Funktionentheorie

Wolfram Decker

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL 0

Grundlagen

1. Komplexe Zahlen

1.1. Der Körper $\mathbb{C}$. Auf dem $\mathbb{R}-$Vektorraum $\mathbb{R}^2$ mit Elementen $z = (x,y)$ definieren wir eine Multiplikation durch

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) \ .$$

Dann ist $\mathbb{C} := (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ ein Körper, der **Körper der komplexen Zahlen**, mit Nullelement $(0,0)$, Einselement $(1,0)$ und

$$z = (x,y) \neq (0,0) \Rightarrow \frac{1}{z} = z^{-1} = \frac{1}{x^2+y^2}(x,-y) \ .$$

Die Abbildung

$$\mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad x \to (x,0)$$

ist ein Körpermonomorphismus, wir fassen $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ als Unterkörper auf und identifizieren $x = (x,0)$.
Für $i = (0,1)$ gilt $i^2 = -1$, d.h. i ist Nullstelle des Polynoms $z^2 + 1$.
Wir haben $\forall \quad z = (x,y) \in \mathbb{C}$:

$$z \ = \ (x,y) \ = \ x(1,0) + y(0,1) \ = \ x + iy \ = \ \underset{\substack{| \\ \text{Realteil}}}{\operatorname{Re} z} \quad + \quad \underset{\substack{| \\ \text{Imaginärteil}}}{i \operatorname{Im} z}$$

Bemerkung. $\mathbb{C}$ kann nicht angeordnet werden.

Annahme. doch $\Rightarrow 0 < 1^2 = 1$ und $0 < i^2 = -1 \Rightarrow 0 < 1 + (-1) = 0$

1.2. Konjugation. Für $z = x + iy$ sei $\overline{z} := x - iy$. Dann ist

$$J : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,, \quad z \to \overline{z}$$

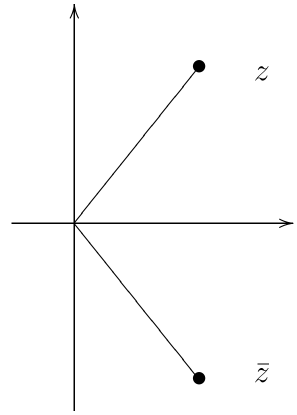
ein Körperautomorphismus mit $J^2 = id$ und Fixkörper $\mathbb{R}$. Mit anderen Worten

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad \overline{zw} = \overline{z}\ \overline{w}, \quad \overline{\overline{z}} = z, \quad z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z} \ .$$

Weiter ist

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \overline{z}), \qquad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}) \ .$$

Anschaulich ist $z \to \overline{z}$ die Spiegelung an der reellen Achse:



1.3. Euklidischer Abstand, $\mathbb{C}$ als metrischer Raum. Wie üblich seien

$$\langle z_1, z_2 \rangle := x_1x_2 + y_1y_2$$

das **euklidische Skalarprodukt**

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

der **euklidische** oder **Absolutbetrag** und

$$d(z_1, z_2) := |z_1 - z_2|$$

der **euklidische Abstand** bzw. die **euklidische Metrik**. Dann gelten die Regeln

$$|\overline{z}| = |z|, \quad |\mathrm{Re}\, z| \leq |z|, \quad |\mathrm{Im}\, z| \leq |z|, \quad z\overline{z} = |z^2|$$

und

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z^2|} \quad \text{für} \quad z \neq 0\ .$$

Der euklidische Abstand d macht $\mathbb{C}$ zum metrischen und damit insbesondere zum topologischen Raum. Begriffe wie offen, abgeschlossen, Umgebung, stetig, Konvergenz, Cauchy-Folge, Häufungspunkt oder kompakt sind damit definiert. Ist $z \in \mathbb{C}$, so schreiben wir $\mathfrak{U}(z)$ für die Menge aller Umgebungen von z.
Wir wiederholen z.B. Konvergenz:

$$a_n \to a \Longleftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists \quad n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon \qquad \forall\ n \geq n_0\ .$$

Dies ist äquivalent zu ($\mathrm{Re}\, a_n \to \mathrm{Re}\, a$ und $\mathrm{Im}\, a_n \to \mathrm{Im}\, a$).
$\mathbb{C}$ ist vollständig, d.h. $\forall$ Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$ konvergiert gegen komplexe Zahl.
Man hat die üblichen Limessätze sowie zusätzlich

$$\lim |a_n| = |\lim a_n|, \quad \lim \overline{a}_n = \overline{\lim a_n}$$

falls $\lim a_n$ existiert.

1.4. Zusammenhang. Sei $A \subset \mathbb{C}$.

1.4.1. Definition.

(i) *Eine stetige Abbildung $\alpha : [a, b] \to A$ heißt **Weg** mit **Anfangspunkt** $\alpha(a)$ und **Endpunkt** $\alpha(b)$.*
*(“α **verbindet** $\alpha(a)$ **mit** $\alpha(b)$”). A heißt **wegzusammenhängend**, wenn je zwei Punkte in A durch einen Weg verbindbar sind.*

(ii) *A heißt **zusammenhängend**, wenn die Bedingungen des folgenden Satzes erfüllt sind.*

1.4.2. Satz. *Es sind äquivalent:*

(i) *Sind $A_1, A_2 \subset A$ offen (bzgl. der induzierten Metrik bzw. Topologie) mit*
$A_1 \cap A_2 = \emptyset, \quad A_1 \cup A_2 = A$, *so folgt $A_1 = A$ oder $A_2 = A$.*

(ii) *Ist $B \subset A$ offen und abgeschlossen (bzgl. der induzierten Metrik bzw. Topologie), so ist $B = A$ oder $B = \emptyset$.*

Beweis. Aufgaben. □

1.4.3. Satz. *Stetige Abbildungen bilden*

(i) *wegzusammenhängende Mengen auf ebensolche ab*

(ii) *zusammenhängende Mengen auf ebensolche ab.*

Beweis. Aufgaben. □

1.4.4. Satz. *Für $G = A$ offen sind äquivalent:*

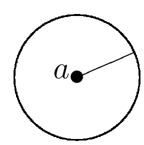
(i) *G wegzusammenhängend*

*(‘**Gebiet**”)*

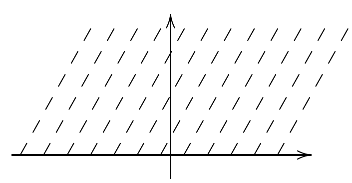
(ii) *G zusammenhängend.*

Beweis. Aufgaben. □

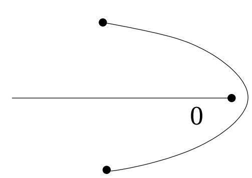
1.4.5. Beispiel. Gebiete sind etwa:
Offene Kreisscheiben $K_r(a) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\}$,



die obere Halbebene $H := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$,



$\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- := \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$.



2. Konvergenz von Reihen

2.1. Konvergente Reihen.

2.1.1. Definition. *Eine Reihe $\sum\limits_{\nu=k}^{\infty} a_\nu$ komplexer Zahlen (i.A. ist $k = 0, 1$) heißt **konvergent mit Summe** s, wenn $s_n := \sum\limits_{\nu=k}^{n} a_\nu \to s$. Wir schreiben dann auch $s = \sum\limits_{\nu=k}^{\infty} a_\nu$.*

2.1.2. Satz. *Äquivalent:*

(i) $\sum\limits_{\nu=k}^{\infty} a_\nu = s$ *ist konvergent.*

(ii) $\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists \quad n_0 \geq k : |\sum\limits_{\nu=m+1}^{n} a_\nu| < \varepsilon \qquad \forall\ n, m \geq n_0$ *(mit $n > m$)*
("Cauchy-Kriterium")

(iii) $\sum \operatorname{Re} a_\nu = \operatorname{Re} s$ *und* $\sum \operatorname{Im} a_\nu = \operatorname{Im} s$ *sind konvergent.*

(iv) *Cauchy für Real- und Imaginärteil.*

Beweis. (i)$\Longleftrightarrow$(ii) bzw. (iii)$\Longleftrightarrow$(iv) ist die Vollständigkeit von $\mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{R}$.
(i)$\Longleftrightarrow$(iii) ergibt sich wegen $\sum\limits_{\nu=k}^{n} a_\nu = \sum\limits_{\nu=k}^{n} \operatorname{Re} a_\nu + \sum\limits_{\nu=k}^{n} \operatorname{Im} a_\nu$ aus den Limessätzen für Folgen. □

2.1.3. Beispiel. Geometrische Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{n} z^\nu = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \to \frac{1}{1 - z} \qquad \forall \quad z \in \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad |z| < 1\ .$$

2.2. Absolute Konvergenz und Umordnung.

Motivation. Wir betrachten ein Beispiel. Die Reihen

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \cdots \quad \text{bzw.} \quad 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots$$

sind Umordnungen voneinander, sie sind konvergent, haben aber die verschiedenen Summen

$$\ln 2 \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{3}{2} \ln 2\ .$$

Will man, unabhängig von Umordnungen, immer denselben Grenzwert erhalten, so braucht man, dass die Reihe absolut konvergiert.

2.2.1. Definition. $\sum\limits_{\nu=k}^{\infty} a_\nu$ *heißt absolut konvergent, wenn* $\sum\limits_{\nu=k}^{\infty} |a_\nu|$ *konvergiert.*

2.2.2. Bemerkung.

(i) Jede absolut konvergente Reihe $\sum a_\nu$ ist konvergent und es gilt $|\sum a_\nu| \leq \sum |a_\nu|$.

(ii) **Majorantenkriterium**. Sei $\sum\limits_k r_\nu$ eine konvergente Reihe reeller Zahlen $r_\nu \geq 0$. Ist $\sum\limits_k a_\nu$ eine Reihe komplexer Zahlen mit $|a_\nu| \leq r_\nu$ für fast alle $\nu \geq k$, so ist $\sum\limits_k a_\nu$ absolut konvergent.

Beweis. Anwendung des Cauchy-Kriteriums. □

2.2.3. Umordnungssatz. *Ist $\sum\limits_0 a_\nu$ absolut konvergent, so auch jede Umordnung dieser Reihe, genauer gilt*

$$\sum_0 a_{\tau(\nu)} = \sum_0 a_\nu \qquad \forall \quad \textit{Bijektion} \quad \tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\ .$$

Beweis. Wortwörtlich wie im Reellen. □

2.3. Produkte von Reihen. Sind $\sum\limits_0 a_\mu$, $\sum\limits_0 b_\nu$ zwei Reihen, so heißt jede Reihe $\sum\limits_0 c_\lambda$, wo $c_0, c_1, c_2, \dots$ genau einmal die Produkte $a_\mu\, b_\nu$ durchläuft, eine **Produktreihe** von $\sum\limits_0 a_\mu$ und $\sum\limits_0 b_\nu$. Besonders wichtig für uns ist das **Cauchy-Produkt**.

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} p_\lambda \quad \text{mit} \quad p_\lambda = \sum_{\mu+\nu=\lambda} a_\mu b_\nu \ .$$

2.3.1. Reihenproduktsatz. *Sind $\sum\limits_0 a_\mu$, $\sum\limits_0 b_\nu$ absolut konvergent, so auch $\forall$ Produktreihe $\sum\limits_0 c_\lambda$ und es gilt*

$$\Big(\sum_0 a_\mu\Big)\Big(\sum_0 b_\nu\Big) = \sum_0 c_\lambda \ .$$

Beweis. $\forall\ l \in \mathbb{N} \quad \exists \quad m \in \mathbb{N}$ mit $\{c_0, \dots, c_l\} \subset \{a_\mu b_\nu \mid 0 \le \mu, \nu \le m\}$. Also folgt

$$\sum_{\lambda=0}^{l} |c_\lambda| \le \Big(\sum_{\mu=0}^{m} |a_\mu|\Big)\Big(\sum_{\nu=0}^{m} |b_\nu|\Big) \le \Big(\sum_{\mu=0}^{\infty} |a_\mu|\Big)\Big(\sum_{\nu=0}^{\infty} |b_\nu|\Big) < \infty \ .$$

Damit ist $\sum c_\lambda$ absolut konvergent und nach dem Umordnungssatz kann man zur Berechnung von $\sum c_\lambda$ jede Anordnung der $a_\mu b_\nu$ benutzen, die man durch Ausmultiplizieren von $\big(\sum\limits_{\mu=0}^{n} a_\mu\big)\big(\sum\limits_{\nu=0}^{n} b_\nu\big)$ erhält. Also ist

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} c_\lambda = \lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{\mu=0}^{n} a_\mu\Big)\Big(\sum_{\nu=0}^{n} b_\nu\Big) = \Big(\sum_{\mu=0}^{\infty} a_\mu\Big)\Big(\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu\Big)$$

□

2.4. Cauchy'scher Doppelreihensatz. Sei $a_{\mu\nu}, (\mu, \nu) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, eine Doppelfolge komplexer Zahlen. Dann gilt: $\sum\limits_{\mu=0}^{\infty} \Big(\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} |a_{\mu\nu}|\Big)$ konvergiert genau dann, wenn $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \Big(\sum\limits_{\mu=0}^{\infty} |a_{\mu\nu}|\Big)$ konvergiert. In diesem Fall ist

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \Big(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu}\Big) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Big(\sum_{\mu=0}^{\infty} a_{\mu\nu}\Big) \ .$$

Beweis. Aufgaben □

KAPITEL 1

Analytische Funktionen

(Weierstraß'scher Ansatz)

3. Konvergenzbegriffe für Funktionenfolgen und -reihen

Seien $A \subset \mathbb{C}$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_n : A \to \mathbb{C}$.

3.1. Punktweise Konvergenz.

3.1.1. Definition. *f_n heißt* **punktweise konvergent in** *A (gegen eine Funktion $f : A \to \mathbb{C}$), falls $\forall\ z \in A \quad f_n(z)$ konvergiert (gegen $f(z)$). Wir schreiben dann $f_n \to f, \quad f = \lim f_n$.*

3.2. Gleichmäßige Konvergenz.

3.2.1. Definition. *f_n heißt* ***gleichmäßig konvergent in*** *A (gegen $f : A \to \mathbb{C}$), falls*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ n_0 \in \mathbb{N} : |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \qquad \forall\ n \geq n_0, \quad \forall\ z \in A\ .$$

Wir schreiben dann $f_n \rightrightarrows f$.

3.2.2. Bemerkung.

(i) $f_n \rightrightarrows f \iff (\operatorname{Re} f_n \rightrightarrows \operatorname{Re} f \quad \text{und} \quad \operatorname{Im} f_n \rightrightarrows \operatorname{Im} f)$
(ii) $(f_n \rightrightarrows f, \quad g_n \rightrightarrows g, \quad a, b \in \mathbb{C}) \Longrightarrow (af_n + bg_n \rightrightarrows af + bg)$
(iii) $(f_n \rightrightarrows f, \quad g_n \rightrightarrows g, \quad f, g \text{ beschränkt}) \Longrightarrow (f_n \cdot g_n \to f \cdot g)$.
(Übung)

3.2.3. Cauchy-Kriterium:
f_n gleichmäßig konvergent $\iff \quad \forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ n_0 \in \mathbb{N}$:

$$|f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon \qquad \forall\ n, m \geq n_0 \quad \forall\ z \in A$$

.

Beweis. Wie im reellen Fall. □

3.3. Lokal-gleichmäßige Konvergenz.

Sei $A = \Omega$ offen.

3.3.1. Definition. *f_n heißt* ***lokal-gleichmäßig (kompakt) konvergent in*** *Ω (gegen $f : \Omega \to \mathbb{C}$), falls die Bedingungen des folgenden Satzes erfüllt sind. Wir schreiben dann $f_n \underset{lok}{\Longrightarrow} f$.*

3.3.2. Satz. *Äquivalent:*

(i) $\forall\ z \in \Omega \quad \exists\ U \in \mathfrak{U}(z)$ *offen*, $U \subset \Omega : f_n|U \rightrightarrows f|U$.

(ii) $\forall\ K \subset \Omega$ *kompakt:* $f_n|K \rightrightarrows f|K$.

Beweis. (i) $\Longrightarrow$ (ii)
Sei $K \subset \Omega$ kompakt. $\forall\ z \in K \quad \exists\ U_z \in \mathfrak{U}(z)$: $\quad f_n|U_z \rightrightarrows f|U_z$.
Da K kompakt $\exists\ z_1, \ldots, z_r \in K$ mit $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{r} U_{z_i} =: U$. Dann $f_n|U \rightrightarrows f|U$, also auch $f_n|K \rightrightarrows f|K$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i)
Sei $z \in \Omega$. Wählen Radien s, r mit $\underset{\text{offen}}{K_s(z)} =: U \subset \underset{\text{kompakt}}{\overline{K_r(z)}} =: K \subset \Omega$.
Dann $f_n|K \rightrightarrows f|K$, also auch $f_n|U \rightrightarrows f|U$. $\square$

3.3.3. Bemerkung. $(f_n \rightrightarrows f) \Longrightarrow (f_n \underset{\text{lok}}{\rightrightarrows} f) \Longrightarrow (f_n \to f)$.

3.3.4. Stetigkeitssatz: *$(f_n \underset{lok}{\rightrightarrows} f$, fast alle f_n stetig$) \Longrightarrow (f$ stetig).*

Beweis. Wie im reellen Fall. $\square$

3.4. Funktionenreihen. Obige Definitionen und Aussagen übertragen sich wie üblich auf Funktionenreihen $\sum\limits_{\nu=k}^{\infty} f_\nu$ durch Betrachten der Partialsummen $\sum\limits_{\nu=k}^{n} f_\nu$. Außerdem gilt das

Majorantenkriterium von Weierstraß: Sei $\sum r_\nu$ eine konvergente Reihe in $\mathbb{R}_+$ mit
$$|f_\nu(z)| \le r_\nu \quad \forall\ z \in A, \quad \text{für fast alle } \nu\ .$$
Dann konvergiert $\sum f_\nu$ gleichmäßig auf A.

Beweis. Für $n > m$ groß genug gilt
$$|\sum_{\nu=m+1}^{n} f_\nu(z)| \le \sum_{\nu=m+1}^{n} |f_\nu(z)| \le \sum_{\nu=m+1}^{n} r_\nu(z) \qquad \forall\ z \in A$$
und Behauptung folgt aus Cauchy-Kriterium. $\square$

Die bereits in § 2 erwähnten Probleme beim Umordnen von Reihen führen zu

3.5. Normale Konvergenz von Funktionenreihen. Sei wieder $A = \Omega$ offen.

3.5.1. Definition. *$\sum f_\nu$ heißt **normal konvergent** in Ω, falls die Bedingungen des folgenden trivialen Satzes erfüllt sind.*

3.5.2. Satz. *Äquivalent:*
(i) $\forall\ z \in \Omega \quad \exists\ \ U \in \mathfrak{U}(z)$ *offen,* $U \subset \Omega$*:* $\ \sum |f_\nu|_U$ *konvergiert.*
(ii) $\forall\ K \subset \Omega$ *kompakt:* $\ \sum |f_\nu|_K$ *konvergiert.*

Dabei verwenden wir die Bezeichnung: Sind X eine Menge, $g : X \to \mathbb{C}$ eine Funktion und $M \subset X$, so sei
$$|g|_M := \sup_{m \in M} |g(m)|\ .$$

3.5.3. Bemerkung.

(i) Normal konvergent $\Longrightarrow$ lokal-gleichmäßig konvergent.
(ii) Für $\Omega = K_r(c)$ sind obige Bedingungen äquivalent zu:
$\forall \quad 0 < s < r : \sum |f_\nu|_{K_s}(c)$ konvergiert.

3.5.4. Umordnungssatz: *Konvergiert* $\sum\limits_0 f_\nu$ *in* Ω *normal gegen* f*, so konvergiert* $\forall$ *Bijektion* $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *auch* $\sum\limits_0 f_{\tau(\nu)}$ *in* Ω *normal gegen* f*.*

Beweis. Für $K \subset \Omega$ kompakt konvergiert $\sum |f_\nu|_K$, also auch $\sum |f_{\tau(\nu)}|_K$, nach dem Umordnungssatz (2.2.4). Ist $z \in \Omega$ so folgt speziell mit $K = \{z\}$: $\sum f_\nu(z) = \sum f_{\tau(\nu)}(z)$. $\square$

Analog ergibt sich aus (2.3.1):

3.5.5. Reihenproduktsatz: *Sind* $\sum f_\nu, \sum g_\nu$ *normal konvergent in* Ω*, so auch jede ihrer Produktreihen gegen* $(\sum f_\nu)(\sum g_\nu)$*.*

4. Potenzreihen

4.1. Formale Potenzreihen. Ist $c \in \mathbb{C}$ ein fester Punkt, so heißt jede Funktionenreihe

$$\sum_0 a_\nu (z-c)^\nu, \qquad a_\nu \in \mathbb{C}$$

(**formale**) **Potenzreihe** mit **Entwicklungspunkt** c und **Koeffizienten** a_ν. Jedes Polynom $\sum\limits_0^n a_\nu (z-c)^\nu$wird als Potenzreihe mit $a_\nu = 0$ für $\nu > n$ aufgefaßt. Die Potenzreihen mit festem Entwicklungspunkt c werden zu einer $\mathbb{C}-$Algebra durch

$$\begin{aligned} \sum a_\nu (z-c)^\nu + \sum b_\nu (z-c)^\nu &:= \sum (a_\nu + b_\nu)(z-c)^\nu \\ \left(\sum a_\nu (z-c)^\nu\right)\left(\sum b_\nu (z-c)^\nu\right) &:= \sum_\lambda \Big(\sum_{\mu+\nu=\lambda} a_\mu b_\nu \Big) . \end{aligned}$$

4.2. Konvergente Potenzreihen.

4.2.1. Definition. *Eine Potenzreihe $\sum a_\nu (z-c)^\nu$ heißt* **konvergent**, *wenn $\exists\ z_0 \neq c$ mit $\sum a_\nu (z_0 - c)^\nu$ konvergiert. Wichtiges Beispiel ist die geometrische Reihe $\sum z^\nu$, konvergent für $|z| < 1$.*

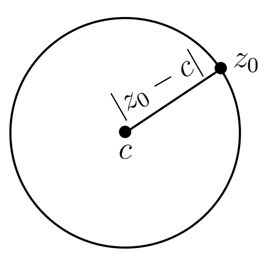
4.2.2. Abel'sches Lemma: *Gibt es zu $\sum a_\nu (z-c)^\nu$ reelle Zahlen $r > 0$, $M > 0$, so daß $|a_\nu| r^\nu \le M \quad \forall\ \nu$, so konvergiert $\sum a_\nu (z-c)^\nu$ normal in $K_r(c)$.*

Beweis. Wir wenden (3.5.3), (ii) an. Für $0 < s < r$ gilt

$$M_\nu := |a_\nu (z-c)^\nu|_{K_{s(c)}} \le |a_\nu| s^\nu = |a_\nu| \left(\frac{s}{r}\right)^\nu r^\nu \le M \left(\frac{s}{r}\right)^\nu .$$

Wegen $\frac{s}{r} < 1$ konvergiert $\sum M_\nu$. $\square$

4.2.3. Korollar. *Konvergiert $\sum a_\nu (z-c)^\nu$ in $z_0 \neq c$, so ist $\sum a_\nu (z-c)^\nu$ normal konvergent in $K_{|z_0-c|}(c)$.*



Beweis. $a_\nu (z_0 - c)^\nu$ ist Nullfolge, also beschränkt. $\square$

4.3. Konvergenzradius. Sei $\sum a_\nu (z-c)^\nu$ eine Potenzreihe.

4.3.1. Definition. $R := \sup \left\{ |z_0 - c| \ \mid \sum a_\nu (z_0 - c)^\nu \text{ konvergent} \right\} \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ *heißt* ***Konvergenzradius*** *und $K_R(c)$* ***Konvergenzkreis*** *von $\sum a_\nu (z-c)^\nu$.*

4.3.2. Konvergenzsatz für Potenzreihen*:*

Ist $R > 0$, so konvergiert $\sum a_\nu (z-c)^\nu$ normal in $K_R(c)$ und divergiert in $\mathbb{C} \setminus \overline{K_R(c)}$.

Beweis. Sei $0 < s < R$. Dann $\exists\ z_0$ mit $s < |z_0 - c| < R$. Nach (4.2.3) konvergiert $\sum a_\nu(z-c)^\nu$ normal in $K_{|z_0-c|}(c)$ und somit erst recht in $K_s(c)$.

Ist $z_0 \notin \overline{K_R(c)}$, so divergiert $\sum a_\nu(z-c)^\nu$ nach Definition von R. $\square$

Insbesondere ist die Grenzfunktion

$$K_R(c) \to \mathbb{C}\,, \qquad z \to \sum a_\nu(z-c)^\nu$$

stetig. Zum Konvergenzverhalten auf dem Rand $\partial K_R(c)$ des Konvergenzkreises vergleiche Aufgaben. Für Anwendungen nützlich sind:

4.3.3. (i) ***Formel von Cauchy-Hadamard:*** *Es gilt*

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}\ \sqrt[\nu]{|a_\nu|}}\ .$$

(ii) ***Quotientenkriterium:*** *Ist $a_\nu \neq 0$ für fast alle ν, so ist*

$$\underline{\lim}\,\frac{|a_\nu|}{|a_{\nu+1}|}\ \le\ R\ \le\ \overline{\lim}\,\frac{|a_\nu|}{|a_{\nu+1}|}\ .$$

Speziell $R = \lim \frac{|a_\nu|}{|a_{\nu+1}|}$, falls dieser Limes existiert.

Beweis. Wie im reellen Fall. $\square$

4.3.4. *Beispiele:*

(i) ***Exponentialreihe*** $\exp(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!}$: $R = \lim \frac{|a_\nu|}{|a_{\nu+1}|} = \lim(\nu+1) = \infty$.

(ii) ***Logarithmische Reihe*** $\sum\limits_{1} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} z^\nu$: $R = \lim \frac{|a_\nu|}{|a_{\nu+1}|} = \lim \frac{\nu+1}{\nu} = 1$.

