Funktionentheorie 2

Prof. Dr. W. Kohnen

unautorisierte Vorlesungsmitschrift
von

Katharina Schulé

Sommersemester 2006

Diese unautorisierte Vorlesungsmitschrift ist während der Vorlesung Funktionentheorie 2 von Prof. Dr. W. Kohnen im Sommersemester 2006 entstanden. Ich habe mich bemüht, möglichst viele Fehler zu finden und zu korrigieren. Da mir das aber sicherlich nicht überall gelungen sein wird, bitte ich darum, mir die gefundenen Fehler über die E-mail-Adresse funktionentheorie2@web.de zu melden. Vielen Dank!

Mannheim, im Juni 2007
Katharina Schulé

Inhaltsverzeichnis

Motivation und Erinnerung

0.1 Thema

Weiteres detailliertes Studium holomorpher / meromorpher Funktionen, insbesondere:

- Funktionen mit vorgegebenen Null- bzw. Polstellen
- Gammafunktion
- Periodische Funktionen: elliptische Funktionen, Modulformen (Anwendung auf die Zahlentheorie)

0.2 Erinnerung: Funktionentheorie 1

Definition (holomorph). *$D \subset \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$. Dann heißt f auf D* holomorph, *falls f in jedem $z_0 \in D$ komplex differenzierbar ist. D.h. $f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ existiert.*

Wichtige Aussagen:

Satz 1 (Cauchy'scher Integralsatz für Sterngebiete). *Sei $D \subset \mathbb{C}$ Sterngebiet, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph.*
Dann gilt:

i) f hat auf D eine Stammfunktion.

ii) $\int_C f(z)dz = 0$ für alle geschlossenen, stückweise glatten Kurven $C \subset D$.

Satz 2 (Cauchy'sche Integralformel). *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, $\overline{U_r(z_0)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r\} \subseteq D$, $r > 0$.*
Dann gilt:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega \qquad (\forall z \in U_r(z_0))$$

wobei C durch $z_0 + re^{2\pi i t} \quad (0 \leq t \leq 1)$ gegeben wird, d.h. C ist die genau einmal im positiven Sinn durchlaufene Kreislinie um z_0 vom Radius r.

Anwendungen:

- f auf D holomorph $\Rightarrow$ f auf D beliebig of komplex diff'bar.
- $f : U_r(z_0) \to D$ holomorph $\Rightarrow f(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{f^{(r)}(z_0)}{r!}(z - z_0)^r \qquad (z \in U_r(z_0))$

- f auf D holomorph $\Leftrightarrow$ f auf D analytisch
- *Satz von Liouville:* Eine ganze beschränkte Funktion ist notwendigerweise konstant. ($\Rightarrow$ Fundamentalsatz der Algebra)
- Lokale Abbildungseigenschaften holomorpher Funktionen: Identitätssatz, Satz von der Gebietstreue, Maximumprinzip

Satz 3 (Singularitäten). *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, $a \notin D$,*
$\dot{U}_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z-a| < r\} \subset D$.
Dann heißt a eine (isolierte) Singularität *von f.*

Klassifikation:

- *hebbar (Riemann'scher Hebbarkeitssatz)*
- *Pol* ($lim_{z \to a}|f(z)| = \infty$)
- *wesentlich (Satz von Casaroti-Weiserstraß)*

Satz 4 (Laurent-Zerlegung). $\mathcal{R} := \{z \in \mathbb{C} | r < |z| < R\}, 0 \leq r < R \leq \infty$ *ist Ringgebiet,*
$f : \mathcal{R} \to \mathbb{C}$ *holomorph.*
$\Rightarrow f$ *hat eindeutige Zerlegung*

$$f(z) = g(z) + h(1/z), z \in \mathbb{R}$$

wobei $g : U_R(0) \to \mathbb{C}$ holomorph und $h : U_{1/r}(0) \to \mathbb{C}$ holomorph mit $h(0) = 0$. Man nennt h den Hauptteil. *($\Rightarrow$ Klassifikation von Singularitäten)*

Satz 5 (Residuensatz). *$D \subset \mathbb{C}$ Elementargebiet, $z_1, \ldots, z_k \in D$,*
$f : D \backslash \{z_1, \ldots, z_k\} \to \mathbb{C}$ holomorph, C geschlossene, stückweise glatte Kurve in $D \backslash \{z_1, \ldots, z_k\}$.
Dann gilt:

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \chi(C; z_j) res_{z=z_j} f$$

1 Konstruktion meromorpher / holomorpher Funktionen

1.1 Partialbruchzerlegung

Satz 1 (Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen). *Seien $p(z)$ und $q(z)$ zwei Polynome über $\mathbb{C}$ und sei $R(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ $(z \in \mathbb{C}, q(z) \neq 0)$. Seien $z_1, \ldots, z_k$ die verschiedenen Polstellen von R und seien $u_1, \ldots, u_k$ deren Ordnungen.*
Dann gibt es eindeutig bestimmte Polynome $p_1(z), \ldots, p_k(z)$ über $\mathbb{C}$ mit $p_r(0) = 0\,(\forall r = 1, \ldots, k)$ und ein eindeutig bestimmtes Polynom $p_0(z)$ über $\mathbb{C}$, sodass gilt:

$$R(z) = \sum_{r=1}^{k} p_r\left(\frac{1}{z - z_r}\right) + p_0(z) \qquad (z \in \mathbb{C}, z \neq z_r \forall r = 1, \ldots, k)$$

Es gilt $grad\, p_r = u_r$.

Beweis. Existenz:
Sei p_r der Hauptteil von R bzgl. der Polstelle z_r (siehe Laurententwicklung). Da z_r Polstelle, ist $p_r(z)$ ein Polynom und es gilt $p_r(0) = 0$ nach dem Satz von Laurent. Ferner hat

$$p_0(z) := R(z) - \sum_{r=1}^{k} p_r\left(\frac{1}{z - z_r}\right) \tag{*}$$

in jedem Punkt z_r $(\forall r = 1, \ldots, k)$ eine hebbare Singularität, hat also holomorphe Fortsetzung auf ganz $\mathbb{C}$.
Da p_0 rationale Funktion (denn $R(z)$ und $p_r(\frac{1}{z-z_r})$ sind rationale Funktionen), folgt, dass p_0 ein Polynom ist. (Schreibe $R(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$ in gekürzter Form und benutze Fundamentalsatz der Algebra; wegen Holom. muss sich jede Nullstelle von B gegen eine NSt von A wegheben.)
Damit ist die Existenz der Zerlegung gezeigt.
$(*)$: Es gilt $grad\, p_r = u_r$

Eindeutigkeit:
Angenommen es gilt:

$$R(z) = \sum_{r=1}^{k} \tilde{p}_r\left(\frac{1}{z - z_0}\right) + \tilde{p}_0(z)$$

mit $\tilde{p}_r$, $(r = 0, 1, \ldots, k)$ der geforderten Art. Sei $\mu \in \{1, \ldots, k\}$. In einer kleinen Umgebung von z_μ gilt dann:

$$R(z) = \tilde{p}_\mu(\frac{1}{z - z_\mu}) + \left(\sum_{\substack{r=1 \\ r \neq \mu}}^{k} \tilde{p}_r(\frac{1}{z - z_r}) + \tilde{p}_0(z) \right)$$

und der Ausdruck in der Klammer ist in der *ganzen* kleinen Umgebung von z_μ holomorph. Daher ist die obige Zerlegung die Laurent-Zerlegung von $R(z)$ bzgl. der Polstelle z_μ. Wegen der Eindeutigkeit der Laurent-Zerlegung folgt also $\tilde{p}_\mu = p_\mu$. Dies gilt für alle $\mu = 1, \ldots, k$. Daher folgt auch $p_0 = \tilde{p}_0$. □

Frage:
Gilt eine ähnliche Zerlegung für beliebige meromorphe Funktionen auf $\mathbb{C}$?

Erinnerung:
Eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ wird gegeben durch eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \setminus S \to \mathbb{C}$, wobei $S \subset \mathbb{C}$ eine diskrete Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist, d.h. S hat keinen Häufungspunkt in $\mathbb{C}$ ($\Leftrightarrow \mathbb{C} \setminus S$ ist offen).

Problem:
Ist S unendlich, so wird die Summe über die Hauptteile $\sum_{s \in S} p_s(\frac{1}{z-s})$ i.Allg. divergieren.

Trick:
Einführung von konvergenzerzeugenden Summanden

Satz 2 (Partialbruchsatz von Mittag-Leffler). *i) Sei $S \subset \mathbb{C}$ diskret. Für jedes $s \in S$ sei eine ganze Funktion $h_s : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben mit $h_s(0) = 0$. (Man nennt $\{h_s\}_{s \in S}$ eine* Hauptteilverteilung.*)*
Dann gibt es eine holomorphe Funktion $h : \mathbb{C} \setminus S \to \mathbb{C}$, deren Hauptteil in $s \in S$ durch h_s gegeben wird $\forall\, s \in S$, d.h.

$$h(z) - h_s(\frac{1}{z - s})$$

hat in s eine hebbare Singularität. (Man nennt h eine Lösung der Hauptteilverteilung.*)*
Alle Lösungen der Hauptteilverteilung werden durch $h + g$ gegeben, wobei h eine feste Lösung ist und g ganz ist.

ii) Sei f eine auf $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion mit Polstellenmenge S und mit Hauptteilen p_s ($s \in S$). Dann gibt es Polynome q_s ($s \in S$) und eine ganze Funktion g, sodass gilt:

$$f(z) = \sum_{s \in S} (p_s(\frac{1}{z - s}) - q_s(z)) + g(z) \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus S)$$

wobei die Reihe rechts auf kompakten Teilmengen $K \subset \mathbb{C} \setminus S$ gleichmäßig absolut konvergiert.

Beweis. i) Ist S endlich, so ist

$$h(z) := \sum_{s \in S} p_s(\frac{1}{z-s}) \qquad (z \neq s\ \forall s)$$

offenbar eine Lösung der Hauptteilverteilung.
Sei S unendlich.
Sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt, dann ist K beschränkt und $K \cap S$ ist beschränkt.
Wäre $\mid K \cap S \mid = \infty$, so hätte $K \cap S$, also auch S, einen Häufungspunkt in $\mathbb{C}$ nach Bolzano-Weierstrass. ↯, da S diskret.
Daher: $K \cap S$ endlich und S abzählbar. Sei $s_0, s_1, s_2, \ldots$ eine Abzählung von S mit $\mid s_0 \mid \leq \mid s_1 \mid \leq \mid s_2 \mid \leq \ldots \to \infty$. (Insbesondere : Ist $0 \in S \Rightarrow s_0 = 0$; ferner: Ist $n \geq 1 \Rightarrow \mid s_n \mid > 0$.)
Setze $h_n := h_{s_n}$. Sei $n \geq 1$.
Die Funktion $h_n(\frac{1}{z-s_n})$ ist holomorph auf der offenen Kreisscheibe $\mid z \mid < \mid s_n \mid$ (Vorr.: $n \geq 1$), besitzt also dort eine Taylorreihenentwicklung um den Punkt 0, welche auf kompakten Mengen gleichmäßig absolut konvergiert.
Nach Definition der Konvergenz existiert also ein Polynom $q_n(z)$, sodass gilt:

$$\mid h_n(\frac{1}{z-s_n}) - q_n(z) \mid \leq \frac{1}{n^2} \qquad \forall z \text{ mit } \underbrace{\mid z \mid \leq \frac{\mid s_n \mid}{2}}_{\text{(kompakt!)}} \tag{*}$$

Sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt.
Dann $\exists\, N \in \mathbb{N}$, sodass $\mid z \mid \leq \frac{\mid s_n \mid}{2} \quad \forall z \in K$ und $\forall n \geq N$.
Wegen $(*)$ und da

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

folgt also, dass die Reihe

$$h(z) := h_0(\frac{1}{z-s_0}) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(h_n \left(\frac{1}{z-s_n} \right) - q_n(z) \right)$$

auf Kompakta $K \subset \mathbb{C} \setminus S$ gleichmäßig absolut konvergiert.
Insbesondere ist h auf $\mathbb{C} \setminus S$ holomorph. Offensichtlich ist h (und damit auch $h + g$ mit g ganz) eine Lösung der Hauptteilverteilung. Sind H und h zwei Lösungen, so haben H und h dieselben Hauptteile $\forall s \in S$, daher ist $g := H - h$ ganz.

ii) Man betrachte die Hauptteilverteilung $\{p_s\}_{s \in S}$. Diese hat die Lösung f nach Voraussetzung, also auch die unter i) (explizit!) konstruierte Lösung. Daher unterscheiden sich beide um eine ganze Funktion g.

□

ANWENDUNG:
Gegeben sei eine auf $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion f mit Polstellenmenge S.

i) Man bestimme die Hauptteile p_s.

ii) Man untersuche $\sum_{s\in S} p_s(\frac{1}{z-s})$ auf Konvergenz und bestimme ggf. Polynome q_s ($s \in S$), sodass $\sum_{s\in S}\left(p_s\left(\frac{1}{z-s}\right) - q_s(z)\right)$ auf Kompakta $K \subset \mathbb{C} \setminus S$ gleichmäßig absolut konvergiert.

iii) Man versuche (!) eine ganze Funktion g explizit zu finden, sodass

$$f(z) = \sum_{s\in S}(p_s(\frac{1}{z-s}) - q_s(z)) + g(z) \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus S)$$

Beispiel. *i)* Behauptung:

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}) \tag{*}$$

wobei die rechte Seite gleichmäßig absolut auf Kompakta $K \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ konvergiert.

Beweis. klar: Polstellenmenge von $\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}$ ist $S = \mathbb{Z}$. Bestimmung der Hauptteile: Es ist:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \mp \dots \quad (z \in \mathbb{C})$$

Sei zunächst z nahe bei 0, $z \neq 0$. Man schreibe:

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{\sin \pi z} &= \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{\frac{\sin \pi z}{\pi z}} \\
&= \frac{1}{z} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 - \frac{(\pi z)^2}{3!} \pm \dots}}_{\text{holomorph in einer kleinen Umgebung von } z=0} \\
&= \frac{1}{z} \cdot (1 + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \dots) \\
\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} &= \frac{1}{z^2} \cdot (1 + 2a_2 z^2 + \dots) = \frac{1}{z^2} + 2a_2 + \dots
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Hauptteil von $\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}$ ist gleich $\frac{1}{z^2}$.
Sei nun $n \in \mathbb{Z}$ fest, z nahe bei n, $z \neq n$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} &= \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi(z-n) + \pi n)} \\
&= \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi(z-n))} \\
&\underbrace{=}_{\text{s.o.: } z=0} \frac{1}{(z-n)^2} + 2a_2 + \dots)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Hauptteil von $\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}$ bei $z = n$ ist gleich $\frac{1}{(z-n)^2}$. □

Behauptung: *Die Summe der Hauptteile $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$ ist auf Kompakta $K \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$*

gleichmäßig absolut konvergent.

Beweis. Sei $K \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ kompakt.
Sei $|z| \leq c\ , \forall z \in K$, dann gilt:

$$|z-n| = |n-z| \geq |n| - |z| \geq |n| - c \geq \frac{|\, n \,|}{2} \qquad \text{, falls: } |n| \geq 2c$$

Daher folgt:

$$\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z} \\ |n|\geq 2c}} \frac{1}{|\, z-n \,|^2} \leq 4 \cdot \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z} \\ |n|\geq 2c}} \frac{1}{n^2} < \infty$$

$$\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|\, z-n \,|^2} \quad \text{ist auf } K \text{ gleichmäßig absolut konvergent.}$$

$\square$

Es folgt: beide Seiten von $(*)$ haben die gleiche Polstellenmenge $S = \mathbb{Z}$ und die gleichen Hauptteile, also existiert eine ganze Funktion g mit

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} + g(z) \quad (\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z})$$

BEHAUPTUNG: $g \equiv 0$

Beweis. Beachte: linke Seite und

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$$

sind periodisch mit Periode 1, also folgt $g(z+1) = g(z)$, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Wegen Stetigkeit folgt $g(z+1) = g(z)$, $\forall z \in \mathbb{C}$.
Es gilt:

$$\begin{aligned}
|\sin^2 \pi z\,| &= \left| \frac{e^{\pi i z} - e^{-\pi i z}}{2i} \right|^2 \\
&= \frac{1}{4}(e^{\pi i z} - e^{-\pi i z})(e^{-\pi i \overline{z}} - e^{\pi i \overline{z}}) \\
&= \frac{1}{4}(e^{-2\pi y} - e^{-2\pi i x} - e^{2\pi i x} + e^{2\pi y}) \\
&= \frac{1}{4}(e^{2\pi y} + e^{-2\pi y}) - \underbrace{\frac{1}{2}\cos(2\pi x)}_{\text{beschränkt}} \\
&\to \infty \text{ , für } |y| \to \infty \quad \text{gleichmäßig in } x.
\end{aligned}$$

Daher gilt:

$$\left| \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} \right| \to 0 \text{ , für } |y| \to \infty \quad \text{gleichmäßig in } x.$$

Insbesondere ist $\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}$ auf $R := \{z = x + iy \mid \ |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ beschränkt.

Sei $z \in R$, $n \neq 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
|z-n|^2 &= |(x-n)+iy|^2 \\
&= (x-n)^2 + y^2 \\
&= |n-x|^2 + y^2 \\
&\geq (|n|-|x|)^2 + y^2 \\
&\geq (\underbrace{|n|-1}_{\geq 0})^2 + y^2 \\
&\geq (|n|-1)^2 + 1
\end{aligned}$$

Daher:

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|z-n|^2} &= \frac{1}{|z|^2} + \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} \frac{1}{|z-n|^2} \qquad (**) \\
&\leq 1 + \sum_{n\neq 0} \frac{1}{(|n|-1)^2+1} < \infty
\end{aligned}$$

Daher ist $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$ auf R beschränkt. Also ist auch g auf R beschränkt.

Da g stetig, ist g trivialerweise auf $\{z = x+iy \mid |x| \leq 1\,, |y| \leq 1\}$ beschränkt. Also ist g auf $\{z = x+iy \mid |x| \leq 1\}$ beschränkt.

$\overset{\text{Liouville}}{\Rightarrow}$ $g = c$ konstant.

Argument $(**)$ zeigt, dass $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$ auf R gleichmäßig absolut konvergiert.
Fixiere $x \in R$. Dann gilt:

$$\lim_{y\to\infty} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \underbrace{\lim_{y\to\infty} \frac{1}{(z-n)^2}}_{=0,\text{ denn } \frac{1}{|z-n|^2} = \frac{1}{(x-n)^2+y^2}} = 0$$

Schon gezeigt: $\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} \to 0\,, |y| \to \infty\,, x \in R$ fest.

$\Rightarrow c = 0$ $\square$

ii) PARTIALBRUCHZERLEGUNG DES KOTANGENS:

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right) \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z})$$

wobei die rechte Seite gleichmäßig absolut konvergiert auf Kompakta $K \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$

Beweis. Wie in i) zeigt man: Polstellenmenge von $\pi \cot \pi z$ ist $S = \mathbb{Z}$, Hauptteil in

$z = n \in \mathbb{Z}$ ist gleich $\frac{1}{z-n}$. Die Reihe

$$\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} \frac{1}{z-n}$$

hat keine Chance auf Konvergenz (beachte: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$, also muss man nach dem Rezept des Beweises von Satz (2), i) vorgehen und Polynome q_s ($s \in \mathbb{Z}$) der geforderten Art bestimmen.
Der konstante Term der Taylorentwicklung von $\frac{1}{z-n}$ ($n \neq 0$) ist gleich $\frac{1}{z-n} \mid_{z=0} = -\frac{1}{n}$.
Also untersuche man $\sum_{n\neq 0}(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n})$ auf Konvergenz!
Es ist

$$\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} = \frac{z}{(z-n)n}$$

(hier tritt n quadratisch auf und $\sum_{n\neq 0} \frac{1}{n^2} < \infty$).
Man zeigt in der Tat einfach (!):

$$\frac{1}{z} + \sum_{n\neq 0}(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n})$$

ist auf Kompakta $K \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ gleichmäßig absolut konvergent.
Daher existiert eine ganze Funktion g, sodass:

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n\neq 0} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) + g(z) \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z})$$

□

Behauptung: $g \equiv 0$

Beweis. Man differenziere: (Satz von Weierstraß)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{z} + \sum_{n\neq 0} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) \right) \\
&\qquad = -\frac{1}{z^2} + \sum_{n\neq 0} \left(-\frac{1}{(z-n)^2} \right) \\
&\qquad = -\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}
\end{aligned}$$

Und weiter:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}(\pi \cot \pi z) &= \pi \frac{\partial}{\partial z}(\frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}) \\ &= \pi \frac{\pi(-\sin \pi z \cdot \sin \pi z - \cos \pi z \cdot \cos \pi z)}{\sin^2 \pi z} \\ &= -\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}\end{aligned}$$

Nach i) und da $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ Gebiet, folgt $g = const.$
Die Funktion $\pi \cot \pi z$ ist ungerade! Es ist:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{z} + \sum_{n \neq 0} \left(\frac{1}{-z-n} + \frac{1}{n} \right) &= -\left(\frac{1}{z} \sum_{n \neq 0} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right) \right) \\ &= -\left(\frac{1}{z} \sum_{n \neq 0} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) \right) \quad (n \mapsto -n, \text{ Reihe abs. konv.!})\end{aligned}$$

Also ist

$$\frac{1}{z} \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \neq 0}} (\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n})$$

auch ungerade!

$\Rightarrow g = const = 0$ $\square$

1.2 Unendliche Produkte

Gegeben sei eine Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$.

Ziel: Man definiere in sinnvoller Weise $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$.

Naheliegender Vorschlag: $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ heißt *konvergent*, falls die Folge $(P_N)_N \geq 1$ der Partialprodukte $P_N := \prod_{n=1}^{N} p_n$ konvergiert. Ist $P = \lim_{N\to\infty} P_N$, setze $P = \prod_{n=1}^{\infty} p_n$.

Problem:

i) Ist ein Faktor $p_n = 0$, so ist $P = 0$, also hängt der Wert von P gar nicht von der ganzen Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ab.

ii) Oft will man $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ mit der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \log p_n$ verknüpfen (log ein Logarithmus), und hierzu braucht man $p_n \neq 0 \; \forall\, n$ (ferner $P \neq 0$, wenn man $\log P$ betrachten will).

iii) Später wollen wir holomorphe Funktionen als unendliche Produkte darstellen, und das sollte auch gehen, wenn diese Nullstellen haben. Also: „$p_n \neq 0 \; \forall\, n$“ ist zu radikal.

Definition (Unendliches Produkt). *Sei $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ derart, dass $p_n = 0$ nur für endlich viele p_n. Sei m die größte positive ganze Zahl n mit $p_n = 0$.*
Dann heißt $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ konvergent, *falls die Folge $(P_N)_{N\geq m+1}$ mit $P_N := \prod_{n=m+1}^{N} p_n$ konvergent ist und einen von 0 verschiedenen Limes P hat.*
Man setzt dann

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n := p_1 \cdot \ldots \cdot p_m \cdot P$$

Bemerkung. *i) Oft (aber nicht immer) sind alle Terme $p_n \neq 0$.*

ii) Beachte: Ein konvergentes Produkt ist genau dann 0, wenn einer seiner Terme 0 ist.

Beispiel. *i) $\prod_{n=2}^{\infty}(1-\frac{1}{n^2})$ ist konvergent und hat den Wert $\frac{1}{2}$.*

Beweis. Alle Terme p_n sind $\neq 0$. Es ist:

$$\begin{aligned}
P_N = \prod_{n=2}^{N}(1-\frac{1}{n^2}) &= \prod_{n=2}^{N}\frac{(n-1)(n+1)}{n^2} \\
&= \frac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (N-1)\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot (N+1)}{(1\cdot 2\cdot \ldots \cdot N)\cdot(1\cdot 2\cdot \ldots \cdot N)} \\
&= \frac{N+1}{N\cdot 2} \\
&= \frac{1}{2}\cdot(1+\frac{1}{N}) \\
&\to \frac{1}{2} \qquad \text{für } N\to\infty
\end{aligned}$$

□

ii) $\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{1}{n^2})$ *ist konvergent und hat den Wert* 0. *(Siehe i)!)*

iii) $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ *ist nicht konvergent im Sinne unserer Definition, denn*

$$P_N = \prod_{n=1}^{N}\frac{1}{n} = \frac{1}{N!} \to 0 \qquad (N\to\infty)$$

Satz 1. *i) Ist* $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ *konvergent, so gilt notwendigerweise* $p_n \to 1$ $(n\to\infty)$.

ii) Es gelte $p_n \neq 0\ \forall n \geq 1$. *Dann ist* $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ *genau dann konvergent, wenn* $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{Log} p_n$ *konvergiert. (Hier ist* $\operatorname{Log} z = \log|z| + i\cdot\operatorname{Arg} z$ *mit* $-\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi$ *der Hauptwert des Logarithmus.)*
Genauer gilt: Ist $P=\prod_{n=1}^{\infty} p_n$, *so gibt es* $h\in\mathbb{Z}$, *sodass* $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{Log} p_n = \operatorname{Log} P + 2\pi i h$.
Ist umgekehrt $S=\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{Log} p_n$, *so gilt* $e^s = \prod_{n=1}^{\infty} p_n$.

Beweis. i) In der Notation der Definition gilt für $N \geq m+1$:

$$p_{N+1} = \frac{P_{N+1}}{P_N} \to \frac{P}{P} = 1 \quad (N\to\infty)$$

(Hier braucht man $p_n \neq 0\ \forall\, n \geq m+1$ und $P\neq 0$)

ii) Es gelte $p_n \neq 0\ \forall\, n\geq 1$, weiter:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{Log}\ p_n$$

d.h.:

$$S = \lim_{N\to\infty} S_N \qquad \text{mit } S_N := \sum_{n=1}^{N}\operatorname{Log}\ p_n$$

Wegen der Stetigkeit von exp folgt:

$$\begin{aligned} e^S &= \lim_{N\to\infty} e^{S_N} = \lim_{N\to\infty}\exp\left(\sum_{n=1}^{N}\operatorname{Log} p_n\right) \\ &= \lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\exp\left(\operatorname{Log}\ p_n\right) = \lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N} p_n \\ &= \lim_{N\to\infty} P_N \end{aligned}$$

Sei nun umgekehrt $P=\prod_{n=1}^{\infty} p_n$:
Dann konvergiert die Folge

$$\left(\frac{\prod_{n=1}^{N} p_n}{P}\right)_{N\geq 1} \to 1$$

Sei $\varepsilon_N := \text{Log}\left(\frac{\prod_{n=1}^N p_n}{P}\right)$.
Da Log z in $z = 1$ stetig, folgt $lim_{N\to\infty}\varepsilon_N = \text{Log } 1 = 0$. Für jedes $N \in \mathbb{N}$ gibt es $h_N \in \mathbb{Z}$ mit

$$\varepsilon_N = \sum_{n=1}^N \text{Log } p_n - \text{Log } P + 2\pi i h_N \tag{*}$$

In der Tat:

$$\exp \varepsilon_N = \frac{\prod_{n=1}^N p_n}{P}$$

und

$$\exp\left(\sum_{n=1}^N \text{Log}\, p_n - \text{Log}\, P\right) = \frac{\prod_{n=1}^N p_n}{P} \qquad \text{(Additionstheoreme)}$$

$$\exp z = \exp z' \Leftrightarrow z - z' \in 2\pi i\mathbb{Z}$$

Es gilt:

$$\varepsilon_{N+1} - \varepsilon_N = \text{Log } p_{N+1} + 2\pi i(h_{N+1} - h_N) \ ,$$

also:

$$2\pi i(h_{N+1} - h_N) = \underbrace{\varepsilon_{N+1}}_{\to 0} - \underbrace{\varepsilon_N}_{\to 0} \underbrace{- \text{Log } \underbrace{p_{N+1}}_{\to 1}}_{\to 0}$$

Daher folgt: $\qquad \lim_{N\to\infty}(h_{N+1} - h_N) = 0$

Da $h_N \in \mathbb{Z} \ \ \forall\, N \geq 1$, folgt $h_{N+1} - h_N = 0$ für N groß, also $h_N = h$ konstant für N groß. Aus $(*)$ folgt dann:

$$\sum_{n=1}^\infty \text{Log } p_n \quad = \quad \text{Log } P - 2\pi i h.$$

$\square$

Bemerkung. *Wegen i) schreibt man i.Allg.* $p_n = 1 + a_n$*. Eine notwendige Bedingung für die Konvergenz von* $\prod_{n=1}^\infty (1 + a_n)$ *ist dann* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$*.*

Satz 2. *i) Sei $1 + a_n \neq 0 \; \forall \, n \geq 1$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log}(1 + a_n) \qquad \textit{absolut konvergent} \\ \Leftrightarrow \quad & \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \textit{absolut konvergent} \end{aligned}$$

ii) Unbedingte Konvergenz*: Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, so konvergiert das Produkt $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$. Die Konvergenz des Produktes ist sogar* unbedingt*, das heißt der Wert hängt nicht von der Reihenfolge der Faktoren ab.*

Beweis. i) Es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{z \to 0} \frac{\log(1+z)}{z} &= \lim_{z \to 0} \frac{\log(1+z) - \log(1)}{z} \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \log z \;|_{z=1} \\ &= \frac{1}{z} \;|_{z=1} = 1 \end{aligned}$$

Ist $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent oder $\sum_{n=1}^{\infty} |\operatorname{Log}(1+a_n)|$ konvergent, so gilt notwendigerweise $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$.
In der Tat:
Im ersten Fall ist dies einfach das bekannte notwendige Konvergenzkriterium.
Im zweiten Fall folgt nach demselben Kriterium, dass

$$\begin{aligned} & \operatorname{Log}(1 + a_n) \to 0 \qquad (n \to \infty) \\ \overset{\exp(\cdot)}{\Longrightarrow} \quad & 1 + a_n \to e^0 = 1 \qquad (n \to \infty) \\ \Longrightarrow \quad & a_n \to 0 \qquad (n \to \infty) \end{aligned}$$

Ist also $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ oder $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log}(1 + a_n)$ absolut konvergent, so folgt:
Ist $\varepsilon > 0$, so gilt für alle n „groß genug“:

$$(1 - \varepsilon)|a_n| \leq |\operatorname{Log}(1 + a_n)| \leq (1 + \varepsilon)|a_n|$$

(Beachte: für $a_n = 0$ sind obige Ungleichungen trivialerweise richtig!)
Die Aussagen des Satzes i) folgen somit aus dem Majorantenkriterium für Reihen.

ii) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent, so gilt $a_n \to 0$ $(n \to 0)$, also $|a_n| \leq 1/2$ für n groß. Daher gilt für solche n, dass $1 + a_n \neq 0$.
Die Konvergenz des Produktes $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ folgt somit aus i) und Satz 1, ii).
Die unbedingte Konvergenz des Produktes ergibt sich, da eine Reihe (in diesem Falle $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log}(1 + a_n)$) genau dann absolut konvergiert, wenn sie unbedingt konvergiert, in Verbindung mit i) und Satz 1, ii).

□

Satz 3. *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge holomorpher Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$ derart, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ auf jeder kompakten Teilmenge von D gelichmäßig absolut konvergiert.*
Dann ist für jedes $z \in D$ das Produkt

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 + f_n(z))$$

unbedingt konvergent und $z \mapsto F(z)$ ist auf D holomorph.

Beweis. Die unbedingte Konvergenz des Produktes für jedes $z \in D$ folgt aus Satz 2, ii), mit $a_n = f_n(z)$.
Noch zu zeigen: F auf D holomorph.
Es genügt Holomorphie auf U zu zeigen, wobei $U \subset D$ offen mit $\bar{U} \subset D$ kompakt, für jedes solche U.
Nach Voraussetzung konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ auf $\bar{U}$, also auch auf U gleichmäßig absolut.
Nach dem notwendigen Konvergenzkriterium für gleichmäßige Konvergenz, konvergiert daher $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf U gleichmäßig gegen 0, insbesondere gibt es $m \in \mathbb{N}$, sodass für $n > m$ gilt:

$$|f_n(z)| < 1\,,$$
$$|\operatorname{Log}(1 + f_n(z))| \leq \frac{3}{2}|f_n(z)| \qquad (\forall\, z \in U)$$

(siehe Beweis von Satz 2, i) mit $\varepsilon = 1/2$)
Da $\sum_{n=m+1}^{\infty} f_n(z)$ nach Voraussetzung auf $U \subset \bar{U}$ (kompakt) gleichmäßig konvergiert, ist das Gleiche wahr für :

$$S(z) := \sum_{n=m+1}^{\infty} \operatorname{Log}(1 + f_n(z))$$

Nach dem Satz von Weierstraß ist also $S(Z)$ auf U holomorph.
Daher gilt dies auch für:

$$e^{S(z)} = \prod_{n=m+1}^{\infty}(1 + f_n(z)) \qquad \text{(siehe Satz 1, ii)!)}$$

Daher ist auch:

$$F(z) = (1 + f_1(z)) \cdot \ldots \cdot (1 + f_m(z))\, e^{S(z)}$$

auf U holomorph.

