

Elektrodynamik

Dirk-Gunnar Welsch

Inhaltsverzeichnis

1	Vorbetrachtungen	7
1.1	Einordnung der Theorie	7
1.2	Mathematische Grundlagen	9
1.2.1	Tensoranalysis	9
1.2.2	Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten .	17
1.2.3	δ -Funktion	21
2	Das System der Maxwell-Gleichungen	29
2.1	Elektrische Ladungen und Ströme	30
2.2	Die differentiellen Maxwell-Gleichungen	35
2.2.1	Vakuumelektrodynamik	36
2.2.2	Elektrodynamik in Medien	39
2.3	Die integralen Maxwell-Gleichungen	48
2.4	Von der Mikro- zur Makroelektrodynamik . . .	51
2.4.1	Sichtbare und unsichtbare Ladungen . .	51
2.4.2	Räumliche Mittelung	56
2.5	Relative Bedeutung von E und B	60
3	Elektrostatik	67
3.1	Das statische elektromagnetische Feld	67
3.2	Elektrisches Feld von Ladungen im freien Raum	69

3.3	Elektrisches Feld und skalares Potential	73
3.4	Elektrische Feldenergie	76
3.5	Elektrischer Spannungstensor	81
3.6	Elektrische Multipolentwicklung	84
3.7	Multipolentwicklung und Polarisierung	94
3.7.1	Dipoldichte und Polarisationsfeld	95
3.7.2	Makroskopisches und lokales Feld	100
3.7.3	Energie bei Anwesenheit eines Mediums	103
3.7.4	Kraft auf einen Körper	106
3.8	Grenzbedingungen und Flächenladungen	108
3.9	Das Randwertproblem der Elektrostatik	112
3.9.1	Eindeutigkeitssatz	113
3.9.2	Schein-, Spiegel- und Influenzladungen	118
3.9.3	Methode der Greenschen Funktion	127
3.10	Kapazitätskoeffizienten	131
4	Magnetostatik	137
4.1	Vektorpotential und Magnetfeld	138
4.2	Biot-Savartsches Gesetz	140
4.3	Induktionskoeffizienten	143
4.4	Magnetische Multipolentwicklung	146
4.5	Multipolentwicklung und Magnetisierung	151
4.6	Magnetische Kraftwirkungen	155
4.7	Magnetische Feldenergie	160
4.8	Magnetischer Spannungstensor	162
4.9	Grenzbedingungen und Randwertproblem	163
5	Quasistationäre Felder	167
5.1	Grundgleichungen	168

5.2	Faradaysches Induktionsgesetz	172
5.3	Kirchhoffsche Regeln	177
5.3.1	Stromregel	177
5.3.2	Spannungsregel	178
5.3.3	Reihenschwingkreis	180
5.3.4	Komplexe Wechselstromrechnung	184
6	Elektromagnetische Wellen	191
6.1	Energiebilanz	192
6.1.1	Poyntingscher Satz	193
6.1.2	Dispersive und absorptive Medien	196
6.2	Impulsbilanz	201
6.3	Potentiale und Eichungen	204
6.3.1	Eichtransformation	204
6.3.2	Coulomb-Eichung	206
6.3.3	Lorentz-Eichung	209
6.4	Freie elektromagnetische Wellen	211
6.4.1	Ebene Wellen und Wellenpakete	212
6.4.2	Die Helmholtz-Gleichung	231
6.4.3	Reflexion und Brechung	234
6.5	Erzeugung elektromagnetischer Wellen	240
6.5.1	Retardierte Potentiale	241
6.5.2	Multipolentwicklung	247
6.5.3	Elektrische Dipolstrahlung	251
6.5.4	Fernfeldnäherung	259
6.5.5	Die Liénard-Wiechert-Potentiale	262
7	Kovariante Formulierung	267
7.1	Die Lorentz-Transformation	267

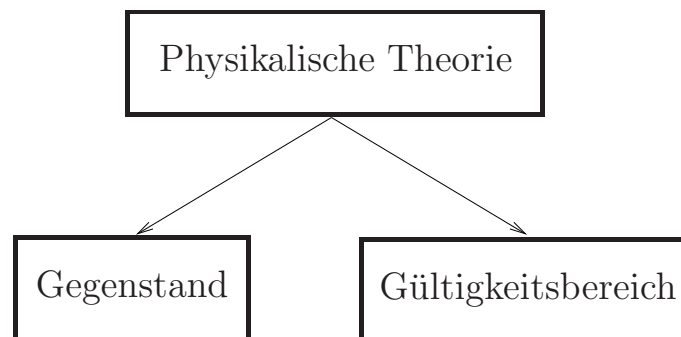
7.2	Pseudoeuklidischer Raum	274
7.2.1	Grundlagen	274
7.2.2	Raum-Zeit-Abstand von Ereignissen . . .	280
7.3	Relativistischer Raum-Zeit-Begriff	282
7.3.1	Addition von Geschwindigkeiten	282
7.3.2	Längenkontraktion	284
7.3.3	Zeitdilatation	285
7.4	Kovariante Form der Maxwell-Gleichungen . . .	286
7.5	Energie-Impulstensor	290
7.6	Transformation des Maxwell-Feldes	293
8	Hamilton-Prinzip	299
8.1	Freies Maxwell-Feld	299
8.2	Feld-Teilchen-Wechselwirkung	303
8.2.1	Nichtrelativistische Teilchen	303
8.2.2	Relativistische Teilchen	306

Kapitel 1

Vorbetrachtungen

Bevor wir beginnen, uns mit der Elektrodynamik im einzelnen zu beschäftigen, wollen wir zunächst die Theorie etwas einordnen und einige Bemerkungen zu dem erforderlichen mathematischen Apparat machen.

1.1 Einordnung der Theorie



Gegenstand der Elektrodynamik¹

Beschreibung der elektromagnetischen Phänomene und ihrer Gesetzmäßigkeiten.

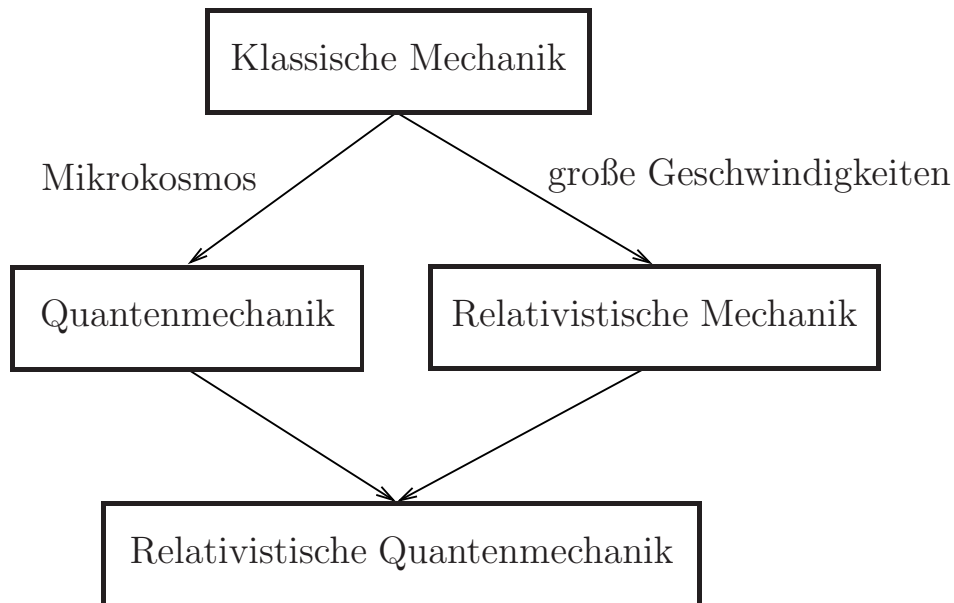
¹Die Elektrodynamik wird im Hinblick auf die 1864 von Maxwell publizierte, fundamentale Arbeit über die dynamische Theorie des elektromagnetischen Feldes auch als Maxwell-Theorie bezeichnet; entsprechend wird das elektromagnetische Feld auch Maxwell-Feld genannt.

Gültigkeitsbereich

Klassisch, relativistisch.

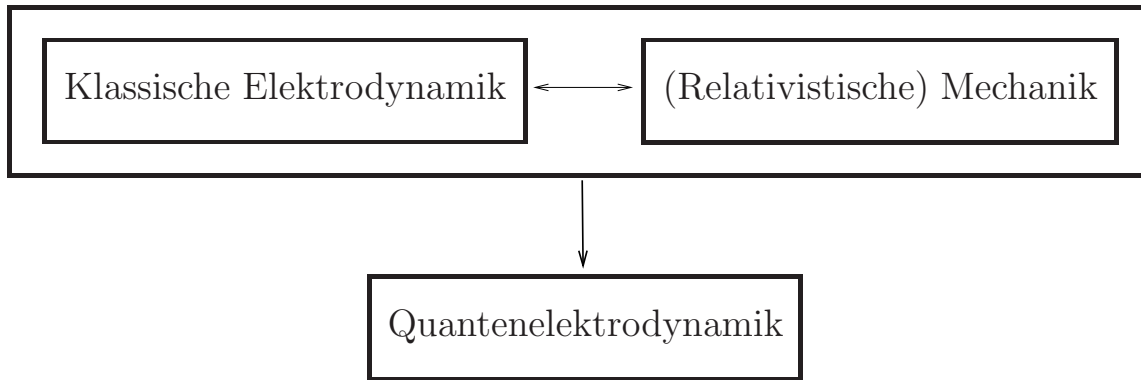
Die Elektrodynamik kann wie die Mechanik als abgeschlossene Theorie angesehen werden, da die Angabe weniger Grundgrößen und Grundgesetzmäßigkeiten zwischen diesen ausreicht, die Vielfalt der elektromagnetischen Phänomene zu erklären und zu quantifizieren. Dabei spielen die Grundgesetzmäßigkeiten die Rolle von Postulaten oder Prinzipien der Theorie. Die Postulate oder Prinzipien einer Theorie resultieren als Ergebnis eines Abstraktionsprozesses aus der Menge aller physikalischen Erfahrungen, die innerhalb der Gültigkeit der Theorie mit ihrem Gegenstand gemacht wurden. Sie sind aber nicht nur Ausdruck der bisherigen Erfahrungen, sondern gestatten es, neue Erkenntnisse zu gewinnen und entsprechende Voraussagen zu machen.

Die Gültigkeit der klassischen Mechanik ist auf nichtrelativistische, makroskopische Systeme beschränkt. Ihre quantenmechanische und relativistische Verallgemeinerung führt auf die relativistische Quantenmechanik. Da die Elektrodynamik eine relativistische Theorie ist, bedarf



es für sie nur der quantentheoretischen Verallgemeinerung.

Die Wahl der einer Theorie zugrunde liegenden Grundprinzipien ist i. allg. nicht eindeutig festgelegt. So kann in der Mechanik an die Stelle der Newtonschen Prinzipien (in geeigneter Weise) das Hamilton-



Prinzip treten. In der Elektrodynamik wird vielfach (so zunächst auch in dieser Vorlesung) von den Maxwell-Gleichungen ausgegangen, die differentieller Ausdruck einiger integral recht anschaulicher Grundaussagen der Theorie sind. Analog zur Mechanik kann natürlich auch von einem Hamilton-Prinzip ausgegangen werden, aus dem dann die Maxwell-Gleichungen als Euler-Gleichungen der entsprechenden Variationsaufgabe folgen (Kapitel 8).

Ein wesentlicher Unterschied zur klassischen (Punkt-)Mechanik besteht darin, daß die Elektrodynamik eine *Nahwirkungstheorie* ist.² Die Grundgrößen definieren zu jedem Zeitpunkt einen Zustand des Raumes, der durch ihre Werte an jedem Raumpunkt bestimmt ist. Der Raum, der den Zustand trägt, ist ein Kontinuum, und deswegen ist die Elektrodynamik [im Gegensatz zur (Punkt-)Mechanik] eine *Kontinuums-* oder *Feldtheorie*. Zustandsänderungen in einem Punkt teilen sich zunächst der unmittelbaren Umgebung dieses Punktes mit. Ein adäquates mathematisches Handwerkszeug zur Beschreibung eines solchen Sachverhaltes sind partielle Differentialgleichungen.

1.2 Mathematische Grundlagen

1.2.1 Tensoranalysis

Die mathematische Sprache der klassischen Mechanik ist die Vektor- und Tensoralgebra. Wegen des Feldcharakters tritt an ihre Stelle in der

²Die „Verschmierung“ der Punktmechanik zur Kontinuumsmechanik liefert gewissermaßen auch eine Nahwirkungstheorie. So gehen viele anschauliche Begriffe in der Elektrodynamik auf die Hydrodynamik zurück.

Elektrodynamik die Vektor- und Tensoranalysis.

Differentialoperationen

Ist jedem Ort \mathbf{r} ein Vektor \mathbf{v} als physikalische Größe zugeordnet, so spricht man von einem Vektorfeld $\mathbf{v}(\mathbf{r})$. Ein spezielles Vektorfeld ist der **Gradient** eines skalaren Feldes $\phi(\mathbf{r})$,

$$d\mathbf{r} \cdot \nabla \phi = d\phi = \phi(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{r}). \quad (1.1)$$

Der Gradient kann als Grenzwert eines vektoriellen Integrals aufgefaßt werden,

$$\nabla \phi = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_{(V)} d\mathbf{a} \phi(\mathbf{r}), \quad (1.2)$$

wobei (V) anzeigt, daß über die (geschlossene) Oberfläche eines Raumbereiches vom Volumen V zu integrieren ist und $d\mathbf{a}$ das differentielle Flächenelement bedeutet. Diese Definition des Gradienten läßt sich auch dann anwenden, wenn ϕ an einzelnen Punkten nicht differenzierbar ist. Die obigen Definitionen des Gradienten lassen sich sinngemäß auch auf Vektorfelder anwenden, wobei der Gradient eines Vektorfeldes offensichtlich ein Tensorfeld ist,

$$(d\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{v} \equiv d\mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{v} = d\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) - \mathbf{v}(\mathbf{r}). \quad (1.3)$$

Die **Divergenz** eines Vektorfeldes $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ ist das skalare Feld

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_{(V)} d\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}). \quad (1.4)$$

Entsprechend ist die Divergenz eines (zweistufigen) Tensorfeldes ein Vektorfeld. Die **Rotation** eines Vektorfeldes $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ liefert das Vektorfeld

$$\nabla \times \mathbf{v} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_{(V)} d\mathbf{a} \times \mathbf{v}(\mathbf{r}). \quad (1.5)$$

Differenzierbarkeit vorausgesetzt, kann der Operator ∇ in kartesischen Komponenten bekanntlich in der expliziten Form

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.6)$$

dargestellt werden.

Volumenintegrale und Oberflächenintegrale von Tensorfeldern können gemäß der Regel

$$\int_V dr^3 \nabla \cdots = \int_{(V)} da \cdots \quad (1.7)$$

ineinander überführt werden. Als wichtiger Spezialfall folgt der **Gaußsche Satz** für ein Vektorfeld $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ in der Form

$$\int_V dr^3 \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \int_{(V)} da \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}). \quad (1.8)$$

Das Volumenintegral auf der linken Seite dieser Gleichung wird auch als **Quellstärke** des Vektorfeldes $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ für das betrachtete Volumen bezeichnet, und das Flächenintegral auf der rechten Seite als **Fluß** des Vektorfeldes durch die jeweilige Fläche (hier die das betrachtete Volumen begrenzende geschlossene Oberfläche). Dementsprechend wird die Divergenz eines Vektorfeldes auch **Quelldichte** des Feldes genannt.³ Verschwindet sie überall, liegt ein quellenfreies Feld vor.

Flächenintegrale und Wegintegrale längs ihrer Berandungen können gemäß der Regel⁴

$$\int_a (da \times \nabla) \cdots = \int_{(a)} dr \cdots \quad (1.9)$$

ineinander überführt werden. Ein wichtiger Spezialfall ist hier der **Stokesche Satz**

$$\int_a da \cdot \nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \int_{(a)} dr \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}). \quad (1.10)$$

Das Flächenintegral auf der linken Seite dieser Gleichung heißt auch **Wirbelstärke** des Vektorfeldes $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ für die betrachtete Fläche und dementsprechend seine Rotation **Wirbeldichte**. Ein wirbelfreies Feld liegt vor, wenn seine Wirbeldichte überall verschwindet. Das Kurvenintegral auf der rechten Seite wird auch **Zirkulation** des Vektorfeldes

³Wir werden der Kürze wegen nur von Quelldichten sprechen und diesen Begriff sowohl auf Quellen (positive Quelldichten) als auch Senken (negative Quelldichten) anwenden.

⁴Die Richtung des vektoriellen Flächenelementes da bildet mit dem Umlaufsinn auf der Randkurve (a) der Fläche a eine Rechtsschraube.

längs der jeweiligen Kurve (hier die die betrachtete Fläche begrenzende geschlossene Randkurve) genannt.⁵ Nach dem Stokesschen Satz kann die Rotation eines Vektorfeldes $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ auch entsprechend der Definition

$$\mathbf{e}_a \cdot \nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \int_{(a)} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}) \quad (1.11)$$

($\mathbf{e}_a = d\mathbf{a}/|d\mathbf{a}|$) eingeführt werden. Damit läßt sie sich selbst für Vektorfelder definieren, die längs einer Linie (senkrecht zur Fläche) singular sind.

Greensche Sätze

Wir wenden auf

$$\nabla \cdot \psi(\mathbf{r})\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r})\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}) + \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot \nabla\psi(\mathbf{r}) \quad (1.12)$$

den Gaußschen Satz (1.8) an und erhalten

$$\int_V dr^3 [\psi(\mathbf{r})\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}) + \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot \nabla\psi(\mathbf{r})] = \int_{(V)} d\mathbf{a} \cdot \psi(\mathbf{r})\mathbf{v}(\mathbf{r}). \quad (1.13)$$

Der erste Greensche Satz folgt für $\mathbf{v} = \nabla\phi$:

$$\int_V dr^3 \{ \psi(\mathbf{r})\Delta\phi(\mathbf{r}) + [\nabla\phi(\mathbf{r})] \cdot [\nabla\psi(\mathbf{r})] \} = \int_{(V)} d\mathbf{a} \cdot \psi(\mathbf{r})\nabla\phi(\mathbf{r}). \quad (1.14)$$

Vertauschung von ψ mit ϕ und Subtraktion der beiden Gleichungen liefert dann den zweiten Greenschen Satz

$$\int_V dr^3 [\psi(\mathbf{r})\Delta\phi(\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{r})\Delta\psi(\mathbf{r})] = \int_{(V)} d\mathbf{a} \cdot [\psi(\mathbf{r})\nabla\phi(\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{r})\nabla\psi(\mathbf{r})]. \quad (1.15)$$

Feldlinien

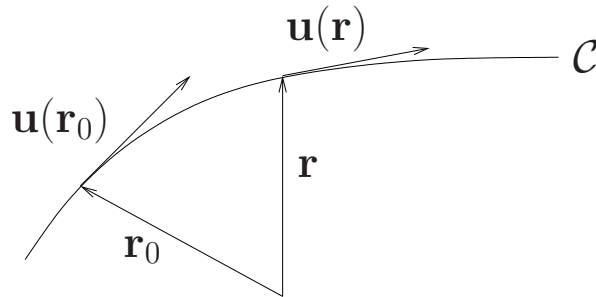
Feldlinien stellen ein nützliches Hilfsmittel zur Veranschaulichung von Vektorfeldern dar. Auf einem Raumbereich sei ein stetig differenzierbares Vektorfeld $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ gegeben, das dort keine Nullstellen besitzt. Damit

⁵Eine geschlossene Kurve, längs derer die Zirkulation nicht verschwindet, wird in diesem Zusammenhang Wirbel genannt.

besitzt $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ für jedes \mathbf{r} eine eindeutige Richtung

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{v}(\mathbf{r})}{|\mathbf{v}(\mathbf{r})|}. \quad (1.16)$$

Das Vektorfeld $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ definiert das Richtungsfeld über dem betrachteten Bereich. Als Feldlinie durch einen Punkt \mathbf{r}_0 wird eine Raumkurve \mathcal{C} bezeichnet, die in ihrem gesamten Verlauf dem Richtungsfeld folgt. In jedem Punkt \mathbf{r} , den sie durchläuft, soll sie also die gleiche Richtung wie $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ besitzen. Demzufolge wird jeder Punkt \mathbf{r} von genau einer Feldlinie



durchlaufen, und diese Feldlinien können sich weder schneiden noch verzweigen.

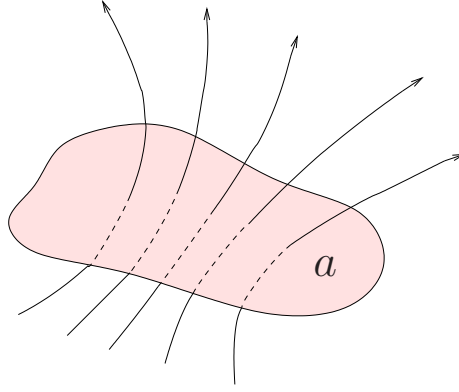
Wir suchen die Feldlinie \mathcal{C} durch \mathbf{r}_0 und nehmen an, daß sie nach der Bogenlänge s parametrisiert ist $[\mathbf{r}(s), \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0]$. Da der Tangenteneinheitsvektor an \mathcal{C} mit $\mathbf{u}(\mathbf{r}(s))$ übereinstimmt, gilt

$$\frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} = \mathbf{u}[\mathbf{r}(s)]. \quad (1.17)$$

Die Lösung dieser Vektordifferentialgleichung mit der Anfangsbedingung $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$ liefert die gesuchte Feldlinie.

- Feldlinien können also mit Lösungen der Vektordifferentialgleichung (1.17) identifiziert werden.
- Insgesamt entsteht ein Kontinuum von Linien.

Da ein Kontinuum von Linien graphisch nicht veranschaulicht werden kann, werden zur Veranschaulichung nur endlich viele Linien gezeichnet, wobei die Stärke $|\mathbf{v}(\mathbf{r})|$ des Feldes $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ durch die Feldliniendichte zum Ausdruck gebracht wird, nämlich die Anzahl der (gemäß



$\mathbf{u}(\mathbf{r})$ orientierten Linien, die senkrecht durch die Flächeneinheit senkrecht zu einer von ihnen geht. Damit wird die Anzahl N der Feldlinien, die eine Fläche schneiden, proportional zum Fluß des Vektorfeldes durch diese Fläche gesetzt,

$$N \sim \left| \int_a \mathbf{d}\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}) \right|. \quad (1.18)$$

Diese Diskretisierung des Feldlinienbegriffes führt zu einer wesentlich neuen Eigenschaft. Zwar ist jede derart gezeichnete Feldlinie Teil einer mathematischen Feldlinie gemäß (1.17), doch sie kann im Gegensatz zu diesen in Raumgebieten beginnen und enden, auch wenn dort die Differentialgleichung regulär ist.

Betrachten wir ein Vektorfeld $\mathbf{v}(\mathbf{r})$, das auf einem endlichen Raumbereich V quellenfrei ist, $\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}) = 0$, so daß

$$\int_V d^3r \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \int_{(V)} \mathbf{d}\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}) = 0 \quad (1.19)$$

gilt. Offensichtlich müssen in den Bereich ebensoviele Feldlinien hinein- wie hinauslaufen. Das heißt, die Feldlinien eines Vektorfeldes, das überall quellenfrei ist ($V \rightarrow \infty$), können nirgendwo im Endlichen beginnen oder enden. Sie sind also entweder in sich geschlossen oder durchlaufen den gesamten unbegrenzten Raum. Nehmen wir nun an, daß das Vektorfeld auf dem Raumbereich V nicht quellenfrei ist, $\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}) \neq 0$, und

$$\int_{(V)} \mathbf{d}\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}) > 0 \quad (1.20)$$

gilt. Da in diesem Fall mehr Feldlinien den Bereich verlassen müssen als in ihn eintreten, müssen also einige Feldlinien im Bereich beginnen (Quellen!). Wenn umgekehrt

$$\int_{(V)} \mathbf{d}\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}) < 0 \quad (1.21)$$

gilt, müssen mehr Feldlinien in den Bereich eintreten als ihn verlassen, so daß einige Feldlinien im Bereich enden müssen (Senken!). Ist überall $\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}) > 0$, kann es nur Quellen geben, und ist überall $\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}) < 0$, kann es nur Senken geben. Ändert $\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r})$ sein Vorzeichen, existieren sowohl Quellen (von denen Feldlinien ausgehen) als auch Senken (in denen Feldlinien enden). Bestimmte Feldlinien sind dann ganz auf das Innere des Bereichs beschränkt und verbinden dort Quellen und Senken.

Bestimmung eines Vektorfeldes aus seiner Quell- und Wirbeldichte

Wir wollen uns abschließend kurz dem Problem der (möglichst eindeutigen) Bestimmung eines Vektorfeldes $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ bei vorgegebener Quelledichte $s(\mathbf{r})$ und vorgegebener Wirbeldichte $\mathbf{w}(\mathbf{r})$ zuwenden,⁶

$$s(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}), \quad (1.22)$$

$$\mathbf{w}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{r}). \quad (1.23)$$

Um das Problem zu lösen, kann man in drei Schritten vorgehen.

1. Zunächst wird ein quellen- und wirbelfreies Feld $\mathbf{v}^{(0)}(\mathbf{r})$ gesucht,

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{v}^{(0)}(\mathbf{r}), \quad 0 = \nabla \times \mathbf{v}^{(0)}(\mathbf{r}). \quad (1.24)$$

2. Als nächstes wird ein wirbelfreies Feld $\mathbf{v}^{(s)}(\mathbf{r})$ gesucht,

$$s(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \mathbf{v}^{(s)}(\mathbf{r}), \quad 0 = \nabla \times \mathbf{v}^{(s)}(\mathbf{r}). \quad (1.25)$$

3. Schließlich wird ein quellenfreies Feld $\mathbf{v}^{(w)}(\mathbf{r})$ gesucht,

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{v}^{(w)}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{w}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{v}^{(w)}(\mathbf{r}). \quad (1.26)$$

⁶Ein Vektorfeld wird auch transversal (longitudinal) genannt, wenn $s=0$ ($\mathbf{w}=0$) gilt.

Konstruieren wir nunmehr das Feld

$$\mathbf{b}(\mathbf{r}) = \alpha \mathbf{v}^{(0)}(\mathbf{r}) + \mathbf{v}^{(s)}(\mathbf{r}) + \mathbf{v}^{(w)}(\mathbf{r}) \quad (1.27)$$

(α – beliebig reell), so gilt offensichtlich

$$\nabla \cdot \mathbf{b}(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \mathbf{v}^{(s)}(\mathbf{r}) = s(\mathbf{r}) \quad (1.28)$$

und

$$\nabla \times \mathbf{b}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{v}^{(w)}(\mathbf{r}) = \mathbf{w}(\mathbf{r}). \quad (1.29)$$

Das Vektorfeld $\mathbf{b}(\mathbf{r})$ erfüllt also die Ausgangsgleichungen (1.22) und (1.23). Andererseits läßt sich jede Lösung dieser Gleichungen in der Form (1.27) darstellen. Wenn $\tilde{\mathbf{b}}(\mathbf{r})$ eine solche Lösung ist, gilt offensichtlich

$$0 = \nabla \cdot [\mathbf{b}(\mathbf{r}) - \tilde{\mathbf{b}}(\mathbf{r})], \quad (1.30)$$

$$0 = \nabla \times [\mathbf{b}(\mathbf{r}) - \tilde{\mathbf{b}}(\mathbf{r})]. \quad (1.31)$$

Durch geeignete Wahl von $\mathbf{v}^{(0)}(\mathbf{r})$ kann also die Differenz $\mathbf{b}(\mathbf{r}) - \tilde{\mathbf{b}}(\mathbf{r})$ zum Verschwinden gebracht werden. Anders gesagt, die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichungen (1.22) und (1.23) kann erhalten werden, indem zu einer ihrer (speziellen) Lösungen [in unserem Fall $\mathbf{v}^{(s)}(\mathbf{r}) + \mathbf{v}^{(w)}(\mathbf{r})$] die allgemeine Lösung der homogenen Gleichungen addiert wird.

Jedes konstante Vektorfeld

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{c} = \alpha \mathbf{e} \quad (1.32)$$

(\mathbf{e} – fester Einheitsvektor, α – reelle Konstante) löst die homogenen Differentialgleichungen. **Homogene Felder** als Lösungen der homogenen Differentialgleichungen stellen somit Felder dar, die auch im Unendlichen nicht verschwinden. Für physikalische Felder muß in der Regel aus energetischen Gründen das Verschwinden im Unendlichen gefordert werden. In anderen Worten, homogene Felder, die nicht identisch verschwinden, dürfen nur als Lösungen der homogenen Differentialgleichungen in einem ganz im Endlichen liegenden Raumbereich erhalten werden. Das „Abbrechen“ solcher Lösungen auf der Oberfläche des Raumbereiches erfordert also Randbedingungen zu setzen, d.h., ein

Randwertproblem entsteht. Ganz allgemein wird die Lösung der Differentialgleichungen (2.21) und (2.24) erst durch hinreichend spezifizierte Randbedingungen eindeutig. Es gilt dann der Satz: Ein Vektorfeld ist durch sein Quellfeld, sein Wirbelfeld und entsprechende Randwerte eindeutig bestimmt.

1.2.2 Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten

Die Laplace-Gleichung

$$\Delta U(\mathbf{r}) = 0 \quad (1.33)$$

in Kugelkoordinaten

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 [rU(\mathbf{r})]}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U(\mathbf{r})}{\partial \phi^2} \quad (1.34)$$

kann durch den Separationsansatz

$$U(\mathbf{r}) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi) \quad (1.35)$$

gelöst werden, wobei die Funktionen $R(r)$, $\Theta(\theta)$ und $\Phi(\phi)$ den gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R(r) = 0, \quad (1.36)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left[\sin \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta(\theta) = 0, \quad (1.37)$$

$$\frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} = -m^2 \Phi(\phi) \quad (1.38)$$

mit den Separationskonstanten $l(l+1)$ und m^2 genügen. Die Lösung der Differentialgleichung (1.36) lautet

$$R_l(r) = A_l r^l + B_l r^{-(l+1)} \quad (1.39)$$

(A_l, B_l - Konstanten). Die Forderung, daß die winkelabhängigen Funktionen auf der Einheitskugel eindeutig, endlich und stetig sind, führt auf die Bedingungen

$$l = 0, 1, 2, \dots, \quad m = -l, -l+1, \dots, l-1, l. \quad (1.40)$$

Die Lösungen der Differentialgleichung (1.38) lauten

$$\Phi(\phi) \sim e^{\pm im\phi}, \quad (1.41)$$

und die Differentialgleichung (1.37) wird durch die *zugeordneten Legendre-Polynome* (auch *Kugelfunktionen* genannt) gelöst,

$$\Theta(\theta) \sim P_l^m(\cos \theta), \quad (1.42)$$

$$\frac{d}{dz} \left[(1 - z^2) \frac{dP_l^m(z)}{dz} \right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1 - z^2} \right] P_l^m(z) = 0. \quad (1.43)$$

Für $m=0$ geht (1.43) in die Differentialgleichung für die *Legendre-Polynome* $P_l(z) \equiv P_l^0(z)$ über,

$$\frac{d}{dz} \left[(1 - z^2) \frac{dP_l(z)}{dz} \right] + l(l+1)P_l(z) = 0. \quad (1.44)$$

Die Legendre-Polynome, die sich in der kompakten Form

$$P_l(z) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dz^l} (z^2 - 1)^l \quad (1.45)$$

angeben lassen, genügen der Orthogonalitätsrelation

$$\int_{-1}^1 dz P_{l'}(z) P_l(z) = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}. \quad (1.46)$$

Die Legendre-Polynome bilden einen vollständigen Satz orthogonaler Funktionen im Intervall $-1 \leq z \leq 1$, so daß dort jede Funktion $f(z)$ nach Legendre-Polynomen entwickelt werden kann:

$$f(z) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l P_l(z) \quad (1.47)$$

$$c_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 dz f(z) P_l(z) \quad (1.48)$$

Aus den Legendre-Polynomen lassen sich die zugeordneten Legendre-Polynome gewinnen:

$$P_l^m(z) = (-1)^m (1 - z^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_l(z)}{dz^m} \quad (m \geq 0), \quad (1.49)$$

$$P_l^m(z) = (-1)^{|m|} \frac{(l - |m|)!}{(l + |m|)!} P_l^{|m|}(z) \quad (m < 0), \quad (1.50)$$

die der Orthogonalitätsrelation

$$\int_{-1}^1 dz P_l^m(z) P_l^m(z) = \frac{2}{2l + 1} \frac{(l + m)!}{(l - m)!} \delta_{ll'} \quad (1.51)$$

genügen. Die Funktionen $P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}$ bilden einen vollständigen Satz orthogonaler Funktionen auf der Einheitskugel. Werden sie unter Berücksichtigung von (1.51) geeignet normiert, gelangt man zu den *Kugelflächenfunktionen*:

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \left[\frac{(2l + 1)(l - m)!}{4\pi(l + m)!} \right]^{\frac{1}{2}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad (1.52)$$

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta Y_{l'm'}^*(\theta, \phi) Y_{lm}(\theta, \phi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad (1.53)$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) = \delta(\phi - \phi') \delta(\cos \theta - \cos \theta'). \quad (1.54)$$

Gemäß (1.50) gilt die Beziehung

$$Y_{l-m}(\theta, \phi) = (-1)^m Y_{lm}^*(\theta, \phi). \quad (1.55)$$

Da die Kugelflächenfunktionen ein Orthonormalsystem auf der Einheitskugel bilden, kann dort jede Funktion $f(\theta, \phi)$ nach ihnen entwickelt werden:

$$f(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l c_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (1.56)$$

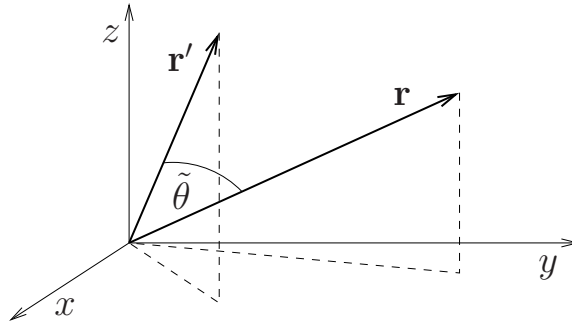
$$c_{lm} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta f(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta, \phi) \quad (1.57)$$

Insbesondere gilt

$$P_l(\cos\tilde{\theta}) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (1.58)$$

wobei (r, θ, ϕ) und (r', θ', ϕ') die Kugelkoordinaten zweier Vektoren \mathbf{r} und \mathbf{r}' sind ($r=r'$), die den Winkel $\tilde{\theta}$ einschließen.

$$\cos\tilde{\theta} = \cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta' \cos(\phi - \phi'). \quad (1.59)$$



Die Gleichungen (1.35), (1.39), (1.41), (1.42) und (1.52) implizieren, daß (eine große Klasse von) Lösungen der Laplace-Gleichung (1.33) in der Form

$$U(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left[A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-(l+1)} \right] Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (1.60)$$

dargestellt werden können. Da Lösungen der Laplace-Gleichung mit

azimutaler Symmetrie nicht von ϕ abhängen, gilt insbesondere:

$$U(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[A_l r^l + B_l r^{-(l+1)} \right] P_l(\cos \theta) \quad (1.61)$$

1.2.3 Verallgemeinerte Funktionen (δ -Funktion)

Wir wollen unter einer *Grundfunktion* eine Funktion verstehen, die beliebig oft differenzierbar ist und zusammen mit allen Ableitungen für alle (positiven ganzen Zahlen) N eine Funktion $O(|x|^{-N})$ für $|x| \rightarrow \infty$ ist. Es läßt sich unschwer zeigen, daß die Ableitung einer Grundfunktion wieder eine Grundfunktion ist und die Summe aus zwei Grundfunktionen ebenfalls eine Grundfunktion ist. Unter einer *schwach wachsenden Funktion* wollen wir eine Funktion verstehen, die beliebig oft differenzierbar ist und zusammen mit allen ihren Ableitungen für ein geeignetes N (das vom Grad der Ableitung abhängen kann) eine Funktion $O(|x|^N)$ für $|x| \rightarrow \infty$ ist. Offensichtlich ist das Produkt einer schwach wachsenden Funktion mit einer Grundfunktion eine Grundfunktion.

- Eine Folge $f_n(x)$ von Grundfunktionen heißt *regulär*, wenn für jede beliebige Grundfunktion $F(x)$ der Grenzwert⁷

$$G = \lim_{n \rightarrow \infty} \int dx f_n(x) F(x) \quad (1.62)$$

existiert.

- Zwei reguläre Folgen von Grundfunktionen heißen *äquivalent*, wenn für jede Grundfunktion $F(x)$ der Grenzwert (1.62) in beiden Fällen der gleiche ist.

Unter einer **verallgemeinerten Funktion** $f(x)$ wollen wir eine reguläre Folge $f_n(x)$ von Grundfunktionen verstehen. Dabei sollen zwei verallgemeinerte Funktionen gleich heißen, wenn die entsprechenden regulären Folgen äquivalent sind. Damit ist jede verallgemeinerte Funktion eine volle Klasse äquivalenter regulärer Folgen. Das Integral über

⁷Wenn keine Integrationsgrenzen angegeben, ist von $-\infty$ bis $+\infty$ zu integrieren.

das Produkt einer verallgemeinerten Funktion $f(x)$ mit einer Grundfunktion $F(x)$ kann durch

$$\int dx f(x)F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int dx f_n(x)F(x) \quad (1.63)$$

definiert werden, da der Grenzwert für alle äquivalenten Folgen $f_n(x)$ der gleiche ist. Insbesondere heißt eine verallgemeinerte Funktion $f(x)$ gerade (ungerade), wenn

$$\int dx f(x)F(x) = 0 \quad (1.64)$$

für jede ungerade (gerade) Grundfunktion $F(x)$ ist.

Es seien $f(x)$ und $h(x)$ zwei verallgemeinerte Funktionen, die durch die Folgen $f_n(x)$ und $h_n(x)$ definiert sind.

- Dann ist die Summe $f(x) + h(x)$ durch die Folge $f_n(x) + h_n(x)$,
- die Ableitung $f'(x)$ durch die Folge $f'_n(x)$ und
- $f(ax + b)$ durch die Folge $f_n(ax + b)$ definiert.
- Ist $\phi(x)$ eine schwach wachsende Funktion, so ist $\phi(x)f(x)$ durch die Folge $\phi(x)f_n(x)$ definiert.
- Die Fourier-Transformierte⁸ $\underline{f}(k)$ von $f(x)$ wird durch die Folge $\underline{f}_n(k)$ definiert, wobei $\underline{f}_n(k)$ die Fourier-Transformierte von $f_n(x)$ ist.

Diese Definitionen sind sinnvoll und eindeutig, da gezeigt werden kann, daß die genannten Folgen reguläre Folgen von Grundfunktionen sind und die Wahl äquivalenter Folgen zur Definition von $f(x)$ und $h(x)$ wieder auf äquivalente Folgen für die oben definierten verallgemeinerten

⁸Ist $F(x)$ eine Grundfunktion, so ist die Fourier-Transformierte $\underline{F}(k) \equiv \mathcal{F}[F(x)] = \int dx e^{-ikx} F(x)$ ebenfalls eine Grundfunktion und es gilt der Fouriersche Umkehrsatz für Grundfunktionen $F(x) = (2\pi)^{-1} \int dk e^{ikx} \underline{F}(k) = (2\pi)^{-1} \mathcal{F}[\underline{F}(-k)]$.

Funktionen führt. Auf der Grundlage dieser Definitionen läßt sich zeigen, daß für jede Grundfunktion $F(x)$ mit der Fourier-Transformierten $\underline{F}(k)$ die folgenden Beziehungen gelten:

$$\int dx f'(x)F(x) = - \int dx f(x)F'(x), \quad (1.65)$$

$$\int dx f(ax + b)F(x) = \frac{1}{|a|} \int dx f(x)F\left(\frac{x - b}{a}\right), \quad (1.66)$$

$$\int dx [\phi(x)f(x)]F(x) = \int dx f(x)[\phi(x)F(x)], \quad (1.67)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int dk \underline{f}(k)\underline{F}(k) = \int dx f(x)F(-x). \quad (1.68)$$

Ist $f(x)$ eine verallgemeinerte Funktion mit der Fourier-Transformierten $\underline{f}(k)$, so gelten die bekannten Relationen

$$f(x) = (2\pi)^{-1} \mathcal{F}[\underline{f}(-k)], \quad (1.69)$$

$$f(ax + b) \longleftrightarrow |a|^{-1} e^{ikb/a} \underline{f}(k/a), \quad (1.70)$$

$$f'(x) \longleftrightarrow ik \underline{f}(k), \quad (1.71)$$

Es sei $f(x)$ eine gewöhnliche Funktion von x , für die für ein gewisses N die Funktion $(1 + x^2)^{-N} f(x)$ von $-\infty$ bis $+\infty$ absolut integrierbar ist. Die verallgemeinerte Funktion $f(x)$ werde dann durch die Folge $f_n(x)$ definiert, für die für jede Grundfunktion

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int dx f_n(x)F(x) = \int dx f(x)F(x) \quad (1.72)$$

gilt.⁹ Das Integral auf der rechten Seite ist hier [im Gegensatz zu dem Integral auf der linken Seite in (1.63)] ein Integral im gewöhnlichen Sinn. Es existiert, denn es ist ein Integral über über das Produkt der absolut integrierbaren Funktion $(1 + x^2)^{-N} f(x)$ mit der Grundfunktion

⁹Es kann gezeigt werden, daß eine solche Folge immer existiert.

$(1+x^2)^N F(x)$. Nachdem die verallgemeinerte Funktion $f(x)$ definiert ist, hat dieses Integral auch in der Theorie der verallgemeinerten Funktionen seinen Sinn. Die Gleichung (1.72) besagt dann, daß das Resultat der Integration in beiden Fällen das gleiche ist. Mit der Definition (1.72) wird der Bereich der verallgemeinerten Funktionen beträchtlich erweitert. So können nicht nur

- (a) gewöhnliche Funktionen $f(x)$, für die $(1+x^2)^{-N} f(x)$ von $-\infty$ bis $+\infty$ absolut integrierbar ist, als verallgemeinerte Funktionen aufgefaßt werden, sondern
- (b) durch Differentiation dieser verallgemeinerten Funktionen

können weitere verallgemeinerte Funktionen erhalten werden. Es gelten die Sätze:

- Ist $f(x)$ eine im gewöhnlichen Sinne differenzierbare Funktion und erfüllen $f(x)$ und $f'(x)$ die obige Bedingung, so ist die Ableitung der von $f(x)$ gelieferten verallgemeinerten Funktion die von $f'(x)$ gelieferte verallgemeinerte Funktion.
- Ist $f(x)$ eine gewöhnliche, von $-\infty$ bis $+\infty$ absolut integrierbare Funktion, so daß die Fourier-Transformierte $\underline{f}(k)$ im üblichen Sinne existiert, so ist die Fourier-Transformierte der von $f(x)$ gelieferten verallgemeinerten Funktion die von $\underline{f}(k)$ gelieferte verallgemeinerte Funktion.

Es sei $h(x)$ eine gewöhnliche Funktion und $f(x)$ eine verallgemeinerte Funktion, und für jede Grundfunktion $F(x)$, die außerhalb des Intervalls $a < x < b$ verschwindet, gelte

$$\int dx f(x)F(x) = \int_a^b dx h(x)F(x). \quad (1.73)$$

Dann kann einfach

$$f(x) = h(x) \quad \text{für} \quad a < x < b \quad (1.74)$$

geschrieben werden, d.h., $f(x)$ stimmt in dem Intervall $a < x < b$ mit $h(x)$ überein.¹⁰ Unter den gemachten Voraussetzungen läßt sich dann

¹⁰ $h(x)$ braucht außerhalb des genannten Intervalls nicht definiert zu sein.

zeigen, daß (1.74) auch für die Ableitungen gültig ist,

$$f'(x) = h'(x) \quad \text{für } a < x < b. \quad (1.75)$$

Ist $f_t(x)$ für jeden Wert des Parameters t eine verallgemeinerte Funktion von x und ist außerdem $f(x)$ eine verallgemeinerte Funktion, so daß für jede Grundfunktion $F(x)$

$$\lim_{t \rightarrow c} \int dx f_t(x) F(x) = \int dx f(x) F(x), \quad (1.76)$$

gilt, so gelte die Definition

$$\lim_{t \rightarrow c} f_t(x) = f(x). \quad (1.77)$$

Es lassen sich dann die folgenden Sätze beweisen:

$$\lim_{t \rightarrow c} f'_t(x) = f'(x), \quad (1.78)$$

$$\lim_{t \rightarrow c} f_t(ax + b) = f(ax + b), \quad (1.79)$$

$$\lim_{t \rightarrow c} \phi(x) f_t(x) = \phi(x) f(x) \quad (1.80)$$

[$\phi(x)$ - beliebig schwach wachsende Funktion],

$$\lim_{t \rightarrow c} \underline{f}_t(k) = \underline{f}(k). \quad (1.81)$$

Beispiel: $\delta(x)$ ¹¹

Die zu der regulären Folge

$$\delta_n(x) = (n/\pi)^{\frac{1}{2}} e^{-nx^2} \quad (1.82)$$

äquivalenten Folgen definieren die verallgemeinerte Funktion $\delta(x)$ mit

$$\int dx \delta(x) F(x) = F(0), \quad (1.83)$$

¹¹Die 3-dimensionale δ -Funktion $\delta(\mathbf{r})$ ist durch $\delta(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$ definiert.

da

$$\begin{aligned}
& \left| \int dx (n/\pi)^{\frac{1}{2}} e^{-nx^2} F(x) - F(0) \right| \\
&= \left| \int dx (n/\pi)^{\frac{1}{2}} e^{-nx^2} [F(x) - F(0)] \right| \\
&\leq \max |F'(x)| \int dx (n/\pi)^{\frac{1}{2}} e^{-nx^2} |x| \\
&= (\pi n)^{-\frac{1}{2}} \max |F'(x)| \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty. \quad (1.84)
\end{aligned}$$

Offensichtlich ist die Fourier-Transformierte von $\delta(x)$ gleich 1,

$$\underline{\delta}(k) = 1, \quad (1.85)$$

denn

$$\underline{\delta}_n(k) = \int dx (n/\pi)^{\frac{1}{2}} e^{-nx^2} e^{-ikx} = e^{-\frac{k^2}{4n^2}} \rightarrow 1 \quad \text{für } n \rightarrow \infty. \quad (1.86)$$

Anwenden der Regel (1.70) liefert

$$\delta(ax + b) \longleftrightarrow |a|^{-1} e^{ikb/a} \quad (1.87)$$

und speziell

$$\delta(x - c) \longleftrightarrow e^{-ikc}. \quad (1.88)$$

Die Gleichung (1.65) impliziert, daß wegen (1.83) für jede Grundfunktion $F(x)$

$$\begin{aligned}
\int dx \frac{d^n \delta(x)}{dx^n} F(x) &= (-1)^n \int dx \delta(x) \frac{d^n F(x)}{dx^n} \\
&= (-1)^n \frac{d^n F(x)}{dx^n} \Big|_{x=0} \quad (1.89)
\end{aligned}$$

gilt. Die unstetige Sprungfunktion

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0, \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases} \quad (1.90)$$

kann als verallgemeinerte Funktion aufgefaßt werden, und es gilt

$$\frac{d \operatorname{sgn}(x)}{dx} = 2\delta(x), \quad (1.91)$$

wie unschwer zu verifizieren ist. Es sei $F(x)$ eine Grundfunktion, die in einem der Intervalle $0 < x < \infty$ und $-\infty < x < 0$ verschwindet, so daß folglich $F(0) = 0$ ist, d.h.

$$\int dx \delta(x) F(x) = 0. \quad (1.92)$$

Gemäß (1.74) ist also

$$\delta(x) = 0 \quad \text{für} \quad 0 < |x| < \infty \quad (1.93)$$

und somit [gemäß (1.75)] auch

$$\frac{d^n \delta(x)}{dx^n} = 0 \quad \text{für} \quad 0 < |x| < \infty. \quad (1.94)$$

Damit verschwindet auch jede Linearkombination der δ -Funktion, und es verschwinden die Ableitungen dieser überall mit Ausnahme der Stelle $x = 0$. Es ist

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} |x|^\epsilon \operatorname{sgn} x = \operatorname{sgn} x \quad (1.95)$$

[vgl. (1.77)], denn für jede Grundfunktion $F(x)$ gilt

$$\begin{aligned} & \left| \int dx \operatorname{sgn} x (|x|^\epsilon - 1) F(x) \right| \\ & \leq \frac{1}{2}\epsilon \int dx |\log |x|| (|x|^\epsilon + 1) |F(x)| = O(\epsilon) \end{aligned} \quad (1.96)$$

in der Grenze $\epsilon \rightarrow 0$. Differentiation der Beziehung (1.95) liefert gemäß (1.78) zusammen mit (1.91)

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon |x|^{\epsilon-1} \operatorname{sgn} x = 2\delta(x). \quad (1.97)$$

Betrachten wir die verallgemeinerte Funktion

$$\delta_a(x) = \frac{\sin(ax)}{\pi x}, \quad (1.98)$$

deren Fourier-Transformierte

$$\underline{\delta}_a(k) = \int dk e^{-ikx} \frac{\sin(ax)}{\pi x} = \begin{cases} 1 & \text{für } k < a \\ 0 & \text{für } k > a \end{cases} \quad (1.99)$$

lautet. Offensichtlich ist

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \underline{\delta}_a(k) = 1 \quad (1.100)$$

und somit [wegen (1.85)]

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \underline{\delta}_a(k) = \underline{\delta}(k). \quad (1.101)$$

Also gilt [siehe (1.77) und (1.81)]

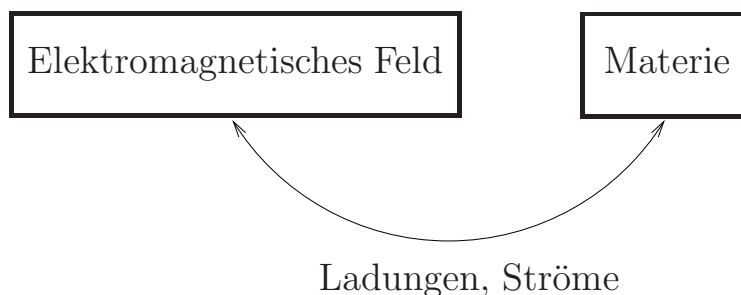
$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\sin(ax)}{\pi x} = \delta(x). \quad (1.102)$$

Kapitel 2

Das System der Maxwell-Gleichungen

Bevor wir uns den Maxwell-Gleichungen und dem Lorentzschen Kraftgesetz als den Grundgleichungen der Elektrodynamik zuwenden, die – analog zu den Newtonschen Gesetzen der Mechanik – als Grundpostulate der Theorie angesehen werden können, wollen wir zunächst zwei wichtige Größen einführen, nämlich die elektrische Ladung und den elektrischen (Ladungs-)Strom.

- Durch elektrische Ladungen und Ströme wird das elektromagnetische Feld (Maxwell-Feld) als Konstituent des elektromagnetischen Zustandes des Raumes mit der materiellen Umwelt verknüpft.
- Andererseits folgen bestimmte (formale) Eigenschaften dieser Größen aus den Maxwell-Gleichungen bzw. bestimmen die Struktur dieser Gleichungen.



2.1 Elektrische Ladungen und Ströme

Wie wir aus Experimenten wissen, ist die Existenz von elektrischen Ladungen an Materie gebunden. Wir werden elektrische Ladungen mit dem Symbol Q bezeichnen und für **Punktladungen**¹ das Symbol q verwenden. Bekanntlich ist in dem gesetzlich vorgeschriebenen Maßsystem, das wir im weiteren verwenden werden, die Ladungseinheit das Coulomb (C), definiert als $1\text{ C} = 1\text{ As}$. Die Ladung ist eine skalare, extensive Größe. Wenn also Q_1 und Q_2 die Ladungen in zwei disjunkten Raumbereichen sind, dann ist die Gesamtladung

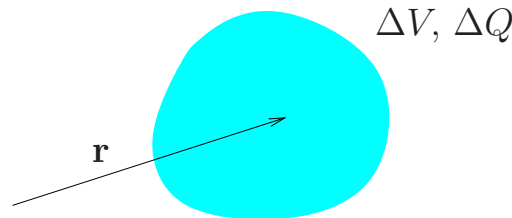
$$Q = Q_1 + Q_2. \quad (2.1)$$

Dabei kann $Q = 0$ sein, ohne daß $Q_1 = Q_2 = 0$ ist. Im Gegensatz zu Massen können sich elektrische Ladungen kompensieren, da es sowohl *positive* als auch *negative* Ladungen gibt. Es hat sich ferner gezeigt, daß freie (d.h. unmittelbar beobachtbare Ladungen) immer ganzzahlige Vielfache einer *Elementarladung*

$$e = 1.602\dots \times 10^{-19}\text{ C} \quad (2.2)$$

darstellen.²

Da materielle Systeme, wenn sie (was üblicherweise der Fall ist) als makroskopisch angesehen werden können, extrem viele Elementarladungen enthalten, ist es sinnvoll zu einer Kontinuumsbeschreibung



überzugehen und mit **Ladungsdichten** zu operieren,

$$\varrho(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} \quad (2.3)$$

¹Der Begriff Punktladung (Ladungspunkt) ist in völliger Analogie zu dem in der Mechanik verwendeten Begriff Massenpunkt zu verstehen.

²Die Elementarladung könnte natürlich auch als Einheitsladung (d.h. Vergleichseinheit) verwendet werden. Für makroskopisch realisierte Ladungen wäre das wegen der extrem großen Werte, die man erhalten würde, sicher etwas unpraktisch.

(ΔQ : Ladung im Volumenelement ΔV). Der Grenzübergang ist i. allg. im Sinne einer **makroskopischen Betrachtungsweise** zu verstehen, d.h., die minimal zulässigen Volumenelemente sollen noch eine hinreichend große Anzahl von Elementarladungen enthalten. Das Ergebnis ist die *Makrodichte* einer Ladungsverteilung. Bei gegebener, i. allg. zeitabhängiger Ladungsdichte $\varrho(\mathbf{r}, t)$, ist die (dann auch zeitabhängige) Gesamtladung $Q(t)$ in einem Volumen V gemäß

$$Q(t) = \int_V d^3r \varrho(\mathbf{r}, t) \quad (2.4)$$

gegeben.

Werden als Ladungsdichten auch solche in Form von δ -Distributionen zugelassen (was wir im weiteren auch tun werden), können auch Punktladungen erfaßt werden. Es befinde sich eine Punktladung q am Ort \mathbf{r}' . Die entsprechende Ladungsverteilung ist

$$\varrho(\mathbf{r}) = q \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (2.5)$$

Haben wir es mit N Punktladungen q_α an Orten \mathbf{r}_α zu tun ($\alpha = 1, \dots, N$), so gilt offensichtlich

$$\varrho(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha=1}^N q_\alpha \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha). \quad (2.6)$$

Wird in einer **mikroskopischen Betrachtungsweise** der Begriff der Punktladung bis hin zu den (elementaren) Ladungen im atomaren Bereich ausgedehnt, stellt $\varrho(\mathbf{r})$ die *Mikrodichte* einer Ladungsverteilung dar, die für hinreichend großes N mit den groben Maßstäben einer makroskopischen Betrachtungsweise als kontinuierlich verschmiert erscheint (Makrodichte). Sind die Punktladungen nicht an festen Positionen, sondern bewegen sie sich längs gewisser Bahnkurven $\mathbf{r}_\alpha(t)$, liefert (2.6) die zeitabhängige Ladungsdichte

$$\varrho(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha=1}^N q_\alpha \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha(t)]. \quad (2.7)$$

Betrachten wir einen (einfach zusammenhängenden) Raumbereich vom Volumen V mit der Oberfläche (V). Wenn wir feststellen, daß sich

die zu einem bestimmten Anfangszeitpunkt im betrachteten Raumbereich befindliche Ladung im Laufe der Zeit ändert, so kann dies zunächst zwei Ursachen haben.

- (1) Im Raumbereich wird Ladung erzeugt oder vernichtet, d.h., es existieren Ladungsquellen oder -senken.
- (2) Ladung fließt durch die Oberfläche des Raumbereichs zu oder ab.

Es sei ΔQ die beobachtete Ladungsänderung in einem Zeitintervall t , $t + \Delta t$. Entsprechend den beiden Möglichkeiten können wir also

$$\Delta Q = \Delta Q^{(1)} + \Delta Q^{(2)} \quad (2.8)$$

bilanzieren, wobei positives $\Delta Q^{(2)}$ in den Bereich fließende und negatives $\Delta Q^{(2)}$ aus dem Bereich fließende Ladung anzeigen soll. Die pro Zeiteinheit aus dem Raumbereich durch seine (nach außen orientierte) Oberfläche abfließende Ladungsmenge gibt Anlaß zu dem (im gesetzlichen Maßsystem in Ampere gemessenen) Ladungsstrom

$$I = - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q^{(2)}}{\Delta t} \quad (2.9)$$

($I > 0$ – Strom fließt nach außen; $I < 0$ – Strom fließt nach innen). Die Ladungsbilanz (2.8) nimmt somit die Form

$$\dot{Q} = \dot{Q}^{(1)} - I \quad (2.10)$$

bzw.

$$\dot{Q} + I = \Lambda \quad (2.11)$$

an ($\Lambda \equiv \dot{Q}^{(1)}$ – Erzeugungs- bzw. Vernichtungsrate von Ladung im betrachteten Raumbereich). Die Gleichung (2.11) ist die allgemeinste Form einer skalaren Bilanzgleichung; eine Bilanzgleichung dieser Art läßt sich für jede skalare, extensive Größe aufschreiben.³

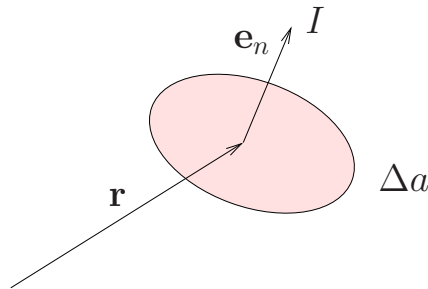
Die Erfahrung besagt nun, daß es keine Quellen oder Senken für elektrische Ladungen gibt. Es existiert nur Ladungstransport, jedoch

³Bilanzgleichungen dieser Art lassen sich natürlich auch für jede Komponente von tensoriellen, extensiven Größen aufstellen. Wir werden davon noch verschiedentlich Gebrauch machen.

keine Ladungserzeugung oder Vernichtung. Demzufolge geht die Bilanzgleichung (2.11) in den Erhaltungssatz für die elektrische Ladung über:

$$\dot{Q} + I = 0 \quad (2.12)$$

Die Definition des elektrischen Ladungsstromes ist natürlich nicht nur auf die (geschlossene) Oberfläche eines Raumbereiches anwendbar, sondern auch auf jeden Teil davon. Im Grunde genommen kann (fast) jedes beliebige, hinreichend glatte Flächenstück im Raum betrachtet werden. Wenn eine Fläche von einem elektrischen Strom durchflossen wird, bedeutet dies, daß in ihrer Umgebung Ladungsströmung stattfindet, d.h. Ladungstransport. Diese Strömung muß natürlich von der speziellen Fläche unabhängig sein. Den Strom durch eine beliebige Fläche erhält man dadurch, daß man die Fläche in die Strömung einbringt und nachsieht, welche Ladungsmenge pro Zeiteinheit durch die Fläche transportiert wird.



Es sei \mathbf{e}_n der Normaleneinheitsvektor eines Flächenelements Δa im Punkt \mathbf{r} . Ist ΔQ die Ladungsmenge, die im Zeitintervall Δt durch das Flächenelement in Richtung des Normaleneinheitsvektors tritt, ist gemäß (2.9)

$$\Delta I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad (2.13)$$

der Strom durch dieses Flächenelement in diese Richtung. Damit läßt sich die Stromdichte senkrecht durch das Flächenelement definieren:

$$j_n \equiv j_{\perp} = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta a}. \quad (2.14)$$

Wenden wir diese Definition für jeden Punkt einer Fläche a an, so ist der i. allg. zeitabhängige Gesamtstrom $I(t)$, der durch diese Fläche fließt, das Flächenintegral

$$I(t) = \int_a da j_{\perp}(\mathbf{r}, t). \quad (2.15)$$

Die Größe $j_{\perp}(\mathbf{r}, t)$ kann als Maß für die (i. allg. zeitabhängige) Strömung angesehen werden, die im Raumpunkt \mathbf{r} senkrecht zu der durch diesen Punkt gehenden Fläche da herrscht. Offensichtlich hängt $j_{\perp}(\mathbf{r}, t)$ noch von der speziellen Fläche ab. Diese Abhängigkeit kann unter der Annahme, daß die Strömung ein Vektorfeld $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ ist, leicht eliminiert werden:

$$j_{\perp}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t), \quad da \mathbf{e}_n = d\mathbf{a}, \quad (2.16)$$

$$I(t) = \int_a d\mathbf{a} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t). \quad (2.17)$$

Das so definierte Vektorfeld $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ heißt **Stromdichtefeld** und charakterisiert die Ladungsströmung in jedem Raumpunkt \mathbf{r} . Es ist unabhängig davon, ob durch \mathbf{r} eine Fläche gelegt wird oder nicht. In völliger Analogie zur Ladungsdichte wird auch hier zwischen mikroskopischer und makroskopischer Betrachtungsweise unterschieden. Insbesondere geben bewegte Punktladungen, deren Ladungsdichte in (2.7) gegeben ist, zu dem Stromdichtefeld

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha=1}^N q_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}(t) \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}(t)] \quad (2.18)$$

Anlaß.

Kehren wir noch einmal zu der globalen (integralen) Form (2.12) des Erhaltungssatzes für elektrische Ladungen zurück. Mit (2.4) und (2.17) nimmt er die Form

$$\frac{d}{dt} \int_V d^3r \varrho(\mathbf{r}, t) + \int_{(V)} d\mathbf{a} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (2.19)$$

an, und für einen zeitlich unveränderlichen Raumbereich gilt [unter Anwendung des Gaußschen Satzes (1.8)] folglich

$$\int_V d^3r \dot{\varrho}(\mathbf{r}, t) + \int_{(V)} d\mathbf{a} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \int_V d^3r [\dot{\varrho}(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)] = 0. \quad (2.20)$$

Da die Gleichung für jeden Raumbereich gilt, muß die lokale (differenzielle) Form des Ladungserhaltungssatzes gelten:

$$\dot{\varrho} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (2.21)$$

Eine Gleichung dieser Form wird auch **Kontinuitätsgleichung** genannt.⁴ Man überzeugt sich unschwer davon, daß die Ladungsdichte (2.7) und die Stromdichte (2.18) für Punktladungen der Kontinuitätsgleichung (2.21) genügen. Umgekehrt kann natürlich aus der Kontinuitätsgleichung die globale Form (2.12) der Ladungserhaltung gewonnen werden. Dazu integrieren wir beide Seiten von (2.21) über einen Raumbereich vom Volumen V und wenden den Gaußschen Satz (1.8) an,

$$\int_V d^3r \dot{\varrho}(\mathbf{r}, t) = - \int_V d^3r \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = - \int_{(V)} d\mathbf{a} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t). \quad (2.22)$$

Für einen zeitlich unveränderlichen Raumbereich folgt somit

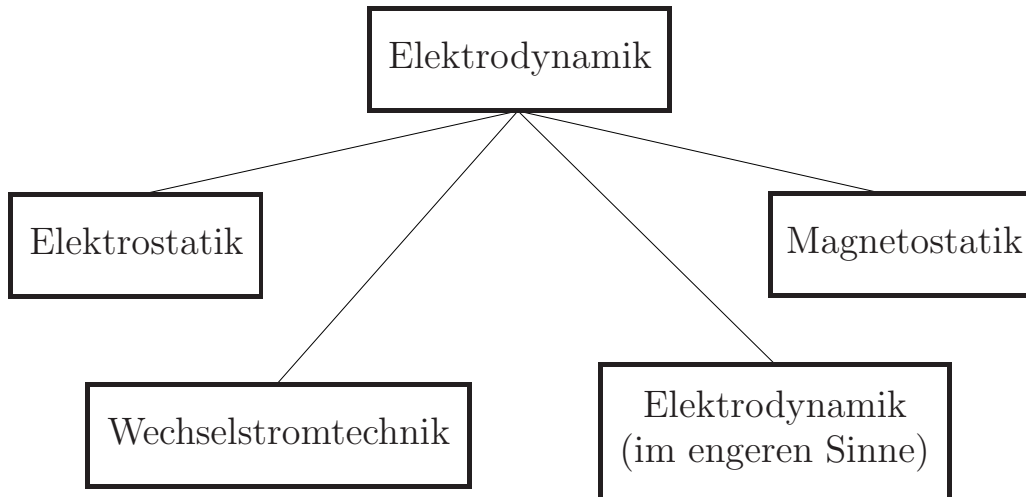
$$\frac{d}{dt} \int_V d^3r \varrho(\mathbf{r}, t) + \int_{(V)} d\mathbf{a} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (2.23)$$

Wir erinnern uns an die Gleichungen (2.4) und (2.17) und sehen, daß die Gleichung (2.23) genau das erwartete Ladungserhaltungsgesetz (2.12) darstellt.

2.2 Die differentiellen Maxwell-Gleichungen und das Lorentzsche Kraftgesetz

Wie bereits gesagt, spielen die Maxwell-Gleichungen in der Elektrodynamik eine ähnliche Rolle wie die Newtonschen Prinzipien in der Mechanik. Sie können als Grundpostulate an die Spitze der Theorie gestellt werden. So erfassen sie das gesamte Gebiet elektromagneti-

⁴Wäre $\Lambda \neq 0$ in der Bilanzgleichung (2.11), dann würde ihre lokale Form $\dot{\varrho} + \nabla \cdot \mathbf{j} = \lambda$ lauten, wobei λ die (von Null verschiedene) Quelledichte (bzw. Senkendichte) wäre.



scher Erscheinungen wie Elektrostatik, Magnetostatik, Wechselstromtechnik und Elektrodynamik im engeren Sinne (Erzeugung und Ausbreitung elektromagnetischer Wellen – etwa Licht in der Optik). Analog zu den Newtonschen Axiomen der Mechanik wird zunächst nicht ganz klar sein, was die Maxwell-Gleichungen physikalisch im einzelnen alles aussagen. Es ist Ziel der Vorlesung zu zeigen, was diese Gleichungen tatsächlich bedeuten. Erst am Ende der Vorlesung wird klar sein, daß die vielfältigen Erfahrungen über elektromagnetische Phänomene in diesen Gleichungen in konzentriertester Form enthalten sind.

2.2.1 Vakuumelektrodynamik

In der Vakuumelektrodynamik (als der fundamentalen mikroskopischen Theorie) kann der elektromagnetische Zustand des Raumes durch zwei Vektorfelder beschrieben werden:

1. das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und
2. das magnetische Induktionsfeld $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$.

In einem Inertialsystem werden diese Vektorfelder untereinander und mit den mikroskopischen Ladungsdichten und Stromdichten (d.h. den Ladungs- und Stromdichten im Vakuum) durch die folgenden Maxwell-Gleichungen verknüpft:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.24)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \dot{\mathbf{B}} = 0 \quad (2.25)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \varrho \quad (2.26)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \dot{\mathbf{E}} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (2.27)$$

Hier ist

$$c = 2.997 \dots \times 10^8 \text{ ms}^{-1} \quad (2.28)$$

die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum, und die Konstanten μ_0 und ε_0 sind dem gesetzlichen Maßsystem geschuldet,⁵

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ VsA}^{-1}\text{m}^{-1}, \quad (2.29)$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} = 8.854 \dots \times 10^{-12} \text{ AsV}^{-1}\text{m}^{-1} \quad (2.30)$$

($c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$). Die elektrische Feldstärke wird in Einheiten von Vm^{-1} und die magnetische Induktion in Einheiten von Wb m^{-2} angegeben.

Die Maxwell-Gleichungen (2.24) und (2.25) heißen auch *homogene* Maxwell-Gleichungen. Sie verknüpfen nur Eigenschaften des elektromagnetischen Feldes. Ladungs- und Stromdichte treten nur in den Gleichungen (2.26) und (2.27) auf. Entsprechend werden diese beiden Gleichungen auch als *inhomogene* Maxwell-Gleichungen bezeichnet. Ihrer mathematischen Form nach stellen die Maxwell-Gleichungen (für gegebene Ladungs- und Stromdichte) ein System gekoppelter partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten dar. Sie legen das elektromagnetische Feld in Form seiner Queldichten und Wirbeldichten fest (siehe dazu Abschnitt 1.2.1). Bei den Gleichungen (2.24) und (2.26) handelt es sich speziell um skalare Gleichun-

⁵Im gesetzlichen Maßsystem ist (neben Meter, Kilogramm und Sekunde) das Ampere als Grundeinheit für die elektrische Stromstärke eingeführt. Die Spannung Volt ($1\text{V} = 1\text{WA}^{-1}$) ist eine abgeleitete Einheit. Häufig verwendete abgeleitete elektromagnetische Einheiten sind die Ladungseinheit Coulomb ($1\text{C} = 1\text{As}$), die Einheit Weber für den magnetischen Fluß ($1\text{Wb} = 1\text{Vs}$), die Kapazitätseinheit Farad ($1\text{F} = 1\text{CV}^{-1}$), die Einheit Henry für die Induktivität ($1\text{H} = 1\text{WbA}^{-1}$) sowie die Einheit Ohm für den elektrischen Widerstand ($1\Omega = 1\text{VA}^{-1}$).

gen, während die Gleichungen (2.25) und (2.27) vektorielle Gleichungen darstellen. Aus der Linearität der Maxwell-Gleichungen folgt das **Superpositionsprinzip** für elektromagnetische Felder. Spezielle Felder können zu neuen Feldern überlagert werden, ohne sich gegenseitig zu stören oder zu beeinflussen.

Die Maxwell-Gleichungen (2.26) und (2.27) beschreiben die Beeinflussung des elektromagnetischen Feldes durch (an Materie gebundene) elektrische Ladungen und Ströme. Damit wird gemäß (2.6) und (2.18) der elektromagnetische Zustand des Raumes an die Orte und Geschwindigkeiten elektrisch geladener Teilchen gekoppelt. Das elektromagnetische Feld wirkt seinerseits auf die geladenen Teilchen zurück, indem es Kräfte auf diese ausübt. Die Kraft, die ein elektromagnetisches Feld auf ein System von N Punktladungen q_α ausübt, ist die Lorentz-Kraft:⁶

$$\mathbf{F} = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{F}_\alpha, \quad (2.31)$$

$$\mathbf{F}_\alpha = q_\alpha \mathbf{E}[\mathbf{r}_\alpha(t), t] + q_\alpha \dot{\mathbf{r}}_\alpha(t) \times \mathbf{B}[\mathbf{r}_\alpha(t), t] \quad (2.32)$$

Mit (2.6) und (2.18) ist unschwer zu sehen, daß die entsprechende Kraftdichte

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}, t) = \varrho(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (2.33)$$

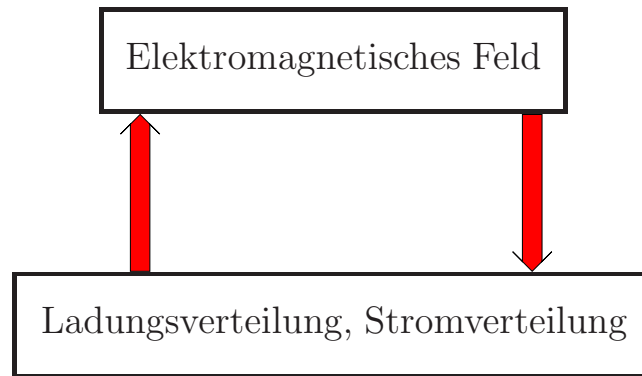
lautet, so daß für die Gesamtkraft, die gemäß (2.31) auf die (bewegten) Ladungen in einem Raumbereich vom Volumen V wirkt,

$$\mathbf{F} = \int_V d^3r \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) \quad (2.34)$$

gilt.

Über das Lorentzsche Kraftgesetz werden Elektrodynamik und Mechanik miteinander verknüpft. Für die Reaktion der massebehafteten

⁶Häufig wird unter dem Begriff Lorentz-Kraft nur der mit dem \mathbf{B} -Feld verknüpfte Kraftanteil verstanden.



Ladungsträger sind die Bewegungsgleichungen der Mechanik zuständig. Die Bewegung der Ladungsträger bestimmt andererseits über die Ladungs- und Stromverteilung in den Maxwell-Gleichungen das resultierende elektromagnetische Feld. Aus (2.32) bzw (2.33) ist ersichtlich, daß nicht der Lorentz-Kraft selbst absolute Bedeutung zukommt, sondern den Feldern \mathbf{E} und \mathbf{B} . Diese werden gewissermaßen durch Probeladungen abgefragt und geben zusammen mit der Eigenschaft der Probeladungen, elektrisch geladen zu sein, eine Kraftwirkung. Dieser Sachverhalt ist Ausdruck des bereits erwähnten Nahwirkungscharakters der Theorie.

2.2.2 Elektrodynamik in Medien

Wie wir gesehen haben, gehen in der Vakuumelektrodynamik alle elektromagnetischen Eigenschaften der Materie über die (mikroskopische) Ladungsdichte und die (mikroskopische) Stromdichte in die Theorie ein. Im Falle makroskopischer materieller Systeme ist es praktisch unmöglich, die mikroskopischen Bewegungsabläufe der geladenen (Elementar-)Teilchen exakt zu erfassen. So müßten beispielsweise in der Optik alle Bauelemente (wie etwa Blenden, Linsen und Spiegel) mindestens auf atomistischem Niveau dynamisch beschrieben werden – ein hoffnungsloses Unterfangen.

2.2.2.1 Maxwell-Gleichungen

Ein Ausweg besteht in der Mittelung über die atomistischen Strukturen. Das Ergebnis sind die makroskopischen Maxwell-Gleichungen, in

denen dann nur noch makroskopisch relevante Ladungen explizit auftreten. Der Preis, der dafür zu zahlen ist, sind zwei zusätzlich auftretende Felder – die **Polarisation** $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ und die **Magnetisierung** $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$. Das Polarisationsfeld und das elektrische Feld werden üblicherweise zum Verschiebungsfeld

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) \quad (2.35)$$

und die magnetische Induktion und die Magnetisierung zur magnetischen Feldstärke

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mu_0^{-1} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) \quad (2.36)$$

zusammengefaßt. Die makroskopischen Maxwell-Gleichungen lauten dann:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.37)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \dot{\mathbf{B}} = 0 \quad (2.38)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \varrho \quad (2.39)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \dot{\mathbf{D}} = \mathbf{j} \quad (2.40)$$

Im Gegensatz zu den mikroskopischen Maxwell-Gleichungen (2.24) – (2.27) bedeuten die Größen ϱ und \mathbf{j} nunmehr nur noch die makroskopisch relevanten Ladungs- und Stromdichten. Offensichtlich bleibt die Struktur der homogenen Maxwell-Gleichungen unverändert. Anstelle der Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} in den inhomogenen Maxwell-Gleichungen (2.26) und (2.27) (mit den gesamten Ladungs- und Stromdichten) treten in den inhomogenen Maxwell-Gleichungen (2.39) und (2.40) nunmehr die Felder \mathbf{D} und \mathbf{H} auf, die bereits einen Teil der Ladungs- und Stromdichten enthalten (Abschnitt 2.4).⁷

⁷Wird in den Gleichungen (2.26) und (2.27) $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$ und $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$ gesetzt, so sehen diese Gleichungen zwar formal wie die Gleichungen (2.39) und (2.40) aus, unterscheiden sich jedoch inhaltlich

Das System der makroskopischen Maxwell-Gleichungen muß durch (in der Regel phänomenologische) **Materialgleichungen** ergänzt werden, die den Zusammenhang zwischen Polarisierung und Magnetisierung einerseits und dem elektrischen Feld und dem Induktionsfeld andererseits vermitteln. Im allgemeinsten Fall wird der Zusammenhang ein funktionaler sein. Polarisierung und Magnetisierung sind gewisse Funktionale der elektrischen Feldstärke und der Induktion:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{P}[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] \quad (2.41)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{M}[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] \quad (2.42)$$

Entsprechend können Verschiebung und magnetische Feldstärke als mehr oder weniger komplizierte Funktionale der elektrischen Feldstärke und der Induktion angesehen werden:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{D}[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] \quad (2.43)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] \quad (2.44)$$

2.2.2.2 Lineare Medien

Während die Maxwell-Gleichungen (2.37) – (2.40) gewissermaßen universell gültig sind, hängen die Materialgleichungen in ihrer konkreten Form vom jeweiligen Medium ab. Solange in (2.41) und (2.42) sowie in (2.43) und (2.44) ein linearer funktionaler Zusammenhang angenommen werden kann (hinreichend schwache elektromagnetische Felder!), spricht man von der **linearen Elektrodynamik**, andernfalls von der **nichtlinearen Elektrodynamik** mit dem Hauptanwendungsgebiet in der **nichtlinearen Optik**.

In der Optik hat man es gewöhnlich mit **dielektrischen** Medien

substantiell von diesen. Während der Unterschied zwischen $\epsilon_0\mathbf{E}$ und \mathbf{E} und der Unterschied zwischen \mathbf{B}/μ_0 von \mathbf{B} einzig durch die Wahl des Maßsystems zustande kommt, handelt es sich in (2.39) und (2.40) sowohl bei den Feldern \mathbf{D} und \mathbf{E} als auch den Feldern \mathbf{H} und \mathbf{B} um jeweils physikalisch verschiedene Felder.

(im thermischen Gleichgewicht) zu tun. Für anisotrope und inhomogene Dielektrika lautet der allgemeinste *lineare* und *lokale* Zusammenhang zwischen Polarisierung und elektrischer Feldstärke wie folgt:⁸ (in kartesischen Koordinaten)

$$P_i(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \int_0^\infty dt' \chi_{ij}(\mathbf{r}, t') E_j(\mathbf{r}, t-t') + P_i^{(0)}(\mathbf{r}, t) \quad (2.45)$$

Hier ist $\chi_{ij}(\mathbf{r}, t)$ die tensorielle **dielektrische Suszeptibilität** und $P_i^{(0)}(\mathbf{r}, t)$ trägt den thermischen Fluktuationen der Polarisierung Rechnung. Kann für hinreichend niedrige Temperaturen von den thermischen Fluktuationen abgesehen werden, vereinfacht sich (2.45) zu⁹

$$P_i(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \int_0^\infty dt' \chi_{ij}(\mathbf{r}, t') E_j(\mathbf{r}, t-t'). \quad (2.46)$$

Das Zeitintegral, das der *Kausalität* Rechnung trägt, läuft effektiv nur über eine endliche Zeit, die durch das *Gedächtnis* des Mediums gegeben ist. Stellen wir die elektrische Feldstärke und die Polarisierung als Fourier-Integrale dar,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int d\omega e^{-i\omega t} \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega), \quad (2.47)$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \int d\omega e^{-i\omega t} \underline{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega), \quad (2.48)$$

so lautet die Materialgleichung (2.46) im Fourier-Raum

$$\underline{P}_i(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 \underline{\chi}_{ij}(\mathbf{r}, \omega) \underline{E}_j(\mathbf{r}, \omega), \quad (2.49)$$

wobei

$$\underline{\chi}_{ij}(\mathbf{r}, \omega) = \int_0^\infty d\tau \chi_{ij}(\mathbf{r}, \tau) e^{i\omega\tau} \quad (2.50)$$

⁸Für Dielektrika kann in der Regel von einer Abhängigkeit der Polarisierung von der magnetischen Induktion abgesehen werden.

⁹Für optische Felder ist das praktisch schon für Zimmertemperaturen der Fall. Ansonsten ist (2.46) als über die Fluktuationen gemittelte Gleichung zu verstehen.

offenbar eine komplexwertige Funktion von ω ist. Wie wir noch sehen werden (Abschnitte 6.1.2.1 und 6.1.2.2), beschreibt ihr Realteil **Dispersion** und ihr Imaginärteil **Absorption**. Wir berücksichtigen (2.35) und finden mit (2.49) für den Zusammenhang zwischen dem Verschiebungsfeld und dem elektrischen Feld im Fourier-Raum die Beziehung

$$\underline{D}_i(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_{ij}(\mathbf{r}, \omega) \underline{E}_j(\mathbf{r}, \omega) \quad (2.51)$$

mit

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 \left[\delta_{ij} + \underline{\chi}_{ij}(\mathbf{r}, \omega) \right] \quad (2.52)$$

als komplexwertiger **Dielektrizitätstensor**. Wir sehen, ein Zusammenhang von der Form (2.51) zwischen dem Verschiebungsfeld und dem elektrischen Feld gilt in Strenge nur für jede Frequenzkomponente, nicht jedoch für die Felder insgesamt. Nur im Falle hinreichend schmalbandiger Felder, wenn

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}, \omega) \approx \varepsilon_{ij}(\mathbf{r}, \omega_0) \equiv \varepsilon_{ij}(\mathbf{r}) \quad \text{für} \quad \omega_0 - \Delta\omega \leq \omega \leq \omega_0 + \Delta\omega \quad (2.53)$$

($2\Delta\omega$ – Feldbandbreite) gilt, kann näherungsweise die Beziehung

$$D_i(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_{ij}(\mathbf{r}) E_j(\mathbf{r}, t) \quad (2.54)$$

verwendet werden, die für isotrope Medien in die bekannte Beziehung

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (2.55)$$

übergeht. In diesem Zusammenhang wird ε auch als **Dielektrizitätskonstante** bezeichnet. Häufig wird sie in der Form $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ geschrieben; ε_r heißt dann **relative Dielektrizitätskonstante**.

Ähnliche Überlegungen können im Rahmen der linearen Elektrodynamik natürlich auch für magnetische Medien (im thermischen Gleichgewicht) angestellt werden. Allerdings macht es mit wachsender Frequenz (d.h. für zeitlich schnell veränderliche Felder) in der Regel wenig Sinn, zwischen den Feldern \mathbf{B} und \mathbf{H} unterscheiden zu wollen. Praktisch gilt das schon für viele Erscheinungen bei Frequenzen, die viel kleiner als optische sind, so daß für derartige Felder $\mu = \mu_0$ gesetzt werden kann.

