Vorlesungsskriptum[1]

Funktionentheorie

Peter Schlicht[2], Frank Werner[3]

[1]Keine Garantie für Vollständigkeit oder Richtigkeit.
In Anlehung an die Vorlesung 'Funktionentheorie' an der Georg-August-Universität Göttingen von Professor Dr. Burmann im Sommersemester 2006

[2]Göttingen, loewepeter@gmx.de
[3]Göttingen, fwerner@math.uni-goettingen.de

Literatur

[RSF] Reinhold Remmert, Georg Schumacher: **Funktionentheorie 1. Mit Übungsaufgaben**
Springerverlag Berlin, 401 Seiten, ISBN: 3-540-41855-5

[FBF] Eberhard Freitag, Rolf Busam: **Funktionentheorie 1**
Springerverlag Berlin, 550 Seiten, ISBN: 3-540-31764-3

[FOA] Otto Forster: **Analysis I. Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen**
Viewegverlag Wiesbaden, 287 Seiten, ISBN: 3-834-80088-0

[WEZ] Frank Werner: **Die Riemann'sche Zetafunktion**
Unveröffentlichtes Studentenskript, Göttingen 2007, 76 Seiten

[SWR] Peter Schlicht, Frank Werner: **Riemann'sche Flächen**
Unveröffentlichtes Studentenskript, Göttingen 2007, 232 Seiten

[WEF] Frank Werner: **Funktionentheorie in mehreren Variablen - Komplexe Analysis**
Unveröffentlichtes Studentenskript, Göttingen 2007, 20 Seiten

[RUR] Walter Rudin: **Reelle und komplexe Analysis**
Oldenbourg Verlag, 499 Seiten, ISBN: 3-486-24789-1

Vorwort

Das Grundgerüst dieses Skriptums ist während der Vorlesung „Funktionentheorie“ von Professor H.-W. Burmann im Sommersemester 2006 an der Georg-August-Universität Göttingen als Gemeinschaftsprojekt von Peter Schlicht und mir entstanden. Die letzten beiden Kapitel wurden im Sommersemester 2007 in Anlehnung an [RUR] und die gleichzeitige Funktionentheorie Vorlesung von Prof. Witt an der Georg-August-Universität Göttingen hinzugefügt.

Es handelt sich hierbei ausdrücklich nur um eine studentische Mitschrift, nicht um ein offiziell vom Dozenten herausgegebenes Skript. Trotz großer Anstrengungen sind sicherlich einige Fehler mathematischer wie auch sprachlicher Natur im Skript verblieben, was hoffentlich nicht allzu große Schwierigkeiten für das Verständnis aufwerfen wird.

Es handelt sich um einen Standardkurs in moderner Funktionentheorie, wobei aber durchaus an manchen Stellen auch auf die klassischen Aspekte eingegangen wird. Das die Funktionentheorie durchaus ein Interessantes Gebiet der Mathematik ist, was auch in vielen Anwendungen zum Einsatz kommt, sollte klar sein. Viele Integrale lassen sich erst mittels des Residuensatzes berechnen, einige interessante Distributionen können auf holomorphe Funktionen zurückgeführt werden, und auch die Theorie der partiellen Differentialgleichungen käme ohne die reine Funktionentheorie wohl nicht aus.

Insbesondere sollte das Verständnis auch ohne große Vorkentnisse außerhalb der gewöhnlichen reellen Analysis möglich sein.

Wer eine Fortsetzung dieses Themas außerhalb der komplexen Analysis in höheren Dimensionen sucht, der sei auf die Riemann'schen Flächen [SWR] verwiesen. Einige Möglichkeiten der Fortsetzung des Themas in höheren komplexen Dimensionen werden in [WEF] ideenhaft dargestellt. Eine ausführliche Anwendung der Theorie der Zetafunktion (und somit der analytischen Zahlentheorie) stellt [WEZ] dar.

Göttingen, im Juli 2007

Frank Werner

Inhaltsverzeichnis

1 Die komplexen Zahlen

Eigentlich sollten die komplexen Zahlen bereits aus den Anfängervorlesungen bekannt sein, deshalb hier nur ein kurzer Abriss.

1.1 Der Körper $\mathbb{C}$

1.1 Definition ($\mathbb{C}$):
Man definiert den Körper $\mathbb{C} = \left(\mathbb{R}^2, +, \cdot, 0, 1\right)$ *wie folgt:*

- $\mathbb{C} \ni 0 := (0,0) \in \mathbb{R}^2$
- $\mathbb{C} \ni 1 := (1,0) \in \mathbb{R}^2$
- $+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *durch* $(a,b) + (x,y) := (a+x, b+y)$
- $\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *durch* $(a,b) \cdot (x,y) := (ax - by, ay + bx)$

Man prüft leicht nach, dass $\mathbb{C}$ mit diesen Axiomen ein Körper ist:

- Ist $z = (a,b) \in \mathbb{C}$, so ist das additiv Inverse durch $(-a,-b)$ gegeben
- Ist $z = (a,b) \in \mathbb{C}$, so ist das multiplikativ Inverse durch $\frac{1}{a^2+b^2}(a,-b)$ gegeben.

Bemerkung 1.1:

- In Zukunft wird ein Element $(x,0) \in \mathbb{C}$ nur noch mit x bezeichnet.
- $\mathrm{i} := (0,1) \in \mathbb{C}$ wird die imaginäre Einheit genannt. Es gilt $\mathrm{i}^2 = (-1,0)$.
- Damit können wir berechtigter Weise $\mathbb{C} \ni z = (x,y) =: x + \mathrm{i} \cdot y$ schreiben. Dabei wird $x =: \Re(z) \in \mathbb{R}$ der Realteil und $y =: \Im(z) \in \mathbb{R}$ der Imaginärteil von z genannt.

1.2 Die komplexe Konjugation

1.2 Definition ($(\overline{\cdots})$):
Für $z = x + \mathrm{i}\, y \in \mathbb{C}$ *definiert man den Körperautomorphismus* $(\overline{\cdots}) : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *durch* $\overline{z} = x - \mathrm{i}\, y$.

Bemerkung 1.2:
Es gilt für $z, w \in \mathbb{C}$:

- $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
- $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
- $\Re(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$
- $\Im(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z - \overline{z})$

1.3 Definition (absoluter Betrag auf $\mathbb{C}$):
Für $z = x + \mathrm{i}\, y \in \mathbb{C}$ *definiert man den absoluten Betrag wie folgt:*

$$|z| := \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}$$

Damit gilt:

- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $|z \cdot w| = |z| \cdot |w| \;\forall\, z, w \in \mathbb{C}$
- $|z + w| \leq |z| + |w|$
- $|z - w| \geq ||z| - |w||$
- $\max(|x|, |y|) \leq |z| \leq |x| + |y|$

$|z|$ entspricht dem euklidischen Abstand zwischen $z \in \mathbb{R}^2$ und $0 \in \mathbb{R}^2$. Allgemeiner entspricht $|z - w|$ dem euklidischen Abstand zwischen $z \in \mathbb{R}^2$ und $w \in \mathbb{R}^2$.

1.4 Definition ($B_r(a)$):
Sei $a \in \mathbb{C}$ *und* $0 < r \in \mathbb{R}$. *Dann definiert man die offene Umgebung um* a *mit dem Radius* r *durch*

$$B_r(a) := \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |a - z| < r \right\}$$

1.3 Polarkoordinaten

1.5 Definition (Polarkoordinaten, $\arg(z)$):
Sei $0 \neq z = x + \mathrm{i}\, y \in \mathbb{C}$. Dann definiert man $r := |z|$ und wählt φ s.d. $\cos(\varphi) = \frac{x}{r}$ und $\sin(\varphi) = \frac{y}{r}$. Damit erhält man die Darstellung von z in den sogenannten Polarkoordinaten

$$z = r\left(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi)\right)$$

φ gibt den Winkel zwischen der Gerade $0 \leftrightarrow z$ und der x-Achse an und wird mit $\arg(z) := \varphi$ bezeichnet. Er ist eindeutig bestimmt bis auf $2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Bemerkung 1.3:
Seien $z, w \in \mathbb{C}$, $z = r\left(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi)\right)$, $w = R\left(\cos(\psi) + \mathrm{i}\sin(\psi)\right)$. Dann gilt in der Polarkoordinatendarstellung:

- $z \cdot w = r \cdot R\left(\cos(\varphi + \psi) + \mathrm{i}\sin(\varphi + \psi)\right)$ (folgt direkt aus den Additionstheoremen)
- $z^n = r^n\left(\cos(n\varphi) + \mathrm{i}\sin(n\varphi)\right)$ (nach de Moivre)
- $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}\left(\cos(-\varphi) + \mathrm{i}\sin(-\varphi)\right)$

1.4 Weitere Eigenschaften

1.6 Definition (der Punkt ∞):
Man definiert $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Eine Umgebung des Punktes ∞ ist das Komplement einer Kreisscheibe

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| > r\} \text{ für } a \in \mathbb{C},\ 0 < r \in \mathbb{R}$$

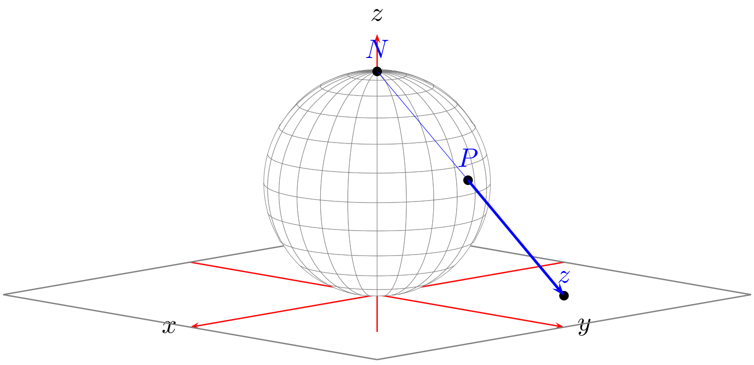
1.7 Definition (stereographische Projektion):
Sei $N := (0,0,1)^t \in \mathbb{R}^3$. Betrachtet man die um den Punkt $\left(0,0,\frac{1}{2}\right)^t \in \mathbb{R}^3$ verschobene Sphäre mit dem Radius $\frac{1}{2}$

$$S^2 := \left\{(x,y,z)^t \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\right\}$$

so erhält man eine Bijektion $S_N : \mathbb{C} \longrightarrow S^2 \setminus \{N\}$ durch

$$z = x + \mathrm{i}\, y \mapsto \left(\frac{x}{1+|z|^2}, \frac{y}{1+|z|^2}, \frac{|z|^2}{1+|z|^2}\right)^t$$

welche die stereographische Projektion genannt wird. Dabei wird ein Punkt $z \in \mathbb{C}$ auf den Schnitt der Sphäre mit der Geraden, welche durch N und s verläuft, abgebildet:



Bemerkung 1.4:
Wird wie oben unter dieser Projektion $\mathbb{C} \ni z \mapsto P \in S^2 \setminus \{N\}, \mathbb{C} \ni w \mapsto Q \in S^2 \setminus \{N\}$ abgebildet, so gilt für den euklidischen Abstand d im $\mathbb{R}^3$:

- $d(P,Q) = \frac{|z-w|}{\sqrt{(1+|z|^2)(1+|w|^2)}}$
- $d(P,N) = \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}$

2 Holomorphe Funktionen

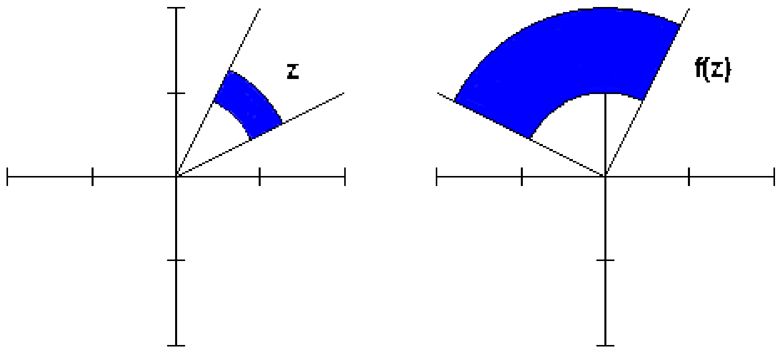
2.1 Funktionen

2.1 Definition (Funktion):

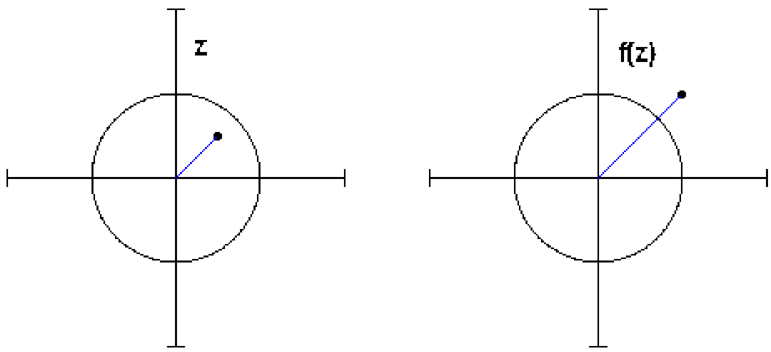
Eine Abbildung $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ wird Funktion genannt. Dabei heißt $D \subset \mathbb{C}$ Definitionsbereich von f.

Beispiel 2.1:

1. $f(z) = z^2$, bzw. für $z = r(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi))$ gilt $f(z) = r^2(\cos(2\varphi) + \mathrm{i}\sin(2\varphi))$

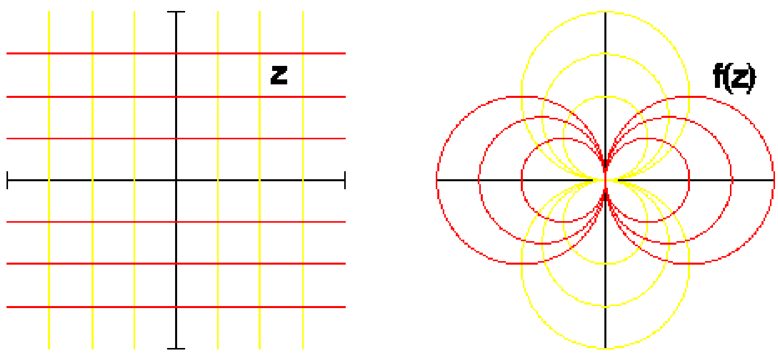


2. $f(z) = \overline{z}$
3. $f(z) = \frac{1}{\overline{z}}$



Im Bild kann man den Grund dafür sehen, dass diese Funktion auch "Spiegelung am Mittelpunkt" genannt wird.

4. $f(z) = \frac{1}{z}$



2.2 Definition (Stetigkeit):

Eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt stetig an $z_0 \in D$, falls eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \textit{s.d.}\ \ \forall\ z \in D\ \textit{mit}\ |z - z_0| < \delta\ \textit{gilt:}\ |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

$$\textit{Zu jeder offenen Umgebung } U \textit{ von } f(z_0) \textit{ gibt es eine Umgebung } V \textit{ von } z_0 \textit{ s.d } z \in V \cap D \ \Rightarrow\ f(z) \in U$$

2.1 Lemma:

Gilt $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = a$ *und* $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = b$, *so gilt auch*

- $\lim\limits_{z \to z_0} (\lambda f(z) + \mu g(z)) = \lambda a + \mu b \ \forall \ \lambda, \mu \in \mathbb{C}$
- $\lim\limits_{z \to z_0} (f(z) \cdot g(z)) = a \cdot b$
- $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{a}{b}$ *falls* $b \neq 0$ *und* $g(z) \neq 0 \ \forall \ z \in D$.
- $\lim\limits_{z \to z_0} \overline{f(z)} = \overline{a}$
- $\lim\limits_{z \to z_0} |f(z)| = |a|$

Der Beweis kann aus der reellen Analysis abgeschrieben werden, er findet sich außerdem in [FOA].

2.2 Vorarbeiten

2.3 Definition (Grenzwert):

Sei $D \subset \mathbb{C}$ *und* z_0 *ein Häufungspunkt von* D, *d.h.* $\exists$ *Folge* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D$ *mit* $\lim\limits_{n \to \infty} = z_0$. *Seien weiter* $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ *eine Funktion und* $a \in \mathbb{C}$.

Man sagt $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = a$ *oder auch* $f(z) \longrightarrow a$ *für* $z \longrightarrow z_0$, *falls eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:*

- $\forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0$ *s.d.* $\forall \ z \in D$ *mit* $|z - z_0| < \delta$ *gilt:* $|f(z) - a| < \varepsilon$
- *Zu jeder offenen Umgebung* U *von* a *gibt es eine Umgebung* V *von* z_0, *s.d*

$$z_0 \neq z \in V \cap D \ \Rightarrow \ f(z) \in U$$

2.4 Definition (Gebiet):

Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{C}$ *heißt Gebiet, falls*

1. $D \neq \emptyset$
2. D *ist offen*
3. D *ist zusammenhängend (also* $D = U \cup V$, U, V *offen,* $U \cap V = \emptyset \ \Rightarrow \ U = \emptyset$ *oder* $V = \emptyset$*)*

2.3 Holomorphie

Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion.

2.5 Definition (Differenzierbarkeit):

Sei $z_0 \in D$. f *heißt an* z_0 *komplex differenzierbar, falls der Grenzwert*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

existiert. In diesem Fall wird besagter Grenzwert die Ableitung von f *an* z_0 *genannt und mit* $f'(z_0)$ *oder* $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$ *bezeichnet.*

2.6 Definition (holomorphe Funktion):

f *heißt holomorph in* D, *falls* f *an jedem Punkt* $z_0 \in D$ *komplex differenzierbar ist.*

2.1 Satz (Äquivalente Charakterisierung der komplexen Differenzierbarkeit):

Sei $z_0 \in D$. *Dann gilt:*

$$\begin{array}{rl} & f \text{ ist an } z_0 \text{ komplex differenzierbar} \\ \Leftrightarrow & \text{es gibt eine komplexe Zahl } a \text{ und eine für hinreichend kleine } 0 \neq h \in \mathbb{C} \text{ erklärte Funktion} \\ & r(h) \text{ mit } \lim\limits_{h \to 0} r(h) = 0 \text{ s.d. } f(z_0 + h) = f(z_0) + a \cdot h + h \cdot r(h) \end{array}$$

Korollar 2.1:

Ist f *an* $z_0 \in D$ *komplex differenzierbar, so ist* f *an* z_0 *stetig.*

2.4 Rechenregeln für komplex differenzierbare und holomorphe Funktionen

2.2 Lemma:

Seien $f, g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph in einem Gebiet $D \subset \mathbb{C}$. Dann gilt:

1. *$(\lambda f + \mu g)$ ist auch holomorph in D mit $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$ $\forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{C}$*
2. *$f \cdot g$ ist auch holomorph in D mit $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$*
3. *Falls $g \neq 0$, so ist auch $\frac{f}{g}$ holomorph in D mit $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$*

Korollar 2.2:

Unter obigen Voraussetzungen und $f \neq 0, g \neq 0$ gilt zusätzlich

1. $(f^n)' = n \cdot f^{n-1} \cdot f'$
2. $\frac{(f \cdot g)'}{f \cdot g} = \frac{f'}{f} + \frac{g'}{g}$
3. $\frac{\left(\frac{f}{g}\right)'}{\frac{f}{g}} = \frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}$

Beispiel 2.2:

1. $f(z) = c \in \mathbb{C} \Rightarrow f'(z) = 0$
2. $f(z) = z \in \mathbb{C} \Rightarrow f'(z) = 1$
3. $f(z) = z^n \in \mathbb{C} \Rightarrow f'(z) = n \cdot z^{n-1}$
4. $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 \in \mathbb{C} \Rightarrow f'(z) = n \cdot a_n z^{n-1} + (n-1) \cdot a_{n-1} z^{n-2} + ... + a_1$
5. Sind $P(z)$ und $Q(z)$ Polynome wie in 4), so ist $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ auch holomorph, falls $Q(z) \neq 0$.

2.2 Satz (Kettenregel):

Seien D_f und D_g zwei Gebiete in $\mathbb{C}$ und $f : D_f \longrightarrow \mathbb{C}$ sowie $g : D_g \longrightarrow \mathbb{C}$ zwei auf ihren Definitionsbereichen holomorphe Funktionen mit $f(D_f) \subset D_g$.
Dann ist $(g \circ f)$ auch holomorph auf D_f und es gilt

$$(g \circ f)'(z) = f'(z) \cdot (g' \circ f)(z) = f'(z) \cdot g'(f(z))$$

Beispiel 2.3:

Ist f eine holomorphe Funktion in $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, so ist auch $g(z) := f\left(z^2\right)$ dort holomorph und es gilt

$$g'(z) = 2z \cdot f'\left(z^2\right)$$

2.3 Satz (Ableitung der Umkehrfunktion):

Sei $D_f \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : D_f \longrightarrow \mathbb{C}$ eine injektive holomorphe Funktion. Sei weiter g die offenbar existente Umkehrfunktion zu f. Zusätzlich nehmen wir an, dass

1. *$f'(z) \neq 0$ $\forall\ z \in D_f$*
2. *$D_g := f(D_f)$ ist ein Gebiet*
3. *g ist stetig*

Dann ist auch g holomorph in D_g und es gilt mit der Bezeichnung $w := f(z)$ für ein festes $z \in D_f$:

$$g'(w) = \frac{1}{f'(z)}$$

Bemerkung 2.1:

Ist f eine auf D_f holomorphe Funktion, $D_f \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f'(z) \neq 0$ $\forall\ z \in D_f$. Dann gilt

$$\frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} \xrightarrow{z \to z_0} |f(z_0)|$$

für $z_0 \in D_f$. Die Ableitung gibt also an, wie stark sich die Funktion verändert, insbesondere hängt die Stauchung / Streckung der abgebildeten Menge nicht von der Richtung ab, aus der man sich an z_0 annähert.

Betrachtet man $z = z_0 + q \cdot t$ für $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| = 1$ und $t \in (0,1]$, so gilt

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(z_0+qt) - f(z_0)}{t} = q \cdot f'(z_0)$$

Folglich bleibt die Richtung, aus der man sich an z_0 annähert beim Ableiten also erhalten.

$$\Rightarrow \text{ holomorphe Funktionen } f \text{ erhalten also Winkel, falls } f' \neq 0$$

Solche Abbildungen werden auch **konform** oder **winkeltreu** genannt. Vergleiche dazu auch Abschnitt 26.2.

Beispiel 2.4 (für nicht-holomorphe Funktionen:):

1. $f(x + \mathrm{i}\, y) = x$
2. $f(z) = \overline{z}$
3. $f(z) = |z|^2 = z\overline{z}$

3 Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ für ein Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ eine Funktion. Wie betrachten $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ und können so

$$f(x,y) = u(x,y) + \mathrm{i}\, v(x,y)$$

schreiben, wobei $u, v : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ Funktionen sind. Insgesamt betrachten wir also eine Abbildung $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ welche durch

$$(x,y) \mapsto (u(x,y), v(x,y))$$

gegeben ist.

Sei $0 \neq h \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \frac{u(x+h,y) - u(x,y)}{h} + \mathrm{i}\, \frac{v(x+h,y) - v(x,y)}{h} \\
\frac{f(z+\mathrm{i}\, h) - f(z)}{\mathrm{i}\, h} &= -\mathrm{i}\, \frac{u(x,y+h) - u(x,y)}{h} + \frac{v(x,y+h) - v(x,y)}{h}
\end{aligned}$$

Ist f holomorph in D, so gilt also offenbar

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \mathrm{i}\, \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \\
&= \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) - \mathrm{i}\, \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)
\end{aligned}$$

was uns durch Vergleich von Real- und Imaginärteil die **Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen** liefert:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ und } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}}$$

3.1 Kriterien für Holomorphie

3.1 Definition:

*Eine reellwertige Funktion $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt **total differenzierbar** in dem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^2$, wenn es zu jedem $(x,y) \in D$ reelle Zahlen a, b und für hinreichend kleines $(0,0) \neq (s,t) \in \mathbb{R}^2$ eine reellwertige Funktion $\rho(s,t)$ gibt, s.d.*

$$u(x+s, y+t) = u(x,y) + a \cdot s + b \cdot t + \sqrt{s^t + t^2} \cdot \rho(s,t)$$

mit $\rho(s,t) \xrightarrow{(s,t) \longrightarrow 0} 0.$

3.1 Satz:

Die komplexwertige Funktion $f := u + \mathrm{i}\, v$ ist genau dann holomorph in dem Gebiet D, wenn u und v total differenzierbar in U sind und die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen erfüllt sind.

Beweis:

- $\boxed{\text{“}\Rightarrow\text{“}}$

  Das für eine holomorphe Funktion die Differentialgleichungen gelten wurde bereits gezeigt. Da f holomorph ist, gilt
  $$f(z+h) = f(z) + f'(z)\cdot h + h\cdot r(h) \text{ mit } r(h) \xrightarrow{h\longrightarrow 0} 0$$
  Sei $h = s + \mathrm{i}\,t$ und $r = p + \mathrm{i}\,q$ (als Funktion). Aus den Differentialgleichungen folgt, dass $f' = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\,\frac{\partial u}{\partial y}$, womit
  $$\begin{aligned} u(x+s, y+t) &= u(x,y) + s\cdot\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + t\cdot\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \sqrt{s^2+t^2}\cdot\rho(s,t) \\ \text{mit } \rho(s,t) &:= \frac{s\cdot p(s,t) - t\cdot q(s,t)}{\sqrt{s^2+t^2}} \xrightarrow{(s,t)\longrightarrow 0} 0 \end{aligned}$$
  weil $\|\rho(s,t)| \leq |p(s,t)| + |(s,t)|2\cdot|r(h)| \longrightarrow 0$ für $h \longrightarrow 0$.

- $\boxed{\text{“}\Leftarrow\text{“}}$

  Seien u und v total differenzierbar in D, also
  $$\begin{aligned} u(x+s, y+t) &= u(x,y) + s\cdot\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + t\cdot\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \sqrt{s^2+t^2}\cdot\rho(s,t) \\ v(x+s, y+t) &= v(x,y) + s\cdot\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) + t\cdot\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) + \sqrt{s^2+t^2}\cdot\sigma(s,t) \end{aligned}$$
  mit $\rho(s,t) \longrightarrow 0$ und $\sigma(s,t) \longrightarrow 0$ für $(s,t) \longrightarrow 0$.

  Sei $h = s + \mathrm{i}\,t$ und $z = x + \mathrm{i}\,y$. Dann gilt
  $$f(z+h) = f(z) + \underbrace{s\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \mathrm{i}\,\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\right) + t\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \mathrm{i}\,\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\right)}_{:=g(x,y)} + h\cdot r(h)$$
  mit $r(h) := \frac{|h|}{h}(\rho(s,t) + \mathrm{i}\,\sigma(s,t)) \xrightarrow{h\longrightarrow 0} 0$. Weiter ist
  $$\begin{aligned} g &\overset{\text{DGL's}}{=} \left(s\cdot\frac{\partial u}{\partial x} - t\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \mathrm{i}\left(s\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + t\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\right) \\ &= \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\,\frac{\partial v}{\partial x}\right)}_{\text{komplexe Ableitung von } f} \cdot h \end{aligned}$$

$\square$

Korollar 3.1:

Sind die reellwertigen Funktionen u, v stetig partiell differenzierbar in D und erfüllen die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen, so ist
$$f := u + \mathrm{i}\,v$$
holomorph in D.

Beispiel 3.1:

Sei für $z = x + \mathrm{i}\,y$
$$f(z) = \exp(x)\cdot(\cos(y) + \mathrm{i}\sin(y))$$
Dann gilt für $u(x,y) := \exp(x)\cos(y)$ und $v(x,y) := \exp(x)\sin(y)$:
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \exp(x)\cos(y) = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ und } \frac{\partial u}{\partial y} = -\exp(x)\sin(y) = -\frac{\partial v}{\partial x}$$
d.h. f ist holomorph.

3.2 Satz:

Ist f holomorph in dem Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ und $f'(z) = 0\ \forall\ z \in D$, so ist f konstant auf D.

3.3 Satz:

*Ist $f = u + \mathrm{i}\, v$ holomorph in dem Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ und sind u und v zweimal stetig partiell differenzierbar, so erfüllen u und v die **Laplace-Differentialgleichung**:*

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{(\partial x)^2} + \frac{\partial^2 u}{(\partial y)^2} = 0 \text{ und } \Delta v = \frac{\partial^2 v}{(\partial x)^2} + \frac{\partial^2 v}{(\partial y)^2} = 0$$

Beweis:

Es gilt

$$\frac{\partial^2 u}{(\partial x)^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \overset{\text{DGL's}}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) \overset{\text{Satz von Schwarz}}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) \overset{\text{DGL's}}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 u}{(\partial y)^2}$$

Für v verläuft der Beweis analog.

□

3.2 Definition:

*(Reell- wie komplexwertige) Funktionen f mit $\Delta(f) = 0$ heißen **harmonisch**.*

Beispiel 3.2:

Sei $f(z) = \frac{1}{z}$ für $0 \neq z \in \mathbb{C}$. Dann ist f holomorph und man kann

$$f(x + \mathrm{i}\, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} - \mathrm{i}\, \frac{y}{x^2 + y^2}$$

schreiben, also ist f harmonisch.

Bemerkung 3.1:

Sei $f = u + \mathrm{i}\, v$ eine holomorphe Funktion und $f' \neq 0$. Dann ist

$$\operatorname{grad}(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} \text{ und } \operatorname{grad}(v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix}$$

Damit gilt offenbar $\| \operatorname{grad}(u) = \| \operatorname{grad}(v)$ und

$$\operatorname{grad}(u) \perp \operatorname{grad}(v)$$

Die Jacobi-Matrix der Abbildung $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$ halt also die Form

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \hat{=} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

welche durch Normierung mit dem Faktor $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$ in die Form einer orthogonalen Matrix gebracht werden kann.

4 Folgen und Reihen

4.1 Folgen

4.1 Definition:

Eine komplexe Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $a_n \in \mathbb{C}$ heißt konvergent genau dann, wenn es ein $a \in \mathbb{C}$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, s.d.

$$|a_n - a| < \varepsilon \ \forall\ n \geq n_0$$

Man schreibt dann $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ oder $a_n \xrightarrow{n \longrightarrow \infty} a$.

4.1.1 Tatsachen

- Sei $a_n = p_n + \mathrm{i}\, q_n$ und $a = p + \mathrm{i}\, q$. Dann gilt

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a \ \Leftrightarrow\ \lim_{n \to \infty} p_n = p \text{ und } \lim_{n \to \infty} q_n = q$$

- Sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Dann gilt
$$\lim_{n\to\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda a + \mu b$$
- Sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Dann gilt
$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = a \cdot b \text{ und falls } b_n \neq 0, b \neq 0 \text{ auch } \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$$
- Sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Dann ist
$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a| \text{ und } \lim_{n\to\infty} \overline{a_n} = \overline{a}$$

Bemerkung 4.1:
Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ beschränkt, so gibt es eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ mit
$$a_{n_k} \xrightarrow{k \longrightarrow \infty} a \in \mathbb{C}$$

Beweis:
Schreibe $a_n = b_n + \mathrm{i}c_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Da es nach Voraussetzung ein $R > 0$ gibt, s.d. $b_n^2 + c_n^2 = |a_n|^2 \leq R \;\forall\; n \in \mathbb{N}$ sind insbesondere auch die reellen Folgen $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ durch R beschränkt. Aus der reellen Analysis wissen wir aber schon, das jede beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge besitzt (vergleiche etwa [FOA], Seite 47, Satz 6)! Finde also zunächst eine konvergente Teilfolge $\left(b_{1(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit
$$b_{1(n)} \xrightarrow{n \longrightarrow \infty} b \in \mathbb{R}$$
Finde dann eine konvergente Teilfolge $\left(c_{2(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ der immer noch beschränkten Folge $\left(c_{1(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ mit
$$c_{2(n)} \xrightarrow{n \longrightarrow \infty} c \in \mathbb{R}$$
Nach obigen Tatsachen konvergiert dann $(a_{n_k})_{n\in\mathbb{N}} := \left(b_{2(n)} + \mathrm{i}c_{2(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $b + \mathrm{i}c \in \mathbb{C}$. □

4.2 Definition (Cauchyfolge):
a_n heißt Cauchyfolge $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \;\exists\; n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_m - a_n| < \varepsilon \;\forall\; m \geq n \geq n_0$.

4.1.2 Cauchykriterium

Es gilt
$$a_n \text{ ist konvergent } \Leftrightarrow a_n \text{ ist Cauchyfolge}$$

4.2 Reihen

4.3 Definition:
Eine Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ mit den Gliedern $a_n \in \mathbb{C}$ ist die Folge der Partialsummen $\left(\sum\limits_{n=1}^{m} a_n\right)_{m\in\mathbb{N}}$.

4.4 Definition:
Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt konvergent $\Leftrightarrow$ die Folge $\left(\sum\limits_{n=1}^{m} a_n\right)_{m\in\mathbb{N}}$ ist konvergent.

Ist a der Grenzwert dieser Folge, so schreibt man $\sum\limits_{n=1}^{m} a_n = a$. a heißt Summe oder Wert der Reihe.

4.2.1 Tatsachen

Für Reihen gelten die gleichen Rechenregeln wie für Folgen, ist z.B. $a_n = p_n + \mathrm{i}\, q_n$, so gilt
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergent } \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} p_n \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} q_n \text{ konvergent}$$

4.2.2 Cauchykriterium

Es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert } \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ s.d. } |\sum_{n=k}^{m} a_n| < \varepsilon \;\forall\, m \geq k \geq n_0$$

Folgerung 4.1:
Eine notwendige Bedingung für die Konvergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *ist* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

4.5 Definition:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ heißt absolut konvergent } \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \textit{ konvergiert}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ heißt bedingt konvergent } \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ konvergiert, } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \textit{ aber nicht}$$

4.1 Lemma:
Aus absoluter Konvergenz folgt Konvergenz.

Der Beweis folgt direkt aus der Dreiecksungleichung.

4.2 Lemma:
Sei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *eine absolut konvergente Reihe und* $b : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *eine Bijektion. Dann ist auch* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{b(n)}$ *absolut konvergent und es gilt*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{b(n)}$$

4.6 Definition (Majorante & Minorante):
Sei a_n *eine Folge in* $\mathbb{C}$ *und* $\alpha_n \geq 0$ *für alle* n.

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ *ist Majorante von* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \Leftrightarrow |a_n| \leq \alpha_n$
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ *ist Minorante von* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \Leftrightarrow |a_n| \geq \alpha_n$

Ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ *eine Majorante von* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$*, so schreiben wir*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \;<<\; \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$$

ohne zu beachten, dass wir keine totale Ordnung auf $\mathbb{C}$ *haben.*

4.3 Lemma:
Aus der Konvergenz der Majorante folgt die Konvergenz der Reihe, aus der Divergenz der Minorante die Divergenz der Reihe.

Auch hier folgt der Beweis wieder direkt aus der Dreiecksungleichung.

4.4 Lemma:
Sind $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *und* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *absolut konvergente Reihen, so ist*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}\right)$$

auch absolut konvergent.

Für den Beweis siehe zum Beispiel [FOA] oder [RSF].

5 Potenzreihen

5.1 Defnitionen und Beispiele

5.1 Definition:

Eine Potenzreihe in z ist eine von $z \in \mathbb{C}$ abhängige Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Dabei heißen $a_n \in \mathbb{C}$ die Koeffizienten und $a_0 \in \mathbb{C}$ das konstante Glied.

Beispiel 5.1:

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ ist die geometrische Reihe
2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ ist die Exponentialreihe
3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} z^n$ für $a \in \mathbb{C}$ und $\binom{a}{n} := \frac{a\cdot(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-n+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}$ bzw. $\binom{a}{0} = 1$ ist die Binomialreihe

5.2 Sätze und Eigenschaften

5.1 Satz:

Sei $z_0 \in \mathbb{C}$.

Konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$, so konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < |z_0|$.

Divergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$, so divergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > |z_0|$.

<u>Beweis:</u>

Ohne Einschränkung können wir $z_0 \neq 0$ annehmen, denn sonst wäre die Aussage offensichtlich. Sei $|z| < |z_0|$. Offenbar $\exists\ C > 0$ mit $|a_n z_0^n| < C\ \forall\ n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leq C \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \text{ d.h. } \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \ << \ \sum_{n=0}^{\infty} C \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$$

und diese Majorante konvergiert, da $|\frac{z}{z_0}| = \frac{|z|}{|z_0|} < 1$.
Ist umgekehrt $|z| > |z_0|$ und nehmen wir an, dass z_0 ein Divergenzpunkt ist, so wäre die Aussage, dass z ein Konvergenzpunkt wäre, direkt widersprüchlich zum oben gezeigten.

□

5.2 Satz:

Zu der Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ gibt es ein $0 \leq \rho \leq \infty$, s.d. die Reihe für $|z| < \rho$ absolut konvergiert und für $|z| > \rho$ divergiert.

<u>Beweis:</u> Sei

$$\rho := \sup \left\{ |z_0| \;\middle|\; z_0 \text{ ist Konvergenzpunkt, also } \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n\right| < \infty \right\}$$

Ist nun $|z| < \rho$, so existiert ein z_0 mit $|z| < |z_0|$, s.d. z_0 ein Konvergenzpunkt ist, also muss auch z ein Konvergenzpunkt sein.
Ist $|z| > \rho$, so existiert ein z_0 mit $|z| > |z_0|$, s.d. z_0 ein Divergenzpunkt ist, also muss auch z ein Divergenzpunkt sein.

□

Bemerkung 5.1:

Dieses ρ heißt Konvergenzradius der Reihe.

Beispiel 5.2:

- Für $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^n z^n$ ist $\rho = 0$, denn für $z \neq 0$ gilt für $n > \frac{1}{|z|}$ gilt $|z^n n^n| > 1$.

- Für $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ ist $\rho = \infty$, denn für jedes $z \in \mathbb{C}$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ s.d.

$$\frac{\left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{z^n}{n!}\right|} = \frac{|z|}{n+1} < \frac{1}{2} \; \forall \; n \geq n_0$$

  Damit folgt die absolute Konvergenz aus dem Quotientenkriterium (vergleiche [FOA]).

- Für $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ ist $\rho = 1$.

Bemerkung 5.2:
Ist die Folge $\alpha_n \geq 0$ beschränkt, so definiert man

$$[0, \infty) \ni \alpha := \limsup_{n\to\infty} \alpha_n \hat{=} \text{ Supremum der Menge aller Häufungspunkte von } \alpha_n$$

Offenbar gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon$, aber nur endlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $|\alpha_n| \geq |\alpha + \varepsilon|$.

Ist α_n dagegen unbeschränkt, so ist $\limsup\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \infty$.

5.3 Satz (Hadamard):
*Der Konvergenzradius ρ der Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ berechnet sich durch die Formel von **Hadamard**:*

$$\rho = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

(Hierbei ist $\frac{1}{0} = \infty$ und $\frac{1}{\infty} = 0$.)

Beweis:
Sei $\alpha = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

- $\boxed{0 < \alpha < \infty}$

  Sei $0 < |z| < \frac{1}{\alpha}$ und ϑ so, dass $0 < \alpha|z| < \vartheta < 1$ gilt. Dann ist $\alpha < \frac{\vartheta}{|z|}$ und nur für endlich viele $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sqrt[n]{|a_n|} \geq \frac{\vartheta}{|z|}$

$$\Rightarrow \; \exists \; n_0 \in \mathbb{N} \text{ s.d } \forall \; n \geq n_0 \text{ gilt } \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{\vartheta}{|z|} \;\Rightarrow\; |a_n z^n| < \vartheta^n$$

  folglich gilt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n \;<<\; \sum\limits_{n=0}^{\infty} \theta^n$ und die Majorante konvergiert.

  Ist dagegen $|z| > \frac{1}{\alpha}$, so gibt es unendlich viele $n \in \mathbb{N}$, s.d.

$$\sqrt[n]{|a_n|} > \frac{1}{|z|} \;\Rightarrow\; |a_n z^n| > 1$$

  also divergiert die Reihe.

- $\boxed{\alpha = 0}$

  Sei $z \neq 0$, dann erfüllen nur endlich viele $n \in \mathbb{N}$ die Bedingung

$$\sqrt[n]{|a_n|} \geq \frac{1}{2|z|} \;\Rightarrow\; \exists \; n_0 \in \mathbb{N} \text{ s.d. } \forall \; n \geq n_0 \text{ gilt } \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{2|z|} \;\Rightarrow\; |a_n z^n| < \left(\frac{1}{2}\right)^n \; \forall \; n \geq n_0$$

  d.h. die Reihe konvergiert für jedes $z \in \mathbb{C}$.

- $\boxed{\alpha = \infty}$

  Sei wieder $z \neq 0$, dann gibt es unendlich viele $n \in \mathbb{N}$, s.d.

$$\sqrt[n]{|a_n|} > \frac{1}{|z|} \;\Rightarrow\; |a_n z^n| > 1$$

  und folglich divergiert die Reihe.

$$\Rightarrow \frac{1}{\alpha} = \rho$$

□

5.4 Satz:
Hat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *den Konvergenzradius* $\rho > 0$*, so ist*

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

holomorph in dem Gebiet $D := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \rho\}$ *und die Ableitung berechnet sich gliedweise:*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \tag{5.1}$$

Diese Potenzreihe hat wieder den Konvergenzradius ρ*.*

Beweis:

Wähle $r, R \in \mathbb{R}$, s.d. $0 < r < R < \rho$ und definiere $\delta := R - r$ und $C := \sum_{n=0}^{\infty} |a_n R^n|$. Dann gilt:

$$\underbrace{n}_{\text{linear steigend}} \cdot \underbrace{\left(\frac{r}{R}\right)^n}_{\text{exponentiell fallend}} \xrightarrow{n \longrightarrow \infty} 0$$

Sei weiter $0 < |z| < r$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |n \cdot a_n \cdot z^{n-1}| &< \frac{1}{|z|} \cdot n \cdot |a_n| \cdot r^n \\ &= \frac{1}{|z|} \cdot n \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^n \cdot |a_n R^n| \\ &< C \cdot \frac{1}{|z|} \cdot n \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^n \end{aligned}$$

Da weiter

$$\left| \frac{(n+1) \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^{n+1}}{n \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^n} \right| = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{r}{R}$$

gilt, folgt die Konvergenz der Reihe (5.1) für $|z| < r$ mit $r < \rho$ beliebig aus dem Quotientenkriterium und dem Majorantenkriterium, also für alle $|z| < \rho$.
Sei nun $|z| < r$ und $|h| < \delta$. Es gilt:

$$\begin{aligned} f(z+h) &= a_0 + a_1 (z+h) + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \cdot \left(z^n + n \cdot z^{n-1} \cdot h + \sum_{k=2}^{n} \left(\binom{n}{k} \cdot z^{n-k} \cdot h^k \right) \right) \\ &\overset{\text{absolute Konvergenz}}{=} f(z) + \left(\sum_{n=1}^{\infty} h \cdot a_n \cdot z^{n-1} \right) \cdot h + h \cdot r(h) \end{aligned}$$

$$\text{mit } r(h) = h \cdot \sum_{n=2}^{\infty} a_n \cdot \left(\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k} h^{k-2} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{Da } \left|\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k} h^{k-2}\right| &\le \frac{1}{\delta^2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} r^{n-k} \delta^k \\ &= \frac{(r+\delta)^n}{\delta^2} \\ &= \frac{R^n}{\delta^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |r(h)| \le |h| \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \frac{R^n}{\delta^2} \le \frac{|h|}{\delta^2} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n R^n| = \frac{C}{\delta^2} |h|$$

und folglich $r(h) \xrightarrow{h \longrightarrow 0} 0$.

□

5.2 Definition:

Ist f eine holomorphe Funktion und ist f' wieder holomorph, so definiert man $(f')'$ als die zweite Ableitung von f und bezeichnet diese mit $f^{(2)}$.
Analog: Ist $f^{(k-1)}$ eine holomorphe Funktion, so ist die k-te Ableitung von f definiert durch

$$f^{(k)} := \left(f^{(k-1)}\right)'$$

5.5 Satz:

Ist $\rho > 0$ der Konvergenzradius von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, so besitzt die Funktion

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

für $|z| < \rho$ die Ableitungen jeder Ordnung $k = 1, 2, ...$ und es gilt

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \left(n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1) \cdot a_n \cdot z^{n-k}\right)$$

Alle diese Potenzreihen haben wieder den Konvergenzradius ρ.

<u>**Beweis:**</u>
Dieser Satz ist eine direkte Folgerung aus Satz 5 und folgt durch Induktion nach k.

□

5.6 Satz:

Sei $r > 0$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ seien konvergent für $|z| < r$ und es gelte

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

Dann gilt $a_n = b_n$ für alle $n = 0, 1, 2, 3, ...$

<u>**Beweis:**</u> Aufgabe! Folgt direkt durch Ableiten und findet sich auch in [FOA].

Bemerkung 5.3:
Betrachtet man $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ anstelle von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, so heißt z_0 der Entwicklungspunkt der Potenzreihe. Durch Substitution $t := z - z_0$ sieht man, dass alle Aussagen analog um $z_0 \in \mathbb{C}$ an Stelle von $0 \in \mathbb{C}$ gelten.

6 Exponentialfunktion, Sinus, Cosinus

6.1 Definition:

Für $z \in \mathbb{C}$ sind definiert:

$$\begin{aligned}
\textit{Exponentialfunktion:} \quad \exp(z) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + ... \\
\textit{Sinus:} \quad \sin(z) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - ... \\
\textit{Cosinus:} \quad \cos(z) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - ...
\end{aligned}$$

6.1 Eigenschaften

Man sieht direkt ein, dass der Konvergenzradius aller drei Potenzreihen $\rho = \infty$ ist (z.B. durch den Satz von Hadamard, da $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$). Folglich sind $\exp(z), \sin(z), \cos(z)$ holomorph auf ganz $\mathbb{C}$.

6.1.1 Ableitungen

Man errechnet:

$$\begin{aligned}
(\exp(z))' &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^n}{n!}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\frac{z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} = \exp(z)\\
(\sin(z))' &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n} = \cos(z)\\
(\cos(z))' &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)!}z^{2n-1}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}z^{2n+1} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}\\
&= -\sin(z)
\end{aligned}$$

6.1 Lemma (Euler'sche Formel):

Es gilt

$$\exp(\mathrm{i}\,z) = \cos(z) + \mathrm{i}\sin(z)$$

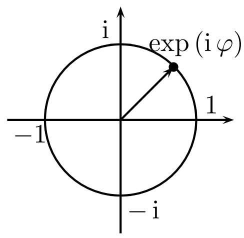
Beweis:

Einsetzen und Nachrechnen! Man verwendet

- $(\mathrm{i}\,z)^{2n} = (-1)^n z^{2n}$
- $(\mathrm{i}\,z)^{2n+1} = \mathrm{i}\,(-1)^n z^{2n+1}$

Folgerung 6.1:

- *Für* $\varphi \in \mathbb{R}$ *gilt also* $\exp(\mathrm{i}\,\varphi) = \cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi)$
- *Es gilt* $\exp\left(\frac{\pi\,\mathrm{i}}{2}\right) = \mathrm{i}, \exp(\pi\,\mathrm{i}) = -1, \exp\left(-\frac{\pi\,\mathrm{i}}{2}\right) = -\,\mathrm{i}, \exp(2\pi\,\mathrm{i}) = 1:$



- *Es gilt*

$$\boxed{\exp(\mathrm{i}\,\pi) + 1 = 0}$$

Diese Gleichung wurde einst zur schönsten Formel der Mathematik gewählt. Sie verknüpft alle wesentlichen mathematischen Konstanten $0, 1, e, \pi, \mathrm{i}$.

6.1.2 Einheitswurzeln

Der Satz von De Moivre sagt uns

$$z = r\exp(\mathrm{i}\,\varphi) \;\Rightarrow\; z^k = r^k\exp(\mathrm{i}\,k\varphi)$$

Nun suchen wir die Lösung von $z^k = 1$, es gilt:

$$\begin{aligned}
z^k = 1 \;&\Leftrightarrow\; r^k\exp(\mathrm{i}\,k\varphi) = 1\\
&\Leftrightarrow\; (r = 1) \wedge (\varphi = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z})
\end{aligned}$$

Es ergeben sich die k-ten Einheitswurzeln:

$$\left\{\exp\left(\frac{2\pi\,\mathrm{i}}{k}l\right) \mid 0 \le l \le k-1\right\}$$

6.1.3 Eigenschaften der exp-Funktion, sin und cos

Wir stellen weiter fest, dass

$$\begin{aligned}
\exp(z)\exp(w) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{w^l}{l!} \\
&\overset{\text{abs.Konv.}}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{n}\frac{z^l w^{n-l}}{l!(n-l)!}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{l=0}^{n}\frac{n!}{l!(n-l)!}z^l w^{n-l}\right) \\
&\overset{\text{Binom.Lehrsatz}}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+w)^n}{n!} \\
&= \exp(z+w)
\end{aligned}$$

Daraus schließen wir folgende

Folgerung 6.2:

- $$\exp(z) \neq 0 \ \forall\ z \in \mathbb{C}$$

  weil: gäbe es ein z^* *mit dieser Eigenschaft, so würde* $\exp(z^*+w) = \exp(w)\cdot 0 = 0\ \forall\ w \in \mathbb{C}$ *folgen!*

- $$\exp(0) = 1 \ \Rightarrow\ (\exp(z))^{-1} = \exp(-z)\ \ \forall\ z \in \mathbb{C}$$

- $$(\exp(z))^k = \exp(kz)\ \ \forall\ z \in \mathbb{C},\ \forall k \in \mathbb{Z}$$

Sei nun $\mathbb{C} \ni z = x + \mathrm{i}\,y$, dann $\exp(z) = \exp(x)\cdot\exp(\mathrm{i}\,y)$. Wegen $|\exp(\mathrm{i}\,\varphi)| = 1\ \forall\ \varphi \in \mathbb{R}$ folgt

$$|\exp(z)| = \exp(x)\,,\ \arg(\exp(z)) = y$$

Betrachtet man das Bild von Geraden zu den Koordinatenachsen unter exp, so sieht man leicht ein, dass

- Geraden parallel zur reellen Achse mit Abstand y_0 auf Strahlen aus dem Ursprung mit Winkel y_0 abgebildet werden.
- Geraden parallel zur imaginären Achse mit Abstand x_0 auf Kreise mit Radius x_0 um den Koordinatenursprung abgebildet werden.

