Mathematische Methoden der Physik: Funktionalanalytische Methoden

Technische Universität Clausthal
WS 1998/99

W. Lücke

Vorwort

Als ***Funktionalanalysis*** bezeichnet man die

> „Analysis von Funktionen, deren Erklärungs- und Bildbereich topologische (meist lineare) Räume sind. Der Name rührt daher, daß die Methoden der klassischen Analysis zunächst auf Funktionale übertragen wurden.“
>
> (Naas und Schmid, 1967, S. 571)

Sie liefert deshalb auch das natürliche mathematische Rüstzeug für die Quantenmechanik, in der die „reinen“ Zustände gewöhnlich durch komplexwertige Wellenfunktionen beschrieben werden. Die gegenwärtige Vorlesung beschäftigt sich hauptsächlich mit diesem Teil der Funktionalanalysis, der oft auch als *Hilbertraum-Theorie* bezeichnet wird. Zur Erzielung größtmöglicher Klarheit ist der Rahmen allerdings vielfach etwas allgemeiner abzustecken – etwa durch eine kurze Einführung in die allgemeine Topologie und die Verbandstheorie.

Natürlich ist es nicht möglich, hier eine auch nur annähernd vollständige Abhandlung wenigstens der Hilbertraum-Theorie zu präsentieren. Es geht also nicht darum, die Dinge umfassend darzustellen, sondern vielmehr darum, den Stoff auf möglichst wenige zentrale Punkte zu reduzieren, die einen gewissen Überblick und selbständige Weiterarbeit ermöglichen. Die Darstellung sollte aber ausführlich genug sein, die Strukturen der Quantenmechanik klar erkennen zu lassen und einen angemessenen Umgang damit zu ermöglichen.

Warnung: Das vorliegende Skript ist nicht zum Selbststudium gedacht.

Literaturempfehlung: (Neumark, 1959; Pflaumann und Unger, 1968; Reed und Simon, 1972; Riesz and Sz.-Nagy, 1982; Yosida, 1971)

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

In der (nichtrelativistischen) Quantenmechanik (für 1-Teilchen-Systeme ohne innere Freiheitsgrade) werden die (reinen Momentan-) Zustände durch Wellenfunktionen $\Psi(\mathbf{x}) \neq 0$ beschrieben, die (gemeinsam mit der Nullfunktion) bzgl. der natürlichen Definition

$$(z_1\Psi_1(.) + z_2\Psi_2(.))\,(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} z_1\Psi_1(\mathbf{x}) + z_2\Psi_2(\mathbf{x})$$

einen komplexen linearen Raum bilden. Wenn der Zustand eines Systems durch die Wellenfunktion $\Psi(.)$ beschreibbar ist, dann teilt man das üblicherweise durch die Aussage

“***Das System befindet sich im Zustand*** $\Psi(\mathbf{x})$”

mit.[1]

Die Wahrscheinlichkeit, ein System im Zustand $\Psi(\mathbf{x})$ (bei idealer momentaner Überprüfung) innerhalb des Gebietes $\mathcal{G}$ lokalisiert zu finden, ist durch

$$w_\Psi(\mathbf{x} \in \mathcal{G}) = \frac{\int_{\mathcal{G}} |\Psi(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x}}{\int |\Psi(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x}} \tag{1}$$

gegeben. Hierbei wird also (für stetige Wellenfunktionen) das Quadrat der Norm

$$\|\Psi\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\int |\Psi(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x}}$$

benutzt, die dem komplexen inneren Produkt[2]

$$\langle \Phi_1 \mid \Phi_2 \rangle \quad \stackrel{\text{def}}{=} \quad \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^{-k} \left\| \Phi_1 + i^k \Phi_2 \right\|^2 \tag{3}$$

Version vom 26. März 2009

[1]Obwohl Wellenfunktionen, die (außerhalb einer Menge vom Lebesgue-Maß Null) zueinander proportional sind, den gleichen Zustand beschreiben.

[2]Gleichung (3) ist der Spezialfall $\hat{A} = \hat{1}$ der ***Polarisations-Identität***

$$\left\langle \Phi_1 \mid \hat{A}\,\Phi_2 \right\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^{-k} \left\langle \left(\Phi_1 + i^k\Phi_2\right) \mid \hat{A}\left(\Phi_1 + i^k\Phi_2\right) \right\rangle \quad \forall\, \Phi_1, \Phi_2 \in D_{\hat{A}} \tag{2}$$

für lineare Operatoren $\hat{A}$ in $\mathcal{H}$ mit Definitionsbereich $D_{\hat{A}}$ (vgl. (Bratteli and Robinson, 1979, Beisp. 2.2.15)).

$$= \int \overline{\Phi_1(\mathbf{x})}\Phi_2(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \tag{4}$$

entspricht:

$$\|\Phi\| = \sqrt{\langle\Phi \mid \Phi\rangle}\,. \tag{5}$$

Mit der Definition

$$\left(\hat{P}_{\mathbf{x}\in\mathcal{G}}\Psi\right)(\mathbf{x}') \stackrel{\text{def}}{=} \chi_{\mathcal{G}}(\mathbf{x}')\Psi(\mathbf{x}')\,, \tag{6}$$

wobei

$$\chi_{\mathcal{G}}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{für } \mathbf{x}\in\mathcal{G} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die ***charakteristische Funktion*** von $\mathcal{G}$ bezeichnet, läßt sich (1) in der Form

$$w_\Psi(\mathbf{x}\in\mathcal{G}) = \frac{\left\|\hat{P}_{\mathbf{x}\in\mathcal{G}}\Psi\right\|^2}{\|\Psi\|^2} = \left|\left\langle \frac{\Psi}{\|\Psi\|} \,\middle|\, \frac{\hat{P}_{\mathbf{x}\in\mathcal{G}}\Psi}{\left\|\hat{P}_{\mathbf{x}\in\mathcal{G}}\Psi\right\|} \right\rangle\right|^2 \tag{7}$$

schreiben.[3] Das läßt sich folgendermaßen anschaulich interpretieren:

$$\xrightarrow{\Psi} \boxed{\mathbf{x}\in\mathcal{G}\ ?} \xrightarrow{\hat{P}_{\mathbf{x}\in\mathcal{G}}\Psi}$$

Nun ist $\hat{P}_{\mathbf{x}\in\mathcal{G}}\Psi$ i.a. allerdings nicht mehr stetig. Zur Lösung dieses und ähnlicher Probleme vervollständigt man den linearen Raum der Wellenfunktionen bzgl. der durch $\|.\|$ gegebenen *Topologie* zu einem komplexen *Hilbertraum* $\mathcal{H}$, den $\hat{P}_{\mathbf{x}\in\mathcal{G}}$ linear in sich abbildet. Diese Vervollständigung läßt sich Realisieren durch die Menge $L^2(\mathbb{R}^n, \mathrm{d}\mathbf{x})$ aller Äquivalenzklassen (*fast überall* erklärter) *Lebesgue-meßbar*er Funktionen $\Psi(\mathbf{x})$, für die

$$\int |\Psi(\mathbf{x})|^2\,\mathrm{d}\mathbf{x} < \infty\,, \tag{8}$$

wobei $\int \ldots \mathrm{d}\mathbf{x}$ allerdings das *Lebesgue-Integral* meint.[4] Dabei ist die Äquivalenzrelation $\sim$ durch

$$\Psi_1 \sim \Psi_2 \quad \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \int |\Psi_1(\mathbf{x}) - \Psi_2(\mathbf{x})|^2\,\mathrm{d}\mathbf{x} = 0 \tag{9}$$

gegeben. Üblicherweise identifiziert man (etwas leichtfertig) die Äquivalenzklassen

$$[\Psi] \stackrel{\text{def}}{=} \{\Psi' :\ \Psi' \textit{ quadratintegrabel} \text{ und } \sim\Psi\}$$

mit ihren Repräsentanten $\Psi' \in [\Psi]$ und schreibt in diesem Sinne auch $\Psi \in L^2(\mathbf{x}, \mathrm{d}\mathbf{x})$.

Version vom 26. März 2009

[3]Deshalb arbeiten viele Autoren grundsätzlich mit normierten Wellenfunktionen, verlangen also stets: $\|\Psi\| = 1$.

[4]Bereits zur Definition des Lebesgue-Integrals sind topologische und verbandstheoretische Grundbegriffe einzuführen.

Auch alle anderen (vermeintlichen) Eigenschaften E eines quantenmechanischen Systems werden durch (Orthogonal-) *Projektoren* $\hat{P}_E$ in dem entsprechenden Hilbertraum $\mathcal{H}$ (***Zustandsraum***) beschrieben:

$$w_\Psi(E) = \frac{\left\|\hat{P}_E\Psi\right\|^2}{\|\Psi\|^2}\,, \quad (\hat{P}_E)^2 = \hat{P}_E\,, \quad \left\langle \hat{P}_E\Psi \mid (\hat{1} - \hat{P}_E)\Psi \right\rangle = 0\,.$$

Sie besitzen eine natürliche *Halbordnung* $\leq$, die in gewissem Sinne der logischen Implikation entspricht:

$$\begin{aligned} \hat{P}_{E_1} \leq \hat{P}_{E_2} \quad &\overset{\text{def}}{\iff} \quad w_\Psi(E_1) \leq w_\Psi(E_2) \quad \forall\,\Psi \in \mathcal{H} \\ &\iff \quad \left\langle \Psi \mid \left(\hat{P}_{E_1} - \hat{P}_{E_2}\right)\Psi \right\rangle \leq 0 \quad \forall\,\Psi \in \mathcal{H}\,. \end{aligned} \tag{10}$$

Die Zuordnung

$$E' = \neg E \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad \hat{P}_{E'} = \hat{1} - \hat{P}_E$$

stellt eine *Orthokomplementierung dar*, die in gewissem Sinne der logischen Negation entspricht:

$$w_\Psi(\neg E) = 1 - w_\Psi(E)\,.$$

Die 'Logik' der Quantenmechanik ist durch den *orthomodularen Verband* der Projektoren mit den Relationen $\prec$ und $\neg$ gegeben.[5]

Diese Betrachtungsweise führt u.a. auf eine allgemeinere Zustandsbeschreibung durch *positive Spurklasse-Operatoren* (Satz von Gleason), die Beschreibung der Erwartungswerte mithilfe (i.a. unbeschränkter) *selbstadjungierter* Operatoren (Spektralsatz) sowie die Beschreibung von Symmetrietransformationen (wie z.B. der Zeittranslationen) mithilfe *unitärer* Operatoren bzw. *1-parametriger unitärer Gruppen* (Satz von Stone). Die Betrachtung der zugehörigen *Generatoren* (insbesondere des *Hamilton-Operators*) führt auf die Untersuchung partieller Differentialgleichungen, u.a. mithilfe distributionstheoretischer Methoden.

Entsprechend obigen Ausführungen ist die Vorlesung wie folgt gegliedert:

1. Kapitel:	Elementare Topologie (Grundlegende Begriffe, Topologische Vektorräume)
2. Kapitel:	Integration (Verbands-, Maß- und Distributionstheorie)
3. Kapitel:	Symmetrische Hilbertraumoperatoren (Spektralmaße, statistische Operatoren, Hamilton-Operatoren)

Version vom 26. März 2009

[5] In diesem Zusammenhang liefert ein Theorem von Amemiya und Araki eine Begründung für die Vervollständigung des *prä-Hilbertraumes* der Wellenfunktionen (vgl. Fußnote 42 von Kap. 1).

Bzgl. des algebraischen Formalismus der Quantentheorie sei auf (Lücke, 1996) und (Lücke, qft) verwiesen.

Kapitel 1

Elementare Topologie

Hier werden nur die einfachsten Grundlagen der Topologie abgehandelt, soweit sie für den Zweck dieser Vorlesung benötigt werden. Für weitergehende Betrachtungen sei insbesondere auf (Schubert, 1964) verwiesen.

1.1 Grundlegende Begriffe

1.1.1 Offene Mengen, Konvergenz und stetige Abbildungen

Definition 1.1.1 *Unter einem* ***topologischen Raum*** *versteht man ein Tupel*[1] $(X, \mathfrak{T})$ *bestehend aus einer beliebigen Menge* X *und einer Auswahl* $\mathfrak{T}$ *von Teilmengen von* X*, die folgenden Bedingungen genügt:*

1. $\emptyset \in \mathfrak{T}$,
2. $X \in \mathfrak{T}$,
3. $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in \mathfrak{T} \implies \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 \in \mathfrak{T}$,
4. $\mathfrak{T}' \subset \mathfrak{T} \implies \bigcup_{\mathcal{O} \in \mathfrak{T}'} \mathcal{O} \in \mathfrak{T}$.

Die Elemente von $\mathfrak{T}$ *werden als die* ***offen****en Teilmengen von* $(X, \mathfrak{T})$ *bezeichnet.*

Übungsaufgabe 1 Man zeige, daß eine Teilmenge $\mathcal{M}$ eines topologischen Raumes $(X, \mathfrak{T})$ genau dann offen ist, wenn zu jedem $x \in \mathcal{M}$ ein $\mathcal{O}_x \in \mathfrak{T}_x \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathcal{O} \in \mathfrak{T} : x \in \mathcal{O}\}$ existiert das ganz in $\mathcal{M}$ enthalten ist: $\mathcal{O}_x \subset \mathcal{M}$.

Version vom 26. März 2009

[1] Oft wird nur X statt $(X, \mathfrak{T})$ geschrieben, wenn klar ist, welche Topologie $\mathfrak{T}$ gemeint ist.

Die offenen Mengen[2] dienen dazu, die Umgebungen eines beliebigen Punktes $x \in X$ zu charakterisieren:

Definition 1.1.2 *Seien Teilmenge $\mathcal{N}$ und $\mathcal{M}$ Teilmengen des topologischen Raumes $(X, \mathfrak{T})$, also: $\mathcal{N}, \mathcal{M} \subset X$. Dann heißt $\mathcal{N}$ eine* ***Umgebung von*** *$\mathcal{M}$, falls ein $\mathcal{O} \in \mathfrak{T}$ existiert mit:*

$$\mathcal{M} \subset \mathcal{O} \subset \mathcal{N} .$$

Im Falle $\mathcal{M} = \{x\}$, $x \in X$, bezeichnet man $\mathcal{N}$ auch als eine Umgebung des Punktes x.

Beispiele:

1. $\mathfrak{T} = \{\emptyset, X\}$ (***Klumpen-Topologie***) .

2. $\mathbb{R}^n$ mit üblicher Topologie:

   Eine Teilmenge $\mathcal{O}$ von $\mathbb{R}^n$ ist genau dann offen, wenn zu jedem $\mathbf{x} \in \mathcal{O}$ ein $\epsilon > 0$ existiert mit

   $$U_\epsilon(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\| < \epsilon\} \subset \mathcal{O} .$$

3. $C(\mathbb{R}^n)$ mit[3] der Topologie $\mathfrak{T}_{\text{gm}}$ der *gleichmäßigen Konvergenz*:

   Eine Teilmenge $\mathcal{O}$ von $C(\mathbb{R}^n)$ gehört genau dann zu $\mathfrak{T}_{\text{gm}}$, wenn zu jedem $f \in \mathcal{O}$ ein $\epsilon > 0$ existiert mit

   $$U_\epsilon(f) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \hat{f} \in C(\mathbb{R}^n) : \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \left| \hat{f}(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) \right| < \epsilon \right\} \subset \mathcal{O} .$$

4. $C(\mathbb{R}^n)$ mit der Topologie $\mathfrak{T}_{\text{pw}}$ der *punktweisen Konvergenz*:

   Eine Teilmenge $\mathcal{O}$ von $C(\mathbb{R}^n)$ gehört genau dann zu $\mathfrak{T}_{\text{pw}}$, wenn zu jedem $f \in \mathcal{O}$ und zu jedem $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ein $\epsilon_{\mathbf{x}} > 0$ existiert mit

   $$\left\{ \hat{f} \in C(\mathbb{R}^n) : \left| \hat{f}(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) \right| < \epsilon_{\mathbf{x}} \right\} \subset \mathcal{O} .$$

5. $L^2(\mathbb{R}^n, \mathrm{d}x)$ mit der üblichen Topologie:

Version vom 26. März 2009

[2] Bzgl. dieser Bezeichnung siehe auch Übungsaufgabe 4.

[3] Mit $C(\mathbb{R}^n)$ wird überlicherweise die Menge der stetigen (komplex-wertigen) Funktionen über $\mathbb{R}^n$ bezeichnet.

Eine Teilmenge $\mathcal{O}$ von $L^2(\mathbb{R}^n, \mathrm{d}x)$ ist genau dann offen, wenn zu jeder Äquivalenzklasse $[f] \in \mathcal{O}$ ein $\epsilon > 0$ existiert mit

$$U_\epsilon([f]) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{[\hat{f}] \in L^2\left(\mathbb{R}^n, \mathrm{d}\mathbf{x}\right) : \left\|[\hat{f}] - [f]\right\| < \epsilon\right\} \subset \mathcal{O}\,,$$

wobei

$$\left\|[\hat{f}]\right\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\int \left|\hat{f}(\mathbf{x})\right|^2 \mathrm{d}\mathbf{x}}$$

(unabhängig von der Wahl des Repräsentanten $\hat{f}$).

Die intuitive Vorstellung von 'offen' ist:

$$x \in \mathcal{O} \in \mathfrak{T} \Longrightarrow \begin{cases} \text{Bewegungsfreiheit} \\ \text{innerhalb } \mathcal{O} \\ \text{um } x \text{ herum}\,. \end{cases}$$

Ohne weitere Spezifizierung der Topologie (etwa mithilfe einer *Metrik*) ist diese Vorstellung aber nicht unbedingt realisiert, wie die Möglichkeit $\mathfrak{T} = 2^X$ ($\stackrel{\text{def}}{=}$ Menge aller Teilmengen von X , ***diskrete Topologie***) zeigt. Selbst die offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^1$ können recht kompliziert sein (vgl. Nr. 2 von Übungsaufgabe 43.)

Die ***Topologie*** $\mathfrak{T}$ von $(X, \mathfrak{T})$ legt fest, wann ein ***Netz*** (***Moore-Smith-Folge*** [4]) in $(X, \mathfrak{T})$, d.h. eine durch eine nach oben gerichtete[5] Menge $\mathfrak{I}$ indizierte Menge $\{x_\rho\}_{\rho \in \mathfrak{I}} \subset X$, konvergiert:

Definition 1.1.3 *Seien $\{x_\rho\}_{\rho \in \mathfrak{I}}$ ein Netz in X und $x \in X$. Dann sagt man, daß x_ρ in $(X, \mathfrak{T})$ gegen $x \in X$* ***konvergiert****, und schreibt dafür*

$$\text{“}x_\rho \longrightarrow x \text{ in } (X, \mathfrak{T})\text{”}$$

bzw. “$\lim x_\rho = x$”, *falls zu jedem $\mathcal{O}_x \in \mathfrak{T}_x$ ein $\rho_0 \in \mathfrak{I}$ existiert mit:*

$$\rho_0 \prec \rho \Longrightarrow x_\rho \in \mathcal{O}_x\,.$$

Umgekehrt ist die Topologie durch die Menge aller konvergenten Netze bereits eindeutig bestimmt[6] (siehe Satz 1.1.8 im Zusammenhang mit Nr. 1 von Übungsaufgabe 4).

[4]Wenn einfach nur von einer ***Folge*** die Rede ist, dann ist damit i.a. ein Netz, also eine Moore-Smith-Folge, mit abzählbarer Indexmenge (meistens $\mathfrak{I} = \mathbb{N} \stackrel{\text{def}}{=} \{1, 2, 3, \ldots\}$) gemeint.

[5]Eine durch $\prec$ halbgeordnete Menge $\mathfrak{I}$ heißt ***nach oben gerichtet*** (resp. ***nach unten gerichtet***), falls zu je zwei Elementen $\rho_1, \rho_2 \in \mathfrak{I}$ ein drittes Element $\rho_3 \in \mathfrak{I}$ existiert mit $\rho_1, \rho_2 \prec \rho_3$ (resp. $\rho_3 \prec \rho_1, \rho_2$).

[6]Unter welchen Bedingungen zu einer vorgegebenen Menge von Netzen eine entsprechende Topologie existiert, ist allerdings eine ganz andere Frage (vgl. dazu (Pflaumann und Unger, 1968, Schluß von Kap. I § 3 a))). In metrisierbaren Räumen kann man sich übrigens auf die Betrachtung von (abzählbaren) Folgen beschränken.

Beispiel: In der Integrationstheorie verwendet man als Indexmenge die Menge aller Unterteilungen — mit $\subset$ als natürlicher Halbordnung — eines jeweils festen Intervalls $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

Der Konvergenzbegriff erlaubt eine besonders anschauliche Definition der Stetigkeit von Abbildungen topologischer Räume:

Definition 1.1.4 *Seien $(X,\mathfrak{T})$ sowie $(X',\mathfrak{T}')$ topologische Räume und f eine Abbildung von X in X'. Dann nennt man f **stetig** bzgl. der Topologien $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}'$, wenn für jedes Netz $\{x_\rho\} \subset X$ die Implikation*

$$x_\rho \longrightarrow x \text{ in } (X,\mathfrak{T}) \quad \Longrightarrow \quad f(x_\rho) \longrightarrow f(x) \text{ in } (X',\mathfrak{T}')$$

gilt.

Technisch vielfach günstiger ist jedoch die folgende Definition:

Definition 1.1.5 *Seien $(X,\mathfrak{T})$ sowie $(X',\mathfrak{T}')$ topologische Räume und f eine Abbildung von X in X'. Dann nennt man f **stetig** bzgl. der Topologien $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}'$, wenn zu jedem $x \in X$ und zu jedem $\mathcal{O}'_{f(x)} \in \mathfrak{T}'_{f(x)}$ ein $\mathcal{O}_x \in \mathfrak{T}_x$ existiert mit*

$$f(\mathcal{O}_x) \stackrel{\text{def}}{=} \{f(x) : x \in \mathcal{O}_x\} \subset \mathcal{O}'_{f(x)}.$$

Übungsaufgabe 2 Man beweise[7] die Äquivalenz der Definitionen 1.1.4 und 1.1.5 mithilfe des ***Auswahlpostulats von Zermelo:***

> Zu jeder Familie $\mathfrak{M}$ von Mengen $\mathcal{M}$ gibt es eine Abbildung f von $\mathfrak{M}$ in $\bigcup_{\mathcal{M}\in\mathfrak{M}} \mathcal{M}$ mit:
>
> $$f(\mathcal{M}) \in \mathcal{M} \quad \forall \mathcal{M} \in \mathfrak{M}.$$

> **Anmerkung:** Da das Zermelosche Auswahlpostulat nicht bewiesen ist (vgl. (Rédei, 1959, Schluß von §15)), verwenden die meisten Autoren nur die Definition 1.1.5 (man beachte auch Nr. 3 von Übungsaufgabe 6).

Beispiele:

1. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$.

Definition 1.1.6

[7] Man beachte daß $\mathfrak{T}_x$ bzgl. der Halbordnung $\subset$ nach unten gerichtet (siehe Fußnote 5) ist.

2. Ortsvektorfunktionen.

3. Zustandsvektor als Funktion der Zeit.

Zwei topologische Räume $(X, \mathfrak{T})$ $(X', \mathfrak{T}')$ *nennt man* ***homöomorph*** *(zueinander), wenn eine* ***topologische Abbildung*** *(****Homöomorphismus****) von* $(X, \mathfrak{T})$ *auf* $(X', \mathfrak{T}')$ *existiert, d.h. eine stetige Bijektion* f *von* X *auf* X' *, deren Umkehrabbildung* f^{-1} *ebenfalls stetig ist.*

Unter ***topologischen Eigenschaften*** versteht man solche Eigenschaften, die unter topologischen Abbildungen invariant sind. In diesem Sinne sind homöomorphe topologische Räume als topologisch gleich anzusehen.

Vereinbarung: In dieser Vorlesung sollen nur ***Hausdorffsche Räume*** betrachtet werden, d.h. solche topologischen Räume $(X, \mathfrak{T})$, für die zu je zwei Punkten $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$ stets zwei offene Umgebungen $\mathcal{O}_{x_1} \in \mathfrak{T}_{x_1}$ und $\mathcal{O}_{x_2} \in \mathfrak{T}_{x_2}$ existieren mit $\mathcal{O}_{x_1} \cap \mathcal{O}_{x_2} = \emptyset$.

Übungsaufgabe 3 Man zeige, daß in einem Hausdorffschen Raum der Limes eines Netzes stets eindeutig ist:[8]

$$\left.\begin{array}{l} x_\rho \to x \\ x_\rho \to y \end{array}\right\} \Longrightarrow x = y\,.$$

1.1.2 Abgeschlossene Mengen und kompakte Mengen

Definition 1.1.7 *Seien* $(X, \mathfrak{T})$ *ein topologischer Raum,* $\mathcal{M} \subset X$ *und* $x \in X$ *. Dann nennt man* x *einen* ***Häufungspunkt*** *von* $\mathcal{M}$ *(in* $(X, \mathfrak{T})$*), falls*

$$(\mathcal{O}_x \setminus \{x\}) \cap \mathcal{M} \neq \emptyset \quad \forall\, \mathcal{O}_x \in \mathfrak{T}_x\,.$$

Die Menge $\mathcal{M}$ *heißt* ***abgeschlossen****, falls sie alle ihre Häufungspunkte enthält. Man nennt* x *einen* ***inneren Punkt*** *von* $\mathcal{M}$ *, falls*

$$\mathcal{O}_x \subset \mathcal{M} \text{ für geeignetes } \mathcal{O}_x \in \mathfrak{T}_x\,.$$

Die Gesamtheit $\underline{\mathcal{M}}$ *aller inneren Punkte von* $\mathcal{M}$ *bezeichnet man als das* ***Innere*** *von* $\mathcal{M}$ *. Die Vereinigung* $\overline{\mathcal{M}}$ *der Menge* $\mathcal{M}$ *mit allen ihren Häufungspunkten bezeichnet*

[8]Eigentlich sollte bei Limites stets die zugehörige Topologie explizit mit angegeben werden.

man als den ***Abschluß*** *von* $\mathcal{M}$ *. Die Menge* $\partial M \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\mathcal{M}} \setminus \underline{\mathcal{M}}$ *bezeichnet man als den* ***Rand*** *indRand einer Menge von* $\mathcal{M}$ *.* $\mathcal{M}$ *heißt* ***dicht in*** $(X, \mathfrak{T})$ *, falls* $\overline{\mathcal{M}} = X$ *. Falls eine abzählbare Menge existiert, die in* $(X, \mathfrak{T})$ *dicht ist, dann nennt man* $(X, \mathfrak{T})$ ***separabel****.*

Übungsaufgabe 4 Man zeige:

1. Eine Teilmenge $\mathcal{M}$ eines topologischen Raumes $(X, \mathfrak{T})$ ist genau dann abgeschlossen, wenn ihr Komplement $X \setminus \mathcal{M}$ offen ist.
2. $\overline{\mathcal{M}}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge, die $\mathcal{M}$ enthält.
3. $\underline{\mathcal{M}}$ ist die größte offene Menge, die in $\mathcal{M}$ enthalten ist.
4. $\partial\mathcal{M}$ ist stets abgeschlossen.

Satz 1.1.8 *Eine Teilmenge* $\mathcal{M}$ *eines topologischen Raumes* $(X, \mathfrak{T})$ *ist genau dann abgeschlossen, wenn für alle Netze* $\{x_\rho\}_{\rho \in \mathfrak{I}} \subset \mathcal{M}$ *gilt:*

$$x_\rho \longrightarrow x \text{ in } (X, \mathfrak{T}) \quad \Longrightarrow \quad x \in \mathcal{M} .$$

Beweis: Siehe z.B. (Pflaumann und Unger, 1968, Kap. I § 3 Auss. (29)). ∎

Oft ist es zweckmäßig, eine zu untersuchende Menge mithilfe einer Überdeckung in kleinere Teile zu zerlegen.[9]

Definition 1.1.9 *Sei* $\mathcal{M}$ *eine Teilmenge des topologischen Raumes* $(X, \mathfrak{T})$ *. Dann versteht man unter einer* ***Überdeckung*** *von* $\mathcal{M}$ *eine Menge* $\mathfrak{G}$ *von Teilmengen* $\mathcal{G} \subset X$ *mit:*

$$\mathcal{M} \subset \bigcup_{\mathcal{G} \in \mathfrak{G}} \mathcal{G} .$$

Sind alle $\mathcal{G} \in \mathfrak{G}$ *offen resp. abgeschlossen, dann bezeichnet man auch die Überdeckung* $\mathfrak{G}$ *als* ***offen*** *resp.* ***abgeschlossen****.*

Dabei ist es in der Regel günstig, wenn man stets mit einer endlichen Überdeckung auskommen kann.

[9] Dies gilt — ganz abgesehen von der Differentialgeometrie – insbesondere für die Theorie der verallgemeinerten Funktionen ***Distributionen***.

Definition 1.1.10 *Eine Teilmenge $\mathcal{K}$ des topologischen Raumes $(X, \mathfrak{T})$ heißt **kompakt**,*[10] *wenn jede offene Überdeckung $\mathfrak{G}$ von $\mathcal{K}$ eine endliche Teilmenge $\mathfrak{G}' \subset \mathfrak{G}$ enthält, die ebenfalls Überdeckung von $\mathcal{K}$ ist. Falls X kompakt ist, nennt man auch den topologischen Raum $(X, \mathfrak{T})$ kompakt.*

Übungsaufgabe 5 Man zeige:

1. Jede abgeschlossene Teilmenge eines kompakten topologischen Raumes ist kompakt.

2. Zu jeder kompakten Teilmenge $\mathcal{K}$ eines Hausdorffschen Raumes $(X, \mathfrak{T})$ und zu jedem $x \in X \setminus \mathcal{K}$ existieren disjunkte offene Umgebungen $\mathcal{O}_{\mathcal{K}}$, $\mathcal{O}_x$:
$$\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathcal{K}} \in \mathfrak{T}\,, \quad \mathcal{O}_x \in \mathfrak{T}_x\,, \quad \mathcal{O}_{\mathcal{K}} \cap \mathcal{O}_x = \emptyset\,.$$

3. Jede kompakte Teilmenge eines Hausdorffschen Raumes ist abgeschlossen.

4. Im $\mathbb{R}^n$ ist eine Menge genau dann[11] kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

5. Für eine stetige Abbildung f eines topologischen Raumes $(X, \mathfrak{T})$ in einen topologischen Raum $(X', \mathfrak{T}')$ ist das 'Urbild' offener Mengen stets offen:[12]
$$\mathcal{O}' \in \mathfrak{T}' \quad \Longrightarrow \quad f^{-1}(\mathcal{O}') \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X : f(x) \in \mathcal{O}'\} \in \mathfrak{T}\,.$$

6. Das stetige Bild einer kompakten Menge ist stets kompakt.

7. Eine reelle stetige Funktion nimmt auf einer kompakten Menge stets ihr Supremum an.

Satz 1.1.11 (Bolzano-Weierstrass) *Ein topologischer Raum $(X, \mathfrak{T})$ ist genau dann kompakt, wenn jedes Netz in $(X, \mathfrak{T})$ ein konvergentes Teilnetz besitzt.*

Beweis: Siehe (Reed und Simon, 1972, Th. IV.3). ∎

Version vom 26. März 2009

[10] Begriff *kompakt* wird in der Literatur mitunter unterschiedlich definiert (vgl. (Pflaumann und Unger, 1968, S. 46, Bem. 19)).

[11] Die Aussage, daß aus der Beschränktheit und Abgeschlossenheit im $\mathbb{R}^n$ die Kompaktheit folgt, ist als ***Satz von Heine-Borel*** bekannt.

[12] Die suggestiven Schreibweise $f^{-1}(\mathcal{O}')$ wird üblicherweise auch dann benutzt, wenn f nicht bijektiv ist.

