

# **Einführung in die Funktionentheorie**

Andreas Gathmann

Vorlesungsskript TU Kaiserslautern 2008/09

## INHALTSVERZEICHNIS

0. Einleitung und Motivation	1
1. Komplexe Zahlen, Folgen und Reihen	2
2. Stetigkeit und Differenzierbarkeit	7
3. Wegintegrale	14
4. Der Cauchysche Integralsatz	19
5. Homotopie von Wegen	25
6. Folgerungen aus dem Cauchyschen Integralsatz	29
7. Potenzreihen und Taylor-Reihen	35
8. Folgerungen aus der Potenzreihenentwicklung	42
9. Laurent-Reihen	47
10. Isolierte Singularitäten	52
11. Die Umlaufzahl und der Residuensatz	57
12. Berechnung reeller Integrale mit dem Residuensatz	65
13. Abzählen von Null- und Polstellen	70
14. Die Riemannsche Zetafunktion	76
Literatur	85

## 0. EINLEITUNG UND MOTIVATION

Funktionentheorie ist — kurz gesagt — die Theorie der Differential- und Integralrechnung in einer komplexen Variablen. Eigentlich wäre also der Name „komplexe Analysis“ zutreffender, und in der Tat wird der Stoff dieser Vorlesung im Englischen auch als „complex analysis“ bezeichnet. Der deutsche Begriff „Funktionentheorie“ ist historisch bedingt (viele der Begründer der Funktionentheorie sind Deutsche, z.B. Bernhard Riemann und Karl Weierstraß) und bis heute erhalten geblieben.

Obwohl die grundlegenden Definitionen der Funktionentheorie (z.B. die der komplexen Differenzierbarkeit) formal genauso wie im Reellen aussehen, führt der zweidimensionale Charakter der komplexen Zahlenebene dazu, dass sich die komplexe Theorie sehr deutlich von der reellen unterscheidet. Ist z.B.  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  eine Abbildung, so können wir  $f$  auf zwei Arten auffassen: einerseits ist  $f$  eine Funktion in *einer komplexen* Variablen, andererseits ist aber auch  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ , so dass wir  $f$  genauso gut als Funktion in *zwei reellen* Variablen auffassen können. Die Funktionentheorie wird dadurch zu einer sehr interessanten Mischung aus ein- und mehrdimensionaler Analysis. Ein wesentliches „eindimensionales Merkmal“ der Funktionentheorie ist z.B., dass die Ableitung einer komplex differenzierbaren Funktion wieder eine Funktion (und nicht wie im Mehrdimensionalen eine Matrix) ist. Ein wesentliches „zweidimensionales Merkmal“ ist dagegen, dass man bei Grenzwertbetrachtungen nicht nur „von links und rechts“ sondern aus einer ganzen zweidimensionalen Umgebung gegen einen gegebenen Punkt laufen kann, und somit (im Gegensatz zur eindimensionalen reellen Analysis) die Topologie der Ebene eine ganz wichtige Rolle spielt.

In der Tat werden wir sehen, dass diese interessante Mischung aus ein- und mehrdimensionaler Analysis dazu führt, dass die komplexe Analysis sehr viel schöner ist als die reelle. Ihr werdet euch sicher noch an die zahlreichen „Gegenbeispiele der reellen Analysis“ erinnern: Abbildungen, die partiell aber nicht total differenzierbar sind, total aber nicht stetig partiell differenzierbar, einmal aber nicht zweimal differenzierbar, unendlich oft differenzierbar aber trotzdem nicht durch ihre Taylorreihe darstellbar, und vieles mehr. *In der komplexen Analysis gibt es diese ganzen Unterschiede nicht.* Es gibt hier nur *einen* Begriff, nämlich den der komplexen Differenzierbarkeit. Eine Funktion, die diese Eigenschaft hat, ist damit automatisch unendlich oft differenzierbar, (lokal) integrierbar und (lokal) durch ihre Taylorreihe darstellbar. Außerdem sind solche komplex differenzierbaren Funktionen bereits durch ihre Funktionswerte auf einer beliebig kleinen offenen Menge eindeutig bestimmt (!), und es gibt einige sehr einfache Möglichkeiten, mit denen man oft ihre Integrale ausrechnen kann, auch wenn man keine Stammfunktion explizit kennt. In vielen Fällen kann man sogar reelle Integrale erst dadurch berechnen, dass man sie als komplexe Integrale auffasst und sie dann mit den Methoden der Funktionentheorie löst.

Außer diesen schönen Eigenschaften komplex differenzierbarer Funktionen gibt es noch viele weitere Anwendungen der Funktionentheorie, von denen wir einige in dieser Vorlesung behandeln werden. Erwähnenswert ist hier vor allem der Fundamentalsatz der Algebra (d.h. die Aussage, dass jedes nicht konstante komplexe Polynom eine Nullstelle besitzt), für den wir mit funktionentheoretischen Mitteln mehrere einfache Beweise sehen werden. Auch in der Zahlentheorie gibt es viele Anwendungen, von denen wir einige im letzten Kapitel dieses Skripts sehen werden. Nicht zuletzt stammt auch das derzeit berühmteste ungelöste Problem der Mathematik, die sogenannte Riemannsche Vermutung, aus der Funktionentheorie (bzw. aus dem Grenzgebiet zwischen Funktionentheorie und Zahlentheorie). Wir werden auch hierauf am Schluss dieser Vorlesung kurz eingehen.

Insgesamt wird die Funktionentheorie aufgrund ihrer relativ naheliegenden Konstruktionen sowie ihrer einfach zu verstehenden und dennoch sehr vielfältigen und mächtigen Resultate von vielen (Dozenten sowie Studenten) als die „schönste Vorlesung des Mathematikstudiums“ bezeichnet. Ich überlasse es euch selbst, euch diesbezüglich eine Meinung zu bilden. . .

## 1. KOMPLEXE ZAHLEN, FOLGEN UND REIHEN

Bevor wir mit der Analysis beginnen, wollen wir zunächst die grundlegenden Definitionen und Eigenschaften der komplexen Zahlen noch einmal kurz wiederholen.

**Definition 1.1.** Die **Menge der komplexen Zahlen** wird definiert als  $\mathbb{C} := \mathbb{R}^2$ . Auf dieser Menge betrachten wir die beiden Verknüpfungen

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) + (x_2, y_2) &:= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) && \text{(Addition)} \\ (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) &:= (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) && \text{(Multiplikation)}\end{aligned}$$

(mit  $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$ ). Elemente der Form  $(x, 0)$  schreiben wir einfach als  $x$ : beachte, dass diese Elemente genauso addiert und multipliziert werden wie reelle Zahlen, so dass wir  $\mathbb{R}$  auf diese Art als Teilmenge von  $\mathbb{C}$  auffassen können. Setzen wir noch  $i := (0, 1)$ , so können wir also jedes Element  $(x, y) \in \mathbb{C}$  als  $x + iy$  schreiben — was die übliche Schreibweise für komplexe Zahlen ist.

*Bemerkung 1.2.*

- (a) Mit der Definition 1.1 ergeben sich die Addition und Multiplikation komplexer Zahlen offensichtlich einfach durch formales Addieren und Ausmultiplizieren von Ausdrücken der Form  $x + iy$  mit  $x, y \in \mathbb{R}$  unter Beachtung der Relation  $i^2 = -1$ .
- (b) Man rechnet leicht nach, dass die komplexen Zahlen mit den beiden gegebenen Verknüpfungen einen Körper bilden. Da die Addition komplexer Zahlen einfach die Vektoraddition in  $\mathbb{R}^2$  ist, ist das additive Inverse von  $x + iy$  gerade  $-x - iy$ . Das multiplikative Inverse zu einer komplexen Zahl  $x + iy \neq 0$  ist  $\frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i \frac{y}{x^2+y^2}$ .

**Definition 1.3.** Für eine komplexe Zahl  $z = x + iy$  (mit  $z \in \mathbb{C}$  und  $x, y \in \mathbb{R}$ ) definieren wir

- (a) den **Realteil** von  $z$  als  $\operatorname{Re} z := x \in \mathbb{R}$ ;
- (b) den **Imaginärteil** von  $z$  als  $\operatorname{Im} z := y \in \mathbb{R}$ ;
- (c) die zu  $z$  **komplex konjugierte Zahl** als  $\bar{z} := x - iy \in \mathbb{C}$ ;
- (d) den **Betrag** von  $z$  als  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  (also genauso wie die normale euklidische Norm eines Vektors in  $\mathbb{R}^2$ ).

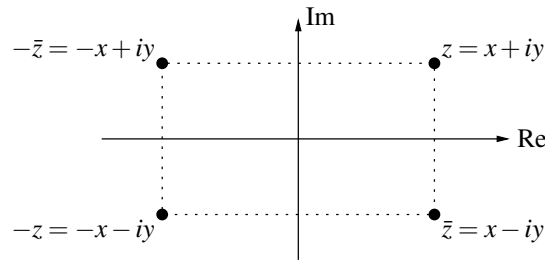
Zwischen diesen Zahlen gelten die folgenden elementaren Relationen:

**Lemma 1.4.** Für alle  $z, w \in \mathbb{C}$  gilt

- (a)  $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2} \cdot (z + \bar{z})$  und  $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i} \cdot (z - \bar{z})$ ;
- (b)  $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$  und  $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$  (d.h. die komplexe Konjugation ist ein Körperisomorphismus);
- (c)  $\overline{\bar{z}} = z$ ;
- (d)  $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$  und  $|z + w| \leq |z| + |w|$ ;
- (e)  $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ .

*Beweis.* einfaches Nachrechnen. Die Ungleichung in (d) ist genau die bekannte Dreiecksungleichung für Vektoren in  $\mathbb{R}^2$ . □

*Bemerkung 1.5.* Da wir  $\mathbb{C}$  als  $\mathbb{R}^2$  definiert haben, können wir komplexe Zahlen als Punkte in der Ebene, der sogenannten **komplexen Zahlenebene** darstellen. Das folgende Bild zeigt zum Beispiel, welche Zahlen man erhält, wenn man einen gegebenen Punkt  $z \in \mathbb{C}$  an der reellen oder imaginären Achse spiegelt.



Wir kommen nun zum ersten Begriff der Analysis, nämlich der Konvergenz von Folgen und Reihen. Wie definieren diesen Begriff wie erwartet, wobei wir entweder die Definition aus der eindimensionalen Analysis für den Grundkörper  $\mathbb{C}$  oder die aus der zweidimensionalen Analysis mit dem Grundkörper  $\mathbb{R}$  (und der euklidischen Norm) verwenden können:

**Definition 1.6** (Konvergenz von Folgen und Reihen). Eine Folge  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  komplexer Zahlen heißt **konvergent** gegen  $z \in \mathbb{C}$ , wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |z_n - z| < \varepsilon$$

gilt. Wie üblich heißt  $z$  dann auch der **Grenzwert** von  $(z_n)$ , und wir schreiben  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$  oder einfach  $z_n \rightarrow z$ . Weiterhin setzen wir wie üblich für die zugehörige Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n := \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N z_n,$$

sofern dieser Grenzwert existiert. Wir sagen in diesem Fall, dass die durch  $(z_n)$  bestimmte Reihe konvergiert und nennen  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  den Wert dieser unendlichen Reihe.

*Bemerkung 1.7.* Wir erinnern uns kurz an die wesentlichen Konvergenzkriterien aus den Grundlagen der Mathematik:

- Die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  heißt **absolut konvergent**, wenn die reelle Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$  der zugehörigen Beträge konvergiert. Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent; die Umkehrung dieser Aussage gilt jedoch nicht [G, Lemma 6.14].
- Eine Folge  $(z_n)$  konvergiert genau dann gegen  $z$ , wenn die reellen Folgen  $(\operatorname{Re} z_n)$  und  $(\operatorname{Im} z_n)$  gegen  $\operatorname{Re} z$  bzw.  $\operatorname{Im} z$  konvergieren [G, Lemma 21.15]. Insbesondere vertauscht die Grenzwertbildung daher mit der komplexen Konjugation: ist  $z_n \rightarrow z$ , so folgt  $\operatorname{Re} z_n \rightarrow \operatorname{Re} z$  sowie  $-\operatorname{Im} z_n \rightarrow -\operatorname{Im} z$  und damit auch  $\bar{z}_n \rightarrow \bar{z}$ .
- (Quotientenkriterium für Reihen)** Es seien komplexe Zahlen  $z_n \in \mathbb{C}$  für  $n \in \mathbb{N}$  gegeben. Gibt es dann ein  $0 < q < 1$ , so dass  $\left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| \leq q$  für fast alle  $n$  gilt, so ist die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  absolut konvergent [G, Satz 6.19 und Folgerung 6.20]. Insbesondere ist dies der Fall, wenn die Folge  $\left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right|$  einen Grenzwert kleiner als 1 hat. Ist hingegen  $\left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| \geq 1$  für fast alle  $n$ , so ist die Reihe divergent; dies ist insbesondere dann der Fall, wenn die Folge der Quotienten  $\left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right|$  einen Grenzwert größer als 1 besitzt. Beachte, dass das Quotientenkriterium nicht in jedem Fall über Konvergenz oder Divergenz der Reihe entscheiden kann; z.B. dann nicht, wenn die Folge der betrachteten Quotienten gegen 1 konvergiert.
- (Wurzelkriterium für Reihen)** Analog zum Quotientenkriterium gilt auch das Wurzelkriterium [G, Aufgabe 7.27]: es lautet wörtlich genauso wie das Quotientenkriterium, mit dem einzigen Unterschied, dass statt des Quotienten  $\left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right|$  der Ausdruck  $\sqrt[n]{|z_n|}$  genommen wird. Beide Kriterien beruhen letztlich auf dem Vergleich mit der geometrischen Reihe.

Die wichtigste Anwendung der Folgenkonvergenz im Komplexen ist die komplexe Exponentialfunktion, die wir jetzt einführen:

**Lemma und Definition 1.8 (Komplexe Exponentialfunktion).** Für alle  $z \in \mathbb{C}$  existiert der Grenzwert

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

*Beweis.* Für  $z = 0$  ist die Aussage trivial, und für alle  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  gilt

$$\left| \frac{z^{n+1}/(n+1)!}{z^n/n!} \right| = \left| \frac{z}{n+1} \right| \rightarrow 0$$

für  $n \rightarrow \infty$ . Damit konvergiert die Exponentialreihe nach dem Quotientenkriterium aus Bemerkung 1.7 (c) absolut und ist nach Bemerkung 1.7 (a) somit auch konvergent.  $\square$

*Bemerkung 1.9.*

- (a) Die (komplexe) Exponentialfunktion genügt der Funktionalgleichung  $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$  für alle  $z, w \in \mathbb{C}$  (siehe [G, Beispiel 6.31 (a)]; für den Beweis zeigt man, dass man das Produkt  $(\sum_n \frac{z^n}{n!})(\sum_m \frac{w^m}{m!})$  aufgrund der absoluten Konvergenz der Exponentialreihe als Cauchy-Produkt „naiv ausmultiplizieren“ kann und fasst die Terme geschickt zusammen).
- (b) Die komplexe Exponentialfunktion „vertauscht mit der komplexen Konjugation“, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} e^{\bar{z}} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{\bar{z}^n}{n!} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \overline{\sum_{n=0}^N \frac{z^n}{n!}} \quad (\text{nach Lemma 1.4 (b)}) \\ &= \overline{\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{z^n}{n!}} \quad (\text{nach Bemerkung 1.7 (b)}) \\ &= \overline{e^z}. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt also für eine „rein imaginäre“ Zahl  $z = iy$  mit  $y \in \mathbb{R}$

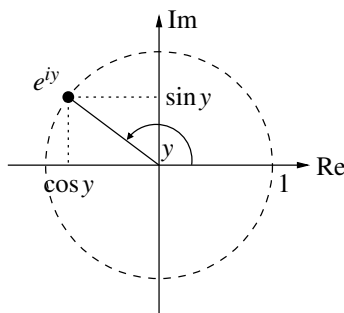
$$|e^{iy}| = \sqrt{e^{iy} \cdot \overline{e^{iy}}} = \sqrt{e^{iy} \cdot e^{-iy}} = \sqrt{e^{iy-iy}} = \sqrt{e^0} = 1,$$

d.h. komplexe Zahlen der Form  $e^{iy}$  liegen auf dem Einheitskreis in der komplexen Zahlenebene. Dies können wir noch etwas besser verstehen:

- (c) Für  $y \in \mathbb{R}$  setzen wir bekanntlich [G, Definition 8.10]

$$\begin{aligned} \cos y &:= \operatorname{Re} e^{iy} = \frac{1}{2} (e^{iy} + e^{-iy}) \\ \text{und} \quad \sin y &:= \operatorname{Im} e^{iy} = \frac{1}{2i} (e^{iy} - e^{-iy}) \end{aligned}$$

(siehe Lemma 1.4 (a) für die jeweils zweite Formel). Also ist  $e^{iy} = \cos y + i \sin y$  genau der Punkt in der komplexen Zahlenebene, der mit der positiven reellen Halbachse wie im folgenden Bild den Winkel  $y$  einschließt:



In der Funktionentheorie betrachtet man allerdings in der Regel Funktionen von komplexen Variablen. Daher wollen wir die Winkelfunktionen auch für alle komplexen Zahlen festlegen. Erwartungsgemäß definieren wir daher **Kosinus** und **Sinus** für alle  $z \in \mathbb{C}$  durch

$$\cos z := \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \quad \text{und} \quad \sin z := \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}).$$

Beachte jedoch, dass für allgemeine komplexe Zahlen *nicht* die Formeln  $\cos z = \operatorname{Re} e^{iz}$  und  $\sin z = \operatorname{Im} e^{iz}$  gelten: in der Regel werden  $\cos z$  und  $\sin z$  nicht einmal reelle Zahlen sein. Wir können die Winkelfunktionen aber wie im Reellen als eine Potenzreihe schreiben, z.B. für den Kosinus

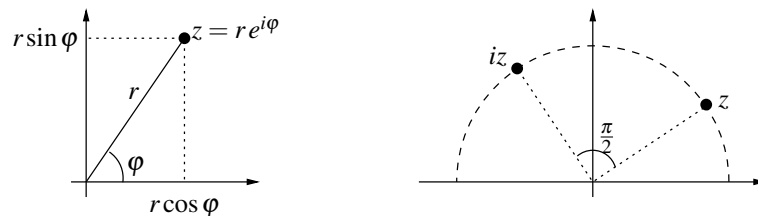
$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{1}{2} \left( 1 + (iz) + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \dots + 1 + (-iz) + \frac{(-iz)^2}{2!} + \frac{(-iz)^3}{3!} + \dots \right) \\ &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} \mp \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \end{aligned}$$

(beachte, dass wir die Terme in den Reihen wegen der absoluten Konvergenz der Exponentialreihe beliebig umordnen können). Analog gilt für den Sinus  $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ .

**Bemerkung 1.10 (Polarkoordinaten).** Ist  $z \neq 0$  wie im Bild unten links eine komplexe Zahl mit Betrag  $r = |z|$ , die mit der positiven reellen Halbachse den Winkel  $\varphi \in [0, 2\pi)$  einschließt, so können wir  $z$  nach Bemerkung 1.9 (c) schreiben als

$$z = r \cos \varphi + ir \sin \varphi = r \cdot e^{i\varphi}.$$

Wir nennen  $\varphi$  den **Winkel** oder das **Argument** von  $z$ ; die Größen  $r$  und  $\varphi$  heißen die Polarkoordinaten von  $z$ .



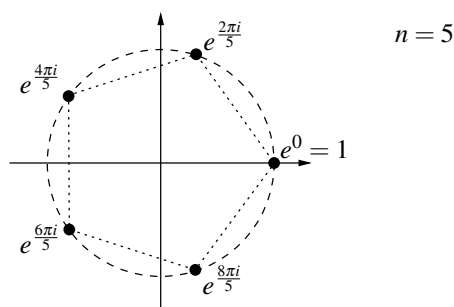
Aus der Polarkoordinatendarstellung erhalten wir eine sehr einfache geometrische Interpretation der Multiplikation komplexer Zahlen: für  $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$  und  $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$  ist nach Bemerkung 1.9 (a)

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)},$$

d.h. bei der Multiplikation komplexer Zahlen werden die Beträge multipliziert und die Winkel addiert. Ein einfaches Beispiel davon zeigt das Bild oben rechts: da  $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$  die Zahl mit Betrag 1 und Winkel  $\frac{\pi}{2}$  ist, entspricht die Drehung einer komplexen Zahl  $z \in \mathbb{C}$  um  $\frac{\pi}{2}$  um den Nullpunkt gerade einer Multiplikation mit  $i$ .

**Beispiel 1.11.** Wir betrachten die Polynomgleichung  $z^n - 1 = 0$  für ein fest gegebenes  $n \geq 1$ . Welche Lösungen hat diese Gleichung über  $\mathbb{C}$ ? Wir wissen aus der linearen Algebra, dass ein solches Polynom höchstens  $n$  Nullstellen haben kann. Andererseits können wir jetzt aber auch  $n$  verschiedene Lösungen dieser Gleichung angeben: die Zahlen  $e^{\frac{2\pi ik}{n}}$  für  $k = 0, \dots, n-1$ , also nach unserer Interpretation aus Bemerkung 1.9 (c) die Eckpunkte eines regelmäßigen  $n$ -Ecks wie in dem Bild unten, erfüllen die gegebene Gleichung, denn

$$\left( e^{\frac{2\pi ik}{n}} \right)^n = e^{2\pi ik} = (e^{2\pi i})^k = 1^k = 1.$$



Wir nennen diese Zahlen die  $n$ -ten **Einheitswurzeln**. Aus der üblichen Zerlegung eines Polynoms in Linearfaktoren folgt dann also insbesondere die Polynomgleichung

$$z^n - 1 = (z - 1) \left( z - e^{\frac{2\pi i}{n}} \right) \cdots \left( z - e^{\frac{2\pi i(n-1)}{n}} \right).$$

Analog kann man auch die  $n$  verschiedenen Lösungen der Gleichung  $z^n - c = 0$  für ein beliebiges  $c \in \mathbb{C}$  mit  $c \neq 0$  finden, so hat z.B. die Gleichung  $z^3 = 2$  die drei Lösungen  $\sqrt[3]{2}$ ,  $\sqrt[3]{2} e^{\frac{2\pi i}{3}}$  und  $\sqrt[3]{2} e^{\frac{4\pi i}{3}}$ .

**Aufgabe 1.12.** Stelle die folgenden komplexen Zahlen  $z$  in der Form  $x + iy$  mit  $x, y \in \mathbb{R}$  dar:

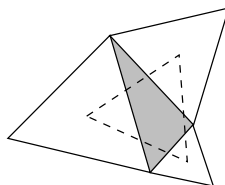
- (a)  $z = \frac{2+i}{1-i}$ ;
- (b)  $z = \left( \frac{1+i}{\sqrt{2}} \right)^{1357}$ ;
- (c) alle Lösungen der Gleichung  $z^4 + z^2 + 1 = 0$ ;
- (d) alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $\left| \frac{z-1}{z-i} \right| < 1$ ;

**Aufgabe 1.13.** Welche der folgenden bekannten Eigenschaften der reellen Winkelfunktionen sind auch für alle komplexen Zahlen gültig?

- (a)  $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$  für alle  $z$ ;
- (b)  $|\cos z| \leq 1$  für alle  $z$ ;
- (c) die Gleichung  $\sin z = 0$  hat genau die Lösungen  $n\pi$  mit  $n \in \mathbb{Z}$ ;
- (d)  $\sin 2z = 2 \sin z \cos z$  für alle  $z$ .

**Aufgabe 1.14.**

- (a) Zeige, dass drei verschiedene Punkte  $a, b, c \in \mathbb{C}$  in der komplexen Zahlenebene genau dann die entgegen dem Uhrzeigersinn benannten Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks sind, wenn die Gleichung  $a + \omega b + \omega^2 c = 0$  mit  $\omega := e^{\frac{2\pi i}{3}}$  gilt.
- (b) Gegeben sei ein Dreieck  $\Delta$  in der Ebene (im Bild unten grau gezeichnet). Wir errichten nun über jeder Seite von  $\Delta$  ein gleichseitiges Dreieck. Zeige unter Benutzung von (a), dass die Mittelpunkte dieser gleichseitigen Dreiecke selbst wieder ein gleichseitiges Dreieck bilden (im Bild unten gestrichelt gezeichnet).





## 2. STETIGKEIT UND DIFFERENZIERBARKEIT

Wir wollen uns nun komplexen Funktionen zuwenden und dabei zunächst die ersten in der Analysis betrachteten Eigenschaften untersuchen, nämlich Stetigkeit und Differenzierbarkeit. Bei der Stetigkeit gibt es keine Überraschungen, da sie natürlich genauso definiert wird wie schon aus den Grundlagen der Mathematik bekannt.

**Definition 2.1** (Grenzwerte von Funktionen). Es sei  $D \subset \mathbb{C}$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  eine Abbildung und  $a \in \bar{D}$  ein Punkt im Abschluss von  $D$  [G, Definition 7.1 bzw. 21.26]. Dann heißt eine Zahl  $c \in \mathbb{C}$  **Grenzwert** von  $f(z)$  für  $z \rightarrow a$ , wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall z \in D : |z - a| < \delta \Rightarrow |f(z) - c| < \varepsilon$$

gilt. Wie üblich schreiben wir diese Bedingung auch als  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = c$  oder „ $f(z) \rightarrow c$  für  $z \rightarrow a$ “ und sagen, dass  $f(z)$  mit  $z \rightarrow a$  gegen  $c$  **konvergiert**.

*Bemerkung und Definition 2.2.* Liegt der betrachtete Punkt  $a$  in Definition 2.1 sogar in  $D$ , so kommt als Grenzwert offensichtlich nur  $c = f(a)$  in Frage, da das Einsetzen von  $z = a$  dann (für alle  $\delta$ ) zugelassen ist und somit  $|f(a) - c| < \varepsilon$  für alle  $\varepsilon$ , also  $|f(a) - c| = 0$  gelten muss. Existiert der Grenzwert in diesem Fall tatsächlich, gilt also

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall z \in D : |z - a| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(a)| < \varepsilon,$$

so heißt  $f$  **stetig** in  $a \in D$ . Man nennt  $f$  stetig auf  $D$ , wenn  $f$  in jedem Punkt  $a \in D$  stetig ist.

Liegt der Punkt  $a$  in Definition 2.1 hingegen nicht in  $D$ , so sagt man im Fall der Existenz des Grenzwerts, dass  $f$  durch den Wert  $c$  nach  $a$  **stetig fortsetzbar** ist.

*Bemerkung 2.3.* Wir haben die Grenzwerte von Funktionen bzw. die Stetigkeit offensichtlich genauso wie in den Grundlagen der Mathematik definiert — wahlweise wie im eindimensionalen Fall mit Grundkörper  $\mathbb{C}$  oder wie im zweidimensionalen Fall mit Grundkörper  $\mathbb{R}$  und der euklidischen Norm. Daher gelten natürlich auch die uns bereits bekannten Kriterien:

- (a) (**Folgenkriterium** für Grenzwerte von Funktionen bzw. für Stetigkeit) Für eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  und einen Punkt  $a \in \bar{D}$  gilt genau dann  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = c$ , wenn für jede Folge  $(z_n)$  in  $D$  mit  $z_n \rightarrow a$  auch  $f(z_n) \rightarrow c$  gilt. Dementsprechend ist  $f$  genau dann stetig in  $a \in D$ , wenn für jede Folge  $(z_n)$  mit  $z_n \rightarrow a$  auch  $f(z_n) \rightarrow f(a)$  gilt [G, Satz 7.8 und Bemerkung 7.9 (b)].
- (b) Ein Grenzwert bzw. die Stetigkeit kann im Zielraum komponentenweise überprüft werden: schreiben wir eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  z.B. als  $f(z) = u(z) + i v(z)$  mit  $u = \operatorname{Re} f : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $v = \operatorname{Im} f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , so ist  $f$  in einem Punkt  $a \in D$  genau dann stetig, wenn  $u$  und  $v$  es sind [G, Lemma 22.6].

**Beispiel 2.4.**

- (a) Die komplexe Konjugationsabbildung  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto \bar{z}$  ist nach Bemerkung 2.3 (b) in jedem Punkt stetig, da die beiden Komponentenfunktionen  $\operatorname{Re} f(z) = x$  und  $\operatorname{Im} f(z) = -y$  (mit  $z = x + iy$ ) natürlich stetig sind.
- (b) Genauso ist die komplexe Exponentialfunktion

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

in jedem Punkt stetig, da ihre Komponentenfunktionen  $\operatorname{Re} f(z) = e^x \cos y$  und  $\operatorname{Im} f(z) = e^x \sin y$  es sind.

- (c) Wir wissen ebenfalls bereits, dass Summen, Differenzen, Produkte, Quotienten und Verkettungen stetiger Funktionen wieder stetig sind [G, Lemma 7.11 und 7.14] — dies zeigt man über  $\mathbb{C}$  genauso wie über  $\mathbb{R}$ . Insbesondere sind damit nach (a) also alle Polynome oder rationalen Funktionen in  $z$  und  $\bar{z}$  stetig.

Auch die Differenzierbarkeit wird zunächst formal genau so definiert wie für Funktionen in einer reellen Variablen, also über die Existenz des Grenzwerts des Differenzenquotienten. Um sicherzugehen, dass wir uns dem betrachteten Punkt von allen Seiten beliebig nähern können, werden wir dabei der Einfachheit halber voraussetzen, dass die Definitionsmenge  $D$  der betrachteten Funktionen offen ist, also um jeden ihrer Punkte  $a \in M$  noch eine kleine Kreisscheibe  $U_\varepsilon(a) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < \varepsilon\}$  enthält.

**Definition 2.5** (Komplexe Differenzierbarkeit und holomorphe Funktionen). Es sei  $D \subset \mathbb{C}$  offen,  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  eine Abbildung und  $a \in D$ . Dann heißt  $f$  **komplex differenzierbar** in  $a$ , wenn der Grenzwert

$$f'(a) := \lim_{\substack{z \in D \setminus \{a\} \\ z \rightarrow a}} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

existiert. Diese Zahl heißt dann auch die **Ableitung** von  $f$  in  $a$ . Ist  $f$  in jedem Punkt von  $D$  komplex differenzierbar, so heißt  $f$  auf  $D$  **holomorph**.

**Beispiel 2.6.**

- (a) Die Identität  $f(z) = z$  ist auf  $\mathbb{C}$  holomorph mit Ableitung  $f'(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{z - a}{z - a} = 1$  für alle  $a \in \mathbb{C}$ .
- (b) Die komplexe Konjugationsabbildung  $f(z) = \bar{z}$  ist *in keinem Punkt komplex differenzierbar*: um dies zu beweisen, zeigen wir mit Hilfe des Folgenkriteriums aus Bemerkung 2.3 (a), dass der Grenzwert aus Definition 2.5 nicht existiert.

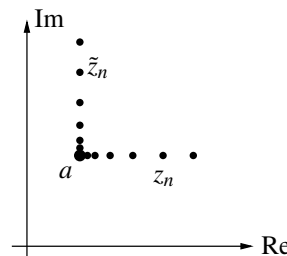
Dazu sei  $a \in \mathbb{C}$  beliebig. Wir betrachten zunächst die Folge  $z_n = a + \frac{1}{n}$ , die „von rechts kommend“ gegen  $a$  konvergiert. In diesem Fall ergibt sich für den Grenzwert des Differenzenquotienten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(z_n) - f(a)}{z_n - a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{a} + \frac{1}{n} - \bar{a}}{a + \frac{1}{n} - a} = 1.$$

Führen wir die gleiche Rechnung jedoch für die Folge  $\tilde{z}_n = a + \frac{i}{n}$  durch, die „von oben kommend“ gegen  $a$  konvergiert, so erhalten wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(\tilde{z}_n) - f(a)}{\tilde{z}_n - a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{a} - \frac{i}{n} - \bar{a}}{a + \frac{i}{n} - a} = -1,$$

also ein anderes Resultat. Nach dem Folgenkriterium existiert der Grenzwert aus Definition 2.5 also nicht, d.h.  $f$  ist in  $a$  nicht komplex differenzierbar.



**Bemerkung 2.7.** Das Resultat aus Beispiel 2.6 (b) ist auf den ersten Blick sicher sehr überraschend, weil die Funktion  $f(z) = \bar{z}$ , also in reellen Koordinaten  $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$ , ja doch sehr „harmlos“ aussieht und ihr Funktionsgraph (wenn man ihn in  $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$  zeichnen könnte) sicherlich keinerlei „Knicke“ hätte. In der Tat ist  $f$  als Funktion von  $\mathbb{R}^2$  nach  $\mathbb{R}^2$  natürlich auch reell (total) differenzierbar, wie wir aus den Grundlagen der Mathematik wissen. Wir sehen also schon, dass *die komplexe Differenzierbarkeit einer Funktion  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  nicht dasselbe ist wie die reelle Differenzierbarkeit der entsprechenden Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .*

Dieser Unterschied zwischen reeller und komplexer Differenzierbarkeit ist absolut fundamental — in der Tat gäbe es die Funktionentheorie ohne ihn nicht. Woran liegt dieser Unterschied anschaulich? Das Problem in Beispiel 2.6 (b) rührte daher, dass wir uns dem Punkt  $a$  aus *verschiedenen Richtungen* genähert haben und für diese Richtungen jeweils den Grenzwert des Differenzenquotienten, d.h. die Änderung von  $f$  in dieser Richtung, berechnet haben. Wir haben hier also ganz entscheidend den

zweidimensionalen Charakter der komplexen Zahlenebene ausgenutzt. Für die *reelle* Differenzierbarkeit ist es in Ordnung, wenn die Änderungen von  $f$  in die beiden Koordinatenrichtungen voneinander unabhängig sind, d.h. wenn die partiellen Ableitungen von  $f$  nach  $x$  und  $y$  nicht miteinander zusammenhängen: in unserem Beispiel 2.6 (b) ändert sich  $f$  entlang der reellen Achse proportional zu  $z$ , entlang der imaginären Achse jedoch proportional zu  $-z$ . Bei der *komplexen* Differenzierbarkeit hingegen muss der Grenzwert des Differenzenquotienten immer derselbe sein — die Ableitung ist hier nur eine einzige Zahl, die die Änderung von  $f$  in *jeder* Richtung angeben muss. Wenn die Änderungsraten von  $f$  in den verschiedenen Richtungen nicht dieselben sind, dann ist  $f$  dort nicht komplex differenzierbar.

Wie können wir diesen Sachverhalt nun mathematisch exakt ausdrücken? Dazu erinnern wir uns daran, dass Differenzierbarkeit nichts weiter als *lineare Approximierbarkeit* bedeutet. Das Problem besteht nun einfach darin, dass eine *reell lineare Abbildung* von  $\mathbb{R}^2$  nach  $\mathbb{R}^2$  nicht das gleiche ist wie eine *komplex lineare Abbildung* von  $\mathbb{C}$  nach  $\mathbb{C}$ . Dafür ist in der Tat die gerade betrachtete komplexe Konjugationsabbildung wiederum ein Beispiel: natürlich ist

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

eine reell lineare Abbildung, aber  $f(z) = \bar{z}$  ist nicht komplex linear, denn für allgemeine  $\lambda, z \in \mathbb{C}$  ist

$$f(\lambda z) = \overline{\lambda z} = \bar{\lambda} \bar{z} = \bar{\lambda} f(z) \neq \lambda f(z).$$

Den genauen Unterschied zwischen reell und komplex linearen Abbildungen beschreibt das folgende Lemma.

**Lemma 2.8.** *Für eine Abbildung  $f : \mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$  sind äquivalent:*

- (a)  $f$  ist komplex linear, d.h.  $f(z+z') = f(z) + f(z')$  und  $f(\lambda z) = \lambda f(z)$  für alle  $z, z', \lambda \in \mathbb{C}$ .
- (b) Es gibt ein  $c \in \mathbb{C}$ , so dass  $f(z) = cz$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ .
- (c) Es gibt eine Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \in \text{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$$

mit  $a_{1,1} = a_{2,2}$  und  $a_{1,2} = -a_{2,1}$ , so dass  $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}$ .

In diesem Fall hängen die Konstante  $c$  aus (b) und die Einträge der Matrix  $A$  aus (c) über die Beziehung  $c = a_{1,1} + ia_{2,1}$  miteinander zusammen.

*Beweis.* Die Äquivalenz „(a)  $\Leftrightarrow$  (b)“ ist genau der bekannte Zusammenhang zwischen linearen Abbildungen und Matrizen aus den Grundlagen der Mathematik 1 (angewendet auf Endomorphismen des 1-dimensionalen  $\mathbb{C}$ -Vektorraums  $\mathbb{C}$ , die dann durch  $1 \times 1$ -Matrizen beschrieben werden).

Für „(b)  $\Rightarrow$  (c)“ sei  $f(z) = cz$  für ein  $c = a + ib$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$ . Dann ist

$$f(x + iy) = (a + ib)(x + iy) = ax - by + i(bx + ay)$$

und damit geschrieben als Funktion von  $\mathbb{R}^2$  nach  $\mathbb{R}^2$

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - by \\ bx + ay \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =: A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit der Matrix  $A = (a_{i,j})$ , die offensichtlich  $a_{1,1} = a_{2,2}$ ,  $a_{1,2} = -a_{2,1}$  sowie  $c = a + ib = a_{1,1} + ia_{2,1}$  erfüllt.

Die Richtung „(c)  $\Rightarrow$  (b)“ ergibt sich genauso, wenn man diese Gleichungen rückwärts liest.  $\square$

Wir übertragen diese Aussage über lineare Abbildungen nun auf die linearen Approximationen — also die Ableitungen — beliebiger Funktionen. Dabei wird die komplexe Konstante  $c$  aus Lemma 2.8 zur komplexen Ableitung und die reelle Matrix  $A$  zur reellen Ableitung, so dass sich das folgende einfache Kriterium zur Überprüfung der komplexen Differenzierbarkeit ergibt:

**Satz 2.9.** Es sei  $D \subset \mathbb{C}$  offen,  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  eine Abbildung und  $a \in D$ . Wir bezeichnen den Real- bzw. Imaginärteil von  $f$  mit  $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$  und  $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$ . Dann sind äquivalent:

- (a)  $f$  ist komplex differenzierbar in  $a$ .  
 (b)  $f$  ist reell (total) differenzierbar in  $a$ , und es gelten die **Cauchy-Riemanschen Differentialgleichungen**

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a) = \frac{\partial v}{\partial y}(a) \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(a) = -\frac{\partial v}{\partial x}(a).$$

In diesem Fall ist die komplexe Ableitung von  $f$  in  $a$  dann gleich  $f'(a) = \frac{\partial u}{\partial x}(a) + i \frac{\partial v}{\partial x}(a)$ .

*Beweis.* Nach Definition ist  $f$  genau dann reell differenzierbar in  $a$ , wenn es eine Matrix  $A \in \operatorname{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$  und eine Funktion  $r : D \rightarrow \mathbb{C}$  gibt mit

$$f(z) = f(a) + A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x - a_1 \\ y - a_2 \end{pmatrix}}_{=z-a} + r(z) \quad \text{und} \quad \lim_{z \rightarrow a} \frac{r(z)}{|z - a|} = 0, \quad (1)$$

wobei  $a_1$  und  $a_2$  den Real- bzw. Imaginärteil von  $a$  bezeichnen. Wir wissen dabei aus den Grundlagen der Mathematik bereits, dass hierbei für die Matrix  $A$  nur die Jacobi-Matrix

$$A = (a_{i,j}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}(a) \quad (2)$$

von  $f$  in  $a$  in Frage kommt [G, Lemma 23.8]. Genauso ist die komplexe Differenzierbarkeit nach [G, Lemma 9.8] äquivalent zur komplex-linearen Approximierbarkeit, d.h. zur Existenz von  $c \in \mathbb{C}$  und  $r : D \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$f(z) = f(a) + c(z - a) + r(z) \quad \text{und} \quad \lim_{z \rightarrow a} \frac{r(z)}{|z - a|} = 0, \quad (3)$$

wobei  $c = f'(a)$  ist. Vergleichen wir nun die linearen Terme in (1) und (3) mit Hilfe der Äquivalenz von Lemma 2.8 „(b)  $\Leftrightarrow$  (c)“, so sehen wir, dass die komplexe Differenzierbarkeit (3) genau äquivalent zur reellen Differenzierbarkeit (1) zusammen mit der Bedingung  $a_{1,1} = a_{2,2}$  und  $a_{1,2} = -a_{2,1}$ , also nach (2) mit  $\frac{\partial u}{\partial x}(a) = \frac{\partial v}{\partial y}(a)$  und  $\frac{\partial u}{\partial y}(a) = -\frac{\partial v}{\partial x}(a)$  ist.

Die Zusatzformel  $f'(a) = \frac{\partial u}{\partial x}(a) + i \frac{\partial v}{\partial x}(a)$  ergibt sich ebenfalls sofort aus dem Zusatz von Lemma 2.8.  $\square$

Die Cauchy-Riemanschen Differentialgleichungen aus Satz 2.9 geben uns nun also ein einfaches Kriterium, um zu berechnen, ob bzw. wo eine gegebene Funktion komplex differenzierbar ist:

### Beispiel 2.10.

- (a) Es sei  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $f(z) = \bar{z}$  noch einmal die komplexe Konjugationsabbildung aus Beispiel 2.6 (b). Mit der Notation aus Satz 2.9 ist dann

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy) = x \quad \text{und} \quad v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy) = -y.$$

Damit sind  $u$  und  $v$  (und damit auch  $f$ ) reell differenzierbar. Die Funktionen erfüllen jedoch nirgends die Cauchy-Riemanschen Differentialgleichungen, denn es ist

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq -1 = \frac{\partial v}{\partial y}$$

in jedem Punkt von  $\mathbb{C}$ . Nach Satz 2.9 ist  $f$  also nirgends komplex differenzierbar — was wir bereits in Beispiel 2.6 (b) durch eine aufwändigere Rechnung gesehen hatten.