Ein halboffener Streifen parallel zur reellen Achse mit Breite 2π wird gerade auf die gesamte komplexe Ebene ohne 0 injektiv abgebildet.

An diesem Zusammenhang erkennt man:

$$\exp(z) = \exp(y)\ \Leftrightarrow\ z = y + 2\pi\,\mathrm{i}\,n,\ n \in \mathbb{Z}$$

Weiter sieht man leicht ein, dass

1. $$\sin(-z) = -\sin(z)$$
2. $$\cos(-z) = \cos(z)$$

und kann ebenso leicht daraus folgern, dass

1. $$\sin(z) = \frac{\exp(\mathrm{i}\,z) - \exp(-\mathrm{i}\,z)}{2\,\mathrm{i}}$$
2. $$\cos(z) = \frac{\exp(\mathrm{i}\,z) + \exp(-\mathrm{i}\,z)}{2}$$

gelten.

Weiter gelten folgende Zusammenhänge:

Additionstheoreme:

$$\begin{aligned}\sin(z+w) &= \sin(z)\cos(x)+\cos(z)\sin(w)\\ \cos(z+w) &= \cos(z)\cos(w)-\sin(z)\sin(w)\end{aligned}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}\exp(z)\exp(w) &= \exp(z+w)\\ &\Rightarrow\\ (\cos(z)+\mathrm{i}\sin(z))(\cos(w)+\mathrm{i}\sin(w)) &= \cos(z+w)+\mathrm{i}\sin(z+w)\\ &\Rightarrow\\ \cos(z)\cos(w)-\sin(z)\sin(w)+\mathrm{i}(\sin(z)\cos(x)+\cos(z)\sin(w)) &= \cos(z+w)+\mathrm{i}\sin(z+w)\end{aligned}$$

Die Behauptung erhält man nun durch Koeffizientenvergleich.

□

Außerdem kann man ohne Weiteres einsehen, dass

$$\sin^2(z)+\cos^2(z)=1\ \forall z\in\mathbb{C}$$

gilt, denn

$$\sin^2(z)+\cos^2(z)=\frac{\exp(2\,\mathrm{i}\,z)-2+\exp(-2\,\mathrm{i}\,z)}{-4}+\frac{\exp(2\,\mathrm{i}\,z)+2+\exp(-2\,\mathrm{i}\,z)}{4}=\frac{4}{4}=1$$

Weiter ergeben sich folgende Eigenschaften für sin und cos:

1. $$\sin(z+2\pi)=\sin(z),\ \cos(z+2\pi)=\cos(z)$$
2. $$\sin(z+\pi)=-\sin(z),\ \cos(z+\pi)=-\cos(z)$$
3. $$\sin(z+\frac{\pi}{2})=\cos(z),\ \cos(z+\frac{\pi}{2})=-\sin(z)$$
4. $$|\exp(z)|\le\exp|z|$$
5. $$|\exp(z)-1|\le|z|\exp|z|$$
   denn $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\le|z|\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}\le|z|\exp|z|$
6. $$|\sin(z)|\ge\frac{2}{5}\exp|y|\,,\ |\cos(z)|\ge\frac{2}{5}\exp|y|$$
   denn
   $$\begin{aligned}|\sin(z)| &\ge \frac{1}{2}\left||\exp(\mathrm{i}\,z)|-|\exp(-\mathrm{i}\,z)|\right|\\ &= \frac{1}{2}|\exp(y)-\exp(-y)|\\ &= \frac{1}{2}\exp(y)\,|1-\exp(-2y)|\\ &\ge \frac{1}{2}\exp(y)\,|1-\exp(-2)|\\ &\ge \frac{1}{2}\exp(y)\left|1-2.5^{-2}\right|\\ &\ge \frac{2}{5}\exp(y)\end{aligned}$$

und die zweite Ungleichung folgt analog.

6.1.4 Definition tan, cot

Man definiert

$$\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)},\ \cot(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)}$$

7 Logarithmus und allgemeine Potenzen

7.1 Logarithmus

7.1.1 Einleitung, Definition (Logarithmusfunktion)

Sei $0 \neq z \in \mathbb{C}$ gegeben. Man sucht $w \in \mathbb{C}$, sodass $\exp(w) = z$ gilt.

Gelte $z = r\exp(\mathrm{i}\,\varphi)\,,\ w = u + \mathrm{i}\,v\ \Rightarrow$ suchen $\exp(u)\exp(\mathrm{i}\,v) = r\exp(\varphi)\ \Rightarrow \begin{cases} r &= \exp(u) \\ \varphi &= v + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \end{cases}$

7.1 Definition:

Also definiert man den Logarithmus für $z = r\exp(\mathrm{i}\,\varphi)$ durch

$$\log(z) = \ln_{\mathbb{R}}(r) + \mathrm{i}\,\varphi^*$$

wobei $\varphi^* \in \{\varphi + 2\pi n | n \in \mathbb{Z}\}$. Dabei bezeichnet $\ln_{\mathbb{R}}$ den reellen, auf $(0,\infty)$ eindeutigen Logarithmus.

7.1.2 Eigenschaften des log

Es gilt

$$\exp(\log(z)) = \exp(\ln(r) + \mathrm{i}\,\varphi^*) = \exp(\ln(r))\exp(\mathrm{i}\,\varphi^*) = r\,(\exp(2\,\mathrm{i}\,\pi))^n\exp(\mathrm{i}\,\varphi) = r\exp(\mathrm{i}\,\varphi) = z$$

analog gilt

$$\log(\exp(w)) = w + 2\,\mathrm{i}\,\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$$

Daher trifft man folgende Vereinbarung:

$$\arg(z_0) = \varphi\ \Rightarrow\ \arg(z) \in (\varphi - \pi, \varphi + \pi)\ \forall\ z \in \mathbb{C} \setminus \{r\exp(\mathrm{i}(\varphi + \pi))\}$$

Dann wird die komplexe Ebene ohne den Strahl $\{r\exp(\mathrm{i}(\varphi + \pi))\}$ durch den Logarithmus injektiv auf den Streifen
$\{z = x + \mathrm{i}\,y \in \mathbb{Z} \mid \varphi - \pi < y < \varphi + \pi\}$ abgebildet.

Es gilt für $z = \exp(w)$

$$(\log(z))' = \frac{1}{(\exp(w))'} = \frac{1}{\exp(w)} = \frac{1}{z}$$

7.2 Definition:

Man definiert den Streifen

$$\{z \in \mathbb{C}\,|{-\pi} < \arg(z) \leq \pi\}\ \subset \mathbb{C}$$

als den Hauptzweig des komplexen Logarithmus.
Analog definiert man den Streifen

$$\{z \in \mathbb{C}\,|{-\pi} + 2\pi n < \arg(z) \leq \pi + 2\pi n\ n \in \mathbb{Z}\}\ \subset \mathbb{C}$$

als den $n-$ten Nebenzweig des Logarithmus.

Man vereinbart weiter, dass der Logarithmus beim Durchlaufen der negativen reellen Achse den nächsten Zweig (also beim Durchlaufen im Uhrzeigersinn den $(n-1)-$ten und beim Durchlaufen entgegen dem Uhrzeigersinn den $(n+1)$-ten) erreicht. Auf diese Weise entsteht die sogenannte **logarithmische Spirale**, eine Riemann'sche Fläche. Vergleiche dazu [SWR].

7.3 Definition:

Für $0 \neq z \in \mathbb{C},\ a \in \mathbb{C}$ definiert man

$$z^a = \exp(a\log z)$$

Man sieht leicht ein, dass

$$z^a = \exp(a\log z) = \exp(a(\ln|z| + \mathrm{i}\arg(z) + 2\pi\,\mathrm{i}\,n)) = \exp(a\ln|z| + a\,\mathrm{i}\arg(z))\exp(2\pi\,\mathrm{i}\,an) = z^a\exp(2\pi\,\mathrm{i}\,an)$$

für ein $n \in \mathbb{Z}$. Aber:

$$\begin{aligned} \exp(2\pi\,\mathrm{i}\,an) = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad an \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow \\ \exp(2\pi\,\mathrm{i}\,an) = 1\ \forall\ n \in \mathbb{Z} \quad &\Leftrightarrow \quad a \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Also ist die allgemeine Potenzfunktion gerade für ganzzahlige a eindeutig.
Es gilt:

$$a \in \mathbb{N} \ \Rightarrow\ z^a = \exp(a\log z) = \exp(\log z + \log z + .. + \log z) = \exp(\log z)\exp(\log z)\cdot .. \cdot \exp(\log z) = (\exp(\log z))^a = z^a$$
$$a = 0 \ \Rightarrow\ z^a = \exp(a\log z) = \exp(0) = 1$$
$$a \in \mathbb{N} \ \Rightarrow\ z^{-a} = \exp(-a\log z) = \tfrac{1}{\exp(a\log z)}$$

Die allgemeine Potenzfunktion stimmt also auf den ganzen Zahlen mit dem überein, was wir uns vorstellen.

Sei $a \in \mathbb{C}$ fest, dann ist $z \mapsto z^a$ holomorph und es gilt

$$(z^a)' = (\exp(a\log z))' \overset{\text{Kettenregel}}{=} a\frac{1}{z}\exp(a\log z) = az^{a-1}$$

Sei $a \in \mathbb{C}$ fest, dann ist $z \mapsto a^z$ holomorph und es gilt

$$(a^z)' = (\exp(z\log a))' = \log a\exp(z\log a) = \log a a^z$$

Weiter gilt offensichtlich:

$$z^a z^b = \exp(a\log z)\exp(b\log z) = \exp((a+b)\log z) = z^{a+b}$$
und
$$z^a w^a = \exp(a\log z)\exp(a\log w) = \exp(a(\log z + \log w)) = \exp(a(\log(zw) + 2\pi\,\mathrm{i}\,n)) = (zw)^a\exp(2\pi\,\mathrm{i}\,n)\ \ n \in \mathbb{Z}$$
sowie
$$\log(z^a) = \log(\exp(a\log z)) = a\log z + 2\pi\,\mathrm{i}\,n\ \ n \in \mathbb{Z}$$
und damit
$$(z^a)^b = \exp(b\log(z^a)) = \exp(b(a\log z + 2\pi\,\mathrm{i}\,n)) = z^{ab}\exp(2\pi\,\mathrm{i}\,n)\ \ n \in \mathbb{Z}$$

Beispiel 7.1:

Wir betrachten i^{i} und sehen ein:

$$\mathrm{i}^{\mathrm{i}} = \exp(\mathrm{i}\log\mathrm{i}) = \exp(\mathrm{i}(\ln(1) + 2\pi\,\mathrm{i}\,n)) = \exp\left(-\frac{\pi}{2}\right)\exp(-2\pi n),\ \ n \in \mathbb{Z}$$

Außerdem lässt sich leicht einsehen, dass

$$z^{1/k} = \sqrt[k]{z}$$

gilt.

8 Verhalten von Potenzreihen auf dem Konvergenzradius

8.1 Einleitung, Beispiele

Wir betrachten als Einleitung einige Beispiele:

Beispiel 8.1:

$$\begin{array}{lll} \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n & \rho = 1 & \text{Divergenz } \forall\ z \text{ mit } |z| = 1 \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} & \rho = 1 & \begin{cases} \text{Divergenz} & \text{falls } z = 1 \\ \text{Konvergenz} & \text{falls } |z| = 1,\ z \neq 1 \end{cases} \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} & \rho = 1 & \text{Konvergenz } \forall\ z \text{ mit } |z| = 1 \end{array}$$

Sei nun $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ gegeben, dann ist $f(z) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ für alle Konvergenzpunkte $z \in \mathbb{C}$.

8.1 Satz:

Ist z_0 absoluter Konvergenzpunkt mit $|z_0| = \rho$, so sind alle z mit $|z| \leq \rho$ absolute Konvergenzpunkte und $f(z)$ stetig auf $|z| \leq \rho$

Beweis:

Zuerst gilt $\forall\ |z| \leq \rho$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\rho^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n z_0^n|$$

Folglich ist jeder Punkt $z:\ |z| \leq \rho$ absoluter Konvergenzpunkt.
Mit der Hilfsgleichung

$$|z^n - z_1^n| = \left|(z - z_1)(z^{n-1} + z_1 z^{n-2} + .. + z_1^{n-2} z + z_1^{n-1})\right| \leq |(z - z_1)| n \rho^{n-1} \tag{8.1}$$

und $|z| \leq \rho \geq |z_1|$ betrachten wir

$$\begin{aligned}
|f(z) - f(z_1)| &= \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_1^n\right| \\
&\leq \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - \sum_{n=0}^{N} a_n z^n\right| + \left|\sum_{n=0}^{N} a_n z^n - \sum_{n=0}^{N} a_n z_1^n\right| + \left|\sum_{n=0}^{N} a_n z_1^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_1^n\right| \\
&\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n z^n| + \sum_{n=0}^{N} |a_n||z^n - z_1^n| + \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n z_1^n| \\
&\overset{(8.1)}{\leq} 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n|\rho^n + |z - z_1| \sum_{n=0}^{N} n|a_n|\rho^{n-1}
\end{aligned}$$

Mit

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N \in \mathbb{N} \text{ s.d } \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

folgt nun also

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N \in \mathbb{N} \text{ s.d. } |f(z) - f(z_1)| < \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

□

8.2 Abelscher Grenzwert- bzw Stetigkeitssatz

8.1 Hilfssatz (partielle Summation):

Seien $a_n, b_n \in \mathbb{C}\ \forall n = 0, .., m$. Sei $s_n = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i\ \forall\ n = 0, .., m$, dann gilt

$$\sum_{n=0}^{m} a_n b_n = s_m b_m - \sum_{n=0}^{m-1} s_n (b_{n+1} - b_n)$$

Beweis:

Es gilt offensichtlich $s_n - s_{n-1} = a_n\ \forall\ n = 0, .., m$, wenn wir $s_{-1} = 0$ definieren. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{m} a_n b_n &= \sum_{n=0}^{m} (s_n - s_{n-1}) b_n \\
&= \sum_{n=0}^{m} s_n b_n - \sum_{n=0}^{m} s_{n-1} b_n \\
&= {}_m b_m + \sum_{n=0}^{m-1} s_n b_n - \sum_{n=0}^{m} s_{n-1} b_n \\
&\overset{s_{-1}=0}{=} s_m b_m + \sum_{n=0}^{m-1} s_n b_n - \sum_{n=0}^{m-1} s_n b_{n+1} \\
&= s_m b_m - \sum_{n=0}^{m-1} s_n (b_{n+1} - b_n)
\end{aligned}$$

□

8.2 Satz (Abelscher Grenzwert- bzw. Stetigkeitssatz):
Ist z_0 Konvergenzpunkt mit $|z_0| = \rho$, so gilt

$$\lim_{r \nearrow 1} f(rz_0) = \lim_{r \nearrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (rz_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$$

also mit der Notation $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ für alle Konvergenzpunkte z

$$\lim_{r \nearrow 1} f(rz_0) = f(z_0)$$

Beweis:
Wir zeigen zuerst, dass wir den Beweis auf den Fall $\rho = 1 = z_0$ zurückführen können:
Man definiert

$$f_0(z) = f(z_0 z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n z_0^n) z^n$$

dann gilt

$$\begin{tikzcd} f_0(r) \arrow[r, dash, "="] \arrow[d, "\rightsquigarrow"'] & f(rz_0) \arrow[d, dotted] \\ f_0(1) \arrow[r, dash, "="'] & f(z_0) \end{tikzcd}$$

Beschränken wir uns nun auf den Fall $\rho = z_0 = 1$, also bleibt zu zeigen $\lim\limits_{(0,1)\ni r \to r} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n r^n = s = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.
Sei dafür $s_m = \sum\limits_{n=0}^{m} a_n r^n$.
Betrachte nun

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{m} a_n r^n &\overset{\text{Hilfssatz}}{=} s_m r^m - \sum_{n=0}^{m-1} s_n (r^{m+1} - r^m) \\ &= s_m r^m + (1-r) \sum_{n=0}^{m-1} s_n r^n \end{aligned}$$

Wir betrachten $0 < r < 1$ im Fall $m \longrightarrow \infty$ folgt also $s_m r^m \rightsquigarrow c \cdot 0 = 0$ und damit

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n &= 0 + \underbrace{(1-r) \sum_{n=0}^{\infty} s_n r^n}_{\text{konvergiert, weil andere Seite auch}} \\ &= s - \frac{1}{1-r}(1-r)s + (1-r) \sum_{n=0}^{\infty} s_n r^n \\ &= s + (1-r) \left(-s \frac{1}{1-r} + \sum_{n=0}^{\infty} s_n r^n \right) \\ &\overset{\text{geom.Reihe}}{=} s + (1-r) \left(-s \sum_{n=0}^{\infty} r^n + \sum_{n=0}^{\infty} s_n r^n \right) \\ &= s + (1-r) \sum_{n=0}^{\infty} (s_n - s) r^n \end{aligned}$$

Weil s_n gegen s konvergiert, folgt $\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}: \ \forall n > N |s_n - s| < \epsilon$. Bezeichne c von nun an $\sum_{n=0}^{N-1} |s_n - s| r^n$, dann folgt

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n - s\right| &\leq (1-r)\left(\sum_{n=0}^{N-1} |s_n - s| r^n + \sum_{n=N}^{\infty} \epsilon r^n\right) \\
&= C(1-r) + \epsilon r^N \\
&\leq C(1-r) + \epsilon \\
\text{Für} \quad & 0 < 1 - r < \frac{\epsilon}{c} \text{ folgt:} \\
\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n - s\right| &< \epsilon
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 8.1:

Der Satz sagt also aus, dass sich die Funktion auf einem Strahl vom Nullpunkt stetig auf den Konvergenzkreis fortsetzt, sobald der entprechende Punkt des Konvergenzkreises ein Konvergenzpunkt ist.
Man kann die Aussage sogar insoweit verstärken, dass sich die Funktion aus Sicht von beliebigen Geraden im Konvergenzbereich stetig fortsetzt. Es gibt aber Gegenbeispiele für beliebige Approximationsrichtungen. Nähert man sich dem Konvergenzpunkt z_0 auf dem Konvergenzkreis zum Beispiel so, dass man ihn in tangentieller Richtung trifft, ist die Stetigkeit nicht zwangsläufig gegeben.

□

9 Kurvenintegrale

Motivation

Wenn man im reellen ein Integral einer stetigen Funktion f auf einem kompakten Intervall $I = [a, b]$ berechnet, so geschieht dies zumeist durch die Riemann-Summe:

$$\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)(x_{k+1} - x_k)$$

wobei hier die Untersumme gewählt wurde und

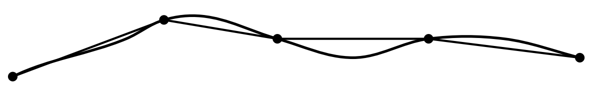
$$a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$$

für $\lim\limits_{n\to\infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$ gelten muss.

Für eine komplexwertige Funktion möchte man ähnlich vorgehen und etwas der Form

$$F(z_n) := \sum_{k=0}^{n} f(z_k)(z_{k+1} - z_k)$$

berechnen. Doch stellt sich hier zunächst die Frage, wie die Punkte z_k zu wählen sind. Zwischen zwei Punkten $a, b \in \mathbb{C}$ gibt es unendlich viele Verbindungen. Zumeist wird daher ein Streckenzug entlang einer Kurve gewählt:



9.1 Vorbereitungen

9.1 Definition:

Ist $I = [\alpha, \beta]$ für $\alpha < \beta$ und F eine stetige, komplexwertige Funktion auf I, d.h. $F(t) = U(t) + \mathrm{i}\,V(t)$, so kann man durch

$$\int_\alpha^\beta F(t)\ \mathrm{d}t := \int_\alpha^\beta U(t)\ \mathrm{d}t + \mathrm{i} \int_\alpha^\beta V(t)\ \mathrm{d}t$$

ein lineares Integral definieren, welches auf das reellwertige Integral zurückgreift.

9.1 Lemma (Eigenschaften):

- *Für dieses Integral gilt die Abschätzungsregel*

$$\left| \int_\alpha^\beta F(t)\ \mathrm{d}t \right| \leq \int_\alpha^\beta |F(t)|\,\mathrm{d}t$$

- *Außerdem gilt wie im reellen die Substitutionsregel:*

  Sei $p : I_1 \longrightarrow I$ eine stetig differenzierbare, reellwertige Funktion, welche das kompakte Intervall I_1 auf I abbildet und $p'(s) > 0\ \forall\ s \in I_1$ erfüllt. Dann gilt:

$$\int_I F(t)\ \mathrm{d}t = \int_{I_1} F(p(s))\, p'(s)\ \mathrm{d}s$$

Beweis:

- Ohne Einschränkung kann man zunächst $0 \neq \int_\alpha^\beta F(t)\ \mathrm{d}t = r \cdot \exp(\mathrm{i}\,\varphi)$ annehmen, denn sonst ist die Ungleichung offensichtlich. Somit gilt:[4]

$$\begin{aligned}
r = \left| \int_\alpha^\beta F(t)\ \mathrm{d}t \right| &= \Re\left(\exp(-\mathrm{i}\,\varphi) \cdot \int_\alpha^\beta F(t)\ \mathrm{d}t \right) \\
&= \Re\left(\int_\alpha^\beta (\exp(-\mathrm{i}\,\varphi) \cdot F(t))\ \mathrm{d}t \right) \\
&= \int_\alpha^\beta \Re(\exp(-\mathrm{i}\,\varphi) \cdot F(t))\ \mathrm{d}t \\
&\leq \int_\alpha^\beta |\Re(\exp(-\mathrm{i}\,\varphi) \cdot F(t))|\ \mathrm{d}t \\
&\leq \int_\alpha^\beta |\exp(-\mathrm{i}\,\varphi) \cdot F(t)|\ \mathrm{d}t \\
&= \int_\alpha^\beta |F(t)|\ \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

- Hier folgt der Beweis direkt durch Aufspaltung in Real- und Imaginärteil aus der Substitutionsregel für reellwertige Integrale.

□

[4] Dieser Beweis sollte sich durch das Weglassen von $\Re$ durchaus vereinfachen lassen. Schließlich:

$$\int_\alpha^\beta F(t)\ \mathrm{d}t = r \cdot \exp(\mathrm{i}\,\varphi) \ \Rightarrow\ \exp(-\mathrm{i}\,\varphi) \cdot \int_\alpha^\beta F(t)\ \mathrm{d}t \in \mathbb{R}$$

9.2 Integral entlang einer Kurve

9.2 Definition (glatter Weg):

Ein glatter Weg γ in $\mathbb{C}$ ist eine Abbildung

$$t \mapsto z(t)$$

eines abgeschlossenen Intervalls $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, s.d. für $t \in I$ die Abbildung

$$z'(t) := \lim_{I \ni x \to t} \frac{z(x) - z(t)}{x - t}$$

existiert, $z'(t) \neq 0$ erfüllt und eine stetige Funktion auf I darstellt.

Bemerkung 9.1:

1. Bei dieser „Ableitung" handelt es sich um die reelle Ableitung: Ist $z(t) = x(t) + \mathrm{i}\, y(t)$, so ist
$$z'(t) = x'(t) + \mathrm{i}\, y'(t)$$
2. t wird hierbei Parameter genannt, I das Parameterintervall
3. Die Bildmenge von I unter z
$$\operatorname{spur}(\gamma) = \{z(t) \mid t \in I\}$$
wird auch Spur von γ genannt.
4. $z(a)$ heißt Anfangspunkt, $z(b)$ heißt Endpunkt und man sagt, γ verbindet a und b.
5. γ heißt geschlossen, falls $a = b$.

Beispiel 9.1:

1. Sei $z(t) = r \cdot \exp(\mathrm{i}\, t)$. Dann ist $z'(t) = \mathrm{i} \cdot r \cdot \exp(\mathrm{i}\, t) \neq 0$ und z stellt für jedes Intervall $I = [\alpha, \beta]$ einen glatten Weg dar. Ist $\alpha = 0$ und $\beta = 2\pi$, so ergibt sich als Spur ein voller Kreis, ist $0 < \beta < 2\pi$, so ergeben sich die entsprechenden Kreisteile.
2. Die Funktion $z(t) = a \cdot (1 - t) + b \cdot t$ für $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$, stellt den glatten Weg einer Geraden dar, da $z'(t) = b - a \neq 0$.
3. Die Funktion $z(t) = t + \mathrm{i}\, t^2$ mit $I = [-1, 1]$ und $z'(t) = 1 + \mathrm{i}\, 2t \neq 0$ repräsentiert den glatten Weg einer Parabel.

9.3 Definition (Integral entlang eines glatten Weges):

Sei f eine stetige Funktion auf dem Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}$ und γ ein glatter Weg in D, gegeben durch $t \mapsto z(t)$ für $z \in I = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ mit $\alpha < \beta$. Dann definiert man das Integral über f entlang γ durch

$$\int_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta f(z(t)) \cdot z'(t)\, \mathrm{d}t$$

Bemerkung 9.2:

Ist

$$\alpha = t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < t_n = \beta$$

mit $\lim_{n \to \infty} (t_{n+1} - t_n) = 0$, so erhält man damit

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z &= \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} f(z(t_k))\, z'(t_k)\, (t_{k+1} - t_k) \\
&\approx \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} f(z(t_k)) \frac{z(t_{k+1}) - z(t_k)}{t_{k+1} - t_k} (t_{k+1} - t_k) \\
&\overset{z_k := z(t_k)}{=} \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} f(z_k)\, (z_{k+1} - z_k)
\end{aligned}$$

D.h. die Definition dieses Integrals entspricht unseren Wünschen.

9.4 Definition (Parametertransformation):
Eine stetig differenzierbare Funktion $p(s)$, welche das abgeschlossene Intervall I_1 auf I abbildet und eine positive Ableitung hat (also $p'(s) > 0 \ \forall \ s \in I_1$), wird Parametertransformation genannt.

Bemerkung 9.3:
Sei der glatte Weg γ gegeben durch $t \mapsto z(t)$ für $t \in I$. Dann wird durch

$$z_1(s) := z(p(s)), s \in I_1$$

für eine Parametertransformation $p = I_1 \longrightarrow I$ ein glatter Weg γ_1 erklärt, denn es gilt

$$z_1'(s) = z'(p(s))\, p'(s)$$

Weiter gilt für das Integral einer stetigen Funktion f entlang γ_1, dass

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_{I} f(z(t))\, z'(t)\,\mathrm{d}t \overset{\text{Substitution}}{=} \int\limits_{I_1} f\big(\underbrace{z(p(s))}_{z_1(s)}\big)\underbrace{z'(p(s))\,p'(s)}_{z_1'(s)}\,\mathrm{d}s = \int\limits_{I_1} f(z_1(s))\, z_1'(s)\,\mathrm{d}s = \int\limits_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z$$

Wir sehen also, dass zwei glatte Wege, die sich nur durch eine Parametertransformation unterscheiden, auf das Integral keinerlei Einfluss haben.

9.5 Definition:
Man definiert für zwei glatte Wege γ_1 und γ, welche durch $t \mapsto z(t), t \in I$ und $t \mapsto z_1(t), t \in I_1$ gegeben sind durch

$$\gamma_1 \sim \gamma \ \Leftrightarrow \ \exists \ \textit{Parametertransformation } p : I_1 \longrightarrow I \textit{ mit } z(s) = z_1(p(s))$$

eine Äquivalenzrelation :

- *Reflexivität* $\gamma \sim \gamma$ *durch* $p = \mathrm{id}$
- *Symmetrie Ist* $\gamma \sim \gamma_1$ *durch* $p : I \longrightarrow I_1$ *gegeben, so erhalten wir mit* $\hat{p} = p^{-1}$ *die Relation* $\gamma_1 \sim \gamma$. p^{-1} *muss existieren, da* $p'(t) > 0$ *und* p *somit streng monoton wachsend, ergo injektiv ist.*
- *Transitivität Ist* $\gamma_1 \sim \gamma_2$ *und* $\gamma_2 \sim \gamma_3$ *durch* p_1 *und* p_2 *entsprechend gegeben, so liefert* $p_2 \circ p_1$ *die Relation* $\gamma_1 \sim \gamma_3$*:*
$$z_1(s) = z_2(p_1(s)) \ \textit{ und } z_2(t) = z_3(p_2(t)) \ \Rightarrow \ z_1(s) = z_3(p_2(p_1(s)))$$

Bemerkung 9.4:

- Bezeichnungen:
Von jetzt ab bezeichnen wir mit einer glatten Kurve $\mathcal{C}$ eine ganze Äquivalenzklasse von glatten Wegen. Mit einer Parametrisierung meinen wir einen Repräsentanten einer Äquivalenzklasse. In diesem Zusammenhang kann auch weiterhin von einem glatten Weg gesprochen werden.
- Spur:
Offenbar ist die Spur aller Parametrisierungen einer glatten Kurve gleich. Daher ist es gerechtfertigt, wenn wir mit
$$\mathrm{spur}(\mathcal{C}) := \mathrm{spur}(\gamma)$$
die Spur von $\mathcal{C}$ für eine beliebige Parametrisierung γ von $\mathcal{C}$ bezeichnen.

9.6 Definition (Integral entlang einer glatten Kurve):
Sei f eine stetige Funktion auf dem Gebiet $D \subset C$ und $\mathcal{C}$ eine glatte Kurve in D. Dann definiert man durch

$$\int\limits_{\mathcal{C}} f(z)\,\mathrm{d}z := \int\limits_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}t$$

für eine beliebige Parametrisierung γ von $\mathcal{C}$ das Integral von f entlang $\mathcal{C}$.

Wir haben oben schon gesehen, dass dies wohldefiniert ist, da der Wert des Integrals nicht von der ausgewählten Parametrisierung abhängt.

9.3 Eigenschaften des Kurvenintegrals

9.2 Lemma (Eigenschaften):

Das oben definierte Integral erfüllt folgende Eigenschaften: Seien f und g zwei stetige Funktionen auf dem Gebiet $D \subset \mathbb{C}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ und sei $\mathcal{C}$ eine glatte Kurve auf D. Dann gilt:

- $\boxed{\textit{Linearität:}}$
  $\int\limits_{\mathcal{C}} (\lambda f(z) + \mu g(z))\ \mathrm{d}z = \int\limits_{\mathcal{C}} f(z)\ \mathrm{d}z + \mu \int\limits_{\mathcal{C}} g(z)\ \mathrm{d}z$

- $\boxed{\textit{Abschätzungsregel:}}$
  Ist γ eine Parametrisierung von $\mathcal{C}$, welche durch $t \mapsto z(t)$ für $t \in I$ gegeben ist, so gilt:

$$\left| \int\limits_{\mathcal{C}} f(z)\ \mathrm{d}z \right| \leq \int\limits_{I} |f(z(t))|\, |z'(t)|\ \mathrm{d}t$$

Mit den Bezeichnungen

$$L(\mathcal{C}) := \int\limits_{I} |z'(t)|\ \mathrm{d}t \textit{ und } M := \sup_{z \in \mathrm{spur}(\mathcal{C})} |f(z)|$$

ergibt sich also die so genannte Standardabschätzung:

$$\left| \int\limits_{\mathcal{C}} f(z)\ \mathrm{d}z \right| \leq M \cdot L(\mathcal{C})$$

Auch diese ist wieder unabhängig von der ausgewählten Parametrisierung (d.h. $L(\gamma_1) = L(\gamma_2)$ falls $\gamma_1 \sim \gamma_2$):

$$\int\limits_{I} z'(t)\ \mathrm{d}t \overset{\text{Substitution}}{=} \int\limits_{I_1} |z'(p(s))|\, p'(s)\ \mathrm{d}s = \int\limits_{I_1} z_1'(s)\ \mathrm{d}s$$

Ein strenger Beweis für diese (eigentlich offensichtlichen) Aussagen findet sich in [RSF].

Bemerkung 9.5:

Die Bezeichnung L ist nicht zufällig: Es handelt sich dabei um die „Länge“ der Kurve!

$$\begin{aligned} L(\mathcal{C}) = \int\limits_{I} z'(t)\ \mathrm{d}t &= \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} |z'(t_k)|\, (t_{k+1} - t_k) \\ &\approx \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \left| \frac{z(t_{k+1}) - z(t_k)}{t_{k+1} - t_k} \right| (t_{k+1} - t_k) \\ &= \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} z(t_{k+1}) - z(t_k) \end{aligned}$$

9.7 Definition:

Sei $\mathcal{C}$ eine glatte Kurve auf dem Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ mit der Parametrisierung γ, welche durch $t \mapsto z(t)$ für $t \in I = [\alpha, \beta]$ gegeben ist. Dann definiert die Vorschrift

$$t \mapsto z(-t)\,,\ t \in [-\beta, -\alpha]$$

einen glatten Weg, welcher mit $-\gamma$ bezeichnet wird. Dieser ist eine Parametrisierung von $-\mathcal{C}$. Anschaulich bedeutet dies genau, den Weg in der anderen Richtung entlangzulaufen.

Nachrechnen verifiziert die Verträglichkeit mit der Äquivalenzrelation:

$$\gamma_1 \sim \gamma \ \Rightarrow\ -\gamma_1 \sim -\gamma.$$

Ist $z_1(s) = z(p(s))$, so ist auch $z_1(-s) = z\big(-\underbrace{(-p(s))}_{\hat{p}(s)}\big)$ und es gilt $\hat{p}'(s) = (-(p(s)))' = \hat{p}'(-s) > 0$.

9.1 Satz (Umkehrungsregel):
Entsprechend zu oben gilt die <u>*Umkehrungsregel*</u> *:*

$$\int_{-\mathcal{C}} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{\mathcal{C}} f(z)\,\mathrm{d}z$$

<u>**Beweis:**</u>

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t))\,z'(t)\,\mathrm{d}t \\
&\overset{\text{Substitution}}{=} -\int_{-\alpha}^{-\beta} f(z(-t))\,z'(-t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_{-\beta}^{-\alpha} f(z(-t))\,(-z'(t))\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_{-\mathcal{C}} f(z)\,\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

□

9.2 Satz (Transformationsformel):
Sei $\mathcal{K} : t \mapsto \omega(t), t \in [\alpha,\beta]$ eine glatte Kurve, h holomorph in G, $h(G) \subset D$, f auf D stetig. Sei $\mathcal{C} : z(t) = h(\omega(t))$ die entstehende Kurve in D, dann ist

$$z'(t) = h'(\omega(t))\omega'(t).$$

Die Ableitung ist als Produkt stetiger Funktionen stetig und hat keine Nullstelle. Dann gilt:

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\mathcal{K}} f(h(\omega))h'(\omega)d\omega$$

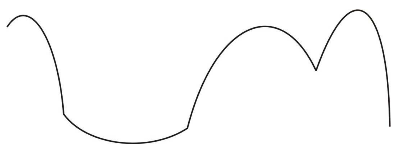
<u>**Beweis:**</u>
Es gilt

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_I f(z(t))z'(t)\,\mathrm{d}t = \int_I f(h(\omega(t)))\frac{\partial(h(\omega(t)))}{\partial t}\,\mathrm{d}t = \int_I f(h(\omega(t)))h'(\omega(t))\omega'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathcal{K}} f(h(\omega))h'(\omega)\,\mathrm{d}\omega$$

und das zeigt die Behauptung.

9.4 Kurven, stückweise glatte Kurven

9.8 Definition (stückweise glatte Kurve):
Seien $\mathcal{C}_1,..,\mathcal{C}_n$ glatte Kurven, die jeweils mit Anfangs- und Endpunkten aneinander liegen, dann ist $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 + .. + \mathcal{C}_n$ eine stückweise glatte Kurve.



Bemerkung 9.6:
Von jetzt an reden wir nur noch von Kurven anstelle von stückweise stetigen Kurven.

9.9 Definition (Parametrisierung stückweiser stetiger Kurven):
Seien $z_k(t),\ t \in [\alpha_k, \alpha_{k+1}]$ für $\alpha = \alpha_1 < .. < \alpha_{n+1} = \beta$ Parametrisierungen der Kurven $\mathcal{C}_k$ aus obiger Definition, dann definiert:

$$z(t) = \begin{cases} z_1(t) & t \in [\alpha_1,\alpha_2] \\ z_2(t) & t \in [\alpha_2,\alpha_3] \\ \dots & \dots \\ z_n(t) & t \in [\alpha_n,\alpha_{n+1}] \end{cases}$$

eine Parametrisierung auf $\mathcal{C}$.

9.10 Definition (Integrale über (stückweise glatte) Kurven):
Man definiert getreu obiger Notation

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n} \left(\int_{\mathcal{C}_k} f(z_k)\,\mathrm{d}z_k \right)$$

Bemerkung 9.7:
Außerdem gelten folgende Zusammenhänge:

1. $$\operatorname{spur}(\mathcal{C}) = \bigcup_{k=1}^{n} \operatorname{spur}(\mathcal{C}_k)$$

2. $$-\mathcal{C} = (-\mathcal{C}_n) + (-\mathcal{C}_{n-1}) + .. + (-\mathcal{C}_1)$$

Beispiel 9.2:
Sei $\mathcal{C} : t \mapsto z(t) = \exp(\mathrm{i}\,t)\,,\ t \in [0, 2\pi n],\ n \in \mathbb{N}$, dann folgt

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \int_{0}^{2\pi n} \frac{\mathrm{i}\exp(\mathrm{i}\,t)}{\exp(\mathrm{i}\,t)}\,\mathrm{d}t = \mathrm{i}\int_{0}^{2\pi n} 1\,\mathrm{d}t = 2\pi\,\mathrm{i}\,n$$

10 Stammfunktionen

10.1 Definition (Stammfunktion):
Sei f in D erklärte holomorphe Funktion. Eine holomorphe Funktion F in D heißt Stammfunktion von f, falls $F' = f$

10.1 Satz:
Zwei Stammfunktionen zu f unterscheiden sich höchstens um eine Konstante $c \in \mathbb{C}$

Beweis: Seien F_1 und F_2 zwei Stammfunktionen zu f und z in D beliebig, dann gilt:

$$(F_1(z) - F_2(z))' = F_1'(z) - F_2'(z) = f(z) - f(z) = 0$$

Damit ist $F_1 - F_2$ konstant, d.h. $F_1 = F_2 + c$ für ein geeignetes $c \in \mathbb{C}$.

□

10.2 Satz:
Sei f stetig auf D, F eine Stammfunktion in D und $\mathcal{C}$ eine glatte Kurve in D mit Anfangspunkt a und Endpunkt b, dann gilt:

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)\,\mathrm{d}z = F(b) - F(a) =: F(z)|_a^b =: F(z)|_{\mathcal{C}}$$

Beweis:
Sei $z(t), t \in [\alpha, \beta]$ eine Parametrisierung von $\mathcal{C}$, dann:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t))\,z'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{\alpha}^{\beta} F'(z(t))\,z'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial}{\partial t}(F(z(t)))\,\mathrm{d}t \\
&= F(z(t))|_{\alpha}^{\beta} \\
&= F(b) - F(a)
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 10.1:
Man kann auf die Voraussetzung, dass $\mathcal{C}$ glatt ist, verzichten. Es genügt, wenn $\mathcal{C}$ stückweise glatt ist.

Beweis: Sei $\mathcal{C}$ eine Kurve, dann gilt nach Definition (9.8) $\mathcal{C} = \sum_{k=1}^{n} \mathcal{C}_k$ und es folgt

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)\,\mathrm{d}z \stackrel{\text{lin.}}{=} \sum_{k=1}^{n} (F(b_k) - F(a_k)) = F(b) - F(a)$$

□

Beispiel 10.1:

- $$\int_{\mathcal{C}} \sin z\,\mathrm{d}z = \int_{\mathcal{C}} (-\cos z)'\,\mathrm{d}z = \cos b - \cos a$$
- $$\int_{\mathcal{C}} \exp(z)\,\mathrm{d}z = \exp(b) - \exp(a)$$
- $$\int_{\mathcal{C}} z^n\,\mathrm{d}z = \frac{1}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1})$$
- $$\oint_{|z|=1} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = 2\pi\,\mathrm{i}$$

Bemerkung 10.2:
Daraus folgt, dass $\frac{1}{z}$ keine Stammfunktion haben kann, sonst müsste das Integral als Differenz von Anfangspunkt und Endpunkt angewandt auf die Stammfunktion 0 sein ($|z| = 1$ ist eine geschlossene Kurve).

10.3 Satz (partielle Integration):
Seien f, g holomorph auf D, $f'(z), g'(z)$ stetig in D und $\mathcal{C}$ eine Kurve in D. Dann gilt:

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)g'(z)\,\mathrm{d}z = f(z)g(z)|_{\mathcal{C}} - \int_{\mathcal{C}} f'(z)g(z)\,\mathrm{d}z$$

Beweis:
Man führt das Problem auf die Produktregel der Differentiation zurück:

$$(fg)' = f'g + fg'$$

Integriert man beide Seiten und stellt die entstehende Gleichung um so erhält man die Behauptung.

□

Beispiel 10.2:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} \sin^2 z\,\mathrm{d}z &= -\sin z\cos z|_{\mathcal{C}} + \int_{\mathcal{C}} \cos^2 z\,\mathrm{d}z \\
&= -\sin z\cos z|_{\mathcal{C}} + \int_{\mathcal{C}} (1 - \sin^2 z)\,\mathrm{d}z \\
&= -\sin z\cos z|_{\mathcal{C}} + z|_{\mathcal{C}} - \int_{\mathcal{C}} \sin^2 z\,\mathrm{d}z \\
\Rightarrow\quad 2\int_{\mathcal{C}} \sin^2 z\,\mathrm{d}z &= (z - \sin z\cos z)|_{\mathcal{C}} \\
\Rightarrow\quad \int_{\mathcal{C}} \sin^2 z\,\mathrm{d}z &= \frac{(z - \sin z\cos z)|_{\mathcal{C}}}{2}
\end{aligned}$$

10.4 Satz:

Ist $F(z)$ eine Stammfunktion von $f(z)$ in D und $h(\omega)$ holomorph in G. Sei weiter $h(G) \subset D$, so ist $F(h(\omega))$ eine Stammfunktion von $f(h(\omega))h'(\omega)$

Beweis:

$$(F(h(\omega)))' = F'(h(\omega))h'(\omega) = f(h(\omega))h'(\omega)$$

□

10.5 Satz:

Sei $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ für $|z| < \rho$, dann ist

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}, \; |z| < \rho$$

Eine Stammfunktion von f.

Beweis:

Offensichtlich hat die Funktion F den selben Konvergenzradius, denn $\left|\frac{a_n}{n+1} z^{n+1}\right| < |a_n z^n| \, |z|$. Die Eigenschaft der Stammfunktion rechnet man einfach aus:

$$F(z)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \left(z^{n+1}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = f(z)$$

□

11 Umlaufzahl

11.1 Einleitung und Definition

Sei $\mathcal{C} : z(t), \; t \in [\alpha, \beta], \; z(\alpha) = z(\beta), \; z(t) \neq 0 \; \forall \; t \in [\alpha, \beta]$ eine geschlossene Kurve. Sei weiter $\arg(z(t))$ eine stetige Abbildung in $[\alpha, \beta]$, dann gilt, weil $\mathcal{C}$ geschlossen ist,

$$\arg(z(\beta)) - \arg(z(\alpha)) = 2\pi n \text{ für ein } n \in \mathbb{Z}$$

Die Umlaufzahl der Kurve soll die Netto-Anzahl der Umläufe um 0 sein und ist definiert als

11.1 Definition (Umlaufzahl):

$$n(\mathcal{C}, 0) := \frac{1}{2\pi} \left(\arg(z(\beta)) - \arg(z(\alpha))\right) \; \textit{heißt Umlaufzahl von } \mathcal{C}$$

Beispiel 11.1:

Betrachten wir nun die geschlitzte komplexe Ebene $\{z \in \mathbb{C} | \varphi - \pi < \arg(z) < \varphi + \pi\}$. Dann ist

$$(\log z)' = \frac{1}{z} \tag{11.1}$$

Sei nun wieder $\mathcal{C} = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathcal{C}_k$ eine geschlossene Kurve repräsentiert durch die Parametrisierungen $z_k(t), \; t \in [\alpha_k, \alpha_{k+1}]$ mit

$$\alpha = \alpha_1 < .. < \alpha_{n+1} = \beta$$

eine Zerteilung der Kurve $\mathcal{C}$ derart, dass $\arg(z_k(t)) \in (\varphi_k - \pi, \varphi_k + \pi)$ für $\varphi_k = \arg(z_k(\alpha_k)), k = 1, ..., n$. Dann gilt mit (2) und $z_k := z_k(\alpha_k)$:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathcal{C}} \frac{\mathrm{d}z}{z} &= \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\mathcal{C}_k} \frac{\mathrm{d}z}{z} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\log|z_{k+1}| - \log|z_k| + \mathrm{i}\left(\arg\left(z_{k+1}\right) - \arg\left(z_k\right)\right)\right) \\
&= \log|z_{n+1}| - \log|z_1| + \mathrm{i}\left(\arg\left(z_{n+1} - \arg(z_1)\right)\right) \\
&\overset{z_1 = z_{n+1}}{=} \mathrm{i}(\arg(z(\alpha)) - \arg(z(\beta))) \\
&= 2\pi\,\mathrm{i}\, n(\mathcal{C}, 0) \\
&\Rightarrow \\
n(\mathcal{C}, 0) &= \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int\limits_{\mathcal{C}} \frac{\mathrm{d}z}{z}
\end{aligned}$$

Also ist die Umlaufzahl auch genau das, was wir von ihr erwartet haben!

11.2 Umlaufzahl um allgemeine Punkte $z_0 \in \mathbb{C}$

11.2 Definition:

Sei $z \in \mathbb{C}$, $\mathcal{C}$ eine geschlossene Kurve parametrisiert durch $z(t), t \in [\alpha, \beta]$ und $z_0 \notin \mathrm{spur}(\mathcal{C})$, dann ist mit

$$n(\mathcal{C}, z_0) = \frac{1}{2\pi}\left(\arg(z(\beta) - z_0) - \arg(z(\alpha) - z_0)\right)$$

die Umlaufzahl von $\mathcal{C}$ um z_0 gegeben. Es ergibt sich analog zum vorigen Fall

$$n(\mathcal{C}, z_0) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int\limits_{\mathcal{C}} \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0}$$

Also ist die Umlaufzahl einer Kurve $\mathcal{C}$ um einen Punkt z_0 in der komplexen Ebene das gleiche wie die Umlaufzahl der um z_0 verschobenen Kuve $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C} - z_0$ um $0 \in \mathbb{C}$

$$n(\mathcal{C}, z_0) = n(\mathcal{C}_0, 0)$$

11.1 Lemma:

Ist $\mathcal{C}$ eine geschlossene Kurve, so ist $n(\mathcal{C}, z)$ auf jeder Zusammenhangskomponente $D \subset \mathbb{C} \setminus \mathrm{spur}(\mathcal{C})$ konstant.

