilungen $\rho(\mathbf{r})$ bzw. Flussdichten $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ übergehen, indem wir die Überlegungen für den elektrischen Fall in 2.2 auf den magnetischen Fall analog übertragen. Im elektrischen Fall lautete die Verallgemeinerung für $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ in (5.18) auf eine Ladungsdichte

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3 r' \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad (5.19)$$

d.h., nach dem allgemeinen Schema

$$q' \rightarrow \int d^3 r' \rho(\mathbf{r}') \dots$$

Das analoge Schema für bewegte Ladungen lautet

$$q' \mathbf{v}' \rightarrow \int d^3 r' \rho(\mathbf{r}') \mathbf{v}' \dots \rightarrow \int d^3 r' \mathbf{j}'(\mathbf{r}') \dots,$$

so dass sich die kontinuierliche Version der magnetischen Induktion aus (5.15) zu

$$\boxed{\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}} \quad (5.20)$$

ergibt. Die Bemerkungen über glatte Ladungsverteilungen in 2.4.3 übertragen sich entsprechend auf den magnetischen Fall.

5.2.2 Einheiten

Die physikalische Einheit für die magnetische Induktion ist aus der Lorentz-Kraft in (5.14) ablesbar:

$$\begin{aligned} \text{Magn. Induktion} \quad \mathbf{B} &\cong \frac{\text{Kraft}}{\text{el. Ladung} \cdot \text{Geschwindigkeit}} \cong \frac{\text{N s}}{\text{C m}} = \\ &= \frac{\text{V s}}{\text{m}^2} =: \text{Tesla} = \text{T}, \end{aligned}$$

worin wir die Definition des Volt (V) aus 1.2.4 benutzt haben. Damit sind in (5.2.2) die Einheiten der Größen \mathbf{B} , q , \mathbf{v} und \mathbf{r} festgelegt, so dass die Konstante μ_0 durch eine Messung bestimmt werden kann. Deren Ergebnis lautet

$$\mu_0 = 1,26 \dots \cdot 10^{-6} \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A} \cdot \text{m}}.$$

Offensichtlich hängt dieser Wert von der früher in 1.2.3 getroffenen Wahl für die Einheit der elektrischen Ladung ab. Wir wollen jetzt untersuchen, welche Auswirkungen eine andere Wahl für die elektrische Ladung haben würde. Wir notieren \bar{q} statt q für die andere Einheit. Die Coulomb-Wechselwirkung

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q q' \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

würde dann etwa die Form

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\bar{\epsilon}_0} \bar{q}\bar{q}' \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

erhalten, denn auch die Einheit von ϵ_0 hängt von der Wahl der Einheit für die Ladung ab. Da auf der linken Seite in jedem Fall eine Kraft steht, deren Einheit unabhängig von der Wahl der Einheit der Ladung ist, müssen die Einheiten von q und ϵ_0 die folgende Relation erfüllen:

$$\frac{\bar{q}^2}{\bar{\epsilon}_0} = \frac{q^2}{\epsilon_0}, \quad \succ \quad \bar{q} = \lambda q, \quad \lambda := \sqrt{\frac{\bar{\epsilon}_0}{\epsilon_0}}.$$

Da die elektrische Flussdichte \mathbf{j} die Einheit Ladung/(Fläche·Zeit) hat, vgl. 5.1.1, gilt auch

$$\bar{\mathbf{j}} = \lambda \mathbf{j}$$

Ferner folgt aus der Lorentz-Kraft

$$\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \bar{q} \mathbf{v} \times \bar{\mathbf{B}}$$

die Einheiten-Relation

$$\bar{\mathbf{B}} = \frac{q}{\bar{q}} \mathbf{B} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{B}.$$

Schließlich erhält die Darstellung der magnetischen Induktion in (5.20) in den veränderten Einheiten die Form

$$\bar{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) = \frac{\bar{\mu}_0}{4\pi} \int d^3r' \bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}.$$

Wenn wir hierin $\bar{\mathbf{B}}$ und $\bar{\mathbf{j}}$ gemäß den obigen Umrechnungen durch \mathbf{B} und \mathbf{j} ersetzen und das Ergebnis mit (5.20) vergleichen, erhalten wir die folgende Relation zwischen $\bar{\mu}_0$ und μ_0 :

$$\bar{\mu}_0 = \frac{1}{\lambda^2} \mu_0 = \frac{\epsilon_0}{\bar{\epsilon}_0} \mu_0 \quad \text{bzw.} \quad \bar{\epsilon}_0 \cdot \bar{\mu}_0 = \epsilon_0 \cdot \mu_0.$$

Das Produkt der Konstanten ϵ_0 und μ_0 ist also von der Wahl der Einheiten unabhängig. Mit der Wahl des Coulomb als Einheit für die elektrische Ladung lauteten die beiden Konstanten

$$\epsilon_0 = 8,859 \cdot 10^{-12} \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{V} \cdot \text{m}}, \quad \mu_0 = 1,26 \cdot 10^{-6} \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A} \cdot \text{m}}.$$

Hieraus erkennen wir zunächst, dass das Produkt $\epsilon_0 \mu_0$ die Einheit s^2/m^2 , also die einer inversen Geschwindigkeit hat. Wir berechnen deshalb $1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ in der Einheit Geschwindigkeit und erhalten mit den obigen Angaben

$$\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 2,9939 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

also die Geschwindigkeit des Lichtes, vgl. 1.1. Warum hier die Geschwindigkeit des Lichtes auftritt, werden wir später in der zeitabhängigen (nicht-stationären) Theorie lernen.

5.3 Drahtförmige elektrische Leiter, Biot–Savartsches Gesetz

In (5.20),

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3},$$

ist angegeben, wie die magnetische Induktion $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ für eine vorgegebene elektrische Flussdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$ zu berechnen ist. Der in der Magnetostatik übliche Fall ist jedoch, dass nicht eine Flussdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$, sondern elektrische Ströme I' in drahtförmigen Leitern ("Drähten") vorgegeben sind. Wir wollen deshalb (5.20) auf diese Situation umschreiben.

5.3.1 Biot–Savartsches Gesetz

Wir betrachten ein Volumen–Element d^3r' , das ein Stück $d\mathbf{r}'$ eines drahtförmigen Leiters L' enthalte. $d\mathbf{r}'$ ist ein Linien–Element längs des Leiters L' . Durch den Leiter L' soll der elektrische Strom $I' = dq'/dt$ (Einheit: Ampere) fließen. Der Fluss der Ladungsträger durch L' sei durch eine mittlere Geschwindigkeit \mathbf{v}' beschreibbar, für die $\mathbf{v}' = d\mathbf{r}'/dt$ gilt. Damit ist $\mathbf{j}(\mathbf{r}') = \rho(\mathbf{r}')\mathbf{v}'$, worin $\rho(\mathbf{r}')$ die Ladungsdichte ist, die die Ladungsträgern im Draht L' bilden. Folglich ist $dq' = \rho(\mathbf{r}')d^3r'$ die elektrische Ladung im Volumen–Element d^3r' . Damit können wir die folgende Umformung durchführen:

$$d^3r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') = d^3r' \rho(\mathbf{r}') \mathbf{v}' = dq' \frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \frac{dq'}{dt} d\mathbf{r}' = I' d\mathbf{r}'.$$

Diese setzen wir in den obigen Ausdruck (5.20) für $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ ein und erhalten

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I' \int_{L'} d\mathbf{r}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (5.21)$$

Das Integral längs L' ist jetzt als *Linien–Integral* zu interpretieren.

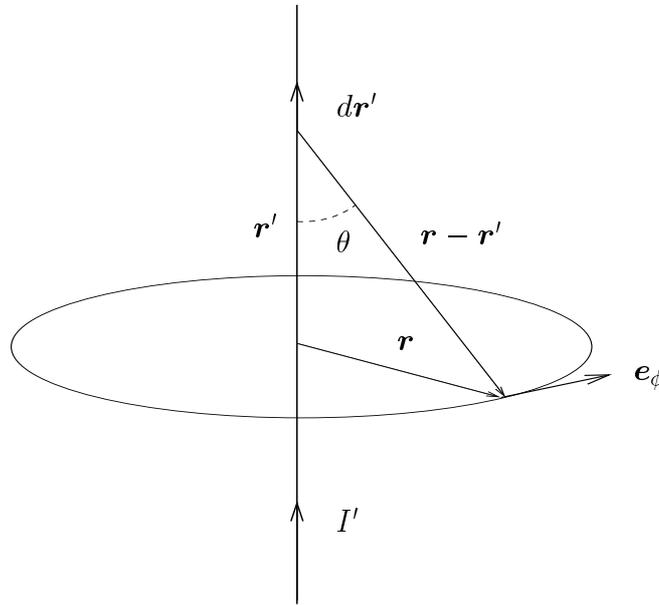
Beispiel: Unendlich langer, geradförmiger Draht

Wir wollen (5.21) für einen unendlich langen, geradlinigen Draht auswerten. Dieses Problem hat zwei Symmetrien:

- Rotations–Symmetrie um den Draht als Achse,
- Translations–Symmetrie längs des Drahtes

Wir wählen den Ursprung O des Bezugssystems (x', y', z') auf dem Draht. Die Drahtachse sei zugleich die z' –Achse. Wegen der Translations–Symmetrie können wir O auf dem Draht so wählen, dass der Ortsvektor \mathbf{r} des "Aufpunktes" A , für dessen Position wir $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ berechnen wollen, senkrecht auf dem Draht steht, vgl. Abbildung 5.2. Mit den Bezeichnungen in dieser Abbildung ist dann

$$d\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = |d\mathbf{r}'| |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \sin\theta \mathbf{e}_\phi = dz' r,$$

Abbildung 5.2: Magnetische Induktion eines ∞ -langen, geradlinigen Leiterdrahtes.

worin \mathbf{e}_ϕ der Einheits-Vektor in Azimutal-Richtung ist, $dz' := |d\mathbf{r}'|$ und $|\mathbf{r}| = r = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \sin \theta$, vgl. Abbildung 5.2. Ferner ist

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2} = \sqrt{r^2 + z'^2}.$$

Damit erhalten wir

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I' r \int_{-\infty}^{+\infty} dz' (r^2 + z'^2)^{3/2} \mathbf{e}_\phi.$$

Mit der Substitution

$$z' = r \sinh \xi, \quad dz' = r \cosh \xi d\xi, \quad r^2 + z'^2 = r^2 \cosh^2 \xi$$

wird

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz' (r^2 + z'^2)^{3/2} = \frac{1}{r^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{\cosh^2 \xi} = \frac{1}{r^2} [\tanh \xi]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{2}{r^2},$$

so dass das Endergebnis

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I'}{2\pi r} \mathbf{e}_\phi. \quad (5.22)$$

lautet. Man beachte, dass r nunmehr der senkrechte Abstand des Aufpunktes A vom Draht bedeutet. Die Feldlinien von $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ sind konzentrische Kreise um den Draht (mit Ebenen senkrecht zum Draht). Das Feld $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ fällt $\sim 1/r$ mit dem Abstand r vom Draht ab, so lange r klein im Vergleich zur Drahtausdehnung ist.

5.3.2 Kraft auf einen stromdurchflossenen Draht

Wir berechnen die Lorentz-Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter L , die von einem anderen stromdurchflossenen Leiter L' ausgeübt wird. Wir betrachten ein Stück $d\mathbf{r}$ des Leiters L am Ort \mathbf{r} , in dem sich die Ladung dq mit einer Geschwindigkeit \mathbf{v} bewegt. Die Lorentz-Kraft auf $d\mathbf{r}$ lautet

$$d\mathbf{F} = dq \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = dq \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{dq}{dt} d\mathbf{r} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = I d\mathbf{r} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}).$$

Insgesamt erfährt der Leiter L also die Kraft

$$\mathbf{F} = I \int_L d\mathbf{r} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}). \quad (5.23)$$

$\mathbf{B}(\mathbf{r})$ sollte von dem Strom I' im Leiter L' erzeugt werden, so dass wir dafür den Ausdruck (5.21) einsetzen können:

$$\mathbf{F}_{LL'} = \frac{\mu_0}{4\pi} I I' \int_L d\mathbf{r} \times \int_{L'} d\mathbf{r}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (5.24)$$

Mit der Regel $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ (vgl. Anhang D.1.2) wird

$$d\mathbf{r} \times (d\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')) = (d\mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')) d\mathbf{r}' - (d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}') (\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

eingesetzt in (5.24)

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{LL'} &= \frac{\mu_0}{4\pi} I I' \int_{L'} d\mathbf{r}' \left(\int_L d\mathbf{r} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) \\ &\quad - \frac{\mu_0}{4\pi} I I' \int_L \int_{L'} (d\mathbf{r} d\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

In dem inneren Integral des ersten Beitrags machen wir die folgende Umformung:

$$\int_L d\mathbf{r} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = - \int_L d \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right]_{L\text{-Anfang}}^{L\text{-Ende}} = 0,$$

weil der Leiter L nach Voraussetzung unendlich lang ausgedehnt sein sollte. Dasselbe Ergebnis erhalten wir übrigens auch mit der Vorstellung, dass der Leiter L eine geschlossene Schleife mit ∞ -großem Radius ist. Wir haben in der obigen Umformung außerdem benutzt, dass

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = - \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3},$$

vgl. 1.3.1. Das Endergebnis lautet also

$$\mathbf{F}_{LL'} = - \frac{\mu_0}{4\pi} I I' \int_L \int_{L'} (d\mathbf{r} d\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (5.26)$$

Diese Kraft $\mathbf{F}_{LL'}$ kann Anziehung oder Abstoßung der beiden Leiter L und L' bewirken:

$$\begin{aligned} \text{Parallele Ströme:} & \quad I I' d\mathbf{r} d\mathbf{r}' > 0 : \text{Anziehung,} \\ \text{Antiparallele Ströme:} & \quad I I' d\mathbf{r} d\mathbf{r}' < 0 : \text{Abstoßung.} \end{aligned} \quad (5.27)$$

Schließlich bemerken wir, dass $\mathbf{F}_{LL'}$ *antisymmetrisch* gegen eine Vertauschung $L \leftrightarrow L'$ ist. Wir müssen dazu \mathbf{r} , $d\mathbf{r}$, I mit \mathbf{r}' , $d\mathbf{r}'$, I' vertauschen, woraus $\mathbf{F}_{L'L} = -\mathbf{F}_{LL'}$ folgt. Die Wechselwirkungskraft $\mathbf{F}_{LL'}$ erfüllt also das dritte Newtonsche Prinzip *actio=reactio*.

Kapitel 6

Magnetostatische Feldgleichungen

Das Ziel dieses Kapitels ist die Formulierung von *magnetostatischen Feldgleichungen* für die magnetische Induktion $\mathbf{B}(\mathbf{r})$. Wir suchen also das magnetische Analogon zu den elektrostatischen Feldgleichungen

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}),$$

vgl. 2.4.2. Auch im magnetischen Fall werden wir die Rotation und die Divergenz von $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ bestimmen und dabei eine gewisse "spiegelbildliche Symmetrie" zum elektrischen Fall finden.

6.1 Das Vektor–Potential und die Divergenz der magnetischen Induktion

6.1.1 Das Vektor–Potential

Der Ausgangspunkt unserer Überlegungen ist die Darstellung der magnetischen Induktion $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ für eine vorgegebene elektrische Flussdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r})$,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3},$$

vgl. 5.2.1. In dieser Darstellung verwenden wir – zum wiederholten Mal –

$$\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|},$$

so dass $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ auch in der Form

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right). \quad (6.1)$$

geschrieben werden kann. Die Kombination innerhalb des Integrals formen wir mit Hilfe des Levi-Civita-Tensors wie folgt um:

$$\begin{aligned} \left\{ \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \right\}_\alpha &= \epsilon_{\alpha\beta\gamma} j_\beta(\mathbf{r}') \partial_\gamma \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\epsilon_{\alpha\gamma\beta} \partial_\gamma \frac{j_\beta(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \\ &= -\left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right\}_\alpha. \end{aligned}$$

Hierin haben wir benutzt, dass $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$ nicht von \mathbf{r} abhängt, also $\partial_\gamma j_\beta(\mathbf{r}') = 0$, und dass $\epsilon_{\alpha\beta\gamma} = -\epsilon_{\alpha\gamma\beta}$. Damit erhalten wir für die magnetische Induktion

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \\ &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{A}(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) := \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (6.3)$$

Die darin ausgeführte Vertauschung von Integration und Rotation,

$$\int d^3 r' \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \dots = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \int d^3 r' \dots$$

ist erlaubt, weil die Integration über \mathbf{r}' geht und auch das Integrationsgebiet, nämlich der gesamte Raum, in dem $\mathbf{j}(\mathbf{r}') \neq 0$, von \mathbf{r} unabhängig ist.

$\mathbf{A}(\mathbf{r})$ heißt das *Vektor-Potential*. Wir werden lernen, dass es eine ähnliche Bedeutung wie das skalare Potential $\Phi(\mathbf{r})$ des elektrischen Feldes besitzt.

6.1.2 Die Divergenz der magnetischen Induktion

Wir berechnen die Divergenz der magnetischen Induktion, indem wir deren Darstellung durch das Vektor-Potential benutzen und wiederum den Formalismus des Levi-Civita-Tensors verwenden:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) : & B_\alpha &= \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \partial_\beta A_\gamma, \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \partial_\alpha B_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \partial_\alpha \partial_\beta A_\gamma = 0, \end{aligned} \quad (6.4)$$

weil die Kombination des Levi-Civita-Tensors mit einem symmetrischen Ausdruck verschwindet: $\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \partial_\alpha \partial_\beta = 0$, vgl. 1.3.3. Wir haben also gezeigt, dass die magnetische Induktion $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ keine Quellen besitzt.

Wir können jetzt auch schon die erste Analogie zwischen den elektrostatischen und magnetostatischen Feldgleichungen formulieren:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \Phi(\mathbf{r}) : & \nabla \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= 0, \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) : & \nabla \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= 0. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Die Ausdrucksweise *spiegelbildliche* Symmetrie soll zum Ausdruck bringen, dass in dieser Analogie zwischen Elektrostatik und Magnetostatik Rotation und Divergenz ihre Rollen tauschen. Damit muss aber auch das "magnetische Potential" ein Vektor-Potential werden. Wir werden im nächsten Abschnitt lernen, dass die *spiegelbildliche* Symmetrie auch für die Rotation der magnetischen Induktion zutrifft.

6.1.3 Vektor-Potential für quellenfreie Felder

Bereits in der klassischen Mechanik wird gezeigt, dass die beiden folgenden Aussagen richtig sind:

- Wenn ein Feld als Gradient eines skalaren Potentials darstellbar ist, dann verschwinden seine Wirbel (seine Rotation).

- Wenn die Wirbel (die Rotation) eines Feldes verschwinden (verschwindet), dann ist dieses Feld als Gradient eines skalaren Potentials darstellbar.

(Hier ist vorauszusetzen, dass die Wirbel in einem einfach zusammenhängenden Gebiet des Raumes verschwinden.) Die Wirbelfreiheit eines Feldes und seine Darstellbarkeit als Gradient einer skalaren Funktion sind also äquivalent:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \Phi(\mathbf{r}). \quad (6.6)$$

Diese Äquivalenz haben wir auch im Kapitel 1 dieses Textes noch einmal gezeigt.

Wir zeigen jetzt, dass die analoge Aussage auch für Quellen und Vektor-Potential gilt:

- Wenn ein Feld als Rotation eines Vektor-Potentials darstellbar ist, dann verschwinden (verschwindet) seine Quellen (seine Divergenz).
- Wenn die Quellen (die Divergenz) eines Feldes verschwinden (verschwindet), dann ist dieses Feld als Rotation eines Vektor-Potentials darstellbar.

Die erste Aussage haben wir soeben, nämlich in (6.4) gezeigt. Um auch die zweite Aussage nachzuweisen, setzen wir voraus, dass $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ ein quellenfreies Feld sei, d.h., seine Divergenz verschwindet. Wir zeigen, dass unter dieser Bedingung das folgende Feld $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ ein Vektor-Potential zu $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ ist:

$$\begin{aligned} A_1(x_1, x_2, x_3) &= \int_{x_{30}}^{x_3} d\xi_3 B_2(x_1, x_2, \xi_3) - \int_{x_{20}}^{x_2} d\xi_2 B_3(x_1, \xi_2, x_{30}), \\ A_2(x_1, x_2, x_3) &= -\int_{x_{30}}^{x_3} d\xi_3 B_1(x_1, x_2, \xi_3), \\ A_3(x_1, x_2, x_3) &= 0. \end{aligned}$$

Hierin sollen die ξ_2, ξ_3 kartesische Integrations-Variablen und x_{20} und x_{30} beliebige, konstante Anfangswerte der Integration sein. Die Ableitungen der Komponenten von $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ lauten, soweit sie nicht verschwinden:

$$\begin{aligned}
\partial_2 A_1 &= \int_{x_{30}}^{x_3} d\xi_3 \partial_2 B_2(x_1, x_2, \xi_3) - B_3(x_1, x_2, x_{30}), \\
\partial_3 A_1 &= B_2(x_1, x_2, x_3), \\
\partial_1 A_2 &= - \int_{x_{30}}^{x_3} d\xi_3 \partial_1 B_1(x_1, x_2, \xi_3), \\
\partial_3 A_2 &= -B_1(x_1, x_2, x_3).
\end{aligned}$$

Damit bilden wir komponentenweise die Rotation des Feldes $\mathbf{A}(\mathbf{r})$:

$$\begin{aligned}
\partial_2 A_3 - \partial_3 A_2 &= B_1(x_1, x_2, x_3), \\
\partial_3 A_1 - \partial_1 A_3 &= B_2(x_1, x_2, x_3), \\
\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 &= - \int_{x_{30}}^{x_3} d\xi_3 (\partial_1 B_1(x_1, x_2, \xi_3) + \partial_2 B_2(x_1, x_2, \xi_3)) + B_3(x_1, x_2, x_{30}) \\
&= \int_{x_{30}}^{x_3} d\xi_3 \partial_3 B_3(x_1, x_2, \xi_3) + B_3(x_1, x_2, x_{30}) \\
&= [B_3(x_1, x_2, \xi_3)]_{\xi_3=x_{30}}^{\xi_3=x_3} + B_3(x_1, x_2, x_{30}) = B_3(x_1, x_2, x_3),
\end{aligned}$$

womit der Nachweis erbracht ist. Das hier angegebene Vektor-Potential $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ ist eine spezielle Wahl. Wir werden später sehen, dass man $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ auf sehr vielfältige Weise in äquivalente Vektor-Potentiale, d.h., in solche, die dieselbe Rotation besitzen, "umeichen kann".

Wir fassen das Ergebnis nochmals zusammen: Die Quellenfreiheit eines Feldes und seine Darstellbarkeit als Rotation eines Vektor-Potentials sind äquivalent

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{A}(\mathbf{r}).} \quad (6.7)$$

6.2 Die Wirbel der magnetischen Induktion

6.2.1 Die Feldgleichung

Wir folgen der bisher festgestellten Analogie mit den elektrostatischen Feldgleichungen. Dort wurden Aussagen über die Wirbel und die Quellen des elektrischen Feldes

gemacht. In 6.1.2 haben wir bereits eine Aussage über die Wirbel der magnetischen Induktion gemacht, nämlich, dass diese verschwinden. Wir werden jetzt also die Wirbel der magnetischen Induktion untersuchen. Indem wir die magnetische Induktion durch das Vektor-Potential darstellen und einen im Anhang D.1.2 bewiesenen Hilfssatz verwenden, erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right) - \Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}). \quad (6.8)$$

Der erste Term auf der rechten Seite ist der Gradient eines Skalars, nämlich der Divergenz von $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, der zweite Term bedeutet die Anwendung des skalaren Laplace-Operators Δ auf das Vektorfeld $\mathbf{A}(\mathbf{r})$. Wir müssen diese beiden Terme getrennt auswerten, wobei wir die Darstellung (6.3),

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|},$$

verwenden.

$$(1) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right):$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \end{aligned}$$

Hier haben wir benutzt, dass $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$ nicht von \mathbf{r} abhängt, also $\partial \mathbf{j}(\mathbf{r}') / \partial \mathbf{r} = 0$, sowie

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Zur weiteren Umformung verwenden wir die Produkt-Regel

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} \left(\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \mathbf{j}(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} \mathbf{j}(\mathbf{r}'),$$

vgl. 3.1.2, so dass

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'}, \left(\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) + \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} \mathbf{j}(\mathbf{r}').$$

Der zweite Term auf der rechten Seite verschwindet für stationäre Flussdichten, $\partial \mathbf{j}(\mathbf{r}')/\partial \mathbf{r}' = 0$, vgl. 5.1.2, wie wir sie hier vorausgesetzt haben. Im ersten Term auf der rechten Seite formen wir mit dem Gaußschen Integralsatz um:

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'}, \left(\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \oint_{\infty} d\mathbf{f}' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = 0,$$

denn die Flächen-Integration erstreckt sich über eine Randfläche, die alle Flussdichten $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$ in ihrem Inneren enthält, auf der also $\mathbf{j}(\mathbf{r}') = 0$. Diese Randfläche kann möglicherweise die ∞ -weit entfernte Randfläche sein, für die $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \rightarrow 0$. In jedem Fall ist also

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0. \quad (6.9)$$

Es sei nochmals betont, dass dieses Resultat die obige Darstellung (6.3) für das Vektor-Potential $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ voraussetzt.

(2) $\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r})$.

Da die Integrationsvariable \mathbf{r}' von den Ableitungen nach \mathbf{r} im Laplace-Operator Δ nicht betroffen ist, wird

$$\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \Delta \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Nun ist, wie in 2.2.2 gezeigt,

$$\Delta \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

also

$$\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}).$$

Damit können wir das Ergebnis der Rechnung in (6.8) formulieren:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}). \quad (6.10)$$

Dieses ist die gesuchte zweite Feldgleichung für die Wirbel der magnetischen Induktion. Damit lauten die Feldgleichungen für die magnetische Induktion insgesamt

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}), \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0.} \quad (6.11)$$

Um die "spiegelbildliche" Symmetrie zwischen den elektrostatischen und den magnetostatischen Feldgleichungen deutlich zu machen, stellen wir die beiden Paare von Feldgleichungen einander gegenüber:

$$\left. \begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0, & \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}), \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}), & \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0. \end{array} \right\} \quad (6.12)$$

6.2.2 Magnetische Feldlinien

Wir greifen zurück auf die Diskussion der elektrischen Feldlinien in 2.4.4. Wir hatten dort begründet, dass die elektrischen Feldlinien an den Quellen des elektrischen Feldes, den elektrischen Ladungen, beginnen und enden und dass es keine in sich geschlossenen elektrischen Feldlinien gibt, weil die Wirbel des elektrischen Feldes in der statischen Theorie verschwinden.

Im magnetischen Fall liegen die Verhältnisse genau umgekehrt. Die magnetischen Feldgleichungen (6.12) besagen, dass es keine Quellen des magnetischen Feldes, also keine "magnetischen Ladungen" gibt. Daran wird sich auch in der zeitabhängigen Theorie nichts ändern. (Diese Aussage ist zunächst einmal auf die klassische Elektrodynamik begrenzt; es ist eine offene Frage, ob in der Quantenfeld-Theorie der Elementarteilchen nicht vielleicht doch "magnetische Ladungen", sogenannte *magnetische Monopole* auftreten können.) Für die magnetischen Feldlinien bedeutet das, dass diese keinen Anfang und kein Ende haben können, also stets in sich geschlossen sein müssen.

Wir hatten in 2.4.4 auch bereits begründet, dass in sich geschlossene Feldlinien nur dann auftreten können, wenn das betreffende Feld nicht-verschwindende Wirbel besitzt und ein endlicher Fluss dieser Wirbel durch die in sich geschlossenen Feldlinien hindurchtritt. Es sei L eine in sich geschlossene Feldlinie und F ein beliebiges Flächenstück, das von L berandet wird. Wir bilden das Linien-Integral über die magnetische Induktion $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ längs L und erhalten mit dem Stokesschen Integralsatz:

$$\oint_L d\mathbf{r} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \int_F d\mathbf{f} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}). \quad (6.13)$$

Wir setzen links die Bahngleichung für die Feldlinie L ein,

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{B}(\mathbf{r}),$$

vgl. 2.4.4, und rechts die Feldgleichung (6.12) für $\partial/\partial \mathbf{r} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})$:

$$\oint_L d\mathbf{r} \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mu_0 \int_F d\mathbf{f} \mathbf{j}(\mathbf{r}). \quad (6.14)$$

Auf der linken Seite wählen wir die Bogenlänge als Parameter s für die Darstellung der Feldlinie, so dass $(d\mathbf{r})^2 = (ds)^2$. Auf der rechten Seite liefert das Flächen-Integral den Strom I durch F bzw. durch die Feldlinie L :

$$\oint_L ds = \mu_0 I. \quad (6.15)$$

Elektrische Ströme I sind also von geschlossenen magnetischen Feldlinien umgeben.

Die obige Überlegung ist unabhängig von der Wahl des Flächenstücks F , das von der betrachteten Feldlinie berandet werden soll. Die Flächen-Integrale über verschiedene Flächenstücke F mit demselben Rand L unterscheiden sich offenbar um Flächen-Integrale über geschlossene Flächen ∂V , die ein Volumen V beranden. Es ist aber mit dem Gaußschen Integralsatz

$$\oint_{\partial V} d\mathbf{f} \mathbf{j}(\mathbf{r}) = \int_V d^3r \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0$$

im stationären Fall.

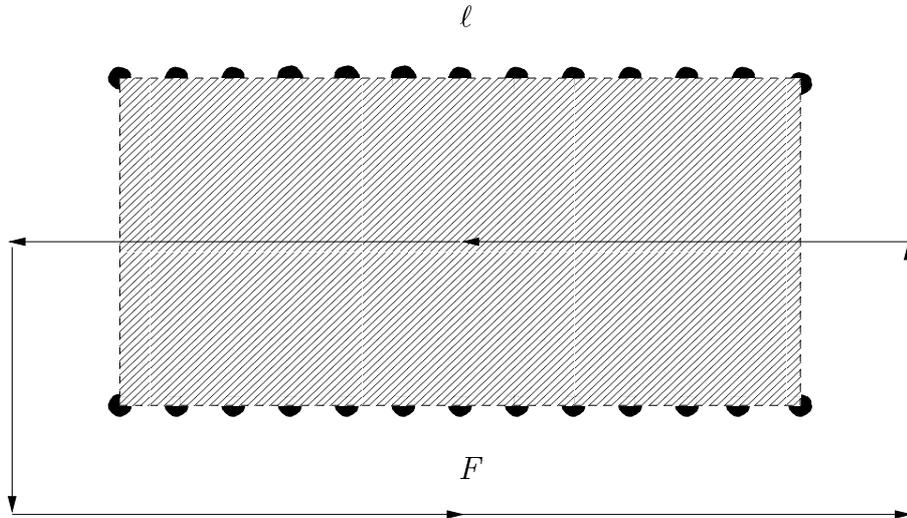


Abbildung 6.1: Magnetische Induktion in einer langen Spule.

6.2.3 Anwendung: Lange Spule

Als Anwendung der Feldgleichung für die Wirbel der magnetische Induktion bestimmen wir deren Feld in einer Spule, die n Windungen auf einer Länge ℓ besitzt. Wenn die Länge ℓ hinreichend groß im Vergleich mit dem Radius der Spule ist, können wir annehmen, dass das Feld \mathbf{B} nur im Inneren der Spule vorhanden ist. Aus Symmetrie-Gründen kann \mathbf{B} nur die Richtung der Spulenachse haben. Es sei F eine Fläche, die die eine Seite der Windungen der Spule senkrecht schneidet. Die Abbildung 6.1 zeigt einen Schnitt durch die Spule in der Fläche F . Wir integrieren die Feldgleichung für die Wirbel von \mathbf{B} über diese Fläche:

$$\int_F d\mathbf{f} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \int_F d\mathbf{f} \mathbf{j}(\mathbf{r}). \quad (6.16)$$

Auf der linken Seite verwenden wir den Stokesschen Integralsatz und machen Gebrauch von der näherungsweise Annahme, dass das Feld \mathbf{B} nur im Inneren der Spule auftritt:

$$\int_F d\mathbf{f} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \oint_{\partial F} \mathbf{B}(\mathbf{r}) \approx \ell B,$$

worin B die Komponente von \mathbf{B} in der Richtung der Spulenachse ist. Das Integral auf der rechten Seite von (6.16) liefert das n -fache des Stromes I , der durch den Spulendraht fließt. Durch Einsetzen in (6.16) finden wir also

$$B = \mu_0 \frac{nI}{\ell}. \quad (6.17)$$

6.3 Eichung des Vektor-Potentials

Wenn $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ ein Vektor-Potential zu $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ ist,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{A}(\mathbf{r}),$$

dann ist auch

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} F(\mathbf{r}) \quad (6.18)$$

ein Vektor-Potential zu $\mathbf{B}(\mathbf{r})$, worin $F(\mathbf{r})$ eine beliebige (differenzierbare) skalare Funktion ist. Der Nachweis für diese Behauptung:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} F(\mathbf{r}) \right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{A}(\mathbf{r}),$$

weil die Rotation eines Gradienten verschwindet. Man nennt den Übergang von einem Vektor-Potential $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ zu einem Vektor-Potential $\mathbf{A}'(\mathbf{r})$ gemäß (6.6) eine *Um-eichung* des Vektor-Potentials und die freie Wahl der Funktion $F(\mathbf{r})$ die *Eichfreiheit* des Vektor-Potentials.

Man kann die Eichfreiheit verwenden, um die Divergenz des Vektor-Potentials festzulegen. Es sei $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ irgendein Vektor-Potential mit bekannter Divergenz $\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}) / \partial \mathbf{r}$ und $\mathbf{A}'(\mathbf{r})$ das gesuchte Vektor-Potential, dessen Divergenz $\partial \mathbf{A}'(\mathbf{r}) / \partial \mathbf{r}$ vorgegeben sei. Da beide Vektor-Potentiale dieselbe magnetische Induktion $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ liefern sollen, muss sein

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times (\mathbf{A}'(\mathbf{r}) - \mathbf{A}(\mathbf{r})) = 0 \quad \implies \quad \mathbf{A}'(\mathbf{r}) - \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} F(\mathbf{r}),$$

was der Aussage in (6.18) entspricht. Wir formulieren die Divergenz und finden

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} F(\mathbf{r}).$$

Nun ist

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} F(\mathbf{r}) = \Delta F(\mathbf{r}),$$

so dass

$$\Delta F(\mathbf{r}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{A}'(\mathbf{r}) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{A}(\mathbf{r}). \quad (6.19)$$

Da die rechte Seite durch Vorgabe bzw. Vorkenntnis bekannt ist, stellt diese Gleichung die Bestimmungs-Gleichung für dasjenige $F(\mathbf{r})$ dar, mit dem sich das Vektor-Potential $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ gemäß (6.18) in $\mathbf{A}'(\mathbf{r})$ mit vorgegebener Divergenz umeichen lässt. Es ist formal dieselbe Gleichung wie die Poisson-Gleichung der Elektrostatik, vgl. 2.4.2.

Die Darstellung von $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ in (6.3),

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|},$$

hat, wie wir in 6.9 gezeigt haben verschwindende Divergenz:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = 0. \quad (6.20)$$

Man nennt eine Eichung mit verschwindender Divergenz auch *Coulomb-Eichung*.

Wie wir in (6.8) gezeigt haben, gilt allgemein

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right) - \Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}), \quad (6.21)$$

so dass die Feldgleichung für die Wirbel von $\mathbf{B}(\mathbf{r})$, ausgedrückt in $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ allgemein

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right) - \Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) \quad (6.22)$$

lautet. Speziell für die Coulomb–Eichung ist also

$$\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}). \quad (6.23)$$

Dieses ist das magnetostatische Analogon zur elektrostatischen Poisson–Gleichung

$$\Delta \Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}). \quad (6.24)$$

Damit haben wir zumindest grundsätzlich die Möglichkeit, Probleme der Magnetostatik mit ähnlichen Techniken anzugehen, wie wir sie im Kapitel 4 für die Elektrostatik entwickelt haben. Allerdings haben die magnetostatischen Probleme wegen anderer Vorgaben für die Flussdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ und anderer Typen von Randbedingungen oft eine andere Struktur als elektrostatische Probleme.

In der statischen Theorie erscheint es zunächst so, als sei nur das Vektor–Potential von der Eichfreiheit betroffen, nicht jedoch das skalare elektrische Potential. In der nicht–stationären Theorie werden wir lernen, dass die allgemeine Eich–Transformation immer zugleich das Vektor–Potential und das skalare Potential betrifft.

6.4 Zerlegungssatz

Die Zusammenstellung der Feldgleichungen für das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ und die magnetische Induktion $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ in (6.12) lässt vermuten, dass ein Feld durch seine Quellen und Wirbel eindeutig bestimmt ist. Für das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ werden die Quellen vorgegeben, während die Wirbel verschwinden sollen, für die magnetische Induktion $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ werden umgekehrt die Wirbel vorgegeben, während die Quellen verschwinden sollen. Wir stellen darum jetzt die allgemeine Frage, ob ein Feld $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ durch Vorgabe seiner Quellen *und* Wirbel,

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{f}(\mathbf{r}) = q(\mathbf{r}), \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{f}(\mathbf{r}) = \mathbf{w}(\mathbf{r}) \quad (6.25)$$

eindeutig bestimmbar ist. Wir versuchen, die gestellte Frage zu beantworten, indem wir das Feld $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ zerlegen,

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}(\mathbf{r}) + \mathbf{b}(\mathbf{r}), \quad (6.26)$$

und zwar in der Weise, dass $\mathbf{e}(\mathbf{r})$ die für $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ vorgegebenen Quellen $q(\mathbf{r})$ besitzt, aber wirbelfrei ist, und $\mathbf{b}(\mathbf{r})$ die für $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ vorgegebenen Wirbel $\mathbf{w}(\mathbf{r})$ besitzt, aber quellenfrei ist. $\mathbf{e}(\mathbf{r})$ und $\mathbf{b}(\mathbf{r})$ erfüllen also jeweils denselben Typ von Feldgleichungen wie das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ bzw. die magnetische Induktion $\mathbf{B}(\mathbf{r})$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{e}(\mathbf{r}) &= 0, & \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{e}(\mathbf{r}) &= q(\mathbf{r}), \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{b}(\mathbf{r}) &= \mathbf{w}(\mathbf{r}), & \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{b}(\mathbf{r}) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.27)$$

Wir können jetzt auf die Aussagen in 4.3 für das elektrische Feld und in 6.3 für die magnetische Induktion zurückgreifen, dass diese nämlich nach Setzung von geeigneten Randbedingungen durch ihre Feldgleichungen jeweils eindeutig bestimmt sind. Dann trifft dieselbe Aussage auch auf $\mathbf{e}(\mathbf{r})$ und $\mathbf{b}(\mathbf{r})$ zu. Auch die Zerlegung von $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ in (6.26) ist eindeutig. Es sei $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}'(\mathbf{r}) + \mathbf{b}'(\mathbf{r})$ eine Zerlegung in zwei andere Felder $\mathbf{e}'(\mathbf{r})$ und $\mathbf{b}'(\mathbf{r})$ mit denselben Eigenschaften und Randbedingungen wie $\mathbf{e}(\mathbf{r})$ und $\mathbf{b}(\mathbf{r})$. Für die Differenz $\mathbf{d}(\mathbf{r}) := \mathbf{e}'(\mathbf{r}) - \mathbf{e}(\mathbf{r})$ erhalten wir die Feldgleichungen

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{d}(\mathbf{r}) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{d}(\mathbf{r}) = 0. \quad (6.28)$$

Wegen der Wirbelfreiheit ist $\mathbf{d}(\mathbf{r})$ durch ein Potential darstellbar:

$$\mathbf{d}(\mathbf{r}) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \phi(\mathbf{r}).$$

Einsetzen in die Quellengleichung liefert

$$\Delta \phi(\mathbf{r}) = 0. \quad (6.29)$$

Es sind entweder Dirichletsche Randbedingungen, nämlich $\phi(\mathbf{r}) = 0$ auf der vorgegebenen Randfläche, oder Neumannsche Randbedingungen, nämlich $\partial\phi(\mathbf{r})/\partial n = 0$ auf der vorgegebenen Randfläche, (oder gemischte Randbedingungen) zu fordern. Wie wir in 4.3.3 gezeigt haben, folgt daraus $\phi(\mathbf{r}) = \text{const}$ bzw. $\mathbf{d}(\mathbf{r}) = 0$. Denselben Schluss können wir für $\mathbf{b}(\mathbf{r})$ statt $\mathbf{e}(\mathbf{r})$, ziehen, vgl auch 6.3. Damit ist die obige Vermutung, dass ein Feld durch Vorgabe seiner Quellen und Wirbel (sowie der Randbedingungen) eindeutig bestimmt ist, bestätigt.

6.5 Magnetische Multipol–Entwicklung

Wir wollen im weiteren Verlauf dieses Kapitels die magnetischen Analogien zu den Themen formulieren, die wir im Kapitel 3 für das elektrische Feld erarbeitet haben. Wenn wir wie im Kapitel 3 vorgehen wollten, müssten wir uns zunächst mit der magnetischen Feldenergie und ihrer Dichte befassen. Es wird sich später zeigen, dass das im Rahmen einer statischen magnetischen Feldtheorie nicht möglich ist. Der Grund dafür ist, dass das Feld $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ der magnetischen Induktion gemäß seiner Feldgleichungen durch elektrische Ströme aufgebaut wird, die einen zeitlichen Anfang gehabt haben müssen. Das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ kann man sich dagegen durch eine beliebig langsame Trennung von Ladungen aufgebaut denken.

Wir wenden uns deshalb hier sogleich der magnetischen Multipol–Entwicklung und später den Flussdichten in äußeren Feldern zu.

6.5.1 Die Entwicklung, Monopol–Term

Ausgangspunkt ist analog dem elektrischen Fall das Vektor–Potential in der Eichung

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (6.30)$$

Wir nehmen wieder an, dass $\mathbf{j}(\mathbf{r}') \neq 0$ nur in einem begrenzten Bereich $|\mathbf{r}'| < R$ und dass wir $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ in hinreichend großer Entfernung $|\mathbf{r}| \gg R$ davon auswerten wollen. Wir entwickeln deshalb auch hier $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ nach \mathbf{r}' und können diese Entwicklung aus 3.2.1 übernehmen:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{x_\alpha x'_\alpha}{r^3} + \dots = \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3} + \dots \quad (6.31)$$

Im Gegensatz zum elektrischen Fall entwickeln wir hier nur bis zur ersten Ordnung, können deshalb also auch nur Dipol-Beiträge erwarten. Magnetische Quadrupol-Terme lassen sich nach demselben Muster wie im elektrischen Fall formulieren, kommen jedoch in Anwendungen recht selten vor.

Einsetzen von (6.31) in (6.30) führt zu einer Entwicklung

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}^{(0)}(\mathbf{r}) + \mathbf{A}^{(1)}(\mathbf{r}) + \dots, \quad (6.32)$$

$$\mathbf{A}^{(0)}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \int d^3r' \mathbf{j}(\mathbf{r}'), \quad (6.33)$$

$$\mathbf{A}^{(1)}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \int d^3r' (\mathbf{r} \mathbf{r}') \mathbf{j}(\mathbf{r}'). \quad (6.34)$$

Der Term $\mathbf{A}^{(0)}(\mathbf{r})$ entspricht dem elektrischen Monopol-Term

$$\Phi^{(0)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}').$$

Da es jedoch wegen $\partial\mathbf{B}/\partial\mathbf{r} = 0$ keine magnetischen Quellen bzw. Ladungen gibt, erwarten wir, dass dieser Term verschwindet. Wir zeigen das mit der folgenden Rechnung:

$$\begin{aligned} \int d^3r' j_\alpha(\mathbf{r}') &= \int d^3r' \delta_{\alpha\beta} j_\beta(\mathbf{r}') = \int d^3r' (\partial'_\beta x'_\alpha) j_\beta(\mathbf{r}') = \\ &= - \int d^3r' x'_\alpha \partial'_\beta j_\beta(\mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (6.35)$$

In dieser Umformung haben wir partiell integriert, ausführlich

$$\int d^3r' (\partial'_\beta x'_\alpha) j_\beta(\mathbf{r}') = \oint_{F'} df'_\beta x'_\alpha j_\beta(\mathbf{r}') - \int d^3r' x'_\alpha \partial'_\beta j_\beta(\mathbf{r}').$$

Das Flächen-Integral verschwindet, wenn die Randfläche F' die Flussdichte $j_\beta(\mathbf{r}')$ enthält, also $j_\beta(\mathbf{r}') = 0$ auf F' .

In (6.35) ist

$$\partial'_\beta j_\beta(\mathbf{r}') = \frac{\partial}{\partial\mathbf{r}'} \mathbf{j}(\mathbf{r}') = 0$$

für stationäre Flussdichten $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$. Dieser Schluss ist also in der nicht-stationären, zeitabhängigen Theorie nicht mehr möglich. Dort werden monopol-artige Terme auftreten, die von nicht-stationären Flussdichten herrühren.

6.5.2 Magnetischer Dipol

Wir werden zeigen, dass sich der Term 1. Ordnung in (6.32) als *magnetischer Dipol-Term* in der Form

$$\mathbf{A}^{(1)}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \mathbf{m} \times \mathbf{r}, \quad \mathbf{m} = \frac{1}{2} \int d^3r' \mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}') \quad (6.36)$$

schreiben lässt. Der Vektor \mathbf{m} heißt der *magnetische Dipol* der Flussdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$. Der obige magnetische Dipol-Term ist analog zum elektrischen Dipol-Term

$$\Phi^{(1)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}, \quad \mathbf{p} = \int d^3r' \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}').$$

aus 3.2.1.

Wir führen den Nachweis von (6.36) "rückwärts", indem wir zeigen, dass diese Formulierung mit dem Term 1. Ordnung in (6.34) übereinstimmt. Unter Verwendung der Definition für \mathbf{m} in (6.36) berechnen wir

$$\begin{aligned} (\mathbf{m} \times \mathbf{r})_\alpha &= \epsilon_{\alpha\beta\gamma} m_\beta x_\gamma = \frac{1}{2} \int d^3r' \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\beta\mu\nu} x'_\mu x_\gamma j_\nu(\mathbf{r}') = \\ &= \frac{1}{2} \int d^3r' (\delta_{\alpha\nu} \delta_{\gamma\mu} - \delta_{\alpha\mu} \delta_{\gamma\nu}) x'_\mu x_\gamma j_\nu(\mathbf{r}') = \\ &= \frac{1}{2} \int d^3r' x_\gamma x'_\gamma j_\alpha(\mathbf{r}') - \frac{1}{2} \int d^3r' x'_\alpha x_\gamma j_\gamma(\mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (6.37)$$

Hier haben wir benutzt, dass

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\beta\mu\nu} = -\epsilon_{\beta\alpha\gamma} \epsilon_{\beta\mu\nu} = -\delta_{\alpha\mu} \delta_{\gamma\nu} + \delta_{\alpha\nu} \delta_{\gamma\mu},$$

vgl. Anhang D.1.1. Der erste Term in der letzten Zeile von (6.37) hat bereits die gewünschte Form in (6.34), allerdings mit dem Faktor 1/2. Es bleibt zu zeigen, dass der auch der zweite Term in der letzten Zeile von (6.37) diese Form (mit dem entgegengesetzten Vorzeichen) hat. Wir führen eine ähnliche Umformung wie in (6.35) durch:

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \int d^3 r' x'_\alpha x_\gamma j_\gamma(\mathbf{r}') = \\
& = -\frac{1}{2} \int d^3 r' x'_\alpha \delta_{\beta\gamma} x_\beta j_\gamma(\mathbf{r}') = \\
& = -\frac{1}{2} \int d^3 r' x'_\alpha (\partial'_\gamma x'_\beta) x_\beta j_\gamma(\mathbf{r}') = \\
& = \frac{1}{2} \int d^3 r' x_\beta x'_\beta \partial'_\gamma (x'_\alpha j_\gamma(\mathbf{r}')) = \\
& = \frac{1}{2} \int d^3 r' x_\beta x'_\beta (\delta_{\alpha\gamma} j_\gamma(\mathbf{r}') + x'_\alpha \partial'_\gamma j_\gamma(\mathbf{r}')) = \\
& = \frac{1}{2} \int d^3 r' x_\beta x'_\beta j_\alpha(\mathbf{r}'), \tag{6.38}
\end{aligned}$$

womit der erwünschte Nachweis erbracht ist. Darin haben wir nochmals die Bedingung $\partial'_\gamma j_\gamma(\mathbf{r}') = 0$ der Stationarität der Flussdichte verwendet. Wir berechnen die magnetische Induktion $\mathbf{B}^{(1)}(\mathbf{r})$ des Dipol-Terms:

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}^{(1)}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \left(\frac{1}{r} \mathbf{m} \times \mathbf{r} \right), \\
B_\alpha^{(1)} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \partial_\beta \left(\epsilon_{\gamma\mu\nu} \frac{1}{r^3} m_\mu x_\nu \right) = \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \epsilon_{\gamma\alpha\beta} \epsilon_{\gamma\mu\nu} m_\mu \partial_\beta \left(\frac{1}{r^3} x_\nu \right) = \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} (\delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\nu} \delta_{\beta\mu}) m_\mu \left(-3 \frac{x_\beta x_\mu}{r^5} + \frac{\delta_{\beta\nu}}{r^3} \right) = \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^5} \left[m_\alpha (-3 x_\beta^2 + r^2 \delta_{\beta\beta}) - m_\beta (-3 x_\alpha x_\beta + r^2 \delta_{\alpha\beta}) \right] = \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^5} \left[3 m_\beta x_\beta x_\alpha - r^2 m_\alpha \right], \\
\mathbf{B}^{(1)}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^5} \left[3 (\mathbf{m} \mathbf{r}) \mathbf{r} - r^2 \mathbf{m} \right] \tag{6.39}
\end{aligned}$$

in Analogie zum elektrischen Feld eines elektrischen Dipols

$$\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^5} \left[3 (\mathbf{p} \mathbf{r}) \mathbf{r} - r^2 \mathbf{p} \right],$$

vgl. 3.2.1.

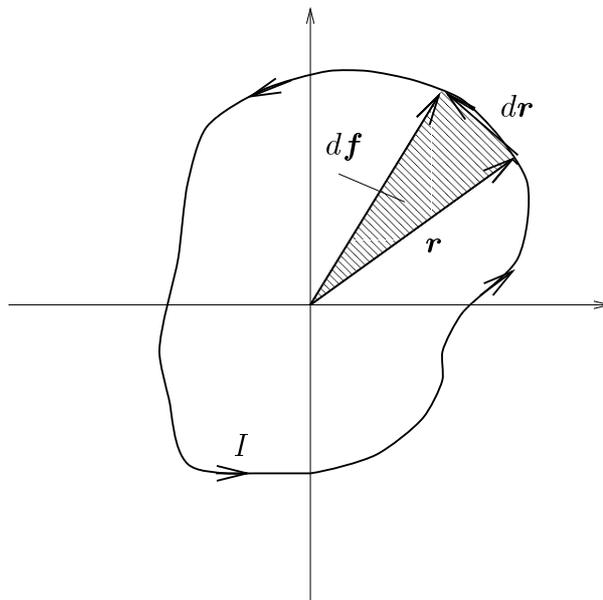


Abbildung 6.2: Ebene Leiterschleife

6.5.3 Beispiel: Ebene Leiterschleife

Als Beispiel für einen magnetischen Dipol betrachten wir einen ebenen, in sich geschlossenen Leiterdraht ("Schleife") L , der von einem elektrischen Strom I durchflossen werde. Wir berechnen das magnetische Dipolmoment gemäß (6.36):

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int d^3r \mathbf{r} \times \mathbf{j}(\mathbf{r}).$$

Wie wir in 5.3.1 gezeigt haben, ist bei einem drahtförmigen Leiter $d^3r \mathbf{j}(\mathbf{r}) = I d\mathbf{r}$, so dass hier

$$\mathbf{m} = \frac{I}{2} \oint_L \mathbf{r} \times d\mathbf{r}. \quad (6.40)$$

Nun ist

$$\frac{1}{2} \mathbf{r} \times d\mathbf{r} = d\mathbf{f}$$

gerade das Flächen-Element eines Segments der Schleife, das in der Abbildung 6.2 für die gezeigte Stromrichtung entgegen dem Uhrzeigersinn senkrecht zur Schleifen-Ebene nach "oben", d.h., der Blickrichtung entgegen zeigt ("Rechte-Hand-Regel" für das Kreuzprodukt.) Also ist

$$\mathbf{m} = I \mathbf{F}, \quad (6.41)$$

worin \mathbf{F} wiederum senkrecht zur Schleifen-Ebene nach "oben" zeigt und $|\mathbf{F}|$ =Flächeninhalt der Schleife.

6.5.4 Bewegte Ladungen

Ein weiteres und oft auftretendes Beispiel für magnetische Momente sind bewegte Ladungen, z.B. rotierende Ladungen. Die Bewegung von Ladungen stellen wir uns wieder als die Bewegung von Ladungsträgern vor. Diese seien beschrieben durch eine stationäre Ladungs- und Flussdichte $\rho(\mathbf{r})$ bzw. $\mathbf{j}(\mathbf{r})$. Die Flussdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ lässt sich durch das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ der Ladungen ausdrücken,

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}) \mathbf{v}(\mathbf{r}),$$

weil die Flussdichte hier rein konvektiv ist, vgl. 5.1.3. Die Berechnung des magnetischen Moments ergibt jetzt

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= \frac{1}{2} \int d^3r \mathbf{r} \times \mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} \times \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \\ &= \frac{1}{2} \int d^3r \frac{\rho(\mathbf{r})}{\mu(\mathbf{r})} \mathbf{r} \times \mathbf{p}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (6.42)$$

Hier haben wir neben der Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$ auch die *Massendichte* $\mu(\mathbf{r})$ der Ladungsträger eingeführt, die durch

$$\mu(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{M_{\Delta V}}{\Delta V} \quad (6.43)$$

mit $M_{\Delta V}$ = Masse im Volumen-Element ΔV definiert ist. Außerdem ist $\mathbf{p}(\mathbf{r}) = \mu(\mathbf{r}) \mathbf{v}(\mathbf{r})$ die *Impulsdichte* der Ladungsträger. Wenn nun das Verhältnis von Ladungs- und Massendichte räumlich konstant ist, weil z.B. nur eine Art von Ladungsträgern mit einem typischen Verhältnis

$$\frac{\rho(\mathbf{r})}{\mu(\mathbf{r})} = \frac{q}{m} \quad (6.44)$$

von Ladung pro Masse in dem betrachteten System vorhanden ist, dann erhalten wir aus (6.42) für das magnetische Moment

$$\boxed{\mathbf{m} = \frac{q}{2m} \mathbf{L}}, \quad \mathbf{L} = \int d^3r \mathbf{r} \times \mathbf{p}(\mathbf{r}). \quad (6.45)$$

\mathbf{L} ist offensichtlich der *Gesamt-Drehimpuls* des Systems von Ladungsträgern.

Dieses Ergebnis ist anwendbar auf einen rotierenden Körper, der elektrisch geladen ist und eine typische Ladung q/m pro Masse trägt. Wir vergleichen es mit der Aussage der Quantentheorie über das magnetische Moment eines Elektrons. Der *Spin* des Elektrons entspricht klassisch der Rotation eines Teilchens um eine Achse durch seinen Schwerpunkt. Der Drehimpuls \mathbf{S} des Elektrons ist *quantisiert*: eine beliebige Komponente von \mathbf{S} , z.B. S_3 , kann die Werte $S_3 = \pm \hbar/2$ annehmen, worin $\hbar = h/(2\pi)$, h = Plancksches Wirkungsquantum. Wenn die oben hergeleitete Formel (6.45) für das magnetische Moment auf das Elektron anwendbar wäre, müsste dieses ein magnetisches Moment $m_3 = \pm e \hbar/(4 m_e)$ besitzen, worin e die Elementarladung und m_e die Masse des Elektrons sind. Tatsächlich jedoch lautet das magnetische Moment des Elektrons

$$m_3 = \pm g \frac{e \hbar}{4 m_e}, \quad g \approx 2, \quad (6.46)$$

ist also etwa doppelt so groß wie der klassische Wert aus (6.45). Daraus ist zu schließen, dass die Interpretation des Elektrons (und ebenso anderer Elementarteilchen) als homogen geladene starre Körper quantentheoretisch nicht korrekt ist. "Homogene Ladung" pro Masse schließt ja die Vorstellung ein, dass sich der Körper aus Massenelementen zusammensetzt, die sämtlich dieselbe Ladung pro Masse tragen. Das Elektron ist aber gerade ein *elementares* Teilchen, das eine solche Zerlegung in kleinere Massenelemente nicht mehr zulässt.

Neben dem Drehimpuls des Spins können Teilchen auch noch einen *Bahn-Drehimpuls* besitzen. Diese sind so quantisiert, dass eine beliebige Komponente, z.B. L_3 , die Werte

$$L_3 = m \hbar, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (6.47)$$

annehmen kann. Hier liefert die klassische Formel (6.45) für das magnetische Bahnmoment

$$m_3 = \frac{e \hbar}{2 m_e} m, \quad (6.48)$$

was in der Quantentheorie bestätigt wird. Allerdings ist die Bewegung eines einzelnen Ladungsträgers nicht stationär, so dass (6.45) hier gar nicht anwendbar wäre.

6.6 Stromverteilungen in äußeren Feldern

Dieser Abschnitt ist das magnetische Analogon zum Abschnitt 3.3 im elektrischen Fall: wir betrachten eine Stromverteilung, charakterisiert durch ihre Flussdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ in einem äußeren Feld $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ der magnetischen Induktion, die nicht durch das betrachtete $\mathbf{j}(\mathbf{r})$, sondern von anderen, hinreichend weit entfernten Flussdichten erzeugt wird. Die betrachtete Flussdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$ sei lokalisiert in der Umgebung des "Strom-Schwerpunktes" \mathbf{r} , d.h., $\mathbf{j}(\mathbf{r}') \neq 0$ in einem Bereich $|\mathbf{r}' - \mathbf{r}| < R$ und

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}') = 0 \quad \text{im Bereich} \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}') \neq 0. \quad (6.49)$$

Nach wie vor soll $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$ stationär sein, also

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} \mathbf{j}(\mathbf{r}') = 0. \quad (6.50)$$

Im Abschnitt 3.3 hatten wir zunächst die Energie einer Ladungsverteilung in einem äußeren Feld bestimmt. Die magnetische Analogie dazu können wir hier noch nicht formulieren, weil die magnetische Feldenergie, wie wir bereits früher bemerkt hatten, erst im Rahmen der vollständigen zeitabhängigen Theorie formulierbar ist. Wir beginnen deshalb mit der Berechnung der Kraft auf eine Stromverteilung in einem äußeren Feld.

6.6.1 Kräfte

Auf das Stromelement in d^3r' wirkt die Lorentz-Kraft

$$d\mathbf{F} = d^3r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \mathbf{B}(\mathbf{r}'), \quad (6.51)$$

auf die gesamte Stromverteilung $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$ also die Resultierende

$$\mathbf{F} = \int d^3r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \mathbf{B}(\mathbf{r}'), \quad (6.52)$$

bzw. in Komponenten

$$F_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \int d^3r' j_\beta(\mathbf{r}') B_\gamma(\mathbf{r}'). \quad (6.53)$$

Wie im elektrischen Fall nehmen wir an, dass wir das Feld $\mathbf{B}(\mathbf{r}')$ um den "Strom-Schwerpunkt" \mathbf{r} in eine Taylorreihe entwickeln können:

$$B_\gamma(\mathbf{r}') = B_\gamma(\mathbf{r}) + (x'_\mu - x_\mu) \partial_\mu B_\gamma(\mathbf{r}) + \dots, \quad (6.54)$$

eingesetzt in (6.53)

$$\begin{aligned} F_\alpha &= \epsilon_{\alpha\beta\gamma} B_\gamma(\mathbf{r}) \int d^3r' j_\beta(\mathbf{r}') + \\ &+ \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \partial_\mu B_\gamma(\mathbf{r}) \int d^3r' (x'_\mu - x_\mu) j_\beta(\mathbf{r}') + \dots \end{aligned} \quad (6.55)$$

Nun hatten wir bereits in 6.5.1 gezeigt, dass

$$\int d^3r' j_\beta(\mathbf{r}') = 0, \quad (6.56)$$

wenn $j_\beta(\mathbf{r}')$, wie vorausgesetzt, stationär ist. Wir schreiben das Ergebnis von (6.55) in der Form

$$F_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} M_{\mu\beta} \partial_\mu B_\gamma(\mathbf{r}) + \dots, \quad (6.57)$$

$$\begin{aligned} M_{\mu\beta} &:= \int d^3 r' (x'_\mu - x_\mu) j_\beta(\mathbf{r}') = \\ &= \int d^3 r' x'_\mu j_\beta(\mathbf{r}') - x_\mu \int d^3 r' j_\beta(\mathbf{r}') = \\ &= \int d^3 r' x'_\mu j_\beta(\mathbf{r}'), \end{aligned} \quad (6.58)$$

worin wir nochmals (6.56) für stationäre Stromverteilungen benutzt haben. $M_{\mu\beta}$ ist offensichtlich ein Tensor 2. Stufe, vgl. 3.2.2. In 6.5.2 hatten wir gezeigt, dass wiederum für stationäre Stromverteilungen

$$\int d^3 r' x'_\alpha x_\gamma j_\gamma(\mathbf{r}') = - \int d^3 r' x_\beta x'_\beta j_\alpha(\mathbf{r}'),$$

bzw., wenn wir rechts den Summations-Index β in γ umbenennen,

$$\int d^3 r' x'_\alpha x_\gamma j_\gamma(\mathbf{r}') = - \int d^3 r' x_\gamma x'_\gamma j_\alpha(\mathbf{r}'),$$

und nunmehr beachten, dass x_γ beliebig wählbar ist,

$$\int d^3 r' x'_\alpha j_\gamma(\mathbf{r}') = - \int d^3 r' x'_\gamma j_\alpha(\mathbf{r}'). \quad (6.59)$$

Diese Aussage bedeutet, dass für den in (6.58) definierten Tensor

$$M_{\alpha\gamma} = -M_{\gamma\alpha} \quad (6.60)$$

gilt, d.h., dass der Tensor $M_{\alpha\gamma}$ *antisymmetrisch* ist. Wir übertragen nun die Definition (6.36) für das magnetische Dipolmoment auf den Fall, dass die Stromverteilung $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$ ihren Schwerpunkt am Ort \mathbf{r} hat:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int d^3 r' (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \times \mathbf{j}(\mathbf{r}'), \quad (6.61)$$

in Komponenten

$$m_\alpha = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \int d^3 r' (x'_\beta - x_\beta) j_\gamma(\mathbf{r}') = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} M_{\beta\gamma}, \quad (6.62)$$

vgl. die Definition (6.58). Wir multiplizieren (6.62) mit $\epsilon_{\alpha\mu\nu}$ (einschließlich Summations-Konvention für α), beachten die Summations-Regeln des Levi-Civita-Tensors, vgl. D.1.1, und die Antisymmetrie des Tensors $M_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\alpha\mu\nu} m_\alpha &= \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\alpha\mu\nu} M_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} (\delta_{\beta\mu} \delta_{\gamma\nu} - \delta_{\beta\nu} \delta_{\gamma\mu}) M_{\beta\gamma} = \\ &= \frac{1}{2} (M_{\mu\nu} - M_{\nu\mu}) = M_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (6.63)$$

eingesetzt in (6.57) (mit geeigneter Umbenennung der Indizes, so dass bereits definierte Indizes nicht mehrfach verwendet werden)

$$\begin{aligned} F_\alpha &= \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\nu\mu\beta} m_\nu \partial_\mu B_\gamma(\mathbf{r}) + \dots \\ &= \epsilon_{\beta\alpha\gamma} \epsilon_{\beta\mu\nu} m_\nu \partial_\mu B_\gamma(\mathbf{r}) + \dots \\ &= (\delta_{\alpha\mu} \delta_{\gamma\nu} - \delta_{\alpha\nu} \delta_{\gamma\mu}) m_\nu \partial_\mu B_\gamma(\mathbf{r}) + \dots \\ &= m_\gamma \partial_\alpha B_\gamma(\mathbf{r}) - m_\alpha \partial_\gamma B_\gamma(\mathbf{r}) + \dots \end{aligned} \quad (6.64)$$

Nun ist $\partial_\gamma B_\gamma(\mathbf{r}) = 0$, weil die magnetische Induktion quellenfrei ist. Außerdem benutzen wir, dass das magnetische Moment, definiert in (6.61), unabhängig vom Ort \mathbf{r} ist, denn

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= \frac{1}{2} \int d^3 r' (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \times \mathbf{j}(\mathbf{r}') = \\ &= \frac{1}{2} \int d^3 r' \mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}') - \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \int d^3 r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') = \\ &= \frac{1}{2} \int d^3 r' \mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}'), \end{aligned}$$

worin wir nochmals (6.56) verwendet haben. Damit können wir das Ergebnis (6.64) wie folgt schreiben:

$$F_\alpha = -\partial_\alpha (-m_\gamma B_\gamma(\mathbf{r})) + \dots, \quad \boxed{\mathbf{F} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (-\mathbf{m} \mathbf{B}(\mathbf{r})) + \dots} \quad (6.65)$$

Wir haben also formal dasselbe Ergebnis gefunden wie elektrischen Fall in 3.3.2 bei verschwindender Gesamtladung Q der Ladungsverteilung:

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (-\mathbf{p} \mathbf{E}(\mathbf{r})) + \dots \quad (6.66)$$

Wie im elektrischen Fall lässt sich $W_m = -\mathbf{m} \mathbf{E}(\mathbf{r})$ als Potential für eine Translation des magnetischen Moments \mathbf{m} interpretieren.

Wir können das Ergebnis (6.65) in eine andere Form bringen, wenn wir die bereits in 3.3.4 benutzte Produkt-Regel

$$\mathbf{C} \times \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{D}(\mathbf{r}) \right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\mathbf{C} \mathbf{D}(\mathbf{r})) - \left(\mathbf{C} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{D}(\mathbf{r})$$

mit \mathbf{C} =konstanter Vektor für $\mathbf{C} = \mathbf{m}$ und $\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(\mathbf{r})$ verwenden und (6.49) beachten:

$$\boxed{\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \left(\mathbf{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{B}(\mathbf{r}) + \dots,} \quad (6.67)$$

ebenfalls gleichlautend mit dem elektrischen Fall. Wir finden schließlich noch eine dritte Formulierung, wenn wir die Produkt-Regel

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})) = \mathbf{m} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{B}(\mathbf{r}) \right) - \left(\mathbf{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{B}(\mathbf{r})$$

verwenden (Nachweis s.u.) und die Quellenfreiheit von $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ beachten, nämlich

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})) + \dots \quad (6.68)$$

Wir zeigen die soeben verwendete Produkt-Regel:

$$\begin{aligned}
\left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})) \right\}_\alpha &= \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \partial_\beta \epsilon_{\gamma\mu\nu} m_\mu B_\nu(\mathbf{r}) = \\
&= \epsilon_{\gamma\alpha\beta} \epsilon_{\gamma\mu\nu} \partial_\beta m_\mu B_\nu(\mathbf{r}) = \\
&= (\delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\nu} \delta_{\beta\mu}) \partial_\beta m_\mu B_\nu(\mathbf{r}) = \\
&= m_\alpha \partial_\beta B_\beta(\mathbf{r}) - m_\beta \partial_\beta B_\alpha(\mathbf{r}).
\end{aligned}$$

6.6.2 Drehmomente

Analog zu (6.52) lautet das resultierende Drehmoment auf die Stromverteilung $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$ bezogen auf den "Strom-Schwerpunkt" bei \mathbf{r}

$$\boldsymbol{\tau} = \int d^3 r' (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \times (\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \mathbf{B}(\mathbf{r}')). \quad (6.69)$$

Wieder entwickeln wir $\mathbf{B}(\mathbf{r}')$ um den "Strom-Schwerpunkt" \mathbf{r} . Im Folgenden wird sich jedoch zeigen, dass hier im Unterschied zu den Kräften auf $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$ bereits der Entwicklungsterm niedrigster Ordnung einen nicht-verschwindenden Beitrag liefert, also

$$\boldsymbol{\tau} = \int d^3 r' (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \times (\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \mathbf{B}(\mathbf{r})) + \dots \quad (6.70)$$

Wir schreiben $\boldsymbol{\tau}$ aus (6.70) in Komponenten auf, benutzen die Definition (6.58) für den antisymmetrischen Tensor $M_{\alpha\beta}$, die "Umkehrformel" (6.63) und beachten $M_{\beta\beta} = 0$ wegen der Antisymmetrie von $M_{\alpha\beta}$ sowie (6.56) für stationäre Flussdichten:

$$\begin{aligned}
\tau_\alpha &= \int d^3 r' \epsilon_{\alpha\beta\gamma} (x'_\beta - x_\beta) \epsilon_{\gamma\mu\nu} j_\mu(\mathbf{r}') B_\nu(\mathbf{r}) = \\
&= \epsilon_{\gamma\alpha\beta} \epsilon_{\gamma\mu\nu} \left(M_{\beta\mu} B_\nu(\mathbf{r}) - x_\beta B_\nu(\mathbf{r}) \int d^3 r' j_\mu(\mathbf{r}') \right) = \\
&= (\delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\nu} \delta_{\beta\mu}) M_{\beta\mu} B_\nu(\mathbf{r}) = \\
&= M_{\beta\alpha} B_\beta(\mathbf{r}) - M_{\beta\beta} B_\alpha(\mathbf{r}) = \\
&= m_\gamma \epsilon_{\gamma\beta\alpha} B_\beta(\mathbf{r}) = \epsilon_{\alpha\gamma\beta} m_\gamma B_\beta(\mathbf{r}),
\end{aligned}$$

bzw.

$$\boxed{\boldsymbol{\tau} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})} \quad (6.71)$$

analog zum elektrischen Fall. Es tritt wie im elektrischen Fall ein Drehmoment bereits in einem homogenen, d.h. räumlich konstanten Feld $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}$ auf.

Wir stellen die Analogien zwischen einer Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$ in einem äußeren elektrischen Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ einerseits und einer Stromverteilung in einem äußeren Feld $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ der magnetischen Induktion andererseits noch einmal zusammen:

	elektrisch:	magnetisch
Dipolmoment:	$\mathbf{p} = \int d^3r' \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}')$	$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int d^3r' \mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}')$
Kraft:	$\mathbf{F} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (-\mathbf{p} \mathbf{E})$	$\mathbf{F} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (-\mathbf{m} \mathbf{B})$
Drehmoment:	$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$	$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$

Kapitel 7

Die Maxwell'schen Gleichungen

In diesem Kapitel werden wir die zeitabhängige Feldtheorie der Elektrodynamik, die sogenannten *Maxwell'schen Gleichungen* formulieren. Wir werden versuchen, diese Formulierung auf rein physikalische Argumente zu stützen. Zu diesen Argumenten gehören *Invarianzen*, die die bisher formulierte statische Theorie bereits besitzt, nämlich Invarianzen gegen die folgenden, diskreten Transformationen:

- (1) Zeitumkehr: T
- (2) Ladungsumkehr: C
- (3) Paritätsumkehr: P

Wir werden deshalb im ersten Abschnitt dieses Kapitels zunächst die obigen Transformationen T, C, P definieren und die Invarianz der bisher formulierten statischen Theorie gegen T, C, P nachweisen.

7.1 Zeit–, Ladungs– und Paritäts–Umkehr

7.1.1 Zeit–Umkehr

Die Zeit–Umkehr wird formal definiert durch ihre Wirkung auf die Zeitvariable t :

$$T t = -t. \tag{7.1}$$

Daraus folgt, dass auch alle ersten Zeitableitungen ihr Vorzeichen unter T ändern, nicht jedoch die zweiten Ableitungen, weil diese als zweifache Anwendung des Operators der ersten Zeitableitung interpretiert werden können:

$$T \frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}, \quad T \frac{\partial^2}{\partial t^2} = +\frac{\partial^2}{\partial t^2}. \quad (7.2)$$

Man nennt eine Variable x mit der Eigenschaft $Tx = +x$ *gerade* und eine Variable x mit der Eigenschaft $Tx = -x$ *ungerade* unter der T -Transformation.

Ausgangspunkt für die folgenden Überlegungen ist, dass die Teilchen-Eigenschaften *Masse* m und *elektrische Ladung* q invariant bzw. gerade gegen T sind, außerdem aus geometrischen Gründen auch der Ort \mathbf{r} :

$$Tm = m, \quad Tq = q, \quad T\mathbf{r} = \mathbf{r}. \quad (7.3)$$

Da mit dem Ort \mathbf{r} auch das Volumen-Element ΔV invariant gegen T ist, ist mit der elektrischen Ladung q auch ihre räumliche Dichte $\rho = q/\Delta V$ invariant gegen T . Aus diesen Annahmen ergibt sich das folgende T -Verhalten von abgeleiteten Variablen:

Variable:	Definition:	T -Verhalten:	
Geschwindigkeit:	$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$,	$T\mathbf{v} = -\mathbf{v}$,	(7.4)
Beschleunigung:	$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$,	$T\mathbf{a} = +\mathbf{a}$,	
Kraft:	$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$,	$T\mathbf{F} = +\mathbf{F}$.	

Die Kraft $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ auf ein geladenes Teilchen sowie die Lorentz-Kraft $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ und die weiteren Zusammenhänge aus der statischen Feldtheorie der bisherigen Kapitel erlauben es uns, die obige Schluss-Kette für das T -Verhalten in die Elektro- und Magnetostatik fortzusetzen:

Variable:	Definition:	T -Verhalten:
Elektrisches Feld:	$\mathbf{E} = \frac{1}{q} \mathbf{F}$,	$T \mathbf{E} = +\mathbf{E}$,
Elektrisches Potential:	$\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \Phi$	$T \Phi = +\Phi$,
Magnetische Induktion:	$\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$,	$T \mathbf{B} = -\mathbf{B}$,
Vektor-Potential:	$\mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{A}$,	$T \mathbf{A} = -\mathbf{A}$,
Elektrische Flussdichte:	$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{j} = -\frac{\partial}{\partial t} \rho$,	$T \mathbf{j} = -\mathbf{j}$.

(7.5)

Hier haben wir benutzt, dass mit \mathbf{r} auch $\partial/\partial \mathbf{r}$ invariant gegen T ist.

Jetzt wenden wir die Zeitumkehr T auf die elektro- und magnetostatischen Feldgleichungen an:

Feldgleichung:	T -Version:
$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{E} = 0$,	$\xrightarrow{T} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{E} = 0$,
$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$,	$\xrightarrow{T} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$,
$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{B} = 0$,	$\xrightarrow{T} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (-\mathbf{B}) = 0, \cong \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{B} = 0$,
$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$,	$\xrightarrow{T} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times (-\mathbf{B}) = -\mu_0 \mathbf{j}, \cong \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$.