Die im Rahmen der linearen Elektrodynamik speziell zu (2.55) analoge Beziehung für magnetische Medien ist

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mu'(\mathbf{r}) \mathbf{B}(\mathbf{r}, t), \quad (2.56)$$

die üblicherweise in der Form

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu(\mathbf{r}) \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \quad (2.57)$$

mit $\mu = 1/\mu'$ als der **Permeabilität** verwendet wird. Die **relative Permeabilität** ist dann $\mu_r = \mu/\mu_0$.

2.2.2.3 Kramers-Kronig-Beziehungen

Realteil und Imaginärteil von $\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}, \omega)$ sind nicht unabhängig voneinander. Da die folgenden Überlegungen sinngemäß sowohl für skalares als auch tensorielles ε gelten, und das räumliche Argument \mathbf{r} dabei unwesentlich ist, beschränken wir uns der Übersichtlichkeit wegen auf den skalaren Fall und unterdrücken das räumliche Argument. Entsprechend (2.50) und (2.52) ist $\varepsilon(\omega)$ durch

$$\varepsilon(\omega)/\varepsilon_0 = 1 + \int_0^\infty d\tau e^{i\omega\tau} \chi(\tau) \quad (2.58)$$

definiert, wobei für Dielektrika die Funktion $\chi(\tau)$ für alle Werte von τ endlich ist und für $\tau \rightarrow \infty$ gegen Null strebt. Fassen wir ω als komplexe Variable auf, so folgt, daß $\varepsilon(\omega)$ in der ganzen oberen Halbebene einschließlich der reellen Achse eine eindeutige Funktion ist, die nirgends unendlich wird, also keine Singularitäten besitzt.¹⁰ Der vorausgesetzte kausale Zusammenhang zwischen Polarisation und elektrischer Feldstärke (d.h. die Gültigkeit des *Kausalitätsprinzips*) hat also letztlich zur Folge, daß $\varepsilon(\omega)$ in der oberen Halbebene eine analytische Funktion ist. Aus der Definition (2.58) folgt ferner, daß

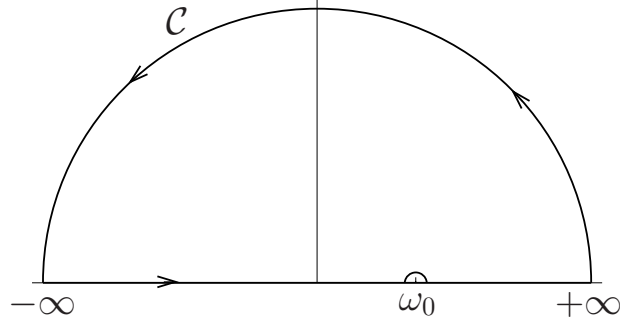
$$\varepsilon(-\omega^*) = \varepsilon^*(\omega) \quad (2.59)$$

gilt sowie

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 \quad (2.60)$$

¹⁰Im Falle von Metallen besitzt $\varepsilon(\omega)$ einen Pol bei $\omega = 0$.

ist. Dies bedeutet insbesondere, daß $[\varepsilon(\omega) - \varepsilon_0]/(\omega - \omega_0)$ im Unendlichen schneller als $1/\omega$ gegen Null strebt. Aus den genannten Eigenschaften folgt, daß für den in der Abbildung angegebenen geschlossenen Integrationsweg \mathcal{C}



$$\int_{\mathcal{C}} d\omega \frac{\varepsilon(\omega) - \varepsilon_0}{\omega - \omega_0} = 0 \quad (2.61)$$

gilt und das Integral längs des im Unendlichen gelegenen Halbkreises ebenfalls Null ist. Das Integral längs des unendlich kleinen Halbkreises um den Punkt ω_0 ist offensichtlich $-i\pi[\varepsilon(\omega_0) - \varepsilon_0]$. Folglich können wir (2.61) in der Form

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{\varepsilon(\omega) - \varepsilon_0}{\omega - \omega_0} - i\pi[\varepsilon(\omega_0) - \varepsilon_0] = 0 \quad (2.62)$$

schreiben (\mathcal{P} - Hauptwert). Nehmen wir von dieser Gleichung den Real- und den Imaginärteil, so erhalten wir (mit der Bezeichnungsweise $\omega \rightarrow \omega'$, $\omega_0 \rightarrow \omega$) die folgenden als *Kramers-Kronig-Beziehungen* bekannten Gleichungen:¹¹

$$\text{Re } \varepsilon(\omega) - \varepsilon_0 = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\text{Im } \varepsilon(\omega')}{\omega' - \omega} \quad (2.63)$$

$$\text{Im } \varepsilon(\omega) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\varepsilon_0 - \text{Re } \varepsilon(\omega')}{\omega' - \omega} \quad (2.64)$$

¹¹Da die Kramers-Kronig-Beziehungen eine direkte Folge des Kausalitätsprinzips sind, gelten analoge Beziehungen auch für andere kausale Zusammenhänge in der Physik.

Real- und Imaginärteil von $\varepsilon(\omega)$ sind also nicht unabhängig voneinander. So bestimmt die Funktion $\operatorname{Re} \varepsilon(\omega)$ eindeutig die Funktion $\operatorname{Im} \varepsilon(\omega)$ und umgekehrt.

Aus (2.59) folgt für reelles ω

$$\operatorname{Im} \varepsilon(-\omega) = -\operatorname{Im} \varepsilon(\omega). \quad (2.65)$$

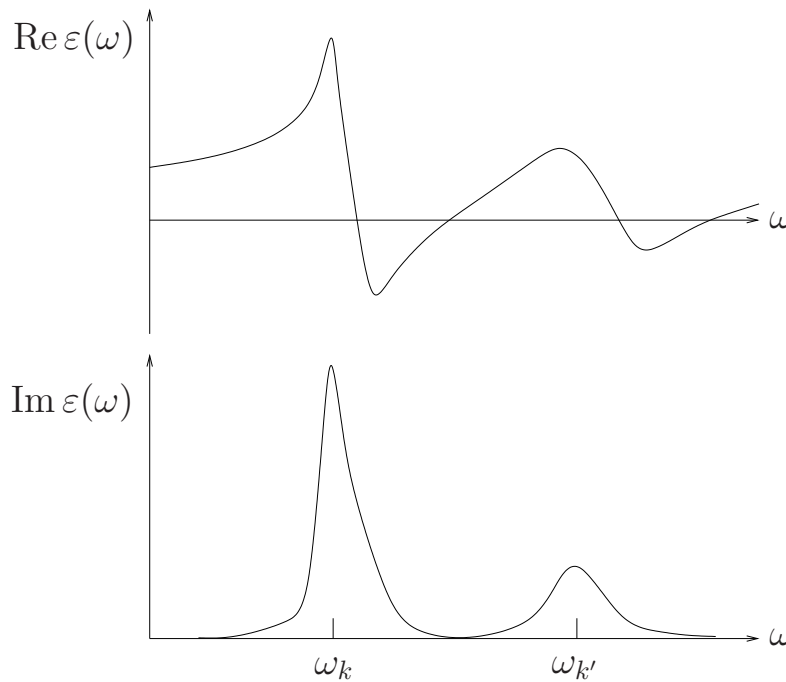
Das heißt, $\operatorname{Im} \varepsilon(\omega)$ ist eine ungerade Funktion.¹² Folglich kann (2.63) als

$$\operatorname{Re} \varepsilon(\omega) - \varepsilon_0 = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_0^\infty d\omega' \frac{\operatorname{Im} \varepsilon(\omega')}{\omega' - \omega} + \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_0^\infty d\omega' \frac{\operatorname{Im} \varepsilon(\omega')}{\omega' + \omega} \quad (2.66)$$

geschrieben werden und somit in der äquivalenten Form

$$\operatorname{Re} \varepsilon(\omega) - \varepsilon_0 = \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^\infty d\omega' \frac{\omega' \operatorname{Im} \varepsilon(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} \quad (2.67)$$

angegeben werden.



Die folgende Abbildung zeigt ein typisches Verhalten des Real- und Imaginärteiles von $\varepsilon(\omega)$ in der Umgebung zweier aufeinanderfolgender

¹²Ist also speziell $\operatorname{Im} \varepsilon > 0$ für $\omega > 0$, so ist $\operatorname{Im} \varepsilon < 0$ für $\omega < 0$. Im Punkt $\omega = 0$ muß dann $\operatorname{Im} \varepsilon$ das Vorzeichen wechseln.

Mediumresonanzen (ω_k und $\omega_{k'}$). Von **normaler Dispersion** wird gesprochen, wenn

$$\frac{d\operatorname{Re} \varepsilon(\omega)}{d\omega} > 0 \quad (2.68)$$

ist, $\operatorname{Re} \varepsilon(\omega)$ also mit wachsender Frequenz ansteigt, während im umgekehrten Fall

$$\frac{d\operatorname{Re} \varepsilon(\omega)}{d\omega} < 0 \quad (2.69)$$

von **anomaler Dispersion** gesprochen wird. Normale Dispersion wird in allen Frequenzbereichen beobachtet, außer in den Umgebungen von Mediumresonanzen. Nur dort, wo anomale Dispersion auftritt, wird der (positive) Imaginärteil von ε groß. Wie bereits angemerkt wurde, bedeutet ein positiver Imaginärteil von ε einen Energieverlust des elektromagnetischen Feldes zugunsten des Mediums. Bereiche mit großem $\operatorname{Im} \varepsilon(\omega)$ werden deshalb auch Bereiche mit **Resonanzabsorption** genannt.

Wir wenden die Gleichung (2.67) auf ein Frequenzgebiet an, in dem das Medium hinreichend schwach absorbierend ist, so daß für diese Frequenzen der positive Imaginärteil¹³ von $\varepsilon(\omega)$ vernachlässigbar ist und folglich näherungsweise

$$\varepsilon(\omega) = \operatorname{Re} \varepsilon(\omega) \quad (2.70)$$

gilt. In diesem Fall ist es nicht nötig, in (2.67) den Hauptwert zu nehmen, da der Punkt $\omega' = \omega$ effektiv nicht im Integrationsgebiet liegt. Das Integral kann dann wie ein gewöhnliches Integral nach dem Parameter ω differenziert werden, da keine Singularität im Integranden auftritt,

$$\frac{d\varepsilon(\omega)}{d\omega} = \frac{4\omega}{\pi} \int_0^\infty d\omega' \frac{\omega' \operatorname{Im} \varepsilon(\omega')}{(\omega'^2 - \omega^2)^2} \quad (2.71)$$

woraus geschlossen werden kann, daß in dem betrachteten Frequenzgebiet

$$\frac{d\varepsilon(\omega)}{d\omega} > 0 \quad (2.72)$$

¹³Für Medien im thermodynamischen Gleichgewicht gilt $\operatorname{Im} \varepsilon(\omega) > 0$.

ist. Gebiete mit (näherungsweise) reellem $\varepsilon(\omega)$ müssen also Gebiete normaler Dispersion sein. Analog kann für solche Gebiete die Gleichung

$$\frac{d}{d\omega} \{ \omega^2 [\varepsilon(\omega) - \varepsilon_0] \} = \frac{4\omega}{\pi} \int_0^\infty d\omega' \frac{\omega'^3 \operatorname{Im} \varepsilon(\omega')}{(\omega'^2 - \omega^2)^2} > 0 \quad (2.73)$$

aufgeschrieben werden, woraus die Ungleichung

$$\frac{d\varepsilon(\omega)}{d\omega} > \frac{2[\varepsilon_0 - \varepsilon(\omega)]}{\omega} \quad (2.74)$$

folgt. Wir werden im Zusammenhang mit der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen auf die Ungleichungen (2.72) und (2.74) zurückkommen.

2.3 Die integralen Maxwell-Gleichungen

Die Anwendung der Integralsätze der Vektoranalysis auf die Maxwell-Gleichungen in ihrer differentiellen Form liefert äquivalente Gleichungen in Integralform. Sie veranschaulichen nicht nur den physikalischen Inhalt der Maxwell-Theorie stärker, sondern sie sind auch dann anwendbar, wenn auf Grund gewisser Randbedingungen die betrachteten (makroskopischen) Felder Unstetigkeiten aufweisen.

Wir legen die Maxwell-Gleichungen in der Form (2.37) – (2.40) zugrunde.¹⁴ Integration von (2.39) über einen Raumbereich vom Volumen V liefert

$$\int_V d^3r \nabla \cdot \mathbf{D} = \int_V d^3r \varrho, \quad (2.75)$$

woraus mit (1.8) und (2.4)

$$\boxed{\int_{(V)} d\mathbf{a} \cdot \mathbf{D} = Q} \quad (2.76)$$

¹⁴Beachte, daß in der mikroskopischen Elektrodynamik elektrisches Feld und Verschiebungsfeld physikalisch identisch sind. Gleiches trifft auch auf die magnetische Induktion und die magnetische Feldstärke zu. Ladungsdichten und Stromdichten beziehen sich dann auf die gesamte Materie.

resultiert, wobei Q die Gesamtladung im betrachteten Volumen V ist. Anschaulich besagt die Gleichung (2.76), daß der Fluß des Verschiebungsfeldes durch die Oberfläche eines Raumbereiches (und somit die Quellstärke des Verschiebungsfeldes für diesen Bereich) gleich der in diesem Bereich vorhandenen Ladungsmenge ist.

- Positive Ladungen verursachen einen positiven Fluß und stellen folglich Quellen des Verschiebungsfeldes dar. Entsprechend bedingen negative Ladungen einen negativen Fluß und repräsentieren Senken.
- Die (physikalischen) Feldlinien des Verschiebungsfeldes beginnen bei positiven Ladungen und enden bei negativen Ladungen.

Räumliche Integration von (2.37) und Anwenden von (1.8) liefert:

$$\boxed{\int_{(V)} d\mathbf{a} \cdot \mathbf{B} = 0} \quad (2.77)$$

Der Fluß der magnetischen Induktion durch die Oberfläche eines jeden endlichen Volumenbereiches verschwindet.

- Es existieren keine magnetischen Ladungen.
- Die Feldlinien der magnetischen Induktion müssen sich also vom Unendlichen in das Unendliche erstrecken oder aber in sich geschlossen sein.

Integration von (2.40) über eine Fläche a liefert

$$\int_a d\mathbf{a} \cdot \nabla \times \mathbf{H} = \int_a d\mathbf{a} \cdot \mathbf{j} + \int_a d\mathbf{a} \cdot \dot{\mathbf{D}}, \quad (2.78)$$

woraus mit (1.10) und (2.17) zunächst

$$\int_{(a)} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{H} = I + \int_a d\mathbf{a} \cdot \dot{\mathbf{D}} \quad (2.79)$$

folgt, wobei I der elektrische Gesamtstrom durch die Fläche a ist. Ist insbesondere die Fläche zeitlich unveränderlich, nimmt die Gleichung (2.79) die Gestalt

$$\int_{(a)} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{H} = I + \frac{d}{dt} \int_a d\mathbf{a} \cdot \mathbf{D} \quad (2.80)$$

an. Die Zirkulation des magnetischen Feldes längs einer geschlossenen Kurve ist gleich der Summe aus dem elektrischen Strom durch eine von der Kurve berandeten Fläche und der zeitlichen Änderung des Flusses des Verschiebungsfeldes durch diese Fläche. Bekanntlich werden geschlossene Kurven, längs derer die Zirkulation eines Vektorfeldes nicht verschwindet, auch als Wirbel des Feldes bezeichnet. Damit besagt die Gleichung (2.80), daß Ladungsströme $I_Q = I$ und **Verschiebungsströme**

$$I_D = \frac{d}{dt} \int_a d\mathbf{a} \cdot \mathbf{D} \quad (2.81)$$

in gleicher Weise zu Wirbeln des Magnetfeldes führen, die die Ströme umschließen.

Analog zur Herleitung der integralen Maxwell-Gleichung (2.80) führt die Integration von (2.38) über eine Fläche a zu der Integralgleichung:

$$\int_{(a)} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} = -\frac{d}{dt} \int_a d\mathbf{a} \cdot \mathbf{B} \quad (2.82)$$

Wird also eine Fläche a von einem sich zeitlich ändernden magnetischen Fluß durchsetzt, entsteht ein Wirbel des elektrischen Feldes. Dieser Effekt heißt **Induktion** und die entsprechende Maxwell-Gleichung **Induktionsgesetz**.

Anmerkungen

- Die integralen Maxwell-Gleichungen sind den differentiellen äquivalent. Sie entsprechen einander wie beispielsweise die Gleichung

für die (globale) Ladungserhaltung (2.12) der Kontinuitätsgleichung (2.21). Historisch wurden erst die integralen Maxwell-Gleichungen gefunden und aus diesen die differentiellen hergeleitet.

- Beiden Formulierungen kommen eigene Bedeutungen zu. Die differentiellen Maxwell-Gleichungen erweisen sich in der Regel als der geeignetere Ausgangspunkt für die weitere mathematische Behandlung der Elektrodynamik. Die integrale Formulierung besticht durch ihre größere physikalische Anschaulichkeit. Wie bereits angemerkt, ist ihre Anwendung besonders dann sinnvoll, wenn die Felder an (im Sinne einer makroskopischen Betrachtungsweise) Grenzflächen bestimmte Unstetigkeiten aufweisen.

2.4 Von der mikroskopischen zur makroskopischen Elektrodynamik

2.4.1 Sichtbare und unsichtbare Ladungen

Die gemäß den Maxwell-Gleichungen gegebene Verknüpfung elektromagnetischer Felder mit Materie über die elektrische Ladungs- und Stromdichte widerspiegelt unmittelbar die Ladungserhaltung. Wir bilden die Zeitableitung von (2.39) und erhalten

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{D}} = \dot{\rho}. \quad (2.83)$$

Divergenzbildung von (2.40) führt auf

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} - \nabla \cdot \dot{\mathbf{D}} = \nabla \cdot \mathbf{j}, \quad (2.84)$$

d.h. wegen $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} = 0$

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{D}} = -\nabla \cdot \mathbf{j}. \quad (2.85)$$

Subtraktion von (2.85) von (2.83) ergibt

$$\dot{\rho} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (2.86)$$

d.h. die Kontinuitätsgleichung (2.21) für die Ladungserhaltung.

Erwartungsgemäß beinhalten die Maxwell-Gleichungen (2.37) – (2.40) Ladungserhaltung. Von der Herleitung der Kontinuitätsgleichung aus den Maxwell-Gleichungen ist ersichtlich, daß Ladungserhaltung sowohl für die makroskopischen Ladungen [wenn sich gemäß (2.35) das Verschiebungsfeld \mathbf{D} vom elektrischen Feld \mathbf{E} durch ein nicht verschwindendes Polarisationsfeld \mathbf{P} und sich gemäß (2.36) das Induktionsfeld \mathbf{B} vom Magnetfeld \mathbf{H} durch ein nicht verschwindendes Magnetisierungsfeld \mathbf{M} unterscheidet] als auch für die mikroskopischen (Gesamt-)Ladungen (wenn also $\mathbf{P} = \mathbf{M} = 0$ ist) gilt.

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, daß, obwohl die Maxwell-Gleichungen in der Form (2.37) – (2.40) üblicherweise in der makroskopischen Elektrodynamik zur Anwendung kommen, die Einführung des Polarisationsfeldes und des Magnetisierungsfeldes (und damit des Verschiebungsfeldes und des Magnetfeldes) nicht notwendigerweise an eine makroskopische Betrachtungsweise geknüpft ist. Beide Felder können auch mikroskopisch eingeführt werden. In diesem Fall stellen sie naturgemäß keine räumlich „glatten“ Funktionen dar, sondern wie die ihnen entsprechenden nunmehr mikroskopischen Ladungs- und Stromdichten extrem schnell veränderliche Felder. Erst eine räumliche Mittelung liefert die „glatten“ Funktionen, wie sie in der makroskopischen Betrachtungsweise verwendet werden.

Eliminieren wir in den Gleichungen (2.39) und (2.40) unter Verwendung der Beziehungen (2.35) und (2.36) das \mathbf{D} -Feld und das \mathbf{H} -Feld zu Gunsten des \mathbf{P} -Feldes und des \mathbf{M} -Feldes, dann gehen die beiden Gleichungen in

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\varrho - \nabla \cdot \mathbf{P}) \quad (2.87)$$

und

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \dot{\mathbf{E}} = \mu_0 (\mathbf{j} + \dot{\mathbf{P}} + \nabla \times \mathbf{M}) \quad (2.88)$$

über. Mit

$$\varrho' = \varrho + \varrho'' \quad (2.89)$$

und

$$\mathbf{j}' = \mathbf{j} + \mathbf{j}'', \quad (2.90)$$

wobei die Definitionen

$$\varrho'' = -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad (2.91)$$

und

$$\mathbf{j}'' = \dot{\mathbf{P}} + \nabla \times \mathbf{M} \quad (2.92)$$

verwendet wurden, nehmen die Maxwell-Gleichungen (2.87) und (2.88) die Form der Maxwell-Gleichungen (2.26) und (2.27) für die fundamentalen Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} an,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \varrho', \quad (2.93)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \dot{\mathbf{E}} = \mu_0 \mathbf{j}'. \quad (2.94)$$

Da die Kontinuitätsgleichung sowohl für die ungestrichenen und die einfach gestrichenen Größen gilt,

$$\dot{\varrho} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad \dot{\varrho}' + \nabla \cdot \mathbf{j}' = 0, \quad (2.95)$$

muß sie auch für die zweifach gestrichenen Größen gelten,

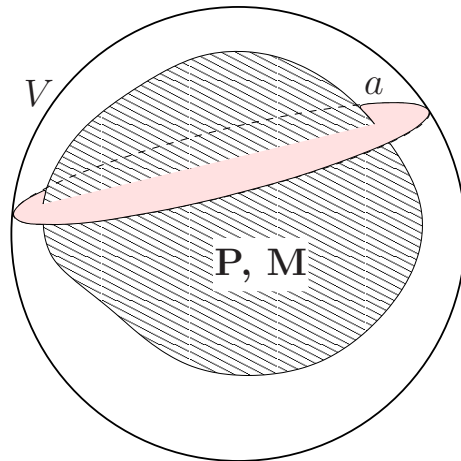
$$\dot{\varrho}'' + \nabla \cdot \mathbf{j}'' = 0, \quad (2.96)$$

was, wie man sich leicht überzeugt, auch der Fall ist.

- Ausgehend von der mikroskopischen Betrachtungsweise bedeutet die Einführung der Felder \mathbf{P} und \mathbf{M} eine Einteilung der Ladungen in *unsichtbare* Ladungen der Ladungsdichte ϱ'' und *sichtbare* Ladungen der Ladungsdichte ϱ , wobei erstere mit der Stromdichte \mathbf{j}'' und letztere mit der Stromdichte \mathbf{j} verknüpft sind.¹⁵ Wird beispielsweise darauf verzichtet, inneratomare Ladungen (Protonen, Elektronen) im einzelnen aufzulösen, können im Falle neutraler Atome diese den unsichtbaren Ladungen zugeschlagen werden. Sichtbare Ladungen sind dann nicht vorhanden – im Gegensatz beispielsweise zu Ionen, deren (Gesamt-)Ladungen als sichtbare Ladungen angesehen werden können.

¹⁵Sichtbare Ladungen und die mit ihnen verknüpften Ströme werden auch als *freie* Ladungen und Ströme bezeichnet.

- An den obigen Überlegungen ändert sich grundsätzlich nichts, wenn über die atomistische Struktur des Mediums gemittelt wird und im Ergebnis „ausgeschmierte“ Felder \mathbf{P} und \mathbf{M} auf einer Längenskala betrachtet werden, die die atomistische Struktur nicht mehr auflöst.¹⁶ Im Rahmen der mikroskopischen Betrachtungsweise bringt die Einführung der Felder \mathbf{P} und \mathbf{M} (bzw. \mathbf{D} und \mathbf{H}) und das (zunächst formale) Umschreiben der mikroskopischen Gleichungen (2.24) – (2.27) auf die Form der (nach räumlicher Mittelung in der makroskopischen Elektrodynamik üblicherweise verwendeten) Gleichungen (2.37) – (2.40) auf den ersten Blick keinen ersichtlichen Fortschritt. Erst wenn es – ausgehend von mikroskopisch begründeten Modellvorstellungen – gelingt, Materialgleichungen zu formulieren, die es gestatten, die Felder \mathbf{P} und \mathbf{M} durch die primären Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} auszudrücken, ist das Problem der Elimination der unsichtbaren Ladungen und Ströme tatsächlich gelöst.
- Betrachten wir einen makroskopischen Körper endlicher Ausdehnung. Offensichtlich ist $\mathbf{P} = 0$ außerhalb des Körpers. Integrieren



wir die Ladungsdichte ϱ'' über ein beliebiges Volumen V , das den Körper ganz enthält, so erhalten wir aus (2.91) [zusammen mit

¹⁶Es ist klar, daß im Rahmen einer solchen Betrachtungsweise elektromagnetische Felder, deren räumliche Änderung auf einer atomaren (oder kleineren) Skala erfolgt, nicht beschrieben werden können.

(1.8)]

$$Q'' = \int_V d^3r \varrho'' = - \int_{(V)} \mathbf{da} \cdot \mathbf{P} = 0. \quad (2.97)$$

Erwartungsgemäß gibt die Ladungsdichte der unsichtbaren Ladungen zu einer verschwindenden Gesamtladung Q'' Anlaß.

So wie die Polarisation verschwindet natürlich auch die Magnetisierung außerhalb des Körpers, $\mathbf{M} = 0$. Wir berechnen den durch die Stromdichte \mathbf{j}'' bedingten Gesamtstrom I'' durch eine (beliebige) Fläche a , die den Körper schneidet und deren Berandung außerhalb des Körpers liegt. Aus (2.92) [zusammen mit (1.10)] folgt dann

$$I'' = \int_a \mathbf{da} \cdot \mathbf{j}'' = \int_{(a)} \mathbf{dr} \cdot \mathbf{M} + \int_a \mathbf{da} \cdot \dot{\mathbf{P}} = \int_a \mathbf{da} \cdot \dot{\mathbf{P}}. \quad (2.98)$$

Da das Flächenintegral von $\dot{\mathbf{P}}$ i. allg. von Null verschieden ist, verschwindet der mit den unsichtbaren Ladungen verknüpfte Strom nur im statischen Fall,

$$\dot{\mathbf{P}} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad I'' = 0. \quad (2.99)$$

Solange

$$|\dot{\mathbf{P}}| \ll |\nabla \times \mathbf{M}| \quad (2.100)$$

ist, kann die mit der Bewegung der unsichtbaren Ladungen verknüpfte **Polarisationsstromdichte** $\dot{\mathbf{P}}$ offensichtlich vernachlässigt werden,

$$\mathbf{j}'' \simeq \nabla \times \mathbf{M}. \quad (2.101)$$

Im Falle hinreichend schnell veränderlicher Felder (insbesondere im optischen Bereich), wenn

$$|\nabla \times \mathbf{M}| \ll |\dot{\mathbf{P}}| \quad (2.102)$$

ist, wird \mathbf{j}'' praktisch allein durch die Polarisationsstromdichte bestimmt, so daß

$$\mathbf{j}'' \simeq \dot{\mathbf{P}} \quad (2.103)$$

und folglich auch

$$\mathbf{H} \simeq \mu_0^{-1} \mathbf{B} \quad (2.104)$$

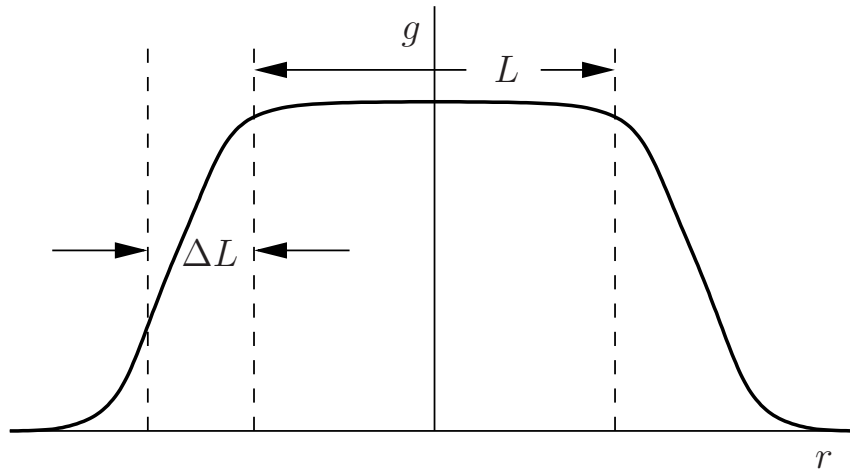
gesetzt werden kann.

2.4.2 Räumliche Mittelung

Unter der bereits mehrfach erwähnten räumlichen Mittelung einer Feldfunktion $F(\mathbf{r}, t)$ wollen wir das Integral

$$\langle F(\mathbf{r}, t) \rangle = \int d^3r' g(\mathbf{r}') F(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t) \quad (2.105)$$

verstehen, wobei die *Testfunktion* $g(\mathbf{r})$ eine reelle, in einer gewissen Umgebung von $\mathbf{r}=0$ von Null verschiedene Funktion ist, deren Integral über den gesamten Raum auf Eins normiert ist. Um die Richtungsabhängigkeit physikalischer Größen bei der Mittelung nicht zu ändern, ist eine räumlich isotrope Testfunktion zu wählen. Im einfachsten Fall kann sie als nicht negativ angesehen werden. Eine entsprechende Funktion ist in der folgenden Abbildung skizziert. Die Ausdeh-



nung L des Plateaubereichs und die Breite ΔL des Bereichs, in dem die Testfunktion auf Null abfällt, sind groß gegenüber den charakteristischen atomaren Dimensionen a (wie Durchmesser und gegenseitiger Abstand der atomaren Bausteine) des betrachteten Mediums ($L \gg a$, $\Delta L \gg a$).¹⁷ Wichtig für die Mittelung ist nicht so sehr die genaue Form der Testfunktion, sondern allgemeine Stetigkeits- und Glattheitseigenschaften, die eine über atomare Abstände schnell konvergierende Taylor-Entwicklung gestatten. Anwenden der Mittelungsvorschrift

¹⁷Setzt man $L \simeq 10^{-8}\text{m} = 10^2\text{\AA}$ als minimales L an, so befinden sich in dem Mittelungsvolumen $L^3 = 10^{-24}\text{m}^3$ (bei normaler Materie) immer noch etwa 10^6 Atome. Jedes Volumen $V \geq L^3$ enthält dann so viele Elektronen und Kerne, daß die (mikroskopischen) Fluktuationen bei der räumlichen Mittelung vollkommen geglättet werden.

(2.105) auf die räumlichen und zeitlichen Ableitungen von $F(\mathbf{r}, t)$ liefert

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \langle F(\mathbf{r}, t) \rangle = \int d^3r' g(\mathbf{r}') \frac{\partial F(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t)}{\partial x_i} = \left\langle \frac{\partial F(\mathbf{r}, t)}{\partial x_i} \right\rangle, \quad (2.106)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle F(\mathbf{r}, t) \rangle = \int d^3r' g(\mathbf{r}') \frac{\partial F(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t)}{\partial t} = \left\langle \frac{\partial F(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right\rangle. \quad (2.107)$$

Mitteln wir nach obigem Verfahren die mikroskopischen Maxwell-Gleichungen (2.24) – (2.27), so sehen wir daß sich gemäß (2.106) und (2.107) die Form der homogenen Gleichungen (2.24) und (2.25) nicht ändert. Sie gehen bei der Mittelung einfach in die entsprechenden Gleichungen (2.37) und (2.38) der makroskopischen Theorie über:

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{B} \rangle = \nabla \cdot \langle \mathbf{B} \rangle = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.108)$$

$$\langle \nabla \times \mathbf{E} + \dot{\mathbf{B}} \rangle = \nabla \times \langle \mathbf{E} \rangle + \frac{\partial \langle \mathbf{B} \rangle}{\partial t} = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla \times \mathbf{E} + \dot{\mathbf{B}} = 0. \quad (2.109)$$

Die gemittelten inhomogenen Gleichungen (2.26) und (2.27) lauten zunächst

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{E} \rangle = \nabla \cdot \langle \mathbf{E} \rangle = \frac{1}{\varepsilon_0} \langle \varrho \rangle \quad \rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \langle \varrho \rangle, \quad (2.110)$$

$$\begin{aligned} \left\langle \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \dot{\mathbf{E}} \right\rangle &= \nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \langle \mathbf{E} \rangle}{\partial t} = \mu_0 \langle \mathbf{j} \rangle \\ &\rightarrow \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \dot{\mathbf{E}} = \mu_0 \langle \mathbf{j} \rangle. \end{aligned} \quad (2.111)$$

Die Aufgabe besteht nun darin, zu zeigen, daß die Gleichungen (2.110) und (2.111) in die Form der inhomogenen Gleichungen (2.39) und (2.40) der makroskopischen Theorie gebracht werden können. Legen wir der mikroskopischen Betrachtung wieder Punktladungen zugrunde, so gilt [siehe (2.5)]

$$\varrho(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}(t)]. \quad (2.112)$$

Wir wollen zwischen freien und (an Atomen) gebundenen Ladungen unterscheiden,

$$\varrho(\mathbf{r}, t) = \varrho_{\text{fr}}(\mathbf{r}, t) + \varrho_{\text{at}}(\mathbf{r}, t), \quad (2.113)$$

und schreiben

$$\varrho_{\text{at}}(\mathbf{r}, t) = \sum_n \varrho_n(\mathbf{r}, t), \quad (2.114)$$

$$\varrho_n(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha_n} q_{\alpha_n} \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha_n}(t)], \quad (2.115)$$

wobei die n -Summe über alle Atome läuft und die α_n -Summe über alle Ladungen des n -ten Atoms. Für das weitere ist es zweckmäßig, Massenmittelpunkts- und Relativkoordinaten einzuführen,

$$\mathbf{r}_{\alpha_n} \rightarrow \mathbf{r}_n + \mathbf{r}_{\alpha_n}. \quad (2.116)$$

Die Anwendung von (2.105) liefert dann für die gemittelte Ladungsdichte des n -ten Atoms

$$\begin{aligned} \langle \varrho_n(\mathbf{r}, t) \rangle &= \sum_{\alpha_n} q_{\alpha_n} \int d^3 r' g(\mathbf{r}') \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{r}_n(t) - \mathbf{r}_{\alpha_n}(t)] \\ &= \sum_{\alpha_n} q_{\alpha_n} g[\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t) - \mathbf{r}_{\alpha_n}(t)]. \end{aligned} \quad (2.117)$$

Da die Relativkoordinaten \mathbf{r}_{α_n} von der Größenordnung der atomaren Ausdehnung sind, unterscheiden sich die Argumente $\mathbf{r} - \mathbf{r}_n - \mathbf{r}_{\alpha_n}$ der Testfunktion in den einzelnen Summanden in (2.117) nur wenig von $\mathbf{r} - \mathbf{r}_n$, so daß sich für jeden Summanden eine Taylor-Entwicklung um $\mathbf{r} - \mathbf{r}_n$ anbietet,

$$\langle \varrho_n(\mathbf{r}, t) \rangle = \sum_{\alpha_n} q_{\alpha_n} \{ g[\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t)] - \nabla \cdot [\mathbf{r}_{\alpha_n}(t) g[\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t)] \mp \dots] \}. \quad (2.118)$$

Mit

$$q_n = \sum_{\alpha_n} q_{\alpha_n} \quad (2.119)$$

als der Gesamtladung des n -ten Atoms und

$$\mathbf{d}_n(t) = \sum_{\alpha_n} q_{\alpha_n} \mathbf{r}_{\alpha_n}(t) \quad (2.120)$$

als seinem elektrischen Dipolmoment geht die Gleichung (2.118) in

$$\langle \varrho_n(\mathbf{r}, t) \rangle = q_n g[\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t)] - \nabla \cdot \{ \mathbf{d}_n(t) g[\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t)] + \dots \} \quad (2.121)$$

bzw.

$$\langle \varrho_n(\mathbf{r}, t) \rangle = \langle q_n \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t)] \rangle - \nabla \cdot \{ \langle \mathbf{d}_n(t) \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t)] \rangle + \dots \} \quad (2.122)$$

über. Brechen wir die Entwicklung mit dem Dipolterm ab, so können wir also jeden atomaren Baustein des Mediums hinsichtlich seines Beitrages zur gemittelten Ladungsdichte als Summe einer Punktladung und eines Punktdipols ansehen.¹⁸ Für die gesamte gemittelte Ladungsdichte gilt dann [unter Berücksichtigung von (2.113) und (2.114) sowie der in (2.89) verwendeten Bezeichnung $\varrho'(\mathbf{r}, t)$ für $\langle \varrho(\mathbf{r}, t) \rangle$]

$$\langle \varrho(\mathbf{r}, t) \rangle \rightarrow \varrho'(\mathbf{r}, t) = \varrho(\mathbf{r}, t) - \nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) \quad (2.123)$$

mit

$$\varrho(\mathbf{r}, t) = \left\langle \varrho_{\text{fr}}(\mathbf{r}, t) + \sum_n q_n(t) \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t)] \right\rangle \quad (2.124)$$

und

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \left\langle \sum_n \mathbf{d}_n(t) \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t)] \right\rangle. \quad (2.125)$$

Mit Blick auf (2.110) ist somit der Anschluß an die Gleichung (2.87) hergestellt.

Gemäß (2.18) lautet die mikroskopische Stromdichte

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}(t) \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}(t)]. \quad (2.126)$$

Wir unterscheiden wieder zwischen freien und (an Atome) gebundenen Ladungen,

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}_{\text{fr}}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{j}_{\text{at}}(\mathbf{r}, t), \quad (2.127)$$

$$\mathbf{j}_{\text{at}}(\mathbf{r}, t) = \sum_n \mathbf{j}_n(\mathbf{r}, t), \quad (2.128)$$

¹⁸Siehe auch Abschnitt 3.7.

$$\mathbf{j}_n(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha_n} q_{\alpha_n} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha_n}(t) \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha_n}(t)]. \quad (2.129)$$

Führen wir wieder Massenmittelpunkts- und Relativkoordinaten ein, so liefert die Anwendung von (2.105) für die gemittelte Stromdichte des n -ten Atoms

$$\langle \mathbf{j}_n(\mathbf{r}, t) \rangle = \sum_{\alpha_n} q_{\alpha_n} [\dot{\mathbf{r}}_n(t) + \dot{\mathbf{r}}_{\alpha_n}(t)] g[\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t) - \mathbf{r}_{\alpha_n}(t)]. \quad (2.130)$$

Taylor-Entwicklung und Vektormanipulation führen (nach einer etwas länglichen Rechnung) für ein makroskopisch ruhendes Medium auf

$$\langle \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \rangle \rightarrow \mathbf{j}'(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \dot{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t) + \nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{r}, t), \quad (2.131)$$

wobei die Magnetisierung $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$ in niedrigster Ordnung durch

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}, t) = \left\langle \sum_n \mathbf{m}_n(t) \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t)] \right\rangle \quad (2.132)$$

gegeben ist,¹⁹ und

$$\mathbf{m}_n(t) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha_n} q_{\alpha_n} \mathbf{r}_{\alpha_n}(t) \times \dot{\mathbf{r}}_{\alpha_n}(t) = \sum_{\alpha_n} \frac{q_{\alpha_n}}{2m_{\alpha_n}} \mathbf{L}_{\alpha_n} \quad (2.133)$$

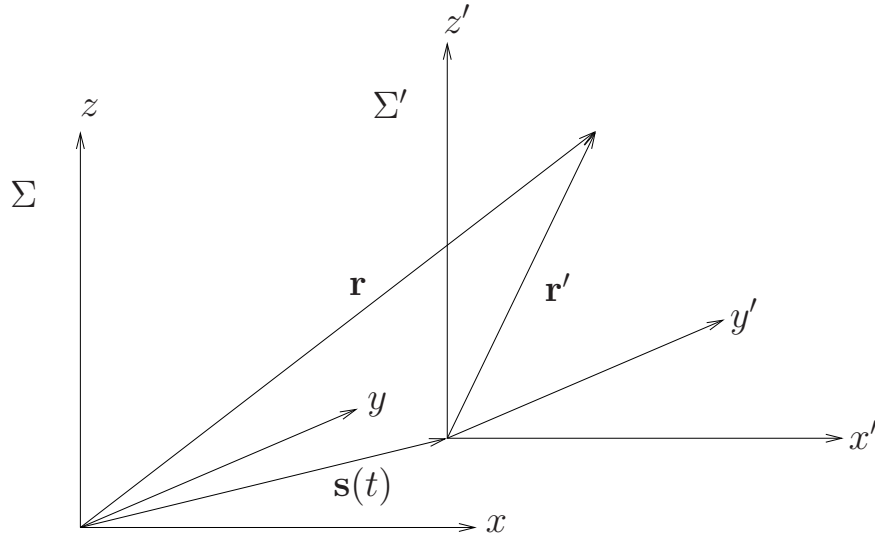
das magnetische Moment des n -ten Atoms ist (\mathbf{L}_{α_n} – Drehimpulse). In dieser Näherung kann also jeder atomare Baustein des Mediums hinsichtlich seines Beitrags zur Magnetisierung als magnetischer Punktdipol angesehen werden.²⁰

2.5 Relative Bedeutung von \mathbf{E} und \mathbf{B}

Wir wollen die (in einem Inertialsystem Σ gültigen) mikroskopischen Maxwell-Gleichungen (2.24) – (2.27) vom Standpunkt eines bewegten Beobachters analysieren. Dazu nehmen wir an, daß sich der Beobachter

¹⁹Für ein makroskopisch ruhendes Medium ist offensichtlich $\mathbf{r}_n(t) = \mathbf{r}_n(t')$ ($t \neq t'$).

²⁰Siehe auch Abschnitt 4.5.



in einem Koordinatensystem Σ' befindet, dessen Ursprung \mathbf{s} relativ zu dem Ursprung von Σ eine Translationsbewegung ausführt. Es gilt

$$\mathbf{r} = \mathbf{s} + \mathbf{r}'. \quad (2.134)$$

Um die zeitliche Änderung beispielsweise des elektrischen Feldes zu erhalten, wie sie in Σ' beobachtet wird, führen wir $\mathbf{r} = \mathbf{s}(t) + \mathbf{r}'$ in $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ ein und differenzieren die so entstandene Funktion $\mathbf{E} = \mathbf{E}[\mathbf{s}(t) + \mathbf{r}', t]$ nach der Zeit. Das Ergebnis ist offensichtlich

$$\frac{\partial' \mathbf{E}}{\partial t} = \dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{s}} \cdot \nabla \mathbf{E}. \quad (2.135)$$

Nun gilt bekanntlich

$$\nabla \times (\dot{\mathbf{s}} \times \mathbf{E}) = \dot{\mathbf{s}} \nabla \cdot \mathbf{E} - \dot{\mathbf{s}} \cdot \nabla \mathbf{E} \quad (2.136)$$

Damit kann (2.135) wie folgt umgeschrieben werden:

$$\frac{\partial' \mathbf{E}}{\partial t} = \dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{s}} \nabla \cdot \mathbf{E} - \nabla \times (\dot{\mathbf{s}} \times \mathbf{E}). \quad (2.137)$$

Analog finden wir für die magnetische Induktion

$$\frac{\partial' \mathbf{B}}{\partial t} = \dot{\mathbf{B}} + \dot{\mathbf{s}} \nabla \cdot \mathbf{B} - \nabla \times (\dot{\mathbf{s}} \times \mathbf{B}). \quad (2.138)$$

Wir setzen $\dot{\mathbf{E}}$ aus (2.137) in die Maxwell-Gleichung (2.27) ein und erhalten

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \left[\frac{\partial' \mathbf{E}}{\partial t} - \dot{\mathbf{s}} \nabla \cdot \mathbf{E} + \nabla \times (\dot{\mathbf{s}} \times \mathbf{E}) \right] = \mu_0 \mathbf{j}. \quad (2.139)$$

Unter Verwendung der Maxwell-Gleichung (2.26), $\nabla \cdot \mathbf{E} = \varrho/\varepsilon_0$, wird daraus

$$\nabla \times \left(\mathbf{B} - \frac{\dot{\mathbf{s}}}{c^2} \times \mathbf{E} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial' \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 (\mathbf{j} - \dot{\mathbf{s}} \varrho). \quad (2.140)$$

Nunmehr setzen wir $\dot{\mathbf{B}}$ aus (2.138) in die Maxwell-Gleichung (2.25) ein und erhalten

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial' \mathbf{B}}{\partial t} - \dot{\mathbf{s}} \nabla \cdot \mathbf{B} + \nabla \times (\dot{\mathbf{s}} \times \mathbf{B}) = 0, \quad (2.141)$$

woraus unter Verwendung der Maxwell-Gleichung (2.24), $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$,

$$\nabla \times (\mathbf{E} + \dot{\mathbf{s}} \times \mathbf{B}) + \frac{\partial' \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (2.142)$$

folgt. Mit

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} - \frac{\dot{\mathbf{s}}}{c^2} \times \mathbf{E} \quad (2.143)$$

und

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \dot{\mathbf{s}} \times \mathbf{B} \quad (2.144)$$

sowie

$$\mathbf{j}' = \mathbf{j} - \dot{\mathbf{s}} \varrho \quad (2.145)$$

lassen sich die Gleichungen (2.140) und (2.142) in die Form

$$\nabla \times \mathbf{B}' - \frac{1}{c^2} \dot{\mathbf{E}}' + \frac{\partial'}{\partial t} \left(\frac{\dot{\mathbf{s}}}{c^2} \times \mathbf{B} \right) = \mu_0 \mathbf{j}', \quad (2.146)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}' + \dot{\mathbf{B}}' + \frac{\partial'}{\partial t} \left(\frac{\dot{\mathbf{s}}}{c^2} \times \mathbf{E} \right) = 0 \quad (2.147)$$

bringen.

Um zu sehen, was mit den zwei restlichen Maxwell-Gleichungen passiert, bilden wir die Divergenz von \mathbf{B}' und \mathbf{E}' . Aus (2.143) und (2.144) folgt dann

$$\nabla \cdot \mathbf{B}' = \nabla \cdot \mathbf{B} + \frac{\dot{\mathbf{s}}}{c^2} \cdot \nabla \times \mathbf{E}, \quad (2.148)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}' = \nabla \cdot \mathbf{E} - \dot{\mathbf{s}} \cdot \nabla \times \mathbf{B}. \quad (2.149)$$

Wir verwenden die Maxwell-Gleichungen (2.24) – (2.27) und erhalten

$$\nabla \cdot \mathbf{B}' + \frac{\dot{\mathbf{s}}}{c^2} \cdot \dot{\mathbf{B}} = 0, \quad (2.150)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}' + \frac{\dot{\mathbf{s}}}{c^2} \cdot \dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{\varepsilon_0} \varrho', \quad (2.151)$$

wobei

$$\varrho' = \varrho - \frac{\dot{\mathbf{s}}}{c^2} \cdot \mathbf{j} \quad (2.152)$$

ist.

Die Ergebnisse zeigen, daß bei dem vollzogenen Übergang von Σ zu Σ' die Maxwell-Gleichungen im strikt nichtrelativistischen Grenzfall ($\dot{\mathbf{s}}/c \ll 1$) forminvariant bleiben, d.h., wenn in den entsprechenden Gleichungen [wie (2.143), (2.146), (2.147) und (2.150) – (2.152)] Beiträge, die proportional zu $\dot{\mathbf{s}}/c$ sind, konsequent vernachlässigt werden,

$$\nabla \cdot \mathbf{B}' = 0 \quad (2.153)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}' + \dot{\mathbf{B}}' = 0 \quad (2.154)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}' = \frac{1}{\varepsilon_0} \varrho' \quad (2.155)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}' - \frac{1}{c^2} \dot{\mathbf{E}}' = \mu_0 \mathbf{j}'. \quad (2.156)$$

In der betrachteten Näherung ist der Zusammenhang zwischen gestrichenen und ungestrichenen Größen gemäß

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B}, \quad (2.157)$$

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \dot{\mathbf{s}} \times \mathbf{B}, \quad (2.158)$$

$$\rho' = \rho, \quad (2.159)$$

$$\mathbf{j}' = \mathbf{j} - \dot{\mathbf{s}}\rho \quad (2.160)$$

gegeben, und es gilt für den bewegten Beobachter die Kontinuitätsgleichung, wie unschwer zu sehen ist. Aus (2.160) zusammen mit (2.21) folgt

$$\nabla \cdot \mathbf{j}' = \nabla \cdot \mathbf{j} - \dot{\mathbf{s}} \cdot \nabla \rho = -\dot{\rho} - \dot{\mathbf{s}} \cdot \nabla \rho, \quad (2.161)$$

also

$$\dot{\rho} + \dot{\mathbf{s}} \cdot \nabla \rho + \nabla \cdot \mathbf{j}' = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \dot{\rho}' + \nabla \cdot \mathbf{j}' = 0. \quad (2.162)$$

Ist $\dot{\mathbf{s}} \equiv \mathbf{v} = \text{const.}$, stellen Σ und Σ' Inertialsysteme dar und folglich müssen die Maxwell-Gleichungen beim Übergang von Σ nach Σ' form-invariant bleiben und zwar nicht nur in der Grenze $\mathbf{v}/c \rightarrow 0$. Dazu ist es offensichtlich notwendig, die störenden dritten Terme auf den linken Seiten der Gleichungen (2.146) und (2.147) sowie die störenden zweiten Terme auf den linken Seiten der Gleichungen (2.150) und (2.151) zu eliminieren. Dies kann erreicht werden, wenn beim Übergang von Σ zu Σ' von der Galilei-Transformation abgegangen, neben den drei räumlichen Koordinaten auch die Zeit transformiert wird und (unter Berücksichtigung von Korrekturtermen bis einschließlich \mathbf{v}/c)

$$\mathbf{r} = \mathbf{v}t' + \mathbf{r}', \quad t = t' + \frac{\mathbf{v}}{c^2} \cdot \mathbf{r}' \quad (2.163)$$

gesetzt wird. Dann gilt beispielsweise für die Divergenz (bezüglich \mathbf{r}') von \mathbf{B}'

$$\nabla' \cdot \mathbf{B}' = \nabla \cdot \mathbf{B}' + \frac{\mathbf{v}}{c^2} \cdot \dot{\mathbf{B}}, \quad (2.164)$$

wie unschwer zu sehen ist. Analog lassen sich die anderen Ausdrücke zusammenfassen, und die Gleichungen (2.146), (2.147), (2.150) und (2.151) nehmen (in der nunmehr betrachteten Näherung) die bekannte Form der Maxwell-Gleichungen

$$\nabla' \cdot \mathbf{B}' = 0 \quad (2.165)$$

$$\nabla' \times \mathbf{E}' + \dot{\mathbf{B}}' = 0 \quad (2.166)$$

$$\nabla' \cdot \mathbf{E}' = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho' \quad (2.167)$$

$$\nabla' \times \mathbf{B}' - \frac{1}{c^2} \dot{\mathbf{E}}' = \mu_0 \mathbf{j}' \quad (2.168)$$

mit den Transformationsformeln (2.143), (2.144), (2.145) und (2.152) an. Wie wir später im Zusammenhang mit der (die Galilei-Transformation relativistisch verallgemeinernden) **Lorentz-Transformation** sehen werden, sind diese auf (2.163) basierenden Transformationsformeln bis in \mathbf{v}/c lineare Glieder richtig. Mit wachsendem \mathbf{v}/c sind weitere relativistische Korrekturen notwendig.

Die Ergebnisse zeigen, daß die Forminvarianz der Maxwell-Gleichungen beim Übergang von einem Inertialsystem zu einem anderen Inertialsystem zwingend erfordert, neben den räumlichen Koordinaten auch die *Zeit* zu transformieren. Ferner sehen wir, daß die Bedeutung von elektrischem Feld und magnetischem Induktionsfeld relativ ist, was auch bereits anschaulich verständlich ist. Ruhende Ladungen stellen Quellen des elektrischen Feldes dar. Da ein bewegter Beobachter bewegte Ladungen wahrnimmt, muß er annehmen, daß elektrische Ströme fließen und somit entsprechende Wirbel des magnetischen Induktionsfeldes vorhanden sind.

Kapitel 3

Elektrostatik

Das System der Maxwell-Gleichungen ist viel zu komplex, als daß es möglich wäre, die *universelle* Lösung zu konstruieren, die alle physikalischen Konsequenzen expliziert. Es ist deshalb angebracht, die Maxwell-Gleichungen für wohldefinierte spezielle Situationen zu untersuchen und auf diese Weise Schritt für Schritt ihren vollen physikalischen Gehalt zu erschließen.

3.1 Das statische elektromagnetische Feld

In diesem Sinne beginnen wir mit der Untersuchung zeitunabhängiger elektromagnetischer Felder, d.h. mit dem statischen Fall. Wir wollen also annehmen, daß (im gewählten Inertialsystem) die Gleichungen

$$\dot{\mathbf{E}} = 0, \quad \dot{\mathbf{B}} = 0, \quad (3.1)$$

$$\dot{\mathbf{D}} = 0, \quad \dot{\mathbf{H}} = 0, \quad (3.2)$$

gelten. Die Maxwell-Gleichungen (2.37) – (2.40) zerfallen dann in zwei Gruppen von jeweils zwei Gleichungen.

Elektrische Feldgleichungen:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \varrho, \quad (3.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (3.4)$$

Magnetische Feldgleichungen:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3.5)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}. \quad (3.6)$$

In der mikroskopischen Elektrodynamik (Vakuumelektrodynamik), die nur die Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} kennt, sind die elektrischen Feldgleichungen nicht mit den magnetischen Feldgleichungen gekoppelt, so daß jede Zweiergruppe für sich untersucht werden kann. Dies ist auch in der makroskopischen Elektrodynamik der Fall, da angenommen werden kann, daß im statischen Fall die Materialgleichungen (2.43) und (2.44) entkoppeln,

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \mathbf{D}[\mathbf{E}(\mathbf{r})], \quad (3.7)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}[\mathbf{B}(\mathbf{r})]. \quad (3.8)$$

Die Gleichungen (3.3) und (3.4) definieren dann die **Elektrostatik** und entsprechend (3.5) und (3.6) die **Magnetostatik** als zwei Gebiete, die unabhängig voneinander behandelt werden können.

Es stellt sich die Frage, ob die Annahmen (3.1) und (3.2) widerspruchsfrei sind und welche Konsequenzen sie eventuell nach sich ziehen. Aus $\dot{\mathbf{D}} = 0$ und (3.3) folgt

$$0 = \nabla \cdot \dot{\mathbf{D}} = \dot{\rho} \quad \rightsquigarrow \quad \dot{\rho} = 0. \quad (3.9)$$

Andererseits muß die Kontinuitätsgleichung

$$\dot{\rho} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (3.10)$$

erfüllt sein, so daß folglich

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (3.11)$$

gelten muß. Das heißt, es dürfen (im Endlichen) keine Stromquellen existieren. In jeden Raumbereich muß genausoviel Strom hinein- wie herausfließen,

$$\int_{(V)} \mathbf{d}\mathbf{a} \cdot \mathbf{j} = 0. \quad (3.12)$$

Aus $\dot{\mathbf{H}} = 0$ und (3.6) folgt

$$0 = \nabla \times \dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{j}} \quad \rightsquigarrow \quad \dot{\mathbf{j}} = 0. \quad (3.13)$$

Die Stromdichte muß also zeitlich konstant sein. Falls $\dot{\mathbf{j}} \neq 0$ wäre, hätte $\dot{\mathbf{H}}$ Wirbel und könnte nicht identisch verschwinden. Statische elektromagnetische Felder erfordern also zeitunabhängige Ladungs- und Stromdichten, d.h. **stationäre** Ladungs- und Stromdichten. Elektrostatik und Magnetostatik bilden insbesondere die Grundlage für das umfangreiche Gebiet der *Gleichstromtechnik*.

Anmerkung

- Gemäß (2.7) bedeutet die Bedingung $\dot{\varrho} = 0$ für strikt punktförmige Ladungen ruhende Ladungen, so daß dann gemäß (2.18) $\dot{\mathbf{j}} = 0$ folgt. Die Bedingungen $\dot{\varrho} = 0$ und $\dot{\mathbf{j}} = 0$ mit $\mathbf{j} \neq 0$ sowie $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ lassen sich offensichtlich nur für „verschmierte“ Ladungs- und Stromdichten erfüllen, die sich im Ergebnis von entsprechenden Mittelungsverfahren ergeben.

3.2 Elektrisches Feld von Ladungen im freien Raum

Die einfachste Aufgabe in der Elektrostatik ist die Berechnung des elektrischen Feldes einer oder sehr weniger als punktförmig anzusehenden Ladungen im unendlich ausgedehnten Raum (Vakuum). Betrachten wir eine Punktladung, die ohne Einschränkung der Allgemeinheit als im Koordinatenursprung befindlich angesehen werden kann,

$$\varrho(\mathbf{r}) = q \delta(\mathbf{r}). \quad (3.14)$$

Für diesen Fall nimmt die Feldgleichung (3.3) die spezielle Form

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = q \delta(\mathbf{r}) \quad (3.15)$$

an, und hinzu kommt die Feldgleichung (3.4),

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0. \quad (3.16)$$

Gesucht ist die Lösung dieser beiden Differentialgleichungen, die in der Grenze $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$ asymptotisch hinreichend schnell verschwindet. Wie wir später noch sehen werden, besitzen die homogenen Gleichungen keine Lösung, die dieser Randbedingung im Unendlichen genügt. Es muß also allein eine Lösung der inhomogenen Gleichungen gesucht werden, die der genannten Randbedingung genügt. Da das Problem offensichtlich kugelsymmetrisch ist, liegt es nahe anzunehmen, daß

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r) \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (3.17)$$

gilt. Ein Feld dieser Art ist wirbelfrei (siehe Zentralkraftfeld in der Mechanik), so daß die Gleichung (3.16) erfüllt ist. Es verbleibt also die Gleichung (3.15), die in integraler Formulierung

$$\varepsilon_0 \int_V d^3r \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 \int_{(V)} \mathbf{d}\mathbf{a} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = q \quad (3.18)$$

lautet (V – Volumen eines Raumbereiches, in dessen Innerem sich die Punktladung befindet). Integrieren wir über die Oberfläche einer Kugel (vom Radius r), so folgt mit (3.17)

$$4\pi r^2 \varepsilon_0 E(r) = q \quad \rightsquigarrow \quad E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \quad (3.19)$$

und somit löst

$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3}} \quad (3.20)$$

die beiden Maxwell-Gleichungen (3.15) und (3.16) und erfüllt die Randbedingung für $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$ wie $|\mathbf{r}|^{-2}$. Die Lösung (3.20) definiert das **Coulomb-Feld** einer Punktladung. Es ist klar, daß, wenn sich die Punktladung nicht im Koordinatenursprung, sondern an einem gewissen Punkt \mathbf{r}' befindet, das Coulomb-Feld durch

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (3.21)$$

gegeben ist.

Betrachten wir als nächstes endlich viele Punktladungen q_α an den Orten \mathbf{r}_α . Da bekanntlich (wegen der Linearität der Feldgleichungen) das Superpositionsprinzip gilt, ist das elektrische Feld dieser Punktladungen einfach die Summe der Felder der einzelnen Punktladungen,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\alpha} q_{\alpha} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}|^3}. \quad (3.22)$$

Der Übergang zu einer kontinuierlich verschmierten Ladungsverteilung in einem endlichen Raumbereich (inselförmige Ladungsverteilung) liefert schließlich die quellenmäßige Darstellung

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \varrho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (3.23)$$

als der (die Randbedingung im Unendlichen befriedigenden) Lösung der beiden Feldgleichungen (3.3) und (3.4) für $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$.¹

Es sei eine Punktladung q_1 am Ort \mathbf{r}_1 . Das elektrische Feld an einem Ort \mathbf{r}_2 ($\neq \mathbf{r}_1$) ist dann gemäß (3.21)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_2) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}, \quad (3.24)$$

so daß eine Punktladung q_2 (im Sinne einer Probeladung) am Ort \mathbf{r}_2 entsprechend dem Lorentzschen Kraftgesetz die Kraft

$$\mathbf{F} \equiv \mathbf{F}_{21} = q_2 \mathbf{E}(\mathbf{r}_2) \quad (3.25)$$

erfährt, d.h., wir finden das **Coulombsche Kraftgesetz**:

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \quad (3.26)$$

¹Im Falle eines homogenen und isotropen linearen Hintergrundmediums (anstelle des Vakuums) kann in (3.20) – (3.23) ϵ_0 durch ϵ ersetzt werden. Beachte, daß im statischen Fall aus der Gleichung (2.46) die Gleichung (2.55) mit $\epsilon_{ij}(\mathbf{r})/\epsilon_0 = 1 + \int_0^\infty d\tau \chi_{ij}(\mathbf{r}, \tau)$ folgt.

Erwartungsgemäß ist umgekehrt die Kraft, die die Punktladung q_1 im Feld der Punktladung q_2 erfährt,

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{q_2 q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} = -\mathbf{F}_{21}. \quad (3.27)$$

Anmerkungen

- Zur Berechnung der Kraft \mathbf{F}_{21} auf die Punktladung q_2 ist nur das von der Punktladung q_1 herrührende Feld berücksichtigt worden. Es ist also nicht berücksichtigt worden, daß die Punktladung q_2 auch ein Feld erzeugt. Der Betrag dieses Feldes wäre unendlich groß, da sich die Punktladung im Zentrum ihres eigenen Feldes befindet. Aus diesem Grund hätte es jedoch keine definierte Richtung, so daß es vernünftig ist anzunehmen, daß diese Kraft dynamisch nicht wirksam werden kann. Im Zusammenhang mit der Wechselwirkung einer Ladung mit dem von ihr erzeugten Feld spricht man auch von **Selbstwechselwirkung**. Im Falle von kontinuierlichen und beschränkten („verschmierten“) Ladungsdichten $\varrho(\mathbf{r})$ trägt die elektrische Kraftdichte

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \varrho(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (3.28)$$

und somit die auf die im Volumenelement dV am Ort \mathbf{r} befindliche Ladung

$$dq = dV \varrho(\mathbf{r}) \quad (3.29)$$

wirkende Kraft

$$d\mathbf{F} = dV \varrho(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (3.30)$$

[vgl. (2.33)] mit $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ gemäß (3.23) der nunmehr endlichen Selbstwechselwirkung Rechnung.

- Die Coulomb-Kraft folgt dem gleichen Abstandsgesetz wie die Gravitationskraft, die die Kepler-Bewegung bedingt. Im Gegensatz zur Gravitationskraft kann die Coulomb-Kraft sowohl anziehend als auch abstoßend wirken. Gleichnamige Ladungen stoßen einander ab, ungleichnamige ziehen sich gegenseitig an. Wie die Gravitationskraft ist die Coulomb-Kraft zentral und konservativ.

- Das Coulombsche Kraftgesetz verknüpft elektrische Ladungen mit Kräften und Längen. Je nach dem gewählten Maßsystem ergibt sich dann der Zahlenwert von ε_0 . Im gesetzlichen Maßsystem wird bekanntlich neben den Einheiten kg (Masse) m (Länge) und s (Zeit) die Einheit A für den elektrischen Strom verwendet, so daß die Ladungseinheit $[q] = \text{As} = \text{C}$ ist. Folglich ist $[\mathbf{E}] = \text{NA}^{-1}\text{s}^{-1} = \text{Vm}^{-1}$ die Einheit der elektrischen Feldstärke (mit $1\text{VAs} = 1\text{Nm} = 1\text{W}$) und $[\mathbf{D}] = \text{Cm}^{-2} = \text{Asm}^{-2}$ die Einheit des Verschiebungsfeldes. Die Maßzahl von ε_0 erhält man also, wenn man die Kraft in N mißt, welche zwei Einheitsladungen von jeweils 1C im Abstands von 1m aufeinander ausüben. Diese Kraft ist $F = 8.987 \dots \times 10^9 \text{N}$, woraus der Zahlenwert (2.30) für ε_0 folgt.

3.3 Elektrisches Feld und skalares Potential

Bisher haben wir das elektrische Feld einer Ladungsverteilung im ansonsten leeren Raum berechnet und dazu die zwei Gleichungen für das Vektorfeld direkt integriert. Im Hinblick auf die Berechnung des elektrischen Feldes mit Randbedingungen im Endlichen kann die Aufgabe durch die Einführung des Potentials als skalare Größe vereinfacht werden. Ausgangspunkt sind wieder die Feldgleichungen (3.3) und (3.4),

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho, \quad (3.31)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (3.32)$$

Die Wirbelfreiheit von \mathbf{E} gestattet es generell, \mathbf{E} als Gradient eines skalaren Potentials φ anzusetzen,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\varphi(\mathbf{r}). \quad (3.33)$$

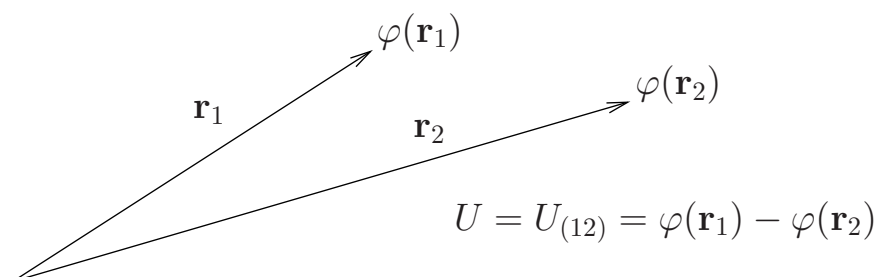
Damit ist die Gleichung (3.32) automatisch erfüllt, und es verbleibt nur noch die Gleichung (3.31). Mit dem Ansatz (3.33) erhalten wir aus

(3.31) für φ die **Poisson-Gleichung**:²

$$\Delta\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \varrho(\mathbf{r}) \quad (3.34)$$

Die Berechnung des vektoriellen elektrischen Feldes ist damit auf die Lösung der Poisson-Gleichung für das skalare Potentialfeld zurückgeführt. Aus der Lösung dieser Gleichung läßt sich das elektrische Feld dann sofort durch Gradientenbildung ableiten.

Wie jedes Potential ist auch das elektrostatische Potential φ nur bis auf eine Konstante bestimmt, so daß nur Potentialdifferenzen relevant



sein können. Eine solche Potentialdifferenz wird auch als **Spannung** U bezeichnet. Die Einheit des Potentials und der Spannung ist im gesetzlichen Maßsystem offensichtlich das Volt, $[\varphi] = [U] = \text{V}$. Es ist unschwer zu sehen, daß das Potential einer am Ort \mathbf{r}' befindlichen Punktladung q als

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (3.35)$$

angegeben werden kann, denn es ist

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (3.36)$$

in Übereinstimmung mit (3.21).

²Gilt eine Materialgleichung der Gestalt $D_i(\mathbf{r}) = \varepsilon_{ij}(\mathbf{r})E_j(\mathbf{r})$, nimmt die Potentialgleichung [wegen $\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \varrho(\mathbf{r})$ anstelle von (3.31)] die Form $\varepsilon_{ij,i}(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r})_{,j} + \varepsilon_{ij}(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r})_{,j,i} = -\varrho(\mathbf{r})$ an. Speziell für isotrope Medien gilt $\nabla\varepsilon(\mathbf{r}) \cdot \nabla\varphi(\mathbf{r}) + \varepsilon(\mathbf{r})\Delta\varphi(\mathbf{r}) = -\varrho(\mathbf{r})$ und für isotrope und homogene Medien $\Delta\varphi(\mathbf{r}) = -\varrho(\mathbf{r})/\varepsilon$.

Da es sich bei der Poisson-Gleichung um eine lineare Differentialgleichung handelt, gilt für das Potential ebenfalls das Superpositionsprinzip. Das Potential mehrerer Punktladungen q_α an den Orten \mathbf{r}_α ist folglich

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\alpha} \frac{q_\alpha}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha|}, \quad (3.37)$$

und für eine inselförmige Ladungsverteilung der Dichte $\varrho(\mathbf{r})$ gilt:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\varrho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (3.38)$$

Ist ganz allgemein eine Lösung der Poisson-Gleichung bekannt, können weitere Lösungen konstruiert werden, indem zu dieser speziellen Lösung beliebige Lösungen der homogenen Potentialgleichung (**Laplace-Gleichung**)

$$\Delta\varphi = 0 \quad (3.39)$$

addiert werden. Die Eindeutigkeit wird wieder durch die Randbedingungen gesichert. Das elektrische Feld einer inselförmigen Ladungsverteilung muß in der Grenze $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$ verschwinden. Wie sich zeigen läßt (wir kommen darauf im Abschnitt 3.9.1 zurück), ist die einzige Lösung der Laplace-Gleichung, die die physikalische Randbedingung im Unendlichen erfüllt, eine Konstante, die, da das Potential nur bis auf eine solche bestimmt ist, weggelassen werden kann. Eine Lösung der Poisson-Gleichung, die der Randbedingung im Unendlichen genügt, muß folglich eindeutig sein.

Wir wollen das Potential einer allgemeinen, inselförmigen Ladungsverteilung (im ansonsten leeren Raum), d.h. (3.38), durch direkte Integration der Poisson-Gleichung mit Hilfe der Methode der Greenschen Funktion konstruieren. Dazu stellen wir die Ladungsdichte in Form der Identität

$$\varrho(\mathbf{r}) = \int d^3r' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \varrho(\mathbf{r}') \quad (3.40)$$

dar, und definieren die (freie) Green-Funktion $G^{(0)}(\mathbf{r})$ der Poisson-Gleichung als Lösung der Gleichung

$$\Delta G^{(0)}(\mathbf{r}) = -\delta(\mathbf{r}), \quad (3.41)$$

die die Randbedingung im Unendlichen befriedigt. Offensichtlich kann das Potential dann in der Form

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int d^3r' G^{(0)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \varrho(\mathbf{r}') \quad (3.42)$$

dargestellt werden, denn es gilt

$$\Delta\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int d^3r' \varrho(\mathbf{r}') \underbrace{\Delta G^{(0)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}_{-\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \varrho(\mathbf{r}), \quad (3.43)$$

und die Randbedingung im Unendlichen ist erfüllt. Das Problem der Berechnung des Potentials für eine allgemeine Ladungsverteilung ist damit auf das Problem der Berechnung des Potentials einer Punktladung zurückgeführt, denn die Gleichung (3.41) ist (bis auf den irrelevanten Faktor $1/\varepsilon_0$) nichts anderes als die Potentialgleichung für eine im Koordinatenursprung befindliche Punktladung. Da gemäß (3.35)

$$G^{(0)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r}|} \quad (3.44)$$

gilt, wird aus (3.42)

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \frac{\varrho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \quad (3.45)$$

d.h., wir erhalten erwartungsgemäß (3.38). Gradientenbildung liefert dann das bekannte Resultat (3.23) für die elektrische Feldstärke:

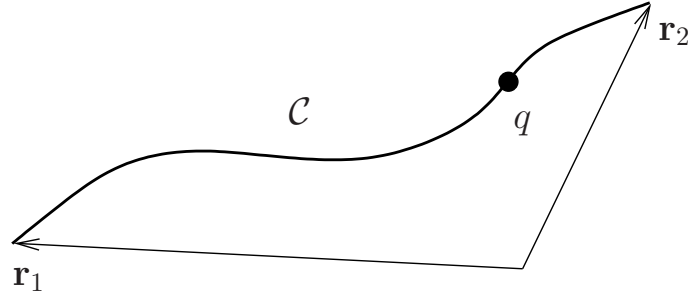
$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -\nabla\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \varrho(\mathbf{r}') \nabla \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \varrho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

3.4 Elektrische Feldenergie

Wenn eine Punktladung q im elektrischen Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ längs einer Kurve \mathcal{C} verschoben wird, wird die Arbeit

$$W = \int_{\mathcal{C}} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) = q \int_{\mathcal{C}} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (3.47)$$

verrichtet. Da die elektrische Feldstärke ein Potential besitzt, ist die



Arbeit wegunabhängig,

$$\begin{aligned} W &= q \int_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -q \int_C d\mathbf{r} \cdot \nabla \varphi(\mathbf{r}) \\ &= -q \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} d\varphi = q [\varphi(\mathbf{r}_1) - \varphi(\mathbf{r}_2)] = qU_{12}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Es existiert also eine potentielle Energie W_{pot} , und es kann

$$W_{\text{pot}}(\mathbf{r}) = q \varphi(\mathbf{r}) \quad (3.49)$$

gesetzt werden. $W_{\text{pot}}(\mathbf{r})$ mißt dann die Arbeit, die von außen (d.h. gegen die elektrische Feldkraft) an der Punktladung zu verrichten ist, um sie aus dem Unendlichen an den Punkt \mathbf{r} zu verschieben,

$$W_{\text{pot}}(\mathbf{r}) = -q \int_{\infty}^{\mathbf{r}} d\mathbf{r}' \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}') = q \int_{\infty}^{\mathbf{r}} d\varphi = q \varphi(\mathbf{r}). \quad (3.50)$$

Insbesondere ist gemäß (3.50) und (3.35) die potentielle Energie einer Punktladung q am Ort \mathbf{r} im elektrischen Feld einer am Ort \mathbf{r}' befindlichen Punktladung q'

$$W_{\text{pot}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (3.51)$$

Wir berechnen die Arbeit, die notwendig ist, ein (endliches) Punktladungssystem zu installieren. Um die erste Punktladung q_1 aus dem Unendlichen an den Ort \mathbf{r}_1 zu bringen, ist offensichtlich keine Arbeit erforderlich ($W_1 = 0$). Um die zweite Ladung q_2 an den Ort \mathbf{r}_2 zu bringen,

ist nach (3.51) die Arbeit

$$W_2 = q_2 \varphi_1(\mathbf{r}_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \quad (3.52)$$

notwendig. Um die Ladung q_3 (im elektrischen Feld der Punktladungen q_1 und q_2) and den Ort \mathbf{r}_3 zu bringen, muß die Arbeit

$$\begin{aligned} W_3 &= q_3 [\varphi_1(\mathbf{r}_3) + \varphi_2(\mathbf{r}_3)] \\ &= \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|} + \frac{q_2}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2|} \right) \end{aligned} \quad (3.53)$$

verrichtet werden. Fortsetzen des Verfahrens führt offenbar dazu, daß beim Einbringen der α -ten Punktladung q_α an den Ort \mathbf{r}_α die Arbeit

$$W_\alpha = q_\alpha \sum_{\alpha'=1}^{\alpha-1} \varphi_{\alpha'}(\mathbf{r}_\alpha) = \frac{q_\alpha}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\alpha'=1}^{\alpha-1} \frac{q_{\alpha'}}{|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_{\alpha'}|} \quad (3.54)$$

aufzuwenden ist. Die Gesamtarbeit zum Installieren von N Punktladungen ist dann

$$W = \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\alpha'=1}^{\alpha-1} \frac{q_\alpha q_{\alpha'}}{|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_{\alpha'}|} \quad (3.55)$$

bzw.

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum'_{\alpha, \alpha'} \frac{q_\alpha q_{\alpha'}}{|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_{\alpha'}|}. \quad (3.56)$$

Der Strich an dem Summenzeichen bedeutet, daß bei der Summation die Vorschrift $\alpha \neq \alpha'$ einzuhalten ist. Die durch die Gleichung (3.56) gegebene Gesamtarbeit definiert den Energieinhalt der betrachteten N Punktladungen. Für eine kontinuierliche, inselförmige Ladungsverteilung läßt sich die Gleichung (3.56) wie folgt verallgemeinern:

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int d^3r \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (3.57)$$

Man beachte, daß der durch diese Gleichung definierte Energieinhalt einer kontinuierlichen und beschränkten Ladungsverteilung die in diesem Fall endliche Selbstenergie einschließt.³ Aus (3.57) folgt insbesondere, daß

$$\delta W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r \int d^3r' \frac{\delta\rho(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (3.58)$$

die Änderung des Energieinhaltes bei einer Änderung der Ladungsdichte ρ um $\delta\rho$ ist.

Wir berücksichtigen (3.38) und finden, daß (3.57) als

$$W = \frac{1}{2} \int d^3r \rho(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r}) \quad (3.59)$$

geschrieben werden kann, wobei φ das Potential des durch die Ladungsverteilung ρ erzeugten elektrischen Feldes ist. Entsprechend nimmt (3.58) die Form

$$\delta W = \int d^3r \delta\rho(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r}) \quad (3.60)$$

an. Andererseits folgt aus (3.59)

$$\delta W = \frac{1}{2} \int d^3r \delta\rho(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \int d^3r \rho(\mathbf{r})\delta\varphi(\mathbf{r}), \quad (3.61)$$

und der Vergleich mit (3.60) liefert

$$\int d^3r \delta\rho(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r}) = \int d^3r \rho(\mathbf{r})\delta\varphi(\mathbf{r}). \quad (3.62)$$

Wir formen (3.59) weiter um, indem wir unter Zuhilfenahme der Poisson-Gleichung (3.34) ρ durch $\Delta\varphi$ ausdrücken:

$$W = -\frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r \varphi(\mathbf{r})\Delta\varphi(\mathbf{r})$$

³Die Bedingung $\alpha \neq \alpha'$ in (3.56) schließt die unendliche Selbstenergie einer punktförmigen Ladungsverteilung aus.

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\varepsilon_0}{2} \left\{ \int d^3r \nabla \cdot [\varphi(\mathbf{r}) \nabla \varphi(\mathbf{r})] - \int d^3r [\nabla \varphi(\mathbf{r})]^2 \right\} \\
&= -\frac{\varepsilon_0}{2} \underbrace{\int_{(V) \rightarrow \infty} d\mathbf{a} \cdot \varphi(\mathbf{r}) \nabla \varphi(\mathbf{r})}_0 + \frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3r [\nabla \varphi(\mathbf{r})]^2 \\
&= \frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3r [\nabla \varphi(\mathbf{r})]^2. \tag{3.63}
\end{aligned}$$

Das Oberflächenintegral verschwindet in der Grenze $V \rightarrow \infty$, da φ wie r^{-1} und $\Delta\varphi$ wie r^{-2} verschwindet, die Oberfläche jedoch nur wie r^2 anwächst. Mit (3.33) erhalten wir also das folgende Ergebnis:

$$W_{\text{el}} \equiv W = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int d^3r \mathbf{E}^2(\mathbf{r}) \tag{3.64}$$

Während in der Ausgangsformel (3.57) der Energieinhalt durch die Ladungen und ihre gegenseitige Anordnung bestimmt wird, wird er nunmehr nur noch durch das herrschende elektrische Feld bestimmt. Das betrachtete System besitzt also eine Energie, da ein elektrisches Feld vorhanden ist, wobei aus (3.64) nicht mehr abzulesen ist, wie dieses Feld zustande gekommen ist. Die Gleichung (3.64) impliziert, einem elektrischen Feld die Energiedichte

$$w_{\text{el}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \mathbf{E}^2(\mathbf{r}) \tag{3.65}$$

zuzuschreiben.⁴ Es ist klar, daß die Energiedichte auch in Raumbereichen, in denen überhaupt keine Ladungen vorhanden sind, von Null verschieden sein kann.

⁴In der Formulierung mit den Feldern \mathbf{D} und \mathbf{E} kann die Gleichung (3.65) auch für den Fall eines linearen Hintergrundmediums (anstelle des Vakuums) mit vorgegebenem $\varepsilon(\mathbf{r})$ angewendet werden (siehe dazu Abschnitt 3.7.3).

Anmerkung:

- Ebenso wie (3.57) enthalten (3.64) und (3.65) Selbstenergiebeiträge. Diese sind endlich für beschränkte Ladungsverteilungen (also Ladungsdichten ohne Distributionscharakter). Die Selbstenergiebeiträge führen dazu, daß die elektrische Feldenergiedichte und damit auch die gesamte elektrische Feldenergie nicht negativ werden kann. Das Weglassen der unendlich großen Selbstenergiebeiträge im Falle von Punktladungen [Gleichung (3.56)] hat zur Folge, daß der Energieinhalt sowohl positiv als auch negativ sein kann. Deshalb liefert (3.56) genaugenommen nur die Wechselwirkungsenergie des Punktladungssystems.

3.5 Elektrischer Spannungstensor

Entsprechend dem Lorentzschen Kraftgesetz (2.33) wirkt auf eine Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$ in einem elektrischen Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ bekanntlich die Kraftdichte

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}). \quad (3.66)$$

Die auf ein endliches Volumen bezogene Gesamtkraft ist dann [bei Berücksichtigung der Feldgleichung (3.3)]

$$\mathbf{F} = \int_V d^3r \mathbf{f}(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 \int_V d^3r \mathbf{E}(\mathbf{r}) \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}). \quad (3.67)$$

Es gilt

$$\nabla \cdot \mathbf{E} \mathbf{E} = \mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \nabla \mathbf{E}, \quad (3.68)$$

d.h.

$$\mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{E} \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \mathbf{E}. \quad (3.69)$$

Ferner gilt

$$0 = \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \frac{1}{2} \nabla \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \mathbf{E}, \quad (3.70)$$

d.h.

$$\mathbf{E} \cdot \nabla \mathbf{E} = \frac{1}{2} \nabla \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}, \quad (3.71)$$

so daß (3.69) die Form

$$\mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{E} \mathbf{E} - \frac{1}{2} \nabla \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \quad (3.72)$$

annimmt. Wir setzen dies in (3.67) ein, berücksichtigen (3.65) und finden

$$\int_V d^3r \mathbf{f}(\mathbf{r}) = \int_V d^3r [\varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \nabla w_{\text{el}}(\mathbf{r})]. \quad (3.73)$$

Gemäß der Regel (1.7) wandeln wir das Volumenintegral auf der rechten Seite dieser Gleichung in ein Oberflächenintegral um,

$$\int_V d^3r \mathbf{f}(\mathbf{r}) = \int_{(V)} [\varepsilon_0 \mathbf{d}\mathbf{a} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \mathbf{d}\mathbf{a} w_{\text{el}}(\mathbf{r})], \quad (3.74)$$

in kartesischen Komponenten

$$\int_V d^3r f_i(\mathbf{r}) = \int_{(V)} da_k [\varepsilon_0 E_i(\mathbf{r}) E_k(\mathbf{r}) - \delta_{ik} w_{\text{el}}(\mathbf{r})]. \quad (3.75)$$

Die Größe

$$\mathbf{T}(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) - w_{\text{el}}(\mathbf{r}) \mathbf{I} \quad (3.76)$$

bzw.⁵

$$\mathbf{T}(\mathbf{r}) = \mathbf{D}(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \frac{1}{2} \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \mathbf{I} \quad (3.77)$$

ist der elektrische Teil des symmetrischen **Maxwellschen Spannungstensors**, in kartesischen Komponenten

$$T_{ik}(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 E_i(\mathbf{r}) E_k(\mathbf{r}) - \delta_{ik} w_{\text{el}}(\mathbf{r}) \quad (3.78)$$

bzw.

$$T_{ik}(\mathbf{r}) = D_i(\mathbf{r}) E_k(\mathbf{r}) - \frac{1}{2} \delta_{ik} D_l(\mathbf{r}) E_l(\mathbf{r}). \quad (3.79)$$

⁵Die in den Feldern \mathbf{D} und \mathbf{E} formulierte Gleichung (3.77) kann auch für den Fall eines linearen Hintergrundmediums (anstelle des Vakuums) mit vorgegebenem $\varepsilon(\mathbf{r})$ angewendet werden (Minkowski-Form des Spannungstensors).