1.1.3 Induzierte Topologien

Definition 1.1.12 *Wenn durch $\mathfrak{T}$ und $\hat{\mathfrak{T}}$ (jeweils als Menge aller offenen Mengen) zwei (i.a. verschiedene) Topologien auf einundderselben Menge X vorgegeben sind, dann nennt man die durch $\hat{\mathfrak{T}}$ gegebene Topologie **stärker** als die durch $\mathfrak{T}$ gegebene, falls $\mathfrak{T} \subset \hat{\mathfrak{T}}$. In diesem Falle sagt man auch, die durch $\mathfrak{T}$ gegebene Topologie sei **schwächer** als die durch $\hat{\mathfrak{T}}$ gegebene.*

Übungsaufgabe 6 Gegeben seien zwei Topologische Räume $(X, \mathfrak{T})$, $(X', \mathfrak{T}')$ und eine stetige Abbildung f von $(X, \mathfrak{T})$ in $(X', \mathfrak{T}')$. Man zeige:

1. f ist auch bzgl. jeder stärkeren Topologie von X stetig.

2. f ist auch bzgl. jeder schwächeren Topologie von X' stetig.

Definition 1.1.13 *Sei $\{(X_\rho, \mathfrak{T}_\rho)\}_{\rho \in \mathfrak{I}}$ eine Familie von topologischen Räumen und sei jeweils f_ρ eine Abbildung der $\mathfrak{I}$-unabhängigen Menge X in $(X_\rho, \mathfrak{T}_\rho)$. Dann bezeichnet man die schwächste Topologie $\mathfrak{T}$, bzgl. der alle Abbildungen f_ρ von $(X, \mathfrak{T})$ in $(X_\rho, \mathfrak{T}_\rho)$ stetig sind, als die $\{f_\rho\}_{\rho \in \mathfrak{I}}$**-schwache Topologie**[13] von X.*

Beispiel: Die Topologie der punktweisen Konvergenz von $C(\mathbb{R}^n)$ stimmt mit der $\{e_{\mathbf{x}}\}_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n}$-schwachen Topologie überein, wobei

$$e_{\mathbf{x}}(f) \stackrel{\text{def}}{=} f(\mathbf{x}) \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n .$$

Definition 1.1.14 *Wenn X eine Teilmenge des topologischen Raumes $(X', \mathfrak{T}')$ ist und ι die kanonische Abbildung von X in X' (Einbettung) bezeichnet, dann heißt X mit der $\{\iota\}$-schwachen Topologie der X entsprechende **topologische Teilraum** von $(X', \mathfrak{T}')$.*

Version vom 26. März 2009

[13] Mitunter bezeichnet man diese Topologie — insbesondere im Hinblick auf Definition 1.1.14 — auch als ***projektive Topologie***.

Übungsaufgabe 7 Man zeige:

1. Die in Definition 1.1.13 charakterisierte schwache Topologie existiert und ist Hausdorffsch, wenn (alle X_ρ Hausdorffsch sind und) $\{f_\rho\}_{\rho\in\mathfrak{I}}$ die Punkte von X ***trennt***, d.h. wenn zu je zwei voneinander verschiedenen Punkten $x_1, x_2 \in X$ ein $\rho_0 \in \mathfrak{I}$ existiert mit $f_{\rho_0}(x_1) \neq f_{\rho_0}(x_2)$.

2. Wenn $(X, \mathfrak{T})$ topologischer Teilraum von $(X', \mathfrak{T}')$ ist, dann gilt
$$\mathfrak{T} = \{X \cap \mathcal{O} : \mathcal{O} \in \mathfrak{T}'\} .$$

3. Wenn $(X, \mathfrak{T})$ topologischer Teilraum von $(X', \mathfrak{T}')$ ist, dann gilt für jedes Netz $\{x_\rho\}_{\rho\in\mathfrak{I}} \subset X$ und jedes $x \in X$:
$$x_\rho \longrightarrow x \text{ in } (X, \mathfrak{T}) \quad \Longleftrightarrow \quad x_\rho \longrightarrow x \text{ in } (X', \mathfrak{T}') .$$

Definition 1.1.15 *Sei $\{(X_\rho, \mathfrak{T}_\rho)\}_{\rho\in\mathfrak{I}}$ eine Familie (nicht unbedingt voneinander verschiedener) topologischer Räume und bezeichne X die Menge aller Abbildungen $x(\rho)$ von $\mathfrak{I}$ in $\bigcup\limits_{\rho\in\mathfrak{I}} X_\rho$ mit*
$$x(\rho) \in X_\rho \quad \forall\, \rho \in \mathfrak{I} .$$
Mit π_ρ sei jeweils die Projektion von X auf X_ρ bezeichnet:
$$\pi_\rho(x) \stackrel{\text{def}}{=} x(\rho) \quad \textit{für } x \in X .$$
Dann heißt X mit der $\{\pi_\rho\}_{\rho\in\mathfrak{I}}$-schwachen Topologie das ***topologische Produkt***[14] *der Räume X_ρ .*

Beispiel: $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$.

Satz 1.1.16 (Tychonoff) *Das topologische Produkt einer beliebigen Familie kompakter topologischer Räume ist kompakt.*

Beweis: Siehe z.B. (Neumark, 1959, S. 50). ∎

Vielfach ist die Topologie durch eine sog. Metrik, d.h. durch ein Abstandsmaß induziert.

[14]Nicht zu verwechseln mit den topologischen Tensor-Produkten topologischer Vektorräume!

Definition 1.1.17 *Sei X eine beliebige (nicht triviale) Menge. Dann versteht man unter einer* ***Metrik*** *auf X eine Abbildung*

$$\begin{array}{rcl} d\,:\; X\times X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1,x_2) & \longmapsto & d(x_1,x_2)\,, \end{array}$$

die für beliebige $x_1,x_2,x_3 \in X$ folgenden Bedingungen genügt:[15]

1. $d(x_1,x_2) \geq 0$.
2. $d(x_1,x_2) = d(x_2,x_1)$.
3. $d(x_1,x_2) = 0 \Longleftrightarrow x_1 = x_2$.
4. $d(x_1,x_3) \leq d(x_1,x_2) + d(x_2,x_3)$ *(* ***Dreiecksungleichung*** *).*

Wenn d eine Metrik auf X ist, dann heißt (X,d) ein ***metrischer Raum****. Der (X,d) entsprechende topologische Raum ist dann durch $(X,\mathfrak{T}_d)$ gegeben, wobei $\mathfrak{T}_d$ die Menge aller in der $\{d(x,.)\}_{x\in X}$-schwachen Topologie offenen Mengen bezeichnet. Ein topologischer Raum $(X,\mathfrak{T})$ heißt* ***metrisierbar****, wenn es eine (nicht eindeutige!) Metrik d gibt mit $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_d$.*

Übungsaufgabe 8 Man zeige, daß für einen metrischen Raum (X,d) stets

$$\mathcal{O} \in \mathfrak{T}_d \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{zu jedem } x \in \mathcal{O} \text{ existiert ein } \epsilon > 0 \text{ mit} \\ U_\epsilon(x) \subset \mathcal{O} \subset X \end{array} \right.$$

gilt, wobei

$$U_\epsilon(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{x' \in X \,:\, d(x,x') < \epsilon\} \; .$$

Beispiele:

1. Kugeloberfläche mit Geodätenlänge als Metrik.
2. Kugeloberfläche mit Abstand im $\mathbb{R}^3$ als Metrik.

Definition 1.1.19

[15] Die erste Bedingung folgt bereits aus der Dreiecksungleichung, die zweite aus der dritten und der Dreiecksungleichung, **wenn** man die Dreiecksungleichung in der unüblichen Form

$$d(x_1,x_3) \leq d(x_1,x_2) + d(x_3,x_2)$$

schreibt (siehe z.B. (Pflaumann und Unger, 1968, S. 58)).

Definition 1.1.18 *Seien (X,d), (X',d') metrische Räume und sei f eine Abbildung von X in X'. Dann heißt f **isometrisch**, wenn*

$$d'\left(f(x_1), f(x_2)\right) = d(x_1, x_2) \quad \forall\, x_1, x_2 \in X$$

gilt.

*Unter einem **Cauchy-Netz** in einem metrischen Raum (X,d) versteht man ein Netz $\{x_\rho\}_{\rho\in\mathfrak{I}}$ in X mit folgender Eigenschaft:*

Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $\rho_0 \in \mathfrak{I}$ mit

$$d\left(x_{\rho_1}, x_{\rho_2}\right) < \epsilon \quad \forall\, \rho_1, \rho_2 \succ \rho_0\,.$$

*Der metrische Raum (X,d) heißt **vollständig**, wenn jedes Cauchy-Netz in (X,d) konvergiert. Unter einer **Cauchy-Folge** [16] in einem metrischen Raum (X,d) versteht man ein Cauchy-Netz $\{x_\rho\}_{\rho\in\mathfrak{I}}$ in (X,d) mit abzählbarer Indexmenge $\mathfrak{I}$.*

Satz 1.1.20 *Jeder metrische Raum erlaubt eine bis auf Isometrie eindeutige Vervollständigung.*[17]

Beweis: Siehe z.B. (Neumark, 1959, S. 53/54). ∎

1.2 Topologische Vektorräume

1.2.1 Beschränktheit und Vollständigkeit

Definition 1.2.1 *Unter einem **topologischen Vektorraum** über dem Körper*[18] *$\mathbb{K}$ versteht man einen Vektorraum X zusammen mit einer Topologie bzgl. der die Abbildungen*

$$\begin{array}{rccc} + : & X \times X & \longrightarrow & X \\ & (x_1, x_2) & \longmapsto & x_1 + x_2 \end{array}$$

[16] Cauchy-Folgen werden auch als ***Fundamentalfolgen*** bezeichnet.

[17] In den üblichen Darstellungen findet man i.a. keine Antwort auf folgende Frage: Seien (X,d), (X,d') metrische Räume mit $X = X'$ und $\mathfrak{T}_d = \mathfrak{T}_{d'}$ und seien $(\hat{X},\hat{d})$, $(\hat{X}',\hat{d}')$ entsprechende Vervollständigungen. Sind dann die topologischen Räume $(\hat{X},\mathfrak{T}_{\hat{d}})$ und $(\hat{X}',\mathfrak{T}_{\hat{d}'})$ zueinander homöomorph? Vermutlich gilt das nicht immer. Man vergleiche dazu auch (Schubert, 1964, Anfang von II.3.8).

[18] Für die vorliegende Vorlesung ist nur der Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ resp. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ von Interesse, wobei man dann von einem komplexen resp. reellen topologischen Vektorraum spricht; statt des Begriffs ***Vektorraum*** wird oft auch der Begriff ***linearer Raum*** benutzt.

und

$$\begin{array}{rcl} \cdot\, :\ \mathbb{K} \times X & \longrightarrow & X \\ (\lambda, x) & \longmapsto & \lambda \cdot x \end{array}$$

stetig sind, wobei die Definitionsbereiche der Addition + und der Multiplikation · entsprechend als topologische Produkte aufzufassen sind.

Beispiele:

1. $\mathbb{R}^n$
2. $C(X)$

Definition 1.2.2 *Seien X und Y topologische Vektorräume über dem gleichen Zahlenkörper. Dann versteht man unter einem* ***topologischen Isomorphismus*** *von X auf Y eine lineare topologische Abbildung von X auf Y. Falls ein solcher topologischer Isomorphismus existiert, nennt man X und Y zueinander* ***topologisch isomorph****.*

Übungsaufgabe 9 Man zeige für einen beliebigen topologischen Vektorraum X über $\mathbb{K}$:

1. Für jedes $a \in X$ ist die Translation $x \mapsto x + a$ ein Homöomorphismus von X auf sich.[19]
2. Für jedes $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ ist die Skalierung $x \mapsto \lambda \cdot x$ ein Isomorphismus von X auf sich.

Definition 1.2.3 *Eine Teilmenge $\mathcal{G}$ eines topologischen Vektorraumes X über $\mathbb{K}$ heißt* ***beschränkt****, wenn zu jeder Umgebung $\mathcal{U}_0$ von 0 ein $\lambda \in \mathbb{K}$ existiert mit*[20]

$$\mathcal{G} \subset \lambda\,\mathcal{U}_0 \overset{\text{def}}{=} \{\lambda x : x \in \mathcal{U}_0\} \ .$$

Eine Abbildung[21] *f von einem topologischen Vektorraum X in einen topologischen Vektorraum Y heißt* ***beschränkt****, falls*

$$\mathcal{G} \text{ beschränkt in } X \quad \Longrightarrow \quad f(\mathcal{G}) \overset{\text{def}}{=} \{f(x) : x \in \mathcal{G}\} \text{ beschränkt in } Y$$

für jede Teilmenge $\mathcal{G}$ von X gilt.

Version vom 26. März 2009

[19] Die Topologie ist also bereits durch τ_0 festgelegt.

[20] Wir schreiben i.d. Regel einfach λx statt $\lambda \cdot x$.

[21] Synonym für 'Abbildung' wird oft auch der Begriff ***Operator***, im Falle $Y = \mathbb{K}$ der Begriff ***Funktional*** (bzw. ***Funktion***, falls zusätzlich $X = \mathbb{R}^n$ oder $X = \mathbb{C}^n$) benutzt.

Übungsaufgabe 10 Man zeige für beliebige Teilmengen $\mathcal{M}$ eines topologischen Vektorraumes X und beliebiges $a \in X$:

$$\mathcal{M} \text{ beschränkt in } X \implies \mathcal{M} + a \stackrel{\text{def}}{=} \{x + a : x \in \mathcal{M}\} \text{ beschränkt in } X \,.$$

Satz 1.2.4 *Sei X ein topologischer Vektorraum mit einer abzählbaren **Umgebungsbasis** der 0, d.h. einer abzählbaren Gesamtheit $\mathfrak{B}_0$ von Umgebungen der 0 mit folgender Eigenschaft:*[22]

Zu jedem $\mathcal{O}_0 \in \mathfrak{T}_0$ existiert ein $\mathcal{N}_0 \in \mathfrak{B}_0$ mit $\mathcal{N}_0 \subset \mathcal{O}_0$.

*Dann existiert eine Metrik d mit $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_d$, die **translationsinvariant** ist, d.h. der Bedingung*

$$d(x_1, x_2) = d(x_1 + x_3, x_2 + x_3) \quad \forall\, x_1, x_2, x_3 \in X$$

genügt.

Beweis:[23] Siehe (Köthe, 1966, § 15,11.(1)). ∎

Übungsaufgabe 11 Man zeige:

1. Wenn die Topologie von X durch eine **translationsinvariante** Metrik d gegeben ist, gilt

$$\mathcal{M} \text{ beschränkt} \iff \sup_{x_1, x_2 \in \mathcal{M}} d(x_1, x_2) < \infty \,.$$

2. Wenn die Metrik nicht translationsinvariant ist, gilt i.a. auch diese Äquivalenz nicht mehr.

Definition 1.2.5 *Unter einem **Cauchy-Netz** [24] in einem topologischen Vektorraum X versteht man ein Netz $\{x_\rho\}_{\rho \in \mathfrak{I}}$ in X mit folgender Eigenschaft:*

Zu jeder Umgebung $\mathcal{N}_0$ von 0 gibt es ein $\rho_0 \in \mathfrak{I}$ mit

$$x_{\rho_1} - x_{\rho_2} \in \mathcal{N}_0 \quad \forall\, \rho_1, \rho_2 \succ \rho_0 \,.$$

*Der topologische Vektorraum X heißt **vollständig**, wenn jedes Cauchy-Netz in X konvergiert. Unter einer **Cauchy-Folge** in einem topologischer Vektorraum X versteht man ein Cauchy-Netz $\{x_\rho\}_{\rho \in \mathfrak{I}}$ in X mit abzählbarer Indexmenge $\mathfrak{I}$.*

[22] Wir bezeichnen wieder mit $\mathfrak{T}$ die Gesamtheit aller in X offenen Mengen und mit $\mathfrak{T}_0$ Gesamtheit aller in X die offenen Mengen, die die 0 enthalten.
[23] Für lokalkonvexes X siehe Übungsaufgabe 14.
[24] Cauchy-Netze lassen sich allgemeiner in *uniformen Räumen* definieren.

Übungsaufgabe 12 Sei X ein topologischer Vektorraum. Man zeige:

1. Definition 1.2.5 ist konsistent mit Definition 1.1.19.
2. Jede endliche Teilmenge von X ist beschränkt.
3. Jede Cauchy-Folge[25] in X ist beschränkt.
4. Wenn X metrisierbar ist, ist jedes Cauchy-Netz $\{x_\rho\}_{\rho\in\mathfrak{I}}$ in X ***asymptotisch beschränkt***, d.h. es existiert ein $\rho_0 \in \mathfrak{I}$ mit:
$$\{x_\rho \in \mathfrak{I} : \rho_0 \prec \rho\} \text{ beschränkt in } V\,.$$

Beispiel zu 2.: Die δ-Folge der

$$f_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} n^2 x & \text{für } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ n - n^2\left(x - \frac{1}{n}\right) & \text{für } x \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist in $C(\mathbb{R})$ bzgl. der Topologie der punktweisen Konvergenz beschränkt!

Übungsaufgabe 13 *Seien X und Y topologische Vektorräume. Man zeige für beliebiges*[26] $f \in L(X,Y)$:

1. $$f \text{ stetig} \implies f \text{ beschränkt}.$$
2. *Wenn X* **metrisierbar** *ist, dann gilt umgekehrt auch*[27]
$$f \text{ beschränkt} \implies f \text{ stetig}.$$

Vereinbarung: Im Folgenden seien nur Vektorräume über dem Körper $\mathbb{K}$ der komplexen oder der reellen Zahlen betrachtet.

Version vom 26. März 2009

[25] Cauchy-Netze sind dagegen i.a. nicht einmal asymptotisch beschränkt!

[26] Wie allgemein üblich, bezeichnen wir mit $L(X,Y)$ den Vektorraum aller linearen Abbildungen des Vektorraumes X in den Vektorraum Y .

[27] Man beachte, daß eine lineare Abbildung entsprechend Übungsaufgabe 9 genau dann stetig ist, wenn sie bei 0 stetig ist.

1.2.2 Lokalkonvexe Räume

Für praktische Anwendungen kommen von den topologische Vektorräumen[28] in aller Regel nur solche in Frage, die *lokalkonvex* sind:[29]

Definition 1.2.6 *Ein topologischer Vektorraum X heißt **lokalkonvex**, wenn jede Umgebung $\mathcal{N}_0$ von 0 eine Umgebung $\mathcal{A}$ von 0 enthält, die **absolut konvex** ist, d.h. der Bedingung*

$$(|\lambda| + |\mu| \leq 1 \Longrightarrow \lambda x + \mu y \in \mathcal{A}) \quad \forall\, x, y \in \mathcal{A}\,,\ \lambda, \mu \in \mathbb{K}$$

*genügt, und **absorbierend**.[30] Letzteres heißt, daß zu jedem $x \in X$ ein $\lambda_x > 0$ existiert mit*

$$|\mu| \geq \lambda_x \Longrightarrow x \in \mu\mathcal{A} \quad \forall\, \mu \in \mathbb{K}\,.$$

Eine offene, absolutkonvexe, absorbierende Menge $\mathcal{A}$ läßt sich stets durch das zugeordnete ***Minkowski-Funktional***

$$h_{\mathcal{A}}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{\lambda > 0 :\, x \in \lambda\mathcal{A}\} \tag{1.1}$$

charakterisieren:

$$x \in \mathcal{A} \Longleftrightarrow h_{\mathcal{A}}(x) < 1\,.$$

Beispiel: Für $X = \mathbb{R}$ gilt stets $\mathcal{A} = (-A, +A)$ mit geeignetem $A \in (0, \infty]$ und somit $h_{\mathcal{A}}(x) = |x|/A$.

Übungsaufgabe 14 Man zeige für einen beliebig vorgegeben lokalkonvexen topologischen Vektorraum mit der Topologie $\mathfrak{T}$:

1. Wenn eine Umgebungsbasis der 0 existiert, dann auch eine solche, die nur aus absolutkonvexen absorbierenden Mengen besteht.

2. Wenn $\mathfrak{B}_0 = \{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \ldots\}$ eine (abzählbare) Umgebungsbasis der 0 ist, die nur aus absolutkonvexen absorbierenden Mengen besteht, dann ist

$$d(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1} 2^{-n} \inf\{h_{\mathcal{A}_n}(x-y), 1\}$$

eine Metrik mit $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_d$.

Version vom 26. März 2009

[28] Falls die lineare Struktur überhaupt angemessen ist.

[29] Bzgl. der Vervollständigung lokalkonvexer Räume siehe (Robertson und Robertson, 1967, Kap. VI, Satz 7).

[30] Aufgrund der Stetigkeit der (äußeren) Multiplikation würde es genügen, nur einfach Konvexität (vgl. (Valentine, 1968)) zu fordern (siehe z.B. (Robertson und Robertson, 1967, Kap. I, Satz 5)).

Definition 1.2.7 *Unter einer **Halbnorm** auf einem Vektorraum X versteht man eine Abbildung h von X in $\mathbb{R}$, die folgenden drei Bedingungen genügt:*

S1: $h(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in X$.

S2: $h(\lambda x) = |\lambda|\, h(x) \quad \forall\, x \in X\,,\ \lambda \in \mathbb{K}$.

S3: $h(x+y) \leq h(x) + h(y) \quad \forall\, x, y \in X$.

*Unter einer **Norm** auf X versteht man eine Halbnorm h, die der Bedingung*[31]

$$h(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$$

für alle $x \in X$ genügt.

Übungsaufgabe 15 Man zeige für einen beliebigen Vektorraum X:

1. Für jede absolutkonvexe, absorbierende Menge $\mathcal{A} \subset X$ stellt das zugehörige Minkowski-Funktional $h_{\mathcal{A}}$ eine Halbnorm auf X dar.

2. Für jede Halbnorm K auf X ist die Menge

$$\mathcal{A}_K \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X : K(x) < 1\}$$

absolutkonvex und absorbierend.

3. Für jede Halbnorm K auf X gilt

$$|K(x) - K(y)| \leq K(x-y) \quad \forall\, x, y \in X\,.$$

4. Für jede Norm $\|.\|$ auf X definiert[32]

$$d(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \|x-y\| \quad \forall\, x, y \in X$$

eine translationsinvariante Metrik auf X.

Definition 1.2.8 *Ein **normierter Raum** ist ein lokalkonvexer Vektorraum X, auf dem eine Norm $\|.\|$ ausgezeichnet ist, deren zugeordnete Metrik*

$$d(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \|x-y\| \quad \forall\, x, y \in X$$

*im Sinne von Definition 1.1.17 die Topologie von X bestimmt. Dieser normierte Raum wird zur Verdeutlichung auch durch $(X, \|.\|)$ mitgeteilt. Wenn X vollständig ist, nennt man $(X, \|.\|)$ einen **Banachraum**.*

[31] Meist schreibt man $\|x\|$ statt $h(x)$.

[32] Die Umkehrung gilt natürlich i.a. nicht, wie etwa das Beispiel $d(x,y) = \sqrt{|x-y|}$ für $X = \mathbb{R}$ zeigt.

Beispiel: $C(\mathbb{R}^n)$ mit Supremumsnorm $\|f\| = \sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x})|$.

Übungsaufgabe 16 Man zeige, daß die Topologie eines normierten Raumes $(X, \|.\|)$ stets mit der $\{\|. - x\|\}_{x\in X}$-schwachen Topologie übereinstimmt.

Definition 1.2.9 *Unter einem* ***inneren Produkt*** *eines Vektorraumes* X *versteht man eine im zweiten Argument lineare Abbildung* $\langle . \mid . \rangle$ *von* $X \times X$ *in* $\mathbb{K}$ *, die folgenden beiden Bedingungen genügt:*

1. $\langle \Phi \mid \Phi \rangle > 0 \quad \forall\, \Phi \in X \setminus \{0\}$.
2. $\langle \Phi_1 \mid \Phi_2 \rangle = \overline{\langle \Phi_2 \mid \Phi_1 \rangle} \quad \forall\, \Phi_1, \Phi_2 \in X$.

Übungsaufgabe 17 Sei X ein Vektorraum mit innerem Produkt $\langle . \mid . \rangle$. Man zeige:

1. Es gilt der ***Satz von Pythagoras:*** [33]

   $$\langle \Phi_1 \mid \Phi_2 \rangle = 0 \Longrightarrow \langle \Phi_1 + \Phi_2 \mid \Phi_1 + \Phi_2 \rangle = \langle \Phi_1 \mid \Phi_1 \rangle + \langle \Phi_2 \mid \Phi_2 \rangle \quad \forall\, \Phi_1, \Phi_2 \in X\,.$$

2. Für alle $\Phi_1, \Phi_2 \in X$ mit $\langle \Phi_2 \mid \Phi_2 \rangle \neq 0$ gilt

   $$\left\langle \Phi_2 \mid \Phi_1 - \frac{\langle \Phi_2 \mid \Phi_1 \rangle}{\langle \Phi_2 \mid \Phi_2 \rangle} \Phi_2 \right\rangle = 0\,.$$

3. Die SCHWARZ***sche Ungleichung*** [34]

   $$|\langle \Phi_1 \mid \Phi_2 \rangle| \leq \sqrt{\langle \Phi_1 \mid \Phi_1 \rangle \, \langle \Phi_2 \mid \Phi_2 \rangle}$$

   gilt für alle $\Phi_1, \Phi_2 \in X$, wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn die Vektoren linear abhängig sind (siehe Lemma 2.1.9 von (Lücke, ein)).

4. $$\|\Phi\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\langle \Phi \mid \Phi \rangle} \quad \forall\, \Phi \in X \tag{1.2}$$

   definiert eine Norm $\|.\|$ auf X .

Version vom 26. März 2009

[33] Die umgekehrte Implikation gilt für komplexe Vektorräume i.a. nicht.

[34] Für die Quantenmechanik besagt die Schwarzsche Ungleichung gemäß entsprechender Verallgemeinerung von (7), daß die Wahrscheinlichkeit für den Übergang von einem Zustand in einen anderen stets kleiner 1 ist.

Definition 1.2.10 *Ein **prä-Hilbertraum**[35] ist ein normierter Raum* $(\mathcal{H}, \|.\|)$ *, dessen Norm* $\|.\|$ *gemäß (1.2) durch ein **inneres Produkt*** $\langle . \mid . \rangle$ *geben ist. Den prä-Hilbertraum* $\mathcal{H}$ *teilt man auch durch* $(\mathcal{H}, \langle . \mid . \rangle)$ *mit. Wenn* $\mathcal{H}$ *vollständig ist, nennt man* $(\mathcal{H}, \langle . \mid . \rangle)$ *einen **Hilbertraum**. Unter einer **Hilbertraum-Basis**[36] versteht man eine Menge linear unabhängiger Vektoren,[37] die in* $\mathcal{H}$ ***total*** *ist, d.h. deren lineare Hülle in* $\mathcal{H}$ *dicht ist. Ein Vektor* $\Phi \in \mathcal{H}$ *heißt **normiert**, falls* $\|\Phi\| = 1$ *. Zwei Vektoren* $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{H}$ *heißen **orthogonal**,[38] falls* $\langle \Phi_1 \mid \Phi_2 \rangle = 0$ *.*

Beispiel:

1. Der Folgenraum

$$\ell_2 \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ z = \{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |\underbrace{z_n}_{\in \mathbb{C}}|^2 < \infty \right\}$$

   mit dem natürlichen inneren Produkt

$$\langle z \mid z' \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{z_n}\, z'_n$$

   ist ein komplexer Hilbertraum.

2. Realisierung von ℓ_2 durch Fourier-Reihen (siehe Abschn. 6.2.1 von (Lücke, ein)).

Die Aussage des folgenden Satzes ist äquivalent zu der des Zermeloschen Auswahlaxioms.

Satz 1.2.11 (*Zornsches Lemma*) *Sei* $\mathfrak{I} \neq \emptyset$ *eine halbgeordnete Menge, für die jede geordnete[39] Teilmenge nach oben beschränkt ist. Dann besitzt* X *(mindestens) ein maximales Element.*

Beweis: Siehe z.B. (Rédei, 1959, §11, Satz 15). ∎

Übungsaufgabe 18 Man zeige für einen beliebigen Hilbertraum $(\mathcal{H}, \langle . \mid . \rangle)$:

Version vom 26. März 2009

[35]Synonym verwendet man auch den Begriff ***unitärer Raum***.

[36]Nicht zu verwechseln mit einer (Hamel-)Basis von $\mathcal{H}$ als linearem Raum!

[37]Die Elemente eines linearen Raumes werden i.a. Vektoren genannt.

[38]Die Orthogonalität zweier Vektoren Φ_1, Φ_2 wird oft auch durch $\Phi_1 \perp \Phi_2$ mitgeteilt.

[39]Eine durch $\prec$ halbgeordnete Menge $\mathfrak{I}$ heißt ***geordnet***, wenn für $\rho_1, \rho_2 \in \mathfrak{I}$ stets mindestens eine der Relationen $x_1 = x_2$, $x_1 \prec x_2$ oder $x_2 \prec x_1$ besteht.

1. Es existiert ein maximales Orthonormalsystem (MONS, auch *vollständiges* Orthonormalsystem oder *Orthonormalbasis* genannt), d.h. eine maximale Menge paarweise orthogonaler, normierter Vektoren in $\mathcal{H}$.

2. Für jedes MONS $\{\Phi_\rho\}_{\rho\in\mathfrak{I}}$ von $(\mathcal{H}, \langle . \mid . \rangle)$ und jeden Vektor $\Phi \in \mathcal{H}$ gilt
$$\Phi = \sum_{\rho\in\mathfrak{I}} \Phi_\rho \, \langle \Phi_\rho \mid \Phi \rangle \tag{1.3}$$
und
$$\|\Phi\|^2 = \sum_{\rho\in\mathfrak{I}} |\langle \Phi_\rho \mid \Phi \rangle|^2 \, , \tag{1.4}$$
wobei (für festes Φ) höchstens abzählbar viele der *Entwicklungskoeffizienten* $\langle \Phi_\rho \mid \Phi \rangle$ von Null verschieden sein können und die Reihenfolge der Summation keine Rolle spielt.

3. Jedes MONS ist eine Hilbertraum-Basis.

4. $(\mathcal{H}, \langle . \mid . \rangle)$ ist genau dann separabel, wenn ein abzählbares MONS (von $\mathcal{H}$) existiert.

5. Alle MONS von $\mathcal{H}$ haben die gleiche Kardinalzahl[40] (Mächtigkeit), die man als ***Hilbertraum-Dimension*** von $\mathcal{H}$ bezeichnet, d.h. zu je zwei MONS $\{\Phi_\rho\}_{\rho\in\mathfrak{I}}$ und $\left\{\Phi'_{\rho'}\right\}_{\rho'\in\mathfrak{I}'}$ existiert eine rückeindeutige Abbildung von $\mathfrak{I}$ auf $\mathfrak{I}'$.

6. Das innere Produkt ist in beiden Argumenten gleichzeitig stetig, d.h. die Abbildung
$$\mathcal{H} \times \mathcal{H} \ni (\Phi_1, \Phi_2) \longmapsto \langle \Phi_1 \mid \Phi_2 \rangle \in \mathbb{C}$$
ist stetig, wobei $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ das topologische Produkt von $\mathcal{H}$ mit sich selbst gemäß Definition 1.1.15 meint.

7. Für jeden abgeschlossenen linearen Teilraum $\mathcal{A}$ von $\mathcal{H}$ ist $\left(\mathcal{A}, \langle . \mid . \rangle \restriction \mathcal{A} \times \mathcal{A}\right)$ ebenfalls ein Hilbertraum.[41]

Version vom 26. März 2009

[40]Man beachte
$$\{\Phi_\rho : \rho \in \mathfrak{I}\} = \bigcup_{\rho'\in\mathfrak{I}'} \underbrace{\left\{\Phi_\rho : \rho \in \mathfrak{I}\, , \, \langle \Phi'_{\rho'} \mid \Phi_\rho \rangle \neq 0\right\}}_{\text{abzählbar}} ,$$
und den Äquivalenzsatz von Schröder und Bernstein (siehe (Kamke, 1965, Kap. II, §10) oder (Halmos, 1994, Kap. 22).) im Zusammenhang mit der (nicht trivialen) Tatsache, daß eine unendliche Menge $\mathcal{M}$ stets die gleiche Kardinalzahl hat wie $\mathbb{N} \times \mathcal{M}$ ($\aleph_0 \cdot \aleph_\mu = \aleph_\mu$, siehe (Kamke, 1965, Kap. VI, §45, Regel (1)) oder (Halmos, 1994, Kap. 24)).