(7.6)

Die elektro- und magnetostatischen Feldgleichungen sind invariant gegen die Zeitumkehr T .

Wenn es Quellen der magnetischen Induktion, also "magnetische Ladungen" $q_m = \partial \mathbf{B} / \partial \mathbf{r}$ gäbe, dann wären das Skalare mit einem Verhalten $T q_m = -q_m$.

7.1.2 Ladungs-Umkehr

Die Ladungs-Umkehr wird formal definiert durch ihre Wirkung auf die elektrische Ladung q :

$$C q = -q. \quad (7.7)$$

Daraus folgt, dass alle Variablen, die die Ladung linear enthalten, z.B. räumliche Ladungsdichte ρ und elektrische Flussdichte \mathbf{j} sich ebenfalls ungerade unter C verhalten:

$$C \rho = -\rho, \quad C \mathbf{j} = -\mathbf{j}. \quad (7.8)$$

Ort, Zeit und Masse sollen sich invariant bzw. gerade unter C verhalten, woraus das gleiche Verhalten auch für Geschwindigkeit, Beschleunigung und Kraft folgt. Damit können wir bereits das C -Verhalten der Variablen in der Elektro- und Magnetostatik bestimmen:

Variable:	Definition:	C-Verhalten:
Elektrisches Feld:	$\mathbf{E} = \frac{1}{q} \mathbf{F}$,	$C \mathbf{E} = -\mathbf{E}$,
Elektrisches Potential:	$\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \Phi$	$C \Phi = -\Phi$,
Magnetische Induktion:	$\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$,	$C \mathbf{B} = -\mathbf{B}$,
Vektor-Potential:	$\mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{A}$,	$C \mathbf{A} = -\mathbf{A}$.

Jetzt wenden wir die Ladungs-Umkehr C auf die elektro- und magnetostatischen Feldgleichungen an:

Feldgleichung:	C -Version:
$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{E} = 0,$	$\xrightarrow{C} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times (-\mathbf{E}) = 0, \cong \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{E} = 0,$
$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho,$	$\xrightarrow{C} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (-\mathbf{E}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho, \cong \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho,$
$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{B} = 0,$	$\xrightarrow{C} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (-\mathbf{B}) = 0, \cong \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{B} = 0,$
$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j},$	$\xrightarrow{C} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times (-\mathbf{B}) = -\mu_0 \mathbf{j}, \cong \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}.$

Die elektro- und magnetostatischen Feldgleichungen sind invariant gegen die Ladungs-Umkehr C .

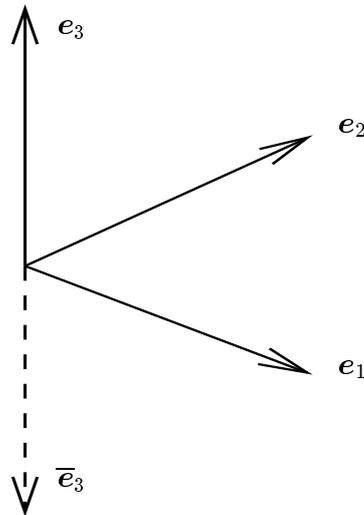


Abbildung 7.1: Rechts- und Links-Basis-Systeme

7.1.3 Paritäts-Umkehr

Die Paritäts-Umkehr wird formal definiert durch ihre Wirkung auf den Ortsvektor \mathbf{r} :

$$P \mathbf{r} = -\mathbf{r}. \quad (7.11)$$

Diese Transformation ist eine Raumspiegelung am Ursprung des gewählten Koordinaten-Systems. Dabei soll der Ursprung jedoch beliebig wählbar sein.

Die Paritäts-Umkehr bewirkt auch eine Vertauschung von "links" und "rechts". Um das zu verstehen, müssen wir zunächst klären, was die Begriffe links und rechts bedeuten. Unter den orthonormierten Basis-Systemen \mathbf{e}_α , $\alpha = 1, 2, 3$ gibt es zwei Klassen, die wir als "links" und "rechts" bezeichnen. Alle Links-Systeme lassen sich untereinander durch Drehungen (und Translationen) zur Deckung bringen, desgleichen alle Rechts-Systeme. Es ist aber nicht möglich, ein Links-System ausschließlich durch Drehung (und Translation) in ein Rechts-System zu überführen bzw. umgekehrt. Um das einzusehen, denken wir uns die Konstruktion eines Basis-Systems schrittweise durch die Wahl der $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ in dieser Reihenfolge ausgeführt. Alle Paare $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ lassen sich noch durch reine Drehungen (und Translationen) untereinander zur Deckung bringen. Bei der Wahl des dritten Vektors gibt dann zwei Möglichkeiten, \mathbf{e}_3 und $\bar{\mathbf{e}}_3 = -\mathbf{e}_3$, vgl. Abbildung 7.1, die nicht mehr durch Drehungen ineinander überführt werden können. Eine der beiden Möglichkeiten wird in Anlehnung an

die "Rechte-Hand-Regel" als "rechts" bezeichnet, die andere als links. Die Freiheit bei der Wahl des dritten Vektors entspricht der Festsetzung der Orientierung beim Vektor-Produkt, die ebenfalls als rechts gewählt wird, also

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3. \quad (7.12)$$

Diese Orientierung bleibt offenbar erhalten, wenn man in (7.12) die Indizes 1, 2, 3 zyklisch vertauscht: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow \dots$. Dagegen bewirkt die Vertauschung von zwei Basis-Vektoren, z.B., von \mathbf{e}_1 und \mathbf{e}_2 in (7.12) einen Vorzeichen-Wechsel,

$$\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_3,$$

d.h., das System $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3$ ist ein Links-System, wenn $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ein Rechts-System ist. Die in der Abbildung 7.1 gezeigte Möglichkeit $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$ mit $\bar{\mathbf{e}}_3 = -\mathbf{e}_3$ erzeugt ebenfalls ein Links-System, wenn $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ein Rechts-System ist, denn aus (7.12) folgt dann

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 = -\bar{\mathbf{e}}_3.$$

Da der Ortsvektor \mathbf{r} als Linear-Kombination der Basis-Vektoren \mathbf{e}_α darstellbar ist, müssen letztere sich offenbar unter der P -Transformation ebenfalls ungerade verhalten: $P \mathbf{e}_\alpha = -\mathbf{e}_\alpha$. Wenn wir die gesamte Basis einer P -Transformation unterwerfen, $\mathbf{e}'_\alpha := P \mathbf{e}_\alpha = -\mathbf{e}_\alpha$, wird aus einer Rechts-Basis eine Links-Basis, denn

$$\mathbf{e}'_1 \times \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}'_3. \quad (7.13)$$

Vektoren \mathbf{a} mit ungeradem P -Verhalten, also $P \mathbf{a} = -\mathbf{a}$, bezeichnet man als *polare* Vektoren. Wir werden sogleich zu klären haben, welche weiteren Vektoren außer dem Ortsvektor aus physikalischen Gründen polar sein sollen. Das Kreuz-Produkt $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ aus zwei polaren Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} verhält sich dann aber unter P gerade:

$$P(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (-\mathbf{a}) \times (-\mathbf{b}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b}. \quad (7.14)$$

Vektoren $\boldsymbol{\omega}$ mit geradem P -Verhalten, also $P \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}$, bezeichnet man als *axiale* Vektoren oder auch *Pseudo-Vektoren*. Es seien \mathbf{a}, \mathbf{b} polar und $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\sigma}$ axial. Dann folgen aus der Überlegung in (7.14) die folgenden Regeln:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \boldsymbol{\omega} : \text{axial} \\
\mathbf{a} \times \boldsymbol{\omega} &= \mathbf{b} : \text{polar} \\
\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\tau} &= \boldsymbol{\sigma} : \text{axial}
\end{aligned}
\tag{7.15}$$

Da Kreuz-Produkte durch den Levi-Civita-Tensor dargestellt werden,

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} : \quad \omega_\gamma = \epsilon_{\gamma\alpha\beta} a_\alpha b_\beta,$$

haben die Regeln (7.15) Auswirkungen auf das Verhalten dieses Tensors unter solchen Koordinaten-Transformationen, die eine Recht-Links-Vertauschung bewirken.

Die zeitliche Ableitung kann die P -Eigenschaft eines Vektors, kurz auch als *Parität* bezeichnet, nicht ändern, weil sie als Limes eines Differenzen-Quotienten darstellbar ist. Damit ist klar, dass Geschwindigkeit \mathbf{v} und Beschleunigung \mathbf{a} ebenfalls polar sind. Daraus folgt weiter, dass auch Flussdichte \mathbf{j} , Kraft \mathbf{F} und das elektrische Feld $\mathbf{E} = \mathbf{F}/q$ polar sind. Nach der Regel (7.15) folgt dann aber aus der Form der Lorentz-Kraft $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, dass die magnetische Induktion \mathbf{B} axial ist. Das Vektor-Potential \mathbf{A} ist gemäß der Regel (7.15) wieder polar, denn in

$$\mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{A}$$

ist mit \mathbf{r} auch die Ableitung $\partial/\partial \mathbf{r}$ polar, so dass \mathbf{A} polar sein muss, damit \mathbf{B} axial wird. Wir stellen das Verhalten der genannten Variablen unter P noch einmal zusammen:

$$\text{polar:} \quad \mathbf{r}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}, \mathbf{v}, \mathbf{j}, \mathbf{a}, \mathbf{F}, \mathbf{E}, \mathbf{A} \tag{7.16}$$

$$\text{axial:} \quad \mathbf{B}, \boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \tag{7.17}$$

Jetzt wenden wir die Paritäts-Umkehr P auf die elektro- und magnetostatischen Feldgleichungen an:

Feldgleichung:	P -Version:	
$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{E} = 0,$	\xrightarrow{P} $-\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times (-\mathbf{E}) = 0,$	\cong $\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{E} = 0,$
$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho,$	\xrightarrow{P} $-\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (-\mathbf{E}) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho,$	\cong $\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho,$
$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{B} = 0,$	\xrightarrow{P} $-\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{B} = 0,$	\cong $\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{B} = 0,$
$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j},$	\xrightarrow{P} $-\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{B} = -\mu_0 \mathbf{j},$	\cong $\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}.$

(7.18)

Die elektro- und magnetostatischen Feldgleichungen sind invariant gegen die Paritäts-Umkehr P .

Wenn es Quellen der magnetischen Induktion, also "magnetische Ladungen" $q_m = \partial \mathbf{B} / \partial \mathbf{r}$ gäbe, dann wären das Skalare mit einem Verhalten $P q_m = -q_m$. Skalare mit diesem Verhalten nennt man auch *Pseudo-Skalare*.

7.2 Formulierung der Maxwell'schen Gleichungen

Ziel dieses Abschnitts ist die Erweiterung der bisher formulierten statischen Feldtheorie für das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ und für die magnetische Induktion $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ zu einer zeitabhängigen Theorie, auch *dynamische* Theorie genannt, die auch zeitlich veränderliche Felder, z.B. elektromagnetische Wellen beschreiben kann. Die statische Theorie hat die Form

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) - \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \end{array} \right\} \quad (7.19)$$

Wir beachten, dass die beiden Feldtheorien für $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ im statischen Fall getrennt ("entkoppelt") sind. Das wird sich im dynamischen Fall ändern.

Wir formulieren zunächst eine Reihe von Forderungen, denen die zu formulierende dynamische Theorie genügen soll. Es wird sich dabei um physikalisch motivierte Forderungen handeln, die letztlich empirisch zu begründen sind.

7.2.1 Der statische Grenzfall

Die statischen Feldgleichungen (7.19) sollen als *stationärer Grenzfall* aus der zu formulierenden dynamischen Theorie hervorgehen, d.h., die dynamische Theorie muss die folgende Form besitzen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \{ \dots \} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \\ \frac{\partial}{\partial t} \{ \dots \} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}, t) \\ \frac{\partial}{\partial t} \{ \dots \} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \\ \frac{\partial}{\partial t} \{ \dots \} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \right\} \quad (7.20)$$

7.2.2 Linearität

Die statische Theorie ist *linear* in den Feldern, d.h., für sie gilt das *Superpositions-Prinzip*. Diese Eigenschaft soll auch die zu formulierende dynamische Theorie besitzen. Das bedeutet, dass die Ausdrücke in $\{ \dots \}$ auf der linken Seite von (7.20) *linear* in den Feldern sein müssen. Wenn jedoch ein Ausdruck $\{ \dots \}$ linear in den Feldern ist, muss auch die entsprechende rechte Seite Vektor-Charakter besitzen. Das ist aber nur für die Wirbel- bzw. Rotations-Terme auf der rechten Seite der Fall. Die linken Seiten der skalaren Quell- bzw. Divergenz-Gleichungen müssen also verschwinden:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \{ \dots \} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \\ 0 &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}, t) \\ \frac{\partial}{\partial t} \{ \dots \} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \\ 0 &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \right\} \quad (7.21)$$

Aus der Forderung der Linearität folgt also bereits, dass es keine "magnetischen Ladungen" geben kann.

7.2.3 Felder als vollständige Variablen

Die Felder $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ sollen den Feldzustand in jedem Zeitpunkt vollständig beschreiben, d.h., wenn $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ an einem Ort \mathbf{r} zu einem Zeitpunkt t gegeben sind, sollen daraus die Zeitableitungen $\partial\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)/\partial t$ und $\partial\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)/\partial t$ der Felder eindeutig bestimmbar sein. Dann dürfen auf der linken Seite von (7.21) höchstens Zeitableitungen 1. Ordnung in den beiden Feldern auftreten. Zusammen mit der Forderung der Linearität bedeutet das, dass die dynamische Theorie die folgende Gestalt haben muss

$$\left. \begin{aligned} a_1 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + a_2 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \\ 0 &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}, t) \\ b_1 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + b_2 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \\ 0 &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \right\} \quad (7.22)$$

7.2.4 Invarianz gegen T, C und P

Die statische Theorie ist invariant gegen T, C und P , also gegen die Umkehr von Zeit, Ladung und Parität. Diese Eigenschaft soll auch die zu formulierende dynamische Theorie besitzen. Wir bestätigen sofort, dass die Theorie in der Form (7.22) die P -Invarianz bereits besitzt. Wenn wir nun die Operationen T und P nach den Regeln und Ergebnissen aus dem vorhergehenden Abschnitt 7.1 auf (7.22) anwenden und fordern, dass (7.22) dabei in sich selbst übergeht, müssen wir gleichlautend für beide Operationen T und P $a_1 = 0$ und $b_2 = 0$ setzen:

$$\left. \begin{aligned} \text{axial:} \quad a_2 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \\ \text{skalar:} \quad 0 &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}, t) \\ \text{polar:} \quad b_1 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \\ \text{pseudo-skalar:} \quad 0 &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \right\} \quad (7.23)$$

7.2.5 Erhaltung der Ladung

Die dynamische Theorie soll die Forderung der Erhaltung der elektrischen Ladung erfüllen. Die Erhaltung der elektrischen Ladung wird gemäß 5.1.2 durch die Kontinuitäts-Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (7.24)$$

ausgedrückt. Aus der skalaren Gleichung in (7.23) berechnen wir $\partial\rho/\partial t$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t).$$

Die Ableitungen nach der Zeit t und die Divergenz können wir vertauschen, wenn wir annehmen, dass die Felder hinreichend oft differenzierbar sind. Für $\partial\mathbf{E}/\partial t$ setzen wir nun den Ausdruck aus der polaren Gleichung in (7.23) ein und erhalten somit

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) = \frac{\epsilon_0}{b_1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \right) - \frac{\epsilon_0 \mu_0}{b_1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t). \quad (7.25)$$

Der erste Term auf der rechten Seite, die Divergenz einer Rotation, verschwindet. Dann erkennen wir, dass (7.25) genau dann mit der Kontinuitäts-Gleichung (7.24) übereinstimmt, wenn $b_1 = \epsilon_0 \mu_0$. Damit erhalten wir für die dynamische Theorie aus (7.23)

$$\left. \begin{array}{l} \text{(a):} \quad a_2 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \\ \text{(b):} \quad 0 = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}, t) \\ \text{(c):} \quad \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \\ \text{(d):} \quad 0 = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \end{array} \right\} \quad (7.26)$$

7.2.6 Relativität und Lorentz–Kraft

Es bleibt noch die Konstante a_2 in (7.26) zu bestimmen. Das soll durch die Forderungen geschehen, dass die dynamische Theorie die Lorentz–Kraft $\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ wiedergibt und dass sie das Relativitäts–Prinzip erfüllt. Wir betrachten ein zunächst statisches Feld $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ der magnetischen Induktion, das durch irgendwelche Ströme z.B. in Leitern erzeugt werde. Jetzt denken wir uns diese felderzeugenden Ströme mit einer konstanten Geschwindigkeit \mathbf{v} bewegt. Ein *ruhender* Beobachter wird dann die magnetische Induktion

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{r} - \mathbf{v} t) \quad (7.27)$$

beobachten. Gemäß der axialen Gleichung (a) in (7.26) ist mit dem zeitabhängigen $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ ein Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ verknüpft, das wir jetzt bestimmen wollen. Wir berechnen die Zeitableitung von $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ und erhalten mit der Kettenregel

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} B_\alpha(\mathbf{r} - \mathbf{v} t) &= (\partial_\beta B_\alpha(\mathbf{r} - \mathbf{v} t)) (-v_\beta) = - \left(\mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) B_\alpha(\mathbf{r}, t), \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r} - \mathbf{v} t) &= - \left(\mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{B}(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (7.28)$$

Jetzt benutzen wir den in 6.6.1 gezeigten Satz

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)) = \mathbf{v} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \right) - \left(\mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{B}(\mathbf{r}, t),$$

worin \mathbf{v} nach Voraussetzung als unabhängig von \mathbf{r} anzunehmen ist. (Die zusätzliche Variable t betrifft die obige Aussage nicht.) Da die Divergenz von $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ verschwindet, bleibt

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)) = - \left(\mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{B}(\mathbf{r}, t),$$

eingesetzt in (7.28)

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r} - \mathbf{v}t) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)).$$

Somit folgt aus der axialen Feld-Gleichung (a) in (7.26)

$$a_2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$$

bzw.

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times (\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - a_2 \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)) = 0.$$

Hieraus können wir weiter schließen, dass der Ausdruck in (...) als (negativer) Gradient eines elektrischen Potentials darstellbar ist. Da es jedoch keine felderzeugenden elektrischen Ladungen in unserer Anordnung geben soll, muss der Ausdruck in (...) sogar verschwinden bzw. es muss

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = a_2 \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (7.29)$$

sein. Wir denken wir uns nun eine Probeladung q in die Anordnung gebracht. Auf diese wirkt dann die Lorentz-Kraft

$$\mathbf{F} = q \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = a_2 q \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t). \quad (7.30)$$

Jetzt kommt das Relativitäts-Prinzip ins Spiel: die beschriebene Anordnung ist äquivalent zu der Situation, dass die Ströme, die das Feld $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ erzeugen, ruhen und die Probeladung q sich mit der Geschwindigkeit $-\mathbf{v}$ bewegt. Auf sie wirkt dann eine Lorentz-Kraft

$$\mathbf{F} = -q \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t). \quad (7.31)$$

Die beiden Ausdrücke (7.30) und (7.31) für die Lorentz-Kraft müssen übereinstimmen, woraus $a_2 = -1$ folgt. Jetzt haben wir die endgültige Form der dynamischen Feld-Gleichungen, die sogenannten *Maxwellschen Gleichungen* begründet. Wir schreiben sie in der Form

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t), \quad (7.32)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}, t), \quad (7.33)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (7.34)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (7.35)$$

Diese Schreibweise bringt zum Ausdruck, dass auch in der dynamischen Theorie die beiden Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} jeweils durch ihre Wirbel und Quellen bestimmt sind und zwar nach dem Zerlegungssatz in 6.4 in eindeutiger Weise. Anders als im statischen Fall jedoch sind die beiden Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} in der dynamischen Theorie miteinander verkoppelt. Die dynamische Theorie "vereinigt" die beiden im statischen Fall getrennten Theorien der Elektrizität und des Magnetismus. Die "Vereinigung" von Theorien ist in der modernen Physik ein sehr wichtiger Vorgang auf dem Weg zu einem möglichst geschlossenen und einheitlichen physikalischen Weltbild.

7.3 Integrale Formen und Lenzsche Regel

7.3.1 Verallgemeinertes Gesetz von Biot–Savart und Verschiebungsstrom

Die magnetostatische Feldgleichung

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (7.36)$$

ist in der dynamischen Theorie erweitert worden zu

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} \quad (7.37)$$

(Wir lassen im Folgenden zur Vereinfachung der Schreibweise die Argumente (\mathbf{r}, t) immer dann fort, wenn die Interpretation von Ort und Zeit eindeutig ist.)

Wir integrieren die dynamische Gleichung (7.37) über ein beliebiges Flächenstück F und erhalten unter Verwendung des Stokesschen Integralsatzes

$$\oint_{\partial F} d\mathbf{r} \mathbf{B} = \mu_0 \left(I + \frac{\partial}{\partial t} \epsilon_0 \int_F d\mathbf{f} \mathbf{E} \right), \quad (7.38)$$

worin ∂F der Rand von F und I der elektrische Strom durch F ist. Der statische Teil ($\partial \dots / \partial t = 0$) dieser Aussage ist das Biot–Savartsche Gesetz: ein elektrischer Strom I ist von in sich geschlossenen \mathbf{B} -Feldlinien umgeben. Man kann nun die dynamische Erweiterung so lesen, dass ein sich zeitlich änderndes elektrisches Feld wie ein elektrischer Strom wirkt. Deshalb bezeichnet man

$$\mathbf{j}_v := \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} \quad \text{bzw.} \quad I_v := \int_F d\mathbf{f} \mathbf{j}_v \quad (7.39)$$

auch als *Verschiebungs-Flussdichte* bzw. *Verschiebungsstrom*.

7.3.2 Faradaysches Induktionsgesetz

Das Gegenstück zum verallgemeinerten Gesetz von Biot–Savart erhalten wir, wenn wir die andere dynamische Wirbel–Gleichung,

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \quad (7.40)$$

über ein beliebiges Flächenstück F integrieren. Mit denselben Umrechnungen wie oben ergibt sich

$$\oint_{\partial F} d\mathbf{r} \mathbf{E} = -\frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad \Psi := \int_F d\mathbf{f} \mathbf{B}. \quad (7.41)$$

Die hier definierte Größe Ψ heißt in Analogie zu (7.38) auch der *magnetische Fluss* durch das Flächenstück F . Damit wird auch die gelegentlich verwendete Bezeichnung *magnetische Flussdichte* (statt magnetischer Induktion) für \mathbf{B} klar. (7.41) heißt das *Faradaysche Induktionsgesetz*. Es besagt, dass ein sich zeitlich änderndes \mathbf{B} -Feld von in sich geschlossenen \mathbf{E} -Feldlinien umgeben ist. Der Umlaufsinn ist gegenüber

jenem im Biot–Savartschen Gesetz gerade umgekehrt, was uns noch gleich bei der Diskussion der *Lenzschen Regel* beschäftigen wird.

Man kann die linke Seite von (7.41) auch als (negative) elektrische Potential–Differenz $-\Delta\Phi$ über den geschlossenen Weg des Randes ∂F von F deuten:

$$\Delta\Phi = \frac{\partial\Psi}{\partial t}.$$

Bei der Herleitung von (7.41) haben wir implizit angenommen, dass das Flächenstück F ortsfest (nicht zeit–abhängig) ist und \mathbf{B} sich zeitlich ändert. Aus dem Relativitäts–Prinzip folgern wir, dass auch dann eine elektrische Potential–Differenz über ∂F induziert wird, wenn sich F bewegt und z.B. \mathbf{B} nicht von der Zeit abhängt, also statisch ist. Wir führen den Nachweis dafür hier durch. Er ist erwartungsgemäß sehr ähnlich den Überlegungen in 7.2.6. Zunächst ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Psi}{\partial t} &= \frac{d}{dt} \int_F d\mathbf{f} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \\ &= \int_F d\mathbf{f} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) + \int_F d\mathbf{f} \left(\mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{B}(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (7.42)$$

Hier haben wir Gebrauch gemacht von dem Begriff der totalen Zeitableitung, den wir bereits aus 5.1.3 kennen:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}. \quad (7.43)$$

Der erste Term berücksichtigt eine mögliche explizite Zeitabhängigkeit in $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, der zweite eine Bewegung der Fläche F und damit der Integrationsorte \mathbf{r} mit einer im Allgemeinen lokalen, d.h., vom Ort abhängigen Geschwindigkeit \mathbf{v} . Wir verwenden eine bereits in 7.2.6 gezeigte Identität (für verschwindende Quellen von \mathbf{B}) und den Stokesschen Integralsatz, um (7.42) wie folgt weiter umzuformen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Psi}{\partial t} &= \int_F d\mathbf{f} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \int_F d\mathbf{f} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)) \\ &= \int_F d\mathbf{f} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \oint_{\partial F} d\mathbf{r} \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (7.44)$$

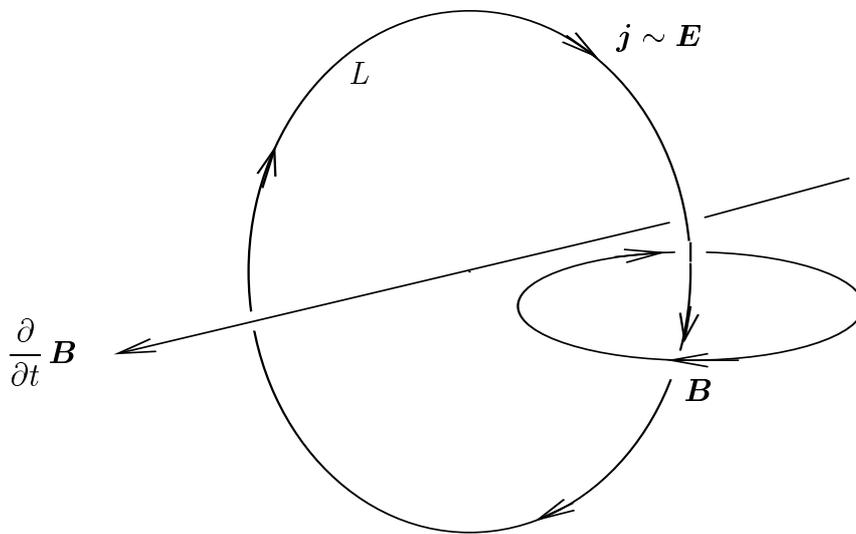


Abbildung 7.2: Zur Lenzschen Regel

Wir setzen das Induktions-Gesetz (7.41) ein und erhalten

$$\int_F d\mathbf{f} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) + \oint_{\partial F} d\mathbf{r} (\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)) = 0. \quad (7.45)$$

Wenn $\partial \mathbf{B} / \partial t = 0$ und keine weitere Induktion stattfindet, folgt $\mathbf{E} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$, und das ist in der Tat identisch mit dem Ausdruck (7.29) in 7.2.6, und zwar für $a_2 = -1$, was dort gerade gezeigt wurde, und für $-\mathbf{v}$ statt \mathbf{v} , weil \mathbf{v} hier die Geschwindigkeit der Fläche F ist, dort diejenige von $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)$.

7.3.3 Lenzsche Regel

Wir betrachten die Situation in der Abbildung 7.2. Ein zeitlich sich änderndes Feld der magnetischen Induktion, dargestellt durch den Pfeil $\partial \mathbf{B} / \partial t$, ist nach dem Faradayschen Induktions-Gesetz umgeben von in sich geschlossenen Feldlinien von \mathbf{E} . Wir denken uns dort z.B. einen ringförmigen Leiter L , der aufgrund des \mathbf{E} -Feldes von einem Strom mit der Flussdichte \mathbf{j} durchflossen wird. Wegen des negativen Vorzeichens im Induktions-Gesetz ist für die Richtung von \mathbf{E} die "Linke-Hand-Regel" anzuwenden. Die Flussdichte \mathbf{j} wird nach dem Biot-Savartschen Gesetz ihrerseits von in sich geschlossenen Feldlinien eines \mathbf{B} -Feldes umgeben, die aber wieder

gemäß der "Rechten-Hand-Regel" zu konstruieren sind. Es ergibt sich damit, dass das zuletzt genannte, von \mathbf{j} verursachte \mathbf{B} -Feld dem ursprünglichen $\partial\mathbf{B}/\partial t$ entgegengesetzt ist, also der Induktionsursache *entgegenwirkt*. Die Verallgemeinerung dieser Beobachtung wird als *Lenzsche Regel* formuliert: Induktionsvorgänge und ihre elektrodynamischen Folgeerscheinungen verlaufen in der Weise, dass sie der Induktionsursache entgegenwirken.

Unsere Konstruktion in der Abbildung 7.2 zeigt auch, dass wir zu demselben Schluss gekommen wären, wenn im Faradayschen Induktions-Gesetz ein positives und im Biot-Savartschen Gesetz ein negatives Vorzeichen auftreten würden. Es kommt also lediglich auf die "negative Rückkopplung" an, die man in der Sprache der Mechanik als eine "Rückstellkraft" bezeichnen würde. Dieses Verhalten ist die Ursache dafür, dass es im elektrodynamischen Feld zu Oszillationen kommt, die wir später bei der Diskussion der elektromagnetischen Wellen im Einzelnen studieren werden.

7.4 Potentiale und Wellengleichung

In der statischen Feldtheorie haben wir gezeigt, dass sich das elektrische Feld \mathbf{E} und das Feld \mathbf{B} der magnetischen Induktion durch ein skalares Potential Φ bzw. ein Vektor-Potential \mathbf{A} darstellen lassen,

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \Phi, \quad \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{A}, \quad (7.46)$$

vgl. 1.3 und 6.1.3. Die jeweils inhomogenen statischen Feldgleichungen ließen sich daraufhin in Gleichungen vom Typ der Poisson-Gleichungen für die Potentiale Φ und \mathbf{A} umformen, nämlich in

$$\Delta \Phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho, \quad \Delta \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}, \quad (7.47)$$

vgl. 2.4.2 und 6.3. Insbesondere die Poisson-artige Gleichung für \mathbf{A} hing von der *Eichung* ab. Diese Ergebnisse der statischen Theorie lassen sich für die dynamische Theorie verallgemeinern.

7.4.1 Existenz der Potentiale und Eichtransformation

Die Aussage, dass das Feld \mathbf{B} der magnetischen Induktion quellenfrei ist, ist beim Übergang von der statischen Theorie zur dynamischen Theorie unverändert geblieben. Also können wir unter Verwendung von 6.3 weiterhin schließen, dass ein Vektorpotential \mathbf{A} existiert:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{B} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{A}. \quad (7.48)$$

Diese Darstellung setzen wir in die Maxwellsche Gleichung für die Wirbel des \mathbf{E} -Feldes ein:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = -\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{A}.$$

Wir setzen (wie bereits früher) voraus, dass die Felder hinreichend oft nach \mathbf{r} und t differenzierbar sind. Dann können wir Zeitableitung und Rotation vertauschen. Wir fassen die beiden Rotationsausdrücke zusammen und schließen wie folgt:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} \right) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \Phi, \quad (7.49)$$

weil ein Feld, hier $\mathbf{E} + \partial \mathbf{A} / \partial t$, dessen Wirbel verschwinden, immer als Gradient eines skalaren Potentials darstellbar ist. Wir fassen die beiden Darstellungen für \mathbf{E} und \mathbf{B} zusammen:

$$\boxed{\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \Phi, \quad \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{A}.} \quad (7.50)$$

Diese Darstellung ist die dynamische Verallgemeinerung von (7.46). Einmal mehr zeigt sich, dass die Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} in der dynamischen Theorie nicht unabhängig voneinander sind.

Wir fragen wie im statischen Fall nach der Möglichkeit, die Potentiale Φ und \mathbf{A} umzueichen. Wie im statischen Fall in 6.3 stellen wir zunächst fest, dass ein Potential

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} F \quad (7.51)$$

mit einer beliebigen (differenzierbaren) skalaren Funktion F zu demselben \mathbf{B} -Feld führt wie \mathbf{A} , weil die Rotation des Gradienten von F verschwindet. Damit das umgeechte Potential \mathbf{A}' auch zu demselben \mathbf{E} -Feld führt, erwarten wir, dass auch das skalare Potential Φ in ein Φ' umgeecht werden muss. Wir bestimmen Φ' , indem wir \mathbf{E} durch \mathbf{A}' und Φ' darstellen und die Umeichung (7.51) für \mathbf{A}' einsetzen:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}' - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \Phi' \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} F - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \Phi' \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\Phi' + \frac{\partial}{\partial t} F \right) \end{aligned} \quad (7.52)$$

Damit diese Darstellung für \mathbf{E} mit derjenigen durch \mathbf{A} und Φ in (7.50) übereinstimmt, ist zu fordern, dass

$$\Phi' + \frac{\partial}{\partial t} F = \Phi.$$

Die vollständige Umeichung für die Potentiale, die sogenannte *Eich-Transformation*, lautet demnach

$$\boxed{\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} F, \quad \Phi' = \Phi - \frac{\partial}{\partial t} F} \quad (7.53)$$

mit einer beliebigen (differenzierbaren) skalaren Funktion $F = F(\mathbf{r}, t)$.

Die Möglichkeit der Umeichung der Potentiale gemäß (7.53) nennt man *Eich-Invarianz* der Theorie. Sie hat weitreichende Konsequenzen. Aus der Mechanik ist bekannt, dass (kontinuierliche) Invarianzen mit Erhaltungssätzen verknüpft sind: Die räumliche und zeitliche Translations-Invarianz mit der Erhaltung von Impuls und Energie, die Invarianz gegen Raumdrehungen mit der Erhaltung des Drehimpulses (Noethersches Theorem). Wir werden später lernen, dass die oben formulierte Eich-Invarianz mit der Erhaltung der elektrischen Ladung verknüpft ist, die wir in 5.1 als empirischen Befund in die Theorie eingeführt hatten.

7.4.2 Die Wellen-Gleichung

Die Darstellung der Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} durch Potentiale ist offenbar äquivalent mit den beiden *homogenen* Maxwell'schen Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \right\} \iff \left\{ \begin{aligned} \mathbf{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \Phi \\ \mathbf{B} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{A}. \end{aligned} \right. \quad (7.54)$$

Wir haben soeben die Schlussrichtung von links nach rechts gezeigt; die umgekehrte Richtung von rechts nach links ist noch einfacher durch Einsetzen sofort zu bestätigen. Wir wollen jetzt die Darstellung der Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} durch die Potentiale in die *inhomogenen* Maxwell'schen Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho, \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} \quad (7.55)$$

einsetzen. Es ist

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{E} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(-\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \Phi \right) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} - \Delta \Phi, \quad (7.56)$$

worin Δ der Laplace-Operator ist. Unter Verwendung von

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{a} \right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{a} \right) - \Delta \mathbf{a}$$

aus D.1.2 für ein beliebiges Feld $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$ wird

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{A} \right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{A} \right) - \Delta \mathbf{A}. \quad (7.57)$$

Wir setzen die Umformungen (7.56) und (7.57) in die beiden inhomogenen Maxwell'schen Gleichungen (7.55) ein. Das Ergebnis können wir in der folgenden Weise formulieren:

$$\Delta \Phi + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{A} = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho, \quad (7.58)$$

$$\Delta \mathbf{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \Phi \right) = -\mu_0 \mathbf{j}. \quad (7.59)$$

Jetzt nutzen wir die Eichfreiheit der Potentiale Φ und \mathbf{A} , indem wir die sogenannte *Lorentz-Eichung*

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{A} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \Phi \quad (7.60)$$

wählen, von der wir unten zeigen, dass sie sich stets realisieren lässt. Mit dieser Eichung erhalten wir aus (7.58) und (7.59) die beiden *Wellen-Gleichungen*

$$\boxed{\square \Phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho, \quad \square \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j},} \quad (7.61)$$

worin

$$\boxed{\square := \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}} \quad (7.62)$$

der sogenannte *d'Alembert-Operator* ist und

$$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}.} \quad (7.63)$$

Die beiden Wellen-Gleichungen, partielle Differential-Gleichungen zweiter Ordnung in Raum und Zeit, ersetzen zusammen mit der Darstellung der Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} durch die Potentiale Φ und \mathbf{A} in (7.54) die vier Maxwell'schen Gleichungen, die jeweils partielle Differential-Gleichungen 1. Ordnung in Raum und Zeit sind.

Die Struktur der linken Seiten der Wellen-Gleichungen (7.61) ist von anderen Wellen-Phänomenen bekannt, z.B. von der Ausbreitung des Schalls. Der Parameter c hat darin die Bedeutung der *Ausbreitungs-Geschwindigkeit* der jeweiligen Welle.

Das wird sich im Folgenden auch für die hier behandelten elektromagnetischen Wellen bestätigen. Mit dieser Bemerkung knüpfen wir an die Diskussion in 5.2.2 an, wo wir bereits festgestellt hatten, dass der Ausdruck $1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ die Dimension einer Geschwindigkeit hat.

Wir bemerken schließlich, dass wir auch Wellen-Gleichungen für die Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} herleiten können, indem wir den d'Alembert-Operator \square auf deren Darstellung durch die Potentiale Φ und \mathbf{A} in (7.54) anwenden und die Wellen-Gleichungen (7.61) für die Potentiale einsetzen. Unter der Voraussetzung, dass die Potentiale hinreichend oft nach \mathbf{r} und t differenzierbar sind, so dass sämtliche Ableitungen vertauscht werden können, erhalten wir

$$\begin{aligned}\square \mathbf{E} &= -\square \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \Phi \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \square \mathbf{A} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \square \Phi = \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \rho + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{j},\end{aligned}\quad (7.64)$$

$$\square \mathbf{B} = \square \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \square \mathbf{A} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{j}.\quad (7.65)$$

7.4.3 Die Lorentz-Eichung

Wir begründen, dass sich stets eine Umeichung in die Lorentz-Eichung (7.60) ausführen lässt. Es seien Φ , \mathbf{A} irgendwelche Potentiale für die Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} . Gesucht ist eine Eich-Transformation

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} F, \quad \Phi' = \Phi - \frac{\partial}{\partial t} F,\quad (7.66)$$

d.h. eine skalare Funktion F , so dass die Potentiale Φ' , \mathbf{A}' die Lorentz-Eichung

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{A}' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \Phi' = 0\quad (7.67)$$

erfüllen. Aus (7.66) berechnen wir

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{A}' &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{A} + \Delta F, \\ \frac{\partial}{\partial t} \Phi' &= \frac{\partial}{\partial t} \Phi - \frac{\partial^2}{\partial t^2} F,\end{aligned}$$

und daraus weiter unter der Verwendung der Definition (7.62) für \square :

$$\square F + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \Phi = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{A}' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \Phi'.$$

Mit der Forderung der Lorentz-Eichung (7.66) für Φ' , \mathbf{A}' wird daraus

$$\square F = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \Phi. \quad (7.68)$$

Aus dieser Gleichung ist die *Erzeugende* F der gesuchten Eich-Transformation zu bestimmen. Die rechte Seite von (7.68) ist als gegeben zu betrachten, weil Φ , \mathbf{A} ja irgendwelche vorgegebenen Potentiale sein sollten. Folglich ist die Bestimmung von F äquivalent zur Lösung der Wellen-Gleichung für die Potentiale. Wenn die Letztere eine Lösung besitzt, was wir bereits aus physikalischen Gründen voraussetzen werden, dann lässt sich auch immer ein F für die Eich-Transformation zur Lorentz-Eichung finden.

Kapitel 8

Bilanz–Gleichungen

In diesem Kapitel werden wir lernen, dass die Maxwell'schen Gleichungen Aussagen über *Bilanzen* physikalischer Größen machen, zu denen die auch in der klassischen Mechanik diskutierten Größen Energie, Impuls und Drehimpuls gehören. Als eine neue, typisch elektrodynamische Größe tritt jetzt noch die elektrische Ladung hinzu, mit der wir die Diskussion der Bilanz–Gleichungen auch beginnen werden.

8.1 Elektrische Ladung und das Schema der Bilanz–Gleichungen

Wir greifen zurück auf die Formulierung der Erhaltung der elektrischen Ladung in 5.1.2. Diese haben wir ausgedrückt durch die Forderung, dass sich die elektrische Ladung Q in einem Volumen V nur dadurch ändern kann, dass Ladung über die Randfläche ∂V entweder einfließt oder ausfließt:

$$\frac{dQ}{dt} = - \oint_{\partial V} dI = - \oint_{\partial V} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t). \quad (8.1)$$

Wenn Q eine Größe wäre, die *nicht* erhalten ist, müssten wir auf der rechten Seite noch einen weiteren Term hinzufügen:

$$\frac{dQ}{dt} = - \oint_{\partial V} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \int_V d^3r \kappa(\mathbf{r}, t). \quad (8.2)$$

Hier würde $\kappa(\mathbf{r}, t)$ die Erzeugung oder Vernichtung von Q pro Volumen und Zeit am Ort \mathbf{r} zur Zeit t beschreiben. Mit denselben Umformungen wie in 5.1.2, also

$$Q = \int_V d^3r \rho(\mathbf{r}, t), \quad \frac{dQ}{dt} = \int_V d^3r \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t),$$

$$\oint_{\partial V} d\mathbf{f} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \int_V d^3r \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$$

kämen wir dann zu

$$\int_V d^3r \left(\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) - \kappa(\mathbf{r}, t) \right) = 0, \quad (8.3)$$

bzw., weil das Volumen V beliebig wählbar ist, zu

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \kappa(\mathbf{r}, t).} \quad (8.4)$$

Dieses ist eine *Bilanz-Gleichung*. Sie beschreibt, wie sich im allgemeinen Fall eine Dichte $\rho(\mathbf{r}, t)$ zeitlich ändert, nämlich durch Transport mit der Flussdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ und durch Erzeugung oder Vernichtung mit einer räumlichen Dichte $\kappa(\mathbf{r}, t)$. Für die elektrische Ladung ist $\kappa(\mathbf{r}, t) = 0$, d.h., sie wird weder erzeugt noch vernichtet. Unser weiteres Ziel ist jetzt die Formulierung von Bilanz-Gleichungen für die Energie, den Impuls und den Drehimpuls.

8.2 Bilanz der Energie

8.2.1 Herleitung

Ausgangspunkt sind die beiden Maxwellschen Gleichungen, die die zeitlichen Ableitungen der Felder enthalten. Wir schreiben sie in der Form

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = 0, \quad (8.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{H} - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} = \mathbf{j}, \quad (8.6)$$

worin wir zur Vereinfachung der Schreibweise

$$\mathbf{H} := \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}, \quad \mathbf{D} := \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (8.7)$$

eingeführt haben. Später, bei der Beschreibung des Verhaltens von Materie in den Feldern \mathbf{E} und \mathbf{B} werden die Felder \mathbf{D} und \mathbf{H} noch eine eigenständige physikalische Bedeutung erhalten.

Wir multiplizieren (8.5) skalar mit \mathbf{H} , (8.6) skalar mit \mathbf{E} und bilden die Differenz der beiden so entstandenen Ausdrücke:

$$\mathbf{E} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} + \mathbf{H} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} + \mathbf{H} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{E} \right) - \mathbf{E} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{H} \right) = -\mathbf{j} \mathbf{E}. \quad (8.8)$$

Wir formen zunächst die Ausdrücke mit den Zeitableitungen um:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} + \mathbf{H} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} &= \epsilon_0 \mathbf{E} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{H} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \right). \end{aligned} \quad (8.9)$$

Den Ausdruck mit den Rotationen formen wir unter Verwendung der Produkt-Regel

$$\mathbf{H} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{E} \right) - \mathbf{E} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{H} \right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \quad (8.10)$$

um. Diese Produkt-Regel lässt sich unter Verwendung des Levi-Civita-Tensors und seines Verhaltens gegenüber Vertauschung der Indizes wie folgt nachweisen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) &= \partial_\alpha (\epsilon_{\alpha\beta\gamma} E_\beta H_\gamma) = \\
&= \epsilon_{\alpha\beta\gamma} [(\partial_\alpha E_\beta) H_\gamma + E_\beta (\partial_\alpha H_\gamma)] = \\
&= H_\gamma \epsilon_{\gamma\alpha\beta} \partial_\alpha E_\beta - E_\beta \epsilon_{\beta\alpha\gamma} \partial_\alpha H_\gamma = \\
&= \mathbf{H} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{E} \right) - \mathbf{E} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{H} \right).
\end{aligned}$$

Mit diesen Umformungen erhält (8.8) die Form einer Bilanz-Gleichung (8.4):

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{S} = -\mathbf{j} \mathbf{E}, \quad (8.11)$$

$$w := \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2, \quad \mathbf{S} := \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}. \quad (8.12)$$

8.2.2 Diskussion

Das in (8.12) definierte w muss die Bedeutung der räumlichen Dichte einer physikalischen Variablen haben. w enthält den uns aus 3.1.2 bekannten Ausdruck $\epsilon_0 \mathbf{E}^2/2$ für die räumliche Dichte der Energie eines statischen \mathbf{E} -Feldes. Aus (8.12) folgern wir deshalb:

- (1) $\epsilon_0 \mathbf{E}^2/2$ ist auch die räumliche Dichte der Energie eines dynamischen \mathbf{E} -Feldes,
- (2) $\mathbf{B}^2/(2\mu_0)$ ist die räumliche Dichte der Energie des \mathbf{B} -Feldes, dynamisch und im Grenzfall auch statisch.

Folglich hat der Vektor $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$, der sogenannte *Poynting-Vektor*, die Bedeutung der Flussdichte der Feldenergie. Er beschreibt also den Fluss von Feldenergie pro Fläche und Zeit in \mathbf{S} -Richtung. Wir bemerken, dass wir zu dem Poynting-Vektor die Rotation eines beliebigen Vektor-Feldes hinzuaddieren können, ohne dass sich seine Divergenz und damit die Bilanz-Gleichung (8.11) ändert:

$$\mathbf{S}' := \mathbf{S} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{C} : \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{S}' = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{S}.$$

Wir folgern weiter, dass der Term $-\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ auf der rechten Seite von (8.11) die Bedeutung der Erzeugung bzw. Vernichtung von *Feldenergie*, nicht etwa von Energie überhaupt, hat. Weil die Erhaltung der gesamten Energie eine grundsätzliche Eigenschaft physikalischer Systeme ist, deren Zusammenhang mit der zeitlichen Translationsinvarianz in der Klassischen Mechanik gezeigt wird, fragen wir, mit welchen anderen Formen von Energie Feldenergie ausgetauscht werden kann. Dazu stellen wir zunächst fest, dass die Feldenergie gemäß (8.11) *erhalten* ist, wenn $\mathbf{j} = 0$, d.h., wenn keine elektrische Ladung bewegt wird. Dann darf aber auch keine elektrische Ladung vorhanden sein, weil diese in einem bewegten Inertial-System auch stets als bewegte Ladung auftritt. Es sind demnach elektrische Ladungen bzw. elektrisch geladene Teilchen, mit denen Feldenergie ausgetauscht werden kann. Wir betrachten die Kräfte, die auf elektrisch geladene Teilchen von den Feldern \mathbf{E} und \mathbf{B} ausgeübt werden:

$$F_{\mathbf{E}} = q \mathbf{E}, \quad F_{\mathbf{B}} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (8.13)$$

Wir gehen zu räumlichen Dichten $q \rightarrow \rho$ und $q \mathbf{v} \rightarrow \rho \mathbf{v} = \mathbf{j}$ über und addieren die beiden Kräfte, die dann zu einer *Kraft-Dichte* \mathbf{f} = Kraft pro Volumen wird,

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad (8.14)$$

der sogenannten *Lorentz-Kraftdichte*. Wenn wir diese skalar mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} der geladenen Teilchen im Sinne eines Geschwindigkeits-Feldes, vgl. 5.1.1, multiplizieren, erhalten wir die räumliche Dichte der Leistung der Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} an den geladenen Teilchen. Da $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$, ist $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) = 0$ und wir erhalten

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}. \quad (8.15)$$

Dieser Ausdruck tritt auf der rechten Seite von (8.11) mit dem negativen Vorzeichen auf, weil $\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} > 0$ bedeutet, dass Leistung dem Feld entnommen wird und auf die geladenen Teilchen übertragen wird, entsprechend umgekehrt.

Ein Beispiel für den *Verlust von Feldenergie*, also $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} > 0$, liefert der Transport von Ladung in Leitern, also die elektrische Leitung. Hier folgt die Ladungsbewegung dem elektrischen Feld \mathbf{E} , d.h., \mathbf{j} und \mathbf{E} sind parallel. Die elektrische Leitung wird sehr häufig durch das phänomenologische *Ohmsche Gesetz* beschrieben,

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad (8.16)$$

worin σ die *spezifische elektrische Leitfähigkeit* ist. Aus dem Ohmschen Gesetz folgt

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = \sigma \mathbf{E}^2 > 0, \quad (8.17)$$

weil $\sigma > 0$. Das Feld \mathbf{E} überträgt Energie an die geladenen Teilchen, z.B. Elektronen, indem es sie beschleunigt. Die Ladungsträger ihrerseits stoßen an die Ionen des Leiters und geben ihre Bewegungs-Energie als Schwingungs-Energie an die Ionen ab. Diese äußert sich in einer Zunahme der Energie des Ionen-Gitters, die sogenannte *Ohmsche Wärme*, die sich durch eine Temperatur-Erhöhung nachweisen lässt. Dieser Prozess ist *irreversibel*. Das lässt sich bereits am Ohmschen Gesetz (8.16) ablesen: wenn wir dort den Zeitumkehr-Operator T anwenden, wechselt \mathbf{j} auf der linken Seite das Vorzeichen, während \mathbf{E} rechts ungeändert bleibt. (σ ist eine Material-Konstante, die unter T invariant ist.) Das Ohmsche Gesetz ist also *nicht* zeitumkehr-invariant. Die Irreversibilität im Ohmschen Gesetz ist eine thermodynamische Eigenschaft, die letztlich auf den 2. Hauptsatz der Thermodynamik zurückgeht. Das Ohmsche Gesetz ist deshalb eher Bestandteil der Thermodynamik als der Elektrodynamik.

Ein Beispiel für den *Gewinn von Feldenergie*, also $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} < 0$, liefert der Vorgang des Aufladens eines Kondensators. Das elektrische Feld \mathbf{E} hat die Richtung von den positiven zu den negativen Ladungen auf den beiden Platten. Um den Kondensator weiter aufzuladen, muss positive Ladung von der negativ geladenen Platte zur positiv geladenen Platte, also gegen die Richtung des bereits vorhandenen \mathbf{E} -Feldes gebracht werden. Das bedeutet einen Fluss \mathbf{j} gegen die Feldrichtung von \mathbf{E} und somit $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} < 0$. Äquivalent dazu ist natürlich die Verschiebung von negativer Ladung von der positiv zur negativ geladenen Platte.

8.3 Bilanzen des Impulses und des Drehimpulses

8.3.1 Impuls-Bilanz

Ausgangspunkt sind wieder die beiden Maxwellschen Gleichungen (8.5) und (8.6), die die zeitlichen Ableitungen der Felder enthalten. Wir multiplizieren jetzt (8.5) vektoriell, also als Kreuzprodukt, von links mit \mathbf{D} , (8.6) vektoriell von rechts mit \mathbf{B} und bilden ebenfalls wieder die Differenz der beiden so entstehenden Ausdrücke. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \mathbf{D} \times \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} \right) \times \mathbf{B} + \mathbf{D} \times \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{E} \right) - \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{H} \right) \times \mathbf{B} &= \\ &= -\mathbf{j} \times \mathbf{B} \end{aligned} \quad (8.18)$$

Unter Verwendung der Produkt-Regel der Differentiation wird

$$\mathbf{D} \times \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} \right) \times \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} \times \mathbf{B}). \quad (8.19)$$

Für die Umformung der Ausdrücke

$$\mathbf{D} \times \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{E} \right) = \epsilon_0 \mathbf{E} \times \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{E} \right), \quad \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{H} \right) \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{B} \right) \times \mathbf{B}$$

verwenden wir eine allgemeine Beziehung für ein beliebiges Vektorfeld $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r})$

$$\mathbf{a} \times \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{a} \right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{1}{2} \mathbf{a}^2 \right) - \left(\mathbf{a} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{a}. \quad (8.20)$$

Zum Nachweis bilden wir die α -Komponente der linken Seite und formen wie folgt um:

$$\begin{aligned} \left\{ \mathbf{a} \times \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{a} \right) \right\}_\alpha &= \epsilon_{\alpha\beta\gamma} a_\beta \epsilon_{\gamma\mu\nu} \partial_\mu a_\nu = \epsilon_{\gamma\alpha\beta} \epsilon_{\gamma\mu\nu} a_\beta \partial_\mu a_\nu = \\ &= a_\beta \partial_\alpha a_\beta - a_\beta \partial_\beta a_\alpha = \partial_\alpha \left(\frac{1}{2} a_\beta^2 \right) - a_\beta \partial_\beta a_\alpha. \end{aligned} \quad (8.21)$$

Damit ist der Nachweis für (8.20) schon geführt. Wir benötigen diese Hilfsformel aber in einer etwas anderen Form und führen deshalb die Umformung in (8.21) wie folgt weiter:

$$\begin{aligned} \left\{ \mathbf{a} \times \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{a} \right) \right\}_\alpha &= \partial_\alpha \left(\frac{1}{2} \mathbf{a}^2 \right) - \partial_\beta (a_\alpha a_\beta) + a_\alpha \partial_\beta a_\beta = \\ &= \partial_\beta \left(\frac{1}{2} \mathbf{a}^2 \delta_{\alpha\beta} - a_\alpha a_\beta \right) + a_\alpha \partial_\beta a_\beta. \end{aligned} \quad (8.22)$$

Wir wenden (8.22) zunächst auf $\mathbf{a} = \mathbf{E}$ an. Mit der Maxwellschen Gleichung

$$\partial_\beta E_\beta = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

erhalten wir

$$\left\{ \mathbf{E} \times \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{E} \right) \right\}_\alpha = \partial_\beta \left(\frac{1}{2} \mathbf{E}^2 \delta_{\alpha\beta} - E_\alpha E_\beta \right) + \frac{1}{\epsilon_0} \rho E_\alpha. \quad (8.23)$$

Dann wenden wir (8.22) auf $\mathbf{a} = \mathbf{B}$ an. Mit der Maxwellschen Gleichung

$$\partial_\beta B_\beta = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{B} = 0$$

erhalten wir

$$\left\{ \mathbf{B} \times \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{B} \right) \right\}_\alpha = \partial_\beta \left(\frac{1}{2} \mathbf{B}^2 \delta_{\alpha\beta} - B_\alpha B_\beta \right). \quad (8.24)$$

Einsetzen von (8.23) und (8.24) in die α -Komponente der Gleichung (8.18) liefert zusammen mit der Umformung (8.19)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} \times \mathbf{B})_\alpha + \partial_\beta \left[\epsilon_0 \left(\frac{1}{2} \mathbf{E}^2 \delta_{\alpha\beta} - E_\alpha E_\beta \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{1}{2} \mathbf{B}^2 \delta_{\alpha\beta} - B_\alpha B_\beta \right) \right] = \\ = -(\rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B})_\alpha. \end{aligned} \quad (8.25)$$

Diese Gleichung hat die Struktur einer Bilanz-Gleichung, nämlich

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \pi_\alpha + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{P}^{(\alpha)} = -f_\alpha.} \quad (8.26)$$

Hierin ist

$$\pi_\alpha = (\mathbf{D} \times \mathbf{B})_\alpha \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{\pi} = \mathbf{D} \times \mathbf{B}, \quad (8.27)$$

$$f_\alpha = (\rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B})_\alpha \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}. \quad (8.28)$$

Der Divergenz-Term in (8.26) ist so zu lesen, dass

$$\mathbf{P}^{(\alpha)} = P_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\beta, \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{P}^{(\alpha)} = \partial_\beta P_{\alpha\beta}, \quad (8.29)$$

$$P_{\alpha\beta} := \epsilon_0 \left(\frac{1}{2} \mathbf{E}^2 \delta_{\alpha\beta} - E_\alpha E_\beta \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{1}{2} \mathbf{B}^2 \delta_{\alpha\beta} - B_\alpha B_\beta \right). \quad (8.30)$$

$P_{\alpha\beta}$ wird also interpretiert als die β -Komponente eines "Vektors" $\mathbf{P}^{(\alpha)}$. Da $P_{\alpha\beta}$ symmetrisch ist, $P_{\alpha\beta} = P_{\beta\alpha}$, hängt diese Interpretation nicht von der Reihenfolge der Indizes α und β ab. Die näher liegende Interpretation besteht darin, $P_{\alpha\beta}$ als *Tensor* aufzufassen. In 3.2.2 hatten wir den Begriff des Tensors bereits eingeführt. Demnach sollte $P_{\alpha\beta}$ dann als Tensor definiert sein, wenn es sich unter orthogonalen Transformationen wie das Produkt von zwei Vektor-Komponenten $a_\alpha b_\beta$ transformiert. Dieses Verhalten ist in der Definition (8.30) direkt ablesbar, wenn wir uns daran erinnern, dass auch $\delta_{\alpha\beta}$ ein Tensor ist, wie wir ebenfalls in 3.2.2 bereits gezeigt hatten. Durch die Divergenz-Bildung $\partial_\beta P_{\alpha\beta}$ wird nun der Tensor $P_{\alpha\beta}$ zu einem Vektor "verjüngt", ebenso, wie ein Vektor a_β durch die Divergenz-Bildung $\partial_\beta a_\beta$ zu einem Skalar "verjüngt" wird.

Bei der physikalischen Diskussion der Bilanz-Gleichung (8.26) gehen wir von der rechten Seite aus. Aus (8.28) lesen wir ab, dass die rechte Seite bis auf das Vorzeichen die Bedeutung der α -Komponente der *räumlichen Dichte der Lorentz-Kraft* hat. Das bestätigen wir sofort, indem wir f_α bzw. \mathbf{f} in (8.28) mit dem Volumen-Element d^3r multiplizieren und $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ einsetzen:

$$\mathbf{f} d^3r = \rho d^3r (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = dq \mathbf{E} + dq \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

worin $dq = \rho d^3r$. Nach dem zweiten Newtonschen Gesetz ist Kraft die Änderung des Impulses pro Zeit, entsprechend für die räumlichen Dichten, so dass $\pi_\alpha = (\mathbf{D} \times \mathbf{B})_\alpha$ unter der Zeitableitung $\partial/\partial t$ auf der linken Seite von (8.26) die Bedeutung der α -Komponente der *räumlichen Dichte des Feldimpulses* bzw. $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{D} \times \mathbf{B}$ die der räumlichen Dichte des Feldimpulses hat. Dass die Lorentz-Kraftdichte \mathbf{f} auf der rechten Seite von (8.26) mit dem negativen Vorzeichen auftritt, hat seinen Grund

darin, dass diese die Kraft auf Ladungen, also die Impuls-Änderung pro Zeit für die Ladungen beschreibt. Jede Impuls-Zunahme für die Ladungen bedeutet aber eine Impuls-Abnahme für das Feld und umgekehrt.

Wir folgen nun dem allgemeinen Schema von Bilanz-Gleichungen weiter und interpretieren den Vektor $\mathbf{P}^{(\alpha)} = P_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\beta$ als die Flussdichte der α -Komponente des Feldimpulses, bzw. den Tensor $P_{\alpha\beta}$ als β -Komponente der Flussdichte der α -Komponente des Feldimpulses. Wegen der Symmetrie von $P_{\alpha\beta}$, also $P_{\alpha\beta} = P_{\beta\alpha}$ ist die letztere Interpretation invariant gegen eine Vertauschung der Indizes α und β .

In der materiellen Kontinuums-Theorie wird gezeigt, dass der wesentliche Anteil der Diagonal-Elemente von Impuls-Flussdichten der hydrostatische Druck ist. Darum heißen Impuls-Flussdichten auch Spannungs-Tensoren, und $P_{\alpha\beta}$ darum der *Maxwellsche Spannungstensor*.

8.3.2 Bilanz des Drehimpulses

Aus der Bilanz-Gleichung (8.26) für den Impuls können wir eine Bilanz-Gleichung auch für den Drehimpuls gewinnen, wenn wir uns daran erinnern, dass der Drehimpuls \mathbf{L} mit dem Impuls \mathbf{p} durch $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, in Komponenten $L_\mu = \epsilon_{\mu\nu\alpha} x_\nu p_\alpha$ zusammenhängt. Wir schreiben die Impuls-Bilanz (8.26) in Komponentenform:

$$\partial_t \pi_\alpha + \partial_\beta P_{\alpha\beta} = -f_\alpha, \quad (8.31)$$

$\partial_t := \partial/\partial t$. Um daraus eine Aussage über den Drehimpuls zu erhalten, müssen wir offensichtlich mit $\epsilon_{\mu\nu\alpha} x_\nu$ multiplizieren, wobei diese "Multiplikation" natürlich immer die Summations-Konvention einschließt:

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha} x_\nu \partial_t \pi_\alpha + \epsilon_{\mu\nu\alpha} x_\nu \partial_\beta P_{\alpha\beta} = -\epsilon_{\mu\nu\alpha} x_\nu f_\alpha. \quad (8.32)$$

Es ist

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha} x_\nu \partial_t \pi_\alpha = \partial_t (\epsilon_{\mu\nu\alpha} x_\nu \pi_\alpha),$$

weil die partielle Zeitableitung ∂_t (bei festgehaltenem Ort) nicht auf die Koordinate x_ν wirkt: $\partial_t x_\nu = 0$.

Mit der Produktregel der Differentiation erhalten wir weiter

$$\begin{aligned}\epsilon_{\mu\nu\alpha} x_\nu \partial_\beta P_{\alpha\beta} &= \partial_\beta (\epsilon_{\mu\nu\alpha} x_\nu P_{\alpha\beta}) - \epsilon_{\mu\nu\alpha} P_{\alpha\beta} \partial_\beta x_\nu \\ &= \partial_\beta (\epsilon_{\mu\nu\alpha} x_\nu P_{\alpha\beta}) - \epsilon_{\mu\beta\alpha} P_{\alpha\beta} \\ &= \partial_\beta (\epsilon_{\mu\nu\alpha} x_\nu P_{\alpha\beta}).\end{aligned}$$

Darin haben wir benutzt, dass $\partial_\beta x_\nu = \delta_{\beta\nu}$ und $\epsilon_{\mu\beta\alpha} P_{\alpha\beta} = 0$, weil $P_{\alpha\beta}$ symmetrisch ist und eine Kombination $\epsilon_{\mu\beta\alpha} P_{\alpha\beta}$ mit einem symmetrischen Tensor $P_{\alpha\beta}$ immer verschwindet, vgl. 1.3.3.

Wir setzen diese Umformungen in (8.32) ein und erhalten (mit einer Umbenennung der Indizes $\alpha \rightarrow \gamma, \mu \rightarrow \alpha$) die Bilanz-Gleichung

$$\partial_t \ell_\alpha + \partial_\beta T_{\alpha\beta} = -\tau_\alpha, \quad (8.33)$$

$$\ell_\alpha = \epsilon_{\alpha\nu\gamma} x_\nu \pi_\gamma, \quad (8.34)$$

$$T_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\nu\gamma} x_\nu P_{\gamma\beta}, \quad (8.35)$$

$$\tau_\alpha = \epsilon_{\alpha\nu\gamma} x_\nu f_\gamma. \quad (8.36)$$

Hier sind ℓ_α die α -Komponente der räumlichen Dichte des Feld-Drehimpulses, $T_{\alpha\beta}$ die β -Komponente der Flussdichte der α -Komponente des Feld-Drehimpulses, die keine Symmetrie besitzt, und τ_α die α -Komponente der räumlichen Dichte des Drehmoments der Lorentz-Kraft.

Wir können die Drehimpuls-Bilanz (8.33) auch wieder in derselben Form wie die Impuls-Bilanz schreiben:

$$\frac{\partial}{\partial t} \ell_\alpha + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{T}^{(\alpha)} = \tau_\alpha, \quad \mathbf{T}^{(\alpha)} := T_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\beta. \quad (8.37)$$

8.4 Erhaltung von Energie, Impuls und Drehimpuls

Die oben hergeleiteten Bilanz-Gleichungen für Energie, Impuls und Drehimpuls enthalten auf ihren rechten Seiten jeweils "Austauschsterme" für den Austausch von Energie, Impuls und Drehimpuls des Feldes mit geladenen Teilchen. Letztere sind durch ihre Ladungsdichte ρ und ihre Flussdichte \mathbf{j} beschrieben. Nun sind Energie, Impuls und Drehimpuls die elementaren physikalischen Variablen, für die Erhaltungssätze gelten. Um die hier formulierten Bilanz-Gleichungen zu Erhaltungssätzen zu erweitern, müsste man die entsprechenden Bilanzen auch für das System der geladenen Teilchen aufstellen. Im Allgemeinen wechselwirken diese auch mit weiteren ungeladenen Teilchen, die dann ebenfalls einzuschließen wären. Wie wir im Fall der elektrischen Leitung in 8.2.2 gesehen haben, kann Feldenergie schließlich sogar in Wärme-Energie überführt werden. Folglich müssten auch die thermodynamischen Bilanz-Gleichungen für Energie, Impuls und Drehimpuls eingeschlossen werden. Erst diese Gesamtheit von gekoppelten Bilanz-Gleichung würde die Erhaltung von Energie, Impuls und Drehimpuls sichtbar werden lassen.

Ein einfacherer Fall liegt für das sogenannte *freie Feld* vor. Darunter versteht man die Dynamik von \mathbf{E} und \mathbf{B} ohne Vorhandensein von geladenen Teilchen, also für $\rho = 0$ und $\mathbf{j} = 0$. Für diesen Fall verschwinden die rechten Seiten der oben hergeleiteten Bilanz-Gleichungen, und wir erhalten Erhaltungssätze für Energie, Impuls und Drehimpuls des Feldes:

$$\text{Energie:} \quad \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{S} = 0, \quad (8.38)$$

$$\text{Impuls:} \quad \frac{\partial}{\partial t} \pi_\alpha + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{P}^{(\alpha)} = 0, \quad (8.39)$$

$$\text{Drehimpuls:} \quad \frac{\partial}{\partial t} \ell_\alpha + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{T}^{(\alpha)} = 0. \quad (8.40)$$

Dass für das freie Feld Energie, Impuls und Drehimpuls erhalten sind, war zu erwarten. Aus dem Noetherschen Theorem der Mechanik wissen wir ja, dass Erhaltungssätze für Energie, Impuls und Drehimpuls Konsequenzen aus *Invarianzen* sind, nämlich den Invarianzen gegen Translationen der Zeit, Translationen des Ortes und Drehungen um beliebige Achsen im Raum. Das gilt auch für Feldgleichungen. Die freien Maxwell'schen Gleichungen (also für $\rho = 0$ und $\mathbf{j} = 0$) enthalten

- (1) die *Zeit* nur als Ableitung $\partial/\partial t$, sind also invariant gegen Translationen der Zeit,

- (2) den *Ort* nur als Ableitung $\partial/\partial\mathbf{r}$, sind also invariant gegen Translationen des Ortes,
- (3) zwar keine *Winkelvariablen*, sondern vektorielle Operationen wie Rotation und Divergenz, die gegen Transformationen der Basis, also gegen Drehungen invariant sind.

Wenn $\rho \neq 0$, $\mathbf{j} \neq 0$ wären, könnten vorgegebene Ladungsdichten und Flussdichten Zeitprogramme, räumliche Inhomogenitäten und ausgezeichnete Richtungen vorgeben und damit die obigen Invarianzen brechen.

Kapitel 9

Freie elektromagnetische Wellen

In diesem Kapitel werden wir Lösungen der Maxwell'schen Gleichungen diskutieren. Die Maxwell'schen Gleichungen sind – vom mathematischen Standpunkt aus gesehen – *partielle Differential-Gleichungen* in den Variablen Ort und Zeit. Zu ihrer Lösung müssen – außer Ladungs- und Flussdichte $\rho(\mathbf{r}, t)$ bzw. $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ – *Randbedingungen* für die Felder $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ vorgegeben werden. Die räumlichen Randbedingungen besagen, wie sich die Felder z.B. für $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$ verhalten sollen. Es können aber auch räumliche Randbedingungen für endliche Orte \mathbf{r} auftreten, z.B. dann, wenn elektrische Leiter anwesend sind, vgl. 4.1. Die "zeitlichen Randbedingungen" besagen, welchen Verlauf die Felder zu einer bestimmten Anfangszeit haben sollen. Man würde sie dann eher Anfangsbedingungen nennen.

Wir können in diesem Text keine mathematisch erschöpfende Theorie der Lösung von partiellen Differential-Gleichungen formulieren. Im Kapitel 4 hatten wir einige Techniken zur Lösung statischer partieller Differential-Gleichungen, sogenannter Randwert-Probleme, angeführt. Wir werden auch in diesem Kapitel immer wieder auf Randbedingungen zurückkommen. Vorerst wollen wir für dieses Kapitel vereinbaren, dass die zu diskutierenden Lösungen der Maxwell'schen Gleichungen den gesamten Raum erfüllen können, dass es also keine Randbedingungen im Endlichen zu erfüllen geben soll.

Wir wollen weiterhin in diesem Kapitel den besonderen Fall diskutieren, dass keine geladenen Teilchen auftreten. Dann verschwinden Ladungs- und Flussdichten: $\rho = 0$, $\mathbf{j} = 0$. Die zu lösenden Maxwell'schen Gleichungen lauten in diesem Fall

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}, \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{E} = 0, \quad (9.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}, \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{B} = 0, \quad (9.2)$$

worin bis jetzt noch $1/c^2 = \epsilon_0 \mu_0$ bzw. $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ als Abkürzung verwendet wird. In 7.4 haben wir gezeigt, dass aus den Maxwell'schen Gleichungen *Wellengleichungen* folgen. Für verschwindende Ladungs- und Flussdichten haben diese die Form

$$\boxed{\square \mathbf{E} = \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E} = 0, \quad \square \mathbf{B} = \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{B} = 0.} \quad (9.3)$$

Die Lösungen dieser Wellengleichungen heißen *freie Wellen*. Wir müssen aber beachten, dass die Wellengleichungen Folgerungen aus den Maxwell'schen Gleichungen, doch nicht etwa äquivalent zu ihnen sind. Um die Eigenschaften von freien Wellen in \mathbf{E} und \mathbf{B} zu bestimmen, müssen wir gelegentlich auf die Maxwell'schen Gleichungen (9.1) und (9.2) zurückgreifen.

Wir erinnern noch daran, dass auch die Potentiale Φ und \mathbf{A} Wellengleichungen vom Typ (9.3) erfüllen, vgl. Abschnitt 7.4.2.

9.1 Ebene Wellen

Wir betrachten in diesem Abschnitt einen besonders einfachen Typ von Lösungen der Wellengleichungen (9.3), auf den wir im weiteren Verlauf dieses Kapitels noch zurückgreifen werden. Die Wellengleichungen (9.3) sind vom Typ

$$\square u = \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u = 0, \quad (9.4)$$

worin $u = u(\mathbf{r}, t)$ anstelle der Komponenten von \mathbf{E} und \mathbf{B} steht.

9.1.1 Ebene Wellen in z -Richtung

Wir nehmen an, dass die Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} bzw. u in (9.4) nur von einer Koordinatenrichtung, z.B. nur von $x_3 =: z$ abhängt: $u = u(z, t)$. Dann wird aus (9.4)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u(z, t) = 0. \quad (9.5)$$

Wir suchen Lösungen dieser Gleichung durch die Substitutionen

$$\left. \begin{aligned} \xi &:= z - ct, & z &= \frac{1}{2} (\eta + \xi), \\ \eta &:= z + ct, & t &= \frac{1}{2c} (\eta - \xi). \end{aligned} \right\} \quad (9.6)$$

Damit wird

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} &= \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial t}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right), \\ \frac{\partial}{\partial \eta} &= \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial t}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right), \\ \implies \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} &= \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right). \end{aligned}$$

Wir können die Wellengleichung (9.5) also in der Form

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} u = 0 \quad (9.7)$$

schreiben. Diese Gleichung besitzt die allgemeine Lösung $u = f_+(\xi) + f_-(\eta)$ bzw. durch Rücktransformation in die Variablen z, t

$$u(z, t) = f_+(z - ct) + f_-(z + ct), \quad (9.8)$$

worin die $f_+(\dots)$ und $f_-(\dots)$ beliebige (zweimal differenzierbare) Funktionen sind. Die Lösung $u(z, t) = f_+(z - ct)$ bedeutet anschaulich, dass ein beliebiger, z.B. zur Zeit $t = 0$ vorgegebener Funktionsverlauf $f_+(z)$ sich mit der Geschwindigkeit c in die positive z -Richtung verschiebt, entsprechend in negativer z -Richtung für $u(z, t) = f_-(z + ct)$. Da die Wellengleichung linear in u ist, lassen sich die beiden Lösungen überlagern. Natürlich hängt diese Deutung nicht von $t = 0$ als Anfangszeit

ab. Der Funktionsverlauf kann bei beliebiger Zeit $t = t_0$ in der Form $u = f_{\pm}(z \pm ct_0)$ vorgegeben sein.

An dieser Stelle der Entwicklung der Theorie können wir nun erstmalig feststellen, dass die bisher nur als Abkürzung benutzte Größe $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ die Bedeutung der Geschwindigkeit von (zunächst ebenen) elektromagnetischen Wellen hat. Wir hatten bisher lediglich festgestellt, dass $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ die Einheit einer Geschwindigkeit besitzt, vgl. 5.2.2.

Das Argument $z \mp ct$ in $f_{\pm}(\dots)$ heißt die *Phase* der Lösung der Wellengleichung. Den Punkten z gleicher Phase sind also dieselben Werte der "Wellenfunktion" $f_{\pm}(z \mp ct)$, d.h., dieselben physikalischen Feldzustände zugeordnet. Die Punkte gleicher Phase liegen auf den Ebenen $z = \pm ct$, die senkrecht auf dem Basis-Vektor \mathbf{e}_z in z -Richtung stehen und sich mit der Geschwindigkeit $\pm c$ in der Richtung \mathbf{e}_z bewegen. Lösungen der Wellengleichung von diesem Typ heißen allgemein *ebene Wellen*. Ein Beispiel ist

$$f_{\pm}(z \mp ct) = \frac{C}{b} \exp \left[-\frac{(z \mp ct)^2}{2b^2} \right].$$

($C = \text{const}$). Dieses ist ein "Wellenbuckel" in der Form einer Gauß-Glocke der Breite b .