- (b) Wir behaupten, dass die komplexe Exponentialfunktion  $f(z) = e^z$  überall komplex differenzierbar mit Ableitung  $f'(z) = e^z$  ist. In der Tat sind die beiden Komponentenfunktionen hier wie in Beispiel 2.4 (b)

$$u(x, y) = \operatorname{Re} e^{x+iy} = e^x \cdot \cos y \quad \text{und} \quad v(x, y) = \operatorname{Im} e^{x+iy} = e^x \cdot \sin y.$$

Natürlich sind  $u$  und  $v$ , und damit auch  $f$ , reell differenzierbar. Außerdem erfüllen sie die Cauchy-Riemanschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cdot \cos y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \cdot \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

in jedem Punkt. Also ist  $f$  nach Satz 2.9 überall komplex differenzierbar mit Ableitung

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cdot (\cos y + i \sin y) = e^z.$$

Die komplexe Ableitung erfüllt die üblichen Rechenregeln für die vier Grundrechenarten sowie die Verkettung von Funktionen:

**Satz 2.11** (Rechenregeln für komplexe Ableitungen).

- (a) Es sei  $D \subset \mathbb{C}$  offen,  $a \in D$ , sowie  $f, g : D \rightarrow \mathbb{C}$  Funktionen, die in  $a$  komplex differenzierbar sind. Dann gilt:
- $f \pm g$  ist ebenfalls komplex differenzierbar in  $a$  mit  $(f \pm g)'(a) = (f' \pm g')(a)$ .
  - $f g$  ist ebenfalls komplex differenzierbar in  $a$  mit  $(fg)'(a) = (f'g + fg')(a)$ .
  - Ist  $g(a) \neq 0$ , so ist  $\frac{f}{g}$  ebenfalls komplex differenzierbar in  $a$  mit  $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'g - fg'}{g^2}(a)$ .
- (b) Es seien  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  und  $g : D' \rightarrow \mathbb{C}$  Funktionen auf offenen Teilmengen von  $\mathbb{C}$  mit  $f(D) \subset D'$ . Ferner sei  $f$  komplex differenzierbar in  $a$  und  $g$  komplex differenzierbar in  $f(a)$ . Dann ist auch  $g \circ f$  komplex differenzierbar in  $a$  mit  $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$ .

*Beweis.* siehe [G, Satz 9.10 und 9.12]; der Beweis ist für  $\mathbb{C}$  wörtlich derselbe wie für  $\mathbb{R}$ . □

**Beispiel 2.12.** Die komplexe Sinusfunktion  $f(z) = \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$  aus Bemerkung 1.9 (c) ist nach Satz 2.11 wie erwartet komplex differenzierbar mit

$$f'(z) = \frac{1}{2i}(ie^{iz} - (-i)e^{-iz}) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \cos z$$

da wir die Exponentialfunktion in Beispiel 2.10 (b) bereits als differenzierbar mit Ableitung  $e^z$  erkannt haben. Genauso folgt natürlich  $\cos'(z) = -\sin z$ .

**Aufgabe 2.13** (Ableitung der Umkehrfunktion). Es sei  $D \subset \mathbb{C}$  offen und  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion. Ferner sei  $a \in D$  ein Punkt mit  $f'(a) \neq 0$ .

Zeige, dass es dann offene Umgebungen  $U \subset D$  von  $a$  sowie  $V \subset \mathbb{C}$  von  $f(a)$  gibt, so dass die Einschränkung  $f : U \rightarrow V$  bijektiv und ihre demzufolge existierende Umkehrfunktion  $f^{-1} : V \rightarrow U$  ebenfalls holomorph mit Ableitung  $(f^{-1})'(z) = \frac{1}{f'(f^{-1}(z))}$  ist.

(Hinweis: Der Satz über lokale Umkehrfunktionen aus den Grundlagen der Mathematik [G, Folgerung 25.7] ist hier sicher nützlich. Ihr dürft ohne Beweis verwenden, dass die Ableitung  $f' : D \rightarrow \mathbb{C}$  eine stetige Funktion ist — wir werden in Folgerung 8.1 „(a)  $\Rightarrow$  (b)“ noch sehen, dass dies für holomorphe Funktionen immer der Fall ist.)

**Bemerkung 2.14.** Mit Hilfe der Regeln von Satz 2.11 wissen wir also nun von vielen „Standardfunktionen“, dass sie komplex differenzierbar sind, und können ihre Ableitungen „genau wie im Reellen“ berechnen: alle Polynome in  $z$ , die Exponential- und Winkelfunktionen, sowie gemäß dem Satz erlaubte Kombinationen davon. Nur die komplexe Konjugation  $z \mapsto \bar{z}$  aus Beispiel 2.6 (b) macht Probleme und führt zu nicht komplex differenzierbaren Abbildungen, wenn sie in irgendeiner Form in der betrachteten Funktion  $f$  enthalten ist.

Diese Idee kann man in der Tat ausbauen und zu einer alternativen Methode für die Bestimmung der komplexen Differenzierbarkeit machen, die oft einfacher ist als das explizite Aufspalten in Real- und Imaginärteil mit anschließendem Nachprüfen der Cauchy-Riemanschen Differentialgleichungen. Der Grundgedanke dieses sogenannten **Wirtinger-Kalküls** ist, die gegebene Funktion nicht in Abhängigkeit von  $x$  und  $y$ , sondern stattdessen in Abhängigkeit von  $z$  und  $\bar{z}$  auszudrücken. Wenn

wir eine solche „Variablentransformation“ durchführen könnten, sollte die Funktion mit obiger Idee genau dann komplex differenzierbar sein, wenn sie nur von  $z$  und nicht von  $\bar{z}$  abhängt.

Natürlich sind  $z$  und  $\bar{z}$  nicht wirklich unabhängige Variablen, denn die eine Zahl ist ja immer die komplex Konjugierte der anderen. Wenn wir aber dennoch für einen Moment annehmen, dass wir eine Variablentransformation von  $x$  und  $y$  nach  $z$  und  $\bar{z}$  machen könnten, würde man aufgrund der Relationen  $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$  und  $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$  (siehe Lemma 1.4 (a)) mit Hilfe der (zweidimensionalen) Kettenregel für die Funktion

$$\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto f(x, y)$$

die Formel

$$\left( \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2i} & -\frac{1}{2i} \end{pmatrix}$$

für „die Ableitungen nach  $z$  und  $\bar{z}$ “ erhalten. Wir benutzen diese „Pseudo-Rechnung“ nun einfach, um die Größen  $\frac{\partial f}{\partial z}$  und  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$  zu definieren:

**Definition 2.15.** Es sei  $D \subset \mathbb{C}$  offen und  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  eine reell differenzierbare Funktion mit Komponentenfunktionen  $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$  und  $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$ . Dann setzen wir wie erwartet

$$\frac{\partial f}{\partial x} := \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y} := \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y}$$

und definieren die **Wirtinger-Ableitungen** von  $f$  durch

$$\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

Das Schöne an diesen Wirtinger-Ableitungen ist nun, dass sie wirklich alle Rechenregeln erfüllen, die man erwarten würde, wenn man  $f$  als Funktion von zwei unabhängigen Variablen  $z$  und  $\bar{z}$  auffassen könnte:

**Satz 2.16** (Rechenregeln für Wirtinger-Ableitungen). *Es sei  $D \subset \mathbb{C}$  offen und  $a \in D$ .*

- Eine reell differenzierbare Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  ist genau dann komplex differenzierbar in  $a$ , wenn  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) = 0$ . In diesem Fall ist dann  $f'(a) = \frac{\partial f}{\partial z}(a)$ .*
- Es ist  $\frac{\partial z}{\partial z} = \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{z}} = 1$  und  $\frac{\partial \bar{z}}{\partial z} = \frac{\partial z}{\partial \bar{z}} = 0$  (d.h. „ $z$  und  $\bar{z}$  verhalten sich wie unabhängige Variablen“).*
- Sind  $f, g : D \rightarrow \mathbb{C}$  reell differenzierbar, so gelten die Rechenregeln für Ableitungen von Summen, Differenzen, Produkten und Quotienten für die Wirtinger-Ableitungen so, als ob  $z$  und  $\bar{z}$  unabhängige Variablen wären, d.h. es ist*
  - $\frac{\partial(f \pm g)}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z} \pm \frac{\partial g}{\partial z}$ , und analog für  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ ;
  - $\frac{\partial(fg)}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial z}$ , und analog für  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ ;
  - $\frac{\partial(f/g)}{\partial z} = \frac{\frac{\partial f}{\partial z} \cdot g - f \cdot \frac{\partial g}{\partial z}}{g^2}$ , und analog für  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ .

*Beweis.* (a): Nach Definition 2.15 gilt am Punkt  $a$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + i \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) \quad (1)$$

$$\text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + i \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) \quad (2)$$

Nach Satz 2.9 ist  $f$  nun genau dann in  $a$  komplex differenzierbar, wenn dort  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$  und  $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$  gelten — was nach (2) äquivalent zu  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$  ist. In diesem Fall ergibt die Formel  $f' = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$  aus Satz 2.9 mit (1) außerdem  $f' = \frac{\partial f}{\partial z}$ .

(b) folgt einfach durch Einsetzen von  $f(z) = z$  bzw.  $f(z) = \bar{z}$  in (1) und (2): für  $f(z) = z$  ist z.B.  $u(x,y) = x$  und  $v(x,y) = y$ , und damit nach (1)

$$\frac{\partial z}{\partial z} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + i \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) = \frac{1}{2} \cdot (1 + 1 + i \cdot 0) = 1.$$

Die anderen drei Gleichungen ergeben sich genauso.

Die Aussagen aus (c) schließlich zeigt man durch einfaches Nachrechnen, indem man jeweils auf beiden Seiten die Ausdrücke (1) bzw. (2) einsetzt und die entsprechenden Rechenregeln für die Ableitungen von  $u$  und  $v$  nach  $z$  und  $\bar{z}$  benutzt.  $\square$

**Beispiel 2.17.** Nach Satz 2.16 können wir von einer Abbildung, die (durch „erlaubte Zusammensetzungen“) als Funktion von  $z$  und  $\bar{z}$  geschrieben ist, nun einfach die komplexe Differenzierbarkeit untersuchen bzw. im Fall der Differenzierbarkeit ihre Ableitung berechnen, indem wir  $z$  und  $\bar{z}$  formal als unabhängige Variable auffassen und die Ableitungen der Funktion nach  $z$  und  $\bar{z}$  berechnen:

(a) Von der Funktion  $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = \frac{1}{z}$  wissen wir so sofort, dass sie nirgends komplex differenzierbar ist, denn

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = -\frac{1}{\bar{z}^2} \neq 0$$

für alle  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

(b) Polynome in  $z$  und  $\bar{z}$  sind genau dann holomorph auf ganz  $\mathbb{C}$ , wenn in ihnen  $\bar{z}$  nicht vorkommt (denn genau dann ist ihre Wirtinger-Ableitung nach  $\bar{z}$  identisch Null).

### Aufgabe 2.18.

(a) Untersuche, ob die Funktion

$$f(z) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{z^2}} & \text{für } z \neq 0, \\ 0 & \text{für } z = 0 \end{cases}$$

(i) als reelle Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  bzw. (ii) als komplexe Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  stetig ist.

(b) In welchen Punkten ist die Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $f(z) = (2z + \bar{z}) \cdot |z|^2$  komplex differenzierbar? Berechne in diesen Punkten auch die Ableitung!

**Aufgabe 2.19.** Es sei  $D = \{z \in \mathbb{C} ; |z - z_0| < r\}$  eine offene Kreisscheibe (mit Mittelpunkt  $z_0$  und Radius  $r$ ). Man zeige:

(a) Jede holomorphe Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $f'(z) = 0$  für alle  $z \in D$  ist konstant.

(b) Jede holomorphe Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ist konstant.

(c) Jede holomorphe Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $|f(z)| = 1$  für alle  $z \in D$  ist konstant.

**Aufgabe 2.20.** Es sei  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  eine Polynomfunktion in  $z$  vom Grad  $n$  mit den (nicht notwendig verschiedenen) Nullstellen  $z_1, \dots, z_n$ . Man zeige:

(a) Es gilt

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{z - z_i} = \sum_{i=1}^n \frac{\overline{z - z_i}}{|z - z_i|^2}$$

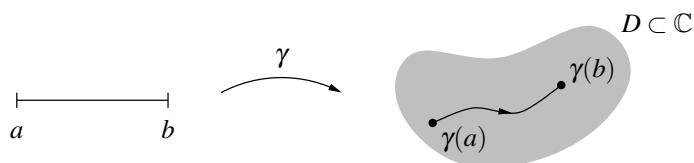
für alle  $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$ .

(b) Zu jeder Nullstelle  $z$  von  $f'$  existieren reelle Zahlen  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$  mit  $\sum_i \lambda_i = 1$  und  $z = \sum_i \lambda_i z_i$  (d.h. die Nullstellen von  $f'$  liegen in der konvexen Hülle der Nullstellen von  $f$ ).

## 3. WEGINTEGRALE

Nach der Differentiation wollen wir uns nun mit der Integration beschäftigen. Auch hier ist die Funktionentheorie wieder eine interessante Mischung aus ein- und zweidimensionaler Theorie: einerseits haben wir nur eine komplexe Variable und damit eindimensionale Integrale, andererseits liegen diese eindimensionalen Integrale aber in der (zweidimensionalen) Ebene. Wir werden also über eindimensionale Objekte in der Ebene, also über „Wege“ integrieren müssen:

**Definition 3.1** (Wege). Es sei  $D \subset \mathbb{C}$ . Ein **Weg** in  $D$  ist eine stetige Abbildung  $\gamma: [a, b] \rightarrow D$  von einem kompakten reellen Intervall nach  $D$ .



Ein solcher Weg heißt...

- (a) **geschlossen**, wenn  $\gamma(a) = \gamma(b)$ ;
- (b) **stückweise stetig differenzierbar**, wenn es eine Unterteilung  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  von  $[a, b]$  gibt, so dass die Einschränkungen  $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$  für alle  $i = 1, \dots, n$  stetig differenzierbar sind. In diesem Fall ist die Ableitung  $\gamma' : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  dann also eine stückweise stetige Funktion (die an den Zwischenstellen  $t_1, \dots, t_{n-1}$  jedoch möglicherweise nicht wohldefiniert ist).

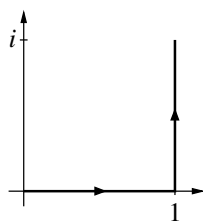
**Beispiel 3.2.**

- (a) Der Weg

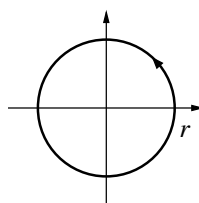
$$\gamma: [0, 2] \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto \begin{cases} t & \text{für } 0 \leq t \leq 1, \\ 1 + i(t-1) & \text{für } 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

ist stückweise stetig differenzierbar mit Ableitung 1 für  $t < 1$  und  $i$  für  $t > 1$ ; er läuft entlang zweier Geradenstücke vom Nullpunkt über 1 nach  $1 + i$ .

- (b) Der Weg  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto r e^{it}$  (für festes  $r$ ) ist stetig differenzierbar und geschlossen; er läuft einmal entgegen dem Uhrzeigersinn entlang einer Kreislinie um 0 vom Radius  $r$ .



(a)



(b)

Wir wollen jetzt Integrale komplexer Funktionen über derartige Wege definieren. Am einfachsten ist dies für stückweise stetig differenzierbare Wege — es ist zwar möglich, für manche Funktionen auch Integrale über beliebige Wege zu definieren, dies ist aber mit sehr viel mehr Aufwand verbunden und soll daher hier nicht behandelt werden, zumal ohnehin nahezu alle in der Praxis auftretenden Wege stückweise stetig differenzierbar sind. Wir vereinbaren also:

Im folgenden seien Wege immer als stückweise stetig differenzierbar vorausgesetzt.

**Definition 3.3** (Integrale). Es seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$ .



- (a) Ist  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  eine *komplexwertige* Funktion auf dem *reellen* Intervall  $[a, b]$ , so definieren wir das Integral von  $g$  über  $[a, b]$  einfach durch Aufspalten in Real- und Imaginärteil als

$$\int_a^b g(t) dt := \int_a^b (\operatorname{Re} g(t)) dt + i \cdot \int_a^b (\operatorname{Im} g(t)) dt.$$

- (b) Es sei nun  $D \subset \mathbb{C}$  und  $\gamma : [a, b] \rightarrow D$  ein Weg in  $D$ . Dann definieren wir die **Länge** von  $\gamma$  als

$$L(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

- (c) Ist darüberhinaus  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  eine stetige Funktion, so ist das **Wegintegral** (oder **Kurvenintegral**) von  $f$  entlang  $\gamma$  definiert als

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

(wobei das Integral auf der rechten Seite im Sinne von (a) zu verstehen ist).

Beachte, dass die Integrale in (b) und (c) (als Riemann-Integrale) existieren, da  $\gamma$  als stückweise stetig differenzierbar vorausgesetzt ist und die Integranden damit stückweise stetige Funktionen sind [G, Beispiel 11.11 (b)].

*Bemerkung 3.4.* Man kann zeigen, dass die oben definierte Länge  $L(\gamma)$  eines Weges genau das ist, was man anschaulich unter der Länge des Weges  $\gamma$  verstehen würde (nämlich die Gesamtlänge, die man erhält, wenn man  $\gamma$  beliebig genau durch Geradenstücke approximiert). Da auf dem Weg ja  $z = \gamma(t)$  gilt, kann man sich dies anschaulich mit Hilfe der „Pseudo-Rechnung“

$$L(\gamma) = \int |\gamma'(t)| dt = \int \left| \frac{dz}{dt} \right| dt = \int |dz|$$

merken, denn  $|dz|$  ist ja gerade „die Länge eines unendlich kleinen Geradenstücks  $dz$ “. Mit einer ähnlichen „Pseudo-Rechnung“ kann man auch die Formel für das Wegintegral begründen:

$$\int f(z) dz = \int f(z) \frac{dz}{dt} dt = \int f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

### Beispiel 3.5.

- (a) Es sei  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $t \mapsto re^{it}$  die Kreislinie mit Radius  $r$  wie in Beispiel 3.2 (b). Dann ist die Länge von  $\gamma$  (wie elementargeometrisch erwartet)

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} |ire^{it}| dt = \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r.$$

Betrachten wir noch die Funktion  $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $f(z) = \frac{1}{z}$ , so ist das Wegintegral von  $f$  über  $\gamma$  gleich

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} ire^{it} dt = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i.$$

Derartige Wegintegrale haben — im Gegensatz zu reellen Integralen — *keine anschauliche Bedeutung* als Fläche oder Volumen irgendeiner Menge unterhalb des Graphen einer Funktion. Wir werden in dieser Vorlesung jedoch sehen, dass sie ein überaus nützliches Hilfsmittel in der Funktionentheorie sind. Man kann sie sich außerdem in folgendem Sinne als Verallgemeinerung des reellen Integrals vorstellen:

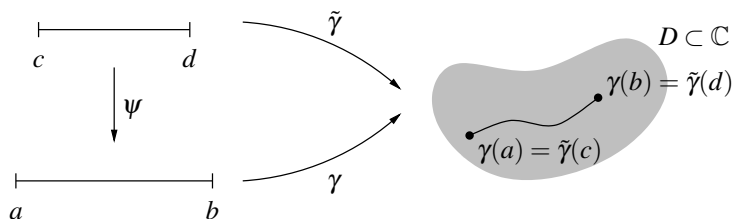
- (b) Es sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ein Weg, der entlang der reellen Achse verläuft; ferner seien  $c = \gamma(a)$  und  $d = \gamma(b)$  der Anfangs- bzw. Endpunkt des Weges. Ist dann  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige reelle Funktion, so folgt aus der Substitutionsregel für reelle Integrale [G, Satz 11.19] sofort

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_c^d f(s) ds \quad \text{mit } s = \gamma(t),$$

d.h. wir erhalten einfach das normale reelle Integral über  $f$  vom Startpunkt bis zum Endpunkt des Weges.

Beachte, dass es in diesem Fall für das Integral keine Rolle spielt, wie der Weg  $\gamma$  (also die Abbildung  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ) genau aussieht, solange er nur entlang der reellen Achse von  $c$  nach  $d$  läuft. Eine ähnliche Aussage gilt in der Tat für beliebige Wegintegrale:

**Bemerkung 3.6** (Invarianz des Wegintegrals unter Umparametrisierungen). Es seien  $D \subset \mathbb{C}$  und  $\gamma: [a, b] \rightarrow D$  ein Weg in  $D$ . Ist nun  $\psi: [c, d] \rightarrow [a, b]$  eine stetig differenzierbare Abbildung mit  $\psi(c) = a$  und  $\psi(d) = b$ , so stellen die Wege  $\gamma: [a, b] \rightarrow D$  und  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \psi: [c, d] \rightarrow D$  wie in der folgenden Skizze dieselbe Bildkurve dar, die i.a. lediglich mit unterschiedlichen „Geschwindigkeiten“ durchlaufen wird. Man nennt  $\tilde{\gamma}$  in diesem Fall eine **Umparametrisierung** von  $\gamma$ .



Ist nun  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  eine stetige Funktion, so gilt für die Wegintegrale von  $f$  entlang  $\gamma$  bzw.  $\tilde{\gamma}$

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz &= \int_c^d f(\tilde{\gamma}(t)) \tilde{\gamma}'(t) dt \\ &= \int_c^d f(\gamma(\psi(t))) (\gamma \circ \psi)'(t) dt \\ &= \int_c^d f(\gamma(\psi(t))) \gamma'(\psi(t)) \psi'(t) dt \\ &= \int_a^b f(\gamma(s)) \gamma'(s) ds \quad (\text{mit der Substitution } s = \psi(t)) \\ &= \int_{\gamma} f(z) dz, \end{aligned}$$

d.h. *Wegintegrale ändern sich nicht bei Umparametrisierungen*. Eine analoge Aussage gilt natürlich auch für die Länge des Weges: es ist  $L(\tilde{\gamma}) = L(\gamma)$ .

Beachte jedoch, dass es beim Wegintegral auf die Orientierung des Weges ankommt: durchlaufen wir die gleiche Bildkurve in umgekehrter Richtung (ist oben also  $\psi(c) = b$  und  $\psi(d) = a$ ), so erhalten wir genauso

$$\int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz,$$

Wir werden daher in Zukunft Wege oft nur durch ihre (orientierten) Bildkurven in  $\mathbb{C}$  angeben und auch so zeichnen. Oft werden unsere Wege Kreislinien (oder „ähnliche geformte“) Kurven sein; für diesen Fall vereinbaren wir, dass wir die Orientierung entgegen dem Uhrzeigersinn wählen, wenn nichts anderes angegeben wird. Für das Wegintegral aus Beispiel 3.5 (a) würden wir z.B. einfach

$$\int_{|z|=r} f(z) dz \quad \text{statt} \quad \int_{\gamma} f(z) dz$$

schreiben.

**Aufgabe 3.7.** Es sei  $D \subset \mathbb{C}$  und  $\gamma: [a, b] \rightarrow D$  ein stückweise stetig differenzierbarer Weg in  $D$ . Zeige, dass es eine *stetig differenzierbare Umparametrisierung* von  $\gamma$  gibt, also eine stetig differenzierbare Funktion  $\psi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ , so dass der umparametrisierte Weg  $\gamma \circ \psi: [c, d] \rightarrow D$  stetig differenzierbar (und nicht nur stückweise stetig differenzierbar) ist.

Aufgrund dieses Ergebnisses können wir uns bei der Untersuchung von Wegintegralen in Zukunft also oft auf stetig differenzierbare Wege beschränken.

*Bemerkung 3.8.* Wir haben gerade gesehen, dass sich Wegintegrale nicht bei Umparametrisierungen des Weges ändern. Eine nächste naheliegende Frage ist, ob derartige Integrale vielleicht sogar nur vom Anfangs- und Endpunkt des Weges abhängen. Im Allgemeinen kann dies jedoch nicht der Fall sein: betrachten wir nämlich noch einmal den geschlossenen Kreisweg  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $t \mapsto re^{it}$  mit dem Integral  $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = 2\pi i$  aus Beispiel 3.5 (a), so hat dieser Weg natürlich den gleichen Anfangs- und Endpunkt wie der konstante Weg  $\tilde{\gamma}(t) \equiv r$ ; jedoch ist über diesen konstanten Weg natürlich wegen  $\tilde{\gamma}'(t) = 0$  jedes Wegintegral gleich Null.

Dennoch werden wir sehen, dass Wegintegrale „sehr oft“ nur vom Anfangs- und Endpunkt des betrachteten Weges abhängen. So besitzen viele Funktionen z.B. eine Stammfunktion, mit der man wie im Reellen Integrale berechnen kann, indem man einfach die Differenz ihrer Werte am Anfangs- und Endpunkt nimmt:

**Definition 3.9** (Stammfunktion). Es sei  $D \subset \mathbb{C}$  offen und  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  stetig. Eine Funktion  $F: D \rightarrow \mathbb{C}$  heißt **Stammfunktion** von  $f$ , wenn  $F$  holomorph auf  $D$  ist mit  $F'(z) = f(z)$  für alle  $z \in D$ .

**Lemma 3.10.** Es sei  $D \subset \mathbb{C}$  offen,  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  stetig, und  $\gamma: [a, b] \rightarrow D$  ein Weg in  $D$ . Hat  $f$  eine Stammfunktion  $F$  auf  $D$ , so gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Das Wegintegral hängt dann also nur vom Anfangs- und Endpunkt des Weges ab und nicht vom Weg selbst. Ist der Weg geschlossen, so ist dann also notwendigerweise  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ .

*Beweis.* Dies ist eine einfache Rechnung:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_a^b F'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_a^b (F \circ \gamma)'(t) dt = [(F \circ \gamma)(t)]_a^b \\ &= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)). \end{aligned}$$

□

### Beispiel 3.11.

- (a) Wir haben in Bemerkung 3.8 gesehen, dass Wegintegrale über die Funktion  $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto \frac{1}{z}$  im Allgemeinen *nicht* nur vom Anfangs- und Endpunkt des Weges abhängen. Also besitzt  $f$  nach Lemma 3.10 keine Stammfunktion. Wir sehen hier also schon, dass die Existenz einer Stammfunktion eine viel stärkere Bedingung als im Reellen ist (wo ja z.B. jede stetige Funktion eine Stammfunktion besitzt). Wir werden später noch genauer untersuchen, unter welchen Bedingungen eine gegebene Funktion eine Stammfunktion besitzt (siehe Satz 6.1).
- (b) Da die Regeln zum Differenzieren komplexer Funktionen nach Satz 2.11 jedoch formal genauso wie im Reellen aussehen, können wir in vielen Fällen eine Stammfunktion einer komplexen Funktion mit den gleichen Regeln wie im Reellen finden. So ist z.B. für  $n \in \mathbb{Z}$  mit  $n \neq -1$  wie gewohnt  $F(z) = \frac{z^{n+1}}{n+1}$  eine Stammfunktion von  $f(z) = z^n$ . Nach Lemma 3.10 ist für  $n \neq -1$  also z.B.  $\int_{\gamma} z^n dz = 0$  für jeden geschlossenen Weg  $\gamma$ . Fassen wir dies mit Beispiel 3.5 (a) zusammen, so erhalten wir für  $n \in \mathbb{Z}$  und  $r \in \mathbb{R}_{>0}$

$$\int_{|z|=r} z^n dz = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq -1, \\ 2\pi i & \text{für } n = -1. \end{cases}$$

Wie wir in dieser Vorlesung noch sehen werden, ist dieses einfache Ergebnis über die Wegintegrale der Potenzen von  $z$  (entlang Kreislinien um 0) ein zentrales und sehr wichtiges Resultat der Funktionentheorie, das immer wieder auftritt (insbesondere beim Residuensatz 11.10).

### Aufgabe 3.12.

- (a) Berechne die Wegintegrale

$$\int_{\gamma} \frac{1}{(z+1)^2} dz \quad \text{und} \quad \int_{\gamma} \bar{z}^2 dz$$

entlang einer geraden Strecke  $\gamma$  von 1 nach  $i$ .

- (b) Untersuche, ob die Funktion
- $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$
- mit
- $f(z) = \bar{z}^2$
- eine Stammfunktion besitzt.

**Aufgabe 3.13.** Wir haben in Beispiel 3.11 (a) gesehen, dass die Funktion  $f(z) = \frac{1}{z}$  auf  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  keine Stammfunktion besitzen kann. In dieser Aufgabe wollen wir nun zeigen, dass wir jedoch eine Stammfunktion finden können, wenn wir den Definitionsbereich der Funktion verkleinern.

Es sei dazu  $D := \{z = r e^{i\varphi}; r \in \mathbb{R}_{>0}, -\pi < \varphi < \pi\} \subset \mathbb{C}$  das Komplement der negativen reellen Achse. Man zeige:

- (a) Die Abbildung
- $\log: D \rightarrow \mathbb{C}$
- mit

$$\log z := \log r + i\varphi$$

ist eine Stammfunktion von  $\frac{1}{z}$  auf  $D$ , d.h. komplex differenzierbar mit Ableitung  $\frac{1}{z}$ . Wir nennen  $\log z$  den **komplexen Logarithmus** von  $z$ .

- (b) Es seien
- $z_1, z_2 \in D$
- beliebig. Dann gilt für jeden Weg
- $\gamma$
- in
- $\mathbb{C} \setminus \{0\}$
- von
- $z_1$
- nach
- $z_2$

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \log(z_2) - \log(z_1) + 2\pi i k \quad (*)$$

für ein  $k \in \mathbb{Z}$ .

- (c) Umgekehrt gibt es für alle
- $k \in \mathbb{Z}$
- einen Weg
- $\gamma$
- in
- $\mathbb{C} \setminus \{0\}$
- von
- $z_1$
- nach
- $z_2$
- , so dass (\*) gilt.

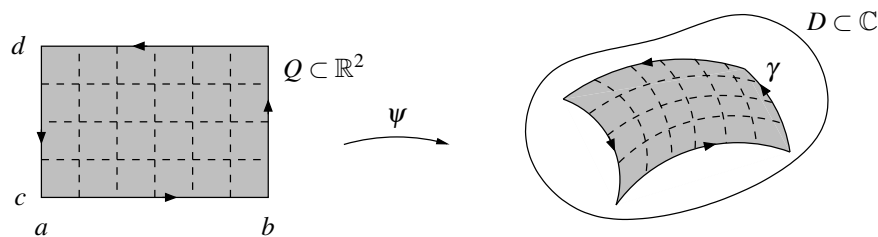
## 4. DER CAUCHYSCHES INTEGRALSATZ

Es sei  $M \subset \mathbb{C}$  offen und  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$  eine stetige Funktion. Hat  $f$  in  $M$  eine Stammfunktion, so haben wir im letzten Kapitel gesehen, dass Kurvenintegrale über  $f$  in  $M$  nur vom Anfangs- und Endpunkt des Weges abhängen bzw. dass Integrale über  $f$  entlang geschlossener Wege in  $M$  gleich Null sind. Wir konnten jedoch noch kein zufriedenstellendes Kriterium dafür angeben, wann  $f$  eine solche Stammfunktion besitzt. Daher wollen wir in diesem Kapitel ein einfach nachprüfbares hinreichendes Kriterium für diese Wegunabhängigkeit des Integrals beweisen. Dies ist für die Berechnung von Integralen natürlich sehr nützlich, da wir in diesem Fall den gegebenen Integrationsweg durch einen anderen Weg mit gleichem Anfangs- und Endpunkt ersetzen können, für den die Berechnung unter Umständen einfacher wird.

Der zentrale Satz, den wir hierfür benötigen, ist der sogenannte Cauchysche Integralsatz. Er besagt anschaulich, dass ein Kurvenintegral  $\int_{\gamma} f(z) dz$  entlang eines geschlossenen Weges  $\gamma$  Null ist, wenn  $f$  auf der ganzen von  $\gamma$  eingeschlossenen Fläche holomorph ist. Leider ist der Begriff der „von einer geschlossenen Kurve eingeschlossenen Fläche“ — so anschaulich er auch sein mag — mathematisch jedoch nur sehr schwer zu definieren. Wir beschränken uns daher zunächst auf den Fall, in dem  $\gamma$  das Bild des Randes  $\partial Q$  eines Quaders  $Q$  unter einer stetig differenzierbaren Abbildung  $\psi$  (und die eingeschlossene Fläche damit natürlich das Bild von  $Q$  unter  $\psi$ ) ist:

**Satz 4.1 (Cauchyscher Integralsatz).** *Es sei  $D \subset \mathbb{C}$  offen und  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion. Ferner sei  $Q = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$  ein Quader,  $\psi : Q \rightarrow D$  eine stetig differenzierbare Abbildung, und  $\gamma = \psi(\partial Q)$  das Bild der Randkurve von  $Q$  unter  $\psi$ . Dann gilt*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$



Bevor wir diesen Satz beweisen, wollen wir uns die Aussage des Satzes etwas genauer anschauen.

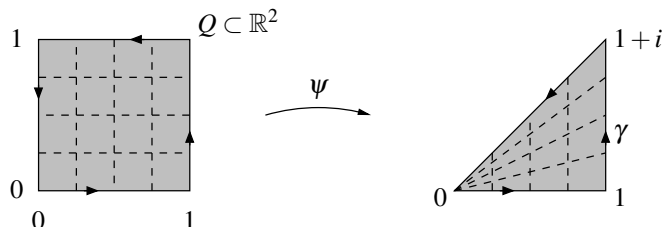
**Beispiel 4.2.** Wir haben oben ja schon erwähnt, dass es im Cauchyschen Integralsatz nicht wirklich darauf ankommt, dass die Bildkurve aus dem Rand eines Quaders entsteht. In der Tat finden sich in der Literatur zahlreiche Versionen des Cauchyschen Integralsatzes für verschiedenste Integrationswege — Dreiecke, Bilder von Dreiecken unter stetigen Abbildungen, Kreislinien und vieles mehr. Ihnen allen ist gemeinsam, dass es sich um Wege handelt, bei denen „die von ihnen eingeschlossene Fläche“ einfach definierbar ist, und dass der Integrand auf dieser gesamten Fläche (und nicht nur auf dem Integrationsweg selbst) als holomorph vorausgesetzt werden muss. Die folgenden Beispiele zeigen, dass unser Satz 4.1 bereits auf „nahezu beliebige“ derartige geschlossene Integrationswege anwendbar ist:

(a) (Dreiecke) Wir betrachten die Abbildung

$$\psi : Q = [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \psi(t, s) = t + ist.$$

Dann wird die Unterkante des Quaders, also die Punkte  $(t, s)$  mit  $s = 0$  und  $0 \leq t \leq 1$ , genau auf das Geradenstück von 0 bis 1 in der komplexen Ebene abgebildet. Genauso wird die rechte Kante auf das Geradenstück von 1 nach  $1 + i$  und die obere auf das Geradenstück von  $1 + i$  nach 0 abgebildet. Die linke Kante des Quaders, also die Punkte mit  $t = 0$ , werden von  $\psi$  alle auf 0 abgebildet, so dass diese Kante im Bild verschwindet. Insgesamt ist das Bild  $\gamma = \psi(\partial Q)$  der Randkurve des Quaders also genau das im Bild unten rechts eingezeichnete

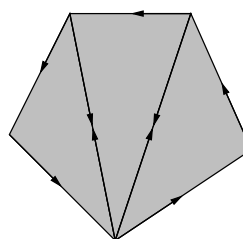
Dreieck. Man sieht leicht, dass auch das Innere des Quaders  $Q$  genau auf das Innere dieses Dreiecks abgebildet wird.



Natürlich kann man analog auch andere Dreiecke in der komplexen Ebene erzeugen. Wir sehen mit Satz 4.1 also, dass „der Cauchysche Integralsatz auch für Dreiecke gilt“, d.h. dass Wegintegrale über Dreieckswege gleich Null sind, wenn die zu integrierende Funktion auf diesem gesamten Dreieck (also auch im Inneren) holomorph ist.

- (b) (Polyeder) Haben wir in der komplexen Ebene ein beliebiges Polyeder, so können wir dies stets wie im Bild rechts in Dreiecke aufteilen. Bezeichnet nun  $\gamma$  die (entgegen dem Uhrzeigersinn orientierte) Randkurve des Polyeders und sind  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  die entsprechenden Randkurven der Dreiecke, so gilt für jede stetige Funktion  $f$

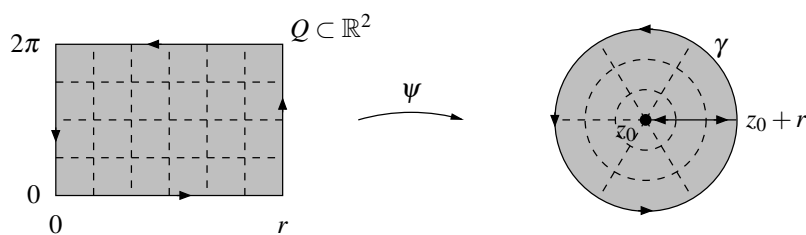
$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \dots + \int_{\gamma_n} f(z) dz,$$



weil sich wie im Bild die gemeinsam durchlaufenen Strecken nach Bemerkung 3.6 wegheben. Da der Cauchysche Integralsatz nun nach (a) für jeden Dreiecksweg  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  gilt, gilt er also auch für das gesamte Polyeder: ist  $f$  überall auf dem Polyeder holomorph, so ist  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ .

- (c) (Kreise) Wir betrachten für  $z_0 \in \mathbb{C}$  und  $r \in \mathbb{R}_{>0}$  die stetig differenzierbare Abbildung

$$\psi : [0, r] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, (t, s) \mapsto z_0 + t e^{is}.$$

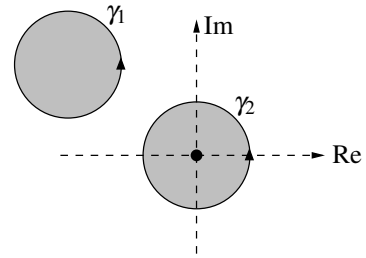


Hier wird (wie im Bild oben) die rechte Kante des Quaders auf die Kreislinie  $\gamma$  um  $z_0$  mit Radius  $r$  abgebildet, die linke auf den Punkt  $z_0$ , und die beiden horizontalen Kanten auf die Strecke von  $z_0$  nach  $z_0 + r$  in entgegengesetzten Richtungen (so dass sich die entsprechenden Integrale wieder wegheben). Der Cauchysche Integralsatz gilt also auch für Kreislinien: es ist  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ , wenn der gesamte Kreis  $\{z \in \mathbb{C} ; |z - z_0| \leq r\}$  komplett in dem Bereich liegt, in dem  $f$  holomorph ist.

- (d) Da die Verkettung stetig differenzierbarer Abbildungen wieder stetig differenzierbar ist, sehen wir mit den obigen Beispielen, dass der Cauchysche Integralsatz auch für stetig differenzierbare Bilder von Polyedern und Kreisen gilt — also für „nahezu beliebige“ Flächen bzw. deren Randkurven.

**Beispiel 4.3.** Wir betrachten wieder die Funktion  $f(z) = \frac{1}{z}$ , die nach Satz 2.11 natürlich in ihrem Definitionsbereich  $D := \mathbb{C} \setminus \{0\}$  holomorph ist. Ferner seien  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  die im folgenden Bild rechts unten eingezeichneten Integrationswege.

Nach dem Cauchyschen Integralsatz 4.1 (bzw. Beispiel 4.2 (c)) ist  $\int_{\gamma_1} f(z) dz = 0$ , denn die von  $\gamma_1$  eingeschlossene Kreisfläche liegt ganz in dem Bereich  $D$ , in dem  $f$  holomorph ist. Für das Integral  $\int_{\gamma_2} f(z) dz$  hingegen sagt der Cauchysche Integralsatz nichts aus, denn hier liegt der Nullpunkt, in dem  $f$  ja nicht einmal definiert ist, im Inneren des von  $\gamma_2$  begrenzten Kreises. In der Tat haben wir in Beispiel 3.5 (a) ja auch gesehen, dass  $\int_{\gamma_2} f(z) dz = 2\pi i \neq 0$  gilt.



*Bemerkung 4.4.* Der Cauchysche Integralsatz ist unser erster „echter Satz“ der Funktionentheorie. Er ist absolut zentral für den weiteren Verlauf dieser Vorlesung. Glücklicherweise ist er aber auch nahezu der einzige Satz, bei dem wir wirklich in die reelle Analysis „absteigen“ und relativ komplizierte Abschätzungen vornehmen müssen. Alle weiteren Resultate der Funktionentheorie, die wir in diesem Skript behandeln werden, folgen dann relativ einfach Stück für Stück aus diesem Satz. Dies ist sicherlich auch einer der Hauptgründe dafür, dass die Funktionentheorie insgesamt sehr „elegant und aufgeräumt“ wirkt.

Kommen wir nun aber endlich zum Beweis des Cauchyschen Integralsatzes. Wir werden den Beweis dadurch führen, dass wir den Betrag des gegebenen Kurvenintegrals nach oben gegen eine Zahl abschätzen, die wir durch eine geeignete Folge von Abschätzungen gegen Null gehen lassen. Für derartige Abschätzungen von Integralen benötigen wir zunächst zwei Lemmata. Das erste ist eine Standardabschätzung, die sehr oft für Kurvenintegrale verwendet wird:

**Lemma 4.5.** *Es sei  $D \subset \mathbb{C}$  offen,  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  stetig, und  $\gamma : [a, b] \rightarrow D$  ein Weg in  $D$ . Dann gilt*

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq L(\gamma) \cdot \max_{z \in \gamma[a, b]} |f(z)|$$

(beachte, dass  $|f|$  auf der kompakten Menge  $\gamma[a, b]$  stetig ist und somit das Maximum existiert).

*Beweis.* Es gilt

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| &= \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f(\gamma(t)) \gamma'(t)| dt \\ &\leq \max_{z \in \gamma[a, b]} |f(z)| \cdot \int_a^b |\gamma'(t)| dt \\ &= \max_{z \in \gamma[a, b]} |f(z)| \cdot L(\gamma). \end{aligned}$$

□

Als zweites brauchen wir noch eine Aussage, wie wir die Länge des Integrationsweges in Satz 4.1 abschätzen können, also wie sich der Umfang des Quaders durch die Abbildung  $\psi$  verändert.