□

PROBLEM:
Sei $S \subset \mathbb{C}$ diskret und jedem $s \in S$ sei ein $m_s \in \mathbb{N}$ zugeordnet.
Gibt es eine ganze Funktion $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ derart, dass

i) $h(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z \in S$

ii) $\mathrm{ord}_{z=s}\, h = m_s \quad \forall\, s \in S$?

ANTWORT:
Ja, solche Funktionen h kann man explizit mit Hilfe von „Weierstraß-Produkten“ konstruieren. Man nennt dann ein solches h eine *Lösung der Nullstellenverteilung* $\{(s, m_s) \mid s \in S\}$.

Satz 4 (Produktsatz von Weierstraß). -

i) Sei $S \subset \mathbb{C}$ diskret und $m_s \in \mathbb{N}$ ($\forall\, s \in S$).
Dann hat die Nullstellenverteilung $\{(s, m_s) \mid s \in S\}$ eine Lösung h.
Alle Lösungen lassen sich schreiben in der Gestalt:

$$H(z) = h(z) \cdot e^{g(z)} \qquad (z \in \mathbb{C})$$

wobei $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ganz.

ii) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ganz, f nicht identisch Null und $S := \{z \in \mathbb{C} \mid f(z) = 0\}$. (nach FT I ist dann S diskret!)
Sei $m_s := \mathrm{ord}_{z=s} f$. Dann gibt es Polynome P_s ($s \in S$) und eine ganze Funktion g, sodass $\forall\, z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$f(z) = \begin{cases} \prod\limits_{s \in S} (1 - \frac{z}{s})^{m_s} \cdot e^{P_s(z)} \cdot e^{g(z)} & , 0 \notin S \\ z^{m_0} \cdot \prod\limits_{\substack{s \in S \\ s \neq 0}} (1 - \frac{z}{s})^{m_s} \cdot e^{P_s(z)} \cdot e^{g(z)} & , 0 \in S \end{cases}$$

Die Produkte rechts (sogenannte Weierstraß-Produkte*) sind auf $\mathbb{C}$ unbedingt konvergent.*

Beweis. i) Ist S endlich, so ist $\prod_{s \in S} (z - s)^{m_s}$ eine Lösung h.
Sei S unendlich. Ohne Einschränkung kann man voraussetzen, dass $0 \notin S$, denn eine Nullstelle der Ordnung m_0 in $z = 0$ kann man nachträglich erzwingen, indem man mit z^{m_0} multipliziert. Dies hat den Vorteil, dass man statt $\prod_{s \in S}(z - s)^{m_s}$ das Produkt $\prod_{s \in S}(1 - \frac{z}{s})^{m_s}$ betrachten kann, welches (hoffentlich!) bessere Konvergenzeigenschaften hat.
Sei $s_1, s_2, \ldots$ eine Abzählung von S mit $0 < |s_1| \leq |s_2| \leq \ldots \to \infty$ (siehe Beweis von Satz 1.2).
Sei $m_n := m_{s_n}$. Die Funktion $(1 - \frac{z}{s_n})^{m_n}$ ist auf dem Elementargebiet $U_{|s_n|}(0)$ holomorph und nullstellenfrei. Nach FT I existiert daher eine holomorphe Funktion $A_n(z)$ auf $U_{|s_n|}(0)$, sodass

$$(1 - \frac{z}{s_n})^{m_n} = e^{-A_n(z)} \qquad (z \in U_{|s_n|}(0))$$
$$z = 0 \Rightarrow 1 = e^{-A_n(0)} \qquad \Rightarrow A_n(0) \in 2\pi i \mathbb{Z}$$

Durch Addition eines Vielfachen von $2\pi i$ kann man also erreichen, dass $A_n(0) = 0$.
Man entwickle $A_n(z)$ auf $U_{|s_n|}(0)$ in eine Taylorreihe. Diese ist dann auf dem Kompaktum $|z| \leq \frac{|s_n|}{2}$ gleichmäßig absolut konvergent. Man kann also ein Polynom $P_n(z)$ finden, sodass $A_n(z) - P_n(z)$ für $|z| \leq \frac{s_n}{2}$ beliebig klein wird.
Da exp stetig, gibt es also ein Polynom $P_n(z)$, sodass

$$\left|\left(1 - \frac{z}{s_n}\right)^{m_n} \cdot e^{P_n(z)} - 1\right| = \left|e^{P_n(z) - A_n(z)} - 1\right| \leq \frac{1}{n^2} \qquad \forall\, z \text{ mit } |z| \leq \frac{|s_n|}{2}$$

Daher ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{z}{s_n}\right)^{m_n} \cdot e^{P_n(z)} - 1\right]$$

auf Kompakta $K \subset \mathbb{C}$ gleichmäßig absolut konvergent. Nach Satz 3 ist daher:

$$h(z) := \prod_{n=1}^{\infty} \left[(1 - \frac{z}{s_n})^{m_n} \cdot e^{P_n(z)}\right]$$

auf $\mathbb{C}$ unbedingt konvergent und holomorph. Offenbar ist h eine Lösung der Verteilung $\{(s, m_s) \mid\ s \in S\}$.
Seien H und h zwei Lösungen.
Dann ist $\frac{H}{h}$ ganz und nullstellenfrei. Da $\mathbb{C}$ Elementargebiet, existiert g ganz mit $\frac{H}{h} = e^g$.

ii) Die Verteilung $\{(s, m_s) \mid\ s \in S\}$ hat die Lösung f nach Voraussetzung, also auch die unter i) konstruierte Lösung.
Nach der „Eindeutigkeit“ unter i) folgt also auch ii).

$\square$

Zusatz:
Seien die Notationen wie im Beweis. Die durch

$$\left(1 - \frac{z}{s_n}\right)^{m_n} = e^{-A_n(z)}\ ,\ z \in U_{|s_n|}(0)$$
$$A_n(0) = 0$$

bestimmte holomorphe Funktion $A_n : U_{|s_n|}(0) \to \mathbb{C}$ ist eindeutig bestimmt und kann explizit angegeben werden.

In der Tat :
Angenommen, es existieren zwei holomorphe Funktionen $A_n, \tilde{A_n}$, die die zwei Bedingungen erfüllen. Dann ist

$$\begin{aligned} & e^{-A_n(z)} = e^{-\tilde{A_n}(z)} \qquad \forall\, z \in U_{|s_n|}(0) \\ \Rightarrow\ & A_n(z) = \tilde{A_n}(z) + 2\pi i h z \qquad \text{mit } h_z \in \mathbb{Z} \quad (\forall\, z \in U_{|s_n|}(0)) \\ \Rightarrow\ & h_z = h = const. \qquad \forall\, z \end{aligned}$$

denn A_n und $\tilde{A_n}$ sind stetig. Es folgt $h \equiv 0$, denn $A_n(0) = \tilde{A_n}(0) = 0$. Also $A_n(z) = \tilde{A_n}(z)\ \forall z$.

Daher muss gelten:

$$A_n(z) = -m_n \log(1 - \frac{z}{s_n})$$

(In der Tat: Wegen des Additionstheorems von exp und $m \in \mathbb{N}$ erfüllt die Funktion die Bedingung.)
Für $|z| < 1$ ist

$$\operatorname{Log}(1 - z) = -\sum_{r=1}^{\infty} \frac{z^r}{r} \tag{*}$$

(In der Tat: Differenzieren beider Seiten (erlaubt nach bekannten Sätzen) liefert:

$$-\frac{1}{1-z} \quad \text{bzw.} \quad -\sum_{r=0}^{\infty} z^r$$

also sind beide Seiten von (*) höchstens um ein $c = const$ verschieden. Auswerten in $z = 0$ liefert $c = 0$.)

$$\Rightarrow A_n(z) = m_n \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} (\frac{z}{s_n})^r \qquad (|z| < |s_n|)$$

Die Polynome P_{s_n} erhält man also explizit durch Abbrechen obiger Reihe.

Korollar. *Sei f meromorph, f nicht identisch Null. Dann ist f der Quotient zweier ganzer Funktionen.*
(Vornehmer: Der Körper der meromorphen Funktionen ist der Quotientenkörper des Integritätsbereichs der ganzen Funktionen.)

Beweis. Sei S die Polstellenmenge von f. Dann ist S diskret.
Sei $m_s := -\operatorname{ord}_{z=s} f \in \mathbb{N}$.
Nach Satz 4 hat die Nullstellenverteilung $\{(s, m_s) \mid s \in S\}$ eine Lösung h.
Setze $g := hf$.
Dann ist g nach Konstruktion ganz: $f = g/h$. □

Beispiel. *i) Sei $S = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}, m_s = 1 \quad \forall s \in S$.*
Da $\sum_{n \geq 1} \frac{z}{n^2}$ auf Kompakta gleichmäßig absolut konvergiert, kann man $P_s(z) \equiv 0$ setzen $\forall s \neq 0$, also ist

$$h(z) = z \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z}{n^2}) \qquad (z \in \mathbb{C})$$

eine Lösung der gegebenen Nullstellenverteilung.

ii) Sei $S = \mathbb{Z}$, $m_s = 1 \; \forall s \in S$.
Da „$\sum_{n \neq 0} \frac{z}{n}$“ nicht absolut konvergiert, muss man Polynome P_s mit $grad P_s \geq 1$ explizit konstruieren.
Sei $n \neq 0$. Der lineare Term von $A_n(z)$ ist $\frac{z}{n}$. Man betrachte daher

$$\left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}}$$

Es gilt:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots \qquad (z \in \mathbb{C})$$

daher:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}} &= (1 - \frac{z}{n})(1 + \frac{z}{n} + \frac{1}{2!} \cdot (\frac{z}{n})^2 + \ldots) \\ &= 1 + (\frac{z}{n})^2 \cdot B(\frac{z}{n}) \end{aligned}$$

wobei $B(z)$ auf $\mathbb{C}$ holomorph mit

$$B(0) = -1 + \frac{1}{2!} = -\frac{1}{2}$$

Da $\sum_{n \neq 0} \frac{z^2}{n^2} B(\frac{z}{n})$ auf Kompakta gleichmäßig absolut konvergiert, folgt:

$$h(z) = z \prod_{n \neq 0} (1 - \frac{z}{n}) \cdot e^{\frac{z}{n}}$$

ist Lösung der gegebenen Nullstellenverteilung.
Wegen der unbedingten Konvergenz der Produkte gilt:

$$\begin{aligned} h(z) &= z \prod_{n \geq 1} \left[(1 - \frac{z}{n}) \cdot e^{\frac{z}{n}} \cdot (1 + \frac{z}{n}) \cdot e^{-\frac{z}{n}}\right] \\ &= z \prod_{n \geq 1} (1 - \frac{z^2}{n^2}) \end{aligned}$$

iii) Es gilt:

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n \geq 1} (1 - \frac{z^2}{n^2}) \qquad (z \in \mathbb{C})$$

Beweis. Nach der Eindeutigkeit in Satz 4,i) gibt es eine ganze Funktion g mit

$$e^{g(z)} = \sin \pi z = \pi z \prod_{n \geq 1} (1 - \frac{z^2}{n^2})$$

Zeige: $g \equiv 0$
Wegen $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} \pm \ldots$ hat $\frac{\sin \pi z}{\pi z}$ in $z = 0$ eine hebbare Singularität und nimmt dort den Wert 1 an.
Wertet man

$$e^{g(z)} \cdot \frac{\sin \pi z}{\pi z} = \prod_{n \geq 1} (1 - \frac{z^2}{n^2}) \qquad (*)$$

in $z = 0$ aus, so folgt

$$e^{g(0)} = 1 \;\Rightarrow\; g(0) \in 2\pi i \mathbb{Z}$$

Durch Addition eines ganzzahligen Vielfachen von $2\pi i$ kann man erreichen $g(0) = 0$. Sei $|z| < 1$. Dann sind alle Faktoren im Produkt rechts von (*) $\neq 0$; nach Satz 1,ii) folgt also

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) = \operatorname{Log}\left[e^{g(z)} \cdot \frac{\sin \pi z}{\pi z}\right] + 2\pi i t z \qquad (tz \in \mathbb{Z})$$

Beachte: $\operatorname{Log}(w \cdot w') = \operatorname{Log} w + \operatorname{Log} w'$ für w, w' nahe bei 1.
Da Log und exp dann auch zueinander invers sind, folgt für $|z| < \rho < 1$ (ρ klein):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) = g(z) + \operatorname{Log}\left(\frac{\sin \pi z}{\pi z}\right) + 2\pi i t z \qquad (**)$$

Da $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log}(1 - \frac{z^2}{n^2})$ auf Kompakta $\subset U_\rho(0)$ gleichmäßig absolut konvergiert, ist diese Funktion holomorph, also stetig.

$$\Rightarrow tz = t = const \qquad \forall\, z \in U_\rho(0)$$

Nach dem Satz von Weierstraß kann man beide Seiten von (**) differenzieren:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2\frac{z}{n^2}}{1 - \frac{z^2}{n^2}} &= g'(z) + \frac{1}{\frac{\sin \pi z}{\pi z}} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \frac{\sin \pi z}{\pi z} \\
\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} &= g'(z) + \frac{\pi z}{\sin \pi z} \cdot \frac{\pi \cdot (\cos \pi z \cdot \pi z - \sin \pi z)}{(\pi z)^2} \\
&= g'(z) + \frac{\pi^2 z}{(\pi z)^2} \cdot \frac{\cos \pi z \cdot \pi z - \sin \pi z}{\sin \pi z} \\
&= g'(z) + \pi cot \pi z - \frac{1}{z} \qquad (z \in \dot{U}_\rho(0))
\end{aligned}$$

Partialbruchzerlegung des Kotangens:

$$\begin{aligned}
\pi \cot \pi z &= \frac{1}{z} + \sum_{n \neq 0} \left(\frac{1}{z - n} + \frac{1}{n}\right) \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}) \\
&= \frac{1}{z} + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{z - n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{z + n} - \frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{z} + \sum_{n \geq 1} \frac{2z}{z^2 - n^2} \\
\Rightarrow \quad g'(z) &= 0 \qquad (\forall\, z \in \dot{U}_\rho(0))
\end{aligned}$$

Da $\dot{U}_\rho(0)$ Gebiet, folgt nach dem Identitätssatz

$$g'(z) = 0 \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}$$
$$\Rightarrow \; g = const.$$

wegen:

$$\begin{aligned} & g(0) = 0 \\ \Rightarrow \; & g(z) \equiv 0. \end{aligned}$$

□

1.3 Die Gammafunktion

Problem:
Man interpoliere (in „natürlicher Weise“) die Fakultäten $n!$ mit $n \in \mathbb{N}_0$, d.h. man suche eine (zumindest stetige) Funktion $\Gamma(x)$ ($x \in \mathbb{R}$, $x > 0$) mit:

i) $\Gamma(n) = (n-1)! \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

ii) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad \forall\, x > 0, x \in \mathbb{R}$

Lösung:

$$x \in \mathbb{N}: \; \Gamma(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{N^x (N-1)!}{x(x+1)\cdot \ldots \cdot (x+N-1)}$$

Fragen:

i) Welche Eigenschaften hat eine solche Funktion?

ii) Kann man $\Gamma(x)$ auf $\mathrm{Re}(z) > 0$ bzw. ganz $\mathbb{C}$ holomorph, meromorph fortsetzen?

iii) Durch welche Eigenschaften kann Γ eindeutig bestimmt werden?

Heuristische Vorgehensweise:
Für kleine n ist nicht klar, wie man interpolieren sollte.
Für große n ist $n!$ sehr groß und die Funktion daher viel „gleichmäßiger“, man sollte also leichter interpolieren können.

In der Tat:
Sei $x \in \mathbb{N}$, $N \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\Gamma(x+N) &= (x+N-1)! = (N+x-1)! \\ &= (N+x-1)(N+x-2)\cdot \ldots \cdot (N+1)\cdot N \cdot (N-1)! \\ &= N^x(1+\frac{x-1}{N})(1+\frac{x-2}{N})\cdot \ldots \cdot (1+\frac{1}{N})\cdot 1 \cdot (N-1)!\end{aligned}$$

Für $N \to \infty$ gilt:

$$1+\frac{x-1}{N},\; 1+\frac{x-2}{N},\; \ldots, 1+\frac{1}{N} \to 1$$

Daher folgt

$$\lim_{N\to\infty} \frac{N^x(N-1)!}{\Gamma(x+N)} = 1 \tag{*}$$

Es gilt auch:

$$\Gamma(x+N) = (x+N-1)! = (x+N-1)(x+N-2)\ldots(x+1)x\,\underbrace{(x-1)!}_{=\Gamma(x)}$$

Daher folgt aus (*):

$$\Gamma(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{N^x (N-1)!}{x(x+1)\dots(x+N-1)}$$

Naheliegend: Man probiere diese Definition aus mit $x \in \mathbb{N}$ ersetzt durch $x \in \mathbb{R}$, $(x \neq 0, -1, -2, \dots)$ oder sogar $z \in \mathbb{C}$, $(z \neq 0, -1, -2, \dots)$, vorausgesetzt der Limes existiert.

Definition. *Sei $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Sei $z \in \mathbb{C}$.*
Dann setze $x^z := e^{z\cdot \log x}$.
Sei $D_{-\mathbb{N}_0} := \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0, -1, -2, \dots\}$

Satz 1. *i) Durch die Vorschrift*

$$\Gamma(z) := \lim_{N\to\infty} \frac{N^z (N-1)!}{z(z+1)\cdot \ldots \cdot (z+N-1)}$$

wird eine auf $D_{-\mathbb{N}_0}$ holomorphe Funktion definiert.
Diese heißt Γ-Funktion, *obige Darstellung* Gauß'sche Produktentwicklung.

ii) Es gilt die Euler'sche Produktdarstellung*:*

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})^z}{1+\frac{z}{n}} \qquad (z \in D_{-\mathbb{N}_0})$$

iii)

$$\begin{array}{lll} \textit{Es gilt:} & \Gamma(z+1) = z\cdot\Gamma(z) & \forall\, z \in D_{-\mathbb{N}_0} \\ \textit{und} & \Gamma(n) = (n-1)! & \forall\, n \in \mathbb{N} \end{array}$$

Beweis. i) zusammen mit

ii) Für $N \in \mathbb{N}$ sei $\Gamma_N(z) := \frac{N^z (N-1)!}{z(z+1)\cdot\ldots\cdot(z+N-1)}$.
Dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma_{N+1}(z)}{\Gamma_N(z)} &= \frac{\frac{(N+1)^z N!}{z(z+1)\dots(z+N)}}{\frac{N^z(N-1)!}{z(z+1)\dots(z+N-1)}} \\ &= (1+\frac{1}{N})^z \cdot \frac{N}{z+N} \\ &= (1+\frac{1}{N})^z \cdot \frac{1}{1+\frac{z}{N}} \end{aligned}$$

Aufgabe: Man zeige die Konvergenz des Produktes in ii)!

Man wende hierzu §2, Satz 3 an! Für $z \in \mathbb{C}$ fest und $|\omega| < 1$ setzt man

$$(1+\omega)^z := e^{z \cdot \operatorname{Log}(1+\omega)}$$

Dann ist $(1+\omega)^z$ holomorph in $|\omega| < 1$ und hat in $\omega = 0$ die Taylorentwicklung

$$\begin{aligned} (1+\omega)^z &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{z}{n} \omega^n \qquad |\omega| < 1 \\ \text{mit: } \binom{z}{n} &= \frac{z(z-1) \cdot \ldots \cdot (z-n+1)}{n!} \end{aligned}$$

(Man verifiziert dies durch sukzessives Ableiten und Induktion, formal siehe Ana I)
Man schreibe:

$$\begin{aligned} (1+\omega)^z &= 1 + z\omega + \omega^2 A(z,\omega) \qquad mit \\ A(z,\omega) &:= \sum_{n=2}^{\infty} \binom{z}{n} \omega^{n-2} \qquad (|\omega| < 1) \end{aligned}$$

Dann ist $A(z,\omega)$ auf beschränkten Teilmengen der Form

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \ |z| \leq c\} \times \{\omega \in \mathbb{C} \mid \ |\omega| \leq \alpha\} \qquad (c > 0,\ 0 < \alpha < 1)$$

beschränkt.
In der Tat:

$$\begin{aligned} |A(z,\omega)| &\leq \sum_{n=2}^{\infty} \left| \binom{z}{n} \right| \cdot |\omega|^{n-2} \\ &\leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|z|(|z|+1)\ldots(|z|+n-1)}{n!} \cdot \alpha^{n-2} \\ &\leq \sum_{n=2}^{\infty} \underbrace{\frac{c(c+1)\ldots(c+n-1)}{n!}}_{=\binom{-c}{n}(-1)^n} \alpha^{n-2} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \binom{-c}{n} (-\alpha)^{n-2} \\ &= A(-c,-\alpha) < \infty \end{aligned}$$

Sei $K \subset D_{-\mathbb{N}_0}$ kompakt.
Nach obigem (mit $\omega = \frac{1}{N}$) und unter Benutzung der geometrischen Reihe gilt dann

$\forall\, z \in K$ und für alle N groß genug:

$$\begin{aligned}
\left|(1+\frac{1}{N})^z \cdot \frac{1}{1+\frac{z}{N}} - 1\right| &= \left|\left[1+\frac{z}{N}+\frac{1}{N^2}A(z,\frac{1}{N})\right]\cdot\left[1-\frac{z}{N}+\frac{z^2}{N^2}B(\frac{z}{N})\right]-1\right| \\
&= \Big|1-\frac{z^2}{N^2}+(1+\frac{z}{N})\frac{z^2}{N^2}B(\frac{z}{N}) \\
&\quad +\frac{1}{N^2}A(z,\frac{1}{N})(1-\frac{z}{N})+\frac{1}{N^2}A(z,\frac{1}{N})\cdot\frac{z^2}{N^2}B(\frac{z}{N})-1\Big| \\
&\le \frac{C}{N^2} \qquad \text{mit geeignetem } C.
\end{aligned}$$

Nach §2, Satz 3 und da $\sum_{N=1}^{\infty}\frac{1}{N^2}<\infty$ folgt also, dass das Produkt:

$$\prod_{N=1}^{\infty}\frac{\Gamma_{N+1}(z)}{\Gamma_N(z)} = \prod_{N=1}^{\infty}\frac{(1+\frac{1}{N})^z}{1+\frac{z}{N}} \tag{**}$$

unbedingt konvergent auf $D_{-\mathbb{N}_0}$ ist und dort eine holomorphe Funktion darstellt. Jeder Faktor in (**) ist auf $D_{-\mathbb{N}_0}$ ungleich Null, also folgt nach der Definition:

$$\begin{aligned}
\prod_{N=1}^{\infty}\frac{\Gamma_{N+1}(z)}{\Gamma_N(z)} &= \lim_{M\to\infty}\prod_{N=1}^{M}\frac{\Gamma_{N+1}(z)}{\Gamma_N(z)} \\
&= \lim_{M\to\infty}\frac{\Gamma_{M+1}(z)}{\Gamma_1(z)} \\
&= z\lim_{M\to\infty}\Gamma_{M+1}(z)
\end{aligned}$$

iii) Es gilt:

$$\begin{aligned}
\Gamma(z+1) &= \lim_{N\to\infty}\frac{N^{z+1}(N-1)!}{(z+1)\dots(z+N)} \\
&= \lim_{N\to\infty} z\frac{N}{z+N}\,\frac{N^z(N-1)!}{z(z+1)\dots(z+N-1)} \\
&= z\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\frac{z}{N}+1}\,\frac{N^z(N-1)!}{z(z+1)\dots(z+N-1)} \\
&= z\cdot\Gamma(z)
\end{aligned}$$

Ferner: $\Gamma(1)=1$. Wegen $\Gamma(z+1)=z\cdot\Gamma(z)$ induktiv $\Gamma(n)=(n-1)!$

$\square$

Satz 2. *i)* $\Gamma(z)$ *definiert eine meromorphe Funktion auf* $\mathbb{C}$. *Diese ist holomorph auf* $D_{-\mathbb{N}_0}$ *und hat einfache Polstellen in* $z = -N$, $(N = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ *mit* $\operatorname{res}_{z=-N} = \frac{(-1)^N}{N!}$

ii) $\frac{1}{\Gamma(z)}$ *hat hebbare Singularitäten in den Punkten* $z = -N$, $(N = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ *und ist eine ganze Funktion.*
Es gilt die Weierstraß'sche Produktentwicklung*:*

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(z)} &= z \cdot e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{z}{n}) e^{-\frac{z}{n}}, \\ \textit{wobei} \quad \gamma &:= \lim_{N \to \infty} (1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{N} - \log N) = 0,57221\ldots\end{aligned}$$

die Euler-Mascheroni'sche Konstante *ist.*

iii) Es gilt der Euler'sche Ergänzungssatz

$$\Gamma(z) \cdot \Gamma(1 - z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

Beweis. i) Schon gesehen: $\Gamma(z)$ holomorph auf $D_{-\mathbb{N}_0}$. Die Punkte $z = 0, -1, -2, \ldots$ sind per Definition isolierte Singularitäten von $\Gamma(z)$.
Sei $N \in \mathbb{N}_0$. Wegen $\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z)$ erhält man induktiv:

$$\Gamma(z + N + 1) = z(z+1) \cdot \ldots \cdot (z+N)\Gamma(z)$$

$\Rightarrow$ für z nahe bei $-N$, aber $z \neq -N$:

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+N+1)}{z(z+1)\ldots(z+N)} = \frac{g(z)}{z - (-N)}$$

wobei

$$g(z) := \frac{\Gamma(z+N+1)}{z(z+1)\ldots(z+N-1)},$$

$g(-N) \neq 0$ und $g(z)$ holomorph in einer Umgebung von $z = -N$ ist.

Nach Defintion hat daher $\Gamma(z)$ in $z = -N$ einen Pol erster Ordnung und

$$\begin{aligned}\operatorname{res}_{z=-N} \Gamma(z) &= \lim_{z \to -N} (z+N)\Gamma(z) \\ &= g(-N) \\ &= \frac{\Gamma(1)}{(-N)(-N+1)\ldots(-1)} \\ &= \frac{(-1)^N}{N!}\end{aligned}$$

ii) In der Euler'schen Produktdarstellung von $\Gamma(z)$, $z \in D_{-\mathbb{N}_0}$ ist jeder Faktor ungleich Null.

$$\Rightarrow \Gamma(z) \neq 0 \quad \forall\, z \in D_{-\mathbb{N}_0}$$

Da $\Gamma(z)$ in den Punkten $z = -N$, $(N = 0, 1, 2, \ldots)$ einfache Polstellen hat, hat $\frac{1}{\Gamma(z)}$ dort hebbare Singularitäten und nimmt dort den Wert Null zur ersten Ordnung an. Daher ist $\frac{1}{\Gamma(z)}$ ganz.

Produktdarstellung: Sei $a_n := 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\log n$. Wir zeigen: (a_n) ist monoton fallend und nach unten beschränkt. ($\Rightarrow$ Limes existiert und ist gleich der größten unteren Schranke.)
Es gilt:

$$\begin{aligned}
a_n - a_{n+1} &= (1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\log n)-(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\log(n+1)) \\
&= -\log n - \frac{1}{n+1} + \log(n+1) \\
&= -\frac{1}{n+1} + \log\frac{n+1}{n}
\end{aligned}$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned}
\log\frac{n+1}{n} &= \int_1^{\frac{n+1}{n}} \frac{dt}{t} \qquad \text{, denn} \quad \log x = \int_1^x \frac{dt}{t} \text{ für } x > 0 \\
&\geq \int_1^{\frac{n+1}{n}} \frac{n}{n+1} dt \qquad (t \leq \frac{n+1}{n} \;\Rightarrow\; \frac{1}{t} \geq \frac{n}{n+1}) \\
&= (\frac{n+1}{n} - 1) \cdot \frac{n}{n+1} \\
&= \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} \\
&= \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

Daher folgt: $a_n \geq a_{n+1}$.
Ferner:

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu} &= \sum_{\nu=1}^{n} \int_{\nu}^{\nu+1} \frac{dt}{\nu} \\
&\geq \sum_{\nu=1}^{n} \int_{\nu}^{\nu+1} \frac{dt}{t} \\
&= \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} \\
&= \log(n+1) \\
&> \log n \\
\Rightarrow \quad a_n &\geq 0 \quad \forall\, n
\end{aligned}$$

Sei $z \in D_{-\mathbb{N}_0}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{N^z}{e^{z(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{N})}} &= e^{z(\log N-(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{N}))} \\ &\to e^{-\gamma z} \quad (N\to\infty) \end{aligned}$$

Daher ist:

$$\begin{aligned} z\cdot\Gamma(Z) &= \Gamma(z+1) \\ &= \lim_{N\to\infty}\frac{N^{z+1}(N-1)!}{(z+1)\ldots(z+N)} \\ &= \lim_{N\to\infty}\frac{N^z}{e^{z(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{N})}}\cdot\frac{e^{z(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{N})}\cdot N!}{(z+1)\ldots(z+N)} \\ &= e^{-\gamma z}\cdot\lim_{N\to\infty}\frac{e^{z(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{N})}}{(1+\frac{z}{1})(1+\frac{z}{2})\ldots(1+\frac{z}{N})} \\ \Rightarrow\quad \frac{1}{\Gamma(z)} &= z\cdot e^{\gamma z}\lim_{N\to\infty}(1+\frac{z}{1})(1+\frac{z}{2})\ldots(1+\frac{z}{N})\cdot e^{-z(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{N})} \\ &= z\cdot e^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{z}{n})\cdot e^{-\frac{z}{n}} \end{aligned}$$

(Denn ein konvergentes Produkt mit lauter von Null verschiedenen Faktoren ist gleich dem Limes der Partialprodukte und $e^{z+z'} = e^z\cdot e^{z'}$.)

Für $z = 0,-1,-2,\ldots$ ist die Produktdarstellung klar (beide Seiten sind Null).

iii) Es gilt:

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= z\cdot\Gamma(z) \\ \overset{\text{ersetze } z\mapsto -z}{\Longrightarrow}\quad \Gamma(1-z) &= (-z)\cdot\Gamma(-z) \end{aligned}$$

Daher folgt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(z)\cdot\Gamma(1-z)} &= \frac{1}{\Gamma(z)}\cdot\frac{1}{-z\Gamma(-z)} \\ &\overset{ii)}{=} \left[z\cdot e^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{z}{n})e^{-\frac{z}{n}}\right]\cdot\left[(-\frac{1}{z})\cdot(-z)\cdot e^{-\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z}{n})e^{\frac{z}{n}}\right] \\ &= z\cdot\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z^2}{n^2}) \end{aligned}$$

In §2 wurde gezeigt: $\sin\pi z = \pi z\cdot\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z^2}{n^2})$. Daher folgt:

$$\frac{1}{\Gamma(z)\cdot\Gamma(1-z)} = \frac{\sin\pi z}{\pi}$$

□

Satz 3. *i) Die Γ-Funktion ist beschränkt in jedem Streifen $0 < a \leq x \leq b$.*

ii) ***(Charakterisierung der Γ-Funktion nach Wielandt)***
Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, welches den Streifen $1 \leq x < 2$ enthält. Sei $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph mit den folgenden Eigenschaften:

1. *f ist auf dem Streifen $1 \leq x < 2$ beschränkt.*
2. *$f(z+1) = z \cdot f(z) \quad \forall\, z$ mit $z, z+1 \in D$*

Dann gilt:

$$f(z) = f(1) \cdot \Gamma(z) \quad (\forall\, z \in D)$$

Beweis. i) Es gilt:

$$\begin{aligned} N^z &= e^{z \cdot Log\, N} \\ &= e^{(x+iy) Log\, N} \\ \Rightarrow \quad |N^z| &= e^{x \log N} \\ &= N^x \end{aligned} \tag{*}$$

Ferner gilt auch:

$$|w| \geq \mathrm{Re}(w) \quad \forall\, w \in \mathbb{C} \tag{**}$$

Daher folgt aus der Definition von $\Gamma(z)$ über die Gauß'sche Produktdarstellung:

$$\begin{aligned} |\Gamma(z)| &= \lim_{N\to\infty} \left| \frac{N^z (N-1)!}{z(z+1)\dots(z+N-1)} \right| \\ &= \lim_{N\to\infty} \frac{N^x (N-1)!}{|z(z+1)\dots(z+N-1)|} && \text{wegen (*)} \\ &\leq \lim_{N\to\infty} \frac{N^x (N-1)!}{x(x+1)\dots(x+N-1)} && \text{wegen (**)} \\ &= \Gamma(x) \end{aligned}$$

Da $\Gamma(x)$ auf dem Kompaktum $[a, b]$ stetig, ist $\Gamma(x)$ dort auch beschränkt.

ii) Durch die Vorschrift

$$f(z+1) := z \cdot f(z)$$

wird f sukzessive auf $1 + D, 2 + D, \dots, n + D, \dots$ $(n \in \mathbb{N})$ fortgesetzt, wobei $n + D := \{n + z \mid z \in D\}$. Wegen i) ist f dann wohldefiniert!
Genauso wird f durch die Vorschrift

$$f(z) := \frac{f(z+1)}{z}$$

sukzessive auf $-1 + D, -2 + D, \dots, -n + D, \dots$ $(n \in \mathbb{N})$ meromorph fortgesetzt, mit

Polstellen höchstens in $z = 0, -1, -2, \ldots$. Insgesamt erhält man also eine auf $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion (beachte: $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq x \leq 2\}$), holomorph auf $D_{-\mathbb{N}_0}$ mit Polstellen höchstens in $z = 0, -1, -2, \ldots$.
Wegen $f(z+N+1) = z(z+1)\ldots(z+N)f(z)$, $\forall\, z \in D_{-\mathbb{N}_0}$ (sukzessives Anwenden der Funktionalgleichung!) ist der Hauptteil der Laurententwicklung von f in $z = -N$, $(N = 0, 1, 2, \ldots)$:

$$\frac{(-1)^N}{N!} \cdot f(1) \frac{1}{z+N}$$

wegen:

$$f(z) = \frac{f(z+N+1)}{z(z+1)\ldots(z+N)}$$

mit

$$z = -N$$

Man setze:

$$h(z) := f(z) - f(1)\Gamma(z) \qquad (\forall\, z \in D_{-\mathbb{N}_0})$$

Nach Satz 2, ii) hat dann h in allen Singularitäten $z = 0, -1, -2, \ldots$ Hauptteile gleich Null, also definiert h(z) eine ganze Funktion.
Wegen $f(z+1) = z \cdot f(z)$ und $\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z)$ ist auch $h(z+1) = z \cdot h(z)$, $(\forall\, z \in \mathbb{C})$. Ferner ist h auf $1 \leq x \leq 2$ beschränkt, denn f nach Voraussetzung und Γ nach Teil i) haben diese Eigenschaft. Es gilt:

$$h(z) = \frac{h(z+2)}{z \cdot (z+1)} \quad z \neq -1, 0 \tag{*}$$

Sei $z = x + iy$. Sei $-1 \leq x \leq 0$. Dann ist $1 \leq x+2 \leq 2$, also ist der Zähler rechts von (*) beschränkt. Sei außerdem $|y| \geq \frac{3}{2}$. Dann gilt:

$$\frac{1}{|z|} \leq \frac{1}{|y|} \leq \frac{2}{3}$$
$$\frac{1}{|z+1|} \leq \frac{1}{|y|} \leq \frac{2}{3}$$

Daher ist $h(z)$ auf $\left\{z \in \mathbb{C} \mid -1 \leq x \leq 0, |y| \geq \frac{3}{2}\right\}$ beschränkt. Auf dem Kompaktum $\left\{z \in \mathbb{C} \mid -1 \leq x \leq 0, |y| \leq \frac{3}{2}\right\}$ ist die Funktion ohnehin beschränkt $\Rightarrow h$ ist beschränkt auf $-1 \leq x \leq 0$. Die Abbildung $z \mapsto 1 - z$ ist die Spiegelung an der Geraden $x = \frac{1}{2}$. Daher ist $h(1-z)$ beschränkt auf $1 \leq x \leq 2$.

