Funktionentheorie I

im WS 1997/98 nach
Vorlesung von Prof. Dr. Kohnen
Übungen von Dr. Breulmann

Heidelberg, den 12. Juli 2008

Vorwort

Das vorliegende Skript ist als nicht autorisierte Mitschrift zur Vorlesung Funktionentheorie I von Prof. Kohnen im Wintersemester 1997/98 entstanden. Die Lösungsansätze zu den Übungsaufgaben sind weder vollständig, noch beschreiben sie unbedingt den einfachsten Lösungsweg.

Heidelberg, den 8. Mai 1998
Gerhard Lechsel
glechsel@googlemail.com

Im Sommersemester 2008 habe ich mich mit Gerhard Lechsel in Verbindung gesetzt und versucht einige Fehler im Skript zu korrigieren.
Sollten noch weitere Fehler im Skript vorhanden sein oder falls ihr bessere Lösungsvorschläge für die Übungsaufgaben habt, so bitte ich darum mir eine eMail zu schreiben.

Heidelberg, den 25. Juni 2008
Alexander Buchner
alexander.buchner@gmx.de

Inhaltsverzeichnis

1 Komplexe Zahlen **7**

§ 1 Definition der komplexen Zahlen 7
§ 2 Konjugation, Absolutbetrag 9
§ 3 Geometrische Veranschaulichung der Multiplikation 11
§ 4 Elementare analytische Geometrie 13

2 Komplexwertige Funktionen **15**

§ 1 Limites, elementare topologische Begriffe 15
§ 2 Stetigkeit 18
§ 3 Komplex differenzierbare Funktionen 19
§ 4 Potenzreihen 24
§ 5 Die komplexe Exponentialfunktion und die trigonometrischen Funktionen 29
§ 6 Der komplexe Logarithmus 32

3 Komplexe Integrationstheorie **37**

§ 1 Komplexe Kurvenintegrale 37
§ 2 Der CAUCHYsche Integralsatz 46
§ 3 Die CAUCHYsche Integralformel 52
§ 4 Direkte Folgerungen aus den CAUCHYschen Integralformeln 57
Anhang: Elementargebiete 63
§ 5 Lokale Abbildungseigenschaften holomorpher Funktionen 65
§ 6 Singularitäten 70
§ 7 LAURENTzerlegung 76
§ 8 Anhang: Meromorphe Funktionen (informell) 83

4 Der Residuensatz **85**

§ 1 Umlaufzahlen 85
§ 2 Residuum 87
§ 3 Funktionentheoretische Anwendung des Residuensatzes 91
§ 4 Berechnung von Integralen mit Hilfe des Residuensatzes 94

5 Der kleine Riemannsche Abbildungssatz **101**

§ 1 Konforme Abbildungen, Motivation 101
§ 2 Beweis des kleinen RIEMANNschen Abbildungssatzes 103
§ 3 Geometrische Charakterisierung von Elementargebieten 108

Übungsaufgaben **115**

Lösungen zu den Übungsaufgaben **127**

1 Komplexe Zahlen

§ 1 Definition der komplexen Zahlen

Motivation: Die Gleichung $x^2 = -1$ hat über $\mathbb{R}$ keine Lösung; man erweitere „in geeigneter Weise“ $\mathbb{R}$ zu einem größeren Bereich, so dass diese Gleichung dort Lösungen hat.
Naive Vorgehensweise: Sei „i“ ein Symbol mit $i^2 = -1$. Dann seien komlexe Zahlen Ausdrücke der Form $a + i\,b$, $a, b \in \mathbb{R}$. „Zahlen“ $a + i\,b$ und $a' + i\,b'$ seien gleich genau dann, wenn $a = a'$ und $b = b'$. Man addiere bzw. multipliziere komlexe Zahlen nach der Vorschrift:

$$(a + i\,b) + (c + i\,d) = (a + c) + i(b + d)$$

(übliche Vektoraddition im $\mathbb{R}^2$)

$$\begin{aligned}(a + i\,b)(c + i\,d) &= a\,c + i\,a\,d + i\,b\,c + b\,d\,i^2 \\ &= (a\,c - b\,d) + i(a\,d + b\,c)\end{aligned}$$

Beobachtung:

- Die komlexen Zahlen enthalten die reellen Zahlen ($b = 0$).
- Addition und Multiplikation sind kommutativ.
- $1 \cdot (a + i\,b) = a + i\,b$.
- Ist $a + i\,b \neq 0$ (d. h. $a \neq 0$ oder $b \neq 0$), so gilt:

$$(a + i\,b) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2} - i\,\frac{b}{a^2 + b^2} \right) = 1$$

  d. h., $a + i\,b$ hat Inverses.

Streng mathematische Vorgehensweise:

Definition: Ein Körper F ist eine nicht-leere Menge F zusammen mit zwei Abbildungen $+ : F \times F \to F$, $(a, b) \mapsto a + b$ und $\cdot : F \times F \to F$, $(a, b) \mapsto a \cdot b$, derart dass gilt:

(i) $(F, +)$ ist eine kommutative Gruppe (0 neutrales Element)

(ii) $(F \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine kommutative Gruppe (1 neutrales Element)

(iii) $a(b+c) = a\,b + a\,c$ (Distributivität)

(iv) $1 \neq 0$

Beispiel 1: Körper: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (p Primzahl)

Ziel: Man mache $\mathbb{R}^2$ zu einem Körper. Man definiere

$$(a,b) + (c,d) := (a+c, b+d)$$

($(0,0)$ neutrales Element, $(-a,-b)$ inverses Element zu (a,b)),

$$(a,b) \cdot (c,d) := (a\,c - b\,d, a\,d + b\,c)$$

Satz 1: $\mathbb{R}^2$ mit obiger Addition und Multiplikation ist ein Körper. Dieser heißt Körper der komplexen Zahlen und wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet.

Beweis: klar, bzw.: $(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \cdot)$ ist eine kommutative Gruppe. Hierzu ist nachzuprüfen:

(i) Assoziativität (nachrechnen!)

(ii) Kommutativität

(iii) $(1,0)$ ist neutrales Element, denn $(1,0)(c,d) = (c,d)$.

(iv) Ist $(a,b) \neq (0,0)$, d. h. $a \neq 0$ oder $b \neq 0$, d. h. $a^2 + b^2 \neq 0$, so gilt:

$$(a,b) \cdot \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) = (1,0)$$

d. h., $\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$ ist Inverses zu (a,b).

□

Bemerkung: $(1,0) \neq (0,0)$

Definition: $i := (0,1)$

Satz 2: $i^2 = (-1,0)$

Beweis: $i \cdot i = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0)$ □

Bemerkung: Die Abbildung φ von $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $a \mapsto (a,0)$ ist ein injektiver Körperhomomorphismus, d. h., ist eine injektive Abbildung, die mit der Multiplikation und Addition verträglich ist: $\varphi(a) + \varphi(b) = \varphi(a+b)$, $\varphi(a \cdot b) = a \cdot \varphi(b)$ und $\varphi(1) = (1,0)$. Arbeitet man in $\mathbb{C}$, so schreibt man statt $(a,0)$ ($a \in \mathbb{R}$) einfach a. Insbesondere gilt (siehe vorstehenden Satz) $i^2 = -1$.

Satz 3: Jedes $z \in \mathbb{C}$ hat eine eindeutige Darstellung $z = a + i\,b$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$.

Beweis: Sei $z = (a, b) \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}(a, b) &= (a, 0) + (0, b)\\ &= (a, 0)(1, 0) + (b, 0)(0, 1)\\ &= a \cdot 1 + b\, i\\ &= a + i\, b\end{aligned}$$

Es ist klar, dass diese Darstellung eindeutig ist. □

Definition: Sei $z = a + i\, b \in \mathbb{C}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Dann heißt a der Realteil und b der Imaginärteil von z. Man schreibt:

$$a = \operatorname{Re} z \qquad b = \operatorname{Im} z$$

Lemma 1:

(i) $z = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z = 0$ und $\operatorname{Im} z = 0$

(ii) $\dfrac{1}{z} = z^{-1} = \dfrac{a - i\, b}{a^2 + b^2}$, wenn $z = a + i\, b \in \mathbb{C}$ $(a, b \in \mathbb{R})$, $z \neq 0$.

Beweis: klar! □

Lemma 2: Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ mit $\alpha \neq 0$. Dann hat die Gleichung $\alpha\, z = \beta$ genau eine Lösung z in $\mathbb{C}$, nämlich $z = \frac{\beta}{\alpha}$.

Beweis: Dies ist in jedem Körper richtig! □

Beispiel 2: Rechnen mit komplexen Zahlen

(i) $(1 + 2i)^3 = (1 + 2i)(1 + 2i)^2 = (1 + 2i)(-3 + 4i) = -11 - 2i$

(ii) $\dfrac{5}{3 + 4i} = \dfrac{5(3 - 4i)}{(3 + 4i)(3 - 4i)} = \dfrac{3}{5} - \dfrac{4}{5}\, i$

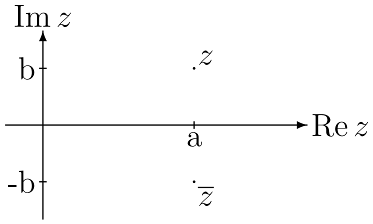
§ 2 Konjugation, Absolutbetrag

Definition: Sei $z = a + i\, b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Dann heißt

$$\overline{z} := a - i\, b$$

die zu z komplex konjugierte Zahl.

Geometrische Veranschaulichung:



Spiegelung an der x-Achse

Satz 4:

(i) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$, $\overline{z\,w} = \overline{z}\,\overline{w}$ $\forall z, w \in \mathbb{C}$

(ii) $z \in \mathbb{C}$ ist reell $\Leftrightarrow$ $\overline{z} = z$

(iii) $\overline{\overline{z}} = z$

(iv) $\operatorname{Re} z = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$, $\operatorname{Im} z = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$

Beweis:

(i) Sei $z = a + i\,b$, $w = c + i\,d$. Dann gilt:

$$\overline{z+w} = \overline{a+c+i(b+d)} = a+c-i(b+d) = (a-i\,b)+(c-i\,d) = \overline{z}+\overline{w}$$

$$\overline{z\,w} = \overline{(a\,c-b\,d)+i(a\,d+b\,c)} = a\,c-b\,d-i(a\,d+b\,c)$$
$$\overline{z}\,\overline{w} = (a-i\,b)(c-i\,d) = a\,c-b\,d-i(a\,d+b\,c) = \overline{z\,w}$$

(ii) z reell $\Leftrightarrow$ $b = 0$ $\Leftrightarrow$ $z = \overline{z}$

(iii) klar!

(iv) $\dfrac{z+\overline{z}}{2} = \dfrac{a+i\,b+a-i\,b}{2} = a = \operatorname{Re} z$, $\dfrac{z-\overline{z}}{2i} = \dfrac{a+i\,b-(a-i\,b)}{2i} = b = \operatorname{Im} z$ $\square$

Definition: Sei $z = a + i\,b$ $(a, b \in \mathbb{R})$. Dann heißt:

$$|z| := \sqrt{a^2+b^2}$$

der Absolutbetrag von z. (Geometrisch identifiziert man $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$, $(a+i\,b) \Leftrightarrow (a,b)$, so ist $|z|$ der euklidische Abstand von (a,b) zu $(0,0)$.)

Satz 5:

(i) $|z| \geq 0$ $\forall z \in \mathbb{C}$; $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

(ii) $|\overline{z}| = |z|$, $|z|^2 = z\,\overline{z}$

(iii) $|z\,w| = |z| \cdot |w|$ $\forall z, w \in \mathbb{C}$

(iv) $|z+w| \le |z| + |w|$ $\forall z, w \in \mathbb{C}$ („Dreiecksungleichung")

(v) $|z-w| \ge \big||z| - |w|\big|$

Beweis:

(i) klar!

(ii) $z\,\overline{z} = |z|^2$

(iii) Es genügt zu zeigen, dass $|z\,w|^2 = (|z| \cdot |w|)^2$ ist. Es gilt nach (ii):

$$|z\,w|^2 = z\,w \cdot \overline{z\,w} = z\,\overline{z} \cdot w\,\overline{w} = |z|^2 \cdot |w|^2$$

(iv) Es genügt zu zeigen, dass $|z+w|^2 \le (|z| + |w|)^2$. Es gilt:

$$|z+w|^2 = (z+w)\overline{(z+w)} = |z|^2 + |w|^2 + z\,\overline{w} + w\,\overline{z} = |z|^2 + |w|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z\,\overline{w})$$

$$(|z| + |w|)^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2|z|\,|w| = |z|^2 + |w|^2 + 2|z\,\overline{w}|$$

Es ist daher zu zeigen, dass $\mathrm{Re}(z\,\overline{w}) \le |z\,\overline{w}|$. Es gilt aber $\forall u \in \mathbb{C}$: $\mathrm{Re}\,u \le |u|$, denn ist $u = a + i\,b$, so ist:

$$\mathrm{Re}\,u = a \le \sqrt{a^2 + b^2} = |u|$$

(v) Formale Konsequenz aus (iv) (Übungsaufgabe!)

□

Bemerkung: Ist $z \neq 0$, so gilt: $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{z\,\overline{z}} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$

§ 3 Geometrische Veranschaulichung der Multiplikation

Addition von komplexen Zahlen bedeutet geometrische Vektorraumaddition im $\mathbb{R}^2$. Wie kann man sich die Multiplikation veranschaulichen?
Sei $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Man schreibe $z = |z|\frac{z}{|z|}$ und beachte, dass $\frac{z}{|z|}$ Absolutbetrag 1 hat. Setzt man $\frac{z}{|z|} = x + i\,y$ $(x, y \in \mathbb{R})$ so gilt also $x^2 + y^2 = 1$, d. h., (x, y) liegt auf dem Einheitskreis. Daher existiert $\Theta \in \mathbb{R}$ mit $x = \cos\Theta$, $y = \sin\Theta$. Setzt man $r := |z|$, so gilt also $z = r(\cos\Theta + i\,\sin\Theta)$ („Polarkoordinaten").

Definition: Die reelle Zahl Θ heißt das Argument von z und wird mit $\arg z$ bezeichnet (man beachte, dass $\Theta = \arg z$ nur modulo 2π bestimmt ist, d. h., mit Θ ist auch $\Theta + 2\pi\,n$ $(n \in \mathbb{Z})$ ein Argument von z). Wählt man $-\pi < \Theta \le \pi$, so heißt diese Wahl des Argumentes *Hauptwert des Arguments*. Dieser wird oft mit $\mathrm{Arg}\,z$ bezeichnet.

Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$. Man schreibe wie oben $z_\nu = r_\nu(\cos\Theta_\nu + i\,\sin\Theta_\nu)$ $(\nu = 1, 2)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1\,r_2(\cos\Theta_1 + i\,\sin\Theta_1)(\cos\Theta_2 + i\,\sin\Theta_2) \\ &= r_1\,r_2\big((\cos\Theta_1\cos\Theta_2 - \sin\Theta_1\sin\Theta_2) + i(\sin\Theta_1\cos\Theta_2 + \cos\Theta_1\sin\Theta_2)\big) \\ &= r_1\,r_2\big(\cos(\Theta_1+\Theta_2) + i\,\sin(\Theta_1+\Theta_2)\big) \end{aligned}$$

Also komplexe Zahlen werden multipliziert, indem man die Beträge multipliziert und die Argumente addiert (modulo 2π).
Anwendung (Moivre)*:*

$$(\cos\Theta + i\,\sin\Theta)^n = \cos n\,\Theta + i\,\sin n\,\Theta \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall\Theta \in \mathbb{R}$$

Multipliziert man die linke Seite nach dem binomischen Lehrsatz aus und vergleicht, folgen hieraus die de Moivre*schen Formeln*.

Satz 6: Sei $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Dann hat die Gleichung $z^n = a$ genau n verschiedene Lösungen z in $\mathbb{C}$. Ist $a = r(\cos\Theta + i\sin\Theta)$ (Polarkoordinaten), so werden diese gegeben durch:

$$z = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\Theta}{n} + k\,\frac{2\,\pi}{n}\right) + i\,\sin\left(\frac{\Theta}{n} + k\,\frac{2\,\pi}{n}\right)\right) \tag{$*$}$$

mit $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Beweis: Sei z wie in $(*)$ definiert. Dann gilt:

$$z^n = r\big(\cos(\Theta + k\cdot 2\,\pi) + i\,\sin(\Theta + k\cdot 2\,\pi)\big) = r(\cos\Theta + i\,\sin\Theta) = a$$

Also löst jedes solche z die Gleichung $z^n = a$. Alle diese Lösungen sind paarweise verschieden, denn gilt:

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\Theta}{n} + k\,\frac{2\,\pi}{n}\right) + i\,\sin\left(\frac{\Theta}{n} + k\,\frac{2\,\pi}{n}\right)\right) = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\Theta}{n} + k'\,\frac{2\,\pi}{n}\right) + i\,\sin\left(\frac{\Theta}{n} + k'\,\frac{2\,\pi}{n}\right)\right)$$

mit $0 \leq k, k' < n$. Hieraus folgt nach Division durch $\sqrt[n]{r}$:

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\Theta}{n} + k\,\frac{2\,\pi}{n}\right) &= \cos\left(\frac{\Theta}{n} + k'\,\frac{2\,\pi}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{\Theta}{n} + k\,\frac{2\,\pi}{n}\right) &= \sin\left(\frac{\Theta}{n} + k'\,\frac{2\,\pi}{n}\right) \end{aligned}$$

Also existiert eine ganze Zahl $m \in \mathbb{Z}$, so dass

$$\frac{\Theta}{n} + k\,\frac{2\,\pi}{n} = \frac{\Theta}{n} + k'\,\frac{2\,\pi}{n} + 2\,\pi\cdot m$$

d. h. $(k-k') = m \cdot n$. Wegen $0 \le k, k' < n$ geht dies nur für $m = 0$, d. h. $k = k'$.
Umgekehrt: Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $z^n = a$. Dann gilt $z \neq 0$ wegen $a \neq 0$. Sei $z = \rho(\cos\varphi + i\,\sin\varphi)$. Aus $z^n = a$ folgt $|z|^n = |a|$, d. h. $\rho^n = r$, also $\rho = \sqrt[n]{r}$. Aus $z^n = a$ folgt ferner:

$$\begin{aligned} & \rho^n(\cos\varphi + i\,\sin\varphi)^n = r(\cos\Theta + i\,\sin\Theta) \\ \Rightarrow\quad & (\cos\varphi + i\,\sin\varphi)^n = \cos\Theta + i\,\sin\Theta \\ \Rightarrow\quad & \cos n\,\varphi + i\,\sin n\,\varphi = \cos\Theta + i\,\sin\Theta \end{aligned}$$

Gleiche Argumentation wie oben: $\exists m \in \mathbb{Z}$ mit $n\,\varphi = \Theta + 2\,\pi\,m$, d. h. $\varphi = \frac{\Theta}{n} + m\,\frac{2\,\pi}{n}$.
Man schreibe $m = l\,n + k$ mit $l \in \mathbb{Z}$, $0 \le k < n$. Es folgt:

$$\varphi = \frac{\Theta}{n} + 2\,\pi\,l + k\frac{2\,\pi}{n} \quad\Rightarrow\quad \cos\varphi = \cos\left(\frac{\Theta}{n} + k\frac{2\,\pi}{n}\right) \quad \sin\varphi = \sin\left(\frac{\Theta}{n} + k\frac{2\,\pi}{n}\right)$$

Also hat z die Form $(*)$. □

Wichtiger Spezialfall: $a = 1$. Lösungen von $z^n = 1$ nennt man *Einheitswurzeln*.

§ 4 Elementare analytische Geometrie

In der ebenen Geometrie untersucht man geometrische Objekte, die durch Gleichungen in den kartesischen Koordinaten x, y gegeben werden. Ist $z = x + i\,y \in \mathbb{C}$, so ist:

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2} \\ y &= \operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i} \end{aligned}$$

Also läßt sich jede solche Gleichung auch als Gleichung in den Termen z und $\overline{z}$ auffassen. Dies ist oft sehr nützlich.

Beispiel 3:

(i) Der Kreis vom Radius r mit Mittelpunkt $a = \alpha + i\,\beta$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ wird gegeben durch $|z - a| = r$, denn

$$|z-a| = r \quad\Leftrightarrow\quad |z-a|^2 = r^2 \quad\Leftrightarrow\quad (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$$

(ii) Geraden werden durch die Parametergleichung $z = a + b\,t$ $(t \in \mathbb{R})$ gegeben, wobei $a, b \in \mathbb{C}$ fest, $b \neq 0$. (In der Tat: dies ist die Gerade durch a und $a + b$.)

(iii) Jede solche Gerade bestimmt eine „rechte“ Halbebene $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}\left(\frac{z-a}{b}\right) < 0\}$ und eine „linke“ Halbebene $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}\left(\frac{z-a}{b}\right) > 0\}$. Dies ist klar, denn $z \in \mathbb{C}$ liegt genau dann auf der Geraden $a + b\,t$ $(t \in \mathbb{R})$, wenn $\frac{z-a}{b} \in \mathbb{R}$, d. h. $\operatorname{Im}\left(\frac{z-a}{b}\right) = 0$.

Beispiel: $a = 0$, $b = i$: $\operatorname{Im}\left(\frac{z-a}{b}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{z}{i}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{x+i\,y}{i}\right) = -x$. Also $-x < 0 \Rightarrow x > 0$ liegt rechts.

2 Komplexwertige Funktionen

§ 1 Limites, elementare topologische Begriffe

Definition: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen heißt konvergent, wenn es $a \in \mathbb{C}$ gibt, derart dass $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon \qquad \forall n > N$$

Dann heißt a der Limes von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Man schreibt

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n$$

Lemma 1:

(i) Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt.

(ii) Konvergente Folgen sind beschränkt, d. h., es existiert ein $C > 0$ mit $|a_n| \leq C$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

(iii) $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$, dann folgt:

$$\lim(a_n + b_n) = a + b$$
$$\lim(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

(iv) Ist $\lim a_n = a$ und $a_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $a \neq 0$, so folgt:

$$\lim \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}$$

(v) Ist $\lim a_n = a$, dann folgt:

$$\lim \overline{a_n} = \overline{a}$$
$$\lim \operatorname{Re} a_n = \operatorname{Re} a$$
$$\lim \operatorname{Im} a_n = \operatorname{Im} a$$
$$\lim |a_n| = |a|$$

Beweis: (i) – (v) wortwörtliche Übertragung der Beweise aus Analysis

(v) Es gilt $|\overline{a_n} - \overline{a}| = |\overline{a_n - a}| = |a_n - a| < \varepsilon \ \forall n > N$ also

$$\lim a_n = a \quad \Rightarrow \quad \lim \overline{a_n} = \overline{a}$$

$\forall z \in \mathbb{C}$ ist $\operatorname{Re} z = \frac{z+\overline{z}}{2}$, $\operatorname{Im} z = \frac{z-\overline{z}}{2i}$. Also folgt aus (iii), dass $\lim a_n = a$:

$$\Rightarrow \quad \lim \operatorname{Re} a_n = \operatorname{Re} a \quad \lim \operatorname{Im} a_n = \operatorname{Im} a$$

Es gilt nach Kapitel 1, § 2, Satz 5(v) (Seite 10):

$$|a_n - a| \geq \big| |a_n| - |a| \big|$$

Also mit $\lim a_n = a \Rightarrow \lim |a_n| = |a|$.

□

Lemma 2: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent $\Leftrightarrow$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchyfolge, d. h., $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a_m| < \varepsilon \ \forall m, n > N$.

Beweis:

„$\Rightarrow$“ Sei $\varepsilon < 0$. Dann $\exists N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \ \forall n > N$. Daher gilt $\forall m, n > N$:

$$|a_m - a_n| \leq |a_m - a| + |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

„$\Leftarrow$“ Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge. Für $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$|\operatorname{Re} z| \leq |z| \qquad |\operatorname{Im} z| \leq |z|$$

Deshalb ist auch

$$(\operatorname{Re} a_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad (\operatorname{Im} a_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

Cauchyfolge. Da $\mathbb{R}$ vollständig $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\lim \operatorname{Re} a_n = \alpha$, $\lim \operatorname{Im} a_n = \beta$. Sei $a := \alpha + i\,\beta$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} |a_n - a| &= |\operatorname{Re} a_n - \alpha + i(\operatorname{Im} a_n - \beta)| \\ &\leq |\operatorname{Re} a_n - \alpha| + |\operatorname{Im} a_n - \beta| \\ &\to 0 \quad (n \to \infty) \\ \Rightarrow \qquad \lim a_n &= a \end{aligned}$$

□

Definition: Unter der unendlichen Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ ($a_\nu \in \mathbb{C}$) versteht man die Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen $S_n := \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu$. Ist diese konvergent, so ist die Reihe konvergent. Ist $S = \lim S_n$, so schreibt man:

$$S = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$$

Beispiel 4: geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ($|z| < 1$). Es gilt:

$$\frac{z^{n+1}-1}{z-1} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n$$

wegen $|z| < 1$ gilt $\lim_{n\to\infty} z^{n+1} = 0$, also folgt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

Lemma 3: Es gelten die üblichen Gesetzmäßigkeiten. Zum Beispiel: $\sum_{r=0}^{\infty} a_r$ konvergent $\Rightarrow$ $(a_r)_{r\in\mathbb{N}}$ ist Nullfolge, absolute Konvergenz $\Rightarrow$ Konvergenz, Majorantenkriterium, Wurzelkriterium, Quotientenkriterium etc.

Beweis: wortwörtliche Übertragung der entsprechenden Aussagen aus Analysis I □

Definition:

(i) Sei $a \in \mathbb{C}$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Dann heißt $U_\varepsilon(a) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < \varepsilon\}$ (offene) Umgebung von a.

(ii) Sei $A \subset \mathbb{C}$ und $a \in A$. Dann heißt a innerer Punkt von A, falls A eine ε-Umgebung von a enthält.

(iii) Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{C}$ heißt offen, wenn jeder Punkt $a \in A$ innerer Punkt von A ist. Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{C}$ heißt abgeschlossen, falls ihr Komplement offen ist.

Definition:

(i) $A \subset \mathbb{C}$ heißt beschränkt, wenn es $C \in \mathbb{R}$, $C > 0$ gibt mit $|a| \le C \; \forall a \in A$

(ii) Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{C}$ heißt kompakt, falls sie abgeschlossen und beschränkt ist. (Nach dem Satz von Heine-Borel ist dies äquivalent dazu, dass jede offene Überdeckung von A eine endliche Teilüberdeckung besitzt.)

§ 2 Stetigkeit

Definition: Sei $D \subset \mathbb{C}$ und $a \in \mathbb{C}$. Sei a Häufungspunkt von D, d. h., in jeder offenen ε-Umgebung von a liegen unendlich viele Punkte aus D. Sei $f : D \to \mathbb{C}$. Man sagt dann, dass der Limes von f gegen a existiert und gleich A ist (in Zeichen: $\lim_{z\to a} f(z) = A$), wenn folgendes gilt: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, so dass

$$|f(z) - A| < \varepsilon \quad \forall z \in D \text{ mit } 0 < |z - a| < \delta$$

Definition: Sei $f : D \to \mathbb{C}$ und $z_0 \in D$. Dann heißt f stetig in z_0, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \quad \forall z \in D \text{ mit } |z - z_0| < \delta$$

(Also: Ist z_0 isolierter Punkt von D, d. h. kein Häufungspunkt von D, so ist jedes f in z_0 stetig. Oder z_0 ist Häufungspunkt von D: dann ist f stetig in $z_0 \Leftrightarrow \lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$.)

Lemma 1: f stetig in $z_0 \Leftrightarrow$ für jede Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $z_n \in D$ und $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(z_0)$$

Beweis: wortwörtliche Übertragung aus Analysis I. □

Lemma 2: Seien $f, g : D \to \mathbb{C}$, sei $z_0 \in D$. Seien f und g in z_0 stetig. Dann gilt:

(i) $f + g : D \to \mathbb{C}$, $z \mapsto f(z) + g(z)$ und $f \cdot g : D \to \mathbb{C}$, $z \mapsto f(z) \cdot g(z)$ sind stetig in z_0.

(ii) $z \mapsto \operatorname{Re} f(z)$, $z \mapsto \operatorname{Im} f(z)$, $z \mapsto \overline{f(z)}$ und $z \mapsto |f(z)|$ sind stetig in z_0.

(iii) Ist $g(z_0) \neq 0$, so gibt es eine δ-Umgebung $U_\delta(z_0)$ von z_0, so dass $g(z) \neq 0\ \forall z \in D \cap U_\delta(z_0)$ und die Abbildung

$$\frac{f}{g} : U_\delta(z_0) \cap D \to \mathbb{C} \qquad z \mapsto \frac{f(z)}{g(z)}$$

ist stetig in z_0.

Beweis: (i) und (ii) sowie 2. Teil von (iii) folgen sofort aus Lemma 1 und den Grenzwertrechenregeln (siehe § 1, Lemma 1, Seite 15).

1. Teil von (iii): Sei $g(z_0) \neq 0$. Dann ist $\varepsilon := \frac{|g(z_0)|}{2} > 0$. Da g in z_0 stetig ist, existiert zu diesem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass $|g(z) - g(z_0)| < \varepsilon \; \forall z \in D$ mit $|z - z_0| < \delta$. Für solche z gilt dann:

$$\begin{aligned} |g(z)| &= \big|g(z_0) - \big(g(z_0) - g(z)\big)\big| \\ &\geq \big||g(z_0)| - |g(z_0) - g(z)|\big| \\ &\geq |g(z_0)| - |g(z) - g(z_0)| \\ &= 2\varepsilon - |g(z) - g(z_0)| \\ &> 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon > 0 \end{aligned}$$

Also ist $g(z) \neq 0 \; \forall z \in D \cap U_\delta(z_0)$. □

Lemma 3: Ist $f : D \to \mathbb{C}$ und $g : E \to \mathbb{C}$ mit $f(D) \subset E$ und ist f in z_0 stetig und g in $f(z_0)$ stetig, so ist auch $g \circ f$ in z_0 stetig.

Beweis: Siehe Analysis II. □

Beispiel 5:

(i) Sei $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ $(a_\nu \in \mathbb{C})$ ein Polynom. Dann ist p stetig in jedem $z_0 \in \mathbb{C}$.

(ii) Sei $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ die Einheitskreissphäre. Für $z \in S^1$ sei $\operatorname{Arg} z$ der Hauptwert des Arguments von z, d. h., ist $z = \cos\Theta + i\sin\Theta$ mit $-\pi < \Theta \leq \pi$, so ist $\Theta = \operatorname{Arg} z$. Dann ist die Abbildung $S^1 \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \operatorname{Arg} z$ *nicht* stetig in $z_0 = -1$.

In der Tat: Sei $a_n = \cos(\pi - \frac{1}{n}) + i\sin(\pi - \frac{1}{n})$ und $b_n = \cos(\pi + \frac{1}{n}) + i\sin(\pi + \frac{1}{n})$ $(n \in \mathbb{N})$. Dann ist $a_n, b_n \in S^1$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \cos\pi + i\sin\pi = -1$. $\operatorname{Arg} a_n = \pi - \frac{1}{n} \to \pi$ $(n \to \infty)$. $\operatorname{Arg} b_n = -\pi + \frac{1}{n} \to -\pi$ $(n \to \infty)$. Daher ist $\operatorname{Arg} z$ in $z_0 = -1$ nicht stetig.

§ 3 Komplex differenzierbare Funktionen

$\mathbb{C}$ ist Körper, insbesondere kann man durch von Null verschiedene komplexe Zahlen dividieren. In Analogie zur Analysis I ist folgende Definition naheliegend:

Definition: Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen. Sei $z_0 \in D$ und $f : D \to \mathbb{C}$. Dann heißt f in z_0 komplex diffbar, wenn

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existiert. Dieser heißt dann die komplexe Ableitung von f in z_0 und wird mit $f'(z_0)$ bezeichnet. Ist f in jedem $z_0 \in D$ komplex diffbar, so heißt f auf D *holomorph*.

Bemerkung: Natürlich ist

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

wenn die Limites existieren.

Beispiel 6:

(i) Die Funktion $f(z) = z^n$ ($n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$) ist in jedem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ komplex diffbar, also auf $\mathbb{C}$ holomorph. Es gilt:

$$f'(z_0) = n\, z_0^{n-1}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} &= \frac{1}{h}\Big((z_0 + h)^n - z_0^n\Big) \\ &= \frac{1}{h}\left(\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} h^\nu\, z_0^{n-\nu} - z_0^n\right) \\ &= \frac{1}{h}\left(z_0^n + n\, h\, z_0^{n-1} + \sum_{\nu=2}^{n} \binom{n}{\nu} h^\nu\, z_0^{n-\nu} - z_0^n\right) \\ &= n\, z_0^{n-1} + \sum_{\nu=2}^{n} \binom{n}{\nu} h^{\nu-1}\, z_0^{n-\nu} \\ &\to n\, z_0^{n-1} \quad (h \to 0) \end{aligned}$$

(ii) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \overline{z}$. Es gilt:

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \frac{\overline{z_0 + h} - \overline{z_0}}{h} = \frac{\overline{h}}{h} = \begin{cases} 1 & \text{falls } h \in \mathbb{R} \\ -1 & \text{falls } h = i\,k, k \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Daher ist f in keinem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ komplex diffbar.

Lemma 1: Sei $D \subset \mathbb{C}$ und $z_0 \in D$. Dann sind äquivalent:

(i) f ist in z_0 komlex diffbar und $f'(z_0) = A$.

(ii) Es gibt eine in z_0 stetige Funktion $\varphi : D \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = f(z_0) + \varphi(z)(z - z_0)$$

und $\varphi(z_0) = A$.

Beweis:

(i) $\Rightarrow$ (ii) Sei f in z_0 komplex diffbar und $A = f'(z_0)$. Man definiere:

$$\varphi(z) := \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} & z \in D, z \neq z_0 \\ A & z = z_0 \end{cases}$$

Dann gilt $\lim_{z \to z_0} \varphi(z) = A = \varphi(z_0)$ also ist φ in z_o stetig.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Es existiere φ mit den angegebenen Eigenschaften. Für $z \neq z_0$ gilt dann:

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \varphi(z) \to \varphi(z_0) = A \quad (z \to z_0)$$

also ist f in z_0 komplex diffbar und $A = f'(z_0)$.

□

Lemma 2: f in z_0 komplex diffbar $\Rightarrow$ f in z_0 stetig.

Beweis: Nach Lemma 1(ii) gilt $f(z) = f(z_0) + \varphi(z)(z - z_0)$ mit $\varphi : D \to \mathbb{C}$ in z_0 stetig. Daher:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0) + \lim_{z \to z_0} \varphi(z)(z - z_0) = f(z_0)$$

wegen $\lim_{z \to z_0} \varphi(z_0)$ und $\lim_{z \to z_0} = 0$. Also ist f in z_0 stetig. □

Satz 7: Seien $f, g : D \to \mathbb{C}$ ($D \subset \mathbb{C}$ offen) in z_0 komplex diffbar. Dann gilt:

(i) $f + g$ ist in z_0 komplex diffbar und

$$(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$$

(ii) $f \cdot g$ ist in z_0 komplex diffbar und

$$(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0) \cdot g(z_0) + f(z_0) \cdot g'(z_0)$$

(iii) Ist $g(z_0) \neq 0$, so ist auch $\frac{f}{g}$ (definiert für z nahe bei z_0) in z_0 komplex diffbar und

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)\, g(z_0) - f(z_0)\, g'(z_0)}{g^2(z_0)}$$

Beweis: genauso wie in Analysis I □

Beispiel 7: Ist $p(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu\, z^\nu$, so ist p auf $\mathbb{C}$ holomorph und $p'(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu\, a_\nu\, z^{\nu-1}$.

Satz 8: (Kettenregel) Seien $D, E \subset \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$, $g : E \to \mathbb{C}$ mit $f(D) \subset E$. Sei $z_0 \in D$. Sei f in z_0 diffbar und g in $w_0 := f(z_0)$ diffbar. Dann ist $g \circ f : D \to \mathbb{C}$ in z_0 diffbar und es gilt:

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))\, f'(z_0)$$

Beweis: Nach Lemma 1 kann man schreiben

$$f(z) - f(z_0) = \varphi(z)(z - z_0)$$

mit $\varphi : D \to \mathbb{C}$ in z_0 stetig, $\varphi(z_0) = f'(z_0)$ und

$$g(w) - g(w_0) = \psi(w)(w - w_0)$$

mit $\psi : E \to \mathbb{C}$ in w_0 stetig, $\psi(w_0) = g'(w_0)$. Mit $w = f(z)$ (und $w_0 = f(z_0)$) folgt also für $z \neq z_0$:

$$\begin{aligned} \frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{z - z_0} &= \psi(f(z))\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \\ &\to \psi(f(z_0))\, f'(z_0) \quad (z \to z_0) \\ &= g'(f(z_0))\, f'(z_0) \end{aligned}$$

Man beachte, dass die Komposition stetiger Abbildung wiederum stetig ist, siehe § 2, Lemma 3 (Seite 19). □

Erinnerung: Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ offen, $(x_0, y_0) \in D$ und $f : D \to \mathbb{R}$. Dann heißt f in (x_0, y_0) (total) diffbar, wenn es eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gibt, derart dass

$$\lim_{h,k\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - L(h, k)}{\|(h, k)\|} = 0$$

wobei $\|(h, k)\| = \sqrt{h^2 + k^2}$ die euklidische Norm bezeichnet. Die lineare Abbildung $L = df(x_0, y_0)$ ist dann eindeutig durch f und (x_0, y_0) bestimmt. Schreibt man

$$L(h, k) = A\,h + B\,k \quad \text{mit } A, B \in \mathbb{R}$$

so sind $A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $B = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ die partiellen Ableitungen von f in (x_0, y_0).
Ist $D \subset \mathbb{R}^2$ offen, $(x_0, y_0) \in D$ und $f : D \to \mathbb{R}^2$, und schreibt man $f = (u, v)$ mit $u : D \to \mathbb{R}$, $v : D \to \mathbb{R}$, so heißt f in (x_0, y_0) (total) diffbar genau dann, wenn u und v in (x_0, y_0) (total) diffbar sind.
Frage: Ist $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ und identifiziert man $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, so läßt sich f als Funktion $D(\subset \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^2$ auffassen. Welche Beziehungen existieren zwischen komplexer Differenzierbarkeit f und totaler reeller Differenzierbarkeit?

Satz 9: Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in D$ und $f : D \to \mathbb{C}$. Man schreibe $f(x, y) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ mit $z = x + i\,y$, $x, y \in \mathbb{R}$, $u(x, y), v(x, y) \in \mathbb{R}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) f ist in z_0 komlex diffbar.

(ii) f ist in (x_0, y_0) total reell-diffbar und es gelten die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) &= -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Beweis: Sei f in z_0 komplex diffbar und $A := f'(z_0)$. Dann gilt nach Definition (wir schreiben jetzt „t“ statt „h“):

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{t \to 0} \left| \frac{f(z_0 + t) - f(z_0)}{t} - A \right| \\ &= \lim_{t \to 0} \left| \frac{f(z_0 + t) - f(z_0) - A \cdot t}{t} \right| \end{aligned}$$

und dies ist äquivalent dazu, dass

$$0 = \lim_{t \to 0} \frac{f(z_0 + t) - f(z_0) - A \cdot t}{|t|}$$

Man schreibe $A = \alpha + i\,\beta$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ und $t = h + i\,k$ $(h, k \in \mathbb{R})$. Dann gilt:

$$A \cdot t = \alpha\,h - \beta\,k + i(\alpha\,k + \beta\,h) \tag{$*$}$$

Nach Aufspaltung in Real- und Imaginärteil ist $(*)$ äquivalent zu

$$\left.\begin{aligned} \lim_{h,k \to 0} \frac{u(x_0 + h, y_0 + k) - u(x_0, y_0) - (\alpha\,h - \beta\,k)}{\|(h, k)\|} &= 0 \\ \lim_{h,k \to 0} \frac{v(x_0 + h, y_0 + k) - v(x_0, y_0) - (\alpha\,k + \beta\,h)}{\|(h, k)\|} &= 0 \end{aligned}\right. \tag{$\dagger$}$$

Setzt man $L_1(h, k) = \alpha\,h - \beta\,k$ und $L_2(h, k) = \beta\,h + \alpha\,k$, so sind L_1 und L_2 lineare Abbildungen von $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, also bedeutet $(\dagger)$ genau, dass u und v in (x_0, y_0) total diffbar sind und dass

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) &= \quad\alpha = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) &= -\beta = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

□

Zusatz: Wir haben mitbewiesen, dass

$$f'(z_0) = A = \alpha + i\,\beta = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Satz 10: Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, d. h. $D \subset \mathbb{C}$ offen und D zusammenhängend. Sei $f : D \to \mathbb{C}$ auf D holomorph und $f'(z) = 0 \ \forall z \in D$. Dann ist f konstant auf D.

Beweis: Nach Satz 9 ist f auf D total diffbar, und es gelten die Cauchy-Riemannschen DGL:

$$u_x = v_y \qquad u_y = -v_x$$

wenn $f = u + i\,v$. Nach dem Zusatz ist $f' = u_x + i\,v_x$. Da nach Voraussetzung $f' = 0$ folgt $u_x = 0$, $v_x = 0$. Also folgt $u_x = 0$, $u_y = 0$ und $v_x = 0$, $v_y = 0$ wegen der DGL. Nach Satz aus Analysis II folgt, da $D \subset \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ Gebiet, dass u und v auf D konstant sind, also ist f auf D konstant. □

§ 4 Potenzreihen

Definition: Eine unendliche Reihe der Form

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu \quad (a_\nu \in \mathbb{C})$$

heißt Potenzreihe mit den Koeffizienten a_ν und um den Entwicklungspunkt z_0. Die Menge der $z \in \mathbb{C}$, für die die Reihe konvergiert heißt auch Konvergenzbereich der Reihe.

Frage: Wo konvergieren solche Reihen? Sind sie holomorph? Was ist die Ableitung?
Erinnerung: gleichmäßige Konvergenz:

Definition: Sei $A \subset \mathbb{C}$ und $f_n : A \to \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{N})$. Dann heißt die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf A gleichmäßig konvergent, wenn es eine Funktion $f : A \to \mathbb{C}$ gibt, so dass gilt: $\forall \varepsilon$ $\exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \quad \forall n \geq N \text{ und } \forall z \in A$$

Lemma 1: (Cauchy-Kriterium)

(i) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist auf A genau dann gleichmäßig konvergent, wenn gilt: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$$|f_m(z) - f_n(z)| < \varepsilon \quad \forall m, n \geq N \text{ und } \forall z \in A$$

(ii) Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf A gleichmäßig konvergent gegen $f : A \to \mathbb{C}$ und sind alle f_n auf A stetig, so ist auch f auf A stetig.

Beweis: wie in Analysis I □

Definition: Eine Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(z)$, $f_\nu : A \to \mathbb{C}$ heißt auf A gleichmäßig konvergent, wenn die Folge der Partialsummen $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf A gleichmäßig konvergiert.

Lemma 2: (Cauchy-Kriterium)

(i) $\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(z)$ ist auf A gleichmäßig konvergent.
$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit:

$$|f_n(z) + f_{n+1}(z) + \cdots + f_{n+p}(z)| < \varepsilon \quad \forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N}, \forall z \in A$$

(ii) Sei $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ eine Majorante von $\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(z)$ auf A, d. h. $a_\nu \in \mathbb{R}$, $a_\nu \geq 0$, $|f_\nu(z)| \leq a_\nu\ \forall z \in A$. Ist dann $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu < \infty$, so ist $\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(z)$ auf A gleichmäßig absolut konvergent, d. h., $\sum_{\nu=1}^{\infty} |f_\nu(z)|$ ist auf A gleichmäßig konvergent.
Nach (i) ist dann also auch $\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(z)$ auf A gleichmäßig konvergent.