Beweis:

Zuerst stellen wir fest, dass die Spur einer geschlossenen Kurve eine kompakte Menge darstellt und daher $C \setminus \mathrm{spur}(\mathcal{C})$ tatsächlich in (bezüglich der Topologie von $\mathbb{C}$ offene) Zusammenhangskomponenten zerfällt.
Seien nun $z_1, z_2 \in D$ beliebig, dann gilt

$$n(\mathcal{C}, z_1) - n(\mathcal{C}, z_2) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int\limits_{\mathcal{C}} \left(\frac{1}{z - z_1} - \frac{1}{z - z_2}\right) \mathrm{d}z = \frac{z_1 - z_2}{2\pi\,\mathrm{i}} \int\limits_{\mathcal{C}} \frac{\mathrm{d}z}{(z - z_1)(z - z_2)}$$

Wegen der Kompaktheit von $\mathrm{spur}(\mathcal{C})$ ist $\mathbb{C} \setminus \mathrm{spur}(\mathcal{C})$ und damit auch all seine Zusammenhangskomponenten D offen. Folglich gibt es nun eine kompakte Kreisscheibe $K \subset D$ um ein beliebiges $z_1 \in D$, welche komplett in D liegt. Sei der Radius der Kreisscheibe ϵ und $z_2 \in K$ s.d. $|z_1 - z_2| \leq \frac{\pi\epsilon^2}{L(\mathcal{C})}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
|n(\mathcal{C}, z_1) - n(\mathcal{C}, z_2)| &\overset{\text{Std.absch.}}{\leq} \frac{1}{2\pi} \underbrace{|z_1 - z_2|}_{\leq \frac{\pi\epsilon^2}{L(\mathcal{C})}} \frac{1}{\epsilon^2} L(\mathcal{C}) \\
&\leq \frac{1}{2} \\
&\Rightarrow \\
n(\mathcal{C}, z_1) &= n(\mathcal{C}, z_2) \;\forall z_1, z_2 \in K
\end{aligned}$$

Da wir um jeden Punkt $z \in \mathbb{C}$ mit $n(\mathcal{C}, z) = n(\mathcal{C}, z_1)$ eine solche Umgebung legen können, in der die Umlaufzahl konstant ist, ist

$$U = \{z \in D \mid n\left(\mathcal{C}, z\right) = n\left(\mathcal{C}, z_1\right)\}$$

offen und wegen $z_1 \in U$ auch nicht leer. Aus selbigem Grund (wähle andere Umlaufzahl) ist

$$V = \{z \in D \mid n(\mathcal{C}, z) \neq n(\mathcal{C}, z_1)\} = \bigcup_{n(\mathcal{C},z_1) \neq j \in \mathbb{N}} \{z \in D \mid n(\mathcal{C}, z) = j\}$$

ebenfalls offen. Dann gilt offensichtlich

$$U \cup V = D \text{ und } U \cap V = \emptyset$$

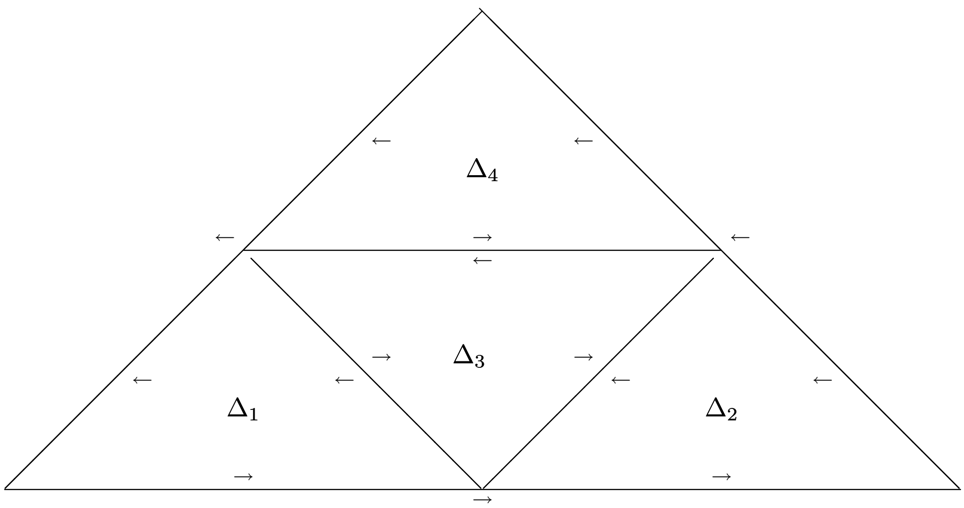
was aber zur Folge hat, dass $V = \emptyset$ gilt (weil D zusammenhängend ist). $\square$

12 Das Integrallemma von Coursat

12.1 Satz (Integrallemma von Coursat, 1883):
Ist $f(z)$ holomorph in D, so gilt für jedes Dreieck $\Delta \subset D$

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

<u>Beweis:</u>
Skizze: die Pfeile zeigen die Integrationsrichtung beim Durchlaufen des Randes der Dreiecke an.



Offensichtlich sieht man an diesem Diagramm, dass

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{4} \int_{\partial\Delta_j} f(z)\,\mathrm{d}z$$

und

$$L(\partial\Delta_j) = \frac{L(\partial\Delta)}{2}$$

Sei dazu bemerkt, dass eine solche Aufteilung mit halbierender Seitenlänge auch für ungleichseitige Dreiecke möglich ist, wenn man als Eckpunkte des mittleren Dreiecks gerade die Mittelpunkte der Seiten des großen Dreiecks wählt. Auf diese Weise lässt sich stets leicht durch Parallelverschiebung einsehen, dass der Umfang eines jeden der 4 kleinen Dreiecke gerade die Hälfte des Umfangs des großen Dreiecks ist.
Wählen wir nun das $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ derart, dass

$$\left| \int_{\partial\Delta_k} f(z)\,\mathrm{d}z \right| = \max_{i=1,..,4} \left| \int_{\partial\Delta_i} f(z)\,\mathrm{d}z \right|$$

dann setzen wir $\Delta^{(0)} = \Delta,\ \Delta^{(1)} = \Delta_k,\ L_0 := L(\partial\Delta),\ L_1 := L\left(\partial\Delta^{(1)}\right)$.

Offensichtlich gilt $L_1 = \frac{L_0}{2}$ und $\left| \int\limits_{\partial\Delta} f(z)\,\mathrm{d}z \right| \leq 4 \left| \int\limits_{\partial\Delta^{(1)}} f(z)\,\mathrm{d}z \right|$.

Man wiederholt dieses Verfahren iterativ und erhält eine Folge $\Delta^{(n)}$ von Dreiecken derart, dass gelten:

$$
\begin{aligned}
&(1) \qquad \Delta = \Delta^{(0)} \supset \Delta^{(1)} \supset .. \supset \Delta^{(n)} \supset ... \\
&(2) \qquad L_n = L(\partial\Delta^{(n)}) = \frac{L_0}{2^n} \\
&(3) \qquad \left| \int_{\partial\Delta} f(z)\,\mathrm{d}z \right| \leq 4^n \left| \int_{\partial\Delta^{(n)}} f(z)\,\mathrm{d}z \right|
\end{aligned}
$$

Sei nun $z_n \in \Delta^{(n)}\ \forall\ n \in \mathbb{N}$, dann gilt wegen $\Delta_m \subset \Delta_n\ \forall\ m \geq n\ z_m \in \Delta^{(n)}\ \forall\ n \leq m$ und $|z_m - z_n| \leq L_n = L_0 \cdot 2^{-n}$. Damit folgt direkt, dass $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist und wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{C}$ sowie der Abgeschlossenheit von $\Delta^{(n)}\ \forall n \in \mathbb{N}$, dass $z_n \xrightarrow{n \longrightarrow \infty} a \in \Delta$.

Wegen der Holomorphie von f gilt außerdem

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + hr(h),\ r(h) \xrightarrow{h \longrightarrow 0} 0$$

Also $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ s.d $B_\delta(a) \subset D$ und $(0 \leq |h| < \delta)\ \Rightarrow\ |r\,(h)| < \varepsilon$.
Wir wählen nun ein $m \in \mathbb{N}$ derart, dass $L_m < \delta$. Dann folgt wegen der Eigenschaft 1 unserer Folge, dass $a \in \Delta^{(m)}$. Sei nun $z \in \Delta^{(m)}\ \Rightarrow\ |z - a| < L_m < \delta$ und $h = z - a$, d.h.

$$f(a+h) = f(z) = f(a) + (z-a)f'(a) + (z-a)r(z-a)$$

und folglich

$$\int_{\partial\Delta^{(m)}} f(z)\,\mathrm{d}z = \underbrace{\int_{\partial\Delta^{(m)}} (f(a) + f'(a)(z-a))\,\mathrm{d}z}_{\text{linear in } z\ \Rightarrow\ \text{Stammfunktion}\ \Rightarrow\ =0} + \int_{\partial\Delta^{(m)}} (z-a)r(z-a)\,\mathrm{d}z = \int_{\partial\Delta^{(m)}} (z-a)r(z-a)\,\mathrm{d}z$$

und mit der Abschätzung von oben

$$\left| \int_{\partial\Delta^{(m)}} f(z)\,\mathrm{d}z \right| < \left| \int_{\partial\Delta^{(m)}} (z-a)\varepsilon\,\mathrm{d}z \right| \overset{\text{Std.Absch.}}{\leq} L_m^2\varepsilon$$

Damit folgt aber direkt

$$
\begin{aligned}
\left| \int_{\partial\Delta} f(z)\,\mathrm{d}z \right| &\leq 4^m \left| \int_{\partial\Delta^{(m)}} f(z)\,\mathrm{d}z \right| \\
&< 4^m L_m^2 \varepsilon \\
&= 4^m \frac{L_0^2}{4^m}\varepsilon \\
&= L_0^2 \varepsilon
\end{aligned}
$$

für beliebig kleines ε

$$\Rightarrow \int_{\partial\Delta} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. □

12.1 Lemma (Zusatz):

Sei D ein Gebiet und $z_0 \in D$ sowie f holomorph in $D \setminus \{z_0\}$ und stetig in z_0, so gilt für alle Dreiecke $\Delta \subset D$

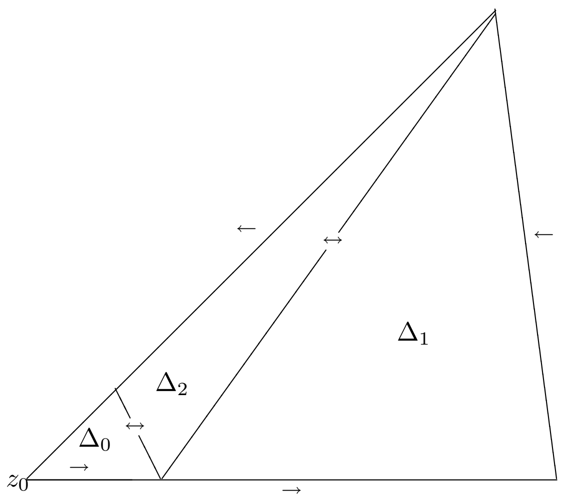
$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Beweis:

Wir führen eine Fallunterscheidung durch:

- $\boxed{z_0 \notin \Delta}$
  Dieser Fall ist trivial

- $\boxed{z_0 \text{ ist Eckpunkt von } \Delta}$



Wir teilen das Dreieck Δ so ein, dass drei Dreiecke entstehen, von denen das Dreieck Δ_0, das z_0 enthält beliebig klein wird. Dann gilt:

$$\int\limits_{\partial\Delta} f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_{\partial\Delta_0} f(z)\,\mathrm{d}z + \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\partial\Delta_i} f(z)\,\mathrm{d}z$$

Dann gilt mit der Stetigkeit von f an z_0

$$\exists\delta : \ |z - z_0| < \delta \ \Rightarrow \ |f(z) - f(z_0)| < 1 \ \Rightarrow \ |f(z)| < 1 + |f(z_0)| =: M$$

Dann gilt, so $\Delta_0 \ \subset B_\delta(z_0)$

$$\left| \int\limits_{\partial\Delta_0} f(z) d(z) \right| < ML(\partial\Delta_0) < 6M\varepsilon$$

Dieser Ausdruck wird beliebig klein, was bedeutet, dass das Integral über den Rand des großen Dreiecks die Summe der Integrale über die beiden anderen Dreiecksränder ist. Für diese gilt die Behauptung.

- $\boxed{\text{sonst}}$

  man kann in diesem Fall das Dreieck derart zerlegen, dass z_0 Eckpunkt einer Menge von kleineren Dreiecken wird und das Integral analog zu oben zerfällt. Dann benutzt man den zweiten Fall. $\square$

13 Integralsatz und Integralformel von Cauchy I

13.1 Definition:

Ein Gebiet D heißt sternförmig mit Zentrum $c \in D$, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist:

$$\{tc + (1-t)g \mid t \in [0,1]\} \subset D \ \forall g \in D$$

13.1 Satz:

Ist f im sternförmigen Gebiet D mit Zentrum c holomorph und gilt für jedes Dreieck $\Delta \subset D$

$$\int\limits_{\partial\Delta} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

so ist

$$F(z) := \int\limits_{c}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta, \ z \in D$$

eine Stammfunktion von f auf D, wobei die Integration entlang der Strecke von c nach z erfolgt.

Beweis:
Seien $z, z+h \in D$ derart dicht beieinander, dass auch die Verbindunsstrecke komplett in D enthalten ist, dann folgt nach Voraussetzung

$$\int_c^z f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta + \int_z^{z+h} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta + \int_{z+h}^{c} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \int_{\partial\Delta} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Damit folgt dann aber

$$\begin{aligned} F(z+h) &= F(z) + \int_z^{z+h} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \\ &= F(z) + \int_z^{z+h} f(z)\,\mathrm{d}\zeta + \int_z^{z+h} (f(\zeta) - f(z))\,\mathrm{d}\zeta \\ &= F(z) + hf(z) + hr(h) \text{ mit } r(h) = \frac{1}{h}\int_z^{z+h} (f(\zeta) - f(z))\,\mathrm{d}\zeta \end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit von f gilt nun $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ s.d. $|t - z| < \delta \ \Rightarrow\ |f(t) - f(z)| < \varepsilon$
Damit folgt dann für $|h| < \delta$ dass $r(h) < \frac{1}{h}h\varepsilon = \varepsilon$, was gleichbedeutend ist mit

$$r(h) \xrightarrow{h \longrightarrow 0} 0$$

ist. Das wiederum zeigt die Behauptung.

□

13.2 Satz (Cauchy'scher Integralsatz):
Ist f in dem sternförmigen Gebiet $D \subseteq C$ eine holomorphe Funktion, so gilt für jede geschlossene Kurve $\mathcal{C}$ in D:

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

und für zwei Kurven $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ in D von a nach b gilt:

$$\int_{\mathcal{C}_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\mathcal{C}_2} f(z)\,\mathrm{d}z$$

Beweis:
Dies ist eine direkte Folgerung aus dem Integrallemma von Coursat und Satz 1: Da f holomorph ist, gibt es eine Stammfunktion F, d.h.

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)\,\mathrm{d}z = F|_{\mathcal{C}}$$

Da aber $\mathcal{C}$ geschlossen ist, folgt somit die erste Behauptung.
Im zweiten Fall gilt analog

$$\int_{\mathcal{C}_1} f(z)\,\mathrm{d}z = F|_a^b = \int_{\mathcal{C}_2} f(z)\,\mathrm{d}z$$

□

13.1 Lemma (Zusatz zu Satz 2):
Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet, $z_0 \in D$, f eine holomorphe Funktion auf $D \setminus \{z_0\}$ und stetig in z_0. Dann besitzt f eine Stammfunktion und es gelten die Aussagen aus Satz 2.

Beweis:
Da das Integrallemma von Coursat nach dem dort gemachten Zusatz auch im Falle einer auf $D \setminus \{z_0\}$ holomorphen und in z_0 stetigen Funktion gilt, folgt diese Aussage genauso wie Satz 2.

□

13.3 Satz (Cauchy'sche Integralformel):

Sei f in dem sternförmigen Gebiet $D \subseteq C$ eine holomorphe Funktion. Ist $z \in D$ fest und $\mathcal{C}$ eine geschlossene Kurve in D, welche nicht durch z verläuft (also $z \notin \operatorname{spur}(\mathcal{C})$), so gilt die ***Cauchy'sche Integralformel:***

$$n(\mathcal{C}, r) \cdot f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta$$

Beweis:

Wir definieren die Funktion f_1 auf D durch

$$f_1(\zeta) := \begin{cases} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z} & \text{falls } z \neq \zeta \in D \\ f'(z) & \text{falls } \zeta = z \end{cases}$$

Dann ist f_1 in $D \setminus \{z\}$ eine holomorphe Funktion und außerdem stetig in z. Damit können wir den Integralsatz von Cauchy verwenden (siehe Zusatz), d.h.

$$0 \stackrel{(1)}{=} \int_{\mathcal{C}} f_1(\zeta) \, \mathrm{d}\zeta \stackrel{(2)}{=} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta$$

wobei (1) deshalb gilt, weil $\mathcal{C}$ geschlossen ist (Integralsatz von Cauchy) und (2) einfach nach Definition von f_1 folgt, da $z \notin \operatorname{spur}(\mathcal{C})$, d.h. $\zeta \neq z$. Jetzt zerlegen wir dieses Integral, also

$$0 = \int_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta - \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta$$

Da aber $\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta = 2\pi \mathrm{i} \cdot n(\mathcal{C}, z)$ gilt, folgt somit:

$$n(\mathcal{C}, z) \cdot f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta$$

□

Folgerung 13.1 (Der Cauchy'sche Integralsatz von Kreisscheiben und die Mittelwertformel):

1. *Sei f holomorph in dem Gebiet $D \subseteq C$ und die Menge $A := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\}$ für festes a liege mit Rand ∂A gänzlich in D. Dann gilt*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{|\zeta - a| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta$$

   für alle $z \in D$ mit $|z - a| < r$.

2. *Unter den selben Voraussetzungen wie für Folgerung 1) gilt die Mittelwertformel:*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + r \cdot \exp(\mathrm{i}\varphi)) \, \mathrm{d}\varphi$$

Beweis:

1. Offenbar ist das Gebiet A sternförmig. Also kann der Integralsatz für die Kurve angewendet werden, welche den Rand parametrisiert.

2. Dies folgt direkt aus Folgerung 1), indem man die Parametrisierung

$$\zeta(\varphi) := a + r \cdot \exp(\mathrm{i}\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$

   verwendet, denn dann ist $\zeta'(\varphi) = \mathrm{i} \cdot r \cdot \exp(\mathrm{i}\varphi)$ und durch Kürzen folgt so direkt die Behauptung.

□

13.1 Hilfssatz:

Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-z)^n} &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n \cdot (n+1) \cdot \ldots \cdot (n+k-1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k} z^k \\ &= 1 + n \cdot z + z^2 \cdot q_n(z)\end{aligned}$$

mit $q_n(z) := \sum_{k=2}^{\infty} \frac{n \cdot (n+1) \cdot \ldots \cdot (n+k-1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k} z^{k-2}$.

Weiter gilt für $|z| \le \theta < 1$:

$$|q_n(z)| \le \frac{1}{\theta^2 (1-\theta)^n}$$

Beweis:

Induktion über n.

- *Induktionsanfang:* Für $n = 1$ ist die Aussage genau die Summenformel der geometrischen Reihe.
- *Induktionsvoraussetzung:* Gelte die Behauptung für alle $m \le n$, d.h. wir nehmen an, dass die Reihe für alle $m \le n$ konvergiert und die Aussagen erfüllt.
- *Induktionsanfang:* Wir differenzieren die Aussage für n, welche nach I.V. gilt:

$$\begin{aligned} & \frac{n}{(1-z)^{n+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n \cdot (n+1) \cdot \ldots \cdot (n+k-1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k} \cdot k \cdot z^{k-1} \\ \overset{\text{Kürzen von } n \text{ und } k}{\Rightarrow} \quad & \frac{1}{(1-z)^{n+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(n+1) \cdot \ldots \cdot (n+k-1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (k-1)} \cdot z^{k-1} \\ \overset{\text{Indexverschiebung}}{\Rightarrow} \quad & \frac{1}{(1-z)^{n+1}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(n+1) \cdot \ldots \cdot ((n+1)+k-1)}{1 \cdot \ldots \cdot k} z^k \end{aligned}$$

  Damit gilt die Aussage auch für $n+1$.

  Jetzt zeigen wir die Abschätzung für $|z| \le \tau < 1$:

$$\begin{aligned}|q_n(z)| &\le \sum_{k=2}^{\infty} \frac{n \cdot (n+1) \cdot \ldots \cdot (n+k-1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k} \theta^{k-2} \\ &< \frac{1}{\theta^2} \underbrace{\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n \cdot (n+1) \cdot \ldots \cdot (n+k-1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k} \theta^k\right)}_{\overset{\text{eben gezeigt}}{=} \frac{1}{(1-\theta)^n}} \\ &= \frac{1}{\theta^2 (1-\theta)^n}\end{aligned}$$

□

13.2 Hilfssatz:

Sei g eine stetige Funktion in dem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$, $\mathcal{C}$ eine Kurve in G und D ein Gebiert, welches $\mathcal{C}$ nicht schneidet, also $D \subseteq \mathbb{C} \setminus \operatorname{spur}(\mathcal{C})$.

Dann ist die Funktion

$$f(z) := \int_{\mathcal{C}} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta \text{ für } z \in D$$

holomorph in D und besitzt dort Ableitungen beliebiger Ordnung:

$$f^{(n)}(z) = n! \int_{\mathcal{C}} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \, \mathrm{d}\zeta \text{ für } z \in D, n \in \mathbb{N}_0$$

Beweis:

Sei $z \in D$. Wir wählen ein $\delta > 0$ s.d. $B_\delta(z) \subseteq D$ gilt. Sei weiter $0 < \theta < 1$ und $\zeta \in \operatorname{spur}(\mathcal{C})$. Wähle ein $h \in \mathbb{C}$ s.d. $|h| \le \theta \cdot \delta$. Dann gilt zunächst

$$\left|\frac{h}{\zeta - z}\right| \le \theta$$

Weiter definieren wir

$$f_n(z) := \int\limits_{\mathcal{C}} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^n}\, \mathrm{d}\zeta \text{ für } z \in D$$

Jetzt gilt allgemein:

$$\frac{1}{(\zeta - (z+h))^n} = \frac{1}{(\zeta - z)^n \left(1 - \frac{h}{\zeta - z}\right)^n} \overset{\text{Hilfssatz 13.1}}{=} \frac{1}{(\zeta - z)^n} \left(1 + n \cdot \frac{h}{\zeta - z} + \left(\frac{h}{\zeta - z}\right)^2 q_n\left(\frac{h}{\zeta - z}\right)\right)$$

Damit gilt dann aber

$$f_n(z+h) = \int\limits_{\mathcal{C}} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - (z+h))^n}\, \mathrm{d}\zeta = \int\limits_{\mathcal{C}} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^n}\, \mathrm{d}\zeta + n \cdot h \cdot \int\limits_{\mathcal{C}} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, \mathrm{d}\zeta + h^2 \cdot \int\limits_{\mathcal{C}} \frac{g(\zeta)\, q_n\left(\frac{h}{\zeta - z}\right)}{(\zeta - z)^{n+2}}\, \mathrm{d}\zeta$$

und das bedeutet

$$f_n(z+h) = f_n(z) + n \cdot f_{n+1}(z) \cdot h + h \cdot r_n(h) \text{ mit } r_n(h) := h \cdot \int\limits_{\mathcal{C}} \frac{g(\zeta)\, q_n\left(\frac{h}{\zeta - z}\right)}{(\zeta - z)^{n+2}}\, \mathrm{d}\zeta$$

Wie oben gesehen ist $\left|\frac{h}{\zeta - z}\right| \leq \theta$, also nach Hilfssatz 13.1 auch $q_n(z) \leq \frac{1}{\theta^2 (1-\theta)^n}$. Weiter ist $(\zeta - z) > \delta$ nach Voraussetzung und somit gilt mit der Bezeichnung $M := \sup\limits_{\zeta \in \operatorname{spur}(\mathcal{C})} |g(\zeta)| < \infty$ die Relation

$$|r_n(h)| \leq |h| \frac{M \cdot L(\varphi)}{\theta^2 (1-\theta)^n \delta^{n+2}} \xrightarrow{h \longrightarrow 0} 0$$

Also ist f_n holomorph in D und es gilt $f_n'(z) = n \cdot f_{n+1}(z)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da aber $f(z) = f_1(z)$ folgt damit die Behauptung.

□

Bemerkung 13.1:
Unter den Voraussetzungen von Satz 3 gilt also:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint\limits_{|\zeta - a| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta \text{ falls } |z - a| < r \\ \overset{\text{Hauptsatz 2}}{\Rightarrow} \quad f'(z) &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint\limits_{|\zeta - a| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, \mathrm{d}\zeta \\ f^{(n)}(z) &= \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \oint\limits_{|\zeta - a| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, \mathrm{d}\zeta \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis fassen wir in Satz 4 zusammen:

13.4 Satz:
Ist f eine in dem Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}$ holomorphe Funktion, so ist auch f' eine in D holomorphe Funktion, insbesondere existieren alle höheren Ableitungen

$$f^{(n)}, \; n \in \mathbb{N}$$

und sind in D holomorph.

Beweis:
Wie gesagt, dieser Satz ist eine direkte Folgerung aus der Cauchy'schen Integralformel: Nach Satz 3 besitzt f eine Darstellung

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint\limits_{|\zeta - a| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta \text{ falls } |z - a| < r$$

Nach Hilfssatz 2 ist diese Funktion sowie alle ihre Ableitungen aber holomorph.

□

13.2 Lemma (Zusatz zu Satz 3):

Unter den Voraussetzungen des Satz 3 gilt für $n = 1, 2, ...$:

$$n(\mathcal{C}, z) f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi\,\mathrm{i}} \oint\limits_{|\zeta - a| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \,\mathrm{d}$$

falls $|z - a| < r$ ist.

Beweis:

Siehe die Bemerkung zu Satz 3.

□

13.5 Satz (Morera 1886):

Eine stetige Funktion f in dem Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}$ ist genau dann holomorph in D, wenn für jedes Dreieck $\Delta \subset D$ gilt:

$$\int\limits_{\partial\Delta} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Beweis:

- $\boxed{\text{„}\Rightarrow\text{“}}$

  Diese Richtung folgt direkt aus dem Integrallemma von Coursat.

- $\boxed{\text{„}\Leftarrow\text{“}}$

  Sei $z \in D$ gegeben. Wir können eine Kreisscheibe C um z legen, s.d. $C \subseteq D$. Dann ist C sternförmig und somit existiert nach Satz 1 und der Voraussetzung eine Stammfunktion F auf C. Dann ist f auf C aber Ableitung einer holomorphen Funktion und somit selbst wieder holomorph. Da dies für jeden Punkt $z \in D$ gilt, muss f also auf ganz D holomorph sein.

□

13.6 Satz:

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $z_0 \in D$. Ist f auf $D \setminus \{z_0\}$ eine holomorphe Funktion, welche an z_0 stetig ist, so ist f holomorph in ganz D.

Beweis:

Dies folgt direkt aus dem Integrallema von Coursat in Verbindung mit Satz 5.

□

Bemerkung 13.2 (Herleitung über den Gauß'schen Integralsatz):

Sei $f = u + \mathrm{i}\,v$ eine in dem Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}$ holomorphe Funktion mit stetiger Ableitung. Schreibe $z = x + \mathrm{i}\,y$. Sei weiter $\mathcal{C}$ die Kurve, welche den Rand einer Kreisscheibe B beschreibt (im mathematisch positiven Sinne), s.d. $B \subseteq D$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathcal{C}} f(z)\,\mathrm{d}z &= \int\limits_{\mathcal{C}} (u + \mathrm{i}\,v)(\,\mathrm{d}x + \mathrm{i}\,\mathrm{d}y) \\
&= \int\limits_{\mathcal{C}} (u\,\mathrm{d}x + v\,\mathrm{d}y) + \mathrm{i}\int\limits_{\mathcal{C}} (v\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y) \\
&\overset{\text{Gauß'scher Integralsatz}}{=} -\int\limits_{B} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \mathrm{i}\int\limits_{B} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&\overset{\text{Cauchy-Riemann-DGL's}}{=} 0
\end{aligned}$$

Unter einigen zusätzlichen Voraussetzungen an das Gebiet, die Kurve und die Funktion kann man also den *Integralsatz von Cauchy* auch über den allgemeineren Satz von Gauß beweisen.

14 Taylorentwicklung

14.1 Satz:

Sei f holomorph in $D \supset \overline{B_r(z_0)}$, dann gilt für $|z-z_0|<r$ und $N \in \mathbb{N}$ die Taylorsche Formel:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n + T_N(z)$$

mit

$$T_N(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint\limits_{|\xi-z_0|=r} \frac{f(\xi)\cdot(z-z_0)^{N+1}}{(\xi-z)(\xi-z_0)^{N+1}}\,\mathrm{d}\xi$$

Beweis:

Sei $1 \neq z \in \mathbb{C}$ und $N \in \mathbb{N}$: Dann gilt

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + .. + z^n + \frac{z^{N+1}}{1-z} \tag{14.1}$$

Sei nun $z_0 \neq \xi \neq z$, dann:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\xi - z} &= \frac{1}{(\xi-z_0)-(z-z_0)} \\
&= \frac{1}{(\xi-z_0)\left(1-\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)} \\
&\overset{(14.1)}{=} \frac{1}{\xi-z_0} + \frac{z-z_0}{(\xi-z_0)^2} + .. + \frac{(z-z_0)^N}{(\xi-z_0)^{N+1}} + \frac{(z-z_0)^{N+1}}{(\xi-z)(\xi-z_0)^{N+1}}
\end{aligned} \tag{14.2}$$

Damit folgt nun

$$\begin{aligned}
f(z) &\overset{\text{Integralformel}}{=} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint\limits_{|\xi-z_0|=r} \frac{f(\xi)}{\xi-z}\,\mathrm{d}\xi \\
&\overset{(14.2)}{=} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint\limits_{|\xi-z_0|=r} f(\xi)\frac{1}{(\xi-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\xi (z-z_0)^n \\
&\quad + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint\limits_{|\xi-z_0|=r} \frac{f(\xi)}{(\xi-z)(\xi-z_0)^{N+1}}\,\mathrm{d}\xi (z-z_0)^{N+1} \\
&\overset{\text{Integralformel}}{=} \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint\limits_{|\xi-z_0|=r} \frac{f(\xi)}{(\xi-z)(\xi-z_0)^{N+1}}\,\mathrm{d}\xi (z-z_0)^{N+1}
\end{aligned}$$

Das zeigt die Behauptung. □

14.2 Satz:

Sei f holomorph in D und $z_0 \in D$, dann besitzt f in jeder Kreisscheibe um z_0, welche in D enthalten ist die Taylorentwicklung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n.$$

Beweis:

Sei $|z-z_0|<r$ in D, $M := \sup\limits_{|\xi-z_0|=r} |f(\xi)|$, dann gilt: $|z-z_0|<r \;\Rightarrow\; |z-z_0| = \vartheta r$ mit einem $\vartheta \in [0,1)$ und es folgt:

$$\left|\frac{(z-z_0)^{N+1}}{(\xi-z)(\xi-z_0)^{N+1}}\right| = \left|\frac{1}{(\xi-z)}\right| \cdot \left|\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right|^{N+1} \leq \left|\frac{1}{(\xi-z_0)-(z-z_0)}\right| \left|\frac{\vartheta r}{r}\right|^{N+1} \leq \frac{\vartheta^{N+1}}{r(1-\vartheta)}$$

Und dann:

$$|T_N(z)| \leq \left|\frac{1}{2\pi}\frac{M\vartheta^{N+1}}{r(1-\vartheta)}2\pi r\right| = \frac{M\vartheta^{N+1}}{1-\vartheta} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

□

Beispiel 14.1:

1. $$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

2. $\frac{1}{1-z}$ ist holomorph in $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, $\left(\frac{1}{1-z}\right)^{(n)} = \frac{n!}{(1-z)^{n+1}}$. Sei nun $z_0 = 1$, dann gilt für alle
$$z \in \mathbb{C}: \ |z-z_0| < |z_0 - 1|: \ \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(1-z_0)^{n+1}}$$

3. Wir betrachten den Logarithmus auf dem Hauptzweig, dann gilt
$$\log(z)' = \frac{1}{z} \ \Rightarrow \ \log^{(n)}(z) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{z^n}$$
$$\Rightarrow \ \log(z) = \log(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{nz^n}(z-z_0)^n \ \forall \begin{cases} |z-z_0| < |z_0| & \Re(z_0) \geq 0 \\ |z-z_0| < |z_0 - \Im(z_0)| & \Re(z_0) < 0 \end{cases}$$
Im Sonderfall $z_0 = 1$ ergibt sich gerade
$$\log(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{nz^n}(z-1)^n \ \forall |z-1| < 1$$

4. Wie betrachten $|z| < 1$, $a \in \mathbb{C}$, $f(z) = (1+z)^a = \exp(a \log(1+z))$ auf dem Hauptzweig. Dann ergibt sich
$$\frac{1}{n!}\left((1+z)^a\right)^{(n)} = \frac{a(a-1) \cdot .. \cdot (a-n+1)}{n!}(1+z)^{a-n}$$
und damit beim Entwickeln von f um 0
$$(1+z)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} z^n$$

14.3 Satz:

Sei $z_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$ und $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ als in $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-z_0| < R\}$ konvergente Potenzreihe gegeben. Dann gilt:
$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint\limits_{|\xi - z_0| = r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}\xi, \ 0 < r < R$$
Weiter gilt für ein $n \in \mathbb{N}$:
$$|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}, \ M(r) = \sup_{|\xi - z_0|\} \leq r} |f(\xi)|$$

<u>**Beweis:**</u>

Offensichtlich gilt:
$$f^{(k)}(z_0) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdot .. \cdot (n-k+1) a_n (z_0 - z_0)^{n-k} = k! a_k \ \Rightarrow \ a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0)$$
Weiter gilt
$$|a_k| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M(r)}{r^{n+1}} 2\pi r = \frac{M(r)}{r^n}$$
□

Bemerkung 14.1:

Die letzte Aussage des Satzes wird auch Koeffizientenabschätzung von Cauchy genannt.

14.1 Definition (ganze Funktion):

Ist f eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion, so nennen wir f eine ganze Funktion.

14.4 Satz (Liouville):
Eine beschränkte ganze Funktion ist konstant.

Beweis:

$f(z)$ ist eine ganze Funktion, d.h. $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n \ \forall \ z \in \mathbb{C}$. Mit der Beschränktheit gilt $|f(z)| < M \ \forall \ z \in \mathbb{C}$. Damit folgt aber aus der Koeffizientenabschätzung:

$$|a_n| \leq \frac{M}{r^n}, \ r > 0, n^{\in}\mathbb{N}$$

Da f eine ganze Funktion ist können wir $r \longrightarrow \infty$ betrachten und somit folgt für alle $n > 0$:

$$a_n \leq \frac{M}{r^n} \xrightarrow{r \longrightarrow \infty} 0 \quad \Rightarrow \ a_n = 0 \ \forall \ n > 0$$

□

Bemerkung 14.2:
Dieser Satz heißt zwar Satz von Liouville, welcher ihn 1847 auch tatsächlich bewies, jedoch hatte Cauchy diesen Satz bereits drei Jahre früher gezeigt.

14.5 Satz (Fundamentalsatz der Algebra):
Ein nicht-konstantes Polynom besitzt mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$

Beweis:

Sei $p(z) = a_0 + a_1 z + .. + a_n z^n$ ein Polynom mit $a_n \neq 0$.
Angenommen $p(z) \neq 0 \ \forall z \in \mathbb{C}$, dann folgt $f(z) = \frac{1}{p(z)}$ ist eine ganze Funktion und wegen der Nullstellenfreiheit von f beschränkt. Damit ist f mit dem Satz von Liouville aber konstant, was bedeutet, dass p konstant war. $\lightning$

□

Bemerkung 14.3:
Aus dem Satz folgt für ein allgemeines Polynom p:

$$p(z_1) = 0 \ \Rightarrow \ p(z) - p(z_1) = \sum_{n=1}^{k} a_n(z^n - z_1^n) = (z - z_1)\tilde{p}(z)$$

Offensichtlich ist der Grad von $\tilde{p}$ gerade um 1 kleiner als der von p und wir können so oft Nullstellen von p abspalten, bis ein konstanter Teil übrig bleibt (gerade a_n) und es gilt am Ende:

$$p(z) = (z - z_1) \cdot ... \cdot (z - z_n) a_n$$

für die (bis auf Reihenfolge) eindeutig bestimmten z_i.

14.1 Nullstellenordnung

14.6 Satz:
Sei $f(z) \not\equiv 0$ holomorph in D, dann:

$$\forall \ z \in \mathbb{C} \ \exists \ n_z \in \mathbb{N} : \ 0 = f(z) = f'(z) = .. = f^{(n_z - 1)}(z), \ f^{(n_z)}(z) \neq 0$$

n_z heißt dann ***Nullstellenordnung*** *von f an z*

Beweis: Wir definieren

$$\begin{aligned} U &:= \left\{ z_0 \in D \mid \exists \ n \in \mathbb{N} \text{ s.d. } f^{(n)}(z_0) \neq 0 \right\} \\ V &:= \left\{ z_0 \in D \mid f^{(n)}(z_0) = 0 \ \forall \ n \in \mathbb{N} \right\} \end{aligned}$$

Da f insbesondere stetig ist, muss U offen sein. V ebenfalls offen, da f an solchen Stellen $z_0 \in V$ konstant ist. Damit ist aber

$$D = U \cup V, \ U \cap V = \emptyset$$

also $D = V$ oder $D = U$, da D als Gebiet zusammenhängend ist. Da aber $f \not\equiv 0$ muss $U \neq \emptyset$ sein, da insbesondere ein $z_0 \in D$ mit $f^{(0)}(z_0) = f(z_0) \neq 0$ existiert. Also ist $V = \emptyset$ und für jedes $z \in D$ existiert ein n_z wie in der Behauptung.

□

14.7 Satz:
Sei $f \not\equiv 0$ eine holomorphe Funktion, $z_0 \in D$ und $m \in \mathbb{N}$, dann sind äquivalent:

1. *m ist Nullstellenordnung von f an z_0*
2. *$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ in einer Umgebung von z_0 und $a_m \neq 0$*
3. *$f(z) = (z-z_0)^m h(z)$ mit einer an z_0 nicht verschwindenden holomorphen Funktion h.*

Beweis:
Die Äquivalenz der ersten beiden Aussagen folgt direkt aus Satz 14.3. Und die Äquivalenz der letzten beiden Aussagen erhält man durch Ausklammern bzw. den Satz 14.3.

□

14.1 Lemma (Eigenschaften der Nullstellenordnung):
Seien $f, g \not\equiv 0$, dann gelten

- $$m(f \cdot g, z_0) = m(f, z) + m(g, z_0)$$
- $$m(f, z_0) \geq m(g, z_0) \;\Rightarrow\; m\left(\frac{f}{g}, z_0\right) = m(f, z_0) - m(g, z_o)$$

Beweis:

- In der Tat :$f(z) = (z-z_0)^{m(f,z_0)} h(z),\; h(z) \neq 0$ und $g(z) = (z-z_0)^{m(g,z_0)} h'(z_0),\; h'(z) \neq 0$ und damit
$$fg(z) = (z-z_0)^{m(f,z_0)+m(g,z_0)} \hat{h}(z),\; \hat{h}(z_0) := h(z_0)h'(z_0) \neq 0$$
- Mit obiger Notation gilt:
$$\frac{f}{g}(z) = (z-z_0)^{m(f,z_0)-m(g,z_0)} \tilde{h}(z),\; \tilde{h}(z_0) := \frac{h(z_0)}{h'(z_0)} \neq 0$$

□

14.2 Definition ($c-$Stellenordnung):
Gilt $f(z) = c$, so heißt z $c-$Stelle von f und die Zahl

$$m(f-c, z_0)$$

für $f \not\equiv c$ heißt c-Stellenordnung von f an z_0

15 Identitätssatz und analytische Fortsetzung

15.1 Satz:
$f \not\equiv 0$ sei holomorph in D, dann gilt für alle $z_0 \in D$

$$\exists r > 0 : \;\; f(z) \neq 0 \;\forall\; 0 < |z-z_0| < r$$

Mit anderen Worten: die Menge der Nullstellen hat keinen Häufungspunkt[5] *in D.*

Beweis:
Wir schreiben
$$f(z) = (z-z_0)^{m(f,z_0)} h(z) \tag{15.1}$$
mit $h(z_0) \neq 0$ für eine holomorphe Funktion h. Da h insbesondere auch stetig ist $\exists$ Umgebung U von z_0 s.d. $h(u) \neq 0 \;\forall\; u \in U$. Nach (15.1) ist dann aber auch $f(u) \neq 0 \;\forall\; u \in U$ mit $u \neq z_0$.

□

[5] Dies ist nicht zu verwechseln mit dem Häufungspunkt einer Folge. Ein Punkt a heißt Häufungspunkt einer Teilmenge $A \subseteq \mathbb{C}$, falls $\forall\; \varepsilon > 0$ die Menge $B_\varepsilon(a) \cap A$ unendlich ist! Vergleiche auch [FOA].

Bemerkung 15.1:
Das gilt nicht in $\mathbb{R}$, Gegenbeispiele sind

- $f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \forall\, x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \sin\frac{1}{x} & \forall\, x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Beide Funktionen haben 0 als Häufungspunkt ihrer Nullstellen.

15.2 Satz (Identitätssatz):
Sind f, g holomorph in D, $f(z) = g(z)$ auf einer Teilmenge von D, welche einen Häufungspunkt in D besitzt, so gilt $f(z) = g(z)\ \forall\, z \in D$

Beweis:

$$f - g \equiv 0 \text{ auf der Teilmenge } \Rightarrow\ f - g \equiv 0 \text{ auf } D$$

da die Menge der Nullstellen nach Satz 15.1 sonst keinen Häufungspunkt haben darf ($f - g$ ist holomorph!).

□

15.3 Satz:
Sei f holomorph in D, G ein Gebiet und $D \subset G$, dann gibt es höchstens eine holomorphe Fortsetzung von f auf G

15.1 Definition (analytische Fortsetzung):
*Eine solche Fortsetzung (wie in Satz 15.3) heißt **analytische Fortsetzung** von f.*

Beweis (von Satz 15.3):
Dieser Satz folgt direkt aus dem Identitätssatz. Angenommen, es gäbe zwei Fortsetzungen F_1, F_2 von f auf G. Dann würde nach Definition

$$F_1 \equiv F_2$$

auf dem Gebiet D gelten. Da aber D als Gebiet offen ist, hat D insbesondere auch einen Häufungspunkt. Damit folgt dann in der Tat aus dem Identitätssatz $F_1 \equiv F_2$ auf ganz G.

Bemerkung 15.2:
Im Reellen stimmt dieser Satz nicht. So gibt es zum Beispiel für die Funktion $f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)\ \forall\, x > 0$ folgende
C^∞−Fortsetzungen auf ganz $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} (1) \quad g_1(x) &= \begin{cases} f(x) & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \\ (2) \quad g_2(x) &= \begin{cases} f(x) & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ f(x) & x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Beispiel 15.1:

1. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n,\ |z| < 1 \ \rightsquigarrow\ g(x) = \frac{1}{1-z},\ z \neq 1$
2. $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n},\ |z| < 1 \ \rightsquigarrow\ g(z) = \log(1-z),\ z \in \mathbb{R} \setminus [1, \infty)$
3. $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2},\ |z| < 1$ - der sogenannte „Bilogarithmus“

- zu 3.) Es gilt $f'(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n} = \frac{\log(1-z)}{z}$ $|z| < 1$.
  Betrachte nun
  $$g(z) = -\int_0^z \frac{\log(1-\xi)}{\xi} \,\mathrm{d}\xi$$
  dann ist g holomorph auf $\mathbb{C} \setminus [1, \infty]$ und $g'(z) = \frac{-\log(1-z)}{z}$.
  Also ist $f' = g'$ auf $|z| < 1 \ \Rightarrow\ (f-g)'(z) \equiv 0 \ \forall |z| < 1$ und g ist die analytische Fortsetzung von f auf $\mathbb{C} \setminus [1, \infty)$

- $$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}, \ |z| < 1$$
  Angenommen G wäre ein Gebiet, $B_1(0) \subseteq G$, dann ist $\exp\left(2\pi\,\mathrm{i}\,\frac{p}{q}\right) \in G$ für natürliche p und q und es gibt ein $M \in \mathbb{N}$ derart, dass $\left|f\left(r \exp\left(2\pi\,\mathrm{i}\,\frac{p}{q}\right)\right)\right| \leq M \ \forall\ 0 < r < 1$. Weiter gilt
  $$f\left(r \exp\left(2\pi\,\mathrm{i}\,\frac{p}{q}\right)\right) = \sum_{n=0}^{q-1} r^{n!} \exp\left(2\pi\,\mathrm{i}\,\frac{pn!}{q}\right) + \sum_{n=q}^{\infty} r^{n!}$$
  Sei nun $N > q$, dann ist
  $$\sum_{n=q}^{N} r^{n!} < \sum_{n=q}^{\infty} r^{n!} < M + q$$
  Mit $N = M + 2q$ folgt
  $$\sum_{n=q}^{M+2q} r^{n!} < M + q \ \forall\ 0 < r < 1$$
  Lässt man nun r gegen 1 laufen, ergibt sich
  $$M + q + 1 \leq M + q \qquad \lightning$$
  Also kann es keine Fortsetzung geben, die $B_1(0)$ echt enthält.

15.2 Definition (Lückenreihe von Fabry):

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{k_n}, \ a_n \neq 0, \ \frac{k_n}{n} \xrightarrow{n \longrightarrow \infty} \infty$$

Die durch obige Reihe definierte Funktion lässt sich sich nicht fortsetzen in einem Gebiet, dass $B_1(0)$ echt enthält.

15.0.1 Eine größere Taylorentwicklung

Seien $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \ \forall\ |z - z_0| < r_0$ und $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_1)^n \ \forall\ |z - z_1| < r_1$ für $z_1 \in B_{r_0}(z_0)$ definiert, dann gilt
$$b_n = \frac{f^{(n)}(z_1)}{n!} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!} a_k (z_1 - z_0)^{k-n} \frac{1}{n!} = \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} a_k (z_1 - z_0)^{k-n}$$
und man erhält $f(z)$ auf $B_{r_0}(z_0) \cup B_{r_1}(z_1)$ durch Taylorentwicklung um z_1

16 Funktionenfolgen und -reihen

Sei $\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$ und $f, f_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ in A erklärt, dann definiert man

16.1 Definition (punktweise Konvergenz):

$$f_n \xrightarrow[\text{punktweise}]{} {}^{n \longrightarrow \infty} f \ \text{in } A \ \Leftrightarrow\ f_n(z) \xrightarrow{n \longrightarrow \infty} f(z) \ \forall\ z \in A$$

oder analog mit der $\varepsilon - \delta$-Formulierung:

$$f_n \xrightarrow[\text{punktweise}]{} {}^{n \longrightarrow \infty} f \ \text{in } A \ \Leftrightarrow\ \forall\ z \in A,\ \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N = N(z, \varepsilon) \in \mathbb{N} \ s.d.\ |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \ \forall\ n \geq N$$

16.2 Definition (gleichmäßige Konvergenz):

Sei $\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$ und seien die Funktionen f_n, f in A erklärt. Wir sagen

$$f_n \xrightarrow[\text{gleichmäßig}]{} {}^{n \longrightarrow \infty} f \text{ in } A \;\Leftrightarrow\; \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N} \text{ s.d. } |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon\ \forall\, n > N,\ \forall\, z \in A$$

16.1 Lemma (Cauchykriterium):

Es gilt:

$$f \xrightarrow[\text{gleichmäßig}]{} {}^{n \longrightarrow \infty} f \text{ in } A \;\Leftrightarrow\; \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N} \text{ s.d } |f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon\ \forall\, n,m > N,\ \forall\, z \in A$$

Der Beweis erfolgt völlig analog zum reellen Fall.

16.1 Satz:

Gelte $f_n \xrightarrow{n \longrightarrow \infty} f,\ g_n \xrightarrow{n \longrightarrow \infty} g$, dann gilt

1.
$$\lambda f_n + \mu g_n \xrightarrow{n \longrightarrow \infty} \lambda f + \mu g$$

2.
$$\exists M : |f_n(z)| \leq M |g_n(z)| \leq M\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall z \;\Rightarrow\; f_n g_n \xrightarrow{n \longrightarrow \infty} fg$$

Auch hier kann man den Beweis wörtlich aus der reellen Analysis abschreiben.

16.2 Satz (über die gleichmäßige Konvergenz):

Seien $f_n,\ n \in \mathbb{N}$ auf $A \subseteq \mathbb{C}$ definierte stetige Funktionen und konvergiere

$$f_n \longrightarrow f$$

gleichmäßig auf A. Dann ist f stetig in A.

Auch dieser Beweis stimmt wörtlich mit dem aus der reellen Analysis überein.

16.3 Definition:

Seien $f_n,\ n \in \mathbb{N}$ in dem Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}$ erklärte Funktionen. Die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt ***lokal gleichmäßig konvergent*** *in D, wenn es zu jedem Punkte $z \in D$ eine Umgebung U gibt, in welcher die Funktionenfolge gleichmäßig konvergiert.*

Sie heißt ***kompakt konvergent*** *in D, wenn sie in jedem Kompaktum $K \subset D$ gleichmäßig konvergiert.*

16.2 Lemma:

Es gilt die folgende Beziehung:

Lokal gleichmäßige Konvergenz $\Leftrightarrow$ kompakte Konvergenz

Beweis:

- $\boxed{\text{„}\Rightarrow\text{“}}$

  Sei $K \subset D$ kompakt, $z_0 \in D$ und U_{z_0} eine Umgebung von z_0 s.d. die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf U_{z_0} gleichmäßig konvergent ist. Offenbar ist
  $$K \subset \bigcup_{z_0 \in K} U_{z_0}$$
  Da aber K kompakt $\exists\ z_1, ..., z_n \in K$ s.d.
  $$K \subset \bigcup_{j=1}^{n} U_{z_j}$$
  Sei nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann wählen wir ein $n_j \in \mathbb{N}$ s.d. $\forall\ n \geq n_j$ gilt:
  $$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$$
  Setzen wir jetzt $n_0 := \max\limits_{j=1,\ldots,n} n_j$, so gilt $\forall\ n \geq n_j,\ z \in K$:
  $$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$$
  Also konvergiert die Folge auch kompakt.

- $\boxed{\text{„}\Leftarrow\text{“}}$

  Zu jedem $z \in D$ finden wir eine abgeschlossene Kreisscheibe $\overline{B} \subset D$, die offenbar kompakt ist. Da die Funktionenfolge aber auf $\overline{B}$ gleichmäßig konvergiert, muss sie auch auf B gleichmäßig konvergieren, folglich liegt auch lokal gleichmäßige Konvergenz vor.

$\square$

16.1 Reihen von Funktionen

Seien f_n, $n \in \mathbb{N}$ auf $\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$ erklärte Funktionen.

16.4 Definition:

Man definiert punktweise und gleichmäßige Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

über die Konvergenz der Funktionenfolge der Partialsummen $\left(\sum_{n=1}^{m} f_n(z)\right)_{m\in\mathbb{N}}$.