(iii) ***Arcustangensreihe*** $\sum\limits_{1} \frac{(-1)^{\mu-1}}{2\mu-1} z^{2\mu-1}$: $R = 1$ *nach Cauchy-Hadamard, da*

$$|a_\nu| \ =\ \begin{cases} 0 & \nu \quad \textit{gerade} \\ \frac{1}{2\mu-1} & \nu = 2\mu-1 \ \textit{ungerade}\ . \end{cases}$$

4.4. Identitätssatz für Potenzreihen. Von großer Bedeutung für die Funktionentheorie ist die Tatsache, daß eine konvergente Potenzreihe durch ihre Grenzfunktion bestimmt ist. Wir zeigen zunächst:

4.4.1. Satz (Isolierte Nullstellen). *Sei $f(z) = \sum a_\nu(z-c)^\nu$ in $K_r(c)$ konvergent. Wenn nicht alle $a_\nu = 0$, so $\exists\ 0 < s < r$ mit $f(z) \neq 0 \quad \forall\ z \in K_s(c)\setminus\{c\}$. Insbesondere ist jede Nullstelle isoliert.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist $n := \min\big\{\nu \mid a_\nu \neq 0\big\} \in \mathbb{N}$ und $f(z) = (z-c)^n g(z)$ wo $g(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_{n+\nu}(z-c)^\nu$. Die Funktion $g(z)$ ist stetig in $K_r(c)$ mit $g(c) = a_n \neq 0$. Also $\exists\ 0 < s < r$ mit $g(z) \neq 0$ und somit auch $f(z) \neq 0 \quad \forall\ z \in K_s(c)\setminus\{c\}$. $\square$

4.4.2. *Identitätssatz:* *Seien $f(z) = \sum a_\nu(z-c)^\nu$, $\quad g(z) = \sum b_\nu(z-c)^\nu$ in $K_r(c)$ konvergent. Gibt es eine Folge $z_n \to c$, $\quad z_n \in K_r(c)\setminus\{c\}\ \forall\, n$, mit $f(z_n) = g(z_n)\ \forall\, n$, so folgt $a_\nu = b_\nu\ \forall\, \nu$.*

Beweis. Mit f, g konvergiert auch $h := f - g, \quad h(z) = \sum \big(a_\nu - b_\nu\big)(z-c)^\nu$, in $K_r(c)$. Wenn nicht alle $a_\nu = b_\nu$, so liefert (4.4.1) ein $0 < s < r$ mit $h(z) \neq 0 \quad \forall\ z \in K_s(c) \backslash \{c\}$. Wegen $z_n \to c \quad \exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ mit $z_n \in K_s(c)\backslash\{c\} \quad \forall\ n \geq n_0$ im Widerspruch zu $h(z_n) = 0$. $\square$

5. Analytische Funktionen

5.1. Definitionen.

5.1.1. *Definition und Bemerkung:* *Seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine Funktion.*

(i) *f heißt in $c \in \Omega$* ***in eine Potenzreihe entwickelbar****, wenn $\exists$ Potenzreihe $\sum a_\nu (z-c)^\nu$, die in einem Kreis $K_r(c) \subset \Omega$ gegen f konvergiert: $f(z) = \sum a_\nu (z-c)^\nu \quad \forall\ z \in K_r(c)$. Diese Potenzreihe ist dann nach dem Identitätssatz (4.4.2) eindeutig bestimmt und heißt* ***Potenzreihenentwicklung*** *von f in c.*

(ii) *f heißt* ***analytisch****, wenn f in jedem Punkt von Ω in eine Potenzreihe entwickelbar ist. f ist dann insbesondere stetig.*

5.1.2. *Beispiel:* *Die Funktion $\frac{1}{z}$ ist auf $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nicht Grenzfunktion einer Potenzreihe, aber analytisch: Um $c \in \mathbb{C}^*$ gilt*

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{c+z-c} = \frac{1}{c}\,\frac{1}{1-\frac{c-z}{c}} = \frac{1}{c}\sum\left(\frac{c-z}{c}\right)^\nu = \sum \frac{(-1)^\nu}{c^{\nu+1}}(z-c)^\nu$$

mit Konvergenzradius $1/\overline{\lim}\sqrt[\nu]{1/|c|^{\nu+1}} = |c|$.

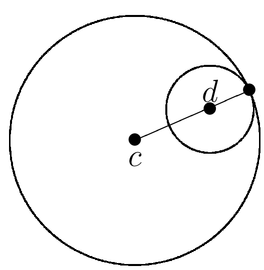
5.2. Entwicklungssatz für Potenzreihen.

Sei $f(z) = \sum a_\nu (z-c)^\nu$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann ist f analytisch in $K_R(c)$. Genauer gilt $\forall\ d \in K_R(c)$: Die Potenzreihe

$$\sum_{\mu=0}^{\infty}\Big(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\mu+\nu}\binom{\mu+\nu}{\nu}(d-c)^\nu\Big)(z-d)^\mu$$

hat mindestens den Konvergenzradius $R - |d-c|$ und konvergiert gegen f in $K_{R-|d-c|}$.

Beweis. Sei $d \in K_R(c)$.



Die binomische Formel liefert $\forall\ z \in K_R(c)$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-c)^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \Big((z-d)+(d-c)\Big)^\nu \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\nu} a_\nu \binom{\nu}{\mu}(d-c)^{\nu-\mu}(z-d)^\mu \ . \end{aligned}$$

Da aber $\sum\limits_{\mu=0}^{\nu} |a_\nu| \binom{\nu}{\mu} |d-c|^{\nu-\mu}\,|z-d|^\mu = |a_\nu|\Big(|z-d|+|d-c|\Big)^\nu$ und $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}|a_\nu|\Big(|z-d|+|d-c|\Big)^\nu$ mindestens für $|z-d|+|d-c| < R$ konvergiert, so folgt für solche

z aus dem Cauchy'schen Doppelreihensatz:

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\nu} a_\nu \binom{\nu}{\mu} (d-c)^{\nu-\mu}(z-d)^\mu \quad &= \quad \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty} a_\nu \binom{\nu}{\mu} (d-c)^{\nu-\mu}(z-d)^\mu \\
= \quad \sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \binom{\nu}{\mu} (d-c)^{\nu-\mu}(z-d)^\mu \quad &= \quad \sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=\mu}^{\infty} a_\nu \binom{\nu}{\mu} (d-c)^{\nu-\mu}(z-d)^\mu \\
= \quad \sum_{\mu=0}^{\infty}\Big(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\mu+\nu} \binom{\mu+\nu}{\nu} (d-c)^{\nu}\Big)(z-d)^\mu \ .
\end{aligned}$$

□

5.3. Identitätssatz für analytische Funktionen. Seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f, g : G \to \mathbb{C}$ analytisch. Gibt es $c \in G$ und Folge $z_n \to c, \quad z_n \in G \setminus \{c\} \quad \forall\ n$, mit $f(z_n) = g(z_n) \quad \forall\ n$, so folgt $f = g$.

Beweis. Sei $B := \{z \in G \mid \exists\ U \in \mathfrak{U}(z),\ U \subset G \text{ mit } f|U = g|U\}$. B ist offen per Definition und nicht leer nach Voraussetzung und dem Identitätssatz (4.4.2). Wir zeigen $G \setminus B$ ist auch offen, dann folgt $G = B$, da G zusammenhängend. Sei dazu $d \in G \setminus B$.

Annahme. $\forall\ U \in \mathfrak{U}(d)$ gilt $U \cap B \neq \emptyset$. Dann $\exists$ Folge $w_n \to d,\ w_n \in B \quad \forall\ n$. Wieder nach (4.4.2) folgt $d \in B$ ↯ . Also $\exists\ U \in \mathfrak{U}(d),\ U \subset G \setminus B$. □

5.3.1. Isoliertheit der Nullstellen: *Seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ analytisch, $f \neq 0$. Dann hat f höchstens isolierte Nullstellen in G.*

Beweis. Sei $c \in G$ mit $f(c) = 0$. Betrachten Potenzreihenentwicklung $f(z) = \sum a_\nu (z-c)^\nu$ in $K_r(c)$. Nach (4.4.1) $\exists\ 0 < s < r$ mit $f(z) \neq 0\, \forall\, z \in K_s(c) \setminus \{c\}$, vorausgesetzt nicht alle $a_\nu = 0$. Wäre dies der Fall, so folgte $f \mid K_r(c) = 0$ ↯ zum Identitätssatz. □

5.3.2. *Bemerkung:* *Ist $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, so ist*

$$A(\Omega) := \Big\{ f : \Omega \to \mathbb{C} \mid f \text{ analytisch} \Big\}$$

eine kommutative $\mathbb{C}-$Algebra mit 1:

$$f, g \in A(\Omega) \Rightarrow f + g,\ f \cdot g \in A(\Omega).$$

Da die Hintereinanderausführung analytischer Funktionen analytisch ist (Aufgaben) folgt mit (5.1.2):

$$f, g \in A(\Omega),\ g(z) \neq 0 \quad \forall z \in \Omega \quad \Rightarrow \quad \frac{f}{g} \in A(\Omega)\ .$$

6. Elementare Funktionen

Wir wollen die Exponentialfunktion, die trigonometrischen und die Hyperbelfunktionen auch für komplexes Argument definieren.

6.1. exp, sin, cos. Nach (4.3.4) konvergiert

$$\exp(z) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!}$$

und somit auch die Reihen

$$\sin(z) = \sum_{v=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)!}\, z^{2\nu+1}$$
$$\cos(z) = \sum_{v=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^\nu}{(2\nu)!}\, z^{2\nu}$$

normal auf ganz $\mathbb{C}$. Nach (5.2) sind $\exp, \sin, \cos \in A(\mathbb{C})$.
Wir schreiben auch e^z für $\exp(z)$ (dies ist vorläufig noch keine Potenz).

6.1.1. *Euler'sche Formel:* $e^{iz} = \cos z + i \sin z \quad \forall\ z \in \mathbb{C}$.

Beweis. Wegen $i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1$ gilt

$$\sum_{\nu=0}^{2m+1} \frac{(iz)^\nu}{\nu!} = \sum_{\mu=0}^{m} (-1)^\mu \frac{z^{2\mu}}{(2\mu)!} + i \sum_{\mu=0}^{m} (-1)^\mu \frac{z^{2\mu+1}}{(2\mu+1)!}$$

und die Behauptung folgt durch Grenzübergang. □

Wegen

$$\cos(-z) = \cos z, \quad \sin(-z) = -\sin z$$

folgt $e^{-iz} = \cos z - i\, \sin z$ und somit auch

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \quad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$$

6.1.2. *Additionstheorem:* $\forall\ z, w \in \mathbb{C}$ *gilt:*

$$\begin{aligned} \exp(z+w) &= \exp(z) \cdot \exp(w) \\ \cos(z+w) &= \cos(z) \cdot \cos(w) - \sin(z) \cdot \sin(w) \quad \textit{und} \\ \sin(z+w) &= \sin(z) \cdot \mathit{cos}\,(w) + \mathit{cos}\,(z) \sin(w)\ . \end{aligned}$$

Beweis. Für exp verwenden wir das Cauchy-Produkt:

$$\begin{aligned} \exp(z) \cdot \exp(w) &= \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu+v=\lambda} \tfrac{z^\nu}{\nu!} \tfrac{w^\mu}{\mu!} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \tfrac{1}{\lambda!} \sum_{\nu=0}^{\lambda} \binom{\lambda}{\nu} z^{\lambda-\nu} w^\mu \\ &= \sum_{\lambda=0}^{\infty} \tfrac{(z+w)^\nu}{\lambda!} = \exp(z+w)\ . \end{aligned}$$

Die Behauptung für cos bzw. sin folgt durch Additon bzw. Subtraktion von

$$e^{i(z+w)} = e^{iz}\, e^{iw} = \big(\cos\, z + i\, \sin\, z\big)\big(\cos\, w + i\, \sin\, w\big)$$

mit der analogen Formel für $e^{-i(z+w)}$. □

Für $w = -z$ ergibt sich

$$e^z \cdot e^{-z} = 1$$

und insbesondere $e^z \neq 0 \quad \forall\ z \in \mathbb{C}$.

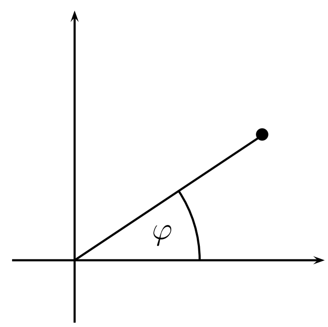
Weitere Formeln folgen wie im reellen, etwa

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1 \ .$$

6.2. Polarkoordinaten. Aus der reellen Analysis wissen wir, daß sich jedes $z \in \mathbb{C}$ in der Form

$$z = |z| e^{i\varphi} = |z|(\cos\varphi + i\,\sin\varphi)$$

schreiben läßt.



Für $z \neq 0$ ist φ bis auf Addition von ganzzahligen Vielfachen von 2π bestimmt, jeder solche Winkel heißt Argument von z,

$$\varphi = \arg z \ .$$

Normieren wir φ, etwa durch $\varphi \in [0, 2\pi[$ oder $\varphi \in]-\pi, \pi]$ so ist φ eindeutig bestimmt. $|z|, \varphi$ heißen dann **Polarkoordinaten** von z.
Multiplikation in Polarkoordinaten:

$$zw = |z|e^{i\varphi} \cdot |w|e^{i\psi} = |z|\,|w|\,e^{i(\varphi+\psi)} \ ,$$

insbesondere gilt die

6.2.1. *Moivresche Formel:* $\forall\ z = |z|e^{i\varphi} \in \mathbb{C}$:

$$z^n = |z|^n e^{i\,n\varphi} = |z|^n(\cos n\varphi + i\,\sin n\varphi) \ .$$

6.3. Epimorphiesatz für exp **und Folgerungen.**

6.3.1. Satz. (i) $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ *ist ein Gruppenepimorphismus der additiven Gruppe* $\mathbb{C}$ *in die multiplikative Gruppe* $\mathbb{C}^*$.

(ii) *Kern*$(\exp) = 2\pi i\mathbb{Z}$, *d.h. die ganzzahligen Vielfachen von* $2\pi i$ *sind genau die Perioden von* exp.

(iii) *Jeder Streifen der Form*

$$\{z \in \mathbb{C} \mid r \leq \operatorname{Im} z < r + 2\pi\}, \quad r \in \mathbb{R},$$

wird durch exp *bijektiv auf* $\mathbb{C}^*$ *abgebildet.*

Beweis. (i) Ist $w \in \mathbb{C}^*$, so sei $z := \log|w| + i\,\arg w$. Dann ist

$$e^z = e^{\log|w|}\,e^{i\,\arg w} = |w|e^{i\,\arg w} = w \ .$$

(ii) Sei $z = x + iy \in \text{Kern}(\exp)$. Dann $1 = e^z = e^x(\cos y + i\,\sin y)$, i.e. $x = 0$, $\cos y = 1$, $\sin y = 0$, i.e. $z \in 2\pi i\mathbb{Z}$.
Umgekehrt liefert die Eulersche Formel (6.1.1): $e^{2\pi ik} = \cos 2\pi k + i\,\sin 2\pi k = 1$.

(iii) Die Surjektivität wurde in (i) mitbewiesen, die Injektivität folgt nach (ii) wegen $e^z = e^w \Rightarrow e^{z-w} = 1$.

□

6.3.2. *Logarithmen komplexer Zahlen:* *$b \in \mathbb{C}$ heißt* ***Logarithmus*** *von $a \in \mathbb{C}$, $b = \log a$, falls $e^b = a$. Wie eben gesehen gilt: $\forall\, a \in \mathbb{C}^*$ hat genau die abzählbar vielen Logarithmen*

$$\log|a| + i\,\arg a\ .$$

(Wir studieren hier log *noch nicht als Funktion !).*

6.3.3. *Wurzeln:* *$b \in \mathbb{C}$ heißt $n-$**te Wurzel** aus $a \in \mathbb{C}$, $b = \sqrt[n]{a}$, falls $b^n = a$ (**Einheitswurzel**, falls $a = 1$). Es gilt: $\forall\, a \in \mathbb{C}^*$ hat genau die n $n-$ten Wurzeln*

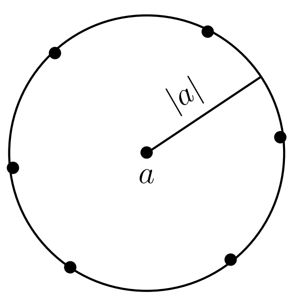
$$\exp\big((2\pi ki + \log a)/n\big), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1\,,$$

wo $\log a$ ein fixierter Logarithmus.
Denn: Das Additionstheorem liefert

$$\Big(\exp\big((2\pi ki + \log a)/n\big)\Big)^n = \exp\log a = a\,,$$

daß die n Zahlen paarweise verschieden sind folgt aus (6.3.1),(ii) und da $z^n - a$ höchstens n Nullstellen hat, sind wir fertig. In Polarkoordinaten:

$$a = |a|\,e^{i\varphi} \Rightarrow \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{|a|}\ \exp\Big(\frac{i}{n}(\varphi + 2k\pi)\Big), \quad k \in \mathbb{Z}\ .$$



6.3.4. Satz. (i) $\sin z = 0 \Longleftrightarrow z \in \pi\mathbb{Z}$, $\cos z = 0 \Longleftrightarrow z \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$.
(ii) *$2\pi\mathbb{Z}$ ist die Menge der Perioden von* sin *und* cos
(iii) sin *und* cos *nehmen jedes $c \in \mathbb{C}$ abzählbar unendlich oft an.*

Beweis. (6.1.1) und Eigenschaften von exp. □

6.3.5. *Tangens und Cotangens:* *Wo Nenner $\neq 0$ sei*

$$\tan z := \frac{\sin z}{\cos z}\ , \quad \cot z := \frac{\cos z}{\sin z}\ .$$

Dann gilt, wo definiert,

$$\tan z = \frac{1}{i}\ \frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1}\,, \qquad \cot z = i\,\frac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1}\ .$$

sowie das
***Additionstheorem**:* $\tan(z+w) = \frac{\tan z + \tan w}{1 - \tan z \cdot \tan w}$, $\cot(z+w) = \frac{\cot z \cdot \cot w - 1}{\cot z + \cot w}$.
Die Nullstellen ergeben sich aus (6.3.4), die Menge der Perioden ist jeweils $\pi\mathbb{Z}$. Zur Potenzreihenentwicklung vergleiche Aufgaben.

6.3.6. *Hyperbelfunktion:* *Diese werden ebenfalls wie im reellen definiert:*

$$\begin{aligned} \sin hz &:= \tfrac{1}{2}(e^z - e^{-z}) = \sum \tfrac{1}{(2\nu+1)!} z^{2\nu+1} , \\ \cos hz &:= \tfrac{1}{2}(e^z + e^{-z}) = \sum \tfrac{1}{(2\nu)!} z^{2\nu} . \end{aligned}$$

Es gilt

$$\sin hz = \frac{1}{i} \sin iz , \quad \cos hz = \cos iz$$

sowie

$$\cos h^2 z - \sin h^2 z = 1 .$$

Hieraus folgt, dass die Menge der Perioden jeweils $2\pi i\mathbb{Z}$ ist sowie das
***Additionstheorem**:* $\sin h(z+w) = \sin hz \cos hw + \cos hz \sin hw$,
$\cos h(z+w) = \cos hz \cos hw + \sin hz \sin hw$.

KAPITEL 2

Holomorphe Funktionen

(Cauchy'scher Ansatz)

7. Komplex differenzierbare Funktionen

Seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $c = a + ib \in \Omega$.

7.1. Komplexe Differenzierbarkeit.

7.1.1. *Definition und Bemerkung:* *$f : \Omega \to \mathbb{C}$ heißt **komplex differenzierbar** in c, falls*

(i) $\exists \quad \Delta : \Omega \to \mathbb{C}$ *stetig in c mit*

$$f(z) = f(c) + (z - c)\ \Delta(z) \qquad \forall\ z \in \Omega\ .$$

Äquivalent:

(ii) $\exists \quad \lim\limits_{z \to c} \frac{f(z)-f(c)}{z-c}$.

Äquivalent:

(iii) $\exists \quad \alpha \in \mathbb{C} \quad$ *mit* $\quad \lim\limits_{z \to c} \frac{f(z)-f(c)-\alpha(z-c)}{z-c} = 0$.

Ist f komplex differenzierbar in c so heißt

$$f'(c) := \Delta(c) = \lim_{z \to c} \frac{f(z) - f(c)}{z - c} = \alpha$$

*die **Ableitung** von f in c. Wie im reellen ergibt sich:*
f komplex differenzierbar in $c \Rightarrow f$ stetig in c.

7.1.2. *Beispiele:*

(i) *f analytisch in c $\Rightarrow$ f komplex differenzierbar in c: Ist $f(z) = \sum\limits_0 a_\nu (z-c)^\nu$ um c, so gilt*

$$f(z) = \underset{f(c)}{\underset{\|}{a_0}} + (z-c)\ \underbrace{\sum_1 a_\nu (z-c)^{\nu-1}}_{\Delta(z)}$$

mit $f'(c) = \Delta(c) = a_1$.

(ii) *$J : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,,\ z \to \overline{z}$, ist in keinem Punkt $c \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar: Für $z = c + t\,,\ \ t \in \mathbb{R}\,,$ ist $\frac{\overline{z}-\overline{c}}{z-c} = \frac{t}{t} = 1$, für $z = c + it\,,\ \ t \in \mathbb{R}\,,$ ist $\frac{\overline{z}-\overline{c}}{z-c} = \frac{-it}{it} = -1$.* $\square$

7.1.3. *Wortwörtlich wie im reellen zeigt man:*

Linearitätsregel: $(\alpha f + \beta g)'(c) = \alpha f'(c) + \beta g'(c)$.

Produktregel: $(fg)'(c) = f'(c)\, g(c) + f(c)\, g'(c)$.

Quotientenregel: $\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \frac{f'(c)g(c)-f(c)g'(c)}{g^2(c)}$, *falls* $g(c) \neq 0$.

Kettenregel: $(g \circ f)'(c) = g'\big(f(c)\big) \cdot f'(c)$.

7.2. Reelle Differenzierbarkeit.

7.2.1. *Definition und Bemerkung:* *Sei zunächst* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *reell-wertig. Dann heißt* f ***reell differenzierbar*** *in* c*, falls*

$$\begin{array}{lcl} \exists \quad \Delta_1, \Delta_2 & : & \Omega \to \mathbb{R} \quad \textit{stetig in} \quad c \quad \textit{mit} \\ \quad f(z) & = & f(c) + (x-a)\,\Delta_1(z) + (y-b)\,\Delta_2(z) \qquad \forall \quad z = x+iy \in \Omega\ . \end{array}$$

Ist dies der Fall, so haben wir die **partiellen Ableitungen**

$$\frac{\partial f}{\partial x}(c) := f_x(c) := \Delta_1(c), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(c) := f_y(c) := \Delta_2(c)\ .$$

Sei nun $f = u + iv : \Omega \to \mathbb{C}$ *komplex-wertig. Dann heißt* f ***reell differenzierbar*** *in* c*, falls*

(i) u, v *reell differenzierbar in* c .

$\Longleftrightarrow$

(ii) $\exists \quad \Delta_1, \Delta_2 : \Omega \to \mathbb{C}$ *stetig in* c *mit*
$f(z) = f(c) + (x-a)\,\Delta_1(z) + (y-b)\,\Delta_2(z) \qquad \forall \quad z = x+iy \in \Omega$.

$\Longleftrightarrow$

(iii) $\exists \quad L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\mathbb{R}-$*linear* *mit* $\lim\limits_{z \to c} \frac{f(z)-f(c)-L(z-c)}{z-c} = 0$.

Ist dies der Fall, so hat man das **totale Differential**

$$Df(c) \ := \ L$$

sowie die **partiellen Ableitungen**

$$\begin{array}{lclclcl} \frac{\partial f}{\partial x}(c) & := & f_x(c) & := & u_x(c) + iv_x(c) & = & \Delta_1(c) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(c) & := & f_y(c) & := & u_y(c) + iv_y(c) & = & \Delta_2(c) \end{array}$$

Als Matrix:

$$\begin{array}{rcl} Df(c)(\xi + i\zeta) & = & \begin{pmatrix} u_x(c) & u_y(c) \\ v_x(c) & v_y(c) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix} \\ & = & \Big(u_x(c)\xi + u_y(c)\zeta\Big) + i\Big(v_x(c)\xi + v_y(c)\zeta\Big)\ . \end{array}$$

7.3. Wirtinger Ableitungen.

7.3.1. Satz. *In (7.2) ist zu (ii) äquivalent:*

`(iv)` $\exists \quad A_1\, A_2 : \Omega \to \mathbb{C}$ *stetig in* c *mit*
$f(z) = f(c) + (z-c)\, A_1(z) + (\overline{z} - \overline{c})\, A_2(z) \qquad \forall \quad z \in \Omega$.

Beweis. (ii) $\Longrightarrow$ (iv):

$$\begin{aligned} f(z) &= f(c) + (x-a)\,\Delta_1(z) + (y-b)\,\Delta_2(z) \\ &= f(c) + \frac{1}{2}(z - c + \overline{z} - \overline{c})\,\Delta_1(z) - \frac{i}{2}(z - c - \overline{z} + \overline{c})\,\Delta_2(z) \\ &= f(c) + (z-c)\ \underbrace{\frac{1}{2}\Big(\Delta_1(z) - i\,\Delta_2(z)\Big)}_{A_1(z)} + (\overline{z} - \overline{c})\ \underbrace{\frac{1}{2}\Big(\Delta_1(z) + i\,\Delta_2(z)\Big)}_{A_2(z)} \end{aligned}$$

(iv) $\Longrightarrow$ (ii): analog. □

7.3.2. Definition. *Ist (iv) erfüllt, so heißen*

$$\frac{\partial f}{\partial z}(c) := f_z(c) := A_1(c) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(c) - i\,\frac{\partial f}{\partial y}(c)\right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(c) := f_{\overline{z}}(c) := A_2(c) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(c) + i\,\frac{\partial f}{\partial y}(c)\right)$$

die **Wirtinger Ableitungen** von f in c.

7.3.3. Ergänzung: *Für $\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}}$ gelten zu (7.1.3) analoge Regeln, vergleiche Literatur.*

7.4. Cauchy-Riemann'sche Differentialgleichungen.

7.4.1. Vorbemerkung: *Die $\mathbb{C}-$linearen Abbildungen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sind genau die Drehstreckungen $z \to \alpha z$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Ist nun $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\mathbb{R}-$linear, $L = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ l_3 & l_4 \end{pmatrix}$ mit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ l_3 & l_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, so gilt:*
L $\mathbb{C}-$linear, i.e. $L(z) = L(1)\cdot z \quad \forall\ z \Longleftrightarrow L(i) = iL(1) \Longleftrightarrow l_1 = l_4,\ l_2 = -l_3$.