9.1.2 Allgemeine ebene Wellen

Die oben beschriebenen ebenen Wellen, die sich in z -Richtung fortbewegen, lassen sich sogleich verallgemeinern zu

$$u(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{n} \mathbf{r} - ct). \quad (9.9)$$

Hier ist \mathbf{n} ein Einheitsvektor, $\mathbf{n}^2 = 1$, in einer beliebigen Raumrichtung und $f(\dots)$ wieder eine beliebige (zweimal differenzierbare) Funktion. Zunächst zeigen wir, dass u in (9.9) eine Lösung der Wellengleichung $\square u = 0$ ist:

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha} u &= n_{\alpha} f'(\mathbf{n} \mathbf{r} - ct), & \Delta u &= \partial_{\alpha}^2 u = n_{\alpha}^2 f''(\mathbf{n} \mathbf{r} - ct) = f''(\mathbf{n} \mathbf{r} - ct), \\ \partial_t u &= -c f'(\mathbf{n} \mathbf{r} - ct), & \partial_t^2 u &= c^2 f''(\mathbf{n} \mathbf{r} - ct), \\ \square u &= \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right) u = 0. \end{aligned}$$

($f'(\dots)$ und $f''(\dots)$ bedeuten die ersten und zweiten Ableitungen der Funktionen nach ihrem Argument.) Die Orte gleicher Phase der Lösung u in (9.9) liegen auf Ebenen $\mathbf{n} \mathbf{r} - c t = \phi_0 = \text{const.}$ Wir formen diese Darstellung um in

$$\mathbf{n} (\mathbf{r} - \mathbf{n} (c t + \phi_0)) = 0.$$

Die Orte \mathbf{r} gleicher Phase liegen also in einer Ebene, die senkrecht auf \mathbf{n} steht und den Punkt $\mathbf{r}_0(t) = \mathbf{n} (c t + \phi_0)$ enthält. Dieser bewegt sich mit der Geschwindigkeit c in \mathbf{n} -Richtung.

Wie wir oben bereits bemerkt hatten, steht u für die Komponenten der Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} . Wir könnten gemäß (9.9) also für diese Felder Lösungen der Wellengleichung in der Form

$$E_\alpha(\mathbf{r}, t) = f_\alpha(\mathbf{n}^{(\alpha, \mathbf{E})} \mathbf{r} - c t), \quad B_\alpha(\mathbf{r}, t) = g_\alpha(\mathbf{n}^{(\alpha, \mathbf{B})} \mathbf{r} - c t) \quad (9.10)$$

konstruieren, worin die $f_\alpha(\dots)$, $g_\alpha(\dots)$ insgesamt 6 beliebige (zweimal differenzierbare) Funktionen und die $\mathbf{n}^{(\alpha, \mathbf{E})}$, $\mathbf{n}^{(\alpha, \mathbf{B})}$ 6 beliebige Einheitsvektoren sind. Allerdings müssten wir diese Lösungen noch in die vollständigen Maxwell'schen Gleichungen (9.1) und (9.2) einsetzen und daraus weitere Bedingungen an die Funktionen $f_\alpha(\dots)$, $g_\alpha(\dots)$ und die Vektoren $\mathbf{n}^{(\alpha, \mathbf{E})}$, $\mathbf{n}^{(\alpha, \mathbf{B})}$ gewinnen. Wir beschränken uns statt dessen von vornherein auf die folgenden, physikalisch anschaulichen Fälle

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 f(\mathbf{n} \mathbf{r} - c t), \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0 f(\mathbf{n} \mathbf{r} - c t). \quad (9.11)$$

Die Felder unterscheiden sich hier nur durch ihre Amplituden-Vektoren \mathbf{E}_0 , \mathbf{B}_0 und haben im Übrigen dieselbe Orts- und Zeitabhängigkeit und damit auch dieselbe Ausbreitungsrichtung \mathbf{n} . Wir untersuchen nun, welche Aussagen wir über die Parameter \mathbf{E}_0 , \mathbf{B}_0 , \mathbf{n} aus den Maxwell'schen Gleichungen (9.1) und (9.2) erhalten. Wir beginnen mit der Bedingung, dass die Divergenzen von \mathbf{E} und \mathbf{B} verschwinden müssen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{E} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\mathbf{E}_0 f(\mathbf{n} \mathbf{r} - c t)) = \partial_\alpha (E_{0,\alpha} f(\mathbf{n} \mathbf{r} - c t)) = \\ &= E_{0,\alpha} \partial_\alpha f(\mathbf{n} \mathbf{r} - c t) = n_\alpha E_{0,\alpha} f'(\mathbf{n} \mathbf{r} - c t) = \\ &= (\mathbf{n} \mathbf{E}_0) f'(\mathbf{n} \mathbf{r} - c t). \end{aligned}$$

Damit die Divergenz verschwindet, muss $\mathbf{n} \mathbf{E}_0 = 0$ sein. (Lösungen mit $f(\dots) = \text{const}$ seien ausgeschlossen.) Die Feldamplitude \mathbf{E}_0 und damit das Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ müssen senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung \mathbf{n} stehen. Dieselbe Rechnung für \mathbf{B} statt \mathbf{E} ergibt $\mathbf{n} \mathbf{B}_0 = 0$, also dieselbe Aussage für $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$. Wellen mit dieser Eigenschaft, also

$$\mathbf{n} \mathbf{E}_0 = 0, \quad \mathbf{n} \mathbf{B}_0 = 0, \quad (9.12)$$

heißen *transversal*. Die elektromagnetischen (zunächst ebenen) Wellen sind transversal.

In einem nächsten Schritt fordern wir, dass die Lösungen (9.11) die Maxwell-Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \quad (9.13)$$

erfüllen. Es ist

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{E} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times (\mathbf{E}_0 f(\mathbf{n} \mathbf{r} - ct)) = \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} f(\mathbf{n} \mathbf{r} - ct) \right) \times \mathbf{E}_0. \quad (9.14)$$

Diese Umformung entnehmen wir aus der Produkt-Regel für eine skalare Funktion $\phi = \phi(\mathbf{r})$ und einem Vektorfeld $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r})$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times (\phi \mathbf{a}) = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{a} + \phi \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{a}, \quad (9.15)$$

die wir in Komponenten-Schreibweise unter Verwendung der gewöhnlichen Produkt-Regel der Differentiation wie folgt nachweisen:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times (\phi \mathbf{a}) \right\}_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \partial_\beta (\phi a_\gamma) = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} (\partial_\beta \phi) a_\gamma + \phi \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \partial_\beta a_\gamma.$$

Wenn wir in (9.15) $\phi = f(\mathbf{n} \mathbf{r} - ct)$ und $\mathbf{a} = \mathbf{E}_0$ setzen und beachten, dass \mathbf{E}_0 unabhängig von \mathbf{r} ist, erhalten wir die Umformung (9.14). Ferner ist

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} f(\mathbf{n} \mathbf{r} - ct) = \mathbf{n} f'(\mathbf{n} \mathbf{r} - ct),$$

wie oben bereits komponentenweise benutzt, so dass

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{E} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}_0 f'(\mathbf{n} \mathbf{r} - ct). \quad (9.16)$$

Andererseits ist

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{B}_0 f(\mathbf{n} \mathbf{r} - ct)) = -c \mathbf{B}_0 f'(\mathbf{n} \mathbf{r} - ct). \quad (9.17)$$

(9.16) und (9.17) eingesetzt in die Maxwellsche Gleichung (9.13) führt auf die Forderung

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}_0 = c \mathbf{B}_0. \quad (9.18)$$

Das bedeutet insbesondere, dass nicht nur \mathbf{E}_0 und \mathbf{B}_0 senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung \mathbf{n} stehen, sondern dass darüber hinaus auch \mathbf{E}_0 und \mathbf{B}_0 aufeinander senkrecht stehen. Was die Orientierungen betrifft, bilden die Vektoren \mathbf{n} , \mathbf{E}_0 , \mathbf{B}_0 gemäß (9.18) in dieser Reihenfolge ein rechts-orientiertes "Dreibein".

Es bleibt noch zu fordern, dass die Lösungen (9.11) auch die Maxwell-Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} \quad (9.19)$$

erfüllen. Mit den analogen Umformungen wie oben ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{B} &= \mathbf{n} \times \mathbf{B}_0 f'(\mathbf{n} \mathbf{r} - ct), \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} &= -c \mathbf{E}_0 f'(\mathbf{n} \mathbf{r} - ct), \end{aligned}$$

was, eingesetzt in (9.19), auf

$$\mathbf{n} \times \mathbf{B}_0 = -\frac{1}{c} \mathbf{E}_0 \quad (9.20)$$

führt. Diese Gleichung ist aber identisch mit (9.18). Das erkennen wir, wenn wir auf (9.20) von links die Operation $\mathbf{n} \times$ anwenden,

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{B}_0) = -\frac{1}{c} \mathbf{n} \times \mathbf{E}_0,$$

und jetzt auf der linken Seite die Identität

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{B}_0) = (\mathbf{n} \mathbf{B}_0) \mathbf{n} - \mathbf{n}^2 \mathbf{B}_0$$

beachten. Mit $\mathbf{n} \mathbf{B}_0 = 0$, vgl. (9.12), und $\mathbf{n}^2 = 1$ kommen wir wieder zu (9.20). Dass die letzte der noch offenen Maxwell'schen Gleichungen keine neue Aussage liefert, ist verständlich, weil unser Lösungsansatz ja bereits die aus den Maxwell'schen Gleichungen folgende Wellengleichung erfüllte.

9.2 Monochromatische ebene Wellen

9.2.1 Einzelne monochromatische ebene Welle

Von besonderer Bedeutung sind die *monochromatischen* ebenen Wellen,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \sim \cos(\mathbf{k} \mathbf{r} - \omega t + \phi), \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \sim \cos(\mathbf{k} \mathbf{r} - \omega t + \phi), \quad (9.21)$$

weil noch gezeigt werden wird, dass sich beliebige freie Wellen stets als Überlagerung von monochromatischen ebenen Wellen darstellen lassen. Hier haben wir das bisher verwendete Argument $\mathbf{n} \mathbf{r} - c t$, das ja die Dimension Länge besitzt, durch Multiplikation mit einem Faktor der Dimension $1/\text{Länge}$ dimensionslos gemacht, um es als Argument in der Funktion $\cos(\dots)$ verwenden zu können:

$$\mathbf{k} \mathbf{r} - \omega t := k (\mathbf{n} \mathbf{r} - c t), \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{k} &= k \mathbf{n}, \\ \omega &= c k \end{cases} \quad (9.22)$$

Der *Wellenzahl-Vektor* \mathbf{k} ist verknüpft mit der *Wellenlänge* λ . Letztere ist dadurch definiert, dass sich die Welle als Funktion des Ortes nach Fortschreiten um λ in Ausbreitungs-Richtung $\mathbf{k} \sim \mathbf{n}$ periodisch wiederholt:

$$|\mathbf{k}| \lambda = 2\pi, \quad |\mathbf{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (9.23)$$

Die *Kreisfrequenz* ω ist mit der Schwingungsdauer T verknüpft:

$$\omega T = 2\pi, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (9.24)$$

Die *Frequenz* f ist definiert durch $f := 1/T = \omega/(2\pi) = c/\lambda$. ϕ in (9.21) ist eine beliebige Phasenkonstante.

Die Rechnungen mit monochromatischen ebenen Wellen gestalten sich erheblich einfacher in der komplexen Schreibweise

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}. \quad (9.25)$$

Diese Schreibweise ist so zu interpretieren, dass bei allen Schlüssen auf physikalisch reale und damit auch reelle Felder die *Realteile* zu bilden sind. Das ist eine völlig unproblematische Operation, solange nur Ausdrücke betroffen sind, die *linear* in den Feldern sind. Wenn Produkte, z.B. Quadrate von Feldern wie in Ausdrücken für die Feldenergie zu bilden sind, ist wie folgt vorzugehen:

- (1) Bildung des Realteils,
- (2) Bildung der Produktausdrücke.

Wenn wir im Folgenden Ausdrücke \mathbf{E}_0^2 usw. bilden, soll allerdings das komplexwertige Quadrat des komplexen Vektors \mathbf{E}_0 gemeint sein.

Die früheren (äquivalenten) Beziehungen (9.18) und (9.20)

$$\mathbf{B}_0 = \frac{1}{c} \mathbf{n} \times \mathbf{E}_0 \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{E}_0 = -c \mathbf{n} \times \mathbf{B}_0 \quad (9.26)$$

werden mit $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$, $k := |\mathbf{k}|$, s.o., zu

$$\mathbf{B}_0 = \frac{1}{ck} \mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 = \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{E}_0 = -\frac{c}{k} \mathbf{k} \times \mathbf{B}_0 = \frac{c^2}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{B}_0. \quad (9.27)$$

Auch die Amplituden-Vektoren $\mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0$ sollen komplex sein dürfen. Die Relationen (9.27) sind dann so zu lesen, dass sie sowohl für die Real- als auch für die Imaginärteile von $\mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0$ gelten sollen. Die Vektoren \mathbf{k} bzw. \mathbf{n} sollen jedoch nach wie vor reell sein. Wie oben bereits bemerkt, ist auch das Quadrat \mathbf{E}_0^2 eine komplexe Zahl. Wir definieren nun einen Phasenwinkel α sowie einen Amplituden-Vektor \mathcal{E} durch

$$\mathbf{E}_0^2 = |\mathbf{E}_0^2| e^{-2i\alpha}, \quad \mathcal{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\alpha}. \quad (9.28)$$

$-\pi < 2\alpha \leq \pi$. Es folgt, dass \mathcal{E}^2 reell ist:

$$\mathcal{E}^2 = e^{2i\alpha} \mathbf{E}_0^2 = |\mathbf{E}_0^2|. \quad (9.29)$$

Dagegen ist \mathcal{E} im Allgemeinen nicht reell, sondern besitzt einen Real- und Imaginärteil:

$$\mathcal{E} = \mathbf{E}_1 + i\mathbf{E}_2, \quad (9.30)$$

worin $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$ reell sein sollen. Aus dieser Darstellung folgt

$$\mathcal{E}^2 = \mathbf{E}_1^2 - \mathbf{E}_2^2 + 2i\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2. \quad (9.31)$$

Da jedoch \mathcal{E}^2 reell ist, vgl. (9.29), folgt weiter, dass

$$\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2 = 0, \quad (9.32)$$

$\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$ stehen also senkrecht aufeinander. Der ursprüngliche Amplituden-Vektor \mathbf{E}_0 in (9.25) steht senkrecht auf \mathbf{n} bzw. \mathbf{k} . Das gilt dann auch für \mathcal{E} , weil diese

beiden Vektoren gemäß (9.28) parallel sind. Folglich stehen auch Real- und Imaginärteil \mathbf{E}_1 , \mathbf{E}_2 von \mathcal{E} senkrecht auf \mathbf{k} . Diese Feststellungen erlauben es uns, ein rechtshändiges, orthogonales Basis-System \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y , \mathbf{e}_z zu wählen, so dass

$$\mathbf{k} = k \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{E}_1 = |\mathbf{E}_1| \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{E}_2 = \pm |\mathbf{E}_2| \mathbf{e}_y. \quad (9.33)$$

Das Vorzeichen bei \mathbf{E}_2 richtet sich danach, ob das Dreibein $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{k}$ rechts- oder linkshändig ist. Wir setzen

$$\mathbf{E}_0 = \mathcal{E} e^{-i\alpha} = (\mathbf{E}_1 + i \mathbf{E}_2) e^{i\alpha}$$

in (9.25) ein, bilden den Realteil des so entstehenden Ausdrucks für $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und erhalten mit der obigen Wahl von $\mathbf{k} = k \mathbf{e}_z$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)] &= \operatorname{Re}[(\mathbf{E}_1 + i \mathbf{E}_2) e^{i(kz - \omega t - \alpha)}] = \\ &= \mathbf{E}_1 \cos(kz - \omega t - \alpha) - \mathbf{E}_2 \sin(kz - \omega t - \alpha). \end{aligned} \quad (9.34)$$

Wir können $\alpha = 0$ durch die Wahl des Zeit-Nullpunkts erreichen. Die x - und y -Komponenten dieser Welle lauten

$$E_x(z, t) = |\mathbf{E}_1| \cos(kz - \omega t), \quad E_y(z, t) = \mp |\mathbf{E}_2| \sin(kz - \omega t). \quad (9.35)$$

Daraus lesen wir ab, dass

$$\left(\frac{E_x(z, t)}{|\mathbf{E}_1|} \right)^2 + \left(\frac{E_y(z, t)}{|\mathbf{E}_2|} \right)^2 = 1. \quad (9.36)$$

Der Feld-Vektor (9.34) beschreibt eine *elliptische Spirale*, d.h., seine Projektion auf die x - y -Ebene läuft auf einer Ellipse mit den Halbachsen $|\mathbf{E}_1|$ und $|\mathbf{E}_2|$ im (mathematisch) positiven oder negativen Sinn um, während er mit jedem Umlauf um eine Wellenlänge λ in z -Richtung fortschreitet. Den magnetischen Feld-Vektor $\operatorname{Re}(\mathbf{B}(\mathbf{r}, t))$ können wir entsprechend aus (9.27) konstruieren, d.h., $\operatorname{Re}(\mathbf{B}(\mathbf{r}, t))$ läuft $\operatorname{Re}(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t))$ mit der Phase π nach oder vor. Man nennt diese Welle, die den allgemeinsten Fall einer monochromatischen ebenen elektromagnetischen Welle darstellt, *elliptisch polarisiert*. Wenn $|\mathbf{E}_1| = |\mathbf{E}_2|$, heißt die Welle *zirkular polarisiert*, wenn $|\mathbf{E}_1| = 0$ oder $|\mathbf{E}_2| = 0$, heißt sie *linear polarisiert*.

9.2.2 Überlagerung monochromatischer ebener Wellen

Wir gehen nochmals auf die Wellengleichung, z.B. für das elektrische Feld

$$\square \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (9.37)$$

zurück und wollen diese durch die Fourier-Transformation lösen, die wir im Anhang C.3 dargestellt haben. Wir stellen $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ durch seine Fourier-Transformierte dar. Da $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ eine Funktion von $\mathbf{r} \cong (x_1, x_2, x_3)$ und der Zeit t ist, müssen wir die Fourier-Transformation nach insgesamt 4 Variablen durchführen. Die übliche Schreibweise dafür ist

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int d^3k \int d\omega \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}. \quad (9.38)$$

Hier sind $\mathbf{k} \cong (k_1, k_2, k_3)$ die zum Ort \mathbf{r} konjugierten Fourier-Variablen und ω die zur Zeit konjugierte Fourier-Variable. Integriert wird über alle k_1, k_2, k_3, ω jeweils in den Grenzen von $-\infty$ bis $+\infty$. Das soll im Folgenden für alle Integrale vereinbart sein, die keine anderen Integrationsgrenzen tragen. Wir erkennen an der Form von (9.38) auch bereits, dass die physikalische Bedeutung von \mathbf{k} und ω die des Wellenzahl-Vektors und der Frequenz sein wird.

Um sicher zu stellen, dass das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ reell ist, könnten wir wie oben verfahren und nur den Realteil von $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ in (9.38) als physikalisch relevant auswerten. Im Fall der Fourier-Transformation gibt es noch eine andere Möglichkeit, die wir hier verwenden. Wir berechnen das konjugiert Komplexe $\mathbf{E}^*(\mathbf{r}, t)$ von $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ in (9.38) und fordern, dass $\mathbf{E}^*(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^*(\mathbf{r}, t) &= \int d^3k \int d\omega \tilde{\mathbf{E}}^*(\mathbf{k}, \omega) e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \\ &= \int d^3k \int d\omega \tilde{\mathbf{E}}^*(-\mathbf{k}, -\omega) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}. \end{aligned} \quad (9.39)$$

Hier haben wir im zweiten Schritt die Substitution $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$ und $\omega \rightarrow -\omega$ ausgeführt. Dabei vertauschen in jedem Integral die Integrations-Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ und die Integrations-Differentiale ändern ihr Vorzeichen. Beides kompensiert sich gegenseitig. Wenn wir nun fordern, dass der Ausdruck in der letzten Zeile von

(9.39) identisch mit der rechten Seite von (9.38) sein soll, so folgt offensichtlich als Realitäts-Bedingung für $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, dass

$$\tilde{\mathbf{E}}^*(-\mathbf{k}, -\omega) = \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega) \quad \text{bzw.} \quad \tilde{\mathbf{E}}^*(\mathbf{k}, \omega) = \tilde{\mathbf{E}}(-\mathbf{k}, -\omega), \quad (9.40)$$

z.B. durch Umkehrung der Fourier-Transformation.

Wir setzen nun die Fourier-Transformation (9.38) in die Wellengleichung (9.37) ein. Die in \square enthaltenen Ableitungen nach dem Ort und nach der Zeit können wir mit der Integration über \mathbf{k} und ω vertauschen:

$$\begin{aligned} \square \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \int d^3 k \int d\omega \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega) \square e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \\ &= \int d^3 k \int d\omega \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega) \left(-\mathbf{k}^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} = 0. \end{aligned} \quad (9.41)$$

Hier haben wir die folgenden Schritte ausgeführt:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = i\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad (9.42)$$

$$\Delta e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \right) = (i\mathbf{k})^2 e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = -\mathbf{k}^2 e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}. \quad (9.43)$$

(In der zweiten Zeile haben wir die Produkt-Regel (E.6) aus dem Anhang E verwendet.) In der zweiten Zeile von (9.41) steht die Fourier-Darstellung einer Funktion, die identisch verschwinden soll. Das ist nur möglich, wenn die entsprechende Fourier-Transformierte ebenfalls identisch verschwindet:

$$\left(-\mathbf{k}^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega) = 0 \quad \text{bzw.} \quad (\omega^2 - c^2 \mathbf{k}^2) \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega) = 0. \quad (9.44)$$

Es muss also $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega) = 0$ sein, wenn nicht $\omega^2 - c^2 \mathbf{k}^2 = 0$, d.h., wenn nicht $\omega = \pm c k$. ($k := |\mathbf{k}|$). Der allgemeinste Ausdruck für diesen Zusammenhang ist offensichtlich

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega) = \tilde{\mathbf{E}}_1(\mathbf{k}) \delta(\omega - c k) + \tilde{\mathbf{E}}_2(\mathbf{k}) \delta(\omega + c k). \quad (9.45)$$

Einsetzen dieses Ausdrucks in die Fourier-Darstellung (9.38) führt dazu, dass die ω -Integration nur Beiträge für $\omega = \pm c k$ liefert. Damit erhalten wir als allgemeine Lösung der Wellengleichung (9.27) den Ausdruck

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int d^3 k \left(\tilde{\mathbf{E}}_1(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - c k t)} + \tilde{\mathbf{E}}_2(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + c k t)} \right), \quad (9.46)$$

worin $\tilde{\mathbf{E}}_{1,2}(\mathbf{k}) = \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \pm c k)$. Damit übersetzt sich die Realitäts-Bedingung (9.40) in

$$\tilde{\mathbf{E}}_1^*(\mathbf{k}) = \tilde{\mathbf{E}}_2(-\mathbf{k}) \quad \text{bzw.} \quad \tilde{\mathbf{E}}_2^*(\mathbf{k}) = \tilde{\mathbf{E}}_1(-\mathbf{k}). \quad (9.47)$$

Diese Relation erhält man auch, wenn man in der Darstellung (9.46) nach dem früheren Muster erneut fordert, dass $\mathbf{E}^*(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$.

Man muss die allgemeine Fourier-Darstellung (9.38) für ein Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und die Darstellung (9.46) für die Lösung der Wellengleichung (9.37) begrifflich unterscheiden. Nur die erstere ist eine Fourier-Transformation, in ihr wird konsequenterweise über \mathbf{k} und ω integriert. Die Darstellung der Lösung in (9.46) enthält nur noch eine \mathbf{k} -Integration und kann schon deshalb keine allgemeine Fourier-Darstellung mehr sein.

Unter Verwendung der Realitäts-Bedingung (9.47) kann man (9.46) in verschiedener Weise umformen, z.B.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \int d^3 k \left(\tilde{\mathbf{E}}_1(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - c k t)} + \tilde{\mathbf{E}}_1^*(-\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + c k t)} \right) \\ &= \int d^3 k \left(\tilde{\mathbf{E}}_1(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - c k t)} + \tilde{\mathbf{E}}_1^*(\mathbf{k}) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - c k t)} \right). \end{aligned} \quad (9.48)$$

Im zweiten Schritt haben wir im zweiten Teil des Integrals $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$ substituiert. Hier ist nun direkt ablesbar, dass $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ reell ist. Die hier vorgestellten Überlegungen für das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ lassen sich sinngemäß auf alle Felder übertragen, die die Wellengleichungen erfüllen, also z.B. auf $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, aber auch auf die Potentiale $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ und $\Phi(\mathbf{r}, t)$.

9.3 Wellenpakete, Phasen- und Gruppen-Geschwindigkeit

Die folgenden Überlegungen führen wir zunächst mit Wellen durch, die nur von einer Koordinaten-Richtung, z.B. nur von $x_3 =: z$ abhängen. Die Verallgemeinerung auf beliebige \mathbf{r} -Abhängigkeiten wird sich als sehr einfach herausstellen. Es sei $u(z, t)$ eine Komponente der Felder \mathbf{E}, \mathbf{B} . Aus der Erfüllung der Wellengleichung $\square u = 0$ folgt, dass $u(z, t)$ sich gemäß (9.46) wie folgt darstellen lässt:

$$u(z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk \left(\tilde{u}(k) e^{i(kz - \omega(k)t)} + \tilde{u}^*(k) e^{-i(kz - \omega(k)t)} \right). \quad (9.49)$$

Hierin bedeutet $\omega(k) = ck$ für elektromagnetische Wellen. Einige der folgenden Schlussfolgerungen schließen aber auch andere Wellen mit einer anderen *Dispersion* $\omega(k)$ ein, so dass wir bei der allgemeineren Schreibweise bleiben wollen. Wir betrachten nun eine Überlagerung der Art (9.49) unter der Annahme, dass die auftretenden Wellenzahlen k aus einem *Band*, d.h., aus einem begrenzten Bereich in der Nähe einer Wellenzahl k_0 stammen. Wir wählen deshalb als Amplituden-Funktion $\tilde{u}(k)$ eine *Gauß-Glocke*

$$\tilde{u}(k) = \frac{u_0}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{(k - k_0)^2}{2\sigma^2} \right]. \quad (9.50)$$

Diese Gauß-Glocke besitzt ihr Maximum bei $k = k_0$ und eine Breite $k_0 \pm \sigma$, definiert durch ihre Wendepunkte. Die Normierung haben wir so gewählt, dass

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk \tilde{u}(k) = u_0, \quad (9.51)$$

wie sich sofort durch elementare Integration bestätigen lässt. Das bedeutet zugleich, dass

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \tilde{u}(k) = u_0 \delta(k - k_0), \quad (9.52)$$

vgl. auch C.1. Wir setzen (9.50) in (9.49) ein und berechnen $u(z, t)$. Mit der Substitution $\kappa = (k - k_0)/\sigma$ erhalten wir für den ersten Teil des k -Integrals

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{+\infty} dk \tilde{u}(k) e^{i(kz - \omega(k)t)} = \\
&= \frac{u_0}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \exp \left[-\frac{(k - k_0)^2}{2\sigma^2} + i(kz - \omega(k)t) \right] \\
&= \frac{u_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\kappa \exp \left[-\frac{\kappa^2}{2} + i(k_0 + \sigma\kappa)z - i\omega(k_0 + \sigma\kappa)t \right]. \quad (9.53)
\end{aligned}$$

Dieses Integral lässt sich ohne Kenntnis der Funktion $\omega(k)$ nicht weiter auswerten. Wenn jedoch die Breite σ der Gauß-Glocke (9.50) hinreichend klein ist, können wir $\omega(k_0 + \sigma\kappa)$ nach $\sigma\kappa$ entwickeln und nach dem Term 1. Ordnung abbrechen:

$$\omega(k_0 + \sigma\kappa) \approx \omega(k_0) + v\sigma\kappa, \quad v = \left(\frac{d\omega(k)}{dk} \right)_{k=k_0}. \quad (9.54)$$

Für elektromagnetische Wellen ist $\omega(k)$ linear, $\omega(k) = ck$, so dass (9.54) *exakt* wird. Wir setzen (9.54) in (9.53) ein und erhalten

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{+\infty} dk \tilde{u}(k) e^{i(kz - \omega(k)t)} = \\
&= \frac{u_0}{\sqrt{2\pi}} e^{i(k_0z - \omega(k_0)t)} \int_{-\infty}^{+\infty} d\kappa \exp \left[-\frac{\kappa^2}{2} + i\sigma(z - vt)\kappa \right] \\
&= u_0 e^{i(k_0z - \omega(k_0)t)} \exp \left[-\frac{\sigma^2}{2} (z - vt)^2 \right]. \quad (9.55)
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir die nunmehr elementare κ -Integration ausgeführt. Der zweite Teil des k -Integrals in (9.49) liefert das konjugiert Komplexe von (9.55). Das Endergebnis lautet also

$$u(z, t) = 2u_0 \cos [k_0z - \omega(k_0)t] \exp \left[-\frac{\sigma^2}{2} (z - vt)^2 \right]. \quad (9.56)$$

Dieses Ergebnis ist in der Abbildung 9.1 als Moment-Aufnahme, d.h. für eine feste Zeit t als Funktion von z dargestellt. Eine Welle

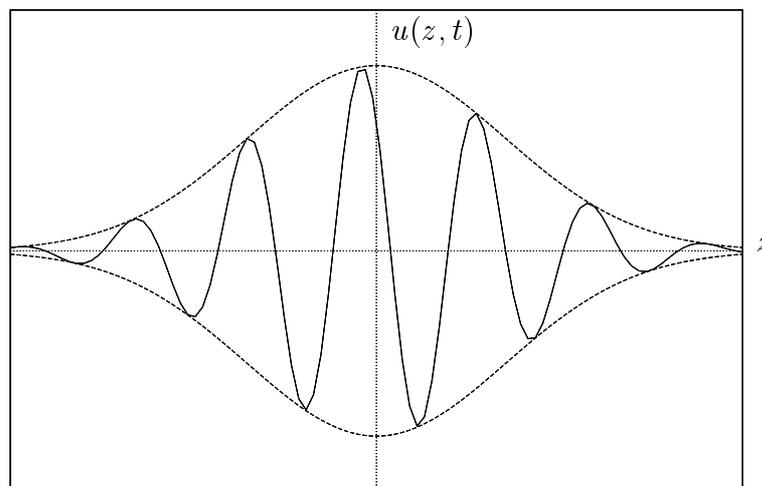


Abbildung 9.1: Wellenpaket

$$\sim \cos [k_0 z - \omega(k_0) t] = \cos \left[k_0 \left(z - \frac{\omega(k_0)}{k_0} t \right) \right]$$

bewegt sich mit der *Phasen-Geschwindigkeit* $v_0 = \omega(k_0)/k_0$ in z -Richtung. Sie wird begrenzt durch den z -abhängigen Amplituden-Faktor

$$\pm \exp \left[-\frac{\sigma^2}{2} (z - v t)^2 \right]$$

der Breite $1/\sigma$, der sich mit der *Gruppen-Geschwindigkeit* v , definiert in (9.54) in z -Richtung bewegt. Dieser Amplituden-Faktor formt das *Wellen-Paket*. Im Allgemeinen sind Phasen- und Gruppen-Geschwindigkeit verschieden. Die Welle $\sim \cos(\dots)$ "gleitet" durch das Paket hindurch. Im Fall elektromagnetischer Wellen sind Phasen- und Gruppengeschwindigkeit gleich, nämlich (für ein beliebiges k statt k_0)

Phasen-Geschwindigkeit:	$v_0 = \frac{\omega(k)}{k} = c,$	(9.57)
Gruppen-Geschwindigkeit:	$v = \frac{d\omega(k)}{dk} = c.$	

In der Abbildung 9.1 erscheint die Welle $\sim \cos(\dots)$ mit dem Amplituden-Faktor starr verbunden, und beide bewegen sich mit der Geschwindigkeit c in z -Richtung.

Wir können diese Überlegungen sogleich verallgemeinern und schreiben statt (9.49)

$$u(\mathbf{r}, t) = \int d^3k \tilde{u}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega(\mathbf{k})t)}. \quad (9.58)$$

Wir wählen die komplexe Schreibweise und bilden am Schluss der Rechnung den Realteil, um das physikalisch reale Feld zu erhalten. Es sei $\tilde{u}(\mathbf{k}) = f(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)$ eine Funktion, die nur für $|\mathbf{k} - \mathbf{k}_0| \leq \sigma$ wesentlich von Null verschiedene Werte annimmt. Wir entwickeln $\omega(\mathbf{k})$ bei $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$ in eine Taylor-Reihe nach $\mathbf{k} - \mathbf{k}_0$ und nehmen an, dass wir die Entwicklung für hinreichend kleines σ nach dem linearen Term abbrechen können:

$$\omega(\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{k}_0) + (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \cdot \mathbf{v} + \dots, \quad \mathbf{v} = \left. \left(\frac{\partial \omega(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}} \right) \right|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_0}. \quad (9.59)$$

Einsetzen in (9.58) ergibt

$$u(\mathbf{r}, t) = e^{i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega(\mathbf{k}_0)t)} \int d^3k f(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{v}t)}. \quad (9.60)$$

Wenn wir die Phase im Wellen-Faktor vor dem Integral in der Form

$$\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega(\mathbf{k}_0)t = \mathbf{k}_0 \cdot \left[\mathbf{r} - \frac{\mathbf{k}_0}{|\mathbf{k}_0|} \frac{\omega(\mathbf{k}_0)}{|\mathbf{k}_0|} t \right]$$

umschreiben, erkennen wir darin eine Welle mit dem Wellenzahl-Vektor \mathbf{k}_0 und der Frequenz $\omega(\mathbf{k}_0)$, die mit der Phasen-Geschwindigkeit $\omega(\mathbf{k}_0)/|\mathbf{k}_0|$ in der Richtung $\mathbf{n} = \mathbf{k}_0/|\mathbf{k}_0|$ fortschreitet. Dagegen beschreibt das k -Integral in (9.60) offensichtlich den Amplituden-Faktor, der mit der Gruppen-Geschwindigkeit $\mathbf{v} = \partial \omega(\mathbf{k})/\partial \mathbf{k}$ (hier für $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$) fortschreitet.

Wir wählen $f(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit als reell, weil ein Imaginärteil nur zu einer zusätzlichen Phase der Welle führen würde. Weiterhin wählen zur Vereinfachung $f(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)$ symmetrisch, also $f(-\mathbf{k} + \mathbf{k}_0) = f(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)$. Dann wird

$$\int d^3k f(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)} = \int d^3k f(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \cos [(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)],$$

und der Realteil von $u(\mathbf{r}, t)$ in (9.60) liefert

$$\operatorname{Re} u(\mathbf{r}, t) = \cos [\mathbf{k}_0 \mathbf{r} - \omega(\mathbf{k}_0) t] \int d^3k f(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \cos [(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)]. \quad (9.61)$$

9.4 Modenzerlegung freier Felder

In 9.2.2 hatten wir bereits gezeigt, wie sich die allgemeinen Lösungen der Wellengleichungen $\square \mathbf{E} = 0$ und $\square \mathbf{B} = 0$ durch Überlagerung monochromatischer ebener Wellen darstellen lassen. Dabei hatten wir vorausgesetzt, dass für die Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} keine Randbedingungen im Endlichen zu erfüllen sind. In diesem Abschnitt soll die Lösung der *freien* Maxwell'schen Gleichungen (9.1) und (9.2), d.h., für $\rho(\mathbf{r}, t) = 0$ und $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0$, durch Überlagerung von monochromatischen Wellen bzw. durch *Zerlegung* nach solchen Wellen noch einmal unter besonderer Berücksichtigung der Randbedingungen formuliert werden. Dabei werden wir zu Ergebnissen kommen, die uns den Übergang in die Quantentheorie freier elektromagnetischer Felder aufzeigen.

9.4.1 Eichung

In 7.4.1 haben wir gezeigt, dass sich die Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} als Folge der beiden homogenen Maxwell'schen Gleichungen durch Potentiale Φ und \mathbf{A} darstellen lassen:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} - \operatorname{grad} \Phi, \quad \mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (9.62)$$

Wir zeigen jetzt, dass sich die Potentiale unter Benutzung von verschwindender Ladungs- und Flussdichte $\rho = 0$ und $\mathbf{j} = 0$ so wählen lassen, dass

$$\Phi = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \quad (9.63)$$

Seien Φ und \mathbf{A} zunächst beliebig gewählte Potentiale für \mathbf{E} und \mathbf{B} . Wir führen eine erste Umeichung

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} F_1, \quad \Phi' = \Phi - \frac{\partial}{\partial t} F_1 \quad (9.64)$$

gemäß 7.4.1 durch und wählen $F_1 = F_1(\mathbf{r}, t)$ so, dass

$$\frac{\partial}{\partial t} F_1 = \Phi, \quad \implies \quad \Phi' = 0, \quad \implies \quad \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}'. \quad (9.65)$$

Da für $\rho = 0$ die Divergenz von \mathbf{E} verschwindet, folgt auch, dass

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}' = -\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{A}' = 0, \quad (9.66)$$

d.h., dass die Divergenz $\partial \mathbf{A}' / \partial \mathbf{r}$ von \mathbf{A} unabhängig von der Zeit t ist. In einer zweiten Umeichung

$$\mathbf{A}'' = \mathbf{A}' + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} F_2, \quad \Phi'' = -\frac{\partial}{\partial t} F_2 \quad (9.67)$$

(mit $\Phi' = 0$) wollen wir fordern, dass

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{A}'' = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{A}' + \Delta F_2 = 0 \quad (9.68)$$

wird. Wir denken uns diese Gleichung für $F_2 = F_2(\mathbf{r}, t)$ gelöst. Da jedoch nach Voraussetzung $\partial \mathbf{A}' / \partial \mathbf{r}$ unabhängig von der Zeit t ist, lässt sich auch immer eine Lösung F_2 finden, die unabhängig von der Zeit t ist: $F_2 = F_2(\mathbf{r})$. Dann folgt aber aus (9.67), dass auch $\Phi'' = 0$. Damit haben wir (9.63) erfüllt. Im Folgenden schreiben wir wieder Φ , \mathbf{A} statt Φ'' , \mathbf{A}'' und

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} \quad \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{A}. \quad (9.69)$$

Wir setzen diese Darstellung in die Maxwellsche Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} = 0 \quad (9.70)$$

(für $\mathbf{j} = 0$) ein,

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{A} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A} = 0,$$

und benutzen auf der linken Seite die Umformung

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{A} \right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{A} \right) - \Delta \mathbf{A},$$

vgl. E.3. Da $\partial \mathbf{A} / \partial \mathbf{r} = 0$, folgt für \mathbf{A} die Wellengleichung

$$\square \mathbf{A} = \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A} = 0. \quad (9.71)$$

Dieser Nachweis war deshalb erforderlich, weil die Wellengleichung für \mathbf{A} in 7.4.2 unter Verwendung der Lorentz-Eichung hergeleitet worden war. Wir haben gezeigt, dass sie im Fall freier Felder ($\rho = 0$ und $\mathbf{j} = 0$) auch für die hier verwendete Eichung gilt.

9.4.2 Lösungen der Wellengleichung und Randbedingungen

Zur Lösung der Wellengleichung (9.71) machen wir den Ansatz

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}_k(t) e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (9.72)$$

und erhalten die Differential-Gleichung

$$\begin{aligned} \left(-\mathbf{k}^2 \mathbf{A}_k(t) - \frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{A}}_k(t) \right) e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} &= 0, \\ \ddot{\mathbf{A}}_k(t) + \omega_k^2 \mathbf{A}_k(t) &= 0, \end{aligned} \quad (9.73)$$

vgl. auch (9.42) und (9.43). Hier bedeutet $\ddot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}}(t)$ die zweite Ableitung nach der Zeit und $\omega_{\mathbf{k}} = c |\mathbf{k}|$. Die Auswahl der Wellenzahl-Vektoren \mathbf{k} hängt von den gewählten Randbedingungen ab. Diese wählen wir so, dass \mathbf{A} und damit die Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} in einem quaderförmigen Volumen mit den Kantenlängen L_1, L_2, L_3 eingeschlossen sind und an den Wänden dieses Volumens *zyklisch fortgesetzt* werden:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}(x_1 + L_1, x_2, x_3, t) &= \mathbf{A}(x_1, x_2, x_3, t), \\ \mathbf{A}(x_1, x_2 + L_2, x_3, t) &= \mathbf{A}(x_1, x_2, x_3, t), \\ \mathbf{A}(x_1, x_2, x_3 + L_3, t) &= \mathbf{A}(x_1, x_2, x_3, t). \end{aligned} \right\} \quad (9.74)$$

Aus diesen Randbedingungen lässt sich formal durch $L_1 \rightarrow \infty$ und ebenso für L_2, L_3 der früher betrachtete Fall zurückgewinnen, dass im Endlichen keine Randbedingungen zu erfüllen sind. Die zyklischen Randbedingungen erlauben die Verwendung von laufenden Wellen $\sim \exp(i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ statt stehender Wellen, wie sie z.B. für Randbedingungen vom Typ $A(L_1, x_2, x_3, t) = 0$ usw. auftreten würden. Je größer das Volumen $V = L_1 L_2 L_3$ ist, einen desto geringeren Einfluss werden die Randbedingungen auf die physikalischen Eigenschaften des betrachteten Systems haben.

Setzen wir die zyklischen Randbedingungen in den Ansatz (9.72) ein, so erhalten wir die Bedingungen

$$e^{i k_1 L_1} = 1, \quad \implies \quad k_1 L_1 = 2 \pi n_1, \quad n_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

und analog für k_2, k_3 , insgesamt also

$$k_\alpha = \frac{2 \pi}{L_\alpha} n_\alpha, \quad n_\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (9.75)$$

Hierin soll keine Summations-Konvention gelten. (Die k_α sind die Komponenten des Wellenzahl-Vektors \mathbf{k} .) (9.75) besagt, dass die erlaubten Werte des Wellenzahl-Vektors \mathbf{k} auf einem Gitter, dem sogenannten *reziproken Gitter* mit den Gitter-Abständen $2 \pi / L_1, 2 \pi / L_2, 2 \pi / L_3$ liegen. Wegen der Linearität der Wellengleichung lässt sich deren allgemeine Lösung nun wieder durch Überlagerung von Lösungen mit dem Ansatz (9.72) gewinnen:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t) e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (9.76)$$

Wie in 9.2.2 erfüllen wir die Forderung, dass $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ real sein muss, durch $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}^*(t) = \mathbf{A}_{-\mathbf{k}}(t)$. Die Bedingung $\partial\mathbf{A}/\partial\mathbf{r} = 0$ für die hier gewählte Eichung führt auf

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = 0, \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{k} \mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t) = 0. \quad (9.77)$$

9.4.3 Die Feldenergie

Wir benutzen die obige Zerlegung in "Moden" monochromatischer ebener Wellen zur Darstellung der Feldenergie

$$W = \int d^3r \left(\frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \right), \quad (9.78)$$

vgl. 8.2.1. Es ist gemäß (9.69) und (9.72)

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} = \sum_{\mathbf{k}} \dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad \mathbf{E}^* = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}^* = \sum_{\mathbf{k}} \dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}}^*(t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \quad (9.79)$$

\mathbf{E} muss reell sein, $\mathbf{E}^* = \mathbf{E}$. Das ist dadurch garantiert, dass \mathbf{A} reell ist bzw. durch die obige Forderung $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}^*(t) = \mathbf{A}_{-\mathbf{k}}(t)$, die sich auf die Zeitableitungen $\dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}}^*(t) = \dot{\mathbf{A}}_{-\mathbf{k}}(t)$ überträgt. Weil \mathbf{E} reell ist, können wir $\mathbf{E}^2 = \mathbf{E} \mathbf{E}^*$ schreiben und erhalten durch Einsetzen von (9.79)

$$\int d^3r \mathbf{E}^2 = \int d^3r \mathbf{E} \mathbf{E}^* = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k}'} \dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} \dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}'}^* \int d^3r e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}}. \quad (9.80)$$

(Zur Vereinfachung der Schreibweise lassen wir die Argumente \mathbf{r}, t fort.) Es ist nun

$$\int d^3r e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} = V \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} = \begin{cases} V, & \text{wenn } \mathbf{k} = \mathbf{k}' \\ 0, & \text{wenn } \mathbf{k} \neq \mathbf{k}'. \end{cases} \quad (9.81)$$

Für $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$ ist (9.81) ganz offensichtlich richtig. Für $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}'$, z.B. $k_1 \neq k'_1$ enthält die linke Seite von (9.81) das Integral

$$\int_0^{L_1} dx_1 e^{i(k_1 - k'_1)x_1} = \frac{e^{i(k_1 - k'_1)L_1} - 1}{i(k_1 - k'_1)} = 0,$$

weil

$$(k_1 - k'_1)L_1 = 2\pi(n_1 - n'_1), \quad e^{i(k_1 - k'_1)L_1} = 1,$$

vgl. (9.75). Damit ist (9.81) nachgewiesen und aus (9.80) folgt

$$\int d^3r \mathbf{E}^2 = \int d^3r \mathbf{E} \mathbf{E}^* = V \sum_{\mathbf{k}} \dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} \dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}}^*. \quad (9.82)$$

Auf analoge Weise berechnen wir

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{A} = i \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \times \mathbf{A}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \\ \mathbf{B}^* &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{A}^* = -i \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \times \mathbf{A}_{\mathbf{k}}^* e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \\ \int d^3r \mathbf{B}^2 &= \int d^3r \mathbf{B} \mathbf{B}^* = V \sum_{\mathbf{k}} (\mathbf{k} \times \mathbf{A}_{\mathbf{k}}) (\mathbf{k} \times \mathbf{A}_{\mathbf{k}}^*). \end{aligned} \quad (9.83)$$

Eine weitere Umformung liefert

$$\begin{aligned} (\mathbf{k} \times \mathbf{A}_{\mathbf{k}}) (\mathbf{k} \times \mathbf{A}_{\mathbf{k}}^*) &= \mathbf{k} [\mathbf{A}_{\mathbf{k}}^* \times (\mathbf{k} \times \mathbf{A}_{\mathbf{k}})] \\ &= \mathbf{k} [(\mathbf{A}_{\mathbf{k}} \mathbf{A}_{\mathbf{k}}^*) \mathbf{k} - (\mathbf{k} \mathbf{A}_{\mathbf{k}}^*) \mathbf{A}_{\mathbf{k}}] = \mathbf{k}^2 \mathbf{A}_{\mathbf{k}} \mathbf{A}_{\mathbf{k}}^*, \end{aligned}$$

weil $\mathbf{k} \mathbf{A}_{\mathbf{k}}^* = 0$, vgl. (9.77). In dieser Umformung haben wir die zyklische Invarianz des Spatprodukts benutzt, $\mathbf{a} (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} (\mathbf{c} \times \mathbf{a})$, und die Beziehung $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$, vgl. E.1. Sie führt uns auf

$$\int d^3r \mathbf{B}^2 = V \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k}^2 \mathbf{A}_{\mathbf{k}} \mathbf{A}_{\mathbf{k}}^*. \quad (9.84)$$

Aus (9.82) und (9.84) bilden wir nun die gesamte Feldenergie W in (9.78). Dabei beachten wir, dass

$$\frac{\mathbf{k}^2}{2\mu_0} = \epsilon_0 \frac{\mathbf{k}^2}{2\epsilon_0\mu_0} = \frac{\epsilon_0}{2} c^2 \mathbf{k}^2 = \frac{\epsilon_0}{2} \omega_{\mathbf{k}}^2,$$

so dass

$$W = \int d^3r \left(\frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) = \frac{\epsilon_0}{2} V \sum_{\mathbf{k}} \left(\dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} \dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}}^* + \omega_{\mathbf{k}}^2 \mathbf{A}_{\mathbf{k}} \mathbf{A}_{\mathbf{k}}^* \right). \quad (9.85)$$

9.4.4 Transformation auf kanonische Koordinaten

Wir führen zwei Transformationen der Koordinaten $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}$ der Feldmoden hintereinander aus und werden dadurch eine *kanonische Formulierung* für freie Felder erhalten. Zunächst wollen wir die Bedingung $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}^*(t) = \mathbf{A}_{-\mathbf{k}}(t)$ für die Realität von $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ identisch erfüllen durch

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t) = \mathbf{a}_{\mathbf{k}}(t) + \mathbf{a}_{-\mathbf{k}}^*(t). \quad (9.86)$$

Damit sind die neuen Koordinaten $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}(t)$ noch nicht eindeutig definiert. Wir können deshalb noch fordern, dass die $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}(t)$ dieselbe Differential-Gleichung (9.73) wie die $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t)$ erfüllen, also

$$\ddot{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}}(t) + \omega_{\mathbf{k}}^2 \mathbf{a}_{\mathbf{k}}(t) = 0, \quad (9.87)$$

und zwar mit Lösungen vom Typ

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{\mathbf{k}}(t) &\sim e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t}, & \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*(t) &\sim e^{+i\omega_{\mathbf{k}} t}, \\ \implies \dot{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}}(t) &= -i\omega_{\mathbf{k}} \mathbf{a}_{\mathbf{k}}(t), & \dot{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}}^*(t) &= +i\omega_{\mathbf{k}} \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*(t). \end{aligned} \quad (9.88)$$

Dann folgt durch zeitliches Differenzieren von $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t)$ in (9.86)

$$\dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}}(t) = -i\omega_{\mathbf{k}} \left(\mathbf{a}_{\mathbf{k}}(t) - \mathbf{a}_{-\mathbf{k}}^*(t) \right), \quad (9.89)$$

wobei wir $\omega_{-\mathbf{k}} = \omega_{\mathbf{k}}$ verwendet haben. Die beiden Gleichungen (9.86) und (9.89) stellen die Transformation zwischen den alten Koordinaten $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}, \dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}}$ und den neuen Koordinaten $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}, \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*$ dar. Diese linearen Transformations-Gleichungen können wir umkehren, um daraus $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}$ und dann auch $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*$ zu berechnen:

$$\mathbf{a}_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{A}_{\mathbf{k}} + \frac{i}{\omega_{\mathbf{k}}} \dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} \right), \quad \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^* = \frac{1}{2} \left(\mathbf{A}_{\mathbf{k}}^* - \frac{i}{\omega_{\mathbf{k}}} \dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}}^* \right). \quad (9.90)$$

(Wir schreiben die Zeitabhängigkeit jetzt wieder nicht mehr mit.) Aus $\mathbf{k} \mathbf{A}_{\mathbf{k}} = 0$ folgt durch zeitliche Differentiation auch $\mathbf{k} \dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} = 0$, vgl. (9.77), und damit aus (9.90) auch

$$\mathbf{k} \mathbf{a}_{\mathbf{k}} = 0, \quad \mathbf{k} \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^* = 0. \quad (9.91)$$

Wir setzen die neuen Koordinaten in die Entwicklung von $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ in (9.76) ein und erhalten

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{\mathbf{k}} \left(\mathbf{a}_{\mathbf{k}} + \mathbf{a}_{-\mathbf{k}}^* \right) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \left(\mathbf{a}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + \mathbf{a}_{-\mathbf{k}}^* e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \right) \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \left(\mathbf{a}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^* e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \right). \end{aligned} \quad (9.92)$$

Im letzten Schritt haben wir die Summations-Variable $-\mathbf{k}$ statt \mathbf{k} substituiert. Wegen (9.88) ist

$$\mathbf{a}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \sim e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t)}, \quad \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^* e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \sim e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t)},$$

so dass $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ in (9.92) nach (laufenden) monochromatischen ebenen Wellen entwickelt wird.

Wir setzen die Transformationen ((9.86) und (9.89) auch in den Ausdruck (9.85) für die Feldenergie ein:

$$\begin{aligned}
W &= \frac{\epsilon_0}{2} V \sum_{\mathbf{k}} \left(\dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} \dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}}^* + \omega_{\mathbf{k}}^2 \mathbf{A}_{\mathbf{k}} \mathbf{A}_{\mathbf{k}}^* \right) \\
&= \frac{\epsilon_0}{2} V \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}}^2 \left[(\mathbf{a}_{\mathbf{k}} - \mathbf{a}_{-\mathbf{k}}^*) (\mathbf{a}_{\mathbf{k}}^* - \mathbf{a}_{-\mathbf{k}}) + (\mathbf{a}_{\mathbf{k}} + \mathbf{a}_{-\mathbf{k}}^*) (\mathbf{a}_{\mathbf{k}}^* + \mathbf{a}_{-\mathbf{k}}) \right] \\
&= \epsilon_0 V \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}}^2 (\mathbf{a}_{\mathbf{k}} \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^* + \mathbf{a}_{-\mathbf{k}} \mathbf{a}_{-\mathbf{k}}^*) \\
&= \epsilon_0 V \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}}^2 \mathbf{a}_{\mathbf{k}} \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*. \tag{9.93}
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir in der Summe wieder $-\mathbf{k}$ statt \mathbf{k} substituiert.

Die zweite Transformation führt Koordinaten $\mathbf{Q}_{\mathbf{k}}$ und $\mathbf{P}_{\mathbf{k}}$ ein, die wie folgt definiert sind:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_{\mathbf{k}} &= \sqrt{\epsilon_0 V} (\mathbf{a}_{\mathbf{k}} + \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*), \\
\mathbf{P}_{\mathbf{k}} &= \dot{\mathbf{Q}}_{\mathbf{k}} = \sqrt{\epsilon_0 V} (\dot{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}} + \dot{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}}^*) = -i\omega_{\mathbf{k}} \sqrt{\epsilon_0 V} (\mathbf{a}_{\mathbf{k}} - \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*), \tag{9.94}
\end{aligned}$$

worin wir im letzten Schritt (9.88) benutzt haben. Aus (9.94) ist sofort ablesbar, dass $\mathbf{Q}_{\mathbf{k}}$ und $\mathbf{P}_{\mathbf{k}}$ reell sind:

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{k}}^* = \mathbf{Q}_{\mathbf{k}}, \quad \mathbf{P}_{\mathbf{k}}^* = \mathbf{P}_{\mathbf{k}}. \tag{9.95}$$

Aus (9.91) folgt auch wieder, dass

$$\mathbf{k} \mathbf{Q}_{\mathbf{k}} = 0, \quad \mathbf{k} \mathbf{P}_{\mathbf{k}} = 0. \tag{9.96}$$

Schließlich folgt aus (9.94) bei nochmaliger Anwendung von (9.88), dass

$$\ddot{\mathbf{Q}}_{\mathbf{k}} = \dot{\mathbf{P}}_{\mathbf{k}} = -i\omega_{\mathbf{k}} \sqrt{\epsilon_0 V} (\dot{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}} - \dot{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}}^*) = -\omega_{\mathbf{k}}^2 \sqrt{\epsilon_0 V} (\mathbf{a}_{\mathbf{k}} + \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*) = -\omega_{\mathbf{k}}^2 \mathbf{Q}_{\mathbf{k}},$$

und ähnlich für $\mathbf{P}_{\mathbf{k}}$, also

$$\ddot{\mathbf{Q}}_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}}^2 \mathbf{Q}_{\mathbf{k}} = 0, \quad \ddot{\mathbf{P}}_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}}^2 \mathbf{P}_{\mathbf{k}} = 0. \tag{9.97}$$

Die Umkehrung der Transformation (9.94) ergibt

$$\mathbf{a}_k = \frac{1}{2\sqrt{\epsilon_0 V}} \left(\mathbf{Q}_k + \frac{i}{\omega_k} \dot{\mathbf{Q}}_k \right), \quad \mathbf{a}_k^* = \frac{1}{2\sqrt{\epsilon_0 V}} \left(\mathbf{Q}_k - \frac{i}{\omega_k} \dot{\mathbf{Q}}_k \right). \quad (9.98)$$

Daraus berechnen wir

$$\mathbf{a}_k \mathbf{a}_k^* = \frac{1}{4\epsilon_0 V} \left(\mathbf{Q}_k^2 + \frac{1}{\omega_k^2} \dot{\mathbf{P}}_k^2 \right),$$

was, eingesetzt in den Ausdruck (9.93) für die Feldenergie, zu

$$\boxed{H := W = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \left(\mathbf{P}_{\mathbf{k}}^2 + \omega_{\mathbf{k}}^2 \mathbf{Q}_{\mathbf{k}}^2 \right)}. \quad (9.99)$$

führt. Dieses $H := W$ lässt sich nun als *Hamilton-Funktion* im Sinne der kanonischen Theorie, die uns aus der analytischen Mechanik bekannt ist, deuten, wobei $\mathbf{Q}_{\mathbf{k}}$ und $\dot{\mathbf{Q}}_{\mathbf{k}}$ die kanonischen Variablen sind, denn es gilt ja

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{Q}}_{\mathbf{k}} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{P}_{\mathbf{k}}} H = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{P}_{\mathbf{k}}} \sum_{\mathbf{k}'} \left(\mathbf{P}_{\mathbf{k}'}^2 + \omega_{\mathbf{k}'}^2 \mathbf{Q}_{\mathbf{k}'}^2 \right) = \mathbf{P}_{\mathbf{k}}, \\ \dot{\mathbf{P}}_{\mathbf{k}} &= -\frac{\partial}{\partial \mathbf{Q}_{\mathbf{k}}} H = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{Q}_{\mathbf{k}}} \sum_{\mathbf{k}'} \left(\mathbf{P}_{\mathbf{k}'}^2 + \omega_{\mathbf{k}'}^2 \mathbf{Q}_{\mathbf{k}'}^2 \right) = -\omega_{\mathbf{k}}^2 \mathbf{Q}_{\mathbf{k}}, \end{aligned} \right\} \quad (9.100)$$

was, ineinander eingesetzt, wieder zu (9.97) führt.

Mit den beiden obigen Transformationen haben wir das freie elektromagnetische Feld ($\rho = 0$, $\mathbf{j} = 0$) als eine Summe bzw. eine Überlagerung aus unabhängigen harmonischen Oszillatoren dargestellt. Diese Oszillatoren, auch *Feld-Oszillatoren* oder *Moden* genannt, sind jeweils durch den Wellenzahl-Vektor \mathbf{k} charakterisiert. Hinzu kommt noch die Polarisierung, vgl. 9.2.1. Die kanonischen Bewegungs-Gleichungen (9.100) müssen dann offensichtlich äquivalent zu den beiden Maxwell'schen Gleichungen in (9.1) und (9.2) sein, die Zeitableitungen enthalten. Die anderen beiden Maxwell'schen Gleichungen, die die Quellenfreiheit der Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} aussagen, sind durch die Transversalitäts-Bedingung erfüllt, die hier durch (9.96), also $\mathbf{k} \mathbf{Q}_{\mathbf{k}} = 0$, $\mathbf{k} \mathbf{P}_{\mathbf{k}} = 0$, ausgedrückt wird.

Mit der Formulierung der kanonischen Theorie der freien Felder können wir unmittelbar zu deren *Quantenfeld-Theorie* übergehen. Wir benutzen dasselbe "Rezept" wie beim Übergang von der klassischen Mechanik zur Quantenmechanik: die kanonischen Variablen Q_k und P_k werden als *Operatoren* betrachtet, die durch die Kommutator-Relationen

$$[Q_k, P_{k'}] = i \hbar \delta_{k,k'}, \quad [Q_k, Q_{k'}] = 0, \quad [P_k, P_{k'}] = 0. \quad (9.101)$$

verknüpft sind. (Auch diese Kommutator-Relationen müssen noch um die "Quantenzahl" der Polarisation erweitert werden.)

Wir geben abschließend noch die Darstellung von $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ durch die Q_k und P_k an. Diese erhält man, wenn man die beiden obigen Transformationen ineinander einsetzt:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{2\sqrt{\epsilon_0 V}} \sum_{\mathbf{k}} \left[\left(Q_{\mathbf{k}} + \frac{i}{\omega_{\mathbf{k}}} P_{\mathbf{k}} \right) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + \left(Q_{\mathbf{k}} - \frac{i}{\omega_{\mathbf{k}}} P_{\mathbf{k}} \right) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 V}} \sum_{\mathbf{k}} \left[Q_{\mathbf{k}} \cos(\mathbf{k}\mathbf{r}) - \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}}} P_{\mathbf{k}} \sin(\mathbf{k}\mathbf{r}) \right], \end{aligned} \quad (9.102)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 V}} \sum_{\mathbf{k}} \left[\dot{Q}_{\mathbf{k}} \cos(\mathbf{k}\mathbf{r}) - \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}}} \dot{P}_{\mathbf{k}} \sin(\mathbf{k}\mathbf{r}) \right] \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 V}} \sum_{\mathbf{k}} [P_{\mathbf{k}} \cos(\mathbf{k}\mathbf{r}) + \omega_{\mathbf{k}} Q_{\mathbf{k}} \sin(\mathbf{k}\mathbf{r})], \end{aligned} \quad (9.103)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 V}} \sum_{\mathbf{k}} \left[\mathbf{k} \times Q_{\mathbf{k}} \sin(\mathbf{k}\mathbf{r}) + \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}}} \mathbf{k} \times P_{\mathbf{k}} \cos(\mathbf{k}\mathbf{r}) \right]. \end{aligned} \quad (9.104)$$

Kapitel 10

Die inhomogene Wellengleichung, Ausstrahlung

Im vorhergehenden Kapitel 9 haben wir Lösungen der Wellengleichung für freie elektromagnetische Felder, d.h. für $\rho = 0$ und $\mathbf{j} = 0$ diskutiert. Diese Wellengleichung war von der Form $\square u = 0$, worin $u = u(\mathbf{r}, t)$ für die Komponenten der Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} , aber auch für das skalare Potential Φ oder für die Komponenten des Vektorpotentials \mathbf{A} stehen kann. In diesem Kapitel wenden wir uns der Wellengleichung für den allgemeinen Fall $\rho \neq 0$ bzw. $\mathbf{j} \neq 0$ zu. Wie wir in 7.4.2 gezeigt haben, lautet sie für die Potentiale

$$\boxed{\square \Phi(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}, t), \quad \square \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t).} \quad (10.1)$$

Daraus sind die Felder gemäß

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \Phi(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t). \quad (10.2)$$

zu berechnen.

10.1 Lösung der inhomogenen Wellengleichung

10.1.1 Die Greensche Funktion

Wir schreiben die inhomogene Wellengleichung in der Form

$$\square u(\mathbf{r}, t) = -f(\mathbf{r}, t), \quad \square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad (10.3)$$

worin $u(\mathbf{r}, t)$ entweder das Potential Φ oder eine der Komponenten des Vektorpotentials \mathbf{A} und $f(\mathbf{r}, t)$ die jeweilige rechte Seite der entsprechenden Wellengleichungen ist. Wir nehmen an, dass die Felder den gesamten Raum erfüllen können, so dass wir als Randbedingung nur deren Verschwinden im Unendlichen fordern: $u(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0$ für $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$. Zur Lösung von (10.3) stellen wir $u(\mathbf{r}, t)$ und $f(\mathbf{r}, t)$ durch ihre Fourier-Transformierten dar:

$$\left. \begin{array}{l} u(\mathbf{r}, t) \\ f(\mathbf{r}, t) \end{array} \right\} = \int d^3k \int d\omega e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \left\{ \begin{array}{l} \tilde{u}(\mathbf{k}, \omega) \\ \tilde{f}(\mathbf{k}, \omega) \end{array} \right\}, \quad (10.4)$$

vgl. 9.2.2. Später werden wir auch deren Umkehrungen benötigen:

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{u}(\mathbf{k}, \omega) \\ \tilde{f}(\mathbf{k}, \omega) \end{array} \right\} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3r \int dt e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \left\{ \begin{array}{l} u(\mathbf{r}, t) \\ f(\mathbf{r}, t) \end{array} \right\}. \quad (10.5)$$

Wir setzen die Transformationen (10.4) in die Wellengleichung (10.3) ein. Unter Beachtung von

$$\square e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = - \left(\mathbf{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

erhalten wir

$$\int d^3k \int d\omega \left[\left(\mathbf{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \tilde{u}(\mathbf{k}, \omega) - \tilde{f}(\mathbf{k}, \omega) \right] e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = 0.$$

Hieraus folgt

$$\left(\mathbf{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \tilde{u}(\mathbf{k}, \omega) - \tilde{f}(\mathbf{k}, \omega) = 0, \quad \tilde{u}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\tilde{f}(\mathbf{k}, \omega)}{\mathbf{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}. \quad (10.6)$$

Wir setzen dieses Ergebnis in die Fourier-Transformation (10.4) für u ein und ersetzen $f(\mathbf{k}, \omega)$ durch die Umkehr-Transformation (10.5) mit \mathbf{r}', t' als Integrations-Variablen, weil \mathbf{r}, t schon auf der linken Seite als Variablen in $u(\mathbf{r}, t)$ auftreten:

$$u(\mathbf{r}, t) = \int d^3k \int d\omega \frac{e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}}{\mathbf{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3r' \int dt' e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}' - \omega t')} f(\mathbf{r}', t').$$

Hierin vertauschen wir die Integration über \mathbf{k}, ω mit denen über \mathbf{r}', t' . Das Ergebnis können wir in der Form

$$u(\mathbf{r}, t) = \int d^3r' \int dt' G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') f(\mathbf{r}', t'), \quad (10.7)$$

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k \int d\omega \frac{e^{i[\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \omega(t - t')]}{\mathbf{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}. \quad (10.8)$$

schreiben. Die Art der Darstellung der Lösung $u(\mathbf{r}, t)$ der Wellengleichung in (10.7) ist uns bereits aus 4.4 bekannt. Dort war ein elektrostatisches Problem $\Delta u(\mathbf{r}) = -f(\mathbf{r})$ mit $u(\mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{r}) =$ elektrostatisches Potential und $f(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})/\epsilon_0$ zu lösen. Die Lösung konnte durch die *Greensche Funktion* $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ dargestellt werden:

$$\Delta u(\mathbf{r}) = -f(\mathbf{r}), \quad u(\mathbf{r}) = \int d^3r' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f(\mathbf{r}'), \quad G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Hier haben wir den vereinfachten Fall aufgeschrieben, dass im Endlichen keine Randbedingung zu erfüllen ist. Dann wird das Problem offensichtlich translations-invariant: $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$. Eine andere Ausdrucksweise war, dass die Greensche Funktion die Gleichung

$$\Delta G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

löst, so dass die Lösung $u(\mathbf{r})$ der Gleichung $\Delta u(\mathbf{r}) = -f(\mathbf{r})$ wegen deren Linearität durch Überlagerung angegeben werden konnte.

Nach dieser Analogie haben wir $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')$ in (10.8) als Greensche Funktion der Wellengleichung $\square u(\mathbf{r}, t) = -f(\mathbf{r}, t)$ zu interpretieren. Um die Analogie vollständig zu machen, berechnen wir $\square G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')$:

$$\begin{aligned} \square G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3 k \int d\omega \frac{\square e^{i[\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')-\omega(t-t')]} }{\mathbf{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3 k \int d\omega e^{i[\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')-\omega(t-t')]} \\ &= \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t'), \end{aligned} \quad (10.9)$$

vgl. C.3.

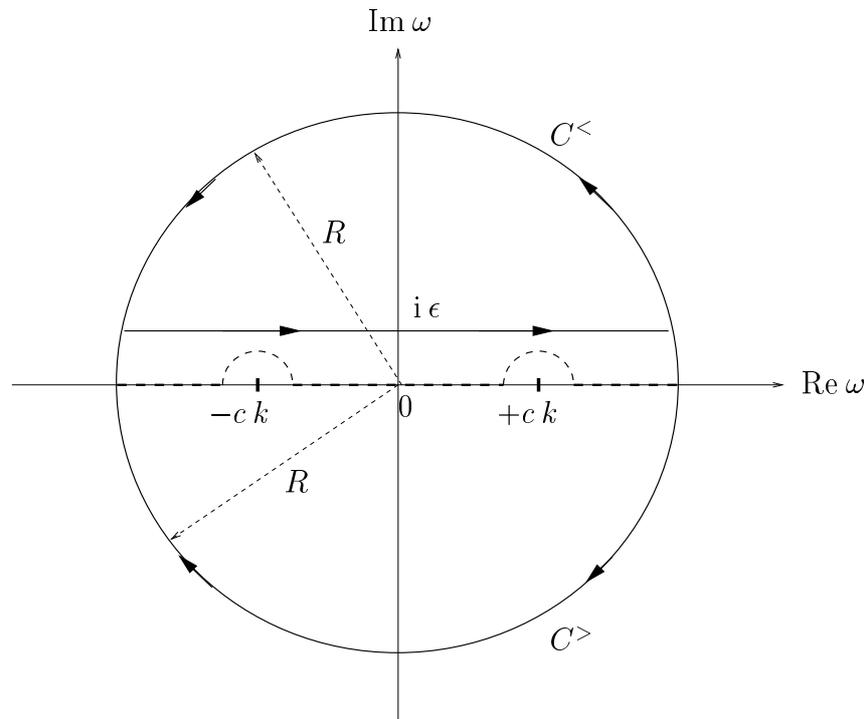
10.1.2 Die Berechnung der Greenschen Funktion

Die Integrationen über $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$ und ω in der Darstellung der Greenschen Funktion in (10.8) sind jeweils von $-\infty$ bis $+\infty$ auszuführen:

$$\int d^3 k \int d\omega \dots = \int_{-\infty}^{+\infty} dk_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dk_2 \int_{-\infty}^{+\infty} dk_3 \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \dots$$

Im Nenner des Integranden in (10.8) treten jedoch bei $\omega^2 = c^2 \mathbf{k}^2$ bzw. $\omega = \pm c |\mathbf{k}|$ Nullstellen auf, so dass die Integrationen ein divergierendes Ergebnis liefern. Es gibt nun Möglichkeiten, diese Divergenzen zu vermeiden. Man kann versuchen, die divergierenden Integrale als Hauptwert-Integrale zu definieren oder den Integrationsweg in der komplexen ω -Ebene in bestimmter Weise beliebig eng an den beiden Singularitäten vorbeizuführen. Die obige Herleitung des Ausdrucks (10.8) für die Greensche Funktion ist offensichtlich unabhängig von solchen Interpretationen. Welche der in Frage kommenden Interpretationen gewählt wird, muss allerdings durch physikalische Argumente entschieden werden. Wir zeigen im Folgenden, dass die Interpretation von (10.8) als

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3 k \int_{-\infty+i\epsilon}^{+\infty+i\epsilon} d\omega \frac{e^{i[\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')-\omega(t-t')]} }{\mathbf{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}, \quad \epsilon > 0, \quad (10.10)$$

Abbildung 10.1: Integrationsweg in der komplexen ω -Ebene

zu einem physikalisch realistischen, nämlich *kausalen* Ergebnis führt. Die Integrations-Grenzen im ω -Integral in (10.10) sind so zu verstehen, dass der Integrationsweg in der Halbebene $\text{Im } \omega > 0$ parallel im Abstand ϵ zur reellen ω -Achse verlaufen soll, vgl. Abbildung 10.1. Äquivalent zu dieser Wahl ist es, den Integrationsweg bis auf die beiden Punkte $\omega = \pm c |\mathbf{k}|$ auf der reellen ω -Achse zu belassen und $\omega = \pm c |\mathbf{k}|$ auf einem beliebig engen Bogen in $\text{Im } \omega > 0$ zu umfahren, vgl. ebenfalls Abbildung 10.1. Die zuletzt genannte Verschiebung des Integrationsweges ist erlaubt, weil der Integrand in dem Bereich der Verschiebung regulär ist, also keine Singularitäten besitzt. Mit dieser Wahl des Integrationsweges berechnen wir nun zunächst

$$g(k, \tau) := \int_{-\infty+i\epsilon}^{+\infty+i\epsilon} d\omega \frac{e^{-i\omega \tau}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}, \quad k = |\mathbf{k}|, \quad \tau = t - t', \quad (10.11)$$

und zwar durch Verwendung des *Residuensatzes*. Dazu schließen wir den Integrationsweg durch einen Halbkreis mit einem Radius $R \rightarrow \infty$ entweder in der oberen komplexen ω -Ebene $\text{Im } \omega > 0$ oder in der unteren komplexen ω -Ebene $\text{Im } \omega < 0$.

Diese letztere Wahl ist so zu treffen, dass der Beitrag der Halbkreise zum Integral mit $R \rightarrow \infty$ verschwindet. Es ist

$$-i\omega\tau = -i(\operatorname{Re}\omega + i\operatorname{Im}\omega)\tau = -i\operatorname{Re}\omega \cdot \tau + \operatorname{Im}\omega \cdot \tau.$$

Auf den beiden Halbkreisen muss also $\operatorname{Im}\omega \cdot \tau \rightarrow -\infty$ mit $R \rightarrow \infty$ gehen. Das bedeutet:

$$\left. \begin{array}{ll} \tau > 0 : & \operatorname{Im}\omega < 0, \quad \text{untere Halbebene,} \\ \tau < 0 : & \operatorname{Im}\omega > 0, \quad \text{obere Halbebene.} \end{array} \right\} \quad (10.12)$$

Der Residuensatz lautet

$$\oint_{\partial G} dz f(z) = 2\pi i \sum_{z_i \in G} \operatorname{Res}\{f(z_i)\}. \quad (10.13)$$

Hierin ist G ein Gebiet in der komplexen z -Ebene, das von der Randlinie ∂G begrenzt wird. Die Integration auf der linken Seite soll im mathematisch positiven Sinn, also gegen den Uhrzeigersinn verlaufen. Auf der rechten Seite wird die Summe über alle Pole z_i von $f(z)$ in G ausgeführt. $\operatorname{Res}\{f(z_i)\}$ ist das Residuum von $f(z)$ bei z_i , d.h., die Laurent-Reihe von $f(z)$ bei z_i habe die Form

$$f(z) = \frac{a_i}{z - z_i} + \dots, \quad a_i := \operatorname{Res}\{f(z_i)\}.$$

Wir beginnen mit dem Fall $\tau > 0$. Nach (10.13) ist dann der Integrationsweg durch den unendlich fernen Halbkreis in $\operatorname{Im}\omega > 0$ zu schließen. Aus der Abbildung 10.1 entnehmen wir, dass der so entstehende geschlossene Integrationsweg, der dort mit $C^<$ bezeichnet ist, keinen Pol des Integranden enthält. Nach dem Residuensatz verschwindet demnach das Integral: $g(k, \tau) = 0$ für $\tau < 0$. Das bedeutet für die Greensche Funktion in (10.10), dass $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = 0$ für $t - t' < 0$. Aus (10.7) folgt damit für die Lösung $u(\mathbf{r}, t)$ der Wellengleichung (10.3)

$$u(\mathbf{r}, t) = \int d^3 r' \int_{-\infty}^t dt' G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') f(\mathbf{r}', t'). \quad (10.14)$$

Das Zeitintegral über t' , das ursprünglich von $-\infty$ bis $+\infty$ zu erstrecken war, reduziert sich auf den Bereich von $t' = -\infty$ bis $t' = t$. Um die darin enthaltene physikalische Aussage deutlich zu machen, interpretieren wir $u(\mathbf{r}, t)$ als Folge oder als *Wirkung* der Ursache $f(\mathbf{r}, t)$. Die Funktion $u(\mathbf{r}, t)$ steht für die Komponenten des Potentials $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ bzw. für $\Phi(\mathbf{r}, t)$, entsprechend $f(\mathbf{r}, t)$ für die der Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ bzw. für die Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r}, t)$. Die Wellengleichung beschreibt also, wie sich die Potentiale und mit ihnen die Felder $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ als Wirkung, nämlich durch elektromagnetische Ausstrahlung aus der vorzugebenden Strom- und Ladungsdichte als Ursachen ergeben. Dann ist die Reduktion der Zeitintegration auf $t' < t$ der Ausdruck der *Kausalität*: die Wirkung kann der Ursache zeitlich nur folgen und nicht etwa ihr vorauslaufen.