**Lemma 4.6.** *Es sei  $Q = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$  ein Quader und  $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  eine stetig differenzierbare Abbildung. Dann gilt*

$$L(\psi(\partial Q)) \leq M \cdot L(\partial Q),$$

wobei

$$M := \max\{|\psi'(z) \cdot v|; z \in Q, v \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } \|v\| = 1\}$$

und natürlich

$$L(\partial Q) = 2(b-a) + 2(d-c)$$

der Umfang von  $Q$  ist.

*Bemerkung 4.7.* Beachte, dass die Ableitung  $\psi'(z)$  in Lemma 4.6 an jedem Punkt eine lineare Abbildung von  $\mathbb{R}^2$  nach  $\mathbb{C}$ , der Ausdruck  $\psi'(z) \cdot v$  also eine komplexe Zahl ist. Da dieser Ausdruck außerdem stetig auf der kompakten Menge  $\{(z, v) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^2; z \in Q \text{ und } v \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } \|v\| = 1\}$  ist, existiert das im Lemma betrachtete Maximum  $M$ .

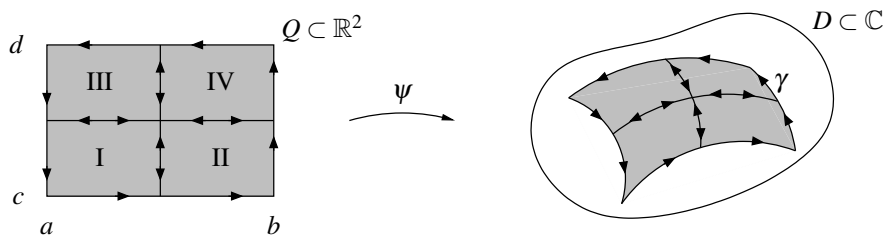
*Beweis von Lemma 4.6.* Wir betrachten zunächst nur den unteren Rand des Quaders, den wir offensichtlich durch  $\gamma: [a, b] \rightarrow Q$ ,  $t \mapsto (t, c)$  parametrisieren können. Wegen  $\|\gamma'(t)\| = \|(1, 0)\| = 1$  für alle  $t$  folgt dann

$$L(\psi(\gamma)) = \int_a^b |(\psi \circ \gamma)'(t)| dt = \int_a^b \underbrace{|\psi'(\gamma(t))|}_{=: z \in Q} \cdot \underbrace{|\gamma'(t)|}_{=: v} dt \leq \int_a^b M dt = M(b-a) = M \cdot L(\gamma).$$

Genauso folgt dies natürlich auch für die anderen drei Seiten des Quaders. Addieren wir diese vier Ungleichungen auf, so erhalten wir die Aussage des Lemmas.  $\square$

Mit diesen Ergebnissen können wir nun endlich den eigentlichen Beweis des Cauchyschen Integralsatzes führen:

*Beweis von Satz 4.1.* Wir teilen den gegebenen Quader  $Q$  in vier gleich große Teilquader auf, die wir mit I, II, III, IV bezeichnen:



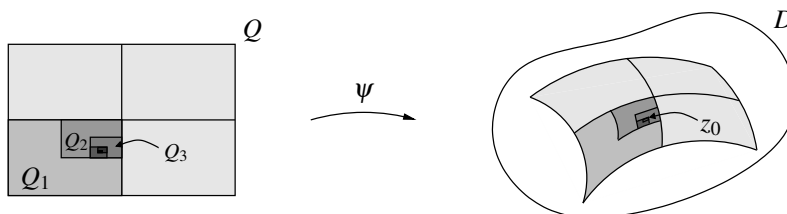
Wie schon in Beispiel 4.2 sieht man sofort, dass sich das Integral von  $f$  über den Weg  $\gamma = \psi(\partial Q)$  aufteilen lässt in die Summe der vier Wegintegrale

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\psi(\partial I)} f(z) dz + \int_{\psi(\partial II)} f(z) dz + \int_{\psi(\partial III)} f(z) dz + \int_{\psi(\partial IV)} f(z) dz$$

(die Integrale auf den Wegstrecken zwischen den Teilquadern heben sich weg, da sie zweimal in entgegengesetzter Richtung durchlaufen werden). Damit folgt nach der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| &\leq \left| \int_{\psi(\partial I)} f(z) dz \right| + \left| \int_{\psi(\partial II)} f(z) dz \right| + \left| \int_{\psi(\partial III)} f(z) dz \right| + \left| \int_{\psi(\partial IV)} f(z) dz \right| \\ &\leq 4 \cdot \left| \int_{\psi(\partial Q_1)} f(z) dz \right|, \end{aligned}$$

wobei  $Q_1 \in \{I, II, III, IV\}$  ein Teilquader ist, für den der Betrag des betrachteten Wegintegrals am größten ist. Wir setzen dieses Verfahren nun rekursiv fort und definieren eine Folge  $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$  von Quadern, von denen jedes aus dem vorhergehenden durch die obige Prozedur entsteht:





Die obige Abschätzung liefert dann offensichtlich

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq 4^n \cdot \left| \int_{\psi(\partial Q_n)} f(z) dz \right| \tag{1}$$

für alle  $n$ .

Beachte, dass der Schnitt aller Quader  $Q_n$  genau ein Punkt in  $Q$  ist. Es sei  $z_0 := \psi(\bigcap_n Q_n)$  wie oben eingezeichnet das Bild dieses Schnittpunkts unter  $\psi$ .

Da  $z_0$  in  $\psi(Q)$  liegt, ist  $f$  nach Voraussetzung in  $z_0$  komplex differenzierbar. (Dies ist übrigens die einzige Stelle des Beweises, an der wir die komplexe Differenzierbarkeit von  $f$  verwenden — und wir sehen in der Tat, dass wir diese Eigenschaft nicht auf dem Integrationsweg  $\gamma$  selbst, sondern *irgendwo in der von  $\gamma$  begrenzten Fläche* benötigen!) Die Funktion  $f$  ist in  $z_0$  also linear approximierbar, d.h. es gibt eine Funktion  $r : D \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$f(z) = \underbrace{f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)}_{(*)} + r(z) \quad \text{für alle } z \in D \tag{2}$$

$$\text{und} \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{r(z)}{z - z_0} = 0 \tag{3}$$

[G, Lemma 9.8]. Hier hat der mit  $(*)$  bezeichnete Term offensichtlich eine Stammfunktion (nämlich  $zf(z_0) + \frac{1}{2}f'(z_0)(z - z_0)^2$ ), so dass beliebige geschlossene Wegintegrale über diesen Ausdruck nach Lemma 3.10 verschwinden. Setzen wir (2) also auf der rechten Seite in (1) ein, so erhalten wir für alle  $n$

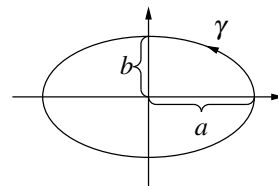
$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| &\leq 4^n \cdot \left| \int_{\psi(\partial Q_n)} r(z) dz \right| \\ &\leq 4^n \cdot L(\psi(\partial Q_n)) \cdot \max_{z \in \psi(\partial Q_n)} |r(z)| && \text{(nach Lemma 4.5)} \\ &\leq 4^n \cdot L(\psi(\partial Q_n)) \cdot \max_{z \in \psi(\partial Q_n)} |z - z_0| \cdot \max_{z \in \psi(\partial Q_n)} \left| \frac{r(z)}{z - z_0} \right| \\ &\leq 4^n \cdot L(\psi(\partial Q_n))^2 \cdot \max_{z \in \psi(\partial Q_n)} \left| \frac{r(z)}{z - z_0} \right| && \text{(} z \text{ und } z_0 \text{ sind beide in } \psi(Q_n)\text{,} \\ &&& \text{also ist } |z - z_0| \text{ kleiner als der} \\ &&& \text{Umfang } L(\psi(\partial Q_n)) \text{ von } \psi(Q_n)\text{)} \\ &\leq 4^n \cdot M^2 \cdot L(\partial Q_n)^2 \cdot \max_{z \in \psi(\partial Q_n)} \left| \frac{r(z)}{z - z_0} \right| && \text{(mit } M := \max\{|\psi'(z) \cdot v|; z \in Q, \\ &&& \|v\| = 1\} \text{ nach Lemma 4.6)} \\ &= M^2 \cdot L(\partial Q)^2 \cdot \max_{z \in \psi(\partial Q_n)} \left| \frac{r(z)}{z - z_0} \right| && \text{(wegen } L(\partial Q_n) = \frac{1}{2^n} \cdot L(\partial Q)\text{).} \end{aligned}$$

In diesem Ausdruck ist  $M^2 \cdot L(\partial Q)^2$  unabhängig von  $n$ . Im verbleibenden Maximum hingegen konvergiert das  $z$ , an dem jeweils das Maximum angenommen wird, notwendigerweise gegen  $z_0$ . Nach (3) konvergiert das Maximum mit  $n \rightarrow \infty$  also gegen Null, womit wie behauptet  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$  folgt.  $\square$

**Aufgabe 4.8.** Es sei  $\gamma$  wie in der Skizze ein geschlossener Weg, der entgegen dem Uhrzeigersinn einmal entlang des Randes einer Ellipse mit Halbachsen  $a$  und  $b$  läuft.

- (a) Zeige mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes, dass das Wegintegral  $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz$  nicht von  $a$  und  $b$  abhängt. Welchen Wert hat es?
- (b) Zeige mit Hilfe von (a) und *ohne Verwendung von Stammfunktionen*, dass

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt = \frac{2\pi}{ab}.$$



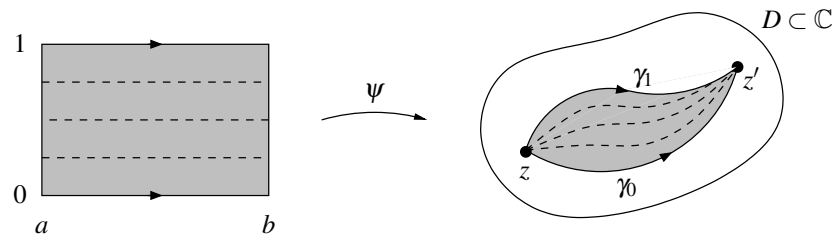
*(Eine Stammfunktion zu finden und das Integral auf diese Art auszurechnen wäre hier zwar prinzipiell möglich, aber sehr aufwändig. Wir sehen hier also ein erstes Beispiel dafür, wie sich reelle Integrale mit Hilfe der Funktionentheorie manchmal viel einfacher berechnen lassen.)*

## 5. HOMOTOPIE VON WEGEN

In der Praxis wird der Cauchysche Integralsatz meistens in einer äquivalenten Umformulierung verwendet, die wir in Aufgabe 4.8 (a) bereits gesehen haben und nun genauer behandeln wollen. In dieser Umformulierung besagt der Cauchysche Integralsatz anschaulich, dass *Wegintegrale*  $\int_{\gamma} f(z) dz$  ihren Wert nicht ändern, wenn man den Weg  $\gamma$  innerhalb des Bereiches deformiert, in dem  $f$  holomorph ist. Um eine solche Aussage mathematisch exakt formulieren zu können, müssen wir natürlich zunächst einmal definieren, was wir unter einer „Deformation eines Weges“ genau verstehen wollen. Der korrekte mathematische Begriff hierfür ist die sogenannte Homotopie. Dieses Konzept stammt eigentlich aus der Topologie und wird normalerweise für lediglich stetige Wege formuliert; wie üblich werden wir uns in dieser Vorlesung aber nur mit *stückweise stetig differenzierbaren* Wegen befassen. Da wir in Aufgabe 3.7 bereits gesehen haben, dass sich jeder solche Weg sogar zu einem *stetig differenzierbaren* Weg umparametrisieren lässt, wollen wir uns hier auf solche stetig differenzierbaren Wege beschränken.

**Definition 5.1** (Homotopie). Es seien  $D \subset \mathbb{C}$  offen und  $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow D$  zwei stetig differenzierbare Wege in  $D$  (mit gleichem Startintervall).

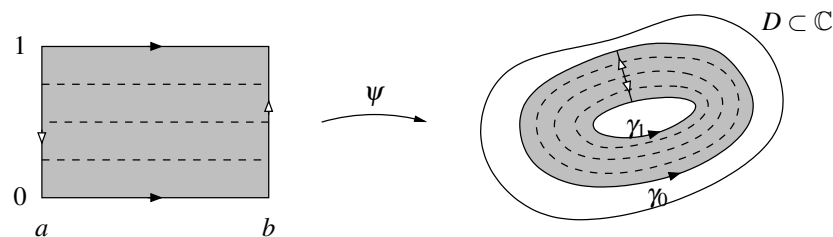
- (a) (Relative Homotopie) Haben  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$  den gleichen Anfangspunkt  $z := \gamma_0(a) = \gamma_1(a)$  und den gleichen Endpunkt  $z' := \gamma_0(b) = \gamma_1(b)$ , so heißen  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$  **homotop** (oder genauer: **homotop relativ** zu den Endpunkten  $\{a, b\}$  des Intervalls) in  $D$ , wenn es wie im folgenden Bild eine stetig differenzierbare Abbildung  $\psi : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow D$  gibt mit



- $\psi(t, 0) = \gamma_0(t)$  und  $\psi(t, 1) = \gamma_1(t)$  für alle  $t \in [a, b]$  (d.h. die untere Rechteckseite ist der Weg  $\gamma_0$  und die obere der Weg  $\gamma_1$ );
- $\psi(a, s) = z$  und  $\psi(b, s) = z'$  für alle  $s \in [0, 1]$  (d.h. die linke Rechteckseite wird konstant auf  $z$  und die rechte konstant auf  $z'$  abgebildet).

Anschaulich sind  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$  also homotop, wenn sich  $\gamma_0$  innerhalb von  $D$  und unter Festhaltung der Endpunkte nach  $\gamma_1$  deformieren lässt: betrachtet man für  $s \in [0, 1]$  die Wege  $\gamma_s : [a, b] \rightarrow D$  mit  $\gamma_s(t) = \psi(t, s)$ , so ändert sich  $\gamma_0$  langsam in  $\gamma_1$ , wenn man  $s$  von 0 nach 1 laufen lässt. (In dem Bild oben sind drei der Zwischenwege  $\gamma_{1/4}, \gamma_{1/2}, \gamma_{3/4}$  gestrichelt eingezeichnet.) Man bezeichnet die Abbildung  $\psi$  auch als **Homotopie** von  $\gamma_0$  nach  $\gamma_1$ .

- (b) (Freie Homotopie) Sind  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$  geschlossen (mit nicht notwendig gleichem Anfangs- bzw. Endpunkt), so heißen  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$  **homotop** (oder genauer: **frei homotop**) in  $D$ , wenn es wie im folgenden Bild eine stetig differenzierbare Abbildung  $\psi : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow D$  gibt mit



- $\psi(t, 0) = \gamma_0(t)$  und  $\psi(t, 1) = \gamma_1(t)$  für alle  $t \in [a, b]$  (d.h. wie oben ist die untere Rechteckseite der Weg  $\gamma_0$  und die obere der Weg  $\gamma_1$ );
- $\psi(a, s) = \psi(b, s)$  für alle  $s \in [0, 1]$  (d.h. jeder Punkt der linken Rechteckseite wird in  $D$  auf den gleichen Punkt wie der entsprechende Punkt der rechten Rechteckseite abgebildet).

Anschaulich sind  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$  also homotop, wenn sich  $\gamma_0$  innerhalb von  $D$  als geschlossener Weg nach  $\gamma_1$  deformieren lässt: betrachtet man wieder für  $s \in [0, 1]$  die Wege  $\gamma_s : [a, b] \rightarrow D$  mit  $\gamma_s(t) = \psi(t, s)$ , so sind alle  $\gamma_s$  geschlossene Wege in  $D$ , die sich für  $s$  von 0 bis 1 langsam von  $\gamma_0$  nach  $\gamma_1$  ändern. Auch hier wird die Abbildung  $\psi$  als Homotopie von  $\gamma_0$  nach  $\gamma_1$  bezeichnet.

- (c) Ein geschlossener Weg heißt **nullhomotop** in  $D$ , wenn er (frei) homotop zu einem konstanten Weg ist, d.h. anschaulich wenn er sich „in  $D$  zu einem Punkt zusammenziehen lässt“.

**Folgerung 5.2** (Homotopieinvarianz des Wegintegrals). *Es seien  $D \subset \mathbb{C}$  offen,  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph, und  $\gamma_0, \gamma_1$  zwei Wege in  $D$ .*

- (a) Sind  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$  homotop (relativ  $\{a, b\}$  oder frei homotop), so gilt  $\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz$ .  
 (b) Ist  $\gamma_0$  (geschlossen und) nullhomotop in  $D$ , so gilt  $\int_{\gamma_0} f(z) dz = 0$ .

*Beweis.* Dies folgt sofort aus dem Cauchyschen Integralsatz 4.1 angewendet auf die Homotopieabbildung  $\psi$  aus Definition 5.1: im Fall der relativen Homotopie verschwindet das Wegintegral über  $f$  entlang der seitlichen Rechteckkanten, da diese konstant auf einen Punkt abgebildet werden. Im Fall der freien Homotopie ist die Summe der Wegintegrale über  $f$  entlang der seitlichen Rechteckkanten Null nach Bemerkung 3.6, da die beiden Kanten den gleichen Weg mit entgegengesetzter Orientierung beschreiben. In beiden Fällen folgt also aus dem Cauchyschen Integralsatz, dass die Integrale entlang der oberen und unteren Rechteckkante (bei korrekter Orientierung) gleich sein müssen, also dass wie in (a) behauptet  $\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz$  gilt. Die Aussage (b) folgt natürlich sofort aus (a), da das Integral über einen konstanten Weg 0 ist.  $\square$

### Beispiel 5.3.

- (a) Es sei  $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Ferner seien

$$\gamma_0 : [0, 2\pi] \rightarrow D, t \mapsto r e^{it} \quad \text{und} \quad \gamma_1 : [0, 2\pi] \rightarrow D, t \mapsto z_0 + r e^{it}$$

zwei Kreislinien mit Radius  $r$ .

- Ist  $|z_0| < r$ , enthält der Weg  $\gamma_1$  also den Nullpunkt in seinem Inneren (siehe Bild unten links), so sind  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$  (frei) homotop in  $D$  mit der Homotopieabbildung

$$\psi : [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow D, (t, s) \mapsto s z_0 + r e^{it}.$$

Das Bild von  $\psi$  liegt nämlich in der Tat in  $D$  (enthält also nicht den Nullpunkt), da

$$|\psi(t, s)| = |s z_0 + r e^{it}| \geq |r e^{it}| - |s z_0| \geq r - |z_0| > 0$$

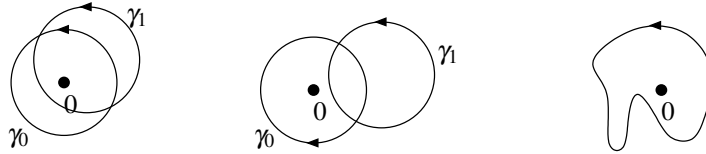
für alle  $t \in [0, 2\pi]$  und  $s \in [0, 1]$ ; und es ist offensichtlich, dass  $\psi$  stetig differenzierbar ist und die geforderten Randbedingungen erfüllt: es ist  $\psi(t, 0) = r e^{it} = \gamma_0(t)$ ,  $\psi(t, 1) = z_0 + r e^{it}$  und  $\psi(0, s) = s z_0 + r = \psi(2\pi, s)$  für alle  $t \in [0, 2\pi]$  und  $s \in [0, 1]$ .

- Ist  $|z_0| > r$ , enthält  $\gamma_1$  also nicht den Nullpunkt in seinem Inneren (wie im Bild unten in der Mitte), so gilt für die auf  $D$  holomorphe Funktion  $z \mapsto \frac{1}{z}$  nach Beispiel 4.3

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z} dz = 0 \neq 2\pi i = \int_{\gamma_0} \frac{1}{z} dz.$$

Aus der Homotopieinvarianz des Wegintegrals gemäß Folgerung 5.2 folgt also, dass  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$  in  $D$  nicht (frei) homotop sein können. Natürlich ist auch anschaulich einleuchtend, dass man  $\gamma_0$  nicht innerhalb von  $D$ , also ohne den Nullpunkt zu treffen, nach  $\gamma_1$  deformieren kann. Letztlich liegt das daran, dass der Weg  $\gamma_0$  einmal um den Nullpunkt herumläuft, während  $\gamma_1$  dies nicht tut: anschaulich ist ein geschlossener Weg in  $D$  genau

dann homotop zur Kreislinie  $\gamma_0$ , wenn er (entgegen dem Uhrzeigersinn) einmal um den Nullpunkt herumläuft, wie z.B. im Bild unten rechts. Wir werden dieses Konzept der „Umlaufzahlen“ in Kapitel 11 noch genauer untersuchen.



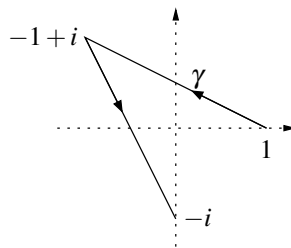
- (b) In der Menge  $D = \mathbb{C}$  sind zwei beliebige geschlossene Wege  $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow D$  stets (frei) homotop: hier kann man immer die Homotopie

$$\psi(t, s) = (1 - s) \gamma_0(t) + s \gamma_1(t)$$

wählen, die offensichtlich die geforderten Randbedingungen erfüllt. Auch anschaulich ist klar, dass man in der gesamten komplexen Ebene jeden geschlossenen Weg in jeden anderen deformieren kann, da im Gegensatz zu (a) in  $D$  diesmal ja „keine Punkte fehlen“, die einen an einer solchen Deformation hindern könnten.

Wir sehen also, dass die Homotopie von Wegen auch sehr wesentlich von der betrachteten Menge  $D$  abhängt, in der die Homotopie liegen darf.

**Aufgabe 5.4.** Berechne das Kurvenintegral  $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz$  entlang des folgenden Weges von  $1$  nach  $-i$ :



(Hinweis: Nutzt die Homotopieinvarianz des Kurvenintegrals aus und ersetzt  $\gamma$  zunächst durch einen „schöneren“ Integrationsweg.)

**Aufgabe 5.5.** Es sei  $D \subset \mathbb{C}$  offen und  $\gamma : [a, b] \rightarrow D$  ein stetig differenzierbarer Weg in  $D$ . Ferner sei  $\gamma' : [a, b] \rightarrow D$  ein Weg, der aus  $\gamma$  durch eine „orientierungserhaltende Umparametrisierung“ entsteht, d.h. es gebe eine stetig differenzierbare Abbildung  $\psi : [a, b] \rightarrow [a, b]$  mit  $\psi(a) = a$  und  $\psi(b) = b$ , so dass  $\gamma' = \gamma \circ \psi$ .

Zeige, dass  $\gamma$  und  $\gamma'$  dann homotop in  $D$  sind. (Dieselbe Aussage gilt analog auch für die freie Homotopie geschlossener Wege. Für holomorphe Funktionen folgt die Unabhängigkeit des Wegintegrals von der Parametrisierung des Weges (siehe Bemerkung 3.6) also auch aus der Homotopieinvarianz.)

**Aufgabe 5.6.** Es seien  $D \subset \mathbb{C}$  offen und  $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow D$  zwei geschlossene Wege, die gleichen Anfangspunkt und Endpunkt haben (es sei also  $\gamma_0(a) = \gamma_1(a) = \gamma_0(b) = \gamma_1(b)$ ), so dass also beide Teile (a) und (b) von Definition 5.1 anwendbar sind.

Zeige, dass  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$  genau dann homotop relativ  $\{a, b\}$  sind, wenn sie frei homotop sind. (Dies rechtfertigt die übliche Sprechweise, beide Eigenschaften einfach nur als „homotop“ zu bezeichnen.)

Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir noch festhalten, dass die Aussage der Homotopieinvarianz des Wegintegrals natürlich besonders einfach wird, wenn die Menge  $D \subset \mathbb{C}$  wie in Beispiel 5.3 (b) so beschaffen ist, dass zwei beliebige geschlossene Wege (bzw. zwei beliebige Wege mit gleichem Anfangspunkt und Endpunkt) immer homotop sind. Hierzu definiert man die folgenden beiden Begriffe:

**Definition 5.7** (Zusammenhang). Es sei  $D \subset \mathbb{C}$  offen.

- (a)  $D$  heißt **zusammenhängend** oder ein **Gebiet**, wenn es zu je zwei Punkten  $z, z' \in D$  einen Weg  $\gamma: [a, b] \rightarrow D$  gibt mit  $\gamma(a) = z$  und  $\gamma(b) = z'$ .
- (b)  $D$  heißt **einfach zusammenhängend**, wenn  $D$  zusammenhängend und jeder geschlossene Weg in  $D$  nullhomotop ist.

*Bemerkung 5.8.* In der Topologie wird eine Menge  $M$  mit der Eigenschaft aus Definition 5.7 (a) in der Regel als *wegzusammenhängend* bezeichnet, während der Begriff „zusammenhängend“ für eine andere Eigenschaft steht (nämlich dass sich  $M$  als topologischer Raum nicht auf nichttriviale Art als disjunkte Vereinigung zweier offener Mengen schreiben lässt). Man kann allerdings zeigen, dass diese beiden Eigenschaften für offene Teilmengen von  $\mathbb{C}$  (also die Mengen, die uns in dieser Vorlesung interessieren) äquivalent sind.

**Beispiel 5.9.** Die Menge  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , die wir in Beispiel 5.3 (a) betrachtet haben, ist zusammenhängend, aber nicht einfach zusammenhängend. Die Menge  $\mathbb{C}$  hingegen ist nach Beispiel 5.3 (b) einfach zusammenhängend. Allgemein ist eine offene Menge anschaulich genau dann zusammenhängend, wenn sie „nicht aus mehreren Teilen besteht“, und genau dann einfach zusammenhängend, wenn sie „keine Löcher hat, um die man herumlaufen könnte“.



**Folgerung 5.10.** Es sei  $D \subset \mathbb{C}$  offen und  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Dann gilt:

- (a) Ist  $D$  zusammenhängend und ist  $f'(z) = 0$  für alle  $z \in D$ , so ist  $f$  konstant.
- (b) Ist  $D$  einfach zusammenhängend, so hängen Wegintegrale über  $f$  nur vom Anfangs- und Endpunkt des Weges ab. Insbesondere gilt dann also  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$  für jeden geschlossenen Weg  $\gamma$ .

*Beweis.*

- (a) Es seien  $z_1, z_2 \in D$  beliebig; zu zeigen ist  $f(z_1) = f(z_2)$ . Nach Voraussetzung gibt es einen Weg  $\gamma$  von  $z_1$  nach  $z_2$ . Dann gilt wie gewünscht nach Lemma 3.10

$$0 = \int_{\gamma} f'(z) dz = f(z_2) - f(z_1).$$

- (b) Es seien  $\gamma$  und  $\gamma'$  zwei Wege, die den gleichen Anfangspunkt und den gleichen Endpunkt haben. Es sei  $\tilde{\gamma}$  der geschlossene Weg, der zuerst  $\gamma$  und danach  $\gamma'$  in umgekehrter Richtung durchläuft. Da  $D$  einfach zusammenhängend ist, ist  $\tilde{\gamma}$  nullhomotop. Also folgt

$$0 = \int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz - \int_{\gamma'} f(z) dz.$$

□

**Aufgabe 5.11.**

- (a) Eine offene Menge  $D \subset \mathbb{C}$  heiße **sternförmig**, falls es ein  $a \in D$  gibt, so dass für alle  $z \in D$  auch die ganze Verbindungsstrecke von  $a$  nach  $z$  in  $D$  liegt. Zeige, dass jede solche sternförmige Menge einfach zusammenhängend ist.  
Ist die Menge  $D = \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}_{\leq 0})$  aus Aufgabe 3.13 sternförmig?
- (b) Man zeige: Sind  $D_1, D_2 \subset \mathbb{C}$  einfach zusammenhängende offene Mengen und ist  $D_1 \cap D_2$  zusammenhängend und nicht leer, so ist  $D_1 \cup D_2$  einfach zusammenhängend.  
Gebt ferner ein Beispiel dafür an, dass man dabei auf die Voraussetzung „ $D_1 \cap D_2$  zusammenhängend“ nicht verzichten kann.

## 6. FOLGERUNGEN AUS DEM CAUCHYSCHEN INTEGRALSATZ

Wir werden nun damit beginnen, einige erste interessante Folgerungen aus dem Cauchyschen Integralsatz herzuleiten. Als erstes wollen wir noch einmal die am Ende von Kapitel 3 gestellte Frage untersuchen, wann eine gegebene Funktion eine Stammfunktion besitzt.

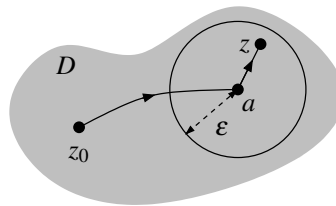
**Satz 6.1** (Existenz von Stammfunktionen). *Es sei  $D \subset \mathbb{C}$  einfach zusammenhängend und  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion. Dann besitzt  $f$  eine Stammfunktion auf  $D$ .*

*Beweis.* Wir wählen einen beliebigen Punkt  $z_0 \in D$ . Da  $D$  zusammenhängend ist, können wir weiterhin für alle  $z \in D$  einen beliebigen Weg  $\gamma_z$  von  $z_0$  nach  $z$  wählen. Damit definieren wir nun eine Funktion  $F : D \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f(w) dw$$

und behaupten, dass  $F$  eine Stammfunktion von  $f$  ist.

Es sei dazu  $a \in D$  beliebig; wir zeigen, dass  $F$  in  $a$  komplex differenzierbar mit Ableitung  $f$  ist. Weil  $D$  offen ist, gibt es ein  $\varepsilon > 0$ , so dass die  $\varepsilon$ -Umgebung  $U_\varepsilon(a)$  von  $a$  ganz in  $D$  liegt. Da weiterhin  $F$  nach Folgerung 5.10 (b) nicht von den gewählten Wegen  $\gamma_z$  abhängt, können wir annehmen, dass diese Wege so gewählt sind, dass  $\gamma_z$  für alle  $z \in U_\varepsilon(a)$  zunächst auf einem festen Weg  $\gamma_a$  von  $z_0$  nach  $a$  und dann entlang der geraden Verbindungsstrecke von  $a$  nach  $z$  verläuft:



Insbesondere ist dann  $F(z) - F(a) = \int_{\gamma_z} f(w) dw - \int_{\gamma_a} f(w) dw$  für alle  $z \in U_\varepsilon(a)$  einfach das Integral von  $f$  entlang der geraden Strecke  $\overline{az}$ . Damit folgt für alle  $z \in U_\varepsilon(a)$

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z) - F(a)}{z - a} - f(a) \right| &= \left| \left( \frac{1}{z - a} \cdot \int_{\overline{az}} f(w) dw \right) - f(a) \right| \\ &= \frac{1}{|z - a|} \cdot \left| \int_{\overline{az}} (f(w) - f(a)) dw \right| \\ &\leq \max_{w \in \overline{az}} |f(w) - f(a)| \quad \text{nach Lemma 4.5.} \end{aligned}$$

Für  $z \rightarrow a$  (und damit auch  $w \rightarrow a$ ) konvergiert dieser Ausdruck wegen der Stetigkeit von  $f$  gegen 0. Also ist  $F$  komplex differenzierbar in  $a$  mit Ableitung  $f(a)$ .  $\square$

*Bemerkung 6.2.*

- Die Idee des Beweises von Satz 6.1 ist in der Tat sehr einfach: wie wir aus der reellen Analysis wissen, sollte die Stammfunktion  $F$  von  $f$  natürlich einfach durch das Integral „ $F(z) = \int_{z_0}^z f(w) dw$ “ gegeben sein. In der komplexen Analysis ergibt dies aber erst einen Sinn, nachdem wir einen Weg von  $z_0$  nach  $z$  gewählt haben — und um sicherzustellen, dass das Ergebnis nicht von diesem Weg abhängt, setzen wir voraus, dass  $D$  einfach zusammenhängend und  $f$  holomorph ist (siehe Folgerung 5.10 (b)).
- Wir werden in Folgerung 8.1 „(c)  $\Rightarrow$  (a)“ sehen, dass für beliebige offene Mengen  $D$  auch die Umkehrung von Satz 6.1 gilt: hat  $f$  eine Stammfunktion auf  $D$ , so ist  $f$  auch holomorph.

**Beispiel 6.3.** Wir hatten in Beispiel 3.11 (a) bereits gesehen, dass die holomorphe Funktion  $f$  mit  $f(z) = \frac{1}{z}$  auf  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  keine Stammfunktion besitzt. In der Tat ist  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  auch nicht einfach zusammenhängend und Satz 6.1 damit nicht anwendbar. Verkleinern wir den Definitionsbereich jedoch z.B. auf die einfach zusammenhängende Menge  $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}_{\leq 0})$ , so besagt Satz 6.1, dass  $f$  auf dieser

Menge eine Stammfunktion besitzen muss. In der Tat haben wir eine solche Stammfunktion — den komplexen Logarithmus — auch bereits in Aufgabe 3.13 kennengelernt.

Dieses Verkleinern des Definitionsbereichs zu einer einfach zusammenhängenden Menge lässt sich natürlich stets anwenden, da es um jeden Punkt einer offenen Menge  $D$  ja zumindest eine (einfach zusammenhängende)  $\varepsilon$ -Umgebung gibt, die noch ganz in  $D$  liegt. Man formuliert Satz 6.1 daher oft auch so:

**Folgerung 6.4.** „Holomorphe Funktionen haben stets lokale Stammfunktionen“, d.h. ist  $D \subset \mathbb{C}$  offen und  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph, so hat jedes  $a \in D$  eine Umgebung in  $D$ , auf der  $f$  eine Stammfunktion besitzt.

**Aufgabe 6.5.** Es sei  $D \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$  offen und einfach zusammenhängend mit  $1 \in D$ . Man zeige:

- Es gibt genau eine Stammfunktion von  $z \mapsto \frac{1}{z}$  auf  $D$ , die an der Stelle 1 den Wert 0 hat. Wie hängt diese Funktion mit dem in Aufgabe 3.13 eingeführten Logarithmus zusammen?
- Es gibt genau eine Wurzelfunktion auf  $D$ , also genau eine stetige Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $f(z)^2 = z$  für alle  $z \in D$ , die an der Stelle 1 den Wert 1 hat. Wir bezeichnen sie mit  $f(z) = \sqrt{z}$ .
- Die Wurzelfunktion aus (b) erfüllt i.a. nicht  $\sqrt{zw} = \sqrt{z} \cdot \sqrt{w}$  für alle  $z, w \in D$  mit  $zw \in D$ ; es gilt jedoch stets  $\sqrt{zw} = \pm \sqrt{z} \cdot \sqrt{w}$ .
- Es gibt keine stetige Wurzelfunktion auf ganz  $\mathbb{C}$ .

Warum ist also die scheinbar widersprüchliche Rechnung  $-1 = i^2 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1$  falsch?

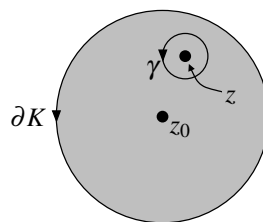
Wir wollen nun aus dem Cauchyschen Integralsatz noch einige andere Eigenschaften herleiten, die aus der Sicht der reellen Analysis sehr überraschend sind. Die erste besagt, dass eine holomorphe Funktion im Inneren eines Kreises (oder auch eines anderen Gebietes) bereits eindeutig bestimmt ist, wenn wir sie nur auf dem Rand dieses Kreises (bzw. Gebietes) kennen:

**Satz 6.6 (Cauchysche Integralformel).** Es sei  $D \subset \mathbb{C}$  offen und  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Weiterhin sei  $K = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| \leq r\}$  ein Kreis in  $D$ . Dann gilt für alle  $z \in K$ , also alle  $z$  im Inneren dieses Kreises

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Insbesondere ist  $f$  auf dem Kreis  $K$  also durch die Werte auf dem Rand  $\partial K$  bereits eindeutig bestimmt.

*Beweis.* Wir berechnen das Wegintegral auf der rechten Seite der zu beweisenden Formel. Da der Integrand auf  $D \setminus \{z\}$  holomorph ist, können wir den Integrationsweg  $\partial K$  nach Folgerung 5.2 (a) durch einen anderen, in  $D \setminus \{z\}$  frei homotopen Weg  $\gamma$  ersetzen. Wir wählen für  $\gamma$  wie im Bild rechts eine kleine Kreislinie mit Radius  $\varepsilon$  um  $z$  (die man offensichtlich aus  $\partial K$  durch eine Deformation in  $D \setminus \{z\}$  erhalten kann).



Damit folgt zunächst

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(w)}{w - z} dw &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z|=\varepsilon} \frac{f(w)}{w - z} dw \\ &= \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z|=\varepsilon} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw}_{(A)} + \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z|=\varepsilon} \frac{f(z)}{w - z} dw}_{(B)}. \end{aligned}$$

Beachte, dass der Integrand in (A) (als Funktion von  $w$ ) nach  $z$  stetig fortsetzbar ist — und zwar durch den Funktionswert  $f'(z)$ . Für festes  $z$  nimmt damit die auf der kompakten Menge  $K$  stetige Funktion



$w \mapsto \left| \frac{f(w)-f(z)}{w-z} \right|$  ein Maximum  $M \in \mathbb{R}$  an. Also können wir (A) nach Lemma 4.5 betragsmäßig nach oben abschätzen durch  $\frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi\varepsilon \cdot M$ . Insbesondere konvergiert (A) also gegen 0 für  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Den Term (B) hingegen können wir mit Hilfe der Substitution  $u = w - z$  und Beispiel 3.5 (a) sofort ausrechnen zu

$$(B) = \frac{f(z)}{2\pi i} \int_{|w-z|=\varepsilon} \frac{1}{w-z} dw = \frac{f(z)}{2\pi i} \int_{|u|=\varepsilon} \frac{1}{u} du = \frac{f(z)}{2\pi i} \cdot 2\pi i = f(z).$$

Insgesamt erhalten wir damit also für  $\varepsilon \rightarrow 0$  wie behauptet

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(w)}{w-z} dw = (A) + (B) = 0 + f(z) = f(z).$$

□

*Bemerkung 6.7.*

- Natürlich können wir den Integrationsweg in der Cauchyschen Integralformel auch durch jeden anderen in  $D \setminus \{z\}$  zu  $\partial K$  homotopen Weg ersetzen — so wie wir das ja auch im Beweis des Satzes getan haben. Insbesondere kommt es also wieder einmal nicht darauf an, dass  $K$  wirklich ein Kreis ist, sondern wir können auf dieselbe Art zeigen, dass „eine in einem gewissen Bereich holomorphe Funktion bereits durch die Funktionswerte auf dem Rand dieses Bereiches eindeutig bestimmt ist“.
- Man beachte jedoch, dass wir für die Cauchysche Integralformel *voraussetzen* müssen, dass  $f$  überall im Inneren von  $K$  holomorph ist, auch wenn das Integral auf der rechten Seite die Werte von  $f$  im Inneren von  $K$  überhaupt nicht verwendet! Versuchen wir z.B., die Cauchysche Integralformel auf die Funktion  $f(z) = \frac{1}{z}$  auf der Einheitskreisscheibe  $K = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\}$  anzuwenden, so würden wir

$$\frac{1}{z} \stackrel{?}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} \frac{1}{w(w-z)} dw$$

erhalten, was zumindest für kleine  $z$  nicht richtig sein kann, da die linke Seite dieser Gleichung für  $z \rightarrow 0$  betragsmäßig unendlich wächst, während auf der rechten Seite der Integrand auf dem betrachteten Weg (und damit auch das Integral) für  $z \rightarrow 0$  beschränkt bleibt. In der Tat wird das Ergebnis von Aufgabe 6.9 (b) zeigen, dass obige Gleichung für *alle*  $z$  im Inneren von  $K$  falsch ist.

**Beispiel 6.8.**

- Ist  $f$  holomorph auf einer abgeschlossenen Kreisscheibe und konstant auf dem Rand dieses Kreises, so ist  $f$  bereits auf der ganzen Kreisscheibe konstant (denn die konstante Funktion ist eine holomorphe Funktion mit den „richtigen“ Werten auf dem Rand, also kann es nach Satz 6.6 keine weitere geben).
- Die Cauchysche Integralformel liefert manchmal eine einfache Möglichkeit, Kurvenintegrale entlang geschlossener Wege über Funktionen zu berechnen, die im vom Weg begrenzten Bereich mit Ausnahme eines einzelnen Punktes holomorph sind. So ergibt sich z.B. das Integral

$$\int_{|w|=2} \frac{e^w}{w+1} dw$$

mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes (für  $f(w) = e^w$  und  $z = -1$ ) sofort zu  $2\pi i \cdot f(-1) = \frac{2\pi i}{e}$ , da der Integrationsweg einmal in positiver Richtung um den Punkt  $z$  herumläuft (siehe Bemerkung 6.7 (a)). Im Gegensatz dazu ist aber natürlich

$$\int_{|w|=2} \frac{e^w}{w+3} dw = 0,$$

nach dem Cauchyschen Integralsatz, denn hier ist der Integrand holomorph im Inneren des Integrationskreises — der Integrationsweg läuft in diesem Fall nicht um den Punkt  $z = -3$  herum, sondern ist nullhomotop in  $\mathbb{C} \setminus \{-3\}$ .

Die Cauchysche Integralformel funktioniert in der obigen Form bisher jedoch in der Regel noch nicht zur Integralberechnung, wenn  $f$  an mehreren Stellen innerhalb des Integrationsweges nicht holomorph ist und/oder der Integrand nicht von der Form  $\frac{f(w)}{w-z}$  mit einer holomorphen Funktion  $f$  ist. Diese Fälle werden wir später mit Hilfe des Residuensatzes 11.10 behandeln.

**Aufgabe 6.9.** Man berechne mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel

- (a)  $\int_{|z+1|=1} \frac{e^z}{(z+1)(z-3)^3} dz$ ;  
 (b)  $\int_{|z|=1} \frac{1}{z(z-w)} dz$  für alle  $w \in \mathbb{C}$  mit  $|w| \neq 1$ .

**Aufgabe 6.10.** Zeige, dass es keine holomorphe Funktion  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  gibt, für die  $f(z) = \bar{z}^2$  für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| = 1$  gilt.

