Funktionentheorie

Prof. Dr. Albin Weber

Semester: SS 2008

Vorwort

Dieses Dokument wurde als Skript für die auf der Titelseite genannte Vorlesung erstellt und wird jetzt im Rahmen des Projekts „Vorlesungsskripte der Fakultät für Mathematik und Informatik“ weiter betreut. Das Dokument wurde nach bestem Wissen und Gewissen angefertigt. Dennoch garantiert weder der auf der Titelseite genannte Dozent, die Personen, die an dem Dokument mitgewirkt haben, noch die Mitglieder des Projekts für dessen Fehlerfreiheit. Für etwaige Fehler und dessen Folgen wird von keiner der genannten Personen eine Haftung übernommen. Es steht jeder Person frei, dieses Dokument zu lesen, zu verändern oder auf anderen Medien verfügbar zu machen, solange ein Verweis auf die Internetadresse des Projekts `http://uni-skripte.lug-jena.de/` *enthalten ist.*

Diese Ausgabe trägt die Versionsnummer 3263 und ist vom 22. April 2011. Eine neue Ausgabe könnte auf der Webseite des Projekts verfügbar sein.

Jeder ist dazu aufgerufen, Verbesserungen, Erweiterungen und Fehlerkorrekturen für das Skript einzureichen bzw. zu melden oder diese selbst einzupflegen – einfach eine E-Mail an die Mailingliste `<uni-skripte@lug-jena.de>` *senden. Weitere Informationen sind unter der oben genannten Internetadresse verfügbar.*

Hiermit möchten wir allen Personen, die an diesem Skript mitgewirkt haben, vielmals danken:

- *Jens Kubieziel* `<jens@kubieziel.de>` *(2008)*

Inhaltsverzeichnis

Auflistung der Theoreme

Sätze

Definitionen und Festlegungen

1. Holomorphe Funktionen

Definition 1.1
Eine offene, zusammenhängende Untermenge $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ heißt **Gebiet** in $\mathbb{C}$.

Definition 1.2
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, d. h. Ω ist offen und zusammenhängend. Dann heißt $f\colon \Omega \to \mathbb{C}, z \mapsto f(z)$ **komplexe Funktion** und hat eine Darstellung durch zwei reelle Funktionen in zwei reellen Variablen: $f\colon \Omega \to \mathbb{C}, x + iy \mapsto u(x, y) + iv(x, y)$ mit $u, v \in \mathbb{R}$.

Beispiel 1.1
Für $z \in \mathbb{C}$ ist:

$$
\begin{aligned}
&f(z) = e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \\
&\quad z = x + iy \Rightarrow e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y)) = e^x\cos(y) + ie^x\sin(y) \\
&\quad\quad \Rightarrow u(x, y) = e^x\cos(y) \quad v(x, y) = e^x\sin(y)
\end{aligned}
$$

Der Raum $(\mathbb{C}, |\cdot|, +)$ ist ein normierter Raum mit der Betragsfunktion

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Definition 1.3
Sei U eine Umgebung von $a \in \mathbb{C}$ und $U \setminus \{a\} \subset D_f$ bzw. a ein Häufungspunkt von $D(f)$. Dann ist

$$\lim_{z\to a} f(z) = b \Leftrightarrow \forall \{z_n\}_{n=0}^{\infty} \subset U \setminus \{a\}\colon z_n \xrightarrow{n\to\infty} a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(z_n) \to b$$

Bemerkung 1.1

i. Äquivalent zur obigen Definition ist:

$$\lim_{z\to a} f(z) = b \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0\colon |f(z) - b| < \varepsilon \text{ für } |z - a| < \delta$$

ii. Weiterhin gilt für $h \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{z\to a} f(z) = b \Rightarrow \lim_{h\to 0} f(a + h) = b \text{ und } \lim_{h\to 0} f(a + ih) = b$$

Beispiel 1.2
Es ist:

$$\lim_{z\to 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1$$

Denn:

$$\begin{aligned}\left|\frac{e^z-1}{z} - 1\right| &= \left|\frac{e^z - 1 - z}{z}\right| = \left|\sum_{k=2}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{k!}\right| \leq \sum_{k=2}^{\infty}\left|\frac{z^{k-1}}{k!}\right| \\ &\leq \sum_{k=2}^{\infty}|z^{k-1}| = \sum_{k=1}^{\infty}|z|^k = \frac{|z|}{1-|z|}\end{aligned}$$

Wir haben hier die geometrische Reihe angewendet, da $|z| \in \mathbb{R}$ und $|z| < 1$, falls z nahe genug bei Null ist. Damit folgt:

$$0 \leq \lim_{z\to 0}\left|\frac{e^z-1}{z} - 1\right| \leq \lim_{z\to 0} \frac{|z|}{1-|z|} = 0$$

Satz 1.1 (Komplexe Grenzwertsätze)
Es gelte $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ und $\lim_{z\to a} f(z) = b$ sowie $\lim_{z\to a} g(z) = c$. Dann folgt:

i. $\lim_{z\to a}|f(z)| = |b|$

ii. $\lim_{z\to a} \Re(f(z)) = \Re(b), \lim_{z\to a} \Im(f(z)) = \Im(b)$

iii. $\lim_{z\to a} \alpha f(z) + \beta g(z) = \alpha b + \beta c$

iv. $\lim_{z\to a} f(z) \cdot g(z) = b \cdot c$

v. $\lim_{z\to a} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{b}{c}$, falls $c \neq 0$.

Beweis:
Es sei auf den Satz über allgemeine normierte Räume verwiesen. Im Komplexen ist der Beweisverlauf analog. Als Neuerung zeigen wir die folgende Eigenschaft: Für Folgen $\{w_n\}_{n=0}^{\infty} = \{u_n + iv_n\}_{n=0}^{\infty}$ und $w = u + iv$ gilt

$$w_n \xrightarrow{n\to\infty} w \Leftrightarrow u_n \xrightarrow{n\to\infty} u \wedge v_n \xrightarrow{n\to\infty} v \Leftrightarrow \Re(w_n) \xrightarrow{n\to\infty} \Re(w) \wedge \Im(w_n) \xrightarrow{n\to\infty} \Im(w)$$

Das beweist die zweite und dritte Behauptung zugleich. ■

Definition 1.4
Sei $a \in D_f \subseteq \mathbb{C}$ und f eine komplexe Funktion. Dann heißt f an der Stelle a **stetig**, genau dann, wenn $\forall \{z_n\}_{n=0}^{\infty} \subset D_f \colon z_n \xrightarrow{n\to\infty} a \Rightarrow f(z_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(a)$.

Bemerkung 1.2
Äquivalent zur obigen Definition ist: f in a stetig, genau dann, wenn $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\colon |f(z) - f(a)| < \varepsilon$ für alle $|z - a| < \delta$.

Satz 1.2 (Eigenschaften stetiger Funktionen)

i. Seien f und g in $a \in D_f \cap D_g$ stetig und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Dann sind auch $|f|, \alpha f + \beta g, f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$ (falls $g(a) \neq 0$) in a stetig.

ii. Sei f in $a \in D_f$ und g in $f(a) \in D_g$ stetig. Dann ist auch $g \circ f$ in a stetig.

Beweis:
Hier sei auf den entsprechenden Satz im Reellen verwiesen. Der Beweis läuft im Komplexen ganz analog. ■

1.1. Differenzierung

Definition 1.5
Sei $a \in D_f$. Dann heißt f an der Stelle a **differenzierbar**, genau dann, wenn der Grenzwert

$$f'(a) := \lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existiert, d. h. eindeutig bestimmt ist. Man schreibt statt $f'(a)$ auch gerne $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}(a)$.

Bemerkung 1.3
Die komplexe Differenzierung unterscheidet sich grundsätzlich von der Differenzierung im $\mathbb{R}^2$, denn

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \neq \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{|h|}$$

Satz 1.3

i. Seien f und g in $a \in D_f \cap D_g$ differenzierbar und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Dann sind f und g auch stetig in a und $\alpha f + \beta g, f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$ (falls $g(a) \neq 0$) sind auch in a differenzierbar. Weiterhin gelten dann die, schon aus dem Reellen bekannten, Ableitungsregeln:

   a) $(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a)$

   b) $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$

   c) $(\frac{f}{g})'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g(a)^2}$

ii. Sei f in $a \in D_f$ und g in $f(a) \in D_g$ differenzierbar. Dann ist auch $g \circ f$ in a differenzierbar. Weiterhin gilt dann **Kettenregel**: $(g \circ f)'(a) = (g' \circ f)(a) \cdot f'(a)$.

Beweis:
Hier sei auf den entsprechenden Satz im Reellen verwiesen. Der Beweis läuft im Komplexen ganz analog. ■

Beispiel 1.3

i. $f(z) = c \Rightarrow f'(z) = 0$

ii. $f(z) = z \Rightarrow f'(z) = 1$

iii. $f(z) = z^n \Rightarrow f'(z) = nz^{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

iv. $f(z) = \frac{1}{z} \Rightarrow f'(z) = -\frac{1}{z^2}$ für alle $z \neq 0$

v. $f(z) = e^z \Rightarrow f'(z) = e^z$

Bemerkung 1.4
Im Reellen ist für $\alpha \in \mathbb{R}$ allgemein $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$. Denn $(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} \alpha/x = \frac{\alpha x^\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$.

Im Komplexen ist diese Eigenschaft allgemein *nicht* gültig. Denn $\ln x$ hat für $x \in \mathbb{C}$ unendlich viele Werte. Dementsprechend kann x^α nicht mehr als eindeutige Funktion definiert werden.

Definition 1.6
Eine Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ ist genau dann **holomorph**, wenn f in jedem Punkt von Ω stetig differenzierbar ist, d. h. $f \in C^1(\Omega)$.

Bemerkung 1.5
Die Funktionen in Beispiel 1.3 sind alle holomorph:

Satz 1.4
Mit $f, g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph sind auch $\alpha f + \beta g, fg, f/g$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ holomorph.

Beweis:
Folgt aus Ableitungsregeln ∎

Satz 1.5
Die Funktion $f\colon z = x + iy \mapsto u(x,y) + iv(x,y)$ ist genau dann holomorph, wenn u, v auf $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ als reellwertige Funktionen C^1-differenzierbar sind und die **Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen** gelten:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad\qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Dann gilt:

$$f'(z) = f'(x+iy) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

Beweis:

i. Sei f holomorph $\Rightarrow f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h,y)-u(x,y)}{h} + i \lim_{h \to 0} \frac{v(x+h,y)-v(x,y)}{h} = u_x(x,y) + iv_x(x,y)$. Denn man geht davon aus, dass f stetig differenzierbar ist.

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} \\
&= \lim_{h=h_1+ih_2\to 0} \frac{u(x+h_1,y+h_2)+iv(x+h_1,y+h_2)-u(x,y)-iv(x,y)}{h_1+ih_2} \\
&= \lim_{h_1\to 0} \frac{u(x+h_1,y)-u(x,y)+i(v(x+h_1,y)-v(x,y))}{h_1} \text{ für } h_2=0 \\
&= \lim_{h_1\to 0} \frac{u(x+h_1,y)-u(x,y)}{h_1} + i \lim_{h_1\to 0} \frac{v(x+h_1,y)-v(x,y)}{h_1} \\
&= u_x(x,y)+v_x(x,y)
\end{aligned}$$

Im Reellen folgt *nicht* aus $\lim_{x\to x_0}(f_1(x)-f_2(x)$ existiert, die Tatsache, dass die Limites der einzelnen Funktionen existieren.

Es gilt aber weiter $f'(z)=-iu_y(x,y)+v_y(x,y)$. Denn hierzu kann man die obigen Schritte ansetzen und $h_1=0$ setzen. Damit folgt, dass die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen gelten. Aus $f'\in C \Rightarrow u_x, v_y \in C \Rightarrow u,v\in C^1$.)

ii. Sei $u,v\in C^1(\Omega)$ und die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen seien erfüllt. Wir setzen $z=x+iy\in\Omega, h=s+it, |s|,|t|\ll 1$. Dann folgt, $f(z+h) = u(x+s,y+t)+iv(x+s,y+t) = u(x,y)+D_xu(x,y)s+D_yu(x,y)t+r_1(s,t)+i(v(x,y)+D_xv(x,y)s+D_yv(x,y)t+r_2(s,t))$ mit $\lim_{h\to 0}\frac{r_1(s,t)}{|h|} = \lim\frac{r_2(s,t)}{|h|} = 0$. Nun setzen wir $r(s+it) := r_1(s,t)+ir_2(s,t)$. Dann ist $f(z+h)=f(z)+(u_x(x,y)+iv_x(x,y))\underbrace{(s+it)}_{h}+r(h)$ wegen der Anwendung der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen mit $\lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{h}=0$. Wir stellen das um und erhalten $\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = u_x(x,y)+iv_x(x,y)+\frac{r(h)}{h} \Rightarrow f'(z)=u_x+iv_x=v_y-iu_y$. ■

Bemerkung 1.6

i. Nicht jedes u und v gehört zu einer holomorphen Funktion $w=u+iv$.

ii. Sind u,v zweimal stetig differenzierbar, so ist

$$\begin{aligned}
\Delta u &= u_{xx}+u_{yy} = v_{yx}-v_{xy}=0 \\
\Delta v &= v_{xx}+v_{yy} = -u_{yx}=u_{xy}=0
\end{aligned}$$

eine *notwendige Bedingung*. Für holomorphe Funktionen sind $u,v\in C^2$.

iii. Es gehört $u=x^2$ zu *keiner* holomorphen Funktion $w=u+iv$. Denn $\Delta u=2\neq 0$.

Satz 1.6
Sei f holomorph in Ω und $f'=0$ in Ω. Dann ist f konstant.

Beweis:
$f=u+iv \Rightarrow f'=u_x+iv_x=v_y-iu_y=0 \Rightarrow u_x=u_y=v_x=v_y=0$. Damit folgt, dass u,v konstant. ■

2. Komplexe Kurvenintegrale

Bemerkung 2.1
Es sei $\gamma\colon t \mapsto z(t) = x(t) + iy(t), a \leq t \leq b$ ein stückweise glatter Jordanweg, d. h. $z \in C^1$ auf den Teilintervallen und $z' \neq 0$ sowie γ doppelpunktfrei. Jede positive Umparametrisierung wird ebenfalls γ bezeichnet und außerdem identifizieren wir die Kurve auch mit γ. Also ist γ eine orientierte Kurve aus C_s^1 und $-\gamma$ die umgekehrt durchlaufene Kurve. Dann folgt, $L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2\, dt} = \int_a^b |z'(t)|\, dt$. Dabei ist $z'(t) := x'(t) + iy'(t)$ **Tangentialvektor**. Im folgenden gehen wir immer von einer positiven Orientierung, sofern nichts anderes angegeben, aus.

Für weitere Details siehe [1] oder andere Lektüre zu Analysis II.

Beispiel 2.1
$C_r(z_0)\colon t \mapsto z_0 + re^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$. Kreislinie $|z - z_0| = r$ im positiven Sinn durchlaufen. Es gilt, $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$.