Es ist jetzt ersichtlich, dass wir die Kausalität erzwungen haben, indem wir den Integrationsweg der ω -Integration in (10.10) in $\text{Im } \omega > 0$ an den Polen des Integranden bei $\omega = \pm ck$ vorbeigeführt haben. Hätten wir den Integrationsweg in $\text{Im } \omega < 0$ an den beiden Polen vorbeigeführt, dann hätten wir eine *anti-kausale* Lösung $u(\mathbf{r}, t)$ erhalten, die der Ursache $f(\mathbf{r}, t)$ vorauslief. Dass auch dieses eine formal korrekte Lösung der Wellengleichung bzw. der Maxwell'schen Gleichungen ist, liegt an deren Zeitumkehr-Invarianz, vgl. 7.1.1.

Jetzt berechnen wir $g(k, \tau)$ aus (10.11) für $\tau > 0$. In diesem Fall ist der Integrationsweg nach (10.12) durch den unendlich fernen Halbkreis in $\text{Im } \omega < 0$ zu schließen, vgl. Abbildung 10.1, Integrationsweg $C^>$. Die beiden Pole bei $\omega = \pm ck$ liegen nunmehr im Inneren des geschlossenen Weges $C^>$, der jetzt allerdings im mathematische negativen Sinn orientiert ist, was zu einem Vorzeichen-Wechsel führt. Mit

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = -\frac{1}{c^2} (\omega - ck) (\omega + ck)$$

erhalten wir aus (10.11) durch Anwendung des Residuensatzes

$$\begin{aligned} g(k, \tau) &= -c^2 \oint_{C^>} d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{(\omega - ck)(\omega + ck)} \\ &= (-2\pi i) (-c^2) \sum_{\omega=\pm ck} \text{Res} \frac{e^{-i\omega\tau}}{(\omega - ck)(\omega + ck)} \\ &= 2\pi i c^2 \left[\left(\frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega + ck} \right)_{\omega=+ck} + \left(\frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega - ck} \right)_{\omega=-ck} \right] \\ &= 2\pi i c^2 \left[\frac{e^{-ick\tau}}{2ck} + \frac{e^{+ick\tau}}{-2ck} \right] \end{aligned}$$

$$= 2\pi c \frac{\sin(c k \tau)}{k}. \quad (10.15)$$

Einsetzen dieses Ergebnisses in (10.10) ergibt für die Greensche Funktion

$$G(\mathbf{s}, \tau) = \frac{c}{(2\pi)^3} \int d^3 k e^{i\mathbf{k}\mathbf{s}} \frac{\sin(c k \tau)}{k}, \quad \mathbf{s} := \mathbf{r} - \mathbf{r}', \quad \tau = t - t' > 0. \quad (10.16)$$

Das \mathbf{k} -Integral berechnen wir durch Einführung von Kugelkoordinaten statt der kartesischen Koordinaten k_1, k_2, k_3 . Als Achse wählen wir die Richtung von \mathbf{s} , so dass

$$d^3 k = k^2 dk \sin \theta d\theta d\phi, \quad \mathbf{k}\mathbf{s} = k s \cos \theta, \quad s := |\mathbf{s}|.$$

Der Integrand hängt nicht vom Azimutal-Winkel ϕ ab; dessen Integration liefert 2π . Wir erhalten also aus (10.16)

$$G(\mathbf{s}, \tau) = \frac{c}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} dk k \sin(c k \tau) \int_0^\pi d\theta \sin \theta e^{i k s \cos \theta}. \quad (10.17)$$

Das θ -Integral lösen wir durch Substitution von $\xi = \cos \theta$, $d\xi = -\sin \theta d\theta$:

$$\int_0^\pi d\theta \sin \theta e^{i k s \cos \theta} = \int_{-1}^{+1} d\xi e^{i k s \xi} = \frac{e^{i k s} - e^{-i k s}}{i k s} = \frac{2 \sin(k s)}{k s},$$

so dass

$$\begin{aligned} G(\mathbf{s}, \tau) &= \frac{2c}{(2\pi)^2 s} \int_0^\infty dk \sin(c k \tau) \sin(k s) \\ &= \frac{c}{(2\pi)^2 s} \int_0^\infty dk \left\{ \cos \left[c k \left(\tau - \frac{s}{c} \right) \right] - \right. \\ &\quad \left. - \cos \left[c k \left(\tau + \frac{s}{c} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (10.18)$$

Nun wird mit der Substitution $\kappa = ck$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dk \cos(ckx) &= \frac{1}{c} \int_0^\infty d\kappa \cos(\kappa x) = \frac{1}{2c} \int_{-\infty}^\infty d\kappa \cos(\kappa x) = \\ &= \frac{1}{4c} \int_{-\infty}^\infty d\kappa (e^{i\kappa x} + e^{-i\kappa x}) = \frac{\pi}{c} \delta(x), \end{aligned}$$

eingesetzt in (10.18)

$$G(\mathbf{s}, \tau) = \frac{1}{4\pi s} \left[\delta\left(\tau - \frac{s}{c}\right) - \delta\left(\tau + \frac{s}{c}\right) \right]. \quad (10.19)$$

Da für $\tau = t - t' > 0$ stets $\tau + s/c > 0$, liefert die zweite δ -Funktion mit diesem Argument keinen Beitrag. Wir erhalten also als Endergebnis für die Greensche Funktion der elektromagnetischen Wellengleichung

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = \begin{cases} \frac{1}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right) & \text{für } t > t', \\ 0 & \text{für } t < t'. \end{cases} \quad (10.20)$$

10.1.3 Diskussion

Erwartungsgemäß hängt die Greensche Funktion aus Gründen der räumlichen Isotropie nur von $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ ab.

Die Greensche Funktion (10.20) erfüllt nicht nur die Forderung der Kausalität, also $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = 0$ für $t < t'$, sondern es ist darüber hinaus

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = 0 \quad \text{für } t < t' + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}. \quad (10.21)$$

Diese Eigenschaft drückt die *Retardierung* aus. Die Wirkung ist gegenüber der Ursache um die Zeit $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$ verzögert. Dieses ist gerade die Laufzeit eines Signals,

das sich mit der Geschwindigkeit c vom Ort \mathbf{r}' der Ursache zum Ort \mathbf{r} der Wirkung bewegt. Die Retardierung schließt offensichtlich die Kausalität ein. Mit der Retardierung wäre ein Verhalten

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \neq 0 \quad \text{für alle } t > t' + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \quad (10.22)$$

vereinbar. Die Greensche Funktion (10.20) hat jedoch die weitergehende Eigenschaft, dass

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \neq 0 \quad \text{nur für } t = t' + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}. \quad (10.23)$$

Die Wirkung tritt scharf zur retardierten Zeit $t = t' + |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$ ein, nicht nur nicht vorher, was gegen die Retardierung verstoßen würde, sondern auch nicht nachher, was mit der Retardierung vereinbar wäre. Es lässt sich zeigen, dass diese Eigenschaft typisch für die Dimensionszahl $d = 3$ unseres Raumes ist. Für $d = 4$ würde (10.22) eintreten: die Ursache hätte einen unendlich langen "Nachhall".

Wenn wir die Greensche Funktion (10.20) in die Darstellung (10.7) für die Lösung $u(\mathbf{r}, t)$ der Wellengleichung einsetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned} u(\mathbf{r}, t) &= \int d^3 r' \int dt' G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') f(\mathbf{r}', t') \\ &= \frac{1}{4\pi} \int d^3 r' \int_{-\infty}^t dt' \delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right) \frac{f(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= \frac{1}{4\pi} \int d^3 r' \frac{f\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \end{aligned} \quad (10.24)$$

Dieses Ergebnis lässt sich anschaulich durch die Vorstellung deuten, dass der Ort \mathbf{r}' die möglichen Ursachen im Raum abtastet, also alle Raumbereiche mit $f(\mathbf{r}', \dots) \neq 0$ erfasst, und die Wirkung jeweils zur retardierten Zeit $t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$ eintritt. Die Wirkung fällt $\sim 1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ mit der Entfernung von der Ursache ab. Dieses Verhalten ist typisch für das elektromagnetische Feld, allerdings auch für die Gravitation, und ebenfalls eine Konsequenz der Raumdimension $d = 3$.

$u(\mathbf{r}, t)$ in (10.24) ist eine *partikuläre* Lösung der inhomogenen Wellengleichung. Ein bekannter Satz aus der Theorie der Differential-Gleichungen besagt, dass man im

Fall linearer inhomogener Differential–Gleichungen deren allgemeine Lösung erhält, indem man zu einer partikulären Lösung die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differential–Gleichung addiert. Letztere sind freie Wellen, die wir ausführlich im Kapitel 9 diskutiert haben. Die allgemeinen Lösungen der Wellengleichung für die Potentiale \mathbf{A} und Φ lauten demnach

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = & \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \\ & + \int d^3k \left[\tilde{\mathbf{A}}_1(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - c k t)} + \tilde{\mathbf{A}}_1^*(\mathbf{k}) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - c k t)} \right], \end{aligned} \quad (10.25)$$

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}, t) = & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \\ & + \int d^3k \left[\tilde{\Phi}_1(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - c k t)} + \tilde{\Phi}_1^*(\mathbf{k}) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - c k t)} \right]. \end{aligned} \quad (10.26)$$

10.2 Die Lienard–Wiechert–Potentiale

Wir werten die Lösungen für $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ und $\Phi(\mathbf{r}, t)$ in (10.25) und (10.26) für eine punktförmige Ladung q aus, die sich längs einer Bahn $\mathbf{r}(t)$ mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)$ bewegt. Die Ladungs- und Flussdichte der punktförmigen Ladung lauten

$$\rho(\mathbf{r}, t) = q \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)), \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = q \mathbf{v}(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)). \quad (10.27)$$

Wir überzeugen uns, dass sie die Bedingung der Ladungserhaltung erfüllen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) &= q \frac{\partial}{\partial t} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)) = -q \partial_\alpha \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)) \dot{x}_\alpha = \\ &= -q \mathbf{v}(t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (10.28)$$

(Die Ableitungen der δ –Funktion sind im Sinne der Darstellung dieser Funktion durch Grenzübergänge zu verstehen, vgl. C.) Wir schreiben jetzt die partikuläre

Lösung der Wellengleichung für das skalare Potential $\Phi(\mathbf{r}, t)$, ausgedrückt durch die Greensche Funktion, aus dem vorhergehenden Abschnitt 10.1 auf und setzen $\rho(\mathbf{r}, t)$ aus (10.27) ein:

$$\begin{aligned}
\Phi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{\epsilon_0} \int d^3 r' \int_{-\infty}^{+\infty} dt' G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \rho(\mathbf{r}', t') \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3 r' \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right) \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int d^3 r' \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right) \frac{\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}(t'))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')|} \delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')|}{c}\right). \quad (10.29)
\end{aligned}$$

Wir verwenden im Folgenden die Schreibweise

$$\mathbf{R}(t') := \mathbf{r} - \mathbf{r}(t'), \quad R(t') := |\mathbf{R}(t')| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')|. \quad (10.30)$$

Bei den weiteren Umformungen soll der Ort \mathbf{r} , an dem das Potential $\Phi(\mathbf{r}, t)$ zu berechnen ist, der sogenannte *Aufpunkt*, festgehalten werden. Zur Berechnung des t' -Integrals in (10.29) substituieren wir

$$\xi = t' - t + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')|}{c} = t' - t + \frac{1}{c} R(t'), \quad \frac{d\xi}{dt'} = 1 + \frac{1}{c} \frac{d}{dt'} R(t'). \quad (10.31)$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt'} R(t') &= \frac{d}{dt'} |\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')| = -\mathbf{v}(t') \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} |\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')| = \\
&= -\mathbf{v}(t') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')|} = -\mathbf{v}(t') \frac{\mathbf{R}(t')}{R(t')},
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt'} &= 1 - \frac{1}{c} \mathbf{v}(t') \frac{\mathbf{R}(t')}{R(t')}, \\ \frac{dt'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')|} &= \frac{dt'}{R(t')} = \frac{d\xi}{R(t') - \frac{1}{c} \mathbf{v}(t') \mathbf{R}(t')}, \end{aligned} \quad (10.32)$$

eingesetzt in (10.28):

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \frac{\delta(\xi)}{R(t') - \frac{1}{c} \mathbf{v}(t') \mathbf{R}(t')} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{R(t') - \frac{1}{c} \mathbf{v}(t') \mathbf{R}(t')} \right]_{\text{ret}}, \end{aligned} \quad (10.33)$$

worin der Index "ret" bedeutet, dass der Ausdruck in [...] für $\xi = 0$, d.h., für $t' = t - R(t')/c$ auszuwerten ist. Ein völlig analoges Ergebnis erhalten wir für das Vektor-Potential, nämlich

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q \mathbf{v}(t')}{R(t') - \frac{1}{c} \mathbf{v}(t') \mathbf{R}(t')} \right]_{\text{ret}}. \quad (10.34)$$

(10.33) und (10.34) heißen die *Lienard-Wiechert-Potentiale*.

10.3 Dynamische Multipol-Entwicklung

In diesem Abschnitt werden wir die Multipol-Entwicklungen, die wir in 3.2 für den statischen elektrischen Fall und in 6.5 für den statischen magnetischen Fall getrennt formuliert hatten, auf den dynamischen Fall erweitern. Es ist unmittelbar einleuchtend, dass die dynamische Erweiterung für den elektrischen und magnetischen Fall zusammen ausgeführt werden muss, da ja auch die Erweiterung der statischen elektrischen und magnetischen Feldgleichungen zu den dynamischen Maxwell'schen

Gleichungen zu einer Kopplung zwischen den elektrischen und magnetischen Phänomenen, dargestellt durch die Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} führte.

In den statischen Fällen gingen die Multipol-Entwicklungen von den Ausdrücken

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (10.35)$$

für das skalare Potential und für das Vektor-Potential aus. Es wurde angenommen, dass Ladungs- und Stromdichte $\rho(\mathbf{r}')$ und $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$ nur jeweils in einem begrenzten Gebiet $|\mathbf{r}'| < R$ in der Nähe des Ursprungs $\mathbf{r}' = 0$ von Null verschieden waren und dass die Potentiale in Entfernungen $|\mathbf{r}| \gg R$ ausgewertet werden sollten. Unter dieser Voraussetzung konnten die Ausdrücke in (10.35) nach \mathbf{r}' , präziser: nach $\mathbf{r}'/|\mathbf{r}|$ entwickelt werden. Diese Entwicklung führte jeweils auf die statischen Multipol-Entwicklungen, die wir hier nur einschließlich der Dipol-Terme aufschreiben:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \dots, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \mathbf{m} \times \mathbf{r} + \dots \quad (10.36)$$

Darin sind die gesamte elektrische Ladung Q und die Dipol-Momente \mathbf{p} und \mathbf{m} definiert durch

$$Q := \int d^3r' \rho(\mathbf{r}'), \quad \mathbf{p} := \int d^3r' \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}'), \quad \mathbf{m} = \frac{1}{2} \int d^3r' \mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}'). \quad (10.37)$$

Wir werden jetzt im dynamischen Fall ganz analog vorgehen. Als Ausgangspunkt dienen uns jetzt die dynamischen Erweiterungen von (10.35),

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (10.38)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (10.39)$$

die wir oben in 10.1 als Lösungen der Wellengleichung gefunden hatten. Die Wellengleichung hatten wir für die Potentiale unter Verwendung der Lorentz-Eichung

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (10.40)$$

hergeleitet, vgl. 7.4.2 und 7.4.3. Es genügt also, die dynamische Multipol-Entwicklung für das Vektor-Potential \mathbf{A} auszuführen, weil wir daraus unter Verwendung der Lorentz-Eichung auch diejenige für das skalare Potential Φ gewinnen können. Wie im statischen Fall seien $\rho(\mathbf{r}', t)$ und $\mathbf{j}(\mathbf{r}', t)$ jeweils auf das Gebiet $|\mathbf{r}'| < R$ in der Nähe des Ursprungs begrenzt, jetzt allerdings zu allen Zeiten t .

10.3.1 Die Entwicklung des Vektor-Potentials

Wir haben die folgenden Ausdrücke nach \mathbf{r}' zu entwickeln:

$$\begin{aligned} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| &= r - x'_\alpha \partial_\alpha r + \dots = r - x'_\alpha \frac{x_\alpha}{r} + \dots \\ &= r - \frac{1}{r} (\mathbf{r} \mathbf{r}') + \dots, \end{aligned} \quad (10.41)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \frac{1}{r} - x'_\alpha \partial_\alpha \frac{1}{r} + \dots = \frac{1}{r} + x'_\alpha \frac{x_\alpha}{r^3} + \dots \\ &= \frac{1}{r} + \frac{1}{r^3} (\mathbf{r} \mathbf{r}') + \dots, \end{aligned} \quad (10.42)$$

vgl. auch 3.2. Diese Entwicklungen brechen wir nach der ersten Ordnung ab und werden deshalb auch im dynamischen Fall nur Monopol- und Dipol-Terme beschreiben. Wir setzen die Entwicklung (10.41) in das Argument der Stromdichte ein:

$$\begin{aligned} \mathbf{j} \left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \right) &= \\ &= \mathbf{j} \left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{1}{c r} (\mathbf{r} \mathbf{r}') + \dots \right) \\ &= \mathbf{j} \left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{c r} (\mathbf{r} \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{j} \left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} \right) + \dots \end{aligned} \quad (10.43)$$

Diese Entwicklung führt zusammen mit der Entwicklung (10.42) im Ausdruck (10.39) für das Vektor-Potential zu

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{r^3} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') + \dots \right] \cdot \\
&\quad \cdot \left[\mathbf{j} \left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{c r} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{j} \left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} \right) + \dots \right] \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \int d^3 r' \mathbf{j} \left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} \right) + \\
&\quad + \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{1}{r^3} + \frac{1}{c r^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \int d^3 r' (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{j} \left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} \right) + \dots \quad (10.44)
\end{aligned}$$

Zunächst formen wir den Term der Ordnung 0 um. Dazu definieren wir das dynamische elektrische Dipol-Moment in Erweiterung von (10.37) durch

$$\mathbf{p}(t) = \int d^3 r' \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}', t), \quad (10.45)$$

bilden seine zeitliche Ableitung und formen diese unter Verwendung der Kontinuitäts-Gleichung für die elektrische Ladung wie folgt um:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{p}}(t) &= \int d^3 r' \mathbf{r}' \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}', t) = - \int d^3 r' \mathbf{r}' \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}', t) \right), \\
\dot{p}_\alpha(t) &= - \int d^3 r' x'_\alpha \partial'_\beta j_\beta(\mathbf{r}', t) \\
&= - \int d^3 r' \partial'_\beta (x'_\alpha j_\beta(\mathbf{r}', t)) + \int d^3 r' j_\beta(\mathbf{r}', t) \partial'_\beta x'_\alpha \\
&= \int d^3 r' j_\alpha(\mathbf{r}', t), \\
\dot{\mathbf{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) &= \int d^3 r' \mathbf{j} \left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} \right). \quad (10.46)
\end{aligned}$$

In dieser Umformung haben wir partiell integriert bzw., mit anderen Worten, die Produkt-Regel der Differentiation und den Gaußschen Satz benutzt:

$$\int d^3 r' \partial'_\beta (x'_\alpha j_\beta(\mathbf{r}', t)) = \oint df_\beta x'_\alpha j_\beta(\mathbf{r}', t) = 0.$$

Das Volumen-Integral über r' schließt das Gebiet mit $j_\beta(\mathbf{r}', t) \neq 0$ ein, so dass auf dessen Randfläche $j_\beta(\mathbf{r}', t) = 0$. Außerdem haben wir $\partial'_\beta x'_\alpha = \delta_{\alpha\beta}$ benutzt. Mit dem Ergebnis der Umformung in der Form von (10.46) können wir den Monopolterm der Entwicklung in (10.44) durch die zeitliche Ableitung des elektrischen Dipolmoments ausdrücken. Im statischen Fall tritt dieser Monopolterm also gar nicht auf. Im dynamischen Fall hat er aber nun die Ordnung eines Dipolterms, d.h. dieselbe Ordnung wie der eigentliche Dipolterm in der Entwicklung in (10.44) nach \mathbf{r}' . Das bedeutet, dass beide Terme, die wir in (10.44) hingeschrieben haben, von derselben Ordnung im Sinne einer Entwicklung nach \mathbf{r}' sind. Alle folgenden Rechnungen sollen sich nun auf diese Ordnung beschränken. Mit dieser Vereinbarung werden wir das Symbol $+ \dots$ für höhere Ordnungen fortlassen.

Der eigentliche Dipolterm in (10.44) hat die Form

$$\begin{aligned} A_\alpha^{(1)}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{1}{r^3} + \frac{1}{c r^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) x_\gamma M_{\gamma\alpha} \left(t - \frac{r}{c} \right), \\ M_{\gamma\alpha} \left(t - \frac{r}{c} \right) &= \int d^3 r' x'_\gamma j_\alpha \left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} \right). \end{aligned} \quad (10.47)$$

Bei der weiteren Umformung dieses Terms greifen wir auf ein Ergebnis aus 6.5.2 zurück. Dort hatten wir allgemein gezeigt, dass

$$\begin{aligned} (\mathbf{m} \times \mathbf{r})_\alpha &= \frac{1}{2} \int d^3 r' x_\gamma x'_\gamma j_\alpha(\mathbf{r}') - \frac{1}{2} \int d^3 r' x'_\alpha x_\gamma j_\gamma(\mathbf{r}') \\ &= \frac{1}{2} x_\gamma M_{\gamma\alpha} - \frac{1}{2} x_\gamma M_{\alpha\gamma} \end{aligned} \quad (10.48)$$

unter Verwendung der Schreibweise aus (10.47). Die Herleitung dieser Relation enthielt keinerlei Einschränkung, also auch nicht etwa die der Stationarität. Wir können (10.48) also auf ein zeitabhängiges magnetisches Moment

$$\mathbf{m}(t) = \frac{1}{2} \int d^3 r' \mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}', t) \quad (10.49)$$

übertragen. Es ist nun unser Ziel, den Term 1. Ordnung in (10.47) durch das magnetische Moment auszudrücken. Das wäre sofort unter Verwendung von (10.48) möglich, wenn dort auf der rechten Seite $\dots = x_\gamma M_{\gamma\alpha}(t)$ stände. Das erreichen wir

durch die folgende Umformung, in der wir nochmals die Kontinuitäts-Gleichung benutzen, außerdem $\partial'_\beta x'_\gamma = \delta_{\beta\gamma}$ und wieder partiell integrieren:

$$\begin{aligned}
 M_{\alpha\gamma}(t) &= \int d^3r' x'_\alpha j_\gamma(\mathbf{r}', t) = \int d^3r' x'_\alpha \delta_{\gamma\beta} j_\beta(\mathbf{r}', t) = \\
 &= \int d^3r' x'_\alpha (\partial'_\beta x'_\gamma) j_\beta(\mathbf{r}', t) = - \int d^3r' x'_\gamma \partial'_\beta (x'_\alpha j_\beta(\mathbf{r}', t)) = \\
 &= - \int d^3r' x'_\gamma (\partial'_\beta x'_\alpha) j_\beta(\mathbf{r}', t) - \int d^3r' x'_\alpha x'_\gamma \partial'_\beta j_\beta(\mathbf{r}', t) = \\
 &= - \int d^3r' x'_\gamma j_\alpha(\mathbf{r}', t) + \int d^3r' x'_\alpha x'_\gamma \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}', t) = \\
 &= -M_{\gamma\alpha}(t) + O(r'^2). \tag{10.50}
 \end{aligned}$$

Wenn wir unsere Umformung konsequent auf Terme 1. Ordnung in der Entwicklung nach \mathbf{r}' beschränken, können wir also in (10.48) $M_{\alpha\gamma}(t) = -M_{\gamma\alpha}(t)$ setzen, so dass

$$(\mathbf{m}(t) \times \mathbf{r})_\alpha = x_\gamma M_{\gamma\alpha}(t). \tag{10.51}$$

Wir setzen dieses Ergebnis in (10.47) ein und erhalten somit für die Entwicklung des Vektor-Potentials in (10.44)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{1}{r} \dot{\mathbf{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) + \left(\frac{1}{r^3} + \frac{1}{c r^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\mathbf{m} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \mathbf{r} \right) \right] \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{1}{r} \dot{\mathbf{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{r^3} \mathbf{m} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \mathbf{r} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{c r^2} \dot{\mathbf{m}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \mathbf{r} \right]. \tag{10.52}
 \end{aligned}$$

Nun ist, wie wir sogleich zeigen werden,

$$\frac{1}{r^3} \mathbf{m} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \mathbf{r} + \frac{1}{c r^2} \dot{\mathbf{m}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \mathbf{r} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \left[\frac{1}{r} \mathbf{m} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right], \tag{10.53}$$

so dass wir unser Ergebnis auch in der Form

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{1}{r} \dot{\mathbf{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \left[\frac{1}{r} \mathbf{m} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \right\}. \quad (10.54)$$

schreiben können.

Den Nachweis von (10.53) führen wir in umgekehrter Richtung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \left[\frac{1}{r} \mathbf{m} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right]_{\alpha} &= \\ &= \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \partial_{\beta} \left[\frac{1}{r} m_{\gamma} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \\ &= \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \left[\left(\partial_{\beta} \frac{1}{r} \right) m_{\gamma} \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{r} \partial_{\beta} m_{\gamma} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right]. \end{aligned} \quad (10.55)$$

Nun ist

$$\partial_{\beta} m_{\gamma} \left(t - \frac{r}{c} \right) = -\dot{m}_{\gamma} \left(t - \frac{r}{c} \right) \frac{1}{c} \partial_{\beta} r = -\frac{x_{\beta}}{c r} \dot{m}_{\gamma} \left(t - \frac{r}{c} \right), \quad (10.56)$$

so dass

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \left[\frac{1}{r} \mathbf{m} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right]_{\alpha} &= \\ &= \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \left[-\frac{1}{r^3} x_{\beta} m_{\gamma} \left(t - \frac{r}{c} \right) - \frac{1}{c r^2} x_{\beta} \dot{m}_{\gamma} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \\ &= - \left[\frac{1}{r^3} \mathbf{r} \times \mathbf{m} \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{c r^2} \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{m}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right]_{\alpha} \\ &= \left[\frac{1}{r^3} \mathbf{m} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \mathbf{r} + \frac{1}{c r^2} \dot{\mathbf{m}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \mathbf{r} \right]_{\alpha}, \end{aligned} \quad (10.57)$$

womit (10.53) nachgewiesen ist.

10.3.2 Berechnung des skalaren Potentials, Diskussion

Aus (10.54) berechnen wir die Divergenz des Vektor-Potentials. Da der Rotations-Term keinen Beitrag dazu liefert, erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left[\frac{1}{r} \dot{\mathbf{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left[\frac{1}{r} \mathbf{p} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \right\}. \quad (10.58)$$

Diese Relation vergleichen wir mit der Lorentz-Eichung in (10.40) und finden daraus

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left[\frac{1}{r} \mathbf{p} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right], \quad (10.59)$$

worin wir $c^2 \mu_0 = 1/\epsilon_0$ benutzt und vorausgesetzt haben, dass kein weiteres statisches, also von der Zeit t unabhängiges skalares Potential mehr auftritt, z.B. auch kein Beitrag

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

einer statischen Gesamtladung.

Im Ausdruck (10.59) führen wir eine Umformung durch, die analog derjenigen in (10.55) bis (10.57) ist:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left[\frac{1}{r} \mathbf{p} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] &= \partial_\alpha \left[\frac{1}{r} p_\alpha \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] = \\ &= \left(\partial_\alpha \frac{1}{r} \right) p_\alpha \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{r} \partial_\alpha p_\alpha \left(t - \frac{r}{c} \right) \\ &= -\frac{x_\alpha}{r^3} p_\alpha \left(t - \frac{r}{c} \right) - \frac{x_\alpha}{c r^2} \dot{p}_\alpha \left(t - \frac{r}{c} \right) \\ &= -\frac{1}{r^3} \mathbf{r} \mathbf{p} \left(t - \frac{r}{c} \right) - \frac{1}{c r^2} \mathbf{r} \dot{\mathbf{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right). \end{aligned} \quad (10.60)$$

Somit lässt sich das skalare Potential auch in der Form

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r^3} \mathbf{r} \mathbf{p} \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{c r^2} \mathbf{r} \dot{\mathbf{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \quad (10.61)$$

schreiben. Diese Darstellung des skalaren Potentials entspricht der des Vektorpotentials in (10.52). Zur Diskussion unserer Ergebnisse schreiben wir diese beiden Darstellungen in der folgenden Form auf:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{A}_s(\mathbf{r}, t) + \mathbf{A}_d(\mathbf{r}, t), \\ \Phi(\mathbf{r}, t) &= \Phi_s(\mathbf{r}, t) + \Phi_d(\mathbf{r}, t), \\ \mathbf{A}_s(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \mathbf{m} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \mathbf{r},\end{aligned}\quad (10.62)$$

$$\Phi_s(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \mathbf{r} \mathbf{p} \left(t - \frac{r}{c} \right), \quad (10.63)$$

$$\mathbf{A}_d(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{1}{r} \dot{\mathbf{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{c r^2} \dot{\mathbf{m}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \mathbf{r} \right], \quad (10.64)$$

$$\Phi_d(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c r^2} \mathbf{r} \dot{\mathbf{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right). \quad (10.65)$$

In den Ausdrücken $\mathbf{A}_s(\mathbf{r}, t)$ und $\Phi_s(\mathbf{r}, t)$ erkennen wir die Dipol-Beiträge der statischen Multipol-Entwicklung, die wir getrennt in 3.2 für das skalare Potential und in 6.5 für das Vektor-Potential durchgeführt hatten. Lediglich das Zeitargument kommt hier als retardierte Zeit $t - r/c$ hinzu. Die statischen Dipol-Beiträge verhalten sich als Funktionen des Abstands r wie $\sim 1/r^2$. Die hier zusätzlich auftretenden dynamischen Dipol-Beiträge $\mathbf{A}_d(\mathbf{r}, t)$ und $\Phi_d(\mathbf{r}, t)$ verhalten sich als Funktionen des Abstands r wie $\sim 1/r$, d.h., sie fallen für große Entfernungen weniger stark ab und dominieren dort das Verhalten der Potentiale.

10.4 Hertzscher Dipol

Ziel dieses Abschnitts ist die Berechnung der Felder $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ eines zeitabhängigen, später auch harmonisch schwingenden elektrischen Dipols $\mathbf{p}(t)$.

10.4.1 Fernfeld-Näherung

Wir wollen sämtliche Rechnungen in der sogenannten *Fernfeld-Näherung* durchführen. Darunter versteht man, dass in allen folgenden Rechnungen immer nur derjenige Term berücksichtigt wird, der die niedrigste Potenz n in einem Verhalten $\sim 1/r^n$ besitzt. Nach den Bemerkungen am Ende des vorhergehenden Abschnitts können wir uns dann also schon auf die dynamischen Beiträge zu den Potentialen \mathbf{A} und Φ in (10.64) und (10.65) beschränken. Da voraussetzungsgemäß kein magnetischer Dipol auftreten soll, haben wir also von den folgenden Ausdrücken auszugehen:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \dot{\mathbf{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right), \quad \Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{cr^2} \mathbf{r} \dot{\mathbf{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right). \quad (10.66)$$

Bei der Berechnung der Felder gemäß

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \Phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \quad (10.67)$$

werden wir wiederholt Ausdrücke der folgenden Form zu berechnen haben:

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \left[\frac{1}{r^n} f \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] &= \\ &= \left(\partial_\alpha \frac{1}{r^n} \right) f \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{r^n} \partial_\alpha f \left(t - \frac{r}{c} \right) \\ &= -\underbrace{\frac{n x_\alpha}{r^{n+2}} f \left(t - \frac{r}{c} \right)}_{\sim 1/r^{n+1}} - \underbrace{\frac{x_\alpha}{c r^{n+1}} \dot{f} \left(t - \frac{r}{c} \right)}_{\sim 1/r^n}. \end{aligned}$$

In Fernfeld-Näherung wird also

$$\partial_\alpha \left[\frac{1}{r^n} f \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] = -\frac{x_\alpha}{c r^{n+1}} \dot{f} \left(t - \frac{r}{c} \right) + O \left(r^{-(n+1)} \right). \quad (10.68)$$

Ein völlig analoges Argument ergibt, dass in Fernfeld-Näherung auch

$$\partial_\alpha \left[\frac{x_\beta}{r^n} f \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] = -\frac{x_\alpha x_\beta}{c r^{n+1}} \dot{f} \left(t - \frac{r}{c} \right) + O \left(r^{-n} \right) \quad (10.69)$$

Wir beginnen mit der Berechnung von \mathbf{B} . (Innerhalb der folgenden Umformungen lassen wir der Übersichtlichkeit halber gelegentlich die Argumente (\mathbf{r}, t) fort. Desgleichen schreiben wir $+\dots$ für höhere Ordnungen der Fernfeld-Näherung nicht mehr mit.)

$$\begin{aligned} B_\alpha &= \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \partial_\beta A_\gamma = \frac{\mu_0}{4\pi} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \partial_\beta \left(\frac{1}{r} \dot{p}_\gamma \left(t - \frac{r}{c} \right) \right) \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{x_\beta}{c r^2} \ddot{p}_\gamma \left(t - \frac{r}{c} \right), \end{aligned}$$

bzw.

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{c r^2} \dot{\mathbf{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \mathbf{r}. \quad (10.70)$$

Zur Berechnung von \mathbf{E} müssen wir zwei Ausdrücke auswerten:

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \Phi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \partial_\alpha \left(\frac{1}{c r^2} x_\beta \dot{p}_\beta \left(t - \frac{r}{c} \right) \right) \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2 r^3} x_\alpha x_\beta \ddot{p}_\beta \left(t - \frac{r}{c} \right), \\ \frac{\partial}{\partial t} A_\alpha &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \ddot{p}_\alpha \left(t - \frac{r}{c} \right), \end{aligned}$$

zusammengefasst

$$\begin{aligned} E_\alpha &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2} \left[\frac{x_\alpha x_\beta}{r^3} \ddot{p}_\beta \left(t - \frac{r}{c} \right) - \frac{1}{r} \ddot{p}_\alpha \left(t - \frac{r}{c} \right) \right], \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2 r^3} \left\{ \left[\mathbf{r} \ddot{\mathbf{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \mathbf{r} - r^2 \ddot{\mathbf{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2 r^3} \left[\ddot{\mathbf{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \mathbf{r} \right] \times \mathbf{r}, \end{aligned} \quad (10.71)$$

worin wir im letzten Schritt die Regel $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ benutzt haben.

10.4.2 Diskussion und Energie-Bilanz

Bei der Diskussion unserer Ergebnisse (10.70) für \mathbf{B} und (10.71) für \mathbf{E} stellen wir zunächst fest, dass

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \mathbf{r} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (10.72)$$

Diese beiden Relationen drücken die *Transversalität* der von dem Dipol $\mathbf{p}(t)$ ausgestrahlten elektromagnetischen Welle aus. Der Vektor \mathbf{r} zeigt nämlich vom Ort des

Dipols, der ja nach Voraussetzung in 10.3 der Ursprung sein sollte, zum Aufpunkt, an dem die Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} zu bestimmen sind, ist also zugleich die Ausbreitungsrichtung.

Außerdem erkennen wir aus (10.70) und (10.71), dass

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{c r} \left[\frac{\mu_0}{4 \pi} \frac{1}{c r^2} \ddot{\mathbf{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \mathbf{r} \right] \times \mathbf{r} = \frac{c}{r} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{r}. \quad (10.73)$$

Hieraus lesen wir ab, dass \mathbf{B} , \mathbf{r} , \mathbf{E} in dieser Reihenfolge oder, zyklisch vertauscht, \mathbf{r} , \mathbf{E} , \mathbf{B} ein rechtshändiges, orthogonales Dreibein bilden. Insbesondere stehen auch die Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} senkrecht aufeinander. Die vom Dipol $\mathbf{p}(t)$ ausgestrahlte Welle verhält sich also völlig analog zu einer ebenen Welle, wie wir sie in 9 betrachtet haben.

\mathbf{B} und \mathbf{E} in (10.70) und (10.71) zeigen auch das richtige Paritäts-Verhalten. Da $\mathbf{p}(t)$ polar ist, vgl. die Definition (10.45), ist es auch $\ddot{\mathbf{p}}(t)$. Folglich ist das durch $\ddot{\mathbf{p}}(t) \times \mathbf{r}$ dargestellte \mathbf{B} axial und das durch $\mathbf{B} \times \mathbf{r}$ dargestellte \mathbf{E} wieder polar.

Wir diskutieren die in 8.2 hergeleitete Energie-Bilanz

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{S} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}, \quad (10.74)$$

$$w := \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2 \mu_0} \mathbf{B}^2, \quad \mathbf{S} := \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}. \quad (10.75)$$

für die vom Dipol $\mathbf{p}(t)$ ausgestrahlte Welle. Wir berechnen zunächst den Poynting-Vektor \mathbf{S} . Unter Verwendung von (10.73), (10.70) und $\mathbf{B} \cdot \mathbf{r} = 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} \frac{c}{r} (\mathbf{B} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{r} = \frac{1}{\mu_0} c \mathbf{B}^2 \frac{\mathbf{r}}{r} = \\ &= \frac{1}{(4 \pi)^2 \epsilon_0} \frac{1}{c^3 r^4} \left| \ddot{\mathbf{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \mathbf{r} \right|^2 \frac{\mathbf{r}}{r}. \end{aligned} \quad (10.76)$$

Der Poynting-Vektor, d.h., die Energie-Flussdichte hat die Richtung \mathbf{r} der Ausbreitungsrichtung \mathbf{r} . Ferner ist $\mathbf{S} = 0$ in der führenden Ordnung der Fernfeld-Näherung, wenn $\ddot{\mathbf{p}} = 0$, d.h., wenn $\dot{\mathbf{p}} = \text{const.}$ Nach der Definition (10.45) oder auch

nach (10.46) würde das bedeuten, dass sich die elektrischen Ladungen $\rho(\mathbf{r}, t) d^3r$, die den Dipol erzeugen, mit jeweils konstanten Geschwindigkeiten bewegen, also zeitlich konstante elektrische Flussdichten darstellen. Diese erzeugen jedoch nur statische Felder, die von höherer Ordnung in der Fernfeld-Näherung sind.

In der Fernfeld-Näherung verhält sich \mathbf{S} als Funktion von r wie $\sim 1/r^2$. Diese Eigenschaft hat eine wichtige Konsequenz für die vom Dipol abgestrahlte Leistung

$$P := \oint_F d\mathbf{f} \mathbf{S} \quad (10.77)$$

Hierin ist F eine beliebige geschlossene Fläche. Wir berechnen P zunächst für den Fall, dass F eine Kugeloberfläche mit dem Radius r ist, deren Mittelpunkt im Ursprung bzw. im Ort des Dipols liegt. Zur Berechnung des Integrals führen wir Kugelkoordinaten ein, deren momentane Achse jeweils die Richtung von $\ddot{\mathbf{p}}$ sei. Dann ist

$$\begin{aligned} d\mathbf{f} &= df \frac{\mathbf{r}}{r}, \\ d^3r &= r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi = r^2 d\Omega dr = df dr, \\ df &= r^2 \sin\theta d\theta d\phi, \\ \left| \ddot{\mathbf{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \mathbf{r} \right|^2 &= \left| \ddot{\mathbf{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right|^2 r^2 \sin^2\theta, \end{aligned}$$

so dass

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{(4\pi)^2 \epsilon_0 c^3} \left| \ddot{\mathbf{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right|^2 \underbrace{\int d\phi}_{= 2\pi} \underbrace{\int_0^\pi d\theta \sin^3\theta}_{= 4/3} \\ &= \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{2}{3 c^3} \left| \ddot{\mathbf{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right|^2. \end{aligned} \quad (10.78)$$

Die insgesamt über die Kugeloberfläche abgestrahlte Leistung P ist unabhängig von dem Radius r . Dem entspricht die Vorstellung, dass die abgestrahlte Leistung P aus dem Dipol bei $\mathbf{r} = 0$ in das Feld übertragen wird und sich dann sogar auf beliebige geschlossene Flächen verteilen muss, die den Dipol einschließen. Diese letztere

Erweiterung begründen wir für den *stationären* Fall der Abstrahlung, in dem keine zeitlichen Änderungen mehr auftreten, so dass in (10.74) $\partial w / \partial t = 0$ und folglich

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{S} &= -\mathbf{j} \mathbf{E}, \\ P = \oint_{\partial V} d\mathbf{f} \mathbf{S} &= \int_V d^3 r \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{S} = - \int_V d^3 r \mathbf{j} \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (10.79)$$

Hier ist ∂V eine beliebige geschlossene Fläche, die das Volumen V einschließt. \mathbf{j} ist die elektrische Flussdichte des Dipols, die auf einen sehr engen Bereich um $\mathbf{r} = 0$ begrenzt ist. Es ist also $P = 0$, wenn V bzw. ∂V den Dipol bei $\mathbf{r} = 0$ nicht einschließen, und es ergibt sich dieselbe Leistung P für alle V bzw. ∂V , die den Dipol bei $\mathbf{r} = 0$ einschließen.

10.4.3 Ausstrahlung eines magnetischen Dipols

Wir betrachten jetzt noch den Fall, dass kein elektrisches Dipol-Moment, sondern nur ein magnetisches Dipol-Moment auftritt. Dann lauten die dynamischen Beiträge zu den Potentialen in (10.64) und (10.65)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{c r^2} \dot{\mathbf{m}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \mathbf{r}, \quad \Phi(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (10.80)$$

Daraus berechnen wir

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{c r^2} \ddot{\mathbf{m}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \mathbf{r} \\ &= -\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{c^3 r^2} \ddot{\mathbf{m}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \mathbf{r}, \end{aligned} \quad (10.81)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t), \\ B_\alpha &= \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \partial_\beta A_\gamma = \frac{\mu_0}{4\pi} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\gamma\mu\nu} \partial_\beta \left[\frac{1}{c r^2} \dot{m}_\mu \left(t - \frac{r}{c} \right) x_\nu \right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\gamma\mu\nu} \left[-\frac{x_\beta x_\nu}{c^2 r^3} \ddot{m}_\mu \left(t - \frac{r}{c} \right) + \dots \right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{c^2 r^3} \epsilon_{\alpha\gamma\beta} \left[\epsilon_{\gamma\mu\nu} \ddot{m}_\mu \left(t - \frac{r}{c} \right) x_\nu \right] x_\gamma + \dots, \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{c^2 r^3} \left[\ddot{\mathbf{m}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \mathbf{r} \right] \times \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (10.82)$$

Wir erkennen, dass diese Welle wiederum transversal ist,

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \mathbf{r} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (10.83)$$

und dass

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{cr} \left[-\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{cr^2} \ddot{\mathbf{m}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \mathbf{r} \right] \times \mathbf{r} = \frac{1}{cr} \mathbf{r} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \quad (10.84)$$

Auch hier bilden also \mathbf{r} , \mathbf{E} , \mathbf{B} in dieser Reihenfolge ein rechtshändiges Dreibein. Wenn wir die Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} für den hier betrachteten Fall der Ausstrahlung eines magnetischen Dipols mit jenen für den Fall der Ausstrahlung eines elektrischen Dipols in (10.70) und (10.71) vergleichen, erkennen wir, dass die Relationen "spiegelbildlich" sind:

Felder:	elektrisch:	magnetisch:
\mathbf{E}	$\sim \frac{1}{r^3} \left[\ddot{\mathbf{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \mathbf{r} \right] \times \mathbf{r}$	$\sim \frac{1}{r^2} \ddot{\mathbf{m}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \mathbf{r}$
\mathbf{B}	$\sim \frac{1}{r^2} \ddot{\mathbf{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \mathbf{r}$	$\sim \frac{1}{r^3} \left[\ddot{\mathbf{m}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \mathbf{r} \right] \times \mathbf{r}$

(10.85)

Diese Spiegelbildlichkeit bewirkt das richtige Paritäts-Verhalten: das elektrische Dipol-Moment \mathbf{p} ist polar, das magnetische Dipol-Moment \mathbf{m} jedoch axial, vgl. (10.49). Die Struktur der Formeln in (10.85) für \mathbf{E} und \mathbf{B} kann man allein aus den folgenden Regeln gewinnen:

- (1) Paritäts-Verhalten,
- (2) \mathbf{r} , \mathbf{E} , \mathbf{B} bilden ein orthogonales Dreibein,
- (3) Ausstrahlung findet nur statt wenn $\ddot{\mathbf{p}} \neq 0$ bzw. $\ddot{\mathbf{m}} \neq 0$,
- (4) Retardierung für das Zeitargument $t - r/c$,
- (5) in Fernfeld-Näherung ist wegen der Energie-Bilanz $|\mathbf{E}| \sim 1/r$ und $|\mathbf{B}| \sim 1/r$.

Alle übrigen Einzelheiten der Formeln können durch eine Dimensions-Analyse erschlossen werden.

Die Berechnung des Poynting-Vektors ergibt jetzt

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{c r} \mathbf{E} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{E}) = \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{c} \mathbf{E}^2 \frac{\mathbf{r}}{r} = \\ &= \frac{\mu_0}{(4\pi)^2} \frac{1}{c^3 r^4} \left| \ddot{\mathbf{m}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \mathbf{r} \right|^2 \frac{\mathbf{r}}{r}. \end{aligned} \quad (10.86)$$

Seine Struktur ist völlig analog zu dem Fall des Hertzschen Dipols in (10.76).

Kapitel 11

Grundlagen der Relativitätstheorie

Aufgabenstellung dieses Kapitels ist die relativistische Formulierung der Elektrodynamik. Wir werden ausgehen von der relativistischen Formulierung der klassischen Mechanik und diese auf Felder erweitern.

11.1 Inertialsysteme

Ein grundlegender Begriff bei der Formulierung physikalischer Theorien ist der des *Inertialsystems*. Bereits in der klassischen Newtonschen Mechanik wird dieser Begriff verwendet. Dort versteht man unter einem Inertialsystem ein räumliches Bezugssystem, z.B. ein orthogonales Koordinatensystem, und eine Möglichkeit, Zeit zu messen, also eine Uhr. Die Annahme in der Newtonschen, präziser, in der nicht-relativistischen Mechanik ist nun, dass Zeit *universal* für alle Bezugssysteme ist, d.h., dass die Uhren in allen Bezugssystemen dieselbe Zeit anzeigen, also synchron laufen. Es sei ausdrücklich daran erinnert, dass sich diese Annahme auch auf Bezugssysteme bezieht, die sich gegeneinander bewegen.

Die Annahme einer universellen Zeit impliziert, dass es ∞ -schnelle physikalische Signale zur Synchronisation gibt. Wie wir bereits am Anfang dieses Textes im Abschnitt 1.1 festgestellt hatten, widerspricht die Annahme einer ∞ -schnellen Geschwindigkeit physikalischer Signale dem experimentellen Befund, dass es eine *maximale* Geschwindigkeit für die Ausbreitung physikalischer Signale gibt, nämlich die Geschwindigkeit

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s.} \quad (11.1)$$

Dieses ist die Geschwindigkeit elektromagnetischer Wellen. Im Kapitel 9 haben wir nachgewiesen, dass sie durch $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ gegeben ist. Im Kapitel 1 diente uns die Endlichkeit der Ausbreitungs-Geschwindigkeit physikalischer Signale als Argument für die Notwendigkeit der Existenz physikalischer Felder. Hier wollen wir untersuchen, welche Auswirkung diese Tatsache auf den Begriff des Inertialsystems und vor allem auf die Transformation zwischen verschiedenen Inertialsystemen hat.

Wir müssen zunächst den Begriff des Inertialsystems gegenüber der nicht-relativistischen Theorie modifizieren. Ein Inertialsystem soll ab jetzt ein räumliches Bezugssystem und eine Uhr bedeuten, wobei letztere jedoch eine system-eigene Zeit, die sogenannte *Eigenzeit* des Systems misst. Abürzend werden wir ein Inertialsystem durch $S = \{\mathbf{r}, t\}$, ein zweites durch $S' = \{\mathbf{r}', t'\}$ charakterisieren.

Wir führen jetzt den Begriff des *Ereignisses* ein. Ein Ereignis kann z.B. die Aussendung eines Signals von einem Sender oder der Empfang eines Signals durch einen Empfänger sein, ganz allgemein eine physikalische Messung. Ereignisse haben offensichtlich einen Ort, an dem sie stattfinden, und eine Zeit, zu der sie stattfinden. Diese werden in verschiedenen Inertialsystemen im Allgemeinen auf verschiedene Weisen beschrieben:

	Ereignis 1	Ereignis 2
Inertialsystem S	(\mathbf{r}_1, t_1)	(\mathbf{r}_2, t_2)
Inertialsystem S'	(\mathbf{r}'_1, t'_1)	(\mathbf{r}'_2, t'_2)

Wir definieren den *Abstand* $(\Delta s)^2$ bzw. $(\Delta s')^2$ zwischen den Ereignissen 1 und 2, der in den beiden Inertialsystemen S und S' im Allgemeinen verschieden ist, durch

$$\begin{array}{l}
 S : (\Delta s)^2 := c^2 (\Delta t)^2 - (\Delta \mathbf{r})^2, \\
 S' : (\Delta s')^2 := c^2 (\Delta t')^2 - (\Delta \mathbf{r}')^2,
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l}
 \left\{ \begin{array}{l} \Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \\ \Delta t = t_2 - t_1, \end{array} \right\} \\
 \left\{ \begin{array}{l} \Delta \mathbf{r}' = \mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}'_1, \\ \Delta t' = t'_2 - t'_1, \end{array} \right\}
 \end{array} \right\} \quad (11.2)$$

Zwischen den Abständen $(\Delta s)^2$ und $(\Delta s')^2$ der beiden Ereignisse in S und S' muss es eine Transformations-Beziehung geben: $(\Delta s')^2 = F((\Delta s)^2)$. Nun impliziert die Aussage der Existenz einer maximalen Ausbreitungs-Geschwindigkeit c für physikalische Signale, dass diese in allen Inertialsystemen dieselbe ist. Diese Feststellung

ist eine spezielle Version des *Einsteinschen Relativitäts-Prinzips*: Die Naturgesetze sind invariant unter Transformationen zwischen Inertialsystemen. Insbesondere folgt, dass sich die Aussagen

$$(\Delta s)^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (\Delta s')^2 = 0 \quad (11.3)$$

gegenseitig implizieren: wenn das Signal zwischen den beiden Ereignissen 1 und 2 in S die maximale Ausbreitungs-Geschwindigkeit c besitzt, dann auch in S' und umgekehrt.

Wir zeigen nun, dass $(\Delta s')^2 = (\Delta s)^2$ für beliebige Ereignisse¹. Wir betrachten dazu die Abstände $(ds)^2$ und $(ds')^2$ zwischen zwei infinitesimal benachbarten Ereignissen. Die Transformation $(ds')^2 = F((ds)^2)$ muss aus physikalischen Gründen stetig sein, d.h., dass das Differential $(ds')^2$ von derselben Ordnung sein muss wie $(ds)^2$. Dann kann die Transformation $F(\dots)$ nur die Form

$$(ds')^2 = a(\dots)(ds)^2 \quad (11.4)$$

haben, worin $a(\dots)$ ein Transformations-Koeffizient ist, der nur noch von dimensionslosen relativen Eigenschaften von S und S' abhängen kann, nicht mehr von $(ds)^2$ oder $(ds')^2$. Die einzige Möglichkeit dafür ist die Kombination v/c , worin $v = |\mathbf{v}|$ der Betrag der Relativ-Geschwindigkeit von S und S' ist. Eine Abhängigkeit von der Richtung der Relativ-Geschwindigkeit \mathbf{v} würde die Isotropie des Raumes verletzen.

Wir betrachten nun die Hintereinander-Ausführung von Transformationen $S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_3$ zwischen drei Inertial-Systemen S_1, S_2, S_3 und vergleichen diese mit der direkten Transformation $S_1 \rightarrow S_3$. Offensichtlich muss dann

$$a\left(\frac{v_{31}}{c}\right) = a\left(\frac{v_{32}}{c}\right) a\left(\frac{v_{21}}{c}\right) \quad (11.5)$$

sein, worin v_{21} der Betrag der Relativ-Geschwindigkeit zwischen S_2 und S_1 ist, analog v_{32} und v_{31} . Nun gilt für die vektoriellen Relativ-Geschwindigkeiten

$$\mathbf{v}_{31} = \mathbf{v}_{32} + \mathbf{v}_{21},$$

¹Argumentation nach Landau-Lifshitz, Theoretische Physik, Bd. 2

so dass

$$v_{31} = |\mathbf{v}_{31}| = \sqrt{v_{32}^2 + v_{21}^2 + 2 v_{32} v_{21} \cos(\angle \mathbf{v}_{32}, \mathbf{v}_{21})}.$$

v_{31} hängt also vom Winkel $\angle \mathbf{v}_{32}, \mathbf{v}_{21}$ zwischen \mathbf{v}_{32} und \mathbf{v}_{21} ab, während $a(v_{31}/c)$ in (11.5) nicht von diesem Winkel abhängt, weil die rechte Seite dort nur von den Beträgen v_{32} und v_{21} abhängt. Dieser Widerspruch löst sich nur dann auf, wenn man schließt, dass $a(v/c) = \text{const}$, d.h., überhaupt nicht von v abhängt. Für die verbleibende Konstante a folgt nun aus (11.5) $a = a^2$, also, weil aus physikalischen Gründen $a \neq 0$ sein muss, $a = 1$, und somit

$$\boxed{(ds)^2 = (ds')^2 \quad \Longrightarrow \quad (\Delta s)^2 = (\Delta s')^2} \quad (11.6)$$

für alle Paare von Inertialsystemen.

11.2 Lorentz–Transformation

In der nicht–relativistischen Theorie folgt aus dem ersten Newtonschen Prinzip, dass Inertialsysteme durch die *Galilei–Transformation* miteinander verknüpft sind:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{v} t + \mathbf{r}'_0, \quad t = t'. \quad (11.7)$$

Die Transformation $t = t'$ drückt die Annahme einer universellen Zeit aus. Wir können immer $\mathbf{r}'_0 = 0$ durch Wahl des Zeit–Nullpunktes erreichen. \mathbf{v} ist die Relativ–Geschwindigkeit: Der Ursprung $\mathbf{r}' = 0$ des Bezugssystems S' bewegt sich in S mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} . Für die Geschwindigkeiten folgt aus (11.7)

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} + \mathbf{v}. \quad (11.8)$$

Die Geschwindigkeiten addieren sich wie Vektoren, was eine direkte Folge der universellen Zeit $t = t'$ ist. Dadurch lassen sich beliebig große Geschwindigkeiten erzeugen.

Um eine relativistisch korrekte Transformation zwischen zwei Inertialsystemen zu konstruieren, müssen wir von der Forderung (11.6)

$$(\Delta s)^2 = (\Delta s')^2 \quad \text{bzw.} \quad c^2 (\Delta t)^2 - (\Delta \mathbf{r})^2 = c^2 (\Delta t')^2 - (\Delta \mathbf{r}')^2 \quad (11.9)$$

ausgehen. Wir schreiben die gesuchte Transformation in der Form

$$\mathbf{r} = \mathbf{f}(\mathbf{r}', t'), \quad t = g(\mathbf{r}', t') \quad (11.10)$$

und betrachten den Abstand der Ereignisse (\mathbf{r}, t) und $0, 0$ in S bzw. (\mathbf{r}', t') und $0, 0$ in S' . (Das gemeinsame Ereignis $(0, 0)$ definiert die Ursprünge und den Zeit–Nullpunkt beider Systeme S und S' .) Dann muss

$$c^2 t'^2 - \mathbf{r}'^2 = c^2 t^2 - \mathbf{r}^2 = c^2 g^2(\mathbf{r}', t') - \mathbf{f}^2(\mathbf{r}', t') \quad (11.11)$$

identisch für alle \mathbf{r}' und t' erfüllt sein, was nur möglich ist, wenn $\mathbf{f}(\mathbf{r}', t')$ und $g(\mathbf{r}', t')$ *lineare* Funktionen sind. Daraus folgt übrigens bereits, dass sich auch in der relativistischen Theorie zwei Inertialsysteme nur mit einer konstanten Relativ–Geschwindigkeit gegeneinander bewegen können.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir die folgende Wahl treffen: Die Achsen \mathbf{e}_α bzw. \mathbf{e}'_α , jeweils $\alpha = x, y, z$ der orthogonalen Koordinatensysteme in S bzw. S' sollen jeweils parallel zueinander sein und \mathbf{e}_x und \mathbf{e}'_x sollen parallel zu der konstanten Relativ–Geschwindigkeit sein. Dann können wir die lineare Transformation zwischen S und S' in der Form

$$x = A x' + B c t', \quad c t = C x' + D c t' \quad (11.12)$$

schreiben. Die Bedingung (11.9) lautet mit der obigen Wahl der räumlichen Koordinatensysteme jetzt $c^2 t'^2 - x'^2 = c^2 t^2 - x^2$. Wenn wir die Form (11.12) in diese Bedingung einsetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned} c^2 t'^2 - x'^2 &= \\ &= (C x' + D c t')^2 - (A x' + B c t')^2 \\ &= (D^2 - B^2) c^2 t'^2 - (A^2 - C^2) x'^2 + 2(CD - AB) c t' x'. \end{aligned} \quad (11.13)$$

Damit diese Relation identisch für alle x' und t' erfüllt ist, ist zu fordern, dass

$$D^2 - B^2 = 1, \quad A^2 - C^2 = 1, \quad CD - AB = 0. \quad (11.14)$$

Dieses sind drei Bedingungen für die 4 Koeffizienten A, B, C, D . Wir erwarten also, dass die gesuchten Transformationen eine einparametrische Schar bilden. Wir erfüllen die Bedingungen (11.14) identisch durch

$$A = D = \cosh \phi, \quad B = C = \sinh \phi, \quad (11.15)$$

worin ϕ der Schar-Parameter ist. Die Transformation (11.12) lautet somit

$$\left. \begin{aligned} x &= x' \cosh \phi + c t' \sinh \phi, \\ c t &= x' \sinh \phi + c t' \cosh \phi. \end{aligned} \right\} \quad (11.16)$$

Wir bestimmen die physikalische Bedeutung des Schar-Parameters ϕ , indem wir den Ursprung des Systems S' bei $x' = 0$ vom System S aus beobachten. Für $x' = 0$ folgt aus (11.16):

$$x = c t' \sinh \phi, \quad c t = c t' \cosh \phi, \quad \implies \quad \frac{x}{c t} = \tanh \phi. \quad (11.17)$$

Nun ist $v := x/t$ offensichtlich die Relativ-Geschwindigkeit von S' gegen S in der gemeinsamen x -Richtung, so dass der Parameter ϕ definiert ist durch

$$\tanh \phi = \frac{v}{c} =: \beta. \quad (11.18)$$

Wir drücken auch $\cosh \phi$ und $\sinh \phi$ durch $\beta = v/c$ aus:

$$\begin{aligned} \cosh \phi &= \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 \phi}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} =: \gamma, \\ \sinh \phi &= \frac{\tanh \phi}{\sqrt{1 - \tanh^2 \phi}} = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \beta \gamma, \end{aligned}$$

so dass die gesuchte Transformation

$$\begin{aligned} x &= \frac{x' + v t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, & y &= y', & z &= z', \\ t &= \frac{t' + v x'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned} \quad (11.19)$$

lautet, bzw. unter Verwendung der obigen Abkürzungen β, γ auch

$$\begin{aligned} x &= \gamma (x' + \beta c t'), & y &= y', & z &= z', \\ t &= \gamma \left(t' + \frac{\beta}{c} x' \right). \end{aligned} \quad (11.20)$$

Diese relativistisch korrekte Transformation zwischen zwei Inertialsystemen heißt *Lorentz-Transformation* (in einer speziellen Form). Wir untersuchen noch, wie sich die Geschwindigkeiten unter der Lorentz-Transformation verhalten. Dazu bilden wir die Differentiale

$$dx = \gamma (dx' + \beta c dt'), \quad dt = \gamma \left(dt' + \frac{\beta}{c} dx' \right)$$

und $dy = dy', dz = dz'$ und bilden daraus

$$u_x := \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + \beta c dt'}{dt' + \beta dx'/c} = \frac{dx'/dt' + \beta c}{1 + \beta dx'/(c dt')} = \frac{u'_x + v}{1 + v u'_x/c^2}. \quad (11.21)$$

Hier sind u_x bzw. u'_x die Geschwindigkeiten eines Punktes, der sich in x -Richtung bewegt und von S bzw. S' beobachtet wird. Wir zeigen, dass stets $u_x < c$, wenn $v < c$ und $u'_x < c$ sind. Es ist dann nämlich

$$u'_x - \frac{u'_x v}{c} = u'_x \left(1 - \frac{v}{c} \right) < c \left(1 - \frac{v}{c} \right) = c - v,$$

woraus

$$u'_x + v < c + \frac{u'_x v}{c} = c \left(1 + \frac{u'_x v}{c^2} \right)$$

und weiter

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + v u'_x / c^2} < c \quad (11.22)$$

folgt. Durch eine relativistisch korrekte Addition ergeben sich Geschwindigkeiten, die stets kleiner als die Lichtgeschwindigkeit c sind.

11.3 4–Vektoren, Transformationen

11.3.1 4–Vektoren

Die Bedingung (11.6) für Transformationen zwischen Inertialsystemen, $(\Delta s)^2 = (\Delta s')^2$, lautet ausgeschrieben

$$c^2 (\Delta t)^2 - (\Delta \mathbf{r})^2 = c^2 (\Delta t')^2 - (\Delta \mathbf{r}')^2$$

oder auch

$$c^2 (\Delta t)^2 - (\Delta x_\alpha)^2 = c^2 (\Delta t')^2 - (\Delta x'_\alpha)^2. \quad (11.23)$$

In dieser letzteren Schreibweise haben wir die im Abschnitt 1.3.2 eingeführte *Summations-Konvention*

$$(\Delta x_\alpha)^2 = \Delta x_\alpha \cdot \Delta x_\alpha \equiv \sum_{\alpha=1}^3 (\Delta x_\alpha)^2 \quad (11.24)$$

benutzt. Unser Ziel ist es nun, den gesamten zeitlich-räumlichen Ausdruck $(\Delta s)^2 = c^2 (\Delta t)^2 - (\Delta x_\alpha)^2$ in einer zu (11.24) analogen Form zu schreiben. Dazu definieren wir einen 4–Vektor x^i mit den *kontravarianten* Komponenten

$$(x^i) := (ct, \mathbf{r}), \quad i = 0, 1, 2, 3, \quad (11.25)$$

d.h., $x^0 := ct$ und die x^i sind die Komponenten des Ortsvektors \mathbf{r} für $i = 1, 2, 3$. Zur Vermeidung von Verwechslungen benutzen wir im Folgenden immer lateinische Indizes i, j, k, \dots für 4-Vektoren und wie bisher griechische Indizes $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ für gewöhnliche 3-Vektoren. Weiter definieren wir einen 4-Vektor x_i mit den *kovarianten* Komponenten

$$(x_i) := (ct, -\mathbf{r}), \quad i = 0, 1, 2, 3. \quad (11.26)$$

Die kontravarianten und kovarianten Komponenten unterscheiden sich also in den *räumlichen* Komponenten um ein Vorzeichen, $x_i = -x^i$, $i = 1, 2, 3$, und stimmen in der *zeitlichen* Komponente überein: $x_0 = x^0$. (Wir schließen uns mit diesen Definitionen der Konvention in der internationalen Literatur an. Dabei kommt es zu der verwirrenden Folge, dass die räumlichen kovarianten Komponenten x_i gerade die negativen Werte der Komponenten des Ortsvektors \mathbf{r} sind, die wir bisher mit x_α , $\alpha = 1, 2, 3$ bezeichnet hatten. Die umgekehrte Version wäre naheliegender gewesen.) Wir bilden jetzt die Produkte $x^i x_i$ aus kontra- und kovarianten Komponenten und summieren über $i = 0, 1, 2, 3$:

$$\sum_{i=0}^3 x^i x_i = (ct)^2 - \mathbf{r}^2. \quad (11.27)$$

Künftig wollen wir auch für 4-Vektoren eine *Summations-Konvention* vereinbaren: Wenn in einem Produktterm kontra- und kovariante Komponenten eines 4-Vektors mit demselben Index i auftreten, dann soll über diesen Index von $i = 0$ bis $i = 3$ summiert werden:

$$a^i b_i \equiv \sum_{i=0}^3 a^i b_i. \quad (11.28)$$

Dagegen wird in einem Ausdruck $a^i b^i$ oder $a_i b_i$ *nicht* über i summiert. Damit erhält (11.27) die Form $x^i x_i = (ct)^2 - \mathbf{r}^2$, und die Bedingung (11.6) für Transformationen zwischen Inertialsystemen wird zu

$$\Delta x^i \Delta x_i = \Delta x'^i \Delta x'_i. \quad (11.29)$$

In Analogie zu $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_\alpha b_\beta$ bezeichnet man die Kombination (11.28) als *Skalarprodukt* zwischen zwei 4-Vektoren. Im gewöhnlichen 3-dimensionalen Raum ist $(\Delta \mathbf{r})^2 = \Delta x_\alpha \Delta x_\alpha$ ein räumlicher Abstand. Analog bezeichnet man $\Delta x^i \Delta x_i$ als den *4-Abstand* im 4-dimensionalen Raum aus Zeit und gewöhnlichem Raum.

11.3.2 4-Transformationen

Transformationen zwischen Inertialsystemen haben gemäß (11.29) die Eigenschaft, den 4-Abstand ungeändert zu lassen. Diese Eigenschaft besitzen im gewöhnlichen 3-dimensionalen Raum die orthogonalen Transformationen

$$x_\alpha = U_{\alpha\beta} x'_\beta, \quad x'_\alpha = U_{\beta\alpha} x_\beta, \quad U_{\gamma\alpha} U_{\gamma\beta} = U_{\alpha\gamma} U_{\beta\gamma} = \delta_{\alpha\beta}. \quad (11.30)$$

Wir übertragen diese Eigenschaft auf den 4-dimensionalen Raum aus Zeit und gewöhnlichem Raum und schreiben

$$x^i = U^i_k x'^k, \quad x'^i = U_k^i x^k. \quad (11.31)$$

Die Orthogonalitäts-Relationen lauten jetzt

$$U^i_j U_k^j = \delta_k^i, \quad U_j^i U^j_k = \delta_k^i, \quad (11.32)$$

worin

$$\delta_k^i = \begin{cases} 1 & i = k, \\ 0 & i \neq k, \end{cases} \quad (11.33)$$

das verallgemeinerte Kronecker-Symbol ist. Durch die Stellung der Indizes haben wir die Summationen in den linearen Transformationen eingeschlossen.

Die U^i_k sind *4-Matrizen*, die offensichtlich die allgemeine Form einer Lorentz-Transformation beschreiben. Unter ihnen muss die spezielle Lorentz-Transformation aus dem Abschnitt 11.2 in (11.20) sein. Wenn wir diese in der Form

$$\begin{aligned} x^0 &= \gamma (x'^0 + \beta x'^1), \\ x^1 &= \gamma (x'^1 + \beta x'^0), \quad x^2 = x'^2, \quad x^3 = x'^3 \end{aligned}$$

schreiben und mit der allgemeinen Form in (11.31) vergleichen, erhalten wir

$$(U^i_k) = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (11.34)$$

Für die 4-Matrizen sollen bei der Stellung der Indizes dieselben Regeln gelten wie bei 4-Vektoren: Wird ein Index i "gesenkt" oder "gehoben", bleibt das Element unverändert, wenn $i = 0$, und ändert sein Vorzeichen, wenn $i = 1, 2, 3$. Es ist also z.B.

$$U^{ik} = \begin{cases} U^i_k & \text{wenn } k = 0, \\ -U^i_k & \text{wenn } k = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (11.35)$$

Mit dieser Vereinbarung erhalten wir aus (11.34)

$$(U_i^k) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (11.36)$$

denn für $i = k$ ändert sich im Vergleich zu U^i_k in (11.34) kein Vorzeichen, weil dann gleichzeitig zwei zeitliche oder zwei räumliche Indizes gesenkt oder gehoben werden, und für $i = 0, k = 1$ und $i = 1, k = 0$ ändert sich das Vorzeichen.

Wenn wir nunmehr von der Transformation (11.31) ausgehen, können wir durch Senken und Heben der Indizes folgende Schritte ausführen

$$x^i = U^i_k x'^k \iff x_i = U_{ik} x'^k \iff x_i = U_i^k x'_k. \quad (11.37)$$

Im ersten Schritt haben wir konsequent auf beiden Seiten den Index i gesenkt, im zweiten Schritt den Index k einmal gehoben und einmal gesenkt, wodurch kein Vorzeichenwechsel auftritt. Analog wird

$$x'^i = U_k^i x^k \iff x'_i = U_{ki} x^k \iff x'_i = U^k_i x_k. \quad (11.38)$$

Jetzt können wir die Invarianz des Abstands, $x^i x_i = x'^i x'_i$ unter der allgemeinen Lorentz-Transformation unter Benutzung der Orthogonalitäts-Relation (11.32) explizit überprüfen:

$$x^i x_i = U^i_k x'^k U_i^j x'_j = U^i_k U_i^j x'^k x'_j = \delta_k^j x'^k x'_j = x'^k x'_k. \quad (11.39)$$

Das Transformations-Verhalten, das wir bisher am Beispiel des 4-Vektors x^i aus Zeit und Ort erklärt haben, soll nun auf beliebige 4-Vektoren übertragen werden. Wie im Fall des gewöhnlichen 3-dimensionalen Raums werden wir im Folgenden Objekte a^i einen 4-Vektor nennen, wenn sie sich unter einer allgemeinen Lorentz-Transformation wie der Vektor x^i in (11.31) transformieren, also

$$a^i = U^i_k a'^k, \quad a'^i = U_k^i a^k. \quad (11.40)$$

Dieselbe Rechnung wie in (11.39) liefert dann, dass allgemein jedes Skalar-Produkt $a^i b_i$ von zwei 4-Vektoren unter einer Lorentz-Transformation invariant ist:

$$a^i b_i = U^i_k a'^k U_i^j b'_j = U^i_k U_i^j a'^k b'_j = \delta_k^j a'^k b'_j = a'^k b'_k. \quad (11.41)$$

11.3.3 Die 4-Geschwindigkeit und 4-Beschleunigung

Wie wir im Abschnitt 11.3.1 begründet haben, ist $dx^i = (c dt, d\mathbf{r})$ ein 4-Vektor und $ds = \sqrt{c^2 (dt)^2 - (d\mathbf{r})^2}$ ein Skalar, d.h., letztere Größe ist invariant gegen Lorentz-Transformationen. Folglich ist

$$u^i := \frac{dx^i}{ds}, \quad u_i := \frac{dx_i}{ds} \quad (11.42)$$

wieder ein 4-Vektor, der als *4-Geschwindigkeit* bezeichnet wird. Seine Komponenten lauten

$$u^0 = \frac{dx^0}{ds} = \frac{c dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma, \quad (11.43)$$

mit $\beta = v/c$, und für $\alpha = 1, 2, 3$

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds} = \frac{\gamma}{c} \frac{dx^\alpha}{dt} = \frac{\gamma}{c} v^\alpha. \quad (11.44)$$

Hier sind $v^\alpha = dx^\alpha/dt$ die Komponenten der gewöhnlichen 3-dimensionalen Geschwindigkeit. Aus (11.43) und (11.44) folgt

$$u^i u_i = \gamma^2 - \frac{\gamma^2}{c^2} \mathbf{v}^2 = \gamma^2 (1 - \beta^2) = 1. \quad (11.45)$$

Wir differenzieren diese Relation nach s . Unter Beachtung der Produkt-Regel der Differentiation erhalten wir

$$\frac{du^i}{ds} u_i + u^i \frac{du_i}{ds} = 2 u^i \frac{du_i}{ds} = 0. \quad (11.46)$$

Auch $a^i := du^i/ds$ ist wieder ein 4-Vektor und wird als *4-Beschleunigung* bezeichnet. In der 4-dimensionalen Raum-Zeit stehen 4-Geschwindigkeit und 4-Beschleunigung senkrecht aufeinander: $a^i u_i = 0$.

11.3.4 Der 4-Gradient

Wir zeigen, dass auch die Ableitungen nach den Komponenten x^i und x_i des 4-Vektors aus Zeit und Ort sich wie 4-Vektoren verhalten. Dazu schreiben wir gemäß der Ketten-Regel der Differentiation

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{k=0}^3 \frac{\partial x'_k}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x'_k}. \quad (11.47)$$

$\partial x'_k/\partial x_i$ berechnen wir aus der Transformations-Relation auf der rechten Seite in (11.38). Indem wir dort die Bezeichnungen i und k vertauschen, erhalten wir

$$x'_k = U^i_k x_i, \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial x'_k}{\partial x_i} = U^i_k,$$

so dass

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{k=0}^3 U^i_k \frac{\partial}{\partial x'_k}. \quad (11.48)$$

Diese Relation hat die allgemeine Form (11.40) einer Lorentz-Transformation, nämlich

$$a^i = U^i_k a'^k,$$

wenn wir definieren

$$\frac{\partial}{\partial x_i} =: \partial^i, \quad \frac{\partial}{\partial x'_k} = \partial'^k, \quad (11.49)$$

so dass

$$\partial^i = U^i_k \partial'^k. \quad (11.50)$$

Völlig analog wird dann auch

$$\frac{\partial}{\partial x^i} =: \partial_i, \quad \frac{\partial}{\partial x'^k} = \partial'_k, \quad \partial_i = U_i^k \partial'_k. \quad (11.51)$$

∂^i bzw. ∂_i wird als *4-Gradient* bezeichnet. Dieser transformiert sich wie ein 4-Vektor. Wie sich sofort bestätigen lässt, gilt für den 4-Gradient

$$\partial_k x^i = \delta_k^i, \quad \partial_i x^i = \partial^i x_i = 4.$$

11.4 4–Tensoren

11.4.1 Gewöhnliche Tensoren

Objekte A^{ik}, B^{ikj}, \dots , die zwei oder mehr Indizes tragen, bezeichnet man als *4–Tensoren*, wenn sie sich wie Produkte $a^i b^k, a^i b^k c^j, \dots$ von Komponenten von 4–Tensoren transformieren:

$$\left. \begin{aligned} a^i b^k &= U^i_\ell U^k_m a'^\ell b'^m && \cong && A^{ik} &= U^i_\ell U^k_m A'^{\ell m}, \\ a^i b^k c^j &= U^i_\ell U^k_m U^j_n a'^\ell b'^m c'^n && \cong && B^{ikj} &= U^i_\ell U^k_m U^j_n B'^{\ell mn}, \end{aligned} \right\} \quad (11.52)$$

usw. Die Anzahl der Indizes bestimmt die *Stufe* des jeweiligen Tensors: A^{ik} ist ein Tensor 2. Stufe, B^{ikj} ist ein Tensor 3. Stufe usw. 4–Vektoren kann man als Tensoren 1. Stufe bezeichnen, Skalare als Tensoren 0–ter Stufe.