7.4.2. Satz. *Für $f = u + iv :\quad \Omega \to \mathbb{C}$ sind äquivalent:*

(i) *f ist komplex differenzierbar in c.*
(ii) *f ist reell differenzierbar in c und $Df(c)$ ist $\mathbb{C}-$linear.*
(iii) *f ist reell differenzierbar in c und $u_x(c) = v_y(c),\ u_y(c) = -v_x(c)$.*
*(**"Cauchy-Riemann"**)*
(iv) *f ist reell differenzierbar in c und $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(c) = 0$.*

Beweis. Nach Vorbemerkung ist (ii)$\Longleftrightarrow$(iii) aber auch (i)$\Longleftrightarrow$(ii) wegen (7.1.1),(iii) und (7.2),(iii). (iii)$\Longleftrightarrow$(iv), denn:

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}(c) &= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\partial f}{\partial x}(c) + i\,\tfrac{\partial f}{\partial y}(c)\right) = \tfrac{1}{2}\Big(u_x(c) + i\,v_x(c) + i\,\Big(u_y(c) + i\,v_y(c)\Big)\Big) \\ &= \tfrac{1}{2}\Big(u_x(c) - v_y(c) + i\,\Big(u_y(c) + v_x(c)\Big)\Big)\ . \end{aligned}$$

□

7.4.3. Korollar: *f komplex differenzierbar in $c \Rightarrow f'(c) = f_z(c) = f_x(c)$.*

Beweis.

$$f'(c) = Df(c)(1) = u_x(c) + i\, v_x(c) = f_z(c)\,,$$
$$f_z(c) = \tfrac{1}{2}\Big(f_x(c) - i\, f_y(c)\Big) = \tfrac{1}{2}\Big(f_x(c) + f_x(c)\Big) = f_x(c)\ .$$

□

7.4.4. *Beispiele:*

(i) *Überall reell - aber nirgends komplex differenzierbar sind:*

$$z \longrightarrow \operatorname{Re} z = x:\ \ \tfrac{\partial x}{\partial \overline{z}} \equiv \tfrac{1}{2}$$
$$z \longrightarrow \operatorname{Im} z = y:\ \ \tfrac{\partial y}{\partial \overline{z}} \equiv \tfrac{i}{2}$$
$$z \longrightarrow J(z) = \overline{z}:\ \ \tfrac{\partial \overline{z}}{\partial \overline{z}} \equiv 1$$

(ii) *Überall reell - aber nur in 0 komplex differenzierbar ist*

$$z \longrightarrow |z|^2 : \frac{\partial |z|^2}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial (x^2+y^2)}{\partial \overline{z}} = z\ .$$

Es ist $\frac{\partial |z|^2}{\partial z}(0) = 0$.

□

8. Holomorphe Funktionen

8.1. Definitionen. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen.

8.1.1. Definition. *$f : \Omega \to \mathbb{C}$ heißt **holomorph**, falls f komplex differenzierbar in allen $c \in \Omega$. Ist dies der Fall, so heißt $f' : \Omega \to \mathbb{C},\ c \to f'(c)$, die **Ableitung** von f in Ω. Ist f' wieder holomorph, so schreiben wir $f^{(2)} := (f')'$ und induktiv, falls definiert, $f^{(\nu)} := (f^{(\nu-1)})'$ mit $f^{(0)} := f\,,\ f^{(1)} := f'$.*

8.1.2. *Bemerkung:* *$\mathcal{O}(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{C} \text{ holomorph}\}$ ist $\mathbb{C}-$Algebra:*

$$f, g \in \mathcal{O}(\Omega) \Longrightarrow f+g,\ f \cdot g \in \mathcal{O}(\Omega)\,,$$

sowie

$$\frac{f}{g} \in \mathcal{O}(\Omega)\,, \quad \textit{falls} \quad g(z) \neq 0 \quad \forall\ z \in \Omega\ .$$

8.2. Analytische Funktionen sind holomorph.

8.2.1. Satz. *Jede analytische Funktion ist holomorph. Genauer gilt:*
*Ist $f(z) = \sum\limits_0 a_\nu (z-c)^\nu$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $R > 0$, so ist f holomorph in $K_R(c)$ und die Ableitung $f'(z) = \sum\limits_1 \nu\, a_\nu (z-c)^{\nu-1}$ hat ebenfalls den Konvergenzradius R. ("**Gliedweise Differentation**").*

Beweis. Sei $g(z) = \sum\limits_1 \nu\, a_\nu (z-c)^{\nu-1}$ mit Konvergenzradius R'.

(1) Wir zeigen $R = R'$. $\underline{R' \leq R}$: Sei $|z-c| < R'$. Wegen
$|a_\nu|\,|z-c|^\nu \ = \ |z-c|\,|a_\nu|\,|z-c|^{\nu-1} \ \leq \ |z-c|\,\nu\,|a_\nu|\,|z-c|^{\nu-1}\,,\ \nu \geq 1\,,$
ist mit $g(z)$ auch $f(z)$ konvergent.

$\underline{R \leq R'}$: Sei $r < R$. Wähle s mit $r < s < R$. Dann ist die Folge $|a_\nu| s^\nu$ beschränkt. Wegen

$$\nu\,|a_\nu|\,r^{\nu-1} \ = \ \left(\frac{|a_\nu|}{r}\,s^\nu\right)\ \overbrace{\nu\left(\frac{r}{s}\right)^\nu}^{\text{Nullfolge}} \ \longrightarrow 0$$

ist die Folge $\nu |a_\nu|\,r^{\nu-1}$ beschränkt. Mit dem Lemma von Abel folgt $r \leq R'$. Da $r < R$ beliebig war, folgt $R \leq R'$.

(2) Sei $d \in K_R(c)$. Nach (5.2) ist

$$f(z) \ = \ \sum_{\mu=0}^\infty \left(\sum_{\nu=0}^\infty a_{\mu+\nu} \binom{\mu+\nu}{\nu} (d-c)^\nu\right)(z-d)^\mu$$

die Potenzreihenentwicklung von f um d. Mit (7.1.2) folgt: f ist differenzierbar in d mit

$$f'(d) \ = \ \sum_{\nu=0}^\infty a_{1+\nu} \binom{1+\nu}{\nu} (d-c)^\nu \ = \ \sum_{\nu=1}^\infty \nu\, a_\nu\, (d-c)^{\nu-1} \ = \ g(d)\ .$$

□

8.2.2. *Korollar:* *$f : \Omega \to \mathbb{C}$ analytisch $\Longrightarrow$ $\forall$ $c \in \Omega$ gilt:*
f ist beliebig oft differenzierbar in c und hat um c die Potenzreihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(c)}{\nu\,!}\,(z-c)^{\nu} \qquad (''\textbf{\textit{Taylor-Reihe}}'')$$

Beweis. Sei $f(z) = \sum a_\nu (z-c)^\nu$ die Potenzreihenentwicklung von f in c. Aus (8.2.1) folgt mit Induktion: f ist beliebig oft differenzierbar in c und es gilt

$$\begin{aligned} f^{(\nu)}(z) &= \sum_{\mu=0}^{\infty} (\mu+\nu)(\mu+\nu-1)\cdot\ldots\cdot(\mu+1)\,a_{\mu+\nu}\,(z-c)^{\mu} \\ &= \sum_{\mu=0}^{\infty} \tfrac{(\mu+\nu)!}{\mu\,!}\,a_{\mu+\nu}\,(z-c)^{\mu}\,. \end{aligned}$$

Insbesondere: $f^{(\nu)}(c) = \nu!\ a_\nu\,.$ □

8.2.3. Bemerkung. Vergleiche mit (5.2).

8.2.4. *Identitätssatz:* *Seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f, g \in A(G)$ mit $\exists\ c \in G$ so dass $f^{(\nu)}(c) = g^{(\nu)}(c)\quad \forall\ \nu$. Dann gilt $f = g$.*

8.2.5. *Die elementaren Funktionen:* *Gliedweise Differentiation liefert*

$$\exp' z = \exp z, \quad \sin' z = \cos z, \quad \cos' z = -\sin z$$

sowie

$$\sinh' z = \cosh z, \quad \cosh' z = \sinh z\,.$$

Mit der Quotientenregel folgt, wo definiert:

$$\tan' z = \tfrac{\sin^2 z + \cos^2 z}{\cos^2 z} = \tfrac{1}{\cos^2 z} = 1 + \tan^2 z\,,$$

$$\cot' z = \tfrac{-\sin^2 z - \cos^2 z}{\sin^2 z} = \tfrac{-1}{\sin^2 z} = -(1 + \cot^2 z)\,.$$

8.3. Charakterisierung lokal-konstanter Funktionen.

8.3.1. Definition. *Sei $A \subset \mathbb{C}$. $f : A \to \mathbb{C}$ heißt* ***lokal-konstant in*** *A, wenn*
$\forall\ a \in A \quad \exists \quad U \in \mathfrak{U}(a) \quad$ mit $\quad f \mid U \cap A \quad$ ist konstant.

8.3.2. *Lemma:* *Für $A \subset \mathbb{C}$ sind äquivalent:*

i) *Jede lokal-konstante Funktion $f : A \to \mathbb{C}$ ist konstant.*
ii) *A ist zusammenhängend.*

Beweis. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Sei $B \subset A$. Betrachte die charakteristische Funktion

$$\chi_B(z) := \begin{cases} 1 & z \in B \\ 0 & z \in A \setminus B \end{cases} .$$

Sind B und $A \setminus B$ offen (bzgl. der induzierten Topologie), so ist χ_B lokal-konstant und somit konstant. Ist $\chi_B \equiv 1$, so folgt $B = A$, ist $\chi_B \equiv 0$ so folgt $B = \emptyset$.
(ii) $\Longrightarrow$ (i): Sei $c \in A$ fest. Die Faser $B := f^{-1}(f(c)) \subset A$ ist nicht leer und offen in A, da f lokal-konstant. B ist auch abgeschlossen, da f insbesondere stetig. Also ist $B = A$, i.e. f konstant. □

8.3.3. Satz. *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Für $f : \Omega \to \mathbb{C}$ sind äquivalent:*

i) *f ist lokal-konstant in Ω .*
ii) *$f \in \mathcal{O}(\Omega)$ und $f'(z) = 0 \quad \forall\, z \in \Omega$.*

Beweis. (i) $\Longrightarrow$ (ii): klar.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Sei $f = u + i\,v$. Wegen $0 = f' = u_x + i\,v_x$ folgt $u_x = v_x = 0$ und somit auch $u_y = v_y = 0$ mit Cauchy-Riemann. Nach GdM II sind dann auch u und v und somit auch f lokal konstant. □

8.3.4. *Korollar:* *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann sind für $f : G \to \mathbb{C}$ äquivalent:*

i) *f ist konstant in G .*
ii) *$f \in \mathcal{O}(G)$ und $f'(z) = 0 \quad \forall\; z \in G$.*

Beweis. Nach (1.4.3) ist für jedes lokalkonstante $f : G \to \mathbb{C}$ auch $f(G)$ zusammenhängend. Also ist f konstant. □

8.4. Stammfunktionen.

8.4.1. Definition. *$\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $\quad f : \Omega \to \mathbb{C}$ Funktion.*
*$F : \Omega \to \mathbb{C}$ heißt **Stammfunktion** von f, falls $F \in \mathcal{O}(\Omega), \quad F' = f$.*

8.4.2. Bemerkung. $G \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $F_1, F_2 : G \to \mathbb{C}$ Stammfunktionen von $f : G \to \mathbb{C} \Longrightarrow F_1 - F_2$ ist konstant.

8.4.3. Satz. *Sei $f(z) = \sum\limits_0 a_\nu (z-c)^\nu$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann hat $F(z) = \sum\limits_0 \frac{1}{\nu+1}\, a_\nu (z-c)^{\nu+1}$ ebenfalls den Konvergenzradius R und ist Stammfunktion von f in $K_R(c)$.*

Beweis. (8.2.1) □

9. Wegintegrale

9.1. Integration in reellen Intervallen. Sei $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall.

9.1.1. Definition. *Ist $f = u + i\,v : I \to \mathbb{C}$ stetig, so sei für $r, s \in I$*

$$\int_r^s f(t)\,\mathrm{d}t \;:=\; \int_r^s u(t)\,\mathrm{d}t \;+ i \int_r^s v(t)\,\mathrm{d}t \;\in \mathbb{C}\,.$$

9.1.2. *Integrationsregeln:* *Seien $f, g : I \to \mathbb{C}$ stetig. Dann gilt:*

i) $\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))\,\mathrm{d}t = \alpha \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \;+ \beta \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \;\forall\; \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$

ii) $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \;= -\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t\;.$

iii) $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \;= \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \;+ \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \quad \forall\; x \in I.$

iv) $\int_a^b \overline{f}(t)\,\mathrm{d}t \;= \overline{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t}.$

9.1.3. *Standardabschätzung:* *$f : I \to \mathbb{C}$ stetig. Dann gilt*

$$\Big|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\Big| \quad\le\quad \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t\,.$$

Beweis. Sei $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \;= r\,e^{i\varphi}$ in Polarkoordinaten. Dann gilt

$$\Big|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\Big| = r = e^{-i\varphi}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \;= \int_a^b \mathrm{Re}\,(e^{-i\varphi} f(t))\,\mathrm{d}t + i \int_a^b \mathrm{Im}\,(e^{-i\varphi} f(t))\,\mathrm{d}t\,.$$

$r \in \mathbb{R} \Longrightarrow \int_a^b \mathrm{Im}\,(e^{-i\varphi} f(t))\,\mathrm{d}t = 0$. Da die Abschätzung für reellwertige Funktionen gilt, folgt Behauptung aus

$$\mathrm{Re}\,(e^{-i\varphi} f) \;\le\; \Big|\mathrm{Re}\,(e^{-i\varphi} f)\Big| \;\le\; |e^{-i\varphi} f| \;=\; |f|\,.$$

$\square$

9.1.4. Definition. *$f : I \to \mathbb{C}$ heißt **stetig differenzierbar**, falls* $\mathrm{Re}\, f$ *und* $\mathrm{Im}\, f$ *dies sind. Ist f differenzierbar, so nennen wir*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t) \;:=\; f'(t) \;:=\; (\mathrm{Re}\, f)'(t) \;+\; i\,(\mathrm{Im}\, f)'(t)$$

*die **Ableitung** von f.*

9.1.5. ***Differentiationsregeln:*** *Linearitäts-, Produkt- und Quotientenregel bleiben unverändert richtig. Außerdem gilt die*

Kettenregel: $\Omega \subset \mathbb{C}$ *offen,* $\gamma : I \to \mathbb{C}$ *differenzierbar mit* $\gamma(I) \subset \Omega$ *und* $f \in \mathcal{O}(\Omega) \Longrightarrow f \circ \gamma$ *differenzierbar mit*

$$(f \circ \gamma)'(t) = f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,, \qquad \forall\, t \in I\,.$$

9.1.6. Definition. *Sei* $f : I \to \mathbb{C}$ *eine Funktion. Dann heißt* $F : I \to \mathbb{C}$ *eine* ***Stammfunktion*** *von* f*, falls* F *differenzierbar ist mit* $F' = f$*.*

9.1.7. ***Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:*** $f : I \to \mathbb{C}$ *stetig. Dann gilt:*

i) $x \longrightarrow \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ *ist* ***Stammfunktion*** *von* f

ii) *Ist* F *irgendeine Stammfunktion von* f*, so ist*

$$\int_r^s f(t)\ \mathrm{d}t \;=\; F(s) - F(r) \qquad \forall \quad r, s \in I\,.$$

Beweis. Wende üblichen Hauptsatz auf $\operatorname{Re} f\,, \operatorname{Im} f$ an. □

9.1.8. ***Korollar:***

i) $F_1, F_2 : I \to \mathbb{C}$ *Stammfunktionen von* $f : I \to \mathbb{C} \Longrightarrow F_1 - F_2$ *ist konstant.*

ii) ***Substitutionsregel:*** *Sind* $J \subset \mathbb{R}$ *ein weiteres kompaktes Intervall und* $\varphi : J \to I$ *stetig differenzierbar, so gilt* $\forall\ f : I \to \mathbb{C}$ *stetig:*

$$\int_r^s f(\varphi(\tilde{t}))\, \varphi'(\tilde{t})\ \mathrm{d}\tilde{t} \;=\; \int_{\varphi(r)}^{\varphi(s)} f(t)\ \mathrm{d}t \qquad \forall\ r, s \in J$$

iii) ***Partielle Integration:*** $f, g : I \to \mathbb{C}$ *stetig differenzierbar. Dann:*

$$\int_a^b f(t) g'(t)\ \mathrm{d}t \;=\; f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(t) g(t)\ \mathrm{d}t\,.$$

Beweis. i) $\forall \quad x \in I$:

$$F_1(x) \;=\; \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t + F_1(a) \;=\; F_2(x) - F_2(a) + F_1(a)\,.$$

ii) Ist F Stammfunktion von f, so auch $F \circ \varphi$ von $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ nach der Kettenregel. Mit Hauptsatz folgt:

$$\int_r^s f(\varphi(t))\varphi'(t)\ \mathrm{d}t \;=\; (F\circ\varphi)(s) - (F\circ\varphi)(r) \;=\; F(\varphi(s)) - F(\varphi(r)) \;=\; \int_{\varphi(r)}^{\varphi(s)} f(t)\ \mathrm{d}t\,.$$

iii) F Stammfunktion von $f'g \Longrightarrow fg - F$ Stammfunktion von fg'. □

9.2. Integrationswege.

9.2.1. Definition.

i) *Nach (1.4.1) ist ein* ***Weg*** *mit Anfangspunkt* $\gamma(a)$ *und* ***Endpunkt*** $\gamma(b)$ *eine stetige Abbildung* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, *wo* $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *ein kompaktes Intervall.* $S(\gamma) := \gamma([a,b])$ *heißt* ***Spur*** *von* γ. *Wir sagen,* γ ***verläuft in*** $A \subset \mathbb{C}$, *falls* $S(\gamma) \subset A$. γ *heißt* ***geschlossen***, *falls* $\gamma(a) = \gamma(b)$, *und* ***Nullweg***, *falls* γ ***konstant*** *ist.*

ii) *Ein Weg* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ *heißt* ***stetig differenzierbar***, *wenn die Funktion* γ *es ist. In diesem Fall heißt*

$$L(\gamma) := \int\limits_a^b |\gamma'(t)| \, \mathrm{d}t$$

die ***Länge*** *von* γ.

9.2.2. *Beispiele:*

(i) ***Strecken:*** *Sind* $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$, *so ist* $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto (1-t)z_0 + t\, z_1$ *ein stetig differenzierbarer Weg der Länge* $L(\gamma) = \int\limits_0^1 |z_1 - z_0| \, \mathrm{d}t \; = \; |z_1 - z_0|$. *(**Strecke** von* z_0 *nach* z_1.*)*

(ii) ***Kreisbögen:*** *Sind* $c \in \mathbb{C}$, $r > 0$, $0 \leq a < b \leq 2\pi$, *so ist* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, $t \to c + r\, e^{it}$ *ein stetig differenzierbarer Weg (**Kreisbogen**). Für* $a = 0$, $b = 2\pi$ *erhalten wir die* ***Kreislinie*** *vom Radius* r *um* c *(wir schreiben dann auch* $\gamma = \partial K_r(c)$*), Länge:*

$$\int\limits_a^b |r\, i\, e^{it}| \, \mathrm{d}t \; = \; r \int\limits_a^b \mathrm{d}t \; = \; r(b-a)\,.$$

9.2.3. ***Definition und Bemerkung:*** *Wir definieren eine Äquivalenzrelation auf der Menge der stetig differenzierbaren Wege: Zwei solche,* $\gamma : I = [a,b] \to \mathbb{C}$ *und* $\tilde{\gamma} : \tilde{I} = [\tilde{a}, \tilde{b}] \to \mathbb{C}$, *heißen äquivalent, wenn* $\exists\ \varphi : \tilde{I} \to I$ *mit*

(i) φ *stetig differenzierbare Bijektion*

(ii) $\gamma \circ \varphi = \tilde{\gamma}$

$$\begin{tikzcd} \tilde{I} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\tilde{\gamma}"'] & \arrow[d, phantom, "\#"] & I \arrow[dl, "\gamma"] \\ & \mathbb{C} & \end{tikzcd}$$

*("**Parametertransformation**")*

(iii) $\varphi'(t) > 0 \quad \forall\, t \in \widetilde{I}$

φ *ist dann monoton wachsend, insbesondere gilt* $\varphi(\tilde{a}) = a$, $\varphi(\tilde{b}) = b$. *Weiter ist* $S(\tilde{\gamma}) = S(\gamma)$ *sowie* $L(\tilde{\gamma}) = L(\gamma)$ *(Substitutionsregel).*

9.2.4. ***Umkehrweg:*** *Für* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ *sei* $-\gamma$ *definiert durch*

$$-\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}\,, \quad t \to \gamma(a+b-t)$$

9.2.5. *Summenweg:* *Für $\gamma_j : [a_j,\, b_j] \to \mathbb{C}\,,\quad j = 1, 2,$ mit $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$ sei $\gamma_1 + \gamma_2$ definiert durch*

$$\gamma_1+\gamma_2 : [a_1, b_2 - a_2 + b_1] \to \mathbb{C}, \quad t \longrightarrow \begin{cases} \gamma_1(t) & t \in [a_1,\, b_1] \\ \gamma_2(t + a_2 - b_1) & t \in [b_1, b_2 - a_2 + b_1]\,. \end{cases}$$

Analog: $\gamma_1 + \ldots + \gamma_m$ *(Summe endlich vieler Wege)*

9.2.6. *Definition und Bemerkung:* *Ein Weg $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ heißt **stückweise stetig differenzierbar** (oder **Integrationsweg**), wenn $\exists$ stetig differenzierbare Wege $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ mit $\gamma = \gamma_1 + \ldots + \gamma_m$. Mit anderen Worten: $\exists$ Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$, so dass $\gamma \mid [t_{k-1}, t_k]$ stetig differenzierbar ist $\forall\, k$. In diesem Fall heißt*

$$L(\gamma) \;:=\; \int_a^b |\gamma'(t)|\;\mathrm{d}t \;:= \sum_{k=1}^{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\gamma'(t)|\;\mathrm{d}t \;=\; \sum_{k=1}^{m} L(\gamma_k)$$

*die **Länge** von γ.*

9.2.7. *Beispiel:* *Sind $c, d \in \mathbb{C}$, so heißt jeder Summenweg $[z_0, z_1] + \ldots + [z_{m-1}, z_m]$ mit $z_0 = c, z_m = d$ **Polygon** oder **Streckenzug** von c nach d.*

9.3. Integration längs Wegen.

9.3.1. Definition. *Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein stetig differenzierbare Weg. Dann setzen wir für alle $f : S(\gamma) \to \mathbb{C}$ stetig*

$$\int_\gamma f\;\mathrm{d}z := \int_\gamma f(z)\;\mathrm{d}z := \int_a^b \big(f \circ \gamma(t)\big)\;\gamma'(t)\;\mathrm{d}t\,.$$

Ist γ stückweise stetig differenzierbar, $\gamma = \gamma_1 + \ldots + \gamma_m$ mit stetig differenzierbarem γ_j, so sei

$$\int_\gamma f\;\mathrm{d}z \;:=\; \sum_{k=1}^{m} \int_{\gamma_k} f\;\mathrm{d}z\,.$$

9.3.2. *Beispiel:* *Für $c \in \mathbb{C}$, $r > 0$ und $n \in \mathbb{Z}$ gilt:*

$$\begin{aligned} \int_{\partial K_r(c)} (\zeta - c)^n\;\mathrm{d}\zeta \quad &= \int_0^{2\pi} (r\,e^{it})^n\, i\, r\, e^{it}\;\mathrm{d}t \;=\; r^{n+1} \int_0^{2\pi} i\, e^{i(n+1)t}\;\mathrm{d}t \\ &= \begin{cases} 0 & n \neq -1 \\ 2\pi\, i & n = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

da $\frac{1}{n+1}\, e^{i(n+1)t}$ Stammfunktion von $i\, e^{i(n+1)t}$.