Damit nimmt die Gleichung (3.73) die Form

$$\int_V d^3r \mathbf{f}(\mathbf{r}) = \int_V d^3r \nabla \cdot \mathbf{T}(\mathbf{r}) \quad (3.80)$$

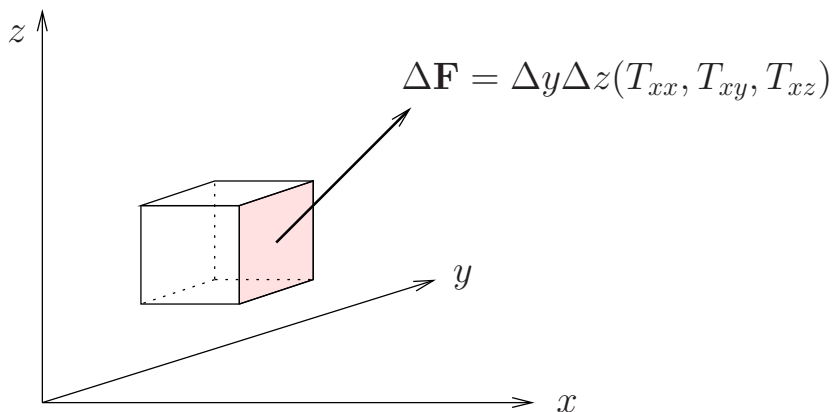
an, und entsprechend kann die Gleichung (3.74) in der Form

$$\int_V d^3r \mathbf{f}(\mathbf{r}) = \int_{(V)} d\mathbf{a} \cdot \mathbf{T}(\mathbf{r}) \quad (3.81)$$

geschrieben werden. In differentieller Form bringt die Gleichung (3.80) zum Ausdruck, daß die Quelledichte des Spannungstensors die Kraftdichte ist:

$$\nabla \cdot \mathbf{T}(\mathbf{r}) = \mathbf{f}(\mathbf{r}) \quad (3.82)$$

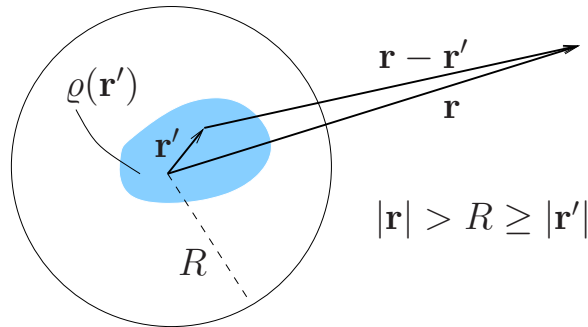
Der Maxwellsche Spannungstensor eines elektrischen Feldes wird nur durch das Feld bestimmt. Ein felderfüllter Raum verhält sich also ähnlich wie ein elastisches Medium. Physikalisch bedeutet dies, daß die auf ein Volumen wirkende Kraft durch Oberflächenkräfte ausdrückbar



ist. Die Diagonalelemente des Spannungstensors liefern die Druck- bzw. Zugspannungen auf die Flächenelemente mit dem gleichen Index und seine Nichtdiagonalelemente die Scherspannungen auf die dazu senkrechten Flächenelemente.

3.6 Elektrische Multipolentwicklung

Häufig steht die Frage nach dem elektrischen Feld einer räumlich beschränkten Ladungsverteilung (oft weit) außerhalb des von den Ladungen erfüllten Raumbereiches, d.h. dem **Fernfeld** der Ladungsverteilung. Für $|\mathbf{r}'| < |\mathbf{r}|$ kann in der Gleichung (3.42) für das Potential die Green-Funktion in eine Taylor-Reihe (bzgl. \mathbf{r}') entwickelt werden, in



kartesischen Koordinaten

$$G^{(0)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} G_{,k_1,k_2,\dots,k_l}^{(0)}(\mathbf{r}) x'_{k_1} x'_{k_2} \cdots x'_{k_l}, \quad (3.83)$$

und entsprechend ergibt sich für das Potential die Entwicklung

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\varepsilon_0} \int d^3r' G^{(0)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \varrho(\mathbf{r}') \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} G_{,k_1,k_2,\dots,k_l}^{(0)}(\mathbf{r}) \int d^3r' \varrho(\mathbf{r}') x'_{k_1} x'_{k_2} \cdots x'_{k_l}. \end{aligned} \quad (3.84)$$

Die Position des Aufpunktes \mathbf{r} ist somit von den Positionen \mathbf{r}' der Quellen separiert. Wie man sich unschwer überzeugt, gilt ($r = |\mathbf{r}|$, $r' = |\mathbf{r}'|$)

$$\begin{aligned} r^{2l+1} G_{,k_1,k_2,\dots,k_l}^{(0)}(\mathbf{r}) x'_{k_1} x'_{k_2} \cdots x'_{k_l} \\ = (r')^{2l+1} G_{,k_1,k_2,\dots,k_l}^{(0)}(\mathbf{r}') x_{k_1} x_{k_2} \cdots x_{k_l}. \end{aligned} \quad (3.85)$$

Wir setzen (3.85) in (3.84) ein und erhalten die Multipolentwicklung des Potentials in der Form

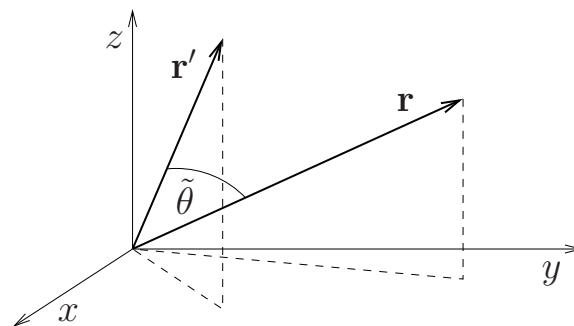
$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{Q_{k_1 k_2 \dots k_l}}{l! r^{2l+1}} x_{k_1} x_{k_2} \dots x_{k_l} \quad (3.86)$$

mit

$$Q_{k_1 k_2 \dots k_l} = 4\pi(-1)^l \int d^3 r' \varrho(\mathbf{r}') r'^{2l+1} G_{,k_1, k_2, \dots, k_l}^{(0)}(\mathbf{r}') \quad (3.87)$$

als den kartesischen (tensoriellen) **Multipolmomenten**.⁶ Die Multipolentwicklung des elektrischen Feldes folgt dann gemäß (3.33) durch (negative) Gradientenbildung von (3.86).

Um einen systematischen Überblick über die Richtungsabhängigkeit der Multipolpotentiale zu erhalten, ist es oftmals zweckmäßig, in Kugelkoordinaten zu rechnen und eine Entwicklung nach auf der Oberfläche der Einheitskugel definierten Kugelflächenfunktionen $Y_{lm}(\theta, \phi)$ vorzunehmen. Ist $\tilde{\theta}$ der Winkel zwischen \mathbf{r} und \mathbf{r}' , so gilt



$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \tilde{\theta}}} \quad (3.88)$$

⁶Genauer nennt man sie nach der (griechischen bzw. lateinischen) Zahl 2^l Monopolmoment ($l=0$), Dipolmoment ($l=1$), Quadrupolmoment ($l=2$), Octupolmoment ($l=3$) usw.

und speziell

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \Big|_{\tilde{\theta}=0} = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r'^l}{r^{l+1}} & \text{für } r' < r, \\ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{r'^{l+1}} & \text{für } r' > r. \end{cases} \quad (3.89)$$

Nun genügt $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$ sowohl bezüglich \mathbf{r} als auch \mathbf{r}' für $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$ der Laplace-Gleichung, so daß wegen der Azimutalsymmetrie gemäß (1.61)

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \left[A_l r'^l + B_l r'^{-(l+1)} \right] P_l(\cos \tilde{\theta}) \quad \text{für } r' < r \quad (3.90)$$

gelten muß [$P_l(z)$ - Legendre-Polynome; siehe (1.45)]. Wir vergleichen mit der ersten der Gleichungen (3.89) und finden⁷

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r'^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \tilde{\theta}) \quad \text{für } r' < r. \quad (3.91)$$

Mit dem Additionstheorem (1.58) für die Kugelflächenfunktionen nimmt die Entwicklung (3.91) die Gestalt ($r' < r$)

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{(2l+1)r} \left(\frac{r'}{r} \right)^l Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (3.92)$$

an (r, θ, ϕ - Kugelkoordinaten von \mathbf{r} ; r', θ', ϕ' - Kugelkoordinaten von \mathbf{r}'). Damit finden wir die Multipolentwicklung des Potentials (3.45) in der folgenden, zu (3.86) äquivalenten Form:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{q_{lm}}{r^{l+1}} Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (3.93)$$

⁷Für $r' > r$ sind offensichtlich r' und r einfach miteinander zu vertauschen.

$$q_{lm} = \int d^3r' \varrho(\mathbf{r}') r'^l Y_{lm}^*(\theta', \phi') \quad (3.94)$$

Die Größen q_{lm} werden ebenfalls als Multipolmomente bezeichnet, genauer sphärische Multipolmomente. Auf Grund von (1.55) gilt

$$q_{l-m} = (-1)^m q_{lm}^*. \quad (3.95)$$

Beispiele:

1. Monopolbeitrag ($l=0$).

Mit

$$G^{(0)}(\mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r'} \quad (3.96)$$

[siehe (3.44)] folgt aus (3.87) für $l=0$

$$Q = \int d^3r' \varrho(\mathbf{r}'), \quad (3.97)$$

d.h. die Gesamtladung der (inselförmigen) Ladungsverteilung. Gemäß (3.86) ergibt sich der Monopolbeitrag zum Potential als

$$\varphi^{(0)} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}. \quad (3.98)$$

Er entspricht genau dem Coulomb-Potential einer im Koordinatenursprung fixierten Punktladung $q=Q$. In hinreichender Entfernung von einer in einem endlichen, ansonsten beliebigen Raumbereich konzentrierten Ladungsverteilung erscheint diese uns (in nullter Näherung) als Punktladung.⁸

2. Dipolbeitrag ($l=1$).

Wir wollen die Abweichung niedrigster Ordnung vom Coulomb-Feld berechnen. Aus (3.96) folgt unschwer

$$G_{,k}^{(0)}(\mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{x'_k}{(r')^3}, \quad (3.99)$$

⁸Dies rechtfertigt insbesondere, den Begriff der Punktladung auch auf nicht punktförmig konzentrierte Ladungsverteilungen anzuwenden.

so daß gemäß (3.87)

$$d_k \equiv Q_k = \int d^3r' \varrho(\mathbf{r}') x'_k \quad (3.100)$$

gilt. Der Vektor \mathbf{d} wird üblicherweise als **elektrisches Dipolmoment** der Ladungsverteilung bezeichnet. Entsprechend (3.86) lautet der Dipolbeitrag zum Potential:

$$\varphi^{(1)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \quad (3.101)$$

Für spätere Zwecke fassen wir die obigen Ergebnisse noch einmal in der Form

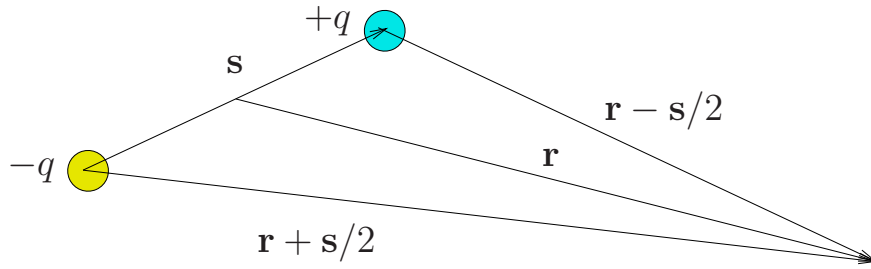
$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} \int d^3r' \varrho(\mathbf{r}') \right. \\ \left. + \frac{1}{r^3} \int d^3r' \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' \varrho(\mathbf{r}') + \dots \right] \quad (r' < r) \quad (3.102) \end{aligned}$$

zusammen.

Punktdipol

Verswindet die Gesamtladung einer Ladungsverteilung, so verschwindet der Monopolbeitrag und die Multipolentwicklung beginnt mit dem Dipolterm (sofern dieser nicht auch verschwindet). Wie wir gesehen haben, ist das Monopolfeld nichts anderes als das Coulomb-Feld einer Punktladung. Es stellt sich die Frage, ob es einen ähnlich einfachen Quelltyp gibt, der zu einem reinen Dipolfeld Anlaß gibt (dessen Multipolentwicklung sich also auf den Dipolterm reduziert). Dazu betrachten wir zwei Punktladungen $-q$ und $+q$ im Abstand s . Das Potential ist einfach die Summe der Potentiale der beiden Punktladungen,

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}/2|} - \frac{1}{|\mathbf{r} + \mathbf{s}/2|} \right). \quad (3.103)$$



Wir entwickeln nach Potenzen von $s/2$ ($s/2 < r$) und erhalten

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{2q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{2} \mathbf{s} \cdot \nabla \frac{1}{r} + \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{2} \mathbf{s} \cdot \nabla \right)^3 \frac{1}{r} + \dots \right]. \quad (3.104)$$

In der Grenze $s \rightarrow 0$, $q \rightarrow \infty$, jedoch $d = qs$ endlich streben alle Entwicklungsglieder $\sim qs^n$ mit $n > 1$ gegen Null, und es bleibt nur das erste Glied übrig,

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{d} \cdot \nabla \frac{1}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{r}}{r^3}, \quad (3.105)$$

d.h. ein reines Dipolfeld. Die durch den so definierten Grenzprozeß definierte (im strengen Sinne fiktive) Ladungsverteilung wird auch Punktdipol genannt. In (3.105) ist der Punktdipol im Koordinatenursprung lokalisiert. Es ist klar, daß für einen Punktdipol am Ort \mathbf{r}' in der Gleichung (3.105) \mathbf{r} einfach durch $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ zu ersetzen ist.

Bekanntlich wirkt auf eine Punktladung q am Ort \mathbf{r} im elektrischen Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ die Kraft $\mathbf{F} = q\mathbf{E}(\mathbf{r})$. Wir wollen die Kraft berechnen, die auf einen Punktdipol wirkt. Analog obiger Rechnung finden wir zunächst

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= q [\mathbf{E}(\mathbf{r} + \mathbf{s}/2) - \mathbf{E}(\mathbf{r} - \mathbf{s}/2)] \\ &= 2q \left[\frac{1}{2} \mathbf{s} \cdot \nabla \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{2} \mathbf{s} \cdot \nabla \right)^3 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \dots \right], \end{aligned} \quad (3.106)$$

woraus im Grenzfall eines Punktdipols

$$\boxed{\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{d} \cdot \nabla \mathbf{E}(\mathbf{r})} \quad (3.107)$$

folgt. Das heißt, nur Feldinhomogenitäten geben Anlaß zu Kräften auf Punktdipole.

Da das so definierte Kraftfeld konservativ ist,

$$\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \nabla \times [\mathbf{d} \cdot \nabla \mathbf{E}(\mathbf{r})] = (\mathbf{d} \cdot \nabla) \underbrace{\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r})}_0 = 0, \quad (3.108)$$

besitzt ein Punktdipol in einem elektrischen Feld eine potentielle Energie $W_{\text{pot}}(\mathbf{r})$ derart, daß

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla W_{\text{pot}}(\mathbf{r}) \quad (3.109)$$

ist. Um $W_{\text{pot}}(\mathbf{r})$ zu finden, erinnern wir uns zunächst daran, daß

$$0 = \mathbf{d} \times [\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r})] = \nabla \mathbf{d} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \mathbf{d} \cdot \nabla \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (3.110)$$

gilt, d.h.

$$\mathbf{d} \cdot \nabla \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \nabla \mathbf{d} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}). \quad (3.111)$$

Damit folgt aus (3.107) für die differentielle Arbeit

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{d} \cdot \nabla \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = d\mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{d} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -dW_{\text{pot}}(\mathbf{r}), \quad (3.112)$$

woraus wir

$$\boxed{W_{\text{pot}}(\mathbf{r}) = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})} \quad (3.113)$$

ablesen.⁹

Offensichtlich hängt die potentielle Energie eines Punktdipols i. allg. sowohl vom Ort des Dipols als auch von seiner Orientierung relativ zur Richtung des am Ort des Dipols herrschenden elektrischen Feldes ab. Deshalb erfährt ein Punktdipol (selbst in einem homogenen Feld) ein Drehmoment \vec{M} . Wie leicht zu sehen ist, gilt:

$$\boxed{\vec{M}(\mathbf{r}) = \mathbf{d} \times \mathbf{E}(\mathbf{r})} \quad (3.114)$$

⁹Die Gleichung (3.113) kann natürlich auch analog zu den Herleitungen der Gleichungen (3.105) und (3.107) gefunden werden, indem von zunächst zwei getrennten, endlichen Punktladungen ausgegangen wird, d.h. von $W_{\text{pot}}(\mathbf{r}) = q[\varphi(\mathbf{r} + \mathbf{s}/2) - \varphi(\mathbf{r} - \mathbf{s}/2)]$, und der Grenzwert für $s \rightarrow 0$, $q \rightarrow \infty$, ($d = qs$ endlich) gebildet wird.

Wir wollen abschließend das elektrische Feld eines Punktdipols etwas näher untersuchen. Wir bilden den (negativen) Gradienten des Dipolpotentials (3.105) und erhalten für das Feld außerhalb der Position des Dipols (hier außerhalb des Koordinatenursprungs)

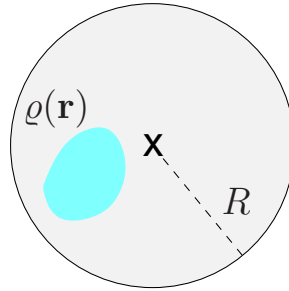
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\mathbf{d} \cdot \mathbf{r} \mathbf{r} - \mathbf{d} r^2}{r^5} \quad (r > 0). \quad (3.115)$$

Um die Frage zu beantworten, was am Ort des Dipols passiert, betrachten wir zunächst ganz allgemein eine in einem gewissen Raumbereich lokalisierte Ladungsverteilung $\varrho(\mathbf{r})$, die zu einem elektrischen Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ Anlaß geben möge, und berechnen das Volumenintegral

$$\int_V d^3r \mathbf{E}(\mathbf{r}) = - \int_V d^3r \nabla \varphi(\mathbf{r}) = - \int_{(V)} d\mathbf{a} \varphi(\mathbf{r}). \quad (3.116)$$

Wir wollen speziell ein Kugelvolumen (Radius R) betrachten und (auch im Hinblick auf Abschnitt 3.7) zwei Fälle untersuchen.

1. Die gesamte Ladungsverteilung befinde sich innerhalb der Kugel. Mit (3.38) wird aus (3.116) zunächst



$$\int_{V_R} d^3r \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{R^2}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \varrho(\mathbf{r}') \int d\Omega \frac{\mathbf{e}_r}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (3.117)$$

wobei

$$\mathbf{e}_r = \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z \quad (3.118)$$

ist. Werden die Komponenten von \mathbf{e}_r nach Kugelflächenfunktionen $Y_l^m(\theta, \phi)$ [(1.52)] entwickelt, können nur Funktionen mit $l = 1$

auftreten, da die genannten Komponenten linear in $\sin \theta$ bzw. $\cos \theta$ sind [vgl. (1.45) und (1.49)]. Machen wir von der Entwicklung (3.92) für $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$ Gebrauch und berücksichtigen die Orthogonalitätsrelation (1.53), so sehen wir, daß für die Raumwinkelintegration in (3.117) nur von $l = 1$ herrührende Terme relevant sind. Folglich können wir in dem Raumwinkelintegral $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$ durch das Glied mit $l = 1$ (d.h. den Dipolterm) in der Entwicklung (3.91) ($\theta \rightarrow \tilde{\theta}$) ersetzen, und somit wird

$$\int d\Omega \frac{\mathbf{e}_r}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{r'}{r^2} \int d\Omega \mathbf{e}_r \cos \tilde{\theta}, \quad (3.119)$$

wobei $\cos \tilde{\theta}$ gemäß (1.59) gegeben ist. Mit

$$\int d\Omega \mathbf{e}_r \cos \tilde{\theta} = \frac{4\pi}{3} \mathbf{e}_{r'} \quad (3.120)$$

ergibt sich also

$$\int d\Omega \frac{\mathbf{e}_r}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{r'}{r^2} \frac{4\pi}{3} \mathbf{e}_{r'} = \frac{4\pi}{3} \frac{\mathbf{r}'}{r^2}. \quad (3.121)$$

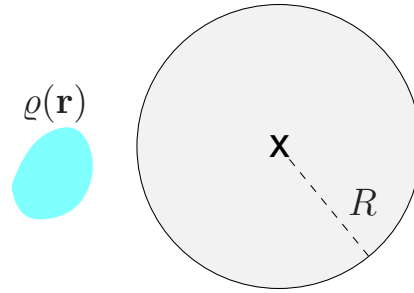
Wir setzen dieses Ergebnis in (3.117) ein ($r = R$) und erhalten

$$\int_{V_R} d^3r \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{d}, \quad (3.122)$$

wobei gemäß (3.100) \mathbf{d} das auf den Kugelmittelpunkt bezogene Dipolmoment der Ladungsverteilung ist. Man beachte, daß der Wert des Integrals über das kugelförmige Volumen nicht vom Kugelradius abhängt.

- Die gesamte Ladungsverteilung befinde sich außerhalb der Kugel. Ausgangspunkt in diesem Fall sind ebenfalls die Gleichungen (3.117) und (3.118). Im Unterschied zum ersten Fall ist nunmehr $r < r'$, so daß in den Entwicklungen (3.91) bzw. (3.92) von $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$ einfach r mit r' zu vertauschen ist. Offensichtlich führt dann die gleiche Argumentation wie im ersten Fall auf

$$\int d\Omega \frac{\mathbf{e}_r}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{r}{r'^2} \frac{4\pi}{3} \mathbf{e}_{r'} = \frac{4\pi r}{3} \frac{\mathbf{r}'}{r'^3}. \quad (3.123)$$



anstelle von (3.121). Wir setzen (3.123) in (3.117) ein und erhalten

$$\int_{V_R} d^3r \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{4}{3}\pi R^3 \underbrace{\left(-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \varrho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r}'}{r'^3} \right)}_{\mathbf{E}(0)}, \quad (3.124)$$

d.h. [vgl. (3.46)]

$$\int_{V_R} d^3r \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{4}{3}\pi R^3 \mathbf{E}(0) = V_R \mathbf{E}(0). \quad (3.125)$$

Der Mittelwert der elektrischen Feldstärke über ein kugelförmiges Volumen, das keine Ladungen enthält, ist also für jedes Feld durch die im Mittelpunkt der Kugel herrschende Feldstärke gegeben.

Kehren wir zu unserer Ausgangsgleichung (3.115) zurück. Würde man ihre Gültigkeit bis $r=0$ ausdehnen, bekäme man offensichtlich Schwierigkeiten, die Gleichung (3.122) zu erfüllen. Die Konsistenz mit (3.122) kann erreicht werden, indem (3.115) gemäß

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\mathbf{d} \cdot \mathbf{r}\mathbf{r} - \mathbf{d}r^2}{r^5} - \frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{d} \delta(\mathbf{r}) \quad (3.126)$$

ergänzt wird mit der Maßgabe, das Volumenintegral des ersten Terms Null zu setzen. Der hinzugefügte zweite Term mit der δ -Funktion, der nur am Ort des Dipols einen Beitrag zum elektrischen Feld liefert, sichert dann das korrekte Resultat.

Anmerkung:

- Schreiben wir das [gemäß (3.101) definierte] Dipolpotential als

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{d_k}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{r} \right), \quad (3.127)$$

so folgt für das elektrische Feld

$$E_i(\mathbf{r}) = \frac{d_k}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{d_k}{4\pi\epsilon_0} \frac{3x_i x_k - r^2 \delta_{ik}}{r^5}. \quad (3.128)$$

Die Gleichung (3.128) setzt zunächst $r > 0$ voraus. Wird $r = 0$ zugelassen, müssen die zweiten Ableitungen als distributive Ableitungen gemäß der Regel

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{3x_i x_k - r^2 \delta_{ik}}{r^5} - \frac{4\pi}{3} \delta_{ik} \delta(\mathbf{r}) \quad (3.129)$$

aufgefaßt werden. Sie impliziert speziell die bereits verwendete Vorschrift

$$\Delta \left(\frac{1}{r} \right) = -4\pi \delta(\mathbf{r}). \quad (3.130)$$

3.7 Multipolentwicklung und Polarisation

Die bisherigen Überlegungen basieren im wesentlichen auf einer Betrachtungsweise, die eine detaillierte Kenntnis der Ladungsverteilung bis hin in den mikroskopischen (atomaren) Bereich voraussetzt. Wie bereits betont, ist eine solche Betrachtungsweise für viele praktische Anwendungen unnötig. Wie wir bereits wissen (Abschnitt 2.4.2), genügt es in vielen Fällen, die gemittelte Ladungsdichte und die gemittelte Dipoldichte der Atome des betrachteten Mediums zu kennen.¹⁰ Dabei kann bekanntlich über viele Atome gemittelt werden, solange das Mittelungsvolumen für makroskopische Maßstäbe klein genug ist. Wir

¹⁰Verschwinden die Dipolmomente der Atome, sind Multipolmomente höherer Ordnung in der Entwicklung (2.121) bzw. (2.122) zu berücksichtigen.

wollen uns den Zusammenhang (2.125) zwischen Dipoldichte und Polarisationsfeld noch einmal unter einem etwas anderen Gesichtspunkt überlegen.

3.7.1 Dipoldichte und Polarisationsfeld

Um die Frage nach der Ladungsdichte eines (im Koordinatenursprung befindlichen) Punktdipols zu beantworten, formen wir das Potential (3.105) etwas um,

$$\begin{aligned}
 \varphi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \\
 &= \frac{\mathbf{d}}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_V d^3r' \frac{\delta(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\
 &= \frac{\mathbf{d}}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_V d^3r' \delta(\mathbf{r}') \nabla_{r'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\
 &= \frac{\mathbf{d}}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_V d^3r' \left[\nabla_{r'} \frac{\delta(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla_{r'} \delta(\mathbf{r}') \right], \quad (3.131)
 \end{aligned}$$

wobei das Volumen V offensichtlich so zu wählen ist, daß sich der (im Koordinatenursprung befindliche) Dipol im Inneren befindet. Das erste Volumenintegral verschwindet, da es in ein verschwindendes Oberflächenintegral umgewandelt werden kann. Wir erhalten also

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{\mathbf{d}}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_V d^3r' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla_{r'} \delta(\mathbf{r}'). \quad (3.132)$$

Mit

$$\varrho_d(\mathbf{r}) = -\nabla \cdot \mathbf{d} \delta(\mathbf{r}) \quad (3.133)$$

wird daraus

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3r' \frac{\varrho_d(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (3.134)$$

Wir vergleichen mit (3.38) und sehen, daß $\varrho_d(\mathbf{r})$ offensichtlich als Ladungsdichte des (im Koordinatenursprung befindlichen) Punktdipols angesehen werden kann. Insbesondere muß sich dann die auf einen (am

Ort \mathbf{r} befindlichen) Dipol wirkende Kraft (3.107) [gemäß (2.33) und (2.34)] in der Form

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \int d^3r' \varrho_d(\mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}') \quad (3.135)$$

darstellen lassen. Wir machen Gebrauch von (3.133) ($\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' - \mathbf{r}$) und finden

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{r}) &= - \int d^3r' \mathbf{E}(\mathbf{r}') \nabla_{r'} \cdot \mathbf{d} \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \\ &= - \int d^3r' \nabla_{r'} \cdot \mathbf{d} \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}') + \int d^3r' \mathbf{d} \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \cdot \nabla_{r'} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \\ &= \int d^3r' \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \mathbf{d} \cdot \nabla_{r'} \mathbf{E}(\mathbf{r}') = \mathbf{d} \cdot \nabla \mathbf{E} \end{aligned} \quad (3.136)$$

in Übereinstimmung mit (3.107).

Die Dipoldichte eines (im Koordinatenursprung befindlichen) Punktdipols ist

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \mathbf{d} \delta(\mathbf{r}), \quad (3.137)$$

und somit läßt sich die Ladungsdichte (3.133) durch die Dipoldichte wie folgt ausdrücken:

$$\boxed{\varrho_d(\mathbf{r}) = -\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r})} \quad (3.138)$$

Die Verallgemeinerung von (3.137) auf mehrere Punktdipole \mathbf{d}_n an Orten \mathbf{r}_n lautet dann (wegen des Superpositionsprinzips)

$$\boxed{\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \sum_n \mathbf{d}_n \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n)} \quad (3.139)$$

und es ist klar, daß auch in diesem Fall die Gleichung (3.138) gültig ist. Sie ist offenbar auch gültig, wenn über die Positionen der Dipole gemäß

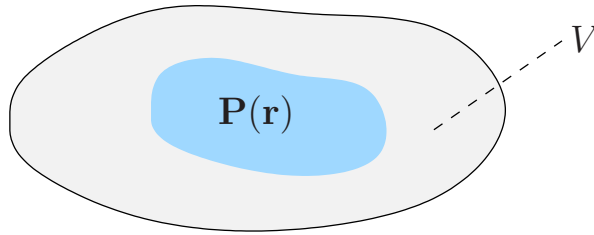
(2.105) gemittelt wird und im Ergebnis die „verschmierte“ Dipoldichte

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \sum_n \langle \mathbf{d}_n \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) \rangle = \sum_n \mathbf{d}_n g(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) \quad (3.140)$$

entsteht, die beschränkt ist. Das Fazit obiger Überlegungen ist, daß sich die Ladungsdichte von Dipolen als Divergenz eines Vektorfeldes darstellen läßt. Dies bringt offensichtlich zum Ausdruck, daß die mit den Dipolen verbundene Gesamtladung verschwindet. Es gilt

$$Q_d = \int_V d^3r \varrho_d(\mathbf{r}) = - \int_V d^3r \nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}) = - \int_{(V)} \mathbf{da} \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}). \quad (3.141)$$

Befinden sich die Dipole ganz im Innern des betrachteten Volumens,



verschwindet offensichtlich das Oberflächenintegral und damit auch Q_d .

Stellen wir uns einen makroskopischen Körper vor, dessen atomare Bausteine im Sinne einer Multipolentwicklung und nach Mittelung über hinreichend viele von diesen Bausteinen zu einer Ladungsdichte $\varrho(\mathbf{r})$ mit nichtverschwindender Gesamtladung und einer Dipoldichte $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ Anlaß geben. Entsprechend der in (2.89) vorgenommenen Aufteilung der Gesamtladungsdichte $\varrho'(\mathbf{r})$ können wir also in Übereinstimmung mit (2.91)

$$\varrho'(\mathbf{r}) = \varrho(\mathbf{r}) + \varrho_d(\mathbf{r}) = \varrho(\mathbf{r}) - \nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}) \quad (3.142)$$

setzen, und wir erhalten

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \varrho'(\mathbf{r}) \quad \rightsquigarrow \quad \nabla \cdot [\varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{P}(\mathbf{r})] = \varrho(\mathbf{r}) \quad (3.143)$$

bzw.

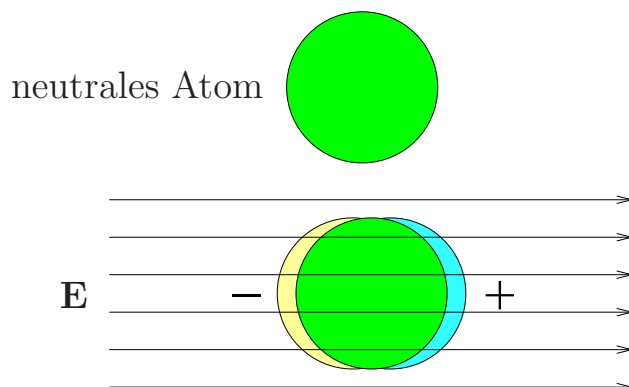
$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \varrho(\mathbf{r}) \quad (3.144)$$

mit

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{P}(\mathbf{r}). \quad (3.145)$$

Die Dipoldichte spielt also die Rolle des Polarisationsfeldes.

Bisher haben wir die Dipoldichte eines Mediums gewissermaßen als gegeben angesehen (**paraelektrisches Medium**). Tatsächlich findet man auch atomare Bausteine (wie etwa Moleküle) mit permanenten elektrischen Dipolmomenten. Ist kein äußeres elektrisches Feld angelegt und die Temperatur hoch genug, so sind ihre Richtungen derart ungeordnet, daß die Polarisation im Mittel verschwindet. Im Falle eines angelegten elektrischen Feldes wächst die Ausrichtung der Dipole mit wachsender Feldstärke und abnehmender Temperatur. Alternativ kann in zunächst unpolarisierten Atomen und Molekülen ein elektrisches Feld die Ladungen so verschieben, daß elektrische Dipole *induziert* werden (**dielektrisches Medium**). Im Falle hinreichend schwa-



cher Felder kann in beiden Fällen davon ausgegangen werden, daß die (mittlere) Polarisation näherungsweise linear von der (mittleren) elektrischen Feldstärke abhängt, so daß in der makroskopischen Elektrostatik für isotrope Medien die einfache Materialgleichung

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 \chi(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (3.146)$$

bzw.

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (3.147)$$

verwendet werden kann.

Anmerkung:

Entsprechend (3.135) und (3.138) ist die auf eine elektrische Dipoldichte $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ im elektrischen Feld wirkende Kraftdichte durch

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = -\mathbf{E}(\mathbf{r}) \nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}) \quad (3.148)$$

gegeben. Aus der Herleitung ist ersichtlich, daß diese Gleichung auch für zeitabhängige elektrische Felder gültig bleibt. Ist auch die Dipoldichte zeitabhängig, so ist die zugeordnete Ladungsdichte ebenfalls zeitabhängig,

$$\dot{\rho}_d(\mathbf{r}, t) = -\nabla \cdot \dot{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t), \quad (3.149)$$

und somit ist

$$\mathbf{j}_d(\mathbf{r}, t) = \dot{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t) \quad (3.150)$$

die zugeordnete Stromdichte [vgl. (2.91) – (2.96)]. Entsprechend dem Lorentzschen Kraftgesetz (2.33) lautet somit die Kraftdichte eines elektrischen Dipolmediums ganz allgemein wie folgt:

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) + \dot{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (3.151)$$

Betrachten wir wieder einen einzelnen (ruhenden) elektrischen Dipol \mathbf{d} in einem beliebigen elektromagnetischen Feld. Offensichtlich unterliegt er seitens des Feldes der Kraft¹¹

$$\mathbf{F} = \mathbf{d} \cdot \nabla \mathbf{E} + \dot{\mathbf{d}} \times \mathbf{B}. \quad (3.152)$$

Wir berücksichtigen, daß

$$\begin{aligned} \mathbf{d} \cdot \nabla \mathbf{E} &= \mathbf{d} \cdot \nabla \mathbf{E} - \nabla \mathbf{d} \cdot \mathbf{E} + \nabla \mathbf{d} \cdot \mathbf{E} \\ &= -\mathbf{d} \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \nabla \mathbf{d} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{d} \times \dot{\mathbf{B}} + \nabla \mathbf{d} \cdot \mathbf{E} \end{aligned} \quad (3.153)$$

gilt, und schreiben die Gleichung (3.152) in der Form

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \nabla \mathbf{d} \cdot \mathbf{E} + \frac{d}{dt} (\mathbf{d} \times \mathbf{B}). \\ &= -\nabla W_{\text{pot}} + \frac{d}{dt} (\mathbf{d} \times \mathbf{B}), \end{aligned} \quad (3.154)$$

wobei W_{pot} die in (3.113) eingeführte potentielle Energie ist.

¹¹Die Gleichung (3.152) verallgemeinert die Gleichung (3.107). Beachte, daß sich die räumliche Ableitung in (3.152) – (3.154) auf das elektrische Feld bezieht, und zwar auch im Falle eines durch das Feld induzierten Dipolmoments.

3.7.2 Makroskopisches und lokales Feld

In der makroskopischen Elektrodynamik ist das elektrische Feld in der Materialgleichung (3.146) naturgemäß makroskopischer Art. In hinreichend verdünnten Medien, in denen die Abstände zwischen den einzelnen atomaren Bausteinen hinreichend groß sind, bestehen nur geringe Unterschiede zwischen den makroskopischen Feldern und den lokalen Feldern, die an den Orten der atomaren Bausteine tatsächlich wirksam sind. In dichteren Medien jedoch, in denen die atomaren Bausteine eng gepackt sind, kann der Unterschied beobachtbar werden.

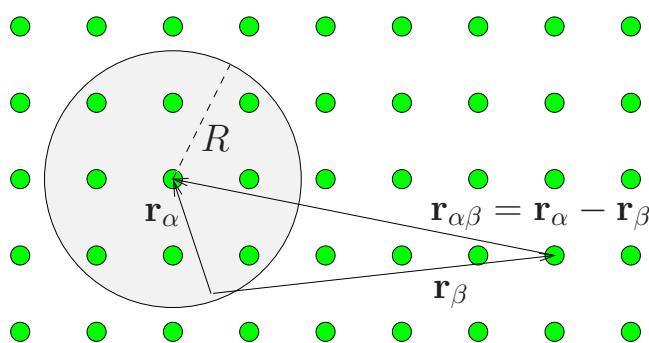
Eine Ladungsdichte ϱ gebe Anlaß zu einem elektrischen Feld \mathbf{E}_ϱ und eine Dipoldichte zu einem elektrischen Feld \mathbf{E}_d , so daß das gesamte elektrische Feld

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_\varrho(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_d(\mathbf{r}) \quad (3.155)$$

lautet. Betrachten wir das elektrische Feld, das auf ein Atom eines Mediums wirkt.¹² Es ist bestimmt durch das Feld \mathbf{E}_ϱ und das von den das herausgegriffene Atom umgebenden Atomen am Ort des herausgegriffenen Atoms erzeugte Feld \mathbf{E}' . Das am Ort \mathbf{r}_α des α -ten Atoms wirkende (lokale) Feld ist somit

$$\mathbf{E}_{\text{loc}}(\mathbf{r}_\alpha) = \mathbf{E}_\varrho(\mathbf{r}_\alpha) + \mathbf{E}'(\mathbf{r}_\alpha), \quad (3.156)$$

wobei in Dipolnäherung gemäß (3.115)



$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}_\alpha) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\beta} \frac{3\mathbf{d}_{\beta} \cdot \mathbf{r}_{\alpha\beta} \mathbf{r}_{\alpha\beta} - \mathbf{d}_{\beta} r_{\alpha\beta}^2}{r_{\alpha\beta}^5} \quad (3.157)$$

¹²Es kann sich bei den atomaren Bausteinen des Mediums natürlich auch um Moleküle handeln.

gilt. Elimination von \mathbf{E}_ρ in (3.156) mittels (3.155) liefert andererseits

$$\mathbf{E}_{\text{loc}}(\mathbf{r}_\alpha) = \mathbf{E}(\mathbf{r}_\alpha) + \mathbf{E}'(\mathbf{r}_\alpha) - \mathbf{E}_d(\mathbf{r}_\alpha). \quad (3.158)$$

Vom makroskopischen Standpunkt sind obige Felder über makroskopisch kleine aber mikroskopisch große Raumbereiche gemittelte Felder (siehe Abschnitt 2.4.2). Zur Bestimmung des räumlich gemittelten Feldes \mathbf{E}_d können wir im einfachsten Fall eines homogenen und isotropen Mediums von dem Ergebnis (3.122) für das Integral des elektrischen Feldes über ein Kugelvolumen, das eine (Dipol-)Ladungsverteilung umschließt, ausgehen. Enthält die Kugel (vom Radius R) hinreichend viele Atome, dann kann das Gesamtdipolmoment innerhalb dieser Kugel als

$$\mathbf{d}_R = V_R \mathbf{P} = \frac{4}{3} \pi R^3 \mathbf{P}, \quad (3.159)$$

angesetzt werden, sofern die Atome gleichförmig über die Kugel verteilt sind und V_R klein genug ist, die Dipoldichte \mathbf{P} als konstant über das Kugelvolumen zu betrachten. Unter Anwendung von (3.122) können wir dann

$$\mathbf{E}_d(\mathbf{r}) \rightarrow \int d^3r' g(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{E}_d(\mathbf{r}') \simeq \frac{1}{V_R} \int_{V_R} d^3r' \mathbf{E}_d(\mathbf{r}') = -\frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P}(\mathbf{r}) \quad (3.160)$$

ansetzen. Nehmen wir ferner (als für viele Materialien gute Arbeitshypothese)

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}) \approx 0 \quad (3.161)$$

an, so geht (3.158) in

$$\mathbf{E}_{\text{loc}}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P}(\mathbf{r}) \quad (3.162)$$

über.

Betrachten wir ein Medium, das aus gleichen Atomen der Anzahl-dichte $n(\mathbf{r})$ besteht. Ist \mathbf{d}_{at} das (mittlere) Dipolmoment eines Atoms, so lautet die Polarisation

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = n(\mathbf{r}) \mathbf{d}_{\text{at}}. \quad (3.163)$$

Wenn das auf ein Atom wirkende lokale Feld hinreichend schwach ist, wird das atomare Dipolmoment in erster Näherung proportional zum einwirkenden Feld sein,

$$\mathbf{d}_{\text{at}} = \alpha_{\text{at}} \varepsilon_0 \mathbf{E}_{\text{loc}}, \quad (3.164)$$

wobei α_{at} die atomare *Polarisierbarkeit* ist. Mit (3.162) und (3.163) wird daraus

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 n \alpha_{\text{at}} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{3\varepsilon_0} \mathbf{P} \right) \quad (3.165)$$

bzw.

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}, \quad (3.166)$$

wobei χ durch die **Clausius-Mussotti-Beziehung**

$$\chi = \frac{n \alpha_{\text{at}}}{1 - \frac{1}{3} n \alpha_{\text{at}}} \quad (3.167)$$

gegeben ist. Umgekehrt ist die atomare Polarisierbarkeit durch die Suszeptibilität gemäß

$$\alpha_{\text{at}} = \frac{3}{n} \frac{\chi}{3 + \chi} \quad (3.168)$$

bestimmt. Schließlich liefern die Gleichungen (3.145), (3.166) und (3.167) die Materialgleichung in der äquivalenten Form

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (3.169)$$

mit

$$\varepsilon/\varepsilon_0 = \varepsilon_{\text{r}} = 1 + \chi = 1 + \frac{n \alpha_{\text{at}}}{1 - \frac{1}{3} n \alpha_{\text{at}}}, \quad (3.170)$$

woraus umgekehrt

$$\alpha_{\text{at}} = \frac{3}{n} \frac{\varepsilon_{\text{r}} - 1}{\varepsilon_{\text{r}} + 2} \quad (3.171)$$

folgt. Die Berechnung der Polarisierbarkeit ist eine Aufgabe für sich und erfordert eine mikroskopische Beschreibung des Mediums.

3.7.3 Energie bei Anwesenheit eines Mediums

Gemäß (3.60) [zusammen mit (3.31) und (3.33)] ist die Änderung der elektrostatischen Energie $\delta W'$ einer durch eine Ladungsverteilung $\varrho'(\mathbf{r})$ (im ansonsten leeren Raum) hervorgerufenen Feldverteilung $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ ¹³

$$\begin{aligned}\delta W' &= \int d^3r \varphi(\mathbf{r}) \delta \varrho'(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 \int d^3r \varphi(\mathbf{r}) \nabla \cdot \delta \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ &= -\varepsilon_0 \int d^3r \delta \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \nabla \varphi(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 \int d^3r \delta \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}).\end{aligned}\quad (3.172)$$

Umfaßt $\varrho'(\mathbf{r})$ alle, auch die (in einem Medium) als atomare Dipole vorhandenen Ladungen, so stellt

$$W' = \frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3r \mathbf{E}^2(\mathbf{r}) \quad (3.173)$$

natürlich auch die elektrostatische Feldenergie bei Anwesenheit eines Mediums dar, für das gemäß (3.145)

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{P}(\mathbf{r}) \quad (3.174)$$

gilt. Wir wollen wieder die Aufteilung der Ladungsdichte in eine „sichtbare“ Ladungsdichte und eine „unsichtbare“ *Polarisationsladungsdichte* vornehmen,

$$\varrho'(\mathbf{r}) = \varrho(\mathbf{r}) + \varrho_d(\mathbf{r}), \quad (3.175)$$

so daß wieder die Gleichungen

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \varrho(\mathbf{r}), \quad \nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}) = -\varrho_d(\mathbf{r}) \quad (3.176)$$

gelten. Mit (3.174) wird aus (3.172)

$$\begin{aligned}\delta W' &= \int d^3r \delta \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \int d^3r \delta \mathbf{P}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ &= \int d^3r \delta \varrho(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) - \int d^3r \delta \mathbf{P}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})\end{aligned}\quad (3.177)$$

¹³Wir verwenden hier aus Gründen der Zweckmäßigkeit die Bezeichnungen $\delta W'$ und ϱ' anstelle von δW und ϱ .

bzw.

$$\int d^3r \delta\rho(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 \int d^3r \delta\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \int d^3r \delta\mathbf{P}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}). \quad (3.178)$$

Der erste Term auf der rechten Seite dieser Gleichung kann als Energieänderung bei vorgegebener Polarisierung (d.h. „starren“ Dipolen) angesehen werden. Der zweite Term stellt dann die Energieänderung auf Grund der Polarisationsänderung (d.h. „Spannen“ und/oder Orientieren der Dipole durch das elektrische Feld) dar. Es ist deshalb sinnvoll, die Größe

$$\delta W = \int d^3r \delta\rho(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r}) = \int d^3r \delta\mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (3.179)$$

als Gesamtenergieänderung anzusehen.

Nehmen wir speziell die lineare Materialgleichung $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ an, so folgt aus (3.179)

$$\begin{aligned} \delta W &= \int d^3r \delta[\varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r})] \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ &= \int d^3r [\delta\varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}^2(\mathbf{r}) + \varepsilon(\mathbf{r})\delta\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})] \\ &= \int d^3r [\delta\varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}^2(\mathbf{r}) + \frac{1}{2}\varepsilon(\mathbf{r})\delta\mathbf{E}^2(\mathbf{r})] \\ &= \int d^3r \left\{ \delta\varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}^2(\mathbf{r}) + \delta \left[\frac{1}{2}\varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}^2(\mathbf{r}) \right] - \frac{1}{2}\delta\varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}^2(\mathbf{r}) \right\} \\ &= \int d^3r \delta \left[\frac{1}{2}\varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}^2(\mathbf{r}) \right] + \frac{1}{2} \int d^3r \delta\varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}^2(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (3.180)$$

bzw.:

$$\delta W = \delta \int d^3r \frac{1}{2}\mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \int d^3r \delta\varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}^2(\mathbf{r}) \quad (3.181)$$

Der Term

$$\tilde{w}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (3.182)$$

wird üblicherweise als Energiedichte des elektrostatischen Feldes bei Anwesenheit eines linearen Mediums mit vorgegebenem $\varepsilon(\mathbf{r})$, d.h. $\delta\varepsilon(\mathbf{r}) = 0$, bezeichnet. Demgemäß ist dann

$$\tilde{W} = \int d^3r \tilde{w}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \int d^3r \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \int d^3r \varrho(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r}) \quad (3.183)$$

die Gesamtenergie des Systems bestehend aus dem Feld und dem linearen Medium mit vorgegebenem $\varepsilon(\mathbf{r})$. Der zweite Term auf der rechten Seite der Gleichung (3.181) kann als die Arbeit betrachtet werden, die bei einer Änderung der relevanten Mediumseigenschaften zu leisten ist – eine Arbeit, die man sich infolge einer Änderung in der Dichte der Polarisationsladungen vorstellen kann.

Mit (3.182) lautet die Gleichung (3.181)

$$\delta W = \delta\tilde{W} + \frac{1}{2} \int d^3r \delta\varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}^2(\mathbf{r}), \quad (3.184)$$

wobei gemäß (3.183)

$$\delta\tilde{W} = \frac{1}{2} \int d^3r \delta[\varrho(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r})] = \frac{1}{2} \int d^3r [\delta\varrho(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r}) + \varrho(\mathbf{r})\delta\varphi(\mathbf{r})] \quad (3.185)$$

gilt. Wir berücksichtigen (3.179) und können (3.184) in der Form

$$\begin{aligned} \int d^3r \delta\varrho(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2} \int d^3r \delta\varrho(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \int d^3r \varrho(\mathbf{r})\delta\varphi(\mathbf{r}) \\ &+ \frac{1}{2} \int d^3r \delta\varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}^2(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (3.186)$$

bzw.

$$\frac{1}{2} \int d^3r \delta\varrho(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \int d^3r \varrho(\mathbf{r})\delta\varphi(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \int d^3r \delta\varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}^2(\mathbf{r}) \quad (3.187)$$

schreiben, woraus ersichtlich ist, daß eine Gleichung der Art (3.62), wie sie für die Vakuumelektrostatik gilt, im Rahmen der makroskopischen Elektrostatik i. allg. nicht gültig ist.

3.7.4 Kraft auf einen Körper

Bekanntlich unterliegen elektrische Dipole in (inhomogenen) elektrischen Feldern Kräften. Somit unterliegen i. allg. auch makroskopische Körper in elektrischen Feldern Kräften. Wie wir bereits wissen, können diese als Volumenintegral über die Kraftdichte bzw. als Oberflächenintegral über den Maxwell'schen Spannungstensor berechnet werden. Eine weitere Möglichkeit besteht darin, sie aus der entsprechenden potentiellen Energie des Systems durch Gradientenbildung zu bestimmen.

Zu diesem Zweck berechnen wir die Änderung der Systemenergie \tilde{W} bei einer Änderung der dielektrischen bzw. parelektrischen Eigenschaften eines linearen Hintergrundmediums in einem elektrischen Feld, dessen (sichtbare) Quellen unveränderlich bleiben,

$$\delta\rho = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \delta W = 0. \quad (3.188)$$

Gemäß (3.184) gilt in diesem Fall¹⁴

$$\delta\tilde{W}|_{\varrho} = -\frac{1}{2} \int d^3r \delta\varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}^2(\mathbf{r}), \quad (3.189)$$

und folglich ist die dabei verrichtete Arbeit

$$\delta A = -\delta\tilde{W}|_{\varrho}. \quad (3.190)$$

Betrachten wir einen Körper (endlicher Ausdehnung), und stellen wir uns vor, daß $\delta\varepsilon$ aus einer Verrückung des Körpers um $\delta\xi$ resultiert. Für die dabei wirksam werdende Kraft F_{ξ} gilt

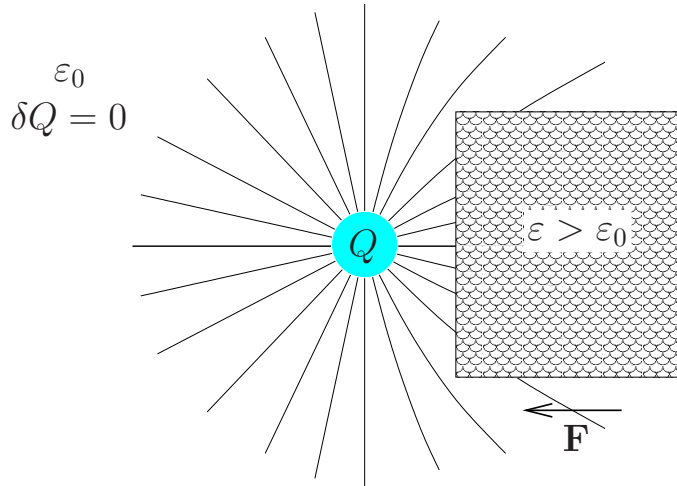
$$\delta A = F_{\xi} \delta\xi \quad \rightsquigarrow \quad F_{\xi} \delta\xi = -\delta\tilde{W}|_{\varrho}. \quad (3.191)$$

Die Feldenergie \tilde{W} als Funktion von ξ kann dann als potentielle Energie des Körpers interpretiert werden, so daß die auf den Körper wirkende Kraft durch

$$F_{\xi} = - \left(\frac{\partial \tilde{W}}{\partial \xi} \right)_{\varrho} \quad (3.192)$$

¹⁴Der Index ϱ zeigt an, daß die Variation bei festgehaltenen Quellen des \mathbf{D} -Feldes zu erfolgen hat.

gegeben ist. Offensichtlich ist der Körper im Falle $\delta\varepsilon > 0$ bestrebt, sich in Raumgebiete mit wachsendem \mathbf{E} -Feld zu bewegen. Umgekehrt wird er für $\delta\varepsilon < 0$ gewissermaßen aus dem elektrischen Feld hinausgedrängt.



Wir wollen obige Energieänderung mit derjenigen vergleichen, die sich ergibt, wenn bei der Änderung von ε nicht die Quellen des \mathbf{D} -Feldes, sondern das Potential festgehalten wird. Den Prozeß kann man sich in zwei Schritten durchgeführt denken. Im ersten Schritt werden die Ladungen festgehalten, und der Körper wird verschoben. Dabei wird sich natürlich das Potential ändern. Gemäß (3.183) ergibt sich für die Änderung von \tilde{W}

$$\delta\tilde{W}^{(1)} = \frac{1}{2} \int d^3r \varrho(\mathbf{r}) \delta\varphi^{(1)}(\mathbf{r}). \quad (3.193)$$

Im zweiten Schritt wird die Ladungsverteilung so geändert, daß das Potential wieder seine ursprünglichen Werte annimmt,

$$\delta\varphi^{(2)} = -\delta\varphi^{(1)} \quad (3.194)$$

Gemäß (3.183) und (3.187) ($\delta\varepsilon = 0$) gilt dann

$$\delta\tilde{W}^{(2)} = \frac{1}{2} \int d^3r \left[\delta\varrho^{(2)}(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r}) + \varrho(\mathbf{r})\delta\varphi^{(2)}(\mathbf{r}) \right] = \int d^3r \varrho(\mathbf{r})\delta\varphi^{(2)}(\mathbf{r}), \quad (3.195)$$

woraus wegen (3.194) sowie (3.193)

$$\delta\tilde{W}^{(2)} = - \int d^3r \varrho(\mathbf{r}) \delta\varphi^{(1)}(\mathbf{r}) = -2 \delta\tilde{W}^{(1)} \quad (3.196)$$

folgt. Die gesamte Energieänderung (bei festgehaltenem φ) ist also¹⁵

$$\delta\tilde{W}|_{\varphi} = \delta\tilde{W}^{(1)} + \delta\tilde{W}^{(2)} = -\delta\tilde{W}^{(1)}, \quad (3.197)$$

d.h.

$$\delta\tilde{W}|_{\varphi} = \frac{1}{2} \int d^3r \delta\varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}^2(\mathbf{r}) = -\delta\tilde{W}|_{\varrho}, \quad (3.198)$$

und folglich gilt für Kraft (3.192):

$$\boxed{F_{\xi} = \left(\frac{\partial \tilde{W}}{\partial \xi} \right)_{\varphi}} \quad (3.199)$$

3.8 Grenzbedingungen und Flächenladungen

Ein makroskopischer Körper kann bekanntlich elektrisch geladen sein. Kompensieren sich die negativen Ladungen der Elektronen nicht mit den positiven Ladungen der Protonen, entsteht eine negative bzw. positive *Überschußladung*. Dabei ist zu unterscheiden, ob die mikroskopischen Ladungsträger, die für die Überschußladung verantwortlich sind, auf einer makroskopischen Skala frei beweglich oder ortsgebunden sind. Sind beispielsweise in einem Festkörper nicht nur die positiv geladenen Atomrümpfe ortsgebunden, sondern auch die Valenzelektronen, spricht man bekanntlich von einem *Isolator*. In Isolatoren kann prinzipiell eine Überschußladungsdichte $\varrho(\mathbf{r})$ vorgegeben (d.h. präpariert) werden, die dann als Quelle des \mathbf{D} -Feldes fungiert.

Eine völlig andere Situation liegt im Falle von metallischen *Leitern* vor. In einem (idealen) Leiter mit frei beweglichen Ladungsträgern

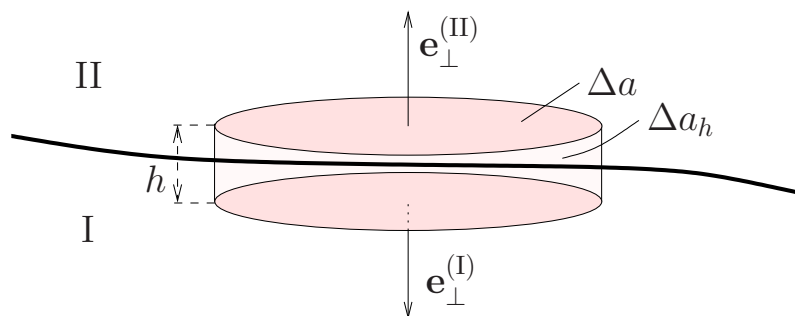
¹⁵Der Index φ zeigt an, daß die Variation bei festgehaltenem Potential zu erfolgen hat.

werden sich diese unter dem Einfluß der Kraftwirkung des elektrischen Feldes solange verschieben, bis sich eine kräftefreie Gleichgewichtskonfiguration eingestellt hat, d.h., der Leiter im Innern feldfrei ist,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0. \quad (3.200)$$

Dann kann es im Innern auch keine Überschußladungsdichte geben, und somit muß im Innern auch $\rho(\mathbf{r}) = 0$ gelten. Da ein Leiter natürlich elektrisch geladen sein kann und damit eine (integrale) Überschußladungsdichte tragen kann, muß diese auf der Oberfläche des Leiters sitzen. Folglich muß auf dieser eine *Flächenladungsdichte* $\sigma(\mathbf{r})$ der Dimension Asm^{-2} (anstelle einer Raumladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$ im Innern) vorhanden sein.

Oberflächen sind (aus makroskopischer Sicht) diskontinuierliche Grenzflächen, die unterschiedliche Medien (d.h. Medien mit unterschiedlichen physikalischen Eigenschaften) trennen. An solchen Grenzflächen sind die makroskopischen Maxwell-Gleichungen in ihrer differentiellen Form zunächst nicht unmittelbar anwendbar; anwendbar sind sie natürlich in ihrer integralen Form. Um die Frage zu beantworten, was an solchen Grenzflächen passiert und wie die jeweiligen Grenz- bzw. Übergangsbedingungen lauten, betrachten wir als erstes ein hinreichend kleines Flächenstück Δa und schließen es in eine „Dose“ der kleinen Höhe h ein. Deckel (im Medium II) und Boden (im Medium I) dieser Dose mögen parallel zur Fläche und zueinander verlaufen. Die



integrale Form der Maxwell-Gleichung (3.3) auf die Dose angewendet liefert

$$\int_{\Delta a} da \left[D_{\perp}^{(\text{II})}(\mathbf{r}) - D_{\perp}^{(\text{I})}(\mathbf{r}) \right] + \int_{\Delta a_h} da \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \Delta Q. \quad (3.201)$$

Lassen wir die Höhe der Mantelfläche gegen Null gehen ($h \rightarrow 0$), so verschwindet der von der Mantelfläche Δa_h herrührende Beitrag, und wir erhalten

$$\int_{\Delta a} da \left[D_{\perp}^{(\text{II})}(\mathbf{r}) - D_{\perp}^{(\text{I})}(\mathbf{r}) \right] = \Delta Q \quad (h \rightarrow 0). \quad (3.202)$$

Falls Oberflächenladungen vorhanden sind, ist $\Delta Q \neq 0$ und ΔQ läßt sich mittels einer Flächenladungsdichte $\sigma(\mathbf{r})$ in der Form

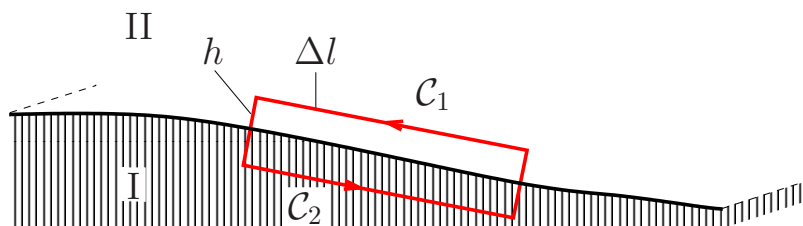
$$\Delta Q = \int_{\Delta a} da \sigma(\mathbf{r}) \quad (3.203)$$

darstellen. Der Vergleich von (3.202) mit (3.203) liefert als Übergangsbedingung an der Grenzfläche:

$$\sigma(\mathbf{r}) = D_{\perp}^{(\text{II})}(\mathbf{r}) - D_{\perp}^{(\text{I})}(\mathbf{r}) \quad (3.204)$$

Folglich erleidet die Normalkomponente des \mathbf{D} -Feldes an Grenzflächen bei Vorhandensein von Oberflächenladungen einen Sprung.

Eine zweite Übergangsbedingung folgt aus der integralen Form der Maxwell-Gleichung (3.4). Wählen wir den in der Abbildung angegebenen, geschlossenen Integrationsweg durch die Grenzfläche, so folgt für verschwindendes h



$$\int_{C_1} dl \left[E_{\parallel}^{(\text{II})}(\mathbf{r}) - E_{\parallel}^{(\text{I})}(\mathbf{r}) \right] = 0 \quad (h \rightarrow 0) \quad (3.205)$$

(E_{\parallel} – in der Oberfläche liegende Tangentialkomponente des elektrischen Feldes), und wir erhalten als Übergangsbedingung:

$$E_{\parallel}^{(\text{I})}(\mathbf{r}) = E_{\parallel}^{(\text{II})}(\mathbf{r}) \quad (3.206)$$

Die Tangentialkomponente des \mathbf{E} -Feldes geht also stetig durch Grenzflächen.

Beispiele

1. Die Grenzfläche trenne zwei ideale Isolatoren, die sich als lineare Medien beschreiben lassen, so daß die Gleichungen

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \varepsilon^{(I)} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad \text{in I,} \tag{3.207}$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \varepsilon^{(II)} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad \text{in II} \tag{3.208}$$

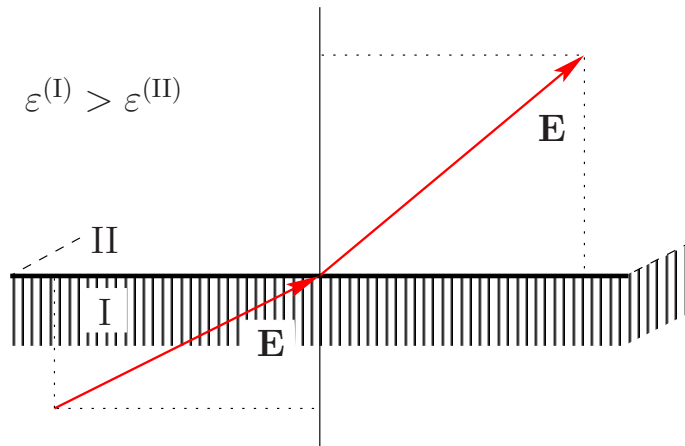
gelten mögen. Da wir für ideale Isolatoren Oberflächenladungen ausschließen können ($\sigma = 0$), liefert (3.204)

$$\varepsilon^{(II)} E_{\perp}^{(II)} - \varepsilon^{(I)} E_{\perp}^{(I)} = 0 \tag{3.209}$$

bzw.

$$\frac{E_{\perp}^{(II)}}{E_{\perp}^{(I)}} = \frac{\varepsilon^{(I)}}{\varepsilon^{(II)}}, \tag{3.210}$$

und es gilt natürlich (3.206). Während die Tangentialkomponente



des elektrischen Feldes stetig durch die Grenzfläche geht, erleidet die Normalkomponente einen Sprung, d.h., die Feldlinien werden an der Grenzfläche gebrochen.

Für das \mathbf{D} -Feld ist die Situation gerade umgekehrt. Während die Normalkomponente stetig durch die Grenzfläche geht, erleidet die

Tangentialkomponente einen Sprung,

$$\frac{D_{\parallel}^{(\text{I})}}{\varepsilon^{(\text{I})}} = E_{\parallel}^{(\text{I})} = E_{\parallel}^{(\text{II})} = \frac{D_{\parallel}^{(\text{II})}}{\varepsilon^{(\text{II})}} \quad (3.211)$$

bzw.

$$\frac{D_{\parallel}^{(\text{II})}}{D_{\parallel}^{(\text{I})}} = \frac{\varepsilon^{(\text{II})}}{\varepsilon^{(\text{I})}}. \quad (3.212)$$

2. Die Grenzfläche trenne einen idealen metallischen Leiter vom Vakuum, so daß gilt

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad \text{in I (Vakuum)}, \quad (3.213)$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{in II (Leiter)}. \quad (3.214)$$

In diesem Fall liefern die Übergangsbedingungen (3.204) und (3.206) die Randbedingungen (für die Leiteroberfläche, $\mathbf{e}_{\perp}^{(\text{II})} \equiv \mathbf{e}_{\perp}$)

$$-\varepsilon_0 E_{\perp} = \sigma \quad (3.215)$$

und

$$E_{\parallel} = 0. \quad (3.216)$$

Gemäß (3.33) lautet die Gleichung (3.215) in der Sprache des Potentials

$$\varepsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \sigma, \quad (3.217)$$

wobei $\partial/\partial n$ die Normalenableitung bezüglich der Richtung \mathbf{e}_{\perp} bedeutet.

3.9 Das Randwertproblem der Elektrostatik

Im Abschnitt 3.3 wurde das Potential einer (inselförmigen) Ladungsverteilung im freien Raum berechnet [Poisson-Integral (3.38)]. In der Praxis hat man es in der Regel mit einer etwas anderen Aufgabenstellung zu tun. Die Ladungsverteilung befindet sich in der Nachbarschaft irgendwelcher makroskopischer Körper (Dielektrika, metallische

Leiter), und somit rückt der unendlich ferne Rand (mit verschwindendem Potential) im Falle des freien Raumes gewissermaßen ins Endliche (natürlich nicht notwendig mit verschwindendem Potential).

3.9.1 Eindeutigkeitssatz

Wir betrachten einen einfach zusammenhängenden Raumbereich V , in dem die Poisson-Gleichung mit einer gewissen Raumladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$ gilt,

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (3.218)$$

Die Lösung dieser Gleichung ist eindeutig im Falle von *Dirichletschen* und *Neumannschen Randbedingungen*¹⁶ oder für aus ihnen zusammengesetzten *gemischten Randbedingungen*.

- Dirichletsche Randbedingung: $\varphi(\mathbf{r})$ ist auf der Bereichsoberfläche (V) vorgegeben.
- Neumannsche Randbedingung: Die Normalenableitung $\partial\varphi(\mathbf{r})/\partial n$ ist auf der Bereichsoberfläche (V) vorgegeben.

Nehmen wir an, es gäbe zwei Lösungen φ_1 und φ_2 , so müßte ihre Differenz

$$\psi = \varphi_1 - \varphi_2 \quad (3.219)$$

der Laplace-Gleichung

$$\Delta\psi = 0 \quad (3.220)$$

mit der Randbedingung

$$\psi = 0 \quad (3.221)$$

im Dirichletschen Fall bzw.

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = 0 \quad (3.222)$$

im Neumannschen Fall genügen. Der erste Greensche Satz (1.14) liefert

$$\int_V d^3r [\psi\Delta\psi + (\nabla\psi)^2] = \int_{(V)} da \psi \frac{\partial\psi}{\partial n}, \quad (3.223)$$

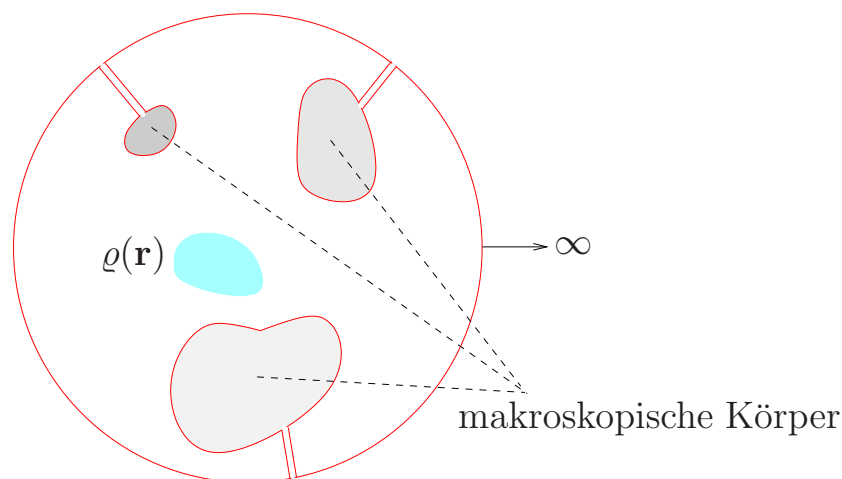
¹⁶Hier ist die Lösung nur bis auf eine für die Berechnung des elektrischen Feldes unwesentliche Konstante bestimmt.

woraus wegen (3.220) und (3.221) bzw. (3.222)

$$\int_V d^3r (\nabla\psi)^2 = 0 \quad (3.224)$$

folgt. Das heißt, $\nabla\psi$ muß im gesamten Raumbereich verschwinden, und folglich muß ψ konstant sein. Da im Falle Dirichletscher Randbedingungen ψ auf dem Rand (oder im Falle gemischter Randbedingungen wenigstens auf einem Teil des Randes) verschwindet, muß ψ sogar identisch verschwinden, die Konstante muß also Null sein. Im Falle von Neumannschen Randbedingungen bleibt die Konstante unbestimmt, so daß das Potential nur bis auf eine Konstante bestimmbar ist, was jedoch die Eindeutigkeit des elektrischen Feldes nicht ändert.

Wie bereits betont, können Ränder im Endlichen physikalisch dadurch zustande kommen, daß eine gegebene (inselförmige) Ladungsverteilung immer eine materielle Umgebung in dem Sinne hat,



daß sich in mehr oder weniger großen Entfernungen von ihr immer irgendwelche makroskopische Körper befinden, deren Berandungen in natürlicher Weise das Gebiet der betrachteten Ladungsverteilung begrenzen. Wie in obiger Abbildung skizziert, können die zunächst voneinander getrennten Berandungen der Körper durch geeignete Schnitte so miteinander und mit dem unendlich entfernten Punkt verbunden werden, daß ein einfach zusammenhängender Bereich entsteht, bezüglich dessen das Randwertproblem formuliert werden kann.¹⁷ Nun

¹⁷Da die zwei Flächen jedes Schnittes entgegengesetzt orientiert sind, liefern sie keinen Beitrag zum Potential, und die Fläche im Unendlichen liefert keinen Beitrag, da dort das Potential definiti-

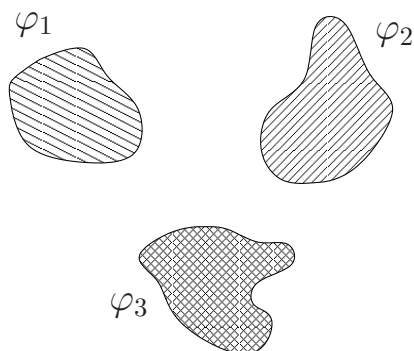
besteht mikroskopisch gesehen jeder dieser Körper (auch wenn er insgesamt elektrisch neutral ist) aus elektrisch geladenen Teilchen (Protonen, Elektronen). Ein von einer Raumladungsdichte $\varrho(\mathbf{r})$ ausgehendes elektrisches Feld übt Kräfte auf die mikroskopischen Ladungen der Körper aus, die ihrerseits naturgemäß auf das Feld zurückwirken. Das heißt, es wird aus physikalischer Sicht i. allg. nicht möglich sein, Randbedingungen frei vorzugeben. Sie stellen sich gewissermaßen erst ein. Bereits aus der integralen Maxwell-Gleichung

$$-\int_{(V)} d\mathbf{a} \cdot \mathbf{E} = \int_{(V)} da \frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\frac{1}{\varepsilon_0} Q \quad (3.225)$$

ist zu sehen, daß $\partial\varphi/\partial n$ auf dem Rand nicht beliebig wählbar ist. Im Falle von Isolatoren müssen die Lösungen der jeweiligen Poisson-Gleichungen sichern, daß die Übergangsbedingungen für das \mathbf{E} - und \mathbf{D} -Feld an den Grenzflächen der Körper erfüllt sind – eine i. allg. recht schwierige Aufgabe. Natürlich könnte man φ bzw. $\partial\varphi/\partial n$ auf dem Rand ausmessen, um das „richtige“ φ bzw. das „richtige“ $\partial\varphi/\partial n$ auf diesem zu verwenden, um das Potential im Innern des Gebietes zu bestimmen.

Eine Ausnahme bilden Berandungen, die von (idealen) metallischen Leitern herrühren. In diesem Fall können die Randwerte tatsächlich frei vorgegeben (d.h. kontrolliert eingestellt) werden. Nehmen wir an, es befände sich im Raum ein Stück eines solchen Leiters. Dann muß das Potential im Innern des Leiters bis einschließlich seiner Oberfläche unabhängig davon, von welchen Ladungen das Potential im Außenraum auch immer verursacht wird, einen konstanten Wert besitzen. Wäre das nicht der Fall, könnte im Innern des Leiters (einschließlich der Oberfläche) $\mathbf{E} \neq 0$ gelten. Die Ladungen im Leiter würden folglich Kräfte erfahren, und – da sie frei beweglich sein sollen – würden sie diesen Kräften folgen, um sich letztlich so zu verteilen, daß sich alle Kräfte zu Null addieren. Dem konstanten Potential kann nun ein beliebiger Wert zugewiesen werden. Insbesondere kann angenommen werden, daß der Leiter durch einen unendlich dünnen Leiter (Draht) mit dem unendlich fernen Punkt verbunden ist. Da vereinbarungsgemäß $\varphi \rightarrow 0$ für $\mathbf{r} \rightarrow \infty$ gelten soll, muß der betrachtete Leiter auf dem Nullpotential liegen – der Leiter ist geerdet. Sind mehrere, unverbundene Leiter im

ongemäß verschwindet (Abschnitt 3.9.3).



Raum vorhanden, so kann jeder auf einem anderen (konstanten) Potential liegen. Wenn dies der Fall ist, haben wir es mit einer Situation zu tun, daß das Potential auf dem Rand insgesamt (d.h. von Leiterrand zu Leiterrand) variiert und diese Variation vorgegeben werden kann. In diesem Sinne ist das Dirichletsche Randwertproblem realisierbar.

Betrachten wir den Fall, daß sich im Raum ein Leiter befindet, der auf einem gewissen Potential $\varphi \neq 0$ liegt. Die Lösung des Dirichletschen Randwertproblems liefert dann das Potential $\varphi(\mathbf{r})$ im leiterfreien Raum. Aus diesem kann speziell $\partial\varphi/\partial n$ auf der Leiteroberfläche berechnet werden und damit gemäß (3.217) auch die Oberflächenladungsdichte, woraus dann die resultierende Gesamtladung Q berechnet werden kann. Während die Oberflächenladungsdichte nicht frei wählbar ist (sie stellt sich bekanntlich so ein, daß φ auf der Oberfläche und im Innern des Leiters konstant ist), ist die Gesamtladung (d.h. die Überschußladung, die auf den Leiter gebracht wird) frei wählbar. Wie wir noch sehen werden (Abschnitt 3.10), besteht zwischen der Gesamtladung und dem Leiterpotential ein linearer Zusammenhang. Bei vorgegebener Gesamtladung ist also wie folgt zu verfahren:

1. Das Dirichletsche Randwertproblem ist mit zunächst unbekanntem φ auf der Leiteroberfläche zu lösen.
2. Mittels der Lösung ist die auf der Oberfläche vorhandene Gesamtladung zu berechnen.
3. Daraus ist für die vorgegebene Gesamtladung das zunächst unbekannte Potential auf der Leiteroberfläche zu berechnen.

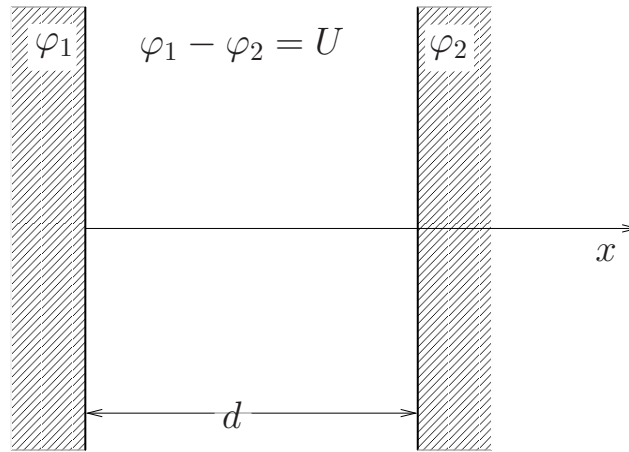
Der Beitrag von Oberflächenladungen zum Potential (bzw. elektrischen Feld) kann formal durch Hinzunahme zum Poisson-Integral (3.38) er-

faßt werden. Bis auf eine Konstante gilt

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3r' \frac{\varrho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{(V)} da \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (3.226)$$

Formal deswegen, weil das eigentliche Problem damit noch nicht gelöst ist. Die Oberflächenladungsdichte $\sigma(\mathbf{r})$ muß noch bestimmt werden.

In einfachen Fällen (Leiteranordnungen hoher Symmetrie) kann die Poisson-Gleichung direkt integriert werden. Betrachten wir einen Plattenkondensator. Aus Symmetriegründen ist klar (strenggenommen



natürlich nur für unendlich ausgedehnte Platten), daß das elektrische Feld nur eine x -Komponente besitzt,

$$\mathbf{E} = (E, 0, 0) \quad \rightsquigarrow \quad \varphi = \varphi(x). \quad (3.227)$$

Da keine Raumladungen vorhanden sind, lautet die Potentialgleichung im vorliegenden Fall

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0, \quad (3.228)$$

und die (allgemeine) Lösung ist einfach

$$\varphi(x) = ax + b. \quad (3.229)$$

Die Konstanten a und b bestimmen sich aus den Randbedingungen gemäß

$$x = 0 : \quad \varphi(0) = \varphi_1 = b, \quad (3.230)$$

$$x = d: \quad \varphi(d) = \varphi_2 = ad + \varphi_1 \quad \rightsquigarrow \quad a = -\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d} = -\frac{U}{d}. \quad (3.231)$$

Somit ist die gesuchte Lösung

$$\varphi(x) = -\frac{U}{d}x + \varphi_1, \quad (3.232)$$

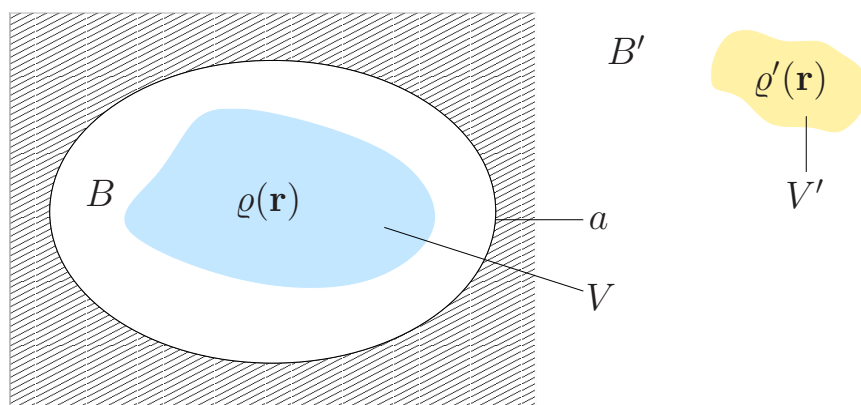
woraus

$$E = -\frac{d\varphi}{dx} = \frac{U}{d} \quad (3.233)$$

folgt.

3.9.2 Schein-, Spiegel- und Influenzladungen

Betrachten wir einen gewissen Raumbereich B mit geschlossener Oberfläche a , in dem sich (in einem gewissen Volumen V) eine Raumladungsdichte $\varrho(\mathbf{r})$ befinden möge. Wir interessieren uns für das Potential



(bzw. das elektrische Feld) in diesem Raumbereich. Es gilt die Poisson-Gleichung

$$\Delta\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\varrho(\mathbf{r}). \quad (3.234)$$

Eine (spezielle) Lösung dieser Differentialgleichung ist das Poisson-Integral (3.38),

$$\varphi_P(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V d^3r' \frac{\varrho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (3.235)$$

Im allgemeinen wird diese Lösung die Randbedingungen auf der Grenzfläche des Bereiches nicht befriedigen (es sei denn, der Außenraum ist

der leere Raum). Um diesen Mangel zu beheben, muß zu $\varphi_P(\mathbf{r})$ noch eine geeignete Lösung $\varphi_0(\mathbf{r})$ der Laplace-Gleichung addiert werden,

$$\varphi(\mathbf{r}) = \varphi_P(\mathbf{r}) + \varphi_0(\mathbf{r}), \quad (3.236)$$

$$\Delta\varphi_0(\mathbf{r}) = 0. \quad (3.237)$$

Eine Möglichkeit, ein solches $\varphi_0(\mathbf{r})$ zu konstruieren, besteht darin, außerhalb des betrachteten Bereiches B eine fiktive Raumladungsdichte $\varrho'(\mathbf{r})$ anzubringen. Das Poisson-Integral von $\varphi'(\mathbf{r})$ ist

$$\varphi'_P(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} d^3s \frac{\varrho'(\mathbf{s})}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|}. \quad (3.238)$$

Da

$$\varrho'(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{für} \quad \mathbf{r} \in B \quad (3.239)$$

ist, genügt $\varphi'_P(\mathbf{r})$ im Bereich B offensichtlich der Laplace-Gleichung,

$$\Delta\varphi'_P(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{für} \quad \mathbf{r} \in B. \quad (3.240)$$

Das heißt, $\varphi'_P(\mathbf{r})$ ist vom gesuchten Typ $\varphi_0(\mathbf{r})$. Damit kann $\varphi(\mathbf{r})$ gemäß (3.236) [zusammen mit (3.235) und (3.238)] in der Form

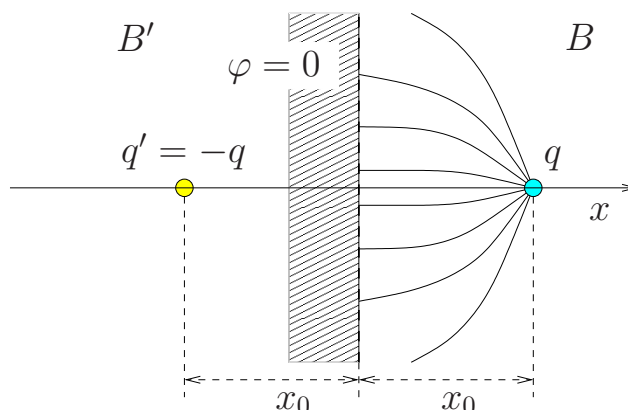
$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3r' \frac{\varrho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} d^3s \frac{\varrho'(\mathbf{s})}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|} \quad (3.241)$$

angegeben werden. Die Ladungsdichte $\varrho'(\mathbf{r})$ im Bereich B' ist zunächst völlig beliebig. Wenn es gelingt, sie so zu bestimmen, daß $\varphi(\mathbf{r})$ die Randbedingungen (auf a) erfüllt, ist das Problem der Bestimmung des Potentials im Bereich B gelöst. Die Randwerte sind durch **Scheinladungen** in dem nicht interessierenden Bereich B' simuliert. Das elektrische Feld im Bereich B ist das gleiche Feld, das man erhält, wenn man die Berandung entfernt und die Scheinladungsdichte $\varrho'(\mathbf{r})$ einbringt.