Ein Tensor 2. Stufe A^{ik} heißt wie üblich *symmetrisch*, wenn $A^{ik} = A^{ki}$. Durch beidseitiges Senken des Index k folgt

$$A^{ik} = A^{ki} \quad \Longleftrightarrow \quad A^i_k = A_k^i. \quad (11.53)$$

Wenn A^{ik} symmetrisch ist, schreibt man deshalb auch A^i_k statt A^i_k oder A_k^i .

Ein Beispiel für einen symmetrischen Tensor ist das Kronecker–Symbol δ_k^i , das wir bereits im Abschnitt 11.3.2 eingeführt hatten. Die Symmetrie von δ_k^i folgt direkt aus der Definition in (11.33). Die Tensor–Eigenschaft erkennen wir, wenn wir die Orthogonalitäts–Relation (11.32) wir folgt umschreiben:

$$\delta_k^i = U^i_j U_k^j = U^i_j U_k^\ell \delta_\ell^j. \quad (11.54)$$

Diese Relation ist vom Typ einer Transformation für einen Tensor 2. Stufe nach dem Muster von (11.52), jedoch mit der Besonderheit, dass $\delta_j^i = \delta'^i_j$. Der symmetrische Tensor δ_j^i besitzt in allen Inertialsystemen dieselbe Gestalt.

Ein weiteres Beispiel für einen symmetrischen Tensor ist der sogenannte *metrische Tensor*

$$g^{ik} = \begin{cases} 1 & i = k = 0, \\ -1 & i = k = 1, 2, 3 \\ 0 & i \neq k, \end{cases} \quad (11.55)$$

Aus der Definition folgt unmittelbar, dass g^{ik} symmetrisch ist und

$$g_k^i = \delta_k^i. \quad (11.56)$$

Damit ist dann auch bereits gezeigt, dass g^{ik} tatsächlich ein Tensor ist und dass auch g^{ik} in allen Inertialsystemen dieselbe Gestalt hat. Mit dem metrischen Tensor g^{ik} lässt sich das Heben und Senken von Indizes formal bewerkstelligen. Wie sich sofort bestätigen lässt, gilt

$$a^i = g^{ik} a_k, \quad a_i = g_{ik} a^k \quad (11.57)$$

usw., wobei $g_{ik} = g^{ik}$. Unter Verwendung des metrischen Tensors lässt sich das Skalarprodukt als

$$a_i b^i = g^{ik} a_i b_k = g_{ik} a^i b^k \quad (11.58)$$

schreiben.

Mehrfach indizierte Objekte werden in der Sprache der Mathematik als *Matrizen* bezeichnet. Matrizen mit zwei Indizes lassen sich in einem Schema darstellen, wie wir das für U^i_k in (11.34) oder für U_i^k in (11.36) im Abschnitt 11.3.2 getan haben. Auch Tensoren 2. Stufe lassen sich in einem solchen Matrix-Schema darstellen, z.B. die Tensoren δ_k^i und g^{ik} als

$$\left(\delta_k^i \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \left(g^{ik} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (11.59)$$

Die Begriffe *Matrix* und *Tensor* müssen aber scharf voneinander getrennt werden. Wie zu Beginn dieses Abschnitts dargestellt, ist ein Tensor beliebiger Stufe durch sein Verhalten unter einer Lorentz-Transformation definiert. Die Lorentz-Transformation ihrerseits lässt sich durch eine 4×4 -Matrix U^i_k bzw. U_i^k beschreiben. Diese Matrix stellt keinen Tensor dar.

11.4.2 Pseudo-Tensoren

Bereits im Abschnitt 1.3.3 hatten wir den 3-dimensionalen Levi-Civita-”Tensor” durch

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma} = \begin{cases} +1 & (\alpha, \beta, \gamma) = \text{gerade Permutation von } (1, 2, 3), \\ -1 & (\alpha, \beta, \gamma) = \text{ungerade Permutation von } (1, 2, 3), \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (11.60)$$

definiert, ohne nachgewiesen zu haben, dass es sich dabei tatsächlich um einen Tensor im Sinne des Verhaltens unter einer 3-dimensionalen orthogonalen Transformation handelt. Wie wir nämlich im Abschnitt 3.2.2 vereinbart hatten, sollte auch ein 3-dimensionaler Tensor dadurch charakterisiert sein, dass er sich unter einer orthogonalen Transformation wie das Produkt von Komponenten von Vektoren transformiert. Ein 3-dimensionaler Tensor 3. Stufe $A_{\alpha\beta\gamma}$ sollte sich also wie

$$A_{\alpha\beta\gamma} = U_{\alpha\mu} U_{\beta\nu} U_{\gamma\lambda} A'_{\mu\nu\lambda} \quad (11.61)$$

transformieren, worin $U_{\alpha\mu}$ eine orthogonale 3×3 -Matrix ist, vgl. (11.30). Wir nehmen nun an, dass $\epsilon'_{\alpha\beta\gamma}$ die Eigenschaft (11.60) des 3-dimensionalen Levi-Civita-Tensors besitzt und diskutieren die rechte Seite von (11.61) für den Fall $A'_{\mu\nu\lambda} = \epsilon'_{\mu\nu\lambda}$:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} &= U_{\alpha\mu} U_{\beta\nu} U_{\gamma\lambda} \epsilon'_{\mu\nu\lambda} = \begin{vmatrix} U_{\alpha 1} & U_{\alpha 2} & U_{\alpha 3} \\ U_{\beta 1} & U_{\beta 2} & U_{\beta 3} \\ U_{\gamma 1} & U_{\gamma 2} & U_{\gamma 3} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{vmatrix} \epsilon'_{\alpha\beta\gamma} = \det(U) \epsilon'_{\alpha\beta\gamma}, \end{aligned} \quad (11.62)$$

worin wir die bereits im Abschnitt 1.3.3 erläuterte Definition einer 3×3 -Determinante durch das Levi-Civita-Symbol und das Verhalten einer Determinante bei Permutation ihrer Zeilen benutzt haben. Nun folgt aus der Orthogonalitätsrelation (11.30),

$$U_{\gamma\alpha} U_{\gamma\beta} = U_{\alpha\gamma} U_{\beta\gamma} = \delta_{\alpha\beta} \quad \text{bzw.} \quad U^T U = U U^T = 1,$$

(U^T = Transponierte von U), dass

$$\det(U^T U) = \det(U^2) = 1, \quad \implies \quad \det(U) = \pm 1. \quad (11.63)$$

Das Ergebnis in (11.62) besagt also, dass $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ unter einer orthogonalen Transformation mit $\det(U) = +1$ invariant ist, jedoch unter einer orthogonalen Transformation mit $\det(U) = -1$ sein Vorzeichen ändert. Nun wollen wir aber erreichen, dass das Levi-Civita-Symbol in sämtlichen Koordinaten-Systemen die Gestalt (11.60) besitzt. Dazu muss offensichtlich der Faktor $\det(U)$ kompensiert werden. Das können wir dadurch erreichen, dass die allgemeine Transformation (11.61) im Fall des Levi-Civita-Tensors einen zusätzlichen Faktor $\det(U)$ erhält, also

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma} = \det(U) U_{\alpha\mu} U_{\beta\nu} U_{\gamma\lambda} \epsilon'_{\mu\nu\lambda}. \quad (11.64)$$

Dieser Faktor $\det(U)$ tritt dann auch in den Transformationen aller Tensoren auf, in deren Definition der Levi-Civita-Tensor genau einmal als Faktor auftritt. Man nennt Tensoren mit dem Transformations-Verhalten (11.64) *Pseudo-Tensoren*.

Wir zeigen jetzt, dass die Unterscheidung zwischen "gewöhnlichen" Tensoren und Pseudo-Tensoren gerade dem unterschiedlichen Verhalten von polaren und axialen Vektoren unter Raumspiegelungen entspricht, das wir im Abschnitt 7.1.3 im Zusammenhang mit der Paritäts-Umkehr diskutiert hatten. Wir betrachten eine Raumspiegelung am Ursprung, dargestellt durch die orthogonale Transformation

$$U = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \det(U) = -1 \quad (11.65)$$

Gewöhnliche bzw. polare Vektoren a_α, b_β, \dots transformieren sich unter diesem U offensichtlich wie $a_\alpha = -a'_\alpha, b_\beta = -b'_\beta, \dots$. Ein axialer Vektor c_γ , definiert als

$$c_\gamma = \epsilon_{\gamma\alpha\beta} a_\alpha b_\beta \quad (11.66)$$

transformiert sich dann gemäß (11.64) unter U aus (11.65) wie

$$c_\gamma = \det(U) U_{\gamma\mu} c'_\mu = -\det(U) c'_\gamma = +c'_\gamma, \quad (11.67)$$

behält also seine Richtung unter Raumspiegelung bei, was gerade die axialen Vektoren auszeichnete.

Analog zur Definition des 3-dimensionalen Levi-Civita-Tensors in (11.60) definieren wir seine 4-dimensionale Version durch

$$\epsilon_{ijkl} = \begin{cases} +1 & (i, j, k, l) = \text{gerade Permutation von } (1, 2, 3, 4) \\ -1 & (i, j, k, l) = \text{ungerade Permutation von } (1, 2, 3, 4) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (11.68)$$

Alle Eigenschaften des 3-dimensionalen Levi-Civita-Tensors übertragen sich analog auf den 4-dimensionalen Fall, insbesondere das Verhalten unter Lorentz-Transformationen. Mit der zu (11.64) analogen Transformations-Relation und unter der Annahme, dass ϵ'_{\dots} die Eigenschaft (11.68) besitzt, erhalten wir

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijkl} &= \det(U) U_i^m U_j^n U_k^p U_\ell^q \epsilon'_{mnpq} \\ &= \det(U) \begin{vmatrix} U_i^1 & U_i^2 & U_i^3 & U_i^4 \\ U_j^1 & U_j^2 & U_j^3 & U_j^4 \\ U_k^1 & U_k^2 & U_k^3 & U_k^4 \\ U_\ell^1 & U_\ell^2 & U_\ell^3 & U_\ell^4 \end{vmatrix} \\ &= (\det(U))^2 \epsilon'_{ijkl} = \epsilon'_{ijkl}, \end{aligned} \quad (11.69)$$

d.h., durch den zusätzlichen Faktor $\det(U)$ wird der 4-dimensionale Levi-Civita-Pseudo-Tensor invariant gegen Lorentz-Transformationen. Wir weisen noch darauf hin, dass Transformationen mit $\det(U) = -1$ sowohl durch eine Zeit-Spiegelung $t \rightarrow -t$ als auch durch eine Raum-Spiegelung $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$ realisiert werden können.

Im Anhang D sind die Rechenregeln für den 3- und 4-dimensionalen Levi-Civita-Tensor zusammen gestellt und hergeleitet. Die wichtigsten unter ihnen lauten

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\alpha\mu\nu} = \begin{vmatrix} \delta_{\beta\mu} & \delta_{\beta\nu} \\ \delta_{\gamma\mu} & \delta_{\gamma\nu} \end{vmatrix} = \delta_{\beta\mu} \delta_{\gamma\nu} - \delta_{\beta\nu} \delta_{\gamma\mu}, \quad (11.70)$$

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\alpha\beta\nu} = 2 \delta_{\gamma\nu}, \quad (11.71)$$

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} = 6, \quad (11.72)$$

$$\epsilon^{ijkl} \epsilon_{inpq} = - \begin{vmatrix} \delta_n^j & \delta_p^j & \delta_q^j \\ \delta_n^k & \delta_p^k & \delta_q^k \\ \delta_n^\ell & \delta_p^\ell & \delta_q^\ell \end{vmatrix}, \quad (11.73)$$

$$\epsilon^{ijk\ell} \epsilon_{ijpq} = -2 \begin{vmatrix} \delta_p^k & \delta_q^k \\ \delta_p^\ell & \delta_q^\ell \end{vmatrix} = -2 (\delta_p^k \delta_q^\ell - \delta_q^k \delta_p^\ell), \quad (11.74)$$

$$\epsilon^{ijk\ell} \epsilon_{ijkq} = -6 \delta_q^\ell, \quad (11.75)$$

$$\epsilon^{ijk\ell} \epsilon_{ijkl} = -24. \quad (11.76)$$

Außerdem gilt

$$\epsilon_{ijkl} = -\epsilon^{ijkl}. \quad (11.77)$$

Kapitel 12

Lorentz–Kovarianz der Elektrodynamik

Die physikalische Motivation für die Entwicklung der klassischen Feldtheorie im Kapitel 1 war die Feststellung, dass wegen der Existenz einer maximalen Signal-Geschwindigkeit c physikalische Wechselwirkungen nur über Felder vermittelt werden können. In diesem Kapitel zeigen wir nun, dass die aus dieser Feststellung entwickelte Elektrodynamik auch tatsächlich die daraus folgende korrekte Invarianz besitzt, nämlich die unter Lorentz–Transformationen.

12.1 4–Strom und 4–Potential

Unser Ziel wird es zunächst sein, auch in der Elektrodynamik 4–Vektoren in derselben Weise wie in der relativistischen Punktmechanik zu identifizieren. Die elementaren 4–Vektoren der Punktmechanik sind der Zeit–Ortsvektor $x^i = (ct, \mathbf{r})$ und der Energie–Impuls–Vektor $p^i = (E/c, \mathbf{p})$.

12.1.1 4–Strom

Eine grundlegende Aussage für die Elektrodynamik ist die der *Ladungserhaltung*

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{j} = 0, \quad (12.1)$$

worin ρ die räumliche Ladungsdichte und \mathbf{j} die elektrische Stromdichte sind, vgl. Kapitel 5. Wir fordern jetzt, dass die Aussage der Ladungserhaltung invariant gegen einen Wechsel des Inertialsystems durch eine Lorentz-Transformation ist. Dann muss sich die linke Seite in (12.1) als ein Lorentz-Skalar schreiben lassen. Die Ableitungen in (12.1) erfolgen bereits nach dem 4-Vektor $x^i = (ct, \mathbf{r})$. Das erkennen wir in der Schreibweise

$$\frac{\partial}{\partial(ct)} c\rho + \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^\alpha} j^\alpha = 0, \quad (12.2)$$

worin j^α die drei räumlichen Komponenten der Stromdichte \mathbf{j} sind. Die linke Seite von (12.2) wird nun genau dann ein Lorentz-Skalar, wenn wir

$$(j^i) := (c\rho, \mathbf{j}) \quad (j_i) := (c\rho, -\mathbf{j}) \quad (12.3)$$

als einen 4-Vektor, nämlich als die *4-Stromdichte* einführen. Wir erinnern nun an die Definition des 4-Gradienten im Abschnitt 11.3.4, nämlich

$$(\partial_i) = \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial(ct)}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right), \quad (\partial^i) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial(ct)}, -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right), \quad (12.4)$$

und können damit die Ladungserhaltung in der Lorentz-invarianten Form

$$\boxed{\partial_i j^i = 0} \quad (12.5)$$

ausdrücken. Mit der Einsicht, dass j^i ein 4-Vektor ist, können wir sogleich auch das Verhalten seiner Komponenten $c\rho, j^\alpha$ unter einer Lorentz-Transformation angeben, z.B. unter derjenigen, die wir im Abschnitt 11.3.2 als Beispiel betrachtet hatten:

$$(U^i_k) = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (12.6)$$

Einsetzen von j^i aus der Definition (12.3) in die Transformations-Relation $j^i = U^i_k j'^k$ führt auf

$$\begin{aligned} \rho &= \gamma \left(\rho' + \frac{v}{c^2} j'^1 \right), & j^2 &= j'^2, \\ j^1 &= \gamma \left(v \rho' + j'^1 \right), & j^3 &= j'^3. \end{aligned} \quad (12.7)$$

Wie anschaulich zu erwarten ist, "mischt" eine Lorentz-Transformation mit einer Relativ-Geschwindigkeit $v \neq 0$ die Ladungs- und Stromdichten.

12.1.2 4-Potential

Wie wir im Abschnitt 7.4.2 gezeigt haben, erfüllen das skalare Potential Φ und das Vektor-Potential \mathbf{A} die Wellen-Gleichungen

$$\square \Phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho, \quad \square \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}. \quad (12.8)$$

Wir wollen auch diese Wellen-Gleichung in eine Lorentz-invariante Schreibweise umformen. Dazu beachten wir zunächst, dass der Operator \square bereits ein Lorentz-invarianter, skalarer Operator ist:

$$\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = -\partial_i \partial^i, \quad (12.9)$$

vgl. (12.4). Wenn wir nun die beiden Wellen-Gleichungen (12.8) mit $\mu_0 = 1/(\epsilon_0 c^2)$ in der Form

$$\left. \begin{aligned} \square \Phi &= -\frac{1}{\epsilon_0 c} c \rho \\ \square c \mathbf{A} &= -\frac{1}{\epsilon_0 c} \mathbf{j}, \end{aligned} \right\} \quad (12.10)$$

schreiben, erkennen wir, dass sich diese Gleichungen in der 4-Schreibweise

$$\boxed{\square \Phi^i = -\frac{1}{\epsilon_0 c} j^i} \quad (12.11)$$

zusammen fassen lassen, wenn wir ein 4-Potential Φ^i durch

$$(\Phi^i) := (\Phi, c \mathbf{A}), \quad (\Phi_i) := (\Phi, -c \mathbf{A}) \quad (12.12)$$

definieren. Beide Seiten der Gleichung (12.11) sind jetzt 4-Vektoren. Folglich transformiert sich diese Gleichung unter einer Lorentz-Transformation in

$$\square' \Phi'^i = -\frac{1}{\epsilon_0 c} j'^i. \quad (12.13)$$

Die Gleichungen (12.11) bzw. (12.13) sind also nicht "invariant" wie Skalare, sondern *Lorentz-kovariant*, d.h., sie haben dieselbe Form in den jeweiligen Variablen. In diesem Fall ist sogar noch $\square' = \square$. Da $\Phi^i = (\rho, c \mathbf{A})$ ein 4-Vektor ist, können wir sogleich auch nach dem Muster von (12.7) das Verhalten seiner Komponenten unter der speziellen Lorentz-Transformation (12.6) bestimmen:

$$\begin{aligned} \Phi &= \gamma (\Phi' + v A'^1), & A^2 &= A'^2, \\ A^1 &= \gamma \left(\frac{v}{c^2} \Phi' + A'^1 \right), & A^3 &= A'^3. \end{aligned} \quad (12.14)$$

12.1.3 Lorentz-Eichung, Umeichung

Die Potentiale Φ und \mathbf{A} erfüllen die Wellen-Gleichungen (12.8) nur dann, wenn diese die *Lorentz-Eichung*

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \Phi + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{A} = 0 \quad (12.15)$$

erfüllen. Mit den Definitionen des 4-Vektors Φ^i in (12.12) lässt sich die Forderung der Lorentz-Eichung in die Lorentz-invariante Form

$$\partial_i \Phi^i = 0 \quad (12.16)$$

bringen. Wenn also die Lorentz-Eichung in einem Inertialsystem erfüllt ist, dann auch in jedem anderen. Diese Aussage ist unverzichtbar für die Feststellung der Lorentz-Kovarianz der Wellen-Gleichung (12.11).

Im Abschnitt 7.4.1 haben wir gezeigt, dass sich die Potentiale Φ und \mathbf{A} einer Eichtransformation

$$\Phi' = \Phi - \frac{\partial}{\partial t} F \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} F \quad (12.17)$$

unterziehen lassen und dass die Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} dadurch nicht geändert werden. Hier ist $F = F(\mathbf{r}, t)$ eine beliebige (differenzierbare) Funktion. Auch die Eichtransformation (12.17) lässt sich Lorentz-kovariant formulieren. Dazu formen wir wie folgt um:

$$\left. \begin{aligned} \Phi' &= \Phi - \frac{\partial}{\partial(ct)} cF \\ c\mathbf{A}' &= c\mathbf{A} + \frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} cF \end{aligned} \right\} \Phi'^i = \Phi^i - \partial^i G, \quad (12.18)$$

worin wir $\partial^i = \partial/\partial x_i$ beachtet haben und $G := cF$ eine beliebige (differenzierbare) skalare Funktion des 4-Vektors x^i ist.

12.2 Der Feld-Tensor

12.2.1 Definition

Die Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} werden als Ableitungen der Potentiale Φ und \mathbf{A} dargestellt:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \Phi - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}, \quad \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{A}. \quad (12.19)$$

Es liegt deshalb nahe, den 4-Tensor

$$\boxed{F^{ik} := \partial^i \Phi^k - \partial^k \Phi^i} \quad (12.20)$$

zu untersuchen, worin ∂^i der 4-Gradient und $\Phi^i = (\Phi, c \mathbf{A})$ das 4-Potential aus (12.12) ist. Dass F^{ik} ein Tensor ist, folgt daraus, dass $\partial^i \Phi^k$ das Produkt von Komponenten von zwei 4-Vektoren ist, vgl. Abschnitt 11.4. Dass einer dieser beiden 4-Vektoren, nämlich ∂^i , ein Operator ist, ändert nichts am Transformations-Verhalten des Produkts. Die gleiche Transformations-Eigenschaft besitzt die Kombination $\partial^k \Phi^i$. Aus der Definition (12.20) ist auch ersichtlich, dass F^{ik} ein *antisymmetrischer* Tensor ist: $F^{ik} = -F^{ki}$.

Wir berechnen zunächst das Element F^{10} :

$$\begin{aligned} F^{10} &= \partial^1 \Phi^0 - \partial^0 \Phi^1 = \frac{\partial}{\partial x_1} \Phi^0 - \frac{\partial}{\partial x_0} \Phi^1 = \\ &= -\frac{\partial}{\partial x^1} \Phi^0 - \frac{\partial}{\partial x^0} \Phi^1 = -\frac{\partial}{\partial x^1} \Phi - \frac{\partial}{\partial(ct)} c A^1 = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^1} \Phi - \frac{\partial}{\partial t} A^1 = E^1. \end{aligned} \quad (12.21)$$

Wir können diese Rechnung unter Verwendung der Antisymmetrie von F^{ik} sofort verallgemeinern zu

$$F^{\alpha 0} = -F^{0\alpha} = E^\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (12.22)$$

Für das Element F^{21} erhalten wir

$$\begin{aligned} F^{21} &= \partial^2 \Phi^1 - \partial^1 \Phi^2 = \frac{\partial}{\partial x_2} c A^1 - \frac{\partial}{\partial x_1} c A^2 = \\ &= c \left(\frac{\partial}{\partial x^1} A^2 - \frac{\partial}{\partial x^2} A^1 \right) = c B^3. \end{aligned} \quad (12.23)$$

Auch diese Rechnung lässt sich sofort verallgemeinern zu

$$\left. \begin{aligned} F^{21} &= -F^{12} = c B^3, \\ F^{32} &= -F^{23} = c B^1, \\ F^{13} &= -F^{31} = c B^2. \end{aligned} \right\} \quad (12.24)$$

Der Tensor F^{ik} , der sogenannte *Feld-Tensor*, hat somit die folgende Gestalt:

$$(F^{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -c B^3 & c B^2 \\ E^2 & c B^3 & 0 & -c B^1 \\ E^3 & -c B^2 & c B^1 & 0 \end{pmatrix} \quad (12.25)$$

Die 6 räumlichen Komponenten der Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} bilden also die 6 unabhängigen Komponenten eines antisymmetrischen 4×4 -Tensors.

Wir überzeugen uns nochmals davon, dass eine Eichtransformation (12.18) den Feld-Tensor invariant lässt:

$$\begin{aligned} F'^{ik} &= \partial^i \Phi'^k - \partial^k \Phi'^i \\ &= \partial^i (\Phi^k - \partial^k G) - \partial^k (\Phi^i - \partial^i G) \\ &= \partial^i \Phi^k - \partial^k \Phi^i - \underbrace{(\partial^i \partial^k G - \partial^k \partial^i G)}_{=0} = F^{ik}. \end{aligned} \quad (12.26)$$

12.2.2 Lorentz-Transformation der Felder

Da die Felder Komponenten eines Tensors sind, können wir deren Verhalten unter einer Lorentz-Transformation gemäß

$$F'^{ik} = U^i_j U^k_\ell F'^{j\ell} \quad (12.27)$$

angeben. Als Beispiel wählen wir die Lorentz-Transformation aus (12.6),

$$(U^i_k) = \begin{pmatrix} \gamma & \beta \gamma & 0 & 0 \\ \beta \gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

die eine Relativ-Bewegung der beiden Systeme längs der parallelen x^1 - bzw. x'^1 -Achsen mit der Relativ-Geschwindigkeit v beschreibt. Es ist

$$\begin{aligned}
E^1 = F^{10} &= U^1_j U^0_\ell F'^{j\ell} \\
&= U^1_0 U^0_1 F'^{01} + U^1_1 U^0_0 F'^{10} \\
&= (\beta\gamma)^2 F'^{01} + \gamma^2 F'^{10} \\
&= \underbrace{\gamma^2 (1 - \beta^2)}_{=1} F'^{10} = F'^{10} = E'^1.
\end{aligned} \tag{12.28}$$

Die Komponente E^1 des elektrischen Feldes längs der Relativ-Bewegung bleibt unverändert. Die Berechnung von E^2 ergibt

$$\begin{aligned}
E^2 = F^{20} &= U^2_j U^0_\ell F'^{j\ell} = U^0_\ell F'^{2\ell} \\
&= U^0_0 F'^{20} + U^0_1 F'^{21} \\
&= \gamma F'^{20} + \beta\gamma F'^{21} = \gamma (E'^2 + v B'^3),
\end{aligned} \tag{12.29}$$

und analog auch

$$E^3 = \gamma (E'^3 - v B'^2). \tag{12.30}$$

Die Transformation der räumlichen Komponenten des Feldes \mathbf{B} ergibt

$$B^1 = \frac{1}{c} F^{32} = \frac{1}{c} U^3_j U^2_\ell F'^{j\ell} = \frac{1}{c} F'^{32} = B'^1, \tag{12.31}$$

$$\begin{aligned}
B^2 = \frac{1}{c} F^{13} &= \frac{1}{c} U^1_j U^3_\ell F'^{j\ell} = \frac{1}{c} U^1_j F'^{j3} \\
&= \frac{1}{c} U^1_0 F'^{03} + \frac{1}{c} U^1_1 F'^{13} \\
&= \frac{\beta\gamma}{c} F'^{03} + \frac{\gamma}{c} F'^{13} = \gamma \left(B'^2 - \frac{v}{c^2} E'^3 \right),
\end{aligned} \tag{12.32}$$

und analog

$$B^3 = \gamma \left(B'^3 + \frac{v}{c^2} E'^2 \right), \tag{12.33}$$

zusammen gefasst

$$\left. \begin{aligned} E^1 &= E'^1, & B^1 &= B'^1 \\ E^2 &= \gamma (E'^2 + v B'^3) & B^2 &= \gamma \left(B'^2 - \frac{v}{c^2} E'^3 \right) \\ E^3 &= \gamma (E'^3 - v B'^2) & B^3 &= \gamma \left(B'^3 + \frac{v}{c^2} E'^2 \right) \end{aligned} \right\} \quad (12.34)$$

12.3 4-Schreibweise der Maxwell'schen Gleichungen

Die Maxwell'schen Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}, & \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{B} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}, & \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{E} &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho, \end{aligned} \right\} \quad (12.35)$$

enthalten Ableitungen der Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} nach dem Ort \mathbf{r} und der Zeit t . Wir erwarten deshalb, dass die Maxwell'schen Gleichungen in der 4-Schreibweise Kombinationen aus ∂_i und dem Feldtensor F^{ik} enthalten.

12.3.1 Die inhomogenen Gleichungen

Die einfachste Kombination dieser Art ist $\partial_i F^{ik}$. Hier wird über $i = 0, 1, 2, 3$ summiert, so dass das Ergebnis dieser Operation insgesamt ein 4-Vektor mit dem kontravarianten Komponenten-Index k ist. Die Kombination $\partial_i F^{ik}$ wird deshalb auch *Verjüngung* des Feld-Tensors F^{ik} genannt. Wir berechnen unter Verwendung der Darstellung des Feld-Tensors in (12.25) und der Maxwell'schen Gleichungen (12.35)

$$\begin{aligned} \partial_i F^{i0} &= \frac{\partial}{\partial x^i} F^{i0} = \frac{\partial}{\partial x^1} E^1 + \frac{\partial}{\partial x^2} E^2 + \frac{\partial}{\partial x^3} E^3 \\ &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho = \frac{1}{\epsilon_0 c} c \rho = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^0, \end{aligned} \quad (12.36)$$

worin wir von der Definition (12.3) der 4-Stromdichte $(j^i) = (c\rho, \mathbf{j})$ Gebrauch gemacht haben. Ebenso berechnen wir

$$\begin{aligned}
 \partial_i F^{i1} = \frac{\partial}{\partial x^i} F^{i1} &= \frac{\partial}{\partial x^0} F^{01} + \frac{\partial}{\partial x^2} F^{21} + \frac{\partial}{\partial x^3} F^{31} \\
 &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} E^1 + c \left(\frac{\partial}{\partial x^2} B^3 - \frac{\partial}{\partial x^3} B^2 \right) \\
 &= \frac{1}{\epsilon_0 c} \left[-\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} E^1 + \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{B} \right)^1 \right] = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^1. \quad (12.37)
 \end{aligned}$$

Völlig analoge Ausdrücke ergeben sich in $\partial_i F^{ik}$ für $k = 2, 3$ statt $k = 1$. Wir fassen die Ergebnisse der beiden Rechnungen in (12.36) und (12.37) zusammen zu

$$\boxed{\partial_i F^{ik} = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^k.} \quad (12.38)$$

Diese 4 Gleichungen für $k = 0, 1, 2, 3$ stellen die 4-Schreibweise der inhomogenen Maxwell'schen Gleichungen dar. Ohne weitere Argumentation stellen wir fest, dass diese 4-Gleichung *Lorentz-kovariant* ist, denn links steht ein durch Verjüngung erzeugter 4-Vektor und rechts steht der 4-Vektor der Stromdichte. Beide Seiten transformieren sich also in derselben Weise.

12.3.2 Die homogenen Maxwell'schen Gleichungen

Zur Gewinnung der 4-Schreibweise für die homogenen Maxwell'schen Gleichungen gehen wir von $\partial \mathbf{B} / \partial \mathbf{r} = 0$ aus und formen diese Gleichung unter Verwendung des Feld-Tensors in (12.25), seiner Antisymmetrie und von $\partial_i = -\partial^i$ für $i = 1, 2, 3$ wie folgt in die 4-Schreibweise um:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{B} &= \partial_1 B^1 + \partial_2 B^2 + \partial_3 B^3 \\
 &= c \left(\partial_1 F^{32} + \partial_2 F^{13} + \partial_3 F^{12} \right) \\
 &= c \left(\partial^1 F^{23} + \partial^2 F^{31} + \partial^3 F^{12} \right). \quad (12.39)
 \end{aligned}$$

In der letzten Zeile auf der rechten Seite steht die zyklische Kombination $\partial^1 F^{23} + \dots$ von sogenannten *äußeren Ableitungen* des Feld-Tensors für die Indizes 1, 2, 3, 1, 2, 3. Als äußere Ableitung eines Tensors wird allgemein eine nicht-verjüngende Kombination $\partial^i F^{jk}$ bezeichnet. Die zyklische Kombination in (12.39) können wir unter Verwendung des 4-dimensionalen Levi-Civita-Tensors auch wie folgt schreiben:

$$\partial^1 F^{23} + \partial^2 F^{31} + \partial^3 F^{12} = -\frac{1}{2} \epsilon_{0jkl} \partial^j F^{kl}. \quad (12.40)$$

Zur Bestätigung beachten wir, dass auf der rechten Seite nur dann nicht-verschwindende Terme auftreten, wenn j, k, ℓ jeweils verschiedene Werte von 1, 2, 3 annehmen und dass

$$\begin{aligned} \epsilon_{0123} &= \epsilon_{0231} = \epsilon_{0312} = -1, \\ \epsilon_{0132} &= \epsilon_{0213} = \epsilon_{0321} = +1. \end{aligned}$$

(Es ist $\epsilon_{0123} = -1$, weil definitionsgemäß $\epsilon^{0123} = +1$ und somit $\epsilon_{0123} = -\epsilon^{0123} = -1$, weil 3 räumliche Indizes gesenkt werden.) Damit wird

$$\begin{aligned} \epsilon_{0jkl} \partial^j F^{kl} &= -\partial^1 F^{23} + \partial^1 F^{32} \\ &\quad -\partial^3 F^{12} + \partial^3 F^{21} \\ &\quad -\partial^2 F^{31} + \partial^2 F^{13} \\ &= -2 \left(\partial^1 F^{23} + \partial^2 F^{31} + \partial^3 F^{12} \right), \end{aligned} \quad (12.41)$$

womit (12.40) nachgewiesen ist. Unter Verwendung von (12.40) können wir nun die homogene Maxwellsche Gleichung $\partial \mathbf{B} / \partial \mathbf{r} = 0$ in der Form

$$\epsilon_{0jkl} \partial^j F^{kl} = 0 \quad (12.42)$$

schreiben. Dieses Ergebnis führt auf die Erwartung, dass die homogenen Maxwellschen Gleichungen insgesamt die 4-Form

$$\boxed{\epsilon_{ijkl} \partial^j F^{kl} = 0} \quad (12.43)$$

haben. Zur Bestätigung berechnen wir $\epsilon_{1jkl} \partial^j F^{k\ell}$ nach demselben Muster wie in (12.41):

$$\begin{aligned}
\epsilon_{1jkl} \partial^j F^{k\ell} &= -\partial^2 F^{30} + \partial^2 F^{03} \\
&\quad -\partial^0 F^{23} + \partial^0 F^{32} \\
&\quad -\partial^3 F^{02} + \partial^3 F^{20} \\
&= -2 \left(\partial^0 F^{23} + \partial^2 F^{30} + \partial^3 F^{02} \right), \\
\frac{1}{2} \epsilon_{1jkl} \partial^j F^{k\ell} &= -\partial^0 F^{23} - \partial^2 F^{30} - \partial^3 F^{02} \\
&= -\partial^0 F^{23} + \partial_2 F^{30} + \partial_3 F^{02} \\
&= \frac{\partial}{\partial t} B^1 + \frac{\partial}{\partial x^2} E^3 - \frac{\partial}{\partial x^3} E^2 \\
&= \frac{\partial}{\partial t} B^1 + \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{E} \right)^1.
\end{aligned} \tag{12.44}$$

Auf der rechten Seite steht gerade die 1-Komponente der linken Seite der homogenen Maxwell'schen Gleichung in der Gestalt

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{E} = 0, \tag{12.45}$$

so dass $\epsilon_{1jkl} \partial^j F^{k\ell} = 0$. Analog zu (12.44) zeigen wir, dass $\epsilon_{ijkl} \partial^j F^{k\ell} = 0$ auch für $i = 2, 3$. Damit haben wir (12.43) für alle $i = 0, 1, 2, 3$ bestätigt.

Auch die 4-Form der homogenen Maxwell'schen Gleichungen in (12.43) ist Lorentz-kovariant. Allerdings steht auf der linken Seite ein 4-Pseudo-Vektor, vgl. Abschnitt 11.4.2, d.h., unter einer Lorentz-Transformation U^i_k erhalten wir aus (12.43)

$$\det(U) \epsilon_{ijkl} \partial'^j F'^{k\ell} = 0. \tag{12.46}$$

Da aber auf der rechten Seite $= 0$ steht, können wir den Faktor $\det(U)$ sogleich herauskürzen.

12.3.3 Diskussion

Die Maxwell'schen Gleichungen lauten in der 4-Schreibweise zusammengefasst

$$\boxed{\partial_i F^{ik} = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^k, \quad \epsilon_{ijkl} \partial^j F^{kl} = 0.} \quad (12.47)$$

Man kann $\partial_i F^{ik}$ als verallgemeinerte 4-Divergenz definieren, die einen 4-Tensor zu einem 4-Vektor verjüngt. Analog kann man $\epsilon_{ijkl} \partial^j F^{kl}$ als verallgemeinerte 4-Rotation definieren, die einen 4-Tensor zu einem 4-Pseudo-Vektor verjüngt. Mit diesen Definitionen kann man die Maxwell'schen Gleichungen symbolisch auch in der Form

$$\text{Div } F = \frac{1}{\epsilon_0 c} j, \quad \text{Rot } F = 0 \quad (12.48)$$

schreiben. Darin drückt sich nochmals aus, dass ein Feld physikalisch durch Divergenz und Rotation, also durch Quellen und Wirbel bestimmt wird.

Wir definieren nun einen zu F^{ij} dualen Tensor durch

$$\tilde{F}_{ij} := \frac{1}{2} \epsilon_{ijkl} F^{kl}. \quad (12.49)$$

Wie man durch Auswertung dieser Definition leicht bestätigt, hat der duale Tensor die Gestalt

$$(\tilde{F}_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & c B^1 & c B^2 & c B^3 \\ -c B^1 & 0 & E^3 & -E^2 \\ -c B^2 & -E^3 & 0 & E^1 \\ -c B^3 & E^2 & -E^1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (12.50)$$

Die Definition (12.49) von \tilde{F} lässt sich umkehren. Wir multiplizieren beide Seiten mit ϵ^{ijmn} und erhalten mit den Rechenregeln für den Levi-Civita-Tensor aus dem Abschnitt 11.4.2 bzw. aus dem Anhang D

$$\begin{aligned}
\epsilon^{ijmn} \tilde{F}_{ij} &= \frac{1}{2} \epsilon^{ijmn} \epsilon_{ijkl} F^{kl} \\
&= -(\delta_k^m \delta_\ell^n - \delta_\ell^m \delta_k^n) F^{kl} \\
&= -F^{mn} + F^{nm} = -2 F^{mn},
\end{aligned}$$

oder mit einer anderen Bezeichnung der Indizes auch

$$F^{ij} = -\frac{1}{2} \epsilon^{klij} \tilde{F}_{kl} = -\frac{1}{2} \epsilon^{ijkl} \tilde{F}_{kl}. \quad (12.51)$$

Jetzt können wir auch die Maxwell'schen Gleichungen für den dualen Tensor \tilde{F} aus denen für F in (12.47) bestimmen:

$$\partial^i \tilde{F}_{ij} = \frac{1}{2} \epsilon_{ijkl} \partial^i F^{kl} = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijkl} \partial^i F^{kl} = 0, \quad (12.52)$$

$$\begin{aligned}
\epsilon^{ijkl} \partial_j \tilde{F}_{kl} &= \frac{1}{2} \epsilon^{ijkl} \epsilon_{klmn} \partial_j F^{mn} \\
&= -(\delta_m^i \delta_n^j - \delta_n^i \delta_m^j) \partial_j F^{mn} \\
&= -\partial_j F^{ij} + \partial_j F^{ji} = 2 \partial_j F^{ji} = \frac{2}{\epsilon_0 c} j^i.
\end{aligned} \quad (12.53)$$

Für den dualen Feld-Tensor \tilde{F} finden wir also in symbolischer Schreibweise

$$\text{Div } \tilde{F} = 0, \quad \text{Rot } \tilde{F} = \frac{2}{\epsilon_0 c} j. \quad (12.54)$$

12.4 Lagrange-Dichte für die Teilchen-Feld-Wechselwirkung

Feld-Theorien lassen sich weitgehend charakterisieren durch wenige, physikalisch elementare Forderungen. Wir wollen zeigen, dass sich die klassische Elektrodynamik charakterisieren lässt durch die Eigenschaften

- (1) Lorentz-Kovarianz,
- (2) Linearität (Gültigkeit des Superpositions-Prinzips)
- (3) Eich-Invarianz (Ladungs-Erhaltung)

Wir werden aufgrund dieser Forderungen ein Wirkungs-Integral formulieren und daraus mit dem Lagrange-Formalismus das dynamische Verhalten der Felder und der mit ihnen wechselwirkenden Teilchen herleiten.

12.4.1 Die relativistische Punktmechanik

Mit dem oben beschriebenen Programm können wir bereits die Mechanik eines relativistischen Massenpunktes gewinnen. Dabei gehen wir von der Überlegung aus, dass das aus der analytischen Mechanik bekannte Wirkungs-Integral die Form

$$W = \int_1^2 d \dots$$

haben muss, worin "1" und "2" den Anfang bzw. das Ende eines Bahnabschnitts des Teilchens charakterisieren. Wir fordern nun, dass das Wirkungs-Integral W Lorentz-invariant ist, d.h., ein Lorentz-Skalar ist. Zur Beschreibung der Teilchenbahn kommt nur der 4-Vektor $x^i = (t, \mathbf{r})$ in Frage, der das Ereignis "Teilchen zur Zeit t am Ort \mathbf{r} " darstellt. Im Integranden darf aber der 4-Vektor x^i nicht explizit auftreten, weil damit die Homogenität von Raum und Zeit verletzt würde, sondern nur das Differential dx^i . Die einzige Möglichkeit, daraus einen Skalar zu bilden, ist

$$ds^2 = dx^i dx_i.$$

Folglich muss das Wirkungs-Integral die Form

$$W = \alpha \int_1^2 ds \tag{12.55}$$

haben, worin die physikalische Bedeutung des Faktors α noch zu bestimmen sein wird. Nun ist

$$ds = \sqrt{dx^i dx_i} = \sqrt{(c dt)^2 - (d\mathbf{r})^2} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} c dt,$$

so dass

$$W = \alpha c \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (12.56)$$

Hieraus lesen wir die Lagrange-Funktion L ab:

$$L = \alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (12.57)$$

Die Bedeutung des Faktors α können wir durch Vergleich mit dem nicht-relativistischen Fall $v \ll c$ bestimmen, in dem die Lagrange-Funktion für ein freies Teilchen $L = T = m v^2/2$ lautet. Wir entwickeln L in (12.57) nach v/c und erhalten

$$L = \alpha c \left(1 - \frac{v^2}{2c^2} + \dots \right) = \alpha c - \frac{\alpha}{2c} v^2 + \dots \quad (12.58)$$

Der Term 0-ter Ordnung αc ist konstant und liefert keinen Beitrag bei der Formulierung der Lagrangeschen Gleichung. Damit der Term 1-ter Ordnung mit der nicht-relativistischen Lagrange-Funktion $L = T = m v^2/2$ übereinstimmt, muss $\alpha = -m c$ sein, woraus

$$L = -m c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (12.59)$$

folgt. Aus der analytischen Mechanik ist bekannt, dass aus dem Variations-Prinzip $\delta W = 0$ für das Wirkungs-Integral die Lagrangeschen Gleichungen folgen, die für das freie Teilchen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = 0 \quad (12.60)$$

lauten. Da für das freie Teilchen L nicht vom Ort \mathbf{r} abhängt, folgt weiter, dass der Impuls

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = -m c^2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{1/2} = \frac{m \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (12.61)$$

konstant ist.

Wir wollen die Variation des Wirkungs-Interals W jetzt noch einmal konsequent in der 4-Schreibweise durchführen, weil wir diese auch für die Teilchen-Feld-Wechselwirkung und für die Dynamik des Feldes selbst benötigen werden. Es ist mit W aus (12.55) und $\alpha = -m c$

$$\delta W = -m c \int_1^2 \delta ds = -m c \int_1^2 \delta \left(dx^i dx_i \right)^{1/2}. \quad (12.62)$$

An dieser Stelle müssen wir die korrekte Nebenbedingung für die Variation δ klären. Im nicht-relativistischen Fall lautete diese $\delta t = 0$: die Variation sollte den zeitlichen Ablauf der Bewegung längs einer Bahn nicht berühren. Allgemeiner können wir formulieren, dass die Wirkungs-Integrale variiert Bahnen miteinander verglichen werden sollen bzw. dass Variation und Bahnablauf unabhängige Operationen sein sollen. Daraus folgt, dass die Variation δ und der Differential-Operator d längs der Bahn vertauschen: $\delta d = d \delta$. Damit wird

$$\begin{aligned} \delta \left(dx^i dx_i \right)^{1/2} &= \frac{1}{2} \left(dx^i dx_i \right)^{-1/2} \delta \left(dx^i dx_i \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(dx^i dx_i \right)^{-1/2} \left(dx^i \delta dx_i + dx_i \delta dx^i \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(dx^i dx_i \right)^{-1/2} \left(dx^i d \delta x_i + dx_i d \delta x^i \right) \\ &= \left(dx^i dx_i \right)^{-1/2} dx^i d \delta x_i = \frac{dx^i}{ds} d \delta x_i, \end{aligned} \quad (12.63)$$

eingesetzt in (12.62)

$$\delta W = -m c \int_1^2 \frac{dx^i}{ds} d \delta x_i = -m c \int_1^2 u^i d \delta x_i, \quad (12.64)$$

worin wir die Definition der 4-Geschwindigkeit $u^i := dx^i/ds$ benutzt haben, vgl. Abschnitt 11.3.3. In dem Integral in (12.64) führen wir eine partielle Integration durch:

$$\begin{aligned}\delta W &= -m c \left[u^i \delta x_i \right]_1^2 + m c \int_1^2 du^i \delta x_i \\ &= -m c \left[u^i \delta x_i \right]_1^2 + m c \int_1^2 ds \frac{du^i}{ds} \delta x_i.\end{aligned}\quad (12.65)$$

Die Variation δ soll wie im nicht-relativistischen Fall nur Bahnen mit festem Anfang und Ende miteinander vergleichen, so dass der Randterm $u^i \delta x_i$ der partiellen Integration am Bahn-Anfang und -Ende verschwindet. Im Übrigen soll die Variation δx_i beliebig sein, so dass aus $\delta W = 0$ in (12.65)

$$\frac{du^i}{ds} = 0 \quad \text{bzw.} \quad u^i = \text{const} \quad (12.66)$$

folgt. Wir definieren den 4-Impuls durch $p^i := m u^i$, so dass mit $u^i = \text{const}$ auch $p^i = \text{const}$. Daraus folgt auch wieder $\mathbf{p} = m \mathbf{v} = \text{const}$, denn

$$u^i = \frac{dx^i}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left(1, \frac{\mathbf{v}}{c} \right), \quad p^i = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left(m, \frac{\mathbf{p}}{c} \right). \quad (12.67)$$

12.4.2 Die Teilchen-Feld-Wechselwirkung

Wir wollen das Wirkungs-Integral (12.55) für einen freien Massenpunkt um einen Ausdruck erweitern, der die Wechselwirkung des Teilchens mit einem Feld beschreibt. Das Feld soll durch einen 4-Vektor $\phi^i = \phi^i(x^j)$ beschrieben werden. Nach wie vor wird das Teilchen durch seine Bahn-Differentiale dx_i beschrieben. Weiterhin soll auch das erweiterte Wirkungs-Integral ein Lorentz-Skalar sein, für den sich jetzt die Kombination $\phi^i dx_i$ anbietet. Tatsächlich ist dieses die einzige Möglichkeit, wenn wir die frühere Forderung erfüllen wollen, dass das Superpositions-Prinzip gelten soll. Aus dieser Forderung folgt offensichtlich, dass das Feld ϕ^i im Wirkungs-Integral in der Verbindung mit den Teilchen-Koordinaten x^i nur linear auftreten kann. Das erweiterte Wirkungs-Integral lautet also

$$W = \int_1^2 [-m c ds - \phi^i dx_i]. \quad (12.68)$$

Wir führen nun wiederum die Variation *nach den Teilchenbahnen* wie im vorhergehenden Abschnitt 12.4.1 durch. Dabei tritt auch ein Term $\delta\phi^i$ auf, weil das Feld längs der Teilchenbahn vom Ort des Teilchens abhängt. Im Einzelnen erhalten wir aus (12.68):

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_1^2 [-m c \delta ds - \delta(\phi^i dx_i)], & (12.69) \\ \delta ds &= d\delta s = u^i d\delta x_i, & \text{vgl. (12.63),} \\ \delta(\phi^i dx_i) &= \delta\phi^i dx_i + \phi^i \delta dx_i = \delta\phi^i dx_i + \phi^i d\delta x_i, \\ \delta\phi^i dx_i &= \partial^k \phi^i \delta x_k dx_i = \partial^i \phi^k dx_k \delta x_i, \end{aligned}$$

eingesetzt in (12.69)

$$\delta W = \int_1^2 [-(m c u^i + \phi^i) d\delta x_i - \partial^i \phi^k dx_k \delta x_i]. \quad (12.70)$$

In dem Teil des Integranden mit dem Differential $d\delta x_i$ führen wir eine partielle Integration nach dem Muster von (12.65) aus:

$$\int_1^2 (m c u^i + \phi^i) d\delta x_i = - \int_1^2 (m c du^i + d\phi^i) \delta x_i,$$

weil keine Randterme $(m c u^i + \phi^i) \delta x_i$ am Anfang und Ende der Bahn auftreten. Die partielle Integration liefert in (12.70)

$$\delta W = \int_1^2 [m c du^i + d\phi^i - \partial^i \phi^k dx_k] \delta x_i. \quad (12.71)$$

Da die Variationen δx_i im Übrigen beliebig sind, folgt aus dem Variations-Prinzip $\delta W = 0$, dass der Integrand verschwindet:

$$m c du^i + d\phi^i - \partial^i \phi^k dx_k = 0.$$

Wir führen noch $d\phi^i = \partial^k \phi^i dx_k$ ein und dividieren durch ds :

$$m c \frac{du^i}{ds} = \frac{dp^i}{ds} = f^{ik} u_k, \quad f^{ik} := \partial^i \phi^k - \partial^k \phi^i. \quad (12.72)$$

f^{ik} ist ein antisymmetrischer Tensor, der wie der 4-Feld-Tensor $F^{ik} = \partial^i \Phi^k - \partial^k \Phi^i$ gebildet ist. Wir versuchen darum, die hier zunächst rein formal entwickelte Lorentz-invariante Feldtheorie auf die Elektrodynamik abzubilden, indem wir $f^{ik} = g F^{ik}$ setzen, worin g ein noch zu bestimmender Kopplungs-Faktor ist. Mit

$$ds = \frac{c}{\gamma} dt, \quad u^i = \frac{dx^i}{ds} = \frac{\gamma}{c} \frac{dx^i}{dt}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

erhalten wir aus (12.72)

$$\frac{dp^i}{dt} = \frac{c}{\gamma} \frac{dp^i}{ds} = g F^{ik} \frac{dx_k}{dt}, \quad (12.73)$$

und daraus für die Komponente $i = 1$

$$\begin{aligned} \frac{dp^1}{dt} &= g \left(F^{10} \frac{dx_0}{dt} + F^{12} \frac{dx_2}{dt} + F^{13} \frac{dx_3}{dt} \right) \\ &= g \left(F^{10} \frac{dx^0}{dt} - F^{12} \frac{dx^2}{dt} - F^{13} \frac{dx^3}{dt} \right) \\ &= g c \left(E^1 + v^2 B^3 - v^3 B^2 \right) = g c \left(E^1 + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})^1 \right), \end{aligned}$$

worin wir die Form (12.25) für den Feld-Tensor F^{ik} benutzt haben. Analoge Ergebnisse erhalten wir für die Komponenten $i = 2, 3$. Wir stellen also fest, dass mit der Setzung $g = q/c$ die Komponenten $i = 1, 2, 3$ der Bewegungs-Gleichung (12.72) bzw. (12.73) die Bewegung eines Teilchens mit der Ladung q unter der Einwirkung der Lorentz-Kraft $q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ beschreibt. Die Komponente $i = 0$ von (12.73) liefert

$$\frac{dp^0}{dt} = \frac{q}{c} \left(F^{01} \frac{dx_0}{dt} + F^{02} \frac{dx_2}{dt} + F^{03} \frac{dx_3}{dt} \right) = \frac{q}{c} \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}. \quad (12.74)$$

Nun ist

$$p^0 = m c u^0 = \frac{m c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

so dass (12.74) auch in der Form

$$\frac{d}{dt} \frac{m c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = q \mathbf{E} \mathbf{v} \quad (12.75)$$

geschrieben werden kann. Diese Beziehung ist als *Energie-Bilanz* des Teilchens zu lesen, weil $q \mathbf{E} \mathbf{v}$ auf der rechten Seite gerade die Leistung des Feldes an dem Teilchen darstellt.

12.4.3 Die homogenen Maxwell'schen Gleichungen

Das Wirkungs-Integral, das die Dynamik eines Teilchens mit der Ladung q in Wechselwirkung mit elektromagnetischen Feldern darstellt, ist nach den Überlegungen im vorhergehenden Abschnitt gegeben durch

$$W = \int_1^2 \left[-m c ds - \frac{q}{c} \Phi^i dx_i \right]. \quad (12.76)$$

Der antisymmetrische 4-Tensor, der die Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} gemäß (12.25) enthält, lautet

$$F^{ik} = \partial^i \Phi^k - \partial^k \Phi^i. \quad (12.77)$$

Wie wir im Abschnitt 12.3.2 gezeigt haben, folgen aus der Form der Definition von F^{ik} in (12.77) bereits die homogenen Maxwell'schen Gleichungen. Wir bestätigen diese Aussage nochmals durch eine explizite Rechnung:

$$\epsilon_{ijkl} \partial^j F^{kl} = \epsilon_{ijkl} \partial^j \partial^i \Phi^k - \epsilon_{ijkl} \partial^j \partial^k \Phi^i = 0. \quad (12.78)$$

Jeder der beiden Beiträge auf der rechten Seite verschwindet bereits einzeln,

$$\epsilon_{ijkl} \partial^j \partial^i \dots = 0, \quad \epsilon_{ijk\ell} \partial^j \partial^k \dots = 0,$$

weil jede Kombination des vollständig antisymmetrischen Tensors ϵ_{ijkl} mit einem Tensor, der in Teilen der Indizes i, j, k, ℓ gerade ist, verschwindet, vgl. Abschnitt 1.3.3. Wir stellen also fest, dass das Paar der homogenen Maxwell'schen Gleichungen eine physikalische Konsequenz ausschließlich der Teilchen-Feld-Wechselwirkung ist. Um auch die inhomogenen Maxwell'schen Gleichungen aus einem Wirkungs-Integral zu gewinnen, werden wir zu (12.76) einen Term hinzufügen, der nur die Dynamik des Feldes betrifft.

12.4.4 Lagrange-Funktion und Hamiltonsche Beschreibung

Aus der analytischen Mechanik ist bekannt, dass das Wirkungs-Integral über einen Bahnabschnitt zwischen den Zeiten t_1 und t_2 das zeitliche Integral über die Lagrange-Funktion ist, vgl. (12.57). Wir formen jetzt das Wirkungs-Integral für das Teilchen und seine Wechselwirkung mit dem elektromagnetischen Feld in (12.76) so um, dass wir daraus die Lagrange-Funktion ablesen können. Dazu verwenden wir

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} c dt, \\ \Phi^0 &= \Phi, \quad \Phi^\alpha = c A^\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3 \\ dx_0 &= c dt, \quad dx_\alpha = -dx^\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

worin Φ das skalare elektrische Potential ist und A^α die (räumlichen) Komponenten des Vektor-Potentials sind. Damit können wir W in (12.76) umformen zu

$$W = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[-m c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - q \Phi + q \mathbf{v} \mathbf{A} \right], \quad (12.79)$$

woraus wir die Lagrange-Funktion

$$L = -m c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - q \Phi + q \mathbf{v} \mathbf{A} \quad (12.80)$$

ablesen. Aus L bilden wir durch Ableitung nach der Geschwindigkeit \mathbf{v} den *kanonischen Impuls* \mathbf{P} :

$$\begin{aligned}\mathbf{P} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} &= -m c^2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + q \mathbf{A} \\ &= \frac{m \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + q \mathbf{A}.\end{aligned}\quad (12.81)$$

Damit erhalten wir für die *Hamilton-Funktion* H :

$$\begin{aligned}H &= \mathbf{P} \mathbf{v} - L \\ &= \frac{m v^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + m c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + q \Phi \\ &= \frac{m c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + q \Phi.\end{aligned}\quad (12.82)$$

Hieraus finden wir bestätigt, dass der erste Term offensichtlich die Energie des Teilchens ohne Feld darstellt, vgl. auch (12.75). Andererseits folgt aus (12.81)

$$\begin{aligned}(\mathbf{P} - q \mathbf{A})^2 &= \frac{m^2 v^2}{1 - v^2/c^2} = \frac{m^2 c^2}{1 - v^2/c^2} - m^2 c^2, \\ \Rightarrow \frac{m c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} &= \sqrt{m^2 c^2 + (\mathbf{P} - q \mathbf{A})^2},\end{aligned}$$

eingesetzt in (12.82)

$$H = c \sqrt{m^2 c^2 + (\mathbf{P} - q \mathbf{A})^2} + q \Phi.\quad (12.83)$$

12.5 Ladungs-Erhaltung und Eich-Invarianz

12.5.1 Kontinuierliche Massen- und Ladungs-Verteilung

Wir wollen die bisherige Formulierung des Wirkungs-Integrals für ein einzelnes Teilchen und seine Wechselwirkung mit elektromagnetischen Feldern verallgemeinern auf ein System mit beliebig vielen Teilchen und schließlich auf eine kontinuierliche Massenverteilung mit einer räumlichen Dichte μ . Der Übergang von einem einzelnen Teilchen zu einem System von Teilchen mit den Massen m_ν , $\nu = 1, 2, 3, \dots$ lautet für das Wirkungs-Integral W_T der Teilchen (noch ohne Wechselwirkung mit Feldern)

$$W_T = -m c \int_1^2 ds \rightarrow -c \sum_\nu m_\nu \int_1^2 ds_\nu. \quad (12.84)$$

Der Übergang zu einer kontinuierlichen Massenverteilung mit der Dichte μ erfolgt allgemein durch

$$\sum_\nu m_\nu \dots \rightarrow \int d^3r \mu \dots,$$

für das Wirkungs-Integral W_T in (12.84) also

$$W_T \rightarrow -c \int d^3r \mu \int_1^2 ds = - \int_1^2 d\Omega \mu \frac{ds}{dt}. \quad (12.85)$$

Hier ist $d\Omega = c dt d^3r = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$ das differentielle Volumen-Element im 4-Raum. Wie der Abstand ist auch das Volumen unter Lorentz-Transformationen invariant, d.h., $d\Omega$ ist ein Lorentz-Skalar. Das Integral

$$\int_1^2 d\Omega \dots$$

soll bedeuten, dass über den gesamten (eigentlichen) Raum sowie über die Zeit bzw. über x^0 von $x^0 = c t_1$ bis $x^0 = c t_2$ zu integrieren ist. Da in (12.85) sowohl W_T als auch $d\Omega$ Lorentz-Skalare sind, muss das auch auf $\mu ds/dt$ zutreffen, vgl. Anhang zu diesem Abschnitt.

Für das Wirkungs-Integral W_{TF} für die Wechselwirkung zwischen Teilchen und Feldern ergibt sich analog der folgende Übergang zu einer kontinuierlichen Ladungs-Verteilung:

$$\begin{aligned} W_{TF} = -\frac{q}{c} \int_1^2 dx_i \Phi^i(x^j) &\rightarrow -\frac{1}{c} \sum_{\nu} q_{\nu} \int_1^2 dx_{\nu i} \Phi^i(x_{\nu}^j) \rightarrow \\ &\rightarrow -\frac{1}{c} \int d^3r \rho \int_1^2 dx_i \Phi^i. \end{aligned} \quad (12.86)$$

q_{ν} sind die Ladungen der Teilchen und ρ ist die räumliche Ladungsdichte. (Im letzten Schritt haben wir das Argument x^j in Φ^i nicht mehr mitgeschrieben.) Nun ist

$$d^3r \rho dx_i = \frac{1}{c} \rho \frac{dx_i}{dt} d\Omega$$

und

$$\rho \frac{dx^0}{dt} = c \rho, \quad \rho \frac{dx^{\alpha}}{dt} = \rho v^{\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

und somit

$$\rho \frac{dx^i}{dt} = j^i, \quad \rho \frac{dx_i}{dt} = j_i, \quad (12.87)$$

vgl. die Definition von j^i in (12.3), wobei $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$. Somit lautet die kontinuierliche Version von W_{TF}

$$W_{TF} = -\frac{1}{c^2} \int_1^2 d\Omega j_i \Phi^i. \quad (12.88)$$

Das Integrations-Gebiet ist dasselbe wie in W_T in (12.85)

Anhang zu 12.5.1

Wir weisen nach, dass $\mu ds/dt$ ein Lorentz-Skalar ist. Offensichtlich ist $dm = \mu d^3r$ ein Lorentz-Skalar. Dann ist

$$dm dx^i = \mu d^3r \frac{dx^i}{dt} dt = \frac{1}{c} \mu \frac{dx^i}{dt} d\Omega$$

ein 4-Vektor, und da $d\Omega$ ein Lorentz-Skalar ist, auch $\mu dx^i/dt$. Nun können wir $\mu ds/dt$ schreiben als

$$\mu \frac{ds}{dt} = \mu \frac{\sqrt{dx^i dx_i}}{dt} = \sqrt{\mu \frac{dx^i}{dt} \mu \frac{dx_i}{dt}}.$$

Also ist $\mu ds/dt$ der Betrag eines Skalar-Produkts aus zwei 4-Vektoren und damit ein Lorentz-Skalar.

12.5.2 Eich-Transformation

Der Lorentz-invariante Ausdruck für W_{TF} in (12.88) enthält das 4-Potential Φ^i direkt, d.h. ohne Ableitung, scheint also zunächst nicht eich-invariant zu sein. Wir unterziehen W_{TF} einer Eich-Transformation und fordern, dass die im Abschnitt 12.4.3 aus $\delta(W_T + W_{TF}) = 0$ hergeleiteten Feldgleichungen wie bisher invariant gegen die Eich-Transformation sind. Gemäß (12.18) lautet die Eich-Transformation in 4-Schreibweise

$$\Phi'^i = \Phi^i - \partial^i G, \quad (12.89)$$

so dass das transformierte W'_{TF} gegeben ist durch

$$W'_{TF} = -\frac{1}{c^2} \int_1^2 d\Omega j_i \Phi'^i = W_{TF} + \frac{1}{c^2} \int_1^2 d\Omega j_i \partial^i G. \quad (12.90)$$

In dem Integral mit dem Integranden $j_i \partial^i G$ führen wir eine partielle Integration durch. Da wir hier über den 4-dimensionalen "Zeit-Raum" integrieren und die Grenzen der Integration nicht überall im ∞ -Fernen liegen, entwickeln wir die partielle Integration schrittweise aus der Produkt-Regel der Differentiation

$$j_i \partial^i G = \partial^i (j_i G) - G \partial^i j_i,$$

die, eingesetzt in (12.90),

$$W'_{TF} = W_{TF} + \frac{1}{c^2} \int_1^2 d\Omega \partial^i (j_i G) - \frac{1}{c^2} \int_1^2 d\Omega G \partial^i j_i \quad (12.91)$$

ergibt. Durch Auflösung der i -Summe und Rückführung auf die gewöhnliche Schreibweise wird

$$\int_1^2 d\Omega \partial^i (j_i G) = \int d^3r c \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial}{c \partial t} (G c \rho) + c \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3r \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (-G \mathbf{j}). \quad (12.92)$$

Hierin ist mit dem Gaußschen Integral-Satz

$$\int d^3r \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (-G \mathbf{j}) = - \oint_{\infty} d\mathbf{f} G \mathbf{j} = 0,$$

weil über den gesamten (eigentlichen) Raum integriert wird und dort im ∞ -Fernen die elektrische Stromdichte \mathbf{j} verschwinden soll. In dem anderen Integral auf der rechten Seite von (12.92) beachten wir, dass

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial}{c \partial t} (G c \rho) = [G \rho]_{t_1}^{t_2},$$

so dass wir insgesamt aus (12.91)

$$W'_{TF} = W_{TF} + \frac{1}{c} \int d^3r [G \rho]_{t_1}^{t_2} - \frac{1}{c^2} \int_1^2 d\Omega G \partial^i j_i \quad (12.93)$$

erhalten. Bei der Ausführung der Variation δ wird

$$\delta \int d^3r [G \rho]_{t_1}^{t_2} = \int d^3r \delta [G \rho]_{t_1}^{t_2} = 0,$$

weil

$$\delta [G \rho]_{t_1}^{t_2} = 0,$$

denn die Bahn sollte in den Zeitpunkten t_1 ihres Beginns und t_2 ihres Endes nicht variiert werden. Also folgt aus (12.93)

$$\delta W'_{TF} = \delta W_{TF} - \frac{1}{c^2} \delta \int_1^2 d\Omega G \partial^i j_i. \quad (12.94)$$

Wenn wir nun fordern, dass das Variations-Prinzip $\delta W = 0$ eich-invariant ist, dann müssen offensichtlich $\delta W_{TF} = 0$ und $\delta W'_{TF} = 0$ für beliebige Erzeugende G von Eich-Transformationen äquivalent sein, d.h., das Integral auf der rechten Seite in (12.94) muss für alle G verschwinden. Das ist nur möglich, wenn $\partial^i j_i = 0$. Diese Relation drückt aber gerade die Ladungs-Erhaltung aus, vgl. (12.5). Damit haben wir gezeigt, dass sich die Eich-Invarianz und die Ladungs-Erhaltung gegenseitig bedingen. Diese Wechselbeziehung zwischen einer Invarianz und einem Erhaltungssatz ist bereits aus der klassischen Mechanik bekannt. Dort wird unter Benutzung des Noetherschen Theorems gezeigt, dass es die folgenden weiteren Wechselbeziehungen gibt:

Invarianz	Erhaltung
räumliche Translation	Impuls
zeitliche Translation	Energie
räumliche Drehung	Drehimpuls
Eichung	Ladung

Einmal mehr erkennen wir die 4-Struktur von Zeit und Raum: deren Invarianz bedingt die Erhaltung des 4-Vektors Energie-Impuls.

12.6 Das Wirkungs-Integral für das Feld

Aus dem Variations-Prinzip $\delta(W_T + W_{TF} = 0)$ für die Wirkungs-Integrale W_T der Teilchen und W_{TF} der Teilchen-Feld-Wechselwirkung haben wir durch *Variation ausschließlich der Teilchenbahnen* δx^i die Bewegungs-Gleichung für die Teilchen,

$$\frac{dp^i}{ds} = \frac{q}{c} F^{ik} u_k, \quad F^{ik} := \partial^i \Phi^k - \partial^k \Phi^i, \quad (12.95)$$

und daraus weiter die homogenen Maxwell'schen Gleichungen

$$\epsilon_{ijkl} \partial^j F^{kl} = 0 \quad (12.96)$$

gewonnen, vgl. (12.72) im Abschnitt 12.4.2 und (12.78) im Abschnitt 12.4.3. Die Felder, dargestellt durch ihr 4-Potential Φ^i wurden nicht variiert, sondern als vorgegeben für die Bestimmung der Teilchen-Bahnen betrachtet.

Wir wollen jetzt versuchen, auch die inhomogenen Maxwell'schen Gleichungen, deren 4-Schreibweise

$$\partial_i F^{ik} = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^k \quad (12.97)$$

wir im Abschnitt 12.3.1, (12.38), kennen gelernt haben, aus einem Variations-Prinzip zu gewinnen. Jetzt geht es also um die Frage, wie die Felder aus den als vorgegeben betrachteten Teilchen-Bahnen, dargestellt durch j^i , zu bestimmen sind. Das bedeutet, dass in dem Variations-Prinzip für die inhomogenen Maxwell'schen Gleichungen *ausschließlich die Felder*, nicht jedoch die Teilchen-Bahnen variiert werden müssen. Wir suchen also einen Ausdruck W_F für das Wirkungs-Integral der Felder, das den folgenden Forderungen genügen soll, vgl. die Forderungen zu Beginn des Abschnitts 12.4:

- (1) W_F soll Lorentz-invariant sein.
- (2) W_F enthält nicht den 4-Strom j^i , weil dieser bereits im Wechselwirkungs-Term

$$W_{TF} = -\frac{1}{c^2} \int_1^2 d\Omega j_i \Phi^i. \quad (12.98)$$

auftritt, vgl. (12.88). Das bedeutet zugleich, dass zur Herleitung der inhomogenen Maxwell'schen Gleichungen $\delta(W_{TF} + W_F) = 0$ auszuführen ist, weil auch W_{TF} die Felder in Form ihres Potentials Φ^i enthält.

- (3) Da die inhomogenen Maxwell'schen Gleichungen linear in den Feldern F^{ik} sind, muss W_F die Felder als eine quadratische Form enthalten. Dann nämlich führt die Variation $\delta \dots = 0$, die wie eine Ableitung wirkt, zu linearen Feld-Gleichungen.

- (4) Da die Feld-Gleichungen nur eine Ableitung ∂^i enthalten, darf W_F keine Ableitungen von F^{ik} enthalten, weil dann die Variation $\delta \dots = 0$ zu Feld-Gleichungen mit zweiten Ableitungen führen würde.
- (5) Aus Gründen der Eich-Invarianz darf W_F die Potentiale Φ^i nicht direkt, d.h., ohne Ableitungen enthalten. Im Term W_{TF} konnte die Eich-Invarianz durch die Forderung der Ladungs-Erhaltung $\partial_i j^i = 0$ erfüllt werden. In W_F ist das nicht mehr möglich.

Unter diesen Bedingungen bleibt als einzige Möglichkeit

$$W_F = \alpha \int_1^2 d\Omega F^{ik} F_{ik}. \quad (12.99)$$

Das Integrations-Gebiet im 4-dimensionalen Zeit-Raum ist dasselbe wie in W_{TF} in (12.98). Der noch offene Faktor α ist durch Vergleich mit der Feldgleichung (12.97) zu bestimmen und hängt von dem verwendeten Einheiten-System ab.

Wie bereits bemerkt, müssen wir jetzt $\delta(W_{TF} + W_F) = 0$ durch Variation der Felder ausführen. Aus (12.98) und (12.99) entnehmen wir dann

$$\begin{aligned} W_{TF} + W_F &= \int_1^2 d\Omega \left(-\frac{1}{c^2} j_i \Phi^i + \alpha F^{ik} F_{ik} \right), \\ \delta(W_{TF} + W_F) &= \int_1^2 d\Omega \left[-\frac{1}{c^2} j_i \delta\Phi^i + \alpha \delta(F^{ik} F_{ik}) \right]. \end{aligned} \quad (12.100)$$

Es ist

$$\begin{aligned} \delta(F^{ik} F_{ik}) &= (\delta F^{ik}) F_{ik} + F^{ik} (\delta F_{ik}) = 2 F^{ik} (\delta F_{ik}), \\ \delta F_{ik} &= \delta(\partial_i \Phi_k - \partial_k \Phi_i) = \partial_i \delta\Phi_k - \partial_k \delta\Phi_i, \end{aligned}$$

so dass

$$\delta(F^{ik} F_{ik}) = 2 F^{ik} \partial_i \delta\Phi_k - 2 F^{ik} \partial_k \delta\Phi_i.$$

Durch Vertauschung der Bezeichnungen der Indizes i, k und unter Verwendung der Antisymmetrie von F^{ik} erhalten wir weiter

$$2 F^{ik} \partial_i \delta \Phi_k = 2 F^{ki} \partial_k \delta \Phi_i = -2 F^{ik} \partial_k \delta \Phi_i,$$

so dass

$$\delta (F^{ik} F_{ik}) = -4 F^{ik} \partial_k \delta \Phi_i.$$

Damit lautet das Variations-Problem

$$\delta (W_{TF} + W_F) = \int_1^2 d\Omega \left[-\frac{1}{c^2} j_i \delta \Phi^i - 4 \alpha F^{ik} \partial_k \delta \Phi_i \right] = 0. \quad (12.101)$$

Im zweiten Integranden auf der rechten Seite führen wir eine partielle Integration aus und benutzen dazu mit der Produkt-Regel der Differentiation

$$\partial_k (F^{ik} \delta \Phi_i) = (\partial_k F^{ik}) \delta \Phi_i + F^{ik} \partial_k \delta \Phi_i,$$

so dass

$$\int_1^2 d\Omega F^{ik} \partial_k \delta \Phi_i = \int_1^2 d\Omega \partial_k (F^{ik} \delta \Phi_i) - \int_1^2 d\Omega (\partial_k F^{ik}) \delta \Phi_i. \quad (12.102)$$

Unter Benutzung des auf 4 Dimensionen verallgemeinerten Gaußschen Integralsatzes ist

$$\int_1^2 d\Omega \partial_k (F^{ik} \delta \Phi_i) = \oint_{\partial\Omega} dS_k F^{ik} \delta \Phi_i = 0. \quad (12.103)$$

Hierin ist zunächst $\partial\Omega$ der 3-dimensionale Rand des 4-dimensionalen Integrations-Gebietes des Integrals auf der linken Seite. Es berandet den gesamten eigentlichen 3-dimensionalen Raum, liegt dort also räumlich im ∞ -Fernen, sowie zeitlich das Intervall zwischen ct_1 und ct_2 . dS_k ist ein 4-Vektor, der das Volumen der 3-dimensionalen Randelemente auf $\partial\Omega$ beschreibt und auf diesen im Sinne des 4-dimensionalen Raumes "senkrecht" steht. Das Integral über $\partial\Omega$ in (12.103) verschwindet, weil

- (a) $F^{ik} \rightarrow 0$ im eigentlich räumlich ∞ -Fernen von $\partial\Omega$ und
 (b) $\delta\Phi_i = 0$ auf dem zeitlichen Rand, d.h., bei $x^0 = ct_1$ und $x^0 = ct^2$.

Damit lautet das Variations-Problem (12.101)

$$\delta(W_{TF} + W_F) = \int_1^2 d\Omega \left[-\frac{1}{c^2} j_i \delta\Phi^i + 4\alpha \left(\partial_k F^{ik} \right) \delta\Phi_i \right] = 0$$

oder auch

$$\delta(W_{TF} + W_F) = \int_1^2 d\Omega \left[-\frac{1}{c^2} j^i + 4\alpha \partial_k F^{ik} \right] \delta\Phi_i = 0. \quad (12.104)$$

Da die Variationen $\delta\Phi_i$ beliebig sind, folgt daraus

$$\partial_k F^{ik} = \frac{1}{4\alpha c^2} j^i.$$

Durch Vertauschung der Bezeichnungen der Indizes i, k und unter Verwendung der Antisymmetrie von F^{ik} können wir diese Gleichung in die inhomogenen Maxwell'schen Gleichungen (12.97)

$$\partial_i F^{ik} = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^k \quad (12.105)$$

überführen, wenn wir $\alpha = -\epsilon_0/(4c)$ wählen. Das gesamte Wirkungs-Integral für das System der miteinander wechselwirkenden Teilchen und Felder lautet also

$$W_T + W_{TF} + W_F = \int_1^2 d\Omega \left[-\mu \frac{ds}{dt} - \frac{1}{c^2} j_i \Phi^i - \frac{\epsilon_0}{4c} F^{ik} F_{ik} \right]. \quad (12.106)$$

In nicht-kontinuierlichen Systemen ließ sich das Wirkungs-Integral als zeitliches Integral über die Lagrange-Funktion schreiben. In der kontinuierlichen Version in (12.106) wird aus dem zeitlichen Integral ein Integral über den Zeit-Raum mit dem Differential $d\Omega$. Man nennt den Integranden in (12.106) deshalb auch die *Lagrange-Dichte* des Systems der miteinander wechselwirkenden Teilchen und Felder.