Das folgende Lemma ist eine einfache Folgerung aus der Cauchyschen Integralformel:

**Lemma 6.11 (Mittelwertprinzip).** *Es sei  $D \subset \mathbb{C}$  offen und  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Weiterhin sei  $K = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| \leq r\}$  ein abgeschlossener Kreis, der ganz in  $D$  liegt. Dann gilt*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt,$$

d.h. „der Funktionswert von  $f$  am Mittelpunkt  $z_0$  von  $K$  ist der Mittelwert der Funktionswerte von  $f$  auf dem Rand  $\partial K$ “.

*Beweis.* Aus der Cauchyschen Integralformel in Satz 6.6 folgt

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z-z_0} dz.$$

Mit der Parametrisierung  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow D$ ,  $t \mapsto z_0 + re^{it}$  des Integrationsweges ist also wie behauptet

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{re^{it}} ire^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt.$$

□

*Bemerkung 6.12.* Beachte, dass das Integral in Lemma 6.11 kein Wegintegral, sondern ein „gewöhnliches“ (komplexes) Integral über eine reelle Variable ist. Demzufolge gilt hier auch keine Homotopieinvarianz wie in Folgerung 5.2, d.h. es ist *nicht* richtig, dass der Funktionswert von  $f$  an einem Punkt  $z_0$  gleich dem Mittelwert der Funktionswerte von  $f$  auf einer beliebigen Kurve ist, die um  $z_0$  einmal herumläuft.

Aus der Tatsache, dass bei einer holomorphen Funktion  $f$  der Wert in jedem Punkt  $z_0$  gleich dem Mittelwert der Funktionswerte auf einer Kreislinie um  $z_0$  ist, folgt nun sofort die weitere sehr erstaunliche Tatsache, dass  $f$  nirgends ein (betragsmäßiges) lokales Maximum besitzen kann, sofern die Funktion nicht schon konstant war:

**Satz 6.13 (Maximumprinzip).** *Es sei  $D \subset \mathbb{C}$  offen und  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Weiterhin sei  $z_0 \in D$  ein Punkt, an dem die Funktion  $|f|$  ein lokales Maximum hat (d.h. es gelte  $|f(z)| \leq |f(z_0)|$  für alle  $z$  in einer Umgebung von  $z_0$ ). Dann ist  $f$  bereits konstant in einer Umgebung von  $z_0$ .*

*Beweis.* Es sei  $U = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < r\} \subset D$  ein Kreis, so dass  $z_0$  auf  $U$  das globale Maximum von  $|f|$  ist. Dann folgt aus dem Mittelwertprinzip für alle  $r'$  mit  $0 < r' < r$

$$\begin{aligned} |f(z_0)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(z_0 + r' e^{it}) dt \right| && \text{(nach Lemma 6.11)} \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + r' e^{it})| dt \\ &\stackrel{(*)}{\leq} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0)| dt && \text{(nach Voraussetzung)} \\ &= |f(z_0)|. \end{aligned}$$

Es muss in dieser Ungleichungskette also überall die Gleichheit gelten. Insbesondere folgt aus der Gleichheit in  $(*)$  (und der Stetigkeit von  $|f|$ ) also  $|f(z_0 + r' e^{it})| = |f(z_0)|$  für alle  $0 < r' < r$  und alle  $t$ , d.h.  $|f|$  ist konstant auf  $U$ .

Ist nun  $f(z_0) = 0$  und damit also  $|f|$  konstant gleich 0 auf  $U$ , so sind wir natürlich fertig, denn dann ist ja auch  $f$  konstant gleich 0 auf  $U$ . Andernfalls setzen wir  $g(z) := \frac{f(z)}{f(z_0)}$  auf  $U$ . Diese Funktion erfüllt dann  $|g(z)| = 1$  für alle  $z \in U$  und ist nach Aufgabe 2.19 (c) damit konstant. Also ist auch  $f$  auf  $U$  konstant, was zu zeigen war.  $\square$

Eine zum Maximumprinzip analoge Aussage gibt es auch für das Minimum:

**Folgerung 6.14 (Minimumprinzip).** *Es sei  $D \subset \mathbb{C}$  offen und  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Hat dann  $|f|$  in einem Punkt  $z_0$  ein lokales Minimum und ist dieses Minimum ungleich 0, so ist  $f$  bereits konstant in einer Umgebung von  $z_0$ .*

*Beweis.* Dies folgt sofort aus dem Maximumprinzip angewendet auf die Funktion  $\frac{1}{f}$ .  $\square$

**Bemerkung 6.15.** Beim Minimumprinzip ist es sehr wichtig vorauszusetzen, dass das betrachtete Betragsminimum ungleich 0 ist. Ohne diese Voraussetzung ist der Satz offensichtlich falsch: da Beträge ja nie negativ sein können, liegt schließlich an jeder Nullstelle von  $f$  ein lokales Betragsminimum vor — und natürlich ist es falsch, dass eine holomorphe Funktion in der Umgebung einer Nullstelle stets konstant ist.

Oftmals findet man das Maximum- bzw. Minimumprinzip in der Literatur in der offensichtlich äquivalenten Formulierung, dass „holomorphe Funktionen ihr Betragsmaximum bzw. -minimum auf dem Rand annehmen“:

**Folgerung 6.16 (Maximum- bzw. Minimumprinzip, 2. Version).** *Es sei  $D \subset \mathbb{C}$  offen und beschränkt,  $f : \overline{D} \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und holomorph auf  $D$ . Dann wird das absolute Betragsmaximum von  $f$  auf  $\overline{D}$  (das wegen der Stetigkeit von  $f$  auf der kompakten Menge  $\overline{D}$  existiert) auf dem Rand von  $D$  angenommen. Dasselbe gilt für das absolute Betragsminimum, sofern es ungleich 0 ist.*

**Bemerkung 6.17.** Beim Maximum- und Minimumprinzip haben wir aus der Existenz eines lokalen Betragsmaximums bzw. -minimums einer holomorphen Funktion  $f$  in einem Punkt  $z_0$  geschlossen, dass  $f$  bereits konstant in einer Umgebung von  $z_0$  sein muss. Ist der betrachtete Definitionsbereich  $D$  von  $f$  zusammenhängend, so wird in der Tat später aus dem Identitätssatz folgen, dass  $f$  dann sogar konstant auf ganz  $D$  ist (siehe Bemerkung 8.11 (b)).

**Aufgabe 6.18.** Es sei  $D \subset \mathbb{C}$  offen und  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion.

Man zeige: Hat die reellwertige Funktion  $\operatorname{Re} f$  ein lokales Maximum in einem Punkt  $a \in D$ , so ist  $f$  konstant in einer Umgebung von  $a$ .

Mit Hilfe des Minimumprinzips können wir nun bereits einen ersten einfachen Beweis für den Fundamentalsatz der Algebra geben. Wir werden später in dieser Vorlesung noch andere einfache Beweise hierfür sehen.

**Satz 6.19 (Fundamentalsatz der Algebra, 1. Beweis).** *Jedes nicht-konstante komplexe Polynom hat eine Nullstelle in  $\mathbb{C}$ .*

*Beweis.* Es sei  $f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$  ein (o.B.d.A. normiertes) Polynom mit  $n > 0$  und  $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ . Wir wollen zunächst die (anschaulich offensichtliche) Aussage formalisieren, dass  $f(z)$  für  $z \rightarrow \infty$  gegen Unendlich strebt. Dazu machen wir die folgende Abschätzung: für  $z \in \mathbb{C}$  gilt nach der Dreiecksungleichung

$$|f(z)| = |z|^n \cdot \left| 1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n} \right| \geq |z|^n \cdot \underbrace{\left( 1 - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} - \dots - \frac{|a_0|}{|z|^n} \right)}_{(*)}.$$

Für  $|z| \rightarrow \infty$  konvergiert der Ausdruck  $(*)$  natürlich gegen 1. Also können wir ein  $r > 0$  finden, so dass  $(*) \geq \frac{1}{2}$  für  $|z| \geq r$ , d.h. es ist dann  $|f(z)| \geq \frac{1}{2}|z|^n$  für alle  $z$  mit  $|z| \geq r$ . Durch evtl. Vergrößern von  $r$  können wir dann natürlich auch ein  $R > 0$  finden, so dass

$$|f(z)| \geq |a_0| + 1 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| \geq R.$$

Betrachten wir nun die Kreisscheibe  $K = \{z \in \mathbb{C} ; |z| \leq R\}$ , so besagt diese Abschätzung gerade, dass

$$|f(z)| \geq |a_0| + 1 > |a_0| = |f(0)|$$

für alle  $z \in \partial K$  ist. Das absolute Betragsminimum von  $|f|$  auf  $K$  wird also sicher nicht auf dem Rand  $\partial K$  angenommen, denn wir haben mit dem Nullpunkt ja in jedem Fall schon einen Punkt im Inneren von  $K$  gefunden, an dem  $|f|$  kleiner ist als überall auf dem Rand. Da  $f$  natürlich holomorph ist, ist dies nach dem Minimumprinzip wie in Folgerung 6.16 aber nur möglich, wenn das Betragsminimum von  $f$  gleich 0 ist — und das heißt ja gerade, dass  $f$  auf  $K$  eine Nullstelle besitzt.  $\square$

## 7. POTENZREIHEN UND TAYLOR-REIHEN

Mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel wollen wir nun in diesem Kapitel ein weiteres sehr zentrales Resultat der Funktionentheorie herleiten, nämlich dass sich holomorphe Funktionen stets lokal um jeden Punkt in eine Potenzreihe entwickeln lassen. Um dies zu sehen, benötigen wir zunächst einige grundlegende Eigenschaften von Potenzreihen, die im Komplexen genauso wie im Reellen gelten und die wir zur Erinnerung aus den Grundlagen der Mathematik kurz wiederholen wollen.

**Definition 7.1** (Potenzreihen). Es sei  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Eine **Potenzreihe** um  $z_0$  ist ein Ausdruck der Form

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

für gewisse  $a_n \in \mathbb{C}$ .

*Bemerkung 7.2.* Am wichtigsten ist bei einer Potenzreihe zunächst die Frage, für welche Werte  $z \in \mathbb{C}$  sie konvergiert und für welche divergiert. Aus den Grundlagen der Mathematik kennen wir hierzu bereits die folgenden Ergebnisse:

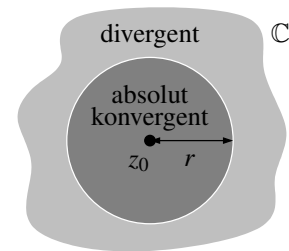
- (a) Konvergiert die Potenzreihe  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$  für ein  $z' \in \mathbb{C}$ , so konvergiert sie auch für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z - z_0| < |z' - z_0|$  absolut [G, Lemma 6.24]. Setzt man also

$$r := \sup\{|z - z_0|; f \text{ konvergiert in } z\} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\},$$

so gilt für alle  $z \in \mathbb{C}$ :

- ist  $|z - z_0| < r$ , so konvergiert  $f(z)$  absolut;
- ist  $|z - z_0| > r$ , so divergiert  $f(z)$

[G, Satz 6.27]. Man nennt diese Zahl  $r$  den **Konvergenzradius** der Potenzreihe  $f$ ; die Menge  $U_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < r\}$  wird auch als **Konvergenzkreis** von  $f$  bezeichnet. Auf dem Rand des Konvergenzkreises, also für  $|z - z_0| = r$ , kann je nach der betrachteten Reihe in manchen Punkten Konvergenz und in anderen Divergenz auftreten.



- (b) Auf jedem kompakten Kreis  $\{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| \leq R\}$  mit  $R < r$  konvergiert die Potenzreihe sogar gleichmäßig [G, Satz 7.32].

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, wie man den Konvergenzradius einer gegebenen Potenzreihe berechnen kann. Besonders einfach ist die folgende Formel, die zwar nicht immer, aber doch sehr oft angewendet werden kann.

**Lemma 7.3.** Es sei  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$  eine Potenzreihe. Dann ist der Konvergenzradius von  $f$  gleich

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|,$$

sofern dieser Grenzwert in  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  existiert.

*Beweis.* Die Aussage folgt direkt aus dem Quotientenkriterium wie in Bemerkung 1.7 (c): es ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} (z - z_0)^{n+1}}{a_n (z - z_0)^n} \right| = \frac{|z - z_0|}{r}$$

(falls dieser Grenzwert existiert), d.h. die Reihe konvergiert (absolut) für  $|z - z_0| < r$  und divergiert für  $|z - z_0| > r$ . Also ist  $r$  der Konvergenzradius der Potenzreihe.  $\square$

*Bemerkung 7.4.* Anstatt des Quotientenkriteriums kann man auch das Wurzelkriterium aus Bemerkung 1.7 (d) verwenden und erhält die weitere Formel

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

für den Konvergenzradius der Potenzreihe. Auch diese Formel ist natürlich nur anwendbar, falls dieser Grenzwert überhaupt existiert. Man kann jedoch zeigen, dass für *jede* Potenzreihe die analoge Formel

$$r = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

gilt, wobei  $\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$  (der sogenannte „Limes superior“) den größten Häufungspunkt der Folge  $(b_n)$  bezeichnet.

### Beispiel 7.5.

- (a) Die Exponentialreihe  $f(z) = \sum \frac{z^n}{n!}$  (siehe Definition 1.8) hat — wie wir bereits wissen — den Konvergenzradius

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n!}{1/(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty,$$

d.h. die Reihe konvergiert absolut für alle  $z$  (und gleichmäßig auf jeder kompakten Kreisscheibe).

- (b) Die Potenzreihe  $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (z-1)^n$  hat den Konvergenzradius

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{1/(n+1)} = 1,$$

konvergiert also absolut für  $|z-1| < 1$  und divergiert für  $|z-1| > 1$ . Auf dem Rand des Konvergenzkreises (d.h. für  $|z-1| = 1$ ) tritt unterschiedliches Verhalten auf, so ist z.B.  $f(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  die konvergente alternierende harmonische Reihe und  $f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  die divergente harmonische Reihe.

Als nächstes wollen wir zeigen, dass Potenzreihen in ihrem Konvergenzbereich stets holomorphe Funktionen darstellen und ihre Ableitungen wie erwartet durch gliedweises Differenzieren berechnet werden können. Für reelle Potenzreihen ist die entsprechende Aussage bereits aus den Grundlagen der Mathematik bekannt [G, Folgerung 9.25]. Für die komplexen Zahlen funktioniert der dort gegebene Beweis jedoch nicht.

Allgemein handelt es sich hierbei natürlich um die Frage, wann Differentiation und Grenzwertbildung (hier also die unendliche Summenbildung) miteinander vertauscht werden können. Die allgemeine Aussage ist hierbei die folgende:

**Satz 7.6** (Vertauschbarkeit von Differentiation und Grenzwertbildung). *Es sei  $D \subset \mathbb{C}$  offen und  $(f_n)$  eine Folge holomorpher Funktionen auf  $D$ , die punktweise gegen eine Grenzfunktion  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  konvergiere. Weiterhin nehmen wir an, dass die Ableitungen  $f'_n : D \rightarrow \mathbb{C}$  stetig sind und auf  $D$  gleichmäßig konvergieren.*

*Dann ist auch die Grenzfunktion  $f$  auf  $D$  holomorph, und für ihre Ableitung gilt  $f' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n$ .*

*Bemerkung 7.7.* Die Stetigkeit der Ableitungen  $f'_n$  ist in den Voraussetzungen dieses Satzes eigentlich überflüssig: wir werden in Folgerung 8.1 „(a)  $\Rightarrow$  (b)“ noch sehen, dass Ableitungen holomorpher Funktionen immer stetig sind und man auf diese Voraussetzung daher hier verzichten könnte. Auch im reellen Fall in [G, Satz 9.24] haben wir den Beweis ohne diese zusätzliche Voraussetzung geführt; dort haben wir nur die Stetigkeit der Grenzfunktion der Ableitungen benötigt. Die zusätzliche Annahme der Stetigkeit aller  $f'_n$  vereinfacht den Beweis hier jedoch wesentlich und ist bei unserer späteren Anwendung auf Potenzreihen auch stets erfüllt.

*Beweis von Satz 7.6.* Für reelle Funktionen ist die analoge Aussage bereits aus den Grundlagen der Mathematik bekannt [G, Satz 9.24]. Wir führen den Beweis nun in  $\mathbb{C}$ , indem wir ihn auf den reellen Fall zurückführen.

Dazu schreiben wir  $f_n = u_n + iv_n$  mit  $u_n = \operatorname{Re} f_n$  und  $v_n = \operatorname{Im} f_n$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Analog setzen wir  $f = u + iv$  für die Grenzfunktion. Die Koordinaten in  $D$  seien wie üblich  $z = x + iy$ .

Betrachten wir nun die Funktionen  $u_n$  und fassen sie bei festgehaltenem  $y$  als Funktionen einer reellen Variablen  $x$  auf, so können wir auf diese Funktionen offensichtlich die *reelle* Vertauschbarkeit von Differentiation und Integration anwenden und sehen, dass  $u$  nach  $x$  partiell differenzierbar ist mit  $\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial u_n}{\partial x}$ . Da wir außerdem vorausgesetzt haben, dass die Ableitungen  $\frac{\partial u_n}{\partial x}$  stetig sind und gleichmäßig gegen  $\frac{\partial u}{\partial x}$  konvergieren, ist  $\frac{\partial u}{\partial x}$  darüberhinaus nach [G, Satz 22.28] stetig. Also ist  $f = u + iv : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  stetig partiell differenzierbar und damit nach [G, Satz 23.15] auch total differenzierbar.

Außerdem sind alle  $f_n$  nach Voraussetzung holomorph und erfüllen somit die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen aus Satz 2.9, d.h. es gilt  $\frac{\partial u_n}{\partial x} = \frac{\partial v_n}{\partial y}$  und  $\frac{\partial u_n}{\partial y} = -\frac{\partial v_n}{\partial x}$  für alle  $n$ . Damit folgt

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial u_n}{\partial x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial v_n}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

und analog  $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ . Also erfüllt auch  $f$  die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen und ist somit nach Satz 2.9 holomorph mit Ableitung

$$f' = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\partial u_n}{\partial x} + i \frac{\partial v_n}{\partial x} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n.$$

□

Um dieses Resultat auf Potenzreihen anwenden zu können, benötigen wir schließlich noch das folgende Lemma.

**Lemma 7.8.** *Es sei  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  eine Potenzreihe. Dann hat die durch gliedweises Differenzieren gebildete Potenzreihe  $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z - z_0)^{n-1}$  denselben Konvergenzradius wie  $f$ .*

*Beweis.* Die Potenzreihe  $f$  konvergiere für einen bestimmten Wert  $z' \in \mathbb{C}$ . Wir behaupten, dass die Reihe  $g$  dann für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z - z_0| < |z' - z_0|$  absolut konvergiert. Für den Beweis dieser Behauptung können wir offensichtlich  $z' \neq z_0$  annehmen. Wir betrachten die zu  $g(z)$  gehörige Summe der Absolutbeträge

$$\sum_{n=1}^{\infty} |n a_n(z - z_0)^{n-1}| = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{|a_n(z' - z_0)^n|}_{(A)} \cdot \underbrace{\left| n \frac{(z - z_0)^{n-1}}{(z' - z_0)^n} \right|}_{(B)}. \quad (*)$$

Da  $f(z')$  nach Voraussetzung konvergiert, ist die Folge  $a_n(z' - z_0)^n$  der in  $f(z')$  aufsummierten Glieder eine Nullfolge und damit insbesondere beschränkt. Wir können den Term (A) also durch eine Konstante  $M \in \mathbb{R}$  abschätzen. Setzen wir weiterhin  $q := \left| \frac{z - z_0}{z' - z_0} \right|$ , so erhalten wir durch Einsetzen in (\*)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |n a_n(z - z_0)^{n-1}| \leq \frac{M}{z' - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} n q^n.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist eine Potenzreihe in  $q$ , deren Konvergenzradius nach Lemma 7.3 gleich  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$  ist. Da nach Voraussetzung  $q < 1$  gilt, ist diese Potenzreihe in  $q$  also konvergent und  $g(z)$  damit absolut konvergent.

Damit muss der Konvergenzradius der Potenzreihe  $g$  mindestens gleich dem von  $f$  sein. Durch eine analoge Rechnung mit vertauschten Rollen von  $f$  und  $g$  zeigt man, dass auch die umgekehrte Ungleichung gilt und die Konvergenzradien von  $f$  und  $g$  damit gleich sein müssen. □

**Folgerung 7.9** (Differenzierbarkeit von Potenzreihen). *Jede Potenzreihe  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  ist in ihrem Konvergenzkreis holomorph mit Ableitung  $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z - z_0)^{n-1}$ .*

*Beweis.* Nach Lemma 7.8 haben  $f$  und  $g(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z - z_0)^{n-1}$  denselben Konvergenzradius  $r$ . Es sei nun  $R < r$  beliebig; nach Bemerkung 7.2 (b) konvergieren beide Potenzreihen dann sogar gleichmäßig auf der kompakten Menge  $\{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| \leq R\}$  und damit natürlich auch auf  $D :=$

$\{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < R\}$ . Anwenden von Satz 7.6 auf die Partialsummen von  $f$  bzw.  $g$  liefert damit die behauptete Aussage auf  $D$ . Da  $R < r$  beliebig war, folgt die Behauptung dann auch auf dem gesamten Konvergenzkreis.  $\square$

**Beispiel 7.10.** Wir betrachten wieder die Potenzreihe  $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (z-1)^n$  aus Beispiel 7.5 (b). Nach Folgerung 7.9 ist  $f$  im Konvergenzkreis  $D = \{z; |z-1| < 1\}$  holomorph mit Ableitung

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (z-1)^{n-1} = - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n = - \frac{1}{1 - (z-1)} = - \frac{1}{z}.$$

Wir kennen nach Aufgabe 3.13 (a) aber schon eine weitere Funktion, deren Ableitung  $-\frac{1}{z}$  ist, nämlich  $-\log z$ . Die Funktion  $z \mapsto f(z) + \log z$  ist also holomorph mit Ableitung 0 in  $D$ . Aus Folgerung 5.10 (a) ergibt sich damit, dass  $f(z) + \log z$  auf  $D$  konstant ist. Einsetzen von  $z = 1$  zeigt, dass diese Konstante 0 sein muss. Damit ist  $f(z) = -\log z$  auf  $D$ . Man beachte hierbei insbesondere, dass  $-\log z$  zwar auf dem viel größeren Gebiet  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$  definiert und holomorph ist, aber nur im Kreis  $D$  (bzw. evtl. noch an einigen Punkten auf  $\partial D$ ) durch die Potenzreihe  $f$  dargestellt wird!

Wir können Folgerung 7.9 nun natürlich sofort auf höhere Ableitungen verallgemeinern:

**Folgerung 7.11** (Taylor-Formel für Potenzreihen). *Es sei  $f(z) = \sum a_n (z - z_0)^n$  eine Potenzreihe mit Konvergenzkreis  $D$ . Dann ist  $f$  auf  $D$  beliebig oft komplex differenzierbar, und alle Ableitungen können gliedweise berechnet werden. Weiterhin gilt  $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$  für alle  $n$  und damit*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \quad (\text{Taylor-Formel})$$

für alle  $z \in D$  (wobei  $f^{(n)}$  natürlich die  $n$ -te komplexe Ableitung von  $f$  bezeichnet).

*Beweis.* Durch iterierte Anwendung von Folgerung 7.9 ergibt sich sofort, dass alle höheren Ableitungen von  $f$  existieren und gliedweise berechnet werden können. Führt man diese Differentiationen aus, so erhält man für alle  $k \in \mathbb{N}$

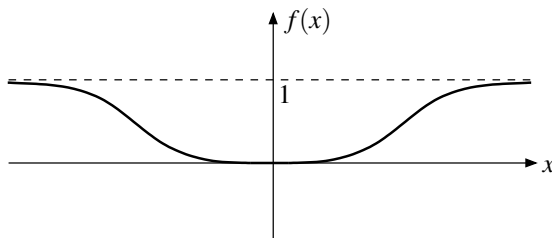
$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) a_n (z - z_0)^{n-k},$$

durch Einsetzen von  $z = z_0$  also  $f^{(k)}(z_0) = k! \cdot a_k$  und damit  $a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$ .  $\square$

**Bemerkung 7.12.** Die Taylor-Formel aus Folgerung 7.11 gilt genauso auch im Reellen [G, Beispiel 10.9 (a)]. Sie ist allerdings zunächst nur eine Aussage über *Potenzreihen* und nicht über (unendlich oft) *differenzierbare Funktionen*. In der Tat gibt es im Reellen unendlich oft differenzierbare Funktionen, die sich nicht als Potenzreihe schreiben lassen und für die demzufolge insbesondere auch die Taylor-Formel aus Folgerung 7.11 nicht gilt: so ist z.B. die reelle Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

unendlich oft differenzierbar mit  $f^{(n)}(0) = 0$  für alle  $n$  [G, Aufgabe 10.10]. Die Funktion läuft sozusagen „unendlich flach in den Nullpunkt hinein“, d.h. die entsprechende Taylor-Reihe  $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$  ist einfach die Nullfunktion und damit nicht gleich der ursprünglichen Funktion  $f$ .





Funktionen, die sich (lokal) als Potenzreihe schreiben lassen (und für die demzufolge die Taylor-Formel gilt), werden in der Literatur als **analytische Funktionen** bezeichnet. Die analytischen Funktionen bilden im Reellen nach dem obigen Beispiel eine echte Teilmenge der unendlich oft differenzierbaren Funktionen.

Der folgende Satz wird jedoch zeigen, dass die komplexe Situation wieder einmal viel schöner als die reelle ist: in der Funktionentheorie ist *jede* holomorphe Funktion automatisch analytisch, also in eine Potenzreihe entwickelbar! Dies ist natürlich sehr angenehm, weil es sich mit Potenzreihen oft viel einfacher rechnen lässt als mit dem allgemeinen Konzept einer differenzierbaren Funktion — und es ist auch der Grund dafür, warum Potenzreihen in der komplexen Analysis eine viel größere Rolle spielen als in der reellen.

**Satz 7.13** (Taylor-Entwicklung holomorpher Funktionen). *Es sei  $D \subset \mathbb{C}$  offen und  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion. Ferner sei  $z_0 \in D$  und  $r > 0$ , so dass der offene Kreis  $U = \{z; |z - z_0| < r\}$  mit Mittelpunkt  $z_0$  und Radius  $r$  ganz in  $D$  liegt. Dann gilt:*

- (a)  *$f$  ist in  $U$  darstellbar als eine Potenzreihe um  $z_0$  (deren Konvergenzradius mindestens  $r$  ist). Insbesondere ist  $f$  in  $U$  nach Folgerung 7.9 also unendlich oft komplex differenzierbar, und es gilt die Taylor-Formel*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

für alle  $z \in U$ .

- (b) *Die höheren Ableitungen von  $f$  in  $z_0$  erfüllen die verallgemeinerte Cauchysche Integralformel*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$ , wobei  $\gamma$  eine beliebige Kreislinie in  $U$  um  $z_0$  ist.

*Beweis.* Es sei  $z \in U$  und  $\gamma$  wie im Bild rechts eine Kreislinie mit Mittelpunkt  $z_0$ , die um den Punkt  $z$  herumläuft und noch ganz in  $U$  liegt. Dann gilt nach der Cauchyschen Integralformel aus Satz 6.6

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}} dw.$$

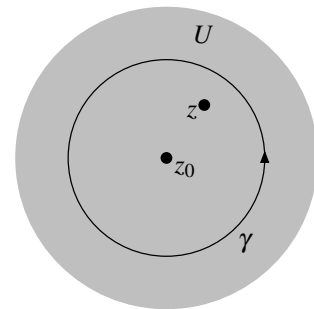
Weil der Betrag von  $\frac{z - z_0}{w - z_0}$  für alle  $w$  auf dem Integrationsweg kleiner als 1 ist, können wir den zweiten Faktor im Integral in die geometrische Reihe entwickeln und erhalten

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^n dw.$$

Wenn  $w$  auf dem Integrationsweg entlang läuft, ist der Ausdruck  $\frac{f(w)}{w - z_0}$  beschränkt, und  $\frac{z - z_0}{w - z_0}$  hat einen konstanten Betrag kleiner als 1. Daher ist die Reihe im Integranden gleichmäßig konvergent in  $w$ . Wir können also die Summe mit dem Integral vertauschen [G, Satz 11.25] und erhalten

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw \right) (z - z_0)^n.$$

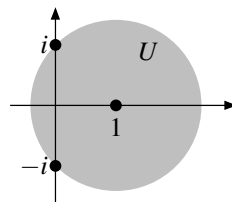
Weil der Ausdruck in der großen Klammer unabhängig von  $z$  ist, haben wir  $f$  damit in der Tat auf  $U$  als Potenzreihe in  $z$  um  $z_0$  geschrieben. Da die Koeffizienten der Potenzreihe nach Folgerung 7.11 außerdem gleich  $\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$  sein müssen, ist damit auch die verallgemeinerte Cauchysche Integralformel bewiesen.  $\square$



**Beispiel 7.14.** Wir betrachten die holomorphe Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus \{\pm i\} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{z^2 + 1}$$

und den Entwicklungspunkt  $z_0 = 1$ . Der größte offene Kreis mit Mittelpunkt  $z_0$ , der noch im Definitionsgebiet liegt, ist offensichtlich  $U = \{z; |z - 1| < \sqrt{2}\}$ .



Also konvergiert die Taylor-Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$  nach Satz 7.13 auf  $U$  gegen  $f$ , d.h. ihr Konvergenzradius ist mindestens  $\sqrt{2}$ . Andererseits kann der Konvergenzradius aber auch nicht größer als  $\sqrt{2}$  sein, denn sonst würden die Punkte  $\pm i$  noch im Inneren des Konvergenzkreises liegen — was bedeuten würde, dass die Taylor-Reihe (die ja auf  $U$  mit  $f$  übereinstimmt) die Funktion  $f$  auf  $U$  in die Punkte  $\pm i$  stetig fortsetzen würde. Dies ist wegen  $\lim_{z \rightarrow \pm i} f(z) = \infty$  aber natürlich unmöglich. Also ist der Konvergenzradius der Taylor-Reihe genau gleich  $\sqrt{2}$ . Beachte, dass wir hier den Konvergenzradius der Taylor-Reihe bestimmen konnten, ohne die Reihe überhaupt explizit hingeschrieben zu haben!

*Bemerkung 7.15.* Aufgrund der Homotopieinvarianz des Wegintegrals (siehe Folgerung 5.2 (a)) können wir den Integrationsweg in der verallgemeinerten Cauchyschen Integralformel von Satz 7.13 (b) natürlich genauso gut durch einen in  $D \setminus \{z_0\}$  homotopen Weg ersetzen. Insbesondere kommt es bei der Integration über eine Kreislinie also nicht darauf an, dass  $z_0$  wirklich der Mittelpunkt der Kreislinie ist, sondern nur darauf, dass  $z_0$  im Inneren des Kreises liegt. Wir können die verallgemeinerte Cauchysche Integralformel also auch analog zur „gewöhnlichen“ in Satz 6.6 aufschreiben als

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw,$$

wobei  $K \subset D$  ein (abgeschlossener) Kreis und  $z \in \overset{\circ}{K}$  ein beliebiger Punkt im Inneren dieses Kreises ist. In dieser Form sieht man also, dass diese Formel nicht nur die Funktionswerte, sondern auch alle Ableitungen von  $f$  im Inneren eines Kreises berechnen kann, wenn man nur die Werte von  $f$  auf dem Rand des Kreises kennt. Wie in Beispiel 6.8 (b) ist dieses Resultat oft nützlich zur Berechnung geschlossener Wegintegrale: wollen wir z.B. das Integral

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2} dz$$

berechnen, so folgt mit der verallgemeinerten Cauchyschen Integralformel für  $z_0 = 0$  und  $f(z) = e^z$  ohne weitere komplizierte Rechnungen

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2} dz = \frac{2\pi i}{1!} \cdot f'(0) = 2\pi i \cdot e^0 = 2\pi i.$$

**Aufgabe 7.16.**

- (a) Berechne das Integral  $\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^{1-z}}{z^3(1-z)} dz$ .
- (b) Bestimme den Konvergenzradius der Taylor-Reihe der Funktion  $f(z) = \frac{2}{z^5 - 1}$  zum Entwicklungspunkt  $z_0 = \frac{1}{4}$ .
- (c) Berechne den Konvergenzradius der Potenzreihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n) z^n$ , wobei

$$\varphi(n) := |\{m = 1, \dots, n; m \text{ ist teilerfremd zu } n\}|$$

die z.B. aus der Zahlentheorie bekannte Eulersche  $\varphi$ -Funktion ist.

**Aufgabe 7.17.** Für  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$  und  $a \in \mathbb{C}$  definieren wir die (**allgemeine**) **komplexe Potenz** als

$$z^a := e^{a \log z}$$

mit  $\log z$  wie in Aufgabe 3.13. (Warum definiert man das so?)

- (a) Man beweise für  $|z| < 1$  die „allgemeine binomische Formel“

$$(1+z)^a = \sum \binom{a}{n} z^n$$

wobei  $\binom{a}{n} := \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}$ .

- (b) Ihr seid Übungsleiter für die Funktionentheorie und bekommt die folgende Abgabe eines Studenten. Was sagt ihr dazu?

*Einerseits ist*

$$(e^{2+2\pi i})^{2+2\pi i} = (e^2 \cdot e^{2\pi i})^{2+2\pi i} = (e^2)^{2+2\pi i} = e^{4+4\pi i} = e^4,$$

*andererseits aber auch*

$$(e^{2+2\pi i})^{2+2\pi i} = e^{(2+2\pi i)^2} = e^{4+8\pi i-4\pi^2} = e^4 \cdot e^{-4\pi^2},$$

*also folgt  $e^4 = e^4 \cdot e^{-4\pi^2}$  und damit  $e^{-4\pi^2} = 1$ .*

## 8. FOLGERUNGEN AUS DER POTENZREIHENENTWICKLUNG

Nachdem wir nun gesehen haben, dass sich holomorphe Funktionen lokal um jeden Punkt als Potenzreihe schreiben lassen, werden wir in diesem Kapitel einige wichtige und überraschende Folgerungen aus dieser Tatsache herleiten. Als erstes wollen wir dafür zur besseren Übersicht noch einmal unsere bisherigen Resultate zusammenfassen und auflisten, welche Eigenschaften einer komplexen Funktion zur Holomorphie äquivalent sind.

**Folgerung 8.1.** *Es sei  $D \subset \mathbb{C}$  offen. Für eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  sind äquivalent:*

- (a)  *$f$  ist holomorph (d.h. in jedem Punkt  $z \in D$  einmal komplex differenzierbar);*
- (b)  *$f$  ist auf  $D$  unendlich oft komplex differenzierbar;*
- (c)  *$f$  besitzt um jeden Punkt  $z \in D$  lokale Stammfunktionen;*
- (d)  *$f$  lässt sich lokal um jeden Punkt als Potenzreihe schreiben;*
- (e)  *$f$  ist reell differenzierbar und erfüllt die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen aus Satz 2.9.*

*Beweis.* „(a)  $\Rightarrow$  (d)“ ist Satz 7.13, „(d)  $\Rightarrow$  (b)“ ist Folgerung 7.11, und „(b)  $\Rightarrow$  (a)“ ist trivial. Dies zeigt die Äquivalenz dieser drei Punkte.

Die Äquivalenz von (a) und (e) ist genau Satz 2.9.

Die Aussage „(a)  $\Rightarrow$  (c)“ ist Folgerung 6.4. Um „(c)  $\Rightarrow$  (a)“ zu sehen setzen wir voraus, dass  $f$  um einen Punkt  $z_0 \in D$  eine lokale Stammfunktion  $F$  besitzt. Da diese natürlich holomorph ist, ist sie nach „(a)  $\Rightarrow$  (b)“ (was wir schon gezeigt haben) sogar unendlich oft differenzierbar. Insbesondere ist  $f = F'$  damit komplex differenzierbar in  $z_0$  mit Ableitung  $f' = F''$ .  $\square$

Wir sehen also noch einmal deutlich, dass die komplexe Analysis hier deutlich schöner ist als die reelle, da die Unterschiede zwischen den ganzen verschiedenen Differenzierbarkeitseigenschaften, die in der reellen Analysis oft große Probleme bereiten ( $n$ -mal differenzierbar,  $n$ -mal stetig differenzierbar, analytisch. . .) in der komplexen Analysis nicht existieren.

Unser erstes neues Resultat in diesem Kapitel ist die aus der Sicht der reellen Analysis überraschende Tatsache, dass jede auf ganz  $\mathbb{C}$  beschränkte holomorphe Funktion automatisch konstant ist. Um dies zu zeigen, benötigen wir zunächst ein Lemma.

**Lemma 8.2** (Abschätzung der Taylorkoeffizienten). *Es sei  $D \subset \mathbb{C}$  offen und  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion. Weiterhin seien  $z_0 \in D$  und  $r > 0$  so, dass der abgeschlossene Kreis  $\{z; |z - z_0| \leq r\}$  ganz in  $D$  liegt. Dann gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$*

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n} \cdot \max_{|z-z_0|=r} |f(z)|.$$

*Beweis.* Es gilt

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(z_0)| &= \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \right| && \text{(nach Satz 7.13)} \\ &\leq \frac{n!}{2\pi} \cdot 2\pi r \cdot \max_{|z-z_0|=r} \left| \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \right| && \text{(nach Lemma 4.5)} \\ &= \frac{n!}{r^n} \cdot \max_{|z-z_0|=r} |f(z)|. \end{aligned}$$

$\square$

**Folgerung 8.3 (Satz von Liouville).** *Jede beschränkte holomorphe Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ist konstant.*

*Beweis.* Es sei  $|f(z)| \leq M$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ . Dann folgt  $|f^{(n)}(0)| \leq M \cdot \frac{n!}{r^n}$  für alle  $n \geq 1$  und  $r > 0$  aus Lemma 8.2. Für  $r \rightarrow \infty$  folgt damit  $f^{(n)}(0) = 0$  für alle  $n \geq 1$ , d.h. die Taylor-Reihe von  $f$  ist eine

Konstante. Da die Funktion  $f$  nach Satz 7.13 auch auf ganz  $\mathbb{C}$  gleich ihrer Taylor-Reihe ist, ist damit auch  $f$  konstant.  $\square$

*Bemerkung 8.4.* Im Satz von Liouville ist es natürlich wesentlich, dass die betrachtete Funktion auf der *gesamten komplexen Zahlenebene* und nicht nur auf einer offenen Teilmenge definiert ist — so ist die Identität  $f(z) = z$  z.B. zwar auf der offenen Einheitskreisscheibe beschränkt, aber dort natürlich nicht konstant. Funktionen, die auf der gesamten komplexen Zahlenebene  $\mathbb{C}$  definiert und holomorph sind, werden in der Literatur oft als **ganze Funktionen** bezeichnet. Der Satz von Liouville besagt in dieser Sprechweise also, dass jede beschränkte ganze Funktion konstant ist.

Die folgende Aussage ist eine Verallgemeinerung dieses Satzes:

**Aufgabe 8.5.** Es sei  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion. Wir setzen voraus, dass es Konstanten  $r, c \in \mathbb{R}_{>0}$  sowie  $n \in \mathbb{N}$  gibt, so dass  $|f(z)| \leq c|z|^n$  für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| \geq r$  ist (d.h. „ $f$  wächst höchstens polynomial vom Grad  $n$  für  $z \rightarrow \infty$ “).

Zeige, dass  $f$  dann schon ein Polynom vom Grad höchstens  $n$  sein muss.

**Aufgabe 8.6.** Eine Teilmenge  $A \subset \mathbb{C}$  heißt **dicht** in  $\mathbb{C}$ , wenn ihr Abschluss  $\bar{A}$  gleich der ganzen komplexen Ebene  $\mathbb{C}$  ist, d.h. wenn in *jeder* Umgebung *jedes* Punktes von  $\mathbb{C}$  mindestens ein Punkt aus  $A$  liegt.

Es sei nun  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  eine nicht konstante, holomorphe Funktion. Zeige, dass dann das Bild  $f(\mathbb{C})$  dicht in  $\mathbb{C}$  ist.

Mit dem Satz von Liouville können wir einen weiteren einfachen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra angeben:

**Satz 8.7 (Fundamentalsatz der Algebra, 2. Beweis).** *Jedes nicht-konstante komplexe Polynom hat eine Nullstelle in  $\mathbb{C}$ .*

*Beweis.* Es sei  $f$  ein Polynom ohne Nullstellen in  $\mathbb{C}$ . Dann ist die Funktion  $\frac{1}{f}$  natürlich auf ganz  $\mathbb{C}$  definiert und holomorph. Wie im Beweis von Satz 6.19 zeigt man, dass es Konstanten  $M, R \in \mathbb{R}_{>0}$  gibt, so dass  $|f(z)| \geq M$  für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| \geq R$ . Damit ist  $\left| \frac{1}{f(z)} \right| \leq \frac{1}{M}$  für alle  $z$  mit  $|z| \geq R$ , d.h.  $\frac{1}{f}$  ist außerhalb des Kreises um 0 mit Radius  $R$  beschränkt. Da  $\frac{1}{f}$  als holomorphe und damit stetige Funktion natürlich auch innerhalb dieses Kreises beschränkt ist, ist  $\frac{1}{f}$  damit auf ganz  $\mathbb{C}$  beschränkt. Also ist  $\frac{1}{f}$  und somit auch  $f$  nach dem Satz von Liouville konstant.  $\square$

Noch überraschender als der Satz von Liouville ist vielleicht der sogenannte Identitätssatz, der besagt, dass zwei holomorphe Funktionen, die auf einer „recht kleinen“ Menge übereinstimmen, bereits überall gleich sein müssen. Wir beginnen dazu mit dem folgenden Hilfssatz.

**Lemma 8.8.** *Es sei  $D \subset \mathbb{C}$  nicht leer, offen und zusammenhängend. Ferner sei  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktionen. Dann sind äquivalent:*

- (a)  $f = 0$ , d.h.  $f$  ist die Nullfunktion;
- (b) es ist  $f|_A = 0$  für eine Teilmenge  $A \subset D$ , die einen Häufungspunkt in  $D$  besitzt (der aber nicht notwendig in  $A$  liegen muss);
- (c) es gibt ein  $z_0 \in D$  mit  $f^{(n)}(z_0) = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

*Beweis.* Die Aussage „(a)  $\Rightarrow$  (b)“ ist trivial (wir können z.B.  $A = D$  wählen, da jeder Punkt einer offenen Menge  $D$  Häufungspunkt von  $D$  ist).