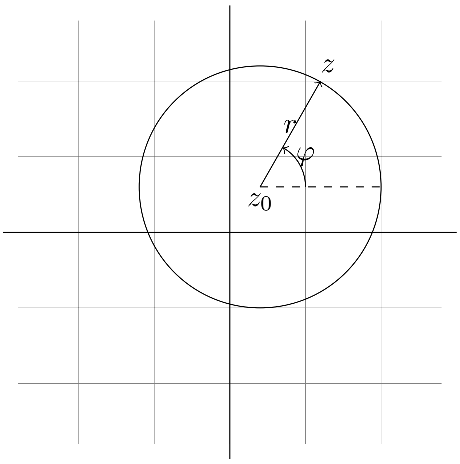

Abbildung 2.1.: Darstellung der Kreislinie

Kettenregel Sei f holomorph (also $f \in C^1(\Omega)$) und $z(t)$ sei C^1-differenzierbar mit $z(t) \in \Omega \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(z(t)) = f'(z(t)) \cdot z'(t)$. Denn sei $f = u + iv$ holomorph und $z(t) =$

$x(t) + iy(t)$ stetig differenzierbar. Dann gilt,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(z(t)) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))) \\
&= u_x(x, y) \cdot x'(t) + u_y(x, y) \cdot y'(t) + i(v_x(x, y) \cdot x'(t) + v_y(x, y) \cdot y'(t)) \\
&= u_x(x, y) \cdot x'(t) - v_x(x, y) \cdot y'(t) + i(v_x(x, y) \cdot x'(t) + u_x(x, y) \cdot y'(t)) \\
&= (u_x(x, y) + iv_x(x, y)) \cdot (x'(t) + iy'(t)) = f'(z(t)) \cdot z'(t)
\end{aligned}$$

Definition 2.1
Die komplexe Funktion f habe eine Darstellung, die nur von einer reellen Variablen abhängig ist, d. h. $f(t) := u(t) + iv(t)$, wobei $u, v \in C([a, b])$ sind. Dann berechnet sich das Integral wie folgt:

$$\int_a^b f(t)\, dt := \int_a^b u(t)\, dt + i \int_a^b v(t)\, dt$$

Satz 2.1 (Hauptsatz der Integralrechnung)
Es gelte $F(t) = U(t) + iV(t)$, wobei $U, V \in C^1([a, b])$. Dann gilt:

$$\int_a^b F'(t)\, dt = F(b) - F(a)$$

Beweis:
Der Beweis folgt sofort aus der Linearität des Integrals und anschließendem zweimaligen Anwenden des bereits aus der reellen Analysis bekannten „Hauptsatzes der Integralrechnung“ auf die reellen Funktionen U und V. ∎

Definition 2.2
Es seien $f \in C(\Omega), \gamma$ eine C^1-Kurve in Ω und $z\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ eine Parametrisierung von γ. Wir definieren dann folgendes **Kurvenintegral**:

$$\int_\gamma f(z)\, dz := \int_a^b f(z(t)) \cdot z'(t)\, dt$$

Bemerkung 2.2

i. Falls γ nur stückweise stetig differenzierbar in Ω ist, so lässt sie sich als $\gamma = \gamma_1 \oplus \cdots \oplus \gamma_n$ darstellen. Dabei sind $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ wie oben C^1-Kurven und wir definieren analog:

$$\int_\gamma f(z)\, dz := \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} f(z)\, dz$$

ii. Wie im Reellen ist das oben definierte Integral unabhängig von der Parametrisierung.

iii. Das Integral ist linear: $\int_\gamma(\alpha f+\beta g)\,dz=\alpha\int_\gamma f\,dz+\beta\int_\gamma g\,dz$.

Satz 2.2 (Integralabschätzung)
Falls $|f(z)|\leq M$ auf dem ganzen Weg γ ist, dann gilt:

$$|\int\limits_\gamma f(z)\,dz|\leq M\cdot L(\gamma)$$

Beweis:
O. B. d. A. sei γ eine C^1-Kurve. Weiter setzen wir $F(t):=f(z(t))\cdot z'(t)$. Somit gilt dann, $\int_\gamma f(z)\,dz=\int_a^b F(t)\,dt=re^{i\varphi}$ und wir können die folgende Abschätzung treffen:

$$\begin{aligned}|\int\limits_\gamma f(z)\,dz|&=|\int\limits_a^b F(t)\,dt|=r=\Re(r)=\Re\left(e^{-i\varphi}\int\limits_a^b F(t)\,dt\right)=\int\limits_a^b\Re(e^{-i\varphi}F(t))\,dt\\&\leq\int\limits_a^b|e^{-i\varphi}F(t)|\,dt=\int\limits_a^b|F(t)|\,dt=\int\limits_a^b|f(z(t))\cdot z'(t)|\,dt\\&=\int\limits_a^b|f(z(t))|\cdot|z'(t)|\,dt\leq\int\limits_a^b M\cdot|z'(t)|\,dt=M\cdot L(\gamma)\end{aligned}$$

■

Satz 2.3 (Zurückführung auf Kurvenintegrale im $\mathbb{R}^2$)

i. Es gilt stets:

$$\int\limits_\gamma f(z)\,dz=\int\limits_\gamma(udx-vdy)+i\int\limits_\gamma(vdx+udy)$$

Denn es ist:

$$\begin{aligned}\int\limits_\gamma f(z)\,dz&=\int\limits_\gamma u(x,y)+iv(x,y)\,d(x,y)\\&=\int\limits_a^b(u(x(t),y(t))+iv(x(t),y(t)))\cdot(x'(t)+iy'(t))\,dt\\&=\int\limits_a^b u(x(t),y(t))\cdot x'(t)-v(x(t),y(t))\cdot y'(t)\,dt\\&\quad+i\int\limits_a^b u(x(t),y(t))y'(t)+v(x(t),y(t))x'(t)\,dt\\&=\int\limits_\gamma(u\,dx-v\,dy)+i\int\limits_\gamma(v\,dx+u\,dy)\end{aligned}$$

ii. Die Funktion f ist holomorph in Ω. Dann folgt, dass die Vektorfelder $(u, -v)$ und (v, u) die Integrabilitätsbedingung in Ω erfüllen. Das gilt genau dann, wenn auf dem sternförmigen Gebiet Ω $(u, -v)$ und (v, u) Gradientenfelder sind. Also sind die Kurvenintegrale wegunabhängig.

   Denn sei f holomorph. Dann folgt, $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$. Also sind die Integrabilitätsbedingungen von SCHWARZ an $(u, -v)$ und (v, u) erfüllt. Der Rest sind bereits bekannte Folgerungen aus der reellen Analysis.

Bemerkung 2.3

i. Ein Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **sternförmig** bezüglich x_0, genau dann, wenn ein $x_0 \in \Omega$ existiert, so dass für alle $x \in \Omega$ immer $\overline{xx_0} \subseteq \Omega$ gilt.

ii. f heißt genau dann **Gradientenfeld**, wenn ein F mit $\nabla F = f$ existiert.

iii. Die Integrabilitätsbedingung lautet:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \qquad \forall i \neq j$$

Satz 2.4 (Grundformeln der Funktionentheorie)

Eine der wichtigsten Anomalien, sozusagen das Fundament, welches die Funktionentheorie überhaupt möglich macht, wird in diesen Formeln deutlich (auch wenn die Tragweite hier noch nicht erkennbar ist):

$$\int\limits_{C_r(z_0)} \frac{1}{z - z_0}\, dz = 2\pi i$$

$$\int\limits_{C_r(z_0)} (z - z_0)^n\, dz = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$$

BEWEIS:

Sei $z = z_0 + re^{it}$ für $t \in [0, 2\pi]$ die Parametrisierung für $C_r(z_0)$. Damit gilt dann $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = ire^{it}$, woraus $dz = ire^{it}dt$ folgt. Damit berechnet man:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{C_r(z_0)} (z - z_0)^n\, dz &= \int\limits_0^{2\pi} (re^{it})^n \cdot (ire^{it})\, dt = ir^{n+1} \int\limits_0^{2\pi} e^{it(n+1)}\, dt \\
&= ir^{n+1} \int\limits_0^{2\pi} \cos((n+1)t) + i \sin((n+1)t)\, dt \\
&= r^{n+1} \left(i \int\limits_0^{2\pi} \cos((n+1)t)\, dt - \int\limits_0^{2\pi} \sin((n+1)t)\, dt \right) \\
&= \begin{cases} 0 & n+1 \neq 0 \\ 2\pi i & n+1 = 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & n \neq -1 \\ 2\pi i & n = -1 \end{cases}
\end{aligned}$$

■

Satz 2.5 (Konstruktion einer Stammfunktion)
Die Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ sei stetig und das Kurvenintegral wegunabhängig. Außerdem setzen wir:

$$F(z) := \int_{z_0}^{z} f(w)\, dw = \int_{\gamma} f(w)\, dw$$

wobei γ ein beliebiger Weg von z_0 nach z ist. Dann ist F holomorph und eine Stammfunktion zu f.

Beweis:
In jedem Fall gilt $F(x+iy) = U(x,y) + iV(x,y)$. Außerdem gilt aber nach Satz 2.3:

$$F(z) := \int_{z_0}^{z} f(w)\, dw = \int_{z_0}^{z} (u(x,y)\, dx - v(x,y)\, dy) + i \int_{z_0}^{z} (v(x,y)\, dx + u(x,y)\, dy)$$

wobei $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ gelten soll. Damit haben wir:

$$U(x,y) = \int_{z_0}^{z} (u(x,y)\, dx - v(x,y)\, dy) \qquad V(x,y) = \int_{z_0}^{z} (v(x,y)\, dx + u(x,y)\, dy)$$

Wegen der Wegunabhängigkeit der Kurvenintegrale folgt, dass U bzw. V Stammfunktionen zu den Vektorfeldern $(u,-v)$ und (v,u) sein müssen. Deshalb gilt: $U_x = u$, $U_y = -v$, $V_x = v$ und $V_y = u$. Woraus unmittelbar $U_x = V_y$ sowie $U_y = -V_x$ folgt. Damit gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. Weiterhin sind u und v stetig vorausgesetzt, also auch U_x, U_y, V_x und V_y stetig. Daher lässt sich Satz 1.5 anwenden und es gilt, dass F holomorph ist. Weiter gilt daher, dass $F'(z) = U_x + iV_x = u + iv = f$. Also ist F auch Stammfunktion zu f. ■

Folgerung 2.1
Falls Ω ein sternförmiges Gebiet und f holomorph in Ω ist, dann besitzt f immer eine holomorphe Stammfunktion F in Ω und für jeden geschlossenen Weg $\gamma \subset \Omega$ gilt: $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$.

Definition 2.3
Wir setzen

$$\Omega := \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}^- \cup \{0\}) = \{z \in \mathbb{C} \colon z = re^{i\varphi}, r > 0, -\pi < \varphi < \pi\}$$

und nennen dies die „geschlitzte komplexe Ebene“, die trivialerweise sternförmig bezüglich $x \in \mathbb{R}$ ist. Außerdem ist $f(z) = \frac{1}{z}$ holomorph in Ω. Damit muss nach Satz 2.5 bzw. Folgerung 2.1 eine holomorphe Stammfunktion F in Ω existieren:

$$F(z) := \int_{\gamma} \frac{1}{z}\, dz = \int_{1}^{r} \frac{1}{z}\, dz + \int_{r}^{z} \frac{1}{z}\, dz = \int_{1}^{r} \frac{dt}{t} + \int_{0}^{\varphi} \frac{ire^{it}}{re^{it}} = \ln r + i\varphi$$

Diese Stammfunktion erfüllt $F(1) = 0$ und wir nennen sie **Hauptzweig des Logarithmus**.

Somit ist der ln definiert als:

$$\ln z := \int\limits_1^z \frac{dw}{w} = \ln r + i\varphi \qquad \text{für } z = re^{i\varphi}, r > 0, -\pi < \varphi < \pi$$

Bemerkung 2.4

i. $e^{\ln(z)} = z$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}^- \cup \{0\})$

ii. $\ln(e^w) = w$ für alle $w \in \mathbb{C}$ mit $|\Im(w)| < \pi$

Definition 2.4

Sei Ω ein einfaches Gebiet mit $0 \notin \Omega$ und F holomorph in Ω. Dann heißt F **Zweig des Logarithmus**, wenn gilt

$$e^{F(z)} = z \qquad \forall z \in \Omega$$

Satz 2.6 (Zweige des Logarithmus)

Zu jedem einfachen Gebiet Ω mit $0 \notin \Omega$ gibt es unendlich viele Zweige des Logarithmus. Sie unterscheiden sich um ganzzahlige Vielfache von $2\pi i$.

Beweis:

Jede komplexe Zahl $z = re^{i\varphi}$ besitzt unendlich viele Darstellungen der Form $z = re^{i(\varphi+2k\pi)}$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Daher ist $i\varphi + 2k\pi i$ mit $k \in \mathbb{Z}$ die Darstellung der Zweige des Logarithmus. ∎

Bemerkung 2.5

a) Sei Ω die geschlossene Ebene. Dann hat $F(z) = \ln z$ die Eigenschaft $e^{F(z)} = e^{\ln z} = z$. Somit ist der Hauptzweig auch ein Zweige des Logarithmus.

b) Für $F(z) = \ln z + 2k\pi i$ folgt, $e^{F(z)} = e^{\ln z + 2k\pi i} = e^{\ln z} e^{2k\pi i} = z$. Also ist F ein Zweig des Logarithmus in der **geschichteten Ebene** (vgl. auch Riemann-Schichten).

c) In $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}^- \cup \{0\})$ gibt es genau zwei holomorphe Funktionen f_1, f_2 mit $(f_1(z))^2 = z$ bzw. $(f_2(z))^2 = z$. Diese heißen **Zweige der Quadratwurzel** und für $z = re^{i\varphi}$ lauten diese:

$$f_1(z) = \sqrt{z} = z^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\ln(z)} = e^{\frac{1}{2}(\ln(r)+i\varphi)} = \sqrt{r}e^{i\frac{\varphi}{2}}$$
$$f_2(z) = \sqrt{z} = z^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}(\ln(z)+2\pi i)} = e^{\frac{1}{2}(\ln(r)+i\varphi+2\pi i)} = \sqrt{r}e^{i(\frac{\varphi}{2}+\pi)}$$

d) Funktionen der Form z^k mit $k \in \mathbb{Z}$, trigonometrische, hyperbolische Funktionen sowie e^z sind eindeutige Funktionen.

e) In z sind die allgemeine Exponentialfunktion $a^z := e^{z \ln a}$ mit $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und die allgemeine Potenzfunktion $z^\alpha := e^{\ln z^\alpha} = e^{\alpha \ln z}$ mit $\alpha \in \mathbb{C}$ *nicht* eindeutig. Das heißt, zu ihnen gehören mehrere Zweige (i. A. unendlich viele). Speziell hat $\sqrt[n]{z} = z^{1/n}$ mit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ genau n Zweige.

f) Doch für $a = e$ ist per Konvention $e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ eindeutig definiert. Entsprechend sind dann:

$$\sinh z := \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad \cosh z := \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$
$$\sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} \qquad \cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

eindeutig. Analog definiert man für $k \in \mathbb{Z}$ die eindeutige Potenzfunktion:

$$z^k := z \cdot z \cdot \ldots \cdot z \neq e^{k \ln z}$$

Definition 2.5
Die Funktionenschaar $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ konvergiert genau dann kompakt gegen f, wenn $f_n \colon \Omega \to \mathbb{C}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ stetig sind und außerdem $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von Ω gegen f konvergiert. Wir schreiben: $f_n \xrightarrow{kompakt} f$.

Satz 2.7 (Satz über die kompakte Konvergenz, Vertauschbarkeit von Limes und Integra
Es gelte $f_n \xrightarrow{kompakt} f$. Dann ist auch f stetig auf Ω und außerdem gilt dann:

$$\int_\gamma f_n(z)\,dz \xrightarrow{n\to\infty} \int_\gamma f(z)\,dz$$

Beweis:
Sei $K \subseteq \Omega$ eine kompakte Menge. Dann konvergiert $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ laut Voraussetzung auf K gleichmäßig gegen f. Dann gilt (wie früher im Reellen), dass f auf K stetig ist. Da K beliebig war, ist f folglich in jedem Punkt $x \in \Omega$ stetig. Weiterhin gilt, weil γ eine kompakte Menge ist, folgende Rechnung:

$$0 \leq \left|\int_\gamma f_n(z)\,dz - \int_\gamma f(z)\,dz\right| = \left|\int_\gamma f_n(z) - f(z)\,dz\right| \leq \sup_{z\in\gamma}|f_n(z) - f(z)| \cdot L(\gamma) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \blacksquare$$

3. Analytische Funktionen

Satz 3.1
Sei

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

gegeben und wir fordern, dass f für $|z - z_0| < R$ konvergent ist, wobei $0 < R \leq \infty$ gelten soll. Dann ist f beliebig oft differenzierbar und die Ableitung erhält man durch gliedweises Differenzieren.

