Physik I Mechanik, Akustik, Wärme

Vorlesungsskript zur Vorlesung im WS 1999/2000

Prof. Dr. Rudolf Gross ^{und} Dr. Achim Marx

Walther-Meissner-Institut Bayerische Akademie der Wissenschaften und Lehrstuhl für Technische Physik (E23)

Technische Universität München

Walther-Meissner-Strasse 8 D-85748 Garching Rudolf.Gross@wmi.badw.de

©Rudolf Gross — Garching, Oktober 2001

Inhaltsverzeichnis

	Vory	wort		9
	Einl	eitung		11
1	Mec	hanik d	les Massenpunktes	17
	1.1	Vektor	en	18
		1.1.1	Skalare und Vektoren	18
		1.1.2	Komponentendarstellung von Vektoren	18
		1.1.3	Koordinatensysteme	18
		1.1.4	Produkte von Vektoren	18
	1.2	Physik	alische Größen	19
		1.2.1	Größen, Einheit und Dimension	19
		1.2.2	Länge und Längenmessung	21
		1.2.3	Flächen-, Raum- und Winkelmessungen	28
		1.2.4	Zeit und Zeitmessung	29
		1.2.5	Meßfehler	34
		1.2.6	Skalare und vektorielle Meßgrößen	36
	1.3	Kinem	atik des Massenpunktes	37
		1.3.1	Geschwindigkeit	39
		1.3.2	Beschleunigung	46
	1.4	Kraft ı	and Masse	57
		1.4.1	Das Trägheitsgesetz – Lex Prima	57
		1.4.2	Realdefinition der Kraft	58
		1.4.3	Das Kraftgesetz von Newton – Lex Secunda	59
		1.4.4	Das Wechselwirkungsgesetz – Lex Tertia	63
	1.5	Gravit	ation und Schwerkraft	66
		1.5.1	Das Gravitationsgesetz	66

	1.5.2	Schwere und träge Masse	71
	1.5.3	Die Keplerschen Gesetze	75
1.6	Anwen	dungsbeispiele	79
	1.6.1	Die Fallgesetze	79
	1.6.2	Die harmonische Schwingung	81
	1.6.3	Das mathematische Pendel	86
	1.6.4	Reibungskräfte	88
1.7	Träghe	itskräfte	91
	1.7.1	Die d'Alembertsche Gleichung	91
	1.7.2	Der Trägheitswiderstand	93
	1.7.3	Die Zentrifugalkraft	94
1.8	Inertial	I- und Nichtinertialsysteme	01
	1.8.1	Inertialsysteme	01
	1.8.2	Nicht-Inertialsysteme	05
	1.8.3	Moderne Theorie der Gravitation	21
1.9	Die En	ergie	24
	1.9.1	Arbeit und Leistung	24
	1.9.2	Kinetische und potentielle Energie – Der Energieerhaltungssatz 1	27
	1.9.3	Beispiele zur potentiellen Energie und Energieerhaltungssatz	35
	1.9.4	Das Prinzip der virtuellen Arbeit	41
	1.9.5	Was ist Energie ?	45
1.10	Der Im	puls	46
	1.10.1	Impuls und Kraftstoß	46
	1.10.2	Impulserhaltungssatz	49
	1.10.3	Massenmittelpunkt und Schwerpunktsatz	55
	1.10.4	Die Stoßgesetze	51
	1.10.5	Stoßvorgänge im Schwerpunktsystem	69
	1.10.6	Winkelverteilung und Wirkungsquerschnitt	73
1.11	Der Dr	ehimpuls	76
	1.11.1	Drehmoment und Drehimpuls	76
	1.11.2	Der Drehimpulserhaltungssatz	81
	1.11.3	Der Drehimpuls bezüglich des Massenmittelpunktes	87
1.12	Zusam	menfassung der Erhaltungssätze der Mechanik	91

2	Mec	chanik des Starren Körpers 193					
	2.1	Der Starre Körper					
		2.1.1 Bewegungsgleichungen und Freiheitsgrade					
		2.1.2	Der Schwerpunkt	199			
	2.2	Statik	des starren Körpers	202			
		2.2.1 Gleichgewicht		202			
		2.2.2	Balkenwaage und Hebel	204			
	2.3	Dynan	nik bei fester Drehachse	207			
		2.3.1	Das Trägheitsmoment	207			
		2.3.2	Arbeit und Energie	211			
		2.3.3	Trägkeitsmomente einfacher Körper	215			
		2.3.4	Der Steinersche Satz	217			
		2.3.5	Drehschwingungen	220			
		2.3.6	Vergleich von Rotations- und Translationsbewegung	224			
	2.4	2.4 Dynamik bei freier Drehachse		225			
		2.4.1	Das Trägheitsellipsoid	225			
	2.5	Kreise	lprobleme	235			
		2.5.1	Der kräftefreie symmetrische Kreisel	235			
		2.5.2	Der schwere symmetrische Kreisel	238			
		2.5.3	Der Kreiselkompaß	241			
	2.6	Abrollbewegungen					
3	Mec	hanik d	leformierbarer Körper	245			
-	3.1	Grund	vorstellungen zur Materiestruktur	246			
	3.2	Elastor	mechanik von Festkörpern	251			
		3.2.1	Spannung und Dehnung	251			
		3.2.2	Elastizitätsmodul	254			
		3.2.3	Poisson- oder Querzahl	254			
		3.2.4	Schub-, Scher- oder Gleitmodul	255			
		3.2.5	Kompressionsmodul	257			
		3.2.6	Biegung	258			
		3.2.7	Plastische Deformation	259			
		3.2.8	Materialparameter	261			
	3.3	Hydro- und Aerostatik					

		3.3.1	Kompression von Flüssigkeiten	262
		3.3.2	Stempeldruck	262
		3.3.3	Schweredruck, hydrostatischer Druck	264
		3.3.4	Aerostatik	270
	3.4	Oberflä	ichenphänomene	275
		3.4.1	Oberflächenenergie, Oberflächenspannung	275
		3.4.2	Kapillarität, Kohäsion, Adhäsion	279
	3.5	Hydro-	und Aerodynamik	283
		3.5.1	Hydrodynamische Bewegungsgleichungen	284
		3.5.2	Die Bernoullische Gleichung	286
		3.5.3	Anwendungsbeispiele der Bernoulli-Gleichung	290
		3.5.4	Umströmung fester Körper durch ideale Flüssigkeiten	294
		3.5.5	Dynamische Viskosität – Laminare und turbulente Strömung	297
4	Schy	vingung	zen und Wellen	309
•	4 1	Schwir	Joungen	310
		4.1.1	Lineare Systeme	310
		4.1.2	Überlagerung und Zerlegung von Schwingungen	312
		4.1.3	Gedämpfte Schwingung	317
		4.1.4	Erzwungene Schwingung	319
		4.1.5	Parametrische Verstärkung	327
		4.1.6	Gekoppelte Systeme	328
	4.2	Wellen		332
		4.2.1	Transversalwellen	333
		4.2.2	Longitudinalwellen	337
		4.2.3	Die Wellengleichung	337
		4.2.4	Reflexion. Brechung und Interferenz von Wellen	340
		4.2.5	Stehende Wellen	343
		4.2.6	Schallwellen	345
		4.2.7	Energie im Schallfeld	348
		4.2.8	Der Doppler-Effekt	350
		-		-

5	Wär	irmelehre 35.				
5.1 Temper			ratur und Gasgesetze	356		
		5.1.1	Temperaturmessung	356		
		5.1.2	Thermische Ausdehnung fester und flüssiger Körper	361		
		5.1.3	Thermische Ausdehnung von Gasen	365		
		5.1.4	Stoffmenge – Avogadro-Gesetz	369		
		5.1.5	Allgemeine Zustandsgleichung von Gasen	372		
	5.2	Die Ha	uptsätze der Wärmelehre	377		
		5.2.1	Wärmemenge und Wärmekapazität	377		
		5.2.2	Der 1. Hauptsatz der Wärmelehre	381		
		5.2.3	Zustandsänderungen idealer Gase	382		
		5.2.4	Reversible und irreversible Prozesse	389		
		5.2.5	Carnotscher Kreisprozeß	391		
		5.2.6	Der 2. Hauptsatz der Wärmelehre	396		
5.3 Phasenumwandlungen und Lösungen		umwandlungen und Lösungen	403			
		5.3.1	Änderung des Aggregatzustandes	403		
		5.3.2	Lösungen	419		
	5.4	Kinetis	che Gastheorie	425		
		5.4.1	Gaskinetischer Druck	425		
		5.4.2	Boltzmannsche Energieverteilung	427		
	Anh	ang		433		
	А	Literat	ur	433		

Vorwort

Das vorliegende Skript ist der erste Teil einer Zusammenstellung des Stoffes der klassischen Experimentalphysik, wie er in den Vorlesungen Physik I bis III für Studierende der Physik und Mathematik angeboten wird.

Das Skript entstand aus der Vorlesung Physik I für Studierende der Physik und Mathematik, die von Prof. Gross erstmals im Wintersemester 1999/2000 an der Universität zu Köln gehalten wurde. Es beinhaltet nicht den Stoff der mathematischen Ergänzungsvorlesung. Die vorliegende Stoffzusammenstellung soll den Studienanfängern zum einen dabei helfen, den Vorlesungen konzentrierter folgen zu können, zum anderen soll sie einen Anhaltspunkt für die Stoffauswahl beim notwendigen Nacharbeiten der Vorlesungen anhand von den meist sehr umfangreichen klassischen Lehrbüchern geben.

Das Vorlesungsskript enthält ohne Zweifel noch einige Fehler. Der Autor ist für Hinweise auf solche Fehler dankbar.

München, Oktober 2001

R. Gross

Einleitung

Exakte Wissenschaften

Die Mathematik und die Naturwissenschaften zählt man zu den *exakten Wissenschaften*, d.h. zu den Wissenschaften, die nach exakten Kriterien vorgehen. Im Unterschied zur Mathematik sind die Naturwissenschaften aber dadurch ausgezeichnet, daß das Kriterium für den Wahrheitsgehalt einer Aussage ihre Nachprüfbarkeit in einem Experiment ist. Argumente wie der *gesunde Menschenverstand* oder die *mathematische Eleganz einer physikalischen Theorie* haben keinerlei Beweiskraft. Ein Experiment soll *objektiv* sein. Es soll vor allem unabhängig vom speziell gewählten Versuchsaufbau und vom das Experiment durchführenden Experimentator sein. Das heißt, ein Experiment muß *reproduzierbar* immer zum selben Ergebnis führen. Hierbei muß die Meßgenauigkeit der verwendeten Apparatur im Rahmen einer Fehlerrechnung bewertet werden.

Einer der ersten Naturforscher, der in der Neuzeit dieses Prinzip in Anlehnung an Aristoteles formuliert hat, war wohl Paracelsus:

"Alein die erfarenheit bleibt in der warheit"

Übersetzt man hierbei "erfarenheit" mit "Experiment", so hat man eine gute Definition für das, was Naturwissenschaft ist.¹

Naturgesetze

Schon immer haben Menschen die Natur beobachtet und die beobachteten Erscheinungen gesammelt, geordnet und teilweise in künstlerischen Bildern und dichterischer Sprache beschrieben. Zunehmend bestand aber das Bedürfnis, die Naturerscheinungen (z.B. Jahreszeiten, Ebbe und Flut, Feuer, Frieren und Sieden von Wasser) nicht nur beschreiben, sondern auch verstehen zu können. Heute ist es ein zentrales Anliegen der Naturwissenschaften, die Gesetze, nach denen die vielfältigen Vorgänge in der Natur ablaufen, zu verstehen. Hierbei betrifft die zentrale Frage das "Wie" und nicht das "Warum" — letztere Frage fällt in den Bereich der Philosophie.

Hinter dem Wunsch des Menschen, die Naturerscheinungen zu verstehen und auf allgemein gültige Gesetze zurückzuführen, steht sowohl der reine Erkenntnisdrang (Grundlagenforschung) als auch die Hoffnung, sich die Natur dienstbar zu machen (anwendungsbezogene Forschung). Bei der Suche nach allgemeinen Regeln, nach denen Prozesse in der Natur ablaufen, muß man sich darüber im Klaren sein,

¹Es sei hier angemerkt, daß eine Sache, die keine Wissenschaft ist, nicht notwendigerweise schlecht ist. Zum Beispiel ist die Liebe keine Wissenschaft (jedenfalls keine exakte). Wenn also gesagt wird, irgendeine Sache sei keine Wissenschaft, so bedeutet das nicht, daß diese Sache etwas Schlechtes ist, sondern daß es eben einfach keine Wissenschaft ist.

daß diese Regeln nicht die vollständige Wahrheit sind, sondern wahrscheinlich nur eine Näherung. Es ist anzunehmen, daß wir heute noch nicht alle Gesetze kennen und daß wir unseren Wissensstand von Jahr zu Jahr durch das Finden neuer Gesetze erweitern werden. Dabei kann es sich herausstellen, daß die heute bekannten Gesetze teilweise falsch sind. Damit stellt sich natürlich sofort die unumgängliche Frage, warum man heute Gesetzmäßigkeiten lernen soll, die sich eventuell in Zukunft als falsch herausstellen werden. Die Antwort darauf ist einfach: Wir lernen neue Gesetzmäßigkeiten nur durch die Erweiterung unseres heutigen Kenntnisstands.² Die Gesetze, die wir heute lernen, entsprechen unserem heutigen Wissensstand, d.h. sie erklären alle bis zum heutigen Tage beobachteten Naturvorgänge. Es ist trotzdem klar, daß sie vielleicht eines Tages aufgrund von neuen Beobachtungen revidiert werden müssen, da sie sich nur als Näherung für einen ganz bestimmten Fall herausgestellt haben und eigentlich falsch waren³.

Um anschaulich klarzumachen, wieso eine aus der Beobachtung gewonnene Gesetzmäßigkeit falsch sein kann, sei hier eine auf den Physiker **Feynmann** zurückgehende Anekdote angeführt:

Angenommen es versucht jemand die Regeln des Schachspiels zu verstehen, indem er das Schachspiel sorgfältig beobachtet. Dabei stellt er z.B. fest, daß sich einer der Läufer nur auf weißen und der andere nur auf schwarzen Feldern bewegen darf. Der Beobachter schließt folgerichtig, daß die Läufer nur diagonal ziehen dürfen. Dieses Gesetz scheint auch nach langer Beobachtungszeit zu stimmen. Eines Tages stellt er aber fest, daß ein Spieler zwei Läufer auf schwarzen Feldern und keinen auf einem weißen Feld hat – wie ist das möglich? Es scheint nun, daß das vorher gefundene Gesetz falsch ist. Dies ist aber nicht so – der Beobachter hat vielmehr eine Regel noch gar nicht gekannt, nämlich die der Bauernumwandlung: Der Läufer auf dem weißen Feld war geschlagen worden, ein Bauer hat die gegnerische Grundlinie erreicht und wurde in einen Läufer auf einem schwarzen Feld umgewandelt. Der Grund war also nicht, daß das alte Gesetz "Läufer bewegt sich diagonal" falsch war, sondern daß es ein weiteres, für den Beobachter bis dahin unbekanntes Gesetz "Bauernumwandlung" gibt.

Ein weiteres Grundprinzip der Naturwissenschaften ist die Suche nach der *Minimalzahl an Grundgeset*zen, mit denen man durch Kombinatorik alle beobachteten Naturphänomene erklären kann. Die Grundgesetze selbst werden nicht weiter hinterfragt und sind meist idealisierte Extrapolationen, die in der Natur von Störeinflüssen verdeckt werden. Diese Grundgesetze bilden als Axiomensystem⁴ die Grundlage für die theoretische Durchdringung eines Wissensgebiets. Alle Folgerungen aus einem solchen Axiomensystem müssen experimentell überprüfbar sein.

Es wurde versucht, ähnlich wie die Mathematik auch die Physik auf einem Axiomensystem aufzubauen, was allerdings nicht gelang. Als Axiome der Physik kann man aber auch *Prinzipien* oder *Erhaltungsätze* ansehen. Diese stellen *heuristische* (d.h. erfundene) Sätze dar, die durch Erfahrung zu bestätigen sind. Wichtige Beispiele sind das *Energieprinzip* (= Erhaltung der Energie), das *Kausalititsprinzip* (= jede Wirkung hat ihre Ursache), das Prinzip von *actio* = *reactio* (Wirkung = Gegenwirkung), das *Trägheitsprinzip*, das **Newton**sche Grundgesetz der Dynamik oder das **Pauli**sche Prinzip.⁵

Als weitere Forderungen, die nicht beweisbar sind, gibt es die *Postulate*. Ihr Geltungsbereich ist eingeschränkt, wie z.B. die **Bohr**schen Postulate, die sich auf das **Bohr**sche Atommodell beziehen. Im

²Als Beispiel sei hier das Gesetz von der Konstanz der trägen Masse angeführt. Erst als man Massen auf sehr hohe Geschwindigkeiten beschleunigen konnte, hat man festgestellt, daß die träge Masse geschwindigkeitsabhängig ist. Dadurch ist also das alte Gesetz für hohe Geschwindigkeiten zwar falsch, es ist aber eine sehr gute Näherung für Geschwindigkeiten, die in unserem täglichen Leben vorkommen.

³So könnte es z.B. mit der heute angenommenen Stabilität des Protons sein. Es sind zur Zeit Experimente im Gange, den Zerfall des Protons nachzuweisen.

⁴Setzt man eine allgemein gültige Aussage als wahr voraus, ohne daß man sie beweisen kann, so spricht man von einem Axiom (griechisch = Forderung). Ein solches Axiom ist z.B. in der Geometrie, daß sich zwei parallele Geraden niemals schneiden. Man kann dies nicht beweisen.

⁵Es gibt aber auch Prinzipien, die nicht auf bestimmte Gebiete beschränkt sind und auch beweisbar sind, wie das **Archimed**ische Prinzip oder das **Fermat**sche Prinzip.

allgemeinen wird die Gültigkeit von Postulaten durch die Ergebnisse der Theorie, deren Ergebnisse mit den Experimenten übereinstimmen, gerechtfertigt.

Physik

Die *Physik* ist neben der Chemie, Biologie und den Geowissenschaften ein Teilgebiet der Naturwissenschaften. Es ist schwierig, eine prägnante Definition für "Physik" zu geben. Das griechische Wort "physis" bedeutet Ursprung, Naturordnung, das Geschaffene (Welt, Geschöpf). Das Wort Physik hat sich daraus entwickelt. Wir verstehen darunter die geistige, quantitative Erfassung aller Erscheinungen in der unbelebten Natur unter Zurückführung auf allgemein gültige Gesetzmäßigkeiten. In der Chemie werden dagegen die Zusammensetzung sowie Umsetzungen der Materie, die als Verbindung der chemischen Elemente verstanden wird, untersucht. In der Biologie werden Lebensvorgänge erforscht.

Wenn wir das Wort Physik für ein Lexikon definieren müßten, könnten wir folgendes angeben:

Physik ist die grundlegende Naturwissenschaft, die einerseits nach den wenigen, grundlegenden Prinzipien zur Beschreibung der unbelebten Natur sucht und andererseits die Naturerscheinungen dadurch verstehen will, daß sie diese als notwendige Konsequenz solcher Prinzipien nachweist.^{*a*}

^{*a*}Für die anderen Naturwissenschaften mag diese Definition überheblich klingen, sie ist aber eher als anspruchsvoll zu bezeichen. Biologen und Chemiker dürfen zu recht darauf hinweisen, daß Physiker noch nicht einmal den Grashalm verstehen oder das Wasser. Das ist zur Zeit noch zu schwer.

Wenn wir das Wort Physik einem Nicht-Naturwissenschaftler erklären müssen, wäre vielleicht folgende Definition angebracht:

Physik ist, unsere Natur und Umgebung mit offenen Augen aufmerksam zu betrachten und nie aufzuhören, die Frage "Wie" zu stellen.

Die Physik ist sicherlich die fundamentalste unter den Naturwissenschaften. Die Physik hat immer einen wichtigen Einfluß auf die Entwicklung aller Naturwissenschaften (Chemie, Biologie, Geowissenschaften) gehabt, die auf den Gesetzen der Physik aufbauen. Die von den Menschen vorgenommene Unterteilung der verschiedenen naturwissenschaftlichen Disziplinen ist aber künstlich und fließend. Die Natur selbst kennt eine solche Aufteilung nicht, sie ist eine Einheit.⁶

Naturwissenschaft und Technik

Die stürmische Entwicklung der Naturwissenschaften, insbesondere der Physik, hat in den letzten etwa 200 Jahren zu einer rasanten Entwicklung der Technik geführt. Umgekehrt hat aber auch die technische Entwicklung einen beträchtlichen Einfluß auf die naturwissenschaftliche Forschung gehabt, da viele Experimente nur durch den technischen Fortschritt ermöglicht wurden. Es besteht also eine ständige, befruchtende Wechselwirkung zwischen Naturwissenschaften und Technik. Während das Ziel der Naturwissenschaften es ist, die Ursachen und Zusammenhänge der Naturvorgänge zu erfassen und zu verstehen, ist das Ziel der Technik, die Anwendung dieses Kenntnisse (hoffentlich) zum Wohle der Menschheit.

⁶Eine schöne Darstellung der Beziehung der Physik zu den anderen Naturwissenschaften ist in **R. P. Feynman**, Vorlesungen über Physik, Band I, Oldenburg Verlag München gegeben.

Methodik

Um die Naturvorgänge zu beobachten, zu verstehen, durch bestimmte Gesetzmäßigkeiten zu beschreiben und diese in geeigneten Experimenten zu überprüfen, bedarf es einer geeigneten Methodik. Vereinfacht läßt sich das methodische Vorgehen eines Naturwissenschaftlers wie folgt beschreiben:

	Tätigkeit	Ziel			
1	Beobachten	Sammeln von Erfahrungen			
2	Nachdenken über geeignetes Experiment	Auswahl eines Meßverfahrens			
3	Durchführen des Experiments, messen	Verifizierung von Zusammenhängen			
4	Diskussion von Meßfehlern	Belegen der Zuverlässigkeit des durch-			
		geführten Experiments			
5	Aufsuchen von Gesetzmäßigkeiten	Formulieren einer Hypothese			
6	Nachprüfen der sich aus der Hypothese erge-	Kontrolle der Hypothese			
	benden Konsequenzen				
7	Mathematische Formulierung der Hypothese	Erhebung der Hypothese zum Gesetz			
8	Zurückführen von mehreren Ge-	Ableitung einer Minimalzahl von Grundge-			
	setzmäßigkeiten auf wenige Grundgesetze	setzen			

Die Hilfsmittel des Naturwissenschaftlers sind einerseits $Me\beta genäte$, die ständig weiterentwickelt werden, und andererseits das *kausal-logische Denken*. Dabei sind folgende 3 Prinzipien zu beachten:

1. Es muß eine Verknüpfung zwischen Ursache und Wirkung geben \rightarrow Kausalitätsprinzip (siehe Abb. 1).



<u>Beobachtete Wirkung:</u> Fe-Körper wird nach unten gezogen

<u>Ursacne:</u> zunächst unklar, da Black Box nicht einsehbar

<u>Aha-Erlebnis:</u> In Black Box ist Schalter, Kabel und Elektromagnet !!

Abbildung 1: Beobachtung einer Wirkung — Suche nach der Ursache.

- 2. Voraussetzung für eine mathematische Beschreibung (Theorie) ist eine Idealisierung der Ergebnisse von Experiment und Beobachtung → Modellvorstellung.
- 3. Das Ergebnis des Experiments hängt von der Art des Experiments selbst ab es liefert nur Teilwahrheiten (z.B. Teilchen-Welle Dualismus bei Licht).

Im Gegensatz zur Mathematik ist in den Naturwissenschaften das Experiment der Prüfstein allen Wissens, d.h. entscheidend für den Wahrheitsgehalt einer Gesetzmäßigkeit ist ihre Nachprüfbarkeit in einem Experiment. Theorien sind nur dann sinnvoll, solange sie im Einklang mit den Ergebnissen von Experimenten sind. Theorien, die durch Experimente nicht nachprüfbar sind, sind zunächst sinnlos (und können dem Bereich der Philosophie zugeordnet werden). Dem Experiment kommt in den Naturwissenschaften deshalb eine besondere Bedeutung zu. Experimente müssen ferner mit größter Sorgfalt durchgeführt werden, um zuverlässige Aussagen zu liefern.⁷

⁷Schlechte Experimente bzw. unvorsichtige und unkritische Experimentatoren haben immer wieder zu *falschen* Entdeckungen geführt. Für die jüngere Vergangenheit ist hierbei die Entdeckung einer 5. Naturkraft (Eötvös-Experiment), freier Quarks,

Beobachtungsprozeß

Jede Beobachtung geht über unsere Sinnesorgane (Augen, Ohren, Nase, Tastsinn, etc.). Dabei spielt das Auge eine besonders große Rolle. Man führt deshalb möglichst viele Vorgänge auf sichtbare Veränderungen zurück (Ausschlag von Meßgerät, Oszilloskop, Computer-Bildschirm, etc.). Es ist deshalb sehr wichtig klarzustellen, inwieweit man sich auf das Sinnesorgan Auge verlassen kann. In Abbildung 2 wird gezeigt, wie sehr man *optischen Täuschungen* unterliegen kann.⁸



Abbildung 2: Optische Täuschungen: (a), (b) Die beiden Geraden sind parallel, erscheinen aber durch die schrägen Linien geknickt. (c) Die beiden Strecken sind gleichlang, erscheinen aber durch die Pfeile verschieden. (d), (e) Die beiden inneren Kreise haben den gleichen Durchmesser. (f) Die beiden Formen haben dieselbe Höhe.

Abbildung 2 und verschiedene Versuche zu optischen Täuschungen mahnen zur Vorsicht bei der Auswertung von Beobachtungen. Manchmal versagen unsere Sinnesorgane – wir nehmen die Wirklichkeit subjektiv und deshalb häufig falsch wahr. Wir brauchen also Beobachtungshilfsmittel – Meßgeräte – die objektiv sind und den Meßbereich unserer Sinnesorgane erweitern.

Lernprozeß

Jene wagemutigen jungen Leute, die ein Studium der Physik beginnen und ein Skript für Anfangssemester haben ein gemeinsames Problem: Es besteht noch keine Übereinkunft, wie man sich verständigen

3. Farbige Schatten

5. Adrionsche Zwerge

der kalten Fusion oder von 14 keV Neutrinos zu nennen. Allerdings setzt sich die Wahrheit immer sehr schnell durch, da wichtige Entdeckungen sofort überprüft werden.

⁸Weitere Demonstrationsversuche zu optischen Täuschungen:

^{1.} Exnersche Spirale

^{2.} Machsche Streifen

^{4.} Schefflerscher Igel

^{6.} Erkennung von Mustern

kann. Die Umgangssprache ist meist zu ungenau, die Vorkenntnisse aus der Schule sind zu verschieden und es bestehen unglaublich falsche Vorstellungen, worauf es beim Studium ankommt. Dieses Verständigungsproblem muß im Rahmen von Gesprächen und Diskussionen gelöst werden.

Ein großer Teil der StudienanfängerInnen wird sich auch auf einen neuen Lernstil umstellen müssen. In der Schule wurde der Lernstoff von den Lehrern quasi eingetrichtert, d.h. solange vorgekaut, bis er verstanden wurde. Der Dozent an einer Hochschule versteht sich dagegen als Vermittler von Fakten, er zeigt Zusammenhänge auf und versucht, Interesse am Lernstoff zu wecken. Dieser muß aber von den Hörern selbst anhand von Lehrbüchern und Skripten weiter aufgearbeitet werden, um ihn zu begreifen.

Kapitel 1

Mechanik des Massenpunktes

Die Mechanik ist die Lehre von der Bewegung und der Formänderung von Körpern unter dem Einfluß äußerer Kräfte. Die Aufgabe der Mechanik ist es, die Bewegung und Verformung von Körpern unter der Einwirkung von Kräften quantitativ zu beschreiben. Die Natur der Kräfte (Gravitations-, elektromagnetische oder Kernkräfte) ist hierbei von untergeordneter Bedeutung. In diesem Sinne ist die Mechanik grundlegend für die gesamte Physik.

In der Antike beschäftigten sich die Naturforscher wie **Aristoteles**, **Archimedes** oder **Ptolenäus** hauptsächlich mit mechanischen Problemen wie z.B. den Hebelgesetzen oder dem Auftrieb. Die antike Tradition wurde im frühen Mittelalter von den Arabern fortgesetzt und an die Neuzeit weitergegeben. Durch die systematische Erforschung der Naturgesetze durch Experimentieren beginnt in der Neuzeit die Entwicklung der modernen Physik. Stellvertretend für viele andere soll hier **Galilei** (1564 – 1642, Trägkeitsgesetz, Fallgesetze) genannt werden. Eine wesentliche Erkenntnis dieser Zeit war, daß die irdische und die Himmelsmechanik denselben Gesetzen genügen (Kopernikus, Brahe, Kepler). Die erste vollständige Formulierung der Grundgesetze der Mechanik (und der Gravitation) erfolgte dann durch **Newton** (1643 – 1727). Bis etwa Mitte des 19. Jahrhunderts war dann der formale Aufbau der klassischen theoretischen Mechanik zu einem vorläufigen Abschluß gekommen (**d'Alembert, Lagrange, Hamilton**). Anfang des 20. Jahrhunderts brachte die spezielle Relativitätstheorie von **Einstein** (1906) eine einschneidende Revision des Raum-Zeit-Begriffs. Schließlich wurde in den Arbeiten von **Bohr, Schrödinger, Heissenberg** u.a. gezeigt, daß die klassische Mechanik als Grenzfall einer allgemeineren Theorie, der Quantenmechanik, betrachtet werden kann.

Der in folgendem behandelte Stoff umfaßt die klassische **Newton**sche Mechanik und ist in vier Hauptabschnitte gegliedert:

- 1. Mechanik des Massenpunktes
- 2. Mechanik des starren Körpers
- 3. Mechanik deformierbarer Medien
- 4. Schwingungen und Wellen

In der Mechanik des Massenpunktes sieht man von der räumlichen Ausdehnung eines Körpers, seiner Form, Orientierung oder Drehung um eine körpereigene Achse ab. Man idealisiert den Körper als massebehaftetes, punktförmiges Objekt. Dadurch reduziert sich die Mechanik auf die Beschreibung der Bewegung von Massepunkten unter dem Einfluß äußerer Kräfte. Diese in der Punktmechanik gemachte Näherung ist für die Beschreibung der Bewegung von Körpern auf Bahnen gut, solange der Krümmungsradius der Bahnen groß gegenüber dem Durchmesser der betrachteten Körper bleibt.

1.1 Vektoren

Es soll in diesem Abschnitt zunächst der Begriff des Vektors eingeführt werden. Es wird sich später herausstellen, daß sich durch die Vektorschreibweise physikalische Gesetze in einer vom speziellen Bezugssystem unabhängigen Darstellung ausdrücken lassen, in der bestimmte Symmetrien bzw. Invarianzen der Naturgesetze zum Ausdruck kommen. Um den Gang der physikalischen Argumentation später nicht allzusehr zu unterbrechen, erscheint es sinnvoll, einige allgemeine Bemerkungen zum Vektorbegriff voranzustellen.

- 1.1.1 Skalare und Vektoren
- 1.1.2 Komponentendarstellung von Vektoren
- 1.1.3 Koordinatensysteme
- 1.1.4 Produkte von Vektoren

1.2 Physikalische Größen

1.2.1 Größen, Einheit und Dimension

Definition einer physikalischen Größe

Alle in der Natur vorkommenden Eigenschaften (z.B. Länge, Zeit, Temperatur, etc.), die durch eine physikalische Meßvorschrift erfaßt werden können, nennt man *physikalische Gößen*. Das Prinzip jeder Messung ist der Vergleich der physikalischen Größe mit einer *Maßeinheit*, wobei ihr eine *Maßzahl* zuordnet wird, d.h. das Ergebnis einer Messung ist die *Maßzahl*. Man kann dann eine physikalische Größe A quantitativ mit einer Größe B gleicher Qualität vergleichen.

Eine physikalische Größe wird folglich immer durch ein Produkt *Maßzahl* mal *Maßeinheit* charakterisiert:

$$\begin{array}{rcl} {\rm Gr{\"o}{\it f}{\it 6e}} & = & {\rm Ma{\it f}{\it 2ahl}} \times {\rm Ma{\it f}{\it 6e}{\it inheit}} \\ {\rm symbolisch}: & A & = & \{A\} \times [{\rm A}] \\ {\rm Beispiel}: & L & = & 2,0\,{\rm m} \end{array}$$

Unter [A] wird also die Maßeinheit der Größe A und unter $\{A\}$ ihre Maßzahl verstanden. Man kann selbstverständlich verschiedene physikalische Größen gleicher Qualität addieren, auch dann wenn sie verschiedene Maßeinheiten besitzen (z.B. kann eine Länge von 1 km zu einer Länge von 1 Meile addiert werden). Man kann allerdings keine physikalischen Größen unterschiedlicher Qualität (z.B. Länge und Zeit oder Zeit und Temperatur) addieren.

Eine physikalische Größe ist generell unabhängig von der Wahl der benutzten Einheit. Die Länge eines Stabes ändert sich nicht, wenn sie mit verschiedenen Maßstäben bestimmt wird. Es kann also festgestellt werden, daß *eine physikalische Größe invariant gegenüber dem Wechsel der Einheit ist*. Aus diesem Grund werden physikalische Gesetze immer in Form von Größengleichungen (z.B. Geschwindigkeit = Länge pro Zeit) und nicht in Form von Zahlenwertgleichungen formuliert.

Internationales Einheitensystem

Im Jahre 1790 begann man (im Geist der französischen Revolution) solche Einheiten zu suchen, die nicht von der zufälligen Größe des menschlichen Körpers (z.B. Elle, Fuß) abhängen. Man wählte für die Längeneinheit den vierzigmillionsten Teil des durch Paris gehenden Erdmeridians. Da eine solche Messung schwer durchzuführen ist und lange dauert, hat man in Paris einen Maßstab dieser neuen Längeneinheit angefertigt, das sogenannte *Urmeter*.¹

Seit langer Zeit bemüht man sich, für alle Arten von physikalischen Größen international gültige Einheiten festzulegen. Das Ziel ist dabei, mit möglichst wenigen *Grund-* oder *Basiseinheiten* auszukommen. Es hat vor der Festlegung der Einheiten zahlreiche Diskussionen über die Wahl der Basiseinheiten gegeben, deren Wahl nicht von grundlegender physikalischer Bedeutung ist. Bei der Festlegung der Einheiten haben vielmehr praktische Gründe den Ausschlag gegeben. Man hat darauf geachtet, daß die Basiseinheiten

¹Später wurden 20 gleiche und verbesserte Exemplare aus einer beständigen Legierung von 90% Platin und 10% Iridium hergestellt und in die wichtigsten Länder verteilt. Eines blieb in Paris und wurde die international gültige Längeneinheit. Im Jahr 1875 ist ein Staatsvertrag (Internationale Meterkonvention) in Kraft getreten, welcher die Schaffung und einheitliche Verwendung von Maßeinheiten anstrebt. Dieser Vertrag gilt noch heute.

- allgemein bekannt,
- gut reproduzierbar,
- und bequem anwendbar sind.

Alle Größen der Mechanik lassen sich auf 3 Grundeinheiten zurückführen. Nimmt man die anderen Gebiete der Physik hinzu, so genügen insgesamt 7 Grundeinheiten. Diese Basiseinheiten dienen dann zur Bildung aller anderen sogenannten *abgeleiteten Einheiten*. Abgeleitete Einheiten sind z.B. [Geschwindigkeit] = [Länge]/[Zeit] oder [Fläche] = [Länge]² etc..

Auf der Conférence Général des Poids et Mesures (CGPM) im Jahre 1960 und 1971 wurde das Internationale Einheitensystem (Système Internationale d'Unités: SI) beschlossen. Es basiert auf folgenden Grundgrößen:²

Basisgröße und Zeichen		SI-Einheit und Zeichen	
Länge	l	Meter	m
Masse	m	Kilogramm	kg
Zeit	t	Sekunde	S
elektrische Stromstärke	Ι	Ampere	А
thermodynamische Temperatur	T	Kelvin	Κ
Lichtstärke	\mathcal{I}	Candela	cd
Stoffmenge	ν	Mol	mol

Die Einführung einer Größe über eine Meßvorschrift nennt man *Realdefinition*. Dabei sind in der klassischen, nichtrelativistischen Mechanik Länge und Zeit unabhängige Größen, während in der relativistischen Mechanik Länge und Zeit miteinander verkoppelt sind.

In den einzelnen Gebieten der Physik ist es oft notwendig, Vielfache oder Teile der Grundeinheiten zu verwenden. Deshalb wurde für alle Einheiten eine dekadische Unterteilung eingeführt:

Zehnerpotenz	Vorsilbe	Kurzzeichen	Zehnerpotenz	Vorsilbe	Kurzzeichen
10^{-1}	Dezi	d	10^{1}	Deka	da
10^{-2}	Zenti	с	10^{2}	Hekto	h
10^{-3}	Milli	m	10^{3}	Kilo	k
10^{-6}	Mikro	μ	10^{6}	Mega	М
10^{-9}	Nano	n	10^{9}	Giga	G
10^{-12}	Piko	р	10^{12}	Tera	Т
10^{-15}	Femto	f	10^{15}	Peta	Р
10^{-18}	Atto	а	10^{18}	Exa	Е

Es ist oft zweckmäßig, statt einer bestimmten Einheit allgemeiner die *Dimension* einer physikalischen Größe anzugeben. Mit dem Begriff Dimension³ charakterisiet man eine physikalische Größe, indem

²Das auf den Grundgrößen Länge, Masse, Zeit und elektrische Stromstärke bestehende Einheitensystem nennt man **MKSA**-System (Meter, Kilogramm, Sekunde, Ampere), Physiker benutzen häufig das heute nicht mehr zulässige **cgs**-System (Centimeter, Gramm, Sekunde)

³Unglücklicherweise wird der Ausdruck Dimension auch für den Begriff "Ausmaß, Abmessung" benutzt.

man unter Weglassung aller Maßzahlen und Einheiten angibt, wie sich die betreffende Größe aus den Grundgrößen zusammensetzt. Zum Beispiel kann man die Geschwindigkeit in km/h, m/s, cm/s etc. angeben. Gibt man nun die Dimension der Geschwindigkeit an, so ist diese Länge l dividiert durch Zeit t und man schreibt hierfür kurz:

$$\dim v = \frac{l}{t} \quad . \tag{1.2.2}$$

Eine solche *Dimensionsgleichung* ist sehr vorteilhaft. Sie führt zur Übersichtlichkeit und man kann die Richtigkeit von Gleichungen leicht anhand solcher Dimensionsgleichungen prüfen. Es gibt auch Größen, die keine Dimension besitzen, z.B. sogenannte Verhältnisgrößen (Verhältnis zweier Längen, Geschwindigkeiten etc.). Man sagt hier, die Größe habe die *Dimension "Eins"*.

1.2.2 Länge und Längenmessung

Bei einer Längenmessung bestimmt man den Abstand l zwischen zwei Raumpunkten A und B oder allgemeiner die Bogenlänge einer Raumkurve (z.B. den Umfang eines Kreises). Als Einheit dient das willkürlich im 18. Jahrhundert eingeführte Meter. Es entsprach ursprünglich dem 10^{-7} -ten Teil der Entfernung zwischen Pol und Äquator auf der Erdoberfläche. Diese Einheit wurde als das Meter

$$[l] := 1 \text{ Meter} := 1 \text{ m}$$
 (1.2.3)

definiert, als Urmeter aus einer chemisch und physikalisch resistenten Platin-Iridium-Legierung gefertigt und unter festgelegten Umweltbedingungen (0°C, 760 Torr) in Paris aufbewahrt.



Abbildung 1.1: (a) Das Ende eines der 30 gleichen Urmeterstäbe. Man erkennt drei feine Strichmarken, von denen die mittlere das Ende des Meters markiert. (b) Eine der beiden entscheidenden Strichmarken auf einem Urmeterstab. Die Aufnahme zeigt die Ungenauigkeit der Ablesung durch die Breite und Unregelmäßigkeit der Strichmarke.

Das Urmeter hatte allerdings den Nachteil, daß es nicht der unbelebten Natur entnommen wurde und bei einer Naturkatastrophe zerstört werden konnte. Aus diesem Grund wurde bereits früh von **Babi-net** (1827) und **Maxwell** (1870) vorgeschlagen, die Wellenlänge des Lichts einer bestimmten Farbe als

Längeneinheit zu verwenden. Außerdem ergaben genaue Messungen am Urmeter, daß trotz sorgfältiger Aufbewahrung ständig umweltbedingte Längenänderungen auftraten. Ferner waren die auf dem Urmeter angebrachten Ritzmarken zu ungenau. Deshalb wurde 1960 diese Definition des Meters aufgegeben und durch einen atomaren Standard ersetzt, der sich sehr viel genauer reproduzieren läßt. Man nahm als Maß die Wellenlänge des Lichtes, welches durch das angeregte Edelgasisotop $_{36}^{86}$ Krypton beim Übergang vom Atomzustand 5d₅ nach 2p₁₀ ins Vakuum ausgesandt wird. Es ergibt sich somit die Definition

 $[l] := 1 \text{ Meter} := 1\,650\,763.73 \times \lambda_{\text{vac}}(5d_5 - 2p_{10})$. (1.2.4)

Bei der einfachsten Längenmessung vergleicht man direkt das Objekt mit einem passend dezimal unterteilten Maßstab. Technisch verfeinerte mechanische Maßstäbe sind die Schieblehre oder die Mikrometerschraube (siehe Abb. 1.6). Zum experimentellen Anschluß der Länge eines Meters an die Wellenlänge der Kryptonlinie dient das *Michelson-Interferometer*. Mit Hilfe dieser interferometrischen Methode kann das Meter mit einer Genauigkeit von 10^{-8} überall auf der Welt reproduziert werden.

Michelson-Interferometer:

Der Lichtstrahl einer Lichtquelle LQ trifft unter einem Winkel von 45° auf einen halbdurchlässigen Spiegel, der als Strahlteiler ST wirkt (siehe Abb. 1.2). Das reflektierte Licht wird vom Spiegel SP I, das durchgelassene vom Spiegel SP II reflektiert. Beide Strahlen werden nach nochmaligem Passieren bzw. nochmaliger Reflektion am Strahlteiler ST am Beobachtungspunkt D zur Überlagerung (Interferenz) gebracht. Die relative Phasenlage der beiden Lichtschwingungen im Punkt D bestimmt, ob es zu einer gegenseitigen Verstärkung oder Abschwächung der elektromagnetischen Wellen kommt. Durch Verschieben des Spiegels SP II kann die relative Phasenlage variiert werden. Verschiebt man SP II gerade um das Stück $l = \lambda/2$ (oder ein ganzzahliges Vielfaches *n* davon, wobei λ die Wellenlänge der Strahlung sein soll), so muß der Lichtstrahl beim Hin- und Rückweg die Wegstrecke $2l = \lambda$ (oder $2l = n\lambda$) zusätzlich durchlaufen und man erhält wieder das ursprüngliche Interferenzmuster. Durch einfaches Abzählen der an D durchlaufenen Interferenzmaxima (oder Minima) kann damit die Wegstrecke l in einer bestimmten Anzahl n von Wellenlängen ausgedrückt werden. Bei bekannter Wellenlänge (in Metern) kann somit die Wegstrecke l (in Metern) gemessen werden. Die Meterdefinition in GI.(1.2.4) entspricht genau der Festlegung einer Wellenlänge in Metern für eine definierte Lichtstrahlung.



Abbildung 1.2: Das Michelson-Interferometer.

Seit 1983 wird das Meter durch die Festlegung der Naturkonstante *Lichtgeschwindigkeit* auf c = 299792458 m/s über die Zeit definiert. Die Strecke von 1 m ergibt sich in dieser Definition als die

Strecke, die das Licht im Vakuum in einer Zeit von 1/299 792 458 Sekunden durchläuft. Man erhält somit eine neue Definition für die Längeneinheit

$$[l] := 1 \text{ Meter} := \frac{1}{299\,792\,458} \,\mathrm{s} \cdot c[m/s]$$
 . (1.2.5)

Man hat damit die Längenmessung auf eine Zeitmessung zurückgeführt. Da die Zeit momentan diejenige Einheit ist, die mit größter Genauigkeit reproduziert werden kann,⁴ hat man durch Festlegung von Naturkonstanten andere Einheiten an die Zeiteinheit angebunden.⁵ Die Größe der Naturkonstanten wird auf internationalen Konferenzen der nationalen Eichämter festgelegt.

Laufzeitmessungen

Aus der obigen Definition des Meters ergeben sich auf natürliche Weise zur Ermittlung von Entfernungen einsetzbare Meßverfahren, die sogenannten *Laufzeitmessungen*. Hierbei wird im Punkt A zur Zeit t_0 ein Schall-, Radar- oder Lichtpuls ausgesandt, im Punkte B reflektiert und dann wieder am Punkt A zur Zeit $t_0 + \Delta t$ registriert. Aus der Laufzeit Δt und der bekannten Laufgeschwindigkeit der verwendeten Wellen läßt sich der Abstand \overline{AB} bestimmen (z.B. Echolot-Verfahren, Radarpeilung). In der Astronomie wurden mit dieser Methode mit Hilfe von Laserpulsen Präzisionsmessungen des Abstands Erde-Mond und Erde-Venus gewonnen. Solche Messungen sind enorm wichtig, da man aus den **Kepler**schen Gesetzen (siehe Abbschnitt 1.5.3) aus einer Messung von Planetenlaufzeiten nur auf die Verhältnisse von Planetenbahnradien schließen kann. Eine einzige Absolutmessung des Abstands zweier Planeten liefert dann einen Absolutmaßstab für die Bahndaten (u.a. ergibt sich der Absolutwert der astronomischen Einheit, die Entfernung Erde-Sonne, siehe unten)

Echolot-Verfahren:

Abbildung 1.3 zeigt die Anordnung zur Bestimmung von Längen mittels Laufzeitmessungen. Ein Lautsprecher strahlt kurze Sinuspakete der Grundfrequenz 4 kHz ab. Diese werden in einem Kanal des Oszilloskops angezeigt. Das an einer Reflektorplatte zurückgeworfene Signal wird von dem Hohlspiegel auf ein Mikrophon fokusiert, mit diesem registriert und im zweiten Kanal des Oszilloskops angezeigt. Aus der zeitlichen Verschiebung der beiden Signale läßt sich die Entfernung zur Reflektorplatte bestimmen.

Im Zusammenhang mit Laufzeitmessungen bietet sich die Einführung einer astronomischen Längeneinheit, dem *Lichtjahr* (Abkürzung: 1 Lj) an. 1 Lj ist die Länge, die Licht im Vakuum in einem Jahr zurücklegt. Es gilt

$$1 \text{ Lj} = 1,94 \times 10^{15} \text{m}$$
 (1.2.6)

Messung großer Längen

Ein für große Längen geeignetes Meßverfahren, das in der Geodäsie und der Astronomie verwendet wird, ist die *Triangulierung*. In den Entfernungsbereichen auf der Erde und im Kosmos, die durch

⁴In Caesiumatomuhren mit lasergekühlten Cs Atomen können heute Genauigkeiten von etwa 10^{-15} erreicht werden.

⁵Neben dem Meter, durch Festlegung der Lichtgeschwindigkeit, hat man das Volt durch Festlegung des Flußquants $\Phi_0 = h/2e$ an die Zeit bzw. die Frequenz $\nu = 1/Z$ eit (vergleiche Gl. 1.2.19) angebunden (aufgrund des Josephson-Effekts gilt: $V = \Phi_0 \nu$, wobei ν die Frequenz ist).



Abbildung 1.3: Prinzip des Echolot-Verfahrens.

Triangulierung noch zugänglich sind, konnten experimentell keine Abweichungen von der euklidischen Geometrie nachgewiesen werden. Dennoch wird in der allgemeinen Relativitätstheorie angesetzt, daß die euklidische Geometrie nicht für das gesamte Universum Gültigkeit besitzt, sondern der Raum vielmehr gekrümmt ist.