- (b)  $\Rightarrow$  (c): Es sei  $z_0 \in D$  ein Häufungspunkt von  $A$ . Angenommen, es wäre  $f^{(n)}(z_0) \neq 0$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ . Wählen wir  $n$  minimal mit dieser Eigenschaft, so liefert die Taylor-Entwicklung von

$f$  um  $z_0$  nach Satz 7.13

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z-z_0)^k \\ &= (z-z_0)^n \underbrace{\left( \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)!} (z-z_0) + \dots \right)}_{=:g(z)}. \end{aligned}$$

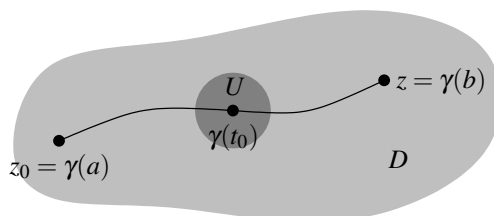
Da wir für die Funktion  $g$  ja aus  $f$  nur den Faktor  $(z-z_0)^n$  herausgezogen haben, konvergiert die Potenzreihe  $g$  natürlich für genau dieselben  $z$  wie  $f$ . Also haben  $g$  und  $f$  denselben Konvergenzradius (der größer als 0 ist); insbesondere ist  $g$  damit stetig in  $z_0$ .

Weil  $z_0$  nach Voraussetzung ein Häufungspunkt von  $A$  ist, gibt es nun eine Folge  $(z_n)$  in  $A \setminus \{z_0\}$ , die gegen  $z_0$  konvergiert. Nach Definition von  $A$  gilt  $f(z_n) = 0$  und damit auch  $g(z_n) = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Da  $g$  stetig in  $z_0$  ist, muss damit auch  $g(z_0) = 0$  gelten. Aber dann folgt  $0 = g(z_0) = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$  im Widerspruch zur Wahl von  $n$ , denn es sollte ja  $f^{(n)}(z_0) \neq 0$  sein. Also war unsere Annahme falsch, und es gilt  $f^{(n)}(z_0) = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

- (c)  $\Rightarrow$  (a): Es sei  $z \in D$  beliebig; wir müssen zeigen, dass  $f(z) = 0$ . Da  $D$  zusammenhängend ist, können wir einen Weg  $\gamma : [a, b] \rightarrow D$  von  $z_0$  nach  $z$  wählen. Wir betrachten nun die Menge

$$I := \{t \in [a, b]; f^{(n)}(\gamma(t)) = 0 \text{ für alle } n \geq 0\},$$

also die Menge aller Punkte des Weges, an denen alle Ableitungen von  $f$  (inklusive der „0-ten Ableitung“, also des Funktionswertes von  $f$ ) verschwinden. Nach Voraussetzung ist  $a \in I$ , d.h.  $I$  ist nicht leer. Außerdem ist  $I$  natürlich beschränkt und abgeschlossen (da  $I$  durch Gleichungen zwischen stetigen Funktionen gegeben ist). Also existiert das Maximum  $t_0 := \max I$  dieser kompakten Menge.



Angenommen, dieses Maximum  $t_0$  wäre kleiner als  $b$ . Dann können wir die Funktion  $f$  um  $\gamma(t_0)$  nach Satz 7.13 lokal in einer offenen Kreisscheibe  $U$  (wie im Bild oben) durch ihre Taylor-Reihe darstellen — und da am Punkt  $\gamma(t_0)$  ja alle Ableitungen von  $f$  verschwinden, ist diese Taylor-Reihe identisch 0. Also ist auch  $f$  identisch gleich 0 in  $U$ . Da der Weg  $\gamma$  aber auch noch für  $t > t_0$  ein Stück weit in  $U$  verlaufen muss, wäre natürlich auch dort noch  $f^{(n)}(\gamma(t)) = 0$  für alle  $n \geq 0$  — im Widerspruch zu  $t_0 = \max I$ .

Also muss  $t_0 = b$  sein, d.h. alle Ableitungen von  $f$  sind 0 entlang des gesamten Weges. Damit folgt insbesondere wie gewünscht  $f(z) = f^{(0)}(\gamma(b)) = 0$ .

□

### Beispiel 8.9.

- (a) Es sei  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion mit  $f(\frac{1}{n}) = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}_{>0}$ . Da die Menge  $\{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}_{>0}\}$  einen Häufungspunkt (nämlich 0) im Definitionsbereich besitzt, folgt aus Lemma 8.8 „(b)  $\Rightarrow$  (a)“, dass  $f$  bereits die Nullfunktion sein muss. Es reichen hier also „sehr wenige“ Informationen über  $f$  aus, um die Funktion bereits eindeutig zu bestimmen!
- (b) Es sei nun  $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion mit  $f(\frac{1}{n}) = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}_{>0}$ . Im Gegensatz zu (a) liegt in diesem Fall der Häufungspunkt nicht mehr im Definitionsgebiet von  $f$ , so dass Lemma 8.8 damit nicht mehr anwendbar ist. In der Tat gibt es auch Funktionen

außer der Nullfunktion, die die genannte Eigenschaft erfüllen, nämlich z.B. die Funktion  $f(z) = \sin \frac{\pi}{z}$ .

In der Regel verwendet man Lemma 8.8 in der folgenden Form:

**Folgerung 8.10 (Identitätssatz).** *Es sei  $D \subset \mathbb{C}$  nicht leer, offen und zusammenhängend. Sind  $f, g : D \rightarrow \mathbb{C}$  zwei holomorphe Funktionen, die auf einer Teilmenge  $A \subset D$  übereinstimmen, die einen Häufungspunkt in  $D$  besitzt, so gilt bereits  $f = g$ .*

*Beweis.* Dies ist genau die Aussage von Lemma 8.8 „(b)  $\Rightarrow$  (a)“, angewendet auf die Funktion  $f - g$ .  $\square$

*Bemerkung 8.11.*

- (a) Da jeder Punkt einer offenen Menge Häufungspunkt dieser Menge ist, ergibt sich aus Folgerung 8.10 insbesondere, dass zwei auf einer zusammenhängenden offenen Menge  $D$  definierte holomorphe Funktionen, die auf einer (beliebig kleinen) nicht leeren offenen Teilmenge von  $D$  übereinstimmen, bereits auf ganz  $D$  übereinstimmen müssen. Der Identitätssatz wird häufig in dieser abgeschwächten Form verwendet.
- (b) Erinnert euch noch einmal an das Maximumprinzip aus Satz 6.13, das besagte, dass eine holomorphe Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ , die an einem Punkt  $z_0 \in D$  betragsmäßig ein Maximum annimmt, in einer Umgebung von  $z_0$  konstant sein muss. Ist  $D$  zusammenhängend, so können wir nun nach dem Identitätssatz aus Folgerung 8.10 sogar schließen, dass  $f$  dann auch auf ganz  $D$  konstant sein muss. Eine analoge Aussage gilt natürlich auch für das Minimumprinzip.

**Aufgabe 8.12.**

- (a) Gibt es eine holomorphe Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $f(\frac{1}{n}) = \frac{n}{n+1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}_{>0}$ ?
- (b) Gibt es eine holomorphe Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $f(n) = \frac{n}{n+1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}_{>0}$ ?

**Aufgabe 8.13.** Es sei  $D \subset \mathbb{C}$  offen und zusammenhängend, und  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion. Wir setzen ferner voraus, dass  $D$  „symmetrisch zur reellen Achse“ ist, d.h. dass für alle  $z \in \mathbb{C}$  genau dann  $z \in D$  gilt, wenn  $\bar{z} \in D$  ist. Man zeige:

- (a) Die Funktion  $g : D \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$  ist ebenfalls holomorph.
- (b) Ist  $f(D \cap \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ , so gilt  $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$  für alle  $z \in D$ . (Diese Eigenschaft gilt also für „sehr viele“ bekannte Funktionen, z.B. Polynome und rationale Funktionen mit reellen Koeffizienten,  $e^z$ ,  $\log z$ ,  $\sin z$ ,  $\cos z$ , Summen, Produkte, Quotienten und Verkettungen solcher Funktionen usw.)

**Folgerung 8.14** („Die Nullstellen holomorpher Funktionen sind isoliert“). *Es sei  $D \subset \mathbb{C}$  offen und zusammenhängend sowie  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  eine nicht konstante, holomorphe Funktion. Dann gibt es zu jeder Nullstelle von  $f$  eine Umgebung, in der keine weitere Nullstelle von  $f$  liegt.*

*Beweis.* Angenommen, es gäbe eine Nullstelle  $z_0 \in D$  von  $f$ , so dass in jeder Umgebung von  $z_0$  eine weitere Nullstelle von  $f$  liegt. Dann muss es eine Folge von Nullstellen  $z_n$  von  $f$  geben, die gegen  $z_0$  konvergiert und damit insbesondere in  $D$  einen Häufungspunkt (nämlich  $z_0$ ) besitzt. Nach dem Identitätssatz muss  $f$  damit die Nullfunktion sein, was wir aber ausgeschlossen haben.  $\square$

Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir noch den Satz beweisen, dass das Bild einer nicht konstanten holomorphen Abbildung immer offen ist.

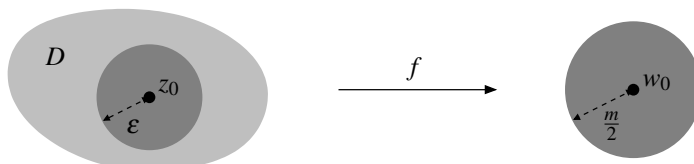
**Satz 8.15.** *Es sei  $D \subset \mathbb{C}$  offen und zusammenhängend sowie  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  eine nicht konstante, holomorphe Funktion. Dann ist  $f(D) \subset \mathbb{C}$  offen.*

*Beweis.* Es sei  $w_0 \in f(D)$ , also  $w_0 = f(z_0)$  für ein  $z_0 \in D$ . Wir müssen zeigen, dass es eine offene Kreisscheibe um  $w_0$  gibt, die noch ganz in  $f(D)$  liegt.

Nach Folgerung 8.14 gibt es ein  $\varepsilon > 0$ , so dass die Funktion  $z \mapsto f(z) - w_0$  keine Nullstelle außer  $z_0$  im abgeschlossenen Kreis  $K = \{z; |z - z_0| \leq \varepsilon\} \subset D$  besitzt. Dann ist

$$m := \min_{|z - z_0| = \varepsilon} |f(z) - w_0| > 0.$$

Wir wollen zeigen, dass der Kreis um  $w_0$  mit Radius  $\frac{m}{2}$  noch in  $f(D)$  liegt.



Sei also  $w \in \mathbb{C}$  mit  $|w - w_0| < \frac{m}{2}$ . Wir betrachten die Funktion  $g : D \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $g(z) = f(z) - w$ :

- für  $z \in D$  mit  $|z - z_0| = \varepsilon$  ist

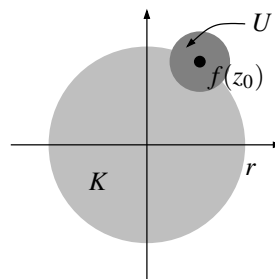
$$|g(z)| = |f(z) - w| \geq |f(z) - w_0| - |w_0 - w| > m - \frac{m}{2} = \frac{m}{2};$$

- für  $z = z_0$  ist  $|g(z)| = |f(z_0) - w| = |w_0 - w| < \frac{m}{2}$ .

Insbesondere ist die holomorphe Funktion  $g$  im Mittelpunkt  $z_0$  des Kreises  $K$  also betragsmäßig kleiner als überall auf dem Rand  $\partial K$ . Nach dem Minimumprinzip aus Folgerung 6.16 ergibt sich also, dass  $g$  in  $K$  eine Nullstelle haben muss, d.h. dass es ein  $z \in K$  gibt mit  $f(z) = w$ . Also liegt  $w$  in  $f(K) \subset f(D)$ , was zu zeigen war.  $\square$

### Beispiel 8.16.

- (a) Aus Satz 8.15 folgt natürlich sofort, dass holomorphe Abbildungen, deren Bild komplett in einer „eindimensionalen Menge“ liegt — also z.B. auf der reellen oder imaginären Achse, auf einer Kreislinie, usw. — konstant sein müssen, da diese „eindimensionalen Mengen“ niemals offen in  $\mathbb{C}$  sein können. Auf diese Art erhalten wir nun also sehr einfache Lösungen für die Probleme aus Aufgabe 2.19 (b) und (c).
- (b) Auch das Maximumprinzip folgt sofort aus Satz 8.15: angenommen, es wäre  $D \subset \mathbb{C}$  offen zusammenhängend, und  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und nicht konstant, so dass  $|f|$  in einem Punkt  $z_0 \in D$  ein lokales Maximum hätte. Nach evtl. Verkleinern von  $D$  können wir annehmen, dass  $|f|$  sogar ein globales Maximum in  $z_0$  hat. Ist  $r := |f(z_0)|$ , so läge das Bild  $f(D)$  also vollständig im rechts hell eingezeichneten Kreis  $K := \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq r\}$ . Nach Satz 8.15 ist  $f(D)$  aber offen, muss also um den Punkt  $f(z_0)$  noch eine Umgebung  $U$  dieses Punktes enthalten — was ein Widerspruch ist, da keine solche Umgebung noch vollständig im Kreis  $K$  liegt.



*Bemerkung 8.17.* Eine Funktion, die offene Mengen auf offene Mengen abbildet, wird in der Regel **offene Funktion** genannt — man verwechsle dies nicht mit der bekannten Eigenschaft stetiger Funktionen, dass Urbilder offener Mengen wieder offen sind [G, Satz 22.12]! In diesem Sinne besagt Satz 8.15 also, dass (nicht konstante) holomorphe Funktionen stets offen sind.

Weiterhin ist klar, dass das Bild einer zusammenhängenden Menge unter einer stetigen Abbildung stets wieder zusammenhängend ist [G, Satz 22.24 (a)]. Da wir offene zusammenhängende Mengen in Definition 5.7 (a) auch als Gebiet bezeichnet haben, kann man Satz 8.15 also auch so formulieren, dass (nicht konstante) holomorphe Funktionen Gebiete auf Gebiete abbilden. Die Aussage dieses Satzes wird deswegen auch oft als **Gebietstreue** bezeichnet.



## 9. LAURENT-REIHEN

In den letzten beiden Kapiteln haben wir gesehen, dass sich holomorphe Funktionen lokal um jeden Punkt  $z_0$  in eine Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$  entwickeln lassen, und daraus viele interessante Eigenschaften holomorpher Funktionen hergeleitet. Wir wollen diese Idee nun dahingehend verallgemeinern, dass wir in diesen Reihen auch negative Potenzen von  $z-z_0$  zulassen. Die Untersuchung dieser neuen Reihen wird ganz analog zu der von Potenzreihen verlaufen, aber trotzdem am Ende wieder einige neue interessante Resultate abwerfen.

**Definition 9.1** (Laurent-Reihen). Es sei  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Eine **Laurent-Reihe** um  $z_0$  ist ein Ausdruck der Form

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n := \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n}_{=: f^-(z)} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n}_{=: f^+(z)}$$

für gewisse  $a_n \in \mathbb{C}$ . Dabei nennen wir  $f^-$  (die Summe der Terme mit negativen Exponenten von  $z-z_0$ ) den **Hauptteil** und  $f^+$  (die Summe der restlichen Terme) den **Nebenteil** von  $f$ .

Wie bei Potenzreihen wollen wir natürlich als erstes untersuchen, für welche Werte  $z$  eine gegebene Laurent-Reihe konvergiert. Dabei ist von vornherein schon einmal klar, dass wir — falls mindestens ein Koeffizient  $a_n$  mit  $n < 0$  ungleich Null ist — den Wert  $z = z_0$  prinzipiell nicht einsetzen dürfen, da in diesem Fall schon der einzelne Term  $a_n(z-z_0)^n$  nicht definiert wäre.

*Bemerkung 9.2.* Beachte, dass wir den „doppelten Grenzwert“ in den Laurent-Reihen, also die Summe von  $-\infty$  bis  $\infty$ , durch Aufspalten der Summe in zwei Teile  $f^+$  und  $f^-$  in zwei einfache Grenzwerte verwandelt haben — eine Laurent-Reihe  $f(z)$  konvergiert also *nach Definition* genau dann, wenn die Reihen  $f^+(z)$  und  $f^-(z)$  konvergieren. Dies ist z.B. *nicht* das gleiche wie die evtl. auch naheliegende Festlegung

$$f(z) \stackrel{?}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N a_n(z-z_0)^n, \quad (*)$$

wie das Beispiel der Laurent-Reihe

$$f(z) = \cdots + z^{-3} - z^{-2} + z^{-1} - z + z^2 - z^3 \pm \cdots,$$

also

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \quad \text{mit} \quad a_n = \begin{cases} 0 & \text{für } n = 0, \\ (-1)^n & \text{für } n > 0, \\ (-1)^{n+1} & \text{für } n < 0 \end{cases}$$

zeigt: setzen wir hier z.B.  $z = 1$  ein, so gilt  $\sum_{n=-N}^N a_n z^n = 0$  für alle  $N \in \mathbb{N}$ , d.h. der Grenzwert (\*) ist gleich Null. Die Laurent-Reihe ist für  $z = 1$  jedoch *nicht* konvergent, da  $f^+(1) = 1 - 1 + 1 - 1 \pm \cdots$  (und analog auch  $f^-(1)$ ) divergiert.

*Bemerkung 9.3.* Schreiben wir die Laurent-Reihe aus Definition 9.1 als

$$f(z) = f^-(z) + f^+(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \left( \frac{1}{z-z_0} \right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n,$$

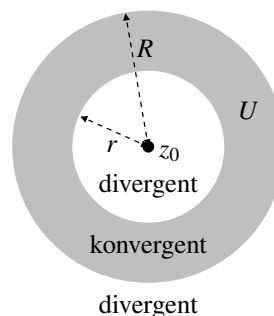
so sehen wir sofort, dass  $f^-$  und  $f^+$  einfach Potenzreihen (in  $\frac{1}{z-z_0}$  bzw.  $z-z_0$ ) sind. Wir können unsere Resultate über Potenzreihen aus Kapitel 7 also ganz einfach auf den Fall von Laurent-Reihen übertragen. Sind z.B.  $\frac{1}{r}$  und  $R$  die Konvergenzradien dieser beiden Potenzreihen  $f^-$  bzw.  $f^+$ , so ist nach den Bemerkungen 7.2 (a) und 9.2 klar, dass die Laurent-Reihe konvergiert, wenn  $\left| \frac{1}{z-z_0} \right| < \frac{1}{r}$  (also  $|z-z_0| > r$ ) und  $|z-z_0| < R$  gilt, und dass sie divergiert, falls  $|z-z_0| < r$  oder  $|z-z_0| > R$  ist. Damit ergibt sich sofort das folgende Resultat:

**Folgerung 9.4.** Es sei  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$  eine Laurent-Reihe. Ferner seien  $\frac{1}{r}$  und  $R$  die Konvergenzradien des Hauptteils  $f^-$  bzw. Nebenteils  $f^+$  dieser Reihe — es ist nach Lemma 7.3 also z.B.

$$r := \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{-n-1}}{a_{-n}} \right| \quad \text{und} \quad R := \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|,$$

falls diese Grenzwerte existieren. Dann gilt:

- Die Reihe  $f(z)$  ist (absolut) konvergent für alle  $z$  in dem Kreisring  $U = \{z \in \mathbb{C} ; r < |z - z_0| < R\}$ . Sie ist divergent für alle  $z$  mit  $|z - z_0| < r$  oder  $|z - z_0| > R$ . Auf dem Rand, also falls  $|z - z_0| = r$  oder  $|z - z_0| = R$  ist, kann sowohl Konvergenz als auch Divergenz auftreten.
- Die Konvergenz ist gleichmäßig in  $z$  auf jedem abgeschlossenen Kreisring um  $z_0$ , der ganz in  $U$  liegt (siehe Bemerkung 7.2 (b)).



Wir nennen  $U$  den **Konvergenzring** von  $f$  (beachte, dass  $U$  auch leer sein kann, falls nämlich  $r \geq R$  ist).

*Bemerkung 9.5.*

- Ein wichtiger Spezialfall von Folgerung 9.4 ist der, wenn der innere Radius  $r$  gleich Null ist — was z.B. stets dann passiert, wenn der Hauptteil  $f^-$  nur aus endlich vielen Termen besteht und somit stets konvergiert. In diesem Fall ist der „Kreisring“  $\{z \in \mathbb{C} ; r < |z - z_0| < R\}$  einfach eine „punktierte Kreisscheibe“, also eine Kreisscheibe ohne ihren Mittelpunkt. Wir werden diesen Spezialfall in Kapitel 10 genauer untersuchen.
- Da eine Laurent-Reihe einfach die Summe zweier Potenzreihen (in  $z - z_0$  bzw.  $\frac{1}{z - z_0}$ ) ist, ist aufgrund von Folgerung 7.9 klar, dass eine solche Reihe in ihrem Konvergenzring eine holomorphe Funktion darstellt und ihre Ableitungen wie erwartet gliedweise berechnet werden können.

**Beispiel 9.6.**

- Wir betrachten die Laurent-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} z^n = \underbrace{\frac{1}{z}}_{f^-} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} z^n}_{f^+}.$$

Der Hauptteil  $f^-$  ist ein Polynom in  $\frac{1}{z}$  und „konvergiert“ damit natürlich für alle  $z \neq 0$ . Der Nebenteil  $f^+$  hat bekanntlich Konvergenzradius 1 und ist einfach gleich der geometrischen Reihe. Also ist der Konvergenzring von  $f$  der Kreisring  $\{z \in \mathbb{C} ; 0 < |z| < 1\}$ , und die dort durch  $f$  dargestellte holomorphe Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z(1-z)}.$$

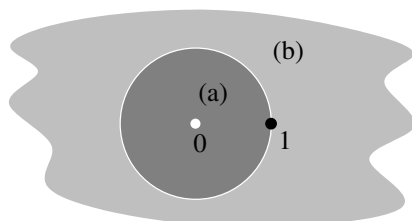
- Für die nur aus dem Hauptteil bestehende Laurent-Reihe

$$f(z) = - \sum_{n=-\infty}^{-2} z^n$$

ist der Konvergenzradius des Hauptteils wieder gleich 1, und der Konvergenzradius des (nicht existierenden) Nebenteils trivialerweise  $\infty$ . Also ist der Konvergenzring von  $f$  gleich  $\{z \in \mathbb{C} ; 1 < |z|\}$ . Die auf diesem Gebiet durch  $f$  dargestellte Funktion lässt sich wieder mit Hilfe der geometrischen Reihe einfacher hinschreiben:

$$f(z) = - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = - \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = - \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{1}{z(1-z)}.$$

Wir erhalten also dieselbe Funktion wie in (a) — nur in einem anderen (disjunkten) Kreisring! Das folgende Bild verdeutlicht dies.



$$f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$$

$$\text{in (a): } f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} z^n$$

$$\text{in (b): } f(z) = - \sum_{n=-\infty}^{-2} z^n$$

**Aufgabe 9.7.**

- (a) Für welche  $z \in \mathbb{C}$  konvergiert die Laurent-Reihe  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1+n^2}{1+2^n} (z-1)^n$  ?
- (b) Es sei  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $r$ . Was ist dann der Konvergenzring der Laurent-Reihe  $g(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{|n|} z^n$  ? Welche Funktion wird durch  $g$  dargestellt?

Wir haben gerade schon festgestellt, dass jede Laurent-Reihe in ihrem Konvergenzring eine holomorphe Funktion definiert. Die besondere Bedeutung der Laurent-Reihen liegt nun darin, dass — wie ihr vielleicht schon erwartet — genau wie bei Potenzreihen auch hier die Umkehrung gilt, also dass sich jede holomorphe Funktion auf jedem Kreisring, der noch im Definitionsgebiet liegt, dort in eine Laurent-Reihe entwickeln lässt. Dies besagt der folgende Satz, dessen Aussage und Beweis völlig analog zu Satz 7.13 sind:

**Satz 9.8** (Laurent-Entwicklung holomorpher Funktionen). *Es sei  $D \subset \mathbb{C}$  offen und  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion. Weiterhin seien  $z_0 \in \mathbb{C}$  (nicht notwendig in  $D$ !) und  $r < R$  reelle Zahlen, so dass der Kreisring  $U = \{z \in \mathbb{C} ; r < |z - z_0| < R\}$  ganz in  $D$  liegt. Dann gilt:*

- (a) Die Funktion  $f$  lässt sich auf  $U$  als Laurent-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

schreiben.

- (b) Die Koeffizienten dieser Reihe sind eindeutig; sie sind bestimmt durch die Formel

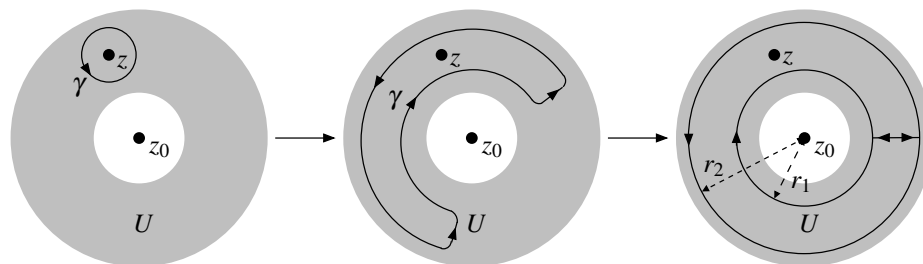
$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

für ein beliebiges  $\rho$  mit  $r < \rho < R$ .

*Beweis.* Wie im Beweis von Satz 7.13 gilt zunächst für alle  $z \in U$  aufgrund der Cauchyschen Integralformel aus Satz 6.6

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

für eine Kreislinie  $\gamma$ , die wie im folgenden Bild links in  $U$  liegt und einmal um den Punkt  $z$  herumläuft:



Nach der Homotopieinvarianz des Wegintegrals (siehe Folgerung 5.2 (a)) können wir diesen Weg nun durch einen anderen in  $U \setminus \{z\}$  homotopen Weg ersetzen, denn der Integrand ist auf dieser Menge holomorph. Wie im Bild oben „ziehen wir ihn dazu im Kreisring  $U$  auseinander“, bis er aus zwei Kreislinien um  $z_0$  (mit Radien  $r_1$  und  $r_2$ , wobei  $r_1 < |z - z_0| < r_2$ ) besteht, die in entgegengesetzter Richtung durchlaufen werden und durch ein Geradenstück miteinander verbunden sind (das in beiden Richtungen durchlaufen wird und sich damit weghebt). Es gilt also

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \left( \underbrace{\int_{|w-z_0|=r_2} \frac{f(w)}{w-z} dw}_{(A)} - \underbrace{\int_{|w-z_0|=r_1} \frac{f(w)}{w-z} dw}_{(B)} \right).$$

Den Term (A) behandeln wir nun wörtlich genauso wie im Beweis von Satz 7.13: wir schreiben

$$(A) = \int_{|w-z_0|=r_2} \frac{f(w)}{w-z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}} dw$$

und können den rechten Faktor im Integranden wegen  $\left| \frac{z-z_0}{w-z_0} \right| = \frac{|z-z_0|}{r_2} < 1$  in die geometrische Reihe entwickeln:

$$(A) = \int_{|w-z_0|=r_2} \frac{f(w)}{w-z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z-z_0}{w-z_0} \right)^n dw = \int_{|w-z_0|=r_2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} \cdot (z-z_0)^n dw.$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz des Integranden können wir die Summe mit dem Integral vertauschen und erhalten so die Potenzreihe

$$(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \int_{|w-z_0|=r_2} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw \right) (z-z_0)^n.$$

Den Term (B) können wir ganz analog behandeln: hier schreiben wir allerdings

$$(B) = - \int_{|w-z_0|=r_1} \frac{f(w)}{z-z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{w-z_0}{z-z_0}} dw$$

und entwickeln den rechten Faktor im Integranden wegen  $\left| \frac{w-z_0}{z-z_0} \right| = \frac{r_1}{|z-z_0|} < 1$  in die geometrische Reihe:

$$(B) = - \int_{|w-z_0|=r_1} \frac{f(w)}{z-z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{w-z_0}{z-z_0} \right)^n dw = - \int_{|w-z_0|=r_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)}{(z-z_0)^{n+1}} \cdot (w-z_0)^n dw.$$

Vertauschen wir auch hier wegen der gleichmäßigen Konvergenz des Integranden die Summe mit dem Integral, so erhalten wir die Laurent-Reihe

$$(B) = - \sum_{n=0}^{\infty} \left( \int_{|w-z_0|=r_1} f(w) (w-z_0)^n dw \right) (z-z_0)^{-n-1}.$$

Also lassen sich sowohl (A) als auch (B) — und damit auch  $f$  — in  $U$  als Laurent-Reihen schreiben. Dies zeigt Teil (a) des Satzes.

Für die Eindeutigkeit und die Formel aus (b) sei nun  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$  eine solche Darstellung als Laurent-Reihe. Für alle  $\rho$  mit  $r < \rho < R$  und alle  $n \in \mathbb{Z}$  gilt dann

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int_{|z-z_0|=\rho} (z-z_0)^{k-n-1} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int_{|w|=\rho} w^{k-n-1} dw \quad (\text{mit Substitution } w = z - z_0) \\ &= a_n \quad (\text{nach Beispiel 3.11 (b)}). \end{aligned}$$

□

### Beispiel 9.9.

- (a) Liegt in Satz 9.8 nicht nur der Kreisring  $U = \{z \in \mathbb{C}; r < |z - z_0| < R\}$ , sondern sogar die ganze Kreisscheibe  $U' = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < R\}$  in  $D$ , so erhalten wir unsere Taylor-Entwicklung aus Satz 7.13 zurück: dann ist nämlich zunächst für  $n < 0$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = 0$$

nach der Cauchyschen Integralformel aus Satz 4.1, da der Integrand dann holomorph in  $U'$  ist. Für  $n \geq 0$  hingegen stimmt die in Satz 9.8 angegebene Formel für die Koeffizienten  $a_n$  mit der aus Satz 7.13 überein. Die Taylor-Entwicklung ist also ein Spezialfall der Laurent-Entwicklung.

- (b) Es sei  $f: \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$ . Wählen wir als Entwicklungspunkt  $z_0 = 0$ , so gibt es zwei (maximale) Kreisringe um  $z_0$ , in denen  $f$  holomorph ist, nämlich

$$U_1 = \{z \in \mathbb{C}; 0 < |z| < 1\}$$

und  $U_2 = \{z \in \mathbb{C}; 1 < |z|\}$ .

In jedem dieser Kreisringe lässt sich  $f$  als Laurent-Reihe schreiben, wie wir in der Tat auch schon in Beispiel 9.6 gesehen haben. Diese Laurent-Reihen sind *verschieden*, d.h. im Gegensatz zu Potenzreihen kann eine feste holomorphe Funktion für einen gegebenen Entwicklungspunkt  $z_0$  mehrere Laurent-Reihen haben — eine für jeden maximalen offenen Kreisring um  $z_0$  im Definitionsgebiet.

- (c) Die Laurent-Reihen aus (b) lassen sich natürlich auch konkret mit der Formel aus Satz 9.8 (b) berechnen: in  $U_1$  gilt z.B. für die Koeffizienten  $a_n$  der Laurent-Reihe von  $f$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z(1-z) \cdot z^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z^{n+2}(1-z)} dz.$$

Für  $n \leq -2$  ist dieses Integral nach dem Cauchyschen Integralsatz gleich Null, denn in diesem Fall ist der Integrand auch im Nullpunkt komplex differenzierbar. Für  $n \geq -1$  dagegen kann man das Integral z.B. mit der verallgemeinerten Cauchyschen Integralformel aus Satz 7.13 (b) berechnen: mit  $g(z) = \frac{1}{1-z}$  gilt dann

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{2\pi i}{(n+1)!} g^{(n+1)}(0),$$

wegen  $g^{(n+1)}(z) = (-1)^{n+1} \cdot (-1) \cdot (-2) \cdots (-n-1) \cdot \frac{1}{(1-z)^{n+2}} = \frac{(n+1)!}{(1-z)^{n+2}}$  also einfach  $a_n = 1$ . Wir erhalten also dasselbe Ergebnis wie in Beispiel 9.6 (a):

$$f(z) = \frac{1}{z(1-z)} = \sum_{n=-1}^{\infty} z^n \quad \text{für } 0 < |z| < 1.$$

**Aufgabe 9.10.** Wie viele verschiedene Laurent-Reihen mit Entwicklungspunkt  $z_0 = 0$  besitzt die Funktion  $f(z) = \frac{1}{z^2-z-2}$ ? Berechnet diese Reihen explizit und gebt ihre Konvergenzringe an.

## 10. ISOLIERTE SINGULARITÄTEN

Der wichtigste Spezialfall von Laurent-Reihen (und in der Tat auch der, den wir ab jetzt nur noch betrachten werden) ist der, bei dem der innere Radius des Konvergenzringes 0 ist, der Konvergenzring also die Form  $\{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < R \text{ und } z \neq z_0\}$  hat. Wir untersuchen damit also Funktionen, die holomorph in einer Umgebung eines Punktes  $z_0$  — *mit Ausnahme des Punktes  $z_0$  selbst* — sind. Solche „isolierten Unbestimmtheitsstellen“ holomorpher Funktionen, die natürlich in der Praxis oft vorkommen, werden in der Regel „isolierte Singularitäten“ genannt:

**Definition 10.1** (Singularitäten). Es sei  $D \subset \mathbb{C}$  offen und  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion. Weiterhin sei  $z_0 \in \mathbb{C} \setminus D$  ein Punkt, so dass es ein  $\varepsilon > 0$  gibt mit  $U_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\} \subset D$ . Mit anderen Worten ist  $z_0$  in einer Umgebung von  $z_0$  der einzige Punkt, der nicht in  $D$  liegt.

- (a) In diesem Fall nennt man  $z_0$  eine **(isolierte) Singularität** von  $f$ .
- (b) Lässt sich  $f$  zu einer holomorphen Funktion auf  $D \cup \{z_0\}$  fortsetzen, so bezeichnet man die isolierte Singularität  $z_0$  als **hebbare Singularität**.

**Beispiel 10.2.**

- (a) Die Funktion  $f : \mathbb{C} \setminus \{0, 1, 2\} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$  hat die isolierten Singularitäten 0, 1 und 2. Davon ist der Punkt 2 natürlich eine hebbare Singularität, da man  $f$  problemlos auch auf den Definitionsbereich  $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$  holomorph fortsetzen kann — man könnte anschaulich auch sagen, der Punkt 2 ist „gar keine“ Singularität von  $f$ . Die Punkte 0 und 1 dagegen sind keine hebbaren Singularitäten, denn wegen  $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} f(z) = \infty$  lässt sich  $f$  nicht einmal stetig in diese Punkte hinein fortsetzen.
- (b) Nicht immer ist eine hebbare Singularität so einfach als solche zu erkennen wie in (a). Betrachten wir z.B. die Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}, f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$$

mit isolierter Singularität in 0, so gilt für alle  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} - 1 \right) = \frac{1}{z} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}.$$

Die Funktion  $f$  ist also eine Potenzreihe in  $z$  und damit insbesondere auch in den Nullpunkt hinein als holomorphe Funktion fortsetzbar mit Funktionswert  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{(n+1)!} = 1$ . Also ist der Nullpunkt eine hebbare Singularität von  $f$ .

Wie oben schon angedeutet wollen wir nun unsere Theorie der Laurent-Reihen auf solche isolierten Singularitäten anwenden.

**Definition 10.3.** Es sei  $D \subset \mathbb{C}$  offen,  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und  $z_0 \in \mathbb{C} \setminus D$  eine isolierte Singularität von  $f$ .

Nach Definition 10.1 gibt es dann ein  $\varepsilon > 0$ , so dass der Kreisring  $U_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\} = \{z \in \mathbb{C}; 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$  noch ganz in  $D$  liegt. Daher besitzt  $f$  in diesem Kreisring nach Satz 9.8 eine eindeutig bestimmte Laurent-Entwicklung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

die wir die **Laurent-Entwicklung von  $f$  in  $z_0$**  nennen (und die offensichtlich nicht von  $\varepsilon$  abhängt). Ist außerdem  $f$  nicht gleich der Nullfunktion auf  $U_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$  und damit die Laurent-Reihe nicht identisch gleich Null, so nennen wir die kleinste auftretende Potenz von  $z - z_0$  in dieser Reihe, also die Zahl

$$\text{ord}_{z_0} f := \begin{cases} \min\{n \in \mathbb{Z}; a_n \neq 0\} & \text{falls diese Menge nach unten beschränkt ist,} \\ -\infty & \text{sonst,} \end{cases}$$

die **Ordnung** von  $f$  in  $z_0$ .

Wir können uns die Ordnung einer holomorphen Funktion in einer isolierten Singularität — sofern sie nicht  $-\infty$  ist — wie folgt vorstellen:

**Lemma 10.4.** *Es sei  $D \subset \mathbb{C}$  offen,  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und  $z_0 \in \mathbb{C} \setminus D$  eine isolierte Singularität von  $f$ . Wir nehmen an, dass  $f$  lokal um  $z_0$  nicht gleich der Nullfunktion sowie  $\text{ord}_{z_0} f \neq -\infty$  ist.*

*Dann ist  $\text{ord}_{z_0} f$  die eindeutig bestimmte Zahl  $m \in \mathbb{Z}$ , für die es eine holomorphe Funktion  $g : D \cup \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$  gibt mit  $g(z_0) \neq 0$  und*

$$f(z) = (z - z_0)^m \cdot g(z)$$

für alle  $z \in D$ .

*Beweis.* Es sei zunächst  $m = \text{ord}_{z_0} f$ . Dann können wir  $f$  um  $z_0$  in eine Laurent-Reihe entwickeln und erhalten

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n && \text{mit } a_m \neq 0 \\ &= (z - z_0)^m \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+m} (z - z_0)^n}_{=: g(z)}. \end{aligned}$$

Die Funktion  $g$  ist dabei als Potenzreihe bei  $z_0$  komplex differenzierbar und hat Funktionswert  $g(z_0) = a_m \neq 0$  in  $z_0$ , erfüllt also die Behauptungen des Lemmas.

Es sei nun umgekehrt  $m$  eine Zahl, die die Behauptung des Lemmas erfüllt, d.h. es gebe eine holomorphe Funktion  $g : D \cup \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $g(z_0) \neq 0$  und  $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$  für alle  $z \in D$ . Entwickeln wir dann  $g$  in eine Potenzreihe  $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ , so ist  $0 \neq g(z_0) = a_0$ , und

$$f(z) = (z - z_0)^m \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=m}^{\infty} a_{n-m} (z - z_0)^n$$

die Laurent-Entwicklung von  $f$  um  $z_0$ , an der man sofort  $\text{ord}_{z_0} f = m$  abliest, da der kleinste auftretende Exponent in dieser Reihe  $m$  und der zugehörige Koeffizient  $a_{m-m} = a_0 \neq 0$  ist.  $\square$

Die Ordnung einer holomorphen Funktion in einem Punkt lässt sich also offensichtlich als „Null- oder Polstellenordnung“ interpretieren: da in der Darstellung  $f(z) = (z - z_0)^m \cdot g(z)$  wie oben die Funktion  $g$  holomorph in  $z_0$  mit  $g(z_0) \neq 0$  ist, können wir den Punkt  $z_0$  je nach Vorzeichen von  $m$  als „ $m$ -fache Nullstelle“ bzw. „ $(-m)$ -fache Polstelle“ auffassen. Wir fassen dies in der folgenden Definition zusammen, die das Konzept der Null- und Polstellen von rationalen Funktionen auf beliebige holomorphe Funktionen mit isolierten Singularitäten erweitert:

**Definition 10.5** (Arten von Singularitäten). *Es sei  $D \subset \mathbb{C}$  offen,  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und  $z_0 \in \mathbb{C} \setminus D$  eine isolierte Singularität von  $f$ . Wir nehmen wieder an, dass  $f$  lokal um  $z_0$  nicht gleich der Nullfunktion ist. Ferner sei  $m = \text{ord}_{z_0} f$ .*

- (a) Ist  $m > 0$ , so heißt  $z_0$  eine **Nullstelle** der Ordnung  $m$  von  $f$ .
- (b) Ist  $m < 0$  und  $m \neq -\infty$ , so heißt  $z_0$  eine **Polstelle** der Ordnung  $-m$  von  $f$ .
- (c) Ist  $m = -\infty$ , so heißt  $z_0$  eine **wesentliche Singularität** von  $f$ .

**Beispiel 10.6.** Nach Lemma 10.4 ist

$$\text{ord}_0 \frac{1}{z(1-z)} = \text{ord}_0 \left( z^{-1} \cdot \frac{1}{1-z} \right) = -1,$$

denn die Funktion  $g(z) = \frac{1}{1-z}$  ist holomorph mit Funktionswert ungleich 0 in 0. Also hat  $\frac{1}{z(1-z)}$  eine einfache Polstelle in 0.

Genauso ist

$$\begin{aligned} \operatorname{ord}_2 \frac{1}{z(1-z)} &= \operatorname{ord}_2 \left( (z-2)^0 \cdot \frac{1}{z(1-z)} \right) = 0, \\ \operatorname{ord}_0 \sin z &= \operatorname{ord}_0 \left( z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \mp \dots \right) = 1 \quad (\text{Nullstelle der Ordnung } 1), \\ \operatorname{ord}_0 e^{\frac{1}{z}} &= \operatorname{ord}_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!} = -\infty \quad (\text{wesentliche Singularität}). \end{aligned}$$

*Bemerkung 10.7.*

(a) Aus Lemma 10.4 folgt offensichtlich

$$\operatorname{ord}_{z_0}(f_1 \cdot f_2) = \operatorname{ord}_{z_0} f_1 + \operatorname{ord}_{z_0} f_2 \quad \text{und} \quad \operatorname{ord}_{z_0} \frac{1}{f} = -\operatorname{ord}_{z_0} f$$

für holomorphe Funktionen  $f, f_1, f_2 : D \rightarrow \mathbb{C}$  mit isolierter Singularität  $z_0$ , sofern diese Ordnungen nicht  $-\infty$  sind. Man sieht leicht, dass die erste dieser beiden Gleichungen auch noch gilt, wenn eine der beteiligten Ordnungen  $-\infty$  ist. Die Aussage wird jedoch i.a. falsch, wenn beide Ordnungen  $-\infty$  sind: so haben z.B.  $e^{\frac{1}{z}}$  und  $e^{-\frac{1}{z}}$  beide im Nullpunkt die Ordnung  $-\infty$ , ihr Produkt hingegen ist konstant 1 und hat damit die Ordnung 0.