Setze:

$$H(z) := h(z) \cdot h(1-z) \qquad (z \in \mathbb{C})$$

Dann ist H ganz und auf $1 \leq x \leq 2$ beschränkt und es gilt:

$$\begin{aligned}
H(z+1) &= h(z+1)h(-z) \\
&= z \cdot h(z) \cdot \frac{1}{-z} h(1-z) \\
&= -h(z)h(1-z) \\
&= -H(z)
\end{aligned}$$

Es gilt also:

$$|H(z)| = |H(z+1)|$$

Daher folgt: H ist auf ganz $\mathbb{C}$ beschränkt. $\overset{Liouville}{\Longrightarrow}$ $H(z) = H(1) = h(1) \cdot h(0) = 0$, wegen $h(z) = f(z) - f(1)\Gamma(z)$, also $h(1) = 0$.
Daher ist also $h(z) \equiv 0$ (, denn D ist ein Gebiet).
Angenommen es gibt ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $h(z_0) \neq 0$. Dann gilt $h(z) \neq 0$ in einer kleinen Umgebung U von $z = z_0$. Also folgt:

$$\begin{aligned}
h(1-z) = 0 \qquad & \forall\, z \in U \\
\overset{\text{Identitätssatz}}{\Longrightarrow} h(1-z) = 0 \qquad & \forall\, z \in D \\
\text{d.h. } h(z) = 0 \qquad & \forall\, z \in D \\
\text{also } h(z_0) = 0 \qquad & ↯
\end{aligned}$$

□

Satz 4 (Legendresche Duplikationsformel). *Es gilt:*

$$\Gamma(\frac{z}{2})\Gamma(\frac{1+z}{2}) = \sqrt{\pi} \cdot 2^{1-z}\Gamma(z) \quad (z \in D_{-\mathbb{N}_0})$$

Beweis. Man benutze den Satz von Wielandt. $D = D_{-\mathbb{N}_0}$ ist ein Gebiet, welches den Streifen $1 \leq x \leq 2$ enthält. Sei

$$f(z) := 2^{z-1}\Gamma(\frac{z}{2})\Gamma(\frac{1+z}{2}) \qquad (z \in D_{-\mathbb{N}_0})$$

Dann ist f auf dem Streifen $1 \leq x \leq 2$ beschränkt. Ferner gilt:

$$\begin{aligned}
f(z+1) &= 2^z\Gamma(\frac{1+z}{2})\Gamma(1+\frac{z}{2}) \qquad \text{(Funktionalgleichung der } \Gamma\text{-Funktion)} \\
&= 2^z \cdot \Gamma(\frac{1+z}{2})\Gamma(\frac{z}{2}) \cdot \frac{z}{2} \\
&= z \cdot 2^{z-1} \cdot \Gamma(\frac{1+z}{2}) \cdot \Gamma(\frac{z}{2}) \\
&= z \cdot f(z)
\end{aligned}$$

Nach Satz 3,ii) gilt:

$$f(z) \quad = \quad f(1) \cdot \Gamma(z)$$

Es ist:

$$f(1) \quad = \quad \Gamma(\frac{1}{2}) \cdot \Gamma(1) = \Gamma(\frac{1}{2})$$

Nach dem Euler'schen Ergänzungssatz ist:

$$\begin{aligned} \Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z) &= \frac{\pi}{\sin \pi z} \\ \stackrel{z=\frac{1}{2}}{\Longrightarrow} \qquad \Gamma(\frac{1}{2})^2 &= \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{2}} = \pi \\ \text{Daher:} \qquad \Gamma(\frac{1}{2}) &= \pm\sqrt{\pi} \end{aligned}$$

Aus der Produktformel von Euler sieht man $\Gamma(\frac{1}{2}) \geq 0$, denn alle Faktoren des Produktes sind > 0.

$$\begin{aligned} \text{Wegen:} \qquad \Gamma(z) &\neq 0 \qquad \forall\, z \in D_{-\mathbb{N}_0} \\ \text{folgt:} \qquad \Gamma(\frac{1}{2}) &> 0 \\ \text{daher:} \qquad \Gamma(\frac{1}{2}) &= \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

$\square$

Satz 5 (Eulersches Integral). -

i) Das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$$

ist für $\mathrm{Re}(z) > 0$ *absolut konvergent, d.h.*

$$\lim_{A\to 0}\int_A^1 |t^{z-1}e^{-t}|dt \qquad \textit{und}$$
$$\lim_{B\to\infty}\int_1^B |t^{z-1}e^{-t}|dt$$

existieren.

ii) Für $\mathrm{Re}(z) > 0$ *ist*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$$

Zum Beweis benötigen wir folgendes Lemma aus der Analysis (ohne Beweis):

Lemma. *Sei* $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ *stetig und* $f(t) \geq 0\ \forall\, t$. *Es gebe* $C > 0$, *sodass*

$$\int_A^1 f(t)dt \leq C \qquad 0 < A < 1$$

Dann existiert

$$\lim_{A\to 0}\int_A^1 f(t)dt$$

Beweis. i) Sei $z = x + iy$ fest, $x > 0$. Es gilt:

$$\begin{aligned} |t^{z-1}| &= |e^{(z-1)\log t}| \\ &= e^{(x-1)\log t} \\ &= t^{x-1} \end{aligned}$$

Es ist:

$$\begin{aligned} \int_A^1 t^{x-1}e^{-t}dt &\leq \int_A^1 t^{x-1}dt \\ &= [\frac{1}{x}t^x]_A^1 \\ &= \frac{1}{x}(1-A^x) \\ &\leq \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Also: $\lim_{A\to 0}\int_A^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ existiert nach dem Majorantenkriterium für Integrale. Genauso gilt:

$$t^{x-1} \leq C \cdot e^{t/2} \qquad (\forall\, t \geq 1)$$

In der Tat: Die Ungleichung ist äquivalent zu

$$(x-1)\log t \leq \log C + \frac{t}{2}$$

Daher folgt:

$$\begin{aligned}
\int_1^B t^{x-1}e^{-t}dt &\leq C \cdot \int_1^B e^{-t/2}dt \\
&= C \cdot [-2 \cdot e^{-t/2}]_1^B \\
&= 2 \cdot C \cdot (-e^{-B/2} + e^{1/2}) \\
&\leq 2Ce^{-1/2}
\end{aligned}$$

Ähnlich wie oben folgt dann, dass $\lim_{B\to\infty}\int_1^B t^{x-1}e^{-t}dt$ existiert.

ii) Man benutze den Satz von Wielandt!

$$\text{Sei:} \qquad f(z) := \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt \qquad (\mathrm{Re}(z) > 0)$$

1. Funktionalgleichung:

$$\begin{aligned}
f(z+1) &= \int_0^\infty t^z e^{-t}dt \\
&= [t^z \cdot (-e^{-t})]_0^\infty \underbrace{- \int_0^\infty z \cdot t^{z-1}(-e^{-t})dt}_{=z\cdot f(z)}
\end{aligned}$$

Es ist:

$$[t^z(-e^{-t})]_0^\infty = 0 - 0 = 0$$

denn:

$$t^z \cdot e^{-t} = e^{z\log t - t}$$

Also:

$$f(z+1) = z \cdot f(z)$$

2. Beschränktheit auf $1 \leq x \leq 2$. Es gilt:

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq \int_0^\infty |t^{z-1}e^{-t}|dt \\ &= \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \\ &= \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt + \int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \end{aligned}$$

   und

$$\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt \quad \leq \quad \int_0^1 e^{-t}dt < \infty$$

   denn:

$$t^{x-1} = e^{(x-1)\log t} \leq e^0 = 1 \qquad \text{für } t \leq 1,\ x \geq 1$$

   Ferner:

$$\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \leq \int_1^\infty t \cdot e^{-t}dt < \infty \quad \text{(partielle Integration)}$$

   denn:

$$t^{x-1} = e^{(x-1)\log t} \leq e^{\log t} = t$$

3. Holomorphie von $f(z)$:
   Sei

$$f_n(z) := \int_{1/n}^n t^{z-1}e^{-t}dt \qquad (\mathrm{Re}(z) > 0,\ n \in \mathbb{N})$$

   Dann ist f_n holomorph (, denn $[\frac{1}{n}, n]$ ist kompakt, wende Leibniz-Kriterium an, siehe Freitag-Busam!). Unter Benutzung gleicher Abschätzung wie unter i) zeigt man, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Kompakta gleichmäßig gegen f konvergiert. Nach dem Satz von Weierstraß ist daher f holomorph.

Wegen 1. - 3. folgt dann:

$$f(z) = f(1) \cdot \Gamma(z) \qquad (\forall\, z \text{ mit } \mathrm{Re}(z) > 0)$$

$$\text{außerdem gilt: } f(1) = \int_0^\infty e^{-t}dt = [-e^{-t}]_0^\infty = 1$$

□

Problem: Wie verhält sich $\Gamma(z)$ für $|z|$ groß? Genauer: Kann man eine hinreichend einfache Funktion finden, die $\Gamma(z)$ für $|z|$ groß gut approximiert? Insbesondere: wähle $z = n \in \mathbb{N}$, n groß - wie wächst $n!$?

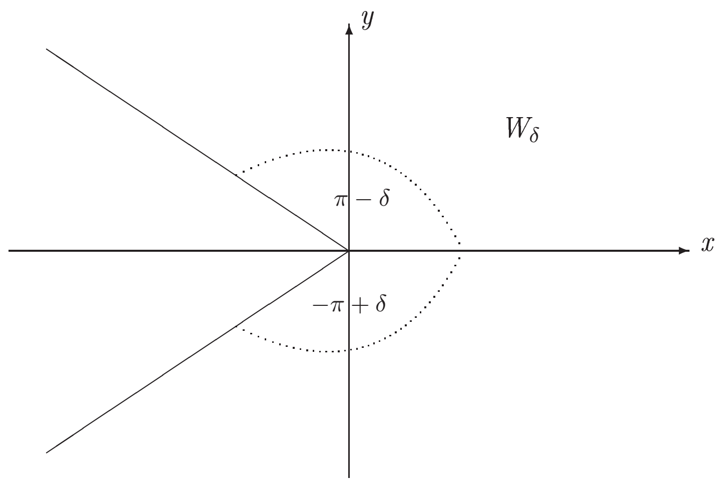
Satz 6 (Stirlingsche Formel). *i) Sei $\mathbb{C}_- = \{z \in C \mid z \neq x$ für $x \in \mathbb{R},\ x \leq 0\}$, die längs der negativen, reellen Achse geschlitzte komplexe Ebene. Dann gilt für $z \in \mathbb{C}_-$:*

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \sqrt{2\pi} z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z} e^{H(z)} \qquad \textit{wobei} \\ z^{z-\frac{1}{2}} &= e^{(z-\frac{1}{2}) \operatorname{Log} z} \end{aligned}$$

und $H(z)$ eine auf $\mathbb{C}_-$ holomorphe Funktion ist, die in jedem Winkelbereich

$$W_\delta := \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid -\pi + \delta < \operatorname{Arg} z < \pi - \delta\}\,,\ \delta > 0$$

für $|z| \to \infty$ gegen Null geht.



ii) Für $x \in \mathbb{R},\ x > 0$ gilt:

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi} x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x} e^{\frac{\vartheta(x)}{12x}} \qquad \textit{mit } 0 < \vartheta(x) < 1$$

Beweis. i) Beweis in mehreren Schritten!

Sei $H_0(z) = (z + \frac{1}{2})(\operatorname{Log}(z+1) - \operatorname{Log} z) - 1$

Lemma 1. *Sei*

$$A := \mathbb{C}_- \cap \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z + \frac{1}{2}| > \frac{1}{2} \right\}$$

Für $z \in A$ ist dann:

$$H_0(z) = \sum_{\substack{\omega \geq 2 \\ \omega \text{ gerade}}} \frac{1}{\omega + 1} \left(\frac{1}{2z+1} \right) \qquad (*)$$

Beweis. Für $|z+\frac{1}{2}| > \frac{1}{2}$ ist

$$|2z+1| > 1 \quad \Rightarrow \quad |\frac{1}{2z+1}| < 1$$

daher konvergiert (*) gleichmäßig absolut auf kompakten Teilmengen von A und ist daher eine holomorphe Funktion auf A. Für $x \in \mathbb{R},\ x > 0$ gilt

$$\begin{aligned}\log(x+1) - \log x &= \log\frac{x+1}{x}\\ &= \log\frac{1+\frac{1}{2x+1}}{1-\frac{1}{2x+1}}\\ &= \log\left(1+\frac{1}{2x+1}\right) - \log\left(1-\frac{1}{2x+1}\right)\end{aligned}$$

Für $|y| < 1$ gilt:

$$\log(1+y) = \sum_{\omega\geq 1}\frac{(-1)^{\omega+1}}{\omega}y^\omega \qquad \text{(Reihenentwicklung des Logarithmus)}$$

Daher folgt

$$\begin{aligned}\log(x+1) - \log x &= \sum_{\omega\geq 1}\frac{(-1)^{\omega+1}}{\omega}\left(\frac{1}{2x+1}\right)^\omega + \sum_{\omega\geq 1}\frac{1}{\omega}\left(\frac{1}{2x+1}\right)^\omega\\ &= 2\cdot \sum_{\substack{\omega\geq 1\\ \omega \text{ ungerade}}}\frac{1}{\omega}\left(\frac{1}{2x+1}\right)^\omega\end{aligned}$$

Daher:

$$\begin{aligned}H_0(x) &= (x+\frac{1}{2})[\log(x+1) - \log x] - 1\\ &= \sum_{\substack{\omega\geq 1\\ \omega\text{ungerade}}}\frac{1}{\omega}\left(\frac{1}{2x+1}\right)^{\omega-1} - 1\\ &= \sum_{\substack{\omega\geq 2\\ \omega\text{gerade}}}\frac{1}{\omega+1}\left(\frac{1}{2x+1}\right)^\omega\end{aligned}$$

Also gilt (*) für $x > 0$, d.h. auf $A\cap\mathbb{R}$. Da beide Seiten von (*) holomorph auf A sind, stimmen sie nach dem Identitätssatz auf ganz A überein.

□

Lemma 2. *Für $z \in \mathbb{C}_-$, $|z+\frac{1}{2}| > 1$ gilt:*

$$|H_0(z)| \geq \frac{1}{2}\frac{1}{|2z+1|^2}$$

Beweis. Für $|z+\frac{1}{2}|>1$ ist $|2z+1|>2$, also $\frac{1}{|2z+1|}<\frac{1}{2}$. Sei $\omega_i=\frac{1}{2z+1}$.

Dann ist nach Lemma 1

$$\begin{aligned}|H_0(z)| &\leq \frac{1}{3}|\omega|^2+\frac{1}{5}|\omega|^4+\frac{1}{7}|\omega|^6+\dots\\ &\leq \frac{1}{3}|\omega|^2[1+|\omega|^2+|\omega|^4+\dots]\\ &< \frac{1}{3}|\omega|^2+\frac{1}{1-\frac{1}{4}} \qquad \left(\omega<\frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{4}{9}|\omega|^2\leq\frac{1}{2}|\omega|^2\end{aligned}$$

□

Für $z\in\mathbb{C}_-$ sei

$$H(z)=\sum_{n=0}^{\infty}H_0(z+n) \qquad \text{die } \textit{Gudermannsche Reihe}$$

Lemma 3. *Die Reihe $H(z)$ konvergiert gleichmäßig absolut auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{C}_-$ und ist daher eine holomorphe Funktion. Es gilt:*

$$\lim_{\substack{|z|\to\infty\\ z\in W_\delta}} H(z)=0 \tag{**}$$

Beweis. Sei $U\subset\mathbb{C}$. Sei $z\in U$. Für $n\in\mathbb{N}_0$, n groß gilt:

$$\begin{aligned}|(z+n)+\frac{1}{2}| &= |(n+\frac{1}{2})-(-z)|\\ &\geq |(n+\frac{1}{2})|-|z|>1\end{aligned}$$

Also folgt nach Lemma 2:

$$\begin{aligned}|H_0(z+n)| &\leq \frac{1}{2}\frac{1}{|2(z+n)+1|^2}\\ &\leq \frac{1}{2}\frac{1}{|2(x+n)+1|^2}\\ &\leq \frac{1}{2}\frac{1}{n^2}\end{aligned}$$

Falls n auch noch so groß, dass

$$2(x+n)+1\geq n, \quad \text{d.h. } x\geq\frac{-(n+1)}{2}$$

Da $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty$, konvergiert somit $H(z)$ auf K gleichmäßig absolut (*Weierstraß-Test*).

Es genügt (**) für δ klein zu zeigen, etwa für $\delta < \frac{\pi}{2}$. Für solche δ gilt:

$$W_\delta = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid x > 0 \text{ oder } |y| \geq C|x|\}$$

mit geeignetem $C = C(\delta) > 0$.
Es gibt eine natürliche Zahl $N(\delta) \in \mathbb{N}$, sodass $\forall\, n \geq N(\delta)$ und $\forall\, z \in W_\delta$ gilt:

$$z + n \in \mathbb{C},\ |(z+n) + \frac{1}{2}| > 1$$

Nach Lemma 2 gilt daher:

$$\begin{aligned} |H_0(z+n)| &\leq \frac{1}{2}\frac{1}{|2(z+n)+1|^2} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{(2(x+n)+1)^2 + 4y^2} \qquad (\forall\, n \geq N(\delta),\ \forall\, z \in W_\delta) \end{aligned}$$

Für $x > 0$ ist

$$(2(x+n)+1)^2 + 4y^2 \geq (2x+2n+1)^2 \geq (2n+1)^2$$

Für $|y| > C|x|$ gilt:

$$\begin{aligned} (2x+2n+1)^2 + 4y^2 &\geq (2x+2n+1)^2 + 4C^2x^2 \\ &\geq (2X_{0,n}+2n+1)^2 + 4C^2X_{0,n}^2 \end{aligned}$$

mit

$$X_{0,n} = -\frac{2n+1}{2(1+C^2)}$$

denn die Funktion

$$x \mapsto (2x+2n+1)^2 + 4C^2x^2$$

nimmt in $X_{0,n}$ ihr Minimum an.

Also existiert $C_1 = C_1(\delta) > 0$ mit

$$H_0(z+n) \leq \frac{1}{(2n+1)^2} \qquad (\forall\, n \geq N(\delta),\ \forall\, z \in W_\delta)$$

Sei $\varepsilon > 0$. Da $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ konvergiert, gibt es $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, sodass $\sum_{n \geq N(\varepsilon)} \frac{1}{(2n+1)^2} \leq \varepsilon$.

Sei $N := \max\{N(\delta), N(\varepsilon)\}$. Dann gilt für alle $z \in W_\delta$:

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq N} |H_0(z+n)| &\leq C_1 \sum_{n\geq N} \frac{1}{(2n+1)^2}\\ &\leq C_1 \sum_{n\geq N(\varepsilon)} \frac{1}{(2n+1)^2}\\ &\leq C_1 \cdot \varepsilon\end{aligned}$$

Sei jetzt $n < N$ (dies sind nur endlich viele!). Für $|z|$ groß gilt dann:

$$|(z+n) + \frac{1}{2}| > 1$$

Nach Lemma 2 folgt daher:

$$|H_0(z+n)| \leq \frac{1}{2} \frac{1}{|2(z+n)+1|^2} \to 0 \qquad (|z| \to \infty)$$

Insgesamt folgt:

$$\lim_{\substack{|z|\to\infty \\ z\in W_\delta}} H(z) = 0$$

$\square$

Sei $h(z) := z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z} e^{H(z)}$ mit $z \in \mathbb{C}_-$.

Lemma 4. *Es gilt:*

1. $h(z+1) = z \cdot h(z)$
2. $h(z)$ *ist beschränkt in* $1 \leq x \leq 2$.

Beweis. 1. Es ist

$$h(z) = e^{(z-\frac{1}{2}) \operatorname{Log} z - z + H(z)}$$

Betrachte:

$$\begin{aligned}\frac{h(z+1)}{h(z)} &= e^{(z+\frac{1}{2}) \operatorname{Log}(z+1) - (z+1) + H(z+1) - [(z-\frac{1}{2}) \operatorname{Log} z - z + H(z)]}\\ &= e^{H(z+1) - H(z) + (z+\frac{1}{2})[\operatorname{Log}(z+1) - \operatorname{Log} z] + \operatorname{Log} z - 1}\\ &= e^{H(z+1) - H(z) + H_0(z) + \operatorname{Log} z}\\ &= e^{\operatorname{Log} z}\\ &= z\end{aligned}$$

denn:

$$\begin{aligned}H(z+1)-H(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} H_0(z+1+n) - \sum_{n=0}^{\infty} H_0(z+n)\\ &= -H_0(z)\end{aligned}$$

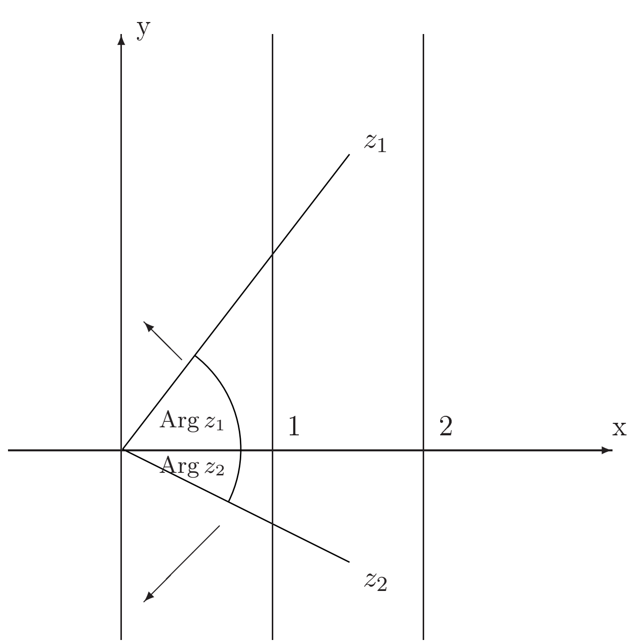
2. e^{-z} ist beschränkt auf $1 \leq x \leq 2$, denn $|e^{-z}| = e^{-x}$.
Auf $W_{\pi/2} = \{z \in \mathbb{C} \mid x > 0\}$ gilt $H(z) \to 0$ für $|z| \to \infty$ nach Lemma 3. Insbesondere ist $H(z)$ und $e^{H(z)}$ auf $1 \leq x \leq 2$ beschränkt. Es gilt:

$$\begin{aligned}|z^{z-\frac{1}{2}}| &= |e^{(z-\frac{1}{2})\operatorname{Log} z}|\\ &= e^{\operatorname{Re}[(z-\frac{1}{2})\operatorname{Log} z]}\end{aligned}$$

wobei:

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}[(z-\frac{1}{2})\operatorname{Log} z] &= \operatorname{Re}[(x-\frac{1}{2}+iy)(\operatorname{Log}|z| + i\operatorname{Arg}(z))]\\ &= \operatorname{Re}[(x-\frac{1}{2})\operatorname{Log}|z| - y\operatorname{Arg}(z)]\\ &= y[(x-\frac{1}{2})\frac{\operatorname{Log}|z|}{y} - \operatorname{Arg}(z)]\end{aligned}$$

Sei $1 \leq x \leq 2$. Für $y \to \pm\infty$ gilt $\operatorname{Arg}(z) \to \pm\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\operatorname{Log}|z|}{y} \to 0$.



Der Realteil von $(z-\frac{1}{2})\operatorname{Log} z$ geht gegen $-\infty$ für $|y| \to \infty$, insbesondere ist $e^{\operatorname{Re}[(z-\frac{1}{2}\operatorname{Log} z)]}$ beschränkt.

□

Nach Lemma 4 und dem Satz von Wielandt existiert ein $A \in \mathbb{C}_- \setminus \{0\}$, sodass

$$\Gamma(z) = A \cdot h(z) \qquad (z \in \mathbb{C}_-)$$

Nach der Legendreschen Verdopplungsformel gilt:

$$\Gamma(\frac{z}{2})\Gamma(\frac{1+z}{2}) = \sqrt{\pi} 2^{1-z} \Gamma(z)$$

Mit $z = n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sqrt{\pi} = 2^{n-1} \frac{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{1+n}{2})}{\Gamma(n)}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
\sqrt{\pi} &= A \cdot 2^{n-1} \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^{n/2-1/2} e^{-n/2} e^{H(\frac{n}{2})} \left(\frac{1+n}{2}\right)^{\frac{1+n}{2}-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1+n}{2}} e^{H(\frac{1+n}{2})}}{n^{n-\frac{1}{2}} e^{-n} e^{H(n)}} \\
&= A \cdot \left(2^{n-1-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1+n}{2}+\frac{1}{2}}\right) \cdot \left(n^{\frac{n}{2}-\frac{1}{2}-n+\frac{1}{2}}\right) (1+n)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(e^{H(\frac{1+n}{2})} e^{H(\frac{n}{2})} e^{-H(n)}\right) \\
&= A \cdot 2^{-\frac{1}{2}} \cdot n^{-\frac{n}{2}} (1+n)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(e^{H(\frac{1+n}{2})} e^{H(\frac{n}{2})} e^{-H(n)}\right) \\
&= A \cdot (2e)^{-\frac{1}{2}} (1 + \frac{1}{n})^{\frac{n}{2}} \cdot e^{H(\frac{1+n}{2}) + H(\frac{n}{2}) - H(n)}
\end{aligned}$$

Nach Lemma 3 gilt:

$$H(\frac{n}{2}), H(\frac{1+n}{2}), H(n) \to 0 \text{ für } n \to \infty$$

Ferner

$$|1 + \frac{1}{n}|^n \to e \;\text{ und }\; (1 + \frac{1}{n})^{\frac{n}{2}} \to \sqrt{e}$$

Also folgt:

$$\begin{aligned}
\sqrt{\pi} &= A 2^{-\frac{1}{2}} \;\text{ für } n \mapsto \infty \\
\Rightarrow A &= \sqrt{2\pi}
\end{aligned}$$

ii) Nach i) gilt für $x > 0$:

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi} x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x} e^{H(x)}$$

Nach Lemma 1 mit $z = x > 0$ und $\omega := \frac{1}{2x+1}$ gilt:

$$\begin{aligned}
H_0(x) &= \frac{1}{3}\omega^2[1 + \omega^2 + \omega^4 + \dots] \\
&= \frac{1}{3}\frac{1}{(2x+1)^2}\frac{1}{1-(\frac{1}{2x+1})^2} \\
&= \frac{1}{3}\frac{1}{(2x+1)^2-1} \\
&= \frac{1}{3}\frac{1}{4x(x+1)} \\
&= \frac{1}{12}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}\right) \\
\Rightarrow 0 < H(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} H_0(x+n) \\
&\leq \frac{1}{12}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+1+n}\right) \\
&\leq \frac{1}{12}\frac{1}{x}
\end{aligned}$$

Setze $\vartheta(x) := 12x \cdot H(x)$, daraus folgt die Behauptung.

□

2 Periodische Funktionen

2.1 Einfach periodische Funktionen

Definition. *Sei* $D \subset \mathbb{C}$ *und* $f : D \to \mathbb{C}$. *Es gebe* $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, *derart dass* $z \in D \Rightarrow z+\omega \in D$ *(d.h.* D *ist invariant unter Translationen druch* ω*). Gilt dann*

$$f(z+\omega) = f(z)\ \forall z \in D$$

so heißt f (einfach) periodisch mit Periode ω.

Beispiel. *i)* e^z *mit* $z \in \mathbb{C}$ *hat Periode* $2\pi i$

ii) $\sin z$, $\cos z$ *mit* $z \in \mathbb{C}$ *haben Periode* 2π

BEACHTE: Ist $f : D \to \mathbb{C}$ periodisch mit Periode ω, so ist $g : \frac{1}{\omega}D \to \mathbb{C}$, $g(z) := f(z \cdot \omega)$ (mit $g : \frac{1}{\omega}D := \left\{\frac{z}{\omega} \mid z \in D\right\}$) periodisch mit Periode 1:

$$g(z+1) = f(\omega(z+1)) = f(\omega z + \omega) = f(\omega z) = g(z)$$

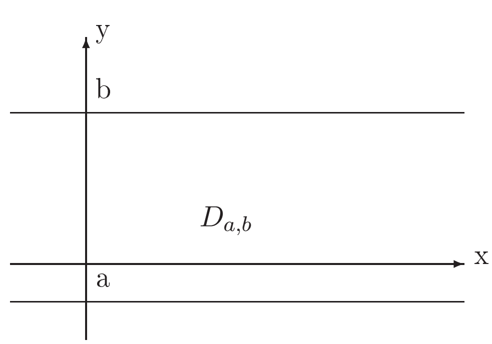
Daher kann man das Studium auf Funktionen $f : D \to \mathbb{C}$ mit Periode 1 beschränken. Insbesondere gilt dann:

$$f(z+n) = f(z) \qquad \forall\, z \in \mathbb{Z}$$

Die vielleicht einfachste auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion mit Periode 1 ist $e^{2\pi i z}$. Diese Funktion spielt im Folgenden eine wichtige Rolle!
Wir setzen im Folgenden voraus, dass gilt:

$$D = D_{a,b} := \{z \in \mathbb{C} \mid a < Im(z) < b\}$$

wobei $-\infty \leq a < b \leq \infty$.



Satz 1. *Sei $f : D_{a,b} \to \mathbb{C}$ holomorph mit Periode 1. Dann hat f eine* Fourierentwicklung*:*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z} \qquad (z \in D_{a,b})$$

mit eindeutig bestimmten Koeffizienten $a_n \in \mathbb{C}$.
Die Reihe ist gleichmäßig absolut konvergent auf Kompakta von $D_{a,b}$ und es gilt die Formel:

$$a_n = \int_0^1 f(z) e^{-2\pi i n z} dx \qquad (\forall\, n \in \mathbb{Z})$$

wobei $z = x + iy_0$ mit $y_0 \in (a,b)$ fest.

Beachte:

- In der Koeffizientenformel wird nur über die reelle Variable integriert.
- Die Fourierreihe entspricht der Laurentreihe in $e^{2\pi i z}$.