Beweis: wie in Analysis I □

Beispiel 8: Sei $0 \leq q < 1$ fest. Ist $|z| \leq q$, so folgt $|z|^\nu \leq q^\nu$, also ist $\sum_{\nu=1}^{\infty} q^\nu < \infty$ eine konvergente Majorante von $\sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu$ auf $A := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq a\}$. Also (nach Lemma 2(ii)) folgt, dass $\sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu$ auf A gleichmäßig absolut konvergent ist.

Lemma 3: Ist die Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$ für $z = z_1$ konvergent und setzt man $r_1 := |z_1 - z_0|$, so konvergiert sie für alle $z \in U_{r_1}(z_0)$. Ferner gilt: Die Reihe konvergiert gleichmäßig absolut auf jedem abgeschlossenen Kreis $|z - z_0| \leq \rho < r_1$.

Beweis: Da $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$ konvergiert, bilden die Glieder dieser Reihe eine Nullfolge. Insbesondere folgt also, dass sie eine beschränkte Folge bilden. Also existiert $c > 0$, so dass

$$|a_\nu| r_1^\nu = |a_\nu (z_1 - z_0)^\nu| \leq c \qquad \forall \nu \in \mathbb{N}_0$$

d.h.

$$|a_\nu| \leq \frac{c}{r_1^\nu} \quad \forall \nu \in \mathbb{N}_0$$

(ohne Einschränkung $r_1 > 0$). Für $|z - z_0| \leq \rho < r_1$ folgt hieraus:

$$|a_\nu (z-z_0)^\nu| = |a_\nu|\, |z-z_0|^\nu \leq \frac{c}{r_1^\nu} \rho^\nu = c\, q^\nu$$

mit $q := \frac{\rho}{r_1}$. Wegen $\rho < r_1$ ist $q < 1$, da sowieso $q \geq 0$ ist also $\sum_{\nu=0}^{\infty} q^\nu$ konvergent, also eine konvergente Majorante für Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$ auf $|z - z_0| \leq \rho$. □

Satz 11: Zu jeder vorgegebenen Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$ existiert genau ein $r \in [0, \infty) \cup \{\infty\}$, Konvergenzradius genannt, mit folgenden Eingenschaften:

(i) In jedem abgeschlossenen Kreis $|z - z_0| \leq \rho < r$ ist die Reihe gleichmäßig absolut konvergent.

(ii) Für $|z - z_0| > r$ ist die Reihe divergent.

(iii) Es gilt: $r = \dfrac{1}{\limsup_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{|a_\nu|}}$ „Formel von Cauchy-Hadamar“

Bemerkung:

(i) Ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit $b_n \geq 0$. Ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt, so sei M die Menge der Häufungspunkte von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann ist $M \neq \emptyset$ und M ist nach oben beschränkt, und man setzt $\limsup_{n\to\infty} b_n := \sup M$. Ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht nach oben beschränkt, so definiert man $\limsup_{n\to\infty} b_n := \infty$. Ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, so gilt $\limsup_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.

(ii) Ist $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ (bzw. ∞), so ist $r = \infty$ (bzw. $r = 0$) zu setzen.

(iii) $r = \dfrac{1}{\limsup_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{|a_\nu|}}$ ist nicht immer zweckmäßig, um r auszurechnen.

Beweis: (i) und (ii) folgen unmittelbar aus Lemma 3 (insbesondere die Existenz von r).

(iii) Sei $r = \frac{1}{\limsup_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{|a_\nu|}}$

1. Fall: Sei $0 < r \leq \infty$. Man wähle ein r_0 mit $0 < r_0 < r$, d. h. $\limsup_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = \frac{1}{r} < \frac{1}{r_0}$. Daher existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt $\sqrt[\nu]{|a_\nu|} < \frac{1}{r_0}$, d. h. $|a_n| < \frac{1}{r_0^n}$. Hieraus folgt:

$$|a_n(z - z_0)^n| < \left(\frac{|z - z_0|}{r_0}\right)^n \quad \Rightarrow \quad \frac{|z - z_0|}{r} < 1$$

also konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ für $|z - z_0| < r_0$ (Vergleich mit der geometrischen Reihe). Da r_0 beliebig mit $0 < r_0 < r$ gewählt war, folgt die absolute Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ $\forall z$ mit $|z - z_0| < r$.

2. Fall: Sei $0 \leq r < \infty$. Sei $r_0 \in \mathbb{R}$ mit $r < r_0 (< \infty)$, d. h. $\frac{1}{r_0} < \frac{1}{r} = \limsup_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{|a_\nu|}$. Daher existiert eine Folge $n_1, n_2, \ldots$ natürlicher Zahlen, so dass

$$\frac{1}{r_0} < \left|a_{n_p}\right|^{\frac{1}{n_p}} \quad \forall p \in \mathbb{N}$$

also $\frac{1}{r_0^{n_p}} < |a_{n_p}|$. Für $|z - z_0| > r_0$ folgt daher

$$\left|a_{n_p}(z - z_0)^{n_p}\right| > 1 \qquad \forall p \in \mathbb{N}$$

Daher ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ nicht konvergent, denn die Glieder dieser Reihe können keine Nullfolge bilden. Da r_0 beliebig mit $r < r_0$, ist also $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$. Hieraus folgt die Behauptung.

□

Beispiel 9:

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n$ hat $r = 0$. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ hat Konvergenzradius $r = \infty$ (man benutze Quotientenkriterium).

(ii) Hat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_n)^n$ Konvergenzradius r, so hat auch die (gliedweise abgeleitete) Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n(z-z_0)^{n-1}$$

Konvergenzradius r.

Denn: Wegen $\sqrt[n]{n} \to 1$ $(n \to \infty)$ hat $\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n(z-z_0)^n$ Konvergenzradius r. Wegen

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n(z-z_0)^n = (z-z_0)\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n(z-z_0)^{n-1}$$

konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n(z-z_0)^{n-1}$ für ein $z \neq z_0$ genau dann, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n(z-z_0)^n$ für dieses z konvergiert. Dies zeigt die Behauptung.

Satz 12: Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_\nu(z-z_0)^\nu$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$. Sei

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_\nu(z-z_0)^\nu \qquad (z \in U_r(z_0))$$

Dann ist $f(z)$ auf $U_r(z_0)$ holomorph und es gilt:

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu\, a_\nu(z-z_0)^{\nu-1} \quad (z \in U_r(z_0))$$

Beweis: Ohne Einschränkung kann man $z_0 = 0$ annehmen (Translation). Für jedes $n \in \mathbb{N}$ kann man schreiben:

$$f(z) = s_n(z) + R_n(z)$$

wobei $s_n(z) := \sum_{n=0}^{n-1} a_\nu\, z^\nu$, $R_n(z) := \sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu\, z^\nu$. Sei $f_1(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \nu\, a_\nu\, z^{\nu-1}$ $(|z| < r)$, siehe Beispiel 9(ii). Offenbar gilt $f_1(z) = \lim_{n\to\infty} s_n'(z)$ $(|z| < r)$, denn Polynome werden gliedweise differenziert. Wir zeigen, dass $f(z)$ für $|z| < r$ komplex diffbar ist und $f'(z) = f_1(z)$ gilt. Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $|z_0| < r$. Wir zeigen Diffbarkeit in z_0. Man wähle $\rho \in \mathbb{R}$ mit $|z_0| < \rho < r$. Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \rho$, $z \neq z_0$. Man schreibe:

$$\begin{aligned}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f_1(z_0) &= \frac{s_n(z)+R_n(z)-s_n(z_0)-R_n(z_0)}{z-z_0} - f_1(z_0)\\ &= \frac{s_n(z)-s_n(z_0)}{z-z_0} - s_n'(z_0) + s_n'(z_0) - f_1(z_0) + \frac{R_n(z)-R_n(z_0)}{z-z_0}\end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{R_n(z) - R_n(z_0)}{z - z_0} &= \sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu \frac{z^\nu - z_0^\nu}{z - z_0} \\ &= \sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu \left(z^{\nu-1} + z^{\nu-2} z_0 + \cdots + z\, z_0^{\nu-2} + z_0^{\nu-1} \right) \\ \Rightarrow \quad \left| \frac{R_n(z) - R_n(z_0)}{z - z_0} \right| &\leq \sum_{\nu=n}^{\infty} |a_\nu|\, \nu\, \rho^{\nu-1} \end{aligned}$$

Wegen $\rho < r$ ist $\sum_{\nu=n}^{\infty} \nu\, |a_\nu|\, \rho^{\nu-1} < \frac{\varepsilon}{3}$ $\forall n \geq N$. Also gilt:

$$\left| \frac{R_n(z) - R_n(z_0)}{z - z_0} \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall n \geq N \text{ und } \forall z \text{ mit } |z| < \rho,\ z \neq z_0$$

Da $\lim_{n\to\infty} s_n'(z_0) = f_1(z_0)$, existiert zu dem vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein $N_1 \in \mathbb{N}$, so dass

$$|s_n'(z_0) - f_1(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall n \geq N_1$$

Sei jetzt $n > \max\{N, N_1\}$. Da $s_n(z)$ in z_0 (komplex) diffbar ist, existiert zu dem gegebenen $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass

$$\left| \frac{s_n(z) - s_n(z_0)}{z - z_0} - s_n'(z_0) \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall z \in \mathbb{C} \text{ mit } 0 < |z - z_0| < \delta$$

Wählt man $\delta > 0$ so klein, dass $|z - z_0| < \delta$ impliziert $|z| < \rho$ (genauer: $0 < \delta < \rho - |z_0|$), so folgt also insgesamt für $0 < |z - z_0| < \delta$:

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f_1(z_0) \right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Daher ist die Behauptung bewiesen. □

Bemerkung: Differenziert man $f(z)$ sukzessive, so erhält man durch vollständige Induktion:

$$f^{(k)}(z) = k!\, a_k + \frac{(k+1)!}{1!} a_{k+1}(z - z_0) + \frac{(k+2)!}{2!} a_{k+2}(z - z_0)^2 + \ldots$$

mit $k = 0, 1, 2, \ldots$, $|z - z_0| < r$. Setzt man speziell $z = z_0$, so folgt $f^{(k)}(z_0) = k!\, a_k$, d. h. $a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$ $(\forall k \geq 0)$. Also folgt:

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(z_0)}{\nu!} (z - z_0)^\nu \quad (|z - z_0| < r)$$

(„Formel von Taylor für Potenzreihen“).

§ 5 Die komplexe Exponentialfunktion und die trigonometrischen Funktionen

Definition: Für $z \in \mathbb{C}$ sei $\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Bemerkung: Oft schreibt man auch e^z statt $\exp(z)$. Man beachte, dass $\exp(z)$ eine „natürliche" Fortsetzung der reellen Exponentialfunktion $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ins Komplexe ist. Wir werden später sehen, dass dies die einzige mögliche Fortsetzung nach $\mathbb{C}$ ist.

Satz 13: Es gelten folgende Aussagen:

(i) Die Potenzreihe $\exp(z)$ hat Konvergenzradius $r = \infty$.

(ii) $\exp'(z) = \exp(z)$ $\forall z \in \mathbb{C}$

(iii) $e^{z+w} = e^z\, e^w$ $\forall z, w \in \mathbb{C}$ („Additionstheorem")

(iv) Ist $z = x + i\, y$ $(x, y \in \mathbb{R})$ so ist $e^z = e^x\, e^{i\,y}$, $|e^z| = e^x$, $|e^{i\,y}| = 1$.

Beweis:

(i) Sei $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ fest gewählt und $a_n = \frac{z^n}{n!}$. Dann gilt:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}}\right| = \frac{1}{n+1}|z| < \frac{1}{2}$$

für n groß. Daher konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ absolut. Daher ist $r = \infty$.

(ii) Nach § 4, Satz 12 (Seite 27) darf $\exp(z)$ gliedweise differenziert werden. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\frac{d}{dz}\frac{z^n}{n!} = \frac{n\, z^{n-1}}{n!} = \frac{z^{n-1}}{(n-1)!}$$

Also gilt $\exp'(z) = \exp(z)$.

(iii) Sei $c \in \mathbb{C}$ fest gewählt. Für $z \in \mathbb{C}$ sei $f(z) := e^z \cdot e^{c-z}$. Dann ist $f(z)$ auf $\mathbb{C}$ holomorph, und es gilt nach (ii) und elementare Rechenregeln für Ableitungen:

$$f'(z) = e^z \cdot e^{c-z} + (-1)\, e^z \cdot e^{c-z} = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Da $\mathbb{C}$ ein Gebiet ist, muß nach § 3, Satz 10 (Seite 24) gelten $f(z) = C$ konstant. Setzt man $z = 0$, so folgt $C = f(0) = e^c$. Daher folgt:

$$e^z\, e^{c-z} = e^c \qquad \forall z \in \mathbb{C}, \forall c \in \mathbb{C}$$

Setzt man $c = z + w$, so folgt also:

$$e^z\, e^w = e^{z+w} \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$$

(iv) Nach (iii) gilt $e^z = e^{x+i\,y} = e^x\,e^{i\,y}$. Also folgt:

$$|e^z| = |e^x\,e^{i\,y}| = |e^x|\cdot|e^{i\,y}| = e^x\cdot|e^{i\,y}|$$

Noch zu zeigen: $|e^{i\,y}| = 1$ $(y\in\mathbb{R})$. Für $z\in\mathbb{C}$ gilt:

$$\overline{e^z} = \overline{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\overline{z}^n}{n!} = e^{\overline{z}}$$

denn gilt $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, so gilt auch $\lim_{n\to\infty}\overline{s_n} = \overline{s}$. Ist speziell $z = i\,y$ mit $y\in\mathbb{R}$, so gilt also:

$$\overline{e^{i\,y}} = e^{\overline{i\,y}} = e^{-i\,y}$$

Daher:

$$|e^{i\,y}|^2 = e^{i\,y}\cdot e^{\overline{i\,y}} = e^{i\,y}\cdot e^{-i\,y} = e^{i\,y-i\,y} = e^0 = 1$$

□

Definition: Für $z\in\mathbb{C}$ definieren wir die komplexen trigonometrischen Funktionen Cosinus und Sinus durch:

$$\cos z := \frac{e^{i\,z}+e^{-i\,z}}{2} \qquad \sin z := \frac{e^{i\,z}-e^{-i\,z}}{2i}$$

Satz 14:

(i) Es gelten Reihenentwicklungen $(z\in\mathbb{C})$:

$$\cos z = 1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\dots \qquad \sin z = z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\dots$$

Insbesondere stimmen $\cos z$ bzw. $\sin z$ für z reell mit den üblichen aus der reellen Analysis bekannten Funktionen Cosinus bzw. Sinus überein.

(ii) Es gilt:

$$e^{i\,z} = \cos z + i\sin z \quad (\forall z\in\mathbb{C})$$

(„Eulersche Formel“). Insbesondere gilt: $e^{i\,y} = \cos y + i\sin y$ $(y\in\mathbb{R})$.

(iii)

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1$$
$$\sin' z = \cos z$$
$$\cos' z = -\sin z$$

Beweis:

(i)

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iz)^n}{n!}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\big(i^n + (-i)^n\big)$$

Für ungerades n ist $i^n + (-i)^n = i^n + (-1)^n i^n = 0$. Für n gerade ist $i^n + (-1)^n i^n = 2i^n = 2(i^2)^{n/2} = 2 \cdot (-1)^{n/2}$. Daher folgt:

$$\cos z = \sum_{\substack{n \geq 0 \\ n \text{ gerade}}} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{z^n}{n!}$$

wie behauptet. Entsprechend folgt die behauptete Formel für $\sin z$.

(ii)

$$\cos z + i \sin z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} + i\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = e^{iz}$$

(iii)

$$\begin{aligned} \cos^2 z + \sin^2 z &= \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}\big(e^{2iz} + 2 + e^{-2iz} - 1 \cdot (e^{2iz} - 2 + e^{-2iz})\big) \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin' z &= \frac{i\,e^{iz} + i\,e^{-iz}}{2i} \\ &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\ &= \cos z \end{aligned}$$

Entsprechend für $\cos' z$.

□

Bemerkung:

(i) Es gilt $e^{2\pi i} = 1$, denn nach (ii) mit $y = 2\pi$ ist $e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$. Daher gilt nach dem Additionstheorem $e^{z+2\pi i} = e^z$, d. h., e^z ist periodisch mit Periode $2\pi i$ ($e^z \neq 0$, denn $e^{-z} \cdot e^z = e^0 = 1$, insbesondere: $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$). Ähnlich gilt:

$$e^{\pi i} = -1, \qquad e^{\pi i/2} = i, \qquad e^{-\pi i/2} = -i, \qquad e^{\pi i/4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

(ii) $e^z = 1 \Leftrightarrow z = 2\pi i \cdot n$ mit $n \in \mathbb{Z}$

Beweis:

„$\Leftarrow$“ klar nach Eulerschen Formel

„$\Rightarrow$“ $e^z = 1 \Rightarrow e^x = |e^z| = 1 \Rightarrow x = 0$. Daher folgt aus $e^z = 1$, dass $e^{i\,y} = \cos y + i \sin y = 1 \Rightarrow y = 2\pi\, n$ mit $n \in \mathbb{Z}$. Daher folgt $z = x + i\,y = 2\pi\, i\, n$.

(i) Man kann auch die übrigen trigonometrischen Funktionen definieren, z. B.:

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \quad (z \in \mathbb{C}, \cos z \neq 0)$$

§ 6 Der komplexe Logarithmus

Definition: Sei $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$. Dann heißt jede Lösung der Gleichung „$e^z = w$“ ein Logarithmus von w. Man schreibt hierfür *ungenau* $z = \log w$.

Satz 15: Jedes $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$ hat unendlich viele Logarithmen. Diese werden gegeben duch:

$$\log w = \log |w| + i\,\Theta + 2\pi i\, n \quad (n \in \mathbb{Z})$$

wobei $w = |w|(\cos\Theta + i \sin\Theta)$ (Polarkoordinaten) und $\log w$ der gewöhnliche Logarithmus der positiven reellen Zahl $|w|$ ist. Hierfür sagt man auch *ungenau* (in Übereinstimmung mit früherer Notation): „Der Logarithmus von w wird gegeben durch $\log |w| + i \arg w$, wobei $\arg w$ „das“ Argument von w ist.

Beweis: Sei $n \in \mathbb{Z}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} e^{\log |w| + i\,\Theta + 2\pi\, i\, n} &\underset{\text{theorem}}{\overset{\text{Additions-}}{=}} e^{\log|w|}\, e^{i\,\Theta}\, e^{i 2\pi\, n} \\ &= |w|(\cos\Theta + i \sin\Theta)\cdot 1 \\ &= w \end{aligned}$$

Umgekehrt: Sei $e^z = w = |w|(\cos\Theta + i\sin\Theta)$. Nimmt man Absolutbeträge, so folgt $|e^z| = |w| = e^x$ (mit $z = x + i\,y$). Daher $x = \log|w|$. Es gilt somit

$$\begin{aligned} e^x\, e^{i\,y} &= e^z \\ &= |w|(\cos\Theta + i\sin\Theta) \\ &= e^x(\cos y + i \sin y) \\ \Leftrightarrow \qquad \cos y + i \sin y &= \cos\Theta + i \sin\Theta \\ \Rightarrow \qquad y &= \Theta + 2\pi\, n \end{aligned}$$

mit $n \in \mathbb{Z}$. Daher folgt $z = x + i\,y = \log|w| + i(\Theta + 2\pi\, n)$. □

Definition: Sei $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$. Dann setzt man

$$\operatorname{Log} w := \log |w| + i\ \operatorname{Arg} w$$

wobei $\operatorname{Arg} w$ Hauptwert des Argument $\arg w$ von w ist (d. h. $-\pi < \operatorname{Arg} w \leq +\pi$).

Satz 16:

(i) Sei $A := \{z = x + i\,y \in \mathbb{C} \mid -\pi < y \leq \pi\}$. Dann liefert die Einschränkung $\exp|_A$ der komplexen Exponentialfunktion auf A eine Bijektion von A auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Die Umkehrabbildung wird durch $w \mapsto \operatorname{Log} w$ gegeben.

(ii) Die Funktion $\operatorname{Log} w$ ist unstetig in allen Punkten der negativen reellen Achse.

Beweis:

(i) Es gelte $e^z = e^{z'}$ mit $z, z' \in A$. Dann folgt

$$\begin{array}{lrcll} & e^{z-z'} & = & 1 & \\ \Rightarrow & z - z' & = & 2\pi\,i\,n & (n \in \mathbb{Z}) \\ \Rightarrow & y - y' & = & 2\pi\,n & \\ \Rightarrow & n & = & 0 & \text{denn } -\pi < y, y' \leq \pi \\ \Rightarrow & z & = & z' & \end{array}$$

Daher ist $\exp|_A$ injektiv. Die Surjektivität (Polarkoordinaten!) klar. (In der Tat: ist $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$, so schreibe man $w = |w|(\cos y + i \sin y)$ mit $-\pi < y \leq \pi$. Man schreibe $|w| = e^x$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $\cos y + i \sin y = e^{i\,y}$. Dann gilt $w = e^x\, e^{i\,y} = e^z$ und $z = x + i\,y \in A$.)

Nach Definition wird die Umkehrabbildung durch $w \mapsto \operatorname{Log} w$ gegeben.

(ii) (vgl. § 2, Beispiel 5(ii) nach Lemma 3, Seite 19). Sei $y_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 < 0$. Sei $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\operatorname{Log}(y_0 + i\,t) = \log|y_0 + i\,t| + i\ \operatorname{Arg}(y_0 + i\,t)$$

Daher:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \operatorname{Log}(y_0 + i\,t) &= \log|y_0| + i \lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \operatorname{Arg}(y_0 + i\,t) \\ &= \log|y_0| + i\,\pi \\ \lim_{\substack{t \to 0 \\ t < 0}} \operatorname{Log}(y_0 + i\,t) &= \log|y_0| + i \lim_{\substack{t \to 0 \\ t < 0}} \operatorname{Arg}(y_0 + i\,t) \\ &= \log|y_0| - i\,\pi \end{aligned}$$

Daher kann $\operatorname{Log} w$ in $w = y_0$ nicht stetig sein.

□

Bemerkung: Unter exp wird das Komplement der Geraden $y = \pi$ in A genau auf die längs der negativen reellen Achse geschlitzte $\mathbb{C}$-Ebene abgebildet. (Denn $e^{x+i\,\pi} = e^x\,(-1) = -e^x$.) Sei $\mathbb{C}_- := \mathbb{C} \setminus \{u \in \mathbb{R} \mid u \leq 0\}$.

Satz 17: Die Funktion $\operatorname{Log} w$ ist auf $\mathbb{C}_-$ holomorph. Es gilt:

$$\operatorname{Log}' w = \frac{1}{w} \quad \forall w \in \mathbb{C}_-$$

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass $\operatorname{Log} w$ auf $\mathbb{C}_-$ stetig ist. Sei $w_0 \in \mathbb{C}_-$. Sei $\operatorname{Log} w_0 = z_0 = x_0 + i\,y_0$ $(x_0, y_0 \in \mathbb{R})$. Dann gilt $|y_0| < \pi$. Sei $\varepsilon > 0$. Sei $K := \{z = x + i\,y \mid |y| \leq \pi,\ |x - x_0| \leq \log 2,\ |z - z_0| \geq \varepsilon\}$. Dann ist K der Durchschnitt dreier abgeschlossener Mengen, also selbst abgeschlossen. Auch ist K beschränkt, also ist K kompakt. (Man wähle $\varepsilon > 0$ so klein, dass $K \neq \emptyset$.) Daher nimmt die stetige reellwertige Funktion $z \mapsto |e^z - e^{z_0}|$ auf K ihr Minimum an. Sei dieses ρ. Dann ist $\rho > 0$. Denn wäre $\rho = 0$, so gäbe es $z \in K$ mit $|e^z - e^{z_0}| = 0 \Rightarrow y - y_0 = 2\pi\,n \Rightarrow n = 0$ (wegen $|y| \leq \pi$) $\Rightarrow z - z_0 = 0$, d. h. $z = z_0$. Widerspruch zu $|z - z_0| \geq \varepsilon > 0$ wegen $z \in K$. Also ist $\rho > 0$. Sei $\delta := \min\{\rho,\ \frac{1}{2}e^{x_0}\} > 0$. Sei $w \in \mathbb{C}_-$ mit $|w - w_0| < \delta$.
Behauptung: $|\operatorname{Log} w - \operatorname{Log} w_0| < \varepsilon$. Also ist $\operatorname{Log} w$ in w_0 stetig.
Beweis: Sei $z = \log w$. Angenommen $|z - z_0| = |\operatorname{Log} w - \operatorname{Log} w_0| \geq \varepsilon$. Wir wollen zeigen, dass dann $z \in K$ folgt. Dies ist dann schon ein Widerspruch, denn dann ist $|w - w_0| = |e^z - e^{z_0}| \geq \rho \geq \delta$. Widerspruch, denn $|w - w_0| < \delta$ nach Voraussetzung. Um zu zeigen, dass $z \in K$ ist, genügt es zu zeigen, dass $|x - x_0| \leq \log 2$. (Die Bedingung $|y| \leq \pi$ ist automatisch erfüllt, denn $w \in \mathbb{C}_-$.) Wir müssen also zeigen, dass $x_0 - \log 2 \leq x \leq x_0 + \log 2$.
Angenommen $x > x_0 + \log 2$. Dann folgt:

$$\begin{array}{rclclcl}
\frac{1}{2}e^{x_0} & \geq & \delta & > & |w - w_0| & = & |e^z - e^{z_0}| \\
& \geq & \big||e^z| - |e^{z_0}|\big| & = & |e^x - e^{x_0}| & \geq & e^x - e^{x_0} \\
& > & e^{x_0 + \log 2} - e^{x_0} & = & 2e^{x_0} - e^{x_0} & = & e^{x_0}
\end{array}$$

Widerspruch! Angenommen $x < x_0 - \log 2$. Dann folgt:

$$\begin{array}{rclclcl}
\frac{1}{2}e^{x_0} & \geq & \delta & > & |w - w_0| & = & |e^z - e^{z_0}| \\
& = & |e^{z_0} - e^z| & \geq & \big||e^{z_0}| - |e^z|\big| & = & |e^{x_0} - e^x| \\
& \geq & e^{x_0} - e^x & > & e^{x_0} - e^{x_0 - \log 2} & = & e^{x_0} - \frac{1}{2}e^{x_0} \\
& = & \frac{1}{2}e^{x_0} & & & &
\end{array}$$

Also ist $\operatorname{Log} w$ stetig $\forall w \in \mathbb{C}_-$.
Wir zeigen jetzt, dass $\operatorname{Log} w$ in w_0 komplex diffbar ist und $\operatorname{Log}' w_0 = \frac{1}{w_0}$. Sei $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $w_n \in \mathbb{C}_-$, $w_n \neq w_0$ und $\lim_{n\to\infty} w_n = w_0$. Sei $z_n := \operatorname{Log} w_n$, $z_0 := \operatorname{Log} w_0$. Wegen der Stetigkeit von Log folgt dann also $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$. Daher folgt:

$$\frac{1}{w_0} = \frac{1}{e^{z_0}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{e^{z_n} - e^{z_0}}{z_n - z_0}}$$

(denn e^z ist in z_0 komplex diffbar mit Ableitung e^{z_0})

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{e^{z_n} - e^{z_0}}{z_n - z_0}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{z_n - z_0}{e^{z_n} - e^{z_0}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{Log} w_n - \operatorname{Log} w_0}{w_n - w_0}
\end{aligned}$$

$\square$

Definition: Die holomorphe Funktion $\mathrm{Log} : \mathbb{C}_- \to \mathbb{C}$ heißt Hauptzweig des (komplexen) Logarithmus.

3 Komplexe Integrationstheorie

§ 1 Komplexe Kurvenintegrale

Definition: Sei $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall mit $a \leq b$. Sei $\varphi : I \to \mathbb{C}$. Man schreibe $\varphi = \varphi_1 + i\,\varphi_2$ mit φ_1, φ_2 reellwertig. Dann heißt φ stetig bzw. diffbar bzw. stetig diffbar, falls die entsprechenden Aussagen für φ_1 und φ_2 gelten. Ist φ diffbar, so setzt man $\varphi' := \varphi_1' + i\,\varphi_2'$.

Erinnerung: Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ diffbar, so bedeutet dies in den Randpunkten a und b, dass die einseitigen Limites

$$f'(a) = \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}, \qquad f'(b) = \lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} \frac{f(x)-f(b)}{x-b}$$

existieren.

Lemma 1:

(i) Summen und Produkte diffbarer Funktionen sind wieder diffbar, und es gelten die üblichen Regeln.

(ii) Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ auf D holomorph. Sei $\psi : I \to \mathbb{C}$ eine diffbare Abbildung, derart dass $\psi(I) \subset D$. Dann ist auch $\varphi : I \to \mathbb{C}$, $\varphi(t) = f(\psi(t))$ diffbar und

$$\varphi'(t) = f'\big(\psi(t)\big) \cdot \psi'(t)$$

Beweis:

(i) klar!

(ii) Man schreibe $f = u + i\,v$, $\psi = \psi_1 + i\,\psi_2$ mit u, v und ψ_1, ψ_2 reellwertig. Dann gilt:

$$\varphi(t) = u\big(\psi_1(t), \psi_2(t)\big) + i\,v\big(\psi_1(t), \psi_2(t)\big)$$

Nach der Kettenregel aus Analysis II und Cauchy-Riemann-DGL (Kapitel 2, § 3, Satz 9, Seite 22) ist somit $\varphi(t)$ diffbar und nach der Kettenregel gilt:

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= \frac{\partial u}{\partial x}\big(\psi_1(t), \psi_2(t)\big) \cdot \psi_1'(t) + \frac{\partial u}{\partial y}\big(\psi_1(t), \psi_2(t)\big) \cdot \psi_2'(t) \\
&\quad + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\big(\psi_1(t), \psi_2(t)\big) \cdot \psi_1'(t) + \frac{\partial v}{\partial y}\big(\psi_1(t), \psi_2(t)\big) \cdot \psi_2'(t)\right) \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\big(\psi_1(t), \psi_2(t)\big) + i\frac{\partial v}{\partial x}\big(\psi_1(t), \psi_2(t)\big)\right)\big(\psi_1'(t) + i\,\psi_2'(t)\big)
\end{aligned}$$

nach Cauchy-Riemann-DGL: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

$$= f'\big(\psi(t)\big) \cdot \psi'(t)$$

Nach § 3, Satz 9(ii) gilt $f'(t) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$.

□

Definition: Sei $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ abgeschlossenes Intervall mit $a \leq b$ und $\varphi : I \to \mathbb{C}$ eine stetige Abbildung. Man schreibe $\varphi = \varphi_1 + i\,\varphi_2$ mit φ_1, φ_2 reellwertig. Dann definiert man:

$$\int_a^b \varphi(t)\,dt := \int_a^b \varphi_1(t)\,dt + i \int_a^b \varphi_2(t)\,dt$$

$$\int_a^b \varphi(t)\,dt := -\int_b^a \varphi(t)\,dt$$

Lemma 2:

(i)

$$\int_a^b \big(\varphi(t) + \psi(t)\big)\,dt = \int_a^b \varphi(t)\,dt + \int_a^b \psi(t)\,dt$$

$$\int_a^b c\,\varphi(t)\,dt = c \int_a^b \varphi(t)\,dt \quad (c \in \mathbb{C})$$

(ii) Ist $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig, so ist die Abbildung $t \mapsto \int_a^t \varphi(x)\,dx$ diffbar ($t \in [a,b]$), und es gilt:

$$\frac{d}{dt}\left(\int_a^t \varphi(x)\,dx\right) = \varphi(t)$$

(iii) Ist $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig diffbar, so gilt $\displaystyle\int_a^b \varphi'(t)\,dt = \varphi(b) - \varphi(a)$.

Beweis:

(i) klar bzw. nachrechnen!

(ii) und (iii) folgen sofort aus der Definition und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung! □

Lemma 3: Sei $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig. Dann ist

$$\left| \int\limits_a^b \varphi(t)\, dt \right| \leq \int\limits_a^b |\varphi(t)|\, dt$$

Beweis: Man verwendet einen Trick! Sei $J := \left| \int_a^b \varphi(t)\, dt \right|$. Dann ist $J \geq 0$. Ist $J = 0$, so ist nichts zu zeigen. Sei daher $J > 0$. Dann ist $\int_a^b \varphi(t)\, dt \neq 0$. Also kann man schreiben:

$$\int\limits_a^b \varphi(t)\, dt = J\, e^{i\,\Theta}$$

mit $\Theta \in \mathbb{R}$. Daher gilt:

$$\begin{aligned} J &= e^{-i\,\Theta} \int\limits_a^b \varphi(t)\, dt \\ &\overset{\text{Lemma 2(i)}}{=} \int\limits_a^b e^{-i\,\Theta}\, \varphi(t)\, dt \\ &\overset{\text{Definition}}{=} \int\limits_a^b \operatorname{Re}\left(e^{-i\,\Theta}\, \varphi(t)\right)\, dt + i \int\limits_a^b \operatorname{Im}\left(e^{-i\,\Theta}\, \varphi(t)\right)\, dt \end{aligned}$$

Da $J \in \mathbb{R}$, $\int_a^b \operatorname{Re}\left(e^{-i\,\Theta}\, \varphi(t)\right)\, dt$, $\int_a^b \operatorname{Im}\left(e^{-i\,\Theta}\, \varphi(t)\right)\, dt$ reell sind, folgt $\int_a^b \operatorname{Im}\left(e^{-i\,\Theta}\, \varphi(t)\right)\, dt$ $= 0$, daher:

$$\begin{aligned} J &= \int\limits_a^b \operatorname{Re}\left(e^{-i\,\Theta}\, \varphi(t)\right)\, dt \\ &\leq \int\limits_a^b \left|e^{-i\,\Theta}\, \varphi(t)\right|\, dt \end{aligned}$$

(nach Rechenregeln für reelle Integrale und wegen $\operatorname{Re} a \leq |a|\ \forall a \in \mathbb{C}$)

$$= \int\limits_a^b |\varphi(t)|\, dt$$

(wegen $|e^{i\,\Theta}| = 1$). $\square$

Sprechweise: Sei $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine stetige Abbildung. Läuft t von a nach b, so durchläuft dann $\varphi(t)$ eine (stetige) Kurve C von $\varphi(a)$ nach $\varphi(b)$.
Man sagt hierfür auch: Sei C die Kurve gegeben durch die Gleichung $\varphi(t)$ $(a \le t \le b)$. Man nennt $\varphi(a)$ den Anfangspunkt und $\varphi(b)$ den Endpunkt von C. Eine Kurve heißt geschlossen, falls $\varphi(a) = \varphi(b)$ ist.

Beispiel 10:

(i) Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ fest, $z_1 \neq z_2$. Dann wird die Verbindungsgerade von z_1 nach z_2 gegeben durch die Gleichung

$$\varphi(t) = (1-t)z_1 + t\,z_2 \quad (0 \le t \le 1)$$

(ii) Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ fest und $r > 0$ fest. Dann wird die genau einmal im Gegenuhrzeigersinn duchlaufene Kreislinie um z_0 vom Radius r gegeben durch

$$\varphi(t) = z_0 + r\,e^{2\pi\,i\,t} \quad (0 \le t \le 1)$$

Definition:

(i) Sei C eine Kurve gegeben durch die Gleichung $\varphi(t)$ $(a \le t \le b)$. Dann heißt C diffbar, falls φ diffbar ist. Mann nennt C glatt, falls φ stetig diffbar ist.

(ii) Man definiere $-C$ durch die Gleichung $\varphi(-t)$ $(-b \le t \le -a)$ (geometrisch bedeutet dies, dass man C in umgekehrter Richtung von $\varphi(b)$ nach $\varphi(a)$ durchläuft).

(iii) Seien $C_1, C_2, \ldots, C_n$ Kurven gegeben duch die Gleichungen $\varphi_j(t)$ mit $a_j \le t \le a_{j+1}$ für $j = 1, \ldots, n$, derart dass $\varphi_j(a_{j+1}) = \varphi_{j+1}(a_{j+1})$ $(j = 1, \ldots, n-1)$, d. h., Endpunkt von C_j ist gleich Anfangspunkt von C_{j+1}. Man nennt dann $C := C_1 + C_2 + \cdots + C_n$ die Kurve, die gegeben wird durch die Gleichung $\varphi(t)$ $(a_1 < t \le a_{n+1})$ mit $\varphi(t) := \varphi_j(t)$ $(a_j \le t \le a_{j+1})$.

Sind alle C_j $(j \le 1 \le n)$ glatt, so heißt C stückweise glatt .

Definition: Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ eine stetige Abbildung. Sei C eine glatte Kurve gegeben durch die Gleichung $\varphi(t)$ $(a \le t \le b)$. Es gelte $\varphi([a, b]) \subset D$. Dann definiert man das komplexe Kurvenintegral von f über C als

$$\int\limits_C f(z)\,dz := \int\limits_a^b f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,dt$$

Ist allgemeiner $C = C_1 + C_2 + ... + C_n$ (wie oben) stückweise glatt, so definiert man

$$\int\limits_C f(z)\,dz := \int\limits_{C_1} f(z)\,dz + \cdots + \int\limits_{C_n} f(z)\,dz$$

Lemma 4:

(i) Das komplexe Kurvenintegral ist invariant unter Parametertransformation von $[\alpha, \beta]$ nach $[a, b]$ mit $t(\alpha) = a$ und $t(\beta) = b$, so gilt:

$$\int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\, \varphi'(t)\, dt = \int_\alpha^\beta f\big(\psi(x)\big)\, \psi'(x)\, dx$$

wobei $\psi(x) := \varphi(t(x))$ $(\alpha \leq x \leq \beta)$. (Dies rechtfertigt die Schreibweise $\int_C f(z)\, dz$.)

(ii)

$$\int_{-C} f(z)\, dz = -\int_C f(z)\, dz$$

Beweis:

(i) Es gilt:

$$\int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\, \varphi'(t)\, dt = \int_{t(\alpha)}^{t(\beta)} f\big(\varphi(t)\big)\, \varphi'(t)\, dt$$

Substitutionsregel (Analysis I):

$$= \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t(x))\big)\, \varphi'\big(t(x)\big)\, t'(x)\, dx$$

$$= \int_\alpha^\beta f\big(\psi(x)\big)\, \psi'(x)\, dx$$

(ii) Sei zunächst C glatt, gegeben durch $\varphi(t)$ $(a \leq t \leq b)$. Dann wird $-C$ gegeben durch $\varphi(-t)$ $(-b \leq t \leq -a)$. Daher gilt:

$$\int_{-C} f(z)\, dz = \int_{-b}^{-a} f\big(\varphi(-t)\big)\big(-\varphi'(-t)\big)$$

mit $t \mapsto -t$:

$$= \int_b^a f\big(\varphi(t)\big)\, \varphi'(t)\, dt$$

$$= -\int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\, \varphi'(t)\, dt$$

$$= -\int_C f(z)\, dz$$

Sei jetzt $C = C_1 + \cdots + C_n$ stückweise glatt. Dann ist $-C = (-C_n) + \cdots + (-C_1)$. Also gilt (nach dem schon Bewiesenen):

$$\begin{aligned}\int_{-C} f(z)\,dz &= \int_{-C_n} f(z)\,dz + \cdots + \int_{-C_1} f(z)\,dz \\ &= -\int_{C_n} f(z)\,dz - \cdots - \int_{C_1} f(z)\,dz \\ &= -\int_{C} f(z)\,dz\end{aligned}$$

□

Motivation: In Analysis I definiert man $\int_a^b f(x)\,dx$ für stetige Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, wobei die Grundmotivation die Berechnung des Flächeninhalts ebener Figuren ist. Mögliche Verallgemeinerung:

(i) Man betrachte reellwertige Funktionen mehrer Variabler und definiere

$$\int_A f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1 \ldots dx_n$$

in geeigneter Weise (LEBESGUE-Integral, Analysis II und III).

Mögliche praktische Anwendung: Berechnung von Volumen in höheren Dimensionen.

(ii) ($n = 2$:) Statt Ausdrücke der Form „$f(x)\,dx$“ (reelle Differentialformen) betrachtet man „$f(z)\,dz$“ mit $z \in \mathbb{C}$ (komplexe Differentialformen). Solche Ausdrücke „wollen“ auch integriert werden, die folgende Definition ist suggestiv: sei C eine Kurve, dann

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,dz &= \int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\frac{d\varphi(t)}{dt}\,dt \\ &= \int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,dt\end{aligned}$$

wobei C durch $\varphi(t)$ ($a \le t \le b$) gegeben wird.

Dieser Integralbegriff ist zunächst einmal von ganz entscheidender theoretischer Bedeutung, denn mit seiner Hilfe kann man fast alle wichtigen Sätze über holomorphe Funktionen „leicht“ erhalten (z. B. jede holomorphe Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ ($D \subset \mathbb{C}$ offen) ist beliebig oft diffbar). Insbesondere kann man auch den „Residuenkalkül“ entwickeln, welcher wichtige praktische Implikationen besitzt (Stichwort: Berechnung von gewissen Typen von reellen Integralen, die i. a. mit reeller Analysis gar nicht oder nur schwer zu berechnen sind. Wichtig für Physik, Ingenieurmathematik,...).

Lemma 5: Das komplexe Integral ist „linear“, d. h.:

$$\int_C \big(f(z) + g(z)\big)\,dz = \int_C f(z)\,dz + \int_C g(z)\,dz$$

$$\int_C \lambda\, f(z)\,dz = \lambda \int_C f(z)\,dz \qquad (\lambda \in \mathbb{C})$$

Beweis: klar! □

Definition: Sei $C = C_1 + \cdots + C_n$ eine stückweise glatte Kurve, wobei C_j durch $\varphi_j(t)$ $(a_j \le t \le a_{j+1})$ gegeben ist. Dann heißt

$$l(C) := \sum_{j=1}^{n} \int_{a_j}^{a_{j+1}} |\varphi'(t)|\,dt$$

die *Bogenlänge* von C.

Motivation: Wird C einfach durchlaufen (d. h., $\varphi_j|_{(a_j,a_{j+1})}$ ist injektiv $\forall j$), so ist $l(C)$ die im anschaulichen Sinne gegebene Länge von C. Dies wurde ausführlich motiviert für den Fall, wo C der Graph einer stetig diffbaren Abbildung $t \mapsto y(t)$ $(a \le t \le b)$ ist (denn dann wird C gegeben durch $\varphi(t) = (t, y(t))$, also gilt:

$$|\varphi'(t)| = \sqrt{1 + y'^2(t)}$$

Approximation von C durch Polygonzüge und Verwendung Riemannscher Summen).

Beispiel 11:

(i) $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 + z_2$; dann wird die Verbindungsgerade von z_1 nach z_2 gegeben durch $\varphi(t) = (1-t)z_1 + t\,z_2$ $(0 \le t \le 1)$. Dann

$$l(C) = \int_0^1 |\varphi'(t)|\,dt = \int_0^1 |-z_1 + z_2|\,dt = |z_1 - z_2|$$

(ii) Sei C die k-fach (im positiven Sinn) durchlaufene Einheitskreislinie, wobei $k \in \mathbb{N}$. Dann wird C gegeben durch $\varphi(t) = e^{2\pi i t}$ $(0 \le t \le k)$ und

$$l(C) = \int_0^k |\varphi'(t)|\,dt = \int_0^k |2\pi\, i\, e^{2\pi i t}|\,dt = 2\pi \int_0^k dt = 2\pi\, k$$

Lemma 6: Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ stetig. Sei C eine stückweise glatte Kurve, die ganz in D enthalten ist. Es gelte $|f(z)| \leq M \ \forall z \in C$. Dann gilt:

$$\left| \int_C f(z)\, dz \right| \leq M\, l(C)$$

Beweis: Mit den üblichen Notationen gilt:

$$\begin{aligned}
\left| \int_C f(z)\, dz \right| &= \left| \sum_{\nu=1}^{n} \int_{C_\nu} f(z)\, dz \right| \\
&\leq \sum_{\nu=1}^{n} \left| \int_{C_\nu} f(z)\, dz \right| \\
&= \sum_{\nu=1}^{n} \left| \int_{a_\nu}^{a_{\nu+1}} f\big(\varphi_\nu(t)\big)\, \varphi_\nu'(t)\, dt \right| \\
&\leq \sum_{\nu=1}^{n} \int_{a_\nu}^{a_{\nu+1}} \left| f\big(\varphi_\nu(t)\big)\, \varphi_\nu'(t) \right| dt \\
&\leq M \sum_{\nu=1}^{n} \int_{a_\nu}^{a_{\nu+1}} |\varphi_\nu'(t)|\, dt \\
&= M \cdot l(C)
\end{aligned}$$

□

Frage: Wie kann man Kurvenintegrale berechnen?