(b) Es sei  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und  $z_0$  eine isolierte Singularität von  $f$ . Dann ist die Ordnung  $\operatorname{ord}_{z_0} f$  nach Definition genau dann größer oder gleich 0, wenn  $f$  eine Potenzreihe lokal um  $z_0$  ist, was nach Folgerung 8.1 wiederum genau dann der Fall ist, wenn  $f$  holomorph in  $D \cup \{z_0\}$  ist. Wir sehen also, dass  $z_0$  genau dann eine hebbare Singularität ist, wenn  $\operatorname{ord}_{z_0} f \geq 0$  gilt.

**Aufgabe 10.8.** Liegt für die folgenden Funktionen  $f$  im Nullpunkt eine hebbare Singularität / Nullstelle (welcher Ordnung) / Polstelle (welcher Ordnung) / wesentliche Singularität vor?

- (a)  $f(z) = \frac{\sin(z^3)}{e^{\cos z} - 1 - 1}$ ;  
 (b)  $f(z) = z \cdot \log z$ ;  
 (c)  $f(z) = z^n \cdot e^{z+\frac{1}{z}}$  (für  $n \in \mathbb{N}$ ).

**Aufgabe 10.9.** Es sei  $z_0 \in \mathbb{C} \setminus D$  eine isolierte Singularität einer holomorphen Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ . Man zeige:

- (a) Ist  $z_0$  eine Polstelle von  $f$ , so hat die Funktion  $\frac{f'}{f}$  einen Pol der Ordnung 1 in  $z_0$ .  
 (b) Die Funktion  $g(z) = e^{f(z)}$  kann keine Polstelle in  $z_0$  haben.

**Aufgabe 10.10.** Es sei  $f : \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_n\} \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion, die auf der gesamten komplexen Ebene mit Ausnahme endlich vieler isolierter Singularitäten  $z_1, \dots, z_n$  definiert ist.

Man zeige: Ist kein  $z_i$  eine wesentliche Singularität von  $f$  und ist  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = 0$ , so ist  $f$  von der Form  $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$  für zwei Polynome  $p$  und  $q$  (d.h.  $f$  ist eine *rationale Funktion*).

Aus unseren Untersuchungen folgt nun ein sehr einfaches (und überraschendes) Kriterium dafür, wann eine isolierte Singularität einer holomorphen Funktion  $f$  hebbbar ist, die Funktion  $f$  also holomorph nach  $z_0$  fortgesetzt werden kann: es reicht dafür schon aus, dass  $f$  in einer Umgebung von  $z_0$  beschränkt ist!

**Satz 10.11 (Riemannscher Hebbbarkeitssatz).** Es sei  $D \subset \mathbb{C}$  offen,  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph, und  $z_0 \in \mathbb{C} \setminus D$  eine isolierte Singularität von  $f$ .

Gibt es dann eine Umgebung  $U$  von  $z_0$ , so dass  $U \setminus \{z_0\}$  ganz in  $D$  liegt und  $f$  auf dieser Menge beschränkt ist, so ist  $z_0$  eine hebbare Singularität von  $f$ .



*Beweis.* Es sei  $\varepsilon > 0$  so gewählt, dass die Kreislinie  $\{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| = \varepsilon\}$  noch ganz in  $U$  liegt. Für die Koeffizienten der Laurent-Entwicklung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

von  $f$  in  $z_0$  gilt dann nach Satz 9.8 und Lemma 4.5

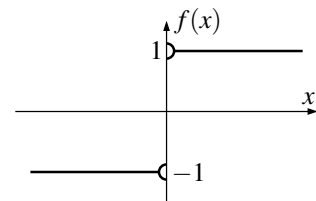
$$\begin{aligned} |a_n| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=\varepsilon} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi\varepsilon \cdot \max_{|w-z_0|=\varepsilon} \left| \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} \right| \\ &= \frac{1}{\varepsilon^n} \cdot \max_{|w-z_0|=\varepsilon} |f(w)|. \end{aligned} \tag{*}$$

Da  $f$  auf  $U \setminus \{z_0\}$  beschränkt ist, kann das Maximum von  $|f(w)|$  für alle  $w$  mit  $|w - z_0| = \varepsilon$  durch eine von  $\varepsilon$  unabhängige Konstante abgeschätzt werden. Damit konvergiert der Ausdruck (\*) für alle  $n < 0$  mit  $\varepsilon \rightarrow 0$  gegen 0. Also ist  $a_n = 0$  für  $n < 0$ , d.h.  $f$  ist lokal eine Potenzreihe um  $z_0$  und damit holomorph fortsetzbar nach  $z_0$ .  $\square$

*Bemerkung 10.12.*

- (a) Beachte, dass die zu Satz 10.11 analoge Aussage im Reellen natürlich falsch ist: eine differenzierbare Funktion, die z.B. auf  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  definiert und dort beschränkt ist, muss damit noch lange nicht als differenzierbare Funktion nach  $\mathbb{R}$  fortsetzbar sein — wie das Beispiel der Vorzeichenfunktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0, \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$



zeigt, die sich nicht einmal stetig in den Nullpunkt hinein fortsetzen lässt.

- (b) Insbesondere folgt aus Satz 10.11, dass eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  mit isolierter Singularität  $z_0$ , die stetig nach  $z_0$  fortsetzbar ist, automatisch auch holomorph nach  $z_0$  fortsetzbar ist (denn wenn  $f$  stetig in  $z_0$  ist, ist  $f$  natürlich insbesondere in einer Umgebung von  $z_0$  beschränkt). Auch hier ist die entsprechende Aussage im Reellen natürlich falsch.
- (c) Mit dem Riemannsches Hebbarkeitssatz lässt sich die Aussage des Satzes von Liouville aus Folgerung 8.3 noch etwas verallgemeinern: ist  $f : \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_n\} \rightarrow \mathbb{C}$  eine beschränkte holomorphe Funktion, die (im Gegensatz zum Satz von Liouville) nicht auf der ganzen komplexen Ebene, sondern nur auf dem Komplement einer endlichen Teilmenge gegeben ist, so ist  $f$  nun nach dem Riemannsches Hebbarkeitssatz zunächst in die isolierten Singularitäten  $z_1, \dots, z_n$  holomorph fortsetzbar, und damit nach dem Satz von Liouville dann ebenfalls konstant.

Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir noch das Verhalten holomorpher Funktionen in der Umgebung von isolierten Singularitäten untersuchen.

*Bemerkung 10.13.* Es sei  $D \subset \mathbb{C}$  offen,  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und  $z_0$  eine isolierte Singularität von  $f$ . Ist  $z_0$  keine wesentliche Singularität von  $f$ , so ist das Verhalten von  $f$  für  $z \rightarrow z_0$  klar:

- Ist  $\text{ord}_{z_0} f \geq 0$ , also  $f$  holomorph und damit insbesondere stetig fortsetzbar nach  $z_0$ , so konvergiert  $f$  für  $z \rightarrow z_0$  natürlich gegen den Funktionswert  $f(z_0)$ .
- Ist  $\text{ord}_{z_0} f < 0$  und  $\text{ord}_{z_0} f \neq -\infty$ , hat  $f$  also eine Polstelle in  $z_0$ , so konvergiert  $f$  für  $z \rightarrow z_0$  (im uneigentlichen Sinne) nach  $\infty$ , d.h. für alle  $M \geq 0$  gibt es ein  $\varepsilon > 0$ , so dass  $|f(z)| \geq M$  für alle  $z \in D$  mit  $|z - z_0| < \varepsilon$  gilt.

Das Verhalten in der Nähe einer wesentlichen Singularität ist dagegen deutlich komplizierter. In diesem Falle nähern sich die Funktionswerte von  $f$  für  $z \rightarrow z_0$  weder einer komplexen Zahl noch streben sie gegen  $\infty$ :

**Satz 10.14 (Satz von Casorati-Weierstraß).** *Es sei  $D \subset \mathbb{C}$  offen,  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph, und  $z_0 \in \mathbb{C} \setminus D$  eine isolierte Singularität von  $f$ . Wir nehmen wieder an, dass  $f$  lokal um  $z_0$  nicht gleich der Nullfunktion ist. Dann sind äquivalent:*

- (a)  $\text{ord}_{z_0} f = -\infty$ , d.h.  $f$  hat eine wesentliche Singularität in  $z_0$ .
- (b) Für jede Umgebung  $U$  von  $z_0$  mit  $U \setminus \{z_0\} \subset D$  ist  $f(U \setminus \{z_0\})$  dicht in  $\mathbb{C}$  im Sinne von Aufgabe 8.6, d.h. für jede nicht-leere offene Menge  $V \subset \mathbb{C}$  ist  $f(U \setminus \{z_0\}) \cap V \neq \emptyset$ . (Anschaulich bedeutet dies also, dass  $f$  „in jeder Umgebung von  $z_0$  jeder komplexen Zahl beliebig nahe kommt“.)

*Beweis.* Für die Richtung „(a)  $\Rightarrow$  (b)“ sei  $z_0$  eine wesentliche Singularität von  $f$ . Wir nehmen an, dass  $f(U \setminus \{z_0\})$  nicht dicht in  $\mathbb{C}$  liegt, also dass es eine offene Menge  $V = U_\varepsilon(w)$  für gewisse  $w \in \mathbb{C}$  und  $\varepsilon > 0$  gibt, so dass  $f(U \setminus \{z_0\}) \cap U_\varepsilon(w) = \emptyset$  ist. Dies bedeutet gerade, dass

$$|f(z) - w| \geq \varepsilon \quad \text{für alle } z \in U \setminus \{z_0\}.$$

Die holomorphe Funktion

$$g : U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{f(z) - w}$$

ist daher wohldefiniert und beschränkt (durch  $\frac{1}{\varepsilon}$ ). Nach dem Riemannsches Hebbarkeitssatz 10.11 lässt sich  $g$  also zu einer holomorphen Funktion auf ganz  $U$  fortsetzen. Damit hat dann aber

$$f(z) = w + \frac{1}{g(z)}$$

in  $z_0$  eine hebbare Singularität (falls  $g(z_0) \neq 0$ ) oder einen Pol (der Ordnung  $\text{ord}_{z_0} g$ , falls  $g(z_0) = 0$ ), aber im Widerspruch zur Voraussetzung sicher keine wesentliche Singularität. Also war unsere Annahme falsch, d.h.  $f(U \setminus \{z_0\})$  muss dicht in  $\mathbb{C}$  liegen. Dies beendet den Beweis der Richtung „(a)  $\Rightarrow$  (b)“.

Die umgekehrte Richtung „(b)  $\Rightarrow$  (a)“ ist dagegen klar nach Bemerkung 10.13, denn für eine isolierte Singularität  $z_0$  mit  $\text{ord}_{z_0} f \neq -\infty$  konvergiert  $f(z)$  für  $z \rightarrow z_0$  stets gegen eine komplexe Zahl oder gegen  $\infty$ , so dass das Bild  $f(U \setminus \{z_0\})$  für eine genügend kleine Umgebung  $U$  von  $z_0$  nicht dicht in  $\mathbb{C}$  liegen kann.  $\square$

**Aufgabe 10.15.** Man bestimme alle holomorphen Funktionen  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , die eine holomorphe Umkehrfunktion  $f^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  besitzen. (Man nennt solche Funktionen auch *Automorphismen der komplexen Ebene*.)

(Hinweis: Betrachte die Funktion  $z \mapsto f(\frac{1}{z})$ . Welche Art von isolierter Singularität kann diese Funktion im Nullpunkt haben? Der Satz 10.14 von Casorati-Weierstraß ist hier nützlich.)

## 11. DIE UMLAUFZAHL UND DER RESIDUENSATZ

Wir wollen uns nun noch einmal mit der Berechnung geschlossener Wegintegrale befassen. Ist  $D \subset \mathbb{C}$  offen,  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und  $\gamma$  ein geschlossener Weg in  $D$ , so haben wir für die Berechnung von  $\int_{\gamma} f(z) dz$  bisher die folgenden Hilfsmittel kennengelernt:

- Besitzt  $f$  eine Stammfunktion auf  $D$ , so ist  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$  (siehe Lemma 3.10).
- Ist  $\gamma$  nullhomotop in  $D$  (z.B. weil  $D$  einfach zusammenhängend ist), so ist  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$  (siehe Folgerung 5.2 (b)).
- Ist  $z_0$  eine isolierte Singularität von  $f$ , ist  $\gamma$  eine hinreichend kleine geschlossene Kreislinie um  $z_0$  und  $f$  von der Form  $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$  mit  $n \in \mathbb{N}$  und einer auf  $D \cup \{z_0\}$  holomorphen Funktion  $g$ , so gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} \frac{g(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} \cdot g^{(n)}(z_0)$$

(nach der verallgemeinerten Cauchyschen Integralformel aus Satz 7.13 (b)).

Wir wollen in diesem Kapitel nun einen Satz herleiten, der diese bisherigen Hilfsmittel wesentlich verallgemeinert und in „nahezu allen“ Fällen eine einfache Berechnung des Integrals  $\int_{\gamma} f(z) dz$  ermöglicht (also ohne Stammfunktionen zu kennen oder die Wegintegrale nach Definition auszurechnen). Dieser sogenannte *Residuensatz* ist wahrscheinlich der wichtigste Satz dieser Vorlesung. Er hat seinerseits natürlich wieder viele Anwendungen, von denen wir einige im Anschluss an dieses Kapitel noch sehen werden.

*Bemerkung 11.1.* Als ersten Schritt auf dem Weg zum Residuensatz wollen wir zuerst zwar beliebige geschlossene Integrationswege  $\gamma$  zulassen, für den Integranden jedoch noch annehmen, dass er die spezielle Form  $(z-z_0)^n$  hat für ein  $n \in \mathbb{Z}$  und ein  $z_0$ , das nicht auf dem Integrationsweg liegt. Wie ihr euch vielleicht schon denken könnt, ist dies der entscheidende Schritt, denn eine beliebige holomorphe Funktion können wir ja dann später durch Reihenentwicklung einfach als Summe solcher speziellen Integranden schreiben.

Der Fall  $n \neq -1$  ist natürlich sehr einfach zu behandeln: da in diesem Fall  $(z-z_0)^n$  die Stammfunktion  $\frac{(z-z_0)^{n+1}}{n+1}$  besitzt, ist jedes geschlossene Wegintegral über diese Funktion 0 nach Lemma 3.10. Interessant ist also nur der Fall  $n = -1$ , d.h. wir wollen das Integral  $\int_{\gamma} \frac{dz}{z-z_0}$  für einen beliebigen Weg in  $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$  berechnen. Um die Notation etwas zu vereinfachen, machen wir zunächst die Substitution

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-z_0} = \int_{\gamma'} \frac{dz}{z},$$

wobei  $\gamma' : t \mapsto \gamma(t) - z_0$  der um  $-z_0$  verschobene Weg  $\gamma$  ist. Von diesem Integral wissen wir aber bereits nach Aufgabe 3.13, dass das Ergebnis immer  $2\pi i k$  für ein  $k \in \mathbb{Z}$  ist. Wir haben in dieser Aufgabe sowie in Beispiel 5.3 (a) auch bereits gesehen, dass diese Zahl  $k$  interpretiert werden kann als die Anzahl, „wie oft der Weg  $\gamma'$  um 0 (bzw.  $\gamma$  um  $z_0$ ) herumläuft“.

Diese Beobachtungen müssen wir jetzt in exakte mathematische Aussagen umwandeln. Wie oft in der Mathematik zäumen wir dafür das Pferd von hinten auf und *definieren* zunächst einmal die Zahl  $k$  oben als die Umlaufzahl von  $\gamma$  um  $z_0$ :

**Definition 11.2** (Umlaufzahl). Es sei  $z_0 \in \mathbb{C}$  und  $\gamma$  ein geschlossener Weg in  $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ . Die (nach Bemerkung 11.1 ganze) Zahl

$$\text{ind}_{z_0}(\gamma) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-z_0} \in \mathbb{Z}$$

heißt **Index** oder **Umlaufzahl** von  $\gamma$  um  $z_0$ .

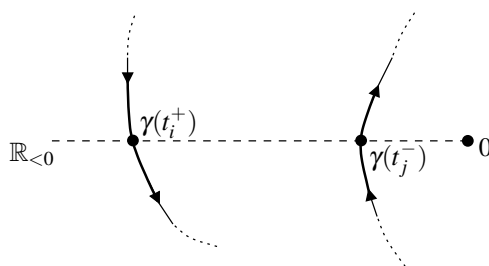
Der folgende Satz sieht zwar etwas kompliziert aus, ist aber sehr einfach anzuwenden und sagt uns letztlich, dass unsere Definition der Umlaufzahl auch wirklich das tut, was wir erwarten. Wie in Bemerkung 11.1 erläutern können wir nach einer Substitution o.B.d.A.  $z_0 = 0$  annehmen.

**Satz 11.3** (Geometrische Deutung der Umlaufzahl). *Es sei  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  ein geschlossener Weg, der die negative reelle Achse  $n$ -mal von oben nach unten und  $m$ -mal von unten nach oben durchkreuzt. Mit anderen Worten setzen wir voraus, dass es verschiedene Punkte  $t_1^+, \dots, t_n^+, t_1^-, \dots, t_m^- \in (a, b)$  gibt, so dass gilt:*

- $\arg \gamma(t) = \pi$  genau dann wenn  $t = t_i^+$  oder  $t = t_i^-$  für ein  $i$ , d.h. der Weg trifft die negative reelle Achse  $\mathbb{R}_{<0}$  genau für die Parameter  $t_i^+$  und  $t_i^-$ ;
- für alle  $i = 1, \dots, n$  hat  $\arg \gamma(t) - \pi$  einen Vorzeichenwechsel von  $-$  nach  $+$  bei  $t = t_i^+$ ;
- für alle  $i = 1, \dots, m$  hat  $\arg \gamma(t) - \pi$  einen Vorzeichenwechsel von  $+$  nach  $-$  bei  $t = t_i^-$ .

Hierbei bezeichnet  $\arg \gamma(t) \in [0, 2\pi)$  den Winkel der komplexen Zahl  $\gamma(t)$  wie in Bemerkung 1.10.

Dann gilt  $\text{ind}_0 \gamma = n - m$ .



*Beweis.* Es seien  $t_1 < \dots < t_{n+m}$  die der Größe nach sortierten Zahlen  $t_1^+, \dots, t_n^+, t_1^-, \dots, t_m^-$ . Mit  $t_0 := a$  und  $t_{m+n+1} := b$  gilt dann

$$\begin{aligned} 2\pi i \cdot \text{ind}_0 \gamma &= \sum_{i=0}^{n+m} \int_{\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]} } \frac{dz}{z} && \text{(Aufteilen des Integrals in Teilwege)} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n+m} \int_{\gamma|_{[t_i + \varepsilon, t_{i+1} - \varepsilon]} } \frac{dz}{z} && \text{(Stetigkeit des Integrals)}. \end{aligned}$$

Da der Weg  $\gamma$  von  $t_i + \varepsilon$  bis  $t_{i+1} - \varepsilon$  nach Voraussetzung ganz in  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$  verläuft, können wir Aufgabe 3.13 auf diese Teilstücke anwenden und erhalten

$$\begin{aligned} 2\pi i \cdot \text{ind}_0 \gamma &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n+m} \left[ \log z \right]_{\gamma(t_i + \varepsilon)}^{\gamma(t_{i+1} - \varepsilon)} \\ &= \sum_{i=0}^{n+m} \left( \underbrace{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \log(\gamma(t_{i+1} - \varepsilon))}_{(A)} - \underbrace{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \log(\gamma(t_i + \varepsilon))}_{(B)} \right). \end{aligned}$$

Wir untersuchen nun die Terme (A) und (B). Nach Definition des komplexen Logarithmus aus Aufgabe 3.13 ist  $\log(re^{i\varphi}) = \log r + i\varphi$ , wobei wir den Winkel  $\varphi$  so wählen müssen, dass er zwischen  $-\pi$  und  $\pi$  liegt. Ist also z.B.  $t_{i+1}$  eine Überkreuzung von oben nach unten, so ist dieser Winkel am Punkt  $\gamma(t_{i+1} - \varepsilon)$  (also kurz vor der Überkreuzung) etwas kleiner als  $\pi$  und konvergiert gegen  $\pi$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Ist  $t_{i+1}$  hingegen eine Überkreuzung von unten nach oben, so ist der Winkel am Punkt  $\gamma(t_{i+1} - \varepsilon)$  etwas größer als  $-\pi$  und konvergiert gegen  $-\pi$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Insgesamt ergibt sich also

$$(A) = \begin{cases} \log |\gamma(t_{i+1})| + i\pi & \text{falls } t_{i+1} = t_j^+ \text{ für ein } j, \\ \log |\gamma(t_{i+1})| - i\pi & \text{falls } t_{i+1} = t_j^- \text{ für ein } j, \\ \log \gamma(b) & \text{falls } i = n+m \end{cases}$$

und analog

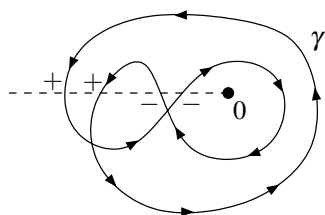
$$(B) = \begin{cases} \log |\gamma(t_i)| - i\pi & \text{falls } t_{i+1} = t_j^+ \text{ für ein } j, \\ \log |\gamma(t_i)| + i\pi & \text{falls } t_{i+1} = t_j^- \text{ für ein } j, \\ \log \gamma(a) & \text{falls } i = 0. \end{cases}$$

Bilden wir nun die Differenz, so heben sich alle reellen Logarithmen sowie  $\log \gamma(a) = \log \gamma(b)$  heraus, und es bleibt gerade

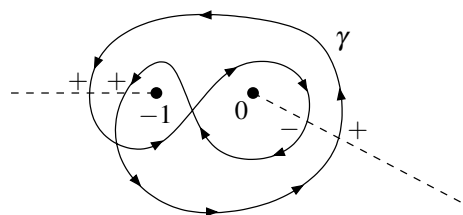
$$2\pi i \cdot \text{ind}_0 \gamma = i\pi((n-m) - (m-n)) = 2\pi i(n-m)$$

übrig, womit der Satz bewiesen ist.  $\square$

**Beispiel 11.4.** Der im Bild unten links dargestellte Weg hat Umlaufzahl  $\text{ind}_0 \gamma = 0$  um 0, denn es gibt je zwei Überkreuzungen der negativen reellen Achse von oben nach unten bzw. von unten nach oben (mit „+“ bzw. „-“ gekennzeichnet).



zu Beispiel 11.4



zu Bemerkung 11.5

*Bemerkung 11.5.*

- Für Umlaufzahlen um andere Punkte als den Nullpunkt ergibt sich natürlich dasselbe Verfahren, nur dass wir dann einen Strahl vom betrachteten Punkt aus nach links ziehen und die Überkreuzungen mit diesem Strahl zählen müssen — so ist z.B. die Umlaufzahl des im Bild oben rechts eingezeichneten Weges um den Punkt  $-1$  gleich  $\text{ind}_{-1} \gamma = 2$ .
- Aufgrund der Homotopieinvarianz des Wegintegrals aus Folgerung 5.2 (a) ist klar, dass zwei geschlossene Wege in  $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$  die gleiche Umlaufzahl um  $z_0$  haben, wenn sie homotop in  $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$  sind, also durch eine Deformation in  $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$  auseinander hervorgehen (in der Tat kann man zeigen, dass auch die Umkehrung dieser Aussage gilt: wenn die beiden Wege die gleiche Umlaufzahl um  $z_0$  haben, so sind sie homotop in  $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ ). Es ist natürlich auch anschaulich einleuchtend, dass solche homotopen Wege „gleich oft“ um  $z_0$  herumlaufen müssen. Stellt man sich z.B. den Weg  $\gamma$  im Bild oben als einen Faden auf einem Blatt Papier vor und stellt man einen Stift im Nullpunkt senkrecht aufs Papier, so kann man den Faden vom Papier herunterziehen, ohne dass dabei der Stift im Weg wäre — der Faden läuft also effektiv nicht um den Stift herum. Stellt man den Stift hingegen auf den Punkt  $-1$ , so wäre dies nicht möglich.
- Eine spezielle Homotopie in (b) besteht darin, dass man den gesamten Weg um den Punkt  $z_0$  um einen bestimmten Winkel dreht. Berechnet man von diesem gedrehten Weg die Umlaufzahl um  $z_0$  nach Satz 11.3, so erhält man offensichtlich dasselbe Resultat, als wenn man die Schnittpunkte des ursprünglichen Weges mit der um den entgegengesetzten Winkel gedrehten negativen reellen Achse betrachtet. Wir sehen also, dass wir in Satz 11.3 statt des dort betrachteten, nach links laufenden Strahls von  $z_0$  auch einen beliebigen anderen verwenden können — die positiven bzw. negativen Überkreuzungen verlaufen dann natürlich lediglich nicht mehr „von oben nach unten“ bzw. „von unten nach oben“, sondern sind solche im mathematisch positiven bzw. negativen Drehsinn um  $z_0$ . Im Bild oben rechts ist z.B. eingezeichnet, wie man für den dort betrachteten Weg die Umlaufzahl  $\text{ind}_0 \gamma = 0$  auch mit Hilfe eines anderen Strahls bestimmen könnte.
- Insbesondere folgt aus (b) und (c), dass wir Satz 11.3 in jedem Fall zur Berechnung der Umlaufzahl eines Weges um einen Punkt verwenden können, auch wenn die Voraussetzung der endlich vielen Schnittpunkte a priori nicht erfüllt ist: gibt es unendlich viele Schnittpunkte mit dem dort betrachteten Strahl nach links (z.B. weil er ein Stück weit auf dem Strahl entlang läuft), so können wir einfach einen anderen Strahl betrachten oder den Weg so deformieren, dass es nur noch endlich viele Schnittpunkte gibt.

Nachdem wir nun Wegintegrale der Form  $\int_{\gamma}(z - z_0)^n dz$  (und insbesondere  $\int_{\gamma}(z - z_0)^{-1} dz$ ) ausführlich studiert haben, kommen wir jetzt zum Fall von allgemeinen Integranden. Wie wir am Anfang dieses Kapitels schon erwähnt haben, wollen wir diesen allgemeinen Fall auf die Integrale  $\int_{\gamma}(z - z_0)^n dz$  zurückführen, indem wir den Integranden auf geeignete Art in eine Laurent-Reihe entwickeln. Da von diesen Integralen nur der Fall  $n = -1$  einen Beitrag liefert, wird der Koeffizient vor  $(z - z_0)^{-1}$  in dieser Laurent-Entwicklung eine besondere Rolle spielen. Wir geben ihm daher einen speziellen Namen.

**Definition 11.6** (Residuum). Es sei  $D \subset \mathbb{C}$  offen,  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und  $z_0 \in \mathbb{C} \setminus D$  eine isolierte Singularität von  $f$ . Wie in Definition 10.3 können wir  $f$  dann lokal um  $z_0$  in eine Laurent-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

entwickeln. Mit diesen Notationen heißt der Koeffizient

$$\operatorname{res}_{z_0} f := a_{-1}$$

von  $(z - z_0)^{-1}$  in dieser Reihe das **Residuum** von  $f$  in  $z_0$ .

**Beispiel 11.7.**

- (a) Ist  $f$  holomorph (fortsetzbar) in  $z_0$ , so ist  $f$  natürlich eine Potenzreihe um  $z_0$  und damit  $\operatorname{res}_{z_0} f = 0$ .  
 (b) Es ist

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_0 \frac{\sin z}{z^4} &= \operatorname{res}_0 \frac{1}{z^4} \left( z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \mp \dots \right) \\ &= \operatorname{res}_0 \left( 1 \cdot z^{-3} - \frac{1}{6} \cdot z^{-1} + \frac{1}{120} \cdot z \mp \dots \right) \\ &= -\frac{1}{6}, \end{aligned}$$

wie man sofort durch Reihenentwicklung und Ablesen des Koeffizienten von  $z^{-1}$  ermittelt.

Die Berechnung der Laurent-Entwicklung einer gegebenen Funktion ist in der Praxis oft recht aufwändig. Wollen wir nur das Residuum bestimmen, so führt das folgende Lemma im Fall von Polstellen oft schneller zum Ziel:

**Lemma 11.8** (Berechnung des Residuums). Es sei  $D \subset \mathbb{C}$  offen,  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und  $z_0 \in \mathbb{C} \setminus D$  eine isolierte Singularität von  $f$ . Hat dann  $f$  in  $z_0$  höchstens einen Pol der Ordnung  $m \in \mathbb{N}$  (d.h. gilt  $\operatorname{ord}_{z_0} f \geq -m$ ), so gilt für das Residuum von  $f$  in  $z_0$  die Formel

$$\operatorname{res}_{z_0} f = \frac{1}{(m-1)!} \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} \left( (z - z_0)^m f(z) \right)^{(m-1)}$$

(wobei das  $(m-1)$  rechts oben für die  $(m-1)$ -te Ableitung der Funktion in den großen Klammern steht).

*Beweis.* Ist  $\operatorname{ord}_{z_0} f \geq -m$ , so hat die Laurent-Entwicklung von  $f$  in  $z_0$  die Form

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} (z - z_0)^m f(z) &= \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n+m} \\ &= a_{-m} + a_{-m+1}(z - z_0) + \dots + a_{-1}(z - z_0)^{m-1} + a_0(z - z_0)^m + \dots \end{aligned}$$

Beim  $(m-1)$ -fachen Differenzieren dieser Potenzreihe fallen natürlich die Terme mit einer Potenz von  $z-z_0$  kleiner als  $m-1$  weg, und wir erhalten

$$\left((z-z_0)^m f(z)\right)^{(m-1)} = a_{-1} \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \dots \cdot 1 + a_0 \cdot m \cdot (m-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot (z-z_0) + \dots$$

Bilden wir hier nun den Grenzwert für  $z \rightarrow z_0$ , so erhalten wir offensichtlich genau  $a_{-1} \cdot (m-1)!$ , was mit der Definition des Residuums die Behauptung des Lemmas zeigt.  $\square$

### Beispiel 11.9.

- (a) Wir wollen mit Hilfe von Lemma 11.8 noch einmal das Residuum  $\operatorname{res}_0 \frac{\sin z}{z^4}$  aus Beispiel 11.7 (b) bestimmen. Die betrachtete Funktion hat im Nullpunkt eine dreifache Polstelle (da der Zähler eine einfache und der Nenner eine vierfache Nullstelle hat). Wir könnten Lemma 11.8 also mit  $m=3$  verwenden. Einfacher ist es jedoch,  $m=4$  zu wählen (was im Lemma ja zugelassen ist), da sich in der Formel dann genau der Nenner  $z^4$  weghebt:

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_0 \frac{\sin z}{z^4} &= \frac{1}{3!} \lim_{z \rightarrow 0} \left( z^4 \cdot \frac{\sin z}{z^4} \right)^{(3)} \\ &= \frac{1}{6} \lim_{z \rightarrow 0} \sin^{(3)}(z) \\ &= -\frac{1}{6} \cos(0) \\ &= -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

- (b) Besonders einfach wird die Formel aus Lemma 11.8 für  $m=1$ , also wenn in  $z_0$  (höchstens) eine einfache Polstelle vorliegt. Dann ergibt sich durch Einsetzen

$$\operatorname{res}_{z_0} f = \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0) f(z).$$

Wir haben nun alle Vorarbeiten geleistet, um den wohl wichtigsten Satz dieser Vorlesung zu beweisen:

**Satz 11.10 (Residuensatz).** *Es sei  $D \subset \mathbb{C}$  offen und einfach zusammenhängend,  $z_1, \dots, z_m \in D$  und  $f : D \setminus \{z_1, \dots, z_m\} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Dann gilt für jeden geschlossenen Weg  $\gamma$  in  $D \setminus \{z_1, \dots, z_m\}$*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^m \operatorname{ind}_{z_k} \gamma \cdot \operatorname{res}_{z_k} f.$$

*Beweis.* Wir entwickeln den Integranden gemäß Definition 10.3 in jedem Punkt  $z_k$  in eine Laurent-Reihe

$$f(z) = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n^{(k)} (z-z_k)^n}_{=: f_k^-} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)} (z-z_k)^n}_{=: f_k^+}.$$

Beachte dabei, dass diese Darstellung zwar nur lokal um  $z_k$  gilt, die Hauptteile  $f_k^-$  aber trotzdem auf  $\mathbb{C} \setminus \{z_k\}$  definiert sind (denn ihre Konvergenzgebiete sind ja von der Form  $\{z \in \mathbb{C}; r < |z-z_k|\}$ , und da wir hier wie in Definition 10.3 die Laurent-Entwicklung in den Punkten  $z_k$  betrachten, ist  $r=0$ ). Die Funktion

$$g : D \setminus \{z_1, \dots, z_m\} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad g(z) = f(z) - f_1^-(z) - \dots - f_m^-(z)$$

ist also wohldefiniert und holomorph — wir können uns  $g$  so vorstellen, dass wir „von  $f$  die singulären Teile subtrahiert haben“. In der Tat ist dieses  $g$  nun auch holomorph in die Punkte  $z_k$  fortsetzbar, denn lokal um  $z_k$  gilt

$$g(z) = \underbrace{(f(z) - f_k^-(z))}_{=: f_k^+(z)} - f_1^-(z) - \dots - f_{k-1}^-(z) - f_{k+1}^-(z) - \dots - f_m^-(z),$$

und in diesem Ausdruck sind alle Summanden holomorph in  $z_k$ . Also ist  $g$  holomorph auf ganz  $D$ . Weil  $D$  nun einfach zusammenhängend und  $\gamma$  damit nullhomotop in  $D$  ist, folgt also  $\int_{\gamma} g(z) dz = 0$  und damit

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\gamma} g(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz - \sum_{k=1}^m \int_{\gamma} f_k^-(z) dz \\ &= \int_{\gamma} f(z) dz - \sum_{k=1}^m \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n^{(k)} \int_{\gamma} (z - z_k)^n dz. \end{aligned}$$

Da die Integrale  $\int_{\gamma} (z - z_k)^n dz$  nach Bemerkung 11.1 und Definition 11.2 gleich 0 sind für  $n \neq -1$  und gleich  $2\pi i \cdot \text{ind}_{z_k} \gamma$  für  $n = -1$ , ergibt sich also

$$0 = \int_{\gamma} f(z) dz - \sum_{k=1}^m a_{-1}^{(k)} \cdot 2\pi i \cdot \text{ind}_{z_k} \gamma,$$

woraus wegen  $\text{res}_{z_k} f = a_{-1}^{(k)}$  die Behauptung des Satzes folgt.  $\square$

### Beispiel 11.11.

- (a) Der einfachste Fall des Residuensatzes ist natürlich, wenn  $D$  einfach zusammenhängend und  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph auf ganz  $D$  ist, wenn es also keine isolierten Singularitäten gibt. In diesem Fall ist einfach  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$  für jeden geschlossenen Weg  $\gamma$  in  $D$ , wie ja auch aus der Homotopieinvarianz des Wegintegrals folgt (siehe Folgerung 5.2 (b)).
- (b) Es sei  $D$  einfach zusammenhängend,  $z_0 \in D$ , und  $f : D \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$  von der Form

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^{n+1}}$$

für ein  $n \in \mathbb{N}$  und eine auf ganz  $D$  holomorphe Funktion  $g$ . Dann folgt aus dem Residuensatz 11.10 für jeden geschlossenen Weg  $\gamma$  in  $D \setminus \{z_0\}$  zunächst natürlich

$$\int_{\gamma} \frac{g(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = 2\pi i \cdot \text{ind}_{z_0} \gamma \cdot \text{res}_{z_0} \frac{g(z)}{(z - z_0)^{n+1}}.$$

Mit Lemma 11.8 für  $m = n + 1$  können wir das hier auftretende Residuum einfach berechnen und erhalten

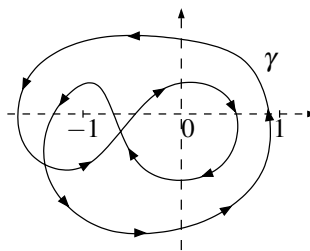
$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{g(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz &= 2\pi i \cdot \text{ind}_{z_0} \gamma \cdot \frac{1}{n!} \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} \left( (z - z_0)^{n+1} \cdot \frac{g(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \right)^{(n)} \\ &= 2\pi i \cdot \text{ind}_{z_0} \gamma \cdot \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}. \end{aligned}$$

Ist  $\gamma$  eine Kreislinie um  $z_0$ , so ist nun  $\text{ind}_{z_0} \gamma = 1$ , und wir erhalten genau die verallgemeinerte Cauchysche Integralformel aus Satz 7.13 (b). Die verallgemeinerte Cauchysche Integralformel ist in diesem Sinne also ein einfacher Spezialfall des Residuensatzes.

- (c) Als Beispiel dafür, dass man mit Hilfe des Residuensatzes nahezu beliebige geschlossene Wegintegrale sehr einfach berechnen kann, wollen wir nun das Integral

$$\int_{\gamma} \frac{1}{(z+1)\sin z} dz$$

entlang des Weges aus Beispiel 11.4 bzw. Bemerkung 11.5 bestimmen, den wir hier rechts noch einmal dargestellt haben.



Der Integrand hat offensichtlich isolierte Singularitäten bei  $-1$  sowie in den Punkten  $k \cdot \pi$  für  $k \in \mathbb{Z}$ . Wählen wir für  $D$  z.B. die Kreisscheibe um 0 mit Radius 3, so liegt  $\gamma$  ganz in  $D$ , und



$f$  hat in diesem Gebiet nur die isolierten Singularitäten  $0$  und  $-1$ . Nach dem Residuensatz ist also

$$\int_{\gamma} \frac{1}{(z+1)\sin z} dz = 2\pi i \left( \text{ind}_{-1} \gamma \cdot \text{res}_{-1} \frac{1}{(z+1)\sin z} + \text{ind}_0 \gamma \cdot \text{res}_0 \frac{1}{(z+1)\sin z} \right).$$

Die hier vorkommenden Umlaufzahlen haben wir bereits in Beispiel 11.4 bzw. Bemerkung 11.5 bestimmt: es ist  $\text{ind}_{-1} \gamma = 2$  und  $\text{ind}_0 \gamma = 0$ . Also benötigen wir nur das Residuum des Integranden im Punkt  $-1$ , und das ergibt sich aufgrund der dort vorliegenden einfachen Polstelle nach Beispiel 11.9 (b) sofort zu

$$\text{res}_{-1} \frac{1}{(z+1)\sin z} = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{1}{\sin z} = -\frac{1}{\sin 1}.$$

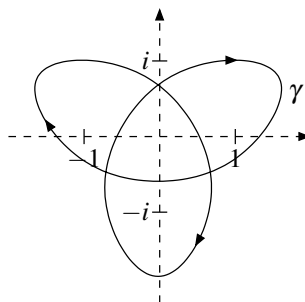
Also erhalten wir für das gesuchte Integral ohne komplizierte Rechnung das Ergebnis

$$\int_{\gamma} \frac{1}{(z+1)\sin z} dz = -\frac{4\pi i}{\sin 1}.$$

**Aufgabe 11.12.** Berechne das Wegintegral

$$\int_{\gamma} \frac{\cos z}{z^3(z^2+1)} dz$$

für den im folgenden Bild eingezeichneten Weg  $\gamma$ :



**Aufgabe 11.13.** Es sei  $D \subset \mathbb{C}$  offen und einfach zusammenhängend,  $z_0 \in D$  und  $f : D \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph.

Zeige, dass das Residuum  $\text{res}_{z_0} f$  die eindeutig bestimmte Zahl  $c \in \mathbb{C}$  ist, für die die auf  $D \setminus \{z_0\}$  holomorphe Funktion  $f(z) - \frac{c}{z-z_0}$  eine Stammfunktion besitzt.

*Bemerkung 11.14.* Oft vereinfacht man die Schreibweise des Residuensatzes etwas, indem man für die Singularitäten des Integranden keine spezielle Bezeichnung einführt: ist  $D$  einfach zusammenhängend und  $f$  holomorph auf  $D$  mit Ausnahme endlich vieler isolierter Singularitäten, so schreibt man für einen geschlossenen Weg in  $D$ , der die Singularitäten von  $f$  nicht trifft, die Formel des Residuensatzes einfach als

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z \in D} \text{ind}_z \gamma \cdot \text{res}_z f.$$

Natürlich steht hier auf der rechten Seite eigentlich eine Summe über alle (überabzählbar vielen) Punkte von  $D$  — aber da das Residuum von  $f$  nach Beispiel 11.7 (a) in allen Punkten gleich  $0$  ist, in denen keine isolierte Singularität vorliegt, ist die Konvention hier natürlich einfach, dass diese Summe als endliche Summe über die isolierten Singularitäten zu verstehen ist.