[41]Mit $f \restriction \mathcal{M}$ wird jeweils die Einschränkung einer Abbildung f auf eine Teilmenge $\mathcal{M}$ ihres Definitionsbereichs bezeichnet.

8. Das ***orthogonale Komplement***

$$\mathcal{M}^\perp \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathcal{H} :\, \langle x \mid y \rangle = 0 \;\forall\, y \in \mathcal{M}\}$$

einer Teilmenge von $\mathcal{H}$ ist stets ein abgeschlossener linearer Teilraum von $\mathcal{H}$.

9. Für jede Teilmenge $\mathcal{M}$ von $\mathcal{H}$ gilt

$$\overline{\text{lineare Hülle}(\mathcal{M})} = \left(\mathcal{M}^\perp\right)^\perp .$$

10. Für jede Teilmenge $\mathcal{M}$ von $\mathcal{H}$ gilt[42]

$$\mathcal{H} = \overline{\text{lineare Hülle}(\mathcal{M})} \oplus \mathcal{M}^\perp ,$$

d.h. jeder Vektor $x \in \mathcal{H}$ besitzt eine eindeutige Zerlegung

$$x = x_1 + x_2 \,, \quad x_1 \in \overline{\text{lineare Hülle}(\mathcal{M})} \,, \quad x_2 \in \mathcal{M}^\perp .$$

11. Die abgeschlossene Einheitskugel

$$\{\Phi \in \mathcal{H} :\, \|\Phi\| \le 1\}$$

ist zwar beschränkt, aber nicht mehr kompakt in der Normtopologie, wenn $\mathcal{H}$ unendlichdimensional ist.

Man rechnet leicht nach, daß sich eine Norm $\|.\|$ genau dann aus einem inneren Produkt $\langle . \mid . \rangle$ gemäß (1.2) ergibt, wenn sie der ***Parallelogramm-Gleichung***[43]

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) \tag{1.5}$$

genügt.[44] Die Supremumsnorm von $C(\mathbb{R}^n)$ genügt der Parallelogrammgleichung für nichttriviale $f, g \in C(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} g = \emptyset$$

offensichtlich **nicht**.

Version vom 26. März 2009

[42]Nach einem Satz von Amemiya und Araki (siehe (Piron, 1976, Theorem (3.26))) gilt das wirklich auch nur dann, wenn $\mathcal{H}$ vollständig ist.

[43]Siehe auch P.R. Halmos: *Hilbert Space Problem Book*.

[44]Das innere Produkt ist dann durch (1.2) (mit $X = \mathcal{H}$) gegeben.

1.2.3 Stetige lineare Abbildungen

Für gegebene topologische Vektorräume X, Y über dem gleichen Zahlenkörper $\mathbb{K}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{L}(X, Y)$ stets den Vektorraum (über $\mathbb{K}$) der **stetigen** linearen Abbildungen[45] — im Falle $Y = \mathbb{K}$ meist *Funktionale* genannt — von X in Y.

Übungsaufgabe 19 Man zeige:

1. Wenn X und Y normierte Räume (über dem gleichen Zahlenkörper) mit den Normen $\|.\|_X$ resp. $\|.\|_X$ sind, dann existiert die sog. ***Operatornorm***
$$\left\|\hat{A}\right\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{0\neq x\in X} \frac{\left\|\hat{A}x\right\|_Y}{\|x\|_X} \quad \forall\, \hat{A} \in \mathcal{L}(X, Y)$$
und hat tatsächlich alle Eigenschaften einer Norm auf $\mathcal{L}(X, Y)$.

2. Wenn X ein normierter Raum und Y ein Banachraum ist, dann ist $\mathcal{L}(X, Y)$ mit der Operatornorm ebenfalls ein Banachraum.

3. Wenn $(\mathcal{H}, \langle . \mid . \rangle)$ ein Hilbertraum ist, dann stimmt für jedes $x \in \mathcal{H}$ die Operatornorm von $\langle x| \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathbb{C})$ mit $\sqrt{\langle x \mid x \rangle}$ überein.[46]

4. ℓ_2 ist zu sich selbst *dual*, d.h.:[47]
$$\mathcal{L}(\ell_2, \mathbb{C}) = \left\{\langle z| : z \in \ell_2\right\}.$$

5. Ein stetiges lineares Funktional[48] auf einem beliebigen topologischen Vektorraum über $\mathbb{K}$ ist genau dann stetig, wenn es eine geeignete Umgebung von Null auf eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{K}$ abbildet.

Version vom 26. März 2009

[45] Man bezeichnet Abbildungen f, g auch als ***Operatoren*** und schreibt dann $f\,x$ statt $f(x)$ sowie $f\,g$ statt $f \circ g$. Natürlich gilt $\mathcal{L}(X, Y) \subset L(X, Y)$.

[46] Mit $\langle x|$ wird i.d. Physik üblicherweise die Abbildung
$$\begin{array}{rcl} \langle x| : \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ y & \longmapsto & \langle x \mid y \rangle \end{array}$$
bezeichnet. Man beachte, daß die Zuordnung $x \longmapsto \langle x|$ ***antilinear*** ist, d.h.:
$$\langle \alpha x + y| = \overline{\alpha}\,\langle x| + \langle y| \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{C}\,,\ x, y \in \mathcal{H}\,.$$

[47] Die entsprechende Aussage $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathbb{C}) = \left\{\langle z| : z \in \mathcal{H}\right\}$ gilt für jeden Hilbertraum (***Lemma von Riesz***), d.h. für jedes $F \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathbb{C})$ gilt
$$\langle z| \sim F \quad \forall\, z \in \{y \in \mathcal{H} : F(y) = 0\}^{\perp}$$
(vgl. (Reed und Simon, 1972, Theorem II.4)).

[48] Die Existenz eines stetigen linearen Funktionals $F \neq 0$ ist nicht für alle topologischen Vektorräume gesichert (siehe z.B. (Robertson und Robertson, 1967, Kap. II, Anhang (6))). Für lokalkonvexe Räume folgt die Existenz aus dem Satz von Hahn und Banach (Satz 1.2.14).

6. Jedes lineare Funktional auf einem endlichdimensionalen topologischen Vektorraum ist stetig.

7. Ein lineares stetiges Funktional F auf einem lokalkonvexen topologischen Vektorraum X ist genau dann stetig, wenn eine absolutkonvexe Umgebung $\mathcal{A}$ von 0 existiert, deren Minkowski-Funktional der Ungleichung

$$|F(x)| \leq h_{\mathcal{A}}(x) \quad \forall\, x \in X$$

genügt.

Definition 1.2.12 *Eine Abbildung f eines Banachraumes X in einen Banachraum Y heißt an der Stelle $x_0 \in X$ (Fréchet-)* ***differenzierbar****, wenn ein $D_{x_0} f \in \mathcal{L}(X, Y)$, die sog.* ***Fréchet-Ableitung***[49] *von f an der Stelle x_0, existiert mit*

$$\lim_{0 \neq \Delta x \to 0} \frac{\|f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \;-\; (D_{x_0} f)(\Delta x)\|}{\|\Delta x\|} = 0\,.$$

Übungsaufgabe 20 Man zeige:

1. Die Fréchet-Ableitung ist tatsächlich eindeutig, falls sie überhaupt existiert.

2. Für stetig differenzierbare Skalarfelder $\Phi(\mathbf{x})$ über dem $\mathbb{R}^n$ gilt

$$(D_{\mathbf{x}_0} \Phi)(\mathbf{x}') = \mathbf{x}' \cdot \operatorname{grad} \Phi(\mathbf{x}_0) \quad \forall\, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^n$$

(also $D_{\mathbf{v}} = \mathcal{L}_{\mathbf{v}}$ entsprechend Abschn. 4.1.1 von (Lücke, ein)).

3. Für ganze analytische Funktionen f gilt

$$(D_{z_0} f)(z) = z\, f'(z_0) \quad \forall\, z_0, z \in \mathbb{C}\,.$$

Definition 1.2.13 *Sei X ein topologischer Vektorraum. Dann bezeichnet man die $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$-schwache Topologie einfach als die* ***schwache Topologie***[50] *von X.*

Übungsaufgabe 21 Man zeige, daß die schwache Topologie von ℓ_2 echt schwächer ist als die Normtopologie.

Übungsaufgabe 22

[49] Diese Definition läßt sich (mithilfe der entspr. Minkowski-Funktionale) ohne weiteres für lokalkonvexe Räume X, Y verallgemeinern. Falls X ein Funktionenraum über $Y = \mathbb{K}$ ist, bezeichnet man $D_{x_0} f$ auch als ***Funktionalableitung***.

[50] Wenn F ein linearer Teilraum von $L(X, \mathbb{K})$ ist, bezeichnet man mit $\sigma(X, F)$ die F-schwache Topologie von X. Die schwache Topologie von X ist also $\sigma(X, X')$, wobei $X' \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$.

Seien X, Y topologische Vektorräume und Z ein in X dichter topologischer Untervektorraum. Man zeige:

1. Stetige lineare Abbildungen von X in Y bilden Cauchy-Netze in X stets auf Cauchy-Netze in Y ab.

2. Wenn Y vollständig ist, läßt sich jede stetige lineare Abbildungen von Z in Y eindeutig zu einer stetigen linearen Abbildungen von X in Y fortsetzen.

Satz 1.2.14 (Hahn-Banach) *Sei X ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum über dem Körper der komplexen oder der reellen Zahlen und sei Z ein topologischer Untervektorraum von X. Dann läßt sich jedes stetige lineare Funktional auf Z zu einem stetigen linearen Funktional auf X fortsetzen.*

Beweis: Siehe z.B. (Robertson und Robertson, 1967, Kap. II, §2). ∎

Satz 1.2.15 (Banach-Steinhaus) *Seien X ein Banachraum, Y ein normierter Vektorraum und $\mathfrak{F} \subset \mathcal{L}(X, Y)$. Falls $\{F(x) : F \in \mathfrak{F}\}$ für jedes $x \in X$ in Y beschränkt ist, dann ist $\mathfrak{F}$ gleichmäßig, d.h. bzgl. der Operatornorm, beschränkt.*[51]

Beweis: Siehe (Reed und Simon, 1972, Theorem III.9). ∎

Übungsaufgabe 23 Seien X ein Banachraum, Y ein normierter Vektorraum. Man zeige, daß jedes bilineare Funktional auf $X \times Y$, das in jedem Argument für sich stetig ist, auch in beiden Argumenten gleichzeitig stetig ist.[52]

Definition 1.2.16 *Seien X ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$ und $Y \subset L(X, \mathbb{K})$. Dann nennt man (X, Y) ein* ***duales Paar****, wenn die Y die Punkte von X trennt.*[53] *Die Y-schwache Topologie auf X bezeichnet man mit $\sigma(X, Y)$ und entsprechend die X-schwache Topologie auf Y mit $\sigma(Y, X)$, wobei man die $x \in X$ gemäß*

$$x(y) \stackrel{\text{def}}{=} y(x) \quad \forall\, y \in Y$$

als Elemente von $L(Y, K)$ auffaßt.

[51]Die Aussage des Satzes von Banach-Steinhaus wird deshalb auch als ***Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit*** bezeichnet. Bzgl. der Verallgemeinerung auf lokalkonvexe topologische Vektorräume (wobei dann X *tonneliert* sein muß) siehe (Robertson und Robertson, 1967, Kap. IV, Satz 4).

[52]Bzgl. einer Verallgemeinerung siehe (Robertson und Robertson, 1967, Kap. 7, Satz 11).

[53]Vgl. Nr. 1 von Übungsaufgabe 7.

Übungsaufgabe 24 Man zeige:

1. Wenn (X, Y) ein duales Paar ist, dann trennt X die Punkte von Y.
2. Für jeden Vektorraum X über $\mathbb{K}$ ist $(X, L(X, \mathbb{K}))$ ein duales Paar.
3. Für jeden lokalkonvexen Vektorraum X über $\mathbb{K}$ ist $(X, \mathcal{L}(X, \mathbb{K}))$ ein duales Paar.
4. Der ***topologische Dualraum*** $X' = \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ eines Banachraumes X ist in der Topologie $\sigma(X', X)$ stets vollständig.[54]

Satz 1.2.17 *Sei (X, Y) ein duales Paar. Dann gilt $Y = \mathcal{L}\Big(\big(X, \sigma(X, Y)\big), \mathbb{K}\Big)$.*

Beweis: Siehe (Robertson und Robertson, 1967, Kap. II, Satz 10). ∎

Satz 1.2.18 (Satz von der offenen Abbildung) *Seien X, Y Banachräume[55] und sei $f \in \mathcal{L}(X, Y)$. Falls $f(X) = Y$, dann ist die Abbildung f* ***offen****, d.h. es gilt:*

$$\mathcal{O} \text{ offen in } X \quad \Longrightarrow \quad f(\mathcal{O}) \text{ offen in } Y .$$

Beweis: Siehe (Reed und Simon, 1972, Satz III.10). ∎

Folgerung 1.2.19 (Satz von der Umkehrabbildung) *Jede stetige Bijektion eines Banachraumes auf einen anderen besitzt eine stetige Umkehrabbildung.*

Beweis: Die Stetigkeit der Umkehrabbildung ist äquivalent zur Offenheit der Abbildung. Deshalb folgt die Behauptung unmittelbar aus Satz 1.2.18. ∎

Satz 1.2.20 (Satz vom abgeschlossenen Graphen) *Seien X, Y vollständige metrisierbare topologische Vektorräume und $f \in L(X, Y)$. Dann ist f genau dann stetig, also $f \in \mathcal{L}(X, Y)$, wenn f einen (im topologischen Produkt von X und Y) abgeschlossenen Graphen[56] hat.*

Version vom 26. März 2009

[54] Bzgl. einer entsprechenden Verallgemeinerung siehe (Robertson und Robertson, 1967, Kap. IV, Folg. 1 zu Satz 4).

[55] Bzgl. einer Verallgemeinerung siehe (Robertson und Robertson, 1967, Kap. VI, Satz 17).

[56] Als den ***Graph****en* einer Abbildung f einer Menge X in eine Menge Y bezeichnet man üblicherweise die Teilmenge $\{(x, f(x)) : x \in X\}$.

Beweis: Siehe (Köthe, 1966, § 15, Nr. 12, Satz (3)). ∎

Übungsaufgabe 25 Seien X, Y topologische Räume und Z ein topologischer Teilraum von X. Man zeige daß der Graph einer Abbildung f von Z in Y genau dann im topologischen Produkt von X und Y abgeschlossen ist, wenn für alle Netze $\{z_\rho\}_{\rho\in\mathfrak{I}}$ in Z gilt:

$$\left.\begin{array}{rcll} x_\rho & \longrightarrow & x & \text{in X}, \\ f(x_\rho) & \longrightarrow & y & \text{in Y} \end{array}\right\} \quad\Longrightarrow\quad x \in Z \;\text{ und }\; f(x) = y\,.$$

Übungsaufgabe 26 Es seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $\hat{A} \in L(\mathcal{H},\mathcal{H})$. Man zeige:

$$\left\langle x \mid \hat{A}y \right\rangle = \left\langle \hat{A}x \mid y \right\rangle \;\forall\, x,y \in \mathcal{H} \quad\Longrightarrow\quad \hat{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{H})$$

(***Satz von Hellinger-Toeplitz***).

1.3 Konstruktionen lokalkonvexer Räume

1.3.1 Projektiver Limes

Unter den Voraussetzungen von Definition 1.1.13 bezeichnet man $(X,\mathfrak{T})$ auch als den ***projektiven Limes*** der Räume $(X_\rho,\mathfrak{T}_\rho)$ unter den Abbildungen f_ρ, wenn $\{f_\rho\}_{\rho\in\mathfrak{I}}$ die Punkte von X trennt.

Übungsaufgabe 27 Man zeige:

1. Der projektive Limes (Hausdorffscher) lokalkonvexer topologischer Vektorräume unter linearen Abbildungen ist stets ebenfalls ein (Hausdorffscher) lokalkonvexer topologischer Vektorraum.

2. Jeder lokalkonvexe topologische Vektorraum ist eine projektiver Limes von Banachräumen.

Ein häufiger Anwendungsfall ist der, daß alle X_ρ lineare Teilräume einunddesselben Vektorraumes Y sind, X mit $\bigcap_{\rho\in\mathfrak{I}} X_\rho$ übereinstimmt und alle f_ρ mit der kanonischen Einbettung. Dann bezeichnet man den projektiven Limes der X_ρ auch als ***topologischen Durchschnitt*** der topologischen Vektorräume X_ρ.

Ein wichtiges Beispiel ist der ***Schwartzraum*** $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ der komplexwertigen ***temperierten Funktionen*** über $\mathbb{R}^n$:

Hier ist Y der Vektorraum aller komplexwertigen Funktionen über $\mathbb{R}^n$, $\mathfrak{I} = \mathbb{Z}_+$ und X_μ ist jeweils der normierte Raum aller μ-mal stetig partiell differenzierbaren Funktionen $\varphi(\mathbf{x})$ über $\mathbb{R}^n$, für die[57]

$$\|\varphi\|_\mu \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} (1+\|\mathbf{x}\|)^\mu \sup_{\substack{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n \\ |\alpha|\le\mu}} |D_\mathbf{x}^\alpha \varphi(\mathbf{x})| < \infty\,.$$

Damit gilt im topologischen Sinne:

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{\mu=0}^{\infty} \left(X_\mu, \|.\|_\mu\right)\,.$$

Übungsaufgabe 28 Man zeige für beliebig vorgegebenes $n \in \mathbb{N}$:

1. Der Schwartzraum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ vollständig und metrisierbar.

2. Jede partielle Ableitung bildet $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ linear und stetig in sich ab.

3. Die Multiplikation mit einer beliebig vorgegebenen Funktion

   $$k \in \mathcal{O}_\mathrm{M}(\mathbb{R}^n) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{k \in C^\infty(\mathbb{R}^n) :\, D_\mathbf{x}^\alpha k(\mathbf{x}) \text{ polynomial beschränkt } \forall\, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n\right\}$$

   ist eine stetige lineare Abbildung von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

4. Die n-dimensionale Fourier-Transformation (siehe Satz 6.2.6 von (Lücke, ein) für $n = 1$) ist ein topologischer Isomorphismus von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Version vom 26. März 2009

[57]Wir benutzen die übliche Multiindex-Schreibweise für $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$\alpha = (\alpha^1, \dots, \alpha^n)\,, \quad |\alpha| \stackrel{\text{def}}{=} \alpha^1 + \ldots + \alpha^n\,, \quad D_\mathbf{x}^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^{\alpha^1} \cdots \left(\frac{\partial}{x^1}\right)^{\alpha^n}\,.$$

Wir schreiben $(1+\|\mathbf{x}\|)^\mu$ statt $\|\mathbf{x}\|^\mu$, damit für beliebige $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{Z}_+$ stets

$$\mu_1 < \mu_2 \implies \|\varphi\|_{\mu_1} \le \|\varphi\|_{\mu_2}$$

gilt.

1.3.2 Induktiver Limes

Definition 1.3.1 *Seien $\{X_\rho\}_{\rho\in\mathfrak{I}}$ eine Familie lokalkonvexer topologischer Vektorräume, X ein Vektorraum und $\{u_\rho\}_{\rho\in\mathfrak{I}}$ eine Familie von Abbildungen, wobei u_ρ jeweils X_ρ in X abbilde und*

$$X = \text{lineare Hülle von} \bigcup_{\rho\in\mathfrak{I}} u_\rho(X_\rho)$$

*gelte. Dann versteht man unter dem **induktiven Limes** der X_ρ unter den Abbildungen u_ρ den linearen Raum X , versehen mit der stärksten lokalkonvexen Topologie, bzgl. der alle u_ρ noch stetig sind.*

Übungsaufgabe 29 Unter den Voraussetzungen von Definition 1.3.1 zeige man:

1. Wenn jeweils $\mathfrak{B}_\rho$ eine Umgebungsbasis der 0 in X_ρ ist, die nur aus absolutkonvexen Mengen besteht, dann bildet die Gesamtheit aller Mengen $\mathcal{A}_{\{\mathcal{N}_\rho\}}$ der Form

$$\mathcal{A}_{\{\mathcal{N}_\rho\}} \stackrel{\text{def}}{=} \text{absolutkonvexe Hülle von} \bigcup_{\rho\in\mathfrak{I}} \mathcal{N}_\rho\,, \qquad \mathcal{N}_\rho \in \mathfrak{B}_\rho\;\forall\,\rho\in\mathfrak{I}\,,$$

   eine Umgebungsbasis der 0 im induktiven Limes (der X_ρ unter den Abbildungen u_ρ).

2. Ein lineares Funktional F auf dem induktiven Limes ist genau dann stetig, wenn für alle $\rho\in\mathfrak{I}$ jeweils das Funktional $F\circ u_\rho$ auf X_ρ stetig ist.

Ein häufiger Anwendungsfall ist der, daß $\mathfrak{I}$ nach oben gerichtet ist und

$$\rho_1 \prec \rho_2 \implies X_{\rho_1} \subset X_{\rho_2}$$

gilt. Dann ist

$$X = \bigcup_{\rho\in\mathfrak{I}} X_\rho$$

und man bezeichnet den induktiven Limes auch als die ***topologische Vereinigung*** der X_ρ . Wenn für alle $\rho_1,\rho_2\in\mathfrak{I}$ mit $\rho_1\prec\rho_2$ jeweils X_{ρ_1} topologischer Teilraum von X_{ρ_2} ist, dann bezeichnet man die topologische Vereinigung auch als ***strikten induktiven Limes***.

Ein wichtiges Beispiel ist der ***Schwartzraum*** $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ der komplexwertigen C^∞-Funktionen über $\mathbb{R}^n$ mit kompaktem Träger:

Für $n, \mu \in \mathbb{N}$ und $A > 0$ bezeichne $K_\mu(\mathbb{R}^n)$ jeweils den linearen Raum aller komplexwertigen Funktionen $\varphi(\mathbf{x})$ über $\mathbb{R}^n$ mit

$$\|\varphi\|_{\mu,\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \sup_{\nu\in\mathbb{Z}_+} (\|\mathbf{x}\| /\mu)^\nu \left|D^\beta_{\mathbf{x}}\varphi(\mathbf{x})\right| < \infty \quad \forall\, \beta \in \mathbb{Z}^n_+ \,.$$

$K_\mu(\mathbb{R}^n)$ sei jeweils mit der $\left\{\|.\|_{\mu,\beta}\right\}_{\beta\in\mathbb{Z}^n_+}$-schwachen Topologie versehen. Dann gilt im topologischen Sinne:

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = \bigcup_{\mu=1}^{\infty} K_\mu(\mathbb{R}^n)\,.$$

Übungsaufgabe 30 Man zeige für beliebig vorgegebenes $n \in \mathbb{N}$:

1. Eine Folge $\{\varphi_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ gegen 0, wenn eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ existiert, außerhalb der alle φ_ν verschwinden und auf der alle partiellen Ableitungen der φ_ν gleichmäßig gegen Null konvergieren.
2. Diese Aussage gilt nicht für Netze.[58]
3. Ein lineares Funktional auf $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ist genau dann stetig, wenn es jede konvergente (abzählbare!) Folge auf eine konvergente Folge in $\mathbb{C}$ abbildet.
4. $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ist ***bornologisch***,[59] d.h. jedes beschränkte lineare Funktional auf $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ist stetig.
5. Nicht jede Cauchy-Netz in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ist asymptotisch beschränkt.
6. $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ist **nicht** metrisierbar.
7. Die kanonische Einbettung von $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist stetig, aber nicht ihre Umkehrabbildung.

Version vom 26. März 2009

[58]**Hinweis:** Man wähle z.B. die Gesamtheit aller Abbildungen von $\mathbb{N}$ in sich als Indexmenge $\mathfrak{I}$ mit der Halbordnung

$$n_1 \prec n_2 \quad \stackrel{\text{def}}{\iff} \quad \begin{cases} n_1(1) \leq n_2(1)\,, \\ n_1(\nu+1)/n_1(\nu) \leq n_2(\nu+1)/n_2(\nu) \quad \forall\, \nu \in \mathbb{N} \end{cases}$$

und betrachte das Netz $\{\varphi_n\}_{n\in\mathfrak{I}}$, wobei

$$\varphi_n(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\varphi\left(\mathbf{x} - n(1)\right)}{n\left(n(1)\right)} \quad \forall\, n \in \mathfrak{I}\,,\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

mit einer nichttrivialen Funktion $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ sei.

[59]Bornologische lokalkonvexe Räume werden auch ***Mackeyräume*** genannt.

1.3.3 Topologische Direkte Summe

Auf dem (topologische) Produkt $\bigtimes_{\rho\in\mathfrak{I}} X_\rho$ einer Familie $\{X_\rho\}_{\rho\in\mathfrak{I}}$ (topologischer) linear Räume X_ρ (über dem gleichen Körper $\mathbb{K}$) läßt sich gemäß

$$(\alpha\, x + \beta\, y)\,(\rho) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha\, x(\rho) + \beta\, y(\rho) \qquad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K}\,,\; x, y \in \bigtimes_{\rho'\in\mathfrak{I}} X_{\rho'}\,,\; \rho \in \mathfrak{I}$$

auf natürliche Weise eine lineare Struktur einführen. Sie diesem Sinne sei $\bigtimes_{\rho\in\mathfrak{I}} X_\rho$ im Folgenden stets als (topologischer) linearer Raum aufgefaßt. Es existiert zu jedem $\rho \in \mathfrak{I}$ eine kanonische Einbettung ι_ρ von X_ρ in $\bigtimes_{\rho'\in\mathfrak{I}} X_{\rho'}$:

$$\iota_\rho(x_\rho)\,(\rho') \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} x_\rho & \text{falls } \rho' = \rho \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \forall\, \rho, \rho' \in \mathfrak{I}\,,\; x_\rho \in X_\rho\,.$$

Den von $\bigcup_{\rho\in\mathfrak{I}} \iota_\rho(X_\rho)$ erzeugten linearen Teilraum von $\bigtimes_{\rho\in\mathfrak{I}} X_\rho$ bezeichnet man i.a. als die (algebraische) ***direkte Summe*** $\bigoplus_{\rho\in\mathfrak{I}} X_\rho$ der Familie[60] $\{X_\rho\}_{\rho\in\mathfrak{I}}$.

Definition 1.3.2 *Sei $\{X_\rho\}_{\rho\in\mathfrak{I}}$ eine Familie lokalkonvexer topologischer Vektorräume. Dann versteht man unter der* ***lokalkonvexen direkten Summe*** *der Räume X_ρ ihren induktiven Limes unter den kanonischen Einbettungen der X_ρ in ihre (algebraische) direkte Summe. Für $\rho_1, \ldots, \rho_n \in \mathfrak{I}$ schreibt man auch*

$$X_{\rho_1} \oplus \ldots \oplus X_{\rho_n} \quad \textit{statt} \quad \bigoplus_{\nu\in\{\rho_1,\ldots,\rho_n\}} X_{\rho_\nu}\,.$$

Beispiel: $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{\nu=1}^n \mathbb{R}^1$.

Übungsaufgabe 31 Sei $\{X_\rho\}_{\rho\in\mathfrak{I}}$ eine Familie lokalkonvexer topologischer Vektorräume. Man zeige:

1. Die lokalkonvexe direkte Summe der X_ρ existiert[61] und ist genau dann vollständig, wenn alle X_ρ vollständig sind.

2. Für jedes $\rho \in \mathfrak{I}$ stellt $\iota{\restriction}X_\rho$ einen topologischen Isomorphismus von X_ρ auf den topologischen Untervektorraum $\iota(X_\rho)$ der lokalkonvexen direkten Summe dar.

3. Wenn $\mathfrak{I}$ endlich ist, stimmt die lokalkonvexe direkte Summe der X_ρ mit dem topologischen Produkt der X_ρ überein.

Version vom 26. März 2009

[60] Die Indizierung der Familie bestimmt die genaue Realisierung des topologischen Produktes und der direkten Summe.

[61] Es sei daran erinnert, daß wir nur Hausdorffsche Räume zulassen wollen.

4. Für beliebige **disjunkte** $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2 \subset \mathfrak{I}$ gilt stets[62]
$$\bigoplus_{\rho\in\mathfrak{I}_1\cup\mathfrak{I}_2} X_\rho \quad \text{topologisch isomorph} \quad \left(\bigoplus_{\rho_1\in\mathfrak{I}_1} X_{\rho_1}\right) \oplus \left(\bigoplus_{\rho_2\in\mathfrak{I}_2} X_{\rho_2}\right).$$

5. Wenn $X_1, X_2 \in \{X_\rho : \rho \in \mathfrak{I}\}$ zueinander disjunkte lokalkonvexe topologische Untervektorräume einunddesselben lokalkonvexen topologischen Vektorraums X sind, dann ist der von $X_1 \cup X_2$ erzeugte lokalkonvexe topologische Untervektorraum von X topologisch isomorph zur lokalkonvexen direkten Summe $X_1 \oplus X_2$.

6. Wenn $X_\rho = \mathcal{H}_\rho$ jeweils ein Hilbertraum mit dem inneren Produkt $\langle . \mid . \rangle_\rho$ ist, dann ist die Topologie der lokalkonvexen Summe stärker als die durch das innere Produkt
$$\langle x \mid y \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\rho\in\mathfrak{I}} \langle x \mid y \rangle_\rho$$
gegebene. Nur für endliches $\mathfrak{I}$ stimmen beide Topologien überein.

1.3.4 Topologische Tensor-Produkte

Mit X^* sei stets der ***algebraische Dualraum*** $L(X, \mathbb{K})$ eines Vektorraums über dem Körper $\mathbb{K}$ bezeichnet. Seien X, Y Vektorräume über $\mathbb{K}$. Dann ist jedem $(x, y) \in X \times Y$ auf natürliche Weise eine Bilinearform $x \otimes y$ über $X^* \times Y^*$ zugeordnet:
$$(x \otimes y)(x^*, y^*) \stackrel{\text{def}}{=} x^*(x)\, y^*(y) \quad \forall\, (x^*, y^*) \in X^* \times Y^* .$$
Den von $\{x \otimes y : (x, y) \in X \times Y\}$ erzeugten linearen Teilraum aller Bilinearformen über $X^* \times Y^*$ bezeichnet man als das ***algebraische Tensorprodukt*** $X \otimes Y$ von X und Y .

Übungsaufgabe 32 Seien X, Y, Z Vektorräume (über dem gleichen Körper $\mathbb{K}$). Man zeige:

1. Für beliebig vorgegebene $(x, y) \in X \times Y$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt[63]
$$\lambda\,(x \otimes y) = (\lambda x) \otimes y = x \otimes (\lambda y) .$$

2. Für beliebige $x_1, x_2 \in X$ und $y \in Y$ gilt
$$(x_1 + x_2) \otimes y = x_1 \otimes y \,+\, x_2 \otimes y .$$

[62]Streng genommen müßte man den Summanden $\bigoplus_{\rho_1\in\mathfrak{I}_1} X_{\rho_1}$ und $\bigoplus_{\rho_2\in\mathfrak{I}_2} X_{\rho_2}$ Indizes zuweisen, damit $\left(\bigoplus_{\rho_1\in\mathfrak{I}_1} X_{\rho_1}\right) \oplus \left(\bigoplus_{\rho_2\in\mathfrak{I}_2} X_{\rho_2}\right)$ eindeutig definiert ist (vgl. Fußnote 60).

[63]Die Zuordnung $(x, y) \longmapsto x \otimes y$ ist i.a. also **nicht** rückeindeutig.