Satz 18: Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ stetig. Wir setzten voraus, dass f auf D eine Stammfunktion hat, d. h., es gibt eine holomorphe Funktion $F : D \to \mathbb{C}$ mit $F'(z) = f(z) \ \forall z \in D$. Sei C eine stückweise glatte Kurve, die ganz in D enthalten ist, mit Anfangspunkt z_1 und Endpunkt z_2. Dann gilt:

$$\int_C f(z)\, dz = F(z_2) - F(z_1)$$

Beweis: Sei zunächst C glatt, gegeben durch $\varphi(t)$ $(a \leq t \leq b)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\int\limits_C f(z)\,dz &= \int\limits_a^b f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,dt \\
&= \int\limits_a^b F'\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,dt \\
&\underset{\text{wegen } F \text{ holomorph}}{\overset{\text{Lemma 1(ii),}}{=}} \int\limits_a^b \frac{d}{dt} F\big(\varphi(t)\big)\,dt \\
&\overset{\text{Lemma 2(iii)}}{=} F\big(\varphi(b)\big) - F\big(\varphi(a)\big) \\
&= F(z_2) - F(z_1)
\end{aligned}$$

Ist $C = C_1 + \cdots + C_n$ stückweise glatt, so gilt:

$$\begin{aligned}
\int\limits_C f(z)\,dz &= \sum_{\nu=1}^{n} \int\limits_{C_\nu} f(z)\,dz \\
&\underset{\text{schon Bewiesenen}}{\overset{\text{nach dem}}{=}} \sum_{\nu=1}^{n} \Big(F\big(\varphi_\nu(a_{\nu+1})\big) - F\big(\varphi_\nu(a_\nu)\big) \Big) \\
&\overset{\varphi_\nu(a_{\nu+1}) = \varphi_{\nu+1}(a_\nu)}{=} -F\big(\varphi_1(a_1)\big) + F\big(\varphi_n(a_{n+1})\big) \\
&= F(z_2) - F(z_1)
\end{aligned}$$

□

Korollar: Gleiche Voraussetzungen wie oben. Dann gilt:

$$\int\limits_C f(z)\,dz = 0$$

für alle *geschlossenen* stückweise glatten C.

Beweis: klar! □

Beispiel 12: Sei $r > 0$ fest und C die einfach im positiven Sinne durchlaufene Kreislinie mit Radius r. Sei $n \in \mathbb{Z}$. Dann gilt:

$$\int\limits_C z^n\,dz = \begin{cases} 0 & n \neq -1 \\ 2\pi\, i & n = -1 \end{cases}$$

denn: für $n \neq -1$ ist $\frac{z^{n+1}}{n+1}$ eine Stammfunktion von z^n auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Also gilt nach Korollar $\int_C z^n\,dz = 0$, denn C ist nach Definition geschlossen. Ferner

$$\int\limits_C \frac{dz}{z} = \int\limits_0^1 \frac{1}{r\,e^{2\pi\,i\,t}} \left(2\pi\,i\,r\,e^{2\pi\,i\,t}\right) dt = 2\pi\,i$$

mit $C : \varphi(t) = r\,e^{2\pi\,i\,t}$ $(0 \leq t \leq 1) \Rightarrow \frac{1}{z}$ hat auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ *keine* Stammfunktion.

Beachte: $\operatorname{Log} z$ ist Stammfunktion auf $\mathbb{C}_-$.

§ 2 Der Cauchysche Integralsatz

Ziel: Wir wollen zeigen, dass das komplexe Kurvenintegral einer holomorphen Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ ($D \subset \mathbb{C}$ offen) längs geschlossener *„Dreieckswege"* immer Null ist. Hieraus wird sich ergeben, dass jede holomorphe Funktion auf einem *„Sterngebiet"* dort immer eine Stammfunktion hat. Dies ist eine Schlüsselaussage der Funktionentheorie, aus der sich viele zentrale Sätze ableiten lassen.

Definition: Seien $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$. Dann bezeichnen wir die von z_1, z_2 und z_3 aufgespannte abgeschlossene Dreiecksfläche $\{z = t_1\,z_1 + t_2\,z_2 + t_3\,z_3 \mid t_1, t_2, t_3 \geq 0, t_1 + t_2 + t_3 = 1\}$ mit $\triangle_{z_1,z_2,z_3}$.

Bemerkung: Anschaulich sollte $\triangle_{z_1,z_2,z_3}$ aus genau den Punkten z bestehen, welche auf den Verbindungsgeraden von z_1 nach z^* liegen, wobei z^* alle Punkte auf der Verbindungsgeraden von z_2 und z_3 durchläuft. Dies ist in der Tat so. Denn jeder solche Punkt z hat die Gestalt

$$\begin{aligned} z &= t\,z_1 + (1-t)z^* && (0 \leq t \leq 1)\\ &= t\,z_1 + (1-t)\big(s\,z_2 + (1-s)z_3\big) && (0 \leq s \leq 1)\\ &= t\,z_1 + (1-t)s\,z_2 + (1-s)(1-t)z_3 \end{aligned}$$

Setze $t_1 := t$, $t_2 := (1-t)s$, $t_3 := (1-t)(1-s)$. Dann gilt $t_\nu \geq 0$ $(\nu = 1, 2, 3)$ und $t_1 + t_2 + t_3 = t + s - t\,s + 1 - s - t + t\,s = 1$. Also gilt $z \in \triangle_{z_1,z_2,z_3}$.
Umgekehrt genauso.

Definition: Wir bezeichnen mit C_{z_1,z_2,z_3} den Rand von $\triangle_{z_1,z_2,z_3}$ genau einmal durchlaufen, und zwar angefangen bei z_1 (dann weiter nach z_2, und über z_3 zurück nach z_1). Dann ist also C_{z_1,z_2,z_3} eine geschlossene, stückweise glatte Kurve, und es ist $C_{z_1,z_2,z_3} = C_1 + C_2 + C_3$, wobei

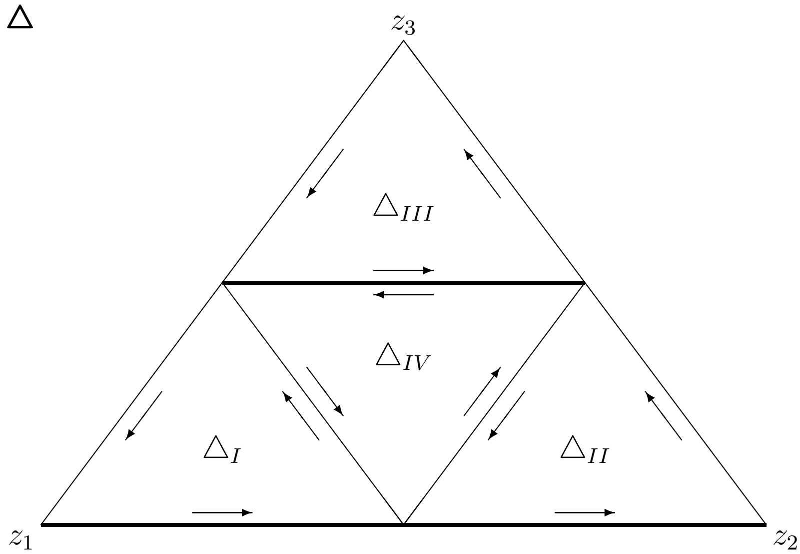
$$\begin{aligned} C_1 &:= z_1 + t(z_2 - z_1) && (0 \leq t \leq 1)\\ C_2 &:= z_2 + (t-1)(z_3 - z_2) && (1 \leq t \leq 2)\\ C_3 &:= z_3 + (t-2)(z_1 - z_3) && (2 \leq t \leq 3) \end{aligned}$$

Satz 19: (Cauchy, Goursat) Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Seien $z_1, z_2, z_3 \in D$, derart dass die abgeschlossene Dreiecksfläche $\triangle_{z_1,z_2,z_3} = \{z = t_1\, z_1 + t_2\, z_2 + t_3\, z_3 \mid t_\nu \geq 0, t_1 + t_2 + t_3 = 1\}$ ganz in D enthalten ist. Dann ist

$$\int\limits_{C_{z_1,z_2,z_3}} f(z)\, dz = 0$$

wobei C_{z_1,z_2,z_3} der genau einmal im positiven Sinne durchlaufene Rand von $\triangle_{z_1,z_2,z_3}$ ist.

Beweis: Wir schreiben $\triangle = \triangle_{z_1,z_2,z_3}$ und $C = C_{z_1,z_2,z_3}$. Wir können annehmen, dass $z_1 \neq z_2$ und z_3 nicht auf der Verbindugsgeraden von z_1 nach z_2 liegt, d. h., $\triangle$ ist ein „echtes“ Dreieck. Denn ist $z_1 = z_2$, so wird integriert von z_1 nach $z_2 = z_1$ dann von $z_1 = z_2$ nach z_3 und dann zurück von z_3 nach $z_1 = z_2$ (nach § 1, Lemma 4(i), Seite 40). Also ist das Integral Null. Ähnlich im anderen Fall.



Man verbinde die Mittelpunkte der Kanten von $\triangle$ durch Geraden. Man erhält dann vier abgeschlossene Dreiecksflächen $\triangle_I, \triangle_{II}, \triangle_{III}, \triangle_{IV} \subset \triangle$. Wir bezeichnen deren Ränder mit $C_I, \ldots, C_{IV}$ und zwar einfach durchlaufen im Gegenuhrzeigersinn. Dann gilt:

$$\int\limits_C f(z)\, dz = \int\limits_{C_I} f(z)\, dz + \int\limits_{C_{II}} f(z)\, dz + \int\limits_{C_{III}} f(z)\, dz + \int\limits_{C_{IV}} f(z)\, dz$$

denn die Summe der Integrale in entgegegesetzten Richtungen längs der Kanten von $\triangle_{IV}$ ist Null (§ 1, Lemma 4(ii), Seite 40). Daher gilt:

$$\left| \int\limits_C f(z)\, dz \right| \leq \left| \int\limits_{C_I} f(z)\, dz \right| + \cdots + \left| \int\limits_{C_{IV}} f(z)\, dz \right|$$

Eine der vier nicht-negativen reellen Zahlen rechts ist größer oder gleich jeder anderen. Wir wählen eine solche aus und bezeichnen die zugehörige Fläche mit $\triangle_1$ und deren Rand mit C_1. Dann gilt also:

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \leq 4\left|\int_{C_1} f(z)\,dz\right|$$

Man verfahre jetzt genauso mit $\triangle_1$ wie mit $\triangle$ oben. Dann erhält man also eine abgeschlossene Dreiecksfläche $\triangle_2 \subset \triangle_1$ mit Rand (positiv orientiert) C_2, derart dass

$$\left|\int_{C_1} f(z)\,dz\right| \leq 4\left|\int_{C_2} f(z)\,dz\right|$$

Also folgt:

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \leq 4^2\left|\int_{C_2} f(z)\,dz\right|$$

Fährt man induktiv fort, so erhält man also eine Folge von abgeschlossenen Dreiecksflächen $\triangle, \triangle_1, \triangle_2, \triangle_3, \dots$ mit Rändern $C, C_1, C_2, C_3, \dots$ (positiv orientiert), so dass $\triangle_{n+1} \subset \triangle_n (\subset \triangle)$ $\forall n \geq 1$ und

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \leq 4^n\left|\int_{C_n} f(z)\,dz\right|$$

Nach Konstruktion ist die Folge $(\triangle_n)_{n\in\mathbb{N}}$ geschachtelt. Nach dem Intervallschachtelungsprinzip (verallgemeinert auf $\mathbb{C}$) existiert daher ein Punkt z_0 mit $z_0 \in \triangle_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, und so dass gilt $\forall \delta > 0$ $\exists N = N(\delta) \in \mathbb{N}$ mit

$$\triangle_n \subset U_\delta(z_0) \quad \forall n \geq N$$

(siehe Analysis I und II oder Übungsaufgabe!) Wegen $z_0 \in \triangle \subset D$ ist f in z_0 komplex diffbar, also existiert eine in z_0 stetige Funktion $\varphi : D \to \mathbb{C}$, so dass

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z_0) + (z - z_0)\varphi(z) \\ \varphi(z_0) &= f'(z_0) \end{aligned}$$

(Kapitel 2, § 3, Lemma 1(ii), Seite 20). (Für $z \neq z_0$ gilt $\varphi(z) = \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ und f ist auf D holomorph, also auch stetig. Also ist φ auf $D \setminus \{z_0\}$ stetig.) Wir benutzen jetzt die Stetigkeit von φ in z_0. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert also ein $\delta > 0$, so dass:

$$|\varphi(z) - f'(z_0)| < \varepsilon \quad \text{für } |z - z_0| < \delta$$

Man wähle n so groß, dass $\triangle_n \subset U_\delta(z_0)$. Man schreibe

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + (\varphi(z) - f'(z_0))(z - z_0)$$

und integriere über C_n. Es folgt:

$$\int\limits_{C_n} f(z)\,dz = \int\limits_{C_n} f(z_0)\,dz + \int\limits_{C_n} f'(z_0)(z - z_0)\,dz + \int\limits_{C_n} \big(\varphi(z) - f'(z_0)(z - z_0)\big)\,dz$$

Die ersten beiden Terme sind Null, denn $\frac{d}{dz} z = 1$, $\frac{d}{dz}\frac{1}{2}(z - z_0)^2 = z - z_0$. Also haben 1 und $(z - z_0)$ Stammfunktionen auf $\mathbb{C}$, da C_n geschlossen sind die Integrale also Null nach Korollar zu § 1, Satz 18 (Seite 45). Daher

$$\int\limits_{C_n} f(z)\,dz = \int\limits_{C_n} \big(\varphi(z) - f'(z_0)\big)(z - z_0)\,dz$$

Es gilt $C_n \subset \triangle_n \subset U_\delta(z_0)$, also gilt für $z \in C_n$, dass $|\varphi(z) - f'(z_0)| < \varepsilon$. Für $z \in C_n$ gilt $|z - z_0| \leq l(C_n)$, denn $z_0 \in \triangle_n$ (elementare geometrische Überlegung). Daher folgt (§ 1, Lemma 6, Seite 44):

$$\left| \int\limits_{C_n} f(z)\,dz \right| \leq \varepsilon \cdot l(C_n) \cdot l(C_n) = \varepsilon\, l^2(C_n)$$

Es gilt nach Konstruktion:

$$l(C_{n+1}) = l(C_{n+1,1}) + l(C_{n+1,2}) + l(C_{n+1,3})$$

wobei $C_{n,\nu}$ = Kanten von C_n

$$= \frac{1}{2}\Big(l(C_{n,1}) + \cdots + l(C_{n,3}) \Big) = \frac{1}{2}\, l(C_n)$$

also folgt induktiv $l(C_n) = \frac{1}{2^n} l(C)$. Daher folgt

$$\left| \int\limits_{C_n} f(z)\,dz \right| \leq \varepsilon \frac{1}{4^n} l^2(C)$$

Es folgt somit:

$$\left| \int\limits_{C} f(z)\,dz \right| \leq 4^n\, \varepsilon \frac{1}{4^n} l^2(C) = \varepsilon\, l^2(C)$$

Dies gilt für jedes $\varepsilon > 0$, also folgt:

$$\int_C f(z)\,dz = 0$$

□

Definition: Eine offene Teilmenge $D \subset \mathbb{C}$ heißt *Sterngebiet*, falls folgendes gilt: es gibt einen Punkt $z_* \in D$, derart dass mit jedem $z \in D$ auch die Verbindungsgerade von z_* nach z ganz in D enthalten ist. Ein solcher (nicht notwendig eindeutig bestimmter) Punkt z_* heißt ein Sternmittelpunkt von D.

Beispiel 13:

(i) $\mathbb{C}$, offene Kreisscheiben sind Sterngebiete.

(ii) $\mathbb{C}_- = \mathbb{C} \setminus \{-x \mid x \geq 0\}$ (alle Punkte auf der positiven reellen Achse sind Sternmittelpunkte)

(iii) $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, $U_\delta(z_0) \setminus \{z_0\}$ sind *keine* Sterngebiete.

Bemerkung: Nach Definition sind Sterngebiete wegzusammenhängend, also auch zusammenhängend, also Gebiete im Sinne der bekannten Definition.

Satz 20: (CAUCHYscher Integralsatz für Sterngebiete) Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Sterngebiet. Sei $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt:

(i) f hat auf D eine Stammfunktion, d. h., es gibt $F : D \to \mathbb{C}$ holomorph mit $F' = f$.

(ii) Ist C eine stückweise glatte Kurve in D, so hängt das Integral $\int_C f(z)\,dz$ nur von Anfangs- und Endpunkt von C ab.

(iii) Ist C eine geschlossene, stückweise glatte Kurve in D, so ist $\int_C f(z)\,dz = 0$.

Beweis: (i) und (ii) folgen sofort aus § 1, Satz 18 und dem Korollar (Seite 44). Es genügt also, (iii) zu zeigen. Sei $z_0 \in D$ ein Sternmittelpunkt von D. Für $z \in D$ sei

$$F(z) := \int_{z_0}^{z} f(w)\,dw$$

wobei integriert wird über die Verbindungsgerade gegeben durch $(1-t)z_0 + t\,z$ $(0 \leq t \leq 1)$ von z_0 nach z (da D Sterngebiet, liegt diese ganz in D). Sei $z \in D$ im Folgenden fest gewählt.

Behauptung: Ist $h \in \mathbb{C}$, $|h|$ klein, so ist die von $z_0, z+h$ und z aufgespannte Dreiecksfläche $\triangle_{z_0,z+h,z}$ ganz in D enthalten.

Beweis: Da D offen, ist z innerer Punkt von D, also liegt für $|h|$ klein auch $z+h$ in D, also auch jeder Punkt auf der Verbindungsgerade von z nach $z+h$. Da D Sterngebiet, ist daher auch die Verbindungsgerade von z_0 und jedem Punkt auf obiger Verbindungsgerade in D enthalten. Dies zeigt die Behauptung.
Für $|h|$ klein ist somit nach Satz 19:

$$\int\limits_{C_{z_0,z+h,z}} f(w)\,dw = 0$$

d. h.

$$\int\limits_{z_0}^{z+h} f(w)\,dw + \int\limits_{z+h}^{z} f(w)\,dw + \int\limits_{z}^{z_0} f(w)\,dw = 0$$

(Integration über gerichtete Verbindungsgerade), d. h.

$$F(z+h) - F(z) = \int\limits_{z}^{z+h} f(w)\,dw$$

Für $h \neq 0$ gilt daher:

$$\begin{aligned}
\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z) &= \frac{1}{h}\int\limits_{z}^{z+h} f(w)\,dw - f(z) \\
&= \frac{1}{h}\int\limits_{z}^{z+h} f(w)\,dw - \frac{1}{h}f(z)\int\limits_{z}^{z+h} dw \\
&= \frac{1}{h}\int\limits_{z}^{z+h} \big(f(w)-f(z)\big)dw
\end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Da $f(w)$ in $w = z$ stetig ist, gibt es $\delta > 0$, so dass

$$|f(w) - f(z)| < \varepsilon \quad \text{für } |w-z| < \delta, w \in D$$

Man wähle $\delta > 0$ so klein, dass $|h| < \delta$ und $\triangle_{z_0,z+h,z} \subset D$. Für jeden Punkt $w = z + t\,h$ $(0 \leq t \leq 1)$ auf der Verbindungsgeraden von z nach $z+h$ gilt dann $|w - z| = |t \cdot h| \leq |h| < \delta$. Also folgt:

$$|f(w) - f(z)| < \varepsilon$$

Daher:

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| = \frac{1}{|h|}\int\limits_{z}^{z+h} \big(f(w)-f(z)\big)dw \leq \frac{1}{|h|} \cdot \varepsilon \cdot |h| = \varepsilon$$

Daher ist F in z komplex diffbar und $F'(z) = f(z)$. $\square$

Anwendung: Für $z \in \mathbb{C}_-$ sei $L(z) := \int_1^z \frac{dw}{w}$ wobei über irgendeine stückweise glatte Kurve von 1 nach z, die in $\mathbb{C}_-$ enthalten ist, integriert wird (man beachte, dass $\mathbb{C}_-$ Sterngebiet und $\frac{1}{w}$ auf $\mathbb{C}_-$ holomorph ist. Das Integral ist also nach Satz 20(ii) wohldefiniert). Nach § 1, Satz 18 (Seite 44) gilt wegen $\operatorname{Log}' w = \frac{1}{w}$

$$\mathrm{L}(z) = \operatorname{Log} z - \operatorname{Log} 1 = \operatorname{Log} z$$

Dies gibt eine neue Darstellung von $\operatorname{Log} z$, die die klassische Formel aus Analysis I verallgemeinert.

§ 3 Die Cauchysche Integralformel

Ziel: Wir wollen (unter Benutzung des Cauchyschen Integralsatzes, Seite 50) zeigen, dass (sehr salopp gesagt) „die Werte einer holomorphen Funktion auf dem Rand einer Kreisscheibe die Funktion im Inneren des Kreises bestimmen.“ Dies hat wichtige Konsequenzen, z. B. „holomorph auf offenen Menge $\Rightarrow$ beliebig oft komplex diffbar“ oder Fundamentalsatz der Algebra.

Satz 21: (Cauchysche Integralformel) Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Die abgeschlossene Kreisscheibe

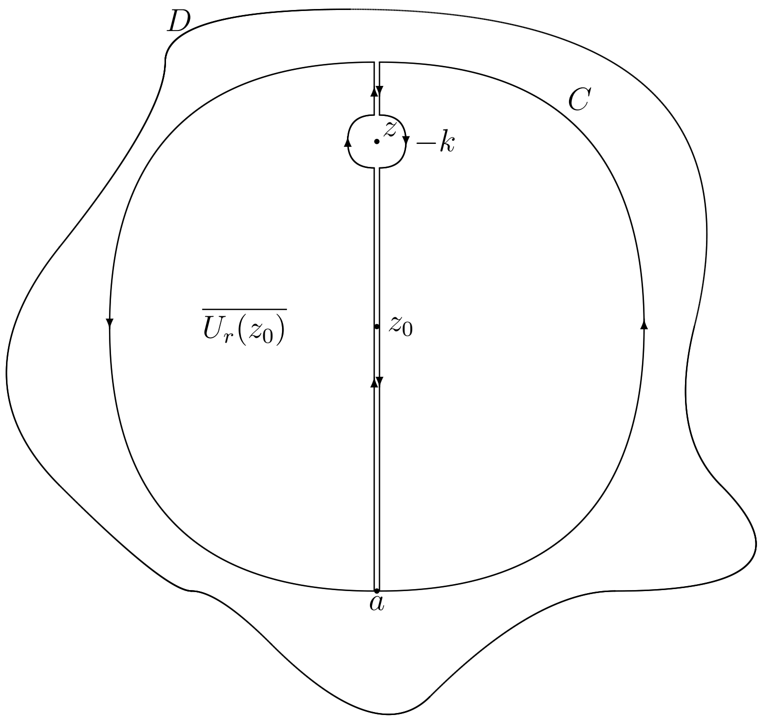
$$\overline{U_r(z_0)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r\}$$

sei ganz in D enthalten. Dann gilt für alle z in der offenen Kreisscheibe $U_r(z_0)$ die Darstellung

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(w)}{w - z}\, dw$$

wobei C durch die Gleichung $z_0 + r\, e^{2\pi i t}$ $(0 \leq t \leq 1)$ gegeben wird, (d. h., „C ist der Rand von $\overline{U_r(z_0)}$“, also die im mathematisch positiven Sinne einmal durchlaufene Kreislinie um z_0 vom Radius r).

Beweis: Sei im Folgenden $z \in U_r(z_0)$ fest gewählt. Sei die Notation wie im folgenden Bild angedeutet:



Es bezeichne also $-k$ den kleinen Kreis um z einfach durchlaufen im *mathematisch negativen* Sinn. Es bezeichne ferner C_1 die Kurve mit Anfangs- und Endpunkt a einfach durchlaufen, bestehend aus dem großen Halbkreis rechts, dann der kleinen Geraden, dann der rechten Hälfte des Halbkreises $-k$ um z und schließlich dem großen Geradenstück durch z_0. Entsprechend bezeichne C_2 die linke Kurve, die aus den entsprechenden Stücken links besteht.

Da C_1 und C_2 stückweise glatte geschlossene Kurven in einem Sterngebiet (man beachte $\overline{U_r(z_0)} \subset D$) sind, auf dem die Funktion $w \mapsto \frac{f(w)}{w-z}$ holomorph ist, gilt nach dem Cauchyschen Integralsatz für Sterngebiete (Seite 50):

$$\int_{C_\nu} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = 0 \quad (\nu = 1, 2)$$

(§ 2, Satz 20, Seite 50). Daher folgt:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{C_1} \frac{f(w)}{w-z}\,dw + \int_{C_2} \frac{f(w)}{w-z}\,dw \\ &= \int_{-k} \frac{f(w)}{w-z}\,dw + \int_{C} \frac{f(w)}{w-z}\,dw \end{aligned}$$

denn die Integrale längs der C_1 und C_2 gemeinsamen Geradenstücke mit entgegengesetzter Orientierung heben sich gegenseitig auf. Daher folgt:

$$\int_C \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \int_k \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

(man beachte, dass k im mathematisch positiven Sinne durchlaufen wird). Also gilt:

$$\int_C \frac{f(w)}{w-z}\,dw = f(z)\int_k \frac{dw}{w-z} + \int_k \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,dw$$

Der kleine Kreis k wird gegeben durch $z + \rho\, e^{2\pi i t}$ $(0 \leq t \leq 1)$, wobei $\rho > 0$ der Radius von k ist. Daher ist

$$\int_k \frac{dw}{w-z} = \int_0^1 \frac{1}{\rho\, e^{2\pi i t}}\, 2\pi i\, \rho\, e^{2\pi i t}\, dt = 2\pi\, i$$

Sei $\varepsilon > 0$. Da $f(w)$ in $w = z$ stetig, gibt es $\delta > 0$, so dass

$$|f(w) - f(z)| < \varepsilon \quad \text{für } |w-z| < \delta, w \in D$$

Man wähle $\rho > 0$ mit $\rho < \delta$. Für alle Punkte $w = z + \rho\, e^{2\pi i t}$ $(0 \leq t \leq 1)$ auf k gilt dann

$$|w - z| = \left|\rho\, e^{2\pi i t}\right| = \rho < \delta$$

also gilt $|f(w) - f(z)| < \varepsilon$. Es folgt daher:

$$\begin{aligned}
\left|\int_k \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,dw\right| &= \left|\int_0^1 \big(f(z+\rho\, e^{2\pi i t}) - f(z)\big)\, \frac{2\pi\, i\, \rho\, e^{2\pi i t}}{\rho\, e^{2\pi i t}}\, dt\right| \\
&= 2\pi \left|\int_0^1 \big(f(z+\rho\, e^{2\pi i t}) - f(z)\big)\, dt\right| \\
&\leq 2\pi\, \varepsilon
\end{aligned}$$

Dies gilt $\forall \varepsilon > 0$. Daher hat man:

$$\left|\int_C \frac{f(w)}{w-z}\,dw - 2\pi\, i\, f(z)\right| \leq 2\pi\, \varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow \qquad \int_C \frac{f(w)}{w-z}\,dw = 2\pi\, i\, f(z)$$

□

Satz 22: Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt:

(i) f ist auf D beliebig of komplex diffbar

(ii) Für die n-te Ableitung ($n \in \mathbb{N}_0$) von f gilt:
ist $\overline{U_r(z_0)} \subset D$, so hat man die Darstellung

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw \quad \forall z \in U_r(z_0)$$

(„Verallgemeinerte Cauchysche Integralformel") wobei C wie in Satz 21.

Beweis: Sei $z_0 \in D$ fest gewählt. Da D offen, ist z_0 innerer Punkt von D, also $\exists R > 0$, so dass $U_R(z_0) \subset D$. Für $0 < r < R$ ist dann $\overline{U_r(z_0)} \subset U_R(z_0) \subset D$, also gilt nach Satz $\forall z \in U_r(z_0)$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(w)}{w-z} dw \qquad (C \text{ wie im Satz})$$

Der Integrand als Funktion von z ist beliebig oft komplex diffbar, und es gilt:

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^n \frac{1}{w-z} = \frac{n!}{(w-z)^{n+1}}$$

Vertauscht man also (*zunächst formal*) Integration und Differentiation, so ergibt sich, dass f auf $U_r(z_0)$ (also auch auf ganz D) beliebig oft komplex diffbar ist, und es folgt (ii).
Zum Beweis des Satzes genügt es also zu zeigen, dass die formale Vertauschung wirklich zulässig ist. Dies kann z. B. mit Hilfe der „Leibnizschen Regel" im Komplexen geschehen, die ihrerseits hergeleitet werden kann aus der entsprechenden Regel im Reellen in Verbindung mit der Tatsache, dass „komplex diffbar $\Leftrightarrow$ total reell-diffbar und Cauchy-Riemann-DGL (Kapitel 2, § 3, Satz 9, Seite 22)" (siehe Buch von Freitag, Busam). Wir werden dies nicht so tun, sondern beweisen:

Lemma: Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $\varphi : D \to \mathbb{C}$ stetig. Sei C eine stückweise glatte Kurve in D. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$F_n(z) := \int\limits_C \frac{\varphi(w)}{(w-z)^n} dw \quad (z \in \mathbb{C} \setminus C)$$

Dann ist $F_n(z)$ auf $\mathbb{C} \setminus C$ holomorph und es gilt:

$$F_n'(z) = n\, F_{n+1}(z)$$

Beweis: Man beachte zunächst, dass $\mathbb{C} \setminus C = \mathbb{C} \cap C^C$ als Durchschnitt zweier offener Mengen offen ist (denn C ist kompakt). Sei $z_0 \in \mathbb{C} \setminus C$ fest gewählt. Da $\mathbb{C} \setminus C$ offen

$\exists r > 0$ mit $U_r(z_0) \subset \mathbb{C} \setminus C$. Sei im Folgenden $z \in \overline{U_{\frac{r}{2}}(z_0)} \subset U_r(z_0)$. Für $w \in C$ und $z \in \overline{U_{\frac{r}{2}}(z_0)}$ gilt dann:

$$\begin{aligned} |w-z| &= |(w-z_0)-(z-z_0)| \\ &\geq |w-z_0| - |z-z_0| \\ &\geq |w-z_0| - \frac{r}{2} \\ &\geq r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2} \end{aligned}$$

Es gilt:

$$F_n(z) - F_n(z_0) = \int\limits_C \varphi(w) \left(\frac{1}{(w-z)^n} - \frac{1}{(w-z_0)^n} \right) dw$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(w-z)^n} - \frac{1}{(w-z_0)^n} &= \frac{(w-z_0)^n - (w-z)^n}{(w-z)^n\,(w-z_0)^n} \\ &= \frac{1}{(w-z)^n\,(w-z_0)^n}\,(z-z_0) \sum_{\nu=0}^{n-1} (w-z_0)^{n-1-\nu}(w-z)^\nu \end{aligned}$$

(denn $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}\,b + \cdots + a\,b^{n-2} + b^{n-1})$). Daher gilt für $z \neq z_0$:

$$\begin{aligned} \frac{F_n(z)-F_n(z_0)}{z-z_0} - n\,F_{n+1}(z_0) &= \int\limits_C \frac{\varphi(w)}{(w-z)^n\,(w-z_0)^n} \sum_{\nu=0}^{n-1} (w-z_0)^{n-1-\nu}(w-z)^\nu\,dw \\ &\quad - n \int\limits_C \frac{\varphi(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw \\ &= \int\limits_C \frac{\varphi(w)}{(w-z_0)^n}\,h(w,z)\,dw \end{aligned}$$

wobei

$$h(w,z) := \frac{1}{(w-z)^n} \sum_{\nu=0}^{n-1} (w-z_0)^{n-1-\nu}\,(w-z)^\nu - \frac{n}{w-z_0}$$

($w \in C$, $z \in \overline{U_{\frac{r}{2}}(z_0)}$). Die Funktion $h(w,z)$ ist stetig. Da $C \times \overline{U_{\frac{r}{2}}(z_0)}$ kompakt ist somit $h(w,z)$ auf $C \times \overline{U_{\frac{r}{2}}(z_0)}$ sogar gleichmäßig stetig (Analysis II). Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert also $\delta > 0$, so dass

$$|h(w,z) - h(w',z')| < \varepsilon \quad \forall w, w' \in C,\ \forall z, z' \in \overline{U_{\frac{r}{2}}(z_0)} \tag{$*$}$$

mit $\|(w,z)-(w',z')\| < \delta$ ($\|.\|$: euklidische Norm auf $\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{C}^2$). Es gilt

$$\begin{aligned} h(w,z_0) &= \frac{1}{(w-z_0)^n} \sum_{\nu=0}^{n-1} (w-z_0)^{n-1-\nu}\,(w-z_0)^\nu - \frac{n}{w-z_0} \\ &= \frac{n\,(w-z_0)^{n-1}}{(w-z_0)^n} - \frac{n}{w-z_0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Daher gilt nach $(*)$:

$$|h(w,z)| < \varepsilon \quad \forall w \in C,\ \forall z \in U_\delta(z_0)$$

(ohne Einschränkung $\delta < \frac{r}{2}$). Sei $M := \max_{w\in C} |\varphi(w)|$. Wegen $|w-z_0| \geq \frac{r}{2}$ folgt somit insgesamt:

$$\begin{aligned} \left| \frac{F_n(z)-F_n(z_0)}{z-z_0} - n\,F_{n+1}(z_0) \right| &= \left| \int_C \frac{\varphi(w)}{(w-z_0)^n}\, h(w,z)\, dw \right| \\ &\leq M \left(\frac{2}{r}\right)^n \varepsilon\, l(C) \qquad\qquad \forall z \in U_\delta(z_0),\ z \neq z_0 \end{aligned}$$

Daher ist F_n in z_0 komplex diffbar und $F_n'(z_0) = n\,F_{n+1}(z_0)$. Das Lemma ist somit bewiesen. □

Wendet man das Lemma sukzessive ($n = 1,2,3,\ldots$) mit $\varphi(w) = f(w)$ an, so erhält man (ii) aus Satz 22. Damit ist Satz 22 vollständig bewiesen. □

§ 4 Direkte Folgerungen aus den Cauchyschen Integralformeln

Satz 23: (Cauchysche Ungleichungen) Sei $f : U_r(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph. Es gebe $M > 0$ mit $|f(z)| \leq M\ \forall z \in U_r(z_0)$. Dann gilt:

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \leq M\,\frac{n!}{r^n} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

Beweis: Man wende die verallgemeinerte Cauchysche Integralformel (Seite 54) an mit

$z = z_0$ und C gegeben durch $z_0 + \rho\, e^{2\pi\, i\, t}$ $(0 \leq t \leq 1)$, wobei $\rho < r$. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
|f^{(n)}(z_0)| &= \left| \frac{n!}{2\pi\, i} \int\limits_C \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}\, dw \right| \\
&= \frac{n!}{2\pi} \left| \int\limits_0^1 \frac{f(z_0 + \rho\, e^{2\pi\, i\, t})}{(\rho\, e^{2\pi\, i\, t})^{n+1}} \rho\, 2\pi i\, e^{2\pi\, i\, t}\, dt \right| \\
&\leq \frac{n!}{2\pi} \int\limits_0^1 \left| \frac{|f(z_0 + \rho\, e^{2\pi\, i\, t})|}{|(\rho\, e^{2\pi\, i\, t})^{n+1}|} \right| \left| \rho\, 2\pi\, i\, e^{2\pi\, i\, t} \right| dt \\
&\leq \frac{n!}{2\pi}\, M\, \frac{1}{\rho^n}\, 2\pi \\
&= M\, \frac{n!}{\rho^n}
\end{aligned}$$

Dies gilt für alle $\rho < r$. Für $\rho \to r$ folgt daher:

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq M\, \frac{n!}{r^n}$$

□

Definition: Eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph ist, heißt ganze Funktion.

Korollar 1: (Satz von Liouville) Eine beschränkte, ganze Funktion ist notwendigerweise konstant.

Beweis: Man wende Satz 23 mit $n = 1$ an. Dann folgt $\forall a \in \mathbb{C}$, $\forall r > 0$:

$$|f'(a)| \leq M \frac{1}{r}$$

wobei M eine Schranke für $|f|$ auf $\mathbb{C}$ ist. Für $r \to \infty$ folgt also:

$$|f'(a)| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f'(a) = 0 \quad \forall a \in \mathbb{C}$$

Also ist f' identisch Null, also ist f konstant, denn $\mathbb{C}$ ist ein Gebiet. □

Korollar 2: (Fundamentalsatz der Algebra) Sei $p(z)$ $(z \in \mathbb{C})$ ein nicht-konstantes Polynom mit komplexen Koeffizienten. Dann hat $p(z)$ eine komplexe Nullstelle.

Beweis: Sei $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ $(a_\nu \in \mathbb{C})$ mit $n \geq 1$, $a_n \neq 0$. Angenommen $p(z) \neq 0$ $\forall z \in \mathbb{C}$. Dann ist $\frac{1}{p(z)}$ $\forall z \in \mathbb{C}$ definiert und eine ganze Funktion. Für $z \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned}
p(z) &= z^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n} \right) \\
&= z^n (a_n + g(z))
\end{aligned}$$

mit $g(z) := \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}$ $(z \neq 0)$. Für $|z| \to \infty$ gilt $g(z) \to 0$. Daher folgt für $|z|$ groß:

$$\begin{aligned} |p(z)| &= |z|^n \, |a_n + g(z)| \\ &= |z|^n \, |a_n - (-g(z))| \\ &\geq |z|^n \, (|a_n| - |g(z)|) \\ &\geq |z|^n \, \frac{|a_n|}{2} \end{aligned}$$

denn $|g(z)| \leq \frac{|a_n|}{2}$ für $|z|$ groß wegen $a_n \neq 0$. Wegen $n \geq 1$ und $a_n \neq 0$ folgt somit, dass $|p(z)| \to \infty$ für $|z| \to \infty$. Dies bedeutet also: ist $M > 0$ vorgegeben, so gibt es $R > 0$, so dass

$$|p(z)| \geq M \qquad \forall z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| \geq R$$

d. h., es gilt:

$$\left| \frac{1}{p(z)} \right| \leq \frac{1}{M} \qquad \forall z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| \geq R$$

Da $\frac{1}{p(z)}$ stetig, ist $\left|\frac{1}{p(z)}\right|$ auf der kompakten Menge $|z| \leq R$ beschränkt. Es folgt also $\left|\frac{1}{p(z)}\right|$ ist auf ganz $\mathbb{C}$ beschränkt. Nach dem Satz von Liouville ist also $\frac{1}{p(z)}$ konstant, also ist $p(z)$ konstant. Widerspruch. Somit muß also $p(z)$ eine Nullstelle in $\mathbb{C}$ haben. □

Satz 24: (Taylorentwicklung) Sei $f : U_r(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt $\forall z \in U_r(z_0)$ die Taylordarstellung:

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(z_0)}{\nu!}(z - z_0)^{\nu}$$

Beweis: Für $|z| < r$ sei $h(z) := f(z_0 + z)$. Dann ist $h(z)$ für $|z| < r$ holomorph. Sei $\rho > 0$ mit $\rho < r$. Dann gilt nach der Cauchyschen Integralformel (Seite 52):

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{h(w)}{w - z} \, dw$$

wobei C durch $\rho \, e^{2\pi i t}$ $(0 \leq t \leq 1)$ gegeben ist, $\forall z$ mit $|z| < \rho$.
Idee: Man entwickle den „Cauchykern“ $\frac{1}{w-z}$ nach Potenzen von $\frac{z}{w}$. Für $\zeta \in \mathbb{C}$ gilt:

$$(1 - \zeta)\,(1 + \zeta + \cdots + \zeta^{n-1}) = 1 - \zeta^n$$

für $\zeta \neq 1$ folgt also:

$$\frac{1}{1 - \zeta} = 1 + \zeta + \cdots + \zeta^{n-1} + \frac{\zeta^n}{1 - \zeta}$$

Für $w \in \mathbb{C}$ und $|z| < \rho$ gilt daher mit $\zeta := \frac{z}{w}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{w-z} &= \frac{1}{w} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{w}} \\
&= \frac{1}{w}\left(1 + \frac{z}{w} + \dots + \left(\frac{z}{w}\right)^{n-1} + \frac{\left(\frac{z}{w}\right)^n}{1-\frac{z}{w}}\right) \\
&= \frac{1}{w} + \frac{z}{w^2} + \dots + \frac{z^{n-1}}{w^n} + \frac{z^n}{w^n} \cdot \frac{1}{w-z}
\end{aligned}$$

Für $|z| < \rho$ folgt daher:

$$h(z) = \sum_{\nu=0}^{n-1} z^\nu \left(\frac{1}{2\pi\, i} \int\limits_C \frac{h(w)}{w^{\nu+1}}\, dw\right) + z^n \frac{1}{2\pi\, i} \int\limits_C \frac{h(w)}{w^n(w-z)}\, dw$$

Nach der verallgemeinerten Cauchyschen Integralformel (Seite 54) ist

$$\frac{1}{2\pi\, i} \int\limits_C \frac{h(w)}{w^{\nu+1}}\, dw = \frac{h^{(\nu)}(0)}{\nu!}$$

somit gilt:

$$h(z) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{h^{(\nu)}(0)}{\nu!}\, z^\nu + \underbrace{z^n \frac{1}{2\pi\, i} \int\limits_C \frac{h(w)}{w^n(w-z)}\, dw}_{\text{noch zu zeigen: } \to 0 \ (n \to \infty)}$$

Sei $\rho_1 < \rho$. Sei $|z| \leq \rho_1$. Für $w \in C$ gilt dann:

$$|w-z| \geq |w| - |z| = \rho - |z| \geq \rho - \rho_1 > 0$$

Sei $M := \max_{w \in \mathbb{C}} |h(w)|$ (beachte: h stetig, C kompakt). Für $|z| \leq \rho_1$ folgt dann:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{z^n}{2\pi\, i} \int\limits_C \frac{h(w)}{w^n(w-z)}\, dw\right| &\leq \frac{\rho_1^n}{2\pi}\, \frac{M}{\rho^n(\rho-\rho_1)}\, \underbrace{l(C)}_{=\rho\, 2\pi} \\
&= \left(\frac{\rho_1}{\rho}\right)^n \frac{M\,\rho}{\rho-\rho_1} \\
&\to 0 \quad (n \to \infty)
\end{aligned}$$

denn $\left(\frac{\rho_1}{\rho}\right) < 1$. Also folgt für $|z| \leq \rho_1$:

$$h(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{h^{(\nu)}(0)}{\nu!}\, z^\nu$$

oder wegen $f(z) = h(z - z_0)$, $|z - z_0| \leq \rho_1$:

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(z_0)}{\nu!} (z - z_0)^\nu$$

Da ρ, ρ_1 beliebig mit $\rho_1 < \rho < r$ ist Satz 24 gezeigt. □

Korollar: Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent:

(i) f ist auf D holomorph

(ii) f ist auf D analytisch, d. h., f ist um jeden Punkt $z_0 \in D$ in eine Potenzreihe entwickelbar, d. h., zu jedem $z_0 \in D$ gibt es eine offene ε-Umgebung $U_\varepsilon(z_0) \subset D$ und eine Potenzreihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu$$

mit Entwicklungspunkt z_0, die auf $U_\varepsilon(z_0)$ konvergiert und so dass gilt:

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu$$

Beweis:

(i) $\Rightarrow$ (ii) Sei $z_0 \in D$, dann $\exists \varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(z_0) \subset D$. Da f auf D holomorph ist f auf $U_\varepsilon(z_0)$ holomorph. Behauptung folgt also aus Satz 24.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Es gelte Voraussetzung von (ii). Da Potenzreihen auf dem Konvergenzbereich holomorph sind (Kapitel 2, § 4, Satz 12, Seite 27), ist f auf $U_\varepsilon(z_0)$ holomorph. Da z_0 beliebig ist f auf D holomorph.