Beispiel: Punktladung vor einer leitenden Wand

Gegeben sei eine Punktladung q vor einer (unendlich ausgedehnten) leitenden Wand auf dem Nullpotential (geerdete Wand). In diesem Fall ist $\varphi_P(\mathbf{r})$ in (3.236) einfach das Coulomb-Potential

$$\varphi_P(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}, \quad \mathbf{r}_0 = (x_0, 0, 0). \quad (3.242)$$



Offensichtlich ist $\varphi_{\text{P}}(0, y, z) \neq 0$. Wir bringen als Scheinladung eine Punktladung $q' = -q$ spiegelsymmetrisch am Ort $-\mathbf{r}_0 = (-x_0, 0, 0)$ an und erhalten

$$\varphi'_{\text{P}}(\mathbf{r}) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} + \mathbf{r}_0|}. \quad (3.243)$$

Gemäß (3.241) folgt dann

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} - \frac{1}{|\mathbf{r} + \mathbf{r}_0|} \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x + x_0)^2 + y^2 + z^2}} \right]. \end{aligned} \quad (3.244)$$

Es ist leicht zu sehen daß $\varphi(\mathbf{r})$ im Bereich B der Gleichung

$$\Delta\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{q}{\epsilon_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (3.245)$$

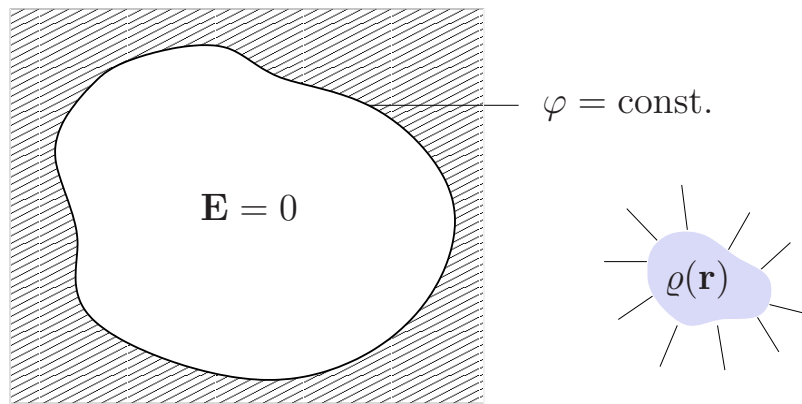
genügt und die Randbedingung

$$\varphi(0, y, z) = 0 \quad (3.246)$$

erfüllt. Somit stellt (3.244) die Lösung des gegebenen Randwertproblems dar. Allgemein werden spiegelsymmetrisch angebrachte Scheinladungen auch als **Spiegelladungen** bezeichnet. Die Lösungen von Randwertproblemen mittels Spiegelladungen zu konstruieren, ist zu einer hohen Kunst entwickelt worden. Die Methode ist insbesondere dann tauglich, wenn auf Flächen besonders hoher Symmetrie (als spezielle

Dirichletsche Randbedingungen) konstante Potentiale vorgebar sind. Schein- und Spiegelladungen haben natürlich keinerlei reale Bedeutung.

Nehmen wir an, daß im obigen Beispiel die Randbedingung durch eine beliebig dünne (geerdete) Platte realisiert wird, die den Raum in zwei Halbräume trennt und der linke Halbraum (Bereich B') leer ist. Dann verschwindet das Potential im linken Halbraum identisch, da sich dort ja keinerlei reale Ladungen befinden. Die Platte schirmt den ladungsfreien Halbraum vollständig gegen elektrische Felder aus



dem anderen Halbraum ab. Dies ist ein Beispiel für einen *Faraday-Käfig*. Das Innere eines beliebigen Raumbereiches, in dem sich keine Ladungen befinden und der von einer leitenden Wand umgeben ist, ist feldfrei. Da das Innere eines Faraday-Käfigs ladungsfrei ist, gilt dort die Laplace-Gleichung $\Delta\varphi(\mathbf{r}) = 0$, und auf der Berandung soll $\varphi(\mathbf{r})$ einen konstanten Wert annehmen. Damit muß aber nach dem Eindeutigkeitsatz (Abschnitt 3.9.1) $\varphi(\mathbf{r})$ diesen konstanten Wert auch überall im Innern annehmen, $\varphi(\mathbf{r}) \equiv \text{const.}$, und somit verschwindet im Innern das elektrische Feld.

Im Gegensatz zu den fiktiven Spiegelladungen sind die den (physikalisch realisierten) Randbedingungen entsprechenden Flächenladungsdichten und die Oberflächenladungen real vorhanden. Berechnen wir für das betrachtete Beispiel das elektrische Feld auf der Randfläche ($x = 0$). Für die Normalkomponente ergibt sich

$$E_x = - \left. \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right|_{x=0} = - \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{x_0}{(\sqrt{x_0^2 + y^2 + z^2})^3}, \quad (3.247)$$

während die Tangentialkomponenten offensichtlich verschwinden.

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{x=0} = 0. \quad (3.248)$$

Da im Bereich B' die elektrische Feldstärke identisch verschwindet, gehen erwartungsgemäß die Tangentialkomponenten stetig durch die Grenzfläche, während die Normalkomponente einen Sprung erleidet. Gemäß (3.217) folgt mit (3.247) für die Flächenladungsdichte

$$\sigma = -\varepsilon_0 \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=0} = -\frac{q}{2\pi} \frac{x_0}{(\sqrt{x_0^2 + y^2 + z^2})^3}. \quad (3.249)$$

Integration von σ über die Fläche liefert die gesamte Flächenladung:

$$Q = \int dy \int dz \sigma(y, z) = -\frac{qx_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty \frac{r dr}{(\sqrt{x_0^2 + r^2})^3} = -q. \quad (3.250)$$

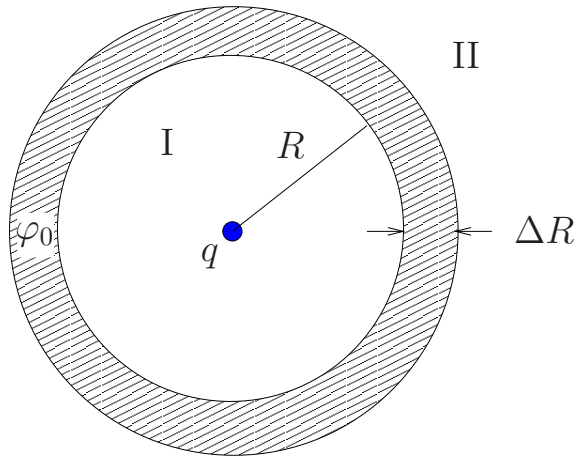
Wie nicht anders zu erwarten, befindet sich in unserem Fall gerade die zu der Punktladung entgegengesetzte und betragsmäßig gleichgroße Ladung auf der Oberfläche der Platte.

Oberflächenladungen dieser Art werden auch **Influenzladungen** genannt, und der Effekt heißt **Influenz**. Er wird generell beobachtet, wenn Ladungen in die Nähe leitender Körper gebracht werden. Da Influenzladungen real existieren, sind sie natürlich auch meßbar. Wird in die Nähe einer geerdeten, zunächst elektrisch neutralen Metallplatte eine Ladung q gebracht, die Erdverbindung der Platte dann unterbrochen und schließlich die äußere Ladung wieder entfernt, so bleibt die Platte mit der Influenzladung zurück.

Beispiel: Punktladung im Mittelpunkt einer leitenden Kugelschale

Wir wollen als zweites, ähnlich einfaches Beispiel einer Randwertaufgabe das Potential einer Punktladung im Mittelpunkt einer leitenden Kugelschale, die auf einem gewissen (konstanten) Potential φ_0 liegt, berechnen. Wir beginnen wieder mit dem Potential der Punktladung im freien Raum

$$\varphi_P(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}. \quad (3.251)$$



Offensichtlich ist $\varphi_{\text{P}}(\mathbf{r})$ auf der (inneren) Kugeloberfläche konstant,

$$\varphi_{\text{P}}(\mathbf{r})|_{r=R} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}. \quad (3.252)$$

Auf Grund der Symmetrie des Problems ist die Kugeloberfläche also bereits (wie gefordert) eine Äquipotentialfläche, jedoch i. allg. nicht zum vorgegebenen Wert φ_0 . Um das Potential im Innenraum I zu erhalten, muß also nur eine Konstante addiert werden,

$$\varphi(\mathbf{r}) = \varphi_0 + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) \quad (r \leq R). \quad (3.253)$$

Für den Außenraum II ist eine Lösung der Laplace-Gleichung gesucht, die auf der äußeren Kugeloberfläche den konstanten Wert φ_0 annimmt und im Unendlichen verschwindet, d.h.

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{R + \Delta R}{r} \varphi_0 \quad (r \geq R + \Delta R). \quad (3.254)$$

Wir wollen wieder die Oberflächenladungen berechnen. Die Flächenladungsdichte auf dem inneren Rand (Radius R) ergibt sich gemäß (3.217) aus (3.253) als

$$\sigma_R = \epsilon_0 \left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=R} = -\frac{q}{4\pi R^2}. \quad (3.255)$$

Die insgesamt auf der inneren Kugeloberfläche befindliche (influenzierte) Ladung ist demnach

$$Q_R = \int_{(V_R)} da \sigma_R = -q. \quad (3.256)$$

Analog ergibt sich für die Ladungsdichte auf der äußeren Kugeloberfläche (Radius $R + \Delta R$)

$$\sigma_{R+\Delta R} = -\varepsilon_0 \left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=R+\Delta R} = \frac{\varepsilon_0 \varphi_0}{R + \Delta R}, \quad (3.257)$$

und die Gesamtladung dort ist

$$Q_{R+\Delta R} = \int_{(V_{R+\Delta R})} da \sigma_{R+\Delta R} = 4\pi\varepsilon_0(R + \Delta R)\varphi_0. \quad (3.258)$$

Insgesamt muß sich also eine Ladungsmenge

$$Q_R + Q_{R+\Delta R} = -q + 4\pi\varepsilon_0(R + \Delta R)\varphi_0 \quad (3.259)$$

auf der Kugelschale befinden.

Wir haben das Randwertproblem primär unter der Annahme gelöst, daß φ_0 vorgegeben ist. Die Gleichung (3.259) zeigt, daß (wie bereits eingangs erwähnt) damit auch das Randwertproblem bei vorgegebener Gesamtladung auf der Kugelschale gelöst ist. Es sei Q_0 die vorgegebene Gesamtladung. Dann ist nach (3.259) das zugehörige Potential

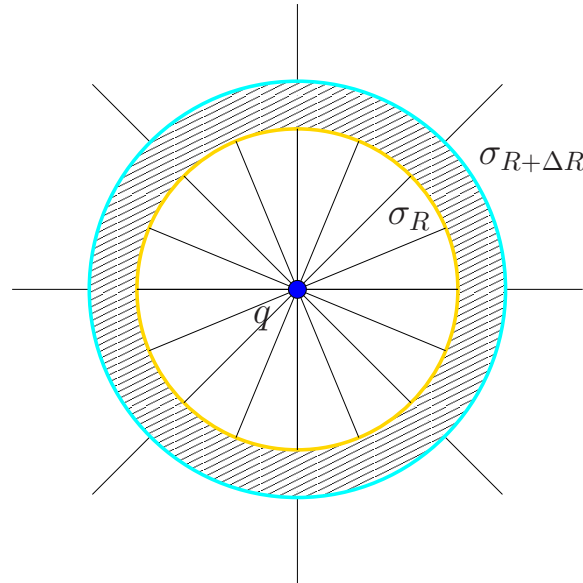
$$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_0 + q}{R + \Delta R}. \quad (3.260)$$

Diesen Ausdruck für φ_0 in (3.253) und (3.254) eingesetzt liefert das Potential im Innen- und Außenraum der Kugelschale für eine vorgegebene Kugelschalenladung Q_0 .

Unter Berücksichtigung von (3.258) kann (3.254) als

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{Q_{R+\Delta R}}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} \quad (r \geq R + \Delta R) \quad (3.261)$$

geschrieben werden. Das Feld im Außenraum der Kugelschale kann also



als Coulomb-Feld einer Scheinladung

$$q' = Q_{R+\Delta R} = 4\pi\epsilon_0(R + \Delta R)\varphi_0 \quad (3.262)$$

im Zentrum des Innenraums angesehen werden. Ist speziell die Kugelschale geerdet, $\varphi_0 = 0$, dann verschwindet wegen $Q_{R+\Delta R} = 0$ das Potential im gesamten Außenraum, $\varphi \equiv 0$ ($r \geq R + \Delta R$). Der Außenraum wird völlig vom Feld abgeschirmt und wirkt als Faraday-Käfig. In jedem Fall wird auf der inneren Kugeloberfläche die Ladung $Q_R = -q$ influenziert.

Nehmen wir an, die Kugelschale ist zunächst ungeladen im freien Raum. In den Innenraum wird nun eine Punktladung eingebracht und im Zentrum positioniert. Die Kugelschale insgesamt bleibt dabei natürlich weiterhin ungeladen, so daß gemäß (3.260) ($Q_0 = 0$) die Kugelschale auf dem Potential

$$\varphi_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R + \Delta R} \quad (3.263)$$

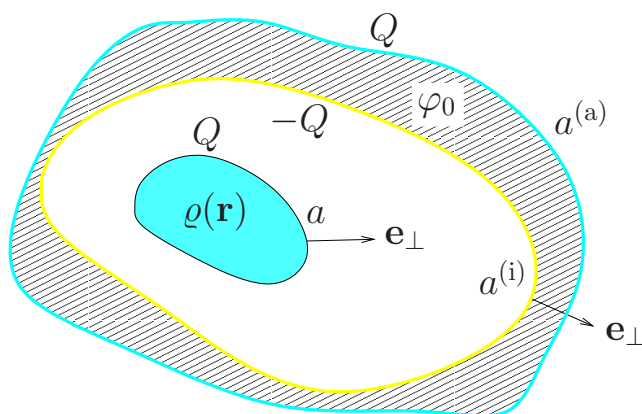
liegt. Wir setzen φ_0 aus dieser Gleichung in (3.253) und (3.254) ein und erhalten

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} - \frac{\Delta R}{R(R + \Delta R)} \right] \quad (r \leq R), \quad (3.264)$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad (r \geq R + \Delta R). \quad (3.265)$$

Das durch die Punktladung q im Innern der Kugelschale erzeugte elektrische Feld bewirkt eine Ladungstrennung in der Kugelschale. Auf der inneren Oberfläche verteilt sich eine Ladung $-q$ und auf der äußeren Oberfläche eine entgegengesetzt gleich große Ladung q .

Dieser Sachverhalt gilt ganz allgemein, wenn eine beliebige Ladungsverteilung, die (wie in der folgenden Abbildung skizziert) ganz in das Innere eines beliebig geformten, doppelwandigen Leiters eingebracht wird, der elektrisch neutral ist. Für den Innenbereich zwischen



der äußeren Berandung a der Ladungsverteilung und der inneren Berandung ($a^{(i)}$) des Gefäßes gilt die integrale Maxwell-Gleichung

$$\int_{a^{(i)}} d\mathbf{a} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) - \underbrace{\int_a d\mathbf{a} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r})}_Q = 0 \quad (3.266)$$

bzw.

$$-\int_{a^{(i)}} d\mathbf{a} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = -Q, \quad (3.267)$$

wenn Q die Gesamtladung der Ladungsverteilung $\varrho(\mathbf{r})$ ist. Es sei $\sigma^{(i)}(\mathbf{r})$ die Flächenladungsdichte und $Q^{(i)}(\mathbf{r})$ die Gesamtladung auf der inneren Berandung. Gemäß (3.215) folgt dann aus (3.267)

$$-\int_{a^{(i)}} d\mathbf{a} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \int_{a^{(i)}} da \sigma^{(i)}(\mathbf{r}) = Q^{(i)}(\mathbf{r}) = -Q. \quad (3.268)$$

Die Gesamtladung, die auf der inneren Berandung des Gefäßes beeinflusst wird, ist also entgegengesetzt gleich der Gesamtladung, die in

das Gefäß gebracht wurde. Damit ist auch sofort klar, daß für die Gesamtladung $Q^{(a)}(\mathbf{r})$ auf der äußeren Berandung des Gefäßes

$$Q^{(a)}(\mathbf{r}) = -Q^{(i)}(\mathbf{r}) = Q \quad (3.269)$$

gelten muß.

Alle Überlegungen dieses Abschnittes gelten natürlich sinngemäß auch dann, wenn mehrere, räumlich voneinander getrennte Ladungsverteilungen in durch mehr oder weniger komplexe Leiteranordnungen abgegrenzten Raumbereichen vorliegen. Ist der Raum in N Bereiche B_1, B_2, \dots, B_n geteilt und liegt im k -ten Bereich die Raumladungsdichte $\varrho^{(k)}(\mathbf{r})$ vor, dann muß eine Lösung der in diesem Gebiet definierten Poisson-Gleichung

$$\Delta\varphi^{(k)}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\varrho^{(k)}(\mathbf{r}) \quad (3.270)$$

gefunden werden, die gleichzeitig den entsprechenden Randbedingungen genügt (d.h. den Bedingungen auf der den k -ten Bereich begrenzenden Oberfläche). Das kann wieder geschehen, indem zum Poisson-Integral $\varphi_P^{(k)}(\mathbf{r})$ eine geeignete Lösung $\varphi_0^{(k)}(\mathbf{r})$ der Laplace-Gleichung addiert wird, die die Erfüllung der Randbedingungen sicherstellt. Diese Lösung kann insbesondere das Poisson-Integral von Scheinladungsdichten (außerhalb des Bereiches B_k) sein. Auf diese Weise zerfällt das Problem der Berechnung des Potentials für den gesamten Raum gewissermaßen in N selbständige Teilprobleme.

3.9.3 Methode der Greenschen Funktion

Die Lösung der Laplace-Gleichung, die zu dem Poisson-Integral einer Ladungsverteilung $\varrho(\mathbf{r})$ zu addieren ist [siehe (3.236) und (3.237)], um die Randbedingungen zu erfüllen, hängt sowohl von den Randwerten als auch von der speziellen Form von $\varrho(\mathbf{r})$ ab. Es wäre sicher günstiger, mit einer Funktion zu arbeiten, die nur von der Gestalt der Randflächen, jedoch nicht von den Randwerten auf diesen Flächen und der Ladungsverteilung abhängt. Eine solche Funktion ist die Green-Funktion $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ als Lösung der Poisson-Gleichung mit singulärer Quelle vom δ -Typ,

$$\Delta_r G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \Delta_{r'} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (3.271)$$

Offensichtlich ist $G^{(0)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ [Gleichungen (3.41) und (3.44)] eine solche Lösung. Weitere Lösungen sind

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G^{(0)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') + F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (3.272)$$

mit

$$\Delta_{r'} F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0. \quad (3.273)$$

Wir wenden den zweiten Greenschen Satz [Gleichung (1.15)] auf die Green-Funktion und das Potential an,

$$\begin{aligned} & \int_V d^3r' [G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Delta_{r'} \varphi(\mathbf{r}') - \varphi(\mathbf{r}') \Delta_{r'} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] \\ &= \int_{(V)} da' \left[G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}')}{\partial n'} - \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} \varphi(\mathbf{r}') \right]. \end{aligned} \quad (3.274)$$

Unter Berücksichtigung der Differentialgleichungen für $\varphi(\mathbf{r}')$ und $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ kann das Volumenintegral wie folgt umgeformt werden:

$$\begin{aligned} & \int_V d^3r' [G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Delta_{r'} \varphi(\mathbf{r}') - \varphi(\mathbf{r}') \Delta_{r'} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] \\ &= -\frac{1}{\varepsilon_0} \int_V d^3r' [G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \varrho(\mathbf{r}') - \varepsilon_0 \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \varphi(\mathbf{r}')] \\ &= -\frac{1}{\varepsilon_0} \int_V d^3r' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \varrho(\mathbf{r}') + \varphi(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (3.275)$$

Wir setzen dieses Resultat in (3.274) ein und erhalten das folgende Ergebnis:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V d^3r' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \varrho(\mathbf{r}') \\ &+ \int_{(V)} da' \left[G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}')}{\partial n'} - \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} \varphi(\mathbf{r}') \right] \end{aligned}$$

(3.276)

Wenn der betrachtete Raumbereich den gesamten Raum umfaßt, gilt $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ und das Oberflächenintegral verschwindet wegen

der Randbedingung im Unendlichen, so daß (3.276) in das Poisson-Integral übergeht. Ist der betrachtete Raumbereich nur ein Teilbereich des gesamten Raumes, dann wird $\varphi(\mathbf{r})$ nicht allein durch die Quellverteilung $\varrho(\mathbf{r})$, sondern auch durch die Randwerte bestimmt, die $\varrho(\mathbf{r})$ und $\partial\varphi(\mathbf{r})/\partial n$ auf dem Rand des betrachteten Bereiches annehmen.¹⁸

Wir wollen die Randbedingung spezifizieren, der die Green-Funktion als Lösung von (3.271) genügen soll.

1. Dirichletsche Randbedingung

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0 \tag{3.277}$$

für \mathbf{r}' auf dem Rand des betrachteten Raumbereiches. In diesem Fall geht (3.276) in

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V d^3r' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \varrho(\mathbf{r}') - \int_{(V)} da' \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} \varphi(\mathbf{r}')$$

(3.278)

über. Damit ist die Lösung des Randwertproblems für das Potential auf das einfachere Randwertproblem für die Green-Funktion zurückgeführt, nämlich das der Berechnung des Potentials einer Punktladung (am Ort \mathbf{r}) bei geerdeter Oberfläche (Nullpotential).

2. Neumannsche Randbedingung

Auf den ersten Blick könnte man vielleicht erwarten, daß $\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')/\partial n' = 0$ für \mathbf{r}' auf dem Rand des betrachteten Bereiches gesetzt werden könnte. Dies ist natürlich nicht möglich, da

$$\begin{aligned} \int_{(V)} da' \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} &= \int_V d^3r' \Delta_{r'} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ &= - \int_V d^3r' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -1 \end{aligned} \tag{3.279}$$

¹⁸Vom mikroskopischen Standpunkt aus wird $\varphi(\mathbf{r})$ natürlich einzig durch die Gesamtheit der Quellen bestimmt, d.h. durch die Ladungsverteilung $\varrho(\mathbf{r})$ und die (sich einstellenden) sichtbaren und unsichtbaren Ladungsverteilungen der makroskopischen Körper.

gelten muß, was mit auf dem Rand verschwindendem $\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')/\partial n'$ nicht verträglich ist. Was gewählt werden kann, ist

$$\frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} = -\frac{1}{a} \quad (3.280)$$

für \mathbf{r}' auf dem Rand des betrachteten Bereiches (a - Flächeninhalt der Randfläche). In diesem Fall erhalten wir aus (3.276):

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) = & \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V d^3r' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \varrho(\mathbf{r}') \\ & + \int_{(V)} da' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}')}{\partial n'} + \frac{1}{a} \int_{(V)} da' \varphi(\mathbf{r}') \end{aligned} \quad (3.281)$$

Der letzte Ausdruck auf der rechten Seite dieser Gleichung ist das über die Randfläche gemittelte Potential,

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{a} \int_{(V)} da' \varphi(\mathbf{r}'), \quad (3.282)$$

und stellt somit eine Konstante dar, die für die Berechnung der elektrischen Feldstärke irrelevant ist.

Beispiel: Beliebige Ladungsverteilung vor einer leitenden Wand

Gegeben sei eine beliebige Ladungsverteilung $\varrho(\mathbf{r})$ vor einer (unendlich ausgedehnten) geerdeten, leitenden Wand. Das Randwertproblem ist die Verallgemeinerung des auf Seite 119 formulierten Randwertproblems für eine Punktladung auf eine beliebige Ladungsverteilung, d.h., die Punktladung q in der dortigen Abbildung ist durch die Ladungsverteilung $\varrho(\mathbf{r})$ zu ersetzen. Da das Potential auf der (geerdeten) Wand verschwindet, liefert die Anwendung der Gleichung (3.278) (auf den Bereich rechts von der Wand)

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V d^3r' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \varrho(\mathbf{r}'), \quad (3.283)$$

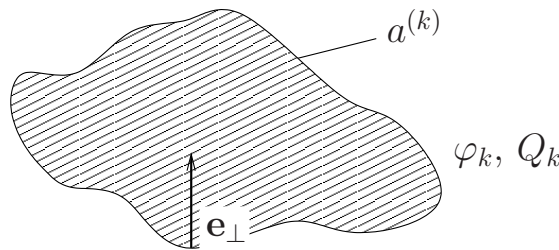
wobei nach Definition $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')/\varepsilon_0$ das Potential am Ort \mathbf{r}' einer sich am Ort \mathbf{r} befindlichen (Einheits-)Punktladung darstellt, also genau

die Lösung des auf Seite 119 formulierten Randwertproblems. Gemäß (3.244) gilt (mit $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}'$ und $\mathbf{r}_0 \rightarrow \mathbf{r}$)

$$\begin{aligned}
 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} - \frac{1}{|\mathbf{r}' + \mathbf{r}|} \right) \\
 &= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{(x' + x)^2 + (y' + y)^2 + (z' + z)^2}} \right]. \quad (3.284)
 \end{aligned}$$

3.10 Kapazitätskoeffizienten

Gegeben sei ein leitender Körper beliebiger Form, der auf dem Potential φ_k liegen möge und eine Gesamtladung Q_k tragen möge. Gemäß (3.278)



lautet das Potential im leiterfreien (leeren) Raum

$$\varphi(\mathbf{r}) = - \int_{a^{(k)}} da' \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} \varphi(\mathbf{r}') = -\varphi_k \int_{a^{(k)}} da' \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'}. \quad (3.285)$$

Die Flächenladungsdichte auf dem Leiter ist dann gemäß (3.217) durch

$$\sigma(\mathbf{r})|_{a^{(k)}} = \varepsilon_0 \left. \frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial n} \right|_{a^{(k)}} \quad (3.286)$$

gegeben. Integration über die Leiteroberfläche liefert dann die Gesamtladung

$$Q_k = \varepsilon_0 \int_{a^{(k)}} da \frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial n} \quad (3.287)$$

auf der Leiteroberfläche, und folglich gilt

$$Q_k = -\varphi_k \varepsilon_0 \int_{a^{(k)}} da \frac{\partial}{\partial n} \left[\int_{a^{(k)}} da' \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} \right] \Big|_{a^{(k)}}, \quad (3.288)$$

d.h., es besteht ein linearer Zusammenhang zwischen dem Potential und der Gesamtladung,

$$Q_k = C_k \varphi_k, \quad (3.289)$$

wobei der Koeffizient C_k , die **Kapazität** des Leiters, nur von der Geometrie des Leiters abhängt. Die Kapazität eines Leiters entspricht also der Gesamtladung, die sich auf ihm befindet, wenn er auf dem Einheitspotential gehalten wird.

Betrachten wir nunmehr den allgemeinen Fall mehrerer Leiter (im ansonsten leeren Raum), wobei wir annehmen wollen, daß der k te Leiter auf dem Potential φ_k liegt und die Ladung Q_k trägt. Es ist unschwer zu sehen, daß die Verallgemeinerung der Gleichung (3.285) auf mehrere Leiter

$$\varphi(\mathbf{r}) = - \sum_k \varphi_k \int_{a^{(k)}} da' \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} \quad (3.290)$$

lautet, so daß die Gleichung (3.289) in das Gleichungssystem

$$Q_k = \sum_{k'} C_{kk'} \varphi_{k'} \quad (3.291)$$

übergeht, wobei die symmetrischen (geometrieabhängigen) **Kapazitätskoeffizienten** durch

$$C_{kk'} = -\varepsilon_0 \int_{a^{(k)}} da \int_{a^{(k')}} da' \frac{\partial^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n \partial n'} \quad (3.292)$$

gegeben sind. Das Gleichungssystem (3.291) kann benutzt werden, um bei gegebenen Ladungen Q_k die entsprechenden Potentiale φ_k zu berechnen, wie es zur Lösung des Randwertproblems mit vorgegebenen Ladungen notwendig ist (siehe Seite 116).

Wir berechnen die elektrische Feldenergie (3.64) für eine solche Leiteranordnung. Es sei V das Volumen des leiterfreien Bereiches. Wir formen (3.64) zunächst etwas um:

$$\begin{aligned}
 W_{\text{el}} &= \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_V d^3r \mathbf{E}^2(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_V d^3r [\nabla\varphi(\mathbf{r})]^2 \\
 &= \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_V d^3r [\nabla \cdot \varphi(\mathbf{r}) \nabla\varphi(\mathbf{r}) - \varphi(\mathbf{r})\Delta\varphi(\mathbf{r})]. \\
 &= \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left[\int_{(V)} d\mathbf{a} \cdot \varphi(\mathbf{r}) \nabla\varphi(\mathbf{r}) - \int_V d^3r \varphi(\mathbf{r})\Delta\varphi(\mathbf{r}) \right] \quad (3.293)
 \end{aligned}$$

Wenn $\varrho(\mathbf{r}) = 0$ ist, gilt $\Delta\varphi(\mathbf{r}) = 0$, und somit verschwindet das zweite Integral. Das verbleibende Oberflächenintegral ist die Summe der Integrale über die Leiteroberflächen $a^{(k)}$ mit konstanten Potentialen φ_k . Demzufolge können wir

$$W_{\text{el}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \sum_k \varphi_k \int_{a^{(k)}} da \frac{\partial\varphi(\mathbf{r})}{\partial n} \quad (3.294)$$

bzw. unter Berücksichtigung von (3.287)

$$\boxed{W_{\text{el}} = \frac{1}{2} \sum_k \varphi_k Q_k} \quad (3.295)$$

schreiben. Wir verwenden (3.291) und erhalten die elektrische Feldenergie als quadratische Form in den Potentialen:

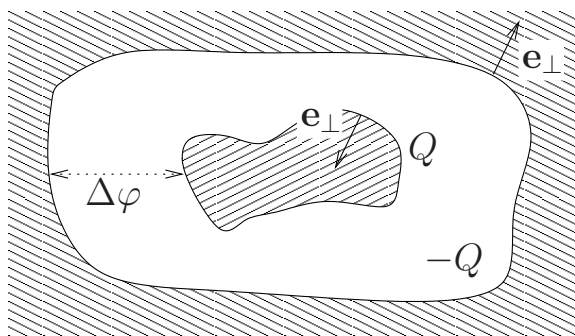
$$\boxed{W_{\text{el}} = \frac{1}{2} \sum_{k,k'} C_{kk'} \varphi_k \varphi_{k'}} \quad (3.296)$$

Ist die elektrische Feldenergie als Funktion der Potentiale bekannt, können die Kapazitätskoeffizienten durch Differentiation gewonnen werden,

$$C_{kk'} = \frac{\partial^2 W_{\text{el}}}{\partial\varphi_k \partial\varphi_{k'}}. \quad (3.297)$$

Anmerkung

- Die Kapazitäten von Leitersystemen werden öfters auch anders definiert. Betrachten wir beispielsweise den Fall zweier Leiter, wobei der eine den anderen umschließt. Sitzt auf dem inneren Leiter



die Ladung $Q_1 = Q$, dann sitzt auf der dem Innenleiter zugekehrten Oberfläche des Außenleiters bekanntlich die Ladung $Q_2 = -Q$, denn es gilt

$$\underbrace{\varepsilon_0 \int_{a^{(1)}} da \frac{\partial \varphi}{\partial n}}_{Q_1} + \underbrace{\varepsilon_0 \int_{a^{(2)}} da \frac{\partial \varphi}{\partial n}}_{Q_2} = 0 \quad (3.298)$$

und somit

$$Q_1 = -\varepsilon_0 \int_{a^{(2)}} da \frac{\partial \varphi}{\partial n}. \quad (3.299)$$

Wir verwenden (3.290) sowie die Definition (3.292) für die Kapazitätskoeffizienten und erhalten

$$Q_1 = -C_{21}\varphi_1 - C_{22}\varphi_2. \quad (3.300)$$

Andererseits gilt gemäß (3.291)

$$Q_1 = C_{11}\varphi_1 + C_{12}\varphi_2 \quad (3.301)$$

$$Q_2 = C_{21}\varphi_1 + C_{22}\varphi_2. \quad (3.302)$$

Die beiden Gleichungen bilden erwartungsgemäß kein System von linear unabhängigen Gleichungen, denn es gelten die Relationen¹⁹

$$C_{11} = -C_{21}, \quad C_{12} = -C_{22}, \quad (3.303)$$

¹⁹Diese Relationen folgen für $Q_1 = -Q_2$ auch direkt aus den Gleichungen (3.301) und (3.302), da die Potentiale φ_1 und φ_2 (zumindest prinzipiell) beliebig wählbar sind.

die offensichtlich notwendig sind, damit

$$Q_2 = -Q_1 \equiv -Q \quad (3.304)$$

gilt. Verwenden wir die Relationen (3.303) sowie die Symmetrieeigenschaft der Kapazitätskoeffizienten,

$$C_{12} = C_{21}, \quad (3.305)$$

können wir (3.301) und (3.302) zu

$$Q_1 = C_{11}(\varphi_1 - \varphi_2), \quad (3.306)$$

$$Q_2 = C_{11}(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (3.307)$$

vereinfachen. Folglich kann nur die Potentialdifferenz $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ bestimmt werden. Dementsprechend wird als Kapazität einer solchen Anordnung üblicherweise das Verhältnis der Ladung auf dem einen Leiter zur Potentialdifferenz zwischen den Leitern definiert,

$$C = \frac{Q}{\Delta\varphi}. \quad (3.308)$$

Analog kann auch bei komplizierteren Leiteranordnungen verfahren werden, wenn Potentialdifferenzen wesentlich werden. Die Gleichungen (3.291) können dann verwendet werden, um die so definierten Kapazitäten durch Kapazitätskoeffizienten auszudrücken.

So ergibt sich beispielsweise im Falle eines Plattenkondensators (Seite 117) die Flächenladungsdichte auf der linken Platte gemäß (3.232) als

$$\sigma_1 = -\varepsilon_0 \left. \frac{d\varphi}{dx} \right|_{x=0} = \varepsilon_0 \frac{U}{d}, \quad (3.309)$$

woraus als Gesamtladung auf einer Fläche a dieser Platte

$$Q \equiv Q_1 = \sigma_1 a = \varepsilon_0 \frac{U}{d} a \quad (3.310)$$

($U = \varphi_1 - \varphi_2$) folgt. Die gemäß (3.308) definierte Kapazität ist dann

$$C = \frac{Q}{U} = \varepsilon_0 \frac{a}{d}. \quad (3.311)$$

Die elektrische Feldenergiedichte ist [mit E aus (3.233)]

$$w_{\text{el}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{U^2}{d^2}. \quad (3.312)$$

Somit ergibt sich die elektrische Feldenergie im Volumen ad als

$$W_{\text{el}} = w_{\text{el}} ad = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{a}{d} U^2, \quad (3.313)$$

woraus in Übereinstimmung mit (3.311)

$$C = \frac{d^2 W_{\text{el}}}{dU^2} = \varepsilon_0 \frac{a}{d} \quad (3.314)$$

folgt.

Kapitel 4

Magnetostatik

Wenden wir uns nun dem magnetischen Teil der Maxwell-Gleichungen für den statischen Fall zu,

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0, \quad (4.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}(\mathbf{r}), \quad (4.2)$$

wobei wir uns daran erinnern, daß gemäß (3.11) die Gleichung

$$\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0 \quad (4.3)$$

gelten muß und speziell

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mu_0^{-1} \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (4.4)$$

ist, wenn unter $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ die gesamte (d.h. von den sichtbaren und unsichtbaren Lagungen herrührende) Stromdichte verstanden wird. Der Gleichung (4.2) ist zu entnehmen, daß im gesetzlichen Maßsystem die magnetische Feldstärke in Einheiten von Am^{-1} gemessen wird, während die magnetische Induktion (gemäß dem Lorentzschen Kraftgesetz) in Einheiten von $\text{Vs m}^{-2} = \text{Wb m}^{-2} = \text{Ts}$ (Tesla) gemessen wird. Folglich muß μ_0 in Einheiten von $\text{VsA}^{-1}\text{m}^{-1}$ angegeben werden. Über den Zahlenwert von μ_0 kann dann nicht mehr frei verfügt werden. Wird eine sich mit einer Geschwindigkeit von 1ms^{-1} bewegend Ladung der Größe 1As in ein (homogenes) Magnetfeld der Größe 1Am^{-1} gebracht ($\mathbf{v} \perp \mathbf{H}$), so erfährt sie eine Kraft von $4\pi \times 10^{-7} \text{N}$, so daß sich

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{VsA}^{-1}\text{m}^{-1} \quad (4.5)$$

ergibt.¹

4.1 Vektorpotential und Magnetfeld

Aus (4.1) folgt, daß es ein **Vektorpotential** $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ geben muß, dessen Rotation die magnetische Induktion liefert:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (4.6)$$

Wegen (4.4) folgt damit aus (4.2)

$$\begin{aligned} \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) &= \nabla \times [\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})] \\ &= \nabla \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) - \Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Die Definition (4.6) des Vektorpotentials ist nicht eindeutig. Addition des Gradienten eines skalaren Feldes liefert wieder ein mögliches Vektorpotential, wie leicht zu sehen ist:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla \chi(\mathbf{r}), \quad (4.8)$$

$$\nabla \times \mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \underbrace{\nabla \times \nabla \chi(\mathbf{r})}_0 = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}), \quad (4.9)$$

d.h.

$$\nabla \times \mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(\mathbf{r}). \quad (4.10)$$

$\mathbf{A}(\mathbf{r})$ und $\mathbf{A}'(\mathbf{r})$ liefern also das gleiche \mathbf{B} -Feld und sind in dieser Hinsicht somit völlig äquivalent. Wir nutzen die Freiheit der Wahl des Vektorpotentials und setzen:

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0 \quad (4.11)$$

¹Der Zahlenwert von μ_0 kann auch durch die Kraft bestimmt werden, den zwei hinreichend dünne und lange, parallel zueinander angeordnete, stromdurchflossene Leiter aufeinander ausüben (Abschnitt 4.6).

Eine Bedingung dieser Art wird allgemein als **Eichung** bezeichnet, und speziell die **Eichbedingung** (4.11) heißt **Coulomb-Eichung**. Angenommen, ein Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ wäre gefunden, das nicht der Eichbedingung (4.11) genügt. Dann kann gemäß (4.8) ein äquivalentes Vektorpotential

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla\chi(\mathbf{r}) \quad (4.12)$$

gefunden werden, und es gilt

$$\nabla \cdot \mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \Delta\chi(\mathbf{r}). \quad (4.13)$$

Wird $\chi(\mathbf{r})$ so gewählt, daß es die Poisson-Gleichung

$$\Delta\chi(\mathbf{r}) = -\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (4.14)$$

löst, erfüllt $\mathbf{A}'(\mathbf{r})$ die Eichbedingung. Es ist klar, daß eine solche Lösung immer gefunden werden kann (z.B. in Form des Poisson-Integrals).

Mit der Coulomb-Eichung (4.11) nimmt die Gleichung (4.7) die Gestalt

$$\Delta\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mu_0\mathbf{j}(\mathbf{r}) \quad (4.15)$$

an. Jede der (kartesischen) Komponenten des Vektorpotentials genügt also einer Poisson-Gleichung. Für eine inselförmige Stromverteilung liegt es also nahe, daß die Lösung (mit der Randbedingung im Unendlichen) in der Form

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mu_0 \int d^3r' G^{(0)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\mathbf{j}(\mathbf{r}') = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (4.16)$$

angegeben werden kann. [vgl. (3.34), (3.38), (3.42) und (3.44)]. Dies ist tatsächlich der Fall, denn das so gefundene $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ erfüllt auch die Eichbedingung (4.11), wie uns schwer zu zeigen ist. Dazu berechnen wir

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mu_0 \int d^3r' \nabla_r \cdot G^{(0)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\mathbf{j}(\mathbf{r}'). \quad (4.17)$$

Wegen

$$\nabla_r G^{(0)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = -\nabla_{r'} G^{(0)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \quad (4.18)$$

sowie (4.3) können wir also auch

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \int d^3r' \nabla_{r'} \cdot G^{(0)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \mathbf{j}(\mathbf{r}') \quad (4.19)$$

schreiben. Das Volumenintegral kann nach dem Gaußschen Satz in ein Oberflächenintegral über den unendlich entfernten Rand verwandelt werden, das für jede inselförmige Stromverteilung verschwindet,

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \int_{(V) \rightarrow \infty} d\mathbf{a}' \cdot G^{(0)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \mathbf{j}(\mathbf{r}') = 0. \quad (4.20)$$

Gemäß (4.6) erhalten wir aus dem Vektorpotential (4.16) das Magnetfeld einer beliebigen (inselförmigen) Stromverteilung $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ im ansonsten leeren Raum

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= \int d^3r' \nabla_r \times G^{(0)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \mathbf{j}(\mathbf{r}') \\ &= - \int d^3r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \nabla_r G^{(0)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}'), \end{aligned} \quad (4.21)$$

woraus wegen

$$\nabla G^{(0)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \nabla \frac{1}{|\mathbf{r}|} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \quad (4.22)$$

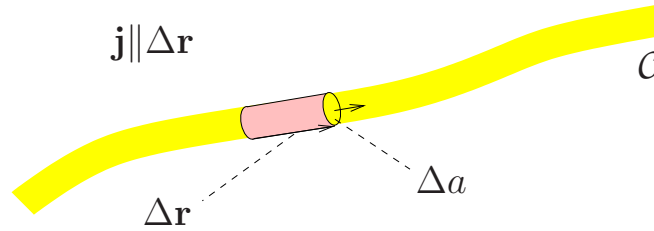
$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3r' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \quad (4.23)$$

folgt. Die Gleichung (4.23) stellt das magnetische Analogon zu der Gleichung (3.23) für das elektrische Feld dar.

4.2 Biot-Savartsches Gesetz

Den einfachsten – wenn auch im Hinblick auf Fragen der Selbstwechselwirkung nicht unproblematischen – Quelltyp der Elektrostatik bildet

eine Punktladung, und es stellt sich die Frage, ob in der Magnetostatik eine ähnlich einfache Stromverteilung vorstellbar ist. Eine solche ist tatsächlich vorstellbar, wenn angenommen werden kann, daß ein (konstanter) Strom I längs einer Raumkurve \mathcal{C} fließt und überall sonst im Raum $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0$ gilt. Eine derartige Stromverteilung, die als Idealisierung eines Stromflusses durch einen dünnen Draht aufgefaßt werden kann, wird auch **Stromfaden** genannt. Entsprechend der Abbildung gilt für



kleines Δa und kleines $\Delta \mathbf{r}$ sowie $\mathbf{j} \parallel \Delta \mathbf{r}$

$$I = |\mathbf{j}(\mathbf{r})| \Delta a \quad (4.24)$$

bzw.

$$I \Delta \mathbf{r} = \mathbf{j}(\mathbf{r}) \Delta V, \quad (4.25)$$

so daß wir die Volumenintegrale bezüglich der Stromdichte durch Kurvenintegrale längs \mathcal{C} gemäß der Regel

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) d^3 r \rightarrow I d\mathbf{r} \quad (4.26)$$

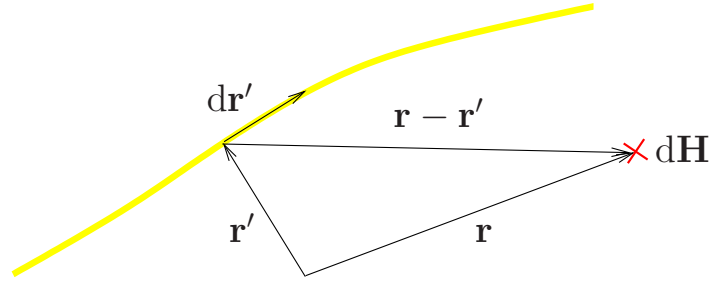
ersetzen können.

Damit ergibt sich aus (4.16) für das Vektorpotential eines Stromfadens

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mu_0 I \int_{\mathcal{C}} d\mathbf{r}' G^{(0)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{\mathcal{C}} \frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (4.27)$$

und die Gleichung (4.23) geht in das Biot-Savartsche Gesetz über:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{I}{4\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{d\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (4.28)$$

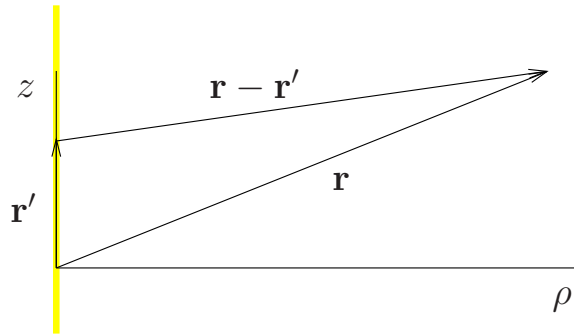


Ein Stromfadenelement $I d\mathbf{r}$ liefert also folgenden Beitrag zum Magnetfeld:

$$d\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{I d\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (4.29)$$

Beispiel: Linearer, stromdurchflossener Leiter

Gegeben sei ein (unendlich langer) linearer Stromfaden entlang der z -Achse. In Zylinderkoordinaten haben wir



$$\mathbf{r} - \mathbf{r}' = (z - z')\mathbf{e}_z + \rho\mathbf{e}_\rho, \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 = (z - z')^2 + \rho^2, \quad (4.30)$$

$$d\mathbf{r}' = dz'\mathbf{e}_z, \quad (4.31)$$

$$d\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \rho dz'\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_\rho = \rho dz'\mathbf{e}_\phi, \quad (4.32)$$

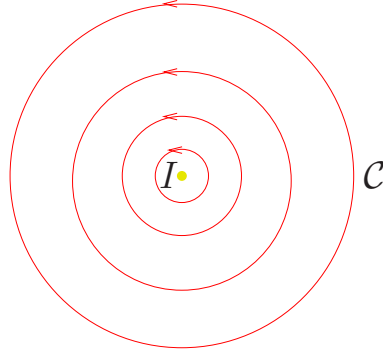
so daß im vorliegenden Fall aus (4.28)

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= \frac{I\rho}{4\pi} \left[\int \frac{dz'}{[(z - z')^2 + \rho^2]^{3/2}} \right] \mathbf{e}_\phi \\ &= \frac{I\rho}{4\pi} \left[\int \frac{dz'}{(z'^2 + \rho^2)^{3/2}} \right] \mathbf{e}_\phi = \frac{I\mathbf{e}_\phi}{4\pi\rho} \underbrace{\int \frac{dz'}{(z'^2 + 1)^{3/2}}}_2 \quad (4.33) \end{aligned}$$

wird, d.h.

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{e}_\phi. \quad (4.34)$$

Das von dem Stromfaden erzeugte Magnetfeld ist also auf konzentri-



rischen Kreisen um den Leiter konstant und nimmt mit wachsendem Radius ρ wie $1/\rho$ ab. Das Magnetfeld liegt dabei tangential an den Kreisen und erfüllt mit der Stromrichtung die „rechte-Hand-Regel“. Erwartungsgemäß gilt längs dieser Kreise

$$\int_C \mathbf{dr} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}) = I. \quad (4.35)$$

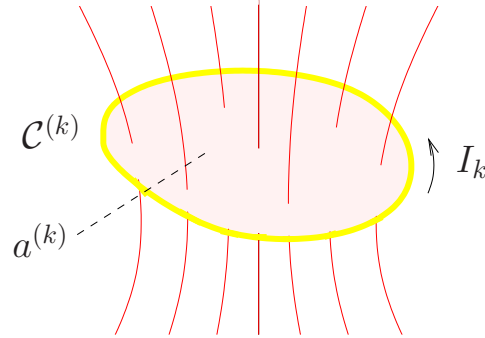
4.3 Induktionskoeffizienten

Gegeben sei eine Konfiguration von N Stromschleifen (im Sinne von geschlossenen Stromfäden); die k -te Schleife werde von einem Strom I_k durchflossen. Dann gilt gemäß (4.27) für das Vektorpotential

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_k I_k \int_{C^{(k)}} \frac{\mathbf{dr}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (4.36)$$

Wir berechnen den Fluß des Induktionsfeldes durch eine Fläche $a^{(k)}$, deren Umrandung durch die k -te Leiterschleife gegeben ist,

$$\begin{aligned} \Phi_k &= \int_{a^{(k)}} \mathbf{da} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \int_{a_k} \mathbf{da} \cdot \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \\ &= \int_{C^{(k)}} \mathbf{dr} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (4.37)$$



Machen wir Gebrauch von (4.36), so folgt, daß Φ_k in der Form

$$\Phi_k = \sum_{k'} L_{kk'} I_{k'} \quad (4.38)$$

dargestellt werden kann, wobei die (aus später noch ersichtlichen Gründen) als **Induktionskoeffizienten** bezeichneten Größen

$$L_{kk'} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{C^{(k)}} \int_{C^{(k')}} \frac{d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (4.39)$$

nur von der Geometrie der Anordnung abhängen. Speziell die Koeffizienten $L_{kk'}$ mit $k \neq k'$ heißen auch *Gegeninduktionskoeffizienten* und die Koeffizienten L_{kk} *Selbstinduktionskoeffizienten*.

Anmerkung

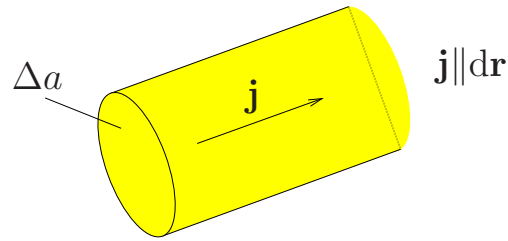
Bei der Berechnung der Selbstinduktionskoeffizienten muß der endliche Leiterquerschnitt in Rechnung gestellt werden, um die Singularität bei $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$ zu vermeiden. Die Singularität ist Ausdruck des Stromfadenmodells, und es ist klar, daß man es real immer mit endlichen Querschnitten zu tun hat. Betrachten wir den Anteil des magnetischen Flusses durch die k -te Stromschleife

$$\Phi_k = \int_{C^{(k)}} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}), \quad (4.40)$$

der von dieser Stromschleife herrührt, etwas genauer. Das relevante Vektorpotential ist

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V^{(k)}} d^3r' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (4.41)$$

wobei das Integral über das für den Stromfluß relevante (Leiter-)Volumen läuft. Wir wollen annehmen, daß die Stromdichte über die Quer-



schnittsfläche Δa (siehe Abbildung) als konstant angesehen werden kann,

$$|\mathbf{j}| = \frac{I}{\Delta a}, \quad (4.42)$$

und somit in dem Integral in (4.41)

$$\mathbf{j} d^3r = \frac{I}{\Delta a} da d\mathbf{r} \quad (4.43)$$

gesetzt werden kann,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I_k}{4\pi} \frac{1}{\Delta a^{(k)}} \int_{\Delta a^{(k)}} da' \int_{\mathcal{C}^{(k)}} \frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (4.44)$$

Dieses Ergebnis in (4.40) eingesetzt liefert

$$\Phi_k = L_{kk} I_k \quad (4.45)$$

mit

$$L_{kk} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{C}^{(k)}} d\mathbf{r} \cdot \frac{1}{\Delta a^{(k)}} \int_{\Delta a^{(k)}} da' \int_{\mathcal{C}^{(k)}} \frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (4.46)$$

als Selbstinduktionskoeffizienten.

4.4 Magnetische Multipolentwicklung

Für eine inselförmige Stromverteilung liegt es nahe (ähnlich wie für eine inselförmige Ladungsverteilung in der Elektrostatik) das Fernfeld im Sinne einer Multipolentwicklung zu bestimmen. Auf Grund der Analogie des Integrals (4.16) mit dem Poisson-Integral der Elektrostatik können wir die Gleichung (3.84) für die Multipolentwicklung des elektrostatischen Potentials unmittelbar auf jede (kartesische) Komponente des Vektorpotentials übertragen,

$$\begin{aligned} A_k(\mathbf{r}) &= \mu_0 \int d^3r' G^{(0)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') j_k(\mathbf{r}') \\ &= \mu_0 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} G_{,k_1,k_2,\dots,k_l}^{(0)}(\mathbf{r}) \int d^3r' j_k(\mathbf{r}') x'_{k_1} x'_{k_2} \cdots x'_{k_l} \end{aligned} \quad (4.47)$$

($r' < r$). Dementsprechend lautet die zu (3.86) analoge Gleichung

$$A_k(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{J_{kk_1k_2\dots k_l}}{l! r^{2l+1}} x_{k_1} x_{k_2} \cdots x_{k_l} \quad (4.48)$$

mit [analog zu (3.87)]

$$J_{kk_1k_2\dots k_l} = 4\pi (-1)^l \int d^3r' j_k(\mathbf{r}') (r')^{2l+1} G_{,k_1,k_2,\dots,k_l}^{(0)}(\mathbf{r}') \quad (4.49)$$

als den (magnetischen) Multipolmomenten.

Schauen wir uns auch hier wieder die Glieder niedrigster Ordnung etwas genauer an. In völliger Analogie zu (3.102) finden wir

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{1}{r} \int d^3r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r^3} \int d^3r' \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' \mathbf{j}(\mathbf{r}') + \cdots \right] \quad (r' < r). \end{aligned} \quad (4.50)$$

Wir berücksichtigen die Identität

$$\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}) \mathbf{r} = \underbrace{\mathbf{r} \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r})}_0 + \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \underbrace{\nabla \mathbf{r}}_I = \mathbf{j}(\mathbf{r}) \quad (4.51)$$

und sehen, daß (für die vorausgesetzte inselförmige Stromverteilung) das erste Integral in (4.50) in ein verschwindendes Oberflächenintegral verwandelt werden kann und somit selbst verschwindet,

$$\int d^3r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') = 0. \quad (4.52)$$

Die magnetische Multipolentwicklung kann also grundsätzlich erst mit dem Dipolterm beginnen.

Um das zweite Integral in (4.50) auszuwerten, wenden wir die Identität (4.51) an und schreiben

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' \mathbf{j}(\mathbf{r}') &= \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' \nabla_{r'} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}') \mathbf{r}' \\ &= \nabla_{r'} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}') \mathbf{r}' \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' - \mathbf{r}' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla_{r'} \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r} \\ &= \nabla_{r'} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}') \mathbf{r}' \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' - \mathbf{r}' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{r} \end{aligned} \quad (4.53)$$

Setzen wir diesen Ausdruck in das zweite Integral in (4.50) ein, so sehen wir, daß das Volumenintegral des ersten Terms in (4.53) in ein verschwindendes Oberflächenintegral umgewandelt werden kann und somit

$$\int d^3r' \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' \mathbf{j}(\mathbf{r}') = - \int d^3r' \mathbf{r} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}') \mathbf{r}' \quad (4.54)$$

verbleibt. Nun gilt bekanntlich

$$\mathbf{r} \times [\mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}')] = \mathbf{r} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}') \mathbf{r}' - \mathbf{r}' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}') \mathbf{r}, \quad (4.55)$$

so daß (4.54) in die Form

$$\int d^3r' \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' \mathbf{j}(\mathbf{r}') = \frac{1}{2} \int d^3r' [\mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}')] \times \mathbf{r} \quad (4.56)$$

gebracht werden kann. Mit der Definition des **magnetischen Dipolmoments**

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int d^3r \mathbf{r} \times \mathbf{j}(\mathbf{r}) \quad (4.57)$$

erhalten wir schließlich für den Dipolanteil des Vektorpotentials [d.h. den zweiten Term in (4.50)] das folgende Ergebnis:

$$\mathbf{A}^{(1)}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (4.58)$$

Gemäß (4.6) ergibt sich das dazugehörige Magnetfeld als

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^{(1)}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi} \nabla \times \left(\frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} \right) = \frac{1}{4\pi} \left(\mathbf{m} \nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} - \mathbf{m} \cdot \nabla \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[-\mathbf{m} \Delta \frac{1}{r} + \mathbf{m} \times \left(\nabla \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) - \nabla \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{m}}{r^3} \right]. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Für $r > 0$ verschwindet der erste und der zweite Term in der rechteckigen Klammer, so daß

$$\mathbf{H}^{(1)}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \nabla \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \quad (r > 0) \quad (4.60)$$

verbleibt. Wir vergleichen (4.60) mit (3.115) und sehen, daß (bis auf den unwesentlichen Austausch von μ_0 mit ε_0) das magnetische Dipolfeld die gleiche Gestalt wie das elektrische Dipolfeld besitzt:

$$\mathbf{H}^{(1)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{3\mathbf{m} \cdot \mathbf{r} \mathbf{r} - \mathbf{m} r^2}{r^5} \quad (r > 0). \quad (4.61)$$

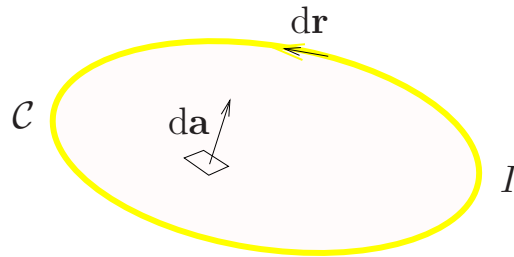
Der Vergleich mit der Elektrostatik zeigt aber auch deutlich den Unterschied zwischen elektrischen und magnetischen Feldern. Da es keine magnetischen Monopolfelder gibt, ist der führende Anteil des Magnetfeldes ein Dipolfeld, wenn nur $\mathbf{m} \neq 0$ gilt. Aus hinreichend großer Entfernung betrachtet, erscheint das Magnetfeld jeder inselförmigen Stromverteilung mit $\mathbf{m} \neq 0$ als reines Dipolfeld, während dies bezüglich des elektrischen Feldes einer inselförmigen Ladungsverteilung nur dann der Fall ist, wenn die Gesamtladung verschwindet.

Punktdipol

Der Dipolbeitrag zum magnetischen Fernfeld einer zunächst beliebigen Stromschleife ist durch (4.61) gegeben, wobei gemäß der Ersetzungsregel (4.26) das magnetische Dipolmoment (4.57) in der folgenden Weise durch den Strom I ausgedrückt werden kann:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int d^3r \mathbf{r} \times \mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} I \int_C \mathbf{r} \times d\mathbf{r}. \quad (4.62)$$

Wir wenden [gemäß der Regel (1.9)] den Stokesschen Satz auf das Kur-



venintegral an und erhalten zunächst

$$\mathbf{m} = -\frac{1}{2} I \int_a (d\mathbf{a} \times \nabla) \times \mathbf{r}, \quad (4.63)$$

woraus mit

$$(d\mathbf{a} \times \nabla) \times \mathbf{r} = -d\mathbf{a} \nabla \cdot \mathbf{r} + \nabla \mathbf{r} \cdot d\mathbf{a} = -2d\mathbf{a} \quad (4.64)$$

$$\boxed{\mathbf{m} = I \int_a d\mathbf{a}} \quad (4.65)$$

folgt. Ist insbesondere die Stromschleife eben, so daß die Fläche a eben gewählt werden kann, vereinfacht sich (4.65) zu

$$\mathbf{m} = I \mathbf{a}. \quad (4.66)$$

Ähnlich wie im elektrischen Fall ist es auch im magnetischen Fall möglich, durch einen entsprechenden Grenzprozeß einen Punktdipol zu konstruieren. Ausgangspunkt dafür ist die Gleichung (4.66). Wird die

Fläche a immer mehr verkleinert, so daß $a \rightarrow 0$ geht, und I gleichzeitig immer mehr vergrößert, so daß $I \rightarrow \infty$ geht, jedoch das Produkt Ia konstant bleibt, so läßt sich zeigen, daß die Beiträge sämtlicher Multipolmomente höherer Ordnung zum magnetischen Fernfeld verschwinden und nur der Dipolbeitrag übrig bleibt.

Betrachten wir eine Punktladung q , die sich auf einer geschlossenen Bahn in einem Zentralkraftfeld bewegt, so daß der Drehimpuls \mathbf{L} eine Erhaltungsgröße ist. Aus dem Flächensatz

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{1}{2m_q} \mathbf{L} \quad (4.67)$$

(m_q - Masse der Punktladung) folgt dann für die von der Bahnkurve umschlossene Fläche

$$\mathbf{a} = \frac{T}{2m_q} \mathbf{L}, \quad (4.68)$$

wobei T die Umlaufzeit ist. Wir setzen (4.68) in (4.66) ein und erhalten für das mit der Bewegung der Punktladung verbundene magnetische Dipolmoment

$$\mathbf{m} = \frac{IT}{2m_q} \mathbf{L}. \quad (4.69)$$

Identifizieren wir IT mit q , so können wir das magnetische Dipolmoment der betrachteten Punktladung in der Form

$$\mathbf{m} = \frac{q}{2m_q} \mathbf{L} \quad (4.70)$$

schreiben [vgl. (2.133)]. Wenden wir die Gleichung (4.70) auf die Bewegung von Elektronen in Atomen an, so sehen wir, daß die Bewegung der Elektronen über die Drehimpulse Anlaß zu magnetischen Dipolmomenten gibt. Ein von Null verschiedener Gesamtdrehimpuls bedeutet somit ein von Null verschiedenes magnetisches Dipolmoment. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von atomaren Ringströmen.

4.5 Multipolentwicklung und Magnetisierung

In Analogie zur Elektrostatik stellt sich Frage, ob einem magnetischen Punktdipol, wie er im Anschluß an die Gleichung (4.66) definiert wurde, eine Stromdichte \mathbf{j}_m derart zugeordnet werden kann, daß das Vektorpotential des durch den (im Koordinatenursprung befindlichen) Dipol nach (4.58) erzeugten Magnetfeldes

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (4.71)$$

in der Form (4.16) geschrieben werden kann. Dazu formen wir (4.71) wie folgt um:²

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \delta(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{m} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \delta(\mathbf{r}') \mathbf{m} \times \nabla_{r'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \delta(\mathbf{r}') \nabla_{r'} \times \frac{\mathbf{m}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \nabla_{r'} \times \frac{\mathbf{m} \delta(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}_0 \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla_{r'} \times \mathbf{m} \delta(\mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (4.72)$$

Das heißt, mit

$$\mathbf{j}_m(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{m} \delta(\mathbf{r}) \quad (4.73)$$

nimmt (4.71) die gewünschte Form

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\mathbf{j}_m(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (4.74)$$

²Das in der vierten Zeile hinzugefügte Volumenintegral verschwindet, da es in ein verschwindendes Oberflächenintegral umgewandelt werden kann.

an. Offensichtlich kann $\mathbf{j}_m(\mathbf{r})$ als die Stromdichte eines magnetischen Punktdipols interpretiert werden, so daß mit

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \mathbf{m} \delta(\mathbf{r}) \quad (4.75)$$

als der entsprechende Dipoldichte

$$\mathbf{j}_m(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{r}) \quad (4.76)$$

gilt. Die Verallgemeinerung von (4.75) auf mehrere Punktdipole \mathbf{m}_n an Orten \mathbf{r}_n lautet

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \sum_n \mathbf{m}_n \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) \quad (4.77)$$

und es ist klar, daß auch in diesem Fall die Gleichung (4.76) gültig ist. Wie die entsprechende Gleichung für den elektrischen Fall ist sie auch gültig, wenn die Dipole Atomen in einem Medium zugeordnet werden und über die Positionen der Dipole gemäß (2.105) gemittelt wird, so daß im Ergebnis die „verschmierte“ beschränkte Stromdichtefunktion

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \sum_n \langle \mathbf{m}_n \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) \rangle = \sum_n \mathbf{m}_n g(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) \quad (4.78)$$

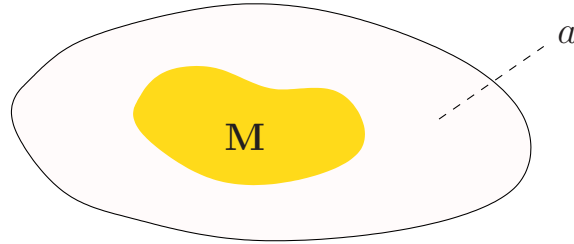
entsteht. Wir setzen die Stromdichte (4.76) in (4.74) ein und erhalten das Vektorpotential einer Dipolverteilung in der Form

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\nabla_{r'} \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (4.79)$$

Die Tatsache, daß sich $\mathbf{j}_m(\mathbf{r})$ als Rotation eines Vektorfeldes darstellen läßt, bringt zum Ausdruck, daß der mit den Dipolen verbundene Gesamtstrom durch eine Fläche, deren Berandung die Dipolverteilung ganz umschließt, verschwindet, wie durch Anwendung des Stokeschen Satzes zu sehen ist,

$$I_m = \int_a d\mathbf{a} \cdot \mathbf{j}_m(\mathbf{r}) = \int_a d\mathbf{a} \cdot \nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{r})$$

$$= \int_{(a)} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}) = 0. \quad (4.80)$$



Nichtverschwindendes makroskopisches $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ entspricht dem Fall eines Körpers, dessen atomare Bausteine über (mikroskopische) Ringströme (und nach Mittelung über hinreichend viele dieser Bausteine) zu einer meßbaren magnetischen Dipoldichte Anlaß geben.³ Wir erinnern an die in (2.90) vorgenommene Aufteilung der Gesamtstromdichte $\mathbf{j}'(\mathbf{r})$ und setzen in Übereinstimmung mit (2.92)

$$\mathbf{j}'(\mathbf{r}) = \mathbf{j}(\mathbf{r}) + \mathbf{j}_m(\mathbf{r}) = \mathbf{j}(\mathbf{r}) + \mu_0^{-1} \nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{r}), \quad (4.81)$$

wobei die Magnetisierung $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ nunmehr mit der (makroskopischen) magnetischen Dipoldichte identifiziert werden kann. Damit kann die (mikroskopische) Maxwell-Gleichung

$$\mu_0^{-1} \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}'(\mathbf{r}) \quad (4.82)$$

in die (makroskopische) Form

$$\nabla \times [\mu_0^{-1} \mathbf{B}(\mathbf{r}) - \mathbf{M}(\mathbf{r})] = \mathbf{j}(\mathbf{r}) \quad \rightsquigarrow \quad \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}(\mathbf{r}) \quad (4.83)$$

mit

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mu_0^{-1} \mathbf{B}(\mathbf{r}) - \mathbf{M}(\mathbf{r}) \quad (4.84)$$

gebracht werden. Wie die Berechnung der Polarisation im elektrischen Fall ist auch die Berechnung der Magnetisierung (als Funktional der magnetischen Induktion) eine i. allg. nicht triviale Aufgabe.

Verschwundet die makroskopische Stromdichte,

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0, \quad (4.85)$$

³Existiert ein nichtverschwindendes $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ ohne äußeres Magnetfeld, spricht man auch von einem Permanentmagneten.

gestattet es die Form der (makroskopischen) Maxwell-Gleichungen

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0, \quad (4.86)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0 \quad (4.87)$$

zusammen mit der Gleichung (4.84), die Magnetostatik in völliger Analogie zur Elektrostatik abzuhandeln. Eliminieren wir in (4.86) die magnetische Induktion gemäß (4.84), so wird aus dieser Gleichung

$$\nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \varrho_m(\mathbf{r}), \quad (4.88)$$

wobei

$$\varrho_m(\mathbf{r}) = -\nabla \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}) \quad (4.89)$$

als **magnetische Poldichte** angesehen werden kann. Die Gleichung (4.89) ist dabei Ausdruck der Tatsache, daß es keine magnetischen Monopole gibt.

Es ist offensichtlich, daß die Lösung der Gleichungen (4.87) und (4.88) völlig analog zur Elektrostatik konstruiert werden kann. So folgt zunächst aus (4.87), daß das magnetische Feld als Gradient eines skalaren Potentials angesetzt werden kann,

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\nabla \varphi_m(\mathbf{r}), \quad (4.90)$$

und somit (4.88) auf eine Poisson-Gleichung für dieses Potential führt,

$$\Delta \varphi_m(\mathbf{r}) = -\varrho_m(\mathbf{r}). \quad (4.91)$$

Gemäß (3.38) lautet die Lösung dieser Gleichung (mit der Randbedingung im Unendlichen)

$$\varphi_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3r' \frac{\varrho_m(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (4.92)$$

Unter Berücksichtigung von (4.89) wird daraus

$$\begin{aligned} \varphi_m(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{4\pi} \int d^3r' \frac{\nabla_{r'} \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= \frac{1}{4\pi} \int d^3r' \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \end{aligned} \quad (4.93)$$

Es ist nicht schwierig, sich davon zu überzeugen, daß das skalare Potential (4.93) und das Vektorpotential (4.79) auf das gleiche Magnetfeld führen.

Für die Anwendung der Gleichung (4.83) in der makroskopischen Magnetostatik wird (analog zur Elektrostatik) noch die Verknüpfung zwischen \mathbf{M} und \mathbf{B} bzw. zwischen \mathbf{H} und \mathbf{B} benötigt. Wie bereits erwähnt, gilt im Rahmen der linearen Elektrodynamik für isotrope magnetische Substanzen (die keine permanente Magnetisierung aufweisen) in vielen Fällen die einfache Beziehung

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mu^{-1}(\mathbf{r})\mathbf{B}(\mathbf{r}) \rightsquigarrow \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu(\mathbf{r})\mathbf{H}(\mathbf{r}). \quad (4.94)$$

Für **paramagnetische Substanzen** ist $\mu > \mu_0$, und für **diamagnetische Substanzen** ist $\mu < \mu_0$. Für **Ferromagnetika** muß die lineare Materialgleichung (4.94) bekanntlich durch eine nichtlineare Materialgleichung ersetzt werden.

4.6 Magnetische Kraftwirkungen

Entsprechend dem Lorentzschen Kraftgesetz unterliegt eine Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ in einem Induktionsfeld $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ der Kraftdichte

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}). \quad (4.95)$$

Wir wollen von dieser Gleichung ausgehend die Kraft

$$\mathbf{F} = \int_V d^3r \mathbf{f}(\mathbf{r}) = \int_V d^3r \mathbf{j}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (4.96)$$

berechnen, die ein Magnetfeld auf eine Stromschleife \mathcal{C} ausübt. Mit der Ersetzungsregel (4.26) folgt aus (4.96)

$$\mathbf{F} = I \int_{\mathcal{C}} d\mathbf{r} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (4.97)$$

bzw. [unter Verwendung von (1.9) mit a als einer von \mathcal{C} berandeten Fläche]

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= I \int_a (\mathbf{da} \times \nabla) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) \\ &= I \int_a \left(-\mathbf{da} \underbrace{\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r})}_0 + \nabla \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{da} \right),\end{aligned}\quad (4.98)$$

d.h.:

$$\boxed{\mathbf{F} = I \int_a \nabla \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{da}} \quad (4.99)$$

Aus (4.99) ist sofort ersichtlich, daß eine Stromschleife in einem homogenen \mathbf{B} -Feld keine Kraft erfährt ($\mathbf{B} = \text{const.} \rightarrow \mathbf{F} = 0$).

Um die Kraft zu berechnen, die eine Stromschleife \mathcal{C} in dem von ihr selbst erzeugte Feld erfährt, machen wir in (4.97) von dem Biot-Savartschen Gesetz (4.28) Gebrauch und erhalten

$$\mathbf{F} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \int_{\mathcal{C}} \int_{\mathcal{C}} \frac{\mathbf{dr} \times [\mathbf{dr}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (4.100)$$

Wir formen den Integranden etwas um:

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{dr} \times [\mathbf{dr}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} &= \frac{\mathbf{dr}' \mathbf{dr} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} - \frac{\mathbf{dr} \cdot \mathbf{dr}' (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\ &= -\mathbf{dr}' \mathbf{dr} \cdot \nabla_r \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{\mathbf{dr} \cdot \mathbf{dr}' (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}.\end{aligned}\quad (4.101)$$

Da das Integral des Gradiententerms über eine geschlossene Kurve verschwindet, wird aus (4.100)

$$\mathbf{F} = -\frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \int_{\mathcal{C}} \int_{\mathcal{C}} \frac{\mathbf{dr} \cdot \mathbf{dr}' (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad (4.102)$$

woraus ersichtlich ist, daß

$$\mathbf{F} = 0 \quad (4.103)$$

gilt (Vertauschen von \mathbf{r} und \mathbf{r}' reproduziert das Integral bis auf das Vorzeichen). Eine Stromschleife übt auf sich selbst also keine Kraft aus.

Um die Kraft zu berechnen, die eine Stromschleife \mathcal{C}_1 (Stromstärke I_1) bei Anwesenheit einer zweiten Stromschleife \mathcal{C}_2 (Stromstärke I_2) erfährt, muß also nur das von der zweiten Stromschleife erzeugte Feld berücksichtigt werden. Völlig analog zur Herleitung von (4.100) finden wir für die Kraft \mathbf{F}_{12} , die die zweite Stromschleife auf die erste Stromschleife ausübt, zunächst

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \int_{\mathcal{C}_1} \int_{\mathcal{C}_2} \frac{d\mathbf{r}_1 \times [d\mathbf{r}_2 \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)]}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}, \quad (4.104)$$

woraus in völliger Analogie zu (4.102)

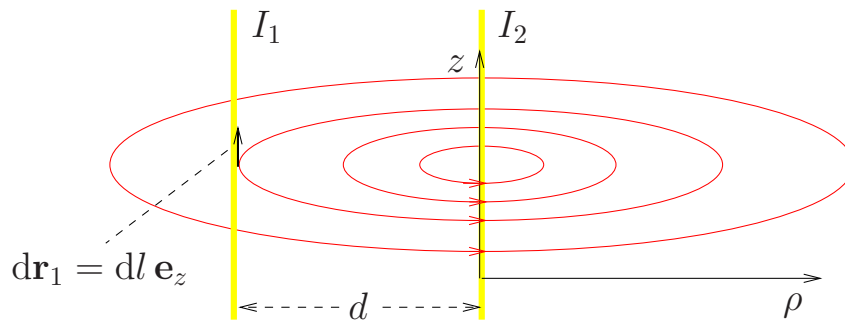
$$\mathbf{F}_{12} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \int_{\mathcal{C}_1} \int_{\mathcal{C}_2} \frac{d\mathbf{r}_1 \cdot d\mathbf{r}_2 (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} \quad (4.105)$$

folgt. Erwartungsgemäß gilt

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}. \quad (4.106)$$

Beispiel: Kraft zwischen zwei parallelen Leitern

Wir betrachten die in der Abbildung skizzierte Anordnung von zwei (unendlich langen) geraden Leitern. Gemäß (4.97) ist die Kraft auf ein



Leiterelement $d\mathbf{r}_1 = dl \mathbf{e}_z$

$$d\mathbf{F}_{12} = I_1 d\mathbf{r}_1 \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_1) = I_1 dl \mathbf{e}_z \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_1), \quad (4.107)$$

wobei gemäß (4.34)

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_1) = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d} \mathbf{e}_\phi \quad (4.108)$$

gilt, d.h., die pro Längeneinheit auf den ersten Leiter wirkende Kraft ist

$$\frac{d\mathbf{F}_{12}}{dl} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \mathbf{e}_\rho. \quad (4.109)$$

Gleichsinnig stromdurchflossene Leiter ziehen sich also an, ungleichsinnig durchflossene stoßen sich ab.

Beispiel: Kraft auf einen Dipol

Entsprechend der Definition eines magnetischen (Punkt-)Dipols wenden wir (4.99) auf den Grenzfall einer auf einen Punkt \mathbf{r} konzentrierten Fläche mit $Ia = \text{const.}$ an und erhalten aus (4.99) unter Berücksichtigung von (4.66)

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \nabla \mathbf{m} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}). \quad (4.110)$$

Da wir i. allg. annehmen können, daß die Stromdichte, die das für die Kraftwirkung relevante Induktionsfeld erzeugt, am Ort des Dipols verschwindet und somit die Relation

$$\mathbf{m} \times [\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r})] = \nabla \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{m} - \mathbf{m} \cdot \nabla \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \quad (4.111)$$

gilt, können wir (4.111) auch in der Form

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{m} \cdot \nabla \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (4.112)$$

schreiben – einer Form, die exakt der für die Kraft eines elektrischen Feldes auf einen elektrischen (Punkt-)Dipol entspricht [Gleichung (3.107)]. Demzufolge kann (4.112) in völliger Analogie zu (3.135) als

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \int d^3 r' \varrho_m(\mathbf{r}') \mathbf{B}(\mathbf{r}') \quad (4.113)$$

geschrieben werden, wobei $\varrho_m(\mathbf{r}')$ die entsprechende magnetische Pol-dichte ist [siehe (4.75) und (4.89)].

Beispiel: Drehmoment auf einen Dipol

Aus (4.97) folgt, daß eine Stromschleife das Drehmoment

$$\vec{M} = I \int_c \mathbf{r} \times [\mathrm{d}\mathbf{r} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})] \quad (4.114)$$

erfährt. Wir schreiben

$$\vec{M} = I \int_c [\mathrm{d}\mathbf{r} \mathbf{r} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) - \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \mathbf{B}(\mathbf{r})], \quad (4.115)$$

und wandeln die Kurvenintegrale gemäß (1.9) in Flächenintegrale um,

$$\vec{M} = I \int_a (\mathrm{d}\mathbf{a} \times \nabla) \mathbf{r} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) - I \int_a (\mathrm{d}\mathbf{a} \times \nabla) \cdot \mathbf{r} \mathbf{B}(\mathbf{r}). \quad (4.116)$$

Eine weitere Umformung liefert

$$\begin{aligned} (\mathrm{d}\mathbf{a} \times \nabla) \mathbf{r} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \mathrm{d}\mathbf{a} \times \underbrace{(\nabla \mathbf{r})}_{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) + \mathrm{d}\mathbf{a} \times [\nabla \mathbf{B}(\mathbf{r})] \cdot \mathbf{r} \\ &= \mathrm{d}\mathbf{a} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) + \mathrm{d}\mathbf{a} \times [\nabla \mathbf{B}(\mathbf{r})] \cdot \mathbf{r}, \end{aligned} \quad (4.117)$$

$$\begin{aligned} (\mathrm{d}\mathbf{a} \times \nabla) \cdot \mathbf{r} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \underbrace{[(\mathrm{d}\mathbf{a} \times \nabla) \cdot \mathbf{r}]}_0 \mathbf{B}(\mathbf{r}) + \mathbf{r} \cdot (\mathrm{d}\mathbf{a} \times \nabla) \mathbf{B}(\mathbf{r}) \\ &= \mathbf{r} \cdot (\mathrm{d}\mathbf{a} \times \nabla) \mathbf{B}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (4.118)$$

Wird die Fläche a auf den Koordinatenursprung konzentriert, so trägt für $Ia = \text{const.}$ nur der erste Term in der Zerlegung (4.117) zu dem Drehmoment bei. Das heißt, ein an einem Ort \mathbf{r} befindlicher Punktdipol erfährt das Drehmoment:

$$\boxed{\vec{M}(\mathbf{r}) = \mathbf{m} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})} \quad (4.119)$$

Mit Blick auf (3.114) ist dieses Ergebnis auf Grund der Analogie von Elektrostatik und Magnetostatik für Dipolverteilungen natürlich nicht überraschend.

4.7 Magnetische Feldenergie

Elektrostatik und Magnetostatik unterscheiden sich wesentlich durch die Tatsache, daß es im Gegensatz zu den elektrischen Ladungen keine magnetischen Ladungen (Monopole) gibt. Die Gemeinsamkeiten ergeben sich aus der Existenz von sowohl elektrischen und magnetischen Dipolen und der (formalen) Gleichheit der von ihnen erzeugten elektrischen bzw. magnetischen Feldern (Abschnitte 4.4 und 4.5).

Die Energiedichte des elektrischen Feldes in der Form (3.65) wurde in der Elektrostatik über die Untersuchung der Arbeit gefunden, eine bestimmte Ladungskonfiguration im Raum zu installieren, wobei Punktladungen als Ausgangspunkt der Überlegungen dienten. Bemerkenswerterweise hängt die Energiedichte in der Form (3.65) nur vom elektrischen Feld ab und nicht von der konkreten Form der Ladungsverteilung, die zu diesem Feld Anlaß gibt. Mit anderen Worten, jede beliebige Ladungsverteilung führt auf die Feldenergiedichte in der Form (3.65). Insbesondere führen beliebige Dipolanordnungen als spezielle Ladungsverteilungen auf diese Form der Feldenergiedichte.