9.3.3. *Unabhängigkeitssatz:* *Sind $\gamma, \tilde\gamma$ äquivalente stetig differenzierbare Wege, so gilt $\;\forall\; f : S(\gamma) = S(\tilde\gamma) \to \mathbb{C}$ stetig:*

$$\int_\gamma f\;\mathrm{d}t \;=\; \int_{\tilde\gamma} f\;\mathrm{d}t$$

Beweis. Sei φ eine Parametertransformation, $\gamma \circ \varphi = \tilde{\gamma}$. Dann gilt

$$\tilde{\gamma}'(\tilde{t}) \;=\; \gamma'\big(\varphi(\tilde{t})\big)\,\varphi'(\tilde{t})$$

und mit der Substitutionsregel folgt

$$\begin{aligned}\int_{\tilde{\gamma}} f \,\mathrm{d}z \quad &= \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} f\big(\tilde{\gamma}(\tilde{t})\big)\,\tilde{\gamma}'(\tilde{t})\,\mathrm{d}\tilde{t} \;=\; \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} f\big(\gamma(\varphi(\tilde{t}))\big)\,\gamma'(\varphi(\tilde{t}))\,\varphi'(\tilde{t})\,\mathrm{d}\tilde{t} \\ &= \int_{a}^{b} f\big(\gamma(t)\big)\,\gamma'(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \int_{\gamma} f\,\mathrm{d}z\,.\end{aligned}$$

□

9.3.4. *Integrationsregeln:* *Für stückweise stetig differenzierbare Wege gilt:*

Linearitätsregel: $\int_\gamma (\alpha f + \beta g)\,\mathrm{d}z \;=\; \alpha \int_\gamma f\,\mathrm{d}z + \beta \int_\gamma g\,\mathrm{d}z$

Summenregel: $\int_{\gamma_1+\gamma_2} f\,\mathrm{d}z \;=\; \int_{\gamma_1} f\,\mathrm{d}z \;+\; \int_{\gamma_2} f\,\mathrm{d}z$

Umkehrregel: $\int_{-\gamma} f\,\mathrm{d}z \;=\; -\int_\gamma f\,\mathrm{d}z$

Beweis. Die Linearitätsregel folgt aus der entsprechenden Regel (9.1.2),(i). Die Summenregel ergibt sich direkt aus Definition (9.3.1). Zum Beweis der Umkehrregel nehmen wir Œ γ stetig differenzierbar an und betrachten $\varphi : [a,b] \to [a,b], \quad t \to a+b-t$. Dann gilt $-\gamma = \gamma \circ \varphi$ und φ ist wegen $\varphi'(t) = -1 < 0$ monoton fallend, d.h. insbesondere $\varphi(a) = b$, $\varphi(b) = a$. Mit der Substitutionsregel folgt

$$\begin{aligned}\int_{-\gamma} f\,\mathrm{d}z \quad &= \int_a^b f\big(\gamma(\varphi(t))\big)\,\gamma'(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\ &= \;-\int_b^a f\big(\gamma(t)\big)\,\gamma'(t)\,\mathrm{d}t \;=\; -\int_\gamma f\,\mathrm{d}z\,.\end{aligned}$$

□

9.3.5. *Transformationsregel:* *Seien $\hat{\Omega}, \Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $g : \hat{\Omega} \to \Omega$ holomorph mit stetiger Ableitung g'. Es sei $\hat{\gamma}$ ein Integrationsweg in $\hat{\Omega}$ und $\gamma := g \circ \hat{\gamma}$ der Bildweg in Ω. Dann gilt $\forall\ f : S(\gamma) \to \mathbb{C}$ stetig:*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; \int_{\hat{\gamma}} f\big(g(\zeta)\big)\,g'(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$$

Beweis. Œ $\hat{\gamma}$ stetig differenzierbar. Dann folgt

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; \int_a^b f\big(g(\tilde{\gamma}(t))\big)\,g'(\hat{\gamma}(t))\,\hat{\gamma}'(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \int_{\hat{\gamma}} f\big(g(\zeta)\big)\,g'(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\,.$$

□

9.3.6. *Standardabschätzung:* *Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ Integrationsweg. Dann gilt für alle $f : S(\gamma) \to \mathbb{C}$ stetig:*

$$\Big| \int_\gamma f \; \mathrm{d}z \Big| \;\leq\; \big|f\big|_{S(\gamma)} \, L(\gamma) \,.$$

Beweis. (i) Sei zunächst γ stetig differenzierbar. Dann folgt mit (9.1.3):

$$\Big| \int_\gamma f \; \mathrm{d}z \Big| \;=\; \Big| \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\, \gamma'(t) \; \mathrm{d}t \Big| \;\leq\; \int_a^b \big|f\big(\gamma(t)\big)\big| \; \big|\gamma'(t)\big| \; \mathrm{d}t \;\leq\; \big|f\big|_{S(\gamma)} \, L(\gamma) \,.$$

(ii) Ist $\gamma = \gamma_1 + \ldots + \gamma_m$ mit stetig differenzierbaren γ_k, so folgt mit (i)

$$\Big| \int_\gamma f \; \mathrm{d}z \Big| \;\leq\; \sum_{k=1}^m \Big| \int_{\gamma_k} f \; \mathrm{d}z \Big| \;\leq\; \sum_{k=1}^m \big|f\big|_{S(\gamma_k)} \, L(\gamma_k) \;\leq\; \big|f\big|_{S(\gamma)} \, L(\gamma) \,.$$

□

9.3.7. *Vertauschungssatz:* *Seien γ ein Integrationsweg und $f_n : S(\gamma) \to \mathbb{C}$ eine Folge stetiger Funktionen.*

(i) *Konvergiert f_n gleichmäßig in $S(\gamma)$, so gilt*

$$\lim \int_\gamma f_n \; \mathrm{d}z \;=\; \int_\gamma \lim f_n \; \mathrm{d}z \,.$$

(ii) *Konvergiert $\sum f_\nu$ gleichmäßig in $S(\gamma)$, so gilt*

$$\sum \int_\gamma f_\nu \; \mathrm{d}z \;=\; \int_\gamma \sum f_\nu \; \mathrm{d}z \,.$$

Beweis. Nur (i) zu zeigen. Nach Stetigkeitssatz (3.3.4) ist $f := \lim f_n$ stetig, insbesondere $\exists \int_\gamma f \; \mathrm{d}z$. Die Standardabschätzung liefert:

$$\Big| \int_\gamma f_n \; \mathrm{d}z - \int_\gamma f \; \mathrm{d}z \Big| \;=\; \Big| \int_\gamma (f_n - f) \; \mathrm{d}z \Big| \;\leq\; |f_n - f|_{S(\gamma)} \; L(\gamma) \longrightarrow 0 \,.$$

□

9.3.8. *Beispiel:* *Wir berechnen*

$$\int_{\partial K_r(c)} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} \,, \qquad c \in \mathbb{C},\, r > 0 \quad \textit{und} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \partial K_r(c) \,.$$

Nach (5.1.2) gilt für $z, \zeta \in \mathbb{C}$:

$$\frac{1}{\zeta - z} \;=\; \sum \frac{(-1)^\nu}{(\zeta - c)^{\nu+1}} \, (c - z)^\nu \;=\; \frac{1}{\zeta - c} \sum \Big(\frac{z - c}{\zeta - c}\Big)^\nu \qquad \textit{falls} \quad |z - c| < |\zeta - c|$$

$$\frac{1}{\zeta - z} \;=\; \sum \frac{(-1)^\nu}{(c - z)^{\nu+1}} \, (\zeta - c)^\nu \;=\; -\frac{1}{z - c} \sum \Big(\frac{\zeta - c}{z - c}\Big)^\nu \qquad \textit{falls} \quad |\zeta - c| < |z - c| \,.$$

Für ein festes $z \in K_r(c)$ *konvergiert die erste Reihe gleichmäßig in* ζ *auf* $\partial K_r(c)$ *nach (3.4):* $\left(\frac{|z-c|}{r}\right)^\nu = \left(\frac{|z-c|}{|\zeta-c|}\right)^\nu \quad \forall\, \zeta \in \partial K_r(c)$ *ist Majorante. Analog für* $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{K_r(c)}$ *fest und die zweite Reihe.*

Mit dem Vertauschungssatz und (9.3.2) folgt:

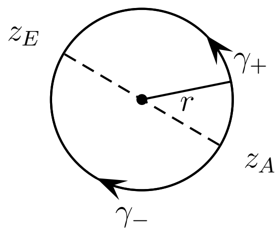
$$\int\limits_{\partial K_r(c)} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} \;=\; \sum (z-c)^\nu \int\limits_{\partial K_r(c)} \frac{\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-c)^{\nu+1}} \;=\; 2\pi\, i\,, \qquad\qquad z \in K_r(c)$$

$$\int\limits_{\partial K_r(c)} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} \;=\; -\sum \frac{1}{(z-c)^{\nu+1}} \int\limits_{\partial K_r(c)} (\zeta-c)^\nu \,\mathrm{d}\zeta \;=\; 0\,, \qquad\qquad z \in \mathbb{C} \setminus \overline{K_r(c)}\,.$$

10. Wegunabhängigkeit von Integralen, Cauchy'scher Integralsatz

10.1. Wegunabhängig integrierbar.

10.1.1. *Motivation:* *Wir kehren zurück zu Beispiel (9.3.2). Sind* $r > 0$, $c \in \mathbb{C}$, *so betrachten wir die Halbkreisbögen*



und erhalten wie in (9.3.2):

$$\int_{\zeta+} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - c} = \pi\, i\,, \qquad \int_{\zeta-} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - c} = -\pi\, i\,.$$

Das Integral $\int\limits_{\gamma+}$ *hängt also i.A. nicht nur von Anfangspunkt* z_A *und Endpunkt* z_E *sondern auch vom Verlauf des Weges* γ *ab. Wir suchen im folgenden nach Kriterien für die Wegunabhängigkeit von Integralen.*

10.1.2. *Definition und Bemerkung:* *Seien* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *offen und* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *stetig.* f *heißt* ***wegunabhängig integrierbar****, wenn*

i) *Für je zwei Integrationswege* γ_1, γ_2 *in* Ω *mit gleichem Anfangs- und Endpunkt gilt*

$$\int_{\gamma_1} f(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta \;=\; \int_{\gamma_2} f(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta\,.$$

oder äquivalent:

(ii) *Für jeden geschlossenen Integrationsweg* γ *in* Ω *gilt*

$$\int_{\gamma} f(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta = 0\,.$$

10.1.3. Satz. *Sei* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *stetig. Besitzt* f *eine Stammfunktion* F *(*f *heißt dann* ***integrierbar****), so ist* f *wegunabhängig integrierbar. Genauer gilt*

$$\int_{\gamma} f(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta \;=\; F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

für jeden Integrationsweg $\gamma : [a, b] \to \Omega$.

Beweis.

i) Ist γ stetig differenzierbar, so ist $F \circ \gamma$ Stammfunktion von $(f \circ \gamma)\gamma'$ nach der Kettenregel (9.1.5). Mit dem Hauptsatz (9.1.7) folgt die Behauptung.

ii) Ist $\gamma = \gamma_1 + \ldots + \gamma_m$ mit stetig differenzierbaren γ_k, so folgt mit (i):

$$\int_{\gamma} f(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta \;=\; \sum_{k=1}^{m} \int_{\gamma} f(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta \;= \ldots =\; F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))\,.$$

$\square$

Für Gebiete gilt auch die Umkehrung:

□

10.1.4. Satz. *$f : G \to \mathbb{C}$ stetig. Ist f wegunabhängig integrierbar, so besitzt f eine Stammfunktion. Genauer gilt: Ist $c \in G$ fest, so ist*

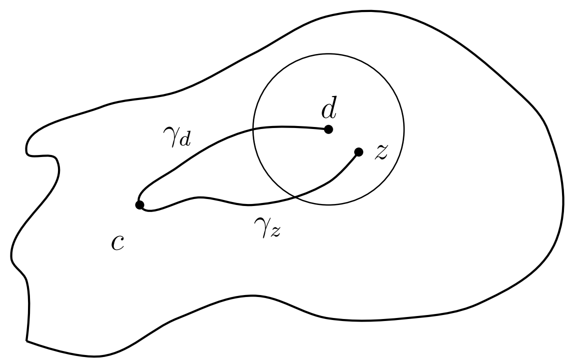
$$z \to F(z) := \int_{\gamma_z} f(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta\,, \quad \gamma_z \text{ irgendein Weg von } c \text{ nach } z$$

eine Stammfunktion von f.

Beweis. Da f wegunabhängig integrierbar, ist F wohldefiniert (unabhängig von der Wahl von γ_z).

Sei $d \in G$. Wählen $r > 0$ mit $K_r(d) \subset G$.

Sei $z \in K_r(d)$. Dann ist $\gamma := \gamma_d + [d, z] + (-\gamma_z)$ ein geschlossener Weg in G und es gilt:



$$0 \;=\; \int_{\gamma} f\, \mathrm{d}\zeta \;=\; F(d) + \int_{[d,z]} f\, \mathrm{d}\zeta - F(z)$$

und somit

$$\left|\frac{F(z) - F(d)}{z - d} - f(d)\right| \;=\; \frac{1}{|z-d|}\;\left|\int_{[d,z]} f(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta - \int_{[d,z]} f(d)\, \mathrm{d}\zeta\right|$$

$$= \frac{1}{|z-d|}\;\left|\int_{[d,z]} (f(\zeta) - f(d))\, \mathrm{d}\zeta\right| \;\le\; \frac{1}{|z-d|}\;\Big|f - f(d)\Big|_{S([d,z])}\; L([d,z])$$

$$= \Big|f - f(d)\Big|_{S([d,z])}.$$

Da f stetig, folgt $\lim\limits_{z \to d} \frac{F(z)-F(d)}{z-d} = f(d)$. □

10.2. Integrabilitätskriterium für Sterngebiete.

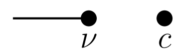
Zum Nachweis der Existenz einer Stammfunktion von $f : G \to \mathbb{C}$ stetig müssen wir also $\int_\gamma f\, \mathrm{d}\gamma = 0$ zeigen $\forall$ geschlossenen Weg γ. Dies ist in der Praxis i.A. nicht zu verifizieren. Für bestimmte Gebiete können wir aber unsere Bedingung abschwächen.

10.2.1. *Definition und Bemerkung:* *$A \subset \mathbb{C}$ heißt **sternförmig**, falls $\exists \quad c \in A$ mit $[c, z] \subset A \quad \forall\, z \in A$. Jedes solche c heißt **Zentrum** von A. A ist dann insbesondere wegzusammenhängend, ist A offen, so heißt A **Sterngebiet**.*

10.2.2. *Beispiele:*

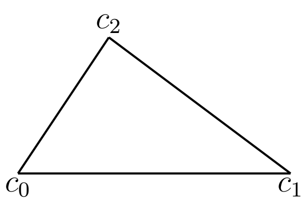
(i) *Jede konvexe Menge ist sternförmig.*

(ii) *$\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ ist sternförmig, aber nicht konvex.*



(iii) *$\mathbb{C}^*$ ist nicht sternförmig.*

10.2.3. *Dreiecke:* *Ist $\Delta \subset \mathbb{C}$ ein abgeschlossenes Dreieck,*



, so heißt

$$\partial\Delta := [c_0, c_1] + [c_1, c_2] + [c_2, c_0]$$

*der **Rand** von Δ.*

10.2.4. Satz. *$f : G \to \mathbb{C}$ stetig, G Sterngebiet. Ist*

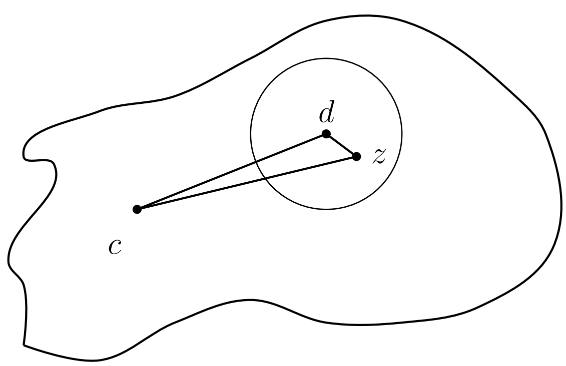
$$\int_{\partial\Delta} f(\zeta)\ \mathrm{d}\zeta = 0$$

$\forall$ abgeschlossenes Dreieck $\Delta \subset G$, so besitzt f eine Stammfunktion.

Beweis. Sei c ein Zentrum von G und

$$F(z) := \int_{[c,z]} f(\zeta)\ \mathrm{d}\zeta \qquad \forall\, z \in G\,.$$

zu $d \in G$ wähle $r > 0$ mit $K_r(d) \subset G$. Für $z \in K_r(d)$ sei Δ das abgeschlossene Dreieck mit den Eckpunkten c, z, d.
Dann ist $\Delta \subset G$



und die Behauptung folgt wegen $\int_{\partial\Delta} f(\zeta)\ \mathrm{d}\zeta = 0$ wie in (10.1.4). □

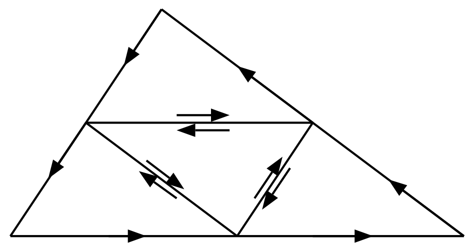
10.3. Der Cauchy'sche Integralsatz für Sterngebiete.

10.3.1. ***Integrallemma von Goursat:*** *Seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt*

$$\int_{\partial\Delta} f \,\mathrm{d}\zeta = 0 \qquad \forall \quad \textit{abg. Dreieck} \quad \Delta \subset \Omega\,.$$

Beweis. Schreiben $I(\Delta) := \int\limits_{\partial\Delta} f \,\mathrm{d}\zeta \quad \forall \quad$ abg. Dreieck $\quad \Delta \subset \Omega$. Sei nun ein solches Δ fixiert.

Wir zerlegen Δ in 4 kongruente Dreiecke $\Delta_1, \dots, \Delta_4$. Dann gilt: $I(\Delta) = \sum\limits_{\nu=1}^{4} I(\Delta_\nu)$.



Setzen $\Delta^1 := \Delta_{\nu_0}$, wo ν_0 so, dass $I(\Delta_{\nu_0})$ maximal. Dann ist

$$|I(\Delta)| \;\leq\; 4|I(\Delta^1)| \quad \text{und} \quad L(\partial\Delta^1) \;=\; \frac{1}{2}L(\partial\Delta)\,.$$

Induktiv erhalten wir eine Folge $\Delta > \Delta^1 > \ldots > \Delta^n > \ldots$ mit

$$|I(\Delta)| \;\leq\; 4^n|I(\Delta^n)| \quad \text{und} \quad L(\partial\Delta^n) \;=\; \frac{1}{2^n}L(\partial\Delta)\,.$$

Hilfssatz: $\exists \quad c \in \bigcap\limits_{\nu=1}^{\infty} \Delta^\nu$

(Dies gilt für jede absteigende Folge nicht-leerer Kompakta in $\mathbb{C}$, in unserem Fall c sogar eindeutig bestimmt: Übung).

Da f komplex differenzierbar in c, $\exists\ A : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig in c, $A(c) = 0$, mit

$$f(\zeta) = f(c) + (\zeta - c)(f'(c) + A(\zeta)) \quad \forall\ \zeta \in \Omega\,.$$

Da $\zeta \to f(c) + (\zeta - c)f'(c)$ eine Stammfunktion hat folgt mit (10.1.3):

$$\begin{aligned}\big|I(\Delta^n)\big| \;&=\; \Big|\int_{\partial\Delta^n} (\zeta - c)\,A(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\Big| \;\leq\; \big|(\zeta - c)\,A(\zeta)\big|_{\partial\Delta^n} L(\partial\Delta^n) \\ &\leq\; L(\partial\Delta^n)^2\ |A|_{\partial\Delta^n}\end{aligned}$$

und somit

$$\big|I(\Delta)\big| \;\leq\; 4^n\big|I(\Delta^n)\big| \;\leq\; 4^n\,\frac{1}{4^n}(L(\partial\Delta))^2\ |A|_{\partial\Delta^n} \;\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\; 0\,.$$

□

10.3.2. ***Satz von Cauchy für Sterngebiete:*** *$f : G \to \mathbb{C}$ holomorph, G Sterngebiet mit Zentrum c. Dann gilt:*

i) $G \to \mathbb{C}, \quad z \to \int\limits_{[c,z]} f \,\mathrm{d}\,\zeta$ *ist Stammfunktion von f*

ii) *f ist wegunabhängig integrierbar*

iii) $\forall$ *geschlossenen Integrationsweg* γ *in* G *ist* $\int_\gamma f \, \mathrm{d}\zeta = 0$

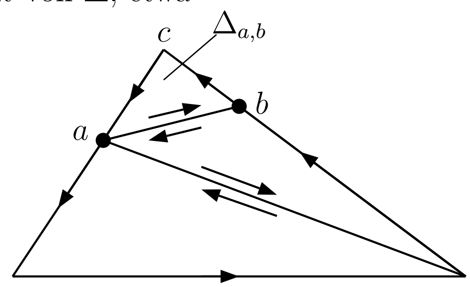
Beweis. (i), (ii), (iii) sind äquivalent nach (10.1.2), (10.1.3), (10.1.4). Die Gültigkeit von (i) ergibt sich aus (10.2.4), (10.3.1). $\square$

10.3.3. ***Verschärfung des Integrallemmas:*** *$f : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig, $c \in \Omega$ mit $f \mid \Omega \setminus \{c\}$ holomorph. Dann gilt*

$$\int_{\partial\Delta} f \, \mathrm{d}\zeta = 0 \qquad \forall \quad \textit{abg. Dreieck} \quad \Delta \subset \Omega\,.$$

Beweis. i) $c \notin \Delta$, so $\exists\ \Delta \subset \tilde{\Omega} \subset \Omega$ mit $c \notin \tilde{\Omega}$ und Behauptung folgt mit (10.3.2).

ii) c ist ein Eckpunkt von Δ, etwa

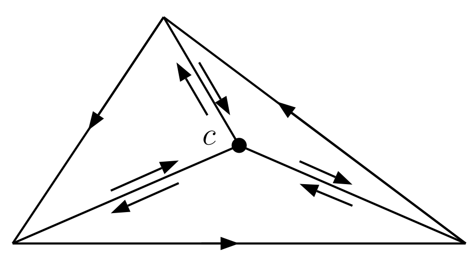


Wähle a, b wie eingezeichnet.
Dann folgt mit (i):

$$\Big|\int_{\partial\Delta} f \, \mathrm{d}\zeta\Big| \;=\; \Big|\int_{\partial\Delta_{a,b}} f \, \mathrm{d}\zeta\Big| \;\le\; |f|_{\partial\Delta_{a,b}} \, L(\partial\Delta_{a,b})$$

$$\le\; |f|_{\partial\Delta_{a,b}} \Big(|a-b| + |b-c| + |c-a|\Big) \;\xrightarrow[a,b\to c]{}\; 0\,.$$

iii) Ist $c \in \Delta$ beliebig, so zerlege Δ in Dreiecke mit c als Eckpunkt, etwa



Die Behauptung folgt dann aus (ii).

$\square$

10.3.4. ***Verschärfung des Satzes von Cauchy:*** *$f : G \to \mathbb{C}$ stetig, G Sterngebiet, $c \in G$ mit $f \mid G \setminus \{c\}$ holomorph. Dann ist*

$$\int_\gamma f \, \mathrm{d}\zeta = 0 \qquad \forall \quad \textit{geschlossenen Integrationsweg} \quad \gamma \ \textit{in}\ G\,.$$

10.4. Der Cauchy'sche Integralsatz für einfach zusammenhängende Gebiete.

10.4.1. ***Vorbemerkung:*** *Ist $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, so ist*

$$\varphi : [0,1] \to [a,b], \quad t \to a + (b-a)t$$

eine stetig differenzierbare Bijektion mit $\varphi'(t) > 0 \quad \forall\, t \in [0,1]$.
Nach dem Unabhängigkeitssatz (9.3.3) können wir für unsere Zwecke Œ annehmen, dass jeder Integrationsweg über $[0,1]$ definiert ist.

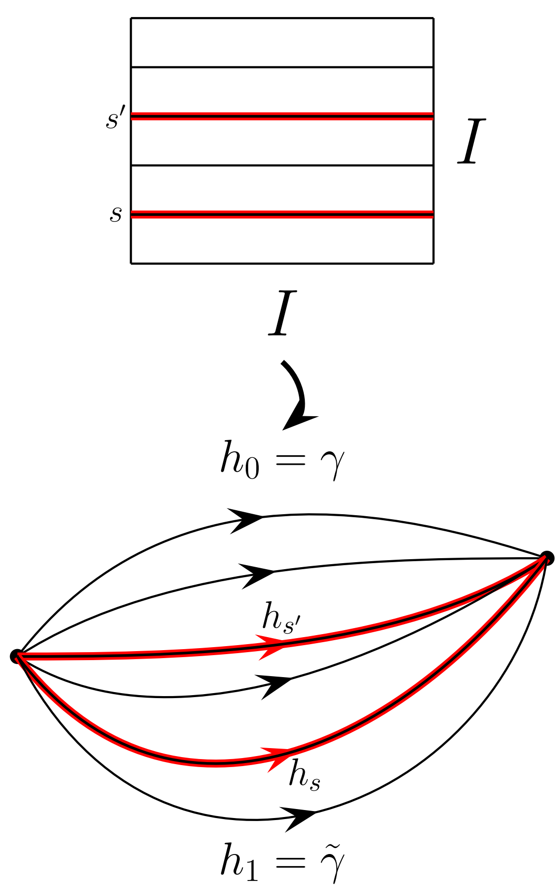
10.4.2. ***Homotopie von Wegen:*** *Seien $I = [0,1]$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $\gamma, \tilde{\gamma} : I \to \Omega$ zwei (stetige) Wege mit gleichem Anfangs- und Endpunkt. Dann heißen γ und $\tilde{\gamma}$* ***homotop in*** *Ω $(\gamma \underset{\Omega}{\sim} \tilde{\gamma})$, falls $\exists\ h : I \times I \to \Omega$ mit:*

i) h *stetig*
ii) $h(t,0) = \gamma(t) \quad \forall\, t \in I$
$h(t,1) = \tilde{\gamma}(t) \quad \forall\, t \in I$ *("**Homotopie**")*
iii) $h(0,s) = \gamma(0) = \tilde{\gamma}(0) = z_A \quad \forall\, s \in I$
$h(1,s) = \gamma(1) = \tilde{\gamma}(1) = z_E \quad \forall\, s \in I$

Für festes s ist dann

$$h_s : I \to \Omega, \qquad t \to h(t,s)$$

ein (stetiger) Weg in Ω mit $h_s(0) = z_A,\ h_s(1) = z_E$.

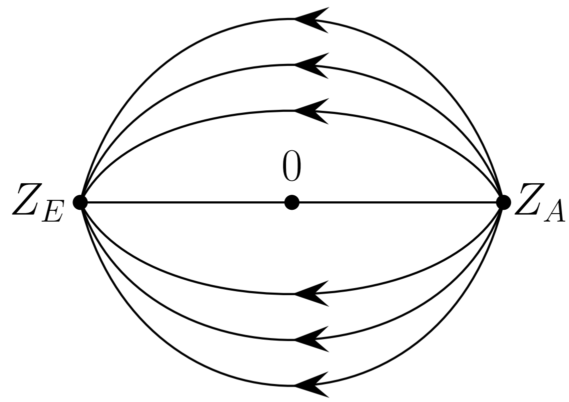


*Sind z_A und z_E fixiert, so ist $\underset{\Omega}{\sim}$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Wege mit Anfangspunkt z_A und Endpunkt z_E. Ist $\gamma : I \to \Omega$ geschlossen, so heißt γ **nullhomotop in** Ω, falls $\gamma \underset{\Omega}{\sim}$ Nullweg.*

10.4.3. *Beispiel:* *$\gamma(t) = e^{\pi i t}$, $\tilde{\gamma}(t) = e^{-\pi i t}$, $t \in [0,1]$ sind homotop in $\mathbb{C}$ vermöge*

$$h : I \times I \to \mathbb{C}\,, \qquad (t,s) \to (1-s)e^{\pi i t} + s\,e^{-\pi i t}\,.$$

h liefert aber keine Homotopie in $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, da $h(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 0 \notin \Omega$.



10.4.4. *Satz von der Homotopie-Invarianz:* *Seien $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph und $\gamma, \tilde{\gamma} : [0,1] \to \Omega$ Integrationswege. Dann gilt:*

$$\gamma \underset{\Omega}{\sim} \tilde{\gamma} \Longrightarrow \int_{\gamma} f \; \mathrm{d}\zeta = \int_{\tilde{\gamma}} f \; \mathrm{d}\zeta\,.$$

Beweis. Aufgabe 23. □

10.4.5. *Korollar:* *Seien $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph und $\gamma : [0,1] \to \Omega$ geschlossener Integrationsweg. Dann gilt:*

$$\gamma \;\text{ nullhomotop in }\; \Omega \Longrightarrow \int_{\gamma} f \; \mathrm{d}\zeta = 0\,.$$

Beweis. $\gamma \underset{\Omega}{\sim} \tilde{\gamma}$, wo $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(0) = \gamma(1) \quad \forall\; t \in [0,1]$. Mit (10.4.4):

$$\int_{\gamma} f \; \mathrm{d}\zeta = \int_{\tilde{\gamma}} f \; \mathrm{d}\zeta = \int_0^1 f\big(\tilde{\gamma}(t)\big)\, \underbrace{\tilde{\gamma}\,'(t)}_{\overset{\|}{0}} \; \mathrm{d}t = 0\,.$$

□

10.4.6. *Definition und Bemerkung:* *Sei $G \in \mathbb{C}$ Gebiet. G heißt **einfach zusammenhängend**, wenn für je zwei Wege $\tilde{\gamma}, \gamma : [0,1] \to G$ mit gleichem Anfangs- und Endpunkt gilt $\gamma \underset{G}{\sim} \tilde{\gamma}$.*

Äquivalent: $\gamma : [0,1] \to G$ geschlossener Weg $\Rightarrow \gamma$ nullhomotop in G (Übung).