3. Für beliebige $x \in X$ und $y_1, y_2 \in Y$ gilt
$$x \otimes (y_1 + y_2) = x \otimes y_1 + x \otimes y_2 \,.$$

4. Wenn $\{x_{\rho_1} : \rho_1 \in \mathfrak{I}_1\}$ eine Basis von X und $\{y_{\rho_2} : \rho_2 \in \mathfrak{I}_2\}$ eine Basis von Y ist, dann ist $\{x_{\rho_1} \otimes y_{\rho_2} : \rho_j \in \mathfrak{I}_j \text{ für } j = 1,2\}$ eine Basis von $X \otimes Y$.

5. $X \otimes Y$ ist isomorph zur direkten Summe von X und Y , faktorisiert nach dem linearen Teilraum, der von allen Elementen der Form
$$\left(\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu x_\nu, \sum_{\mu=1}^{m} \beta_\mu y_\mu\right) - \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{m} \alpha_\nu \beta_\mu (x_\nu, y_\mu)$$
erzeugt wird.(Vgl. (Köthe, 1966, § 9, Nr. 6).)

6. $X \otimes Y$ und $Y \otimes X$ sind isomorph.

7. $X \otimes (Y \otimes Z)$ und $(X \otimes Y) \otimes Z$ sind isomorph.

8. Im Falle $X = Y = \mathbb{R}^n$ ist $X \otimes Y$ gerade der Vektorraum der kontravarianten Tensoren 2. Stufe und $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$ jeweils das dyadische Produkt der den $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ entsprechenden kontravarianten Tensoren 1. Stufe (vgl. Anhang A.2.1 von (Lücke, ein)).

9. Wenn wir mit $F(\mathcal{M})$ jeweils den Vektorraum aller $\mathbb{K}$-wertigen Funktionen über $\mathcal{M}$ bezeichnen, dann ist $F(\mathcal{M}_1) \otimes F(\mathcal{M}_2)$ für beliebig vorgegebene Mengen $\mathcal{M}_j$ isomorph zu dem linearen Teilraum von $F(\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2)$, der von allen Abbildungen der Form
$$\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 \ni (m_1, m_2) \longmapsto f_1(m_1)\, f_2(m_2) \in \mathbb{K} \,, \quad f_j \in F(\mathcal{M}_j) \text{ für } j = 1,2$$
erzeugt wird, die deshalb üblicherweise auch mit $f_1 \otimes f_2$ bezeichnet werden.

Definition 1.3.3 *Seien X, Y lokalkonvexe topologische Vektorräume über dem gleichen Körper. Dann versteht man unter dem* ***π-Tensorprodukt***[64] *$X \otimes_\pi Y$ von X und Y das algebraische Tensorprodukt $X \otimes Y$, versehen mit der feinsten lokalkonvexen Topologie bzgl. der die Abbildung*
$$X \times Y \ni (x, y) \longmapsto x \otimes y \in X \otimes Y$$
stetig ist.[65] *Die Vervollständigung bezeichnet man mit $X \widetilde{\otimes}_\pi Y$.*

[64] Für weitere Details sei auf (Pietsch, 1969, Kap. 7) verwiesen.

[65] Diese Topologie wird mitunter auch als *projektive Topologie* bezeichnet, obwohl es sich eigentlich um die induktive Topologie bzgl. der kanonischen Einbettung von $X \times Y$ in $X \otimes Y$ handelt. Sie ist tatsächlich ebenfalls Hausdorffsch (siehe (Robertson und Robertson, 1967, Kap. VII, Satz 8)).

Übungsaufgabe 33 *Seien X, Y lokalkonvexe topologische Vektorräume über dem gleichen Körper. Man zeige:*

1. *Wenn $\mathfrak{B}_X$ resp. $\mathfrak{B}_Y$ eine Umgebungsbasis der 0 in X resp. Y ist, die nur aus absolutkonvexen Mengen besteht, dann ist*

$$\{\textit{absolutkonvexe Hülle}\,(\mathcal{A}_X \otimes \mathcal{A}_Y) : \mathcal{A}_X \in \mathfrak{B}_X\,,\ \mathcal{A}_Y \in \mathfrak{B}_Y\}$$

   eine Umgebungsbasis der 0 in $X \otimes_\pi Y$.

2. *Zu jeder (in beiden Variablen gleichzeitig) stetigen Bilinearform b über $X \times Y$ existiert genau ein $l \in \mathcal{L}\left(\left(X \widetilde{\otimes}_\pi Y\right), \mathbb{K}\right)$ mit*

$$b(x, y) = l(x \otimes y) \quad \forall\, (x, y) \in X \times Y\,.$$

Satz 1.3.4 *Seien X, Y lokalkonvexe topologische Vektorräume über dem gleichen Körper. Wenn X und Y metrisierbar sind, dann existieren zu jedem $z \in X \widetilde{\otimes}_\pi Y$ Folgen $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ resp. $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ resp. $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in X resp. Y resp. $\mathbb{K}$ mit:*

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n\, x_n \otimes y_n\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \leq 1\,, \quad x_n \to 0\,, \quad y_n \to 0\,.$$

Beweis: Siehe (Robertson und Robertson, 1967, Kap. VII, Folg. 1 zu Satz 9).
∎

Kapitel 2

Integration

2.1 Verbandstheoretische Grundlagen[1]

Definition 2.1.1 *Unter einem* ***Verband***[2] $(X, \prec)$ *(englisch:* ***lattice****) versteht man eine halbgeordnete Menge (englisch:* ***poset*** *)* X *mit einer Halbordnung* $\prec$ *, bzgl. der zu je zwei Elementen* $x_1, x_2 \in X$ *sowohl das Infimum*

$$x_1 \wedge x_2 \stackrel{\text{def}}{=} \inf_X \{x_1, x_2\}$$

als auch das Supremum

$$x_1 \vee x_2 \stackrel{\text{def}}{=} \sup_X \{x_1, x_2\}$$

in X *existieren. Wenn*

$$\hat{0} \stackrel{\text{def}}{=} \inf_X X$$

existiert, sagt man, $(X, \prec)$ *besitze eine* ***universelle untere Schranke*** $\hat{0}$ *. Wenn*

$$\hat{1} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_X X$$

existiert, sagt man, $(X, \prec)$ *besitze eine* ***universelle obere Schranke*** $\hat{1}$ *. Ein Verband* $(X, \prec)$ *heißt* σ*-****vollständig****, wenn sowohl das Infimum (bzgl.* X *) als auch das Supremum jeder abzählbaren Teilmenge von* X *(in* X *) existiert. Ein Verband* $(X, \prec)$ *heißt* ***vollständig****, wenn das Infimum und das Supremum jeder Teilmenge von* X *existiert. Ein Verband* $(X, \prec)$ *heißt* ***distributiv****, wenn die Bedingungen*

$$x_1 \wedge (x_2 \vee x_3) = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_3)$$

Version vom 26. März 2009

[1] Für weitergehende Betrachtungen sei insbesondere auf (Birkhoff, 1967) verwiesen.

[2] Man kann einen Verband natürlich auch äquivalent mithilfe der (für den Begriff des Teilverbandes wichtigen) Verknüpfungen $\vee, \wedge$ definieren und die Halbordnung gemäß

$$x_1 \prec x_2 \stackrel{\text{def}}{\iff} x_1 \wedge x_2 = x_1 \ (\iff x_1 \vee x_2 = x_2)$$

einführen; siehe (Birkhoff, 1967, Ch. I, Th. 8).

und

$$x_1 \vee (x_2 \wedge x_3) = (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_3)$$

für alle $x_1, x_2, x_3 \in X$ *erfüllt sind.*

Beispiel: Für jede Menge S ist[3] $\left(2^S, \subset\right)$ ein vollständiger distributiver Verband mit universeller oberer Schranke $\hat{1} = S$ und universeller unterer Schranke $\hat{0} = \emptyset$.

Übungsaufgabe 34 Man zeige für einen beliebige vorgegebenen Verband $(X, \prec)$, daß die Verknüpfungen $\wedge, \vee$ idempotent, kommutativ und assoziativ sind und den *Verschmelzungsgesetzen*

$$x \wedge (x \vee y) = x = x \vee (x \wedge y) \quad \forall\, x, y \in X$$

genügen.

In der klassischen Physik identifiziert man üblicherweise jede Teilmenge $\mathcal{M}$ der gesamten Zustandsmenge S eines vorgegebenen (nicht statistischen) Systems mit einer Eigenschaft $E_{\mathcal{M}}$, die das System genau dann besitzt, wenn sein Zustand zu $\mathcal{M}$ gehört. Für den Verband $\left(2^S, \subset\right)$, wobei S die Gesamtheit aller Zustände des gegebenen Systems bezeichnet, haben wir dann folgende Interpretation:

$$\subset \;\widehat{=}\; \text{logische Implikation}\,, \tag{2.1}$$
$$\hat{1} \;\widehat{=}\; \text{triviale Eigenschaft}\,, \tag{2.2}$$
$$\hat{0} \;\widehat{=}\; \text{unmögliche Eigenschaft}\,, \tag{2.3}$$
$$\wedge \;\widehat{=}\; \text{logisches „und“} \tag{2.4}$$
$$\vee \;\widehat{=}\; \text{logisches „oder“}\,. \tag{2.5}$$

Wenn $(X, \prec)$ ein distributiver Verband ist und X' eine Teilmenge von X , für die $(X', \prec)$ ebenfalls ein Verband ist, dann muß letzterer **nicht** distributiv sein, weil z.B.

$$\inf_X \{x_1, x_2\} = x_1 \wedge x_2 \;\neq\; x_1 \wedge' x_2 \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{X'} \{x_1, x_2\}$$

für bestimmte $x_1, x_2 \in X'$ gelten kann.[4]

In der Quantenphysik (ohne *Superauswahlregeln*) identifiziert man üblicherweise jeden Hilbertschen Unterraum $\mathcal{P}$ (bzw. den entsprechenden Projektionsoperator) des Hilbertschen Zustandsraumes $\mathcal{H}$ eines vorgegebenen Systems mit einer Eigenschaft $E_{\mathcal{P}}$, die eine dem System entsprechende statistische **Gesamtheit** in einem

[3] Wie üblich, bezeichnen wir mit 2^S die Gesamtheit aller Teilmengen von S .

[4] Dann ist $(X', \prec)$ zwar ein sub-poset, aber kein sub-lattice von $(X, \prec)$.

durch $\Psi \in \mathcal{H}$ beschriebenen (reinen) Zustand genau dann besitzt, wenn $\Psi \in \mathcal{P}$. Weil diese Zuordnung von Eigenschaften (den experimentellen Möglichkeiten entsprechend) eingeschränkt ist, kann man noch die Interpretationen (2.1)–(2.3), aber **nicht** mehr die Interpretationen (2.4),(2.5) allgemein beibehalten.[5]

Übungsaufgabe 35 Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum der Dimension ≥ 2. Man zeige, daß der zugehörige Verband $(\mathfrak{P}_{\mathcal{H}}, \subset)$ vollständig, aber **nicht** distributiv ist.

Definition 2.1.2 *Unter einer* ***Orthokomplementierung*** *eines Verbandes* $(X, \prec)$ *versteht man eine Abbildung* $x \longmapsto \neg x$ *von* X *in sich, die folgenden vier Bedingungen genügt:*[6]

(O1): $x \wedge \neg x = \hat{0} \quad \forall\, x \in X\,,$

(O2): $x \vee \neg x = \hat{1} \quad \forall\, x \in X\,,$

(O3): $\neg(\neg x) = x \quad \forall\, x \in X\,,$

(O4): $x_1 \prec x_2 \iff \neg x_2 \prec \neg x_1 \quad \forall\, x_1, x_2 \in X\,.$

Übungsaufgabe 36 Man zeige für eine beliebig vorgegebene Menge X und beliebiges $\mathfrak{M} \subset 2^X$, daß $(\mathfrak{M}, \subset, \neg)$ mit

$$\neg \mathcal{M} \stackrel{\text{def}}{=} X \setminus \mathcal{M} \in \mathfrak{M} \qquad \forall\, \mathcal{M} \in \mathfrak{M} \neq \emptyset \tag{2.6}$$

ein orthokomplementierter Verband mit universeller unterer Schranke $\emptyset$ und universeller oberer Schranke X ist, wenn die Bedingung

$$\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2 \in \mathfrak{M} \quad \forall \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \in \mathfrak{M}$$

erfüllt ist.

Die Interpretation der Orthokomplementierung (2.6) für den o.a. Eigenschaftsverband $(2^S, \subset)$ eines klassischen Systems ist:

$$\neg \;\widehat{=}\; \text{logisches „nicht“}\,. \tag{2.7}$$

[5]Man geht dann pragmatisch so vor, daß man sich jeweils auf einen **distributiven** Teilverband von

$$(\mathfrak{P}_{\mathcal{H}}, \subset)\,, \quad \mathfrak{P}_{\mathcal{H}} \stackrel{\text{def}}{=} \{\text{Hilbertsche Teilräume von } \mathcal{H}\}\,,$$

beschränkt und dafür die Interpretation (2.1)–(2.5) formal beibehält. Bzgl. der Frage, was denn diese Verbandsstruktur „wirklich“ bedeutet, sollte man aber äußerste Vorsicht walten lassen (siehe (Doebner and Lücke, 1991)).

[6]Hier bezeichnet $\hat{0}$ resp. $\hat{1}$ wieder die als existent vorausgesetzte universelle untere resp. obere Schranke von $(X, \prec)$.

Definition 2.1.3 *Unter einer* ***Mengenalgebra***[7] *versteht man einen orthokomplementierten Verband des in Übungsaufgabe 36 betrachteten Typs. Wenn eine Mengenalgebra als Verband σ-vollständig ist, bezeichnet man sie auch als* ***σ-Mengenalgebra***.[8]

Definition 2.1.4 *Unter einer* ***Logik*** *versteht man einen σ-vollständigen orthokomplementierten Verband $(\mathfrak{P}, \prec, \neg)$, der* ***schwach modular ist***, *d.h. in dem*

$$\mathcal{P}_1 \prec \mathcal{P}_2 \implies \mathcal{P}_1 = (\mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2) \vee (\mathcal{P}_1 \wedge \neg\mathcal{P}_2)$$

für alle $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in \mathfrak{P}$ gilt. Wenn ein solcher Verband distributiv ist, bezeichnet man ihn als ***klassische Logik***. *Unter einer* ***Teillogik*** *einer Logik $(\mathfrak{P}, \prec, \neg)$ verstehen wir eine Logik $(\mathfrak{P}', \prec', \neg')$ mit $\mathfrak{P}' \subset \mathfrak{P}$, die den Bedingungen*[9] *$\mathcal{P}_1 \wedge' \mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2$ und $\neg'\mathcal{P} = \neg\mathcal{P}$ für alle $\mathcal{P}, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in \mathfrak{P}'$ genügt.*

Übungsaufgabe 37 Man zeige:

1. Für einen beliebig vorgegebenen Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist $(\mathfrak{P}_{\mathcal{H}}, \subset, \neg)$ mit

$$\neg\mathcal{P} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{H} \ominus \mathcal{P} \stackrel{\text{def}}{=} \{\Psi \in \mathcal{H} : \langle \Psi \mid \Phi \rangle = 0 \;\forall\, \Phi \in \mathcal{P}\}$$

   eine Logik,[10] für $\mathcal{H}$ der Dimension > 1 aber nicht distributiv.

2. Jede σ-Mengenalgebra ist eine klassische Logik.

Version vom 26. März 2009

[7]Die entsprechenden algebraischen Operationen sind die 'Multiplikation'

$$\mathcal{M}_1 \odot \mathcal{M}_2 \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 \quad \Big(= X \setminus (\neg\mathcal{M}_1 \cup \neg\mathcal{M}_2)\Big)$$

und die 'Addition'

$$\mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2 \stackrel{\text{def}}{=} (\mathcal{M}_1 \setminus \mathcal{M}_2) \cup (\mathcal{M}_2 \setminus \mathcal{M}_1) \;;$$

denn:

$$\chi_{\mathcal{M}_1 \odot \mathcal{M}_2} = \chi_{\mathcal{M}_1}\chi_{\mathcal{M}_2} \,, \quad \chi_{\mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2} = \chi_{\{1\}} \circ (\chi_{\mathcal{M}_1} + \chi_{\mathcal{M}_2}) \,.$$

[8]Im Englischen wird jedoch meist die Bezeichnung ***σ-field*** verwendet, obwohl eine σ-Mengenalgebra mit den Operationen $\oplus, \odot$ i.a. nur einen Ring mit Einselement (also eine Algebra über sich selbst mit $\odot$ auch als äußerer Multiplikation), aber keinen Körper bildet. Wir verzichten hier auf die Betrachtung von *Mengenringen*, die keine Mengenalgebren sind.

[9]Es sei daran erinnert, daß die Forderung $\prec' = \prec$ (auf $\mathfrak{P}'$) i.a. nicht genügt.

[10]Die in der Einleitung angedeutete Beschreibung dieser Logik mithilfe der entsprechenden Projektionsoperatoren wird in Kap. 3 präzisiert.

Satz 2.1.5 (Loomis-Sikorski) *Jede klassische Logik ist das σ-homomorphe*[11] *Bild einer σ-Mengenalgebra.*

Beweis: Siehe (Birkhoff, 1967, Ch. XI, Th. 3) (oder (Varadarajan, 1968, Satz 1.1)). ∎

Übungsaufgabe 38 Sei X eine beliebige Menge und Υ_X die Gesamtheit aller Topologien auf X. Man zeige:

1. Durch[12]
$$\mathfrak{T}_1 \prec \mathfrak{T}_2 \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \mathfrak{T}_1 \text{ schwächer als } \mathfrak{T}_2$$
ist eine Halbordnungsrelation $\prec$ gegeben, mit der $(\Upsilon_X, \prec)$ ein vollständiger Verband ist.[13]

2. Die diskrete Topologie auf X ist universelle obere Schranke dieses Verbandes.

3. Die Klumpen-Topologie auf X ist universelle untere Schranke dieses Verbandes.

4. I.a. ist dieser Verband nicht distributiv (vgl. Übungsaufgabe 35).

5. Wenn X endlich ist, dann ist mit $\mathfrak{T}$ auch $\mathfrak{T}' \overset{\text{def}}{=} \{X \setminus \mathcal{O} : \mathcal{O} \in \mathfrak{T}\}$ eine Topologie von X. Welche Eigenschaften einer Orthokomplementierung besitzt die Zuordnung $\mathfrak{T} \mapsto \mathfrak{T}'$?

Eine wichtige Klasse von σ-Mengenringen ist durch topologische Räume gegeben.

Definition 2.1.6 *Sei $(X, \mathfrak{T})$ ein (Hausdorffscher) topologischer Raum, der* ***lokalkompakt***[14] *ist, d.h. in dem jeder Punkt eine kompakte Umgebung besitzt. Außerdem sei X die Vereinigung abzählbar vieler (in $(X, \mathfrak{T})$) kompakter Mengen. Dann versteht*

[11] Ein σ-***Homomorphismus*** eines orthokomplementierten Verbandes $(X, \prec, \neg)$ **auf** einen orthokomplementierten Verband $(X', \prec', \neg')$ ist eine (i.a. nicht rückeindeutige) Abbildung γ von X auf X', die den Bedingungen
$$\gamma(\neg x) = \neg' \gamma(x) \quad \forall\, x \in X$$
und
$$\gamma\left(\inf_X \{x_\nu : \nu \in \mathbb{N}\}\right) = \inf_{X'} \{\gamma(x_\nu) : \nu \in \mathbb{N}\} \quad \forall\, x_1, x_2, \ldots \in X$$
genügt.

[12] Wir identifizieren eine Topologie jeweils mit der mit der ihr entsprechenden Gesamtheit aller offene Mengen.

[13] Vgl. dazu (Isham, 1989).

[14] Ein topologischer **Vektor**raum ist genau dann lokalkompakt, wenn er endlichdimensional ist (Pflaumann und Unger, 1968, Kap. IV, Satz (35)).

man unter den ***Borelmengen*** *von* $(X, \mathfrak{T})$ *die Elemente der von den kompakten Mengen erzeugten* σ*-Mengenalgebra* $\left(\mathfrak{B}_{(X,\mathfrak{T})}, \subset, X \setminus .\right)$. *Unter einer reellwertigen* ***Borelfunktion*** *auf* $(X, \mathfrak{T})$ *versteht man eine Abbildung* f *von* X *in* $\mathbb{R}$ *mit*

$$f^{-1}(B) \in \mathfrak{B}_{(X,\mathfrak{T})} \quad \forall\, B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}\,.$$

Eine solche Borelfunktion f *heißt* ***einfach****, wenn* $f(X)$ *nur endlich viele Elemente enthält.*

Übungsaufgabe 39 Sei $(X, \mathfrak{T})$ wie in Definition 2.1.6 vorgegeben. Man zeige:

1. Jede (in $(X, \mathfrak{T})$) offene Menge $\mathcal{O}$ ist eine Borelmenge.[15]

2. Eine Abbildung f von X in $\mathbb{R}$ ist genau dann eine Borelfunktion auf $(X, \mathfrak{T})$, wenn[16]
$$f^{-1}\Big((-\infty, c)\Big) \in \mathfrak{B}_{(X,\mathfrak{T})} \quad \forall\, c \in \mathbb{R}\,.$$

3. Jede stetige reellwertige Funktion auf $(X, \mathfrak{T})$ ist eine Borelfunktion.

4. Jede (nicht notwendig streng) monotone reellwertige Funktion auf $\mathbb{R}$ ist eine Borelfunktion.

5. Wenn f und g reellwertige Borelfunktionen auf $(X, \mathfrak{T})$ sind, dann auch $f + g$ und fg.

6. Wenn g eine reellwertige Borelfunktion auf $(X, \mathfrak{T})$ ist und f eine reellwertige Borelfunktion auf $\mathbb{R}$, dann ist auch $f \circ g$ eine reellwertige Borelfunktion auf $(X, \mathfrak{T})$.

7. Für jedes $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}_{(X,\mathfrak{T})}$ ist die charakteristische Funktion $\chi_{\mathcal{B}}$ eine Borelfunktion.

8. Wenn f eine reellwertige Borelfunktion auf $(X, \mathfrak{T})$ ist, dann[17] auch $|f|$.

9. Die einfachen Borelfunktionen sind reelle Linearkombinationen charakteristischer Funktionen von Borelmengen.

10. Nicht jede einfache Borelfunktion auf $\mathbb{R}$ ist Riemann-integrabel.

Version vom 26. März 2009

[15]**Hinweis:** Man wähle kompakte Mengen $\mathcal{K}_\nu$ mit $\mathcal{O} \subset \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \mathcal{K}_\nu$ und beachte, daß

$$\mathcal{O} = \left(\bigcup_{\nu=1}^{\infty} \mathcal{K}_\nu\right) \setminus \bigcup_{\mu=1}^{\infty} (\mathcal{K}_\mu \setminus \mathcal{O})\,.$$

[16]**Hinweis:** Man beachte, daß die Gesamtheit **aller** $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}$, für die $f^{-1}(\mathcal{M}) \in \mathfrak{B}_X$, eine σ-Mengenalgebra ist.

[17]Die umgekehrte Aussage gilt i.a. natürlich **nicht**.

2.2 Grundlagen der Maßtheorie[18]

Die Zustände einer statistischen Theorie sind durch Wahrscheinlichkeitsmaße auf der entsprechenden Logik gegeben.[19]

Definition 2.2.1 *Ein* ***(positives) Maß*** *über einer Logik* $(\mathfrak{P}, \prec, \neg)$ *ist eine Abbildung* μ *von* $\mathfrak{P}$ *in* $[0,\infty]$ *mit* $\mu(\hat{0}) = 0$ *, die auf jeder klassischen Teillogik*[20] $(\mathfrak{P}', \prec, \neg)$ *von* $(\mathfrak{P}, \prec, \neg)$ σ***-additiv*** *ist, d.h. der Bedingung*

$$\left.\begin{array}{l} P_1, P_2, \ldots \in \mathfrak{P}' \,, \\ P_j \prec \neg P_k \text{ für } j \neq k \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \mu\Big(\sup\{P_j : j \in \mathbb{N}\}\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(P_j)$$

genügt. Ein solches Maß heißt ***endlich****, wenn es den 'Wert'* ∞ *nicht annimmt.*[21]
Unter einem ***Wahrscheinlichkeitsmaß*** *über* $(\mathfrak{P}, \prec, \neg)$ *versteht man ein endliches (positives) Maß über* $(\mathfrak{P}, \prec, \neg)$ *mit* $\mu(\hat{1}) = 1$ *, das der* ***Jauch-Piron-Bedingung***

$$\mu(P_1) = \mu(P_2) = 1 \implies \mu(P_1 \wedge P_2) = 1$$

für alle $P_1, P_2 \in \mathfrak{P}$ *genügt.*

Übungsaufgabe 40 Man zeige, daß für ein (positives) Maße μ über einer klassischen Logik $(\mathfrak{P}, \prec, \neg)$ mit $\mu(\hat{1}) = 1$ die Jauch-Piron-Bedingung stets erfüllt ist.

Der folgende Satz charakterisiert die Zustände der gewöhnlichen Quantenmechanik.

Satz 2.2.2 (Gleason) *Seien* $\mathcal{H}$ *ein separabler komplexer Hilbertraum der Dimension* > 2 *,* $(\mathfrak{P}_{\mathcal{H}}, \subset, \neg)$ *die (entsprechend Übungsaufgabe 37, Nr. 1) zugehörige Logik der abgeschlossenen Teilräume und* ω *eine* σ*-additive Abbildung von* $(\mathfrak{P}_{\mathcal{H}}, \subset, \neg)$ *in* $[0,\infty)$ *mit* $\omega(\mathcal{H}) = 1$ *. Dann existieren ein Orthonormalsystem* $\{\Psi_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ *und eine Zahlenfolge* $\{\lambda_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ *mit*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \underbrace{\lambda_\nu}_{\geq 0} = 1 \,,$$

[18] Für weitergehende Betrachtungen sei insbesondere auf (Halmos, 1950) verwiesen.
[19] Es gibt Logiken auf denen kein Wahrscheinlichkeitsmaß existiert (Greechie, 1971).
[20] Man beachte in diesem Zusammenhang Fußnote 5.
[21] In diesem Falle folgt die Bedingung $\mu(\hat{0}) = 0$ natürlich schon aus der Additivität.

die der Bedingung

$$\omega\left(\overline{\textit{lineare Hülle}\ \{\Phi_\rho :\ \rho\in\mathfrak{I}\}}\right)=\sum_{\rho\in\mathfrak{I}}\sum_{\nu\in\mathbb{N}}\lambda_\nu\left|\langle\Phi_\rho\mid\Psi_\nu\rangle\right|^2 \tag{2.8}$$

für jedes Orthonormalsystem $\{\Phi_\rho\}_{\rho\in\mathfrak{I}}$ *mit endlicher oder abzählbarer Indexmenge* $\mathfrak{I}$ *genügt.*

Beweis: Siehe (Gleason, 1957) or (Cooke et al., 1985). ∎

Übungsaufgabe 41 Man zeige daß jede der in Satz 2.2.2 betrachteten Abbildungen ω ein Wahrscheinlichkeitsmaß, die Darstellung (2.8) i.a. aber nicht eindeutig ist.

Definition 2.2.3 *Sei* $(X,\mathfrak{T})$ *wie in Definition 2.1.6 vorgegeben. Dann versteht man unter einem (positiven)* ***Borelmaß*** *auf* $(X,\mathfrak{T})$ *ein (positives) Maß über der* σ*-Mengenalgebra aller Borelmengen (von* $(X,\mathfrak{T})$*), das auf den kompakten Borelmengen endliche Werte annimmt. Als* ***komplexes Borelmaß*** *auf* $(X,\mathfrak{T})$ *bezeichnet man eine Abbildung* μ *von* X *in* $\mathbb{C}$ *der Form*[22]

$$\mu(B)=\mu_1^+(B)-\mu_1^-(B)+i\left(\mu_2^+(B)-\mu_2^-(B)\right)\quad\forall\, B\in\mathfrak{B}_{(X,\mathfrak{T})}\,,$$

wobei μ_1^+,μ_1^-,μ_2^+ *und* μ_2^- *positive Borelmaße auf* $(X,\mathfrak{T})$ *sind.*

Satz 2.2.4 *Sei* $(X,\mathfrak{T})$ *wie in Definition 2.1.6 vorgegeben. Außerdem besitze* $(X,\mathfrak{T})$ *eine abzählbare Umgebungsbasis.*[23] *Dann ist jedes (positive) Borelmaß* μ *auf* $(X,\mathfrak{T})$ ***regulär:***

$$\mu(\mathcal{B})=\inf_{\substack{\mathcal{O}\supset\mathcal{B}\\ \mathfrak{B}\ni\mathcal{O}\text{ offen}}}\mu(\mathcal{O})=\sup_{\substack{\mathcal{K}\subset\mathcal{B}\\ \mathfrak{B}\ni\mathcal{K}\text{ kompakt}}}\mu(\mathcal{K})\quad\forall\,\mathcal{B}\in\mathfrak{B}_{(X,\mathfrak{T})}\,.$$

Version vom 26. März 2009

[22]Z.B. μ_1^+ und μ_1^- lassen sich immer so wählen, daß eine (i.a. nicht eindeutige) ***Hahnsche Zerlegung*** $X=A_+\cup A_-$ von X in disjunkte Borelmengen $A_\pm$ existiert, mit der

$$\left(\mu_1^+-\mu_1^-\right)(B\cap A_\pm)=\pm\mu_1^\pm(B)\quad\forall\, B\in\mathfrak{B}_{(X,\mathfrak{T})}$$

gilt (siehe (Halmos, 1950, § 29, Th. A u. Th. B)). Mit dieser Zusatzbedingung sind dann μ_1^+ und μ_1^- eindeutig (siehe (Halmos, 1950, S. 122)) und man definiert damit die sog. ***totale Variation*** $|\mu_1|=\mu_1^++\mu_1^-$ von $\mu_1=\mu_1^+-\mu_1^-$.

[23]Eine Gesamtheit $\mathfrak{U}\subset 2^X$ heißt eine ***Umgebungsbasis*** von $(X,\mathfrak{T})$, wenn zu jedem $x\in X$ und zu jedem $\mathcal{O}_x\in\mathfrak{T}_x$ ein $\mathcal{U}\in\mathfrak{U}$ existiert mit $x\in\underline{\mathcal{U}}\subset\mathcal{O}_x$.

Beweis: Siehe (Halmos, 1950, § 50, Th. E; § 52, Th. G). ∎

Anmerkung: Ein Maß μ auf einer Mengenalgebra $(\mathfrak{M}, \subset, X \setminus .)$ von Teilmengen von X heißt ***vollständig***, wenn $\mathfrak{M}$ alle Teilmengen von X enthält, die in einem $\mathcal{M} \in \mathfrak{M}$ mit $\mu(\mathcal{M}) = 0$ enthalten sind. Wir verzichten auf die Vervollständigung der betrachteten Borelmaße, um auf die damit verbundenen Komplikationen nicht eingehen zu müssen.

Übungsaufgabe 42 Sei $(X, \mathfrak{T})$ wie in Definition 2.1.6 vorgegeben, sei μ ein (positives) Borelmaß auf $(X, \mathfrak{T})$ und sei f eine reellwertige Borelfunktion auf $(X, \mathfrak{T})$. Man zeige, daß $\mu \circ f^{-1}$ ein Borelmaß auf $\mathbb{R}$ ist.

Definition 2.2.5 *Sei $(X, \mathfrak{T})$ wie in Definition 2.1.6 vorgegeben, sei μ ein (positives) Borelmaß auf $(X, \mathfrak{T})$ und sei f eine Abbildung von X in sich mit*

$$f^{-1}(\mathcal{B}) \in \mathfrak{B}_{(X,\mathfrak{T})} \quad \forall\, \mathcal{B} \in \mathfrak{B}_{(X,\mathfrak{T})}\,.$$

Dann heißt das Maß ***f-invariant****, wenn*

$$\mu\left(f^{-1}(\mathcal{B})\right) = \mu(\mathcal{B}) \quad \forall\, \mathcal{B} \in \mathfrak{B}_{(X,\mathfrak{T})}$$

gilt.