16.5 Definition:

Man sagt, die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ *konvergiert* ***absolut gleichmäßig*** *in* A*, wenn die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|$$

gleichmäßig in A *konvergiert.*

Bemerkung 16.1:

- Konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ absolut gleichmäßig in A, so konvergiert sie auch gleichmäßig in A. Diese Aussage folgt direkt aus dem Satz über absolute und „normale“ Konvergenz.
- Auch hier gibt es das Majorantenkriterium:
  Gilt $|f_n(z)| \leq \alpha_n$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty$, so ist

  $$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \quad << \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$$

  eine Majorante und $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ konvergiert gleichmäßig in A.

Beispiel 16.1:

1. Die Funktionsfolge $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert für $|z| < 1$ lokal gleichmäßig:

   $$z^n \longrightarrow 0$$

2. Eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ mit dem Konvergenzradius $\rho > 0$ ist in $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \rho\}$ lokal gleichmäßig konvergent:
   Sei $0 < r < \rho$. Dann ist $|a_n (z-z_0)^n| < |a_n| r^n$ für $|z - z_0| < r$, folglich ist

   $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad << \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| r^n$$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ ist sogar (global!) gleichmäßig konvergent in $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Dies sieht man durch die Majorante

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} \quad << \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

4. Die Konvergenz der Funktionenfolge

   $$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \longrightarrow \exp(z)$$

   ist lokal gleichmäßig in ganz $\mathbb{C}$.

   Beweis:

Zunächst zeigen wir für den Hauptzweig des Logarithmus und $|z| < 1$ die Ungleichung

$$|\log(1+z) - z| \leq \frac{1}{2}\frac{|z|^2}{1-|z|}$$

In der Tat, bekanntlich ist $\log(1+z) = -\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-z)^k}{k}$ falls $|z| < 1$. Also gilt:

$$\begin{aligned}
\log(1+z) - z &= -\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-z)^k}{k} \\
&= z^2\left(-\frac{1}{2} + \frac{z}{3} \mp \ldots\right) \\
\Rightarrow \quad |\log(1+z) - z| &\leq |z|^2\left(\frac{1}{2} + \frac{|z|}{3} + \ldots\right) \\
&\leq \frac{|z|^2}{2}\left(1 + |z| + |z|^2 + \ldots\right) \\
&= \frac{|z|^2}{2\cdot(1-|z|)} \qquad \text{für } |z| < 1
\end{aligned}$$

Sei nun $R > 0$, $|z| < R$ und $n > 2R$. Dann ist $\left|\frac{z}{n}\right| \leq \frac{1}{2}$ und wir können die obige Ungleichung verwenden:

$$\Rightarrow \left|\log\left(1+\frac{z}{n}\right) - \frac{z}{n}\right| \leq \frac{|z|^2}{n^2}$$

Allgemein gilt aber

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \exp\left(n\cdot\log\left(1+\frac{z}{n}\right)\right) = \exp(z)\exp\left(n\cdot\left(\log\left(1+\frac{z}{n}\right) - \frac{z}{n}\right)\right)$$

genauso wie $|\exp(z)| \leq \exp|z|$ und $|\exp(z) - 1| \leq |z|\cdot\exp|z|$. Damit gilt dann aber:

$$\begin{aligned}
\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n - \exp(z)\right| &\leq |\exp(z)|\cdot\left|\exp\left(n\cdot\left(\log\left(1+\frac{z}{n}\right) - \frac{z}{n}\right)\right) - 1\right| \\
&\leq \exp|z|\cdot\frac{|z|^2}{n}\exp\left(\frac{|z|^2}{n}\right) \\
&\leq \exp\left(\frac{3}{2}R\right)\cdot R^2\cdot\frac{1}{n}
\end{aligned}$$

□

16.3 Satz:

Die Funktionen $f_n, n \in \mathbb{N}$ seien in dem Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}$ stetige Funktionen und sei die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ lokal gleichmäßig in D. Dann gilt für eine Kurve $\mathcal{C}$ in D:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} \lim_{n\to\infty} f_n(z)\,\mathrm{d}z &= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathcal{C}} f_n(z)\,\mathrm{d}z \\
\textit{bzw.} \quad \int_{\mathcal{C}} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)\,\mathrm{d}z &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathcal{C}} f_n(z)\,\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

Beweis:

Wir zeigen nur den Fall der Folge, der der Funktionsreihe ist analog zu beweisen.
Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Offenbar ist $\operatorname{spur}(\mathcal{C})$ kompakt in D. Wir wählen nun ein $n_0 \in \mathbb{N}$ s.d.

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$$

für $n \geq n_0$ und $z \in \operatorname{spur}(\mathcal{C})$. Dies ist wegen der lokal gleichmäßigen und somit wegen der kompakten Konvergenz möglich. Damit gilt:

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathcal{C}} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\mathcal{C}} f_n(z)\,\mathrm{d}z\right| &= \left|\int_{\mathcal{C}} (f(z) - f_n(z))\,\mathrm{d}z\right| \\
&\overset{\text{Standardabschätzung}}{\leq} \varepsilon\cdot L(\mathcal{C})
\end{aligned}$$

□

16.4 Satz:

Sind $f_n, n \in \mathbb{N}$ holomorphe Funktionen in dem Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}$ und konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ lokal gleichmäßig in D, so ist

$$f(z) := \lim_{n\to\infty} f_n(z) \ \text{ bzw. } f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

holomorph in D und es gilt

$$f'(z) = \lim_{n\to\infty} f_n'(z) \ \text{ bzw. } f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(z)$$

und die Folge $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ ist lokal gleichmäßig konvergent.

Beweis:

Auch hier zeigen wir nur den Fall der Folge $f(z) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(z)$, der Fall der Funktionsreihe ist auch hier absolut analog zu beweisen.
Sei $\Delta \subset D$ ein Dreieck. Nach dem Kriterium von Morera gilt:

$$\int\limits_{\partial\Delta} f(z)\, \mathrm{d}z \overset{\text{Satz 1}}{=} \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\partial\Delta} f_n(z)\, \mathrm{d}z = 0$$

Folglich ist auch f holomorph in D.
Sei nun $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r\} \subset D$ und $|z - z_0| < r$. Dann gilt nach der Integralformel von Cauchy:

$$f'(z) - f_n'(z) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \oint\limits_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta) - f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, \mathrm{d}\zeta$$

Ist allerdings $|z - z_0| \leq \frac{r}{2}$, so gilt für $|\zeta - z_0| = r$ auch $|\zeta - z| \geq \frac{r}{2}$.

$$\Rightarrow |f'(z) - f_n'(z)| = \frac{1}{2\pi} \frac{\sup\limits_{|\zeta - z_0| = r} |f(\zeta) - f_n(\zeta)|}{\left(\frac{r}{2}\right)^2} \cdot 2\pi$$

Geben wir uns nun ein $\varepsilon > 0$ vor, so wählen wir ein $n_0 \in \mathbb{N}$ s.d. $\forall\, n \geq n_0$ und $|\zeta - z_0| < r$ gilt:

$$|f(\zeta) - f_n(\zeta)| < \frac{r}{4} \cdot \varepsilon$$

Dies ist möglich, da $\{z \in \mathbb{C} \mid |\zeta - z_0| = r\}$ kompakt in D und die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Grund ihrer lokal gleichmäßigen Konvergenz auch kompakt konvergent in D ist. Damit folgt dann:

$$|f'(z) - f_n'(z)| < \varepsilon \ \forall\, z \text{ mit } |z - z_0| \leq \frac{r}{2} \text{ und } n \geq n_0$$

□

Folgerung 16.1:

1. *Unter den Voraussetzungen von Satz 2 gilt für alle $k \in \mathbb{N}_0$:*

$$\begin{aligned} f^{(k)}(z) &= \lim_{n\to\infty} f_n^{(k)}(z) \\ \text{bzw. } f^{(k)}(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z) \end{aligned}$$

   und die Folge der k-ten Ableitungen $\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$ ist lokal gleichmäßig konvergent in D.

2. *Unter den Voraussetzungen von Satz 2 gilt für $z_0 \in D$ und die Taylorentwicklungen*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \ \text{ und } f_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^n (z - z_0)^k$$

dass

$$\begin{aligned} a_k &= \lim_{n\to\infty} a_k^n \text{ im Falle der Folge} \\ \text{bzw. } a_k &= \sum_{n=1}^{\infty} a_k^n \text{ im Falle der Reihe} \end{aligned}$$

Beweis:

1. Man wendet Satz 2 induktiv auf $\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$ an.
2. Wir setzen die Formel für die Koeffizienten ein, welche uns der Satz von Taylor liefert:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} f_n^{(k)}(z_0)}{k!} = \lim_{n\to\infty} a_k^n$$

Der Beweis für die Darstellung der Koeffizienten der Reihe verläuft analog.

□

Bemerkung 16.2:
Für die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_k^n (z-z_0)^k = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_k^n (z-z_0)^k$$

In diesem Fall dürfen also die Summen vertauscht werden.
Diese Eigenschaft wird auch als **Weierstraß'scher Doppelreihensatz** genannt.

Beispiel 16.2:

1. Die Reihe $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n}\right), z \neq -1, -2, ...$ ist holomorph und darf gliedweise differenziert werden:

$$f^{(k)}(z) = (-1)^k \cdot k! \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^{k+1}}$$

Beweis:
Wir weisen die lokal gleichmäßige Konvergenz auf $\mathbb{C} \setminus \{-1, -2, ...\}$ nach.
Sei $R > 0$, $0 < r < \frac{1}{2}$, $|z| \leq R$ und $|z+n| \geq r$. Durch geeignete $R > 0$ und $r > 0$ können wir somit jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, -2, ...\}$ erreichen. Jetzt gilt:

$$\left|\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n}\right| = \frac{|z|}{|z+n| \cdot n} \leq \begin{cases} \frac{R}{r} & \text{falls } n \leq 2R \\ \frac{|z|}{n^2\left(1-\frac{|z|}{n}\right)} \leq \frac{2R}{n^2} & \text{falls } n > 2R \end{cases}$$

Da aber jetzt für $n \leq 2R$ und $C := \frac{4R^3}{r}$ die Relation

$$\frac{R}{r} \leq \frac{C}{(2R)^2} \leq \frac{C}{n^2}$$

gilt, folgt damit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n}\right) \quad << \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C}{n^2}$$

□

2. Die Riemann'sche Zeta-Funktion :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

für $s \in \mathbb{C}$, $s = \sigma + \mathrm{i}\, t$ mit $\sigma > 1$. Diese Reihe konvergiert dort lokal gleichmäßig (und ist somit holomorph).

Beweis:

Sei $\sigma \geq 1+\varepsilon$. Damit gilt wegen $n \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$:

$$\left|\frac{1}{n^s}\right| = \frac{1}{n^\sigma} \leq \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad << \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$$

und diese Majorante konvergiert[6]. Also ist $\zeta(s)$ in $\{s \in \mathbb{C} \mid s = \sigma + \mathrm{i}\, t \text{ mit } \sigma > 1\}$ lokal gleichmäßig konvergent.

□

3. Eine alternierende Variante der ζ-Funktion:

$$\zeta_a(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$$

für $s \in \{z \in \mathbb{C} \mid z = \sigma + \mathrm{i}\, t, \sigma > 0\}$. Diese Funktionsreihe ist in diesem Gebiet zwar lokal gleichmäßig, aber nicht absolut konvergent.

Beweis:
Wie in der Behauptung bereits erwähnt hilft uns hier die Abschätzung durch die Beträge nicht, wir verwenden daher die partielle Summation [7]:

$$\sum_{n=1}^{N} a_n b_n = s_N \cdot b_N + \sum_{n=1}^{N-1} s_n (b_n - b_{n+1}) \text{ für } s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, s_0 := 0$$

Wir wenden dies hier durch $a_n = (-1)^{n-1}$ und $b_n = \frac{1}{n^s}$ an. Damit ist offenbar $s_n = \frac{1-(-1)^n}{2}$.

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = \frac{1-(-1)^N}{2N^s} + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1-(-1)^n}{2} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right)$$

Da aber $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{t^s}\right) = \frac{-s}{t^{s+1}}$ folgt damit aber

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} &= s \cdot \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^{s+1}} \\ \Rightarrow \left|\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right| &\leq |s| \cdot \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^{s+1}} \\ &\leq \frac{|s|}{n^{\sigma+1}} \end{aligned}$$

Ist also $|s| \leq R$ und $\sigma \geq \varepsilon > 0$, so erhalten wir die Abschätzung

$$\left|\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right| \leq \frac{R}{n^{\varepsilon+1}}$$

Da $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ konvergiert und

$$\left|\frac{1-(-1)^N}{2N^s}\right| \xrightarrow{N\to\infty} 0$$

wegen $\sigma > 0$, haben wir eine konvergente Majorante gefunden und somit muss auch

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$$

lokal gleichmäßig konvergieren.

[6]Vergleiche das Diff I Skript
[7]Vergleiche Hilfssatz 8.1

4. Sei nun $\mathbb{R} \ni \sigma > 1$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\zeta_a(\sigma) &\overset{\text{absolute Konvergenz}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^\sigma} - \sum n = 1^\infty \frac{1}{(2n)^\sigma} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^\sigma} \\
&= \left(1 - 2^{1-\sigma}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} \\
&= \left(1 - 2^{1-\sigma}\right) \zeta(\sigma)
\end{aligned}$$

Folglich stimmen also $\left(1 - 2^{1-\sigma}\right)\zeta(\sigma)$ und $\zeta_a(\sigma)$ auf $\sigma \in (1, \infty)$ überein. Damit folgt nach dem Identitätssatz

$$\boxed{\zeta_a(s) = \left(1 - 2^{1-s}\right)\zeta(s) \ \forall\ s = \sigma + \mathrm{i}\, t \in \mathbb{C} \text{ mit } \sigma > 1}$$

Oder anders geschrieben sehen wir

$$\zeta(s) = \frac{1}{1 - 2^{1-s}} \zeta_a(s)$$

Dabei ist die rechte Seite holomorph für $s = \sigma + \mathrm{i}\, t$ mit $\sigma > 0$ und $s \neq 1 - \frac{2\pi\,\mathrm{i}}{\log(2)} \cdot k,\ k \in \mathbb{Z}$[8].
Also haben wir durch die alternierende Zeta-Funktion eine Fortsetzung von ζ gefunden!

17 Parameterintegrale

17.1 Einführung

Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ und $G \subseteq \mathbb{C}$ zwei Gebiete und sei f eine Funktion in den Variablen $z \in D$ und $w \in G$, d.h.

$$f : D \times G \longrightarrow \mathbb{C},\ (z, w) \mapsto f(z, w).$$

17.1 Definition:
Wir sagen, f ist stetig, falls $\forall\ (z_0, w_0) \in D \times G$ gilt:

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 \text{ s.d. } \forall\ (z, w) \in D \times G \text{ mit } |z - z_0| < \delta, |w - w_0| < \delta \text{ gilt } |f(z, w) - f(z_0, w_0)| < \varepsilon$$

Beispiel 17.1:
Sei $f(z, w) = w^{z-1} \exp(-w)$ für $z \in \mathbb{C}$, $w \in \mathbb{C} \backslash (-\infty, 0]$, wobei die Potenz über den Hauptzweig des Logarithmus berechnet werden möge. Dann ist f stetig, doch wir werden dies nicht über die Definition einsehen. Stattdessen argumentieren wir, dass

$$f(z, w) = \exp((z-1)\log(w))\exp(-w)$$

als Verknüpfung stetiger Funktionen wieder stetig ist.

17.1.1 Bedingung (A)

In Folge werden wir immer sagen, „f erfüllt die Bedingung (A)“, falls die folgenden beiden Relationen erfüllt sind:

- f ist holomorph bezüglich $z \in D$ bei festem $w \in G$.
- f ist stetig als Funktion von $(z, w) \in D \times G$.

17.1 Satz:
Erfüllt f die Bedingung (A), so erfüllt auch

$$\frac{\partial f}{\partial z}$$

diese Bedingung.

Beweis:

[8]Bedenke: $2^{1-s} = \exp((1-s)\log(2))$!

- Die Holomorphie von $\frac{\partial f}{\partial z}$ bezüglich z ist klar, da es sich um die Ableitung einer holomorphen Funktion handelt.
- Sei $(z_0, w_0) \in D \times G$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir definieren

$$K := \{(z,w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r, |w - w_0| \leq r\}$$

wobei $r > 0$ so gewählt ist, dass $K \subseteq D \times G$.
Wir können $K \subset \mathbb{R}^4$ betrachten. Da K abgeschlossen und beschränkt ist, muss K also kompakt sein (vergleiche [FOA]), daher ist $f_{|K}$ sogar gleichmäßig stetig:

$$\exists\, \delta > 0 \text{ s.d. } \forall\ (z,w) \in K, (z_0, w_0) \in K \text{ mit } |z - z_0| < \delta, |w - w_0| < \delta \text{ gilt: } |f(z,w) - f(z_0,w_0)| < \varepsilon \tag{17.1}$$

Sei jetzt $w \in G$ fest mit $|w - w_0| \leq r$. Wir entwickeln f bezüglich der Variablen z in eine Taylorreihe um z_0 für z mit $|z - z_0| < r$:

$$f(z,w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(w)(z - z_0)^n$$

mit den Koeffizienten

$$a_n(w) = \frac{1}{n!}\frac{\partial^n f}{(\partial z)^n}(z_0, w) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \oint\limits_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta, w)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta$$

Diese dürfen wir gliedweise differenzieren und erhalten

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z,w) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n(w)(z - z_0)^{n-1}$$

Damit gilt dann

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z,w) - \frac{\partial f}{\partial z}(z_0,w_0) = \underbrace{a_1(w) - a_1(w_0)}_{(2)} + \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} n \cdot a_n(w)(z - z_0)^{n-1}}_{(1)}$$

Wir müssen jetzt also die Terme (1) und (2) abschätzen um die Stetigkeit von f in (z_0, w_0) zu zeigen.

zu (1) Sei $M := \sup\limits_{(z,w) \in K} |f(z,w)| < \infty$. Dann gilt mit der Koeffizientenabschätzung von Cauchy:

$$|a_n(w)| \leq \frac{M}{r^n}\ \forall\ n \in \mathbb{N}_0, w \in G \text{ mit } |w - w_0| \leq r$$

Für $z \in D$ mit $|z - z_0| \leq \frac{r}{2}$ gilt also:

$$\begin{aligned} \left|\sum_{n=2}^{\infty} n a_n(w)(z - z_0)^{n-1}\right| &\leq \left(\sum_{n=2}^{\infty} n\frac{M}{r^n}|z - z_0|^{n-2}\right)|z - z_0| \\ &\leq \underbrace{\frac{4M}{r^2}\left(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{2^n}\right)}_{:=C}|z - z_0| \end{aligned}$$

zu (2) Zunächst gilt

$$a_1(w) - a_1(w_0) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \oint\limits_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta,w) - f(\zeta,w_0)}{(\zeta - z_0)^2}\,\mathrm{d}\zeta$$

Ist nun $|z - z_0| < \delta, |w_0 - w| < \delta$ mit dem δ aus (17.1), so gilt durch die Standardabschätzung:

$$|a_1(w) - a_1(w_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \underbrace{2\pi r}_{=L(\mathcal{C})} \cdot \underbrace{\sup_{|\zeta - z_0| = r} |f(\zeta,w) - f(\zeta,w_0)|}_{<\varepsilon} \cdot \frac{1}{r^2} < \frac{\varepsilon}{r}$$

Zusammen erhalten wir damit

$$\left|\frac{\partial f}{\partial z}(z,w) - \frac{\partial f}{\partial z}(z_0,w_0)\right| < \frac{\varepsilon}{r} + C|z-z_0|$$

Setzen wir nun $\delta_1 := \min(\delta,\varepsilon)$ und verlangen $|z-z_0| < \delta$, so ist sogar

$$\left|\frac{\partial f}{\partial z}(z,w) - \frac{\partial f}{\partial z}(z_0,w_0)\right| < \left(\frac{1}{r} + C\right)\varepsilon$$

was die Stetigkeit von f in (z_0, w_0) zeigt.

□

Folgerung 17.1:
Erfüllt f die Bedingung (A), so tun es auch alle Ableitungen nach z:

$$\frac{\partial^k f}{(\partial z)^k}\ \forall\, k \in \mathbb{N}_0$$

17.2 Satz:
Erfülle die Funktion f die Bedingung (A) und sei $\mathcal{C}$ eine Kurve in G Dann stellt das ***Parameterintegral***

$$\Phi(z) := \int_{\mathcal{C}} f(z,w)\,\mathrm{d}w$$

eine holomorphe Funktion für $z \in D$ dar und es gilt

$$\Phi'(z) = \int_{\mathcal{C}} \frac{\partial f}{\partial z}(z,w)\,\mathrm{d}w$$

Beweis:
Sei $z_0 \in D$ vorgegeben, $w \in G$ beliebig und K wie oben definiert:

$$K := \{(z,w) \in \mathbb{C}\times\mathbb{C} \mid |z-z_0| \le r, |w-w_0| \le r\}$$

mit $r > 0$ s.d. $K \subset D \times G$ gilt. Sei weiter $M := \sup\limits_{(z,w)\in K} |f(z,w)|$.
Betrachten wir $|h| < r$ so können wir (*) wegen der Holomorphie von f in der Variablen z und (**) nach dem Satz von Taylor schreiben:

$$\begin{aligned} f(z_0+h,w) &\overset{(*)}{=} f(z_0,w) + h\cdot\frac{\partial f}{\partial z}(z_0,w) + h\cdot r(h,w) \qquad (17.2)\\ &\overset{(**)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(w)\,h^n \\ &= f(z_0,w) + h\cdot\frac{\partial f}{\partial z}(z_0,w) + h\cdot\sum_{n=2}^{\infty} an(w)\,h^{n-1} \end{aligned}$$

Also muss

$$r(h,w) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n(w)\,h^{n-1}$$

gelten. Insbesondere für $|h| \le \frac{r}{2}$ gilt also unter Verwendung der Koeffizientenabschätzung von Cauchy wie oben:

$$|r(h,w)| \le |h|\sum_{n=2}^{\infty}\frac{M}{r^n}\left(\frac{r}{2}\right)^{n-2} = \underbrace{\frac{4M}{r^2}\left(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n}\right)}_{:=C}|h|$$

Integrieren wir jetzt (17.2) über die Variable w entlang der gegebenen Kurve $\mathcal{C}$, so erhalten wir

$$\Phi(z_0+h) = \Phi(z_0) + h\cdot\int_{\mathcal{C}}\frac{\partial f}{\partial z}(z_0,w)\,\mathrm{d}w + h\cdot R(h)$$

mit $R(h) = \int\limits_{\mathcal{C}} r(h,w)\ \mathrm{d}w$. Im Falle $|h| \leq \frac{r}{2}$ gilt also wieder mit der Standardabschätzung:

$$|R(h)| \leq C \cdot L(\mathcal{C}) \cdot |h| \xrightarrow{h \longrightarrow 0} 0$$

womit Φ komplex differenzierbar an der Stelle $h \in D$ ist und die Ableitung wie in der Behauptung angegeben hat. Da z aber beliebig war, ist Φ somit in ganz D holomorph.

□

Folgerung 17.2:
Mit Satz 1 gilt jetzt unter den Voraussetzungen von Satz 2:

$$\Phi^k(z) = \int\limits_{\mathcal{C}} \frac{\partial^k f}{(\partial z)^k} f(z,w)\ \mathrm{d}w$$

Beispiel 17.2:

Wir betrachten wieder $f(z,w) = w^{z-1}\exp(-w)$. Sei $\mathcal{C}$ eine Kurve mit $\mathrm{spur}(\mathcal{C}) \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Dann ist

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \int\limits_{\mathcal{C}} w^{z-1}\exp(-w)\ \mathrm{d}w \\ \Phi'(z) &= \int\limits_{\mathcal{C}} \log(w)\, w^{z-1}\exp(-w)\ \mathrm{d}w \end{aligned}$$

Eigentlich würden wir jetzt gerne als Kurve die Strecke $(0,\infty)$ betrachten. Doch damit wir das können, benötigen wir erst den Begriff des **uneigentlichen Integrals**.

17.2 Uneigentliche Integrale

Für diesen Abschnitt vergleiche auch [FOA].

17.2 Definition:
Wir betrachten eine stetige Funktion f in einem reellen Parameter $t \in [\alpha,\beta)$ mit $\alpha < \beta \leq \infty$. Wir definieren das uneigentliche Integral

$$\int\limits_\alpha^\beta f(t)\ \mathrm{d}t := \lim_{\gamma \nearrow \beta} \int\limits_\alpha^\gamma f(t)\ \mathrm{d}t$$

falls dieser Limes existiert. Analog definieren wir im Falle der unteren Grenze $t \in (\alpha,\beta]$.

Beispiel 17.3:

Bekanntlich gilt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{t^s}{s}\right) = t^{s-1}$ falls $\mathbb{C} \ni s \neq 0$. Daher gilt

$$\int\limits_0^1 t^{s-1}\ \mathrm{d}t = \lim_{\gamma \searrow 0} \int\limits_\gamma^1 t^{s-1}\ \mathrm{d}t = \lim_{\gamma \searrow 0}\left(\frac{1}{s} - \frac{\gamma^s}{s}\right)$$

Im Falle $\Re(s) > 0$ gilt $\gamma^s = \exp(s\log(\gamma)) \xrightarrow{\gamma \searrow 0} 0$ und wir erhalten

$$\int\limits_0^1 t^{s-1}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{s} \text{ im Falle } \Re(s) > 0$$

Ganz analog sehen wir für $\Re(s) < 0$:

$$\int\limits_1^\infty t^{s-1}\ \mathrm{d}t = \lim_{\gamma \nearrow \infty}\left(\frac{\gamma^s}{s} - \frac{1}{s}\right) = -\frac{1}{s}$$

17.3 Definition:
Sei f eine in dem Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}$ stetige Funktion, $\mathcal{C}$ eine Kurve, welche bis auf dem Endpunkt in D liegt. Sei weiter $z(t), t \in [\alpha,\beta]$ eine Parametrisierung von $\mathcal{C}$.

Dann definieren wir das uneigentliche Integral entlang $\mathcal{C}$ über f durch

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)\ \mathrm{d}z := \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t))\, z'(t)\ \mathrm{d}t$$

wieder unter dem Vorbehalt, dass die rechte Seite Sinn macht.

Analog definieren wir ein uneigentliches Integral im Falle, dass der Anfangspunkt der Kurve nicht in D liegt.

Wir wollen nun unseren Begriff der Kurve etwas erweitern.

17.4 Definition:

Ein Strahl S ist eine Abbildung $S : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ der Form $t \mapsto a + t\cdot\exp(\mathrm{i}\,\varphi)$ für ein $a \in \mathbb{C}$ und einen Winkel $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Analog definiert man Strahlen mit $t \in (-\infty, 0]$.

17.5 Definition:

Wir erweitern unseren Begriff der Kurve jetzt dadurch, dass wir für Strahlen S und S', sowie für eine Kurve $\mathcal{C}$ jetzt folgende Gebilde als Kurven in $\overline{\mathbb{C}}$ bezeichnen:

$$\mathcal{C},\ \mathcal{C}+S,\ S'+\mathcal{C},\ S'+\mathcal{C}+S,\ S,\ S', S+S'$$

Dabei müssen wir den Abschluss von $\mathbb{C}$ verwenden, da die Kurven im unendlichen beginnen und / oder enden können.

Bemerkung 17.1:

Dabei greifen wir für die Addition auf die Definition der Addition zweier Kurven zurück. Stimmt der Endpunkt der Kurve $\mathcal{C}_1$ mit dem Anfangspunkt der Kurve $\mathcal{C}_2$ überein, so ist $\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2$ definiert. Daher ist oben jeweils von passenden Anfangs- und Endpunkten auszugehen.

17.6 Definition:

Ist S ein Strahl mit $S : t \mapsto a + t\cdot\exp(\mathrm{i}\,\varphi)$, $t \in [0,\infty)$ so definiert man das Integral entlang S für eine in dem entsprechenden Gebiet stetige Funktion f durch

$$\int_S f(z)\ \mathrm{d}z = \int_a^{a+\infty\exp(\mathrm{i}\,\varphi)} f(z)\ \mathrm{d}z := \exp(\mathrm{i}\,\varphi)\int_0^{\infty} f(a + t\cdot\exp(\mathrm{i}\,\varphi))\ \mathrm{d}t$$

Dabei setzen wir voraus, dass das reelle uneigentliche Integral - welches rechts steht - konvergiert.

Analog definiert man das Integral für einen Strahl mit $t \in (-\infty, 0]$.

Bemerkung 17.2:

- Damit können wir jetzt wieder über alle Kurven integrieren.
- Wir haben jetzt zwei Möglichkeiten, wie ein uneigentliches Integral zu Stande kommen kann:
  - Der Integrand ist an Anfangs- oder Endpunkt der Kurve nicht definiert.
  - Anfangs- und / oder Endpunkt der Integration ist ∞.

Beispiel 17.4:

Die β-Funktion:

$$B(z,w) := \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}\ \mathrm{d}t$$

17.7 Definition:

Sei $f : A \times [\alpha,\beta) \longrightarrow \mathbb{C}$ für eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{C}$ eine bezüglich der Variablen t stetige Funktion. Das uneigentliche Integral

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(z,t)\ \mathrm{d}t$$

*heißt **gleichmäßig konvergent** in $A \subseteq \mathbb{C}$, falls es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\gamma_0 \in (\alpha,\beta)$ gibt, s.d. für jedes $\gamma \in (\gamma_0,\beta)$ gilt:*

$$\left|\int_{\gamma}^{\beta} f(z,t)\ \mathrm{d}t\right| = \left|\int_{\alpha}^{\beta} f(z,t)\ \mathrm{d}t - \int_{\alpha}^{\gamma} f(z,t)\ \mathrm{d}t\right| < \varepsilon\ \forall\ z \in A$$

Bemerkung 17.3:
Diese Eigenschaft prüft man zumeist nicht durch die Definition, sondern durch die Angabe einer Majorante für das Integral: Für eine Funktion f wie oben ist eine stetige, reelle Funktion $g : [\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Majorante, falls

$$|f(z,t)| \leq g(t) \;\; \forall\, t \in [\alpha, \beta) \;\; \forall\, z \in A$$

und falls $\int\limits_{\alpha}^{\beta} g(t)\, \mathrm{d}t$ konvergiert. Der Beweis dafür, dass eine Majorante hinreichend ist, folgt direkt aus der Dreiecksungleichung für reelle Integrale.

Beispiel 17.5:

1. $\int\limits_0^1 t^{z-1} \exp(-t)\, \mathrm{d}t$ für $z = x + \mathrm{i}\, y$ mit $x \geq \varepsilon > 0$. Dann gilt für $t \in [0,1)$:

$$\left|t^{z-1} \exp(-t)\right| \leq t^{x-1} \leq t^{\varepsilon - 1}$$

und da das Integral

$$\int\limits_0^1 t^{\varepsilon-1}\, \mathrm{d}t$$

konvergiert, haben wir eine Majorante gefunden.

2. $\int\limits_1^{\infty} t^{z-1} \exp(-t)\, \mathrm{d}t$ für $z = x + \mathrm{i}\, y$ mit $x \leq \delta$. Dann gilt für jedes $t \geq 1$:

$$\left|t^{z-1} \exp(-t)\right| \leq t^{x-1} \exp(-t) \leq t^{\delta-1} \exp(-t) = t^{\delta-1} \exp\left(-\frac{t}{2}\right) \cdot \exp\left(-\frac{t}{2}\right) \leq C \cdot \exp\left(-\frac{t}{2}\right)$$

womit wir wieder eine konvergente Majorante gefunden haben.

17.8 Definition:
Sei $f : D \times G \longrightarrow \mathbb{C}$ für zwei Gebiete $D, G \subseteq \mathbb{C}$ eine bezüglich $w \in G$ stetige Funktion. Sei $\mathcal{C}$ eine Kurve in $\overline{\mathbb{C}}$; welche bis auf den Endpunkt in G verläuft. Sei $t \mapsto w(t)\,, t \in [\alpha, \beta)$ eine Parametrisierung ohne Endpunkt von $\mathcal{C}$. Dann heißt das uneigentliche Integral

$$\int\limits_{\mathcal{C}} f(z,w)\, \mathrm{d}w = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(z, w(t))\, w'(t)\, \mathrm{d}t, \quad z \in D$$

lokal gleichmäßig konvergent *in D, falls es zu jedem Punkt $z_0 \in D$ eine Umgebung U gibt, s.d. das Integral in dieser Umgebung gleichmäßig konvergiert.*

Das Integral heißt **kompakt konvergent**, *falls es in jedem Kompaktum von D gleichmäßig konvergiert.*

Analog definiert man kompakte und lokal gleichmäßige Konvergenz für den Fall, dass der Anfangspunkt von $\mathcal{C}$ nicht in G liegt.

17.2.1 Lokal gleichmäßige Konvergenz von uneigentlichen Integralen und Holomorphie

17.1 Hilfssatz:
Sei g eine in dem Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}$ holomorphe Funktion und seien auch die Funktionen g_γ für beliebiges $\gamma \in (\alpha, \beta)$ holomorphe Funktionen. Für jede Folge $\gamma_n \in (\alpha, \beta)$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} \gamma_n = \beta$ sei die Konvergenz

$$g_{\gamma_n} \xrightarrow{n \longrightarrow \infty} g$$

lokal gleichmäßig. Dann gibt es zu jedem Punkt $z_0 \in D$ eine Umgebung U s.d.

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \gamma_0 \in (\alpha, \beta) \;\; s.d. \;\; \gamma \in (\gamma_0, \beta) \;\; \Rightarrow \;\; |g_\gamma(z) - g(z)| < \varepsilon \;\forall\, z \in U$$

Beweis:
Aufgabe! Üblicherweise wird dieser etwas fummelig zu beweisende Hilfssatz durch Widerspruch gezeigt.

17.3 Satz:

Seien $D \subseteq \mathbb{C}, G \subseteq \mathbb{C}$ Gebiete und erfülle $f : D \times G \longrightarrow \mathbb{C}$ die obige Bedingung (A). Sei weiter $\mathcal{C}$ eine Kurve in $\overline{\mathbb{C}}$, welche bis auf den Endpunkt (ganz analog für den Anfangspunkt) in G verläuft. Konvergiert das uneigentliche Integral

$$\Phi(z) := \int\limits_{\mathcal{C}} f(z,w)\ \mathrm{d}w, \quad z \in D$$

lokal gleichmäßig in D, so ist $\Phi(z)$ in D eine holomorphe Funktion und es gilt

$$\Phi'(z) = \int\limits_{\mathcal{C}} \frac{\partial f}{\partial z}(z,w)\ \mathrm{d}w$$

<u>**Beweis:**</u>

Sei $t \mapsto w(t), t \in [\alpha, \beta)$ eine Parametrisierung von $\mathcal{C}$ ohne Endpunkt und $\gamma \in (\alpha, \beta)$. Wir definieren $\mathcal{C}_\gamma$ als die Kurve, welche durch $t \mapsto w(t), t \in [\alpha, \gamma]$ parametrisiert wird. Sei weiter

$$\Phi_\gamma(z) := \int\limits_{\mathcal{C}_\gamma} f(z,w)\ \mathrm{d}w$$

Betrachten wir jetzt eine Folge $\gamma_n \longrightarrow \beta$ mit $\gamma_n \in (\alpha, \beta)$, so erhalten wir nach Satz 17.2 eine Folge von in D holomorphen Funktionen

$$\Phi_{\gamma_n}$$

Wegen der lokal gleichmäßigen Konvergenz des Integrals ist auch die Konvergenz $\Phi_{\gamma_n} \xrightarrow{n \longrightarrow \infty} \Phi$ lokal gleichmäßig (vergleiche Definition 17.7):

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \gamma_0 \text{ s.d. } \gamma \in (\gamma_0, \beta) \ \Rightarrow\ |\Phi_\gamma(z) - \Phi(z)| = \left| \int\limits_{\mathcal{C}_\gamma} f(z,w)\ \mathrm{d}w - \int\limits_{\mathcal{C}} f(z,w)\ \mathrm{d}w \right| < \varepsilon$$

Nach Satz 16.4 ist Φ also als Grenzfunktion holomorpher Funktionen wieder holomorph.

Für die Ableitung gilt jetzt:

$$\Phi'(z) = \lim_{n \to \infty} \int\limits_{\mathcal{C}_{\gamma_n}} \frac{\partial f}{\partial z}(z,w)\ \mathrm{d}w$$

Nach dem Hilfssatz 17.1 ist diese Konvergenz gleichmäßig, und somit folgt

$$\Phi'(z) = \int\limits_{\mathcal{C}} \frac{\partial f}{\partial z}(z,w)\ \mathrm{d}w$$

was die Behauptung zeigt.

□

Beispiel 17.6 (Ergänzung zu 17.5):

1. Dieses Integral stellt damit eine holomorphe Funktion in $\Re(z) > 0$ dar, da wie oben gesehen für jedes $z \geq \varepsilon > 0$ gleichmäßige und somit insgesamt lokal gleichmäßige Konvergenz vorliegt.
2. Hier liegt wie oben gesehen für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $\Re(z) \leq \delta$ für beliebiges δ gleichmäßige und somit insgesamt auf ganz $\mathbb{C}$ lokal gleichmäßige Konvergenz vor. Also ist

$$f(z) := \int\limits_1^\infty t^{z-1} \exp(-t)\ \mathrm{d}t$$

eine ganze Funktion!

17.9 Definition (Gamma-Funktion):

Man definiert

$$\Gamma(z) := \int\limits_0^\infty t^{z-1} \exp(-t)\ \mathrm{d}t$$

für $\Re(z) > 0$ und unter der Vereinbarung, dass wir zum Berechnen der Potenz t^{z-1} immer den Hauptzweig des Logarithmus verwenden wollen.

Bemerkung 17.4:
Wie in den Beispielen gesehen, ist Γ auf $\Re(z) > 0$ als Summe zweier dort holomorpher Funktionen wieder holomorph.

17.10 Definition (Beta-Funktion):
Man definiert

$$B(z,w) := \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}\,\mathrm{d}t$$

für $\Re(z) > 0, \Re(w) > 0$ *und wieder unter der Vereinbarung, zur Berechnung der Potenzen den Hauptzweig des Logarithmus zu verwenden.*

Bemerkung 17.5:
Analog zur Γ-Funktion rechnet man auch hier nach, dass diese Funktion in ihrem Definitionsbereich unter Festhalten der jeweils anderen Variable holomorph ist.

Bemerkung 17.6:
Unter gewissen Bedingungen an f ist

$$F(z) := \int_0^\infty f(w)\,w^{z-1}\,\mathrm{d}w$$

eine holomorphe Funktion für $z \in D$, wobei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein geeignetes Gebiet ist. Die Funktion F wird auch die *Mellin-Transformierte* von f genannt. Des Weiteren können wir f aus F durch

$$f(w) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_{c-\mathrm{i}\,\infty}^{c+\mathrm{i}\,\infty} F(z)\,w^{-z}\,\mathrm{d}z$$

für ein geeignetes $c \in \mathbb{C}$ zurückgewinnen.

Ähnlich ist die *LaPlace-Transformierte* von f definiert:

$$F(z) := \int_0^\infty f(w)\exp(-zw)\,\mathrm{d}w$$

Hier kann man f durch

$$f(w) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_{c-\mathrm{i}\,\infty}^{c+\mathrm{i}\,\infty} F(z)\exp(zw)\,\mathrm{d}z$$

wieder mit geeignetem $c \in \mathbb{C}$ zurückgewinnen.

In unserem Beispiel sehen wir damit, dass gerade

$$\exp(-w) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_{c-\mathrm{i}\,\infty}^{c+\mathrm{i}\,\infty} \Gamma(z)\,w^{-z}\,\mathrm{d}z, \quad c > 0$$

gilt.

18 Integralformel und Integralsatz von Cauchy II

Zunächst wollen wir auch hier unseren Begriff der Kurve etwas ausdehnen.

18.1 Definitionen

18.1 Definition:
Sei $\mathcal{C}$ *eine geschlossene Kurve in* $\mathbb{C}$*. Wir definieren das Innere* $I(\mathcal{C})$ *und das Äußere* $A(\mathcal{C})$ *der Kurve* $\mathcal{C}$ *durch*

$$\begin{aligned} I(\mathcal{C}) &:= \{z \notin \operatorname{spur}(\mathcal{C}) \mid n(\mathcal{C},z) \neq 0\} \\ A(\mathcal{C}) &:= \{z \notin \operatorname{spur}(\mathcal{C}) \mid n(\mathcal{C},z) = 0\} \end{aligned}$$

Nach Lemma 11.1 ist die Umlaufzahl einer geschlossenen Kurve lokal konstant, folglich sind $I(\mathcal{C})$ und $A(\mathcal{C})$ offen.

Bemerkung 18.1:
Wir erhalten so eine disjunkte Zerlegung

$$\mathbb{C} = I(\mathcal{C}) \sqcup A(\mathcal{C}) \sqcup \operatorname{spur}(\mathcal{C})$$

Des Weiteren ist

$$I(\mathcal{C}) \cup \operatorname{spur}(\mathcal{C})$$

kompakt, da beschränkt und abgeschlossen.

18.2 Definition:
Eine ***Kette*** $\mathcal{K}$ *ist ein Gebilde*

$$\mathcal{K} := (\mathcal{C}_1, ..., \mathcal{C}_n)$$

für geschlossene Kurven $\mathcal{C}_j, j = 1, ..., n$*. Wir definieren analog zur Kurve:*

- $\operatorname{spur}(\mathcal{K}) := \bigcup\limits_{j=1}^{n} \operatorname{spur}(\mathcal{C}_j)$
- $L(\mathcal{K}) := \sum\limits_{j=1}^{n} L(\mathcal{C}_j)$
- *Ist* $z \notin \operatorname{spur}(\mathcal{K})$*, so definiert man*

$$n(\mathcal{K}, z) := \sum_{j=1}^{n} n(\mathcal{C}_j, z)$$

  als die Umlaufzahl der Kette $\mathcal{K}$ *um den Punkt* z*.*

Ähnlich definiert man auch das Innere $I(\mathcal{K})$ *und das Äußere* $A(\mathcal{K})$ *der Kette:*

$$\begin{aligned} I(\mathcal{K}) &:= \{z \notin \operatorname{spur}(\mathcal{K}) \mid n(\mathcal{K}, z) \neq 0\} \\ A(\mathcal{K}) &:= \{z \notin \operatorname{spur}(\mathcal{K}) \mid n(\mathcal{K}, z) = 0\} \end{aligned}$$

18.3 Definition:
Sei f *eine stetige Funktion und* $\mathcal{K}$ *eine Kette mit den Bezeichnungen wie in der obigen Definition. Dann definieren wir*

$$\int_{\mathcal{K}} f(z)\, \mathrm{d}z := \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathcal{C}_j} f(z)\, \mathrm{d}z$$

18.2 Integralformel

18.1 Satz (Cauchy'sche Integralformel):
Sei f *eine in dem Gebiet* $D \subseteq \mathbb{C}$ *holomorphe Funktion und* $\mathcal{K}$ *eine Kette in* D *mit* $I(\mathcal{K}) \subset D$*. Dann gilt die* ***Cauchy'sche Integralformel****:*

$$n(\mathcal{K}, z) \cdot f(z) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_{\mathcal{K}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta \text{ für } z \in D \setminus \operatorname{spur}(\mathcal{K})$$

Beweis:
Zunächst definieren wir für $z, w \in D$ die Funktion

$$g(z, w) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(w)}{z-w} & \text{falls } z \neq w \\ f'(z) & \text{falls } z = w \end{cases}$$

1. Halten wir $w \in D$ fest, so ist g holomorph für $z \neq w$ und offenbar stetig für $z = w$, folglich ist g also holomorph als Funktion von z.
   Damit ist dann auch $\frac{\partial g}{\partial z}(z, w)$ für festes $w \in D$ als Funktion von z holomorph.

2. Wir zeigen nun, dass g stetig in ganz $D \times D$ ist.

   Sei dazu $(z_0, w_0) \in D \times D$ gegeben. Ist $z_0 \neq w_0$, so ist g als Verknüpfung stetiger Funktionen offenbar holomorph.

   Ist dagegen $z_0 = w_0$, so wählen wir ein $0 < r < 1$ s.d. $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r\}$ ganz in D liegt. Geben wir uns ein Paar (z, w) mit $|z - z_0| < r$, $|w - w_0| < r$ und $w \neq z$, so gilt mit der Holomorphie aus 1. nach Cauchy:

$$\begin{aligned} g(z,w) &= \frac{1}{z-w}\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \oint\limits_{|\zeta - z_0| = r} \left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} - \frac{f(\zeta)}{\zeta - w}\right) \mathrm{d}\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \oint\limits_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - w)} \mathrm{d}\zeta \end{aligned} \tag{18.1}$$

   Im Falle $z = w$ ist $g(z,w) = f'(z)$ nach Definition, was aber nach Cauchy mit (18.1) übereinstimmt, also gilt allgemein:

$$g(z,w) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int\limits_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - w)} \mathrm{d}\zeta \quad \forall\ (z,w) \in D \times D \text{ mit } |z - z_0| < r \text{ und } |w - w_0| < r$$

   Bekanntlich gilt ebenso allgemein, dass

$$\frac{1}{a-b} = \frac{1}{a} + \frac{b}{a(a-b)} \tag{18.2}$$

   und damit gilt dann

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} \cdot \frac{1}{\zeta - w} &= \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} \cdot \frac{1}{(\zeta - z_0) - (w - z_0)} \\ &\overset{(18.2)}{=} \left(\frac{1}{\zeta - z_0} + \frac{z - z_0}{(\zeta - z_0)(\zeta - z)}\right)\left(\frac{1}{\zeta - z_0} + \frac{w - z_0}{(\zeta - z_0)(\zeta - w)}\right) \\ &= \frac{1}{(\zeta - z_0)^2} + \frac{z - z_0}{(\zeta - z_0)^2(\zeta - z)} + \frac{w - z_0}{(\zeta - z_0)^2(\zeta - w)} + \frac{(z - z_0)(w - w_0)}{(\zeta - z_0)^2(\zeta - z)(\zeta - w)} \end{aligned}$$

   Mit diesem Ergebnis zerlegen wir jetzt (18.1) und integrieren einzeln:

$$\begin{aligned} g(z,w) = {} & \underbrace{f'(z_0)}_{=g(z_0,w_0)} + \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}(z - z_0) \oint\limits_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2(\zeta - z)} \mathrm{d}\zeta \\ & + \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}(w - z_0) \oint\limits_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2(\zeta - w)} \mathrm{d}\zeta \\ & + \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}(z - z_0)(w - w_0) \oint\limits_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2(\zeta - z)(\zeta - w)} \mathrm{d}\zeta \end{aligned}$$

   Nehmen wir jetzt $|z - z_0| \leq \frac{r}{2}$, $|w - w_0| \leq \frac{r}{2}$ an und definieren $M := \sup\limits_{|\zeta - z_0| = r} |f(\zeta)|$, so gilt nach der Standardabschätzung:

$$|g(z,w) - g(z_0,w_0)| \leq \frac{2M}{r^2}|z - z_0| + \frac{2M}{r^2}|w - z_0| + \frac{4M}{r^3}|z - z_0||w - w_0|$$

   was die Stetigkeit von g an (z_0, w_0) zeigt.

Wir haben damit gezeigt, dass g die Bedingung (A) erfüllt.

3. Sei jetzt

$$G(z) := \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int\limits_{\mathcal{K}} g(z,w)\, \mathrm{d}w \text{ für } z \in D$$

was als Summe (siehe Definition 18.3) von Parameterintegralen mit Satz 17.2 auch eine holomorphe Funktion in D darstellt. Damit gilt dann:

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int\limits_{\mathcal{K}} g(z,w)\, \mathrm{d}w \text{ für } z \in D \\ &= \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int\limits_{\mathcal{K}} \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta}\, \mathrm{d}\zeta \text{ für } z \notin \operatorname{spur}(\mathcal{K}) \\ &= \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \left(\int\limits_{\mathcal{K}} \frac{f(z)}{z-\zeta}\, \mathrm{d}\zeta + \int\limits_{\mathcal{K}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta \right) \\ &= -n(\mathcal{K}, z) \cdot f(z) + \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int\limits_{\mathcal{K}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta \end{aligned}$$

Ist also $z \in D \cap A(\mathcal{K})$, so ist

$$G(z) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int\limits_{\mathcal{K}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta \tag{18.3}$$

da dann $n(\mathcal{K}, z) = 0$ ist. Allerdings stellt die rechte Seite von Gleichung (18.3) als Funktion von z in jedem Gebiet G mit $G \cap \operatorname{spur}(\mathcal{K}) = \emptyset$ holomorph.

Also definieren wir durch

$$H(z) := \begin{cases} G(z) & \text{falls } z \in D \\ \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int\limits_{\mathcal{K}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta & \text{falls } z \in A(\mathcal{K}) \end{cases}$$

eine ganze Funktion (d.h. H ist auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph), da $\operatorname{spur}(\mathcal{K}) \cup I(\mathcal{K}) \subseteq D$. Diese Definition ist auf $D \cap A(\mathcal{K})$ konsistent, da die angegeben Funktionen dort laut (18.3) übereinstimmen.

Wir wählen nun ein $R > 0$ s.d. $\operatorname{spur}(\mathcal{K}) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le R\}$. Ist $M_1 := \sup\limits_{\zeta \in \operatorname{spur}(\mathcal{K})} |f(\zeta)|$, so gilt für $|z| \ge R$:

$$|H(z)| \le \frac{1}{2\pi} \frac{M_1 \cdot L(\mathcal{K})}{|z| - R} \xrightarrow{z \longrightarrow \infty} 0$$

Gleichzeitig ist H auf der kompakten Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le R\}$ als stetige Funktion durch ihr Maximum beschränkt, folglich ist H auf ganz $\mathbb{C}$ durch eine Konstante beschränkt, also ist K nach dem Satz von Liouville konstant. Da aber

$$H(z) \xrightarrow{z \longrightarrow \infty} 0$$

muss $H \equiv 0$ gelten.