Beweis:
Wir betrachten die Funktion

$$g(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$$

welche für beliebiges r mit $|z - z_0| \leq r < R$ gleichmäßig konvergent ist. Außerdem liege jeder Weg γ in einer solchen Kreisscheibe. Damit folgt aus Satz 2.7 und der Linearität des Integrals:

$$\int_{\gamma} g(w)\, dw = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \int_{\gamma} (w - z_0)^{n-1}\, dw \tag{3.1}$$

Da $(w - z_0)^{n-1}$ holomorph in jedem sternförmigen Gebiet ist, folgt aus Satz 2.3, dass $\int_{\gamma} (w - z_0)^{n-1}\, dw$ wegunabhängig ist. Damit gilt Gleiches ebenso für das Integral $\int_{\gamma} g(w)\, dw$. Der Satz 2.5 liefert nun, dass g eine Stammfunktion besitzt, welche über ein Kurvenintegral darstellbar ist. Wir setzen $\gamma_z := \overline{z_0 z}$, dann hat γ_z die Parametrisierung $w(t) = z_0 + t(z - z_0)$ mit $t \in [0, 1]$ und es folgt $dw = (z - z_0)dt$. Damit berechnen wir:

$$\int_{\gamma_z} (w - z_0)^{n-1}\, dw = \int_0^1 t^{n-1}(z - z_0)^n\, dt = (z - z_0)^n \left[\frac{1}{n} t^n\right]_0^1 = \frac{(z - z_0)^n}{n}$$

Setzt man dieses Ergebnis in Gleichung 3.1 ein, erhält man:

$$\int_{\gamma_z} g(w)\, dw = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \frac{(z - z_0)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = f(z) - a_0$$

Nun war aber $\int_{\gamma_z} g(w)\,dw$ eine Stammfunktion zu g und damit wissen wir, das $f(z)-a_0$ eine Stammfunktion zu g darstellt. Da eine additive Konstante nichts an dieser Eigenschaft ändert, ist auch $(f(z)-a_0)+a_0 = f(z)$ eine Stammfunktion zu g. Damit gilt: $f'(z) = g(z)$. Dieser Prozess kann sukzessive fortgesetzt werden und wir erhalten, dass f unendlich oft differenzierbar ist. ■

Definition 3.1
Eine Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ heißt auf dem Gebiet Ω genau dann **analytisch**, wenn für alle $z_0 \in \Omega$ ein $r > 0$ existiert, sodass f auf $K_r(z_0)$ in eine Potenzreihe entwickelbar ist.

Bemerkung 3.1

i. Ist f analytisch in Ω, so ist $f \in \mathbb{C}^\infty(\Omega)$ und die Koeffizienten der Potenzreihe a_n sind eindeutig gegeben durch

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Denn für $|z-z_0| < R$ ist:

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\cdot \ldots \cdot (k-n+1)a_k(z-z_0)^{k-n} \to f^{(n)}(z_0) = n!a_n$$

ii. Sind f und g analytisch in Ω, so sind auch $\lambda f + \mu g, f\cdot g$ analytisch in Ω. Dabei sind $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

Satz 3.2 (Identitätssatz für analytische Funktionen)
Seien f und g analytisch auf Ω und es gelte $f(z_n) = g(z_n)$ für eine Folge $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Omega\backslash\{z_0\}$ mit $z_n \xrightarrow{n\to\infty} z_0$, wobei $z_0 \in \Omega$. Dann gilt $f \equiv g$ auf Ω.

Beweis:
Seien $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ und $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-z_0)^k$ die Darstellungen für $|z-z_0| < R$ von f und g. Dabei ist zu beachten, dass wir wieder o. B. d. A. von dem gleichen Entwicklungspunkt für f und g ausgehen können. Wir nehmen an, dass es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, mit $a_k \neq b_k$. Weiterhin setzen wir (da die folgende Menge nicht leer ist) noch $m := \min\{k \in \mathbb{N}\colon a_k \neq b_k\}$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} f(z)-g(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k - \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-z_0)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(a_k-b_k)(z-z_0)^k = \sum_{k=m}^{\infty}(a_k-b_k)(z-z_0)^k \\ &= (z-z_0)^m \sum_{k-m=0}^{\infty}(a_k-b_k)(z-z_0)^{k-m} = (z-z_0)^m \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \end{aligned}$$

Dabei wurde die Umbenennung $c_{k-m} = a_{k-m} - b_{k-m}$ und die Indexverschiebung $n := k-m$ vorgenommen. Außerdem gilt in dieser Darstellung $c_0 \neq 0$. Wir setzen:

$$h(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \Rightarrow \lim_{z\to z_0} h(z) = h(z_0) = c_0 \neq 0$$

Weil $z_n \xrightarrow{n\to\infty} z_0$ und $f(z_n) = g(z_n)$ gelten sollte, folgt aber andererseits auch:

$$\lim_{n\to\infty} h(z_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(z_n) - g(z_n)}{(z - z_0)^m} = 0$$

Da ein Grenzwert immer eindeutig bestimmt ist, erhält man durch Gleichsetzen der beiden Gleichungen auch:

$$c_0 = \lim_{z\to z_0} h(z) = \lim_{n\to\infty} h(z_n) = 0$$

$\lightning$ Das ergibt einen Widerspruch zu $c_0 \neq 0$, womit die Annahme falsch gewesen sein muss. Damit folgt, dass es kein $k \in \mathbb{N}$ mit $a_k \neq b_k$ gibt, woraus unmittelbar $f = g$ auf ganz $K_R(z_0)$ gilt. ■

Der Satz besagt, dass es für analytische Funktionen ausreicht, wenn sie auf einer einzigen, in Ω konvergierenden Folge übereinstimmen, um auf vollständige Übereinstimmung zu schließen.

Analog kann man fordern, dass f und g auf einer abzählbaren Punktmenge, die mindestens einen Häufungspunkt in Ω besitzt, übereinstimmt. Auch dann ist $f \equiv g$ in Ω.

Beispiel 3.1

a) $f(z) = \frac{1}{w-z}$ ist analytisch in $\Omega = \mathbb{C}\setminus\{w\}$. Denn für $z_0 \in \Omega$ mit $|z-z_0| < R := |w-z_0|$ ist, $\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-z_0+z_0-z} = \frac{1}{w-z_0} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}$. Dies gilt für $|z| < 1$: $\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$.

b) Die Exponentialfunktion e^z ist analytisch in $\mathbb{C}$. Denn $e^z = e^{z_0}e^{z-z_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{z_0}}{n!}(z - z_0)^n$.

c) Analog sind auch alle trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen analytisch.

Satz 3.3 (Nullstellen analytischer Funktionen)
Sei f auf Ω analytisch und nicht konstant. Dann folgt:

a) $f(z_0) = 0 \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und Umgebung von z_0 mit $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$ mit $g(z) \neq 0$.

b) f an den Stellen z_0 Nullstelle k-ter Ordnung genau dann, wenn $f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(k-1)}(z_0) = 0, f^{(k)}(z_0) \neq 0$.

c) In jeder kompakten Teilmenge von Ω hat f höchstens endlich viele Nullstellen.

Beweis:
Der Beweis lässt sich mit den obigen Sätzen einfach führen. ■

Cauchyscher Integralsatz für einfache Gebiete Sei f holomorph in einem sternförmigen (oder allgemeiner einfachem) Gebiet Ω und γ ein geschlossener Weg. Dann folgt:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0 \tag{3.2}$$

Link einfügen

Dies ergibt sich aus Folgerung 3 in 16.2

Folgerung 3.1
Die Gleichung 3.2 gilt auch für einfach gelagerten Weg γ, d. h. $\gamma \subset \Omega' \subset \Omega$ mit Ω' einfach.

Bemerkung 3.2
Ein Kreisring ist *kein* einfaches Gebiet, denn $\int_{C_r(0)} \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0$.

Bemerkung 3.3
Sei f holomorph in Ω. Der CAUCHYsche Integralsatz gilt auch für allgemeinere Gebiete.

Bemerkung 3.4
Sei f holomorph in $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. Dann gilt:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{C_r(z_0)} f(z)\,dz$$

Denn es ist $\int_\gamma f(z)\,dz + \int_{-C_r(z_0)} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz - \int_{C_r(z_0)} f(z)\,dz = \int_{\partial M} f(z)\,dz = 0$.

Hierbei umläuft γ den Punkt z_0 einfach positiv, d. h. der Strahl

$$\{z_0 + te^{i\varphi} : t \geq 0\}$$

trifft $z(t)$ (Parametrisierung von γ) in genau einem Punkt.

Beispiel 3.2

$$\int_\gamma \frac{1}{z - z_0}\,dz = 2\pi i$$

Satz 3.4 (Homologiesatz)
Sei Ω ein Gebiet, f holomorph in $\Omega \setminus \{z_0\}$ und γ umlaufe z_0 einfach positiv. Dann folgt:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{C_r(z_0)} f(z)\,dz$$

falls das Innere von γ und von $C_r(z_0)$ in Ω liegt.

Definition 3.2
Seien f_1, f_2 geschlossene Wege. Diese sind genau dann **homolog**, wenn $\int_{\gamma_1} f\,dz = \int_{\gamma_2} f\,dz$ für jedes $f \in C^1(\Omega)$.

4. Cauchysche Integralformel

Satz 4.1 (Cauchysche Integralformel für Kreise)
Sei f holomorph in $\Omega, \overline{K_r(z_0)} \subset \Omega \Rightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw$ für alle $z \in K_r(z_0)$.

Satz 4.2 (Cauchysche Integralformel für einfach positiv umlaufende Wege)
Sei γ ein geschlossener Weg, der jeden von ihm umschlossenen Punkt einfach positiv umläuft. Es sei γ und sein Inneres in Ω enthalten und f holomorph in Ω. Dann folgt:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z}\, dw$$

Beweis:
Sei z im Inneren von γ. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, dass $C_\varepsilon(z)$ und γ homolog bezüglich $\Omega \setminus \{z\}$. Es folgt, $\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon(z)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw = f(z)$. ■

Satz 4.3 (Potenzreihenentwicklung holomorpher Funktionen)
Sei f holomorph in Ω, also eine C^1-Funktion. Dann folgt:

a) f ist in Ω analytisch ($\Rightarrow C^\infty(\Omega)$)

b) $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ist Potenzreihenentwicklung um $z_0 \in \Omega \Rightarrow$ Konvergenzradius dieser Reihe mindestens $R = |(z_0, \partial\Omega)|$ und

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz \qquad \forall r\colon 0 < r < R \tag{4.1}$$

Obiges bezeichnet man als **Cauchy-Formeln**.

Bemerkung 4.1
Im Reellen gibt es keinen, dazu äquivalenten Satz. Eine C^1-Funktion in $(a,b) \not\Rightarrow f \in C^\infty(a,b)$. Betrachten wir beispielsweise die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} 2x & x > 0 \\ 0 & \leq 0 \end{cases}$$

Die Ableitung ist stetig, also $f \in C^1(\mathbb{R})$. Doch f'' ist in $x = 0$ nicht differenzierbar, also $f \notin \mathbb{C}^2(\mathbb{R})$.

Es gibt sogar C^∞-Funktionen im Reellen, die trotzdem nicht analytisch sind. Ein Beispiel dafür ist:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Es ist $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, aber in $x = 0$ nicht analytisch. Denn wäre $f(x) = \sum_{k=0}^\infty a_k x^k$, so wäre insbesondere $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = 0$. Das heißt, in einer ε-Umgebung um 0 wäre $f(x) \equiv 0$. Das ist ein Widerspruch.

Satz 4.4 (Identitätssatz für holomorphe Funktionen)
Seien f, g holomorph auf Ω und $z_0 \in \Omega$. Weiterhin gelte $f(z_n) = g(z_n)$ für eine Folge $\{z_n\}_{n=1}^\infty \subset \Omega \setminus \{z_0\}$ mit $z_n \xrightarrow{n\to\infty} z_0$. Dann gilt $f \equiv g$ auf Ω.

BEWEIS:
Da f und g holomorph auf Ω sind, folgt aus Satz 4.3 (i), dass f und g auch analytisch auf Ω sind. Der Satz 3.2 liefert dann die gewünschte Behauptung. ■

Bemerkung 4.2

i. Es kann nur eine holomorphe Fortsetzung der reellen Funktion e^x ins Komplexe geben, da die beiden in ganz $\mathbb{R}$ übereinstimmen müssen. Diese Fortsetzung lautet:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y) = \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{n!}$$

Denn betrachten wir die holomorphe Funktion $f(z) = e^z$ mit $z \in \mathbb{C}$. Diese stimmt mit e^x f+r $x \in \mathbb{R}$ überein. Ist $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ebenfalls holomorph, so wählen wir eine beliebige in $\mathbb{R}$ konvergente Punktfolge $(z_n) \subset \mathbb{R}, z_n \to z_0 \in \mathbb{R}$. Dann ist $g(z_n) = f(z_n)$. Also gilt nach dem obigen Satz die Identität.

ii. Gleiches gilt für die komplexen Fortsetzungen der reellen Funktionen $\sin(x)$ und $\cos(x)$:

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \cos(z) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

iii. Damit gelten die aus dem Reellen bekannten Additionstheoreme auch im Komplexen.

iv. Die einzige holomorphe Fortsetzung von $\ln(1 + x)$ für $x < 1$ aus dem Reellen ins Komplexe lautet:

$$\ln(1 + z) = \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} \qquad \forall |z| < 1$$

Definition 4.1
Eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion heißt **ganze Funktion**. Insbesondere gilt für ganze Funktionen $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ mit $z \in \mathbb{C}$. Der Konvergenzradius ist $R = \infty$.

Beispiel 4.1
Polynome, $e^z, \sin, \cos$ sind ganze Funktionen.

Satz 4.5 (Satz über Potenzreihen)
Für $z_0 \in \mathbb{C}$ und ein fixiertes $R > 0$ sei die Potenzreihe

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad \forall |z - z_0| < R$$

gegeben. Weiter setzen wir $M(f, r) := \max\{|f(z)| \colon |z - z_0| = r\}$ für $0 < r < R$. Dann gilt:

$$|a_n| \leq \frac{M(f, r)}{r^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

oder sind das die Cauchy-Formeln?

Beweis:
Aus der Cauchyschen Integralformel (Gleichung 4.1) und Satz 2.2 folgt:

$$\begin{aligned}
|a_n| &= \left|\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\right| \cdot \left|\int\limits_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz\right| \\
&\leq \left|\frac{-i}{2\pi}\right| \int\limits_{C_r(z_0)} \left|\frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\right| dz \leq \frac{1}{2\pi} \cdot L(C_r(z_0)) \cdot \frac{M(f, r)}{|r^{n+1}|} \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi r \cdot \frac{M(f, r)}{r^{n+1}} = \frac{M(f, r)}{r^n}
\end{aligned}$$
■

Satz 4.6 (Satz von Liouville)
Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant. Insbesondere gilt: Jede ganze, nicht konstante Funktion ist nicht beschränkt.

Beweis:
Es gelte $|f(z)| \leq M$ für eine ganze Funktion f. Wir können o. B. d. A. den Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ für f annehmen. Dann gilt für ein beliebiges $r > 0$, dass f die Darstellung $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ für alle $0 < |z| < r$ hat. Mit Hilfe von Satz 4.5 lässt sich nun folgern, $|a_n| \leq \frac{M}{r^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Der Grenzübergang $r \to \infty$ liefert dann: $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Eingesetzt in die Potenzreihenentwicklung von f folgt die Behauptung $f(z) = a_0$. ■

Beispiel 4.2
Da die Sinusfunktion im Reellen nicht konstant ist, muss sie im Komplexen unbeschränkt sein.

Satz 4.7 (Fundamentalsatz der Algebra)
Wenn p ein nicht-konstantes Polynom mit komplexen Koeffizienten ist, dann hat p wenigstens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$. Daraus folgt der Fundamentalsatz der Algebra: p lässt sich als Produkt linearer Faktoren schreiben.

Beweis:
Sei $p(z) = a_0 + \cdots + a_n z^n$ mit $a_n \neq 0$ für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dann gilt:

$$|\frac{p(z)}{z^n}| = \frac{|a_0|}{|z|^n} + \frac{|a_1|}{|z|^{n-1}} + \cdots + \frac{|a_{n-1}|}{|z|} + |a_n|$$

Damit folgt im Grenzwert:

$$\lim_{|z|\to\infty} |\frac{p(z)}{z^n}| = |a_n| > 0$$

Für ein ausreichend großes $R > 0$ gilt daher aber auch:

$$|\frac{p(z)}{z^n}| \geq \frac{|a_n|}{2} > 0 \qquad \forall |z| > R$$

Durch einfaches Umstellen erhalten wir damit:

$$\frac{1}{p(z)} \leq \frac{2}{|a_n|} \cdot \frac{1}{|z|^n} \leq \frac{2}{|a_n| R^n} =: M \qquad \forall |z| > R \tag{4.2}$$

Wir nehmen nun an, dass $p(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ wäre. Dann wäre $f := \frac{1}{p}$ eine ganze Funktion, weil p als Polynom eine ganze Funktion darstellt. Außerdem wäre f beschränkt für $|z| \leq R$, weil f stetig ist und f wäre beschränkt für $|z| \geq R$ wegen Gleichung 4.2. Damit ist f eine beschränkte ganze Funktion und wegen Satz 4.6 somit konstant. Damit ist aber auch p konstant. ` zur Voraussetzung. Deshalb war die Annahme falsch und p hat wenigstens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$. ∎

Satz 4.8 (Satz von Morera)
Sei f in Ω stetig und gelte $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ für jeden einfach gelagerten, geschlossenen Weg[1] γ in Ω. Dann ist f holomorph auf Ω.