□

Bemerkung:

(i) Die Koeffizienten a_ν in (ii) sind notwendigerweise gleich $\frac{f^{(\nu)}(z_0)}{\nu!}$ (Bemerkung nach Kapitel 2, § 4, Satz 12, Seite 28).

(ii) Das Analogon des Korollars im Reellen ist i. a. falsch, d. h., ist $I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ beliebig oft diffbar, so braucht f nicht reell analytisch zu sein, d. h., braucht nicht um jeden Punkt $x_0 \in I$ in einer Potenzreihe entwickelbar sein.

Beispiel 14: $I = (-1, 1)$, $f : I \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

In Analysis I zeigt man: f ist beliebig oft diffbar auf I und $f^{(\nu)}(0) = 0\ \forall \nu \in \mathbb{N}_0$. Die Taylorreihe von f gebildet an der Stelle $x_0 = 0$ ist also identisch Null, die Funktion selbst ist aber nur für $x_0 = 0$ gleich Null. Daher ist f in $x_0 = 0$ nicht in einer Potenzreihe entwickelbar.

(iii) Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $r > 0$ eine positive reelle Zahl mit $U_r(z_0) \subset D$. Dann konvergiert nach Satz 24 die Taylorreihe von f in z_0 auf $U_r(z_0)$. Es kann passieren, dass die Taylorreihe tatsächlich auf einem sehr viel größeren Bereich konvergiert, ohne dass sie dort notwendigerweise die Funktion f darstellt.

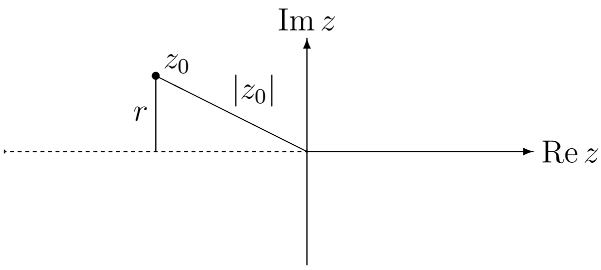
Beispiel 15: Sei $\mathrm{Log}(z)$ ($z \in \mathbb{C}_- =$ längs der negativen reellen Achse geschlitzte Ebene) der Hauptwert des Logarithmus. Sei $z_0 \in \mathbb{C}_-$. Wegen $\mathrm{Log}'(z) = \frac{1}{z}$, $\frac{d}{dz}\frac{1}{z} = -\frac{1}{z^2}, \ldots$ sieht man:

$$\mathrm{Log}(z) = \mathrm{Log}(z_0) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{z_0^{\nu}\,\nu}(z-z_0)^{\nu}$$

($z \in U_r(z_0) \subset \mathbb{C}_-$). Taylorreihe von $\mathrm{Log}(z)$ an der Stelle $z = z_0$. Nach der Formel von Cauchy-Hadamar (Seite 25) hat die Potenzreihe rechts den Konvergenzradius

$$R = \frac{1}{\limsup_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{|a_\nu|}} = \frac{1}{\limsup_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{\left|\frac{(-1)^{\nu-1}}{z_0^{\nu}\,\nu}\right|}} = |z_0|$$

Ist also $\mathrm{Re}\, z_0 < 0$, so ist der Abstand von z_0 zum Rand echt kleiner als $|z_0|$.



Satz 25: (Weierstrass) Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$, die punktweise gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ konvergiert. Die Konvergenz sei gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von D, und alle f_n seien auf D holomorph. Dann ist f auf D holomorph, die Folge $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen f' und die Konvergenz ist gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von D.

Beweis: Sei $z_0 \in D$ fest, $r > 0$ mit $\overline{U_r(z_0)} \subset D$. Da $\overline{U_r(z_0)}$ kompakt und f_n stetig und nach Voraussetzung daher $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\overline{U_r(z_0)}$ gleichmäßig gegen f konvergiert, ist f auf $\overline{U_r(z_0)}$ stetig, also auf D stetig (siehe Analysis I, II). Nach der CAUCHYschen Integralformel (Seite 52) gilt:

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi\, i} \int\limits_C \frac{f_n(w)}{w-z}\, dw \quad (z \in U_r(z_0))$$

wobei C durch $z_0 + r\, e^{2\pi\, i\, t}$ $(0 \leq t \leq 1)$ gegeben ist. Sei $z \in \overline{U_{\frac{r}{2}}(z_0)}$. Dann gilt für $w \in C$:

$$\begin{array}{rcccccc} |w-z| & = & |(w-z_0)-(z-z_0)| & \geq & |w-z_0| - |z-z_0| & & \\ & = & r - |z-z_0| & \geq & r - \frac{r}{2} & = & \frac{r}{2} \end{array}$$

C ist kompakt. Nach Voraussetzung konvergiert also $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f, d. h., $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$, so dass

$$|f_n(w) - f(w)| < \varepsilon \quad \forall n > N\ \forall w \in C$$

Für $z \in U_{\frac{r}{2}}(z_0)$ folgt mit $w \in C$:

$$\left| \frac{f_n(w)}{w-z} - \frac{f(w)}{w-z} \right| = \frac{1}{|w-z|}\, |f_n(w) - f(w)| \leq \frac{2}{r}\, \varepsilon$$

d. h., dass $\left(\frac{f_n(w)}{w-z}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ auf C gleichmäßig gegen $\frac{f(w)}{w-z}$ konvergiert. Für $z \in U_{\frac{r}{2}}(z_0)$ folgt somit:

$$\begin{aligned} f(z) &= \lim_{n\to\infty} f_n(z) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi\, i} \int\limits_C \frac{f_n(w)}{w-z}\, dw \\ &= \frac{1}{2\pi\, i} \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 \frac{f_n(z_0 + r\, e^{2\pi\, i\, t})}{z_0 + r\, e^{2\pi\, i\, t} - z}\, r\, 2\pi\, i\, e^{2\pi\, i\, t}\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi\, i} \int\limits_0^1 \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(z_0 + r\, e^{2\pi\, i\, t})}{z_0 + r\, e^{2\pi\, i\, t} - z}\, r\, 2\pi\, i\, e^{2\pi\, it}\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi\, i} \int\limits_C \frac{f(w)}{w-z}\, dw \end{aligned}$$

$(\forall z \in U_{\frac{r}{2}}(z_0))$. Mit § 3, Lemma (Seite 55) folgt, dass $f(z)$ auf $U_{\frac{r}{2}}(z_0)$ holomorph ist. Da $z_0 \in D$ ist also f auf D holomorph. Rest der Behauptung siehe Übungsaufgabe (CAUCHYsche Integralformel, Seite 52). □

Anhang: Elementargebiete

Definition: Ein Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ heißt *Elementargebiet*, falls jede holomorphe Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ auf D eine Stammfunktion hat.

Beispiel 16:

(i) Sterngebiete sind Elementargebiete (§ 2, Satz 20, Seite 50).

(ii) $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist kein Elementargebiet, denn $\frac{1}{z}$ hat auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ keine Stammfunktion (siehe Beispiel 12 nach Korollar zu § 1, Satz 18, Seite 45).

Satz 26: Seien D_1 und D_2 zwei Elementargebiete. Es sei $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$ und $D_1 \cap D_2$ zusammenhängend. Dann ist auch $D_1 \cup D_2$ ein Elementargebiet.

Beweis: $D_1 \cup D_2$ offen: klar!
$D_1 \cup D_2$ ist zusammenhängend, denn D_1 und D_2 sind zusammenhängend und $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$ (Übungsaufgabe, Analysis II). Es folgt: $D_1 \cup D_2$ ist Gebiet. Sei $f : D_1 \cup D_2 \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist $f|_{D_1}$ und $f|_{D_2}$ holomorph. Da D_1 und D_2 Elementargebiete sind, gibt es holomorphe Funktionen $F_1 : D_1 \to \mathbb{C}$ und $F_2 : D_2 \to \mathbb{C}$ mit $F_1'(z) = f(z)$ $\forall z \in D_1$ und $F_2'(z) = f(z)$ $\forall z \in D_2$. Es gilt:

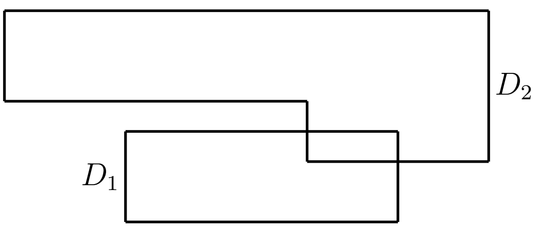
$$(F_1 - F_2)'(z) = F_1'(z) - F_2'(z) = f(z) - f(z) = 0$$

Da $D_1 \cap D_2$ zusammenhängend, folgt also $F_1 = F_2 + c$ auf $D_1 \cap D_2$ mit $c \in \mathbb{C}$. Mit F_2 ist auch $F_2 + c$ Stammfunktion von f auf D_2. Man kann daher ohne Einschränkung F_2 durch $F_2 + c$ ersetzen, also annehmen, dass $F_1 = F_2$ auf $D_1 \cap D_2$. Man definiere jetzt:

$$F : D_1 \cup D_2 \to \mathbb{C}, \quad F(z) := \begin{cases} F_1(z) & z \in D_1 \\ F_2(z) & z \in D_2 \end{cases}$$

Dann ist F wohldefiniert, holomorph auf $D_1 \cup D_2$ und $F' = f$ auf $D_1 \cup D_2$. Also ist $D_1 \cup D_2$ Elementargebiet. □

Man kann den Satz benutzen, um zu zeigen, dass nicht jedes Elementargebiet auch Sterngebiet ist:



D_1, D_2 Sterngebiete, $D_1 \cup D_2$ Elementargebiet nach Satz aber offenbar kein Sterngebiet.

Folgerung: Es existieren Elementargebiete, die keine Sterngebiete sind.
Bemerkung: Man kann eine geometrische Charakterisierung von Elementargebieten geben (nicht leicht!). Diese sind genau die *einfach zusammenhängenden Gebiete*, d. h. anschaulich Gebiete „ohne Löcher“ oder mathematisch, dass sich jede geschlossene Kurve in D stetig auf einen Punkt zusammenziehen läßt (man sagt: ist nullhomotop).

§ 5 Lokale Abbildungseigenschaften holomorpher Funktionen

Lemma 1: (Identitätssatz für Potenzreihen) Seien $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$ und $\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu (z-z_0)^\nu$ zwei Potenzreihen mit Entwicklungspunkt z_0, die in $U_r(z_0)$ $(r>0)$ konvergieren. Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $z_n \in U_r(z_0)$, $z_n \neq z_0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ und

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z_n-z_0)^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu (z_n-z_0)^\nu$$

$\forall n \in \mathbb{N}$. Dann ist $a_\nu = b_\nu$ $\forall \nu \in \mathbb{N}_0$.

Beweis: Angenommen es $\exists \nu \in \mathbb{N}_0$ mit $a_\nu \neq b_\nu$. Sei m die kleinste nicht-negative Zahl ν mit dieser Eigenschaft. Dann gilt also:

$$\sum_{\nu=m}^{\infty} a_\nu (z_n-z_0)^\nu = \sum_{\nu=m}^{\infty} b_\nu (z_n-z_0)^\nu \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Nach Division durch $(z_n-z_0)^m \neq 0$ folgt:

$$\begin{aligned} a_m + a_{m+1}(z_n-z_0) + \ldots &= \sum_{\nu=m}^{\infty} a_\nu (z_n-z_0)^{\nu-m} \\ &= \sum_{\nu=m}^{\infty} b_\nu (z_n-z_0)^{\nu-m} \\ &= b_m + b_{m+1}(z-z_0) + \ldots \end{aligned}$$

Wegen $\lim z_n = z_0$ $\exists K \subset U_r(z_0)$ kompakt mit $z_n \in K$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Da Potenzreihen auf kompakten Mengen gleichmäßig konvergieren und bei gleichmäßig kompakten Reihen Grenzübergänge und Summation vertauscht werden dürfen, folgt mit $z_n \to z_0$ $(n \to \infty)$ und wegen $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$, dass $a_m = b_m$. Widerspruch. Also gilt $a_\nu = b_\nu$ $\forall \nu \in \mathbb{N}_0$. □

Satz 27: (Identitätssatz für holomorphe Funktionen) Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Seien $f, g : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Es gebe $z_0 \in D$ und eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $z_n \in D$ $z_n \neq z_0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim z_n = z_0$ und $f(z_n) = g(z_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Dann ist $f(z) = g(z)$ $\forall z \in D$.

Beweis: Sei $F(z) := f(z) - g(z)$ $(z \in D)$. Dann ist $F(z_n) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Sei $A := \{z \in D \mid F^{(\nu)}(z) = 0 \ \forall \nu \in \mathbb{N}_0\}$, $B := \{z \in D \mid \exists \nu \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } F^{(\nu)} \neq 0\}$. Sei $a \in D$. Dann $\exists \varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(a) \subset D$, derart dass

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{F^{(\nu)}(a)}{\nu!}(z-a)^\nu \quad \forall z \in U_\varepsilon(a) \tag{†}$$

(§ 4, Satz 24, Seite 59). Sei $a \in A$. Nach (†) ist dann $F(z) = 0$ $\forall z \in U_\varepsilon(a)$, also folgt $F^{(\nu)}(z) = 0$ $\forall z \in U_\varepsilon(a)$, $\forall \nu \in \mathbb{N}_0$. Also gilt $U_\varepsilon(a) \subset A$, also ist A offen. Sei $a \in B$. Dann $\exists \nu \in \mathbb{N}_0$ mit $F^{(\nu)}(a) \neq 0$ Da $F^{(\nu)}$ stetig existiert Umgebung V von a mit $F^{(\nu)}(z) \neq 0$ $\forall z \in V$, also ist $V \subset B$, d. h., B ist offen.
Es gilt $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = D$. Mit $a = z_0$ und wegen der Voraussetzung $\lim z_n = z_0$, $z_n \neq z_0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ und $F(z_n) = 0$ folgt aus (†) in Verbindung mit Lemma 1, dass $F^{(\nu)}(z_0) = 0$ $\forall \nu \in \mathbb{N}_0$, d. h. $z_0 \in A$. Daher $A \neq \emptyset$. Da D zusammenhängend muß $B = \emptyset$, d. h. $A = D$. Also folgt $F(z) = 0$ $\forall z \in D$, d. h. $f(z) = g(z)$ $\forall z \in D$. □

Bemerkung:

(i) Die Aussage von Satz 27 ist i. a. falsch, wenn D kein Gebiet ist.

Beispiel 17: $A = \{z \mid |z| < 1\}$, $B = \{z \mid |z-3| < 1\}$, $D = A \cup B$, $f : D \to \mathbb{C}$, $f(z) = z$, $g : D \to \mathbb{C}$ mit

$$g(z) := \begin{cases} z & z \in A \\ z^2 & z \in B \end{cases}$$

(ii) Nach Satz 27 ist der Gesamtverlauf einer holomorphen Funktion auf einem Gebiet vollständig bestimmt durch ihre Werte auf einer „sehr kleinen Teilmenge“ von D, z. B. auf einem kleinen Geradenstückchen.

Korollar 1: (Eindeutigkeit der holomorphen Fortsetzung) Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $M \subset D$ eine Teilmenge, die in D mindestens einen Häufungspunkt besitzt. Sei $f : M \to \mathbb{C}$ eine Abbildung. Wenn es eine holomorphe Funktion $\tilde{f}(z) : D \to \mathbb{C}$ gibt mit $\tilde{f}(z) = f(z)$ $\forall z \in M$, so ist $\tilde{f}$ eindeutig bestimmt.

Beweis: klar! (mit Satz 27) □

Korollar 2: Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Sei $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und f nicht identisch Null auf D. Dann ist die Nullstellenmenge $N_f := \{z \in D \mid f(z) = 0\}$ diskret in D, d. h., N_f hat keinen Häufungspunkt in D.

Beweis: Angenommen N_f hat einen Häufungspunkt z_0 in D. Dann existiert eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $z_n \in N_f$, $z_n \neq z_0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$. Es gilt $f(z_n) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Nach Satz 27 ist dann f identisch Null auf D. Widerspruch. □

Beispiel 18: Die reellen Funktionen $e^x, \sin x, \cos x$ usw. haben genau eine Fortsetzung ins Komplexe.

Satz 28: (Satz von der Gebietstreue) Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Sei $f : D \to C$ holomorph und nicht konstant auf D. Dann ist auch $f(D)$ ein Gebiet.

Beweis: Da f stetig und D zusammenhängend ist, ist auch $f(D)$ zusammenhängend (Analysis II). Wir müssen also „nur" zeigen, dass $f(D)$ offen ist. Sei $a \in D, b = f(a)$. Wir müssen dann zeigen, dass $U_\varepsilon(b)$ existiert mit $U_\varepsilon(b) \subset f(D)$. Ersetzt man gegebenenfalls $f(z)$ durch $g(z) := f(z+a) - f(a)$ und beachtet $g(0) = 0$ und dass Translationen Homöomorphismen sind, so kann man annehmen, dass $a = b = f(a) = 0$. Da D offen, ist 0 innerer Punkt von D, also existiert $U_\varepsilon(0)$ mit $\varepsilon > 0$, $U_\varepsilon(0) \subset D$ und eine Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu\, z^\nu$ auf $U_\varepsilon(0)$ konvergent mit:

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu\, z^\nu \quad (|z| < \varepsilon)$$

(§ 4, Satz 24, Seite 59, bzw. Korollar). Wegen $f(0) = 0$ ist $a_0 = 0$. Nach Satz 27 können nicht alle Koeffizienten a_ν null sein (denn D ist ein Gebiet). Widerspruch. Sei $n \geq 1$ der kleinste Index ν mit $a_\nu \neq 0$. Dann gilt also:

$$f(z) = z^n\, g(z) \quad (|z| < \varepsilon)$$

mit $g(z) = \sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu\, z^{\nu-n}$ $(|z| < \varepsilon)$. Die Funktion $g(z)$ ist auf $U_\varepsilon(0)$ holomorph und $g(0) = a_n \neq 0$. Da g stetig, gilt $g(z) \neq 0$ $\forall z \in U_{\varepsilon_1}(0)$, wobei $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$ geeignet. Zum weiteren Beweis benötigen wir:

Lemma 2: Sei D ein Elementargebiet und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Es gelte $f(z) \neq 0$ $\forall z \in D$. Dann gilt:

(i) Es gibt eine holomorphe Funktion $h : D \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = \exp(h(z))$ $(\forall z \in D)$.

(ii) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert eine holomorphe Funktion $H : D \to \mathbb{C}$ mit $H^n = f$ auf D.

Beweis:

(i) Da $f(z) \neq 0$ $\forall z \in D$, ist $\frac{f'(z)}{f(z)}$ auf D holomorph. Da D Elementargebiet, hat $\frac{f'}{f}$ eine Stammfunktion F auf D. Sei $G(z) := \frac{\exp F(z)}{f(z)}$ $(z \in D)$. Es gilt:

$$\begin{aligned} G'(z) &= \frac{F'(z)\, f(z)\, \exp F(z) - \exp F(z)\, f'(z)}{f^2(z)} \\ &= \frac{f'(z)\, \exp F(z) - f'(z)\, \exp F(z)}{f^2(x)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Da D ein Gebiet gilt also $G(z) = C$ konstant $\forall z \in D$. Da $\exp \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ surjektiv, kann man schreiben $C = e^c$ mit $c \in \mathbb{C}$. Es gilt also

$$e^c = \frac{e^{F(x)}}{f(z)}$$

d. h.:

$$f(z) = e^{F(z)-c}$$

Sei $h := F(z) - c$.

(ii) Man setze $H(z) := \exp(\frac{1}{n}\, h(z))$. Dann gilt:

$$H^n(z) = \exp\big(h(z)\big) = f(z)$$

□

Wir wenden Lemma 2(ii) an auf $g : U_{\varepsilon_1}(0) \to \mathbb{C}$ (man beachte, dass $U_{\varepsilon_1}(0)$ ein Sterngebiet, also auch ein Elementargebiet ist). Es folgt also die Existenz einer holomorphen Funktion $H : U_\varepsilon(0) \to \mathbb{C}$ mit $g(z) = H^n(z)\ \forall z \in U_{\varepsilon_1}(0)$. Also $f(z) = (z\,H(z))^n = F^n(z)$ wobei $F(z) := z\,H(z)\ \forall z \in U_{\varepsilon_1}(0)$. Es gilt $F(0) = 0$, $F'(0) \neq 0$, da $F'(z) = H(z) + z\,H'(z)$ und somit $F'(0) = H(0) \neq 0$.
Da F' stetig existiert $\varepsilon_2 > 0$ mit $F'(z) \neq 0\ \forall z \in U_{\varepsilon_2}(0)$. Wir wollen den Satz über die inverse Funktion aus Analysis II auf F anwenden ($\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$). Man schreibe $F = u + i\,v$ mit u und v reell. Da F holomorph und F' stetig ist F von der Klasse C^1, ferner gelten die Cauchy-Riemannschen DGL: $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ und $F' = u_x + i\,v_x$ (Kapitel 2, § 3, Satz 9, Seite 22). Daher gilt für die Jacobideterminante:

$$JF = \det \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = u_x\,v_y - u_y\,v_x = u_x^2 + v_x^2$$

Wegen $F' \neq 0$ auf $U_{\varepsilon_2}(0)$ gilt somit:

$$JF(x,y) \neq 0 \quad \forall (x,y) \in U_{\varepsilon_2}(0)$$

Nach dem Satz über die inverse Funktion existiert daher eine offene Umgebung $V \subset U_{\varepsilon_2}(0)$ von 0, so dass $F(V)$ offen ist. Da $F(0) = 0$, ist somit 0 innerer Punkt von $F(V)$, d. h., es existiert $r > 0$ mit $U_{r^n}(0) \subset F(V)$.
Behauptung: $U_{r^n}(0) \subset f(V)\ (\subset f(D))$
Beweis: Sei $w \in U_{r^n}(0)$, d.h. $|w| < r^n$. Man schreibe $w = \tau^n$ mit $\tau \in \mathbb{C}$ (siehe Kapitel 1, § 3, Satz 6, Seite 12). Dann gilt:

$$|\tau|^n < r^n \quad \Rightarrow \quad |\tau| < r$$

Nach dem oben Bewiesenen gibt es also $z \in V$ mit $\tau = F(z)$. Daher folgt:

$$w = \tau^n = F^n(z) = f(z)$$

Daher gilt also $U_{r^n}(0) \subset f(V)$ □

Korollar 1: Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, f nicht konstant auf D. Dann gilt

(i) *„Maximumprinzip:“* Die Funktion f hat auf D kein lokales Betragsmaximum. (Man sagt, dass f in a ein lokales Betragsmaximum annimmt, wenn es $\delta > 0$ mit $U_\delta(a) \subset D$ gibt und $|f(z)| \leq |f(a)| \; \forall z \in U_\delta(a)$.)

(ii) *„Minimumprinzip:“* Besitzt f in a ein lokales Betragsminimum, so gilt notwendigerweise $f(a) = 0$. (Definition des lokalen Betragsminimums analog zu (i).)

Beweis:

(i) Angenommen f nimmt in $a \in D$ ein lokales Betragsmaximum an. Da f nicht konstant und D ein Gebiet, ist $f(D)$ offen also $b = f(a)$ innerer Punkt von $f(D)$, d. h., es existiert $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(b) \subset f(D)$. In jeder noch so kleinen Umgebung von b kann man aber Punkte w finden mit $|w| > |b|$. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass b ein lokales Maximum ist.

(ii) Angenommen f nimmt in a ein lokales Betragsminimum an. Man argumentiert wie unter (i): in jeder noch so kleinen Umgebung von b kann man Punkte finden mit $|w| < |b|$, es sei denn $0 = b = f(a)$.

□

Korollar 2: (Maximumprinzip) Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $K \subset D$ kompakt. Die stetige reellwertige Funktion $f\big|_K$ nimmt dann auf dem Rand ∂K von K ihr Maximum an.

Beweis: Da K kompakt ist $K = \operatorname{int}K \cup \partial K$. Sei $a \in K$ ein Punkt, so dass $f\big|_K$ in a ihr Maximum annimmt. Ist $a \in \partial K$, so ist nichts zu zeigen. Sei also $a \in \operatorname{int}K$. Dann nimmt f in $a \in D$ ein lokales Betragsmaximum an, ist also nach Korollar 1(i) konstant auf D, also auch auf K, also wird das Maximum auch auf dem Rand angenommen. □

Satz 29: (Lemma von Schwarz) Sei $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Sei $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ holomorph und $f(0) = 0$. Dann gilt $|f(z)| \leq |z| \; \forall z \in \mathbb{E}$ und $|f'(0)| \leq 1$. Ferner gilt: wenn es $a \in \mathbb{E}$, $a \neq 0$ gibt mit $|f(a)| = |a|$, so existiert $c \in \mathbb{C}$, $|c| = 1$ und $f(z) = c\,z$.

Beweis: Es gilt $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu\, z^\nu$ $(|z| < 1)$ wobei $a_\nu = \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!}$ (Taylorentwicklung im Punkt 0). Wegen $f(0) = 0$ ist $a_0 = 0$, also gilt:

$$f(z) = z\,g(z) \quad \text{mit } g(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu\, z^{\nu-1}$$

$(|z| < 1)$. Die Funktion g ist auf $\mathbb{E}$ holomorph und $\mathbb{E}$ ist ein Gebiet. Nach Korollar 2 nimmt daher die Funktion g eingeschränkt auf $K_r := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$ $(0 < r < 1)$ ihr Maximum auf dem Rand $\partial K_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$ an. Für $|z| = r$ gilt aber:

$$|g(z)| = \left|\frac{f(z)}{z}\right| = \frac{|f(z)|}{r} \leq \frac{1}{r}$$

Daher ist $|g(z)| \leq \frac{1}{r}$ $\forall z \in K_r$. Für $r \to 1$ folgt daher:

$$|g(z)| \leq 1 \qquad \forall z \in \mathbb{E}$$

d. h.

$$|f(z)| \leq |z| \qquad \forall z \in \mathbb{E}$$

Es gebe $a \in \mathbb{E}$, $a \neq 0$ mit $|f(a)| = |a|$, d. h. $|g(a)| = 1$. Also nimmt g in a ein lokales Betragsmaximum an, also muß g auf $\mathbb{E}$ konstant sein: $g(z) = c$ $\forall z \in \mathbb{C}$. Nimmt man $z = a$, so folgt $|c| = 1$ wegen $|g(a)| = 1$. Daher gilt:

$$f(z) = c\,z \quad \forall z \in \mathbb{E}$$

$g(0) = f'(0)$, also $|f'(0)| \leq 1$. □

Definition: Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann setzt man

$$\mathrm{Aut}(D) := \{f : D \to D \mid f \text{ ist holomorph, } f \text{ bijektiv und } f^{-1} \text{ holomorph}\}$$

Man nennt $\mathrm{Aut}(D)$ die *Automorphismengruppe* von D. ($\mathrm{Aut}(D)$ ist offenbar eine Gruppe unter der Komposition von Abbildungen.) Mit Hilfe des Lemma von SCHWARZ (Satz 29) kann man $\mathrm{Aut}(\mathbb{E})$ bestimmen (siehe Übungsaufgabe 35).

§ 6 Singularitäten

Motivation: Oft sind Funktionen f nur in einer punktierten Umgebung eines Punktes $a \in \mathbb{C}$ definiert und dort holomorph. Man nennt dann a eine Singularität von f. Man interessiert sich für das Verhalten von f nahe bei a.

Beispiel 19:

(i)

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} \qquad (z \neq 0)$$

es gilt $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \mp \dots$ $(z \in \mathbb{C})$ für $z \neq 0$ gilt also:

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} \mp \dots$$

diese konvergiert ebenfalls, da sie sich nur durch den Faktor $\frac{1}{z}$ von der ersten unterscheidet und liefert somit eine holomorphe Fortsetzung von $f(z)$ in $z = 0$.

(ii)

$$f(z) = \frac{e^z}{z} \qquad (z \neq 0)$$

$$\lim_{z\to 0} |f(z)| = \lim_{z\to 0} |e^z| \, \frac{1}{|z|} = \infty$$

man sagt dann, dass $z = 0$ ein Pol von f ist (man beachte, dass sich $f(z)$ nicht in $z = 0$ holomorph fortsetzen läßt, da f in $z = 0$ nicht stetig ist).

(iii) $f(z) = e^{1/z}$ $(z \neq 0)$; die Folgen $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\left(\frac{1}{i\,n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ haben Grenzwert 0 $(n \to \infty)$. Es gilt:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{n}\right) &= \quad e^n \quad \to \infty \quad (n \to \infty) \\ \left| f\left(\frac{1}{i\,n}\right)\right| &= \left|e^{i\,n}\right| = 1 \qquad \text{(beschränkt)} \end{aligned}$$

daher kann sich f nicht holomorph nach $z = 0$ fortsetzen lassen, und $z = 0$ kann auch kein Pol von f sein. Man nennt 0 eine wesentliche Singularität von f.

Definition:

(i) Sei $a \in \mathbb{C}$. Dann heißt

$$\overset{\bullet}{U}_r(a) := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - a| < r\}$$

$(r > 0)$ eine punktierte Kreisscheibe von $z = a$.

(ii) Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $a \in \mathbb{C}$ mit $a \notin D$, aber $\overset{\bullet}{U}_r(a) \subset D$ mit $r > 0$. Dann heißt a eine *Singularität* von f.

Definition: Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und a eine Singularität von f. Dann heißt a *hebbar*, falls sich f holomorph auf $D \cup \{a\}$ fortsetzen läßt, d. h., es gibt eine holomorphe Funktion $\tilde{f} : D \cup \{a\} \to \mathbb{C}$ mit $\tilde{f}|_D = f$.

Bemerkung:

(i) Man beachte, dass $D \cup \{a\} = D \cup U_r(a)$ offen ist (Vereinigung von endlich vielen offenen Mengen).

(ii) $\tilde{f}$ (wenn es existiert) ist eindeutig durch f bestimmt, denn $\tilde{f}$ ist holomorph in a, also auch stetig in a also gilt:

$$\tilde{f}(a) = \lim_{\substack{z\to a\\ z\neq a}} \tilde{f}(z) = \lim_{\substack{z\to a\\ z\neq a}} f(z)$$

Man schreibt daher auch einfach f statt $\tilde{f}$.

Beispiel 20: $\dfrac{\sin z}{z}$ $(z \neq 0)$ hat in $z = 0$ eine hebbare Singularität (s. o.).

Satz 30: (RIEMANNsche Hebbarkeitssatz) Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und a eine Singularität von f. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) a ist hebbar.

(ii) Es gibt $\delta > 0$ mit $\overset{\bullet}{U}_\delta(a) \subset D$, so dass f auf $\overset{\bullet}{U}_\delta(a)$ beschränkt ist.

Beweis:

(i) $\Rightarrow$ (ii) Sei a hebbar. Da $\tilde{f}$ in a holomorph ist $\tilde{f}$ auch in a stetig. Daher existiert $\delta > 0$ mit

$$\left|\tilde{f}(z) - \tilde{f}(a)\right| < 1 \quad \forall z \in U_\delta(a)$$

Für $z \in \overset{\bullet}{U}_\delta(a)$ ist $\tilde{f}(a) = f(z)$, also gilt für solche z:

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq \left|f(z) - \tilde{f}(a)\right| + \left|\tilde{f}(a)\right| \\ &= \left|\tilde{f}(z) - \tilde{f}(a)\right| + \left|\tilde{f}(a)\right| \\ &\leq 1 + \left|\tilde{f}(a)\right| \end{aligned}$$

also ist f auf $\overset{\bullet}{U}_\delta(a)$ beschränkt. Dies zeigt (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i) Es gelte also die Voraussetzung von (ii). Man definiere $g : U_\delta(a) \to \mathbb{C}$ durch:

$$g(z) := \begin{cases} (z-a)^2 f(z) & (z \neq a) \\ 0 & (z = a) \end{cases}$$

Auf $\overset{\bullet}{U}_\delta(a)$ ist g holomorph. Ferner gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{z \to a} \frac{g(z) - g(a)}{z - a} &= \lim_{z \to a} \frac{(z-a)^2 f(z) - 0}{z - a} \\ &= \lim_{\substack{z \to a \\ z \neq a}} (z-a) f(z) \\ &= 0 \end{aligned}$$

denn f ist nach Voraussetzung auf $\overset{\bullet}{U}_\delta(a)$ beschränkt. Also ist g in $z = a$ komplex diffbar und $g'(a) = 0$. Da also g auf $U_\delta(a)$ holomorph ist, gilt (TAYLORentwicklung):

$$g(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-a)^\nu \qquad (|z - a| < \delta)$$

mit $a_\nu = \frac{g^{(\nu)}(a)}{\nu!}$. Wegen $g(a) = g'(a) = 0$, ist $a_0 = a_1 = 0$. Sei

$$h(z) := \sum_{\nu=2}^{\infty} a_\nu (z-a)^{\nu-2} \qquad (|z-a| < \delta)$$

(Ausklammern von $(z-a)^2$). Dann ist $h(z)$ holomorph auf $U_\delta(a)$ und für $z \in \overset{\bullet}{U}_\delta(a)$ gilt nach Konstruktion:

$$h(z) = \frac{1}{(z-a)^2} \sum_{\nu=2}^{\infty} a_\nu (z-a)^\nu = \frac{1}{(z-a)^2}\, g(z) = f(z)$$

Daher liefert $h(z)$ eine holomorphe Fortsetzung von f auf ganz $U_\delta(a)$. Definiert man $\tilde{f} : D \cup \{a\} \to \mathbb{C}$ durch:

$$\tilde{f}(z) := \begin{cases} h(z) & (z \in U_\delta(a)) \\ f(z) & (z \notin U_\delta(a)) \end{cases}$$

so ist $\tilde{f}$ auf $D \cup \{a\}$ holomorph und $\tilde{f}|_D = f$.

$\square$

Definition: Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und a eine Singularität von f. Dann heißt a ein *Pol* von f, falls es $\delta > 0$ mit $U_\delta(a) \subset D \cup \{a\}$ eine holomorphe Funktion $g : U_\delta(a) \to \mathbb{C}$ mit $g(a) \neq 0$ und ein $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 1$ gibt, so dass

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m} \qquad (\forall z \in \overset{\bullet}{U}_\delta(a))$$

Bemerkung: Die Zahl $m \in \mathbb{N}$ ist eindeutig bestimmt, da: angenommen

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m} = \frac{h(z)}{(z-a)^{m'}}$$

für $z \in \overset{\bullet}{U}_\delta(a)$ mit $g, h : U_\delta(a) \to \mathbb{C}$ holomorph, $g(a) \neq 0$, $h(a) \neq 0$ und $m, m' \in \mathbb{N}$ und sei etwa $m > m'$. Wegen $h(a) \neq 0$ ist aus Stetigkeitsgründen $h(z) \neq 0$ für z nahe bei a, also gilt für solche $z, z \neq a$:

$$(z-a)^{m-m'} = \frac{g(z)}{h(z)}$$

Daher folgt mit $z \to a$ wegen $m - m' > 0$, dass $g(a) = 0$. Widerspruch. Also muß $m = m'$ gelten.

Definition: Die Zahl m heißt Polstellenordnung von f in a. Ist $m = 1$, so heißt a einfacher Pol von f.

Beispiel 21: $\dfrac{e^z}{z^2}$ $(z \neq 0)$ hat in $z = 0$ einen Pol der Ordnung 2.

Bemerkung: Hat f in a einen Pol der Ordnung m, so kann man für geeignete $\delta > 0$ schreiben:

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + \dots$$

$(0 < |z-a| < \delta)$ mit $a_{-m} \neq 0$. (Man entwickle $g(z)$ in $z = a$ in eine TAYLORreihe und beachte $g(a) \neq 0$).

Satz 31: Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und a eine Singularität von f. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) a ist ein Pol von f.

(ii) $\lim\limits_{z\to a} |f(z)| = \infty$

Beweis:

(i) $\Rightarrow$ (ii) Sei also a ein Pol von f und $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}$ $(z \in \dot{U}_\delta(a))$ mit g und m wie in der Definition. Wegen $g(a) \neq 0$, der Stetigkeit von g in a und $m \geq 1$ folgt dann:

$$\lim_{z\to a} |f(z)| = \lim_{z\to a} |g(z)| \frac{1}{|z-a|^m} = \infty$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Wegen $\lim_{z\to a} |f(z)| = \infty$ gibt es $\delta > 0$ mit $\dot{U}_\delta(a) \subset D$ und $f(z) \neq 0\ \forall z \in \dot{U}_\delta(a)$. Auf $\dot{U}_\delta(a)$ ist dann $\frac{1}{f(z)}$ definiert und holomorph. Wegen $\lim_{z\to a} |f(z)| = \infty$ ist $\frac{1}{f}$ auf $\dot{U}_\delta(a)$ beschränkt. Nach dem RIEMANNschen Hebbarkeitssatz (Satz 30) läßt sich also $\frac{1}{f(z)}$ holomorph mit $\tilde{f}(z) = \frac{1}{f(z)}\ \forall z \in \dot{U}_\delta(a)$. Wegen $\lim_{z\to a} |f(z)| = \infty$ muß gelten: $\tilde{f}(a) = 0$. Nach dem Satz von TAYLOR (Seite 59 und dem Identitätssatz (Seite 65) gilt somit:

$$\tilde{f}(z) = \sum_{\nu=m}^{\infty} a_\nu (z-a)^\nu$$

mit $m \geq 1$ und $a_m \neq 0$ (da $\tilde{f}(z)$ ist außerhalb von a nirgends null). Also gilt:

$$\tilde{f}(z) = (z-a)^m\, h(z)$$

mit $h : U_\delta(a) \to \mathbb{C}$ holomorph und $h(z) \neq 0\ \forall z \in U_\delta(a)$ (beachte $h(a) = a_m \neq 0$). Für $z \in \dot{U}_\delta(a)$ gilt somit:

$$f(z) = \frac{1}{\tilde{f}(z)} = \frac{1}{(z-a)^m\, h(z)} = \frac{\frac{1}{h(z)}}{(z-a)^m} = \frac{g(z)}{(z-a)^m}$$

wobei $g(z) = \frac{1}{h(z)}$ auf $U_\delta(a)$ holomorph und $g(a) \neq 0$ ist.

$\square$

Definition: Sei D offen, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und a eine Singularität von f. Dann heißt a *wesentliche* Singularität von f, wenn a weder hebbar noch ein Pol von f ist.

Beispiel 22: $e^{1/z}$ $(z \neq 0)$ hat in $z = 0$ eine wesentliche Singularität (siehe Beispiel 19(iii)) in der Motivation und Satz 31).

Satz 32: (Satz von Casorati-Weierstrass) Sei D offen, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und a eine wesentliche Singularität von f. Sei $\dot{U}_\delta(a)$ eine beliebige, vorgegebene punktierte Umgebung von a. Dann existiert zu jedem $b \in \mathbb{C}$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $z \in \dot{U}_\delta(a) \cap D$ mit $|f(z) - b| < \varepsilon$.
Hierfür sagt man auch: die Funktion f kommt in jeder noch so kleinen punktierten δ-Umgebung von a jedem Wert $b \in \mathbb{C}$ beliebig nahe. *Merke:* f ist also „extrem nervös" in der Nähe von a.

Beweis: Sei ohne Einschränkung $\delta > 0$ so klein, dass $\dot{U}_\delta(a) \subset D$. Angenommen die Behauptung ist nicht richtig. Dann gibt es also $b \in \mathbb{C}$ und $\varepsilon > 0$ mit

$$|f(z) - b| \geq \varepsilon \qquad \forall z \in \dot{U}_\delta(a)$$

Sei

$$g(z) := \frac{1}{f(z) - b} \qquad (z \in \dot{U}_\delta(a))$$

Dann ist g holomorph auf $\dot{U}_\delta(a)$ und auf $\dot{U}_\delta(a)$ beschränkt, da

$$\frac{1}{|f(z) - b|} \leq \frac{1}{\varepsilon}$$

Nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz (Satz 30) läßt sich also g holomorph auf $U_\delta(a)$ fortsetzen.
1. Fall: $g(a) \neq 0$. Dann gilt:

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} + b \quad (\forall z \in U_\delta(a))$$

Dann ist $f(z)$ auf $U_\delta(a)$ holomorph, also a hebbare Singularität von f. Widerspruch.
2. Fall: $g(a) = 0$. Da g nicht identisch null auf $U_\delta(a)$, gilt nach dem Satz von Taylor (Seite 59) und dem Identitätssatz (Seite 65):

$$g(z) = (z - a)^m\, h(z)$$

mit $m \geq 1$ (da $g(a) = 0$) und $h : U_\delta(a) \to \mathbb{C}$ holomorph, $h(a) \neq 0$. Für $z \in \dot{U}_\delta(a)$ folgt daher:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{g(z)} + b \\ &= \frac{1/h(z)}{(z-a)^m} + b \\ &= \frac{G(z)}{(z-a)^m} \end{aligned}$$

mit $G(z) := \frac{1}{h(z)} + b(z-a)^m$ $(z \in U_\delta(a))$. Es gilt $G(a) = \frac{1}{h(a)} \neq 0$. Also hat f in a einen Pol. Widerspruch. Also ist der Satz bewiesen. □

Bemerkung: Es gilt auch die Umkehrung von Satz 32.

§ 7 Laurentzerlegung

Ziel: genaues Studium von holomorphen Funktionen auf Ringgebieten

Definition: Sei im folgenden r und R fest gewählt mit $0 \leq r < R \leq \infty$. Dann heißt

$$\mathfrak{R} := \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z| < R\}$$

ein *Ringgebiet*.

Bemerkung: Die allgemeineren Ringgebiete $\{z \in \mathbb{C} \mid r < |z-a| < R\}$ gehen aus $\mathfrak{R}$ durch Translation hervor, wir beschränken uns daher auf $a = 0$.

Satz 33: Sei $f : \mathfrak{R} \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann besitzt f eine Zerlegung

$$f(z) = g(z) + h\left(\frac{1}{z}\right) \quad (z \in \mathfrak{R}) \tag{‡}$$

wobei $g : U_R(0) \to \mathbb{C}$ und $h : U_{\frac{1}{r}}(0) \to \mathbb{C}$ holomorph sind mit $h(0) = 0$. Diese Zerlegung ist eindeutig bestimmt.

Bemerkung: Die Funktion $z \mapsto h(\frac{1}{z})$ heißt *Hauptteil* und $z \mapsto g(z)$ heißt *Nebenteil* von f. Die Zerlegung (‡) heißt *Laurentzerlegung* von f.

Beweis: 1. Eindeutigkeit der Zerlegung: Angenommen man hat zwei Zerlegungen

$$f(z) = g(z) + h\left(\frac{1}{z}\right) = \tilde{g}(z) + \tilde{h}\left(\frac{1}{z}\right) \quad (z \in \mathfrak{R})$$

wobei $h, \tilde{h}, g, \tilde{g}$ die geforderten Eigenschaften haben. Mit $G := g - \tilde{g}$ und $H := h - \tilde{h}$ gilt dann:

$$G(z) = -H\left(\frac{1}{z}\right) \quad (z \in \mathfrak{R})$$

Für $z \in \mathbb{C}$ setze man

$$F(z) := \begin{cases} G(z) & |z| < R \\ -H\left(\frac{1}{z}\right) & |z| > r \end{cases}$$

Dann ist F wohldefiniert und auf $\mathbb{C}$ holomorph. Sei ρ so gewählt, dass $r < \rho < R$. Auf dem Kompaktum $|z| \leq \rho$ ist die stetige Funktion $F(z) = G(z)$ beschränkt. Ebenso ist die stetige Funktion $H(w)$ auf dem Kompaktum $|w| \leq \frac{1}{\rho} < \frac{1}{r}$ beschränkt, d. h., $F(z) = -H(\frac{1}{z})$ ist auf $|z| \geq \rho$ beschränkt. Daher ist $F(z)$ auf ganz $\mathbb{C}$ beschränkt. Nach dem Satz von Liouville (Seite 58) ist daher F konstant. Es gilt:

$$\lim_{|z|\to\infty} |F(z)| = \lim_{|z|\to\infty} \left|-H\left(\frac{1}{z}\right)\right| = \lim_{|z|\to\infty} \left|H\left(\frac{1}{z}\right)\right| = 0$$

denn $h(0) = 0$, $\tilde{h}(0) = 0$ und $H = h - \tilde{h}$. Also ist F identisch null auf $\mathbb{C}$, also sind G und H identisch null und somit $g = \tilde{g}$, $h = \tilde{h}$.