Triangulierung:

wobei

Abbildung 1.4a zeigt das Meßprinzip. Bei bekannter Basislänge $\overline{AB} = c$ lassen sich die unbekannten Entfernungen $\overline{BC} = a$ und $\overline{AC} = b$ durch eine Messung der Winkel α und β bestimmen. Nach dem Sinussatz der (ebenen, euklidischen) Geometrie gilt

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$
(1.2.7)

$$= \pi - (\alpha + \beta) . \qquad (1.2.8)$$

Mit Hilfe der Triangulierung kann bei Halbmond bei bekanntem Abstand d_{ME} zwischen Erde und Mond der Abstand d_{SE} zwischen Sonne und Erde bestimmt werden (siehe Abbildung 1.4b). Bei Halbmond ist der Winkel $\gamma = 90^{\circ}$ und man erhält $d_{SE} = d_{ME} / \cos \beta$. Man muß also nur den Winkel β messen.

 γ



Abbildung 1.4: Prinzip der Triangulierung: messe c, α und β ; berechne a und b.

Die Entfernungen zwischen Erde und Mond oder Erde und den Planeten, die der Erde nahe kommen,

lassen sich mit einer Basis \overline{AB} auf der Erde mittels Triangulierung bestimmen. Für Entfernungen außerhalb unseres Planetensystems ist man auf eine größere Basislänge \overline{AB} angewiesen, nämlich den Radius r der Erdbahn um die Sonne. Betrachtet man von der Erde aus erdnahe Sterne vor dem Hintergrund weit entfernt liegender Sterne, so scheinen die erdnahen Sterne im Laufe eines Jahre eine Ellipsenbahn zu durchlaufen. Winkelmessungen über ein Jahr hinweg erlauben die Bestimmung des trigonometrischen *Parallaxenwinkels* p, d.h. des Winkels, unter dem die große Halbachse der elliptischen Sternbahn von der Erde aus erscheint. Die Parallaxe stimmt nach Abb. 1.5 mit dem Winkel überein, unter dem ein Beobachter vom Stern aus die große Halbachse der für ihn elliptischen Erdbahn um die Sonne sehen würde. Bezeichnet man den Abstand Gestirn Sonne mit l, so ergibt sich aus Abb. 1.5:

$$\tan p = \frac{r}{l} \quad \text{bzw.} \quad l = \frac{r}{\tan p}$$
(1.2.9)
Stern

Abbildung 1.5: Der Parallaxenwinkel p eines Sterns.

Die genaue Kenntnis des Erdbahnradius r, der astronomischen Einheit, ist von zentraler Bedeutung für Entfernungsmessungen im Kosmos. Gleichung (1.2.9) gibt Anlaß zur Einführung einer in der Astronomie gebräuchlichen Längeneinheit, der *Parallaxensekunde* oder kurz *Parsec* (Abbkürzung: 1 pc). Ein Stern hat die Entfernung 1 Parsec von der Sonne, wenn sein Parallaxenwinkel p gleich einer Bogensekunde wird. In Metern ausgedrückt ergibt sich

$$1 \text{ pc} = 3.086 \times 10^{16} \text{ m} = 3,26 \text{ Lj}$$
 (1.2.10)

Schon der unserer Sonne nächste Stern (α Proxima Centauri) hat einen Parallaxenwinkel p < 1'. Da die Fehler bei der Parallaxenbestimmung heute unter $\pm 0, 01''$ liegen, erlaubt die Triangulierungsmethode Entfernungsmessungen bis über 100 pc.

Für noch größere Entfernungsmessungen ist man auf indirekte Methoden angewiesen, die an Sternen innerhalb des mit der Triangulierungsmethode abgedeckten Bereichs geeichtet werden müssen. So besteht z.B. ein systematischer Zusammenhang zwischen der Farbe und der absoluten Leuchtkraft eines Sterns (Hertzsprung-Russel Diagramm) sowie (für bestimmte in der Helligkeit pulsierende Sterne) zwischen Pulsationsdauer und absoluter Helligkeit. Da sich Farbe und Pulsationsdauer auf der Erde genau



bestimmen lassen, kann man mit Hilfe dieser Zusammenhänge und der auf der Erde gemessenen scheinbaren Leuchtkraft der Sterne, die mit dem Quadrat der Entfernung abnimmt, die Entfernung von Sternen abschätzen.

Als weitere Methode sei hier auf die Bestimmung der Rotverschiebung hingewiesen. Sehr entfernte Galaxien erscheinen punktförmig. Ihre Entfernung kann nur noch über die kosmologische Vorstellung eines expandierenden Weltalls aus ihrer Fluchtgeschwindigkeit angegeben werden, die auf der Erde aus der Rotverschiebung der Sternspektren (Dopplereffekt) nachweisbar ist.

Messung kleiner Längen

Mit bloßem Auge nicht mehr sichtbare Objekte lassen sich mit dem Lichtmikroskop (bis herab zu $l \simeq 0.1 \,\mu\text{m}$) bzw. mit dem Elektronenmikroskop (bis herab zu $l \simeq 0.1 \,\text{nm}$) ausmessen. Mit den Rastersondentechniken (Rastertunnel- und Rasterkraftmikroskop) lassen sich an Oberflächen von Festkörpern Abstände im atomaren Bereich bestimmen. Im subatomaren Bereich ist man schließlich auf Streuexperimente mit Röntgenstrahlen, Neutronen, Elektronen u.a. angewiesen. So kann z.B. der mittlere Abstand von Atomen in einem Kristallgitter mit Hilfe der Röntgenbeugung mit einer Genauigkeit von besser als 0.1 pm bestimmt werden. Gebräuchliche Längenskalen im atomaren und subatomaren Bereich sind

$$1 \text{ Å} (\text{Ångström}) = 10^{-10} \text{ m}$$
 (1.2.11)

$$1 \,\mathrm{fm} \,\mathrm{(Fermi)} = 10^{-15} \,\mathrm{m} \,.$$
 (1.2.12)

Der in der klassischen Physik eingeführte Begriff der Länge stößt vor allem im atomaren und subatomaren Bereich an seine Gültigkeitsgrenze. Die Frage, wie genau man letztendlich den Ort eines Teilchens bestimmen kann, wird in der Quantenmechanik durch die **Heissenberg**sche Unschärferelation

$$\Delta p_x \Delta x \ge h \tag{1.2.13}$$

beantwortet. Hierbei ist $h = 6,626 \ 075 \ 7 \times 10^{-34}$ Js das **Planck**sche Wirkungsquantum. Sie besagt, daß die Unschärfe Δx in der Ortsbestimmung an die Unschärfe Δp_x in der Festlegung des Impulses p_x gekoppelt ist. Eine präzise Ortsbestimmung führt also zu einer großen Unschärfe bei der Impulsbestimmung und umgekehrt. Dies ist mit der klassischen Orts- und Impulsmessung nicht vereinbar.

Längenspektrum

Folgende charakteristischen Längen kommen in der Natur vor (sie erstrecken sich über mehr als 40 Größenordnungen):



Abbildung 1.6: Werkzeuge zur Messung von Längen.

ca. 10^{26}	m	Ausdehnung des Weltalls
$1,56 imes 10^{21}$	m	Entfernung zur nächsten Galaxie (Magellansche Wolke)
3×10^{20}	m	Abstand Sonne – galaktisches Zentrum
4×10^{16}	m	Entfernung zum nächsten Stern (α Proxima Centauri)
$1,496 \times 10^{11}$	m	Abstand Sonne – Erde (astronomische Einheit)
$6,96 imes10^8$	m	Radius der Sonne
$6,378 imes 10^6$	m	Radius der Erde (Äquatorebene)
$8,85 imes10^3$	m	höchster Berggipfel (Mt. Everest)
1,80	m	homo sapiens
1×10^{-4}	m	Sandkorn
10^{-6}	m	Größe von Bakterien
5×10^{-7}	m	Wellenlänge des sichtbaren Lichts
10^{-10}	m	typischer Durchmesser der Atomhülle
3×10^{-15}	m	typischer Durchmesser eines Atomkerns

1.2.3 Flächen-, Raum- und Winkelmessungen

Aus der Grundgröße Länge und ihrer Einheit Meter lassen sich abgeleitete Größen und ihre Einheiten gewinnen (siehe Abb. 1.7):

Fläche
$$A = a \cdot b$$
 $[A] = 1 \mathrm{m}^2$ Volumen $V = a \cdot b \cdot c$ $[V] = 1 \mathrm{m}^3$ (1.2.14)ebener Winkel $\alpha = s/r$ $[\alpha] = 1 \mathrm{rad}$ (Radiant)(1.2.15)Raumwinkel $\Omega = A/r^2$ $[\Omega] = 1 \mathrm{sr}$ (Steradiant)(1.2.15)



Abbildung 1.7: Flächen-, Raum- und Winkeleinheit.

Der ebene Winkel und der Raumwinkel sind Verhältnisgrößen mit Dimension 1, die zur Kennzeichnung den Zusatz *Radiant* (rad) und *Steradiant* (sr) erhalten. 1 rad entspricht dem Winkel, der auf dem Einheitskreis mit Radius r = 1 m die zugehörige Bogenlänge von 1 m herausschneidet. Genauso entspricht 1 sr dem Raumwinkel, der aus einer Kugel mit Einheitsradius von 1 m die Fläche von 1 m² herausschneidet. Neben diesen SI-Einheiten für die Winkelmessung werden häufig die Einheiten im Gradmaß verwendet. Wegen $2\pi \cdot rad = 360^{\circ}$ und $4\pi \cdot sr = (360^{\circ})^2$ gilt:

$$1 \operatorname{rad} = 360^{o} / 2\pi = 57.2928^{o}$$

$$1 \operatorname{sr} = (360^{o})^{2} / 4\pi = 10313.2(^{o})^{2}$$
(1.2.16)

Hierbei wird $1(^{o})^{2}$ als ein Quadrat-Altgrad bezeichnet.

1.2.4 Zeit und Zeitmessung

Bei der Zeitmessung wird das Zeitintervall t bestimmt, das zwischen zwei Ereignissen A und B verstreicht. Ähnlich wie für die Lage im Raum kann man keine "absolute" Zeit angeben.⁶ Man kann also nur die Zeitdifferenz zwischen zwei Ereignissen, d.h. eine Zeitspanne, durch eine Meßvorschrift definieren. Ein Zeitintervall kann am besten durch den Vergleich mit der Dauer eines *periodischen Vorgangs* gemessen werden. Setzen wir die Dauer einer Periode gleich unserer Zeiteinheit, so bedeutet die Bestimmung eines Zeitintervalls zwischen zwei Ereignissen das Abzählen der Anzahl der Perioden des als Uhr benutzten periodischen Vorgangs.

Hierbei stellt sich natürlich sofort das Problem, wie man entscheidet, ob ein physikalischer Vorgang streng periodisch ist. Diese Frage kann nur beantwortet werden, indem man Geräte zur Zeitmessung (Uhren), die nach verschiedenen Prinzipien funktionieren, untereinander vergleicht. Die Ganggenauigkeit der genauesten Uhren kann nur aus dem Gleichlauf mehrerer gleichartiger Uhren beurteilt werden.

Entsprechend wie ursprünglich die Längeneinheit an die räumliche Ausdehnung der Erde angeschlossen wurde, wurde die Zeiteinheit ebenfalls mit einem irdischen Maß, nämlich mit der Periode der Erddrehung um ihre eigene Achse (1 Tag := 1 d) bzw. mit der Bewegung der Erde um die Sonne (1 Jahr := 1 a) verknüpft. Damit ergab sich folgende Definition für die Sekunde (sogenannte *Ephemeriden-Sekunde*)?

$$[t] := 1 \text{ Sekunde} = 1 \text{ s} := \frac{\text{mittlerer Sonnentag}}{24 \cdot 60 \cdot 60} . \tag{1.2.17}$$

Mit fortschreitender Technik erwies sich diese Definition als zu grob. Z.B. führt die Ellipsenbahn der Erde um die Sonne zu variablen Bahngeschwindigkeiten, die auch bei konstanter Rotationsgeschwindigkeit der Erde um ihre eigene Achse im Laufe eines Jahres zu unterschiedlichen Dauern eines Sonnentages führen. Deshalb muß die Dauer eines Sonnentages über ein Jahr gemittelt werden. Erschwerend kommt hinzu, daß durch die Gezeitenwirkung die Erde in 100 Jahren um 1,6 ms langsamer rotiert und wegen der Präzession und Nutation der Erdachse diese keineswegs konstant im Raum orientiert bleibt. Man hatte außerdem gelernt, viel genauere Zeitmesser (Uhren), die auf periodischen Vorgängen beruhen, zu bauen (siehe z.B. Abb. 1.8). Als Beispiel seien hier die Pendeluhren, Torsionsuhren, Quarzuhren und die heute von den Eichämtern verwendeten Atomuhren genannt. Die Erfindung der Atomuhren hat dazu geführt, daß man sich für das SI-System im Jahre 1967 zur Einführung eines atomaren Zeitstandards entschieden hat. Danach ist die Sekunde ein bestimmtes Vielfaches der Schwingungsdauer T der elektromagnetischen Strahlung, die von dem Isotop $\frac{133}{55}$ Cs (Kernspin I = 7/2) beim Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstrukturniveaus (F = 4, $M = 0 \rightarrow F = 3$, M = 0) des Grundzustands $2S_{1/2}$ ausgesandt wird:

[t] := 1 s := 9 192 631 770 T \approx 9.19 × 10⁹ T(¹³³₅₅ Cs) (1.2.18)

Die Schwingungsdauer T ist die Zeit, die während einer vollen Schwingung (Hin- und Rückschwingung) verstreicht. Der Kehrwert von T gibt die Anzahl der Schwingungen pro Zeiteinheit an und wird als Schwingungsfrequenz ν bezeichnet. Die Einheit der Frequenz im SI-System ist 1 s⁻¹ und wird auch mit 1 Hertz (Abkürzung: 1 Hz) bezeichnet:

⁶Man kann ohne Bezugssystem für zwei Punkte A und B keine absolute Lage im Raum angeben, nur ihr Abstand läßt sich genau angeben.

⁷Im Jahr 1960 wurde die Ephemeridensekunde zu $1 \text{ s} = (1/31\ 556\ 925, 9747) \times$ topisches Sonnenjahr am 01. 01. 1900 festgelegt. Ein mittleres Sonnenjahr (Umlauf der Erde um die Sonne) hat 365,2422 Tage. Die Genauigkeit der hiermit festgelegten Sekunde beträgt etwa 10^{-9} .



Abbildung 1.8: (a) Fadenpendel: die Schingungsdauer beträgt $T \simeq 2\pi\sqrt{l/g}$, wobei g die Erdbeschleunigung ist. Am 50. Breitengrad erhält man T = 1 s bei l = 0.248 m. (b) Federpendel: die Schwingungsdauer beträgt $T = 2\pi\sqrt{m/k}$, wobei k die Federkonstante ist. (c) Schwinggabel: die typische Schwingungsdauer ist 10^{-3} s. (d) Schwingquarz: die typische Schwingungsdauer ist 10^{-7} s. (e) Atomuhr basierend auf Amoniak (NH₃). Die Inversionsschwingung hat eine Frequenz von $\nu = 23870, 4$ MHz mit einer Genauigkeit von $\Delta \nu / \nu = 10^{-9}$. Nicht gezeigt ist das Drehpendel (Unruhe in Armbanduhren).

und
$$\nu := \frac{1}{T}$$

 $[\nu] = 1/s := 1 \text{ Hertz} = 1 \text{ Hz}$. (1.2.19)

Die Definition der Sekunde nach Gl. (1.2.18) entspricht genau der Festlegung der Frequenz der $_{55}^{133}$ Cs-Strahlung auf $\nu = 9.192$ 631 770 GHz.

Die Ganggenauigkeit von Uhren wird durch den Quotient $\Delta t/t$ aus Abweichung Δt und Zeitintervall t angegeben. Die besten Pendeluhren erreichen $\Delta t/t = 10^{-8}$, die besten Quarzuhren $\Delta t/t = 10^{-10}$, die Amoniakatomuhr $\Delta t/t = 10^{-9}$ und die besten Cs-Atomuhren (z.B Atomuhr CS2 bei der Physikalisch Technischen Bundesanstalt in Braunschweig⁸ etwa $\Delta t/t = 10^{-14}$. Ganz neue Entwicklungen mit lasergekühlten Cs Atomen erlauben eine weitere Verbesserung der Ganggenauigkeit um etwa eine Größenordnung. Hierbei wird die mittlere thermische Geschwindigkeit der Cs-Atome von etwa 100 m/s durch Wechselwirkung mit Laserstrahlung auf etwa 1 m/s reduziert.

⁸Nach dem Zeitgesetz von 1978 ist die PTB mit der Darstellung und Verbreitung der gesetzlichen Zeit beauftragt. Diesen Auftrag erfüllt die PTB vor allem durch ihre Zeitsignal- und Normalfrequenzaussendungen über den Langwellensender DCF77. Das Zeitsignal wird mit einer Leistung von 50 kW abgestrahlt und ist in weiten Teilen Europas (Reichweite etwa 2000 km) zu empfangen. Die Trägerfrequenz 77,5 kHz des DCF77 ist eine hochstabile Normalfrequenz, die zur Nachsteuerung von Normalfrequenzoszillatoren verwendet werden muß. Das Zeitsignal der PTB wird für die Uhren der Bahn AG, der Rundfunkanstalten, für Funkuhren, aber auch für Verkehrsüberwachungsgeräte und zur Steuerung von Prozeßabläufen verwendet.

Physik I

Messung sehr kurzer Zeiten

Bei bekannter Geschwindigkeit eines Objekts lassen sich sehr kurze Zeiten elegant durch Messung der zurückgelegten Wegstrecke bestimmen. Dies funktioniert insbesondere dann sehr gut, wenn sich Objekte sehr schnell (z.B. mit Lichtgeschwindigkeit) bewegen. Ein Beispiel ist die Bestimmung der Lebensdauer des π^0 -Mesons durch eine Blasenkammeraufnahme. π^0 -Mesonen werden bei der Reaktion $\pi^- + p^+ \rightarrow \pi^0 + n$ erzeugt und zerfallen in der mittleren Zeit τ in eine Elektron, ein Positron und ein γ -Quant: $\pi^0 \rightarrow e^+ + e^- + \gamma$. Das π^0 -Meson bewegt sich praktisch mit Lichtgeschwindigkeit und seine Lebensdauer kann deshalb aus der in der Blasenkammer zwischen Erzeugung und Zerfall zurückgelegten Strecke *s* zu $\tau = s/c$ bestimmt werden. Da die kleinste meßbare Strecke *s* etwa 1 μ m ist, kann man Zerfallszeiten $\tau \geq 3 \times 10^{-15}$ s messen.

Messung sehr langer Zeiten

Neben periodischen Vorgängen kann im Prinzip jeder physikalische Prozeß, der einer zeitlichen Gesetzmäßigkeit genügt, zur Zeitmessung herangezogen werden. Ein antikes Beispiel ist die Sanduhr, ein modernes der radioaktive Zerfall instabiler Elementarteilchen, Atomkerne etc.. Der radioaktive Zerfall wird insbesondere zur Altersbestimmung (Messung sehr langer Zeiten) in der Archäologie und der Geologie herangezogen. Der Zerfall folgt der Gesetzmäßigkeit

$$N(t) = N_0 \exp(-\frac{t}{\tau}) , \qquad (1.2.20)$$

wobei τ die mittlere Zerfallszeit und N_0 die Anfangszahl der zerfallenden Teilchen ist. Sind τ und N_0 bekannt, so kann durch Messung von N(t) auf die seit dem Anfangszustand verstrichene Zeit t geschlossen werden. Bekannte Radionukliduhren sind ¹⁴C, die K-Ar-Uhr und die U-Pb-Uhr.

Der soeben diskutierte Begriff der Zeit in der klassischen Physik bedarf einer Revision, die von der Quantenmechanik vorgegeben ist und insbesondere im atomaren Bereich wirksam wird. Analog zur Unschärferelation für Ort und Impuls in Gl. (1.2.13) sind auch die Zeit t und die Energie E über eine Unschärferelation verbunden:

$$\Delta t \cdot \Delta E \ge \hbar \quad . \tag{1.2.21}$$

Diese Relation besagt, daß entgegen der klassischen Annahme die Zeit nicht beliebig genau festgelegt werden kann, ohne daß dadurch eine andere wichtige Eigenschaft eines Zustands, die Energie E, beliebig unschaft wird (umgekehrt gilt dies genauso). Unsere Kenntnis der Welt läuft damit auf einen Kompromiß hinaus, mit welchen Genauigkeiten Ort, Impuls, Zeit und Energie eines Zustandes angebbar sind.

Zum Schluß sollen einige charakteristische Zeitskalen, die in der Natur auftreten, aufgelistet werden:

ca 10 ¹⁰ a	Alter des Universums
4.5×10^9 a	Alter der Frde
4,0 × 10 a	
$2 \times 10^{\circ}$ a	Laufzeit der Sonne um das galaktische Zentrum
$1,75 \times 10^{6}$ a	Alter der Menschheit
$3,156 imes10^7~ m s$	Umlaufzeit der Erde um die Sonne
$8,64 imes 10^4~{ m s}$	Dauer eines mittleren Sonnentages
1 s	Herzschlag
$1 \times 10^{-3} \mathrm{s}$	Schwingungsdauer T des Schalls im empfindlichsten Bereich des
	menschlichen Gehörs
$1 \times 10^{-8} \text{ s}$	Schwingungsdauer T von elektromagnetischen Wellen im UKW
	Bereich
$1,6 imes 10^{-15} ext{ s}$	Schwingungsdauer T des sichtbaren Lichts
10^{-21} s	Dauer einer Atomkernschwingung
10^{-23} s	Dauer, die Licht zum Durchlaufen des Durchmessers eines Atom-
	kerns benötigt

Positionsbestimmung über Laufzeitmessungen – das Global Positioning System (GPS)

Ortung und Navigation sind für den Menschen schon immer von großer Bedeutung gewesen. Der Begriff Navigation ist von lateinisch *navis*, Schiff, abgeleitet, da Seeleute für die Bestimmung ihrer Position und ihrer Fahrtrichtung auf dem Meer schon seit der Antike technische Hilfsmittel entwickelt haben. Durch die Entwicklung der Satellitentechnik und ultrapräziser Uhren, wurden in den letzten Jahrzehnten globale Positionsbestimmungssysteme entwickelt, die auf Laufzeitmessungen beruhen.

Ab 1973 entwickelten die USA das sogenannte Global Positioning System (GPS), das aus 24 Satelliten besteht, die in einer Höhe von 20 000 km in kreisförmigen Bahnen in jeweils 12 Stunden die Erde umkreisen. Die Satelliten sind auf 6 Bahnebenen so verteilt (siehe Abb. 1.9), daß von jedem Punkte der Erde aus Signale von mindesten 4 Satelliten empfangen werden können. Jeder Satellit enthält 3 hochgenaue Atomuhren, die von einer Leitzentrale auf der Erde (Colorado Springs) synchronisiert und überwacht werden. Die GPS-Satelliten identifizieren sich durch Abstrahlung eines Codes (Abstrahlfrequenz = 1.6 GHz), der verschiedene Informationen wie z.B. die genauen Bahndaten des Satelliten und weitere technische Informationen enthält. Dieses charakteristische Signal wird, synchronisiert mit der hochpräzisen Atomuhr des Satelliten, jede Millisekunde wiederholt. Empfängt ein GPS-Empfänger auf der Erde das Signal eines der 24 Satelliten, so synchronisert er sich zuerst mit diesem und kann dann die Signallaufzeit zwischen Satellit und Empfänger und damit die Entfernung R_1 zum Satelliten bestimmen. Die Position des Empfängers liegt dann auf der Oberfläche einer Kugel mit Radius $R_{\rm I}$. Dieser Vorgang kann mit zwei weiteren Satelliten wiederholt werden. Dadurch ergeben sich zwei weitere Kugeln mit Radius R_2 und R_3 . Die drei Kugeloberflächen schneiden sich in 2 Punkten, von denen einer meist ausgeschlossen werden kann (da er z.B. nicht auf der Erdoberfläche liegt). Somit kann durch Laufzeitmessungen zu 3 Satelliten die Position des Empfängers prinzipiell bestimmt werden.

Ein Problem besteht aber darin, daß die Uhr des Empfängers im Vergleich zu den Atomuhren der Satelliten sehr ungenau ist (die Empfänger sollen billig sein). Die Frage stellt sich also, wie man überhaupt eine Synchronisation erreichen kann. Die Lösung besteht darin, daß der Gangunterschied zwischen Empfängeruhr und Satellitenuhr als weitere Unbekannte wie eine der drei Standortkoordinaten betrachtet wird. Um diese vierte Unbekannte zu eliminieren, muß eine Laufzeitmessung zu einem vierten Satelliten gemacht werden. Mathematisch ergibt sich mit den gemessenen Laufzeiten ($T_E - T_S$) zwischen Empfänger und Satellit folgendes Gleichungssystem:



Abbildung 1.9: (a) Seit 1993 umkreisen 24 Satelliten in etwa 20 000 km Höhe die Erde, die zusammen mit einer Bodenstation die Grundausstattung des Global Positioning Systems (GPS) bilden. Jeweils 4 Satelliten haben eine gemeinsame Bahnebene. Die Umlaufbahnen sind um jeweils 55^o gegenüber dem Äquator geneigt. (b) Geometrische Darstellung der Positionsberechnung per GPS. Die Empfängerposition ist einer der zwei Schnittpunkte von 3 Kugeloberflächen. (c) Zur Positionsbestimmung mit GPS.

$$R_{i} = c \cdot (T_{E} - T_{S,i}) = \sqrt{(x_{E} - x_{S,i})^{2} + (y_{E} - y_{S,i})^{2} + (z_{E} - z_{S,i})^{2}} + c \cdot b + e_{i} \qquad i = 1 \dots 4$$
(1.2.22)

Hierbei ist (x_E, y_E, z_E) die Empfängerposition, $(x_{S,i}, y_{S,i}, z_{S,i})$ die Position des i-ten Satelliten (i = 1...4), b der Uhrenfehler des Empfängers, c die Lichtgeschwindigkeit und e_i restliche Systemfehler der einzelnen Satelliten. Um die vier Unbekannten x_E , y_E , z_E und b zu bestimmen, benötigt man vier Gleichungen, d.h. Laufzeitmessungen zu vier Satelliten.

Durch ständige Überwachung und Korrektur der Satellitenuhren mit Hilfe der Bodenstation wird die Abweichung der Satellitenuhren gegenüber einer vorgegebenen GPS-Zeit auf $< 5 \times 10^{-9}$ s reduziert, was einem Fehler in der Abstandsmessung von weniger als 1,5 m entspricht. Zusammen mit anderen Fehlern (Satellitenposition, Ionosphäre, Empfängerrauschen, etc.) erhält man heute eine Genauigkeit von etwa 5 m.⁹

⁹Durch spezielle Meßtechniken (Ausnutzung des Dopplereffekts) lassen sich heute aber wesentlich genauere Ortsbestim-

Das GPS wurde ursprünglich hauptsächlich für militärische Zwecke entwickelt. Eine zivile Nutzung wurde zwar vorgesehen, aber nur mit höherer Fehlertoleranz. So steht heute die hohe Genauigkeit nur dem Militär zur Verfügung. Für zivile Nutzer wurden die abgestrahlten Satellitensignale künstlich verschlechtert (*selective availability*), so daß nur eine Genauigkeit von etwa 100 m erreicht werden kann. Dieses Problem wurde durch die Entwicklung des differentiellen GPS (DGPS) umgangen. Beim DGPS wird der künstlich aufgeprägte Fehler der Satellitensignale durch eine zusätzliche Laufzeitmessung zu einer auf der Erde befindlichen Referenz mit bekannter Position wieder reduziert, so daß man Genauigkeiten von etwa 10 m erreicht.

1.2.5 Meßfehler

Wiederholte Messungen einer physikalischen Größe führen im allgemeinen nicht zu gleichen Ergebnissen. So ergeben sich z.B. Unterschiede durch Schätzungen von Meßwerten, die zwischen zwei Teilstrichen auf einer Skala liegen oder durch Parallaxen bei der Ablesung (siehe Abb. 1.10). Diese *zufälligen Fehler* lassen sich durch eine Fehlerrechnung ausgleichen. Man erhält dann einen wahrscheinlichsten Wert für das Ergebnis und einen mittleren Wert für den Fehler. Eine Grundvoraussetzung für die Durchführung einer Fehlerrechnung ist natürlich das Vorhandensein mehrerer Messungen.



Abbildung 1.10: Parallaxenfehler: Der Zeiger von Meßgeräten hat meist einen endlichen Abstand von der Skala, weshalb durch das Ablesen der Skala unter endlichem Winkel der sogenannte Parallaxenfehler entsteht. Zur Vermeidung von Parallaxenfehlern können verspiegelte Skalen verwendet werden, bei denen der Zeiger mit seinem Spiegelbild zur Deckung gebracht werden muß.

Neben den *zufälligen Fehlern* können auch *systematische Fehler* auftreten, die z-B. auf eine falsche Meßskala, durch ein fehlerhaftes Meßinstrument oder durch Bedienungsfehler des Experimentators verursacht werden können. Diese systematischen Fehler können nicht durch eine Fehlerrechnung korrigiert werden.

Bei einer wiederholten Messung wird der wahrscheinlichste Wert durch Bildung des arithmetischen Mittels gewonnen. Das *arithmetische Mittel* ist der Wert, für den die Summe der Quadrate der Abweichungen ein Minimum ist (Ausgleichsprinzip von **Gauß**, Methode der kleinsten Quadrate). Ist n die Zahl der durchgeführten Messungen, dann ist der *mittlere absolute Fehler* der Meßreihe gegeben durch

$$\Delta x = \pm \sqrt{\frac{\sum (x_i - x)^2}{n(n-1)}} \quad . \tag{1.2.23}$$

mungen vornehmen. Für geodätische Messungen wie z.B. die Bestimmung der Bewegung der Kontinentalplatten konnten Genauigkeiten von einigen Millimetern erreicht werden.

Hierbei ist x_i das Resultat einer Einzelmessung und $x = \sum x_i/n$ das arithmetische Mittel. Der mittlere absolute Fehler liefert eine Wertung des Meßergebnisses. Ist die Streuung groß und die Zahl der Messungen klein, so ergibt sich ein großer Fehler und umgekehrt.

Die Größe des mittleren absoluten Fehlers muß aber auch im Verhältnis zum Wert der gemessenen Größe betrachtet werden. Ist z.B. der mittlere absolute Fehler bei einer Längenmessung $\Delta x = 0.01$ m, dann ist dieser Fehler ohne Zweifel klein, wenn die gemessene Länge x = 100 m beträgt. Er ist dagegen groß, wenn die gemessene Länge nur 10 cm beträgt. Aus diesem Grunde ist es besser den *relativen Fehler* zu betrachten, den man durch Bildung des Verhältnisses $\Delta x/x$ aus mittlerem Fehler und mittlerem Meßwert erhält. Man gibt den relativen Fehler meist in Prozent an, wie z.B.

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{0.01\mathrm{m}}{100\mathrm{m}} = 0.01\% \quad . \tag{1.2.24}$$

Der relative Fehler gibt sofort eine Auskunft über die Genauigkeit von Messungen ganz unterschiedlicher Art (z.B. Länge, Zeit, etc.) an.

Sehr häufig setzt sich ein Meßergebnis aus mehreren Einzelmessungen zusammen. Setzt sich das Ergebnis K aus der Summe von zwei Einzelmessungen x und y zusammen, so muß man bei der Betrachtung des Fehlers die mittleren absoluten Fehler der Einzelmessungen addieren: $\Delta K = \Delta x + \Delta y$ ¹⁰ Ist das Ergebnis K eine Funktion der gemessenen Größe x, dann ist der mittlere absolute Fehler des Ergebnisses $\Delta K = dK/dx \cdot \Delta x$. Dies kann an dem einfachen Beispiel der Bestimmung einer Kreisfläche verdeutlicht werden. Durch mehrmaliges Messen des Durchmessers wurde ein mittlerer Durchmesser x = 2,00 m mit einem mittleren absoluten Fehler von $\Delta x = 0.01$ m bestimmt. Die mittlere Fläche ist damit K = 3,14 m² und der mittlere absolute Fehler beträgt

$$\Delta K = \frac{\Delta K}{dx} \cdot \Delta x = \frac{\pi}{4} 2x \cdot \Delta x = \pm 0,03 \,\mathrm{m}^2 \quad . \tag{1.2.25}$$

Das heißt, daß aus dem Fehler für den Durchmesser auch der Fehler für die Kreisfläche berechnet werden konnte. Der relative Fehler für den Kreisdurchmesser beträgt $\Delta x/x = 0.2\%$, derjenige für die Kreisfläche jedoch $\Delta K/K = 1\%$.

Nimmt man allgemein an, daß der Zusammenhang des Ergebnisses K mit den Einzelmessungen x, y, z, ... durch eine Funktion f(x, y, z, ...) gegeben ist, so ergibt sich der relative Fehler zu

$$\frac{\Delta K}{K} = \frac{1}{K} \sqrt{\left(\frac{\partial f}{dx} \cdot \Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{dy} \cdot \Delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{dz} \cdot \Delta z\right)^2 + \dots} \quad (1.2.26)$$

Ist K z.B. das Volumen eines Zylinder mit Grundfläche $\pi x^2/4$ und Höhe z und werden der Durchmesser x und die Höhe z des Zylinders in Einzelmessungen bestimmt, so ergibt sich mit $f(x, z) = \pi x^2 z/4$ der relative Fehler zu

$$\frac{\Delta K}{K} = \sqrt{\left(2\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{z}\right)^2} \quad . \tag{1.2.27}$$

¹⁰Man muß den ungünstigsten Fall betrachten.

1.2.6 Skalare und vektorielle Meßgrößen

Zur Beschreibung physikalischer Vorgänge werden dimensionsbehaftete Größen benötigt. Diese können sich durch die Anzahl von Angaben unterscheiden, die zu ihrer eindeutigen Festlegung notwendig sind. Größen, die bei vorgegebener Maßeinheit durch eine einzige Zahlenangabe festgelegt sind, heißen *Skalare*. Hierzu gehören z.B. Länge, Fläche, Volumen, Zeit, Masse oder Temperatur. Skalare Größen sind also ausschließlich durch ihre Menge (Maßzahl und Einheit) gekennzeichnet, womit sich für die Länge folgende Darstellung ergibt:

$$l = \{l\} \qquad \cdot [l]$$
skalare Größe = {Maßzahl} · [Dimension] . (1.2.28)

Größen, die bei vorgegebener Maßeinheit durch eine Zahl <u>und</u> eine Richtung charakterisiert sind, heißen *Vektoren*. Hierzu gehören z.B. Geschwindigkeit, Kraft, Impuls, Magnetfeld oder elektrisches Feld. Wie in Abschnitt 1.1.1 gezeigt wurde, können Vektoren in Betrag und Einheitsvektor (Maßzahl und Richtung) zerlegt werden. Somit sind vektorielle Größen durch die Maßzahl, die Dimension und die Richtung gekennzeichnet, wodurch sich z.B. für die Geschwindigkeit folgende Darstellung ergibt:

$$\mathbf{v} = \{v\} \qquad \cdot [v] \qquad \cdot \hat{\mathbf{e}}$$
vektorielle Größe = {Maßzahl} · [Dimension] · Richtung . (1.2.29)

Hierbei gilt für den Einheitsvektor $|\hat{\mathbf{e}}| = 1$ und $\hat{\mathbf{e}} ||\mathbf{v}|$, d.h. die Maßzahl des Einheitsvektors ist eins und seine Richtung parallel zu \mathbf{v} .
1.3 Kinematik des Massenpunktes

Die *Kinematik* ist die Lehre von den Bewegungen von Körpern in Raum und Zeit. Die Ursache der Bewegung bleibt dabei außer Betracht. Im Rahmen der Kinematik werden Bewegungen nur beschrieben. Im Gegensatz zur *Kinematik* ist die *Dynamik* die Lehre vom Zusammenhang zwischen Bewegung und Kraft, wobei dann eine Antwort auf die Ursache von Bewegungsänderungen gegeben wird. Man kann also in der Mechanik unterscheiden zwischen

Kinematik = Beschreibung der Bewegung Dynamik = Beschreibung des Zusammenhangs zwischen Bewegung und Kraft .

In diesem Abschnitt sollen nur punktförmige Objekte betrachtet werden. Als wichtige neue Begriffe sollen die *Geschwindigkeit* und die *Beschleunigung* eingeführt werden. Unter einem *punktförmigen Objekt* verstehen wir dabei einen Körper mit räumlicher Ausdehnung Null aber endlicher Masse – man spricht von einem *Massenpunkt*. Im Gegensatz zu einem Massenpunkt spricht man von einem *starren Körper*, wenn das betrachtete Objekt eine endliche räumliche Ausdehnung besitzt, wobei aber alle Teile des ausgedehnten Objekts einen festen Abstand haben (starr: keine Vibrationen, keine Deformation). Wie in Abb.1.11 gezeigt ist, läßt sich jede Bewegung eines starren Körpers als eine Überlagerung einer fortschreitenden Bewegung (*Translation*) des *Schwerpunkts* des Körpers und einer Drehbewegung (*Rotation*) auffassen. Die reine Translationsbewegung eines starren Körpers ist deshalb identisch mit der Bewegung eines Massenpunktes.



Abbildung 1.11: Die Bahn des Schwerpunkts eines starren Körpers entspricht der Bewegung eines Massenpunktes.

Bezugs- und Koordinatensysteme

Die Bahnkurven eines punktförmigen Objekts werden in einem *Bezugssystem* durch den zeitabhängigen Ortsvektor $\mathbf{r}(t)$ des Objekts beschrieben. Bei einem Wechsel des Bezugssystems ändert sich die Darstellung der Bahnkurve und für gegeneinander bewegte Bezugssysteme ändert sich sogar die Bewegungsform eines Objekts, je nachdem von welchem Bezugssystem aus wir das Objekt betrachten. So ruht z.B. eine in einem fahrenden Zug sitzende Person im Bezugssystem, das mit dem Zug mitbewegt wird, wogegen sich die Person in einem relativ zur Erde ruhenden Bezugssystem bewegt. Würde man das Bezugssystem nicht an die Erde koppeln, sondern an die Sonne, so würde sich durch die zusätzliche Bahnbewegung der Erde um die Sonne in diesem Koordinatensystem eine wiederum andere Bewegungsform ergeben. Daraus kann man ablesen, daß sich die Suche nach einem ausgezeichneten Bezugssystem, von dem aus die "Absolutbewegung" eines Objekts beobachtet werden kann, als erfolglos herausstellt. Es macht nur Sinn, von der Bewegung eines Körpers relativ zu einem mehr oder weniger willkürlich gewählten *Bezugssystem* zu sprechen.¹¹

¹¹Sitzt man in einem Eisenbahnwaggon und blickt auf einen fahrenden Gegenzug, so kann man oft nicht feststellen, ob sich nur der Gegenzug bewegt oder ob sich der eigene Zug ruckfrei in Bewegung gesetzt hat.

Olazabal! Oder: Ein Putt zu viel

it dem längsten Putt aller Zeiten hat sich der spanische Golfstar José Maria Olazabal in die Rekordbücher gespielt. Der Masters-Sieger überbot auf dem Flug von London nach Boston in der Concorde, die 2000 km/h flog, die bisherige Bestmarke von Brad Faxon bei seinem ersten Versuch um 1,1 Kilometer. Insgesamt war der Ball 14,6 Kilometer in Bewegung. Der Amerikaner Faxon hatte 1997 ebenfalls in einem Flugzeug einen 13,6 Kilometer langen (sid) Putt eingelocht.

Kölner Stadtanzeiger, September 1999



Es macht also keinen Sinn von *absoluter Ruhe* oder *Bewegung* zu sprechen. Aus der Tatsache, daß man nur Relativbewegungen von Körpern gegenüber Bezugssystemen beobachten kann und keines dieser System bevorzugt ist, leitet man die Gleichberechtigung einer ganzen Klasse von Bezugssystemen, den *Inertialsystemen*, ab. Weitere Details hierzu werden in Abbschnitt 1.8.1 im Zusammenhang mit der *Galilei-Invarianz* diskutiert.¹²

Zur Beschreibung der Bewegung eines Massenpunktes braucht man also

- ein Raumsystem als Bezugssystem (dreidimensional)
- die Zeit (eindimensional)

Zur Festlegung von Punkten, Längen und Bewegungen benutzt man sogenannte Koordinatensysteme, die im Bezugsystem fest verankert sind. Das Koordinatensystem wählt man meist so, daß die mathematische Beschreibung von Bewegungen in einem Bezugsystem möglichst einfach wird. Einige gebräuchliche Koordinatensysteme sind in Abb. 1.13 gezeigt, nämlich das kartesische Koordinatensystem (x, y, z), das zylindrische Koordinatensystem (ρ, φ, z) und das Kugelkoordinatensystem (r, θ, φ) . Ein und derselbe Raumpunkt P läßt sich durch die Koordinaten (x, y, z), (ρ, φ, z) oder (r, θ, φ) charakterisieren. Die verschiedenen Koordinaten lassen sich auf folgende Weise ineinander umrechnen:

¹²Es sei hier angemerkt, daß im *ptolemäischen Weltbild* angenommen wurde, daß die Erde ruht und der Fixsternhimmel sich bewegt. Im *kopernikanischen Weltsystem* wurde dagegen der Fixsternhimmel als ruhend angenommen. Während es nach den Gesetzen der Mechanik unzulässig wäre, anzunehmen, daß die Erde ruht und der Fixsternhimmel sich bewegt, ist die umgekehrte Annahme mit ihnen verträglich. D.h. das ptolemäische Weltsystem widerspricht unserer Mechanik, während das kopernikanische mit ihr im Einklang ist.

Kartesische Koordinaten :
$$x, y, z$$
Zylinderkoordinaten : ρ, φ, z $x = \rho \cos \varphi$ $y = \rho \sin \varphi$ $z = z$ Kugelkoordinaten : r, θ, φ $x = r \sin \theta \cos \varphi$ $y = r \sin \theta \sin \varphi$ $z = r \cos \theta$



Abbildung 1.13: Kartesisches Koordinatensystem (x, y, z), zylindrisches Koordinatensystem (ρ, φ, z) und Kugelkoordinatensystem (r, θ, φ) .

Im kartesischen Koordinaten
system ist der Abstandreines Punktes vom Koordinaten
anfangspunkt gegeben durch

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad . \tag{1.3.2}$$

Den Abstand d zweier Punkte erhält man zu

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \quad . \tag{1.3.3}$$

1.3.1 Geschwindigkeit

Gleichförmige, geradlinige Bewegung

In einem vorgegebenen kartesischen Koordinatensystem soll zunächst die nach dem Zustand der Ruhe einfachste Bewegungsform, die *gleichförmige Bewegung* diskutiert werden. Darunter versteht man die in

Abb. 1.14a gezeigte Bewegung eines Körpers, der auf einer geradlinigen Bahn in gleichen Zeitabständen Δt gleiche Bahnabschnitte Δs durchläuft, d.h. $\Delta s \propto \Delta t$ (das Zeichen \propto steht für "proportional zu"). Der Proportionalitätsfaktor heißt *Geschwindigkeit* v (von lat. "velocitas"):

$$\Delta s = v \cdot \Delta t \quad . \tag{1.3.4}$$

Die Geschwindigkeit ist demnach die pro Zeiteinheit zurückgelegte Wegstrecke:



Abbildung 1.14: (a) Die geradlinige gleichförmige Bewegung. (b) Weg-Zeit-Diagramm der gleichförmigen Bewegung.

In dem in Abb. 1.14b gezeigten Weg-Zeit-Diagramm bedeutet v die Steigung der Geraden. Für die Steigung gilt:

$$v := \frac{\Delta s}{\Delta t} = \tan \alpha \quad . \tag{1.3.6}$$

Je steiler die Gerade, desto größer ist also die Geschwindigkeit. Aus dem Weg-Zeit-Diagramm ergibt sich außerdem sofort die auf dem Fahrstrahl zurückgelegte Strecke s als Funktion der verstrichenen Zeit t zu

$$s = s_0 + \sum \Delta s = s_0 + \sum v \Delta t = s_0 + v \sum \Delta t \quad , \tag{1.3.7}$$

da die Konstante v vor die Summe gezogen werden kann. Beginnend beim Zeitpunkt t_0 liefert die Summation der Zeitintervalle Δt aber gerade $\sum \Delta t = (t - t_0)$, so daß man den zur Zeit t zurückgelegten Weg wie folgt ausdrücken kann:

$$s(t) = s_0 + v(t - t_0) \quad . \tag{1.3.8}$$

Diese in t lineare Funktion ist in Abb. 1.14b dargestellt.

A: Bestimmung der Geschoßgeschwindigkeit:

Auf der verlängerten Achse eines Elektromotors sind zwei Pappscheiben im Abstand *d* angebracht, die mit der Drehzahl *U* (Umdrehungen pro Minute) des Motors rotieren. Feuert man aus einem Gewehr eine Kugel parallel zur Achse des Motors ab, so durchschlägt die Kugel die beiden Pappscheiben. Aufgrund des Abstands der Pappscheiben und der nur endlichen Geschwindigkeit des Geschosses, hat sich die zweite Pappscheibe bereits um den Winkel α weitergedreht, bis sie von der Gewehrkugel durchschlagen wird. Da der in der Sekunde durchlaufene Winkel $360^{\circ} \cdot U/60$ s beträgt, erhält man für den in der Zeit *t* durchlaufenen Winkel

$$\alpha \ [^o] = t[s] \ \frac{U[\text{Umdrehungen pro Minute}]}{60} \cdot 360$$
.

Für die Flugzeit t des Geschosses zwischen den beiden Scheiben und die Geschoßgeschwindigkeit ergibt sich

$$t = \frac{\alpha \cdot 60}{360 \cdot U}$$
$$v = \frac{d}{t} = \frac{d \cdot 360 \cdot U}{\alpha \cdot 60}$$

Für eine Geschoßgeschwindigkeit von 300 m/s, einem Scheibenabstand von 1 m und einer Motordrehzahl von 2400 Umdrehungen/min ergibt sich ein Winkel von etwa 45, der bequem gemessen werden kann.



Abbildung 1.15: Experimentelle Anordnung zur Bestimmung der Geschwindigkeit eines Geschosses.

B: Messung der Schallgeschwindigkeit in Luft:

Ein Lautsprecher erzeugt einen kurzen Ton, wodurch eine Quarzuhr gestartet wird. Im Abstand d vom Lautsprecher befindet sich ein Mikrofon, das den eintreffenden Schall registriert und die Uhr nach der Zeit t stoppt. Durch Messung von d und t erhält man dadurch die Schallgeschwindigkeit in Luft bei Atmosphärendruck zu etwa 330 m/s.

C: Messung der Lichtgeschwindigkeit – Geschichtliche Entwicklung:

1. Olaf Römer (1676): Die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichts wurde erstmals von **Olaf Römer** mittels einer astronomischen Methode nachgewiesen, bei der große Entfernungen und deshalb große Laufzeiten des Lichts auftreten. **Römer** untersuchte die Verfinsterung der Jupitermonde. Die Umlaufzeit eines Jupitermondes sei *T*. In der Stellung *A* der Erde in der Bahn um die Sonne werde zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0 eine Verfinsterung beobachtet (siehe Abb. 1.16a). In der Zeit, in der sich die Erde von der Stellung *A* in die Stellung *B* bewegt, macht der Mond eine bestimmte Anzahl *n* von Umläufen um den Jupiter.^{*a*} Es läßt sich also die Zeit $t = t_0 + nT$ vorausberechnen, wann der Mond in der Erdstellung *B* in den Jupiterschatten treten sollte, falls die Lichtgeschwindigkeit unendlich groß ist. Tatsächlich stellt man aber fest, daß dieses Ereignis um 1000 s später als vorausberechnet eintritt. Dieses Ergebnis läßt sich dadurch erklären, daß das Lichtsignal, das in der Stellung *B* den Eintritt der Verfinsterung angibt, 1000 s benötigt, um den Durchmesser der Erdbahn $d = 3 \times 10^{11}$ m zu durchlaufen. Damit ergibt sich die Lichtgeschwindigkeit zu $c = 3 \times 10^{11}/10^3 = 3 \times 10^8$ m/s.