Anmerkung: Auf $\left(2^{\mathbb{R}^3}, \subset, \neg\right)$ kann kein translations- und drehinvariantes Maß existieren. Das folgt aus dem ***Banach-Tarski-Paradoxon*** (Rosenblum, 1950, S. 150): Man kann die Einheitskugel in eine endliche Anzahl (komplizierter) Teilstücke zerlegen, aus denen sich allein durch geeignete Drehungen und Translationen zwei Einheitskugeln ergeben!

Satz 2.2.6 *Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es genau ein (positives) Borelmaß μ_{L} auf $\mathbb{R}^n$ mit*

$$\mu_{\mathrm{L}}\left((a_1, b_1] \times \ldots (a_n, b_n]\right) = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n) \quad \forall\, (a_1, b_1], \ldots (a_n, b_n] \subset \mathbb{R}\,.$$

Dieses sog. ***Lebesguemaß*** [24] *μ_{L} ist bis auf einen nichtnegativen Faktor das einzige translationsinvariante Borelmaß auf $\mathbb{R}^n$.*

Beweis: Siehe (Halmos, 1950, § 8; § 13, Th. A; § 60 Th. C). ∎

[24] Vielfach wird nur die Vervollständigung dieses Borelmaßes als *Lebesguemaß* bezeichnet.

Übungsaufgabe 43

1. Man zeige, daß das Lebesguemaß μ_{L} auf $\mathbb{R}^3$ drehinvariant ist.

2. Man konstruiere zu beliebig vorgegebenem $\epsilon > 0$ eine offene Menge $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}$ mit $\mu_{\mathrm{L}}(\mathcal{O}) < \epsilon$, die alle rationalen Zahlen zwischen 0 und 1 enthält.

Definition 2.2.7 *Sei $(X, \mathfrak{T})$ wie in Definition 2.1.6 vorgegeben, sei μ ein Borelmaß auf $(X, \mathfrak{T})$ und sei f eine einfache Borelfunktion auf $(X, \mathfrak{T})$. Dann nennt man f **μ-integrabel**, wenn*

$$\mu\left(f^{-1}(\{\alpha\}\right) < \infty \quad \forall\, \alpha \in f(X) \setminus \{0\}$$

gilt und bezeichnet

$$\int f(x)\, \mu(\mathrm{d}x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\alpha \in f(X)} \alpha\, \mu\big(f^{-1}(\{\alpha\})\big)$$

*als das **μ-Integral** von f über X. Für $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}_X$ bezeichnet man dann*

$$\int_{\mathcal{B}} f(x)\, \mu(\mathrm{d}x) \stackrel{\text{def}}{=} \int \left(\chi_{\mathcal{B}}(x) f(x)\right) \mu(\mathrm{d}x) \tag{2.9}$$

als das μ-Integral von f über $\mathcal{B}$.

> **Anmerkung:** Wenn μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist, dann ist jede einfache reellwertige Borelfunktion f auf $(X.\mathfrak{T})$ μ-integrabel und läßt sich als diskrete Zufallsvariable interpretieren. Dann ist $\mu\left(f^{-1}(\{\alpha\}\right)$ jeweils die Wahrscheinlichkeit dafür, daß f den Wert α annimmt und $\int f(x)\, \mu(\mathrm{d}x)$ der Erwartungswert von f für die durch μ beschriebene statistische Gesamtheit.

Übungsaufgabe 44 Seien $(X, \mathfrak{T})$, μ und f wie in Definition 2.2.7 vorgegeben. Man zeige:

1. Wenn f μ-integrabel ist, dann auch $\chi_{\mathcal{B}} f$ für alle $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}_X$.

2. Die μ-integrablen einfachen reellwertigen Borelfunktionen bilden einen reellen Vektorraum $S(X, \mu)$.

3. f ist genau dann μ-integrabel, wenn $|f|$ μ-integrabel ist.

4. Durch
$$\|f\|_\mu \stackrel{\text{def}}{=} \int |f(x)|\, \mu(\mathrm{d}x)$$
ist eine Norm $\|.\|_\mu$ auf $S(X, \mu)$ gegeben.[25]

[25] Es liegt also nahe, diesen normierten Raum zu vervollständigen.

5. Das μ-Integral ist ein stetiges lineares Funktional auf $\left(S(X,\mu), \|.\|_\mu\right)$.

Satz 2.2.8 *Seien $(X,\mathfrak{T})$ und μ wie in Definition 2.2.7 vorgegeben. Dann existiert zu jeder Cauchyfolge $\{f_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ in $\left(S(X,\mu), \|.\|_\mu\right)$ eine Borelfunktion f auf $(X,\mathfrak{T})$, gegen die diese Folge* ***im μ-Maß*** *konvergiert, d.h. für alle $\epsilon > 0$ gilt*

$$\lim_{\nu\to\infty} \mu\Big(\{x \in X : |f_\nu(x) - f(x)| \geq \epsilon\}\Big) = 0\,.$$

Wenn g eine weitere Borelfunktion ist, gegen die die Cauchyfolge im μ-Maß konvergiert, dann existiert ein $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}_X$ mit $\mu(\mathcal{B}) = 0$, außerhalb dessen f und g übereinstimmen.

Beweis: Siehe (Halmos, 1950, § 22, Th. E u. Th. C; § 24, Th. A). ∎

Definition 2.2.9 *Seien $(X,\mathfrak{T})$ und μ wie in Definition 2.2.7 vorgegeben und sei f eine reellwertige Borelfunktion auf $(X,\mathfrak{T})$. Dann heißt f μ-integrabel, falls eine Cauchyfolge $\{f_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ in $\left(S(X,\mu), \|.\|_\mu\right)$ existiert, die im μ-Maß gegen f konvergiert. Dann bezeichnet man*[26]

$$\int f(x)\,\mu(\mathrm{d}x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\nu\to\infty} \int f_\nu(x)\,\mu(\mathrm{d}x)$$

als das ***μ-Integral*** *von f. Mit $\mathcal{L}^1(X,\mu;\mathbb{R})$ wird der reelle Vektorraum aller μ-integrablen reellwertigen Borelfunktionen auf $(X,\mathfrak{T})$ bezeichnet, mit $L^1(X,\mu;\mathbb{R})$ der Faktorraum von $\mathcal{L}^1(X,\mu;\mathbb{R})$ nach*

$$\left\{g \in \mathcal{L}^1(X,\mu;\mathbb{R}) : \int |g(x)|\;\mu(\mathrm{d}x) = 0\right\}.$$

Mit $\mathcal{L}^1(X,\mu)$ (bzw. $\mathcal{L}^1(X,\mu;\mathbb{C})$) bezeichnen wir den komplexen Vektorraum aller Funktionen f auf x der Form

$$f(x) = f_1(x) + i\,f_2(x)\,, \quad f_1, f_2 \in \mathcal{L}^1(X,\mu;\mathbb{R})\,,$$

für die wir auch

$$\int f(x)\,\mu(\mathrm{d}\mu) \stackrel{\text{def}}{=} \int f_1(x)\,\mu(\mathrm{d}\mu) + i\int f_2(x)\,\mu(\mathrm{d}\mu)$$

definieren. Mit $L^1(X,\mu)$ (bzw. $L^1(X,\mu;\mathbb{C})$) bezeichnen wir schließlich den Faktorraum von $\mathcal{L}^1(X,\mu)$ nach[27]

$$\left\{g \in \mathcal{L}^1(X,\mu) : \int |g(x)|\;\mu(\mathrm{d}x) = 0\right\}.$$

Übungsaufgabe 45 Seien f eine stetige reellwertige Funktion auf und $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Man zeige, daß f über $[a,b]$ Lebesgue-integrabel ist und das entsprechende Lebesgue-Integral mit dem Riemann-Integral übereinstimmt.[28]

Satz 2.2.10 (Lebesgue) *Seien* $(X, \mathfrak{T})$ *und* μ *wie in Definition 2.2.9 vorgegeben, sei* $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}_X$, $g \in \mathcal{L}^1(X,\mu,\mathbb{R})$ *und seien* $f, f_1, f_2, \dots$ *reellwertige Borelfunktionen auf* $(X, \mathfrak{T})$ *mit*

$$|f_\nu(x)| \leq g(x) \quad \forall\, \nu \in \mathbb{N}\,,\, x \in X \setminus \mathcal{B}\,.$$

Falls $\mu(\mathcal{B}) = 0$:

$$f_\nu \longrightarrow f \text{ im } \mu\text{-Maß} \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} f \in \mathcal{L}^1(X,\mu,\mathbb{R})\,, \\ \int |f_\nu(x) - f(x)|\, \mu(\mathrm{d}x) \longrightarrow 0\,. \end{array} \right.$$

Beweis: Siehe (Halmos, 1950, § 26, Th. D; § 27, Th. A). ∎

Anmerkung: Man beachte, daß $\chi_B f_\nu$ für jede kompakte Teilmenge $\mathcal{K}$ von X im μ-Maß gegen $\chi_B f$ konvergiert, wenn f_ν ***μ-fast überall*** gegen f konvergiert, d.h. falls

$$\lim_{\nu\to\infty} f_\nu(x) = f(x) \quad \forall\, x \in X \setminus \mathcal{B}_0$$

für ein geeignetes $\mathcal{B}_0 \in \mathfrak{B}_X$ mit $\mu(\mathcal{B}_0) = 0$ gilt (siehe (Halmos, 1950, § 22, Th. A)).

Übungsaufgabe 46 Seien $(X, \mathfrak{T})$ und μ wie in Definition 2.2.7 vorgegeben. Man zeige:

1. Eine reellwertige Borelfunktion f auf $(X, \mathfrak{T})$ ist μ-integrabel, falls ein $g \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$ existiert mit

   $$|f(x)| \leq |g(x)| \quad \forall\, x \in X$$

   gilt. Dann ist auch $|g| \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$ und[29]

   $$\left| \int g(x)\, \mu(\mathrm{d}x) \right| \leq \int |g(x)|\, \mu(\mathrm{d}x)\,.$$

[26]Die Schreibweise (2.9) wird entsprechend benutzt.
[27]Man beachte Nr. 1 von Übungsaufgabe 46.
[28]Mehr über den Zusammenhang zwischen Riemann- und Lebesgue-Integral findet sich in (Behnke et al., 1962, Kap. III, § 1.3).
[29]**Hinweis:** $\left|\int g(x)\,\mu(\mathrm{d}x)\right| = e^{i\psi} \int g(x)\,\mu(\mathrm{d}x) = \int \Re\left(e^{i\psi} g(x)\right) \mu(\mathrm{d}x)$ für geeignetes $\psi \in \mathbb{R}$.

2. Mit
$$\left\|\left\{g \in \mathcal{L}^1(X,\mu) : \int |f(x) - g(x)|\; \mu(\mathrm{d}x) = 0\right\}\right\|^1 \stackrel{\text{def}}{=} \int |f(x)|\; \mu(\mathrm{d}x)$$
(für $f \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$) ist $\left(L^1(X,\mu), \|.\|^1\right)$ ein Banachraum.

3. Das μ-Integral ist ein stetiges lineares Funktional auf $\left(L^1(X,\mu), \|.\|^1\right)$.

Satz 2.2.11 *Seien* $(X,\mathfrak{T})$ *wie in Satz 2.2.4 vorgegeben,* μ *ein Borelmaß auf* $(X,\mathfrak{T})$ *und* $f \in \mathcal{L}^1(X,\mu,\mathbb{R})$. *Dann existiert zu jedem* $\epsilon > 0$ *eine stetige reellwertige Funktion* f_ϵ *auf* $(X,\mathfrak{T})$, *die außerhalb einer kompakten Teilmenge von* X *verschwindet, mit*
$$\int |f(x) - f_\epsilon(x)|\; \mu(\mathrm{d}x) < \epsilon\,.$$

Beweis: Siehe (Halmos, 1950, § 50, Th. E; § 55, Th. C u. D). ∎

2.3 Grundlagen der Distributionstheorie[30]

Vereinbarung: In diesem Abschnitt wird stets die Schreibweise
$$\int f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int f(\mathbf{x})\,\mu_{\mathrm{L}}(\mathrm{d}\mathbf{x})$$
sowie $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) = \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, \mu_{\mathrm{L}}, \mathbb{C})$ benutzt.

Die Elemente von $X' \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}(X,\mathbb{K})$ werden i.a. als ***verallgemeinerte Funktionen*** (*Distributionen*) bezeichnet, **wenn** X ein lokalkonvexer Vektorraum von Funktionen über $\mathbb{R}^n$ ist, der folgenden Bedingungen genügt:

(D1) Jedes $g \in X$ läßt sich gemäß
$$g(f) \stackrel{\text{def}}{=} \int g(\mathbf{x})\, f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \quad \forall\, f \in X \tag{2.10}$$
auch als Element von $X' \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}(X,\mathbb{K})$ auffassen ($\mathrm{d}\mathbf{x} = \mu_{\mathrm{L}}(\mathrm{d}\mathbf{x})$).

(D2) In diesem Sinne ist X eine dichte Teilmenge von[31] $(X', \sigma(X',X))$.

Version vom 26. März 2009

[30]Für weitergehende Betrachtungen sei insbesondere auf (Gelfand und Schilow, 1967)–(Gelfand and Wilenkin, 1964) sowie (Colombeau, 1992) verwiesen.
[31]Man beachte Fußnote 50 von Kapitel 1.

(D3) Sämtliche partiellen Ableitungen bilden X stetig in sich ab und es gilt

$$\int \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} g(\mathbf{x}) \right) f(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x} = - \int g(\mathbf{x}) \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} f(\mathbf{x}) \right) \mathrm{d}\mathbf{x} \quad \forall\, f, g \in X\,,\ \nu \in \{1, \ldots, n\}\,. \tag{2.11}$$

In Verallgemeinerung von (2.10) resp. (2.11) schreibt man dann auch

$$F(f) = \int F(\mathbf{x})\, f(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x} \tag{2.12}$$

resp.

$$\int \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} F(\mathbf{x}) \right) f(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x} = - \int F(\mathbf{x}) \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} f(\mathbf{x}) \right) \mathrm{d}\mathbf{x} \tag{2.13}$$

für alle $F \in X'$ und $f \in X$, auch wenn die Integrale im Lebesgueschen Sinne nicht mehr existieren. Damit sind die partiellen Ableitungen auch auf X' definiert. Konsistenterweise werden durch die vereinbarte Schreibweise auch gewöhnliche Funktionen, die nicht im üblichen Sinne differenzierbar sind,[32] mit Elementen von X' identifiziert. Außerdem legt die Schreibweise die Identifizierung

$$f(F) \stackrel{\text{def}}{=} F(f) \quad \forall\, F \in X'$$

der $f \in X$ mit Elementen von $\mathcal{L}\Big(\big(X', \sigma(X', X)\big), \mathbb{K}\Big)$ nahe.

Übungsaufgabe 47 Man zeige, daß die so auf X' definierten partiellen Ableitungen die einzige bzgl. $\sigma(X', X)$ stetige lineare Fortsetzung von $X \subset X'$ auf ganz X' darstellen.

Die Regel (2.13) wendet man nicht nur für $\frac{\partial}{\partial x^\nu}$, sondern für jede Abbildung $\hat{T}$ von X in sich an, zu der eine stetige lineare Abbildung $\hat{T}'$ von X in sich existiert, die der Bedingung

$$\boxed{\int (\hat{T} F)(\mathbf{x})\, \varphi(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x} = \int F(\mathbf{x})\, (\hat{T}' \varphi)(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x} \quad \forall \varphi \in X} \tag{2.14}$$

für alle $F \in X$ genügt. (2.14) wird dann als Definition für alle $F \in X'$ benutzt.

Die wichtigsten verallgemeinerten Funktionen F sind sind die (Schwartz-) ***Distributionen*** $F \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$ und davon speziell die ***temperierten Distributionen*** $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$.

Version vom 26. März 2009

[32]Die distributionstheoretische Ableitung bezeichnet man dann auch als ***schwache*** Ableitung. Für $F \in X'$, die stetig differenzierbaren Funktionen entsprechen, stimmt die schwache Ableitung natürlich — im Sinne der vereinbarten Identifizierungen — mit der gewöhnlichen überein.

Übungsaufgabe 48 Sei $n \in \mathbb{N}$. Man zeige:

1. Jede temperierte Distribution über $\mathbb{R}^n$ ist, eingeschränkt auf $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, tatsächlich eine Distribution.

2. Jede Distribution über $\mathbb{R}$ besitzt eine Stammfunktion in $\mathcal{D}(\mathbb{R})'$ und diese ist – als Distribution – bis auf eine additive Konstante eindeutig.

   Anmerkung: Man kann sogar zeigen (Gelfand und Schilow, 1967, S. 50): Wenn die Distribution $F \in \mathcal{D}(\mathbb{R})'$ der homogenen Differentialgleichung
   $$F^{(n)}(x) + \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu(x) F^{(n-\nu)}(x) = 0$$
   mit beliebig oft differenzierbaren $c_\nu(x)$ genügt, dann entspricht $F(x)$ einer gewöhnlichen Lösung Bei partiellen Differentialgleichungen gilt das i.a. nicht mehr, wie z.B. die 2-Punkt-Funktion des freien Klein-Gordon-Feldes (siehe Kapitel 2 von (Lücke, qft)) zeigt.

3. $\chi_{[0,\infty)}$ ist Stammfunktion der δ-Funktion über $\mathbb{R}$.

4. Die Stammfunktionen temperierter Distributionen sind temperiert.

5. Jedes $F \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \cup \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ läßt sich gem. (2.12) als temperierte Distribution auffassen, wobei $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ die Menge aller komplexen Linearkombinationen f reellwertiger Borelfunktionen auf $\mathbb{R}^n$ mit
   $$\int |f(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} < \infty$$
   bezeichnet.

6. Für $F \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$ und $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ folgt aus der Definition
   $$(F * \psi)(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \int F(\mathbf{x}')\psi(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \, d\mathbf{x}' \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$
   der ***Faltung*** $F * \psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ von F und ψ
   $$\int (F * \psi)(\mathbf{x}) \, \varphi(-\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int F(\mathbf{x}) \, (\psi * \varphi)(-\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$
   und somit Konsistenz mit der allgemeinen Regel (2.14) für Operationen mit verallgemeinerten Funktionen.

7. Für $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ und $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gelten die gleichen Beziehungen und außerdem[33]
   $$(F * \psi)(\mathbf{x}) \in \mathcal{O}_\mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \,.$$

[33]Der Vektorraum $\mathcal{O}_\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ wurde in Nr. 3 von Übungsaufgabe 28 definiert.

8. Die Elemente von $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ liegen in $\Big(\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)', \sigma\Big(\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)', \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\Big)\Big)$ dicht.

9. Die Elemente von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ liegen in $\Big(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)', \sigma\Big(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)', \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\Big)\Big)$ dicht.

10. Die Elemente von $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ liegen in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dicht.

11. Die kanonische Einbettung von $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$ liegt in $L^1(\mathbb{R}^n)$ dicht.

12. Zu jedem $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ und zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $\varphi_\epsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ mit[34]

$$\int |f(\mathbf{x}) - \varphi_\epsilon(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} < \epsilon \, .$$

Die zeitabhängige ***Schrödinger-Gleichung***

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_t(\mathbf{x}) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{\mathbf{x}} + V(\mathbf{x}, t) \right) \Psi_t(\mathbf{x}) \tag{2.15}$$

(für 1-Teilchen-Systeme der Masse $m > 0$ ohne innere Freiheitsgrade) läßt sich (für ‘vernünftige’ Potentiale V) als Differentialgleichung für eine Familie von temperierten Distributionen $\{\Psi_t(\mathbf{x})\}_{t \in \mathbb{R}}$ über $\mathbb{R}^3$ auffassen,[35] wobei für festes t jeweils $\Psi_t(\mathbf{x}) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$ gefordert wird sowie Differenzierbarkeit nach t im üblichen Sinne bzgl. $\sigma\Big(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)', \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\Big)$.

Oft löst man inhomogene (für $n < 1$ partielle) Differentialgleichungen in $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ der Form

$$\hat{D}_{\mathbf{x}} \, f_g(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) \; , \quad + \text{ Randbedingungen bei } \infty \, ,$$

wobei $\hat{D}_{\mathbf{x}}$ ein Polynom der partiellen Ableitungen (mit konstanten Koeffizienten) ist, mithilfe der entsprechenden ***Greenschen Funktion*** $G(\mathbf{x}) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$, die durch

$$\hat{D}_{\mathbf{x}} \, G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \; , \quad + \text{ Randbedingungen bei } \infty$$

charakterisiert ist und mit der

$$f_g(\mathbf{x}) = (G * g)(\mathbf{x})$$

für $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ gilt. Eines der bekanntesten Beispiele ist die ***Poissonsche*** Gleichung

$$-\epsilon_0' \, \Delta_{\mathbf{x}} \, \Phi_\rho(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}) \; , \quad \Phi_\rho(\mathbf{x}) \underset{|\mathbf{x}| \to \infty}{\longrightarrow} = 0$$

Version vom 26. März 2009

[34]**Hinweis:** Man approximiere f zunächst durch eine beschränkte Funktion, die außerhalb einer kompakten Menge verschwindet und beachte Satz 2.2.11.

[35]Mehr dazu in Kapitel 3.

(vgl. Gl. (1.8) von (Lücke, edyn)), wobei

$$G(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0'\,|\mathbf{x}|}\,.$$

Anmerkung: Bzgl. komplizierterer Randbedingungen siehe Abschn. 1.3.2 von (Lücke, edyn). Für weitere Beispiele Greenscher Funktionen siehe (Lücke, ftm).

Definition 2.3.1 *Sei $X = \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ ein lokalkonvexer Vektorraum von Funktionen über $\mathbb{R}^n$, der den Bedingungen (D1)–(D3) genügt und sei $\mathcal{O}$ eine beliebige offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Dann bezeichnet man mit $\mathcal{C}(\mathcal{O})$ den topologischen Untervektorraum von $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ all derjenigen Funktionen, die außerhalb einer abgeschlossenen Teilmenge von $\mathcal{O}$ verschwinden. Die verallgemeinerten Funktionen $F \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)'$ nennt man* ***lokalisierbar****, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:*

1. *Für jede offene Teilmenge $\mathcal{O}'$ von $\mathbb{R}^n$ liegt $\mathcal{D}(\mathcal{O}') \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ sowohl in $\mathcal{D}(\mathcal{O}')$ als auch in $\mathcal{C}(\mathcal{O}')$ dicht.*

2. *Für jede beschränkte offene Teilmenge $\mathcal{U}$ von $\mathbb{R}^n$ und jede (endliche) offene Überdeckung $\mathfrak{O}$ von $\overline{\mathcal{U}}$ gilt*

$$\mathcal{C}(\mathcal{U}) \subset \textit{lineare Hülle}\Big(\bigcup_{\mathcal{O}' \in \mathfrak{O}} \mathcal{C}(\mathcal{O}')\Big)\,.$$

Wenn diese Bedingungen erfüllt sind, dann definiert man für beliebiges $F \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)'$

$$F(\mathbf{x}) = 0 \textit{ für } \mathbf{x} \in \mathcal{O} \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad F(\varphi) = 0\;\forall\,\varphi \in \mathcal{C}(\mathcal{O})$$

und bezeichnet die kleinste abgeschlossene Teilmenge $\operatorname{supp} F$ von $\mathbb{R}^n$, außerhalb der $F(\mathbf{x}) = 0$ gilt, als den ***Träger*** *von F.*

Übungsaufgabe 49 Man zeige für beliebiges $n \in \mathbb{N}$:

1. Die Distributionen über $\mathbb{R}^n$ sind lokalisierbar.

2. Der Träger einer temperierten Distribution über $\mathbb{R}^n$ stimmt stets mit dem Träger ihrer Einschränkung auf $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ überein.

3. Jede Distribution mit kompaktem Träger ist die Einschränkung (auf $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$) genau einer temperierten Distribution.

4. In $\Big(\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)', \sigma\Big(\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)', \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\Big)\Big)$ liegen die Distributionen mit kompaktem Träger dicht.

5. Die Fourier-Transformierte einer Distribution mit kompaktem Träger entspricht stets einer ganzen analytischen Funktion (der *Ordnung* 1).

Distributionen wurden von L. Schwartz als Verallgemeinerung von Radonmaßen eingeführt.

Definition 2.3.2 Sei $(X, \mathfrak{T})$ ein lokalkompakter topologischer Raum. Dann versteht man unter einem ***Radonmaß*** auf $(X, \mathfrak{T})$ ein stetiges lineares Funktional auf dem induktiven Limes

$$\mathcal{D}^0(X) = \bigcup_{\substack{\mathcal{K}\subset X \\ \mathcal{K}\text{ kompakt}}} C_0(\mathcal{K})$$

(der $C_0(\mathcal{K})$ unter den kanonischen Einbettungen), wobei $C_0(\mathcal{K})$ jeweils den durch

$$\|\varphi\|_{\mathcal{K}} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x\in\mathcal{K}} |\varphi(x)|$$

normierten Raum der stetigen Funktionen auf $(X, \mathfrak{T})$ bezeichnet, die außerhalb $\mathcal{K}$ verschwinden.

Satz 2.3.3 (Riesz-Markov) *Sei $(X, \mathfrak{T})$ wie in Definition 2.1.6 vorgegeben. Dann existiert zu jedem Radonmaß F auf $(X, \mathfrak{T})$ genau ein reguläres*[36] *komplexes Borelmaß μ mit*

$$F(\varphi) = \int_X \varphi(x)\,\mu(\mathrm{d}x) \quad \forall\,\varphi \in \mathcal{D}^0(X)\,.$$

Beweis: Siehe (Halmos, 1950, § 56, Th. D u. Th. E). ∎

Übungsaufgabe 50 Man zeige für beliebig vorgegebenes $n \in \mathbb{N}$:

1. Zu jeder temperierten Distribution $F(\mathbf{x})$ über $\mathbb{R}^n$ existieren ein $N \in \mathbb{N}$ sowie komplexe Borelmaße μ_α über $\mathbb{R}^n$ mit[37]

$$F(\varphi) = \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n \\ |\alpha|\le N}} \int D_{\mathbf{x}}^\alpha \varphi(\mathbf{x})\,\mu_\alpha(\mathrm{d}\mathbf{x}) \quad \forall\,\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

und

$$\int (1 + \|\mathbf{x}\|)^{-N}\ |\mu_\alpha|(\mathrm{d}\mathbf{x}) < \infty$$

Version vom 26. März 2009

[36] Hier sei an Satz 2.2.4 erinnert.

[37] **Hinweis:** Man beachte die Sätze von Hahn-Banach (Satz 1.2.14) und Riesz-Markov (Satz 2.3.3).

(für alle $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ mit $|\alpha| \leq N$), wobei $|\mu_\alpha|$ jeweils die ***totale Variation*** von μ_α bezeichnet, d.h.:[38]

$$|\mu_\alpha|(B) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{f_1, f_2 \text{ rellw. Borelf.} \\ |f_1 + i f_2| \leq 1}} \left| \int_{\mathcal{B}} (f_1(\mathbf{x}) + i f_2(\mathbf{x}))\ \mu_\alpha(\mathrm{d}\mathbf{x}) \right| \quad \forall\, B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n}\,.$$

2. Dabei können die μ_α so gewählt werden, daß

$$\mu_\alpha\left(\mathbb{R}^n \setminus \operatorname{supp} F\right) = 0$$

(für alle $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ mit $|\alpha| \leq N$) gilt.

3. Ein Radonmaß über $\mathbb{R}^n$ entspricht genau dann (der Einschränkung) einer **temperierten** Distribution, wenn das gemäß Satz 2.3.3 zugeordnete komplexe Borelmaß μ ***polynomial beschränkt*** ist, d.h. der Bedingung

$$\int (1 + \|\mathbf{x}\|)^{-N}\ |\mu|(\mathrm{d}\mathbf{x}) < \infty$$

für hinreichend großes $N \in \mathbb{N}$ genügt.

4. Zu jedem Radonmaß F auf $\mathbb{R}^n$ mit Punktträger $\{\mathbf{x}_0\}$ gibt es ein $c_F \in \mathbb{C}$ mit

$$F(\varphi) = c_F\, \varphi(\mathbf{x}_0) \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\,.$$

5. Zu jedem Radonmaß F auf $\mathbb{R}^n$ existieren eine stetige Funktion $G(\mathbf{x})$ auf $\mathbb{R}^n$ und ein $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ mit $F(\mathbf{x}) = D_{\mathbf{x}}^\alpha G(\mathbf{x})$ (im distributionstheoretischen Sinne).

Satz 2.3.4 (Bochner-Schwartz) *Eine Distribution F über $\mathbb{R}^n$ ist genau dann* ***positiv semidefinit****, d.h. genügt der Bedingung*

$$0 \leq \int \left(\int F(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\, \varphi(\mathbf{x}')\, \mathrm{d}\mathbf{x}' \right) \overline{\varphi(\mathbf{x})}\, \mathrm{d}\mathbf{x} \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\,,$$

wenn ein polynomial beschränktes komplexes Borelmaß μ auf $\mathbb{R}^n$ existiert mit

$$F(\varphi) = \int \widetilde{\varphi}(\mathbf{p})\, \mu(\mathrm{d}\mathbf{p}) \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\,,$$

wobei $\widetilde{\varphi}$ die Fouriertransformierte von φ bezeichnet.

[38]Für reelle Borelmaße ist diese Definition zu der in Fußnote 22 gegebenen äquivalent (vgl. (Halmos, 1950, § 30, Aufg. (7) u. (8))).

Beweis: Siehe (Gelfand and Wilenkin, 1964, Kap. II, § 3). ∎

Übungsaufgabe 51 Man zeige für beliebiges $n \in \mathbb{N}$:

1. Eine stetige Funktion $F(\mathbf{x})$ über $\mathbb{R}^n$, als Distribution aufgefaßt, ist genau dann positiv semidefinit, wenn sie der Bedingung

$$0 \leq \sum_{j,k=1}^{N} F(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k)\, \overline{z_j}\, z_k \quad \forall\, N \in \mathbb{N}\,,\ (z_1, \dots, z_N) \in \mathbb{C}^N$$

genügt.

2. Die stetigen positiv semidefiniten (komplexwertigen) Funktionen f über $\mathbb{R}^n$ sind genau diejenigen Funktionen über $\mathbb{R}^n$, für die endliche (positive) Borelmaße μ auf $\mathbb{R}^n$ existieren mit[39]

$$f(\mathbf{x}) = (2\pi\hbar)^{-n/2} \int e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}}\, \mu(\mathrm{d}\mathbf{p}) \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

(***Satz von Bochner***).

3. Jede stetige positiv semidefinite (komplexwertige) Funktion f über $\mathbb{R}^n$ genügt der Bedingung

$$|f(\mathbf{x})| \leq f(0) \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\,.$$

[39] Die physikalische Konstante $\hbar$ erlaubt es, $\mathbf{x}$ und $\mathbf{p}$ physikalische Dimensionen zuzuordnen.

Kapitel 3

Symmetrische Hilbertraumoperatoren

In diesem Kapitel bezeichne $\mathcal{H}$ stets einen komplexen Hilbertraum und $(\mathfrak{P}_{\mathcal{H}}, \subset, \neg)$ die zugehörige, in Nr. 1 von Übungsaufgabe 37 behandelte, Logik (*Standard-Quantenlogik*).