Da für Dipolanordnungen die Magnetostatik völlig äquivalent zur Elektrostatik formuliert werden kann (so kann einer magnetischen Dipolverteilung eine magnetische Poldichte zugeordnet werden die exakt dem gleichen Kraftgesetz bezüglich eines Magnetfeldes folgt wie die entsprechende elektrische Ladungsdichte bezüglich eines elektrischen Feldes [siehe (4.113) und (3.135)], muß sich die gleiche Form der magnetischen Feldenergie wie für den elektrischen Fall ergeben. Entsprechend (3.64) und (3.65) gilt somit:

$$W_{\text{mag}} = \int d^3r w_{\text{mag}}(\mathbf{r}) \quad (4.120)$$

$$w_{\text{mag}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mu_0^{-1} \mathbf{B}^2(\mathbf{r}) \quad (4.121)$$

Wir wollen den Energieinhalt eines Magnetfeldes durch das Vektorpotential und die Stromdichte ausdrücken. Mit (4.6) wird aus (4.120)

[zusammen mit (4.121)] zunächst

$$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \int d^3r \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot [\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})], \quad (4.122)$$

und es gilt

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot [\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})] = \nabla \cdot [\mathbf{A}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}(\mathbf{r})] + \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot [\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r})]. \quad (4.123)$$

Der erste Term auf der rechten Seite dieser Gleichung liefert bezüglich (4.122) keinen Beitrag, da (für eine inselförmige Stromverteilung) das entsprechende Volumenintegral mittels des Gaußschen Satzes in ein verschwindendes Oberflächenintegral umgewandelt werden kann. Dies sowie die Maxwell-Gleichung (4.2) erlauben es dann, (4.122) wie folgt darzustellen:

$$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \int d^3r \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (4.124)$$

Im Falle einer Leiterschleife wird gemäß der Ersetzungsregel (4.26) aus (4.124)

$$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} I \int_{\mathcal{C}} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (4.125)$$

und nach Anwendung des Stokesschen Satzes

$$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} I \int_a d\mathbf{a} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} I \Phi \quad (4.126)$$

(a - Fläche, die von \mathcal{C} berandet wird). Es ist klar, dass im Falle mehrerer Leiterschleifen über alle diese zu summieren ist:

$$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \sum_k I_k \Phi_k \quad (4.127)$$

Berücksichtigen wir schließlich noch (4.38), so können wir den Energieinhalt allein durch die Stromstärken und die (rein geometrieabhängi-

gen) Induktionskoeffizienten wie folgt ausdrücken:

$$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \sum_{k,k'} L_{kk'} I_k I_{k'} \quad (4.128)$$

Ist also die magnetische Feldenergie einer solchen Anordnung als Funktion der Ströme bekannt, können die Induktionskoeffizienten durch Differentiation gewonnen werden,

$$L_{kk'} = \frac{\partial^2 W_{\text{mag}}}{\partial I_k \partial I_{k'}}. \quad (4.129)$$

4.8 Magnetischer Spannungstensor

Entsprechend dem Lorentzschen Kraftgesetz (2.33) unterliegt eine Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ in einem Magnetfeld $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ der Kraftdichte

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}), \quad (4.130)$$

woraus die auf ein endliches Volumen V wirkende Kraft

$$\mathbf{F} = \int_V d^3r \mathbf{f}(\mathbf{r}) = \int_V d^3r \mathbf{j}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (4.131)$$

resultiert. Mit (4.2) und (4.4) wird daraus

$$\begin{aligned} \int_V d^3r \mathbf{f}(\mathbf{r}) &= \mu_0^{-1} \int_V d^3r [\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r})] \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) \\ &= -\mu_0^{-1} \int_V d^3r \left[\frac{1}{2} \nabla \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) - \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \nabla \mathbf{B}(\mathbf{r}) \right] \end{aligned} \quad (4.132)$$

bzw. wegen $\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$

$$\int_V d^3r \mathbf{f}(\mathbf{r}) = -\mu_0^{-1} \int_V d^3r \left[\frac{1}{2} \nabla \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) - \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) \mathbf{B}(\mathbf{r}) \right]. \quad (4.133)$$

Wir berücksichtigen die Definition der magnetischen Feldenergiedichte in (4.121) und erhalten

$$\int_V d^3r \mathbf{f}(\mathbf{r}) = \int_V d^3r [\mu_0^{-1} \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) \mathbf{B}(\mathbf{r}) - \nabla w_{\text{mag}}(\mathbf{r})]. \quad (4.134)$$

Erwartungsgemäß hat die Gleichung (4.134) die gleiche Form wie die für den elektrischen Fall gültige Gleichung (3.74), so daß für eine weitere Auswertung die entsprechenden Gleichungen des Abschnittes 3.5 sofort übernommen werden können. So gilt

$$\int_V d^3r \mathbf{f}(\mathbf{r}) = \int_{(V)} d\mathbf{a} \cdot \mathbf{T} \quad (4.135)$$

mit

$$\mathbf{T}(\mathbf{r}) = \mu_0^{-1} \mathbf{B}(\mathbf{r}) \mathbf{B}(\mathbf{r}) - w_{\text{mag}}(\mathbf{r}) \mathbf{I} \quad (4.136)$$

als dem magnetischen Teil des Maxwellschen Spannungstensors [siehe (3.81) und (3.77)]. Die physikalische Interpretation ist analog zu der im Abschnitt 3.5 gegebenen.

4.9 Grenzbedingungen und Randwertproblem

Die allgemeine Lösung der vektoriellen Poisson-Gleichung für das Vektorpotential,

$$\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}), \quad (4.137)$$

setzt sich wieder aus der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung und einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung zusammen. Im Falle einer inselförmigen Stromverteilung im ansonsten leeren Raum sichert die Forderung, daß das Magnetfeld im Unendlichen verschwinden soll, die Eindeutigkeit der Poisson-Integrallösung (4.16).

Randbedingungen im Endlichen sind beispielsweise zu berücksichtigen, wenn sich in der Umgebung der betrachteten Stromverteilung makroskopische (magnetische) Körper befinden und speziell das Feld in ihrer Nähe von Interesse ist. Die Lösung muß dann so konstruiert werden, daß gewisse Übergangsbedingungen an den Grenzflächen unterschiedlicher Materialbereiche erfüllt werden. Wie in der Elektrostatik folgen diese Übergangsbedingungen aus den Maxwell-Gleichungen in integraler Form. Die Herleitung geschieht in der gleichen Weise wie im Abschnitt 3.8. Die integrale Form der Maxwell-Gleichung (4.1) auf die auf Seite 109 skizzierte Dose angewendet impliziert die folgende Übergangsbedingung für das \mathbf{B} -Feld:

$$B_{\perp}^{(I)}(\mathbf{r}) = B_{\perp}^{(II)}(\mathbf{r}) \quad (4.138)$$

Die Normalkomponente des \mathbf{B} -Feldes geht also stetig durch Grenzflächen. Analog liefert die Anwendung der integralen Form der Maxwell-Gleichung (4.2) auf die auf Seite 110 skizzierte Fläche als Übergangsbedingung für das \mathbf{H} -Feld:

$$s_{\parallel}(\mathbf{r}) = H_{\parallel}^{(II)}(\mathbf{r}) - H_{\parallel}^{(I)}(\mathbf{r}) \quad (4.139)$$

Hier bedeutet $\mathbf{s}(\mathbf{r})$ die bei Existenz von Oberflächenströmen von Null verschiedene Oberflächenstromdichte,

$$\Delta I = \int_{\mathcal{C}_2} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}(\mathbf{r}). \quad (4.140)$$

Gelten lineare Materialgleichungen der Art

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu \mathbf{H}(\mathbf{r}), \quad (4.141)$$

können die Übergangsbedingungen (4.138) und (4.139) wahlweise in der Form

$$B_{\perp}^{(I)}(\mathbf{r}) = B_{\perp}^{(II)}(\mathbf{r}), \quad (4.142)$$

$$B_{\parallel}^{(\text{I})}(\mathbf{r}) = \frac{\mu^{(\text{I})}}{\mu^{(\text{II})}} B_{\parallel}^{(\text{II})}(\mathbf{r}) \quad (4.143)$$

oder in der Form

$$H_{\perp}^{(\text{I})}(\mathbf{r}) = \frac{\mu^{(\text{II})}}{\mu^{(\text{I})}} H_{\perp}^{(\text{II})}(\mathbf{r}), \quad (4.144)$$

$$H_{\parallel}^{(\text{I})}(\mathbf{r}) = H_{\parallel}^{(\text{II})}(\mathbf{r}) \quad (4.145)$$

geschrieben werden. Während die Normalkomponente des \mathbf{B} -Feldes stetig durch eine Grenzfläche geht, erleidet seine Tangentialkomponente einen Sprung. Umgekehrt erleidet die Normalkomponente des \mathbf{H} -Feldes einen Sprung, während sich seine Tangentialkomponente stetig ändert.

Wegen des Fehlens magnetischer Ladungen (und damit magnetischer Ströme) gibt es in der Magnetostatik ein Randwertproblem wie das in der Elektrostatik für elektrische Ladungen und (ideale) Leiter nicht. Es ist näherungsweise realisiert, wenn im Rahmen der Übergangsbedingung (4.144) $\mu_1 \gg \mu_2$ gilt. In diesem Fall kann $H_{\perp}^{(\text{II})}(\mathbf{r})$ sehr viel größer als $H_{\perp}^{(\text{I})}(\mathbf{r})$ werden und nahezu senkrecht auf der Grenzfläche stehen, während $H_{\perp}^{(\text{I})}(\mathbf{r})$ vernachlässigbar klein wird. Für das magnetische Feld lassen sich dann die gleichen Methoden wie in der Elektrostatik zur Bestimmung des elektrischen Feldes bei Anwesenheit von (idealen) Leitern anwenden.

Kapitel 5

Quasistationäre Felder

In der bisherigen Auswertung der Maxwell-Gleichungen haben wir uns auf strikt zeitunabhängige elektromagnetische Felder konzentriert. In diesem Kapitel wollen wir zeitlich veränderliche Felder zulassen, uns jedoch auf verhältnismäßig langsam veränderliche Felder beschränken, wie sie etwa für die (niederfrequente) Elektrotechnik typisch sind. In der Elektrotechnik spielen insbesondere solche Ströme eine wichtige Rolle, deren Stärke an jedem Querschnitt der verwendeten Leitungsdrähte nahezu dieselbe ist. Obwohl die Stromstärke längs eines Drahtes zu jedem Zeitpunkt als (räumlich) unveränderlich angesehen werden kann, kann sie sich jedoch (gleichförmig längs des Drahtes) zeitlich langsam ändern. Im Sinne von Stromfäden haben wir es in einem solchen Fall mit sogenannten quasistationären Stromfäden zu tun.

Um einen elektrischen Strom durch einen Leitungsdraht aufrecht zu halten, bedarf es offensichtlich einer Kraft auf die entsprechenden Ladungsträger längs des Drahtes. Die Ursache für diese Kraft ist typischerweise ein elektrisches Feld,

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)]. \quad (5.1)$$

Es liegt auf der Hand, daß das Auffinden des durch diese Materialgleichung vermittelten konkreten Zusammenhanges zwischen Strom und elektrischem Feld mikroskopische (Modell-)Untersuchungen erforderlich macht und ohne Einbeziehung der entsprechenden Bewegungsgleichungen für die Ladungsträger unter dem Einfluß des Feldes nicht möglich ist.¹ In linearer, lokaler und instantaner Näherung geht die

¹Für diese Art von Materialgleichung gelten sinngemäß natürlich auch die im Abschnitt 2.2.2

Materialgleichung (5.2) in das bekannte **Ohmsche Gesetz**

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (5.2)$$

in differentieller Form über, wobei σ hier die (i. allg. ortsabhängige) **Leitfähigkeit** bedeutet.

5.1 Grundgleichungen

Elektromagnetische Felder werden als quasistationär bezeichnet, wenn

$$|\dot{\mathbf{D}}| \ll |\mathbf{j}| \quad (5.3)$$

gilt, so daß sich die Maxwell-Gleichungen (2.37)–(2.40) auf

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (5.4)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \dot{\mathbf{B}} = 0, \quad (5.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \varrho, \quad (5.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} \quad (5.7)$$

reduzieren.

In diesem Zusammenhang reicht es oft aus, die Materialgleichungen in linearer Näherung zu verwenden, so daß

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = \frac{\varepsilon}{\sigma} \mathbf{j} \quad (5.8)$$

angenommen werden kann und somit auch

$$\dot{\mathbf{D}} = \frac{\varepsilon}{\sigma} \dot{\mathbf{j}} \quad (5.9)$$

gilt. Es sei ω die Frequenz der relevanten Fourier-Komponente von \mathbf{j} ,

$$\underline{\mathbf{j}} \sim e^{i\omega t} \rightsquigarrow \underline{\dot{\mathbf{j}}} \sim i\omega \underline{\mathbf{j}}. \quad (5.10)$$

gemachten Ausführungen.

Gemäß (5.9) ergibt sich dann für die relevanten Fourier-Komponenten von $\dot{\mathbf{D}}$ und \mathbf{j} der Zusammenhang

$$\dot{\mathbf{D}} \sim i \frac{\varepsilon \omega}{\sigma} \mathbf{j}, \quad (5.11)$$

und die Bedingung (5.3) führt auf

$$\frac{\varepsilon \omega}{\sigma} \ll 1 \quad (5.12)$$

bzw.

$$\omega \ll \frac{\sigma}{\varepsilon}. \quad (5.13)$$

Die Erfüllung dieser Bedingung erfordert offensichtlich ein relativ gut leitendes Medium. Im Gegensatz zur Vernachlässigung von $\dot{\mathbf{D}}$ in den Maxwell-Gleichungen kann in diesem Fall $\dot{\mathbf{B}}$ nicht vernachlässigt werden. Gemäß (5.5) wird durch die zeitliche Änderung eines \mathbf{B} -Feldes ein elektrisches Feld induziert. Selbst wenn die zeitliche Änderung des \mathbf{B} -Feldes relativ klein ist, so daß nur ein schwaches elektrisches Feld induziert wird, kann dieses gemäß (5.2) wegen der relativ hohen Leitfähigkeit beachtliche Ströme erzeugen.

Die Gleichung (5.7) impliziert

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (5.14)$$

was entsprechend der Kontinuitätsgleichung der Forderung

$$\dot{\rho} = 0 \quad (5.15)$$

entspricht. Mit dem Ohmschen Gesetz (5.2) führt die Kontinuitätsgleichung zunächst auf

$$\dot{\rho} = -\nabla \cdot \mathbf{j} = -\nabla \cdot \sigma \mathbf{E} \quad (5.16)$$

bzw. unter Verwendung der Maxwell-Gleichung (5.6) und unter Zugrundelegung eines linearen Zusammenhanges zwischen \mathbf{D} und \mathbf{E} , $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$,

$$\dot{\rho} = -\frac{\sigma}{\varepsilon} \nabla \cdot \mathbf{D} = -\frac{\sigma}{\varepsilon} \rho, \quad (5.17)$$

wobei \mathbf{E} und \mathbf{D} die von der Ladungsverteilung im leitenden Material erzeugten Eigenfelder bedeuten und σ als räumlich konstant angenommen ist. Aus (5.17) folgt dann

$$\varrho = \varrho_0 e^{-t/\tau} \quad (5.18)$$

mit

$$\tau = \frac{\varepsilon}{\sigma}. \quad (5.19)$$

Jede in einem leitenden, insgesamt elektrisch neutralem Material einmal vorhandene (Raum-)Ladungsdichte $\varrho \neq 0$ klingt also exponentiell ab, weil die Ladungen durch ihr Eigenfeld (infolge von Abstoßungskräften) gewissermaßen auseinandergezogen werden. Die entsprechende charakteristische Zeit τ ist i. allg. sehr klein (z.B. $\tau \approx 10^{-17}$ s für Kupfer), so daß sich eine irgendwie entstandene Ladungsanhäufung extrem schnell auflöst und somit auf einer Zeitskala, die τ nicht auflöst, $\dot{\varrho} = 0$ gesetzt werden kann.

Der quasistationäre Fall kann analog zum statischen Fall abgehandelt werden. Die Gleichung (5.4) impliziert wieder die Möglichkeit, das \mathbf{B} -Feld als Rotation eines Vektorpotentials darzustellen,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t), \quad (5.20)$$

so daß die Gleichung (5.5) die Form

$$\nabla \times [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \dot{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t)] = 0 \quad (5.21)$$

annimmt. Da ein Vektorfeld, dessen Rotation verschwindet, als Gradient eines skalaren Feldes dargestellt werden kann, können wir

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \dot{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) = -\nabla \varphi(\mathbf{r}, t) \quad (5.22)$$

bzw.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) - \nabla \varphi(\mathbf{r}, t) \quad (5.23)$$

setzen. Mit den Ansätzen (5.20) und (5.23) sind die beiden Maxwell-Gleichungen (5.4) und (5.5) befriedigt, und es verbleiben die beiden Maxwell-Gleichungen (5.6) und (5.7).

Wir wollen als Hintergrund für die Ladungen und Ströme den leeren Raum annehmen, so daß diese Gleichungen

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\varepsilon_0} \varrho(\mathbf{r}, t) \quad (5.24)$$

und

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \quad (5.25)$$

lauten. Mit dem Ansatz (5.23) wird aus (5.24)

$$-\nabla \cdot \dot{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) - \Delta \varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\varepsilon_0} \varrho(\mathbf{r}, t), \quad (5.26)$$

und mit dem Ansatz (5.20) wird aus (5.7)

$$\nabla \times [\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)] = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \quad (5.27)$$

bzw.

$$\nabla \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t). \quad (5.28)$$

Wie wir bereits wissen, ist das Vektorpotential nicht eindeutig bestimmt, da die Ersetzung

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \rightarrow \mathbf{A}'(\mathbf{r}, t) + \nabla \chi(\mathbf{r}, t) \quad (5.29)$$

ebenfalls ein mögliches Vektorpotential $\mathbf{A}'(\mathbf{r}, t)$ liefert,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}'(\mathbf{r}, t). \quad (5.30)$$

Diese Eichfreiheit kann wieder genutzt werden, um das Vektorpotential so zu wählen, daß die Coulomb-Eichung

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (5.31)$$

gilt (siehe Abschnitt 4.1). Damit entkoppeln die Gleichungen (5.26) und (5.28) für das Vektorpotential und das skalare Potential:

$$\Delta \varphi(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \varrho(\mathbf{r}, t) \quad (5.32)$$

$$\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \quad (5.33)$$

Wir erhalten also die gleichen Potentialgleichungen wie in der Elektrostatik und der Magnetostatik.² Vektorpotential und skalares Potential folgen adiabatisch der zeitlichen Änderung von Ladungs- und Stromverteilung.

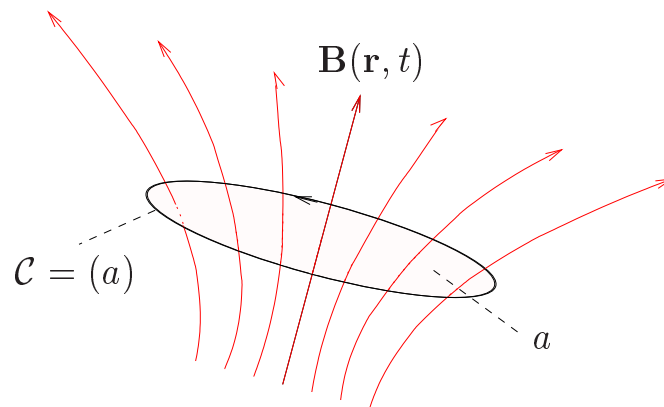
5.2 Faradaysches Induktionsgesetz

Wie bereits erwähnt, stellt die Maxwell-Gleichung (5.5) das Induktionsgesetz in differentieller Form dar. Wir wollen es etwas genauer diskutieren und betrachten dazu die integrale Form gemäß (2.82)

$$\int_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = - \int_a d\mathbf{a} \cdot \dot{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) = - \frac{d\Phi(t)}{dt} \quad (5.34)$$

$$\Phi(t) = \int_a d\mathbf{a} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t). \quad (5.35)$$

Die zeitliche Änderung des magnetischen Flusses Φ durch eine Fläche



a liefert ein von Null verschiedenes Wegintegral der elektrischen

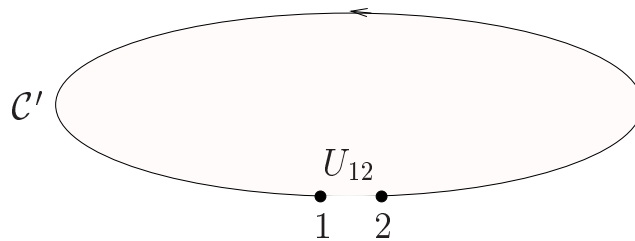
²Man beachte, daß die Ladungsdichte ρ in (5.32) und die Stromdichte \mathbf{j} in (5.33) der Kontinuitätsgleichung $\dot{\rho} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ genügen müssen, wenn die Ladungsdichte als zeitabhängig angenommen wird. Das aus diesen Gleichungen resultierende elektromagnetische Feld stellt dann das sogenannte Nahfeld dar (Abschnitt 6.5).

Feldstärke längs der Berandungskurve der Fläche. Das Wegintegral der elektrischen Feldstärke längs einer geschlossenen Kurve \mathcal{C} wird als induzierte Spannung bezeichnet und das Induktionsgesetz in der Form

$$U_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi(t)}{dt} \quad (5.36)$$

geschrieben.

Repräsentiert nämlich die geschlossene Kurve eine (ideale) Leiterschleife, dann kann die induzierte Spannung als *elektromotorische Kraft* interpretiert werden. Wir denken uns die Leiterschleife an zwei (hinreichend wenig voneinander entfernten) Punkten 1 und 2 unterbrochen. Das Kurvenintegral längs der geschlossenen Kurve \mathcal{C} setzt sich dann aus zwei Teilen zusammen,



$$U_{\text{ind}} = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{dr} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int_{\mathcal{C}'} \mathbf{dr} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + U_{12}, \quad (5.37)$$

wobei

$$U_{12} = \int_1^2 \mathbf{dr} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (5.38)$$

die zwischen den (End-)Punkten 1 und 2 anliegende Spannung ist. Mit Blick auf die Materialgleichung (5.2) ist klar, daß im Grenzfall eines idealen Leiters ($\sigma \rightarrow \infty$) das elektrische Feld innerhalb des Leiters verschwindet ($\mathbf{E} \rightarrow 0$) und somit

$$U_{\text{ind}} = U_{12} \quad (5.39)$$

wird.

Lenzsche Regel

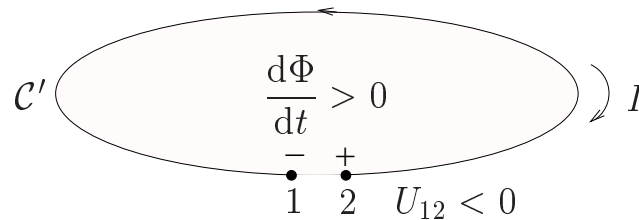
Es sei

$$\frac{d\Phi}{dt} > 0. \quad (5.40)$$

Dann ist offensichtlich

$$U_{12} < 0, \quad (5.41)$$

d.h., der Strom in der Leiterschleife transportiert positive Ladungen



zum Punkt 2 (siehe Abbildung). Das durch diesen Stromfluß erzeugte Magnetfeld ist folglich der zeitlichen Änderung des verursachenden Magnetfelds entgegengesetzt gerichtet (vergleiche mit der Abbildung auf Seite 172), so daß die zeitliche Änderung des Induktionsflusses vermindert wird. Analog bewirkt für $\dot{\Phi} < 0$ der Induktionsstrom eine Vergrößerung von $\dot{\Phi}$ (Verringerung von $|\dot{\Phi}|$). Der geschilderte Sachverhalt ist Ausdruck der Lenzschen Regel: *Der induzierte Strom und das ihn begleitende Magnetfeld sind so gerichtet, das sie die sie verursachende Flußänderung zu hemmen versuchen.*

Bewegte Leiterschleife

In unseren bisherigen Überlegungen sind wir von einer unbeweglichen Leiterschleife ausgegangen. Im Falle einer bewegten Leiterschleife kann in der integralen Maxwell-Gleichung

$$\int_C \mathbf{dr} \cdot \mathbf{E} = - \int_a \mathbf{da} \cdot \dot{\mathbf{B}} \quad (5.42)$$

die zeitliche Differentiation nicht wie in (5.34) vor das Integral gezogen werden. Um die in der Leiterschleife induzierte Spannung zu berechnen, gehen wir deshalb zunächst in das Koordinatensystem Σ' , das sich mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} gegenüber dem Inertialsystem Σ bewegt und in dem die Leiterschleife ruht. Gemäß (2.157) und (2.158) hängen die

Felder \mathbf{E}' und \mathbf{B}' in Σ' mit den Feldern \mathbf{E} und \mathbf{B} in Σ für $|\mathbf{v}| \ll c$ (d.h. ohne relativistische Korrekturen) wie folgt zusammen:

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B}, \quad (5.43)$$

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (5.44)$$

Wird mittels (5.44) in (5.42) das \mathbf{E} -Feld durch das \mathbf{E}' -Feld und das \mathbf{B} -Feld ausgedrückt, ergibt sich

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{dr} \cdot \mathbf{E}' - \int_{\mathcal{C}} \mathbf{dr} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = - \int_a \mathbf{da} \cdot \dot{\mathbf{B}}. \quad (5.45)$$

Offensichtlich kann das längs der Leiterschleife genommene Wegintegral von \mathbf{E}' als induzierte Spannung interpretiert werden,

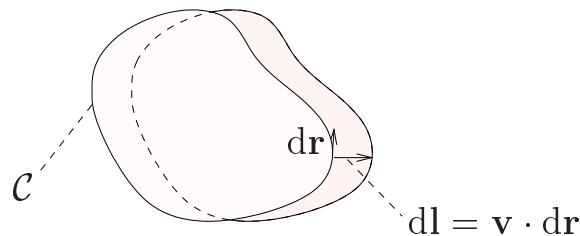
$$U_{\text{ind}} = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{dr} \cdot \mathbf{E}', \quad (5.46)$$

und somit folgt:

$$U_{\text{ind}} = - \int_a \mathbf{da} \cdot \dot{\mathbf{B}} + \int_{\mathcal{C}} \mathbf{dr} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (5.47)$$

Durch die Bewegung des Leiters werden natürlich auch die Ladungsträger in ihm bewegt. Sich bewegende Ladungsträger bedeuten bekanntlich einen Strom, und auf diesen Strom übt ein Magnetfeld eine Kraft auf.

Wir wollen die Änderung des magnetischen Flusses durch eine sich bewegende Leiterschleife berechnen. Die Änderung des Induktionsflusses



ses durch die von der Leiterschleife berandete Fläche resultiert aus der

Änderung des \mathbf{B} -Feldes und der Änderung der Fläche. Die Änderung der Fläche bei Verschieben des Leiterelements $d\mathbf{r}$ um $d\mathbf{l}$ ist

$$d\mathbf{a} = d\mathbf{l} \times d\mathbf{r} = dt \mathbf{v} \times d\mathbf{r}, \quad (5.48)$$

und folglich ist die Änderung des Flusses während dt durch Verschieben der Leiterschleife bei festem \mathbf{B}

$$d\Phi|_{\mathbf{B}} = dt \int_C (\mathbf{v} \times d\mathbf{r}) \cdot \mathbf{B} = -dt \int_C d\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (5.49)$$

Die totale zeitliche Änderung des Flusses ist folglich

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_a d\mathbf{a} \cdot \dot{\mathbf{B}} - \int_C d\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (5.50)$$

und der Vergleich von (5.50) mit (5.47) liefert das Induktionsgesetz in der Form (5.36),

$$U_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi(t)}{dt}. \quad (5.51)$$

Die induzierte Spannung ist also generell durch die totale zeitliche Ableitung des Induktionsflusses gegeben. Die Flußänderung kann entweder durch eine Änderung der magnetischen Induktion oder durch Änderung der Gestalt, der Orientierung oder der Lage der Leiterschleife bewirkt werden. Im Falle zweier Leiterschleifen wird also in einer Leiterschleife (der zweiten) ein Strom induziert, wenn entweder diese Leiterschleife bewegt wird und die andere (die erste), die von einem stationären Strom durchflossen wird, in Ruhe bleibt oder aber die zweite Leiterschleife festgehalten wird und die erste in die gleiche relative Richtung bewegt wird.

System von Leiterschleifen

Gegeben sei ein System von Leiterschleifen (Stromkreisen). Die k -te Leiterschleife werde vom Strom I_k durchflossen. Gemäß (4.38) ist der Induktionsfluß durch die k -te Leiterschleife durch

$$\Phi_k = \sum_{k'} L_{kk'} I_{k'} \quad (5.52)$$

gegeben, wobei die $L_{kk'}$ die in (4.39) definierten geometrieabhängigen Induktionskoeffizienten sind. Zeitlich veränderliche Ströme führen dann bei fester Geometrie zu einer Flußänderung

$$\dot{\Phi}_k = \sum_{k'} L_{kk'} \dot{I}_{k'} \quad (5.53)$$

und somit zu einer in der k -ten Leiterschleife induzierten Spannung:

$$U_k^{\text{ind}} = - \sum_{k'} L_{kk'} \dot{I}_{k'} \quad (5.54)$$

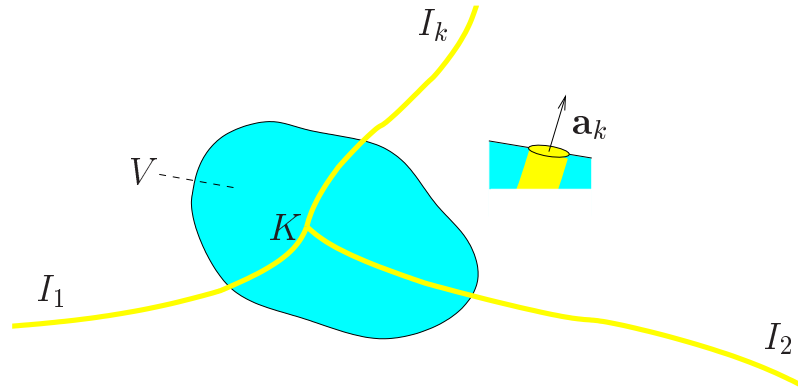
5.3 Kirchhoffsche Regeln

Wie bereits erwähnt, bildet das System der Maxwell-Gleichungen (5.4) – (5.7) zusammen mit dem Ohmschen Gesetz (5.2) die Grundlage für das umfangreiche Gebiet der Elektrotechnik und speziell der Wechselstromtechnik. Bekanntlich werden der Berechnung von (Wechsel-)Stromkreisen üblicherweise die Kirchhoffschen Regeln zugrunde gelegt. Sie machen Aussagen über die Ströme in Leiterknoten und die Spannungen in Leiterkreisen. Wir wollen uns überlegen, wie die Kirchhoffschen Regeln aus den Maxwell-Gleichungen folgen, als eine einfache Anwendung den Reihenschwingkreis diskutieren und kurz auf die komplexe Wechselstromrechnung eingehen.

5.3.1 Stromregel

Gegeben sei ein miteinander verknüpft System von Leiterkreisen, und es sei K ein Leiterknoten, in dem sich eine gewisse Anzahl von Leitern treffen möge, wobei im k -ten Leiter der Strom I_k fließen möge. Der Knoten liege in einem Raumbereich vom Volumen V . Die integrale Form der (Kontinuitäts-)Gleichung (5.14) liefert

$$0 = \int_V d^3r \nabla \cdot \mathbf{j} = \int_{(V)} \mathbf{da} \cdot \mathbf{j}. \quad (5.55)$$



Ist a_k die Querschnittsfläche des k -ten Leiters an der Oberfläche des betrachteten Raumbereiches, gilt also

$$\sum_k \int_{a_k} \mathbf{da} \cdot \mathbf{j} = 0. \quad (5.56)$$

Mit

$$I_k = \int_{a_k} \mathbf{da} \cdot \mathbf{j} \quad (5.57)$$

wird daraus die Kirchhoffsche Stromregel:³

$$\boxed{\sum_k I_k = 0} \quad (5.58)$$

Gemäß (4.24) und (4.25) ist dabei über die Vorzeichen der Ströme so verfügt, daß

$$I = \begin{cases} +|I| & \text{für } \mathbf{j}_k \uparrow\uparrow \mathbf{a}_k, \\ -|I| & \text{für } \mathbf{j}_k \downarrow\uparrow \mathbf{a}_k \end{cases} \quad (5.59)$$

Die Summe aller Ströme addieren sich in einem Leiterknoten zu Null.

5.3.2 Spannungsregel

Wir greifen uns aus dem System von Leiterkreisen den k -ten Leiterkreis \mathcal{C}_k heraus und wenden das Induktionsgesetz [Gleichungen (5.34) und

³Beachte, daß (für eine feste Zeit) die Stromstärke I längs eines Leiters wegen $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ konstant ist.

(5.36)] auf diesen an,

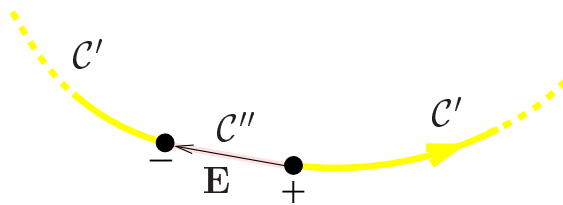
$$\int_{\mathcal{C}_k} \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} = -\dot{\Phi} = U_k^{\text{ind}}. \quad (5.60)$$

Für jeden Leiterkreis gilt also die Kirchhoffsche Spannungsregel:

$$\boxed{\int_{\mathcal{C}_k} \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} - U_k^{\text{ind}} = 0} \quad (5.61)$$

Die Summe aller in einem Leiterkreis auftretenden Spannungen ist gleich Null.

Die induzierte Spannung als elektromotorische Kraft geht dabei mit negativem Vorzeichen ein. Dies gilt auch für jede andere im Stromkreis befindliche elektromotorische Kraft U_k^{ext} . Betrachten wir den in der folgenden Abbildung skizzierten Stromkreisabschnitt, der U_k^{ext} enthält,



und nehmen wir (zum betrachteten Zeitpunkt) die angegebene Polung an. Wir denken uns den Integrationsweg \mathcal{C}_k zerlegt in das die externe Spannungsquelle enthaltende Teilstück \mathcal{C}_k'' und den restlichen Leiterkreis \mathcal{C}_k' . Offensichtlich gilt

$$\int_{\mathcal{C}_k''} \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} = -U_k^{\text{ext}}, \quad (5.62)$$

so daß (5.61) die Form

$$\int_{\mathcal{C}_k'} \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} - U_k^{\text{ext}} - U_k^{\text{ind}} = 0 \quad (5.63)$$

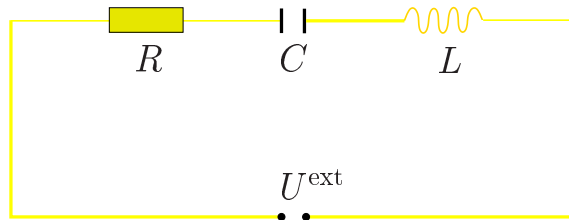
annimmt. Machen wir (für ruhende Leiterkreise) noch von (5.54) Gebrauch, so können wir weiter

$$\int_{\mathcal{C}'_k} \mathbf{dr} \cdot \mathbf{E} + \sum_{k'} L_{kk'} \dot{I}_{k'} = U_k^{\text{ext}} \quad (5.64)$$

schreiben. Stromregel und Spannungsregel liefern ein gekoppeltes Gleichungssystem zur Berechnung (der zeitlichen Entwicklung) der Ströme in den einzelnen Leiterkreisen.

5.3.3 Reihenschwingkreis

Wir betrachten den in der Abbildung skizzierten Leiterkreis bestehend



aus einem Ohmschen Widerstand (R), einem Kondensator (C), einer Spule (L), einer äußeren Spannungsquelle (U_{ext}) sowie die diese Bauelemente verbindenden Drähte. Wir wenden die Spannungsregel (5.61) in der Form (5.64) an und schreiben ($\mathcal{C}' = \mathcal{C}_R + \mathcal{C}_C + \mathcal{C}_{\text{Drähte}}$)

$$\int_{\mathcal{C}_R} \mathbf{dr} \cdot \mathbf{E} + \int_{\mathcal{C}_C} \mathbf{dr} \cdot \mathbf{E} + \int_{\mathcal{C}_{\text{Drähte}}} \mathbf{dr} \cdot \mathbf{E} + L \dot{I} = U^{\text{ext}}. \quad (5.65)$$

Die drei Integrale stellen offensichtlich die Spannungsabfälle am Widerstand, dem Kondensator und den Widerständen der Drähte (einschließlich des Spulendrahtes) dar. Zur Berechnung des Beitrages des Widerstandes machen wir von dem Ohmschen Gesetz (5.2) Gebrauch, berücksichtigen (4.42) und erhalten das Ohmsche Gesetz in seiner übli-

chen Form⁴

$$U_R = \int_{\mathcal{C}_R} \mathbf{dr} \cdot \mathbf{E} = \int_{\mathcal{C}_R} \frac{\mathbf{dr} \cdot \mathbf{j}}{\sigma} = I \int_{\mathcal{C}_R} \frac{dr}{\sigma \Delta a} = I R \quad (5.66)$$

mit

$$R = \int_{\mathcal{C}_R} \frac{dr}{\sigma \Delta a} \quad (5.67)$$

als dem Ohmschen Widerstand. Sind insbesondere σ und Δa konstant über die Länge l des Widerstandes, ergibt sich für R die bekannte Formel

$$R = \frac{l}{\sigma \Delta a}. \quad (5.68)$$

Das von den Drähten (einschließlich des Spulendrahtes) in (5.65) herrührende Integral kann völlig analog ausgewertet werden. Entsprechend der Bestimmung der Bauelemente sind die resultierenden Widerstände in der Regel klein im Vergleich zum Widerstand des Bauelementes „Widerstand“ und können entweder vernachlässigt oder über R berücksichtigt werden. Schließlich erhalten wir gemäß (3.308)

$$U_C = \int_{\mathcal{C}_C} \mathbf{dr} \cdot \mathbf{E} = \frac{Q}{C} \quad (5.69)$$

mit C als der Kapazität des Kondensators und

$$\dot{Q} = I. \quad (5.70)$$

Damit geht (5.65) in

$$L \dot{I} + R I + \frac{1}{C} Q = U^{\text{ext}} \quad (5.71)$$

über, woraus nach zeitlicher Ableitung und unter Berücksichtigung von (5.70)

$$L \ddot{I} + R \dot{I} + \frac{1}{C} I = \dot{U}^{\text{ext}} \quad (5.72)$$

⁴Hier wird wieder angenommen, daß \mathbf{j} über die Querschnittsfläche Δa als konstant angesehen werden kann.

wird. Die Gleichung (5.72) ist die Differentialgleichung für eine erzwungene, gedämpfte Schwingung des Stromes.⁵

Ein Vergleich mit der entsprechenden Bewegungsgleichung der Mechanik für die Auslenkung eines Massenpunktes aus seiner Gleichgewichtslage in einem harmonischem Potential zeigt, daß der Selbstinduktionskoeffizient L der Masse m , die Kapazität C der reziproken Federkonstanten $1/k$ und der Ohmsche Widerstand R dem Reibungskoeffizienten γ entspricht. Im Falle der freien zeitlichen Entwicklung ($U^{\text{ext}} = 0$) lautet die Lösung der Differentialgleichung (5.72) folglich

$$I(t) = e^{-t/\tau} (ae^{i\Omega t} + \text{c.c.}) \quad (5.73)$$

mit

$$\Omega = \left(\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} \right)^{1/2} \quad (5.74)$$

und

$$\tau = \frac{2L}{R} \quad (5.75)$$

(a – komplexwertige Integrationskonstante entsprechend den Anfangsbedingungen). Bekanntlich kann zwischen drei Fällen unterschieden werden.

(1) Gedämpfte Schwingung:

$$R^2 < \frac{4L}{C} \quad \rightsquigarrow \quad \Omega \text{ reell.} \quad (5.76)$$

Speziell die für den Grenzfall verschwindenden Ohmschen Widerstandes definierte *Eigenfrequenz* ω_0 des Schwingkreises ist

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad (5.77)$$

(Thomson-Formel).

(2) Aperiodischer Grenzfall:

$$R^2 = \frac{4L}{C} \quad \rightsquigarrow \quad \Omega = 0. \quad (5.78)$$

⁵Ist speziell $\dot{U}^{\text{ext}} = \dot{U}^{\text{ext}}(t)$ periodisch und die Dämpfung hinreichend klein, handelt es sich um eine gedämpfte, periodische Schwingung.

(3) Kriechfall:

$$R^2 > \frac{4L}{C} \quad \rightsquigarrow \quad \Omega \text{ imaginär.} \quad (5.79)$$

Energiebilanz

Wir folgen dem Vorgehen in der Mechanik und multiplizieren die Gleichung (5.71) mit I ,

$$L \dot{I} I + R I^2 + \frac{1}{C} Q I = U^{\text{ext}} I. \quad (5.80)$$

Wegen

$$L \dot{I} I = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L I^2 \right), \quad (5.81)$$

$$\frac{1}{C} Q I = \frac{1}{C} Q \dot{Q} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2C} Q^2 \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C U_C^2 \right) \quad (5.82)$$

ergibt sich die Bilanzgleichung

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L I^2 + \frac{1}{2} C U_C^2 \right) = -R I^2 + U^{\text{ext}} I. \quad (5.83)$$

Offensichtlich handelt es sich um die Energiebilanz. Gemäß (3.296) und (4.128) steht auf der linken Seite der Gleichung die zeitliche Änderung der elektromagnetischen Feldenergie als der Summe aus der elektrischen Feldenergie des Kondensators und der magnetischen Feldenergie der Induktivität (Spule). Der Term $R I^2$ repräsentiert die Verlustleistung, d.h. die pro Zeiteinheit am Ohmschen Widerstand erzeugte Joulsche (Reibungs-)Wärme, und $U^{\text{ext}} I$ stellt die Leistung dar, die der Stromkreis über die äußere Spannungsquelle aufnimmt. Die von einem elektrischen Feld \mathbf{E} an einer mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} bewegten Punktladung q pro Zeiteinheit geleistete Arbeit ist bekanntlich $q \mathbf{v} \cdot \mathbf{E}$. Ein Magnetfeld leistet an der Punktladung keine Arbeit, da die magnetische Kraft senkrecht zur Geschwindigkeit gerichtet ist. Existiert eine kontinuierliche Ladungsverteilung, dann ergibt sich die pro Zeiteinheit an der Ladung im Volumenelement d^3r geleistete Arbeit als $d^3r \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$. Die längs eines Ohmschen Widerstandes pro Zeiteinheit geleistete Arbeit ergibt sich folglich mit (5.66) zu

$$\int_V d^3r \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \quad \rightsquigarrow \quad I \int_{\mathcal{C}_r} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} = I R^2 \geq 0. \quad (5.84)$$

Sie ist grundsätzlich nicht negativ und beschreibt, da sie in die Energiebilanz für die elektromagnetische Feldenergie als Verlustleistung ein- geht, die Umwandlung elektromagnetischer Energie über mechanische Energie in Wärmeenergie.⁶

Im Grenzfall $U^{\text{ext}} = 0$ und $R = 0$ beschreibt (5.72) eine freie, ungedämpfte Schwingung, und es gilt der Energieerhaltungssatz für die elektromagnetische Feldenergie,

$$\frac{1}{2}LI^2 + \frac{1}{2}CU_C^2 = \text{const.} \quad (5.85)$$

Magnetische und elektrische Feldenergie spielen offensichtlich die Rollen von kinetischer und potentieller Energie des entsprechenden mechanischen (ungedämpften) Oszillators. Nimmt Q den Maximalwert an, so befindet sich die gesamte Energie als elektrische Feldenergie im Kondensator. Es beginnt ein Strom zu fließen, und in der Induktivität wird ein Magnetfeld aufgebaut. Die hierzu notwendige Energie geht zu Lasten der elektrischen Feldenergie des Kondensators. Im weiteren verwandelt sich die magnetische Feldenergie wieder in elektrische, wobei sich der Kondensator (im Vergleich zum Ausgangszustand) umgekehrt auflädt. Danach beginnt der Vorgang von neuem.⁷

Ist $U^{\text{ext}}(t)$ periodisch, so wird das Verhalten des Leiterkreises unter stationären Verhältnissen auch periodisch. Wie wir noch sehen werden (Abschnitt 5.3.4) verschwindet im Zeitmittel dann in (5.83) die zeitliche Ableitung der elektromagnetischen Feldenergie, und es gilt

$$\overline{U^{\text{ext}}I} = R\overline{I^2}. \quad (5.86)$$

Die im zeitlichen Mittel vom Leiterkreis (von außen) aufgenommene Leistung wird über den Ohmschen Widerstand vollständig in Wärmeenergie umgewandelt.

5.3.4 Komplexe Wechselstromrechnung

Die Strom- und Spannungsverhältnisse im betrachteten Reihenschwingkreis wie auch in komplexeren Schaltungen werden [gemäß (5.58) und

⁶Der Zusammenhang $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ erfordert die Einbeziehung eines Reibungsterms in die zugrunde liegende Bewegungsgleichung für die den Strom realisierenden Ladungen.

⁷Selbst wenn der Ohmsche Widerstand tatsächlich verschwände, würde sich dieser Vorgang auf Grund von (hier vernachlässigter Abstrahlung) nicht beliebig oft wiederholen.

(5.64)] i. allg. durch lineare Differentialgleichungssysteme beschrieben. Solche und ähnliche Gleichungen lassen sich, wenn man es mit periodischen Vorgängen zu tun hat, erheblich einfacher und übersichtlicher durch komplexe Größen behandeln. Deshalb hat sich insbesondere in der Wechselstromtechnik das Rechnen mit komplexen Spannungen, Strömen und Widerständen eingebürgert. Betrachten wir wieder die Differentialgleichung (5.72) für den Reihenschwingkreis, und nehmen wir an, daß der Stromkreis unter dem Einfluß einer äußeren Wechselspannung

$$U^{\text{ext}}(t) = \text{Re}(\tilde{U} e^{i\omega t}), \quad (5.87)$$

$$\tilde{U} = |\tilde{U}| e^{i\phi_U} \quad (5.88)$$

steht. Wenn nur das stationäre Verhalten des Stromkreises interessiert (d.h. von Einschaltvorgängen abgesehen werden kann), ist nur die der Inhomogenität in der Differentialgleichung (5.72) proportionale partikuläre Lösung dieser Gleichung von Interesse. Entsprechend der Theorie der gewöhnlichen, linearen Differentialgleichungen ergibt sich diese über den Ansatz

$$I(t) = \text{Re}(\tilde{I} e^{i\omega t}), \quad (5.89)$$

$$\tilde{I} = |\tilde{I}| e^{i\phi_I}. \quad (5.90)$$

Auf Grund der Linearität der Differentialgleichung stellt sowohl $\tilde{I} e^{i\omega t}$ als auch $\tilde{I}^* e^{-i\omega t}$ eine Lösung dar. Einsetzen von $\tilde{I} e^{i\omega t}$ für den Strom in (5.72) liefert die algebraische Gleichung

$$\left(-L\omega^2 + iR\omega + \frac{1}{C}\right) \tilde{I} = i\omega \tilde{U} \quad (5.91)$$

bzw.

$$\left[R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right] \tilde{I} = \tilde{U}. \quad (5.92)$$

Mit

$$\tilde{R} = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \quad (5.93)$$

nimmt (5.92) die Form des Ohmschen Gesetzes im Komplexen an:

$$\tilde{U} = \tilde{R} \tilde{I} \quad (5.94)$$

Der komplexe Widerstand \tilde{R} – auch **Scheinwiderstand** genannt – setzt sich (im betrachteten Beispiel) additiv aus drei Beiträgen zusammen,

$$\tilde{R} = \tilde{R}_R + \tilde{R}_L + \tilde{R}_C, \quad (5.95)$$

wobei

$$\tilde{R}_R = R \quad (5.96)$$

der (positive) reelle Ohmsche Widerstand,

$$\tilde{R}_L = i\omega L \quad (5.97)$$

der (positive) imaginäre induktive Widerstand und

$$\tilde{R}_C = \frac{1}{i\omega C} \quad (5.98)$$

der (negative) imaginäre kapazitive Widerstand ist. Der Ohmsche Widerstand wird in diesem Zusammenhang auch als **Wirkwiderstand** bezeichnet, und

$$\tilde{R}' = \tilde{R}_L + \tilde{R}_C \quad (5.99)$$

heißt **Blindwiderstand**. Die komplexe Schreibweise ermöglicht somit, in Wechselstromkreisen den Einfluß von Induktivitäten und Kapazitäten formal genauso zu behandeln wie den Einfluß eines Ohmschen Widerstandes.

Mit

$$\tilde{R} = |\tilde{R}|e^{i\delta} \quad (5.100)$$

sowie (5.88) und (5.90) lautet (5.94)

$$|\tilde{U}|e^{i\phi_U} = |\tilde{R}|e^{i\delta} |\tilde{I}|e^{i\phi_I}, \quad (5.101)$$

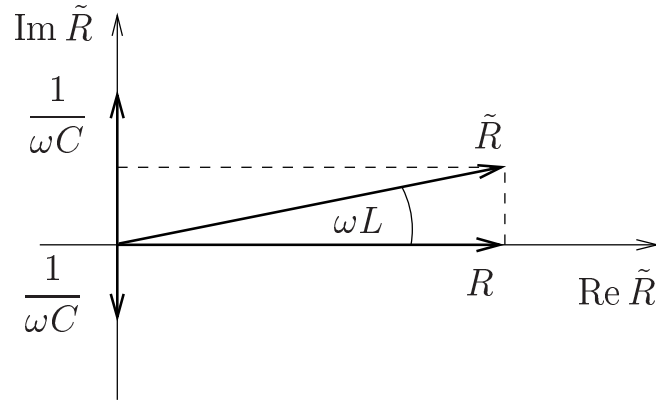
woraus für die Amplituden

$$|\tilde{U}| = |\tilde{R}| |\tilde{I}| \quad (5.102)$$

und die Phasen

$$\Delta\phi = \phi_U - \phi_I = \delta \quad (5.103)$$

folgt. Bezüglich der Phasenlage können drei Fälle unterschieden werden.



(1) Der Strom bleibt hinter der Spannung zurück:

$$\omega L > \frac{1}{\omega C} \quad \rightsquigarrow \quad \delta > 0. \quad (5.104)$$

(2) Strom und Spannung sind in Phase:

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \quad \rightsquigarrow \quad \delta = 0. \quad (5.105)$$

(1) Der Strom eilt der Spannung voraus:

$$\omega L < \frac{1}{\omega C} \quad \rightsquigarrow \quad \delta < 0. \quad (5.106)$$

Aufgenommene Leistung

Wir wollen die unter stationären Verhältnissen aufgenommene Leistung

$$N(t) = U^{\text{ext}}(t) I(t) = \text{Re}(\tilde{U}e^{i\omega t}) \text{Re}(\tilde{I}e^{i\omega t}) \quad (5.107)$$

bestimmen. Eine einfache Rechnung liefert zunächst

$$N(t) = \frac{1}{4} \left(\tilde{U}\tilde{I}^* + \tilde{U}^*\tilde{I} + \tilde{U}\tilde{I}e^{2i\omega t} + \tilde{U}^*\tilde{I}^*e^{-2i\omega t} \right). \quad (5.108)$$

Mittelung über eine Periode $T = 1/\omega$ liefert dann die im zeitlichen Mittel aufgenommene Leistung als⁸

$$\bar{N} = \frac{1}{4}(\tilde{U}\tilde{I}^* + \tilde{U}^*\tilde{I}) = \frac{1}{2}\text{Re}(\tilde{U}\tilde{I}^*), \quad (5.109)$$

⁸Unter dem zeitlichen Mittelwert einer Funktion $f(t)$ über ein Zeitintervall Δt ist die Größe $\bar{f} = (\Delta t)^{-1} \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} d\tau f(\tau)$ zu verstehen.

d.h.

$$\bar{N} = \frac{1}{2} |\tilde{U}| |\tilde{I}| \cos \Delta\phi. \quad (5.110)$$

Mit den üblicherweise definierten **Effektivwerten**

$$U_{\text{eff}} = \frac{|\tilde{U}|}{\sqrt{2}}, \quad I_{\text{eff}} = \frac{|\tilde{I}|}{\sqrt{2}} \quad (5.111)$$

nimmt die Gleichung (5.110) die Form

$$\bar{N} = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \Delta\phi \quad (5.112)$$

an. Die vom Stromkreis im Zeitmittel aufgenommene Leistung – auch als **Wirkleistung** bezeichnet – ist also bis auf den Faktor $\cos \Delta\phi$ gleich dem Produkt aus den Effektivwerten von (von außen angelegter) Spannung und Strom.⁹ Die Größe $U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \sin \Delta\phi$ wird in diesem Zusammenhang auch als **Blindleistung** bezeichnet.

Wie bereits angedeutet, wird die im zeitlichen Mittel insgesamt vom Stromkreis aufgenommene Leistung am Ohmschen Widerstand verbraucht. Um dies zu sehen, berechnen wir

$$\bar{N}_R = R \overline{\text{Re}(\tilde{I} e^{i\omega t})^2}. \quad (5.113)$$

Analog zu obiger Rechnung erhalten wir

$$\bar{N}_R = \frac{1}{2} R |\tilde{I}|^2. \quad (5.114)$$

Wir machen Gebrauch von (5.94) und können

$$\bar{N}_R = \frac{1}{2} |\tilde{U}| |\tilde{I}| \frac{R}{|\tilde{R}|} = |\tilde{U}| |\tilde{I}| \cos \Delta\phi \quad (5.115)$$

schreiben, d.h.

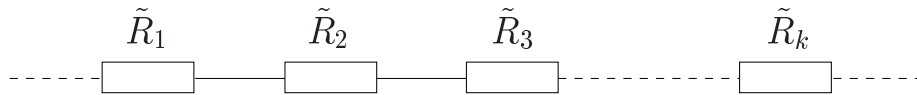
$$\bar{N}_R = \bar{N}. \quad (5.116)$$

Anmerkung

Die am Beispiel des Reihenschwingkreises gewonnenen Erkenntnisse lassen sich unter Anwendung der Kirchhoffschen Regeln sinngemäß

⁹Die Ähnlichkeit der Gleichung (5.112) mit der für die Gleichstromleistung ist der Hauptgrund dafür, daß in der Elektrotechnik die Effektivwerte von Spannung und Strom bevorzugt werden.

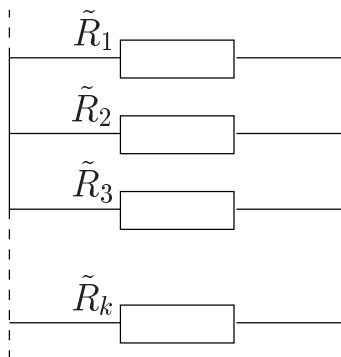
natürlich auch auf kompliziertere Stromkreise und Stromkreissysteme verallgemeinern. Die komplexe Wechselstromrechnung gestattet es dabei insbesondere, Gesamtwiderstände von Stromkreisen in systematischer Weise zu berechnen. Im oben betrachteten Fall einer Reihenschaltung ergab sich gemäß (5.95) der (komplexe) Gesamtwiderstand durch Addition der (komplexen) Einzelwiderstände. Allgemein gilt für Rei-



henschaltungen die folgende Regel:

$$\tilde{R} = \sum_k \tilde{R}_k \quad (5.117)$$

Analog läßt sich für Parallelschaltungen als Regel ableiten, daß sich der



reziproke (komplexe) Gesamtwiderstand als die Summe der reziproken (komplexen) Einzelwiderstände ergibt:

$$\frac{1}{\tilde{R}} = \sum_k \frac{1}{\tilde{R}_k} \quad (5.118)$$

Kapitel 6

Elektromagnetische Wellen

Wenden wir uns nunmehr dem vollen System der Maxwell-Gleichungen zu, wie es in differentieller Form in (2.24) – (2.27) für die Vakuumelektrodynamik bzw. in (2.37) – (2.40) für die makroskopische Elektrodynamik gegeben ist. Wie wir noch im einzelnen sehen werden, gibt die nunmehrige Berücksichtigung des Verschiebungsstromes zu (nichttrivialen) Lösungen der Maxwell-Gleichungen bei Abwesenheit von Ladungen und Strömen Anlaß, den elektromagnetischen Wellen.

Sind im Rahmen der makroskopischen Maxwell-Gleichungen wieder diskontinuierliche Grenzflächen zu berücksichtigen, die unterschiedliche Medien trennen, kommen die entsprechenden integralen Maxwell-Gleichungen zur Anwendung. Die Herleitung der Übergangsbedingungen für die Felder an den Grenzflächen erfolgt in der gleichen Weise wie im statischen Fall. Demzufolge ist sofort zu sehen, daß die Übergangsbedingungen (3.204) und (4.138) für die Normalkomponenten des \mathbf{D} -Feldes und des \mathbf{B} -Feldes weiterhin gültig sind. Bezüglich der Übergangsbedingungen für die Tangentialkomponenten des \mathbf{E} -Feldes und des \mathbf{H} -Feldes ist zunächst zu bemerken, daß im Gegensatz zum statischen Fall die Maxwell-Gleichungen (2.38) und (2.40) nunmehr noch die zeitlichen Ableitungen des \mathbf{B} -Feldes und des \mathbf{D} -Feldes enthalten. Da davon ausgegangen werden kann, daß $\dot{\mathbf{B}}$ und $\dot{\mathbf{D}}$ endlich sind, liefern die sie enthaltenden Integralterme bei den entsprechenden Grenzübergängen offensichtlich keinen Beitrag zu den Übergangsbedingungen, so daß

auch die Übergangsbedingungen (3.206) und (4.139) für die Tangentialkomponenten des \mathbf{E} -Feldes und des \mathbf{H} -Feldes weiterhin gültig bleiben.

6.1 Energiebilanz

Wir wollen die im Abschnitt 5.3.3 gemachten Vorbetrachtungen zur Energiebilanz auf beliebige elektromagnetische Felder verallgemeinern. Dazu multiplizieren wir die Maxwell-Gleichung (2.38) skalar mit \mathbf{H} ,

$$\mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{B}} + \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = 0, \quad (6.1)$$

und analog die Maxwell-Gleichung (2.40) skalar mit \mathbf{E} ,

$$-\mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}. \quad (6.2)$$

Subtrahieren wir die Gleichung (6.2) von der Gleichung (6.1), so erhalten wir unter Berücksichtigung der Beziehung

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}), \quad (6.3)$$

die Gleichung

$$\mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{B}} + \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}. \quad (6.4)$$

Mit der Definition des **Poynting-Vektors**

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \quad (6.5)$$

nimmt die Gleichung (6.4) dann die folgende Gestalt an:

$$\mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{B}} + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \quad (6.6)$$

6.1.1 Poyntingscher Satz

Bekanntlich braucht in der Vakuumelektrodynamik wegen $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$ und $\mathbf{H} = \mu_0^{-1} \mathbf{B}$ nicht zwischen \mathbf{E} und \mathbf{D} bzw. \mathbf{H} und \mathbf{B} unterschieden werden, so daß

$$\mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{B}} = \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{E}} + \mu_0^{-1} \mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{B}} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2} \mu_0^{-1} \mathbf{B}^2 \right) \quad (6.7)$$

gilt. Der Ausdruck in der runden Klammer ist gerade die Dichte der elektromagnetischen Feldenergie als der Summe aus elektrischer und magnetischer Feldenergiedichte,

$$w(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{2} \mu_0^{-1} \mathbf{B}^2(\mathbf{r}, t) \quad (6.8)$$

[siehe (3.65) und (4.121)], so daß (6.6) in die (lokale) Bilanzgleichung

$$\dot{w} + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \quad (6.9)$$

übergeht. Ihre integrale Form lautet

$$\frac{dW}{dt} + \int_{(V)} \mathbf{da} \cdot \mathbf{S} = - \int_V d^3r \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}, \quad (6.10)$$

wobei

$$W = \int_V d^3r w \quad (6.11)$$

die im (festen) Volumen V enthaltene elektromagnetische Feldenergie darstellt.

Offensichtlich stellt der Poyntingvektor gerade die elektromagnetische **Energiestromdichte** dar.¹ Es ist klar, daß der Poyntingsche Satz (6.9) [bzw. (6.10)] (im Gegensatz zur Kontinuitätsgleichung für die

¹Die Formel (6.5) für die Energiestromdichte kann für beliebig veränderliche elektromagnetische Felder als gültig angesehen werden, auch beim Durchgang durch Medien, wenn die Stetigkeit der Tangentialkomponenten von \mathbf{E} und \mathbf{H} gewährleistet ist. In diesem Fall folgt (6.5) aus der Bedingung, daß die Normalkomponente von \mathbf{S} auf dem Rand eines Körpers stetig ist und daraus, daß die Formel im Vakuum außerhalb des Körpers gilt.

elektrische Ladung) keinen Erhaltungssatz darstellt. Die elektromagnetische Feldenergie ist keine Erhaltungsgröße; sie kann unter geeigneten Umständen entstehen und vergehen, nämlich genau dann, wenn der „Quellterm“ $-\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ von Null verschieden ist.

Gegeben sei ein System von geladenen Punktteilchen. Auf das α -te Teilchen wirke die Kraft \mathbf{F}_α . Aus der Mechanik ist bekannt, daß die kinetische Gesamtenergie der Teilchen

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}^2 \quad (6.12)$$

der Bilanzgleichung

$$\frac{dW_{\text{kin}}}{dt} = \sum_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha} \cdot \mathbf{F}_{\alpha} \equiv N \quad (6.13)$$

genügt. Die zeitliche Änderung der kinetischen Energie ist gleich der von den Kräften pro Zeiteinheit verrichteten Arbeit (d.h. der Leistung). Wir wollen annehmen, daß die Teilchen nur elektromagnetischen Kräften unterliegen,

$$\mathbf{F}_{\alpha} = q_{\alpha} \mathbf{E}_{\alpha} + q_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha} \times \mathbf{B}_{\alpha}, \quad (6.14)$$

so daß die Leistung durch

$$N = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha} \cdot \mathbf{E}_{\alpha} \quad (6.15)$$

bzw.

$$N = \int d^3r \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \quad (6.16)$$

gegeben ist, wobei gemäß (2.18)

$$\mathbf{j} = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}) \quad (6.17)$$

gilt. Wenn wir annehmen, daß sich die Teilchen in einem Raumbereich vom Volumen V befinden (und diesen nicht verlassen), so können wir

unter Berücksichtigung von (6.16) die Bilanzgleichung (6.13) in der Form

$$\frac{dW_{\text{kin}}}{dt} = \int_V d^3r \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \quad (6.18)$$

schreiben. Damit geht der Poyntingsche Satz (6.10) in die Bilanzgleichung

$$\frac{d}{dt} (W + W_{\text{kin}}) = - \int_{(V)} \mathbf{da} \cdot \mathbf{S} \quad (6.19)$$

über. *Die zeitliche Änderung der sich aus der kinetischen Energie der Teilchen und der elektromagnetischen Feldenergie additiv zusammensetzenden Gesamtenergie ist gleich dem negativen elektromagnetischen Energiestrom (aus dem betrachteten Bereich).* Ist der Bereich abgeschlossen, so daß die Energiestromdichte auf dem Rand verschwindet, gilt Energieerhaltung.

Aus (6.15) und (6.16) ist zu ersehen, daß $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ als Leistungsdichte die vom elektromagnetischen Feld an der Stromdichte \mathbf{j} pro Volumeneinheit und Zeiteinheit verrichtete Arbeit darstellt. Sie beschreibt die Umwandelbarkeit von elektromagnetischer Energie in andere Energieformen und umgekehrt.

- Mechanische Energie in Form von kinetischer Energie wird in elektromagnetische Energie umgewandelt (Generatoren).
- Elektromagnetische Energie wird in mechanische (d.h. kinetische) Energie umgewandelt (Motoren).
- Elektromagnetische Energie wird über kinetische Energie in Wärme umgewandelt (Ohmsche Widerstände; siehe Abschnitt 5.3.3).

Wir betrachten ein lineares Medium und nehmen an, daß von jeglicher Dispersion abgesehen werden kann und somit die Materialgleichungen

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu(\mathbf{r}) \mathbf{H}(\mathbf{r}, t), \quad (6.20)$$

lauten. Es ist unschwer zu sehen, daß in diesem Fall aus (6.6) ebenfalls (6.9) folgt, jedoch gilt anstelle von (6.8) nunmehr

$$\begin{aligned} w(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{2}\varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{2}\mu(\mathbf{r})\mathbf{H}^2(\mathbf{r}, t) \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{2}\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (6.21)$$

Offensichtlich kann die Größe w hier als Energiedichte des elektromagnetischen Feldes bei Anwesenheit des Mediums aufgefaßt werden (siehe auch Abschnitt 3.7).

6.1.2 Dispersive und absorptive Medien

Beim Vorhandensein von Dispersion ist eine solche einfache Interpretation nicht möglich. Hinzu kommt, daß Dispersion i. allg. mit Absorption verbunden ist, so daß ein Medium mit Dispersion gleichzeitig ein absorbierendes Medium ist und die Definition elektromagnetischer Feldenergie in Medien problematisch wird.

6.1.2.1 Absorption

Betrachten wir zunächst eine monochromatische Feldanregung

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2}\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)e^{-i\omega t} + \text{c.c.}, \quad (6.22)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2}\underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega)e^{-i\omega t} + \text{c.c.} \quad (6.23)$$

Offensichtlich gilt dann für die (über eine Periode) gemittelten quadratischen Größen \mathbf{E}^2 und \mathbf{H}^2

$$\overline{\mathbf{E}^2} = \frac{1}{2}|\underline{\mathbf{E}}|^2, \quad (6.24)$$

$$\overline{\mathbf{H}^2} = \frac{1}{2}|\underline{\mathbf{H}}|^2. \quad (6.25)$$

Wir berücksichtigen (2.35) und (2.36) und finden für die (ebenfalls monochromatischen) Felder \mathbf{D} und \mathbf{B}

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2}[\varepsilon_0\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) + \underline{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega)]e^{-i\omega t} + \text{c.c.}, \quad (6.26)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2}[\mu_0\underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega) + \mu_0\underline{\mathbf{M}}(\mathbf{r}, \omega)]e^{-i\omega t} + \text{c.c.} \quad (6.27)$$

Damit folgt für die zeitlichen Ableitungen dieser Felder

$$\dot{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{2} i\omega [\varepsilon_0 \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) + \underline{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega)] e^{-i\omega t} + \text{c.c.}, \quad (6.28)$$

$$\dot{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{2} i\omega [\mu_0 \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega) + \mu_0 \underline{\mathbf{M}}(\mathbf{r}, \omega)] e^{-i\omega t} + \text{c.c.}, \quad (6.29)$$

und der (wieder über eine Periode genommene) zeitliche Mittelwert von $\mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{B}}$ ergibt sich als

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{B}}} &= \frac{1}{4} [i\omega (\underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{P}}^* - \underline{\mathbf{E}}^* \cdot \underline{\mathbf{P}}) + i\omega \mu_0 (\underline{\mathbf{H}} \cdot \underline{\mathbf{M}}^* - \underline{\mathbf{H}}^* \cdot \underline{\mathbf{M}})] \\ &= \frac{1}{2} \omega [\text{Im}(\underline{\mathbf{P}} \cdot \underline{\mathbf{E}}^*) + \mu_0 \text{Im}(\underline{\mathbf{M}} \cdot \underline{\mathbf{H}}^*)]. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Im Falle des Fehlens von (makroskopischen) Strömen, d.h. $\mathbf{j} = 0$, folgt somit aus (6.6) für die Divergenz des zeitlich gemittelten Poynting-Vektors das folgende Ergebnis:

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{S}} = -\frac{1}{2} \omega [\text{Im}(\underline{\mathbf{P}} \cdot \underline{\mathbf{E}}^*) + \mu_0 \text{Im}(\underline{\mathbf{M}} \cdot \underline{\mathbf{H}}^*)] \quad (6.31)$$

Speziell für den freien Raum, $\underline{\mathbf{P}} = \underline{\mathbf{M}} = 0$, wird daraus

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{S}} = 0. \quad (6.32)$$

Ein monochromatisches elektromagnetisches Feld im ansonsten leeren Raum bedeutet also einen im zeitlichen Mittel konstanten Energiestrom.

Wir wenden die Gleichung (6.31) auf ein lineares Medium an, für das (bei Vernachlässigung der Fluktuationsterme) die Materialgleichungen

$$\underline{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 \chi_{\text{el}}(\mathbf{r}, \omega) \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \rightsquigarrow \underline{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon(\mathbf{r}, \omega) \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega), \quad (6.33)$$

$$\underline{\mathbf{M}}(\mathbf{r}, \omega) = \chi_{\text{mag}}(\mathbf{r}, \omega) \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega) \rightsquigarrow \underline{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, \omega) = \mu(\mathbf{r}, \omega) \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega) \quad (6.34)$$

gelten mögen (siehe Abschnitt 2.2.2). Einsetzen in (6.31) liefert

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{S}} = -\frac{1}{2} \omega (\text{Im} \varepsilon |\underline{\mathbf{E}}|^2 + \text{Im} \mu |\underline{\mathbf{H}}|^2), \quad (6.35)$$

so daß unter Berücksichtigung von (6.24) und (6.25) das Ergebnis

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{S}} = -\omega \left(\text{Im } \varepsilon \bar{\mathbf{E}}^2 + \text{Im } \mu \bar{\mathbf{H}}^2 \right) \quad (6.36)$$

folgt. Es zeigt, daß die in einem Medium stattfindende Absorption (Dissipation) elektromagnetischer Felder durch die Imaginärteile von ε und μ bestimmt wird. Genaugenommen repräsentieren die beiden Terme auf der rechten Seite der Gleichung (6.36) die durch Absorption bedingten elektrischen bzw. magnetischen Verluste dann, wenn

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{S}} < 0 \quad (6.37)$$

gilt und somit die Imaginärteile von ε und μ positiv sind,

$$\text{Im } \varepsilon > 0, \quad \text{Im } \mu > 0. \quad (6.38)$$

Dies gilt für alle Medien und alle Frequenzen.² Da jedes reale Medium zu Dissipation Anlaß gibt, können $\text{Im } \varepsilon$ und $\text{Im } \mu$ für keinen (von Null verschiedenen) Frequenzwert exakt Null werden. Dies schließt natürlich nicht aus, daß es Frequenzgebiete (*Transparenzgebiete*) gibt, in denen $\text{Im } \varepsilon$ und $\text{Im } \mu$ (verglichen mit den Realteilen von ε und μ) sehr klein werden, so daß sie in einer gewissen Näherung vernachlässigt werden können.

6.1.2.2 Dispersion

Um den Einfluß der Dispersion (in einem Transparenzgebiet) zu studieren, reicht es nicht aus, rein monochromatische elektromagnetische Felder zu betrachten, sondern Felder in einem endlichen Frequenzintervall der Breite $\Delta\omega$. Es sei Ω die Mittenfrequenz eines solchen Feldes, wobei $\Omega \gg \Delta\omega$ gelten möge. Die Feldstärken können dann in der Form

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) e^{-i\Omega t} + \text{c.c.}, \quad (6.39)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, t) e^{-i\Omega t} + \text{c.c.} \quad (6.40)$$

²Dabei wird generell vorausgesetzt, daß das Medium sich selbst überlassen ist und sich in einem (thermodynamischen) Gleichgewichtszustand befindet. So kann beispielsweise ein von außen gepumptes Medium (in einem gewissen Frequenzbereich) zu einer Verstärkung elektromagnetischer Felder führen, so daß $\nabla \cdot \bar{\mathbf{S}} > 0$ gilt.

geschrieben werden, wobei $\tilde{\mathbf{E}}$ und $\tilde{\mathbf{H}}$ als (im Vergleich zu $e^{-i\Omega t}$) zeitlich langsam veränderliche Amplitudenfunktionen aufgefaßt werden können, deren Fourier-Integrale gemäß

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \int_{\Delta\omega} d\omega \underline{\tilde{\mathbf{E}}}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t}, \quad (6.41)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, t) = \int_{\Delta\omega} d\omega \underline{\tilde{\mathbf{H}}}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} \quad (6.42)$$

gegeben sind. Die Gleichungen für \mathbf{D} und \mathbf{B} sind analog. Wir wollen den (über die schnelle Periode genommenen) zeitlichen Mittelwert

$$\overline{\mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{B}}} = \frac{1}{4} \left[\tilde{\mathbf{E}} e^{-i\Omega t} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\tilde{\mathbf{D}}^* e^{i\Omega t}) + \tilde{\mathbf{H}} e^{-i\Omega t} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\tilde{\mathbf{B}}^* e^{i\Omega t}) \right] + \text{c.c.} \quad (6.43)$$

berechnen. Entsprechend (6.33) und (6.41) gilt

$$\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, t) e^{-i\Omega t} = \int_{\Delta\omega} d\omega \varepsilon(\mathbf{r}, \Omega + \omega) \underline{\tilde{\mathbf{E}}}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i(\Omega + \omega)t}. \quad (6.44)$$

Zeitliche Differentiation dieser Gleichung und Potenzreihenentwicklung der Funktion $f(\omega) = (\Omega + \omega)\varepsilon(\mathbf{r}, \Omega + \omega)$ an der Stelle $\omega = 0$ liefert

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, t) e^{-i\Omega t} \right] &= -i \int_{\Delta\omega} d\omega (\Omega + \omega) \varepsilon(\mathbf{r}, \Omega + \omega) \underline{\tilde{\mathbf{E}}}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i(\Omega + \omega)t} \\ &= -i \int_{\Delta\omega} d\omega \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n [\Omega \varepsilon(\mathbf{r}, \Omega)]}{\partial \Omega^n} \omega^n \underline{\tilde{\mathbf{E}}}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i(\Omega + \omega)t} \\ &= -i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \frac{\partial^n [\Omega \varepsilon(\mathbf{r}, \Omega)]}{\partial \Omega^n} \int_{\Delta\omega} d\omega (-i\omega)^n \underline{\tilde{\mathbf{E}}}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i(\Omega + \omega)t} \\ &= -i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \frac{\partial^n [\Omega \varepsilon(\mathbf{r}, \Omega)]}{\partial \Omega^n} \frac{\partial^n \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^n} e^{-i\Omega t} \end{aligned} \quad (6.45)$$

und somit folgt

$$\tilde{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r}, t) e^{i\Omega t} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left[\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, t) e^{-i\Omega t} \right]$$

$$= -i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \frac{\partial^n [\Omega \varepsilon(\mathbf{r}, \Omega)]}{\partial \Omega^n} \tilde{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r}, t) \cdot \frac{\partial^n \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^n}. \quad (6.46)$$

Für $\Delta\omega \ll \Omega$ genügt es in vielen Fällen, die Entwicklung nur bis zu dem Glied mit $n=1$ zu betrachten und näherungsweise

$$\begin{aligned} & \tilde{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r}, t) e^{i\Omega t} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left[\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, t) e^{-i\Omega t} \right] \\ &= -i\Omega \varepsilon(\mathbf{r}, \Omega) |\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)|^2 + \frac{\partial [\Omega \varepsilon(\mathbf{r}, \Omega)]}{\partial \Omega} \tilde{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r}, t) \cdot \dot{\tilde{\mathbf{E}}}(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (6.47)$$

zu setzen. Mit Blick auf (6.43) wird daraus

$$\overline{\mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{D}}} = \frac{1}{2} \Omega \operatorname{Im} \varepsilon |\tilde{\mathbf{E}}|^2 + \frac{1}{4} \frac{\partial(\Omega \operatorname{Re} \varepsilon)}{\partial \Omega} \frac{\partial}{\partial t} |\tilde{\mathbf{E}}|^2 \quad (6.48)$$

wobei die zu $\partial[\Omega \operatorname{Im} \varepsilon]/\partial \Omega$ proportionale Korrektur (des ersten Terms in dieser Gleichung) vernachlässigt wurde. Es ist klar, daß die analoge Rechnung für den magnetischen Anteil in (6.43) auf

$$\overline{\mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{B}}} = \frac{1}{2} \Omega \operatorname{Im} \mu |\tilde{\mathbf{H}}|^2 + \frac{1}{4} \frac{\partial(\Omega \operatorname{Re} \mu)}{\partial \Omega} \frac{\partial}{\partial t} |\tilde{\mathbf{H}}|^2 \quad (6.49)$$

führt. Unter Berücksichtigung von (6.24) und (6.25) können wir also

$$\overline{\mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{B}}} = \Omega \operatorname{Im} \varepsilon \overline{\mathbf{E}^2} + \Omega \operatorname{Im} \mu \overline{\mathbf{H}^2} + \dot{\bar{w}} \quad (6.50)$$

schreiben, wobei

$$\bar{w}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial [\Omega \operatorname{Re} \varepsilon(\mathbf{r}, \Omega)]}{\partial \Omega} \overline{\mathbf{E}^2}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial [\Omega \operatorname{Re} \mu(\mathbf{r}, \Omega)]}{\partial \Omega} \overline{\mathbf{H}^2}(\mathbf{r}, t) \right\}$$

(6.51)

als zeitlich gemittelte Energiedichte des elektromagnetischen Feldes in Medien interpretiert werden kann, denn gemäß (6.6) gilt ($\mathbf{j}=0$):

$$\dot{\bar{w}} + \nabla \cdot \bar{\mathbf{S}} = -\Omega \operatorname{Im} \varepsilon \overline{\mathbf{E}^2} - \Omega \operatorname{Im} \mu \overline{\mathbf{H}^2} \quad (6.52)$$

Entsprechend (6.36) stellt der Term auf der rechten Seite dieser Gleichung gerade die durch Absorption bedingten elektromagnetischen Verluste dar, so daß speziell in einem Transparenzgebiet (näherungsweise)

$$\dot{\bar{w}} + \nabla \cdot \bar{\mathbf{S}} = 0 \quad (6.53)$$

gilt und $\varepsilon(\Omega) \approx \text{Re } \varepsilon(\Omega)$ gemäß (2.72) der Ungleichung

$$\frac{\partial \varepsilon(\mathbf{r}, \Omega)}{\partial \Omega} > 0. \quad (6.54)$$

genügt. Transparenzgebiete sind also Gebiete normaler Dispersion. Das Verhalten von μ ist analog. Wenn auch die Dispersion vernachlässigbar ist (d.h. die Realteile von ε und μ als frequenzunabhängige Konstanten angesehen werden können), geht die Gleichung (6.51) erwartungsgemäß in die zeitlich gemittelte Gleichung (6.21) über.

6.2 Impulsbilanz

Wir eliminieren in der Lorentzschen Kraftdichte

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}, t) = \varrho(\mathbf{r}, t)\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (6.55)$$

die Ladungs- und Stromdichte mittels der Maxwell-Gleichungen (2.39) und (2.40),

$$\varrho \mathbf{E} = \mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{D}, \quad (6.56)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{j} \times \mathbf{B} &= -\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{H} - \dot{\mathbf{D}}) \\ &= -\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{H}) + \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{B} \times \mathbf{D}) - \dot{\mathbf{B}} \times \mathbf{D}. \end{aligned} \quad (6.57)$$

Machen wir ferner von der Maxwell-Gleichung (2.38) Gebrauch, geht (6.57) in

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = -\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{H}) - \mathbf{D} \times (\nabla \times \mathbf{E}) \quad (6.58)$$

über. Wir setzen (6.56) und (6.58) in (6.55) ein und erhalten

$$\begin{aligned} \mathbf{f} = & -\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) \\ & - [\mathbf{D} \times (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{H}) - \mathbf{H} \nabla \cdot \mathbf{B}] \end{aligned} \quad (6.59)$$

(beachte, daß $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ gilt).

Wir wenden die Gleichung (6.59) auf die Vakuumelektrodynamik an. Hier gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{D} \times (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \varepsilon_0 [\mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{E}] \\ &= \varepsilon_0 \left[\frac{1}{2} \nabla \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \mathbf{E} - \mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{E} \right] \end{aligned} \quad (6.60)$$

bzw.

$$\mathbf{D} \times (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{D} = \varepsilon_0 \left[\frac{1}{2} \nabla \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} - \nabla \cdot \mathbf{E} \mathbf{E} \right] \quad (6.61)$$

und analog

$$\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{H}) - \mathbf{H} \nabla \cdot \mathbf{B} = \mu_0^{-1} \left[\frac{1}{2} \nabla \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} - \nabla \cdot \mathbf{B} \mathbf{B} \right]. \quad (6.62)$$

Damit kann die Gleichung (6.59) in der Form

$$\boxed{c^{-2} \dot{\mathbf{S}} - \nabla \cdot \mathbf{T} = -\mathbf{f}} \quad (6.63)$$

geschrieben werden, wobei \mathbf{S} der in (6.5) definierte Poynting-Vektor und

$$\mathbf{T}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mu_0^{-1} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - w(\mathbf{r}, t) \mathbf{I} \quad (6.64)$$

der Maxwell'sche Spannungstensor des elektromagnetischen Feldes [siehe (3.76) und (4.136)] mit w als der elektromagnetischen Energiedichte gemäß (6.8) ist. Die Gleichung (6.63) stellt offensichtlich die Impulsbilanz in lokaler Form dar, wobei

$$\vec{p}(\mathbf{r}, t) = c^{-2} \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \quad (6.65)$$

als die Impulsdichte des elektromagnetischen Feldes angesehen werden kann. Entsprechend hat $-\mathbf{T}$ die physikalische Bedeutung der elektromagnetischen Impulsstromdichte. In integraler Form lautet die Bilanzgleichung (6.63)

$$\frac{d\vec{P}}{dt} - \int_{(V)} d\mathbf{a} \cdot \mathbf{T} = - \int_V d^3r \mathbf{f}, \quad (6.66)$$

wobei

$$\vec{P} = \int_V d^3r \vec{p} \quad (6.67)$$

der Impuls des elektromagnetischen Feldes in dem betrachteten (festen) Raumbereich ist.

Wir wollen wieder annehmen, daß sich sämtliche (geladenen) Teilchen in dem Raumbereich vom Volumen V befinden und dort auch verbleiben. Ist \vec{P}_{mech} die Summe der Impulse aller dieser Teilchen, so gilt gemäß dem 2. Newtonschen Axiom

$$\frac{d\vec{P}_{\text{mech}}}{dt} = \sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha} = \int_V d^3r \mathbf{f}. \quad (6.68)$$

Wir fassen die Gleichungen (6.66) und (6.68) zusammen und erhalten die folgende Bilanzgleichung:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\vec{P} + \vec{P}_{\text{mech}} \right) = \int_{(V)} d\mathbf{a} \cdot \mathbf{T}} \quad (6.69)$$

Die zeitliche Änderung des sich aus dem mechanischen Impuls der Teilchen und dem elektromagnetischen Feldimpuls additiv zusammensetzenden Gesamtimpulses ist gleich dem negativen elektromagnetischen Impulsstrom (aus dem betrachteten Bereich).

Drehimpuls

Dem elektromagnetischen Feld kann natürlich auch ein Drehimpuls zugeordnet werden und es kann eine Drehimpulsbilanz formuliert werden.