Beweis:
Sei $K_r(z_0) \subset \Omega$ eine beliebige Kreisscheibe, welche trivialerweise sternförmig ist. Nach Vorraussetzung gilt, $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ für alle in $K_r(z_0)$ liegenden, geschlossenen und einfach gelagerten γ. Damit gilt für einen beliebigen Weg $\gamma' \in K_r(z_0)$, dass $\int_{\gamma'} f(z)\,dz$ wegunabhängig ist. Nach Satz 2.5 besitzt f nun eine Stammfunktion F auf $K_r(z_0)$, die außerdem noch holomorph ist. Wegen Satz 4.3 ist F damit auch analytisch auf $K_r(z_0)$. Mit einer obigen Folgerung folgt nun, dass F alle Ableitungen besitzt, welche selber wieder holomorph sind. Damit ist im Speziellen $f = F'$ holomorph auf jeder Kreisscheibe $K_r(z_0) \subset \Omega$, also auf ganz Ω. ∎

Satz 4.9 (Satz über Vertauschung von Differentiation und Grenzübergang)
Sei $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine Folge von in Ω holomorphen Funktionen, die kompakt gegen f konvergieren. Dann ist auch f holomorph in Ω und für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt: $f_n^{(k)}(z) \xrightarrow{\text{kompakt}} f^{(k)}(z)$.

oder
meint?

Beweis:
Wir zeigen zunächst, dass f holomorph in Ω ist. Dazu sei γ ein einfach gelagerter geschlossener Weg in Ω. Dann gilt wegen Gleichung 3.1und der dazugehörigen Aussage für jede auf Ω holomorphe Funktion $\int_\gamma f_n(z)\,dz = 0$. Aus der kompakten Konvergenz von $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ folgt (wie aus Analysis 2 bekannt), dass f stetig ist. Die Vertauschbarkeit von Grenzübergang und Integration folgt aus Satz 2.7 und damit folgt auch $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma \lim_{n\to\infty} f_n(z)\,dz = \lim_{n\to\infty}\int_\gamma f_n(z)\,dz = 0$.

Wegen Satz 4.8 gilt nun, dass auch f holomorph auf Ω ist. Bleibt noch die Aussage über die kompakte Konvergenz der Ableitungen zu zeigen. Dazu sei $K \subset \Omega$ eine beliebige kompakte Menge. Wir setzen $r := \frac{1}{2}\mathrm{dist}(K, \partial\Omega)$ und weiterhin $K_r := \{z \in \mathbb{C} \colon \mathrm{dist}(z, K) \le r\}$. Dann gilt $K \subset K_r \subset \Omega$ und K_r wieder eine kompakte Menge. Weiterhin sei ein $z_0 \in K$ fixiert, dann folgt aus Satz 4.3 mit den Cauchy-Formeln und der Additivität des Integrals:

$$f^{(k)}(z_0) - f_n^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{C_r(z_0)} \frac{f(z) - f_n(z)}{(z - z_0)^{k+1}}\,dz$$

Damit gilt dann unter Verwendung von Satz 2.2 folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}
\left|f^{(k)}(z_0) - f_n^{(k)}(z_0)\right| &\le \frac{k!}{|2\pi i|} \cdot \frac{L(C_r(z_0))}{r^{k+1}} \cdot \max_{z \in C_r(z_0)} |f(z) - f_n(z)| \\
&= \frac{k!}{2\pi} \cdot \frac{2\pi r}{r^{k+1}} \cdot \max_{z \in C_r(z_0)} |f(z) - f_n(z)| \\
&= \frac{k!}{r^k} \cdot \max_{z \in C_r(z_0)} |f(z) - f_n(z)|
\end{aligned}$$

Und damit gilt auch $f_n^{(k)} \xrightarrow{n\to\infty} f^{(k)}$ gleichmäßig auf K. ∎

Folgerung 4.1
Eine kompakt konvergente Reihe aus holomorphen Funktionen ist beliebig oft gliedweise differenzierbar.

Folgerung 4.2
Es sei f stetig auf Ω. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

i. f ist holomorph auf Ω.

ii. f ist analytisch auf Ω.

iii. $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ mit $u, v \in C^1(\Omega)$ und $u_x = v_y$ sowie $u_y = -v_x$.

iv. $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ für jeden einfach gelagerten, geschlossenen Weg γ in Ω.

Beweis:
(i)⇒(ii) gilt wegen Satz 4.3

[1] Es genügt sogar, dass das für jeden geschlossenen, in einem sternförmigen Gebiet $\Omega' \subset \Omega$ liegenden Weg gilt.

(ii)⇒(i) gilt wegen Satz 3.1

(i)⇒(iii) gilt wegen Satz 1.5

(i)⇒(iv) gilt wegen Folgerung 2.1

(iv)⇒(i) gilt wegen Satz 4.8 ∎

Bemerkung 4.3
Im Reellen gilt die Aussage „$f \in C^1(\Omega) \Rightarrow f$ ist in Potenzreihe entwickelbar“ übrigens nicht! Ein Gegenbeispiel dazu ist:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Hier gilt $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ und außerdem $f^{(k)}(0) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Damit kann f in $x_0 = 0$ nicht in eine Potenzreihe entwickelt werden. Wenn überhaupt, muss die Potenzreihenentwicklung mit der Taylor-Reihe in einer Umgebung von $x_0 = 0$ übereinstimmen. Es gilt aber für alle $x \in]-\varepsilon, \varepsilon[\setminus \{0\}$:

$$0 \neq f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{0}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} 0 = 0$$

5. Laurent-Entwicklungen

Definition 5.1

i. Sei f holomorph und $D_f = \Omega \setminus \{z_0\}$. Dann heißt z_0 **isolierte Singularität**.

ii. Der Punkt z_0 heißt genau dann **hebbare Singularität**, wenn es eine auf $K_\varepsilon(z_0)$ holomorphe Funktion g mit $f(z) = g(z)$ für alle $z \in K_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$ gibt.

iii. Der Punkt z_0 heißt genau dann **Polstelle**, wenn $\lim\limits_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$.

iv. Der Punkt z_0 heißt genau dann **wesentliche Singularität**, wenn z_0 weder eine hebbare Singularität noch eine Polstelle ist.

Beispiel 5.1

a) Die Funktion $f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$ hat in $z_0 = 0$ eine hebbare Singularität. Denn $g(z) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k+1)!}$ erfüllt die in Definition 5.1 geforderten Bedingungen.

b) Die Funktion $f(z) = \frac{z^3-1}{z-1}$ hat in $z_0 = 1$ eine hebbare Singularität.

c) Ebenso hat $f(z) = \frac{e^z-1}{z}$ in $z_0 = 0$ eine hebbare Singularität.

d) Die Funktion $f(z) = \frac{1}{z}$ hat in $z_0 = 0$ eine Polstelle. Denn $\lim_{z \to 0} |\frac{1}{z}| = \lim_{z \to 0} \frac{1}{|z|} = \infty$.

e) Die Funktion $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ hat in $z_0 = 0$ eine wesentliche Singularität. Denn $\lim_{n \to \infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \to \infty} e^n = \infty$. Aber $\lim_{n \to \infty} f\left(-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \to \infty} e^{-n} = 0$. Damit ist $z_0 = 0$ keine Polstelle und es kann auch keine holomorphe Fortsetzung von f in z_0 geben. Wie wir später noch sehen werden, ist sogar jede komplexe Zahl als Grenzwert möglich. Es gilt zum Beispiel auch: $\lim_{n \to \infty} f\left(\frac{1}{2n\pi i}\right) = \lim_{n \to \infty} e^{(2n\pi)i} = 1$.

Beispiel 5.2

a) Wie wir bereits in Beispiel 3.1 (iii) gesehen hatten, gilt, $\frac{1}{w-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}$ für alle $|z - z_0| < |w - z_0|$.

b) Aber umgekehrt gilt auch für $|z - z_0| > |w - z_0|$:

$$\frac{1}{w-z} = -\frac{1}{z-w} = -\frac{1}{z-z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{w-z_0}{z-z_0}} = -\frac{1}{z-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}$$

c) Beides zusammen ergibt:

$$\frac{1}{w-z} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} & |z-z_0| < |w-z_0| \\ -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}} & |z-z_0| > |w-z_0| \end{cases}$$

Durch eine Indexverschiebung und anschließendem Übergang von n zu $-n$ kann man die zweite Gleichung aber auch in einer (noch) ungewöhnlichen Form aufschreiben, die uns später noch hilfreich sein wird:

$$\frac{1}{w-z} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} & |z-z_0| < |w-z_0| \\ -\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} & |z-z_0| > |w-z_0| \end{cases}$$

Definition 5.2

i. Die Reihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ heißt **Laurentreihe**.

ii. Für eine Laurentreihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ setzen wir

$$r(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$
$$h(z) := \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$$

Dabei heißt $r(z)$ **Nebenteil** (oder **regulärer Teil**) und $h(z)$ **Hauptteil** (oder **singulärer Teil**) der Laurentreihe.

iii. Eine Laurentreihe heißt genau dann **konvergent** in z, wenn $r(z)$ und $h(z)$ konvergieren.

Satz 5.1 (Satz über den singulären Teil der Laurentreihe)
Wir betrachten $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(z-z_0)^n}$. Dann gilt:

i. Ist die Reihe konvergent für $z = z_1$, so ist sie absolut konvergent für alle z mit $|z-z_0| > |z_1-z_0|$.

ii. Ist die Reihe divergent in $z = z_2$, so ist sie divergent für alle z mit $|z-z_0| < |z_1-z_0|$.

Beweis:
Zum Beweis führen wir die Aussage auf bereits bekannte Konvergenzeigenschaften von Potenzreihen zurück. Dazu setzen wir:

$$w := \frac{1}{z-z_0} \qquad w_1 := \frac{1}{z_1-z_0} \qquad w_2 := \frac{1}{z_2-z_0}$$

Damit hat der Hauptteil der Laurentreihe die Gestalt $h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}w^n$.

i. $h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}w_1^n$ konvergiert $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}w^n$ konvergiert absolut für alle $|w| < |w_1|$. Nun setzt man die Darstellung für w und w_1 ein. Nach der Umstellung der Gleichung erhält man das gewünschte Ergebnis.

ii. $h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} w_2^n$ divergiert $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} w^n$ divergiert für alle $|w| > |w_2|$. Danach wieder Einsetzen und Umstellen. ■

Bemerkung 5.1

i. Diese Konvergenzeigenschaften für den Hauptteil einer Laurentreihe sind genau umgekehrt zu den Konvergenzeigenschaften für Potenzreihen von früher. Es haben sich nur die Relationszeichen gedreht.

ii. Ist der Hauptteil der Laurentreihe konvergent für z_1, der Nebenteil konvergent für z_2, so ist die Laurentreihe konvergent im Ringgebiet: $|z_1 - z_0| < |z - z_0| < |z_2 - z_0|$.

Satz 5.2 (Cauchy-Formel für Laurentreihen)
Sei $f(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ konvergent für $\rho := |z_1 - z_0| < |z - z_0| < |z_2 - z_0| =: R$ mit $0 \leq \rho < R \leq \infty$. Dann ist $f(z)$ gleichmäßig konvergent für $\rho + \varepsilon \leq |z - z_0| \leq R - \mu$ mit $\varepsilon, \mu > 0$. Insbesondere ist dann f in diesem Kreisring holomorph. Dabei gilt:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz \qquad \forall \rho < r < R$$

Beweis:
Die Tatsache, dass $r(z)$ für $|z - z_0| \leq R - \mu$ gleichmäßig konvergent ist, ist schon von den Potenzreihen bekannt. Sei also $\rho + \frac{\varepsilon}{2} = |z_2 - z_0|$. Da f konvergent für dieses z_2 ist, folgt, dass $f(z_2) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z_2 - z_0)^n}$ absolut konvergent ist. Dies impliziert, dass $\left\{\frac{a_{-n}}{(z_2 - z_0)^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ eine Nullfolge darstellt. Da die Glieder jeder konvergenten Folge auch beschränkt sind, gilt, $\frac{|a_{-n}|}{|z_2 - z_0|^n} \leq M \Leftrightarrow |a_{-n}| \leq M \cdot |z_2 - z_0|^n$. Sei nun weiterhin $\rho + \varepsilon \leq |z - z_0|$. Dann lässt sich folgende Abschätzung treffen:

$$|\frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}| = \frac{|a_{-n}|}{|z_2 - z_0|^n} \cdot \frac{|z_2 - z_0|^n}{|z - z_0|^n} \leq M |\frac{z_2 - z_0}{z - z_0}|^n \leq M \left(\frac{\rho + \frac{\varepsilon}{2}}{\rho + \varepsilon}\right)^n$$

Mit dem Weierstrassschen Majorantenkriterium folgt nun, dass $h(z)$ gleichmäßig konvergent ist für $|z - z_0| \geq \rho + \varepsilon$.

Sei nun K eine kompakte Teilmenge von $\rho < |z - z_0| < R$. Dann liegt K in einem Kreisring obiger Art und wie wir bereits gesehen haben, sind $r(z)$ und $h(z)$ damit kompakt konvergent gegen f. Mit Satz 4.9 folgt dann, dass f auch holomorph ist. Aus Satz 2.7 folgt aufgrund der kompakten Konvergenz, dass Integration und Grenzwertbildung vertauscht werden dürfen. Daher gilt:

$$\int\limits_{C_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}}\, dw = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int\limits_{C_r(z_0)} (w - z_0)^{n-k-1}\, dw$$

Der Satz 2.4 liefert dann, dass nur der Summand mit $n = k$ übrig bleibt, was uns zu folgender Gleichung bringt:

$$\int\limits_{C_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}}\, dw = 2\pi i \cdot a_k$$

Die Division durch $2\pi i$ liefert das gewünschte Ergebnis. ■

Satz 5.3 (Identitätssatz für Laurentreihen)
Sei $\rho := |z_1 - z_0|, R := |z_2 - z_0|$. Gilt nun

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z-z_0)^n \text{ für } \rho < |z-z_0| < R$$

so sind $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Beweis:
Der Beweis folgt sofort aus der in Satz 5.2 gezeigten Formel für die Koeffizienten der Laurentreihe. Man braucht nur das gleiche r betrachten. ∎

Satz 5.4
Sei f holomorph in Ringgebiet und $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \colon \rho < |z - z_0| < R\}$ mit $0 \leq \rho < R \leq \infty$. Dann besitzt f die Reihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

Sie ist in jeder kompakten Teilmenge von Ω gleichmäßig konvergent und $a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw$ mit $\rho < r < R$.

Satz 5.5
Sei f eine Laurentreihe wie in Satz 5.2 und $M(f,r) := \max\{|f(z)| \colon |z-z_0| = r\}$ mit $\rho < r < R$. Dann ist $|a_n| \leq \frac{M(f,r)}{r^n}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Beweis:
wie ensprechender Satz für Potenzreihen (Satz 4.5). ∎

Beispiel 5.3 (Entwicklung des Kotangens)
$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}, \quad z \neq n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$, holomorph

$(\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \neq 0, \quad \Im z \neq 0 :$
$e^{iz} - e^{-iz} = 0 \Leftrightarrow e^{2iz} = 1 \Rightarrow \Im z = 0$
$e^z = e^x \cdot \underbrace{e^{iy}}_{|\cdot|=1} = 1 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0)$

Laurententwicklung für $0 < |z| < \pi$:

$z \cdot \cot z = \frac{z}{\sin z} \cdot \cos z$: an Stelle 0 hebbare Singularität.