Definition 3.0.5 *Unter einem **symmetrischen Operator** in $\mathcal{H}$ versteht man eine Abbildung $\hat{A}$ eines in $\mathcal{H}$ dichten, linearen Teilraumes $D_{\hat{A}}$ von $\mathcal{H}$ in $\mathcal{H}$, die der Bedingung*

$$\left\langle \Phi \mid \hat{A}\Psi \right\rangle = \left\langle \hat{A}\Phi \mid \Psi \right\rangle \quad \forall\, \Phi, \Psi \in D_{\hat{A}}$$

genügt.[1]

3.1 Beschränkte lineare Operatoren

3.1.1 Projektorwertige Maße

Seien $\mathcal{P}$ ein Hilbertscher Teilraum von $\mathcal{H}$ und $\{\Phi_\rho\}_{\rho\in\mathfrak{I}}$ resp. $\left\{\Phi'_{\rho'}\right\}_{\rho'\in\mathfrak{I}'}$ ein MONS von $\mathcal{P}$ resp. $\neg\mathcal{P} = \{\Psi \in \mathcal{H} : \langle \Psi \mid \Phi\rangle = 0 \;\forall\, \Phi \in \mathcal{P}\}$. Nach Übungsaufgabe 18 ist dann $\{\Phi_\rho\}_{\rho\in\mathfrak{I}} \cup \left\{\Phi'_{\rho'}\right\}_{\rho'\in\mathfrak{I}'}$ ein MONS von[2]

$$\mathcal{H} = \mathcal{P} \oplus \neg\mathcal{P} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{P} \vee \neg\mathcal{P}$$

und mit der allgemeinen Definition

$$\hat{P}_{\mathcal{P}}\Psi \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\rho\in\mathfrak{I}} \langle \Phi_\rho \mid \Psi\rangle\, \Phi_\rho \quad \forall\, \Psi \in \mathcal{H} \tag{3.1}$$

[1] Man sieht leicht, daß $\hat{A}$ ***linear*** sein muß.
[2] Hier bezeichnet $\oplus$ die direkte **Hilbertraum**summe.

ergibt sich für jedes $\Psi \in \mathcal{H}$ eine Zerlegung der Form

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 \,, \quad \Psi_1 \in \mathcal{P} \,, \; \Psi_2 \in \neg\mathcal{P} \,, \tag{3.2}$$

indem man

$$\Psi_1 = \hat{P}_{\mathcal{P}} \Psi \,, \quad \Psi_2 = \hat{P}_{\neg\mathcal{P}} \Psi \tag{3.3}$$

setzt.

Übungsaufgabe 52 Sei $\mathcal{P}$ ein Hilbertscher Teilraum von $\mathcal{H}$. Man zeige:

1. Für beliebige $\Psi_1 \in \mathcal{P}$ und $\Psi_2 \in \neg\mathcal{P}$ gilt

$$\Psi_1 = \sum_{\rho \in \mathfrak{I}} \langle \Phi_\rho \mid \Psi \rangle \, \Phi_\rho \,, \quad \Psi_2 = \sum_{\rho' \in \mathfrak{I}'} \left\langle \Phi'_{\rho'} \mid \Psi \right\rangle \Phi'_{\rho'}$$

   für $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$.

2. Die Definition (3.1) der ***Orthogonalprojektion*** $\hat{P}_{\mathcal{P}}$ von $\mathcal{H}$ auf $\mathcal{P}$ hängt nicht von der Wahl des MONS $\{\Phi_\rho\}_{\rho \in \mathfrak{I}}$ von $\mathcal{P}$ ab.

3. $\hat{P}_{\mathcal{P}} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

4. $\hat{P}_{\neg\mathcal{P}} = \hat{1} - \hat{P}_{\mathcal{P}}$.

5. $\hat{P}_{\mathcal{P}}$ ist ***idempotent***, d.h. es gilt $\hat{P}_{\mathcal{P}}^2 = \hat{P}_{\mathcal{P}}$.

6. $\hat{P}_{\mathcal{P}}$ ist symmetrisch (mit $D_{\hat{P}_{\mathcal{P}}} = \mathcal{H}$).

7. Jeder symmetrische, idempotente Operator $\hat{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ist ein (Hilbertraum-) ***Projektor***, d.h. es existiert ein Hilbertscher Unterraum $\mathcal{P}$ von $\mathcal{H}$ mit $\hat{A} = \hat{P}_{\mathcal{P}}$.

Nach Übungsaufgabe 37 lassen sich die Hilbertschen Teilräume von $\mathcal{H}$ eindeutig durch entsprechende Projektoren $\hat{P}$ charakterisieren. Die der Standard-Quantenlogik entsprechende Halbordnung $\leq$ ist dann durch[3]

$$\hat{P}_1 \leq \hat{P}_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \left\langle \Psi \mid \hat{P}_1 \Psi \right\rangle \leq \left\langle \Psi \mid \hat{P}_2 \Psi \right\rangle \; \forall \, \Psi \in \mathcal{H} \tag{3.4}$$

und die entsprechende Orthokomplementierung $\neg$ durch

$$\neg \hat{P} = \hat{1} - \hat{P} \tag{3.5}$$

gegeben (Beweis als Übungsvorschlag). Die Gesamtheit aller Projektoren von $\mathcal{H}$ sei mit $\mathfrak{L}_{\mathcal{H}}$ bezeichnet. $(\mathfrak{L}_{\mathcal{H}}, \leq, \neg)$ ist also nur eine andere Realisierung von $(\mathfrak{P}_{\mathcal{H}}, \subset, \neg)$.

Version vom 26. März 2009

[3] Vgl. (10.)

Wie in der Einleitung ausgeführt, interpretiert man jeweils

$$w_\Psi(E) \stackrel{\text{def}}{=} \omega_\Psi(\mathcal{P}_E) \stackrel{\text{def}}{=} \omega_\Psi(\hat{P}_E) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\left\|\hat{P}_E \Psi\right\|^2}{\|\Psi\|^2} = \left\langle \frac{\Psi}{\|\Psi\|} \middle| \hat{P}_E \frac{\Psi}{\|\Psi\|} \right\rangle \quad \forall \Psi \in \mathcal{H} \setminus \{0\} \tag{3.6}$$

als Wahrscheinlichkeit dafür, bei 'idealer Überprüfung' der 'Eigenschaft' E am System im Ψ entsprechenden Zustand die Antwort „ja“ zu bekommen. Dabei bezeichnet $\mathcal{P}_E$ den Hilbertschen Teilraum all derjenigen $\Psi \in \mathcal{H}$, die Gesamtheiten beschreiben, denen die Eigenschaft E zukommt. $\hat{P}_E$ bezeichnet den entsprechenden Projektionsoperator.[4]

In diesem Sinne sollte jeder (1-komponentigen) physikalischen Größe[5] A und jedem $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}_\mathbb{R}$ ein Projektor $\hat{P}_{A\in\mathcal{B}}$ entsprechen.[6] Entsprechend Fußnote 5 von Kapitel 2 sollte dabei natürlich

$$\hat{P}_{A\in\mathbb{R}} = \hat{1}\,, \tag{3.7}$$

$$\neg\hat{P}_{A\in\mathcal{B}} = \hat{P}_{A\in\mathbb{R}\setminus\mathcal{B}} \quad \forall\, \mathcal{B} \in \mathfrak{B}_\mathbb{R}\,, \tag{3.8}$$

und

$$\inf_{\mathfrak{L}_\mathcal{H}} \left\{ \hat{P}_{A\in\mathcal{B}_\nu} : \nu \in \mathbb{N} \right\} = \hat{P}_{A\in\bigcap_\nu^\infty B_\nu} \quad \forall\, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2\,, \ldots \in \mathfrak{B}_\mathbb{R} \tag{3.9}$$

gelten.

Übungsaufgabe 53 Man zeige[7] unter den Voraussetzungen (3.7)–(3.9) für beliebig vorgegebene $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots \in \mathfrak{B}_\mathbb{R}$:

1. $\hat{P}_{A\in\emptyset} = \hat{0}\,.$
2. $\sup_{\mathfrak{L}_\mathcal{H}} \left\{ \hat{P}_{A\in\mathcal{B}_\nu} : \nu \in \mathbb{N} \right\} = \hat{P}_{A\in\bigcup_\nu^\infty B_\nu}\,.$
3. $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2 \quad \Longrightarrow \quad \hat{P}_{A\in\mathcal{B}_1} \le \hat{P}_{A\in\mathcal{B}_2}\,.$
4. $\hat{P}_{A\in\mathcal{B}_1} = \left(\hat{P}_{A\in\mathcal{B}_1} \wedge \hat{P}_{A\in\mathcal{B}_2}\right) \vee \left(\hat{P}_{A\in\mathcal{B}_1} \wedge \neg\hat{P}_{A\in\mathcal{B}_2}\right)\,.$
5. $\hat{P}_{A\in\mathcal{B}_1}\hat{P}_{A\in\mathcal{B}_2} = \hat{P}_{A\in\mathcal{B}_1} \wedge \hat{P}_{A\in\mathcal{B}_2} = \hat{P}_{A\in\mathcal{B}_2}\hat{P}_{A\in\mathcal{B}_1}\,.$
6. $\hat{P}_{A\in\mathcal{B}_1\cup\mathcal{B}_2} = \hat{P}_{A\in\mathcal{B}_1} + \hat{P}_{A\in\mathcal{B}_2} - \hat{P}_{A\in\mathcal{B}_1\cap\mathcal{B}_2}\,.$

[4] Also: $\hat{P}_E = \hat{P}_{\mathcal{P}_E}\,.$

[5] Der Einfachheit halber beschreiben wir physikalische Größen durch ihre Zahlenwerte, bezogen auf ein festes Einheitensystem, das je nach Bedarf festgelegt werden kann.

[6] Man beachte: $\mathcal{B}_1 \ne \mathcal{B}_2 \stackrel{\text{i.a.}}{\not\Longrightarrow} \hat{P}_{A\in\mathcal{B}_1} \ne \hat{P}_{A\in\mathcal{B}_2}\,.$

[7] Hinweis zu 2.: Man zeige zunächst, daß für eine Logik $(X, \prec \neg)$ stets

$$(\neg x_1) \vee (\neg x_3) \vee \ldots = \neg(x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots) \quad \forall\, x_1, x_2, \ldots \in X$$

gilt.

7. Für alle $\Psi \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ gilt

$$w_\Psi (A \in \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2) = w_\Psi (A \in \mathcal{B}_1) + w_\Psi (A \in \mathcal{B}_2) - w_\Psi (A \in \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2) \ .$$

8. $B_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset \quad \Longrightarrow \quad \hat{P}_{A\in\mathcal{B}_1}\hat{P}_{A\in\mathcal{B}_2} = \hat{P}_{A\in\mathcal{B}_2}\hat{P}_{A\in\mathcal{B}_1} = \hat{0}\,.$

9. $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2 \quad \Longrightarrow \quad \hat{P}_{A\in\mathcal{B}_1}\hat{P}_{A\in\mathcal{B}_2} = \hat{P}_{A\in\mathcal{B}_1}\,.$

Definition 3.1.1 *Unter einem* ***Projektorwertigen Maß*** [8] *über $\mathbb{R}$ zu $\mathcal{H}$ versteht man eine Abbildung $\hat{E}$ von $\mathbb{R}$ in $\mathfrak{L}_\mathcal{H}$, die den Bedingungen*

$$\hat{E}(\mathbb{R}) = \hat{1}$$

und [9]

$$\mathcal{B}_\nu \cap \mathcal{B}_\mu = \emptyset \text{ für } \nu \neq \mu \quad \Longrightarrow \quad \hat{E}\left(\bigcup_{\nu=1}^{\infty} \mathcal{B}_\nu\right)\Psi = \sum_{\nu=1}^{\infty} \hat{E}\left(\mathcal{B}_\nu\right)\Psi \quad \forall\,\Psi \in \mathcal{H}$$

für alle $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots \in \mathfrak{B}_\mathbb{R}$ genügt.

Übungsaufgabe 54 Man zeige:

1. Die Summe zweier Projektoren $\hat{P}_1, \hat{P}_2$ ist genau dann wieder ein Projektor, wenn $\hat{P}_1\hat{P}_2 = \hat{P}_2\hat{P}_1 = 0\,.$

2. Projektorwertige Maße $\hat{E}$ genügen den (3.8) und (3.9) entsprechenden Bedingungen
$$\hat{1} - \hat{E}(\mathcal{B}) = \neg\hat{E}(\mathcal{B}) = \hat{E}(\mathbb{R} \setminus \mathcal{B})$$
und [10]
$$\inf{}_{\mathfrak{L}_\mathcal{H}} \left\{\hat{E}(\mathcal{B}_\nu) : \nu \in \mathbb{N}\right\} = \hat{E}\left(\bigcap\nolimits_\nu^\infty B_\nu\right) \quad \forall\,\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2\,, \ldots \in \mathfrak{B}_\mathbb{R}\,.$$

Version vom 26. März 2009

[8] Bzgl. der Verallgemeinerung zu Maßen, deren Werte positive Operatoren sind, siehe (Davies, 1976, Abschn. 3.1). **Warnung:** Die Behauptung von Davies, daß durch seine Gleichung (1.10) stets ein selbstadjungierter Operator gegeben sei, ist falsch, wie man leicht mithilfe des Ergebnisses von Aufgabe 71 zeigen kann.

[9] Die Konvergenz der unendlichen Summe ist im Sinne der Normtopologie von $\mathcal{H}$ zu verstehen.

[10] **Hinweis:** Man zeige zunächst

$$\hat{E}\left(\bigcup_{\nu=1}^{\infty} \mathcal{B}_\nu\right)\Psi = \sup{}_{\mathfrak{L}_\mathcal{H}} \left\{\hat{E}\left(\mathcal{B}_\nu\right) : \nu \in \mathbb{N}\right\} \quad \forall\,\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2\,, \ldots \in \mathfrak{B}_\mathbb{R}$$

und beachte Fußnote 7.

1-komponentige physikalische Größen A sollten i.d. Quantenmechanik also Projektorwertigen Maßen $\hat{E}_A$ auf $\mathbb{R}$ entsprechen:

$$\hat{E}_A(\mathcal{B}) = \hat{P}_{A\in\mathcal{B}} \quad \forall\, \mathcal{B} \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}\,.$$

Der Erwartungswert der physikalischen Größe A (im Sinne von Fußnote 5 von Kapitel 2) für eine durch $\Psi \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ gegebene Gesamtheit ist dann gemäß (3.6) durch

$$\overline{A}^{\Psi} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} \lambda \left\langle \frac{\Psi}{\|\Psi\|} \,\middle|\, \hat{E}_A(\mathrm{d}\lambda) \frac{\Psi}{\|\Psi\|} \right\rangle \tag{3.10}$$

gegeben.

Übungsaufgabe 55 Sei A eine (1-komponentige) physikalische Größe mit dem entsprechenden Projektorwertigen Maß $\hat{E}_A$. Man zeige:

1. Es gibt genau einen linearen Operator $\hat{A}$ mit Definitionsbereich

$$D_{\hat{A}} = \left\{ \Psi \in \mathcal{H} : \int \lambda^2 \left\langle \Psi \mid \hat{E}_A(\mathrm{d}\lambda)\Psi \right\rangle \le \infty \right\}, \tag{3.11}$$

als A entsprechende ***Observable*** bezeichnet, mit dem sich die Erwartungswerte von A gemäß

$$\overline{A}^{\Psi} = \left\langle \frac{\Psi}{\|\Psi\|} \,\middle|\, \hat{A} \frac{\Psi}{\|\Psi\|} \right\rangle \quad \forall\, \Psi \in D_{\hat{A}} \setminus \{0\}$$

ergeben.[11]

2. Dieser Operator ist symmetrisch.[12]

3. Der Operator $\hat{A}$ ist genau dann beschränkt (siehe Definition 1.2.3), wenn ein $C \in \mathbb{R}$ existiert mit $\hat{E}_A([-C, +C]) = \hat{1}$.

4. Im Falle $\hat{E}_A([-C, +C]) = \hat{1}$ ist $D_{\hat{A}} = \mathcal{H}$ und für die Operatornorm

$$\left\|\hat{A}\right\| = \sup_{\substack{\Psi\in\mathcal{H} \\ \|\Psi\|=1}} \left\|\hat{A}\Psi\right\|$$

von $\hat{A}$ (siehe Nr. 1 von Aufgabe 19) gilt $\left\|\hat{A}\right\| \le C$.

[11]Falls $0 \neq \Psi \notin D_{\hat{A}}$, aber $\int \lambda \left\langle \Psi \mid \hat{E}_A(\mathrm{d}\lambda)\Psi \right\rangle < \infty$, ergibt sich $\overline{A}^{\Psi}$ durch entsprechende Grenzwertbildung.

[12]Sogar *selbstadjungiert*, wie wir noch sehen werden.

Wenn f eine reellwertige Borelfunktion auf $\mathbb{R}$ ist, und A eine (1-komponentige) physikalische Größe mit dem entsprechenden Projektorwertigen Maß $\hat{E}_A$, dann sollte das der physikalischen Größe[13] $f(A)$ im Sinne von Fußnote 5 von Kapitel 2 entsprechende Projektorwertige Maß durch

$$\hat{E}_{f(A)}(\mathcal{B}) = \hat{E}_A\left(f^{-1}(\mathcal{B})\right) \quad \forall\, \mathcal{B} \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}} \tag{3.12}$$

gegeben sein. In diesem Falle schreibt man auch $f(\hat{A})$ für die $f(A)$ entsprechende Observable.[14]

Übungsaufgabe 56 Seien $\hat{A}$ und $\hat{E}_A$ wie in Aufgabe 55 vorgegeben und sei f eine reellwertige Borelfunktion auf $\mathbb{R}$. Man zeige:

$$D_{f(\hat{A})} = \left\{\Psi \in \mathcal{H} : \int f^2(\lambda) \left\langle \Psi \mid \hat{E}_A(d\lambda)\Psi \right\rangle < \infty \right\}, \tag{3.13}$$

und[15]

$$\left\langle \Phi \mid f(\hat{A})\Psi \right\rangle = \int f(\lambda) \left\langle \Phi \mid \hat{E}_A(d\lambda)\Psi \right\rangle \quad \forall\, \Phi, \Psi \in D_{f(\hat{A})}\,. \tag{3.14}$$

3.1.2 Spektralmaße beschränkter Operatoren

Übungsaufgabe 57 Man zeige für beliebig vorgegebene $\hat{A}, \hat{B} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) = \mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{H})$:

$$\left\| \hat{A}\hat{B} \right\| \le \left\| \hat{A} \right\| \left\| \hat{B} \right\|\,. \tag{3.15}$$

Sei f eine ganze analytische Funktion auf $\mathbb{C}$ mit der Taylorentwicklung

$$f(z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} c_\mu\, z^\mu \quad \forall\, z \in \mathbb{C}\,. \tag{3.16}$$

Aus (3.15) folgt dann die Konvergenz von[16]

$$f(\hat{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\mu=0}^{\infty} c_\mu\, \hat{A}^\mu \quad \forall\, \hat{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \tag{3.17}$$

in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ bzgl. der Operatornorm.

Version vom 26. März 2009

[13] Man beachte Fußnote 5.

[14] Für unbeschränkte $\hat{A}$ ist allerdings zu beachten, daß

$$h = f + g \stackrel{\text{i.a.}}{\not\Longrightarrow} h(\hat{A}) = f(\hat{A}) + g(\hat{A})\,, \quad h = f\,g \stackrel{\text{i.a.}}{\not\Longrightarrow} h(\hat{A}) = f(\hat{A})\,g(\hat{A})$$

(vgl. Nr. 3 von Aufgabe 64).

[15] Man beachte wieder die Polarisations-Identität (2).

[16] Diese Definition von $f(\hat{A})$ ist mit der vor Aufgabe 56 für Observable $\hat{A}$ gegebenen konsistent (siehe Nr. 3 von Aufgabe 64).

Übungsaufgabe 58 Sei $\hat{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ symmetrisch.[17] Man zeige:

1. Die entsprechend (3.16),(3.17) definierte Operatorfunktion $e^{iz\hat{A}}$ von $z \in \mathbb{C}$ ist stetig bzgl. der Operatornorm in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

2. $$\lim_{\substack{\Delta z \to 0 \\ 0 \neq \Delta z \in \mathbb{C}}} \left\| \frac{e^{i(z+\Delta z)\hat{A}} - e^{iz\hat{A}}}{\Delta z} - i\hat{A}e^{iz\hat{A}} \right\| = 0 \quad \forall\, z \in \mathbb{C}\,.$$

3. Der Operator $\hat{U} = e^{it\hat{A}}$ ist für jedes $t \in \mathbb{R}$ ***isometrisch***, d.h.:
$$\left\| \hat{U}\Psi \right\| = \|\Psi\| \quad \forall\, \Psi \in \mathcal{H}\,.$$
Jedes solche $\hat{U}$ ist sogar ***unitär***, d.h. $\hat{U}$ ist isometrisch und bildet $\mathcal{H}$ **auf** sich ab: $\hat{U}\mathcal{H} = \mathcal{H}$.

4. Für beliebig vorgegebenes $\Psi \in \mathcal{H}$ ist $\left\langle \Psi \mid e^{it\hat{A}}\Psi \right\rangle$ als Funktion von $t \in \mathbb{R}$ **positiv semidefinit**.

Satz 3.1.2 *Sei $\hat{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ symmetrisch. Dann besitzt $\hat{A}$ ein* ***Spektralmaß****, d.h. ein eindeutiges Projektorwertiges Maß $\hat{E}_{\hat{A}}$ über $\mathbb{R}$ zu $\mathcal{H}$ mit*

$$\left\langle \Psi \mid \hat{A}\Psi \right\rangle = \int_{\mathbb{R}} \lambda \left\langle \Psi \mid \hat{E}_{\hat{A}}(\mathrm{d}\lambda)\Psi \right\rangle \quad \forall\, \Psi \in \mathcal{H}\,. \tag{3.18}$$

Beweisskizze: Aufgrund des Satzes von Bochner (siehe Nr. 2 von Aufgabe 51) existiert gemäß Nr. 4 von Aufgabe 58 zu jedem **symmetrischen** $\hat{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ und zu jedem normierten $\Psi \in \mathcal{H}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß[18] $\mu_\Psi^{\hat{A}}$ auf $\mathbb{R}$ mit

$$\left\langle \Psi \mid e^{it\hat{A}}\Psi \right\rangle = \int e^{it\lambda} \mu_\Psi^{\hat{A}}(\mathrm{d}\lambda) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}\,. \tag{$*1$}$$

Gemäß Nr. 2 von Aufgabe 58 folgt daraus

$$\left\langle \Psi \mid \hat{A}\Psi \right\rangle = \int \lambda\, \mu_\Psi^{\hat{A}}(\mathrm{d}\lambda) \quad \forall\, \Psi \in \mathcal{H}\,. \tag{$*2$}$$

Darüber hinaus folgt aus (*1)

$$\left\langle \Psi \mid \left(\int \varphi(t)\, e^{it\hat{A}}\, \mathrm{d}t \right) \Psi \right\rangle = \int \left(\int \varphi(t)\, e^{it\lambda}\, \mathrm{d}t \right) \mu_\Psi^{\hat{A}}(\mathrm{d}\lambda) \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\,,$$

[17] Für Nr. 1 ist die Symmetrie nicht erforderlich.

[18] Zur Klassifizierung dieser Maße siehe (Halmos, 1950, § 43, Th. E).

wobei $\int \varphi(t)\, e^{it\hat{A}}\, \mathrm{d}t$ den durch

$$\left\langle \Phi \mid \left(\int \varphi(t)\, e^{it\hat{A}}\, \mathrm{d}t \right) \Psi \right\rangle = \int \varphi(t) \left\langle \Phi \mid e^{it\hat{A}}\, \Psi \right\rangle \mathrm{d}t \quad \forall\, \Phi, \Psi \in \mathcal{H}$$

charakterisierten Operator aus $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ bezeichnet. Das zeigt, daß ein geeigneter Grenzübergang[19]

$$\hat{E}_{\hat{A}}(\mathcal{B}) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\substack{\int \varphi(t)\, e^{it\lambda}\, \mathrm{d}t \to \chi_{\mathcal{B}}(\lambda) \\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})}} \int \varphi(t)\, e^{it\hat{A}}\, \mathrm{d}t \quad \forall\, \mathcal{B} \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$$

möglich ist, der ein Projektorwertiges Maß $\hat{E}_{\hat{A}}$ liefert,[20] das entsprechend (*2) und (*1) der Bedingung (3.18)genügt und dadurch eindeutig charakterisiert ist. ∎

Gemäß Satz 3.1.2 geht man in der elementaren Quantentheorie (ohne Superauswahlregeln) davon aus, daß **jeder** symmetrische beschränkte Operator die Observable einer dem Projektorwertigen Maß $\hat{E}_A = \hat{E}_{\hat{A}}$ entprechenden physikalischen Größe A ist.

Übungsaufgabe 59 Man zeige, daß die Projektoren genau diejenigen Observablen sind, die physikalischen Größen entsprechen, die nur die Werte 0 und 1 annehmen können.

Um in Abschnitt 3.2.3 die Existenz der Spektralmaße auch für unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren zeigen zu können, benötigen wir eine Spektralzerlegung (nur) für unitäre Operatoren.

Satz 3.1.3 *Sei $\hat{U}$ ein unitärer Operator in $\mathcal{H}$. Dann existiert genau ein Projektorwertiges Maß $\hat{E}_{\hat{U}}$ über $\mathbb{R}$ zu $\mathcal{H}$ mit $\hat{E}_{\hat{U}}(\mathbb{R} \setminus (0, 2\pi]) = 0$ und*

$$\left\langle \Psi \mid \hat{U} \Psi \right\rangle = \int_{(0,2\pi]} e^{i\phi} \left\langle \Psi \mid \hat{E}_{\hat{U}}(\mathrm{d}\phi) \Psi \right\rangle \quad \forall\, \Psi \in \mathcal{H}\,.$$

Version vom 26. März 2009

[19]Es ist darauf zu achten, daß

$$\int \left(\int \varphi(t)\, e^{it\lambda}\, \mathrm{d}t \right) \mu_\Psi(\mathrm{d}\lambda) \to \int \chi_{\mathcal{B}}(\lambda)\, \mu_\Psi(\mathrm{d}\lambda) \quad \forall\, \Psi \in \mathcal{H}$$

gilt, was sich aufgrund der Regularität von μ_Ψ (siehe Satz 2.2.4) einrichten läßt.

[20]Es gilt also

$$\left\langle \Psi \mid \hat{E}_{\hat{A}}(\mathcal{B})\, \Psi \right\rangle = \mu_\Psi^{\hat{A}}(\mathcal{B}) \quad \forall\, \mathcal{B} \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}\,,\ \Psi \in \mathcal{H}\,.$$

Beweisskizze: Sei S^1 der durch $\phi \in (0, 2\pi]$ parametrisierten Einheitskreis mit der üblichen Topologie und sei $C^1(S^1)$ der Banachraum aller stetig differenzierbaren Funktionen auf S^1 mit der Norm

$$\|f\|_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\phi\in(0,2\pi]} \left(|f(\phi)| + \left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi} f(\phi) \right| \right) .$$

Dann zeigt die Theorie der Fourier-Reihen (siehe Satz 6.2.5 von (Lücke, ein)), daß

$$\hat{U}_f \, \Psi \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\phi) e^{-in\phi} \, \mathrm{d}\phi \right) \hat{U}^n \, \Psi \quad \forall\, f \in C^1(S^1) \, , \, \Psi \in \mathcal{H}$$

in $\mathcal{H}$ konvergiert und

$$F_\Psi(f) \stackrel{\text{def}}{=} \left\langle \Psi \mid \hat{U}_f \, \Psi \right\rangle$$

für jedes $\Psi \in \mathcal{H}$ ein stetiges lineares Funktional F_Ψ auf $C^1(S^1)$ definiert. Da man mithilfe der Beziehung

$$c_n \left(|f|^2 \right) = \sum_{\mu\in\mathbb{Z}_+} \overline{c_\mu(f)} \, c_{n+\mu}(f) \; , \quad c_\nu(f) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\phi) e^{-i\nu\phi} \, \mathrm{d}\phi \, ,$$

leicht sieht, daß die $F_\Psi(f)$ für nichtnegative $f \in C^1(S^1)$ stets nichtnegative Werte annehmen, muß aufgrund des Satzes von Bochner-Schwartz[21] zu jedem $\Psi \in \mathcal{H}$ ein positives Borelmaß $\mu_\Psi^{\hat{U}}$ auf S^1 existieren mit

$$\left\langle \Psi \mid \hat{U}_f \, \Psi \right\rangle = F_\Psi(f) = \int_{S^1} f(\phi) \, \mu_\Psi^{\hat{U}}(\mathrm{d}\phi) \, .$$

Speziell für $f(\phi) = e^{i\phi}$ resp. $f(\phi) = 1$ folgt daraus

$$\left\langle \Psi \mid \hat{U} \Psi \right\rangle = \int_{(0,2\pi]} e^{i\phi} \, \mu_\Psi^{\hat{U}}(\mathrm{d}\phi) \quad \text{resp.} \quad \|\Psi\|^2 = \mu_\Psi^{\hat{U}}\Big((0, 2\pi] \Big) \, .$$

Durch Grenzübergang $f \longrightarrow \chi_{\mathcal{B}}$ ergibt sich somit das gesuchte Spektralmaß:[22]

$$\left\langle \Psi \mid \hat{E}_{\hat{U}}(\mathcal{B}) \Psi \right\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \mu_\Psi^{\hat{U}}\Big((0, 2\pi] \cap \mathcal{B} \Big) \quad \forall\, \mathcal{B} \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}} \, , \, \Psi \in \mathcal{H}$$

Die Eindeutigkeit ist auch hier offensichtlich. ∎

[21] Man fasse $g(\phi) F_\Psi(\phi)$ für positive $g \in C^1(S^1)$ mit nichttrivialem Träger jeweils als temperierte Distribution über $\mathbb{R}^1$ auf.

[22] Die Projektionseigenschaften folgen aus der leicht zu zeigenden Beziehung $\hat{U}_{fg} = \hat{U}_f \, \hat{U}_g$.

3.1.3 Spurklasse-Operatoren

Übungsaufgabe 60 Seien $\{\Psi_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ ein MONS von $\mathcal{H}$ und $a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{R}$. Man zeige:

1. Für beliebiges
$$\Psi \in D_{\hat{A}} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{\Phi \in : \sum_{\nu=1}^{\infty} \left|a_\nu \langle \Psi_\nu \mid \Phi\rangle\right|^2 < \infty\right\}$$
konvergiert[23]
$$\hat{A}\Psi \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{\nu=1}^{N} a_\nu \, |\Psi_\nu\rangle\langle\Psi_\nu|\right) \Psi$$
in $\mathcal{H}$ und liefert einen symmetrischen Operator $\hat{A}$.

2. Dieser Operator entspricht einer dem Projektorwertigen Maß[24]
$$\hat{E}_A(\mathcal{B}) = \hat{P}_{A\in\mathcal{B}} = \sum_{\substack{\nu\in\mathbb{N}\\ a_\nu\in\mathcal{B}}} |\Psi_\nu\rangle\langle\Psi_\nu|$$
zugeordneten physikalischen Größe A, deren (im Sinne von Fußnote 5 von Kapitel 2) mögliche Werte nur die Eigenwerte von $\hat{A}$ sind.

3. Die Gesamtheit der Eigenwerte von $\hat{A}$ ist $\{a_1, a_2, \ldots\}$.

4. Die Wahrscheinlichkeit dafür, bei idealer Überprüfung von A an einer dem normierten[25] Vektor
$$\Psi = \sum_{\nu=1}^{\infty} z_\nu \Psi_\nu$$
entsprechenden Gesamtheit den Wert a_μ festzustellen, ist jeweils $|z_\mu|^2$.

Falls $a_\nu = \lambda_\nu \, \forall \nu \in \mathbb{N}$ und
$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \underbrace{\lambda_\nu}_{\geq 0} = 1\,, \tag{3.19}$$

Version vom 26. März 2009

[23] Für normiertes $\Phi \in \mathcal{H}$ bezeichnen wir mit $|\Phi\rangle\langle\Phi|$ jeweils den Projektor auf den von Φ aufgespannten eindimensionalen Teilraum:
$$|\Phi\rangle\langle\Phi| \, \Psi \stackrel{\text{def}}{=} \langle\Phi \mid \Psi\rangle \, \Phi \quad \forall\, \Psi \in \mathcal{H}\,.$$

[24] Die Konvergenz der Reihe ist im Sinne der Operatornorm zu verstehen.