^{*a*}Die Umlaufzeit des dem Jupiter am nächsten Mondes beträgt 42 Stunden 28 Minuten und 36 Sekunden.

2. Fizeau (1849): Die Lichtgeschwindigkeit wurde erstmals von Fizeau mit irdischen Lichtwegen gemessen (siehe Abb. 1.16b). Die von Fizeau verwendete Zahnradmethode enthält das Prinzip aller modernen Meßverfahren. Das von der Lichtquelle Q ausgehende Licht wird von einem halbdurchlässigen Spiegel reflektiert und tritt durch die Lücke eines Zahnrades. Nach dem Weg l wird es an einem Spiegel reflektiert und gelangt zum Beobachter. Wird das Rad mit einer bestimmten Umlaufzeit T gedreht, so kann gerade der nächste Zahn an die Stelle der Lücke gerückt sein, während das Licht zum Spiegel hin- und wieder zurückläuft. Es wird dann vom Zahnrad abgefangen, das Gesichtsfeld des Beobachters bleibt dunkel. Ist die Frequenz $\nu = 1/T$ und hat das Zahnrad N Zähne (wobei Zähne und Lücken gleich breit sein sollen), so ist $t = 1/2N\nu$ die Zeit, die das Licht zum Durchlaufen der Strecke 2l benötigt. Damit ergibt sich die Lichtgeschwindigkeit zu $c = 2l/t = 4Nl\nu$. Im Experiment von Fizeau war l = 8, 6 km, N = 720 und $\nu = 12.6$ s⁻¹. Daraus ergab sich $c = 3.13 \times 10^8$ m/s. Moderne Messungen verwenden polarisiertes Licht und statt des Zahnrades eine Kerr-Zelle, die mit Wechselstrom betrieben wird, als Lichtschranke (siehe unten).

3. Foucault (1869): Ein anderes Verfahren zur Messung der Lichtgeschwindigkeit ist die Drehspiegelmethode, die erstmals 1869 von Foucault verwirklicht wurde. Das Prinzip ist in Abb. 1.16c gezeigt. Das von Q ausgehende Lichtbündel läuft nach Reflexion an den Spiegeln in sich zurück, wenn der Drehspiegel ruht. Bei Rotation des Drehspiegels mit der Winkelgeschwindigkeit ω wird jedoch eine Verschiebung Δs des Bildes Q' gegenüber Q festgestellt. Diese kommt dadurch zustande, daß sich der Drehspiegel in der Zeit Δt , in der das Licht vom Drehspiegel die Strecke b zum festen Spiegel und wieder zurück läuft, um den Winkel $\beta = \omega \Delta t$ gedreht hat. Die Verschiebung Δs entspricht dann dem Winkel 2β zwischen einfallendem und reflektiertem Strahl. Somit ist $c = 2b/\Delta t = 2b\omega/\beta$. Mit $2\beta \simeq \Delta s/a$ folgt $c = 4ab\omega/\Delta s$. Foucault erhielt für b = 20 m, $\omega = 2\pi \cdot 8 \times 10^2 \text{ s}^{-1}$ und a = 1 m eine Verschiebung $\Delta s = 1, 34$ mm, woraus er $c = 3 \times 10^8$ m/s erhielt.



Abbildung 1.16: Zur Messung der Lichtgeschwindigkeit nach Römer (a), Fizeau (b) und Foucault (c).

D: Messung der Lichtgeschwindigkeit – Laborexperimente:

1. Laufzeitexperiment mit Kerr-Zelle: Eine intensive Lichtquelle erzeugt einen intensiven Lichtstrahl, aus dem mit Hilfe eines schnellen Schalters ("Kerr-Effekt") zur Zeit t = 0 ein kurzer Lichtpuls herausgeschnitten wird. Nach Durchlaufen der Strecke d wird der Lichtpuls mit einem schnellen Photodetektor registriert. Die Laufzeit t des Lichtimpulses über die Strecke d wird mit Hilfe eines Oszilloskops gemessen (etwa 100 ns für d = 30 m). Man erhält somit die Lichtgeschwindigkeit zu $c \simeq 3 \times 10^8$ m/s.

2. Mikrowellen-Interferometer: Ein Mikrowelleninterferometer funktioniert wie das in Abb. 1.2 beschriebene Michelson-Interferometer. Bei bekannter Frequenz ν (~ 100 GHz) der Mikrowelle wird die Wellenlänge λ aus der Verschiebung des Spiegels zwischen zwei Intensitätsmaxima gemessen. Da die typische Wellenlänge der Mikrowellen im Bereich von 0.1 bis 1 cm liegt, kann die Verschiebung bequem gemessen werden. Die Lichtgeschwindigkeit ergibt sich zu $c = \nu \cdot \lambda$. Eine abgewandelte Methode stellt die Hohlraum-Resonator Methode dar. Ein Mikrowellen-Resonator wird z.B. durch zwei planparallele Platten im Abstand $l = n \cdot \lambda$ gebildet. Durch Messung von l kann λ bestimmt werden und man erhält wiederum $c = \nu \cdot \lambda$.

Es soll hier nochmals darauf hingewiesen werden, daß seit 1983 die Lichtgeschwindigkeit auf c = 299792458 m/s als Naturkonstante festgelegt ist und dadurch die Länge über die Naturkonstante c an die Zeitdefinition gekoppelt wurde (vergleiche hierzu Abschnitt 1.2.2).

Ungleichförmige, geradlinige Bewegung

Im Gegensatz zu der bisher betrachteten gleichförmigen Bewegung legt ein Körper bei einer ungleichförmigen Bewegung in gleichen Zeitabschnitten Δt keine gleichen Strecken Δs zurück (siehe Abb. 1.17). Im Weg-Zeit-Diagramm ist die Kurve s(t) gekrümmt, d.h. sie besitzt keine konstante Steigung mehr. Damit wird die Geschwindigkeit selbst eine Funktion der Zeit: v = v(t). Während für eine gleichförmige Bewegung bei der Bestimmung der Geschwindigkeit aus dem Weg-Zeit-Diagramm die Länge des verwendeten Zeitintervall gleichgültig war, erhält man für die ungleichförmige Bewegung für verschiedene Zeitintervalle verschiedene Geschwindigkeiten. Der Wert der *Momentangeschwindigkeit* v(t) ergibt sich, wenn man zu immer kleineren (in der Grenze "infinitesimalen") Meßintervallen übergeht. Daher liegt es nahe, in Verallgemeinerung von Gl.(1.3.5) die Geschwindigkeit v zu definieren als

$$v(t) := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s} .$$
(1.3.9)

Hierbei läßt sich der Differentialquotient ds/dt im Weg-Zeit-Diagramm als Steigung der Tangente an die Kurve s(t) interpretieren.



Abbildung 1.17: Weg-Zeit-Diagramm der nichtgleichförmigen Bewegung.

Nicht-geradlinige Bewegung

Bei der Betrachtung von geradlinigen Bewegungen genügt eine skalare Betrachtungsweise, da das Koordinatensystem immer so gewählt werden kann, daß eine Achse (s-Achse) parallel zur Bahn ist. Dann wird der Bewegungsvorgang zu einem eindimensionalen Problem, die einzelnen Bahnabschnitte entsprechen den Koordinatenabschnitten auf der s-Achse. Bei einer nicht-geradlinigen oder krummen Bewegung läßt sich diese Vereinfachung nicht mehr machen. Die Bahnkurve muß durch einen zeitlich veränderlichen Ortsvektor **r** im dreidimensionalen Ortsraum beschrieben werden (siehe Abb. 1.18).

Zum Zeitpunkt t wird die Lage des betrachteten Körpers durch den Ortsvektor $\mathbf{r}(t)$, zum Zeitpunkt $t+\Delta t$ durch den Vektor $\mathbf{r}(t + \Delta t)$ festgelegt. In der Zeit Δt hat sich der Körper auf der Bahnkurve um das Wegstück Δs weiterbewegt und die Lage des Körpers hat sich um $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$ verschoben. Die mittlere Geschwindigkeit im Zeitintervall Δt ist dann $\overline{\mathbf{v}} = \Delta \mathbf{r}/\Delta t$. In Verallgemeinerung der oben bei der geradlinigen Bewegung verwendeten Geschwindigkeitsdefinition (Gl.(1.3.9)) definiert man die *Momentangeschwindigkeit* entlang der Bahnkurve zu

$$\mathbf{v}(t) := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \quad (1.3.10)$$

Für infinitesimale Meßintervalle $\Delta \mathbf{r}$ und Δt stellt das Verhältnis $\Delta \mathbf{r}/\Delta t$ tatsächlich die zum Zeitpunkt t herrschende Momentangeschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$ dar. Gleichung (1.3.10) gibt somit eine allgemeine Definition der Geschwindigkeit auch für Bewegungen, bei denen sich die Geschwindigkeit nach Betrag und



Abbildung 1.18: Zur Definition der Geschwindigkeit bei einer ungleichförmigen, nicht-geradlinigen Bewegung.

Richtung zeitlich ändert. Da im Limes $\Delta t \rightarrow 0$ der Verschiebungsvektor $\Delta \mathbf{r}$ für infinitesimal benachbarte Bahnpunkte tangential zur Bahn gerichtet ist, folgt aus der Definitionsgleichung (1.3.10), daß die Geschwindigkeit immer in Richtung der Tangente an die Bahnkurve weist (siehe Abb. 1.18). Da ferner $\Delta \mathbf{r}$ ein Vektor und Δt ein Skalar ist, ist die Geschwindigkeit \mathbf{v} selbst ein Vektor. In kartesischen Koordinaten erhält man folgende Ausdrücke für die Komponenten v_x , v_y und v_z sowie den Betrag v der Geschwindigkeit:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt},$$
 (1.3.11)

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \quad . \tag{1.3.12}$$

Mit Hilfe des Betrags v der Geschwindigkeit läßt sich der Geschwindigkeitsvektor mit Hilfe des *Tangenteneinheitvektors* $\hat{\mathbf{t}}$ als

$$\mathbf{v}(t) = v(t) \cdot \hat{\mathbf{t}} \tag{1.3.13}$$

ausdrücken. Diese Schreibweise zeigt explizit, daß die Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$ immer tangential an die Bahnkurve gerichtet ist.¹³

Mit Hilfe der in Gl.(1.3.10) gegebenen Definition kann man ausgehend vom Ortsvektor $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0)$ zur Zeit t_0 bei bekannter Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$ den Ortsvektor $\mathbf{r}(t)$ zur Zeit t berechnen zu

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{v}(t') dt'$$
(1.3.14)

Das Zeitintegral der Geschwindigkeit auf der rechten Seite von Gl.(1.3.14) ergibt damit die Verschiebung $\Delta \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0$. Weiterhin erhält man den entlang der Bahn zurückgelegten Weg $\Delta s = s(t) - s(t_0) = s(t) - s_0$ durch Integration des Betrags v der Geschwindigkeit:

¹³Der Tangenteneinheitsvektor ist durch $\hat{\mathbf{t}} := d\mathbf{r}(s)/ds$ definiert. Er ist also tangential an die Bahnkurve gerichtet und wie sich leicht zeigen läßt ist $|\hat{\mathbf{t}}| = 1$.

$$s(t) = s_0 + \int_{t_0}^t v(t')dt' \quad \text{bzw.} \quad \Delta s(t) = \int_{t_0}^t v(t')dt' \quad . \tag{1.3.15}$$

Ein Vergleich von Gl.(1.3.14) und Gl.(1.3.15) macht klar, daß z.B. für eine hin- und herpendelnde Bewegung die Verschiebung $\Delta \mathbf{r}(t)$ immer wieder zu Null wird, die Funktion $\Delta s(t)$ dagegen monoton mit der Zeit ansteigt. Von einem willkürlichen Nullpunkt $s(t_0) = 0$ auf der Bahn aus gibt $\Delta s(t)$ die *Bogenlänge* der Bahnkurve an.

Zusammensetzung und Zerlegung von Bewegungen

Der vektorielle Charakter der Geschwindigkeit schließt die Möglichkeit ein, die Geschwindigkeit in Komponenten zu zerlegen oder zwei Geschwindigkeiten zu einer zusammenzusetzen, wie allgemein in Abb. 1.19 gezeigt ist.



Abbildung 1.19: Komponentenzerlegung (a) und Addition (b) von Geschwindigkeiten.

Ein Beispiel für die Zerlegung von Geschwindigkeiten ist in Abb. 1.20 gegeben: ein Schwimmer durchquert einen Fluß, der mit der Geschwindigkeit \mathbf{v}_1 strömt, relativ zum Fluß bewegt sich der Schwimmer mit der Geschwindigkeit \mathbf{v}_2 . Die resultierende Gesamtgeschwindigkeit des Schwimmers (vom Ufer aus betrachtet) ist dann $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$. Ein wichtiger Satz zur Zerlegung von Geschwindigkeiten lautet, daß Bewegungen, die senkrecht zueinander erfolgen, unabhängig voneinander sind. Schwimmt der Schwimmer genau senkrecht zur Strömung des Flusses, so wird er unabhängig von der Strömungsgeschwindigkeit \mathbf{v}_1 des Flusses immer nach der gleichen Zeit das andere Ufer erreichen, da hierfür nur die senkrecht zu \mathbf{v}_1 gerichtete Schwimmgeschwindigkeit \mathbf{v}_2 maßgebend ist.



Abbildung 1.20: Ein Schwimmer in einem Fluß der Strömungsgeschwindigkeit \mathbf{v}_1 hat relativ zum Fluß die Geschwindigkeit \mathbf{v}_2 und relativ zum Ufer die Geschwindigkeit $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$.

1.3.2 Beschleunigung

Eine Bewegung, bei der sich der Geschwindigkeitsvektor \mathbf{v} im Laufe der Zeit ändert, nennt man eine *beschleunigte Bewegung*. Deshalb ist jede ungleichförmige Bewegung eine beschleunigte Bewegung.

Experiment: Freier Fall und schiefer Wurf:

Man betrachtet 2 Kugeln A und B (siehe Abb. 1.21a). Kugel A erhält eine Anfangsgeschwindigkeit v_x in x-Richtung, wobei für Kugel B $v_x = 0$ gilt. Sobald Kugel A die Rampe verläßt und frei fallen kann, wird auch Kugel B in gleicher Höhe losgelassen. Da die Horizontalund Vertikalgeschwindigkeit getrennt betrachtet werden können, kann man sofort folgende Schlußfolgerungen treffen. (i) Beide Kugeln erreichen zur selben Zeit den Boden. (ii) Da die Höhe z für beide Kugeln zu allen Zeiten gleich groß ist (gleiche Fallbewegung), stoßen die Kugeln unabhängig von der Horizontalgeschwindigkeit v_x immer zusammen.

In Abb. 1.21b ist ein weiteres Experiment zur Demonstration der gleichen Fallzeiten beim horizontalen Wurf gezeigt. Ein Hammer schlägt auf eine Blattfeder und verursacht somit eine Horizontalgeschwindigkeit von Kugel *A*. Gleichzeitig fällt Kugel *B* senkrecht nach unten. Unabhängig von der mit dem Hammer erzeugten Horizontalgeschwindigkeit schlagen beide Kugeln immer gleichzeitig am Boden auf.



Abbildung 1.21: Freier Fall von zwei Kugeln A und B mit unterschiedlichen Horizontalgeschwindigkeiten v_x .

Für die Beschleunigung verwendet man häufig das Symbol a von lat. "acceleratio".

Es ist naheliegend, die Beschleunigung als die Änderung der Geschwindigkeit $\Delta \mathbf{v}$ im Verlauf des Zeitintervalls Δt , dividiert durch das Zeitintervall Δt zu definieren. Anhand von Abb. 1.23 erhält man

$$\mathbf{v}(t + \Delta t) = \mathbf{v}(t) + \Delta \mathbf{v} \qquad \Rightarrow \Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t) \qquad (1.3.16)$$

und
$$(t + \Delta t) = t + \Delta t$$
 $\Rightarrow \Delta t = (t + \Delta t) - t$ (1.3.17)

Um wie bei der Geschwindigkeit auch bei der Beschleunigung den Momentanwert zur Zeit t zu erfassen, geht man mit dem Meßintervall Δt gegen Null. Die Beschleunigung ergibt sich somit zu

Experiment: Welche Kugel ist schneller am Ziel ?

Man betrachtet 2 Kugeln A und B (siehe Abb. 1.22). Beide Kugeln haben die gleiche Horizontalgeschwindigkeit v_x . Man würde deshalb erwarten, daß beide Kugeln gleichzeitig am Ziel ankommen würden (für die Horizontalbewegung ist nur v_x maßgebend) oder daß Kugel B später ankommt, da sie einen längeren Weg zu durchlaufen hat. Im Experiment werden diese Erwartungen allerdings widerlegt. Kugel B erhält durch die Mulde in der Bahn eine zusätzliche Beschleunigung und läuft deshalb einen Teil der Wegstrecke mit höherer Geschwindigkeit als Kugel A und erreicht somit trotz des längeren Wegs als erste das Ziel. Die genaue Berechnung erfordert etwas Zeit.



Abbildung 1.22: Kugel *B* erreicht trotz des längeren Wegs als erste das Ziel, da sie durch die Mulde eine zusätzliche Beschleunigung erfährt.



Abbildung 1.23: Beschleunigte Bewegung.

$$\mathbf{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \qquad (1.3.18)$$
$$[\mathbf{a}] = \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{s}^2} . \qquad (1.3.19)$$

Laut dieser Definition ist die Beschleunigung ein Vektor. Es sei darauf hingewiesen, daß eine Beschleunigung $\mathbf{a} \neq 0$ auch dann vorliegt, wenn der Betrag der Geschwindigkeit konstant bleibt, sich aber die Richtung des Geschwindigkeitsvektors ändert. Die spezielle Bewegungsform mit $\mathbf{a} = const.$ heißt gleichförmig beschleunigte Bewegung.

Als Differentialquotient geschrieben wird aus Gl.(1.3.19)

$$\mathbf{a}(t) := \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} \quad . \tag{1.3.20}$$

und mit Hilfe von Gl.(1.3.10) ergibt sich

$$\mathbf{a}(t) := \frac{d^2 \mathbf{r}(t)}{dt^2} \quad . \tag{1.3.21}$$

Die Beschleunigung ist also die erste Ableitung der Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$ bzw. die zweite Ableitung des Ortsvektors $\mathbf{r}(t)$ nach der Zeit. In Komponenten lauten die Gln.(1.3.20) und (1.3.21)

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}, \quad (1.3.22)$$

und für den Betrag der Beschleunigung erhält man

$$a = \sqrt{\left(\frac{dv_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_z}{dt}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2} \quad (1.3.23)$$

PHYSIK I

In Gl.(1.3.13) wurde gezeigt, daß die Geschwindigkeit immer tangential an die Bahnkurve gerichtet ist. Mit $\mathbf{v} = v \cdot \hat{\mathbf{t}}$ erhält man:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(v \cdot \hat{\mathbf{t}})}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{\mathbf{t}} + v\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{dt}$$
(1.3.24)

Die Beschleunigung läßt sich also somit in zwei Teile zerlegen: Der erste Summand gibt die Tangentialkomponente der Beschleunigung an, deren Größe der Änderung des Betrags der Geschwindigkeit entspricht. Die Bedeutung des zweiten Summanden wird nur nach einigen Umformungen ersichtlich. Mit Hilfe von

$$\frac{d\mathbf{t}}{dt} = \frac{d\mathbf{t}}{ds}\frac{ds}{dt} \tag{1.3.25}$$

folgt

$$v\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{dt} = v^2\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} = v^2\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \quad . \tag{1.3.26}$$





Um den Ausdruck $d\hat{\mathbf{t}}/ds$ zu berechnen, betrachtet man die in Abb. 1.24 gezeichnete Bahnkurve. Die Bahnkurve wird im Bereich zwischen den Bahnpunkten $\mathbf{r}(t)$ und $\mathbf{r}(t + \Delta t)$ für kleine Δt durch einen Kreis approximiert, der sich optimal der Bahnkurve anpassen soll. Dieser *Knümmungskreis* besitzt den Radius *R*. Für den Winkel $\Delta \varphi$ gilt nach Abb. 1.24

$$\Delta \varphi = \frac{\Delta s}{R} \simeq \frac{|\Delta \hat{\mathbf{t}}|}{|\hat{\mathbf{t}}|} = |\Delta \hat{\mathbf{t}}|$$
(1.3.27)

und damit erhält man

$$\frac{|\Delta \mathbf{t}|}{\Delta s} = \frac{1}{R} \text{ und damit } \frac{d|\mathbf{t}|}{ds} = \frac{1}{R}$$
(1.3.28)

Vom Punkt M aus erscheint das Bogenstück Δs auf der Bahn unter dem Winkel $\Delta \varphi$ und im Limes $\Delta s \rightarrow 0$ ist $\Delta s = R \Delta \varphi$, wenn $\Delta \varphi$ im Bogenmaß gemessen wird. Die Richtung von $d\hat{\mathbf{t}}/ds$ kann man aus folgender Überlegung gewinnen: Da $|\hat{\mathbf{t}}| = 1$ folgt $\hat{\mathbf{t}}^2 = 1$. Da die Ableitung einer Konstanten Null ergibt, erhält man:

$$\frac{d\hat{\mathbf{t}}^2}{ds} = 2\hat{\mathbf{t}}\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} = 0 \Rightarrow \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} \perp \hat{\mathbf{t}} \quad . \tag{1.3.29}$$

Mit dem *Hauptnormalenvektor* $\hat{\mathbf{n}}$, der vom Bahnpunkt $\mathbf{r}(t)$ zum Krümmungsmittelpunkt M gerichtet ist und den Betrag 1 hat, läßt sich $d\hat{\mathbf{t}}/ds$ schreiben als

$$\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} = \frac{1}{R} \,\hat{\mathbf{n}} \quad . \tag{1.3.30}$$

Der zweite Summand in Gl.(1.3.24) gibt also die *Normalkomponente* der Beschleunigung an, deren Betrag durch das Quadrat der Bahngeschwindigkeit dividiert durch den Krümmungsradius gegeben ist. Somit kann die Beschleunigung grundsätzlich in eine *Tangentialkomponente* \mathbf{a}_{n} und *Normalkomponente* \mathbf{a}_{n} zerlegt werden

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \frac{dv}{dt}\,\hat{\mathbf{t}} + \frac{v^2}{R}\,\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n \quad (1.3.31)$$

Zum Abschluß sollen einige Sonderfälle diskutiert werden:

Geradlinige Bewegung:

In diesem Fall sind Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung immer kollinear. Die Normalkomponente der Beschleunigung ist Null, nur die Tangentialkomponente bleibt übrig. Ist die Beschleunigung bekannt, so kann durch Integration die Geschwindigkeit, der Ortsvektor und der zurückgelegte Weg berechnet werden:

$$\mathbf{v}(t) = \int_{t_0}^t \mathbf{a}(t')dt' \qquad (1.3.32)$$

$$\mathbf{r}(t) = \int_{t_0}^t \mathbf{v}(t') dt' \qquad (1.3.33)$$

$$s(t) = \int_{t_0}^t v(t')dt'$$
 (1.3.34)

Für eine zeitlich konstante Beschleunigung $\mathbf{a}(t) = const.$ (gleichförmige Beschleunigung) erhält man

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}(t - t_0)$$
 (1.3.35)

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\mathbf{a}(t - t_0)^2$$
(1.3.36)

$$s(t) = s_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$
 (1.3.37)

Hierbei sind $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0)$, $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(t_0)$ und $s_0 = s(t_0)$ der Ortsvektor, die Geschwindigkeit und die Wegstrecke zur Zeit $t = t_0$. Im speziellen Fall $t_0 = 0$, $v_0 = 0$ und $s_0 = 0$ ergibt sich

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{a}t \tag{1.3.38}$$

$$s(t) = \frac{1}{2}at^2 \quad . \tag{1.3.39}$$

Bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung nimmt also die Geschwindigkeit linear und der zurückgelegte Weg quadratisch mit der Zeit zu, d.h. die Funktion s(t) ist eine Parabel.

Experiment: Luftkissen-Bahn:

Messung von v und s mit Hilfe einer geneigten Bahn, auf der sich ein Fahrzeug mit vernachlässigbarer Reibung auf einem Luftkissen bewegt. Man kann experimentell die in Gl.(1.3.39) hergeleiteten Zusammnehänge verifizieren.

Experiment: Freier Fall:

Ein einfaches Beispiel für eine geradlinige, gleichförmig beschleunigte Bewegung ist der freie Fall. Die vertikale Beschleunigung ist durch die Erdbeschleunigung $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ gegeben (der genaue Wert hängt vom Ort auf der Erdoberfläche ab und ist unabhängig von der Masse, eine genaue Erklärung folgt später). Aufgrund der Unabhängigkeit von g von der Masse fallen alle Körper gleich schnell. Die im Alltagsleben für unterschiedliche Körper (z.B. Feder und Bleikugel) beobachteten unterschiedlichen Fallgeschwindigkeiten hängen nur mit der Luftreibung zusammen.

(a) Läßt man eine Styroporkugel in einem evakuierten Rohr fallen (keine Luftreibung mehr), so fällt sie so schnell wie eine gleichgroße Bleikugel.

(b) Experiment mit Fallschnüren:

An zwei Schnüren werden Eisenkugeln befestigt und zwar an Schnur A in gleichen Abständen und an Schnur B in Abständen, die sich wie 1:4:9:16:25 verhalten. Beide Schnüre werden an der Decke so aufgehängt, daß die unterste Kugel fast den Boden berührt. Schneidet man dann die Schnüre ab, so schlagen die Kugeln nacheinander auf dem Boden auf. Bei Schnur A geschieht dies in immer kürzeren Zeitabständen, während die Kugeln von Schnur B in gleichmäßigen Zeitintervallen auf dem Boden aufschlagen.

(c) Experiment zur Bestimmung der Erdbeschleunigung – der Fall auf der schiefen Ebene (siehe Abb. 1.25):

Läßt man eine Kugel in einer Rille eine schiefe Ebene herunterrollen, so rollt sie umso langsamer, je kleiner der Neigungswinkel α der schiefen Ebene ist. Die senkrecht nach unten wirkende Beschleunigung g des freien Falls läßt sich in die beiden Komponente $g \sin \alpha$ und $g \cos \alpha$ zerlegen. Da die senkrecht zur Bahn wirkende Komponente keine Bewegung hervorrufen kann, wirkt allein die Größe $g \sin \alpha$ als Beschleunigung. Diese ist aber kleiner als g, d.h. die Fallgeschleunigung auf der schiefen Ebene kann herabgesetzt werden und dadurch die Fallbewegung verlangsamt werden. Die kleineren Geschwindigkeiten können dann besser gemessen werden.^a Mit v = gt, $s = \frac{1}{2}(g \sin \alpha)t^2$ und $s = h/\sin \alpha$ ergibt sich die Endgeschwindigkeit nach Durchlaufen der schiefen Ebene zu $v = \sqrt{2(g \sin \alpha) \cdot (h/\sin \alpha)} = \sqrt{2gh}$. Dies ist exakt dieselbe Geschwindigkeit, die ein Körper beim senkrechten freien Fall erreicht. D.h., die Endgeschwindigkeit eines aus einer bestimmten Höhe fallenden Körpers hängt nicht davon ab, ob er frei fällt oder auf einer beliebig geneigten Ebene herabgleitet.^b

Gleichförmige Kreisbewegung

Bei einer gleichförmigen Kreisbewegung läuft ein Körper mit konstantem Geschwindigkeitsbetrag vauf einem Kreis mit Radius R. Er legt in gleichen Zeiten Δt gleiche Bogenlängen Δs zurück. Nach Gl.(1.3.31) verschwindet daher die Tangentialbeschleunigung \mathbf{a}_t und es existiert nur eine von Null verschiedene Normalkomponente \mathbf{a}_n der Beschleunigung. Das heißt, nur die Richtung der Geschwindigkeit ändert sich, während der Geschwindigkeitsbetrag konstant bleibt.

^{*a*}Galilei hat diese Methode benutzt, um die Fallgesetze abzuleiten. Er benutzte zur Zeitmessung Wasseruhren, bei denen die Zeit über das Gewicht des ausgelaufenen Wassers bestimmt wird.

^bBei dieser Überlegung wird vernachlässigt, daß bei einer rollenden Kugel aufgrund der auf der schiefen Ebene erhaltenen endlichen Rotationsenergie die Endgeschwindigkeit nach Durchlaufen der schiefen Ebene geringer ist als diejenige beim freien Fall.



Abbildung 1.25: Zum Fall auf der schiefen Ebene, für die zurückgelegte Wegstrecke gilt: $s(t) = \frac{1}{2}(g \sin \alpha)t^2$.

Dem Bahnstück Δs kann der Winkel $\Delta \varphi = \Delta s / \Delta t$ zugeordnet werden (siehe Abb. 1.26). Mit Hilfe dieses Winkels können für Kreisbewegungen nützliche neue Größen definiert werden, nämlich die *Winkelgeschwindigkeit* ω und die *Winkelbeschleunigung* β :

$$\omega := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}$$
(1.3.40)

$$\beta := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \quad . \tag{1.3.41}$$

Anschaulich geben ω und β die Geschwindigkeit und die Beschleunigung eines fiktiven Massepunktes im Abstand 1 m vom Drehzentrum auf dem Fahrstrahl an. Es ist zu beachten, daß ω und β nicht die Dimension einer Geschwindigkeit bzw. einer Beschleunigung haben, weshalb die verwendete Namensgebung etwas irreführend ist. Aus Gl.(1.3.41) folgt nämlich

$$[\omega] = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \qquad \text{und} \qquad [\beta] = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \quad . \tag{1.3.42}$$

Für die gleichförmige Kreisbewegung ist $\omega = const.$ und $\beta = 0$, daher gilt auch für endliche Zeitintervalle Δt

$$\Delta \varphi = \omega \ \Delta t \quad . \tag{1.3.43}$$

Gl.(1.3.43) stellt also die Übertragung von Gl.(1.3.4) auf die Kreisbewegung dar. Wegen $\Delta \varphi = \Delta s/R$ folgt $\frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{1}{R} \frac{\Delta s}{\Delta t}$ und damit

$$\omega := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{|\mathbf{v}|}{R} \quad . \tag{1.3.44}$$

Die Bahngeschwindigkeit $|\mathbf{v}|$ und die Winkelgeschwindigkeit ω sind also über den Radius der Kreisbahn miteinander verknüpft. Mit der *Umlaufzeit* T (Zeit für einen vollen Umlauf $\varphi = 2\pi$) gilt ferner

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu; \qquad \nu = \frac{1}{T} \frac{|\mathbf{v}|}{R}; \qquad [\nu] = \frac{1}{s} \quad . \tag{1.3.45}$$



Abbildung 1.26: Kinematik der gleichförmigen Kreisbewegung. Die Beschleunigung a ist parallel zu $\Delta \mathbf{v}$. Sie ist für infinitesimale $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)$ auf den Mittelpunkt M der Kreisbahn gerichtet.

Die Frequenz ν mißt hierbei die Zahl der Umläufe pro Zeiteinheit. Aufgrund von Gl.(1.3.45) nennt man ω auch *Kreisfrequenz*. Schließlich ergibt sich mit $d|\mathbf{v}(t)|/dt = 0$ die Beschleunigung mit Hilfe von Gl.(1.3.31) zu

$$\mathbf{a}(t) = \frac{v^2}{R} \,\hat{\mathbf{n}}(t) = \omega^2 R \,\hat{\mathbf{n}}(t) \tag{1.3.46}$$

$$|\mathbf{a}(t)| = \omega^2 R = \frac{v^2}{R}$$
 (1.3.47)

Für eine gleichförmige Kreisbewegung ist die Tangentialkomponente der Beschleunigung also Null und die verbleibende Komponente ist auf den Kreismittelpunkt gerichtet. Man nennt sie deshalb Zentripetalbeschleunigung.

Experiment: Messung der Kreisfrequenz mit einem Stroboskop:

Zur Messung der Kreisfrequnz kann ein *Stroboskop*, d.h. eine Blitzlampe mit variabel einstellbarer Blitzfolgefrequenz $\nu_{\rm Str}$ verwendet werden. Beleuchtet man einen mit der Frequenz ν rotierenden Körper mit einem Stroboskop, so erhält man nur dann ein stehendes Bild des Körpers, wenn $\nu_{\rm Str} = n\nu$ oder $\nu_{\rm Str} = \nu/n$ gilt (hierbei ist *n* eine ganze Zahl).

Wurfparabel:

Es soll nun die Überlagerung einer Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit \mathbf{v}_0 mit der freien Fallbewegung diskutiert werden. Zur Zeit $t_0 = 0$ soll gelten: $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$, $\mathbf{a} = a\hat{\mathbf{z}} = -g \cdot \hat{\mathbf{z}}$ und $\mathbf{r}(0) = 0$. Hierbei ist \hat{z} der Einheitsvektor in z-Richtung und g der Betrag der Erdbeschleunigung. Durch Integration erhält man

$$\mathbf{v}(t) = -g \cdot t \cdot \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{v}_0 \quad , \tag{1.3.48}$$

$$\mathbf{r}(t) = -\frac{1}{2}gt^2 \cdot \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{v}_0 t \quad . \tag{1.3.49}$$

Der Ausdruck für $\mathbf{r}(t)$ ist wiederum durch eine Parabel gegeben, die sogenannte *Wurfparabel* (siebe Abb. 1.27).



Abbildung 1.27: Wurfparabel: Es gilt $\Delta x \propto t$ und $\Delta z \propto t^2$.

Experiment: "Falling faster than g":

Bei der Entfernung der Haltebügel in Abb. 1.28 fällt das Brett und damit der auf ihm befestigte Topf und die Kugel im Schwerefeld der Erde nach unten. Wenn das Brett ankommt, liegt die Kugel im Topf. Der Topf scheint also schneller als die Kugel nach unten zu fallen: "Falling faster than g ?".

Erklärung: Der Schwerpunkt des Brettes fällt mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}_S = g\hat{\mathbf{z}} \cdot t$. Da das Brett am Drehpunkt festgehalten wird, fällt der Topf mit einer Geschwindigkeit $v_{\text{Topf}} > v_S$. Für die Geschwindigkeit des Brettendes kann folgende Abschätzung gemacht werden:

$$v_{\rm Ende} \simeq \omega \cdot L > v_S \simeq \omega \cdot L/2$$
 (1.3.50)

Mit $v_s = gt$ erhält man $v_{\text{Ende}} \simeq 2gt$. Wichtig ist, daß der Schwerpunkt des Brettes und der Kugel exakt gleich schnell fallen. Die Tatsache, daß das Brettende schneller fällt, liegt daran, daß man es nicht mit der Bewegung eines Massenpunktes sondern mit derjenigen eines starren Körpers zu tun hat. Der soeben diskutierte Fall kann auch auf einen kippenden Kamin angewendet werden. Beim fallen knickt der Kamin ab. Würde der Kamin als starre Einheit fallen, so müßte das Ende des Kamins auf etwa die doppelte Fallgeschwindigkeit beschleunigt werden. Die dabei auftretende Kraft führt zum Abknicken.



Abbildung 1.28: (a) Beim Fallen des Brettes fällt der Topf schneller als die Kugel, so daß die Kugel in den Topf fällt. (b) Kippen eines Kamins.

Zahlenbeispiele von Geschwindigkeiten:

$2,998 imes 10^8 \mathrm{m/s}$	Lichtgeschwindigkeit
$2,50 imes10^5$ m/s	Bahngeschwindigkeit der Sonne um das galaktische Zentrum
$2,98 imes10^4$ m/s	Bahngeschwindigkeit der Erde um die Sonne
$4,59 imes10^2\mathrm{m/s}$	Umfanggeschwindigkeit der Erde am Äquator
$3 imes 10^2\mathrm{m/s}$	Schallgeschwindigkeit in Luft bei Normaldruck
10m/s	Geschwindigkeit eines Sprinters

1.4 Kraft und Masse – Dynamik des Massenpunktes

Die Kinematik beschäftigt sich mit der Beschreibung von Bewegungen, ohne nach der Ursache eines in der Natur beobachteten Bewegungszustands zu fragen. Die kinematische Beschreibung kommt mit den Grundgrößen Länge und Zeit aus. Um aber von einem bestimmten Bewegungszustand eines Körpers ausgehend seine weitere Bewegung vorhersagen zu können, bedarf es des physikalischen Verständnisses des Bewegungsablaufs. Es muß die Ursache der Bewegung und die Reaktion eines Körpers auf die Bewegungsursache geklärt werden. Das heißt, wir wollen nicht nur beschreiben, wie ein Apfel vom Baum fällt, sondern aufgrund welcher Ursache er das tut. Die Antwort hierauf geben die **Newton**schen Axiome¹⁴ der Mechanik, die auf die Begriffe *Kraft* und *Masse* führen. Die Einführung der **Newton**schen Axiome bedeutet den Übergang von der Kinematik zur *Dynamik* eines Bewegungsvorganges. Mit ihrer Hilfe ist es möglich, die *Dynamik eines Bewegungszustandes* zu studieren. Das bedeutet, daß man einen Bewegungszustand nicht nur kinematisch beschreibt, sondern aus den Ursachen heraus berechnet.

Im vorliegenden Abschnitt sollen die **Newton**schen Axiome diskutiert werden. Aus didaktischen Gründen wird die Kraft über eine Meßvorschrift als dritte Grundgröße neben Länge und Zeit eingeführt und die Masse anhand der **Newton**schen Axiome definiert, obwohl abweichend davon im SI-System die Masse als weitere Grundgröße ausgewählt wurde.

1.4.1 Das Trägheitsgesetz – Lex Prima

Eingehende Beobachtungen und Überlegungen führten **Galilei** (1564-1642) zum Trägheitsgesetz, welches von **Newton** (1643-1727) schließlich an die Spitze seiner Axiome gesetzt wurde:

1. Newtonsches Axiom – Lex Prima: "Alle Körper verharren im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen, geradlinigen Bewegung, wenn keine äußere Einflüsse vorhanden sind."

Das Beharrungsvermögen eines Körpers in seinem Bewegungszustand nennt man die *Trägkeit* eines Körpers, weshalb das von **Newton** als Lex Prima in sein Axiomensystem übernommene **Galilei**sche Bewegungsgesetz auch das *Trägheitsgesetz* heißt. Man beachte, daß die Lex Prima als experimentelle Erfahrungstatsache über die rein kinematische Beschreibung einer Bewegung hinausgeht. Die Trägheit eines Körpers schreibt man einer Eigenschaft des Körpers zu, der *trägen Masse m*. Da alle Körper dem Trägheitsgesetz genügen, haben alle im Rahmen der **Newton**schen Mechanik eine träge Masse.

Es sei darauf hingewiesen, daß die Lex Prima keineswegs trivial ist und zuerst von **Kepler** erkannt und formuliert wurde. Im Gegensatz dazu glaubte **Aristoteles**, daß $v \propto F$, d.h. daß eine gleichförmige Bewegung nur bei Vorhandensein einer endlichen Kraft möglich sei. Diese Aussage stimmt zwar mit der Erfahrung häufig überein, hängt aber mit den nichtverschwindenden Reibungskräften zusammen (Reibungskräfte werden später in Abschnitt 1.6.4 diskutiert). Reibungskräfte machen also die experimentelle Beobachtung der Lex Prima schwierig. Die von **Aristoteles** gemachte falsche Vermutung hat wahrscheinlich bewirkt, daß sehr lange Zeit bis zur Formulierung der **Newton**schen Axiome vergangen ist.

¹⁴**Axiom** (griech.) = Forderung. Axiome sind Sätze eines Wissensgebiets, mit denen alle übrigen Sätze des Wissensgebiets bewiesen werden können. Ihre Gültigkeit ist beweislos vorausgesetzt. Die Axiome eines Axiomensystems müssen (i) widerspruchsfrei, (ii) unabhängig und (iii) vollständig sein. Es darf also nicht möglich sein, mit Axiomen zwei Sätze zu beweisen, die sich widersprechen (Widerspruchsfreiheit). Keines der Axiome darf sich mit Hilfe eines anderen beweisen lassen (Unabhängigkeit). Jeder Satz soll mit den Axiomen bewiesen werden können (Vollständigkeit). Welche Sätze man als Axiome einführt, ist innerhalb der durch diese drei Forderungen gezogenen Grenzen willkürlich.

Im Trägkeitsgesetz ist von Ruhe und gleichförmiger, geradliniger Bewegung die Rede. Derartige Aussagen können nur dann gelten, wenn ein bestimmtes Bezugssystem zugrunde gelegt wird. Die Lex Prima und alle weiteren **Newton**schen Axiome sind nur in *Inertialsystemen* (lat.: inertia = Trägheit) oder *Fundamentalsystemen* gültig, auf die später in Abschnitt 1.8 im Detail eingegangen wird. Ein Inertialsystem ist per Definition ein Bezugssystem, in dem das 1. **Newton**sche Axiom erfüllt ist, d.h. gegenüber dem sich ein kräftefreier Körper mit konstanter Geschwindigkeit bewegt. Ein solches System ist nicht die Erde, wenngleich dies naheliegend wäre, da das Trägheitsgesetz aus Versuchen auf der Erde abgeleitet wurde. Es wird später aber noch genau gezeigt, daß nur ein im Fixsternhimmel verankertes Koordinatensystem ein geeignetes Bezugssystem darstellt. Das man trotzdem das Trägheitsgesetz aus Versuchen auf der Erde abgeleitet hat, liegt nur an dem glücklichen Umstand der zu großen Meßungenauigkeit, der die durch die Erdrotation auftretenden Abweichungen nicht erkennbar werden ließ.

Da eine gleichförmige, geradlinige Bewegung auch in jedem anderen Bezugsystem, das sich bezüglich des Fixsternhimmels geradlinig und gleichförmig bewegt, wiederum als gleichförmig, geradlinige Bewegung erscheint, gibt es unendlich viele gleichberechtigte Bezugssysteme. Geschwindigkeiten können deshalb nicht absolut sondern immer nur relativ angegeben werden: **Galilei**sches Relativitätsprinzip.

Experiment: Luftkissentisch:

Geht man von der Vorstellung aus, daß Wechselwirkungen zwischen Körpern materiellen Ursprungs sind und deshalb grundsätzlich zwischen zwei oder mehreren Körpern wirken, so ist das im Trägheitsgesetz geforderte Verschwinden aller Wechselwirkungen nur schwierig zu erfüllen. Auf der Erde ist dies aufgrund der Erdanziehung, der Reibung und des Luftwiderstands besonders schwierig. Am überzeugendsten sind Experimente mit Luftkissenfahrzeugen. Wird ein Körper auf einem Luftkissentisch angestoßen, so gleitet er gleichförmig und geradlinig weiter. Die Reibung als äußerer Einfluß wird durch die Luftschicht zwischen Unterlage und Körper minimiert. Die Erdanziehung kann bei einer horizontalen Unterlage nicht wirksam werden.

1.4.2 Realdefinition der Kraft

Im folgenden soll die Kraft im Sinne einer Realdefinition über eine Meßvorschrift als dritte Grundgröße eingeführt werden. Dabei wird versucht, möglichst eng an die Vorstellung der vertrauten "Muskelkraft" anzuschließen. Danach ist eine "Kraft" notwendig, um einen Körper zu beschleunigen, ihn hochzuheben oder auf dem Boden zu schleifen.¹⁵ Als charakteristische Eigenschaft einer Kraft kann man herausgreifen, daß sie Körper beschleunigen kann. Man kann deshalb gleichwertig zu obiger Definition des Trägheitsgesetzes formulieren, daß Abweichungen vom Trägheitsgesetz auf Kräfte zurückzuführen sind.

Hängt man wie in Abb. 1.29 gezeigt Gewichtskörper an einer Feder auf, so wird die Feder gespannt – die "Federwaage" schlägt aus. Die Interpretation dieser Beobachtung lautet, daß die Kraft, die die Gewichtskörper zum Erdmittelpunkt hin beschleunigt, die Feder deformiert. Diese Eigenschaft läßt sich bequem für eine Meßvorschrift und damit Definition der Kraft verwenden. Der Federausschlag kann mit einem Satz identischer Gewichtssteine geeicht werden. Die geeichte Federausdehnung wird dann als Maß für die Kraft benutzt, wobei Kräfte, die mit keiner Eichmarke übereinstimmen, durch Interpolation erhalten werden. Es muß beachtet werden, daß bei dieser Realdefinition angenommen wird, daß N Gewichtssteine der N-fachen Kraft entsprechen. Dagegen wird für die Feder kein linearer Zusammenhang zwischen Dehnung und Kraft vorausgesetzt. Zusammenfassend erhält man folgende qualitative und quantitative Definition der Kraft:

¹⁵Typische aus dem Alltagsleben bekannte "Kräfte" sind die Muskelkraft, die Reibungskraft, die Schwerkraft oder die Rückstellkraft einer Feder.



Abbildung 1.29: Zur Realdefinition der Kraft. Eine Verdopplung der Zahl der Gewichtskörper führt zu einer Verdopplung der Auslenkung. Die Auslenkung ist also proportional zur Schwerkraft: $F \propto z$.

- Qualitative Definition: Die Kraft ist die Ursache für die Änderung des Bewegungszustands bzw. Ursache für eine Deformation.
- Quantitative Definition: Kräfte sind gleich, wenn sie gleiche Veränderungen hervorrufen (z.B. gleiche Deformation oder Geschwindigkeitsänderung).

Meßtechnisch ist die Definition der Kraft nach obigem Verfahren allerdings problematisch, da man einen Satz identischer, unveränderlicher Eichkörper benötigt. Zum anderen variiert die Schwerkraft mit dem Ort auf der Erde. Da sich außerdem der Aufbau und die Bewegungsform der Erde im Laufe der Zeit verändern, würde man selbst an einem Normort keine konstanten Federauslenkungen messen. Dennoch soll in den Unterabschnitten 1.4.3 und 1.4.4 die Argumentation so geführt werden, daß die Kraft mit Hilfe des eben beschriebenen Kraftmessers eingeführt sei. Die Kraft wird mit dem Buchstaben F von lat. "fortitudo" symbolisiert.

Aufgrund ihrer Definition sind Kräfte vektorielle Größen, d.h. sie sind durch Vorgabe von Maßzahl, Maßeinheit und Richtung eindeutig bestimmt. Man kann grob zwischen Punktkräften (greifen an einem Punkt an, wie z.B. bei Feder) und Kraftfeldern (hier wirkt in jedem Raumpunkt eine Kraft, wie z.B. bei elektromagnetischen Feldern) unterscheiden. Eine weitere aus dem Alltagsleben gut bekannte Kraft ist die Reibungskraft, die an Flächen angreift und von der Geschwindigkeit abhängt (eine genaue Diskussion folgt in Abschnitt 1.6.4).

1.4.3 Das Kraftgesetz von Newton – Lex Secunda

Zur Aufstellung des dynamischen Grundgesetzes, der Lex Secunda, betrachten wir das in Abb. 1.30 gezeigte Experiment, bei dem eine Kraft F auf einen Körper M wirkt, der sich auf einer waagrechten Luftschiene frei bewegen kann. Der Körper M ist über eine Schnur und eine Umlenkrolle mit dem kleinen Körper μ verbunden. Werden die Körper losgelassen, so erfahren beide Körper durch die Wirkung der Schwerkraft von Körper μ eine Bewegungsänderung. Es wird die Zeit gemessen, die für eine bestimmte Wegstrecke s benötigt wird. Man stellt fest, daß für den 4-fachen Weg die doppelte Zeit benötigt wird, d.h. der zurückgelegte Weg s ist proportional zum Quadrat der vergangenen Zeit: $s \propto t^2$. Setzt man die Proportionalitätskonstante gleich a/2, ergibt sich die Gleichung für eine gleichförmig beschleunigte Bewegung (vergleiche Abbschnitt 1.3.2). Es gilt das Weg-Zeit-Gesetz

$$s = \frac{1}{2}at^2$$

Die Frage stellt sich nun, welcher Zusammenhang zwischen der Kraft und der Beschleunigung besteht. Dieser muß aus dem Experiment bestimmt werden.