$[\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \ldots =: g(z), \quad g(0) \neq 0 \quad g$ analytisch in $\mathbb{C}; \quad g \neq 0$ für $|z| < \pi \Rightarrow$
$g_1 = \frac{1}{g}$ analytisch für $|z| < \pi$ $(\sin z = 0 \Leftrightarrow z = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z})$
$\Rightarrow z \cdot \cot z = \frac{z}{\sin z} \cdot \cos z = g_1(z) \cdot \cos z, \quad 0 < |z| < \pi]$

$\Rightarrow z \cot z = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad |z| < \pi.$

$(\tan z = \sum\limits_1^\infty (-1)^{n-1} \frac{b_{2n}}{(2n)!} 4^n(4^n-1)z^{2n-1}, \quad |z| < \frac{\pi}{2}$
$z \cot z = \sum\limits_0^\infty (-1)^n \frac{B_{2n}}{(2n)!} 4^n z^{2n}, \quad |z| < \pi$
$\sum_{i=0}^n \binom{n+1}{i} B_i = 0, \quad n = 1, 2, \ldots; \quad B_0 = 1)$

$$z \cos z = z - \frac{z^3}{2!} + \frac{z^5}{4!} - \frac{z^7}{6!} \pm \ldots = z \cot z \sin z$$
$$= (a_0 z + a_1 z^2 + (a_2 - \frac{a_0}{3!})z^3 + (a_3 - \frac{a_1}{3!})z^4 + (a_4 - \frac{a_2}{3!} + \frac{a_0}{5!})z^5 + (a_6 - \frac{a_4}{3!} + \frac{a_2}{5!} - \frac{a_0}{7!})z^7 + \ldots$$
$$\Rightarrow a_1 = a_3 = a_5 = \ldots = 0, \quad a_0 = 1, \quad a_2 = -\frac{1}{3}, \quad a_4 = -\frac{1}{45}, \quad a_6 = -\frac{2}{945}, \ldots$$
$$\cot z = \frac{1}{z} - \frac{1}{3}z - \frac{1}{45}z^3 - \frac{2}{945}z^5 - \ldots$$

für $0 < |z| < \pi$

Satz 5.6 (Satz von Riemann)
Sei f holomorph und beschränkt für $0 < |z-z_0| < R$. Dann ist z_0 eine hebbare Singularität.

Beweis:
Für $f = \sum_{-\infty}^\infty a_n(z-z_0)^n$ und $|f| \leq M$ folgt, $|a_n| \leq \frac{M}{r^n}$ mit $0 < r < R$. Weiter ist $|a_{-n}| \leq Mr^n$ für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Nun gehe $r \to 0$. Dann folgt, $a_{-n} = 0 \Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n(z-z_0)^n$ mit $0 < |z-z_0| < R$. Die rechte Seite ist holomorph für $|z-z_0| < R$. ■

Satz 5.7 (Charakterisierung von Polstellen)
Sei f holomorph mit $0 < |z-z_0| < R$. Die Funktion f hat genau dann einen Pol in z_0, wenn f von der Form

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \quad m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, a_{-n} \neq 0.$$

ist. Dabei ist m die Ordnung des Pols z_0.

Satz 5.8 (Kriterien für Polstellen)
a) Die isolierte Singularität z_0 von f ist genau dann ein Pol m-ter Ordnung, wenn $\lim_{z \to z_0}(z-z_0)^m f(z)$ existiert und ungleich 0 ist.

b) Sei g holomorph in einer Umgebung von z_0 und z_0 Nullstelle m-ter Ordnung von g. Dann ist $\frac{1}{g}$ in z_0 ein Pol m-ter Ordnung.

Satz 5.9 (Satzvon Casorati-Weierstraß)
Sei z_0 eine wesentliche Singularität von f. Dann folgt,

i. $\forall a \in \mathbb{C}\ \exists (z_n)\colon z_n \to z_0 \wedge f(z_n) \to a$.

ii. $\exists (w_n)\colon w_n \to z_0 \wedge |f(w_n)| \to \infty$.

Definition 5.3
Ganze Funktionen, die kein Polynom sind, heißen **ganz-transzendent**.

Bemerkung 5.2
a) Sei f ganz-transzendent. Dann ist $f(\frac{1}{z})$ an der Stelle 0 eine wesentliche Singularität.

BEWEIS:
Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit $z \in \mathbb{C}$ (nicht $a_n = 0$ für $n \geq n_0$). Dann ist f nach dem Satz von Liouville (Satz 4.6) nicht beschränkt. Somit gilt, $f(\frac{1}{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{z^n} = \sum_{n=-\infty}^{0} \underbrace{a_{-n}}_{b_n} \frac{1}{z^n}$ für $z \neq 0$. Es ist nicht $b_n = 0$ für $n \leq n_1$, somit 0 keine Polstelle ∎

b) Sei p ein Polynom von Grad $n \geq 1$. Dann ist $p(\frac{1}{z})$ an der Stelle 0 ein Pol n-ter Ordnung.

Satz 5.10 (Satz von Casorati-Weierstraß für ganz-transzendente Funktionen)
Sei f eine ganz-transzendente Funktion. Dann gilt,

i. $\forall a \in \mathbb{C}\ \exists (z_n)\colon |z_n| \to \infty \wedge f(z_n) \to a$

ii. $\exists (w_n)\colon |w_n| \to \infty \wedge |f(w_n)| \to \infty$.

Satz 5.11 (Satz von Picard)
Habe f an der Stelle z_0 wesentliche Singularität. Dann existiert ein $a \in \mathbb{C}$, so dass f in jeder Umgebung von z_0 alle Werte von $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ annimmt.

6. Residuenkalkül

Definition 6.1 (Residuum)
Sei f holomorph in $\Omega\backslash\{z_0\}$ und z_0 eine isolierte Singularität. Dann ist $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ für $0 < |z - z_0| < R$ und $R > 0$. Man bezeichnet a_{-1} als das **Residuum** von f an der Stelle z_0 und schreibt $\operatorname{Res}(f, z_0) := a_{-1}$.

Bemerkung 6.1
Für $0 < r < R$ und den Weg γ, der z_0 einfach positiv umläuft und mit seinem Inneren ganz in Ω liegt, gilt die einfachste Form des Residuensatzes:

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_r(z_0)} f(z)\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} f(z)\, dz \tag{6.1}$$

Die Gleichung folgt aus der Formel für Koeffizienten von Laurentreihen.

Satz 6.1
a) $\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z\to z_0}(z - z_0)f(z)$, falls der Grenzwert existiert, d. h. falls z_0 eine hebbare Singularität oder ein Pol erster Ordnung ist.

b) $\operatorname{Res}(\alpha f + \beta g, z_0) = \alpha \operatorname{Res}(f, z_0) + \beta \operatorname{Res}(g, z_0)$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

c) Sei f in z_0 ein Pol erster Ordnung und g holomorph in einer Umgebung von z_0. Dann ist $\operatorname{Res}(f \cdot g, z_0) = g(z_0) \operatorname{Res}(f, z_0)$.

d) Sei z_0 eine einfache Nullstelle von f. Dann ist $\operatorname{Res}(\frac{1}{z}, z_0) = \frac{1}{f'(z_0)}$.

Beweis:
Die ersten beiden Aussagen folgen aus der Laurententwicklung und die beiden letzten folgen aus der ersten Aussage. ∎

Beispiel 6.1
Wir haben die Abbildung:

$$f(z) = \frac{1}{1 + z^4} = \frac{1}{(z - z_0)(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)}$$

Es ist $z_k = e^{\frac{i\pi}{4}(1+2k)}$ mit $k = 0, 1, 2, 3$ und $g(z) = 1+z^4$. Also ergibt sich für das Residuum $\operatorname{Res}(f, z_k) = \frac{1}{g'(z_k)} = \frac{1}{4z_k^3} = -\frac{1}{4}z_k$, da $z_k^4 = -1$ ist.

Satz 6.2 (Residuensatz)
Sei f holomorph in Ω mit Ausnahme isolierter Singularitäten. Der geschlossene Weg γ in Ω treffe keine Singularitäten. Dann gilt:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \operatorname{Res}(f, z_k)$$

wobei $z_1, \dots z_N$ die von γ umschlossenen Singularitäten sind.

Allgemeiner und genauer kann man schreiben: Sei γ der Rand eines Gebietes $M \subseteq \Omega$. Das Gebiet M lasse sich in $M_1, \dots, M_m$ mit $\overline{M} = \bigcup_1^m \overline{M}_i$ und $M_i \cap M_j = \emptyset, i \neq j$ zerlegen. ∂M_j umlaufe M_j einfach positiv und in jedem M_j gebe es höchstens eine Singularität.
Beweis:
Falls in M_j keine Singularität ist, folgt nach dem Cauchyschen Integralsatz, $\int_{\partial M_j} f(z)\,dz = 0$.

Falls in M_j eine Singularität z_k enthalten ist, so folgt nach Gleichung 6.1, $\int_{\partial M_j} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_k)$. Somit folgt, $\int_{\partial M} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^n \int_{\partial M_j} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(f, z_k)$. ∎

Bemerkung 6.2
Hilfsfunktion $f(z) = \pi \cot \pi z$. Es ist $f(z) = \frac{1}{z} - \frac{\pi^2}{3z} - \frac{\pi^4}{45} z^3 - \frac{2\pi^6}{945} z^5 - \dots$ mit $0 < |z| < \pi$. Der Kotanges von z hat einfache Pole an den Stellen $k\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$. Sonst ist die Funktion holomorph. Also hat f einfache Pole an den Stellen $k \in \mathbb{Z}$. Es ist $\operatorname{Res}(f, k) = 1$ für $k \in \mathbb{Z}$.

Satz 6.3
Seien p, q teilerfremde Polynome mit $\deg q \geq \deg p + 2$ Für $f(z) = \pi \cot \pi z$ folgt damit $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{p(n)}{q(n)} = -\sum_{q(a)=0} \operatorname{Res}(\frac{p}{q} f, a)$ für $q \neq 0$.

Beispiel 6.2
Für die Reihe $\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist $q(z) = z^2 = 0$ genau dann, wenn $z = 0$. Also haben wir $-\sum_{a=0} \operatorname{Res}(\frac{1}{z^2} \pi \cot \pi z, a) = -\operatorname{Res}(\frac{1}{z^2} \pi \cot \pi z, 0)$ und es folgt, $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} = -\frac{1}{2} \operatorname{Res}(\frac{1}{z^2} \pi \cot \pi z, 0) = \frac{\pi^2}{6}$.

Weiterhin ist $\sum_1^\infty \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$ und $\sum_1^\infty \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$.
Beweis:
Für $p(z) = 1$ und $q(z) = z^2$ haben wir nach Bemerkung 6.1 $\frac{\pi \cot \pi z}{z^2} = g = \frac{p}{q} f = \frac{1}{z^3} - \frac{\pi^2}{3} \frac{1}{z} - \frac{\pi^4}{45} z - \dots$. Also ist $\operatorname{Res}(g, 0) = \sum_{q(a)=0} \operatorname{Res}(g, 0) = -\frac{\pi^2}{3} \Rightarrow \sum_{0 \neq n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{3} \Rightarrow \sum_\infty^1 \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{3}$. Nun fahren wir mit $q(z) = z^4$ bzw. $q(z) = z^6$ fort. ∎

Satz 6.4
Sei f holomorph in $\mathbb{C}$ mit Ausnahme endlich vieler Singularitäten $z_1, \dots, z_N$, die nicht auf der rellen Achse liegen. Weiterhin sei $|f(z)| \leq \frac{C}{|z|^2}$ für $|z| \geq r$ und $\Im z \geq 0$. Dann folgt,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\Im z_k > 0} \operatorname{Res}(f, z_k)$$

Beweis:
Nach dem Majorantenkriterium konvergent das Integral. Nun sei $R > r$ so groß, daß alle z_k in $K_R(0)$ liegen.

$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\Im z_k > 0} \operatorname{Res}(f, z_k)$.

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \underbrace{\int_{-R}^{R} Tf(z)\,dz}_{\to \int_{-\infty}^{\infty}} + \underbrace{\int_{\gamma^*} f(z)\,dz}_{\to 0} \qquad R \to \infty \Rightarrow \left|\int_{\gamma^*} f(z)\,dz\right| \geq \frac{C}{R^2}\pi R$$

$\Rightarrow 2\pi i \sum_{\Im z_k > 0} \operatorname{Res}(f, z_k) = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$. ■

Bemerkung 6.3
Falls für f Abklingbedingung in unterer Halbebene $\Im z \leq 0$: ähnliche Formel.

Beispiel 6.3
$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$. Die Funktion $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ hat in oberen Halbebene einfache Pole: $z_1 = e^{\frac{\pi i}{4}}$ und $z_2 = e^{\frac{3\pi i}{4}}$. Für das Residuum ergibt sich $\operatorname{Res}(f, z_1) = -\frac{1}{4}z_1 = -\frac{1}{4}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$ und $\operatorname{Res}(f, z_2) = -\frac{1}{4}z_2 = -\frac{1}{4}(cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$ sowie $2\pi i \sum_1^2 \operatorname{Res}(f, z_k) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

Satz 6.5 (Berechnung von Fourierintegralen $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{ixt}\,dt$)
Die Abbildung f hat gleiche Vorraussetzungen wie in Satz 6.3, aber $|f(z)| \leq \frac{C}{|z|^2}$ mit $|z| \geq r$, $g(z) := f(z)e^{ixz}$, dabei ist $x \in \mathbb{R}$ fest. Dann folgt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{ixt}\,dt = \begin{cases} 2\pi i \sum_{\Im z_k > 0} \operatorname{Res}(g, z_k) & x > 0 \\ -2\pi i \sum_{\Im z_k > 0} \operatorname{Res}(g, z_k) & x < 0 \end{cases}$$

A. Übungsaufgaben

1.) Wo liegen die Zahlen z in der GAUSSschen Zahlenebene?

a) $|z+3| \le 2$ (Kreis mit Radius 2 und Mittelpunkt bei -3.)

b) $\frac{z-z_1}{z-z_2} = 1$, wobei $z_1 \neq z_2 \in \mathbb{C}$ fest sind.
Nach Umstellen erhält man, $|z-z_1| = |z-z_2|$, d. h. z hat den gleichen Abstand zu z_1 und z_2. Also liegt z auf einer Gerade, die senkrecht auf der Verbindungsstrecke zwischen z_1 und z_2 steht.

2.) Bestimme den Real- und Imaginärteil von

a) $(4+8i)(3-2i)^2 = (4+8i)(5-12i) = 116-8i$

b) $\frac{4+8i}{(3+2i)^2} = \frac{(4+8i)(3+2i)^2}{|3+2i|^4} = \frac{116}{169} - \frac{8}{169}i$

c) $|\frac{17-i}{1+i}| = |\frac{(17-i)(1+i)}{|1+i|^2}| = {}^1\!/_2|16-18i| = |8-9i| = \sqrt{8^2+(-9)^2} = \sqrt{145}$

3.) Man stelle die folgenden Zahlen in trigonometrischer Form:

a) $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$

b) $1+i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3}$

c) $\sqrt{3}-i = 2e^{-\pi/6}$

4.) Man berechne:

a) $\sqrt{-7+24i}$
Im Allgemeinen gilt: $(a+ib)^2 = -7+24i \Rightarrow a^2-b^2+2abi = -7+24i \Rightarrow ab = 12$ und weiter ist $a^2-b^2 = -7 \Rightarrow b^4+7b^2-144 = 0 \Rightarrow b^2 = 16 \Rightarrow b = \pm 4$ und $a = \pm 3$.

b) $\sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{e^{i\frac{\pi}{2}}} = e^{i\frac{\pi}{6}+i\frac{2}{3}k\pi}$ mit $k = 0,1,2$

c) $\sqrt[3]{-1+i} = \sqrt[3]{\sqrt{2}e^{i3\pi/4}} = \sqrt[6]{2}e^{i\pi/4+i2/3k\pi}$ mit $k = 0,1,2$.

d) $\sqrt[6]{-64} = 2\sqrt[6]{-1} = 2\sqrt[6]{e^{-i\pi}} = 2e^{-i\pi/6+ik\pi/3}$ mit $k = 0,\dots,5$

5.) Man löse die quadratische Gleichung: $z^2+(5-2i)z+5(1-i) = 0$.
Es ist $p(X) = X^2+(5-2i)X+5(1-i) = (X+(3-i))(X+(2-i)) \in \mathbb{C}[X]$ und man kann sofort die Nullstellen $(i-3),(i-2)$ ablesen.

Zeichnung und Erklärung hinzufügen

6.) Man charakterisiere geometrisch (Skizze) diejenigen $z \in \mathbb{C}$, für die gilt:

a) $0 < \Re(iz) < 1 \Leftrightarrow -1 < \Im(z) < 0$

b) $|z-2| + |z+2| = 5$
Wir setzen $z = a + ib$ und haben: $|(a-2)+ib| + |(a+2)+ib| = 5 \Rightarrow \sqrt{(a-2)^2+b^2} + \sqrt{(a+2)^2+b^2} = 5 \Rightarrow (a-2)^2+b^2 = (5-\sqrt{(a+2)^2+b^2})^2 = 25-10\sqrt{(a+2)^2+b^2}+(a+2)^2+b^2 \Rightarrow 25+8a = 10\sqrt{(a+2)^2+b^2} \Rightarrow (8a+25)^2 = 100((a+2)^2+b^2) \Rightarrow 64a^2+400a+625 = 100a^2+400a+400+100b^2 \Rightarrow 36a^2+100b^2 = 225$. Insgesamt ergibt sich somit die Gleichung $\left(\frac{2}{5}\right)^2 a^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 =^1$. Die Gleichung stellt somit eine Ellipse mit Halbachsen $5/2$ und $3/2$ dar.

c) $|\frac{z-i}{z+i}| = 1$
Dies ist ein Spezialfall der Aufgabe 1b.