Damit ist dann insbesondere nach Definition von H auch $G \equiv 0$ und somit gilt für alle $z \in D \setminus \operatorname{spur}(\mathcal{K})$:

$$0 = -n(\mathcal{K}, z) \cdot f(z) + \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int\limits_{\mathcal{K}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta \quad \Rightarrow \quad n(\mathcal{K}, z) \cdot f(z) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int\limits_{\mathcal{K}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta$$

□

Folgerung 18.1:

Unter den Voraussetzungen von Satz 18.1 gilt somit für alle $k \in \mathbb{N}_0$, $z \in D \setminus \operatorname{spur}(\mathcal{K})$:

$$n(\mathcal{K}, z)\, f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi\,\mathrm{i}} \int\limits_{\mathcal{K}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\, \mathrm{d}\zeta$$

Beweis:

Man leitet die in Satz 18.1 gezeigte Formel m-mal ab:

- Da die Umlaufzahl lokal konstant ist, ändert sie sich durch das Ableiten nicht, und dort steht dann $n(\mathcal{K}, z)\, f^{(k)}(z)$.
- Links dürfen wir laut Hilfssatz 13.2 die Differentiation und das Integral vertauschen, d.h. dort steht dann

$$\frac{k!}{2\pi\,\mathrm{i}} \int\limits_{\mathcal{K}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\, \mathrm{d}\zeta$$

$\square$

Bemerkung 18.2:
Haben wir nun ein Gebiet mit „Loch“ in der Mitte, d.h. zum Beispiel $\{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0\}$ wie im Falle von $f(z) = \frac{1}{z}$, so können wir die Integralformel jetzt doch anwenden, indem wir die Kette $\mathcal{K} = (\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ verwenden, wobei $\mathcal{C}_1$ ein im mathematisch negativen Sinne umlaufener Kreis mit kleinem Radius und $\mathcal{C}$ ein im mathematisch positiven Sinne umlaufener größerer Kreis ist. Für alle Punkte zwischen diesen beiden Kreisen können wir jetzt die Integralformel von Cauchy anwenden.

18.3 Integralsatz

18.2 Satz (Cauchy'scher Integralsatz):
Ist f holomorph in dem Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}$, so gilt für jede Kette $\mathcal{K}$ in D mit $I(\mathcal{K}) \subset D$, dass

$$\int_{\mathcal{K}} f(z)\, \mathrm{d}z = 0$$

Beweis:
Sei $z_0 \in D \setminus \operatorname{spur}(\mathcal{K})$ beliebig. Wir definieren durch

$$h(z) = (z - z_0)\, f(z)$$

eine holomorphe Funktion mit $h(z_0) = 0$. Nach der Cauchy'schen Integralformal gilt:

$$n(\mathcal{K}, z_0)\, h(z_0) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_{\mathcal{K}} \frac{h(\zeta)}{\zeta - z_0}\, \mathrm{d}\zeta$$

Damit erhalten wir wegen $h(z_0) = 0$:

$$0 = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_{\mathcal{K}} \frac{(z - z_0)\, f(z)}{z - z_0}\, \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_{\mathcal{K}} f(z)\, \mathrm{d}z$$

Dies zeigt die Behauptung.

$\square$

18.4 Definition:
Ein Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}$ heißt ***einfach zusammenhängend****, wenn für jede geschlossene Kurve $\mathcal{C}$ in D gilt:*

$$I(\mathcal{C}) \subset D$$

Bemerkung 18.3:

- Einfach zusammenhängend bedeutet grob gesagt, dass das Gebiet kein „Loch“ hat.
- Insbesondere sind sternförmige Gebiete einfach zusammenhängend.

Folgerung 18.2:
Ist f holomorph in dem einfach zusammenhängenden Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}$, so gilt für jede geschlossene Kurve $\mathcal{C}$ in D

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)\, \mathrm{d}z = 0$$

und für zwei Kurven $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ in D mit gleichen Anfangs- und Endpunkten gilt

$$\int_{\mathcal{C}_1} f(z)\, \mathrm{d}z = \int_{\mathcal{C}_2} f(z)\, \mathrm{d}z$$

18.1 Lemma:
Ein Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}$ ist einfach zusammenhängend, wenn sich jedes $a \notin D$ mit jedem anderen $b \notin D$ durch einen stetigen Weg verbinden lässt, d.h. zu $a \notin D$, $b \notin D$ gibt es eine stetige Funktion $z : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{C} \setminus D$ s.d. $z(\alpha) = a, z(\beta) = b$.

Beweis:
Sei $\mathcal{C}$ eine geschlossene Kurve in D und $a \notin D$. Wir wählen ein $R > 0$ s.d. $\mathcal{C}$ innerhalb von $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$ liegt. Da die Umlaufzahl lokal konstant und z stetig ist, muss

$$n(\mathcal{C}, z(t)) \equiv konst$$

sein. Da aber sicherlich $n(\mathcal{C}, b) = n(\mathcal{C}, a) = 0$ ist, muss, da $a \in \mathbb{C} \setminus D$ beliebig war, somit

$$I(\mathcal{C}) \subset D$$

gelten.

□

19 Isolierte Singularitäten, Laurententwicklung und Polordnung

19.1 Definitionen

19.1 Definition:
*Ist f holomorph in einer Umgebung von z_0 außer (eventuell) an z_0, so nennt man z_0 eine **isolierte Singularität** von f. Man unterscheidet 3 Fälle:*

1. *Man spricht genau dann von einer **hebbaren Singularität**, falls*
$$\lim_{z \to z_0} f(z) = c \in \mathbb{C}$$
2. *Man spricht genau dann von einem **Pol**, falls*
$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$$
3. *Man spricht genau dann von einer **wesentlichen Singularität**, falls der Grenzwert*
$$\lim_{z \to z_0} f(z)$$
nicht existiert.

Bemerkung 19.1:

1. Im Fall einer hebbaren Singularität mit $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = c \in \mathbb{C}$, so definiert man $f(z_0) := c$, wodurch f in der ganzen Umgebung von z_0, insbesondere auch an z_0 holomorph wird (Hier folgt die Holomorphie an z_0 aus der Stetigkeit, vergleiche Satz 13.6).
2. Wir sagen genau dann an z_0 liegt „höchstens ein Pol" vor, wenn f an z_0 eine hebbare Singularität oder einen Pol hat.
3. Beispiele wie der Logarithmus an $0 \in \mathbb{C}$ werden für solche isolierten Singularitäten nicht betrachtet, da der Logarithmus um $0 \in \mathbb{C}$ immer nur in einer geschlitzten, nicht in der ganzen Umgebung holomorph ist.

Beispiel 19.1:

1. $f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$ hat an $z = 0$ eine hebbare Singularität.
2. $f(z) = \frac{z}{\exp(-z)-1}$ hat an $z = 0$ eine hebbare Singularität.
3. Wir betrachten $f(z) = \frac{1}{(z^4+1)^2}$. Der Nenner hat Nullstellen bei $z = \pm \exp\left(\frac{\pi \mathrm{i}}{4}\right)$ und $z = \pm \mathrm{i} \exp\left(\frac{\pi \mathrm{i}}{4}\right)$, d.h. $f(z)$ hat an diesen Stellen Pole!
4. Wir betrachen $f(z) = \exp\left(\frac{1}{z}\right)$. Da
$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{1}{x}\right) &\longrightarrow \infty \text{ für } x \searrow 0 \\ \text{und } \exp\left(\frac{1}{x}\right) &\longrightarrow 0 \text{ für } x \nearrow 0 \end{aligned}$$
kann er Grenzwert $\lim\limits_{z \to 0} f(z)$ nicht existieren, folglich hat f an $z = 0$ eine wesentliche Singularität.
5. Wir betrachten $\sin\left(\frac{1}{z}\right)$. Wir wissen bereits, dass
$$\sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ für } \mathbb{R} \ni x \longrightarrow 0$$
nicht existiert, also hat f an $z = 0$ eine wesentliche Singularität.

19.2 Sätze über Singularitäten

19.1 Satz (Riemann'scher Hebbarkeitssatz):

Hat f eine isolierte Singularität an z_0 und ist f in einer Umgebung von z_0 beschränkt, so handelt es sich bei z_0 um eine hebbare Singularität.

Beweis:

Wir wählen ein $R > 0$ s.d. $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < R\}$ ganz in der Umgebung von z_0 liegt, in welcher f holomorph, und ganz in der Umgebung von z_0 liegt, in welcher f beschränkt ist. Nach Voraussetzung können wir auch ein $M > 0$ finden, s.d.

$$|f(z)| \leq M \ \forall \ z \text{ mit } 0 < |z - z_0| < R.$$

Weiter wählen wir Zahlen r_0, R_0 s.d. f in

$$0 < r_0 < |z - z_0| < R_0 < R$$

holomorph und beschränkt ist. Wir betrachten jetzt die Kette geschlossener Kurven $\mathcal{K} = (\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$, in welcher $\mathcal{C}_1$ als der im mathematisch negativen Sinne umlaufene Kreis $|z - z_0| = r_0$ und $\mathcal{C}_2$ der im mathematisch positiven Sinne umlaufene Kreis $|z - z_0| = R_0$ ist.

Da $I(\mathcal{K}) = \{z \in \mathbb{C} \mid r_0 < |z - z_0| < R_0\} \subseteq \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < R\}$ gilt, können wir die Cauchy'sche Integralformel anwenden:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint\limits_{|\zeta - z_0| = R_0} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint\limits_{|\zeta - z_0| = r_0} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta$$

Jetzt gilt aber

$$\left| \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint\limits_{|\zeta - z_0| = r_0} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta \right| \leq \frac{M}{|z - z_0| - r_0} \cdot r_0 \xrightarrow{r_0 \longrightarrow 0} 0$$

Folglich gilt also

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint\limits_{|\zeta - z_0| = R_0} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta \ \forall \ z \text{ mit } 0 < |z - z_0| < R_0 \tag{19.1}$$

wegen $r_0 \longrightarrow 0$. Die rechte Seite der Gleichung (19.1) ist holomorph in ganz $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\}$, insbesondere auch im Punkte z_0. Daher muss auch die linke Seite, d.h. f an z_0 holomorph fortsetzbar sein, z_0 ist also eine hebbare Singularität.

□

19.2 Satz (Casorati / Weierstraß):

Hat f eine wesentliche Singularität an z_0, so kommen in jeder Umgebung von z_0 die Werte von f jedem Punkt aus $\mathbb{C}$ beliebig nahe.

D.h. die Menge der Werte von f in jeder noch so kleinen Umgebung um z_0 ist dicht in $\mathbb{C}$: $\forall \ \varepsilon > 0$ gilt $\overline{f(B_\varepsilon(z_0))} = \mathbb{C}$.

Beweis:

Wir zeigen den Umkehrschluss: Sei f holomorph in $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < r\}$ und es existiere ein $c \in \mathbb{C}$ und ein $\varepsilon > 0$ s.d.

$$|f(z) - c| \geq \ \varepsilon \ \forall \ t \in \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < r\} \tag{19.2}$$

In diesem Fall definieren wir durch

$$g(z) := \frac{1}{f(z) - c}$$

ein in $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < r\}$ holomorphe Funktion. Des weiteren ist g nach (19.2) beschränkt durch

$$g(z) \leq \frac{1}{\varepsilon}$$

Nach dem Riemann'schen Hebbarkeitssatz hat g also ein hebbare Singularität an z_0. Stellen wir die Gleichung um, so erhalten wir

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} + c$$

Das bedeutet aber

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{g(z)} + c = \begin{cases} \infty & \text{falls } g(z_0) = 0 \\ d \in \mathbb{C} & \text{falls } g(z_0) \neq 0 \end{cases}$$

Damit existiert dieser Grenzwert in $\overline{\mathbb{C}}$, folglich kann f an z_0 höchstens einen Pol haben.

Wir haben damit $\neg B \ \Rightarrow \ \neg A$ gezeigt, damit folgt die Behauptung $A \ \Rightarrow \ B$.

□

19.3 Satz (Picard - ohne Beweis):

In jeder Umgebung einer wesentlichen Singularität nimmt die Funktion jeden Wert in $\mathbb{C}$ mit höchstens einer Ausnahme an.

Beispiel 19.2:

1. $\exp\left(\frac{1}{z}\right)$ nimmt wie auf einem der Übungszettel gezeigt in jeder Umgebung von $z_0 = 0$ jeden Wert außer $0 \in \mathbb{C}$ an.

2. Folglich nimmt natürlich $\sin\left(\frac{1}{z}\right)$ in jeder Umgebung jeden Wert in $\mathbb{C}$ an, da

$$\sin\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{z}\right) - \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{z}\right)}{2\,\mathrm{i}}$$

19.4 Satz:

Eine in $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < R\}$ holomorphe Funktion f lässt sich in der Form

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}$$

mit Koeffizienten $a_n \in \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{Z}$ darstellen. Dabei konvergiert die erste Reihe in $|z - z_0| < R$ und die zweite Reihe konvergiert für alle $z_0 \neq z \in \mathbb{Z}$.

Besitzt f diese Darstellung, so können die Koeffizienten a_n berechnet werden durch

$$a_n = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z$$

für $n \in \mathbb{Z}$ und ein $0 < r < R$.

__**Beweis:**__ Sei $0 < r_0 < |z - z_0| < R_0 < R$ gegeben, dann durchlaufen wir eine Kette bestehend aus einem Kreis im mathematisch negativen Sinne mit Radius r_0 um z_0 und einem Kreis im mathematisch positiven Sinne mit Radius R_0 um z_0 und es folgt mit dem Cauchy-Integralsatz für Ketten:

$$f(z) = \underbrace{\frac{1}{2\,\mathrm{i}\,\pi} \oint_{|\zeta-z_0|=R_0} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta}_{=:g(z)} + \underbrace{\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \oint_{|\zeta-z_0|=r_0} \frac{f(\zeta)}{z - \zeta}\,\mathrm{d}\zeta}_{=:h(z)}$$

Betrachten wir nun die Abbildung g. Diese ist als Abbildung von z holomorph in $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R_0\}$ und lässt sich folglich dort durch eine Taylorreihe darstellen:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Definiert man nun $M := \sup\limits_{|\zeta-z_0|=r_0} |f(\zeta)|$, so sehen wir im Falle der offensichtlich in $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| > r_0\}$ als Abbildung von z holomorphen Funktion h, dass

$$|h(z)| < \frac{M}{|z - z_0| - r_0} r_0 \xrightarrow{z \longrightarrow \infty} 0$$

gilt. Man definiert nun

$$w = \frac{1}{z - z_0} \;\Rightarrow\; z = z_0 + \frac{1}{w}$$

und es gilt damit

$$|z - z_0| > r_0 \;\Leftrightarrow\; 0 < |w| < \frac{1}{r_0}$$

Jetzt definiert man durch

$$h_1(w) = h\left(z_0 + \frac{1}{w}\right) \text{ und } h_1(0) := 0$$

eine in $\left\{w \in \mathbb{C} \mid |w| < \frac{1}{r_0}\right\}$ holomorphe Funktion und es folgt:

$$\begin{aligned} h(z) &= h_1(w) \\ &= h_1(0) + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} w^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} w^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n} \ \forall \ |z - z_0| > r_0 \end{aligned}$$

Damit folgern wir nun:

$$f(z) = g(z) + h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}$$

Da $g(z)$ auch für $z = z_0 + R_0$ konvergiert, konvergiert damit auch $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| R_0^n$. Außerdem konvergiert h auch für $z = z_0 + r_0$ und damit konvergiert auch $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|a_{-n} r_0^{-n}\right|$. Folglich sind alle Reihen lokal gleichmäßig konvergent und Summation kann mit Integration vertauscht werden. Dann ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \oint\limits_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} \,\mathrm{d}z &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \oint\limits_{|z-z_0|=r} \frac{(z - z_0)^n}{(z - z_0)^{k+1}} \,\mathrm{d}z + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \oint\limits_{|z-z_0|=r} \frac{(z - z_0)^{-n}}{(z - z_0)^{k+1}} \,\mathrm{d}z \\ &= a_k \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \oint\limits_{|z-z_0|=r} \frac{1}{z - z_0} \,\mathrm{d}z \\ &= a_k \end{aligned}$$

Den vorletzten Schritt haben wir dabei daraus gefolgert, dass die Funktion $\frac{(z-z_0)^{-n}}{(z-z_0)^{k+1}}$ für alle $n \neq k$ eine Stammfunktion hat.

□

19.3 Laurententwicklung und Singularitäten

19.2 Definition (Laurententwicklung):
Eine Entwicklung

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$$

von f um z_0 heißt Laurententwicklung. Weiter nennt man

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

den Nebenteil und

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} a_n (z - z_0)^n$$

den Hauptteil der Entwicklung.

Beispiel 19.3:

1.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sin^3(z)} &= \frac{1}{\left(z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} \mp ..\right)^3} \\
&= \frac{1}{z^3\left(1 - \frac{z^2}{6} \pm ..\right)^3} \\
&\overset{(*)}{=} \frac{1}{z^3}\left(1 + \frac{z^2}{6} + \frac{7}{360}z^4 + ..\right)^3 \\
&= \frac{1}{z^3}\left(1 + \frac{z^2}{6} + \frac{17}{120}z^4 + ..\right) \\
&= \underbrace{\frac{1}{z^3} + \frac{1}{2}\frac{1}{z}}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{\frac{17}{120}z^4 + ..}_{\text{Nebenteil}}
\end{aligned}$$

Der einzig unklare Schritt (*) erklärt sich so: Das Reziproke berechnet man, indem man

$$(a_0 + a_1 z + .. + a_n z^n + ..)(b_0 + b_1 z + .. + b_n z^n + ..) = 1 + 0 + 0 + ..$$

setzt. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
a_0 b_0 &= 1 \\
a_0 b_1 + a_1 b_0 &= 0 \\
... &= 0
\end{aligned}$$

Damit rechnet man dann die reziproke Reihe rekursiv aus.

2.

$$\exp\left(\frac{1}{z}\right) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n}}_{\text{HT}} + \underbrace{1}_{\text{NT}}$$

19.5 Satz:
Ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n}$ *der Hauptteil der Laurententwicklung von* f *um* z_0*, dann gilt:*

$$\begin{aligned}
z_0 \text{ hebbare Singularität} &\Leftrightarrow a_{-n} = 0 \ \forall\, n \in \mathbb{N} \\
z_0 \text{ Polstelle} &\Leftrightarrow |\{a_{-n} \neq 0\}| < \infty \\
z_0 \text{ wesentliche Singularität} &\Leftrightarrow |\{a_{-n} \neq 0\}| = \infty
\end{aligned}$$

<u>**Beweis:**</u> Wir zeigen lediglich die ersten beiden Äquivalenzen, die dritte ergibt sich als „Restfall“.

- $\boxed{\boxed{\text{erste Äquivalenz}}}$
  - $\boxed{\text{„}\Leftarrow\text{“}}$
    Offensichtlich.
  - $\boxed{\text{„}\Rightarrow\text{“}}$

$$\begin{aligned}
a_{-n} &= \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \oint\limits_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{-n+1}}\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \oint\limits_{|z-z_0|=r} \underbrace{f(z)(z-z_0)^{n-1}}_{\text{holomorph}}\,\mathrm{d}z \\
&= 0
\end{aligned}$$

- $\boxed{\boxed{\text{zweite Äquivalenz}}}$

– $\boxed{„\Leftarrow“}$

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=1}^{p} a_{-n}(z-z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \text{ mit } a_{-p} \neq 0 \\ &= (z-z_0)^{-p} \sum_{n=-p}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n+p} \\ &=: (z-z_0)^{-p} h(z) \text{ womit } h \text{ holomorph in einer Umgebung von } z_0 \text{ ist und } h(z_0) \neq 0 \text{ gilt.} \end{aligned}$$

– $\boxed{„\Rightarrow“}$

$$f(z) \xrightarrow{z \longrightarrow z_0} \infty \Rightarrow \frac{1}{f(z)} \xrightarrow{z \longrightarrow z_0} 0$$

Die Nullstelle hat eine Ordnung $1 \leq p < \infty$ und es gilt folglich

$\frac{1}{f(z)} = (z-z_0)^p g(z)$ mit einer in einer Umgebung von z_0 holomorphen Funktion g mit $g(z_0) \neq 0$

Damit ergibt sich dann direkt:

$$f(z) = \frac{1}{\frac{1}{f(z)}} = (z-z_0)^p \frac{1}{g(z)} =: (z-z_0)^p \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n := \sum_{n=-p}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

□

19.3 Definition (Polordnung):
Habe f an z_0 einen Pol und sei $\sum_{n=1}^{p} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$ der Hauptteil der Laurententwicklung von f um z_0 mit $a_{-p} \neq 0$. Dann heißt p die ***Polordnung*** *von f an z_0.*

19.6 Satz:
Sei z_0 eine isolierte Singularität von f und $p \in \mathbb{N}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. *f hat an z_0 einen Pol der Ordnung p.*
2. *$f(z) = \sum_{n=-p}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ in einer Umgebung von z_0 und mit $a_{-p} \neq 0$.*
3. *$f(z) = (z-z_0)^{-p} h(z)$ bei z_0 mit einer holomorphen und in z_0 nicht verschwindenden Funktion h.*

Der Beweis ist leicht und ein Analogon zu Satz 14.7 über die Nullstellenordnung .

19.4 Definition (Ordnung):
Habe f an $z_0 \in \mathbb{C}$ höchstens einen Pol. Die Zahl

$$m(f, z_0) = \begin{cases} \textit{Nullstellenordnung von } f \textit{ an } z_0 & \textit{falls } f \textit{ an } z_0 \textit{ holomorph ist} \\ -\textit{Polordnung von } f \textit{ an } z_0 & \textit{falls } f \textit{ an } z_0 \textit{ einen Pol hat} \end{cases}$$

heißt ***Ordnung*** *von f an z_0.*

19.1 Lemma (ohne Beweis):
Sei $0 \not\equiv f$, $f(z) = (z-z_0)^m h(z)$ für ein $m \in \mathbb{Z}$ mit einer in einer Umgebung von z_0 holomorphen Funktion h und $h(z_0) \neq 0$, analog für g. Dann gelten folgenden Aussagen:

$$\begin{aligned} m(f \cdot g, z_0) &= m(f, z_0) + m(g, z_0) \\ m\left(\frac{f}{g}, z_0\right) &= m(f, z_0) - m(g, z_0) \\ m(f \pm g, z_0) &\geq \min\{m(f, z_0), m(g, z_0)\} \textit{ und Gleichheit falls } m(f, z_0) \neq m(g, z_0) \\ m(f', z_0) &= m(f, z_0) - 1 \textit{ im Falle, dass } f' \not\equiv 0 \end{aligned}$$

Der Beweis ist direkt klar und hier nicht aufgeführt.

Beispiel 19.4:

$$m\left(\frac{z^2+2}{z^4-1}, z_0\right) = \begin{cases} 1 & z_0 = \pm\,\mathrm{i}\sqrt{2} \\ -1 & z_0 \in \{\pm\,\mathrm{i},\ \pm 1\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$m\left(\frac{1}{\sin\left(z^2\right)}, z_0\right) = \begin{cases} -2 & z_0 = 0 \\ -1 & z_0 \in \left\{\pm\sqrt{k\pi},\ \pm\,\mathrm{i}\sqrt{k\pi}\,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

19.5 Definition (meromorphe Funktion):
Eine bis auf Polstellen in dem Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}$ holomorphe Funktion heißt meromorph in D.

19.7 Satz (Eigenschaften meromorpher Funktionen):
Seien f, g meromorphe Funktionen in dem Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}$, dann gilt:

- *Die Funktion $f \pm g$ ist meromorph in D.*
- *Die Funktion $f \cdot g$ ist meromorph in D.*
- *Ist $g(z) \neq 0\ \forall\ z \in D$, so ist auch die Funktion $\frac{f}{g}$ meromorph in D.*
- *Auch f' ist meromorph in D.*

Kein Beweis, die Aussagen sind offensichtlich.

20 Residuensatz

20.1 Voraussetzungen, Vorbemerkungen

Sei f eine holomorphe Funktion in D bis auf isolierte Singularitäten. Sei weiter $S \subseteq D$ die Menge der nicht hebbaren Singularitäten in D und $\mathcal{K}$ eine Kette in D mit den Eigenschaften

- $I(\mathcal{K}) \subset D$
- $|S \cap I(\mathcal{K})| < \infty$
- $\operatorname{spur}(\mathcal{K}) \cap S = \emptyset$

Dann ist $I(\mathcal{K}) \cup \operatorname{spur}(\mathcal{K})$ als beschränkte und abgeschlossene Menge sicher kompakt und offensichtlich ist $D \setminus S$ ein Gebiet.

20.1 Definition (Residuum):
Habe f an z_0 eine isolierte Singularität. Dann definiert man das Residuum von f an z_0 durch:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) := \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \oint\limits_{|z-z_0|=r} f(z)\,\mathrm{d}z \quad \textit{mit } 0 < r < r_0$$

und einem r_0 derart, dass $S \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r_0\} = \emptyset$ gilt.

Bemerkung 20.1:
Dann ist $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = a_{-1}$ für das entsprechende a_{-1} aus der Laurententwicklung von f um z_0

20.1.1 Residuensatz, Rechenregeln und Beispiele

20.1 Satz (Residuensatz):
Sei f eine in dem Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}$ bis auf isolierte Singularitäten holomorphe Funktion und $\mathcal{K}$ eine Kette in D mit $I(\mathcal{K}) \subseteq D$, auf der keine Singularität von f liege. Sind $z_1, .., z_n$ die Singularitäten von f in $I(\mathcal{K})$, so gilt

$$\boxed{\int\limits_{\mathcal{K}} f(z)dz = 2\pi\,\mathrm{i} \sum_{j=1}^{n} n(\mathcal{K}, z_j) \operatorname*{Res}_{z=z_j} f(z)}$$

Beweis:
Sei $B_j = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_j| < r\}$ mit derart kleinem r definiert, dass

1. $B_j \subset I(\mathcal{K}) \subset D \;\forall\, 1 \leq j \leq n$
2. $j \neq k \;\Rightarrow\; B_j \cap B_k = \emptyset \;\forall\, 1 \leq j, k \leq n$

gelten.
Sei weiter $\mathcal{B}_j$ gerade der Weg, der den Rand von B_j genau $n(\mathcal{K}, z_j)$ mal durchläuft (mit der selben Orientierung, mit der $\mathcal{K}$ z_j umläuft).Ist die Kette $\mathcal{K}$ gegeben als $\mathcal{K} = (\mathcal{C}_1, ..., \mathcal{C}_m)$, so definieren wir eine neue Kette $\mathcal{L}$ durch

$$\mathcal{L} = (\mathcal{C}_1, .., \mathcal{C}_m, -\mathcal{B}_1, .., -\mathcal{B}_n)$$

Sei nun $z \notin \operatorname{spur}(\mathcal{L})$. Dann folgt nach Definition

$$n(\mathcal{L}, z) = n(\mathcal{K}, z) + \sum_{j=1}^{n} n(\mathcal{B}_j, z) = \begin{cases} 0 & \text{falls } z \in \bigcup\limits_{j=1}^{n} B_j \qquad \text{(Umläufe heben sich gerade auf)} \\ n(\mathcal{K}, z) & \text{falls } z \notin \bigcup\limits_{j=1}^{n} B_j \qquad \text{(alle } \mathcal{B}_j \text{ umlaufen } z \text{ nicht)} \end{cases}$$

Also:

$$I(\mathcal{L}) = I(\mathcal{K}) \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{n} \overline{B}_j \right) \subset D \setminus S$$

und da f holomorph auf $I(\mathcal{L})$ ist folgt:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathcal{L}} f(z)\, \mathrm{d}z \\ &= \int_{\mathcal{K}} f(z)\, \mathrm{d}z - \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathcal{B}_j} f(z)\, \mathrm{d}z \\ &= \int_{\mathcal{K}} f(z)\, \mathrm{d}z - \sum_{j=1}^{n} n(\mathcal{K}, z_j) \int_{|z-z_0|=r} f(z)\, \mathrm{d}z \\ &\overset{\text{Def.}}{=} \int_{\mathcal{K}} f(z)\, \mathrm{d}z - 2\pi\,\mathrm{i} \sum_{j=1}^{n} n(\mathcal{K}, z_j) \operatorname*{Res}_{z=z_j} f(z) \end{aligned}$$

Dies zeigt die Behauptung. □

20.1.2 Rechenregeln zur Berechnung der Residuen

1. Für eine hebbare Singularität z_0 von f gilt

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = 0 \tag{R1}$$

   Dies ist offensichtlich, da f auf z_0 und damit auch in einer (hinreichend kleinen) Umgebung holomorph ist, also das Integral über einer geschlossenen Kurve verschwindet.

2. Für $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ gilt

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} (\lambda f(z) + \mu g(z)) = \lambda \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) + \mu \operatorname*{Res}_{z=z_0} g(z) \tag{R2}$$

   da das Integral linear ist.

3. Ist g in einer Umgebung von z_0 holomorph, so gilt

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} (f(z) + g(z)) = \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) \tag{R3}$$

   Diese Regel entsteht durch Zusammenfassen der ersten beiden Regeln.

4. Es gilt stets

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f'(z) = 0 \tag{R4}$$

Beweis:
Sei $f(z) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} b_n (z-z_0)^n$ die Laurententwicklung von f um z_0. Dann ist

$$f'(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} n b_n (z-z_0)^{n-1} =: \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-z_0)^n$$

Damit sehen wir also:

$$a_n = (n+1)\cdot b_{n+1} \;\Rightarrow\; \operatorname*{Res}_{z=z_0} f'(z) = a_{-1} = 0\cdot a_0 = 0$$

5. Ebenso gilt stets

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)\, g'(z) = -\operatorname*{Res}_{z=z_0} f'(z)\, g(z) \tag{R5}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)\, g'(z) &\overset{\text{Produktregel}}{=} \operatorname*{Res}_{z=z_0} \big((f\cdot g)'(z) - f'(z)\, g(z)\big)\\ &\overset{\text{R2}}{=} \operatorname*{Res}_{z=z_0} (f\cdot g)'(z) - \operatorname*{Res}_{z=z_0} f'(z)\, g(z)\\ &\overset{\text{R4}}{=} -\operatorname*{Res}_{z=z_0} f'(z)\, g(z)\end{aligned}$$

□

6. Hat f eine einfache Polstelle an z_0, so ist

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} (z-z_0)\, f(z) = (z-z_0)\, f(z)\big|_{z=z_0} \tag{R6}$$

Beweis:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \oint\limits_{|z-z_0|=r} \frac{\overbrace{(z-z_0)\, f(z)}^{\text{holomorph}}}{z-z_0}\,\mathrm{d}z \overset{\text{Integralsatz}}{=} (z-z_0)\, f(z)\big|_{z=z_0}$$

□

7. Sei f holomorph in z_0 und habe g an z_0 eine einfache Nullstelle. Dann gilt:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)} \tag{R7}$$

Beweis:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} \frac{f(z)}{g(z)} \overset{(6)}{=} \left.\frac{(z-z_0)\, f(z)}{g(z)}\right|_{z=z_0} \overset{g(z_0)=0}{=} \left.\frac{f(z)}{\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}}\right|_{z=z_0} = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}$$

8. Habe f an z_0 einen $p-$fachen Pol, dann gilt allgemein:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(p-1)!}\frac{\partial^{p-1}}{(\partial z)^{p-1}} (z-z_0)^p f(z)\Big|_{z=z_0} \tag{R8}$$

Beweis:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \oint\limits_{|z-z_0|=r} \frac{\overbrace{(z-z_0)^p f(z)}^{\text{holomorph}}}{(z-z_0)^{p-1+1}}\,\mathrm{d}z \overset{\text{Integralformel}}{=} \frac{1}{(p-1)!}\frac{\partial^{p-1}}{(\partial z)^{p-1}} (z-z_0)^p f(z)$$

Beispiel 20.1 (für die Berechnung von Residuen):

1. Da sowohl $f(z) = \exp(z) - 1 - z$ als auch $g(z) = z(\exp(z)-1)$ an 0 eine doppelte Nullstelle hat, ist der Quotient $\frac{f(z)}{g(z)}$ holomorph und es gilt:

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1}{\exp(z)-1} = \operatorname*{Res}_{z=0} \left(\frac{1}{z} - \frac{\exp(z)-1-z}{z(\exp(z)-1)}\right) \overset{\text{(R3)}}{=} \operatorname*{Res}_{z=0} \left(\frac{1}{z}\right) = 1$$

2. Wegen Regel (R4) gilt:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} \frac{\cot(z)}{\sin(z)} = \operatorname*{Res}_{z=z_0} \frac{\cos(z)}{\sin^2(z)} = \operatorname*{Res}_{z=z_0} \left(\frac{-1}{\sin(z)}\right)' \overset{(R4)}{=} 0$$

3. Wegen Regel (R5) gilt:

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{\exp(z)\cos(z)}{(\exp(z)-1)^2} = \operatorname*{Res}_{z=0} \left(\cos(z)\left(\frac{-1}{\exp(z)-1}\right)'\right) \overset{(R5)}{=} \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{\sin(z)}{\exp(z)-1} = 0$$

4. Wegen Regel (R6) gilt:

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{\cos(z)}{\sin(z)} \overset{(R6)}{=} \left.\frac{z}{\sin(z)}\cos(z)\right|_{z=0} = 1$$

5. Wegen Regel (R7) gilt sogar für jedes $n \in \mathbb{Z}$:

$$\operatorname*{Res}_{z=\pi n} \frac{\cos(z)}{\sin(z)} \overset{(R7)}{=} \left.\frac{\cos(z)}{\cos(z)}\right|_{z=\pi n} = 1$$

6. Wegen Regel (R7) gilt für jedes $n \in \mathbb{Z}$:

$$\operatorname*{Res}_{z=n} \frac{\exp(z)}{\sin(\pi z)} \overset{(R7)}{=} \left.\frac{\exp(z)}{\pi\cos(\pi z)}\right|_{z=n} = \frac{(-1)^n \exp(n)}{\pi}$$

7. Wegen Regel (R8) gilt:

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{\cos(z)}{z\sin(z)} \overset{(R8)}{=} \frac{1}{1!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left.\frac{z\cos(z)}{\sin(z)}\right|_{z=0} = \left.\frac{z\sin(z)\cos(z) - z\sin^2(z) - z\sin(z)\cos(z)}{\sin^2(z)}\right|_{z=0} = -z|_{z=0} = 0$$

8. Wegen Regel (R8) gilt:

$$\operatorname*{Res}_{z=\exp\left(\frac{\pi\mathrm{i}}{4}\right)} \frac{1}{(z^4+1)^2} \overset{(R8)}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left.\frac{1}{\left(z+\exp\left(\frac{\pi\mathrm{i}}{4}\right)\right)^2(z^2+\mathrm{i})}\right|_{z=\exp\left(\frac{\pi\mathrm{i}}{4}\right)} = \frac{-3}{10\sqrt{2}}(1+i)$$

Bemerkung 20.2 (Anwendung des Residuensatzes auf Integrale):
Sei f holomorph in $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ mit einem $R > 1$ bis auf endlich viele isolierte Singularitäten, die nicht auf $|z| = 1$ liegen. Dann folgt:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(\exp(\mathrm{i}\varphi))\,\mathrm{d}\varphi &= \oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{\mathrm{i}\,z}\,\mathrm{d}z \\ &= \sum_{j=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_j} \frac{f(z)}{\mathrm{i}\,z}\end{aligned}$$

wobei $\{z_j \mid |1 \leq j \leq n\}$ die Menge der Singularitäten von $\frac{f(z)}{\mathrm{i}\,z}$ ist.

Beispiel 20.2 (für die Anwendung des Residuensatzes):

1. Wie in der Bemerkung gesehen gilt nun:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \cos^n(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\exp(\mathrm{i}\varphi) + \exp(-\mathrm{i}\varphi)}{2}\right)^n \mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{1}{2^n}\oint_{|z|=1} \left(z + \frac{1}{z}\right)^n \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}\,z} \\ &= \frac{2\pi}{2^n}\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{\left(z+\frac{1}{z}\right)^n}{z} \\ &= \frac{2\pi}{2^n}\operatorname*{Res}_{z=0}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} z^{n-k}\left(\frac{1}{z}\right)^{k+1}\right) \\ &= \begin{cases} \frac{2\pi}{2^n}\binom{n}{n/2} & \text{falls } n \in 2\mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst}\end{cases}\end{aligned}$$

da der Summand $\frac{1}{z}$ nur für gerade n stehen bleibt und wir das Residuum als a_{-1} in der Laurententwicklung von f berechnen können. Damit folgt:

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n}(\varphi)\, \mathrm{d}\varphi = \frac{2\pi}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$$

2. Wir betrachten das Integral

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4+1} dx$$

Wir wollen dieses Integral lösen, indem wir die (bis auf zwei isolierte Singularitäten) holomorphe Funktion $f(z) = \frac{z^2}{z^4+1}$ entlang der reellen Achse von $-R$ nach R und zurück über den entsprechenden Halbkreis durch die obere Halbebene (bezeichnet als $\mathcal{C}_R$) integrieren.

Für $R > 1$ umläuft $\mathcal{C}_R$ die beiden Polstellen $\exp\left(\frac{\mathrm{i}\,\pi}{4}\right)$ und $\mathrm{i}\exp\left(\frac{\mathrm{i}\,\pi}{4}\right)$. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}\int_{-R}^{R} \frac{x^2}{x^4+1}\,\mathrm{d}x + \int_{\mathcal{C}_R} \frac{z^2}{z^4+1}\,\mathrm{d}z &= 2\pi\,\mathrm{i}\left(\operatorname*{Res}_{z=\exp\left(\frac{\mathrm{i}\,\pi}{4}\right)} \frac{z^2}{z^4+1} + \operatorname*{Res}_{z=\mathrm{i}\exp\left(\frac{\mathrm{i}\,\pi}{4}\right)} \frac{z^2}{z^4+1}\right)\\ &= 2\pi\,\mathrm{i}\left(\frac{\exp\left(-\frac{\mathrm{i}\,\pi}{4}\right)}{4} - \mathrm{i}\,\frac{\exp\left(-\frac{\mathrm{i}\,\pi}{4}\right)}{4}\right)\\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\left|\int_{\mathcal{C}_R} \frac{z^2}{z^4+1}\,\mathrm{d}z\right| \le \frac{R^2}{R^4-1}2\pi R \xrightarrow{R\longrightarrow\infty} 0$$

und damit folgt wegen der Symmetrie der Funktion in $f(z) = f(-z)$, dass

$$\int_{-R}^{R} \frac{x^2}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^R \frac{x^2}{x^4+1}\,\mathrm{d}x \xrightarrow{R\longrightarrow\infty} \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Wir erhalten also

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

3. Wir können obiges Ergebnis auch verallgemeinern:

Seien dafür P und Q zwei Polynome, die $\operatorname{grad}(Q) \ge \operatorname{grad}(P) + 2$ erfüllen. Gelte weiter $Q(x) \neq 0\ \forall\ x \in \mathbb{R}$. Dann gilt mit der selben Argumentation wie oben:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x = 2\pi\,\mathrm{i}\sum_{j=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_j} \frac{P(z)}{Q(z)}}$$

wobei $z_1, .., z_n$ die Nullstellen von Q in der oberen komplexen Halbebene sind.

4. <u>Behauptung:</u>

$$\int_0^\infty \frac{\log^2(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^3}{8} \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \frac{\log(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 0$$

<u>Beweis:</u>

Wir betrachten den Logarithmus auf der in der negativen imaginären Achse geschlitzten Ebene, also

$$\frac{-\pi}{2} < \arg(z) < \frac{3\pi}{2}$$

und die bis auf isolierte Singularitäten in dieser geschlitzten Ebene holomorphe Funktion

$$f(z) = \frac{\log^2 z}{1+z^2}$$

mit den Polstellen $0,\ \mathrm{i}$ und $-\mathrm{i}$. Wir wählen nun folgenden Integrationsweg:

(a) entlang der reellen Achse von r nach R, wobei $0 < r < 1 < R \in \mathbb{R}$

(b) mittels Halbkreis (Radius R) in der oberen Halbebene um die Polstelle i von R nach $-R$ (genannt $\mathcal{C}_R$)

(c) entlang der reellen Achse von $-R$ nach r

(d) mittels Halbkreis mit Radius r durch die obere Halbebene von $-r$ nach r (genannt $\mathcal{C}_r$).

Dann ergibt sich aus dem Residuensatz:

$$\int_r^R f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\mathcal{C}_R} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{-R}^{-r} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\mathcal{C}_r} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\,\mathrm{i}\operatorname*{Res}_{z=\mathrm{i}} \frac{\log^2(z)}{1+z^2} \overset{(R7)}{=} 2\pi\,\mathrm{i}\operatorname*{Res}_{z=\mathrm{i}} \frac{\log^2(z)}{2z} = \frac{-\pi^3}{4} \tag{20.1}$$

Gleichzeitig gilt aber:

$$\int_{-R}^{-r} \frac{\log^2(z)}{1+z^2}\,\mathrm{d}z = \int_{-R}^{-r} \frac{(\log|x| + \pi\,\mathrm{i})^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_r^R \frac{\log^2|x|}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + 2\pi\,\mathrm{i}\int_r^R \frac{\log|x|}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \quad \underbrace{-\pi^2 \int_r^R \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}}_{\xrightarrow[r \longrightarrow 0]{R \longrightarrow \infty} -\frac{\pi^3}{2}}$$

Jetzt beobachtet man

$$\left| \int_{\mathcal{C}_R} f(z)\,\mathrm{d}z \right| \leq \frac{\log(R^2)}{R^2-1}\pi R \xrightarrow{R \longrightarrow \infty} 0$$

und

$$\left| \int_{\mathcal{C}_r} f(z)\,\mathrm{d}z \right| \leq \frac{\log(r^2)}{1-r^2}\pi r \xrightarrow{r \longrightarrow 0} 0$$

Beide Resultate kann man leicht mit dem Satz von l'Hospital[9] nachrechnen.
Zusammenfassend aus (20.1) ergibt sich also durch Bilden der Grenzwerte:

$$\frac{-\pi^3}{4} = \int_{-\infty}^{0} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_0^\infty f(z)\,\mathrm{d}z = 2\int_0^\infty \frac{\log^2(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + 2\pi\,\mathrm{i}\int_0^\infty \frac{\log(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x - \frac{\pi^3}{2}$$

Addition von $\frac{\pi^3}{2}$ und Vergleichen von Real- und Imaginärteilen liefert nun die Behauptung □

5. Behauptung: Sei $c > 0$. Dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} \frac{\exp(\lambda z)}{z}\,\mathrm{d}z = \begin{cases} 1 & \text{falls } \lambda > 0 \\ 0 & \text{falls } \lambda < 0 \end{cases}$$

Beweis:
Zunächst halten wir fest, dass für $z = x + \mathrm{i}\,y$ gilt:

$$|\exp(\lambda z)| = \exp(\lambda x)$$

Sei nun $\lambda > 0$. Wir wählen Zahlen $a < 0, S \neq 0, T \neq 0, S < T$ und definieren unseren Integrationsweg durch

- die Strecke von $a + \mathrm{i}\,S$ nach $c + \mathrm{i}\,S$
- die Strecke von $c + \mathrm{i}\,S$ nach $c + \mathrm{i}\,T$
- die Strecke von $c + \mathrm{i}\,T$ nach $a + \mathrm{i}\,T$
- die Strecke von $a + \mathrm{i}\,T$ nach $a + \mathrm{i}\,S$

[9] Vergleiche hierzu den Diff-I-Skript

Jetzt schätzen wir zunächst ab:

$$\begin{aligned}
\left|\int_{a+\mathrm{i}\,T}^{c+\mathrm{i}\,T} \frac{\exp(\lambda z)}{z}\,\mathrm{d}z\right| &= \left|\int_{a}^{c} \frac{\exp(\lambda x)\exp(\mathrm{i}\,\lambda T)}{x+\mathrm{i}\,T}\,\mathrm{d}x\right| \\
&\leq \frac{1}{|T|}\int_a^c \exp(\lambda x)\;\mathrm{d}x \\
&\leq \frac{1}{\lambda|T|}\exp(\lambda c) \qquad (20.2)
\end{aligned}$$

Ganz analog können wir

$$\left|\int_{a+\mathrm{i}\,S}^{c+\mathrm{i}\,S} \frac{\exp(\lambda z)}{z}\,\mathrm{d}z\right| \leq \frac{1}{\lambda|S|}\exp(\lambda c) \qquad (20.3)$$

abschätzen. Weiter gilt aber :

$$\left|\int_{a+\mathrm{i}\,S}^{a+\mathrm{i}\,T} \frac{\exp(\lambda z)}{z}\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_S^T \frac{\exp(\lambda a)\exp(\mathrm{i}\,\lambda y)}{a+\mathrm{i}\,y}\,\mathrm{i}\;\mathrm{d}y\right| \leq \frac{\exp(\lambda a)}{|a|}(T-S)$$

Gleichzeitig liefert uns der Residuensatz:

$$\begin{aligned}
&= \int_{c+\mathrm{i}\,S}^{c+\mathrm{i}\,T} \frac{\exp(\lambda z)}{z}\,\mathrm{d}z + \int_{c+\mathrm{i}\,T}^{a+\mathrm{i}\,T} \frac{\exp(\lambda z)}{z}\,\mathrm{d}z + \int_{a+\mathrm{i}\,T}^{a+\mathrm{i}\,S} \frac{\exp(\lambda z)}{z}\,\mathrm{d}z + \int_{a+\mathrm{i}\,S}^{c+\mathrm{i}\,S} \frac{\exp(\lambda z)}{z}\,\mathrm{d}z \\
&= \begin{cases} \operatorname*{Res}_{z=0} 2\pi\,\mathrm{i}\,\frac{\exp(\lambda z)}{z} = 2\pi\,\mathrm{i} & \text{falls } S<0<T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}$$

Im Falle $0<S<T$ stellen wir die so erhaltene Formel um erhalten

$$\begin{aligned}
\left|\int_{c+\mathrm{i}\,S}^{c+\mathrm{i}\,T} \frac{\exp(\lambda z)}{z}\,\mathrm{d}z\right| &\leq \frac{\exp(\lambda c)}{\lambda T} + \frac{\exp(\lambda a)}{\lambda T}(T-S) + \frac{\exp(\lambda c)}{\lambda S} \\
&\xrightarrow{a\longrightarrow -\infty} \frac{\exp(\lambda c)}{\lambda}\left(\frac{1}{T}+\frac{1}{S}\right) \\
&\xrightarrow{0<S<T\longrightarrow\infty} 0
\end{aligned}$$

Damit sehen wir nun die Existenz des Integrals aus der Behauptung ein.
Alles in Allem können wir damit für $S<0<T$ mit dem Residuensatz wie folgt vorgehen:

$$\begin{aligned}
\left|\int_{c+\mathrm{i}\,S}^{c+\mathrm{i}\,T} \left(\frac{\exp(\lambda z)}{z}\,\mathrm{d}z\right) - 2\pi\,\mathrm{i}\right| &\leq \underbrace{\left|\int_{a+\mathrm{i}\,S}^{c+\mathrm{i}\,S} \frac{\exp(\lambda z)}{z}\,\mathrm{d}z\right|}_{\text{Verwende (14)}} + \underbrace{\left|\int_{a+\mathrm{i}\,T}^{c+\mathrm{i}\,T} \frac{\exp(\lambda z)}{z}\,\mathrm{d}z\right|}_{\text{Verwende (13)}} \\
&\quad + \left|\int_{a+\mathrm{i}\,T}^{a+\mathrm{i}\,S} \frac{\exp(\lambda z)}{z}\,\mathrm{d}z\right| \\
&\leq \frac{\exp(\lambda c)}{\lambda}\left(\frac{1}{T}+\frac{1}{|S|}\right) + \frac{\exp(\lambda a)}{|a|}(T+|S|) \\
&\xrightarrow{a\longrightarrow -\infty} \frac{\exp(\lambda c)}{\lambda}\left(\frac{1}{T}+\frac{1}{|S|}\right) \\
&\xrightarrow{T\longrightarrow\infty} \frac{\exp(\lambda c)}{\lambda}\frac{1}{|S|} \\
&\xrightarrow{S\longrightarrow -\infty} 0
\end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung für $\lambda > 0$:

$$\int\limits_{c-\mathrm{i}\,\infty}^{c+\mathrm{i}\,\infty} \left(\frac{\exp(\lambda z)}{z}\,\mathrm{d}z \right) = 2\pi\,\mathrm{i}$$

Der Fall $\lambda < 0$ folgt ähnlich und bleibt als Aufgabe überlassen. $\square$

6. Behauptung: Es gilt

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-x^2\right)\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$$

Beweis:
Zunächst definieren wir

$$a := \sqrt{\pi}\exp\left(\frac{\pi\,\mathrm{i}}{4}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(1+\mathrm{i})$$

Damit gilt $a^2 = \pi \cdot \mathrm{i}$ und die Gleichung

$$2 \cdot a \cdot z = \pi\,\mathrm{i} + 2\pi\,\mathrm{i}\,n,\ n \in \mathbb{Z}$$

wird genau durch $z = \frac{a}{2}(2n+1)$ gelöst. Definieren wir nun

$$f(z) := \frac{\exp\left(-z^2\right)}{\exp(-2az)+1}$$

so hat diese Funktion ihre Singularitäten genau bei $z = \frac{a}{2}(2n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$. Mit Hilfe von Regel (R7) berechnen wir das entsprechende Residuum:

$$\operatorname*{Res}_{z=\frac{\pi}{2}} f(z) \overset{\text{(R7)}}{=} \frac{\exp\left(-\frac{a^2}{4}\right)}{-2a\exp\left(-a^2\right)} = -\frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{\pi}} \tag{20.4}$$

Als letzte Vorbereitung berechnen wir jetzt noch

$$\begin{aligned} f(z+a) &= \frac{\exp\left(-\left(z^2+2az+a^2\right)\right)}{\exp\left(-2az-2a^2\right)+1} \\ &\overset{a^2 \text{ einsetzen}}{=} -\frac{\exp\left(-\left(z^2+2az\right)\right)}{\exp(-2az)+1} \\ &= -\exp(-2az)\,f(z)\,[0.1cm] \\ &= (1-(1+\exp(-2az)))\,f(z) \\ &= f(z) - \exp\left(-z^2\right) \end{aligned} \tag{20.5}$$

Als Integrationsweg wählen wir nun das Parallelogramm mit den Seiten

- Strecke von $-T$ nach T
- Strecke von T nach $a+T$
- Strecke von $a+T$ nach $a-T$
- Strecke von $a-T$ nach $-T$.