Abbildung 1.30: Versuchsanordnung zur Bestimmung des Zusammenhangs zwischen Kraft und Beschleunigung. Die Masse M kann sich frei auf einem Luftpolster horizontal bewegen. Die wesentlich kleinere Masse μ verursacht über ihre Schwerkraft eine Beschleunigung. Sowohl M als auch μ können durch Vielfache ersetzt werden.

Hierzu variiert man die Kraft F, indem man Vielfache i des Gewichtskörpers μ verwendet, es gilt $F \propto i \cdot \mu$. Ebenso verwendet man Vielfache j des Körpers M. Damit kann die Kraft in Einheiten des Körpers μ angegeben werden, weil die Anzahl der Gewichtskörper die Größe der Kraft bestimmt. Weil μ sehr viel kleiner ist als M, besteht der beschleunigte Gesamtkörper näherungsweise nur aus M. Im Experiment mißt man die Zeit t zum Durchfahren der Strecke s und bestimmt daraus die Beschleunigung a. Aus dem Experiment ergibt sich:

- 1. Bei gleicher Kraft ergibt sich bei Vervielfachung des Körpers M eine Vervielfachung des Verhältnisses F/a.
- 2. Für einen gleichen Körper M ergibt sich bei einer Vervielfachung der Kraft F ein konstantes Verhältnis F/a.

Aufgrund des Ergebnisses F/a = const. kann man allgemein ansetzen

$$\frac{F}{a} = const. = f(m) \quad , \tag{1.4.1}$$

wobei f(m) zunächst eine unbekannte Funktion der trägen Masse m des Körpers M ist. Da eine Vervielfachung von M zu einer Vervielfachung von F/a führt, folgt

$$f(j \cdot m) = \sum_{k=1}^{j} f(m_k) \quad . \tag{1.4.2}$$

Demnach hat ein Körper M, der sich aus zwei identischen Körpern zusammensetzt, den doppelten F/a-Wert wie die Einzelkörper. Man definiert deshalb

$$f(m) := m \tag{1.4.3}$$

und das Naturgesetz (1.4.1) besagt, daß jeder Körper eine wohldefinierte träge Masse besitzt, die durch das Verhältnis F/a gegeben ist. Damit ergibt sich die das zweite **Newton**sche Axiom zu:

2. Newtonsches Axiom – Lex Secunda: "Wirkt auf einen frei bewegliche	n
Körper eine Kraft F , so bewegt sich der Körper mit einer Beschleunigung d	ı,
die proportional zu der wirkenden Kraft ist:"	

 $F = m \cdot a \tag{1.4.4}$

Die Lex Secunda ist als dynamische Bewegungsgleichung von grundlegender Bedeutung für die gesamte klassische Physik ("Grundgesetz der Mechanik"). Danach bewirkt die an einem Körper angreifende Kraft F eine Änderung seines Bewegungszustandes, während sich der Körper aufgrund seiner trägen Masse m dieser Änderung widersetzt. Das Trägheitsgesetz ist ein Spezialfall des 2. **Newton**schen Axioms. Wenn keine Kräfte wirken, ist a = 0 und somit v = const.. Die Bewegungsgleichung F = mafindet eine sehr vielfältige Anwendung . Bei bekannter Kraft und Masse kann man die Beschleunigung und daraus die Bahnkurve von Körpern bestimmen (z.B. Planeten im Gravitationsfeld, Ladungen in elektromagnetischen Feldern etc.).¹⁶

Das Gesetz $F = m \cdot a$ wurde unter der Annahme abgeleitet, daß die Körpermasse konstant ist. In der klassischen Physik kann man viele Beispiele anführen, in der diese Bedingung nicht erfüllt ist: etwa ein rinnender Wassereimer oder eine startende Rakete, die verbrannte Auspuffgase abstößt. In der speziellen Relativitätstheorie wird die Masse sogar abhängig von der Geschwindigkeit eines Körpers.¹⁷ Wie die dynamischen Bewegungsgleichungen in diesen allgemeinen Fällen lauten, wird in einem späteren Abschnitt im Zusammenhang mit dem Impuls diskutiert.

Das Gesetz der Additivität der Masse ist in der klassischen Physik sehr gut erfüllt. Im Bereich der Atomund Kernphysik werden allerdings Abweichungen von diesem Gesetz deutlich. Gehen beispielsweise zwei Atome eine Bindung ein oder verschmelzen Protonen und Neutronen zu einem Atomkern, so ist die Masse des entstandenen Moleküls bzw. Atomkerns kleiner als die Summe der Massen ihrer Bausteine. Dieser Massendefekt hängt über die von **Einstein** entdeckte Äquivalenz von Masse m und Energie $E (E = mc^2$, wobei c die Lichtgeschwindigkeit ist) mit der Bindungsenergie zusammen. In der Elementarteilchenphysik kann sogar die gesamte Masse bei der Zerstrahlung von Materie und Antimaterie in masselose γ -Quanten umgewandelt werden.

Grundgröße Kilogramm

Nach dem 2. Newtonschen Axiom können Körper dadurch gekennzeichnet werden, daß sie von einer Kraft verschieden stark beschleunigt werde. Diese Kennzeichnung wird als *träge Masse* bezeichnet. Man kann Massen dadurch vergleichen, indem man bei konstanter Kraft die resultierenden Beschleunigungen oder bei konstanter Beschleunigung die resultierenden Kräfte mißt. Letzteres ist im täglichen Leben allgemein üblich. Man vergleicht die Kräfte (= Gewichte) mit denen Körper zur Erde gezogen werden.

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Diese Beziehung stammt aus der von **Einstein** entwickelten speziellen Relativitätstheorie. Hierbei ist m_0 die Ruhemasse bei v = 0. Bei Geschwindigkeiten $v \ll c$ erhält man $v \simeq v_0$.

¹⁶Die Lex Secunda gilt natürlich auch nur im Bezugssystem des Fixsternhimmels bzw. eines davon abgeleiteten Inertialsystems. Denn in jedem dieser Systeme, aber auch nur in einem solchen System, ist die Beschleunigung *a* die gleiche. In allen Inertialsystemen gilt also $F = m \cdot a$ völlig unverändert. Vom experimentellen Stand aus betrachtet bedeutet dies, daß man niemals durch Versuche unterscheiden kann, ob man sich in einem "ruhenden" oder "gleichförmig bewegten" Bezugssystem befindet: Die "absolute" Bestimmung der Geschwindigkeit ist unmöglich: **Galilei***sches Relativitätsprinzip* (siehe hierzu auch Abschnitt 1.8).

¹⁷Mit zunehmender Geschwindigkeit nimmt die Masse zu:

Da an einem Ort die Fallbeschleunigung konstant ist, können Massen durch Gewichtsvergleich bestimmt werde.¹⁸

Aufgrund der in Abschnitt 1.4.2 beschriebenen Probleme bei der Definition der Kraft, ist man international übereingekommen, für das *Internationale Einheitensystem* nicht die Kraft sondern die Masse als dritte Grundgröße neben der Zeit und der Länge einzuführen. Die Einheit der Masse wurde willkürlich dadurch festgelegt, daß man ein Metallstück (chemisch und physikalisch widerstandfähige PtIr-Legierung, 90% Pt, 10% Ir) genommen, bei Paris aufbewahrt und erklärt hat, daß dieses Stück Metall die Einheit der Masse darstellen soll.¹⁹ Die Masse ist die dritte Grundgröße im SI-System:

$$[m] = 1 \text{ kg} \quad (\text{Kilogramm}) \quad . \tag{1.4.5}$$

Alle Länder, die sich dem SI-System angeschlossen haben, besitzen in den staatlichen Eichämtern (in Deutschland ist dies die Physikalisch Technische Bundesanstalt in Braunschweig) eine Kopie des "Urkilogramms". Mit dem Kilogramm als weitere Grundgröße ergibt sich für die Einheit der Kraft:

$$[F] = [m \cdot a] = 1 \text{ kg} \cdot 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1 \text{ N} \quad (\text{Newton}) \quad .$$
 (1.4.6)

Den Quotienten aus Masse und Volumen bezeichnet man als Dichte eines Körpers:

$$\rho = \frac{m}{V} \tag{1.4.7}$$

$$[\rho] = 1 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} . \tag{1.4.8}$$

Als atomare Masseneinheit verwendet man:

$$1 \ amu = \frac{1}{12}m(^{12}C) = 1,660531 \times 10^{-27} \text{kg}$$
(1.4.9)

$$[amu] = [g] / N_A$$
. (1.4.10)

Hierbei ist $N_A = 6,002\,2169 \times 10^{23}$ /mol die **Loschmidt**- oder **Avogadro**-Konstante, die die Zahl der Atome pro Mol angibt, wobei die Stoffmenge 1 mol genau M Gramm eines Stoffes mit Molekularge-wicht M entspricht.

In der folgenden Tabelle sind einige Beispiele von Massen zusammengestellt:

$9,11 imes10^{-31}\mathrm{kg}$	Ruhemasse des Elektrons
$1,6725 imes10^{-27}\mathrm{kg}$	Ruhemasse des Protons
$1,6748 \times 10^{-27} { m kg}$	Ruhemasse des Neutrons
$3,95 imes 10^{-25}{ m kg}$	Masse des Uranatoms
$7,35 imes 10^{22}{ m kg}$	Mondmasse
$5,98 imes10^{23}{ m kg}$	Erdmasse
$1,99 imes10^{30}{ m kg}$	Sonnenmasse
ca. 4×10^{41} kg	Masse unserer Galaxie (ca. 10 ¹¹ Sterne)
ca 10^{52} kg	Masse des Universums (ca. 10 ¹¹ Galaxien)

¹⁸Die träge und die schwere Masse sind allerdings zwei verschiedene Größen: Träge Masse = Kraft/Beschleunigung; schwere Masse=Gewicht/Fallbeschleunigung. Es wird später jedoch gezeigt, daß man sie gleichsetzen kann. Deshalb lassen wir in den nächsten Abschnitten die Bezeichnung "Trägheit" bei Massen weg.

¹⁹Es sollte ursprünglich die gleiche Masse wie ein Kubikdezimeter Wasser bei 4°C und 760 Torr besitzen, was zwar ungefähr aber nicht genau stimmt: 1 kg H₂O entspricht 1,000028 dm³.

1.4.4 Das Wechselwirkungsgesetz – Lex Tertia

Kraft als Vektorgröße (Lex Quarta)

Da die Beschleunigung a eine Vektorgröße und m ein Skalar ist, liegt es nahe, die Kraft F aufgrund der Beziehung $F = m \cdot a$ ebenfalls als Vektorgröße aufzufassen und in der Form

$$\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a} \tag{1.4.11}$$

darzustellen. Im Newtonschen Axiomensystem ist als Lex Quarta festgeschrieben, daß die Kraft ein Vektor ist. Als Vektorgrößen lassen sich dann Kräfte in Komponenten zerlegen

$$F_x = m \cdot a_x$$

$$F_y = m \cdot a_y$$

$$F_z = m \cdot a_z$$
(1.4.12)

und umgekehrt lassen sich mehrere an einem Körper angreifende Kräfte zu einer Gesamtkraft

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \cdots \tag{1.4.13}$$

addieren. Diese Vektoreigenschaften der Kraft lassen sich experimentell überprüfen (siehe Abb. 1.31). Wichtig ist hierbei

• die Kompensierbarkeit von Kräften. Befindet sich ein Körper in Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung, so muß die auf den Körper wirkende Gesamtkraft verschwinden. In Abb. 1.31a wird z.B. die Gewichtskraft \mathbf{F}_G durch die Federkraft \mathbf{F}_F kompensiert. Beide Kräfte besitzen den gleichen Betrag und die entgegengesetzte Richtung, so daß

$$\mathbf{F}_G + \mathbf{F}_F = 0 \tag{1.4.14}$$

- *die Umlenkbarkeit von Kräften* (siehe Abb. 1.31b). Kräfte lassen sich mit Rollen in ihrer Richtung umlenken (z.B. Flaschenzug).
- die Vektoraddition von Kräften (siehe Abb. 1.31c).
- die Komponentenzerlegung von Kräften (siehe Abb. 1.31d). Bei der Bewegung auf der schiefen Ebene kann die Schwerkraft \mathbf{F}_G in eine Tangentialkraft \mathbf{F}_t und eine Normalkraft \mathbf{F}_n zerlegt werden. Letztere ist senkrecht zur Auflagefläche und hat somit keinen Einfluß auf die Bewegung. Die Gewichtskraft \mathbf{F}_{G2} muß nur die Tangentialkomponente \mathbf{F}_t kompensieren, um ein Abgleiten zu verhindern.



Abbildung 1.31: Zur Kompensation (a), Umlenkbarkeit (b), Vektoraddition (c) und Komponentenzerlegung (d) von Kräften.

Das Wechselwirkungsgesetz (Lex Tertia)

Newton formulierte als *Lex Tertia* ein Axiom, das bei einer Wechselwirkung zwischen zwei Körpern 1 und 2 eine Beziehung zwischen den Kräften F_1 und F_2 herstellt, die an den Körpern angreifen. Danach sind die Kräfte F_1 und F_2 betragsmäßig gleich groß, antiparallel zueinander gerichtet und längs der Verbindungslinie der beiden Körper wirksam. Schlagwortartig umschreibt man dieses Wechselwirkungsgesetz mit

3. Newtonsches Axiom – Lex Tertia:		
actio = reactio		
$\mathbf{F_1} = -\mathbf{F_2}$	(1.4.15)	

Die Lex Tertia postuliert eine bestimmte Symmetrie in der Wechselwirkung zweier Körper. Das Axiom verbietet beispielsweise, daß ein Körper 1 auf einen Körper 2 eine Kraft \mathbf{F}_2 ausübt, ohne das gleichzeitig Körper 1 eine Gegenkraft \mathbf{F}_1 von Körper 2 erfährt. Die Erfahrung bestätigt das Wechselwirkungsgesetz.

Klassifizierung von Kräften

Kräfte, die einer Wechselwirkung zwischen materiellen Körpern entsprechen, nennt man *reale Kräfte*. Nicht reale Kräfte nennt man dagegen *fiktive* oder *Pseudokräfte*. Hierzu gehören die in den späteren Abschnitten zu behandelnden Trägheitskräfte und die Scheinkräfte in beschleunigten Bezugssystemen (siehe Abschnitt 1.8).

Ρηλεικ Ι

Beispiele:

- 1. Betragsmäßig ist die von der Sonne auf die Erde ausgeübte Kraft gleich der von der Erde auf die Sonne.
- 2. Expander: Eine Person versucht zwei über eine Feder verbundene Körper mit den Kräften F'_1 und F'_2 auseinander zu ziehen. Die Feder wirkt dieser Bewegung mit den Kräften F_1 und F_2 entgegen. Befindet sich das in Abb. 1.32 gezeigte System in Ruhe, so erhält man die Kräftebilanz: $F_1' = F'_2$; $F_1 = F'_1$ und $F_2 = F'_2$. Insgesamt folgt damit für die Wechselwirkungskräfte zwischen den beiden Körper $F_1 = F_2$. Das Modell liefert damit zwanglos das Wechselwirkungsgesetz.



Abbildung 1.32: Modell zum Wechselwirkungsgesetz.

Bei den realen Kräften unterscheidet man heute (mindestens) zwischen vier Grundtypen der Wechselwirkung oder *Fundamentalkräfte*:

- 1. Gravitation oder Gravitationskraft (Kraft zwischen schweren Massen).
- 2. *elektromagnetische Wechselwirkung* oder *elektromagnetische Kraft* (Kraft zwischen ruhenden Ladungen (Coulombkraft) und zwischen bewegten Ladungen (magnetische Kraft)).
- 3. *starke Wechselwirkung* oder *Kernkraft* (Kraft, welche z.B. Nukleonen in einem Atomkern zusammenhält).
- 4. *schwache Wechselwirkung* oder *schwache Kraft* (diese ist unter anderem verantwortlich für den β -Zerfall radioaktiver Kerne).

Alle anderen Kräfte lassen sich aus den Fundamentalkräften ableiten. Diese bezeichnet man deshalb als *abgeleitete Kräfte*. Beispiele hierfür sind Molekularkräfte, Auftriebskräfte, Federkräfte oder die Reibungskraft.

Bei Körpern, die sich durch Führungen oder Schienen auf einer vorgegebenen Bahnkurve bewegen, stellt man *eingeprägte Kräfte* den *Zwangskräften* gegenüber, wie dies in Abb. 1.33 gezeigt ist. Bei der Bewegung auf der schiefen Ebene tritt als eingeprägte Kraft die zum Erdmittelpunkt gerichtete Schwerkraft auf. Um die Zwangsbedingung (Bewegung auf Ebene) einzuhalten, muß auf den Körper von der Bahn eine Zwangskraft übertragen werden, die genau die Normalkomponente der eingeprägten Kraft kompensiert. Diese Komponente heißt deshalb *verlorene Kraft*. Aus der Vektorsumme der eingeprägten und der Zwangskraft ergibt sich schließlich die *wirksame Kraft*, die für die Begegung entlang der schiefen Ebene verantwortlich ist. Sie ist durch die Tangentialkomponente der eingeprägten Kraft gegeben.



Abbildung 1.33: Zur Klassifizierung von Kräften.

1.5 Gravitation und Schwerkraft

Zum Erfolg der in den Newtonschen Axiomen formulierten Mechanik hat wesentlich eine weitere Entdeckung Newtons beigetragen: die Aufstellung des *Gravitationsgesetzes*. Unter Gravitation versteht man eine experimentell beobachtbare anziehende Wechselwirkung zwischen Körpern. Das Gravitationsgesetz gibt die Kraft an, mit der sich zwei Körper bestimmter Massen anziehen. Für einen vorgegebenen Körper mit Masse m läßt sich aus der Newtonschen Bewegungsgleichung $\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}$ erst dann die Bahnkurve $\mathbf{r}(t)$ berechnen, wenn neben der Masse auch die Kraft \mathbf{F} bekannt ist, die auf die Masse mwirkt. Aus der Kombination der Bewegungsgleichung $\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}$ mit dem Gravitationsgesetz lassen sich z.B. die Gesetze der Planetenbewegung, die empirisch gefundenen Keplerschen Gesetze, ableiten. Dies ist ein überzeugender Beweis der Gültigkeit der Newtonschen Mechanik.

1.5.1 Das Gravitationsgesetz

Aufgrund intensiver Planetenbeobachtungen von **Tycho Brahe** (1546-1601) entwickelte **Johannes Kepler** (1571-1630) die nach ihm benannten **Kepler**schen Gesetze. **Isaac Newton** (1643-1724) leitete wiederum aus ihnen das Kraftgesetz zwischen Körpern ab, das allgemein als *Gravitationsgesetz* bezeichnet wird.

Betrachtet man zwei Massen am Ort $\mathbf{r_1}$ und $\mathbf{r_2}$ mit Massen m_1 und m_2 (siehe Abb. 1.34) so kann man die Verbindungsvektoren $\mathbf{r_{12}} = \mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}$ und $\mathbf{r_{21}} = \mathbf{r_2} - \mathbf{r_1}$ als Verbindungsvektoren zwischen m_1 und m_2 bzw. m_2 und m_1 einführen. Mit $r = |\mathbf{r_{21}}| = |\mathbf{r_{12}}|$ als Abstand der beiden Massen können ferner die Einheitsvektoren $\mathbf{\hat{r_{21}}} = \mathbf{r_{21}}/r$ und $\mathbf{\hat{r_{12}}} = \mathbf{r_{12}}/r$ eingeführt werden. Damit läßt sich das **Newton**sche Gravitationsgesetz für die Anziehungskraft $\mathbf{F_1}$ auf die Masse m_1 und $\mathbf{F_2}$ auf die Masse m_2 wie folgt ausdrücken²⁰

$$\mathbf{F_1} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \, \hat{\mathbf{r}}_{21} = -\mathbf{F_2}$$

$$\mathbf{F_2} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \, \hat{\mathbf{r}}_{12} = -\mathbf{F_1}$$
(1.5.1)

²⁰Newton'sche Herleitung des Gravitationsgesetzes: Für eine gleichförmige Kreisbewegung (z.B der Erde mit Masse m_1 um die Sonne mit Masse m_2) gilt für die Zentripetalkraft (vergleiche Gl.(1.3.47)) $F_R = F_1 = m_1 R \omega^2$. Mit dem 3. Kepler'schen Gesetz $T^2 \propto R^3$ (siehe Abschnitt 1.5.3) und $T \propto 1/\omega$ ergibt sich damit $F_1 \propto m_1/R^2$. Wegen actio = reactio muß $F_2 \propto m_2/R^2$ sein. Damit erhält man $F_1 = F_2 = G \frac{m_1 m_2}{R^2}$ mit der Gravitationskonstanten G.



Abbildung 1.34: Zum Gravitationsgesetz.

Hierbei ist G eine Maßsystemkonstante, die Gravitationskonstante, mit dem Zahlenwert

$$G = (6,67259 \pm 0,00085) \times 10^{-11} \,\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2} \ . \tag{1.5.2}$$

Die Gravitationskonstante muß experimentell bestimmt werden. Die Gravitationskraft ist eine Zentralkraft. Sie ist parallel zur Verbindungslinie der beiden Massen. Gravitationskräfte sind immer Anziehungskräfte. Der Betrag der beiden Gravitationskräfte ist gleich groß und aus Gl.(1.5.1) folgt

$$F = G \,\frac{m_1 m_2}{r^2} \ . \tag{1.5.3}$$

Das heißt, die Gravitationskraft ist proportional zum Produkt der Massen und umgekehrt proportional zum Quadrat deren Abstandes. Wegen $\mathbf{F_1} = -\mathbf{F_2}$ erfüllen die Gravitationskräfte das dritte **Newton**sche Wechselwirkungsaxiom (actio = reactio).

Bestimmung des Gravitationskonstante

Es soll im folgenden die Bestimmung der Gravitationskonstante nach der Methode von **Cavendish** (1798) vorgestellt werden (siehe Abb. 1.35). Da die Gravitationskraft sehr klein ist (2 Massen von jeweils 100 kg im Abstand von 1 m ziehen sich mit der Kraft $F = 6, 7 \times 10^{-7}$ N an), ist eine sehr empfindliche Meßmethode erforderlich. Die Idee von Cavendish bestand in der Umsetzung einer Translation in eine Rotation und Anzeige des Drehwinkels mittels eines Lichtzeigers, wodurch eine hohe Verstärkung erzielt wird. Im Experiment werden zwei kleine, miteinander fest verbundene Massen m an einem Torsionsfaden aufgehängt. Ihnen gegenüber befinden sich zwei große, ebenfalls fest verbundene Massen M. Nach dem Gravitationsgesetz wirken zwischen den kleinen und den großen Massen Anziehungskräfte. Dreht man nun die großen Massen so, daß die Anziehungskräfte von der entgegengesetzten Seite auf die kleinen Massen wirken, so verändert sich deren Lage. Experimentell wird die resultierende Drehung mit Hilfe des Lichtzeigers nachgewiesen.

Durch die Gravitationskräfte resultiert das Drehmoment²¹ $\mathbf{T}_{\mathbf{G}} = 2\mathbf{F}_{\mathbf{G}} \cdot R$, das durch das Drehmoment des Drahtes $\mathbf{T}_{\mathbf{D}} = -\mathbf{T}_{\mathbf{G}}$ kompensiert wird und dadurch zu einem bestimmten Drehwinkel α führt,

²¹Eine genaue Diskussion des Drehmoments folgt in Abschnitt 1.11.



Abbildung 1.35: Bestimmung der Gravitationskonstante mit der Cavendish'schen Drehwaage.

dessen Größe vom Drehmoment des Drahtes abhängt. Hierbei ist $\mathbf{F}_{\mathbf{G}}$ die durch die Gravitationswechselwirkung verursachte Kraft. Werden die großen Massen jetzt um 180° gedreht, so erhält man das Drehmoment $\mathbf{T}'_{\mathbf{G}} = -\mathbf{T}_{\mathbf{G}}$, während das Drehmoment des Drahtes unverändert bleibt. Somit ergibt sich

$$\mathbf{T}'_{\text{gesamt}} = \mathbf{T}'_{\mathbf{G}} + \mathbf{T}_{\mathbf{D}} = -4\mathbf{F}_{\mathbf{G}} \cdot R \neq 0 \tag{1.5.4}$$

Das heißt, das System der kleineren Massen, das am Faden aufgehängt ist, wird rotieren (gegen den Uhrzeigersinn). Aus der Messung des Drehwinkels als Funktion der Zeit, $\alpha(t)$, läßt sich die Gravitationskonstante bestimmen. Ebenso wie bei Fallversuchen ist der zurückgelegte Weg $\Delta r = (a/2)t^2$, woraus sich die Beschleunigung errechnen läßt. Da der Weg Δr sehr klein ist, wird dieser mit Hilfe eines Lichtzeigers hochskaliert. Mit

$$\Delta r = \alpha \cdot R = \frac{1}{2}at^2 \tag{1.5.5}$$

und
$$\alpha' = \frac{\Delta s'}{L} = 2\alpha$$
 (1.5.6)

erhält man

$$\frac{1}{2}at^2 = \frac{\Delta s'R}{2L} \tag{1.5.7}$$

und
$$a = \frac{\Delta s' R}{Lt^2} = G \frac{M}{r^2}$$
, (1.5.8)

woraus sich schließlich

$$G = \frac{r^2 \cdot R \cdot \Delta s'}{M \cdot L \cdot t^2} \tag{1.5.9}$$

ergibt. Hierbei ist r der Abstand der Schwerpunkte der großen und der kleinen Masse. Typische Größenordnungen der beim Experiment von Cavendish verwendeten Massen und Längenskalen sind $M \simeq 1$ kg, $m \simeq 10$ g, $R \simeq 5$ cm, $r \simeq 40$ mm und $L \simeq 20$ m.

Superpositionsprinzip

Treten mehr als 2 Massen miteinander in Wechselwirkung (z.B. die Massen m_1 , m_2 und m_3), so ist die Gravitationskraft auf die Masse m_1 die vektorielle Summe der Kräfte F_{21} (zwischen m_2 und m_1) und F_{31} (zwischen m_3 und m_1)

$$\mathbf{F_1} = \mathbf{F_{21}} + \mathbf{F_{31}} \quad , \tag{1.5.10}$$

wobei sowohl F_{21} und F_{31} dem Gravitationsgesetz genügen. Die Gesamtwechselwirkung läßt sich also einfach als Überlagerung von 2-Körper-Kräften darstellen (siehe Abb. 1.36).



Abbildung 1.36: (a) Das Superpositionsprinzip der Gravitation. (b) Zur Gravitation zwischen ausgedehnten Körpern.

Das Superpositionsgesetz läßt sich dazu benutzen, das Gravitationsgesetz für ausgedehnte Massen zu verallgemeinern. Nach dem Superpositionsprinzip ergibt sich die Gesamtkraft zwischen zwei ausgedehnten Massen als Summe der Wechselwirkungskräfte zwischen allen infinitesimalen und damit punktförmigen Masseelementen dm_1 und dm_2 . Die von dm_1 auf dm_2 ausgeübte Kraft $d^2\mathbf{F_1}$ ist mit Gl. (1.5.1) gegeben durch $d^2\mathbf{F_1} = Gdm_1dm_2\hat{\mathbf{r}_{21}}/r_{21}^2$. Die vom gesamten Körper 2 auf das Massenelement dm_1 ausgeübte Kraft $d\mathbf{F_1}$ erhält man hieraus durch Summation aller von den Massenelementen dm_2 verursachten Einzelkräfte (Superpositionsprinzip) zu

$$d\mathbf{F_1} = Gdm_1 \int_{m_2} \frac{dm_2}{r_{21}^2} \,\hat{\mathbf{r}}_{21} \quad . \tag{1.5.11}$$

Eine weitere Integration über alle Massenelemente dm_1 liefert schließlich die Gesamtkraft F_1 auf den Körper 1:

$$\mathbf{F_1} = G \int_{m_1} \int_{m_2} \frac{dm_1 dm_2}{r_{21}^2} = G \rho_1 \rho_2 \int_{V_1} \int_{V_2} \frac{dV_1 dV_2}{r_{21}^2} \,\hat{\mathbf{r}}_{21} \quad , \tag{1.5.12}$$

wobe
i $dm = \rho dV$ benutzt werden kann, falls jeder Körper eine homogene Massendichte
 ρ aufweist. Die Gesamtkraft $\mathbf{F_2}$ auf den Körper 2 ist wegen actio = reactio einfach
 $\mathbf{F_2} = -\mathbf{F_1}$.

Bei beliebig geformten Körpern werden die Integrale beliebig schwierig und eine Integration ist i.a. nicht geschlossen durchführbar. Besonders einfache Lösungen gibt es bei kugelförmigen Körpern:

• Zwei homogene Kugeln:

Das Gravitationsgesetz reduziert sich auf die einfache Form für zwei Massenpunkte, deren Massen den Kugelmassen und deren Abstand dem Abstand der beiden Kugelmittelpunkte entspricht.

• Hohlkugel mit kleiner Masse im Innenraum:

Im Innenraum der Hohlkugel verschwindet die Gravitationskraft. Dies ist auf die gegenseitige Kompensation der von den einzelnen Massenelementen der Kugelschale ausgeübten Kräfte zurückzuführen.

• Homogene Vollkugel (siehe Abb. 1.37):

Befindet sich ein Probekörper mit Masse m im Abstand r vom Kugelmittelpunkt, so erfährt dieser von der Kugelschale zwischen r und R keine Gravitationskraft (dieser Bereich entspricht einer Hohlkugel). Das heißt, der Probekörper erfährt nur eine Gravitationskraft, die von der Masse M_i der Innenkugel mit Radius r herrührt. Mit $M_i = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$ ergibt sich die Gravitationskraft

$$F = G \ \frac{mM_i}{r^2} = G \ \frac{m(\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3)}{r^2} = G \cdot \rho \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot m \cdot r \ . \tag{1.5.13}$$

Für eine homogene Vollkugel ist $\rho = M/V = M/\frac{4}{3}\pi R^3$, womit sich

$$F = G \frac{m \cdot M}{R^3} r \quad \text{für } 0 \le r \le R \tag{1.5.14}$$

ergibt. Die Gravitationskraft im Innern einer Vollkugel nimmt also linear mit r zu. Für den Außenraum (r > R) gilt $F \propto 1/r^2$.



Abbildung 1.37: Gravitationskraft F auf eine punktförmige Masse m im Abstand r vom Zentrum einer homogenen Kugel mit Radius R.

Physik I

Was ist Gravitation ?

Obwohl das Gravitationsgesetz eine einfache Beziehung darstellt, nach deren simplen Regel sich Monde, Planeten und Sterne richten, wurde bis heute keine Maschinerie gefunden, die die Gravitation "erklärt", ohne gleichzeitig ein anderes Phänomen vorherzusagen, das *nicht* existiert. Auch **Newton** hat darüber keine Hypothese aufgestellt. Er war zufrieden, herauszufinden, was sich tut, ohne sich mit der Maschinerie zu befassen.

Es ist instruktiv, mögliche Beziehungen zwischen der Gravitationskraft und anderen Kräften zu diskutieren. Gegenwärtig gibt es keine Erklärung der Gravitation aus anderen Kräften. Jedoch sind Gravitation und andere Kräfte sehr ähnlich und es ist deshalb interessant, Analogien aufzuzeigen. Zum Beispiel sieht das Kraftgesetz zwischen zwei punktförmigen Ladungen q_1 und q_2

$$F = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad . \tag{1.5.15}$$

genauso aus wie das Gravitationsgesetz. Hierbei ist $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ As/Vm die elektrische Feldkonstante. Die elektrische Kraft zwischen gleichnamigen Ladungen ist abstoßend, sie ist aber wie die Gravitationskraft proportional zu $1/r^2$ und proportional zum Produkt der Ladungen, genauso wie die Gravitationskraft proportional zum Produkt der Massen ist. Vielleicht sind also Gravitation und Elektrizität viel enger miteinander verwandt als wir denken. Es wurden viele Versuche unternommen, die beiden Kräfte zu vereinigen, die aber bis heute nicht erfolgreich waren.²²

Ein interessanter Aspekt sind die relativen Stärken der Gravitationskraft und der elektrischen Kraft. Vergleicht man die Kraft zwischen zwei Elektronen ($q = 1.602 \times 10^{-19}$ As, $m = 9.109 \times 10^{-31}$ kg) so findet man

$$\frac{\text{anziehende Gravitationskraft}}{\text{abstoßende elektrische Kraft}} = \left(\frac{m}{q}\right)^2 G \,4\pi\epsilon_0 = \frac{1}{2.4 \times 10^{42}} \quad (1.5.16)$$

Dieses Verhältnis ist unabhängig vom Abstand und stellt eine Naturkonstante dar. Die Gravitationskraft ist also im Vergleich zur elektrischen Kraft extrem klein. Zur Zeit ist völlig unklar, woher dieser extreme Unterschied kommt (man bedenke, daß man nur zwei unterschiedliche Aspekte des gleichen Dings, des Elektrons, betrachtet). Das Verhältnis in Gl.(1.5.16) ist aber eine Naturkonstante und damit voraussichtlich mit irgendetwas Tiefgehendem in der Natur verknüpft. Man hofft, daß man eines Tages eine "Universalgleichung finden wird, die zu den Wurzeln der phantastisch großen Zahl im Nenner von Gl.(1.5.16) führt.

1.5.2 Schwere und träge Masse

Im Gravitationsgesetz (Gl.(1.5.1)) wurde als diejenige Körpereigenschaft, die für die Gravitation verantwortlich ist, die Masse m des Körpers verwendet, wie man sie aus Beschleunigungsexperimenten erhält. Diese Vorgehensweise ist keineswegs selbstverständlich. Man kann im Gegenteil nicht erwarten, daß die Eigenschaft eines Körpers, die für sein Beharrungsvermögen ("Trägheit") bei Beschleunigungsversuchen zuständig ist, auch zu einer Gravitationswechselwirkung führt. Begrifflich muß man deshalb zwischen einer trägen Masse m_t , die in der dynamischen Grundgleichung $F = m_t a$ auftritt, und einer schweren Masse m_s , die als Ursache der Gravitationsanziehung auftritt und in das Gravitationsgesetz einzusetzen

²²Bis heute konnten die Kernkraft, die schwache Kraft und die elektromagnetische Kraft vereinigt werden. Eine Vereinigung aller vier Fundamentalkräfte (große Vereinheitlichung) steht allerdings noch aus. Zur Zeit wird dies sehr intensiv im Rahmen sogenannter String-Theorien versucht.

ist, unterscheiden. Experimentell steht allerdings fest, daß schwere und träge Masse eng miteinander verknüpft sind. Im Rahmen der Meßgenauigkeit sind m_s und m_t streng zueinander proportional:

$$m_s \propto m_t \quad \text{oder} \quad \frac{m_s}{m_t} = const$$
 . (1.5.17)

Das Verhältnis von m_s und m_t ist also für alle Körper eine Konstante. Moderne Experimente haben gezeigt, daß die Abweichungen von der Konstanz für m_s/m_t kleiner als 10^{-11} sind.

Die Proportionalität von m_s und m_t folgte schon aus Fallversuchen, die von **Galilei** durchgeführt wurden. Auf der Erdoberfläche wirkt die Gravitationsanziehung zwischen der Erde und einem Probekörper der schweren Masse m_s als *Schwerkraft* oder *Gewicht*. Setzt man in Analogie zur trägen Masse auch für die schwere Masse an, daß sie additiv ist, so beobachtet man experimentell

$$F_G \propto m_s$$
 . (1.5.18)

Diese Aussage ist bereits im Newtonschen Gravitationsgesetz enthalten, aus dem sich

$$F_G = m_s \cdot \frac{G \cdot M_E}{R_E^2} = m_s \cdot g \tag{1.5.19}$$

ergibt (vergleiche Gl.(1.5.1)) mit einer für alle Körper einheitlichen Proportionalitätskonstanten g. Da sich g aus Konstanten zusammensetzt ist g deshalb selbst eine Konstante. Hierbei ist M_E die Erdmasse und R_E der Erdradius.

Beim freien Fall wird die Schwerkraft F_G zur antreibenden Kraft, die als Beschleunigungsursache in der dynamischen Grundgleichung $F = m_t a$ auftritt. Mit $F_G = F$ ist daher $m_s g = m_t a$ oder

$$a = \frac{m_s}{m_t}g \quad . \tag{1.5.20}$$

Für die weitere Argumentation ist nun entscheidend, daß Fallversuche und weitere Experimente an den unterschiedlichsten Körpern ergaben, daß alle Körper gleich schnell fallen, d.h. sie erfahren dieselbe Fallbeschleunigung a = const.



Abbildung 1.38: Fallversuche (a) und Pendelversuche (b) mit identischen Massen aus unterschiedlichen Substanzen. Für die Substanzen mit geringerer Dichte werden Hohlkugeln verwendet.
Fallversuche:

Die ersten Fallversuche wurden von Galilei vor mehr als 350 Jahren in Pisa durchgeführt, wo er Körper von einem hohen Turm (wahrscheinlich nicht vom bekannten Schiefen Turm) fallen ließ. Er ließ Körper aus Holz und Blei fallen, die die gleiche Form (z.B. Vollkugel und Hohlkugel) hatten, um Unterschiede im Luftwiderstand zu eliminieren. Er stellte fest, daß alle Körper mit der gleichen Beschleunigung fallen.

Den störenden Effekt des Luftwiderstands kann man in Vakuum vermeiden. Läßt man in einer luftgefüllten Röhre eine Bleikugel und einer Feder fallen, so fällt die Bleikugel wesentlich schneller. Die Ursache hierfür ist der höhere Luftwiderstand für die Feder. Wird die Röhre evakuiert, um den Luftwiderstand zu eliminieren, so fallen die Bleikugel und die Feder exakt gleichschnell.^{*a*}

^{*a*}Zur Zeit werden am Bremer Fallturm hochpräzise Fallexperimente durchgeführt, um festzustellen, ob unterschiedliche Körper (z.B. Körper aus Elementen mit unterschiedlicher Baryonen-Zahl) wirklich exakt gleichschnell fallen.

Pendel-Experimente von Newton:

Newton verglich die Schwingungsdauer von mathematischen Pendeln, an denen gleiche Massen unterschiedlicher Substanzen befestigt waren (siehe Abb. 1.38). Um Effekte des störenden Luftwiderstands zu eliminieren hat er Kugeln mit gleichem Radius verwendet (Vollkugeln oder Hohlkugeln). In die Bewegungsgleichung des mathematischen Pendels (zur Herleitung siehe Abschnitt 1.6.3), $-m_s \cdot g \cdot \sin \varphi = m_t \cdot l \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2}$, gehen schwere und träge Masse ein. Da bei gleicher schwerer Masse für unterschiedliche Substanzen dieselbe Schwingungsdauer beobachtet wurde, schloß Newton auf die Äquivalenz von schwerer und träger Masse.



Abbildung 1.39: Schematische Darstellung des Versuchsaufbaus beim Eötvös-Experiment. Durch Beobachtung der Torsionswaage in unterschiedlichen Orientierungen stellte Eötvös fest, daß keine meßbare Rotation stattfand.

Eötvös-Experiment:

Der ungarische Physiker Eötvös^a entwickelte einen Versuchsaufbau, mit dem die Äquivalenz von träger und schwerer Masse erstmals mit hoher Genauigkeit (~ 10⁻⁹) überprüft werden konnte. Die Experimente wurden zwischen 1889 und 1908 durchgeführt. Der Versuchsaufbau ist in Abb. 1.39 skizziert. Eötvös beobachtete den Effekt auf eine Torsionswaage, wenn zwei Massen unterschiedlicher Substanzen, die an einem Balken aufgehängt sind, gleichzeitig von der Schwerkraft $\mathbf{F}_{\mathbf{G}} = m_s \cdot \mathbf{g}$ und der Zentrifugalkraft^b $\mathbf{F}_{\mathbf{TZ}} = -m_t \cdot \omega R^2 \hat{\mathbf{n}}$ beeinflußt werden. Hierbei ist R der Erdradius und $\omega = 2\pi/T = 2\pi/24h$ die Drehfrequenz der Erde um ihre eigene Achse. Ein Unterschied zwischen der trägen und schweren Masse würde zu einem Drehmoment und damit zu einer Rotation des Aufhängebalkens führen. Eine solche Rotation kann mittels eines an dem Balken befestigten Spiegels sehr genau nachgewiesen werden.

Später wurden ähnliche Experimente mit höherer Meßgenauigkeit durchgeführt, aus denen $(m_s - m_t)/m_t \leq 10^{-11}$ geschlossen werden konnte (z.B. R. H. Dicke, 1960).^c

^cIn einigen Experimenten wurden auch Abweichungen zwischen träger und schwerer Masse festgestellt und daraus auf die Existenz einer fünften Fundamentalkraft geschlossen. Diese Experimente konnten allerdings nicht bestätigt werden.

Die Konstanz von a in Gl.(1.5.20) beweist aber mit g = const die in Gl.(1.5.17) aufgestellte Behauptung $m_s \propto m_t$. Die Proportionalität $m_s \propto m_t$ beinhaltet, daß Gravitation und Trägheit einander äquivalent sind. Diese Aussage wird als Äquivalenzprinzip zum Ausgangspunkt der Relativitätstheorie von **Einstein**. Die Gleichwertigkeit von schwerer und träger Masse wird hier aber nicht als Zufall abgetan, sondern vielmehr zum Grundpostulat einer Theorie der Gravitation erhoben.

Schließlich kann durch eine passende Einheitenwahl

 $m_s = m_t := m$ (1.5.21)

gewählt werden, was einer Gleichsetzung von schwerer und träger Masse entspricht. Als Einheit wird 1 kg verwendet. Bei dieser Einheitenwahl muß man dann aber im Gravitationsgesetz eine Maßsystemkonstante G vorsehen, da über alle Einheiten der im Gravitationsgesetz auftretenden Größen bereits verfügt wurde. Mit der Festlegung in Gl.(1.5.21) erhält man schließlich mit Gl.(1.5.20) die Fallbeschleunigung

$$a = g \quad . \tag{1.5.22}$$

Auf einen Körper der Masse m an der Erdoberfläche wirkt die Kraft

$$F = G \frac{m \cdot M_E}{R_E^2} = m \cdot g \quad . \tag{1.5.23}$$

Die Größe g ist die Fallbeschleunigung auf der Erdoberfläche und wird auch *Erdbeschleunigung* genannt. Da die genaue Masse der Erde nicht bekannt ist, kann man durch Messung der Erdbeschleunigung g mit den bekannten Größen R_E und G die Erdmasse M_E bestimmen. Mit $R_E = 6,37 \times 10^6$ m, $G = 6,67259 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$ und $g = 9,82 \text{ m/s}^2$ erhält man

$$M_E = 5,98 \times 10^{24} \,\mathrm{kg} \quad . \tag{1.5.24}$$

^{*a*}Baron Roland von Eötvös, 1848 -1919

^bZur Herleitung des Ausdrucks für die Zentrifugalkraft siehe Abschnitt 1.7.

Die Größe der Erdmasse macht verständlich, daß trotz der kleinen Maßzahl für die Gravitationskonstante G die Schwerkraft an der Erdoberfläche leicht beobachtbar ist.²³

Die Erdbeschleunigung g ist abhängig von der Höhe h über der Erdoberfläche. Die wirksame Erdbeschleunigung g(h) ist gegeben durch

$$g(h) = \frac{G \cdot M_E}{(R_E + h)^2} = \frac{G \cdot M_E}{R_E^2 (1 + \frac{h}{R_E})^2} \quad . \tag{1.5.25}$$

Für $h/R_E \ll 1$ läßt sich der Ausdruck $(1 + \frac{h}{R_E})^{-2}$ nach Taylor entwickeln. Mit $(1 + \frac{h}{R_E})^{-2} \approx (1 - \frac{2h}{R_E})$ ergibt sich

$$g(h) \simeq G \,\frac{M_E}{R_E^2} \,\left(1 - \frac{2h}{R_E}\right) \quad , \tag{1.5.26}$$

d.h. die Erdbeschleunigung nimmt etwa linear mit zunehmender Höhe über der Erdoberfläche ab (wobei die Näherung nur für $h \ll R_E$ gilt). In einer Höhe von 300 km über der Erdoberfläche hat die Erdbeschleunigung g(h) im Vergleich zu g(0) um 10% abgenommen. Da die Erde keine exakte Kugelform besitzt, ist die Erdbeschleunigung abhängig vom genauen Ort auf der Erdoberfläche. Insbesondere ist aufgrund der an den Polen abgeflachten Form der Erde die Erbeschleunigung dort größer als amÄquator $(g_{\rm Pol} = 9, 8322 \text{ m/s}^2, g_{\rm Äquator} = 9, 7805 \text{ m/s}^2).^{24}$

1.5.3 Die Keplerschen Gesetze

Die Bewegung der Planeten hat schon im Altertum und insbesondere zu Beginn der naturwissenschaftlichen Forschung in der Neuzeit das Interesse der Astronomen und Physiker geweckt. Anhand eines umfangreichen Beobachtungsmaterials gelang es **Kepler**, die wichtigsten Eigenschaften der Planetenbewegung in einfachen empirischen Regeln zusammenzufassen. Diese haben entscheidend dazu beigetragen, das *geozentrische* durch das *heliozentrische Weltbild* zu ersetzen, in dem sich die Planeten um die Sonne und nicht um die Erde bewegen. Der große Verdienst **Newton**s bestand dann darin, die **Kepler**schen Regeln zwanglos aus fundamentalen Naturgesetzen (Newtonsche Axiome, Gravitationsgesetz) abzuleiten.

Die drei Keplerschen Gesetze lauten angewandt auf unser Planetensystem:

1. Keplersches Gesetz: Die Bahnen der Planeten sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht (siehe Abb. 1.40a).

²³Mit Hilfe von $F_G = m_s \cdot \frac{G \cdot M_E}{R_E^2} = m_s \cdot g$ läßt sich auch die Fallbeschleunigung auf dem Mond berechnen: Mit $M_M = 7,35 \times 10^{22}$ kg, $R_M = 1,74 \times 10^6$ m erhält man $g_M = 1,62$ m/s². Die Fallbeschleunigung auf dem Mond ist deshalb nur etwa 1/6 der Erdbeschleunigung. Entsprechend ist die Schwerkraft $F_G = m \cdot g_M$ auf dem Mond etwa um den Faktor 6 kleiner als auf der Erde.

²⁴Zu einer Abweichung kommt es allerdings auch aufgrund der durch die Erdrotation verursachten Zentrifugalkraft. Eine genaue Erläuterung erfolgt später bei der Diskussion von Trägheitskräften in Abschnitt 1.7.3.

2. Keplersches Gesetz: Der Fahrstrahl von der Sonne zur Erde überstreicht in gleichen Zeiten dt gleiche Flächen dA. Anders formuliert: die Flächengeschwindigkeit dA/dt des Fahrstrahls ist für einen Planeten konstant (siehe Abb. 1.40b).

3. Keplersches Gesetz: Die Quadrate der Umlaufzeiten T_1 und T_2 zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachsen a_1 und a_2 der Bahnellipsen:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \quad . \tag{1.5.27}$$



Abbildung 1.40: Zum 1. und 2. Keplerschen Gesetz.