10.4.7. *Satz von Cauchy für einfach zusammenhängende Gebiete:* *$f : G \to \mathbb{C}$ holomorph, G einfach zusammenhängend. Dann besitzt f eine Stammfunktion.*

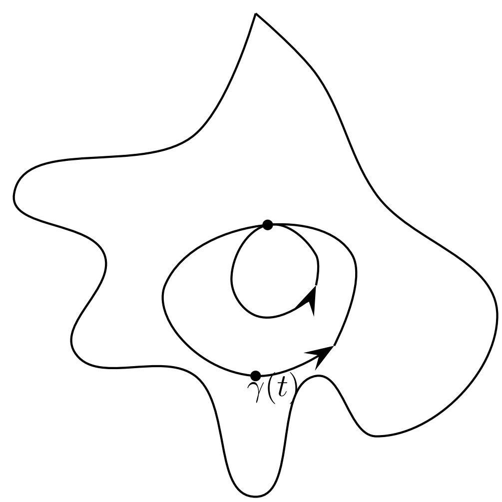
Beweis. Sei $\gamma : [0,1] \to G$ ein geschlossener Integrationsweg. Dann ist γ nullhomotop in G, d.h. es gilt $\int\limits_\gamma f \,\mathrm{d}\,\zeta = 0$ nach (10.4.5). Wieder mit (10.1.4) folgt Behauptung. □

10.4.8. *Beispiel:*

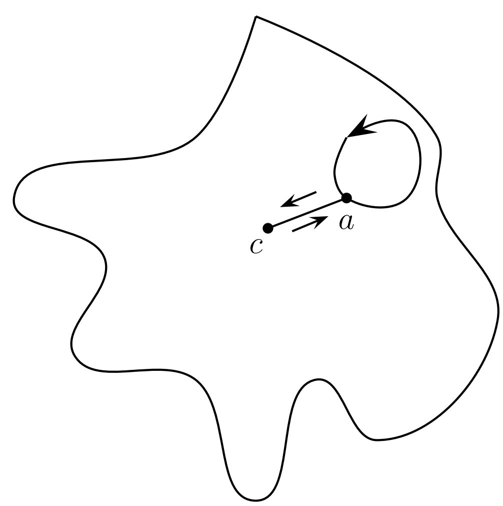
(i) *$\mathbb{C}^*$ ist nicht einfach zusammenhängend, da $\int\limits_{\partial K_1(0)} \frac{\mathrm{d}\,\zeta}{\zeta} = 2\pi\, i$, vergleiche (9.3.2).*

(ii) *$G \subset \mathbb{C}$ sternförmig $\Rightarrow$ G einfach zusammenhängend, da:*
Sei $\gamma : [0,1] \to G$ ein geschlossener Weg mit $\gamma(0) = \gamma(1) = a$.

(a) *Ist a ein Zentrum von G, so setze $h(t,s) := (1-s)\,\gamma(t) + s\,a$.*



(b) *Ist a beliebig und c ein Zentrum von G, so wende a) auf $[c,a] + \gamma - [c,a]$ an.*



11. Cauchy'sche Integralformel für Kreisscheiben, Entwicklungssatz von Cauchy-Taylor

11.1. Cauchy'sche Integralformel für Kreisscheiben. Sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, $\overline{K_r(c)} \subset \Omega$ eine Kreisscheibe. Dann gilt

$$f(z) \;=\; \frac{1}{2\pi\, i} \int\limits_{\partial K_r(c)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\,\zeta \qquad\qquad \forall\; z \in K_r(c)$$

Beweis. Sei $z \in K_r(c)$. Setzen

$$g(\zeta) \;:=\; \begin{cases} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z} & \zeta \in \Omega \setminus \{z\} \\ f'(z) & \zeta = z \end{cases}$$

und wählen $s > r$ mit $K_s(c) \subset \Omega$. Da $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ folgt $g \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{z\})$ und g stetig auf Ω. Wir wenden den verschärften Integralsatz (10.3.4) auf $g \mid K_s(c)$ an. Zusammen mit Beispiel (9.3.8) folgt:

$$\begin{aligned} 0 = \int\limits_{\partial K_r(c)} g\; \mathrm{d}\,\zeta \quad &= \int\limits_{\partial K_r(c)} \tfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\,\zeta - f(z) \int\limits_{\partial K_r(c)} \tfrac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} \\ &= \int\limits_{\partial K_r(c)} \tfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\,\zeta - 2\pi i f(z)\,. \end{aligned}$$

□

11.2. Entwicklungslemma. Seien $c \in \mathbb{C}$, $r > 0$ und $f : \partial K_r(c) \to \mathbb{C}$ stetig. Dann ist

$$g : K_r(c) \to \mathbb{C}\,, \quad z \to \frac{1}{2\pi\, i} \int\limits_{\partial K_r(c)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\,\zeta$$

in $K_r(c)$ in eine Potenzreihe um c entwickelbar:

$$g(z) = \sum a_\nu (z-c)^\nu \quad \text{mit} \quad a_\nu = \frac{1}{2\pi\, i} \int\limits_{\partial K_r(c)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{\nu+1}}\, \mathrm{d}\,\zeta\,, \qquad z \in K_r(c)\,.$$

Beweis. Sei $z \in K_r(c)$ fest. Dann gilt nach (9.3.8):

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \;=\; \sum \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{\nu+1}}\,(z-c)^\nu\,, \qquad \zeta \in \partial K_r(c)$$

und diese Reihe konvergiert gleichmäßig auf $\partial K_r(c)$ in ζ nach (3.4):

$$\Big|\frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{\nu+1}}\,(z-c)^\nu\Big| \;\le\; \frac{1}{r}\Big(\frac{|z-c|}{r}\Big)^\nu\, |f|_{\partial K_r(c)}\,.$$

Mit dem Vertauschungssatz (9.3.7) folgt:

$$g(z) = \frac{1}{2\pi\, i} \int\limits_{\partial K_r(c)} \sum \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{\nu+1}}\,(z-c)^\nu\; \mathrm{d}\,\zeta = \sum \Big(\frac{1}{2\pi\, i} \int\limits_{\partial K_r(c)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{\nu+1}}\; \mathrm{d}\,\zeta\Big)(z-c)^\nu$$

□

11.3. Entwicklungssatz von Cauchy-Taylor. Sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist f auch analytisch. Genauer gilt: Ist $c \in \Omega$, so ist f in dem maximalen Kreis $K_s(c) \subset \Omega$ in eine Potenzreihe entwickelbar:

$$f(z) = \sum a_\nu (z-c)^\nu \quad \text{mit} \quad a_\nu = \frac{1}{2\pi\, i} \int\limits_{\partial K_r(c)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{\nu+1}}\, \mathrm{d}\,\zeta\,, \qquad z \in K_s(c)\,,$$

wo $0 < r < s$ beliebig.

Beweis. Sei $0 < r < s$. Wegen $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ liefert die Cauchy-Formel $f(z) = \frac{1}{2\pi\, i} \int\limits_{\partial K_r(c)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\,\zeta \ \forall z \in K_r(c)$. Das Entwicklungslemma liefert eine Potenzreihenentwicklung in $K_r(c)$. Wegen (8.2.2) $(a_\nu = \frac{f^{(\nu)}(c)}{\nu!})$ oder dem Identitätssatz hängen die Koeffizienten nicht von r ab. $\square$

11.4. Holomorphiekriterien. Für $f : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig sind äquivalent:

(i) f holomorph in Ω.

(ii) $\int\limits_{\partial\Delta} f\, d\,\zeta = 0 \quad \forall$ abgeschlossenes Dreieck $\Delta \subset \Omega$.

(iii) $\int\limits_{\gamma} f\, d\,\zeta = 0 \quad \forall$ geschlossenen, in Ω nullhomotopen Integrationsweg γ.

(iv) f ist lokal integrabel in Ω.

(v) f ist lokal wegunabhängig integrierbar in Ω.

(vi) $\forall\ \overline{K_r(c)} \subset \Omega : \quad f(z) = \frac{1}{2\pi\, i} \int\limits_{\partial K_r(c)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\,\zeta \qquad \forall\ z \in K_r(c)$

(vii) f analytisch in Ω.

Beweis.

$$\begin{tikzcd}
 & & & \text{(v)} \arrow[dl, Rightarrow, shift left, "(10.1.4)"] \\
 & \text{(ii)} \arrow[r, Rightarrow, "(10.2.4)"] & \text{(iv)} \arrow[ur, Rightarrow, shift left, "(10.1.3)"] \arrow[dr, Rightarrow, "(11.3)\ (8.2.1)"] & \\
\text{(i)} \arrow[ur, Rightarrow, "(10.3.1)"] \arrow[r, Rightarrow, "(10.4.5)"'] \arrow[dr, Rightarrow, "(11.1)"'] & \text{(iii)} \arrow[ur, Rightarrow, "(10.4.7)"'] & & \text{(i)} \\
 & \text{(vi)} \arrow[r, Rightarrow, "(11.3)"'] & \text{(vii)} \arrow[ur, Rightarrow, "(8.2.1)"'] &
\end{tikzcd}$$

$\square$

11.4.1. *Bemerkung:* *Sei $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ Dann ist f beliebig oft komplex differenzierbar in Ω und $f^{(n)} \in \mathcal{O}(\Omega) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.*

11.5. Cauchy'sche Integralformeln für Ableitungen. Seien $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ und $\overline{K_r(c)} \subset \Omega$. Dann gilt $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \forall\, z \in K_r(c)$:

$$f^{(n)}(z) \;=\; \frac{n!}{2\pi\, i} \int\limits_{\partial K_r(c)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, \mathrm{d}\,\zeta\,.$$

Beweis. Wir zeigen durch Induktion nach n: $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \forall\, f \in \mathcal{O}(\Omega)$ gilt obige Formel. Den Fall $n = 0$ haben wir in (11.1) erledigt. Für den Induktionsschluss $n \to n+1$ sei $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ gegeben. Wir wenden die Induktionsvoraussetzung auf f' an:

$$f^{n+1}(z) \;=\; (f')^{(n)} \;=\; \frac{n!}{2\pi\, i} \int\limits_{\partial K_r(c)} \frac{f'(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, \mathrm{d}\,\zeta \qquad \forall\, z \in K_r(c)\,.$$

Für $z \in K_r(c)$ fest ist

$$g : \Omega \setminus \{z\} \to \mathbb{C}\,, \quad \zeta \to \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}$$

holomorph und $\forall\, \zeta \in \Omega \setminus \{z\}$ gilt:

$$g'(\zeta) \;=\; \frac{f'(\zeta)(\zeta - z)^{n+1} - f(\zeta)(n+1)(\zeta - z)^n}{(\zeta - z)^{2n+2}} \;=\; \frac{f'(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} - \frac{(n+1)\, f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+2}}\,.$$

Mit (10.1.3) folgt

$$\begin{aligned} 0 \;&=\; \int\limits_{\partial K_r(c)} g'(\zeta)\, \mathrm{d}\,\zeta \;=\; \int\limits_{\partial K_r(c)} \tfrac{f'(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\, \mathrm{d}\,\zeta - (n+1) \int\limits_{\partial K_r(c)} \tfrac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+2}}\, \mathrm{d}\,\zeta \;= \\ &=\; \tfrac{2\pi\, i}{n!}\, f^{(n+1)}(z) - (n+1) \int\limits_{\partial K_r(c)} \tfrac{f(\zeta)}{(\zeta-c)^{n+2}}\, \mathrm{d}\,\zeta\,. \end{aligned}$$

□

11.6. Cauchy'sche Ungleichungen.

11.6.1. *Cauchy'sche Abschätzungen für Ableitungen:* *Seien $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ und $\overline{K_r(c)} \subset \Omega$. Dann gilt $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \forall\, z \in K_r(c)$:*

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \;\le\; n!\, \frac{r}{d_z^{n+1}}\, \left|f\right|_{\partial K_r(c)} \qquad \mathit{mit} \quad d_z := \min_{\zeta \in \partial K_r(c)} \left|\zeta - z\right|\,.$$

Beweis. Die Cauchy'sche Integralformeln für Ableitungen (11.5) und die Standardabschätzungen (9.3.6) liefern für $z \in K_r(c)$:

$$\begin{aligned} \left|f^{(n)}(z)\right| \;&=\; \tfrac{n!}{2\pi} \left| \int\limits_{\partial K_r(c)} \tfrac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\, \mathrm{d}\,\zeta \right| \;\le\; \tfrac{n!}{2\pi} \left| \tfrac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}} \right|_{\partial K_r(c)} L(\partial K_r(c)) \\ &=\; n!\, r \left| \tfrac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}} \right|_{\partial K_r(c)} \;\le\; n!\, \tfrac{r}{d_z^{n+1}}\, \left|f\right|_{\partial K_r(c)}\,. \end{aligned}$$

□

11.6.2. *Cauchy'sche Ungleichungen für Taylorkoeffizienten:* *Seien $f(z) = \sum a_\nu (z-c)^\nu$ eine konvergente Potenzreihe mit Konvergenzradius R und $0 < r \subset R$. Dann gilt*

$$\left|a_\nu\right| \leq \frac{\left|f\right|_{\partial K_r(c)}}{r^\nu} \qquad \forall \ \nu \in \mathbb{N}.$$

Beweis. $|a_\nu| = \left|\frac{f^{(\nu)}(c)}{\nu!}\right| \leq \frac{\nu!}{\nu!} \frac{r}{r^{\nu+1}} \, |f|_{\partial K_r(c)}$. □

KAPITEL 3

Erste Anwendungen der Cauchy-Formel

12. Der Konvergenzsatz von Weierstraß

12.1. Weierstraß'scher Konvergenzsatz. Seien $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ eine Folge von Funktionen mit $f_n \underset{\text{lok}}{\Longrightarrow} f$. Dann gilt

$$f_n \in \mathcal{O}(\Omega) \Longrightarrow f \in \mathcal{O}(\Omega)\ .$$

In diesem Fall konvergieren dann auch die Ableitungen

$$f_n^{(k)} \underset{\text{lok}}{\Longrightarrow} f^{(k)} \qquad \forall\ k \in \mathbb{N}\,.$$

Beweis. Nach dem Stetigkeitssatz (3.3.4) ist f stetig in Ω. Der Vertauschungssatz (9.3.7) liefert

$$\int\limits_{\partial\Delta} f\ \mathrm{d}\,\zeta \;=\; \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\partial\Delta} f_n\ \mathrm{d}\,\zeta \overset{\text{Goursat}}{=\!=} 0$$

$\forall$ abgeschlossenen Dreiecke $\Delta \subset \Omega$, d.h. f ist holomorph nach (11.4).
Sei nun $K \subset \Omega$ kompakt. Œ $K = \overline{K_s(c)}$ ein Kreis, da wir K mit endlich vielen Kreisen überdecken können. Wählen $r > s$ mit $\overline{K_r(c)} \subset \Omega$. Dann folgt mit den Cauchy'schen Abschätzungen:

$$\left|f_n^{(k)} - f^{(k)}\right|_{K_s(c)} \;\le\; k!\,\frac{r}{s^{k+1}}\ \left|f_n - f\right|_{\partial K_r(c)} \longrightarrow 0\,.$$

□

12.2. Weierstraß'scher Differentiationssatz für Reihen. Konvergiert $\sum f_\nu\,,\ f_\nu \in \mathcal{O}(\Omega)$, lokal (normal) in Ω gegen f, so ist $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ und $\forall\ k \in \mathbb{N}$ konvergiert $\sum f_\nu^{(k)}$ lokal (normal) in Ω gegen $f^{(k)}$.

Beweis. Normale Konvergenz impliziert lokale und für diese folgt die erste Aussage aus (12.1). Es bleibt zu zeigen, dass mit $\sum f_\nu$ auch $\sum f_\nu^{(k)}$ normal in Ω konvergiert. Sei $K \subset \Omega$ kompakt. Aus den Cauchy'schen Abschätzungen folgt: $\exists$ Kompaktum $K \subset L \subset \Omega$ und $\forall\ k \ge 1$ eine konstante M_k mit $|f^{(k)}|_K \le M_k\,|f|_L \quad \forall\ f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Also gilt

$$\sum |f_\nu^{(k)}|_K \;\le\; M_k \sum |f_\nu|_L \;<\; \infty\,.$$

□

12.3. Weierstraß'scher Doppelreihensatz. Seien $f_\nu = \sum\limits_{\mu=0}^{\infty} a_{\mu\nu}(z-c)^\mu$ $\mu \in \mathbb{N}$, Potenzreihen, die alle in einem Kreis $K_r(c)$ konvergieren. Konvergiert $f(z) = \sum f_\nu(z)$ lokal in $K_r(c)$, so hat f in $K_r(c)$ die dort konvergente Potenzreihendarstellung

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\Big(\sum_{\mu=0}^{\infty} a_{\mu\nu}(z-c)^\mu\Big) = \sum_{\mu=0}^{\infty}\Big(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu}\Big)(z-c)^\mu .$$

Beweis. Mit (12.2) folgt $f \in \mathcal{O}(K_r(c))$ und $f^{(\mu)} = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} f_\nu^{(\mu)} \quad \forall\, \mu \in \mathbb{N}$. Nach dem Entwicklungssatz (11.3) hat f in $K_r(c)$ die dort konvergente Taylorentwicklung

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{f^{(\mu)}(c)}{\mu!}(z-c)^\mu = \sum_{\mu=0}^{\infty}\Big(\sum_{\nu=0}^{\infty} \underbrace{\frac{f_\nu^{(\mu)}(c)}{\mu!}}_{\substack{\| \\ a_{\mu\nu}}}\Big)(z-c)^\mu .$$

$\square$

13. Offenheitssatz und Maximumprinzip

13.1. Offenheitssatz.

13.1.1. Definition. *Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heißt offen, falls*

$$U \subset X \quad \textit{offen} \quad \Longrightarrow \quad f(U) \subset Y \quad \textit{offen}.$$

13.1.2. *Offenheitssatz:* *Sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph und nirgends lokal konstant. Dann ist f offen.*

(13.1.2.1) Zum Beweis zeigen wir zunächst den

Existenzsatz für Nullstellen: $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $\overline{K_r(c)} \subset \Omega$. Dann gilt:

$$\min_{z\in\partial K_r(c)} |f(z)| > |f(c)| \quad \Longrightarrow \quad f \quad \text{hat Nullstelle in} \quad K_r(c)\,.$$

Beweis: **Annahme:** falsch. Dann $\exists$ $\overline{K_r(c)} \subset U \underset{\text{offen}}{\subset} \Omega$, so dass f nullstellenfrei ist in U. Also ist $g := 1/(f|_U) \in \mathcal{O}(U)$ und die Cauchy'sche Abschätzung (11.6.1) für $n = 0$ liefert

$$1/|f(c)| \;=\; |g(c)| \;\le\; |g|_{\partial K_r(c)} \;=\; 1/\min_{z\in\partial K_r(c)} |f(z)|\;.$$

$\lightning$ $\square$

(13.1.2.2) **Beweis des Offenheitssatzes:** Seien $U \subset \Omega$ offen und $c \in U$. Œ $f(c) = 0$ (sonst betrachte $f(z) - f(c)$).
Wir zeigen: $\exists$ Kreis $K_s(f(c)) = K_s(0) \subset f(U)$.

Da f um c nicht konstant ist liefert der Identitätssatz (5.3): $\exists\, \overline{K_r(c)} \subset U$ mit $0 \notin f(\partial K_r(c))$. Es gilt dann $0 < \min_{z\in\partial K_r(c))} |f(z)| \;=:\; 2s$.

Sei nun $d \in K_s(0)$, i.e. sei $|d| < s$. Dann ist

$$|f(z) - d| \;\ge\; |f(z)| \;- |d| \;>\; s \;>\; |d| \qquad \forall \quad z \in \partial K_r(c)$$

und somit $\min_{z\in\partial K_r(c))} |f(z) - d| \;>\; |d|$. Nach dem Existenzsatz für Nullstellen $\exists\; z_0 \in K_r(c)$ mit $f(z_0) = d$. Es folgt $K_s(0) \subset f(U)$. $\square$

13.1.3. *Satz von der Gebietstreue:* *Seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant. Dann ist $f(G)$ ein Gebiet.*

Beweis. Mit G ist auch $f(G)$ zusammenhängend, da f stetig. Andererseits ist f nirgends lokal konstant wegen dem Identitätssatz und die Behauptung folgt aus dem Offenheitssatz. $\square$

13.2. Maximum- und Minimumprinzip.

13.2.1. *Maximumprinzip:* *Seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in \mathcal{O}(G)$. Dann gilt:*

(1) *Hat f ein lokales Maximum in $c \in G$, d. h. $\exists U \in \mathfrak{U}(c)$ mit*

$$|f(z)| \le |f(c)| \qquad \forall z \in U\,,$$

so ist f konstant.

(2) *Ist G beschränkt und f noch definiert und stetig auf $\overline{G}$, so nimmt $|f|$ sein Maximum auf ∂G an:*

$$|f(z)| \;\leq\; |f|_{\partial G} \qquad \forall \quad z \in \overline{G}\,.$$

Beweis. Die zweite Behauptung folgt aus der ersten und diese wiederum aus dem Offenheitssatz: Nach Voraussetzung $\exists\, U \in \mathfrak{U}(c)$ mit $|f(z)| \;\leq\; |f(c)| \quad \forall\, z \in U$. Es folgt

$$f(U) \;\subset\; \big\{ w \in \mathbb{C} \;\mid\; |w| \;\leq\; |f(c)| \big\}\,.$$

Also ist $f(U)$ keine Umgebung von $f(c)$, d.h. f ist nicht offen. Also ist f konstant. $\square$

Anwendung auf $1/f$ liefert:

13.2.2. *Minimumprinzip:* *Hat $f \in \mathcal{O}(G)$ ein lokales Minimum in $c \in G$, so ist $f(c) = 0$ oder f konstant. Ist zusätzlich G beschränkt und f noch stetig auf $\overline{G}$, so hat f Nullstellen in G oder $|f|$ nimmt sein Minimum auf ∂G an.*

14. Wachstum und Fundamentalssatz

14.1. Wachstumslemma.

14.1.1. *Definition und Bemerkung:* *Jede Funktion $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ heißt* ***ganz****. Nach dem Entwicklungssatz von Cauchy-Taylor konvergiert dann jede Potenzreihenentwicklung von f auf ganz $\mathbb{C}$. Ist f ganz aber kein Polynom, so heißt f* ***ganz transzendent****. Beispiele hierfür sind* $\exp, \cos, \sin, \sinh, \cosh$.

14.1.2. *Wachstumslemma:* *Sei $p = \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu \in \mathbb{C}[z]$ ein Polynom $n-$ten Grades. Dann $\exists\ R > 0$, so dass $\forall\ z$ mit $|z| \geq R$ gilt:*

$$\frac{1}{2}|a_n|\,|z|^n \ \leq\ |p(z)|\ \leq\ 2\,|a_n|\,|z|^n\,.$$

Beweis. Für $n = 0$ ist nichts zu zeigen.
Sei nun $n \geq 1$ und $r(z) := \sum\limits_{\nu=0}^{n-1} |a_\nu||z|^\nu$. Dann gilt $\forall\ z$:

$$|a_n|\,|z|^n\ -\ r(z)\ \leq\ |p(z)|\ \leq\ |a_n|\,|z|^n\ +\ r(z)\,.$$

Für $|z| \geq 1$ und $\nu < n$ ist $|z|^\nu \leq |z|^{n-1}$ und somit $r(z) \leq M|z|^{n-1}$ mit $M := \sum\limits_{\nu=0}^{n-1} |a_\nu|$. Die Behauptung folgt mit $R := \max\big\{1, 2M/|a_n|\big\}$. □

14.1.3. Satz. *Ist f ganz, so ist f ein Polynom vom Grad $\leq n$ genau dann, wenn $\exists\ M, R > 0$ mit*

$$|f(z)|\ \leq\ M\,|z|^n \qquad\qquad \forall\ |z|\ \geq\ R\,.$$

Beweis. Sei $f(z) = \sum a_\nu z^\nu$ die Potenzreihenentwicklung um 0. Ist obige Abschätzung erfüllt, so liefern die Cauchy'schen Ungleichungen für $\nu \geq n+1$ und $r \geq R$

$$|a_\nu|\ \leq\ \frac{1}{r^\nu}\,|f|_{\partial K_r(c)}\ \leq\ \frac{1}{r^\nu}\,M r^n\ \underset{r\to\infty}{\longrightarrow}\ 0\,.$$

Die andere Richtung folgt aus dem Wachstumslemma. □

Der Spezialfall $n = 0$ liefert den

14.1.4. *Satz von Liouville:* *Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.*

14.1.5. *Bemerkung:* *Falsch im Reellen, betrachte etwa* $\sin$.

14.2. Fundamentalsatz der Algebra. Jedes nicht konstante komplexe Polynom hat mindestens eine komplexe Nullstelle.

Beweis. $p = \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu$ habe den Grad $n \geq 1$. Hätte p keine Nullstelle, so wäre $\frac{1}{p}$ ganz. Nach dem Wachstumslemma wäre $\frac{1}{p}$ aber auch beschränkt:

$$\exists\ R > 0:\ |p(z)|\ \geq\ \frac{1}{2}|a_n|\ |z|^n \qquad \forall\ |z|\ \geq\ R$$

impliziert

$$\Big|1/p(z)\Big|\ \leq\ \frac{2}{|a_n|\ |z|^n}\ \leq\ \frac{2}{|a_n|\ R^n}\,.$$

Mit dem Satz von Liouville folgte $1/p$ konstant. $\lightning$ □

14.2.1. *Korollar:* *Jedes komplexe Polynom zerfällt in Linearfaktoren. Genauer gilt: Hat* $p = \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu \, z^\nu$ *den Grad* n*, so existiert eine bis auf Reihenfolge eindeutige Darstellung*

$$p(z) \; = \; a_n(z-c_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (z-c_r)^{m_r}$$

mit $c_k \in \mathbb{C}\,,\quad c_k \neq c_\ell\,,$ *und* $m_k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\,,\quad \sum m_k = n\,.$

15. Holomorphe Logarithmen und Wurzeln

15.1. Holomorphe Logarithmen.

Sei $G \in \mathbb{C}$ stets ein Gebiet.

15.1.1. *Definition und Bemerkung:* *Ist $f \in \mathcal{O}(G)$, so heißt $g \in \mathcal{O}(G)$* ***holomorpher Logarithmus von*** *f in G, falls*

$$\exp\big(g(z)\big) \;=\; f(z) \qquad \forall\; z \in G\,.$$

Existiert ein solches g, so ist f insbesondere nullstellenfrei und es gilt $f' = g'e^g = g'f$, d.h.

$$g' \;=\; \frac{f'}{f}\,. \qquad\qquad \textit{(\textbf{Logarithmische Ableitung})}$$

15.1.2. *Existenzlemma:* *Für $f \in \mathcal{O}(G)$ nullstellenfrei in G sind äquivalent:*

(i) $\exists$ *holomorpher Logarithmus zu f in G.*
(ii) $\frac{f'}{f}$ *ist integrabel in G.*
(iii) $\int\limits_\gamma \frac{f'}{f}\,\mathrm{d}\,\zeta = 0 \qquad \forall$ *geschlossenen Integrationsweg γ in G.*

Beweis. (ii) und (iii) sind äquivalent nach (10.1.3), (10.1.4).