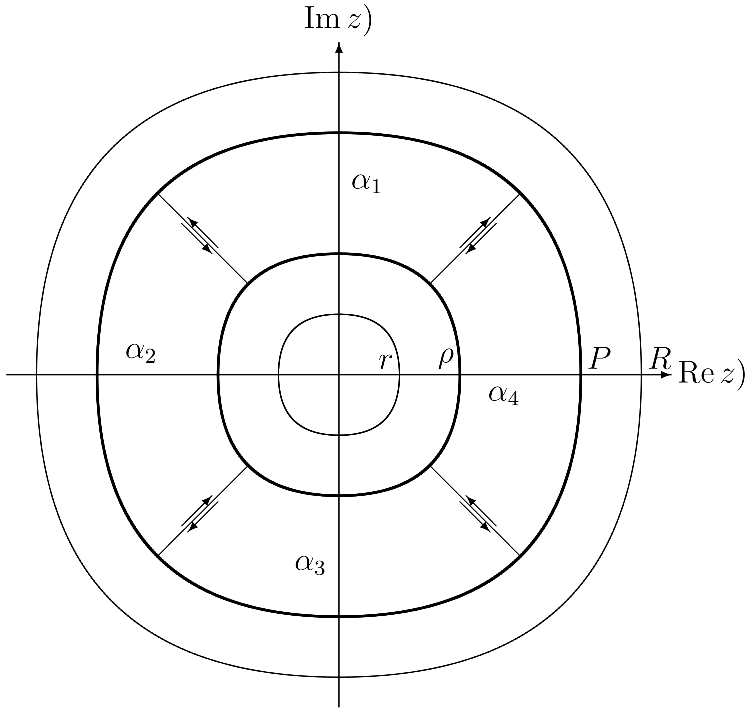
2. Existenz der Laurent*zerlegung:* Seien $r < \rho < P < R$. Es gilt, die Existenz der Laurenzerlegung auf jedem der kleineren Ringgebiete $\rho < |z| < P$ zu beweisen, denn nach 1. ist die Laurentzerlegung eindeutig bestimmt (wenn sie existiert) und $\mathfrak{R}$ ist die Vereinigung aller dieser Ringgebiete.

Lemma: Sei $G : \mathfrak{R} \to \mathbb{C}$ holomorph und seien ρ und P wie oben. Dann gilt:

$$\int_{|w|=\rho} G(w)\, dw = \int_{|w|=P} G(w)\, dw$$

wobei jeweils über die angegebenen Kreislinien (positiv orientiert, einfach durchlaufen) integriert wird.

Beweis: Sei die Notation wie im folgenden Bild:



Die Wege α_ν sind geschlossen und stückweise glatt, und sie liegen alle in einem Sterngebiet, auf dem $G(w)$ holomorph ist. Nach dem CAUCHYschen Integralsatz (Seite 50) ist daher

$$\int\limits_{\alpha_\nu} G(w)\,dw = 0 \quad \forall \nu$$

also gilt auch:

$$\sum_\nu \int\limits_{\alpha_\nu} G(w)\,dw = 0$$

Da die Integrale über die entgegengesetzt orientierten kleinen Geradenstückchen sich gegenseitig aufheben (Rechenregeln für Linienintegrale), folgt also

$$0 = \int\limits_{|z|=P} G(w)\,dw + \left(- \int\limits_{|z|=\rho} G(w)\,dw \right)$$

Damit ist das Lemma bewiesen. □

Sei jetzt $z \in \mathfrak{R}$ fest mit $\rho < |z| < P$. Für $w \in \mathfrak{R}$ sei

$$G(w) := \begin{cases} \dfrac{f(w) - f(z)}{w - z} & (w \neq z) \\ f'(z) & (w = z) \end{cases}$$

Dann ist $G(w)$ auf $\mathfrak{R} \setminus \{z\}$ holomorph. Ferner ist $G(w)$ in $w = z$ stetig, denn f ist ja in $w = z$ komplex diffbar. Daher ist $G(w)$ in einer Umgebung von $w = z$ beschränkt. Also ist $G(w)$ auf $\mathfrak{R}$ holomorph (RIEMANNscher Hebbarkeitssatz, Seite 72). Nach dem Lemma gilt somit:

$$\int\limits_{|w|=P} G(w)\,dw = \int\limits_{|w|=\rho} G(w)\,dw$$

d. h.

$$\int\limits_{|w|=P} \frac{f(w)}{w-z}\,dw - f(z) \int\limits_{|w|=P} \frac{dw}{w-z} = \int\limits_{|w|=\rho} \frac{f(w)}{w-z}\,dw - f(z) \int\limits_{|w|=\rho} \frac{dw}{w-z}$$

Wegen $|z| > \rho$ und da $w \mapsto \frac{1}{w-z}$ für $w \neq z$ holomorph ist, gilt nach dem CAUCHYschen Integralsatz (Seite 50) $\int_{|w|=\rho} \frac{dw}{w-z} = 0$. Nach der CAUCHYschen Integralformel (Seite 52) gilt wegen $|z| < P$:

$$\int\limits_{|w|=P} \frac{dw}{w-z} = 2\pi\, i$$

Mit $z \in \mathbb{C}$, $\rho < |z| < P$ fest ergibt sich:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\, i} \int\limits_{|w|=P} \frac{f(w)}{w-z}\,dw - \frac{1}{2\pi\, i} \int\limits_{|w|=\rho} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = g(z) + h\left(\frac{1}{z}\right)$$

mit

$$g(z) := \frac{1}{2\pi\, i} \int\limits_{|w|=P} \frac{f(w)}{w-z}\,dw \qquad (|z| < P)$$

$$h(z) := \frac{-1}{2\pi\, i} \int\limits_{|w|=\rho} \frac{f(w)}{w-\frac{1}{z}}\,dw \qquad (|z| < \frac{1}{\rho}, z \neq 0)$$

In § 3, Lemma (Seite 55) wurde gezeigt: ist $D \subset \mathbb{C}$ offen, C eine stückweise glatte Kurve in D und $\varphi : D \to \mathbb{C}$ stetig, so ist die Abbildung

$$z \mapsto \int\limits_{C} \frac{\varphi(w)}{w-z}\,dw$$

holomorph auf dem Komplement von C in $\mathbb{C}$ (nicht nur auf $D \setminus C$ wie in § 3, Lemma, Seite 55 formuliert). Hieraus folgt, dass $g(z)$ auf $U_P(0)$ und $h(z)$ auf $U_{\frac{1}{\rho}}(0)$, $z \neq 0$ holomorph ist (man beachte $z \mapsto \frac{1}{z}$ ist für $z \neq 0$ holomorph). Wir müssen noch zeigen, dass h sich holomorph nach $z = 0$ fortsetzen läßt mit $h(0) = 0$. Für $|w| = \rho$ und $|z| < \frac{1}{\rho}$ gilt:

$$\left|w - \frac{1}{z}\right| = \left|\frac{1}{z} - w\right| \geq \left|\frac{1}{z}\right| - |w| = \left|\frac{1}{z}\right| - \rho > 0$$

Mit $M := \max_{|w|=\rho} |f(w)|$ folgt daher

$$|h(z)| \leq \frac{1}{2\pi} M \frac{1}{\left|\frac{1}{z}\right| - \rho} 2\pi \rho \to 0 \quad (z \to 0)$$

Insbesondere ist $h(z)$ beschränkt für z nahe bei 0, hat also nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz (Seite 72) eine hebbare Singularität bei $z = 0$. Aus Stetigkeitsgründen folgt $h(0) = 0$. □

Definition: Unter einer unendlichen Reihe der Form $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ versteht man das Paar

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \right)$$

Eine solche Reihe heißt konvergent, wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}$ konvergieren; dann heißt $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ der Grenzwert von $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$. Man schreibt dann

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}$$

Man verwendet die Begriffe „absolute Konvergenz“ und „gleichmäßige Konvergenz“ bei obigen Reihen in demselben Sinn.

Definition: Eine Laurentreihe (mit Entwicklungspunkt $a \in \mathbb{C}$) ist eine Reihe der Form

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n \quad (a_n \in \mathbb{C})$$

Satz 34: Sei $\mathfrak{R} = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z-a| < R\}$ $(0 \leq r < R \leq \infty)$ ein Ringgebiet und $f : \mathfrak{R} \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann besitzt f auf $\mathfrak{R}$ eine Laurententwicklung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n \quad (z \in \mathfrak{R})$$

welche auf $\mathfrak{R}$ absolut und auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathfrak{R}$ gleichmäßig absolut konvergiert. Für die Koeffizienten gilt:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w-a|=\rho} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} \, dw \quad (n \in \mathbb{Z},\ r < \rho < R)$$

wobei über die genau einmal in positivem Sinne durchlaufene Kreislinie vom Radius ρ um a integriert wird. Die Laurententwicklung ist eindeutig bestimmt.

Beweis: Sei ohne Einschränkung $a = 0$. Sei $f(z) = g(z) + h(\frac{1}{z})$ wie in Satz 33. Seien

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n \qquad (|z| < R)$$

$$h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, z^n \qquad \left(|z| < \frac{1}{r}\right)$$

die TAYLORreihen von g und h (man beachte $h(0) = 0$). Man setze $a_{-n} := b_n$ $(n \geq 1)$. Dann gilt also

$$f(z) = g(z) + h\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\, z^n \quad (z \in \mathfrak{R})$$

Die Eindeutigkeit der LAURENTentwicklung folgt aus der entsprechenden Aussage aus Satz 33. Die Aussagen über die Konvergenz folgen aus den wohlbekannten Sätzen über Konvergenz von Potenzreihen.
Beweis der Koeffizientenformel: Für $n \geq 0$ gilt nach der verallgemeinerten CAUCHYschen Integralformel (Seite 52) und dem Satz von TAYLOR (Seite 59):

$$a_n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi\, i} \int\limits_{|w|=\rho} \frac{g(w)}{w^{n+1}}\, dw \quad (\rho < R)$$

Sei jetzt auch $r < \rho$. Die Abbildung $w \mapsto \frac{1}{w}$ bildet die Kreislinie $|w| = \rho$ auf die Kreislinie $|w| = \frac{1}{\rho}$ ab und ändert die Orientierung. Daher gilt:

$$\int\limits_{|w|=\rho} \frac{h(\frac{1}{w})}{w^{n+1}}\, dw \overset{w \mapsto \frac{1}{w}}{=} -\int\limits_{|w|=\frac{1}{\rho}} \frac{h(w)}{\left(\frac{1}{w}\right)^{n+1}}\, d\left(\frac{1}{w}\right) = \int\limits_{|w|=\frac{1}{\rho}} h(w)\, w^{n-1}\, dw$$

(wegen $d(\frac{1}{w}) = -\frac{dw}{w^2}$). Dieses Integral ist null. Nach dem CAUCHYschen Integralsatz (Seite 50), denn $\frac{1}{\rho} < \frac{1}{r}$ und $w \mapsto h(w)\, w^{n-1}$ ist für $n \geq 0$ holomorph (man beachte $h(0) = 0$). Daher gilt:

$$a_n = \frac{1}{2\pi\, i} \int\limits_{|w|=\rho} \frac{g(w) + h(\frac{1}{w})}{w^{n+1}}\, dw = \frac{1}{2\pi\, i} \int\limits_{|w|=\rho} \frac{f(w)}{w^{n+1}}\, dw$$

Für $n < 0$ argumentiert man ähnlich. □

Beispiel 23:

$$f(z) = \frac{2}{z^2 - 4z + 3} \qquad (z \neq 1, z \neq 3)$$

$f(z)$ hat in $1 < |z| < 3$ eine Laurententwicklung. Partialbruchzerlegung liefert

$$f(z) = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{z-3}$$

Für $1 < |z|$ gilt:

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{z^n} = -\sum_{n \geq 0} \frac{1}{z^{n+1}}$$

Für $|z| < 3$ gilt:

$$\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{3}} = -\frac{1}{3} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{z}{3}\right)^n = -\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{3^{n+1}}$$

Also gilt für $1 < |z| < 3$ $f(z) = g(z) + h(\frac{1}{z})$ mit

$$g(z) = -\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{3^{n+1}} \qquad (|z| < 3)$$

$$h(z) = -\sum_{n \geq 1} z^n \qquad (|z| < 1)$$

(Laurententwicklung!)

Satz 35: Ist $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und a eine Singularität von f, so ist f auf dem Ringgebiet $\dot{U}_R(a) = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < R\}$ für geeignetes $R > 0$ holomorph, besitzt also dort eine Laurententwicklung.
In dieser Situation gilt:

(i) a hebbar $\Leftrightarrow a_n = 0 \ \forall n < 0$

(ii) a ist Polstelle der Ordnung $m \geq 1 \Leftrightarrow a_{-m} \neq 0$, $a_n = 0 \ \forall n < -m$.

(iii) a wesentlich $\Leftrightarrow$ es existieren unendlich viele $n < 0$ mit $a_n \neq 0$.

Beweis: Übungsaufgabe $\square$

§ 8 Anhang: Meromorphe Funktionen (informell)

Konvention:

(i) $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

(ii) Ist $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, D offen und a ein Pol von f, so setzt man $f(a) := \infty$ (dies ist sinnvoll wegen $\lim_{z\to a} |f(z)| = \infty$ nach § 6, Satz 31, Seite 74).

Definition: Sei $f : D \to \overline{\mathbb{C}}$, $D \subset \mathbb{C}$ offen, eine Abbildung. Dann heißt f eine meromorphe Funktion auf D, falls gilt:

(i) $S(f) := f^{-1}(\{\infty\})$ ist diskret in D, d. h., $S(f)$ hat keinen Häufungspunkt in D.

(ii) Die Einschränkung $f_0 := f\big|_{D\setminus S(f)}$ ist holomorph.

(iii) Alle Punkte aus $S(f)$ sind Polstellen von f_0.

Sind $f, g : D \to \overline{\mathbb{C}}$ meromorph mit Polstellenmenge $S(f)$ bzw. $S(g)$, so ist $f_0 + g_0$ auf $D \setminus (S(f) \cup S(g))$ holomorph und die Punkte aus $S(f) \cup S(g)$ sind Singularitäten von $f_0 + g_0$. Diese Singularitäten sind entweder hebbar oder Polstellen (siehe § 7, Satz 35, Seite 82). Daher kann man $f_0 + g_0$ eindeutig zu einer meromorphen Funktion auf D ergänzen. Diese wird mit $f + g$ bezeichnet. Ähnlich definiert man $f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$, letzteres aber nur dann, wenn die Nullstellenmenge von g diskret in D ist (Konvention: $\frac{1}{0} = \infty$, $\frac{1}{\infty} = 0$). Man beachte, dass die Nullstellenmenge von g diskret in D ist, falls D ein Gebiet und g nicht identisch null auf D ist (Korollar 2 zum Identitätssatz, Seite 66).
Schluß: Ist D ein Gebiet, so bilden die meromorphen Funktionen auf D einen Körper (unter den genannten Rechenoperationen).

Beispiel 24:

(i) Rationale Funktionen $R(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ $(z \in \mathbb{C})$ q nicht identisch null. $S(R) \subset$ Nullstellenmenge von q.

(ii) $\cot \pi z := \dfrac{\cos \pi z}{\sin \pi z} \Rightarrow S(\cot \pi z) = \mathbb{Z}$.

(iii) Quotienten $\frac{f}{g}$ holomorpher Funktionen $f, g : D \to \mathbb{C}$, g nicht identisch null auf D.

Wir werden später (Funktionentheorie II) zeigen: ist $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : D \to \overline{\mathbb{C}}$ meromorph, so gibt es holomorpe Funktionen $g, h : D \to \mathbb{C}$, $g \neq 0$, mit $f = \frac{h}{g}$.

4 Der Residuensatz

Ziel: Ist $D \subset \mathbb{C}$ ein Sterngebiet, so wissen wir, dass

$$\int_C f(z)\, dz = 0$$

für alle geschlossenen stückweise glatten Kurven C in D und für alle holomorphen Funktionen auf D. Der *Residuensatz* gibt eine Verallgemeinerung dieses Sachverhaltes auf holomorphe Funktionen $f : D \setminus \{z_1, \ldots, z_k\} \to \mathbb{C}$, wobei $z_1, \ldots, z_k$ endlich viele paarweise verschiedene Punkte aus D sind und C durch keinen der Punkte $z_1, \ldots, z_k$ läuft:

$$\int_C f(z)\, dz = 2\pi\, i \sum_{j=1}^{k} \chi(C; z_j)\ \mathrm{res}_{z=z_j} f$$

wobei $\chi(C_j; z_j)$ die *Umlaufzahl* von C bzgl. z_j ist und $\mathrm{res}_{z=z_j} f$ das *Residuum* von f in z_j ist.
Der Residuensatz hat wichtige Anwendungen sowohl theoretischer als auch praktischer Natur (Berechnung gewisser bestimmter Integrale reeller Funktionen).

§ 1 Umlaufzahlen

Definition: Sei C eine geschlossene, stückweise glatte Kurve in $\mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}$, $z \notin C$. Dann heißt

$$\chi(C; z) := \frac{1}{2\pi\, i} \int_C \frac{dw}{w - z}$$

die *Umlaufzahl* von C bzgl. z.

Satz 36: Es gilt $\chi(C; z) \in \mathbb{Z}$.

Beweis: Sei ohne Einschränkung vorausgesetzt, dass C glatt ist. Sei C durch die Gleichung $\varphi(t)$ $(a \leq t \leq b)$ gegeben. Für $t \in [a, b]$ sei

$$h(t) := \int_a^t \frac{\varphi'(u)}{\varphi(u) - z}\, du$$

Dann gilt insbesondere $h(b) = 2\pi\, i\, \chi(C; z)$. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist h auf $[a, b]$ stetig diffbar und

$$h'(t) = \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t) - z}$$

Sei $H(t) := e^{-h(t)} \cdot (\varphi(t) - z)$ $(a \leq t \leq b)$. Dann gilt $H'(t) = 0$. Daher ist $H(t)$ konstant auf $[a, b]$. Es gilt:

$$\begin{aligned} & H(a) = e^{-h(a)}\,(\varphi(a) - z) = e^0\,(\varphi(a) - z) = \varphi(a) - z \\ \Rightarrow \quad & H(t) = \varphi(a) - z \end{aligned}$$

Daher

$$e^{h(t)} = \frac{\varphi(t) - z}{\varphi(a) - z} \qquad (a \leq t \leq b)$$

Insbesondere gilt:

$$e^{h(b)} = \frac{\varphi(b) - z}{\varphi(a) - z} = 1$$

wegen $\varphi(a) = \varphi(b)$, denn C ist geschlossen. Daher muß gelten $h(b) = 2\pi\, i\, n$ mit $n \in \mathbb{Z}$.

$$\Rightarrow \quad \chi(C; z) = n \in \mathbb{Z}$$

$\square$

Beispiel 25: Sei $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$ und sei C die k-fach durchlaufene Kreislinie um a mit Radius $r > 0$, d. h., C wird gegeben durch die Gleichung

$$\varphi(t) = a + r\, e^{2\pi\, i\, k\, t} \quad (0 \leq t \leq 1)$$

man beachte: ist $k > 0$, so ist C die k-mal im positiven Sinne durchlaufene Kreislinie, ist $k < 0$, so ist C die $|k|$-mal im negativen Sinne durchlaufene Kreislinie.

Behauptung: Es gilt:

$$\chi(C; z) = \begin{cases} 0 & \text{falls } |z - a| > r \\ k & \text{falls } |z - a| < r \end{cases}$$

Begründung: Die erste Behauptung folgt aus dem Cauchyschen Integralsatz, denn für $|z-a| > r$ liegt C in einem Sterngebiet, auf dem $w \mapsto \frac{1}{w-z}$ holomorph ist. Für $|z-a| < r$ gilt:

$$\begin{aligned} \chi(C; z) &= \frac{1}{2\pi\, i} \int\limits_C \frac{dw}{w - z} \\ &= k \cdot \frac{1}{2\pi\, i} \int\limits_{|w-a|=r} \frac{dw}{w - z} \end{aligned}$$

(integriert wird über die positiv orientierte genau einmal durchlaufene Kreislinie)

$$= k$$

(CAUCHYsche Integralformel, Seite 52, angewandt mit $f \equiv 1$).

Obige Definition der Umlaufzahl ist ungeometrisch, stimmt aber im obigen Beispiel 25 mit unserer Anschauung überein. Man kann (topologisch) begründen, dass die Zahl $\chi(C; z)$ tatsächlich angibt, wie oft (im Sinne der Anschauung) C um z läuft.
Eine mathematisch präzise Definition der Umlaufzahl die auch unserer Anschauung sehr nahe kommt ist schwer. Alle für uns relevanten Berechnungen von Umlaufzahlen ergeben sich durch simple Modifikationen von obigem Beispiel 25. Oft ist auch folgendes (mit der Anschauung übereinstimmendes) Resultat nützlich:

Satz 37: Sei C eine geschlossene, stückweise glatte Kurve und seien $z_0, z_1 \notin C$. Die Punkte z_0 und z_1 seien durch einen Weg in $\mathbb{C} \setminus C$ verbindbar, d. h., es existiert $\varphi : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus C$, φ stetig mit $\varphi(0) = z_0$, $\varphi(1) = z_1$. Dann ist

$$\chi(C; z_0) = \chi(C; z_1)$$

Beweis: Sei $U := \mathbb{C} \setminus C$. Dann ist U offen. Sei $W(z_0) := \{z \in U |\ z \text{ ist mit } z_0 \text{ durch einen Weg in U verbindbar}\}$.
Dann ist $W(z_0)$ wegzusammenhängend, d.h. je zwei Punkte aus $W(z_0)$ sind durch einen Weg in $W(z_0)$ verbindbar (klar nach einfacher Überlegung!). Daher ist $W(z_0)$ auch zusammenhängend (Analysis II).
Beachte: Die Abbildung $U \to \mathbb{C}, z \mapsto \chi(C; z)$ ist holomorph, also auch stetig. Daher ist mit $W(z_0)$ auch $\chi(C; W(z_0))$ zusammenhängend. Nach Satz 36 ist aber $\chi(C; W(z_0)) \subset \mathbb{Z}$ (diskret).
$\Rightarrow \chi(C; W(z_0)) = \{\text{Punkt}\}$. Da $z_0, z_1 \in W(z_0)$ nach Voraussetzung folgt $\chi(C; z_0) = \chi(C; z_1)$. □

§ 2 Residuum

Definition: Sei $D \subset \mathbb{C}$, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und a eine Singularität von f. Sei

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

($0 < |z - a| < R$, $R > 0$ geeignet). Die LAURENTentwicklung von f um a. Dann heißt der Koeffizient a_{-1} das *Residuum* von f in a. Man schreibt:

$$a_{-1} = \operatorname{res}_{z=a} f$$

Bemerkung:

(i) Nach der Koeffizientenformel (Kapitel 3, § 7, Satz 34, Seite 80) gilt:

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi\, i} \int\limits_{|z-a|=\rho} f(z)\, dz$$

für ρ klein genug.

(ii) Ist a hebbar, so ist $\mathrm{res}_{z=a}\, f = 0$ (siehe Kapitel 3, § 7, Satz 35, Seite 82).

Beispiel 26:

(i) $f(z) = \dfrac{\cos z}{z}$ $(z = 0)$, wegen $\cos z = 1 - \dfrac{z^2}{2!} \pm \dots$ $(z \in \mathbb{C})$ folgt $\mathrm{res}_{z=a} \dfrac{\cos z}{z} = 1$.

(ii) $e^{1/z}$ $(z \neq 0)$, wegen $e^{1/z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{z^n}$ $(z = 0)$ gilt $\mathrm{res}_{z=0}\, e^{1/z} = 1$.

(iii) e^{1/z^2} $(z \neq 0)$, dann $\mathrm{res}_{z=0}\, e^{1/z^2} = 0$ (siehe (ii)).

Satz 38: (Residuensatz) Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Elementargebiet. Seien $z_1, \dots, z_k$ endlich viele, paarweise verschiedene Punkte in D. Sei $f : D \setminus \{z_1, \dots, z_k\} \to \mathbb{C}$ holomorph und C eine geschlossene, stückweise glatte Kurve in D mit $z_j \notin C\ \forall j = 1, \dots, k$. Dann gilt die Residuenformel:

$$\int\limits_C f(z)\, dz = 2\pi\, i \sum_{j=1}^{k} \chi(C; z_j)\ \mathrm{res}_{z=z_j}\, f$$

Beweis: Definitionsgemäß sind alle z_j $(j = 1, \dots, k)$ Singularitäten von f. Sei

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{n,j}\, (z - z_j)^n$$

$(0 < |z - z_j| < R_j,\ R_j > 0$ geeignet) die Laurententwicklung von f um z_j. Dann ist

$$a_{-1,j} = \mathrm{res}_{z=z_j}\, f$$

. Nach dem Satz über die Laurententwicklung (Kapitel 3, § 7, Satz 33, Seite 76) ist jeder Hauptteil $h_j\left(\frac{1}{z-z_j}\right) = \sum_{n=-1}^{-\infty} a_{n,j}\, (z - z_j)^n$ $(z \neq z_j)$ auf $C \setminus \{z_j\}$ holomorph. Sei

$$g(z) := f(z) - \sum_{j=1}^{k} h_j \left(\frac{1}{z - z_j}\right) \quad (z \in D \setminus \{z_1, \dots, z_k\})$$

Die Laurententwicklung von $g(z)$ um jeden der Punkte z_l hat keine negativen Terme, also sind alle Punkte z_l $(l = 1, \dots, k)$ hebbare Singularitäten von g (Kapitel 3, § 7, Satz 35, Seite 82). Da D ein Elementargebiet ist, hat g auf D eine Stammfunktion, also ist

$$\begin{aligned}\int_C g(z)\,dz &= 0\\ &= \int_C \left(f(z) - \sum_{j=1}^{k} h_j\left(\frac{1}{z-z_j}\right)\right) dz\\ &= \int_C f(z)\,dz - \sum_{j=1}^{k} \int_C h_j\left(\frac{1}{z-z_j}\right) dz\end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}\int_C h_j\left(\frac{1}{z-z_j}\right) dz &= \int_C \left(\sum_{n=-1}^{-\infty} a_{n,j}\,(z-z_j)^n\right) dz\\ &= \sum_{n=-1}^{-\infty} a_{n,j} \int_C (z-z_j)^n\,dz\end{aligned}$$

(Vertauschung von Integration und Summation zulässig, denn die Laurententwicklung konvergiert auf der kommpakten Menge C gleichmäßig, siehe Kapitel 3, § 7, Satz 34, Seite 80)

$$= a_{-1,j} \int_C \frac{dz}{z-z_j}$$

(denn für $n \neq -1$ sind die Integrale Null, da für $n \neq -1$ die Funktion $(z-z_j)^n$ auf $C \setminus \{z_j\}$ eine Stammfunktion hat, nämlich $\frac{1}{n+1}\,(z-z_j)^{n+1}$)

$$= 2\pi\, i\, \chi(C; z_j)\ \operatorname{res}_{z=z_j} f$$

Dies beweist die Residuenformel (und erklärt gleichzeitig den Namen „Residuum“). □

Bemerkung: Sind alle z_j hebbar, so ist $\operatorname{res}_{z=z_j} f = 0\ \forall j$. Daher ist der Residuensatz eine Verallgemeinerung des Cauchyschen Integralsatzes.

Satz 39: (Allgemeine Cauchysche Integralformel) Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Elementargebiet, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und C eine stückweise glatte, geschlossene Kurve in D. Dann gilt für alle $z \in D \setminus C$:

$$\chi(C; z)\, f(z) = \frac{1}{2\pi\, i} \int_C \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

Beweis: Sei (z fest) $g(w) := \frac{f(w)}{w-z}$ ($w \in D$, $w \neq z$). Dann ist $\operatorname{res}_{w=z} g(w) = f(z)$ (man entwickle $f(w)$ in eine TAYLORreihe um $w = z$, $f(w) = f(z) + \frac{f'(z)}{1!}(w-z) + \dots$) und $g(w)$ ist für $w \neq z$ holomorph. Nach dem Residuensatz gilt also

$$\int_C g(w)\, dw = 2\pi\, i\, \chi(C; z)\, f(z)$$

□

Lemma: Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und a ein Pol von f der Ordnung $m \geq 1$. Dann gilt:

$$\operatorname{res}_{z=a} f = \frac{g^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}$$

wobei $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}$ ($z \in \dot{U}(a)$, $g : U_R(a) \to \mathbb{C}$ holomorph, $g(a) \neq 0$ mit geeignetem $R > 0$). Insbesondere gilt für $m = 1$ (also einfacher Pol):

$$\operatorname{res}_{z=a} f = \lim_{z \to a} (z-a)\, f(z)$$

Beweis: Sei

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n \qquad (z \in U_R(a))$$

Die TAYLORentwicklung von g um a. Für $z \neq a$ folgt dann

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^{n-m}$$

Dies ist die LAURENTentwicklung von f um a, also gilt:

$$\operatorname{res}_{z=a} f = \frac{g^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}$$

nach Definition des Residuums. Ist $m = 1$, so gilt

$$\operatorname{res}_{z=a} f = g(a) = \lim_{z \to a} g(z) = \lim_{z \to a} (z-a)\, f(z)$$

□

Beispiel 27:

(i) $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+1}$ $(z \neq \pm i)$; $f(z) = \frac{e^{iz}}{(z+i)(z-i)}$, hat $f(z)$ in $z = \pm i$ einfache Pole. Daher gilt nach dem Lemma ($m = 1$):

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}_{z=i} f &= \lim_{z \to i} (z-i)\, f(z) = \lim_{z \to i} \frac{e^{iz}}{z+i} = \frac{e^{-1}}{2i} = \frac{-i}{2e} \\
\operatorname{res}_{z=-i} f &= \lim_{z \to -i} (z+i)\, f(z) = \lim_{z \to -i} \frac{e^{iz}}{z-i} = \frac{e}{-2i} = \frac{e\, i}{2}
\end{aligned}$$

Nach dem Residuensatz gilt daher für jede geschlossene, stückweise glatte Kurve C, die nicht durch $z = \pm i$ läuft:

$$\int_C \frac{e^{iz}}{z^2+1}\, dz = 2\pi i \left(-\chi(C; i)\, \frac{i}{2e} + \chi(C; -i)\, \frac{e}{2}\, i \right)$$

(ii) $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^3}$ $(z \neq \pm i)$, wegen $f(z) = \frac{1}{(z-i)^3(z+i)^3}$ hat f in $z = \pm i$ Pole der Ordnung 3. Es gilt:

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-i)^3} \quad \text{mit } g(z) = \frac{1}{(z+i)^3},\ (z \neq -i)$$

Nach dem Lemma ($m = 3$) gilt:

$$\operatorname{res}_{z=i} f = \frac{g''(i)}{2} = \frac{1}{2}\, \frac{3 \cdot 4}{(2i)^5} = \frac{-3i}{16}$$

wegen $g''(z) = 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{(z+i)^5}$.

§ 3 Funktionentheoretische Anwendung des Residuensatzes

Definition: Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und a eine Singularität von f, die nicht wesentlich ist. Sei

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n \quad (0 < |z-a| < R, R > 0 \text{ geeignet})$$

die Laurententwicklung von f um a. Man setzt dann

$$\operatorname{ord}(f; a) := \begin{cases} \min\{n \in \mathbb{Z} \mid a_n \neq 0\} & \text{falls } n \in \mathbb{Z} \text{ existiert mit } a_n \neq 0 \\ \infty & \text{falls } a_n = 0\ \forall n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Man beachte, dass es nur endlich viele $n < 0$ gibt mit $a_n \neq 0$ (Kapitel 3, § 6, Satz 32, Seite 75). Ist $\operatorname{ord}(f; a) = m$, so sagt man „die Ordnung von f in a ist m." Beachte die widersprüchliche Nutzung des Begriffs „Ordnung“: ist a ein Pol der Ordnung $m \in \mathbb{N}$ (in früherer Sprechweise), so gilt $\operatorname{ord}(f;a) = -m$.

Satz 40: („Null- und Polstellen zählendes Integral“) Sei D ein Elementargebiet und f eine auf D meromorphe Funktion mit endich vielen Nullstellen und Polstellen. Seien diese Null- und Polstellen mit $a_1, \dots, a_n$ bezeichnet. Sei C eine geschlossene stückweise glatte Kurve mit $a_j \notin C \ \forall j = 1, \dots, n$. Dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{\nu=1}^{n} \chi(C; a_\nu) \operatorname{ord}(f; a_\nu)$$

Beweis: Die Funktion $\frac{f'(z)}{f(z)}$ ist holomorph auf $D \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$. Nach dem Residuensatz gilt also:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{\nu=1}^{n} \chi(C; a_\nu) \operatorname{res}_{z=a_\nu} \frac{f'}{f}$$

Es genügt daher zu zeigen: ist a eine Nullstelle oder ein Pol von f, so gilt $\operatorname{res}_{z=a} \frac{f'}{f} = \operatorname{ord}(f;a)$. Man schreibe

$$f(z) = (z-a)^m\, g(z) \quad (z \in \dot{U}_R(a), R > 0 \text{ geeignet})$$

wobei $g : U_R(a) \to \mathbb{C}$ holomorph, $g(a) \neq 0$ und $m = \operatorname{ord}(f;a)$. (Ist $m < 0$, so hat man einen Pol, ist $m > 0$, so hat man eine Nullstelle von f.) Für z nahe bei a, $z \neq a$ gilt dann:

$$\begin{aligned}
& & f'(z) &= m\,(z-a)^{m-1}\, g(z) + (z-a)^m\, g'(z) \\
&\Rightarrow & \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{m\,(z-a)^{m-1}\, g(z) + (z-a)^m\, g'(z)}{(z-a)^m\, g(z)} \\
& & &= \frac{m}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)} \\
&\Rightarrow & \operatorname{res}_{z=a} \frac{f'}{f} &= m
\end{aligned}$$

denn $\frac{g'}{g}$ ist in a holomorph. □

Korollar: (Argumentprinzip) Seien die Voraussetzungen wie in Satz 40. Seien $a_1, \dots, a_r$ die Nullstellen von f und $a_{r+1}, \dots, a_n$ die Polstellen von f. Sei

$$N(0) := \sum_{\nu=1}^{r} \operatorname{ord}(f; a_\nu)$$

die Gesamtanzahl der Nullstellen von f und

$$N(\infty) := -\sum_{\nu=r+1}^{n} \operatorname{ord}(f; a_\nu)$$

Die Gesamtanzahl der Polstellen von f (jeweils mit Vielfachheit gezählt). Dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi\, i} \int\limits_C \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = N(0) - N(\infty)$$

für jede geschlossene, stückweise glatte Kurve C, die jeden der Punkte a_ν ($\nu = 1, \ldots, n$) genau einmal im positiven Sinne durchläuft.

Beweis: klar! □

Satz 41: (Hurwitz) Sei D ein Gebiet und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von holomorphen Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$, welche auf jeder kompakten Teilmenge von D gleichmäßig gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ konvergiert. Es gelte $f_n(z) \neq 0\ \forall z \in D$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Dann ist entweder f identisch Null auf D oder es ist $f(z) \neq 0\ \forall z \in D$.

Beweis: Nach Kapitel 3, § 4, Satz 25 (Seite 62) ist f auf D holomorph. Wir nehmen an, dass f nicht identisch Null auf D ist. Da D Gebiet ist die Nullstellenmenge von f diskret in D (Korollar 2 zum Identitätssatz, Seite 66). Sei $a \in D$ fest gewählt. Wir müssen zeigen $f(a) \neq 0$. Wegen der Diskretheit der Nullstellenmenge gibt es $r > 0$, so dass $\overline{U_r(a)} \subset D$ und f auf $\overline{U_r(a)} \setminus \{a\}$ nicht Null ist. Insbesondere

$$M := \min_{|z-a|=r} |f(z)| > 0$$

Da (f_n) auf der kompakten Menge $|z-a| = r$ gleichmäßig gegen f konvergiert, gibt es $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$|f_n(z) - f(z)| < \frac{M}{2} \quad \forall n > N,\ \forall z \text{ mit } |z-a| = r$$

Für solche n und solche z folgt dann

$$\begin{aligned} |f_n(z)| &= |f(z) - (f(z) - f_n(z))| \\ &\geq |f(z)| - |f(z) - f_n(z)| \\ &\geq M - \frac{M}{2} = \frac{M}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} \left| \frac{1}{f_n(z)} - \frac{1}{f(z)} \right| &= \frac{|f(z) - f_n(z)|}{|f_n(z)| \cdot |f(z)|} \\ &\leq \frac{2}{M} \cdot \frac{1}{M}\, |f_n(z) - f(z)| \end{aligned}$$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{f_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent gegen $\frac{1}{f}$ auf $|z-a|=r$, denn $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen f auf $|z-a|=r$. Wir wissen ferner, dass $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig auf $|z-a|=r$ gegen f' konvergiert (Kapitel 3, § 4, Satz 25, Seite 62). Hieraus folgt sofort, dass auch $\left(\frac{f_n'}{f_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $\frac{f'}{f}$ auf $|z-a|=r$ konvergiert. Daher folgt:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi\, i}\int\limits_{|z-a|=r}\frac{f_n'(z)}{f_n(z)}\,dz &= \frac{1}{2\pi\, i}\int\limits_{|z-a|=r}\lim_{n\to\infty}\frac{f_n'(z)}{f_n(z)}\,dz \\ &= \frac{1}{2\pi\, i}\int\limits_{|z-a|=r}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz\end{aligned} \tag{$*$}$$

Da $f_n \neq 0\ \forall z \in D$ und $\forall n \in \mathbb{N}$, ist nach dem Korollar zu Satz 40 die linke Seite von $(*)$ gleich null $\forall n \in \mathbb{N}$. Daher ist

$$\frac{1}{2\pi\, i}\int\limits_{|z-a|=r}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 0$$

Nach dem Korollar zu Satz 40 angewandt auf f folgt jetzt $f(z)\neq 0\ \forall z$ mit $|z-a|<r$. Daher ist $f(a)\neq 0$. □

Korollar: Sei $D\subset\mathbb{C}$ ein Gebiet und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von injektiven holomorphen Funktionen $f_n : D\to\mathbb{C}$, welche auf jeder kompakten Teilmenge von D gleichmäßig gegen $f : D\to\mathbb{C}$ konvergiert. Dann ist f entweder konstant oder auch injektiv.

Beweis: Sei f nicht konstant. Sei $a\in D$ fest. Dann sind die Funktionen $f_n(z)-f_n(a)$ nullstellenfrei auf dem Gebiet $D\setminus\{a\}$. Nach Satz 41 ist dann $f(z)-f(a)$ auf $D\setminus\{a\}$ entweder identisch null oder niemals null. Der erste Fall ist nach Voraussetzung ausgeschlossen, also $f(z)\neq f(a)\ \forall z\in D\setminus\{a\}$. Da $a\in D$ beliebig folgt, f ist injektiv auf D. □

§ 4 Berechnung von Integralen mit Hilfe des Residuensatzes

Satz 42: Sei $R(x,y)=\frac{p(x,y)}{q(x,y)}$ eine rationale Funktion mit reellen (oder auch komplexen) Koeffizienten in zwei Variablen (d. h., $p(x,y)$, $q(x,y)$ sind Polynome mit reellen bzw. komplexen Koeffizienten in zwei Unbestimmten). Sei $q(x,y)\neq 0\ \forall x,y\in\mathbb{R}$ mit $x^2+y^2=1$. Dann gilt:

$$\int\limits_0^{2\pi} R(\cos t,\sin t)\,dt = 2\pi\sum_{a\in\mathbb{E}}\operatorname{res}_{z=a} f$$

wobei $\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ die Einheitskreisscheibe ist und f die rationale Funktion gegeben durch

$$f(z) = \frac{1}{z}\, R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)$$

(Man beachte, dass in der Summe rechts tatsächlich nur über die endlich vielen Polstellen von f summiert wird.)

Beweis: Für $|z| = 1$ ist $\frac{1}{z} = \overline{z}$, daher sind

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) &= \frac{1}{2}(z+\overline{z}) \;=\; \operatorname{Re} z = x\\ \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right) &= \frac{1}{2i}(z-\overline{z}) = \operatorname{Im} z \;= y\end{aligned}$$

reelle Zahlen, falls $|z| = 1$. Wegen $1 = |z|^2 = x^2 + y^2$ ist $q(x,y) \neq 0$ für solche z, also hat f auf $|z| = 1$ keine Pole. Nach dem Residuensatz ist daher

$$\begin{aligned} & 2\pi\, i \sum_{\substack{a\in\mathbb{E}\\ a \text{ Pol}}} \operatorname{res}_{z=a} f = \int\limits_{|z|=1} f(z)\, dz\\ \Leftrightarrow\qquad & 2\pi \sum_{\substack{a\in\mathbb{E}\\ a \text{ Pol}}} \operatorname{res}_{z=a} f = \frac{1}{i} \int\limits_{|z|=1} f(z)\, dz\end{aligned}$$

(Man beachte $\chi(C; a) = 1$ wenn C die Kreislinie $|z| = 1$ und $a \in \mathbb{E}$)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{i} \int\limits_{|z|=1} R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right) \frac{1}{z}\, dz\\ &= \frac{1}{i} \int\limits_0^{2\pi} R\left(\frac{1}{2}\left(e^{it}+e^{-it}\right) \frac{1}{2i}\left(e^{it}-e^{-it}\right)\right) e^{-it}\, i\, e^{it}\, dt\\ &= \int\limits_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\, dt\end{aligned}$$

□

Beispiel 28:

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{a+\cos t} \qquad (a \in \mathbb{R}, a > 1)$$

Es gilt $R(x,y) = \frac{1}{a+x}$, also

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{a+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)} = \frac{2}{z^2 + 2a\, z + 1}$$

Es gilt

$$z^2 + 2a\,z + 1 = (z-\alpha)(z-\beta) \tag{†}$$

mit

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{-2a + \sqrt{4a^2-4}}{2} & \beta &= \frac{-2a - \sqrt{4a^2-4}}{2} \\ \alpha &= -a + \sqrt{a^2-1} & \beta &= -a - \sqrt{a^2-1} \end{aligned}$$

α, β sind reell. Behauptung $|\alpha| < 1$, d. h. $\alpha \in \mathbb{E}$. Denn

$$\begin{aligned} |\alpha| < 1 \quad &\Leftrightarrow \quad -1 < -a + \sqrt{a^2-1} < 1 \\ &\Leftrightarrow \quad a - 1 < \sqrt{a^2-1} < 1 + a \\ &\Leftrightarrow \quad (a-1)^2 < a^2 - 1 < (a+1)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad -2a + 1 < -1 < 2a + 1 \\ &\Leftrightarrow \quad -a < 1 < a \end{aligned}$$

Die letzte Zeile ist erfüllt, denn $a > 1$. Wegen $\alpha \cdot \beta = 1$ (Koeffizientenvergleich in (†)) folgt $|\beta| > 1$. Es gilt nach Satz 42 somit:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \cos t} &= 2\pi \operatorname{res}_{z=\alpha} \frac{2}{z^2 + 2a\,z + 1} \\ &= 4\pi \operatorname{res}_{z=\alpha} \frac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)} \\ &\overset{\S\,2,\ \text{Lemma}}{\underset{\text{Seite } 90}{=}} 4\pi \lim_{z\to\alpha} (z-\alpha) \frac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)} \\ &= 4\pi \frac{1}{\alpha - \beta} \\ &= 2\pi \frac{1}{\sqrt{a^2-1}} \end{aligned}$$

Vorbemerkung: Berechnung von Integralen rationaler Funktionen über $\mathbb{R}$. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Dann heißt f integrierbar über $\mathbb{R}$, falls die beiden Grenzwerte $\lim_{A\to\infty} \int_0^A f(x)\,dx$ und $\lim_{B\to\infty} \int_{-B}^0 f(x)\,dx$ (unabhängig voneinander) existieren. Man schreibt dann:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to\infty} \int_0^A f(x)\,dx + \lim_{B\to\infty} \int_{-B}^0 f(x)\,dx$$

f heißt absolut integrierbar, falls $|f|$ integrierbar ist. Man zeigt leicht, dass absolute Integrierbarkeit die Integrierbarkeit impliziert (Beweis mit Hilfe eines Analogons des Cauchy-Kriteriums, ähnlich wie bei unendlichen Reihen).