Zur Diskussion des 1. und 3. **Kepler**schen Gesetzes soll lediglich die im 1. Gesetz als Spezialfall enthaltene Kreisbahn eines Planeten um die Sonne diskutiert werden, da diese mathematisch einfacher zu handhaben ist. Beim Kreis fallen die Ellipsenbrennpunkte F_1 und F_2 in Abb. 1.40 zusammen, die beiden Halbachsen a und b sind gleich und es gilt a = b = r. Ferner wird ausgenutzt, daß die Sonnenmasse M_S viel größer als die Planetenmasse m_p ist. Man kann dann näherungsweise annehmen, daß der Zentralstern ruht, und für die Planetenbahn eine Kreisbahn ansetzen.²⁵ Wie in Abb. 1.41 gezeigt ist, soll ein Planet mit Masse m_p betrachtet werden, der zum Zeitpunkt t von der Sonne aus mit dem Ortsvektor $\mathbf{r}(t)$ beschrieben wird. Die Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$ steht senkrecht auf $\mathbf{r}(t)$. Durch die Sonnenmasse erfährt der Planet die Gravitationskraft

$$\mathbf{F} = -G\frac{m_p M_S}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad , \tag{1.5.28}$$

die auf das Gravitationszentrum, die Sonne, gerichtet ist. Diese Kraft hat eine Beschleunigung **a** des Planeten zur Folge, die sich aus $\mathbf{F} = m_p \mathbf{a}$ ergibt und ebenfalls zur Sonne weist. Die momentane Beschleunigung steht daher senkrecht zur Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$ des Planeten. In der Bezeichnungsweise des Abschnitts 1.3.2 stellt $\mathbf{a}(t)$ eine Normalbeschleunigung des Planeten dar, wogegen die Tangentialbeschleunigung verschwindet. Gemäß Gl.(1.3.31) bleibt daher der Betrag v der Geschwindigkeit gleich, während sich die Richtung der Geschwindigkeit ändert, d.h. die Bahnkurve wird gekrümmt. Der Krümmungsradius R ergibt sich gemäß Gl.(1.3.31) aus

$$\mathbf{a}(t) = \frac{v^2}{R}\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{a}_n \quad , \tag{1.5.29}$$

²⁵In Wirklichkeit bewegen sich die Sonne und der Planet um einen gemeinsamen Schwerpunkt. Für $M_S \gg m_p$ liegt der gemeinsame Schwerpunkt aber praktisch im Mittelpunkt der Sonne.

wobei $\hat{\mathbf{n}}$ der Normalenvektor ist, der vom Planeten auf den Krümmungsmittelpunkt der Bahn gerichtet ist. Wenn nun der Krümmungsradius R der Bahn mit dem Abstand r zwischen Sonne und Planet übereinstimmt, d.h. R = r gilt, so läuft der Planet in der Zeit Δt auf einem Kreisbogen mit Radius rum die Sonne. In der neuen Position zur Zeit $t + \Delta t$ steht aber wieder $\mathbf{v}(t + \Delta t)$ wieder senkrecht zur Gravitationskraft und obige Argumentation gilt von neuem. Insgesamt bewegt sich der Planet auf einer Kreisbahn, in dessen Mittelpunkt sich die Sonne befindet (1. **Kepler**sches Gesetz).

PHYSIK I



Abbildung 1.41: Umlauf eines Planeten mit Masse m_p um die Sonne mit Masse M_S auf einer Kreisbahn.

Im speziellen Fall der Kreisbahn ist die Bahngeschwindigkeit konstant und ergibt sich aus den obigen Gleichungen

$$F = G \frac{m_p \cdot M_S}{r^2} = m_p \cdot a = m_p \frac{v^2}{R} = m_p \frac{v^2}{r}$$
(1.5.30)

zu

$$v^2 = G \frac{M_S}{r} \ . \tag{1.5.31}$$

Je enger ein Planet die Sonne umkreist, desto höher ist seine Bahngeschwindigkeit v. Für die Winkelgeschwindigkeit $\omega = v/r$ und die Umlaufzeit $T = 2\pi/\omega$ folgt

$$\omega^2 = G \frac{M_S}{r^3} \tag{1.5.32}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM_S} . (1.5.33)$$

Beim Vergleich zweier Planeten auf Kreisbahnen mit Radien r_1 und r_2 um die Sonne liefert Gl.(1.5.33) für das Verhältnis der Umlaufzeiten T_1/T_2 unmittelbar

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3} \quad . \tag{1.5.34}$$

Dies ist der Inhalt des 3. **Kepler**schen Gesetzes für kreisförmige Planetenbahnen. Die Herleitung macht deutlich, daß das 3. **Kepler**sche Gesetz nur dann Gültigkeit besitzt, wenn das Gravitationsgesetz einer $1/r^2$ -Abhängigkeit genügt.

Für die Diskussion des 2. **Kepler**schen Gesetzes sollen die Verhältnisse in zwei ausgewählten Punkten einer ellipsenförmigen Planetenbahn betrachtet werden. Für das *Perihel* (sonnennächster Punkt) und das *Aphel* (sonnenfernster Punkt) ist der Krümmungsradius R aufgrund der Symmetrieeigenschaften der Ellipse gleich. Für die auftretenden Kräfte (Gravitationskraft = Zentripetalkraft) gilt dann

Perihel:
$$G \frac{m_p \cdot M_S}{r_1^2} = m_p \cdot \frac{v_1^2}{R} \Rightarrow G \frac{M_S}{r_1^2} = \frac{v_1^2}{R}$$
 (1.5.35)

Aphel:
$$G \frac{m_p \cdot M_S}{r_2^2} = m_p \cdot \frac{v_2^2}{R} \Rightarrow G \frac{M_S}{r_2^2} = \frac{v_2^2}{R}$$
 (1.5.36)

Hierbei sind r_1 und r_2 der Abstand von Perihel und Aphel zur Sonne. Aus beiden Gleichungen ergibt sich

$$r_1^2 \cdot v_1^2 = r_2^2 \cdot v_2^2$$
 bzw. $r_1 \cdot v_1 = r_2 \cdot v_2$. (1.5.37)

Mit der in der Zeit dt überstrichenen Fläche $dA = \frac{1}{2}rds$ ergibt sich

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}r \cdot v \tag{1.5.38}$$

und damit das 2. Keplersche Gesetz

$$\frac{dA_1}{dt} = \frac{dA_2}{dt} = const \quad . \tag{1.5.39}$$

Aus Gl.(1.5.33) läßt sich mit Hilfe der Umlaufzeiten und der Bahnradien der Planeten die Masse der Sonne berechnen. Man erhält

$$M_S = 1,99 \times 10^{30} \text{ kg} \quad . \tag{1.5.40}$$

Die Masse der Sonne ist also um etwa 3×10^5 größer als die Erdmasse und immerhin noch etwa 1000 mal größer als die Masse des größten Planeten (Jupiter). Die obige Annahme $M_S \gg m_p$ ist also gut erfüllt.

Die **Kepler**schen Gesetze gelten auch für die Monde der Planeten oder künstliche Monde (Satelliten). Der Planet übernimmt hierbei die Rolle des Zentralkörpers. Analog zu Gl.(1.5.33) folgt für die Umlaufzeiten der Satelliten

$$T_{Sat}^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM_E} \quad , \tag{1.5.41}$$

wobei r z.B. der Abstand zwischen Erde und Mond ist. Für künstliche Satelliten folgt mit $r = R_E + h$ und $GM_E = gR_E^2$ (vergleiche Gl.(1.5.19)) folgt

$$T_{Sat}^2 = \frac{4\pi^2 (R_E + h)^3}{g R_E^2} \quad . \tag{1.5.42}$$

Hieraus ergibt sich für $h = 35\ 800$ km über dem Äquator eine Umlaufzeit von t = 24 h. Die Position des Satelliten wird dadurch *geostationär*, was für die Nachrichtentechnik wichtig ist.

1.6 Anwendungsbeispiele der Bewegungsgleichungen

In diesem Abschnitt soll anhand von einfachen Beispielen beschrieben werden, wie mit Hilfe der **New**tonschen Axiome die Gesetzmäßigkeiten von Bewegungsabläufen beschrieben werden können.

1.6.1 Die Fallgesetze

Im Schwerefeld der Erde wirkt auf einen Körper mit der schweren Masse m_s die Schwerkraft $\mathbf{F}_{\mathbf{G}} = m_s \cdot \mathbf{g}$. Sie bewirkt eine Beschleunigung a der trägen Masse m_t

$$\mathbf{F}_{\mathbf{G}} = m_t \cdot \mathbf{a} = m_t \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = m_s \cdot \mathbf{g} \quad . \tag{1.6.1}$$

Da $m_s = m_t = m$ zu setzen ist, ergibt sich

$$\frac{md^2\mathbf{r}}{dt^2} = m \cdot \mathbf{g} \tag{1.6.2}$$

Durch Integration erhält man die Geschwindigkeit des Körpers zum Zeitpunkt t zu

$$\mathbf{v}(t) = \int_{t_0}^t \mathbf{g} dt' = \mathbf{g} \cdot t + \mathbf{v}_0 \quad . \tag{1.6.3}$$

Hierbei ist \mathbf{v}_0 die Anfangsgeschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = t_0$. Den Ortsvektor erhält man durch nochmalige Integration zu

$$\mathbf{r}(t) = \int_{t_0}^t \mathbf{v}(t') dt' = \int_{t_0}^t (\mathbf{g} \cdot t' + \mathbf{v}_0) dt'$$
(1.6.4)

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\mathbf{g}}{2}t^2 + \mathbf{v}_0 \cdot t + \mathbf{r_0} \quad , \tag{1.6.5}$$

wobei \mathbf{r}_0 der Ortsvektor zur Zeit $t = t_0$ ist.

Freier Fall

Durch geeignete Wahl der Anfangsbedingungen vereinfachen sich obige Beziehungen. Beim freien Fall ist $\mathbf{v}_0 = 0$ und man kann den Koordinatenursprung so wählen, daß $\mathbf{r}_0 = 0$ ist. Die Fallrichtung soll außerdem parallel zur *z*-Achse sein. Glgn.(1.6.3) und (1.6.5) vereinfachen sich dann zu

$$z(t) = h(t) = \frac{g}{2}t^2$$
 (1.6.6)

$$v_z(t) = g \cdot t = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \quad . \tag{1.6.7}$$

Eine vorgegebene Fallhöhe h wird nach der Zeit $\sqrt{\frac{2h}{g}}$ erreicht, wodurch sich die erreichte Endgeschwindigkeit zu $v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$ ergibt. Beim freien Fall entspricht die Länge des Ortsvektors $\mathbf{r}(t)$ der Fallhöhe h(t), da es sich um eine geradlinige Bewegung handelt.

Waagrechter und schiefer Wurf

Beim waagrechten und schiefen Wurf wird der freien Fallbewegung eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit v_0 überlagert. Dieser Fall wurde bereits in Abschnitt 1.3.1 und 1.3.2 diskutiert und wird hier nur nochmals kurz rekapituliert.

Zur Zeit $t_0 = 0$ soll gelten: $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$, $\mathbf{a} = a\hat{\mathbf{z}} = -g \cdot \hat{\mathbf{z}}$ und $\mathbf{r}(0) = 0$. Durch Integration erhält man

$$\mathbf{v}(t) = -g \cdot t \cdot \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{v}_0 \tag{1.6.8}$$

$$\mathbf{r}(t) = -\frac{1}{2}gt^2 \cdot \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{v}_0 t \tag{1.6.9}$$

oder
$$\mathbf{r}(t) = -\frac{1}{2}gt^2 \cdot \hat{\mathbf{z}} + v_{0x}t \cdot \hat{\mathbf{x}} + v_{0y}t \cdot \hat{\mathbf{y}} + v_{0z}t \cdot \hat{\mathbf{z}}$$
 (1.6.10)

Hierbei sind $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ und $\hat{\mathbf{z}}$ die Einheitsvektoren in x, y und z-Richtung und g der Betrag der Erdbeschleunigung. In Komponentenschreibweise erhält man somit

$$x(t) = v_{0x} \cdot t \tag{1.6.11}$$

$$y(t) = v_{0y} \cdot t \tag{1.6.12}$$

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0z} \cdot t \quad . \tag{1.6.13}$$

Durch Auflösen der Gleichungen für x(t) und y(t) nach t und Einsetzen in die Gleichung für z(t) erhält man

$$z(x) = -\frac{1}{2v_{0x}^2}x^2 + \frac{v_{0z}}{v_{0x}} \cdot x$$
(1.6.14)

$$z(y) = -\frac{1}{2v_{0y}^2}y^2 + \frac{v_{0z}}{v_{0y}} \cdot y \quad .$$
(1.6.15)

Diese Gleichungen stellen Parabeln in der zy- bzw. zx-Ebene dar, man nennt sie auch *Wurfparabeln*. Beim waagrechten Wurf ist $v_{0z} = 0$ und der zweite Term in Gl.(1.6.14) und (1.6.15) verschwindet.

Durch eine Kurvendiskussion lassen sich die Wurfweite W(z(t) = 0), die Scheitelhöhe H(dz/dx = 0 bzw. dz/dy = 0) und die Flugzeit T berechnen zu

$$W_x = \frac{2v_{0x} \cdot v_{z0}}{g} \tag{1.6.16}$$

$$W_y = \frac{2v_{0y} \cdot v_{z0}}{g} \tag{1.6.17}$$

$$H = \frac{v_{0z}^2}{2g} \tag{1.6.18}$$

$$T = \frac{2v_{0z}}{g} \quad . \tag{1.6.19}$$

Durch eine Drehung des Koordinatensystems läßt sich erreichen, daß die Wurfparabel in der zx-Ebene liegt. Mit der Abwurfgeschwindigkeit v_0 und dem Abwurfwinkel α gegen die Horizontale wird $v_{0x} =$

$v_0 \cos \alpha$, und $v_{0z} = v_0 \sin \alpha$. Da ferner $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$ ist, lassen sich W, H und T als Funktion des Winkels α angeben

$$W_x = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha \tag{1.6.20}$$

$$H = \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\alpha \tag{1.6.21}$$

$$T = \frac{2v_0}{g}\sin\alpha \quad . \tag{1.6.22}$$

Wegen $\sin 2\alpha = 1$ für $\alpha = 45^{\circ}$, erzielt man bei vorgegebener Abwurfgeschwindigkeit v_0 unter einem Abwurfwinkel von 45° die größte Wurfweite $\frac{v_0^2}{a}$.

1.6.2 Die harmonische Schwingung

Definition einer harmonischen Schwingung

Man betrachte eine Punkt P auf einem Kreis mit Radius a, der mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω entgegen dem Uhrzeigersinn periodisch umläuft (siehe Abb. 1.42). Die Kreisbahn soll in der xy-Ebene liegen und der Kreismittelpunkt soll mit dem Ursprung des Koordinatensystems zusammenfallen. Der Winkel φ zwischen Radiusvektor \mathbf{r} und der x-Achse wächst linear mit der Zeit an: $\varphi(t) = \varphi_0 + \omega t$. Hierbei ist φ_0 der Anfangswinkel zur Zeit t = 0. Die x- und y-Koordinate des Punkts P lassen sich dann wie folgt ausdrücken

$$x(t) = A \cos \varphi(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$
(1.6.23)

$$y(t) = A \sin \varphi(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0) \quad . \tag{1.6.24}$$

Der Verlauf dieser Funktionen ist in Abb. 1.43 dargestellt. Diese Bewegungsform auf der x- und y-Achse wird als harmonische Schwingung bezeichnet. Man nennt in diesem Zusammenhang A die Amplitude, $\varphi(t)$ die Phase und φ_0 die Anfangsphase oder Phasenverschiebung der Schwingung. Die Zeit, die der Radiusvektor **r** für einen vollen Umlauf braucht, nennt man die Schwingungsdauer T.

Die harmonische Schwingung ist dadurch ausgezeichnet, daß *die Schwingungsdauer unabhängig* von der Amplitude A ist. Eine positive Phasenverschiebung φ_0 entspricht einem zeitlich vorgerückten Vorgang. Die Kurve ist in Richtung kleinerer t-Werte verschoben. Für $\varphi_0 < 0$ ist die Kurve nach rechts, d.h. in Richtung größerer t-Werte gegenüber dem Zustand mit $\varphi_0 = 0$ verschoben.

Die Geschwindigkeiten bzw. die Beschleunigungen, mit denen die Projektionen des Punktes P auf der x- bzw. y-Achse entlanglaufen, erhält man aus Gl.(1.6.24) durch Differentiation nach der Zeit zu

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi_0)$$
(1.6.25)

$$a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 \cdot x(t)$$
(1.6.26)

$$v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \varphi_0)$$
(1.6.27)

$$a_y(t) = \frac{dv_y(t)}{dt} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 \cdot y(t)$$
 (1.6.28)



Abbildung 1.42: Die harmonische Schwingung als Projektion eines auf einem Kreis gleichförmig umlaufenden Punktes *P* auf die Koordinatenachsen.

Man erhält somit die für eine harmonische Schwingung charakteristischen Differentialgleichungen

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -\omega^2 \cdot x(t) \qquad (1.6.29)$$
$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = -\omega^2 \cdot y(t) \quad . \quad (1.6.30)$$

Charakteristisch für eine harmonische Schwingung ist also ferner, daß *die Beschleunigung proportional zur Auslenkung* ist. Die Einführung der harmonischen Schwingung als eine Projektion der gleichförmigen Kreisbewegung auf die Koordinatenachsen stellt ein Beispiel für die Zerlegung des Ortsvektors, der Geschwindigkeit und der Beschleunigung in zueinander senkrecht stehende und unabhängig wirkende Komponenten dar (vergleiche hierzu auch Abbschnitt 1.3.1).



Abbildung 1.43: Harmonische Schwingung.

Das Masse-Feder Pendel – Federkraft

Lenkt man eine zunächst in Ruhe befindliches System bestehend aus einer Feder und einer Masse m um die Strecke x reibungsfrei aus (siehe Abb. 1.44), so muß man die elastische Gegenkraft der Feder

Experiment: Rotierender Stab:

Ein rotierender, exzentrisch angebrachter Stab wird zunächst über einen in Ruhe befindlichen Drehspiegel an die Wand projiziert. Man beobachtet den Schatten des Stabes, der sich mit der Umlauffrequenz ω auf und ab bewegt. Versetzt man den Drehspiegel in gleichförmige Rotation, so beobachtet man das Bild einer Sinusfunktion, d.h. aus dem zeitlichen Nacheinander des auf- und abschwingenden Schattenbildes wird ein räumliches Nebeneinander.

überwinden. Nach einem Ansatz von **Hooke** ist der Betrag der Rückstellkraft der Feder proportional zur Auslenkung und ihre Richtung ist antiparallel zur Auslenkung. Somit ergibt sich das **Hooke**sche Gesetz zu

$$\mathbf{F}_F = F_{Fx} \cdot \hat{\mathbf{x}} = -kx \cdot \hat{\mathbf{x}} \quad . \tag{1.6.31}$$



Abbildung 1.44: Masse-Feder Pendel in Ruhelage (links) und mit endlicher Auslenkung (rechts).

Hierbei ist k die *Federkonstante*. Vernachlässigt man die Federmasse und setzt man in der dynamischen Grundgleichung $F = ma = md^2x/dt^2$ die **Hooke**sche Beziehung ein, so erhält man

$$-k \cdot x = m \cdot a_x = m \frac{d^2 x}{dt^2} \quad , \tag{1.6.32}$$

oder

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 \cdot x \quad . \tag{1.6.33}$$

Dies ist die Differentialgleichung einer harmonischen Schwingung mit der Kreisfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} \quad , \tag{1.6.34}$$

wobei ν die Schwingungsfrequenz ist, also die Zahl der pro Sekunde ausgeführten Schwingungen. Das Federpendel besitzt somit die Schwingungsdauer

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad . \tag{1.6.35}$$

Man nennt ganz allgemein Kräfte, die Anlaß zu einer harmonischen Schwingung geben, *harmonische Kräfte*. Der **Hooke**sche Ansatz für die Federkraft ist ein Beispiel dafür. Die Aufstellung der Schwingungsgleichung macht klar, daß harmonische Kräfte Rückstellkräfte sind, die betragsmäßig linear mit der Auslenkung aus der Ruhelage anwachsen.

Experiment: Bestimmung der Federkonstanten:

Ein auf einer Platte annähern reibungsfrei beweglicher Wagen mit einer Masse m ist zwischen zwei seitlich befestigte Federn eingespannt (siehe Abb. 1.45). Durch eine schwere Masse M wird der Wagen um die Strecke x aus seiner Ruhelage ausgelenkt. Man variiert nun M und mißt x als Funktion von M. Die Federkonstante berechnet sich zu $k = M \cdot g/x$. Setzt man diesen Wert für k in die Schwingungsgleichng ein, so erhält man die Schwingungsdauer zu $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ (Schwingung ohne Masse M). Diese berechnete Schwingungsdauer läßt sich leicht mit Hilfe einer Stoppuhr überprüfen. Vergrößert man m auf das Vierfache, so muß sich die doppelte Schwingungsdauer ergeben. Auch dies kann mit Hilfe einer Stoppuhr überprüft werden.



Abbildung 1.45: Anordnung zur Bestimmung der Federkonstante. In der Ruhelage (x = 0) sind beide Federn entspannt.

Die obigen Formeln für ω , ν und T bleiben erhalten, wenn an der Masse zusätzlich zur Federkraft eine konstante Kraft einwirkt. Um die Richtigkeit dieser Aussage zu prüfen, wird eine Masse m betrachtet, die im Gravitationsfeld der Erde an einer Feder mit Federkonstanten k aufgehängt ist (siehe Abb. 1.46). Die konstante Schwerkraft $F_G = mg$ führt zu einer Grundauslenkung x_G aus der Ruhelage der entspannten Feder, die sich aus Gl.(1.6.32) zu $mg = k|x_G|$ ergibt. Legt man wie in Abb. 1.46 gezeigt den Nullpunkt der x-Achse in diese Gleichgewichtslage, dann berechnet sich die Kraft F_x bei einer Auslenkung x zu

$$F_x = m \cdot g - k \cdot (|x_G| + x) = -k \cdot x \quad . \tag{1.6.36}$$

Die resultierende Kraft ist demnach wieder harmonisch mit der Federkonstanten k und man beobachtet eine harmonische Schwingung der Masse um die Gleichgewichtslage, wenn die Masse aus dieser ausgelenkt und losgelassen wird.

Es ist lehrreich, sich zu überlegen, wie die Federkonstante k einer Kombination von Federn (parallel oder hintereinander geschaltet, siehe Abb. 1.47) mit den Federkonstanten $k_1, k_2, ...$ der einzelnen Federn zusammenhängt. Bei einer Parallelschaltung von Federn ist die gesamte Rückstellkraft durch die Summe der einzelnen Rückstellkräfte gegeben, d.h. die einzelnen Federkräfte $F_i = -k_i x$ addieren sich. Da die Auslenkung für alle Federn dieselbe ist, erhält man

$$|F_{\text{ges}}| = \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot x$$
 . (1.6.37)

Das heißt, bei einer Parallelschaltung von Federn setzt sich die Gesamtfederkonstante aus der Summe der einzelnen Federkonstanten zusammen



Abbildung 1.46: Das Masse-Feder Pendel im Schwerefeld der Erde.



Abbildung 1.47: Parallelschaltung (a) und Serienschaltung (b) zweier Federn.

$$k_{\text{ges}} = k_1 + k_2 + \ldots = \sum_{i=1}^n k_i$$
 (1.6.38)

Bei einer Reihenschaltung von Federn muß in der Ruhestellung die Summe der Federkräfte von benachbarten Federn verschwinden, das heißt, alle Kräfte müssen betragsmäßig gleich groß sein: $|F_i| = |F_j| = F$. Die gesamte Auslenkung aller Federn ergibt sich durch Summation über alle Einzelauslenkungen, d.h.

$$x_{\text{ges}} = x_1 + x_2 + \ldots = \sum_{i=1}^n x_i$$
 (1.6.39)

Da die Gesamtauslenkung durch $x_{\rm ges} = |F_{\rm ges}|/k_{\rm ges}$ ausgedrückt werden kann, erhält man

$$x_{\text{ges}} = \frac{|F_{\text{ges}}|}{k_{\text{ges}}} = \frac{F}{k_{\text{ges}}} = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} + \dots = F \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i} \quad .$$
(1.6.40)

Das heißt, bei einer Serienschaltung von Federn addieren sich die Kehrwerte der Federkonstanten zum Kehrwert der Gesamtfederkonstante,

$$\frac{1}{k_{\text{ges}}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \ldots = \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i} \quad . \tag{1.6.41}$$

Experiment: Federkonstante einer Serienschaltung von Federn:

Es werden 4 Federn mit gleichen Federkonstanten k hintereinander gehängt und mit einer Masse m belastet. Die Auslenkung aus der Ruhelage ist viermal so groß wie für eine einzelne Feder. Versetzt man die Anordnung in Schwingung, so mißt man eine Schwingungsfrequenz, die nur halb so groß ist wie diejenige einer einzelnen Feder, da die Gesamtfederkonstante $k_{ges} = k/4$ ist.

Bei einer Serienschaltung von n gleichen Federn ist $k_{ges} = k/n$ und die Gesamtlänge $l_{ges} = n \cdot l$. Die Größe k^* , gegeben durch Federkonstante mal Länge, bleibt damit konstant und ist eine Materialeigenschaft des verwendeten Federmaterials. Mit dieser Größe läßt sich das **Hooke**sche Gesetz schreiben als

$$F_F = -k^* \cdot \frac{x}{l} \quad . \tag{1.6.42}$$

Dabei ist x/l die relative Längenänderung der Feder. Die Einheit von k^* ist 1 N, die Maßzahl von k^* gibt die Federkonstante einer Feder mit Länge l = 1 m an.

1.6.3 Das mathematische Pendel

Unter einem mathematischen Pendel versteht man eine punktförmige Masse m, die an einem masselosen Faden der Länge l in einem Gravitationsfeld mit der Fallbeschleunigung g aufgehängt ist (siehe Abb. 1.48). Die Gleichgewichtsposition der Masse liegt lotrecht unter dem Aufhängepunkt. In dieser Position wird die Schwerkraft $\mathbf{F}_G = m\mathbf{g}$ exakt durch die Fadenspannung $\mathbf{F}_F = -m\mathbf{g}$ kompensiert, so daß die Gesamtkraft $\mathbf{F} = \mathbf{F}_G + \mathbf{F}_F$ auf die Masse verschwindet (Ruhelage). Bei einer Auslenkung der Masse um den Winkel φ aus der Ruhelage läuft die Masse auf einem Kreisbogen das Wegstück $s = l\varphi$. In dieser Position kann die Fadenspannung nicht mehr die gesamte Schwerkraft kompensieren, sondern nur diejenige Komponente von \mathbf{F}_G , die in Richtung des Fadens liegt. Es verbleibt eine Komponente der Schwerkraft, die senkrecht zum Faden steht und den Pendelkörper in die Ruhelage zurückzutreiben versucht.

Da die Bahn des Massenpunktes auf einer Kreisbahn verläuft, ist es zweckmäßig, zur Beschreibung der Bewegung Kreiskoordinaten zu verwenden. In diesem System wird die Lage des Punktes P in der Ebene durch zwei Koordinaten r und φ festgelegt. Dabei gibt r den Abstand von P zum Koordinatenursprung an und φ mißt den Winkel zwischen einer vorgegebenen Achse und dem Fahrstrahl vom Ursprung durch den Punkt P. Von der festen Achse aus werden Winkel entgegen dem Urzeigersinn positiv gezählt. Die Koordinaten r = const sind zum Ursprung konzentrische Kreise, die Linien $\varphi = const$ sind Geraden, die radial vom Ursprung ausgehen.

Für die Tangentialkomponente der Schwerkraft erhält man

$$\mathbf{F}_{\varphi} = m \cdot g \cdot \sin \varphi \,\, \mathbf{\hat{e}}_{\varphi} \quad . \tag{1.6.43}$$



Abbildung 1.48: Mathematisches Pendel (a) und Darstellung in Kreiskoordinaten (b).

Für die Radialkomponente ergibt sich

$$\mathbf{F}_r = m \cdot g \cdot \cos \varphi \ \mathbf{\hat{e}_r} \quad . \tag{1.6.44}$$

Hierbei sind $\hat{\mathbf{e}}_{\varphi}$ und $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}}$ die Einheitsvektoren in tangentialer und radialer Richtung. Die Radialkomponente der Schwerkraft wird durch die Fadenspannung (Zwangskraft) kompensiert. Die rücktreibende Tangentialkomponente hat wegen $\mathbf{F}_{\varphi} = m\mathbf{a}_{\varphi}$ eine tangentiale Beschleunigung $\mathbf{a}_{\varphi} = a_{\varphi}\hat{\mathbf{e}}_{\varphi}$ zur Folge. Längs des Kreisbogens $s = l\varphi$ ist $a_{\varphi} = dv_{\varphi}/dt$ und $v_{\varphi} = ds/dt = ld\varphi/dt$. Damit erhält man

$$a_{\varphi} = l \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \quad . \tag{1.6.45}$$

Damit ergibt sich die Bewegungsgleichung des mathematischen Pendels $F_{\!\varphi} = m a_{\!\varphi}$ zu

$$-m \cdot g \cdot \sin \varphi = m \cdot l \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2}$$
(1.6.46)

oder

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\varphi \quad . \tag{1.6.47}$$

Diese Gleichung hat nur in der *harmonischen Näherung* eine einfache Lösung. In der harmonischen Näherung wird für kleine Winkel $\sin \varphi \approx \varphi$ und man erhält die Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\varphi \tag{1.6.48}$$

einer harmonischen Schwingung. In Analogie zum Masse-Feder Pendel erhält man die Lösung

$$\varphi(t) = \varphi_m \cos(\omega t + \varphi_0) \tag{1.6.49}$$

mit der Kreisfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad . \tag{1.6.50}$$

Für die Schwingungsfrequenz ν und die Schwingungsdauer T erhält man

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} \quad \text{bzw.} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad .$$
(1.6.51)

Es sollte insbesondere darauf hingewiesen werden, daß die Schwingungsdauer des mathematischen Pendels nicht von der Masse m des Pendelkörpers abhängt. Das liegt, wie man aus Gl.(1.6.46) erkennen kann an der angesetzten Gleichheit von schwerer und träger Masse, die sich auf der linken und rechten Seite der Gl.(1.6.46) gegenseitig wegheben. **Newton** hat deshalb das mathematische Pendel benutzt, um die Äquivalenz von schwerer und träger Masse zu überprüfen. Für $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ ergibt sich bei einer Pendellänge von l = 1 m die Schwingungsdauer $T = 1.969 \approx 2$ s.

Bei großen Schwingungsamplituden ist die harmonische Näherung nicht mehr gültig. Die Lösung der exakten Bewegungsgleichung in höherer Näherung ergibt dann die Schwingungsdauer

$$T^{\star} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + (\frac{1}{2})^2 \sin^2 \frac{\varphi_m}{2} + (\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4})^2 \sin^4 \frac{\varphi_m}{2} + \dots \right)$$

$$T^{\star} \simeq 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{16} \varphi_m^2 \right) \quad . \tag{1.6.52}$$

Die Korrekturterme zur harmonischen Näherung lassen die Schwingungsdauer T^* eine Funktion der Schwingungsamplitude φ_m werden. Für $\varphi_m = 10^o$ ist die relative Abweichung $\Delta T/T = (T^* - T)/T$ noch vergleichsweise klein, nämlich etwa 0.2%.²⁶

1.6.4 Reibungskräfte

Reibung zwischen festen Körpern

Wird ein Körper mit der Normalkraft \mathbf{F}_{n} auf eine Unterlage gepreßt (\mathbf{F}_{n} steht senkrecht auf der Unterlage), so muß eine bestimmte Kraft \mathbf{F} tangential zur Unterlage ausgeübt werden, um den Körper auf der Unterlage zu verschieben (siehe Abb. 1.49). Die Ursache hierfür ist die sogenannte *Haftreibungskraft* $\mathbf{F}_{\mathbf{R}}$. Die Größe der Haftreibungskraft ist durch die mikroskopische Struktur der beiden Oberflächen gegeben. Im allgemeinen findet man folgenden Zusammenhang zwischen $|\mathbf{F}_{n}|$ und $|\mathbf{F}_{\mathbf{R}}|$:

$$F_R = \mu_h F_n \quad . \tag{1.6.53}$$

Der Haftreibungskoeffizient μ_h ist eine Proportionalitätskonstante, die von der Materialart und der Oberflächenbeschaffenheit der beteiligten Körper abhängt. Wichtig ist, daß die Haftreibungskraft in erster

²⁶Es ist interessant, sich die Frage zu stellen, ob man nicht ein amplituden-unabhängiges Pendel konstruieren kann. **Huyghens** hat dieses Problem bereits 1658 gelöst, indem er das *Zykloidenpendel* entwickelt hat. Seine Schwingungsdauer ist in aller Strenge unabhängig von der Schwingungsamplitude. Die Bahnkurve ist statt eines Kreises eine Zykloide. Eine Zykloide erhält man, indem man einen Kreis auf einer Geraden abrollt. Als Zykloiden bezeichnet man die Bahnen der Kreispunkte auf dem Umfang eines Kreises, die man bei diesem Abrollvorgang erhält. Beim Zykloidenpendel rollt der Faden des Pendels auf einer Zykloide ab.

Näherung nicht von der Größe der Auflagefläche abhängt. Man hat deshalb für einen flachen Quader immer die gleiche Haftreibung unabhängig davon, auf welche Seitenfläche man ihn stellt. Die Unabhängigkeit der Haftreibungskraft von der Größe der Auflagefläche kann man sich dadurch klar machen, daß eine technisch ebene Fläche noch keineswegs mathematisch eben ist und man davon ausgehen kann, daß sich zwei starre Körper immer nur in drei Punkten berühren. Bei zwei gegeneinander bewegten Körpern tritt die sogenannte *Gleitreibung* auf, die durch den Gleitreibungskoeffizienten μ_g charakterisiert ist. Im allgemeinen gilt $\mu_g < \mu_h$.²⁷



Abbildung 1.49: Zur Definition der Haftreibung.

Experiment: Bestimmung des Haftreibungskoeffizienten auf der schiefen Ebene:

Legt man zwei gleichgroße Holzquader auf ein Holzbrett, so beginnen beide ab einem bestimmten Neigungswinkel α des Brettes gegen die Waagrechte auf dem Brett abzugleiten. Der Tangentialraft $F_t = mg \sin \alpha$ wirkt die Haftreibungskraft $F_R = \mu_h mg \cos \alpha$ entgegen. Der Körper beginnt zu gleiten, wenn $F_t \ge F_R$ wird. Damit erhält man den Haftreibungskoeffizienten zu $\mu_h = \tan \alpha$.

Legt man unter einen der Holzquader ein Filzstück, so beginnt der Quader ohne Filzunterlage bei einem kleineren Neigungswinkel zu gleiten. Der Haftreibungskoeffizient zwischen Holz und Filz ist also größer als zwischen Holz und Holz.

Man kann außerdem feststellen, daß der Gleitreibungskoeffizient in erster Näherung unabhängig von der Geschwindigkeit der Holzquader ist. Dies gilt für die meisten Festkörper.

Reibung zwischen Festkörpern und Flüssigkeiten oder Gasen

Für die viskose Reibung (Gleitreibung) bei der Bewegung eines Festkörpers durch eine Flüssigkeit gilt weitgehend

$$F_R \propto v$$
 . (1.6.54)

Dieser Zusammenahng wird als Stokessches Gesetz bezeichnet.

Für den Luftwiderstand von aerodynamisch ungünstig geformten Körpern, sowie allgemein bei hohen Geschwindigkeiten, gilt²⁸

$$F_R \propto v^2$$
 . (1.6.55)

Die quadratische Zunahme des Luftwiderstands mit der Geschwindigkeit spielt vor allem bei der Konstruktion von Autos eine bedeutende Rolle. Durch geschickte Formgebung versucht man, den Proportionalitätsfaktor in Gl.(1.6.55) möglichst klein zu halten.

²⁷Die genauen physikalischen Prozesse, die zur Haft- und Gleitreibung führen, sind äußerst komplex und in vielen Fällen im Detail noch nicht verstanden. Die Physik der Reibung ist Gegenstand vieler aktueller Forschungsarbeiten.

²⁸Der Luftwiderstand hängt empfindlich von der Art der Luftströmung (laminare oder turbulente Strömung) ab.

Freier Fall mit Reibung

Als Anwendungsbeispiel betrachten wir den freien Fall eines Körpers mit Masse m in einem viskosen Medium (z.B. Flüssigkeit) mit Reibungskoeffizienten μ , wobei die Reibungskraft proportional zur Fallgeschwindigkeit (viskose Reibung) sein soll:

$$\mathbf{F}_{\mathbf{R}} = -\mu \cdot \mathbf{v} \quad . \tag{1.6.56}$$

Der Körper werde zur Zeit t = 0 losgelassen, so daß $\mathbf{v}(0) = 0$ und $\mathbf{r}(0) = 0$. Der Körper wird durch die Schwerkraft $\mathbf{F}_{\mathbf{G}} = m\mathbf{g}$ beschleunigt und durch die Reibungskraft $\mathbf{F}_{\mathbf{R}} = -\mu\mathbf{v} = -\mu\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ abgebremst. Man erhält somit für die Gesamtkraft \mathbf{F}

$$m \cdot \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} = \mathbf{F}_{\mathbf{G}} + \mathbf{F}_{\mathbf{R}} = m \cdot \mathbf{g} - \mu \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad . \tag{1.6.57}$$

Man erhält somit die Differentialgleichung

$$m \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m \cdot \mathbf{g} - \mu \cdot \mathbf{v} \quad . \tag{1.6.58}$$



Abbildung 1.50: Zeitlicher Verlauf der Geschwindigkeit (a) und der Beschleunigung beim freien Fall mit Reibung.

Aus dieser Gleichung geht hervor, daß der Körper bei t = 0 wegen v(0) = 0 und damit $F_R = 0$ zunächst mit der vollen Schwerkraft beschleunigt wird. Mit zunehmendem v wird allerdings die Reibungskraft immer größer und dadurch die beschleunigende Gesamtkraft immer kleiner, bis sie schließlich bei einer Maximalgeschwindigkeit v_{max} ganz verschwindet. Der Körper bewegt sich dann mit konstanter Geschwindigkeit weiter, da die angreifende Gesamtkraft $F_g + F_R$ verschwindet. Die Lösung der Differentialgleichung (1.6.58) ergibt

$$\mathbf{v}(t) = \frac{m \cdot \mathbf{g}}{\mu} \left(1 - \exp(-\frac{\mu}{m}t) \right)$$
(1.6.59)

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \mathbf{g} \exp(-\frac{\mu}{m}t)$$
(1.6.60)

Der Verlauf der Geschwindigkeit und der Beschleunigung ist in Abb. 1.50 gezeigt. Als maximale Geschwindigkeit erhält man $\mathbf{v_{max}} = \frac{m \cdot \mathbf{g}}{\mu}$, d.h. $\mathbf{v_{max}}$ ist umgekehrt proportional zum Reibungskoeffizienten μ .

1.7 Trägheitskräfte

1.7.1 Die d'Alembertsche Gleichung

In der Newtonschen Bewegungsgleichung $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ bedeutet \mathbf{F} eine reale Kraft (z.B. Gravitationskraft), die der Wechselwirkung zwischen zwei Körpern entspringt. Bei der Einwirkung dieser Kraft auf einen Probenkörper der Masse m erfährt dieser eine Beschleunigung \mathbf{a} . Die reale Kraft \mathbf{F} ist also die Ursache der Bewegungsänderung, während die träge Masse m sich der Bewegungsänderung widersetzt. Wie **d'Alembert** gezeigt hat, ist es oft zweckmäßig, die Bewegungsgleichung $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ umzuinterpretieren und neben *realen Kräften* noch fiktive *Pseudo-* oder *Scheinkräfte*, die *Trägheitskräfte* einzuführen. Wir werden zeigen, daß die Trägheitskräfte mit den realen Kräften ins Gleichgewicht treten. Die Dynamik wird dann gewissermaßen auf die Statik zurückgeführt.

In der *Statik* sind nach Definition alle Körper in Ruhe. Ein punktförmiger Körper kann aber nur dann in Ruhe verharren, wenn die Summe der am Körper angreifenden Kräfte verschwindet, wenn also

$$\mathbf{F} = \sum_{i} \mathbf{F}_{i} = 0 \tag{1.7.1}$$

gilt. Ein Beispiel dafür ist in Abb. 1.51 gezeigt. An der auf einer Unterlage ruhenden Masse m greift die Gewichtskraft $\mathbf{F}_{\mathbf{G}} = m\mathbf{g}$ an. Damit der Körper in Ruhe bleibt, muß diese Kraft von einer Zwangskraft $\mathbf{F}_{\mathbf{el}} = -m\mathbf{g}$ exakt kompensiert werden, die von der elastischen Rückstellkraft der mehr oder weniger stark deformierten Unterlage bereitgestellt wird. Die Gesamtkraft verschwindet damit.



Abbildung 1.51: Statikbedingung: die Summe der realen Kräfte verschwindet.

In der Dynamik sind Bewegungsänderungen zugelassen. Gemäß der Newtonschen Grundgleichung

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \qquad \text{Newton} \qquad (1.7.2)$$

treten genau dann Beschleunigungen auf, wenn die einwirkende reale Kraft nicht verschwindet. Nach **d'Alembert** schreibt man diese Gleichung zu

$$\mathbf{F} - m\mathbf{a} = 0 \tag{1.7.3}$$

um und führt formal die Trägheitskraft

$$\mathbf{F}_{\mathbf{T}} := -m\mathbf{a} \tag{1.7.4}$$

ein. Damit erhält man

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_{\mathbf{T}} = 0. \qquad \qquad \text{d'Alembert} \qquad (1.7.5)$$

Die Newtonsche und die d'Alembertsche Gleichung sind zwei gleichberechtigte Beschreibungsweisen der Physik. Die Trägheitskraft \mathbf{F}_{T} nach Gl.(1.7.4) ist proportional zur Masse m. Diese Eigenschaft hat sie gemeinsam mit der Gravitationskraft.

Ein Vergleich von Gl.(1.7.1) und Gl.(1.7.5) zeigt, daß in der Statik die Summe aller einwirkenden realen Kräfte verschwindet, während im Rahmen des **d'Alembert**schen Formalismus in der Dynamik die Summe aus realen und Trägheitskräften verschwindet: die Trägheitskraft $\mathbf{F}_{\mathbf{T}}$ kompensiert die reale Kraft \mathbf{F} .

Es ist wichtig, sich klarzumachen, daß im Unterschied zum Naturgesetz $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, bei dem die Kraft von außen vorgegeben wird (z.B. Gravitation), in der Gleichung $\mathbf{F_T} = -m\mathbf{a}$ die Trägheitskraft per Definition gleich dem Ausdruck $-m\mathbf{a}$ gesetzt wird; $\mathbf{F_T}$ ist also nur die abkürzende Schreibweise für $-m\mathbf{a}$. Die Trägheitskraft für sich genommen ruft also keine Beschleunigung hervor. Dies rechtfertigt die Bezeichnung *Scheinkraft*. Die Trägheitskraft tritt nur dann auf, wenn reale Kräfte zunächst eine Beschleunigung $\mathbf{a} \neq 0$ hervorgerufen haben, d.h. Trägheitskräfte werden durch reale Kräfte erst geweckt. In Analogie zur **Newton**schen Lex Tertia kann man auch formulieren, daß die Trägheitskraft die "reactio" auf die "actio" der realen Kraft ist.

Mit dem Begriff Trägheitskraft lassen sich besonders solche Bewegungen anschaulich beschreiben, bei denen einem Körper durch Zwangsbedingungen wie z.B. Schienen bei einer Straßenbahn, Faden beim Pendel etc. Zwangsbewegungen aufgeprägt werden. So wird z.B. bei der Kurvenfahrt einer Straßenbahn dem Fahrgast durch die Schienen eine Kreisbewegung und damit eine Beschleunigung a vorgeschrieben, die auf den Mittelpunkt des Krümmungsradius zeigt (siehe Abb. 1.52). Die träge Masse des Fahrgasts ist nach dem Trägheitsgesetz aber bestrebt, ihre ursprüngliche Bewegung beizubehalten. Der Fahrgast hat deshalb den Eindruck, entgegengesetzt zur Beschleunigung a radial nach außen gedrückt zu werden. Die Trägheitskraft $\mathbf{F_T}$ erscheint hier also als Kraft, die den Fahrgast in der Kurve umzuwerfen versucht. An diesem Beispiel wird die Bezeichnung Trägheitskraft verständlich.



Abbildung 1.52: Die Trägheitskraft $\mathbf{F}_{\mathbf{T}} = -m\mathbf{a}$ kann in den Trägheitswiderstand $\mathbf{F}_{\mathbf{TW}} = -m\mathbf{a}_{\mathbf{t}}$ und die Zentrifugalkraft $\mathbf{F}_{\mathbf{TZ}} = -m\mathbf{a}_{\mathbf{n}}$ zerlegt werden.

Im folgenden sollen die Trägheitskräfte bei der Kreisbewegung diskutiert werden. Im Abschnitt 1.3.2 wurde abgeleitet, daß die Beschleunigung

$$\mathbf{a}(t) = \frac{dv}{dt}\,\hat{\mathbf{t}} + \frac{v^2}{R}\,\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n \quad . \tag{1.7.6}$$

in eine Tangential- und Normalkomponente zerlegt werden kann. Entsprechend lassen sich die Trägkheitskräfte klassifizieren. Man definiert

$$\mathbf{F}_{\mathbf{TW}} := -m \cdot \mathbf{a}_{\mathbf{t}} = -m \cdot \frac{dv}{dt} \,\hat{\mathbf{t}}$$
(1.7.7)

als den Trägheitswiderstand und

$$\mathbf{F}_{\mathbf{TZ}} := -m \cdot \mathbf{a}_{\mathbf{n}} = -m \frac{v^2}{R} \,\hat{\mathbf{n}}$$
(1.7.8)

als die Zentrifugalkraft. Bei einer geradlinig translatorisch beschleunigten Bewegung tritt als Trägheitskraft nur der Trägheitswiderstand, bei einer gekrümmten Bahnkurve, die mit konstanter Bahngeschwindigkeit durchlaufen wird, nur die Zentrifugalkraft auf. Für die gesamte Trägheitskraft $\mathbf{F}_{\mathbf{T}}$ gilt 29

$$\mathbf{F}_{\mathbf{T}} = \mathbf{F}_{\mathbf{TW}} + \mathbf{F}_{\mathbf{TZ}} \quad . \tag{1.7.9}$$

1.7.2 Der Trägheitswiderstand

Der Trägheitswiderstand soll anhand einer Masse m, die an einer Feder in einem Fahrstuhl aufgehängt ist (siehe Abb. 1.53), veranschaulicht werden. Es können folgende 3 Fälle unterschieden werden:



Abbildung 1.53: Fahrstuhlmodell zum Trägheitswiderstand.

1. Der Fahrstuhl befindet sich in Ruhe:

Es wirkt die Schwerkraft $\mathbf{F}_{\mathbf{G}} = m\mathbf{g} = -mg \cdot \hat{\mathbf{z}}$ nach unten. Die Feder wird gedehnt und die daraus resultierende Federkraft $\mathbf{F}_{\mathbf{F}} = kz \cdot \hat{\mathbf{z}}$ kompensiert die Schwerkraft. Es stellt sich ein Gleichgewichtszustand

²⁹Es sei hier angemerkt, daß in rotierenden Systemen bei einer radialen Bewegung ($R \neq const$), die hier ausgeschlossen wurde, eine weitere Trägheitskraft, die *Coriolis-Kraft*, auftritt. Diese wird erst später im Abschnitt 1.8.2 eingehend diskutiert.

$$\mathbf{F}_{\mathbf{G}} + \mathbf{F}_{\mathbf{F}} = 0 \tag{1.7.10}$$

ein.

2. Der Fahrstuhl bewegt sich beschleunigt nach unten:

Wird der Fahrstuhl mit der konstanten Beschleunigung $-a \cdot \hat{\mathbf{z}}$ nach unten bewegt, so tritt gemäß der **d'Alembert**schen Gleichung eine Trägheitskraft $\mathbf{F_T} = ma \cdot \hat{\mathbf{z}}$ auf, die entgegengesetzt zur Beschleunigung, also nach oben gerichtet ist. Es genügt deshalb eine kleinere Federkraft, um die Schwerkraft $\mathbf{F_G}$ zu kompensieren. Die Feder verkürzt sich. Es gilt

$$\mathbf{F}_{\mathbf{G}} + \mathbf{F}_{\mathbf{F}} + \mathbf{F}_{\mathbf{T}} = 0 = -mg \cdot \hat{\mathbf{z}} + kz \cdot \hat{\mathbf{z}} + ma \cdot \hat{\mathbf{z}} \quad (1.7.11)$$

Ist a = g (freier Fall des Fahrstuhls), so kompensiert die Trägheitskraft die Schwerkraft vollständig (Schwerelosigkeit) und die Feder ist vollkommen entspannt.