(i) $\Longrightarrow$ (ii) gilt nach (15.1.1).

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Sei $F \in \mathcal{O}(G)$ mit $F' = f'/f$. Für $h := f \cdot \exp(-F)$ gilt dann $h' = f' \exp(-F) - f\,F' \exp(-F) = 0$. Also ist h konstant, d.h. $\exists \;\; a \neq 0$ mit $f = a \exp F$. Wähle $b \in \mathbb{C}$ mit $e^b = a$ (vergleiche (6.3.2)). Für $g := F + b$ gilt dann $\exp g = f$. □

15.1.3. *Existenzsatz:* *Ist G einfach zusammenhängend und $f \in \mathcal{O}(G)$ in G nullstellenfrei, so besitzt f einen holomorphen Logarithmus in G.*

Beweis. (15.1.2) + Cauchy (10.4.7). □

15.1.4. *Bemerkung:* *Unter den obigen Voraussetzungen läßt sich jeder holomorphe Logarithmus g von f nach (10.1.4) in der Form*

$$g(z) \;=\; \int\limits_{\gamma_z} \frac{f'}{f}\,\mathrm{d}\,\zeta + b \;\;\textit{mit}\;\; e^b \;=\; f(c)$$

schreiben, wo $c \in G$ fest und γ_z irgendein Weg von c nach z. Insbesondere folgt

$$f(z) \;=\; f(c) \exp \int\limits_{\gamma_z} \frac{f'}{f}\,\mathrm{d}\,\zeta\,.$$

15.1.5. *Bemerkung und Definition:* *Sei $G \subset \mathbb{C}^*$ einfach zusammenhängend. Dann ist $f(z) = z$ holomorph und nullstellenfrei in G. Ist g holomorpher Logarithmus von f in G, so heißt g* ***Logarithmusfunktion*** *oder* ***Zweig des Logarithmus*** *in G. Alle Zweige des Logarithmus sind dann von der Form*

$$g_k = g + 2\pi\, k\, i\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\;:$$

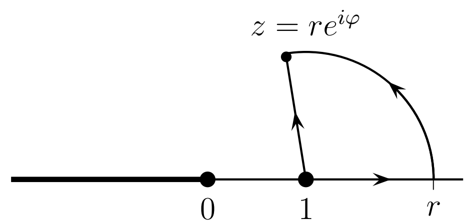
Es gilt $e^{g_k(z)} = z$ *und ist* h *beliebig mit* $e^{h(z)} = z$, *so folgt* $e^{g(z)-h(z)} = 1$, *i.e.* $g(z) - h(z) = 2\pi\, i\, k(z)\,, \quad k(z) \in \mathbb{Z}$. *Mit* g, h *ist auch* k *stetig und somit konstant.*
Wir betrachten nun speziell $G = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. *Dann ist*

$$\log z \;:=\; \int\limits_{[1,z]} \frac{\mathrm{d}\,\zeta}{\zeta}$$

ein Zweig des Logarithmus, dessen Einschränkung auf die positive reelle Achse der natürliche relle Logarithmus ist. Wir nennen diesen Zweig ***Hauptzweig****, alle anderen* ***Nebenzweige*** *des Logarithmus in* $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.

Wählt man als Weg γ_z *von* 1 *nach* $z = r\, e^{i\,\varphi}\,, \quad -\pi < \varphi < \pi\,,$

zuerst die Strecke $[1, r]$ *und dann den Kreisbogen von* r *nach* z, *so folgt wegen der Wegunabhängigkeit:*



$$\int\limits_{[1,z]} \frac{\mathrm{d}\,\zeta}{\zeta} \;=\; \int\limits_1^r \frac{\mathrm{d}\,t}{t} + \int\limits_0^\varphi \frac{i\,r\,e^{i\,t}}{r\,e^{i\,t}}\,\mathrm{d}\,t \;=\; \log r + i\,\varphi$$

(vergleiche auch Aufgabe 14 e)).

Nach (4.3.4), (ii) ist $\lambda(z) = \sum\limits_1 \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}\,(z-1)^\nu$ *konvergent in* $K_1(1)$. *Gliedweise Differentiation liefert*

$$\lambda'(z) \;=\; \sum_0 (1-z)^\nu \;=\; \frac{1}{1-(1-z)} \;=\; \frac{1}{z} \qquad \forall\, z \in K_1(1)\,.$$

Also ist λ *in* $K_1(1)$ *eine Stammfunktion von* $\frac{1}{z}$ *und stimmt somit dort bis auf eine additive Konstante mit* $\log z$ *überein. Auswerten in* 1 *liefert* $\lambda(z) = \log z$.

15.2. Holomorphe Wurzeln. Sei $G \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $f \in \mathcal{O}(G)$ und $n \geq 1$.

15.2.1. Definition. $q \in \mathcal{O}(G)$ *heißt* ***holomorphe n-te Wurzel aus*** f, *falls*

$$q^n \;=\; f\,.$$

15.2.2. ***Bemerkung:*** *Ist* q *eine* n*-te holomorphe Wurzel aus* $f \neq 0$, *so sind*

$$q, \zeta q, \ldots, \zeta^{n-1} q \qquad \textit{mit} \qquad \zeta \;=\; \exp\,(2\pi\, i/n)$$

alle holomorphen Wurzeln aus f.

Beweis. $f \neq 0 \implies \exists\ \emptyset \neq U \underset{\text{offen}}{\subset} G$ mit $1/q \in \mathcal{O}(U)$. Ist $g \in \mathcal{O}(U)$ irgendeine $n-$te Wurzel von f, so gilt $\left(\frac{g}{q}\right)^n = 1$ in U. Nach (6.3.3) nimmt g/q nur die Werte $1, \zeta, \ldots, \zeta^{n-1}$ in U an. Da g/q stetig $\exists\, k$ mit $g = \zeta^k q$ in U und dann auch in G nach dem Identitätssatz. $\square$

Mit dem Additionstheorem der Exponentialfunktion folgt:

15.2.3. *Existenzsatz:* *Ist $g \in \mathcal{O}(G)$ ein Logarithmus von f, so ist* $\exp\left(\frac{1}{n}\, g\right)$ *eine $n-$te Wurzel von f. Ist G einfach zusammenhängend, so hat f eine $n-$te Wurzel.*

15.2.4. Definition. *Ist speziell $f(z) = z$ und q eine holomorphe $n-$te Wurzel von f, so heißt q auch* ***n-te Wurzelfunktion****.*

15.3. Die Gleichung $f(z) \;=\; f(c)\, \exp \int_\gamma \frac{f'}{f}\, \mathrm{d}\,\zeta$.

Für spätere Verwendung notieren wir:

15.3.1. Satz. *Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in \mathcal{O}(G)$ nullstellenfrei in G, so gilt*

$$f(z) \;=\; f(c)\, \exp \int\limits_\gamma \frac{f'}{f}\, \mathrm{d}\,\zeta$$

für jeden Weg γ in G von c nach z.

Beweis. Es sei $\gamma : [a,b] \to G$ ein Weg. Wählen $a =: t_0 < t_1 < \ldots < t_n := b$ und Kreisscheiben $U_1, \ldots, U_n$ in G mit: $\gamma_\nu := \gamma \mid [t_{\nu-1}, t_\nu]$ verläuft ganz in U_ν. Dann gilt $\gamma = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$ und mit (15.1.4) folgt:

$$\exp \int\limits_{\gamma_\nu} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, \mathrm{d}\,\zeta \;=\; \frac{f\big(\gamma(t_\nu)\big)}{f\big(\gamma(t_{\nu-1})\big)} \qquad\qquad \forall\, \nu\,.$$

Mit dem Additionstheorem für exp folgt die Behauptung. □

15.3.2. *Korollar:* *Seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f \in \mathcal{O}(G)$ nullstellenfrei in G und γ ein geschlossener Weg in G. Dann gilt*

$$\int\limits_\gamma \frac{f'}{f}\, \mathrm{d}\,\zeta \;\in\; 2\pi\, i\, \mathbb{Z}\,.$$

Beweis. Obiger Satz liefert $\exp \int_\gamma \frac{f'}{f}\, \mathrm{d}\,\zeta = 1$ und somit die Behauptung wegen $\mathrm{Kern}(\exp) = 2\pi\, i\, \mathbb{Z}$. □

16. Riemann'scher Fortsetzungssatz, biholomorphe Abbildungen, lokale Nebenform

16.1. Riemann'scher Fortsetzungssatz.

16.1.1. Definition. (i) *Seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $A \subset \Omega$ abgeschlossen bzgl. der Relativtopologie und $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus A)$. Dann heißt f* ***stetig (holomorph) nach*** *A* ***fortsetzbar****, wenn $\exists\ \widehat{f} : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig (holomorph) mit $\widehat{f}|_{\Omega\setminus A} = f$.*

(ii) *Seien X topologischer Raum und $A \subset X$. Dann heißt A* ***diskret in*** *X, wenn $\forall\ p \in A$ gilt: p ist* ***isolierter Punkt von*** *A, d.h. $\exists\ U \in \mathfrak{U}(p)$ mit $U \cap A = \{p\}$.*

16.1.2. ***Riemann'scher Fortsetzungssatz:*** *Seien A diskret und abgeschlossen in $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus A)$. Äquivalent:*

(i) *f ist holomorph nach A fortsetzbar.*
(ii) *f ist stetig nach A fortsetzbar.*
(iii) *$\forall c \in A \quad \exists U \in \mathfrak{U}(c)$, $U \subset \Omega$, mit $f|_U$ ist beschränkt.*
(iv) $\lim\limits_{z\to c}(z-c)\, f(z) = 0 \quad \forall c \in A$.

Beweis. Œ $A = \{0\}$ einpunktig. (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (iv) ist trivial.
(iv) $\Longrightarrow$ (i): Wir betrachten

$$g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad z \longrightarrow \begin{cases} z\, f(z) & z \in \Omega \setminus \{0\} \\ 0 & z = 0 \end{cases} \qquad \text{und} \quad h(z) := z\, g(z)\,.$$

Nach Annahme ist g stetig in 0, daher $h(z) = h(0) + z\, g(z)$ komplex differenzierbar in 0 mit $h'(0) = g(0) = 0$. Wegen $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{0\})$ ist $h \in \mathcal{O}(\Omega)$, also um 0 in seine Taylorreihe entwickelbar, $h(z) = z^2 \sum\limits_{\nu=2}^{\infty} a_\nu z^{\nu-2}$ wegen $h(0) = h'(0) = 0$.

Für $z \neq 0$ ist $h(z) = z^2 f(z)$ und somit lässt sich f durch $\sum\limits_{\nu=2}^{\infty} a_\nu z^{\nu-2}$ holomorph nach 0 fortsetzen. □

16.1.3. ***Bemerkung:*** *Der Satz zeigt, dass die Verschärfungen (10.3.3) und (10.3.4) keine echten Verschärfungen sind.*

16.2. Biholomorphe Abbildungen.

16.2.1. Definition. *Seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Dann heißt f* ***biholomorphe Abbildung*** *von Ω auf $\Omega' := f(\Omega)$, falls gilt: Ω' ist offen, $f : \Omega \to \Omega'$ ist bijektiv mit Umkehrabbildung $f^{-1} \in \mathcal{O}(\Omega')$.*

16.2.2. ***Beispiele:***

(i) $\exp : \{z \mid -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ *ist biholomorph, die Umkehrabbildung ist der Hauptzweig des Logarithmus.*

(ii) $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[+ i\,\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{it \mid |t| \geq 1\}$ *ist biholomorph mit Umkehrabbildung*

$$\arctan w = \frac{1}{2i} \log \frac{1+iw}{1-iw} \quad ,$$

wo log *der Hauptzweig des Logarithmus (Aufgabe 13).*
Analoge Aussagen erhält man für cot, cosh, sinh, cos, sin.

16.2.3. ***Biholomorphiekriterium:*** *Sei $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ injektiv. Dann ist $\Omega' := f(\Omega)$ offen, es gilt $f'(z) \neq 0 \quad \forall z \in \Omega$ und $f : \Omega \to \Omega'$ ist biholomorph mit*

$$(f^{-1})'(w) \;=\; \frac{1}{f'(f^{-1}(w))} \qquad \forall w \in \Omega' .$$

Beweis. (i) Nach Voraussetzung ist f holomorph und nirgends lokal konstant. Nach dem Offenheitssatz (13.1.2) ist dann f offen, somit f^{-1} stetig und insbesondere Ω' offen.

(ii) Die Charakterisierung lokal konstanter Funktionen in (8.3.3) liefert für die Ableitung: f' ist lokal nirgends identisch Null. Also ist die Nullstellenmenge $N(f')$ diskret und abgeschlossen in Ω (Isoliertheit der Nullstellen (5.3.1)). Da f offen ist nach (i) folgt: $A := f(N(f'))$ ist diskret und abgeschlossen in Ω'.

(iii) Sei $d = f(c) \in \Omega' \setminus A$. Dann $\exists \Delta : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig in c mit $f(z) = f(c) + (z-c)\Delta(z)$ und $\Delta(c) = f'(c) \neq 0$. Mit $z = f^{-1}(w)$, $w \in \Omega'$, ergibt sich $w = d + (f^{-1}(w) - c)\Delta(f^{-1}(w))$. Andererseits ist $h := \Delta \circ f^{-1}$ stetig in d mit $h(d) = f'(c) \neq 0$. Es folgt

$$f^{-1}(w) = f^{-1}(d) + (w-d)\frac{1}{h(w)} \quad \forall w \in U ,$$

wo $U \in \mathfrak{U}(d)$ hinreichend klein. Insgesamt ist f^{-1} in d komplex differenzierbar mit

$$(f^{-1})'(d) = \frac{1}{f'(c)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(d))} \quad \forall d \in \Omega' \setminus A.$$

(iv) Da f^{-1} stetig ist folgt aus (iii) und dem Riemann'schen Fortsetzungssatz dass $f^{-1} \in \mathcal{O}(\Omega')$. Die Gleichung $(f^{-1})'(w) \cdot f'(f^{-1}(w)) = 1$ schließlich gilt in $\Omega' \setminus A$, aus Stetigkeitsgründen gilt sie dann in ganz Ω'. Insbesondere ist $f'(z) \neq 0 \quad \forall z \in \Omega$.

16.3. Lokales Biholomorphikriterium. Um das Biholomorphiekriterium anwenden zu können, benötigt man Bedingungen für die Injektivität holomorpher Abbildungen. Wir zeigen zunächst:

16.3.1. ***Approximationslemma:*** *Seien $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ und $K_r(c) \subset \Omega$. Dann gilt:*

$$\left|\frac{f(w)-f(z)}{w-z} - f'(c)\right| \;\leq\; \left|f' - f'(c)\right|_{K_r(c)} \qquad \forall w,z \in K_r(c)\,, \;\; w \neq z\,.$$

Beweis. Da $f(\zeta) - f'(c)\zeta$ eine Stammfunktion von $f'(\zeta) - f'(c)$ ist, gilt nach (10.1.3):

$$f(w) - f(z) - f'(c)(w-z) \;=\; \int\limits_{[z,w]} \Big(f'(\zeta) - f'(c)\Big)\,\mathrm{d}\,\zeta \qquad \forall w,z \in K_r(c).$$

Die Standardabschätzung (9.3.6) liefert die Behauptung. □

16.3.2. ***Injektivitätslemma:*** *Seien $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ und $c \in \Omega$ mit $f'(c) \neq 0$. Dann $\exists\, U \in \mathfrak{U}(c)$, $U \subset \Omega$, mit $f|_U$ ist injektiv.*

Beweis. $f'(c) \neq 0\,,\ f$ stetig $\Rightarrow \exists\ K_r(c) \subset \Omega$ mit

$$\left| f' - f'(c) \right|_{K_r(c)} < f'(c)\,.$$

Es folgt $f(w) \neq f(z)$ für $w \neq z,\ w, z \in K_r(c)$, sonst erhielte man einen $\lightning$ zum Approximationslemma. Also ist $f|_{K_r(c)}$ injektiv. $\square$

16.3.3. Definition. *Eine Funktion $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ heißt **lokal biholomorph um** $c \in \Omega$, wenn $\exists U \in \mathfrak{U}(c)$ offen, $U \subset \Omega$, mit $f|_U : U \to f(U)$ ist biholomorph.*

16.3.4. *Lokales Biholomorphiekriteriium:* *Seien $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $c \in \Omega$. Dann gilt: f lokal-biholomorph um $c \Longleftrightarrow f'(c) \neq 0$.*

Beweis. (16.3.2) + (16.2.3). $\square$

16.4. Lokale Normalform. Seien $f \in \mathcal{O}(\Omega),\ c \in \Omega$. Ist f nicht identisch 0 um c, so existiert auf Grund des Identitätssatzes ein $\nu \in \mathbb{N}$ mit $f(c) = f'(c) = \cdots = f^{(\nu-1)}(c) = 0$ und $f^{(\nu)}(c) \neq 0$.

16.4.1. *Definition und Bemerkung:* *Die **(Nullstellen) Ordnung** von f in c ist definiert durch*

$$o_c(f) := \begin{cases} \min\{\nu \in \mathbb{N} \mid f^{(\nu)}(c) \neq 0\} & \text{falls } f \text{ nicht identisch } 0 \text{ um } c, \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt

$$f(c) = 0 \Longleftrightarrow o_c(f) \geq 1$$

*sowie die **Rechenregeln:***

(i) $o_c(fg) = o_c(f) + o_c(g)$,
(ii) $o_c(f+g) \geq \min\{o_c(f), o_c(g)\}$ *mit Gleichheit falls* $o_c(f) \neq o_c(g)$.

*Weiter heißt $v(f,c) := o_c(f - f(c))$ die **Vielfachheit** von f in c ("f nimmt den Wert $f(c)$ mit der Vielfachheit $v(f,c)$ an"). Äquivalent (sofort):*

(i) $v(f,c) = n < \infty$
(ii) *Um c gilt $f(z) = f(c) + (z-c)^n\, g(z)$, g holomorph in c mit $g(c) \neq 0$*

Vergleiche mit dem Beweis von (4.4.1).

16.4.2. *Lokale Normalform:* *Sei f nicht konstant um c. Dann $\exists\ h$ lokal biholomorph um c mit*

$$f = f(c) + h^{v(f,c)} \quad \text{um} \quad c\,.$$

Beweis. Seien $n := v(f,c)$ und $f(z) = (z-c)^n g(z)$ wie oben. Wir wählen $K_r(c)$ so klein, dass $g \in \mathcal{O}(K_r(c))$ und dort nullstellenfrei. Nach (15.2.3) $\exists q \in \mathcal{O}(K_r(c))$ mit $q^n = g|_{K_r(c)}$. Ist $K_r(c)$ klein genug, so ist $h := (z-c)q : K_r(c) \to h(K_r(c))$ biholomorph nach (16.3.4), da $h'(c) = q(c) \neq 0$ wegen $q^n(c) = g(c) \neq 0$. Darüberhinaus gilt $f = f(c) + h^n$ in $K_r(c)$. $\square$

KAPITEL 4

Isolierte Singularitäten, meromorphe Funktionen, Residuenkalkül

17. Isolierte Singularitäten

Funktionen wie $\frac{\sin z}{z}$, $\frac{1}{z^2(z-i)}$, $e^{\frac{1}{2}}$ sind bis auf isolierte Punkte ("Singularitäten") definiert und holomorph. Wir beschreiben die möglichen Arten von Singularitäten.

17.1. Definition. Sind $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $c \in \Omega$ und $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{c\})$, so heißt c **isolierte Singularität** von f. Weiter heißt dann c

(i) **hebbare Singularität von** f, falls f holomorph nach c fortsetzbar,
(ii) **Pol von** f, falls c keine hebbare Singularität von f, aber von $(z-c)^n f(z)$ für ein $n \geq 1$,
(iii) **wesentliche Singularität von** f, sonst.

17.1.1. *Beispiele:*

(i) $f(z) = \frac{\sin z}{z} = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)!} z^{2\nu}$, $z \in \mathbb{C}^*$, *ist durch* $f(0) = 1$ *holomorph nach* 0 *fortsetzbar.*
(ii) $\frac{1}{z^2(z-i)}$ *hat Pole in* 0 *und* i*:* $z^2 f(z)$ *bzw.* $(z-i)f(z)$ *sind holomorph nach* 0 *bzw.* i *fortsetzbar.*
(iii) $f(z) = e^{1/z}$ *hat wesentliche Singularität in* 0*:* $z^n e^{1/z}$ *ist nicht holomorph nach* 0 *fortsetzbar, da sonst* $z^n e^{1/z}$ *Polynom vom Grad* $\leq n$ *nach (14.1.3).*

17.2. Riemannscher Hebbarkeitssatz. Für eine isolierte Singularität c von $f : \Omega \setminus \{c\} \to \mathbb{C}$ sind äquivalent:

(i) c hebbare Singularität.
(ii) f stetig nach c fortsetzbar.
(iii) $\exists\ U \in \mathfrak{U}(c),\ U \subset \Omega : f|_{U \setminus \{c\}}$ ist beschränkt.

Beweis. (16.1.2). □

17.3. Pole. Sei c isolierte Singularität von $f : \Omega \setminus \{c\} \to \mathbb{C}$.

17.3.1. Definition. *Ist* c *Pol von* f, *so heißt*

$$\min\{n \geq 1 \mid c \textit{ ist hebbare Singularität von } (z-c)^n f(z)\}$$

*die **Ordnung des Pols*** c ***von*** f.

17.3.2. *Hauptsatz für Pole:* *Für* $n \geq 1$ *sind äquivalent:*

(i) c *ist Pol der Ordnung* n *von* f.

(ii) $\exists g \in \mathcal{O}(\Omega),\ g(c) \neq 0,$ *mit*

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-c)^n} \qquad \forall z \in \Omega \setminus \{c\}.$$

(iii) $\exists U \in \mathfrak{U}(c)$ *offen,* $U \subset \Omega$, $\exists h \in \mathcal{O}(U)$ *mit: h hat Nullstelle in c der Ordnung n, h ist nullstellenfrei in $U \setminus \{c\}$ und es gilt $f = 1/h$ in $U \setminus \{c\}$.*

(iv) $\exists U \in \mathfrak{U}(c), U \subset \Omega$, $\exists M_1, M_2 > 0$ *mit*

$$\frac{M_1}{|z-c|^n} \ \leq\ |f(z)| \ \leq\ \frac{M_2}{|z-c|^n} \qquad \forall z \in U \setminus \{c\}\,.$$

Beweis. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Nach Voraussetzung hat $(z-c)^n f(z)$ Fortsetzung $g \in \mathcal{O}(\Omega)$. Da n minimal mit dieser Eigenschaft ist, folgt $g(c) \neq 0$ (sonst wäre $(z-c)^{n-1} f(z)$ holomorph fortsetzbar).

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): Ist g wie in (ii), so $\exists\, U \in \mathfrak{U}(c)$ offen, $U \subset \Omega$, mit g in U ohne Nullstelle. Dann hat

$$h(z) \ =\ (z-c)^n / g(z)$$

die gewünschten Eigenschaften.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv): Ist h wie in (iii), so gilt nach (16.4.1) um c (Œ auf U, sonst U kleiner): $h(z) = (z-c)^n\, h_0(z)$ mit $h_0 \in \mathcal{O}(U)$ und $h_0(z) \neq 0 \quad \forall z \in U$, sowie

$$M_1 \ :=\ \inf_{z \in U} \Big(1 \,/\, |h_0(z)|\Big) > 0, \qquad M_2 \ :=\ \sup_{z \in U} \Big(1 \,/\, |h_0(z)|\Big) < \infty\,.$$

Für $z \in U \setminus \{0\}$ folgt

$$\frac{M_1}{|z-c|^n} \ \leq\ \frac{1}{|z-c|^n\ |h_0(z)|} \ =\ |f(z)| \ =\ \frac{1}{|z-c|^n\ |h_0(z)|} \ \leq\ \frac{M_2}{|z-c|^n}\,.$$

(iv) $\Longrightarrow$ (i): Seien U, M_1, M_2 wie in (iv). Da $|z-c|^n\,|f(z)| \ \leq\ M_2$ für $z \in U \setminus \{c\}$, so ist $(z-c)^n\, f$ um c beschränkt. Die Abschätzung $|z-c|^{n-1}\,|f(z)| \geq M_1 / |z-c|$ liefert: $(z-c)^{n-1}\, f$ ist um c nicht beschränkt. Nach (17.2) und (17.3.1) ist c ein Pol von f der Ordnung n. □

17.3.3. *Korollar:* *Es gilt:*

$$f \quad \textit{hat Pol in} \quad c \iff \lim_{z \to c} f(z) = \infty\,.$$

Beweis. $\lim\limits_{z \to c} f(z) = \infty \iff \lim\limits_{z \to c} 1/f(z) = 0$ und dies ist richtig nach (iii) des Hauptsatzes. □

17.3.4. *Entwicklung von Funktionen um Polstellen:* *Es gilt: f hat Pol in c der Ordnung $n \iff \exists\ b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$, $b_n \neq 0$ und $f_0 \in \mathcal{O}(\Omega)$ mit*

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{b_\nu}{(z-c)^\nu} + f_0(z) \qquad \forall z \in \Omega \setminus \{0\}\,.$$

In diesem Fall sind f_0 und $b_1, \ldots, b_n$ durch f eindeutig bestimmt.

Beweis. $\Longrightarrow$: Nach (17.3.2), (ii) $\exists\ g \in \mathcal{O}(\Omega),\ g(c) \neq 0$ mit $f(z) = \frac{g(z)}{(z-c)^n}\quad \forall\, z \in \Omega \setminus \{c\}$; dabei ist g durch f eindeutig bestimmt. Sei $g(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-c)^\nu$ die Potenzreihenentwicklung von g um c, etwa konvergent in $K_r(c) \subset \Omega$. Für $z \in K_r(c) \setminus \{c\}$ gilt

$$\begin{aligned} f(z) &= \tfrac{1}{(z-c)^n} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-c)^\nu = \sum_{\nu=0}^{n-1} \tfrac{a_\nu}{(z-c)^{n-\nu}} + \sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu (z-c)^{\nu-n} \\ &= \sum_{\nu=1}^{n} \tfrac{a_{n-\nu}}{(z-c)^\nu} + \sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu (z-c)^{\nu-n} =: \sum_{\nu=1}^{n} \tfrac{b_\nu}{(z-c)^\nu} + f_0(z)\,. \end{aligned}$$

Die Funktion $f_0 \in \mathcal{O}(K_r(c))$ ist holomorph nach Ω fortsetzbar durch $f_0(z) = f(z) - \sum\limits_{\nu=1}^{n} \frac{b_\nu}{(z-c)^\nu}$ und es ist $b_n = a_0 = g(c) \neq 0$.
Die Eindeutigkeit ergibt sich aus der von g.