Beweis. Sei $D := D_{a,b}$. Man betrachte die Abbildung

$$D \to \mathbb{C},\ z \mapsto q := e^{2\pi i z}$$

Diese bildet D auf das Ringgebiet

$$\mathcal{R} := \{q \in \mathbb{C} \mid r < |q| < R\}$$

mit

$$r := e^{-2\pi b}, \quad R := e^{-2\pi a}$$

und der Konvention:

$$\begin{aligned} e^{-2\pi b} &= 0 \text{ für } b = \infty \\ e^{-2\pi a} &= \infty \text{ für } a = -\infty \end{aligned}$$

In der Tat:

$$\begin{aligned} r < |q| < R \quad &\Leftrightarrow \quad e^{-2\pi b} < e^{-2\pi y} < e^{-2\pi a} \\ &\Leftrightarrow \quad a < y < b \quad \text{d.h.: } z \in D \end{aligned}$$

Definiere: $F : \mathcal{R} \to \mathbb{C},\ F(q) := f(z)$, falls $q = e^{2\pi i z}$ mit $z \in D$.

i) Dann ist F wohldefiniert, denn $q = e^{2\pi i z} = e^{2\pi i z'} \Rightarrow z - z' \in \mathbb{Z}$, d.h. $z' = z + n$ mit $n \in \mathbb{Z}$, aber $f(z') = f(z+n) = f(z)$, denn f hat Periode 1.

ii) F ist auf $\mathcal{R}$ holomorph.

Bemerkung. *Dies sollte man erwarten, mehr noch: Nach dem Leibniz-Kalkül gilt:*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial q}F(q) &= \frac{\partial}{\partial e^{2\pi iz}}F(e^{2\pi iz}) \\
&= \frac{\partial}{\partial e^{2\pi iz}}f(z) \\
&= \frac{1}{\frac{\partial e^{2\pi iz}}{\partial z}} \cdot \frac{\partial}{\partial z}f(z) \\
&= \frac{1}{2\pi i e^{2\pi iz}}f'(z) \\
&= \frac{1}{2\pi iq}f'(z)
\end{aligned}$$

Beweis. (Holomorphie-Behauptung) Sei $q_0 \in \mathcal{R}$, man untersuche

$$\lim_{q \to q_0} \frac{F(q) - F(q_0)}{q - q_0}$$

Wähle eine Folge $(q_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{R}$ mit $q_\nu \to q_0$ $(\nu \to \infty)$, $q_\nu \neq q_0 \; \forall \, \nu$. Schreibe $q_\nu = e^{2\pi iz_\nu}$ und $q_0 = e^{2\pi iz_0}$ mit $z_\nu, z_0 \in D$.
Es ist

$$\begin{aligned}
0 \leftarrow q_\nu - q_0 &= e^{2\pi iz_\nu} - e^{2\pi iz_0} \\
&= e^{2\pi iz_0}(e^{2\pi i(z_\nu - z_0)} - 1)
\end{aligned}$$

Daher:

$$e^{2\pi i(z_\nu - z_0)} \to 1$$

Daher folgt:

$$\text{Log } e^{2\pi i(z_\nu - z_0)} \to \text{Log } 1 = 0$$

Denn *Log* ist bei $z = 1$ stetig. Nach Definition ist:

$$\begin{aligned}
0 \overset{(\nu \to \infty)}{\longleftarrow} \text{Log } e^{2\pi i(z_\nu - z_0)} &= 2\pi i(z_\nu - z_0) + 2\pi i m_\nu \qquad (m_\nu \in \mathbb{Z}) \\
&= 2\pi i(z_\nu + m_\nu) - 2\pi iz_0 \\
&= 2\pi iz'_\nu - 2\pi iz_0 \qquad \text{mit } z'_\nu := z_\nu + m_\nu \\
\Rightarrow z'_\nu &\to z_0
\end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
\lim_{\nu\to\infty}\frac{F(q_\nu)-F(q_0)}{q_\nu-q_0} &= \lim_{\nu\to\infty}\frac{f(z_\nu)-f(z_0)}{e^{2\pi i z_\nu}-e^{2\pi i z_0}} \\
&= \lim_{\nu\to\infty}\frac{f(z'_\nu)-f(z_0)}{e^{2\pi i z'_\nu}-e^{2\pi i z_0}} \\
&\quad \text{denn } f \text{ und } z\mapsto e^{2\pi i z} \text{ sind periodisch mit Periode 1} \\
&= \lim_{\nu\to\infty}\frac{1}{\frac{e^{2\pi i z'_\nu}-e^{2\pi i z_0}}{z'_\nu-z_0}}\cdot\frac{f(z'_\nu)-f(z_0)}{z'_\nu-z_0} \\
&= \frac{1}{2\pi i e^{2\pi i z_0}}\cdot f'(z_0)
\end{aligned}$$

Daher ist F in q_0 komplex differenzierbar. □

Nach FT 1 hat $F(q)$ eine Laurententwicklung um $a=0$:

$$F(q)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n q^n \qquad (q\in\mathcal{R})$$

die gleichmäßig absolut auf Kompakta $\subset\mathcal{R}$ konvergiert, mit

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|q|=\rho}\frac{F(q)}{q^{n+1}}dq \qquad (r<\rho<R)$$

wobei über die genau einmal im mathematisch positiven Sinne durchlaufene Kreislinie um $q=0$ vom Radius ρ integriert wird.
Daraus folgen die Aussagen des Satzes. Nicht-trivial ist nur die behauptete Formel von a_n: Die genannte Kreislinie wird parametrisiert durch

$$\varphi(x)=\rho e^{2\pi i x} \qquad (0\le x\le 1)$$

Nach Definition folgt also:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^1\frac{F(\rho e^{2\pi i x})}{(\rho e^{2\pi i x})^{n+1}}\cdot 2\pi i\cdot\rho\cdot e^{2\pi i x}dx \\
&= \int_0^1\frac{F(\rho e^{2\pi i x})}{(\rho e^{2\pi i x})^{n}}dx
\end{aligned}$$

Man wähle $\rho=e^{-2\pi y_0}$ mit $y_0\in(a,b)$. Es gilt $e^{2\pi i z}=e^{-2\pi y_0}\cdot e^{2\pi i x}=\rho\cdot e^{2\pi i x}$, ferner $F(e^{2\pi i z})=f(z)\Rightarrow$ Behauptung. □

Beispiel. *Sei $k\in\mathbb{N}$, $k\ge 2$. Sei $\mathbb{H}=D_{0,\infty}=\{z\in\mathbb{C}\mid Im(z)>0\}$ die obere Halbebene. Dann gilt:*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(z-n)^k}=\frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!}\sum_{n=1}^{\infty}n^{k-1}e^{2\pi i n z} \quad (z\in\mathbb{H}) \tag{*}$$

Beweis. Die Reihe links von (*) konvergiert gleichmäßig absolut auf Kompakta in $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$; (für den Fall $k=2$ siehe Kap.1, §1 Beispiel nach Satz 2, genauer: $\frac{\pi^2}{\sin^2\pi z}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(z-n)^2}$, der Fall

$k > 2$ geht genauso!)
Insbesondere ist die linke Seite von (*) holomorph auf $\mathbb{H}$. Wegen der absoluten Konvergenz ist die linke Seite von (*) periodisch mit Periode 1, hat also eine Fourierentwicklung nach obigem Satz.
Nach der Partialbruchzerlegung des Kotangens gilt:

$$\begin{aligned}
\pi \cdot \cot(\pi z) &= \frac{1}{z} + \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right) \quad (z \in \mathbb{H}) \\
&\overset{abs.Konv.}{=} \frac{1}{z} + \sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{z+n} - \frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{z} + \sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n}\right)
\end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\pi \cdot \cot(\pi z) &= \pi \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} \\
&= \pi \frac{\frac{e^{\pi i z} + e^{-\pi i z}}{2}}{\frac{e^{\pi i z} - e^{-\pi i z}}{2i}} \\
&= \pi i \frac{e^{\pi i z} + e^{-\pi i z}}{e^{\pi i z} - e^{-\pi i z}} \\
&= \pi i \frac{e^{2\pi i z} + 1}{e^{2\pi i z} - 1} \\
&= \pi i \frac{q+1}{q-1} \\
&= \pi i \frac{(q-1)+2}{q-1} \\
&= \pi i \left(1 + \frac{2}{q-1}\right) \\
&= \pi i \left(1 - 2\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right) \qquad \text{(geometrische Reihe)} \\
&= \pi i - 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} q^n \qquad (|q| < 1,\ \text{denn: } z \in \mathbb{H})
\end{aligned}$$

Also gilt $\forall\, z \in \mathbb{H}$:

$$\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n}\right) = \pi i - 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} e^{2\pi i n z}$$

Beide Seiten sind auf Kompakta gleichmäßig absolut konvergent, dürfen also beliebig oft differenziert werden. Einmal Ableiten ergibt:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{z^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(z-n)^2} + \frac{1}{(z+n)^2}\right] &= -(2\pi i)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n e^{2\pi i n z} \\
\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} &= (2\pi i)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n e^{2\pi i n z}
\end{aligned}$$

Per Induktion (k-mal Ableiten) erhält man $\forall\, k \in \mathbb{N},\ k \geq 2$:

$$(-1)^k (k-1)! \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^k} = (2\pi i)^k \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} e^{2\pi i n z}$$

$\square$

2.2 Elliptische Funktionen

2.2.1 Problemstellung

Gibt es holomorphe / meromorphe Funktionen f auf $\mathbb{C}$, welche zwei „reell unabhängige“ Perioden haben, d.h.
$\exists\, \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ linear unabhängig über $\mathbb{R}$, sodass gilt:

$$f(z+\omega_1) = f(z),\ f(z+\omega_2) = f(z)\ \forall\, z \in \mathbb{C}?$$

Erinnerung: Eine auf $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion ist eine Abbildung $f : \mathbb{C} \mapsto \bar{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, derart dass

i) $S(f) := f^{-1}(\{\infty\})$ diskret in $\mathbb{C}$ ist

ii) $f_0 := f\,|_{\mathbb{C}\setminus S(f)}$ holomorph ist und sodass die Punkte aus $S(f)$ Polstellen sind.

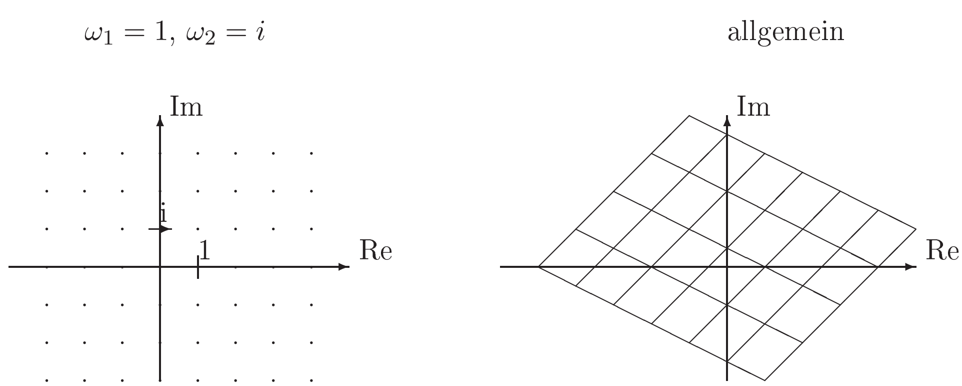
Sind f und g auf $\mathbb{C}$ meromorph, so ist $f_0 + g_0$ auf $\mathbb{C} \setminus (S(f) \cup S(g))$ holomorph und hat in $S(f) \cup S(g)$ nur unwesentliche Singularitäten. Also hat $f_0 + g_0$ eine eindeutige Fortsetzung zu einer meromorphen Funktion $f+g$ auf $\mathbb{C}$. Genauso wird fg, f' und $\frac{f}{g}$ definiert (g nicht identisch Null).

Die auf $\mathbb{C}$ meromorphen Funktionen bilden einen Körper.

Definition. *Eine Teilmenge $L \subset \mathbb{C}$ heißt* Gitter *(im Englischen „lattice“), falls es zwei über $\mathbb{R}$ linear unabhängige Zahlen $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ gibt, sodass*

$$L = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2 := \{m\omega_1 + n\omega_2 | m, n \in \mathbb{Z}\}$$

Man nennt $\{\omega_1,\, \omega_2\}$ eine Basis *von L.*



Bemerkung. *i) Man zeigt leicht (!): $\{\omega_1,\, \omega_2\}$ und $\{\omega_1',\, \omega_2'\}$ sind genau dann Basen desselben Gitters L, wenn $\exists M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}) | ad - bc = \pm 1 \right\}$ mit*

$$\begin{pmatrix} \omega_1' \\ \omega_2' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}.$$

ii) Der Periodentorus
Sei $L = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2 \subset \mathbb{C}$ *ein Gitter. Dann definiert man eine Äquivalenzrelation auf* $\mathbb{C}$ *durch*

$$z \sim z' \Leftrightarrow \exists z - z' \in L$$

Für die Äquivalenzklasse $[z]$ *von* z *gilt:* $[z] = z + L$*. Die Menge der Äquivalenzklassen bezeichnet man mit* $\mathbb{C} \mid L$ *(*$\mathbb{C}$ *modulo* L*).*
Beachte: $\mathbb{C} \mid L$ *ist die additive Gruppe* $(\mathbb{C}, +)$ *ausdividiert nach dem Normalteiler* $(L, +)$ *und ist daher eine Gruppe unter* $[z]+[z'] := [z+z']$*. Man nennt* $\mathbb{C} \mid L$ *den* Periodentorus*.*
Jedes $z \in \mathbb{C}$ *ist äquivalent zu einem Punkt in der* Grundmasche

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(\omega_1, \omega_2) = \{t_1\omega_1 + t_2\omega_2 \mid 0 \leq t_1, t_2 \leq 1\}$$

Zwei Punkte aus $\mathfrak{F}$ *sind genau dann äquivalent, wenn sie gleich sind oder auf gegenüberliegenden Seiten der Ränder von* $\mathfrak{F}$ *liegen. Identifiziert man gegenüberliegende Seiten, so erhält man einen Torus.*

Definition (Elliptische Funktionen). *Unter einer* elliptischen Funktion *zum Gitter* L *versteht man eine meromorphe Funktion* $f : \mathbb{C} \mapsto \bar{\mathbb{C}}$*, derart dass gilt:*

$$f(z + \omega) = f(z)\ \forall\, \omega \in L,\ \forall\, z \in \mathbb{C}$$

Bemerkung. *i) Es gilt:* $f(z+\omega) = f(z)\ \forall \omega \in L,\ \forall z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow f(z+\omega_1) = f(z),\ f(z+\omega_2) = f(z)\ \forall z \in \mathbb{C}$, *wenn* $L = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$. *Aus diesem Grund nennt man elliptische Funktionen auch* doppelt-periodische Funktionen.

ii) Ist $c \in \bar{\mathbb{C}}$ *und gilt* $f(z) = c$, *so gilt auch* $f(z+\omega) = c\ \forall\, \omega \in L$. *Es ist daher sinnvoll, z.B. von den Nullstellen oder Polstellen* modulo L *zu sprechen.*

iii) Die elliptischen Funktionen zum Gitter L *bilden einen Körper* $K(L)$. *Dieser enthält den „Konstanten-Körper“* $\mathbb{C}$ *(d.h. Konstanten sind (trivialerweise) elliptische Funktion). Ferner:* $f \in K(L) \Rightarrow f' \in K(L)$

iv) Der Name „elliptische Funktion“ *kommt von der Theorie der* elliptischen Integrale, *das sind Integrale folgender Gestalt:*

$$\int_a^z \frac{dt}{\sqrt{P(t)}}$$

wobei $P(t)$ *ein Polynom 3. oder 4. Grades ohne mehrfache Nullstellen ist. (Der Wert des Integrals hängt von der Wahl der Wurzel* $\sqrt{\cdot}$ *im Nenner und von der Wahl des Integrationsweges ab.)*
Diese Integrale treten auf bei der Berechnung von Längen von Ellipsenbögen. Man kann zeigen (vage!): Die „Umkehrfunktion“ eines elliptischen Integrals ist eine elliptische Funktion. In diesem Sinne ist die Theorie der elliptischen Integrale „äquivalent“ mit der Theorie der elliptischen Funktionen.
Theorie der elliptischen Funktionen: sehr schön ...!
Warnung: Ellipsen haben ihrer geometrischen Natur nach nichts mit elliptischen Kurven zu tun. Letztere sind Kurven in $\mathbb{C}^2$ *gegeben durch Gleichungen der Form* $y^2 = x^3 + ax + b$ *mit* $a, b, \in \mathbb{C}$: $\Delta := 4a^3 - 27b^2 \neq 0$. *Ellipsen sind* rational, *d.h. können durch rationale Funktionen parametrisiert werden, während elliptische Kurven der einfachste Typus von Kurven sind, für die das nicht mehr gilt (sie haben „Geschlecht 1“ und werden durch elliptische Funktionen parametrisiert).*

2.2.2 Die Liouvilleschen Sätze

Es gibt 4 *Liouvillesche Sätze*, diese geben notwendige Bedingungen für die Existenz elliptischer Funktionen an.

Satz 1 (1. Liouvillescher Satz). *Eine elliptische Funktion ohne Polstellen ist notwendigerweise konstant.*

Beweis. Sei f elliptisch zum Gitter L. Für jedes $z \in \mathbb{C}$ gibt es dann $\omega \in L$ mit $z + \omega \in \mathfrak{F}(\omega_1, \omega_2) =$ Grundmasche zur Basis $\{\omega_1, \omega_2\}$.
Da f elliptisch, gilt $f(z+\omega) = f(z)$. Daher nimmt f schon jeden seiner Werte auf $\mathfrak{F}(\omega_1, \omega_2)$ an. Beachte: $\mathfrak{F}(\omega_1, \omega_2)$ ist kompakt! Ist daher f auf $\mathbb{C}$ holomorph, so ist f insbesondere stetig, ist also auf $\mathfrak{F}(\omega_1, \omega_2)$ beschränkt, also auch auf $\mathbb{C}$ beschränkt. Also ist f eine ganze, beschränkte Funktion $\Rightarrow$ f konstant nach dem Satz von Liouville (FT 1). □

Satz 2 (2. Liouvillescher Satz). *Für jedes $f \in K(L)$ gilt:*

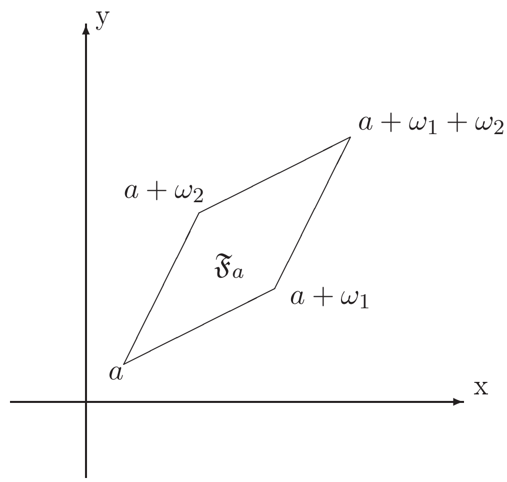
$$\sum_{z \in \mathbb{C}|L} res_z f = 0$$

(Summation über ein vollständiges Vertretersystem der Polstellen von f modulo L: notwendigerweise endlich!)

Beweis. Zeige zunächst: die linke Seite ist endlich und wohldefiniert!
In der Tat: Hätte f unendlich viele Pole modulo L, so hätte f unendlich viele Pole in $\mathfrak{F}$ (festgewählte Grundmasche), aber $\mathfrak{F}$ ist kompakt ($\Rightarrow$ beschränkt), also hätte $S(f) := f^{-1}(\{\infty\})$ einen Häufungspunkt in $\mathfrak{F}$. ↯
Auch gilt: $res_{z_0} f(z) = res_{z_0+\omega} f(z)\ \forall \omega \in L$, denn die Laurententwicklung von $f(z)$ um $z_0+\omega$ ist gleich der Laurententwicklung von $f(z-\omega)$ um z_0 und $f(z-\omega) = f(z)$:

$$\sum_{n \geq n_0} a_n (z - (z_0 + \omega))^n$$

Für $a \in \mathbb{C}$ sei $\mathfrak{F}_a := a + \mathfrak{F} = \{a + z \mid z \in \mathfrak{F}\}$.



Dann kann $\mathbb{C}|L$ mit $\mathfrak{F}_a$ (modulo Randidentifikationen) identifiziert werden. (Klar, denn ist $z \in \mathbb{C}$, so $\exists\, \omega \in L$ mit $(z-a)+\omega \in \mathfrak{F}$, d.h. $z+\omega \in a+\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_a$)
Man wähle a, sodass auf dem Rand $\partial\mathfrak{F}_a$ von $\mathfrak{F}_a$ keine Pole von f liegen, denn f hat auf $\mathfrak{F}$ nur endlich viele Pole (s.o.). Dann enthält das Innere $\operatorname{int}\mathfrak{F}_a$ von $\mathfrak{F}_a$ genau einen Repräsentanten jeder Polstelle von f modulo L.
Nach dem Residuensatz gilt dann:

$$\sum_{z \in \operatorname{int}\mathfrak{F}_a} res_z f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathfrak{F}_a} f(w)dw$$

wobei $\partial\mathfrak{F}$ genau einmal im positiven Sinne durchlaufen wird. Daher:

$$\begin{aligned} 2\pi i \sum_{z \in \mathbb{C}\backslash L} res_z f &= \int_{\partial\mathfrak{F}_a} f(w)dw \\ &= \int_a^{a+\omega_1} f(w)dw + \int_{a+\omega_1}^{a+\omega_1+\omega_2} f(w)dw \\ &\quad + \int_{a+\omega_1+\omega_2}^{a+\omega_2} f(w)dw + \int_{a+\omega_2}^{a} f(w)dw \end{aligned}$$

wobei über die entsprechenden Geradenstücke integriert wird.

Im 4. Integral substituiere man $w \mapsto w - \omega_1$. Wegen $f(w-\omega_1) = f(w)$ geht dann dieses Integral über in:

$$\int_{a+\omega_1+\omega_2}^{a+\omega_1} f(w)dw = -\int_{a+\omega_1}^{a+\omega_1+\omega_2} f(w)dw$$

also ergibt die Summe des 4. und des 2. Integrals Null. Ebenso folgt nach Transformation $w \mapsto w - \omega_2$, dass die Summe des 3. und des 1. Integrals Null ergibt. $\square$

Korollar. *i) Es gibt kein $f \in K(L)$ mit genau einer einfachen Polstelle modulo L.*

ii) Ein $f \in K(L) \setminus \mathbb{C}$ hat mindestens eine mindestens doppelte Polstelle modulo L oder mindestens zwei modulo L verschiedene Polstellen.

Beweis. i) klar nach Satz 2!

ii) ist die logische Umkehrung von i) unter Beachtung von Satz 1.

□

Definition. *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \bar{\mathbb{C}}$ meromorph, $f \not\equiv 0$, sei $z_0 \in D$.*

i) Sei $c \in \mathbb{C}$. Man sagt dann, dass f in z_0 den Wert c mit Vielfachheit $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$ *annimmt, falls*

$$ord_{z_0}(f - c) = k$$

Beachte: $ord_{z_0}(f - c) > 0 \Leftrightarrow f(z_0) = c$

ii) Ist z_0 Polstelle von f der Ordnung $k \geq 1$ (also $ord_{z_0} f = -k$), so sagt man, dass f in z_0 den Wert ∞ mit Vielfachheit k annimmt.

Satz 3 (3. Liouvillescher Satz). *Jedes $f \in K(L) \setminus \mathbb{C}$ nimmt jeden Wert $c \in \bar{\mathbb{C}}$ modulo L gleich oft an (mit Vielfachheiten gezählt).*
Genauer: Ist $c \in \mathbb{C}$, so gilt:

$$\sum_{\substack{z \in \mathbb{C}|L \\ z \text{ kein Pol}}} ord_z(f - c) = - \sum_{\substack{z \in \mathbb{C}|L \\ z \text{ ist Pol}}} ord_z f$$

Beweis. Zeige zunächst: Beide Summen sind endlich:
Für „rechts“ schon gezeigt in Satz 2.
Für „links“: Angenommen, $f - c$ hat unendlich viele Nullstellen modulo L, dann hat $f - c$ unendlich viele Nullstellen in $\mathfrak{F}$. Da $\mathfrak{F}$ kompakt ($\Rightarrow$ beschränkt!) hat also die Nullstellenmenge von $f - c$ einen Häufungspunkt. Aber die Nullstellen in $f - c$ sind die Nullstellen der auf dem Gebiet $\mathbb{C} \setminus S(f)$ holomorphen Funktion $f_0 - c$ (mit $f_0 := f\,|_{\mathbb{C} \setminus S(f)}$). Nach dem Identitätssatz (FT 1) folgt: $f_0 - c = 0$, d.h. $f_0 \equiv c$ konstant $\Rightarrow f \equiv c$ konstant. ↯
Dass die Ordnung nur von z modulo L abhängt, ist klar. (Betrachte die Laurententwicklung und benutze $f(z + \omega) = f(z)\,\forall\, \omega \in L$.)
Sei $c \in \mathbb{C}$ fest. Da f nicht konstant, ist:

$$\frac{f'}{f - c} \in K(L)$$

Man wende Satz 2 auf diese Funktion an.

$$0 = \sum_{z \in \mathbb{C}|L} res_z \frac{f'}{f-c}$$

Es gilt:

$$res_z \frac{f'}{f-c} = res_z \frac{(f-c)'}{f-c} = ord_z(f-c)$$

(siehe Beweis zum Null- & Polstellenzählenden Integral!). Daher:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\substack{z \in \mathbb{C}|L \\ z \text{ kein Pol}}} ord_z(f-c) + \sum_{\substack{z \in \mathbb{C}|L \\ z \text{ ist Pol}}} ord_z(f-c) \\ &= \sum_{\substack{z \in \mathbb{C}|L \\ z \text{ kein Pol}}} ord_z(f-c) + \sum_{\substack{z \in \mathbb{C}|L \\ z \text{ ist Pol}}} ord_z f \end{aligned}$$

(z Pol von $f \Leftrightarrow z$ ist Pol von $f-c$!) □

Definition. *Man nennt die in Satz 3 auftretende positive ganze Zahl die* Ordnung *von f ($ord\ f$).*

Satz 4 (4. Liouvillescher Satz). *Sei $f \in K(L) \setminus \mathbb{C}$ und sei $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ bzw. $\beta_1, \ldots, \beta_s$ ein vollständiges Vertretersystem der Null- bzw. Polstellen von f modulo L, wobei jede Null- bzw. Polstelle mit entsprechenden Vielfachheiten auftritt.*
Dann gilt:

i) $r = s$

ii) $\sum_{j=1}^{r} \alpha_j - \sum_{j=1}^{s} \beta_j \in L$ *Summe Null- weniger Summe Polstellen liegt im Gitter!*

Beweis. i) Das ist der Fall $c = 0$ in Satz 3!

ii) Zum Beweis benötigen wir folgendes:

Lemma. *Sei D ein Elementargebiet und f eine auf D meromorphe Funktion mit endlich vielen Null- und Polstellen $a_1, \ldots, a_n$. Sei $g : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei C eine stückweise glatte, geschlossene Kurve in $D \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$.*
Dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{\nu=1}^{n} \chi(C; a_\nu) ord_{a_\nu} f \cdot g(a_\nu)$$

Beweis. Genauso wie im Fall $g \equiv 1$ (Satz über das NPI).

Die Funktion $g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}$ ist auf $D \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$ holomorph;

$$res_{z=a_\nu} g(z)\frac{f'(z)}{f(z)} = ord_{a_\nu} f \cdot g(a_\nu)$$

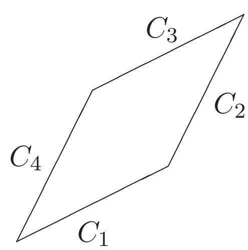
Man wende den Residuensatz an! $\square$

Durch Abändern der $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots \beta_r$ modulo L kann man erreichen, dass die $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots \beta_r \in \operatorname{int} \mathfrak{F}_a$ mit geeignetem $a \in \mathbb{C}$ denn f hat in $\mathfrak{F}$ nur endlich viele Null- & Polstellen.
Man wende das Lemma an mit $g(z) = z$. Dann folgt

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{r} \alpha_j - \sum_{j=1}^{r} \beta_j &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathfrak{F}_a} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left(\sum_{\nu=1}^{4} \int_{C_\nu} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz \right)\end{aligned}$$

wobei:

- $C_1, \ldots, C_4$ die im Bild angedeuteten Geradenstücke sind.
- Integriert wird über den Rand $\partial \mathfrak{F}_a$, genau einmal durchlaufen, positiv orientiert.
- Man beachte die Konvention über die Vielfachheiten!



Es gilt:

$$\begin{aligned}\int_{C_4} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \int_{-C_2} (z - \omega_1) \frac{f'(z - \omega_1)}{f(z - \omega_1)} dz \quad (z \mapsto z - \omega_1) \\ &= -\int_{C_2} (z - \omega_1) \frac{f'(z)}{f(z)} dz \\ &= -\int_{C_2} z \frac{f'(z)}{f(z)} + \omega_1 \int_{C_2} \frac{f'(z)}{f(z)}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{C_2} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \int_{C_4} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz \right) = \frac{\omega_1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

Nach Voraussetzung hat f auf C_2 keine Null- & Polstellen. Da C_2 kompakt ist, ist also C_2 enthalten in einem kleinen offenen Rechteck R (=Elementargebiet), auf dem f keine Null- oder Polstellen hat.
Nach FT 1 (Satz über offene Abbildungen / Satz der Gebietstreue bzw. Lemma zur holomorphen Wurzel) kann man also schreiben:

$$f(z) = e^{h(z)} \; \forall \, z \in R$$

wobei $h(z)$ auf R holomorph. Es folgt:

$$\begin{aligned} f'(z) &= h'(z) \cdot e^{h(z)} \\ &= h'(z) \cdot f(z) \\ \Rightarrow \frac{f'}{f} &= h' \end{aligned}$$

Also ist h Stammfunktion von $\frac{f'}{f}$ auf R.
Nach den Rechenregeln für Kurvenintegrale folgt daher:

$$\int_{C_2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = h(a + \omega_1 + \omega_2) - h(a + \omega_1)$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} e^{h(a+\omega_1+\omega_2)} = f(a + \omega_1 + \omega_2) = f(a + \omega_1) = e^{h(a+\omega_1)} \\ \Rightarrow h(a + \omega_1 + \omega_2) - h(a + \omega_1) \in 2\pi i \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Daher:

$$\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{C_2} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \int_{C_4} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz \right) \in \mathbb{Z}\omega_1$$

Ebenso zeigt man:

$$\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{C_1} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \int_{C_3} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz \right) \in \mathbb{Z}\omega_2$$

$\square$

2.2.3 Die Weierstraß'sche $\wp$-Funktion

ZIEL:

i) Konstruktion einer elliptischen Funktion $\wp$ zum Gitter L mit Polstellen (zweiter Ordnung) genau in den Punkten aus L.

ii) Man zeige: $K(L) = \mathbb{C}(\wp) + \wp'\mathbb{C}(\wp)$ wobei $\mathbb{C}(\wp)$ der Körper der rationalen Funktionen in $\wp$ ist.

Konvention:

i) $L = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2 \subset \mathbb{C}$ festes Gitter

ii) statt $\sum_{\omega \in L \setminus \{(0,0)\}}$ schreibt man $\sum'_{\omega \in L}$.

Lemma. *Sei $r > 2$. Dann ist*

$$\sum_{\omega \in L}{}' \frac{1}{|\omega|^r} < \infty$$

Beweis.

$$\text{Sei } f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R},\ f(x,y) := \frac{|x\omega_1 + y\omega_2|^r}{|xi + y|^r}$$

Dann ist $f(x,y) > 0$, denn ω_1, ω_2 sind über R linear unabhängig. Ferner ist f homogen vom Grad Null, d.h.

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y) \qquad \forall\, \lambda \neq 0,\ \forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

Ferner nimmt f auf dem Kompaktum $S' = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\big\}$ ihr Minimum an, ist also dort nach unten beschränkt durch ein $C > 0$.
Daher folgt:

$$|f(x,y)| \geq C\ \forall x, y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \qquad (\text{schreibe } z = \underbrace{|z|}_{\lambda} \cdot \frac{z}{|z|} \in S')$$

Man wende dies an mit $(x,y) = (m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Es folgt:

$$\frac{1}{|m\omega_1 + n\omega_2|^r} \leq \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{|mi + n|^r}$$

Wegen dem Majorantenkriterium genügt es also zu zeigen:

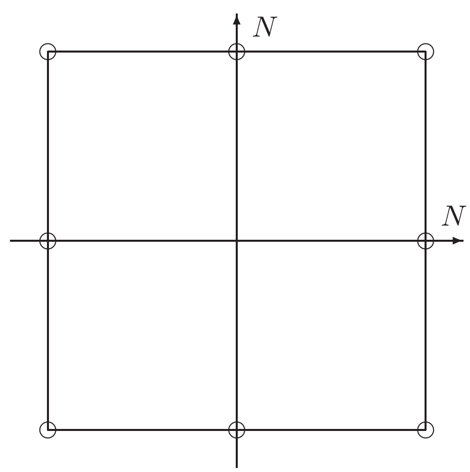
$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2}{}' \frac{1}{|mi + n|^r} < \infty$$

Beachte: Euklidische Norm: $|mi + n| = \sqrt{m^2 + n^2}$.
Alle Normen auf $\mathbb{R}^2$ sind äquivalent, insbesondere ist die euklidische Norm äquivalent zur

Maximumsnorm $(||(x,y)||_\infty = \max\{|x|,|y|\})$. Folglich genügt es nun zu zeigen, dass

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}{}' \frac{1}{||(m,n)||_\infty^r} = \sum_{N=1}^{\infty} \#\left\{(m,n)\in\mathbb{Z}^2 \mid ||(x,y)||_\infty = N\right\} \frac{1}{N^r} < \infty$$

Leicht zu sehen: $\#\left\{(m,n)\in\mathbb{Z}^2 \mid ||(x,y)||_\infty = N\right\} = 8N$.