Kapitel 13

Elektrische und Magnetische Felder in Materie

In den bisherigen Kapiteln haben wir elektrische Ladungen und deren Ströme im *Vakuum* betrachtet. Wir haben eine gewisse räumliche Dichte $\rho(\mathbf{r}, t)$ der elektrischen Ladung und deren Flussdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ als vorgegeben betrachtet und angenommen, dass es sonst keine anderen elektrischen Ladungen und Ströme gibt. Diese Situation ändert sich, wenn Materie vorhanden ist. Diese besteht in ihrer mikroskopischen, d.h., atomistischen Struktur aus elektrisch geladenen Teilchen, z.B. Elektronen, Ionen, elektrischen Dipolen, die sich auf einer mikroskopischen Längenskala bewegen können. Dadurch kommen zu den als vorgegeben betrachteten $\rho(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ weitere Ladungs- und Flussdichten ins Spiel, die den Verlauf und das Verhalten der Felder $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ der als vorgegeben betrachteten $\rho(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ beeinflussen werden.

Das ist die Problemstellung dieses Kapitels. Sie gehört eigentlich nicht in die Elektrodynamik, denn die elektrodynamische Beschreibung der mikroskopischen Ladungen und Ströme in Materie verlangt Aussagen der *Festkörper-Physik*, die sich ihrerseits der *Quantentheorie* und der *Statistischen Physik* bedienen muss. Wir wollen jedoch der allgemeinen Tradition in der Literatur der Elektrodynamik folgen und hier eine schematische Beschreibung des Verhaltens von elektrischen und magnetischen Feldern in Materie einschließen¹.

¹Vgl. aber Landau/Lifshitz: "Theoretische Physik", wo der Band 2 ausschließlich die "Klassische Feldtheorie", nämlich Elektrodynamik *und* Gravitation, im Vakuum enthält und das Verhalten von Materie in elektrischen und magnetischen Feldern erst im Band 9, "Elektrodynamik der Kontinua" abgehandelt wird.

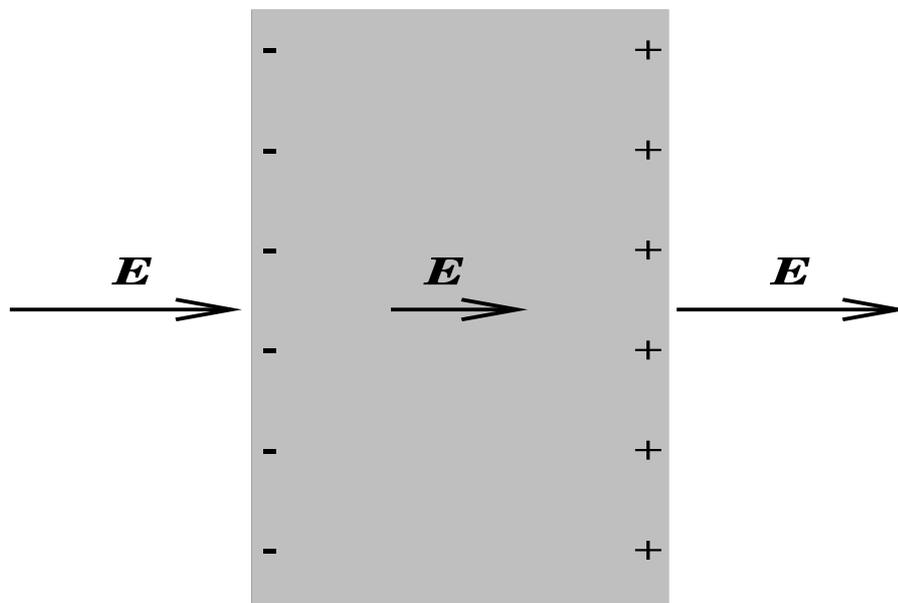


Abbildung 13.1: Elektrisches Feld und Polarisation

13.1 Phänomenologische Beschreibung

13.1.1 Elektrische Polarisation

Wir stellen uns vor, dass Materie in ein äußeres elektrisches Feld \mathbf{E} eingebracht wird, das z.B. von Ladungen auf den Platten eines Kondensators erzeugt wird. Die elektrisch geladenen Teilchen mit Ladungen q in der Mikrostruktur der Materie erfahren Kräfte $q\mathbf{E}$, und zwar positive Ladungen in Feldrichtung, negative Ladungen gegen Feldrichtung. Das elektrische Feld bewirkt also eine Trennung der Ladungen. Wir stellen uns vor, dass die elektrisch geladenen Teilchen in der Mikrostruktur der Materie durch atomare Kräfte gebunden sind. Die sich einstellende Ladungstrennung ist dann das Ergebnis eines Gleichgewichts zwischen dem äußeren Feld \mathbf{E} und den atomaren Bindungskräften. Die getrennten Ladungen können wir mikroskopisch auch als *induzierte Dipole* beschreiben. Deren Richtungen erwarten wir als parallel zur Feldrichtung $\mathbf{p} \sim \mathbf{E}$.

Wenn die betrachtete Materie bereits feste elektrische Dipole \mathbf{p} besitzt wie z.B. Wasser-Moleküle, dann werden diese ohne ein äußeres \mathbf{E} -Feld ungeordnet sein. Wenn jedoch das äußere \mathbf{E} -Feld eingeschaltet wird, erfahren auch die Dipole Kräfte, von denen wir in 3.3.2 gezeigt haben, dass sie sich durch eine potentielle Energie

$W_p = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$ beschreiben lassen. Das äußere Feld bewirkt also eine Ausrichtung der Dipole in Feldrichtung, die jedoch gegen die thermische Bewegung gerichtet ist und darum nur partiell erfolgen wird.

Im Inneren der Materie werden sich die Ladungen der entweder induzierten oder im Feld ausgerichteten Dipole räumlich kompensieren. Es verbleiben aber *Polarisationsladungen* ρ_P an den Oberflächen. Diese bewirken offensichtlich eine Abschwächung des elektrischen Feldes \mathbf{E} im Inneren der Materie. Diese Situation ist schematisch in der Abbildung 13.1 dargestellt. Für das Feld im Inneren müssen die Polarisationsladungen als Quellen mitberücksichtigt werden, so dass die Maxwellsche Gleichung, die die Ladung als Quelle des elektrischen Feldes beschreibt, zu erweitern ist in

$$\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{E} = \rho \quad \longrightarrow \quad \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{E} = \rho + \rho_P. \quad (13.1)$$

Wenn das äußere Feld räumlich nicht homogen ist, also vom Ort abhängt, $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r})$, werden sich die Polarisationsladungen im Inneren der Materie im Allgemeinen nicht mehr vollständig kompensieren, d.h., es kann auch dort ein $\rho_P = \rho_P(\mathbf{r}) \neq 0$ auftreten. Wenn das äußere Feld auch von der Zeit abhängt, $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, kommt es zusätzlich zu dynamischen Effekten, $\rho_P = \rho_P(\mathbf{r}, t)$, d.h., dass sich die Polarisationsladungen bewegen werden und zu *Polarisationsströmen* $\mathbf{j}_P = \mathbf{j}_P(\mathbf{r}, t)$ Anlass geben. Selbstverständlich muss auch die Polarisationsladung erhalten sein, also

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_P + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{j}_P = 0, \quad (13.2)$$

weil auch in der mikroskopischen Struktur von Materie keine Ladung entstehen oder vernichtet werden kann. Wenn jedoch Polarisationsströme auftreten können, muss auch die Maxwellsche Gleichung abgeändert werden, in der elektrische Flussdichten als Wirbel für das Feld \mathbf{B} der magnetischen Induktion beschrieben werden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} \\ \longrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{B} &= \mu_0 (\mathbf{j} + \mathbf{j}_P) + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (13.3)$$

Wir gehen jetzt zu einer alternativen Beschreibung von Polarisationsladung ρ_P und Polarisationsströmen \mathbf{j}_P über, nämlich zur *elektrischen Polarisation* $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$, die so gewählt sein soll, dass

$$\rho_P(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{P}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{j}_P(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}(\mathbf{r}, t). \quad (13.4)$$

Diese Wahl ist so getroffen worden, dass die Kontinuitäts-Gleichung (13.2) identisch erfüllt ist. Allerdings stellt (13.4) selbst bei bekannten $\rho_P(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{j}_P(\mathbf{r}, t)$ keine eindeutige Definition für die elektrische Polarisation $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ dar. Aus der zweiten Gleichung in (13.4) folgt, dass $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ nur bis auf ein statisches Feld festgelegt ist. Mit $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ ist auch $\mathbf{P}'(\mathbf{r}, t) = \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}_0(\mathbf{r})$ eine mögliche elektrische Polarisation. Mit der ersten Gleichung in (13.4) ist $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ nur bis auf ein mögliches additives Wirbelfeld festgelegt, so dass mit $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ auch jedes

$$\mathbf{P}'(\mathbf{r}, t) = \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{Q}(\mathbf{r})$$

eine mögliche elektrische Polarisation ist. Wir schränken diese Freiheit in einem ersten Schritt durch die Forderung ein, dass es außerhalb von Materie keine elektrische Polarisation geben soll, weil dort auch $\rho_P = 0$ und $\mathbf{j}_P = 0$:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad \text{außerhalb von Materie.} \quad (13.5)$$

Unter Verwendung von (13.4) können die beiden erweiterten Maxwellschen Gleichung (13.1) und (13.3) wie folgt geschrieben werden:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{D} &= \rho, \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \left(\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \right) &= \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}, \end{aligned} \right\} \boxed{\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) := \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}(\mathbf{r}, t).} \quad (13.6)$$

Das Feld \mathbf{D} wird die *elektrische Verschiebungsdichte* genannt. Außerhalb von Materie ist nach (13.5) $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$, vgl. auch die Bezeichnungsweise in Kapitel 8.

Die obigen Überlegungen setzen voraus, dass sich die Polarisationsladungen ρ_P und ihre Flussdichte \mathbf{j}_P begrifflich von den "übrigen" Ladungen ρ und deren Flussdichte \mathbf{j} trennen lassen. Nun werden aber auch die Ladungen ρ und deren Flussdichte \mathbf{j} letztlich wieder von geladenen Teilchen getragen, z.B. durch Elektronen oder Ionen. Wir führen die begriffliche Trennung zwischen ρ und ρ_P bzw. zwischen \mathbf{j} und \mathbf{j}_P dadurch aus, dass ρ und \mathbf{j} *freie* Ladungen beschreiben sollen, die im Gegensatz

zu den durch Polarisation bzw. Ladungstrennung entstehenden ρ_P und \mathbf{j}_P nicht gebunden, sondern frei beweglich sein sollen. Zu den freien Ladungen, die in der älteren Literatur auch "wahre" Ladungen genannt werden, gehören dann aber auch etwa die frei beweglichen Elektronen in Leitern oder die frei beweglichen Elektronen und Löcher in Halbleitern.

13.1.2 Magnetisierung

Wir stellen uns jetzt vor, dass Materie in ein äußeres Feld \mathbf{B} der magnetischen Induktion eingebracht wird, das z.B. von Strömen in einer Spule erzeugt wird. Auch in diesem Fall sind zwei Arten von Reaktionen der geladenen Teilchen in der Materie vorstellbar:

- Wenn sich das \mathbf{B} -Feld zeitlich ändert, z.B. beim Einbringen der Materie in das Feld oder beim Ein- oder Ausschalten des Feldes, wird nach dem Induktionsgesetz ein elektrisches Wirbelfeld \mathbf{E} induziert, das seinerseits Wirbelströme der geladenen Teilchen anwerfen kann. Nach der Lenzschen Regel erzeugen diese wiederum ein \mathbf{B} -Feld, das der Änderung des äußeren \mathbf{B} -Feldes entgegenwirkt. Dieses Verhalten heißt *diamagnetisch*.
- Wenn es in der Materie magnetische Momente \mathbf{m} gibt, z.B. Bahnmomente von Elektronen in Atomen oder Spin-Momente der Elektronen, erfahren diese durch das äußere \mathbf{B} -Feld Kräfte, von denen wir im Abschnitt 6.6.1 gezeigt haben, dass sie sich durch eine potentielle Energie $W_m \sim -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$ beschreiben lassen. Das äußere Feld bewirkt also eine Ausrichtung der magnetischen Momente in Feldrichtung, die jedoch wie im Fall der elektrischen Dipole im \mathbf{E} -Feld gegen die thermische Bewegung gerichtet ist und darum nur partiell erfolgen wird. Dieses letztere Verhalten heißt *paramagnetisch*.

Im Allgemeinen wird man in Materie beide Arten von Verhalten, diamagnetisch und paramagnetisch beobachten, und es ist eine Frage der spezifischen Materialeigenschaften, welche der beiden Arten von Magnetismus dabei überwiegt. In jedem Fall werden *Magnetisierungsströme* mit einer Flussdichte $\mathbf{j}_M = \mathbf{j}_M(\mathbf{r}, t)$ auftreten, entweder direkt durch Induktion oder getragen von den Ringströmen der vorhandenen und durch das \mathbf{B} -Feld partiell ausgerichteten magnetischen Momente. Auch hier erwarten wir, dass sich die \mathbf{j}_M im Inneren der Materie teilweise kompensieren, z.B. schon innerhalb eines Atoms, wenn dort Elektronen mit entgegengesetzten Drehimpulsen auftreten, vgl. Abschnitt 6.5.4.

Das Auftreten von Magnetisierungsströmen mit einer Flussdichte \mathbf{j}_M veranlasst uns, die Maxwellsche Gleichung zu erweitern, in der elektrische Flussdichten als Wirbel für das Feld \mathbf{B} der magnetischen Induktion beschrieben werden. Dazu wählen wir als Ausgangspunkt die Formulierung in (13.6), wo bereits die Polarisierungsströme durch die elektrische Polarisierung \mathbf{P} in Materie berücksichtigt sind, und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \left(\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \right) &= \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} \\ \longrightarrow \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \left(\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \right) &= \mathbf{j} + \mathbf{j}_M + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}. \end{aligned} \quad (13.7)$$

Jetzt beachten wir eine Besonderheit der Magnetisierungsströme: es handelt sich dabei, wie soeben beschrieben, stets um Ringströme, also um "Strom-Linien" (analog den Feld-Linien), die in sich geschlossen sind. Wir nehmen also an, dass die Divergenz der \mathbf{j}_M verschwindet, so dass wir diese als Wirbel einer Magnetisierung $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$ darstellen können:

$$\mathbf{j}_M(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{M}(\mathbf{r}, t). \quad (13.8)$$

Diese Darstellung ist offensichtlich analog zu (13.4) für die elektrischen Polarisation. Aus ihr folgt unmittelbar, dass es keine "Magnetisierungsladung" ρ_M gibt, denn aus deren Erhaltung, die wiederum zu fordern ist, und aus dem Verschwinden der Divergenz von \mathbf{j}_M folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_M + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{j}_M = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{j}_M = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} \rho_M = 0, \quad (13.9)$$

und daraus $\rho_M = 0$, weil nach unserer Konstruktion keine statische "Magnetisierungsladung" auftreten kann. Um ein naheliegendes Missverständnis an dieser Stelle zu vermeiden, sei betont, dass ein $\rho_M \neq 0$ nicht etwa "magnetische Ladung", also einen magnetischen Monopol bedeuten würde. Auch ρ_M wäre elektrische Ladung, wenn es sie gäbe.

Auch (13.8) ist keine eindeutige Definition für $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$, denn mit jedem $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$ ist auch

$$\mathbf{M}'(\mathbf{r}, t) = \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} F(\mathbf{r}, t)$$

eine mögliche Magnetisierung, wobei $F(\mathbf{r}, t)$ eine beliebige skalare Funktion ist. Wie im elektrischen Fall schränken wir diese Freiheit in einem ersten Schritt durch die Forderung ein, dass es außerhalb von Materie keine Magnetisierung geben soll, weil dort auch $\mathbf{j}_M = 0$:

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad \text{außerhalb von Materie.} \quad (13.10)$$

Unter Verwendung von (13.8) können wir die erweiterte Maxwellsche Gleichung (13.7) umschreiben. Für diese und für die andere, hier unveränderte Maxwellsche Gleichung in (13.6) erhalten wir insgesamt also

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{D} = \rho, \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}, \\ \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) := \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}(\mathbf{r}, t), \end{aligned} \quad (13.11)$$

$$\boxed{\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) := \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{M}(\mathbf{r}, t).} \quad (13.12)$$

Die beiden homogenen Maxwellschen Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{B} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \quad (13.13)$$

bleiben unverändert. Die erste der beiden homogenen Maxwellschen Gleichungen besagt, dass es keine magnetischen Monopole gibt, was natürlich auch für die Teilchen zutrifft, aus denen Materie besteht. Die zweite homogene Maxwellsche Gleichung ist, wie wir im Abschnitt 7.2.6 gezeigt haben, mit der Lorentz-Kraft der Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} auf geladene Teilchen verknüpft, die natürlich auch auf diejenigen geladenen Teilchen wirkt, aus denen Materie besteht. Tatsächlich haben wir das Verhalten von Materie in den Feldern \mathbf{E} und \mathbf{B} gerade unter der Annahme beschrieben, dass die Reaktion der geladenen Teilchen in der Materie auf der Lorentz-Kraft beruht.

Die beiden erweiterten inhomogenen Maxwellschen Gleichungen (13.11) und die unveränderten homogenen Maxwellschen Gleichungen (13.13) bilden kein geschlossenes System von partiellen Differential-Gleichungen für die auftretenden Felder. Wie wir

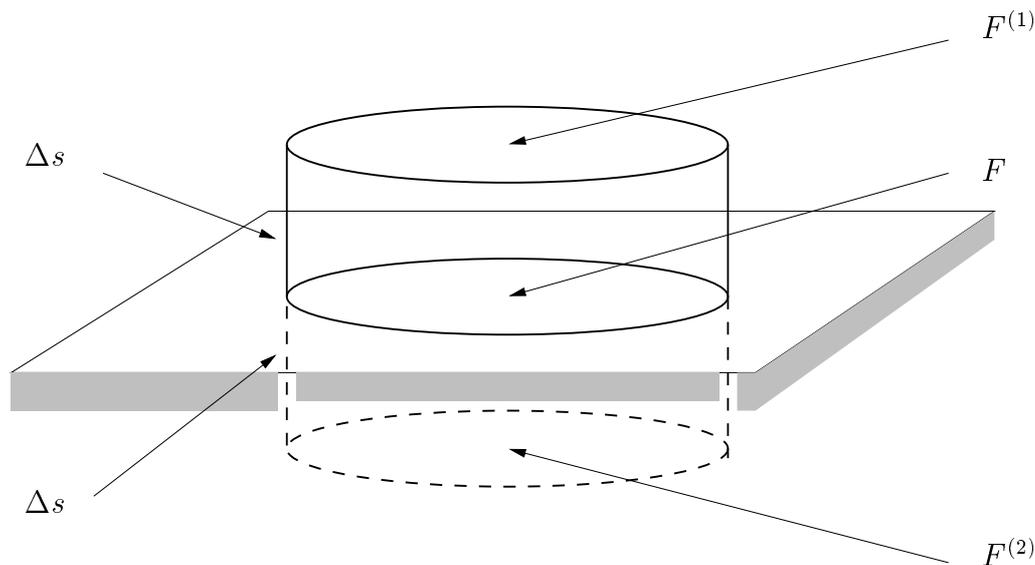


Abbildung 13.2: Pillendose an der Grenzfläche Vakuum–Material

im Zerlegungssatz im Abschnitt 6.4 gezeigt haben, ist ein Feld erst durch Angabe seiner Quellen *und* Wirbel eindeutig bestimmt. Die Maxwell'schen Gleichungen in (13.11) und (13.13) beschreiben aber nur die Quellen von \mathbf{B} und \mathbf{D} und die Wirbel von \mathbf{E} und \mathbf{H} . Das System der Maxwell'schen Gleichungen ist nur dann eindeutig lösbar, wenn es einen Zusammenhang zwischen \mathbf{D} und \mathbf{E} bzw. zwischen \mathbf{H} und \mathbf{B} gibt oder äquivalent zwischen \mathbf{P} und \mathbf{E} bzw. zwischen \mathbf{M} und \mathbf{B} . Wir werden später in diesem Kapitel solche Zusammenhänge in linearer Weise als Approximationen für das Verhalten von Materie in den Feldern \mathbf{E} und \mathbf{B} formulieren und diskutieren.

13.2 Grenzbedingungen für die Felder

Die Überlegungen des vorhergehenden Abschnitts zum Verhalten von Materie in den Feldern \mathbf{E} und \mathbf{B} gelten nur innerhalb eines von Materie erfüllten Raumbereichs. Außerhalb dieses Bereichs sollten die elektrische Polarisation und die Magnetisierung verschwinden, vgl. (13.5) und (13.10). An einer Grenzfläche zwischen Material und Vakuum werden wir also im Allgemeinen ein unstetiges Verhalten der Felder zu erwarten haben. Dasselbe gilt, wenn zwei Materialien mit verschiedenem elektrischen oder magnetischen Verhalten aneinander grenzen. Für die Lösung der Maxwell'schen Gleichungen in Anwesenheit von Materialien ist es entscheidend, die Unstetigkeiten der Felder an solchen Grenzflächen richtig zu beschreiben.

13.2.1 Grenzbedingungen für die Normal-Komponenten

Wir werden das Unstetigkeits-Verhalten der Felder \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{B} , \mathbf{H} aus den Maxwell'schen Gleichungen in (13.12) und (13.13) herleiten. Zuerst diskutieren wir die beiden Gleichungen, die die Quellen von \mathbf{B} und \mathbf{D} beschreiben,

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{B} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{D} = \rho, \quad (13.14)$$

und benutzen dafür die Konstruktion der "Pillendosen", die wir bereits im Abschnitt 4.1.1 eingeführt hatten. Diese Konstruktion ist hier nochmals in der Abbildung 13.2 dargestellt. Wir denken uns einen Zylinder der Höhe $2\Delta s$ mit seiner Achse senkrecht in die betrachtete Grenzfläche eingesetzt, so dass sich jeweils ein Stück der Höhe Δs des Zylinders auf den beiden Seiten der Grenzfläche befindet. Wir integrieren die Quellengleichung für \mathbf{B} über das Zylinder-Volumen V und wenden den Gaußschen Integralsatz an:

$$\int_V d^3r \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{B} = \int_{\partial V} d\mathbf{f} \mathbf{B} = \int_{F^{(1)}} d\mathbf{f} \mathbf{B} + \int_{F^{(2)}} d\mathbf{f} \mathbf{B} + O(\Delta s) = 0, \quad (13.15)$$

worin $F^{(1)}$ und $F^{(2)}$ die obere bzw. untere Stirnfläche des Zylinders ist. Der Term $O(\Delta s)$ beschreibt den Beitrag von der Mantelfläche des Zylinders. Jetzt führen wir $\Delta s \rightarrow 0$ aus. Dabei verschwindet der Beitrag der Mantelfläche des Zylinders, und die beiden Stirnflächen streben gegen die Schnittfläche F des Zylinders mit der Grenzfläche: $F^{(1,2)} \rightarrow F$. Aus (13.15) wird

$$\int_F d\mathbf{f} (\mathbf{B}^{(1)} - \mathbf{B}^{(2)}) = \int_F d\mathbf{f} \mathbf{n} (\mathbf{B}^{(1)} - \mathbf{B}^{(2)}) = 0. \quad (13.16)$$

Hier sind $\mathbf{B}^{(1)}$ und $\mathbf{B}^{(2)}$ die \mathbf{B} -Felder unmittelbar oberhalb und unterhalb der Schnittfläche F , und \mathbf{n} ist deren Normalen-Vektor. Das Minuszeichen vor $\mathbf{B}^{(2)}$ rührt daher, dass die Normalenrichtung auf $F^{(2)}$ entgegengesetzt zu der auf $F^{(1)}$ ist. Das Ergebnis in (13.16) gilt für beliebige Schnittflächen, so dass daraus die allgemeine Relation

$$\mathbf{n} (\mathbf{B}^{(1)} - \mathbf{B}^{(2)}) = 0 \quad (13.17)$$

folgt: an Grenzflächen zwischen einem Material und dem Vakuum oder zwei verschiedenen Materialien verhält sich die Normal-Komponente des \mathbf{D} -Feldes stetig.

Aus der Gleichung für die Quellen von \mathbf{D} in (13.14) folgt statt (13.15)

$$\int_V d^3r \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{D} = \int_{\partial V} d\mathbf{f} \mathbf{D} = \int_{F^{(1)}} d\mathbf{f} \mathbf{D} + \int_{F^{(2)}} d\mathbf{f} \mathbf{D} + O(\Delta s) = \int_V d^3r \rho. \quad (13.18)$$

Für $\Delta s \rightarrow 0$ wird

$$\int_V d^3r \rho \rightarrow \int_F df \sigma,$$

worin σ eine mögliche Ladung pro Fläche auf der Grenzfläche ist. Wenn sich die räumliche Dichte ρ der Ladung überall stetig verhält, wird $\sigma = 0$. Ein $\sigma \neq 0$ kann nur auftreten, wenn ρ auf der Grenzfläche singulär ist und dort einen endlichen Wert pro Fläche besitzt. Allgemein finden wir also als Grenzbedingung für \mathbf{D} statt (13.17)

$$\mathbf{n} \left(\mathbf{D}^{(1)} - \mathbf{D}^{(2)} \right) = \sigma. \quad (13.19)$$

Wenn keine Grenzflächen-Ladung auftritt, verhält sich die Normal-Komponente des \mathbf{D} -Feldes stetig, anderenfalls springt sie um den Wert der Ladung pro Grenzfläche. Wir erkennen übrigens jetzt, dass die im Abschnitt 4.1.1 hergeleitete Regel für das Verhalten des \mathbf{E} -Feldes an Leiter-Oberflächen ein Spezialfall von (13.19) ist, weil \mathbf{E} dort im Inneren verschwindet.

Es sei daran erinnert, dass σ *keine* Polarisations-Ladungen einschließt, sondern nur freie Ladungen beschreibt.

13.2.2 Grenzbedingungen für die Tangential-Komponenten

Wir wenden uns jetzt den beiden Maxwellschen Gleichungen zu, die die Wirbel der Felder \mathbf{E} und \mathbf{H} beschreiben:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}, \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}. \quad (13.20)$$

Wiederum integrieren wir diese beiden Gleichungen über das Volumen der "Pillendose" in Abbildung 13.2 und wenden jetzt eine andere Version des Gaußschen Integralsatzes an, nämlich

$$\int_V d^3r \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{E} = \oint_{\partial V} d\mathbf{f} \times \mathbf{E} \quad (13.21)$$

und analog für \mathbf{B} . Am Schluss dieses Abschnitts zeigen wir, wie sich diese Version aus der gewöhnlichen Version des Gaußschen Integralsatzes herleiten lässt. Für $\Delta s \rightarrow 0$ erhalten wir analog zu (13.15) und (13.16)

$$\oint_{\partial V} d\mathbf{f} \times \mathbf{E} \rightarrow \int_F d\mathbf{f} \times (\mathbf{E}^{(1)} - \mathbf{E}^{(2)}) = \int_F df \mathbf{n} \times (\mathbf{E}^{(1)} - \mathbf{E}^{(2)}). \quad (13.22)$$

Wir nehmen an, dass sich das Feld \mathbf{B} und seine zeitliche Ableitung $\partial \mathbf{B} / \partial t$ auf der Grenzfläche stetig verhalten, so dass für $\Delta s \rightarrow 0$

$$\int_V d^3r \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \rightarrow 0.$$

(13.21) und (13.22) angewendet auf die erste der beiden Maxwell'schen Gleichungen in (13.20) ergibt also

$$\int_F df \mathbf{n} \times (\mathbf{E}^{(1)} - \mathbf{E}^{(2)}) = 0,$$

bzw., weil die Schnittfläche F beliebig ist,

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}^{(1)} - \mathbf{E}^{(2)}) = 0. \quad (13.23)$$

An der Grenzfläche zwischen einem Material und dem Vakuum oder zwei verschiedenen Materialien verhält sich Tangential-Komponente des \mathbf{E} -Feldes stetig.

Bei der analogen Umformung für die zweite der beiden Maxwell'schen Gleichungen in (13.20) tritt zusätzlich ein Term

$$\int_V d^3r \mathbf{j}$$

auf. Wenn die Flussdichte \mathbf{j} auf der Grenzfläche stetig ist, verschwindet dieses Integral für $\Delta s \rightarrow 0$. Die Grenzfläche kann aber eine singuläre Flächen-Stromdichte tragen. Dann schreiben wir $d^3r = df dz$, worin z eine lokale Koordinate in Normalen-Richtung sei, so dass

$$\int_V d^3r \mathbf{j} = \int_F df \int_{-\Delta s}^{+\Delta s} dz \mathbf{j} \rightarrow \int_F df \boldsymbol{\eta}, \quad \boldsymbol{\eta} := \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \int_{-\Delta s}^{+\Delta s} dz \mathbf{j}. \quad (13.24)$$

$\boldsymbol{\eta}$ ist dadurch zu definieren, dass $dQ = |\boldsymbol{\eta}| d\ell_n dt$ die elektrische Ladung ist, die während der Zeit dt innerhalb der Grenzfläche in $\boldsymbol{\eta}$ -Richtung durch ein Linienelement $d\ell_n$ senkrecht zu $\boldsymbol{\eta}$ transportiert wird.

Wenn wir annehmen, dass sich auch das Feld \mathbf{D} und seine zeitliche Ableitung $\partial\mathbf{D}/\partial t$ auf der Grenzfläche stetig verhalten, erhalten wir aus der zweiten der Maxwellschen Gleichungen in (13.20) die Grenzbedingung

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}^{(1)} - \mathbf{H}^{(2)}) = \boldsymbol{\eta}. \quad (13.25)$$

An der Grenzfläche zwischen einem Material und dem Vakuum oder zwei verschiedenen Materialien verhält sich Tangential-Komponente des \mathbf{H} -Feldes stetig, falls in der Grenzfläche keine Flächen-Stromdichte $\boldsymbol{\eta}$ auftritt, anderenfalls springt sie um $\boldsymbol{\eta}$.

Wir können die Grenzbedingungen für die Felder $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{H}$ in eine Form bringen, die die Verknüpfung mit den jeweiligen Maxwellschen Gleichungen, aus denen sie folgen, noch deutlicher macht. Wir definieren dazu den Operator $\boldsymbol{\delta}$ durch

$$\boldsymbol{\delta} \mathbf{a} := \mathbf{n} (\mathbf{a}^{(1)} - \mathbf{a}^{(2)}), \quad \boldsymbol{\delta} \times \mathbf{a} := \mathbf{n} \times (\mathbf{a}^{(1)} - \mathbf{a}^{(2)}), \quad (13.26)$$

worin \mathbf{a} eines der Felder $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{H}$ ist. Die kontinuierlichen Maxwellschen Gleichung mit den ihnen jeweils zugeordneten Grenzbedingungen sind in der folgenden Tabelle angegeben:

Kontinuierliche Maxwellsche Gleichungen	Grenzbedingungen
$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{B} = 0$	$\delta \mathbf{B} = 0$
$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{D} = \rho$	$\delta \mathbf{D} = \sigma$
$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}$	$\delta \times \mathbf{E} = 0$
$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}$	$\delta \times \mathbf{H} = \boldsymbol{\eta}$

13.2.3 Nachweis der verwendeten Version des Gaußschen Integralsatzes

Wir gehen aus von der gewöhnlichen Version des Gaußschen Integralsatzes

$$\int_V d^3r \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{b}(\mathbf{r}) = \oint_{\partial V} d\mathbf{f} \mathbf{b}(\mathbf{r}), \quad (13.27)$$

worin V ein beliebiges Volumen, ∂V seine Einhüllende und $\mathbf{b}(\mathbf{r})$ ein beliebiges (differenzierbares) Vektorfeld sei. Wir setzen $\mathbf{b}(\mathbf{r}) = \mathbf{c} \times \mathbf{a}(\mathbf{r})$, worin \mathbf{c} ein beliebiger konstanter Vektor sei:

$$\int_V d^3r \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\mathbf{c} \times \mathbf{a}(\mathbf{r})) = \oint_{\partial V} d\mathbf{f} (\mathbf{c} \times \mathbf{a}(\mathbf{r})). \quad (13.28)$$

Im Integranden der linken Seite ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\mathbf{c} \times \mathbf{a}(\mathbf{r})) &= \partial_\alpha \epsilon_{\alpha\beta\gamma} c_\beta a_\gamma(\mathbf{r}) = -c_\beta \epsilon_{\beta\alpha\gamma} \partial_\alpha a_\gamma(\mathbf{r}) = \\ &= -\mathbf{c} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{a}(\mathbf{r}) \right). \end{aligned} \quad (13.29)$$

Das Spatprodukt im Integranden der rechten Seite in (13.28) formen wir wie folgt um:

$$d\mathbf{f} (\mathbf{c} \times \mathbf{a}(\mathbf{r})) = \mathbf{c} (\mathbf{a}(\mathbf{r}) \times d\mathbf{f}) = -\mathbf{c} (d\mathbf{f} \times \mathbf{a}(\mathbf{r})). \quad (13.30)$$

Einsetzen von (13.29) und (13.30) in (13.28) führt auf

$$\mathbf{c} \int_V d^3r \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{a}(\mathbf{r}) = \mathbf{c} \oint_{\partial V} d\mathbf{f} \times \mathbf{a}(\mathbf{r}),$$

bzw., weil \mathbf{c} beliebig ist, auf

$$\int_V d^3r \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{a}(\mathbf{r}) = \oint_{\partial V} d\mathbf{f} \times \mathbf{a}(\mathbf{r}). \quad (13.31)$$

13.3 Mikroskopische und makroskopische Beschreibung von Feldern in Materie

Bei der phänomenologischen Beschreibung von elektrischen und magnetischen Feldern in Materie im Abschnitt 13.1 haben wir Polarisations–Ladungen, –Ströme sowie Magnetisierungs–Ströme als rein phänomenologische Begriffe eingeführt, ohne deren mikroskopischen Hintergrund zu diskutieren. In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, wie sich diese phänomenologischen Begriffe und die mit ihnen zusammenhängende elektrische Polarisation und Magnetisierung auf mikroskopische Vorstellungen gründen lassen.

13.3.1 Mikroskopische Ladungs– und Flussdichte

Es seien $\mathbf{r}_i(t)$ die Orte bzw. Bahnen von Teilchen $i = 1, 2, \dots, N$ mit der jeweiligen elektrischen Ladung q_i in der Struktur von Materie, z.B. von Elektronen oder Ionen. Diese mikroskopischen Ladungen führen zu einer mikroskopischen Ladungsdichte

$$\hat{\rho}(\mathbf{r}, t) = \sum_i q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)), \quad (13.32)$$

vgl. auch Abschnitt 2.4.1. Im Folgenden werden wir alle mikroskopischen Variablen durch $\hat{\rho}, \hat{\mathbf{j}}, \dots$ usw. bezeichnen. Zu der mikroskopischen Ladungsdichte $\hat{\rho}$ gehört eine mikroskopische Flussdichte

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r}, t) &= \hat{\rho}(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \sum_i q_i \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) = \\
&= \sum_i q_i \mathbf{v}_i(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)), \tag{13.33}
\end{aligned}$$

vgl. auch Abschnitt 5.1.1. Hier ist $\mathbf{v}_i(t) = d\mathbf{r}_i(t)/dt$ die Geschwindigkeit des Teilchens Nr. i . $\hat{\rho}$ und $\hat{\mathbf{j}}$ erfüllen die Bedingung der Ladungserhaltung, denn

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho}(\mathbf{r}, t) &= \sum_i q_i \frac{\partial}{\partial t} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) = - \sum_i q_i \mathbf{v}_i(t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)), \\
\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r}, t) &= \sum_i q_i \mathbf{v}_i(t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)),
\end{aligned}$$

so dass

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r}, t) = 0. \tag{13.34}$$

Der Gradient der δ -Funktion $\partial \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t))/\partial \mathbf{r}$ ist ein symbolischer Ausdruck. Wir stellen die δ -Funktion durch einen geeigneten Grenzübergang in einer differenzierbaren Funktion dar, vgl. Anhang C, bilden aber zuerst den Gradienten und führen dann den Grenzübergang aus.

Die mikroskopischen Ladungs- und Flussdichten führen zu mikroskopischen Potentialen

$$\begin{aligned}
\hat{\Phi}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\hat{\rho}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \\
\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\hat{\mathbf{j}}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \tag{13.35}
\end{aligned}$$

vgl. Abschnitt 10.1.

13.3.2 Mittelung

Durch eine geeignete Mittelung über die mikroskopischen Ladungen und Ströme kommen wir zu makroskopischen Ausdrücken, die uns hier interessieren sollen. Das Problem solcher Mittelungen hatten wir bereits im Abschnitt 2.4.3 angeschnitten. Die mikroskopischen Größen sollen über ein Volumen ΔV gemittelt werden, z.B. die mikroskopische Ladungsdichte

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} d^3 s \hat{\rho}(\mathbf{r} + \mathbf{s}, t), \quad (13.36)$$

wobei ΔV so zu wählen ist, dass es

- einerseits immer noch sehr viele mikroskopische Teilchen enthält, aber
- andererseits hinreichend klein ist, um noch Änderungen der Ladungsdichte auf einer makroskopischen Längenskala zu erfassen.

Wir schreiben die Mittelung in (13.36) in der Form

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \int d^3 s f(\mathbf{s}) \hat{\rho}(\mathbf{r} + \mathbf{s}, t), \quad (13.37)$$

worin $f(\mathbf{s}) \neq 0$ nur in $\mathbf{s} \in \Delta V$ und

$$\int d^3 s f(\mathbf{s}) = 1.$$

Wir erhalten (13.36) aus (13.37) für

$$f(\mathbf{s}) = \begin{cases} 1/\Delta V & \text{für } \mathbf{s} \in \Delta V, \\ 0 & \text{für } \mathbf{s} \notin \Delta V, \end{cases} \quad (13.38)$$

aber auch jede glatte Funktion $f(\mathbf{s})$ mit analogen Eigenschaften ist für die Mittelung geeignet.

Wenden wir nun die Mittelung auf die Darstellung des mikroskopischen skalaren Potentials $\widehat{\Phi}(\mathbf{r}, t)$ durch die mikroskopische Ladungsdichte $\widehat{\rho}(\mathbf{r}, t)$ in (13.35) an, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{r}, t) &:= \int d^3s f(\mathbf{s}) \widehat{\Phi}(\mathbf{r} + \mathbf{s}, t) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3s f(\mathbf{s}) \int d^3r' \frac{\widehat{\rho}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} + \mathbf{s} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} + \mathbf{s} - \mathbf{r}'|}.\end{aligned}$$

Hier substituieren wir $\mathbf{r}'' := \mathbf{r}' - \mathbf{s}$ als neue Integrations-Variable statt \mathbf{r}' und erhalten weiter

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3s f(\mathbf{s}) \int d^3r'' \frac{\widehat{\rho}\left(\mathbf{r}'' + \mathbf{s}, t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r'' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|} \int d^3s f(\mathbf{s}) \widehat{\rho}\left(\mathbf{r}'' + \mathbf{s}, t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|}{c}\right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|},\end{aligned}\tag{13.39}$$

worin wir die Definition der gemittelten Ladungsdichte in (13.36) für den Ort \mathbf{r}'' statt \mathbf{r} und für die retardierte Zeit $t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}''|/c$ statt t benutzt und die Integrations-Variable \mathbf{r}'' wieder in \mathbf{r}' zurückbenannt haben.

Wir haben mit (13.39) ein Ergebnis erhalten, das identisch mit jenem im Vakuum im Abschnitt 10.1.3 ist. Wir müssen die gemittelte Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r}, t)$ als die Dichte der *freien* ("wahren") Ladungen *ohne* Polarisationsladungen interpretieren. Letztere sind mikroskopische Ladungen, die offensichtlich durch die Mittelung eliminiert worden sind. Konsequenterweise erhalten wir dann auch ein gemitteltes Potential $\Phi(\mathbf{r}, t)$, das nur von den freien Ladungen erzeugt wird. Analoge Schlüsse treffen auch auf das mittlere Vektor-Potential zu, das wir durch dieselbe Mittelung aus dem mikroskopischen Vektor-Potential in (13.35) berechnen und das nur durch die mittlere, freie Flussdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ bestimmt ist.

Die soeben ausgeführte Mittelung ist offensichtlich zu grob, indem sie sämtliche durch Polarisation und Magnetisierung entstehenden mikroskopischen Effekte eliminiert. Um diese Elimination zu verhindern und tatsächlich zu einer mikroskopischen Beschreibung von Polarisation und Magnetisierung zu kommen, werden wir anders vorgehen müssen, nämlich zunächst durch eine Multipol-Entwicklung in $\hat{\rho}$ und $\hat{\mathbf{j}}$ mikroskopische elektrische und magnetische Dipole bzw. deren Dichten einführen und erst dann Mittelungen durchführen.

13.3.3 Mikroskopische Multipol-Entwicklung

Wir gehen von den Ausdrücken (13.35) für das mikroskopische skalare Potential $\hat{\Phi}$ und das mikroskopische Vektor-Potential $\hat{\mathbf{A}}$ aus und führen dort eine Multipol-Entwicklung nach den mikroskopischen elektrischen und magnetischen Dipolen durch. Dabei können wir uns formal auf die dynamische Multipol-Entwicklung im Abschnitt 10.3 stützen. Für das Vektor-Potential benutzen wir das dort hergeleitete Ergebnis

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{1}{r} \dot{\mathbf{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \left[\frac{1}{r} \mathbf{m} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \right\},$$

und für das skalare Potential

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left[\frac{1}{r} \mathbf{p} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right].$$

Wir erinnern daran, dass in diesen Ergebnissen ausschließlich die Multipol-Entwicklung bis zur Ordnung der Dipol-Terme benutzt wurde, jedoch noch keine Fernfeld-Näherung ausgeführt wurde und auch nicht etwa statische Beiträge vernachlässigt wurden. Für den Fall vieler mikroskopischer elektrischer Dipole $\mathbf{p}_i(t)$ und magnetischer Dipole $\mathbf{m}_i(t)$ jeweils an den Orten \mathbf{r}_i mit $i = 1, 2, \dots, N$ sind die obigen Ausdrücke für die Potentiale umzuformulieren in

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_i \left\{ \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \dot{\mathbf{p}}_i \left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}{c} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \mathbf{m}_i \left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}{c} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (13.40)$$

$$\hat{\Phi}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \mathbf{p}_i \left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}{c} \right) \right]. \quad (13.41)$$

Wir erkennen, dass diese mikroskopischen Potentiale ausschließlich die Beiträge der mikroskopischen Dipole, nicht jedoch Beiträge von den freien Ladungen enthalten. Letztere müssen am Ende der folgenden Umformungen noch hinzugefügt werden. Zunächst führen wir analog zu den mikroskopischen Ladungs- und Flussdichten in (13.32) und (13.33) räumliche Dichten der elektrischen und magnetischen Dipole ein:

$$\widehat{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t) = \sum_i \mathbf{p}_i(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \quad (13.42)$$

$$\widehat{\mathbf{M}}(\mathbf{r}, t) = \sum_i \mathbf{m}_i(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i). \quad (13.43)$$

Mit diesen Definitionen lassen sich die Potentiale $\widehat{\mathbf{A}}$ und $\widehat{\Phi}$ in (13.40) und (13.41) umschreiben in

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) = & \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \left\{ \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \widehat{\dot{\mathbf{P}}} \left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \widehat{\mathbf{M}} \left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \right) \right] \right\}, \quad (13.44) \end{aligned}$$

$$\widehat{\Phi}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3 r' \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \widehat{\mathbf{P}} \left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \right) \right]. \quad (13.45)$$

Im nächsten Schritt führen wir die Mittelung durch, wie wir sie im vorhergehenden Abschnitt 13.3.2 beschrieben haben,

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \\ \Phi(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) \end{array} \right\} = \int d^3 s f(\mathbf{s}) \left\{ \begin{array}{l} \widehat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) \\ \widehat{\Phi}(\mathbf{r}, t) \\ \widehat{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t) \\ \widehat{\mathbf{M}}(\mathbf{r}, t) \end{array} \right\} \quad (13.46)$$

und erhalten damit aus (13.44) und (13.45)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \left\{ \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \dot{\mathbf{P}} \left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \right) + \right.$$

$$+\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{M} \left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \right) \right] \Bigg\}, \quad (13.47)$$

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{P} \left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \right) \right]. \quad (13.48)$$

In den Integranden dieser Ausdrücke, soweit sie Ableitungen $\partial/\partial \mathbf{r}$ als Divergenz oder Rotation enthalten, formen wir wie folgt um:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{P} \left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \right) \right] &= \\ &= -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{P} \left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \right) \right] + \\ &+ \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} \mathbf{P}(\mathbf{r}', t') \right]_{t'=\tau}, \quad \tau = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}. \end{aligned} \quad (13.49)$$

Zur Begründung dieser Umformung: Der Ausdruck auf der linken Seite hängt von \mathbf{r} nur in der Kombination $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ ab, und für diese Kombination darf $\partial/\partial \mathbf{r} = -\partial/\partial \mathbf{r}'$ gesetzt werden. Allerdings tritt außerdem eine Abhängigkeit von \mathbf{r}' allein im räumlichen Argument in $\mathbf{P}(\mathbf{r}', \dots)$ auf. Deren Beitrag muss auf der rechten Seite durch den zweiten Term kompensiert werden. Aus (13.46) folgt durch Integration über \mathbf{r}' unter Verwendung des Gaußschen Integralsatzes

$$\begin{aligned} \int d^3r' \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{P} \left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \right) \right] &= \\ &= \int d^3r' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} \mathbf{P}(\mathbf{r}', t') \right]_{t'=\tau}, \quad \tau = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}, \end{aligned} \quad (13.50)$$

weil

$$\begin{aligned} \int d^3r' \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{P} \left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \right) \right] &= \\ &= \int_{\infty} d\mathbf{f}' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{P} \left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \right) = 0, \end{aligned}$$

wobei vorauszusetzen ist, dass $\mathbf{P}(\mathbf{r}', \dots) = 0$ auf der ∞ -fernen Grenzfläche, also für $|\mathbf{r}'| \rightarrow \infty$.

Völlig analog zu (13.49) ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{M} \left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \right) \right] &= \\ &= -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} \times \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{M} \left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \right) \right] + \\ &\quad + \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} \times \mathbf{M}(\mathbf{r}', t') \right]_{t'=\tau}, \quad \tau = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}, \end{aligned} \quad (13.51)$$

woraus durch Integration über \mathbf{r}' in Analogie zu (13.50)

$$\begin{aligned} \int d^3 r' \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{M} \left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \right) \right] &= \\ &= \int d^3 r' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} \times \mathbf{M}(\mathbf{r}', t') \right]_{t'=\tau}, \quad \tau = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}, \end{aligned} \quad (13.52)$$

folgt. Hier haben wir den Gaußschen Integralsatz in der Version (13.31) und das Argument benutzt, dass auch $\mathbf{M}(\mathbf{r}', \dots) = 0$ für $|\mathbf{r}'| \rightarrow \infty$.

Wir definieren jetzt

$$\left. \begin{aligned} \text{Polarisations-Ladungsdichte:} \quad \rho_P(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{P}(\mathbf{r}, t), \\ \text{Polarisations-Stromdichte:} \quad \mathbf{j}_P(\mathbf{r}, t) &= \dot{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t), \\ \text{Magnetisierungs-Stromdichte:} \quad \mathbf{j}_M(\mathbf{r}, t) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{M}(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \right\} \quad (13.53)$$

Diese Definitionen sind mit jenen in den Abschnitten 13.1.1 und 13.1.2 formal identisch. Die physikalische Übereinstimmung mit den früheren Definitionen ist aber erst dann gesichert, wenn wir zeigen können, dass die durch (13.42) und (13.43) definierten und in (13.46) gemittelten räumlichen Dichten \mathbf{P} der elektrischen Dipole und

\mathbf{M} der magnetischen Dipole in derselben Weise in die inhomogenen Maxwell'schen Gleichungen eingehen wie im Abschnitt 13.1. Wir fassen zunächst unsere obigen Umformungen zusammen, indem wir (13.50) und (13.52) in (13.47) und (13.48) einsetzen und die dabei Definitionen in (13.53) verwenden:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \left[\mathbf{j}_P \left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \right) + \mathbf{j}_M \left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \right) \right], \quad (13.54)$$

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \rho_P \left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \right). \quad (13.55)$$

13.3.4 Die Maxwell'schen Gleichungen in Materie

Wie wir im Abschnitt 13.3.3 ausgeführt haben, sind die Potentiale in (13.54) und (13.55) nur die der mikroskopischen elektrischen und magnetischen Dipole. Zu ihnen müssen noch die Potentiale der freien ("wahren") Ladungen ρ und ihrer Stromdichten \mathbf{j} hinzugefügt werden, so dass wir von

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \left[\mathbf{j} \left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \right) + \mathbf{j}_P \left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \right) + \mathbf{j}_M \left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \right) \right], \quad (13.56)$$

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \left[\rho \left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \right) + \rho_P \left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \right) \right] \quad (13.57)$$

auszugehen haben. Nach wie vor sind die Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} durch die Potentiale bestimmt, nämlich durch

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \Phi - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}, \quad \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{A}, \quad (13.58)$$

woraus die unveränderten homogenen Maxwell'schen Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}, \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{B} = 0 \quad (13.59)$$

folgen. Zur Herleitung der inhomogenen Maxwell'schen Gleichungen berechnen wir aus (13.58)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{E} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \Phi \right) - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{A}, \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{B} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{A} \right). \end{aligned} \quad (13.60)$$

Es ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \Phi \right) &= \Delta \Phi, \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{A} \right) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{A} \right) - \Delta \mathbf{A}, \end{aligned} \quad (13.61)$$

vgl. auch Anhang D.1.2. Außerdem nehmen wir an, dass die Potentiale \mathbf{A} und Φ in Lorentz-Eichung vorliegen:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{A} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \Phi, \quad (13.62)$$

vgl. Abschnitt 7.4.2. Wir setzen (13.61) und (13.62) in (13.60) ein und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{E} &= -\Delta \Phi + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi = -\square \Phi, \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{B} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{A} \right) - \Delta \mathbf{A} \\ &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \Phi \right) - \Delta \mathbf{A} \\ &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} \right) - \Delta \mathbf{A} \\ &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} - \square \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (13.63)$$

$$(13.64)$$

Hierin haben wir $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$,

$$\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

vgl. Abschnitt 7.4.2, und außerdem nochmals die Darstellung (13.58) für \mathbf{E} verwendet. Jetzt greifen wir auf Ergebnisse des Abschnitts 10.1 zurück. Dort hatten wir gezeigt, dass Ausdrücke vom Typ der Potentiale in (13.56) und (13.57) Lösungen der Wellen-Gleichungen

$$\square \mathbf{A} = -\mu_0 (\mathbf{j} + \mathbf{j}_P + \mathbf{j}_M), \quad \square \Phi = -\frac{1}{\epsilon_0} (\rho + \rho_P) \quad (13.65)$$

sind, wenn man als Randbedingung fordert, dass die Potentiale im ∞ -Fernen verschwinden. Übrigens gelten auch die Wellen-Gleichungen für die Potentiale in (13.65) nur unter der Annahme der Lorentz-Eichung (13.62), vgl. Abschnitt 7.4.2. Wir setzen (13.65) in (13.63) und (13.64) ein und erhalten

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho + \rho_P), \quad (13.66)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} + \mu_0 (\mathbf{j} + \mathbf{j}_P + \mathbf{j}_M), \quad (13.67)$$

und mit den Definitionen (13.53) für ρ_P , \mathbf{j}_P , \mathbf{j}_M auch

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho, \quad (13.68)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \left(\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \right) = \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}). \quad (13.69)$$

Diese Gleichungen sind tatsächlich identisch mit den Maxwellschen Gleichungen in Materie, wie wir sie im Rahmen der rein phänomenologischen Theorie in (13.11), (13.12) im Abschnitt 13.1 formuliert hatten. Mit den Überlegungen dieses Abschnitts haben wir also den rein phänomenologischen Ansatz des Abschnitts 13.1 auf eine konsequente mikroskopische Basis gestellt. Damit haben wir auch festgestellt, dass sich die elektrische Polarisation \mathbf{P} als räumliche Dichte der mikroskopischen elektrischen Dipole und die Magnetisierung \mathbf{M} als räumliche Dichte der mikroskopischen magnetischen Dipole in der Materie interpretieren lassen.

Kapitel 14

Phänomenologische Material–Relationen, Suszeptibilitäten

14.1 Material–Relationen

Wie wir im Abschnitt 6.4 gezeigt haben ist ein Feld durch seine Quellen *und* Wirbel eindeutig bestimmt. Die Maxwell'schen Gleichungen im Vakuum,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}, & \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{B} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}, & \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{E} &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho, \end{aligned} \quad (14.1)$$

beschreiben jeweils die Quellen und die Wirbel der beiden Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} , legen diese damit eindeutig zu allen Zeiten fest. Die Maxwell'schen Gleichungen in Materie,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}, & \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{B} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{H} &= \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}, & \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{D} &= \rho, \end{aligned} \quad (14.2)$$

beschreiben jedoch vier Felder \mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{D} , \mathbf{H} , und zwar jeweils die Quellen von \mathbf{D} und \mathbf{B} und die Wirbel von \mathbf{E} und \mathbf{H} , legen also die vier Felder nicht eindeutig fest. Natürlich ist die Situation, dass Materie in gegebene elektrische und magnetische Felder eingebracht wird, aber physikalisch eindeutig. Die vorgegeben Felder können z.B. durch elektrische Ladungen auf Kondensatoren oder durch Ströme in Spulen definiert sein. Folglich müssen die Felder \mathbf{D} und \mathbf{H} , oder – was äquivalent ist – die elektrische Polarisation \mathbf{P} und die Magnetisierung \mathbf{M} in Materie nach Vorgabe von \mathbf{E} und \mathbf{B} durch Material-Beziehungen bestimmt sein. Die allgemeinste Form solcher Material-Beziehungen zwischen Feldern sind *Funktionale*, die wir aus physikalischen Gründen als *kausal* voraussetzen:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) &= \boldsymbol{\pi}[\mathbf{E}(\mathbf{r}', t'), \mathbf{B}(\mathbf{r}', t')], \\ \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) &= \boldsymbol{\mu}[\mathbf{E}(\mathbf{r}', t'), \mathbf{B}(\mathbf{r}', t')], \end{aligned} \right\} t' \leq t. \quad (14.3)$$

Die elektrische Polarisation $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ und die Magnetisierung $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$ am Ort \mathbf{r} und zur Zeit t sollen vom Verlauf der Felder $\mathbf{E}(\mathbf{r}', t')$, $\mathbf{B}(\mathbf{r}', t')$ an allen Orten \mathbf{r}' und zu allen Zeiten $t' \leq t$ abhängen können. Die Bedingung $t' \leq t$ drückt gerade die Kausalität aus. Dieser sehr allgemeine funktionale Ansatz lässt die Möglichkeit zu, dass bei der elektrischen und magnetischen Polarisierung von Materie Wechselwirkungen zwischen benachbarten Bereichen $\mathbf{r}' \neq \mathbf{r}$ auftreten und dass das betreffende Material ein *Gedächtnis* mit $t' < t$ besitzt. Letzteres ist bei der *Hysterese* in Ferromagneten beobachtbar wie sie in der Abbildung 14.1 skizziert ist. Dort ist die Magnetisierung M als Funktion des Feldes H (statt B , s.u.) aufgetragen. Für sehr große Werte von $|H|$ wird eine Sättigungs-Magnetisierung $\pm M_s$ erreicht. Der Verlauf des Zusammenhangs $M(H)$ hängt davon ab, von welchen Werten von H und M man ausgeht. Die Kurve, die von $M = +M_s$ bei $H > 0$ ausgeht und zu $M = -M_s$ bei $H < 0$ führt, hat einen anderen Verlauf als der umgekehrte Vorgang. Die Bestimmung der Funktionale $\boldsymbol{\pi}[\dots]$ und $\boldsymbol{\mu}[\dots]$ aus den mikroskopischen Eigenschaften des jeweiligen Materials ist eine typische Problemstellung für die Theoretische Festkörperphysik. Dabei sind außerdem Methoden der Statistischen Physik zu verwenden, weil über die mikroskopische Dynamik der Materialien in geeigneter Weise gemittelt werden muss, vgl. Abschnitt 13.3.

Der funktionale Zusammenhang (14.3) wird gewöhnlich vereinfacht und umgeschrieben in

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \boldsymbol{\pi}[\mathbf{E}(\mathbf{r}', t')], \quad \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) = \boldsymbol{\mu}[\mathbf{H}(\mathbf{r}', t')], \quad t' \leq t. \quad (14.4)$$

Es wird also angenommen, dass ausschließlich ein elektrisches Feld \mathbf{E} zu einer elektrischen Polarisation \mathbf{P} der Materie führt, nicht eine magnetische Flussdichte \mathbf{B} bzw.

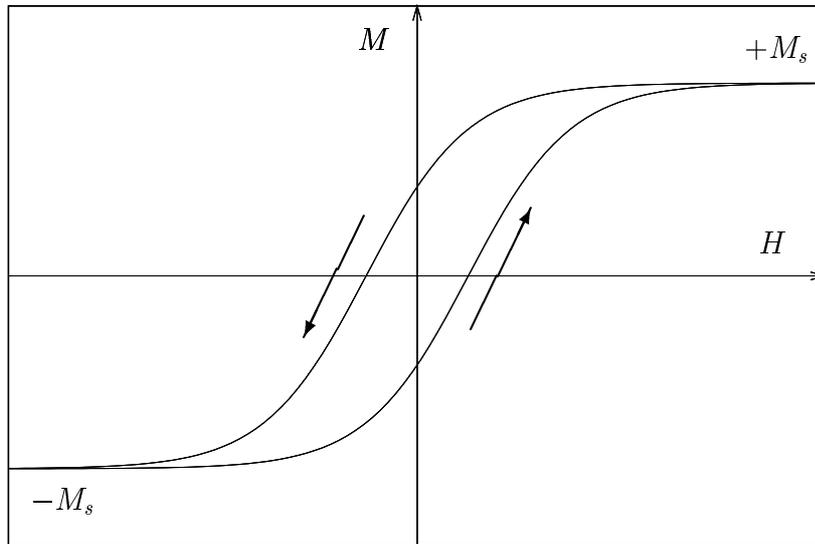


Abbildung 14.1: Hysterese in Ferromagneten: Abhängigkeit von der Vorgeschichte

ein magnetisches Feld \mathbf{H} . Entsprechend wird angenommen, dass nur \mathbf{B} bzw. \mathbf{H} zu einer Magnetisierung \mathbf{M} in Materie führt, nicht jedoch \mathbf{E} . Diese Annahmen sind physikalisch plausibel, werden auch empirisch bestätigt, sind jedoch aus der Theorie heraus nicht zwingend. Gelegentlich lassen sich auch Symmetrie-Argumente für diese Vereinfachung anführen.

Weiterhin haben wir in (14.4) $\pi[\mathbf{H}(\mathbf{r}', t')]$ anstelle von $\pi[\mathbf{B}(\mathbf{r}', t')]$ geschrieben. Offensichtlich sind beide Schreibweisen möglich und letztlich bezüglich ihrer physikalischen Information auch äquivalent, doch ist die Schreibweise $\pi[\mathbf{H}(\mathbf{r}', t')]$ die üblichere, zumal das \mathbf{H} -Feld über die (statische) Maxwellsche Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{H} = \mathbf{j}$$

auch direkt mit den als bekannt anzunehmenden Strömen z.B. in einer felderzeugenden Spule verknüpft ist.

14.2 Lineare Relationen, Suszeptibilitäten

14.2.1 Suszeptibilitäten

Der einfachste Fall einer funktionalen Abhängigkeit (14.4) sind *lineare* Funktionale. Wir schreiben sie in der Form

$$\left. \begin{aligned} P_\alpha(\mathbf{r}, t) &= \epsilon_0 \int d^3 r' \int_{-\infty}^t dt' \chi_{\alpha\beta}^{(e)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') E_\beta(\mathbf{r}', t'), \\ M_\alpha(\mathbf{r}, t) &= \int d^3 r' \int_{-\infty}^t dt' \chi_{\alpha\beta}^{(m)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') H_\beta(\mathbf{r}', t'). \end{aligned} \right\} \quad (14.5)$$

Hier haben wir die Forderung der Kausalität explizit berücksichtigt, indem wir die Integration über t' nur bis zur Zeit t erstrecken. Wir können uns die linearen Funktionale in (14.5) als die linearen Terme einer "funktionalen Taylor-Entwicklung" der allgemeinen Ausdrücke in (14.4) vorstellen, d.h., (14.5) ist als lineare Approximation von (14.4) interpretierbar. Dabei haben wir allerdings vorausgesetzt, dass keine Terme 0-ter Ordnung auftreten, d.h., dass $\mathbf{P} = 0$, wenn $\mathbf{E} = 0$, und $\mathbf{M} = 0$, wenn $\mathbf{H} = 0$. Wenn diese Voraussetzung nicht zutrifft, besitzt das Material eine sogenannte *spontane* elektrische Polarisation oder Magnetisierung. Die in der Abbildung 14.1 skizzierte Abhängigkeit $M(H)$ für einen Ferromagneten zeigt gerade eine solche spontane Magnetisierung, also $M \neq 0$ bei $H = 0$, die allerdings auch wieder von der "Vorgeschichte" des Systems abhängt. Wir werden uns in diesem Text jedoch auf den Fall beschränken, dass keine spontanen Werte von \mathbf{P} und \mathbf{M} auftreten.

Die Erwartung, dass die lineare Approximation (14.5) des allgemeinen funktionalen Zusammenhangs (14.4) für nicht zu hohe Werte der Felder \mathbf{E} und \mathbf{H} eine hinreichende Beschreibung darstellt, wird experimentell bestätigt. Für sehr hohe Felder \mathbf{E} und \mathbf{H} , wie sie etwa in laser-erzeugten Lichtwellen auftreten, muss die Entwicklung (14.5) allerdings um Terme zweiter und sogar dritter Ordnung ergänzt werden. Solche nicht-linearen Abhängigkeiten insbesondere zwischen \mathbf{P} und \mathbf{E} bilden den Ausgangspunkt für die *Nicht-lineare Optik*, ein aktuelles Forschungsgebiet mit einer inzwischen sehr großen Zahl technologischer Anwendungen.

Die Koeffizienten $\chi_{\alpha\beta}^{(e)}(\dots)$ bzw. $\chi_{\alpha\beta}^{(m)}(\dots)$ heißen die (linearen) elektrischen bzw. magnetischen *Suszeptibilitäten*. Schon aus formalen mathematischen Gründen müssen sie *Tensoren* sein, weil sie zwei Vektorfelder \mathbf{P} und \mathbf{E} bzw. \mathbf{M} und \mathbf{H} miteinander verknüpfen. Daraus folgt auch bereits ihr Tensor-Charakter, vgl. Abschnitt 3.2.2. Unter Verwendung von thermodynamischen Argumenten lässt sich zeigen, dass die Suszeptibilitäten *symmetrische* Tensoren sind, also

$$\chi_{\alpha\beta}^{(e)}(\dots) = \chi_{\beta\alpha}^{(e)}(\dots), \quad \chi_{\alpha\beta}^{(m)}(\dots) = \chi_{\beta\alpha}^{(m)}(\dots). \quad (14.6)$$

Dann können wir nach einem bekannten Satz der Linearen Algebra in dem Material stets ein Koordinaten-System finden, in dem die Tensoren $\chi_{\alpha\beta}^{(e)}(\dots)$ und $\chi_{\alpha\beta}^{(m)}(\dots)$ *diagonale* Gestalt haben. Wenn das Material *kubische* Symmetrie besitzt, müssen die drei diagonalen Terme übereinstimmen, weil eine Drehung um eine der kubischen Achsen um einen rechten Winkel die diagonalen Terme untereinander vertauscht, die physikalische Situation aber nicht ändert. Ein ähnliches Argument zeigt, dass die diagonalen Terme auch in Materialien mit *hexagonaler* Symmetrie übereinstimmen. In all diesen Fällen lassen sich die linearen Relationen in (14.5) in der Form

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) &= \epsilon_0 \int d^3 r' \int_{-\infty}^t dt' \chi^{(e)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') \mathbf{E}(\mathbf{r}', t'), \\ \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) &= \int d^3 r' \int_{-\infty}^t dt' \chi^{(m)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') \mathbf{H}(\mathbf{r}', t'). \end{aligned} \right\} \quad (14.7)$$

schreiben, d.h., dass \mathbf{P} parallel zu \mathbf{E} und \mathbf{M} parallel zu \mathbf{H} ist. Das gilt natürlich auch in Materialien, die makroskopisch isotrop sind, z.B. in amorphen Materialien, in Gasen und Flüssigkeiten. Zur Vereinfachung der Schreibweise werden wir im Folgenden fast immer den isotropen Zusammenhang (14.7) verwenden. Die Verallgemeinerung auf den vollständigen tensoriellen Fall bereitet keine Schwierigkeiten.

14.2.2 Ohmsches Gesetz, Hall-Effekt

In leitenden Materialien, z.B. Metallen, Halbleitern, elektrolytischen Flüssigkeiten, kommt es bei Anlegen eines elektrischen Feldes \mathbf{E} zu einem Stromfluss. Allgemein müssten wir hierfür einen funktionalen Zusammenhang zwischen der sich einstellenden Stromdichte \mathbf{j} und dem Feld \mathbf{E} formulieren:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \boldsymbol{\sigma}[\mathbf{E}(\mathbf{r}', t')].$$

Auch hier denken wir uns die lineare Approximation nach dem Muster im Abschnitt 14.2.1 durchgeführt und erhalten dann

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \int d^3 r' \int_{-\infty}^t dt' \sigma(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') \mathbf{E}(\mathbf{r}', t'). \quad (14.8)$$

Dieser lineare Zusammenhang wird als *Ohmsches Gesetz* bezeichnet, und $\sigma(\dots)$ als *spezifische elektrische Leitfähigkeit*. Es ist zu betonen, dass es sich um eine approximative Materialgleichung handelt, die experimentell allerdings in fast allen leitenden Materialien bestätigt wird.

Die bisher in diesem Text entwickelte Elektrodynamik erfüllte die drei Invarianzen gegen Zeitumkehr T , gegen Paritätsumkehr P und gegen Ladungsumkehr C . Im Kapitel 7 haben wir diese Invarianzen sogar zur Formulierung der Maxwell'schen Gleichungen benutzt. Das trifft auch auf die linearen Material-Relationen zwischen \mathbf{P} und \mathbf{E} und zwischen \mathbf{M} und \mathbf{H} in (14.7) zu. Insbesondere verhalten sich \mathbf{P} und \mathbf{E} beide gerade unter T und \mathbf{M} und \mathbf{H} beide ungerade unter T . (Dieses Verhalten von \mathbf{P} und \mathbf{M} lässt sich aus deren Definition als räumliche Dichte elektrischer bzw. magnetischer Dipole gewinnen.) Das Ohmsche Gesetz jedoch bricht die Invarianz gegen die Zeitumkehr T : die Stromdichte \mathbf{j} auf der linken Seite verhält sich ungerade unter T , das elektrische Feld \mathbf{E} auf der rechten Seite dagegen gerade unter T . Die elektrische Leitung in Materialien ist also ein *irreversibler* Prozess. Dabei wird Feldenergie in sogenannte *Stromwärme* umgewandelt. Das geht auch aus der Bilanz der Energie hervor, die wir im Abschnitt 8.2.1 hergeleitet haben:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{r}} = -\mathbf{j} \mathbf{E}. \quad (14.9)$$

Der Term $-\mathbf{j} \mathbf{E}$ auf der rechten Seite beschreibt den Energie-Austausch zwischen dem Feld und den geladenen Teilchen, die die Stromdichte \mathbf{j} tragen. Für die elektrische Leitung ist stets $\mathbf{j} \mathbf{E} > 0$, wenn überhaupt ein Feld $\mathbf{E} \neq 0$ und eine Stromdichte $\mathbf{j} \neq 0$ auftreten. Der Strom "folgt" dem elektrischen Feld, fließt also dem Feld niemals entgegen. Es ist demnach stets $-\mathbf{j} \mathbf{E} < 0$: Feldenergie geht auf die Teilchen über und wird von ihnen durch Stöße ("Reibung") letztlich als Stromwärme, auch *Ohmsche Wärme* genannt, auf das Material übertragen. Dass dieser Prozess nicht umgekehrt ablaufen kann, ist eine Folge des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik, weil bei der Erzeugung von Stromwärme Entropie erzeugt wird.

Wenn in einem leitenden Material außer dem elektrischen Feld \mathbf{E} auch eine magnetische Flussdichte \mathbf{B} auftritt, erfahren die Ladungsträger eine Lorentz-Kraft $\mathbf{F}_L = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$, worin q die Ladung pro Teilchen und \mathbf{v} seine Geschwindigkeit ist. Wir nehmen an, dass \mathbf{B} nicht die Richtung von $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ besitzt, vgl. Abschnitt 5.1.1, so dass $\mathbf{v} \times \mathbf{B} \neq 0$. Die Lorentz-Kraft lenkt die Ladungsträger senkrecht zur Stromrichtung \mathbf{j} ab. In einem räumlich begrenzten Leiter, z.B. einem Draht, kommt es so zu einer Aufladung des Randes. Dadurch wird ein elektrisches Feld \mathbf{E}_H , das sogenannte *Hall-Feld*, aufgebaut. Dieser Vorgang läuft so lange weiter, bis das Hall-Feld die Lorentz-Kraft \mathbf{F}_L kompensiert, also

$$\mathbf{E}_H = -\mathbf{v} \times \mathbf{B} = -R \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad R = \frac{1}{\rho}, \quad (14.10)$$

Die Konstante $R = 1/\rho$ wird auch *Hall-Konstante* genannt. Da $\rho = qn$, worin n die räumliche Dichte der Ladungsträger ist, erlaubt die Messung der Hall-Konstanten eine experimentelle Bestimmung der Ladungsträger-Dichte in Leitern.

14.3 Fourier-Transformation

14.3.1 Zeitliche und räumliche Homogenität

Wir nehmen an, dass das betrachtete Material stationär bzw. *zeitlich homogen* ist. Es sollen in dem Material also keine Prozesse, z.B. Relaxationen, auf einer zeitlich makroskopischen Skala mehr ablaufen. Insbesondere soll sich das Material in einem Zustand des thermodynamischen Gleichgewichts befinden. Dann hängen die Suszeptibilitäten $\chi^{(e)}(\dots)$ und $\chi^{(m)}(\dots)$ in den linearen Relationen (14.7) bzw. die spezifische elektrische Leitfähigkeit $\sigma(\dots)$ in (14.8) nur noch von den Differenzen der Zeitargumente ab:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) &= \epsilon_0 \int d^3 r' \int_{-\infty}^t dt' \chi^{(e)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t - t') \mathbf{E}(\mathbf{r}', t'), \\ \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) &= \int d^3 r' \int_{-\infty}^t dt' \chi^{(m)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t - t') \mathbf{H}(\mathbf{r}', t'), \\ \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) &= \int d^3 r' \int_{-\infty}^t dt' \sigma(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t - t') \mathbf{E}(\mathbf{r}', t'). \end{aligned} \right\} \quad (14.11)$$

Nach wie vor kann das Material noch ein "Gedächtnis" besitzen; dieses soll aber nicht von dem absoluten Zeitpunkt abhängen.

Wir wollen die analoge Aussage in Bezug auf die räumliche Struktur des Materials machen, also annehmen, dass es auch *räumlich homogen* ist. Diese Annahme bedarf – im Unterschied zur zeitlichen Homogenität – einer besonderen Diskussion. Zunächst einmal besitzt jedes Material eine atomare oder molekulare Struktur, ist also auf einer mikroskopischen Skala keineswegs räumlich homogen. Wir haben aber bereits im Abschnitt 13.3.2 eine Mittelung durchgeführt, die ja überhaupt erst die Grundlage für die Begriffe der elektrischen Polarisierung und der Magnetisierung als mittlere räumliche Dichten der elektrischen und magnetischen Dipole geschaffen

hat. Diese Mittelung sollte sich über einen Volumenbereich ΔV erstrecken, der hinreichend viele Teilchen enthält, so dass die atomare oder molekulare Inhomogenität der Materie in den Material-Relationen wie (14.11) nicht mehr auftritt.

Es gibt allerdings auch gegen die Annahme einer makroskopischen räumlichen Homogenität einen Einwand, nämlich die Existenz von Grenzflächen, entweder zwischen einem Material und dem Vakuum oder zwischen zwei verschiedenen Materialien. Der Homogenitätsbereich wird in diesen Fällen auf den Raum zwischen den Grenzflächen eingengt, und die oben erwähnte Mittelung verbietet es, die mikroskopische Nachbarschaft von Grenzflächen in die hier anzustellenden Überlegungen einzubeziehen. Im Übrigen werden zwei homogene Bereiche, die durch eine Grenzfläche getrennt sind, durch die Grenzbedingungen für die Felder verknüpft, die wir im Abschnitt 13.2 hergeleitet hatten.

Unter Beachtung dieser Diskussion machen wir nun die Annahme einer räumlichen Homogenität, nehmen also an, dass die Suszeptibilitäten $\chi^{(e)}(\dots)$ und $\chi^{(m)}(\dots)$ bzw. die spezifische elektrische Leitfähigkeit $\sigma(\dots)$ in den linearen Relationen (14.11) nur noch von den Differenzen der Ortsvariablen abhängt und erhalten

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) &= \epsilon_0 \int d^3 r' \int_{-\infty}^t dt' \chi^{(e)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \mathbf{E}(\mathbf{r}', t'), \\ \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) &= \int d^3 r' \int_{-\infty}^t dt' \chi^{(m)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \mathbf{H}(\mathbf{r}', t'), \\ \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) &= \int d^3 r' \int_{-\infty}^t dt' \sigma(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \mathbf{E}(\mathbf{r}', t'). \end{aligned} \right\} \quad (14.12)$$

Um ein mögliches Missverständnis zu vermeiden, sei betont, dass hier die zeitliche und räumliche Homogenität der *Material-Eigenschaften* angenommen wurde. Selbstverständlich können aber die Felder $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ und auch $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ von Ort und Zeit abhängen, also zeitlich und räumlich inhomogen sein. Das trifft z.B. auf den Fall zu, dass $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ elektromagnetische Wellen sind.