Satz 43: Seien $p(x)$ und $q(x)$ zwei Polynome mit reellen Koeffizienten. Es gelte

$$\operatorname{grad} q(x) \geq \operatorname{grad} p(x) + 2$$

und $q(x) \neq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$. Sei $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ $(x \in \mathbb{R})$. Dann gilt:

(i) $R(x)$ ist absolut integrierbar über $\mathbb{R}$.

(ii)
$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\, dx = 2\pi\, i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{res}_{z=a_j} R(z)$$

wobei $a_1, \ldots, a_k$ die Polstellen von $R(z)$ in der oberen Halbebene $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ sind.

Beweis:

(i) $R(x)$ ist stetig auf $\mathbb{R}$. Sei $p(z) = \sum_{\nu=0}^{m} b_\nu\, z^\nu$, $q(z) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu\, z^\nu$ $(z \in \mathbb{C})$ mit $m = \operatorname{grad} p(z)$, $n = \operatorname{grad} q(z)$. Für $z \neq 0$ ist
$$R(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = z^{m-n}\, \frac{\frac{b_0}{z^m} + \cdots + b_m}{\frac{c_0}{z^n} + \cdots + c_n}$$
Für $|z| \to \infty$ strebt der zweite Faktor gegen b_m/c_m, ist also insbesondere beschränkt. Also existiert $M > 0$ und $c > 0$, so dass
$$|R(z)| \leq |z^{m-n}|\, M \qquad \text{für } |z| > c$$
Also folgt:
$$|R(z)| \leq \frac{1}{|z|^2}\, M \qquad (|z| > c)$$
denn $n - m \geq 2$. Insbesondere gilt mit $z = x$ reell:
$$\begin{aligned}
\int_0^A |R(x)|\, dx &= \int_0^c |R(x)|\, dx + \int_c^A |R(x)|\, dx \qquad (A \text{ groß})\\
&\leq \int_0^c |R(x)|\, dx + M \cdot \int_c^A \frac{dx}{x^2}\\
&= \int_0^c |R(x)|\, dx + M\, \left(-x^{-1}\right)\Big|_c^A\\
&= \int_0^c |R(x)|\, dx + M \left(-\frac{1}{A} + \frac{1}{c}\right)\\
&\leq \int_0^c |R(x)|\, dx + \frac{M}{c} < \infty
\end{aligned}$$

(unabhängig von A). Hieraus folgt leicht, dass $\lim_{A\to\infty}\int_0^A |R(x)|\,dx$ existiert. (Dies ist das Analogon zur Tatsache, dass eine monoton wachsende, beschränkte Zahlenfolge konvergiert.) Genauso zeigt man, dass $\lim_{B\to\infty}\int_{-B}^0 |R(x)|\,dx$ existiert.

(ii) Sei $r > 0$ und C_r die geschlossene, stückweise glatte Kurve gegeben durch

$$\varphi(t) = \begin{cases} t & \text{für } -r \le t \le r \\ r\,e^{i(t-r)} & \text{für } \quad r \le t \le r+\pi \end{cases}$$

Sei $r > |a_j|\ \forall j = 1, \ldots, k$. Dann gilt:

$$\int\limits_{\alpha_r} R(z)\,dz + \int\limits_{-r}^{r} R(x)\,dx = \int\limits_{C_r} R(z)\,dz = 2\pi\,i \sum_{j=1}^{k} \mathrm{res}_{z=a_j} R(z)$$

nach dem Residuensatz, denn $\chi(C_r; a_j) = 1\ \forall j$ und wobei α_r durch $\varphi(t)$ für $r \le t \le r+\pi$ gegeben wird. α_r beschreibt somit einen Halbkreis in der oberen Halbene $\mathbb{H}$. Es gilt:

$$\begin{aligned} \left|\int\limits_{\alpha_r} R(z)\,dz\right| &= \left|\int\limits_0^{\pi} R(r\,e^{i\,t})\,r\,i\,e^{i\,t}\,dt\right| \\ &\le r \int\limits_0^{\pi} |R(r\,e^{i\,t})|\,dt \\ &\le r\,\frac{M}{|r\,e^{i\,t}|^2}\,\pi \end{aligned}$$

(nach vorher bewiesener Abschätzung, wenn r groß)

$$= \frac{M\,\pi}{r} \to 0 \qquad\qquad (r\to\infty)$$

Für $r \to \infty$ gilt $\int_{-r}^{r} R(x)\,dx \to \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx$. Nach Definition folgt die Behauptung.

□

Beispiel 29: Behauptung:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \pi$$

Es gilt $z^2+1 = (z-i)(z+i)$. Also hat $\frac{1}{z^2+1}$ genau eine Polstelle, nämlich i in $\mathbb{H}$ und es gilt:

$$\mathrm{res}_{z=i}\,\frac{1}{z^2+1} = \lim_{z\to i}\frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i}$$

Mit Satz 43 folgt:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = 2\pi\, i\, \frac{1}{2i} = \pi$$

Auf ähnliche Weise kann man Integrale der Form $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\, e^{i\,x}\, dx$ ($R(x)$ wie vorher) und somit auch $\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \cos x\, dx$, $\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \sin x\, dx$ berechnen. Man zeigt wie oben:

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\, e^{i\,x}\, dx = 2\pi\, i \sum_{\substack{a \text{ Pol} \\ a \in \mathbb{H}}} \operatorname{res}_{z=a} R(z)\, e^{i\,z}$$

(Begründung in den Übungsaufgaben)

5 Der kleine Riemannsche Abbildungssatz

§ 1 Konforme Abbildungen, Motivation

Definition: Seien $D, D^* \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Abbildung $\varphi : D \to D^*$ heißt *konform* (oder biholomorph) falls gilt:

(i) φ ist bijektiv

(ii) φ ist holomorph

(iii) φ^{-1} ist holomorph

Definition: Zwei Gebiete $D, D^* \subset \mathbb{C}$ heißen *konform äquivalent*, falls es eine konforme Abbildung $\varphi : D \to D^*$ gibt.

Bemerkung: Offenbar definiert der Begriff „konform äquivalent" eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Gebiete in $\mathbb{C}$.

Beispiel 30:

(i) Die obere Halbebene $\mathbb{H}$ und die Einheitskreisscheibe $\mathbb{E}$ sind konform äquivalent denn die Abbildung $\varphi : \mathbb{H} \to \mathbb{E}$, $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ (Möbius-Transformation) ist konform.

Beweis: Übung, bzw.

$$\begin{aligned}
\left|\frac{z-i}{z+i}\right| < 1 \quad &\Leftrightarrow \quad |z-i|^2 < |z+i|^2 \\
&\Leftrightarrow \quad (z-i)(\overline{z}+i) < (z+i)(\overline{z}-i) \\
&\Leftrightarrow \quad |z|^2 + i(z-\overline{z}) + 1 < |z|^2 - i(z-\overline{z}) + 1 \\
&\Leftrightarrow \quad 2i(z-\overline{z}) < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{z-\overline{z}}{2i} > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \operatorname{Im} z > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad z \in \mathbb{H}
\end{aligned}$$

(ii) $\mathbb{C}$ und $\mathbb{E}$ sind nicht konform äquivalent (denn ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{E}$ holomorph, so ist f beschränkt, also ist f konstant nach dem Satz von Liouville (Seite 58), also ist f z. B. nicht injektiv). Man zeigt aber leicht: $\mathbb{C}$ und $\mathbb{E}$ sind homöomorph.

Lemma 1: Seien D, D^* Gebiete und $\varphi : D \to D^*$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent:

(i) φ ist konform.

(ii) φ ist bijektiv, holomorph und $\varphi'(z) \neq 0 \ \forall z \in D$.

(iii) φ ist bijektiv und holomorph.

Beweis:

(i) $\Rightarrow$ (ii) Sei φ konform und $\psi := \varphi^{-1}$. Es gilt $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}$, also folgt nach Kettenregel

$$\begin{aligned} & & \varphi'\big(\psi(w)\big)\, \psi'(w) &= 1 & \forall w \in D^* \\ &\Rightarrow & \varphi'(\psi(w)) &\neq 0 & \\ &\Rightarrow & \varphi'(z) &\neq 0 & \forall z \in D \end{aligned}$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) trivial

(iii) $\Rightarrow$ (i) Übungsaufgabe

$\square$

Zwei Gebiete, die konform äquivalent sind, sollten dieselben funktionentheoretischen Eigenschaften haben.

Lemma 2: Seien $D, D^* \subset \mathbb{C}$ Gebiete und $\varphi : D \to D^*$ konform. Sei D ein Elementargebiet. Dann ist auch D^* ein Elementargebiet.

Beweis: Sei $f^* : D^* \to \mathbb{C}$ holomorph. Wir müssen zeigen, dass f^* eine Stammfunktion $F^* : D^* \to \mathbb{C}$ hat.

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "f^* \circ \varphi"'] & D^* \arrow[d, "f^*"] \\ & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

Da D ein Elementargebiet und $(f^* \circ \varphi)\, \varphi' : D \to \mathbb{C}$ holomorph ist, hat $(f^* \circ \varphi)\, \varphi'$ eine Stammfunktion $F : D \to \mathbb{C}$. Sei $\psi = \varphi^{-1}$ und $F^* := F \circ \psi$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} (F^*)'(w) &= (F \circ \psi)'(w) \\ &= F'\big(\psi(w)\big)\, \psi'(w) \\ &= (f^* \circ \varphi)\big(\psi(w)\big) \cdot \varphi'\big(\psi(w)\big) \cdot \psi'(w) \\ &= f^*(w) \cdot \underbrace{\varphi'\big(\psi(w)\big)\, \psi'(w)}_{=1} \\ &= f^*(w) \end{aligned}$$

Daher ist F^* eine Stammfunktion von f^*. Daher ist D^* ein Elementargebiet. $\square$

Hauptproblem: Man gebe eine Liste von schön beschreibbaren Gebieten $D \subset \mathbb{C}$ an, derart dass jedes Gebiet in $\mathbb{C}$ äquivalent ist zu einem Gebiet aus der Liste und keine zwei Gebiete in der Liste äquivalent sind.

Für Elementargebiete ist die Antwort (nicht aber ihr Beweis) einfach:

Satz 44: (Kleiner Riemannscher Abbildungssatz) Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Elementargebiet und $D \subsetneqq \mathbb{C}$. Dann ist D konform äquivalent zur Einheitskreisscheibe $\mathbb{E}$.

Bemerkung: Der kleine Abbildungssatz ist ein Spezialfall des „Großen Riemannschen Abbildungssatzes“: Dieser besagt, dass jede einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche (=komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension 1) konform äquivalent ist zu $\mathbb{C}$, $\mathbb{E}$ oder $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

§ 2 Beweis des kleinen Riemannschen Abbildungssatzes

Beweis erfolgt in mehreren Schritten.
1. Schritt: Vorbereitung

Lemma 1: Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Elementargebiet und $D \subsetneqq \mathbb{C}$. Dann ist D konform äquivalent zu einem Elementargebiet D^* mit $0 \in D^* \subset \mathbb{E}$.

Beweis: Nach Voraussetzung existiert $c \in \mathbb{C}$ mit $c \notin D$. Die Funktion $f(z) = z - c$ hat dann auf D keine Nullstelle und ist holomorph. Da D ein Elementargebiet hat also f auf D eine holomorphe Quadratwurzel, d. h., es existiert $g : D \to \mathbb{C}$ holomorph mit $g^2(z) = f(z)\ \forall z \in D$, siehe Kapitel 3, § 5, Lemma 2 (innerhalb des Beweises des Satzes von der Gebietstreue, Seite 67). □

Feststellung:

$$\begin{array}{lll} & g(z_1) = \pm g(z_2) & \text{mit } z_1, z_2 \in D \\ \Rightarrow & f(z_1) = f(z_2) & \\ \Rightarrow & z_1 = z_2 & \end{array}$$

Hieraus folgt:

(i) g ist injektiv, definiert also eine konforme Abbildung von D auf das Elementargebiet $D_1 := g(D)$ (man beachte den Satz von der Gebietstreue, Seite 67 und § 1, Lemma 1, 2, Seite 102).

(ii) Ist $w \in D_1$, $w \neq 0$, so folgt $-w \notin D_1$ (denn $w = g(z_1) = -g(z_2)$ mit $z_1, z_2 \in D \Rightarrow z_1 = z_2 \Rightarrow w = -w \Rightarrow w = 0$).

Da D_1 offen, gibt es $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ und $r > 0$ mit $U_r(a) \subset D_1$ und $0 \notin U_r(a)$. Dies bedeutet, dass alle Punkte der Form $-w$ mit $w \in U_r(a)$ in $\mathbb{C} \setminus D_1$ liegen (nach (ii)). Dies heißt, dass $U_r(-a) \subset \mathbb{C} \setminus D_1$. Man setze $b := -a$. Die Abbildung

$$w \mapsto \frac{1}{w - b}$$

ist für $w \neq b$ holomorph und injektiv, bildet also D_1 auf ein konform äquivalentes beschränktes Gebiet D_2 ab, denn

$$w \in D_1 \quad \Rightarrow \quad |w-b| \geq r \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{w-b}\right| \leq \frac{1}{r}$$

Translatiert man in geeigneter Weise ($z \mapsto z+\alpha$), so erhält man ein äquivalentes beschränktes Gebiet D_3 mit $0 \in D_3$. Schrumpft man noch geeignet (d. h. $w \mapsto \rho \cdot w$, $\rho > 0$), so erhält man ein äquivalentes Gebiet D^* mit $0 \in D^* \subset \mathbb{E}$. Wir werden daher im folgenden immer voraussetzen, dass $0 \in D \subset \mathbb{E}$. Ist $D = \mathbb{E}$, so ist nichts zu zeigen.

2. Schritt: Rückführung auf Extremalproblem

Lemma 2: Sei D ein Elementargebiet mit $0 \in D \subset \mathbb{E}$. Ist dann $D \subsetneqq \mathbb{E}$, so gibt es eine injektive holomorphe Abbildung $\varphi : D \to \mathbb{E}$ mit $\varphi(0) = 0$ und $|\varphi'(0)| > 1$.

Beweis: Wir wissen: für jedes $a \in \mathbb{E}$ ist die Abbildung $\varphi_a : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ mit

$$\varphi_a(z) = \frac{z-a}{\overline{a}\,z-1}$$

konform (Übungsaufgabe), und $\varphi_a(a) = 0$. Nach Voraussetzung existiert $b \in \mathbb{E}$ mit $b \notin D$. Daher ist φ_b auf D nullstellenfrei. Da D Elementargebiet, existiert $h : D \to \mathbb{C}$ holomorph mit $h^2(z) = \varphi_b(z)\ \forall z \in D$. Da $|\varphi_b(z)| < 1\ \forall z \in D$ und φ_b injektiv ist auch $|h(z)| < 1$ und h auf D injektiv. Sei $c := h(0)$ (man beachte $0 \in D$). Dann ist auch $\varphi := \varphi_c \circ h$ eine injektive holomorphe Abbildung von D nach $\mathbb{E}$. Explizit ist

$$\varphi(z) = \frac{h(z)-c}{\overline{c}\,h(z)-1} \quad \Rightarrow \quad \varphi(0) = 0$$

Es ist

$$\varphi'(z) = \frac{h'(z)\big(\overline{c}\,h(z)-1\big) - \overline{c}\,h'(z)\big(h(z)-c\big)}{\big(\overline{c}\,h(z)-1\big)^2}$$

$$\Rightarrow \qquad \varphi'(0) = \frac{h'(0)\,(|c|^2-1)}{(|c|^2-1)^2} = \frac{h'(0)}{|c|^2-1}$$

Ferner

$$
\begin{aligned}
& & |c|^2 = |h(0)|^2 = |\varphi_b(0)| = |b| \\
\Rightarrow & & |c| = |h(0)| = \sqrt{|b|} \\
& & h^2(z) = \varphi_b(z) \\
\Rightarrow & & 2\,h'(z)\,h(z) = \varphi_b'(z) = \frac{(\bar b\,z-1) - \bar b(z-b)}{\left(\bar b\,z-1\right)^2} = \frac{|b|^2-1}{\left(\bar b\,z-1\right)^2} \\
\Rightarrow & & 2\,h'(0)\,h(0) = |b|^2-1 \\
\Rightarrow & & |h'(0)| = \frac{\left||b|^2-1\right|}{2\sqrt{|b|}} \\
\Rightarrow & & |\varphi'(0)| = \frac{\left||b|^2-1\right|}{2\sqrt{|b|}} \cdot \frac{1}{||b|-1|} = \frac{|b|+1}{2\sqrt{|b|}} > 1
\end{aligned}
$$

(denn $|b| - 2\sqrt{|b|} + 1 > 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{|b|}-1\right)^2 > 0$). □

Korollar: Sei D ein Elementargebiet mit $0 \in D \subset \mathbb{E}$. Sei

$$\mathfrak{M}(D) := \{\varphi : D \to \mathbb{E} \mid \varphi \text{ injektiv, holomorph, } \varphi(0) = 0\}$$

Es gelte folgende Voraussetzung: Es gebe $\psi \in \mathfrak{M}(D)$ mit $|\psi'(0)|$ maximal, d. h.

$$|\psi'(0)| \geq |\varphi'(0)| \quad \forall \varphi \in \mathfrak{M}(D) \tag{$*$}$$

Dann gilt: ψ ist eine konforme Abbildung von D nach $\mathbb{E}$.

Beweis: Angenommen ψ wäre nicht surjektiv. Dann gilt also $\psi(D) \subsetneqq \mathbb{E}$. Mit D ist auch $\psi(D)$ Elementargebiet (§ 1, Lemma 2, Seite 102). Nach Lemma 2 (mit D ersetzt durch $\psi(D)$) existiert also $\varphi \in \mathfrak{M}(\psi(D))$ mit $|\varphi'(0)| > 1$. Es gilt dann $\varphi \circ \psi \in \mathfrak{M}(D)$, und

$$
\begin{aligned}
|(\varphi \circ \psi)'(0)| &= \left|\varphi'\big(\psi(0)\big)\,\psi'(0)\right| \\
&= |\varphi'(0)| \cdot |\psi'(0)| \\
&> |\psi'(0)|
\end{aligned}
$$

(man beachte, dass $|\psi'(0)| \geq 1$ wegen der Maximalbedingung an ψ). Dies ist ein Widerspruch zur Maximalität von $|\psi'(0)|$. Also ist ψ surjektiv und daher nach § 1, Lemma 1 (Seite 102) eine konforme Abbildung von D auf $\mathbb{E}$. □

Es genügt also, die Voraussetzung $(*)$ zu zeigen. Hierzu wird nur benutzt, dass D beschränkt ist und $0 \in D$

3. Schritt: Beweis von $(*)$ mit Hilfe des Satzes von Montel

Sei $M := \sup_{\varphi \in \mathfrak{M}(D)} |\varphi'(0)|$. (Man beachte $\mathfrak{M}(D) \neq \emptyset$, denn $\mathrm{id}|_D \in \mathfrak{M}(D)$ und a priori ist $M = \infty$ nicht ausgeschlossen.) Nach Definition des Supremums existiert eine Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $\varphi_n \in \mathfrak{M}(D)$ mit $|\varphi_n'(0)| \to M \;(n \to \infty)$.

Lemma 3: (Satz von MONTEL) Sei $A \subset \mathbb{C}$ offen und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von holomorphen Funktionen $f_n : A \to \mathbb{C}$, welche auf A beschränkt ist, d. h., es existiert $C > 0$ mit $|f_n(z)| \leq C \; \forall n \in \mathbb{N}$, $z \in A$. Dann besitzt $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge und diese konvergiert auf jeder kompakten Teilmenge von A gleichmäßig.

Beweis: siehe unter *4. Schritt* □

Wir wollen Lemma 3 auf die Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ anwenden. Wegen $\varphi_n(D) \subset \mathbb{E}$ ist die Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Daher hat nach Lemma 3 $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge, welche auf jeder kompakten Teilmenge von D gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $\psi : D \to \mathbb{C}$ konvergiert.
Wegen $\varphi_{n_\nu}(0) = 0$ und $\varphi_{n_\nu}(0) \to \psi(0)$ $(\nu \to \infty)$ gilt $\psi(0) = 0$. Nach Kapitel 3, § 4, Satz 25 (Seite 62) ist die Grenzfunktion ψ auf D holomorph (wegen gleichmäßiger Konvergenz auf Kompakta), und es gilt $\varphi'_{n_\nu}(z) \to \psi'(z) \; \forall z \in D$, insbesondere also für $z = 0$. Da $|\varphi'_{n_\nu}(0)| \to M$ $(\nu \to \infty)$, folgt also $M = |\psi'(0)|$, insbesondere gilt also $M < \infty$ und $|\varphi'(0)| \leq |\psi'(0)| \; \forall \varphi \in \mathfrak{M}(D)$.
Wegen der Maximalitätseigenschaft von ψ (gerade gezeigt) und $\mathrm{id}|_D \in \mathfrak{M}(D)$ ist $\psi'(0) \neq 0$ also ist ψ auf dem Gebiet nicht konstant (denn sonst wäre ja $\psi'(z) = 0 \; \forall z \in D$). Da alle φ_{n_ν} injektiv sind, ist nach dem Korollar des Satzes von HURWITZ (Kapitel 4, § 3, Seite 94) auch ψ injektiv. Wegen $\lim_{\nu\to\infty} \varphi_{n_\nu}(z) = \psi(z) \; \forall z \in D$ und $|\varphi_{n_\nu}(z)| < 1$ $\forall z \in D$ gilt $|\psi(z)| \leq 1$. Gäbe es $z_0 \in D$ mit $|\psi(z_0)| = 1$, so würde ψ in z_0 ein Betragsmaximum annehmen, wäre also konstant nach dem Maximumprinzip (Kapitel 3, § 5, Korollar 1(i) zu Satz 28, Seite 68), was bereits ausgeschlossen wurde. Also gilt $\psi(D) \subset \mathbb{E}$.
Zusammen folgt also $\psi \in \mathfrak{M}(D)$ und ψ erfüllt die Extremalbedingung $(*)$.
4. Schritt: Beweis des Satzes von MONTEL

Lemma 4: Sei $A \subset \mathbb{C}$ offen und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge holomorpher Funktionen $f_n : A \to \mathbb{C}$ mit $|f_n(z)| \leq C \; \forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in A$. Es gebe eine dichte Teilmenge $S \subset A$ (d. h. $\overline{S} = A$), so dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf S punktweise konvergiert. Dann konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf A, und zwar gleichmäßig auf kompakten Teilmengen.

Beweis: Es genügt, folgende Aussage zu zeigen: Sei $K \subset A$ kompakt. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|f_m(z) - f_n(z)| < \varepsilon \quad \forall m, n > N, \; \forall z \in K \tag{\dagger}$$

In der Tat: aus (†) folgt zunächst, dass $(f_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ für jedes $z \in K$ konvergiert, denn $\mathbb{C}$ ist vollständig. Sei

$$f(z) := \lim_{n\to\infty} f_m(z) \quad (z \in K)$$

Man wähle $n > N$ fest und nehme in (†) den Limes für $m \to \infty$. Dann folgt:

$$|f(z) - f_n(z)| = \lim_{m\to\infty} |f_m(z) - f_n(z)| \leq \varepsilon$$

Dies gilt $\forall n > N$ und $\forall z \in K$. Dies heißt, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert auf K gleichmäßig auf f. Sei $K \subset A$ kompakt. Da A offen, existiert zu jedem $a \in K \subset A$ ein $r_a > 0$ mit

$\overline{U_{2r_a}(a)} \subset A$. Die Familie $\{U_{r_a}(a)\}_{a\in K}$ bildet eine offene Überdeckung von K. Da K kompakt, existiert eine endliche Teilüberdeckung, d. h.

$$K \subset \bigcup_{\nu=1}^{N} U_{r_\nu}(a_\nu)$$

mit endlich vielen Punkten $a_1, \dots, a_N \in K$, wobei $r_\nu := r_{a_\nu}$. Es folgt insbesondere

$$K \subset \bigcup_{\nu=1}^{N} \overline{U_{r_\nu}(a_\nu)}$$

und nach Konstruktion ist $\overline{U_{r_\nu}(a_\nu)} \subset A$. Es genügt daher, (†) für kompakte Mengen der Form

$$K = \overline{U_r(a)} \subset D$$

zu zeigen ($a \in A$, $r > 0$), wobei man noch anwenden kann, dass $\overline{U_{2r}(a)} \subset A$.
Sei $\varepsilon > 0$. Man wähle $\delta > 0$ mit $\delta > \frac{r}{8C} \cdot \varepsilon$. Sei f eine der Funktionen f_n ($n \in \mathbb{N}$). Seien $z, z' \in U_{\frac{3}{2}r}(a)$ mit $|z - z'| < \delta$. Nach der Cauchyschen Integralformel (Seite 52) gilt dann:

$$\begin{aligned}
|f(z) - f(z')| &= \left| \frac{1}{2\pi\, i} \int\limits_{|w-a|=2r} \left(\frac{f(w)}{w-z} - \frac{f(w)}{w-z'} \right) dw \right| \\
&= \frac{|z-z'|}{2\pi} \left| \int\limits_{|w-a|=2r} \frac{f(w)}{(w-z)(w-z')}\, dw \right|
\end{aligned}$$

Für $|w - a| = 2r$ und $z \in U_{\frac{3}{2}r}(a)$ gilt $|w - z| = |(w - a) - (z - a)| \geq |w - a| - |z - a| \geq 2r - \frac{3}{2}\, r = \frac{r}{2}$. Daher:

$$\begin{aligned}
|f(z) - f(z')| &\leq \frac{|z-z'|}{2\pi} \left(\frac{2}{r}\right)^2 \cdot C \cdot 4\pi\, r \\
&= \frac{|z-z'| \cdot 8C}{r} \\
&< \frac{r}{8C} \cdot \varepsilon \cdot \frac{8C}{r} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Es gilt also:

$$|f_n(z) - f_n(z')| < \varepsilon$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall z, z' \in U_{\frac{3}{2}r}(a)$ mit $|z - z'| < \delta$. Da S dicht in A gilt:

$$\overline{U_r(a)} \subset \bigcup_{b \in S \cap U_{\frac{3}{2}r}(a)} U_\delta(a)$$

Da $\overline{U_r(a)}$ kompakt, gibt es endlich viele Punkte $b_1, \ldots, b_M \in S \cap \overline{U_{\frac{3}{2}r}(a)}$, so dass

$$\overline{U_r(a)} \subset \bigcup_{\mu=1}^{M} U_\delta(b_\mu)$$

Sei $z \in \overline{U_r(a)}$. Dann gilt für geeignetes $\mu \in \{1, \ldots, M\}$

$$\begin{aligned} |f_m(z) - f_n(z)| &\leq |f_m(z) - f_m(b_\mu)| + |f_m(b_\mu) - f_n(b_\mu)| + |f_n(b_\mu) - f_n(z)| \\ &< \varepsilon + |f_m(b_\mu) - f_n(b_\mu)| + \varepsilon \\ &< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon \end{aligned}$$

(nach dem gerade Bewiesenen) $\forall m, n > N$ mit N geeignet, wobei für alle der endlich vielen Punkte b_μ das gleiche N gewählt werden kann, denn $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert auf S.□

Beweis des Satzes von Montel*:* Sei S eine abzählbar dichte Teilmenge von A, etwa

$$S = \{x + i\, y \in A \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$$

Sei $s_1, s_2, \ldots$ eine Abzählung von S. Die Folge $(f_n(s_1))_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt, nach Bolzano-Weierstrass hat also $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge, die in s_1 konvergiert. Eine solche sei $f_{11}, f_{12}, \ldots$. Ebenso hat diese wiederum eine Teilfolge $f_{21}, f_{22}, f_{23}, \ldots$, die in s_2 konvergiert. Induktiv konstruiert man eine Folge von Folgen, derart dass jede dieser Folgen Teilfolgen der vorhergehenden ist und so dass die n-te Folge $f_{n1}, f_{n2}, f_{n3}, \ldots$ in $s_1, \ldots, s_n$ konvergiert. Dann konvergiert die Diagonalfolge $f_{11}, f_{22}, f_{33}, \ldots$ $\forall s \in S$ (offensichtlich!). Behauptung folgt somit aus Lemma 4.
Dies beweist den kleinen Riemannschen Abbildungssatz.

§ 3 Geometrische Charakterisierung von Elementargebieten

Ziel: Zu zeigen, dass die Elementargebiete $D \subset \mathbb{C}$ genau die Gebiete in $\mathbb{C}$ ohne Löcher sind (d. h. einfach zusammenhängend).

Lemma 1: Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $K \subset D$ kompakt. Dann gibt es $r > 0$, so dass $\forall a \in K$ die Kreisscheibe $U_r(a)$ vom Radius r um a ganz in D enthalten ist (r heißt „Lebesguesche Zahl“).

Beweis: Zu jedem $a \in K$ wähle $r_a > 0$ mit $U_{2r_a}(a) \subset D$. Dann ist $\{U_{r_a}(a)\}_{a \in K}$ eine offene Überdeckung von K, da K Kompakt gilt also:

$$K \subset \bigcup_{\nu=1}^{N} U_{2r_\nu}(a_\nu) \quad (r_\nu := r_{a_\nu})$$

mit endlich vielen $a_1, \dots, a_N$. Sei $r := \min_{\nu=1,\dots,N}\{a_\nu\}$. Sei $a \in K$. Man wähle ν mit $|a - a_\nu| < r_\nu$. Sei $z \in U_r(a)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & |z - a_\nu| \le |z - a| + |a - a_\nu| < r + r_\nu \le 2\, r_\nu \\ \Rightarrow \quad & z \in U_{2r_\nu}(a) \subset D \\ \Rightarrow \quad & U_r(a) \subset D \end{aligned}$$

□

Lemma 2: Sei $D \subset \mathbb{C}$ und C eine (stetige) Kurve in D gegeben durch $\varphi(t)$ $(a \le t \le b)$. Dann existiert eine Unterteilung $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ und ein $r > 0$, derart dass mit $z_\nu := \varphi(a_\nu)$ $(0 \le \nu \le n)$ gilt für $0 \le \nu \le n - 1$:

$$U_r(z_\nu) \subset D$$
$$\varphi([a_\nu, a_{\nu+1}]) \subset U_r(z_\nu) \cap U_r(z_{\nu+1})$$

Beweis: $C = \varphi([a, b])$ ist kompakt, also existiert $r > 0$ mit $U_r(a) \subset D$ $\forall a \in K$ nach Lemma 1. Da φ auf dem Kompaktum $[a, b]$ gleichmäßig stetig ist, gibt es zu diesem $r > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$|\varphi(t) - \varphi(t')| < r$$

falls $t, t' \in [a, b]$, $|t - t'| < \delta$. Man wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{b-a}{n} < \delta$ und unterteile $[a, b]$ in die n Teilintervalle

$$\left[a + \frac{b-a}{n}\,\nu,\ a + \frac{b-a}{n}\,(\nu + 1)\right] \quad (0 \le \nu \le n - 1)$$

der Länge $\frac{b-a}{n} < \delta$. Sei $a_\nu = a + \frac{b-a}{n}\,\nu$ $(0 \le \nu \le n)$ und $z_\nu := \varphi(a_\nu)$. Dann gilt $U_r(z_\nu) \subset D$ und für $t \in [a_\nu, a_{\nu+1}]$ ist $|t - a_\nu|,\ |t - a_{\nu+1}| < \delta$. Also folgt:

$$|\varphi(t) - \varphi(a_\nu)|\,,\ |\varphi(t) - \varphi(a_{\nu+1})| < r$$

d. h. $\varphi(t) \in U_r(z_\nu) \cap U_r(z_{\nu+1})$. □

Definition: Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei C eine Kurve in D. Sei die Notation wie in Lemma 2. Dann definiert man das Integral von f längs C als

$$\int_C f(z)\, dz := \sum_{\nu=0}^{n-1} \int_{z_\nu}^{z_{\nu+1}} f(z)\, dz \tag{‡}$$

wobei jeweils längs der Verbindungsgeraden z_ν nach $z_{\nu+1}$ integriert wird (man beachte nach Lemma 2 liegt $z_\nu, z_{\nu+1}$ in D, also auch die Verbindungsgerade in D).

Lemma 3:

(i) Obige Definition ist unabhängig von der Auswahl der Unterteilung.

(ii) Ist C stückweise glatt, so ist die rechte Seite von (‡) gleich dem üblichen Kurvenintegral, wie früher definiert.

Beweis: Man zeigt dies mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes für Kreisscheiben, z. B. (ii): ist C stückweise glatt, so auch das Teilstück von z_ν nach $z_{\nu+1}$, also ist dieses zusammen mit der Geraden von z_ν nach $z_{\nu+1}$ eine geschlossene stückweise glatte Kurve im Sterngebiet $U_r(z_\nu)$, also ist das Integral von f hierüber gleich null. Im Falle (i) betrachte man gemeinsame Verfeinerungen. □

Definition: Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und seien C_1, C_2 zwei Kurven in D gegeben durch $\varphi_1(t)$ bzw. $\varphi_2(t)$ $(0 \leq t \leq 1)$. Es gelte

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) \qquad \varphi_1(1) = \varphi_2(1)$$

(gleicher Anfangs- und Endpunkt). Dann heißen C_1 und C_2 homotop in D (mit festgehaltenen Endpunkten), falls es eine stetige Abbildung $H : [0,1] \times [0,1] \to D$ gibt mit

(i) $H(t,0) = \varphi_1(t)$, $H(t,1) = \varphi_2(t)$

(ii) $\forall s \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} H(0,s) &= \varphi_1(0) = \varphi_2(0) \\ H(1,s) &= \varphi_1(1) = \varphi_2(1) \end{aligned}$$

Anschaulich: Für jedes $s \in [0,1]$ definiert $\varphi_s(t) := H(t,s)$ $(0 \leq t \leq 1)$ eine Kurve von $\varphi_1(0)$ nach $\varphi_1(1)$ und für $s = 0$ bzw. $s = 1$ erhält man C_1 bzw. C_2. Obige Definition bedeutet also, dass man C_1 in D stetig nach C_2 deformieren kann, wobei die Endpunkte fest bleiben.

Beispiel 31: Ist D konvex, so sind je zwei Kurven C_1 und C_2 in D mit gleichen Anfangs- und Endpunkten homotop in D. Eine Abbildung H mit den geforderten Eigenschaften ist

$$H(t,s) = \varphi_1(t) + s\,(\varphi_2(t) - \varphi_1(t)) \quad (0 \leq s, t \leq 1)$$

Definition:

(i) Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und C eine geschlossene Kurve in D mit Anfangs- und Endpunkt z_0. Dann nennt man C nullhomotop in D, falls C homotop in D zur konstanten Kurve C_{z_0} gegeben durch $\varphi(t) = z_0$ $(0 \leq t \leq 1)$ ist.

(ii) Ein Gebiet D heißt einfach zusammenhängend, falls jede geschlossene Kurve in D nullhomotop in D ist.

Bemerkung: (ii) ist die mathematische Präzisierung des anschaulichen Sachverhaltes „D hat keine Löcher."

Satz 45: (Homotopieversion des CAUCHYschen Integralsatzes)

(i) Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und seien C_1, C_2 zwei Kurven in D mit gleichem Anfangs- und Endpunkten, die in D homotop sind. Sei $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist

$$\int\limits_{C_1} f(z)\,dz = \int\limits_{C_2} f(z)\,dz$$

(ii) Sei D ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Dann ist

$$\int\limits_{C} f(z)\,dz = 0$$

für alle geschlossenen Kurven C in D.

Beweis:

(ii) Folgt aus (i), denn

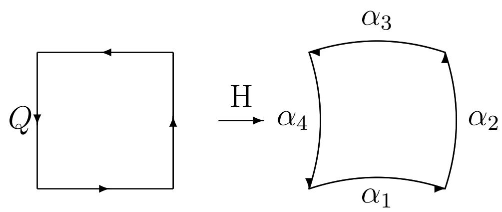
$$\int\limits_{C_{z_0}} f(z)\,dz = 0$$

(i) **Lemma 4:** Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen. Sei $Q := [0,1] \times [0,1]$ und $H : Q \to D$ eine stetige Abbildung. Sei $\partial H(Q)$ der positiv orientierte Rand von $H(Q)$. $\partial H(Q)$ ist die geschlossene Kurve in D gegeben als $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$ mit

$$\begin{aligned}
\alpha_1(t) &= H(t,0) && 0 \leq t \leq 1\\
\alpha_2(t) &= H(1,t-1) && 1 \leq t \leq 2\\
\alpha_3(t) &= H(3-t,1) && 2 \leq t \leq 3\\
\alpha_4(t) &= H(0,4-t) && 3 \leq t \leq 4
\end{aligned}$$

Sei $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, dann gilt

$$\int\limits_{\partial H(Q)} f(z)\,dz = 0$$



Beweis: Die stetige Funktion H ist auf dem Kompaktum Q gleichmäßig stetig. Ähnlich wie beim Beweis von Lemma 2 kann man daher unter Benutzung von Lemma 1 eine Unterteilung von Q in n^2 Teilquadrate $Q_{\mu\nu}$ $(0 \leq \mu,\ \nu < n)$ gleicher Kantenlänge finden, derart dass $H(Q_{\mu\nu}) \subset U_{\mu\nu} \subset D$, wobei $U_{\mu\nu}$ eine offene Kreisscheibe ist. Nach dem CAUCHYschen Integralsatz ist

$$\int_{\partial H(Q_{\mu\nu})} f(z)\,dz = 0$$

(integriert wird nach Definition über eine geschlossene Kurve, die aus kleinen Geradenstücken besteht). Andererseits ist das Integral

$$\int_{\partial H(Q)} f(z)\,dz = \sum_{0\leq\mu,\nu<n} \int_{\partial H(Q_{\mu\nu})} f(z)\,dz = 0$$

Hieraus folgt die Behauptung. □

Sei $H : Q \to D$ eine Homotopie von C_1 nach C_2. In der Notation von Lemma 4 ist dann $C_1 = \alpha_1$ und $-C_2 = \alpha_3$, und es gilt α_3 und α_4 sind konstante Kurven. Nach Lemma 4 ist somit

$$0 = \int_{\partial H(Q)} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz - \int_{C_2} f(z)\,dz + 0$$

□

Satz 46: Sei D ein Gebiet. Dann sind äquivalent

(i) D ist ein Elementargebiet.

(ii) D ist einfach zusammenhängend.

Beweis:

(ii) ⇒ (i) Sei D einfach zusammenhängend. Sei $z_1 \in D$ fest gewählt. Sei $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei

$$F(z) := \int_{z_1}^{z} f(w)\,dw \quad (z \in D)$$

(integriert wird längs irgendeiner Kurve von z_1 nach z. Das Integral ist unabhängig von der Auswahl nach Satz 45(ii), Seite 111). Man zeigt F ist holomorph und $F' = f$, also ist D ein Elementargebiet (genauer $z_0 \in D$, schreibe man

$$F(z) = F(z_0) + \int_{z_0}^{z} f(w)\,dw$$

und schätze den Differenzenquotienten $\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0}$ wie üblich ab (Kapitel 3, § 2, Satz 20, Seite 50).)

(i) $\Rightarrow$ (ii) Nach dem kleinen Riemannschen Abbildungssatz ist $D = \mathbb{C}$ oder D ist komplex äquivalent zu $\mathbb{E}$. Da $\mathbb{C}$ und $\mathbb{E}$ konvex sind $\mathbb{C}$ und $\mathbb{E}$ auch einfach zusammenhängend. Man beachte jetzt, dass konforme Abbildungen insbesondere topologisch (d. h. homöomorph) sind und dass der Begriff nullhomotop invariant unter Homöomorphismen ist (genauer: $D, D' \subset \mathbb{C}$ offen, $D \overset{\varphi}{\underset{\sim}{\to}} D'$ (homöomorph), φ Homöomorphismus, H Homotopie in $D \Rightarrow \varphi \circ H$ Homotopie in D'). Hieraus folgt die Behauptung.

□

Korollar:

(i) Der Begriff „Elementargebiet" ist topologischer Natur.

(ii) Je zwei einfach zusammenhängende Gebiete in der Ebene sind homöomorph.

Beweis:

(i) klar!

(ii) Bis auf konforme Äquivalenz gibt es genau zwei Elementargebiete, nämlich $\mathbb{C}$ und $\mathbb{E}$ (Riemann), $\mathbb{C}$ und $\mathbb{E}$ sind homöomorph unter

$$\begin{array}{ll} \mathbb{C} \to \mathbb{E} & z \mapsto \dfrac{z}{1+|z|} \\ \mathbb{E} \to \mathbb{C} & w \mapsto \dfrac{w}{1-|w|} \end{array}$$

(nachrechnen!).

□

Übungsaufgaben

Aufgabe 1:
Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil von

a) $\left(\dfrac{2+\imath}{3-2\imath}\right)^2$

b) $(1+\imath)^n$ für $n \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 2:
Zeigen Sie: Sind $a, b \in \mathbb{C}$ mit $|a| < 1$ und $|b| < 1$, so ist

$$\left|\frac{a-b}{1-\bar{a}\,b}\right| < 1$$

Aufgabe 3:
Es sei $p(z) = a_n\,z^n + a_{n-1}\,z^{n-1} + \cdots + a_0$ ($n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$) ein Polynom mit Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $z_0 \in \mathbb{C}$ genau dann eine Nullstelle von p ist, wenn $\overline{z_0}$ eine Nullstelle von p ist.

Aufgabe 4:
Es sei $p(z) = a_n\,z^n + a_{n-1}\,z^{n-1} + \cdots + a_0$ ($n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$) ein Polynom mit Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, wobei $a_n \neq 0$. Zeigen Sie, dass ein $L > 0$ existiert, so dass

$$\frac{|a_n\,z^n|}{2} < |p(z)| < 2|a_n\,z^n|$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq L$.

Aufgabe 5:
Es seien $n \in \mathbb{N}$, $\zeta_n := \cos\frac{2\pi}{n} + \imath\sin\frac{2\pi}{n} \in \mathbb{C}$. Beweisen Sie, dass für alle $h \in \mathbb{N}$ gilt:

$$1 + \zeta_n^{2h} + \cdots + \zeta_n^{(n-1)h} = \begin{cases} n, & \text{falls } n \mid h. \\ 0, & \text{falls } n \nmid h. \end{cases}$$

Aufgabe 6:
Beweisen Sie die DE MOIVRE'schen Formeln: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\cos n\,\varphi = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ gerade}}}^{n} (-1)^{\frac{k}{2}} \binom{n}{k} (\cos\varphi)^{n-k} (\sin\varphi)^k,$$

$$\sin n\,\varphi = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ ungerade}}}^{n} (-1)^{\frac{k-1}{2}} \binom{n}{k} (\cos\varphi)^{n-k} (\sin\varphi)^k,$$

Aufgabe 7:
Es seien $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \ : \ \operatorname{Im} z > 0\}$, $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < 1\}$ und

$$f : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longmapsto \frac{z - \imath}{z + \imath}$$

(„Cayley-Abbildung“). Zeigen Sie: f ist injektiv und $f(\mathbb{H}) = \mathbb{E}$.