Daher wird obige Reihe majorisiert duch:

$$8\cdot\sum_{N=1}^{\infty}\frac{1}{N^{r-1}} < \infty \qquad \text{da } r > 2$$

$\square$

Satz 1. *i) Die Reihe*

$$\wp(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega\in L}{}' \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) \qquad z \in \mathbb{C} \setminus L$$

ist auf Kompakta $\subset \mathbb{C} \setminus L$ gleichmäßig absolut konvergent und definiert eine holomorphe Funktion auf $\mathbb{C} \setminus L$. Diese heißt Weierstraß'sche $\wp$-Funktion. *Die $\wp$-Funktion hat Polstellen der Ordnung 2 in den Punkten aus L.*

ii) Es gilt:

$$\wp'(z) = -2 \sum_{\omega\in L} \frac{1}{(z-\omega)^3} \qquad z \in \mathbb{C} \setminus L$$

Die Funktion $\wp'$ist ungerade und ist $\in K(L)$.

iii) Es gilt: $\wp \in K(L)$ und $\operatorname{ord} \wp = 2$.

iv) Die Funktion $\wp(z)$ hat um $z = 0$ die Laurententwicklung

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n\geq 1} (2n+1) G_{2n+2} z^{2n} \qquad (0 < |z| < \rho := \min \{|\omega| \mid \omega \in L, \omega \neq 0\})$$

wobei: $G_{2k} := \sum_{\omega\in L}{}' \frac{1}{\omega^{2k}} \qquad k \in \mathbb{N}, k \geq 2$

die sogenannten homogenen Eisensteinreihen *vom Gewicht $2k$ zu L sind.*

Beweis. i) Sei $K \subset \mathbb{C} \setminus L$ kompakt. Es gelte $|z| \leq R \; \forall \, z \in K$. Sei $\omega \in L$ so gewählt, dass $|\omega| > 2R$. Für $z \in K$ und solche ω gilt dann:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right| &= \left| \frac{\omega^2 - (z-\omega)^2}{\omega^2 (z-\omega)^2} \right| \\ &= \left| \frac{\omega^2 - (z^2 - 2\omega z + \omega^2)}{\omega^2 (z-\omega)^2} \right| \\ &= \left| \frac{z(z-2\omega)}{\omega^2 (z-\omega)^2} \right| \end{aligned}$$

Man schätze die Terme getrennt ab!

1. $|z| \leq R$ nach Voraussetzung
2. $$\begin{aligned} |z - 2\omega| &\leq |z| + 2|\omega| \\ &\leq R + 2|\omega| \\ &\leq \frac{|\omega|}{2} + 2|\omega| = \frac{5}{2}|\omega| \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} |z-\omega|^2 &= |\omega - z|^2 \\ &\geq (|\omega| - |z|)^2 \qquad (*) \\ &\geq (|\omega| - R)^2 \\ &\geq (|\omega| - \frac{|\omega|}{2})^2 \\ &= \frac{1}{4}|\omega|^2 \end{aligned}$$

(*): beachte: $|z| \leq R < 2R < |\omega|$ nach Wahl von ω.

Also:

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right| &\leq \frac{R \cdot \frac{5}{2}|\omega|}{|\omega|^2 \cdot \frac{1}{4}|\omega|^2} \\ &= \frac{10R}{|\omega|^3} \end{aligned}$$

Nach dem Lemma ist daher die Reihe auf K gleichmäßig absolut konvergent. Nach dem Satz von Weierstraß ist $\wp(z)$ auf $\mathbb{C} \setminus L$ holomorph. Nach Definition hat $\wp(z)$ doppelte Polstellen in L (der Hauptteil in $z = \omega$ ist $\frac{1}{(z-\omega)^2}$).

ii) Nach dem Satz von Weierstraß darf $\wp(z)$ gliedweise abgeleitet werden:

$$\begin{aligned} \wp'(z) &= -\frac{2}{z^3} - 2\sum_{\omega \in L}{}' \frac{1}{(z-\omega)^3} \\ &= -2\sum_{\omega \in L} \frac{1}{(z-\omega)^3} \qquad z \in \mathbb{C} \setminus L \end{aligned}$$

Die Reihe ist absolut konvergent (ähnliches Argument wie oben!).
Sei $\omega_0 \in L$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \wp'(z+\omega_0) &= -2\sum_{\omega \in L} \frac{1}{(z+\omega_0-\omega)^3} \\ &= -2\sum_{\omega \in L} \frac{1}{(z-(\omega-\omega_0))^3} \\ &= -2\sum_{\omega \in L} \frac{1}{(z-\omega)^3} \qquad (*) \\ &= \wp'(z) \end{aligned}$$

(*) Beachte: Mit ω durchläuft auch $\omega - \omega_0$ alle Elemente aus L, denn L ist abelsche Gruppe; weiter: Die Reihe ist absolut und damit auch unbedingt konvergent.

Folglich ist $\wp' \in K(L)$
Es gilt: $\wp'(-z) = -\wp'(z)$: klar!

iii) zu zeigen: $\wp \in K(L)$, d.h. $\wp(z+\omega_j) = \wp(z) \qquad \forall\, z \in \mathbb{C} \setminus L,\ j = 1, 2$.
Es gilt: $\wp'(z+\omega_j) - \wp'(z) = 0$ nach ii). D.h. $\wp(z+\omega_j) - \wp(z)$ hat Ableitung Null. Da

$\mathbb{C} \setminus L$ Gebiet, folgt $\wp(z+\omega_j) - \wp(z) = c_j \quad (\forall\, z \in \mathbb{C} \setminus L,\ j = 1, 2)$ mit $c_j \in \mathbb{C}$ konstant.
Setze $z := -\frac{\omega_j}{2} \notin L$.
Dann folgt:

$$0 = \wp(\frac{\omega_j}{2}) - \wp(\frac{\omega_j}{2}) = \wp(\frac{\omega_j}{2}) - \wp(-\frac{\omega_j}{2}) = c_j$$

$\operatorname{ord} \wp = 2$ klar, denn $\wp$ hat in den Punkten aus L doppelte Polstellen.

iv) Es gilt:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + g(z) \qquad \text{wobei}$$
$$g(z) = \sum_{\omega \in L}{}' \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) \quad \text{auf } |z| < \rho \text{ holomorph}$$

Sukzessives Ableiten ergibt:

$$g^{(n)}(z) = (-1)^n (n+1)! \sum_{\omega \in L}{}' \frac{1}{(z-\omega)^{2+n}} \quad (n \geq 1)$$

Daher:

$$\begin{aligned} g^{(n)}(0) &= (-1)^n (n+1)! \sum_{\omega \in L}{}' \frac{1}{(-\omega)^{2+n}} \\ &= (n+1)! \sum_{\omega \in L}{}' \frac{1}{\omega^{2+n}} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{n ungerade} \\ (n+1)! G_{2+n} & \text{n gerade} \end{cases} \end{aligned}$$

Weiter:

$$\begin{aligned} g(z) &= \sum_{n \geq 0} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} z^n \qquad (|z| < \rho,\ \text{beachte: } g(0) = 0) \\ &= \sum_{\substack{n \geq 2 \\ \text{n gerade}}} (n+1) G_{2+n} z^n \\ &= \sum_{n \geq 1} (2n+1) G_{2n+2} z^{2n} \end{aligned}$$

$\square$

Satz 2 (Differentialgleichung der $\wp$-Funktion). *Es gilt:*

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3$$

wobei

$$g_2 := 60 \cdot G_4$$
$$g_3 := 140 \cdot G_6$$

die sogenannnten Weierstraß-Konstanten des Gitters L *sind.*

Beweis. IDEE: Man zeigt, dass:

$$\wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 + g_2\wp(z) \in K(L)$$

eine hebbare Singularität in $z = 0$ hat. Hierzu untersuche man den Hauptteil und den konstanten Term dieser Funktion!

Es gilt:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + 3G_4z^2 + 5G_6z^4 + \dots$$
$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + 6G_4z + 20G_6z^3 + \dots$$

i) Daher:

$$\begin{aligned} \wp' \cdot \wp' &= (-\frac{2}{z^3} + 6G_4z + 20G_6z^3 + \dots) \cdot (-\frac{2}{z^3} + 6G_4z + 20G_6z^3 + \dots) \\ &= \frac{4}{z^3} - 12G_4\frac{1}{z^2} - 40G_6 - 12G_4\frac{1}{z^2} - 40G_6 + \dots \\ &= \frac{4}{z^6} - 24G_4\frac{1}{z^2} - 80G_6 + \dots \end{aligned}$$

ii) Ebenso:

$$4\wp^3 = \frac{4}{z^6} + 36G_4\frac{1}{z^2} + 60G_6 + \dots$$

iii) Und zuletzt:

$$g_2\wp = 60G_4\frac{1}{z^2} + 0 + \dots$$

Daher folgt:

$$\wp'^2 - 4\wp^3 + g_2\wp = -140 \cdot G_6(+\text{ höhere Terme}) = -g_3$$

Daher hat also in der Tat $\wp'^2 - 4\wp^3 + g_2\wp$ in $z = 0$ eine hebbare Singularität (kein Hauptteil!) und nimmt dort den Wert $-g_3$ an. Wegen $\wp'^2 - 4\wp^3 + g_2\wp \in K(L)$ ist daher diese Funktion holomorph auf $\mathbb{C}$. Folglich gilt nach dem ersten Liouvilleschen Satz

$$\wp'^2 - 4\wp^3 + g_2\wp = const = -g_3$$

$\square$

Korollar. *Sei* $\omega_3 := \omega_1 + \omega_2$ *und sei weiter* $e_j := \wp(\frac{\omega_j}{2})$ *mit* $j = 1, 2, 3$.
Dann gilt

$$\wp'^2 = 4(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3)$$

Bemerkung. *Die Zahlen* $0, \wp(\frac{\omega_1}{2}), \wp(\frac{\omega_2}{2}), \wp(\frac{\omega_3}{2})$ *sind Repräsentanten modulo* L *der sogenannten* Zweiteilungspunkte des Gitters L, *d.h. derjenigen Punkte* $z \in \mathbb{C}|L$ *mit* $2z \equiv 0\ (L)$, *d.h.* $2z \in L$.
In der Tat:

$$2z \in L \Leftrightarrow z = \frac{1}{2}L = \left\{\frac{m}{2}\omega_1 + \frac{n}{2}\omega_2 \mid m, n \in \mathbb{Z}\right\}$$

Beweis. Es gilt:

$$-\wp'(\frac{\omega_j}{2}) \overset{i)}{=} \wp'(-\frac{\omega_j}{2}) \overset{ii)}{=} \wp'(\frac{\omega_j}{2}) = 0$$

i) $\wp'$ ist ungerade

ii) denn $\wp'$ hat Periode $\omega_1, \omega_2, \omega_3$

Wegen Satz 2 sind also e_1, e_2, e_3 Nullstellen des kubischen Polynoms $4X^3 - g_2X - g_3 \in \mathbb{C}[X]$.
Zu zeigen: $e_j \neq e_i$ für $j \neq i$ (also sind e_1, e_2, e_3 alle Nullstellen des Polynoms!)

In der Tat: Angenommen, $e_i = e_j$ für ein $i \neq j$, dann:

$$\begin{aligned} &\operatorname{ord}_{\frac{\omega_i}{2}}(\wp - e_i) \geq 2 \\ &\operatorname{ord}_{\frac{\omega_j}{2}}(\wp - e_j) \geq 2 \\ \text{denn:}\quad &\wp(\frac{\omega_j}{2}) = e_i \\ \text{und}\quad &\wp'(\frac{\omega_i}{2}) = 0 \end{aligned}$$

entsprechend für j.

Wegen der Annahme $e_i = e_j$ folgt also:

$$\begin{aligned} &\operatorname{ord}_{\frac{\omega_i}{2}}(\wp - e_i) \geq 2 \\ &\operatorname{ord}_{\frac{\omega_j}{2}}(\wp - e_i) \geq 2 \end{aligned}$$

Aber $\frac{\omega_i}{2} \not\sim \frac{\omega_j}{2}\ mod\, L$ wegen $i \neq j$. Also folgt ord $\wp \geq 4$. ↯

Folglich ist:

$$4X^3 - g_2X - g_3 = 4(X - e_1)(X - e_2)(X - e_3)$$

$\Rightarrow$ Behauptung. $\square$

Erinnerung:

i) Sei K (zusammen mit der Addition $+$ und der Multiplikation $\cdot$) ein Körper. Dann heißt $k \subset K$ Teilkörper, falls $(k, +)$ Untergruppe von $(K, +)$ und $(k^\times, \cdot)$ Untergruppe von $(K^\times, \cdot)$ ist. Dann ist k zusammen mit der eingeschränkten Addition $+$ und der Multiplikation $\cdot$ selbst ein Körper. Man nennt K/k eine Körpererweiterung.

   Wichtig: Man kann K als k-Vektorraum auffassen mit der Skalarmultiplikation $(\lambda, a) \mapsto \lambda a$ mit $\lambda \in k, a \in K$. Man nennt $dim_k K$ den Körpergrad von K/k und schreibt hierfür $[K : k]$ (Beispiele: $[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$, $[K(L) : \mathbb{C}] = \infty$, $[\mathbb{R} : \mathbb{Q}] = \infty$).

ii) Seien K, K' Körper. Eine Abbildung $\varphi : K \to K'$ heißt *(Körper-)Homomorphismus*, falls gilt:

$$\begin{aligned} \varphi(a + b) &= \varphi(a) + \varphi(b) \\ \varphi(ab) &= \varphi(a)\varphi(b) \\ \varphi(1) &= 1 \end{aligned}$$

   Dieser heißt Isomorphismus, falls er bijektiv ist. Hierfür reicht schon die Surjektivität. In der Tat:
   Sei $a \neq 0$. Dann gilt: $\varphi(a^{-1}) \cdot \varphi(a) = \varphi(a^{-1}a) = \varphi(1) = 1 \;\Rightarrow\; \varphi(a) \neq 0$. Also ist φ injektiv.

Satz 3 (Struktursatz). *i) Sei $K_+(L) = \{f \in K(L) \mid f(z) = f(-z) \,\forall z \in \mathbb{C}\}$ der Körper der* geraden elliptischen Funktionen. *Dann ist die Abbildung:*

$$\varphi : \mathbb{C}[X] \to K_+(L), \quad R(X) \mapsto R(\wp)$$

definiert und ein Körperhomomorphismus. Insbesondere ist φ surjektiv, das heißt $\mathbb{C}(\wp) = K_+(L)$, also ist jede gerade elliptische Funktion eine rationale Funktion in $\wp$.

ii) Es gilt $[K(L) : K_+(L)] = 2$ und $\{1, \wp'\}$ ist Basis von $K(L)/K_+(L)$. Nach i) gilt daher:

$$K(L) = \mathbb{C}(\wp) \oplus \mathbb{C}(\wp) \cdot \wp'$$

Beweis. i) Sei $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ nicht das Nullpolynom, $grad\ P = n \geq 1$. Dann ist $P(\wp)$ nicht die Nullfunktion, denn $P(\wp)$ hat eine Polstelle der Ordnung $2n$ in 0 (, da $\wp$ Polstelle der Ordnung 2 in 0 hat).

Da $\wp$ gerade, ist auch $P(\wp)$ gerade $\forall\, P(X) \in \mathbb{C}[X]$. Daher ist φ definiert.

Klar: φ ist Homomorphismus (Auswerten in $\wp$)

Für den Nachweis des Isomorphismus reicht es nach Bem. ii) zu zeigen, dass φ surjektiv ist. Also: zeige: $\mathbb{C}(\wp) = K_+(L)$, es reicht: $K_+(L) \subset \mathbb{C}(\wp)$.

Lemma. *Sei $f \in K_+(L)$ mit $S(f)(= f^{-1}(\{\infty\}) \subset L$. Dann ist f ein Polynom in $\wp$.*

Beweis. Ohne Einschränkung sei f nicht-konstant. Nach dem 1. Liouvilleschen Satz ist dann $S(f) \neq \emptyset$.

Sei $\omega_0 \in S(f)$. Nach Voraussetzung ist dann $\omega_0 \in L$. Da aber $f(z+\omega) = f(z)\ \forall\, \omega \in L$ gehört jedes $\omega \in L$ somit zu $S(f)$, d.h. $S(f) = L$. Insbesondere ist auch $0 \in S(f)$.

Sei

$$f(z) = a_{-2n} z^{-2n} + \text{höhere Terme} \qquad 0 < |z| < \rho,\ n \geq 1,\ a_{-2n} \neq 0$$

die Laurententwicklung von f um 0. Beachte: f ist gerade!

Es gilt auch

$$\begin{aligned} \wp(z) &= \frac{1}{z^2} + \text{höhere Terme} \qquad 0 < |z| < \rho \\ \wp(z)^n &= \frac{1}{z^{2n}} + \text{höhere Terme} \qquad 0 < |z| < \rho \end{aligned}$$

Dann hat $g := f - a_{-2n} \cdot \wp^n$ in $z = 0$ einen Pol der Ordnung $< 2n$. Auch gilt: $g \in K_+(L)$ (denn $f, \wp$ gerade) und $S(g) \subset L$.

Verfährt man mit g genauso anstelle von f, usw. (sukzessives Abziehen von Potenzen von $\wp$), so erhält man nach endlich vielen Schritten ein Polynom $P[X] \in \mathbb{C}[X]$, sodass $f - P(\wp)$ in $z = 0$ eine hebbare Singularität hat und dort den Wert Null annimmt.

Da $f(z+\omega) = f(z)\ \forall\, \omega \in L$, ist also $f - P(\wp)$ ganz, also konstant Null nach Liouville .

Also $f = P(\wp)$. $\square$

Sei $f \in K_+(L)$, $a \notin L$. Sei a eine Polstelle der Ordnung $N \geq 1$ von f. Dann hat $(\wp(z) - \wp(a))^N$ eine Nullstelle in $z = a$ mindestens der Ordnung N. Dann hat

$$g(z) := f(z) \cdot (\wp(z) - \wp(a))^N$$

eine hebbare Singularität in $z = a$. Da f modulo L unendlich viele Polstellen hat, gibt es also $a_j \in \mathbb{C} \setminus L$ $(j = 1, \ldots, m)$ und $N_j \in \mathbb{N}$ $(j = 1, \ldots, m)$, sodass

$$G(z) := f(z) \cdot \prod_{j=1}^{m} (\wp(z) - \wp(a_j))^{N_j}$$

höchstens Pole in L hat.

Beachte: $G \in K_+(L)$. Wendet man daher das Lemma auf G an, so folgt $G \in \mathbb{C}(\wp)$.

ii) Sei $f \in K(L)$. Dann ist auch $f(-z)$ elliptisch zu L. Sei

$$f_1(z) := \frac{f(z) + f(-z)}{2}$$
$$f_2(z) := \frac{f(z) - f(-z)}{2}$$

Dann ist $f_1, f_2 \in K(L)$, f_1 ist gerade, f_2 ist ungerade.
Ferner ist

$$f = f_1 + f_2 = \boxed{f_1} + \wp' \boxed{\frac{f_2}{\wp'}}$$

wobei $\square$ gerade, also $\in K_+(L)$. Daher ist $f \in K_+(L) \oplus K_+(L)\wp'$, also erzeugen $\{1, \wp'\}$ den $K_+(L)$-Vektorraum $K(L)$.

Ferner: 1 und $\wp'$ sind über $K_+(L)$ linear unabhängig:

$$g \cdot 1 + h \cdot \wp' = 0 \qquad (g, h \in K_+(L))$$
$$\Rightarrow h = 0$$

denn sonst könnte man schließen, dass:

$$\underbrace{\wp'}_{\text{ungerade}} = - \underbrace{\frac{g}{h}}_{gerade}$$
$$\Rightarrow g = 0$$

Also ist $\{1, \wp'\}$ Basis von $K(L)$ über $K_+(L)$.

$\square$

2.2.4 Das abelsche Theorem

Sei $L = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$ fest gewählt.

Satz 1 (Satz von Abel). *Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ und $\beta_1, \dots, \beta_r$ jeweils r Punkte in $\mathbb{C}$, die mit Vielfachheiten auftauchen können, sonst aber paarweise verschieden sind. Es gelte $\alpha_i \not\sim \beta_i$ modulo L $\forall i, j = 1, \dots, r$. Es existiert genau dann ein $f \in K(L)$ mit Nullstellen $\alpha_1, \dots \alpha_r$ respektive Polstellen $\beta_1, \dots, \beta_r$ (mit Vielfachheiten gezählt), wenn:*

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i = \sum_{i=1}^{r} \beta_i \tag{*}$$

Beweis. Gibt es $f \in K(L)$ mit den angegebenen Eigenschaften, so gilt (*) nach Satz 4.

Gelte umgekehrt (*).
IDEE: Man konstruiert f als Quotient zweier ganzer Funktionen, wobei Zähler und Nenner mit Hilfe der sog. *Weierstraß'schen σ-Funktion* konstruiert werden.

Lemma. *Das unendliche Produkt*

$$\sigma(z) = z \cdot \prod_{\substack{\omega \in L \\ \omega \neq 0}} (1 - \frac{z}{\omega}) e^{\frac{z}{\omega} + \frac{1}{2}(\frac{z}{\omega})^2}$$

heißt Weierstraß'sche σ-Funktion.

i) Die Funktion konvergiert unbedingt und ist auf $\mathbb{C}$ holomorph mit Nullstellen erster Ordnung in den Punkten von L und sonst Nullstellenfrei.

ii) Es gilt

$$\sigma(z + \omega_0) = e^{a_{\omega_0} z + b_{\omega_0}} \sigma(z) \qquad \forall\, z \in \mathbb{C},\ \omega_0 \in L$$

wobei $a_{\omega_0}, b_{\omega_0} \in \mathbb{C}$ von ω_0 abhängige komplexe Zahlen sind.

Beweis. Die Funktion σ konstruiert man mit Hilfe des Weierstraß'schen Produktsatzes (Kap. 1, § 2, Satz 4), d.h. man sucht eine ganze Funktion mit Nullstellen erster Ordnung genau in den Punkten aus $L \setminus \{\emptyset\}$ mit Hilfe des Ansatzes:

$$\prod_{\substack{\omega \in L \\ \omega \neq 0}} (1 - \frac{z}{\omega}) e^{P_\omega(z)}$$

wobei die Polynome $P_\omega(z)$ durch Abbrechen der Reihe

$$\sum_{\nu=1} \frac{1}{\nu} (\frac{z}{\omega})^\nu \qquad |z| < \omega$$

erhalten werden.

Genau wie bei der Untersuchung des Produktes

$$\prod_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq\sigma}}(1-\frac{z}{\omega})e^{\frac{z}{n}} \qquad \text{(Kap. 1, § 2, Bsp. 2)}$$

zeigt man leicht, dass auf Kompakta $K \subset \mathbb{C}$ gilt:

$$\left|(1-\frac{z}{\omega})e^{\frac{z}{\omega}+\frac{1}{2}(\frac{z}{\omega})^2}-1\right| \leq C_K \frac{1}{|\omega|^3}$$

mit C_K nur von K abhängig.

Da $\sum_{\omega\in L}{}' \frac{1}{|\omega|^3} < \infty$ (Lemma § 2.3) folgt nach Satz 3, § 3, Kap. 2, dass das Produkt unbedingt konvergiert und $\sigma(z)$ eine auf $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion ist.

Die Aussage über die Nullstellen ist dann klar.

$\sigma(z)$ und $\sigma(z+\omega_0)$, $\omega_0 \in L$, haben die gleichen Nullstellen, daher ist

$$\frac{\sigma(z+\omega_0)}{\sigma(z)}$$

ganz und nullstellenfrei.

Da $\mathbb{C}$ Elementargebiet ist, gilt:

$$\frac{\sigma(z+\omega_0)}{\sigma(z)} = e^{h(z)} \qquad z \in \mathbb{C}$$

mit $h(z)$ ganz, d.h.

$$\sigma(z+\omega_0) = e^{h(z)} \cdot \sigma(z)$$

Es genügt zu zeigen, dass $h''(z) = 0 \; \forall\, z \in \mathbb{C} \setminus L$.

Es gilt:

$$\sigma'(z+\omega_0) \;=\; \sigma'(z)\cdot e^{h(z)} + \sigma(z)h'(z)e^{h(z)}$$

$$\text{also:} \qquad \begin{aligned} h'(z) &= \frac{e^{-h(z)\cdot\sigma'(z+\omega_0)-\sigma'(z)}}{\sigma(z)} \\ &= \frac{\sigma'(z+\omega_0)}{\sigma(z+\omega_0)} - \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} \qquad z \notin L \end{aligned}$$

Zu zeigen ist also, dass

$$\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)'(z+\omega_0) \;=\; \left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)'(z) \qquad (\forall\, z \notin L)$$

Dies soll für alle $\omega_0 \in L$ gelten, d.h. wir zeigen, dass $\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)'$ elliptisch ist (bzgl. L). Man beachte:

$$\frac{\sigma'}{\sigma} = (\log \circ \sigma)' = \text{logarithmische Ableitung}$$

Wir zeigen: $\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)' = -\wp(z)$

Die Funktion $\frac{\sigma(z)}{z}$ hat bei $z = 0$ eine hebbare Singularität.

Für $|z| < \rho = \min\{|\omega| \mid \omega \in L, \omega \neq 0\}$ sind alle Faktoren des Produktes $\neq 0$. Nach Kap. 1, § 2, Satz 1, ii) gilt dann

$$\begin{aligned}
\log \frac{\sigma(z)}{z} &= \sum_{\omega \in L}{}' \, Log\left((1 - \frac{z}{\omega}) + e^{\frac{z}{\omega} + \frac{1}{2}(\frac{z}{\omega})^2}\right) + 2\pi i m_z \\
&\overset{z \text{ nahe } 0}{=} \sum_{\omega \in L}{}' \, Log\left((1 - \frac{z}{\omega}) + \frac{z}{\omega} + \frac{1}{2}(\frac{z}{\omega})^2\right) + 2\pi i m_z
\end{aligned}$$

Die Reihe $\sum_{\omega \in L}{}' \ldots$ ist auf Kompakta $K \subset U_\rho(0)$ gleichmäßig absolut konvergent. In der Tat:

$$\begin{aligned}
\log(1 - \frac{z}{\omega}) &= -\sum_{\nu \geq 1} \frac{1}{\nu}(\frac{z}{\omega})^\nu \\
\left|\log(1 - \frac{z}{\omega}) + \frac{z}{\omega} + \frac{1}{2}(\frac{z}{\omega})^2\right| &= \left|\sum_{\nu \geq 3} \frac{1}{\nu}(\frac{z}{\omega})^\nu\right| \\
&\leq \sum \nu \geq 3 |\frac{z}{\omega}|\nu \\
&= |\frac{z}{\omega}|^3 \frac{1}{1 - |\frac{z}{\omega}|} \\
&\leq C_k \frac{1}{|\omega|^3}
\end{aligned}$$

wobei C_k nur von k abhängig ist. $(1 - |\frac{z}{\omega}| \geq \frac{1}{2}$ für ω groß)
Die Behauptung folgt, da $\sum_{\omega \in L}{}' \frac{1}{|\omega|^3} < \infty$.

Sei nun z nahe bei 0.

$$z \mapsto 2\pi i m_z = \log \frac{\sigma(z)}{z} - \sum_{\omega \in L}{}' \left(\log(1 - \frac{z}{\omega}) - \frac{z}{\omega} - \frac{1}{2}(\frac{z}{\omega})^2\right)$$

Weil die rechte Seite stetig ist, ist m_z konstant.

Gliedweises Ableiten ergibt:

$$
\begin{aligned}
\frac{\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\sigma(z)}{z}\right)}{\frac{\sigma(z)}{z}} &= \sum_{\omega\in L}{}' \left(\frac{-\frac{1}{\omega}}{1-\frac{z}{\omega}} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2} \right) \\
\text{d.h.} \quad \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} - \frac{1}{z} &= \frac{\frac{\sigma'(z)z-\sigma(z)}{z^2}}{\frac{\sigma(z)}{z}} \\
&= -\sum_{\omega\in L}{}' \left(\frac{1}{\omega - z} - \frac{1}{\omega} - \frac{z}{\omega^2} \right) \qquad z \neq 0 \\
\text{d.h.} \quad \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} &= \frac{1}{z} - \sum_{\omega\in L}{}' \left(\frac{1}{\omega - z} - \frac{1}{\omega} - \frac{z}{\omega^2} \right) \qquad z \neq 0
\end{aligned}
$$

Die Gleichung gilt für alle $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ und „z nahe bei 0“. Nach dem Identitätssatz gilt sieauch $\forall z \in \mathbb{C} \setminus L$.

Also ist $(\frac{\sigma'}{\sigma})'(z) = -\wp(z)$. Daraus folgt das Lemma. $\square$

Weiter im Beweis des Satzes von Abel.

$$
\text{Setze:} \quad \omega_0 = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i - \sum_{i=1}^{r} \beta_i \in L
$$

$$
\text{und} \quad f(z) = \frac{\sigma(z - \alpha_1 + \omega_0) \cdot \prod_{j=2}^{r} \sigma(z - \alpha_j)}{\prod_{j=1}^{r} \sigma(z - \beta_j)}
$$

Dann ist f auf $\mathbb{C}$ meromorph und hat nach Lemma 1 die entsprechenden Null- & Polstellen mit entsprechenden Vielfachheiten. Null- & Polstellen können sich gegenseitig aufheben, weil $\alpha_i \not\sim \beta_j \; \forall i,j \in \{1,\dots,r\}$ war.

Ferner gilt nach Lemma ii) $\forall\, \omega \in L$:

$$
\begin{aligned}
f(z+\omega) &= \frac{\sigma(z - \alpha_1 + \omega_0 + \omega) \prod_{j=2}^{r} \sigma(z + \omega - \alpha_j)}{\prod_{j=1}^{r} \sigma(z + \omega - \beta_j)} \\
&= \frac{e^{a_\omega(z-\alpha_1+\omega_0)+b_\omega} \cdot \prod_{j=2}^{r} e^{a_\omega(z-\alpha_j)+b_\omega}}{\prod_{j=1}^{r} e^{a_\omega(z-\beta_j)+b_\omega}} \\
&\cdot \frac{\sigma(z + \omega_0 - \alpha_1) \prod_{j=2}^{r} \sigma(z - \alpha_j)}{\prod_{j=2}^{r} \sigma(z - \beta_j)} \\
&= e^{a_\omega \omega_0} e^{(-\sum_{j=1}^{r} \alpha_j + \sum_{j=1}^{r} \beta_j) a_\omega} f(z) \\
&= f(z)
\end{aligned}
$$

$\square$

3 Modulformen

3.1 Motivation

Grob Gesagt...: Modulformen sind auf der oberen Halbebene

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid Im\, z > 0\}$$

holomorphe Funktionen, die gewisse einfache Transformationsgesetze unter diekreten Gruppen von gebrochen linearen Transformationen haben.
Genauer...:

$$SL_2(\mathbb{R}) = \{M \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det M = 1\}$$

ist Gruppe unter gewöhnlicher Matrizenmultiplikation.
Beachte:

$$\begin{aligned} \det AB &= \det A \cdot \det B \\ \det A^{-1} &= \frac{1}{\det A} \qquad \text{falls } A \text{ invertierbar} \end{aligned}$$

Jedes

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$$

definiert eine sogenannte gebrochen lineare Transformation (auch *Möbiustransformation* genannt) von $\mathbb{H}$ in sich:

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

In der Tat: Sei $z \in \mathbb{H}$. Dann ist $cz + d \neq 0$. (Denn wäre $cz + d = 0, c \neq 0 \Rightarrow z = -\frac{d}{c} \in \mathbb{R}$ nicht in $\mathbb{H}$; $c = 0 \Rightarrow d = 0$ ↯ zu $ad - bc = 1$)

Ferner:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) &= \operatorname{Im}\frac{(az+b)(\overline{cz+d})}{|cz+d|^2} \\
&= \operatorname{Im}\frac{ac|z|^2+adz+bc\bar{z}+bd}{|cz+d|^2} \qquad (z=x+iy) \\
&= \frac{(ad-bc)y}{|cz+d|^2} \\
&= \frac{y}{|cz+d|^2} > 0
\end{aligned}$$

Eine Modulform vom Gewicht k ist dann eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$, die (neben einigen „technischen“ Zusatzvoraussetzungen) folgendes Transformationsverhalten hat:

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k \cdot f(z) \quad \forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$$

wobei $\Gamma \subset SL_2(\mathbb{R}) \subset M_2(\mathbb{R}) \triangleq \mathbb{R}^4$ eine diskrete Untergruppe ist.

Hier: $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}) \mid ad-bc=1 \right\}$.