14.3.2 Fourier-Transformation

Die zeitliche und räumliche Homogenität der linearen Relationen in (14.12) legt es nahe, diese einer Fourier-Transformation zu unterziehen. Wir führen die Fourier-Transformation am Beispiel der linearen Relation zwischen \mathbf{P} und \mathbf{E} in (14.12) aus; die folgenden Rechnungen lassen sich sofort auf die anderen Relationen übertragen. Die Fourier-Transformationen für $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ lauten

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) \end{array} \right\} = \int d^3k \int d\omega e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \left\{ \begin{array}{l} \widetilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega), \\ \widetilde{\mathbf{P}}(\mathbf{k}, \omega), \end{array} \right. \quad (14.13)$$

Die Fourier-Transformation ist uns aus dem Kapitel 9 bekannt, desgleichen aus dem Anhang C. Damit $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ reell ist, muss

$$\widetilde{\mathbf{E}}^*(\mathbf{k}, \omega) = \widetilde{\mathbf{E}}(-\mathbf{k}, -\omega) \quad (14.14)$$

erfüllt sein, und gleichlautend für \mathbf{P} . Zu integrieren ist in (14.13) über alle Wellenzahl-Vektoren \mathbf{k} in 3 Dimensionen und über alle Frequenzen ω . Die Umkehr-Transformation zu (14.13) lautet

$$\left. \begin{array}{l} \widetilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega) \\ \widetilde{\mathbf{P}}(\mathbf{k}, \omega) \end{array} \right\} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3r \int dt e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) \end{array} \right. \quad (14.15)$$

vgl. Anhang C. Wir berechnen jetzt $\widetilde{\mathbf{P}}(\mathbf{k}, \omega)$, indem wir die obigen Fourier-Transformationen und die lineare Relation in (14.12) verwenden. In der letzteren erstrecken wir die Zeit-Integration formal von $t' = -\infty$ bis $t' = +\infty$ und berücksichtigen die Bedingung der Kausalität durch die Vereinbarung

$$\chi^{(e)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = 0 \quad \text{für} \quad t < t'. \quad (14.16)$$

Wir erhalten dann

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{P}}(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3r \int dt e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) \\ &= \frac{\epsilon_0}{(2\pi)^4} \int d^3r \int dt e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \cdot \\ &\quad \cdot \int d^3r' \int dt' \chi^{(e)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \mathbf{E}(\mathbf{r}', t') \\ &= \frac{\epsilon_0}{(2\pi)^4} \int d^3r' \int dt' e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}' - \omega t')} \mathbf{E}(\mathbf{r}', t') \cdot \\ &\quad \cdot \int d^3r \int dt e^{-i[\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \omega(t - t')]} \chi^{(e)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \\ &= \epsilon_0 \widetilde{\chi}^{(e)}(\mathbf{k}, \omega) \widetilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega). \end{aligned} \quad (14.17)$$

Hier haben wir die Umkehrformel (14.15) und die folgende Definition für $\tilde{\chi}^{(e)}$ benutzt:

$$\begin{aligned}\tilde{\chi}^{(e)}(\mathbf{k}, \omega) &:= \int d^3 r \int dt e^{-i[\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')-\omega(t-t')]} \chi^{(e)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t') \\ &= \int d^3 r \int dt e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r}-\omega t)} \chi^{(e)}(\mathbf{r}, t),\end{aligned}\quad (14.18)$$

worin wir im letzten Schritt $\mathbf{r}'' := \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ und $t'' := t - t'$ substituiert und anschließend \mathbf{r}'', t'' wieder in \mathbf{r}, t umbenannt haben. $\tilde{\chi}^{(e)}(\mathbf{k}, \omega)$ ist offenbar die Fourier-Transformierte der orts- und zeitabhängigen Suszeptibilität $\chi^{(e)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')$ bzw. $\chi^{(e)}(\mathbf{r}, t)$, wobei wir allerdings den Faktor $1/(2\pi)^4$ aus Gründen der einfacheren Schreibweise anders als in (14.13) bzw. (14.15) zugeordnet haben.

Mit dem Ergebnis (14.17) haben wir den sogenannten *Faltungssatz* bewiesen. Man nennt nämlich eine Relation vom Typ der linearen Relationen in (14.12) eine *Faltung*. Faltungen gehen unter der Fourier-Transformation in Produkte der Fourier-Transformierten über. Wir erinnern nochmals daran, dass die Faltungen in (14.12) eine Konsequenz aus der Annahme zeitlicher und räumlicher Homogenität waren. Völlig analog zu (14.17) folgen aus den anderen beiden linearen Relationen in (14.12) auch

$$\left. \begin{aligned}\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{k}, \omega) &= \tilde{\chi}^{(m)}(\mathbf{k}, \omega) \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{k}, \omega), \\ \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{k}, \omega) &= \tilde{\sigma}(\mathbf{k}, \omega) \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega).\end{aligned}\right\} \quad (14.19)$$

Die Definitionen der Fourier-Transformierten von $\mathbf{M}, \mathbf{H}, \mathbf{j}, \chi^{(m)}, \sigma$ folgen sinngemäß den obigen Definitionen.

14.3.3 Kramers-Kronig-Relationen

Wir untersuchen jetzt die Auswirkung der Bedingung der Kausalität für die Suszeptibilitäten als Funktionen der Zeit auf deren Fourier-Transformierten als Funktionen der Frequenz. Wenn wir die linearen Relationen (14.12) nur bezüglich des Ortes \mathbf{r} bzw. der Wellenzahl \mathbf{k} einer Fourier-Transformation unterziehen, bleiben die zeitlichen Faltungen bestehen, während bezüglich der \mathbf{k} -Abhängigkeit Produkt-Ausdrücke entstehen. Wie man nach dem obigen Muster sofort bestätigt, kommen wir damit zu linearen Relationen vom Typ

$$g(t) = \int dt' \alpha(t-t') f(t'), \quad (14.20)$$

worin $g(t)$, $f(t)$, $\alpha(t-t')$ für die \mathbf{k} -Fourier-Transformierten von \mathbf{P} , \mathbf{E} , $\chi^{(e)}$ usw. stehen. Wir untersuchen jetzt die Fourier-Transformierte $\tilde{\alpha}(\omega)$ von $\alpha(t)$. Nach dem Vorbild von (14.18) ist

$$\tilde{\alpha}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-i\omega t} \alpha(t) = \int_0^{+\infty} dt e^{-i\omega t} \alpha(t), \quad (14.21)$$

worin wir im zweiten Schritt die Eigenschaft der Kausalität benutzt haben, vgl. (14.16). Aus physikalischen Gründen setzen wir voraus, dass $\tilde{\alpha}(\omega)$ für alle reellen Frequenzen ω existiert. In mathematischer Sprechweise bedeutet das, dass das t -Integral von $t = 0$ bis $t = +\infty$ auf der rechten Seite von (14.21) für alle reellen ω konvergiert. Wir wollen jetzt die *analytische Fortsetzung* von $\tilde{\alpha}(\omega)$ für komplexe Werte von ω diskutieren, während die Zeit t weiterhin reell bleiben soll. Nun ist

$$\begin{aligned} i\omega t &= i(\operatorname{Re} \omega)t - (\operatorname{Im} \omega)t, \\ \tilde{\alpha}(\omega) &= \int_0^{+\infty} dt e^{-i(\operatorname{Re} \omega)t + (\operatorname{Im} \omega)t} \alpha(t), \end{aligned} \quad (14.22)$$

worin $\operatorname{Re} \omega$ bzw. $\operatorname{Im} \omega$ den Real- bzw. Imaginärteil von ω bedeuten. Aus (14.22) lesen wir ab, dass das t -Integral auf der rechten Seite in $\operatorname{Im} \omega < 0$ um so mehr konvergiert, wenn es bereits gemäß obiger Voraussetzung auf der reellen Achse $\operatorname{Im} \omega = 0$ konvergiert. Eine andere Ausdrucksweise für diese Feststellung lautet, dass $\tilde{\alpha}(\omega)$ keine Singularitäten in der Halbebene $\operatorname{Im} \omega < 0$ besitzt.

Wir diskutieren jetzt das Integral

$$J := \oint_C d\omega' \frac{\tilde{\alpha}(\omega')}{\omega' - \omega}, \quad (14.23)$$

worin C ein geschlossener Integrationsweg in der komplexen ω' -Ebene ist, der in der Abbildung 14.2 skizziert ist und aus folgenden Teilstücken besteht:

C_0 : längs der reellen ω' -Achse von $\omega' = -R$ bis $\omega' = \omega - \rho$ und von $\omega' = \omega + \rho$ bis $\omega' = R$,

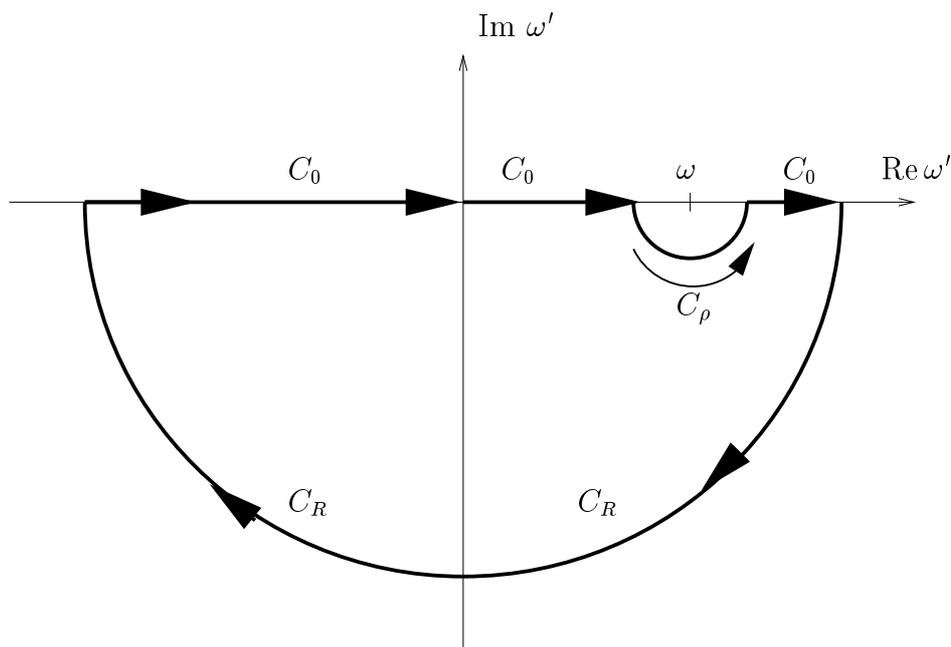


Abbildung 14.2: Integrationsweg

C_R : auf dem Halbkreis in $\text{Im } \omega' < 0$ mit dem Radius R und dem Mittelpunkt im Ursprung $\omega' = 0$,

C_ρ : auf einem Halbkreis in $\text{Im } \omega' < 0$ mit dem Radius ρ und dem Mittelpunkt in $\omega' = \omega$.

Wir werden den Grenzfall $R \rightarrow \infty$ und $\rho \rightarrow 0$ betrachten. Zunächst einmal stellen wir fest, dass das Integral J in (14.23) verschwindet, $J = 0$, weil der Integrationsweg im Gebiet $\text{Im } \omega' < 0$ verläuft, in dem der Integrand, also auch die Funktion $\tilde{\alpha}(\omega')$ keine Singularitäten besitzt, s.o.

Weiter zeigen wir, dass der Beitrag über das Teilstück C_R zu dem Integral J für $R \rightarrow \infty$ ebenfalls verschwindet, weil der Integrand auf C_R für $R \rightarrow \infty$ verschwindet. Wenn wir nämlich annehmen, dass $\alpha(t)$ aus physikalischen Gründen beschränkt ist, $|\alpha(t)| < M$, gewinnen wir für $\text{Im } \omega' < 0$ aus (14.22) die Abschätzung

$$|\tilde{\alpha}(\omega')| \leq M \int_0^\infty dt e^{-|\text{Im } \omega'|t} = \frac{M}{|\text{Im } \omega'|}. \quad (14.24)$$

Nun ist auf C_R

$$\omega' = R e^{i\phi}, \quad \text{Im } \omega' = R \sin \phi, \quad |\text{Im } \omega'| = R |\sin \phi|,$$

so dass $\text{Im } \omega' \rightarrow \infty$ für $R \rightarrow \infty$ und somit in (14.24) $|\tilde{\alpha}(\omega')| \rightarrow 0$ für $R \rightarrow \infty$. (Auszunehmen sind lediglich die singulären Punkte bei $\phi = 0$ und $\phi = \pi$, die jedoch keinen endlichen Beitrag zu dem Integral über C_R liefern.)

Zur Berechnung des Beitrags des Teilstücks C_ρ zu dem Integral J substituieren wir

$$\omega' = \omega - \rho e^{i\phi}, \quad d\omega' = -i \rho e^{i\phi} d\phi.$$

Für $\phi = 0$ bis $\phi = \pi$ wird gerade der Halbkreis in $\text{Im } \omega' < 0$ durchlaufen. Für $\phi = 0$ wird $\omega' = \omega - \rho$ und für $\phi = \pi$ wird $\omega' = \omega + \rho$, und wir erhalten

$$\int_{C_\rho} d\omega' \frac{\tilde{\alpha}(\omega')}{\omega' - \omega} = i \int_0^\pi d\phi \alpha(\omega - \rho e^{i\phi}),$$

so dass für $\rho \rightarrow 0$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{C_\rho} d\omega' \frac{\tilde{\alpha}(\omega')}{\omega' - \omega} = i \pi \tilde{\alpha}(\omega). \quad (14.25)$$

Schließlich schreiben wir den Beitrag des Teilstücks C_0 zu dem Integral J für $R \rightarrow \infty$ und $\rho \rightarrow 0$ in der Form

$$\begin{aligned} \int_{C_0} d\omega' \frac{\tilde{\alpha}(\omega')}{\omega' - \omega} &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{\omega - \rho} d\omega' \frac{\tilde{\alpha}(\omega')}{\omega' - \omega} + \int_{\omega + \rho}^{+\infty} d\omega' \frac{\tilde{\alpha}(\omega')}{\omega' - \omega} \right] \\ &=: \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\tilde{\alpha}(\omega')}{\omega' - \omega} \end{aligned} \quad (14.26)$$

eines sogenannten *Hauptwert-Integrals*. Dass dieses existiert, erkennen wir aus der folgenden Überlegung: wir substituieren

$$\begin{aligned} \text{in} \quad -\infty < \omega' \leq \omega - \rho : & \quad \omega' = \omega - \omega'', \\ \text{in} \quad \omega + \rho \leq \omega' < +\infty : & \quad \omega' = \omega + \omega'', \end{aligned}$$

und erhalten

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\tilde{\alpha}(\omega')}{\omega' - \omega} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\rho}^{\infty} d\omega'' \frac{\tilde{\alpha}(\omega + \omega'') - \tilde{\alpha}(\omega - \omega'')}{\omega''}. \quad (14.27)$$

- (1) Der Grenzwert für $\rho \rightarrow 0$ existiert, weil $\tilde{\alpha}(\omega)$ regulär sein sollte und deswegen die Differenz $\tilde{\alpha}(\omega + \omega'') - \tilde{\alpha}(\omega - \omega'') = O(\omega'')$ für $\omega'' \rightarrow 0$, so dass dadurch der Nenner ω'' kompensiert wird.
- (2) Das Integral

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\rho}^R d\omega'' \frac{\tilde{\alpha}(\omega + \omega'') - \tilde{\alpha}(\omega - \omega'')}{\omega''}$$

konvergiert auch für $R \rightarrow \infty$, weil die Umkehrung von (14.21),

$$\alpha(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{i\omega t} \tilde{\alpha}(\omega)$$

auch für $t = 0$ konvergieren soll, d.h., dass bereits $\tilde{\alpha}(\omega)$ von $\omega = -\infty$ bis $\omega = +\infty$ integrierbar ist, um so mehr der Integrand des obigen Hauptwert-Integrals.

Wir fassen unsere Rechnungen zusammen: Da das Integral J in (14.23) über den gesamten Integrationsweg $C = C_0 + C_R + C_{\rho}$ verschwindet und da der Beitrag über C_R für $R \rightarrow \infty$ ebenfalls verschwindet, bleibt für $R \rightarrow \infty$ und $\rho \rightarrow 0$

$$\int_{C_0} d\omega' \frac{\tilde{\alpha}(\omega')}{\omega' - \omega} + \int_{C_{\rho}} d\omega' \frac{\tilde{\alpha}(\omega')}{\omega' - \omega} = 0.$$

Daraus folgt nach Einsetzen der obigen Ergebnisse

$$\tilde{\alpha}(\omega) = \frac{i}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\tilde{\alpha}(\omega')}{\omega' - \omega}. \quad (14.28)$$

Wenn wir $\tilde{\alpha}(\omega)$ bzw. $\tilde{\alpha}(\omega')$ auf beiden Seiten in Real- und Imaginär-Teil zerlegen, erhalten wir daraus die beiden Relationen

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re} \tilde{\alpha}(\omega) &= -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\operatorname{Im} \tilde{\alpha}(\omega')}{\omega' - \omega}, \\ \operatorname{Im} \tilde{\alpha}(\omega) &= \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\operatorname{Re} \tilde{\alpha}(\omega')}{\omega' - \omega}. \end{aligned} \right\} \quad (14.29)$$

Dieses sind die *Kramers-Kronig-Relationen*, die, wie oben erläutert, für die beiden Suszeptibilitäten $\chi^{(e)}(\mathbf{k}, \omega)$, $\chi^{(m)}(\mathbf{k}, \omega)$ und für die spezifische Leitfähigkeit $\sigma(\mathbf{k}, \omega)$ jeweils als Funktion der Frequenz ω gelten. (Die Abhängigkeit vom Wellenzahl-Vektor \mathbf{k} spielt dabei keine Rolle; man könnte $\chi^{(e)}$, $\chi^{(m)}$ und σ statt (14.18) auch nur bezüglich der Zeit einer Fourier-Transformation unterziehen und die Kramers-Kronig-Relationen für $\chi^{(e)}(\mathbf{r}, \omega)$ usw. formulieren, aber das ist nicht üblich.)

Die Kramers-Kronig-Relationen besagen, dass Real- und Imaginärteil der Suszeptibilitäten nicht unabhängig voneinander sind. Letztlich ist das eine Folge der Kausalität, denn die entscheidende Voraussetzung, dass $\tilde{\alpha}(\omega)$ in $\operatorname{Im} \omega < 0$ regulär ist, folgte direkt aus der Tatsache, dass das Fourier-Integral über die Zeit t in (14.22) keine Beiträge für $t < 0$ liefert. Wäre das aber der Fall, dann könnten wir den Schluss über die Regularität von $\tilde{\alpha}(\omega)$ in $\operatorname{Im} \omega < 0$ nicht mehr ziehen.

In der Literatur wird die Fourier-Transformation zwischen α und $\tilde{\alpha}$ in (14.21) auch mit dem umgekehrten Vorzeichen im Exponenten, also in der Form

$$\tilde{\alpha}(\omega) = \int_0^{+\infty} dt e^{+i\omega t} \alpha(t)$$

definiert. Mit einer Transformation $t \rightarrow -t$ weist man sehr einfach nach, dass dann die obigen Kramers-Kronig-Relationen eine Vorzeichen-Änderung erfahren.

Man kann die Kramers-Kronig-Relationen verwenden, um die Funktion $\operatorname{Im} \tilde{\alpha}(\omega)$ aus dem Verlauf von $\operatorname{Re} \tilde{\alpha}(\omega)$ oder umgekehrt zu bestimmen. Es reicht also aus, entweder $\operatorname{Re} \tilde{\alpha}(\omega)$ oder $\operatorname{Im} \tilde{\alpha}(\omega)$ durch eine Messung zu bestimmen. Allerdings benötigt man jeweils den Verlauf von $\operatorname{Re} \tilde{\alpha}(\omega)$ oder $\operatorname{Im} \tilde{\alpha}(\omega)$ für alle Frequenzen und außerdem konvergieren die Integrale in den Kramers-Kronig-Relationen mit ihrem asymptotischen Verhalten $\sim 1/\omega'$ sehr langsam.

14.4 Modelle

14.4.1 Thomsonsches Atom-Modell

Im Abschnitt 13.1.1 hatten wir überlegt, dass es zwei mögliche Mechanismen für die elektrische Polarisation in Materie gibt:

- (1) Unter der Einwirkung eines elektrischen Feldes können gebundene Ladungsträger partiell verschoben werden und so mikroskopische elektrische Dipole entstehen.
- (2) Bereits in der Materie vorhandene elektrische Dipole können unter der Einwirkung eines elektrischen Feldes partiell orientiert werden.

Der unter (2) genannte Mechanismus ist ein *thermodynamischer* Vorgang: Die partielle Orientierung der Dipole im Feld aufgrund ihrer potentiellen Energie $W_p = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$ erfolgt gegen deren thermische Bewegung. Die sich einstellende Orientierung hängt von der Energie der thermischen Bewegung und somit von der Temperatur ab. Dieser Mechanismus wird in der Thermodynamik und Statistischen Physik untersucht. Für nicht zu tiefe Temperaturen T ergibt sich ein Verhalten $\chi^{(e)} \sim 1/T$.

Der unter (1) genannte Mechanismus ist im Wesentlichen ein *dynamischer* Vorgang: Die Kraft $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$, die ein elektrisches Feld \mathbf{E} auf eine Ladung q ausübt, führt zu einer Verschiebung der Ladung, die sich aus dem Gleichgewicht mit der Bindungskraft der Ladung ergibt. Diesen Vorgang wollen wir in diesem Abschnitt in einem einfachen klassischen Modell, dem *Thomsonschen Atom-Modell*, beschreiben. Die klassische Beschreibung ist eine Näherung. Korrekterweise müsste man quantentheoretisch rechnen, doch hängen die folgenden Ergebnisse davon qualitativ nicht ab.

Ein Atom soll beschrieben werden durch

- einen Kern am Ort \mathbf{r}_K mit einer punktförmigen Ladung Ze und
- eine kugelförmige Elektronen-Verteilung mit einem Zentrum bei \mathbf{r}_e , einem Radius R und der Gesamtladung $-Ze$, die homogen innerhalb der Kugel verteilt sein soll.

Die Ladungsdichte des Kerns lautet voraussetzungsgemäß

$$\rho_K(\mathbf{r}) = Q_K \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_K), \quad Q_K = Ze, \quad (14.30)$$

und die der Elektronen

$$\rho_e(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{Q_e}{4\pi R^3/3} & \text{in } |\mathbf{r} - \mathbf{r}_e| < R, \\ 0 & \text{in } |\mathbf{r} - \mathbf{r}_e| > R. \end{cases} \quad Q_e = -Ze. \quad (14.31)$$

Wir berechnen das elektrische Feld \mathbf{E}_e der Elektronen innerhalb der "Elektronen-Kugel". Dieses ist rotationssymmetrisch um den Mittelpunkt \mathbf{r}_e der "Elektronen-Kugel". Wir setzen zur Vereinfachung der Schreibweise zunächst $\mathbf{r}_e = 0$ und führen am Ende der Rechnung eine Translation um \mathbf{r}_e durch. Es sei V_r eine Kugel mit dem Mittelpunkt bei $\mathbf{r}_e = 0$ und dem Radius $r \leq R$. Wir integrieren die elektrostatische Feldgleichung

$$\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{E}_e = \rho_e$$

über V_r und erhalten unter Verwendung des Gaußschen Integralsatzes

$$\epsilon_0 \oint_{\partial V_r} d\mathbf{f} \mathbf{E}_e = \int_{V_r} d^3 r \rho_e. \quad (14.32)$$

Es ist

$$\oint_{\partial V_r} d\mathbf{f} \mathbf{E}_e = 4 \pi r^2 |\mathbf{E}_e|, \quad \int_{V_r} d^3 r \rho_e = \frac{Q_e}{4 \pi R^3 / 3} \int_{V_r} d^3 r = Q_e \left(\frac{r}{R} \right)^3,$$

eingesetzt in (14.32)

$$|\mathbf{E}_e| = \frac{Q_e}{4 \pi \epsilon_0} \frac{r}{R^3}, \quad \mathbf{E}_e = \frac{Q_e}{4 \pi \epsilon_0} \frac{1}{R^3} \mathbf{r},$$

und nach Translation um \mathbf{r}_e

$$\mathbf{E}_e = \frac{Q_e}{4 \pi \epsilon_0} \frac{1}{R^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_e). \quad (14.33)$$

In diesen Umformungen haben wir von der Rotations-Symmetrie des Feldes \mathbf{E}_e Gebrauch gemacht. Wir nehmen nun an, dass der Kern bei der zu berechnenden Ladungsverschiebung die "Elektronen-Kugel" nicht verlässt, so dass wir bei der Berechnung der Kraft \mathbf{F}_K der Elektronen auf die Kernladung ausschließlich das Elektronenfeld innerhalb der "Elektronen-Kugel" in (14.33) verwenden können:

$$\mathbf{F}_K = Q_K \mathbf{E}_e(\mathbf{r}_K) = \frac{Q_e Q_K}{4 \pi \epsilon_0} \frac{1}{R^3} (\mathbf{r}_K - \mathbf{r}_e) = -\frac{(Z e)^2}{4 \pi \epsilon_0} \frac{1}{R^3} (\mathbf{r}_K - \mathbf{r}_e). \quad (14.34)$$

Wegen des dritten Newtonschen Prinzips "actio=reactio" lautet die Kraft des Kerns auf die Elektronen $\mathbf{F}_e = -\mathbf{F}_K$. Kern und Elektronen sollen außerdem unter der Einwirkung eines zeitabhängigen externen elektrischen Feldes $\mathbf{E}(t)$ stehen, das die Ladungstrennung zwischen Kern und Elektronen bewirkt. Die Bewegungs-Gleichungen von Kern und Elektronen lauten dann

$$\begin{aligned} m_K \ddot{\mathbf{r}}_K &= \mathbf{F}_K + Q_K \mathbf{E}(t) = -\frac{(Z e)^2}{4 \pi \epsilon_0} \frac{1}{R^3} (\mathbf{r}_K - \mathbf{r}_e) + Z e \mathbf{E}(t), \\ Z m_e \ddot{\mathbf{r}}_e &= \mathbf{F}_e + Q_e \mathbf{E}(t) = \frac{(Z e)^2}{4 \pi \epsilon_0} \frac{1}{R^3} (\mathbf{r}_K - \mathbf{r}_e) - Z e \mathbf{E}(t). \end{aligned} \quad (14.35)$$

Hierin ist m_K die Kernmasse und $Z m_e$ die gesamte Elektronenmasse. Die Annahme, dass ein rein zeitabhängiges externes elektrisches Feld $\mathbf{E}(t)$ auftritt, ist eine Näherung, denn jedes zeitabhängige elektrische Feld breitet sich gemäß der Wellengleichung $\square \mathbf{E} = 0$ auch räumlich aus, ist also auch ortsabhängig. Wir nehmen aber an, dass die Wellenlänge λ dieser Welle groß ist im Vergleich zum Durchmesser des Atoms, der von der Größenordnung des Bohrschen Radius $\approx 1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$ ist. Die Wellenlängen von sichtbarem Licht liegen im Bereich $4 \dots 8 \cdot 10^{-7} \text{ m}$. Wellenlängen in der Größenordnung von Atomdurchmessern liegen bereits im Bereich von Röntgenstrahlung, für die die hier vorgestellte Theorie auch aus anderen Gründen nicht mehr zutrifft.

Wir dividieren die Bewegungsgleichungen in (14.35) durch m_K bzw. $Z m_e$ und finden durch Subtraktion eine Bewegungs-Gleichung für den Differenzvektor $\mathbf{r}_K - \mathbf{r}_e$:

$$\frac{d^2}{dt^2} (\mathbf{r}_K - \mathbf{r}_e) = \left(\frac{1}{m_K} + \frac{1}{Z m_e} \right) \left[-\frac{(Z e)^2}{4 \pi \epsilon_0} \frac{1}{R^3} (\mathbf{r}_K - \mathbf{r}_e) + Z e \mathbf{E}(t) \right]. \quad (14.36)$$

Es ist $m_K \gg Z m_e$, so dass

$$\frac{1}{m_K} + \frac{1}{Z m_e} \approx \frac{1}{Z m_e}.$$

Wir definieren den Verschiebungsvektor $\mathbf{r} := \mathbf{r}_K - \mathbf{r}_e$ und erhalten für diesen aus (14.36) die Bewegungs-Gleichung

$$\ddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r} = \frac{e}{m_e} \mathbf{E}(t), \quad \omega_0^2 := \frac{Z e^2}{4 \pi \epsilon_0 m_e R^3}. \quad (14.37)$$

Diese Bewegungs-Gleichung beschreibt einen harmonischen Oszillator mit der Eigenfrequenz ω_0 unter der Einwirkung einer externen Kraft $\sim \mathbf{E}(t)$. Wenn das externe elektrische Feld $\mathbf{E}(t)$ von einer monochromatischen elektromagnetischen Welle herrührt, so dass

$$\mathbf{E}(t) = \tilde{E}(\omega) e^{-i\omega t}, \quad (14.38)$$

dann kommt es in Abhängigkeit von der Frequenz ω des externen Feldes zu Resonanz-Phänomenen, bei $\omega = \omega_0$ sogar zu einer *Resonanz-Katastrophe*, weil der Oszillator ungedämpft ist. Eine solche Resonanz-Katastrophe ist physikalisch unrealistisch. Tatsächlich werden in einem Material immer Dämpfungen für schwingende Dipole auftreten, z.B. durch Abstrahlung oder Kopplung an die akustischen Moden des Materials. Wir beschreiben diese Dämpfungs-Prozesse modellhaft durch Einfügung eines linearen Dämpfungsterms in die Bewegungs-Gleichung (14.37):

$$\ddot{\mathbf{r}} + \gamma \dot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r} = \frac{e}{m_e} \mathbf{E}(t), \quad (14.39)$$

worin γ eine weitere Material-Größe ist.

14.4.2 Suszeptibilität und Polarisierbarkeit

Wir wählen das externe Feld $\mathbf{E}(t)$ als monochromatische Welle wie in (14.38). Dann lautet, wie aus der Theorie des linearen Oszillators aus der Mechanik bekannt und auch sofort nachprüfbar, eine partikuläre Lösung der inhomogenen linearen Differential-Gleichung (14.39)

$$\mathbf{r}(t) = \frac{e}{m_e} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}. \quad (14.40)$$

Um die allgemeine Lösung zu erhalten, ist die Gesamtheit der Lösungen der homogenen Differential-Gleichung, also für $\mathbf{E}(t) = 0$ hinzuzufügen. Diese Lösungen enthalten aber sämtlich den Term $\sim \exp(-\gamma t)$, klingen also zeitlich exponentiell ab. Wir betrachten das Problem für Zeiten $t \gg 1/\gamma$. Dann sind die Lösungen der homogenen Gleichungen abgeklungen, und (14.40) stellt die asymptotische Lösung dar.

$\mathbf{r}(t)$ beschreibt die relative Verschiebung einer Ladung Ze , so dass damit ein elektrisches Dipolmoment

$$\mathbf{p}(t) = Ze \mathbf{r}(t) = \epsilon_0 \tilde{\alpha}(\omega) \mathbf{E}(t), \quad \tilde{\alpha}(\omega) := \frac{Ze^2}{\epsilon_0 m_e} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \quad (14.41)$$

verbunden ist. $\tilde{\alpha}(\omega)$ heißt die *Polarisierbarkeit* des betreffenden Atoms. Zur Berechnung der elektrischen Polarisation \mathbf{P} erinnern wir uns, dass diese als mittlere räumliche Dichte der elektrischen Dipole definiert war. Also ist $\mathbf{P} = n\mathbf{p}$, worin n die mittlere räumliche Dichte der Atome in dem Material sei. Wir schreiben analog zu (14.38)

$$\mathbf{P}(t) = \tilde{P}(\omega) e^{-i\omega t}$$

und erhalten

$$\tilde{P}(\omega) = \epsilon_0 \tilde{\chi}^{(e)}(\omega) \tilde{\mathbf{E}}(\omega), \quad \tilde{\chi}^{(e)}(\omega) = \frac{Zne^2}{\epsilon_0 m_e} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}, \quad (14.42)$$

also eine elektrische Suszeptibilität, wie wir sie allgemein in den vorhergehenden Abschnitten dieses Kapitels diskutiert hatten. Diese hängt nicht von einer Wellenzahl \mathbf{k} ab, weil das hier betrachtete Modell unabhängige polarisierbare Atome mit einer mittleren Dichte n beschreibt. Würden wir eine Kopplung zwischen den Atomen einführen, dann würde sich eine Wellenzahl-Abhängigkeit ergeben, und das so erweiterte Modell würde sogenannte *optische Gitterschwingungen* in dem Material beschreiben.

Aus (14.43) können wir durch elementare Rechnungen auch Real- und Imaginärteil der Suszeptibilität bestimmen, nämlich

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re} \tilde{\chi}^{(e)}(\omega) &= \frac{Z n e^2}{\epsilon_0 m_e} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{[\omega_0^2 - \omega^2]^2 + (\gamma \omega)^2}, \\
 \operatorname{Im} \tilde{\chi}^{(e)}(\omega) &= \frac{Z n e^2}{\epsilon_0 m_e} \frac{\gamma \omega}{[\omega_0^2 - \omega^2]^2 + (\gamma \omega)^2}.
 \end{aligned}
 \tag{14.43}$$

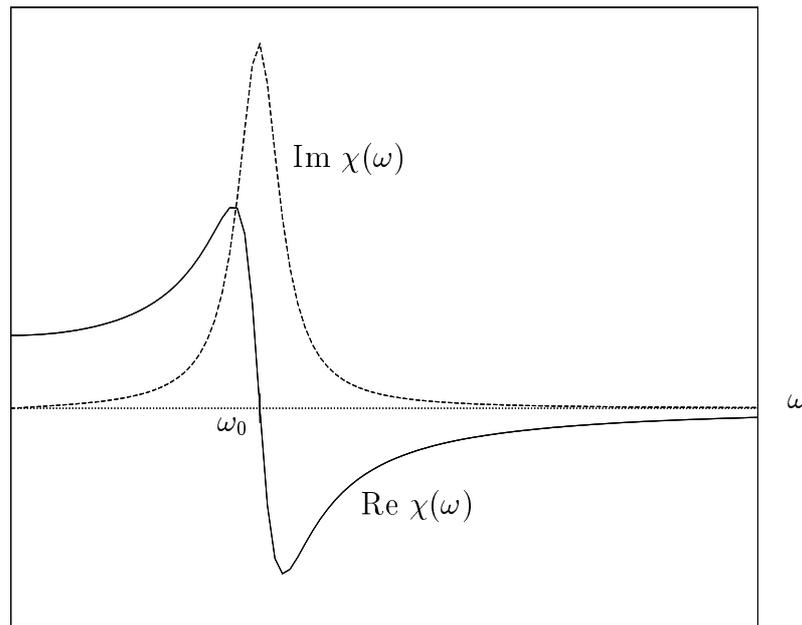


Abbildung 14.3: Real- und Imaginärteil der Suszeptibilität als Funktionen der Frequenz

Die Abbildung 14.3 zeigt den Real- und Imaginärteil der Suszeptibilität als Funktionen der Frequenz.

Im statischen Grenzfall $\omega = 0$ lautet die atomare Polarisierbarkeit

$$\tilde{\alpha}(0) = \frac{Z e^2}{\epsilon_0 m_e} \frac{1}{\omega_0^2} = 4 \pi R^3 = 3 V_R,
 \tag{14.44}$$

worin wir die Definition der Eigenfrequenz in (14.37) eingesetzt haben und $V_R = 4 \pi R^3 / 3$ das Volumen der "Elektronen-Kugel" und damit auch des Atoms selbst

ist. Die Proportionalität der atomaren Polarisierbarkeit zum Atomvolumen lässt sich experimentell bestätigen.

Der wesentliche Punkt des Thomsonschen Atom-Modells ist die Bewegungsgleichung (14.37) und darin wiederum die Tatsache, dass einer Ladungstrennung um den Abstandsvektor \mathbf{r} eine Rückstellkraft $\mathbf{F} = -k \mathbf{r}$ entgegenwirken soll, wobei $k = m \omega_0^2$ und m die reduzierte Masse $m \approx Z m_e$ des Systems ist. Wir können diesen Grundgedanken des Modells auf beliebige Moleküle übertragen, die kein permanentes Dipol-Moment tragen sollen, für die also $\mathbf{p} = 0$, wenn $\mathbf{E} = 0$. Wenn man ein solches Molekül in ein elektrisches Feld \mathbf{E} einbringt, wird man erwarten, dass es zu einer Ladungstrennung kommt, der auch wieder eine Rückstellkraft $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ als Funktion der Ladungsverschiebung \mathbf{r} entgegenwirkt. Wenn wir $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ in eine Potenz-Reihe nach \mathbf{r} entwickeln, wird kein Term 0-ter Ordnung auftreten, weil $\mathbf{F} = 0$ für $\mathbf{r} = 0$. Für Verschiebungen \mathbf{r} , die klein im Vergleich zur Molekülgröße sind, wird man schon aus physikalischen Gründen annehmen dürfen, dass der niedrigste, nicht-verschwindende Term in der Reihen-Entwicklung $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = k \mathbf{r} + \dots$ eine hinreichende Näherung ist. Das dadurch entstehende Modell führt auf dieselbe Bewegungsgleichung (14.37) wie das Thomsonsche Atom-Modell. Wir können also die obigen Ergebnisse auf beliebige Moleküle ohne permanentes Dipol-Moment übertragen, ohne allerdings die Eigenfrequenz ω_0 auf die Parameter des Moleküls zurückführen zu können.

14.4.3 Das Drude-Modell

Wenn man in der Bewegungsgleichung (14.37) $\omega_0 = 0$ setzt, also annimmt, dass es keine Rückstellkraft für die Ladungsträger gibt, beschreibt man physikalisch eine Situation, in der diese dem Feld frei folgen können. Das ist aber gerade der Fall für die "freien" Ladungsträger, die nicht zur elektrischen Polarisation beitragen. Das durch $\omega_0 = 0$ entstehende Modell,

$$\dot{\mathbf{v}} + \gamma \mathbf{v} = \frac{e}{m_e} \mathbf{E}(t), \quad \mathbf{v} := \dot{\mathbf{r}}, \quad (14.45)$$

heißt das *Drude-Modell* und wird als einfachste Beschreibung des Verhaltens freier Ladungsträger, z.B. Elektronen in Metallen, verwendet. Wenn wir wieder ein Feld $\mathbf{E}(t)$ wählen, das einer monochromatischen Welle entspricht, und einen entsprechenden Ansatz für die Geschwindigkeit \mathbf{v} der Ladungsträger machen,

$$\mathbf{E}(t) = \widetilde{\mathbf{E}}(\omega) e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{v}(t) = \widetilde{\mathbf{v}}(\omega) e^{-i\omega t},$$

erhalten wir als asymptotische Lösung von (14.45) für $t \gg 1/\gamma$ analog zu (14.40)

$$\tilde{\mathbf{v}}(\omega) = \frac{e}{m_e(\gamma - i\omega)} \tilde{\mathbf{E}}(\omega). \quad (14.46)$$

Aus der Geschwindigkeit erhalten wir die elektrische Stromdichte $\mathbf{j} = e n \mathbf{v}$, worin n nunmehr die räumliche Dichte der freien Ladungsträger mit der Ladung e ist. Üblicherweise drückt man die Dämpfungs-Konstante γ durch $\tau := 1/\gamma$ aus. τ hat die Dimension einer Zeit. Wie wir oben schon überlegt hatten, ist es diejenige Zeit, nach der Anfangsbedingungen der Bewegung abklingen. Man nennt τ deshalb auch die von der Dämpfung bestimmte *Relaxationszeit*. Damit erhalten wir insgesamt aus (14.46)

$$\tilde{\mathbf{j}}(\omega) = \tilde{\sigma}(\omega) \tilde{\mathbf{E}}(\omega), \quad \tilde{\sigma}(\omega) = \frac{n e^2 \tau}{m_e (1 - i\omega \tau)}, \quad (14.47)$$

also das Ohmsche Gesetz mit einer komplexen, frequenz-abhängigen spezifischen Leitfähigkeit $\tilde{\sigma}(\omega)$. Die Gleichstrom-Leitfähigkeit für $\omega = 0$ lautet

$$\tilde{\sigma}(0) = \frac{n e^2 \tau}{m_e}. \quad (14.48)$$

Den Imaginärteil von $\tilde{\sigma}(\omega)$ für $\omega \neq 0$ rechnet man hier zweckmäßigerweise in eine Phasenverschiebung der Stromdichte gegenüber dem Feld um. Es ist

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}(\omega) &= \frac{n e^2 \tau}{m_e (1 - i\omega \tau)} = \frac{n e^2 \tau (1 + i\omega \tau)}{m_e [1 + (\omega \tau)^2]} = |\tilde{\sigma}(\omega)| e^{i\alpha} \\ |\tilde{\sigma}(\omega)| &= \frac{n e^2 \tau}{m_e \sqrt{1 + (\omega \tau)^2}}, \quad \tan \alpha = \omega \tau, \end{aligned}$$

so dass

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(t) &= |\tilde{\sigma}(\omega)| \tilde{\mathbf{E}}(\omega) e^{-i(\omega t - \alpha)}, \\ \text{Re } \mathbf{j}(t) &= |\tilde{\sigma}(\omega)| \tilde{\mathbf{E}}(\omega) \cos(\omega t - \alpha). \end{aligned} \quad (14.49)$$

14.5 Clausius–Mosotti–Relation

In diesem Abschnitt diskutieren wir die Frage, welches elektrische Feld auf ein Atom oder Molekül polarisierend wirkt und dort einen elektrischen Dipol erzeugt. In verdünnter Materie, z.B. in Gasen, ist das wirksame elektrische Feld das externe Feld \mathbf{E} , das z.B. zwischen den Platten eines Kondensators besteht, *bevor* die Materie, im Beispiel also das Gas dort eingebracht wurde. In dicht gepackter Materie, z.B. in Flüssigkeiten und Festkörpern beeinflussen sich die Dipole benachbarter Atome oder Moleküle gegenseitig und beeinflussen damit das auf das einzelne Atom oder Molekül wirksame Feld, das wir zum Unterschied vom externen Feld \mathbf{E} mit $\mathbf{E}^{(a)}$ bezeichnen wollen. Die lineare Relation für das atomare oder molekulare Dipolmoment in (14.41), $\mathbf{p} = \epsilon_0 \tilde{\alpha} \mathbf{E}$, ist abzuändern in $\mathbf{p} = \epsilon_0 \tilde{\alpha} \mathbf{E}^{(a)}$, desgleichen auch die lineare Relation für die Polarisation in $\mathbf{P} = \epsilon_0 \tilde{\chi}^{(e)} \mathbf{E}^{(a)}$. Wir lassen Zeit- bzw. Frequenz-Argumente fort, weil die folgenden Überlegungen ausschließlich für statische Felder durchgeführt werden sollen.

Wir versuchen das Problem der Berechnung von $\mathbf{E}^{(a)}$ aus dem externen Feld \mathbf{E} durch ein Gedanken-Experiment zu lösen. Wir stellen uns ein Material vor, das aufgrund eines bestehenden elektrischen Feldes eine homogene Polarisation \mathbf{P} trägt. Aus diesem Material denken wir uns einen kugelförmigen Bereich mit dem Radius a herausgestanzt, und zwar bei *festgehaltener* Polarisation \mathbf{P} . Dann denken wir uns ein Atom oder ein Molekül in den entstandenen kugelförmigen Hohlraum eingebracht. Dessen dort auftretendes Dipolmoment wird zur *selbstkonsistenten* Bestimmung der Polarisation \mathbf{P} benutzt.

In einem ersten Schritt greifen wir auf ein Ergebnis des Abschnitts 14.4.1 zurück. Wir hatten dort das elektrische Feld einer homogen geladenen Kugel im Inneren der Kugel bestimmt. Das Ergebnis lautete, übertragen auf eine Ladung Q und einen Kugelradius a

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a^3} \mathbf{r}, \quad |\mathbf{r}| < a. \quad (14.50)$$

Außerhalb der Kugel, also in $|\mathbf{r}| > a$, ist das Feld $\mathbf{E}_0(\mathbf{r})$ identisch mit einem Feld, das eine punktförmige Ladung Q erzeugen würde, also

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \mathbf{r}, \quad |\mathbf{r}| > a. \quad (14.51)$$

Durch elementare Integration bestimmen wir das zugehörige Potential $\Phi_0(\mathbf{r})$, nämlich bis auf Integrationskonstanten

$$\Phi_0(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} \left(\text{const} - \frac{r^2}{2a} \right) & |\mathbf{r}| < a, \\ \left(\text{const} + \frac{1}{r} \right) & |\mathbf{r}| > a. \end{cases} \quad (14.52)$$

Die Integrationskonstanten werden so gewählt, dass (a) $\Phi_0(\mathbf{r}) \rightarrow 0$ für $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$ und (b) $\Phi_0(\mathbf{r})$ an der Kugeloberfläche $r = a$ stetig ist. Die Forderung der Stetigkeit folgt daraus, dass $\Phi_0(\mathbf{r})$ sogar differenzierbar sein muss. Das Ergebnis lautet

$$\Phi_0(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} \left(\frac{3}{2a} - \frac{r^2}{2a} \right) & |\mathbf{r}| < a, \\ \frac{1}{r} & |\mathbf{r}| > a. \end{cases} \quad (14.53)$$

In einem zweiten Schritt bestimmen wir das Potential $\Phi(\mathbf{r})$ einer Kugel, die homogen polarisiert ist. Dazu überlagern wir die Potentiale von zwei entgegengesetzt geladenen Kugeln im Abstand \mathbf{r}_0 und führen dann $\mathbf{r}_0 \rightarrow 0$ aus:

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}) &= \Phi_0\left(\mathbf{r} - \frac{1}{2}\mathbf{r}_0\right) - \Phi_0\left(\mathbf{r} + \frac{1}{2}\mathbf{r}_0\right) \\ &= -\mathbf{r}_0 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \Phi_0(\mathbf{r}) + O(r_0^2) = \mathbf{r}_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + O(r_0^2) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} \frac{Q\mathbf{r}_0\mathbf{r}}{a^3} + O(r_0^2), & |\mathbf{r}| < a, \\ \frac{Q\mathbf{r}_0\mathbf{r}}{r^3} + O(r_0^2), & |\mathbf{r}| > a, \end{cases} \end{aligned} \quad (14.54)$$

Jetzt führen wir den Grenzübergang $\mathbf{r}_0 \rightarrow 0$ durch. Dabei wird $Q\mathbf{r}_0 \rightarrow \mathbf{p}$ das Dipolmoment der Kugel, für das andererseits $\mathbf{p} = (4\pi a^3/3)\mathbf{P}$ gilt, worin \mathbf{P} die Polarisation der Kugel ist. Einsetzen dieser Relationen in (14.54) führt auf

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{3\epsilon_0} \begin{cases} \mathbf{P}\mathbf{r}, & |\mathbf{r}| < a, \\ \frac{a^3}{r^3}\mathbf{P}\mathbf{r}, & |\mathbf{r}| > a. \end{cases} \quad (14.55)$$

Wir betrachten jetzt den kugelförmigen Hohlraum, der nach dem Ausstanzen der Kugel in dem Material verblieben ist, und bezeichnen das Potential im Inneren des Hohlraums mit $\Phi^{(a)}(\mathbf{r})$, s.o. Wir wollen das Potential $\Phi^{(a)}(\mathbf{r})$ unter der Voraussetzung berechnen, dass sich das Material in einem externen homogenen \mathbf{E} -Feld befindet. Dann muss $\Phi^{(a)}(\mathbf{r})$ die Relation

$$\Phi^{(a)}(\mathbf{r}) + \Phi(\mathbf{r}) = -\mathbf{E} \mathbf{r} \quad (14.56)$$

erfüllen, worin $\Phi(\mathbf{r})$ das Potential aus (14.55) für $|\mathbf{r}| < a$ Zur Begründung von (14.56): $\Phi^{(a)}(\mathbf{r}) + \Phi(\mathbf{r})$ ist dasjenige Potential, das sich ergibt, wenn wir die ausgestanzte Kugel zurück in den Hohlraum einsetzen. Dieses letztere Potential soll aber nach Voraussetzung ein externes homogenes Feld \mathbf{E} beschreiben. Damit ist (14.56) begründet und wir erhalten daraus

$$\Phi^{(a)}(\mathbf{r}) = \left(\mathbf{E} + \frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P} \right) \mathbf{r}, \quad |\mathbf{r}| < a, \quad (14.57)$$

und für das zugehörige Feld im Inneren der Hohlkugel

$$\mathbf{E}^{(a)}(\mathbf{r}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \Phi^{(a)}(\mathbf{r}) = \mathbf{E} + \frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P}, \quad |\mathbf{r}| < a. \quad (14.58)$$

Das Feld $\mathbf{E}^{(a)}(\mathbf{r})$ im Inneren der gedachten Hohlkugel betrachten wir als das wirk-same Feld, das polarisierend auf ein Atom oder Molekül wirkt, so dass

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \epsilon_0 \tilde{\alpha} \mathbf{E}^{(a)}, \\ \mathbf{P} &= \epsilon_0 n \tilde{\alpha} \mathbf{E}^{(a)} = \epsilon_0 n \tilde{\alpha} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P} \right), \end{aligned} \quad (14.59)$$

aufgelöst nach \mathbf{P} :

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \frac{n \tilde{\alpha}}{1 - \frac{1}{3} n \tilde{\alpha}} \mathbf{E}. \quad (14.60)$$

Hieraus erkennen wir zunächst, dass die gegenseitige Beeinflussung der atomaren bzw. molekularen Dipole die Polarisierung verstärkt. Die elektrische Suszeptibilität $\tilde{\chi}^{(e)}$ ist nun definiert durch $\mathbf{P} = \epsilon_0 \tilde{\chi}^{(e)} \mathbf{E}$, so dass wir aus (14.60)

$$\tilde{\chi}^{(e)} = \frac{n \tilde{\alpha}}{1 - \frac{1}{3} n \tilde{\alpha}} \quad (14.61)$$

ablesen. Die Auflösung dieser Relation nach $\tilde{\alpha}$ liefert

$$\tilde{\alpha} = \frac{1}{n} \frac{\tilde{\chi}^{(e)}}{1 + \frac{1}{3} \tilde{\chi}^{(e)}}. \quad (14.62)$$

Dieses ist die *Clausius-Mosotti-Relation*. Sie erlaubt es, aus einer Messung der elektrischen Suszeptibilität $\tilde{\chi}^{(e)}$ die atomare Polarisierbarkeit $\tilde{\alpha}$ zu bestimmen, wenn die Dichte n bekannt ist.

Anhang A

Krummlinige Koordinaten

Eine allgemeine Theorie der Transformation auf krummlinige Koordinaten einschließlich der Transformation von Differentialausdrücken und Differentialoperatoren findet man in Textbüchern über Differentialgeometrie oder auch über Allgemeine Relativitätstheorie. Wir stellen hier die wichtigsten Aussagen über *orthogonale* krummlinige Koordinaten zusammen, zu denen insbesondere die am häufigsten auftretenden Fälle von Zylinderkoordinaten und Kugelkoordinaten gehören.

A.1 Das Transformationsschema

Es seien \mathbf{e}_α $\alpha = 1, 2, 3$ die Basisvektoren eines kartesischen Koordinatensystems, also

$$\mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta = \delta_{\alpha\beta}, \quad (\text{A.1})$$

und x_α , $\alpha = 1, 2, 3$ die kartesischen Koordinaten eines Punktes im Raum bzw. Komponenten seines Ortsvektors \mathbf{r} :

$$\mathbf{r} = x_\alpha \mathbf{e}_\alpha. \quad (\text{A.2})$$

Wir vereinbaren also wiederum die Summationskonvention.

Eine Koordinatentransformation von den kartesischen Koordinaten x_α zu beliebigen, also auch nicht-kartesischen, d.h. krummlinigen Koordinaten ξ_α , $\alpha = 1, 2, 3$ ist definiert durch Transformationsgleichungen

$$\xi_\alpha = \xi_\alpha(x_1, x_2, x_3), \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (\text{A.3})$$

Wie in der Physik üblich unterscheiden wir nicht den Namen der Variablen ξ_α von dem Funktionssymbol für die Abhängigkeit von den x_α . Wir wollen voraussetzen, dass die Transformation in (A.3) differenzierbar und bis auf höchstens endlich viele, sogenannte Singularitäten eindeutig umkehrbar ist.

Durch $\xi_\alpha(x_1, x_2, x_3) = \text{const}$ für $\alpha = 1, 2, 3$ sind die *Koordinatenflächen* definiert. Alle Punkte auf dieser Fläche besitzen denselben Wert der Koordinate ξ_α . Die kartesischen Koordinatenflächen $x_\alpha = \text{const}$ sind Ebenen jeweils senkrecht zu \mathbf{e}_α . Wir wollen annehmen, dass sich die drei Koordinatenflächen $\xi_\alpha = \text{const}$ für $\alpha = 1, 2, 3$ mit höchstens endlich vielen Ausnahmen immer in einem Punkt schneiden und umgekehrt, dass durch jeden Punkt im Raum bis auf höchstens endlich viele Ausnahmen immer gerade drei solcher Koordinatenflächen gehen. Für kartesische Koordinaten ist diese Aussage offensichtlich. Für beliebige Koordinaten ξ_α ist es eine Annahme, die äquivalent zu der Annahme der eindeutigen Umkehrbarkeit ist.

Wir bilden das Differential von ξ_α . Unter Verwendung der Kettenregel erhalten wir

$$d\xi_\alpha = \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_\beta} dx_\beta. \quad (\text{A.4})$$

Differentielle Verschiebungen dx_β mit der Eigenschaft, dass $d\xi_\alpha = 0$, liegen offensichtlich innerhalb einer Koordinatenfläche $\xi_\alpha = \text{const}$. Folglich steht der Vektor

$$\mathbf{g}_\alpha := J_{\beta\alpha} \mathbf{e}_\beta, \quad J_{\beta\alpha} := \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_\beta}, \quad (\text{A.5})$$

senkrecht auf der Koordinatenfläche $\xi_\alpha = \text{const}$. Wir wollen nun weiter annehmen, dass sich die drei Koordinatenflächen $\xi_\alpha = \text{const}$ in jedem Punkt senkrecht schneiden, bzw., dass die \mathbf{g}_α paarweise senkrecht aufeinander stehen:

$$\mathbf{g}_\alpha \mathbf{g}_\beta = 0, \quad \text{wenn} \quad \alpha \neq \beta. \quad (\text{A.6})$$

Man kann sich leicht überlegen, dass das außer für kartesische Koordinaten z.B. auch für Zylinder- und Kugelkoordinaten der Fall ist. Es liegt nahe, die \mathbf{g}_α analog den \mathbf{e}_α als Basisvektoren für die krummlinigen Koordinaten ξ_α zu verwenden. Gemäß (A.6)

sind sie zwar orthogonal, jedoch anders als die \mathbf{e}_α im allgemeinen nicht normiert. Es ist

$$\mathbf{g}_1^2 = J_{11}^2 + J_{21}^2 + J_{31}^2 = J_{\beta 1} J_{\beta 1} = J_{\beta 1}^2 \quad (\text{A.7})$$

und analog für $\mathbf{g}_2^2, \mathbf{g}_3^2$. Diese Relation lässt sich *nicht* in der Form

$$\mathbf{g}_\alpha^2 = J_{\beta\alpha} J_{\beta\alpha}$$

schreiben, weil die Summationskonvention auf beiden Seiten die α -Summe bilden würde, was aber nicht beabsichtigt ist. (Die allgemeine Theorie vermeidet diese Schwierigkeit durch Verwendung von sogenannten kontra- und kovarianten Basen.) Wir umgehen das Problem durch die Definition einer *diagonalen* Matrix G

$$G := \begin{pmatrix} g_1 & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & 0 \\ 0 & 0 & g_3 \end{pmatrix}, \quad \text{bzw.} \quad G^{-1} := \begin{pmatrix} g_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & g_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & g_3^{-1} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.8})$$

worin $g_1 := |\mathbf{g}_1|$ usw. Dann ist leicht einzusehen, dass

$$\mathbf{e}'_\alpha = (G^{-1})_{\alpha\beta} \mathbf{g}_\beta \quad (\text{A.9})$$

für $\alpha = 1, 2, 3$ drei orthonormierte Basisvektoren bilden, die wie die \mathbf{g}_α senkrecht auf den Koordinatenflächen $\xi_\alpha = \text{const}$ stehen. Wenn wir in diese Relation die Darstellung (A.5) durch die \mathbf{e}_α einsetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_\alpha &= (G^{-1})_{\alpha\beta} J_{\gamma\beta} \mathbf{e}_\gamma = U_{\gamma\alpha} \mathbf{e}_\gamma, \\ U_{\gamma\alpha} &:= (G^{-1})_{\alpha\beta} J_{\gamma\beta}. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Die Transformationsmatrix $U_{\gamma\alpha}$ transformiert zwischen zwei jeweils orthonormierten Basen \mathbf{e}_α und \mathbf{e}'_γ . Eine solche Transformationsmatrix ist uns aus dem Abschnitt 1.3 bereits bekannt: es muss eine orthogonale Matrix sein. Wie dort gilt also

$$U_{\alpha\beta} = \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}'_\beta, \quad U_{\alpha\gamma} U_{\beta\gamma} = U_{\gamma\alpha} U_{\gamma\beta} = \delta_{\alpha\beta}, \quad (\text{A.11})$$

bzw. $U U^T = U^T U = 1$ oder $U^{-1} = U^T$ in Matrixschreibweise. Die Umkehrung von (A.10) lautet somit

$$\mathbf{e}_\alpha = U_{\alpha\beta} \mathbf{e}'_\beta. \quad (\text{A.12})$$

(Wie bereits im Abschnitt 1.3 ändern wir je nach Bedarf die Namen der Indizes.) Da die Matrix G diagonal und somit auch symmetrisch ist und dasselbe dann auch für die Inverse G^{-1} gilt, können wir die Definition von U in (A.10) auch in der Form

$$U_{\gamma\alpha} = J_{\gamma\beta} (G^{-1})_{\beta\alpha} = (J \cdot G^{-1})_{\gamma\alpha} \quad \text{bzw.} \quad U = J \cdot G^{-1} \quad (\text{A.13})$$

schreiben.

A.2 Die Differentiale

Wir betrachten die Koordinatenflächen zu den Werten ξ_α und $\xi_\alpha + d\xi_\alpha$ für $\alpha = 1, 2, 3$. Diese sechs Flächen begrenzen im Sinne von Differentialen 1. Ordnung ein Parallelepiped. Mit der Annahme, dass sich die Koordinatenflächen $\xi_\alpha = \text{const}$ senkrecht schneiden, ist das Parallelepiped sogar rechtwinklig. Es hat die analoge Bedeutung wie das in kartesischen Koordinaten von den $dx_1 \mathbf{e}_1$, $dx_2 \mathbf{e}_2$, $dx_3 \mathbf{e}_3$ aufgespannte rechtwinklige Parallelepiped. Wir bestimmen die Kantenlängen ds'_1, ds'_2, ds'_3 des Parallelepipeds in den krummlinigen Koordinaten. Sie entsprechen den dx_1, dx_2, dx_3 im kartesischen Fall, d.h., ein Differential $d\mathbf{r}$ des Ortsvektors bzw. ein Linienelement lässt sich in den beiden System darstellen als

$$d\mathbf{r} = dx_\alpha \mathbf{e}_\alpha = ds'_\alpha \mathbf{e}'_\alpha. \quad (\text{A.14})$$

Daraus folgt mit dem Transformationsschema aus dem Abschnitt 1.3

$$ds'_\alpha = U_{\beta\alpha} dx_\beta. \quad (\text{A.15})$$

Wir wollen nun dx_β auf der rechten Seite durch die $d\xi_\gamma$ ausdrücken. Dazu greifen wir zurück auf (A.4),

$$d\xi_\alpha = \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_\beta} dx_\beta = J_{\beta\alpha} dx_\beta,$$

woraus durch Multiplikation mit $(J^{-1})_{\alpha\gamma}$ folgt

$$\begin{aligned} (J^{-1})_{\alpha\gamma} d\xi_\alpha &= J_{\beta\alpha} (J^{-1})_{\alpha\gamma} dx_\beta = dx_\gamma, \\ \text{bzw.} \quad dx_\beta &= (J^{-1})_{\gamma\beta} d\xi_\gamma, \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

eingesetzt in (A.15)

$$ds'_\alpha = (J^{-1})_{\gamma\beta} U_{\beta\alpha} d\xi_\gamma = (J^{-1} \cdot U)_{\gamma\alpha} d\xi_\gamma = (G^{-1})_{\gamma\alpha} d\xi_\gamma, \quad (\text{A.17})$$

vgl. (A.13). Die krummlinigen Komponenten des Linienelements $d\mathbf{r}$ lauten also in den einzelnen Koordinatenrichtungen

$$ds'_1 = \frac{d\xi_1}{g_1}, \quad ds'_2 = \frac{d\xi_2}{g_2}, \quad ds'_3 = \frac{d\xi_3}{g_3}, \quad (\text{A.18})$$

vgl. (A.8). Hieraus folgt unmittelbar für das Volumenelement, d.h. für das Volumen des Parallelepipeds

$$d^3 r = \frac{d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3}{g_1 g_2 g_3} = \frac{1}{g} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3, \quad (\text{A.19})$$

worin

$$g := g_1 g_2 g_3 = \det(G), \quad (\text{A.20})$$

$\det(G)$ bedeutet die Determinante der Matrix G , vgl. (A.8). Desgleichen lauten die Flächenelemente $d\mathbf{f}'_1, d\mathbf{f}'_2, d\mathbf{f}'_3$ in krummlinigen Koordinaten

$$d\mathbf{f}'_1 = \frac{d\xi_2 d\xi_3}{g_2 g_3} \mathbf{e}'_1, \quad d\mathbf{f}'_2 = \frac{d\xi_3 d\xi_1}{g_3 g_1} \mathbf{e}'_2, \quad d\mathbf{f}'_3 = \frac{d\xi_1 d\xi_2}{g_1 g_2} \mathbf{e}'_3. \quad (\text{A.21})$$

Die Diagonalelemente g_1, g_2, g_3 von G beschreiben also die räumliche Verzerrung, die durch krummlinige Koordinaten entsteht. Sie berücksichtigen insbesondere, dass die krummlinigen Koordinaten ξ_α nicht notwendig Längenkoordinaten sind, sondern etwa auch Winkel wie im Fall von Zylinder- und Kugelkoordinaten. Auch die Transformationen der Differentialoperatoren Gradient, Divergenz und Rotation, die wir im folgenden Abschnitt herleiten werden, stützt sich ausschließlich auf die Matrix G bzw. ihre diagonalen Elemente g_1, g_2, g_3 .

A.3 Die Differentialoperatoren

Im folgenden seien $\Phi(\mathbf{r})$ eine beliebige skalare Funktion und $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r})$ ein beliebiges Vektorfeld, beide differenzierbar. Wir werden das Argument \mathbf{r} , das man sich in kartesischen oder krummlinigen Koordinaten ausgedrückt denken kann, aus Gründen der Vereinfachung der Schreibweise im folgenden nicht mehr mitführen. Für die Transformation der Komponenten des Feldes \mathbf{a} erhalten wir aus

$$\mathbf{a} = a_\alpha \mathbf{e}_\alpha = a'_\alpha \mathbf{e}'_\alpha \quad (\text{A.22})$$

mit den Transformationsregeln aus dem Abschnitt 1.3

$$a_\alpha = U_{\alpha\beta} a'_\beta, \quad a'_\alpha = U_{\beta\alpha} a_\beta, \quad (\text{A.23})$$

vgl. auch (A.15).

A.3.1 Der Gradient

Indem wir die Kettenregel der Differentialrechnung und die Transformationsregeln und Definitionen aus dem Abschnitt A.1 verwenden, erhalten wir:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{r}} = \mathbf{e}_\alpha \frac{\partial\Phi}{\partial x_\alpha} = U_{\alpha\beta} \mathbf{e}'_\beta \frac{\partial\xi_\gamma}{\partial x_\alpha} \frac{\partial\Phi}{\partial\xi_\gamma} = U_{\alpha\beta} J_{\alpha\gamma} \mathbf{e}'_\beta \frac{\partial\Phi}{\partial\xi_\gamma}. \quad (\text{A.24})$$

Nun ist

$$U_{\alpha\beta} J_{\alpha\gamma} = \left(U^{-1} \right)_{\beta\alpha} J_{\alpha\gamma} = \left(U^{-1} \cdot J \right)_{\beta\gamma} = G_{\beta\gamma},$$

vgl. (A.13), eingesetzt in (A.24) mit einer Umbenennung der Indizes

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{r}} = \mathbf{e}_\alpha \frac{\partial\Phi}{\partial x_\alpha} = \mathbf{e}'_\alpha G_{\alpha\beta} \frac{\partial\Phi}{\partial\xi_\beta}, \quad (\text{A.25})$$

in Komponenten

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{r}} = \mathbf{e}_\alpha \frac{\partial\Phi}{\partial x_\alpha} = \mathbf{e}'_1 g_1 \frac{\partial\Phi}{\partial\xi_1} + \mathbf{e}'_2 g_2 \frac{\partial\Phi}{\partial\xi_2} + \mathbf{e}'_3 g_3 \frac{\partial\Phi}{\partial\xi_3}. \quad (\text{A.26})$$

Wie oben bereits angekündigt, ist die Transformation allein durch die g_1, g_2, g_3 bestimmt. Im nächsten Abschnitt werten wir diese und die folgenden Transformationsformeln für Zylinder- und Kugelkoordinaten aus.

A.3.2 Die Divergenz

Mit denselben Mitteln, allerdings in einer aufwendigeren Rechnung, transformieren wir die Divergenz wie folgt:

$$\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\mathbf{r}} = \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial\xi_\beta}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial\xi_\beta} \left(U_{\alpha\gamma} a'_\gamma \right) = J_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial\xi_\beta} \left(U_{\alpha\gamma} a'_\gamma \right). \quad (\text{A.27})$$

Den Ausdruck in den (...) ersetzen wir darin unter Verwendung von $U = J \cdot G^{-1}$, vgl. (A.13), bzw. auch $U^{-1} = G \cdot J^{-1}$ durch

$$U_{\alpha\gamma} a'_\gamma = \left(U^{-1} \right)_{\gamma\alpha} a'_\gamma = G_{\gamma\mu} a'_\gamma \left(J^{-1} \right)_{\mu\alpha} = g^{-1} G_{\gamma\mu} a'_\gamma \cdot g \left(J^{-1} \right)_{\mu\alpha},$$

worin wieder $g = \det(G) = g_1 g_2 g_3$, und erhalten unter Verwendung der Produktregel der Differentiation

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_\alpha} &= g (J^{-1})_{\mu\alpha} J_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial \xi_\beta} \left[g^{-1} G_{\gamma\mu} a'_\gamma \right] \\ &+ g^{-1} G_{\gamma\mu} a'_\gamma J_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial \xi_\beta} \left[g (J^{-1})_{\mu\alpha} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Wir werden sogleich zeigen, dass der zweite Summand darin verschwindet, so dass

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_\alpha} = g \frac{\partial}{\partial \xi_\beta} \left(g^{-1} G_{\gamma\beta} a'_\gamma \right), \quad (\text{A.29})$$

oder in Komponenten

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_\alpha} = g \left[\frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{1}{g_2 g_3} a'_1 \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{1}{g_3 g_1} a'_2 \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left(\frac{1}{g_1 g_2} a'_3 \right) \right]. \quad (\text{A.30})$$

Auch diese Transformationsformel ist allein durch die g_1, g_2, g_3 bestimmt.

Wir zeigen jetzt noch, dass der zweite Summand in (A.28) verschwindet. Unter Verwendung der Produktregel wird

$$\begin{aligned} J_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial \xi_\beta} \left[g (J^{-1})_{\mu\alpha} \right] &= (J^{-1})_{\mu\alpha} J_{\alpha\beta} \frac{\partial g}{\partial \xi_\beta} + g J_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial \xi_\beta} (J^{-1})_{\mu\alpha} \\ &= \frac{\partial g}{\partial \xi_\mu} + g J_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial \xi_\beta} (J^{-1})_{\mu\alpha}. \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

Nun ist

$$J_{\gamma\mu} \frac{\partial x_\alpha}{\partial \xi_\mu} = \frac{\partial \xi_\mu}{\partial x_\gamma} \frac{\partial x_\alpha}{\partial \xi_\mu} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial x_\gamma} = \delta_{\alpha\gamma},$$

so dass

$$\frac{\partial x_\alpha}{\partial \xi_\mu} = (J^{-1})_{\mu\alpha} \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial \xi_\beta} (J^{-1})_{\mu\alpha} = \frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial \xi_\beta \partial \xi_\mu}. \quad (\text{A.32})$$

Zur Berechnung von $\partial g/\partial \xi_\mu$ greifen wir auf (A.7) zurück. Wenn wir dort auf beiden Seiten nach ξ_μ differenzieren, erhalten wir

$$g_1 \frac{\partial g_1}{\partial \xi_\mu} = J_{\beta 1} \frac{\partial}{\partial \xi_\mu} J_{\beta 1},$$

so dass unter Verwendung der Produktregel

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \xi_\mu} &= g_2 g_3 \frac{\partial g_1}{\partial \xi_\mu} + g_3 g_1 \frac{\partial g_2}{\partial \xi_\mu} + g_1 g_2 \frac{\partial g_3}{\partial \xi_\mu} \\ &= \frac{g_2 g_3}{g_1} J_{\beta 1} \frac{\partial}{\partial \xi_\mu} J_{\beta 1} + \frac{g_3 g_1}{g_2} J_{\beta 2} \frac{\partial}{\partial \xi_\mu} J_{\beta 2} + \frac{g_1 g_2}{g_3} J_{\beta 3} \frac{\partial}{\partial \xi_\mu} J_{\beta 3}. \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

$\partial J_{\beta 1}/\partial \xi_\mu$ usw. berechnen wir aus

$$J_{\beta \lambda} (J^{-1})_{\lambda \alpha} = \delta_{\alpha \beta}$$

durch Differentiation nach ξ_μ ,

$$\frac{\partial}{\partial \xi_\mu} J_{\beta \lambda} \cdot (J^{-1})_{\lambda \alpha} + J_{\beta \lambda} \frac{\partial}{\partial \xi_\mu} (J^{-1})_{\lambda \alpha} = 0,$$

und Multiplikation mit $J_{\alpha \gamma}$,

$$\frac{\partial}{\partial \xi_\mu} J_{\beta \lambda} \cdot (J^{-1})_{\lambda \alpha} J_{\alpha \gamma} + J_{\beta \lambda} J_{\alpha \gamma} \frac{\partial}{\partial \xi_\mu} (J^{-1})_{\lambda \alpha} = 0,$$

woraus zusammen mit (A.32)

$$\frac{\partial}{\partial \xi_\mu} J_{\beta \gamma} = -J_{\beta \lambda} J_{\alpha \gamma} \frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial x_\mu \partial x_\lambda}$$

folgt. Mit diesem Ergebnis für $\gamma = 1, 2, 3$ setzen wir die Rechnung in (A.33) fort:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial \xi_\mu} &= - \left[\frac{g_2 g_3}{g_1} J_{\alpha 1} J_{\beta 1} + \frac{g_3 g_1}{g_2} J_{\alpha 2} J_{\beta 2} + \frac{g_1 g_2}{g_3} J_{\alpha 3} J_{\beta 3} \right] J_{\beta \lambda} \frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial x_\mu \partial x_\lambda} \\
&= -g \left[J_{\alpha 1} g_1^{-1} J_{\beta 1} g_1^{-1} + J_{\alpha 2} g_2^{-1} J_{\beta 2} g_2^{-1} + J_{\alpha 3} g_3^{-1} J_{\beta 3} g_3^{-1} \right] J_{\beta \lambda} \frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial x_\mu \partial x_\lambda} \\
&= -g \left[J_{\alpha \nu} (G^{-1})_{\nu 1} J_{\beta \rho} (G^{-1})_{\rho 1} + J_{\alpha \nu} (G^{-1})_{\nu 2} J_{\beta \rho} (G^{-1})_{\rho 2} + \right. \\
&\quad \left. + J_{\alpha \nu} (G^{-1})_{\nu 3} J_{\beta \rho} (G^{-1})_{\rho 3} \right] J_{\beta \lambda} \frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial x_\mu \partial x_\lambda} \\
&= -g J_{\alpha \nu} (G^{-1})_{\nu \kappa} J_{\beta \rho} (G^{-1})_{\rho \kappa} J_{\beta \lambda} \frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial x_\mu \partial x_\lambda} \\
&= -g (J \cdot G^{-1})_{\alpha \kappa} (J \cdot G^{-1})_{\beta \kappa} J_{\beta \lambda} \frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial x_\mu \partial x_\lambda} \\
&= -g U_{\alpha \kappa} U_{\beta \kappa} J_{\beta \lambda} \frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial x_\mu \partial x_\lambda} \\
&= -g J_{\alpha \lambda} \frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial x_\mu \partial x_\lambda} = -g J_{\alpha \beta} \frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial x_\mu \partial x_\beta}. \tag{A.34}
\end{aligned}$$

Wenn wir dieses Ergebnis und (A.32) in (A.31) einsetzen, erhalten wir die behauptete Aussage

$$J_{\alpha \beta} \frac{\partial}{\partial \xi_\beta} \left[g (J^{-1})_{\mu \alpha} \right] = 0.$$

A.3.3 Die Rotation

Auf analoge Weise erhalten wir mit den Transformationsformeln für Vektoren und Komponenten, mit $U = J \cdot G^{-1}$ und der Definition $J_{\beta \kappa} = \partial \xi_\kappa / \partial x_\beta$ sowie mit der Produktregel der Differentiation

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{a} &= \epsilon_{\alpha \beta \gamma} \mathbf{e}_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\beta} a_\gamma \\
&= \epsilon_{\alpha \beta \gamma} U_{\alpha \mu} \mathbf{e}'_\mu \frac{\partial}{\partial x_\beta} (U_{\gamma \nu} a'_\nu) \\
&= \epsilon_{\alpha \beta \gamma} U_{\alpha \mu} \mathbf{e}'_\mu \frac{\partial \xi_\kappa}{\partial x_\beta} \frac{\partial}{\partial \xi_\kappa} \left[J_{\gamma \lambda} (G^{-1})_{\lambda \nu} a'_\nu \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \epsilon_{\alpha\beta\gamma} U_{\alpha\mu} J_{\beta\kappa} J_{\gamma\lambda} \frac{\partial}{\partial \xi_\kappa} \left[(G^{-1})_{\lambda\nu} a'_\nu \right] \mathbf{e}'_\mu + \\
 &\quad + \epsilon_{\alpha\beta\gamma} U_{\alpha\mu} J_{\beta\kappa} (G^{-1})_{\lambda\nu} a'_\nu \left[\frac{\partial}{\partial \xi_\kappa} J_{\gamma\lambda} \right] \mathbf{e}'_\mu. \tag{A.35}
 \end{aligned}$$

Wir werden sogleich zeigen, dass der zweite Summand verschwindet. Im ersten Summanden formen wir nochmals unter Verwendung von $U = J \cdot G^{-1}$ um:

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma} U_{\alpha\mu} J_{\beta\kappa} J_{\gamma\lambda} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} J_{\alpha\rho} J_{\beta\kappa} J_{\gamma\lambda} (G^{-1})_{\rho\mu} = \epsilon_{\rho\kappa\lambda} \det(J) (G^{-1})_{\rho\mu},$$

vgl. die Definition der Determinante im Abschnitt 1.3. Nochmals aus $U = J \cdot G^{-1}$ folgt

$$\det(U) = \det(J) \det(G^{-1}) = \frac{\det(J)}{\det(G)} = \frac{1}{g} \det(J).$$

Da nun U orthogonal ist, also $U^T U = 1$, folgt auch

$$\det(U^T U) = [\det(U)]^2 = 1,$$

so dass $\det(U) = \pm 1$. Durch eine Umnummerierung der krummlinigen Koordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3 können wir immer $\det(U) = +1$ erreichen. Damit wird $\det(J) = g$. Unter der Voraussetzung, dass der zweite Summand in (A.35) verschwindet, ist also

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{a} &= g \epsilon_{\rho\kappa\lambda} (G^{-1})_{\rho\mu} \frac{\partial}{\partial \xi_\kappa} \left[(G^{-1})_{\lambda\nu} a'_\nu \right] \mathbf{e}'_\mu \\
 &= g_2 g_3 \left[\frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{1}{g_3} a'_3 \right) - \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left(\frac{1}{g_2} a'_2 \right) \right] \mathbf{e}'_1 + \\
 &\quad + g_3 g_1 \left[\frac{\partial}{\partial \xi_3} \left(\frac{1}{g_1} a'_1 \right) - \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{1}{g_3} a'_3 \right) \right] \mathbf{e}'_2 + \\
 &\quad + g_1 g_2 \left[\frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{1}{g_2} a'_2 \right) - \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{1}{g_1} a'_1 \right) \right] \mathbf{e}'_3. \tag{A.36}
 \end{aligned}$$

Auch diese Transformation ist ausschließlich durch die g_1, g_2, g_3 bestimmt.