3. Der Fahrstuhl bewegt sich beschleunigt nach oben:

Die Trägheitskraft $\mathbf{F}_{\mathbf{T}} = -ma \cdot \hat{\mathbf{z}}$ zeigt jetzt nach unten und ist parallel zur Schwerkraft. Es wird jetzt eine größere Federkraft benötigt, um die Summe aus Schwerkraft $\mathbf{F}_{\mathbf{G}}$ und Trägheitskraft $\mathbf{F}_{\mathbf{T}}$ zu kompensieren. Die Feder wird weiter gedehnt und es gilt

$$\mathbf{F}_{\mathbf{G}} + \mathbf{F}_{\mathbf{F}} + \mathbf{F}_{\mathbf{T}} = 0 = -mg \cdot \hat{\mathbf{z}} + kz \cdot \hat{\mathbf{z}} - ma \cdot \hat{\mathbf{z}} \quad (1.7.12)$$

Die in dem Beispiel deutlich werdende Gleichwertigkeit von Gravitations- und Trägkheitskraft ist schon im *Äquivalenzprinzip* (siehe Abschnitt 1.5.2) festgehalten, wonach schwere und träge Masse zueinander äquivalent sind. Was mit dem Begriff Äquivalenz gemeint ist, läßt sich jetzt noch deutlicher fassen: Nach dem Äquivalenzprinzip ist es generell nicht möglich, zwischen Gravitations- und Trägheitskräften zu unterscheiden. Einem Astronauten im schwerelosen Raum kann man durch eine Beschleunigung des Raumfahrzeugs eine Gravitation "vortäuschen".

Betrachtet man das Fahrstuhlexperiment in der **Newton**schen und der **d'Alembert**schen Sichtweise, so kommt man zu folgendem Ergebnis. Wird der Fahrstuhl z.B. nach unten beschleunigt, so versucht vom **Newton**schen Standpunkt aus die Masse m aufgrund ihrer Trägheit in ihrer Position zu verharren, die Feder muß deshalb eine kleinere Kraft ($F_F = mg - ma < F_G$) aufbringen, um die Gewichtskraft zu kompensieren, und wird somit weniger gedehnt. Vom **d'Alembert**schen Standpunkt aus ist die Situation anders, da für ihn die Summe aller Kräfte zu verschwinden scheint (dynamisches Gleichgewicht). Eine Pseudokraft scheint die Kugel nach oben zu ziehen. Die Pseudokraft ist die **d'Alembert**sche Trägkeitskraft F_T , die die realen Kräfte F_G und F_F kompensiert. Mit der Trägheitskraft erhält man das **d'Alembert**sche dynamische Gleichgewicht $F_G + F_F + F_T = 0$, in dem die Summe aus realen und Scheinkräften verschwindet.

1.7.3 Die Zentrifugalkraft

In den folgenden Beispielen zur Zentrifugalkraft soll zur Vereinfachung nur die Bewegung auf einer Kreisbahn mit Radius R betrachtet werden, die mit konstanter Bahngeschwindigkeit v abläuft. In Abb. 1.54 sind die Betrachtungsweise von **Newton** und **d'Alembert** gegenübergestellt. Auf der Kreisbahn unterliegt der Körper einer Normalbeschleunigung $\mathbf{a}_{\mathbf{n}} = (v^2/R)\hat{\mathbf{n}}$, die auf den Krümmungsmittelpunkt M der Kreisbahn zeigt. Nach **Newton** ist hierfür die Kraft $\mathbf{F} = m\mathbf{a}_{\mathbf{n}}$, eine Zentripetalkraft aufzubringen, die die Trägheit der Masse überwindet und den Körper von der geradlinigen

Experimente zum Trägheitswiderstand:

(a) In einem einfachen Experiment zum Trägheitswiderstand stellt man ein Wasserglas auf ein Blatt Papier. Die Frage lautet: kann man das Papier unter dem Wasserglas so wegziehen, daß das Glas stehen bleibt ? Die Antwort lautet: ja, wenn man am Papier ruckartig mit sehr großer Beschleunigung *a* zieht. In diesem Fall ist der Betrag der Trägheitskraft $F_T = ma \gg F_R$ und die Trägheitskraft schiebt das Wasserglas von der Unterlage.

(b) Man befestigt eine Masse m in der Mitte eines Stücks Faden und hängt die Masse mit dem einen Stück Faden an einer Halterung auf, während das andere Stück lose nach unten hängt. Zieht man nun ruckartig an dem unteren Faden, so reißt das untere Stück Faden. Zieht man dagegen langsam, so reißt das obere Stück Faden, an dem die Masse an der Halterung befestigt ist. Beim ruckartigen Ziehen entsteht eine sehr große Trägheitskraft $F_T = -ma$, die entgegengesetzt zur Beschleunigung nach oben gerichtet ist. Die sehr große Trägheitskraft führt zum Reißen des unteren Fadens. Beim langsamen Ziehen ist dagegen die Trägheitskraft vernachlässigbar. Auf den oberen Faden wirkt dann die Zugund die Gewichtskraft, wogegen auf den unteren Faden nur die Zugkraft wirkt. Der obere Faden reißt dadurch zuerst.

(c) Man stellt sich auf eine Waage und bestimmt sein Gewicht. Geht man nun schnell in die Hocke (Beschleunigung des Körperschwerpunkts nach unten) bzw. aus der Hocke wieder in die aufrechte Position (Beschleunigung des Körperschwerpunkts nach oben), so wird der Ausschlag der Waage kleiner bzw. größer (die Erklärung ist analog zum Fahrstuhlmodell).



Abbildung 1.54: Gegenüberstellung der Newtonschen und der d'Alembertschen Betrachtungsweise bei der Kreisbewegung.

Bahn auf die Kreisbahn zwingt. Nach **d'Alembert** wird die Tatsache, daß sich die Masse der zentripetalen Beschleunigung widersetzt, so interpretiert, daß aufgrund der Trägheit der Masse eine Trägheitskraft, die Zentrifugalkraft angreift, die den Körper vom Zentrum wegtreibt. Die Zentrifugalkraft \mathbf{F}_{TZ} steht dabei im Gleichgewicht mit der Zentripetalkraft $\mathbf{F} = m\mathbf{a}_n$. Für die Zentrifugalkraft erhält man (vergleiche hierzu Abschnitt 1.3.2)

$$\mathbf{F}_{\mathbf{TZ}} + m \cdot \mathbf{a}_{\mathbf{n}} = 0$$

$$\mathbf{F}_{\mathbf{TZ}} = -m \frac{v^2}{R} \cdot \hat{\mathbf{n}} = -mv\omega \cdot \hat{\mathbf{n}} = -m\omega^2 R \cdot \hat{\mathbf{n}} . \qquad (1.7.13)$$

Man kann die in Abb. 1.54 gezeigte Situation wie folgt diskutieren: In der Newtonschen Sichtweise wirkt nur die Zentripetalkraft F (reale Kraft), die zur Normalbeschleunigung q_n führt und die Masse auf der Kreisbahn hält. In der d'Alembertschen Sichtweise ist die Masse m in Ruhe (dynamisches

Gleichgewicht), d.h. die Summe aller Kräfte muß verschwinden. Es muß deshalb eine Scheinkraft F_{TZ} existieren, die nach außen gerichtet ist und die Zentripetalkraft kompensiert.



Abbildung 1.55: Zentrifugalkraft beim Kettenkarussel (a) und bei der Kurvenfahrt (b).

Beispiele für die Zentrifugalkraft:

- Die Zentrifugalkraft ist dafür verantwortlich, daß sich Schleiffunken von der rotierenden Schleifscheibe ablösen und sich anschließend nach dem Trägheitsgesetz mit der Tangentialgeschwindigkeit v geradlinig und gleichförmig weiterbewegen. Ähnliches gilt für Wassertropfen an Fahrzeugreifen.
- Kurvenfahrt: Bei schnellen Kurvenfahrten kann die Zentrifugalkraft auf ein Vielfaches der Schwerkraft anwachsen. Fliegt z.B. ein Flugzeug mit Schallgeschwindigkeit ($v \simeq 340$ m/s) eine Kurve mit Radius R = 1000m, so tritt eine Zentrifugalbeschleunigung von etwa 10g, also dem Zehnfachen der Erdbeschleunigung auf. Auf den Piloten wirkt also eine Trägheitskraft, die einem Vielfachen der Gewichtskraft entspricht.^{*a*}

Da die Zentrifugalkraft größer als die Gewichtskraft werden kann, kann man bei entsprechender Geschwindigkeit auf der Achterbahn eine vertikale Schleife durchfahren ("Looping"), ohne aus dem Fahrzeug zu fallen. Hierbei muß $\omega^2 R \ge g$ gelten.

Bei Kurvenfahrten mit Straßen- oder Schienenfahrzeugen wirkt die resultierende Gesamtkraft $\mathbf{F}_{res} = \mathbf{F}_{G} + \mathbf{F}_{TZ}$ aufgrund der endlichen Zentrifugalkraft bei einer horizontalen Fahrbahn nicht normal zur Fahrbahn. Man neigt deshalb die Fahrbahn, um \mathbf{F}_{res} senkrecht zur Fahrbahnoberfläche zu haben. Mit $\tan \alpha = F_{TZ}/F_G$ (siehe Abb. 1.55b) ergibt sich $\alpha = v^2/Rg$, wobei *R* der Kurvenradius ist.

 ^aDie Toleranzgrenzen für Menschen sind sitzend etwa $a\simeq 5g$ und liegend $a\simeq 12g.$

 Beim Kettenkarussel führt die Zentrifugalkraft F_{TZ} dazu, daß die Kette aufgrund der Schwerkraft F_G nicht genau senkrecht nach unten hängt, sondern aufgrund der resultierenden Kraft F_{res} = F_G + F_{TZ} schräg nach außen gerichtet ist (siehe Abb. 1.55a). Die Kraft F_{res} wird von der Kettenkraft F_K kompensiert. Der genaue Winkel wird durch das Verhältnis von Schwerkraft und Zentrifugalkraft bestimmt.

- Die hohen Zentrifugalkräfte bei schnellen Drehbewegungen werden in *Ultrazentrifugen* zur Trennung von Stoffen ausgenutzt. Bei der Sedimentation von Stoffen aus einer Suspension spielen die Reibungskräfte, die die suspendierten Körper erfahren, eine Rolle. Nach **Stokes** gilt $F_R \propto r \cdot v$, wobei r der Radius bei kugelförmiger Gestalt des Körpers ist. Im Schwerefeld der Erde sinken im Gleichgewicht $F_R = F_G$ von Reibungskraft und Schwerkraft Körper mit konstanter Geschwindigkeit v_s . Wegen $rv_s \propto mg$ bzw. wegen $m = \rho \cdot 4\pi r^3/3$ für geometrisch gleiche Körper folgt $v_s \propto \rho g$. Stoffe mit hoher Massendichte sinken schneller ab und sammeln sich am Boden des Gefäßes an. In einer Ultrazentrifuge setzt man die Suspension in Rotation und sedimentiert die Stoffe mit Hilfe der Zentrifugalkraft ab. Bei der Bahnbeschleunigung a ist die zentrifugale Wanderungsgeschwindigkeit $v_s \propto \rho a$ und die Stoffe lagern sich mit zunehmender Dichte von innen nach außen ab. Zahlenbeispiel: Bei der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi 10^3 \text{s}^{-1}$ und R = 1 cm ist $a = \omega^2 R \simeq 4 \times 10^4 g$. Die Sedimentation in der Zentrifuge ist deshalb wesentlich effektiver.
- Schwerkraftersatz im Raumfahrzeug: Durch eine Rotationsbewegung eines Raumfahrzeugs entsteht eine radial nach außen gerichtete Zentrifugalkraft $F_R = m\omega^2 R$, die als Ersatz für die fehlende Gravitationskraft benutzt werden kann.
- Rotiert man ein kreisförmiges Blatt Papier oder eine ringförmige Kette, so führt die dabei auftretende Zentrifugalkraft zu einer dynamischen Stabilisierung des Blattes und der Kette. Mit dem Blatt kann sogar ein Stück Holz zersägt werden. Die Kette wird scheinbar steif.



Abbildung 1.56: Der Newtonsche Eimerversuch.

Es soll nun kurz auf den **Newton**schen Eimerversuch eingegangen werden. Ein mit Wasser gefüllter Eimer wird dabei um die vertikal stehende Symmetrieachse in Rotation versetzt. Reibungskräfte sorgen dafür, daß auch das Wasser nach einiger Zeit mitbewegt wird. Die resultierende Kraft F_{res} aus Gewichtskraft F_G und Zentrifugalkraft F_{TZ} muß senkrecht zur Wasseroberfläche stehen. Aus Abb. 1.56 liest man ab:

$$\tan \alpha = \frac{m\omega^2 x}{mg} = \frac{\omega^2 x}{g} = \frac{dy}{dx} . \qquad (1.7.14)$$

Durch Integration erhält man schließlich

$$y = \frac{\omega^2}{2g}x^2 + y_0 \quad . \tag{1.7.15}$$

Man erhält also eine parabolisch gekrümmte Wasseroberfläche. Nach **Newton** ist die Aufwölbung der Wasseroberfläche ein direkter Beweis für eine beschleunigte Bewegung des Wassereimers. Würde man nämlich in einem Gedankenexperiment den Fixsternhimmel in Drehung versetzen und den Eimer ruhen lassen, so sollte der Wasserspiegel eben bleiben. Man kann also unterscheiden, ob der Fixsternhimmel oder der Wassereimer eine beschleunigte Bewegung ausführt, d.h. die Beschleunigung ist in einem "absoluten" Sinne feststellbar. Von **Mach** wurde dagegen die Idee geäußert, daß bei ruhendem Eimer und rotierendem Fixsternhimmel die Wasseroberfläche sich ebenfalls aufwölben würde (**Mach**sches Prinzip). Danach würde sich nur die "relative" Beschleunigung zwischen Eimer und Fixsternhimmel feststellen lassen.³⁰ Es ist bis heute ein ungelöstes Problem, ob Beschleunigungen absolut oder nur relativ angegeben werden können.



Abbildung 1.57: Die Zentrifugalkraft auf der um ihre eigene Achse rotierenden Erde.

Die jährliche Bewegung der Erde um die Sonne, vor allem aber die tägliche Drehung um ihre eigene Achse führt zu leicht beobachtbaren Effekten der Zentrifugalkraft. Die Zentrifugalkraft aufgrund der Erdrotation um die eigene Achse ist am Äquator maximal (siehe Abb. 1.57) und ist gegeben durch

$$a_{\ddot{A}q} = \omega^2 R_E = \frac{4\pi^2}{T^2} R_E = \frac{4\pi^2 \cdot 6.4 \times 10^6}{(24 \cdot 60 \cdot 60)} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 0.034 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} .$$
(1.7.16)

Die effektive Gewichtskraft mg_{eff} am Äquator ist die Differenz zwischen der Gewichtskraft mg_0 , wie sie für eine nichtrotierende Erde erwartet würde, und der Zentrifugalkraft $ma_{\ddot{A}g}$

$$mg_{\text{eff}} = mg_0 - ma_{\ddot{A}q}$$
 bzw. $g_{\text{eff}} = g_0 - a_{\ddot{A}q}$. (1.7.17)

Je schneller die Erde rotieren würde, umso leichter erschiene ein Körper amÄquator. An den Polen tritt dagegen wegen R = 0 keine Zentrifugalkraft auf. Dort sollte die Fallbeschleunigung g_{i} direkt meßbar sein. In der Tat ist die Fallbeschleunigung an den Polen höher als amÄquator:

$$g(\text{Pol}) = 9.832 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$
 $g(\ddot{\text{A}}\text{quator}) = 9.780 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. (1.7.18)

³⁰Genauso wie auch nur relative und keine absoluten Geschwindigkeiten (geradlinig, gleichförmig) meßbar sind, siehe hierzu auch Abschnitt 1.8.1.

Die Differenz $\Delta g = 0.052 \text{ m/s}^2$ dieser Zahlenwerte ist allerdings größer als die Äquatorialbeschleunigung $a_{\ddot{A}q} = 0.031 \text{ m/s}^2$. Die unterschiedlichen Fallbeschleunigungen an den Polen sind deshalb nur teilweise auf die Wirkung der Zentrifugalkraft zurückzuführen (siehe hierzu auch Abschnitt 1.5.1). Die verbleibende Abweichung ist auf die Abweichung der Erde von der Kugelform zurückzuführen.³¹

Aus Abb. 1.57 liest man ab, daß ein Körper auf dem Breitengrad φ aufgrund der Erdrotation eine Kreisbahn mit dem Radius $R = R_E \cos \varphi$ durchläuft. Die resultierende Zentrifugalkraft $\mathbf{F_{TZ}}(\varphi)$ steht senkrecht auf der Erdachse und weist von der Achse weg. Für den Betrag von $\mathbf{F_{TZ}}(\varphi)$ gilt

$$F_{TZ} = m\omega^2 R = m\omega^2 R_E \cos\varphi = ma_{\ddot{A}a} \cos\varphi \quad . \tag{1.7.19}$$

Selbst für eine idealisierte homogene Erdkugel ist deshalb die allein beobachtbare Überlagerung der Gravitationskraft mg_0 und der Zentrifugalkraft F_{TZ} nicht exakt auf den Erdmittelpunkt gerichtet.

Die Zentrifugalbeschleunigung a_{ES} aufgrund der Rotation der Erde um die Sonne erhält man in gleicher Weise zu

$$a_{ES} = \omega_{ES}^2 R_{ES} = \frac{4\pi^2}{T_{ES}^2} R_{ES} = \frac{4\pi^2 \cdot 1.5 \times 10^{11}}{(365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60)} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 0.00578 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} .$$
(1.7.20)

Weiter erhält man durch die Rotation der Sonne um das Zentrum der Milchstraße³²

$$a_{SM} \simeq 10^{-7} a_{ES}$$
 . (1.7.21)

Das Erde-Mond-System — die Gezeiten

Da die Masse der Erde nur etwa 80 mal so groß ist wie diejenige des Mondes, rotieren Erde und Mond um einen gemeinsamen Schwerpunkt S, der etwa 3/4 des Erdradius vom Erdmittelpunkt entfernt ist (siehe Abb. 1.58), also noch innerhalb der Erde liegt. Es handelt sich dabei nicht um eine Drehung der Erde um eine Achse, die durch S geht, sondern, da Erde und Mond nicht starr miteinander verbunden sind, um eine reine Verschiebung, bei der der Erdmittelpunkt in 27 1/3 Tagen eine Kreisbahn mit dem Radius $3/4 R_E$ um den Schwerpunkt S durchläuft. Alle anderen Punkte der Erde beschreiben ebenfalls Kreise mit Radius $3/4 R_E$, aber um andere Mittelpunkte.³³ Durch diese Kreisbewegung wird eine Zentrifugalkraft hervorgerufen, die in jedem Punkt der Erde gleich groß ist. Diese Kraft wirkt in Richtung der Verbindungslinie von Erdpunkt zu Mondmittelpunkt und ist auf den Mond gerichtet.

Ganz anders sieht es mit der Gravitationskraft des Mondes aus. Sie ist aufgrund der nicht zu vernachlässigenden Ausdehnung der Erde an verschiedenen Erdpunkten verschieden groß und wird nur im Erdmittelpunkt von der Zentrifugalkraft kompensiert. In Abb. 1.58b sind die in vier verschiedenen

³¹Die Erde ist ein abgeplattetes Rotationsellipsoid, wodurch der Abstand Pol-Erdmittelpunkt kleiner ist als der Erdradius am Äquator und dadurch die Gravitationskraft an den Polen auch bei ruhender Erde größer sein sollte als am Äquator. Diese Argumentation ist aber gefährlich, da bei einer extremen Abplattung zu einer diskusförmigen Scheibe die Gravitationskraft an den Polen im Gegenteil sogar ganz verschwinden würde. Eine genaue Rechnung für eine Kugel mit einer homogenen Masseverteilung zeigt allerdings, daß für den Fall der Erde die Fallbeschleunigung an den Polen tatsächlich bei einer kleinen Abplattung zuerst zunimmt um dann schließlich bei größeren Abplattungen wieder abzunehmen.

³²An dieser Stelle setzte **Einstein**s Überlegung an, daß eventuell die Schwerkraft nur eine Trägheitskraft ist, da wir ein falsches Bezugssystem benutzen.

³³Man spricht hier von Revolution ohne Rotation.



Abbildung 1.58: (a) Bewegung von Erde und Mond um ihren gemeinsamen Schwerpunkt. (b) Zur Erklärung der Gezeiten.

Punkten auf der Erdoberfläche und im Erdmittelpunkt wirkenden Gravitationskräfte und Zentrifugalkräfte gezeigt. In Punkt A überwiegt ΔF_G , ³⁴ während in Punkt B F_{TZ} überwiegt. In Punkt C und D ist die resultierende Kraft klein und zum Erdmittelpunkt hin gerichtet. Zwischen den Punkten C und D einerseits und A und B andererseits findet ein kontinuierlicher Übergang der Größe und Richtung der resultierenden Kraft statt. In diesen Zwischenpunkten besitzt die resultierende Kraft eine Tangentialkomponente, die in Richtung Äquator weist. Diese Komponente bewirkt eine Bewegung des Wassers in den Ozeanen in Richtung der Punkte A und B, wodurch dort Flutberge entstehen. In den Punkten C und D sowie im gesamten, senkrecht durch die Punkte C und D verlaufenden Erdmeridians herrscht dagegen Ebbe. Die Vertikalkomponente der resultierende Kraft bewirkt eine elastische Verformung der Erde, d.h. ein Heben und Senken der Erdoberfläche um einige Dezimeter, wodurch sich eine kleine Zunahme der Erdbeschleunigung g an den Polen ergibt.

Aufgrund der Drehung des Modes um die Erde und der Rotation der Erde um ihre eigene Achse verschiebt sich der oben beschriebene Zustand dauernd, so daß innerhalb eines Zeitintervals von etwa 24 3/4 Stunden an einem Ort zweimal Ebbe und Flut eintritt.

 $^{^{34}\}Delta F_G$ soll der Unterschied der Gravitationskraft an einem Punkt der Erdoberfläche und im Erdmittelpunkt aufgrund der unterschiedlichen Abstände zum Mittelpunkt des Mondes sein.

1.8 Inertial- und Nichtinertialsysteme

1.8.1 Inertialsysteme

Ein Inertialsystem ist wie folgt definiert:

Ein Inertialsystem ist ein Bezugssystem, in dem das Galileische Trägheitsgesetz (Lex Prima) gilt.

Man kann zeigen, daß eine hinreichende Bedingung für das Vorliegen eines Inertialsystems gegeben ist, wenn sich ein kräftefreier Körper in allen drei Raumrichtungen geradlinig gleichförmig bewegt. Die experimentelle Erfahrung hat gezeigt, daß ein im Fixsternhimmel verankertes Bezugssystem diese Bedingung erfüllt. Ausgehend vom Trägheitsgesetz (Lex Prima) stellt man in einem Inertialsystem die Newtonschen Axiome auf, die die Grundlage der gesamten Mechanik bilden. Diese Axiome sind nur in einem Inertialsystem gültig.

Das Relativitätsprinzip

Es soll nun diskutiert werden, inwieweit der Fixsternhimmel das einzige Inertialsystem ist, oder ob es andere Bezugssysteme gibt, die ebenfalls Inertialsysteme darstellen. Um diese Fragestellung zu diskutieren, muß man überlegen, wie ein und derselbe physikalische Tatbestand von verschiedenen Koordinatensystemen aus beschrieben wird. Hierzu soll der Übergang von einem Bezugssystem S zu einem Bezugssystem S', das sich relativ zu S mit konstanter Geschwindigkeit v bewegt, betrachtet werden. Bezüglich der Transformation der Zeit wird in der klassischen **Newton**schen Mechanik angenommen, daß die Zeit eine "absolute" Größe ist, die unabhängig vom Bezugssystem ist. Der Übergang von Snach S' wird durch die *Galileitransformation* vermittelt. Zur Ableitung der Transformationsformeln zwischen den Koordinaten (x, y, z, t) in S und (x', y', z', t') in S' werden zwei kartesische Koordinatensysteme betrachtet, deren Ursprung zur Zeit $t_0 = 0$ zusammenfällt und die sich mit der Geschwindigkeit (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}) gleichförmig gegeneinander bewegen (siehe Abb. 1.59). Man erhält dann folgende Ausdrücke für die Galileitransformation der Ortskoordinaten

$$x = x' + v_{0x}t
 y = y' + v_{0y}t
 z = z' + v_{0z}t ,$$
(1.8.1)

der Geschwindigkeit

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + v_{0x}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt} + v_{0y}$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{dt} + v_{0z} , \qquad (1.8.2)$$

der Beschleunigung



Abbildung 1.59: Zur Ableitung der Galileitransformation zwischen zwei Koordinatensystemen S und S'.

$$a_{x} = \frac{d^{2}x}{dt^{2}} = \frac{d^{2}x'}{dt^{2}}$$

$$a_{y} = \frac{d^{2}y}{dt^{2}} = \frac{d^{2}y'}{dt^{2}}$$

$$a_{z} = \frac{d^{2}z}{dt^{2}} = \frac{d^{2}z'}{dt^{2}}$$
(1.8.3)

und der Zeit

$$t = t'$$
. (1.8.4)

In vektorieller Schreibweise erhält man

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{v}_0 t$$
$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_0$$
$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' . \qquad (1.8.5)$$

Aus Gl.(1.8.5) ist ersichtlich, daß sich die in S und S' gemessenen Geschwindigkeiten ein und desselben Körpers zwar um \mathbf{v}_0 unterscheiden die Beschleunigung aber in beiden Bezugssystemen gleich ist. Ein kräftefreier Körper, der in S die Beschelunigung $\mathbf{a} = 0$ erfährt, hat auch in S die Beschleunigung $\mathbf{a}' = 0$. Damit ist gezeigt, daß ausgehend von einem Inertialsystem S alle diejenigen Bezugssysteme S' wiederum Inertialsysteme sind, die sich gegen S gleichförmig geradlinig bewegen. Zu einem Inertialsystem gehört also eine Schar von unendlich vielen weiteren Inertialsystemen.

Anhand der **Galilei**transformation sieht man, daß sich Geschwindigkeiten beim Übergang von S nach S' vektoriell addieren, während die Beschleunigung gleich bleibt. Man sagt deshalb, daß die Beschleunigung eine bezüglich der **Galilei**transformation *invariante Giöße* oder kurz *Invariante* ist. Es ist ein

weitergehendes Problem, wie sich die dynamischen Größen Kraft und Masse beim Bezugssystemwechsel transformieren. Die Masse wird in der **Newton**schen Mechanik als Körpereigenschaft aufgefaßt, die unabhängig vom Bewegungszustand des Körpers und damit unabhängig von der Geschwindigkeit ist. Nach der speziellen Relativitätstheorie ist dies aber nur näherungsweise richtig, solange die Geschwindigkeit v der Masse klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit c ist. In dieser Näherung ist beim Wechsel des Bezugssystems

$$m = m', \qquad (1.8.6)$$

d.h. die Masse ist eine Invariante. Schließlich bleibt noch die Frage, welche Beziehung zwischen der Kraft **F** im System S und der Kraft **F'** im System S' besteht. Nach dem Gravitationsgesetz (1.5.1) hängt die Gravitationskraft nur von den invarianten Massen m_1 und m_2 und von dem relativen Abstand $r = |\mathbf{r}_{21}|$ zweier Körper ab. Da nach Gl.(1.8.1) Abstände zwischen zwei Raumpunkten galileiinvariant sind, erwartet man, daß auch die Gravitationskraft eine Invariante bezüglich der **Galilei**transformation ist. Eine ähnliche Argumentation gilt für die Coulombkraft zwischen zwei Ladungen. Kräfte wie die Reibungskraft, die eine Funktion der Relativgeschwindigkeit $\mathbf{v}_{21} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ zwischen zwei Körpern sind, erweisen sich ebenfalls als galileiinvariant, da nach Gl.(1.8.2) für die relative Geschwindigkeit $\mathbf{v}_{21} = \mathbf{v}'_{21}$ gilt. Die magnetischen Wechselwirkungen zwischen zwei bewegten Ladungen hängen dagegen von den Geschwindigkeiten \mathbf{v}_1 und \mathbf{v}_2 der Ladungsträger selber ab und sind damit nicht galileiinvariant.³⁵ Läßt man letztere Kräfte, die im Bereich der technischen Mechanik eine untergeordnete Rolle spielen, unberücksichtigt, so ist näherungsweise auch die Kraft eine Invariante bezüglich der **Ga-lilei**transformation:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}' \quad . \tag{1.8.7}$$

Mit Hilfe von Gln. (1.8.6) und (1.8.7) findet man bei der Transformation der **Newton**schen Bewegungsgleichung vom Inertialsystem S nach S:

$$\mathbf{F} = m \mathbf{a} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}' = m' \mathbf{a}' \quad . \tag{1.8.8}$$

Dies ist ein bemerkenswertes Resultat: die dynamische Grundgleichung hat in allen Inertialsystemen dieselbe Form, keines dieser Systeme ist vor dem anderen ausgezeichnet, alle Inertialsysteme sind untereinander gleichwertig. In Anlehnung an die **Galilei**invarianz der **Newton**schen Grundgleichung stellt man ein sehr weitreichendes Prinzip auf, das *spezielle Relativitätsprinzip*:

Die physikalischen Gesetze haben in allen Inertialsystemen diesselbe Form

Die **Galilei**invarianz der Bewegungsgleichung in der **Newton**schen Mechanik ist ein Sonderfall des Relativitätsprinzips: wenn alle Größen einer Gleichung invariant sind, bleibt die Form der Gleichung in allen Inertialsystemen trivialerweise erhalten. Das Relativitätsprinzip verlangt etwas weniger. Um die Form einer Gleichung nicht zu verändern, genügt es, daß sich beide Seiten der Gleichung beim Wechsel

³⁵Eine genaue Diskussion erfolgt in der Vorlesung zur Elektrodynamik.

des Bezugssystems gleich transformieren. Das Postulat der *Forminvarianz* der Naturgesetze in allen Inertialsystemen hat bislang jeder experimentellen Nachprüfung standgehalten und man sieht es heute als eines der fundamentalen Prinzipien der Physik an.

Als Konsequenz aus dem Relativitätsprinzip ergibt sich, daß Geschwindigkeiten nicht absolut meßbar sind. Da alle Inertialsysteme gleichberechtigt sind, kann man kein "ausgezeichnetes" Inertialsystem finden, von dem aus man die Geschwindigkeit eines Körpers als "absolut" bezeichnen könnte. Man mißt also Geschwindigkeiten grundsätzlich relativ zu Bezugssystemen.

Die Lorentztransformation

Führt man eine **Galilei**transformation der **Maxwell**schen Gleichungen, die den Elektromagnetismus in einem einheitlichen System beschreiben, durch, so stellt man fest, daß ihre Form nicht gleich bleibt.³⁶ Das bedeutet, daß die Gesetze des Elektromagnetismus ($\mathbf{F} \neq \mathbf{F}'$), die **Newton**sche Bewegungsgleichung $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ mit der invarianten Masse m = m', die **Galilei**transformation ($\mathbf{a} = \mathbf{a}'$) und das Relativitätsprinzip ($\mathbf{F} = m\mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{F}' = m'\mathbf{a}'$) nicht miteinander verträglich sind. Das kommt einer Verletzung des Relativitätsprinzips gleich. Diese Schwierigkeit wurde in der *Speziellen Relativitätstheorie* (**Einstein**, 1905) überwunden.³⁷ Ausgehend vom Relativitätsprinzip und der experimentell beobachteten Konstanz der Lichtgeschwindigkeit *c* hat **Einstein** vor allem den **Newton**schen Begriff der Zeit einer Kritik unterworfen und konnte zeigen, daß die Galileitransformation durch eine allgemeinere Transformation, die *Lorentztransformation*, ersetzt werden muß. Wir werden sehen, daß die Lorentztransformation für kleine Relativgeschwindigkeiten ($v \ll c$) zwischen den Inertialsystemen in die Galileitransformation übergeht. Bezüglich der Lorentztransformation sind der Relativabstand zwischen zwei Körpern, die Zeit und die Masse eines Körpers keine Invarianten mehr sondern hängen vielmehr von dem Inertialsystem ab, in dem sie beobachtet werden.

Ursprünglich glaubte man, daß die **Maxwell**schen Gleichungen falsch sein mußten. Zahlreiche Experimente führten aber zu dem Ergebnis, daß die **Maxwell**schen Gesetze der Elektrodynamik korrekt waren und die Schwierigkeiten wahrscheinlich woanders liegen. **H. A. Lorentz** stellte fest, daß folgende Transformation die **Maxwell**schen Gleichungen unverändert läßt:

$$\begin{array}{rcl}
x' &=& \frac{x - v_{0x}t}{\sqrt{1 - v_{0x}^2/c^2}} \\
y' &=& \frac{y - v_{0y}t}{\sqrt{1 - v_{0y}^2/c^2}} \\
z' &=& \frac{z - v_{0z}t}{\sqrt{1 - v_{0z}^2/c^2}} \\
t' &=& \frac{t - v r/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} . \quad (1.8.9)
\end{array}$$

Die Gleichungen (1.8.9) sind als Lorentztransformation bekannt. Einstein schlug vor, daß alle physikalischen Gesetze unter einer Lorentztransformation unverändert bleiben sollten. Das bedeutet, daß

³⁶In einem bewegten und ruhenden Raumschiff wären dann die elektrischen und optischen Phänomene verschieden. Man könnte deshalb diese optischen Phänomene dazu benutzen, die Geschwindigkeit des Raumschiffes zu bestimmen, insbesondere könnte die "absolute" Geschwindigkeit des Raumschiffes bestimmt werden. Dies widerspricht dem Relativitätsprinzip.

³⁷Im Jahre 1915 veröffentlichte **Einstein** eine zusätzliche Theorie, die *Allgemeine Relativitätstheorie*. Diese Theorie behandelt die Erweiterung der Speziellen Relativitätstheorie auf den Fall des Gravitationsgesetzes. Diese Theorie wird hier nicht diskutiert.

man die Gesetze der Mechanik und nicht diejenigen der Elektrodynamik ändern muß. Die Frage lautet also, wie müssen die **Newton**schen Gesetze geändert werden, damit sie unter einer Lorentztransformation unverändert bleiben. Es zeigte sich, daß es genügte, die Masse m in den **Newton**schen Gleichungen durch

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{1.8.10}$$

zu ersetzen, wobei m_0 die "Ruhemasse" des nichtbewegten Körpers ist.³⁸

Während die alte, **Galilei**sche Transformation zwischen den Koordinaten und der Zeit selbstverständlich erscheint, sieht die neue, die **Lorentz**sche Transformation zunächst eigenartigt aus. Die Gültigkeit der **Lorentz**transformation für die Gesetze der Mechanik wurde mittlerweile aber in vielen Experimenten bestätigt. Um sie zu verstehen, muß man, wie **Einstein** es getan hat, nicht nur die Gesetze der Mechanik studieren sondern seine Vorstellungen von *Raum und Zeit* analysieren.³⁹

1.8.2 Nicht-Inertialsysteme

Bezugssysteme, die sich relativ zu einem Inertialsystem translatorisch oder rotatorisch beschleunigt bewegen, sind selbst keine Inertialsysteme, da das Trägheitsgesetz in diesen Systemen verletzt ist.

In Inertialsystemen lassen sich zwar die Bewegungsgleichungen am einfachsten formulieren, in der Praxis hat man es aber oft mit Nicht-Inertialsystemen zu tun. Ein Beispiel ist die Erde, die aufgrund ihrer täglichen Rotationsbewegung um die eigene Achse und ihrer jährlichen Bewegung um die Sonne kein Inertialsystem darstellt, da ein auf der Erde verankertes Bezugssystem aufgrund dieser Bewegungen beschleunigt ist. Ebenso wäre ein in der Sonne verankertes Bezugssystem kein Inertialsystem, da die Sonne eine Bahnbewegung um das galaktische Zentrum ausführt, die mit einer Zentripetalbeschleunigung verknüpft ist. Da man es also in der Praxis häufig mit Nicht-Inertialsystemen zu tun hat, ist es sinnvoll, auch die für Nicht-Inertialsysteme gültigen Bewegungsgleichungen abzuleiten.

Im folgenden werden zwei häufig auftretende beschleunigte Bezugssysteme diskutiert, und zwar das gleichförmig translatorisch beschleunigte und das mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotierende Bezugssystem.

Das translatorisch beschleunigte Bezugssystem

Wir betrachten zwei kartesische Koordinatensysteme S und S, die wie in Abb. 1.60 gezeigt ist achsenparallel zueinander stehen und sich der Einfachheit halber nur längst der x-Achse gegeneinander bewegen sollen. S sei ein Inertialsystem und S bewege sich mit konstanter Beschleunigung $\mathbf{a}_0 = a_0 \cdot \hat{\mathbf{x}}$. Für den Übergang von S nach S setzen wir die **Galilei**transformation von Gl.(1.8.1) an

$$\begin{aligned}
x &= x' + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_0t^2 \\
y &= y' + v_{0y}t \\
z &= z' + v_{0z}t
\end{aligned}$$
(1.8.11)

³⁸Es wird in Abschnitt 1.8.3 gezeigt, daß sich dieser zunächst nicht einsichtige Ausdruck für die Masse aus der von **Einstein** postulierten Äquivalenz von Masse und Energie ableiten läßt.

³⁹Eine Diskussion der **Einstein**schen Ideen und deren Folgerungen für die Gesetze der Mechanik erfordert einige Breite und soll deshalb hier nicht durchgeführt werden.



Abbildung 1.60: Bezugssystem S' wird mit der Beschleunigung \mathbf{a}_0 relativ zum Inertialsystem S bewegt.

und erhalten durch Differenzieren nach der Zeit

$$v_{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + v_{0x} + a_{0}t$$

$$v_{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt} + v_{0y}$$

$$v_{z} = \frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{dt} + v_{0z} .$$
(1.8.12)

Durch nochmaliges Differenziren erhält man

$$a_{x} = \frac{d^{2}x}{dt^{2}} = \frac{d^{2}x'}{dt^{2}} + a_{0}$$

$$a_{y} = \frac{d^{2}y}{dt^{2}} = \frac{d^{2}y'}{dt^{2}}$$

$$a_{z} = \frac{d^{2}z}{dt^{2}} = \frac{d^{2}z'}{dt^{2}}$$
(1.8.13)

oder in Vektorschreibwiese.

$$a = a' + a_0$$
 . (1.8.14)

Beschleunigungen werden also nach Gl.(1.8.14) von System S und S' unterschiedlich beurteilt. Bewegt sich z.B. ein kräftefreier Körper der Masse m im Inertialsystem S aus gesehen mit der Beschleunigung $\mathbf{a} = 0$, so ist im System S' für $\mathbf{a}_0 = const \neq 0$ die Beschleunigung \mathbf{a}' im System S' von Null verschieden: $\mathbf{a}' = -\mathbf{a}_0 \neq 0$. Damit ist in System S' das Trägheitsgesetz verletzt oder – gleichbedeutend – S ist kein Inertialsystem.

Für die dynamischen Größen Masse m und reale Kraft **F** setzen wir mit ähnlichen Argumenten wie im vorangegangenen Abschnitt an, daß auch bei einem Übergang von einem Inertialsystem zu einem Nicht-Inertialsystem

$$m = m' \tag{1.8.15}$$

und

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}' \quad . \tag{1.8.16}$$

gelten soll. Im Inertialsystem ist die Bewegungsgleichung $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ bekannt. Mit Gl.(1.8.14)-(1.8.16) läßt sich diese Gleichung in das System S übersetzen und man erhält

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}' = m\mathbf{a} = m'\mathbf{a}' + m'\mathbf{a_0}$$
 (1.8.17)

Es ist zweckmäßig, die Scheinkraft F_A

$$\mathbf{F}_{\mathbf{A}} = -m\mathbf{a}_{\mathbf{0}} \tag{1.8.18}$$

einzuführen, die wie die **d'Alembert**sche Trägheitskraft $\mathbf{F}_{\mathbf{T}}$ aus Abschnitt 1.7 proportional zur Masse ist. Mit dieser Definition schreibt sich Gl.(1.8.17) in der Form

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_{\mathbf{A}} = m' \mathbf{a}' \quad . \tag{1.8.19}$$

Gl.(1.8.19) ist die gesuchte Bewegungsgleichung im translatorisch beschleunigten Bezugssystem S. Da die zusätzliche Kraft $\mathbf{F}_{\mathbf{A}}$ keiner Wechselwirkung zwischen Körpern entspricht, ist die Bezeichnung Scheinkraft gerechtfertigt. Der Zusatzterm $\mathbf{F}_{\mathbf{A}}$ in Gl.(1.8.19) zeigt klar, daß die **Newton**schen Bewegungsgleichungen nur in einem Inertialsystem Gültigkeit besitzen.

Die Bedeutung der Scheinkraft wird klarer, wenn man analog zur Trägheitskraft $\mathbf{F}_{\mathbf{T}} = -m\mathbf{a}$ im Inertialsystem S auch für das Nichtinertialsystem S' die Trägheitskraft $\mathbf{F}'_{\mathbf{T}}$

$$\mathbf{F}_{\mathbf{T}}' = -m\mathbf{a}' \tag{1.8.20}$$

definiert. Mit Gl.(1.8.14) ergibt sich dann

$$\mathbf{F}_{\mathbf{T}} = -m\mathbf{a} = -m\mathbf{a}' - m\mathbf{a}_{\mathbf{0}} = \mathbf{F}'_{\mathbf{T}} + \mathbf{F}_{\mathbf{A}} \quad . \tag{1.8.21}$$

Diese Beziehung macht klar, daß im Gegensatz zu der realen Kraft ($\mathbf{F} = \mathbf{F}'$) beim Wechsel des Bezugssystems die Trägheitskräfte nicht invariant sind. Die Scheinkraft $\mathbf{F}_{\mathbf{A}}$ ist identisch mit der Trägheitskraft $\mathbf{F}_{\mathbf{T}}$ im Inertialsystem, wenn die Trägheitskraft im Nicht-Inertialsystem verschwindet. Dieser Fall liegt z.B. dann vor, wenn der Körper relativ zum beschleunigten System ruht, d.h. $\mathbf{a}' = 0$ gilt. Die Scheinkraft $\mathbf{F}_{\mathbf{A}}$ ist dann identisch mit dem in Abschnitt 1.7 eineführten Trägheitswiderstand $\mathbf{F}_{\mathbf{T}\mathbf{W}}$ und trägt damit den Charakter einer Trägheitskraft. Die Scheinkraft $\mathbf{F}_{\mathbf{A}}$ wird deshalb vielfach auch als Trägheitskraft bezeichnet.

Beispiele:

• Fahrgast in Straßenbahn:

Die enge Beziehung zwischen $\mathbf{F}_{\mathbf{A}}$ in S' und $\mathbf{F}_{\mathbf{T}\mathbf{W}}$ in S wird an folgendem Beispiel klar. Man betrachte einen Fahrgast in einer anfahrenden oder abbremsenden Straßenbahn. Vom beschleunigten System S' aus wirkt auf den Fahrgast die Kraft $\mathbf{F}_{\mathbf{A}} = -m\mathbf{a}_{\mathbf{0}}$ ein. Der Fahrgast muß sich festhalten, d.h. eine reale Kraft aufbringen, um von der Scheinkraft nicht umgeworfen zu werden und mit $\mathbf{a}' = 0$ die Gleichung $\mathbf{F} + \mathbf{F}_{\mathbf{A}} = 0$ zu erfüllen. Eine sehr ähnliche Argumentation wurde in Abschnitt 1.7 benutzt, wo von der **d'Alembert**schen Bewegungsgleichung $\mathbf{F} + \mathbf{F}_{\mathbf{T}} = 0$ im Inertialsystem S ausgegangen wurde

• Masse-Feder-System:

Ein Körper der Masse *m* ist über eine Feder mit einer Aufhängung verbunden, die sich gegenüber *S* mit der Beschleunigung \mathbf{a}_0 bewegt. Die Masse ruht im System *S'*, d.h. $\mathbf{a}' = 0$. Mit $\mathbf{F}' = \mathbf{F} = \mathbf{F}_{\mathbf{F}}$ folgt dann $\mathbf{F} + \mathbf{F}_{\mathbf{A}} = m\mathbf{a}' = 0$ und deshalb $\mathbf{F}_{\mathbf{F}} = -\mathbf{F}_{\mathbf{A}} = m\mathbf{a}_0$.

• Mathematisches Pendel in startender Rakete:

Wird ein mathematisches Pendel in einer Rakete entgegen der Erdbeschleunigung g mit der Beschleunigung \mathbf{a}_0 beschleunigt, so greifen an der Masse m des Pendels die Schwerkraft $\mathbf{F}_{\mathbf{G}} = m\mathbf{g}$, die Fadenspannung $\mathbf{F}_{\mathbf{F}}$ und die Scheinkraft $\mathbf{F}_{\mathbf{A}} = -m\mathbf{a}_0$. Ähnlich wie bei Pendel im Inertialsystem zerlegt man die Kraft $\mathbf{F}_{\mathbf{G}} + \mathbf{F}_{\mathbf{A}}$ in eine Normalkomponente $\mathbf{F}_{\mathbf{r}}$ in Fadenrichtung und eine tangentiale Komponente \mathbf{F}_{φ} senkrecht zum Faden (siehe Abb. 1.61). Die Normalkomponente wird von der Fadenspannung kompensiert. Als wirksame Kraft verbleibt alleine die Tangentialkomponente $\mathbf{F}_{\varphi'} = -m(\mathbf{g} + \mathbf{a}_0) \sin \varphi'$. Damit ergibt sich die Schwingungsdauer T' im System S' zu

$$\mathbf{T}' = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g+a_0}} . \tag{1.8.22}$$

Das heißt, daß beim Starten der Rakete die Schwingungsperiode des mathematischen Pendels kürzer wird. Aus der Schwingungsdauer des Pendels läßt sich sofort die Beschleunigung **a**₀ der Rakete bestimmen. Durch Integration über die Zeit lassen sich hieraus die Geschwindigkeit und der seit dem Start zurückgelegte Weg berechnen und z.B. mit einer vorgegebenen Sollbahn vergleichen. Bei Abweichungen von der Sollbahn kann man entsprechend nachsteuern ("Trägheitssteuerung").

Bewegt sich die Rakete aus dem Weltraum beschleunigt auf die Erde zu, so erhält man

$$\mathbf{T}' = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g - a_0}} . \tag{1.8.23}$$

Beim freien Fall ($\mathbf{a}_0 = \mathbf{g}$) wird die Schwingungsdauer unendlich groß. Das Pendel bleibt im beschleunigten System dann bei beliebiger Auslenkung ϕ aus der Nullage stehen.

Es sei abschließend angemerkt, daß in Gln.(1.8.22) und (1.8.23) das Äquivalenzprinzip zum Tragen kommt. Die durch die Gravitation und die Beschleunigung auftretenden Trägheitskräfte sind gleichwertig.


Abbildung 1.61: Mathematisches Pendel in einem beschleunigten Bezugssystem.