Hierbei ist k eine vorgegebene feste, nicht negative ganze Zahl.

Wichtig: Über die Theorie der Modulformen hat die Funktionentheorie wichtige Anwendungen auf die Zahlentheorie! Dies soll motiviert werden mit einem Beispiel aus der Theorie der ganzzahligen quadratischen Formen:

Beispiel. *Sei $m \in \mathbb{N}$. Sei $A \in M_m(\mathbb{Z}), A = (a_{\mu\nu})_{1\le\mu,\nu\le m}$.*
Voraussetzungen:

i) A sei gerade, d.h. $a_{\mu\mu}$ ist gerade $\forall\ \mu = 1,\ldots,m$.

ii) A symmetrisch, d.h. $A = A'$ (=transponierte Matrix)

Für $x \in M_{m,1}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^m$ setze $Q(x) := \frac{1}{2}x'Ax \in \mathbb{R}$.
Dann gilt mit $x = x_1e_1 + \ldots + x_me_m$ (e_ν: ν-ter Einheitsvektor):

$$\begin{aligned}
Q(x) &= \frac{1}{2}(x_1e_1' + \ldots + x_me_m')A(x_1e_1 + \ldots + x_me_m) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{1\le\mu,\nu\le m} x_\mu x_\nu \underbrace{e_\mu' A e_\nu}_{=a_{\mu\nu}} \\
&= \sum_{1\le\mu,\nu\le m} a_{\mu\nu}x_\mu x_\nu + \sum_{\nu=1}^{m}\frac{a_{\nu\nu}}{2}x_\nu^2 \qquad \textit{denn } a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu} \\
&= \textit{ganzzahlige quadratische Form in den „Unbestimmten“ } x_1,\ldots x_m
\end{aligned}$$

Zusatzvoraussetzung:

iii) A (bzw. Q) sei positiv definit, d.h. $Q(x) > 0$ für $x \neq 0$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 2 \end{pmatrix} \quad \textit{erfüllt Voraussetzungen i)-iii):}$$
$$Q(x) = x_1^2 + \ldots x_m^2$$

Definition. *Sei $n \in \mathbb{N}$.*

$$\begin{aligned} r_Q(n) \;&:=\; \#\{x \in \mathbb{Z}^m \mid Q(x) = n\} \\ &=\; \textit{Anzahl der Darstellungen von } n \textit{ durch } Q \end{aligned}$$

Lemma 1. $r_Q(n) < \infty$

Beweis. Nach LA 1 ist A über $\mathbb{R}$ (durch eine orthogonale Matrix) diagonalisierbar, d.h.

$$\exists U \;\in GL_m(\mathbb{R}) \text{ (mit } U'U = E)$$

sodass

$$U'AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{pmatrix} \qquad (\text{mit } \lambda_\nu \in \mathbb{R}\,\forall\,\nu)$$

Da $Q > 0$, gilt

$$\begin{aligned} \lambda_\nu &= e_\nu' \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{pmatrix} e_\nu \\ &= e_\nu' U' A U e_\nu \\ &= (Ue_\nu)' A (Ue_\nu) > 0 \end{aligned}$$

Wegen $Ue_\nu > 0$. Sei $M := \{x \in \mathbb{R}^m \mid Q(x) = n\}$.
Behauptung: M ist kompakt.

Beweis. Es ist:

$$\begin{aligned} Q(x) &= \frac{1}{2} x' A x \\ &= \frac{1}{2} x' U'^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{pmatrix} U^{-1} x \\ &= \frac{1}{2} (U'^{-1} x)' \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{pmatrix} (\underbrace{U^{-1} x}_{=:y}) \end{aligned}$$

Dann ist:

$$M = \left\{ Uy \mid \frac{1}{2}\left(\sum_{\nu=1}^{m} \lambda_\nu y_\nu^2\right)\right\} = \text{Bild der kompakten Menge unter } U$$

$$= \left\{ y \in \mathbb{R}^m \mid \sum_{\nu=1}^{m} \underbrace{\lambda_\nu y_\nu^2}_{(\sqrt{\lambda_\nu} y_\nu)^2} = 2n \right\} \qquad \text{(Beachte: } \lambda_\nu > 0 \;\forall\, \nu)$$

Da U stetig ist, ist daher auch M kompakt. □

Es ist also

$$\{x \in \mathbb{Z}^m \mid Q(x) = n\} = M \cap \mathbb{Z}^m$$
$$= \text{ Schnitt einer kompakten Menge und einer disjunkten Menge}$$

also endlich. □

ZAHLENTHEORIE

Man gebe eine *möglichst genaue* oder zumindest asymptotische ($n \to \infty$) Formel für $r_Q(n)$ an.

Beispiel.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & \ddots & \\ & & 2 \end{pmatrix}, \quad Q(x) = x_1^2 + \ldots + x_m^2$$

Dann ist $r_Q(n)$ = Anzahl der Darstellungen von n als Summe von m ganzzahligen Quadraten.

GRUNDIDEE: (JACOBI) Man definiere die *Thetareihe*

$$\vartheta_Q(\tau) := \sum_{x \in \mathbb{Z}^m} e^{2\pi i Q(x)\tau} \qquad (\tau \in \mathbb{H})$$

Formal ist dann:

$$\vartheta_Q(\tau) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r_Q(n) e^{2\pi i n\tau} \tag{*}$$

d.h. $\vartheta_Q(\tau)$ ist die erzeugende Fourierreihe der arithmetischen Funktion $r_Q(n)$.

Lemma 2. *$\vartheta_Q(\tau)$ ist auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{H}$ gleichmäßig absolut konvergent. Insbesondere ist $\vartheta_Q(\tau)$ auf $\mathbb{H}$ holomorph und es gilt (*).*

Beweis. Sei

$$S(\tau) := \sum_{x \in \mathbb{Z}^m} |e^{2\pi i Q(x)\tau}| = \sum_{x \in \mathbb{Z}^m} e^{-2\pi Q(x)v} \quad (\text{mit } \tau = u + iv)$$

Sei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^m$. Die stetige Funktion $Q(x)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ nimmt auf dem Kompaktum $\{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\| = 1\}$ ihr Minimum an. Wegen $Q(x) > 0 \ \forall\, x \neq 0$ gibt es also $c > 0$, sodass

$$Q\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \geq c \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^m,\ x \neq 0$$

Es folgt:

$$Q(x) \geq c\,\|x\|^2 = c\left(\sum_{\nu=1}^{m} x_\nu^2\right) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^m$$

Daher:

$$\begin{aligned} S(\tau) &\leq \sum_{x \in \mathbb{Z}^m} e^{-2\pi c(x_1^2 + \ldots + x_m^2)v} \\ &= \left(\sum_{\lambda \in \mathbb{Z}} e^{-2\pi c \lambda^2 v}\right)^m \qquad (v \geq \varepsilon > 0, \text{ denn } z \in \text{ Kompaktum}) \\ &\leq \left(\sum_{\lambda \in \mathbb{Z}} e^{-2\pi c \varepsilon \lambda^2}\right)^m \\ &= \left(1 + 2 \cdot \sum_{\lambda 1}^{\infty} e^{-2\pi c \varepsilon \lambda^2}\right)^m < \infty \end{aligned}$$

(Vergleiche mit der geometrischen Reihe: $0 < q := e^{-2\pi c\varepsilon} < 1$) $\square$

FUNDAMENTALE TATSACHEN:

i) Sei $N \in \mathbb{N}$ die *Stufe* von Q, d.h. N ist die kleinste positive ganze Zahl , sodass $N \cdot A^{-1}$ wieder gerade ist.

Beispiel.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & \ddots & \\ & & 2 \end{pmatrix} \textit{ hat Stufe } 4, \textit{ denn:}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & & \\ & \ddots & \\ & & 1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow 4 \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & \ddots & \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Sei: } \Gamma_0(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid\ N|c \right\}$$

Dann ist $\Gamma_0(N)$ (diskrete) Untergruppe von $SL_2(\mathbb{Z})$ (trivial) und $\vartheta_Q \in M_{m/2}(\Gamma_0(N))$ $= \mathbb{C}$-Vektorraum der Modulformen vom Gewicht $\frac{m}{2}$ zur Gruppe $\Gamma_0(N)$.

$$\{f : \mathbb{H} \to \mathbb{C} \,|f \text{ holomorph},$$
$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \mathcal{E}_m \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (cz+d)^{m/2} f(z) \forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$$
$$f \text{ ist } \textit{holomorph in } \infty \text{ und in allen anderen } \textit{Spitzen}\}$$

wobei $\mathcal{E}_m \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine gewisse 4-te Einheitswurzel ist und $z^{m/2} := e^{m/2 \operatorname{Log} z}$ ($z \in \mathbb{C}, z \neq 0$), wenn m nur gerade. (Es gilt $\mathcal{E}_m \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \pm 1$, falls m gerade!)

Die Bedingung *holomorph in* ∞ bedeutet: Wendet man das Transformationsgesetz für f mit $M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ an ($z \mapsto z+1$), so findet man $f(z+1) = f(z)$. Also hat f nach Kapitel 2.1 eine Fourierentwicklung

$$f(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{2\pi i n \tau}$$

Man findet $a_n = 0 \;\forall n < 0$. D.h. $F(q) := f(z)$ ($q = e^{2\pi i z}$, $0 < |q| < 1$) hat hebbare Singularität in $q = 0$.

Ist m ungerade, so hat man ein *halbganzes Gewicht*: Theorie sehr viel schwieriger!

ii) $\dim M_{m/2}(\Gamma_0(N)) < \infty$ (schwieriger zu beweisen!)

iii) Für $m \geq 4$ hat man eine direkte Summenzerlegung

$$M_{m/2}(\Gamma_0(N)) = \mathcal{E}_{m/2}(\Gamma_0(N)) \oplus S_{m/2}(\Gamma_0(N))$$

wobei $\mathcal{E}_{m/2}(\Gamma_0(N))$ der von den sogenannten *Eisensteinreihen* aufgespannte Vektorraum ist und $S_{m/2}(\Gamma_0(N))$ der Unterraum der Spitzenformen.

(Man fordert: alle konstanten Terme in den Fourierentwicklungen von f sind Null, insbesondere: $a_0 = 0$, d.h. $f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n \tau}$)

Für $m \geq 4$, m gerade hat $\mathcal{E}_{m/2}(\Gamma_0(N))$ eine Basis von ausgezeichneten Funktionen, deren Fourierkoeffizienten durch elementare Teilersummen gegeben werden.

Beispiel. *$k \in 2\mathbb{N}$, $k \geq 4$, dann $\mathcal{E}_k(SL_2(\mathbb{Z})) = \mathbb{C}E_k$, wobei*

$$E_k(\tau) := \frac{1}{2} \sum_{ggT(c,d)=1} \frac{1}{(c\tau + d)^k} \qquad (\tau \in \mathbb{H})$$

Summation über alle Paare $(c, d) \in \mathbb{Z}^2$ mit $ggT(c, d) = 1$. Man zeigt:

$$E_k(\tau) = 1 + c_k \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) e^{2\pi i n \tau}$$
$$\sigma_{k-1} = \sum_{\substack{d|n \\ d>0}} d^{k-1}$$
$$c_k = \textit{ Konstante}$$

ANWENDUNG: Für kleine m ist oft $S_{m/2}(\Gamma_0(N)) = \{0\}$, dies führt dann zu expliziten Formeln für $r_Q(n)$!

Beispiel.

$$m = 4, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{pmatrix}$$
$$Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2, \quad \frac{m}{2} = 2, \quad N = 4.$$

Man weiß

$$\begin{aligned} S_2(G_0(4)) &= \{0\}\,, \quad \dim M_2(\Gamma_0(4)) = 2 \\ M_2(\Gamma_0(4)) &= \mathcal{E}_2(\Gamma_0(4)) \\ &= \mathbb{C}(P(\tau) - 4P(4\tau)) \oplus \mathbb{C}(P(\tau) - 2P(2\tau)) \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} P(\tau) &= \frac{3}{\pi^2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z} \\ m\neq 0}} (m + n\tau)^{-2} \\ &= 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n) e^{2\pi i n\tau} \end{aligned}$$

Da $\vartheta_Q \in M_2(\Gamma_0(4))$, *existieren* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *mit*

$$\vartheta_Q(\tau) = \alpha(P(\tau) - 4P(4\tau)) + \beta(P(\tau) - 2P(2\tau))$$

Bestimmung von α *und* β *durch Vergleich der ersten beiden Fourierkoeffizienten auf beiden Seiten!*

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha(-3) + \beta(-1) \\ r_Q(1) &= 8 \end{aligned}$$

denn:

$$1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

so ist genau ein $x_\nu = \pm 1$, *alle anderen sind Null.*
Daher:

$$8 = \alpha(-24 - 0) + \beta(-24 - 0)$$

Daher:

$$1 = -3\alpha - \beta$$
$$8 = -24\alpha - 24\beta$$
$$\Rightarrow \alpha = -\frac{1}{3} \text{ und } \beta = 0$$

Also:

$$\vartheta_Q(\tau) = -\frac{1}{3}(P(\tau) - 4P(4\tau))$$

Vergleich der Fourierkoeffizienten auf beiden Seiten $\forall\, n \geq 1$ *ergibt:*

$$\vartheta_Q(n) = -\frac{1}{3}(-24\sigma_1(n) + 4 \cdot 24\sigma_1(\frac{n}{4}))$$

Konvention:

$$\sigma_1(\frac{n}{4}) = 0 \text{ für } 4 \nmid n$$

dann:

$$P(4\tau) = 1 - 24\sum_{n\geq 1}\sigma_1(\frac{n}{4}e^{2\pi i n\tau})$$
$$\Rightarrow r_Q(n) = 8(\sigma_1(n) - 4\sigma_1(\frac{n}{4}))$$

Insbesondere:

$$r_Q(n) \geq 1\ \forall n \geq 1$$

Beispiel (Beweis des Lagrangeschen 4-Quadrate-Satz). *$n = p$ prim, dann $R_Q(p) = 8(\sigma_1(p) - 4\sigma_1(\frac{p}{4})) = 8(1+p)$. Ist $S_{m/2}(\Gamma_0(N)) \neq \{0\}$, so bekommt man i.Allg. nur asymptotische Formeln für $r_Q(n)$ mit $n \to \infty$. In der Tat:*

$$\vartheta_Q = \text{(Eisensteinanteil)} + \text{(Spitzenformenanteil)}$$

Man weiß: (Hecla)

$$f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n\tau} \in S_{m/2}(\Gamma_0(N))$$
$$\Rightarrow a_n = O(n^{m/4}) \quad n \geq 1$$

Daher:

$$r_Q(n) = (\text{elementare Teilersumme der Größenordnung } n^{m/2-1}) + O(n^{m/2}) \quad (n \to \infty)$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_{k-1}(n) &= \sum_{d|n} d^{k-1} \\
&= \sum_{d|n} \left(\frac{n}{d}\right)^{k-1} \\
&= n^{k-1} \sum_{d|n} \frac{1}{d^{k-1}} \\
&= O(n^{k-1}) \qquad (k \geq 4) \\
\sigma_{k-1}(n) &= n^{k-1} + \sum_{\substack{d|n \\ d \neq n}} d^{k-1} \geq n^{k-1}
\end{aligned}
$$

3.2 Modulgruppe, Fundamentalbereich

Definition. *Sei G eine Gruppe und S eine Menge. Man sagt dann, dass G auf S (von links)* operiert, *falls es eine Abbildung $G \times S \to S$, $(g, s) \mapsto g \circ s$ gibt, sodass*

i) $e \circ s = s \quad (\forall\, s \in S;\ e$ *neutrales Element von* $G)$

ii) $(g_1 g_2) \circ s = g_1 \circ (g_2 \circ s)$

Man nennt $G_s := \{g \in G \mid g \circ s = s\}$ *die* Stabilisatorgruppe *von s und* $Gs = \{g \circ s \mid g \in G\}$ *den* Orbit *von s unter G.*

Man definiert eine Äquivalenzrelation auf S durch

$$s \sim s' :\Leftrightarrow \exists\, g \in G \text{ mit } s' = g \circ s$$

Die Äquivalenzklasse von s ist Gs und man hat eine disjunkte Zerlegung $S = \bigcup_{j \in I} Gs_j$, wobei Gs_j $(j \in I)$ die verschiedenen Orbits durchläuft.

Satz 1. *i) Die Gruppe* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ *operiert auf* $\mathbb{H}$ *durch*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ z = \frac{az+b}{cz+d}$$

ii) Sei $\mathrm{Aut}(\mathbb{H}) := \{f : \mathbb{H} \to \mathbb{H} \mid f \text{ biholomorph}\}$ *(d.h. f bijektiv, f und f^{-1} holomorph;* $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ *ist Gruppe unter Komposition). Dann ist die Abbildung*

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \setminus \{\pm\mathbb{E}\} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} mod \{\pm\mathbb{E}\} \mapsto (z \mapsto \frac{az+b}{cz+d})$$

ein Gruppenhomomorphismus mit $\mathbb{E} := \{w \in \mathbb{C} \mid |w| < 1\}$.

Beweis. i) Schon gezeigt: $z \in \mathbb{H} \Rightarrow \frac{az+b}{cz+d} \in \mathbb{H}$ (siehe § 1, es gilt $Im\frac{az+b}{cz+d} = \frac{Im\, z}{|cz+d|^2}$)

klar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ z = z$$

Ferner:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \circ z \right) &= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \circ \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} \\
&= \frac{a_1 \cdot \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} + b_1}{c_1 \cdot \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} + d_1} \\
&= \frac{a_1(a_2 z + b_2) + b_1(c_2 z + d_2)}{c_1(a_2 z + b_2) + d_1(c_2 z + d_2)} \\
&= \frac{(a_1 a_2 + b_1 c_2) z + a_1 b_2 + b_1 d_2}{(c_1 a_2 + d_1 c_2) z + c_1 b_2 + d_1 d_2}
\end{aligned}$$

Weiter gilt:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 + b_1 c_2 & a_1 b_2 + b_1 d_2 \\ c_1 a_2 + d_1 c_2 & c_1 b_2 + d_1 d_2 \end{pmatrix}$$

ii) Zunächst: Ist $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, so ist $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ eine biholomorphe Abbildung von $\mathbb{H}$ auf sich selbst. Die Umkehrabbildung wird gegeben durch:

$$\begin{aligned}
z \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \circ z &= \frac{dz - b}{-cz + a} \\
\text{beachte:} \quad z &= \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) \circ z \\
&= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \circ \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) \circ z
\end{aligned}$$

Sei $\varphi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \left(z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \right)$.
Nach i) ist φ Gruppenhomomorphismus.
Man zeige:

1. φ surjektiv
2. $\ker \varphi = \{\pm \mathbb{E}\}$

Dann folgt daraus zusammen mit dem Homomorphiesatz die zweite Aussage des Satzes!

Beweis. 1. Man zeigt:

a) Die Operation von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{H}$ ist transitiv, d.h. zu beliebigen $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$ $\exists\, M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ mit $M \circ z_1 = z_2$

b) Ist $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ mit $f(i) = i \Rightarrow \exists\, M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ mit $f(z) = M \circ z \;\forall\, z \in \mathbb{H}$.

Beweis. a) Es reicht zu zeigen, dass zu jedem $z \in \mathbb{H}$ ein $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ mit $M \circ i = z$ existiert, denn ist $M_1 \circ i = z_1, M_2 \circ i = z_2 \Rightarrow M_2 M_1^{-1} \circ z_1 = M_2 \circ i = z_2$.
Sei also $z = x + iy \in \mathbb{H}$ fest.
Sei $M := \begin{pmatrix} y^{1/2} & xy^{-1/2} \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

Dann ist

$$\begin{aligned} M \circ i &= \frac{y^{1/2} i + x y^{-1/2}}{y^{-1/2}} \\ &= yi + x \\ &= z \end{aligned}$$

b) Die Abbildung

$$g : \mathbb{H} \to \mathbb{E} := \{w \in \mathbb{C} \mid |w| < 1\}$$
$$g(z) := \frac{z-i}{z+i}$$

ist eine biholomorphe Abbildung von $\mathbb{H} \to \mathbb{E}$ (siehe FT 1).
Es gilt $g(i) = 0$.
Die Umkehrabbildung wird durch

$$w \mapsto \frac{-iw - 1}{w - 1}$$

gegeben.
Sei $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ mit $f(i) = i$ und $F := g \circ f \circ g^{-1} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{E})$. Es ist $F(0) = 0$.
Nach dem Lemma von Schwarz muss daher gelten:

$$|F(w)| \leq |w|, \quad |F^{-1}(\underbrace{w}_{\text{Subst.: } w \mapsto F(w)})| \leq |w| \qquad \forall\, w \in \mathbb{E}$$
$$\Rightarrow |F(w) \leq |w| \leq |F(w)| \qquad \forall\, w \in \mathbb{E}$$
$$\text{d.h. } |F(w)| = |w|$$

Nach dem Lemma von Schwarz folgt daher

$$F(w) = e^{i\vartheta} w \quad \forall\, w \in \mathbb{E} \text{ mit } \vartheta \in \mathbb{R} \text{ fest}$$

denn $|F|$ hat außer 0 einen weiteren Fixpunkt. Es gilt:

$$f = g^{-1} \circ F \circ g$$

Also:

$$\begin{aligned}
f(z) &= (g^{-1} \circ F)(g(z)) \\
&= (g^{-1} \circ F)\left(\frac{z-i}{z+i}\right) \\
&= g^{-1}\left(e^{i\vartheta}\frac{z-i}{z+i}\right) \\
&= \frac{-ie^{i\vartheta}\frac{z-i}{z+i} - i}{e^{i\vartheta}\frac{z-i}{z+i} - 1} \\
&= \frac{-ie^{i\vartheta}(z-i) - i(z+i)}{e^{i\vartheta}(z-i-(z+i)} \\
&= \frac{-i(e^{i\vartheta}+1)z - e^{i\vartheta} + 1}{(e^{i\vartheta}-1)z - i(e^{i\vartheta}+1)} \\
&= \frac{\cos\frac{\vartheta}{2} \cdot z + \sin\frac{\vartheta}{2}}{-\sin\frac{\vartheta}{2} \cdot z + \cos\frac{\vartheta}{2}} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\vartheta/2 & \sin\vartheta/2 \\ -\sin\vartheta/2 & \cos\vartheta/2 \end{pmatrix} \circ z \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})
\end{aligned}$$

(sogar $\in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$, denn $\cos^2 + \sin^2 = 1$.)

$\square$

Sei $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$. Nach a) existiert $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ mit $M \circ i = f(i)$.
Dann ist $z \mapsto f^{-1}(M \circ z) \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ und diese Abbildung lässt i fest.
Nach b) existiert daher $M_1 \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ mit

$$f^{-1}(M \circ z) = M_1 \circ z \qquad \forall\, z \in \mathbb{H}$$

es folgt:

$$M \circ z = f(M_1 \circ z)$$

also:

$$(\underbrace{MM^{-1}}_{\in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}) \circ z = f(z) \qquad \forall\, z \in \mathbb{H}$$

2. Es ist $\pm\mathbb{E} \in ker\, \varphi$.

   Sei umgekehrt $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in ker\, \varphi$ d.h.

$$\begin{aligned}
& \frac{az+b}{cz+d} = z \qquad \forall\, z \in \mathbb{H} \\
\Rightarrow\quad & cz^2 + (d-a)z - b = 0 \qquad \forall\, z \in \mathbb{H} \\
\Rightarrow\quad & c = 0,\ d-a = 0,\ b = 0 \quad M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \\
& 1 = \det M = a^2 \qquad \Rightarrow a = \pm 1 \\
\Rightarrow\quad & M = \pm\mathcal{E}
\end{aligned}$$

$\square$

Die zweite Aussage des Satzes folgt somit aus dem Homomorphiesatz der Gruppentheorie

□

Wir studieren im Folgenden die Operation von diskreten Untergruppen $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \subset M_2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^4$ auf $\mathbb{H}$.

Besonders wichtig dabei: $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ oder $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ von endlichem Index (z.B. $\Gamma_0(N)$).

Definition. *Die Gruppe* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}) \mid ad - bc = 1 \right\}$ *heißt* (volle) Modulgruppe.

Spezielle Matrizen in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T \circ z = z + 1 \qquad \text{(Translation)}$$
$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S \circ z = -\frac{1}{z} \qquad \text{(Stürzung)}$$

Bemerkung. *Der Name* Modulform *(bzw.* Modulgruppe*) hat nichts mit* Moduln *aus der Linearen Algebra zu tun, sondern kommt aus der algebraischen Geometrie: Klassisch ist ein* Modul *eine Größe, die man einer algebraischen Funktion (z.B. $y^3 = 4x^3 - g_2x - g_3$ elliptische Kurve; g_2, g_3 Weierstraß-Konstanten zum Gitter L) zuordnet und die sich nicht ändert, wenn man die Funktion gewissen Transformationen unterwirft. (Im Beispiel parametrisiere man g_2 und g_3 durch $\tau \in \mathbb{H}$, d.h. $L = \mathbb{Z}\tau \oplus \mathbb{Z}$. Ersetzt man $\tau \mapsto \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$ ($\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$), so ist $j := \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2}$ ein Modul, denn $j(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}) = j(\tau)$.)*

Ziel:
Aus jedem Orbit $\Gamma \circ z = \{M \circ z \mid M \in \Gamma\}$ wähle man einen „geeigneten“ Repräsentanten aus! Die Menge dieser Punkte soll „einfach“ beschreibbar sein und „schöne“ geometrische Eigenschaften (z.B. zusammenhängend) haben.

Definition. *Eine Teilmenge $\mathcal{F} \subset \mathbb{H}$ heißt* Fundamentalbereich *für die Operation von Γ auf $\mathbb{H}$, falls gilt:*

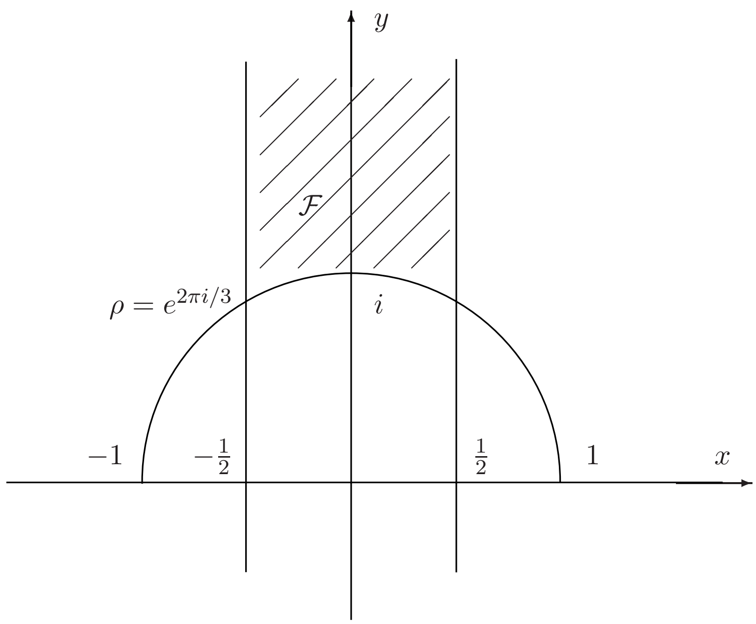
i) *$\mathcal{F}$ ist offen.*

ii) *Zu jedem $z \in \mathbb{H}$ existiert $M \in \Gamma$, sodass $M \circ z \in \bar{\mathcal{F}}$ (= Abschluss von $\mathcal{F}$ in $\mathbb{H}$).*

iii) $\#\left\{M \in \Gamma \mid M \circ \bar{\mathcal{F}} \cap \bar{\mathcal{F}} \neq \emptyset\right\} < \infty$

iv) *Ist $z_1, z_2 \in \mathcal{F}$ und existiert $M \in \Gamma$ mit $M \circ z_1 = z_2$, so gilt notwendigerweise $M = \pm\mathcal{E}$ und daher $z_1 = z_2$.*

Satz 2. *Die Menge* $\mathcal{F} = \left\{z = x + iy \in \mathbb{H} \mid |x| < \frac{1}{2}, |z| > 1\right\}$ *ist ein Fundamentalbereich für* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.



Beweis. Man muss die Punkte i) bis iv) der Definition nachweisen!

i) klar (Der Schnitt zweier offener Mengen ist offen!)

ii) Schreibe $\Gamma(1) := \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.
Jedem $z \in \mathbb{H}$ ordne man seine *Höhe* $h(z) = Im\, z$ zu.
In §1 wurde gezeigt:

$$Im \frac{az+b}{cz+d} = \frac{Im\, z}{|cz+d|^2} \qquad \forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$$

Insbesondere gilt:

$$h(\frac{az+b}{cz+d}) = |cz+d|^{-2} h(z) \qquad \forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(1)$$

Lemma 1. *Jeder Orbit* $\Gamma(1) \circ z$ *enthält Punkte* w *maximaler Höhe. Diese sind (unter allen Punkten aus* $\Gamma(1) \circ z$*) charakterisiert durch die Ungleichungen*
$|cw + d| \geq 1 \;\; \forall\, (c, d) \in \mathbb{Z}^2$ *mit* $ggT(c, d) = 1$.

Beweis. Sei $z = x+iy \in \mathbb{H}$ fest. Dann hat die Ungleichung $|cz+d| \leq 1$ nur endlich viele Lösungen $(c, d) \in \mathbb{Z}^2$ (klar: Schnitt von Kompaktum mit diskreter Menge ist endlich, $\mathbb{Z}z \oplus \mathbb{Z}$ ist Gitter!).

Es gilt aber:

$$h(M \circ z) \geq h(z) \Leftrightarrow |cz + d| \leq 1 \quad \left(M = \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(1)\right) \tag{*}$$

Da die Höhe von $M \circ z$ nur von der zweiten Zeile von M abhängt, hat die linke Seite von (*) einen maximalen Wert. Also hat $\Gamma(1) \circ z$ Punkte maximaler Höhe.
Sei $w \in \Gamma(1) \circ z$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
h(w) \text{ maximal} \quad &\Leftrightarrow \quad h(w) \geq h(M \circ z) \quad \forall M \in \Gamma(1) \\
&\Leftrightarrow \quad h(w) \geq h(M \circ w) \quad \text{denn } w \text{ und } z \text{ sind unter } \Gamma(1) \text{ äquivalent!} \\
&\Leftrightarrow \quad |cw + d| \geq 1 \quad \forall \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(1) \\
&\Leftrightarrow \quad |cw + d| \geq 1 \quad \forall\, (c, d) \in \mathbb{Z}^2 \text{ mit } ggT(c, d) = 1
\end{aligned}$$

Beachte:

1. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(1) \Rightarrow ad - bc = 1 \Rightarrow ggT(c, d) = 1.$
2. Umgekehrt: Ist $(c, d) \in \mathbb{Z}^2$ und $ggT(c, d) = 1 \Rightarrow \exists\, a, b \in \mathbb{Z}$ mit $ad - bc = 1$ (denn $\mathbb{Z}$ ist Hauptidealring)

$\Rightarrow M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(1)$ $\square$

Beachte: $h(z)$ ist invariant unter der Operation von Translationen $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b \in \mathbb{Z}$.
Man bestimme $b \in \mathbb{Z}$ so, dass $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ w = w + b$ die Eigenschaft $\mathrm{Re}\,(w + b) \leq \frac{1}{2}$ hat. Dann hat $w + b$ immer noch maximale Höhe und es folgt:

Lemma 2. *Sei*
$\mathcal{F}' = \left\{z = x + iy \in \mathbb{H} \mid |x| \leq \frac{1}{2},\ |cz + d| \geq 1\ \forall\, (c, d) \in \mathbb{Z}^2 \text{ mit } ggT(c, d) = 1\right\}$.
Dann existiert zu jedem $z \in \mathbb{H}$ ein $M \in \Gamma(1)$ mit $M \circ z \in \mathcal{F}'$.

Lemma 3. *Es gilt:*

$$\mathcal{F}' = \bar{\mathcal{F}} = \left\{z = x + iy \in \mathbb{H} \mid |x| \leq \frac{1}{2},\ |z| \geq 1\right\}$$

Beweis. Es gilt: $\mathcal{F}' \subset \bar{\mathcal{F}}$, denn $ggT(1, 0) = 1$.

Sei also umgekehrt $z \in \bar{\mathcal{F}}$ und $(c, d) \in \mathbb{Z}^2$ mit $ggT(c, d) = 1$.

Zu zeigen ist: $|cz+d|^2 \geq 1$. Es gilt:

$$\begin{aligned} |cz+d|^2 &= |(cx+d)+icy|^2 \\ &= (cx+d)^2 + c^2y^2 \\ &= c^2(x^2+y^2) + 2cdx + d^2 \\ &\geq c^2 - |c|\cdot|d| + d^2 \qquad (\text{wegen } |z| \geq 1 \text{ und } |x| \leq \frac{1}{2}) \\ &\geq 1 \end{aligned}$$

denn die quadratische Form $x^2 - xy + y^2$ ist positiv definit! □

Zum Beweis von

iii) und

iv) zeigen wir mehr, nämlich folgendes

Lemma 4. *1. Seien $z, z' \in \bar{\mathcal{F}}$ und es gebe $M \in \Gamma(1)$ mit $z' = M \circ z$. Sei $z \neq z'$. Dann gilt entweder*

- *$x = \pm\frac{1}{2}$ und $z' = z \mp 1$, $M = \pm T^{\mp 1}$ oder*
- *$|z| = 1$ und $z' = -\frac{1}{z}$, $M = \pm S$*

2. Es gilt:

$$\Gamma(1)_z = \begin{cases} <-\mathcal{E}, ST> & \text{falls } z = \rho = e^{2\pi i/3} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \\ <-\mathcal{E}, TS> & \text{falls } z = -\bar{\rho} = e^{-\pi i/3} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \\ <-\mathcal{E}, S> & \text{falls } z = i \end{cases} \qquad (*)$$

In allen anderen Fällen gilt: $\Gamma(1)_z = \{\pm\,\mathcal{E}\}$.
Die rechts in (*) stehenden Untergruppen sind endlich!