(i) $\Longleftarrow$ (ii): Umgekehrt folgt aus einer Darstellung wie oben, dass $(z-c)^n f(z)$ aber nicht $(z-c)^{n-1} f(z)$ nach c holomorph fortsetzbar ist. $\square$

17.4. Satz von Casorati-Weierstraß. Für $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{c\})$ sind äquivalent:

(i) c ist wesentliche Singularität von f.
(ii) $\forall U \in \mathfrak{U}(c),\ U \subset \Omega$ gilt $\overline{f(U \setminus \{c\})} = \mathbb{C}$. Mit anderen Worten: $\forall a \in \mathbb{C}\ \ \exists$ Folge $z_n \to c$ mit $f(z_n) \to a$.

Beweis. $\Longrightarrow$: **Annahme**: falsch, d.h. $\exists\ U$ wie oben mit $f(U \setminus \{c\})$ nicht dicht in $\mathbb{C}$. Dann $\exists$ Kreisscheibe $K_r(a)$ mit $f(U \setminus \{c\}) \cap K_r(a) = \emptyset$, d.h. $|f(z) - a| \geq r\quad \forall\, z \in U \setminus \{c\}$. Die Funktion $g(z) := 1/(f(z) - a)$ ist somit holomorph in $U \setminus \{c\}$ und beschränkt durch $1/r$, hat also eine hebbare Singularität in c. Dann hat $f(z) = a + 1/g(z)$ in c eine hebbare Singularität (falls $\lim\limits_{z \to c} g(z) \neq 0$) oder einen Pol nach (17.3.2) (falls $\lim\limits_{z \to c} g(z) = 0$). $\lightning$

$\Longleftarrow$: Klar nach (17.2) und (17.3.2). $\square$

18. Meromorphe Funktionen

18.1. Definition und Beispiele.

18.1.1. Definition. *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Eine* ***meromorphe Funktion*** *f in Ω ist eine holomorphe Funktion $f : \Omega \setminus P(f) \to \mathbb{C}$, wobei gilt::*

(i) *$P(f)$ ist diskret in Ω.*
(ii) *Die Punkte von $P(f)$ sind Pole von f.*

Dann heißt $P(f)$ die ***Polstellenmenge von*** *f.*
Wir schreiben $\mathcal{M}(\Omega) := \{$meromorphen Funktionen auf $\Omega\}$.

18.1.2. ***Bemerkung:***

(i) *$P(f)$ stets abgeschlossen (in Ω).*
(ii) *Holomorphe Funktionen sind meromorphe Funktionen mit $P(f) = \emptyset$.*

18.1.3. ***Beispiele:*** *Auf ganz $\mathbb{C}$ meromorph sind:*

(i) *Jede* ***rationale*** *Funktion*

$$f = \frac{p}{q}\,, \qquad p, q \ \text{Polynome}, \qquad q \neq 0\,.$$

$P(f)$ ist dann Teilmenge der Nullstellenmenge von q.

(ii) $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$ *(vergleiche Aufgaben).*

18.1.4. Satz. *Mit geeignet definierten Verknüpfungen ist $\mathcal{M}(\Omega)$ eine $\mathbb{C}-$Algebra, die abgeschlossen ist bzgl. der Differentiation. Ist $\Omega = G$ ein Gebiet, so ist $\mathcal{M}(\Omega)$ sogar ein Körper.*

Beweis. Aufgaben. □

18.1.5. ***Definition und Bemerkung:*** *Seien $f \in \mathcal{M}(\Omega)$, $c \in \Omega$. Nach (17.3.4) hat f um c eine eindeutige Entwicklung*

$$f(z) = \sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu \,(z-c)^\nu\,, \qquad a_\nu \in \mathbb{C}\,, \quad a_n \neq 0\,.$$

von Verallgemeinerung von (16.4.1) setzen wir $o_c(f) := n$. Es gilt:

(i) *$o_c(f) \geq 0 \Longleftrightarrow f$ holomorph in c.*
(ii) *$o_c(f) < 0 \Longleftrightarrow f$ hat Pol in c der Ordnung $-o_c(f)$.*

Weiter gelten die ***Rechenregeln:***

(i) *$o_c(fg) = o_c(f) + o_c(g)$*
(ii) *$o_c(f+g) \geq \min\,(o_c(f), o_c(g))$ mit $=$, falls $o_c(f) \neq o_c(g)$.*

18.2. Reihen meromorpher Funktionen.

18.2.1. Definition. *Eine Reihe $\sum f_\nu$ von in Ω meromorphen Funktionen f_ν heißt* ***kompakt konvergent*** *(bzw.* ***normal konvergent****) in Ω, wenn $\forall\ K \subset \Omega$ kompakt $\exists\ \nu_0 \in \mathbb{N}$ mit*

(i) *$\forall \nu \geq \nu_0$ ist $P(f_\nu) \cap K = \emptyset$,*
(ii) *$\sum\limits_{\nu \geq \nu_0} f_\nu|_K$ konvergiert gleichmäßig auf K (bzw. $\sum\limits_{\nu \geq \nu_0} |f_\nu|_K < \infty$).*

18.2.2. *Bemerkung:*

(i) *Sind (i) und eine der Bedingungen in (ii) erfüllt, so ist* $P := \bigcup_\nu P(f_\nu)$ *diskret und* $f = \sum_\nu f_\nu|_{\Omega \setminus P} \in \mathcal{O}(\Omega \setminus P)$ *nach dem Konvergenzsatz von Weierstraß (12.1). Die Grenzfunktion* f *stellt also eine meromorphe Funktion in* Ω *dar mit Polen oder hebbaren Singularitäten in* P*.*

(ii) *Umordnungssatz (3.5.4), eine Variante des Reihenproduktsatzes (3.5.5) und der Differentiationssatz von Weierstraß (12.2) übertragen sich (Übung).*

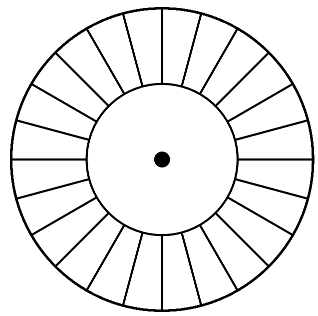
19. Laurententwicklung holomorpher Funktionen in Kreisringen

Hat $f \in \mathcal{O}(\Omega \backslash \{c\})$ einen Pol in c, so $\exists$ Reihenentwicklung $f(z) = \sum\limits_{\nu=-n}^{\infty} a_\nu (z-c)^\nu$ etwa in $K_s(c) \setminus \{c\}$ (17.3.4). Wir entwickeln nun allgemeiner in Kreisringen holomorphe Funktionen in Reihen $\sum\limits_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu (z-c)^\nu$. Das führt auch zu einem Klassifiktationssatz für isolierte Singularitäten.

19.1. Cauchy-Theorie für Kreisringe.

19.1.1. Definition. *Sind $r, s \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $0 \leq r < s$ und $c \in \mathbb{C}$, so heißt*

$K_{r,s}(c) := \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z-c| < s\}$

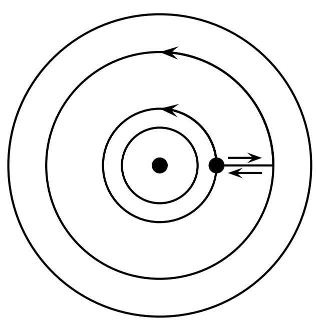


***Kreisring um** c **mit Radien** r, s.*

19.1.2. *Cauchyscher Integralsatz für Kreisringe:* *Sei $f \in \mathcal{O}(K_{r,s}(c))$. Dann gilt*

$$\int\limits_{\partial K_\rho(c)} f \,\mathrm{d}\zeta = \int\limits_{\partial K_\sigma(c)} f \,\mathrm{d}\zeta \qquad \forall \;\; \rho, \sigma \in \mathbb{R}, \quad r < \rho \leq \sigma < s\,.$$

Beweis. Satz von der Homotopieinvarianz (10.4.4):



□

19.1.3. *Cauchysche Integralformel für Kreisringe:* *Seien $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ und $\overline{K_{r,s}(c)} \subset \Omega$ ein Kreisring. Dann gilt*

$$f(z) \;=\; \frac{1}{2\pi\, i} \int\limits_{\partial K_s(c)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \;-\; \frac{1}{2\pi\, i} \int\limits_{\partial K_r(c)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \qquad \forall\, z \in K_{r,s}(c)\,.$$

Beweis. Sei $z \in K_{r,s}(c)$. Wie im Beweis der Cauchyschen Integralformel (11.1) setzen wir

$$g(\zeta) := \begin{cases} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z} & \zeta \in \Omega \setminus \{z\} \\ f'(z) & \zeta = z \end{cases} .$$

Dann ist $g \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{z\})$ und g stetig in Ω, also $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz (16.1.2). Mit dem Integralsatz (19.1.2) folgt

$$\int_{\partial K_r(c)} g \, \mathrm{d}\,\zeta \;=\; \int_{\partial K_s(c)} g \, \mathrm{d}\,\zeta$$

und somit

$$\int_{\partial K_r(c)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\,\zeta \;-\; f(z) \underbrace{\int_{\partial K_r(c)} \frac{d\zeta}{\zeta - z}}_{\overset{\|}{0}} \;=\; \int_{\partial K_s(c)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\,\zeta \;-\; f(z) \underbrace{\int_{\partial K_s(c)} \frac{d\zeta}{\zeta - z}}_{\overset{\|}{2\pi\, i}}$$

□

19.2. Laurenttrennungen. Seien $K_{r,s}(c)$ ein Kreisring und $f \in \mathcal{O}(K_{r,s}(c))$.

19.2.1. Definition. *Eine* ***Laurenttrennung*** *von f ist ein Paar (f_1, f_2) von Funktionen $f_1 \in \mathcal{O}(K_{r,\infty}(c)), f_2 \in \mathcal{O}(K_s(c))$ mit $\lim\limits_{z\to\infty} f_1(z) = 0$ und*

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) \qquad \forall\, z \in K_{r,s}(c)\,.$$

f_1 heißt ***Hauptteil****, f_2* ***Nebenteil*** *von f.*

19.2.2. Satz. *Zu f existiert eine Laurenttrennung (f_1, f_2). Dabei sind f_1, f_2 eindeutig bestimmt: $\forall\, \rho$ mit $r < \rho < s$ gilt*

$$\begin{aligned} f_2(z) &= \tfrac{1}{2\pi\, i} \int_{\partial K_\rho(c)} \tfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\,\zeta \qquad \forall\, z \in K_\rho(c)\,, \\ f_1(z) &= \tfrac{-1}{2\pi\, i} \int_{\partial K_\rho(c)} \tfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\,\zeta \qquad \forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \overline{K_\rho(c)}\,. \end{aligned}$$

Beweis. **Existenz:** Nach dem Entwicklungssatz (11.2) ist

$$f_{2,\rho}(z) \;=\; \frac{1}{2\pi\, i} \int_{\partial K_\rho(c)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\,\zeta\,, \qquad r < \rho < s\,,$$

holomorph in $K_\rho(c)$. Es gilt $\rho < \sigma < s \Rightarrow f_{2,\sigma}|_{K_\rho(c)} = f_{2,\rho}$ nach dem Integralsatz. Also $\exists\, f_2 \in \mathcal{O}(K_s(c))$ mit $f_2|_{K_\rho(c)} = f_{2,\rho} \quad \forall\, \rho$.

Analog erhält man $f_1 \in \mathcal{O}(K_{r,\infty}(c))$ mit

$$f_1(z) \;=\; -\frac{1}{2\pi\, i} \int_{\partial K_\rho(c)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\,\zeta \qquad \forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \overline{K_\rho(c)}\,,\;\; r < \rho < s\,.$$

Ist $z \in K_{r,s}(c)$, so wähle ρ, σ mit $r < \rho < |z - c| < \sigma < s$. Dann liefert die Integralformel angewendet auf $K_{\rho,\sigma}$ die Gleichung $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$.

Schließlich folgt mit der Standardabschätzung für Integrale

$$|f_1(z)| \;\leq\; \rho\,\frac{|f|_{\partial K_\rho(c)}}{|z-c|-\rho}$$

d.h. $\lim\limits_{z\to\infty} f_1(z) = 0$.

Eindeutigkeit: Seien (f_1, f_2) und (g_1, g_2) Laurent-Trennungen.
Dann sind $h_1 := f_1 - g_1 \in \mathcal{O}(K_{r,\infty}(c))$, $h_2 := f_2 - g_2 \in \mathcal{O}(K_s(c))$ mit $h_1|_{K_{r,s}(c)} = h_2|_{K_{r,s}(c)}$. Also $\exists\, h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ganz mit $h|_{K_{r,\infty}(c)} = h_1$, $h|_{K_s(c)} = h_2$. Wegen $\lim\limits_{z\to\infty} h(z) = 0$ folgt $h = 0$ nach Lionville, d.h. $f_1 = g_1$, $f_2 = g_2$. □

19.3. Laurententwicklung. Sei $f \in \mathcal{O}(K_{r,s}(c))$ mit Laurenttrennung (f_1, f_2). Dann $\exists$ eindeutige Darstellung

$$f(z) \;=\; \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{-\nu}(z-c)^{-\nu} \;+\; \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-c)^\nu \qquad \forall\, z \in K_{r,s}(c)\,.$$

Die erste Reihe konvergiert auf $K_{r,\infty}(c)$ normal gegen f_1, die zweite auf $K_s(c)$ normal gegen f_2. Es gilt

$$a_\nu \;=\; \frac{1}{2\pi\, i}\int\limits_{\partial K_\rho(c)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-c)^{\nu+1}}\,\mathrm{d}\zeta \qquad \text{für} \quad r<\rho<s, \quad \nu \in \mathbb{Z}\,.$$

Beweis. Wir entwickeln $f_2(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(z-c)^\nu$ in $K_s(c)$ nach Cauchy-Taylor.
Zur Herleitung einer Reihe für $f_1(z)$ betrachten wir

$$T : K_{1/r}(0) \setminus \{0\} \longrightarrow K_{r,\infty}(c), \quad w \longrightarrow c + \frac{1}{w}\,.$$

T ist biholomorph mit Umkehrabbildung $z \to 1/(z-c)$. Dann ist $g := f_1 \circ T \in \mathcal{O}(K_{1/r}(0) \setminus \{0\})$. Aus $\lim\limits_{z\to\infty} f_1(z) = 0$ folgt $\lim\limits_{w\to 0} g(w) = 0$, d.h. mit $g(0) := 0$ ist $g \in \mathcal{O}(K_{1/r}(0))$ nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz. Wir entwickeln $g(w) = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} b_\nu\, w^\nu$ in $K_{1/r}(0)$ nach Cauchy-Taylor. Es folgt $f_1(z) = g \circ T^{-1}(z) = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} b_\nu(z-c)^{-\nu} =: \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_{-\nu}(z-c)^{-\nu}$ auf $K_{r,\infty}(c)$. Dass die Entwicklungen normal konvergieren ist Bestandteil von Cauchy-Taylor. Also müssen wir nur noch die Formel für die a_n zeigen: $\forall n \in \mathbb{Z}$ gilt

$$(z-c)^{-n-1} f(z) \;=\; \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{-\nu+n+1}(z-c)^{-\nu} \;+\; \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu+n+1}(z-c)^\nu\,.$$

Wegen der normalen Konvergenz und (9.3.7) dürfen wir gliedweise integrieren:

$$\int\limits_{\partial K_\rho(c)} (\zeta-c)^{-n-1}\, f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \;\overset{(*)}{=}\; a_n\, 2\pi\, i\,,\; r<\rho<s\,.$$

Dabei gilt $(*)$, da $(\zeta-c)^\nu$ eine Stammfunktion hat $\quad \forall \nu \neq -1\,.$ □

19.4. Laurentreihen.

19.4.1. Definition. *Eine Reihe der Form*

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu (z-c)^\nu \;=\; \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{-\nu}(z-c)^{-\nu} \;+\; \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-c)^\nu$$

heißt ***Laurentreihe*** *um c.* $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_{-\nu}(z-c)^{-\nu}$ *heißt* ***Hauptteil***, $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(z-c)^\nu$ ***Nebenteil***. $\sum\limits_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu(z-c)^\nu$ *heißt* ***konvergent*** *in* $z_0 \in \mathbb{C}$ *(mit* ***Summe*** $f(z_0) = f_1(z_0) + f_2(z_0)$*), falls* $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_{-\nu}(z_0-c)^{-\nu}$, $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(z_0-c)^\nu$ *konvergent (mit Summe* $f_1(z_0)$ *bzw.* $f_2(z_0)$*). Analog erklärt man* ***absolute, kompakte*** *und* ***normale Konvergenz*** *von Laurentreihen.*

Holomorphe Funktionen in Kreisringen um c sind in Laurent-Reihen um c entwickelbar nach (19.3). Umgekehrt gilt:

19.4.2. *Konvergenzsatz für Laurentreihen:* *Seien* $\sum\limits_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu(z-c)^\nu$ *eine Laurentreihe, s der Konvergenzradius des Nebenteils und* $1/r$ *der Konvergenzradius von* $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_{-\nu}\, w^\nu$. *Dann gilt:*

(i) $r \geq s \Rightarrow$ *Laurentreihe konvergiert in keiner offenen, nichtleeren Teilmenge von* $\mathbb{C}$.

(ii) $r < s \Rightarrow$ *Laurentreihe konvergiert normal in* $K_{r,s}(c)$ *gegen eine dort holomorphe Funktion. Die Laurentreihe konvergiert in keinem Punkt von* $\mathbb{C} \setminus \overline{K_{r,s}(c)}$.

Beweis. Wir wenden den Konvergenzsatz für Potenzreihen (4.3.2) an: $g(w) = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_{-\nu}\, w^\nu$ konvergiert normal in $K_{1/r}(0)$ und divergiert in $\mathbb{C}\setminus\overline{K_{1/r}(0)}$. Also konvergiert $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_{-\nu}(z-c)^{-\nu}$ in $\mathbb{C}\setminus\overline{K_r(c)}$ normal gegen $f_1(z) = g(1/(z-c))$ und ist divergent in $K_r(c)$. Andererseits konvergiert $f_2(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(z-c)^\nu$ normal in $K_s(c)$ und divergiert in $\mathbb{C}\setminus\overline{K_s(c)}$. □

19.4.3. *Identitätssatz für Laurentreihen:* *Sind* $\sum\limits_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu(z-c)^\nu$, $\sum\limits_{\nu=-\infty}^{\infty} b_\nu(z-c)^\nu$ *Laurentreihen, die beide auf einer Kreislinie* $\partial K_\rho(c)$, $\rho > 0$, *gleichmäßig gegen dieselbe Grenzfunktion f konvergieren, so gilt*

$$a_\nu \;=\; b_\nu \;=\; \frac{1}{2\pi\rho^\nu}\int_0^{2\pi} f(c+\rho\, e^{i\varphi})\, e^{-i\nu\varphi}\, \mathrm{d}\varphi \qquad \forall\, \nu \in \mathbb{Z}\,.$$

Beweis. Die Behauptung ergibt sich aus dem Vertauschungssatz (9.3.7) durch Einsetzen der Laurentreihen in das Integral auf der rechten Seite. □

19.5. Charakterisierung isolierter Singularitäten.

19.5.1. ***Klassifikationssatz:*** *Es sei c eine isolierte Singularität von $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{c\})$. Ist*

$$f(z) \;=\; \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu (z-c)^\nu$$

die Laurententwicklung von f um c, so ist c

(i) *hebbare Singularität* $\iff a_\nu = 0$ *für $\nu < 0$*
(ii) *Pol der Ordnung $n \geq 1$* $\iff a_\nu = 0$ *für $\nu < -n$ und $a_{-n} \neq 0$*
(iii) *wesentliche Singularität* $\iff a_\nu \neq 0$ *für unendlich viele $\nu < 0$*

Beweis. Wegen der Eindeutigkeit der Laurententwicklung folgt die Aussage aus dem Entwicklungssatz von Cauchy-Taylor (11.3) und der Entwicklung von Funktionen um Polstellen (17.3.4). □

19.5.2. ***Beispiel:*** *Entwickeln $f(z) = \frac{1}{z^2(z-i)}$ in $K_{0,1}(0), K_{0,1}(i)$ und $K_{1,\infty}(0)$:*

$$f(z) \;=\; \tfrac{1}{z^2}\,\tfrac{1}{i}\,\tfrac{1}{-iz-1} \;=\; \tfrac{i}{z^2}\sum_{\nu=0}^{\infty}(-i)^\nu z^\nu = \sum_{\nu=-2}^{\infty}(-i)^{\nu+3} z^\nu\,, \qquad 0 < |z| < 1\,,$$

$$\begin{aligned}
f(z) \;&=\; \tfrac{1}{z-i}\,\tfrac{-1}{\left(1+\frac{z-i}{i}\right)^2} \;=\; \tfrac{i}{z-i}\left(\tfrac{1}{1+\frac{z-i}{i}}\right)' \;=\; \tfrac{i}{z-i}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\,\tfrac{1}{i^\nu}(z-i)^\nu\right)' \\
&=\; \tfrac{i}{z-i}\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^\nu\,\tfrac{\nu}{i^\nu}(z-i)^{\nu-1} \;=\; \sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^\nu\,\tfrac{\nu}{i^{\nu-1}}\,(z-i)^{\nu-2} \\
&=\; \sum_{\nu=-1}^{\infty}(-1)^\nu\,\tfrac{\nu+2}{i^{\nu+1}}\,(z-i)^\nu\,, \qquad 0 < |z-i| < 1\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(z) \;&=\; \tfrac{1}{z^2}\,\tfrac{1}{z}\,\tfrac{1}{1-\frac{i}{z}} \;=\; \tfrac{1}{z^3}\sum_{\nu=0}^{\infty} i^\nu\,\tfrac{1}{z^\nu} \;=\; \sum_{\nu=0}^{\infty} i^\nu\, z^{-\nu-3} \\
&=\; \sum_{\nu=-\infty}^{-3}\tfrac{1}{i^{\nu+3}}\,z^\nu\,, \qquad |z| > 1\,.
\end{aligned}$$

Im Folgenden wollen wir den Residuensatz beweisen und einige nützliche Folgerungen ziehen. Der Residuensatz ist die natürliche Verallgemeinerung des Cauchyschen Integralsatzes auf holomorphe Funktionen mit isolierten Singularitäten. Der Beweis wird mit Hilfe des Laurentschen Entwicklungssatzes auf den Integralsatz zurückgeführt. Wir zeigen zunächst eine allgemeine Version des Integralsatzes sowie der Integralformel.

20. Allgemeine Cauchysche Integralformel

20.1. Die Indexfunktion.

20.1.1. Definition. *Sei γ ein geschlossener Integrationsweg in $\mathbb{C}$. Für $z \in \mathbb{C} \setminus S(\gamma)$ heißt*

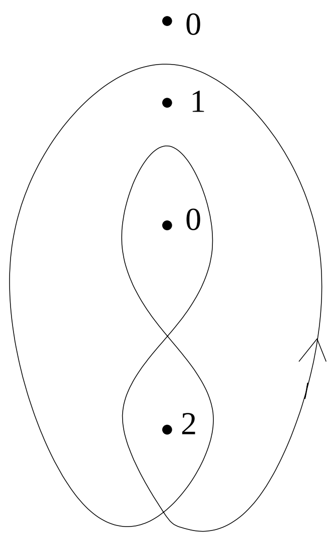
$$ind_\gamma(z) \;:=\; \frac{1}{2\pi\, i} \int\limits_\gamma \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z}$$

*die **Umlaufzahl von** γ **bzgl.** z. Weiter heißen $Int\gamma := \{z \in \mathbb{C} \setminus S(\gamma) \mid ind_\gamma(z) \neq 0\}$ bzw. $Ext\gamma := \{z \in \mathbb{C} \setminus S(\gamma) \mid ind_\gamma(z) = 0\}$ das **Innere** bzw. **Äußere von** γ.*

20.1.2. *Eigenschaften der Indexfunktion:*

(i) *$ind_\gamma(z) \in \mathbb{Z} \qquad \forall z \in \mathbb{C} \setminus S(\gamma)$.*
(ii) *$ind_\gamma(z)$ ist lokal-konstant in $\mathbb{C} \setminus S(\gamma)$.*
(iii) *$Int\gamma$ und $Ext\gamma$ sind offen.*
(iv) *$\partial\, Int\gamma \subset S(\gamma)\,, \quad \partial\, Ext\gamma \subset S(\gamma)$.*
(v) *$Int\gamma$ ist beschränkt, $\quad Ext\gamma$ ist nicht leer und unbeschränkt.*

Beweis. Aufgaben. □



20.2. Allgemeiner Cauchyscher Integralsatz. Wir wollen folgende Frage beantworten: Wie lassen sich bei vorgebenem Definitionsbereich Ω die geschlossenen Wege γ in Ω charakterisieren, für die gilt $\int\limits_\gamma f\,\mathrm{d}\zeta \;=\; 0$ für alle $f \in \mathcal{O}(\Omega)$?

20.2.1. Definition. *Seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und γ ein geschlossener Integrationsweg in Ω. Dann heißt γ **nullhomolog in** Ω, falls*

$$\int\limits_\gamma f\,\mathrm{d}\zeta = 0 \qquad \forall\, f \in \mathcal{O}(\Omega)\,.$$

20.2.2. *Beispiel:* *Nach dem Korollar (10.4.5) zu dem Satz über die Homotopie-Invarianz gilt für jeden geschlossenen Integrationsweg γ in Ω:*

$$\gamma \textit{ nullhomotop in } \Omega \implies \gamma \textit{ nullhomolog in } \Omega\,.$$

20.2.3. *Allgemeiner Satz von Cauchy:* *Sei γ ein geschlossener Integrationsweg in Ω. Dann gilt:*

$$\gamma \textit{ nullhomolog in } \Omega \iff \textit{Int}\,\gamma \ \subset \Omega\,.$$

Beweis. $\Longrightarrow$: Sei $c \in \operatorname{Int}\gamma$.