Wie unschwer zu sehen ist, folgt mit der Drehimpulsdichte

$$\vec{l}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{r} \times \vec{p}(\mathbf{r}, t) = c^{-2} \mathbf{r} \times \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \quad (6.70)$$

sowie der Drehimpulsstromdichte

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{T} \times \mathbf{r} \quad (6.71)$$

aus (6.63) die lokale Bilanzgleichung³

$$\dot{\vec{l}} + \nabla \cdot \mathbf{\Lambda} = -\mathbf{r} \times \mathbf{f} \quad (6.72)$$

für den Drehimpuls. Ihre integrale Form ist

$$\frac{d\vec{L}}{dt} + \int_{(V)} d\mathbf{a} \cdot \mathbf{\Lambda} = - \int_V d^3r \mathbf{r} \times \mathbf{f}. \quad (6.73)$$

Berücksichtigen wir, daß

$$\frac{d\vec{L}_{\text{mech}}}{dt} = \sum_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{F}_{\alpha} = \int_V d^3r \mathbf{r} \times \mathbf{f} \quad (6.74)$$

ist, folgt aus (6.73) als Bilanzgleichung für den Gesamtdrehimpuls

$$\frac{d}{dt} (\vec{L} + \vec{L}_{\text{mech}}) = - \int_{(V)} d\mathbf{a} \cdot \mathbf{\Lambda}. \quad (6.75)$$

6.3 Potentiale und Eichungen

6.3.1 Eichtransformation

Wie bereits mehrfach betont, gestattet die Gültigkeit der Maxwell-Gleichung (2.37) grundsätzlich den Lösungsansatz

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (6.76)$$

³Beachte, daß $\epsilon_{jkl} T_{ik} x_{l,i} = \epsilon_{jki} T_{ik} = 0$ ist.

mittels eines Vektorpotentials \mathbf{A} . Wie wir ferner von unseren Untersuchungen zum quasistationären Fall (Abschnitt 5) wissen, wird dann die Maxwell-Gleichung (2.38) durch den Ansatz

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \dot{\mathbf{A}} \quad (6.77)$$

mit φ als einem skalaren Potential gelöst. Es verbleiben somit die beiden inhomogenen Maxwell-Gleichungen (2.39) und (2.40).

Im Falle der (fundamentalen) Vakuumelektrodynamik wird mit den Ansätzen (6.76) und (6.77) aus (2.26) [bzw. (2.39)]

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = -\varepsilon_0 \nabla \cdot (\nabla\varphi + \dot{\mathbf{A}}) = \varrho \quad (6.78)$$

bzw.:

$$\boxed{-\Delta\varphi - \nabla \cdot \dot{\mathbf{A}} = \frac{1}{\varepsilon_0} \varrho} \quad (6.79)$$

Entsprechend wird aus (2.27) [bzw. (2.40)]

$$\nabla \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \dot{\mathbf{E}} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \varepsilon_0 \mu_0 (\nabla \dot{\varphi} + \ddot{\mathbf{A}}) = \mu_0 \mathbf{j} \quad (6.80)$$

bzw.:

$$\boxed{\frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{A}} - \Delta \mathbf{A} + \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \dot{\varphi} \right) = \mu_0 \mathbf{j}} \quad (6.81)$$

Die Gleichungen (6.79) und (6.81) sehen auf den ersten Blick recht kompliziert aus, da sie das skalare Potential und das Vektorpotential miteinander verkoppeln. Wir wissen jedoch bereits, daß das Vektorpotential nicht eindeutig bestimmt ist und durch Eichung mit besonders vorteilhaften Eigenschaften [im Hinblick auf eine möglichst einfache Lösung der Gleichungen (6.79) und (6.81)] versehen werden kann.

Wie wir wissen (siehe Abschnitt 4.1), sind \mathbf{A} und \mathbf{A}' gleichberechtigte Vektorpotentiale, wenn sie sich um den Gradienten eines skalaren

Feldes χ unterscheiden:

$$\mathbf{A}' - \mathbf{A} = \nabla\chi \quad (6.82)$$

Die Wahl des Vektorpotentials impliziert i. allg. ein entsprechendes skalares Potential. Da sowohl für \mathbf{A} und φ als auch \mathbf{A}' und φ'

$$\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}} - \nabla\varphi = -\dot{\mathbf{A}}' - \nabla\varphi' \quad (6.83)$$

gelten muß, folgt

$$\nabla(\varphi' - \varphi) = -\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{A}' - \mathbf{A}) \quad (6.84)$$

und wegen (6.82)

$$\nabla(\varphi' - \varphi) = -\nabla\dot{\chi} \quad (6.85)$$

bzw.

$$\nabla(\varphi' - \varphi + \dot{\chi}) = 0. \quad (6.86)$$

Bis auf eine unwesentliche Konstante muß also

$$\varphi' - \varphi = -\dot{\chi} \quad (6.87)$$

gelten. Die Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} bleiben also unverändert, wenn folgende Eichtransformation vorgenommen wird:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \rightarrow \mathbf{A}'(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \nabla\chi(\mathbf{r}, t), \quad (6.88)$$

$$\varphi(\mathbf{r}, t) \rightarrow \varphi'(\mathbf{r}, t) = \varphi(\mathbf{r}, t) - \dot{\chi}(\mathbf{r}, t). \quad (6.89)$$

Dies ist die allgemeinste Eichtransformation.

6.3.2 Coulomb-Eichung

Wir knüpfen zunächst an die in den Abschnitten 4 und 5 bereits verwendete Coulomb-Eichung

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (6.90)$$

an. Wie leicht zu sehen ist, nehmen die Gleichungen (6.79) und (6.81) in diesem Fall die folgende Gestalt an:

$$\Delta\varphi = -\frac{1}{\varepsilon_0} \varrho \quad (6.91)$$

$$\frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{A}} - \Delta\mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j}^\perp \quad (6.92)$$

Während das skalare Potential nach wie vor der Poisson-Gleichung genügt, genügt das Vektorpotential einer inhomogenen (vektoriellen) Wellengleichung,⁴ wobei die Inhomogenität durch die *transversale Stromdichte*

$$\mathbf{j}^\perp = \mathbf{j} - \mathbf{j}^\parallel \quad (6.93)$$

mit

$$\mathbf{j}^\parallel = \varepsilon_0 \nabla \dot{\varphi} \quad (6.94)$$

gegeben ist. Wie unschwer zu sehen ist, gilt wegen (6.91) sowie der Kontinuitätsgleichung (2.21)

$$\nabla \cdot \mathbf{j}^\perp = \nabla \cdot \mathbf{j} - \varepsilon_0 \Delta \dot{\varphi} = \nabla \cdot \mathbf{j} + \dot{\varrho} = 0. \quad (6.95)$$

Erwartungsgemäß sind die Gleichungen (6.90) und (6.92) miteinander verträglich.

⁴Lineare partielle Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten vom Typ $v^{-2}\ddot{f} - \Delta f = g$ werden als Wellengleichungen bezeichnet, wobei zwischen homogenen Wellengleichungen ($g=0$) und inhomogenen Wellengleichungen ($g \neq 0$) unterschieden wird.

Ist nur die Randbedingung im Unendlichen zu erfüllen, ist die Lösung von (6.91) einfach durch das Poisson-Integral gemäß (3.38) gegeben:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (6.96)$$

Um die *longitudinale Stromdichte* \mathbf{j}^{\parallel} zu bestimmen, bilden wir hieraus zunächst die zeitliche Ableitung von φ ,

$$\dot{\varphi}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\dot{\rho}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (6.97)$$

und eliminieren $\dot{\rho}$ mittels der Kontinuitätsgleichung (2.21),

$$\dot{\varphi}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla_{r'} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}', t). \quad (6.98)$$

Gradientenbildung liefert schließlich

$$\mathbf{j}^{\parallel}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \nabla \dot{\varphi}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int d^3r' \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \nabla_{r'} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}', t), \quad (6.99)$$

so daß für inselförmige Stromverteilungen (unter Verwendung des Gaußschen Satzes)

$$\mathbf{j}^{\parallel}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{4\pi} \int d^3r' \mathbf{j}(\mathbf{r}', t) \cdot \nabla_{r'} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (6.100)$$

folgt. Damit finden wir für die transversale Stromdichte (6.93)⁵

$$\mathbf{j}^{\perp}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{4\pi} \int d^3r' \mathbf{j}(\mathbf{r}', t) \cdot \nabla_{r'} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (6.101)$$

Damit sind die Gleichungen für das skalare Potential und das Vektorpotential entkoppelt, wobei zu beachten ist, daß die transversale

⁵Es sei angemerkt, daß sich der transversale (longitudinale) Anteil eines Vektorfelds $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ gemäß $\mathbf{v}^{\perp(\parallel)}(\mathbf{r}) = \int d^3r' \delta^{\perp(\parallel)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}')$ ergibt, wobei $\delta^{\perp(\parallel)}$ die transversale (longitudinale) tensorwertige δ -Funktion ist. Aus (6.100) und (6.101) ist ersichtlich, daß die Relationen $\delta^{\perp}(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}) - \delta^{\parallel}(\mathbf{r})$ und $\delta^{\parallel}(\mathbf{r}) = -(4\pi)^{-1} \nabla \nabla r^{-1}$ gelten [$\delta(\mathbf{r}) = \mathbf{I} \delta(\mathbf{r})$].

Stromdichte als Quellterm in der Gleichung für das Vektorpotential die Projektion der Stromdichte auf den Raum der transversalen Vektorfunktionen darstellt. Dieser Zusammenhang ist nicht lokal; er verknüpft (für jede Zeit) die transversale Stromdichte am Ort \mathbf{r} mit der Stromdichte an allen möglichen Orten \mathbf{r}' .

Mit Blick auf (6.77) gilt offensichtlich

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}^\perp(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}^\parallel(\mathbf{r}, t), \quad (6.102)$$

$$\mathbf{E}^\perp(\mathbf{r}, t) = -\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t), \quad (6.103)$$

$$\mathbf{E}^\parallel(\mathbf{r}, t) = -\nabla\varphi(\mathbf{r}, t). \quad (6.104)$$

In der Coulomb-Eichung ist also der longitudinale (rotationsfreie) Feldanteil durch das skalare Potential und der transversale (divergenzfreie) Feldanteil durch das Vektorpotential bestimmt. Während das longitudinale Feld (an jedem Raumpunkt) parametrisch der zeitlichen Entwicklung der Ladungsverteilung folgt und somit (im Vergleich zur Mechanik) keinen neuen Freiheitsgrad repräsentiert, entwickelt das transversale Feld eine eigene Dynamik, so daß es das transversale Feld ist, das letztendlich die über die Elektrodynamik ins Spiel kommenden neuen (mit elektromagnetischer Strahlung verknüpften) Freiheitsgrade bestimmt.

Gemäß (4.14) bestimmt sich bei beliebig vorgegebenen Potentialfeldern \mathbf{A} und φ das Eichfeld χ , das sichert, daß $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi$ der Coulomb-Bedingung genügt, als Lösung einer Poisson-Gleichung:

$$\Delta\chi(\mathbf{r}, t) = -\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \quad (6.105)$$

Da \mathbf{A} i. allg. eine Funktion der Zeit ist, ist χ dann ebenfalls eine Funktion der Zeit und das gleiche trifft auch auf $\dot{\chi}$ in dem zu \mathbf{A}' gehörenden skalaren Potential $\varphi' = \varphi - \dot{\chi}$ zu.

6.3.3 Lorentz-Eichung

Im Hinblick auf eine kovariante Formulierung der Theorie (Abschnitt 7) erweist es sich als zweckmäßig, die Unsymmetrie der Gleichungen

(6.79) und (6.81) bezüglich \mathbf{A} und φ zu beseitigen. Dies gelingt mit der Lorentz-Eichung:

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c^2} \dot{\varphi}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (6.106)$$

Es ist unschwer zu sehen, daß in diesem Fall die Gleichungen (6.79) und (6.81) gleichermaßen in inhomogene Wellengleichungen übergehen:

$$\frac{1}{c^2} \ddot{\varphi} - \Delta \varphi = \frac{1}{\varepsilon_0} \varrho \quad (6.107)$$

$$\frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{A}} - \Delta \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (6.108)$$

Um die Verträglichkeit von (6.106) mit (6.107) und (6.108) zu prüfen, bilden wir zunächst

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \dot{\varphi} = \frac{1}{\varepsilon_0} \dot{\varrho}, \quad (6.109)$$

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \nabla \cdot \mathbf{A} = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{j}, \quad (6.110)$$

woraus

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \dot{\varphi} \right) = \mu_0 (\nabla \cdot \mathbf{j} + \dot{\varrho}) \quad (6.111)$$

folgt. Da die linke Seite dieser Gleichung wegen der Lorentz-Eichung (6.106) verschwindet und die rechte Seite wegen der Kontinuitätsgleichung (2.21) verschwindet, ist die Verträglichkeit gesichert.

Wir wollen feststellen, ob es bei beliebig vorgegebenen Potentialen \mathbf{A} und φ ein Eichfeld gibt, so daß die gemäß (6.88) und (6.89) transformierten Potentiale \mathbf{A}' und φ' der Lorentz-Bedingung (6.106) genügen.

Wir finden

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{A}' + \frac{1}{c^2} \dot{\varphi}' = \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \dot{\varphi} + \Delta\chi - \frac{1}{c^2} \ddot{\chi}, \quad (6.112)$$

d.h., χ muß Lösung der inhomogenen Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2} \ddot{\chi} - \Delta\chi = \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \dot{\varphi} \quad (6.113)$$

sein. Da die inhomogene Wellengleichung immer Lösungen besitzt, kann also immer ein entsprechendes Eichfeld angegeben werden.

Die Lorentz-Eichung hat im Vergleich zur Coulomb-Eichung zwar den Vorteil der Symmetrie bezüglich der Gleichungen für das Vektorpotential und das skalare Potential, jedoch den Nachteil, daß zunächst mehr Freiheitsgrade in die Theorie eingehen. Für praktische Rechnungen in einem vorgegebenem Inertialsystem wird deshalb vielfach (speziell in der Optik) die Coulomb-Eichung bevorzugt.

6.4 Freie elektromagnetische Wellen

Wir beginnen mit den Maxwell-Gleichungen ohne Ladungen und Ströme ($\rho = 0 = \mathbf{j}$). Die Potentialgleichungen in der Coulomb-Eichung lauten dann gemäß (6.91) und (6.92)

$$\Delta\varphi = 0, \quad (6.114)$$

$$\frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{A}} - \Delta\mathbf{A} = 0. \quad (6.115)$$

Mit der Randbedingung im Unendlichen können wir $\varphi = 0$ setzen, so daß die homogene Wellengleichung für das transversale Vektorpotential verbleibt, die unter der Bedingung (6.90) zu lösen ist. Die Lorentz-Eichung führt gemäß (6.107) und (6.108) auf die homogenen Wellengleichungen

$$\frac{1}{c^2} \ddot{\varphi} - \Delta\varphi = 0, \quad (6.116)$$

$$\frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{A}} - \Delta\mathbf{A} = 0, \quad (6.117)$$

die unter der Bedingung (6.106) zu lösen sind.

Nicht nur die Potentiale, sondern auch die Felder selbst genügen homogenen Wellengleichungen, wie aus den Maxwell-Gleichungen direkt zu sehen ist. Zeitliche Differentiation der Maxwell-Gleichung (2.27) liefert die Gleichung

$$\nabla \times \dot{\mathbf{B}} = \frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{E}}, \quad (6.118)$$

woraus mit der Maxwell-Gleichung (2.25)

$$\frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{E}} = -\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla \nabla \cdot \mathbf{E} + \Delta \mathbf{E} \quad (6.119)$$

wird. Da im ladungsfreien Raum die Divergenz der elektrischen Feldstärke entsprechend der Maxwell-Gleichung (2.26) verschwindet, folgt die Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{E}} - \Delta \mathbf{E} = 0, \quad (6.120)$$

die unter der Bedingung $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ zu lösen ist. Bilden wir andererseits die Rotation von (2.27), so erhalten wir

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla \nabla \cdot \mathbf{B} - \Delta \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \nabla \times \dot{\mathbf{E}}, \quad (6.121)$$

und mit (2.24) sowie (2.25) folgt die Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{B}} - \Delta \mathbf{B} = 0, \quad (6.122)$$

die unter der Bedingung $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ zu lösen ist. Es ist klar, daß die Lösungen von (6.120) und (6.122) nicht unabhängig voneinander sind, da sie durch die (weiterhin gültigen) Maxwell-Gleichungen (2.25) und (2.27) miteinander verknüpft sind.

Vergleichen wir die verschiedenen Varianten, so stellt die Potentialvariante mit Coulomb-Eichung offensichtlich die optimale Variante dar:

$$\frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{A}} - \Delta \mathbf{A} = 0 \quad (\nabla \cdot \mathbf{A} = 0), \quad (6.123)$$

$$\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}}, \quad (6.124)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (6.125)$$

6.4.1 Ebene Wellen und Wellenpakete

Im einfachsten Fall der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen im ansonsten leeren Raum können die Felder immer durch Überlagerungen von ebenen Wellen beschrieben werden.

6.4.1.1 Lösung der Wellengleichung

Die Wellengleichung (6.123) kann durch **monochromatische, ebene Wellen**

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \sim \mathbf{a}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (6.126)$$

(**k** - **Wellenzahlvektor**) gelöst werden, wobei natürlich nur der Realteil physikalisch relevant ist.⁶ Es ist leicht zu sehen, daß für ebene Wellen die Relationen

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = i\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}, \quad (6.127)$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = i\mathbf{k} \times \mathbf{A}, \quad (6.128)$$

$$\Delta \mathbf{A} = -k^2 \mathbf{A} \quad (6.129)$$

gelten. Einsetzen von (6.126) in die Wellengleichung (6.123) liefert unter Berücksichtigung von (6.129) die Gleichung

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) \mathbf{A} = 0, \quad (6.130)$$

woraus ersichtlich ist, daß die **Dispersionsbeziehung**

$$\omega = kc \quad (6.131)$$

($\omega > 0$) gelten muß. Ferner verlangt die Coulomb-Eichung $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, daß [gemäß (6.127)]

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{A} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \mathbf{a}(\mathbf{k}) \perp \mathbf{k} \quad (6.132)$$

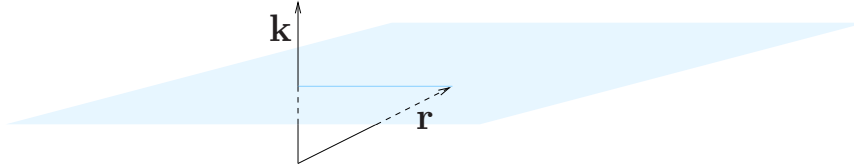
⁶Um Schreibarbeit zu sparen, verzichten wir hier auf eine spezielle Bezeichnungsweise für komplexwertige Größen.

ist. Der Vektor $\mathbf{a}(\mathbf{k})$ liegt also in der Ebene senkrecht zu \mathbf{k} . Es seien $\mathbf{e}_\sigma(\mathbf{k})$ ($\sigma = 1, 2$) zwei linear unabhängige (in der Regel orthogonale) Einheitsvektoren, die diese Ebene aufspannen. Damit kann $\mathbf{a}(\mathbf{k})$ immer in der Form

$$\mathbf{a}(\mathbf{k}) = \sum_{\sigma=1}^2 a_\sigma(\mathbf{k}) \mathbf{e}_\sigma(\mathbf{k}) \quad (6.133)$$

dargestellt werden, wobei $\mathbf{e}_\sigma(\mathbf{k}) \perp \mathbf{k}$ gilt.

Für gegebenes t ist $\mathbf{A} = \text{const.}$, wenn das Skalarprodukt $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ konstant ist, d.h., \mathbf{A} ist konstant auf einer Ebene senkrecht zum Wellenzahlvektor. Flächen mit $\mathbf{A} = \text{const.}$ werden **Wellenfronten** genannt.



Im vorliegenden Fall stellen die Wellenfronten also Ebenen dar (woraus sich die Bezeichnung ebene Wellen ableitet).

Es sei die z -Achse die Koordinatenachse in Richtung des \mathbf{k} -Vektors,

$$\mathbf{k} \parallel \mathbf{e}_z \quad \rightsquigarrow \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = kz. \quad (6.134)$$

Aus (6.126) ist leicht zu ersehen, daß die Wellenfronten längs z räumlich periodisch sind,

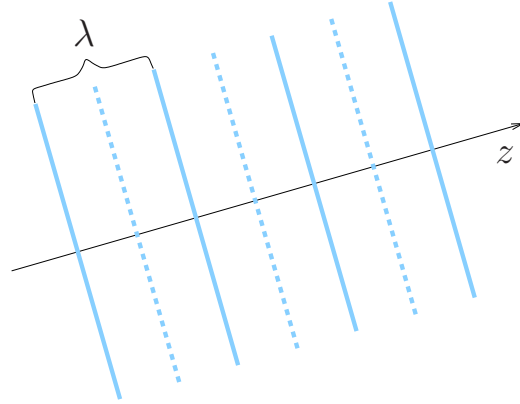
$$k\lambda = 2\pi \quad \rightsquigarrow \quad \lambda = \frac{2\pi}{k}. \quad (6.135)$$

Die Periode λ wird üblicherweise als **Wellenlänge** bezeichnet. Für gegebenen Ort \mathbf{r} ist \mathbf{A} periodisch in der Zeit,

$$\omega T = 2\pi \quad \rightsquigarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad (6.136)$$

so daß mit (6.131) und (6.135)

$$T = \frac{2\pi}{kc} = \frac{\lambda}{c} \quad (6.137)$$



bzw. für die Frequenz $\nu = 1/T$

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \quad \rightsquigarrow \quad c = \lambda\nu \quad (6.138)$$

folgt. Wir betrachten eine Wellenfront zum Zeitpunkt t am Ort z . Zu einem (späteren) Zeitpunkt $t + \Delta t$ finden wir diese Wellenfront am Ort $z + \Delta z$ mit

$$kz - \omega t = k(z + \Delta z) - \omega(t + \Delta t), \quad (6.139)$$

woraus

$$\Delta z = c \Delta t \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\Delta z}{\Delta t} = c \quad (6.140)$$

folgt. Läßt man, von einem Momentbild der Wellenfronten ausgehend, die Zeit laufen, bewegen sich diese folglich mit der Geschwindigkeit c in Richtung \mathbf{k} . Die Geschwindigkeit, mit der sich die Wellenfronten monochromatischer Wellen ausbreiten, wird auch als **Phasengeschwindigkeit** bezeichnet.

Es ist klar, daß für gegebenes ω in (6.126) [in Übereinstimmung mit (6.131)] \mathbf{k} ein beliebiger Vektor sein kann, sofern sein Betrag nur ω/c ist. Wenn sich also speziell eine ebene Welle mit $\mathbf{k} \parallel \mathbf{e}_z$ entlang der z -Achse ausbreitet, breitet sich die durch die Ersetzung $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$ resultierende ebene Welle (mit der gleichen Phasengeschwindigkeit) entgegengesetzt zur z -Achse aus.

Entsprechend (6.124) ist die mit der ebenen Welle (6.126) verknüpfte elektrische Feldstärke durch

$$\mathbf{E} = i\omega\mathbf{A} \quad (6.141)$$

gegeben, und gemäß (6.125) folgt für die magnetische Induktion [unter Berücksichtigung von (6.128)]

$$\mathbf{B} = i\mathbf{k} \times \mathbf{A}. \quad (6.142)$$

Erwartungsgemäß sind beide Felder ebenfalls in der Form von ebenen Wellen gegeben. Drücken wir in (6.142) mittels (6.141) das Vektorpotential durch die elektrische Feldstärke aus, erhalten wir folgenden Zusammenhang zwischen \mathbf{E} und \mathbf{B} :

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \frac{k}{\omega} \frac{\mathbf{k}}{k} \times \mathbf{E} \quad (6.143)$$

bzw.

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\mathbf{k}}{k} \times \mathbf{E}. \quad (6.144)$$

Die Vektoren \mathbf{k} , \mathbf{E} und \mathbf{B} einer ebenen elektromagnetischen Welle stehen also senkrecht aufeinander und bilden ein rechtshändiges Dreibein, so daß erwartungsgemäß neben dem (transversal geeichten) Vektorpotential auch das \mathbf{E} - und das \mathbf{B} -Feld transversal ist,

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (6.145)$$

Wegen der Linearität der Wellengleichung (6.123) für das transversale Vektorpotential ist jede Linearkombination von transversalen, monochromatischen, ebenen Wellen der Form (6.126), die die Dispersionsbeziehung (6.131) erfüllen, Lösung dieser Gleichung. Damit kann die allgemeine Lösung dieser Gleichung in der Form

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\sigma=1}^2 \int d^3k a_{\sigma}(\mathbf{k}) \mathbf{e}_{\sigma}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - kct)} + \text{c.c.} \quad (6.146)$$

angegeben werden. Sie ist geeignet, beliebige elektromagnetische Wellenpakete im ansonsten leeren Raum mittels Fourier-Entwicklung zu

konstruieren.⁷ Unter Berücksichtigung von (6.141) und (6.142) folgen damit für das \mathbf{E} - und das \mathbf{B} -Feld die Fourier-Integraldarstellungen

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\sigma=1}^2 \int d^3k k c a_{\sigma}(\mathbf{k}) \mathbf{e}_{\sigma}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-kct)} + \text{c.c.} \quad (6.147)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\sigma=1}^2 \int d^3k a_{\sigma}(\mathbf{k}) \mathbf{k} \times \mathbf{e}_{\sigma}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-kct)} + \text{c.c.} \quad (6.148)$$

Ein Überblick über die übliche Klassifizierung von elektromagnetischen Wellen nach Wellenlängenbereichen findet sich am Schluß dieses Kapitels (Seite 266).

Werden bei Zugrundelegung der Lorentz-Eichung als Ausgangsgleichungen die Wellengleichungen (6.107) und (6.108) verwendet, so können die allgemeinen Lösungen zunächst völlig analog zu (6.146) konstruiert werden. Jedoch ist bezüglich des Vektorpotentials nunmehr zu berücksichtigen, daß die Summe über σ in (6.146) von 1 bis 3 läuft, wobei $\mathbf{e}_3(\mathbf{k}) = \mathbf{k}/k$ den longitudinalen Feldanteil erfaßt. Hinzu kommt die skalare Version der Gleichung (6.146) für das skalare Potential. Die Lorentz-Bedingung (6.106) verknüpft dann den longitudinalen Anteil des Vektorpotentials mit dem skalaren Potential derart, daß das \mathbf{E} -Feld und das \mathbf{B} -Feld transversal sind und ebenfalls in der Form (6.147) und (6.148) darstellbar sind.

6.4.1.2 Polarisationszustände

Die zwei (reellen) **Polarisationseinheitsvektoren** $\mathbf{e}_{\sigma}(\mathbf{k})$ repräsentieren die zwei **Polarisationsfreiheitsgrade** elektromagnetischer Wel-

⁷Werden nur ebene Wellen berücksichtigt, die sich in einer festen Richtung und der dazu entgegengesetzten Richtung ausbreiten können, so wird aus der 3-dimensionalen Wellengleichung (6.150) die 1-dimensionale Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial z^2} = 0$$

(wenn die z -Achse die ausgezeichnete Richtung ist). Ihre allgemeine Lösung ist offensichtlich

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}_+(z - ct) + \mathbf{A}_-(z + ct),$$

wobei $\mathbf{A}_{\pm}(z) \perp \mathbf{e}_z$ gelten muß und ansonsten die Funktionen $\mathbf{A}_{\pm}(z)$ frei wählbar sind.

len. Eine ebene Welle der Form

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \sim a_\sigma(\mathbf{k}) \mathbf{e}_\sigma(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \quad (6.149)$$

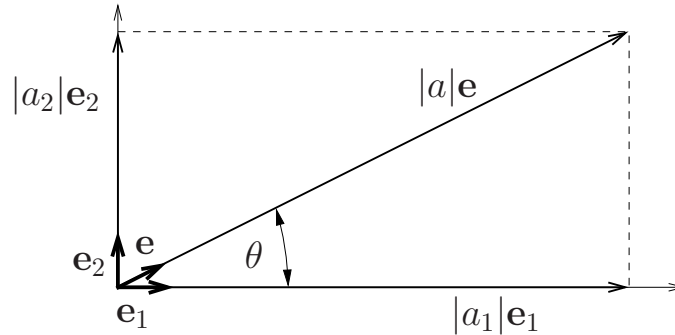
heißt **linear polarisiert**. Eine Überlagerung linear polarisierter ebener Wellen [gemäß (6.146) mit $a_1(\mathbf{k}) \equiv 0$ oder $a_2(\mathbf{k}) \equiv 0$] liefert ein linear polarisiertes Wellenfeld. Im Falle orthogonaler Polarisierungseinheitsvektoren bilden die Einheitsvektoren $\mathbf{e}_1(\mathbf{k})$, $\mathbf{e}_2(\mathbf{k})$ und $\mathbf{e}_3(\mathbf{k}) = \mathbf{k}/k$ ein orthogonales Dreibein.

Die allgemeinste ebene Welle kann als Überlagerung zweier linear polarisierter Wellen aufgefaßt werden:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \sim [a_1(\mathbf{k}) \mathbf{e}_1(\mathbf{k}) + a_2(\mathbf{k}) \mathbf{e}_2(\mathbf{k})] e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \quad (6.150)$$

Die Koeffizienten $a_\sigma(\mathbf{k})$ können beliebig komplex sein.

- Die Phasen $\delta_\sigma(\mathbf{k})$ der $a_\sigma(\mathbf{k})$ sind gleich [$\delta_1(\mathbf{k}) = \delta_2(\mathbf{k}) \equiv \delta(\mathbf{k})$].



$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &\sim [|a_1(\mathbf{k})| \mathbf{e}_1(\mathbf{k}) + |a_2(\mathbf{k})| \mathbf{e}_2(\mathbf{k})] e^{i\delta(\mathbf{k})} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \\ &= a(\mathbf{k}) \mathbf{e}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \end{aligned} \quad (6.151)$$

$$a(\mathbf{k}) = |a(\mathbf{k})| e^{i\delta(\mathbf{k})}, \quad (6.152)$$

$$|a(\mathbf{k})| = \sqrt{|a_1(\mathbf{k})|^2 + |a_2(\mathbf{k})|^2}, \quad (6.153)$$

$$\mathbf{e}_1(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{e}(\mathbf{k}) = \cos \theta, \quad \theta = \arctan \frac{|a_2(\mathbf{k})|}{|a_1(\mathbf{k})|}. \quad (6.154)$$

In diesem Fall stellt (6.151) eine linear polarisierte Welle dar, deren Polarisierungseinheitsvektor i. allg. verschieden von den $\mathbf{e}_\sigma(\mathbf{k})$ ist.

- Die Phasen der $a_\sigma(\mathbf{k})$ sind verschieden. In diesem Fall beschreibt (6.150) i. allg. **elliptisch polarisierte** Wellen. Beginnen wir mit dem Spezialfall **zirkular polarisierter** Wellen, wenn die $a_\sigma(\mathbf{k})$ gleiche Beträge $[|a_1(\mathbf{k})| = |a_2(\mathbf{k})| \equiv a(\mathbf{k})]$ besitzen, sich jedoch um eine Phasendifferenz von $\pm\pi/2$ unterscheiden,

$$a_1(\mathbf{k}) = a(\mathbf{k}), \quad a_2(\mathbf{k}) = a(\mathbf{k}) e^{\pm i\pi/2}, \quad (6.155)$$

so daß (6.150) die Gestalt

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \sim [\mathbf{e}_1(\mathbf{k}) \pm i\mathbf{e}_2(\mathbf{k})] a(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \quad (6.156)$$

annimmt. Wir wollen wieder annehmen, daß die Richtung des Wellenzahlvektors mit der z -Achse übereinstimmt ($\mathbf{k}/k = \mathbf{e}_z$), so daß $\mathbf{e}_1(\mathbf{k})$ mit \mathbf{e}_x und $\mathbf{e}_2(\mathbf{k})$ mit \mathbf{e}_y identifiziert werden können. Für die x - und die y -Komponente des reellen Vektorpotentials in diesem Koordinatensystem gilt dann

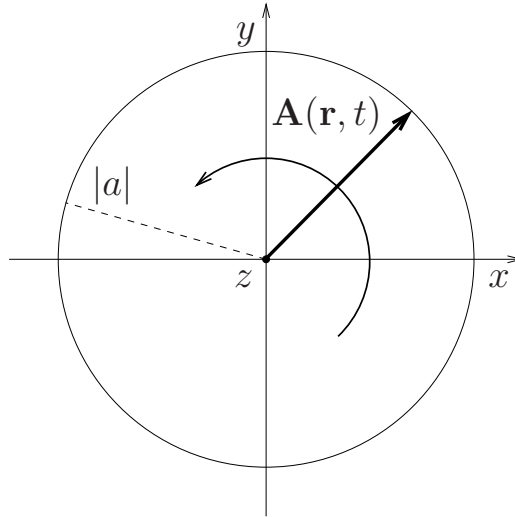
$$A_x(\mathbf{r}, t) \sim |a(\mathbf{k})| \cos(kz - \omega t + \delta), \quad (6.157)$$

$$A_y(\mathbf{r}, t) \sim \mp |a(\mathbf{k})| \sin(kz - \omega t + \delta). \quad (6.158)$$

An einem festen Raumpunkt ist der Vektor des Vektorpotentials dem Betrage nach konstant, dreht sich aber innerhalb eines Kreises mit der Winkelgeschwindigkeit ω .⁸ Für das obere Vorzeichen verläuft die Drehung entgegen dem Uhrzeigersinn, wenn der Beobachter in Richtung der ankommenden Welle blickt (also entgegengesetzt zur z -Achse). Man spricht in diesem Fall auch von einer *linkszirkular* polarisierten Welle bzw. von *positiver Helizität*. Für das untere Vorzeichen verläuft die Drehung im Uhrzeigersinn. In diesem Fall spricht man von einer *rechtszirkular* polarisierten Welle bzw. von *negativer Helizität*.

Die beiden zirkular polarisierten Wellen bilden einen gleichermaßen geeigneten Satz von Grundwellen für die Beschreibung eines allgemeinen Polarisationszustandes. Dazu führen wir die komple-

⁸Das gleiche Verhalten zeigen natürlich auch die entsprechenden Vektoren \mathbf{E} und \mathbf{B} .



nen orthogonalen Einheitsvektoren

$$\mathbf{e}_{\pm}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\mathbf{e}_1(\mathbf{k}) \pm i\mathbf{e}_2(\mathbf{k})] \quad (6.159)$$

ein. Es gilt

$$\mathbf{e}_{\pm}^*(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{e}_{\mp}(\mathbf{k}) = 0, \quad (6.160)$$

$$\mathbf{e}_{\pm}^*(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{e}_3(\mathbf{k}) = 0, \quad (6.161)$$

$$\mathbf{e}_{\pm}^*(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{e}_{\pm}(\mathbf{k}) = 1. \quad (6.162)$$

Die zu (6.159) inverse Transformation lautet

$$\mathbf{e}_1(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\mathbf{e}_-(\mathbf{k}) + \mathbf{e}_+(\mathbf{k})], \quad (6.163)$$

$$\mathbf{e}_2(\mathbf{k}) = \frac{i}{\sqrt{2}} [\mathbf{e}_-(\mathbf{k}) - \mathbf{e}_+(\mathbf{k})]. \quad (6.164)$$

Damit kann die ebene Welle (6.150) in der Form

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \sim [a_+(\mathbf{k}) \mathbf{e}_+(\mathbf{k}) + a_-(\mathbf{k}) \mathbf{e}_-(\mathbf{k})] e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (6.165)$$

dargestellt werden, wobei

$$a_{\pm}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} [a_1(\mathbf{k}) \pm ia_2(\mathbf{k})] \quad (6.166)$$

gilt.⁹

Besitzen die

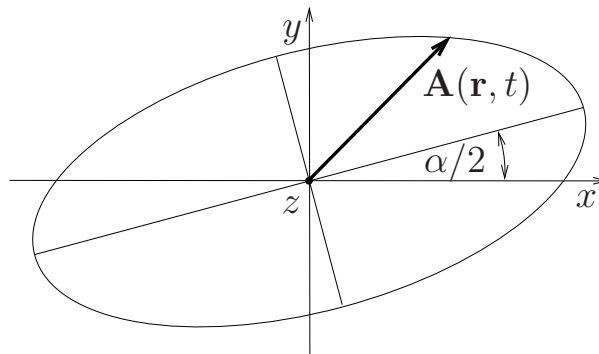
$$a_{\pm}(\mathbf{k}) = |a_{\pm}(\mathbf{k})| e^{i\delta_{\pm}(\mathbf{k})} \quad (6.167)$$

verschiedene Beträge, aber gleiche Phasen, stellt (6.165) eine elliptisch polarisierte Welle dar, wobei die Lage der Hauptachsen der Ellipse mit den durch $\mathbf{e}_1(\mathbf{k})$ und $\mathbf{e}_2(\mathbf{k})$ definierten Achsen übereinstimmt. Im allgemeinen Fall

$$\frac{a_-(\mathbf{k})}{a_+(\mathbf{k})} = r(\mathbf{k}) e^{i\alpha(\mathbf{k})}, \quad (6.168)$$

$$r(\mathbf{k}) = \frac{|a_-(\mathbf{k})|}{|a_+(\mathbf{k})|}, \quad \alpha(\mathbf{k}) = \delta_-(\mathbf{k}) - \delta_+(\mathbf{k}) \quad (6.169)$$

bewegt sich die Spitze des (reellen) Vektors des Vektorpotentials auf einer Ellipse, deren Achsen um $\alpha/2$ gedreht sind und deren Verhältnis von großer zu kleiner Hauptachse durch $|(1+r)/(1-r)|$ gegeben ist. Für $r = \pm 1$ entartet die Ellipse zu einer Geraden, und man erhält wieder eine linear polarisierte Welle.



⁹Die beiden Polarisationszustände, über die in (6.146) [sowie in (6.147) und (6.148)] summiert wird, müssen sich nicht notwendigerweise auf lineare Polarisation beziehen, sondern beispielsweise auch auf zirkuläre Polarisation.

Die obigen Aussagen, die sich zunächst auf das Vektorpotential beziehen, treffen unter Berücksichtigung von (6.141) und (6.144) natürlich auch auf die Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} zu, wobei zu berücksichtigen ist, daß \mathbf{B} senkrecht auf \mathbf{E} steht. So trifft die obige Abbildung sowohl auf \mathbf{A} als auch \mathbf{E} zu, während die entsprechende Ellipse für \mathbf{B} um $\pi/2$ (im Uhrzeigersinn) gedreht ist.

Der Polarisationszustand einer ebenen elektromagnetischen Welle ist bekannt, wenn er gemäß (6.150) oder (6.165) mit bekannten Koeffizienten $a_1(\mathbf{k})$, $a_2(\mathbf{k})$ bzw. $a_+(\mathbf{k})$, $a_-(\mathbf{k})$ gegeben ist. In der Praxis tritt jedoch oft das entgegengesetzte Problem auf, wenn man weiß, daß die Welle die Form (6.126) besitzt, und die Frage zu beantworten ist, wie aus Beobachtungen auf die Einzelheiten des Polarisationszustandes geschlossen werden kann. Ein nützliches Hilfsmittel stellen in diesem Zusammenhang die vier *Stokesschen Parameter* dar. Sie lassen sich über die Basisvektoren sowohl der linearen als auch der zirkularen Polarisation definieren.

Wir wollen den (allgemeineren) zweiten Fall betrachten und beginnen mit der der Gleichung (6.165) entsprechenden Gleichung für die (komplexe) elektrische Feldstärke,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = [\underline{E}_+(\mathbf{k}) \mathbf{e}_+(\mathbf{k}) + \underline{E}_-(\mathbf{k}) \mathbf{e}_-(\mathbf{k})] e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}, \quad (6.170)$$

$$\underline{E}_\pm(\mathbf{k}) \sim i\omega a_\pm(\mathbf{k}). \quad (6.171)$$

Die Stokesschen Parameter sind dann wie folgt definiert:

$$s_0 = |\mathbf{e}_+^* \cdot \mathbf{E}|^2 + |\mathbf{e}_-^* \cdot \mathbf{E}|^2 = |\underline{E}_+|^2 + |\underline{E}_-|^2, \quad (6.172)$$

$$s_1 = 2 \operatorname{Re} [(\mathbf{e}_+^* \cdot \mathbf{E})^* \mathbf{e}_-^* \cdot \mathbf{E}] = 2|\underline{E}_+||\underline{E}_-| \cos(\delta_+ - \delta_-), \quad (6.173)$$

$$s_2 = 2 \operatorname{Im} [(\mathbf{e}_+^* \cdot \mathbf{E})^* \mathbf{e}_-^* \cdot \mathbf{E}] = 2|\underline{E}_+||\underline{E}_-| \sin(\delta_+ - \delta_-). \quad (6.174)$$

$$s_3 = |\mathbf{e}_+^* \cdot \mathbf{E}|^2 - |\mathbf{e}_-^* \cdot \mathbf{E}|^2 = |\underline{E}_+|^2 - |\underline{E}_-|^2, \quad (6.175)$$

Die vier Parameter, die von den drei Größen $|\underline{E}_+|$, $|\underline{E}_-|$ und $\delta_+ - \delta_-$ abhängen, sind nicht unabhängig voneinander. Es gilt

$$s_0^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2. \quad (6.176)$$

Der Parameter s_0 ist durch die Intensität der Welle (siehe Abschnitt 6.4.1.3) bestimmt. Die Differenz der Intensitäten der Anteile mit positiver und negativer Helizität wird durch den Parameter s_3 bestimmt. Die Informationen über die Phasen ist in s_1 und s_2 enthalten.

Die Formeln für die Stokesschen Parameter bei Verwendung der Basisvektoren der linearen Polarisation ergeben sich aus obigen Formeln durch Ersetzen der komplexen Basisvektoren \mathbf{e}_+ , \mathbf{e}_- durch die reellen Basisvektoren \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 und entsprechendes Ersetzen der zugehörigen (komplexen) Amplituden.¹⁰ In jedem Fall sind die Stokesschen Parameter quadratisch in den Feldstärken und können letztlich aus Intensitätsmessungen bestimmt werden. Ihre experimentelle Bestimmung liefert eine vollständige Beschreibung des Polarisationszustandes.

6.4.1.3 Energie und Energiestromdichte

Um die Energie einer ebenen elektromagnetischen Welle als eine in den Feldstärken quadratische Form zu berechnen, müssen natürlich die reellen Felder betrachtet werden. Dementsprechend schreiben wir hier die elektrische Feldstärke in der Form

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t)} + \text{c.c.} \quad (6.177)$$

Gemäß (6.143) lautet das dazugehörige \mathbf{B} -Feld

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \quad (6.178)$$

Unter Berücksichtigung der Dispersionsbeziehung (6.131) finden wir mit (6.178) für die Dichte der magnetischen Feldenergie

$$\begin{aligned} w_{\text{mag}} &= \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 = \frac{1}{2\mu_0} \frac{1}{\omega^2} (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \frac{1}{\omega^2} [k^2 \mathbf{E}^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E})^2] = \frac{1}{2\mu_0} \frac{k^2}{\omega^2} \mathbf{E}^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \mathbf{E}^2, \end{aligned} \quad (6.179)$$

d.h. magnetische und elektrische Energiedichte sind gleich groß:

$$w_{\text{mag}} = w_{\text{el}} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \mathbf{E}^2 \quad \rightsquigarrow \quad w = w_{\text{el}} + w_{\text{mag}} = \varepsilon_0 \mathbf{E}^2. \quad (6.180)$$

¹⁰Gegebenenfalls sind noch die Umbenennungen $s_1 \rightarrow s_2$, $s_2 \rightarrow s_3$ und $s_3 \rightarrow s_1$ vorzunehmen.

Dies gilt natürlich auch für die über eine Periode $T = 1/\omega$ genommenen zeitlichen Mittelwerte, so daß wir unter Berücksichtigung von (6.24) für die zeitlich gemittelte Energiedichte der Welle

$$\bar{w} = \bar{w}_{\text{el}} + \bar{w}_{\text{mag}} = 2\bar{w}_{\text{el}} = \varepsilon_0 \overline{\mathbf{E}^2} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 |\underline{\mathbf{E}}|^2 \quad (6.181)$$

erhalten.

Analog folgt für den Poynting-Vektor zunächst

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0 \omega} \mathbf{E} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \\ &= \frac{1}{\mu_0 \omega} [\mathbf{kE}^2 - \mathbf{E} \mathbf{k} \cdot \mathbf{E}] = \frac{1}{\mu_0 \omega} \mathbf{kE}^2 \end{aligned} \quad (6.182)$$

bzw. [unter Berücksichtigung von (6.131) und (6.180)]

$$\mathbf{S} = \frac{k}{\varepsilon_0 \mu_0 \omega} \varepsilon_0 \mathbf{E}^2 \frac{\mathbf{k}}{k} = c w \frac{\mathbf{k}}{k}. \quad (6.183)$$

Mit (6.181) ergibt sich schließlich für den zeitlich gemittelten Poynting-Vektor:

$$\bar{\mathbf{S}} = c \bar{w} \frac{\mathbf{k}}{k} = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 |\underline{\mathbf{E}}|^2 \frac{\mathbf{k}}{k} \quad (6.184)$$

Der Poynting-Vektor zeigt also in Richtung des Wellenzahlvektors. Längs dieser Richtung findet ein Energiestrom statt, dessen Dichte proportional zur Energiedichte der Welle ist.

6.4.1.4 Transparente lineare Medien

Alle bisherigen Aussagen zu ebenen elektromagnetischen Wellen und Überlagerungen von solchen zu Wellenpaketen betrafen Wellen im materiefreien Raum (Vakuumhintergrund). Für monochromatische Wellen, die sich in einem durch reelles $\varepsilon(\omega)$ und reelles $\mu(\omega)$ (näherungsweise) charakterisierbaren linearen Medium (d.h. in einem Transparentbereich des Mediums) ausbreiten, bleiben offensichtlich alle Ergebnisse

richtig, wenn in den Formeln die Ersetzungen

$$\varepsilon_0 \rightarrow \varepsilon(\omega) \quad (6.185)$$

und

$$\mu_0 \rightarrow \mu(\omega) \quad (6.186)$$

vorgenommen werden. Das bedeutet insbesondere, daß die im Vakuum als Phasengeschwindigkeit fungierende Lichtgeschwindigkeit c gemäß

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \longrightarrow v(\omega) = \frac{c}{n(\omega)} \quad (6.187)$$

durch eine frequenzabhängige Phasengeschwindigkeit $v(\omega)$ zu ersetzen ist, wobei

$$n(\omega) = \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0} \frac{\mu(\omega)}{\mu_0}} = \sqrt{\varepsilon_r(\omega) \mu_r(\omega)} \quad (6.188)$$

als (frequenzabhängige) **Brechzahl** bezeichnet wird. Anstelle von (6.131) ist nunmehr die (i. allg. wesentlich kompliziertere) Dispersionsbeziehung

$$\omega = \frac{k}{\sqrt{\varepsilon(\omega) \mu(\omega)}} = k v(\omega) \quad (6.189)$$

zu berücksichtigen.

Es sei ω_0 die Mittenfrequenz und $\Delta\omega$ ein Maß für die Breite des betrachteten Transparenzbereiches,

$$|\omega_0 - \omega| \leq \Delta\omega. \quad (6.190)$$

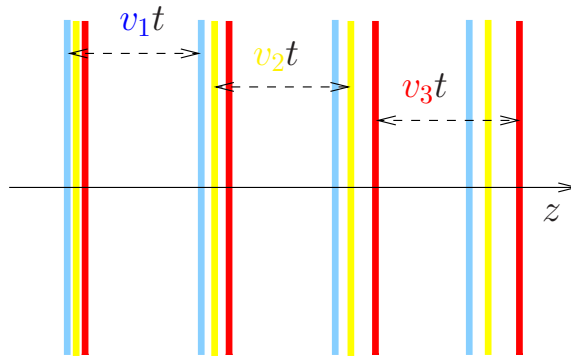
Für die [gemäß der Dispersionsbeziehung (6.189)] dazugehörigen Beträge der Wellenzahlvektoren gelte

$$|k_0 - k| \leq \Delta k. \quad (6.191)$$

Überlagerung von ebenen Wellen in diesem Frequenzgebiet liefert dann Wellenpakete, die analog zu (6.146) in der Form

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\sigma=1}^2 \int_{\Delta k} d^3 k a_{\sigma}(\mathbf{k}) \mathbf{e}_{\sigma}(\mathbf{k}) e^{i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega(k)t]} + \text{c.c.} \quad (6.192)$$

dargestellt werden können, wobei die $a_{\sigma}(\mathbf{k})$ außerhalb des betrachteten Frequenzgebietes praktisch Null sein sollen. Im Unterschied zu (6.146) ist jedoch nunmehr [gemäß der Dispersionsbeziehung (6.189)] für gegebene Richtung des Wellenzahlvektors (z.B. $\mathbf{k} \parallel \mathbf{e}_z$ wie in der Abbildung) die Phasengeschwindigkeit frequenzabhängig und somit k -abhängig. Das heißt, die Wellenfronten von Wellen unterschiedlicher Frequenz



breiten sich i. allg. mit unterschiedlicher Geschwindigkeit aus, so daß ein zu einer bestimmten Zeit (bezüglich der betrachteten Ausbreitungsrichtung) lokalisiertes Wellenpaket im Verlaufe der Ausbreitung seine Form verändert und auseinanderläuft.

Für $\Delta\omega \ll \omega_0$ ist es oft ausreichend, diesen dispersiven Effekt bis einschließlich der Glieder $\sim (dv/d\omega)$ zu berücksichtigen.¹¹ In diesem Sinne entwickeln wir $\omega(k)$ an der Stelle k_0 in eine Potenzreihe in $(k - k_0)$ und brechen mit dem quadratischen Glied ab,

$$\omega(k) \simeq \omega(k_0) + \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0 (k - k_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\omega}{dk^2} \right)_0 (k - k_0)^2 \quad (6.193)$$

¹¹Dies entspricht genau der näherungsweise Behandlung der Dispersion im Abschnitt 6.1.2.2 (mit $\Omega \rightarrow \omega_0$).

$[\omega(k_0) = \omega_0 = k_0 v_0, v_0 = v(\omega_0)]$. Die Größe

$$u(\omega) = \frac{d\omega}{dk} = c \left[\frac{d(n\omega)}{d\omega} \right]^{-1} \quad (6.194)$$

definiert die i. allg. ebenfalls frequenzabhängige (bzw. k -abhängige) **Gruppengeschwindigkeit**. Wir machen von der Dispersionsbeziehung (6.189) Gebrauch und finden

$$\frac{d\omega}{dk} = v + k \frac{dv}{dk} = v + k \frac{dv}{d\omega} \frac{d\omega}{dk}, \quad (6.195)$$

d.h.

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{v}{1 - k \frac{dv}{d\omega}} = \frac{v}{1 - \frac{\omega}{v} \frac{dv}{d\omega}}. \quad (6.196)$$

Die **Dispersion der Gruppengeschwindigkeit** ist durch

$$\frac{d^2\omega}{dk^2} = \frac{du}{dk} = \frac{d}{d\omega} \left[\frac{1}{2} u^2(\omega) \right] \quad (6.197)$$

bestimmt. Aus (6.196) finden wir

$$\frac{d^2\omega}{dk^2} = \left[\left(1 - k \frac{dv}{d\omega} \right)^2 \right]^{-1} \left[\frac{dv}{d\omega} \frac{d\omega}{dk} \left(1 - k \frac{dv}{d\omega} \right) + v \frac{dv}{d\omega} + vk \frac{d^2v}{d\omega^2} \frac{d\omega}{dk} \right] \quad (6.198)$$

bzw.

$$\frac{d^2\omega}{dk^2} = \frac{2u^2}{v} \frac{dv}{d\omega} + \frac{\omega u^3}{v^2} \frac{d^2v}{d\omega^2}. \quad (6.199)$$

und speziell für vernachlässigbares $d^2v/d\omega^2$

$$\frac{d^2\omega}{dk^2} = \frac{2u(u-v)}{\omega}. \quad (6.200)$$

Betrachten wir wieder ein Wellenpaket aus ebenen Wellen, die sich in Richtung der z -Achse ausbreiten, so daß wir [gemäß (6.192)]

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty dk \mathbf{a}(k) e^{i[kz - \omega(k)t]} + \text{c.c.} \quad (6.201)$$

schreiben können, und nehmen wir speziell ein Gaußsches Wellenpaket an, dessen Amplitudenfunktion

$$\mathbf{a}(k) = \mathbf{a}(k_0) \exp\left[-\frac{(k - k_0)^2}{4(\Delta k)^2}\right] \quad (6.202)$$

lautet. Setzen wir (6.193) und (6.202) in (6.201) ein, erhalten wir ein Gaußsches Integral, das (mit der Variablensubstitution $k - k_0 \rightarrow q$ und Ausdehnung des resultierenden q -Integrals bis $-\infty$) auf

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} + \text{c.c.} \quad (6.203)$$

führt, wobei die langsam veränderliche Amplitudenfunktion durch

$$\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) = 4\mathbf{a}(k_0) \sqrt{\frac{\pi}{\beta(t)}} \exp\left[-\frac{(z - u_0 t)^2}{\beta(t)}\right] \quad (6.204)$$

mit

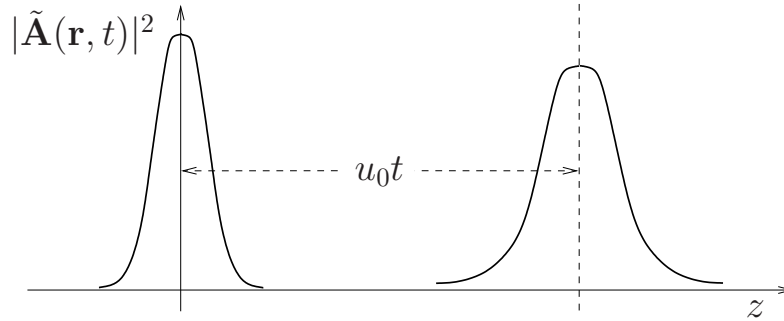
$$\beta(t) = \frac{1}{(\Delta k)^2} + 2i \left(\frac{d^2\omega}{dk^2}\right)_0 t \quad (6.205)$$

[$u_0 = u(\omega_0)$] gegeben ist. Ihr Absolutquadrat

$$|\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t)|^2 = \frac{8\pi |\mathbf{a}(k_0)|^2 \sqrt{(\Delta k)^2}}{\sqrt{[\Delta z(t)]^2}} \exp\left\{-\frac{(z - u_0 t)^2}{2[\Delta z(t)]^2}\right\}, \quad (6.206)$$

$$[\Delta z(t)]^2 = \frac{1}{4(\Delta k)^2} \left\{ 1 + 4 \left[\left(\frac{d^2\omega}{dk^2}\right)_0 \right]^2 (\Delta k)^4 t^2 \right\}, \quad (6.207)$$

stellt also zu jedem Zeitpunkt eine Gauß-Funktion in z dar, dessen Maximum bei $z = u_0 t$ sich mit der Gruppengeschwindigkeit in z -Richtung bewegt. Mit wachsender Zeit nimmt die Breite $|\Delta z(t)|$ des Wellenpaketes auf Grund der Dispersion der Gruppengeschwindigkeit zu, und entsprechend nimmt seine Höhe ab. Aus (6.207) lesen wir insbesondere



die Unschärferelation

$$|\Delta k| |\Delta z| \geq \frac{1}{2} \quad (6.208)$$

ab. Je schmalbandiger ein Wellenpaket ist, desto breiter ist also seine Ausdehnung im Ortsraum.

Im Gegensatz zu einer monochromatischen ebenen Welle (strikte Periodizität!) kann ein Wellenpaket zur Signalübertragung verwendet werden. In der betrachteten Näherung spielt offensichtlich die Gruppengeschwindigkeit die Rolle der Signalgeschwindigkeit. Die Ungleichungen (2.72) und (2.74) [zusammen mit den für $\mu(\omega)$ analogen Ungleichungen] sichern, daß die Gruppengeschwindigkeit immer kleiner als die (Vakuum-)Lichtgeschwindigkeit ist. Wie unschwer zu zeigen ist, folgen für $\mu = \mu_0$ [d.h. $n(\omega) = \sqrt{\varepsilon(\omega)/\varepsilon_0}$] aus den Ungleichungen (2.72) und (2.74) die Ungleichungen

$$\frac{d[\omega n(\omega)]}{d\omega} > n(\omega), \quad \frac{d[\omega n(\omega)]}{d\omega} > \frac{1}{n(\omega)}. \quad (6.209)$$

Berücksichtigen wir die Definition (6.194) der Gruppengeschwindigkeit, so sehen wir, daß die (positive) Gruppengeschwindigkeit den beiden Ungleichungen

$$u(\omega) < c/n(\omega), \quad u(\omega) < c n(\omega) \quad (6.210)$$

genügt, woraus ersichtlich ist, daß

$$u(\omega) < c \quad (6.211)$$

sowohl für $n(\omega) > 1$ als auch $n(\omega) < 1$ gilt. Die Gruppengeschwindigkeit kann also nicht größer als die (Vakuum-)Lichtgeschwindigkeit werden.

Anmerkungen

- In den obigen Überlegungen ist stillschweigend immer angenommen worden, daß in dem betrachteten Transparenzgebiet nicht nur $\varepsilon(\omega) \approx \text{Re } \varepsilon(\omega)$ gilt, sondern auch $\text{Re } \varepsilon(\omega) > 0$ ist. Frequenzgebiete mit (praktisch) reellem $\varepsilon(\omega)$ sind bekanntlich immer Gebiete mit normaler Dispersion, wobei $\varepsilon(\omega)$ auch negativ sein kann. Obwohl in einem solchen Fall Absorption ebenfalls nur eine unwesentliche Rolle spielt, handelt es sich nicht um ein Transparenzgebiet im eigentlichen Sinne, da gemäß (6.188) $n(\omega)$ und somit gemäß (6.189) k imaginär werden, so daß keine (sich ausbreitenden) Wellen realisierbar sind.
- Wenn sowohl der Realteil als auch der Imaginärteil von $\varepsilon(\omega)$ zu berücksichtigen sind, liefert die Beziehung (6.189) für das nunmehr komplexe k ($\mu = \mu_0$)

$$k = \sqrt{\varepsilon(\omega)\mu_0} \omega = \sqrt{\varepsilon_r(\omega)} \frac{\omega}{c} = [n(\omega) + i\kappa(\omega)] \frac{\omega}{c}. \quad (6.212)$$

Man spricht in diesem Fall auch von *gedämpften Wellen*, wobei die Brechzahl $n(\omega)$ die Ausbreitung der Wellen [Phasengeschwindigkeit $v(\omega) = c/n(\omega)$] bestimmt und der Koeffizient $\kappa(\omega)$ ihre Dämpfung. Dabei muß Dämpfung nicht unbedingt Absorption heißen, da $\kappa(\omega)$ auch dann von Null verschieden ist, wenn $\varepsilon(\omega)$ als reell angesehen werden kann, jedoch negativ ist. Wir wollen $n(\omega)$ und $\kappa(\omega)$ durch den Real- und Imaginärteil von $\varepsilon_r(\omega)$ ausdrücken. Aus (6.212) folgt

$$[\text{Re } \varepsilon_r(\omega) + i \text{Im } \varepsilon_r(\omega)] = n^2(\omega) - \kappa^2(\omega) + 2in(\omega)\kappa(\omega), \quad (6.213)$$

d.h.

$$n^2(\omega) - \kappa^2(\omega) = \text{Re } \varepsilon_r(\omega), \quad 2n(\omega)\kappa(\omega) = \text{Im } \varepsilon_r(\omega). \quad (6.214)$$

Die Lösung dieser beiden Gleichungen lautet

$$n(\omega) = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\text{Re } \varepsilon_r(\omega) + \sqrt{\text{Re}^2 \varepsilon_r(\omega) + \text{Im}^2 \varepsilon_r(\omega)} \right]}, \quad (6.215)$$

$$\kappa(\omega) = \sqrt{\frac{1}{2} \left[-\text{Re } \varepsilon_r(\omega) + \sqrt{\text{Re}^2 \varepsilon_r(\omega) + \text{Im}^2 \varepsilon_r(\omega)} \right]}. \quad (6.216)$$

Aus den Gleichungen (6.214) – (6.216) ist insbesondere zu ersehen, daß im Fall schwacher Absorption,

$$0 < \operatorname{Im} \varepsilon_r(\omega) \ll |\operatorname{Re} \varepsilon_r(\omega)|, \quad (6.217)$$

die folgenden Abschätzungen gemacht werden können:

$$n(\omega) \simeq \sqrt{\operatorname{Re} \varepsilon_r(\omega)} \gg \kappa(\omega) \simeq \frac{\operatorname{Im} \varepsilon_r(\omega)}{2\sqrt{\operatorname{Re} \varepsilon_r(\omega)}} \quad (\operatorname{Re} \varepsilon_r(\omega) > 0), \quad (6.218)$$

$$n(\omega) \simeq \frac{\operatorname{Im} \varepsilon_r(\omega)}{2\sqrt{|\operatorname{Re} \varepsilon_r(\omega)|}} \ll \kappa(\omega) \simeq \sqrt{|\operatorname{Re} \varepsilon_r(\omega)|} \quad (\operatorname{Re} \varepsilon_r(\omega) < 0). \quad (6.219)$$

Während also im Falle eines positiven Realteils von $\varepsilon_r(\omega)$ die Brechzahl $n(\omega)$ durch den Realteil von $\varepsilon_r(\omega)$ bestimmt ist und der Dämpfungskoeffizient $\kappa(\omega)$ proportional zum Imaginärteil von $\varepsilon_r(\omega)$ ist, ist die Situation im Falle eines negativen Realteils von $\varepsilon_r(\omega)$ gerade umgekehrt. Die Brechzahl ist nunmehr proportional zum Imaginärteil von $\varepsilon_r(\omega)$ und die Dämpfungskonstante ist durch den Realteil von $\varepsilon_r(\omega)$ bestimmt.

- Wird die Definition (6.194) der Gruppengeschwindigkeit auf Frequenzgebiete mit anomaler Dispersion ausgedehnt, so ist wegen $dn/d\omega < 0$ aus

$$u(\omega) = \frac{c}{n(\omega) + \omega \frac{dn(\omega)}{d\omega}}. \quad (6.220)$$

zu ersehen, daß $u(\omega)$ auch größer als c werden kann. In solchen Gebieten ist jedoch typischerweise $n(\omega)$ wesentlich durch den Imaginärteil von $\varepsilon(\omega)$ (Absorption!) mitbestimmt. Unter diesen Umständen macht es [selbst für reelles $n(\omega)$] wenig Sinn, die Gruppengeschwindigkeit als Signalgeschwindigkeit zu interpretieren.

6.4.2 Die Helmholtz-Gleichung

Die Wellengleichung (6.123) kann ganz allgemein durch einen Separationsansatz

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = q(t)\mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (6.221)$$

gelöst werden. Wir setzen (6.221) in (6.123) ein und erhalten bezüglich der k -ten Komponente des Vektorpotentials

$$c^2 \frac{\Delta A_k(\mathbf{r})}{A_k(\mathbf{r})} = \frac{\ddot{q}(t)}{q(t)}. \quad (6.222)$$

Da die linke Seite dieser Gleichung nur von \mathbf{r} und die rechte Seite nur von t abhängt und beide Seiten einander gleich sein sollen, müssen sie konstant sein. Es sei $-\omega^2$ diese Konstante. Dann gilt

$$\ddot{q}(t) + \omega^2 q(t) = 0 \quad (6.223)$$

sowie

$$\Delta A_k(\mathbf{r}) + \frac{\omega^2}{c^2} A_k(\mathbf{r}) = 0 \quad (k = 1, 2, 3) \quad (6.224)$$

bzw. in kompakter Form:

$$\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0 \quad (6.225)$$

Für reelles ω stellt (6.223) die Bewegungsgleichung eines (freien) harmonischen Oszillators dar, und es gilt

$$q(t) = a e^{-i\omega t} + c.c., \quad (6.226)$$

so daß $\omega > 0$ gewählt werden kann. Offensichtlich hat ω die Bedeutung der Frequenz einer monochromatischen Feldanregung, deren räumliche Struktur durch die Helmholtz-Gleichung (6.225) festgelegt wird. Es ist klar, daß bei Anwesenheit eines linearen, homogenen Mediums für Frequenzen in einem Transparenzgebiet [d.h. reelles $\varepsilon(\omega)$ und reelles $\mu(\omega)$] c^{-2} in (6.225) durch $\varepsilon_r(\omega)\mu_r(\omega)c^{-2}$ ersetzt werden kann [siehe (6.187) und (6.188)], so daß die Helmholtz-Gleichung (für diesen Frequenzbereich)

$$\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \varepsilon_r(\omega)\mu_r(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0 \quad (6.227)$$

lautet.

Die Lösung der Helmholtz-Gleichung (zusammen mit den jeweils zu erfüllenden Randbedingungen) stellt ein sogenanntes *Eigenwertproblem* dar,

$$\Delta \mathbf{A}_\lambda(\mathbf{r}) = \Lambda_\lambda \mathbf{A}_\lambda(\mathbf{r}), \quad (6.228)$$

wobei $\mathbf{A}_\lambda(\mathbf{r})$ die zum *Eigenwert*

$$\Lambda_\lambda = -\frac{\omega_\lambda^2}{c^2} \quad \text{bzw.} \quad \Lambda_\lambda = -\varepsilon_r(\omega_\lambda)\mu_r(\omega_\lambda)\frac{\omega_\lambda^2}{c^2} \quad (6.229)$$

gehörende (vektorielle) *Eigenfunktion* ist.¹² Man kann zeigen, daß die Eigenwerte reell sind und die zu verschiedenen Eigenwerten gehörigen Eigenfunktionen orthogonal zueinander sind,¹³

$$\int d^3r \mathbf{A}_\lambda(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}_{\lambda'}(\mathbf{r}) = 0 \quad (\Lambda_\lambda \neq \Lambda_{\lambda'}). \quad (6.230)$$

Von Entartung wird gesprochen, wenn zu einem Eigenwert mehrere linear unabhängige Eigenfunktionen gehören, was in der Regel der Fall ist. Diese Funktionen können immer so gewählt werden, daß sie ebenfalls orthogonal zueinander sind,

$$\int d^3r \mathbf{A}_\lambda(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}_{\lambda'}(\mathbf{r}) = 0 \quad \lambda \neq \lambda'. \quad (6.231)$$

Die allgemeine Lösung der Wellengleichung für das Vektorpotential kann dann in der Form

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\lambda} \mathbf{A}_\lambda(\mathbf{r}) a_\lambda e^{-i\omega_\lambda t} + \text{c.c.} \quad (6.232)$$

geschrieben werden. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von der **Modenentwicklung** des Vektorpotentials; demgemäß heißen die $\mathbf{A}_\lambda(\mathbf{r})$ auch **Modenfunktionen**. Aus (6.232) folgen dann sofort die entsprechenden Modenentwicklungen des **E**- und des **B**-Feldes mit

$$\mathbf{E}_\lambda(\mathbf{r}) = i\omega_\lambda \mathbf{A}_\lambda(\mathbf{r}) \quad (6.233)$$

¹²Es ist klar, daß die $\mathbf{A}_\lambda(\mathbf{r})$ der Bedingung $\nabla \cdot \mathbf{A}_\lambda(\mathbf{r}) = 0$ genügen müssen.

¹³Wird mit komplexwertigen Eigenfunktionen gerechnet, ist $\mathbf{A}_\lambda(\mathbf{r})$ durch $\mathbf{A}_\lambda^*(\mathbf{r})$ zu ersetzen.

bzw.

$$\mathbf{B}_\lambda(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}_\lambda(\mathbf{r}) \quad (6.234)$$

als den dazugehörigen Modenfunktionen.

Es ist klar, daß in dem Fall, wenn sich die elektromagnetischen Wellen im ansonsten leeren Raum ausbreiten können, die Helmholtz-Gleichung durch ebene Wellen gelöst wird,

$$\mathbf{A}_\lambda(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{e}_\sigma(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (6.235)$$

$$\int d^3r \mathbf{e}_{\sigma'}^*(\mathbf{k}') e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}} \cdot \mathbf{e}_\sigma(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = (2\pi)^3 \delta_{\sigma\sigma'} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (6.236)$$

Der Modenindex λ repräsentiert in diesem Fall den (kontinuierlichen) Wellenzahlvektor \mathbf{k} und den (diskreten) Polarisationsindex σ ,

$$\lambda \rightarrow \{\mathbf{k}, \sigma\}, \quad (6.237)$$

und gemäß (6.229) gilt die bekannte Dispersionsbeziehung (6.131) bzw. (6.189).

Das große Anwendungsgebiet der Helmholtz-Gleichung sind **Wellenleiter** und **Resonatoren**, wenn bei Anwesenheit makroskopischer Körper durch entsprechende Randbedingungen die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in bestimmten Richtungen (zumindest näherungsweise) unterbunden wird. Speziell im Falle eines idealen Resonators ist das elektromagnetische Feld ganz im Inneren eines endlichen Raumbereiches mit perfekt reflektierender Berandung konzentriert. In Übereinstimmung mit den Grenzbedingungen (3.206) und (4.138) bedeutet dies die Randbedingungen

$$\mathbf{e}_\parallel(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}_\lambda(\mathbf{r})|_{\text{Rand}} = 0, \quad (6.238)$$

$$\mathbf{e}_\perp(\mathbf{r}) \cdot [\nabla \times \mathbf{A}_\lambda(\mathbf{r})]|_{\text{Rand}} = 0, \quad (6.239)$$

wobei in jedem Punkt \mathbf{r} der Berandungsfläche $\mathbf{e}_\parallel(\mathbf{r})$ tangential und $\mathbf{e}_\perp(\mathbf{r})$ normal zu dieser Fläche gerichtet ist. Das Modenspektrum des elektromagnetischen Wellenfeldes in einem idealen Resonator ist immer diskret. Da jeder Feldmode $\mathbf{A}_\lambda(\mathbf{r})$ gemäß (6.223) ein harmonischer Oszillator der Frequenz ω_λ zugeordnet werden kann, entspricht ein solches Feld somit einem System von abzählbar unendlich vielen (wechselwirkungsfreien!) harmonischen Oszillatoren.

6.4.3 Reflexion und Brechung

Bekanntlich können elektromagnetische Wellen an der Trennfläche zweier (linearer) Medien (I) und (II) reflektiert und gebrochen werden. Wir wollen wieder annehmen, daß es sich um Wellen in einem (eigentlichen) Transparenzgebiet der Medien handelt, so daß sowohl

$$\varepsilon_r^{(I)}(\omega)\mu_r^{(I)}(\omega) > 0 \quad (6.240)$$

als auch

$$\varepsilon_r^{(II)}(\omega)\mu_r^{(II)}(\omega) > 0 \quad (6.241)$$

vorausgesetzt werden kann. Ferner wollen wir als Trennfläche eine Ebene betrachten.

6.4.3.1 Reflexions- und Brechungsgesetz

Für eine gegebene Frequenz ω sind dann Lösungen der Helmholtz-Gleichung (6.227) für die beiden Halbräume gesucht, die auf der Trennfläche den entsprechenden Grenzbedingungen für die Felder genügen. Wie wir wissen, wird die Helmholtz-Gleichung in jedem Halbraum durch ebene Wellen gelöst. Betrachten wir im Medium (I) eine auf die Trennfläche zulaufende (einfallende) ebene Welle

$$\mathbf{A}^{(I)}(\mathbf{k}^{(I)}, \mathbf{r}) = \mathbf{A}_0^{(I)}(\mathbf{k}^{(I)}) e^{i\mathbf{k}^{(I)} \cdot \mathbf{r}}. \quad (6.242)$$

Wie wir sehen werden, lassen sich die Grenzbedingungen erfüllen, wenn im Medium (I) zu der einlaufenden ebenen Welle eine reflektierte ebene Welle

$$\mathbf{A}'^{(I)}(\mathbf{k}'^{(I)}, \mathbf{r}) = \mathbf{A}_0'^{(I)}(\mathbf{k}'^{(I)}) e^{i\mathbf{k}'^{(I)} \cdot \mathbf{r}} \quad (6.243)$$

addiert wird und im Medium (II) eine von der Trennfläche weglaufende (auslaufende) ebene Welle

$$\mathbf{A}^{(II)}(\mathbf{k}^{(II)}, \mathbf{r}) = \mathbf{A}_0^{(II)}(\mathbf{k}^{(II)}) e^{i\mathbf{k}^{(II)} \cdot \mathbf{r}} \quad (6.244)$$

berücksichtigt wird. Gemäß der Dispersionsbeziehung (6.189) gilt

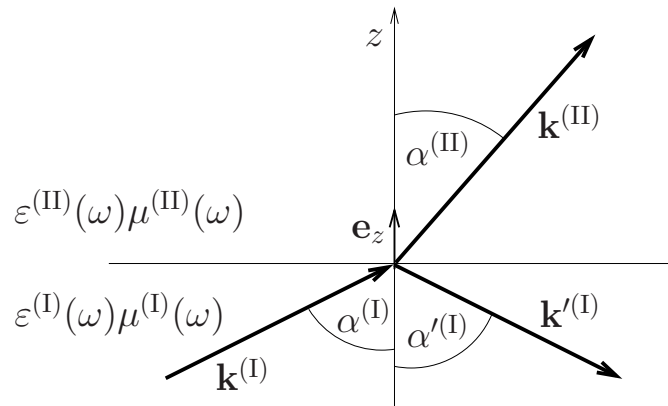
$$k^{(I)} = k'^{(I)} = \omega \sqrt{\varepsilon^{(I)}(\omega)\mu^{(I)}(\omega)} = \frac{\omega}{v^{(I)}(\omega)} = n^{(I)}(\omega) \frac{\omega}{c}, \quad (6.245)$$

$$k^{(\text{II})} = \omega \sqrt{\varepsilon^{(\text{II})}(\omega) \mu^{(\text{II})}(\omega)} = \frac{\omega}{v^{(\text{II})}(\omega)} = n^{(\text{II})}(\omega) \frac{\omega}{c}. \quad (6.246)$$

Da die Grenzbedingungen an allen Punkten auf der Trennebene erfüllt sein müssen, muß die räumliche Änderung der drei Wellen in dieser Ebene jeweils die gleiche sein. Die xy -Ebene sei die Trennebene. Dann muß für $z = 0$

$$\mathbf{k}^{(\text{I})} \cdot \mathbf{r} \Big|_{z=0} = \mathbf{k}'^{(\text{I})} \cdot \mathbf{r} \Big|_{z=0} = \mathbf{k}^{(\text{II})} \cdot \mathbf{r} \Big|_{z=0} \quad (6.247)$$

gelten. Diese Gleichungen enthalten die sogenannten kinematischen Eigenschaften von Reflexion und Brechung. Offenbar müssen die drei Wellenzahlvektoren $\mathbf{k}^{(\text{I})}$, $\mathbf{k}'^{(\text{I})}$ und $\mathbf{k}^{(\text{II})}$ in einer Ebene (senkrecht zur xy -Ebene) liegen. Die Gleichungen (6.247) lauten dann



$$k^{(\text{I})} \sin \alpha^{(\text{I})} = k'^{(\text{I})} \sin \alpha'^{(\text{I})} = k^{(\text{II})} \sin \alpha^{(\text{II})}. \quad (6.248)$$

Aus der linken Gleichung folgt dann (wegen $k^{(\text{I})} = k'^{(\text{I})}$) das *Reflexionsgesetz*, das besagt, daß Einfalls- und Ausfallswinkel gleich sind:

$$\alpha^{(\text{I})} = \alpha'^{(\text{I})} \quad (6.249)$$

Entsprechend liefert die äußere Gleichung das *Brechungsgesetz*:

$$\frac{\sin \alpha^{(\text{I})}}{\sin \alpha^{(\text{II})}} = \frac{k^{(\text{II})}}{k^{(\text{I})}} = \frac{v^{(\text{I})}}{v^{(\text{II})}} = \frac{n^{(\text{II})}}{n^{(\text{I})}} \quad (6.250)$$

Während der Ausfallswinkel der reflektierten Welle unabhängig von der Frequenz ist und nur durch den Einfallswinkel der einlaufenden Welle festgelegt ist, ist der Ausfallswinkel der gebrochenen Welle bei gegebenem Einfallswinkel der einlaufenden Welle entsprechend den dispersiven Eigenschaften der beiden Medien frequenzabhängig.

6.4.3.2 Fresnelsche Formeln

In den bisherigen Überlegungen wurde von der expliziten Form der Grenzbedingungen noch nicht Gebrauch gemacht, da es zur Herleitung der kinematischen Eigenschaften ausreichend war zu fordern, daß diese an jedem Punkt der Trennebene erfüllt sein müssen. Um die sogenannten dynamischen Eigenschaften (Intensitäts- und Polarisations-eigenschaften der Wellen) zu bestimmen, müssen die Grenzbedingungen explizit eingearbeitet werden. Gemäß (6.141) und (6.142) gelten für die \mathbf{E} - und \mathbf{B} -Felder aller drei Wellen die Relationen

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{k}) \sim \mathbf{A}_0(\mathbf{k}), \quad (6.251)$$

$$\mathbf{B}_0(\mathbf{k}) \sim \mathbf{k} \times \mathbf{A}_0(\mathbf{k}). \quad (6.252)$$

Die dynamischen Eigenschaften ergeben sich aus der Bedingung, daß die Normalkomponenten von \mathbf{D} und \mathbf{B} sowie die Tangentialkomponenten von \mathbf{E} und \mathbf{H} an der Trennfläche zwischen den beiden Medien stetig sind [siehe (3.206), (3.209), (4.142), (4.145)]:

$$\left[\varepsilon^{(\text{I})} \left(\mathbf{A}_0^{(\text{I})} + \mathbf{A}_0'^{(\text{I})} \right) - \varepsilon^{(\text{II})} \mathbf{A}_0^{(\text{II})} \right] \cdot \mathbf{e}_z = 0, \quad (6.253)$$

$$\left(\mathbf{k}^{(\text{I})} \times \mathbf{A}_0^{(\text{I})} + \mathbf{k}'^{(\text{I})} \times \mathbf{A}_0'^{(\text{I})} - \mathbf{k}^{(\text{II})} \times \mathbf{A}_0^{(\text{II})} \right) \cdot \mathbf{e}_z = 0, \quad (6.254)$$

$$\left(\mathbf{A}_0^{(\text{I})} + \mathbf{A}_0'^{(\text{I})} - \mathbf{A}_0^{(\text{II})} \right) \times \mathbf{e}_z = 0, \quad (6.255)$$

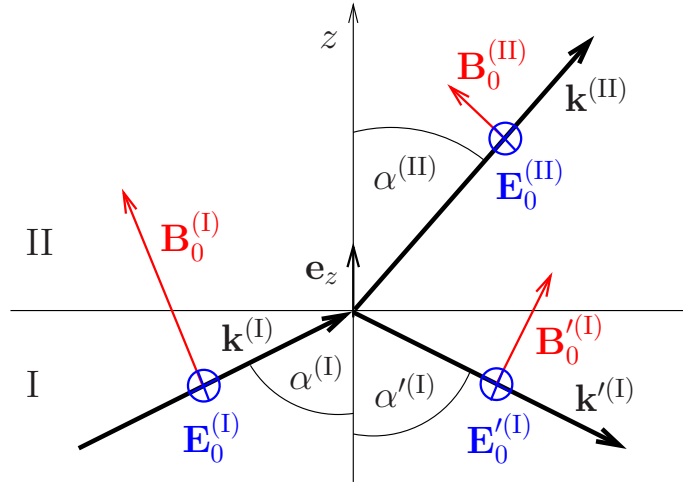
$$\left[\frac{1}{\mu^{(\text{I})}} \left(\mathbf{k}^{(\text{I})} \times \mathbf{A}_0^{(\text{I})} + \mathbf{k}'^{(\text{I})} \times \mathbf{A}_0'^{(\text{I})} \right) - \frac{1}{\mu^{(\text{II})}} \mathbf{k}^{(\text{II})} \times \mathbf{A}_0^{(\text{II})} \right] \times \mathbf{e}_z = 0. \quad (6.256)$$

Für die Auswertung dieser Gleichungen ist es zweckmäßig, zwischen zwei Fällen zu unterscheiden, nämlich den Fall, daß die einfallende ebene Welle linear polarisiert ist und ihr Polarisations-einheitsvektor (Richtung des \mathbf{E} -Vektors) senkrecht auf der von $\mathbf{k}^{(\text{I})}$ und \mathbf{e}_z aufgespannten

Einfallebene steht, und den Fall, daß der Polarisationsvektor in der Einfallsebene liegt. Das Feld im allgemeinen Fall elliptischer Polarisation ergibt sich dann durch Linearkombination der in den beiden Fällen erhaltenen Felder.

- Polarisation senkrecht zur Einfallsebene

In diesem Fall ist die Gleichung (6.253) trivialerweise erfüllt (Identität), und die Gleichung (6.254) führt zusammen mit dem



Brechungsgesetz (6.250) auf die Gleichung (6.255), so daß nur die Gleichungen (6.255) und (6.256) verbleiben,

$$A_0^{(I)} + A_0'^{(I)} - A_0^{(II)} = 0, \quad (6.257)$$

$$\sqrt{\frac{\varepsilon^{(I)}}{\mu^{(I)}}} \left(A_0^{(I)} - A_0'^{(I)} \right) \cos \alpha^{(I)} - \sqrt{\frac{\varepsilon^{(II)}}{\mu^{(II)}}} A_0^{(II)} \cos \alpha^{(II)} = 0, \quad (6.258)$$

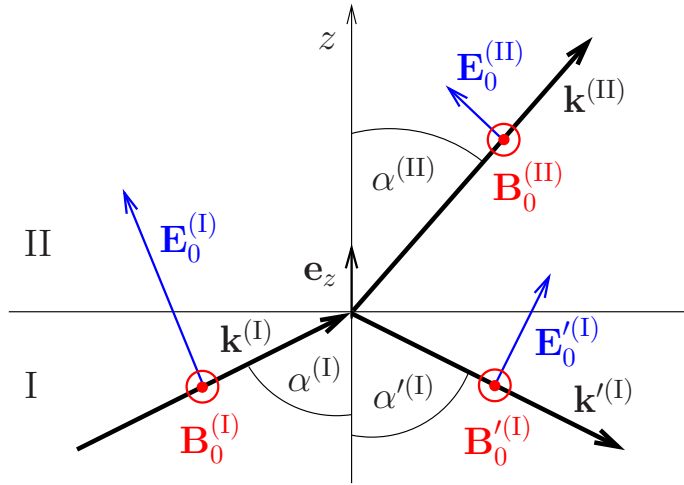
deren Lösung unschwer zu finden ist:

$$\frac{A_0'^{(I)}}{A_0^{(I)}} = \frac{n^{(I)} \cos \alpha^{(I)} - \frac{\mu^{(I)}}{\mu^{(II)}} n^{(II)} \cos \alpha^{(II)}}{n^{(I)} \cos \alpha^{(I)} + \frac{\mu^{(I)}}{\mu^{(II)}} n^{(II)} \cos \alpha^{(II)}}, \quad (6.259)$$

$$\frac{A_0^{(II)}}{A_0^{(I)}} = \frac{2n^{(I)} \cos \alpha^{(I)}}{n^{(I)} \cos \alpha^{(I)} + \frac{\mu^{(I)}}{\mu^{(II)}} n^{(II)} \cos \alpha^{(II)}}. \quad (6.260)$$

- Polarisation parallel zur Einfallsebene

In diesem Fall ist die Gleichung (6.254) identisch erfüllt, und die



Gleichung (6.253) führt unter Berücksichtigung des Brechungsgesetzes (6.250) auf die Gleichung (6.255). Es bleiben also wiederum die Gleichungen (6.255) und (6.256) übrig:

$$\left(A_0^{(I)} - A_0'^{(I)} \right) \cos \alpha^{(I)} - A_0^{(II)} \cos \alpha^{(II)} = 0, \quad (6.261)$$

$$\sqrt{\frac{\varepsilon^{(I)}}{\mu^{(I)}}} \left(A_0^{(I)} + A_0'^{(I)} \right) - \sqrt{\frac{\varepsilon^{(II)}}{\mu^{(II)}}} A_0^{(II)} = 0. \quad (6.262)$$

Die Lösung lautet

$$\frac{A_0'^{(I)}}{A_0^{(I)}} = \frac{\frac{\mu^{(I)}}{\mu^{(II)}} n^{(II)} \cos \alpha^{(I)} - n^{(I)} \cos \alpha^{(II)}}{\frac{\mu^{(I)}}{\mu^{(II)}} n^{(II)} \cos \alpha^{(I)} + n^{(I)} \cos \alpha^{(II)}}, \quad (6.263)$$

$$\frac{A_0^{(II)}}{A_0^{(I)}} = \frac{2n^{(I)} \cos \alpha^{(I)}}{\frac{\mu^{(I)}}{\mu^{(II)}} n^{(II)} \cos \alpha^{(I)} + n^{(I)} \cos \alpha^{(II)}}. \quad (6.264)$$

Die Gleichungen (6.259), (6.260) sowie (6.263), (6.264) werden üblicherweise als Fresnelsche Formeln bezeichnet. Man beachte, daß mit

Hilfe des Brechungsgesetzes (6.250) in den Fresnelschen Formeln der Brechungswinkel $\alpha^{(\text{II})}$ zugunsten des Einfallswinkels $\alpha^{(\text{I})}$ gemäß der Beziehung

$$n^{(\text{II})} \cos \alpha^{(\text{II})} = \sqrt{(n^{(\text{II})})^2 - (n^{(\text{I})})^2 \sin^2 \alpha^{(\text{I})}} \quad (6.265)$$

eliminiert werden kann. Ferner sei daran erinnert, daß üblicherweise $\mu^{(\text{I})}/\mu^{(\text{II})} \approx 1$ gesetzt werden kann.