Das rotierende Bezugssystem

Auch mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotierende Bezugssysteme sind beschleunigte Systeme, da zur Aufrechterhaltung der Drehbewegung eine Zentripetalbeschleunigung $a_0 \cdot \hat{\mathbf{n}}$ notwendig ist (vergleiche hierzu Abschnitt 1.3.2). In Analogie zum translatorisch beschleunigten System erwartet man in einem rotierenden Bezugssystem S' (siehe Abb. 1.62) für einen Körper im Abstand R' von der Drehachse folgenden Ausdruck für das Kräftegleichgewicht

mit
$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_{\mathbf{A}} = m'\mathbf{a}'$$

 $\mathbf{F}_{\mathbf{A}} = -m\omega^2 R' \cdot \hat{\mathbf{n}}$. (1.8.24)

Die Scheinkraft $\mathbf{F}_{\mathbf{A}} = -m\mathbf{a}_{\mathbf{0}}$ entspricht dabei der Zentrifugalkraft.





Im folgenden sollen anhand von Abb. 1.63 kurz die zwei Grenzfälle $\mathbf{a} = 0$ und $\mathbf{F} = 0$ diskutiert werden:

A: a' = 0:

Man erhält

$$\mathbf{F}_{\mathbf{F}} + \mathbf{F}_{\mathbf{A}} = m'\mathbf{a}' = 0$$

und damit
$$\mathbf{F}_{\mathbf{F}} = -\mathbf{F}_{\mathbf{A}} = m\omega^2 R' \cdot \hat{\mathbf{n}} . \qquad (1.8.25)$$

Aus $\mathbf{a}' = 0$ schließt der Beobachter im System S', daß die Gesamtkraft verschwindet, also muß die Scheinkraft $\mathbf{F}_{\mathbf{A}}$ die Federkraft $\mathbf{F}_{\mathbf{F}}$ kompensieren.



Abbildung 1.63: (a) Die Beschleunigung der Masse m im Bezugssystem S' sei $\mathbf{a}' = 0$. (b) Die real auf die Masse m wirkende Kraft sei $\mathbf{F} = \mathbf{F}' = 0$.

B: F = 0:

Dieser Fall liegt z.B. im Fall von tangential von einer Schleifscheibe abspringenden Funken vor. Aus $\mathbf{F_F} + \mathbf{F_A} = m'\mathbf{a}'$ folgt mit $\mathbf{F} = 0$

$$\mathbf{F}_{\mathbf{A}} = m'\mathbf{a}' = m\omega^2 R' \cdot \hat{\mathbf{n}} . \qquad (1.8.26)$$

Ein Beobachter im Bezugssystem S' sieht die Masse (Schleiffunken) radial nach außen fliegen, da $\mathbf{a}' \neq 0$ (siehe Abb. 1.63b). Er schließt daraus auf die (Schein-) Kraft $\mathbf{F}_{\mathbf{A}} = m\omega^2 R' \cdot \hat{\mathbf{n}}$. Diese Beobachtung gilt nur für den Anfang der Flugbahn. Im Laufe der Zeit sieht der radial nach außen blickende Beobachter im System S' eine Rechtsabweichung, da der Massenpunkt auf seiner gleichförmigen Bahn hinter dem mit konstanter Winkelgeschwindigkeit sich drehenden Sehstrahl des Beobachters zurückbleibt. Er muß daraus auf eine weitere Scheinkraft schließen, die bei radialer Bewegung auftritt und in obigem Ausdruck noch nicht enthalten ist.



Abbildung 1.64: Zur Veranschaulichung der Corioliskraft.

Die bei radialer Bewegung zusätzlich auftretende Scheinkraft kann anhand von folgendem Versuch klar gemacht werden: Man bewegt einem Bleistift auf einer rotierenden Scheibe in radialer Richtung nach außen. Dabei entstehen gekrümmte Linien, da sich die Scheibe unter dem Bleistift wegbewegt. Bei einer Rotation im Uhrzeigersinn sind die Striche nach links, bei einer Rotation gegen den Uhrzeigersinn nach rechts gekrümmt (siehe Abb. 1.64). Ein Beobachter auf der Scheibe (im System S) schließt auf eine Scheinkraft, die Ursache für die Ablenkung des Stiftes ist. Der Einfachheit halber soll angenommen werden, daß sich der Stift vom Mittelpunkt der Scheibe mit konstanter Geschwindigkeit v_0 in radialer Richtung nach außen bewegt. Der mitrotierende Beobachter im System S erwartet, daß der Stift nach der Zeit $T = R/v_0$ den Punkt A erreicht. Die Scheibe dreht sich aber um das Wegstück $s = v \cdot t = \omega \cdot R \cdot t = \omega \cdot v_0 \cdot t^2$ nach B weiter. Für den mitrotierenden Beobachter scheint eine senkrecht zu v_0 gerichtete Beschleunigung a_c stattzufindent. Mit $s = \frac{1}{2}a_ct^2$ erhält man

$$\frac{a_c}{2}t^2 = \omega \cdot v_0 \cdot t^2 \Rightarrow a_c = 2 \cdot v_0 \cdot \omega .$$
(1.8.27)

Die Beschleunigung ac heißt Coriolisbeschleunigung, für die die Scheinkraft

$$F_C = 2 \cdot m \cdot v_0 \cdot \omega \tag{1.8.28}$$

verantwortlich ist, die als *Corioliskraft* bezeichnet wird. Ein Körper, der sich in einem rotierenden Bezugssystem relativ zu diesem mit der Geschwindigkeit v_0 bewegt, erfährt also neben der Zentrifugalkraft noch eine weitere Trägheitskraft, nämlich die Corioliskraft. Bei einer Rotation im Uhrzeigersinn zeigt die Corioliskraft "nach links" relativ zur Anfangsgeschwindigkeit v_0 , bei einer Rotation gegen den Uhrzeigersinn ist sie nach rechts gerichtet.

Für die Herleitung allgemeinerer Ausdrücke für die Zentrifugalkraft und die Corioliskraft, muß zuerst eine allgemeinere Beschreibung von Drehbewegungen gemacht werden.

Beschreibung von Drehbewegungen

Infinitesimale Drehungen können durch *axiale Vektoren* dargestellt werden. Der Grund hierfür ist die Komponentenzerlegbarkeit der gleichförmigen Bewegung. Eine Drehung ist durch die Vorgabe einer Drehachse und eines Drehwinkels $d\varphi$ um die Drehachse charakterisiert (siehe Abb. 1.65). Die Lage der Drehachse im Raum legt man durch einen in der Achse liegenden Vektor $d\varphi$ fest, dessen Länge $d\varphi$ den Drehwinkel angibt. Damit ist der Vektor $d\varphi$ bis auf sein Vorzeichen eindeutig. Um die Wahl zwischen den beiden Möglichkeiten $d\varphi$ und $-d\varphi$ zu treffen, fordert man noch, daß der Drehsinn zusammen mit der Richtung von $d\varphi$ eine Rechtsschraube bildet.⁴⁰ Es sei hier ausdrücklich darauf hingewiesen, daß endliche Drehungen nicht als axiale Vektoren darstellbar sind.⁴¹

Verläuft wie in Abb. 1.65 gezeigt die Drehachse durch den Ursprung des Koordinatensystems, so kann man die aus einer Drehung resultierende Verrückung $d\mathbf{r}$ eines Massenpunktes mit Ortsvektor \mathbf{r} zum Drehvektor $d\varphi$ in Beziehung setzen. Bei der Drehung läuft die Masse m auf einem Kreis mit Radius $\rho = r \sin \alpha$ um die Achse. Dabei ist

⁴⁰Man bezeichnet dies als Korkenzieherregel oder Daumenregel der rechten Hand. Zeigt der Daumen der rechten Hand in Richtung von $d\varphi$, so geben die übrigen Finger der rechten Hand den Drehsinn an.

⁴¹Nacheinander um verschiedene Achsen ausgeführte Drehungen mit endlichem Drehwinkel $\Delta \varphi$ sind nicht kommutativ und verletzen daher eine wesentliche Vektoreigenschaft. Nur im Limes infinitesimaler Drehwinkel werden Drehungen kommutativ.



Abbildung 1.65: (a) Darstellung einer infinitesimalen Drehung als Axialvektor $d\varphi$. (b) Winkelgeschwindigkeit ω und zugehöriger Drehsinn.

$$dr = \rho d\varphi = (r \sin \alpha) \, d\varphi = d\varphi \cdot r \cdot \sin \alpha = |d\varphi \times \mathbf{r}| \quad . \tag{1.8.29}$$

Da ferner $d\mathbf{r} \perp d\boldsymbol{\varphi}$ und $d\mathbf{r} \perp \mathbf{r}$ und $(d\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{r}, d\mathbf{r})$ ein Rechtsdreibein bilden, folgt insgesamt⁴²

$$d\mathbf{r} = d\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r} \quad . \tag{1.8.30}$$

Es bietet sich ferner an, die Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ zu verallgemeinern und eine vektorielle Schreibweise

$$\boldsymbol{\omega} := \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt} \tag{1.8.31}$$

zu definieren. Für die Beträge der Winkelgeschwindigkeit gilt nach wie vor Gl.(1.3.44). Mit $d\varphi$ ist aber auch ω ein axialer Vektor, d.h. mit der Richtung von ω ist ein Drehsinn (Rechtsschraube) verknüpft (siehe Abb. 1.65b).

Da die Geschwindigkeit durch $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ gegeben ist, erhält man mit Gl.1.8.30 und der Definition (1.8.31)

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad . \tag{1.8.32}$$

für die Drehgeschwindigkeit eines Körpers, der von der Drehachse aus den Ortsvektor r hat.43

⁴²Zur Feststellung der Richtung von $d\mathbf{r}$ benutzt man die Rechte-Hand-Regel: Zeigt der rechtwinklig abgespreizte Daumen in Richtung von $d\varphi$ und der Zeigefinger in Richtung von \mathbf{r} , so zeigt der ebenfalls rechtwinklig abgespreizte Mittelfinger in Richtung von $d\mathbf{r}$.

⁴³Es ist hier anzumerken, daß das Vektorprodukt aus einem axialen Vektor (ω) und einem polaren Vektor (\mathbf{r}) wiederum einen polaren Vektor (\mathbf{v}) liefert.



Abbildung 1.66: Das Bezugssystem S' rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω gegenüber dem Inertialsystem S.

Nach dieser Einführung in die Beschreibung von Drehbewegungen, können die Bewegungsgleichungen in einem System S', das mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega} = const$ relativ zu einem Inertialsystem rotiert, in allgemeiner Form abgeleitet werden. Die Ursprünge der beiden Systeme sollen wie in Abb. 1.66 gezeigt ist zusammenfallen. Zur Vereinfachung der Schreibweise werden die Basiseinheitsvektoren mit $\hat{\mathbf{e}}_1 = \hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{e}}_2 = \hat{\mathbf{y}}$ und $\hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{z}}$ bzw. mit $\hat{\mathbf{e}}'_1 = \hat{\mathbf{x}}'$, $\hat{\mathbf{e}}'_2 = \hat{\mathbf{y}}'$ und $\hat{\mathbf{e}}'_3 = \hat{\mathbf{z}}'$, die Koordinaten mit $x_1 = x, x_2 = y$ und $x_3 = z$ bzw. mit $x'_1 = x', x'_2 = y', x'_3 = z'$ bezeichnet. Vom jeweiligen System aus gesehen ist dann der Ortsvektor eines Massenpunktes m gegeben durch

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{3} x_i \, \hat{\mathbf{e}}_i \quad \text{und} \quad \mathbf{r}' = \sum_{i=1}^{3} x'_i \, \hat{\mathbf{e}}'_i \, .$$
 (1.8.33)

Da beide Systeme den gleichen Ursprung haben gilt

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' \quad . \tag{1.8.34}$$

Für die Geschwindigkeiten v und v' relativ zu S und S' erhält man

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{3} \frac{dx_i}{dt} \,\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{i}} \quad \text{und} \quad \mathbf{v}' = \sum_{i=1}^{3} \frac{dx'_i}{dt} \,\hat{\mathbf{e}}'_{\mathbf{i}} \quad . \tag{1.8.35}$$

Wegen $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ gilt auch für die Einheitsvektoren

$$\frac{d\hat{\mathbf{e}}'_{\mathbf{i}}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{e}}'_{\mathbf{i}} . \qquad (1.8.36)$$

Aus Gln.(1.8.33) bis (1.8.36) folgt dann unter Berücksichtigung der Produktregel für die Differentiation

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{3} x'_{i} \,\hat{\mathbf{e}}'_{i} = \sum_{i=1}^{3} \frac{dx'_{i}}{dt} \,\hat{\mathbf{e}}'_{i} + \sum_{i=1}^{3} x'_{i} \frac{d\hat{\mathbf{e}}'_{i}}{dt}$$
$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \mathbf{v}' + \sum_{i=1}^{3} x'_{i} (\boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{e}}'_{i})$$
$$= \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \left(\sum_{i=1}^{3} x'_{i} \,\hat{\mathbf{e}}'_{i}\right) = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \quad .$$
(1.8.37)

Man erhält also insgesamt

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \quad . \tag{1.8.38}$$

Gl.(1.8.38) kann man sich folgendermaßen plausibel machen: wenn ein Körper in S ruht ($\mathbf{v}' = 0$), so hat er nach Gl.(1.8.32) in S die Drehgeschwindigkeit $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$. Bewegt sich der Körper in S mit $\mathbf{v}' \neq 0$, so überlagert sich diese Geschwindigkeit noch der Drehgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ und man erhält insgesamt Gl.(1.8.38).

Für die Beschleunigungen a und a' in S und S'

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{3} \frac{d^2 x_i}{dt^2} \, \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{i}} \quad \text{und} \quad \mathbf{a}' = \sum_{i=1}^{3} \frac{d^2 x_i'}{dt^2} \, \hat{\mathbf{e}}'_{\mathbf{i}}$$
(1.8.39)

erhält man nach Ausführen der zeitlichen Differentiation von Gl.(1.8.38) unter Benutzung von $\omega = const$ folgende Ausdrücke

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \right) = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{dx'_{i}}{dt} \, \hat{\mathbf{e}}'_{i} + \boldsymbol{\omega} \times \left(\sum_{i=1}^{3} x'_{i} \, \hat{\mathbf{e}}'_{i} \right) \right)$$
$$= \sum_{i=1}^{3} \frac{d^{2}x'_{i}}{dt^{2}} \, \hat{\mathbf{e}}'_{i} + \sum_{i=1}^{3} \frac{dx'_{i}}{dt} \, \frac{d\hat{\mathbf{e}}'_{i}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{dx'_{i}}{dt} \, \hat{\mathbf{e}}'_{i} \right) + \boldsymbol{\omega} \times \left(\sum_{i=1}^{3} x'_{i} \, \frac{d\hat{\mathbf{e}}'_{i}}{dt} \right)$$
$$= \mathbf{a}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \right) .$$
(1.8.40)

Man erhält also insgesamt

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \quad . \tag{1.8.41}$$

Wie beim translatorisch beschleunigten Bezugssystem setzen wir auch hier an, daß beim Wechsel vom Inertialsystem S zum Nicht-Inertialsystem S' Massen und reale Kräfte invariant sind, d.h. m = m' und $\mathbf{F} = \mathbf{F}'$ (vergleiche Gln.(1.8.15) und (1.8.16)). Mit Gl.(1.8.41) lautet dann die Übersetzung der Bewegungsgleichung $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ des Inertialsystems

$$\mathbf{F}' = m \cdot \mathbf{a}' + 2m' \,\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + m' \,\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \quad . \tag{1.8.42}$$

Definiert man im nächsten Schritt zur Masse proportionale Scheinkräfte, nämlich die Corioliskraft FC

$$\mathbf{F}_{\mathbf{C}} := -2m\,\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' = 2m\mathbf{v}' \times \boldsymbol{\omega} \tag{1.8.43}$$

und die Zentrifugalkraft $\mathbf{F}_{\mathbf{Z}}$

$$\mathbf{F}_{\mathbf{Z}} := -m\,\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = m\,\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}) \tag{1.8.44}$$

so erhält man Gl.(1.8.42) in der Form⁴⁴

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_{\mathbf{C}} + \mathbf{F}_{\mathbf{Z}} = m \mathbf{a}' \quad . \tag{1.8.45}$$

Die Beziehung (1.8.45) stellt die gesuchte Bewegungsgleichung in einem mit $\omega = const$ rotierenden Bezugssystem S' dar. Im Nicht-Inertialsystem treten in der dynamischen Grundgleichung $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ des Inertialsystems die Korrekturterme $\mathbf{F}_{\mathbf{C}}$ und $\mathbf{F}_{\mathbf{Z}}$ auf.

Die **d'Alembert**sche Trägheitskraft im System S' ist definiert als $\mathbf{F}'_{\mathbf{T}} := -m\mathbf{a}'$. Durch Multiplikation von Gl.(1.8.41) mit (-m) erhält man $-m\mathbf{a} = -m\mathbf{a}' - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$ und man erhält somit

$$\mathbf{F}_{\mathbf{T}} = \mathbf{F}_{\mathbf{T}}' + \mathbf{F}_{\mathbf{C}} + \mathbf{F}_{\mathbf{Z}} \quad . \tag{1.8.46}$$

Diese Gleichung gibt die Transformation der Trägheitskräfte an, die wegen $\mathbf{a} \neq \mathbf{a}$ nicht invariant sind. Für den Fall der unbeschleunigten Bewegung in S ($\mathbf{a}' = 0$ und damit $\mathbf{F}'_{\mathbf{T}} = 0$) haben die Scheinkräfte $\mathbf{F}_{\mathbf{C}}$ und $\mathbf{F}_{\mathbf{Z}}$ im Inertialsystem S die Bedeutung einer Trägheitskraft: $\mathbf{F}_{\mathbf{T}} = \mathbf{F}_{\mathbf{C}} + \mathbf{F}_{\mathbf{Z}}$.

Veranschaulichung der Corioliskraft am Beispiel einer rotierenden Scheibe:

Anhand von Abb. 1.67a sollen die Coriolis- und die Zenrifugalkraft auf einer rotierenden Scheibe veranschaulicht werden. Die Corioliskraft tritt nur dann auf, wenn sich ein Körper im System *S'* mit endlicher Geschwindigkeit v' bewegt und steht sowohl senkrecht auf v' und der Drehachse ω . In unserem Beispiel soll $\omega \parallel \hat{z}$ (bzw. \hat{e}_3) sein und die Koordinatenachsen \hat{z} und \hat{z}' sollen zusammenfallen. Die Corioliskraft liegt dann in der x'y'-Ebene. Für $\omega = \omega \hat{z}$ mit $\omega > 0$ (Drehung gegen den Uhrzeigersinn) wird ein Körper der sich auf der Scheibe bewegt, von der Corioliskraft immer nach "rechts" abgelenkt (bei einer Drehung gegen den Uhrzeigersinn immer nach "links"). Die Begriffe rechts und links gelten dabei für einen Beobachter, der auf der Scheibe steht. Da v' $\perp \omega$, ergibt sich der Betrag der Corioliskraft zu $F_C = 2mv'\omega$, wie er schon oben anhand des einfachen Beispiels mit dem auf einem rotierenden Papier nach außen geführten Bleistifts abgeleitet wurde.

⁴⁴In den Gleichungen (1.8.43) bis (1.8.45) wurden überflüssige Strichindizes nicht mitgeführt.



Abbildung 1.67: (a) Corioliskraft $\mathbf{F}_{\mathbf{C}}$ und Zenrifugalkraft $\mathbf{F}_{\mathbf{Z}}$ auf einer rotierenden Scheibe. (b) Zerlegung des Ortsvektors **r** in eine Komponente parallel und senkrecht zur Winkelgeschwindigkeit. (c) Ein im Inertialsystem *S* ruhender Massenpunkt wird vom Nicht-Inertialsystem *S* aus betrachtet.

Veranschaulichung der Zentrifugalkraft am Beispiel einer rotierenden Scheibe:

Zur Diskussion der Zentrifugalkraft $\mathbf{F}_{\mathbf{Z}}$ betrachten wir Abb. 1.67b. Der Ortsvektor \mathbf{r} läßt sich immer in eine Komponente \mathbf{r}_{\parallel} parallel und \mathbf{r}_{\perp} senkrecht zur Drehachse zerlegen. Da $\mathbf{r}_{\parallel} \times \boldsymbol{\omega}$ verschwindet, vereinfacht sich im Ausdruck für die Zentrifugalkraft der Term $(\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega})$ zu $(\mathbf{r}_{\perp} \times \boldsymbol{\omega})$ mit dem Betrag $|\mathbf{r}_{\perp} \times \boldsymbol{\omega}| = r_{\perp} \boldsymbol{\omega}$. Da ferner $(\mathbf{r}_{\perp} \times \boldsymbol{\omega}) \perp \boldsymbol{\omega}$, wird $|\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega})| = \omega^2 r_{\perp}$. Durch wiederholte Anwendung der Rechte-Hand-Regel überzeugt man sich, daß die Richtungen der Vektoren $\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega})$ und \mathbf{r}_{\perp} identisch sind. Insgesamt erhält man somit

$$\mathbf{F}_{\mathbf{Z}} = m\omega^2 \mathbf{r}_{\perp} \quad . \tag{1.8.47}$$

Die Zentrifugalkraft zeigt deshalb wie in Abb. 1.67a gezeigt senkrecht von der Drehachse weg radial nach außen. Im Unterschied zur Corioliskraft ist die Zentrifugalkraft auch für einen im rotierenden System S' ruhenden Körper wirksam. In der Tat bewegt sich der Körper vom Inertialsystem S aus gesehen dann gleichförmig auf einer Kreisbahn. Hierzu muß eine reale Zentripetalkraft aufgebracht werden. Der Beobachter in S' interpretiert, daß die reale Kraft von einer Scheinkraft, der Zentrifugalkraft, zu Null kompensiert werden muß, denn nur bei verschwindender Kraft wird für ihn a' = 0 verständlich. Es ist instruktiv, einen in S ruhenden Körper (v = 0) vom Nicht-Inertialsystem S' aus zu betrachten (siehe Abb. 1.67c). Im System S' bewegt sich der Körper gleichförmig auf einer Kreisbahn mit einer Geschwindigkeit v' = $-\omega \times r$. Die zugehörige Normalbeschleunigung ist betracsmäßin $a' = w'^2/r$ und auf das Drehzentrum 0 gerichtet also $a' = (-w'^2/r)\hat{r}$. Da

ist betragsmäßig $a' = v'^2/r$ und auf das Drehzentrum 0 gerichtet, also $\mathbf{a}' = (-v'^2/r) \hat{\mathbf{r}}$. Da $\omega \perp \mathbf{r}$, ist $v' = \omega r$ und daher $\mathbf{a}' = -\omega^2 r \hat{\mathbf{r}} = -\omega^2 \mathbf{r}$. Man kann leicht nachprüfen, daß sich das gleiche Ergebnis aus der Bewegungsgleichung in *S'* ergibt.

Die Erde als rotierendes Bezugssystem

Die Erde ist das naheliegendste Beispiel für ein rotierendes Bezugssystem. In diesem Abschnitt sollen Effekte diskutiert werden, die insbesondere durch die Corioliskraft in einem Bezugssystem hervorferufen

werden, das an der Erdoberfläche verankert ist. Die Auswirkungen der Corioliskraft sind dabei ein von astronomischen Beobachtungen unabhängiger Beweis für die Drehung der Erde um ihre eigene Achse.



Abbildung 1.68: Zur Bahnablenkung bei der Bewegung von Körpern auf der rotierenden Erde.

In Abb. 1.68 ist die Erde mit ihrer vom Süd- zum Nordpol gerichteten Drehachse dargestellt. Die Erde dreht sich von West nach Ost. Im Laufe von $T = 24 \text{ h} = 8,64 \times 10^4 \text{s}$ erscheint die "mittlere" Sonne von der Erde aus in derselben Position (mittlerer Sonnentag). Die daraus berechnete Winkelgeschwindigkeit $\omega = 2\pi/T$ ist allerdings nur ein Näherungswert. Die wahre Winkelgeschwindigkeit muß auf das Inertialsystem des Fixsternhimmels bezogen werden. Es interessiert also die Zeit T^* , die verstreicht, bis die Erde bezüglich des Fixsternhimmels wieder dieselbe Drehposition einnimmt ("mittlerer Sterntag"). Da die Erde im Laufe eines Jahres mit demselben Drehsinn wie ihre Eigenrotation einmal um die Sonne läuft, hat ein Jahr 365,25 Sonnentage und 366,25 Sterntage. Die Dauer eines mittleren Sterntages ist deshalb etwas kürzer als die eines mittleren Sonnentages und beträgt

$$T^{\star} = \frac{365.25}{366.25} T = 8,616 \times 10^4 \text{ s}$$
 (1.8.48)

Damit erhält man die Winkelgeschwindigkeit der Erde zu

$$\omega = \frac{2\pi}{T^*} = 7,292 \times 10^{-5} \text{ s} . \qquad (1.8.49)$$

Wie in Abb. 1.68 gezeigt ist, steht an den Polen die Drehachse der Erde senkrecht zur Horizontalebene. Wegen $\mathbf{F}_{\mathbf{C}} = 2m\mathbf{v}' \times \boldsymbol{\omega}$ führt daher nur eine Horizontalkomponente $\mathbf{v}_{\mathbf{h}} \neq 0$ der Geschwindigkeit zu einer endlichen Corioliskraft. Am Nordpol liefert $\mathbf{F}_{\mathbf{C}}$ eine Rechtsabweichung der Bahnkurve, am Südpol dagegen eine Linksabweichung.⁴⁵ Vom Inertialsystem des Fixsternhimmels aus betrachtet ist die Bahnablenkung trivial: die Erde dreht sich unter der Bahn weg.

Ein bekanntes Experiment dazu ist der *Foucaultsche Pendelversuch*. Die im Inertialsystem invariante Schwingungsebene eines mathematischen Pendels dreht sich am Pol für einen irdischen Beobachter innerhalb eines Sterntages um exakt den Winkel $\Delta \alpha = 2\pi$ (siehe hierzu Abb. 1.69), also in guter Näherung

⁴⁵Man beachte hierbei, daß am Südpol der Beobachter mit den Beinen auf der Horizontalebene steht und daher in Abb. 1.68 "kopfunter" erscheint.



Abbildung 1.69: (a) Das Foucaultsche Pendel. (b) Zur Bahnablenkung beim Foucaultschen Pendel. (c) Zur Komponentenzerlegung der Winkelgeschwindigkeit der Erde in eine Vertikalkomponente $\omega_{\mathbf{k}}$ und eine Horizontalkomponente $\omega_{\mathbf{h}}$.

innerhalb von 24 h um 360° bzw. in 1 h um 15°. In der Zeit Δt ist der Drehwinkel $\Delta \alpha = \omega \Delta t$. Am Äquator ist die Situation anders. Hier liegt ω parallel zur Horizontalebene und bei einer Bewegung des Körpers in der Horizontalebene mit der Geschwindigkeit \mathbf{v}_h trägt nur die zu $\boldsymbol{\omega}$ senkrechte Komponente längs des Äquators (d.h. längs des Breitengrades $\varphi = 0$) zur Corioliskraft $\mathbf{F}_{\mathbf{C}} = 2m\mathbf{v}' \times \boldsymbol{\omega}$ bei. Für eine Bewegung von Ost nach West bzw. West nach Ost wird dadurch der Körper schwerer bzw. leichter, d.h. die effektive Schwerkraft wird größer bzw. kleiner.

Der Foucaultsche Pendelversuch:

Die Anregung für seinen Pendelversuch erhielt Léon Foucault durch einen in eine schnell rotierende Drehbank eingespannten Stahlstab. Versetzt er diesen in Schingungen, so stellte er fest, daß die Schwingungsebene nicht mit dem Stab mitrotierte. Foucault erkannte, daß der vibrierende Stab und die rotierende Klemme der Drehbank einem Pendel und der rotierenden Erde entsprechen. Im Keller seines Hauses konstruierte er zunächst ein Pendel mit einem 5 kg schweren Messinggewicht an einer 2 m langen Schnur. Beim ersten Versuch am 3. Januar 1851 riß der Faden. Doch 5 Tage später hatte Foucault Erfolg. Die Schwingungsebene des Pendels drehte sich.

Auf Einladung Aragos installierte Foucault am Pariser Observatorium nun ein 11 m langes Pendel. Mit Unterstützung des Präsidenten der Republik, Louis-Napoléon Bonaparte wurde im Frühjahr 1851 für eine spektakuläre öffentliche Demonstration ein noch größeres Pendel (28 kg Gewicht an einem 67 m langen Stahlseil) im Pariser Panthéon installiert. Die Verlagerung der Schwingungsebene wurde durch einen Stift an der Unterseite des Gewichts markiert, der an den Umkehrpunkten einen feuchten Sandwall durchpflügte.

Das Pendel muß äußerst sorgfältig konstruiert und in Schwingung versetzt werden, da es sonst eine Rosettenbahn beschreibt. Man lenkt dazu das Pendel mit einem dünnen Faden seitlich aus und läßt es in dieser Position vollkommen zur Ruhe kommen. Dann wird der Faden vorsichtig mit einer Flamme durchtrennt.

Der Foucaultsche Pendelversuch im Kölner Dom:

Der Pendelversuch wurde im Jahr 1852 von Kölner Gymnasiallehrer Prof. Caspar Garthe im Kölner Dom wiederholt. Er benutzte eine 34 Pfund (17 kg) schwere Kugel, die in der Kuppel des Doms an einem 145 rheinische Fuß langen Eisendraht (Durchmesser 0.7 mm) aufgehängt war. Im Hörsaal I der Physikalischen Institute befindet sich ein Foucaultsches Pendel mit einer 35 kg schweren Stahlkugel an einem 8 m langen Stahlseil. Die Schwingungsamplitude dieses Pendels wird über einen Wirbelstromantrieb konstant gehalten.

Der Foucaultsche Pendelversuch – Zeitdauer für vollständige Drehung der Schwingungsebene:

Die Winkelgeschwindigkeit ω läßt sich in Komponenten parallel zu den Koordinatenachsen zerlegen: $\omega = (0, \omega \sin \varphi, \omega \cos \varphi)$ (siehe hierzu Abb. 1.69c). Auf einen Massenpunkt, der sich parallel zur Erdoberfläche ($v_y = 0$) bewegt, wirkt dann die Corioliskraft

$$\mathbf{F}_{\mathbf{C}} = 2m \cdot \left(-\frac{dz}{dt} \omega \sin \varphi, -\frac{dx}{dt} \omega \cos \varphi, \frac{dx}{dt} \omega \sin \varphi \right) \quad . \tag{1.8.50}$$

Interessiert man sich nur für die Kraft in der *xy*-Ebene (Horizontalebene, die anderen Komponenten werden durch Zwangskräfte kompensiert), dann erhält man

$$|\mathbf{F}_{\mathbf{C},\mathbf{hor}}| = 2m \cdot \omega \cdot \sin \varphi \cdot \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = 2m \cdot \omega \cdot v \cdot \sin \varphi \quad .$$
(1.8.51)

Entsprechend benötigt das Pendel für eine vollständige Drehung der Schwingungsebene die Zeit

$$T_{\varphi} = \frac{2\pi}{\omega_{\varphi}} = \frac{2\pi}{\omega \sin \varphi} . \qquad (1.8.52)$$

Für Paris ($\varphi = 48, 5^{\circ}$) erhält man damit $T_{\varphi} \simeq 33$ h. Für Köln ($\varphi = 50^{\circ}, 55', 21'$) ist diese Zeit sehr ähnlich. Man erwartet eine Drehung der Schwingungsebene von etwa 11° pro Stunde.

Corioliskraft beim freien Fall:

Im windgeschützten Innern eines hohen Turmes fällt ein Körper nicht entlang eines frei hängenden Lots, denn die Turmspitze hat infolge der größeren Entfernung zum Erdmittelpunkt eine größere Umlaufgeschwindigkeit. Der fallende Körper behält diese wegen seiner Trägheit bei. Er erreicht den Boden deshalb nicht am Fußpunkt des Lots, sondern ein Stück weiter östlich. Mit der Komponentenzerlegung aus Abb. 1.69 und $\mathbf{v} = (0, -v_y, 0)$ erhält man die Corioliskraft

$$\mathbf{F}_{\mathbf{C}} = -2m(\omega \cdot v_y \cdot \sin\varphi, 0, 0) \quad . \tag{1.8.53}$$

Das heißt, man erhält nur eine Corioliskraft in *x*-Richtung. Der Effekt ist am Äquator am größten ($\varphi = 0, \cos \varphi = 1$) und verschwindet an den Polen ($\varphi = \pi/2, \cos \varphi = 0$). Ein ähnliches Phänomen wird beim senkrechten Wurf beobachtet.



Abbildung 1.70: Zur Bildung eines Zyklon-Antizyklon-Paares durch die Corioliskraft.

Corioliskraft - Luft- und Wasserwirbel:

Der Einfluß der Corioliskraft macht sich auf der Nordhalbkugel (Südhalbkugel) durch folgende Phänomene bemerkbar: Meeres- und Luftströmungen werden nach rechts (links) umgelenkt (z.B. Golfstrom, Passatwinde). Ferner strömt Luft aus einem Hochdruckgebiet nicht radial aus, sondern spiralförmig und zwar auf der Nordhalbkugel im (auf der Südhalbkugel gegen den) Uhrzeigersinn. Aufgrund der Corioliskraft wird der rechte (auf der Südhalbkugel der linke) Schienenstrang des Eisenbahnnetzes stärker abgenutzt. Ein einfaches Experiment zum spiralförmigen Ein- und Ausströmen von Wasser oder Luft ist in Abb. 1.70 gezeigt. Der Wasserspiegel ist zunächst in beiden Behältern unterschied-

lich hoch. Der Abfluß ist verschlossen. Nachdem in beiden Behältern das Wasser die Winkelgeschwindigkeit ω des Experimentiertisches angenommen hat, entfernt man den Abflußstopfen. Es entstehen in beiden Behältern entgegengesetzt drehende Wirbel (Bildung von Zyklon-Antizyklon-Paar).

1.8.3 Moderne Theorie der Gravitation

Gravitation und Relativität

Es soll in diesem Unterabschnitt kurz auf die **Einstein**sche Abänderung des **Newton**schen Gravitationsgesetzes hingewiesen werden, ohne auf die Details der speziellen oder allgemeinen Relativitätstheorie einzugehen. Es wurde durch **Einstein** abgeändert, um die Relativitätstheorie zu berücksichtigen.

Nach **Newton** ist der Gravitationseffekt instantan, d.h. wenn an irgendeinem Ort eine Masse bewegt wird, spürt man instantan an einem anderen Ort die geänderte Gravitationswirkung. Auf diese Weise könnten wir Signale mit unendlich hoher Geschwindigkeit übertragen, da bei einer Bewegung von Masse 1 eine weit entfernte Masse 2 die Änderung der Gravitationskraft durch Änderung des Abstandes instantan spüren würde. **Einstein** dagegen argumentierte, daß wir keine Signale mit einer Geschwindigkeit größer als die Lichtgeschwindigkeit übermitteln können. Also kann das Gravitationsgesetz nicht richtig sein. Durch eine Korrektur zur Berücksichtigung einer endlichen Verzögerung erhält man ein neues, das **Einstein**sche Gravitationsgesetz.

In Abschnitt 1.8.1 wurde bereits darauf hingewiesen, daß die **Newton**schen Gesetze invariant unter einer **Lorentz**transformation werden, wenn man die Masse m in den **Newton**schen Gleichungen durch $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ ersetzt. Man kann für $v \ll c$ die Wurzel in eine Potenzreihe entwickeln und erhält

$$\frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \dots \right) .$$
(1.8.54)

Man sieht, daß diese Reihe für $v \ll c$ schnell konvergiert und man die höheren Glieder vernachlässigen kann. Man erhält somit

$$m \simeq m_0 + \frac{1}{2}m_0 v^2 \left(\frac{1}{c^2}\right)$$
 (1.8.55)

Da $\frac{1}{2}m_0v^2$ die kinetische Energie im altmodischen Newtonschen Sinn ist, kann man sagen, daß die Massenzunahme des Gesamtkörpers gleich der Zunahme der kinetischen Energie dividiert durch \hat{c} ist.⁴⁶

⁴⁶Eine genaue Definition der kinetischen Energie erfolgt in Abschnitt 1.9.

Diese Beobachtung führte **Einstein** zu der Vermutung, daß die Masse eines Körpers einfacher als durch Gl.(1.8.10) ausgedrückt werden kann, wenn man sagt, daß die Masse m gleich dem Gesamtenergieinhalt des Körpers dividiert durch c^2 ist (Äquivalenz von Masse und Energie: $E = mc^2$). Multipliziert man Gl.(1.8.55) mit c^2 so erhält man

$$mc^2 = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \dots (1.8.56)$$

Hierbei stellt die linke Seite der Gleichung die Gesamtenergie eines Körpers dar und man erkennt als zweites Glied auf der rechten Seite die kinetische Energie. **Einstein** interpretierte das große konstante Glied m_0c^2 als einen Teil der Gesamtenergie des Körpers, als eine innere Energie, bekannt als die *Ruheenergie*.

Als Konsequenz der **Einstein**schen Annahme, daß die Energie eines Körpers immer gleich mc^2 ist, ergibt sich, wie in folgendem kurz gezeigt werden soll, direkt Gl.(1.8.10), die ad hoc angenommen wurde, um zu erreichen, daß bei einer **Lorentz**transformation die **Newton**schen Gesetze unverändert bleiben. Wir werden in Abschnitt 1.9 sehen, daß die zeitliche Änderung der Energie, dE/dt, gleich der Kraft mal der Geschwindigkeit $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ ist. Mit F = d(mv)/dt erhält man dann

$$\frac{d(mc^2)}{dt} = \mathbf{v} \cdot \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} \quad . \tag{1.8.57}$$

Durch Umformen erhält man

$$c^2 \frac{d(m^2)}{dt} = \frac{d(m^2 v^2)}{dt} . (1.8.58)$$

Da die Ableitungen zweier Größen genau dann gleich sind, wenn sich die Größen selbst nur um eine Konstante C unterscheiden, erhält man

$$m^2 c^2 = m^2 v^2 + C {.} {(1.8.59)}$$

Da Gleichung (1.8.59) auch für v = 0 gelten muß, folgt $m_0^2 c^2 = 0 + C$ oder $C = m_0^2 c^2$ und man erhält

$$m^2 c^2 = m^2 v^2 + m_0^2 c^2 . (1.8.60)$$

Nach Division durch c^2 und erneutem Umformen erhält man schließlich

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} . (1.8.61)$$

Dies ist exakt Gl.(1.8.10), die sich also aus der von **Einstein** postulierten Äquivalenz von Masse und Energie ableiten läßt.



Abbildung 1.71: Zur Ablenkung von Lichtstrahlen durch große Massen.

Die in unserem Alltagsleben auftretenden Energieänderungen resultieren allerdings in extrem kleinen Massenänderungen. Selbst die bei einer Atombombenexplosion frei werdende Energie entspricht gemäß der Beziehung $\Delta E = \Delta (mc^2)$ nur einer Massenänderung im Gramm-Bereich. Die Theorie der Äquivalenz von Masse und Energie ist sehr schön durch Experimente verifiziert, in denen Masse völlig in Energie umgewandelt wird. Stoßen z.B. ein Elektron und ein Positron mit den Ruhemassen m_0 zusammen, so werden sie in zwei Gammaquanten zerstrahlt, die jeweils die Energie m_0c^2 besitzen.

In der **Einstein**schen Relativitätstheorie hat jedes Ding, das *Energie* besitzt, eine Masse und zwar Masse in dem Sinn, daß es der Gravitationswirkung unterliegt. Selbst Licht besitzt demnach "Masse". Wenn ein Lichtstrahl deshalb eine große Masse wie z.B. unsere Sonne passiert, so erfährt er durch diese eine Anziehung. Das Licht wandert also nicht geradlinig, sondern es wird abgelenkt. Zum Beispiel erscheinen bei einer Sonnenfinsternis die hinter der Sonne am Fixsternhimmel stehenden Sterne durch die Ablenkung der die Sonne passierenden Lichtstrahlen etwas verschoben zu den Positionen, die sie besäßen, wenn die Sonne nicht da wäre (siehe Abb.1.71). Dies wurde in der Tat beobachtet. Der gravitative Effekt auf Lichtquanten kann auch beim **Mößbauer**-Effekt im Schwerefeld der Erde beobachtet werden. Am spektakulärsten tritt der gravitative Effekt auf Lichtquanten in der Nähe von sogenannten *Schwarzen Löchern* zu Tage.⁴⁷ Die Schwerkraft $\mathbf{F}_{\mathbf{G}}$ ist hier so groß, daß Licht im Schwerefeld des Schwarzen Loches gefangen bleibt und dieses für uns unsichtbar ("schwarz") bleibt.

Einstein hat auch aus der Äquivalenz von träger und schwerer Masse (Äquivalenzprinzip, 1911) weitreichende Folgerungen gezogen. Wegen $m_s = m_t$ ist der Aufenthalt in einem Gravitationsfeld identisch mit dem in einem beschleunigten Bezugssystem, d.h. die Gravitationskraft ist nicht von einer Trägheitskraft unterscheidbar. Zum Beispiel verspürt eine Person in einem nach oben beschleunigten Fahrstuhl eine zusätzlich Kraft, die sie auf den Boden drückt. Die Person kann aber, wenn sie nichts von der Außenwelt weiß, nicht unterscheiden, ob diese zusätzliche Kraft aus einer Beschleunigung oder einer geänderten Schwerkraft resultiert. **Einstein** ging schließlich noch einen Schritt weiter und hat postuliert, daß die Graviationskraft eine Trägheitskraft ist, die wir spüren, da wir das falsche Bezugssystem benutzen. Das richtige Bezugssystem wäre demnach ein gekrümmter dreidimensionaler Raum,⁴⁸ der nur in vier Dimensionen darstellbar ist (sogenanntes vierdimensionales Raum-Zeit-Kontinuum).

⁴⁷Schwarze Löcher besitzen einen sehr kleinen Radius und eine enorme Dichte ($\rho \sim 10^{23} \text{kg/m}^3$). Die Masse unserer Sonne kann bei dieser Dichte in einer Kugel mit einem Radius von nur $R \sim 100 \text{ m}$ untergebracht werden.

⁴⁸Die Krümmung wird durch Massen verursacht.

1.9 Die Energie

In der Natur treten bestimmte physikalische Größen auf, die bei allen Zustandsänderungen erhalten bleiben, d.h. ihr Wert, egal ob es sich um einen Skalar oder Vektor handelt, ändert sich als Funktion der Zeit nicht. Größen, für die derartige *Erhaltungssätze* gelten, sind also zeitlich konstant und werden als *Erhaltungsgrößen* bezeichnet. Allein die Tatsache, daß es Erhaltungsgrößen gibt, ist schon interessant. Man muß also versuchen zu klären, warum und unter welchen Voraussetzungen eine physikalische Größe zu einer Erhaltungsgröße wird. Zum anderen sind Erhaltungsgrößen oft die natürlichen Variablen eines Problems, die eine Interpretation von physikalischen Vorgängen einfacher machen. Bei der Anwendung von Erhaltungssätzen auf Bewegungsabläufe (diese können wir jetzt mit Hilfe der **Newton**schen Axiome berechnen) gewinnt man ferner Aussagen, die unabhängig von den im einzelnen wirkenden Kräften sind, d.h. die Kräfte brauchen gar nicht bekannt sein. Wir werden insgesamt sehen, daß man mit Hilfe von Erhaltungsgrößen Bewegungsabläufe häufig viel einfacher beschreiben kann.

In diesem Abschnitt soll als erste Erhaltungsgröße die *Energie* eingeführt werden. In den darauf folgenden Abschnitten werden dann *Impuls* und *Drehimpuls* als weitere Erhaltungsgrößen diskutiert.

1.9.1 Arbeit und Leistung

Um zu dem Energiebegriff zu gelangen, definieren wir zunächst die Arbeit. Aus unserer Alltagserfahrung wissen wir, daß mechanische Arbeit proportional zu Kraft und Weg ist.⁴⁹ Wird ein Körper unter der Wirkung einer Kraft F längs des Weges s verschoben, so wird hierbei die Arbeit W ("W" vom Angelsächsischen "work")

$$W := F s \tag{1.9.1}$$

Arbeit := Kraft · Weg

verrichtet. Diese Definition gilt allerdings nur dann, wenn (i) die Kraft längs des Weges konstant ist und (ii) die Kraft \mathbf{F} und die Verschiebung s gleichgerichtet sind. Wie Abb. 1.72 zeigt, müssen aber \mathbf{F} und s nicht unbedingt parallel sein. Mit dem Winkel α zwischen Kraft \mathbf{F} und der Verschiebung s definiert man die längs des Weges verrichtete Arbeit W zu

$$W := |\mathbf{F}||\mathbf{s}| \cos \alpha \quad . \tag{1.9.2}$$

Zerlegt man die Kraft, wie in Abb.1.72b gezeigt, in eine Normalkomponente $\mathbf{F}_{\mathbf{n}}$ senkrecht zu s und eine Tangentialkomponente $\mathbf{F}_{\mathbf{t}}$ parallel zu s, so gilt mit dem Einheitsvektor $\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{s}/|\mathbf{s}|$ in s-Richtung $\mathbf{F}_{\mathbf{t}} = F_t \hat{\mathbf{s}}$ mit $F_t = F \cos \alpha$. Für die Arbeit folgt daher

$$W = F_t s = F \cos \alpha s , \qquad (1.9.3)$$

d.h. nur die zur Bewegungsrichtung tangentiale Kraftkomponente ist maßgebend für die geleistete Arbeit. Insbesondere erhält man

⁴⁹Diese Erfahrung macht man z.B. beim Heben eines Gewichts oder beim Ziehen eines Wagens.



Abbildung 1.72: (a) Zur Definition der Arbeit W, die eine konstante Kraft F längs des geradlinigen Wegstückes s verrichtet. (b) Zerlegung der Kraft in eine Komponente F_t tangential und eine Komponente F_n normal zum Wegstück s. Die Normalkomponente wird üblicherweise durch eine Zwangskraft F_Z kompensiert. (c) Kräftezerlegung beim Ziehen eines Körpers über eine horizontale Unterlage. Die Zwangskraft der Unterlage kompensiert die verbleibende Normalkomponente $F_n - mg$.

W > 0	wenn ${f F}$ in gleicher Richtung wie ${f s}$	$(\cos lpha > 0)$	
W < 0	wenn ${f F}$ in Gegenrichtung zu ${f s}$	$(\cos lpha > 0)$.	(1.9.4)

Dieses Ergebnis ist einleuchtend: eine die Bewegung antreibende Kraft ($\mathbf{F} \| \mathbf{s}$) (Beispiel: anfahrende Lokomotive) verrichtet eine positive Arbeit, während eine Bremskraft ($\mathbf{F} \| - \mathbf{s}$) dagegen eine "negative" Arbeit verrichtet. Für $\mathbf{F} \perp \mathbf{s}$ ($\alpha = \pi/2$ und $\cos \alpha = 0$) wird die verrichtete Arbeit W = 0. Beispielsweise leistet die Gravitationskraft keine Arbeit bei einer Bewegung in einer Horizontalebene parallel zur Erdoberfläche und ebensowenig die Zentripetalkraft bei einer Kreisbewegung.

Die bei der Definition der Arbeit angesetzte Verknüpfung zwischen F und s tritt vielfach in der Physik auf und es ist zweckmäßig für die Produktbildung der Vektoren einen besonderen Namen, das *skalare Produkt*, und eine besondere Schreibweise

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} \tag{1.9.5}$$

einzuführen.50



Abbildung 1.73: Zur Definition der längs des Weges von 1 nach 2 verrichteten Arbeit.

⁵⁰Allgemein definiert man zu zwei Vektoren **a** und **b** das skalare Produkt $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ als $|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = ab \cos \alpha$.