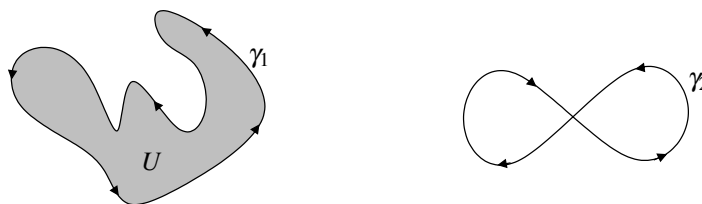
Zum Schluss dieses Kapitels wollen wir noch eine offensichtliche, aber in der Praxis oft vorkommende Vereinfachung des Residuensatzes festhalten, die sich ergibt, wenn der betrachtete Weg  $\gamma$  einfach „der Rand eines Gebietes“ ist, z.B. der Rand eines Kreises, eines Rechtecks oder einer ähnlichen Figur. In diesem Fall ist die Umlaufzahl des Weges um die Punkte im Inneren des umlaufenen Gebietes natürlich  $1$ , während die Umlaufzahl um die Punkte im Äußeren gleich  $0$  ist:

**Definition 11.15** (Randkurven). Es sei  $D \subset \mathbb{C}$  offen und einfach zusammenhängend. Ein geschlossener Weg  $\gamma: [a, b] \rightarrow D$  heißt **Randkurve**, wenn die Umlaufzahl  $\text{ind}_z \gamma$  für alle  $z \in D \setminus \gamma([a, b])$  gleich 0 oder 1 ist. In diesem Fall nennen wir

$$U = \{z \in D \setminus \gamma([a, b]); \text{ind}_z \gamma = 1\} \quad \text{das Innere und} \\ \{z \in D \setminus \gamma([a, b]); \text{ind}_z \gamma = 0\} \quad \text{das Äußere von } \gamma$$

und sagen auch,  $\gamma$  ist eine Randkurve von  $U$ .

**Beispiel 11.16.** Im folgenden Bild ist der Weg  $\gamma_1$  links eine Randkurve von  $U$ , während der Weg  $\gamma_2$  rechts keine Randkurve ist (weil die Umlaufzahl von  $\gamma_2$  um die Punkte im linken Gebiet der „Acht“ gleich  $-1$  ist).



In der Tat kann man zeigen, dass jeder Weg „ohne Selbstüberschneidungen“ (ggfs. nach Orientierungsumkehr) eine Randkurve ist, also die komplexe Ebene in ein „Inneres“ und „Äußeres“ teilt.

Mit dieser Definition ergibt sich nun die folgende offensichtliche Vereinfachung des Residuensatzes für Randkurven:

**Folgerung 11.17 (Residuensatz für Randkurven).** Es sei  $D \subset \mathbb{C}$  offen und einfach zusammenhängend. Weiterhin sei  $f$  holomorph auf  $D$  mit Ausnahme endlich vieler isolierter Singularitäten. Dann gilt für jede Randkurve  $\gamma$  in  $D$ , die die Singularitäten von  $f$  nicht trifft,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z \in U} \text{res}_z f,$$

wobei  $U$  das Innere von  $\gamma$  ist (und die Summe auf der rechten Seite wieder im Sinne von Bemerkung 11.14 zu verstehen ist).

*Beweis.* Dies ergibt sich natürlich einfach aus dem Residuensatz 11.10 durch Einsetzen der Umlaufzahlen 1 bzw. 0 für alle Punkte im Inneren bzw. Äußeren von  $\gamma$ .  $\square$

## 12. BERECHNUNG REELLER INTEGRALE MIT DEM RESIDUENSATZ

Wir haben gerade gesehen, dass man mit Hilfe des Residuensatzes nahezu beliebige geschlossene komplexe Kurvenintegrale berechnen kann. In diesem Kapitel wollen wir nun zeigen, dass sich auch einige *reelle* Integrale mit dem Residuensatz sehr einfach berechnen lassen — unter anderem auch einige, an die man mit den „normalen“ Methoden der reellen Analysis nicht herankommt, weil man keine Stammfunktion des Integranden angeben kann.

Es handelt sich hierbei in der Regel um „uneigentliche Integrale“, also um reelle Integrale der Form

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

wobei  $f$  eine reelle Funktion ist, die im Unendlichen schnell genug abfällt, so dass das Integral konvergiert. Wir werden dabei der Einfachheit halber hier nur Integrale betrachten, bei denen es keine Rolle spielt, ob wir sie als uneigentliche Riemann-Integrale oder als Lebesgue-Integrale auffassen. Wir können uns das obige Integral damit als Grenzwert

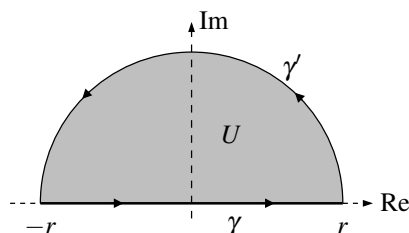
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f(x) dx$$

vorstellen.

Die Idee, wie man solche Integrale unter Umständen mit Hilfe der Funktionentheorie berechnen kann, ist schnell erklärt: zunächst einmal können wir das reelle Integral von  $-r$  bis  $r$  natürlich auch als komplexes Wegintegral

$$\int_{-r}^r f(x) dx = \int_{\gamma} f(z) dz$$

über den rechts eingezeichneten Weg  $\gamma$  interpretieren, der auf der reellen Achse von  $-r$  nach  $r$  verläuft.



Wir versuchen nun, die ursprünglich gegebene Funktion  $f$  in einer *reellen* Variablen zu einer holomorphen Funktion in einer *komplexen* Variablen zu erweitern — bei den Standardfunktionen wie z.B. Polynomen, Exponential- oder Winkelfunktionen bzw. Kombinationen davon ist dies natürlich einfach möglich. Damit können wir dann den Integrationsweg  $\gamma$  mit einem weiteren Wegstück  $\gamma'$  in der komplexen Ebene so ergänzen, dass sich insgesamt eine *geschlossene* Kurve ergibt — z.B. durch einen Halbkreisbogen wie im Bild oben rechts. Mit dem Residuensatz wie in Folgerung 11.17 können wir dann das Integral über  $f$  entlang dieses geschlossenen Weges einfach berechnen und erhalten

$$\int_{\gamma} f(z) dz + \int_{\gamma'} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z \in U} \operatorname{res}_z f. \quad (*)$$

In dieser Situation betrachten wir nun den Grenzwert für  $r \rightarrow \infty$ , also einen immer größer werdenden Halbkreis. Wenn der Integrand „im Unendlichen schnell genug abfällt“, können wir hoffen, dass das Integral über  $\gamma'$  gegen Null konvergiert. Gelingt es uns, dies zu zeigen, bleibt in  $(*)$  im Grenzfalle also nur noch das Integral über  $\gamma$  und damit das gesuchte Integral  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$  übrig, das wir dann durch (einfach berechenbare) Residuen von  $f$  ausgedrückt haben.

Wir werden dieses Verfahren in diesem Kapitel für reelle Integrale der Form

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \cos x dx \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \sin x dx$$

durchführen, wobei  $p$  und  $q$  jeweils beliebige Polynomfunktionen sind (und  $q$  keine reellen Nullstellen hat, so dass der Integrand auf der gesamten reellen Achse definiert ist). In jedem dieser Fälle erhalten wir so ein sehr einfaches Resultat für diese Integrale. Analoge Techniken können auch für viele andere Typen von Integranden eingesetzt werden, allerdings muss natürlich in jeder Klasse von Beispielen erneut überprüft werden, dass das „Schließen des Integrationsweges im Unendlichen“ das

Resultat nicht ändert, d.h. dass das Integral über  $\gamma'$  oben im Grenzfalle  $r \rightarrow \infty$  wirklich gegen 0 konvergiert. Da diese Abschätzungen in der Regel nur wenig spannend sind, werden wir hier auf die Behandlung weiterer Beispiele verzichten.

Bevor wir nun in den oben genannten Fällen die nötigen Berechnungen durchführen können, benötigen wir ein paar Vorbemerkungen darüber, „wie schnell“ Funktionen der Form  $\frac{p(x)}{q(x)}$  mit Polynomen  $p$  und  $q$  im Unendlichen abfallen.

**Definition 12.1.** Eine (reelle) **rationale Funktion** ist eine Abbildung der Form

$$f: U \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)},$$

wobei  $p, q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  Polynome sind und  $U = \{x \in \mathbb{R}; q(x) \neq 0\}$  die Menge der Punkte, an denen der Nenner nicht verschwindet. Ist der Grad von  $p$  gleich  $n$  und der Grad von  $q$  gleich  $m$ , so nennen wir die Zahl  $\deg f := n - m \in \mathbb{Z}$  den **Grad** der rationalen Funktion  $f$ .

*Bemerkung 12.2.* Natürlich können wir jede reelle rationale Funktion  $f$  auch als komplexe Funktion auffassen, die dann auf dem Komplement der komplexen Nullstellen des Nennerpolynoms holomorph ist. Wir werden diese „komplexifizierte Funktion“ im folgenden der Einfachheit halber ebenfalls mit  $f$  bezeichnen.

Für die Abschätzung der später auftretenden Integrale benötigen wir das folgende einfache Lemma.

**Lemma 12.3.** *Es sei  $f$  eine reelle rationale Funktion vom Grad  $n$ . Dann gibt es reelle Zahlen  $R > 0$  und  $c > 0$ , so dass*

$$|f(z)| \leq c \cdot |z|^n$$

für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| \geq R$  gilt.

*Beweis.* Es sei  $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$  mit

$$p(z) = a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \dots + a_0 \quad \text{und} \quad q(z) = b_l z^l + b_{l-1} z^{l-1} + \dots + b_0$$

(wobei  $a_k \neq 0$  und  $b_l \neq 0$ ), so dass also  $n = k - l$  gilt. Dann ist

$$|f(z)| = \left| \frac{z^k (a_k + a_{k-1} z^{-1} + \dots + a_0 z^{-k})}{z^l (b_l + b_{l-1} z^{-1} + \dots + b_0 z^{-l})} \right| = |z|^n \cdot \underbrace{\left| \frac{a_k + a_{k-1} z^{-1} + \dots + a_0 z^{-k}}{b_l + b_{l-1} z^{-1} + \dots + b_0 z^{-l}} \right|}_{(*)}.$$

Der Ausdruck  $(*)$  konvergiert hierbei für  $z \rightarrow \infty$  offensichtlich gegen  $\left| \frac{a_k}{b_l} \right|$ . Setzen wir also  $c := \left| \frac{a_k}{b_l} \right| + 1$ , so gibt es wie behauptet ein  $R > 0$ , so dass  $|f(z)| \leq c |z|^n$  ist für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| \geq R$ .  $\square$

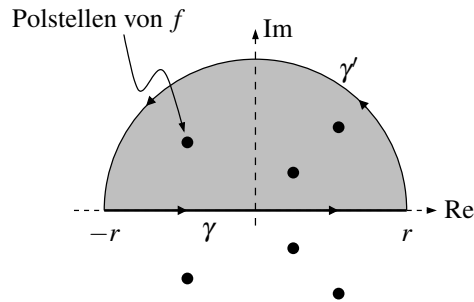
Mit dieser Abschätzung können wir nun die oben schon erwähnten Integrale über rationale Funktionen berechnen.

**Satz 12.4.** *Es sei  $f$  eine reelle rationale Funktion mit  $\deg f \leq -2$ , die auf der reellen Achse keine Polstellen hat. Dann gilt*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \cdot \sum_{z: \operatorname{Im} z > 0} \operatorname{res}_z f,$$

d.h. man erhält (bis auf einen Vorfaktor  $2\pi i$ ) genau die Summe der Residuen von  $f$  in den Polstellen der oberen Halbebene.

*Beweis.* Es seien  $R$  und  $c$  wie in Lemma 12.3. Wir wählen nun ein  $r \geq R$ , so dass alle Polstellen von  $f$  der oberen Halbebene wie im folgenden Bild bereits im Halbkreis über der Strecke  $[-r, r] \subset \mathbb{C}$  liegen.



Nach dem Residuensatz aus Folgerung 11.17 gilt dann

$$\int_{\gamma} f(z) dz + \int_{\gamma'} f(z) dz = 2\pi i \cdot \sum_{z: \operatorname{Im} z > 0} \operatorname{res}_z f. \quad (*)$$

Das zweite Integral können wir dabei mit Lemma 4.5 abschätzen durch

$$\left| \int_{\gamma'} f(z) dz \right| \leq L(\gamma') \cdot \max_{|z|=r} |f(z)| \leq \pi r \cdot c r^n = \pi c r^{n+1}.$$

Wegen  $n \leq -2$  konvergiert dieser Ausdruck für  $r \rightarrow \infty$  gegen Null. Damit erhalten wir aus (\*) für  $r \rightarrow \infty$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f(x) dx = 2\pi i \cdot \sum_{z: \operatorname{Im} z > 0} \operatorname{res}_z f.$$

Der Grenzwert auf der linken Seite ist nun einfach  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$  (z.B. nach dem Satz von Lebesgue [G, Satz 27.35], denn die Funktion  $x \mapsto c|x|^n$  ist nach Lemma 12.3 für  $|x| \geq R$  eine integrierbare Majorante). Damit ist der Satz bewiesen.  $\square$

*Bemerkung 12.5.* Vielleicht überrascht euch das Auftreten des Faktors  $i$  in der Formel aus Satz 12.4 etwas, da das zu berechnende Integral natürlich reell sein muss. In der Tat wird aber auch die Summe der zu berechnenden Residuen immer rein imaginär sein, so dass sich insgesamt wie erwartet ein reelles Endresultat ergibt.

**Beispiel 12.6.** Wir wollen für  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  das reelle Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)^n} dx$$

berechnen. Dazu müssen wir nach Satz 12.4 (beachte, dass der Integrand Grad  $-2n$  und keine reellen Polstellen hat) lediglich die komplexen Polstellen des Integranden suchen und an den Polstellen mit positivem Imaginärteil die Residuen aufaddieren. Das ist hier sehr einfach: wegen

$$\frac{1}{(z^2 + 1)^n} = \frac{1}{(z + i)^n (z - i)^n}$$

gibt es nur die beiden Polstellen  $\pm i$ , von denen nur  $+i$  in der oberen Halbebene liegt. Also ist das gesuchte Integral gleich

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)^n} dx = 2\pi i \operatorname{res}_i \frac{1}{(z^2 + 1)^n}.$$

Das Residuum können wir nun noch einfach mit Lemma 11.8 berechnen: da bei  $+i$  eine Polstelle der Ordnung  $n$  vorliegt, ist

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_i \frac{1}{(1+z^2)^n} &= \frac{1}{(n-1)!} \cdot \lim_{z \rightarrow i} \left( (z-i)^n \cdot \frac{1}{(z^2+1)^n} \right)^{(n-1)} \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \cdot \lim_{z \rightarrow i} ((z+i)^{-n})^{(n-1)} \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \cdot \lim_{z \rightarrow i} (-n)(-n-1) \cdots (-2n+2)(z+i)^{-2n+1} \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \cdot (-1)^{n-1} \cdot \frac{(2n-2)!}{(n-1)!} \cdot (2i)^{-2n+1} \\ &= -\frac{i}{2^{2n-1}} \binom{2n-2}{n-1}. \end{aligned}$$

Einsetzen ergibt damit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^n} dx = \frac{\pi}{2^{2n-2}} \binom{2n-2}{n-1}.$$

In diesem Beispiel hätten wir das Integral genauso gut mit Hilfe reeller Stammfunktionen berechnen können, auch wenn die entsprechende Rechnung weit aufwändiger gewesen wäre. Wir wollen daher nun noch andere Funktionen behandeln, bei denen sich mit den üblichen Mitteln der reellen Analysis keine Stammfunktionen ermitteln lassen und die Funktionentheorie somit die einzige Möglichkeit darstellt, diese Integrale zu berechnen. Wie schon angekündigt handelt es sich dabei um Funktionen, bei denen im Integranden zusätzlich zu einer rationalen Funktion wie oben noch ein Faktor  $\cos x$  oder  $\sin x$  steht.

Der Einfachheit halber fassen wir diese beiden Fälle zusammen und berechnen für beliebige rationale Funktionen  $f$  das *komplexwertige* Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ix} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos x dx + i \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin x dx,$$

aus dem man durch Aufspalten in Real- und Imaginärteil natürlich sofort die beiden einzelnen Integrale wieder zurückgewinnen kann. Der folgende Satz ist dann sowohl in der Aussage als auch im Beweis völlig analog zu Satz 12.4:

**Satz 12.7.** *Es sei  $f$  eine reelle rationale Funktion mit  $\deg f \leq -2$ , die auf der reellen Achse keine Polstellen hat. Dann gilt*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ix} dx = 2\pi i \cdot \sum_{z: \operatorname{Im} z > 0} \operatorname{res}_z (f(z) e^{iz}).$$

*Beweis.* Die Beweisidee ist dieselbe wie bei Satz 12.4: mit denselben Bezeichnungen wie im dortigen Beweis erhalten wir aus dem Residuensatz diesmal die Gleichung

$$\int_{\gamma} f(z) e^{iz} dz + \int_{\gamma'} f(z) e^{iz} dz = 2\pi i \cdot \sum_{z: \operatorname{Im} z > 0} \operatorname{res}_z (f(z) e^{iz}).$$

In diesem Fall können wir das Integral über den Halbkreisbogen mit Lemma 4.5 nun wie folgt abschätzen: es ist

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma'} f(z) e^{iz} dz \right| &\leq L(\gamma') \cdot \max_{\substack{|z|=r \\ \operatorname{Im} z \geq 0}} |f(z) e^{iz}| \\ &\leq \pi r \cdot \max_{|z|=r} |f(z)| \cdot \max_{\operatorname{Im} z \geq 0} |e^{iz}| \\ &\leq \pi r \cdot c r^n \cdot \max_{\operatorname{Im} z \geq 0} |e^{i \operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z}| \\ &= \pi c r^{n+1} \cdot \underbrace{\max_{\operatorname{Im} z \geq 0} e^{-\operatorname{Im} z}}_{=1} \\ &= \pi c r^{n+1}, \end{aligned}$$

was wiederum für  $r \rightarrow \infty$  gegen Null konvergiert. Damit ergibt sich der Beweis der Aussage auf dieselbe Art wie in Satz 12.4.  $\square$

**Beispiel 12.8.** Wir berechnen das uneigentliche reelle Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2} dx$$

mit Hilfe von Satz 12.7. Wie in Beispiel 12.6 müssen wir hierzu nur das Residuum im Punkt  $i$  berechnen: es gilt

$$\operatorname{res}_i \frac{e^{iz}}{1+z^2} = \lim_{z \rightarrow i} (z-i) \frac{e^{iz}}{(z+i)(z-i)} = \frac{e^{-1}}{2i}.$$

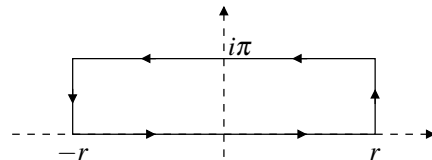
Insgesamt ergibt sich damit also das gesuchte Integral zu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2} dx = \operatorname{Re} \left( 2\pi i \operatorname{res}_i \frac{e^{iz}}{1+z^2} \right) = \operatorname{Re} \left( 2\pi i \frac{e^{-1}}{2i} \right) = \frac{\pi}{e}.$$

**Aufgabe 12.9.** Berechne das reelle Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$$

mit Hilfe des rechts eingezeichneten Integrationsweges.



**Aufgabe 12.10.** Es sei  $f$  wieder eine reelle rationale Funktion ohne Polstellen auf der reellen Achse, von der wir jetzt aber nur noch voraussetzen wollen, dass  $\deg f \leq -1$  ist. Man zeige:

(a) Auch in diesem Fall gilt noch die Gleichung

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f(x) e^{ix} dx = 2\pi i \cdot \sum_{z: \operatorname{Im} z > 0} \operatorname{res}_z (f(z) e^{iz}).$$

(b) Die Funktion  $x \mapsto f(x) e^{ix}$  (bzw.  $x \mapsto f(x) \cos x$  oder  $x \mapsto f(x) \sin x$ ) ist jedoch im Allgemeinen auf  $\mathbb{R}$  nicht Lebesgue-integrierbar.

## 13. ABZÄHLEN VON NULL- UND POLSTELLEN

Als weitere Anwendung des Residuensatzes wollen wir nun sehen, wie man oft auf einfache Art berechnen kann, wie viele Null- bzw. Polstellen eine gegebene Funktion in einem bestimmten Gebiet hat. Unter anderem wird sich mit dieser Methode ein weiterer Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra ergeben, der im Gegensatz zu unseren ersten beiden Beweisen (siehe Satz 6.19 und 8.7) sehr anschaulich ist und dessen Idee auch ohne jegliche Kenntnisse der Funktionentheorie einfach verständlich ist.

Wir wissen ja bereits aus Folgerung 11.17, dass ein geschlossenes Kurvenintegral  $\int_{\gamma} f(z) dz$  über eine Randkurve  $\gamma$  als Ergebnis einfach  $2\pi i$  mal die Summe der Residuen von  $f$  im Inneren von  $\gamma$  ergibt. Der Schlüssel zur Berechnung der Anzahl der Null- und Polstellen von  $f$  im Inneren von  $\gamma$  liegt daher in dem folgenden Lemma, das die Ordnung von  $f$  in einem Punkt als ein Residuum ausdrückt:

**Lemma 13.1.** *Es sei  $D \subset \mathbb{C}$  offen,  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion und  $z_0 \in \mathbb{C} \setminus D$  eine isolierte Singularität. Wir nehmen an, dass  $f$  lokal um  $z_0$  nicht gleich der Nullfunktion und  $\text{ord}_{z_0} f \neq -\infty$  ist. Dann gilt*

$$\text{ord}_{z_0} f = \text{res}_{z_0} \frac{f'}{f}.$$

*Beweis.* Dem Beweis liegt dieselbe Idee zugrunde wie bei Aufgabe 10.9 (a): setzen wir  $m = \text{ord}_{z_0} f \neq -\infty$ , so können wir  $f$  auf  $D$  nach Lemma 10.4 als

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z)$$

schreiben, wobei  $g$  eine auf  $D \cup \{z_0\}$  holomorphe Funktion mit  $g(z_0) \neq 0$  ist. Differenzieren ergibt nun

$$f'(z) = m(z - z_0)^{m-1} g(z) + (z - z_0)^m g'(z)$$

und damit

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}. \quad (*)$$

Hierbei ist der Ausdruck  $\frac{g'}{g}$  in einer Umgebung von  $z_0$  holomorph und damit dort eine Potenzreihe um  $z_0$ . Entwickelt man  $\frac{f'}{f}$  also um  $z_0$  in eine Laurent-Reihe, so liefert der Term  $\frac{g'}{g}$  keine Beiträge mit negativen Potenzen von  $z - z_0$ . Das Residuum von  $\frac{f'}{f}$  in  $z_0$ , d.h. nach Definition der Koeffizient von  $(z - z_0)^{-1}$  in der Laurent-Entwicklung von  $(*)$  um  $z_0$ , ist damit wie behauptet gleich  $m$ .  $\square$

Mit dieser Formel ergibt sich nun sofort das folgende Resultat:

**Satz 13.2 (Das Null- und Polstellen zählende Integral).** *Es sei  $D$  offen und einfach zusammenhängend sowie  $f$  eine Funktion, die auf  $D$  mit Ausnahme endlich vieler isolierter Polstellen holomorph ist. Weiterhin sei  $\gamma$  eine Randkurve in  $D$ , die die Null- und Polstellen von  $f$  nicht trifft, und  $U$  das Innere von  $\gamma$ . Dann gilt*

$$\sum_{z \in U} \text{ord}_z f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz,$$

*d.h. das Integral auf der rechten Seite ist gleich der Anzahl der Nullstellen minus der Anzahl der Polstellen von  $f$  in  $U$  (wobei die Null- und Polstellen „mit Vielfachheit gezählt werden müssen“, d.h. eine Null- bzw. Polstelle der Ordnung  $m$  trägt  $m$  bzw.  $-m$  zum Integral auf der rechten Seite bei).*

*Beweis.* Mit dem Residuensatz aus Folgerung 11.17 ergibt sich sofort nach Lemma 13.1

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi i \sum_{z \in U} \text{res}_z \frac{f'}{f} = \sum_{z \in U} \text{ord}_z f.$$

$\square$



Man kann das Ergebnis von Satz 13.2 auch in einer „integralfreien“ Version schreiben:

**Folgerung 13.3 (Die Null- und Polstellen zählende Umlaufzahl).** *Mit denselben Voraussetzungen wie in Satz 13.2 gilt*

$$\sum_{z \in U} \text{ord}_z f = \text{ind}_0(f \circ \gamma),$$

d.h. die Anzahl der Nullstellen minus die Anzahl der Polstellen von  $f$  im Inneren von  $\gamma$  ist gleich der Umlaufzahl um 0 des Weges, den man erhält, wenn man den Weg  $\gamma$  mit  $f$  abbildet.

*Beweis.* Dies ergibt sich sofort aus Satz 13.2, denn es ist

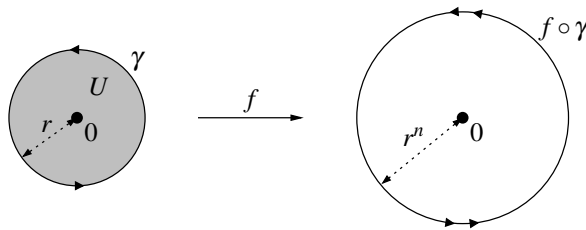
$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{f \circ \gamma} \frac{1}{w} dw && \text{(mit der Substitution } w = f(z)) \\ &= \text{ind}_0(f \circ \gamma) && \text{(nach Definition 11.2 der Umlaufzahl).} \end{aligned}$$

□

**Beispiel 13.4.** Für eine gegebene natürliche Zahl  $n$  betrachten wir die auf der ganzen komplexen Ebene definierte Funktion  $f(z) = z^n$ . Weiterhin sei  $\gamma$  der Weg

$$\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto r e^{it}.$$

Offensichtlich ist  $\gamma$  eine Randkurve, deren Inneres der Kreis  $U = \{z \in \mathbb{C}; |z| < r\}$  um 0 mit Radius  $r$  ist.



Natürlich hat  $f$  in  $U$  keine Polstellen und (mit Vielfachheiten gezählt)  $n$  Nullstellen — nämlich die Nullstelle 0 mit Ordnung  $n$ . Bilden wir andererseits den Weg  $\gamma$  mit  $f$  ab, so erhalten wir den Weg

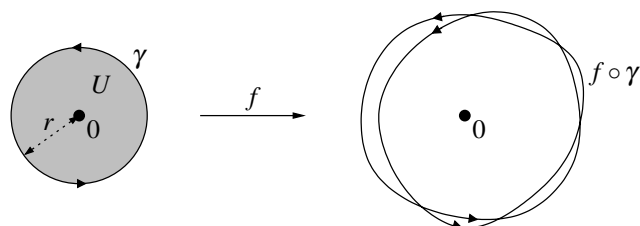
$$f \circ \gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto (r e^{it})^n = r^n e^{int},$$

der (mit Radius  $r^n$ ) wie im Bild oben  $n$ -mal um die Null herumläuft. Also ist  $\text{ind}_0(f \circ \gamma) = n$  in Übereinstimmung mit Folgerung 13.3. Genauso gut könnte man natürlich auch mit der Integralversion aus Satz 13.2

$$\sum_{z \in U} \text{ord}_z f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{nz^{n-1}}{z^n} dz = \frac{n}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z} = n$$

rechnen.

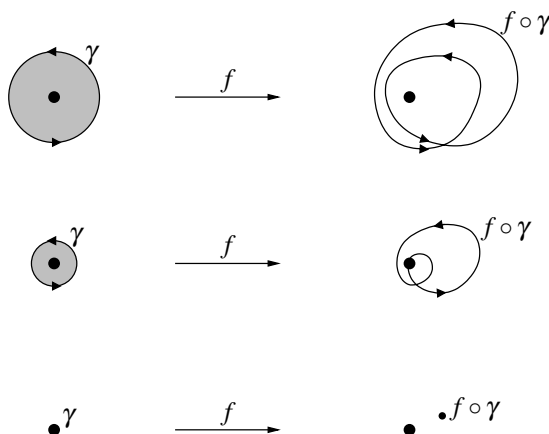
**Bemerkung 13.5.** Wenn wir Beispiel 13.4 etwas erweitern, sehen wir bereits, wie man mit diesen Methoden zu einem weiteren Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra kommen kann: statt der einfachen Potenzfunktion  $f(z) = z^n$  betrachten wir nun einmal ein Polynom  $f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$  vom Grad  $n$  (mit Leitkoeffizient 1). Wie in Beispiel 13.4 sei  $\gamma$  wieder der Rand des Kreises  $U$  mit Mittelpunkt 0 und Radius  $r$ . Wählen wir  $r$  sehr groß, so ist anschaulich einleuchtend, dass  $f(z)$  für Punkte  $z$  auf der Kreislinie (also mit  $|z| = r$ ) nahe bei  $z^n$  liegen sollte, da die Terme niedrigerer Ordnung für betragsmäßig große  $z$  nur eine kleine Rolle spielen. Die Bildkurve  $f \circ \gamma$  sollte also nur eine „kleine Deformation“ der Bildkurve in Beispiel 13.4 sein, so wie im folgenden Bild für den Fall  $n = 2$  dargestellt:



Insbesondere erwarten wir für  $f \circ \gamma$  also immer noch einen Weg, der  $n$ -mal um die Null herumläuft (wenn auch nicht mehr auf einer exakten Kreislinie, sondern auf einem etwas deformierten Weg). Nach Folgerung 13.3 würde das dann aber bedeuten, dass  $f$  in  $U$  genau  $n$  Nullstellen hat (Polstellen gibt es ja keine, da  $f$  auf ganz  $\mathbb{C}$  holomorph ist) — d.h. wir würden so wieder einen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra erhalten.

Wir werden dieses Argument in Satz 13.6 und 13.8 noch zu einem exakten Beweis machen. Zunächst wollen wir aber den umgekehrten Weg gehen und auch die eben verwendete Folgerung 13.3 anschaulich erklären, so dass wir zusammen mit unseren obigen Überlegungen dann eine komplett anschauliche Begründung des Fundamentalsatzes der Algebra erhalten.

Wie also kann man sich anschaulich vorstellen, dass  $f$  in  $U$  eine Nullstelle besitzen muss, wenn die Umlaufzahl  $\text{ind}_0(f \circ \gamma)$  des Bildweges  $f \circ \gamma$  um 0 ungleich Null ist? Um dies zu sehen, lassen wir einfach (wie im folgenden Bild von oben nach unten dargestellt) den Radius  $r$  des betrachteten Kreises kleiner werden und schließlich gegen 0 gehen, so dass der Weg  $\gamma$  auf einen Punkt (nämlich den Nullpunkt) zusammengezogen wird.



Natürlich ziehen wir damit auch den Bildweg  $f \circ \gamma$  auf einen Punkt zusammen. Der ursprüngliche Bildweg hatte aber eine Umlaufzahl ungleich Null um den Nullpunkt und war damit nicht nullhomotop in  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Also können wir ihn nicht in  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  zu einem Punkt zusammenziehen — was gerade bedeutet, dass der Bildweg beim Verkleinern von  $r$  irgendwann einmal den Nullpunkt treffen muss (in der Skizze oben ist dies in der mittleren Zeile der Fall). Genau in diesem Punkt liegt dann aber natürlich eine Nullstelle von  $f$  vor, denn es gibt dann ja einen Punkt auf  $\gamma$ , der von  $f$  auf 0 abgebildet wird.

Man kann diese Idee auch leicht in der Sprache der Homotopien (siehe Definition 5.1) ausdrücken: die ursprüngliche Kreislinie  $\gamma$  lässt sich mit der Homotopie

$$\psi : [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \psi(t, s) = rs e^{it}$$

auf den Nullpunkt zusammenziehen. Dann ist aber  $f \circ \psi$  eine Homotopie zwischen  $f \circ \gamma$  und einem konstanten Weg. Da es eine solche Homotopie wegen  $\text{ind}_0(f \circ \gamma) \neq 0$  nicht in  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  geben kann, muss der Nullpunkt im Bild von  $f \circ \psi$  liegen — was dann bedeutet, dass  $f$  eine Nullstelle haben muss.

Insgesamt haben wir so also nun eine vollständig anschauliche Begründung für den Fundamentalsatz der Algebra gesehen. Wir wollen dieses Argument nun aber auch noch zu einem exakten Beweis machen. Dazu müssen wir in Bemerkung 13.5 lediglich noch die Aussage, dass „eine leichte Störung an der Funktion  $f$  die Umlaufzahl von  $f \circ \gamma$  um 0 nicht ändert“, exakt herleiten. Wir zeigen dies gleich in einer deutlich allgemeineren Form, die sich auch noch für andere Anwendungen als nützlich erweisen wird.

**Satz 13.6 (Satz von Rouché).** *Es seien  $f, g : D \rightarrow \mathbb{C}$  zwei holomorphe Funktionen auf einer offenen und einfach zusammenhängenden Menge  $D \subset \mathbb{C}$ . Ferner sei  $\gamma$  eine Randkurve in  $D$  mit Innerem  $U$ . Gilt dann*

$$|f(z) - g(z)| < |g(z)|$$

für alle  $z$  auf dem Weg  $\gamma$ , so folgt

$$\sum_{z \in U} \text{ord}_z f = \sum_{z \in U} \text{ord}_z g,$$

d.h.  $f$  und  $g$  haben (mit Vielfachheiten gezählt) gleich viele Nullstellen in  $U$ .

*Beweis.* Für  $t \in \mathbb{R}$  mit  $0 \leq t \leq 1$  betrachten wir die holomorphe Funktion

$$h_t : D \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto g(z) + t(f(z) - g(z)),$$

so dass also  $h_0 = g$  und  $h_1 = f$  ist. Nach Voraussetzung gilt für alle  $t$  und alle  $z$  auf dem Weg  $\gamma$

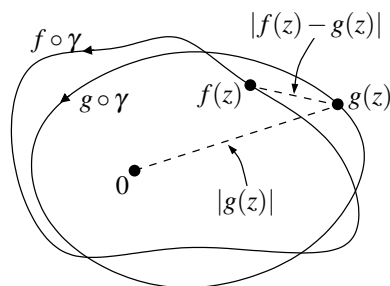
$$|h_t(z)| = |g(z) + t(f(z) - g(z))| \geq |g(z)| - |t| \cdot |f(z) - g(z)| \geq |g(z)| - |f(z) - g(z)| > 0.$$

Also hat  $h_t$  keine Nullstellen auf dem Weg  $\gamma$ . Damit ist das Integral

$$N(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{h_t'(z)}{h_t(z)} dz$$

wohldefiniert und zählt nach Satz 13.2 die Anzahl der Nullstellen von  $h_t$  im Inneren von  $\gamma$ . Beachte, dass der Integrand und damit auch die Funktion  $N(t)$  stetig in  $t$  ist. Da  $N(t)$  aber nur ganzzahlige Werte annehmen kann, muss  $N(t)$  damit konstant sein. Insbesondere ist also  $N(0) = N(1)$ , d.h.  $h_0 = g$  und  $h_1 = f$  haben gleich viele Nullstellen im Inneren von  $\gamma$ .  $\square$

*Bemerkung 13.7.* Auch den Satz 13.6 von Rouché kann man anschaulich leicht verstehen. Nach Folgerung 13.3 brauchen wir dazu ja nur zu sehen, dass die beiden Bildwege  $f \circ \gamma$  und  $g \circ \gamma$  die gleiche Umlaufzahl um 0 haben. Das folgende Bild illustriert dies in dem Fall, in dem diese Umlaufzahl gleich 1 ist:



Wir sehen an diesem Bild anschaulich, dass die Bedingung  $|f(z) - g(z)| < |g(z)|$  auf dem Weg sicherstellt, dass  $f \circ \gamma$  genauso oft um die Null herumläuft wie  $g \circ \gamma$ : da der Abstand von  $f(z)$  zu  $g(z)$  stets kleiner ist als der von  $g(z)$  zu 0, hat „ $f(z)$  nicht genug Bewegungsfreiheit, um unabhängig von  $g(z)$  um die Null herumzulaufen“. Im Sinne von Bemerkung 13.5 können wir  $g$  als eine „hinreichend kleine Deformation“ von  $f$  auffassen.

Anschaulich wird der Satz von Rouché oft auch als „der Satz vom Mann, dem Hund und der Laterne“ bezeichnet: man stelle sich den Nullpunkt als eine Laterne vor, und  $g \circ \gamma$  als den Weg eines (wahrscheinlich betrunkenen) Mannes, der um diese Laterne torkelt. Der Mann hat einen Hund an der Leine dabei, den er dabei entlang des Weges  $f \circ \gamma$  mit sich mitschleift. Achtet der Mann dabei

darauf, dass die Leine zu jedem Zeitpunkt kürzer ist als sein Abstand zur Laterne (d.h. gilt also stets  $|f(z) - g(z)| < |g(z)|$ ), so muss der Hund am Ende offensichtlich genauso oft um die Laterne gelaufen sein wie der Mann.

Mit dem Satz von Rouché können wir nun den Fundamentalsatz der Algebra mit den Ideen dieses Kapitels neu beweisen:

**Satz 13.8 (Fundamentalsatz der Algebra, 3. Beweis).** *Jedes nicht konstante komplexe Polynom hat eine Nullstelle in  $\mathbb{C}$ .*

*Beweis.* Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass  $f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$  ein nicht konstantes Polynom mit Leitkoeffizient 1 ist. Mit  $g(z) := z^n$  ist dann

$$f(z) - g(z) = a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$$

ein Polynom von einem Grad  $k \leq n-1$ . Nach Lemma 12.3 gibt es also Konstanten  $R > 0$  und  $c > 0$ , so dass

$$|f(z) - g(z)| \leq c|z|^k$$

für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| \geq R$  gilt. Da wir (durch evtl. Vergrößern von  $R$ ) ohne Einschränkung  $R \geq 1$  und damit auch  $|z| \geq 1$  voraussetzen können, folgt wegen  $k \leq n-1$  damit auch

$$|f(z) - g(z)| \leq c|z|^{n-1}$$

für alle  $z$  mit  $|z| \geq R$ . Dann gilt aber auch für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| = r := \max(R, c+1)$ , also für alle  $z$  auf einer Kreislinie um 0 mit diesem Radius  $r$

$$|f(z) - g(z)| \leq c \cdot |z|^{n-1} < |z| \cdot |z|^{n-1} = |g(z)|.$$

Aus dem Satz 13.6 von Rouché folgt also, dass  $f$  im Kreis  $\{z \in \mathbb{C}; |z| < r\}$  genauso viele Nullstellen hat wie  $g(z)$ , nämlich  $n$ .  $\square$

*Bemerkung 13.9.* Obwohl wir beim Beweis von Satz 13.8 unsere Ergebnisse der Funktionentheorie benutzt haben, sollte aus der anschaulichen Begründung in Bemerkung 13.5 deutlich geworden sein, dass wir für die dort gegebenen Argumente gar nicht benötigt haben, dass  $f$  holomorph ist, sondern dass es eigentlich nur auf die *Stetigkeit* von  $f$  ankam (damit der Weg  $f \circ \gamma$  kontinuierlich variiert, wenn  $\gamma$  es tut). Wir können diesen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra daher als rein *topologischen Beweis* auffassen — im Gegensatz zu unseren beiden vorherigen Beweisen in den Sätzen 6.19 und 8.7, die mit dem Minimumprinzip bzw. dem Satz von Liouville wirklich charakteristische Eigenschaften *holomorpher* Funktionen benutzen. In der Tat ist es gerade die topologische Natur des neuen Beweises in diesem Kapitel, die es uns ermöglicht, den Beweis anschaulich so leicht nachzuvollziehen.

Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir noch an einem Beispiel sehen, wie man mit Hilfe des Satzes von Rouché oft Abschätzungen über die Lage der Nullstellen holomorpher Funktionen gewinnen kann.

**Beispiel 13.10.** Es sei  $f(z) = z^5 + 4z + 2$ . Wir wissen natürlich, dass  $f$  als Polynom fünften Grades in der komplexen Ebene fünf Nullstellen hat. Es gibt jedoch kein Verfahren, mit dem man diese Nullstellen *exakt* berechnen kann (was übrigens üblicherweise in der Vorlesung „Einführung in die Algebra“ gezeigt wird). Man ist für die Bestimmung der Nullstellen von  $f$  also auf Näherungsverfahren angewiesen.

Mit Hilfe des Satzes von Rouché können wir nun bereits eine erste Abschätzung geben, wo die Nullstellen von  $f$  liegen müssen. Dazu müssen wir einfach eine „Vergleichsfunktion“  $g$  und einen Weg  $\gamma$  finden, so dass wir...

- einerseits zeigen können, dass  $g$  auf  $\gamma$  eine hinreichend gute Näherung für  $f$  darstellt (also dass dort  $|f(z) - g(z)| < |g(z)|$  gilt), und
- andererseits wissen, wie viele Nullstellen  $g$  im Inneren von  $\gamma$  hat.

Hierfür haben wir natürlich verschiedene Möglichkeiten. Im konkreten Beispiel unseres hier betrachteten Polynoms können wir z.B. folgende Vergleichsfunktionen wählen:

- (a) Für eine komplexe Zahl  $z$  mit  $|z| = 2$  „dominiert“ im Polynom  $f$  der Term  $z^5$ : setzen wir hier also  $g(z) = z^5$ , so folgt für  $|z| = 2$

$$|f(z) - g(z)| = |4z + 2| \leq 4|z| + 2 = 10 < 32 = |z^5| = |g(z)|.$$

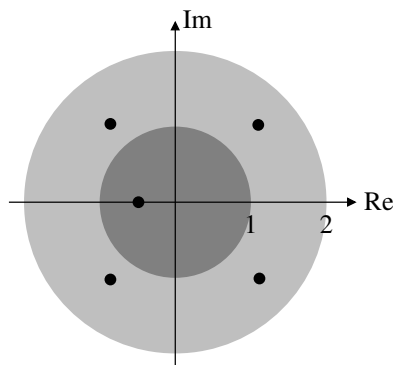
Wählen wir für  $\gamma$  eine Kreislinie mit Radius 2 um 0, so sagt uns der Satz von Rouché also, dass  $f$  im Inneren dieses Kreises genau so viele Nullstellen hat wie  $g$ , nämlich fünf. Alle Nullstellen von  $f$  sind also betragsmäßig kleiner als 2.

- (b) Für  $|z| = 1$  hingegen dominiert in  $f$  der lineare Term: setzen wir hier  $g(z) = 4z$ , so erhalten wir für  $|z| = 1$

$$|f(z) - g(z)| = |z^5 + 2| \leq |z|^5 + 2 = 3 < 4 = |4z| = |g(z)|.$$

Für diese Wahlen ergibt sich also genauso wie oben, dass  $f$  im Kreis um 0 mit Radius 1 genau eine Nullstelle hat (nämlich genau so viele wie  $g$ ).