7.) Es sei $z = -1 + i$ und $\zeta = -1/2 - i/2\sqrt{3}$. Man berechne, $z+\zeta, z\zeta, z^{-1}, \zeta^{-1}, z/\zeta$ sowie ζ/z und stelle das Ergebnis in der Form $x + iy$ und $re^{i\varphi}$ dar. Schließlich skizziere man deren Lage in der komplexen Ebene.

a) Für $z+\zeta = (-1+i)+(-1/2-i/2\sqrt{3}) = -3/2+\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right) i = \sqrt{4-\sqrt{3}}\cdot e^{i\arctan(2-\sqrt{3},-3)} = \sqrt{4-\sqrt{3}}e^{i\pi - i\arctan\frac{2-\sqrt{3}}{3}}$.

b) Für $z\zeta = (-1+i)(-1/2 - i/2\sqrt{3}) = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i/2(\sqrt{3}-1) = \sqrt{2}\cdot e^{i\pi/12}$.

c) Für $z^{-1} = \frac{1}{-1+i} = \frac{-1-i}{(-1-i)(-1+i)} = \frac{-1-i}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i5\pi/4}$.

d) Für $\zeta^{-1} = \frac{1}{-1/2-i/2\sqrt{3}} = \frac{\overline{\zeta}}{|\zeta|^2} = -1/2 + i/2\cdot\sqrt{3} = e^{i\arctan(\sqrt{3},-1)} = e^{i2\pi/3}$.

e) Für $z/\zeta = \frac{z\overline{\zeta}}{|\zeta|^2} = \frac{1-\sqrt{3}}{2} - i/2(1+\sqrt{3}) = \sqrt{2}e^{i\arctan(-2-\sqrt{3},2)} = \sqrt{2}e^{i17\pi/12}$.

f) Für $\zeta/z = \frac{\zeta\overline{z}}{|z|^2} = \frac{\overline{z\overline{\zeta}}}{2} = \frac{1-\sqrt{3}}{4} + i/4(1+\sqrt{3}) = 1/\sqrt{2}e^{i\arctan(2+\sqrt{3},2)} = 1/\sqrt{2}e^{i7\pi/12}$.

8.) Sei $\omega = \cos 2\pi/3 + i\sin 2\pi/3$. Man berechne $(a\omega+b\omega^2)(a\omega^2+b\omega)$.
Wir schreiben $\omega = \cos 2\pi/3 + i\sin 2\pi/3 = e^{i2\pi/3}$ und damit ergibt sich für $(a\omega + b\omega^2)(a\omega^2+b\omega) = (ae^{i2\pi/3}+be^{i4\pi/3})(ae^{i4\pi/3}+be^{i2\pi/3}) = (a^2+b^2)\underbrace{e^{\frac{i6\pi}{3}}}_{=1}+ab(e^{i4\pi/3}+e^{i8\pi/3}) = a^2+b^2+ab\left(\overline{e^{i2\pi/3}} + e^{i2\pi/3}\right) = a^2+b^2+2ab\Re(e^{i2\pi/3}) = a^2+b^2+2ab\cos 2\pi/3 = a^2+b^2-2ab$.

9.) Man drücke die folgenden Funktionen durch $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ aus:

a) $\cos 3\varphi = 1/2\left(e^{i3\varphi}+e^{-i3\varphi}\right) = 1/2\left((e^{i\varphi})^3+(e^{-i\varphi})^3\right) = 1/2\left((\cos\varphi+i\sin\varphi)^3+(\cos\varphi-i\sin\varphi)^3\right) = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi$

b) $\sin 3\varphi = 1/2i\left(e^{i3\varphi}-e^{-i3\varphi}\right) = 1/2i\left((e^{i\varphi})^3-(e^{-i\varphi})^3\right) = 1/2i\left((\cos\varphi+i\sin\varphi)^3-(\cos\varphi-i\sin\varphi)^3\right) = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi$

10.) Zu gegebenem u bestimmte man v so, dass $w = u + iv$ holomorph ist und die angegebene Anfangsbedingung erfüllt:

a) $u = x^2 - y^2 + xy, w(0) = 0$
Bei beiden Aufgaben wird eine partiell stetig differenzierbare Funktion gesucht, die die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen und die Anfangsbedingung erfüllt. Es gilt, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x + y$. Also ist $v(x, y) = 2xy + {}^{y^2}\!/_2 + h(x)$. Wegen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen ergibt sich weiter $\frac{\partial v}{\partial x} = 2y + h'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2y - x$. Also ist $h'(x) = -x$ und $h(x) = -{}^{x^2}\!/_2 + c$ mit $c \in \mathbb{R}$. Insgesamt ergibt sich für die Funktion

$$w(x, y) = (x^2 - y^2 + xy) + i\,(2xy + {}^{y^2}\!/_2 - {}^{x^2}\!/_2 + c)$$

Wegen der Anfangsbedingung $w(0) = 0$ ist $c = 0$ und $w(z) = (1 - {}^{i}\!/_2)z^2$.

b) $u = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3, w(0) = 0$
Mit selbigen Überlegungen wie oben ergibt sich $w(z) = (1 - 2i)z^3$.

11.) Sei $w = e^{i2\pi/3}$ Man berechne (vereinfache): $(a + b + c)(a + bw + cw^2)(a + bw^2 + cw)$.
Es ist:

$$\begin{aligned} w &= e^{i2\pi/3} = \cos {}^{2\pi}\!/_3 + i \sin {}^{2\pi}\!/_3 = -{}^{1}\!/_2 + i{}^{\sqrt{3}}\!/_2 \\ w^2 &= e^{i4\pi/3} = \cos {}^{4\pi}\!/_3 + i \sin {}^{4\pi}\!/_3 = -{}^{1}\!/_2 - i{}^{\sqrt{3}}\!/_2 \\ w^3 &= e^{i6\pi/3} = 1 \\ w^4 &= w^3 \cdot w = -{}^{1}\!/_2 + i{}^{\sqrt{3}}\!/_2 \end{aligned}$$

Also haben wir $(a+b+c)(a+bw+cw^2)(a+bw^2+cw) = (a+b+c)(a^2+w(ab+ac)+w^2(ac+ab+bc)+w^3(b^2+c^2)+w^4bc) = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ac)) = a^3+b^3+c^3-3abc$.

12.) Man drücke die Funktionen durch $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ mit $n \in \mathbb{N}, \varphi \in \mathbb{R}$ aus:

a) $\sin n\varphi$

Siehe hierzu auch die Lösung zu Aufgabe 9.

$$\begin{aligned}
\sin n\varphi &= {}^1\!/\!{}_{2i}\left(e^{in\varphi} - e^{-in\varphi}\right) = {}^1\!/\!{}_{2i}\left((e^{i\varphi})^n - (e^{-i\varphi})^n\right) \\
&= {}^1\!/\!{}_{2i}((\cos\varphi + i\sin\varphi)^n - (\cos\varphi - i\sin\varphi)^n) \\
&= {}^1\!/\!{}_{2i}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos^{n-k}\varphi\cdot i^k\sin^k\varphi - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos^{n-k}\varphi\cdot(-i)^k\sin^k\varphi\right) \\
&= {}^1\!/\!{}_{2i}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} i^k\cos^{n-k}\varphi\sin^k\varphi\cdot(1-(-1)^k) \\
&= {}^1\!/\!{}_{2i}\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}\binom{n}{2k+1} 2i^{2k+1}\cos^{n-2k+1}\varphi\sin^{2k+1}\varphi \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}\binom{n}{2k+1} i^{2k}\cos^{n-2k-1}\varphi\sin^{2k+1}\varphi \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}\binom{n}{2k+1} (-1)^{k}\cos^{n-2k-1}\varphi\sin^{2k+1}\varphi
\end{aligned}$$

b) $\cos n\varphi$

$$\begin{aligned}
\cos n\varphi &= {}^1\!/\!{}_2\left(e^{in\varphi} + e^{-in\varphi}\right) = {}^1\!/\!{}_2\left((e^{i\varphi})^n + (e^{-i\varphi})^n\right) \\
&= {}^1\!/\!{}_2((\cos\varphi + i\sin\varphi)^n + (\cos\varphi - i\sin\varphi)^n) \\
&= {}^1\!/\!{}_2\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos^{n-k}\varphi i^k\sin^k\varphi + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos^{n-k}\varphi(-i)^k\sin^k\varphi\right) \\
&= {}^1\!/\!{}_2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} i^k\cos^{n-k}\varphi\sin^k\varphi(1+(-1)^k) \\
&= {}^1\!/\!{}_2\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2k} 2i^{2k}\cos^{n-2k}\varphi\sin^{2k}\varphi = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2k}(-1)^k\cos^{n-2k}\varphi\sin^{2k}\varphi
\end{aligned}$$

13.) Man drücke $\cos^3\varphi$ durch Funktionen von Vielfachen des Winkels φ aus.

$$\begin{aligned}
\cos^3\varphi &= \frac{1}{2^3}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{i3\varphi} + 3e^{i2\varphi}e^{-i\varphi} + 3e^{i\varphi}e^{-i2\varphi} + e^{-i3\varphi}\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(e^{i3\varphi} + 3e^{i\varphi} + 3e^{-i\varphi} + e^{-i3\varphi}\right) \\
&= \frac{1}{8}(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi + 3\cos\varphi + 3i\sin\varphi + 3\cos\varphi - 3i\sin\varphi + \cos 3\varphi - i\sin 3\varphi) \\
&= \frac{1}{4}(\cos 3\varphi + 3\cos\varphi)
\end{aligned}$$

14.) Man beweise für $z, w \in \mathbb{C}$: $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$.
Für allgemeine $z \in \mathbb{C}$ wissen wir, dass $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$. Also können wir schreiben: $|z+w|^2+|z-w|^2 = (z+w)(\overline{z+w})+(z-w)(\overline{z-w}) = (z+w)(\overline{z}+\overline{w})+(z-w)(\overline{z}-\overline{w}) = (z\overline{z} + w\overline{w} + z\overline{w} + w\overline{z}) + (z\overline{z} + w\overline{w} - z\overline{w} - w\overline{z}) = 2z\overline{z} + 2w\overline{w} = 2|z|^2 + 2|w|^2$.

15.) Man drücke $\cos^4 x$ und $\sin^4 x$ durch Linearkombinationen von $\cos kx$ und $\sin kx$ mit $k \in \mathbb{N}$ aus.

$$\begin{aligned}
\cos^4 x &= {}^1\!/_{2^4} \left(e^{ix} + e^{-ix}\right)^4 = {}^1\!/_{16} \left(e^{i4x} + e^{-i4x} + 6 + 4e^{i2x} + 4e^{-i2x}\right) \\
&= {}^1\!/_8(\cos 4x + 4\cos 2x + 3) \\
\sin^4 x &= \cos^4\left({}^\pi\!/_2 - x\right) = {}^1\!/_8(\cos(2\pi - 4x) - 4\cos(\pi - 2x) + 3) \\
&= {}^1\!/_8(\cos 4x - 4\cos 2x + 3)
\end{aligned}$$

16.) Zu gegebenem u oder v bestimme man v oder u, so dass $w = u + iv$ holomorph ist und die angegebene Anfangsbedingung erfüllt wird:

a) $v = \frac{y}{x^2+y^2}, w(2) = 0$
Wir haben:

$$\begin{aligned}
u_y &= \frac{(x^2+y^2) - 2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = -v_x \\
u_x &= -\frac{y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = v_y \\
u(x,y) &= \int u_y \, dy = \int \frac{y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \, dy
\end{aligned}$$

In obigem Integral substituieren wir $x^2 + y^2$ durch z und haben $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = 2y$, also $dz = 2y\,dz$. Damit lässt sich das Integral als $x \int \frac{1}{z^2}\,dz$ schreiben und auflösen:

$$u(x,y) = \frac{-x}{(x^2+y^2)} + f(x)$$

Wenn wir $u(x,y)$ nach x ableiten und Koeffizienten vergleichen, ergibt sich, dass $f'(x) = 0$ sein muss. Somit ist $f(x) = c$ eine Konstante. Nun können wir die Anfangsbedingung einsetzen: $w(2,0) = u(2,0) + iv(2,0) = -\frac{1}{2} + c + 0i$. Damit ist $c = +\frac{1}{2}$ und die gesamte Funktion:

$$u(x,y) = \frac{-x}{(x^2+y^2)} + \frac{1}{2}$$

b) $u = e^x(x\cos y - y\sin y), w(0) = 0$

Wir haben:

$$\begin{aligned}
v_y &= e^x(x\cos y + \cos y - y\sin y)\\
v_x &= e^x(x\sin y + \sin y + y\cos y)\\
v(x,y) &= e^x\int x\cos y + \cos y - y\sin y\,dy\\
&= e^x(x\sin y + \sin y + y\cos y - \int \cos y\,dy) = e^x(x\sin y + y\cos y) + f(x)
\end{aligned}$$

Mit ähnlichen Überlegungen wie oben ergibt sich, dass $f(x) = c$ ist und durch Einsetzen der Anfangsbedingung wird klar, dass $c = 0$ gilt.

$$v(x,y) = e^x(x\sin y + y\cos y)$$

17.) Drei aufeinanderfolgende Ecken eines Parallelogramms mögen in den Punkten z_1, z_2, z_3 liegen. Man bestimme die Lage der vierten Ecke.
Assoziiert man $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ mit $x + iy \to \begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}$, so ist klar: $z_4 = z_1 + (z_3 - z_2)$.

18.) Seien z_0 und z_1 zwei benachbarte Ecken eines regelmäßigen n-Ecks. Wo liegt die folgende Ecke?
Sei z der Mittelpunkt des regelmäßigen n-Ecks. Dann gilt für die Ecken:

$$\begin{aligned}
z_0 &= z + re^{i\varphi_0}\\
z_1 &= z + re^{i\varphi_0 + \frac{2\pi}{n}i}\\
z_2 &= z + re^{i\varphi_0 + \frac{4\pi}{n}i}\\
(z_1 - z_0)e^{\frac{2\pi}{n}i} &= re^{i\varphi_0}(e^{\frac{2\pi}{n}i} - 1)e^{\frac{2\pi}{n}i}\\
&= re^{i\varphi_0 + \frac{4\pi}{n}i} - re^{i\varphi_0 + \frac{2\pi}{n}i} = z_2 - z_1\\
z_2 &= z_1 + (z_1 - z_0)e^{\frac{2\pi}{n}i}
\end{aligned}$$

19.) Einem Kreis mit dem Radius R und dem Mittelpunkt $c = a + ib$ sei ein regelmäßiges n-Eck einbeschrieben. Eine der Ecken liege im Punkt $z_0 = a + (b + R)i$. Wo liegen die übrigen Ecken?
Wir setzen $c = 0$. Dann ist $z_0 = iR$. Nun numerieren wir die Punkte des n-Ecks entgegen dem Uhrzeigersinn mit $z_0, \ldots, z_{n-1}$. Wir stellen fest, dass sie den gleichen Betrag, aber eine Differenz von $\Delta\varphi = {}^{2\pi}/_{2}$ haben. Somit ist der k-te Eckpunkt durch $z_k = Re^{i\pi/2 + ik2\pi/n}$ gegeben. Ist nun $c = a + ib$, so ergeben sich die Punkte durch eine Verschiebung:

$$z_k = c + Re^{i\pi/2 + ik2\pi/n}$$

20.) Man stelle die Zahlen in trigonometrischer Form dar:

a) $z = 1 + i \tan \alpha = 1 + i \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ mit $0 < \alpha < \pi/2$.
Wir stellen um und erhalten $z \cos \alpha = \cos \alpha + i \sin \alpha = e^{i\alpha}$. Also gilt: $z = \frac{1}{\cos \alpha} e^{i\alpha}$.

b) $1 - \cos \alpha + i \sin \alpha$ mit $0 < \alpha < 2\pi$
Der Punkt liegt auf dem Einheitskreis um $c = 1$. Es ist $\varphi = \frac{\pi - \alpha}{2}$ und somit ergibt sich $z = |z| e^{i\varphi} = \sqrt{1 - 1 \cos \alpha} e^{i\pi/2 - i\alpha/2}$.