Aufgabe 8:
Bestimmen Sie alle Punkte $z_0 \in \mathbb{C}$, in denen die folgenden Funktionen komplex differenzierbar sind:

a) $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto \operatorname{Re} z$,

b) $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto z|z|^2$,

c) $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto \sin |z|$.

Aufgabe 9:
Es sei

$$S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

die Kugeloberfläche. Beweisen Sie, dass die Abbildung

$$\pi : S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad (x, y, z) \longmapsto \frac{x + \imath y}{1 - z}$$

bijektiv ist („Stereographische Projektion“). *Bemerkung:* Ist „∞“ ein Symbol, das nicht in $\mathbb{C}$ liegt, so kann man vermöge der obigen Abbildung S^2 und $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ identifizieren.

Aufgabe 10:

a) Es seien $D \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in D$ und $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ sei in z_0 komplex differenzierbar. Weiter seien $D^* := \{z \in \mathbb{C} \ : \ \bar{z} \in D\}$ und $g : D^* \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto \overline{f(\bar{z})}$. Zeigen Sie, dass g in $\overline{z_0}$ komplex differenzierbar ist und berechnen Sie $g'(\overline{z_0})$.

b) Die Funktion $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ sei holomorph im Gebiet $G \subset \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:
   (i) f ist konstant in G.
   (ii) $|f|$ ist konstant in G.
   (iii) $\bar{f}$ ist holomorph in G.

Aufgabe 11:
Es sei $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) := \{M \in \mathrm{M}(2; \mathbb{R}) \ : \ \det M = 1\}$ und für $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2; \mathbb{R})$ sei

$$\rho_M : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}, \quad z \longmapsto \frac{a\,z + b}{c\,z + d},$$

wobei $\mathbb{H}$ wie in Aufgabe 7 die obere Halbebene bezeichne. Beweisen Sie:

a) Für alle $M \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ ist ρ_M wohldefiniert und biholomorph, d. h. bijektiv mit holomorpher Umkehrabbildung.

b) Für $M, N \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ gilt
$$\rho_{M\,N} = \rho_M \circ \rho_N.$$

Aufgabe 12:
Man bestimme die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$,

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{k\,n}{n} z^n$ für $k \in \mathbb{N}$,

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt[n]{n!}}$,

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \sin n \; z^n$.

Aufgabe 13:
Zeigen Sie, dass die Funktion
$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longmapsto \sin z$$
keine Polynomfunktion ist.

Aufgabe 14:
Es sei $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$. Beweisen Sie:

a) $\displaystyle\mathrm{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$,

b) $\displaystyle\frac{1}{2}(\mathrm{Log}(1-z))^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n}{n+1} z^{n+1}$,

wobei $s_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ $(n \in \mathbb{N})$ und Log den Hauptwert des Logarithmus bezeichnet.

Aufgabe 15:
Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ eine konvergente Reihe komplexer Zahlen. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k}$. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergiert und dass
$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

Hinweis: Setzen Sie $B_n := \sum_{k=0}^n b_k$, $B := \lim_{n\to\infty} B_n$ und leiten Sie eine Abschätzung der Form

$$\left|\sum_{k=0}^n a_k\, B - \sum_{k=0}^n c_k\right| \le \sum_{k=0}^n |a_k|\,|B - B_{n-k}|$$

her.

Aufgabe 16:
Es sei $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ eine *harmonische* Funktion, d. h., u ist zweimal stetig partiell differenzierbar und es gilt

$$\triangle u(x,y) := \frac{\partial^2}{\partial x^2}\, u(x,y) \frac{\partial^2}{\partial y^2}\, u(x,y) = 0$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie:

a) Es existiert eine harmonische Funktion $v : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, so dass die Funktion

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad x + \imath\, y \longmapsto u(x,y) + \imath\, v(x,y)$$

holomorph ist. *Hinweis:* Machen Sie den Ansatz

$$v(x,y) := \int_0^y \frac{\partial}{\partial x}\, u(0,t)\, dt - \int_0^x \frac{\partial}{\partial y}\, u(t,y)\, dt.$$

b) v ist bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt.

Aufgabe 17:
Zeigen Sie: Für $z \in \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^n (\sin k\, z)^2 = \frac{n}{2} - \frac{\cos((n+1)z)\, \sin(n\, z)}{2\sin z}$$

Aufgabe 18:
Es seien $a_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ und $R \in [0,\infty]$ der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^\infty a_n\, z^n$. Zeigen Sie:

$$\liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \le R \le \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Aufgabe 19:
Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale:

a) $\displaystyle\int_C \bar{z}^3\, dz,\ C : \varphi(t) = e^{\imath\, t},\ 0 \le t \le \pi.$

b) $\displaystyle\int\limits_C \operatorname{Log} z\, dz,\ C : \varphi(t) = R\, e^{\imath t},\ -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2},\ R > 0$ fest.

c) $\displaystyle\int\limits_C \frac{\sin z}{z}\, dz,\ C : \varphi(t) = e^{\imath t},\ 0 \le t \le 2\pi.$

Aufgabe 20:
Es seien $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph und γ ein stückweise glatter geschlossener Weg in D. Beweisen Sie:

$$\int_\gamma \overline{f(z)}\, f'(z)\, dz$$

ist eine rein imaginäre komplexe Zahl.

Aufgabe 21:

a) Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}$ sind Gebiete in $\mathbb{C}$? (Mit Beweis!)
   (i) $\mathbb{R}$
   (ii) $\{z \in \mathbb{C} \ :\ |\exp(z)| > 1\}$.
   (iii) $\{z \in \mathbb{C} \ :\ |z^2 - 1| < 3\}$.
   (iv) $\{z \in \mathbb{C} \ :\ |z^2 - 3| < 1\}$.

b) Zeigen Sie, dass jedes Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ wegzusammenhängend ist.
   Hinweis: Zeigen Sie, dass für ein festes $x \in G$ die Menge aller $y \in G$, die mit x durch einen Streckenzug in G verbindbar sind, offen und abgeschlossen ist.

Aufgabe 22:
Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Elementagebiet und $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Weiter sei $f(z) \neq 0$ für alle $z \in G$ und f' sei ebenfalls holomorph auf G. (Die letzte Voraussetzung wird sich im weiteren Verlauf der Vorlesung als überflüssig erweisen.) Zeigen Sie, dass eine holomorphe Funktion $g : G \longrightarrow \mathbb{C}$ existiert, so dass

$$f(z) = \exp(g(z))$$

für alle $z \in G$.
Hinweis: Betrachten Sie $\exp \circ H$ für eine Stammfunktion H von f'/f.

Aufgabe 23:
Welche der folgenden Funktionen hat auf dem jeweiligen Definitionsbereich eine Stammfunktion? (Mit Beweis!)

a) $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \bar{z}.$

b) $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \operatorname{Re} z.$

c) $h : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \cos z \cdot \exp(\imath \sin z)$.

Aufgabe 24:
Wenden Sie den CAUCHY'schen Integralsatz auf das Rechteck mit den Ecken $\pm a$, $\pm a + \imath\, b$ $(a, b > 0)$ und die Funktion $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \exp(-z^2)$ an. Zeigen Sie, dass bei festem b die Integrale über die vertikalen Seiten des Rechtecks für $a \to \infty$ gegen null konvergieren, und folgern Sie, dass

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos(2b\, x)\, dx = \sqrt{\pi}\, e^{-b^2}.$$

Hinweis: $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)\, dx = \sqrt{\pi}$.

Aufgabe 25:
Für $r > 0$ sei $\gamma_r : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C},\ t \longmapsto r \exp(\imath\, t)$. Berechnen Sie für $n, m \in \mathbb{Z}$ die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_{\gamma_1} \exp(z)\, z^n\, dz$.

b) $\displaystyle\int_{\gamma_2} z^n (1 - z)^m\, dz$

Aufgabe 26:

a) Es sei $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph und es gebe $M, R > 0$ und $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$|f(z)| \leq M\, |z|^n$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq R$. Zeigen Sie, dass f ein Polynom höchstens vom Grad n ist.

b) Zeigen Sie, dass es kein normiertes Polynom

$$p(z) = z^n + a_{n-1}\, z^{n-1} + \cdots + a_0$$

$(a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N})$ gibt, so dass $|p(z)| < 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$.

Aufgabe 27:
Die Funktion $f : \overline{U_R(a)} \longrightarrow \mathbb{C}$ $(a \in \mathbb{C},\ R > 0)$ sei stetig und $f|_{U_R(a)}$ sei holomorph. Zeigen Sie, dass für alle $z \in U_r(a)$ gilt:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\, \imath} \int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,$$

wobei $\gamma_R(t) := a + R \cdot e^{\imath\, t}$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$.

Hinweis: Die Funktion $\zeta \longmapsto \frac{f(\zeta)}{\zeta - a}$ erweist sich auf geeigneten kompakten(!) Mengen $\overline{U_r(a)} \setminus U_r(a)$ $(0 < r < R)$ als gleichmäßig stetig.

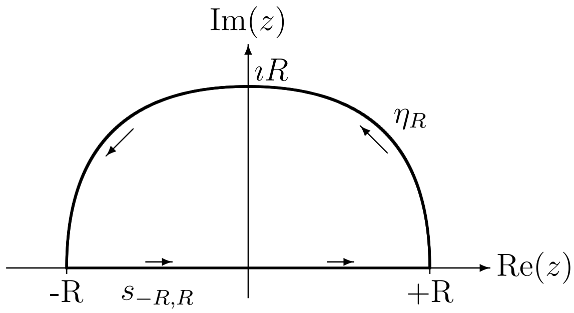
Aufgabe 28:
Es sei $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ $(a_k \in \mathbb{C},\ a_n \neq 0,\ n \in \mathbb{N})$ ein Polynom in $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass p eine Nullstelle hat (Fundamentalsatz der Algebra), indem Sie annehmen, dass p nullstellenfrei ist und die folgenden Schritte ausführen:

a) Zeigen Sie, dass unter der gemachten Annahme auch $p^*(z) := \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k}\, z^k$ nullstellenfrei ist.

b) Wenden Sie für $R > 0$ den Cauchy'schen Integralsatz auf die Funktion $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto \frac{1}{p(z)\, p^*(z)}$ und den skizzierten Weg $\eta_R + s_{-R,R}$ an, wobei $\eta_R(t) := R \cdot e^{\imath pi t}$ $(0 \leq t \leq 1)$ und $s_{-R,R}(t) = R(t-2)$ $(1 \leq t \leq 3)$.

c) Zeigen Sie (mit Hilfe von Aufgabe 4), dass $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\, dz = 0.$

d) Leiten Sie hieraus den gewünschten Widerspruch her.



Aufgabe 29: („Satz von Morera")
Es seien $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig. Für jedes abgeschlossene Dreieck mit den Ecken a, b und c, das ganz in D enthalten ist gelte:

$$\int_{C_{a,b,c}} f(z)\, dz = 0,$$

wobei $C_{a,b,c}$ wie üblich den Dreiecksweg bezeichne. Beweisen Sie, dass f holomorph ist.

Aufgabe 30:

a) Es seien $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ganz und $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ linear unabhängig über $\mathbb{R}$. Ferner sei $f(z + w_j) = f(z)$ für $j = 1, 2$ und alle $z \in \mathbb{C}$. Beweisen Sie, dass f konstant ist.

b) Es sei $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ganz und der Realteil von f sei nach oben beschränkt. Zeigen Sie, dass f konstant ist.

Aufgabe 31:
Es seien $D \subset \mathbb{C}$ offen und die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ holomorpher Funktionen konvergiere auf kompakten Teilmengen von D gleichmäßig gegen die (nach Vorlesung ebenfalls holomorphe) Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass die Folge der Ableitungen $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ auf kompakten Teilmengen von D gleichmäßig gegen f' konvergiert.

Aufgabe 32:
Die Funktion $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ sei ganz. Zeigen Sie, dass die Reihe

$$F(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z)}{n!}$$

auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{C}$ gleichmäßig absolut konvergiert. Wie läßt sich F durch f ausdrücken?

Aufgabe 33:

a) Es sei $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ganz und nicht konstant. Zeigen Sie, dass zu jedem $w \in \mathbb{C}$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $z \in \mathbb{C}$ existiert, so dass $|f(z) - w| < \varepsilon$. (Mit anderen Worten: Das Bildgebiet einer nicht konstanten ganzen Funktion liegt dicht in $\mathbb{C}$.)

b) Es seien $D, G \subset \mathbb{C}$ Gebiete und $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ und $g : G \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen mit $g(G) \subset D$. Zeigen Sie: Ist g nicht konstant und $f \circ g(z) = 0$ für alle $z \in G$, so ist $f = 0$.

Aufgabe 34:
Es sei $f : \overline{U_1(0)} \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig und $f|_{U_1(0)}$ holomorph. Ferner gebe es $0 \le \alpha < \beta \le 2\pi$, so dass $f(e^{\imath\varphi}) = 0$ für alle $\alpha \le \varphi \le \beta$. Zeigen Sie: $f = 0$.

Aufgabe 35:
Es sei $\mathbb{E} = U_1(0)$ wie in Aufgabe 7 der Einheitskreis. Beweisen Sie:

a) Ist $\varphi : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ biholomorph mit $\varphi(0) = 0$, so gibt es ein $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $|\zeta| = 1$, so dass $\varphi(z) = \zeta\, z$ für alle $z \in \mathbb{E}$.

b) Für alle $a \in \mathbb{E}$ ist die Abbildung

$$\varphi_a : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}, \quad z \longmapsto \frac{z - a}{\bar{a}\, z - 1}$$

wohldefiniert, holomorph und bijektiv mit Umkehrabbildung $\varphi_a^{-1} = \varphi_a$.

c) Ist $\varphi : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ biholomorph, so gibt es ein $a \in \mathbb{E}$ und ein $\zeta \in \mathbb{C}$, $|\zeta| = 1$, so dass $\varphi(z) = \zeta\, \varphi_a(z)$ für alle $z \in \mathbb{E}$.

Aufgabe 36:
Es sei $\triangle = \{t_1\, a + t_2\, b\, t_3\, c \ : \ t_1, t_2, t_3 \ge 0,\ t_1 + t_2 + t_3 = 1\} \subset \mathbb{C}$ ein abgeschlossenes Dreieck mit den Ecken a, b und c, so dass $|a - b| = |b - c| = |c - a|$. Beweisen Sie:

$$\max\{|z - a| \cdot |z - b| \cdot |z - c| \ : \ z \in \triangle\} = \frac{\sqrt{3}}{8}\, |a - b|^3.$$

Aufgabe 37:
Bestimmen Sie in den Fällen a) bis c) die Art der Singularität der Funktion f im Punkt a.

a) $f(z) = \dfrac{z^3 + 3z - 2\imath}{z^2 + 1}$, $a = \imath$,

b) $f(z) = \dfrac{z}{e^z - 1}$, $a = 2\pi\,\imath\,k$ mit $k \in \mathbb{Z}$,

c) $f(z) = \exp\left(\exp\left(-\dfrac{1}{z}\right)\right)$, $a = 0$.

Aufgabe 38:
Es seien $U \subset \mathbb{C}$ offen, $0 \in U$ und $f : U \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie: f hat in 0 eine hebbare Singularität (bzw. einen Pol bzw. eine wesentliche Singularität) genau dann, wenn f^2 in 0 eine hebbare Singularität (bzw. einen Pol bzw. eine wesentliche Singularität) hat.

Aufgabe 39:

a) Es seien $U \subset \mathbb{C}$ offen, $a \in U$ und die holomorphen Funktionen $f, g : U \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{C}$ haben in a keine wesentliche Singularität. Ist

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

die LAURENTentwicklung von f um a, so definiert man

$$\operatorname{ord}(f;a) := \begin{cases} \infty, & \text{falls } f = 0. \\ \min\{n \in \mathbb{Z} \ : \ a_n \neq 0\}, & \text{falls } f \neq 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie: Auch die Funktionen $f + g$, $f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$ (falls g in einer Umgebung von a nullstellenfrei ist) haben in a keine wesentliche Singularität, und es gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{ord}(f+g;a) &\geq \min\{\operatorname{ord}(f;a), \operatorname{ord}(g;a)\}, \\ \operatorname{ord}(f \cdot g;a) &= \operatorname{ord}(f;a) + \operatorname{ord}(g;a), \\ \operatorname{ord}(\frac{f}{g};a) &= \operatorname{ord}(f;a) - \operatorname{ord}(g;a). \end{aligned}$$

b) Es seien $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ und $f : \dot{U}_r(a) \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit LAURENTentwicklung.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n \quad (z \in \dot{U}_r(a)).$$

Beweisen Sie: f hat in a genau dann

(i) eine hebbare Singularität, wenn $a_n = 0$ für alle $n < 0$.

(ii) einen Pol der Ordnung $k \in \mathbb{N}$, wenn $a_{-k} \neq 0$ und $a_n = 0$ für alle $n < -k$.

(iii) eine wesentliche Singularität, wenn $a_n \neq 0$ für unendlich viele $n < 0$.

Aufgabe 40:
Es sei $f : \overset{\bullet}{U}_1(0) \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph und nullstellenfrei und $\frac{f'}{f}$ habe in 0 eine hebbare Singularität. Zeigen Sie: f hat in 0 eine hebbare Singularität, und es ist $\lim_{x \to 0} f(z) \neq 0$.

Aufgabe 41:
Es seien $f, g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ganz mit $f^2 + g^2 = 1$. Zeigen Sie, dass eine gane Funktion $h : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ existiert, so dass

$$f = \cos \circ h, \quad g = \sin \circ h.$$

Aufgabe 42:
Berechnen Sie die LAURENTentwicklung der Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus \{1, -2\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longmapsto \frac{1}{(z+2)(z-1)}$$

für folgende Kreisringe um $a = 0$:

a) $\{z \in \mathbb{C} \ : \ 0 < |z| < 1\}$,

b) $\{z \in \mathbb{C} \ : \ 1 < |z| < 2\}$,

c) $\{z \in \mathbb{C} \ : \ 2 < |z|\}$.

Aufgabe 43:
Zeigen Sie: Die Reihe

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{(2^n)} - z^{-(2^n)}}$$

konvergiert auf kompakten Teilmengen von $G := \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| > 1\}$ gleichmäßig absolut. Bestimmen Sie die LAURENTentwicklung von f um 0.

Aufgabe 44:
Es seien $p(z) = a_0 + \cdots + a_{n-1} z^{n-1}$, $q(z) = b_0 + \cdots + b_n z^n$ mit $n \in \mathbb{N}$, $b_n \neq 0$, und $R > 0$ sei so groß, dass alle Nullstellen von q in $U_R(0)$ liegen. Beweisen Sie:

$$\frac{1}{2\pi \imath} \int_{|z|=R} \frac{p(z)}{q(z)} \, dz = \frac{a_{n-1}}{b_n},$$

wobei „$|z| = R$" wie üblich die positiv orientierte Kreilinie um 0 mit Radius R bezeichnet.

Aufgabe 45:
Es sei C eine geschlossene, stückweise glatte Kurve in $\mathbb{C}$.

a) Es seien $a, b \in \mathbb{C} \setminus C$ durch einen Weg in $\mathbb{C} \setminus C$ verbindbar. Zeigen Sie:

$$\chi(C; a) = \chi(C; b).$$

b) Es seien

$$\begin{aligned} \operatorname{Int}(C) &:= \{z \in \mathbb{C} \ : \chi(C; z) \neq 0\}, \\ \operatorname{Ext}(C) &:= \{z \in \mathbb{C} \ : \chi(C; z) = 0\} \end{aligned}$$

das *Innere* resp. *Äußere* von C. Beweisen Sie: $\operatorname{Int}(C)$ ist beschränkt, und $\operatorname{Ext}(C)$ ist unbeschränkt, insbesondere ist $\operatorname{Ext}(C) \neq 0$.

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $z \longmapsto \chi(C; \frac{1}{z})$.

Aufgabe 46:

a) („Satz von ROUCHÉ“) Es seien $f, g : G \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph im Gebiet G, $a \in G$ und $r > 0$, so dass $\overline{U_r(a)} \subset G$. Weiter sei vorausgesetzt, dass $|f(z) - g(z)| < |g(z)|$ für alle $z \in \partial U_r(a)$. Zeigen Sie, dass die Anzahlen der Nullstellen von f und g in $U_r(a)$ übereinstimmen.

b) Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longmapsto e^z - 3z$$

genau eine Nullstelle in $U_1(0)$ hat. Zeigen Sie weiter, dass diese Nullstelle reell ist und in $(\frac{1}{2}, 1)$ liegt.

Aufgabe 47:
Es seien $D \subset \mathbb{C}$ ein Elementargebiet, und $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ sei meromorph mit (paarweise verschiedenen) Null- bzw. Polstellen $a_1, \ldots, a_n \in D$ ($n \in \mathbb{N}_0$). Weiter sei $g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph und C eine geschlossene, stückweise glatte Kurve in $G \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$. Zeigen Sie:

$$\frac{1}{2\pi\imath} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\, g(z)\, dz = \sum_{\nu=1}^{n} \chi(C; a_\nu)\ \operatorname{ord}(f; a_\nu)\, g(a_\nu).$$

Aufgabe 48:
Beweisen Sie die Existenz der folgenden Integrale, und berechnen Sie ihren Wert mit Hilfe des Residuensatzes.

a) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{a + \cos^2 x} \quad (a > 0)$,

b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^4}{x^6 + 1}\, dx$,

c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ $(a>0,\ n\in\mathbb{N})$,

d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2+a^2)^2}\,dx$ $(a>0)$,

e) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos m\,x}{5+3\cos x}$ $(m\in\mathbb{N})$.

Aufgabe 49:
Es seien $D, D'\subset\mathbb{C}$ Gebiete und $\varphi : D\longrightarrow D'$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) φ ist konform.

(ii) φ ist bijektiv und holomorph.

Aufgabe 50:
Es seien $D\subset\mathbb{C}$ offen, $a\in D$ und $f : D\setminus\{a\}\longrightarrow\mathbb{C}$ holomorph und injektiv. Beweisen Sie:

a) f hat in a keine wesentliche Singularität.

b) Hat f in a einen Pol, so ist a ein Pol erster Ordnung.

c) Hat f in a eine hebbare Singularität, so ist die holomorphe Fortsetzung $\bar{f} : D\longrightarrow\mathbb{C}$ von f ebenfalls injektiv.

Aufgabe 51:
Für eine offene Teilmenge $D\subset\mathbb{C}$ sei $\mathrm{Aut}(D)$ die Menge der konformen Selbstabbildungen von D. Zeigen Sie:

a) $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})=\{\mathbb{C}\ni z\longmapsto a\,z+b\ :\ a\in\mathbb{C}^*,\ b\in\mathbb{C}\}$,

b) $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^*)=\{\mathbb{C}^*\ni z\longmapsto a\,z\ :\ a\in\mathbb{C}^*\}\cup\{\mathbb{C}^*\ni z\longmapsto \dfrac{a}{z}\ :\ a\in\mathbb{C}^*\}$,

c) $\mathrm{Aut}(\mathbb{E}\setminus\{0\})=\{(\mathbb{E}\setminus\{0\})\ni z\longmapsto e^{\imath\varphi}\,z\ :\ \varphi\in\mathbb{R}\}$, wobei $\mathbb{E}$ wie in Aufgabe 35 den Einheitskreis bezeichne.

Aufgabe 52:
Konstruieren Sie konforme Abbildungen

a) f von $\mathbb{E}$ auf $G:=\{z\in\mathbb{C}\ :\ \mathrm{Re}\,z,\ \mathrm{Im}\,z>0\}$ mit $f(0)=e^{\pi\,\imath/4}$, $f'(0)>0$,

b) g von $\mathbb{H}$ auf $G:=\{z\in\mathbb{C}\ :\ 0<\mathrm{Im}\,z<2\pi\}$.

Lösungen zu den Übungsaufgaben

Aufgabe 1:

a) $\operatorname{Im}\left(\dfrac{2+\imath}{3-2\imath}\right)^2 = \dfrac{56}{169}$, $\operatorname{Re}\left(\dfrac{2+\imath}{3-2\imath}\right)^2 = -\dfrac{33}{169}$

b) $\operatorname{Im}(1+\imath)^n = \sqrt{2}^{\,n} \sin\dfrac{\pi\, n}{4}$, $\operatorname{Re}(1+\imath)^n = \sqrt{2}^{\,n} \cos\dfrac{\pi\, n}{4}$ mit $n \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 2:
$|1-\bar{a}\,b| \neq 0$, da sonst $\bar{a}\,b = 1 \Rightarrow |a|\cdot|b| = 1$. Widerspruch zur Voraussetzung, daß $|a|, |b| < 1$.

$$
\begin{array}{rc}
 & \left|\dfrac{a-b}{1-\bar{a}\,b}\right| < 1 \\
\Leftrightarrow & |a-b|^2 < |1-\bar{a}\,b|^2 \\
\Leftrightarrow & (a-b)(\bar{a}-\bar{b}) < (1-\bar{a}\,b)(1-a\,\bar{b}) \\
\Leftrightarrow & |a|^2+|b|^2 < 1+|a|^2\,|b|^2 \\
\Leftrightarrow & |b|^2-|a|^2\,|b|^2 < 1-|a|^2 \\
\Leftrightarrow & |b|^2(1-|a|^2) < 1-|a|^2 \\
\overset{|a|<1}{\Leftrightarrow} & |b|^2 < 1
\end{array}
$$

Aufgabe 3:
Sei z_0 Nullstelle von $p(z)$, d. h.

$$
\begin{array}{rl}
 & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\, z_0^k = 0 \\
\Leftrightarrow & \overline{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\, z_0^k} = \bar{0} \\
\Leftrightarrow & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \bar{a}_k\, \bar{z}_0^k = 0 \\
\overset{a\in\mathbb{R}}{\Leftrightarrow} & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\, \bar{z}_0^k = 0
\end{array}
$$

Dies ist äquivalent dazu, daß $\bar{z}_0$ Nullstelle von $p(z)$ ist.

Aufgabe 4:
Es gilt:

$$\frac{|p(z)|}{|z^n|} \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k| \, |z|^{k-n} \to |a| \quad (|z| \to \infty)$$

Nach Definition des Limes ist dies äquivalent zu: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists L \geq 0$, so daß

$$\left| \frac{|p(z)|}{|z^n|} - |a_n| \right| < \varepsilon \quad \forall |z| \geq L$$

Mit $\varepsilon = \frac{|a_n|}{2}$ folgt:

$$\begin{array}{rccccc} & -\frac{|a_n|}{2} & < & \frac{|p(z)|}{|z^n|} - |a_n| & < & \frac{|a_n|}{2} \\ \Leftrightarrow & \frac{|a_n \, z^n|}{2} & < & |p(z)| & < & \frac{3}{2} \, |a_n \, z^n| \end{array}$$

Hieraus ergibt sich die Behauptung.

Aufgabe 5:
1. Fall: $n \mid h$, d. h., $\exists k = \frac{h}{n} \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^{n-1} \zeta^{\nu\, h} &\overset{\text{MOIVRE}}{=} \sum_{\nu=0}^{n-1} \cos 2\pi \, \nu \, k + \imath \, \sin 2\pi \, \nu \, k \\ &= \sum_{\nu=0}^{n-1} 1 = n \end{aligned}$$

2. Fall: $n \nmid h$:

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^{n-1} \zeta^{\nu\, h} &\overset{\text{Summen-}}{\underset{\text{formel}}{=}} \frac{\left(\zeta^h\right)^{n-1+1} - 1}{1 - \underbrace{\zeta^h}_{\neq 0}} \\ &= \frac{1-1}{1-\zeta^h} = 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 6:
Formel von MOIVRE ergibt:

$$(\cos\varphi + \imath \, \sin\varphi)^n = \cos n\,\varphi + \imath \, \sin n\,\varphi$$

Der Binomische Lehrsatz führt zu:

$$(\cos\varphi + \imath \, \sin\varphi)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\cos\varphi)^{n-k} \, (\sin\varphi)^k \, \imath^k$$

Vergleich von Real- und Imaginärteil führt zum Ergebnis.

Aufgabe 7:
Diese Abbildung heißt auch CAYLEYabbildung. *Injektivität*, d. h. $f(z) = f(w) \Rightarrow w = z$ mit $z, w \in \mathbb{H}$. Sei also $z, w \in \mathbb{H}$, woraus folgt $z + \imath \neq 0$ bzw. $w + \imath \neq 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{z-\imath}{z+\imath} &= \frac{w-\imath}{w+\imath} \\ \Leftrightarrow \qquad w &= z \end{aligned}$$

Surjektivität, d. h., $\forall z \in \mathbb{E}$ existiert ein $w \in \mathbb{H}$ mit $f(w) = z$. Jedes $z \in \mathbb{E}$ läßt sich darstellen als

$$z = \frac{w-\imath}{w+\imath}$$

mit $w \in \mathbb{C}$, $w \neq \imath$, also

$$w = \imath\,\frac{1+z}{1-z}$$

Also ist w wohldefiniert $\forall z \in \mathbb{E}$, da $1 - z \neq 0$ und $w \neq -\imath$, da $\frac{1+z}{1-z} \neq -1$. Es ist noch zu zeigen, daß aus $z = \frac{w-\imath}{w+\imath} \in \mathbb{E}$ folgt, daß $w \in \mathbb{H}$:

$$\begin{aligned} & \left|\frac{w-\imath}{w+\imath}\right| < 1 \\ \Leftrightarrow \quad & (w-\imath)(\bar{w}+\imath) < (w+\imath)(\bar{w}-\imath) \\ \Leftrightarrow \quad & 2\imath\,(w-\bar{w}) < 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (2\imath)^2 \operatorname{Im} w < 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \operatorname{Im} w > 0 \end{aligned}$$

Somit ist $z \in \mathbb{H}$ äquivalent zu $f(z) \in \mathbb{E}$, also $f(\mathbb{H}) = \mathbb{E}$.

Aufgabe 8:

a) Differenzenquotient ergibt:

$$\frac{z + h + \bar{z} + \bar{h} - z - \bar{z}}{2\,h} = \frac{h + \bar{h}}{2\,h} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\bar{h}}{h}\right)$$

Limes von $\frac{\bar{h}}{h}$ existiert nicht (betrachte Folgen $\frac{\imath}{n}$ und $\frac{1}{n}$). Also ist f in keinem Punkt komplex diffbar.

b) Differenzenquotient ergibt, daß g nur in $z = 0$ komplex diffbar ist.

c) Für $z \neq 0$ folgt aus den CAUCHY-RIEMANN'schen DGL:

$$\frac{\partial \operatorname{Re} f(z)}{\partial x} = \frac{x}{|z|} \cdot \cos|z| \qquad \frac{\partial \operatorname{Re} f(z)}{\partial y} = \frac{y}{|z|} \cdot \cos|z|$$
$$\frac{\partial \operatorname{Im} f(z)}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial \operatorname{Im} f(z)}{\partial x} = 0$$

Damit $f(z)$ komplex diffbar muß gelten:

$$0 = \frac{x}{|z|}\cos|z| = \frac{y}{|z|}\cos|z|$$

Also ist $f(z)$ für alle $|z| = \frac{\pi}{2}(2k+1)$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

Für $z = 0$ sind die partiellen Ableitungen nicht stetig, nach Satz aus Analysis II ist dann auch f nicht diffbar.

Aufgabe 9:
Ist π bijektiv, dann existiert Umkehrabbildung π^{-1}. Annahme:

$$\pi^{-1}: \begin{cases} \mathbb{C} & \to \quad S^2 \setminus \{(0,0,1)\} \\ z & \mapsto \quad \left(\operatorname{Re}\dfrac{2z}{|z|^2+1}, \operatorname{Im}\dfrac{2z}{|z|^2+1}, \dfrac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right) \end{cases}$$

π^{-1} ist wohldefiniert, da $x^2+y^2+z^2 = 1$ (nachrechnen). π ist offensichtlich wohldefiniert. Durch einfaches Nachrechnen ergibt sich ferner:

$$\pi \circ \pi^{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{C}} \qquad \pi^{-1} \circ \pi = \mathrm{id}_{S^2\setminus\{(0,0,1)\}}$$

Also ist π bijektiv.

Aufgabe 10:

a) D ist offen, also auch D^*. Sei f in z_0 komplex diffbar, d. h.:

$$f'(z_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(z_0)+h-f(z_0)}{h}$$

Beide Seiten komplex konjugiert ergibt, da aus $h \to 0$ folgt $\bar{h} \to 0$ und aus $\lim a_n = a$ folgt $\lim \bar{a}_n = \bar{a}$:

$$\overline{f'(z_0)} = \lim_{k\to 0}\frac{g(\bar{z}_0+k)-g(\bar{z}_0)}{k} = g'(\bar{z}_0)$$

mit $k = \bar{h}$.

b) i) $\Rightarrow$ ii) $f(z) = C\ \forall z \in G$ mit $C \in \mathbb{C}$ fest. Also $|f(z)| = |C|\ \forall z \in G$.

ii) $\Rightarrow$ iii) *1. Fall:* $|f(z)| = 0$ ist äquivalent zu $f(z) = 0$. Also ist $\bar{f} = 0$ und deshalb komplex diffbar.

2. Fall: $|f(z)| = C > 0$ mit $C \in \mathbb{C}$ fest. $f\,\bar{f} = |f|^2$ also

$$\bar{f} = \frac{|f|^2}{f} = \frac{C^2}{f}$$

Differenzenquotient:

$$\frac{\overline{f(z+h)}\cdot\overline{f(z)}}{h} = \frac{-C^2}{f(z)\,f(z+h)}\cdot\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

Da f holomorph auf G ist f auch stetig auf G ergibt der Limes für h gegen 0:

$$\overline{f(z)}' = \frac{-C^2}{f^2(z)} \cdot f'(z)$$

$\bar{f}$ ist deshalb holomorph auf G.

iii) ⇒ i) Sei $z = x + \imath y$ $x, y \in \mathbb{R}$, $z \in G$. Sei $f(z) = u(z) + \imath v(z)$ mit u, v reellwertig. Aus den CAUCHY-RIEMANN'schen DGL für f und $\bar{f}$ folgt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial x} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Also sind alle partiellen Ableitungen gleich null. f' ist also gleich null und weil G ein Gebiet ist f konstant auf G.

Aufgabe 11:

a) ρ_m *ist wohldefiniert*, da $c\,z + d \neq 0$ und $\rho_m(z) \in \mathbb{H}$.

Angenommen $c\,z + d = 0$. $c = 0$, dann ist auch $d = 0$ und $a\,c - b\,d = 0$. Widerspruch, da $\det M = 1$. Ist $c \neq 0$, dann ist $z = -\frac{d}{c} \in \mathbb{R}$, also $\operatorname{Im} z = 0$. Widerspruch, da $z \in \mathbb{H}$.

$$\operatorname{Im} z = \frac{\rho_M(z) - \overline{\rho_M(z)}}{2\imath} = \frac{\operatorname{Im} z}{|c\,z + d|^2} > 0 \quad \text{da } z \in \mathbb{H}$$

ρ_m *ist bijektiv*, d. h., es existiert ρ_M^{-1}. Sei M^{-1} die Umkehrmatrix zu M. Dann ist $M^{-1} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ (nachrechnen).

Bijektivität, d. h. $\rho_m \circ \rho_{M^{-1}} = \rho_{M^{-1}} \circ \rho_M = \mathrm{id}_{\mathbb{H}}$. $\mathrm{id}_{\mathbb{H}}$ entspricht der Einheitsmatrix. Mit Vorgriff auf Teil b) muß gelten $M \cdot M^{-1} = 1_2$ (nachrechnen). $M^{-1} \cdot M = 1_2$ folgt dann aus der Regel über inverses Element einer Gruppe.

ρ_M^{-1}, ρ_M *sind holomorph*, da sie Komposition holomorpher Abbildungen sind.

b) $\rho_M \cdot \rho_N = \rho_{M \cdot N}$ nachrechnen für zwei beliebige Matrizen. Ferner $\det(M \cdot N) = \det M \cdot \det N = 1 \cdot 1 = 1$.

Aufgabe 12:

a) $r = 1$ (folgt aus Formel).

b) Für $k = 1$: $r = 1$. Für $k \geq 2$ folgt aus Quotientenkriterium: $r = \dfrac{(k-1)^{k-1}}{k^k}$.

c) Betrachtung des Grenzwertes $\log\left((n!)^{1/n^2}\right)$:

$$\begin{aligned} \lim\left((n!)^{1/n^2}\right) &= \lim\frac{1}{n^2}\log n! \\ &= \lim\frac{1}{n^2}(\log 1+\log 2+\cdots+\log n) \\ &\overset{\text{log monoton}}{\leq} \lim\frac{n}{n^2}\log n \\ &\overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim\frac{1}{n} = 0 \end{aligned}$$

weil $\log\left((n!)^{1/n^2}\right) \geq 0$ folgt:

$$\lim\log\left((n!)^{1/n^2}\right) = 0$$

Da log stetig folgt:

$$\lim\left((n!)^{1/n^2}\right) = 1$$

Der Limes existiert also und ist gleich lim sup. Damit ergibt sich $r = 1$

d) Da sin beschränkt ist $\sum_{n=0}^{\infty}|z|^n$ Majorante mit Konvergenzradius $r = 1$. Angenommen Konvergenzradius ist größer als 1, dann konvergiert die Reihe insbesondere für $z = 1$. Ferner muß dann $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$ Nullfolge sein, d. h. $\lim\sin n = 0$. Aus $\sqrt{1-\cos^2 n} = \sin n$ folgt dann außerdem $\cos n = \pm 1$. Mit Additionstheorem folgt:

$$\lim\sin(n+1) = \lim(\sin n\,\cos 1+\cos n\,\sin 1) = \sin 1 \neq 0$$

Widerspruch. Also ist $r = 1$.

Aufgabe 13:
Ein Polynom hat nur endlich viele Nullstellen

Aufgabe 14:
Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}|z|^n$ ist Majorante zu Reihen aus a) und b). Deshalb sind diese lokal gleichmäßig konvergent und deren Ableitung ist gleich der gliedweisen Ableitung der Summanden. Die Identität zeigt man jeweils durch Ableiten beider Seiten, woraus sich ergibt, daß die Ableitungen gleich sind. Danach vergleicht man beide Seiten im Punkt $z = 0$.

Aufgabe 15:
Sei $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$, $C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$. Dann folgt mit $c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j\, b_{k-j}$:

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{l=0}^{k} a_l\, b_{k-l}\right)$$

Man mache sich z. B. mit Hilfe eines Diagramms klar, daß dies gleich der folgenden Summe ist:

$$C_n = \sum_{j=0}^{n} a_j \sum_{k=0}^{n-j} b_k = \sum_{j=0}^{n} B_{n-j}$$

Also folgt:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{k=0}^{\infty} b_k - C_n\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot B - \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot B_{n-k}\right| \\ &= \left|\sum_{k=0}^{n} a_k \left(B - B_{n-k}\right)\right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n} |a_k| \cdot |B - B_{n-k}|\end{aligned}$$

$\sum b_k$ ist konvergent, deshalb ist Folge (B_n) beschränkt, Sei $M > 0$ eine obere Schranke. Da $\sum a_k$ absolut konvergiert, existiert $\forall \varepsilon > 0$ $N_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{k>N_1} |a_k| < \frac{\varepsilon}{M + \sum |a_k|}$$

Da $\lim B_m = B$ existiert für obiges ε ein $N_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$|B - B_{m-k}| < \frac{\varepsilon}{M + \sum |a_k|}$$

$\forall (m-k) > N_2$. Sei $N := \max\{N_1, N_2\}$, dann folgt für n groß:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot B - \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot B_{n-k}\right| &\leq \sum_{k=0}^{n} |a_k| \cdot |B - B_{n-k}| \\ &= \sum_{k=0}^{N} |a_k| \cdot |B - B_{n-k}| + \sum_{k>N} |a_k| \cdot |B - B_{n-k}| \\ &\leq \sum_{k=0}^{N} |a_k| \frac{\varepsilon}{M + \sum |a_k|} + \sum_{k>N} |a_k| \cdot M \\ &= \frac{\varepsilon}{M + \sum |a_k|} \sum_{k=0}^{N} |a_k| + M \sum_{k>N} |a_k| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{M + \sum |a_k|} \sum_{k=0}^{N} |a_k| + M \frac{\varepsilon}{M + \sum |a_k|} = \varepsilon\end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$\lim \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot B - \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot B_{n-k}\right) = 0 = \lim \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot B - C_n\right)$$

C_n ist konvergent, da

$$|C_n| = \left|\sum_{j=0}^{n} a_j\, B_{n-j}\right| \le \sum_{j=0}^{n} |a_j| \cdot |B_{n-j}|$$

(B_n) ist nach Voraussetzung konvergent, also existiert obere Schranke $M' > 0$ mit $|B_n| < M'$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Hieraus leitet man ab:

$$|C_n| = \sum_{j=0}^{n} |a_j|\, M' \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Da $\sum a_j$ absolut konvergiert, ist $\sum_{j=0}^{n} |a_j|\, M'$ konvergente Majorante, d. h., (C_n) konvergiert. Also

$$\lim \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot B - C_n\right) = \lim \sum_{k=0}^{n} a_k\, B - \lim C_n$$

Deshalb $\sum c_n = A \cdot B$.

Aufgabe 16:

a)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \int_0^y u_x(0,t)\, dt - \frac{\partial}{\partial x} \int_0^x u_y(t,y)\, dt \\
&\overset{\text{Leibniz}}{=} \int_0^y \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(u_x(0,t))}_{=0}\, dt - \frac{\partial}{\partial x} \int_0^x u_y(t,y)\, dt
\end{aligned}$$

Also ist $v_x = -u_y$. Ferner:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial y} &= u_x(0,y) - \int_0^x \frac{\partial}{\partial y}(u_y(t,y))\, dt \\
&= u_x(0,y) - \int_0^x u_{yy}(t,y)\, dt
\end{aligned}$$

harmonisch: $u_{yy} = -u_{xx}$

$$\begin{aligned}
&= u_x(0,y) + \int u_{xx}(t,y)\, dt \\
&= u_x(0,y) - u_x(x,y) - u_x(0,y) = u_x(x,y)
\end{aligned}$$

f ist deshalb holomorph und $v = \operatorname{Im} f$ ist harmonisch folgt aus f holomorph.

b) Seien v_1, v_2 Funktionen, die Bedingung aus Teil a) erfüllen, so daß

$$f_1 = u + \imath\, v_1 \quad f_2 = u + \imath\, v_2$$

Aus $f_1' - f_2'$ folgt:

$$\imath \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) = \frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial y}$$

Also

$$\imath\, \frac{\partial}{\partial x}(v_1 - v_2) = \frac{\partial}{\partial y}(v_1 - v_2)$$

Weil v_1 und v_2 reellwertig sind, muß gelten

$$\frac{\partial}{\partial x}(v_1 - v_2) = \frac{\partial}{\partial y}(v_1 - v_2) = 0$$

$(v_1 - v_2)$ darf nicht von y und x abhängen, d. h. $v_1 - v_2 = c \in \mathbb{R}$. Also $v_1 = v_2 + c$.

Aufgabe 17:
Ersetze $\sin z$ durch $\frac{e^{\imath z} - e^{\imath z}}{2\imath}$. Rest nachrechnen.