[25] Wir nehmen also $\sum_{\nu=1}^{\infty} |z_\nu|^2 = 1$ für die $z_1, z_2, \ldots \in \mathbb{C}$ an.

dann läßt sich der Operator

$$\hat{\rho} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu |\Psi_\nu\rangle\langle\Psi_\nu| \qquad \left(= \hat{A} \text{ in Aufgabe } 60\right) \tag{3.20}$$

auch als ***statistischer Operator*** des im Satz von Gleason (Satz 2.2.2) beschriebenen allgemeinsten Wahrscheinlichkeitsmaßes (2.8) über $(\mathfrak{P}_{\mathcal{H}}, \subset, \neq)$ interpretieren:

$$\omega(\hat{P}\mathcal{H}) = \operatorname{tr}(\hat{\rho}\hat{P}) \in [0,1] \quad \forall\, \hat{P} \in \mathfrak{L}_{\mathcal{H}}\,. \tag{3.21}$$

Definition 3.1.4 *Sei $\hat{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Dann sagt man, der Operator $\hat{A}$ gehöre zu* ***Spurklasse****, wenn er der Bedingung*

$$\sum_{\rho\in\mathfrak{I}} \left|\left\langle \Psi_\rho \mid \hat{A}\Psi_\rho \right\rangle\right| < \infty$$

für jedes MONS $\{\Psi_\rho\}_{\rho\in\mathfrak{I}}$ von $\mathcal{H}$ genügt. Falls $\hat{A}$ zur Spurklasse gehört und $\{\Psi_\rho\}_{\rho\in\mathfrak{I}}$ ein MONS von $\mathcal{H}$ ist, bezeichnet man

$$\operatorname{tr}(\hat{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\rho\in\mathfrak{I}} \left\langle \Psi_\rho \mid \hat{A}\Psi_\rho \right\rangle$$

als die ***Spur*** *(englisch:* ***trace****) von $\hat{A}$.*

Übungsaufgabe 61 Man zeige:

1. Wenn $\{\Psi_\nu\}_{\rho\in\mathbb{N}}$ ein ONS von $\mathcal{H}$ ist und (3.19) gilt, dann gehört der durch (3.20) gegebene Operator zur Spurklasse und seine Spur

$$\operatorname{tr}(\hat{\rho}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\rho\in\mathfrak{I}} \langle \Phi_\rho \mid \hat{\rho}\,\Phi_\rho\rangle$$

   hängt nicht von der Wahl des Orthonormalsystems $\{\Phi_\rho\}_{\rho\in\mathfrak{I}}$ von $\mathcal{H}$ ab.[26]

2. Alle positiven[27] Spurklasseoperatoren sind von dieser Form.

Version vom 26. März 2009

[26]**Hinweis:** Man beachte:

$$\langle \Psi \mid \hat{\rho}\,\Psi\rangle = \left\langle \sqrt{\hat{\rho}}\,\Psi \mid \sqrt{\hat{\rho}}\,\Psi \right\rangle = \sum_{\rho\in\mathfrak{I}} \left\langle \sqrt{\hat{\rho}}\,\Psi \mid \Phi_\rho \right\rangle \left\langle \Phi_\rho \mid \sqrt{\hat{\rho}}\,\Psi \right\rangle \quad \forall\, \Psi \in \mathcal{H}\,.$$

[27]Ein Operator $\hat{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ heißt ***positiv***, falls

$$0 \le \left\langle \Psi \mid \hat{A}\Psi \right\rangle \quad \forall\, \Psi \in \mathcal{H}\,.$$

3. Dafür gilt[28]
$$\operatorname{tr}(\hat{\rho}\hat{P}) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu \left\langle \Psi_\nu \mid \hat{P}\Psi_\nu \right\rangle \quad \forall\, \hat{P} \in \mathfrak{L}_{\mathcal{H}}$$
(beachte Nr. 8).

4. Die Spurklasse-Operatoren bilden einen linearen Teilraum von $\mathcal{H}$.

5. Ein symmetrischer Operator $\hat{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ gehört genau dann zur Spurklasse, wenn $\left|\hat{A}\right|$ (siehe Aufgabe 56) zur Spurklasse gehört.

6. Zu jedem $\hat{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ existiert genau ein $\hat{A}^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit
$$\left\langle \Phi \mid \hat{A}\Psi \right\rangle = \left\langle \hat{A}^*\Phi \mid \Psi \right\rangle \quad \forall\, \Phi\,,\, \Psi \in \mathcal{H}\,.$$

7. Ein Operator $\hat{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ gehört genau dann zur Spurklasse, wenn die beiden symmetrischen Operatoren $\hat{A} + \hat{A}^*$ und $i\hat{A} - i\hat{A}^*$ zur Spurklasse gehören.

8. Die Definition der Spur hängt nicht von der Wahl des MONS $\{\Psi_\rho\}_{\rho\in\mathfrak{I}}$ ab (beachte Nr. 1).

9. Ein Operator $\hat{U} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ist genau dann unitär, wenn $\hat{U}^* = \hat{U}^{-1}$ gilt.

10. Ein Operator $\hat{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ gehört genau dann zur Spurklasse, wenn $\hat{U}^{-1}\hat{A}\hat{U}$ für jeden unitären Operator zur Spurklasse gehört.

Lemma 3.1.5 *Jeder Operator $\hat{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ erlaubt eine sog.* ***Polarzerlegung****, d.h. es existiert genau ein $\hat{V} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit folgenden Eigenschaften:*[29]
$$\begin{aligned}
\hat{A} &= \hat{V}\sqrt{\hat{A}^*\hat{A}}\,, && (3.22)\\
\left\|\hat{V}\,\Psi\right\| &= \|\Psi\| \quad \forall\,\Psi \in \neg\operatorname{Ker}(\hat{A})\,, && (3.23)\\
\hat{V}\,\Psi &= 0 \quad \forall\,\Psi \in \operatorname{Ker}(\hat{A})\,, && (3.24)\\
\hat{V}\,\hat{V}^* &= \textit{Projektion auf } \overline{\hat{A}\mathcal{H}}\,, && (3.25)\\
\hat{V}^*\hat{V} &= \textit{Projektion auf } \neg\operatorname{Ker}(\hat{A})\,, && (3.26)
\end{aligned}$$
wobei
$$\operatorname{Ker}(\hat{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{\Psi \in \mathcal{H} :\ \hat{A}\Psi = 0\right\}$$
den sog. ***Kern*** *von $\hat{A}$ bezeichnet.*

Version vom 26. März 2009

[28] Hier sei an die Interpretation von (3.6) erinnert.

[29] Operatoren $\hat{V}$ mit den Eigenschaften (3.23) und (3.24) (mit einem beliebigen Hilbertschen Teilraum anstelle von $\operatorname{Ker}(\hat{A})$) bezeichnet man als ***partielle Isometrien***.

Beweis: Siehe (Reed und Simon, 1972, Th. VI.10). ∎

Satz 3.1.6 *Sei $\hat{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Wenn $\sqrt{\hat{A}^*\hat{A}}$ zur Spurklasse gehört, dann auch $\hat{A}$ und dann ist* $\operatorname{tr}(\hat{A}) \leq \operatorname{tr}\left(\sqrt{\hat{A}^*\hat{A}}\right)$.

Beweisskizze: Mit der Polarzerlegung gemäß Lemma 3.1.5 gilt

$$\left|\left\langle \Psi \mid \hat{A}\Psi \right\rangle\right| = \left|\left\langle \sqrt{\sqrt{\hat{A}^*\hat{A}}}\,\hat{V}^*\Psi \mid \sqrt{\sqrt{\hat{A}^*\hat{A}}}\,\Psi \right\rangle\right| \leq \left\|\sqrt{\sqrt{\hat{A}^*\hat{A}}}\,\hat{V}^*\Psi\right\| \left\|\sqrt{\sqrt{\hat{A}^*\hat{A}}}\,\Psi\right\|$$

für alle $\Psi \in \mathcal{H}$ und somit

$$\sum_{\rho\in\mathfrak{I}} \left|\left\langle \Psi_\rho \mid \hat{A}\Psi_\rho \right\rangle\right| \leq \sqrt{\sum_{\rho\in\mathfrak{I}} \left\langle \Psi_\rho \mid \left(\hat{V}\sqrt{\hat{A}^*\hat{A}}\,\hat{V}^*\right)\Psi_\rho \right\rangle} \sqrt{\operatorname{tr}\left(\sqrt{\hat{A}^*\hat{A}}\right)} .$$

für jedes MONS $\{\Psi_\rho\}_{\rho\in\mathfrak{I}}$ von $\mathcal{H}$. Wenn man das MONS so wählt, daß Ψ_ρ jeweils entweder in $\overline{\hat{A}\mathcal{H}}$ oder orthogonal dazu liegt, dann gilt

$$\sum_{\rho\in\mathfrak{I}} \left\langle \Psi_\rho \mid \left(\hat{V}\sqrt{\hat{A}^*\hat{A}}\,\hat{V}^*\right)\Psi_\rho \right\rangle = \sum_{\rho\in\mathfrak{I}_{\hat{A}}} \left\langle \hat{\Psi}_\rho \mid \sqrt{\hat{A}^*\hat{A}}\hat{\Psi}_\rho \right\rangle$$

mit

$$\mathfrak{I}_{\hat{A}} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{\rho \in \mathfrak{I} :\, \Psi_\rho \in \overline{\hat{A}\mathcal{H}}\right\} , \quad \hat{\Psi}_\rho \stackrel{\text{def}}{=} \hat{V}^*\,\Psi_\rho \;\forall\, \rho \in \mathfrak{I}_{\hat{A}} .$$

Da die $\hat{\Psi}_\rho$ ein Orthonormalsystem bilden und $\sqrt{\hat{A}^*\hat{A}}$ positiv ist, gilt somit

$$\sum_{\rho\in\mathfrak{I}} \left\langle \Psi_\rho \mid \left(\hat{V}\sqrt{\hat{A}^*\hat{A}}\,\hat{V}^*\right)\Psi_\rho \right\rangle \leq \operatorname{tr}\left(\sqrt{\hat{A}^*\hat{A}}\right) < \infty .$$

Deshalb muß $\hat{V}\sqrt{\hat{A}^*\hat{A}}\,\hat{V}^*$ von dem in Nr. 1 von Aufgabe 61 betrachteten Typ sein, woraus die Behauptung folgt. ∎

Übungsaufgabe 62 Man zeige:

1. Seien $\hat{A}, \hat{U} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Wenn $\sqrt{\hat{A}^*\hat{A}}$ zur Spurklasse gehört und $\hat{U}$ unitär ist, dann gehören auch $\hat{U}\hat{A}$ und (somit entspr. Nr. 10 auch) $\hat{A}\hat{U}$ zur Spurklasse.

2. Für jeden symmetrische Operator $\hat{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ gilt

$$\frac{\hat{A}}{\left\|\hat{A}\right\|} = \frac{1}{2}\left(\hat{U}_+ + \hat{U}_-\right) , \quad \hat{U}_\pm \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\hat{A}}{\left\|\hat{A}\right\|} \pm i\sqrt{\hat{1} - \left(\frac{\hat{A}}{\left\|\hat{A}\right\|}\right)^2} \text{ unitär} .$$

3. Jeder Operator $\hat{B} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ läßt sich als komplexe Linearkombination von vier unitären Operatoren schreiben.

4. Wenn $\hat{A}$ zur Spurklasse gehört und $\hat{B}$ beschränkt ist, dann gehören auch $\hat{A}\hat{B}$ und $\hat{B}\hat{A}$ zur Spurklasse und es gilt[30]

$$\operatorname{tr}(\hat{A}\hat{B}) = \operatorname{tr}(\hat{B}\hat{A})\,. \tag{3.27}$$

5. Wenn $\hat{A}$ zur Spurklasse gehört, dann[31] auch $\sqrt{\hat{A}^*\hat{A}}$.

6. Wenn $\hat{\rho}$ zur Spurklasse gehört, dann ist

$$\hat{B} \longmapsto \operatorname{tr}(\hat{\rho}\hat{B})$$

eine (bzgl. der Operatornorm) stetige Abbildung von $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ in $\mathbb{C}$.

7. Für symmetrische $\hat{\rho}, \hat{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit $\hat{\rho}$ aus der Spurklasse ist $\operatorname{tr}(\hat{\rho}\hat{A})$ reell und als Erwartungswert der Observablen $\hat{A}$ für eine dem Wahrscheinlichkeitsmaß (3.21) auf $(\mathfrak{P}_{\mathcal{H}}, \subset, \neg)$ entsprechende Gesamtheit interpretierbar.

Definition 3.1.7 *Ein $\hat{A} \in \mathcal{L}L(\mathcal{H})$ heißt* ***Hilbert-Schmidt-Operator****,*[32] *wenn ein MONS $\{\Psi_\rho\}_{\rho\in\mathfrak{I}}$ von $\mathcal{H}$ existiert mit*

$$\sum_{\rho\in\mathfrak{I}} \left\|\hat{A}\Psi_\rho\right\|^2 < \infty\,. \tag{3.28}$$

Übungsaufgabe 63 Sei $\hat{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Man zeige:

1. Wenn (3.28) für ein MONS $\{\Psi_\rho\}_{\rho\in\mathfrak{I}}$ von $\mathcal{H}$ gilt, dann gilt jedes MONS $\{\Psi'_\rho\}_{\rho\in\mathfrak{I}}$ von $\mathcal{H}$

$$\left\|\hat{A}\right\|_{\mathrm{HS}} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\sum_{\rho\in\mathfrak{I}} \left\|\hat{A}\Psi_\rho\right\|^2} = \sqrt{\sum_{\rho\in\mathfrak{I}} \left\|\hat{A}^*\Psi'_\rho\right\|^2}\,.$$

[30]**Hinweis:** (3.27) beweise man zunächst für unitäres $\hat{B}$ mithilfe der Ersetzung $\Phi_\rho \longmapsto \Phi'_\rho = \hat{B}\Phi_\rho$.

[31]**Hinweis:** Man untersuche $\hat{A}\,\hat{V}^* = \hat{V}\,\sqrt{\hat{A}^*\hat{A}}\,\hat{V}^*$ wie im Beweis von Satz 3.1.6 und beachte dabei:

$$\hat{\Psi} \in \neg\,\hat{V}^*\mathcal{H} \Longrightarrow \hat{V}^*\hat{V}\hat{\Psi} = 0 \Longrightarrow \hat{\Psi} \in \operatorname{Ker}(\hat{A}) = \operatorname{Ker}\left(\sqrt{\hat{A}^*\hat{A}}\right)\,.$$

[32]Bzgl. der Verallgemeinerung zu Abbildungen in einen anderen Hilbertraum und den Zusammenhang mit *nuklearen Operatoren* sei z.B. auf (Gelfand and Wilenkin, 1964, Kap. 1, §2) verwiesen.

2. Wenn (3.28) für ein MONS gilt, dann für alle.

3. Wenn $\hat{A}$ ein Hilbert-Schmidt-Operator ist, dann auch $\hat{A}^*$ und es gilt
$$\left\|\hat{A}\right\|_{\mathrm{HS}} = \left\|\hat{A}^*\right\|_{\mathrm{HS}} .$$

4. $\hat{A}$ ist genau dann ein Hilbert-Schmidt-Operator, wenn $\hat{A}^*\hat{A}$ zur Spurklasse gehört.

5. Wenn $\hat{A}$ und $\hat{B}$ Hilbert-Schmidt-Operatoren sind, dann gehört $\hat{A}\hat{B}$ zur Spurklasse.

6. Die Hilbert-Schmidt-Operatoren zu $\mathcal{H}$ bilden einen Hilbertraum mit dem inneren Produkt
$$\left\langle \hat{A} \mid \hat{A}' \right\rangle_{\mathrm{HS}} \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{tr}\left(\hat{A}^*\hat{A}'\right) ,$$
das der Hilbert-Schmidt-Norm $\|.\|_{\mathrm{HS}}$ im Sinne von (1.2) entspricht.

7. Wenn $\hat{A}$ ein Hilbert-Schmidt-Operator ist und $\hat{B} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, dann sind auch $\hat{A}\hat{B}$ und $\hat{B}\hat{A}$ Hilbert-Schmidt-Operatoren und es gilt
$$\left\|\hat{B}\hat{A}\right\|_{\mathrm{HS}} \leq \left\|\hat{B}\right\| \left\|\hat{A}\right\|_{\mathrm{HS}} .$$

8. Für den Zustand (3.21) gilt
$$\omega(\hat{P}\mathcal{H}) = \left\langle \sqrt{\hat{\rho}} \mid \hat{P}\,\sqrt{\hat{\rho}} \right\rangle_{\mathrm{HS}} .$$

3.2 Unbeschränkte lineare Operatoren

3.2.1 Allgemeine Bereichsfragen

Nach dem Satz von Hellinger und Toeplitz (siehe Aufgabe 26) können unbeschränkte symmetrische Operatoren $\hat{A}$ leider nie auf dem gesamten Hilbertraum definiert sein. Beim Umgang mit unbeschränkten Operatoren $\hat{A}$ ist deshalb stets auf ihre Definitionsbereiche $D_{\hat{A}}$ zu achten.

Definition 3.2.1 *Seien $\hat{A}$ und $\hat{B}$ (nicht notwendig beschränkte) lineare*[33] *Operatoren in $\mathcal{H}$. Dann definiert man*
$$D_{\hat{A}+\hat{B}} \stackrel{\text{def}}{=} D_{\hat{A}} \cap D_{\hat{B}} \,, \quad (\hat{A}+\hat{B})\Psi \stackrel{\text{def}}{=} (\hat{A}\Psi) + (\hat{B}\Psi) \quad \forall\, \Psi \in D_{\hat{A}+\hat{B}}$$

[33]Damit ist auch gemeint, daß die Definitionsbereiche lineare (nicht notwendig in $\mathcal{H}$ dichte) Teilräume von $\mathcal{H}$ sind.

und

$$D_{\hat{A}\,\hat{B}} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{\Psi \in D_{\hat{B}} : \hat{B}\Psi \in D_{\hat{A}}\right\} , \quad (\hat{A}\,\hat{B})\Psi \stackrel{\text{def}}{=} \hat{A}\left(\hat{B}\Psi\right) \quad \forall\,\Psi \in D_{\hat{A}\,\hat{B}} \,.$$

Außerdem definiert man für $z \in \mathbb{C}$

$$D_{z\hat{1}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{H} \,, \quad \left(z\hat{1}\right)\Psi = z\Psi \quad \forall\,\Psi \in \mathcal{H} \,.$$

und identifiziert oft stillschweigend z mit $z\hat{1}$.

Übungsaufgabe 64 Sei $\hat{A}$ ein linearer Operator in $\mathcal{H}$. Man zeige:

1. $D_{z\hat{A}} = D_{\hat{A}} \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$.
2. $D_{\hat{A}+z} = D_{\hat{A}} \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$.
3. Wenn $\hat{A}$ eine Observable ist, dann gilt für beliebige Borelfunktionen f und g auf $\mathbb{R}$:
$$f(\hat{A}) + g(\hat{A}) \subset (f+g)(\hat{A}) \,, \quad f(\hat{A})\,g(\hat{A}) \subset (f\,g)(\hat{A}) \,, \quad f\left(g(\hat{A})\right) \subset (f \circ g)(\hat{A}) \,.$$
4. Speziell für $f(\lambda) = \lambda^2$ gilt $f(\hat{A}) = \hat{A}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \hat{A}\,\hat{A}$.
5. Für die sog. ***Streuung***
$$\mathrm{Str}_\Psi(\hat{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\int \left(\lambda - \overline{A}^\Psi\right)^2 \frac{\left\langle \Psi \mid \hat{E}_A\,(\mathrm{d}\lambda)\,\Psi \right\rangle}{\|\Psi\|^2}} \tag{3.29}$$
einer physikalischen Größe A in einer durch $\Psi \in D_{\hat{A}} \cap D_{\hat{A}^2}$ beschriebenen Gesamtheit gilt
$$\left(\mathrm{Str}_\Psi(\hat{A})\right)^2 = \|\Psi\|^{-2} \left\langle \Psi \mid \left(\hat{A} - \overline{A}^\Psi\right)^2 \Psi \right\rangle = \overline{\hat{A}^2}^\Psi - \left(\overline{A}^\Psi\right)^2 \,, \tag{3.30}$$
wenn $\hat{A}$ die zugehörige Observable ist.
6. Dabei gilt $\mathrm{Str}_\Psi(\hat{A}) = 0$ genau dann wenn $\Psi \neq 0$ ein ***Eigenvektor*** von $\hat{A}$ ist, d.h. wenn ein ***Eigenwert*** $a \in \mathbb{C}$ existiert mit $\hat{A}\Psi = a\,\Psi$.
7. $\mathrm{Str}_\Psi(\hat{A}) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \hat{A}\Psi = \overline{A}^\Psi\,\Psi$.
8. Symmetrische Operatoren können nur reelle Eigenwerte haben.

Operatoren $\hat{A}, \hat{B}$ sind nur dann als gleich anzusehen, wenn ihre Definitionsbereiche übereinstimmen und sie darauf gleiche Weise wirken:

$$\hat{A} = \hat{B} \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{cases} D_{\hat{A}} = D_{\hat{B}} \,, \\ \hat{A}\Psi = \hat{B}\Psi \;\forall\, \Psi \in D_{\hat{A}} \,. \end{cases} \tag{3.31}$$

Die Einschränkung eines Operators auf einen echt kleineren Definitionsbereich ist also als anderer Operator anzusehen.

Definition 3.2.2 *Seien $\hat{A}$ und $\hat{B}$ (nicht notwendig beschränkte) lineare Operatoren in $\mathcal{H}$. Dann nennt man $\hat{B}$ eine* ***Erweiterung*** *von $\hat{A}$, falls die Bedingungen*

$$D_{\hat{A}} \subset D_{\hat{B}}$$

und

$$\hat{A}\Psi = \hat{B}\Psi \;\forall\, \Psi \in D_{\hat{A}}$$

erfüllt sind. In diesem Falle nennt man $\hat{A}$ auch eine ***Einschränkung*** *von $\hat{B}$ und teilt das durch $\hat{A} \subset \hat{B}$ bzw. $\hat{B} \supset \hat{A}$ mit.*

Eine kanonische Erweiterung ist die Abschließung, falls letztere möglich ist.

Definition 3.2.3 *Ein linearer Operator $\hat{A}$ in $\mathcal{H}$ heißt* ***abschließbar****, wenn er die Einschränkung eines abgeschlossenen Operators $\hat{B}$ ist. Dabei nennt man $\hat{B}$* ***abgeschlossen****, wenn die $\hat{B}$ entsprechende Abbildung des topologischen Teilraumes $D_{\hat{A}}$ von $\mathcal{H}$ in $\mathcal{H}$ einen abgeschlossenen Graphen (siehe Fußnote 56 von Kapitel 1) hat.*[34]

Übungsaufgabe 65 Sei $\hat{A}$ ein abschließbarer linearer Operator in $\mathcal{H}$. Man zeige, daß dazu eine eindeutige minimale Erweiterung $\overline{\hat{A}}$, der sog. ***Abschluß*** von $\hat{A}$, existiert.

3.2.2 Selbstadjungiertheit

Übungsaufgabe 66 Man zeige für eine beliebig vorgegebene Observable $\hat{A}$:

$$(\hat{A} + i)D_{\hat{A}} = (\hat{A} - i)D_{\hat{A}} = \mathcal{H} \tag{3.32}$$

(beachte Nr. 2 von Aufgabe 64).

[34]Nach Aufgabe 25 ist das gleichbedeutend mit:

$$\left.\begin{array}{l} \Psi_\nu \to \Psi \text{ in } D_{\hat{A}} \,, \\ \hat{A}\Psi_\nu \to \Phi \text{ in } \mathcal{H} \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \Psi \in D_{\hat{A}} \,, \\ \hat{A}\Psi = \Phi \,. \end{cases}$$

Symmetrische Operatoren $\hat{A}$ mit der Eigenschaft (3.32), lassen sich dadurch charakterisieren, daß sie *selbstadjungiert* sind (Satz 3.2.5), d.h. mit ihrem *adjungierten* Operator $\hat{A}^*$ übereinstimmen.

Definition 3.2.4 *Seien $D_{\hat{A}}$ ein dichter Teilraum von $\mathcal{H}$ und $\hat{A}$ eine Abbildung von $D_{\hat{A}}$ in $\mathcal{H}$. Dann bezeichnet man mit $D_{\hat{A}^*}$ die Menge all derjenigen Vektoren $\Phi \in \mathcal{H}$, zu denen ein $\Phi_{\hat{A}} \in \mathcal{H}$ existiert mit*[35]

$$\left\langle \Phi \mid \hat{A}\Psi \right\rangle = \langle \Phi_{\hat{A}} \mid \Psi \rangle \quad \forall\, \Psi \in \mathcal{H} \tag{3.33}$$

und definiert

$$\hat{A}^* \Phi \stackrel{\text{def}}{=} \Phi_{\hat{A}} \quad \forall\, \Phi \in D_{\hat{A}^*} \tag{3.34}$$

(mit $\Phi_{\hat{A}}$ gemäß (3.33)). Man bezeichnet $\hat{A}^*$ als den zu $\hat{A}$ ***adjungierten*** *Operator. Dementsprechend bezeichnet man $\hat{A}$ als* ***selbstadjungiert****, falls $\hat{A} = \hat{A}^*$.*

Übungsaufgabe 67 Seien $D_{\hat{A}}$ ein dichter Teilraum von $\mathcal{H}$ und $\hat{A}$ eine lineare Abbildung von $D_{\hat{A}}$ in $\mathcal{H}$. Man zeige:[36]

1. Die Definition (3.34)/(3.34) des adjungierten Operators $\hat{A}^*$ ist konsistent und liefert (auch wenn $\hat{A}$ nicht linear ist) einen **linearen** Operator in $\mathcal{H}$, der abgeschlossen ist.
2. **Falls** $\hat{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$: $\quad \hat{A}$ selbstadjungiert $\iff \hat{A}$ symmetrisch.
3. $\hat{A} \in \mathfrak{L}_{\mathcal{H}} \implies \hat{A}$ symmetrisch.
4. $\hat{A}$ symmetrisch $\iff \hat{A} \subset \hat{A}^*$.
5. $\hat{A}_1 \subset \hat{A}_2 \implies \hat{A}_2^* \subset \hat{A}_1^*$.
6. $\hat{A}$ abschließbar $\implies \overline{\hat{A}}^* = \hat{A}^*$.
7. $D_{\hat{A}^*}$ dicht in $\mathcal{H} \iff \hat{A}$ abschließbar.
8. $\hat{A}$ muß nicht abschließbar sein.[37]

Version vom 26. März 2009

[35] Nach dem Satz von Riesz (siehe Fußnote 47 von Kapitel 1), ist natürlich genau dann $\Phi \in D_{\hat{A}^*}$, wenn die Abbildung $\Psi \longmapsto \left\langle \Phi \mid \hat{A}\Psi \right\rangle$ von $D_{\hat{A}}$ (als topologischer Teilraum von $\mathcal{H}$ aufgefaßt) in $\mathbb{C}$ stetig ist.

[36] Bzgl. Nr. 7 und Nr. 9 sei auf (Reed und Simon, 1972, Th. VIII.1) verwiesen (im dort gegebenen Beweis ist $\langle 0, \Psi \rangle$ durch $\langle \Psi, 0 \rangle$ zu ersetzen).

[37] Man betrachte z.B. den Fall

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})\,, \quad D_{\hat{A}} = L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}) \quad \hat{A}\Psi = \left(\int \Psi(x)\, dx \right) \Psi_0 \quad \forall \Psi \in D_{\hat{A}}$$

mit festem $\Psi_0 \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$.

9. $\hat{A}$ abschließbar $\Longrightarrow$ $\overline{\hat{A}} = (\hat{A}^*)^*$.

10. $\hat{A}$ symmetrisch $\Longrightarrow$ $\overline{\hat{A}}$ symmetrisch.

Satz 3.2.5 *Ein symmetrischer Operator $\hat{A}$ ist genau dann selbstadjungiert, wenn eine der folgenden beiden Aussagen gilt:*

1. *$\hat{A}$ ist abgeschlossen und* $\operatorname{Ker}\left(\hat{A}^* + i\right) = \operatorname{Ker}\left(\hat{A}^* - i\right) = \{0\}$.

2. $\left(\hat{A} + i\right) D_{\hat{A}} = \left(\hat{A} - i\right) D_{\hat{A}} = \mathcal{H}$.

Beweis: Sei $\hat{A}$ selbstadjungiert. Dann ist $\hat{A}$ gem. Nr. 1 von Aufgabe 67 abgeschlossen und für $\Psi \in \operatorname{Ker}\left(\hat{A}^* \pm i\right)$ gilt

$$\pm i \langle \Psi \mid \Psi \rangle = \langle \mp i \Psi \mid \Psi \rangle = \left\langle \hat{A}^* \Psi \mid \Psi \right\rangle = \left\langle \Psi \mid \hat{A} \Psi \right\rangle = \left\langle \Psi \mid \hat{A}^* \Psi \right\rangle = \mp i \langle \Psi \mid \Psi \rangle$$

und somit $\Psi = 0$. Falls $\hat{A}$ selbstadjungiert ist, gilt also die 1. Aussage.

Es sei nun angenommen, daß die 1. Aussage gilt. Wegen

$$\Psi \in \neg \left(\hat{A} \pm i\right) D_{\hat{A}} \quad \Longrightarrow \quad \left\langle \hat{A} \Phi \mid \Psi \right\rangle = \langle \Phi \mid \mp i \Psi \rangle \ \forall \Phi \in D_{\hat{A}} ,$$

also

$$\Psi \in \neg \left(\hat{A} \pm i\right) D_{\hat{A}} \quad \Longrightarrow \quad \Psi \in D_{\hat{A}^*} , \ \hat{A}^* \Psi = \mp i \Psi ,$$

muß dann $\left(\hat{A} \pm i\right) D_{\hat{A}}$ in $\mathcal{H}$ dicht liegen. Mit

$$\left\| \left(\hat{A} \pm i\right) \Psi \right\|^2 = \left\| \hat{A} \Psi \right\|^2 + \|\Psi\|^2$$

sieht man andererseits leicht, daß $\left(\hat{A} \pm i\right) D_{\hat{A}}$ abgeschlossen ist. Somit gilt die 2. Aussage.

Schließlich sei angenommen, daß die 2. Aussage gilt. Um zu zeigen, daß $\hat{A}$ dann selbstadjungiert ist, genügt der Nachweis von $D_{\hat{A}^*} \subset D_{\hat{A}}$. Sei also $\Psi \in D_{\hat{A}^*}$. Dann existiert voraussetzungsgemäß ein $\Phi \in D_{\hat{A}}$ mit

$$\left(\hat{A} \pm i\right) \Phi = \left(\hat{A}^* \pm i\right) \Psi$$

(beachte Nr. 2 von Aufgabe 64) und somit

$$\left(\hat{A}^* \pm i\right) (\Psi - \Phi) = 0 .$$

Da aus der 2. Aussage auch $\operatorname{Ker}\left(\hat{A}^* \pm i\right) = \{0\}$ folgt, muß damit auch $\Psi = \Phi$ und somit $\Psi \in D_{\hat{A}}$ gelten.[38] ∎

Gemäß Satz 3.2.5 und Aufgabe 66 sind

$$\boxed{\textbf{Observable} \text{ also stets } \textbf{selbstadjungiert}.}$$

Die Projektoren $\hat{P}_{A\in\mathcal{B}} = \hat{E}_{\hat{A}}(\mathcal{B})$, also beschränkte Operatoren, sind zwar die für die Interpretation der Quantenmechanik fundamentalen Objekte,[39] aber in konkreten Anwendungen meistens nicht direkt physikalisch gegeben. In der Regel sind es die — meistens unbeschränkten — Observablen, die sich heuristisch mithilfe des Korrespondenzprinzips eindeutig charakterisieren lassen.[40] Deren Spektralanalyse ist dann die eigentliche Aufgabe, deren Lösung auf die Projektoren $\hat{P}_{A\in\mathcal{B}}$ und damit auf die entsprechenden statistischen Vorhersagen führt.