Beweis. Zunächst ist klar, dass aus Lemma 4 Aussagen iii) und iv) des Satzes folgen. Wegen $S^2 = -\mathcal{E}$ und $(ST)^3 = (TS)^3 = -\mathcal{E}$, folgt dass die Untergruppen rechts in (*) endlich sind. Sie sind auch in $\Gamma(1)_z$ enthalten, denn:

$$S \circ i = -\frac{1}{i} = i$$

Es gilt:

$$\rho^3 = 1,\ \rho \neq 1 \Rightarrow \rho^2 + \rho + 1 = 0$$

Daher:

$$ST \circ \rho = S \circ (\rho + 1) = -\frac{1}{\rho+1} = \frac{1}{\rho^2} = \rho$$

Genauso:

$$TS \circ (-\bar{\rho}) = -\bar{\rho}$$

Sei $z, z' \in \bar{\mathcal{F}}$, $z' = M \circ z$ mit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(1)$.
Nach Konstruktion von $\bar{\mathcal{F}} = \mathcal{F}'$ sind dann z, z' Punkte im gleichen Orbit $\Gamma(1) \circ z$ mit maximaler Höhe. Insbesondere ist also

$$h(z) = h(z') = h(M \circ z) = \frac{h(z)}{|cz+d|^2}$$

Es folgt:

$$\boxed{|cz+d|^2 = 1}$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} 1 = |cz+d|^2 &= c^2(x^2+y^2) + 2cdx + d^2 \\ &\geq |c|^2 - |c||d| + |d|^2 \qquad \text{(wegen } z \in \bar{\mathcal{F}}\text{)} \\ &= (|d| - \frac{|c|}{2})^2 + \frac{3}{4}|c|^2 \\ &\geq 1 \end{aligned}$$

Also muss an jeder Stelle Gleichheit stehen! Daher:

$$(|d| - \frac{|c|}{2})^2 + \frac{3}{4}|c|^2 = 1$$

Dies lässt nur endlich viele Möglichkeiten für c und d zu, nämlich:

1. Fall: $c = 0,\ d = \pm 1$
Dann gilt:

$$M = \begin{pmatrix} \pm 1 & b \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } b \in \mathbb{Z}$$

also

$$z' = M \circ z = z \pm b$$

Daher gilt entweder

$$b = 0 \quad (\Rightarrow z' = z,\ M = \pm\,\mathcal{E})$$

oder aber

$$x = \pm\frac{1}{2},\ z' = z \mp 1$$
$$\Rightarrow b = -1\ ,\ \text{d.h. } M = \pm\,T^{-1}\ ,\ \text{oder } b = 1\ ,\ \text{d.h. } M = \pm\,T$$

2. Fall: $c = \pm 1,\ d = 0$

Dann folgt: |z|=1 und

$$M = \begin{pmatrix} a & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } a \in \mathbb{Z}$$

und

$$z' = M \circ z = \frac{az \mp 1}{\pm z} = \pm\, a - \frac{1}{z}$$

Wegen $|z| = 1$ ist auch $|-\frac{1}{z}| = 1$, also auch $-\frac{1}{z} \in \bar{\mathcal{F}}$.
Da $z' \in \bar{\mathcal{F}}$, folgt einer der drei Fälle:

$\boxed{\text{A}}$ $a = 0$
Es folgt

$$z' = -\frac{1}{z} M = \pm\, S \qquad \text{(wie behauptet)}$$

und im Fall

$$z = z'$$

folgt

$$z^2 = -1$$

also

$$z = i$$

$\boxed{\text{B}}$ $\pm a = c \cdot a = 1$
Dann muss gelten

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} &= \mathrm{Re}(-\frac{1}{z}) \\ &= \mathrm{Re}(\frac{-\bar{z}}{|z|^2}) \\ &= -x \end{aligned}$$

daher

$$x = \frac{1}{2}$$

Wegen

$$|z|^2 = x^2 + y^2 = 1$$

folgt:

$$y^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

d.h.

$$z = -\bar{\rho} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$$

Ferner

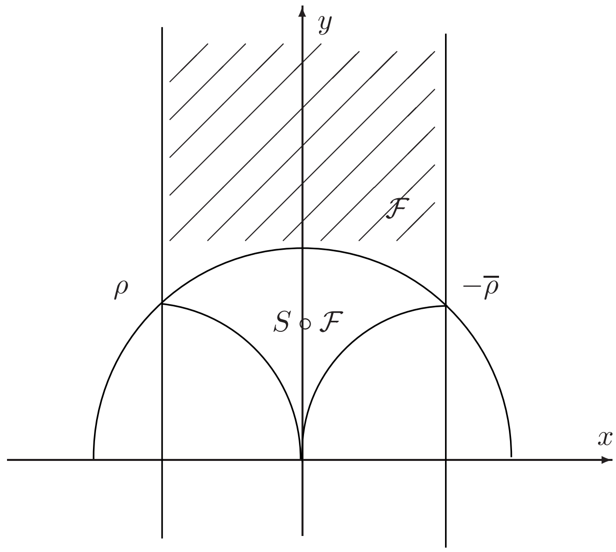
$$\begin{aligned} z' &= 1 - \frac{1}{-\bar{\rho}} \\ &= 1 + \frac{1}{\bar{\rho}} \\ &= -\bar{\rho} \end{aligned}$$

Ferner

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= TS \end{aligned} \qquad \text{oder} \qquad \begin{aligned} M &= -\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= -TS \end{aligned}$$

$\boxed{\text{C}}$ $\pm a = c \cdot a = -1$
Man zeigt wie eben, dass $z' = z = \rho$ und $M = \pm(ST)^2$.

3. Fall: $c = \pm 1,\ d = \pm 1$
Man zeigt wie oben, dass $z' = z = -\bar{\rho}$ und $M = \pm(TS)^2$ oder $z' = z = \rho$ und $M = \pm\, ST$.



$\square$

$\square$

Korollar. *Die Gruppe* $\Gamma(1)$ *wird erzeugt von* $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *und* $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Beweis. Man zeigt zunächst:
BEHAUPTUNG: Sei $\Gamma(1)'$ die von S und T erzeugte Untergruppe von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ und $z \in \mathbb{H}$. Dann exitiert ein $M' \in \Gamma(1)'$ mit $M' \circ z \in \bar{\mathcal{F}}$.

Beweis. (der Behauptung) Man zeigt wie in Lemma 1, dass jeder Orbit $\Gamma(1)' \circ z$ Punkte mit maximaler Höhe enthält!
Wähle dazu $M' \in \Gamma(1)'$ mit $h(M' \circ z)$ maximal. Wähle $n \in \mathbb{Z}$ mit

$$|\operatorname{Re}(T^n \circ M' \circ z)| \leq \frac{1}{2}$$

Dann gilt:

$$z' := (\underbrace{T^n \circ M'}_{\in \Gamma(1)'}) \circ z \in \bar{\mathcal{F}}$$

Wir brauchen nur zu zeigen, dass $|z'| \geq 1$.

Angenommen $|z'| < 1$. Dann folgt

$$\begin{aligned} h(S \circ z') &= h(-\frac{1}{z'}) = \mathrm{Im}(-\frac{1}{z'}) \\ &= \frac{\mathrm{Im}(z')}{|z'|^2} \\ &> \mathrm{Im}(z') = h(z') \end{aligned}$$

↯ zur Wahl von z', denn $S \in \Gamma(1)'$. □

Wähle festen Punkt $z_0 \in \mathcal{F}$ (z.B. $z_0 = 2i$). Sei $M \in \Gamma(1)$. Nach dem eben Bewiesenem existiert ein $M' \in \Gamma(1)'$ mit $M' \circ (M \circ z_0) = M'M \circ z_0 \in \bar{\mathcal{F}}$. Nach Lemma 4 folgt $M'M = \pm\,\mathcal{E}$.

$$\Rightarrow M \in < -\mathcal{E}, S, T > = < S, T > \qquad (S^2 = -\mathcal{E})$$

□

3.3 Definition von Modulfunktionen und Modulformen

Definition. *Sei* $k \in \mathbb{Z}$. *Sei* $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$. *Dann heißt* f Modulfunktion vom Gewicht k bzgl. $\Gamma(1) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, *falls gilt*

i) f *ist meromorph.*

ii) $f(\frac{az+b}{cz+d}) = (cz+d)^k f(z) \quad \forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(1)$

iii) f *ist meromorph in* ∞.

Dabei bedeutet iii) das Folgende:
Man wende ii) an mit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = T$. Es folgt $f(z+1) = f(z)$.
Also hat f nach Kapitel 2.1 $f(z)$ eine Fourierentwicklung

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{2\pi i n z}$$

(gleichmäßig absolut konvergent auf Kompakta in $\{z \in \mathbb{H} \mid y \geq y_0 > 0\}$)

Wir fordern: Es existieren nur endlich viele $n < 0$ mit $a_n \neq 0$.
Anders gesagt: Ist $\mathcal{R} = \{q \in \mathbb{C} \mid 0 < |q| < 1\}$ und $F : \mathcal{R} \to \mathbb{C}$ durch

$$F(q) := f(z) \qquad (q = e^{2\pi i z}\,,\ z \in \mathbb{H})$$

gegeben, so hat $F(q)$ eine nicht-wesentliche Singularität (d.h. „Pol“ oder „hebbar“) in $q = 0$.

Definition. *Eine Modulfunktion vom Gewicht* k *bzgl.* $\Gamma(1)$ *heißt* Modulform, *falls* f *auf* $\mathbb{H}$ *holomorph ist und* f *in* ∞ *holomorph ist.*
Letzteres bedeutet für die Fourierentwicklung von f, *dass* $a_n = 0 \; \forall \, n < 0$.
Eine solche Modulform heißt Spitzenform, *falls auch noch* $a_0 = 0$ *gilt.*

Definition (Petersson'scher Strichoperator). *Sei* $k \in \mathbb{Z}$ *fest. Sei* $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$.
Für $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ *setze man*

$$(f|_k\, M)(z) := (cz+d)^{-k} f(\frac{az+b}{cz+d})$$

Lemma. *Es gilt*

i) $f|_k\, \mathcal{E} = f$

ii) $f|_k\, M_1 M_2 = (f|_k\, M_1)|_k\, M_2$ *(d.h. die Gruppe* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ *operiert von rechts auf* $\{f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}\}$ *mit* $f \circ M := f|_k\, M$*)*

Beweis. i) klar.

ii) Für $M = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet \\ c & d \end{pmatrix}$ setze $j(M, z) = cz + d$.
Dann gilt

$$j(M_1 M_2, z) = j(M_1, M_2 \circ z) j(M_2, z) \qquad \text{(Kozykelrelation, „Kozykelrelation“)}$$

Nach Definition ist $(f|_k\, M)(z) = j(M, z)^{-k} f(M \circ z)$.
Daher gilt:

$$\begin{aligned} (f|_k\, M_1 M_2)(z) &= j(M_1 M_2, z)^{-k} f((M_1 M_2) \circ z) \\ &= j(M_2, z)^{-k} \cdot j(M_1, M_2 \circ z)^{-k} \cdot f(M_1 \circ (M_2 \circ z)) \\ &= ((f|_k\, M_1)|_k) M_2 \end{aligned}$$

□

Korollar. *Sei k gerade. Eine Funktion $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ erfüllt die Bedingung*

$$f(\frac{az+b}{cz+d}) = (cz+d)^k f(z) \quad \forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(1)$$

genau dann, wenn gilt

$$f(z+1) = f(z) \quad \textit{und} \quad f(-\frac{1}{z}) = z^k f(z)$$

Beweis. Nach Definition ist $f(\frac{az+b}{cz+d}) = (cz+d)^k f(z)$ genau dann, wenn $f|_k\, M = f$. Nach dem Korollar zu Satz 3.2.2 wird $\Gamma(1)$ von S und T erzeugt. Es gilt

$$(f|_k\, S)(z) = z^{-k} f(-\frac{1}{z}) \quad \text{und} \quad (f|_k\, T)(z) = f(z+1)$$

Also folgt die Behauptung aus dem Lemma. □

Bemerkung. *i) Ist k ungerade, so gibt es keine von Null verschiedenen Modulfunktionen vom Gwicht k bzgl. $\Gamma(1)$. Dazu betrachte man Eigenschaft ii) der Definition mit $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathcal{E}$:*

$$f(z) = f\left(\frac{(-1)\cdot z + 0}{0 \cdot z + (-1)}\right) = (0 \cdot z + (-1))^k f(z) = (-1)^k f(z)$$

falls k ungerade, so folgt $f \equiv 0$.

ii) Eine Funktion $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ ist genau dann Modulform vom Gewicht k bzgl. $\Gamma(1)$, falls f eine Fourierentwicklung

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n e^{2\pi i n z} \qquad (\textit{konvergent } \forall\, z \in \mathbb{H})$$

hat und wenn gilt

$$f(-\frac{1}{z}) = z^k f(z)$$

(Beachte hierzu das Korollar zum Lemma!)

iii) *Modulformen eines gegebenen Gewichts* k *bzgl.* $\Gamma(1)$ *bilden einen* $\mathbb{C}$*-Vektorraum* M_k*.*

iv) $f \in M_k,\ g \in M_{k'} \ \Rightarrow \ fg \in M_{k+k'}$

3.4 Beispiele für Modulformen

3.4.1 Thetareihen

NOTATION:

i) Sei $A \in M_m(\mathbb{R})$, $A = A'$. Man schreibt dann $A > 0$, falls A positiv definit ist.

ii) Sei $A \in M_m(\mathbb{R})$, $A = A'$, $B \in M_{m,n}(\mathbb{C})$. Man setzt $A[B] := B'AB$ (=symmetrische (n, n)-Matrix).
Dann gilt $A[B_1 B_2] = (A[B_1])[B_2]$

Definition. *Sei $A \in M_m(\mathbb{R}), A = A', A > 0$. Dann heißt*

$$\vartheta_A(z) := \sum_{g \in \mathbb{Z}^m} e^{\pi i A[g] z} \qquad (z \in \mathbb{H})$$

eine Thetareihe.

Lemma 1. *Die Reihe $\vartheta_A(z)$ ist gleichmäßig absolut konvergent in $y \geq y_0 > 0$ (y_0 fest), insbesondere auf Kompakta $\subset \mathbb{H}$. Daher ist $\vartheta_A(z)$ auf $\mathbb{H}$ holomorph.*

Beweis. Siehe 3.1! Die zusätzlichen Voraussetzungen dort (A ganz und gerade) werden beim Beweis der Konvergenz nirgends benutzt! □

Satz 1. *Es gilt die* Thetatransformationsformel*:*

$$\vartheta_{A^{-1}}(-\frac{1}{z}) = \sqrt{\det A} \cdot \left(\frac{z}{i}\right)^{m/2} \vartheta_A(z) \quad \forall\, z \in \mathbb{H}$$

Hierbei ist

$$\left(\frac{z}{i}\right)^{m/2} := e^{m/2 \operatorname{Log} \frac{z}{i}} \qquad (z \neq 0)$$

falls m ungerade.

BEWEISIDEE: Für $z \in \mathbb{H}$ fest setze:

$$f(\omega) := \sum_{g \in \mathbb{Z}^m} e^{\pi i A[g+\omega] z} \qquad (\omega \in \mathbb{C}^m)$$

Dann

$$f(\omega + h) = f(\omega) \qquad \forall\, h \in Z^m$$
$$\Rightarrow f(\omega) = \sum_{h\in\mathbb{Z}^m} a(h) e^{2\pi i h'\omega}$$

mit

$$a(h) = \int_0^1 \dots \int_0^1 f(\omega) e^{-2\pi i h'\omega} du \qquad (\omega = u + iv,\ v \in \mathbb{R}^m \text{fest})$$

Beweis. Beachte: Mit $A > 0$ ist auch $A^{-1} > 0$, denn $A^{-1} = A[A^{-1}]$ (Ausschreiben!)
Setze:

$$f(\omega) := \sum_{g\in\mathbb{Z}^m} e^{\pi i A[g+\omega]z}$$

BEHAUPTUNG:
Die Reihe $f(\omega)$ konvergiert gleichmäßig absolut auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{C}^m$ und ist in jeder Variablen separat eine holomorphe Funktion.

Beweis. Wie in 3.1 gezeigt, gilt wegen $A > 0$, dass es ein $\delta \in \mathbb{R}_+$ gibt mit:

$$\begin{aligned} A[g] &\geq \delta \left\|g\right\|^2 = \delta g' g \qquad (g \in \mathbb{Z}^m) \\ \operatorname{Im}(A[g+\omega]z) &= A[g]y + 2\operatorname{Im}(\omega' A g z) + \operatorname{Im}(A[\omega]z) \qquad (z = x + iy,\ y > 0) \\ &\geq \delta y g' g + 2\operatorname{Im}(\omega' A g z) + \operatorname{Im}(A[\omega]z) \qquad (*) \end{aligned}$$

Sei $K \subseteq \mathbb{C}^m$ kompakt. Da die Funktion $g \mapsto g'g$ quadratisch ist, $g \mapsto Ag$ linear und $\delta y > 0$ ist die rechte Seite von (*) $\geq \frac{1}{2}\delta y g' g$ für alle bis auf endlich viele $g \in \mathbb{Z}^m\ \forall\, \omega \in \mathbb{C}^m$ (Details: Übung!)
Daher gilt

$$\sum_{g\in\mathbb{Z}^m} \left| e^{\pi i A[g+\omega]z} \right| \leq c_k + \sum_{g\in\mathbb{Z}^m} e^{-\pi/2\delta y g' g}$$

mit $c_k > 0$ geeignet.
Ein Vergleich mit der geometrischen Reihe liefert dann die gewünschte Konvergenzaussage.
□

Wegen der absoluten Konvergenz der Reihe $f(\omega)$ gilt:

$$f(\omega + h) = f(\omega) \qquad \forall\, h \in \mathbb{Z}^m$$

Daher hat $f(\omega)$ die Fourierentwicklung

$$f(\omega) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} a(k) e^{2\pi i k'\omega}$$

mit

$$a(k) = \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 f(\omega) e^{-2\pi i k'\omega} du \qquad (\omega = u + iv,\ v \in \mathbb{R}^m,\ v \text{ fest})$$

Der Beweis folgt leicht aus dem Fall $m = 1$ per Induktion.

Nach dem Satz von Fubini (ANA II) gilt:

$$\begin{aligned}
a(k) &= \int_{I_n} (\omega) e^{-2\pi i k'\omega} du \qquad \text{wobei: } I_n = [0,1]^n \\
&= \int_{I_n} (\sum_{g \in \mathbb{Z}^m} e^{\pi i (A[g+\omega]z - 2k'\omega)}) du \\
&= \sum_{g \in \mathbb{Z}^m} \int_{I_n} e^{\pi i (A[g+\omega]z - 2k'\omega)}) du \\
&\overset{u \mapsto u-g}{=} \sum_{g \in \mathbb{Z}^m} \int_{I_n + g} e^{\pi i (A[\omega]z - 2k'\omega) + 2\pi i k' g}) du \qquad k, g \text{ ganz} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{\pi i (A[\omega]z - 2k'\omega)} du
\end{aligned}$$

Dieses Verfahren heißt *Poissonscher Summationstrick*.

Durch quadratische Ergänzung erhält man:

$$A[\omega]z - 2k'\omega = zA[\omega - A^{-1}kz^{-}]^{-} A^{-1}[k]z^{-1}$$

wählt man $v = \operatorname{Im}(A^{-1}kz^{-1})$ so folgt:

$$a(k) = e^{-\pi i A^{-1}[k]z^{-1}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\pi i A[k]z} du$$

Man schreibe $A = B'B$ mit $B \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$.

In der Tat: nach LA existiert ein $U \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$ mit

$$A[U] = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_m \end{pmatrix} \qquad \text{mit } d_\nu > 0 \; \forall \, \nu = 1 \dots m$$

setze:

$$\Delta = \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{d_m} \end{pmatrix}$$

also:

$$A = \mathcal{E}[\Delta U^{-1}]$$

Setze:

$$B = \Delta U^{-1}$$

Im Integral substituiert man $U \mapsto B^{-1}U$. Die Funktionaldeterminante dieser Substitution ist

$(\det B)^{-1}$. Also gilt wegen

$$|\det B|^{-1} = (\det A)^{-1/2}$$

dass

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\pi i A[u]z} du &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{\pi i (Bu')(Bu)z} du \\ &= (\det A)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\pi i u'uz} du \\ &= (\det A)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}^m} e^{\pi i (k_1^2 + \ldots + k_n^2) z} du \\ &= (\det A)^{-1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pi i t^2 z} dt \right)^m\end{aligned}$$

Lemma 2. *Für $y > 0$ gilt:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2 y} dt = y^{-1/2}$$

Beweis. Substituiere:

$$t = \frac{x}{\sqrt{\pi y}} = \frac{1}{\sqrt{\pi y}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

Nach dem Eulerschen Ergänzungssaz (mit $S = \frac{1}{2}$) gilt:

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{\infty} t^{-1/2} e^{-t} dt = \sqrt{\pi}$$

Substituiert man $t \mapsto x^2$ so folgt:

$$2 \int_0^{\infty} x^{-1} e^{-x^2} x dx = \int_{-\infty} \infty e^{-x} dx = \sqrt{x}$$

Die Funktion $z \mapsto \left(\frac{z}{i}\right)^{m/2}$ und $z \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pi i t^2 z} dt$ sind auf $\mathbb{H}$ holomorph und stimmen auf der positiven imaginären Achse überein. Nach dem Identitätssatz gilt:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pi i t^2 z} dt \right)^m = \left(\frac{z}{i}\right)^{m/2}$$

Es ergibt sich:

$$a(k) = e^{-\pi i A^{-1}[k] z^{-1}} (\det A)^{-1/2} \left(\frac{z}{i}\right)^{m/2}$$

Nun ist:

$$\vartheta_A(z) = \sum_k a(k) = f(0)$$

□

□

Satz 2. *Sei $A \in M_m(\mathbb{Z})$, gerade, $A = A'$, $A > 0$,* $\det A = 1$. *Dann gilt notwendigerweise $8 \mid m$ und ϑ_A ist eine Modulform vom Gewicht $\frac{m}{2}$ bzgl. $\Gamma(1)$.*

Beweis. Beachte zunächst: Sind A, B zwei beliebige ganzzahlige gerade, symmetrische, positiv definite Matrizen der Größe m und ist $B = A[U]$ mit $U \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{Z})$, so gilt: $\vartheta_A = \vartheta_B$.

In der Tat:

$$\begin{aligned}\vartheta_B(z) &= \sum_{g\in\mathbb{Z}^m} e^{\pi i A[U][g]z}\\ &= \sum_{g\in\mathbb{Z}^m} e^{\pi i A[Ug]z}\\ &= \sum_{g\in\mathbb{Z}^m} e^{\pi i A[g]z} = \vartheta_A(z)\end{aligned}$$

Denn mit g durchläuft auch Ug das Gitter $\mathbb{Z}^m$ und die Reihe ist absolut konvergent.

Seien die Voraussetzungen wie in Satz 2. Wegen $\det A = 1$ und $A^{-1} = A[\underbrace{A^{-1}}_{=U}]$ gilt dann $\vartheta_{A^{-1}} = \vartheta_A$.

Angenommen $8 \nmid m$. Ersetzt man u.U. A durch $\left(\begin{smallmatrix} A & \\ & A\end{smallmatrix}\right)$ oder $\begin{pmatrix} A &&& \\ & A && \\ && A & \\ &&& A\end{pmatrix}$ so kann man erreichen, dass $m \equiv 4 \mod 8$.

Nach Satz 1 gilt dann:

$$\begin{aligned}\vartheta_A(-\frac{1}{z}) &= \left(\frac{z}{i}\right)^{m/2} \vartheta_A(z)\\ &= -z^{m/2}\vartheta_A(z) \qquad \text{wegen } m \equiv 4\,(8)\end{aligned}$$

d.h

$$\vartheta_A \mid_{m/2} S = -\vartheta_A \qquad (S = \begin{pmatrix} 0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix})$$

Ferner gilt:

$$\vartheta_A \mid_{m/2} T = \vartheta_A \qquad (T = \begin{pmatrix} 1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix})$$

Denn A ist gerade und hat daher eine Fourierentwicklung in $e^{2\pi i z}$ (s. §1)

Aber $(TS)^3 = -\mathcal{E}$. Daher folgt:

$$\begin{aligned}\vartheta_A &= \vartheta_A \mid_{m/2} (-\mathcal{E}) \qquad (\frac{m}{2} \text{ gerade!})\\ &= \vartheta_A \mid_{m/2} (TS)^3\\ &= \vartheta_A \mid_{m/2} TS \mid_{m/2} TS \mid_{m/2} TS\\ &= (-1)^3\vartheta_A = -\vartheta_A\end{aligned}$$

denn:

$$\begin{aligned} \vartheta_A \mid_{m/2} TS &= \vartheta_A \mid_{m/2} T \mid_{m/2} S \\ &= \vartheta_A \mid_{m/2} S \\ &= -\vartheta_A \\ \Rightarrow \vartheta_A &\equiv 0 \end{aligned}$$

$\lightning$, denn der konstante Term von ϑ_A ist gleich 1.

Also: $8 \mid m$.

Sei jetzt $8 \mid m$. Dann gilt nach Satz 1

$$\vartheta_A(-\frac{1}{z}) = z^{m/2}\vartheta_A(z)$$

Ferner hat ϑ_A die Fourierentwicklung

$$\vartheta_A(z) = 1 + \sum_{n\geq 1} r_A(n)e^{2\pi i n z} \qquad (z \in \mathbb{H})$$

mit

$$r_A(n) := \#\left\{g \in \mathbb{Z}^m \mid \frac{1}{2}A[g] = n\right\}$$

Daher ist $\vartheta_A \in M_{m/2}$ nach § 3, Bemerkung ii) $\square$

Beispiel. *(m=8)*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & & & & & \\ 0 & 2 & 0 & -1 & & & & \\ -1 & 0 & 2 & -1 & & & & \\ & -1 & -1 & 2 & -1 & & & \\ & & & -1 & 2 & -1 & & \\ & & & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

3.4.2 Eisensteinreihen

Definition. *Sei $k \in \mathbb{Z}$, k gerade, $k \geq 4$. Dann heißt*

$$G_k(z) := \sum_{m,n}{}' \frac{1}{(mz+n)^k} \qquad (z \in \mathbb{H})$$

Eisensteinreihe.

Satz 3. *i) Die Reihe $G_k(z)$ ist gleichmäßig absolut konvergent auf Bereichen*

$$D_\varepsilon := \left\{ z = x + iy \in \mathbb{H} \mid y \geq \varepsilon \,,\; x^2 \leq \frac{1}{\varepsilon} \right\} \qquad (\varepsilon > 0)$$

Insbesondere ist $G_k(z)$ auf $\mathbb{H}$ holomorph.

ii) $G_k \in M_k$

Beweis. i) Behauptung: $\exists\, \delta > 0$, sodass $\forall\, z \in D_\varepsilon$ und $\forall\, m, n \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$|mz + n|^2 \geq \delta(m^2 + n^2) \; (= \delta|mi + n|^2) \tag{*}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} (*) \;\Leftrightarrow\; & m^2(x^2 + y^2) + 2mnx + n^2 \geq \delta(m^2 + n^2) \\ \Leftrightarrow\; & (x^2 + y^2 - \delta)m^2 + 2xmn + (1 - \delta)n^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Es genügt also zu zeigen, dass ein $\delta > 0$ existiert, sodass $\forall\, z \in D_\varepsilon$ die quadratische Form

$$(x^2 + y^2 - \delta)X^2 + 2xXY + (1 - \delta)Y^2$$

positiv semi-definit ist, d.h. nur Werte ≥ 0 annimmt.

Dies ist äquivalent zu

1. $x^2 + y^2 - \delta \geq 0$
2. Diskriminante $= (2x)^2 - 4(x^2 + y^2 - \delta)(1 - \delta) \leq 0$

Bedingung i) ist erfüllt (für $z \in D_\varepsilon$), wenn nur $\delta > 0$ klein genug.
ii) ist äquivalent zu

$$0 \leq (1 - \delta)y^2 - \delta x^2 - \delta(1 - \delta)$$

Aber für $z \in D_\varepsilon$ ist:

$$(1 - \delta)y^2 - \delta x^2 - \delta(1 - \delta) \geq (1 - \delta)y^2 - \delta\varepsilon^{-1} - \delta(1 - \delta)$$

Also reicht es zu zeigen, dass ein $\delta > 0$ existiert, sodass $\forall\, z \in D_\varepsilon$ gilt:

$$(1 - \delta)y^2 - \delta\varepsilon^{-1} - \delta(1 - \delta) \geq 0 \tag{**}$$

aber:

$$(**) \underset{(\delta < 1)}{\Leftrightarrow} y^2 \geq \frac{\delta\varepsilon^{-1} + \delta(1 - \delta)}{1 - \delta} \longleftarrow 0 \quad (\delta \to 0)$$

□

Daher gilt $\forall\, z \in D_\varepsilon$:

$$\sum_{m,n}{}' \frac{1}{|mz+n|^k} \leq \delta^{-k/2} \sum_{m,n}{}' \frac{1}{|mi+n|^k} < \infty$$

denn in Kapitel 2.2 wurde gezeigt:

$$\sum_{\omega \in L}{}' \frac{1}{|\omega|^r} < \infty \quad \text{für } r > 2,\ L = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2 \subset \mathbb{C} \text{ ein Gitter.}$$

Beachte: Aus diesen Aussagen folgt, dass $G_k(z)$ holomorph auf $\mathbb{H}$ ist.

ii) Da $\Gamma(1) =< S, T >$ genügt es zu zeigen, dass:

1. $G_k(z+1) = G_k(z)$

$$\begin{aligned} G_k(z+1) &= \sum_{m,n}{}' \frac{1}{(m(z+1)+n)^k} \\ &= \sum_{m,n}{}' \frac{1}{(mz+(m+n))^k} \\ &= G_k(z) \end{aligned}$$

2. $G_k(-\frac{1}{z}) = z^k G_k(z)$

$$\begin{aligned} G_k(-\frac{1}{z}) &= \sum_{m,n}{}' \frac{1}{(m(-\frac{1}{z})+n)^k} \\ &= z^k \sum_{m,n}{}' \frac{1}{(nz-m)^k} \\ &= z^k G_k(z) \end{aligned}$$

Beachte: Mit (m,n) durchläuft auch $(m, m+n)$ und $(n, -m)$ alle Elemente in $\mathbb{Z}^2 \setminus \{0,0\}$ und die Reihen sind absolut konvergent.