Speziell für senkrechten Einfall wird der Begriff der Einfallsebene bedeutungslos und die Formeln (6.259) und (6.260) liefern das gleiche Resultat wie die Formeln (6.263) und (6.264), nämlich $(\mu^{(\text{I})}/\mu^{(\text{II})} = 1)^{14}$

$$\frac{A_0^{(\text{I})'}}{A_0^{(\text{I})}} = \frac{n^{(\text{II})} - n^{(\text{I})}}{n^{(\text{II})} + n^{(\text{I})}}, \quad (6.266)$$

$$\frac{A_0^{(\text{II})}}{A_0^{(\text{I})}} = \frac{2n^{(\text{I})}}{n^{(\text{II})} + n^{(\text{I})}}. \quad (6.267)$$

Bemerkenswert ist, daß es für eine parallel zur Einfallsebene polarisierte Welle einen bestimmten Einfallswinkel gibt, den **Brewster-Winkel** oder **Polarisationswinkel**, bei dem keine Reflexion auftritt, wie aus (6.263) unschwer abzuleiten ist. Speziell für $\mu^{(\text{I})}/\mu^{(\text{II})} = 1$ ist dieser Winkel durch

$$\alpha^{(\text{I})} = \arctan \frac{n^{(\text{II})}}{n^{(\text{I})}} \quad (6.268)$$

gegeben.¹⁵ Fällt also beispielsweise elliptisch polarisiertes Licht unter dem Brewster-Winkel auf die ebene Trennfläche zweier Dielektrika, dann ist das reflektierte Licht vollständig linear polarisiert (und zwar senkrecht zur Einfallsebene).

¹⁴Das Vorzeichen für die reflektierte Welle entspricht dem für in der Einfallsebene polarisierter Strahlung.

¹⁵Beim Übergang von einem optisch dichteren in ein optisch dünneres Medium stellt der Grenzwinkel der Totalreflexion $\alpha^{(\text{I})} = \arcsin(n^{(\text{II})}/n^{(\text{I})})$, $n^{(\text{II})}/n^{(\text{I})} < 1$, bekanntlich einen zweiten markanten Einfallswinkel dar.

6.5 Erzeugung elektromagnetischer Wellen

Nach der Diskussion von Lösungen der homogenen Maxwell-Gleichungen ($\varrho = \hat{\mathbf{j}} = 0$) wollen wir uns nun den inhomogenen Maxwell-Gleichungen zuwenden und speziell die Lösung konstruieren, die durch im Endlichen gelegene Ladungen und Ströme generiert wird und insbesondere die Erzeugung von elektromagnetischen Wellen beschreibt. In der Coulomb-Eichung ist das skalare Potential (und damit das longitudinale elektrische Feld) bekanntlich durch das Poisson-Integral (6.96) bestimmt, so daß sich das Problem auf die Lösung der inhomogenen Wellengleichung (6.92) für das Vektorpotential reduziert,

$$\frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{A}} - \Delta \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j}^\perp. \quad (6.269)$$

Diese Gleichung entspricht exakt den Freiheitsgraden des mit elektromagnetischen Wellen (d.h. Strahlung) verbundenen (transversalen) Anteils des elektromagnetischen Feldes. In der Lorentz-Eichung führt die symmetrische Einführung von skalarem Potential und Vektorpotential bekanntlich dazu, daß gemäß (6.107) und (6.108) beide Potentiale inhomogenen Wellengleichungen genügen,

$$\frac{1}{c^2} \ddot{\varphi} - \Delta \varphi = \frac{1}{\varepsilon_0} \varrho, \quad (6.270)$$

$$\frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{A}} - \Delta \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j}. \quad (6.271)$$

6.5.1 Retardierte Potentiale

Es sei $f(\mathbf{r}, t)$ eine der Komponenten von $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ und entsprechend $s(\mathbf{r}, t)$ eine der Komponenten von $\mu_0 \mathbf{j}^\perp(\mathbf{r}, t)$, wenn die Coulomb-Eichung verwendet wird. Analog sei bei Lorentz-Eichung $f(\mathbf{r}, t)$ eine der Komponenten von $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ bzw. $\varphi(\mathbf{r}, t)$ und entsprechend $s(\mathbf{r}, t)$ eine der Komponenten von $\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ bzw. $\varrho(\mathbf{r}, t)/\varepsilon_0$. In jedem Fall ist somit die Lösung der partiellen Differentialgleichung vom Typ

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(\mathbf{r}, t) - \Delta f(\mathbf{r}, t) = s(\mathbf{r}, t) \quad (6.272)$$

gesucht. Wenn $G^{(0)}(\mathbf{r}, t)$ die Greensche Funktion des Problems ist, d.h. die Funktion, die der Gleichung (6.272) mit δ -Inhomogenität sowie der Randbedingung im Unendlichen genügt,

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} G^{(0)}(\mathbf{r}, t) - \Delta G^{(0)}(\mathbf{r}, t) = \delta(\mathbf{r})\delta(t), \quad (6.273)$$

dann kann die Lösung von (6.272) in der Form der quellenmäßigen Darstellung

$$f(\mathbf{r}, t) = \int d^3r' \int dt' G^{(0)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t') s(\mathbf{r}', t') \quad (6.274)$$

angegeben werden. Damit ist das Problem auf die einmalige Berechnung der Green-Funktion reduziert.

Die (im Koordinatenursprung angesiedelte) δ -förmige Inhomogenität (im ansonsten leeren Raum) in (6.273) impliziert Kugelsymmetrie der Green-Funktion,

$$G^{(0)}(\mathbf{r}, t) = G^{(0)}(r, t), \quad (6.275)$$

so daß der Laplace-Operator Δ gemäß

$$\Delta \rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r = \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \quad (6.276)$$

ersetzt werden kann und (6.273) für $r > 0$ in die homogene Wellengleichung für Kugelwellen übergeht,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left[r G^{(0)}(r, t) \right] - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} G^{(0)}(r, t) = 0. \quad (6.277)$$

Wir machen den Ansatz

$$G^{(0)}(r, t) = \frac{1}{r} g(r, t) \quad (6.278)$$

und sehen, daß die Funktion $g(r, t)$ der eindimensionalen homogenen Wellengleichung

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] g(r, t) = 0 \quad (6.279)$$

genügt, die durch zwei beliebige Funktionen $g(t \mp r/c)$ gelöst wird, und folglich die Green-Funktion die Gestalt

$$G^{(0)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{r} g(t \mp r/c) \quad (6.280)$$

besitzen muß. Über $g(t \mp r/c)$ muß nun so verfügt werden, daß für $r \rightarrow 0$ der Inhomogenität in der Differentialgleichung (6.273) Rechnung getragen wird. Dazu integrieren wir diese Gleichung über ein Kugelvolumen vom Radius R , das den Koordinatenursprung enthält, und betrachten den Grenzwert $R \rightarrow 0$. Wir erhalten zunächst für endliches R

$$\int_{V_R} d^3r \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G^{(0)}}{\partial t^2} - \Delta G^{(0)} \right) = \delta(t) \quad (6.281)$$

bzw. nach Anwenden des Gaußschen Satzes

$$\frac{1}{c^2} \int_{V_R} d^3r \frac{\partial^2 G^{(0)}}{\partial t^2} - \int_{(V_R)} d\mathbf{a} \cdot \nabla G^{(0)} = \delta(t). \quad (6.282)$$

Da der Integrand des Volumenintegrals proportional zu $1/r$ ist, ist das Integral proportional zu R^2 und verschwindet folglich für $R \rightarrow 0$. Im Gegensatz dazu liefert $\nabla r^{-1} = -r^{-2} \mathbf{e}_r$ in der Grenze $R \rightarrow 0$ einen nicht-verschwindenden Beitrag zu dem Oberflächenintegral,

$$\lim_{R \rightarrow 0} \int_{(V_R)} d\mathbf{a} \cdot \nabla G^{(0)} = -4\pi g(t), \quad (6.283)$$

und folglich ist

$$g(t) = \frac{1}{4\pi} \delta(t) \quad (6.284)$$

zu setzen. Für die Green-Funktion ergeben sich damit zwei Wahlmöglichkeiten, nämlich die **retardierte** Green-Funktion

$$G_{\text{ret}}^{(0)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi r} \delta(t - r/c), \quad (6.285)$$

bzw. die **avancierte** Green-Funktion

$$G_{\text{av}}^{(0)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi r} \delta(t + r/c). \quad (6.286)$$

Mit Blick auf (6.274) gibt $G_{\text{ret}}^{(0)}(\mathbf{r}, t)$ Anlaß zur retardierten Lösung und entsprechend $G_{\text{av}}^{(0)}(\mathbf{r}, t)$ zur avancierten Lösung der inhomogenen Wellengleichung (6.272).

Betrachten wir die retardierte Lösung. Gemäß (6.269), (6.274) und (6.285) ergibt sich für das retardierte Vektorpotential in Coulomb-Eichung die Integraldarstellung:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\mathbf{j}^\perp(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (6.287)$$

Analog lauten die retardierten Potentiale in der Lorentz-Eichung:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (6.288)$$

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\varrho(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (6.289)$$

Zu zeigen ist natürlich noch, daß das Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ in (6.287) tatsächlich divergenzfrei ist und die Potentiale $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ und $\varphi(\mathbf{r}, t)$ in (6.288) bzw. (6.289) der Eichbedingung (6.106) genügen. Ersteres läßt sich in der gleichen Weise zeigen wie die Transversalität des statischen Vektorpotentials $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ im Anschluß an die Gleichung (4.16). Letzteres kann in analoger Weise (bei Berücksichtigung der Kontinuitätsgleichung) gezeigt werden.

Aus (6.287) – (6.289) ist ersichtlich, daß an einem Beobachtungspunkt \mathbf{r} zu einem Zeitpunkt t nicht die Quellverteilungen zu diesem Zeitpunkt für die Potentiale maßgeblich sind, sondern die Quellverteilungen zu früheren Zeitpunkten $t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$. Offensichtlich trägt ein Quellpunkt \mathbf{r}' erst nach der Zeit $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$ zum betrachteten Potential am Beobachtungspunkt \mathbf{r} bei. Die Wirkung eines Quellpunktes ist also

nicht momentan, sondern verzögert, da sie sich mit (endlicher) Lichtgeschwindigkeit c ausbreitet (Nahwirkungstheorie). In diesem Zusammenhang wird die Zeit

$$t' = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c \quad (6.290)$$

auch retardierte Zeit genannt. Es ist klar, daß Ersetzen der retardierten Zeit in (6.287) – (6.289) durch die avancierte Zeit $t' = t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$ auf die avancierten Potentiale führt.

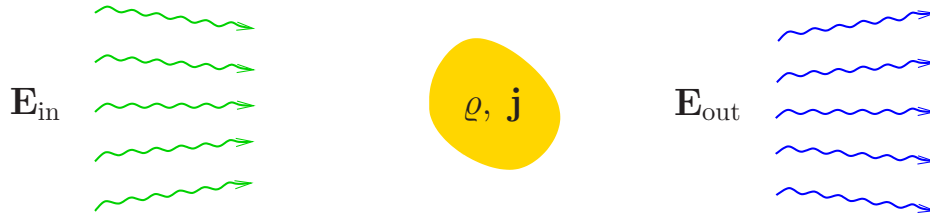
Die quellenmäßige Darstellung mittels retardierter Potentiale entspricht der Kausalitätsauffassung, wonach die Ursache eines Ereignisses zeitlich nicht nach dem Ereignis liegen kann, wobei im vorliegenden Fall die Dynamik der Quellen als Ursache für die Felder angesehen wird. Dabei wird jedoch stillschweigend vorausgesetzt, daß die physikalischen Anfangsbedingungen durch einen kontrollierten Nichtgleichgewichtszustand der Quellen festgelegt sind (und gegebenenfalls die weitere Dynamik der Quellen ebenfalls von außen kontrolliert wird¹⁶).

Nun wissen wir jedoch, daß die Quellen dem Lorentzschen Kraftgesetz unterliegen und somit die quellenmäßigen Darstellungen mittels retardierter oder avancierter Potentiale i. allg. nur formale Lösungen des (komplizierten) Problems der Wechselwirkung elektromagnetischer Felder mit materiellen Systemen darstellen. Selbst wenn die physikalischen Anfangsbedingungen durch einen Nichtgleichgewichtszustand der Quellen bestimmt sind, wird die weitere zeitliche Entwicklung der Quellen (bei fehlender Kontrolle von außen) durch die Felder bestimmt, so daß mittels der avancierten Potentiale aus den Quellverteilungen zu späteren Zeitpunkten $t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$ auf die Felder am Beobachtungspunkt \mathbf{r} zum Zeitpunkt t geschlossen werden kann.

Sowohl retardierte und avancierte Potentiale stellen spezielle Lösungen der jeweiligen inhomogenen Wellengleichung dar. Da sich die allgemeine Lösung einer inhomogenen Wellengleichung aus der allgemeinen Lösung der homogenen Wellengleichung und einer speziellen Lösung der inhomogenen Wellengleichung zusammensetzt, reicht es vom mathematischen Standpunkt aus, entweder die retardierten oder die avancierten Potentiale zu betrachten.

¹⁶Man spricht in diesem Zusammenhang auch von der Ausstrahlungsbedingung als Bedingung für den Ausschluß der avancierten Potentiale.

Sind die Quellen in Raum und Zeit lokalisiert, verschwinden die retardierten Potentiale für $t \rightarrow -\infty$ und die avancierten Potentiale für $t \rightarrow +\infty$. Dann vorhandene Felder können also nur freie Felder sein, die sich als Lösungen der homogenen Wellengleichungen darstellen lassen. Es seien $\mathbf{A}_{\text{in}}(\mathbf{r}, t)$ und $\varphi_{\text{in}}(\mathbf{r}, t)$ Lösungen der homogenen Wellengleichungen (in Lorentz-Eichung), die einlaufende Felder repräsentieren (d.h. Felder, die aus dem Unendlichen kommen und auf die Quellen zulaufen). Die diesen Bedingungen entsprechenden Lösungen der inho-



mogenen Wellengleichungen lauten dann

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}_{\text{in}}(\mathbf{r}, t) + \mu_0 \int d^3r' \int dt' G_{\text{ret}}^{(0)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \mathbf{j}(\mathbf{r}', t'), \quad (6.291)$$

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \varphi_{\text{in}}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{\varepsilon_0} \int d^3r' \int dt' G_{\text{ret}}^{(0)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \varrho(\mathbf{r}', t'). \quad (6.292)$$

Diese Felder können natürlich auch unter Zuhilfenahme der avancierten Potentiale konstruiert werden,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}_{\text{out}}(\mathbf{r}, t) + \mu_0 \int d^3r' \int dt' G_{\text{av}}^{(0)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \mathbf{j}(\mathbf{r}', t'), \quad (6.293)$$

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \varphi_{\text{out}}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{\varepsilon_0} \int d^3r' \int dt' G_{\text{av}}^{(0)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \varrho(\mathbf{r}', t'), \quad (6.294)$$

wobei $\mathbf{A}_{\text{out}}(\mathbf{r}, t)$ und $\varphi_{\text{out}}(\mathbf{r}, t)$ nunmehr Lösungen der homogenen Wellengleichungen sind, die die entsprechenden auslaufenden Felder repräsentieren. Gleichsetzen von (6.291) und (6.293) bzw. von (6.292) und (6.294) liefert dann den folgenden Zusammenhang zwischen einlaufenden und auslaufenden Feldern:

$$\mathbf{A}_{\text{out}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}_{\text{in}}(\mathbf{r}, t) + \mu_0 \int d^3r' \int dt' D^{(0)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \mathbf{j}(\mathbf{r}', t')$$

(6.295)

$$\varphi_{\text{out}}(\mathbf{r}, t) = \varphi_{\text{in}}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{\varepsilon_0} \int d^3r' \int dt' D^{(0)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \varrho(\mathbf{r}', t')$$
(6.296)

Offensichtlich gilt

$$D^{(0)}(\mathbf{r}, t) = G_{\text{ret}}^{(0)}(\mathbf{r}, t) - G_{\text{av}}^{(0)}(\mathbf{r}, t).$$
(6.297)

6.5.2 Multipolentwicklung

Wir betrachten wieder inselförmige Ladungs- und Stromverteilungen und fragen nach dem elektromagnetischen Feld außerhalb dieser Verteilungen. Wie in der Elektrostatik und der Magnetostatik bieten sich Multipolentwicklungen der Potentiale an, wobei wir im weiteren die retardierten Potentiale zugrunde legen wollen.

In der Coulomb-Eichung hat die Multipolentwicklung des skalaren Potentials (6.96) offensichtlich die gleiche Form wie in der Elektrostatik, so daß die entsprechenden Formeln des Abschnittes 3.6 sofort übernommen werden können. Als neue Aufgabe verbleibt somit nur die Multipolentwicklung des Vektorpotentials in (6.287), wobei zu beachten ist, daß die zu einer inselförmigen Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ gehörende transversale Stromdichte $\mathbf{j}^\perp(\mathbf{r}, t)$ i. allg. nicht inselförmig ist. Das Vektorpotential in (6.287) resultiert bekanntlich aus der Gleichung

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \int d^3r' \int dt' G_{\text{ret}}^{(0)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \mathbf{j}^\perp(\mathbf{r}', t').$$
(6.298)

Die in (6.101) definierte transversale Stromdichte

$$\mathbf{j}^\perp(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{4\pi} \int d^3r' \mathbf{j}(\mathbf{r}', t) \cdot \nabla_{r'} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$
(6.299)

kann in der Form

$$\mathbf{j}^\perp(\mathbf{r}, t) = \int d^3r' \boldsymbol{\delta}^\perp(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}', t)$$
(6.300)

dargestellt werden, wobei

$$\boldsymbol{\delta}^\perp(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\delta}(\mathbf{r}) - \boldsymbol{\delta}^\parallel(\mathbf{r})$$
(6.301)

die transversale und

$$\delta^{\parallel}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \nabla \nabla \frac{1}{r} \quad (6.302)$$

die longitudinale (tensorwertige) δ -Funktion bedeuten. Mit (6.300) geht dann (6.298) in

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \int d^3r' \int dt' \mathbf{G}_{\text{ret}}^{(0)\perp}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}', t') \quad (6.303)$$

mit

$$\mathbf{G}_{\text{ret}}^{(0)\perp}(\mathbf{r}, t) = \int d^3r' \delta^{\perp}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') G_{\text{ret}}^{(0)}(\mathbf{r}', t) \quad (6.304)$$

als der transversalen retardierten (tensorwertigen) Green-Funktion über. Wir schreiben

$$\mathbf{G}_{\text{ret}}^{(0)\perp}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{G}^{(0)\perp}(\mathbf{r}) \delta(t - r/c), \quad (6.305)$$

$$\mathbf{G}^{(0)\perp}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3r' \frac{\delta^{\perp}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{r'}, \quad (6.306)$$

und finden für das Vektorpotential in der Coulomb-Eichung die folgende zu (6.287) äquivalente Darstellung:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \mathbf{G}^{(0)\perp}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c) \quad (6.307)$$

Diese Gleichung kann für inselförmige Stromdichten als Ausgangspunkt für eine Multipolentwicklung dienen.

In der Lorentz-Eichung kann unmittelbar von den Gleichungen (6.288) und (6.289) mit dem wesentlich einfacheren Integralkern ausgegangen werden. Allerdings sind i. allg. sowohl das Vektorpotential als auch das skalare Potential zu entwickeln, wobei beide Entwicklungen in formal gleicher Weise durchgeführt werden können. Wir wollen im weiteren die Lorentz-Eichung verwenden.

Im Unterschied zum statischen Fall tritt in (6.288) und (6.289) der Abstand $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ nicht nur als einfacher Nenner auf, sondern er erscheint über die Retardierungszeit auch im Zeitargument von Ladungs- und

Stromdichte. Wir wollen das Vorgehen kurz skizzieren. Dazu schreiben wir

$$\begin{aligned} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{\pm 1} &= \left[(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2 \right]^{\pm \frac{1}{2}} = (r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' + r'^2)^{\pm \frac{1}{2}} \\ &= r^{\pm 1} \left(1 - \frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2} \right)^{\pm \frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (6.308)$$

und nehmen wieder an, daß

$$\frac{r'}{r} < 1 \quad (6.309)$$

gilt, d.h., die lineare Ausdehnung des Quellgebietes soll kleiner sein als die Abstände zwischen den Quellpunkten und den Beobachtungspunkten. Der Klammerausdruck auf der rechten Seite der Gleichung (6.308) kann dann nach Potenzen von r'/r entwickelt werden:¹⁷

$$\left(1 - \frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2} \right)^{\pm \frac{1}{2}} = 1 \mp \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} \dots \quad (6.310)$$

Damit erhalten wir im Hinblick auf die retardierten Potentiale (6.288) und (6.289) in einem ersten Schritt

$$\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} \dots \right) \mathbf{j} \left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{1}{c} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r} \dots \right), \quad (6.311)$$

$$\frac{\varrho(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} \dots \right) \varrho \left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{1}{c} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r} \dots \right). \quad (6.312)$$

In einem zweiten Schritt können dann die Ladungsdichte und die Stromdichte nach Potenzen von r'/r entwickelt werden:

$$\mathbf{j} \left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{1}{c} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r} \dots \right) = \mathbf{j} \left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} \right) + \dot{\mathbf{j}} \left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} \right) \frac{1}{c} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r} \dots, \quad (6.313)$$

¹⁷Wir beschränken uns hier und im folgenden der Übersicht halber auf die explizite Angabe der Terme bis zur ersten Ordnung.

$$\varrho\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{1}{c} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r} \dots\right) = \varrho\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) + \dot{\varrho}\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) \frac{1}{c} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r} \dots \quad (6.314)$$

Wir setzen die Entwicklung (6.313) in (6.311) und die Entwicklung (6.314) in (6.312) ein und erhalten

$$\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} \left\{ \mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} \left[\mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) + \frac{r}{c} \dot{\mathbf{j}}\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) \right] \dots \right\}, \quad (6.315)$$

$$\frac{\varrho(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} \left\{ \varrho\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} \left[\varrho\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) + \frac{r}{c} \dot{\varrho}\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) \right] \dots \right\}. \quad (6.316)$$

Somit ergibt sich für die retardierten Potentiale

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \left\{ \int d^3r' \mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) + \int d^3r' \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} \left[\mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) + \frac{r}{c} \dot{\mathbf{j}}\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) \right] \dots \right\}, \quad (6.317)$$

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \left\{ \int d^3r' \varrho\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) + \int d^3r' \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} \left[\varrho\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) + \frac{r}{c} \dot{\varrho}\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) \right] \dots \right\}, \quad (6.318)$$

woraus gemäß (6.76) und (6.77) die entsprechenden Ausdrücke für das **B**- und das **E**-Feld berechnet werden können.

Anmerkung

In den obigen Entwicklungen wurde generell nach Potenzen von r'/r entwickelt. Die Entwicklungen (6.313) und (6.314) lassen jedoch auch

eine andere Interpretation zu. Betrachten wir beispielsweise die Entwicklung (6.314), und nehmen wir an, daß im Sinne einer Fourier-Entwicklung

$$\varrho(\mathbf{r}, t) \sim e^{-i\Omega t} \tilde{\varrho}(\mathbf{r}, t) + \text{c.c.} \quad (6.319)$$

gilt [Ω - Mittenfrequenz, $\tilde{\varrho}(\mathbf{r}, t)$ - langsam veränderliche Amplitudenfunktion; vgl. (6.39) – (6.42)]. Ist

$$\frac{\Omega r'}{c} < 1, \quad (6.320)$$

kann (6.314) offensichtlich auch als Entwicklung nach dem Parameter $\Omega r'/c$ aufgefaßt werden. Wie wir im nächsten Abschnitt noch sehen werden, bestimmt Ω gerade die Mittenfrequenz der erzeugten elektromagnetischen Wellen, so daß $\Omega \sim c/\lambda$ ist (λ - der Mittenfrequenz entsprechende Wellenlänge). Folglich kann (6.314) als Entwicklung nach dem Parameter r'/λ angesehen werden. Ist insbesondere

$$\frac{r'}{\lambda} \ll 1, \quad (6.321)$$

d.h., ist die lineare Ausdehnung des Quellgebietes hinreichend klein im Vergleich zur Wellenlänge der erzeugten Strahlung, dann reicht es aus, in der Entwicklung (6.314) [und ebenso in der Entwicklung (6.313)] nur bis zu dem in r'/r linearen Term zu gehen.

6.5.3 Elektrische Dipolstrahlung

Der Prototyp elektromagnetischer Strahlung ist die von einem elektrischen Dipol (auch Hertzscher Dipol genannt) erzeugte elektrische Dipolstrahlung.

6.5.3.1 Elektromagnetisches Feld

Wir erinnern uns an die (Definitions-)Gleichungen (3.97) und (3.100) und sehen, daß das skalare Potential (6.318) bis einschließlich der (elektrischen) Dipolterme gemäß

$$\varphi(\mathbf{r}, t) \approx \varphi^{(0)}(\mathbf{r}, t) + \varphi^{(1)}(\mathbf{r}, t)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} Q\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{r^3} \mathbf{r} \cdot \mathbf{d}\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{cr^2} \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{d}}\left(t - \frac{r}{c}\right) \right] \quad (6.322)$$

gegeben ist und somit der Dipolterm $\varphi_d(\mathbf{r}, t) \equiv \varphi^{(1)}(\mathbf{r}, t)$ wie folgt lautet:

$$\varphi_d(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r^3} \mathbf{r} \cdot \mathbf{d}\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{cr^2} \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{d}}\left(t - \frac{r}{c}\right) \right] \quad (6.323)$$

Wenden wir uns nunmehr dem Vektorpotential (6.317) zu. Es beginnt mit dem Term

$$\mathbf{A}^{(0)}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \int d^3r' \mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right). \quad (6.324)$$

Die Identität

$$\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \mathbf{r} = \mathbf{r} \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \quad (6.325)$$

[vgl. (4.51)] zusammen mit der Kontinuitätsgleichung liefert

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \mathbf{r} + \mathbf{r} \dot{\rho}(\mathbf{r}, t). \quad (6.326)$$

Setzen wir dies in (6.324) ein, so sehen wir, daß der erste Term (wegen des Gaußschen Satzes und der vorausgesetzten inselförmigen Stromverteilung) zu einem verschwindenden Oberflächenintegral Anlaß gibt und der zweite Term zur zeitlichen Ableitung des elektrischen Dipolmoments,

$$\int d^3r' \mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) = \dot{\mathbf{d}}\left(t - \frac{r}{c}\right). \quad (6.327)$$

Man überzeugt sich unschwer, daß in der betrachteten (elektrischen) Dipolnäherung der relevante Beitrag $\mathbf{A}_d(\mathbf{r}, t)$ zum Vektorpotential gerade durch $\mathbf{A}^{(0)}(\mathbf{r}, t)$ gegeben ist, d.h.:

$$\mathbf{A}_d(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \dot{\mathbf{d}}\left(t - \frac{r}{c}\right) \quad (6.328)$$

Ferner zeigt eine einfache Rechnung, daß in der betrachteten (elektrischen) Dipolnäherung $\mathbf{A}_d(\mathbf{r}, t)$ aus (6.328) gerade das Vektorpotential ist, das zusammen mit dem skalaren Potential $\varphi_d(\mathbf{r}, t)$ aus (6.323) die Lorentz-Bedingung (6.106) erfüllt.

Die den Dipolpotentialen (6.323) und (6.328) entsprechenden \mathbf{B} - und \mathbf{E} -Felder ergeben sich gemäß (6.76) und (6.77). Wir verzichten auf die etwas längliche Geradeausrechnung und geben gleich das Resultat an:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{d}}(t-r/c)}{r^3} + \frac{\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{d}}(t-r/c)}{cr^2} \right], \quad (6.329)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{3\mathbf{r}\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}(t-r/c) - r^2\mathbf{d}(t-r/c)}{r^5} + \frac{3\mathbf{r}\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{d}}(t-r/c) - r^2\dot{\mathbf{d}}(t-r/c)}{cr^4} + \frac{\mathbf{r} \times [\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{d}}(t-r/c)]}{c^2r^3} \right\}. \quad (6.330)$$

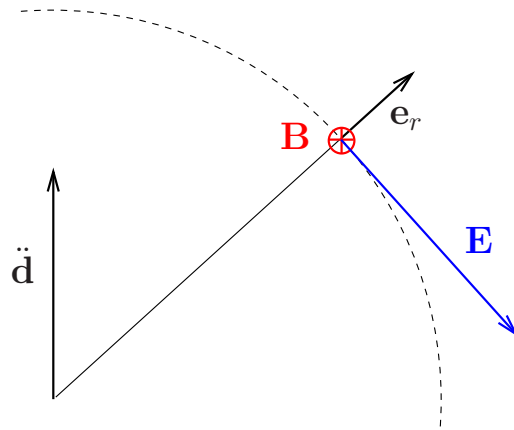
Speziell für ein zeitlich konstantes Dipolmoment, $\dot{\mathbf{d}} = 0$, reduziert sich sein elektromagnetisches Feld erwartungsgemäß auf das bekannte elektrostatische Dipolfeld (3.115).

Die Gleichungen (6.329) und (6.330) zeigen, daß die einzelnen Beiträge zum elektromagnetischen Feld mit wachsender Entfernung r von der elektrischen Dipolquelle unterschiedlich schnell abklingen und für hinreichend große Entfernungen nur noch das wie r^{-1} abklingende *Fernfeld*

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^3} \frac{\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{d}}(t-r/c)}{r^2} \quad (6.331)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\mathbf{r} \times [\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{d}}(t-r/c)]}{r^3} \quad (6.332)$$

($r \rightarrow \infty$) wesentlich ist. Da das Fernfeld proportional zu $\ddot{\mathbf{d}}$ ist, tritt es also nur auf, wenn und solange die Ladungen eine beschleunigte Bewegungen durchführen. Im Gegensatz dazu wird das Nahfeld, d.h. jener Feldanteil, der wie r^{-3} bzw. r^{-2} abklingt, bereits durch ruhende bzw. mit konstanter Geschwindigkeit bewegte Ladungen erzeugt. Als (eigentlicher) Nahfeldbereich wird öfters nur die unmittelbare Umgebung der Dipolquelle verstanden, wo ein wie r^{-3} abklingendes (bereits schon von ruhenden Ladungen erzeugtes) elektrisches Feld dominiert. Ein \mathbf{B} -Feld (wie es bereits schon von gleichförmig bewegten Ladungen erzeugt wird) tritt erstmals im sogenannten Induktionsfeldbereich auf, wo die Felder wie r^{-2} abklingen.



Die Gleichungen (6.331) und (6.332) implizieren in Übereinstimmung mit (6.144) den folgenden Zusammenhang zwischen dem \mathbf{B} - und dem \mathbf{E} -Feld im Fernfeldbereich:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \mathbf{e}_r \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (6.333)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -c \mathbf{e}_r \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (6.334)$$

($\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r \simeq \mathbf{k}/k$). Wie wir sehen werden, ist es das Fernfeld, das zu einem Transport elektromagnetischer Energie von der Dipolquelle weg in den Raum führt, während das Nahfeld an die Quelle gebunden ist.

Anmerkung

Um nur das wie r^{-1} abklingende Fernfeld (d.h. das eigentliche Strahlungsfeld) zu bestimmen, genügt es offensichtlich, sich in der Entwicklung von $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{\pm 1}$ auf das erste Glied zu beschränken, so daß sich (6.311)

und (6.312) zu

$$\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} \mathbf{j} \left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{1}{c} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r} \right), \quad (6.335)$$

$$\frac{\varrho(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} \varrho \left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{1}{c} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r} \right). \quad (6.336)$$

vereinfachen, so daß speziell das (für das Fernfeld relevante) Vektorpotential

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \int d^3r' \mathbf{j} \left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{1}{c} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r} \right) \quad (6.337)$$

lautet. Diese Gleichung stellt die Verallgemeinerung der Gleichung (6.324) dar, da sie nicht auf den elektrischen Dipolbeitrag zum Fernfeld beschränkt ist. Unter Berücksichtigung von (6.326) kann (6.337) in der [zu (6.328) analogen] Form

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \dot{\vec{d}} \quad (6.338)$$

mit

$$\vec{d} = \int d^3r' \mathbf{r}' \left[\varrho \left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{1}{c} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r} \right) - \frac{1}{c} \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{j} \left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{1}{c} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r} \right) \right] \quad (6.339)$$

geschrieben werden.

6.5.3.2 Energieabstrahlung

Der Poynting-Vektor (6.5) des elektromagnetischen Feldes (6.329) und (6.330) hat (in Kugelkoordinaten) die Struktur

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(4\pi)^2 \varepsilon_0} & \left[\frac{1}{r^5} \mathbf{f}_5(\theta, \phi, t - r/c) + \frac{1}{cr^4} \mathbf{f}_4(\theta, \phi, t - r/c) \right. \\ & \left. + \frac{1}{c^2 r^3} \mathbf{f}_3(\theta, \phi, t - r/c) + \frac{1}{c^3 r^2} \mathbf{f}_2(\theta, \phi, t - r/c) \right], \quad (6.340) \end{aligned}$$

wobei der zu r^{-2} proportionale Term der Fernfeldbeitrag mit

$$\mathbf{f}_2 = - \left[\frac{\mathbf{r}}{r} \times \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \times \ddot{\mathbf{d}} \right) \right] \times \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \times \ddot{\mathbf{d}} \right) = \left| \frac{\mathbf{r}}{r} \times \ddot{\mathbf{d}} \right|^2 \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (6.341)$$

ist. Aus (6.340) ist unschwer zu sehen, daß das asymptotische Verhalten des elektromagnetischen Energiestroms durch die Oberfläche einer Kugel vom Radius r für $r \rightarrow \infty$ durch

$$\begin{aligned} I_{\text{rad}}(t-r/c) &= \int_{(V_R)} \mathbf{d}\mathbf{a} \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \\ &= \frac{1}{(4\pi)^2 c^3 \varepsilon_0} \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\phi \mathbf{f}_2(\theta, \varphi, t-r/c) \end{aligned} \quad (6.342)$$

gegeben ist. Es ist also das Fernfeld, daß zu einem elektromagnetischen Energietransport von der Dipolquelle weg bis hin ins Unendliche und somit zu einer Energieabstrahlung der Dipolquelle Anlaß gibt. Der für die Energieabstrahlung relevante Poynting-Vektor

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(4\pi)^2 c^3 \varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \left| \frac{\mathbf{r}}{r} \times \ddot{\mathbf{d}}(t-r/c) \right|^2 \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (6.343)$$

($r \rightarrow \infty$) enthält die zweite zeitliche Ableitung des Dipolmoments (und zwar quadratisch). Beschleunigte Ladungen führen also (über das von ihnen erzeugte Fernfeld) zu einer Energieabstrahlung.¹⁸

Beispiel: linearer Dipol

Betrachten wir einen linearen Dipol parallel zur z -Achse,

$$\ddot{\mathbf{d}} = \ddot{d} \mathbf{e}_z. \quad (6.344)$$

Aus (6.343) folgt dann

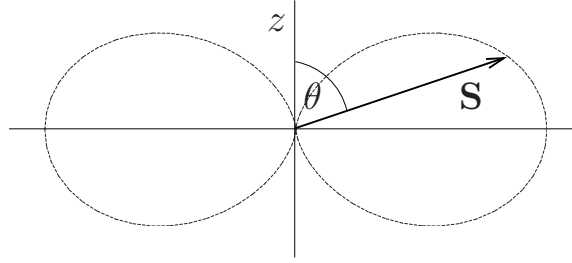
$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = S(\mathbf{r}, t) \mathbf{e}_r \quad (6.345)$$

mit

$$S(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(4\pi)^2 c^3 \varepsilon_0} \frac{\ddot{d}^2(t-r/c)}{r^2} \sin^2 \theta. \quad (6.346)$$

Erwartungsgemäß erfolgt die Abstrahlung zylindersymmetrisch um die

¹⁸Es ist klar, daß der Poynting-Vektor des Nahfeldes i. allg. nicht verschwindet. Da der damit verbundene Energiefluß jedoch nicht zu einer Abstrahlung Anlaß gibt, kann er nur zu einer bloßen Umverteilung von elektromagnetischer Energie (in der Umgebung der Dipolquelle) führen.



Dipolachse, jedoch ist sie bezüglich der Achsenrichtung deutlich anisotrop. Parallel zur Dipolachse erfolgt keine und senkrecht zur Achse maximale Abstrahlung. Effekte dieser Art werden auch als *Richtwirkungen von Antennen* bezeichnet (im vorliegenden Fall ist die Antenne ein linearer Dipol). Offensichtlich ist $r^2 S(t-r/c)$ die pro Zeiteinheit und Raumwinkeleinheit abgestrahlte Energie, und somit ist die pro Zeiteinheit insgesamt abgestrahlte Energie

$$I_{\text{rad}}(t-r/c) = \frac{\ddot{d}^2(t-r/c)}{(4\pi)^2 c^3 \varepsilon_0} \underbrace{\int_0^\pi d\theta \sin^3 \theta}_{4/3} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{2\pi}, \quad (6.347)$$

d.h.

$$I_{\text{rad}}(t-r/c) = \frac{\ddot{d}^2(t-r/c)}{6\pi c^3 \varepsilon_0}. \quad (6.348)$$

Führt das Dipolmoment speziell eine harmonische Schwingung aus,

$$d(t) = d_0 \sin(\omega t + \alpha), \quad \rightsquigarrow \quad \ddot{d}(t) = -\omega^2 d(t), \quad (6.349)$$

so liefert (6.348)

$$I_{\text{rad}}(t-r/c) = \frac{d_0^2 \omega^4}{6\pi c^3 \varepsilon_0} \sin^2(\omega t + \alpha), \quad (6.350)$$

und somit ergibt sich für die mittlere Strahlungsleistung (d.h. die über eine Periode zeitlich gemittelte Energie, die pro Zeiteinheit abgestrahlt wird) das folgende Ergebnis:

$$\boxed{\bar{I}_{\text{rad}} = \frac{d_0^2 \omega^4}{12\pi c^3 \varepsilon_0}} \quad (6.351)$$

Man beachte, daß die Strahlungsleistung proportional zur vierten Potenz der Frequenz ist. Dies erklärt insbesondere, warum sich hochfrequente elektromagnetische Wellen durch Antennen besser abstrahlen lassen als niederfrequente.

Es ist klar, daß die abgestrahlte Energie der Dipolquelle von außen ständig nachgeliefert werden muß, um die Schwingung aufrechtzuerhalten. Wird die Energiezufuhr beendet, verliert die (angeregte) Dipolquelle permanent Energie und wird gedämpft. Dieser Dämpfungsmechanismus, dem beschleunigte Ladungen grundsätzlich unterliegen, wird auch als **Strahlungsdämpfung** bezeichnet. Betrachten wir eine Punktladung q , die entlang der z -Achse eine erzwungene Schwingung ausführt und somit zu einem zeitabhängigen Dipolmoment

$$d(t) = qz(t) \quad (6.352)$$

Anlaß gibt.¹⁹ Die Ladung unterliege neben der rücktreibenden Kraft $-kz$ einer äußeren treibenden Kraft F_{ext} . Der Energieverlust auf Grund der Abstrahlung kann in der Newtonschen Bewegungsgleichung bekanntlich durch eine dissipative Kraft F_{diss} berücksichtigt werden,

$$m_q \ddot{z} + kz = F_{\text{ext}} + F_{\text{diss}}, \quad (6.353)$$

wobei die von der dissipativen Kraft (während dt) verrichtete Arbeit gemäß (6.348) als

$$F_{\text{diss}} \dot{z} dt = -I_{\text{rad}} dt = -\frac{q^2}{6\pi c^3 \epsilon_0} \ddot{z}^2 dt. \quad (6.354)$$

angesetzt werden kann. Mit

$$\ddot{z}^2 dt = \ddot{z} d\dot{z} = d(\dot{z}\ddot{z}) - \dot{z}d\ddot{z} = d(\dot{z}\ddot{z}) - \dot{z}\ddot{z} dt \quad (6.355)$$

wird daraus

$$F_{\text{diss}} \dot{z} dt = \frac{q^2}{6\pi c^3 \epsilon_0} \dot{z} \ddot{z} dt - \frac{q^2}{6\pi c^3 \epsilon_0} d(\dot{z}\ddot{z}). \quad (6.356)$$

¹⁹Befindet sich im Koordinatenursprung keine zweite Punktladung $-q$, enthält das (für die Abstrahlung irrelevante) Nahfeld neben Dipolanteilen natürlich noch das Coulomb-Feld der Punktladung q .

Es sei Ω die charakteristische Frequenz der erzwungen Schwingung. Wir wollen annehmen daß die Strahlungsdämpfung schwach ist, so daß sie während einer Periodendauer $T = 2\pi/\Omega$ praktisch vernachlässigbar ist,

$$z(t) \sim \tilde{z}(t)e^{-i\Omega t} + \text{c.c.}, \quad |\dot{\tilde{z}}/\tilde{z}| \ll \Omega. \quad (6.357)$$

In diesem Fall kann der zweite Term auf der rechten Seite der Gleichung (6.356) vernachlässigt werden, und wir erhalten²⁰

$$F_{\text{diss}} = \frac{q^2}{6\pi c^3 \varepsilon_0} \ddot{z}. \quad (6.358)$$

Damit geht die Bewegungsgleichung (6.353) näherungsweise in

$$m_q \ddot{z} + kz - \frac{q^2}{6\pi c^3 \varepsilon_0} \ddot{z} = F_{\text{ext}} \quad (6.359)$$

über. Es ist klar, daß in der betrachteten Näherung gemäß (6.357)

$$\ddot{z} \simeq -\Omega^2 z \quad (6.360)$$

ist und somit näherungsweise

$$F_{\text{diss}} = -m_q \gamma \dot{z} \quad (6.361)$$

gesetzt werden kann, wobei

$$\gamma = \frac{q^2 \Omega^2}{6\pi c^3 \varepsilon_0 m_q} \quad (6.362)$$

gilt. Die Bewegungsgleichung (6.359) nimmt dann die aus der Mechanik bekannte Form

$$m_q \ddot{z} + m_q \gamma \dot{z} + m_q \omega_0^2 z = F_{\text{ext}} \quad (6.363)$$

($\omega_0^2 = k/m_q$) an.

Anmerkung

Ein schwingender elektrischer Dipol ist das einfachste Beispiel einer *Sendeantenne* für elektromagnetische Wellen. Bekanntlich gibt es neben

²⁰Beachte, daß im Rahmen einer solchen Näherung Zeiten, die kleiner als T sind, nicht aufgelöst werden können.

Sendeantennen auch *Empfangsantennen*, um elektromagnetische Energie aus dem Raum aufzunehmen und (über geeignete Verstärker) einer weiteren Verarbeitung zuzuführen. Dies geschieht dadurch, daß das einfallende elektromagnetische Feld gemäß dem Lorentzschen Kraftgesetz in ihnen Ladungsschwankungen bzw. elektrische Ströme (speziell hochfrequente Wechselströme) erzeugt. Die Berechnung von Sende- und Empfangsantennen ist ein Gegenstand des umfangreichen Gebietes der *Antennentheorie* innerhalb der Elektrodynamik.

6.5.4 Fernfeldnäherung

Das von einer Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ erzeugte Induktionsfeld $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ ist bekanntlich durch

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \quad (6.364)$$

bestimmt, wobei in der Lorentz-Eichung [siehe (6.288)]

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (6.365)$$

gilt, während in der Coulomb-Eichung [siehe (6.307)]

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \mathbf{G}^{(0)\perp}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c) \quad (6.366)$$

ist. Da offensichtlich

$$\nabla \times \mathbf{G}^{(0)\perp}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{G}^{(0)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \nabla \times \frac{\mathbf{I}}{r} \quad (6.367)$$

gilt, ist klar, daß beide Potentiale das gleiche Induktionsfeld liefern. Folglich kann die Gleichung (6.365) im Hinblick auf die Bestimmung des Induktionsfeldes gewissermaßen unabhängig von der gewählten Eichung als gültig angesehen werden.

Ist nur das Fernfeld von Interesse, wie es im Zusammenhang mit Strahlungsproblemen üblicherweise der Fall ist, genügt es in der Regel, das Vektorpotential durch den asymptotischen Ausdruck

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi r} \int d^3r' \mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \frac{\mathbf{r}'}{c}\right) \quad (r \rightarrow \infty) \quad (6.368)$$

zu nähern, woraus mit der Definition

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \int d^3r' \mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \frac{\mathbf{r}'}{c}\right) \quad (6.369)$$

für $r \rightarrow \infty$ der asymptotische Ausdruck

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{r}, t)}{r^2} \quad (6.370)$$

für das Induktionsfeld folgt. Der asymptotische Ausdruck für das elektrische Feld kann dann gemäß (6.170) [$\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r \rightarrow \mathbf{k}/k$; vgl. (6.334)] aus dem asymptotischen Ausdruck für das Induktionsfeld gewonnen werden:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -c \mathbf{e}_r \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (6.371)$$

Die einzelnen Multipolbeiträge zum Fernfeld können nunmehr durch zeitliche Entwicklung von $\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - r/c + \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}'/c)$ an der Stelle $t - r/c$ gefunden werden,

$$\begin{aligned} & \mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \frac{\mathbf{r}'}{c}\right) \\ &= \mathbf{j}(\mathbf{r}', t - r/c) + \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \frac{\mathbf{r}'}{c} \frac{\partial \mathbf{j}(\mathbf{r}', t - r/c)}{\partial t} + \dots \end{aligned} \quad (6.372)$$

und entsprechend (6.369)

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}^{(0)}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{J}^{(1)}(\mathbf{r}, t) + \dots \quad (6.373)$$

Es ist unschwer zu sehen, daß das erste Glied in der Entwicklung (6.372) genau auf den Beitrag des elektrischen Dipolmoments zum Fernfeld führt,

$$\mathbf{J}^{(0)}(\mathbf{r}, t) = \dot{\mathbf{d}}(t - r/c). \quad (6.374)$$

Zerlegen wir das zweite Glied in der Entwicklung (6.372) in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Anteil,

$$\begin{aligned}
& \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \frac{\mathbf{r}'}{c} \frac{\partial \mathbf{j}(\mathbf{r}', t-r/c)}{\partial t} \\
&= \frac{1}{2c} \left[\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{r}' \frac{\partial \mathbf{j}(\mathbf{r}', t-r/c)}{\partial t} + \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \frac{\partial \mathbf{j}(\mathbf{r}', t-r/c)}{\partial t} \mathbf{r}' \right] \\
&+ \frac{1}{2c} \left[\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{r}' \frac{\partial \mathbf{j}(\mathbf{r}', t-r/c)}{\partial t} - \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \frac{\partial \mathbf{j}(\mathbf{r}', t-r/c)}{\partial t} \mathbf{r}' \right] \\
&= \frac{1}{2c} \left[\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{r}' \frac{\partial \mathbf{j}(\mathbf{r}', t-r/c)}{\partial t} + \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \frac{\partial \mathbf{j}(\mathbf{r}', t-r/c)}{\partial t} \mathbf{r}' \right] \\
&+ \frac{1}{2c} \frac{\mathbf{r}}{r} \times \left[\frac{\partial \mathbf{j}(\mathbf{r}', t-r/c)}{\partial t} \times \mathbf{r}' \right], \tag{6.375}
\end{aligned}$$

so sehen wir, daß der erste Term durch das elektrische Quadrupolmoment und der zweite durch das magnetische Dipolmoment bestimmt ist und somit speziell in magnetischer Dipolnäherung [mit \mathbf{m} gemäß (4.57)]

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \rightarrow \mathbf{J}_m^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c\mu_0} \frac{\mathbf{r}}{r} \times \dot{\mathbf{m}}(t-r/c) \tag{6.376}$$

gilt. Folglich ergibt sich nach (6.370) das Induktionsfeld in Fernfeldnäherung und magnetischer Dipolnäherung als

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{4\pi c^2} \frac{\mathbf{r} \times [\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{m}}(t-r/c)]}{r^3}, \tag{6.377}$$

woraus gemäß (6.371) das zugehörige elektrische Feld berechnet werden kann,²¹

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{4\pi c} \frac{\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{m}}(t-r/c)}{r^2}. \tag{6.378}$$

Das Verfahren kann beliebig fortgesetzt werden, um die Beiträge weiterer Momente zum Fernfeld zu berechnen.

²¹Ein Vergleich mit der elektrischen Dipolstrahlung zeigt, daß betragsmäßig die Entsprechung $m(t)/(c\mu_0) \hat{=} d(t)$ gilt.

6.5.5 Die Liénard-Wiechert-Potentiale

Die retardierten Potentiale in der Form (6.288) und (6.289) sind besonders gut geeignet zur Berechnung von elektromagnetischen Feldern, die von kontinuierlichen Ladungs- und Stromverteilungen erzeugt werden. Im Falle von Punktladungen, die sich längs Bahnkurven bewegen, können die retardierten Potentiale weiter ausgewertet werden, ehe sie zur Anwendung gebracht werden.

Eine Punktladung q , die sich längs einer Bahnkurve $\mathbf{s}(t)$ bewegt, gibt bekanntlich zu der Ladungsdichte

$$\varrho(\mathbf{r}, t) = q \delta[\mathbf{r} - \mathbf{s}(t)] \quad (6.379)$$

und der Stromdichte

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = q \dot{\mathbf{s}}(t) \delta[\mathbf{r} - \mathbf{s}(t)] \quad (6.380)$$

Anlaß [vgl. (2.5) und (2.18)]. Beginnen wir mit dem skalaren Potential (6.289), das mit der retardierten Green-Funktion (6.285) (vor Ausführen der Zeitintegration)

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dt' \int d^3r' \frac{\delta(t-t'-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \varrho(\mathbf{r}', t') \quad (6.381)$$

bzw. mit (6.380)

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \int dt' \frac{\delta(t-t'-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \delta[\mathbf{r}' - \mathbf{s}(t')] \quad (6.382)$$

lautet. Anstelle der zeitlichen Integration führen wir erst die räumliche Integration aus und erhalten

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int dt' \frac{\delta(t-t'-R(\mathbf{r}, t')/c)}{R(\mathbf{r}, t')}, \quad (6.383)$$

wobei

$$R(\mathbf{r}, t) = |\mathbf{r} - \mathbf{s}(t)| \quad (6.384)$$

ist. Analog finden wir für das Vektorpotential (6.288)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{q\mu_0}{4\pi} \int dt' \frac{\dot{\mathbf{s}}(t') \delta(t-t'-R(\mathbf{r}, t')/c)}{R(\mathbf{r}, t')}. \quad (6.385)$$

Zur weiteren Auswertung der Gleichungen (6.383) und (6.385) verwenden wir die Formel

$$\delta[f(x)] = \sum_{\nu} \left| \left(\frac{df}{dx} \right)_{x=x_{\nu}} \right|^{-1} \delta(x - x_{\nu}), \quad (6.386)$$

wobei die x_{ν} die (einfachen) Nullstellen der Funktion $f(x)$ sind,

$$f(x_{\nu}) = 0. \quad (6.387)$$

Betrachten wir die für (6.383) und (6.384) relevante Funktion

$$f(\mathbf{r}, t') \equiv t - t' - R(\mathbf{r}, t')/c. \quad (6.388)$$

Ihre Ableitung (nach t') ist

$$\frac{\partial f(\mathbf{r}, t')}{\partial t'} = -1 - \frac{1}{c} \frac{\partial R(\mathbf{r}, t')}{\partial t'} = -1 + \frac{[\mathbf{r} - \mathbf{s}(t')] \cdot \dot{\mathbf{s}}(t')}{c R(\mathbf{r}, t')} \quad (6.389)$$

bzw.

$$\frac{\partial f(\mathbf{r}, t')}{\partial t'} = -1 + \underbrace{\frac{\mathbf{r} - \mathbf{s}(t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}(t')|} \cdot \frac{\dot{\mathbf{s}}(t')}{|\dot{\mathbf{s}}(t')|}}_{-1 \cdots + 1} \frac{|\dot{\mathbf{s}}(t')|}{c}, \quad (6.390)$$

und somit gilt

$$-1 - \frac{|\dot{\mathbf{s}}|}{c} \leq \dot{f} \leq -1 + \frac{|\dot{\mathbf{s}}|}{c}. \quad (6.391)$$

Da die Teilchengeschwindigkeit immer kleiner als die Lichtgeschwindigkeit ist (siehe Abschnitt 7),

$$|\dot{\mathbf{s}}| < c, \quad (6.392)$$

folgt aus (6.391) insbesondere

$$\dot{f} < 0 \quad \rightsquigarrow \quad |\dot{f}| = -\dot{f}, \quad (6.393)$$

und somit finden wir

$$\begin{aligned} R(\mathbf{r}, t') \left| \frac{\partial f(\mathbf{r}, t')}{\partial t'} \right| &= -R(\mathbf{r}, t') \frac{\partial f(\mathbf{r}, t')}{\partial t'} \\ &= R(\mathbf{r}, t') - [\mathbf{r} - \mathbf{s}(t')] \cdot \dot{\mathbf{s}}(t')/c. \end{aligned} \quad (6.394)$$

Damit können wir [nach Anwendung von (6.386)] die Gleichungen (6.383) und (6.385) für das skalare Potential und das Vektorpotential in folgender Form schreiben:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{s}(t')| - [\mathbf{r}-\mathbf{s}(t')] \cdot \dot{\mathbf{s}}(t')/c} \Big|_{t-t'-|\mathbf{r}-\mathbf{s}(t')|/c=0} \quad (6.395)$$

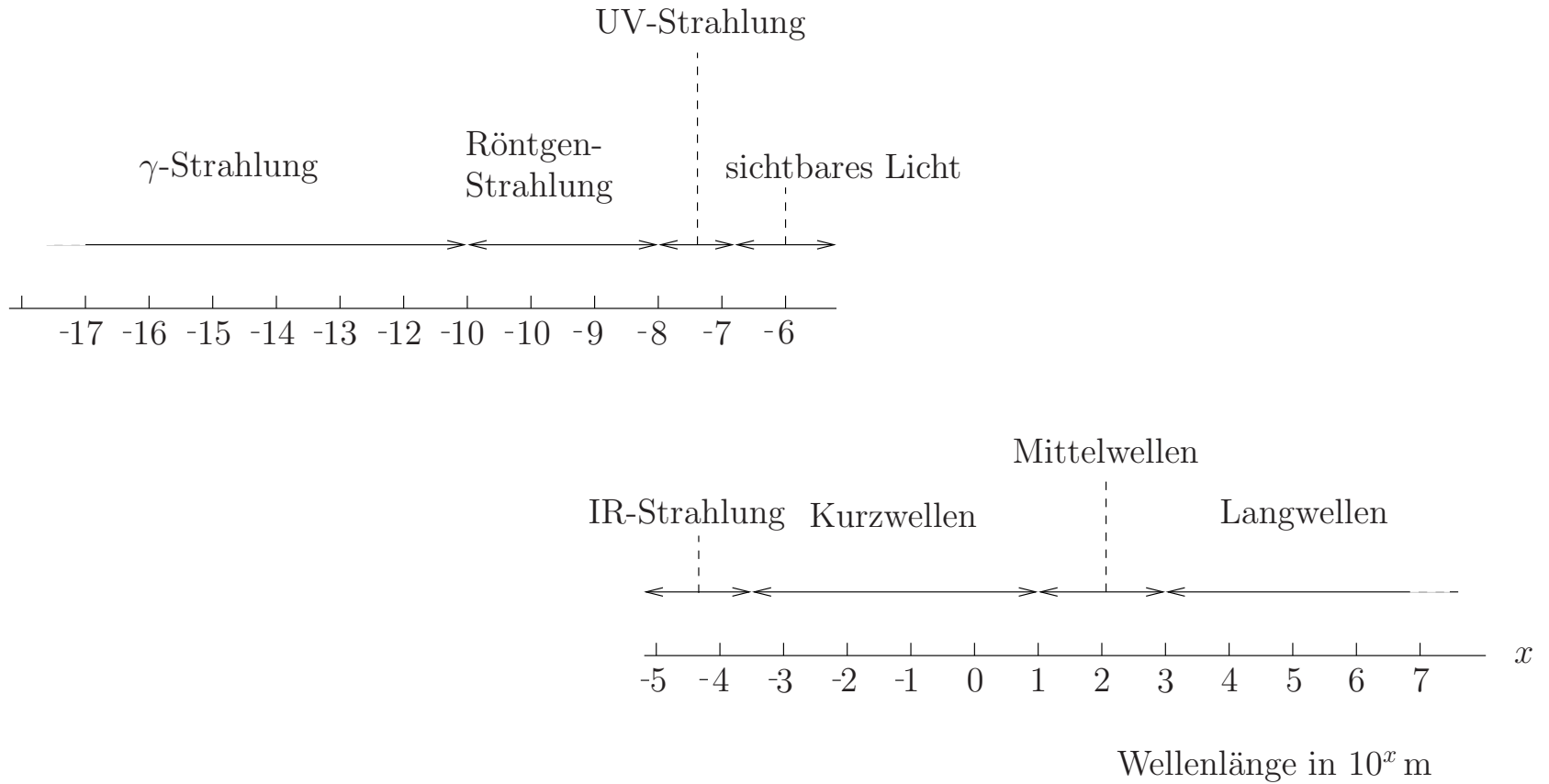
$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{q\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\mathbf{s}}(t')}{|\mathbf{r}-\mathbf{s}(t')| - [\mathbf{r}-\mathbf{s}(t')] \cdot \dot{\mathbf{s}}(t')/c} \Big|_{t-t'-|\mathbf{r}-\mathbf{s}(t')|/c=0} \quad (6.396)$$

Trotz ihrer auf den ersten Blick einfachen Gestalt ist die Anwendung der Liénard-Wiechert-Potentiale (6.395) und (6.396) (im Hinblick auf analytische Darstellungen) i. allg. nicht trivial. Offensichtlich liegt die Schwierigkeit in der für nicht ganz einfache Teilchenbahnkurven analytisch schwer auswertbaren Retardierungsbedingung

$$t - t' - |\mathbf{r} - \mathbf{s}(t')|/c = 0 \quad (6.397)$$

begründet.

Klassifizierung elektromagnetischer Wellen nach Wellenlängenbereichen



Kapitel 7

Lorentz-Transformation und Kovarianz

Wie wir bereits wissen (Abschnitt 2.5), sind die Maxwell-Gleichungen i. allg. nicht forminvariant unter Galilei-Transformationen, die die Zeit beim Übergang von einem Inertialsystem zu einem anderen Inertialsystem unverändert lassen. Wie wir sehen werden, sind sie als speziell relativistische Gleichungen unter Lorentz-Transformationen, bei denen die drei räumlichen Koordinaten zusammen mit der Zeit als gewissermaßen der vierten Koordinate transformiert werden, forminvariant. In diesem Zusammenhang wird es zweckmäßig sein, die Maxwell-Gleichungen in dem entsprechenden vierdimensionalen Raum – dem **pseudoeuklidischen Raum** oder **Minkowski-Raum** – zu formulieren.

7.1 Die Lorentz-Transformation

Beginnen wir zunächst mit der Lorentz-Transformation als speziell relativistische Verallgemeinerung der Galilei-Transformation. Die Voraussetzungen, um die Transformation zwischen Inertialsystemen zu finden, sind außerordentlich gering. Es genügt, von folgenden Erfahrungen auszugehen:

- (1) Alle Inertialsysteme sind gleichwertig, d.h., durch keinerlei physikalisches Verfahren kann ein ausgezeichnetes Inertialsystem gefunden werden

(2) Die Vakuumlichtgeschwindigkeit ist in jedem Inertialsystem c .

Bekanntlich führt die erste Forderung auf die Galilei-Transformation, die jedoch die zweite Forderung nicht erfüllt. In Formeln ausgedrückt, besagt die zweite Forderung folgendes. Breitet sich in einem Inertialsystem Σ ein Lichtsignal mit der Vakuumlichtgeschwindigkeit c aus, d.h.

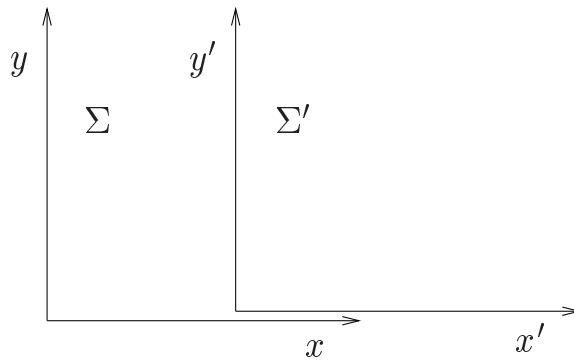
$$c^2 t^2 - \mathbf{r}^2 = 0, \quad (7.1)$$

so stellt ein Beobachter in einem relativ zu Σ bewegten Inertialsystem Σ' ebenfalls fest, daß sich das Lichtsignal mit der Geschwindigkeit c ausbreitet, d.h.

$$c^2 t'^2 - \mathbf{r}'^2 = 0, \quad (7.2)$$

und natürlich auch umgekehrt. Daraus folgt (unter Berücksichtigung der Homogenität von Raum und Zeit) sofort, daß die Transformation von Σ zu Σ' linear sein muß.

Wenn sich das System Σ' relativ zum System Σ mit einer konstanten Geschwindigkeit \mathbf{v} bewegt, verbietet offensichtlich nichts den Beobachtern in den beiden Systemen, gleiche Achsenorientierungen ihrer



kartesischen Koordinatensysteme zu wählen und insbesondere die x -Achse in Richtung \mathbf{v} zu legen. Die Relativbewegung findet dann einzig längs der x -Achse (bzw. x' -Achse) statt. In diesem Koordinatensystem muß die gesuchte Transformation dann die Gestalt

$$x' = \gamma x + \delta t, \quad (7.3)$$

$$t' = \epsilon x + \eta t, \quad (7.4)$$

$$y' = y, \quad z' = z \quad (7.5)$$

besitzen, wobei die zunächst unbekanntesten Koeffizienten von der Geschwindigkeit abhängen können: $\gamma(v)$, $\delta(v)$, $\epsilon(v)$, $\eta(v)$. Die Koordinatenursprünge von Σ und Σ' seien ferner so gewählt, daß sie zur Zeit $t=0$ zusammenfallen. Zur Zeit t wird dann ein Beobachter in Σ den Ursprung von Σ' am Ort $(vt, 0, 0)$ sehen, so daß gemäß (7.3)

$$0 = \gamma vt + \delta t = (\gamma v + \delta) t \quad (7.6)$$

und somit

$$\delta = -\gamma v \quad (7.7)$$

gelten muß. Damit nimmt (7.3) die Gestalt

$$x' = \gamma (x - vt) \quad (7.8)$$

an.

Die Transformationsformeln gelten natürlich auch für zwei Inertialsysteme Σ und Σ' , deren x - und x' -Achse entgegengesetzt zu \mathbf{v} orientiert sind. Setzen wir in den Gleichungen (7.4) und (7.8)

$$x \rightarrow -x, \quad x' \rightarrow -x', \quad \mathbf{v} \rightarrow -\mathbf{v}, \quad (7.9)$$

so dürfen sich diese Gleichungen nicht ändern. Wir erhalten zunächst aus (7.4)

$$t' = -\epsilon(-v) x + \eta(-v) t \quad (7.10)$$

und aus (7.8)

$$-x' = \gamma(-v) (-x + vt) \quad \rightsquigarrow \quad x' = \gamma(-v) (x - vt), \quad (7.11)$$

woraus durch Vergleich mit (7.4) und (7.8) folgt, daß die Beziehungen

$$\epsilon(v) = -\epsilon(-v), \quad (7.12)$$

$$\eta(v) = \eta(-v), \quad (7.13)$$

$$\gamma(v) = \gamma(-v) \quad (7.14)$$

gelten müssen.

Bisher haben wir den Übergang von Σ zu Σ' betrachtet. Betrachten wir nunmehr den Übergang von Σ' zu Σ . Der einzige Unterschied besteht offenbar darin, daß vom Standpunkt eines Beobachters im System

Σ' sich das System Σ mit der Geschwindigkeit $-\mathbf{v}$ bewegt. Ansonsten müssen die gleichen Transformationsformeln gelten:

$$x = \gamma(-v) (x' + vt'), \quad (7.15)$$

$$t = \epsilon(-v) x' + \eta(-v) t', \quad (7.16)$$

$$y = y', \quad z = z'. \quad (7.17)$$

Verwenden wir die Symmetriebeziehungen (7.12) – (7.14), so gehen die Gleichungen (7.15) und (7.16) in

$$x = \gamma(v) (x' + vt') \quad (7.18)$$

und

$$t = -\epsilon(v) x' + \eta(v) t' \quad (7.19)$$

über.

Gehen wir zunächst vom System Σ zum System Σ' über und anschließend wieder zurück zum System Σ , führen wir also Hin- und Rücktransformation hintereinander aus, so müssen wieder die ursprünglichen Raum-Zeit-Koordinaten herauskommen:

$$x = \gamma (x' + vt') = \gamma [\gamma (x - vt) + v (\epsilon x + \eta t)], \quad (7.20)$$

$$t = -\epsilon x' + \eta t' = -\epsilon \gamma (x - vt) + \eta (\epsilon x + \eta t) \quad (7.21)$$

bzw.

$$x = \gamma [(\gamma + v \epsilon) x + v (\eta - \gamma) t], \quad (7.22)$$

$$t = \epsilon (\eta - \gamma) x + (\eta^2 + \epsilon \gamma v) t. \quad (7.23)$$

Daraus ist zunächst zu sehen, daß

$$\eta = \gamma \quad (7.24)$$

sein muß. Damit verbleibt die Gleichung

$$\gamma (\gamma + v \epsilon) = 1, \quad (7.25)$$

woraus

$$\epsilon = \frac{1}{\gamma v} - \frac{\gamma}{v} = -\frac{\gamma}{v} \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) \quad (7.26)$$

folgt.

Zusammengefaßt lautet das bisherige Ergebnis

$$x' = \gamma (x - vt), \quad (7.27)$$

$$t' = \gamma \left[-\frac{1}{v} \left(1 - \frac{1}{\gamma^2} \right) x + t \right], \quad (7.28)$$

$$y' = y, \quad z' = z. \quad (7.29)$$

Es basiert ausschließlich auf der Forderung der Äquivalenz der Inertialsysteme (und Linearität der Transformation). Von der Forderung gleicher Vakuumlichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen wurde noch nicht Gebrauch gemacht. Diese Forderung legt die noch unbestimmte Größe γ fest.¹ Für einen (δ -artigen) Lichtblitz, der zur Zeit $t=0$ vom (in Σ und Σ' zusammenfallenden) Koordinatenursprung ausgeht, muß entsprechend dieser Forderung das Verhältnis von Laufstrecke zu Laufzeit in beiden Inertialsystemen gleich c sein,

$$\frac{x'}{t'} = \frac{x}{t} = c. \quad (7.30)$$

Mit (7.27) und (7.28) wird daraus

$$\frac{x'}{t'} = c = \frac{c - v}{-\frac{c}{v} \left(1 - \frac{1}{\gamma^2} \right) + 1}. \quad (7.31)$$

Wir lösen nach γ^2 auf und erhalten²

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad \rightsquigarrow \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (7.32)$$

Damit nimmt die spezielle (eigentliche) Lorentz-Transformation die folgende Gestalt an:

¹Würde $t' = t$ gefordert, müßte offensichtlich $\gamma = 1$ gesetzt werden, und das Ergebnis wäre die bekannte Galilei-Transformation.

²Die Wurzel mit dem negativen Vorzeichen muß ausgeschlossen werden, da $\gamma \rightarrow 1$ für $v \rightarrow 0$ gelten muß.

$$x' = \gamma (x - vt) \quad (7.33)$$

$$t' = \gamma \left(-\frac{\beta}{c} x + t \right) \quad (7.34)$$

$$y' = y, \quad z' = z \quad (7.35)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c} \quad (7.36)$$

Die verallgemeinerte (eigentliche) Lorentz-Transformation ergibt sich für den Fall, daß \mathbf{v} nicht parallel zu einer Koordinatenachse ist. Es sei

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_\perp + \mathbf{r}_\parallel \quad (7.37)$$

so zerlegt, daß

$$\mathbf{r}_\perp \perp \mathbf{v}, \quad \mathbf{r}_\parallel \parallel \mathbf{v} \quad (7.38)$$

ist. Gemäß (7.33) und (7.35) gilt dann

$$\mathbf{r}'_\perp = \mathbf{r}_\perp, \quad (7.39)$$

$$\mathbf{r}'_\parallel = \gamma (\mathbf{r}_\parallel - \mathbf{v}t) \quad (7.40)$$

und somit

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{r}'_\perp + \mathbf{r}'_\parallel \\ &= \mathbf{r}_\perp + \gamma (\mathbf{r}_\parallel - \mathbf{v}t). \end{aligned} \quad (7.41)$$

Mit

$$\mathbf{r}_\perp = \mathbf{r} - \mathbf{r}_\parallel \quad (7.42)$$

und

$$\mathbf{r}_\parallel = \frac{\mathbf{v} \mathbf{v}}{v^2} \cdot \mathbf{r} \quad (7.43)$$

wird aus (7.41)

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \frac{\mathbf{v} \mathbf{v}}{v^2} \cdot \mathbf{r} + \gamma \left(\frac{\mathbf{v} \mathbf{v}}{v^2} \cdot \mathbf{r} - \mathbf{v}t \right), \quad (7.44)$$

d.h.:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + (\gamma - 1) \frac{\mathbf{v} \mathbf{v}}{v^2} \cdot \mathbf{r} - \gamma \mathbf{v} t \quad (7.45)$$

Analog gilt gemäß (7.34)

$$t' = \gamma \left(-\frac{v}{c^2} r_{\parallel} + t \right), \quad (7.46)$$

und folglich ergibt sich mit (7.43):

$$t' = \gamma \left(-\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{c^2} + t \right) \quad (7.47)$$

Erwartungsgemäß geht für $v/c \rightarrow 0$ die Lorentz-Transformation in die Galilei-Transformation über.

Anmerkung

Zur Herleitung der Lorentz-Transformation wurde neben dem Relativitätsprinzip (1) die Konstanz der Vakuumlichtgeschwindigkeit (2) verwendet. Wir wollen diese Annahme einmal fallen lassen. Wie wir gesehen haben, führt das Relativitätsprinzip als einzige Annahme zu den Transformationsformeln (7.27) – (7.29) mit der zunächst unbestimmten Größe γ . Um die Frage nach der physikalischen Bedeutung von γ zu beantworten, nehmen wir an, daß zum Zeitpunkt $t = t' = 0$ von $x = x' = 0$ ein Signal ausgesendet wird, das von einem Beobachter in Σ' zum Zeitpunkt t' am Ort x' detektiert wird. Aus (7.27) und (7.28) ergibt sich dann der folgende Zusammenhang zwischen der Ausbreitungsgeschwindigkeit $u' = x'/t'$ in Σ' und der Ausbreitungsgeschwindigkeit $u = x/t$ in Σ :

$$u = u' \frac{1 + \frac{v}{u'}}{1 \pm \frac{v}{u'} \frac{u'}{u_0^2}}, \quad (7.48)$$

$$u_0^2 = \begin{cases} + \frac{v^2}{1 - 1/\gamma^2} & \text{für } \gamma^2 \geq 1, \\ - \frac{v^2}{1 - 1/\gamma^2} & \text{für } \gamma^2 < 1. \end{cases} \quad (7.49)$$

Die Größe u_0^2 stellt offensichtlich ein Geschwindigkeitsquadrat dar, wobei im wesentlichen nur der Fall $\gamma^2 \geq 1$ [obere Vorzeichen in (7.48) und (7.49)] von physikalischem Interesse ist.³ Speziell für $u' = u_0$ folgt in diesem Fall $u = u' = u_0$, d.h., die beobachtete Signalgeschwindigkeit ist in allen Inertialsystemen die gleiche, und somit muß u_0 eine universelle Konstante sein. Sie stellt offenbar eine obere Grenzgeschwindigkeit dar, die nicht überschritten werden kann. Gemäß (7.49) kann also γ durch die Grenzgeschwindigkeit u_0 ausgedrückt werden,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{u_0^2}}}. \quad (7.50)$$

Falls es keine endliche obere Grenze für die Geschwindigkeit gibt (d.h. $u_0 \rightarrow \infty$), dann folgt für jedes v offensichtlich $\gamma = 1$ und somit die Galilei-Transformation. Existiert jedoch eine endliche obere Grenze für die Geschwindigkeit, ist die Galilei-Transformation nur für $v \ll u_0$ anwendbar. Es ist eine Erfahrungstatsache, daß es eine endliche (wenn auch sehr große) obere Grenzgeschwindigkeit u_0 gibt, nämlich die Vakuumlichtgeschwindigkeit c .

7.2 Pseudoeuklidischer Raum

7.2.1 Grundlagen

Wir vereinigen die drei Komponenten des Ortsvektors x, y, z mit der Zeit t zu vierkomponentigen Vektoren x^μ bzw. x_μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) mit den Definitionen

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z \quad (7.51)$$

³Für $\gamma^2 < 1$ kann u divergieren (endliches u' kann zu unendlichem u führen).

bzw.

$$x_0 = ct, \quad x_1 = -x, \quad x_2 = -y, \quad x_3 = -z \quad (7.52)$$

Offensichtlich hängen die *kontravarianten* Komponenten x^μ mit den *kovarianten* Komponenten x_μ über die Beziehungen

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu, \quad x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu \quad (7.53)$$

zusammen, wobei der *metrische Fundamentaltensor* des vierdimensionalen pseudoeuklidischen Raumes gemäß

$$(g_{\mu\nu}) \hat{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \hat{=} (g^{\mu\nu}) \quad (7.54)$$

gegeben ist.⁴

Die den Übergang von einem Inertialsystem Σ zu einem relativ dazu bewegten Inertialsystem Σ' vermittelnde spezielle (eigentliche) Lorentz-Transformation (7.33) – (7.35) [zusammen mit (7.36)] transformiert die x^μ gemäß⁵

$$x'^0 = \gamma x^0 - \beta \gamma x^1, \quad (7.55)$$

$$x'^1 = -\beta \gamma x^0 + \gamma x^1 \quad (7.56)$$

$$x'^2 = x^2, \quad (7.57)$$

$$x'^3 = x^3. \quad (7.58)$$

Die Gleichungen (7.55) – (7.58) lassen sich in der Form

$$\boxed{x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu} \quad (7.59)$$

⁴Vierervektoren und -tensoren werden im folgenden durch griechische, Dreervektoren und -tensoren durch lateinische Indizes charakterisiert. Über doppelt auftretende kontravariante und kovariante Indizes ist zu summieren.

⁵Diese Transformation wurde 1915 von Albert Einstein in die Physik eingeführt.

zum Transformationsgesetz für die kontravarianten Komponenten x^ν zusammenfassen, wobei die Transformationsmatrix Λ^μ_ν wie folgt definiert ist:

$$(\Lambda^\mu_\nu) \cong \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.60)$$

Anstelle der relativen Geschwindigkeit $\beta = v/c$, mit der sich der Koordinatenursprung des Systems Σ' (relativ zu Σ) bewegt, wird auch die über die Gleichung

$$\tanh \chi = \beta = \frac{v}{c} \quad (7.61)$$

definierte **Rapidity** χ verwendet, so daß gemäß (7.36)

$$\gamma = \cosh \chi \quad (7.62)$$

und

$$\beta\gamma = \sinh \chi \quad (7.63)$$

geschrieben werden kann und die Transformationsmatrix (7.60) die Gestalt

$$(\Lambda^\mu_\nu) \cong \begin{pmatrix} \cosh \chi & -\sinh \chi & 0 & 0 \\ -\sinh \chi & \cosh \chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.64)$$

annimmt.

Das Transformationsgesetz für die kovarianten Komponenten ist ebenfalls unschwer zu finden. Es gilt

$$\boxed{x'_\mu = \Lambda_\mu^\nu x_\nu} \quad (7.65)$$

mit

$$(\Lambda_\mu^\nu) \cong \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \chi & \sinh \chi & 0 & 0 \\ \sinh \chi & \cosh \chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.66)$$

Man überzeugt sich unschwer, daß die $\Lambda^\mu{}_\nu$ und die $\Lambda_\mu{}^\nu$ über die Beziehung

$$\Lambda_\mu{}^\nu = g_{\mu\lambda} \Lambda^\lambda{}_\rho g^{\rho\nu} \quad (7.67)$$

miteinander zusammenhängen und der Orthogonalitätsrelation

$$\Lambda^\mu{}_\nu \Lambda_\mu{}^\lambda = g_\nu^\lambda = \delta_\nu^\lambda \quad (7.68)$$

genügen (δ_ν^λ - Kronecker-Symbol). Demgemäß finden wir

$$(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = \Lambda_\nu{}^\mu, \quad (7.69)$$

und es ist leicht zu sehen, daß

$$\det \Lambda^\mu{}_\nu = 1 \quad (7.70)$$

ist.

Die obigen Resultate bleiben natürlich auch für verallgemeinerte (eigentliche) Lorentz-Transformationen (7.45) und (7.47), bei denen die Relativgeschwindigkeit nicht in einer Koordinatenachse liegt, gültig. Transformationen dieser Art werden auch **Boosts** genannt und ihre Matrizen mit $B(\mathbf{v})$ bezeichnet. In diesem Sinne ist die Matrix $\Lambda \equiv (\Lambda^\mu{}_\nu)$ in (7.60) [bzw. (7.64)] ein Boost in die z -Richtung, $B(v\mathbf{e}_z)$. Die eigentlichen Lorentz-Transformationen lassen sich noch weiter verallgemeinern, indem zu den Boosts noch räumliche Drehungen $R(\boldsymbol{\varphi})$ hinzugenommen werden,

$$\Lambda = B(\mathbf{v})R(\boldsymbol{\varphi}). \quad (7.71)$$

Diese Transformationen sind durch sechs Parameter charakterisiert. Drei Parameter spezifizieren die relative Orientierung der (dreidimensionalen) räumlichen Koordinatensysteme zueinander und drei Parameter ihre Relativgeschwindigkeit.

Die obigen Transformationen schöpfen die möglichen Lorentz-Transformationen noch nicht aus. Die Gleichungen (7.67) und (7.68) implizieren die Definitionsgleichung

$$\Lambda^\lambda{}_\mu g^{\mu\nu} \Lambda_\nu{}^\rho = g^{\lambda\rho} \quad (7.72)$$

für Lorentz-Transformationen. Aus ihr folgt ganz allgemein

$$(\det \Lambda^\mu{}_\nu)^2 = 1 \quad \rightsquigarrow \quad \det \Lambda^\mu{}_\nu = \pm 1 \quad (7.73)$$

sowie

$$\Lambda^0{}_\mu g^{\mu\nu} \Lambda^0{}_\nu = (\Lambda^0{}_0)^2 - \sum_{k=1}^3 (\Lambda^0{}_k)^2 = 1, \quad (7.74)$$

d.h.

$$\Lambda^0{}_0 \geq 1 \quad \text{oder} \quad \Lambda^0{}_0 \leq -1. \quad (7.75)$$

Das Vorzeichen der Determinante in (7.73) und das Vorzeichen von $\Lambda^0{}_0$ in (7.75) können zur Klassifizierung der Lorentz-Transformationen verwendet werden. Neben den bisher betrachteten

- *eigentlichen orthochronen* Lorentz-Transformationen, die stetig mit der Identität zusammenhängen und durch

$$\det \Lambda^\mu{}_\nu = 1, \quad \text{sgn} \Lambda^0{}_0 = 1 \quad (7.76)$$

charakterisiert sind, gibt es die

- *uneigentlichen orthochronen* Lorentz-Transformationen,

$$\det \Lambda^\mu{}_\nu = -1, \quad \text{sgn} \Lambda^0{}_0 = 1 \quad (7.77)$$

(wie die Raumspiegelung $t' = t$, $x' = -x$, $y' = -y$, $z' = -z$), die

- *zeitspiegelungsartigen* Lorentz-Transformationen,

$$\det \Lambda^\mu{}_\nu = -1, \quad \text{sgn} \Lambda^0{}_0 = -1 \quad (7.78)$$

(wie die Zeitspiegelung $t' = -t$, $x' = x$, $y' = y$, $z' = z$) sowie die

- *raumzeitspiegelungsartigen* Lorentz-Transformationen,

$$\det \Lambda^\mu{}_\nu = 1, \quad \text{sgn} \Lambda^0{}_0 = -1 \quad (7.79)$$

(wie die Raum-Zeitspiegelung $t' = -t$, $x' = -x$, $y' = -y$, $z' = -z$).