Wir zeigen jetzt noch, dass der zweite Summand in (A.35) verschwindet. In diesem Summand tritt die folgende Kombination auf:

$$J_{\beta\kappa} \frac{\partial}{\partial \xi_\kappa} J_{\gamma\lambda} = \frac{\partial \xi_\kappa}{\partial x_\beta} \frac{\partial}{\partial \xi_\kappa} J_{\gamma\lambda} = \frac{\partial}{\partial x_\beta} J_{\gamma\lambda} = \frac{\partial^2 \xi_\lambda}{\partial x_\beta \partial x_\gamma}.$$

Dieser Ausdruck ist symmetrisch in den Indizes β, γ , so dass seine Kombination mit $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ verschwindet, vgl. Abschnitt 1.3.

A.4 Zylinder- und Kugelkoordinaten

Die in der Physik am häufigsten auftretenden krummlinigen Koordinaten sind *Zylinder-* und *Kugelkoordinaten*. Wir stellen im folgenden die Transformationsformeln für diese beiden Fälle dar. Deren Herleitung aus den allgemeinen Transformationsformeln der vorhergehenden Abschnitte sind elementare Rechenschritte, die wir hier nicht im einzelnen aufführen.

A.4.1 Zylinderkoordinaten

Ausgehend von einem kartesischen System mit den Koordinaten x_1, x_2, x_3 sind die Zylinderkoordinaten ρ, ϕ, z wie folgt definiert: die Projektion des Ortsvektors \mathbf{r} in die Ebene $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ wird durch deren Länge ρ und deren Winkel ϕ zur Achse \mathbf{e}_1 beschrieben und $z \equiv x_3$. Daraus resultierenden die folgenden Transformationsgleichungen:

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho \cos \phi & \rho &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ x_2 &= \rho \sin \phi & \phi &= \arctan \frac{x_2}{x_1} \\ x_3 &= z & z &= x_3 \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

$$J = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\frac{\sin \phi}{\rho} & 0 \\ \sin \phi & \frac{\cos \phi}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.38})$$

$$g_1 = 1, \quad g_2 = \frac{1}{\rho}, \quad g_3 = 1, \quad g = g_1 g_2 g_3 = \frac{1}{\rho}. \quad (\text{A.39})$$

$$\text{Linienenelement:} \quad d\mathbf{r} = d\rho \mathbf{e}'_\rho + \rho d\phi \mathbf{e}'_\phi + dz \mathbf{e}'_z, \quad (\text{A.40})$$

$$\text{Volumenelement:} \quad d^3r = \rho d\rho d\phi dz. \quad (\text{A.41})$$

$$\text{Gradient:} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \mathbf{e}'_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \mathbf{e}'_\phi + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \mathbf{e}'_z, \quad (\text{A.42})$$

$$\text{Divergenz:} \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{a} = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial (\rho a'_\rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial a'_\phi}{\partial \phi} + \rho \frac{\partial a'_z}{\partial z} \right], \quad (\text{A.43})$$

$$\begin{aligned} \text{Rotation:} \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{a} &= \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial a'_z}{\partial \phi} - \rho \frac{\partial a'_\phi}{\partial z} \right] \mathbf{e}'_\rho + \\ &+ \left[\frac{\partial a'_\rho}{\partial z} - \frac{\partial a'_z}{\partial \rho} \right] \mathbf{e}'_\phi + \\ &+ \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial (\rho a'_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial a'_\rho}{\partial \phi} \right] \mathbf{e}'_z. \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

Durch die Kombination von Divergenz und Gradient erhalten wir auch die häufig vorkommende Operation "div grad"

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \Phi = \Delta \Phi, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, \quad (\text{A.45})$$

nämlich

$$\Delta \Phi = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right]. \quad (\text{A.46})$$

A.4.2 Kugelkoordinaten

Ausgehend von einem kartesischen System mit den Koordinaten x_1, x_2, x_3 sind die Kugelkoordinaten r, θ, ϕ wie folgt definiert: der Ortsvektor \mathbf{r} wird durch seine Länge

$r = |\mathbf{r}|$ und durch seinen Winkel θ zur Achse \mathbf{e}_3 beschrieben, seine Projektion in die Ebene $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ durch ihren Winkel ϕ zur Achse \mathbf{e}_1 . Daraus resultieren die folgenden Transformationsgleichungen:

$$\begin{aligned} x_1 &= r \sin \theta \cos \phi & r &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \\ x_2 &= r \sin \theta \sin \phi & \theta &= \arctan \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{x_3} \\ x_3 &= r \cos \theta & \phi &= \arctan \frac{x_2}{x_1} \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

$$J = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & \frac{\cos \theta \cos \phi}{r} & -\frac{\sin \phi}{r \sin \theta} \\ \sin \theta \sin \phi & \frac{\cos \theta \sin \phi}{r} & \frac{\cos \phi}{r \sin \theta} \\ \cos \theta & -\frac{\sin \theta}{r} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.48})$$

$$g_1 = 1, \quad g_2 = \frac{1}{r}, \quad g_3 = \frac{1}{r \sin \theta}, \quad g = g_1 g_2 g_3 = \frac{1}{r^2 \sin \theta}. \quad (\text{A.49})$$

$$\text{Linienelement:} \quad d\mathbf{r} = dr \mathbf{e}'_r + r d\theta \mathbf{e}'_\theta + r \sin \theta d\phi \mathbf{e}'_\phi, \quad (\text{A.50})$$

$$\text{Volumenelement:} \quad d^3 r = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi. \quad (\text{A.51})$$

$$\text{Gradient:} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \mathbf{e}'_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \mathbf{e}'_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \mathbf{e}'_\phi, \quad (\text{A.52})$$

$$\text{Divergenz:} \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{a} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial (r^2 a'_r)}{\partial r} + r \frac{\partial (\sin \theta a'_\theta)}{\partial \theta} + r \frac{\partial a'_\phi}{\partial \phi} \right], \quad (\text{A.53})$$

$$\begin{aligned} \text{Rotation:} \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{a} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[r \frac{\partial (\sin \theta a'_\phi)}{\partial \theta} - r \frac{\partial a'_\theta}{\partial \phi} \right] \mathbf{e}'_r + \\ &+ \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial a'_r}{\partial \phi} - \sin \theta \frac{\partial (r a'_\phi)}{\partial r} \right] \mathbf{e}'_\theta + \\ &+ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r a'_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial a'_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{e}'_\phi. \end{aligned} \quad (\text{A.54})$$

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left[\sin\theta \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} \right]. \quad (\text{A.55})$$

Anhang B

Die Integralsätze

In den Kapiteln 1 und 2 haben wir den Integralsatz von Stokes für ein Rechteck und den Integralsatz von Gauß für ein quaderförmiges Volumen nachgewiesen. Diese Nachweise haben wir auf beliebige Flächen bzw. beliebige Volumina übertragen, indem wir beliebige Flächen im Raum durch Rechtecke und beliebige Volumina durch Quader approximiert haben. Bei der Summation über die Rechtecke und über die Quader fallen die Beiträge über die inneren Grenzlinien bzw. die inneren Grenzflächen heraus. Die beiden Sätze gelten demnach für die genannten Approximationen beliebiger Flächen bzw. Volumina und damit im Grenzfall konvergierender Approximationen auch für beliebige Flächen bzw. Volumina.

Durch Verwendung von krummlinigen Koordinaten lassen sich die beiden Integralsätze auch direkt ohne Zuhilfenahme von Approximationen nachweisen.

B.1 Der Gaußsche Integralsatz

Es sei V ein beliebiges Volumen und $F := \partial V$ seine geschlossene Grenzfläche ("Einhüllende"). Wir wählen den Ursprung O eines Systems von Kugelkoordinaten innerhalb von V . Es bezeichne nun $R = R(\theta, \phi)$ den Abstand eines Punktes, der in der Richtung θ, ϕ auf $F = \partial V$ liegt, vom Ursprung. Die Punkte in V und auf $F = \partial V$ können wir dann durch die folgenden Koordinaten beschreiben:

$$\begin{aligned} V : & \quad r, & \quad \theta, \phi & \quad 0 \leq r \leq R(\theta, \phi) \\ F = \partial V : & \quad r = R(\theta, \phi), & \quad \theta, \phi & \end{aligned}$$

Wenn $R = R(\theta, \phi)$ mehrdeutig ist, weil $F = \partial V$ so gefaltet ist, dass in der Richtung θ, ϕ mehrere Punkte auf $F = \partial V$ liegen, denken wir uns das Volumen V in Teilvolumina zerlegt, so dass deren Grenzflächen eindeutig durch $R = R(\theta, \phi)$ beschreibbar sind. Wir zeigen dann den Gaußschen Integralsatz für jedes der Teilvolumina und bilden deren Summe, in der sich die Beiträge über innere Grenzflächen herausheben.

Unter Verwendung des Ausdrucks

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{a} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial (r^2 a_r)}{\partial r} + r \frac{\partial (\sin \theta a_\theta)}{\partial \theta} + r \frac{\partial a_\phi}{\partial \phi} \right], \quad (\text{B.1})$$

für die Divergenz des Vektorfeldes $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r})$ und von $d^3 r = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$ für das Volumenelement in Kugelkoordinaten wird

$$\begin{aligned} \int_V d^3 r \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{a} &= \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \int_0^R dr \left[\sin \theta \frac{\partial (r^2 a_r)}{\partial r} + r \frac{\partial (\sin \theta a_\theta)}{\partial \theta} + r \frac{\partial a_\phi}{\partial \phi} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Hier soll R stets $R = R(\theta, \phi)$ bedeuten. (Zur Vereinfachung schreiben wir a_r, a_θ, a_ϕ für die Komponenten von \mathbf{a} in Kugelkoordinaten statt a'_r, a'_θ, a'_ϕ wie im Anhang A.)

Die Integrationen über die drei Summanden der Divergenz in (B.2) werten wir wie folgt aus:

$$\int_0^R dr \frac{\partial (r^2 a_r)}{\partial r} = R^2 a_{r,F}, \quad (\text{B.3})$$

worin

$$a_{r,F} := a_r(R(\theta, \phi), \theta, \phi)$$

den Wert der Komponente a_r auf der Grenzfläche $F = \partial V$ bedeuten soll.

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\pi d\theta \int_0^R dr r \frac{\partial (\sin \theta a_\theta)}{\partial \theta} = \\
 & = \int_0^\pi d\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \int_0^R dr r a_\theta \right] - \int_0^\pi d\theta R \frac{\partial R}{\partial \theta} \sin \theta a_{\theta,F}. \quad (\text{B.4})
 \end{aligned}$$

Nun ist

$$\int_0^\pi d\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \int_0^R dr r a_\theta \right] = \left[\sin \theta \int_0^R dr r a_\theta \right]_{\theta=0}^{\theta=\pi} = 0, \quad (\text{B.5})$$

weil $\sin \theta = 0$ für $\theta = 0$ und $\theta = \pi$.

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R dr r \frac{\partial a_\phi}{\partial \phi} = \\
 & = \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\int_0^R dr r a_\phi \right] - \int_0^{2\pi} d\phi R \frac{\partial R}{\partial \phi} a_{\phi,F}, \quad (\text{B.6})
 \end{aligned}$$

und

$$\int_0^{2\pi} d\phi \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\int_0^R dr r a_\phi \right] = \left[\int_0^R dr r a_\phi \right]_{\phi=0}^{\phi=2\pi} = 0, \quad (\text{B.7})$$

weil das r -Integral in [...] periodisch in ϕ mit der Periode 2π ist.

Wir setzen die Ausdrücke (B.3) bis (B.7) in (B.2) ein und erhalten

$$\begin{aligned}
 & \int_V d^3 r \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{a} = \\
 & = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \left[R^2 \sin \theta a_{r,F} - R \frac{\partial R}{\partial \theta} \sin \theta a_{\theta,F} - R \frac{\partial R}{\partial \phi} a_{\phi,F} \right]. \quad (\text{B.8})
 \end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass das Integral auf der rechten Seite gerade gleich dem Flächenintegral von \mathbf{a} über die Grenzfläche $F = \partial V$ ist, womit der Gaußsche Integralsatz

bewiesen wäre. Dazu ermitteln wir die Flächenelemente $d\mathbf{f}$ auf $F = \partial V$. Letztere ist beschrieben durch $R = R(\theta, \phi)$ oder auch $\Psi(r, \theta, \phi) = r - R(\theta, \phi) = 0$. Also gilt auch $d\Psi = 0$ auf ∂V .

$$d\Psi = dr - \frac{\partial R}{\partial \theta} d\theta - \frac{\partial R}{\partial \phi} d\phi = ds_r - \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial \theta} ds_\theta - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial R}{\partial \phi} ds_\phi, \quad (\text{B.9})$$

worin

$$ds_r = dr, \quad ds_\theta = r d\theta, \quad ds_\phi = r \sin \theta d\phi$$

die Linienelemente in Kugelkoordinaten sind. Für $d\Psi = 0$ liegen diese Elemente in $F = \partial V$, so dass der Vektor

$$\mathbf{N}_{\partial V} := \mathbf{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial R}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi \quad (\text{B.10})$$

senkrecht auf $F = \partial V$ steht, und folglich $d\mathbf{f} \sim \mathbf{N}_{\partial V}$. Den noch fehlenden Faktor ermitteln wir für den Fall $d\mathbf{f} \sim \mathbf{e}_r$, dann nämlich ist

$$d\mathbf{f} = ds_\theta ds_\phi \mathbf{e}_r = r^2 \sin \theta d\theta d\phi \mathbf{e}_r,$$

so dass für $r = R$

$$\begin{aligned} d\mathbf{f} &= \mathbf{N}_{\partial V} R^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \left(R^2 \sin \theta \mathbf{e}_r - R \frac{\partial R}{\partial \theta} \sin \theta \mathbf{e}_\theta - R \frac{\partial R}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi \right) d\theta d\phi. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Die Bildung des Skalarprodukts $\mathbf{a} d\mathbf{f}$ liefert offensichtlich gerade den Integranden auf der rechten Seite von (B.8), womit der Gaußsche Satz

$$\int_V d^3r \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{a} = \oint_{\partial V} d\mathbf{f} \mathbf{a} \quad (\text{B.12})$$

für beliebige Volumina bewiesen ist.

B.2 Der Stokessche Integralsatz

Es sei F ein beliebiges Flächenstück im Raum und $L = \partial F$ seine geschlossene Grenzlinie ("Saum"). Wir wählen ein System von Zylinderkoordinaten. Die Projektion der Linie $L = \partial F$ in die Ebene $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\phi$ ($z=0$) bildet dort eine ebenfalls geschlossene Linie, die wir mit L' bezeichnen. Das System von Kugelkoordinaten sei so gewählt, dass sein Ursprung O innerhalb von L' liegt. Es bezeichne $R = R(\phi)$ den Abstand der Punkte, die in der Richtung ϕ auf L' liegen, vom Ursprung, und $z = H(\theta, \phi)$ die Höhe z der Punkte auf F über der Ebene $z = 0$. Die Punkte auf $F, L = \partial F$ und L' können wir dann durch die folgenden Koordinaten beschreiben:

$$\begin{aligned} F : & \quad \rho, \quad \phi, \quad z = H(\rho, \phi) & \quad 0 \leq \rho \leq R(\phi) \\ L = \partial F : & \quad \rho = R(\phi), \quad \phi, \quad z = H(R(\phi), \phi) \\ L' : & \quad \rho = R(\phi), \quad \phi, \quad z = 0 \end{aligned}$$

Falls die so definierten Funktionen $\rho = R(\phi)$ oder $z = H(\theta, \phi)$ mehrdeutig werden, müssen wir L und entsprechend F auf geeignete Weise zerlegen und anschließend die Summe über die Zerlegung bilden, vgl. die entsprechende Bemerkung im vorhergehenden Abschnitt.

Zunächst bestimmen wir die Flächenelemente $d\mathbf{f}$ auf F , und zwar analog wie im vorhergehenden Abschnitt. Wir beschreiben F durch $\Psi(\rho, \phi, z) = z - H(\rho, \phi) = 0$.

$$d\Psi = dz - \frac{\partial H}{\partial \rho} d\rho - \frac{\partial H}{\partial \phi} d\phi = ds_z - \frac{\partial H}{\partial \rho} ds_\rho - \frac{1}{\rho} \frac{\partial H}{\partial \phi} ds_\phi, \quad (\text{B.13})$$

worin

$$ds_\rho = d\rho, \quad ds_\phi = \rho d\phi, \quad ds_z = dz$$

die Linienelemente in Zylinderkoordinaten sind. Für $d\Psi = 0$ liegen diese Elemente in F , so dass der Vektor

$$\mathbf{N}_F := \mathbf{e}_z - \frac{\partial H}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho - \frac{1}{\rho} \frac{\partial H}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi \quad (\text{B.14})$$

senkrecht auf F steht. Den noch fehlenden Faktor ermitteln wir für den Fall $d\mathbf{f} \sim \mathbf{e}_z$, dann nämlich ist

$$d\mathbf{f} = ds_\rho ds_\phi \mathbf{e}_z = \rho d\rho d\phi \mathbf{e}_z,$$

so dass

$$d\mathbf{f} = \left(\mathbf{e}_z - \frac{\partial H}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho - \frac{1}{\rho} \frac{\partial H}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi \right) \rho d\rho d\phi. \quad (\text{B.15})$$

Unter Verwendung des Ausdrucks

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{a} &= \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial a_z}{\partial \phi} - \rho \frac{\partial a_\phi}{\partial z} \right] \mathbf{e}_\rho + \\ &+ \left[\frac{\partial a_\rho}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial \rho} \right] \mathbf{e}_\phi + \\ &+ \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial(\rho a_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial a_\rho}{\partial \phi} \right] \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

für die Rotation des Vektorfeldes $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r})$ in Zylinderkoordinaten bilden wir das Skalarprodukt aus $d\mathbf{f}$ und der Rotation von \mathbf{a} und integrieren über das Flächenstück F :

$$\begin{aligned} \int_F d\mathbf{f} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{a} \right) &= \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R d\rho \left[\frac{\partial(\rho a_{\phi,F})}{\partial \rho} - \frac{\partial a_{\rho,F}}{\partial \phi} - \frac{\partial H}{\partial \rho} \left(\frac{\partial a_{z,F}}{\partial \phi} - \rho \frac{\partial a_{\phi,F}}{\partial z} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial H}{\partial \phi} \left(\frac{\partial a_{\rho,F}}{\partial z} - \frac{\partial a_{z,F}}{\partial \rho} \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

worin

$$a_{\rho,F} := a_\rho(\rho, \phi, H(\rho, \phi))$$

den Wert der Komponente a_ρ auf der Fläche F bedeuten soll, entsprechend für die anderen Komponenten. Wegen dieser impliziten zweifachen Abhängigkeit von ρ und ϕ können wir die Integrationen nicht direkt ausführen, sondern müssen zunächst die totalen Ableitungen bilden:

$$\frac{d(\rho a_{\phi,F})}{d\rho} = \frac{\partial(\phi a_{\rho,F})}{\partial\rho} + \rho \frac{\partial a_{\phi,F}}{\partial z} \frac{\partial H}{\partial\rho}, \quad (\text{B.18})$$

$$\frac{da_{\rho,F}}{d\phi} = \frac{\partial a_{\rho,F}}{\partial\phi} + \frac{\partial a_{\rho,F}}{\partial z} \frac{\partial H}{\partial\phi}, \quad (\text{B.19})$$

$$\frac{da_{z,F}}{d\rho} = \frac{\partial a_{z,F}}{\partial\rho} + \frac{\partial a_{z,F}}{\partial z} \frac{\partial H}{\partial\rho}, \quad (\text{B.20})$$

$$\frac{da_{z,F}}{d\phi} = \frac{\partial a_{z,F}}{\partial\phi} + \frac{\partial a_{z,F}}{\partial z} \frac{\partial H}{\partial\phi}. \quad (\text{B.21})$$

Aus den letzten beiden Relationen (B.20) und (B.21) folgt noch

$$-\frac{\partial H}{\partial\rho} \frac{\partial a_{z,F}}{\partial\phi} + \frac{\partial H}{\partial\phi} \frac{\partial a_{z,F}}{\partial\rho} = -\frac{\partial H}{\partial\rho} \frac{da_{z,F}}{d\phi} + \frac{\partial H}{\partial\phi} \frac{da_{z,F}}{d\rho}. \quad (\text{B.22})$$

Wir setzen (B.18), (B.19) und (B.22) in das Integral in (B.17) ein:

$$\begin{aligned} \int_F d\mathbf{f} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{a} \right) &= \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R d\rho \left[\frac{d(\rho a_{\phi,F})}{d\rho} - \frac{da_{\rho,F}}{d\phi} - \frac{\partial H}{\partial\rho} \frac{da_{z,F}}{d\phi} + \frac{\partial H}{\partial\phi} \frac{da_{z,F}}{d\rho} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

Die einzelnen Integrationen liefern:

$$\int_0^R d\rho \frac{d(\rho a_{\phi,F})}{d\rho} = R a_{\phi,L}, \quad (\text{B.24})$$

worin

$$a_{\phi,L} = a_\phi (R(\phi), \phi, H(R(\phi), \phi))$$

den Wert der Komponente a_ϕ auf der Grenzlinie $L = \partial F$ bedeuten soll, entsprechend für die anderen Komponenten.

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R d\rho \frac{da_{\rho,F}}{d\phi} = \int_0^{2\pi} d\phi \frac{d}{d\phi} \left[\int_0^R d\rho a_{\rho,F} \right] - \int_0^{2\pi} d\phi \frac{dR}{d\phi} a_{\rho,L} \quad (\text{B.25})$$

mit

$$\int_0^{2\pi} d\phi \frac{d}{d\phi} \left[\int_0^R d\rho a_{\rho,F} \right] = \left[\int_0^R d\rho a_{\rho,F} \right]_{\phi=0}^{\phi=2\pi} = 0, \quad (\text{B.26})$$

weil das ρ -Integral in [...] periodisch in ϕ mit der Periode 2π ist.

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R d\rho \frac{\partial H}{\partial \rho} \frac{da_{z,F}}{d\phi} = \\ & = \int_0^{2\pi} d\phi \frac{d}{d\phi} \left[\int_0^R d\rho \frac{\partial H}{\partial \rho} a_{z,F} \right] - \int_0^{2\pi} d\phi \left(\frac{\partial H}{\partial \rho} \right)_L \frac{dR}{d\phi} a_{z,L} - \\ & - \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R d\rho \frac{\partial^2 H}{\partial \rho \partial \phi} a_{z,F}, \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

$$\int_0^{2\pi} d\phi \frac{d}{d\phi} \left[\int_0^R d\rho \frac{\partial H}{\partial \rho} a_{z,F} \right] = \left[\int_0^R d\rho \frac{\partial H}{\partial \rho} a_{z,F} \right]_{\phi=0}^{\phi=2\pi} = 0, \quad (\text{B.28})$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R d\rho \frac{\partial H}{\partial \phi} \frac{da_{z,F}}{d\rho} = \\ & = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R d\rho \frac{d}{d\rho} \left(\frac{\partial H}{\partial \phi} a_{z,F} \right) - \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R d\rho \frac{\partial^2 H}{\partial \rho \partial \phi} a_{z,F}, \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R d\rho \frac{d}{d\rho} \left(\frac{\partial H}{\partial \phi} a_{z,F} \right) = \left(\frac{\partial H}{\partial \phi} \right)_L a_{z,L} - \underbrace{\left(\frac{\partial H}{\partial \phi} a_z \right)_{\rho=0}}_{=0}. \quad (\text{B.30})$$

Anschaulich ist unmittelbar einleuchtend, dass die Funktion $z = H(\rho, \phi)$ für $\rho = 0$ nicht mehr von ϕ abhängen kann. Die obigen Integrationen setzen wir in (B.23) ein und erhalten

$$\begin{aligned} \int_F d\mathbf{f} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{a} \right) &= \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi \left\{ R a_{\phi,L} + \frac{dR}{d\phi} a_{\rho,L} + \left[\left(\frac{\partial H}{\partial \rho} \right)_L \frac{dR}{d\phi} + \left(\frac{\partial H}{\partial \phi} \right)_L \right] a_{z,L} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

Wir zeigen nun, dass das Integral auf der rechten Seite gerade gleich dem Linienintegral von \mathbf{a} über die Grenzlinie L ist. Es ist

$$d\mathbf{r} \mathbf{a} = ds_\rho a_\rho + ds_\phi a_\phi + ds_z a_z = d\rho a_\rho + d\phi \rho a_\phi + dz a_z. \quad (\text{B.32})$$

Wir haben die Grenzlinie L durch $\rho = R(\phi)$ und $z = H(R(\phi), \phi)$, also mit ϕ als unabhängiger Variablen dargestellt. Darum müssen wir alle Differentiale durch $d\phi$ ausdrücken:

$$d\rho = \frac{dR}{d\phi} d\phi, \quad dz = \left[\left(\frac{\partial H}{\partial \rho} \right)_L \frac{dR}{d\phi} + \left(\frac{\partial H}{\partial \phi} \right)_L \right] d\phi.$$

Einsetzen in (B.32) führt genau auf den Integranden in (B.31), womit der Stokessche Integralsatz

$$\int_F d\mathbf{f} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{a} \right) = \oint_{\partial F} d\mathbf{r} \mathbf{a} \quad (\text{B.33})$$

für beliebige Flächenstücke F bewiesen ist.

Anhang C

Die Diracsche δ -Funktion

Im Abschnitt 2.2.2 haben wir die Diracsche δ -Funktion als eine Schreibweise eingeführt, um den Gaußschen Integralsatz formal auch auf das elektrische Feld einer Punktladung anwenden zu können. Wir hatten nämlich gezeigt, dass

$$\Delta \frac{1}{r} = \partial_\alpha^2 \frac{1}{r} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{1}{r} \right) = 0 \quad \text{für} \quad r \neq 0, \quad (\text{C.1})$$

aber bei formaler Verwendung des Gaußschen Integralsatzes

$$\int_V d^3 r \Delta \frac{1}{r} = \int_V d^3 r \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{1}{r} \right) = \oint_{\partial V} d\mathbf{f} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{1}{r} \right) = \begin{cases} -4\pi & (\mathbf{r} = \mathbf{0}) \in V, \\ 0 & (\mathbf{r} = \mathbf{0}) \notin V. \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

Hier ist das Volumenintegral für den Fall $(\mathbf{r} = \mathbf{0}) \in V$ wegen der Singularität des Integranden bei $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ nicht definiert, während das Flächenintegral über ∂V definiert ist und die angegebenen Werte besitzt. Hieraus hatten wir die formale Schreibweise

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4\pi} \Delta \frac{1}{r} &=: \delta(\mathbf{r}), \\ \delta(\mathbf{r}) &= 0 \quad \text{für} \quad \mathbf{r} \neq \mathbf{0}, \\ \text{aber} \quad \int_V d^3 r \delta(\mathbf{r}) &= \begin{cases} 1 & (\mathbf{r} = \mathbf{0}) \in V, \\ 0 & (\mathbf{r} = \mathbf{0}) \notin V. \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

entwickelt. Unter formaler Verwendung des Gaußschen Integralsatzes hatten wir im Abschnitt 2.2.2 auch gezeigt, dass für eine stetige Funktion $\phi(\mathbf{r})$

$$\int_V d^3r \phi(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{0}) \quad (\text{C.4})$$

gilt, wenn $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ in V liegt, anderenfalls verschwindet das Integral.

üblicherweise stellt man die δ -Funktion $\delta(\mathbf{r})$ für die 3-dimensionale Variable \mathbf{r} als Produkt über 3 δ -Funktionen der kartesischen Komponenten x_1, x_2, x_3 von \mathbf{r} dar:

$$\delta(\mathbf{r}) = \delta(x_1) \delta(x_2) \delta(x_3), \quad (\text{C.5})$$

wobei in Analogie zu (C.4) für eine stetige Funktion $\phi(x)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \phi(x) \delta(x) = \phi(0) \quad (\text{C.6})$$

gelten soll, dass (C.5) im Sinne von (C.4) richtig ist, erkennen wir an der folgenden Umformung:

$$\begin{aligned} \int d^3r \phi(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r}) &= \int dx_1 \delta(x_1) \int dx_2 \delta(x_2) \int dx_3 \delta(x_3) \phi(x_1, x_2, x_3) \\ &= \int dx_1 \delta(x_1) \int dx_2 \delta(x_2) \phi(x_1, x_2, 0) \\ &= \int dx_1 \delta(x_1) \phi(x_1, 0, 0) = \phi(0, 0, 0) = \phi(\mathbf{0}). \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

C.1 Die 1-dimensionale Delta-Funktion und die Darstellung durch einen Grenzübergang

Der Grund für die formale Schreibweise mit der δ -"Funktion" liegt darin, dass man mit diesem Symbol in Bezug auf Integration oder Differentiation wie mit einer gewöhnlichen (stetigen oder differenzierbaren) Funktion rechnen kann, obwohl es sich gar nicht um eine Funktion im üblichen Sinne handelt. Es gibt eine mathematische Theorie für Objekte wie die δ -"Funktion", die Theorie der *Distributionen*. Für

die überwiegende Zahl der physikalischen Anwendungen der δ -"Funktion" lohnt dieser Aufwand nicht. Dennoch sollte man auch in der Physik über eine mathematisch korrekte Vorstellung über die Verwendung der δ -"Funktion" verfügen. Eine Möglichkeit dafür ist die Darstellung der δ -"Funktion" durch geeignete Grenzübergänge in gewöhnlichen Funktionen. Wir werden im folgenden differenzierbare Funktionen $D_\epsilon(x)$ mit einem Parameter ϵ kennenlernen, die durch den Grenzübergang $\epsilon \rightarrow 0$ in die δ -Funktion übergehen:

$$D_\epsilon(x) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \delta(x). \tag{C.8}$$

Dieser Grenzübergang soll dadurch definiert sein, dass er die Beziehung (C.6) liefert, also

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \phi(x) D_\epsilon(x) = \phi(0). \tag{C.9}$$

Die Beziehung (C.6) soll also als symbolische Schreibweise für den Grenzübergang in (C.9) interpretiert werden. Da $D_\epsilon(x)$ sogar differenzierbar sein soll, ist das Integral in (C.9) im gewöhnlichen Riemannschen Sinn definiert.

Die am häufigsten in der Physik vorkommenden Darstellungen für $D_\epsilon(x)$ sind:

$$\begin{aligned} D_\epsilon(x) &= \frac{1}{2\epsilon} \Theta(\epsilon - |x|), && \text{(A): Kasten,} \\ &= \frac{1}{2\epsilon} \exp\left(-\frac{|x|}{\epsilon}\right), && \text{(B): Exponentialfunktion,} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\epsilon} \exp\left(-\frac{x^2}{2\epsilon^2}\right), && \text{(C): Gaußglocke,} \\ &= \frac{\epsilon}{\pi} \frac{1}{\epsilon^2 + x^2}, && \text{(D): Lorentz-Kurve,} \\ &= \frac{\epsilon}{\pi x^2} \sin^2 \frac{x}{\epsilon}, && \text{(E): Spaltfunktion.} \end{aligned} \tag{C.10}$$

Hierin ist $\Theta(s)$ die Heavyside-Funktion, definiert durch

$$\Theta(s) = \begin{cases} 1 & \text{für } s \geq 0, \\ 0 & \text{für } s < 0 \end{cases}$$

Wie man leicht erkennt, haben alle obigen Darstellungen von $D_\epsilon(x)$ unter der Transformation $x = \epsilon \xi$ die folgende Skalierungseigenschaft:

$$D_\epsilon(\epsilon \xi) = \frac{1}{\epsilon} D_1(\xi), \quad (\text{C.11})$$

worin $D_1(\xi)$ aus (C.10) für $\epsilon = 1$ folgt. Man kann ebenfalls nachweisen, dass die $D_1(\xi)$ normiert sind, d.h.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi D_1(\xi) = 1, \quad (\text{C.12})$$

und zwar entweder durch elementare Integrationen oder durch Anwendung entsprechender Integrationstechniken. dass bedeutet, dass wegen (C.11) dann auch die $D_\epsilon(x)$ normiert sind:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx D_\epsilon(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi D_1(\xi) = 1. \quad (\text{C.13})$$

Die Abbildung C.1 zeigt graphische Darstellungen der $D_\epsilon(x)$ aus (C.10).

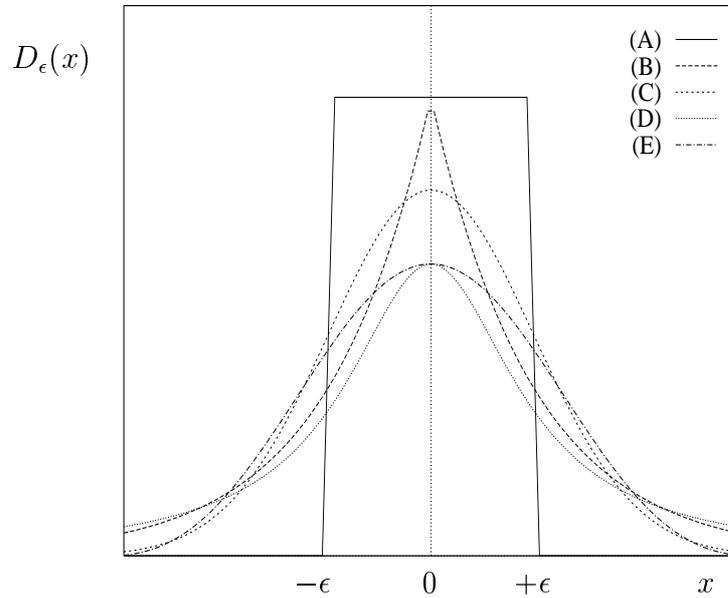
C.2 Nachweis von (C.9)

Wir weisen jetzt die Beziehung (C.9) für stetige Funktionen $\phi(x)$ und für die $D_\epsilon(x)$ aus (C.10) nach. Wir beachten, dass in allen Fällen $D_\epsilon(x) \geq 0$. Wir führen den Nachweis, indem wir

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx [\phi(x) - \phi(0)] D_\epsilon(x) = 0 \quad (\text{C.14})$$

zeigen. Das Integral teilen wir in drei Bereiche auf:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx [\phi(x) - \phi(0)] D_\epsilon(x) = J_\epsilon(a) + R_\epsilon^+(a) + R_\epsilon^-(a), \quad (\text{C.15})$$


 Abbildung C.1: Graphische Darstellungen von $D_\epsilon(x)$

mit

$$\begin{aligned}
 J_\epsilon(a) &:= \int_{-a}^{+a} dx [\phi(x) - \phi(0)] D_\epsilon(x), \\
 R_\epsilon^+(a) &:= \int_a^{+\infty} dx [\phi(x) - \phi(0)] D_\epsilon(x), \\
 R_\epsilon^-(a) &:= \int_{-\infty}^{-a} dx [\phi(x) - \phi(0)] D_\epsilon(x),
 \end{aligned}$$

worin a eine positive Zahl ist, $a > 0$, über die wir sogleich verfügen werden. Zunächst schätzen wir $J_\epsilon(a)$ ab. Unter Beachtung von $D_\epsilon(x) \geq 0$ wird

$$\begin{aligned}
 |J_\epsilon(a)| &\leq \max_{|x| \leq a} |\phi(x) - \phi(0)| \int_{-a}^{+a} dx D_\epsilon(x) \\
 &= \max_{|x| \leq a} |\phi(x) - \phi(0)| \int_{-a/\epsilon}^{+a/\epsilon} d\xi D_1(\xi). \tag{C.16}
 \end{aligned}$$

Bei der Abschätzung von $R_\epsilon^+(a)$ beachten wir, dass $\phi(x) - \phi(0)$ wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von $\phi(x)$ beschränkt ist: $|\phi(x) - \phi(0)| < C$. Damit wird

$$R_\epsilon^+(a) \leq C \int_a^{+\infty} dx D_\epsilon(x) = C \int_{a/\epsilon}^{+\infty} d\xi D_1(\xi). \quad (\text{C.17})$$

Ganz analog wird $R_\epsilon^-(a)$ abgeschätzt. Jetzt verfügen wir, dass mit $\epsilon \rightarrow 0$ auch $a \rightarrow 0$ gehen soll, allerdings in der Weise, dass $a/\epsilon \rightarrow \infty$. Das lässt sich z.B. durch die Wahl $a \sim \sqrt{\epsilon}$ erreichen. Dann ist wegen der Stetigkeit von $\phi(x)$

$$\lim_{a \rightarrow 0} \max_{|x| \leq a} |\phi(x) - \phi(0)| = 0$$

sowie

$$\lim_{a/\epsilon \rightarrow \infty} \int_{a/\epsilon}^{+\infty} d\xi D_1(\xi) = 0,$$

und analog für $R_\epsilon^-(a)$. Damit ist der erwünschte Nachweis erbracht.

C.3 Die Fourier–Transformation

Der Fall (D) für $D_\epsilon(x)$ aus (C.10) hat eine besondere Bedeutung für die Fourier–Transformation. Um diesen Zusammenhang herzustellen, schreiben wir

$$D_\epsilon(x) = \frac{\epsilon}{\pi} \frac{1}{\epsilon^2 + x^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ikx - \epsilon|k|}. \quad (\text{C.18})$$

Um diese Identität nachzuweisen, spalten wir die Integration auf der rechten Seite in die Bereiche von $-\infty$ bis 0 und von 0 bis $+\infty$ auf und berechnen die beiden verbleibenden Integrale durch elementare Integration. Führen wir den Grenzübergang $\epsilon \rightarrow 0$ direkt in (C.18) aus, so finden wir im Sinne der früher eingeführten symbolischen Sprechweise

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ikx} = \delta(x). \quad (\text{C.19})$$

Diese symbolische Aussage wird z.B. bei der Umkehrung der Fourier–Transformation benutzt. Als Fourier–Transformierte $\tilde{f}(k)$ einer Funktion $f(x)$ wird definiert

$$\tilde{f}(k) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) e^{-ikx}. \quad (\text{C.20})$$

Wir multiplizieren beide Seiten mit $\exp(ikx')$ und integrieren über k :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk \tilde{f}(k) e^{ikx'} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) e^{ik(x'-x)}. \quad (\text{C.21})$$

Wenn wir die Reihenfolge der k - und x -Integrationen auf der rechten Seite vertauschen dürften und dann (C.19) verwenden, erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \tilde{f}(k) e^{ikx'} &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ik(x'-x)} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \delta(x'-x) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx'' f(x'-x'') \delta(x'') = f(x'), \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

worin wir im letzten Schritt $x'' := x' - x$ statt x als Integrationsvariable substituiert haben. Wenn wir nun wieder x statt x' schreiben, wird aus (C.22)

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk \tilde{f}(k) e^{ikx}, \quad (\text{C.23})$$

also die Umkehrung der Fourier-Transformation in (C.20).

Die Tatsache, dass wir durch die Vertauschung der Reihenfolge der k - und x -Integrationen in (C.22) auf die δ -"Funktion" gestoßen sind, weist darauf hin, dass die Vertauschung nicht erlaubt ist, weil das Ergebnis eben keine integrierbare Funktion im Sinne des Riemannschen Integralbegriffs ist. Unter der Voraussetzung, dass aber das x -Integral in (C.20) konvergiert, müsste die korrekte Rechnung statt (C.22) wie folgt lauten:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \tilde{f}(k) e^{ikx'} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-1/\epsilon}^{+1/\epsilon} dk \tilde{f}(k) e^{ikx'} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-1/\epsilon}^{+1/\epsilon} dk \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) e^{ik(x'-x)} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \frac{1}{2\pi} \int_{-1/\epsilon}^{+1/\epsilon} dk e^{ik(x'-x)} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) D_{\epsilon}(x' - x). \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

Da wir nun im Abschnitt C.2 nachgewiesen haben, dass die Darstellung (D) für $D_\epsilon(x)$ für $\epsilon \rightarrow 0$ die allgemeine Relation (C.9) erfüllt, folgt aus (C.24) für $\epsilon \rightarrow 0$ die Umkehrformel (C.23) der Fourier-Transformation.

C.4 Darstellung der 3-dimensionalen δ -Funktion durch einen Grenzübergang

Auch die 3-dimensionale δ -Funktion können wir direkt durch einen Grenzübergang darstellen, ohne auf den 1-dimensionalen Fall zurückgreifen zu müssen. Im Anschluss an (C.3) definieren wir

$$D_\epsilon(\mathbf{r}) := -\frac{1}{4\pi} \Delta \frac{1}{r + \epsilon}, \quad \epsilon > 0. \quad (\text{C.25})$$

Wir berechnen nun nach dem Muster im Abschnitt 2.1

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \frac{1}{r + \epsilon} &= -\frac{1}{(r + \epsilon)^2} \frac{x_\alpha}{r}, \\ \partial_\alpha^2 \frac{1}{r + \epsilon} &= -\partial_\alpha \left(\frac{1}{(r + \epsilon)^2} \frac{x_\alpha}{r} \right) \\ &= \frac{2}{(r + \epsilon)^3} \frac{x_\alpha^2}{r^2} + \frac{1}{(r + \epsilon)^2} \frac{x_\alpha^2}{r^3} - \frac{1}{(r + \epsilon)^2} \frac{3}{r} \\ &= \frac{2}{(r + \epsilon)^3} - \frac{2}{(r + \epsilon)^2 r} = -\frac{2\epsilon}{(r + \epsilon)^3 r}, \\ D_\epsilon(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2\pi} \frac{\epsilon}{(r + \epsilon)^3 r}. \end{aligned} \quad (\text{C.26})$$

Die Funktion $D_\epsilon(\mathbf{r})$ besitzt endliche Werte für $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$, die jedoch mit $\epsilon \rightarrow 0$ verschwinden:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} D_\epsilon(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{für} \quad \mathbf{r} \neq \mathbf{0}. \quad (\text{C.27})$$

Bei $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ besitzt $D_\epsilon(\mathbf{r})$ eine Singularität, ist jedoch integrierbar. Wir integrieren $D_\epsilon(\mathbf{r})$ über $|\mathbf{r}| \leq R$, also über eine Kugel mit dem Radius R und dem Mittelpunkt in $\mathbf{r} = \mathbf{0}$. Mit der Substitution $s := r + \epsilon$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{|\mathbf{r}| \leq R} d^3 r D_\epsilon(\mathbf{r}) &= 2 \int_0^R dr r^2 \frac{\epsilon}{(r + \epsilon)^3 r} = 2 \epsilon \int_\epsilon^{R+\epsilon} ds \frac{s - \epsilon}{s^3} = \\ &= -2 \epsilon \left[s^{-1} \right]_\epsilon^{R+\epsilon} + \epsilon^2 \left[s^{-2} \right]_\epsilon^\epsilon = \left(\frac{R}{R + \epsilon} \right)^2. \end{aligned} \quad (\text{C.28})$$

Für $\epsilon \rightarrow 0$ liefert das Integral den Wert 1, und zwar unabhängig von der Wahl von R :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|\mathbf{r}| \leq R} d^3 r D_\epsilon(\mathbf{r}) = 1. \quad (\text{C.29})$$

Wir können sogar den Radius R mit ϵ verschwinden lassen, allerdings schwächer als ϵ , z.B. $R = \sqrt{\epsilon}$:

$$\int_{|\mathbf{r}| \leq \sqrt{\epsilon}} d^3 r D_\epsilon(\mathbf{r}) = \left(\frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{\epsilon} + \epsilon} \right)^2 = \left(\frac{1}{1 + \sqrt{\epsilon}} \right)^2 \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 1. \quad (\text{C.30})$$

Wir zeigen nun die zu (C.9) entsprechende Relation

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int d^3 r \phi(\mathbf{r}) D_\epsilon(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{0}) \quad (\text{C.31})$$

für stetige Funktionen $\phi(\mathbf{r})$, indem wir analog wie im Abschnitt C.2 vorgehen. Wir teilen das zu (C.14) analoge Integral in zwei Teile $|\mathbf{r}| \leq R$ und $|\mathbf{r}| > R$ auf. Außerdem sei $|\phi(\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{0})| \leq C$ wegen der vorausgesetzten Stetigkeit. Es ist

$$\begin{aligned} \int d^3 r [\phi(\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{0})] D_\epsilon(\mathbf{r}) &= \\ &= \int_{|\mathbf{r}| \leq R} d^3 r [\phi(\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{0})] D_\epsilon(\mathbf{r}) + \int_{|\mathbf{r}| > R} d^3 r [\phi(\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{0})] D_\epsilon(\mathbf{r}), \\ \left| \int_{|\mathbf{r}| \leq R} d^3 r [\phi(\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{0})] D_\epsilon(\mathbf{r}) \right| &\leq \max_{|\mathbf{r}| \leq R} |\phi(\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{0})| \int_{|\mathbf{r}| \leq R} d^3 r D_\epsilon(\mathbf{r}) = \\ &= \max_{|\mathbf{r}| \leq R} |\phi(\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{0})| \left(\frac{R}{R + \epsilon} \right)^2, \\ \left| \int_{|\mathbf{r}| > R} d^3 r [\phi(\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{0})] D_\epsilon(\mathbf{r}) \right| &\leq C \int_{|\mathbf{r}| > R} d^3 r D_\epsilon(\mathbf{r}) = \\ &= C \left[1 - \left(\frac{R}{R + \epsilon} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Jetzt wählen wir wieder $R = \sqrt{\epsilon}$, so dass

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \max_{|\mathbf{r}| \leq \sqrt{\epsilon}} |\phi(\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{0})| = 0$$

wegen der vorausgesetzten Stetigkeit und

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[1 - \left(\frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{\epsilon} + \epsilon} \right)^2 \right] = 0,$$

s.o. Damit ist (C.31) nachgewiesen. Die Beiträge zu dem Integral kommen für $\epsilon \rightarrow 0$ aus einer beliebig kleinen Umgebung von $\mathbf{r} = \mathbf{0}$.

Anhang D

Der Levi–Civita–Tensor in 3 und 4 Dimensionen

Wie wir im gesamten Text der Elektrodynamik erfahren, stellt der Levi–Civita–Tensor ein sehr rationelles Hilfsmittel beim Umgang mit Ausdrücken dar, in denen Kreuzprodukte und der Differentialoperator der Rotation vorkommen. Diese Erfahrung bezieht sich zunächst einmal auf den dreidimensionalen Ortsraum. Die 4–Schreibweise der Elektrodynamik zeigt uns jedoch, daß es zum Kreuzprodukt und zur Rotation auch 4–dimensionale Entsprechungen gibt, die sich am geeignetsten mit dem 4–dimensionalen Levi–Civita–Tensor darstellen lassen. Wir wollen deshalb in diesem Anhang einige ”Rechenregeln” für den Levi–Civita–Tensor in 3 und in 4 Dimensionen zusammenstellen. Die wichtigsten dieser Regeln betreffen Ausdrücke, in denen Produkte von Levi–Civita–Tensoren auftreten. Solche Ausdrücke ergeben sich immer dann, wenn Kreuzprodukte oder Differentialoperatoren der Rotation mehrfach verschachtelt auftreten.

D.1 Produktausdrücke von zwei 3–dimensionalen Levi–Civita–Tensoren

D.1.1 Die Rechenregeln

Wir erinnern zunächst noch einmal an die Definition

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma} = \begin{cases} +1 & (\alpha, \beta, \gamma) = \text{gerade Permutation von } (1, 2, 3) \\ -1 & (\alpha, \beta, \gamma) = \text{ungerade Permutation von } (1, 2, 3) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{D.1})$$

des 3-dimensionalen Levi-Civita-Tensors aus dem Abschnitt 1.3.3. Wir wollen jetzt einen Ausdruck für das Produkt $\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\lambda\mu\nu}$ von zwei Levi-Civita-Tensoren formulieren, in denen beliebige Indizes (α, β, γ) bzw. (λ, μ, ν) auftreten können. Jeder dieser Indizes darf beliebige Werte von $(1, 2, 3)$ annehmen. Wir zeigen nun die folgende Identität:

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\lambda\mu\nu} = \begin{vmatrix} \delta_{\alpha\lambda} & \delta_{\alpha\mu} & \delta_{\alpha\nu} \\ \delta_{\beta\lambda} & \delta_{\beta\mu} & \delta_{\beta\nu} \\ \delta_{\gamma\lambda} & \delta_{\gamma\mu} & \delta_{\gamma\nu} \end{vmatrix} \quad (\text{D.2})$$

Wir zeigen zunächst, dass beide Seiten dasselbe Verhalten bei Permutation der Indizes α, β, γ untereinander bzw. λ, μ, ν untereinander besitzen. Werden nämlich auf der linken Seite zwei Indizes in α, β, γ oder in λ, μ, ν vertauscht, ändert sich das Vorzeichen. Dem entspricht in der Determinante auf der rechten Seite die Vertauschung von zwei Zeilen oder von zwei Spalten, die ebenfalls zu einer Vorzeichen-Änderung führt.

Wenn zwei der Indizes α, β, γ auf der linken Seite übereinstimmen, so dass $\epsilon_{\alpha\beta\gamma} = 0$, treten in der Determinante auf der rechten Seite zwei gleiche Zeilen auf, so dass auch die Determinante verschwindet. Wenn links zwei der Indizes λ, μ, ν übereinstimmen, so dass $\epsilon_{\lambda\mu\nu} = 0$, treten in der Determinante auf der rechten Seite zwei gleiche Spalten auf, so dass auch die Determinante verschwindet.

Es bleibt zu zeigen, dass kein weiterer Faktor in der Relation (D.2) auftritt. Ein solcher Faktor würde nicht im Widerspruch zur übereinstimmenden Symmetrie auf den beiden Seiten stehen. Um den Faktor zu ermitteln, genügt es, einen speziellen Fall zu betrachten, z.B. $\alpha = \lambda = 1, \beta = \mu = 2, \gamma = \nu = 3$. Auf der linken Seite erhalten wir dann $\epsilon_{123} \epsilon_{123} = 1$ und auf der rechten Seite

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

womit (D.2) bewiesen ist.

Aus (D.2) folgen nun weitere wichtige Relationen, auf die wir beim Umrechnen von Produktausdrücken von Levi-Civita-Tensoren zurückgreifen können. Wenn wir in (D.2) z.B. $\lambda = \alpha$ setzen, entsteht auf der linken Seite der Ausdruck $\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\alpha\mu\nu}$, in dem per Summations-Konvention über $\alpha = 1, 2, 3$ zu summieren ist. Auf der rechten Seite entwickeln wir die Determinante nach der ersten Zeile. Durch konsequente Beachtung der Summations-Konvention und unter Verwendung von $\delta_{\alpha\alpha} = 3$ erhalten wir

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\alpha\mu\nu} = \begin{vmatrix} \delta_{\beta\mu} & \delta_{\beta\nu} \\ \delta_{\gamma\mu} & \delta_{\gamma\nu} \end{vmatrix} = \delta_{\beta\mu} \delta_{\gamma\nu} - \delta_{\beta\nu} \delta_{\gamma\mu}. \quad (\text{D.3})$$

Statt der soeben beschriebenen Herleitung können wir diese Relation auch wieder durch Symmetrie-Betrachtungen und einen speziellen Fall direkt beweisen. Beide Seiten haben dasselbe Verhalten bei Vertauschung von β, γ bzw. von μ, ν und beide Seiten verschwinden, wenn entweder $\beta = \gamma$ oder $\mu = \nu$ (oder beides). Als speziellen Fall wählen wir $\beta = \mu = 2, \gamma = \nu = 3$, so dass die α -Summation links einen Term $\neq 0$ nur noch für $\alpha = 1$ liefert und $\epsilon_{\alpha 23} \epsilon_{\alpha 23} = 1$. Auf der rechten Seite erhalten wir für die Determinante ebenfalls

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

womit (D.3) bewiesen ist.

Jetzt setzen wir in (D.3) auch noch $\mu = \beta$. Unter Beachtung der Summationskonvention, die jetzt auch für β gilt, erhalten wir aus (D.3)

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\alpha\beta\nu} = \delta_{\beta\beta} \delta_{\gamma\nu} - \delta_{\beta\nu} \delta_{\gamma\beta} = 3 \delta_{\gamma\nu} - \delta_{\gamma\nu} = 2 \delta_{\gamma\nu}. \quad (\text{D.4})$$

Schließlich sei auch noch $\nu = \gamma$:

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} = 2 \delta_{\gamma\gamma} = 2 \cdot 3 = 6. \quad (\text{D.5})$$

Die Summe auf der linken Seite erstreckt sich über alle $3! = 6$ Permutationen (α, β, γ) von $(1, 2, 3)$, für die stets $\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} = +1$.

D.1.2 Anwendungen

Wir gehen aus von den Darstellungen des Kreuzproduktes und der Rotation durch den Levi-Civita-Tensor im Abschnitt 1.3.3:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} a_\beta b_\gamma, \quad \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{C}(\mathbf{r}) \right)_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \partial_\beta C_\gamma(\mathbf{r}). \quad (\text{D.6})$$

Hier bedeuteten $(\dots)_\alpha$ die α -Komponente des jeweiligen Vektorausdrucks in (\dots) und $\partial_\beta = \partial/\partial x_\beta$ die β -Komponente von $\partial/\partial \mathbf{r}$.

Natürlich können wir diese Darstellungen durch Multiplikation mit dem Basisvektor \mathbf{e}_α (einschließlich Summationskonvention für α) umschreiben zu

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \mathbf{e}_\alpha a_\beta b_\gamma, \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{C}(\mathbf{r}) = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \mathbf{e}_\alpha \partial_\beta C_\gamma(\mathbf{r}). \quad (\text{D.7})$$

Unser erstes Anwendungsbeispiel soll die Berechnung des doppelten Kreuzproduktes $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$. Unter Verwendung der obigen Darstellungen und der Regeln aus dem Abschnitt D.1.1 erhalten wir für dessen α -Komponente

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}))_\alpha &= \epsilon_{\alpha\beta\gamma} a_\beta \epsilon_{\gamma\mu\nu} b_\mu c_\nu \\ &= \epsilon_{\gamma\alpha\beta} \epsilon_{\gamma\mu\nu} a_\beta b_\mu c_\nu \\ &= (\delta_{\alpha\mu} \epsilon_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\nu} \delta_{\beta\mu}) a_\beta b_\mu c_\nu \\ &= a_\beta b_\alpha c_\beta - a_\beta b_\beta c_\alpha \\ &= b_\alpha (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - c_\alpha (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}). \end{aligned}$$

Hier haben wir benutzt, daß wegen der zyklischen Invarianz $\epsilon_{\alpha\beta\gamma} = \epsilon_{\gamma\alpha\beta}$ und daß $a_\beta c_\beta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ usw., vgl. auch Abschnitt 1.3.2. Durch Multiplikation mit \mathbf{e}_α erhalten wir aus dem obigen Ergebnis die aus der Vektorrechnung bekannte Formel

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}). \quad (\text{D.8})$$

Auf analoge Weise berechnen wir die in der Elektrodynamik häufig vorkommende "doppelte Rotation" eines Vektorfeldes $\mathbf{C}(\mathbf{r})$. Zur Vereinfachung der Schreibweise schreiben wir das Ortsargument \mathbf{r} nicht mehr mit. Es ist nach dem obigen Vorbild

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{C} \right) \right)_{\alpha} &= \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \partial_{\beta} \epsilon_{\gamma\mu\nu} \partial_{\mu} C_{\nu} \\
 &= \epsilon_{\gamma\alpha\beta} \epsilon_{\gamma\mu\nu} \partial_{\beta} \partial_{\mu} C_{\nu} \\
 &= (\delta_{\alpha\mu} \epsilon_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\nu} \delta_{\beta\mu}) \partial_{\beta} \partial_{\mu} C_{\nu} \\
 &= \partial_{\alpha} \partial_{\beta} C_{\beta} - \partial_{\beta} \partial_{\beta} C_{\alpha} \\
 &= \partial_{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{C} \right) - \Delta C_{\alpha}.
 \end{aligned}$$

In dieser Umformung haben wir die Divergenz des Vektorfeldes $\mathbf{C}(\mathbf{r})$,

$$\partial_{\beta} C_{\beta} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{C},$$

sowie die Schreibweise

$$\Delta = \partial_{\beta} \partial_{\beta}$$

für den Delta-Operator benutzt, vgl. Abschnitt 2.1. Die vektorielle Form des Ergebnisses der obigen Umformung lautet

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{C} \right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{C} \right) - \Delta \mathbf{C}. \quad (\text{D.9})$$

Im ersten Term auf der rechten Seite wird der Gradient desjenigen Skalars gebildet, der durch die Divergenz des Vektorfeldes \mathbf{C} entsteht. Im zweiten Term wirkt der skalare Operator Δ im Sinne eines Skalarprodukts auf das Vektorfeld \mathbf{C} .

Ein weiteres Beispiel ist die Berechnung der Rotation des Kreuzproduktes zweier Vektorfelder $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r})$ und $\mathbf{C} = \mathbf{C}(\mathbf{r})$:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \right)_{\alpha} &= \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \partial_{\beta} \epsilon_{\gamma\mu\nu} B_{\mu} C_{\nu} \\
 &= \epsilon_{\gamma\alpha\beta} \epsilon_{\gamma\mu\nu} \partial_{\beta} (B_{\mu} C_{\nu}) \\
 &= (\delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\nu} \delta_{\beta\mu}) \partial_{\beta} (B_{\mu} C_{\nu}) \\
 &= \partial_{\beta} (B_{\alpha} C_{\beta}) - \partial_{\beta} (B_{\beta} C_{\alpha}) \\
 &= C_{\beta} \partial_{\beta} B_{\alpha} + B_{\alpha} \partial_{\beta} C_{\beta} - C_{\alpha} \partial_{\beta} B_{\beta} - B_{\beta} \partial_{\beta} C_{\alpha} \\
 &= \left(\mathbf{C} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) B_{\alpha} + B_{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{C} \right) - C_{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{B} \right) - \left(\mathbf{B} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) C_{\alpha},
 \end{aligned}$$

bzw. in vektorieller Form

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= \left(\mathbf{C} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{B} + \mathbf{B} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{C} \right) \\ &\quad - \mathbf{C} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{B} \right) - \left(\mathbf{B} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{C}. \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

In der obigen Umformung haben wir die gewöhnliche Produktregel der Differentiation für $\partial_\beta = \partial/\partial x_\beta$ verwendet. Im Ergebnis (D.10) tritt die Operator-Kombination

$$\mathbf{C} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = C_\beta \partial_\beta \quad (\text{D.11})$$

auf. Dieses ist ein skalarer Operator, der auf ein Vektorfeld analog zur Multiplikation eines Skalars mit einem Vektor wirkt. Das Ergebnis ist also wieder ein Vektor. Der Operator links in (D.11) wird auch als "Vektorgradient" bezeichnet. Das kann jedoch irreführend sein, weil es sich nicht um einen Gradienten handelt, der ja auf eine skalare Funktion wirkt und als Ergebnis ein Vektorfeld hat.

Wenn der Vektor \mathbf{C} konstant ist, also nicht vom Ort \mathbf{r} abhängt, gilt

$$\mathbf{C} \times \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{B} \right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\mathbf{C} \mathbf{B}) - \left(\mathbf{C} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{B}. \quad (\text{D.12})$$

Wir führen den Beweis dieser Behauptung, indem wir die α -Komponente der linken Seite hinschreiben und wie folgt umformen:

$$\begin{aligned} \left[\mathbf{C} \times \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{B} \right) \right]_\alpha &= \epsilon_{\alpha\beta\gamma} C_\beta \epsilon_{\gamma\mu\nu} \partial_\mu B_\nu \\ &= \epsilon_{\gamma\alpha\beta} \epsilon_{\gamma\mu\nu} C_\beta \partial_\mu B_\nu \\ &= C_\beta \partial_\alpha B_\beta - C_\beta \partial_\beta B_\alpha \\ &= \partial_\alpha (C_\beta B_\beta) - C_\beta \partial_\beta B_\alpha. \end{aligned}$$

D.2 Produktausdrücke von zwei 4-dimensionalen Levi-Civita-Tensoren

Unter Beachtung der kontra- bzw. ko-varianten Schreibweise von 4-Vektoren, die wir im Abschnitt 11.3 eingeführt haben, ist der 4-dimensionale Levi-Civita-Tensor zu definieren als

$$\epsilon^{ijkl} = \begin{cases} +1 & (i, j, k, \ell) = \text{gerade Permutation von } (1, 2, 3, 4) \\ -1 & (i, j, k, \ell) = \text{ungerade Permutation von } (1, 2, 3, 4) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{D.13})$$

Es gilt nun für beliebige Wahlen der Indizes i, j, k, ℓ

$$\epsilon_{ijkl} = -\epsilon^{ijkl}, \quad (\text{D.14})$$

wobei für den 4-dimensionalen Levi-Civita-Tensor dieselben Regeln für das Heben und Senken von Indizes gelten soll, die wir im Abschnitt 11.3 allgemein eingeführt haben¹. Damit ist bereits klar, dass ϵ_{ijkl} und ϵ^{ijkl} sich höchstens um ein Vorzeichen unterscheiden können, also auch dieselben Anti-Symmetrie-Eigenschaften besitzen. Beide Seiten verschwinden, wenn auch nur zwei der Indizes i, j, k, ℓ übereinstimmen. Es genügt also, den speziellen Fall $i = 0, j = 1, k = 2, \ell = 3$ zu betrachten. In der Tat ist aber $\epsilon_{0123} = -\epsilon^{0123}$, weil drei räumliche Indizes (1,2,3) gehoben werden, wodurch sich jedesmal das Vorzeichen ändert.

In Analogie zum 3-dimensionalen Fall in (D.2) gilt nun

$$\epsilon^{ijkl} \epsilon_{mnpq} = - \begin{vmatrix} \delta_m^i & \delta_n^i & \delta_p^i & \delta_q^i \\ \delta_m^j & \delta_n^j & \delta_p^j & \delta_q^j \\ \delta_m^k & \delta_n^k & \delta_p^k & \delta_q^k \\ \delta_m^\ell & \delta_n^\ell & \delta_p^\ell & \delta_q^\ell \end{vmatrix}. \quad (\text{D.15})$$

Völlig analog zum 3-dimensionalen Fall können wir erkennen, dass beide Seiten dasselbe Verhalten bei Vertauschung von Indizes in (i, j, k, ℓ) bzw. in (m, n, p, q)

¹(D.14) ist keine korrekte kontra- oder ko-variante Gleichung, weil dort alle gleichnamigen Indizes entweder in kontra- oder kovarianter Stellung stehen müssen. (D.14) ist nur Element für Element zu lesen.

haben. Beide Seiten verschwinden auch, wenn in (i, j, k, ℓ) bzw. in (m, n, p, q) jeweils zwei oder mehr Indizes übereinstimmen. Es bleibt wiederum nur ein spezieller Fall zu betrachten. Wir wählen $i = m = 0$, $j = n = 1$, $k = p = 2$, $\ell = q = 3$ und erhalten unter Beachtung von (D.14) die korrekte Aussage, dass

$$\epsilon^{0123} \epsilon_{0123} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

womit (D.15) bewiesen ist.

Nach demselben Muster wie im 3-dimensionalen Fall im Abschnitt D.1.1 können wir aus (D.15) weitere Regeln gewinnen, indem wir einen oder mehrere Indizes aus (i, j, k, ℓ) mit einem oder mehreren Indizes aus (m, n, p, q) gleich setzen und dabei die 4-dimensionale Summations-Konvention beachten. Dabei erhalten wir zunächst

$$\epsilon^{ijkl} \epsilon_{inpq} = - \begin{vmatrix} \delta_n^j & \delta_p^j & \delta_q^j \\ \delta_n^k & \delta_p^k & \delta_q^k \\ \delta_n^\ell & \delta_p^\ell & \delta_q^\ell \end{vmatrix}. \quad (\text{D.16})$$

Beide Seiten haben dasselbe Verhalten bei Vertauschung oder Übereinstimmung von Indizes. Als speziellen Fall wählt man hier z.B. $j = n = 1$, $k = p = 2$, $\ell = q = 3$, so dass links nur für $i = 0$ ein Term $\neq 0$ auftritt, der gemäß (D.14) den Wert -1 besitzt. Denselben Wert liefert die rechte Seite für diesen Fall, womit (D.16) bewiesen ist.

Nach dem Muster des Abschnitts D.1.1 setzen wir nun auch $j = n$ einschließlich Summations-Konvention nun auch über j und erhalten

$$\epsilon^{ijk\ell} \epsilon_{ijpq} = -2 \begin{vmatrix} \delta_p^k & \delta_q^k \\ \delta_p^\ell & \delta_q^\ell \end{vmatrix} = -2 (\delta_p^k \delta_q^\ell - \delta_q^k \delta_p^\ell). \quad (\text{D.17})$$

Beide Seiten haben dasselbe Verhalten bei Vertauschung oder Übereinstimmung von Indizes. Als speziellen Fall wählt man hier z.B. $k = p = 2$, $\ell = q = 3$. Dann gibt es auf der linken Seite zwei Terme $\neq 0$ in der Summe $\epsilon^{ij23} \epsilon_{ij23}$, nämlich für $i = 0$, $j = 1$ und $i = 1$, $j = 0$, die beide den Wert -1 liefern, insgesamt also -2 . Denselben Wert liefert die rechte Seite für diesen Fall, womit (D.17) bewiesen ist.

Setzen wir auch noch $k = p$ einschließlich Summationskonvention nun auch über k , so erhalten wir

$$\epsilon^{ijk\ell} \epsilon_{ijkq} = -6 \delta_q^\ell. \quad (\text{D.18})$$

Beide Seiten verschwinden, wenn $\ell \neq q$, weil dann in der Summe $\epsilon^{ijk\ell} \epsilon_{ijkq}$ keine Kombinationen von Indizes mit Termen $\neq 0$ mehr auftreten können. Als speziellen Fall wählt man hier z.B. $\ell = q = 3$. Dann gibt es auf der linken Seite in der Summe $\epsilon^{ijk3} \epsilon_{ijk3}$ 6 Summanden $\neq 0$, nämlich gerade die Anzahl von Permutationen der drei Index-Werte $(0, 1, 2)$ für (i, j, k) . Alle diese Summanden haben den Wert -1, vgl. (D.14).

Schließlich wird, wenn alle Indizes übereinstimmen,

$$\epsilon^{ijk\ell} \epsilon_{ijkl} = -6 \delta_\ell^\ell = -24 = -4!, \quad (\text{D.19})$$

weil links jetzt alle $4! = 24$ Permutationen (i, j, k, l) von $(0, 1, 2, 3)$ den Beitrag -1 liefern.

Anhang E

Formeln der Vektor–Analysis

E.1 Vektor–Algebra

3–dimensionale orthogonale Basis:

$$\mathbf{e}_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta = \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \alpha = \beta, \\ 0 & \alpha \neq \beta \end{cases} \quad (1.3.2) \quad (\text{E.1})$$

Transformation zwischen zwei orthogonalen Basen:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta = \delta_{\alpha\beta} \\ \mathbf{e}_\alpha = U_{\alpha\beta} \mathbf{e}'_\beta \\ x_\alpha = U_{\alpha\beta} x'_\beta \\ \partial_\alpha = U_{\alpha\beta} \partial'_\beta \\ U_{\alpha\gamma} U_{\beta\gamma} = U_{\gamma\alpha} U_{\gamma\beta} = \delta_{\alpha\beta} \end{array} \quad U_{\alpha\beta} = \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}'_\beta \quad \left. \begin{array}{l} \mathbf{e}'_\alpha \mathbf{e}'_\beta = \delta_{\alpha\beta} \\ \mathbf{e}'_\alpha = U_{\beta\alpha} \mathbf{e}_\beta \\ x'_\alpha = U_{\beta\alpha} x_\beta \\ \partial'_\alpha = U_{\beta\alpha} \partial_\beta \end{array} \right\} \quad (1.3.2) \quad (\text{E.2})$$

Vektor–Algebra:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}). \quad (D.1.2) \quad (\text{E.3})$$

E.2 Gradient, Divergenz, Rotation

Bezeichnungen:

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

$$\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}$$

Formeln:

$$\partial_\alpha r = \frac{x_\alpha}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (1.3.1) \quad (\text{E.4})$$

$$\partial_\alpha \frac{1}{r} = -\frac{x_\alpha}{r^3}, \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (1.3.1) \quad (\text{E.5})$$

Produkt-Regeln:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\phi(\mathbf{r}) \mathbf{a}(\mathbf{r})) &= \frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{a}(\mathbf{r}) + \phi(\mathbf{r}) \frac{\partial \mathbf{a}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \\ \text{bzw.} \quad \partial_\alpha (\phi a_\alpha) &= (\partial_\alpha \phi) a_\alpha + \phi (\partial_\alpha a_\alpha) \end{aligned} \right\} \quad (3.1.2) \quad (\text{E.6})$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times (\phi(\mathbf{r}) \mathbf{a}(\mathbf{r})) = \frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{a}(\mathbf{r}) + \phi(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{a}(\mathbf{r}) \quad (9.1.2) \quad (\text{E.7})$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\mathbf{a}(\mathbf{r}) \times \mathbf{b}(\mathbf{r})) = \mathbf{b}(\mathbf{r}) \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{a}(\mathbf{r}) \right) - \mathbf{a}(\mathbf{r}) \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{b}(\mathbf{r}) \right) \quad (8.2.1) \quad (\text{E.8})$$

Wenn \mathbf{c} ein konstanter Vektor ist:

$$\mathbf{c} \times \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{a}(\mathbf{r}) \right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\mathbf{c} \mathbf{a}(\mathbf{r})) - \left(\mathbf{c} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{a}(\mathbf{r}) \quad (3.3.2) \quad (\text{E.9})$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}(\mathbf{r})) = \mathbf{c} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{a}(\mathbf{r}) \right) - \left(\mathbf{c} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{a}(\mathbf{r}) \quad (6.6.1) \quad (\text{E.10})$$

E.3 Laplace-Operator

Definition:

$$\Delta = \partial_\alpha \partial_\alpha = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \quad (\text{E.11})$$

Formeln:

$$\Delta \frac{1}{r} = 0 \quad r \neq 0 \quad (2.1) \quad (\text{E.12})$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{C} \right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{C} \right) - \Delta \mathbf{C}. \quad (D.1.2). \quad (\text{E.13})$$

E.4 Partielle Integration

Wenn $\phi(\mathbf{r}) = 0$ oder $\psi(\mathbf{r}) = 0$ (oder beides) für $\mathbf{r} \in \partial V$ =Randfläche des Integrations-Gebietes V :

$$\int_V d^3r (\partial_\alpha \phi) \psi = - \int_V d^3r \phi (\partial_\alpha \psi) \quad (3.1.2) \quad (\text{E.14})$$

$\phi(\mathbf{r}) = a_\alpha(\mathbf{r})$ in (E.14):

$$\int_V d^3r (\partial_\alpha a_\alpha) \psi = - \int_V d^3r a_\alpha (\partial_\alpha \psi) \quad (3.1.2) \quad (\text{E.15})$$

$\phi(\mathbf{r}) = \partial_\alpha \chi(\mathbf{r})$ in (E.14):

$$\int_V d^3r (\Delta \chi) \psi = - \int_V d^3r (\partial_\alpha \chi) (\partial_\alpha \psi). \quad (\text{E.16})$$

E.5 Integralsätze

Stokesscher Integralsatz:

$$\int_F d\mathbf{f} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{a}(\mathbf{r}) = \oint_{\partial F} d\mathbf{r} \mathbf{a}(\mathbf{r}) \quad (1.4.1) \quad (\text{E.17})$$

Gaußscher Integralsatz:

$$\int_V d^3r \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{a}(\mathbf{r}) = \oint_{\partial V} d\mathbf{f} \mathbf{a}(\mathbf{r}) \quad (2.2.1) \quad (\text{E.18})$$

Andere Version:

$$\int_V d^3r \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{a}(\mathbf{r}) = \oint_{\partial V} d\mathbf{f} \times \mathbf{a}(\mathbf{r}). \quad (2.2.3) \quad (\text{E.19})$$

Definition:

$$\frac{\partial}{\partial n} = \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}},$$

worin \mathbf{n} der Einheits-Vektor in Normalen-Richtung auf einer vorzugebenden Fläche ist.

1. Greensche Identität:

$$\int_V d^3r \left(\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}} + \phi \Delta \psi \right) = \oint_{\partial V} d\mathbf{f} \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \quad (4.3.1) \quad (\text{E.20})$$

2. Greensche Identität:

$$\int_V d^3r (\phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi) = \oint_{\partial V} d\mathbf{f} \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right). \quad (4.3.1) \quad (\text{E.21})$$