$\frac{a}{2}$ ist die einzige Singularität von f innerhalb dieses Parallelogramms, daher liefert der Residuensatz :nun

$$\int\limits_{-T}^{T} f(z)\,\mathrm{d}z + \int\limits_{T}^{a+T} f(z)\,\mathrm{d}z + \int\limits_{a+T}^{a-T} f(z)\,\mathrm{d}z + \int\limits_{a-T}^{-T} f(z)\,\mathrm{d}z \overset{(20.4)}{=} \sqrt{\pi}$$

Weiter ist aber

$$\begin{aligned} \int\limits_{-T}^{T} f(z)\,\mathrm{d}z + \int\limits_{T+a}^{-T+a} f(z)\,\mathrm{d}z &= \int\limits_{-T}^{T} f(z)\,\mathrm{d}z + \int\limits_{T}^{-T} f(z+a)\,\mathrm{d}z \\ &= \int\limits_{-T}^{T} (f(z) - f(z+a))\,\mathrm{d}z \\ &\overset{(20.5)}{=} \int\limits_{-T}^{T} \exp\left(-z^2\right)\,\mathrm{d}z \end{aligned}$$

Unter Verwendung von $z^2 = (x + \mathrm{i}\, y)^2 = x^2 + y^2 + 2\,\mathrm{i}\, xy$ und

$$\exp(2az) = \exp\left(2\pi \frac{1+i}{2}(x + \mathrm{i}\, y)\right) \Rightarrow |\exp(2az)| = \exp\left(\sqrt{2\pi}\,(x-y)\right)$$

erhalten wir so

$$\begin{aligned} |f(z)| &\overset{\text{Erweiterung mit } \exp(2za)}{=} \frac{\left|\exp\left(-z^2 + 2az\right)\right|}{|\exp(2az) + 1|} \\ &\leq \frac{\exp\left(-x^2 + y^2 + \sqrt{2\pi}\,(x-y)\right)}{\left|\exp\left(\sqrt{2\pi}\,(x-y)\right) - 1\right|} \end{aligned}$$

Das wiederum liefert uns unter der Annahme $0 \leq y \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ und $|x - y| \geq 1$ zu

$$|f(z)| \leq \frac{\exp\left(\frac{\pi}{2}\right)\exp\left(-x^2 + \sqrt{2\pi}x\right)}{\exp\left(\sqrt{2\pi}\right) - 1}$$

Damit erhalten wir die finale Abschätzung

$$\left|\int_{\pm T}^{a \pm T} f(z)\, \mathrm{d}z\right| \leq C \cdot \exp\left(-\frac{T^2}{2}\right) \xrightarrow{T \longrightarrow \infty} 0$$

was uns die Behauptung liefert:

$$\begin{aligned} \sqrt{\pi} &= \int_{-T}^{T} f(z)\, \mathrm{d}z + \int_{a+T}^{a-T} f(z)\, \mathrm{d}z + \int_{T}^{a+T} f(z)\, \mathrm{d}z + \int_{a-T}^{-T} f(z)\, \mathrm{d}z \\ &= \int_{-T}^{T} \exp\left(-z^2\right) \mathrm{d}z + \int_{T}^{a+T} f(z)\, \mathrm{d}z + \int_{a-T}^{-T} f(z)\, \mathrm{d}z \\ &\xrightarrow{T \longrightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-z^2\right) \mathrm{d}z + 0 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-x^2\right) \mathrm{d}x \end{aligned}$$

□

21 Null- und Polstellenanzahlen

21.1 Sätze und Eigenschaften

21.1 Satz:

Sei $f \not\equiv 0$ meromorph in dem Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}$, g holomorph in D. Sei weiter $\mathcal{K}$ eine Kette in D, auf der keine Null- oder Polstellen von f liegen, mit $I(\mathcal{K}) \subset D$. Sind nun $a_1, ..., a_k$ die Nullstellen von f und $b_1, ..., b_l$ die Polstellen von f, welche in $I(\mathcal{K})$ liegen, so gilt:

$$\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_{\mathcal{K}} \frac{f'(z)}{f(z)} g(z)\, \mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{k} n(\mathcal{K}, a_j)\, m(f, a_j)\, g(a_j) + \sum_{j=1}^{l} n(\mathcal{K}, b_j)\, m(f, b_j)\, g(b_j)$$

Beweis:

Sei $z_0 \in \mathbb{C}$. Wir schreiben

$$f(z) = (z - z_0)^m \cdot h(z)$$

mit einer in einer Umgebung von z_0 holomorphen Funktion h, welche $h(z_0) \neq 0$ erfüllt. Als **logarithmische Ableitung** erhalten wir so

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z - z_0} + \frac{h'(z)}{h(z)}$$

Folglich gilt also für das Residuum von f an z_0:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} \frac{f'(z)}{f(z)} g(z) = \operatorname*{Res}_{z=z_0} \left(\frac{m \cdot g(z)}{z - z_0} + \underbrace{\frac{h'(z)}{h(z)} g(z)}_{\text{holomorph}}\right) = m \cdot g(z_0)$$

Damit folgt die Behauptung direkt aus dem Residuensatz.

□

21.2 Satz:

Sei $f \not\equiv 0$ meromorph in dem Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}$, $\mathcal{K}$ eine Kette in D, welche folgende Eigenschaften erfülle:

- $I(\mathcal{K}) \subset D$.
- $n(\mathcal{K}, z) = 1 \ \forall \ z \in I(\mathcal{K})$.
- *f hat keine Null- oder Polstellen auf $\mathcal{K}$.*

Ist nun N die Anzahl der Nullstellen, P die Anzahl der Polstellen (mit Vielfachheiten) von f in $I(\mathcal{K})$, so gilt:

$$N - P = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int\limits_{\mathcal{K}} \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z$$

Falls f keine Pole in $I(\mathcal{K})$ besitzt, so gilt insbesondere

$$N = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int\limits_{\mathcal{K}} \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z$$

und falls f keine Nullstellen in $I(\mathcal{K})$ hat, so gilt analog

$$P = -\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int\limits_{\mathcal{K}} \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z$$

Beweis:

Nach Voraussetzung ist $n(\mathcal{K}, z) = 1 \ \forall \ z \in I(\mathcal{K})$. Wenden wir also Satz 21.1 auf f und $g \equiv 1$ an, so folgt die Behauptung. □

Folgerung 21.1 (Fundamentalsatz der Algebra):

Auch hier kann man wieder den Fundamentalsatz der Algebra folgern:

Ein Polynom vom Grad $n > 1$ besitzt genau n Nullstellen in $\mathbb{C}$

Beweis:

Sei P ein Polynom vom Grad $n > 0$, $P(0) \neq 0$. Das können wir in der Tat annehmen, denn falls $P(0) = 0$, so schreiben wir $P(z) = z^k Q(z)$ mit $Q(0) \neq 0$, $\operatorname{grad}(Q) = \operatorname{grad}(P) - k$ und müssen die Aussage dasher nur für Q zeigen.

Wegen $P(z) \xrightarrow{z \longrightarrow \infty} \infty$ finden wir ein $R_0 > 0$ s.d.

$$|z| \geq R_0 \ \Rightarrow \ P(z) \neq 0$$

Jetzt definieren wir durch

$$f(z) := \frac{P(z)}{z^n}$$

eine Funktion, welche bei $0 \in \mathbb{C}$ eine n-fache Polstelle und sonst genauso viele Nullstellen N wie P besitzt. Damit gilt nach Satz 21.2:

$$\begin{aligned}
N - n &= \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \oint\limits_{|z|=R} \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \oint\limits_{|z|=R} \frac{\frac{P'(z)z^n - P(z)nz^{n-1}}{z^{2n}}}{\frac{P(z)}{z^n}}\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \oint\limits_{|z|=R} \frac{\left(P'(z)\,z^n - P(z)\,nz^{n-1}\right) \cdot z^n}{z^{2n} \cdot P(z)}\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \oint\limits_{|z|=R} \left(\frac{P'(z)}{P(z)} - \frac{n}{z}\right)\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \oint\limits_{|z|=R} \frac{z \cdot P'(z)\,n \cdot P(z)}{z \cdot P(z)}\,\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

für ein beliebiges $R > R_0$. Da im Falle $P(z) = az^n + bz^{n+1} + ...$ dann $zP'(z) = naz^n + (n-1)bz^{n-1} + ...$ und $nP(z) = naz^n + nbz^{n-1} + ...$ gilt, ist der Grad des Nenners zwangsläufig mindestens um 2 größer als der Grad des Zählers. Damit existiert das Integral!

Außerdem gilt deswegen:

$$\left|\frac{z \cdot P'(z)\, n \cdot P(z)}{z \cdot P(z)}\right| \leq \frac{C}{|z|^2} \quad \text{für } |z| \geq R_1 \geq R_0$$

Damit folgt dann

$$\left| frac12\pi\,\mathrm{i} \oint\limits_{|z|=R} \frac{z \cdot P'(z)\, n \cdot P(z)}{z \cdot P(z)}\,\mathrm{d}z\right| \leq \frac{c}{R^2} \cdot R = \frac{c}{R} \xrightarrow{R \longrightarrow \infty} 0$$

womit wiederum $n = N$ folgt, was der Behauptung entspricht. □

21.3 Satz (Rouché 1862):

Seien f und g holomorph in dem Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}$ und $\mathcal{K}$ eine Kette in D mit $I(\mathcal{K}) \subset D$ und $n(\mathcal{K}, z) = 1\ \forall\ z \in I(\mathcal{K})$. Gilt weiter

$$|g(z)| < |f(z)| \ \ \forall\ z \in \operatorname{spur}(\mathcal{K})$$

so hat $f + g$ ebenso viele Nullstellen in $I(\mathcal{K})$ wie f selbst.

Beweis:

Offenbar ist $|f(z)| - |g(z)|$ stetig auf $\operatorname{spur}(\mathcal{K})$ und dort nach Voraussetzung auch positiv. Aber $\operatorname{spur}(\mathcal{K})$ ist kompakt! Also:

$$\exists\ \varepsilon > 0 \text{ s.d. } |f(z)| - |g(z)| \geq \varepsilon\ \forall\ z \in \operatorname{spur}(\mathcal{K})$$

Wir wählen jetzt ein $M > 0$ s.d.

$$|g(z)| \leq M\ \forall\ z \in \operatorname{spur}(\mathcal{K})$$

Damit gilt für $0 \leq \lambda \leq 1 + \frac{\varepsilon}{2M}$ und $z \in \operatorname{spur}(\mathcal{K})$:

$$\begin{aligned} |f(z) + \lambda g(z)| &\geq |f(z)| - \lambda\,|g(z)| \\ &\geq |f(z)| - |g(z)| + (1-\lambda)\,|g(z)| \\ &\geq \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2M}\,|g(z)| \\ &\geq \frac{\varepsilon}{2} \\ &> 0 \end{aligned}$$

Jetzt wollen wir die Nullstellenanzahl $N(\lambda)$ der Funktion $h_\lambda = f + \lambda g$ betrachten. Da die Funktion nach Voraussetzung keine Polstellen hat, gilt für diese nach Satz 21.1:

$$N(\lambda) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int\limits_{\mathcal{K}} \frac{f'(z) + \lambda g'(z)}{f(z) + \lambda g(z)}\,\mathrm{d}z$$

Das bedeutet für $0 \leq \lambda, \lambda_0 \leq 1 + \frac{\varepsilon}{2M}$, dass

$$N(\lambda) - N(\lambda_0) = \frac{\lambda - \lambda_0}{2\pi\,\mathrm{i}} \int\limits_{\mathcal{K}} \frac{f(z)\,g'(z) - f'(z)\,g(z)}{(f(z) + \lambda g(z))\,(f(z) + \lambda_0 g(z))}\,\mathrm{d}z$$

Dies impliziert die Stetigkeit der Funktion N in λ. Da N aber gleichzeitig ganzzahlig ist, muss N demnach konstant sein, d.h. insbesondere

$$N(0) = N(1)$$

was der Behauptung entspricht. □

Folgerung 21.1 (Fundamentalsatz der Algebra):

Auch hier folgt wieder ein schöner Beweis für den Fundamentalsatz der Algebra:

Ein Polynom vom Grad $n > 1$ besitzt genau n Nullstellen in $\mathbb{C}$

Beweis:

Sei $P(z) = a_n z^n + ... + a_0$ mit $a_n \neq 0, n > 0$. Wir definieren jetzt

$$f(z) := a_n z^n \text{ und } g(z) := a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_0$$

Offenbar hat die Funktion f genau n Nullstellen. Offensichtlich finden wir ein $R_0 > 0$ s.d.

$$|z| = R > R_0 \ \Rightarrow\ |f(z)| > |g(z)|$$

Damit können wir Satz 21.3 anwenden und sehen so, dass auch $P = f + g$ genau n Nullstellen haben muss. □

21.2 Beispiele

Beispiel 21.1:

1. Wir betrachten $P(z) = z^7 - 5z^3 + 12$. Aus dem Fundamentalsatz der Algebra folgt unmittelbar, dass P insgesamt sieben Nullstellen besitzt.

   Behauptung:
   Alle sieben Nullstellen von P liegen in $1 < |z| < 2$.

   Beweis:
   Wir definieren zunächst $f_1(z) := 12$ und $g_1(z) := z^7 - 5z^3$. Weiter betrachten wir den Kreis $|z| = 1$. Auf diesem gilt
   $$|g_1(z)| \leq 6 < 12 = |f_1(z)| \tag{21.1}$$
   Damit gilt nach Satz 21.3, dass die Funktion $P = f_1 + g_2$ in $|z| < 1$ ebenso wie f keine Nullstellen hat. Die Betragsabschätzung (21.1) zeigt auch direkt, dass $P(z) \neq 0 \ \forall \ z$ mit $|z| = 1$, da für $|z| = 1$ gilt:
   $$|\Re(g_1(z))| \leq |g_1(z)| < 12 = \Re(f) \quad \Rightarrow \quad \Re(P(z)) \neq 0$$
   Jetzt definieren wir $f_2(z) := z^7$, $g_2(z) := -5z^3 + 12$ und betrachten den Kreis $|z| = 2$. Offenbar hat f_2 innerhalb dieses Kreises (nämlich an $0 \in \mathbb{C}$) sieben Nullstellen. Mit der Abschätzung
   $$|g_2(z)| \leq 52 < 128 = |f_2(z)|$$
   erhalten wir also aus dem Satz von Rouché (Satz 21.3), dass die Funktion $P = f_2 + g_2$ innerhalb von $|z| < 2$ genau sieben Nullstellen haben muss. Dies zeigt die Behauptung. □

2. Sei $\Re(a) > 1$.

   Behauptung:
   Dann hat die Gleichung
   $$\exp(-z) = z - a \tag{21.2}$$
   genau eine Lösung in $|z - a| < 1$.

   Beweis:
   Wir definieren $f(z) := z - a$ und $g(z) := -\exp(-z)$. Dann ist
   $$f(z) + g(z) = z - a - \exp(-z) =: h(z)$$
   Weiter betrachten wir den Kreis $|z - a| = 1$, welcher sich durch $z = a + \exp(\mathrm{i}\varphi)$ parametrisieren lässt. In diesem Fall gilt:
   $$|g(z)| = \exp(-\Re(a) + 1) < 1 = |f(z)|$$
   Da f in $|z - a| < 1$ genau die eine Nullstelle a hat, besitzt also auch h dort genau eine Nullstelle und damit die Gleichung (21.2) genau eine Lösung in $|z - a| < 1$. □

22 Lokales Werteverhalten holomorpher Funktionen

22.1 Definition und Beispiel

22.1 **Definition:**

*Sei f eine nicht-konstante, in dem Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, $z_0 \in D$ und $f(z_0) = c$. Dann heißt z_0 **c-Stelle** von f von der Ordnung*
$$m = m((f - c), z_0)$$

Lokal bedeutet das immer
$$f(z) = c + (z - z_0)^m h(z)$$
mit einer in einer Umgebung von z_0 holomorphen Funktion h, $h(z_0) \neq 0$.

Beispiel 22.1:

Die Funktion $f(z) = z^3 + 1$ hat bei $z_0 = 0$ eine 1-Stelle der Ordnung 3. Ist dagegen $c \neq 1$, so ist eine c-Stelle gleichbedeutend mit einer Lösung der Gleichung
$$z^3 + 1 - c = 0$$
Diese Gleichung hat für jedes $c \in \mathbb{C}$ drei Lösungen (Fundamentalsatz der Algebra), aber im Falle $c \neq 1$ sind sie alle einfach, da
$$z^3 + 1 - c = 0 \ \Rightarrow \ 3z^2 \neq 0$$

22.1 Satz:

Sei f eine nicht-konstante, in dem Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}$ holomorphe Funktion, $z_0 \in D$ und $w = f(z_0)$. Sei z_0 eine m-fache w_0-Stelle von f.

Dann gibt es offene Umgebungen $U \subseteq D$ von z_0 und V von w_0, s.d.

1. *f bildet U auf V ab, d.h. $f(U) = V$*
2. *Zu jedem $w \in V \setminus \{w_0\}$ gibt es genau m verschiedene w-Stellen von f in U*
3. *Jede dieser w-Stellen, $w \in V \setminus \{w_0\}$, ist einfach.*

Beweis:

Wir finden ein $r > 0$ s.d. $f(z) \neq w_0$ und $f'(z) \neq 0 \ \forall\ z$ mit $0 < |z - z_0| \leq r$, da die Nullstellen von f' und $f - w_0$ sich nicht in z_0 häufen. Wir definieren jetzt eine geschlossene glatte Kurve $\mathcal{C}$ durch

$$\mathcal{C} : \varphi \mapsto f(z_0 + r\exp(\mathrm{i}\,\varphi)), \ \ \varphi \in [0, 2\pi]$$

Nach Definition der Zahl r ist $w_0 \notin \operatorname{spur}(\mathcal{C})$. Allgemein gilt für ein $w \notin \operatorname{spur}(\mathcal{C})$ damit:

$$\begin{aligned}
n(\mathcal{C}, w) &= \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int\limits_{\mathcal{C}} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - w} \\
&= \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int\limits_0^{2\pi} \frac{f'(z_0 + r\exp(\mathrm{i}\,\varphi))}{f(z_0 + r\exp(\mathrm{i}\,\varphi)) - w} r\,\mathrm{i}\exp(\mathrm{i}\,\varphi)\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \oint\limits_{|z-z_0|=r} \frac{f'(z)}{f(z) - w}\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \oint\limits_{|z-z_0|=r} \frac{(f(z) - w)'}{f(z) - w}\,\mathrm{d}z \\
&\overset{\text{Satz 21.1}}{=} \text{Anzahl der } w\text{-Stellen von } f \text{ in } |z - z_0| < r
\end{aligned}$$

Ebenso liefert uns Satz 21.1 mit der Voraussetzung, dass $n(\mathcal{C}, w_0) = m$. Wir wählen also ein $r' > 0$ mit

$$\{w \in \mathbb{C} \mid |w - w_0| \leq r'\} \cap \operatorname{spur}(\mathcal{C}) = \emptyset \tag{22.1}$$

Da die Umlaufzahl lokal konstant ist, gilt also für solche $w \in \mathbb{C}$ mit $|w - w_0| < r'$, dass

$$n(\mathcal{C}, w) = n(\mathcal{C}, w_0) = m$$

Wir definieren jetzt $V := B_{r'}(w_0)$. Damit ist V offen und wie eben gesehen gibt es zu jedem $w \in V$ genau m w-Stellen von f. Weiter setzen wir

$$U := \{z \in B_r(z_0) \mid f(z) \in V\} = f^{-1}(V) \cap B_r(z_0)$$

Da f stetig ist, ist U als Schnitt offener Mengen auch wieder offen und es gilt:

$$f(U) = f\left(f^{-1}(V)\right) \cap f(B_r(z_0)) = V \cap f(B_r(z_0)) \overset{(22.1)}{\subseteq} = V$$

Die dritte Behauptung, dass jede dieser w-Stellen einfach ist, folgt direkt daraus, dass $f'(z) \neq 0 \ \forall\ z \in B_r(z_0)$. Denn gäbe es eine w-Stelle $z_1 \in U$ der Ordnung $m > 1$, so müsste

$$0 = (f(z) - w)_{|z=z_1} = f'(z_1)$$

gelten, was aber der Annahme $f(z) \neq 0 \ \forall\ z \in B_r(z_0)$ widerspricht. □

22.2 Satz (Satz von der Gebietstreue):

Das Bild eines Gebiets D unter einer nicht-konstanten, holomorphen Funktion f ist wieder ein Gebiet.

Beweis:

Das $f(D) \neq \emptyset$ ist offensichtlich. In Satz 22.1, 3. Aussage, haben wir gesehen, dass $f(D)$ offen ist.

Nehmen wir jetzt an, dass $f(D) = U \cup V$ für zwei offene Mengen U und V mit $U \cap V = \emptyset$. Seien U_1, V_1 die Urbilder von U und V unter f entsprechend. Dann wäre aber direkt $U_1 \cap V_1 = \emptyset$, $D = U_1 \cup V_1$, und wegen der Stetigkeit von f wäre sowohl U_1 als auch V_1 offen. Dies wäre also ein Widerspruch zur Gebietseigenschaft von D, womit $f(D)$ also ein Gebiet sein muss. □

22.3 Satz:
Ist f holomorph in dem Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}$, $z_0 \in D$, $w_0 := f(z_0)$, so sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $f'(z_0) \neq 0$
2. *Es gibt offene Umgebungen U von z_0 und V von w_0, s.d. f U bijektiv auf V abbildet.*

Beweis:

- $\boxed{„1) \Rightarrow 2)“}$
  Da $f'(z_0) \neq 0$ ist
  $$(f(z) - w_0)'_{|z=z_0} \neq 0 \tag{22.2}$$
  d.h. z_0 ist eine einfache w_0-Stelle ($m = 1$). Damit gibt es nach Satz 22.1 Umgebungen U und V von z_0, w_0 entsprechend, s.d. jedes $w \in V$ ein eindeutiges Urbild hat.
- $\boxed{„2) \Rightarrow 1)“}$
  Wir zeigen $\neg 1) \Rightarrow \neg 2)$. Da so $f'(z_0) = 0$ ist wegen (22.2) z_0 eine mehrfache w_0-Stelle ($m > 1$), womit es nach Satz 22.1 Umgebungen U und V von z_0 und w_0 entsprechend gibt, s.d. es zu jedem Punkt $w \in V$ mehrere Urbilder gibt. Also kann es keine Umgebungen wie in der Behauptung geben. □

22.4 Satz:
Sei f holomorph und injektiv in dem Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}$. Dann gilt:

1. *Die Umkehrfunktion f^{-1} ist holomorph in $f(D)$.*
2. *Ist B eine offene Kreischeibe, deren Abschluss in D liegt, so gilt für $w \in f(B)$:*
$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\partial B} \frac{f'(z)}{f(z) - w} z \, \mathrm{d}z$$
3. *Ist $z_0 \in D$, $w_0 = f(z_0)$, so lautet die Taylorentwicklung von f^{-1} um w_0:*
$$f^{-1}(w) = z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{(\mathrm{d}z)^{n-1}} \left(\frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} \right)^n_{|z=z_0} (w - w_0)^n$$
Diese Reihe wird auch ***<u>Lagrang'sche Reihe</u>*** *gennannt.*

Beweis:
Wir zeigen zunächst die zweite Aussage. Sei stets $w = f(z)$. Mit dieser Konvention ist die Funktion
$$\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta) - w} \cdot \zeta \tag{22.3}$$
holomorph in allen Punkten ζ außer $\zeta = z$, dort hat sie eine isolierte Singularität. Der Residuensatz liefert also für $w \in f(B), z \in B$:
$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\partial B} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta) - w} \zeta \, \mathrm{d}\zeta = \operatorname*{Res}_{\zeta = z} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta) - w} \zeta \overset{(\mathrm{R7})}{=} \left(\frac{f'(\zeta)}{f'(\zeta)} \zeta \right)_{|\zeta = z} = z = f^{-1}(w)$$
Dies zeigt die zweite Aussage des Satzes. Wie bereits festgestellt, ist die Funktion (22.3) holomorph bis auf $\zeta = z$ und folglich ist das Integral aus der eben bewiesenen Darstellung holomorph für $w \in B^{\circ}$. Damit folgt dann die Holomorphie von f^{-1} in $f(D)$.

Um die dritte Aussage zu zeigen, berechnen wir unter Verwendung von Satz 17.2 und der eben bewiesenen

Darstellung für f^{-1}:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^n f^{-1}}{(\mathrm{d}w)^n}(w_0) &\overset{\text{Satz 17.2}}{=} \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\oint\limits_{\partial B}\frac{f'(z)}{(f(z)-w_0)^{n+1}}z\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\oint\limits_{\partial B} z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(-\frac{1}{n}\frac{1}{(f(z)-w)^n}\right)\mathrm{d}z \\
&\overset{\text{partielle Integration}}{=} \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}\,n}\oint\limits_{\partial B}\frac{\mathrm{d}z}{(f(z)-w)^n} \\
&\overset{\text{Residuensatz}}{=} \frac{1}{n}\operatorname*{Res}_{z=z_0}\frac{1}{(f(z)-w_0)^n} \\
&\overset{\text{(R8)}}{=} \frac{1}{n}\frac{1}{(n-1)!}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{(\mathrm{d}z)^{n-1}}\left(\frac{z-z_0}{f(z)-f(z_0)}\right)^n_{|z=z_0} \\
&= \frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{(\mathrm{d}z)^{n-1}}\left(\frac{z-z_0}{f(z)-f(z_0)}\right)^n_{|z=z_0}
\end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung aus dem Satz von Taylor. □

22.2 Definition:

*Ist ρ eine reellwertige Funktion mit komplexem Argument aus dem Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}$, so heißt $z_0 \in D$ **lokales Maximimum** bzw. **lokales Minimum** von ρ, falls es eine Umgebung U von z_0 gibt, s.d.*

$$\rho(z_0) \geq \rho(z) \ \text{ bzw. } \rho(z_0) \leq \rho(z) \ \ \forall\ z \in U$$

22.5 Satz (Maximumsprinzip):

Ist f eine nicht-konstante, holomorphe Funktion in dem Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}$, so hat die reellwertige Funktion

$$|f(z)|$$

kein lokales Maximum in D.

Beweis:

Sei $z_0 \in D, w_0 = f(z_0)$. Wir finden Umgebungen U und V von z_0, w_0 entsprechend, s.d. f die Umgebung U auf V abbildet. Wir betrachten nun den Strahl von 0 durch w_0 in $\mathbb{C}$. Auf diesem finden wir wegen der Offenheit von V immer eine Zahl $w_1 \in V$ mit $|w_1| > |w_0|$. Zu diesem w_1 können wir ein $z_1 \in U$ mit $f(z_1) = w_1$ finden. D.h. aber

$$|f(z_1)| > |f(z_0)|$$

womit z_0 kein lokales Maximum sein kann. □

Bemerkung 22.1:

Das Maximumsprinzip folgt also direkt aus dem Satz über die Gebietstreue holomorpher Funktionen.

Bemerkung 22.2:

Sei $K \subset D$ eine kompakte Teilmenge des Gebiets $D \subseteq \mathbb{C}$. Dann nimmt für jede in D holomorphe Funktion f die reellwertige Funktion

$$|f(z)|$$

zwangsläufig wegen der Stetigkeit ein Maximum in K. Mit Satz 22.5 folgt also: Das Maximum von $|f(z)|$ in K liegt auf dem Rand von K!

Beispiel 22.2:

Sei $f(z) = \frac{1}{z^2+z+1}$.

Behauptung:

$$\Re(z) > 0 \quad \Rightarrow \quad |f(z)| \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Beweis:

Offenbar ist f bis auf die Punkte $-\frac{1}{2} \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ holomorph in ganz $\mathbb{C}$. Wir betrachten den (kompakten Halbkreis) mit Radius R und Mittelpunkt $0 \in \mathbb{C}$ in $\Re(z) \geq 0$. Wir suchen das Supremum von f auf diesem Halbkreis. Nach der obigen Bemerkung müssen wir dieses auf dem Rand suchen. Nur auf der imaginären Achse ist $|z| < R$, folglich müssen wir nur dort nach dem Supremum suchen.

Dort gilt:

$$|f(\mathrm{i}\,y)| = \frac{1}{\sqrt{(1-y^2)^2 + y^2}}$$

Dieser Ausdruck nimmt sein Maximum bei $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Da diese Aussage für ein beliebiges $R > 0$ gezeigt wurde, folgt damit:

$$\Re(z) > 0 \quad\Rightarrow\quad |f(z)| \leq \frac{1}{\sqrt{(1-y^2)^2 + y^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

22.6 Satz:

Ist f eine nicht-konstante, holomorphe Funkion in dem Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}$ ohne Nullstelle, so hat $|f(z)|$ kein lokales Minimum in D.

Beweis:

Wir wenden das Maximumsprinzip auf die Funktion $\frac{1}{f(z)}$ an.

Folgerung 22.1 (Fundamentalsatz der Algebra):

Auch hier folgt wieder ein schöner Beweis für den Fundamentalsatz der Algebra:

Ein nicht-konstantes Polynom besitzt mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$

Beweis:

Sei P ein nicht-konstantes Polynom. Wir nehmen an, dass $P(z) \neq 0 \;\forall\; z \in \mathbb{C}$. Damit hat P nach dem Minimumsprinzip kein lokales Minimum in $\mathbb{C}$, insbesondere auch keins in $0 \in \mathbb{C}$. Das bedeutet für jedes $R > 0$:

$$|P(0)| > \inf_{|z|=R} |P(z)| = P(z_R) \text{ für ein bestimmtes } z_R \text{ mit } |z_R| = R$$

Da P nicht konstantes Polynom ist, gilt $\lim\limits_{|z|\to\infty} f(z) = \infty$, d.h. für $R \longrightarrow \infty$ ergibt sich damit $P(0) = \infty$, was offensichtlich unmöglich ist. □

23 Partialbruchzerlegungen und der Satz von Mittag-Leffler

23.1 Satz (Partialbruchzerlegung für rationale Funktionen):

Sei

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

eine rationale Funktion, d.h. P und Q Polynome mit $Q \not\equiv 0$, welche die Pole

$$z_1, ..., z_m$$

besitzt. Sei weiter

$$H_k(z) = \sum_{n=1}^{p_k} \frac{a_{k,n}}{(z-z_k)^n}$$

der Hauptteil der Laurententwicklung von R um $z_k, k = 1, ..., m$, so gibt es ein Polynom P_0, s.d.

$$R(z) = \sum_{k=1}^{m} H_k(z) + P_0(z)$$

Im Falle $\operatorname{grad}(Q) > \operatorname{grad}(P)$ *gilt $P_0 \equiv 0$ und ist $N := \operatorname{grad}(P) - \operatorname{grad}(Q) \geq 0$, so ist* $\operatorname{grad}(P_0) \leq N$.

Beweis:

Betrachten wir

$$f(z) := R(z) - \sum_{k=1}^{m} H_k(z)$$

so muss es sich um eine ganze Funktion handeln, da sich alle Singularitäten wegheben. Im Falle $\operatorname{grad}(Q) > \operatorname{grad}(P)$ gilt jetzt

$$f(z) \xrightarrow{z \longrightarrow \infty} 0$$

womit nach dem Satz von Liouville $f \equiv 0$ gelten muss.
Ist jetzt das im Satz definierte $N \geq 0$, so betrachten wir

$$\left|\frac{f(z)}{z^N}\right| \leq c \text{ für } |z| \geq 1$$

Nach der Cauchy-Koeffizientenabschätzung sagt uns das

$$f(z) = \sum_{j=0}^{N} b_j z^j$$

was einem Polynom vom Grad $\leq N$ entspricht. □

Beispiel 23.1:

1. $\frac{1}{z^2+1} = -\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{1}{z-\mathrm{i}} - \frac{1}{z+\mathrm{i}}\right)$
2. $\frac{z^4}{(z^2+1)^2} = \frac{a}{z-\mathrm{i}} + \frac{A}{(z-\mathrm{i})^2} + \frac{b}{z+\mathrm{i}} + \frac{B}{(z+\mathrm{i})^2} + c$
   Direkt klar ist hierbei, dass $c = 1$ gilt.

23.1 Der Satz von Mittag-Leffler

Mögen die Summen

$$H_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{k,n}}{(z-z_k)^n} \text{ für } k = 1, ..., m$$

überall außer in $z = z_k$ konvergieren (Es handelt sich also dabei um Hauptteile von Laurententwicklungen).

23.2 Satz (Mittag-Leffler, bewiesen 1876/1877):
Sei $z_1, z_2, ...$ eine Folge paarweise verschiedener Punkte in $\mathbb{C}$ mit

$$z_k \xrightarrow{k \longrightarrow \infty} \infty$$

Für $k = 1, 2, ...$ sei jeweils

$$H_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{k,n}}{(z-z_k)^n}$$

gegeben und konvergiere für $z \neq z_k$ für $k = 1, 2, ...$ Dann gibt es eine in $\mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, ...\}$ holomorphe Funktion H s.d. H_k jeweils der Hauptteil der Laurententwicklung von H um $z = z_k$ ist.

<u>**Beweis:**</u>
Ist $z_1 = 0$, so betrachten wir die Folge $z_2, z_3, ...$ und zeigen die Aussage hierfür. Sei H_0 die Funktion aus der Behauptung für die Folge $z_2, z_3, ...$ Dann erfüllt die Funktion

$$H(z) := H_0(z) + H_1(z)$$

die Aussage des Satzes für die Folge $z_1, z_2, ...$
Sei also $z_k \neq 0 \;\forall\; k \in \mathbb{N}$.
Der Satz von Taylor liefert uns nun

$$H_k(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_{k,m} z^m \text{ für } |z| < |z_k|$$

Wir geben uns nun eine Folge $\varepsilon_k > 0$ mit $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < \infty$ und ein $m_k \in \mathbb{N}_0$ vor, s.d.

$$\sum_{m=m_k+1}^{\infty} |c_{k,m}| \left|\frac{z_k}{2}\right|^m < \varepsilon_k$$

gilt. Jetzt definieren wir noch

$$T_k(z) := \sum_{m=0}^{m_k} c_{m,k} z^m$$

und können somit
$$|H_k(z) - T_k(z)| < \varepsilon_k$$
für $|z| \leq \left|\frac{z_k}{2}\right|$ abschätzen.
Sei jetzt $R > 0$ und $k_0 \in \mathbb{N}$ s.d. $k \geq k_0 \Rightarrow |z_k| \geq 2R$. Für $|z| \leq R$ betrachten wir jetzt
$$\sum_{k=k_0}^{\infty} (H_k(z) - T_k(z)) \tag{23.1}$$
Da $R \leq \frac{|z_k|}{2}\ \forall\ k \geq k_0$ ist $\sum\limits_{k=k_0}^{\infty} \varepsilon_k$ eine konvergente Majorante! Daher muss es sich bei der Reihe (23.1) also um eine holomorphe Funktion in dem Gebiet $|z| < R$ handeln!
Jetzt definieren wir analog
$$H(z) := \sum_{k=1}^{\infty} (H_k(z) - T_k(z))$$
und erhalten somit eine holomorphe Funktion in $|z| < R$ bis auf die Punkte $z = z_k$ welche $|z_k| < R$ erfüllen.
Außerdem ist offenbar
$$H(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{k,n}}{(z - z_k)^n} + \sum_{n=1}^{\infty} b_{k,n} (z - z_k)^n$$
die Laurententwicklung von H um z_k. Da für beliebiges $R > 0$ die Funktion H wegen
$$z_k \xrightarrow{k \longrightarrow \infty} \infty$$
immer nur endlich viele nicht holomorphe Stellen in $|z| < R$ besitzt, ist die Aussage damit für ganz $\mathbb{C}$ gezeigt. $\square$

Bemerkung 23.1:
Die T_k's werden konvergenzerzeugende Summanden genannt.

23.3 Satz:
Es gilt
$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z - n)^2}$$

Beweis:
Offenbar hat die linke Funktion Pole zweiter Ordnung an $z \in \mathbb{Z}$. Daher hat die Laurententwicklung um 0 die Form
$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = \frac{a}{z^2} + \frac{b}{z} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ...$$
Da es sich um eine Gerade Funktion handelt ($\sin^2$), ist direkt klar, dass $b = a_{2n-1} = 0\ \forall\ n \in \mathbb{N}$. Wir berechnen das Residuum an 0 durch
$$\left(\frac{\pi z}{\sin(\pi z)}\right)^2 \xrightarrow{z \longrightarrow 0} 1$$
und wissen daher $a = 1$.
Wegen $\sin(\pi(z - n)) = (-1)^n \sin(\pi z)$ können wir dieses Argument auf die Laurententwicklungen um die anderen Pole ausdehnen:
$$\Rightarrow \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi(z - n))} = \frac{1}{(z - n)^2} + a_0 + a_2(z - n)^2 \text{ für } 0 < |z - n| < 1$$
Jetzt betrachten wir die Summe der Hauptteile aller Laurententwicklungen von f:
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z - n)^2} \tag{23.2}$$
Ist jetzt $|z| \leq R$ und $|n| > 2R$, so können wir $\left|\frac{z}{n}\right| \leq \frac{1}{2}$ abschätzen, und erhalten somit
$$\sum_{|n|>2R} \left|\frac{1}{(z - n)^2}\right| \leq \sum_{|n|>2R} \frac{1}{n^2} \left(\frac{1}{\left(1 - \left|\frac{z}{n}\right|\right)^2}\right) \leq \sum_{|n|>2R} \frac{4}{n^2} < \infty$$

Also haben wir eine Majorante und somit lokal gleichmäßige Konvergenz der Reihe (23.2). Durch Hinzufügen der fehlenden Glieder $|n| < 2R$ geht lediglich die Holomorphie an $\{n \in \mathbb{Z} \mid |n| \leq 2R\}$ verloren. Nach dem Satz von Mittag-Leffler erhalten wir also

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2} + g(z)$$

mit einer ganzen Funktion g. Wir haben also noch $g \equiv 0$ zu zeigen!

Zuerst folgern wir dazu aus der Substitution $z \mapsto z+1$, dass

$$g(z) = g(z+1)$$

Wenn wir nun zeigen können, dass g in $0 \leq \Re(z) \leq 1$ beschränkt ist, so folgt aus dem Satz von Liouville, dass $g \equiv$ konst. Wir betrachten dazu

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}$$

für $\Im(z) \geq 1$:

$$\left|\frac{\pi}{\sin(\pi z)}\right| = \left|\frac{2\pi}{\exp(-\pi\,\mathrm{i}\,z)(\exp(2\pi\,\mathrm{i}\,z)-1)}\right| \overset{z=x+\mathrm{i}\,y}{\leq} \frac{2\pi}{\exp(\pi y)(1-\exp(-2\pi y))} \overset{y\geq 1}{\leq} \frac{4\pi}{\exp(\pi y)} \xrightarrow{y \longrightarrow \infty} 0$$

Analog betrachtet man den Fall $y \leq -1$.

Sei nun $0 \leq x \leq 1$, $z = x + \mathrm{i}\,y$ und $n \geq 2$. Dann gilt:

$$|z-n|^2 = (x-n)^2 + y^2 = n^2\left(1-\frac{x}{n}\right)^2 + y^2 \geq \left(\frac{n}{2}\right)^2 + y^2$$

Wir geben uns ein $\varepsilon > 0$ vor und erhalten aus der obigen Gleichung:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}\right| &\leq \frac{3}{y^2} + 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + y^2} \\
&\leq \frac{2n_0}{y^2} + 2\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{4}{n^2} \\
&\overset{\text{für } |y|>>0 \text{ und } n_0>>0}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

Die Differenz von $\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}$ und $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$ wird also beliebig klein in $0 \leq x \leq 1, y \geq 1$. Damit ist nach Liouville also $g \equiv$ konst.

Nun betrachten wir die gültigen Gleichungen

$$\begin{aligned}
g\left(\frac{z}{2}\right) &= \frac{\pi^2}{\sin^2\left(\frac{\pi z}{2}\right)} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{4}{(z-2n)^2} \\
g\left(\frac{z+1}{2}\right) &= \frac{\pi^2}{\cos^2\left(\frac{\pi z}{2}\right)} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{4}{(z-(2n-1))^2}
\end{aligned}$$

und addieren diese unter Ausnutzung von

$$\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} + \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{4}{\left(2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2} = \frac{4}{\sin^2(\alpha)}$$

Damit erhalten wir:

$$g\left(\frac{z}{2}\right) + g\left(\frac{z+1}{2}\right) = \frac{4\pi^2}{\sin^2(\pi z)} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{4}{(z-n)^2} = 4g(z)$$

Jetzt setzen wir $M := \sup\limits_{|z|\leq 2} |g(z)|$. Da $|z| \leq 2 \;\Rightarrow\; \left|\frac{z}{2}\right| \leq 2, \left|\frac{z+1}{2}\right| \leq 2$, haben wir also für $|z| \leq 2$:

$$\begin{aligned}
|4g(z)| &= \left|g\left(\frac{z}{2}\right) + g\left(\frac{z+1}{2}\right)\right| \\
&\leq M + M
\end{aligned}$$

Das bilden des Supremums auf beiden Seiten liefert uns so

$$4M \leq 2M$$

und damit $M = 0$. Da $g \equiv$ konst war, gilt also

$$g \equiv 0$$

Das zeigt wie bereits gesehen die Behauptung. $\square$

Bemerkung 23.2:
Der letzte Trick, welcher aus $g \equiv$ konst sogar $g \equiv 0$ folgert, wird Herglotz-Trick genannt.

Folgerung 23.1:
Es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Beweis:
Wir betrachten die Funktion

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} - \frac{1}{z^2}$$

welche in einem geeigneten Gebiet um 0 holomorph ist. Jetzt betrachten wir

$$\begin{aligned}
\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} - \frac{1}{z^2} &= \frac{\pi^2}{\left(\pi z - \frac{(\pi z)^3}{6} + ... - ...\right)^2} - \frac{1}{z^2} \\
&= \frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{\left(\underbrace{1}_{=:a} - \underbrace{\frac{(\pi z)^3}{6} + ... - ...}_{=:b}\right)^2} - 1\right) \\
&\overset{\text{Binomische Formel}}{=} \frac{1}{z^2}\left(\underbrace{1 + \frac{\pi^2}{3} z^3 + ...}_{=(1-b)^{-2}} - 1\right) \\
&= \frac{\pi^2}{3} + ...
\end{aligned}$$

und schießen daraus

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} - \frac{1}{z^2} \xrightarrow{z \longrightarrow 0} \frac{\pi^2}{3}$$

Nach Satz 23.3 gilt damit also

$$2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}\Bigg|_{z=0} = \left(\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} - \frac{1}{z^2}\right)\Bigg|_{z=0} = \frac{\pi^2}{3}$$

Damit folgt die Behauptung. $\square$

23.4 Satz:
Es gilt

$$\pi \cdot \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right)$$

Beweis:
Offenbar hat die Funktion auf der linken Seite Pole bei $z \in \mathbb{Z}$. Wegen (R8) gilt

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \pi \cdot \cot(\pi z) = \pi \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \frac{\pi}{\pi} = 1$$

Daher sagt uns dann die Laurententwicklung der Funktion um $z = 0$, dass

$$\pi \cdot \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + a_1 z + a_3 z^3 + ...$$

Die Terme $a_{2k}, k \in \mathbb{N}_0$ fallen dabei wieder weg, da cot eine ungerade Funktion ist.
Wegen $\cot(z+\pi) = \cot(z)$ können wir direkt die Laurententwicklungen der Funktion um $z = n$ ablesen:

$$\pi \cdot \cot(\pi z) = \frac{1}{z-n} + a_1(z-n) + a_3(z-n)^3 + \dots$$

Jetzt nutzen wir

$$\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} = \frac{z}{(z-n)n} = \frac{z}{n^2\left(\frac{z}{n}-1\right)}$$

aus und können so die Konvergenz genau wie in Satz 23.3 folgern.
Wir erhalten so

$$\pi \cdot \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right) + g(z) \tag{23.3}$$

und müssen nur noch zeigen, dass $g \equiv 0$. Dazu differenzieren wir die Gleichung (23.3) und erhalten so

$$-\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = -\frac{1}{z^2} - \sum_{n \neq 0} \frac{1}{(z-n)^2} + g'(z)$$

Nach Satz 23.3 sagt uns das $g' \equiv 0$, also $g \equiv$ konst. Jetzt betrachten wir noch

$$\left.\left(\pi \cdot \cot(\pi z) - \frac{1}{z}\right)\right|_{z=0} = 0$$

was wegen der Laurententwicklung ($a_{2k} = 0, k \in \mathbb{N}_0$) gilt, und erhalten wegen

$$\left.\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right)\right|_{z=0} = 0$$

dass $g \equiv 0$. □

24 Der Weierstraß'sche Produktsatz

24.1 Definition:

Sei $0 \neq a_n \in \mathbb{C}\ \forall\ n \in \mathbb{N}$ gegeben. Falls

$$\lim_{N \to \infty} \prod_{n=1}^{N} a_n = a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

so sagt man, dass das Produkt $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.

Beispiel 24.1:

1. Es gilt

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}$$

   wegen

$$\begin{aligned} \prod_{n=2}^{N} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) &= \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} \cdot \dots \cdot \frac{(N-1)\cdot(N+1)}{N \cdot N} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{N+1}{N}\right) \\ &\xrightarrow{N \longrightarrow \infty} \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2. $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent.

3. $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$ ist ebenfalls divergent.

24.1 Lemma:
Eine notwendige Bedingung für Konvergenz ist

$$a_n \xrightarrow{n \longrightarrow \infty} 1$$

Beweis:
Offenbar gilt

$$a_n = \frac{\prod_{k=1}^{n} a_k}{\prod_{k=1}^{n-1} a_k} \xrightarrow{n \longrightarrow \infty} \frac{a}{a} = 1$$

Dies zeigt die Aussage. □

24.1 Hilfssatz:
Wir betrachten den Hauptzweig des Logarithmus. Ist $|z| \leq \frac{1}{2}$, so gilt

$$|\log(1-z)| \leq 2|z|$$

Ist weiter $N \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, so gilt

$$\left|\log(1-z) + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{z^n}{n}\right| \leq |z|^N$$

Beweis:
Der Satz von Taylor liefert uns für jedes $|z| < 1$:

$$\log(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

Insbesondere gilt also für $|z| \leq \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} |\log(1-z)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |z|^n \\ &\leq |z| \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= 2|z| \end{aligned}$$

Analog folgt durch Einsetzen der Taylorentwicklung für $N \in \mathbb{N}_{\geq 2}$:

$$\begin{aligned} \left|\log(1-z) + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{z^n}{n}\right| &= \left|-\sum_{n=N}^{\infty} \frac{z^n}{n}\right| \\ &\leq \frac{1}{N}|z|^N \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &\leq \frac{1}{2}|z|^N \cdot 2 \\ &= |z|^N \end{aligned}$$

□

24.2 Lemma (Hinreichende Bedingung für Produktkonvergenz):
Sei $0 \neq a_n \in \mathbb{C} \ \forall \ \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} |1 - a_n| < \infty \quad \Rightarrow \quad \prod_{n=1}^{\infty} a_n \ \textit{konvergiert}$$

Außerdem ist dann die Reihenfolge beliebig vertauschbar, ohne dass sich der Wert oder die Konvergenz ändert.

Beweis:
Da die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |1 - a_n|$ absolut konvergiert, kann sie beliebig umgeordnet werden. Daher folgt die Beliebigkeit der Reihenfolge direkt.

Jetzt wählen wir ein $n_0 \in \mathbb{N}$ s.d. $n \geq n_0 \Rightarrow |1-a_n| \leq \frac{1}{2}$. Das ist wegen der Konvergenz der Reihe möglich. Nach dem Hilfssatz haben wir dann

$$|\log(a_n)| = |\log(1-(1-a_n))| \leq 2|1-a_n| \ \forall\, n \geq n_0$$

Jetzt gilt für das Produkt für jedes $N \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\prod_{n=1}^{N} a_n &= \prod_{n=1}^{N} \exp(\log(a_n)) \\ &= \exp\left(\sum_{n=1}^{N} \log(a_n)\right)\end{aligned}$$

und daher können wir wie folgt abschätzen:

$$\left|\prod_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \left|\exp\left(\sum_{n=0}^{n_0-1} \log(a_n) + \sum_{n=n_0}^{\infty} 2|1-a_n|\right)\right|$$

Damit folgt die Konvergenz. □

Sei nun $p(z) = az^m(z-z_1)\cdot\ldots\cdot(z-z_n)$ für $a, z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ ein Polynom. Nach dem bewiesenen Hauptsatz der Algebra können wir jedes Polynom so darstellen. Dann erhalten wir quasi

$$P(z) = bz^m\left(1-\frac{z}{z_1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{z}{z_n}\right)$$

mit einer Hoffnung auf Konvergenz, da $z_n \longrightarrow \infty$ (Nach Satz 15.1 Häufen sich die Nullstellen einer holomorphen Funktion nicht im Endlichen!).