Annahme: $c \notin \Omega$. Dann ist $\frac{1}{\zeta - c} \in \mathcal{O}(\Omega)$, aber es gilt

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - c} \;=\; 2\pi i \,\operatorname{ind}_\gamma(c) \;\neq\; 0 \qquad \lightning$$

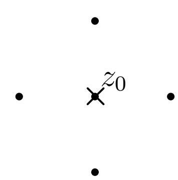
$\Longleftarrow$: Zunächst einige Bezeichnungen:

Für $c \in \mathbb{C}$ und $\varepsilon > 0$ betrachten wir das **Gitter**

$$\Lambda_\varepsilon(c) \;:=\; \{c + \varepsilon n_1 + i\varepsilon n_2 \mid n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}.$$

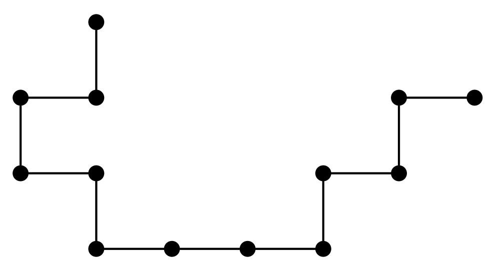
Zwei Punkte $z_0, z_1 \in \Lambda_\varepsilon(c)$ heißen **benachbart**,

wenn $|z_0 - z_1| = \varepsilon$. In diesem Fall nennen wir



die Verbindungsstrecke $\overline{z_0 z_1}$ auch **Kante** des Gitters.
Ein Streckenzug $[z_0, z_1] + \ldots + [z_{m-1}, z_m]$

heißt $\varepsilon-$**Kantenweg** (zu c), wenn z_{k-1} und z_k gleiche oder benachbarte Gitterpunkte sind $\forall\ k$.



Schließlich schreiben wir $I = [0,1]$ und nennen für $z_0 \in \Lambda_\varepsilon(c)$ die Menge

$$Q_{z_0} := z_0 + (\varepsilon I \times \varepsilon I),$$

das **Gitterquadrat** (**mit linker unterer Ecke** z_0).

Sei nun $\gamma : I \to \Omega$ ein geschlossener Integrationsweg mit $\operatorname{Int}\gamma \subset \Omega$ und sei c der Anfangs- und Endpunkt von γ. Wir haben zu zeigen:

$$\int_\gamma f \,\mathrm{d}\,\zeta \;=\; 0 \qquad \forall\ f \in \mathcal{O}(\Omega)\,.$$

1. Schritt: Œ γ ein geschlossener $\varepsilon-$Kantenweg zu c:

Wegen der Kompaktheit von I und da γ stetig ist, ist auch $\gamma(I)$ kompakt und γ gleichmäßig stetig. Also existieren

(i) $\varepsilon > 0$ mit $0 < \varepsilon < \frac{1}{3} d(\gamma([0,1]), \partial\Omega)$, wobei

$$d(\gamma([0,1]), \partial\Omega) := \min\{d(w_1, w_2) \mid w_1 \in \gamma([0,1]), w_2 \in \partial\Omega\}$$

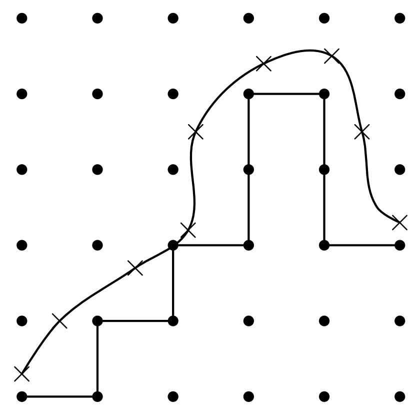
(ist $\Omega = \mathbb{C}$, so setze $\varepsilon = 1$).

(ii) $\delta > 0$ mit $|t_1 - t_2| < \delta \Longrightarrow |\gamma(t_1) - \gamma(t_2)| < \varepsilon$

(iii) $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \delta$

(iv) $z_k \in \Lambda_\varepsilon(c)$ mit $|\gamma(k/n) - z_k| < \sqrt{2}\,\varepsilon\,, \quad k = 0, \ldots, n$ und $z_0 = z_n = c\,.$

(v) Kürzeste $\varepsilon-$Kantenwege $\tilde{\gamma}_k$ zu c von z_{k-1} nach z_k $\forall k\,.$



Dann ist

$$\tilde{\gamma} := \tilde{\gamma}_1 + \ldots + \tilde{\gamma}_n$$

ein geschlossener $\varepsilon-$Kantenweg zu c mit

$$\gamma \underset{\Omega}{\sim} \tilde{\gamma}$$

vermöge

$$H : I \times I \to \Omega\,, \quad (s,t) \mapsto (1-s)\,\gamma(t) + s\tilde{\gamma}(t)\,.$$

Der Satz von der Homotopie-Invarianz liefert

$$\int_\gamma f \, \mathrm{d}\,\zeta = \int_{\tilde{\gamma}} f \, \mathrm{d}\,\zeta$$

$\forall\ f \in \mathcal{O}(\Omega)\,.$ Insbesondere folgt wie im Beweisteil "$\Longrightarrow$", dass $\operatorname{Int}\tilde{\gamma} \subset \Omega$ (da $\operatorname{Int}\gamma \subset \Omega$) .

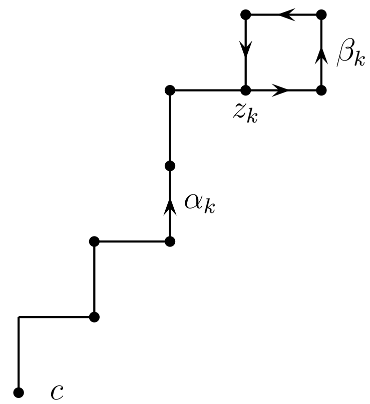
2. Schritt: Œ γ ein geschlossener $\varepsilon-$Kantenweg zu c mit $\operatorname{Int}\gamma = \emptyset$:

Nach dem 1. Schritt: γ ein geschlossener $\varepsilon-$Kantenweg zu $c\,.$

Seien $Q_{z_1}, \ldots, Q_{z_m}$ die nach Eigenschaft (v) der Indexfunktion in (20.1.2) endlich vielen Gitterquadrate, deren Mittelpunkte $c_1, \ldots, c_m$ in $\operatorname{Int}\gamma$ liegen. Dann gilt

$$Q_{z_k} \subset S(\gamma) \cup \operatorname{Int}\gamma \subset \Omega\,.$$

Seien β_k der "Randweg" von Q_{z_k} und α_k ein $\varepsilon-$Kantenweg von c nach z_k mit $S(\alpha_k) \subset \Omega$.



(Ist $z_k \in S(\gamma)$, so kann man auf γ entlang gehen, andernfalls ist $z_k \in \operatorname{Int}\gamma \subset \Omega$ und damit auch alle Punkte auf einem $\varepsilon-$Kantenweg von z_k aus, solange dieser γ nicht trifft).
Dann ist $\gamma_k := \alpha_k + \beta_k - \alpha_k$ nullhomotop in Ω und somit $\operatorname{Int}\gamma_k \subset \Omega$ sowie $\int\limits_{\gamma_k} f \,\mathrm{d}\,\zeta = 0 \quad \forall\; f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Also ist

$$\tilde{\gamma} \;:=\; \gamma - \operatorname{ind}_\gamma(c_1)\,\gamma_1 \;-\ldots-\; \operatorname{ind}_\gamma(c_m)\,\gamma_m$$

ein geschlossener $\varepsilon-$Kantenweg zu c mit

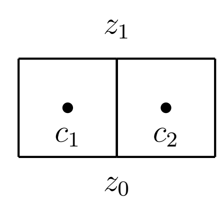
$$\int\limits_\gamma f \,\mathrm{d}\,\zeta = \int\limits_{\tilde{\gamma}} f \,\mathrm{d}\,\zeta \qquad \forall\; f \in \mathcal{O}(\Omega)$$

und

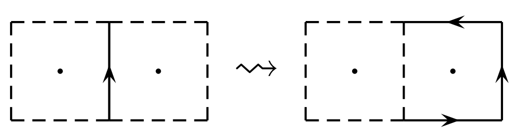
$$\operatorname{Int}\tilde{\gamma} \;=\; \emptyset\,.$$

3. Schritt: Ein geschlossener $\varepsilon-$Kantenweg mit $\operatorname{Int}\gamma = \emptyset$ durchläuft jede seiner Kanten in beiden Richtungen gleich oft.

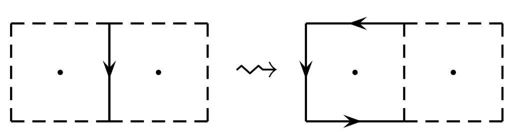
Sei Œ $\overline{z_0\, z_1}$
eine senkrechte Kante.



Sie werde von γ $n-$mal von unten nach oben und $m-$mal von oben nach unten durchlaufen. Wir gehen von γ zu einem $\varepsilon-$Kantenweg $\tilde{\gamma}$ über, in dem wir jede Durchlaufung von unten nach oben



bzw. von oben nach unten



wie eingezeichnet ersetzen. Wegen $\operatorname{Int}\tilde{\gamma} = \emptyset$ folgt

$$\begin{aligned}
\operatorname{ind}_{\tilde{\gamma}}(c_1) &\overset{!}{=} \operatorname{ind}_{\gamma}(c_1) + m = m \\
\operatorname{ind}_{\tilde{\gamma}}(c_2) &\overset{!}{=} \operatorname{ind}_{\gamma}(c_2) + n = n
\end{aligned}$$

Da $\tilde{\gamma}$ die Kante $\overline{z_0\, z_1}$ nicht durchläuft und die Indexfunktion außerhalb der Spur lokal konstant ist (Eigenschaft (ii) der Indexfunktion in (20.1.2) (ii)), folgt $\operatorname{ind}_{\tilde{\gamma}}(c_1) = \operatorname{ind}_{\tilde{\gamma}}(c_2)$ und somit $m = n$. □

20.3. Allgemeine Cauchysche Integralformel. Sei γ nullhomolog in Ω. Dann gilt $\forall\ f \in \mathcal{O}(\Omega)$:

$$\operatorname{ind}_{\gamma}(z)\, f(z) = \frac{1}{2\pi\, i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\,\zeta \qquad \forall\ z \in \Omega \setminus S(\gamma)\,.$$

Beweis. Sei $z \in \Omega \setminus S(\gamma)$. Wie beim Beweis der Cauchyschen Integralformel (11.1) betrachten wir

$$g(\zeta) := \begin{cases} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z} & \zeta \in \Omega \setminus \{z\} \\ f'(z) & \zeta = z \end{cases}$$

Dann ist $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz (17.2) und somit $\int\limits_{\gamma} g\, \mathrm{d}\,\zeta = 0$, da γ nullhomolog. Es folgt

$$\frac{1}{2\pi\, i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\,\zeta = f(z)\, \frac{1}{2\pi\, i} \int\limits_{\gamma} \frac{\mathrm{d}\,\zeta}{\zeta - z} = \operatorname{ind}_{\gamma}(z)\, f(z)\,.$$

□

21. Der Residuensatz

Der Residuensatz ist, wie bereits gesagt, die natürliche Verallgemeinerung des Cauchyschen Integralsatzes auf holomorphe Funktionen mit isolierten Singularitäten und hat viele Anwendungen innerhalb und außerhalb der Funktionentheorie.

21.1. Residuen.

21.1.1. *Definition und Bemerkung:* *Sei $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{c\})$ mit Laurent-entwicklung $f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu (z-c)^\nu$ um c, etwa in $K_r(c) \setminus \{c\}$. Dann heißt $res_c\, f := a_{-1}$ das* ***Residuum von** f **in** c.*

Nach dem Satz (19.3) über die Laurent-Entwicklung gilt $\forall s$ mit $0 < s < r$:

$$\mathrm{res}_c\, f \;=\; a_{-1} \;=\; \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_s(c)} f(\zeta)\, \mathrm{d}\,\zeta\,.$$

Das Residuum ist also der Koeffizient der Laurent-Entwicklung, der beim Integrieren wie oben übrig bleibt.

21.1.2. *Bemerkung:* *Es gelten die folgenden Regeln:*

(i) $res_c\,(\alpha f + \beta g) \;=\; \alpha\, res_c\, f + \beta\, res_c\, g\,, \qquad f, g \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{c\})\,, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}\,.$

(ii) *Ist c einfacher Pol von $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{c\})$, so gilt*

$$res_c\, f \;=\; \lim_{z\to c} (z-c)\, f(z)\,.$$

(iii) *Ist c ein Pol höchstens $n-$ter Ordnung von $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{c\})$ und g die holomorphe Fortsetzung von $(z-c)^n f(z)$ nach c, so gilt*

$$res_c\, f \;=\; \frac{1}{(n-1)!}\, g^{(n-1)}(c)\,.$$

(iv) *Sind $g, h \in \mathcal{O}(U)$, $U \in \mathfrak{U}(c)$ offen, $g(c) \neq 0$, $h(c) = 0$ und $h'(c) \neq 0$, so hat $f := g/h$ in c einen einfachen Pol und es gilt*

$$res_c\, f \;=\; g(c)/h'(c)\,.$$

Beweis. (i) o.k.

(ii) Um c gilt $f(z) = a_{-1}/(z-c) + h(z)$, wo h holomorph um c.

(iii) Um c gilt $f(z) = a_{-n}/(z-c)^n + \ldots + a_{-1}/(z-c) + h(z)$, wo h holomorph um c. Es folgt $g(z) = a_{-n} + \ldots + a_{-1}(z-c)^{n-1} + \ldots$ um c, d.h. $\mathrm{res}_c\, f \;=\; a_{-1} \;=\; \frac{1}{(n-1)!}\, g^{(n-1)}(c)$.

(iv) Um c gilt $h(z) = h'(c)(z-c) + \ldots$, es folgt

$$\lim_{z\to c} (z-c) f(z) \;=\; \lim_{z\to c} (z-c)\, \frac{g(z)}{h(z)} \;=\; \frac{g(c)}{h'(c)} \;\neq\; 0\,.$$

$\square$

21.1.3. *Beispiele:*

(i) *In Beispiel (19.5.2) zur Charakterisierung isolierter Singularitäten haben wir die Laurententwicklungen von* $f(z) = \frac{1}{z^2(z-i)}$ *um* 0 *und* i *bestimmt. Es gilt* $res_0\, f = (-1)^{-1+3} = 1$, $res_i\, f = (-1)^{-1}\frac{-1+2}{i^{-1+1}} = -1$.

(ii) $f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}$ *ist meromorph in* $\mathbb{C}$, *die Polstellen sind gerade die* $4-$*ten Wurzeln aus* -1: $c_\nu := i^\nu\, e^{\pi\, i/4} = \frac{i^\nu}{\sqrt{2}}(1+i)$, $\nu = 0, \ldots, 3$. *Nach Teil (iv) der obigen Bemerkung sind alle Pole einfach mit*

$$res_{c_\nu}\, f = \frac{i^{2\nu}\, e^{2\pi\, i/4}}{4\, i^{3\nu}\, e^{3\pi\, i/4}} = \frac{1}{4i^\nu}\, e^{-\pi\, i/4} = \frac{1}{4i^\nu\sqrt{2}}(1-i)\,.$$

21.2. Residuensatz. Seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, γ ein nullhomologer Weg in Ω und $A = \{c_1, \ldots, c_m\} \subset \Omega$ endlich mit $A \cap S(\gamma) = \emptyset$. Dann gilt $\forall\, f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus A)$:

$$\frac{1}{2\pi\, i}\int_\gamma f\, \mathrm{d}\,\zeta = \sum_{c\in\Omega} \mathrm{ind}_\gamma(c)\cdot \mathrm{res}_c(f)\,.$$

Beweis. Zunächst bemerken wir, dass die Summe rechts endlich ist: Da das Residuum $\mathrm{res}_c(f)$ Null ist für $c \notin A$, wird tatsächlich nur über die endlich vielen Punkte von $A \cap \mathrm{Int}\,\gamma$ summiert. Für jedes μ sei nun h_μ der Hauptteil der Laurententwicklung von f um c_μ. Dann ist $h_\mu \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus c_\mu)$ (der Radius r in Satz (19.3) über die Laurententwicklung auf Kreisringen ist hier 0). Es folgt $f - \sum\limits_{\mu=1}^{m} h_\mu \in \mathcal{O}(\Omega)$ (die Differenz ist per Definition des Hauptteils um jedes c_μ holomorph). Der allgemeine Satz von Cauchy liefert

$$\int_\gamma f\, \mathrm{d}\,\zeta = \sum_{\mu=1}^{m}\int_\gamma h_\mu\, \mathrm{d}\,\zeta\,.$$

Wir schreiben $h_\mu(\zeta) = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_{-\nu\mu}(\zeta - c_\mu)^{-\nu}$ und erhalten mit dem Vertauschungssatz (9.3.7) (die Reihe konvergiert nach Satz (19.3) über die Laurententwicklung auf Kreisringen insbesondere gleichmäßig auf $S(\gamma)$, da $A \cap S(\gamma) = \emptyset$):

$$\begin{aligned}\int_\gamma h_\mu \mathrm{d}\,\zeta &= \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{-\nu\mu}\int_\gamma (\zeta - c_\mu)^{-\nu}\mathrm{d}\,\zeta\\ &\overset{(*)}{=} a_{-1\mu}\int_\gamma(\zeta - c_\mu)^{-1}\mathrm{d}\,\zeta\\ &= \mathrm{res}_{c_\mu}(f)\cdot 2\pi\, i\cdot \mathrm{ind}_\gamma(c_\mu)\,.\end{aligned}$$

Dabei gilt (*), da $(\zeta - c_\mu)^{-\nu}$ für $\nu \geq 2$ eine Stammfunktion in $\mathbb{C} \setminus \{c_\mu\}$ hat. □

21.2.1. *Bemerkung.*

(i) *Man beachte, dass in einem einfach zusammenhängenden Gebiet alle geschlossenen Integrationswege nullhomolog sind.*

(ii) *Der Residuensatz erlaubt es, Integrale der Form* $\int_\gamma f\, d\zeta$ *ohne komplizierte Rechnungen zu bestimmen. Wir werden im nächsten Abschnitt ein einfaches Beispiel sehen.*

(iii) *Der Residuensatz gilt auch, wenn wir nur voraussetzen, dass f bis auf eine in Ω diskrete (nicht notwendig endliche) Teilmenge $A \subset \Omega$ mit $A \cap S(\gamma) = \emptyset$ holomorph ist: Mit Eigenschaft (iv) der Indexfunktion und dem allgemeinen Cauchyschen Integralsatz folgt $\overline{Int\,\gamma} \subset Int\,\gamma \cup S(\gamma) \subset \Omega$. Wegen Eigenschaft (v) der Indexfunktion ist aber $\overline{Int\,\gamma}$ kompakt und enthält somit nur endlich viele Punkte der in Ω diskreten Menge A.*

22. Anwendungen des Residuensatzes

Wir beginnen mit einer Anwendung des Residuenkalküls in der reellen Analysis, nämlich der Berechnung reeller Integrale. Wir erklären die Vorgehensweise an einem Beispiel. Für weitere Beispiele siehe Literatur.

22.1. Beispiel. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \pi$.

Dies können wir mit Hilfe einer Stammfunktion direkt ausrechnen:

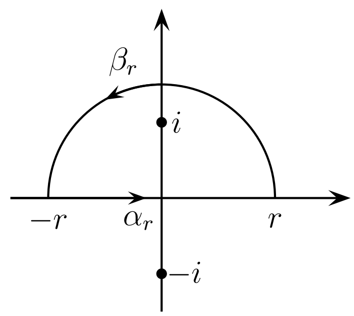
$$\int\limits_{-r}^{r} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x \Big|_{-r}^{r} \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} \pi .$$

Wir bestimmen das Integral nun ohne Stammfunktion durch Fortsetzen des Integranden ins Komplexe. Dazu schreiben wir

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z+i)(z-i)} .$$

Wir betrachten die Wege

$\alpha_r := [-r, r]$,
$\beta_r := \partial K_r(0)|_{[0,\pi]}, \quad r > 1$
$\gamma_r := \alpha_r + \beta_r$.



Da $\mathbb{C}$ einfach zusammenhängend ist, ist insbesondere γ_r nullhomolog in $\mathbb{C}$. Also liefert der Residuensatz:

$$\underset{1}{\underset{\|}{\operatorname{ind}_{\gamma_r}(i)}} \ \underset{1/2\,i}{\underset{\|}{\operatorname{res}_i(f)}} + \underset{0}{\underset{\|}{\operatorname{ind}_{\gamma_r}(-i)}} \operatorname{res}_{-i}(f) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_r} \frac{\mathrm{d}\,\zeta}{1+\zeta^2} ,$$

d.h.

$$\pi = \int\limits_{\gamma_r} \frac{\mathrm{d}\,\zeta}{1+\zeta^2} = \int\limits_{\alpha_r} \frac{\mathrm{d}\,\zeta}{1+\zeta^2} + \int\limits_{\beta_r} \frac{\mathrm{d}\,\zeta}{1+\zeta^2} .$$

Die Standardabschätzung ergibt

$$\left| \int\limits_{\beta_r} \frac{\mathrm{d}\,\zeta}{1+\zeta^2} \right| \leq \frac{\pi r}{r^2-1} \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0 .$$

Es folgt

$$\int\limits_{-r}^{r} \frac{\mathrm{d}\,x}{1+x^2} = \int\limits_{\alpha_r} \frac{\mathrm{d}\,\zeta}{1+\zeta^2} \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} \pi . \qquad \square$$

Nun diskutieren wir Anwendungen in der Funktionentheorie.

22.2. Anzahlformel für Null- und Polstellen. Die Details zum Beweis von Satz 18.1.4 über $\mathcal{M}(\Omega)$ als $\mathbb{C}$-Algebra zeigen: Ist $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ eine meromorphe Funktion, so ist auch die Ableitung f' eine meromorphe Funktion mit der gleichen Polstellenmenge wie f. Weiter ist der Quotient f/g zweier Elemente $f, g \in M(\Omega)$ insbesondere dann definiert als Element in $\mathcal{M}(\Omega)$, wenn g nur endlich viele Nullstellen in Ω hat. Also ist das Integral in dem folgenden Satz definiert:

22.2.1. Satz (Null- und Polstellen zählendes Integral). *Sei $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ mit nur endlich vielen Null- und Polstellen in Ω. Dann gilt für jeden nullhomologen Weg γ in Ω, der durch keine dieser Stellen geht:*

$$\sum_{c \text{ Nullstelle von } f} ind_\gamma(c) \cdot o_c(f) - \sum_{d \text{ Polstelle von } f} ind_\gamma(d) \cdot o_d(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta\,.$$

Beweis. Die Behauptung ergibt sich aus dem Residuensatz und dem folgenden Lemma. □

22.2.2. *Lemma:*

(i) *Ist $f \in \mathcal{O}(U)$, $U \in \mathfrak{U}(c)$ offen und ist c eine Nullstelle von f, so gilt:*

$$res_c\,\Big(\frac{f'(z)}{f(z)}\Big) = o_c(f)\,.$$

(ii) *Ist $f \in \mathcal{M}(U)$, $U \in \mathfrak{U}(d)$ offen und ist d ein Pol von f, so gilt:*

$$res_c\,\Big(\frac{f'(z)}{f(z)}\Big) = -o_d(f)\,.$$

Beweis. (i) Um c gilt $f(z) = (z-c)^n\, g(z)$ mit $n := o_c(f)$ und g holomorph um c mit $g(c) \neq 0$ (siehe die Rechenregeln für die Ordnung in (16.4.1)). Es folgt

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n(z-c)^{n-1}g(z) + (z-c)^n g'(z)}{(z-c)^n g(z)} = \frac{n}{(z-c)} + \text{holomorph}$$

um c und somit die Behauptung.

(ii) Analog mit $m = o_d(f)$ und einer Darstellung $f(z) = \frac{g(z)}{(z-d)^m}$ (siehe den Hauptsatz für Pole (17.3.2), (ii)).

□

22.2.3. *Bemerkung:* *Ist $a \in \mathbb{C}$ ein beliebiger Punkt, so gelten obige Aussagen analog für **a-Stellen** anstatt Nullstellen, d.h. für Punkte $c \in \Omega$ mit $f(c) = a$: Ersetze die Ordnung $o_c(f)$ durch die Vielfachheit $\nu(f, c)$ (vergleiche (16.4.1)) und $\int_\gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta$ durch $\int_\gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)-a}\, d\zeta$.*

Wir behandeln noch einen Spezialfall.

22.2.4. Definition. *Ein geschlossener Weg γ in $\mathbb{C}$ heißt **einfach geschlossen**, wenn*

$$Int\,\gamma \neq \emptyset \quad \text{und} \quad ind_\gamma(z) = 1 \qquad \forall\ z \in Int\,\gamma\,.$$

22.2.5. *Beispiel:*

(i) *Kreisränder sind einfach geschlossen (9.3.8).*
(ii) *Dreiecksränder sind einfach geschlossen (Aufgaben).*

22.2.6. *Anzahlformel für Null-und Polstellen:* *Sei $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ mit nur endlich vielen Null- und Polstellen in Ω. Sei weiter γ ein einfach geschlossener nullhomologer Weg in Ω, so dass f null- und polstellenfrei auf γ ist. Dann ist*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'}{f}\, d\zeta \in \mathbb{Z}$$

gleich Anzahl der Nullstellen - Anzahl der Polstellen in Intγ (mit Vielfachheit gerechnet).

22.3. Satz von Rouché. Seien $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$. Ist γ ein einfach geschlossener nullhomologer Weg in Ω mit

$$(*) \qquad |f(\zeta) - g(\zeta)| < |g(\zeta)| \quad \forall\ \zeta \in S(\gamma),$$

so haben f und g die gleiche Anzahl von Nullstellen in $\operatorname{Int}\gamma$ (mit Vielfachheit gerechnet).

Beweis. Wir betrachten die auf Ω meromorphe Funktion $h := f/g$. Nach $(*)$ ist g nullstellenfrei auf $S(\gamma)$. Aus Stetigkeitsgründen gibt es dann eine offene Menge $U \subset \Omega$, $S(\gamma) \subset U$, so dass g nullstellenfrei in U ist und so dass $(*)$ auch auf U gilt:

$$|h(z) - 1| < 1 \quad \forall z \in U, \quad d.h. \quad h(U) \subset K_1(1) \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-.$$

Somit ist $\log h$ wohldefiniert in U nach Abschnitt (15.1) und dort eine Stammfunktion von $h'/h = f'/f - g'/g$. Da f, g nullstellenfrei sind auf $S(\gamma)$ nach $(*)$ folgt

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'}{f}\,\mathrm{d}\,\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{g'}{g}\,\mathrm{d}\,\zeta$$

und somit die Behauptung mit der Formel in (22.2.6). $\square$

Literaturverzeichnis

[1] Conway. *Functions of one complex variable.*

[2] Fischer/Lieb. *Funktionentheorie.*

[3] Jänich. *Einführung in die Funktionentheorie.*

[4] R.Remmert. *Funktionentheorie I.* Springer-Verlag, 1972. Heidelberger Taschenbücher.