3. G_k ist holomorph in ∞
D.h. $H_k(q) := G_k(z)$ mit $0 < |q| < 1$ und $q = e^{2\pi i z}$ mit $z \in \mathbb{H}$ hat in $q = 0$ eine hebbare Singularität.
Nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz bedeutet dies, dass $H_k(q)$ in einer kleinen gelochten Umgebung von $q = 0$ beschränkt ist. Dies ist sicherlich richtig, falls $\lim_{q \to 0} H_k(q)$ existiert, d.h. $\lim_{y \to \infty} G_k(z)$ existiert.
Sei $(z_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{H}$ mit $y_\nu \to \infty$ für $\nu \to \infty$.
Wegen $G_k(z+1) = G_k(z)$ kann man annehmen, dass $|x_\nu| \leq \frac{1}{2}\ \forall\, \nu$.
Auf D_ε mit $\varepsilon = 1$ ist die Reihe $G_k(z)$ gleichmäßig konvergent, also kann der Grenzübergang gliedweise vorgenommen werden:

$$\lim_{\nu \to \infty} G_k(z_\nu) = \begin{cases} \sum_{m,n}{}' \lim_{\nu \to \infty} \frac{1}{(mz_\nu + n)^k} \to 0 & \text{für } m \neq 0 \\ 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} & \text{für } m = 0 \end{cases}$$

□

Satz 4 (Fourierreihe der Eisensteinreihen). *Es gilt:*

$$G_k(z) = 2 \cdot \xi(k) + 2 \cdot \frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n \geq 1} \sigma_{k-1}(n) e^{2\pi i n z} \qquad (z \in \mathbb{H},\ k \text{ gerade},\ k \geq 4)$$

wobei

$$\xi(k) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^k}$$

der Wert der Riemannschen ξ-Funktion an der Stelle k ist und

$$\sigma_{k-1}(n) := \sum_{\substack{d|n \\ d>0}} d^{k-1}$$

Beweis. Man spalte die Reihe (absolut konvergent!) auf in die Terme mit $m = 0$ und $m \neq 0$. Dann

$$\begin{aligned} G_k(z) &= 2 \cdot \xi(k) + \sum_{m \neq 0} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(mz+n)^k} \\ &= 2 \cdot \xi(k) + 2 \cdot \sum_{m \geq 1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(mz+n)^k} \end{aligned}$$

In Kapitel 2.1 wurde gezeigt:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z+n)^k} = \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n \geq 1} n^{k-1} e^{2\pi i n z} \qquad (z \in \mathbb{H},\ k \in \mathbb{N},\ k \geq 2)$$

Man wende dies an mit z ersetzt durch mz und erhält:

$$G_k(z) = 2 \cdot \xi(k) + 2 \cdot \frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{m \geq 1} (\sum_{n \geq 1} n^{k-1} e^{2\pi i m n z})$$

Setze $m \cdot n := t$. Dann durchläuft n alle Teiler von t und man erhält:

$$G_k(z) = 2 \cdot \xi(k) + \frac{2(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{t \geq 1} (\sum_{n \nmid t} n^{k-1})^{2\pi i t z}$$

□

Satz 5 (Bernoulli-Zahlen). *Man definiere die Bernoulli-Zahlen $B_0, B_1, B_2, \ldots$ durch die Taylorentwicklung*

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n \qquad (|t| < 2\pi)$$

Dann gilt:

i) $B_n \in \mathbb{Q} \; \forall \, n \geq 0$. *Speziell ist* $B_0 = 1,\ B_1 = -\frac{1}{2},\ B_n = 0$ *für* $n > 1$ *ungerade.*

ii) (Rekursionsformel) $\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} B_\nu = (-1)^n B_n$

iii) Für k gerade, $k \geq 2$ ist

$$\xi(k) = \frac{(-1)^{\frac{k}{2}-1} 2^{k-1} B_k}{k!} \pi^k$$

Bemerkung. $\omega \mapsto \frac{\omega}{e^\omega - 1}$ *hat in* $\omega = 0$ *eine hebbare Singularität und nimmt dort den Wert* 1 *an, denn* $e^\omega = 1 + \omega + \frac{\omega^2}{2!} + \ldots$. *Auch hat* $\frac{\omega}{e^\omega - 1}$ *in* $\omega = 2\pi i \nu$ *(*$\nu \in \mathbb{Z},\ \nu \neq 0$*) Polstellen, also konvergiert die Taylorreihe in* $\frac{\omega}{e^\omega - 1}$ *um* $\omega = 0$ *in* $|\omega| < 2\pi$.

Beweis. i) und

ii) Betrachtet man den Limes

$$\lim_{t \to 0} \frac{t}{e^t - 1} = \lim_{t \to 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n$$

so folgt: $B_0 = 1$.

Weiter ist:

$$\begin{aligned}
-t &= t\Big(\frac{1 - e^t}{e^t - 1}\Big) \\
&= t\Big(\frac{1}{e^t - 1} + \frac{e^t}{1 - \varepsilon^t}\Big) \\
&= t\Big(\frac{1}{e^t - 1} + \frac{1}{e^{-t} - 1}\Big) \\
&= \frac{t}{e^t - 1} - \frac{-t}{e^{-t} - 1} \\
&= \sum_{n \geq 0} \frac{B_n}{n!} (1 - (-1)^n) t^n \\
\Rightarrow -t &= \sum_{n \geq 0} \frac{B_n}{n!} (1 - (-1)^n) t^n \\
&= 2tB_1 + 2t^3 \frac{B_3}{3!} + 2t^5 \frac{B_5}{5!} + \ldots
\end{aligned}$$

Daher folgt nach Koeffizientenvergleich:

$$B_1 = -\frac{1}{2},\ B_n = 0 \;\forall n > 1,\ n \equiv 1\,(2)$$

Rekursionsformel:

$$\sum_{n\geq 0}\Big(\boxed{\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}B_\nu}\Big)\frac{t^n}{n!} = \sum_{\substack{n\geq 0\\ 0\leq\nu\leq n}}\frac{B_\nu}{\nu!(n-\nu)!}t^n$$

Setze: $k := n-\nu$, also $n = \nu + k$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{\nu\geq 0\\ k\geq 0}}\frac{B_\nu}{\nu! k!}t^{\nu+k}\\
&= \Big(\sum_{\nu\geq 0}\frac{B_\nu}{\nu!}t^\nu\Big)\Big(\sum_{k\geq 0}\frac{t^k}{k!}\Big)\\
&= \frac{t}{e^t-1}\cdot e^t\\
&= \frac{t}{1-e^{-t}}\\
&= \frac{-t}{e^{-t}-1}\\
&= \sum_{n\geq 0}\boxed{(-1)^n\cdot B_n}\frac{t^n}{n!}
\end{aligned}$$

Rekursionsformel und $B_0 = 1 \Rightarrow B_n \in \mathbb{Q}\ \forall n\geq 0$. In der Tat

$$\begin{aligned}
(n=1):&\quad B_0 + B_1 = -B_1 \ \Rightarrow B_1 = -\frac{1}{2}\\
(n=3):&\quad B_0 + 3B_1 + B_2 + B_3 = -B_3 \qquad (B_3 = 0)\ \Rightarrow B_2 = \frac{1}{6}\\
\text{usw.}&\quad B_4 = \frac{1}{30},\quad B_6 = -\frac{1}{42},\dots
\end{aligned}$$

iii) Setze $t = 2\pi i z$. Für $|z| < 1$ gilt dann:

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0}\frac{B_n}{n!}(2\pi i)^n z^n &= \frac{2\pi i z}{e^{2\pi i z}-1}\\
&= \pi z\frac{2i}{e^{2\pi i z}-1}\\
&\overset{!}{=} \pi z(\cot\pi z - i)
\end{aligned}$$

Es gilt:

$$
\begin{aligned}
\cot \pi z &= \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} \\
&= \frac{\frac{e^{\pi i z}+e^{-\pi i z}}{2}}{\frac{e^{\pi i z}-e^{-\pi i z}}{2i}} \\
&= i \cdot \frac{e^{\pi i z}+e^{-\pi i z}}{e^{\pi i z}-e^{-\pi i z}} \\
&= i \cdot \frac{e^{2\pi i z}+1}{e^{2\pi i z}-1} \\
&= i\left(1+\frac{2}{e^{2\pi i z}-1}\right)
\end{aligned}
$$

Wegen $B_1 = -\frac{1}{2}$ folgt somit:

$$
\pi z \cdot \cot(\pi z) = 1 + \sum_{\substack{n\geq 2\\ n gerade}} \frac{B_n}{n!}(-1)^{n/2}(2\pi)^n z^n
$$

Nach der Partialbruchzerlegung des Kotangens folgt:

$$
\begin{aligned}
z\pi \cot(\pi z) &= z\left(\frac{1}{z}\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{z+n}\right)\right) \\
&= 1 + \left(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{z^2-n^2}\right)2z^2 \\
&= 1 - \left(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2-z^2}\right)2z^2 \\
&= 1 - 2z^2\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{1-(\frac{z}{n})^2} \\
&= 1 - 2z^2\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}\sum_{k\geq 0}\left(\frac{z}{n}\right)^{2k} \\
&= 1 - 2\sum_{k\geq 0}\left(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{2k+2}}\right)z^{2k+2} \\
&= 1 - 2\cdot\sum_{\substack{n\geq 2\\ n gerade}}\underbrace{\left(\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^n}\right)}_{\to\xi(n)} z^n
\end{aligned}
$$

$\square$

Definition. *Die Reihe*

$$E_k(z) := \frac{1}{2\xi(k)} G_k(z)$$

heißt normalisierte Eisensteinreihe.

Nach Satz 3, iii) gilt:

$$E_k(z) = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n \geq 1} \sigma_{k-1}(n) e^{2\pi i n z}$$

(rationale Fourierkoeffizienten!)

Speziell gilt:

$$E_4 = 1 + 240 \sum_{n \geq 1} \sigma_3(n) q^n$$
$$E_6 = 1 - 504 \sum_{n \geq 1} \sigma_5(n) q^n$$

Wegen

$$B_4 = \frac{1}{30} \text{ und } B_6 = -\frac{1}{42}$$

ganze Koeffizienten!

3.5 Valenzformel

Erinnerung: Sei $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$, $\dot{U}_r(a) = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z-a| < r\}$, $f : \dot{U}_r(a) \to \mathbb{C}$ holomorph, a sei eine nicht-wesentliche Singularität von f.
Sei

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z-a)^n \qquad (z \in \dot{U}r(a))$$

die Laurent-Entwicklung. Dann ist $a_n = 0 \;\forall\, n < 0$ bis auf endlich viele Ausnahmen.

Man definiert:

$$\operatorname{ord}_a\, f := \min\{n \in \mathbb{Z} \mid a_n \neq 0\}$$

Definition. *Sei f eine Modulfunktion vom Gewicht k bzgl. $\Gamma(1)$, $f \not\equiv 0$. Dann setzt man*

$$\operatorname{ord}_\infty f := \operatorname{ord}_0 F$$

wobei $F(q) := f(z)$ mit $q = e^{2\pi i z}$, $z \in \mathbb{H}$

Satz 1 (Valenzformel). *Sei f eine Modulfunktion vom Gewicht k bzgl. $\Gamma(1)$, f nicht identisch Null. Dann gilt:*

$$\operatorname{ord}_\infty f + \frac{1}{2} \operatorname{ord}_i f + \frac{1}{3} \operatorname{ord}_\rho f + \sum_{\substack{[z] \in \Gamma(1) | \mathbb{H} \\ z \not\sim i,\, \rho}} \operatorname{ord}_z f = \frac{k}{12} \tag{*}$$

Hier ist $\rho = e^{2\pi i/3}$ und die Summe links erstreckt sich über alle Orbiten $[z]$ in $\Gamma(1) \mid \mathbb{H}$, $z \not\sim i$, $z \not\sim \rho$.

Bemerkung. *Formel (*) ist sinnvoll, d.h.*

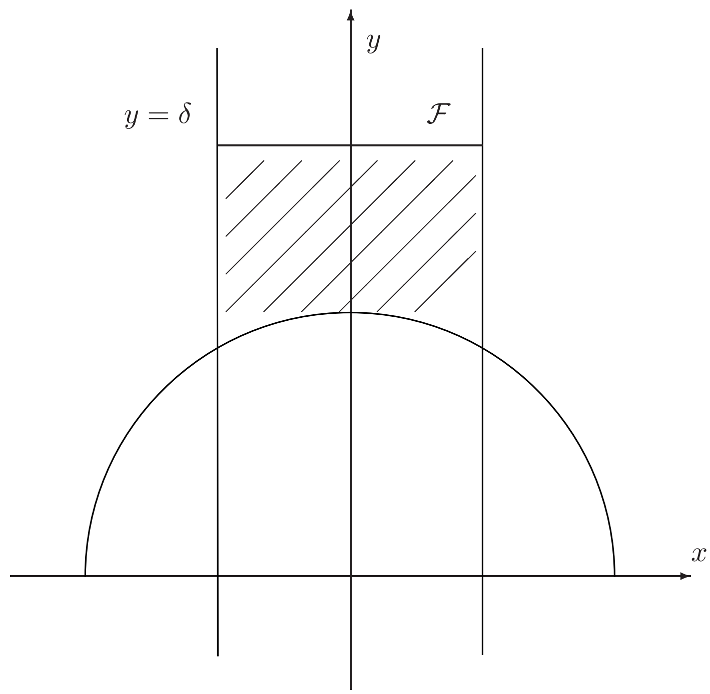
i) $\operatorname{ord}_z f$ *hängt nur von den Klassen $[z]$ von z modulo $\Gamma(1)$ ab.*
Klar, denn:

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \underbrace{(cz+d)^k}_{\neq 0} f(z) \quad \forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(1)$$

ii) f hat modulo $\Gamma(1)$ nur endlich viele Null- und Polstellen.
In der Tat: $F(q) = f(z)$ ($q = e^{2\pi i z}$, $z \in \mathbb{H}$, $0 < |q| < 1$) ist meromorph (Modulfunktion!) und nicht identisch Null. Daher liegen die Pole und Nullstellen von F diskret. Insbesondere $\exists\, \delta > 0$, sodass $F(q)$ keine Pol- oder Nullstellen in $0 < |q| < e^{-2\pi\delta}$ hat mit Ausnahme von möglicherweise $q = 0$. D.h. $f(z)$ hat keine Pol- oder Nullstelle in $\operatorname{Im} z > \delta$. Sei

$$\mathcal{F} = \left\{ z = x + iy \in \mathbb{H} \mid |x| < \frac{1}{2}, |z| > 1 \right\} \qquad \textit{Fundamentalbereich}$$

Dann ist $\bar{\mathcal{F}} \cap \{z \in \mathbb{H} \mid y \leq \delta\}$ kompakt.

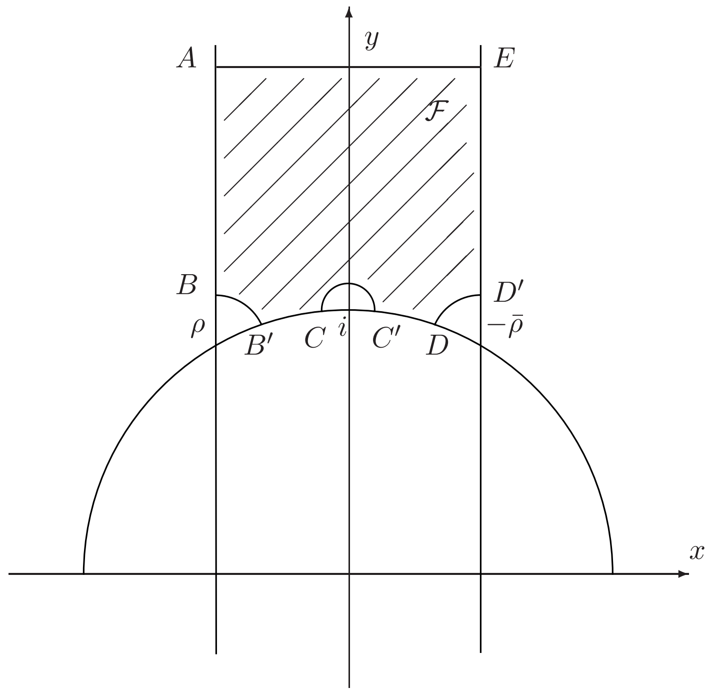


Also hat f dort nur endlich viele Null- und Polstellen. Daher hat f in $\bar{\mathcal{F}}$ nur endlich viele Pol- und Nullstellen.

Beweis. IDEE: Man integriert $\frac{1}{2\pi i}\frac{f'(z)}{f(z)}$ längs eines geeignet modifizierten "Randes" von $\bar{\mathcal{F}}$ und wertet das Integral auf zwei verschiedene Weisen aus, einmal mit Hilfe des Satzes über das NPI und zum zweiten unter Benutzung des Transformationsverhaltens von f unter $\Gamma(1)$.

i) Annahme: f hat keine Null- oder Polstellen auf dem Rand $\partial\bar{\mathcal{F}}$ mit Ausnahme von möglicherweise ρ und i (und dann auch $-\bar{\rho}$).

   Sei $\mathcal{C}$ die unten beschriebene Kurve, genau einmal durchlaufen mit angegebener Orientierung und sodass im Inneren von $\mathcal{C}$ genau ein Repräsentant jeder Null- und Polstellen von f liegt (mit Ausnahme von möglicherweise ρ und i). Über $\overline{AE}$ liegen keine Null- oder Polstellen.



Man berechne $\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = I$.

Nach dem Satz über das NPI (FT 1) ist:

$$I = \sum_{\substack{[z]\in\Gamma(1)|\mathbb{H} \\ z\not\sim i,\rho}} \operatorname{ord}_z f$$

Man wertet nun das Integral auf verschiedene Weise aus:

1. Die Abbildung $z \mapsto q = e^{2\pi i z}$ bildet das Geradenstück $\overrightarrow{EA}$ auf eine Kreislinie ω um $q = 0$ ab, genau einmal durchlaufen, negativ orientiert und sodass im Inneren von ω keine Null- oder Polstelle von $F(q)$ liegt mit Ausnahme von möglicherweise $q = 0$.

   In der Tat: $\overrightarrow{EA}$ wird parametrisiert durch $i\delta - t$ (mit $-\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}$), also gilt:

   $$q = e^{-2\pi\delta}e^{-2\pi i t} \qquad (-\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2})$$

   Man schreibe:

   $$f(z) = \sum_{n\geq N} a_n e^{2\pi i n z} = F(q) = \sum_{n\geq N} a_n q^n$$

Daher:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial q}F(q) &= \sum_{n\geq N} na_n q^{n-1}\\
\frac{\partial}{\partial z}f(z) &= 2\pi i \sum_{n\geq N} na_n e^{2\pi i n z}\\
&= \underbrace{2\pi i q}_{=\frac{\partial q}{\partial z}} \sum_{n\geq N} na_n q^{n-1}\\
&= 2\pi i q \frac{\partial}{\partial q}F(q)\\
\Rightarrow f'(z)\partial z &= F'(q)\partial q
\end{aligned}$$

Daher:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{\overrightarrow{EA}} \frac{f'(z)}{f(z)}dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\omega} \frac{F'(q)}{F(q)}dq\\
&= -\operatorname{ord}_0 F\\
&= -\operatorname{ord}_\infty f
\end{aligned}$$

2. Der Kreisbogen $\overset{\frown}{BB'}$ wird parametrisiert durch $z = \rho + re^{it}$, wobei $r > 0$ fest und $\frac{\pi}{2} \geq t \geq \alpha$ mit α unabhängig von r. Man schreibe $f(z) = (z-\rho)^m g(z)$ mit $m = \operatorname{ord}_\rho f$, also $g(z)$ holomorph bei ρ und $g(\rho) \neq 0$. Dann gilt:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-\rho} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

Daher:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{\overset{\frown}{BB'}} \frac{f'(z)}{f(z)}dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\pi/2}^{\alpha} \frac{m}{re^{it}} + \frac{g'(\rho+re^{it})}{g(\rho+re^{it})} r\cdot i\cdot e^{it}dt\\
&= \frac{m}{2\pi}(\alpha - \frac{\pi}{2}) + \frac{r}{2\pi}\int_{\pi/2}^{\alpha} \frac{g'(\rho+re^{it})}{g(\rho+re^{it})}e^{it}dt\\
&\longrightarrow \frac{m}{2\pi}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}\right) + 0 \qquad (\text{für } r\to 0)\\
&= -\frac{m}{6} = -\frac{1}{6}\operatorname{ord}_\rho f
\end{aligned}$$

denn der Integrand im zweiten Term ist beschränkt und

$$\alpha \to \frac{\pi}{6}\ (\hat{=}\ 30^\circ) \qquad \text{für } r\to 0$$

Genauso zeigt man

$$\int_{\overset{\frown}{DD'}} \frac{f'(z)}{f(z)}dz \to -\frac{1}{6}\operatorname{ord}_{-\bar\rho} f = -\frac{1}{6}\operatorname{ord}_\rho f \qquad (r\to 0,\ \rho\sim -\bar\rho)$$

und

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\overset{\frown}{CC'}}\frac{f'(z)}{f(z)}dz \to -\frac{1}{2}\operatorname{ord}_i f \qquad (r \to 0)$$

3. $\overrightarrow{AB}$ wird durch $z \mapsto z+1$ auf $\overrightarrow{ED'}$ transformiert. Da $f(z+1) = f(z)$ ist $\frac{f'(z)}{f(z)}dz$ invariant unter $z \mapsto z+1 \Rightarrow$

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\overset{\frown}{AB}} + \int_{\overset{\frown}{DE}}\right)\frac{f'(z)}{f(z)}dz = 0$$

4. Die Abbildung $z \mapsto S\cdot z = -\frac{1}{z}$ $(S = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right))$ überführt $\overset{\frown}{C'D}$ auf $\overset{\frown}{CB'}$. Daher:

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\overset{\frown}{B'C}} + \int_{\overset{\frown}{C'D}}\right)\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\overset{\frown}{B'C}}\frac{f'(z)}{f(z)}dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{\overset{\frown}{B'C}}\frac{f'(Sz)}{f(Sz)}d(Sz) \qquad (*)$$

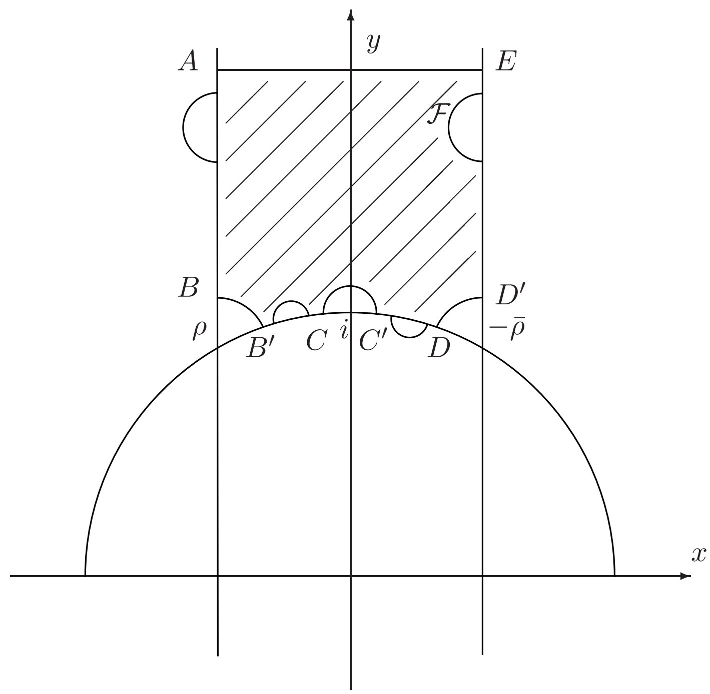
Es ist:

$$\begin{aligned} f(Sz) = f(-\frac{1}{z}) &= z^k f(z) \\ \Rightarrow kz^{k-1}f(z) + z^k f'(z) &= \frac{\partial}{\partial z}f(Sz) = f'(Sz)\frac{\partial}{\partial z}(Sz) \\ \Rightarrow \frac{f'(Sz)}{f(Sz)}d(Sz) &= \frac{kz^{k-1}f(z) + z^k f'(z}{z^k f(z)}dz \\ &= \left(\frac{k}{z} + \frac{f'(z)}{f(z)}\right)dz \end{aligned}$$

Daher:

$$\begin{aligned} (*) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\overset{\frown}{B'C}}\frac{k}{z}dz &\to -\frac{k}{2\pi i}\int_{2\pi/3}^{\pi/2}\frac{d(e^{it})}{e^{it}} \qquad (r \to 0) \\ &= -\frac{k}{2\pi i}\cdot i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{k}{12} \end{aligned}$$

ii) f habe Null- bzw. Polstellen auf $\partial\bar{\mathcal{F}}$. Man modifiziert $\mathcal{C}$ wie in der Abbildung angegeben und verfährt wie oben.



□

> **Korollar.**
> $$\dim M_k < \infty$$

Beweis. $k < 0$ Angenommen, es gibt $f \in M_k$, $f \not\equiv 0$. In der Valenzformel ist dann die linke Seite negativ, die rechte Seite aber ≥ 0, denn f ist holomorph einschließlich ∞. ↯

$k \geq 0$ Sei $N := [\frac{k}{12}]$. Man betrachte $\varphi : M_k \to \mathbb{C}^{N+1}$, $f \mapsto (a_0, a_1, \ldots, a_N)$. Dann ist φ linear!
BEHAUPTUNG: φ ist injektiv!

Beweis. Sei $\varphi(f) = 0$, also $a_0 = a_1 = \ldots = a_N = 0$. Angenommen $f \neq 0$. Dann gilt: $\operatorname{ord}_\infty f \geq N + 1$. Nach der Valenzformel folgt:

$$\frac{k}{12} \geq N + 1 = [\frac{k}{12}] + 1 \quad ↯$$

Also $f \equiv 0$. □

Daher ist $\dim M_k \leq N + 1$.

□

Lemma. *Seien E_4 und E_6 die normalisierten Eisensteinreihen vom Gewicht 4 bzw. 6 bzgl $\Gamma(1)$, also (wegen $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_6 = \frac{1}{42}$):*

$$E_4 = 1 + 240 \sum_{n \geq 1} \sigma_3(n) e^{2\pi i n z}$$
$$E_6 = 1 - 504 \sum_{n \geq 1} \sigma_5(n) e^{2\pi i n z}$$

Sei

$$\Delta := \frac{1}{1728} \left(E_4^3 - E_6^2 \right)$$

Dann ist Δ eine Spitzenform vom Gewicht 12 bzgl $\Gamma(1)$.

$$\Delta = e^{2\pi i z} + \ldots$$
$$\Delta(z) \neq 0 \; \forall z \in \mathbb{H}$$

Beweis. Da E_4 Gewicht 4 und E_6 Gewicht 6 hat, ist Δ eine Modulform vom Gewicht 12 bzgl $\Gamma(1)$.

Es gilt:

$$E_4^3 = 1 + 3 \cdot 240 e^{2\pi i z} + \ldots$$
$$E_6^2 = 1 + 2 \cdot 504 e^{2\pi i z} \pm \ldots$$

daher ist Δ Spitzenform und der Term bei q ist gleich 1. Nach der Valenzformel mit $k = 12$ und wegen $\operatorname{ord}_\infty \Delta = 1$ gilt:

$$\operatorname{ord}_z \Delta = 0 \; \forall z \in \mathbb{H}$$

Also ist $\Delta(z) \neq 0 \; \forall z \in \mathbb{H}$. $\square$

Sei M_k der $\mathbb{C}$-Vektorraum der Modulformen vom Gewicht k bzgl. $\Gamma(1)$ und S_k der Unterraum der Spitzenformen. ($M_k = \{0\}$ falls $k \geq 3$ ungerade)

Satz 2. *Sei k gerade. Dann gilt:*

i) $M_k = \{0\}$ *für* $k < 0$, $M_2 = \{0\}$

ii) $M_0 = \mathbb{C}$

iii) *Für* $k \geq 4$ *ist* $M_k = \mathbb{C}E_k \oplus S_k$

iv) *Die Abbildung* $f \mapsto f\Delta$ *ist ein Isomorphismus von* M_{k-12} *auf* S_k.

Beweis. i) Sei $k < 0$. Sei $f \in M_k$. Ist $f \neq 0$, so hat man einen Widerspruch zur Valenzformel, denn die rechte Seite der Valenzformel ist negativ und die linke Seite ist ≥ 0. Also gilt $f \equiv 0$.

Sei $k = 2$. Dann ist die rechte Seite der Valenzformel $\frac{1}{6}$. Man kann $\frac{1}{6}$ nicht schreiben als $\frac{1}{6} = n + \frac{1}{2}n' + \frac{1}{3}n''$ mit $n, n', n'' \in \mathbb{Z},\ n, n', n'' \geq 0$. Daher ist $M_2 = \{0\}$.

ii) $\mathbb{C} \subset M_0$ klar! Sei umgekehrt $f \in M_0$. Sei $z_0 \in \mathbb{H}$ fest und $g(t) := f(z) - f(z_0) \in M_0$. Es gilt $g(z_0) = 0$. Nach der Valenzformel (angewandt auf g) folgt $g = 0 \Rightarrow f = const.$ Daher $M_0 \subset \mathbb{C}$.

iii) Sei $f \in M_k$ und a_0 der konstante Term von der Fourierentwicklung von f. Sei $g := f - a_0 E_k$. Dann ist $g \in S_k$ und $f = a_0 E_k + g$, also $M_k = \mathbb{C}E_k \oplus S_k$. Nach Definition ist klar, dass $\mathbb{C}E_k \cap S_k = \{0\}$.

iv) Klar: $f \mapsto f\Delta$ ist eine injektive lineare Abbilung.

Beweis der Surjektivität: Sei $g \in S_k$. Sei $f := \frac{g}{\Delta}$. Da $\Delta(z) \neq 0\ \forall z \in \mathbb{H}$, ist f auf $\mathbb{H}$ holomorph. Auch ist $f \in M_{k-12}$, denn $\Delta \in M_{12},\ g \in S_k$. Es ist:

$$\operatorname{ord}_\infty f = \operatorname{ord}_\infty g - \operatorname{ord}_\infty \Delta \geq 0$$

denn g ist Spitzenform, also $\operatorname{ord}_\infty g \geq 1$ und $\operatorname{ord}_\infty \Delta = 1$. Daher ist f in ∞ holomorph, alo $f \in M_{k-12}$.

□

Korollar. *Sei $k \geq 0$, k gerade. Dann gilt*

$$\dim M_k = \begin{cases} \left[\frac{k}{12}\right] & \text{falls } k \equiv 2 \mod 12 \\ \left[\frac{k}{12}\right] + 1 & \text{falls } k \not\equiv 2 \mod 12 \end{cases}$$

Bemerkung. *Nach Satz 2 ist: $S_k = \{0\}, M_k = \mathbb{C}E_k$ für $k = 4, 6, 8, 10$. Ferner ist: $S_12 = \mathbb{C}\Delta$.*

Beweis. Die Formel ist klar für $k \leq 10$ nach dem schon Bewiesenem. Für $k \geq 4$ gilt:

$$\dim M_k = 1 + \dim S_k = 1 + \dim M_{k-12}$$

Ersetzt man k durch $k + 12$, so wachsen beide Seiten der Gleichung um 1 an. Also ist die Gleichung induktiv wahr $\forall k \geq 0$, k gerade. □

Korollar. *Sei $k \geq 0$, k gerade. Dann bilden die „Monome“ $E_4^\alpha E_6^\beta$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0, 4\alpha + 6\beta = k)$ eine Basis von M_k.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass die genannten Funktionen M_k erzeugen. Dies ist richtig für $k \leq 10$ (denn: 4,6 $\surd$, $k = 8$: wegen $\dim M_8 = 1$ und da $E_4 = 1 + \dots,\ E_8 = 1 + \dots$, gilt $E_8 = E_4^2$, $k = 10$: genauso gilt $E_{10} = E_4 E_6$). Sei jetzt $k \geq 12$. Es gibt offenbar $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$ mit $4\alpha + 6\beta = k$. Sei $g := E_4^\alpha E_6^\beta \in M_k$. Der konstante Term der Fourierentwicklung von g ist gleich 1.

Sei $f \in M_k$. Dann $\exists \lambda \in \mathbb{C}$, sodass $f - \lambda g \in S_k$, also gilt nach Satz 2, iv) $f - \lambda g = \Delta h$ mit $h \in M_{k-12}$. Nach Induktionsvoraussetzung ist h Linearkombination von monomen der

Form $E_4^\delta E_6^\gamma$ mit $4\delta + 6\gamma = k - 12$. Wegen $\Delta = \frac{1}{1728}(E_4^3 - E_6^2)$ ist Δh Linearkombination von Monomen $E_4^{\delta+3} E_6^\gamma$ und $E_4^\delta E_6^{\gamma+2}$ und es gilt $4(\delta+3)+6\gamma = k$, $4\delta+6(\gamma+2) = k$. Angenommen:

$$\sum_{\substack{\alpha,\beta\geq 0\\ 4\alpha+6\beta=k}} \lambda_{\alpha,\beta} E_4^\alpha E_6^2 = 0 \quad (\lambda_{\alpha,\beta} \in \mathbb{C})$$

1. Fall $k \equiv 0 \mod 4$. Wegen $4\alpha + 6\beta = k$ folgt dann β gerade, also $\beta = 2\beta'$ mit $\beta' \in \mathbb{N}_0$. Es folt weiter:

   $$\alpha = \frac{k}{4} - 3\beta'$$

   Daher:

   $$\begin{aligned} E_4^\alpha E_6^\beta &= E_4^{\frac{k}{4}-3\beta'} E_6^{2\beta'} \\ &= E_4^{\frac{k}{4}} \left(\frac{E_6^2}{E_4^3}\right)^{\beta'} \end{aligned}$$

   Es folgt:

   $$E_4^{\frac{k}{4}} \sum_{\substack{\beta'\ldots\\ \beta'\geq 0}} \lambda_{\alpha,\beta} \left(\frac{E_6^2}{E_4^3}\right)^{\beta'} = 0$$

   Wären nicht alle $\lambda_{\alpha,\beta} = 0$, so würde also $\frac{E_6^2}{E_4^3}$ Nullstelle eines von Null verschiedenen Polynoms sein, nach dem Fundamentalsatz der Algebra (und aus Stetigkeitsgründen) wäre also $\frac{E_6^2}{E_4^3}$ konstant.

   Es gilt: $E_6(i) = 0$ (denn $E_6\left(-\frac{1}{z}\right) = z^6 E_6(z)$, setze $z = i$), aber $E_4(i) \neq 0$ (denn $E_4(i) = 1 + 240\sum_{n\geq 1} \sigma_3(n) e^{-2\pi n} > 0$).

   Also folgte $\frac{E_6^2}{E_4^3} = 0$, also $E_6 = 0$. Widerspruch!

   Also gilt $\lambda_{\alpha,\beta} = 0 \, \forall \alpha, \beta$.

   Also sind die Monome auch linear unabhängig.

2. Fall $k \equiv 2 \mod 4$: ähnlich.

$\square$

Index