24.1 Satz:

Sei $z_1, z_2, \ldots$ eine Folge in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ mit

$$z_n \xrightarrow{n \longrightarrow \infty} \infty$$

Dann gibt es eine Folge $k_1, k_2, \ldots$ in $\mathbb{N}_0$ s.d. das ***Weierstraßprodukt***

$$W(z) := \prod_{n=1}^{\infty}\left(\left(1-\frac{z}{z_n}\right)\exp\left(\sum_{k=0}^{k_n}\frac{1}{k}\left(\frac{z}{z_n}\right)^k\right)\right)$$

für jedes $z \ni \mathbb{C}$ konvergiert und eine holomorphe Funktion mit Nullstellen genau an $z_1, z_2, \ldots$ darstellt, wobei die Nullstellenordnung an z_n gleich der Anzahl der $j \in \mathbb{N}$ mit $z_j = z_n$ ist.

Beweis:

Wir wählen $k_n \in \mathbb{N}_0$, s.d. für jedes $R > 0$ gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{R}{|z_n|}\right)^{k_n+1} < \infty \tag{24.1}$$

(d.h. dass diese Reihe konvergiert, z.B. $k_n = n-1$ erfüllt dies stets).

Dann gilt für beliebiges $R > 0, |z| \leq R$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ s.d. $|z_n| \geq 2R \ \forall\, n \geq n_0$, dass

$$\frac{R}{|z_n|} \leq \frac{1}{2} \ \forall\, n \geq n_0$$

Nach dem Hilfssatz haben wir unter diesen Bedingungen folglich

$$\left|\log\left(1-\frac{z}{z_n}\right) + \sum_{k=1}^{k_n}\frac{1}{k}\left(\frac{z}{z_k}\right)^k\right| \leq \left|\frac{z}{z_n}\right|^{k_n+1} \leq \left(\frac{R}{|z_n|}\right)^{k_n+1}$$

und damit dann insgesamt die Abschätzung

$$\begin{aligned}\prod_{n=n_0}^{N}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)\exp\left(\sum_{k=1}^{k_n}\frac{1}{k}\left(\frac{z}{z_n}\right)^k\right) &= \exp\left(\sum_{n=n_0}^{N}\left(\log\left(1-\frac{z}{z_0}\right)+\sum_{k=1}^{k_n}\frac{1}{k}\left(\frac{z}{z_n}\right)^k\right)\right) \\ &\leq \exp\left(\sum_{n=n_0}^{N}\left(\frac{R}{|z_n|}\right)^{k_n+1}\right)\end{aligned}$$

welche wegen der Wahl der k_n in (24.1) die Behauptung zeigt. □

24.2 Satz:

Eine ganze Funktion f ohne Nullstellen lässt sich darstellen als

$$f(z) = \exp(g(z))$$

mit einer ganzen Funktion g.

Beweis:

Da f ganz und ohne Nullstellen ist, ist die logarithmische Ableitung

$$\frac{f'}{f}$$

auch ganz. Daher definieren wir durch

$$g(z) := \int_0^z \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} \,\mathrm{d}\zeta + \log(f(0))$$

eine ganze Funktion. Nun gilt:

$$\left(\frac{\exp(g(z))}{f(z)}\right)' = \frac{\exp(g(z))}{f(z)} \left(g'(z) - \frac{f'(z)}{f(z)}\right) \equiv 0$$

Der ist also $\frac{\exp(g(z))}{f(z)} \equiv$ konst. Da aber gleichzeitig

$$\exp(g(0)) = \exp(\log(f(0))) = f(0)$$

folgt direkt die Behauptung. $\square$

24.3 Satz (Weierstraß'scher Produktsatz):

Sei $f \not\equiv 0$ eine ganze Funktion und seien $z_1, z_2, ...$ die von 0 verschiedenen Nullstellen von f, jeweils mit Vielfachheit aufgeführt. Ist m die Nullstellenordnung von f in $z = 0$, so gibt es eine Folge $k_1, k_2, ...$ in $\mathbb{N}_0$ und eine ganze Funktion g, s.d.

$$f(z) = z^m \cdot \exp(g(z)) \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 - \frac{z}{z_n}\right) \cdot \exp\left(\sum_{k=1}^{k_n} \frac{1}{k}\left(\frac{z}{z_n}\right)^k\right)\right)$$

gilt.

Beweis:

Wir wählen die Folge $k_1, k_2, ...$ in $\mathbb{N}_0$ so, dass das Weierstraßprodukt $W(z)$ zu den Nullstellen $z_1, z_2, ...$ konvergiert. Jetzt betrachtet man

$$\frac{f(z)}{z^m \cdot W(z)}$$

Nach Definition ist das eine ganze Funktion ohne Nullstellen, und damit gibt es laut Satz 24.2 eine ganze Funktion g mit

$$\frac{f(z)}{z^m \cdot W(z)} = \exp(g(z))$$

Damit folgt die Behauptung. $\square$

24.4 Satz:

Es gilt

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right) \exp\left(\frac{z}{n}\right) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

Beweis:

Offenbar ist

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \left(\frac{R}{|n|}\right)^{1+1} < \infty \;\forall\; R > 0$$

Daher können wir $k_n = 1\ \forall\ n \in \mathbb{N}$ wählen und das Weierstraßprodukt zu den Nullstellen $z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ der Funktion $\sin(\pi z)$ konvergiert. Damit haben wir nach Satz 24.3

$$\sin(\pi z) = \exp(g(z)) \cdot ...$$

mit einer ganzen Funktion g.
Betrachten wir jetzt die logarithmische Ableitung, so liefert uns das

$$\begin{aligned} \pi \cot(\pi z) &= g'(z) + \frac{1}{z} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \left(\frac{-\frac{1}{n}}{1-\frac{z}{n}} + \frac{1}{n} \right) \\ &= g'(z) + \underbrace{\frac{1}{z} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right)}_{\text{laut Satz 23.4 } = \pi\cot(\pi z)} \end{aligned}$$

und damit wissen wir $g \equiv$ konst. Auswertung beider Terme an $z = 0$ liefert uns nun $g \equiv 0$ bzw. $\exp(g) \equiv 1$ und damit die Behauptung. □

25 Die Gammafunktion

Dieser Abschnitt ist [WEZ], Kapitel 4 sehr ähnlich.

Wir kennen bereits die Gammafunktion

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} \exp(-t)\ \mathrm{d}t$$

welche laut Beispiel 17.5 und Definition 17.9 für $\Re(z) > 0$ holomorph ist. Für sie können wir

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \int_0^\infty t^{z-1} \exp(-t)\ \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 t^{z-1} \exp(-t)\ \mathrm{d}t + \underbrace{\int_1^\infty t^{z-1} \exp(-t)\ \mathrm{d}t}_{\text{ganz}} \end{aligned}$$

schreiben. Folgendes Lemma liefert eine alternative Darstellung für das erste Integral:

25.1 Lemma:
Es gilt

$$\int_0^1 t^{z-1} \exp(-t)\ \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n} \tag{25.1}$$

für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, ...\}$.

Beweis:
Allgemein gilt für jedes $z \in \mathbb{C}$:

$$t^{z-1} \exp(-t) = t^{z-1} \sum_{n=0}^\infty \frac{(-t)^n}{n!} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} t^{z+n-1}$$

Diese Reihe konvergiert für jedes feste $z \in \mathbb{C}$ gleichmäßig bezüglich $t \in [0, 1]$. Insbesondere darf daher die Integration gleichmäßig mit der Summenbildung vertauscht werden (vergleiche zum Beispiel [FOA], §21, Satz

4) und daher gilt für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, ...\}$:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 t^{z-1} \exp(-t)\, \mathrm{d}t &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 t^{z+n-1}\, \mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n} t^{z+n}\Big|_{t=0}^{t=1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n}
\end{aligned}$$

Das zeigt die Behauptung. □

Damit können wir Γ holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, ...\}$ mit einfachen Polen an den Stellen $\{0, -1, -2, ...\}$ fortsetzen. Aus der Reihendarstellung (25.1) folgt direkt, dass

$$\operatorname*{Res}_{z=-n} \Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}$$

gilt.

25.1 Hilfssatz (Euler-McLaurin'sche Summenformel):
Sei f eine stetig differenzierbare, komplexwertige Funktion auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$. [10] *Dann gilt:*

$$\sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ a < n \leq b}} f(n) = \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x + (a - \lfloor a \rfloor) f(a) - (b - \lfloor b \rfloor) f(b) + \int_a^b (x - \lfloor x \rfloor) f'(x)\, \mathrm{d}x$$

Beweis:
Sei

$$a \leq n < \alpha < \beta < n + 1 < b$$

Ist $x \notin \mathbb{Z}$, so gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} (x - \lfloor x \rfloor) f(x) = f(x) + (x - \lfloor x \rfloor) f'(x) \tag{25.2}$$

Daher ist dann

$$\int_\alpha^\beta (f(x) + (x - \lfloor x \rfloor)) f'(x)\, \mathrm{d}x = (\beta - n) f(\beta) - (\alpha - n) f(\alpha)$$

Insbesondere ist also

$$\begin{aligned}
\int_\alpha^{n+1} (f(x) + (x - \lfloor x \rfloor)) f'(x)\, \mathrm{d}x &= \int_\alpha^\beta (f(x) + (x - \lfloor x \rfloor)) f'(x)\, \mathrm{d}x + \int_\beta^{n+1} (f(x) + (x - \lfloor x \rfloor)) f'(x)\, \mathrm{d}x \\
&= (\beta - n) f(\beta) - (\alpha - n) f(\alpha) + \int_\beta^{n+1} (f(x) + (x - \lfloor x \rfloor)) f'(x)\, \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Da die Funktion $(f(x) + (x - \lfloor x \rfloor)) f'(x)\, \mathrm{d}x$ auf $\beta \leq x \leq n+1$ beschränkt ist folgt so mit $\beta \nearrow n+1$:

$$\int_\alpha^{n+1} (f(x) + (x - \lfloor x \rfloor)) f'(x)\, \mathrm{d}x = f(n+1) - (\alpha - n) f(\alpha) \tag{25.3}$$

Ganz analog lässt man nun $\alpha \searrow n$ gehen und erhält so

$$\int_n^{n+1} (f(x) + (x - \lfloor x \rfloor)) f'(x)\, \mathrm{d}x = f(n+1)$$

[10] Mit „stetig differenzierbar" auf einem abgeschlossenen Intervall ist gemeint, dass es ein offenes Intervall I mit $[a, b] \subset I \subset \mathbb{R}$ gibt, in welchem f stetig differenzierbar ist.

Durch Zerlegung des Integrals in ganzzahlige Teilintervalle sieht man so

$$\begin{aligned}
\int_a^b \left(f(x) + (x - \lfloor x \rfloor)\right) f'(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^{\lfloor a \rfloor + 1} \left(f(x) + (x - \lfloor x \rfloor)\right) f'(x)\,\mathrm{d}x \\
&+ \sum_{n=\lfloor a \rfloor + 1}^{\lfloor b \rfloor - 1} \int_n^{n+1} \left(f(x) + (x - \lfloor x \rfloor)\right) f'(x)\,\mathrm{d}x \\
&+ \int_{\lfloor b \rfloor}^{b} \left(f(x) + (x - \lfloor x \rfloor)\right) f'(x)\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{Analog zu (1.3)}}{=} f(\lfloor a \rfloor + 1) - (a - \lfloor a \rfloor) f(a) \\
&+ \sum_{n=\lfloor a \rfloor + 1}^{\lfloor b \rfloor - 1} f(n+1) + (b - \lfloor b \rfloor) f(b) - 0 \\
&= \sum_{n=\lfloor a \rfloor}^{\lfloor b \rfloor - 1} f(n+1) - (a - \lfloor a \rfloor) f(a) + (b - \lfloor b \rfloor) f(b)
\end{aligned}$$

Diese Gleichung zeigt genau die Behauptung.

Gibt es keine α, β, n wie oben gefordert, so kann man die Berechnungen analog nachvollziehen. Der Fall $[a, b] \cap \mathbb{Z} = \emptyset$ ist trivial, da (25.2) dann stets gilt. Gibt es genau eine ganze Zahl $n \in [a, b]$ so kann man ganz analog zu obiger Rechnung verfahren, nur das die Summe in der letzten Gleichungskette leer bleibt. □

25.1 Satz (Funktionalgleichung):

Es gilt

$$\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z)$$

für $\Re(z) > 0$.

<u>Beweis:</u>

Wegen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^z \exp(-x)\right) = z x^{z-1} \exp(-x) - x^z \exp(-x)$$

folgt direkt

$$x^z \exp(-x)\big|_a^b = z \int_a^b x^{z-1} \exp(-x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b x^z \exp(-x)\,\mathrm{d}x$$

Lassen wir dort nun $a \longrightarrow 0$ und $b \longrightarrow \infty$ in der Halbebene $\Re(z) > 0$ gehen, so folgt direkt

$$0 = z\Gamma(z) - \Gamma(z+1)$$

was der Behauptung entspricht. □

Folgerung 25.1:

Es gilt

$$\Gamma(n+1) = n!$$

<u>Beweis:</u>

Obiger Satz sagt uns

$$\Gamma(z+n) = z \cdot (z+1) \cdot \ldots \cdot (z+n-1) \cdot \Gamma(z)$$

Außerdem gilt

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty \exp(-t)\,\mathrm{d}t = 1$$

Das zeigt die Behauptung. □

25.1 Definition (allgemeine Fakultät):

Wir definieren die ***allgemeine Fakultät*** *durch*

$$\Pi(z) := \Gamma(z+1)$$

Bemerkung 25.1:

Insbesondere hat die allgemeine Fakultät also die Eigenschaft $\Pi(n) = n!$.

Wir haben mit (25.1R) schon die folgende Darstellung der Gammafunktion gesehen:

Folgerung 25.2 (Darstellung nach Prym):

Es gilt

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n} + \int_1^{\infty} t^{z-1} \exp(-t)\, dt$$

in $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, ...\}$.

Im Weiteren sei stets $s \in \mathbb{C}$ mit $s = \sigma + it$ für $\sigma, t \in \mathbb{R}$. Wir werden s dann stets als das Argument der Gamma-Funktion benutzen.

Wir wollen nun einige nützliche Gleichungen der Gamma-Funktion beweisen. Dazu brauchen wir aber zunächst die folgende Wachstumsabschätzung:

25.2 Satz:

Sei $\sigma_1 < \sigma_2$. *Dann gilt*

$$\Gamma(s) = \mathcal{O}(1)$$

für $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$ *und* $|t| \geq 1$. *Die selbe Aussage gilt auch für* $0 < \sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$ *und* $t \in \mathbb{R}$.

Beweis:

Sei $\sigma_1 > 0$. Dann gilt:

$$|\Gamma(s)| \leq \int_0^{\infty} x^{\sigma-1} \exp(-x)\, dx = \Gamma(\sigma) \leq \sup_{\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2} \Gamma(\sigma) < \infty$$

Das zeigt den zweiten Fall.

Sei $\sigma_1 \leq 0$. Dann wählen wir ein $n \in \mathbb{N}$ s.d. $\sigma_1 + n > 0$ gilt. Natürlich ist dann

$$0 < \sigma_1 + n \leq \sigma + n \leq \sigma_2 + n$$

Betrachten wir jetzt

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+n)}{s \cdot (s+1) \cdot ... \cdot (s+n-1)}$$

so können wir den ersten Teil auf den Zähler anwenden. Da in diesem Fall $|t| \geq 1$ vorausgesetzt wurde, können wir den Nenner abschätzen:

$$|\Gamma(s)| \leq \frac{|\Gamma(s+n)|}{|s| \cdot |(s+1)| \cdot ... \cdot |(s+n-1)|} \leq \frac{C}{|t|^n} \leq C$$

Damit ist auch hier die Behauptung gezeigt. □

Jetzt sind wir bereit, die **Ergänzungsformel** zu zeigen:

25.3 Satz (Ergänzungsformel):

Es gilt

$$\Gamma(s) \cdot \Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$$

für alle $s \in \mathbb{C}$.

Beweis:
Die Funktion
$$f(s) := \Gamma(s)\Gamma(1-s) - \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$$
ist holomorph in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Außerdem gilt
$$\begin{aligned} f(s+1) &= s\gamma(s)\Gamma(-s) + \frac{\pi}{\sin(\pi s)} \\ &= -\Gamma(s)(-s)\Gamma(-s) + \frac{\pi}{\sin(\pi s)} \\ &= -\left(\Gamma(s)\Gamma(1-s) - \frac{\pi}{\sin(\pi s)}\right) \\ &= -f(s) \end{aligned}$$
Damit haben wir die Gleichung
$$f(s+n) = (-1)^n f(s) \tag{25.4}$$
für $n \in \mathbb{Z}$. Betrachten wir nun die offensichtlich geltende Gleichung
$$f(s) = \frac{\Gamma(1+s)\Gamma(1-s) - \frac{\pi s}{\sin(\pi s)}}{s}$$
Setzen wir dort $s = 1$, so haben wir im Zähler
$$\Gamma(1)^2 - \frac{\pi s}{\sin(\pi s)}\Big|_{s=0} = 0$$
und daher handelt es sich um eine hebbare Polstelle. Zusammen mit Gleichung (25.4) sagt uns das, dass f eine ganze Funktion ist.
Wir haben außerdem die Abschätzung
$$\begin{aligned} |\sin(\pi s)| &= \left|\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\exp(\mathrm{i}\pi s) - \exp(-\mathrm{i}\pi s)\right)\right| \\ &= \left|\frac{\exp(-\mathrm{i}\pi s)}{2\mathrm{i}}\left(\exp(2\pi \mathrm{i} s) - 1\right)\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|\exp(-\mathrm{i}\pi s)\right|\left|1 - \exp(2\pi \mathrm{i} s)\right| \\ &\overset{|a-b| \geq |a|-|b|}{\geq} \frac{1}{2}\exp(\pi t)\underbrace{\left(1 - \exp(-2\pi t)\right)}_{\geq \frac{1}{2} \text{ für } t \geq 1} \\ &\geq \frac{1}{4}\exp(\pi t) \end{aligned}$$
Ganz analog gilt natürlich
$$|\sin(\pi s)| \geq \frac{1}{4}\exp(\pi t)$$
für $t \leq -1$.

Nach Satz 25.2 können wir die Γ-Funktion ebenfalls durch eine Konstante in dem Bereich $|t| \geq 1$ und $\sigma \in [0,1]$ abschätzen. Nach obigen Rechnungen muss also auch f in dem Bereich $|t| \geq 1$ und $\sigma \in [0,1]$ beschränkt sein. Weiter ist f in der kompakten Menge $\sigma \in [0,1]$, $t \in [-1,1]$ holomorph, also stetig, also beschränkt und daher folgt
$$f(s) = \mathcal{O}(1)$$
in ganz $0 \leq \sigma \leq 1$. Wegen Gleichung (25.4) folgt damit aber die Beschränktheit in ganz $\mathbb{C}$ und nach dem Satz von Liouville ist F konstant, also $f \equiv c \in \mathbb{C}$. Wendet man darauf wieder Gleichung (25.4) an, so sieht man
$$c = f(s+1) = -f(s) = -c$$
und daher gilt $c = 0$, was die Behauptung zeigt. □

Folgerung 25.3:
Es gilt
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Beweis:
Wir betrachten die Ergänzungsformel für $s = \frac{1}{2}$. Dann folgt

$$\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \pi$$

Da $\Gamma(\sigma) > 0$ für $\sigma > 0$, folgt die Behauptung. □

Folgerung 25.4:
Die Funktion Γ hat keine Nullstellen.

Beweis:
Das folgt direkt daraus, dass

$$\frac{\pi}{\sin(\pi s)} \neq 0$$

für jedes $s \in \mathbb{C}$. Also ist nach der Ergänzungsformel auch

$$\Gamma(s)\,\Gamma(1-s) \neq 0 \;\forall\; s \in \mathbb{C}$$

und daher $\Gamma(s) \neq 0 \;\forall\; s \in \mathbb{C}$. □

Folgerung 25.5:
Die Funktion

$$\frac{1}{\Gamma(s)}$$

ist ganz und hat einfache Nullstellen an den Punkten $s = 0, -1, -2, \dots$.

25.4 Satz (Eindeutigkeitssatz von Wielandt (1939)):
Sei f eine in $\sigma > 0$ holomorphe Funktion mit den Eigenschaften :

1. $f(1) = 1$
2. $f(s+1) = s \cdot f(s)$
3. $f(s) = \mathcal{O}(1)$ *in* $1 \leq \sigma \leq 2$

Dann gilt

$$f(s) = \Gamma(s)$$

Beweis:
Die Voraussetzungen 1. und 2. implizieren wie bei Γ selbst durch

$$f(s) = \frac{f(s+n+1)}{s \cdot (s+1) \cdot \ldots \cdot (s+n)} \text{ für } \sigma > -n-1$$

eine Fortsetzung in $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$ mit einfachen Polen und

$$\operatorname*{Res}_{s=-n} f(s) = \frac{(-1)^n}{n!}$$

für $n \in \mathbb{N}_0$. Dann ist die Funktion

$$g(s) := f(s) - \Gamma(s)$$

zunächst holomorph in $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$ und wegen

$$\operatorname*{Res}_{s=-n} f(s) = \operatorname*{Res}_{s=-n} \Gamma(s)$$

(und weil es sich bei beiden um einfache Pole handelt), muss g eine ganze Funktion sein. Ganz zwangsläufig erfüllt dann auch g die Funktionalgleichung 2..
Sei jetzt

$$h(s) := g(s) \cdot g(1-s)$$

Dann ist h ebenfalls eine ganze Funktion und es gilt

$$\begin{aligned} h(s+1) &= sg(s)\,g(-s) \\ &= -\left(g(s)\,(-s)\,g(-s)\right) \\ &= -g(s)\,g(1-s) \\ &= h(-s) \end{aligned}$$

Also erfüllt h die Gleichung

$$h(s+n) = (-1)^n h(s) \text{ für } n \in \mathbb{Z} \tag{25.5}$$

Aus der Voraussetzung 3. folgern wir jetzt wie bei Γ in Satz 25.2 mit der Formel

$$\frac{f(s+n)}{s \cdot (s+1) \cdot \ldots \cdot (s+n-1)} = f(s)$$

dass sogar $f(s) = O(1)$ für beliebige $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$ und $|t| \geq 1$ sowie für $0 < \sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$ und $t \in \mathbb{R}$. Also erfüllt auch g diese Eigenschaft. Allgemein gilt aber

$$\Re(s) \in [1,2] \quad \Rightarrow \quad \Re(1-s) \in [-1,0]$$

und daher muss wegen der Holomorphie wie oben schon (stetig auf Kompaktum, also beschränkt) auch

$$h(s) = \mathcal{O}(1)$$

für $1 \leq \sigma \leq 2$ gelten. Mit Gleichung (25.5) folgt daraus aber die Beschränktheit von h in der ganzen Ebene und nach Liouville ist $h(s) \equiv c \in \mathbb{C}$. Mit Gleichung (25.5) folgt aber wieder

$$c = h(1) = -h(0) = -c$$

und daher $c = 0$, also ist

$$h(s) = g(s)\, g(1-s) \equiv 0$$

Nach dem Identitätssatz muss daher aber $g = 0$ gelten, also ist die Behauptung gezeigt. □

Jetzt können wir auch die sogenannte **Verdopplungsformel von Legendre** zeigen:

25.5 Satz (Verdoppelungsformel von Legendre):
Es gilt

$$\Gamma(2s) = \frac{2^{2s-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(s)\, \Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right)$$

für alle $s \in \mathbb{C}$.

Beweis:
Offensichtlich ist die Funktion

$$f(s) := \frac{2^{s-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)$$

holomorph in $\sigma > 0$. Man berechnet außerdem leicht

$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{2^0}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Außerdem erfüllt f die Funktionalgleichung:

$$\begin{aligned} f(s+1) &= \frac{2^s}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right) \\ &= \frac{2^s}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \frac{s}{2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \\ &= s \cdot f(s) \end{aligned}$$

Sei nun $1 \leq \sigma \leq 2$. Dann ist aber

$$\frac{1}{2} \leq \frac{\sigma}{2} \leq 1 \text{ und } 1 \leq \frac{\sigma+1}{2} \leq \frac{3}{2}$$

und daher folgt direkt aus den schon gezeigten Eigenschaften der Γ-Funktion (vergleiche Satz 25.2), dass

$$f(s) = \mathcal{O}(1)$$

in diesem Bereich. Mit Satz 25.4 gilt dann aber

$$f(s) = \Gamma(s)$$

und das Ersetzen von s durch $2s$ in dieser Gleichung liefert genau die Behauptung. □

Eine Verallgemeinerung der Verdopplungsformel stellt die sogenannte **Multiplikationsformel** dar:

25.6 Satz (Multiplikationsformel von Gauß und Legendre):
Sei $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\Gamma(m \cdot s) = \frac{\sqrt{m}}{(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}} m^{ms-1} \Gamma(s) \cdot \Gamma\left(s + \frac{1}{m}\right) \cdot \dots \cdot \Gamma\left(s + \frac{m-1}{m}\right)$$

für alle $s \in \mathbb{C}$.

Beweis:
Setze

$$f(s) := \frac{\sqrt{m}}{(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}} m^{s-1} \Gamma\left(\frac{s}{m}\right) \cdot \dots \cdot \Gamma\left(\frac{s+m-1}{m}\right)$$

Wie oben zeigen wir nun

1. $f(1) = 1$
2. $f(s+1) = sf(s)$
3. $f(s) = \mathcal{O}(1)$ für $1 \leq \sigma \leq 2$

1. Sei

$$A := \Gamma\left(\frac{1}{m}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{2}{m}\right) \cdot \dots \cdot \Gamma(1)$$

Wir können A umschreiben zu

$$A = \Gamma(1) \cdot \Gamma\left(1 - \frac{1}{m}\right) \cdot \dots \cdot \Gamma\left(1 - \frac{m-1}{m}\right)$$

und dann auf A^2 die oben schon bewiesene Ergänzungsformel anwenden:

$$\begin{aligned}
A^2 &= \left(\Gamma\left(\frac{1}{m}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{2}{m}\right) \cdot \dots \cdot \Gamma(1)\right) \cdot \left(\Gamma(1) \cdot \Gamma\left(1 - \frac{1}{m}\right) \cdot \dots \cdot \Gamma\left(1 - \frac{m-1}{m}\right)\right) \\
&= \Gamma\left(\frac{1}{m}\right) \cdot \Gamma\left(1 - \frac{1}{m}\right) \cdot \dots \cdot \Gamma\left(\frac{m-1}{m}\right) \cdot \Gamma\left(1 - \frac{m-1}{m}\right) \\
&\overset{\text{Ergänzungsformel}}{=} \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)} \cdot \frac{\pi}{\sin\left(\frac{2\pi}{m}\right)} \cdot \dots \cdot \frac{\pi}{\sin\left(\frac{(m-1)\pi}{m}\right)}
\end{aligned}$$

Umstellen dieser Gleichung liefert uns

$$\begin{aligned}
\frac{\pi^{m-1}}{A^2} &= \prod_{k=1}^{m-1} \sin\left(\frac{k\pi}{m}\right) \\
&= \prod_{k=1}^{m-1} \frac{\exp\left(\mathrm{i}\frac{\pi}{m}k\right) - \exp\left(-\mathrm{i}\frac{\pi}{m}k\right)}{2\mathrm{i}} \\
&= \frac{(-\mathrm{i})^{m-1}}{2^{m-1}} \exp\left(-\mathrm{i}\frac{\pi}{m}(1 + 2 + \dots + m-1)\right) \prod_{k=1}^{m-1} \left(\exp\left(\frac{2\pi\mathrm{i}k}{m}\right) - 1\right) \\
&\overset{(-\mathrm{i})^{m-1} = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}\pi}{2}(m-1)\right)}{=} \frac{1}{2^{m-1}} \exp\left(-\frac{\mathrm{i}\pi}{2}(m-1) - \frac{\mathrm{i}\pi}{m}\frac{m(m-1)}{2}\right) \prod_{k=1}^{m-1} \left(\exp\left(\frac{2\pi\mathrm{i}k}{m}\right) - 1\right) \\
&= \frac{1}{2^{m-1}} \exp\left(-\mathrm{i}\pi(m-1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)\right) \prod_{k=1}^{m-1} \left(\exp\left(\frac{2\pi\mathrm{i}k}{m}\right) - 1\right) \\
&= \frac{\exp(-\pi\mathrm{i}(m-1))}{2^{m-1}} \prod_{k=1}^{m-1} \left(\exp\left(\frac{2\pi\mathrm{i}k}{m}\right) - 1\right) \\
&= (-1)^{m-1} \cdot \frac{1}{2^{m-1}} \prod_{k=1}^{m-1} \left(\exp\left(\frac{2\pi\mathrm{i}k}{m}\right) - 1\right)
\end{aligned}$$

Allgemein ist aber

$$z^m - 1 = (z-1)\cdot\left(z - \exp\left(\frac{2\pi\mathrm{i}}{m}\right)\right)\cdot\ldots\cdot\left(z-\exp\left(\frac{2\pi\mathrm{i}\,(m-1)}{m}\right)\right)$$

und daher gilt auch

$$z^{m-1}+z^{m-2}+\ldots+1 = \frac{z^m-1}{z-1} = \left(z - \exp\left(\frac{2\pi\mathrm{i}}{m}\right)\right)\cdot\ldots\cdot\left(z-\exp\left(\frac{2\pi\mathrm{i}\,(m-1)}{m}\right)\right)$$

Für $z=1$ folgt damit insbesondere

$$m = \prod_{k=1}^{m-1}\left(1-\exp\left(\frac{2\pi\mathrm{i}}{m}k\right)\right)$$

und in der obigen Gleichung eingesetzt erhalten wir so

$$\begin{aligned}\frac{\pi^{m-1}}{A^2} &= \frac{1}{2^{m-1}}\prod_{k=1}^{m-1}\left(1-\exp\left(\frac{2\pi\mathrm{i}k}{m}\right)\right)\\ &= \frac{1}{2^{m-1}}\cdot m\end{aligned}$$

Wir können diese Gleichung nach A umstellen, und da Γ für $\sigma>0$ eine positive Funktion darstellt, folgt so

$$A = \frac{(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}}{\sqrt{m}}$$

Jetzt brauchen wir nur noch einzusetzen und erhalten direkt

$$f(1) = 1$$

2. Diese Aussage ist ganz leicht, das folgt direkt durch Einsetzen der Funktionalgleichung:

$$\begin{aligned}f(s+1) &= \frac{\sqrt{m}}{(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}}m^s\Gamma\left(\frac{s+1}{m}\right)\cdot\ldots\cdot\Gamma\left(\frac{s+m}{m}\right)\\ &= \frac{\sqrt{m}}{(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}}m^s\Gamma\left(\frac{s+1}{m}\right)\cdot\ldots\cdot\frac{s}{m}\cdot\Gamma\left(\frac{s}{m}\right)\\ &= s\cdot\frac{\sqrt{m}}{(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}}m^{s-1}\Gamma\left(\frac{s+1}{m}\right)\cdot\ldots\cdot\Gamma\left(\frac{s}{m}\right)\\ &= sf(s)\end{aligned}$$

3. Diese Aussage folgt direkt aus Satz 25.2, d.h. aus der Beschränktheit der Γ-Funktion.

Mit Satz 25.4 folgt daraus sofort

$$\Gamma(s) = f(s)$$

und Ersetzen von s durch $s\cdot m$ in dieser Formel liefert die Behauptung. □

Zuletzt wollen wir noch einige alternative Darstellungen der Gamma-Funktion beweisen:

25.7 Satz (Limesdarstellung von Gauß):
Die Γ-Funktion besitzt die Darstellung

$$\Gamma(s) = \lim_{n\to\infty}\frac{n!n^s}{s\cdot(s+1)\cdot\ldots\cdot(s+n)}$$

in ganz $\mathbb{C}$.

Beweis:
Sei

$$f(s) := \lim_{n\to\infty}\frac{n!n^s}{s\cdot(s+1)\cdot\ldots\cdot(s+n)}$$

Sei weiter $R > 0,\ m \in \mathbb{N}$ s.d. $m \geq 2R$. In $|s| < R$ und für $n > m$ gilt dann für den Hauptzweig des Logarithmus:

$$\begin{aligned}
\frac{n!n^s}{s\cdot(s+1)\cdot\ldots\cdot(s+n)} &= \frac{m!}{s\cdot(s+1)\cdot\ldots\cdot(s+m)}\frac{(m+1)\cdot\ldots\cdot n\cdot n^s}{(s+m+1)\cdot\ldots\cdot(s+n)}\\
&= \frac{m!}{s\cdot(s+1)\cdot\ldots\cdot(s+m)}\frac{n^s}{\left(1+\frac{s}{m+1}\right)\cdot\left(1+\frac{s}{m+2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{s}{n}\right)}\\
&= \frac{m!}{s\cdot(s+1)\cdot\ldots\cdot(s+m)}\exp\left(s\log n - \sum_{k=m+1}^{m}\log\left(1+\frac{s}{k}\right)\right) \qquad (25.6)
\end{aligned}$$

Da wir

$$\left|\frac{s}{k}\right| \leq \left|\frac{s}{m}\right| < \frac{1}{2}$$

für alle $k = m+1, ..., n$ haben, gilt nach der Taylorreihenentwicklung der Funktion log

$$\log\left(1+\frac{s}{k}\right) = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{j}\left(\frac{s}{k}\right)^j$$

für $k = m+1, ..., n$. Insbesondere gilt dann aber auch

$$\begin{aligned}
\left|\log\left(1+\frac{s}{k}\right)-\frac{s}{k}\right| &= \left|\sum_{j=2}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{j}\left(\frac{s}{k}\right)^j\right|\\
&\leq \sum_{j=2}^{\infty}\left|\frac{s}{k}\right|^j\\
&= \frac{\left|\frac{s}{k}\right|^2}{1-\left|\frac{s}{k}\right|}\\
&= \frac{|s|^2k}{k^2\left(k-|s|\right)}\\
&< \frac{R^2}{k^2}
\end{aligned}$$

Das sagt uns, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\log\left(1+\frac{s}{k}\right)-\frac{s}{k}\right) \qquad (25.7)$$

in diesem Gebiet gleichmäßig konvergiert und veranlasst uns, die Gleichung (25.6) wie folgt weiterzuschreiben:

$$\begin{aligned}
&\frac{n!n^s}{s\cdot(s+1)\cdot\ldots\cdot(s+n)}\\
=\ &\frac{m!}{s\cdot(s+1)\cdot\ldots\cdot(s+m)}\cdot\exp\left(s\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}\right)\exp\left(s\left(\log n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)-\sum_{k=m+1}^{n}\left(\log\left(1+\frac{s}{k}\right)-\frac{s}{k}\right)\right)
\end{aligned}$$

Die Euler-McLaurin'sche Summationsformel (Hilfssatz 25.1) liefert uns

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = 1 + \underbrace{\int_1^n\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x}_{=\log n} - \int_1^n\frac{x-\lfloor x\rfloor}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

und daher ist

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n = 1 - \int_1^n\frac{x-\lfloor x\rfloor}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

Bilden wir jetzt dort den Grenzwert $n \longrightarrow \infty$, so erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log n\right) = 1 - \underbrace{\int_1^{\infty}\frac{x-\lfloor x\rfloor}{x^2}\,\mathrm{d}x}_{\text{existiert!}} =: \gamma \approx 0,57721...$$

γ wird auch die **Eulersche Konstante** genannt.
Also existiert der Grenzwert f für $|s| < R$ und es gilt

$$f(s) = \frac{m!}{s \cdot (s+1) \cdot \ldots \cdot (s+m)} \cdot \exp\left(s \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k}\right) \exp\left(-\gamma s - \sum_{k=m+1}^{\infty} \left(\log\left(1+\frac{s}{k}\right) - \frac{s}{k}\right)\right)$$

Die vorkommende Reihe (25.7) ist wie oben schon gesehen gleichmäßig konvergent und daher ebenfalls holomorph in dem Gebiet $|s| < R$. Daher muss auch f in $|s| < R$ bis auf die Punkte

$$s \in \{-n \mid n \in \mathbb{N}\} \cap \{s \in \mathbb{C} \mid |s| < R\}$$

holomorph sein. Insbesondere ist f also holomorph in $\sigma > 0$, da $R > 0$ beliebig war.
Weiter gilt

$$\begin{aligned} f(s+1) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n! n^{s+1}}{(s+1) \cdot \ldots \cdot (s+n+1)} \\ &= a \lim_{n\to\infty} \frac{n! n n^s}{a(s+1) \cdot \ldots \cdot (s+n+1)} \\ &\overset{\text{Konvergenz}}{=} s \lim_{n\to\infty} \frac{n! n^s}{s(s+1) \cdot \ldots \cdot (s+n)} \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty} nn+s+1}_{=1} \\ &= s \cdot f(s) \end{aligned}$$

Trivialerweise ist auch

$$f(1) = \lim_{n\to\infty} \frac{n! n}{1 \cdot \ldots \cdot (n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

Zuletzt gilt für $1 \leq \sigma \leq 2$:

$$\left| \frac{n^s n!}{s \cdot \ldots \cdot (s+n)} \right| \leq \frac{n! n^\sigma}{\sigma \cdot (\sigma + 1) \cdot \ldots \cdot (\sigma + n)}$$

und daher

$$|f(s)| \leq f(\sigma) \leq M := \sup_{1 \leq \sigma \leq 2} f(\sigma) < \infty$$

in diesem Bereich. Mit dem Eindeutigkeitssatz (Satz 25.4) folgt wieder

$$f = \Gamma$$

und die Behauptung ist gezeigt. □

Folgerung 25.6:
Es gilt auch

$$\Gamma(s) = \frac{1}{s} \exp\left(-\gamma s - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\log\left(1+\frac{s}{k}\right) - \frac{s}{k}\right)\right)$$

für $s \neq 0, -1, -2, \ldots$.

Beweis:
Für den Hauptzweig des Logarithmus gilt

$$\frac{1}{1+\frac{s}{k}} = \exp\left(-\log\left(1+\frac{s}{k}\right)\right)$$

und daher folgt aus der oben schon gezeigten Darstellung für $m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\Gamma(s) &= \frac{m!}{s\cdot(s+1)\cdot\ldots\cdot(s+m)}\cdot\exp\left(s\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}\right)\exp\left(-\gamma s-\sum_{k=m+1}^{\infty}\left(\log\left(1+\frac{s}{k}\right)-\frac{s}{k}\right)\right)\\
&= \frac{1}{s}\frac{1}{(1+s)\cdot\left(1+\frac{s}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{s}{m}\right)}\cdot\exp\left(s\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}\right)\exp\left(-\gamma s-\sum_{k=m+1}^{\infty}\left(\log\left(1+\frac{s}{k}\right)-\frac{s}{k}\right)\right)\\
&= \frac{1}{s}\exp\left(-\sum_{k=1}^{m}\log\left(1+\frac{s}{k}\right)\right)\cdot\exp\left(s\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}\right)\exp\left(-\gamma s-\sum_{k=m+1}^{\infty}\left(\log\left(1+\frac{s}{k}\right)-\frac{s}{k}\right)\right)\\
&= \frac{1}{s}\exp\left(-\sum_{k=1}^{m}\left(\log\left(1+\frac{s}{k}\right)-\frac{s}{k}\right)\right)\cdot\exp\left(-\gamma s-\sum_{k=m+1}^{\infty}\left(\log\left(1+\frac{s}{k}\right)-\frac{s}{k}\right)\right)\\
&= \frac{1}{s}\exp\left(-\gamma s-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\log\left(1+\frac{s}{k}\right)-\frac{s}{k}\right)\right)
\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. □

Da die Γ-Funktion keine Nullstellen hat, können wir den Ausdruck aus Folgerung 25.6 auch wie folgt umschreiben:

Folgerung 25.7 (Weierstraß'sche Produktdarstellung):
Es gilt

$$\Gamma(s)=\frac{1}{s}\exp(-\gamma s)\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\exp\left(\frac{s}{k}\right)}{1+\frac{s}{k}}$$

Außerdem erhalten wir ebenso direkt die Darstellung für $\frac{1}{\Gamma}$ nach dem Weierstraß'schen Produktsatz:

Folgerung 25.8:
Es gilt

$$\frac{1}{\Gamma(s)}=s\exp(\gamma s)\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{s}{k}\right)\exp\left(-\frac{s}{k}\right)$$

Jetzt interessieren wir uns für die logarithmische Ableitung der Γ-Funktion. Allgemein sieht man durch die Leibniz-Regel schnell, dass

$$\frac{(f\cdot g)'}{f\cdot g}=\frac{f'\cdot g}{f\cdot g}+\frac{f\cdot g'}{f\cdot g}=\frac{f'}{f}+\frac{g'}{g}$$

d.h. die logarithmische Ableitung eines Produktes ist die Summe der logarithmischen Ableitungen. Da wie oben schon bemerkt außerdem

$$\frac{(\exp(f))'}{\exp(f)}=f'$$

gilt, folgt aus der Darstellung in Folgerung 25.6 direkt, dass

$$\begin{aligned}
\Psi(s) &:= \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}\\
&= -\frac{1}{s}-\gamma+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\left(\exp\left(\frac{s}{k}\right)\right)'}{\exp\left(\frac{s}{k}\right)}+\frac{\left(\frac{k}{k+s}\right)'}{\frac{k}{k+s}}\right)\\
&= -\gamma-\frac{1}{s}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}+\frac{-\frac{k}{(k+s)^2}}{\frac{k}{k+s}}\right)\\
&= -\gamma-\frac{1}{s}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}+\frac{-k(k+s)}{(k+s)^2k}\right)\\
&= -\gamma-\frac{1}{s}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+s}\right)\\
&= -\gamma-\frac{1}{s}-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s+k}-\frac{1}{k}\right)
\end{aligned}$$

gilt.

Folgerung 25.9:
Es gilt

$$\log\left(\Gamma\left(s\right)\right)=-\gamma s-\log s-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\log\left(1+\frac{s}{k}\right)-\frac{s}{k}\right)$$

für $s\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$.

Beweis:
Das folgt auch direkt wieder aus der Darstellung in Folgerung 25.6, wenn man beachtet, dass $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ einfach zusammenhängend ist und daher

$$f\left(s\right)\neq 0 \quad\Rightarrow\quad f\left(s\right)=\exp\left(\log\left(f\left(s\right)\right)\right)$$

gilt. □

25.2 Lemma (ohne Beweis):
Das Wachstum der Gamma-Funktion lässt sich im Grenzwert beschreiben durch

$$\Gamma\left(z\right)\sim\sqrt{2\pi}\frac{z^{z-\frac{1}{2}}}{\exp\left(z\right)}$$

wobei im spitzen Winkel entlang der reellen Achse gegen ∞ *gegangen wird.*

Zum Beweis vergleiche etwa [WEZ], Abschnitt 8.1.

26 Konforme Abbildungen

26.1 Das Lemma von Schwarz

Sei in diesem Abschnitt stets $\mathfrak{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ die Einheitskreisscheibe.

26.1 Lemma (Lemma von Schwarz):

Sei $f : \mathfrak{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $|f(z)| \leq 1 \;\forall\; z \in \mathfrak{D}$ und $f(0) = 0$. Dann gelten:

(1) Es ist $|f(z)| \leq |z| \;\forall\; z \in \mathfrak{D}$ und $|f'(0)| \leq 1$

(2) Gibt es ein $z \in \mathfrak{D} \setminus \{0\}$ s.d. $|f(z)| = |z|$ oder gilt $|f'(0)| = 1$, so ist

$$f(z) = \exp(\mathrm{i}\theta)\, z$$

für ein $\theta \in [0, 2\pi)$.

<u>**Beweis:**</u>

(1) Da $f(0) = 0$ ist, hat die Funktion

$$z \mapsto \frac{f(z)}{z},\;\; z \in \mathfrak{D}$$

in $z = 0$ eine hebbare Singularität. Es gibt also eine in $\mathfrak{D}$ holomorphe Funktion g s.d.

$$f(z) = zg(z) \;\;\forall\; z \in \mathfrak{D}$$

Für $z \in \mathfrak{D}$ und $|z| < r < 1$ gilt dann entsprechend mit dem Maximumsprinzip (Satz 22.5)

$$|g(z)| \leq \max_{\theta \in [0,2\pi)} \frac{|f(r\exp(\mathrm{i}\theta))|}{r} \leq \frac{1}{r}$$

Mit $r \longrightarrow 1$ folgt so $|g(z)| \leq 1 \;\forall\; z \in \mathfrak{D}$ und daher sofort $|f(z)| \leq |z| \;\forall\; z \in \mathfrak{D}$. Außerdem ist $f'(0) = (z \cdot g(z))'_{|z=0} = g(0)$ und damit folgt auch $|f'(0)| \leq 1$.

(2) Ist $|f(z_0)| = |z_0|$ für ein $z_0 \in \mathfrak{D} \setminus \{0\}$, so ist $|g(z_0)| = 1$ für dieses $z_0 \in \mathfrak{D}$ und nach dem Maximumsprinzip ist g konstant. Das liefert wegen $|g(z_0)| = 1$ insbesondere $|g(z)| = |g(z_0)| = 1 \;\forall\; z \in \mathfrak{D}$. Das zeigt die Behauptung.

Ganz analog: Ist $|f'(0)| = 1$, so folgt nach der Rechnung aus (1), dass $|g(0)| = 1$. Das entspricht genau dem eben berechneten Fall mit $z_0 = 0$. □

26.1 Definition:

Sei $\alpha \in \mathfrak{D}$. Wir definieren $B_\alpha : \mathfrak{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ durch

$$B_\alpha(z) := \frac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha} z}$$

26.2 Lemma:

Sei $\alpha \in \mathfrak{D}$ fest. Dann ist B_α eine bijektive Abbildung $\mathfrak{D} \longrightarrow \mathfrak{D}$ mit $B_\alpha(\alpha) = 0$. Die inverse Abbildung ist gegeben durch $B_{-\alpha}$. Außerdem gilt

$$B'_\alpha(z) = \frac{1 - \overline{\alpha}z + \overline{\alpha}z + |\alpha|^2}{(1 - \overline{\alpha}z)^2} = \frac{1 + |\alpha|^2}{(1 - \overline{\alpha}z)^2}$$

<u>**Beweis:**</u>

Offenbar ist B_α in $\mathbb{C} \setminus \left\{\frac{1}{\overline{\alpha}}\right\}$ holomorph. Da aber $\frac{1}{\overline{\alpha}} \notin \mathfrak{D}$ ist B_α also insbesondere holomorph in ganz $\mathfrak{D}$. Direktes Einsetzen liefert für jedes $z \in \mathfrak{D}$:

$$B_{-\alpha}(B_\alpha(z)) = B_{-\alpha}\left(\frac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha}z}\right) = \frac{\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z} + \alpha}{1 + \overline{\alpha}\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}} = z$$

Daher ist B_α injektiv und $B_{-\alpha}$ ist die zugehörige inverse Abbildung. Für reelles t gilt

$$\left|\frac{\exp(\mathrm{i}t) - \alpha}{1 - \overline{\alpha}\exp(\mathrm{i}t)}\right| = \frac{|\exp(\mathrm{i}t) - \alpha|}{|\exp(-\mathrm{i}t) - \overline{\alpha}|} = \frac{|\exp(\mathrm{i}t) - \alpha|}{\left|\overline{\exp(\mathrm{i}t) - \alpha}\right|} = 1$$

und daher bildet B_α den Rand der Einheitskreisscheibe $\partial\mathfrak{D}$ wieder in $\partial\mathfrak{D}$ ab, ebenso $B_{-\alpha}$. Nach dem Maximumsprinzip ist dann

$$|B_\alpha(z)| \leq \max_{w \in \partial\mathfrak{D}} B_\alpha(w) = 1 \;\forall\; z \in \mathfrak{D}$$

und daher $B_\alpha(\mathfrak{D}) \subset \mathfrak{D}$. Ebenso gilt $B_{-\alpha}(\mathfrak{D}) \subset \mathfrak{D}$ und daher $B_\alpha(\mathfrak{D}) = \mathfrak{D}$. □

26.2 Konformität

26.2 Definition:

Seien Γ_1, Γ_2 zwei C^1-Kurven, die sich in $z_0 \in \mathbb{C}$ schneiden. Wir bezeichnen dann mit $\angle_{z_0}(\Gamma_1, \Gamma_2)$ den ***Winkel*** *(gemessen in mathematisch positiver Richtung) von der orientierten Tangente an Γ_1 in z_0 zur orientierten Tangente von Γ_2 in z_0.*

26.3 Definition:

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und $f \in C^1(U)$. f heißt ***konform*** *in z_0, falls jeder Winkel an z_0 erhalten bleibt, d.h. für alle C^1-Kurven Γ_1, Γ_2, die sich in z_0 schneiden, gilt*

$$\angle_{z_0}(\Gamma_1, \Gamma_2) = \angle_{f(z_0)}(f \circ \Gamma_1, f \circ \Gamma_2)$$

Ist U ein Gebiet, so heißt f konform in U, falls f in jedem Punkt $z_0 \in U$ konform ist.

Beispiel 26.1:

$f(z) = z^2$ ist nicht konform in $z_0 = 0$. Aber in allen anderen Punkten $z_0 \in \mathbb{C}^*$ ist f konform, d.h. winkeltreu.