Aus diesen beiden — sehr einfachen — Rechnungen folgt also bereits, dass eine der Nullstellen von  $f$  Betrag kleiner als 1 hat und der Betrag der anderen vier Nullstellen zwischen 1 und 2 liegt. Natürlich könnten wir auch noch andere Wege oder Vergleichsfunktionen wählen, um diese Abschätzungen noch zu verbessern. Das Bild rechts zeigt übrigens (näherungsweise) die Lage der Nullstellen von  $f$ .



**Aufgabe 13.11.** Zeige mit Hilfe des Satzes von Rouché, dass

- (a) drei Lösungen der Gleichung  $2z^4 + 5z^3 + z - 1 = 0$  betragsmäßig kleiner als 1 sind, und dass der Betrag der vierten Lösung zwischen 2 und 3 liegt;  
 (b) die Gleichung  $3z^2 + e^z = 0$  im Gebiet  $\{z \in \mathbb{C}; |\operatorname{Re} z| < 1\}$  genau zwei Lösungen besitzt.

## 14. DIE RIEMANNSCHE ZETA FUNKTION

Zum Abschluss dieses Skripts wollen wir noch ein paar sehr interessante Anwendungen unserer erarbeiteten Theorie betrachten, die zum einen enge Beziehungen der Funktionentheorie zur Zahlentheorie aufzeigen und zum anderen auch zum wohl berühmtesten derzeit ungelösten Problem der Mathematik — der sogenannten Riemannschen Vermutung — führen. Das Clay Mathematics Institute, eine große amerikanische Stiftung zur Förderung der mathematischen Forschung, hat diese Vermutung sogar zu einem ihrer „Millennium Problems“ ernannt und für einen korrekten Beweis ein Preisgeld von einer Million Dollar ausgesetzt [C]!

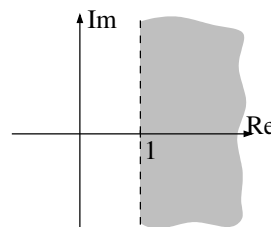
Da es in diesem Kapitel hauptsächlich um die Darstellung von Ideen und Zusammenhängen geht, werden wir hier für die meisten Aussagen nur noch die Beweisideen angeben und für einen kompletten, korrekten Beweis auf die Literatur verweisen.

Der Schlüssel zu den Anwendungen der Funktionentheorie in der Zahlentheorie ist die sogenannte Riemannsche Zetafunktion, die wir jetzt einführen werden.

**Lemma und Definition 14.1** (Die Riemannsche Zetafunktion). *Die Reihe*

$$\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

konvergiert absolut für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re} z > 1$  und stellt in diesem (rechts dargestellten) Gebiet eine holomorphe Funktion dar. Sie wird **Riemannsche Zetafunktion** genannt.



*Beweis.* Beachte zunächst, dass der Ausdruck  $\frac{1}{n^z}$  für alle  $z \in \mathbb{C}$  natürlich als

$$\frac{1}{n^z} = n^{-z} = e^{-z \log n}$$

zu verstehen und damit wohldefiniert ist, da wir hier nur den *reellen* und nicht den *komplexen* Logarithmus benötigen (vgl. Aufgabe 7.17). Schreiben wir wie üblich  $x = \operatorname{Re} z$  und  $y = \operatorname{Im} z$ , so ist weiterhin

$$|n^z| = |e^{(x+iy) \log n}| = |e^{x \log n}| \cdot \underbrace{|e^{iy \log n}|}_{=1} = n^x. \quad (*)$$

Damit ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^z} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x},$$

und diese Reihe ist bekanntlich konvergent für  $x > 1$  [G, Aufgabe 11.18 (c)]. Also konvergiert die Reihe der Zetafunktion absolut für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re} z > 1$ .

Um zu zeigen, dass die Zetafunktion dort auch holomorph ist, genügt es nach Satz 7.6 zu zeigen, dass die Reihe

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^z},$$

die aus der gegebenen Reihe durch gliedweise Differentiation entsteht, auf jeder Menge der Form  $\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z \geq a\}$  mit  $a > 1$  *gleichmäßig* konvergiert. Dazu wählen wir für ein gegebenes  $a > 1$  ein  $\delta > 0$  mit  $a - \delta > 1$ . Da die Potenzfunktion  $n \mapsto n^\delta$  für  $n \rightarrow \infty$  schneller als die Logarithmusfunktion  $n \mapsto \log n$  wächst [G, Beispiel 10.3 (c)], gibt es ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass  $\log n \leq n^\delta$  für alle  $n \geq N$  ist. Damit ist für alle  $z$  mit  $x = \operatorname{Re} z \geq a$

$$\left| - \sum_{n=N}^{\infty} \frac{\log n}{n^z} \right| \stackrel{(*)}{\leq} \sum_{n=N}^{\infty} \frac{\log n}{n^x} \leq \sum_{n=N}^{\infty} \frac{n^\delta}{n^a} = \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^{a-\delta}}.$$

Wegen  $a - \delta > 1$  konvergiert diese Reihe wie oben wieder nach [G, Aufgabe 11.18 (c)]. Da die Variable  $z$  in dieser letzten Reihe außerdem überhaupt nicht mehr vorkommt, ist die Konvergenz der Reihe der Ableitungen sogar gleichmäßig in  $z$  und die Zetafunktion damit wie behauptet holomorph.  $\square$

*Bemerkung 14.2.*

- (a) Die Riemannsche Zetafunktion ist ein Spezialfall von sogenannten *Dirichlet-Reihen*, die allgemein die Form

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z}$$

mit komplexen Koeffizienten  $a_n \in \mathbb{C}$  haben. In der Tat werden wir in Satz 14.7 noch eine weitere Dirichlet-Reihe sehen, die den Kehrwert  $z \mapsto \frac{1}{\zeta(z)}$  der Zetafunktion darstellt. Dirichlet-Reihen sind in gewissem Sinne analog zu Potenzreihen, nur dass hier die Variable  $z$  im Exponenten und der Summationsindex  $n$  in der Basis der Potenz steht, während dies bei Potenzreihen  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  ja genau umgekehrt ist. Dementsprechend haben viele Resultate für Potenzreihen auch ein Analogon für Dirichlet-Reihen — z.B. haben auch die Konvergenzgebiete von Dirichlet-Reihen immer eine feste Form; sie sind nämlich stets „rechte Halbebene“ der Form  $\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z > a\}$  für ein  $a \in \mathbb{R}$  (im Gegensatz zu Kreisscheiben für Potenzreihen). Genauere Informationen zu Dirichlet-Reihen finden sich z.B. in [FB] Kapitel VII.2.

- (b) Um einen ersten Zusammenhang der Riemannschen Zetafunktion mit der Zahlentheorie zu sehen, betrachten wir für  $z \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re} z > 1$  einmal ein Produkt der Form

$$\prod_p \frac{1}{1 - p^{-z}}, \quad (*)$$

wobei  $p$  zunächst über eine feste Menge verschiedener *Primzahlen*  $p = p_1, \dots, p_k$  läuft. Wegen  $|p^{-z}| < 1$  können wir in diesem Ausdruck jeden einzelnen Faktor in eine geometrische Reihe entwickeln und erhalten

$$\prod_p (1 + p^{-z} + (p^2)^{-z} + (p^3)^{-z} + \dots).$$

Man kann leicht zeigen, dass man dieses Produkt „naiv ausmultiplizieren“ darf, so dass man also insgesamt den Ausdruck

$$\sum_{a_1=0}^{\infty} \dots \sum_{a_k=0}^{\infty} (p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k})^{-z}$$

erhält. Wegen der eindeutigen Primfaktorzerlegung natürlicher Zahlen können wir dies offensichtlich auch schreiben als  $\sum_n n^{-z}$ , wobei  $n$  nun über alle natürlichen Zahlen (außer der 0) läuft, deren Primfaktorzerlegung nur die Primzahlen  $p_1, \dots, p_k$  enthält.

Gehen wir in unserem ursprünglichen Ausdruck (\*) jetzt zu dem Grenzfalle über, bei dem wir das (unendliche) Produkt über *alle* Primzahlen bilden, so erwarten wir also, dass wir die Summe  $\sum_n n^{-z}$  erhalten, wobei  $n$  nun über *alle* natürlichen Zahlen (ungleich 0) läuft — also genau die Riemannsche Zetafunktion. In der Tat gilt diese Gleichung

$$\zeta(z) = \prod_{p \text{ prim}} \frac{1}{1 - p^{-z}} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } \operatorname{Re} z > 1,$$

die die **Eulersche Produktformel** genannt wird (einen exakten Beweis findet man z.B. in [FB] Satz VII.2.8). Wir können diese Gleichung auffassen als eine analytische Version der Aussage, dass jede natürliche Zahl eine eindeutige Primfaktorzerlegung besitzt.

Wir wollen nun die grundlegenden Eigenschaften der Riemannschen Zetafunktion studieren. Als erstes wird man sich wahrscheinlich fragen, ob man zumindest einige spezielle Werte der Zetafunktion konkret (und exakt) berechnen kann. Der naheliegendste Wert ist dabei wohl

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

den man ja bereits in den „Grundlagen der Mathematik“ kennen lernt als eine der ersten Reihen, deren Konvergenz man zwar beweisen, deren Wert man jedoch zumindest mit einfachen Methoden nicht berechnen kann.

Mit Hilfe der Funktionentheorie können wir diesen Wert nun mit einer einfachen (und sehr überraschenden) Argumentation berechnen:

**Satz 14.3.** *Es gilt*

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

*Beweisidee.* Um die Herleitung dieser Gleichung kurz zu halten und auf die wesentlichen Punkte zu reduzieren, geben wir hier nur die Beweisidee an. Die genauen Rechnungen (die allesamt einfach sind) könnt ihr z.B. in [FL] Satz VII.3.1 und VII.4.1 nachlesen.

Wir betrachten die auf  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  holomorphen Funktionen

$$f(z) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} \quad \text{und} \quad g(z) := \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}.$$

Da in der Reihe von  $f$  nur der Term für  $n = 0$  eine Singularität im Nullpunkt hat, hat die Laurent-Entwicklung von  $f$  um 0 die Form

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^2} + \underbrace{\sum_{n \neq 0} \frac{1}{(z-n)^2}}_{= 2\zeta(2) \text{ in } z=0} = \frac{1}{z^2} + 2\zeta(2) + (\text{Terme in } z^k \text{ mit } k > 0). \end{aligned} \quad (1)$$

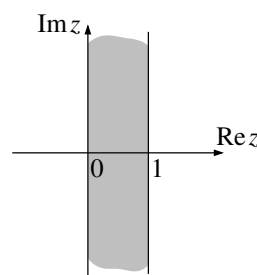
Auch  $g$  hat offensichtlich im Nullpunkt einen Pol zweiter Ordnung. Die ersten Terme der Laurent-Entwicklung von  $g$  um 0 lassen sich mit unseren Methoden aus den Kapiteln 10 und 11 einfach berechnen; man erhält

$$g(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{\pi^2}{3} + (\text{Terme in } z^k \text{ mit } k > 0). \quad (2)$$

Wegen (1) und (2) genügt es also offensichtlich zu zeigen, dass  $f$  und  $g$  dieselbe Funktion sind — der Vergleich der  $z^0$ -Koeffizienten der Laurent-Entwicklung liefert dann die Behauptung.

Um diese (viel stärkere) Aussage  $f = g$  zu zeigen, gehen wir wie folgt vor:

- $f$  und  $g$  sind offensichtlich  $\mathbb{Z}$ -periodisch, d.h. es gilt  $f(z+1) = f(z)$  und  $g(z+1) = g(z)$  für alle  $z$ .
- Die Funktion  $f - g$  hat im Nullpunkt eine hebbare Singularität, da sich nach (1) und (2) die Hauptteile der Laurent-Entwicklungen dort wegheben. Wegen (a) sind damit sogar alle Punkte von  $\mathbb{Z}$  hebbare Singularitäten von  $f - g$ . Wir können  $f - g$  also als holomorphe Funktion auf ganz  $\mathbb{C}$  auffassen.
- Wegen (a) nimmt  $f - g$  alle Funktionswerte bereits im rechts dargestellten Streifen  $\{z \in \mathbb{C}; 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1\}$  an. Für  $z = x + iy$  mit  $0 \leq x \leq 1$  sieht man aber leicht, dass  $f(z)$  und  $g(z)$  für  $y \mapsto \pm\infty$  gegen 0 konvergieren. Also ist  $f - g$  in diesem Streifen und damit auch auf ganz  $\mathbb{C}$  beschränkt.
- Als beschränkte, auf ganz  $\mathbb{C}$  holomorphe Funktion ist  $f - g$  nach dem Satz von Liouville aus Folgerung 8.3 konstant. Da  $f$  und  $g$  nach (c) für festes  $x$  und  $y \rightarrow \pm\infty$  beide gegen Null konvergieren, muss die Konstante  $f - g$  außerdem gleich Null sein. Also folgt  $f = g$ .



Damit ist der Satz bewiesen. □

*Bemerkung 14.4.* Mit ähnlichen Methoden kann man die Werte der Riemannschen Zetafunktion an allen Punkten der Form  $2n$  für  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  berechnen (siehe [FL] Satz VII.4.1). Über die anderen



Funktionswerte ist aber nur sehr wenig bekannt — diese Werte können in der Regel nur numerisch bestimmt werden.

Als nächstes wollen wir untersuchen, ob und wo die Riemannsche Zetafunktion Nullstellen besitzt. Am einfachsten sieht man dies, wenn man den Kehrwert  $\frac{1}{\zeta(z)}$  ebenfalls als Dirichlet-Reihe gemäß Bemerkung 14.2 (a) schreibt und auf Polstellen untersucht. Wir benötigen dazu eine Definition, die ihr wahrscheinlich schon aus der Vorlesung „Elementare Zahlentheorie“ kennt.

**Definition 14.5** (Möbius-Funktion). Für eine natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  mit Primfaktorzerlegung  $n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$  (mit verschiedenen Primzahlen  $p_1, \dots, p_k$  und  $a_1, \dots, a_k \geq 1$ ) definieren wir

$$\mu(n) := \begin{cases} (-1)^k & \text{falls } a_1 = \dots = a_k = 1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

d.h.  $\mu(n)$  gibt an, ob  $n$  gerade oder ungerade viele verschiedene Primfaktoren hat bzw. ob  $n$  einen Primfaktor doppelt besitzt. Die so definierte Funktion  $\mu : \mathbb{N}_{>0} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$  wird **Möbius-Funktion** genannt.

*Bemerkung 14.6.* Wenn man sich die Werte der Möbius-Funktion ansieht, kann man in ihnen keinerlei Regelmäßigkeiten oder Häufungen einer der drei Werte  $-1, 0$  und  $1$  feststellen — sie sehen praktisch wie eine Folge von Zufallszahlen aus. Hier ist z.B. ein willkürlich herausgegriffenes Stück der Funktionswerte:

$n$	$\cdots$	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	$\cdots$
$\mu(n)$	$\cdots$	0	1	0	-1	0	1	0	1	1	-1	0	-1	1	0	0	1	-1	-1	0	1	-1	$\cdots$

**Satz 14.7.** Für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re} z > 1$  gilt

$$\frac{1}{\zeta(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^z} \in \mathbb{C}.$$

*Insbesondere hat die Zetafunktion für  $\operatorname{Re} z > 1$  also keine Nullstellen.*

*Beweis.* Die Reihe auf der rechten Seite der Gleichung konvergiert für alle  $z$  mit  $\operatorname{Re} z > 1$ , denn wegen  $|\mu(n)| \leq 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist die Reihe der Zetafunktion eine nach Lemma 14.1 konvergente Majorante. Weiterhin ist nach Definition der Zetafunktion

$$\zeta(z) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^z} = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{(mn)^z} \quad (1)$$

Setzen wir hier  $N = mn$ , so tritt in dieser Reihe ein Term  $\frac{1}{N^z}$  für jeden Teiler  $n$  von  $N$  auf — und dieser hat dann einen Koeffizienten von  $\mu(n)$ . Also können wir (1) umschreiben als

$$\zeta(z) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^z} = \sum_{N=1}^{\infty} \left( \sum_{n|N} \mu(n) \right) \frac{1}{N^z}. \quad (2)$$

Nun ist aber für alle  $N \in \mathbb{N}_{>0}$

$$\sum_{n|N} \mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{für } N = 1, \\ 0 & \text{für } N > 1. \end{cases} \quad (3)$$

Für  $N = 1$  ist dies offensichtlich — und für  $N > 1$  mit Primfaktorzerlegung  $N = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$  sind die in der Summe (3) auftretenden Teiler, die eine nicht-verschwindende Möbius-Funktion besitzen, gerade die  $2^k$  Zahlen  $p_1^{b_1} \cdots p_k^{b_k}$  mit  $b_1, \dots, b_k \in \{0, 1\}$ , von denen offensichtlich jeweils genau die Hälfte die Möbius-Funktion  $1$  bzw.  $-1$  haben. Vielleicht kennt ihr die Aussage (3) auch bereits aus der „Elementaren Zahlentheorie“ als einen Spezialfall des sogenannten Möbiusschen Umkehrsatzes.

Setzt man nun (3) in (2) ein, so erhält man schließlich wie behauptet für alle  $z$  mit  $\operatorname{Re} z > 1$

$$\zeta(z) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^z} = 1.$$

□

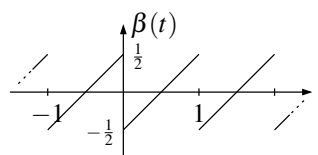
**Bemerkung 14.8.** Wir haben mit Bemerkung 14.2 (b) und Satz 14.7 nun schon zwei Beispiele dafür gesehen, wie sich zahlentheoretische Eigenschaften in holomorphen Funktionen widerspiegeln können. Es gibt ein ganzes Teilgebiet der Mathematik, die sogenannte *analytische Zahlentheorie*, das diese Zusammenhänge genauer studiert und mit Hilfe funktionentheoretischer Methoden Probleme der Zahlentheorie (vor allem zum Thema der Primzahlverteilung) untersucht.

Bisher haben wir die Zetafunktion nur für komplexe Zahlen  $z \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re} z > 1$  untersucht — in der Tat konvergiert die Reihe in Definition 14.1 auch für keine anderen Werte von  $z$ . Allerdings haben wir ja schon bei Potenzreihen gesehen, dass eine Reihendarstellung durchaus nur auf einer Teilmenge des größtmöglichen Definitionsgebietes einer holomorphen Funktion gültig sein kann. Wir können uns daher fragen, ob die Riemannsche Zetafunktion vielleicht auf ein größeres Gebiet holomorph fortgesetzt werden kann (auf dem dann die Reihendarstellung aus Definition 14.1 nicht mehr gilt).

In der Tat ist das möglich. Wir geben hier zunächst eine Möglichkeit an, wie man die Zetafunktion zumindest auf das Gebiet mit positivem Realteil holomorph fortsetzen kann.

**Satz 14.9** (Holomorphe Fortsetzung der Zetafunktion). *Es sei  $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die im Bild rechts dargestellte „Sägezahnfunktion“, d.h. es ist  $\beta(n + \delta) = \delta - \frac{1}{2}$  für alle  $n \in \mathbb{Z}$  und  $\delta \in [0, 1)$ . Dann definiert die Vorschrift*

$$\tilde{\zeta}(z) := \frac{1}{2} + \frac{1}{z-1} - z \int_1^{\infty} t^{-z-1} \beta(t) dt$$



eine auf dem Gebiet  $\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z > 0\} \setminus \{1\}$  holomorphe Funktion, die für alle  $z$  mit  $\operatorname{Re} z > 1$  mit der Riemannschen Zetafunktion übereinstimmt.

*Beweisidee.* Da  $\beta$  durch  $\frac{1}{2}$  beschränkt ist, gilt für das Integral

$$\left| \int_1^{\infty} t^{-z-1} \beta(t) dt \right| \leq \int_1^{\infty} |t^{-z-1} \beta(t)| dt \leq \frac{1}{2} \int_1^{\infty} t^{-\operatorname{Re} z - 1} dt = -\frac{1}{2 \operatorname{Re} z} [t^{-\operatorname{Re} z}]_1^{\infty},$$

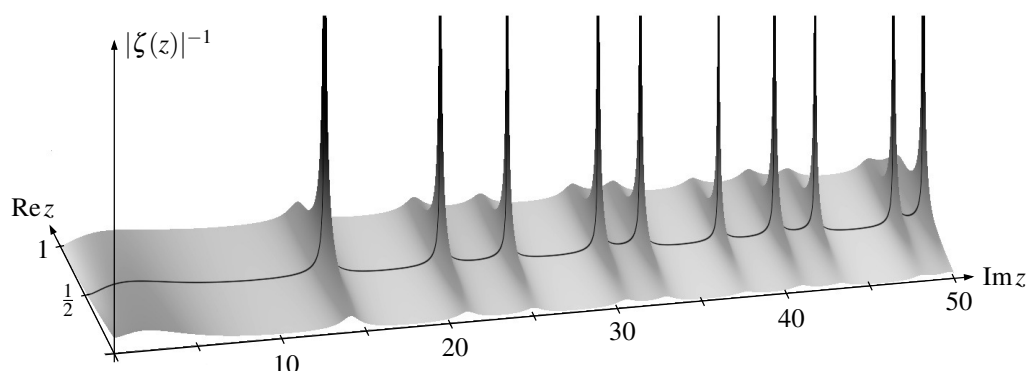
was für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re} z > 0$  konvergiert. Das Integral lässt sich auch sehr einfach berechnen, denn auf jedem Intervall  $[n, n+1]$  für  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  ist es ja einfach ein Integral über eine Potenzfunktion. Teilt man das Integral in diese Teilintervalle auf, erhält man also eine Summe über  $n$ , die sich ohne schwierige Umformungsschritte sofort als die Reihe der Riemannschen Zetafunktion herausstellt. Die genaue Rechnung könnt ihr z.B. in [FB] Hilfssatz VII.5.2 nachlesen. □

**Bemerkung 14.10.**

- Im Gegensatz zur Reihe aus Definition 14.1 sieht die Formel aus Satz 14.9 sehr kompliziert aus und macht keinen besonders „natürlichen“ Eindruck. Man könnte daher denken, dass diese Fortsetzung recht willkürlich ist. Dem ist aber nicht so — denn wir haben ja im Identitätssatz in Folgerung 8.10 gesehen, dass zwei holomorphe Funktionen auf  $\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z > 0\} \setminus \{1\}$ , die auf dem ursprünglichen Definitionsbereich  $\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z > 1\}$  übereinstimmen, bereits gleich sein müssen! Die Funktion in Satz 14.9 ist also die *einzig mögliche* Fortsetzung der Zetafunktion auf dieses größere Gebiet. Wir bezeichnen sie daher ebenfalls mit  $\zeta$  und nennen auch sie die Riemannsche Zetafunktion.
- Man kann zeigen (siehe z.B. [FB] Theorem VII.3.10), dass sich die Zetafunktion sogar holomorph nach  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$  fortsetzen lässt; wie in (a) ist diese Fortsetzung dann natürlich auch

wieder eindeutig. Wir werden diese weitere Fortsetzung, deren Konstruktion deutlich komplizierter ist, im folgenden aber nicht weiter untersuchen.

Nachdem wir die Zetafunktion nun (mit Ausnahme des Punktes 1) in die gesamte rechte Halbebene fortgesetzt haben, können wir die Frage nach den Nullstellen (siehe Satz 14.7) natürlich wieder aufgreifen und uns fragen, ob in dem neu hinzugekommenen Streifen, also bei komplexen Zahlen mit Realteil zwischen 0 und 1, Nullstellen der Zetafunktion liegen. Um zuerst einmal numerisch einen Überblick über die Situation in diesem Streifen zu bekommen, lassen wir die Funktion zunächst von einem Computer zeichnen. Dabei müssen wir uns mit dem (reellwertigen) Betrag der Zetafunktion begnügen, da wir die komplexwertige Zetafunktion nicht in einem dreidimensionalen Bild darstellen können. Außerdem haben wir in dem folgenden Bild den *Kehrwert* des Betrags der Zetafunktion zeichnen lassen — auf diese Art werden die Nullstellen deutlicher sichtbar, da sie sich als Polstellen des Kehrwerts zeigen.



Aufgrund dieses Bildes sieht es so aus, als ob die Zetafunktion Nullstellen besitzt, die zwar ungleichmäßig verteilt sind, aber alle den Realteil  $\frac{1}{2}$  haben. Genau dies ist der Inhalt der sogenannten *Riemannschen Vermutung* bzw. *Riemannschen Hypothese*:

**Vermutung 14.11 (Riemannsche Vermutung).** *Alle Nullstellen der Zetafunktion in der rechten Halbebene  $\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z > 0\}$  haben Realteil  $\frac{1}{2}$ .*

Dieses Problem ist schon sehr lange bekannt — es wurde von Riemann bereits im 19. Jahrhundert formuliert. Obwohl ein Beweis dieser Vermutung für die Zahlentheorie (und auch andere Gebiete der Mathematik) weitreichende Folgen hätte und demzufolge schon sehr viele Mathematiker nach einem solchen Beweis gesucht haben, existiert bis heute nicht einmal ein vielversprechender Ansatz zur Lösung. Konkrete Berechnungen haben bisher lediglich gezeigt, dass die Vermutung für die ersten 10 Billionen (!) Nullstellen der Zetafunktion stimmt — so dass die meisten Mathematiker inzwischen zumindest nicht mehr an der Richtigkeit der Vermutung zweifeln. Nachdem die Fermatsche Vermutung vor einigen Jahren von Wiles bewiesen wurde, ist die Riemannsche Vermutung derzeit wohl das bekannteste und wichtigste ungelöste Problem der Mathematik. Es wurde im Jahr 2000 vom Clay Mathematics Institute, einer der größten amerikanischen mathematischen Stiftungen, zu einem der „Millennium Problems“ ernannt und mit einem Preisgeld von 1 Million Dollar für den ersten korrekten Beweis versehen [C].

Natürlich können wir hier demzufolge keinen Beweis dieser Aussage geben. Wir wollen aber zumindest als Abschluss unserer Untersuchungen der Zetafunktion noch sehen, wie die Riemannsche Vermutung zahlentheoretisch interpretiert werden kann.

Zunächst einmal kann man mit Hilfe der sogenannten Funktionalgleichung der Zetafunktion (siehe [FB] Theorem VII.3.10) zeigen, dass die Nullstellen symmetrisch zur Achse  $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$  liegen — so dass es für den Beweis der Riemannschen Vermutung also reichen würde zu zeigen, dass es keine Nullstelle mit Realteil größer als  $\frac{1}{2}$  gibt. Wir betrachten dazu nun wieder den Kehrwert der

Zetafunktion, den wir zumindest für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re} z > 1$  nach Satz 14.7 ja als

$$\frac{1}{\zeta(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^z}$$

schreiben können. Wenn wir nun zeigen könnten, dass diese Reihe sogar für  $\operatorname{Re} z > \frac{1}{2}$  konvergiert (und eine holomorphe Funktion darstellt), würde dies auch in diesem Gebiet die Nullstellenfreiheit von  $\zeta$  zeigen und somit die Riemannsche Vermutung beweisen.

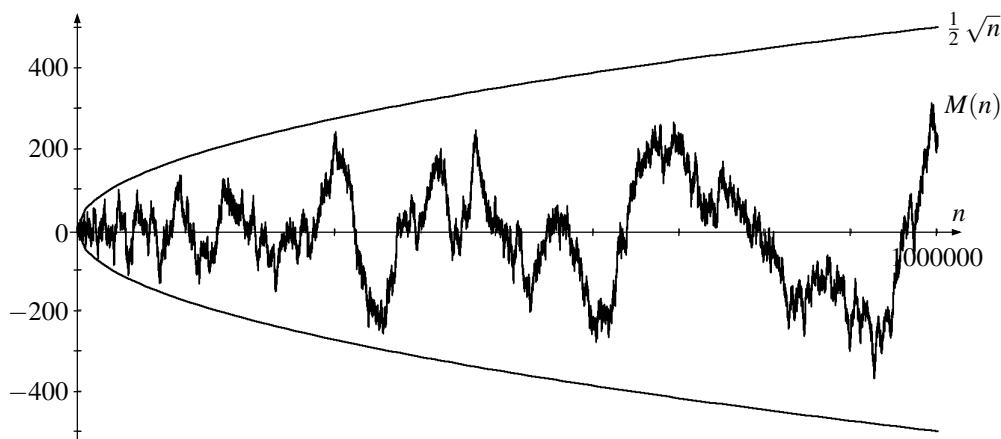
Im Beweis von Satz 14.7 haben wir die Möbius-Funktion einfach betragsmäßig durch 1 abgeschätzt und auf diese Art die Konvergenz der Reihe für alle  $z$  mit  $\operatorname{Re} z > 1$  gezeigt. Wir haben in Bemerkung 14.6 aber auch schon gesehen, dass die Werte der Möbius-Funktion scheinbar „zufällig“ die Vorzeichen wechseln und wir somit hoffen können, dass durch diese wechselnden Vorzeichen die Konvergenzeigenschaften der Reihe  $\sum_n \frac{\mu(n)}{n^z}$  verbessert werden. Betrachten wir konkret z.B. einmal die „aufsummierte Möbius-Funktion“

$$M(n) := \sum_{k=1}^n \mu(k),$$

so sollte sich die Funktion  $M$  wie eine „Zufallsbewegung“ verhalten, die in jedem Schritt von  $n$  nach  $n+1$  mit nahezu gleicher Wahrscheinlichkeit um 1 steigt oder fällt (wenn sie nicht gleich bleibt). Von einer derartigen Zufallsbewegung ist aus der Stochastik bekannt, dass der Erwartungswert des Abstands zum Nullpunkt (also der Erwartungswert von  $|M(n)|$ ) proportional zu  $\sqrt{n}$  wächst. Das Bild unten zeigt für  $n \leq 1000000$ , dass  $M$  tatsächlich „wie eine Zufallsbewegung aussieht“ und es den Anschein hat, als ob es eine Abschätzung

$$|M(n)| \leq c\sqrt{n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_{>0}$$

für ein  $c \in \mathbb{R}$  gäbe (während man  $|M(n)|$  natürlich nur proportional zu  $n$  abschätzen könnte, wenn die Funktion  $M$  sich mit jedem Schritt in die gleiche Richtung ändern und damit linear ansteigen würde).



Um diese Idee verwenden zu können, müssen wir die Reihe  $\sum_n \frac{\mu(n)}{n^z}$  zunächst so umschreiben, dass in ihr die aufsummierte Möbius-Funktion  $M$  vorkommt. Dies erreicht man mit dem folgenden einfachen Trick:

**Lemma 14.12 (Partielle Summation).** *Es seien  $(a_n)_{n>0}$  und  $(b_n)_{n>0}$  zwei komplexe Zahlenfolgen. Wir definieren daraus die beiden neuen Folgen  $(A_n)$  und  $(\Delta b_n)$  durch*

$$A_n := \sum_{k=1}^n a_k \quad \text{und} \quad \Delta b_n := b_{n+1} - b_n.$$

Dann gilt für alle  $N_2 \geq N_1 \geq 1$

$$\sum_{n=N_1}^{N_2} a_n b_n = A_{N_2} b_{N_2+1} - A_{N_1+1} b_{N_1} - \sum_{n=N_1}^{N_2} A_n \Delta b_n.$$

*Beweis.* Man beweist dies sofort z.B. mit Induktion über  $N_2$  (und Startwert  $N_2 = N_1$ ). Die Formel ist auch leicht verständlich, da sie das exakte Analogon zur partiellen Integration ist, wenn man sich  $(A_n)$  als diskrete Version des Integrals von  $(a_n)$  und  $(\Delta b_n)$  als diskrete Version der Ableitung von  $(b_n)$  vorstellt.  $\square$

Mit Hilfe dieser partiellen Summation kann man nun zeigen:

**Satz 14.13.** *Wenn es eine Konstante  $c \in \mathbb{R}$  gibt, so dass  $|M(n)| \leq c\sqrt{n}$  für alle  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  gilt, dann ist die Riemannsche Vermutung wahr.*

*Beweisidee.* Mit Lemma 14.12 (angewendet auf  $a_n = \mu(n)$  und  $b_n = n^{-z}$ ) können wir ein Stück der Reihe  $\sum_n \frac{\mu(n)}{n^z}$  als

$$\sum_{n=N_1}^{N_2} \frac{\mu(n)}{n^z} = \underbrace{M(N_2)(N_2+1)^{-z}}_{(A)} - \underbrace{M(N_1+1)N_1^{-z}}_{(B)} - \underbrace{\sum_{n=N_1}^{N_2} M(n)((n+1)^{-z} - n^{-z})}_{(C)} \quad (*)$$

schreiben. Wir setzen wieder  $x = \operatorname{Re} z$  und  $y = \operatorname{Im} z$ . Ist nun  $N \in \mathbb{N}_{>0}$  und sind  $N_1, N_2 \geq N$ , so lässt sich der Term (A) für  $x > \frac{1}{2}$  nach Voraussetzung proportional zu

$$\sqrt{N_2} \cdot |N_2^{-z}| = N_2^{-x+\frac{1}{2}} \leq N^{-x+\frac{1}{2}}$$

nach oben abschätzen, was für  $x > \frac{1}{2}$  mit  $N \rightarrow \infty$  gegen 0 konvergiert. Analog folgt dies für Term (B). In (C) hingegen kann man die Differenz  $(n+1)^{-z} - n^{-z}$  durch die Ableitung  $-zn^{-z-1}$  approximieren und die Summanden damit proportional zu

$$\sqrt{n} \cdot |n^{-z-1}| = n^{-x-\frac{1}{2}}$$

nach oben abschätzen. Da der hier auftretende Exponent für  $x > \frac{1}{2}$  kleiner als  $-1$  ist, ist die Summe  $\sum_{n=1}^{\infty} M(n)((n+1)^{-z} - n^{-z})$  nach [G, Aufgabe 11.18 (c)] konvergent. Der Term (C) konvergiert für  $N \rightarrow \infty$  damit ebenfalls gegen 0.

Wir haben insgesamt also gesehen, dass der Ausdruck (\*) mit  $N \rightarrow \infty$  (wobei  $N_1, N_2 \geq N$ ) gegen 0 konvergiert. Damit konvergiert die Reihe  $\sum_n \frac{\mu(n)}{n^z}$  für  $\operatorname{Re} z > \frac{1}{2}$  nach dem Cauchy-Kriterium.

Analog zum Beweis von Lemma 14.1 kann man nun noch die gleichmäßige Konvergenz der Ableitungen von (\*) zeigen und so nachweisen, dass die Funktion  $z \mapsto \sum_n \frac{\mu(n)}{n^z}$  für  $\operatorname{Re} z > \frac{1}{2}$  sogar holomorph ist. Damit ist auch die Funktion

$$z \mapsto \zeta(z) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^z}$$

auf  $\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z > \frac{1}{2}\} \setminus \{1\}$  holomorph. Da sie für  $\operatorname{Re} z > 1$  nach Satz 14.7 konstant gleich 1 ist, muss sie dies nach dem Identitätssatz aus Folgerung 8.10 auch für  $\operatorname{Re} z > \frac{1}{2}$  sein, d.h. es ist

$$\zeta(z) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^z} = 1$$

für alle  $z \neq 1$  mit  $\operatorname{Re} z > \frac{1}{2}$ . Damit kann  $\zeta$  für  $\operatorname{Re} z > \frac{1}{2}$  keine Nullstellen besitzen. Aus der oben erwähnten Symmetrie der Nullstellen zur Achse  $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$  folgt dann, dass die Zetafunktion in der rechten Halbebene auch für  $\operatorname{Re} z < \frac{1}{2}$  keine Nullstellen haben kann. Alle Nullstellen von  $\zeta$  der rechten Halbebene haben also Realteil  $\frac{1}{2}$ .  $\square$

Wir haben damit also eine Möglichkeit gesehen, wie man die Riemannsche Vermutung zahlentheoretisch interpretieren kann: sie ist letztlich eine Aussage darüber, wie stark die aufsummierte Möbius-Funktion  $M$  wächst, bzw. ob sie so wächst, wie man es bei einer Zufallsbewegung erwarten würde. In der Tat ist der einzige (allerdings leider wesentliche) Schwachpunkt bei unserem „Beweis“ der Riemannschen Vermutung der, dass die Möbius-Funktion natürlich *keine* Zufallsbewegung, sondern eine völlig deterministische zahlentheoretische Funktion ist — und man daher *nicht* weiß, ob sie wirklich nur proportional zu  $\sqrt{n}$  ansteigt.

Neuere Forschungsergebnisse haben übrigens gezeigt, dass man  $M(n)$  entgegen dem ersten Anschein vermutlich doch nicht proportional zu  $\sqrt{n}$  abschätzen kann. Für unseren Beweis von Satz 14.13 genügt es allerdings, wenn  $M(n)$  für alle  $\varepsilon > 0$  proportional zu  $n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$  abschätzbar ist. Diese leicht schwächere Aussage impliziert übrigens nicht nur die Riemannsche Vermutung, sondern ist sogar zu ihr äquivalent. Auf diese Art kann man die Riemannsche Vermutung also komplett in die Sprache der Zahlentheorie übersetzen.

## LITERATUR

- [C] Clay Mathematics Institute, *The Millennium Problems*, <http://www.claymath.org/millennium/>
- [FB] E. Freitag, R. Busam, *Funktionentheorie*, Springer (1991)
- [FL] W. Fischer, I. Lieb, *Funktionentheorie*, Vieweg (1980)
- [G] A. Gathmann, *Grundlagen der Mathematik*, Vorlesungsskript TU Kaiserslautern (2007/08), <http://www.mathematik.uni-kl.de/~gathmann/gdm-2007.php>
- [J] K. Jänich, *Funktionentheorie*, Springer (1993)
- [R] R. Remmert, *Funktionentheorie I*, Springer (1984)

## INDEX

- Ableitung, 8
- absolute Konvergenz, 3
- Argument, 5
- Betrag einer komplexen Zahl, 2
- Casorati-Weierstraß, 56
- Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen, 10
- Cauchysche Integralformel, 30
  - verallgemeinerte, 39
- Cauchyscher Integralsatz, 19
- dichte Teilmenge, 43
- Differenzierbarkeit, 8
- Dirichlet-Reihe, 77
- einfach zusammenhängend, 28
- Einheitswurzeln, 6
- Eulersche Produktformel, 77
- Exponentialfunktion, 4
  - Funktionalgleichung, 4
- Folgenkriterium für Stetigkeit, 7
- freie Homotopie, 25
- Fundamentalsatz der Algebra, 34, 43, 74
- Funktion
  - analytische, 39
  - ganze, 43
  - holomorphe, 8
  - komplex differenzierbare, 8
  - offene, 46
  - rationale, 66
  - stetig fortsetzbare, 7
  - stetige, 7
- ganze Funktion, 43
- Gebiet, 28
- Gebietsstreue, 46
- geschlossener Weg, 14
- Grad
  - einer rationalen Funktion, 66
- Grenzwert
  - einer Folge, 3
  - einer Funktion, 7
  - einer Reihe, 3
- Hauptteil, 47
- hebbare Singularität, 52
- Hebbarkeitssatz von Riemann, 54
- Holomorphie, 8
- Homotopie, 25
  - freie, 25
  - relative, 25
- Homotopieinvarianz
  - des Wegintegrals, 26
- Identitätssatz, 45
- Imaginärteil, 2
- Index, 57
- Integralformel von Cauchy, 30
- Integralsatz von Cauchy, 19
- isolierte Singularität, 52
- Komplexe Differenzierbarkeit, 8
- komplexe Exponentialfunktion, 4
- komplexe Konjugation, 2
- komplexe Potenz, 40
- komplexe Zahlen, 2
- komplexe Zahlenebene, 2
- konjugiert komplexe Zahl, 2
- Konvergenz
  - absolute, 3
  - einer Folge, 3
  - einer Funktion, 7
  - einer Reihe, 3
- Konvergenzkreis, 35
- Konvergenzradius, 35
- Konvergenzring, 48
- Kosinus, 5
- Kurvenintegral, 15
- Länge eines Weges, 15
- Laurent-Entwicklung, 49, 52
- Laurent-Reihe, 47
- Liouville, 42
- Logarithmus, 18
- Maximumprinzip, 32
- Minimumprinzip, 33
- Mittelwertprinzip, 32
- Möbius-Funktion, 79
- Nebenteil, 47
- nullhomotop, 26
- Nullstellen, 53
  - Abzählen von, 70
- offene Funktion, 46
- Ordnung, 52
- partielle Summation, 82
- Polarkoordinaten, 5
- Polstellen, 53
  - Abzählen von, 70
- Potenz, 40
- Potenzreihe, 35
- Quotientenkriterium, 3
- Randkurve, 64
- rationale Funktion, 66
- Realteil, 2
- relative Homotopie, 25
- Residuensatz, 61
  - für Randkurven, 64
- Residuum, 60
- Riemannsche Vermutung, 81
- Riemannsche Zetafunktion, 76
- Riemannscher Hebbarkeitssatz, 54
- Rouché
  - Satz von, 73
- Satz
  - von Casorati-Weierstraß, 56
  - von Liouville, 42



- von Rouché, 73
- Singularität
  - hebbare, 52
  - isolierte, 52
  - wesentliche, 53
- Sinus, 5
- Stammfunktion, 17, 29
  - lokale, 30
- stetige Fortsetzbarkeit, 7
- Stetigkeit, 7
  - Folgenkriterium, 7
- stückweise stetig differenzierbar, 14
- Summation
  - partielle, 82
- Taylor-Entwicklung, 39
- Taylor-Formel
  - für holomorphe Funktionen, 39
  - für Potenzreihen, 38
- Umlaufzahl, 57
- Umparametrisierung, 16
- Weg, 14
  - geschlossener, 14
  - nullhomotoper, 26
  - stückweise stetig differenzierbarer, 14
- Wegintegral, 15
- wegzusammenhängend, 28
- wesentliche Singularität, 53
- Wirtinger-Ableitungen, 12
- Wirtinger-Kalkül, 11
- Wurzelkriterium, 3
- Zetafunktion, 76
- zusammenhängend, 28
  - einfach, 28