21.) Berechnen Sie (alle Zweige):

a) $\log(-e)$
Es ist $z = e \cdot e^{i\pi + 2k\pi i}$ und $\log(z) = \log e + i\pi + 2k\pi i = 1 + (2k+1)\pi$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

b) $\ln(-2)$
Es ist $z = 2 \cdot e^{i\pi + 2k\pi i}$ und $\ln(z) = \log 2 + i\pi + 2\pi i k = \log 2 + (2k+1)\pi i$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

c) $2^i = e^{i \cdot \log 2} = e^{i(\log 2 + 2k\pi i)} = e^{i \log 2 - 2k\pi} = e^{i \log 2} \cdot e^{-2k\pi}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

d) $\log i$
Es ist $z = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i}$ und $\log z = \log 1 + i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i = i\pi(2k + \frac{1}{2})$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

22.) Berechnen Sie (alle Zweige):

a) $\log \frac{1+i}{\sqrt{2}}$
Es ist $z = e^{i\frac{\pi}{4} + 2k\pi i}$ und $\log z = \log 1 + i\frac{\pi}{4} + 2k\pi i = i\pi(\frac{1}{4} + 2k)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

b) $\log(x + iy)$
Es ist $z = x + iy = \sqrt{x^2 + y^2} e^{i \arctan \frac{y}{x} + 2k\pi i}$ und $\log z = \log(\sqrt{x^2 + y^2}) + i \arctan \frac{y}{x} + 2k\pi i$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

c) $e^{\pi i} = e^{i\pi \log e} = e^{i\pi(\log e + 2k\pi i)} = -1$

d) $i^i = e^{i \log i} = e^{i(i\pi(2k + \frac{1}{2}))} = e^{-\pi(2k + \frac{1}{2})}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

e) $\sin(x + iy) = \sin x \cos iy + \sin iy \cos x = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$

23.) Man stelle $z = 1 + \sin \alpha - i \cos \alpha$ mit $0 < \alpha < 2\pi$ in trigonometrischer Form dar.

24.) Man bestimme die Wurzeln $x \in \mathbb{C}$ der Gleichung $(x + i)^n + (x - i)^n = 0$.

25.) Man bestimme

a) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{-i} = \left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{-i} = e^{-i \log e^{i\frac{\pi}{4}}} = e^{-i\pi i(\frac{1}{4} + 2k)} = e^{\pi(\frac{1}{4} + 2k)}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

b) $\tan \frac{\pi i}{2} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} i)}{\cos(\frac{\pi}{2} i)} = \frac{i \sinh(\frac{\pi}{2})}{\cosh(\frac{\pi}{2})} = i \tanh(\frac{\pi}{2})$

c) $\cos(x + iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$

d) $\arctan xi = \frac{1}{2i} \log(\frac{1 + i(ix)}{1 - i(ix)}) = \frac{1}{2i} \log(\frac{1-x}{1+x}) + k\pi$

26.) Man bestimme die Lösungen x der Gleichung:

$$\left(\frac{1+xi}{1-xi}\right)^n = \frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

27.) Berechnen Sie $\int_\gamma |z|\,dz$, wobei γ geradlinig oder auf ∂E mit E Einheitskreis mit $|z| < 1$ von $-i$ nach i läuft.

28.) Man berechne mit der Cauchy-Integralformel:
Dabei ist γ eine geschlossene, einfach positiv umlaufende Kurve und f ist holomorph in Ω mit $f(\omega) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-\omega}\,dz$ für alle ω im Innern von γ.

a) $\int_{|z|=2} \frac{\sin z}{z+i}\,dz$
Es ist $\omega = -i$ im Kreis mit dem Radius $r = -2$ und $f(z) = \sin z$ holomorph. Insgesamt ergibt sich $f(-i)2\pi i = \int_{|z|=2} \frac{\sin z}{z+i}\,dz = \sin(-i)2\pi i = 2\pi i \frac{e^{-i^2} - e^{i^2}}{2i} = \pi(e - \frac{1}{e})$.

b) $\int_{|z+2i|=3} \frac{dz}{z^2+\pi^2}$
Es ist $\omega = -i\pi$ im Kreis um $-2i$ mit Radius $r = 3$ und $f(z) = \frac{1}{z-i\pi}$ holomorph in Ω. Insgesamt ergibt sich $\int_{|z+2i|=3} \frac{dz}{z^2+\pi^2} = \int_{|z+2i|=3} \frac{\frac{1}{z-i\pi}}{z+i\pi}\,dz = 2\pi i f(-i\pi) = \frac{2\pi i}{-2\pi i} = -1$.

c) $\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^4-1}$
Der Ansatz $\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^4-1} = \int_{|z|=2} \frac{\frac{1}{(z^2+1)(z+1)}}{z-1}\,dz$ ist nicht erfolgversprechend, da $\frac{1}{(z^2+1)(z+1)}$ nicht holomorph ist. Ein anderer Weg ist:

$$\begin{aligned}\int\limits_{|z|=2} \frac{dz}{z^4-1} &= \int\limits_{|z|=2} \frac{dz}{4(z^4-1)} - \int\limits_{|z|=2} \frac{dz}{4(z+1)} + \int\limits_{|z|=2} \frac{i\,dz}{4(z-1)} - \int\limits_{|z|=2} \frac{i\,dz}{4(z+1)} \\ &= \frac{1}{4}(2\pi i(1 - 1 + i - i)) = 0\end{aligned}$$

29.) Man berechne

a) $\int_\gamma |z|^2\,dz$ mit $\gamma\colon z(t) = a\cos t + ib\sin t, t \in [0, 2\pi], a, b > 0$

Es ist $z(t) = a\cos t + ib\sin t$ und $z'(t) = -a\sin t + ib\cos t$. Somit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma |z|^2\,dz &= \int_0^{2\pi} |a\cos t + ib\sin t|^2(-a\sin t + ib\cos t)\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} -a^3\sin t\cos^2 t\,dt + \int_0^{2\pi} ia^2b\cos^3 t\,dt - \int_0^{2\pi} ab^2\sin^3 t\,dt + \int_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} b^3\sin^2 t\cos t\,
\end{aligned}$$

$$\int \cos^3 t\,dt = \cos^2 t\sin t + 2\int \cos t\sin^2 t\,dt$$

$$\int \cos t\sin^2 t\,dt = \frac{1}{3}\sin^3 t$$

$$\int \sin^3 t\,dt = -\sin^2 t\cos t + 2\int \sin^2 t\cos t\,dt$$

$$\int \sin^2 t\cos t\,dt = -\frac{1}{3}\cos^3 t$$

$$\Rightarrow \int_\gamma |z|^2\,dz = 0$$

b) $\int_{|z|=r} |z|\,d|z|$
Aus $|z| = r$ folgt, $z(t) = re^{i\varphi}$ und $z'(t) = ire^{i\varphi}$. Nun haben wir $|dz| = |z'|\,d\varphi = r\,d\varphi$ und es ergibt sich: $\int_{|z|=r} |z|\,|dz| = \int_0^{2\pi} r \cdot r\,d\varphi = 2\pi r^2$.

c) $\int_\gamma \frac{z}{(z^2+4)^2}\,dz$ mit $\gamma = \overline{z_1 z_2}$ Strecke von z_1 nach z_2
Die Funktion ist an der Stelle $\pm 2i$ nicht definiert. Falls $\pm 2i$ nicht auf der Strecke $\overline{z_1 z_2}$ liegt, können wir den Satz über Stammfunktionen anwenden und es ist $F(z) = -\frac{1}{2(z^2+4)}$. Damit ergibt sich für das Integral: $\int_\gamma f(z)\,dz = F(z_2) - F(z_1) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z_1^2+4} - \frac{1}{z_2^2+4}\right)$.

30.) Mit Hilfe der Cauchy-Integralformel (für f bzw. $f^{(n)}$) bestimme man

$$\int_{|z-3/2|=1} \frac{e^z}{z(z-1)^3}\,dz$$

Man nimmt die n-ten Ableitungen der Cauchyschen Integralformel. Es ist $\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw$ sowie $f(z) = \frac{e^z}{z}$, $f'(z) = \frac{e^z}{z} - \frac{e^z}{z^2}$, $f''(z) = \frac{e^z}{z} - 2\frac{e^z}{z^2} + 2\frac{e^z}{z^3}$. Also haben wir $\int_{|z-3/2|=1} \frac{\frac{e^z}{z}}{(z-1)^{2+1}}\,dz = \frac{2\pi i}{2!} f''(1) = \pi$.

31.) Man berechne

$$\int_{\partial E} z^2\,dz + z^{-2}\,dy$$

32.) Mittels Cauchy-Integralformel bestimme man:

a) $\int_{|z|=3} \frac{e^{az}}{z^2(z^2+2z+2)}\,dz$
Es ist

$$\frac{e^{az}}{z^2(z^2+2z+2)} = \frac{e^{az}}{z^2(z-(-1+i))(z-(-1-i))}$$

und durch Partialbruchzerlegung erhalten wir:

$$\frac{1}{z^2(z-(-1+i))(z-(-1-i))} = \frac{A}{z+1-i} + \frac{B}{z+i+1} + \frac{C}{z} + \frac{D}{z^2}$$
$$= \frac{A(z+i+1)(z^2) + B(z+i-1)z^2 + Cz(z^2+2z+2) + D(z^2+2z+2)}{z^2(z^2+2z+2)}$$

Für $z = 0$ ist $2D = 1$, also $D = 1/2$. Für $z = -1+i$ ist $A(2i)(-1+i)^2 = 2iA(1-2i-1) = 4A = 1$, also $A = 1/4$. Für $z = -i-1$ ist $B(-2i)(-i-1)^2 = -2iB(1+2i-1) = 4B = 1$, also $B = 1/4$. Nun haben wir die linearen Terme $0 = 2Cz + 2Dz$, also $C = -D = -1/2$. Somit können wir schreiben:

$$\frac{e^{az}}{z^2(z-(-1+i))(z-(-1-i))} = \left(\frac{1}{4(z+1-i)} + \frac{1}{4(z+i+1)} - \frac{1}{2z} + \frac{1}{2z^2}\right)e^{az}$$

Nun können wir das Integral für $z_0 = 0$ lösen:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{C_3(0)} \frac{e^{az}}{z^2(z^2+2z+2)}\,dz &= \int\limits_{C_3(0)} \frac{e^{az}}{4(z+1-i)}\,dz + \int\limits_{C_3(0)} \frac{e^{az}}{4(z+i+1)}\,dz \\
&\quad - \int\limits_{C_3(0)} \frac{e^{az}}{2z}\,dz + \int\limits_{C_3(0)} \frac{e^{az}}{2z^2}\,dz \\
&= \int\limits_{C_3(0)} \frac{\frac{e^{az}}{4}}{(z-(-1+i))}\,dz + \int\limits_{C_3(0)} \frac{\frac{e^{az}}{4}}{(z-(-i-1))}\,dz \\
&\quad - \frac{1}{2}\int\limits_{C_3(0)} \frac{e^{az}}{z-0}\,dz + \int\limits_{C_3(0)} \frac{e^{az}}{2z^2}\,dz \\
&= 2\pi i\left(\frac{e^{a(-1+i)}}{4} + \frac{e^{a(-1-i)}}{4} - \frac{e^{0a}}{2}\right) + 2\pi i a e^{0a}\frac{1}{2} \\
&= 2\pi i\left(-\frac{1}{2} + \frac{a}{2} + \frac{e^{-a}}{4}(e^{ai} + e^{-ai})\right) \\
&= \pi i(-1 + a + \frac{\cos a}{e^a})
\end{aligned}$$

b) $\int_{|z|=r} \frac{dz}{(z-a)^n(z-b)^m}$, $|a| < r < |b|, m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$
Die Funktion $f(z) = \frac{1}{(z-b)^m}$ ist holomorph im Kreis $C_r(0)$. Nach dem Homologie-

satz (Satz 3.4) gilt für hinreichend kleines $R < |b-a|$:

$$\int_{C_r(0)} \frac{dz}{(z-a)^n(z-b)^m} = \int_{C_r(0)} \frac{f(z)}{(z-a)^n}\,dz = 2\pi i \frac{f^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!}$$

für $z_0 = a$. Dabei ist $f(z) = (z-b)^{-m}$ und $f^{(n-1)}(z_0) = m \cdot \ldots \cdot (m+n-2)(-1)^{n-1}(a-b)^{-m-n+1}$. Insgesamt haben wir:

$$\begin{aligned}\int_{|z|=r} \frac{dz}{(z-a)^n(z-b)^m} &= 2\pi i \frac{m \cdot \ldots \cdot (m+n-2)(-1)^{n-1}(a-b)^{-m-n+1}}{(n-1)!} \\ &= 2\pi i \frac{(m+n-2)!(-1)^{n-1}(a-b)^{-m-n+1}}{(m-1)!(n-1)!} \\ &= 2\pi i \binom{m+n-2}{m-1}(-1)^{n-1}(a-b)^{-m-n+1}\end{aligned}$$

33.) Man bestimme Real-, Imaginärteil, Betrag und Argument:

a) $z = \frac{1+i}{2-3i}$

b) $z = \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{201}$

c) $z = (1+i)^{2n} + (1-i)^{2n}, n \in \mathbb{N}$

34.) Bestimmen Sie den Konvergenzradius ρ:

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{3k}}{2^k}$
Die geometrische Reihe konvergiert für $|\frac{z^3}{2}| < 1$. Daher ist $\rho = \sqrt[3]{2}$.

b) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3k^2+k}{2k^2+1}\right)^k z^k$
Nach dem Wurzelkriterium gilt $\rho^{-1} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$. Also haben wir $\frac{1}{\rho} = \lim_{k\to\infty} \frac{3k^2+k}{2k^2+1} = \frac{3}{2}$ und somit $\rho = \frac{2}{3}$.

c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{n!}{3^n(2n)!}(z+1)^n$
Das Quotientenkriterium liefert $\rho = \lim_{k\to\infty} |\frac{a_k}{a_{k+1}}|$ und es gilt, $\rho = \lim_{k\to\infty} |\frac{k! 3^{k+1}(2k+2)!}{3^k(2k)!(k+1)!}| = \lim_{k\to\infty} \frac{3(2k+2)(2k+1)}{k+1} = \infty$.

35.) Man bestimme die Potenzreihenentwicklung von f um z_0:

a) $f(z) = \frac{3z^2+1}{z+1}, z_0 = 2, z_0 = i$
Für $z_0 = 2$ ist $f(z) = \frac{13}{3} + \frac{23}{9}(z-2) + \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k \frac{4}{3^{k+1}}(z-2)^k$ mit $\rho = 3$. Denn wir haben $f(z) = \frac{3z^2+1}{z+1}$ ist für $z \neq -1$ holomorph. Der Konvergenzradius ergibt sich durch $\rho = 2 - (-1)$. Denn -1 ist eine isolierte Singularität. Potenzreihenentwicklung: $\frac{1}{z+1} = \frac{1}{(z-2)+3} = \frac{1}{3}\frac{1}{\frac{z-2}{3}+1} = \frac{1}{3}\frac{1}{1-(-\frac{z-2}{3})} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}(z-2)^n$. Weiter

haben wir $f_2 = 3z^2 + 1 = 3((z-2)+2)^2 + 1 = 3((z-2)^2 + 4(z-2) + 4) + 1 = 3(z-2)^2 + 12(z-2) + 13$ und es ist $f = f_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z-2)^n$.
Für $z_0 = i$ ist $f(z) = (-1+i) + (3+2i)(z-1) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{(1+i)^{n+1}}(z-i)^n$ und $\rho = \sqrt{2}$.

$$f_1 = 3z^2 + 1 = 3(z-i)^2 + 6i(z-i) - 2$$
$$3z^2 + 1 = a_2(z-i)^2 + a_1(z-i) + a_0$$

Es ist sofort klar, dass $a_2 = 3$ und $a_0 = f_1(i) = 2$. Für a_1 ist $a_1 = f_1'(i) = 6i$. Für $f_2 = \frac{1}{z+1} = \frac{1}{(z-i)+1+i} = \frac{1}{1+i}\frac{1}{\frac{z-i}{1+i}+1} = \frac{1}{1+i}\frac{1}{1-(-\frac{z-i}{1+i})} = \frac{1}{1+i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(1+i)^n}(z-i)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(1+i)^{n+1}}(z-i)^n$ mit $|\frac{z-i}{1+i}| = |\frac{z-i}{\sqrt{2}}| < 1$, also $|z-i| < \sqrt{2}$. Dies ist funktionentheoretisch sofort klar. Denn wir entwickeln um $z_0 = i$ und die Singularität ist bei -1. Der Abstand zwischen den Punkte ist genau $\sqrt{2}$.