Aber auch von den Observablen $\hat{A}$ wird in aller Regel nur eine symmetrische Einschränkung $\hat{A}\bigwedge D$ auf einen kleineren Definitionsbereich D angegeben, weil die Bestimmung des vollen Definitionsbereichs zu kompliziert ist. Dann ist aber darauf zu achten, daß $\hat{A}\bigwedge D$ genau eine selbstadjungierte Erweiterung, nämlich $\hat{A}$, besitzt.[41] Man findet leicht Beispiele voneinander verschiedener Operatoren der in Aufgabe 55 betrachteten Art, die auf einem kleineren Bereich mit einunddemselben symmetrischen Operator übereinstimmen.[42]

Definition 3.2.6 *Ein symmetrischer Operator $\hat{A}$ in $\mathcal{H}$ heißt* ***im wesentlichen selbstadjungiert****, wenn es genau eine selbstadjungierte Erweiterung von $\hat{A}$ gibt.*

Übungsaufgabe 68 Sei $\hat{A}$ ein symmetrischer Operator in $\mathcal{H}$. Man zeige:[43]

1. $\overline{\hat{A}} = \overline{\hat{A}}^* \implies \hat{A}$ im wesentlichen selbstadjungiert (i.w.s.a.).

[38]Entsprechend läßt sich zeigen:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A} \text{ symmetrisch}\,,\\ \hat{A}D_{\hat{A}} = \mathcal{H}\end{array}\right\} \implies \hat{A} = \hat{A}^*\,.$$

[39]In der algebraischen Quantenfeldtheorie (siehe z.B. (Haag, 1996)), in der es zunächst nicht um konkrete Modelle geht, beschäftigt man sich deshalb in aller Regel nur mit beschränkten Operatoren.

[40]Z.B.: „Mittlere Gesamtenergie = mittlere kinetische Energie + mittlere potentielle Energie“ $\leadsto \hat{H}\bigwedge\left(D_{\Delta_{\mathbf{x}}} \cap D_{V(\mathbf{x})}\right) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_{\mathbf{x}} + V(\mathbf{x})$.

[41]In elementaren Anwendungen stellt sich meistens glücklicherweise heraus, daß die Voraussetzungen von Aufgabe 68, Nr. 6, erfüllt sind.

[42]Man betrachte z.B. ein eindimensionales quantenmechanisches Teilchen in einem Kasten einmal mit periodischen, zum anderen mit reflektierenden Randbedingungen (Verschwinden stetiger Wellenfunktionen am Rand).

[43]Es gilt auch die Umkehrung der 1. Aussage (siehe Satz 3.3.3).

2. $\overline{\hat{A}} = \overline{\hat{A}}^* \iff \mathrm{Ker}\left(\hat{A}^* + i\right) = \mathrm{Ker}\left(\hat{A}^* - i\right) = \{0\}\,.$

3. $\overline{\hat{A}} = \overline{\hat{A}}^* \iff \left(\hat{A} \pm i\right) D_{\hat{A}}$ dicht in $\mathcal{H}$.

4. $\overline{\hat{A}} = \overline{\hat{A}}^* \iff \hat{A}^* \subset \overline{\hat{A}}\,.$

5. $\hat{A}$ i.w.s.a. $\iff b\hat{A} + c\hat{1}$ i.w.s.a. $\forall\, b, c \in \mathbb{R}$.

6. $\left.\begin{array}{l} \hat{A} \text{ Observable}\,, \\ D \text{ dichter linearer Teilraum von } D_{\hat{A}}\,, \\ \hat{E}_{\hat{A}}(\mathcal{B})\mathcal{H} \subset D \quad \forall\, \mathcal{B} \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}} \end{array}\right\} \Longrightarrow \hat{A}\restriction D$ i.w.s.a.

3.2.3 Spektralmaße selbstadjungierter Operatoren

Es soll nun mithilfe des Spektralsatzes für unitäre Operatoren[44] gezeigt werden, daß jeder selbstadjungierte Operator $\hat{A}$ ein Spektralmaß $\hat{E}_{\hat{A}}$ besitzt und in diesem Sinne als Observable einer (1-komponentigen) physikalischen Größe aufgefaßt werden kann.

Übungsaufgabe 69 Sei $\hat{A}$ ein selbstadjungierter Operator. Man zeige:

1. Die sog. ***Cayley-Transformierte***

$$\hat{U}_{\hat{A}} \stackrel{\text{def}}{=} (\hat{A} - i)\,(\hat{A} + i)^{-1}$$

von $\hat{A}$ ist auf ganz $\mathcal{H}$ wohldefiniert und unitär.

2. $(\hat{A} - i)\,(\hat{A} + i)^{-1}\Psi = (\hat{A} + i)^{-1}\,(\hat{A} - i)\Psi \quad \forall\, \Psi \in D_{\hat{A}}\,.$

3. $\mathrm{Ker}\left(1 - \hat{U}_{\hat{A}}\right) = \{0\}\,.$

4. $\dfrac{\hat{A} + i}{2i}\Psi = \left(1 - \hat{U}_{\hat{A}}\right)^{-1}\Psi \quad \forall\, \Psi \in D_{\hat{A}}\,.$

5. $\hat{A}\Psi = i\left(1 + \hat{U}_{\hat{A}}\right)\left(1 - \hat{U}_{\hat{A}}\right)^{-1}\Psi \quad \forall\, \Psi \in D_{\hat{A}}\,.$

[44]Bzgl. anderer Beweise des Spektralsatzes für selbstadjungierte Operatoren siehe (Riesz and Sz.-Nagy, 1982).

Satz 3.2.7 *Sei $\hat{A}$ ein unbeschränkter selbstadjungierter Operator in $\mathcal{H}$. Dann besitzt $\hat{A}$ ein* ***Spektralmaß****, d.h. ein eindeutiges Projektorwertiges Maß $\hat{E}_{\hat{A}}$ über $\mathbb{R}$ zu $\mathcal{H}$, für das (3.11) gilt sowie die Einschränkung von (3.18) auf $D_{\hat{A}}$:*

$$\left\langle \Psi \mid \hat{A}\Psi \right\rangle = \int_{\mathbb{R}} \lambda \left\langle \Psi \mid \hat{E}_{\hat{A}}(\mathrm{d}\lambda)\Psi \right\rangle \quad \forall\, \Psi \in D_{\hat{A}}\,. \tag{3.35}$$

Beweisskizze: Sei $\hat{E}$ das Spektralmaß der Cayley-Transformierten von $\hat{A}$, also $\hat{E} = \hat{E}_{\hat{U}_{\hat{A}}}$. Nach Nr. 5 von Aufgabe 69 sowie Nr. 3 von Aufgabe 64 gilt dann

$$\left\langle \psi \mid \hat{A}\Psi \right\rangle = i \int_{(0,2\pi]} \frac{1+e^{i\phi}}{1-e^{i\phi}} \left\langle \Psi \mid \hat{E}(\mathrm{d}\phi)\Psi \right\rangle = -\int_{(0,2\pi)} \cot(\phi/2) \left\langle \Psi \mid \hat{E}(\mathrm{d}\phi)\Psi \right\rangle$$

für alle $\Psi \in D_{\hat{A}}$. Nach Übungsaufgabe 56 folgt daraus, daß der durch das Spektralmaß[45]

$$\hat{E}_{\hat{B}} = \hat{E} \circ \cot^{-1}$$

gegebene selbstadjungierte Operator $\hat{B}$ eine Erweiterung von $-\hat{A}$ ist und somit voraussetzungsgemäß mit $-\hat{A}$ übereinstimmt. ∎

3.3 Mehr über selbstadjungierte Erweiterungen

3.3.1 Quantenmechanische Symmetrien

Satz 3.3.1 (Wigner) *Sei W eine Abbildung von $\mathcal{H}$ auf sich, die den Bedingungen*

$$|\langle \Psi \mid \Phi \rangle| = |\langle W(\Psi) \mid W(\Phi) \rangle| \quad \forall\, \Phi, \Psi \in \mathcal{H}$$

genügt. Dann existiert ein entweder unitärer oder anti-unitärer[46] Operator $\hat{U}$ mit

$$\hat{U}\,\Psi \sim W(\Psi) \quad \forall\, \Psi \in \mathcal{H}\,.$$

Beweis: Siehe (Bargmann, 1964). ∎

[45] Man beachte, daß $\hat{U}_{\hat{A}}$ gemäß Nr. 3 von Aufgabe 69 nicht den Eigenwert 1 haben kann und deshalb $\hat{E}\Big((0,2\pi]\Big) = \hat{E}\Big((0,2\pi)\Big)$ gilt.

[46] Ein ***anti-unitärer*** Operator in $\mathcal{H}$ ist eine rückeindeutige Abbildung $\hat{U}$ von $\mathcal{H}$ auf sich mit

$$\left\langle \Phi \mid \hat{U}^{-1}\,\Psi \right\rangle = \overline{\left\langle \hat{U}\,\Phi \mid \Psi \right\rangle} \quad \forall\, \Phi, \Psi \in \mathcal{H}\,.$$

Motiviert durch den Satz von Wigner[47] werden Symmetriegruppen in der Quantentheorie nach Möglichkeit unitär dargestellt, insbesondere die 1-parametrigen Untergruppen Liescher Symmetriegruppen durch stark stetige 1-parametrige Gruppen unitärer Operatoren $\hat{U}(t)$ im Hilbertschen Zustandsraum $\mathcal{H}$.

> **Anmerkung:** Auf die Unvermeidbarkeit von *Strahldarstellungen* für bestimmte Symmetriegruppen soll hier nicht eingegangen werden (siehe z.B. Absch. 4.2.2 von (Lücke, qft)).

Definition 3.3.2 *Unter einer* ***stark stetigen 1-parametrigen Gruppe unitärer Operatoren*** $\hat{U}(t)$ ***in*** $\mathcal{H}$ *versteht eine Abbildung* $t \longmapsto \hat{U}(t)$ *von* $\mathbb{R}$ *in die Menge der unitären Operatoren in* $\mathcal{H}$*, die folgenden Bedingungen genügt:*

1. $\hat{U}(t+s) = \hat{U}(t)\,\hat{U}(s) \quad \forall\, s,t \in \mathbb{R}$.

2. $\mathbb{R} \ni t \longmapsto \hat{U}(t)\Psi \in \mathcal{H}$ *stetig* $\quad \forall\, \Psi \in \mathcal{H}$.

Übungsaufgabe 70 Man zeige:

1. Es gilt der ***Satz von Stone:***

   Jede stark stetige 1-parametrige Gruppe unitärer Operatoren $\hat{U}(t)$ in $\mathcal{H}$ besitzt einen eindeutigen ***Generator***, d.h. einen selbstadjungierten Operator $\hat{A}$ mit[48]

   $$\hat{U}(t) = e^{it\hat{A}} \stackrel{\text{def}}{=} \cos(t\hat{A}) + i\sin(t\hat{A}) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}\,. \tag{3.36}$$

2. Für jeden selbstadjungierten Operator $\hat{A}$ ist durch (3.37) stets eine stetige 1-parametrige Gruppe unitärer Operatoren $\hat{U}(t)$ in $\mathcal{H}$ gegeben.

3. Dafür gilt stets

   $$\hat{A}\hat{U}(t)\Psi = -i \lim_{\Delta t \to +0} \frac{\hat{U}(t+\Delta t)\Psi - \hat{U}(t)\Psi}{\Delta t} \quad \forall\, \Psi \in D_{\hat{A}}\,,\ t \in \mathbb{R} \tag{3.37}$$

   und

   $$D_{\hat{A}} = \{\Psi \in \mathcal{H} :\ \text{rechte Seite von (3.37) existiert}\} = \hat{U}(t)\, D_{\hat{A}} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}\,. \tag{3.38}$$

Version vom 26. März 2009

[47] Man beachte, daß das Produkt zweier anti-unitärer Operatoren stets einen unitären Operator ergibt.

[48] Bzgl. reellwertiger Funktionen selbstadjungierter Operatoren sei an Aufgabe 56 erinnert.

Für zeitlich homogene nicht dissipative[49] Quantensysteme ist der Hamilton-Operator $\hat{H}$ nicht nur die Observable der *Gesamtenergie*, sondern auch das $-\frac{i}{\hbar}$-fache des Generators der Zeitentwicklung:

$$\Psi_t = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\,t}\Psi_0 \quad \forall\, t \in \mathbb{R}\,.$$

Die Selbstadjungiert des Hamilton-Operators ist also auch wichtig, um die Dynamik eindeutig festzulegen.[50]

Wie bereits in Abschnitt 3.2.2 hervorgehoben, werden von unbeschränkten Observablen $\hat{A}$ in aller Regel zunächst nur symmetrische Einschränkungen $\hat{A}\restriction D$ auf kleinere Definitionsbereiche D angegeben. Aber nicht jeder symmetrische Operator besitzt eine selbstadjungierte Fortsetzung.

Satz 3.3.3 *Ein symmetrischer Operator $\hat{A}$ in $\mathcal{H}$ läßt sich genau dann selbstadjungiert erweitern, wenn seine* ***Defektindizes***

$$n_\pm \stackrel{\text{def}}{=} \dim\left(\operatorname{Ker}(\hat{A}^* \mp i)\right)$$

übereinstimmen (also $n_- = n_+$). Er ist genau dann i.w.s.a., wenn $n_- = n_+ = 0$.

Beweis: Siehe (Reed und Simon, 1975, Th. X.2). ∎

Übungsaufgabe 71 Man zeige, daß der durch[51]

$$(\hat{A}\Psi)(r) = \frac{\hbar}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\Psi(r) \quad \forall\,\Psi \in D_{\hat{A}} = \mathcal{D}\left((0,+\infty)\right)$$

in $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}_+)$ gegebene Operator symmetrisch ist, aber keine selbstadjungierte Erweiterung besitzt.

3.3.2 Spezielle Hamiltonoperatoren

Typische Energieobservable $\hat{H}$ (***Hamilton-Operator*** en) der elementaren Quantenmechanik mit $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$ sind jedoch mit einem geeigneten Potential V durch

$$\hat{H}\Psi(\mathbf{x}) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_{\mathbf{x}} + V(\mathbf{x})\right)\Psi(\mathbf{x}) \quad \forall\,\Psi \in D = \{[\varphi] : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\} \tag{3.39}$$

Version vom 26. März 2009

[49] Bzgl. der Dynamik offener quantenmechanischer System sei auf (Davies, 1976) verwiesen.

[50] Entsprechendes gilt für alle Generatoren (stark stetiger unitärer Darstellungen) 1-parametriger **Symmetrie**gruppen.

[51] Es sei daran erinnert, daß die Elemente von $L^2(\mathbb{R}^n)$ eigentlich Äquivalenzklassen sind.

gegeben und genügen damit der Bedingung

$$\overline{\hat{H}\Psi} = \hat{H}\overline{\Psi} \quad \forall\,\Psi \in D\,,$$

wobei $\overline{}$ komplexe Konjugation meint. Dadurch ist gewährleistet, daß tatsächlich jeweils (mindestens) ein selbstadjungierter Operator $\hat{H}$ mit (3.39) existiert.

Übungsaufgabe 72 *Sei $\hat{A}$ ein symmetrischer Operator in $L^2(\mathbb{R}^n)$, der der Bedingung*

$$\overline{\hat{H}\Psi} = \hat{H}\overline{\Psi} \quad \forall\,\Psi \in D_{\hat{H}}$$

genügt. Man zeige, daß $\hat{H}$ selbstadjungiert erweiterbar ist.[52]

In komplizierteren Fällen gilt immer noch die Bedingung[53]

$$-\infty < \inf_{\substack{\Psi\in D\\ \|\Psi\|=1}} \left\langle \Psi \mid \hat{H}\Psi \right\rangle \tag{3.40}$$

die ebenfalls die Existenz einer selbstadjungierten Erweiterung von $\hat{H}\restriction D$ garantiert.

Satz 3.3.4 *Jeder positive symmetrische Operator besitzt (mindestens) eine positive selbstadjungierte Erweiterung.*

Beweis: Siehe (Reed und Simon, 1975, Th. X.23). ∎

Man macht sich leicht klar, daß es nichts schadet, wenn man $\hat{H}\restriction D$ auf einem größeren Bereich $D \subset D_{\hat{H}}$ angibt.

Übungsaufgabe 73 Seien $\hat{H}$ ein symmetrischer Operator in $\mathcal{H}$ und D ein in $\mathcal{H}$ dichter linearer Teilraum von $D_{\hat{H}}$. Man zeige:

> Wenn $\hat{H}\restriction D$ i.w.s.a. ist, dann auch $\hat{H}$ und die selbstadjungierte Erweiterung von $\hat{H}$ stimmt mit derjenigen von $\hat{H}\restriction D$ überein.

Wenn man D zu klein (aber immer noch dicht in $\mathcal{H}$) wählt, kann es leicht passieren, daß $\hat{H}\restriction D$ nicht mehr i.w.s.a. ist, also $\hat{H}$ nicht mehr eindeutig charakterisiert (siehe Fußnote 42). Glücklicherweise tritt dieser Effekt im Falle (3.39) für viele physikalische relevante Potentiale V nicht auf.

Version vom 26. März 2009

[52]**Hinweis:** Man zeige zunächst $\overline{\hat{H}^*\Psi} = \hat{H}^*\overline{\Psi}$ für alle $\Psi \in D_{\hat{H}^*}$ und beachte Satz 3.3.3.

[53]Wäre $\hat{H}\restriction D$ nicht in diesem Sinne ***nach unten beschränkt***, würde das quantenmechanische System aufgrund der Wechselwirkung mit dem quantisierten elektromagnetischen Feld ständig Energie abstrahlen.

Satz 3.3.5 (Kato-Rellich) *Seien $\hat{H}_0$ ein selbstadjungierter und $\hat{V}$ ein symmetrischer Operator in $\mathcal{H}$, der folgenden beiden Bedingungen genügt:*

1. $D_{\hat{H}_0} \subset D_{\hat{V}}$.

2. *Es existieren $a, b \in \mathbb{R}$ mit*

$$\left\| \hat{V} \Psi \right\| \leq \underbrace{a}_{<1} \left\| \hat{H}_0 \Psi \right\| + b \left\| \Psi \right\| \quad \forall \, \Psi \in \mathcal{H} \, . \tag{3.41}$$

Dann ist $\hat{H}_0 + \hat{V}$ selbstadjungiert.[54] *Wenn $\hat{H}_0$ nach unten beschränkt ist, dann auch $\hat{V}$. Außerdem gilt für jeden dichten linearen Teilraum D von $D_{\hat{H}_0}$:*

$$\hat{H}_0 \restriction D \text{ i.w.s.a.} \quad \Longrightarrow \quad \left(\hat{H}_0 + \hat{V} \right) \restriction D \text{ i.w.s.a.}$$

Beweis: Siehe (Reed und Simon, 1975, Th. X.12). ∎

Folgerung 3.3.6 *Seien f_1, f_2 reellwertige Borelfunktionen auf $\mathbb{R}$ mit*

$$f_1 \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3) \, , \qquad f_2 \text{ beschränkt} \, .$$

Dann ist $(\Delta + f_1 + f_2) \restriction \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ i.w.s.a.[55] *und der Definitionsbereich der selbstadjungierten Erweiterung hängt nicht von $f_1 + f_2$ ab.*

Beweis: Siehe (Reed und Simon, 1975, Th. X.15). ∎

Das Coulomb-Potential $V(\mathbf{x}) \sim 1/|\mathbf{x}|$ erlaubt offensichtliche eine Zerlegung $V = f_1 + f_2$ mit f_1 und f_2 entsprechend Folgerung 3.3.6. Deshalb ist die Einschränkung des Hamilton-Operators, der das einfachste Modell des Wasserstoffatoms bestimmt, auf $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ i.w.s.a.[56]

3.3.3 Analytische Vektoren

Definition 3.3.7 *Seien $\hat{A}$ ein linearer Operator in $\mathcal{H}$. Dann versteh man unter einem* ***analytischen Vektor für*** *$\hat{A}$ ein $\Psi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} D_{\hat{A}^n}$, zu dem ein $T \in \mathbb{R}$ existiert mit*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\| (T\hat{A})^n \Psi \right\| < \infty \, . \tag{3.42}$$

[54] Gemäß Definition 3.2.1 ist $D_{\hat{H}_0 + \hat{V}} = D_{\hat{H}_0} \cap D_{\hat{V}} = D_{\hat{H}_0}$.

[55] Die Elemente von $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ sind hier natürlich mit den entprechenden Äquivalenzklassen aus $L^2(\mathbb{R}^3)$ zu identifizieren.

[56] Bzgl. der Verallgemeinerung auf andere Atome siehe (Reed und Simon, 1975, Th. X.16).

Wenn (3.42) für alle $T \in \mathbb{R}$ gilt, nennt man Ψ einen ***ganzen analytischen Vektor für*** $\hat{A}$ ***.***

Beispiel: Alle Eigenvektoren von $\hat{A}$ sind ganze analytische Vektoren für $\hat{A}$.

Übungsaufgabe 74 Sei $\hat{A}$ ein selbstadjungierter Operator in $\mathcal{H}$. Man zeige:

1. Wenn Ψ ein analytischer Vektor für $\hat{A}$ ist, dann existiert ein $T = T(\hat{A}, \Psi) > 0$ mit
$$e^{it\hat{A}}\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(it\hat{A})^n\Psi \quad \forall\, t \in (-T, +T)$$
und $\left\langle \Psi \mid e^{it\hat{A}}\Psi \right\rangle$ ist eine reell analytische Funktion[57] von t.

2. Wenn D ein in $\mathcal{H}$ dichter Teilraum analytischer Vektoren für $\hat{A}$ ist, dann ist $\hat{A}$ durch $\hat{A} \restriction D$ bereits eindeutig festgelegt.

Folgerung 3.3.8 *Ein Operator, dessen analytische Vektoren in $\mathcal{H}$ dicht liegen, kann höchstens eine selbstadjungierte Erweiterung besitzen.*

Beispiel: Wenn $\hat{A}$ selbstadjungiert ist, dann ist $\bigcup_{n\in\mathbb{R}} \hat{E}_{\hat{A}}([-n, n])\mathcal{H}$ eine dichte Menge (ganzer) analytischer Vektoren für $\hat{A}$.

Übungsaufgabe 75 Sei $\hat{A}$ ein symmetrischer Operator in $\mathcal{H}$. Außerdem seien $\Psi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} D_{\hat{A}^n}$ und $T > 0$ so vorgegeben, daß (3.42) gilt. Man zeige:

1. Für alle $\Delta t_1, \Delta t_2 \in (-T/2, T/2)$ gilt
$$\begin{aligned}
&\lim_{N_1,N_2\to\infty} \sum_{n_1=0}^{N_1} \frac{1}{n_1!} \left(i\Delta t_1\, \overline{\hat{A}}\right)^{n_1} \left(\sum_{n_2=0}^{N_2} \frac{1}{n_2!} \left(i\Delta t_2\, \overline{\hat{A}}\right)^{n_2} \Psi \right) \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} \left(i(\Delta t_1 + \Delta t_2)\, \overline{\hat{A}}\right)^{n} \Psi \quad \text{in } \bigcap_{n=1}^{\infty} D_{\overline{\hat{A}}^n} .
\end{aligned}$$

2. Für alle $\Delta t \in (-T, +T)$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt
$$\left\| \overline{\hat{A}}^n \lim_{N\to\infty} \sum_{\nu=0}^{N} \frac{1}{\nu!} \left(i\Delta t\, \overline{\hat{A}}\right)^{\nu} \Psi \right\| = \left\| \hat{A}^n \Psi \right\| .$$

[57] D.h. die Taylorentwicklung um einen beliebig vorgegebenen Punkt der reeelen Achse hat einen nicht verschwindenden Konvergenzradius.

3.

$$\hat{U}_{\hat{A}}(t)\Psi \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{N_1\to\infty}\sum_{\nu_1=0}^{N_1}\frac{1}{\nu_1!}\left(i\frac{t}{n}\,\overline{\hat{\hat{A}}}\right)^{\nu_1}\dots \right.$$
$$\left.\dots\left(\lim_{N_1\to\infty}\sum_{\nu_n=0}^{N_n}\frac{1}{\nu_n!}\left(i\frac{t}{n}\,\overline{\hat{\hat{A}}}\right)^{\nu_n}\Psi\right)\dots\right) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} D_{\overline{\hat{A}}^n}\,, \tag{3.43}$$

existiert als stetig von t abhängiger analytischer Vektor für $\hat{A}$, der den Bedingungen

$$\hat{U}_{\hat{A}}(t_1+t_2)\Psi = \hat{U}_{\hat{A}}(t_1)\left(\hat{U}_{\hat{A}}(t_2)\Psi\right)$$

und

$$\left\|\hat{U}_{\hat{A}}(t)\Psi\right\| = \|\Psi\|$$

genügt.

Satz 3.3.9 (Nelson) *Ein symmetrischer Operator, dessen analytische Vektoren in $\mathcal{H}$ dicht liegen, ist i.w.s.a.*

Beweisskizze: Wenn man die $\hat{U}_{\hat{A}}(t)$ für analytische Vektoren von $\hat{A}$ gemäß (3.43) definiert, dann existiert dazu (genau) eine stark stetige 1-parametrige Gruppe $\hat{U}(t)$ mit

$$\Psi \text{ analytischer Vektor für } \hat{A} \quad \Longrightarrow \quad \hat{U}(t)\Psi = \hat{U}_{\hat{A}}(t)\Psi\ \forall\, t \in \mathbb{R}\,.$$

Der (gemäß Satz von Stone) zugehörige Generator ist dann eine selbstadjungiert Erweiterung von $\hat{A}\big/\bigcap_{n=1}^{\infty} D_{\overline{\hat{A}}^n}$. Nach Folgerung 3.3.8 ist $\hat{A}\big/\bigcap_{n=1}^{\infty} D_{\overline{\hat{A}}^n}$ also i.w.s.a., woraus entsprechend Aufgabe 73 die Behauptung folgt. ∎

Übungsaufgabe 76 Man zeige:

Ein symmetrischer Operator $\hat{A}$, der ein MONS $\{\Phi_\rho\}_{\rho\in\mathfrak{I}}$ von Eigenvektoren besitzt, ist i.w.s.a. und sein Spektralmaß ist durch

$$\hat{E}_{\hat{A}}(\mathcal{B}) = \sum_{\substack{\rho\in\mathfrak{I}\\ a_\rho\in\mathcal{B}}} |\Phi_\rho\rangle\langle\Phi_\rho| \quad \forall\, \mathcal{B} \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$$

gegeben, wobei a_ρ jeweils den Eigenwert zu Φ_ρ bezeichnet: $\hat{A}\Phi_\rho = a_\rho\Phi_\rho$.

Literaturverzeichnis

Balakrishnan, A. V. (1971). *Applied Functional Analysis*, Band 3 von *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen*. Springer-Verlag, 2. Auflage.

Bargmann, V. (1964). Note on wigner's theorem on symmetry operations. *J. Mathem. Phys.*, 5:862. 84

Behnke, H., Bachmann, F., Fladt, F., und Süss, W. (1962). *Grundzüge der Mathematik III: Analysis*. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen. 54

Birkhoff, G. (1967). *Lattice Theory*, Band 25 von *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island. 43, 47

Bratteli, O. und Robinson, D. W. (1979). *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics I*. Texts and Monographs in Physics. Springer-Verlag. 7

Colombeau, J. F. (1992). *Multiplication of Distributions*, Band 1532 von *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag. A tool in mathematics, numerical engineering and theoretical physics. 55

Conway, J. B. (1985). *A Course on Functional Analysis*. Springer-Verlag.

Cooke, R., Keane, M., und Moran, W. (1985). An elementary proof of Gleason's theorem. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 98:117–128. 50

Davies, E. B. (1976). *Quantum Theory of Open Systems*. Academic Press. 66, 86

Doebner, H. und Lücke, W. (1991). Quantum logic as a consequence of realistic measurements on deterministic systems. *J. Mathem. Phys.*, 32:250–253. 45

Dunford, N. und Schwartz, J. T. (1957). *Linear Operators Part I: General Theory*. Interscience Publishers.

Dunford, N. und Schwartz, J. T. (1963). *Linear Operators Part II: Spectral Theory*. Interscience Publishers.

Dunford, N. und Schwartz, J. T. (1971). *Linear Operators Part III: Spectral Operators*. Interscience Publishers.

Gelfand, I. und Schilow, G. (1967). *Verallgemeinerte Funktionen (Distributionen)*, Band I. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin. 55, 57

Gelfand, I. und Wilenkin, N. J. (1964). *Verallgemeinerte Funktionen (Distributionen)*, Band IV. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin. 55, 62, 76

Gleason, A. M. (1957). Measures on the closed subspaces of a hilbert space. *J. Math. Mech.*, 6:885–893. 50

Greechie, R. (1971). Orthomodular lattices admitting no states. *J. Comb. Theory*, 10:119–132. 49

Haag, R. (1996). *Local Quantum Physics*. Springer, 2. Auflage. 82

Halmos, P. R. (1950). *Measure Theory*. Van Nostrand Reinhold Company. 49, 50, 51, 53, 54, 55, 60, 61, 69

Halmos, P. R. (1994). *Naive Mengenlehre*, Band 6 von *Moderne Mathematik in elementarer Darstellung*. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen. 29

Isham, C. J. (1989). Quantum topology and quantisation on the lattice of topologies. *Class. Quantum Grav.*, 6:1509–1534. 47

Kamke, E. (1965). *Mengenlehre*, Band 999/999a von *Sammlung Göschen*. Walter de Guyter & Co, Berlin. 29

Köthe, G. (1966). *Topologische lineare Räume I*, Band 107 von *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen*. Springer-Verlag, 2. Auflage. 23, 35, 41

Lücke, W. (1996). Axiomatic quantum theory. *Acta Phys. Pol.*, 27:2357–2385. 10

Lücke, W. (edyn). Elektrodynamik .
http://www.wolfgang-luecke.de/skripten/edyn.pdf. 59

Lücke, W. (ein). Mathematische Methoden der Physik.
http://www.wolfgang-luecke.de/skripten/ein.pdf. 27, 28, 32, 36, 41, 71

Lücke, W. (ftm). Mathematische Methoden der Physik: Funktionentheoretische Methoden.
http://www.wolfgang-luecke.de/skripten/ftm.pdf. 59

Lücke, W. (qft). Particles and fields.
http://www.wolfgang-luecke.de/skripten/qft.pdf. 10, 57, 85

Naas, J. und Schmid, H. L. (1967). *Mathematisches Wörterbuch*, Band I. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Berlin Stuttgart. 3

Neumark, M. A. (1959). *Normierte Algebren*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin. 3, 19, 21

Pflaumann, E. und Unger, H. (1968). *Funktionalanalysis I*, Band 82/82a. Bibliographisches Institut · Mannheim. 3, 13, 16, 17, 20, 47

Pietsch, A. (1969). *Nukleare lokalkonvexe Räume*. Akademie-Verlag, Berlin. 41

Piron, C. (1976). *Foundations of Quantum Physics*. W. A. Benjamin, Inc. 30

Rédei, L. (1959). *ALGEBRA*. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig. Erster Teil. 14, 28

Reed, M. und Simon, B. (1972). *Methods in Modern Mathematical Physics*, Band I: Functional Analysis. Academic Press. 3, 17, 31, 33, 34, 75, 80

Reed, M. und Simon, B. (1975). *Methods in Modern Mathematical Physics*, Band II: Fourier Analysis, Self-Adjointness. Academic Press. 86, 87, 88

Riesz, F. und Sz.-Nagy, B. (1982). *Vorlesungen über Funktionalanalysis*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin. 3, 83

Robertson, A. und Robertson, W. (1967). *Topologische Vektorräume*, Band 164/164a. Bibliographisches Institut · Mannheim. 25, 31, 33, 34, 41, 42

Rosenblum, R. (1950). *Elements of Mathematical Logic*. Dover, New York. 51

Schubert, H. (1964). *Topologie*. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart. 11, 21

Valentine, F. A. (1968). *Konvexe Mengen*, Band 402/402a. Bibliographisches Institut · Mannheim. 25

Varadarajan, V. S. (1968). *Geometry of Quantum Theory*, Band I von *The university series in higher mathematics*. Springer. 47

Yosida, K. (1971). *Functional Analysis*, Band 123 von *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen*. Springer-Verlag, 3. Auflage. 3

Index