26.4 Definition:

Sei $\mathfrak{G} \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in C^1(\mathfrak{G})$, sowie $z_0 \in \mathfrak{G}$.

(1) f heißt ***lokal 1-1*** *oder* ***lokal injektiv*** *in z_0, falls es ein $\delta > 0$ gibt, s.d.*

$$z_1, z_2 \in \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \delta\}, \ z_1 \neq z_2 \ \Rightarrow \ f(z_1) \neq f(z_2)$$

(2) f heißt ***lokal 1-1 in $\mathfrak{G}$****, falls f in jedem Punkt $z_0 \in \mathfrak{G}$ lokal 1-1 ist.*

(3) f heißt ***1-1*** *oder* ***schlicht*** *in $\mathfrak{G}$, falls für alle $z_1, z_2 \in \mathfrak{G}$ gilt:*

$$z_1 \neq z_2 \ \Rightarrow \ f(z_1) \neq f(z_2)$$

26.1 Satz:

Sei f holomorph in einer Umgebung des Punktes $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $f'(z_0) \neq 0$. Dann ist f konform und lokal 1-1 in z_0.

Beweis:

Wir zeigen zunächst die Konformität. Sei Γ eine C^1-Kurve durch z_0, parametrisiert durch $z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)$ mit $z(0) = z_0$. Der Winkel der Tangente an Γ an der Stelle z_0 zur positiv reellen Achse ist $\arg(z'(0))$. Der Winkel der Tangente an $f \circ \Gamma$ an der Stelle $f(z_0)$ zur positiv reellen Achse ist

$$\arg\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(z(t))\big|_{t=0}\right) = \arg(z'(0) \cdot f'(z_0)) \overset{f'(z_0)\neq 0}{=} \arg(z'(0)) + \arg(f'(z_0))$$

Für jede Kurve ändert sich der Winkel also genau um $\arg(f'(z_0))$. Das bedeutet aber insbesondere, das der Winkel zwischen zwei Kurven erhalten bleibt.

Jetzt zeigen wir die lokale Schlichtheit von f. Sei dazu $f(z_0) = \alpha$. Da sich die Nullstellen von f nicht häufen finden wir ein $\delta' > 0$ s.d. $z \mapsto f(z) - \alpha$ keine weiteren Nullstellen außer z_0 in $\{w \in \mathbb{C} \mid |w - z_0| < \delta'\}$ besitzt. Wegen $f'(z_0) \neq 0$ muss es sich auch um eine einfache α-Stelle handeln. Insbesondere gilt mit der lokalen Konstantheit der Windungszahl:

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint\limits_{|z-z_0|=\delta'} \frac{f'(z)}{f(z)-\alpha}\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint\limits_{f\{z\in\mathbb{C} \ \mid \ |\zeta-z_0|=\delta'\}} \frac{1}{\zeta-\alpha}\,\mathrm{d}\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint\limits_{f\{z\in\mathbb{C} \ \mid \ |\zeta-z_0|=\delta'\}} \frac{1}{\zeta-\beta}\,\mathrm{d}\zeta \ \forall\, \beta \in \{z \in \mathbb{C} \mid |z_0 - \alpha| < \varepsilon\} \text{ mit einem } \varepsilon > 0
\end{aligned}$$

Wähle nun also $0 < \delta \leq \delta'$ s.d.

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \delta\} \subset f^{-1}(\{z \in \mathbb{C} \mid |z - \alpha| < \varepsilon\})$$

gilt. Damit gilt dann für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ mit $|z_1 - z_0| < \delta > |z_0 - z_2|$:

$$1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z_0 - z| = \delta} \frac{f'(z)}{z - z_j} \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \oint_{f(\{z \in \mathbb{C} \ | \ |z - z_j| = \delta\})} \frac{1}{\zeta - f(z_j)} \mathrm{d}\zeta \text{ für } j = 1, 2$$

Das bedeutet mit Satz 21.2 aber genau

$$z_1 \neq z_2 \ \Rightarrow \ f(z_1) \neq f(z_2) \ \text{ in } \ \{z \in \mathbb{C} \ | \ |z - z_0| < \delta\}$$

und daher ist f lokal 1-1 in z_0. □

Bemerkung 26.1:

Betrachte wieder $B_\alpha : \mathfrak{D} \longrightarrow \mathfrak{D}$ aus Definition 26.1. Diese Funktion ist global injektiv, außerdem gilt

$$B'_\alpha(z) = \frac{1 + |\alpha|^2}{(1 - \overline{\alpha} z)^2} \neq 0 \ \forall \ z \in \mathfrak{D}$$

und daher ist B_α konform von $\mathfrak{D}$ nach $\mathfrak{D}$.

26.5 Definition:

Sei $k \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2 \subset \mathbb{C}$ Gebiete und $f : \mathfrak{G}_1 \longrightarrow \mathfrak{G}_2$ eine Funktion. f heißt $k-1$ von $\mathfrak{G}_1$ nach $\mathfrak{G}_2$, falls für alle $\alpha \in \mathfrak{G}_2$ die Gleichung

$$f(z) = \alpha$$

genau k Lösungen (gezählt mit Vielfachheiten) in $\mathfrak{G}_1$ hat.

Beispiel 26.2:

Man überlegt sich leicht, dass die Funktion $f(z) = z^k$ für jedes $\delta > 0$ eine $k-1$ Abbildung von $\{z \in \mathbb{C} \ | \ |z| < \delta\}$ nach $\left\{z \in \mathbb{C} \ | \ |z| < \delta^k\right\}$ ist.

26.2 Satz:

Sei f eine nicht konstante holomorphe Funktion in einer Umgebung von $z_0 \in \mathbb{C}$ und sei $f'(z_0) = 0$. Dann vergrößert f Winkel an z_0 um den Faktor k und es gibt eine Umgebung U von z_0, in welcher f eine $k-1$-Abbildung von U auf $f(U)$ ist. Dabei ist k gegeben als

$$k = \min_{n \in \mathbb{N}} \left\{ f^{(n)}(z_0) \neq 0 \right\} \geq 2$$

<u>Beweis:</u>

Ohne Einschränkung können wir $f(z_0) = 0$ annehmen, denn andernfalls betrachten wir einfach die Funktion $z \mapsto f(z) - f(z_0)$. Die Potenzreihenentwicklung von f an z_0 hat dann die Form

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^k \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} (z - z_0)^n$$

mit $a_k \neq 0$. Wir definieren dann durch

$$g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} (z - z_0)^n$$

eine in einer Umgebung von z_0 holomorphe Funktion, und per Definition gilt

$$f(z) = (z - z_0)^k \cdot g(z)$$

in einer kleinen Umgebung von z_0. Insbesondere gilt auch $g(z_0) = a_k \neq 0$ und daher existiert für hinreichend kleines $r > 0$ eine holomorphe Funktion $l : \{z \in \mathbb{C} \ | \ |z - z_0| < r\} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit

$$(l(z))^m = g(z) \ \ \forall \ z \in \{w \in \mathbb{C} \ | \ |w - z_0| < r\}$$

Entsprechend ist dann

$$f(z) = (h(z))^k \ \text{ für } h(z) = l(z) \cdot (z - z_0), \ z \in \{w \in \mathbb{C} \ | \ |w - z_0| < r\}$$

Insbesondere gilt $h(z_0) = 0$ und $h'(z_0) = l(z_0) \neq 0$.

f ist also in $\{w \in \mathbb{C} \ | \ |w - z_0| < r\}$ die Komposition der konformen 1-1 Abbildung $z \mapsto h(z)$ (vergleiche Satz 26.1) und der Abbildung $\zeta \mapsto \zeta^k$, welche Winkel um den Faktor k vergrößert. Außerdem ist $\zeta \mapsto \zeta^k$ nach Beispiel 26.1 $k-1$ in Kreisscheiben um 0. Wir wählen ein $\varepsilon > 0$ mit $\{w \in \mathbb{C} \ | \ |w| < \varepsilon\} \subset h(\{z \in \mathbb{C} \ | \ |z - z_0| < r\})$ und setzen

$$U := h^{-1}(\{w \in \mathbb{C} \ | \ |w| < \varepsilon\})$$

Dann ist f eine $k-1$ Abbildung von U auf $f(U)$ wie in der Behauptung. □

26.3 Satz:
Sei $\mathfrak{G} \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und f eine in $\mathfrak{G}$ holomorphe und schlichte Funktion. Dann gelten die folgenden beiden Aussagen:

(1) f^{-1} existiert und ist holomorph in dem Gebiet $f(\mathfrak{G})$

(2) Sowohl f als auch f^{-1} sind konform in $\mathfrak{G}$ beziehungsweise $f(\mathfrak{G})$.

Beweis:
Teil (1) wurde schon in Satz 22.4 gezeigt, da f als schlichte Funktion injektiv in $\mathfrak{G}$ ist. Insbesondere gilt laut Satz 2.3 auch die Regel

$$\left(f^{-1}\right)'(w) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(w)\right)}$$

Daher muss $f' \neq 0$ in $\mathfrak{G}$ sein und die Konformität folgt aus Satz 26.1. □

26.6 Definition:

(1) Eine holomorphe 1-1 Abbildung f heißt ***konforme Abbildung****.*

(2) Zwei Gebiete $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ heißen ***konform äquivalent****, falls es eine konforme Abbildung $f : \mathfrak{G}_1 \longrightarrow \mathfrak{G}_2$ gibt.*

Bemerkung 26.2:
Offenbar ist „konforme Äquivalenz“ eine Äquivalenzrelation.

26.3 Einige spezielle Abbildungen

26.3.1 Elementare Tranformationen

Wir betrachten zunächst die Abbildungen

$$z \mapsto az + b$$

mit $a, b \in \mathbb{C},\ a \neq 0$. Diese Abbildungen sind konforme Abbildungen von $\mathbb{C}$ auf sich selbst. Außerdem können wir diese Abbildungen zerlegen in

$$w_1 \circ w_2 \circ w_3$$

wobei $w_1(z) := |a| \cdot z$ die Streckung um den Faktor $|a|$ ist, $w_2(z) := \exp(\mathrm{i} \arg(a))\, z$ die Drehung um den Winkel $\arg(a)$ ist und $w_3(z) := z + b$ der Verschiebung um $b \in \mathbb{C}$ entspricht.

Jetzt betrachten wir die Abbildungen

$$z \mapsto z^\alpha = \exp(\alpha \log z)$$

mit $\alpha > 0$. Diese Transformation ist holomorph in jedem einfach zusammenhängenden Gebiet, welches 0 nicht enthält.Wir wählen dabei einen Zweig des Logarithmus so, dass positive reelle Zahlen auf positive reelle Zahlen abgebildet werden. Unter dieser besagten Abbildung wird der Sektor

$$S := \{z \in \mathbb{C} \mid \vartheta_1 < \arg(z) < \vartheta_2\}$$

auf den Sektor

$$T := \{w \in \mathbb{C} \mid \alpha\vartheta_1 < \arg(w) < \alpha\vartheta_2\}$$

abgebildet. Gilt $\alpha\vartheta_2 - \alpha\vartheta_1 < 2\pi$, so haben wir eine konforme Abbildung von S auf T.

Zuletzt betrachten wir noch die Abbildung

$$z \mapsto \exp(z)$$

Wegen $\exp(z) = \exp(x) \cdot \exp(\mathrm{i}y)$ für $z = x + \mathrm{i}y$ wird der horizontale Streifen $y_1 < y < y_2$ auf den Sektor

$$\{z \in \mathbb{C} \mid y_1 < \arg(z) < y_2\}$$

abgebildet. Gilt $y_2 - y_1 < 2\pi$, so stellt dies eine konforme Abbildung dar.

26.3.2 Die gebrochen-linearen Tranformationen

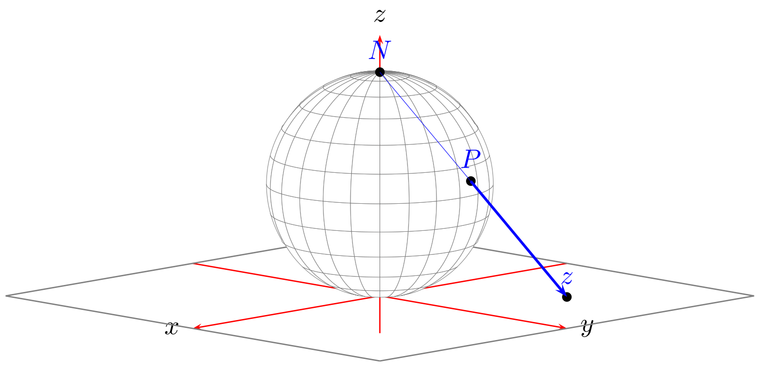
26.7 Definition (Möbiustransformation):

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ mit $ad - bc \neq 0$. Eine gebrochen-lineare Transformation der Form

$$T : z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

*nennen wir **Möbiustransformation**.*

Wir stellen leicht fest, dass die Bedingung $ad - bc \neq 0$ die Wohldefiniertheit dieser Transformation garantiert - andernfalls wäre der Wert konstant. Im Falle $c \neq 0$ scheint die Stelle $z = -\frac{d}{c}$ eine Ausnahmestelle, d.h. ein Pol der Transformation, zu sein. Wir betrachten daher die Sphäre im $\mathbb{R}^3$ als 1-Punkt Kompaktifizierung von $\mathbb{C}$ mit dem Nordpol als unendlich fernem Punkt. Wir sprechen dabei in diesem Zusammenhang auch von der **Riemann'schen Zahlenkugel** Σ. Vergleiche dazu Definition 1.7. mit der stereographischen Projektion:



Der Punkt N entspricht unter unserer Identifikation genau dem unendlich fernen Punkt ∞ für $\mathbb{C}$.
In diesem Zusammenhang setzen wir für $c \neq 0$ direkt $T\left(-\frac{d}{c}\right) := \infty$ und $T(\infty) := \frac{a}{c}$.

Bemerkung 26.3:

Mit dieser Definition bilden die Mödiustransformationen die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(\Sigma)$ von Σ. Auf diese Aussage wird beispielsweise in [SWR] und den zugehörigen Übungsaufgaben näher eingegangen.

26.3 Lemma:

$T : \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}$ *ist eine konforme Abbildung, falls $c \neq 0$. Der Falls $c = 0$ wurde bereits oben mit den linearen Transformationen $z \mapsto az + b$ abgedeckt.*

Beweis:

Offenbar ist die Abbildung T wie in der Behauptung angegeben holomorph. Außerdem ist T bijektiv, da die Gleichung

$$w = \frac{az + b}{cz + d}$$

die eindeutige Lösung

$$z = \frac{dw - b}{-cw + a}$$

besitzt (und diese hängt offenbar holomorph von $w \in \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}$ ab). □

26.4 Satz:

Die Transformation

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \text{ mit } a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ und } ad - bc \neq 0$$

bildet Kreise und Geraden in Kreise oder Geraden ab.

Beweis:

Wir zeigen die Aussage zunächst für den Spezialfall $z \mapsto \frac{1}{z}$. Sei dazu $S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \alpha| = r\}$ ein Kreis in $\mathbb{C}$. Wir interessieren uns dann für

$$T := \left\{ w \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{w} \in S \right\}$$

Die definierende Gleichung von S ist

$$(z - \alpha) \cdot (\overline{z} - \overline{\alpha}) = r^2$$

was genau

$$\overline{z}z - \alpha\overline{z} - \overline{\alpha}z = r^2 - |\alpha|^2$$

entspricht. Für $z = \frac{1}{w}$ also insbesondere

$$\frac{1}{w\overline{w}} - \frac{\alpha}{\overline{w}} - \frac{\overline{\alpha}}{w} = r^2 - |\alpha|^2$$

Gilt nun $|\alpha| = r$, d.s. ist $0 \in S$, so entspricht das der Gleichung

$$1 - \alpha w - \overline{\alpha w} = 0 \;\Leftrightarrow\; \Re(\alpha w) = \frac{1}{2}$$

Das ist genau die Gleichung einer Geraden.
Ist $0 \notin S$, d.h. $|\alpha| \neq r$, so liefert Umstellen der Gleichung genau

$$w\overline{w} - \left(\frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|^2 - r^2}\right)\overline{w} - \left(\frac{\alpha}{|\alpha|^2 - r^2}\right)w = -\frac{1}{|\alpha|^2 - r^2}$$

Mit $\beta := \frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|^2 - r^2}$ entspricht das genau

$$w\overline{w} - \beta\overline{w} - \overline{\beta}w + |\beta|^2 = \frac{r^2}{\left(|\alpha|^2 - r^2\right)^2} \;\Leftrightarrow\; |w - \beta|^2 = \left(\frac{r}{|\alpha|^2 - r^2}\right)^2$$

Das ist die Gleichung eines Kreises mit Mittelpunkt β.
Für eine Gerade, d.h. eine Gleichung der Form $\Re(\alpha z) = c$ mit $\alpha \in \mathbb{C}$ und $c \in \mathbb{R}$ geht man analog vor.

Wenden wir uns nun dem allgemeinen Fall zu: Wir schreiben die gegebene Transformation als

$$z \mapsto \frac{z + b}{cz + d} = \omega_3 \circ \omega_2 \circ \omega_1(z)$$

mit

$$\omega_1(z) = cz + d,\; \omega_2(z) = \frac{1}{z} \text{ und } \omega_3(z) = \frac{a}{c} - \frac{ad - dc}{c}z$$

Man rechnet leicht nach, das diese einzelnen Transformationen zusammengesetzt wieder die ursprüngliche Transformation ergeben. ω_3 und ω_1 sind affin lineare Transformationen, erhalten also Kreise und Geraden, und ω_2 erfüllt nach obiger Rechnung ebenfalls die Behauptung. Daher muss es auch die Komposition tun. □

26.8 Definition:

Sei $\mathfrak{G} \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine konforme Selbstabbildung $f : \mathfrak{G} \longrightarrow \mathfrak{G}$ heißt ***Automorphismus*** *von $\mathfrak{G}$.*
Mit $Aut(\mathfrak{G})$ bezeichnen wir die Gruppe der Automorphismen des Gebiets $\mathfrak{G}$.

Bemerkung 26.4:

Seien $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2 \subset \mathbb{C}$ zwei Gebiete und sei $f : \mathfrak{G}_1 \longrightarrow \mathfrak{G}_2$ eine konforme Abbildung.

(1) Dann ist jede andere konforme Abbildung $h : \mathfrak{G}_1 \longrightarrow \mathfrak{G}_2$ von der Form $h = g \circ f$, wobei $g \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{G}_2)$ ein Automorphismus von $\mathfrak{G}_2$ ist.

(2) Dann besitzt jeder Automorphismus $h \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{G}_1)$ von $\mathfrak{G}_1$ die Darstellung

$$h = f^{-1} \circ g \circ f$$

wobei $g \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{G}_2)$ in Automorphismus von $\mathfrak{G}_2$ ist.

Beweis:

(1) Betrachte die Abbildung $f^{-1} \circ h : \mathfrak{G}_1 \longrightarrow \mathfrak{G}_1$. Offenbar handelt es sich dabei um einen Automorphismus des Gebiets $\mathfrak{G}_1$, d.h. $f^{-1} \circ h = g \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{G}_1)$. Das bedeutet aber genau

$$h = g \circ f$$

wie in der Behauptung.

(2) Ist $h \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{G}_1)$, so ist $f \circ h : \mathfrak{G}_1 \longrightarrow \mathfrak{G}_2$ eine konforme Abbildung. Nach (1) gibt es ein $g \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{G}_2)$ mit

$$f \circ h = g \circ f$$

Damit folgt die Behauptung. □

26.4 Lemma:
Sei T ein Automorphismus von $\mathfrak{D}$ mit der Eigenschaft $T(0) = 0$. Dann hat T die Form

$$T(z) = \exp(\mathrm{i}\theta)\, z$$

mit einem $\theta \in [0, 2\pi)$.

Beweis:
Wir wollen das Lemma von Schwarz (Lemma 26.1) nutzen. Da alle Voraussetzungen für den ersten Teil erfüllt sind, erhalten wir sofort $|T(z)| \leq |z| \ \forall\ z \in \mathfrak{D}$. Wir können den ersten Teil aber auch auf die Umkehrfunktion T^{-1} anwenden und erhalten so

$$|z| = |T^{-1}(T(z))| \leq |T(z)|$$

Insbesondere gilt also $|T(z) = |z| \ \forall\ z \in \mathfrak{D}$. Damit ist Teil (2) des Lemmas anwendbar und wir erhalten

$$T(z) = \exp(\mathrm{i}\theta)\, z \ \forall\ z \in \mathfrak{D}$$

mit einem festen $\theta \in [0, 2\pi)$. □

26.5 Satz:
Die Automorphismen T der Einheitskreisscheibe $\mathfrak{D}$ sind alle von der Form

$$T(z) = \exp(\mathrm{i}\theta)\, \frac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha} z}$$

für ein $\alpha \in \mathfrak{D}$ und ein $\theta \in [0, 2\pi)$.

Beweis:
Wir betrachten die Abbildung

$$B_\alpha(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha} z}$$

aus Definition 26.1 für ein festes $\alpha \in \mathfrak{D}$. Wir haben in Lemma 26.2 und Bemerkung 26.1 schon gesehen, dass B_α eine konforme Abbildung der Einheitskreisscheibe auf sich selbst ist. Damit folgt sofort, dass jede der Abbildungen

$$z \mapsto \exp(\mathrm{i}\theta)\, B_\alpha(z)$$

mit $\alpha \in \mathfrak{D}$ und $\theta \in [0, 2\pi)$ ein Automorphismus der Einheitskreisscheibe $\mathfrak{D}$ ist. Es bleibt zu zeigen, dass jeder der Automorphismen T aus der Behauptung eine solche Darstellung besitzt. Sei $T^{-1}(0) = \alpha \in \mathfrak{D}$. Betrachte dann die Abbildung

$$T \circ B_\alpha^{-1}$$

Dabei handelt es sich dann im einen Automorphismus von $\mathfrak{D}$, welcher die $0 \in \mathfrak{D}$ fixiert. Nach obigem Lemma 26.4 gilt

$$T \circ B_\alpha^{-1}(z) = \exp(\mathrm{i}\theta)\, z \ \forall\ z \in \mathfrak{D}$$

mit einem festen $\theta \in [0, 2\pi)$. Das zeigt die Behauptung. □

26.6 Satz:
Die Automorphismen der oberen Halbebene sind von der Form

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $ad - bc > 0$.

Beweis:
Wir betrachten zunächst

$$S : z \mapsto \frac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}}$$

Offenbar handelt es sich dabei um eine Abbildung der oberen Halbebene auf die Einheitskreisscheibe $\mathfrak{D}$, denn schließlich bildet S die reelle Achse $\mathbb{R}$ auf die Einheitskreislinie ab (für $z \in \mathbb{R}$ gilt natürlich $|z - \mathrm{i}| = |z + \mathrm{i}|$) und es gilt $S(\mathrm{i}) = 0$ (deshalb landen wir im Inneren des Kreises).

Ergo sind alle Automorphismen der oberen Halbebene laut obiger Bemerkung 26.4 von der Form

$$S^{-1} \circ T \circ S \text{ mit } T(z) = \exp(\mathrm{i}\theta)\, \frac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha} z} \text{ für ein } \alpha \in \mathfrak{D},\ \theta \in [0, 2\pi)$$

Berechnung dieses Ausdrucks liefert genau eine Abbildung mit der Form wie in der Behauptung. Bleibt zu zeigen, dass jede der angegebenen Abbildungen ein Automorphismus der oberen Halbebene ist.

Da es sich um den Spezialfall einer Möbiustransformation handelt, haben wir Injektivität und Holomorphie schon gesehen. Wegen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gilt

$$z \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; \frac{az+b}{cz+d} \in \mathbb{R}$$

und außerdem gilt

$$\Im\left(\frac{a\mathrm{i}+b}{c\mathrm{i}+d}\right) = \frac{ad-bc}{c^2+d^2} > 0$$

Daher ist das Bild jeder so gegebenen Abbildung wieder in der oberen Halbebene enthalten. Die Surjektivität folgt daraus, dass die im Beweis von Lemma 26.3 angegebene Umkehrung der Transformation wieder eine Möbiustransformation mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $ad - bc > 0$ ist. □

26.9 Definition:

Sei $\mathfrak{G} \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : \mathfrak{G} \longrightarrow \mathfrak{G}$ eine Funktion. Ein Punkt $z_0 \in \mathfrak{G}$ heißt ***Fixpunkt*** *von f, falls*

$$f(z_0) = z_0$$

gilt.

26.5 Lemma:

Eine gebrochen-lineare Transformation T verschieden der Identität hat höchstens zwei Fixpunkte in Σ.

Beweis:

Sei

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \text{ mit } a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ und } ad - bc \neq 0$$

Ist $c \neq 0$, so bedeutet $T(z) = z$ genau

$$az + b = cz^2 + dz$$

und diese quadratische Gleichung hat höchstens zwei verschiedene Lösungen. Beachte, dass dann $T(\infty) = \frac{a}{c} \neq \infty$!

Ist $c = 0$ und $\frac{a}{d} \neq 1$, so ist die Abbildung

$$T(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$$

affin linear und die Gleichung

$$T(z) = z$$

hat genau eine komplexe Lösung. Außerdem ist $z = \infty$ ein weiterer Fixpunkt.

Ist $c = 0$ und $\frac{a}{d} = 1$, so besitzt

$$T(z) = z + \frac{b}{d}$$

$z = \infty$ als einzigen Fixpunkt. □

26.7 Satz:

Seien z_1, z_2, z_3 paarweise verschiedene Zahlen aus $\mathbb{C}$. Die eindeutig bestimmte gebrochen-lineare Transformation, welche z_1, z_2, z_3 in dieser Reihenfolge auf die Punkte $\infty, 0, 1 \in \Sigma$ abbildet, ist

$$T(z) = \frac{z - z_2}{z - z_1}\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$$

Beweis:

Offenbar hat T die gewünschten Eigenschaften:

$$\begin{aligned}
T(z_1) &= \lim_{z \to z_1} \frac{z - z_2}{z - z_1}\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = \infty \\
T(z_2) &= \frac{z_2 - z_2}{z_2 - z_1}\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = 0 \\
T(z_3) &= \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = 1
\end{aligned}$$

Außerdem ist T eine gebrochen-lineare Transformation der Form

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

für $a = \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}$, $b = -z_3\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}$, $c = 1$ und $d = -z_1$.
Bleibt die Eindeutigkeit zu zeigen. Sei S eine weitere Transformation mit den Eigenschaften aus der Behauptung. Dann Ist $T \circ S^{-1}$ eine gebrochen-lineare Transformation mit den Fixpunkten $\infty, 0, 1 \in \Sigma$ und nach obigem Lemma 26.5 gilt $T \circ S^{-1} = \mathrm{id}$, was die Behauptung zeigt. □

Bemerkung 26.5:
Mit den folgenden Transformationen bleibt der Satz richtig, falls $z_j = \infty$ für ein $j = 1, 2, 3$:

- Im Fall $z_1 = \infty$ setze
$$T(z) = \frac{z-z_2}{z_3-z_2}$$
- Im Fall $z_2 = \infty$ setze
$$T(z) = \frac{z_3-z_1}{z-z_1}$$
- Im Fall $z_3 = \infty$ setze
$$T(z) = \frac{z-z_2}{z-z_1}$$

Beachte, dass dabei $\frac{\infty}{\infty} = 1$ gesetzt wird.

26.10 Definition:
Seien $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ vier paarweise verschiedene Zahlen. Das ***Doppelverhältnis***

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) := \frac{z_4-z_2}{z_4-z_1}\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}$$

von z_1, z_2, z_3, z_4 ist das Bild von z_4 unter der oben angegebenen gebrochen-linearen Transformation für z_1, z_2, z_3.

Bemerkung 26.6:
Fallen zwei der vier Punkte zusammen, so kann man das Doppelverhältnis als Grenzübergang definieren, etwa

$$(z_1, z_1, z_3, z_4) := \lim_{h\to 0}(z_1, z_1+h, z_3, z_4)$$

26.8 Satz:
Das Doppelverhältnis ist invariant unter gebrochen-linearen Transformationen T, d.h. für vier paarweise verschiedene komplexe Zahlen z_1, z_2, z_3, z_4 gilt

$$(Tz_1, Tz_2, Tz_3, Tz_4) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$$

Beweis:
Sei S die laut Satz 26.7 eindeutige gebrochen-lineare Transformation mit $S : (z_1, z_2, z_3) \mapsto (\infty, 0, 1)$. Dann gilt

$$S \circ T^{-1} : (Tz_1, Tz_2, Tz_3) \mapsto (\infty, 0, 1)$$

D.h. $S \circ T^{-1}$ ist die laut Satz 26.7 eindeutig bestimmte gebrochen-lineare Transformation mit diesen Eigenschaften. Per Definition ist dann

$$(Tz_1, Tz_2, Tz_3, Tz_4) = S \circ T^{-1}(Tz_4) = S(z_4) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$$

Das zeigt die Behauptung. □

Wir erhalten durch Komposition sofort die folgende

Folgerung 26.1:
Seien z_1, z_2, z_3 und w_1, w_2, w_3 jeweils drei paarweise verschiedene komplexe Zahlen. Die eindeutig bestimmte gebrochen-lineare Transformation T mit $z_1 \mapsto w_1$, $z_2 \mapsto w_2$ und $z_3 \mapsto w_3$ für $T(z) =: w$ ist gegeben durch

$$\frac{z-z_2}{z-z_1}\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2} = \frac{w-w_2}{w-w_1}\frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}$$

Beispiel 26.3:

Wir betrachten

$$\begin{aligned} z_1 = 1,\ z_2 &= 2,\ z_3 = 7 \\ w_1 = 1,\ w_2 &= 2,\ w_3 = 3 \end{aligned}$$

Dann besitzt die Transformation aus Folgerung 26.1 aufgelöst die Darstellung

$$w = T(z) = \frac{7z-4}{2z+1}$$

27 Der Riemann'sche Abbildungssatz

Sei in diesem Abschnitt wieder stets $\mathfrak{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ die Einheitskreisscheibe. In diesem Abschnitt wollen wir den folgenden Satz beweisen:

27.1 Satz (Riemann'scher Abbildungssatz):

Alle einfach zusammenhängenden Gebiete $\mathfrak{G} \subset \mathbb{C}$, welche verschieden von $\mathbb{C}$ sind, sind konform äquivalent.

Wir werden dazu die folgende, noch stärkere Aussage beweisen:

27.2 Satz (Riemann'scher Abbildungssatz - stärkere Version):

Sei $\mathfrak{G} \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $\mathfrak{G} \neq \mathbb{C}$ und $z_0 \in \mathfrak{G}$. Dann gibt es genau eine konforme Abbildung $f : \mathfrak{G} \longrightarrow \mathfrak{D}$ mit $f(z_0) = 0$ und $f'(z_0) > 0$. [11]

Das Satz 27.2 direkt Satz 27.1 impliziert, ist offensichtlich, da es sich bei „konformer Äquivalenz" um eine Äquivalenzrelation handelt.

27.1 Lemma (Hurwitz):

Sei $\mathfrak{G} \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge holomorpher, in $\mathfrak{G}$ nicht verschwindender Funktionen, die lokal gleichmäßig gegen f konvergieren. Dann ist $f \equiv 0$ oder $f(z) \neq 0\ \forall\ z \in \mathfrak{G}$.

Beweis:

Wir nehmen an, es gäbe ein $z_0 \in \mathfrak{G}$ s.d. $f(z_0) = 0$, aber $f \not\equiv 0$ in $\mathfrak{G}$. Sei weiter $r > 0$ s.d.

$$B := \{w \in \mathbb{C} \mid |z_0 - w| < r\} \subset \mathfrak{G}$$

und $f(z) \neq 0\ \forall\ z \in \partial B$. Das ist möglich, da sich die Nullstellen holomorpher Funktionen nicht häufen. Laut Satz 16.4 ist f holomorph, daher gilt mit Satz 16.3, Folgerung 16.1 und Satz 21.2 insbesondere

$$0 = \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f_m'(z)}{f_m(z)}\,dz}_{=\text{ Anzahl der Nullstellen von } f_m \text{ in } B} \xrightarrow{m \longrightarrow \infty} \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz}_{=\text{ Anzahl der Nullstellen von } f \text{ in } B} \geq 1$$

wegen $f(z_0) = 0$ und $z_0 \in B$. Das ist ein Widerspruch, daher gilt die Behauptung. □

27.1 Hilfssatz:

Sei $\mathfrak{G} \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine lokal gleichmäßig konvergente Folge holomorpher, injektiver Funktionen auf $\mathfrak{G}$,

$$f_n \xrightarrow[\text{lokal gleichmäßig}]{n \longrightarrow \infty} f$$

mit f nicht konstant. Dann ist f ebenfalls holomorph und injektiv.

Beweis:

Laut Satz 16.4 ist f holomorph. Wir nehmen an, es gibt $z_1, z_2 \in \mathfrak{G}$ mit $z_1 \neq z_2$ und $f(z_1) = f(z_2) = a$, aber $f \not\equiv a$. Ohne Einschränkung können wir $a = 0$ annehmen, andernfalls betrachten wir einfach

$$f_n - a \xrightarrow[\text{lokal gleichmäßig}]{n \longrightarrow \infty} f - a$$

Wähle ein $r > 0$ s.d. $B_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z_1 - z| < r\} \subset \mathfrak{G}$, $B_2 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z_2 - z| < r\} \subset \mathfrak{G}$ und $\overline{B_1} \cap \overline{B_2} = \emptyset$. Da f nicht konstant ist, aber sowohl in B_1 als auch in B_2 eine Nullstelle besitzt, muss es in Umkehrung von Lemma 27.1 ein $n \in \mathbb{N}$ geben, s.d. die Funktion f_n sowohl in B_1 als auch in B_2 mindestens eine Nullstelle besitzt. Das ist ein Widerspruch zur Injektivität von f_n und daher gilt die Behauptung. □

[11] Die Formulierung $f'(z_0) > 0$ beinhaltet natürlich wieder $f'(z_0) \in \mathbb{R}$.

Beweis (von Satz 27.2):
Wir wollen die gesuchte Funktion f als Lösung eines Extremalproblems finden. Setze dazu

$$\mathcal{F} := \{g : \mathfrak{G} \longrightarrow \mathfrak{D} \mid g \text{ ist holomorph und injektiv, } g'(z_0) > 0\}$$

Wir zeigen nun:

(1) $\mathcal{F} \neq \emptyset$

(2) Das Supremum der Ableitungen aller Funktionen aus $\mathcal{F}$ an der Stelle z_0 ist beschränkt, d.h.

$$\sup_{g \in \mathcal{F}} g'(z_0) =: M < \infty$$

und es wird auch angenommen, d.h. es gibt ein $f \in \mathcal{F}$ mit $f'(z_0) = M$.

(3) Für dieses f gilt $f(z_0) = 0$ und dieses f ist surjektiv. Daher muss f dann die gesuchte Abbildung sein.

(4) Zuletzt zeigen wir noch, dass f eindeutig bestimmt ist.

zu (1) Da $\mathfrak{G} \neq \mathbb{C}$, finden wir ein $\omega_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathfrak{G}$. Da $\mathfrak{G}$ einfach zusammenhängend ist, existiert eine holomorphe Funktion h, s.d.

$$(h(z))^2 = \frac{z - \omega_0}{z_0 - \omega_0} \ \forall \ z \in \mathfrak{G}$$

mit $h(z_0) = 1$ (vergleiche dazu etwa [RUR], Seite 328, Satz 13.11). Offenbar ist h injektiv. Wir zeigen nun zunächst:

$$\exists \eta > 0 \text{ s.d. } |h(z) + 1| > \eta \ \forall \ z \in \mathfrak{G} \tag{27.1}$$

Würde (27.1) nicht gelten, so gäbe es eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{G}$ s.d.

$$h(z_n) \xrightarrow{n \longrightarrow \infty} -1$$

Das würde aber

$$\frac{z_m - \omega_0}{z_0 - \omega_0} = (h(z_m))^2 \xrightarrow{m \longrightarrow \infty} 1$$

bedeuten, was durch einfaches Umstellen der Gleichung $z_m \xrightarrow{m \longrightarrow \infty} z_0$ bedeutet. Das ist ein Widerspruch zur Stetigkeit von h:

$$\lim_{n \to \infty} h(z_n) = -1 \neq 1 = h(z_0) = h\left(\lim_{n \to \infty} z_n\right)$$

Also gilt Gleichung (27.1) und wir setzen

$$g(z) := \exp(\mathrm{i}\theta) \frac{\eta}{h(z) + 1} \text{ mit } \theta = -\arg\left(\frac{-\eta h'(z_0)}{(h(z_0) + 1)^2}\right)$$

Da h injektiv ist, muss auch g injektiv sein. Außerdem gilt wegen Gleichung (27.1) $g : \mathfrak{G} \longrightarrow \mathfrak{D}$ und per Definition von θ auch $g'(z_0) > 0$ wegen $\frac{\eta}{h(z)+1} \neq 0$. Also ist $g \in \mathcal{F}$ und $\mathcal{F} \neq \emptyset$.

zu (2) Da $\mathfrak{G} \subset \mathbb{C}$ offen ist und $z_0 \in \mathfrak{G}$ liegt, finden wir ein $\delta > 0$ s.d. $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq \delta\} \subset \mathfrak{G}$ gilt. Dann gilt zunächst für jedes $g \in \mathcal{F}$:

$$\begin{aligned} |g'(z_0)| &= \left| \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{|\zeta - z_0| = \delta} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2} \mathrm{d}z \right| \\ &\overset{|g(z)| \leq 1}{\leq} \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi\delta \frac{1}{\delta^2} \\ &= \frac{1}{\delta} \end{aligned}$$

Nach Definition von $\mathcal{F}$ gilt dann insbesondere

$$\forall \ g \in \mathcal{F} : \ 0 < g'(z_0) \leq \frac{1}{\delta}$$

und daher existiert das Supremum (d.h. $M < \infty$, $M \in \mathbb{R}$).

Wir zeigen nun, dass es auch angenommen wird. Sei $(g_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ eine approximierende Folge für das Supremum M, d.h.

$$g_m'(z_0) \xrightarrow{m\longrightarrow\infty} M$$

Wir wählen nun eine abzählbare, dichte Teilmenge $(\xi_l)_{l\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{G}$ (z.b. $\mathbb{Q}^2\cap\mathfrak{G}$ für $\mathbb{C}\cong\mathbb{R}^2$). Wegen $|g_m(z)| \leq 1\ \forall\ m\in\mathbb{N}\ \forall\ z\in\mathfrak{G}$ ist dann insbesondere

$$(g_m(\xi_1))_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$$

eine beschränkte Folge, und wir wissen mit Bemerkung 4.1, dass sie daher eine konvergente Teilfolge $\left(g_{1(m)}(\xi_1)\right)_{m\in\mathbb{N}}$ mit Grenzwert $f(\xi_1)$ besitzt. Nun ist aber auch

$$\left(g_{1(m)}(\xi_2)\right)_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$$

eine beschränkte Folge, und wir finden eine konvergente Teilfolge $\left(g_{2(m)}(\xi_2)\right)_{m\in\mathbb{N}}$ mit Grenzwert $f(\xi_2)$. Wir erhalten so induktiv immer weitere Verfeinerungen der Folge

$$\left(g_{k(m)}\right)_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}\ \text{ s.d. } g_{k(m)}(\xi_l) \xrightarrow{m\longrightarrow\infty} f(\xi_l)\ \ \forall\ l\leq k$$

Jetzt definieren wir

$$f_m := g_{m(m)}$$

als die Diagonalfolge. Dann gilt für alle $l\in\mathbb{N}$:

$$f_m(\xi_l) \xrightarrow{m\longrightarrow\infty} f(\xi_l)$$

d.h. es liegt punktweise Konvergenz auf einer dichten Teilmenge vor. Wir wollen nun zeigen, dass sogar lokal gleichmäßige Konvergenz der holomorphen Funktionsfolge $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ gegen die Funktion f vorliegt. Sei dazu $\varepsilon>0$, $K\subset\mathfrak{G}$ kompakt und $\operatorname{dist}(K,\mathbb{C}\setminus\mathfrak{G}) =: 2d > 0$. Für $z\in K$ gilt dann:

$$|f_m'(z)| \leq \left|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint\limits_{|\zeta-z|=d|}\frac{f_m(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,\mathrm{d}\zeta\right| \overset{f_m\in\mathcal{F}}{\leq} \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi d\cdot\frac{1}{d^2} = \frac{1}{d} \tag{27.2}$$

Weiterhin können wir K ohne Einschränkung als Kreisscheibe annehmen, da wir jede kompakte Menge durch endlich viele Kreisscheiben überdecken können. Damit ist K konvex und es gilt für alle $z,z'\in K$, $\forall\ m\in\mathbb{N}$:

$$|f_m(z)-f_m(z')| = \left|\int\limits_z^{z'} f_m'(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\right| \overset{(27.2)}{\leq} \frac{|z-z'|}{d} \tag{27.3}$$

Also ist die Funktionsfolge $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ mit $\delta := \varepsilon\cdot d$ **gleichgradig gleichmäßig stetig** auf K. Jetzt überdecken wir K mit endlich vielen Kreisscheiben der Form $\left\{z\in\mathbb{C}\ \middle|\ |z-\xi_l| < \frac{d\varepsilon}{3}\right\}$, d.h.

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{r}\left\{z\in\mathbb{C}\ \middle|\ |z-\xi_{l_j}| < \frac{d\varepsilon}{3}\right\}$$

Für jedes $z\in K$ existiert damit ein j mit $|z-\xi_{l_j}| < \frac{d\varepsilon}{3}$ und wegen der bereits gezeigten punktweisen Konvergenz auf der dichten Teilmenge gibt es auch ein $m_\varepsilon^{l_j}$ s.d. $\forall\ m,m'\geq m_\varepsilon^{l_j}$:

$$|f_m(\xi_l) - f_{m'}(\xi_l)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{27.4}$$

Setze nun $m_\varepsilon := \max\limits_{j=1,\dots,r}\left\{m_\varepsilon^{l_j}\right\}$. Dieses m_ε hängt dann nicht mehr von $z\in K$ ab und es gilt für alle $z\in K$ und für alle $m,m'\geq m_\varepsilon$ mit geeignetem $1\leq j\leq r$:

$$|f_m(z)-f_{m'}(z)| \leq \left|f_m(z)-f_m(\xi_{l_j})\right| + \left|f_m(\xi_{l_j})-f_{m'}(\xi_{l_j})\right| + \left|f_{m'}(\xi_{l_j})-f_{m'}(z)\right| \overset{(27.3)\text{ und }(27.4)}{<} \varepsilon$$

Das bedeutet genau, dass

$$f_{m|_K} \xrightarrow[\text{lokal gleichmäßig}]{m\longrightarrow\infty} f_{|_K}$$

Daher ist die Folge $(f_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ lokal gleichmäßig konvergent und nach Satz 16.4 ist f ebenfalls holomorph in $\mathfrak{G}$. Außerdem sagt uns Folgerung 16.1 über die Ableitung, dass

$$f'(z_0) = \lim_{m\to\infty} f'_m(z_0) = M$$

Laut Satz 22.1 ist f als holomorphe, nicht konstante Funktion offen und wegen

$$|f(z)| = \lim_{m\to\infty} |f_m(z)| \leq 1 \ \forall\ z \in \mathfrak{G}$$

muss also $f(\mathfrak{G}) \subset \mathfrak{D}$ gelten. Mit Hilfssatz 27.1 ist f außerdem injektiv, d.h $f \in \mathcal{F}$.

zu (3)

- Angenommen, es wäre $f(z_0) = \alpha$ mit einem $0 < |\alpha| < 1$. Betrachte dann die Funktion

$$g(z) := B_\alpha \circ f(z) = \frac{f(z) - \alpha}{1 - \overline{\alpha} f(z)}$$

wobei B_α den zu $\alpha = f(z_0)$ und $\theta = 0$ gehörigen Automorphismus der Einheitskreisscheibe $\mathfrak{D}$ bezeichnet (vergleiche Satz 26.5 und Definition 26.1). Man berechnet

$$g'(z_0) = f'(z_0) \cdot B'_\alpha(f(z_0)) = \frac{f'(z_0)}{1 - |\alpha|^2} > f'(z_0) > 0$$

Damit folgt zum einen $g \in \mathcal{F}$ und zum anderen stellt dies einen Widerspruch zur Maximalität der Ableitung von f an der Stelle z_0 dar.

- Wir nehmen an, es gäbe ein $w_0 \in \mathfrak{D} \backslash f(\mathfrak{G})$. Zwangsläufig ist $w_0 \neq 0$, da $f(z_0) = 0$. Wir stellen w_0 dann eindeutig in der Form

$$w_0 = -t^2 \exp(\mathrm{i}\theta)$$

mit einem $0 < t < 1$ und einem $\theta \in [0, 2\pi)$ dar. Sei nun

$$g_0(z) := \exp(-\mathrm{i}\theta) f(z)$$

Dann ist $g_0 : \mathfrak{G} \longrightarrow \mathfrak{D}$ holomorph, injektiv und es gilt $|g'_0(z_0)| = f'(z_0) = M$ sowie $g_0(z_0) = f(z_0) = 0$. Außerdem muss wegen $f(z) \neq w_0 \ \forall\ z \in \mathfrak{G}$ auch $g_0(z) \neq -t^2 \ \forall\ z \in \mathfrak{G}$ gelten. Betrachte nun

$$g_1(z) := B_{-t^2} \circ g_0(z) = \frac{g_0(z) + t^2}{1 + t^2 g_0(z)}$$

wobei wieder B_{-t^2} den zu $t^2 \in \mathfrak{D}$ gehörenden Automorphismus der Einheitskeisscheibe $\mathfrak{D}$ bezeichnet. Wiederum ist $g_1 : \mathfrak{G} \longrightarrow \mathfrak{D}$ holomorph und injektiv, aber diesmal gilt $g_1(z_0) = t^2$. Außerdem nimmt g_1 den Wert $0 \in \mathfrak{D}$ per Definition nicht an. Da $\mathfrak{G}$ einfach zusammenhängend ist und g_1 den Wert 0 nicht annimmt, finden wir eine holomorphe Funktion $g_2 : \mathfrak{G} \longrightarrow \mathfrak{D}$ mit

$$(g_2(z))^2 = g_1(z) \ \ \forall\ z \in \mathfrak{G}$$

und $g_0(z_0) = t$ (vergleiche dazu wieder [RUR], Seite 328, Satz 13.11). Die Funktion g_2 ist dann automatisch auch injektiv, da sonst g_1 nicht injektiv wäre. Setze nun

$$g_3(z) := B_t \circ g_2(z) = \frac{g_2(z) - t}{1 - t g_2(z)} \text{ für } z \in \mathfrak{G}$$

Dann ist $g_3 : \mathfrak{G} \longrightarrow \mathfrak{D}$ eine holomorphe, injektive Funktion und es gilt $g_3(z_0) = 0$ per Definition. Für die Ableitungen gilt:

$$\begin{aligned}
g'_1(z_0) &= g'_0(z_0) \cdot B'_{-t^2}(g_0(z_0)) = g'_0(z_0) \cdot B'_{-t^2}(0) = g'_0(z_0) \cdot \left(1 - t^4\right) \\
g'_2(z_0) &= \frac{g'_1(z_0)}{2\sqrt{g_1(z_0)}} = \frac{g'_0(z_0)\left(1 - t^4\right)}{2t} \\
g'_3(z_0) &= g'_2(z_0) \cdot B'_t(g_2(z_0)) = \frac{g'_2(z_0)}{1 - t^2} = \frac{g'_0(z_0)\left(1 + t^2\right)}{2t}
\end{aligned}$$

Insbesondere folgt damit

$$|g'_3(z_0)| = \frac{|g'_0(z_0)|\left(1 + t^2\right)}{2t} > 0 \tag{27.5}$$

Betrachte also $g_4(z) := \exp(-\mathrm{i}\arg(g'_3(z_0)))\, g_3(z)$ und erhalte so eine Funktion $g_4 \in \mathcal{F}$. Wegen $1 + t^2 > 2t \ \forall\ t \in (0, 1)$ sagt uns (27.5) aber genau

$$g'_4(z_0) > M = f'(z_0)$$

was einen Widerspruch zur Maximalität der Ableitung von f an z_0 darstellt.

Also kann es kein $w_0 \in \mathfrak{D} \setminus f(\mathfrak{G})$ geben und f ist surjektiv.

Damit ist jetzt schon klar, dass f die Behauptungen des Satzes erfüllt.

zu (4) Wir nehmen an, es gäbe zwei konforme Abbildungen $f, g : \mathfrak{G} \longrightarrow \mathfrak{D}$ mit $f(z_0) = g(z_0) = 0$ und $f'(z_0) > 0 < g'(z_0)$. Betrachte dann die Funktion

$$h := f \circ g^{-1} : \mathfrak{D} \longrightarrow \mathfrak{D}$$

Als Komposition konformer Funktionen ist h dann ebenfalls konform und es gilt $h(0) = 0$. Mit dem Lemma (25.5) über die Automorphismen der Einheitskreisscheibe folgt sofort

$$h(z) = \exp(\mathrm{i}\theta) z \text{ für ein } \theta \in [0, 2\pi), \ \forall \ z \in \mathfrak{D}$$

Wegen $h'(0) = \left(g^{-1}\right)'(0) \cdot f'\left(g^{-1}(0)\right) = \frac{1}{g'(0)} \cdot f'(0) > 0$ nach Voraussetzung muss aber $\theta = 0$ gelten und daher folgt

$$\mathrm{id}_{\mathfrak{D}} = h = f \circ g^{-1}$$

d.h. $f = g$ als Funktionen. □

Stichwortverzeichnis