Aufgabe 18:
1. Ungleichung: $\limsup \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \leq R$. Sei $0 < |z| < \liminf \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ (für $|z| = \liminf \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 0$ ist nichts zu zeigen). Nach Definition des $\liminf$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n \neq 0$ und $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| > |z|\ \forall n > N$, also allgemein:

$$\begin{aligned} |a_{n+1}|\,|z| &< |a_n| && \forall n > N \\ |a_n| > |z|\,|a_{n+1}| > |z|^2\,|a_{n+2}| &> \cdots > |z|^m\,|a_{n+m}| && \forall m \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$|a_{n+m}|\,|z|^{n+m} \leq |a_n|\,|z|^n$$

Sei $K := \max\{|a_0\, z^0|, \ldots, |a_n\, z^n|\}$, d. h. $|a_n\, z^n| \leq K\ \forall n \in \mathbb{N}$. Die Folge $|a_n\, z^n|$ ist also beschränkt, also konvergent, da monoton, woraus folgt, daß $|z| \leq R$ ist, wobei R der Konvergenzradius ist. Für $|z| > R$ würde ja die Folge $|a_n\, z^n|$ divergieren. Da $|z|$ beliebig zweischen 0 und $\liminf \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ folgt:

$$\liminf \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \leq R$$

2. Ungleichung: $R \leq \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$. Sei $0 \leq \limsup \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| < |z| < \infty$. Nach Definition des $\limsup$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n \neq 0$ und $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| < |z|$, also

$$\begin{aligned} |a_{n+1}|\,|z| &> |a_n| && n \geq N \\ |a_n| < |a_{n+1}\, z| < |a_{n+2}\, z^2| &< \cdots < |a_{n+l}\, z^l| \end{aligned}$$

Multiplikation mit $|z|^n$:

$$0 < |a_n\, z^n| \leq |a_{n+l}\, z^{n+l}| \qquad\qquad \forall l \geq 0$$

Also ist $(|a_n\, z^n|)$ keine Nullfolge und die Reihe $\sum a_n\, z^n$ ist divergent, d. h. $|z| \geq R$, wobei R der Konvergenzradius ist. Da z beliebig größer als $\limsup \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ folgt:

$$R \leq \limsup \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

Aufgabe 19:

a) $\displaystyle\int\limits_C \bar{z}^3\, dz = 0$ (nachrechnen).

b) $\displaystyle\int\limits_C \operatorname{Log} z\, dz = 0$ (nachrechnen).

c)

$$\begin{aligned}\int\limits_C \frac{\sin z}{z}\, dz &\overset{\text{Definition des sin}}{=} \int\limits_C \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\, dz \\ &= \int\limits_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, \imath\, \frac{e^{\imath\, t\,(2n+1)}}{(2n+1)!}\, dt\end{aligned}$$

Die Potenzreihe von $\sin z$ hat also Konvergenzradius unendlich und ist insbesondere gleichmäßig stetig für alle $z \in \mathbb{C}$. Grenzprozesse dürfen daher vertauscht werden. Woraus sich durch Ausrechnen das Integral zu null ergibt.

Aufgabe 20:

Es ist zu zeigen, daß $\operatorname{Re}\left(\int_\gamma \bar{f}(z)\, f'(z)\, dz\right) = 0$. Sei $f(z) = u(x, y) + \imath\, v(x, y)$ mit $z = x + \imath\, y$ und u, v reellwertig. Sei $\gamma : \varphi(t) = \varphi_1(t) + \imath\, \varphi_2(t)$, wobei φ_1, φ_2 reellwertig, φ glatt für $a_n \leq t \leq a_{n+1}$ mit $n = 1, \ldots, N$, $\varphi(a_1) = \varphi(a_{N+1})$. Es folgt:

$$\begin{aligned}\int\limits_\gamma \overline{f(z)}\, f'(z)\, dz &= \sum_{n=1}^{N} \int\limits_{a_n}^{a_{n+1}} \overline{f\big(\varphi(t)\big)}\, f'\big(\varphi(t)\big)\, \varphi'(t)\, dt \\ &= \sum_{n=1}^{N} \int\limits_{a_n}^{a_{n+1}} \overline{(u + \imath\, v)}\, (u_x + \imath\, v_x)\, \varphi'(t)\, dt \\ &= \sum_{n=1}^{N} \int\limits_{a_n}^{a_{n+1}} (u\, u_x + v\, v_x - \imath\, v\, u_x + \imath\, u\, u_x)\, \big(\varphi_1'(t) + \imath\, \varphi_2'\big)\, dt\end{aligned}$$

Addition mit dem komplex Konjugiertem ergibt:

$$\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\int_\gamma \overline{f(z)}\, f'(z)\, dz\right) = \sum_{n=1}^{N} \int_{a_n}^{a_{n+1}} (u\, u_x\, \varphi_1' + v\, v_x\, \varphi_1' + v\, u_x\, \varphi_2' - u\, u_x\, \varphi_2')\, dt$$

Behauptung: $\frac{d}{dt}\frac{1}{2}(u^2+v^2)$ =Integrand (nachrechnen). Also:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\int_\gamma \overline{f(z)}\, f'(z)\, dz\right) &= \sum_{n=1}^{N} \int_{a_n}^{a_{n+1}} \frac{d}{dt}\frac{1}{2}(u^2+v^2)\, dt\\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\Big(u^2\big(\varphi(a_{n+1})\big) + v^2\big(\varphi(a_{n+1})\big) - u^2\big(\varphi(a_n)\big) - v^2\big(\varphi(a_1)\big)\Big)\\ &= \frac{1}{2}\Big(u^2\big(\varphi(a_{N+1}\big) + v^2\big(\varphi(a_{N+1})\big) - u^2\big(\varphi(a_1)\big) - v^2\big(\varphi(a_1)\big)\Big) = 0\end{aligned}$$

da $\varphi(a_1) = \varphi(a_{N+1})$.

Aufgabe 21:

a) jeweils anschauliche Begründung

(i) $\mathbb{R}$ entspricht einer Linie in der komplexen Zahlenebene, deshalb enthält jede Umgebung einer reellen Zahl auch komplexe Zahlen. $\mathbb{R}$ ist deshalb nicht offen, also kein Gebiet.

(ii) $\{z \in \mathbb{C} \mid |\exp z| > 1\} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$, was der rechten Halbebenen entspricht. Diese ist ein Gebiet.

(iii) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z^2 - 1| < 3\}$ ist anschaulich eine deformierte Ellipse, die die reelle Achse in ± 2 und die imaginäre Achse in $\pm\sqrt{2}$ schneidet. Also ein Gebiet

(iv) Kein Punkt der imaginären Achse ist in $\{z \in \mathbb{C} \mid |z^2-3| < 1\}$ enthalten. Aber $\pm\sqrt{3}$ sind Elemente dieser Menge und liegen links und rechts der imaginären Achse, können daher nicht durch einen Weg verbunden werden. $\{z \in \mathbb{C} \mid |z^2-3| < 1\}$ ist also nicht zusammenhängend, also kein Gebiet.

b) Sei $x \in G$. Sei $A_x := \{y \in G \mid$ es existiert ein Weg von x nach y in $G\}$. Dann ist $A_x \subset G$. Zu zeigen ist, daß A_x offen ist: Sei also $y \in A_x \subset G$. Da G Gebiet, ist G offen, es existiert also eine Umgebung $U_r(y) \subset G$ von y in G. Da Umgebungen konvex sind, läßt sich jeder Punkt in der Umgebung durch eine Strecke mit y verbinden, es existiert also ein Weg zwischen jedem Punkt in der Umgebung und y. Also $U_r(y) \subset A_x$, deshalb ist A_x offen.

Sei $B_x := A_x^C$, dann ist auch B_x offen. Da für jedes $y \in B_x \subset G$ eine Umgebung $U_r(y) \subset G$ existiert, weil G ein Gebiet ist. Da jeder Punkt in $U_r(y)$ durch eine Strecke mit y verbindbar ist, y aber durch keinen Weg mit x verbindbar ist, gilt: $U_r(y) \subset B_x$. Also ist B_x offen.

Es gilt: $G = A_x \cup B_x$, $A_x \cap B_x = \emptyset$. Da A_x nicht leer ist (x ist in A_x enthalten), G aber zusammenhängend ist, muß B_x leer sein. Also ist $G = A_x$ und somit wegzusammenhängend nach Definition von A_x, da $x \in G$ beliebig.

Aufgabe 22:
$\frac{f'}{f}$ ist holomorph, da $f \neq 0$ $\forall z \in G$. Da G Elementargebiet existiert somit eine Stammfunktion H von $\frac{f'}{f}$. Sei $k(z) := \frac{\exp(H)}{f}$. k ist holomorph, da Komposition von holomorphen Abbildungen. Es folgt:

$$k'(z) = \frac{f\,H'\,\exp H - f'\exp H}{f^2} = 0$$

Da G Gebiet, ist $k(z) = C$ konstant. Da $\exp H(z) \neq 0$ $\forall z \in \mathbb{C}$ folgt $C \neq 0$ und wegen Surjektivität von $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ folgt: es existiert $c \in \mathbb{C}$ mit $\exp c = C$. Also $f \cdot C = \exp H \Leftrightarrow f = \exp(H - c)$. Sei $g(z) := H - c$, dann folgt:

$$f(z) = \exp(g(z))$$

Aufgabe 23:

a) Angenommen f habe Stammfunktion. Dann ist das Integral über eine geschlossene, glatte Kurve von f Null. Sei die Kurve gegeben durch:

$$\varphi(t) = e^{2\pi\imath t} \quad \text{mit } 0 \leq t \leq 1$$

Ausrechnen des Integrals:

$$\int_0^1 \overline{e^{2\pi\imath t}} \cdot 2\pi\,\imath\, e^{2\pi\imath t}\,dt = 2\pi\,\imath \neq 0$$

Also existiert keine Stammfunktion zu f.

b) Argumentation wie bei a), wobei Kurve C, z. B. Kreis um Nullpunkt mit Radius 1 und

$$\int_C \operatorname{Re} z\,dz = \frac{1}{2}\int_C z\,dz + \frac{1}{2}\int \bar{z}\,dz$$

z hat Stammfunktion (z. B. $\frac{1}{2}z^2$), weshalb das erste Integral null ist. Das zweite Integral ergibt $2\pi\,\imath$. Zusammen also:

$$\int_C \operatorname{Re} z\,dz = \pi\,\imath \neq 0$$

g hat also keine Stammfunktion.

c) $\dfrac{1}{\imath}\,e^{\imath\sin z}$ ist Stammfunktion von h (nachrechnen).

Aufgabe 24:
Sei der Rand des Rechtecks parametrisiert durch:

$$\begin{array}{llll}
\varphi_1(t) = t & \forall t \in [-a,a] & \Rightarrow & \varphi_1' = 1 \\
\varphi_2(t) = a + \imath\, t & \forall t \in [0,b] & \Rightarrow & \varphi_2' = \imath \\
\varphi_3(t) = -t + \imath\, b & \forall t \in [-a,a] & \Rightarrow & \varphi_3' = -1 \\
\varphi_4(t) = -a + \imath\,(b-t) & \forall t \in [0,b] & \Rightarrow & \varphi_4' = -\imath
\end{array}$$

Rand des Rechtecks ist geschlossene, stückweise glatte Kurve, f ist holomorph, $\mathbb{C}$ Sterngebiet. Mit CAUCHY-Integralformel folgt:

$$\begin{aligned}
0 = &\int_{-a}^{a} \exp(-t^2)\, 1\, dt + \int_0^b \exp(-(a+\imath\, t)^2)\, \imath\, dt \\
&+ \int_{-a}^{a} \exp(-(-t+\imath\, b)^2)\,(-1)\, dt + \int_0^b \exp(-\,(-a+\imath(b-t))^2)\,(-\imath)\, dt
\end{aligned}$$

Betrachte $\int_0^b \exp(-a(a+\imath\, t)^2)\, dt$:

$$\begin{aligned}
\big|\exp\big(-(a+\imath\, t)^2\big)\big| &= \big|\exp\big(-(a^2-t^2+2\imath\, a\, t)\big)\big| \\
&= \big|\exp(-a^2+t^2)\big| \\
&\le \exp(-a^2+b^2) \qquad\qquad \forall t \in [0,b]
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Standardabschätzung über die Bogenlänge folgt:

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^b \exp\big(-(a+\imath\, t)^2\big)\, dt\right| &\le \exp(-a^2+b^2)\cdot \underbrace{b}_{\text{Bogenlänge}} \\
&\to 0 \quad (a\to\infty)
\end{aligned}$$

Für $\int_0^b \exp(-a(-a+\imath\,(b-t))^2)\, dt$ analog. Für $\lim_{a\to\infty}$ folgt somit:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-t^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\big(-(t-\imath\, b)^2\big)\, dt \\
&= e^{b^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, \cos(2b\, t)\, dt + \imath\, e^{b^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, \sin(2b\, t)\, dt
\end{aligned}$$

Für Realteile auf beiden Seiten folgt mit $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}$ folgt die Behauptung.

Aufgabe 25:

a)

$$\int_{\gamma_1} \exp(z)\, z^n \, dz = \begin{cases} 0 & \text{für } n \geq 0 \\ \dfrac{\imath \cdot 2\pi}{(-1-n)!} & \text{für } n < 0 \end{cases}$$

b)

$$\int_{\gamma_2} z^n \,(1-z)^m \, dz = \begin{cases} 0 & n \geq 0 \\ \begin{pmatrix} m \\ -n-1 \end{pmatrix} (-1)^{-n-1}\, 2\pi\,\imath & n < 0 \end{cases}$$

wobei $\binom{n}{k} = \frac{m\cdot\dots\cdot(m-k+1)}{1\cdot\dots\cdot k}$ verallgemeinerter Binomialkoeffizient.

Aufgabe 26:

a) Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq R$. Sei $C := 2\,|z|\, e^{2\pi\,\imath\, t}$ mit $0 \leq t \leq 1$. CAUCHY-Integralformel für erste Ableitung:

$$\begin{aligned} |f'(z)| &= \left| \frac{1}{2\pi\,\imath} \int_C \frac{f(w)}{(w-z)^2}\, dw \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi\,\imath} \int_0^1 \frac{f(2\,|z|\, e^{2\pi\,\imath\, t}) \cdot 2\pi\,\imath \cdot 2\,|z|\, e^{2\pi\,\imath\, t}}{\left(2\,|z|\, e^{2\pi\,\imath\, t} - z\right)^2}\, dt \right| \\ &\leq 2\,|z| \int_0^1 \frac{|f(2\,|z|\, e^{2\pi\,\imath\, t})| \cdot |e^{2\pi\,\imath\, t}|}{\left|2\,|z|\, e^{2\pi\,\imath\, t} - z\right|^2}\, dt \\ &\leq 2\,|z| \int_0^1 \frac{M\,|z|^n}{\left(2\,|z|\, |e^{2\pi\,\imath\, t}| - |z|\right)^2}\, dt \\ &= 2\,M\, \frac{|z|^{n+1}}{|z|^2} \int_0^1 dt \\ &= 2\,M\,|z|^{n-1} \end{aligned}$$

$\forall |z| \geq R$. n-maliges Ableiten:

$$|f^{(n)}(z)| \leq 2^n\, M \quad \forall |z| \geq R$$

Da $f^{(n)}$ holomorph ist $f^{(n)}$ auf kompaktem Gebiet $\overline{U_R(z)}$ beschränkt. Also ist $f^{(n)}$ beschränkt auf ganz $\mathbb{C}$. Mit Satz von LIOUVILLE ist $f^{(n)}$ notwendigerweise konstant. Also ist f Polynom mit maximalem Grad n.

b) $p^{(n)}(z) = n!$. Mit CAUCHY-Integralformel für n-te Ableitung

$$p^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi\imath} \int_{\gamma_1} \frac{p(w)}{w^{n+1}}\, dw$$

Also

$$2\pi\imath = \int_{\gamma_1} \frac{p(w)}{w^{n+1}}\, dw$$

Auf beiden Seiten Betrag, und mit γ_1 gleich Einheitskreis, d. h. $|w| = 1$:

$$2\pi \leq \int_{\gamma_1} \frac{|p(w)|}{|w^{n+1}|}\, |dw|$$

Andererseits: $|p(w)| < 1\ \forall w \in \gamma_1$, also

$$\int_{\gamma_1} |p(w)|\, |dw| \leq 2\pi = \int_{\gamma_1} 1\, |dw|$$

Aufgabe 27:
CAUCHY-Integralformel für $0 < r < R$, $|z - a| < r$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi\imath} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w - z}\, dw \\ &= \frac{1}{2\pi\imath} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + r\, e^{\imath t})}{a + r\, e^{\imath t} - z}\, \imath\, r\, e^{\imath t}\, dw \end{aligned}$$

Da $U_r(a)$ offen ist $U_r^C(a)$ abgeschlossen. Deshalb ist $\overline{U_R(a)} \cap \underline{U_r^C}(a)$ beschränkt und abgeschlossen, also kompakt. Da f stetig auf Kompaktum $\overline{U_R(a)}$ ist f gleichmäßig stetig. $a + r\, e^{\imath t} - z \neq 0\ \forall z \in \overline{U_R(a)} \setminus U_r(a)$ ist Integrand gleichmäßig stetig auf $\overline{U_R(a)} \setminus U_r(a)$. Es folgt:

$$\begin{aligned} f(z) &= \lim_{r \to R} \frac{1}{2\pi\imath} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w - z}\, dw \\ &= \frac{1}{2\pi\imath} \int_{\gamma_R} \frac{f(w)}{w - z}\, dw \end{aligned}$$

Aufgabe 28:

a) Annahme $p(z) \neq 0\ \forall z \in \mathbb{C}$, d. h.

$$\overline{p(z)} = \sum_{k=0}^{n} \bar{a}_k\, \bar{z}^k \neq 0$$

Da dies für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt, setze $\bar{w} = z$ und es folgt:

$$\overline{p(\bar{w})} = \sum_{k=0}^{n} \bar{a}_k\, w^k \neq 0 \quad \forall w \in \mathbb{C}$$

mit Definition aus der Aufgabe folgt:

$$p^*(z) = \sum_{k=0}^{n} \bar{a}_k\, z^k \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

b) Sei $C = \eta_R + s_{-R,R}$, dann ist C stückweise glatt und geschlossen. Da $\mathbb{C}$ Sterngebiet und Polynome holomorph sind ist auch $f(z)$ holomorph und nach a) auch definiert und es gilt CAUCHY'scher Integralsatz:

$$0 = \int_{\eta_R} f(z)\,dz + \int_{s_{-R,R}} f(z)\,dz$$

c) Nach Aufgabe 4 existieren $L_1, L_2 > 0$, so daß

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_n\, z^n}{2}\right| &\leq |p(z)| \quad \forall |z| \geq L_1 \\ \left|\frac{\bar{a}_n\, z^n}{2}\right| &\leq |p^*(z)| \quad \forall |z| \geq L_2 \end{aligned}$$

Sei $L := \max\{L_1, L_2\}$. Dann folgt für $R > L$:

$$\left|p(R\, e^{\imath\,\pi\,t})\right| \cdot \left|p^*(R\, e^{\imath\,\pi\,t})\right| \geq \frac{|a_n|^2 \cdot |R\, e^{\imath\,\pi\,t}|^{2n}}{4} = \frac{|a_n|^2}{4} \cdot R^{2n}$$

da $|R\,e^{\imath\,\pi\,t}| = R > L$. Es folgt:

$$\begin{aligned}\left|\int\limits_{\eta_R} f(z)\,dz\right| &= \left|\int\limits_0^1 \frac{R\,\imath\,\pi\,e^{\imath\,\pi\,t}}{p(R\,e^{\imath\,\pi\,t})\cdot p^*(R\,e^{\imath\,\pi\,t})}\,dt\right| \\ &\leq \int\limits_0^1 \frac{|R\,\imath\,\pi\,e^{\imath\,\pi\,t}|}{|p(R\,e^{\imath\,\pi\,t})\cdot p^*(R\,e^{\imath\,\pi\,t})|}\,dt \\ &\leq \int\limits_0^1 \frac{4\cdot R\,\pi}{|a_n|^2\cdot R^{2n}}\,dt \\ &= \frac{4\pi}{|a_n|^2}\cdot\frac{1}{R^n} \\ &\to 0 \quad (R\to\infty)\end{aligned}$$

($n \neq 0$ nach Voraussetzung, da $n \in \mathbb{N}$).

d)

$$\int\limits_{s_{-R,R}} f(z)\,dz = \int\limits_1^3 \frac{R}{p^*\big(R(t-2)\big)\cdot p\big(R(t-2)\big)}\,dt$$

Es gilt $R(t-2) \in \mathbb{R}\ \forall t \in [1,3]$ und deshalb gilt nach Definition von p^* und $x \in \mathbb{R}$, d. h. $x = \bar{x}$.

$$p^*(x) = \overline{p(\bar{x})} = \overline{p(x)}$$

Deshalb

$$\int\limits_{s_{-R,R}} f(z)\,dz = \int\limits_1^3 \frac{R}{\big|p\big(R(t-2)\big)\big|^2}\,dt > 0$$

da Integrand positiv und stetig ist und $p(z) \neq 0\ \forall z \in \mathbb{C}$. Hieraus folgt:

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{s_{-R,R}} f(z)\,dz > 0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{R\to\infty}\left(\int\limits_{\eta_R} f(z)\,dz + \int\limits_{s_{-R,R}} f(z)\,dz\right) \neq 0$$

Widerspruch zum Cauchy'schen Integralsatz. Annahme, daß $p(z)$ keine Nullstellen hat ist also falsch.

Aufgabe 29:
Sei $a \in D$ beliebig. Da D offen existiert $r > 0$ mit $\overline{U_r(a)} \subset D$. Seien $b, c \in U_r(a)$, derart daß a, b, c ein Dreieck aufspannen. Sei $C_{z_1,z_2} : [0,1] \to U_r(a)\ t \mapsto z_1 + t(z_2 - z_1)$. Da

f stetig, existiert $F(z) := \int_{C_{c,z}} f(w)\,dw$ mit $z \in U_r(a)$. Nach Voraussetzungen gilt für $\triangle_{a,b,c}$:

$$F(a) - \int\limits_{C_{b,a}} f(w)\,dw - F(b) = 0$$

und damit

$$F(a) - F(b) = \int\limits_0^1 f(b + t(a-b))\,dt \cdot (a-b)$$

Division durch $(a-b)$ und $\lim_{b\to a}$ ergibt:

$$\lim_{b\to a} \frac{F(a) - F(b)}{a-b} = \lim_{b\to a} \int\limits_0^1 f\big(b + t(a-b)\big)\,dt$$

Da f auf D stetig ist f auf $\overline{U_r(a)}$ gleichmäßig stetig. Integration und Limes dürfen vertauscht werden.

$$\lim_{b\to a} \frac{F(a) - F(b)}{a-b} = \int\limits_0^1 \lim_{b\to a} f\big(b + t(a-b)\big)\,dt = \int\limits_0^1 f(a)\,dt = f(a)$$

Da a beliebig, ist F holomorph. Da holomorphe Funktionen beliebig oft komplex diffbar sind, ist auch $F'(a) = f(a)$ holomorph.

Aufgabe 30:

a) Da $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ und w_1, w_2 reell linear unabhängig, sind w_1, w_2 Basis von $\mathbb{C}$, d. h.:

$$f(\mathbb{C}) = f(\{z \in \mathbb{C} \mid z = t_1\,w_1 + t_2\,w_2 \text{ mit } t_1, t_2 \in [0,1]\})$$

Da $\{z \in \mathbb{C} \mid z = t_1\,w_1 + t_2\,w_2\}$ kompakt ist (Parallelogramm), ist $f(z)$ beschränkt auf $\mathbb{C}$. Nach dem Satz von LIOUVILLE ist f somit konstant.

b) Sei $g := \exp \circ f$, dann ist g ebenfalls ganze Funktion und

$$|g(z)| = |\exp \circ f(z)| = e^{\operatorname{Re} f(z)}$$

g ist also beschränkt und nach Satz von LIOUVILLE somit konstant. Ableitung ergibt also:

$$0 = g'(z) = f'(z)\,\exp(f(z))$$

da $\exp(f(z)) \neq 0$ folgt $f'(z) = 0$, da $\mathbb{C}$ Gebiet, ist f konstant.

Aufgabe 31:

Sei $z_0 \in D$ beliebig. Da D offen, existiert $r > 0$, so daß $\overline{U_r(z_0)} \subset D$. Sei $z \in U_{\frac{r}{2}}(z_0) \subset \overline{U_r(z_0)}$, dann folgt $f(z) - f_n(z)$ ist holomorph und $f_n(z)$ konvergiert gleichmäßig gegen

$f(z)$. Mit CAUCHY-Integralformel gilt für alle $z \in U_{\frac{r}{2}}(z_0)$:

$$|f'(z) - f_n'(z)| \leq \left|\frac{1}{2\pi\imath}\right| \int\limits_{|z_0 - w| = r} \frac{|f(w) - f_n(w)|}{|w - z|^2} \, |dw|$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{|f(z_0 + r\,e^{\imath t}) - f_n(z_0 + r\,e^{\imath t})|}{|z_0 - z + r\,e^{\imath t}|^2} \, r\,dt$$

Für Nenner gilt:

$$\left|r\,e^{\imath t} - (z - z_0)\right| \geq \left|r\,e^{\imath t}\right| - |z - z_0| \geq r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}$$

Somit

$$|f'(z) - f_n'(z)| \leq \frac{2}{\pi\,r} \int\limits_0^{2\pi} \left|f(z_0 + r\,e^{\imath t}) - f_n(z_0 + r\,e^{\imath t})\right| \, dt$$

Wegen gleichmäßiger Konvergenz dürfen Grenzübergänge vertauscht werden, also $f' = \lim f_n'$. Für beliebige kompakte Teilmengen von D gibt es endliche offene Überdeckungen mit Umgebungen. Also kann die gleichmäßige Konvergenz auf die ganze kompakte Teilmenge übertragen werden.

Aufgabe 32:
Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ beliebig. Da f ganz folgt aus CAUCHY-Integralformel für $z \in U_1(z_0)$:

$$\left|f^{(n)}(z)\right| = \left|\frac{n!}{2\pi} \int\limits_{|z_0 - w| = 3} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} \, dw\right|$$
$$\leq \frac{n!}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{|f(z_0 + 3\,e^{\imath t})|}{|z_0 + 3\,e^{\imath, t} - z|^{n+1}} \, 3\,dt$$

$f(z)$ ist auf kompakter Menge $\overline{U_3(z_0)}$ beschränkt, d. h. $|f(z) \leq M$ für ein $M > 0$. Für Nenner gilt:

$$\left|3\,e^{\imath t} - (z - z_0)\right| \geq 3 - |z - z_0| \underset{z \in U_1(z_0)}{\geq} 3 - 1 = 1$$

Deshalb folgt:

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \leq \frac{n!}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{M}{2^{n+1}} \, 3\,dt$$

Also ist $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{2} M \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ist konvergente Majorante. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z)}{n!}$ konvergiert deshalb für $z \in U_1(z_0)$ gleichmäßig absolut. Für beliebige kompakte Teilmengen existieren endliche offenen Überdeckungen von Umgebungen, so daß $F(z)$ absolut, gleichmäßig konvergiert. f ganze Funktion, daher TAYLORentwicklung:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

speziell für $z = z_0 + 1$ folgt:

$$f(z+1) = F(z)$$

Aufgabe 33:

a) Beweis durch Widerspruch: Angenommen es existiert $\varepsilon > 0$ und ein $w \in \mathbb{C}$ mit $|f(z) - w| > \varepsilon > 0 \; \forall z \in \mathbb{C}$, dann folgt:

$$\left| \frac{1}{f(z) - w} \right| < \frac{1}{\varepsilon}$$

Somit ist $\frac{1}{f(z)-w}$ beschränkte, ganze Funktion. Nach Satz von LIOUVILLE ist sie deshalb konstant, die Ableitung ist also null, d. h. $f'(z) = 0$. Da $\mathbb{C}$ Gebiet ist $f(z)$ konstant. Widerspruch zur Voraussetzung, daß $f(z)$ nicht konstant.

b) $g(G)$ ist ebenfalls ein Gebiet (Satz von der Gebietstreue). Da Nullstellenmenge diskret, $f \circ g$ aber identisch null, läßt sich die Funktion $\tilde{f} = 0$, die in einem Häufungspunkt mit f übereinstimmt, auf D eindeutig Fortsetzen. Also ist $f = 0$.

Aufgabe 34:

Die Funktion $f_\varphi(z\, e^{\imath\varphi})$ mit $\varphi \in \mathbb{R}$ ist holomorph, da Drehungen biholomorph sind. Sei $\delta := \beta - \alpha$, $n \in \mathbb{N}$ mit $N > \frac{2\pi}{\delta}$. Dann folgt:

$$g(z) := \prod_{n=0}^{N} f(z\, e^{\imath\, n\, \delta})$$

ist holomorph auf $U_1(0)$ und stetig auf $\overline{U_1(0)}$. Mit Aufgabe 27 ergibt sich

$$g(z) = \frac{1}{2\pi\,\imath} \int\limits_{|w|=1} \frac{g(w)}{w - z}\, dw = 0$$

da $g(w) = 0$ auf Rand von $U_1(0)$. Also ist $f(0) = 0$. Behauptung: $f(z) = 0$ für alle $z \in U_1(0)$. Angenommen $f(z)$ ist nicht identisch null. Da Nullstellenmenge diskret ist, existiert eine Umgebung $U_r(0)$ mit $0 < r < 1$, derart daß $f(z) \neq 0 \; \forall z \in U_r(0)$, $z \neq 0$. Da die Abbildung $z \mapsto z\, e^{\imath\varphi}$ jede Umgebung von Null bijektiv abbildet und den Nullpunkt auf sich selbst, ist $f(z\, e^{\imath\, n\, \delta}) \neq 0 \; \forall z \in U_r(0)$, $z \neq 0$. Also müßte auch gelten: $g(z) \neq 0$ $\forall z \in U_r(0)$, $z \neq 0$. Widerspruch. Also ist $f(z) = 0 \; \forall z \in U_1(0)$. Da $f(z)$ stetig auf $\overline{U_1(0)}$ folgt Behauptung der Aufgabe.

Aufgabe 35:

a) φ ist biholomorph, also existiert holomorphe Funktion φ^{-1}. Es folgt $0 = \varphi^{-1}(\varphi(0)) = \varphi^{-1}(0)$. Lemma von Schwarz für φ und φ^{-1}: $|\varphi(z)| \leq |z|$ und $|\varphi^{-1}(z)| \leq |z|$ insbesondere:

$$\left|\varphi^{-1}\big(\varphi(z)\big)\right| \leq |\varphi(z)| \leq |z|$$

also:

$$|z| \leq |\varphi(z)| \leq |z|$$

deshalb ist $|\varphi(z)| = |z|$. Aus dem zweiten Teil des Lemma von Schwarz folgt die Existenz eines $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $|\zeta| = 1$, derart daß

$$\varphi(z) = \zeta \cdot z$$

b) Wohldefiniert, da Nenner ungleich null, und mit Aufgabe 2 auch kleiner 1 ist. Holomorph, da Komposition von Polynomen und Nennerpolynom ungleich null. Bijektiv, da $\varphi \circ \varphi^{-1}(z) = z$.

c) Aus $(\varphi_{\varphi(0)} \circ \varphi)(0) = 0$ folgt $(\varphi_{\varphi(0)} \circ \varphi)(z) = \zeta z$. Also ist $\varphi(z) = \varphi^{-1}_{\varphi(0)}(\zeta z) = \varphi_{\varphi(0)}(\zeta z) = \zeta \varphi_{\varphi(0)/\zeta}(z)$

Aufgabe 36:
Translationen und Drehungen in der komplexen Zahlenebene ändern den Abstand zweier komplexer Zahlen nicht.

$$\begin{gathered} |(z+w)-(a+w)| = |z-a| \\ |z\, e^{\imath\varphi} - a\, e^{\imath\varphi}| = |z-a|\; |e^{\imath\varphi}| = |z-a| \end{gathered}$$

Verschiebung des Dreiecks um $-a$ und Drehung um $-\operatorname{Arg} b'$. Deshalb oBdA: Sei Dreieck a, b, c gleichseitig mit $a = 0$, $b \in \mathbb{R}^+$. Dann folgt:

$$c = b\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\imath\right)$$

Sei $f(z) = (z-a)(z-b)(z-c) = z(z-b)(z-b(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\,\imath))$ Dann ist $f(z)$ holomorph. Nach Satz nimmt $f(z)$ sein Maximum auf dem Rand des Dreieck an. Aus Symmetriegründen nimmt $f(z)$ dieses auf jeder Seite an. Betrachte Seite a, b:

$$|f(t)| = b^3 \left| t\,(t-1)\left(t - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\imath\right)\right)\right|$$

mit $t \in [0,1]$. Bestimmen der kritischen Punkte und Nachprüfen, ob diese Maxima sind, führt zu:

$$\max\{|z-a|\,|z-b|\,|z-c|\} = \frac{\sqrt{3}}{8}\,|b-a|^3$$

Aufgabe 37:

a) hebbar

b) $a = 0$: hebbar, $a \neq 0$: Pol der Ordnung 1

c) wesentlich

Aufgabe 38:
f beschränkt, so ist auch f^2 beschränkt. $|f| \to \infty$, so ist auch $|f^2| \to \infty$. $f|_{U_\varepsilon}$ dicht in $\mathbb{C}$, so ist auch $f^2|_{U_\varepsilon}$ dicht in $\mathbb{C}$, da $.^2$ stetig. Damit folgt die Behauptung der Aufgabe.

Aufgabe 39:

a)
$$f = \sum_{n=\operatorname{ord}(f,a)}^{\infty} a_n (z-a)^n$$
mit $a_{\operatorname{ord}(f,a)} \neq 0$, $f \equiv 0$ dann $\operatorname{ord}(f,a) = \infty$. $f + g$ klar. $f \cdot g$ klar. $f = h \cdot g$, deshalb $\operatorname{ord}(f,a) = \operatorname{ord}(\frac{f}{g}, a) + \operatorname{ord}(h,a)$. Ferner $\operatorname{ord}(\frac{f}{g}, a) = \operatorname{ord}(f,a) - \operatorname{ord}(h,a)$. Also $\operatorname{ord}(\frac{f}{g}, a) = \operatorname{ord}(f,a) - \operatorname{ord}(g,a)$.

b) (i) Hebbare Singularität, d. h., f (genauer: eindeutig bestimmte Fortsetzung) hat TAYLORentwicklung. Diese entspricht der LAURENTreihe.

(ii) Pol, d. h. $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^k}$. Zähler in TAYLORreihe entwickeln, da $g(0) \neq 0$ ist $a_{-k} \neq 0$.

(iii) Wesentliche Singularität folgt durch Ausschluß von i) und ii).

Aufgabe 40:
$\frac{f'}{f}$ hat hebbare Singularität, d. h., es existiert Fortsetzung $h : U_\varepsilon(0) \to \mathbb{C}$. h holomorph, es gibt also Stammfunktion H. Mit Beweis von Aufgabe 22 folgt: $f(z) = e^d\, e^{H(z)}$ mit d konstant. Deshalb gibt es holomorphe Fortsetzung für f und $f(0) \neq 0$.

Aufgabe 41:
$f^2 + g^2 = 1$, $(f + \imath\, g)(f - \imath\, g) = 1$, also $f + \imath\, g \neq 0$. mit Aufgabe 22 folgt die Existenz einer ganzen Funktion h, derart daß $f + \imath\, g = e^{\imath\, h}$. Einsetzen führt zu $f - \imath\, g = e^{-\imath\, h}$. Addition beider Gleichungen ergibt: $2\, f = e^{\imath\, h} + e^{-\imath\, h}$, also $f = \cos h$. Subtraktion der Gleichungen ergibt: $g = \sin h$.

Aufgabe 42:
Partialbruchzerlegung und durch geeignetes Ausklammern die beiden Summanden in geometrische Reihe Entwickeln.

Aufgabe 43:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{2^n}} \frac{1}{1 - z^{-2 \cdot 2^n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{2^n}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z^{2^{n+1}}} \right)^k$$

Annahme, daß man umordnen darf:

$$f(z) = \sum_{k,n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{2^n(2k+1)}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{z^m}$$

Letzte Gleichheit wegen Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung. Da diese Reihe absolut konvergiert, ist Umordnung im Nachhinein gestattet.

Aufgabe 44:

Aufgabe 45:

a) Sei $\alpha : [0,1] \to \mathbb{C}$ Weg in $\mathbb{C} \setminus C$, d. h. stetige Abbildung, mit $\alpha(0) = a$, $\alpha(1) = b$. Sei $t \in [0,1]$, sei

$$\chi_t := \int_C \frac{dw}{w - \alpha(t)}$$

Der Integrand ist stetig. Da χ_t ganzzahlig, ist χ_t konstant $\forall t \in [0,1]$. Somit ist $\chi_0 = \chi_1$ und da $\chi_0 = \chi(C;a)$ und $\chi_1 = \chi(C;b)$ gilt

$$\chi(C;a) = \chi(C;b)$$

b) irgendwie mit Hinweis (viel Glück dabei!)

Aufgabe 46:

a) Sei $h_s(z) := g(z) + s(f(z) - g(z))$ mit $|s| \le 1$. Für $z \in \partial U_r(a)$ gilt:

$$\begin{aligned} |h_s(z)| &\ge |g(z)| - |s| \cdot |f(z) - g(z)| \\ &> |g(z)| - |s|\,|g(z)| \ge 0 \end{aligned}$$

Also hat h_s keine Nullstellen auf $\partial U_r(a)$. f und g sind holomorph, deshalb ist auch h_s holomorph. h_s hat deshalb keine Polstellen.

Sei $C := a + r\,e^{\imath t}$ mit $0 \le t \le 2\pi$. Dann gilt für die Anzahl der Nullstellen N_s von h_s in $U_r(a)$ jeweils mit ihrer Vielfachheit gezählt:

$$N_s = \frac{1}{2\pi\,\imath} \int_C \frac{h_s'(z)}{h_s(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi\,\imath} \int_C \frac{g'(z) + s\big(f'(z) + g'(z)\big)}{g(z) + s\big(f(z) + g(z)\big)}\,dz$$

Das rechtsstehende Integral ist stetig in s. N_s ist ganzzahlig, also ist N_s konstant. Somit ist $N_0 = N_1$ und $N_0 = N_g$, $N_1 = N_f$. Also haben f und f in $U_r(a)$ die gleiche Anzahl von Nullstellen (mit jeweiliger Ordnung gezählt).

b) Sei $f(z) := e^z - 3z$, $g(z) := 3z$. Dann gilt für $|z| = 1$:

$$|f(z) - g(z)| = |e^z| = e^{\mathrm{Re}\,z} \le e' < 3$$

$$|g(z)| = |3z| = 3$$

Damit sind Voraussetzungen von Teil a) erfüllt. g und f haben auf $U_1(0)$ gleiche Anzahl von Nullstellen. $g(z)$ hat einfache Nullstelle, deshalb kann $f(z)$ ebenfalls nur eine Nullstelle haben. $f|_{\mathbb{R}}(\frac{1}{2}) = e^{1/2} - \frac{3}{2} > 0$, $f|_{\mathbb{R}}(1) = e^1 - 3 < 0$. Mit Zwischenwertsatz folgt die Behauptung.

Aufgabe 47:
Für jedes a_ν mit $\nu = 1, \ldots ; n$ läßt sich f schreiben als:

$$f(z) = (z - a_\nu)^m \, u(z)$$

wobei $m = \operatorname{ord}(f; a_\nu)$ und $u(z)$ holomorph auf D. Somit

$$\begin{aligned} g(z) \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} &= g(z) \, \frac{m(z-a_\nu)^{m-1} \, u(z) + (z-a_\nu)^m \, u'(z)}{(z-a_\nu)^m \, u(z)} \\ &= g(z) \, \frac{m \, u(z) + (z-a_\nu) \, u'(z)}{(z-a_\nu) \, u(z)} \end{aligned}$$

Ist $g(a_\nu) \neq 0$, so ist a_ν Pol erster Ordnung und nach Satz gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=a_\nu} g(z) \, \frac{f'(z)}{f(z)} &= \lim_{z \to a_\nu} (z - a_\nu) \cdot g(z) \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} \\ &= \lim_{z \to a_\nu} g(z) \, \frac{m \, u(z) - (z-a_\nu) u'(z)}{u(z)} \\ &= m \cdot g(a_\nu) \end{aligned}$$

Ist $g(a_\nu) = 0$, so ist a_ν hebbar und das Residuum für $z = a_\nu$ gleich null, also ebenfalls:

$$\operatorname{res}_{z=a_\nu} g(z) \, \frac{f'(z)}{f(z)} = m \, g(a_\nu) = \operatorname{ord}(f; a_\nu) \, g(a_\nu)$$

Aus der Residuenformel folgt dann die Behauptung.

Aufgabe 48:

a) $$\int_0^\pi \frac{dx}{a + \cos^2 x} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 + a}}$$

b) $$\frac{x^4}{x^6 + 1} \, dx = \frac{\pi}{3}$$

c) $$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} = \frac{\pi}{(2a)^{2n-1}} \, \frac{(2n-2)!}{\big((n-1)!\big)^2}$$

d) $$\int\limits_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2+a^2)^2}\,dx = \frac{e^{-a}}{4}\,\pi(a^{-2}+a^{-3})$$

e) $$\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos m\,x}{5+3\,\cos x}\,dx = \frac{\pi}{2\,(-3)^m}$$

Aufgabe 49-52:
Lösungen vielleicht später, irgenwann einmal

Index

Absolutbetrag, 10
Additionstheorem, 29
Argument, 11
Argumentprinzip, 92
Automorphismus, 70

beschränkte Menge, 17
Betrag, 10
biholomorph, 101
Bogenlänge, 43

Casaroti-Weierstrass, 75
Cauchy
  Integralsatz, 111
Cauchy
  Integralformel, 52, 54, 89
  Integralsatz, 50
  Ungleichungen, 57
Cauchy, Goursat, 47
Cauchy-Kriterium, 24, 25
Cauchy-Riemann-DGL, 23
Cayley-Abbildung, 116
Cosinus, 30

de Moivre, 12
  Formeln von, 115
Differenzierbarkeit, 19, 37
Dreieck $\triangle$, 46
Dreiecksungleichung, 11
Dreiecksweg, 46

einfach zusammenhängend, 111
Einheitswurzeln, 13
Elementargebiet, 64
Eulersche Formel, 30
Exponentialfunktion, 29

Folge, konvergente, 15
Fortsetzung, Eindeutigkeit der, 66
Fundamentalsatz der Algebra, 58

ganze Funktion, 58
Gebietstreue, Satz von der, 67
gleichmäßige Konvergenz, 24, 25
Goursat, 47

harmonische Funktion, 118
Hauptteil, 76
Hauptzweig, 35
hebbare Singularität, 71
Hebbarkeitssatz, 72
homotop, 110
Hurwitz, 93

i, 8
Identitätssatz, 65
Imaginärteil, 9
innerer Punkt, 17
Integral, 38, 109
Integralformel, Cauchy, 52, 54, 89
Integralsatz, Cauchy, 111
Integralsatz, Cauchy, 50

Kettenregel, 21
Körper $\mathbb{C}$, 7
kompakte Menge, 17
komplex konjugiert, 9
konform, 101
konform äquivalent, 101
Kurve, 40
  stückweise glatt, 40
Kurvenintegral, 40

Laurentreihe, 80

LAURENTzerlegung, 76
Lemma
    von SCHWARZ, 69
Limes, 18
LIOUVILLE, Satz von, 58
Logarithmus, komplexer, 32

Maximumprinzip, 69
Menge
    abgeschlossen, 17
    offen, 17
meromorphe Funktion, 83
MÖBIUS-Transformation, 101
MONTEL, Satz von, 106
MORERA, Satz von, 121

Nebenteil, 76
nullhomotop, 111

Ordnung, 91

Pol, 73
Polarkoordinaten, 12
Polstellenordnung, 73
Potenzreihe, 24
punktierte Umgebung, 71

Realteil, 9
Reihe, 16, 80
Residuensatz, 88
Residuum, 87
RIEMANN
    Hebbarkeitssatz, 72
    kleiner Abbildungssatz, 103
Ringgebiet, 76
ROUCHÉ, Satz von, 125

Satz von
    CASAROTI-WEIERSTRASS, 75
    der Gebietstreue, 67
    HURWITZ, 93
    LIOUVILLE, 58
    MONTEL, 106
    MORERA, 121
    ROUCHÉ, 125
SCHWARZ, Lemma von, 69
Singularität, 71
    hebbar, 71
    Pol, 73
    wesentliche, 75
Sinus, 30
Stereographische Projektion, 116
Sterngebiet, 50
Stetigkeit, 18, 37
stückweise glatt, 40

TAYLORentwicklung, 59
trigonometrische Funktionen, 30

Umgebung, 17
Umlaufzahl, 85

wesentliche Singularität, 75