Das Hintereinanderausführen zweier Lorentz-Transformationen liefert offensichtlich wieder eine Lorentz-Transformation. Die Gesamtheit aller Lorentz-Transformationen bildet die **Lorentz-Gruppe**. Werden noch die zeitlichen und räumlichen Translationen

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu} \quad (7.80)$$

hinzugenommen, wobei a^{ν} ein beliebiger Vierervektor ist, so gelangt man zu den Transformationen

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu\nu} x_{\nu} + a^{\mu}, \quad (7.81)$$

die die **inhomogene Lorentz-Gruppe** oder **Poincaré-Gruppe** bilden.

In völliger Analogie zum dreidimensionalen euklidischen Raum können im vierdimensionalen pseudoeuklidischen Raum ganz allgemein (Vierer-)Tensoren definiert werden, und zwar durch die Forderung, daß sich ihre Komponenten bei einer Lorentz-Transformation wie die entsprechenden (Vierer-)Koordinaten transformieren. So transformieren sich insbesondere die kontravarianten Komponenten a^{μ} und die kovarianten Komponenten a_{μ} eines beliebigen Vierervektors gemäß folgender Vorschrift:

$$a'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} a^{\nu}, \quad a'_{\mu} = \Lambda_{\mu}^{\nu} a_{\nu} \quad (7.82)$$

Offensichtlich hat eine Lorentz-Transformation als orthogonale Transformation im Sinne von (7.68) zur Folge, daß das Skalarprodukt zweier Vierervektoren a^{μ} und b^{μ} eine Invariante ist,

$$a'^{\mu} b'_{\mu} = \underbrace{\Lambda^{\mu}_{\nu} \Lambda_{\mu}^{\lambda}}_{\delta_{\nu}^{\lambda}} a^{\nu} b_{\lambda} = a^{\nu} b_{\nu}. \quad (7.83)$$

Insbesondere können die Viererableitungen

$$\partial_{\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \quad \text{bzw.} \quad \partial^{\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \quad (7.84)$$

als kovariante bzw. kontravariante Komponenten eines Vierervektors aufgefaßt werden. So gilt unter Berücksichtigung von (7.65)

$$\partial'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu, \quad (7.85)$$

woraus mit (7.69) das Transformationsverhalten für kovariante Vektor-komponenten folgt,

$$\partial'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu \partial_\nu. \quad (7.86)$$

Analog folgt das Transformationsgesetz

$$\partial'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \partial^\nu. \quad (7.87)$$

7.2.2 Raum-Zeit-Abstand von Ereignissen

Es seien $x^{(1)\mu}$ und $x^{(2)\mu}$ die kontravarianten Koordinaten zweier Punkte $E^{(1)}$ und $E^{(2)}$ – auch *Weltpunkte* oder *Ereignisse* genannt – im betrachteten vierdimensionalen Raum. Definieren wir ihren gegenseitigen Abstand als

$$(\Delta s)^2 = \Delta x^\mu \Delta x_\mu \quad (7.88)$$

($\Delta x^\mu = x^{(1)\mu} - x^{(2)\mu}$), so sehen wir, daß $(\Delta s)^2$ bei einem durch eine Lorentz-Transformation vermittelten Übergang von einem Inertialsystem zu einem anderen auf Grund der Invarianzbeziehung (7.83) unverändert bleibt. Wie eine (durch eine orthogonale Transformation mit Determinante +1 vermittelte) Drehung der Koordinatenachsen im gewöhnlichen dreidimensionalen Raum die Koordinaten zweier Punkte ändert, ihren gegenseitigen Abstand jedoch unverändert läßt, ändern auch Lorentz-Transformationen (als Pseudodrehungen im Minkowski-Raum) zwar die Raum-Zeit-Koordinaten von Ereignissen, nicht jedoch den Raum-Zeit-Abstand

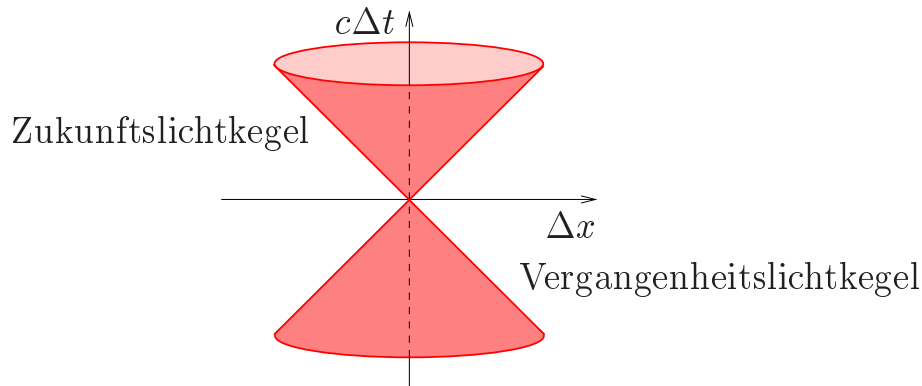
$$(\Delta s)^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2. \quad (7.89)$$

Der Abstand zwischen zwei Punkten des dreidimensionalen euklidischen Raumes ist bekanntlich nur dann Null, wenn die beiden Punkte zusammenfallen. Im Unterschied dazu kann gemäß (7.89) das Raum-Zeit-Intervall Δs auch zwischen zwei verschiedenen Weltpunkten $E^{(1)}$

und $E^{(2)}$ des Minkowski-Raumes verschwinden:

$$\Delta s = 0 \quad \rightsquigarrow \quad c\Delta t = \pm\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}. \quad (7.90)$$

Wie die zweidimensionale Veranschaulichung in der folgenden Abbildung zeigt, liegen alle Weltpunkte E , die der Bedingung (7.90) genügen, auf dem Mantel eines vierdimensionalen Doppelkegels, dessen



Spitze das Bezugsereignis $E^{(0)}$ definiert. Dieser Kegel heißt **Lichtkegel** im Ereignis (Weltpunkt) $E^{(0)}$, seine obere Hälfte ($\Delta t > 0$) *Zukunftslichtkegel*, seine untere Hälfte ($\Delta t < 0$) entsprechend *Vergangenheitslichtkegel*. Die Gleichung (7.90) entspricht der Gleichung einer Kugel vom Radius $|c\Delta t|$ im dreidimensionalen euklidischen Raum. Ereignisse E auf dem Zukunftslichtkegel sind in diesem Bild mit dem Ereignis $E^{(0)}$ durch vom Kegelmittelpunkt auslaufende Lichtkugelwellen verknüpft. Entsprechend verknüpfen einlaufende Lichtkugelwellen Ereignisse E auf dem Verganheitslichtkegel mit dem Ereignis $E^{(0)}$. Da sich die Abstände zwischen Ereignissen bei einer Lorentz-Transformation nicht ändern, bleibt natürlich auch der Lichtkegel ungeändert. Somit können alle Ereignisse völlig unabhängig vom (zufällig) gewählten Inertialsystem nach ihrer Lage zum Lichtkegel in irgendeinem Bezugsereignis $E^{(0)}$ wie folgt klassifiziert werden.

Lage des Ereignisses E zum Lichtkegel in $E^{(0)}$	Abstand zwischen $E^{(0)}$ und E	Bezeichnung des Abstandes
innerhalb des Lichtkegels	$(\Delta s)^2 < 0$	zeitartig
außerhalb des Lichtkegels	$(\Delta s)^2 > 0$	raumartig
auf dem Lichtkegel	$(\Delta s)^2 = 0$	lichtartig

Sind zwei Ereignisse $E^{(0)}$ und $E^{(1)}$ durch ein lichtartiges Intervall getrennt, so daß $E^{(1)}$ auf dem zu $E^{(0)}$ gehörenden Lichtkegel liegt, dann ist ihr räumlicher Abstand offenbar gerade so groß, daß diese Strecke von einem Lichtsignal exakt während der Zeit $|t^{(1)} - t^{(0)}|$ zurückgelegt werden kann. Die Ereignisse $E^{(0)}$ und $E^{(1)}$ können sich also vermittels eines Lichtsignals gegenseitig beeinflussen. Stehen nur Signale zur Verfügung, deren Übertragungsgeschwindigkeit kleiner als die Lichtgeschwindigkeit ist, dann kann das Ereignis $E^{(0)}$ nur Ereignisse innerhalb des Zukunftslichtkegels beeinflussen bzw durch Ereignisse innerhalb des Vergangenheitslichtkegels beeinflußt werden.⁶ Alle Ereignisse, die außerhalb des Lichtkegels liegen und deren Abstand von $E^{(0)}$ somit raumartig ist, können das Ereignis $E^{(0)}$ weder beeinflussen noch von diesem beeinflußt werden.

7.3 Relativistischer Raum-Zeit-Begriff

Während eine Galilei-Transformation die Zeit unverändert läßt, wird diese bei einer Lorentz-Transformation verändert. Damit geschieht hinsichtlich des Zeitbegriffes das gleiche wie bereits mit dem Raum-begriff im Rahmen des Galileischen Relativitätsprinzips. Führt dieses das Konzept des absoluten Raumes ad absurdum, so muß nunmehr auch das Konzept der absoluten Zeit fallen gelassen und der Zeitbegriff relativiert werden. Wie wir sehen werden, hat dies eine Reihe bemerkenswerter Konsequenzen.

7.3.1 Addition von Geschwindigkeiten

Betrachten wir drei Inertialsysteme Σ , Σ' und Σ'' , wobei wir annehmen wollen, daß Σ' sich relativ zu Σ mit der Geschwindigkeit v und Σ'' sich relativ zu Σ' mit der Geschwindigkeit v' bewegt, und fragen wir nach der Geschwindigkeit v'' , mit der sich Σ'' relativ zu Σ bewegt. Gemäß (7.65) gilt für den direkten Übergang von Σ zu Σ''

$$\Sigma \xrightarrow{v''} \Sigma''$$

⁶Man kann überdies zeigen, daß alle Ereignisse innerhalb des Zukunftslichtkegels in jedem Inertialsystem nach dem Ereignis $E^{(0)}$ stattfinden und entsprechend alle Ereignisse innerhalb des Vergangenheitslichtkegels stets vor dem Ereignis $E^{(0)}$.

$$x''^\mu = \Lambda^\mu_\nu(v'') x^\nu. \quad (7.91)$$

Andererseits gilt für den Übergang

$$\Sigma \xrightarrow{v} \Sigma' \xrightarrow{v'} \Sigma''$$

$$x''^\mu = \Lambda^\mu_\nu(v') x'^\nu, \quad (7.92)$$

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu(v) x^\nu \quad (7.93)$$

und somit

$$x''^\mu = \Lambda^\mu_\lambda(v') \Lambda^\lambda_\nu(v) x^\nu. \quad (7.94)$$

Der Vergleich mit (7.91) liefert

$$\Lambda^\mu_\nu(v'') = \Lambda^\mu_\lambda(v') \Lambda^\lambda_\nu(v) \quad (7.95)$$

bzw. unter Verwendung von (7.60)

$$\begin{pmatrix} \gamma'' & -\beta''\gamma'' & 0 & 0 \\ -\beta''\gamma'' & \gamma'' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma'\gamma(1+\beta'\beta) & -\gamma'\gamma(\beta'+\beta) & 0 & 0 \\ -\gamma'\gamma(\beta'+\beta) & \gamma'\gamma(1+\beta'\beta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.96)$$

Damit ergeben sich die beiden Gleichungen

$$\gamma'\gamma(1+\beta'\beta) = \gamma'' \quad (7.97)$$

und

$$\gamma'\gamma(\beta'+\beta) = \beta''\gamma''. \quad (7.98)$$

Wir multiplizieren die erste Gleichung mit β'' , vergleichen mit der zweiten Gleichung und erhalten

$$(1+\beta'\beta)\beta'' = \beta'+\beta \quad \rightsquigarrow \quad \beta'' = \frac{\beta'+\beta}{1+\beta'\beta}. \quad (7.99)$$

Folglich gilt [mit (7.36)]:

$$v'' = \frac{v+v'}{1+\frac{vv'}{c^2}} \quad (7.100)$$

Man überzeugt sich unschwer, daß natürlich wieder

$$\gamma'' = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta''^2}} \quad (7.101)$$

gilt.

Das Transformationsgesetz (7.100) ist unter dem Namen *relativistisches Additionstheorem von Geschwindigkeiten* bekannt. Es bringt wieder deutlich zum Ausdruck, daß die Vakuumlichtgeschwindigkeit c die nicht zu überschreitende (obere) Grenzgeschwindigkeit ist. Ist mindestens eine der beiden Geschwindigkeiten v und v' hinreichend klein verglichen mit c , geht (7.100) (näherungsweise) in das bekannte nicht-relativistische Additionstheorem für Geschwindigkeiten über, z.B.

$$v'/c \ll 1 \quad \rightsquigarrow \quad v'' \simeq v + v'. \quad (7.102)$$

7.3.2 Längenkontraktion

Gegeben sei ein längs \mathbf{v} orientierbarer Stab, der im System Σ ruhen möge. Wir wollen wieder annehmen, daß die Richtung von \mathbf{v} mit der der x -Achse übereinstimmt. Die Länge des Stabes sei

$$l = \Delta x = x^{(2)} - x^{(1)}. \quad (7.103)$$

Für einen Beobachter im System Σ' ist die Länge des in diesem System bewegten Stabes durch den (räumlichen) Abstand

$$l' = \Delta x' = x'^{(2)} - x'^{(1)} \quad (7.104)$$

gegeben, den er zu einem festen Zeitpunkt beobachtet, d.h. durch eine gleichzeitige Messung der Orte der beiden Begrenzungspunkte des Stabes. Was ihm als gleichzeitig erscheint, ist natürlich nicht gleichzeitig im System Σ , denn gemäß (7.33) und (7.34) gilt

$$\Delta x' = \gamma (\Delta x - v \Delta t), \quad (7.105)$$

$$\Delta t' = \gamma \left(\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x \right), \quad (7.106)$$

speziell

$$\Delta t' = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \Delta t = \frac{v}{c^2} \Delta x. \quad (7.107)$$

Wir setzen dies in (7.105) und erhalten

$$\Delta x' = \gamma \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \Delta x. \quad (7.108)$$

Damit [und (7.36)] ist die im System Σ' gemessene Stablänge wie folgt gegeben:

$$l' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} l \quad (7.109)$$

Wegen $l' < l$ erscheint einem Beobachter im System Σ' ein im System Σ ruhender Stab verkürzt. Der Effekt der Längenkontraktion ist natürlich symmetrisch bezüglich der beiden Bezugssysteme. Ein Beobachter im System Σ sieht einen im System Σ' ruhenden Stab ebenfalls verkürzt. Deswegen kommt ein Beobachter in einem beliebigen Inertialsystem zu der Feststellung, daß (gleichförmig) *bewegte Maßstäbe kürzer als ruhende sind*.

7.3.3 Zeitdilatation

Im System Σ trete an einem gewissen Ort zum Zeitpunkt $t^{(1)}$ ein Ereignis $E^{(1)}$ ein (beispielsweise werde eine ruhende Lampe eingeschaltet). Zu einem späteren Zeitpunkt $t^{(2)}$ trete am gleichen Ort ein zweites Ereignis $E^{(2)}$ ein (die ruhende Lampe werde wieder ausgeschaltet). Der zeitliche Abstand der beiden Ereignisse ist dann

$$\Delta t = t^{(2)} - t^{(1)} > 0. \quad (7.110)$$

Wir fragen nach dem zeitlichen Abstand der beiden Ereignisse, den ein Beobachter im System Σ' feststellt. Aus (7.105) und (7.106) folgt für $\Delta x = 0$

$$\Delta x' = -\gamma v \Delta t, \quad (7.111)$$

$$\Delta t' = \gamma \Delta t. \quad (7.112)$$

Für den Beobachter im System Σ' finden die beiden Ereignisse also an verschiedenen Orten statt [Gleichung (7.111)] und ihr zeitlicher Abstand ist [Gleichung (7.112)]:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (7.113)$$

Die Tatsache, daß die beiden Ereignisse im System Σ' an verschiedenen Orten stattfindet, ist nicht neu. Bereits das Galileische Relativitätsprinzip führt zu dieser Erkenntnis (wenn auch in quantitativ verschiedener Form). Neu ist, daß der Beobachter im System Σ' ein anderes, längeres Zeitintervall zwischen den beiden Ereignissen mißt. Der Effekt der Zeitdilatation ist natürlich ebenso wie der Effekt der Längenkontraktion symmetrisch bezüglich der beiden Bezugssysteme. Ein Beobachter im System Σ mißt ebenfalls eine längere Zeitdifferenz zwischen zwei im System Σ' am gleichen Ort stattfindenden Ereignissen als ein Beobachter im System Σ . Deswegen kommt ein Beobachter in einem beliebigen Inertialsystem zu der Feststellung, daß (gleichförmig) *bewegte Uhren langsamer als ruhende gehen*.

Es sollte noch einmal betont werden, daß weder durch Längenkontraktion noch Zeitdilatation irgendein Inertialsystem ausgezeichnet wird. Genau wie ein Beobachter im System Σ feststellt, daß seine Normaluhren gegenüber Normaluhren im System Σ' vorgehen, kommt ein Beobachter im System Σ' zu dem Ergebnis, daß seine Normaluhren gegenüber den Normaluhren im System Σ vorgehen. Ähnliches gilt für Normalmaßstäbe, die wechselseitig verkürzt gemessen werden.

7.4 Kovariante Form der Maxwell-Gleichungen

Wenn die Maxwell-Gleichungen (2.24) – (2.27) (oder auch andere physikalische Gleichungen) den Gesetzen der speziellen Relativitätstheorie genügen sollen, müssen sie in jedem Inertialsystem die gleiche Gestalt

haben, wobei der Übergang von einem Inertialsystem zu einem anderen nunmehr durch eine Lorentz-Transformation vermittelt wird. Wie wir gesehen haben, sind Lorentz-Transformationen orthogonale Transformationen im (vierdimensionalen) Minkowski-Raum. Um die Forminvarianz einer physikalischen Theorie unter Lorentz-Transformationen zu prüfen, muß sie demnach als vierdimensionale (Tensor-)Theorie formuliert werden können. Dies ist aber für die Maxwell-Theorie genau der Fall.

Um dies zu zeigen, fassen wir zunächst die Ladungsdichte ϱ und den dreidimensionalen Stromdichtevektor \mathbf{j} zu dem Vierervektor (Viererstrom)

$$(j^\mu) \hat{=} (c\varrho, \mathbf{j}) \rightsquigarrow j^0 = c\varrho \quad (7.114)$$

zusammen. Analog fassen wir das skalare Potential φ und das dreidimensionale Vektorpotential \mathbf{A} zu dem Vierervektor (Viererpotential)

$$(A^\mu) \hat{=} (\varphi/c, \mathbf{A}) \rightsquigarrow A^0 = \varphi/c \quad (7.115)$$

zusammen. Es ist sofort zu sehen, daß mit (7.114) die Kontinuitätsgleichung (2.21) in der kovarianten Form

$$\partial_\mu j^\mu = \partial^\mu j_\mu = 0 \quad (7.116)$$

geschrieben werden kann, die in jedem Inertialsystem gilt. Es ist ferner unschwer zu sehen, daß mit (7.114) die kovariante Form der Lorentz-Bedingung (6.106)

$$\partial_\mu A^\mu = \partial^\mu A_\mu = 0 \quad (7.117)$$

lautet.⁷ Wir schreiben den d'Alembert-Operator in kovarianter Form,

$$\square \equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta = \partial^\mu \partial_\mu, \quad (7.118)$$

⁷Gilt $\partial_\mu A^\mu \neq 0$, kann immer ein Potential $A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \chi$ gefunden werden, das der Lorentz-Bedingung genügt, wobei die Eichfunktion χ als Lorentz-Skalar offensichtlich eine Lösung der Gleichung $\partial_\mu \partial^\mu \chi = \partial_\mu A^\mu$ ist [vgl. (6.113)].

bringen die inhomogene Wellengleichung (6.109) für das skalare Potential auf die Form

$$\square \frac{\varphi}{c} = \frac{1}{c\epsilon_0} \varrho = \mu_0 c \varrho, \quad (7.119)$$

d.h. mit (7.114) und (7.115)

$$\square A^0 = \mu_0 j^0, \quad (7.120)$$

und sehen, daß die inhomogenen Wellengleichungen (6.109) und (6.110) für das skalare Potential und das Vektorpotential gemäß

$$\partial^\nu \partial_\nu A^\mu = \mu_0 j^\mu \quad (7.121)$$

zusammengefaßt werden können. Die quellenmäßige Darstellung der Lösung von (7.121) ist dann (vgl. Abschnitt 6.5.1)

$$A^\mu(x^\nu) = \mu_0 \int d^4x' G^{(0)}(x^\nu - x'^\nu) j^\mu(x'^\nu) \quad (7.122)$$

mit

$$G^{(0)}(x^\nu) = \begin{cases} G_{\text{ret}}^{(0)}(x^\nu) = \frac{1}{4\pi r} \delta(x^0 - r) & \text{(retartierte Green-Funktion),} \\ G_{\text{av}}^{(0)}(x^\nu) = \frac{1}{4\pi r} \delta(x^0 + r) & \text{(avancierte Green-Funktion)} \end{cases} \quad (7.123)$$

($r^2 = x^i x_i$). Es gilt [vgl. (6.386)]

$$\delta(x^2) = \frac{1}{2r} [\delta(x^0 - r) + \delta(x^0 + r)] \quad (7.124)$$

($x^2 = x^\mu x_\mu$), so daß unter Verwendung der Sprungfunktion $\Theta(x^0)$ bzw. $\Theta(-x^0)$ die Green-Funktionen in der Form

$$G_{\text{ret}}^{(0)}(x^\nu) = \frac{1}{2\pi} \Theta(x^0) \delta(x^2), \quad (7.125)$$

$$G_{\text{av}}^{(0)}(x^\nu) = \frac{1}{2\pi} \Theta(-x^0) \delta(x^2), \quad (7.126)$$

geschrieben werden können.

Bekanntlich lassen sich das **B**- und das **E**-Feld aus den Potentialen φ und **A** gemäß (6.76) und (6.77) durch einfache Differentiation bestimmen. Dieser Zusammenhang wird im Minkowski-Raum durch den total antisymmetrischen elektromagnetischen **Feldstärketensor**

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = -F^{\nu\mu} \quad (7.127)$$

bzw.

$$F_{\mu\nu} = g_{\mu\lambda}g_{\nu\tau}F^{\lambda\tau} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (7.128)$$

vermittelt. Es ist leicht nachzurechnen, daß

$$(F^{\mu\nu}) \hat{=} \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (7.129)$$

bzw.

$$(F_{\mu\nu}) \hat{=} \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (7.130)$$

gilt. Wir bilden die Viererdivergenz des Feldstärketensors und erhalten aus (7.127) mit (7.117) und (7.121)

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \underbrace{\partial_\mu \partial^\mu A^\nu}_{\mu_0 j^\nu} - \underbrace{\partial_\mu \partial^\nu A^\mu}_0. \quad (7.131)$$

Somit gilt:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu \quad (7.132)$$

Dies ist jedoch nichts anderes als die kovariante Form der inhomogenen Maxwell-Gleichungen (2.26) und (2.27). Schließlich lassen sich die homogenen Maxwell-Gleichungen (2.24) und (2.25) in der folgenden Viererform aus dem Feldstärketensor gewinnen:

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0 \quad (7.133)$$

In den obigen Überlegungen sind wir von den Potentialen (in der Lorentz-Eichung) und den entsprechenden Potentialgleichungen ausgegangen, um zu den Maxwell-Gleichungen in Viererform zu gelangen. Es ist natürlich klar, daß der Feldstärketensor und die Maxwell-Gleichungen in der Viererform (7.132) und (7.133) an die Spitze gestellt werden können. Es ist dann unschwer zu zeigen, daß der Potentialansatz (7.128) die homogenen Maxwell-Gleichungen (7.133) löst. Wird mit diesem Ansatz in die inhomogenen Maxwell-Gleichungen (7.132) gegangen und die Lorentz-Eichung gemäß (7.117) verwendet, folgen unmittelbar die inhomogenen Wellengleichungen (7.121).

7.5 Energie-Impulstensor

Mit (7.114) und (7.129) läßt sich unschwer zeigen, daß die Lorentzsche Kraftdichte (2.33) aus dem Feldstärketensor wie folgt gewonnen werden kann:

$$f^k = F^{k\nu} j_\nu. \quad (7.134)$$

Da $F^{\mu\nu} j_\nu$ ein Vierervektor ist, kann f^k zu einem Vierervektor

$$f^\mu = F^{\mu\nu} j_\nu \quad (7.135)$$

ergänzt werden, d.h.

$$(f^\mu) \hat{=} (\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}/c, \mathbf{f}), \quad (7.136)$$

wobei die Größe $\mathbf{E} \cdot \mathbf{f}$ bekanntlich die (elektromagnetische) Leistungsdichte darstellt. Wir eliminieren in (7.135) gemäß (7.132) den Viererstrom und erhalten

$$f^\mu = \frac{1}{\mu_0} F^{\mu\nu} \partial^\lambda F_{\lambda\nu} \quad (7.137)$$

bzw.

$$f^\mu = \frac{1}{\mu_0} (\partial^\lambda F^{\mu\nu} F_{\lambda\nu} - F_{\lambda\nu} \partial^\lambda F^{\mu\nu}). \quad (7.138)$$

Wir formen den zweiten Term auf der rechten Seite dieser Gleichung [unter Verwendung der Antisymmetrieeigenschaft des Feldstärketensors sowie der homogenen Maxwell-Gleichungen (7.133)] wie folgt um:

$$\begin{aligned} F_{\lambda\nu} \partial^\lambda F^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} (F_{\lambda\nu} \partial^\lambda F^{\mu\nu} + F_{\nu\lambda} \partial^\nu F^{\mu\lambda}) \\ &= \frac{1}{2} (F_{\lambda\nu} \partial^\lambda F^{\mu\nu} + F_{\lambda\nu} \partial^\nu F^{\lambda\mu}) \\ &= -\frac{1}{2} F_{\lambda\nu} \partial^\mu F^{\nu\lambda} = \frac{1}{2} F_{\nu\lambda} \partial^\mu F^{\nu\lambda} \\ &= \frac{1}{4} \partial^\mu F_{\nu\lambda} F^{\nu\lambda} = \frac{1}{4} g_\tau^\mu \partial^\tau F_{\nu\lambda} F^{\nu\lambda}. \end{aligned} \quad (7.139)$$

Damit kann (7.138) in der Form

$$f^\mu = \partial^\lambda \frac{1}{\mu_0} (F^{\mu\nu} F_{\lambda\nu} - \frac{1}{4} g_\lambda^\mu F_{\nu\tau} F^{\nu\tau}) \quad (7.140)$$

geschrieben werden. Das heißt, es gilt

$$\partial_\lambda T^{\lambda\mu} = -f^\mu \quad (7.141)$$

mit

$$T^{\lambda\mu} = -\frac{1}{\mu_0} (F^{\mu\nu} F_{\lambda\nu} - \frac{1}{4} g^{\mu\lambda} F_{\nu\tau} F^{\nu\tau}) \quad (7.142)$$

bzw.

$$T^{\lambda\mu} = \frac{1}{\mu_0} (g^{\lambda\tau} F_{\tau\nu} F^{\nu\mu} + \frac{1}{4} g^{\mu\lambda} F_{\nu\tau} F^{\nu\tau}) = T^{\mu\lambda} \quad (7.143)$$

als dem (symmetrischen) Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes. Seine Elemente sind wie folgt gegeben:

$$(T^{\mu\nu}) \cong \begin{pmatrix} w & S_x/c & S_y/c & S_z/c \\ S_x/c & -T_{xx} & -T_{xy} & -T_{xz} \\ S_y/c & -T_{yx} & -T_{yy} & -T_{yz} \\ S_z/c & -T_{zx} & -T_{zy} & -T_{zz} \end{pmatrix} \quad (7.144)$$

Hier sind w die elektromagnetische Feldenergiedichte [Gleichung (6.8)], S_x , S_y und S_z die kartesischen Komponenten des Poynting-Vektors [Gleichung (6.5)] und T_{xx} , T_{xy} , T_{xz} , ... die kartesischen Komponenten des Maxwell'schen Spannungstensors [Gleichung (6.64)].

Die Gleichungen (7.141) fassen die Energie- und Impulsbilanz für das elektromagnetische Feld in Viererform zusammen.

Energiebilanz

Für $T^{\lambda 0}$ liefert (7.141) gemäß

$$\partial_\lambda T^{\lambda 0} = \partial_0 T^{00} + \partial_k T^{k0} = -f^0 \rightsquigarrow \frac{1}{c} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial S^k}{\partial x^k} = -\frac{1}{c} E_k j^k \quad (7.145)$$

den Poyntingschen Satz

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \quad (7.146)$$

[Gleichung (6.9)].

Impulsbilanz

Analog liefert (7.141) für $T^{\lambda k}$

$$\partial_\lambda T^{\lambda k} = \partial_0 T^{0k} + \partial_i T^{ik} = -f^k \rightsquigarrow \frac{1}{c^2} \frac{\partial S^k}{\partial t} + \frac{\partial T^{ik}}{\partial x^i} = -f^k, \quad (7.147)$$

d.h. die Impulsbilanz

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{T} = -\mathbf{f} \quad (7.148)$$

[Gleichung (6.63)].

7.6 Transformation elektromagnetischer Feldgrößen

Wie wir bereits im Abschnitt 2.5 gesehen haben, ist die Bedeutung der Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} relativ. Wir wollen auf der Grundlage der (nunmehr exakten) Lorentz-Transformation ihr Transformationsverhalten beim Übergang zwischen zwei Inertialsystemen Σ und Σ' etwas genauer untersuchen. Wie wir im Abschnitt 7.4 gesehen haben, stellen die Komponenten des \mathbf{E} - und des \mathbf{B} -Feldes Elemente des vierdimensionalen Feldstärketensors dar, und es ist deshalb klar, daß eine Lorentz-Transformation zu einer „Vermischung“ der beiden Felder führt.

In den zwei Inertialsystemen werden Ladungs- und Stromdichten sowie elektrische und magnetische Feldstärken gemessen. Wir wollen den Zusammenhang der Meßergebnisse in den beiden Inertialsystemen für den Fall einer allgemeinen (eigentlichen) Lorentz-Transformation untersuchen, wobei wir wieder mit der speziellen Transformation (7.60) beginnen wollen. Ausgangspunkt ist der Zusammenhang der Feldstärketensoren in den beiden Inertialsystemen:

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\sigma \Lambda^\nu_\tau F^{\sigma\tau}. \quad (7.149)$$

Betrachten wir zunächst die für das elektrische Feld im System Σ' relevanten Elemente

$$\begin{aligned} F'^{\mu 0} &= \Lambda^\mu_\sigma \Lambda^0_\tau F^{\sigma\tau} = \Lambda^\mu_\sigma (\Lambda^0_0 F^{\sigma 0} + \Lambda^0_1 F^{\sigma 1}) \\ &= \Lambda^\mu_\sigma (\gamma F^{\sigma 0} - \gamma\beta F^{\sigma 1}) = \gamma \Lambda^\mu_\sigma (F^{\sigma 0} - \beta F^{\sigma 1}). \end{aligned} \quad (7.150)$$

$\mu = 1$:

$$\begin{aligned} F'^{10} &= \gamma [-\gamma\beta (F^{00} - \beta F^{01}) + \gamma (F^{10} - \beta F^{11})] \\ &= \gamma (\gamma\beta^2 F^{01} + \gamma F^{10}) = \underbrace{\gamma^2 (1 - \beta^2)}_1 F^{10}, \end{aligned} \quad (7.151)$$

d.h.

$$F'^{10} = F^{10} \quad \rightsquigarrow \quad E'_x = E_x. \quad (7.152)$$

$\mu = 2$:

$$F'^{20} = \gamma (F^{20} - \beta F^{21}) \quad \rightsquigarrow \quad E'_y = \gamma (E_y - vB_z). \quad (7.153)$$

$\mu = 3$:

$$F'^{30} = \gamma (F^{30} - \beta F^{31}) \quad \rightsquigarrow \quad E'_z = \gamma (E_z + v B_y). \quad (7.154)$$

In kompakter Schreibweise lauten die Gleichungen (7.152) – (7.154)

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel}, \quad (7.155)$$

$$\mathbf{E}'_{\perp} = \gamma (\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (7.156)$$

wobei \parallel und \perp die Komponenten in Richtung von \mathbf{v} bzw. senkrecht zu \mathbf{v} bedeuten. Es ist klar, daß die Richtung von \mathbf{v} nicht notwendigerweise mit der Richtung der x -Achse übereinstimmen muß, so daß die Gleichungen (7.155) und (7.156) auch für den Fall einer allgemeinen (eigentlichen) Lorentz-Transformation gelten. Mit

$$\mathbf{E}_{\perp} = \mathbf{E} - \mathbf{E}_{\parallel}, \quad \mathbf{E}_{\parallel} = \frac{\mathbf{v} \mathbf{v}}{v^2} \cdot \mathbf{E} \quad (7.157)$$

[vgl. (7.42) und (7.43)] lassen sich dann die Gleichungen (7.155) und (7.156) zu dem Transformationsgesetz

$$\mathbf{E}' = \gamma \left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\mathbf{v} \mathbf{v}}{v^2} \cdot \mathbf{E} \right) \quad (7.158)$$

zusammenfassen. Die Gleichung stellt (für konstantes $\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{v}$) die relativistische Verallgemeinerung der Gleichung (2.158) dar.

Analog können die Komponenten des \mathbf{B}' -Feld aus F'^{32} , F'^{13} und F'^{21} bestimmt werden:

$$F'^{32} = F^{32} \quad \rightsquigarrow \quad B'_x = B_x, \quad (7.159)$$

$$F'^{13} = \gamma (F^{13} - \beta F^{03}) \quad \rightsquigarrow \quad B'_y = \gamma \left(B_y + \frac{v}{c^2} E_z \right), \quad (7.160)$$

$$F'^{21} = \gamma (F^{21} - \beta F^{20}) \quad \rightsquigarrow \quad B'_z = \gamma \left(B_z - \frac{v}{c^2} E_y \right), \quad (7.161)$$

d.h.

$$\mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel}, \quad (7.162)$$

$$\mathbf{B}'_{\perp} = \gamma \left(\mathbf{B}_{\perp} - \frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \mathbf{E} \right). \quad (7.163)$$

Mit den zu (7.157) analogen Formeln für das \mathbf{B} -Feld gelangen wir schließlich zu folgendem Transformationsgesetz:

$$\mathbf{B}' = \gamma \left(\mathbf{B} - \frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \mathbf{E} - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\mathbf{v} \mathbf{v}}{v^2} \cdot \mathbf{B} \right) \quad (7.164)$$

Es stellt die relativistische Verallgemeinerung von (2.157) dar.

Die obigen Ergebnisse verdeutlichen noch einmal explizit den inneren Zusammenhang zwischen elektrischen und magnetischen Feldgrößen. Beide bilden in Form des Feldstärketensors eine Einheit. Die in einem Inertialsystem gemessene Aufteilung des elektromagnetischen Feldes in ein \mathbf{E} - und ein \mathbf{B} -Feld ist also systemspezifisch und nicht universell gültig. Es ist klar, daß eine „Vermischung“ von elektrischem magnetischem Feld eine entsprechende „Vermischung“ von Ladungs- und Stromdichte als Komponenten eines Vierervektors voraussetzt. So folgt mit (7.60) aus

$$j'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} j^{\nu} \quad (7.165)$$

für die Komponente j'^0

$$j'^0 = \Lambda^0_{\nu} j^{\nu} = \Lambda^0_0 j^0 + \Lambda^0_1 j^1 = \gamma (j^0 - \beta j^1), \quad (7.166)$$

d.h.

$$\varrho' = \gamma \left(\varrho - \frac{v}{c^2} j_x \right). \quad (7.167)$$

Analog folgt für j'^1

$$j'^1 = \Lambda^1_{\nu} j^{\nu} = \Lambda^1_0 j^0 + \Lambda^1_1 j^1 = \gamma (j^1 - \beta j^0), \quad (7.168)$$

d.h.

$$j'_x = \gamma (j_x - v \varrho). \quad (7.169)$$

Die Komponenten j^2 und j^3 bleiben unverändert, so daß

$$j'_y = j_y, \quad j'_z = j_z. \quad (7.170)$$

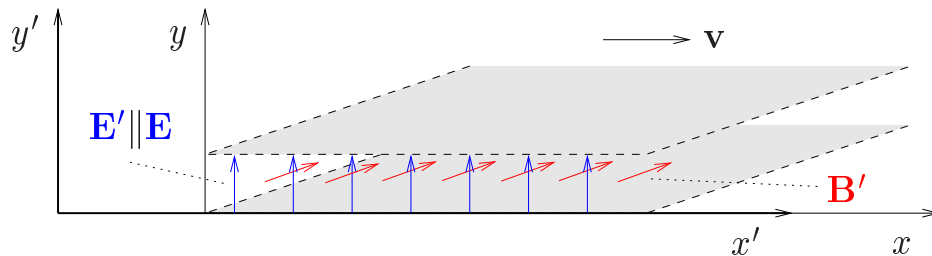
gilt. Die Gleichungen (7.167) sowie (7.169) und (7.170) implizieren die Transformationsgesetze:

$$\varrho' = \gamma \left(\varrho - \frac{\mathbf{v}}{c^2} \cdot \mathbf{j} \right) \quad (7.171)$$

$$\mathbf{j}' = \gamma (\mathbf{j} - \mathbf{v} \varrho) \quad (7.172)$$

Beispiel: bewegter Plattenkondensator

Obige Transformationsformeln sind nicht nur von grundsätzlichem Interesse, sondern sie können auch oftmals bei der Lösung von praktischen Problemen nützlich sein. Betrachten wir als einfaches Beispiel einen im



Laborsystem Σ' parallel zu seinen Platten mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} bewegten Plattenkondensator (siehe Abbildung). Im Ruhesystem Σ des Plattenkondensators verschwinde das magnetische Feld, während das (senkrecht auf \mathbf{v} stehende homogene) elektrische Feld von Null verschieden sei:

$$\Sigma : \quad \mathbf{E} \neq 0, \quad \mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{B} = 0.$$

Die im Laborsystem gemessenen Felder folgen dann unmittelbar durch Anwendung der Transformationsformeln (7.158) und (7.164) mit $\mathbf{v} \rightarrow -\mathbf{v}$:

$$\mathbf{E}' = \gamma \mathbf{E} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \mathbf{E}, \quad (7.173)$$

$$\mathbf{B}' = \gamma \frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \mathbf{E} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \mathbf{E}. \quad (7.174)$$

Zusätzlich zum (homogenen) elektrischen Feld tritt also auch ein (homogenes) magnetisches Feld auf. Beide stehen senkrecht aufeinander. Verschwindet im Ruhesystem des Plattenkondensators die Stromdichte, muß im Laborsystem gemäß (7.171) und (7.172) neben der Ladungsdichte

$$\varrho' = \gamma \varrho = \frac{\varrho}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (7.175)$$

die Stromdichte

$$\mathbf{j}' = \gamma \mathbf{v} \varrho = \frac{\mathbf{v} \varrho}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (7.176)$$

herrschen.

Kapitel 8

Hamilton-Prinzip und Lagrange-Gleichungen

In unserem bisherigen Studium der vielfältigen elektromagnetischen Erscheinungen sind wir stets von den Maxwell-Gleichungen als den Grundpostulaten der Theorie ausgegangen. Wie in der Mechanik (wo die Newtonschen Axiome eine ähnlich zentrale Rolle wie die Maxwell-Gleichungen in der Elektrodynamik spielen) kann auch in der Elektrodynamik ein Schritt weiter in der Abstraktion gegangen werden und eine Lagrange-Funktion an die Spitze gestellt werden, die – auf der Grundlage des Hamilton-Prinzips – die Feldgleichungen in Form von Lagrange-Gleichungen liefert. Die Maxwellschen Feldgleichungen und die Bewegungsgleichungen der Mechanik sind bekanntlich über die materiellen Ladungen und Ströme miteinander gekoppelt und bilden eine einheitliche Theorie zur Beschreibung von aus elektromagnetischen Feldern und materiellen Teilchen bestehenden gekoppelten Gesamtsystemen. Die Untersuchung solcher gekoppelter Systeme ist strenggenommen der eigentliche Gegenstand der Elektrodynamik. Ausgangspunkt dafür ist in der Regel die Lagrange- bzw. Hamilton-Funktion des betrachteten gekoppelten Gesamtsystems.

8.1 Freies Maxwell-Feld

Wir wollen zunächst wieder elektromagnetische Felder bei vorgegebenen Ladungen und Strömen betrachten und somit die (dynamische)

Rückwirkung der Felder auf die Bewegung der geladenen Teilchen unberücksichtigt lassen. In der Punktmechanik enthält bekanntlich die Lagrange-Funktion als Funktion der (generalisierten) Teilchenkoordinaten und -geschwindigkeiten die relevante Information über ein Teilchensystem. In einer Feldtheorie tritt an ihre Stelle zunächst eine Lagrange-Dichte (\mathcal{L}), wobei in der Elektrodynamik die Potentiale sowie ihre zeitlichen als auch (nunmehr) räumlichen Ableitungen die Rolle der Variablen übernehmen,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(A_\mu, \partial_\nu A_\mu). \quad (8.1)$$

Die Lagrange-Funktion (genauer das Lagrange-Funktional) ist dann das 4-dimensionale Volumenintegral über die Lagrange-Dichte, und das Hamilton-Prinzip lautet

$$\delta \int d^4x \mathcal{L} = 0 \quad (8.2)$$

($d^4x = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$) mit der Maßgabe, daß $\delta A_\nu = 0$ auf dem Rand zu setzen ist. Dementsprechend lauten die Lagrange-Gleichungen:

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = 0} \quad (8.3)$$

Hinsichtlich der Konstruktion der Lagrange-Dichte ist zu fordern, daß sie ein Minkowski-Skalar ist, d.h. eine Invariante unter Lorentz-Transformationen.¹ Ein elektromagnetisches Feld ist durch seinen Feldstärketensor vollständig bestimmt. Der einfachste Skalar, der aus diesem konstruiert werden kann, ist $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$, wobei mit dem Potentialansatz (7.127)

$$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \quad (8.4)$$

¹Man beachte, daß das vierdimensionale Volumenelement d^4x ebenfalls ein Minkowski-Skalar ist, denn es gilt $d^4x' = |\det \partial_\nu x'^\mu| d^4x$ mit $\det \partial_\nu x'^\mu = \det L^\mu_\nu = \pm 1$. Somit ist die Wirkung $\sim \int d^4x \mathcal{L}$ ebenfalls ein Minkowski-Skalar, so daß das Hamilton-Prinzip in der Form (8.2) in jedem Inertialsystem gültig ist.

gilt. Bekanntlich sichert der Potentialansatz (7.127), daß die homogenen Maxwell-Gleichungen (7.133) automatisch erfüllt sind und somit nur noch die inhomogenen Maxwell-Gleichungen (7.132) von Interesse sind. Der einfachste Minkowski-Skalar zur Beschreibung der verbleibenden Wechselwirkung der Felder mit den Ladungen und Strömen ist $j^\mu A_\mu$. Es ist deshalb naheliegend, die Lagrange-Dichte additiv aus zwei Termen zusammensetzen, wobei der erste, das freie Feld beschreibende Term proportional zu $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ und der zweite, die Kopplung des Feldes an die Ladungen und Ströme beschreibende Term proportional zu $j^\mu A_\mu$ ist:²

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - j^\mu A_\mu \quad (8.5)$$

Die daraus folgenden Lagrange-Gleichungen sind in der Tat die inhomogenen Maxwell-Gleichungen (7.132). Offensichtlich ist

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = -j^\nu. \quad (8.6)$$

Ferner finden wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\sigma\tau}} \frac{\partial F_{\sigma\tau}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \\ &= -\frac{1}{2\mu_0} F^{\sigma\tau} (\delta_\sigma^\mu \delta_\tau^\nu - \delta_\tau^\mu \delta_\sigma^\nu) = -\frac{1}{\mu_0} F^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (8.7)$$

d.h.

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -\frac{1}{\mu_0} \partial_\mu F^{\mu\nu}. \quad (8.8)$$

Damit lauten die Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -j^\nu + \frac{1}{\mu_0} \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \quad (8.9)$$

bzw.

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu. \quad (8.10)$$

²In der Gleichung (8.5) müssen die Komponenten des Feldstärketensors als durch die Ableitungen der Viererpotentialkomponenten gemäß (8.4) ausgedrückt gedacht werden.

Anmerkungen

- In den obigen Gleichungen ist von keinerlei Eichbedingung für die Potentiale Gebrauch gemacht. Wird insbesondere die Lorentz-Eichung (7.117) verwendet, führen die Lagrange-Gleichungen (8.9) erwartungsgemäß auf die forminvarianten Potentialgleichungen (7.121).
- Unter Verwendung von (7.129) [und (7.130)] ist unschwer zu zeigen, daß die Lagrange-Dichte des freien Maxwell-Feldes

$$\mathcal{L}_F = -\frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (8.11)$$

ausgedrückt durch das **E**- und **B**-Feld

$$\mathcal{L}_F = \frac{1}{2} (\varepsilon_0 \mathbf{E}^2 - \mu_0^{-1} \mathbf{B}^2) \quad (8.12)$$

lautet und somit physikalisch die Differenz aus elektrischer und magnetischer Feldenergiedichte darstellt.

- Der Wechselwirkungsterm

$$\mathcal{L}_W = -j^\mu A_\mu, \quad (8.13)$$

gemäß (7.114) und (7.115) ausgedrückt durch skalares Potential und Vektorpotential sowie Ladungs- und Stromdichte, lautet:

$$\mathcal{L}_W = -\rho\varphi + \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} \quad (8.14)$$

- Räumliche Integration der Lagrange-Dichte liefert die Lagrange-Funktion

$$L = \int d^3r \mathcal{L}. \quad (8.15)$$

Mit dieser (unter Lorentz-Transformationen nicht invarianten) Lagrange-Funktion kann das (invariante) Hamilton-Prinzip (8.2) in der aus der Mechanik vertrauten (kanonischen) Form

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt L = 0 \quad (8.16)$$

geschrieben werden.

8.2 Feld-Teilchen-Wechselwirkung

Um die Dynamik der Feld-Teilchen-Wechselwirkung in die Theorie einzubeziehen, muß die obige Lagrange-Funktion noch durch einen die freie Teilchenbewegung beschreibenden Term ergänzt werden. Wir werden uns im folgenden der Übersichtlichkeit wegen auf ein Teilchen beschränken und beginnen im Anschluß an die übliche Mechanik mit einem nichtrelativistischen Teilchen.

8.2.1 Nichtrelativistische Teilchen

Betrachten wir ein (Punkt-)Teilchen der Ladung q und der Masse m_q , das sich entlang einer Bahnkurve $\mathbf{s} = \mathbf{s}(t)$ bewegt. Die Lagrange-Funktion des kräftefreien Teilchens ist die kinetische Energie:

$$L_T = \frac{1}{2} m_q \dot{\mathbf{s}}^2 \quad (8.17)$$

Wie wir gerade gesehen haben, lautet die Lagrange-Funktion des freien elektromagnetischen Feldes

$$L_F = \int d^3r \mathcal{L}_F \quad (8.18)$$

mit \mathcal{L}_F gemäß (8.11). Da für (nichtrelativistische) Punktteilchen

$$\varrho = q \delta(\mathbf{r} - \mathbf{s}) \quad (8.19)$$

sowie

$$\mathbf{j} = q\dot{\mathbf{s}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{s}) \quad (8.20)$$

angenommen werden kann, ergibt sich mit (8.14) für den Wechselwirkungsterm:

$$L_W = \int d^3r \mathcal{L}_W = -q\varphi(\mathbf{s}, t) + q\dot{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{s}, t) \quad (8.21)$$

Die Lagrange-Funktion für das aus elektromagnetischem Feld und Teilchen bestehende gekoppelte Gesamtsystem lautet dann:

$$L = L_T + L_F + L_W \quad (8.22)$$

Wie wir bereits wissen, liefert die Lagrange-Funktion (8.22) die richtigen Feldgleichungen.³ Es bleibt deshalb zu prüfen, ob sie auch die richtigen Bewegungsgleichungen für das Teilchen liefert. Es seien $s^1 = s_x$, $s^2 = s_y$ und $s^3 = s_z$ die drei kartesischen Komponenten des Ortsvektors \mathbf{s} . Die Lagrange-Gleichungen für die Teilchenbewegung sind

$$\frac{\partial L}{\partial s^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{s}^i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (8.23)$$

Es ist unschwer zu sehen, daß die partiellen Ableitungen von L nach s^i und \dot{s}^i

$$\frac{\partial L}{\partial s^i} = -q \frac{\partial \varphi}{\partial s^i} + q\dot{\mathbf{s}} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial s^i} \quad (8.24)$$

und

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{s}^i} = m_q \dot{s}_i + q A_i \quad (8.25)$$

³Für die Herleitung der Feldgleichungen ist die kinetische Teilchenenergie in (8.22) offensichtlich unerheblich. Analog ist für die Herleitung der Bewegungsgleichungen des Teilchens nur der Teil $L_{TW} = L_T + L_W$ der Lagrange-Funktion von Bedeutung.

lauten. Wir bilden die totale Zeitableitung der letzten Gleichung und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{s}^i} &= m_q \ddot{s}_i + q \frac{dA_i}{dt} \\ &= m_q \ddot{s}_i + q \left(\frac{\partial A_i}{\partial t} + \dot{\mathbf{s}} \cdot \nabla A_i \right). \end{aligned} \quad (8.26)$$

Aus (8.24) und (8.26) folgt dann

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial s^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{s}^i} &= q \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial s^i} - \frac{\partial A_i}{\partial t} \right. \\ &\quad \left. + \dot{\mathbf{s}} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial s^i} - \dot{\mathbf{s}} \cdot \nabla A_i \right) - m_q \ddot{s}_i = 0, \end{aligned} \quad (8.27)$$

d.h.

$$m_q \ddot{s}_i = q \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial s^i} - \frac{\partial A_i}{\partial t} + \dot{\mathbf{s}} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial s^i} - \dot{\mathbf{s}} \cdot \nabla A_i \right). \quad (8.28)$$

Wir erhalten also die vektorielle Bewegungsgleichung

$$m_q \ddot{\mathbf{s}} = q \left[-\nabla \varphi(\mathbf{s}, t) - \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{s}, t)}{\partial t} + \nabla \mathbf{A}(\mathbf{s}, t) \cdot \dot{\mathbf{s}} - \dot{\mathbf{s}} \cdot \nabla \mathbf{A}(\mathbf{s}, t) \right] \quad (8.29)$$

bzw.

$$m_q \ddot{\mathbf{s}} = q \left\{ -\nabla \varphi(\mathbf{s}, t) - \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{s}, t)}{\partial t} + \dot{\mathbf{s}} \times [\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{s}, t)] \right\} \quad (8.30)$$

und somit unter Berücksichtigung des bekannten Zusammenhanges von Potentialen und Feldern [Gleichungen (6.76) und (6.77)] die erwartete Newtonsche Bewegungsgleichung

$$m_q \ddot{\mathbf{s}} = q \mathbf{E}(\mathbf{s}, t) + q \dot{\mathbf{s}} \times \mathbf{B}(\mathbf{s}, t) \quad (8.31)$$

mit der Kraft gemäß dem Lorentzschen Kraftgesetz, die gegebenenfalls noch durch eine äußere Kraft zu ergänzen ist. Es ist klar, daß im Falle mehrerer geladener Teilchen jedes Teilchen einer Bewegungsgleichung obiger Form unterliegt. Zusammen mit den Maxwell-Gleichungen stellen sie ein i. allg. hochgradig nichtlineares Gleichungssystem dar, das sich nur in speziellen Fällen in geschlossener Form lösen läßt.

8.2.2 Relativistische Teilchen

Die Newtonschen Bewegungsgleichungen der klassischen Mechanik sind gültig, solange die Teilchengeschwindigkeiten hinreichend klein im Vergleich zur Vakuumlichtgeschwindigkeit bleiben. In diesem Fall kann der Übergang von einem Inertialsystem zu einem zweiten Inertialsystem bekanntlich durch eine Galilei-Transformation vollzogen werden. Damit die Bewegungsgleichungen für beliebige Geschwindigkeiten (mit der Lichtgeschwindigkeit als obere Grenzgeschwindigkeit) in jedem Inertialsystem die gleiche Form besitzen, müssen sie forminvariant unter Lorentz-Transformationen sein, was die Newtonschen Bewegungsgleichungen offensichtlich nicht sind. Sie müssen folglich derart abgeändert werden, daß sie in Form von Vektor- bzw. Tensorgleichungen im Minkowski-Raum darstellbar sind. Es ist klar, daß die abgeänderte Theorie im Grenzfall kleiner Geschwindigkeiten in die Newtonsche Theorie übergehen muß. Glücklicherweise muß die Newtonsche Theorie im Grunde genommen nur wenig modifiziert werden, um die geforderte Kovarianz sicherzustellen.

8.2.2.1 Relativistische Kinematik

Bevor wir jedoch dazu kommen, seien einige Bemerkungen zur relativistischen Kinematik eines Teilchens vorangestellt. Wir fassen zunächst wieder die räumlichen Komponenten des die Bahnkurve beschreibenden Ortsvektors \mathbf{s} des Teilchens und die Zeit zu dem Vierervektor

$$(s^\mu) \hat{=} (ct, \mathbf{s}) \quad (8.32)$$

zusammen. Es ist klar, daß

$$s^\mu s_\mu = c^2 t^2 - \mathbf{s}^2 \quad (8.33)$$

als Lorentz-Skalar invariant unter Lorentz-Transformationen ist. Das gilt dann aber auch für das pseudo-euklidische Linienelement

$$ds = \sqrt{ds^\mu ds_\mu} = \sqrt{c^2 dt^2 - d\mathbf{s}^2}. \quad (8.34)$$

Wir formen diese Gleichung etwas um,

$$ds = \sqrt{c^2 dt^2 \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \right]} = c dt \sqrt{1 - \frac{\dot{s}^2}{c^2}}, \quad (8.35)$$

und sehen, daß auch

$$\boxed{d\tau = \frac{ds}{c} = \sqrt{1 - \frac{\dot{s}^2}{c^2}} dt} \quad (8.36)$$

ein Lorentz-Skalar ist. Die Größe τ wird in diesem Zusammenhang als **Eigenzeit** bezeichnet. Es sollte darauf hingewiesen werden, daß bei der im weiteren öfters verwendeten abkürzenden Schreibweise

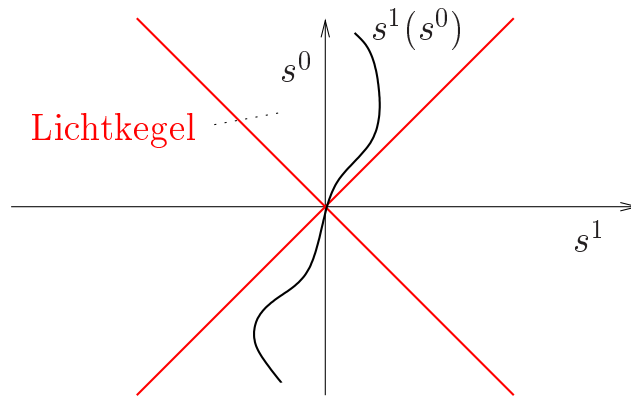
$$\gamma = \left(1 - \frac{\dot{s}^2}{c^2} \right)^{-1/2} \quad (8.37)$$

\dot{s} nicht die Bedeutung einer konstanten Relativgeschwindigkeit (wie etwa in den Formeln der Lorentz-Transformation) besitzt, sondern die Bahngeschwindigkeit des Teilchens ist, die ein Beobachter in einem Inertialsystem zur Zeit t mißt. Wäre \dot{s} konstant, könnte einfach auf das Inertialsystem transformiert werden, in dem das Teilchen ruht, und die Gleichung (8.36) brächte einfach den Effekt der Zeitdilatation zum Ausdruck [vgl. (7.113)].

Bekanntlich ist in der Euklidischen Geometrie die (Bogen-)Länge eines Kurvenstückes nicht nur vom Anfangspunkt und vom Endpunkt abhängig, sondern auch vom Kurvenverlauf zwischen beiden Punkten. Analog ist (und zwar im Gegensatz zur Newtonschen absoluten Zeit) die über die pseudoeuklidische Bogenlänge definierte Eigenzeit nicht integrierbar, d.h. das Integral

$$\Delta\tau = \int_{E^{(1)}}^{E^{(2)}} \sqrt{1 - \frac{\dot{s}^2}{c^2}} dt \quad (8.38)$$

hängt außer von den Weltpunkten $E^{(1)}$ und $E^{(2)}$ noch von der *Weltlinie* $s^k(s^0)$ ab.



Da τ ein Viererskalar ist, ist

$$\boxed{u^\mu = \frac{ds^\mu}{d\tau}} \quad (8.39)$$

ein Vierervektor,

$$(u^\mu) \hat{=} \gamma(c, \dot{\mathbf{s}}), \quad (8.40)$$

nämlich die *Vierergeschwindigkeit*. Folglich muß $u^\mu u_\mu$ ein Viererskalar sein,

$$u^\mu u_\mu = \gamma^2 (c^2 - \dot{\mathbf{s}}^2) = \frac{c^2 - \dot{\mathbf{s}}^2}{1 - \frac{\dot{\mathbf{s}}^2}{c^2}} = c^2, \quad (8.41)$$

d.h., die Norm von u^μ ist eine (universelle) Konstante. Analog kann die *Viererbeschleunigung* als

$$\boxed{a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{d^2 s^\mu}{d\tau^2}} \quad (8.42)$$

definiert werden. Da aus (8.41)

$$d(u^\mu u_\mu) = u^\mu du_\mu + u_\mu du^\mu = 2u_\mu du^\mu = 0 \quad (8.43)$$

folgt, gilt also der universelle (invariante) Zusammenhang:

$$\boxed{u_\mu a^\mu = 0} \quad (8.44)$$

Es liegt dann nahe, den *Viererimpuls*

$$\boxed{p^\mu = m_0 u^\mu} \quad (8.45)$$

zu definieren, wobei m_0 die (in jedem Inertialsystem gleiche und somit skalare) Ruhemasse des Teilchens ist. Wird nunmehr die bewegte Masse

$$\boxed{m = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{\dot{\mathbf{s}}^2}{c^2}}}} \quad (8.46)$$

eingeführt, kann der Viererimpuls in der Form

$$(p^\mu) \hat{=} (mc, m\dot{\mathbf{s}}) = (mc, \mathbf{p}) \quad (8.47)$$

dargestellt werden, so daß sich insbesondere die drei räumlichen Komponenten als „normale“ Impulskomponenten schreiben lassen. Aus (8.46) ist ersichtlich, daß die bewegte Masse für $\dot{\mathbf{s}} = 0$ mit der Ruhemasse übereinstimmt, mit wachsender Geschwindigkeit zunimmt und in der Grenze $|\dot{\mathbf{s}}| \rightarrow c$ über alle Maßen anwächst.

8.2.2.2 Energie

Die vierdimensionale Formulierung der Maxwell-Theorie hat gezeigt (Abschnitt 7.5), daß in einer relativistischen Theorie offensichtlich Dreierimpuls und Energie zusammengehören. Demzufolge schreiben wir (8.47) als

$$\boxed{(p^\mu) \hat{=} (E/c, \mathbf{p})} \quad (8.48)$$

und identifizieren E mit der Teilchenenergie. Mit (8.41) folgt aus (8.45)

$$p^\mu p_\mu = m_0^2 c^2. \quad (8.49)$$

Andererseits ist gemäß (8.48)

$$p^\mu p_\mu = E^2/c^2 - \mathbf{p}^2. \quad (8.50)$$

Der Vergleich beider Gleichungen liefert

$$E^2 = c^2 \mathbf{p}^2 + E_0^2 \quad (8.51)$$

mit

$$E_0 = m_0 c^2, \quad (8.52)$$

und somit gilt folgender relativistischer Zusammenhang zwischen Teilchenenergie und -impuls:

$$E = \sqrt{c^2 \mathbf{p}^2 + E_0^2} \quad (8.53)$$

Offensichtlich ist E_0 die (in jedem Inertialsystem gleiche) Ruheenergie des Teilchens, so daß die Differenz

$$W_{\text{kin}} = E - E_0 = m_0 c^2 (\gamma - 1) = m_0 c^2 \left[\left(1 - \frac{\dot{\mathbf{s}}^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right] \quad (8.54)$$

als kinetische Energie des Teilchens angesehen werden kann. Entwickeln wir W_{kin} nach Potenzen von $|\dot{\mathbf{s}}|/c$,

$$W_{\text{kin}} = m_0 \dot{\mathbf{s}}^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{8} \frac{\dot{\mathbf{s}}^2}{c^2} + \dots \right), \quad (8.55)$$

so erhalten wir im nichtrelativistischen Grenzfall $|\dot{\mathbf{s}}|/c \rightarrow 0$ das vertraute Resultat

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m_0 \dot{\mathbf{s}}^2. \quad (8.56)$$

Es ist also tatsächlich sinnvoll, die Größe $E = mc^2$ als Teilchenenergie zu interpretieren. Diese Energie kann den Minimalwert $E_0 = m_0 c^2$

prinzipiell nicht unterschreiten; Masse und Energie sind offensichtlich äquivalent (Einsteinsche Äquivalenzformel).

Die relativistische Energieformel (8.53) ist auch für Teilchen mit verschwindender Ruhemasse ($m_0 = 0$) sinnvoll, wenn

$$E = W_{\text{kin}} = c|\mathbf{p}| \quad (8.57)$$

gilt. Auf den ersten Blick könnte man annehmen, daß in diesem Fall wegen $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{s}}$ der Impuls und somit auch die Energie verschwinden. Das ist jedoch nicht der Fall. So folgt aus

$$\mathbf{p} = \gamma m_0 \dot{\mathbf{s}} \quad \rightsquigarrow \quad \mathbf{p}^2 = \frac{m_0^2 c^2 \dot{\mathbf{s}}^2}{c^2 - \dot{\mathbf{s}}^2} \quad (8.58)$$

$$|\dot{\mathbf{s}}| = \frac{c|\mathbf{p}|}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m_0^2 c^2}}, \quad (8.59)$$

so daß sich für $m_0 = 0$ und beliebiges $|\mathbf{p}|$ immer $|\dot{\mathbf{s}}| = c$ ergibt. Masse-lose Teilchen können also auch einen Impuls (und damit eine Energie) besitzen, bewegen sich jedoch grundsätzlich mit Lichtgeschwindigkeit. Folglich kann für derartige (á priori relativistische) Teilchen keine sinnvolle Newtonsche Asymptotik existieren.

Wie wir wissen, breiten sich elektromagnetische Wellen im Vakuum mit der Grenzgeschwindigkeit c aus. Wegen des generellen *Welle-Teilchen-Dualismus* der Quantentheorie besitzt elektromagnetische Strahlung sowohl Wellen- als auch Teilchencharakter. Die obigen Ergebnisse legen dann nahe, daß die entsprechenden „Teilchen“ (Photonen) die Ruhemasse $m_0 = 0$ besitzen, was auch tatsächlich der Fall ist.

8.2.2.3 Lagrange-Funktion

So wie für das Maxwell-Feld muß auch für relativistische Teilchen und ihre Wechselwirkung mit dem Feld das Hamilton-Prinzip relativistisch kovariant formuliert werden. Es sei $L^{(r)} \equiv L_{\text{T}}^{(r)} + L_{\text{W}}^{(r)}$ die für die Teilchenbewegung in einem (vorgegebenen) elektromagnetischen Feld relevante relativistische Lagrange-Funktion. Da das Wirkungsintegral

ein Lorentz-Skalar sein muß, setzen wir das Hamilton-Prinzip (für die Teilchbewegung) in der Form

$$\delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau L^{(r)} = 0 \quad (8.60)$$

an, d.h., wir ersetzen das gewöhnliche Zeitintegral durch das entsprechende Eigenzeitintegral und fordern, daß

$$L^{(r)} = L^{(r)}(s^\mu, u^\mu, \tau) \quad (8.61)$$

ein Lorentz-Skalar ist.⁴ Es ist klar, daß das Hamilton-Prinzip in obiger Form in jedem Inertialsystem gültig ist. In diesem Zusammenhang ist darauf hinzuweisen, daß das Hamilton-Prinzip auch in der aus der nichtrelativistischen Mechanik bekannten (kanonischen) Form

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt L = 0 \quad (8.62)$$

angewendet werden kann, wobei wegen (8.36) offenbar

$$L = \gamma^{-1} L^{(r)} = \sqrt{1 - \frac{\dot{\mathbf{s}}^2}{c^2}} L^{(r)} \quad (8.63)$$

zu setzen ist. Die so konstruierte Lagrange-Funktion L ist relativistisch korrekt, jedoch kein Lorentz-Skalar.

Wegen der Forderung, daß das Wirkungsintegral in (8.60) im nichtrelativistischen Grenzfall ($|\dot{\mathbf{s}}|/c \ll 1$) in ein nichtrelativistisches Wirkungsintegral von der Art wie in (8.62) gemäß

$$L^{(r)}(s^\mu, u^\mu, \tau) d\tau \implies L^{(\text{nr})}(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}, t) dt \quad (8.64)$$

übergehen soll, muß also der Übergang von der relativistischen Lagrange-Funktion $L^{(r)}$ zur nichtrelativistischen Lagrange-Funktion $L^{(\text{nr})}$ entsprechend der Vorschrift

$$L = \gamma^{-1} L^{(r)}(s^\mu, u^\mu, \tau) \implies L^{(\text{nr})}(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}, t) \quad (8.65)$$

⁴Die explizite τ -Abhängigkeit resultiert aus der Zeitabhängigkeit des elektromagnetischen Feldes.

vollzogen werden.

Betrachten wir zunächst ein freies Teilchen, für das $L^{(\text{nr})}$ einfach die nichtrelativistische kinetische Energie ist [$m_q \equiv m_0$ in (8.17)]. Da eine Konstante für die Lagrange-Funktion bedeutungslos ist, kann natürlich auch

$$L^{(\text{nr})} = \frac{1}{2}m_0\dot{\mathbf{s}}^2 - m_0c^2 \quad (8.66)$$

geschrieben werden. Es liegt deshalb nahe, die Lagrange-Funktion eines freien Teilchens als den Lorentz-Skalar

$$L^{(\text{r})} = -m_0c^2 = -m_0u^\mu u_\mu \quad (8.67)$$

anzusetzen [vgl. (8.41)], da dann

$$L = \gamma^{-1}L^{(\text{r})} = -\gamma^{-1}m_0c^2 = -m_0c^2\sqrt{1 - \frac{\dot{\mathbf{s}}^2}{c^2}} \quad (8.68)$$

im nichtrelativistischen Grenzfall gemäß

$$L = -m_0c^2 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\dot{\mathbf{s}}^2}{c^2} - \frac{1}{8} \frac{\dot{\mathbf{s}}^4}{c^4} - \dots \right) \quad (8.69)$$

wie gefordert in $L^{(\text{nr})}$ übergeht.

Es ist dann schnell einzusehen, daß die Hinzunahme der Wechselwirkung des Teilchens mit dem Maxwell-Feld auf eine Lagrange-Funktion der Gestalt

$$L^{(\text{r})} = -m_0c^2 - qu^\mu A_\mu(s^\nu) \quad (8.70)$$

führt, denn es gilt wegen (7.115) und (8.40)

$$L = \gamma^{-1}L^{(\text{r})} = -\gamma^{-1}m_0c^2 + L_W \quad (8.71)$$

mit dem bekannten Wechselwirkungsterm L_W aus (8.21).

Wir wollen noch die dem Teilchen zuzuordnende Viererstromdichte $j^\mu(x^\nu)$ bestimmen. Offensichtlich müssen die Wechselwirkungsterme in (8.5) und (8.70) den gleichen Beitrag zum Wirkungsintegral liefern,

$$q \int d\tau u^\mu A_\mu(s^\nu) = \frac{1}{c} \int d^4x j^\mu(x^\nu) A_\mu(x^\nu). \quad (8.72)$$

Dies ist der Fall, wenn

$$j^\mu(x^\nu) = \frac{qc}{u^0(\tau)} \delta[\mathbf{r} - \mathbf{s}(\tau)] u^\mu(\tau) \quad (8.73)$$

gesetzt wird, wovon man sich unschwer überzeugt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \int d^4x j^\mu(x^\nu) A_\mu(x^\nu) &= q \int d^4x [u^0(\tau)]^{-1} \delta[\mathbf{r} - \mathbf{s}(\tau)] u^\mu(\tau) A_\mu(x^\nu) \\ &= q \int dx^0 \int d^3r \frac{d\tau}{dx^0} \delta[\mathbf{r} - \mathbf{s}(\tau)] u^\mu(\tau) A_\mu(x^\nu) \\ &= q \int d\tau u^\mu(\tau) A_\mu(s^\nu) \end{aligned} \quad (8.74)$$

($s^0 = x^0 = ct$). Mittels der 4-dimensionalen δ -Funktion nimmt $j^\mu(x^\nu)$ dann die folgende Form an:

$$j^\mu(x^\nu) = qc \int d\tau u^\mu(\tau) \delta^{(4)}[x^\nu - s^\nu(\tau)] \quad (8.75)$$

Offensichtlich gilt

$$\begin{aligned} j^\mu(x^\nu) &= qc \int ds^0 \frac{d\tau}{ds^0} \delta(x^0 - s^0) \delta[\mathbf{r} - \mathbf{s}(\tau)] u^\mu(\tau) \\ &= qc \frac{d\tau}{dx^0} \delta[\mathbf{r} - \mathbf{s}(\tau)] u^\mu(\tau) = \frac{qc}{u^0(\tau)} \delta[\mathbf{r} - \mathbf{s}(\tau)] u^\mu(\tau), \end{aligned} \quad (8.76)$$

d.h., (8.75) führt exakt auf (8.73).

8.2.2.4 Bewegungsgleichungen

Um die relativistischen Bewegungsgleichungen für (geladene) Teilchen abzuleiten, gehen wir vom Hamilton-Prinzip in der Form (8.60) aus. Während in der nichtrelativistischen Theorie die δs^i und $\delta \dot{s}^i$ (mit Ausnahme an den Integrationsgrenzen) beliebig gewählt werden können, ist dies in der relativistischen Theorie wegen (8.41) für die Variation

der Vierergeschwindigkeit u^μ offensichtlich nicht der Fall. Wir umgehen dieses Problem, indem wir anstelle der Eigenzeit τ einen Parameter $\tilde{\tau}$ verwenden,

$$\tilde{\tau} = \tilde{\tau}(\tau). \quad (8.77)$$

Da τ ein Lorentz-Skalar ist, ist $\tilde{\tau}$ natürlich auch ein Lorentz-Skalar. Wir definieren nun eine neue, nicht normierte Vierergeschwindigkeit

$$\tilde{u}^\mu = \frac{ds^\mu}{d\tilde{\tau}} = \frac{ds^\mu}{d\tau} \frac{d\tau}{d\tilde{\tau}} = u^\mu \frac{d\tau}{d\tilde{\tau}}. \quad (8.78)$$

Für diese Vierergeschwindigkeit gilt dann

$$\tilde{u}^2 \equiv \tilde{u}^\mu \tilde{u}_\mu = u^\mu u_\mu \left(\frac{d\tau}{d\tilde{\tau}} \right)^2 = c^2 \left(\frac{d\tau}{d\tilde{\tau}} \right)^2. \quad (8.79)$$

Da über $d\tau/d\tilde{\tau}$ frei verfügt werden kann, darf $\tilde{u}^\mu \tilde{u}_\mu$ (d.h. die Norm von \tilde{u}^μ) als nicht eingeschränkt angesehen werden, so daß die freie Variation der \tilde{u}^μ erlaubt ist. Gemäß (8.79) können wir also im weiteren

$$\frac{d\tau}{d\tilde{\tau}} = \frac{1}{c} \sqrt{\tilde{u}^2} \quad (8.80)$$

und gemäß (8.78)

$$\tilde{u}^\mu = \frac{u^\mu}{c} \sqrt{\tilde{u}^2} \quad (8.81)$$

setzen.

Mit

$$L^{(r)} d\tau = L^{(r)} \frac{d\tau}{d\tilde{\tau}} d\tilde{\tau} = \frac{1}{c} L^{(r)} \sqrt{\tilde{u}^2} d\tilde{\tau} \quad (8.82)$$

können wir die Gleichung (8.60) in die Form

$$\delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau L^{(r)} = \delta \frac{1}{c} \int_{\tilde{\tau}_1}^{\tilde{\tau}_2} d\tilde{\tau} L^{(r)} \sqrt{\tilde{u}^2} = 0 \quad (8.83)$$

bringen, d.h.

$$\delta \int_{\tilde{\tau}_1}^{\tilde{\tau}_2} d\tilde{\tau} \tilde{L}^{(r)}(s^\mu, \tilde{u}^\mu, \tilde{\tau}) = 0 \quad (8.84)$$

mit:

$$\tilde{L}^{(r)}(s^\mu, \tilde{u}^\mu, \tilde{\tau}) = \frac{1}{c} L^{(r)}(s^\mu, u^\mu, \tau) \sqrt{\tilde{u}^2} \quad (8.85)$$

Die Variationen δs^μ und $\delta \tilde{u}^\mu$ sind bis auf die üblichen Einschränkungen

$$\delta s^\mu(\tilde{\tau}_1) = \delta s^\mu(\tilde{\tau}_2) = 0 \quad (8.86)$$

willkürlich. Die weitere Auswertung erfolgt nun wie gewohnt und liefert die Bewegungsgleichungen in Form von Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{\partial \tilde{L}^{(r)}}{\partial s^\mu} - \frac{d}{d\tilde{\tau}} \frac{\partial \tilde{L}^{(r)}}{\partial \tilde{u}^\mu} = 0 \quad (8.87)$$

Da $\tilde{L}^{(r)}$ und $\tilde{\tau}$ Lorentz-Skalare sind, stellen die beiden Terme in (8.87) offensichtlich Lorentz-Vektoren dar.

Im uns interessierenden Fall der Bewegung eines (mit dem elektromagnetischen Feld wechselwirkenden) geladenen Teilchen ergibt sich gemäß (8.85) mit $L^{(r)}$ aus (8.70) sowie unter Berücksichtigung von (8.81)

$$\begin{aligned} \tilde{L}^{(r)} &= -m_0 c \sqrt{\tilde{u}^2} - \frac{q}{c} u^\nu \sqrt{\tilde{u}^2} A_\nu(s^\mu) \\ &= -m_0 c \sqrt{\tilde{u}^2} - q \tilde{u}^\nu A_\nu(s^\mu). \end{aligned} \quad (8.88)$$

Dementsprechend finden wir für die partiellen Ableitungen von $\tilde{L}^{(r)}$ nach s^μ und \tilde{u}^μ

$$\frac{\partial \tilde{L}^{(r)}}{\partial s^\mu} = -q \tilde{u}^\nu \frac{\partial A_\nu}{\partial s^\mu}, \quad (8.89)$$

$$\frac{\partial \tilde{L}^{(r)}}{\partial \tilde{u}^\mu} = -m_0 c \frac{\tilde{u}_\mu}{\sqrt{\tilde{u}^2}} - q A_\mu. \quad (8.90)$$

Damit folgen gemäß (8.87) die Lagrange-Gleichungen

$$-q \tilde{u}^\nu \frac{\partial A_\nu}{\partial s^\mu} + \frac{d}{d\tilde{\tau}} \left(m_0 c \frac{\tilde{u}_\mu}{\sqrt{\tilde{u}^2}} + q A_\mu \right) = 0. \quad (8.91)$$

Wir gehen zu den ursprünglichen Variablen zurück und erhalten unter Berücksichtigung von (8.80) und (8.81) sowie (8.45) zunächst

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tilde{\tau}} \left(m_0 c \frac{\tilde{u}_\mu}{\sqrt{\tilde{u}^2}} \right) &= \frac{d}{d\tau} \left(m_0 c \frac{\tilde{u}_\mu}{\sqrt{\tilde{u}^2}} \right) \frac{d\tilde{\tau}}{d\tau} \\ &= \frac{d(m_0 u_\mu)}{d\tau} \frac{1}{c} \sqrt{\tilde{u}^2} = \frac{dp_\mu}{d\tau} \frac{1}{c} \sqrt{\tilde{u}^2}. \end{aligned} \quad (8.92)$$

Analog ergibt sich

$$\frac{d(qA_\mu)}{d\tilde{\tau}} = \frac{d(qA_\mu)}{d\tau} \frac{1}{c} \sqrt{\tilde{u}^2}. \quad (8.93)$$

Berücksichtigen wir ferner, daß

$$-q\tilde{u}^\nu \frac{\partial A_\nu}{\partial s^\mu} = -qu^\nu \frac{\partial A_\nu}{\partial s^\mu} \frac{1}{c} \sqrt{\tilde{u}^2} \quad (8.94)$$

gilt, so können wir (8.91) in der Form

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = q \left(\frac{\partial A_\nu}{\partial s^\mu} u^\nu - \frac{dA_\mu}{d\tau} \right) \quad (8.95)$$

schreiben. Führen wir die verbleibende totale Eigenzeitableitung unter Berücksichtigung von (8.39) aus,

$$\frac{dA_\mu}{d\tau} = \frac{\partial A_\mu}{\partial s^\nu} \frac{ds^\nu}{d\tau} = \frac{\partial A_\mu}{\partial s^\nu} u^\nu, \quad (8.96)$$

so geht (8.95) in

$$\boxed{\frac{dp_\mu}{d\tau} = q \left(\frac{\partial A_\nu}{\partial s^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial s^\nu} \right) u^\nu} \quad (8.97)$$

über. Wir erinnern uns an die Definition (7.128) des Feldstärketensors und erhalten die zu (8.97) äquivalente Form:

$$\boxed{\frac{dp_\mu}{d\tau} = q F_{\mu\nu}(s^\lambda) u^\nu} \quad (8.98)$$

Mit

$$K_\mu = K_\mu(s^\lambda, u^\nu) = qF_{\mu\nu}(s^\lambda) u^\nu \quad (8.99)$$

als Viererkraft ergibt sich schließlich:

$$\boxed{\frac{dp_\mu}{d\tau} = K_\mu} \quad (8.100)$$

Offensichtlich stellen die Gleichungen (8.100) ganz allgemein die relativistische Verallgemeinerung der Newtonschen Bewegungsgleichungen dar.⁵ Wir verwenden (7.130) sowie (8.40) und berechnen die Komponenten der Viererkraft (8.99). Wir beginnen mit den räumlichen Komponenten

$$K_i = qF_{i\nu}u^\nu \quad (8.101)$$

und finden z.B.

$$\begin{aligned} K_1 &= q(F_{10}u^0 + F_{12}u^2 + F_{13}u^3) \\ &= -q(E_x/c u^0 + B_z u^2 - B_y u^3) \\ &= -\gamma q(E_x + B_z \dot{s}_y - B_y \dot{s}_z) = -\gamma q(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{s}} \times \mathbf{B})_x, \end{aligned} \quad (8.102)$$

so daß sich – zusammen mit den entsprechenden Formeln für die Komponenten K_2 und K_3 – die räumlichen Komponenten der Viererkraft als proportional zu denen der Lorentz-Kraft erweisen:

$$(K^\mu) \hat{=} (K^0, \gamma \mathbf{F}) \quad (8.103)$$

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{s}} \times \mathbf{B}). \quad (8.104)$$

Für die verbliebene zeitliche Komponente

$$K_0 = qF_{0\nu}u^\nu \quad (8.105)$$

der Viererkraft finden wir

$$K_0 = q(F_{01}u^1 + F_{02}u^2 + F_{03}u^3)$$

⁵Die Viererkraft (auch Minkowski-Kraft genannt) kann dann auch noch explizit von τ abhängen.

$$\begin{aligned}
&= q (E_x/c u^1 + E_y/c u^2 + E_z/c u^3) \\
&= \gamma q (E_x \dot{s}_x + E_y \dot{s}_y + E_z \dot{s}_z) / c \\
&= \gamma \frac{q \mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{s}}}{c} = \gamma \frac{\mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{s}}}{c} = \gamma \frac{N}{c}.
\end{aligned} \tag{8.106}$$

Die zeitliche Komponente der Viererkraft ist also proportional zur Leistung, und somit gilt insgesamt:

$$(K^\mu) \hat{=} \gamma (\mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{s}}/c, \mathbf{F}) = \gamma (N/c, \mathbf{F}) \tag{8.107}$$

Berücksichtigen wir den Zusammenhang $d\tau = dt/\gamma$ zwischen Eigenzeit und gewöhnlicher Zeit [(8.36)], können wir

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = \gamma \frac{dp^\mu}{dt} \tag{8.108}$$

schreiben, so daß (8.100) auf

$$\gamma \frac{dp^\mu}{dt} = K^\mu \tag{8.109}$$

führt. Gemäß (8.107) liefern die drei räumlichen Komponenten die vektorielle Bewegungsgleichung

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}, \tag{8.110}$$

die im Vergleich zur nichtrelativistischen Mechanik tatsächlich nur „minimal“ dahingehend abgeändert ist, daß [gemäß (8.46) und (8.47)] die Teilchenmasse nunmehr als geschwindigkeitsabhängig anzusehen ist,

$$\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{s}}, \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{\dot{\mathbf{s}}^2}{c^2}}}. \tag{8.111}$$

Da gemäß (8.48) $p^0 = E/c$ mit

$$E = mc^2 \tag{8.112}$$

als der (nunmehr relativistischen) Teilchenenergie ist, liefert die zeitliche Komponente der Gleichung (8.100) zusammen mit (8.107) erwartungsgemäß die Energiebilanz

$$\frac{dE}{dt} = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{s}}. \quad (8.113)$$

Anmerkung

Gemäß (7.136) stellt die Lorentzsche Kraftdichte \mathbf{f} die räumlichen Komponenten eines Vierervektors f^μ dar. Dementsprechend ist die auf ein Teilchen wirkende Kraft durch

$$F^i = \int d^3r f^i \quad (8.114)$$

mit f^i gemäß (7.134) und (8.73) gegeben. Offensichtlich können die F^i nicht die räumlichen Komponenten der Viererkraft sein, da

$$\int d^3r f^\mu$$

kein Vierervektor ist. Wie bereits erwähnt, ist

$$d^4x = d^3r c dt \quad (8.115)$$

ein Skalar. Mit der Eigenzeit anstelle der Koordinatenzeit wird daraus

$$d^4x = d^3r c \gamma d\tau. \quad (8.116)$$

Da d^4x und $d\tau$ Skalare sind, muß auch γd^3r ein Skalar sein. Folglich ist die Viererkraft

$$K^\mu = \int d^3r \gamma f^\mu. \quad (8.117)$$