Wir haben also

$$\begin{aligned}
f &= f_1 f_2 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} 3\frac{(-1)^n}{(1+i)^{n+1}}(z-i)^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} 6i\frac{(-1)^n}{(1+i)^{n+1}}(z-i)^{n+1} \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty}(-2)\frac{(-1)^n}{(1+i)^{n+1}}(z-i)^n \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1+i)^{n+1}}(z-i)^n + \sum_{n=1}^{\infty} 6i\frac{(-1)^{n-1}}{(1+i)^n}(z-i)^n \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty}(-2)\frac{(-1)^n}{(1+i)^{n+1}}(z-i)^n \\
&= \frac{-2}{1+i} + \frac{2}{(1+i)^2}(z-i) + \frac{6i}{1+i}(z-i) \\
&\quad + \sum_{n=2}^{\infty}\Big(3(1+i)^2 - 6i(1+i) - 2\Big)\frac{(-1)^n}{(1+i)^{n+1}}(z-i)^n
\end{aligned}$$

Es ist nun weiter, $-\frac{2}{1+i} = -\frac{2(1-i)}{1-i^2} = -(1-i) = i-1$, $(1+i)^2 = 2i$, $\frac{2}{(1+i)^2} + \frac{6i}{1+i} = \frac{2+6i(1+i)}{(1+i)^2} = \frac{-4+6i}{2i} = \frac{-2+3i}{i} = (-2+3i)(-i) = 2i+3$. Wenn wir oben fortsetzen, ergibt sich:

$$f = i - 1 + (3+2i)(z-i) + 4\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(1+i)^{n+1}}(z-i)^n$$

b) $f(z) = \frac{z^2}{(z+i)(z-i)^2}, z_0 = 0$

$$f(z) = \frac{z^2}{(z+i)(z-i)^2} = -\frac{1}{4}\frac{1}{-i-z} - \frac{3}{4}\frac{1}{i-z} - \frac{i}{2}\frac{1}{(z-i)^2}$$

$$\frac{1}{-i-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(-i)^{n+1}}$$

$$\frac{1}{i-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{i^{n+1}}$$

$$-\frac{1}{(z-i)^2} = \left(\frac{1}{z-i}\right)' = \left(-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{i^{n+1}}\right)' = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{i^{n+1}} z^n$$

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{4}\frac{1}{i^{n+1}} + \frac{3}{4}\frac{1}{(-i)^{n+1}} - \frac{i}{2}\frac{n}{i^{n+1}}\right) z^n + \left(\frac{1}{i} + \frac{1}{-i}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^{n+1} + i^{n+1} - (-i)^{n+1} n}{1} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} i^{n+1}((-1)^{n+1} + 1 + (-n)^n) z^n$$

Weitermachen

Die Lösung geht noch weiter.

36.) Man bestimme den Konvergenzradius

$$\sum_{k=0}^{\infty} (n^2 + b^n) z^n \qquad b \in \mathbb{C}$$

1. Fall Für $b = 0$ ist $a_n = n^2$ und $R = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{n^2}{n^2+2n+1}| = 1$.

2. Fall Für $|b| \in (0,1)$ strebt b^n gegen 0 und es gilt, $R = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{n^2+b^n}{n^2+2n+1b \cdot b^n}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{1+\frac{b^n}{n^2}}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{b^n b}{n^2}}| = 1$.

3. Fall Für $|b| = 1$ strebt $|b|^n$ gegen 1, d. h. b^n ist beschränkt. Damit ist auch $R = 1$.

4. Fall Für $|b| > 1$ strebt b^n gegen ∞ und es ist $R = \frac{1}{|b|}$.

37.) Die Summe $\sum a_k z^k$ habe den Konvergenzradius ρ. Welchen Konvergenzradius hat

a) $\sum a_k z^{2k}$

b) $\sum a_k^2 z^k$

38.) Man entwickle in eine Potenzreihe um $z_0 = 0$:

a) $f(z) = \sin^2 z$
Es ist $\sin(2z) = \cos^2 z - \sin^2 z = 1 - 2\sin^2 z$ und es gilt:

$$\sin^2 z = 1/2 - 1/2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = -1/2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$$

b) $f(z) = \cos(z^2 - 1)$

$$\begin{aligned}\cos(z^2-1) &= \cos(z^2)\cos(-1) - \sin(z^2)\sin(-1)\\ &= \cos(z^2)\cos(1) + \sin(z^2)\sin(1)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{4n}\cos 1 + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{4n+2}\sin 1\end{aligned}$$

39.) Man bestimme die Art der Singularitäten:

a) $\frac{1-\cos z}{z^2}$
Die Funktion hat in $z_0 = 0$ eine hebbare Singularität:

$$1-\cos z = 1 - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}z^{2n}$$
$$\frac{1-\cos z}{z^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}z^{2n-2}$$

b) $e^{1/z} + 1/z$
Die Funktion besitzt in $z_0 = 0$ eine wesentliche Singularität, denn

$$e^{1/z} + 1/z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n + \frac{1}{z}$$

Für jedes $m \in \mathbb{Z}$ gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $k \leq m$ und $a_k \neq 0$.

40.) Man bestimme den Konvergenzradius von:

a) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}z^n$
Nach dem Quotientenkriterium ist $\rho = 4$.

b) $\sum_{n=0}^{\infty}(\cos n)z^n$

41.) Es habe $\sum a_k z^k$ den Konvergenzradius ρ. Welchen Konvergenzradius hat $\sum a_k^2 z^{2k}$ und $\sum \frac{a_k}{k!}z^k$?

42.) Bestimmen Sie die Laurentreihenentwicklung um $z_0 = 0$ für alle in Frage kommenden Kreisringe von:

$$f(z) = \frac{1}{z^2-5z+6} = \frac{1}{(z-3)(z-2)} = \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-2}$$

Wir entwickeln zunächst die Summanden:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z-3} &= -\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{3}} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n && |z|<3 \\
\frac{1}{z-3} &= \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{3}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{z}\right)^n && |z|>3 \\
\frac{1}{z-2} &= -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n && |z|<2 \\
\frac{1}{z-2} &= \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n && |z|>2
\end{aligned}$$

1. Fall Für $|z| < 2$:

$$f(z) = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n} - \left(-\frac{1}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n} = -\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3^{n+1}-\frac{1}{2^{n+1}}}\right)z^n$$

2. Fall Für $2 < |z| < 3$:

$$\begin{aligned}
f(z) &= -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n} - \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^n} \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}
\end{aligned}$$

3. Fall Für $|z| > 3$:

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^n} - \frac{2^n}{z^n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(3^n-2^n)z^{-n-1} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{-1}(3^{-n-1}-2^{-n-1})z^n
\end{aligned}$$

43.) Man bestimme die singulären Punkte und die Art der Singularitäten von

a) $\frac{z}{z^2+1}$
Wir müssen die Punkte $z_0 = i$ und $\widetilde{z_0} = -i$ betrachten:

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to i}(z-i)f(z) &= \lim_{z\to i}\frac{z(z-i)}{z^2+1} = \lim_{z\to i}\frac{z}{z+i} = \frac{i}{2i} = \frac{1}{2} \\
\lim_{z\to -i}(z+i)f(z) &= \lim_{z\to -i}\frac{z(z+i)}{z^2+1} = \lim_{z\to -i}\frac{z}{z-i} = \frac{-i}{-2i} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Das heißt, es gibt bei i und $-i$ einen Pol erster Ordnung.

b) $\frac{1}{z-z^3}$
Wir müssen die Punkte $0, 1$ und -1 betrachten:

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to 0} zf(z) &= \lim_{z\to 0} \frac{z}{z(1-z^2)} = 1 \\
\lim_{z\to 1}(1-z)f(z) &= \lim_{z\to 1} \frac{1-z}{z(1+z)(1-z)} = \frac{1}{2} \\
\lim_{z\to -1}(1+z)f(z) &= \lim_{z\to -1} \frac{1+z}{z(1+z)(1-z)} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Somit gibt es in allen drei Punkten einen Pol erster Ordnung.

c) $\frac{1}{\sin z}$
Die Funktion $g(z) = \sin z$ ist in $\mathbb{C}$ holomorph. Falls $g(z)$ eine Nullstelle erster Ordnung besitzt, so besitzt $f(z)$ auch einen Pol erster Ordnung. Für die Nullstellen $z_0 \in \mathbb{C}$ wissen wir, dass $z_0 = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ Nullstellen sind. Wir nehmen an, dass es ein $z = a + ib$ mit $b \neq 0$ und $\sin z = 0$ gibt. Dann ist $\sin(a + ib) = \sin a \cosh b + i \cos a \sinh b = 0$. Für $b \neq 0$ ist $\sinh b \neq 0$ und für alle reellen Zahlen b ist $\cosh b \neq 0$. Damit müsste $\cos a = \sin a = 0$ sein, was ein Widerspruch ist. Somit hat $f(z)$ an den Stellen $k\pi$ Poler erster Ordnung.

44.) Gewinnen Sie die Laurentreihe für

a) $f(z) = \frac{z}{(z^2-4)(z^2-1)}, 1 < |z| < 2$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(x-4)(x-1)} &= \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x-1} = \frac{1}{3(x-4)} - \frac{1}{3(x-1)} \\
\frac{1}{x-4} &= -\frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{x}{4}} = -\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{4^k} = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{4^{k+1}} \qquad |x| < 4 \\
\frac{1}{x-1} &= \frac{1}{x}\frac{1}{1-\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{x^k} = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{x^k} \qquad |x| > 1 \\
\frac{1}{(x-4)(x-1)} &= -\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{4^{k+1}} - \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{x^k} \qquad 1 < |x| < 4 \\
\frac{z}{(z^2-4)(z^2-1)} &= z\left(-\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{4^{k+1}} - \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{z^{2k}}\right) \\
&= -\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k+1}}{4^{k+1}} - \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{z^{2k-1}}
\end{aligned}$$

b) $f(z) = z^5 e^{1/z} = z^5 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{1/n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{5-n}}{n!}$

45.) Man beweise

a) Eine isolierte Singularität z_0 von f ist genau dann Pol m-ter Ordnung, wenn $\lim_{z\to z_0}(z - z_0)^m f(z)$ existiert und ist ungleich Null.

b) Sei g holomorph in einer Umgebung von z_0 und z_0 Nullstelle m-ter Ordnung von $g \Rightarrow {}^1\!/_g$ hat in z_0 einen Pol m-ter Ordnung.

c) Für eine ganz transzendente Funktion f gilt:

i. $\forall a \in \mathbb{C} \exists (z_n)\colon |z_n| \to \infty \wedge f(z_n) \to a$

ii. $\exists (z_n)\colon |z_n| \to \infty \wedge |f(z_n)| \to \infty$

46.) Man bestimme die Laurentreihenentwicklung für

$$f(z) = \frac{1}{(z^2-1)(z^2-4)^2} \qquad 1 < |z| < 2$$

Link einfügen

47.) Beweisen Sie Satz 1 aus Abschnitt 7(Rechenregeln für Residuen).

48.) Leiten Sie für $f(z) = e^{z+1/z}$ die Laurentreihendarstellung her:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z^{-n} + z^n) \qquad z \neq 0$$

$$c_n = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(n+j)!j!} \qquad n \geq 1, c_0 = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j!)^2}$$

49.) Man bestimme die Art der Singularität, Residuen und Hauptteil von $f(z) = (z+2)\sin\frac{1}{z+2}$.

50.) Man zeige:

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx = \pi\sqrt{2}$

b) $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4+6x^2+5}\,dx = \frac{\pi}{8}\left(\sqrt{5}-1\right)$

51.) Man bestimme $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{\pi}{6}$.

52.) Zeigen Sie, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{2a}\coth \pi a - \frac{1}{2a^2}$ für $a > 0$.

53.) Bestimmen Sie, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+9)^2}$ indem Sie zunächst eine Stammfunktion berechnen und dann mittels Residuentheorie.

54.) Man berechne

a) $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{16+x^2}\,dx$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx$

c) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3t}{5-4\cos t}\,dt = \frac{\pi}{12}$
Hinweis: Substituiere $z = e^{it}$ und zeige $dz = ie^{it}dt$. Dann ergibt sich, $\cos t = \frac{z+1/z}{2}, \cos 3t = \cdots \to \int_0^{2\pi} \ldots = \int_{\partial E} \ldots$ mit $\partial E = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\}$ positiv orientiert.

55.) Man zeige

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a+bn)^2} = \frac{\pi^2}{b^2} \cdot \frac{1}{\sin^2 \pi a/b}$$

wobei $\pi \neq 0$ und $a/b \notin \mathbb{Z}$.

56.) Berechnen Sie

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{\pi}{2a}$ mit $a > 0$

b) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+\cos t} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$ mit $a > 1$

c) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(a+b\cos t)^2}$ mit $a > |b|$ oder zu Beginn mit $a = 2, b = 1$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+4} = \frac{\pi}{4} \frac{1}{\sinh 2\pi} - \frac{1}{8}$
Hinweis:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n f(n) = -\sum \mathrm{Res} \frac{\pi}{\sin \pi z}[f(z)] \qquad \sum_{-\infty}^{\infty} f(n) = -\sum \mathrm{Res} \pi \cot \pi z [f(z)]$$

wobei $\sum \mathrm{Res}\, \varphi(z)[f(z)]$ Summe der Residuen von $\varphi(z)f(z)$ bezüglich der Pole von $f(z)$ und $f(z)$ meromorph.

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2+1)(n^2+4)}$

57.) Man berechne

a) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3t\, dt}{1-2p\cos 2t+p^2} = \frac{\pi(1-p+p^2)}{1-p}$ mit $|p| < 1$

b) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 2\varphi\, d\varphi}{1-2p\cos\varphi+p^2} = \pi \frac{1+p^4}{1-p^2}$ mit $|p| < 1$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2+a^2)^2} = \frac{\pi}{4a^3} \coth \pi a + \frac{\pi^2}{4a^2} \frac{1}{\sinh^2 \pi a} - \frac{1}{2a^4}$ mit $a > 0$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4+1} = \pi/2\, \Re(z_0 \cot \pi z_0) - 1/2 = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \frac{\sin \sqrt{2}\pi + \sinh \sqrt{2}\pi}{\sin^2 \pi/\sqrt{2} + \sinh^2 \pi/\sqrt{2}} - \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \frac{\sinh \sqrt{2}\pi + \sin \pi\sqrt{2}}{\cosh \pi\sqrt{2} - \cos \pi\sqrt{2}} - \frac{1}{2}$ mit $z_0 = e^{i\pi/4} = \frac{1}{2}\sqrt{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{2}$

58.) Man berechne

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\sinh \pi a n} = -\frac{1}{2\pi a} - \frac{1}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\sinh \frac{\pi n}{a}}$ für $a > 0$

b) $\frac{1}{e^{\pi}-e^{-\pi}} - \frac{2}{e^{2\pi}-e^{-2\pi}} + \frac{3}{e^{3\pi}-e^{-3\pi}} - \cdots = \frac{1}{8\pi}$

59.) Entwickeln Sie in Laurentreihen

a) $f = \frac{1}{(z^2+1)^n}$ um die Singularitäten von f (jeweils in einer punktierten Kreisscheibe) $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

b) $f = \frac{1}{(z^2+1)^n}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, z_0 = 0$ in geeigneten Kreisringen

B. Prüfungsklausur vom 2009-07-21

i. Definieren Sie die Begriffe analytische Funktion, isolierte und hebbare Singularität sowie Polstelle.
Siehe Definition 3.1 und Definition 5.1

ii. Formulieren Sie die Sätze: Cauchysche Integralformel für Kreise und Potenzreihenentwicklung holomorpher Funktionen (Konvergenzradius und Cauchyformel).
siehe Satz 4.1 und Satz 4.3

iii. Seien $z_1 = 1, z_2 = 2 + i$ die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks. Man suche die dritte Ecke $z_3 = a + ib$ (im mathematisch positiven Sinn).

iv. Bestimme den Konvergenzradius:

   a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)2^n}{3^n} z^n$

   b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\log^2(n+2))3^n n!}{2^{3n-4} n^{n+1}} z^n$

v. Berechnen Sie (alle Zweige):

   a) $\log \frac{1+i}{\sqrt{2}}$

   b) i^i

vi. Man bestimme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4}$

vii. Berechnen Sie $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2+16)^2}$

viii. Bestimmen Sie $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3t\,dt}{5/4 - \cos 2t}$.

Literaturverzeichnis

[1] Wolfgang Walter. Analysis II.

[2] Freitag. Funktionentheorie 1.

[3] Fischer, Kaul: Mathematik für Physiker 1 (Primärliteratur)

[4] Remmert: Funktionentheorie 1, 2

Index