Wir müssen nun den Begriff der Arbeit auf Wegelemente verallgemeinern, die nicht geradlinig verlaufen und auf Kräfte, die entlang des Weges nicht konstant sind (siehe Abb. 1.73). In diesem Fall muß man den Weg in infinitesimale Wegstücke ds unterteilen, die wiederum als geradlinig angenommen werden können und entlang derer die wirkende Kraft konstant ist. Um die gesamte Arbeit W_{21} zu erhalten, die längs des Weges zwischen zwei Punkten 1 und 2 geleistet wurde, muß über alle Beiträge dW_i auf den einzelnen Wegelementen aufsummiert werden und man erhält

$$W_{21} := dW_1 + dW_2 + dW_3 + \ldots = \mathbf{F_1} \cdot d\mathbf{s_1} + \mathbf{F_2} \cdot d\mathbf{s_2} + \mathbf{F_3} \cdot d\mathbf{s_3} + \ldots$$
(1.9.6)

bzw.

$$W_{21} := \int_{1}^{2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$
 . (1.9.7)

Man nennt ein derartiges Integral ein *Linien-* oder *Wegintegral* und entsprechend ist die Arbeit gegeben durch das Wegintegral der Kraft.⁵¹ Die Indizes bei der Arbeit W_{21} , die zwischen Anfangspunkt 1 und Endpunkt 2 verrichtet wird, sind analog zum Verschiebungsvektor $\mathbf{r}_{21} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ vom Anfangspunkt \mathbf{r}_1 zum Endpunkt \mathbf{r}_2 gewählt.

Man bezeichnet

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad (1.9.8)$$

als das "Differential" der Arbeit. Es kann wegen $d\mathbf{s} = dx\hat{\mathbf{x}} + dy\hat{\mathbf{y}} + dz\hat{\mathbf{z}}$ in Komponenten $dW = F_x dx + F_y dy + F_z dz$ zerlegt werden. Wirken gleichzeitig mehrere Kräfte $\mathbf{F_a}, \mathbf{F_b}, \dots$ so ergibt sich die geleistete Gesamtarbeit dW als Summe der Einzelarbeiten dW_a, dW_b, \dots und man erhält

$$dW = (\mathbf{F}_{\mathbf{a}} + \mathbf{F}_{\mathbf{b}} + \dots) \cdot d\mathbf{s} = \mathbf{F}_{\mathbf{a}} \cdot d\mathbf{s} + \mathbf{F}_{\mathbf{b}} \cdot d\mathbf{s} + \dots = dW_{a} + dW_{b} + \dots \quad (1.9.9)$$

Man sieht ferner aus Gl.(1.9.8), daß bei einer Umkehrung des Weges mit ds' = -ds auch die Arbeit das Vorzeichen wechselt. Entsprechend gilt für die auf dem Weg von 1 nach 2 und von 2 nach 1 geleistete Arbeit die Beziehung

$$W_{21} = -W_{12} (1.9.10)$$

Die Dimension der Arbeit ist nach obigen Gleichungen dim $W = \dim (Kraft \times Weg)$ und für die im SI-System mit Joule bezeichnete Einheit ergibt sich

$$[W] = 1 \text{ Nm} := 1 \text{ Joule} = 1 \text{ J}$$
 (1.9.11)

Für die Arbeit kommt es nur auf den Weg, aber nicht auf die Zeit an, in der der Weg durchlaufen wird, d.h. bei gleicher Kraft und gleichem Weg kann Arbeit in unterschiedlichen Zeiten verrichtet werden. Umgangssprachlich sagt man, es liege eine hohe Leistung vor, wenn Arbeit in kurzer Zeit verrichtet wird. In Anlehnung daran führt man in der Physik die *Leistung P* ("P" vom Angelsächsischen "power")

⁵¹Es soll hier nicht darauf eingegangen werden, wie Linienintegrale im einzelnen auszuwerten sind. Es werden später einige einfache Beispiele vorgestellt.

$$P := \frac{dW}{dt} \quad (1.9.12)$$

ein. Die Leistung ist zeitabhängig und die Momentanleistung P(t) ist durch die im Zeitinterval dt zur Zeit t verrichtete Arbeit dividiert durch das Zeitinterval dt gegeben. Die Einheit der Leistung im SI-System heißt das *Watt*. Aus Gl.(1.9.12) folgt

$$[P] = 1 \frac{\text{Nm}}{\text{s}} = 1 \frac{\text{Joule}}{\text{s}} := 1 \text{ Watt} = 1 \text{ W} .$$
(1.9.13)

Ist die Leistung P als Funktion der Zeit bekannt, so kann die zwischen zwei Zeitpunkten t_1 und t_2 verrichtete Arbeit durch eine Zeitintegration zu

$$W = \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt \qquad (1.9.14)$$

erhalten werden. Die Kombination der Gln.(1.9.8) und (1.9.14) führt schließlich auf $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = P dt$ bzw. wegen $\mathbf{v} = d\mathbf{s}/dt$ auf

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad . \quad (1.9.15)$$

1.9.2 Kinetische und potentielle Energie – Der Energieerhaltungssatz

Kinetische Energie

Greift an einem Körper der Masse m die Kraft **F** an, so wird er beschleunigt. Die von **F** längs des Weges s geleistete Arbeit beträgt

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = m \,\mathbf{a} \cdot d\mathbf{s} = m \,\frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{s} = m \,d\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{s}}{dt}$$
$$= m \,d\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = d\left(\frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{1}{2}mv_z^2\right) = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) , \qquad (1.9.16)$$

wobei $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ das Betragsquadrat der Geschwindigkeit ist. Gl.(1.9.16) gibt Anlaß zur Definition der *kinetischen Energie* E_{kin} eines Körpers mit Masse *m*, der sich mit der Geschwindigkeit $v = |\mathbf{v}|$ bewegt:

$$E_{\rm kin} := \frac{1}{2}mv^2 . (1.9.17)$$

Mit dieser Definition ergibt sich aus Gl.(1.9.16)

$$dE_{\rm kin} = dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$
, (1.9.18)

d.h. die von der Kraft **F** an einem Körper verrichtete Arbeit dW ist gleich der Änderung der kinetischen Energie des Körpers. Für dW > 0 gilt $dE_{kin} > 0$ und umgekehrt. Da eine Zu- oder Abnahme von E_{kin} bei konstanter Masse eine Zu- oder Abnahme der Geschwindigkeit bedeutet und damit einer Beschleunigung des Körpers entspricht, nennt man dW in Gl.(1.9.18) auch die "Beschleunigungsarbeit".

Durch Summation der Beiträge dW und dE_{kin} längs des gesamten Weges vom Anfangspunkt 1 zum Endpunkt 2 folgt aus Gl.(1.9.18)

$$W_{21} = \int_{1}^{2} dW = \int_{1}^{2} dE_{\rm kin} = E_{\rm kin}(2) - E_{\rm kin}(1) := \Delta E_{\rm kin} , \qquad (1.9.19)$$

bzw.

$$W_{21} = \Delta E_{\rm kin} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$
 (1.9.20)

Die Einheit der kinetischen Energie stimmt aufgrund der Definitionsgleichung (1.9.16) mit derjenigen der Arbeit überein. Wie die Arbeit ist auch die kinetische Energie ein Skalar.

Kraftfeld und konservative Kräfte

Neben der kinetischen Energie kann man einem Körper unter bestimmten Voraussetzungen auch eine *potentielle Energie* E_{pot} zuordnen. Dazu müssen wir zuerst den Begriff des *Kraftfeldes* $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ diskutieren. Man sagt, es liege ein Kraftfeld vor, wenn ein Körper in jedem Raumpunkt r eine wohldefinierte Kraft $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ erfährt. Ein Beispiel hierfür ist das Gravitationsfeld der Erde, das für jeden massebehafteten Körper in einer wohldefinierten Gravitationskraft resultiert. Ist das Kraftfeld so beschaffen, daß die Arbeit W_{21} , die das Feld am Körper bei einer Verrückung von 1 nach 2 verrichtet, unabhängig vom gewählten Weg ist (siehe hierzu Abb. 1.74a), dann nennt man das Kraftfeld bzw. die Kraft *konservativ*.



Abbildung 1.74: (a) Wegunabhängigkeit der Arbeit in einem konservativen Kraftfeld. (b) Zur Arbeit in einem konstanten Kraftfeld.

Für ein konstantes Kraftfeld $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, wie es z.B. an einem Punkt auf der Erdoberfläche vorherrscht, läßt sich zeigen (siehe Abb. 1.74b), daß wegen $\mathbf{r_1} + \int_1^2 d\mathbf{s} = \mathbf{r_2}$

$$W_{21} = \int_{1}^{2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \mathbf{F} \cdot \int_{1}^{2} d\mathbf{s} = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r_{2}} - \mathbf{r_{1}}) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{r_{21}}$$
(1.9.21)

Ein allgemeineres Kriterium für die Wegunabhängigkeit der Arbeit und damit für ein konservatives Kraftfeld gewinnt man, wenn man auf demselben Weg I von 1 nach 2 und dann wieder von 2 zurück nach 1 läuft (siehe Abb. 1.75a). Nach Gl.(1.9.10) gilt dann

$$W_{21}^{\rm I} = -W_{12}^{\rm I} . (1.9.22)$$

Setzt man ein konservatives Kraftfeld an, so ist nach Definition für die Wege I und II

$$W_{21}^{\rm I} = W_{21}^{\rm II}$$
 bzw. $W_{12}^{\rm I} = W_{12}^{\rm II}$ (1.9.23)

Damit wird aber für den geschlossenen Weg die insgesamt vom Kraftfeld verrichtete Arbeit $W_0 = W_{21}^I + W_{12}^{II} = -W_{12}^I + W_{12}^{II} = 0$. Ebenso zeigt man umgekehrt, daß $W_{21}^I = W_{21}^{II}$ aus $W_0 = 0$ folgt. Ein konservatives Kraftfeld liegt also genau dann vor, wenn die geleistete Arbeit $W_0 = 0$ entlang eines geschlossenen Weges verschwindet.⁵²

$$W_{\rm O} = \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$$
 . (1.9.24)

Wir können also insgesamt folgendes festhalten:

Bei einem konservativen Kraftfeld verschwindet die Arbeit bei der Verschiebung eines Körpers längs eines geschlossenen Weges.

Ein Beispiel für ein eindimensionales konservatives Kraftfeld ist die Federkraft, für ein dreidimensionales das Schwerkraftfeld der Erde.



Abbildung 1.75: (a) Zur Wegunabhängigkeit des Arbeitsintegrals. (b) Definition der potentiellen Energie.

⁵²Hierbei bedeutet \oint eine Integration über einen geschlossenen Pfad.

Potentielle Energie

Wir nehmen im folgenden ein konservatives Kraftfeld als gegeben hin und nutzen die Eigenschaft dieses Feldes aus, daß die bei der Verschiebung eines Körpers verrichtete Arbeit nicht vom speziellen Weg, sondern nur vom Anfangs- und Endpunkt abhängt. Daher ist es in einem konservativen Kraftfeld möglich, jedem Raumpunkt P eine Zahl zuzuodnen, die die Arbeit W_P angibt, die von dem Kraftfeld bei einer Verrückung des Körpers vom Ausgangspunkt P in einen beliebigen aber festen Endpunkt 0 geleistet werden mußte. Diese Arbeit definiert man als die *potentielle Energie* des Körpers im Raumpunkt P. Der Raumpunkt 0 heißt Bezugspunkt der potentiellen Energie. In Formeln ergibt sich

$$E_{\text{pot}} := W_P = \int_P^0 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad . \tag{1.9.25}$$

Es ist allerdings zweckmäßiger, den festen Bezugspunkt 0 nicht als Endpunkt, sondern als Anfangspunkt zu wählen. Mit Gl.(1.9.10) und (1.9.25) ergibt sich dann

$$E_{\rm pot}(P) := W_P = -\int_0^P \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$
 . (1.9.26)

Nach dieser Gleichung verschwindet die potentielle Energie im Bezugspunkt 0: $E_{\text{pot}}(0) = 0$.

Bei einem festen Bezugspunkt 0 ist für ein vorgegebenes konservatives Kraftfeld die potentielle Energie eine wohldefinierte Funktion der Raumkoordinate r. Da die potentielle Energie also nur von der Lage im Raum abhängt, bezeichnet man sie auch als "Lageenergie", um sie von der kinetischen Energie abzuheben. *Physikalisch relevant ist nur die Differenz der potentiellen Energie zu der bei einem Bezugspunkt, da diese die meßbare Größe ist.* Deshalb kann der Bezugspunkt der potentiellen Energie willkürlich und damit zweckmäßig gewählt werden.

Die Differenz der potentiellen Energie in zwei Raumpunkten 1 und 2 läßt sich leicht berechnen (siehe Abb. 1.75b). Unter Berücksichtigung der Wegunabhängigkeit des Integrals erhält man

$$\Delta E_{\text{pot}} = E_{\text{pot}}(2) - E_{\text{pot}}(1) = -\int_{O}^{2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \int_{O}^{1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{O}^{1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} - \int_{O}^{2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$
$$= -\int_{1}^{O} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} - \int_{O}^{2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -\int_{1}^{2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -W_{21} \quad .$$
(1.9.27)

bzw. kurz

$$\Delta E_{\rm pot} = E_{\rm pot}(2) - E_{\rm pot}(1) = -W_{21} \quad . \tag{1.9.28}$$

Eine von dem Kraftfeld bei der Verschiebung von 1 nach 2 geleistete Arbeit ist damit gleich der Abnahme der potentiellen Energie des Körpers. Differentiell erhält man wegen

$$\Delta E_{\text{pot}} = -W_{21} = -\int_{1}^{2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$
(1.9.29)

schließlich

Wir verwenden den Begriff potentielle Energie nun dazu, die Arbeit anzugeben, die externe Kräfte \mathbf{F}^* aufbringen müssen, um einen Körper in einem konservativen Kraftfeld zu verrücken. Da die äußere Kraft, ohne den Körper zu beschleunigen und damit kinetische Energie einzubringen, mindestens die Kraft \mathbf{F} des gegebenen Kraftfeldes überwinden muß, ist $\mathbf{F}^* = -\mathbf{F}$ und man erhält für die Arbeit W_{21}^* des äußeren Feldes

$$W_{21}^{\star} = \int_{1}^{2} \mathbf{F}^{\star} \cdot d\mathbf{s} = -\int_{1}^{2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -W_{21}$$
(1.9.31)

und damit mit Gl.(1.9.28)

$$W_{21}^{\star} = \Delta E_{\text{pot}} \qquad (\text{für } \mathbf{F}^{\star} = -\mathbf{F}) \quad , \qquad (1.9.32)$$

bzw. differentiell

$$dW^{\star} = dE_{\text{pot}} = \mathbf{F}^{\star} \cdot d\mathbf{s} \qquad (\text{für } \mathbf{F}^{\star} = -\mathbf{F}) \quad . \tag{1.9.33}$$

Eine von außen gegen das Kraftfeld aufgebrachte Arbeit $W_{21}^* > 0$ findet sich also als Zunahme der potentiellen Energie $dE_{\text{pot}} > 0$ wieder. Die potentielle Energie ist demnach als "Arbeitsspeicher" anzusehen, die nach Wegnahme der äußeren Kompensationskraft wieder als Arbeitsleistung des Kraftfeldes verfügbar ist. Die Dimension der potentiellen Energie ist

$$[E_{\text{pot}}] = 1 \text{ Joule} = 1 \text{ J} .$$
 (1.9.34)

Energieerhaltungssatz

Mit den bis jetzt gemachten Definitionen für die kinetische und die potentielle Energie kann man den *Energieerhaltungssatz* für konservative Kräfte ableiten. Nach Gln.(1.9.18) und (1.9.30) ist

$$dW = dE_{\rm kin} = -dE_{\rm pot} \tag{1.9.35}$$

bzw.

$$dE_{\rm kin} + dE_{\rm pot} = d(E_{\rm kin} + E_{\rm pot}) = 0$$
, (1.9.36)

d.h. die zeitliche Änderung der Summe aus kinetischer und potentieller Energie verschwindet. Definiert man die *Gesamtenergie* E_{tot} eines Körpers als

$$E_{\rm tot} := E_{\rm kin} + E_{\rm pot} , \qquad (1.9.37)$$

so lautet der Energieerhaltungssatz für konservative Kräfte $dE_{tot} = 0$, bzw.⁵³

$$E_{\rm tot} = E_{\rm kin} + E_{\rm pot} = const \quad . \tag{1.9.38}$$

Der Satz von der Erhaltung der Gesamtenergie in einem konservativen Kraftfeld ist von fundamentaler Bedeutung. Das System "Körper im Kraftfeld" nennt man ein *abgeschlossenes System*, wenn für den Körper nur die systemeigenen "inneren" Kräfte des vorgegebene Kraftfeldes wirksam sind und keine zusätzlichen äußeren Kräfte F* einwirken. Für abgeschlossene Systeme besagt der Energiesatz, daß zwar potentielle in kinetische Energie und umgekehrt umgewandelt werden kann, die Summe aus beiden Energien aber konstant bleibt. Die aus dem Vorrat an potentieller Energie in kinetische Energie umgewandelte Energie ist dabei gemäß Gl.(1.9.20) und (1.9.32) gerade die verrichtete Arbeit $W_{21} = \Delta E_{kin} = -\Delta E_{pot}$. Es gibt keine experimentellen Erfahrungen, die dem Prinzip der Energie haltung widersprechen.⁵⁴

Der Energieinhalt eines Systems kann nur durch äußere Kräfte \mathbf{F}^* verändert werden, die für $\mathbf{F}^* = -\mathbf{F}$ keine Beschleunigung verursachen und somit nur die potentielle Energie ändern. In diesem allgemeineren Fall ist die Arbeit W_{21}^* der äußeren Kraft gegeben durch

$$W_{21}^{\star} = \Delta E_{\text{tot}} = \Delta E_{\text{kin}} + \Delta E_{\text{pot}} \quad . \tag{1.9.39}$$

Nichtkonservative Kräfte

Streng genommen darf es nichtkonservative Kräfte nicht geben, da alle Elementarkräfte in der Natur konservative Kräfte sind und alle Kräfte auf diese zurückgeführt werden können. Man bezeichnet trotzdem Kräfte, die die Bedingung $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$ verletzen, als nichtkonservativ. Ein Beispiel hierfür ist die Reibungskraft $\mathbf{F_R}$. Zu jedem Wegelement $d\mathbf{s}$ ist die Reibungskraft $\mathbf{F_R}$ antiparallel ausgerichtet, d.h. das Wegintegral dieser Kraft über einen geschlossenen Weg kann nicht verschwinden. Die Frage lautet jetzt: Gilt der Energiesatz auch dann, wenn solche nichtkonservative Kräfte im Spiel sind ? Zur Beantwortung dieser Frage kann geltend gemacht werden, daß die vier fundamentalen Kräfte, auf die alle anderen Kräfte in der Natur zurückgeführt werden können, alle konservativ sind.⁵⁵

Das heißt, die Gültigkeit des Energieerhaltungssatzes ist gesichert. Allerdings ist bei nichtkonservativen Kräften der Energiesatz nicht in der Form $E_{tot} = E_{kin} + E_{pot} = const$ aufrechtzuerhalten, da man für nichtkonservative Kräfte nach Durchlaufen eines geschlossenen Weges nicht mehr zum ursprünglichen Ausgangszustand zurückkehrt. So erwärmt sich z.B. bei der viskosen Reibung eines in einem zähen Medium bewegten Körpers (siehe Abb. 1.76) das Medium, d.h. nach Durchlaufen eines geschlossenen Weges hat sich der mikroskopische Bewegungszustand der Partikel des zähen Mediums geändert. Die mit der Wärmebewegung der Partikel verknüpfte Energie Q muß im Energiesatz berücksichtigt werden und man erhält

⁵³Vielfach wird die Gesamtenergie eines Körpers mit E, die kinetische Energie mit T und die potentielle Energie mit V bezeichnet, so daß sich der Energieerhaltungssatz E = T + V = const schreibt.

⁵⁴Lediglich in der Quantenmechanik kann für endliche Zeitintervalle Δt der Energiesatz um ΔE aufgrund der **Heissen**bergschen Unschärferelation $\Delta E \Delta t \geq \hbar$ verletzt sein. Im Zeitmittel gilt aber auch hier der Ernergieerhaltungssatz.

⁵⁵Da alle Kräfte auf die fundamentalen, konservativen Kräfte zurückgeführt werden können, ist es deshalb streng genommen nicht sinnvoll, von "nichtkonservativen" Kräften zu reden.



$$E_{\rm tot} = E_{\rm kin} + E_{\rm pot} + Q = const$$
. (1.9.40)

Dies ist der Energiesatz in einem abgeschlossenen System mit nichtkonservativen Kräften.⁵⁶

Kraft als Gradient der potentiellen Energie

In diesem Abschnitt soll überlegt werden, inwieweit die Vorgabe einer Kraft bzw. einer potentiellen Energie in jedem Raumpunkt $\mathbf{r} = (x, y, z)$ zwei zueinander äquivalente Beschreibungsweisen sind. In Gln.(1.9.25) und (1.9.26) wurde beschrieben, wie aus einem vorgegebenen Kraftfeld die potentielle Energie berechnet werden kann. Es soll nun überlegt werden, wie umgekehrt bei bekannter potentieller Energie $E_{\text{pot}}(x, y, z)$ das zugehörige Kraftfeld $\mathbf{F}(x, y, z)$ berechnet werden kann. Mit $dW = F_x dx + F_y dy + F_z dz$ und $dW = -dE_{\text{pot}}$ folgt

$$dE_{\rm pot} = -F_x dx - F_y dy - F_z dz . (1.9.41)$$

Andererseits läßt sich für infinitesimale Verrückungen $d\mathbf{s} = dx\mathbf{\hat{x}} + dy\mathbf{\hat{y}} + dz\mathbf{\hat{z}}$ die Änderung der potentiellen Energie $dE_{\text{pot}}(x, y, z) = E_{\text{pot}}(x + dx, y + dy, z + dz) - E_{\text{pot}}(x, y, z)$ schreiben als ⁵⁷

$$dE_{\rm pot}(x,y,z) = \frac{\partial E_{\rm pot}(x,y,z)}{\partial x} dx + \frac{\partial E_{\rm pot}(x,y,z)}{\partial y} dy + \frac{\partial E_{\rm pot}(x,y,z)}{\partial z} dz \quad . \quad (1.9.42)$$

Durch Koeffizientenvergleich der beiden letzten Gleichungen erhält man dann

$$F_x = -\frac{\partial E_{\text{pot}}(x, y, z)}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial E_{\text{pot}}(x, y, z)}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial E_{\text{pot}}(x, y, z)}{\partial z} \quad (1.9.43)$$

 $^{^{56}}$ Es sei hier angemerkt, daß die Wärmemenge Q natürlich auch als zusätzliche kinetische Energie der Partikel des zähen Mediums aufgrund der erhöhten Temperatur ausgedrückt werden kann. Dies wäre aber sehr kompliziert, da man dann den Bewegungszustand von sehr vielen Teilchen kennen müßte. Man sagt deshalb, daß die verlorene kinetische und potentielle Energie in eine Wärmeenergie übergegangen ist.

⁵⁷Die geschweiften Differentialsymbole bringen dabei zum Ausdruck, daß z.B. in $\partial E_{pot}(x, y, z)/\partial x$ bei konstant gehaltenen Variablen y und z nach x differenziert wird.

Diese drei Komponentengleichungen lassen sich in der Vektorgleichung⁵⁸

$$\mathbf{F} = -\operatorname{grad} E_{\operatorname{pot}} = \frac{\partial E_{\operatorname{pot}}}{\partial x} \mathbf{\hat{x}} + \frac{\partial E_{\operatorname{pot}}}{\partial y} \mathbf{\hat{y}} + \frac{\partial E_{\operatorname{pot}}}{\partial z} \mathbf{\hat{z}} \quad (1.9.44)$$

zusammenfassen. Da die Komponentendarstellung der Kraft $\mathbf{F} = F_x \hat{\mathbf{x}} + F_y \hat{\mathbf{y}} + F_z \hat{\mathbf{z}}$ ist, stimmen die Komponenten aus Gl.(1.9.44) mit den physikalisch hergeleiteten Gln.(1.9.43) überein, d.h. Gl.(1.9.44) ist tatsächlich eine kompakte Schreibweise der Gl.(1.9.43).

Die Gleichung $\mathbf{F} = -\operatorname{grad} E_{\operatorname{pot}}$ zeigt, daß konservative Kräfte als Gradientenfelder der potentiellen Energie darstellbar sind. Zur Charakterisierung von Wechselwirkungen zwischen Körpern ist es daher nicht notwendig, die Wechselwirkungskraft anzugeben, es genügt, allein die potentielle Energie des Zweikörper-Systems in Abhängigkeit von der relativen Lage zu kennen. Da die Kraft ein Vektor ist, die Energie dagegen ein Skalar, wird die Wechselwirkung zwischen Teilchen einfacher und durchsichtiger mit einer Wechselwirkungsenergie statt einer Wechselwirkungskraft beschrieben.

Potentialextrema und Kräftegleichgewicht

Im Kräftegleichgewicht gilt

$$\mathbf{F}_{ges} = \sum_{i} \mathbf{F}_{i} = 0 \quad . \tag{1.9.45}$$

Mit Gl.(1.9.44) folgt dann (im eindimensionalen Fall)

$$F_x = -\frac{\partial E_{\text{pot}}(x)}{\partial x} = 0 \quad , \tag{1.9.46}$$

d.h. die potentielle Energie besitzt ein Extremum. Je nach Art des Extremums spricht man von stabilem ($\partial^2 E_{\text{pot}}(x)/\partial x^2 > 0$), indifferentem ($\partial^2 E_{\text{pot}}(x)/\partial x^2 = 0$) oder labilem Gleichgewicht ($\partial^2 E_{\text{pot}}(x)/\partial x^2 < 0$). Stabiles Gleichgewicht liegt bei einem Minimum, labiles bei einem Maximum der potentiellen Energie vor.

Andere Energieformen

Wir haben bisher hauptsächlich die Energie von mechanischen Systemen (kinetische Energie und potentielle Energie in Form von Hubarbeit, Spannarbeit etc.) diskutiert. Das Konzept der potentiellen Energie kann aber auch auf elektromagnetische Kräfte, auf molekulare Kräfte, die in der Chemie eine wichtige Rolle spielen, oder auf Kernkräfte, die in der Kernphysik zentral sind, übertragen werden. So kann z.B. die potentielle Energie für die Wechselwirkung zweier Atome oder zweier Nukleonen (Proton, Neutron) in einem Atomkern als Funktion ihres Abstandes angegeben werden. Die in chemischen Bindungen oder in einem System wechselwirkender Nukleonen (Atomkern) gespeicherte potentielle Energie kann durch bestimmte Prozesse (z.B. Verbrennen von Benzin, Spalten von Atomkernen) in andere Energieformen wie z.B. kinetische Energie umgewndelt werden. Hierbei bleibt die Summe aller verschiedenen Energieformen (kinetische, chemische, nukleare, molekulare, thermische Energie) immer konstant.

⁵⁸Hierbei bedeutet das Symbol "grad" (Gradient) einen Vektoroperator, der angewandt auf eine differenzierbare skalare Funktion f(x, y, z) einen Vektor grad $f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{\hat{x}} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{\hat{y}} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{\hat{z}}$ liefert.

Es sei an dieser Stelle auch darauf hingewiesen, daß für die Energieversorgung auf unserer Erde aufgrund des Energieerhaltungssatzes im Prinzip kein Energiemangel herrscht.⁵⁹ Die durch die elektromagnetische Strahlung der Sonne auf die Erde eingestrahlte Energie entspricht der von der Erde wieder abgestrahlten Energie. Durch Veränderung unserer Atmosphäre (Treibhauseffekt) stellen wir nur das Gleichgewicht auf einem anderen Niveau ein. Das Problem ist also nicht, daß wir zu wenig Energie haben, sondern daß wir Energie nicht in der richtigen Form haben, in der wir sie benötigen. In diesem Zusammenhang kann man eine Energiewertigkeit einführen, indem man die Fähigkeit, aus Energie mechanische Arbeit zu gewinnen, berücksichtigt. Wir werden bei der Diskussion der Wärmelehre sehen, daß eine Zunahme der Entropie gleichbedeutend mit einer Abnahme der Energiewertigkeit ist. Insofern haben wir auf unserer Erde kein Energie- sondern eher ein Entropieproblem.

1.9.3 Beispiele zur potentiellen Energie und Energieerhaltungssatz

Konstantes Gravitationsfeld

Auf der Erdoberfläche kann das Gravitationsfeld in guter Näherung als konstant angenommen werden, d.h $\mathbf{F} = m \mathbf{g} = const$. Wählt man als Bezugspunkt für die potentielle Energie die Erdoberfläche, so erhält man für die potentielle Energie eines Körpers der Masse m, der sich in einer Höhe h über der Erdoberfläche befindet, die potentielle Energie

$$E_{\text{pot}}(h) = -\int_{0}^{h} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -\int_{0}^{h} F ds \cos(\mathbf{F}, d\mathbf{s})$$
$$= -\int_{0}^{h} mg \, ds(-1) = mg \int_{0}^{h} ds \quad , \qquad (1.9.47)$$

wobei $\mathbf{F} \| - d\mathbf{s}$ angenommen wurde. Man erhält also

$$E_{\rm pot}(h) = mgh$$
 . (1.9.48)

Die potentielle Energie eines der Schwerkraft ausgesetzten Körpers nimmt also linear mit der Höhe hüber der Erdoberfläche zu. Man erhält dieses Ergebnis unahängig davon, auf welchem Weg man die Höhe h über der Erdoberfläche erreicht (siehe hierzu Abb. 1.77), d.h. die potentielle Energie hängt nur von der Höhe h und nicht dem gewählten Weg ab. Man kann aus dieser potentiellen Energie nun auch wieder rückwärts die Schwerkraft berechnen. Mit h = z ist $E_{pot}(z) = mgz$ und man erhält $F_z = -dE_{pot}/dz = -mg$.

Die Beziehung (1.9.48) hat zusammen mit dem Energiesatz vielfache Anwendungsmöglichkeiten. So ist z.B. beim freien Fall eines Körpers zu Beginn v = 0 und damit $E_{kin}(1) = 0$ und $E_{tot}(1) = E_{pot}(1) = mgh$. Bei der Ankunft am Erdboden ist dagegen $E_{pot}(2) = 0$ und $E_{tot}(2) = \frac{1}{2}mv^2$. Die Energieerhaltung verlangt $E_{tot}(1) = E_{tot}(2)$ und damit $\frac{1}{2}mv^2 = mgh$ oder

$$v = \sqrt{2gh} \tag{1.9.49}$$

in Übereinstimmung mit Gl.(1.6.7). In den Zwischenlagen 0 < z < h trägt zur Gesamtenergie sowohl potentielle als auch kinetische Energie bei, aber immer so, daß $E_{tot} = const$.

⁵⁹Aufgrund des Energieerhaltungssatzes kann man Energie nicht verbrauchen, man kann sie nur aus der einen Form in eine andere Form umwandeln, wobei die Gesamtenergie erhalten bleibt.



Abbildung 1.77: Zur Unabhängigkeit der Hubarbeit vom gewählten Weg. In (a) ist $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = mgh$. In (b) ist $W = \mathbf{F}' \cdot \mathbf{s}' = (mg \sin \alpha) \cdot (h/\sin \alpha) = mgh$.



Abbildung 1.78: Potentielle und kinetische Energie beim Springen einer Stahlkugel auf einer elastischen Unterlage.

Ist die Unterlage derartig beschaffen, daß beim Auftreffen des Körpers nur konservative Kräfte wirken (hier elastische Kräfte), d.h. daß keine Energie in Form von Wärmeenergie "verloren" wird, so wird der Körper reflektiert und kann wieder bis zur vollen Höhe h aufsteigen. Dabei wird dann kinetische Energie wieder in potentielle Energie umgewandelt.⁶⁰ Eine Stahlkugel, die auf eine Stahlplatte fällt, springt periodisch zwischen den Höhen 0 und h auf und ab, wobei ständig kinetische in potentielle Energie ungewandelt wird. Es gilt hierbei $E_{\text{pot}}(h) = mgh$ und $E_{\text{kin}}(h) = 0$ sowie $E_{\text{pot}}(0) = 0$ und $E_{\text{kin}}(0) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(gt)^2 = mg(\frac{1}{2}gt^2) = mgh$. Der Verlauf der potentiellen und kinetischen Energie ist in Abb. 1.78 gezeigt.

Bei der Schwingung eines mathematischen Pendels wechselt die Energie ebenfalls ständig zwischen potentieller und kinetischer Energie hin und her. Mit einer ähnlichen Argumentation wie beim freien Fall ist bei einer Anfangsauslenkung φ_0 bzw. einer Hebung der Pendelmasse m auf die Höhe h die Geschwindigkeit beim Nulldurchgang durch $v = \sqrt{2gh}$ gegeben. Diese Beziehung gilt auch für große Auslenkungswinkel, für die die harmonische Näherung für die Schwingungsform nicht mehr gültig ist. Die Einhaltung des Energieerhaltungssatzes beim mathematischen Pendel läßt sich auch schön anhand eines Fangpendels demonstrieren, bei dem ab einem bestimmten Auslenkungswinkel die Pendellänge verkürzt wird (siehe hierzu Abb. 1.79). Die Pendelmasse steigt auch in diesem Fall exakt auf die gleich Höhe h, da die potentielle Energie nur von der Höhe h aber nicht von dem genauen Weg, wie die Masse auf diese Höhe gelangt, abhängt.

⁶⁰Streng genommen müßte man hier zeigen, daß beim Aufprall keine kinetische Energie auf die Erde übertragen wird. Wir werden in Abschnitt 1.10 sehen, daß dies in der Tat der Fall ist.



Abbildung 1.79: Zur Energieerhaltung beim Fangpendel.

Das Gravitationspotential

Ein Körper der Masse m erfährt im Abstand r von einem zweiten Körper der Masse M die Graviationskraft $\mathbf{F}_{\mathbf{G}} = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$, die auf den Körper M gerichtet ist (siehe Abb. 1.80). Die Masse M baut somit ein radiales, kugelsymmetrisches Gravitationsfeld auf. Kräfte, die alle auf einen festen Punkt hin bzw. von einem Punkt weg gerichtet sind, nennt man Zentralkräfte. Zentralkräfte, die zudem nur vom Abstand zum Zentrum, nicht aber von der Raumrichtung abhängen, sind zudem konservativ. Dies wird sofort aus Abb. 1.80a klar, wenn man die Arbeitsbeiträge entlang des Weges $A \to B \to C \to D$ betrachtet. Die Beiträge der Wegstücke von $A \to B$ und von $C \to D$ kompensieren sich gerade, da hier $\mathbf{F}_{\mathbf{G}} || d\mathbf{s}$ bzw. $\mathbf{F}_{\mathbf{G}} || - d\mathbf{s}$ und die Kraft nur von r abhängt. Die Beiträge der Wegelemente von $B \to C$ und von $D \to A$ verschwinden, da hier $\mathbf{F}_{\mathbf{G}} \perp d\mathbf{s}$. Insgesamt verschwindet also die Arbeit, $\oint \mathbf{F}_{\mathbf{G}} \cdot d\mathbf{s} = 0$, für den speziell gewählten in sich geschlossenen Weg. Da man jeden beliebigen Weg immer aus infinitesimalen radialen Wegelementen und Kreisbogenelementen aufbauen kann, folgt, daß die Arbeit für jeden geschlossenen Weg verschwindet und damit die Gravitationskraft eine konservative Kraft darstellt.



Abbildung 1.80: (a) Zentralkräfte mit Kugelsymmetrie sind konservativ. (b) Das Gravitationspotential $\Phi(r) = -GM/r$.

Die potentielle Energie der Gravitationskraft ergibt sich zu

$$E_{\text{pot}}(r) = \int_{r}^{\infty} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -\int_{r}^{\infty} G \frac{Mm}{r^{2}} \hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{s} \quad .$$
(1.9.50)

Integriert man längs eines Radiusstrahls, so ist $\hat{\mathbf{r}} || d\mathbf{s}$ und es ist $\hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{s} = dr$. Damit ergibt sich

 $E_{\rm pot}(r) = -\int_{r}^{\infty} G \frac{Mm}{r^2} dr$ (1.9.51)

bzw.

$$E_{\rm pot}(r) = -G \frac{Mm}{r}$$
 (1.9.52)

Die letzte Gleichung zeigt, daß die Wahl des Bezugspunktes zweckmäßig war, da die potentielle Energie der Gravitationswechselwirkung für zwei unendlich weit voneinander entfernte Körper verschwindet. Bewegt sich der Körper mit Masse M mit der Geschwindikeit V und der Körper mit Masse m mit Geschwindigkeit v, so ergibt sich die Gesamtenergie

$$E_{\rm tot}(r) = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r} . \qquad (1.9.53)$$

Da die potentielle Energie nach Gl.(1.9.52) linear von der Probenmasse m abhängt, führt man das *Gravitationspotential* $\Phi(r)$ in der Form

$$E_{\text{pot}}(r) := m\Phi(r) \tag{1.9.54}$$

mit

$$\Phi(r) := -G \frac{M}{r}$$
 (1.9.55)

ein. Das Potential $\Phi(r)$ hängt nur von der Masse M des Zentralkörpers und dem Abstand r eines Probekörpers ab. Der Funktionsverlauf von $\Phi(r)$ ist in Abb. 1.80b gezeigt. Die Äquipotentialflächen sind konzentrische Kugelflächen um M als Mittelpunkt.⁶¹

Die Einführung des Gravitationspotentials bringt den Vorteil, daß bei Anwesenheit mehrerer Massen M_1, M_2, \ldots das Gesamtpotential Φ in einem Raumpunkt durch die skalare Summe der Einzelpotentiale gegeben ist

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i = -\sum_{i=1}^{n} G \frac{M_i}{r_i} .$$
 (1.9.56)

Die einfache Addition der Potentiale ist hierbei eine direkte Konsequenz des in Abschnitt 1.5.1 diskutierten Superpositionsprinzips. Eine Probemasse hat in diesem Raumpunkt dann die potentielle Energie $E_{\text{pot}} = m\Phi$ und die Kraft auf die Masse ergibt sich dann aus $\mathbf{F} = -\text{grad}E_{\text{pot}}$. Auf diese Weise umgeht man die unbequeme vektorielle Addition der Einzelkräfte.

⁶¹In Abschnitt 1.5 wurde gezeigt, daß die Gravitationskraft im Innern einer Hohlkugel verschwindet. Die potentielle Energie der Gravitationskraft muß deshalb im Innern einer Hohlkugel konstant sein und beträgt $E_{pot}(r) = -\int_{R}^{\infty} G \frac{Mm}{r} dr = -G \frac{Mm}{R}$ für $r \leq R$, wobei R der Radius der Hohlkugel ist. Das Integral \int_{r}^{R} trägt aufgrund des Verschwindens der Gravitationskraft im Innern der Hohlkugel nichts bei.

Anhand von GI.(1.9.53) kann berechnet werden, mit welcher Startgeschwindigkeit ein Körper der Masse m von der Erde ($M_E = 5.98 \times 10^{24}$ kg, $R_E = 6.38 \times 10^6$ m, V = 0) aus gesehen abgeschossen werden muß, um aus dem Gravitationsfeld der Erde zu entweichen. Die Geschwindigkeit ergibt sich aus der Bedingung, daß $E_{\rm pot}(\infty) = 0$, während $E_{\rm kin}(\infty) \ge 0$ sein soll. Im Grenzfall $E_{\rm kin}(\infty) = 0$ kommt der Körper im Unendlichen gerade mit v = 0 an, seine Gesamtenergie ist dann $E_{\rm tot} = 0$. Aus dem Energieerhaltungssatz folgt dann für seine Geschwindigkeit auf der Erde

$$E_{\rm tot} = \frac{1}{2}mv^2 - G \frac{M_E m}{R_E}$$
(1.9.57)

oder

$$v = \sqrt{\frac{2GM_E}{R_E}} \quad . \tag{1.9.58}$$

Die Geschwindigkeit ist also unabhängig von der Masse m des Körpers. Mit obigen Zahlenwerten ergibt sich $v = 11.2 \times 10^3$ m/s.

Das Masse-Feder-Pendel – das harmonische Oszillatorpotential

Die Federkraft ist bei Vernachlässigung von Reibungskräften proportional zur Auslenkung: $F_x = -kx$. Diese Kraft ist konservativ. Für die Berechnung der potentiellen Energie wählt man als Bezugspunkt den unausgelenkten Zustand x = 0 (siehe Abb. 1.81a). Damit ergibt sich

$$E_{\text{pot}}(x) = \int_0^x \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^x F_x dx = \int_0^x kx \, dx = k \int_0^x x \, dx \tag{1.9.59}$$

und somit

$$E_{\rm pot}(x) = \frac{1}{2}kx^2$$
 . (1.9.60)

Die potentielle Energie wächst also quadratisch mit der Auslenkung x an. Man bezeichnet $E_{\text{pot}}(x)$ als harmonisches Oszillatorpotential, da man durch Gradientenbildung $F_x = -dE_{\text{pot}}/dx = kx$ eine harmonische Kraft erhält. Die Gleichgewichtslage x = 0 stellt, wie Abb. 1.81b zeigt, ein Extremum der potentiellen Energie ($dE_{\text{pot}}/dx = 0$) und zwar ein Minimum dar, was zu einer stabilen Gleichgewichtslage bei x = 0 führt.

Verschiebt man die Federmasse aus ihrer Gleichgewichtsposition, so setzt eine harmonische Schwingung ein, bei der ständig potentielle in kinetische Energie und umgekehrt umgewandelt wird. In den Endpunkten der Schwingung ist $E_{tot} = E_{pot}$ und $E_{kin} = 0$, während beim Nulldurchgang $E_{tot} = E_{kin}$ und $E_{pot} = 0$ ist. Durch zeitliche Ableitung der Gesamtenergie ergibt sich

$$\frac{dE_{\text{tot}}}{dt} = 0 = \frac{d\left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2\right)}{dt} = m\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + kx\frac{dx}{dt} , \qquad (1.9.61)$$

woraus für $\frac{dx}{dt} \neq 0$



Abbildung 1.81: (a) Zur potentiellen Energie einer gespannten Feder. (b) Das harmonische Oszillatorpotential einer Feder.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx (1.9.62)$$

folgt, also genau die schon in Abbschnitt 1.6 aus den **Newton**schen Bewegungsgleichungen abgeleitete Bewegungsgleichung. Dieses Beispiel macht also auch deutlich, daß die Energiebetrachtung gleichwertig zur **Newton**schen Beschreibungsweise ist.

Beispiel: Masse-Feder-Pendel mit endlicher Federmasse:

Die Anwendung des Energiesatzes führt oft zu einer einfacheren Darstellung eines Problem, wie anhand des Masse-Feder-Pendels mit endlicher Federmasse m_F gezeigt werden soll. Die Ruhelänge der Feder sei l_0 und sie habe eine Massenbelegung pro Längeneinheit von $\eta = m_F/l_0$. Mit η kann die Masse dm eines Federstücks dl durch $dm = \eta dl$ ausgedrückt werden. Bei der Auslenkung der Federmasse m um das Stück x, wird das Federelement dl im Abstand l von der Befestigung um $x_l = x \frac{l}{l_0}$ ausgelenkt. Damit erhält man für die kinetische Energie

$$E_{\rm kin} = \frac{1}{2}k\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \int_0^{l_0} \frac{1}{2}dm\left(\frac{dx_l}{dt}\right)^2 .$$
 (1.9.63)

Mit $(dx_l/dt)^2 dm = (dx/dt)^2 (l^2/l_0^2) \eta dl = (dx/dt)^2 (l^2/l_0^2) (m_F/l_0) dl$ ergibt sich

$$E_{\rm kin} = \frac{1}{2}k\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{m_f}{l_0^3}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \int_0^{l_0} l^2 dl = \frac{1}{2}k\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{m_f}{l_0^3}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \frac{1}{3}l_0^3$$
$$= \frac{1}{2}\left(m + \frac{1}{3}m_F\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 .$$
(1.9.64)

Die potentielle Energie ist nach wie vor $E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}kx^2$. Die Anwendung des Energieerhaltungssatzes liefert nach Gl.(1.9.61) die Differentialgleichung der Schwingung, die für einen harmonischen Ansatz auf die Schwingungsdauer

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m + m_F/3}{k}} . (1.9.65)$$

führt, wonach die Federmasse zu einem Drittel zur effektiv schwingenden Masse beiträgt.

1.9.4 Das Prinzip der virtuellen Arbeit

Wir haben oben gesehen, daß die Bedingung für statisches Kräftegleichgewicht sich sehr einfach als ein Minimum in der potentiellen Energie ausdrücken läßt. Das jetzt zu diskutierende *Prinzip der virtuellen Arbeit* kann als eine Verallgemeinerung der obigen Überlegungen betrachtet werden.

Wir betrachten ein System von *n* Massenpunkten mit Massen m_i , die zunächst alle frei beweglich sein sollen. Auf den *i*-ten Massenpunkt wirke die Gesamtkraft $\mathbf{F_i}$ ein, die sich aus der Summe der inneren Kräfte $\mathbf{F_{ki}}$ ($k = 1, ..., n; k \neq i$), die vom *k*-ten auf den *i*-ten Massenpunkt wirken, und der von außen an dem *i*-ten Massenpunkt angreifenden äußeren Kraft $\mathbf{F_i^*}$ zusammensetzt. Die *eingeprägte Kraft* $\mathbf{F_i}$ ist deshalb

$$\mathbf{F}_{\mathbf{i}} = \sum_{k=1; k \neq i}^{n} \mathbf{F}_{k\mathbf{i}} + \mathbf{F}_{\mathbf{i}}^{\star} . \qquad (1.9.66)$$

Das System wird genau dann im Zustand der Ruhe verharren (statisches Gleichgewicht), wenn die Kraft \mathbf{F}_i auf jeden einzelnen Massenpunkt verschwindet. Die Gleichgewichtsbedingung lautet somit

$$\mathbf{F}_{\mathbf{i}} = 0$$
 für $i = 1, \dots, n$. (1.9.67)

Um diese Gleichgewichtsbedingung in anderer Form auszudrücken, wird die *virtuelle Vertückung* δs_i eingeführt.⁶² Diese Verrückung soll einerseits so schnell erfolgen, daß die Kräfte als zeitlich konstant angenommen werden können, andererseits aber langsam genug, damit keine Trägheitskräfte geweckt werden. Mit der virtuellen Verrückung δs_i für den *i*-ten Massenpunkt ist die virtuelle Arbeit $\delta W_i = \mathbf{F}_i \cdot \delta s_i$ verbunden. Im statischen Gleichgewicht gilt wegen Gl.(1.9.67) trivialerweise

$$\delta W = \sum_{i}^{n} \delta W_{i} = \sum_{i}^{n} \mathbf{F}_{i} \cdot \delta \mathbf{s}_{i} = 0 \quad .$$
(1.9.68)

Das heißt, *im statischen Gleichgewicht verschwindet die virtuelle Arbeit der eingeprägten Kräfte*. In Gl.(1.9.68) sind alle Verrückungen δs_i unabhängig voneinander.

Sind die Kräfte \mathbf{F}_{i} alle aus einem Potential ableitbar und bezeichnet man die gesamte potentielle Energie mit E_{pot} , so wird mit Gl.(1.9.30) aus Gl.(1.9.68)

$$\delta W = \sum_{i}^{n} \mathbf{F}_{i} \cdot \delta \mathbf{s}_{i} = -\sum_{i}^{n} \delta E_{\text{pot}}, i = -\delta E_{\text{pot}} = 0 \quad . \quad (1.9.69)$$

Das heißt, *im statischen Gleichgewicht eines Systems von freien Massenpunkten nimmt die potentielle Energie ein Minimum ein.* Dies wurde oben anhand des Masse-Feder-Pendels bereits festgestellt.

Der wirkliche Nutzen der virtuellen Arbeit tritt aber erst dann zu Tage, wenn man die Voraussetzung fallen läßt, daß sich die Massenpunkte frei bewegen können sollen. Wir wollen jetzt annehmen, daß die

 $^{^{62}}$ In folgendem wird zur Unterscheidung vom Symbol "*d*" bei den wirklichen Größen für die virtuellen Größen das Symbol " δ " verwendet.

Virtuelle Arbeit: Beispiel Masse-Feder-Pendel:

Ein Masse-Feder-Pendel habe die Gleichgewichtsposition x und es greife an der Masse m eine vorgegebene äußere Kraft \mathbf{F}^* an. Mit der Federkraft \mathbf{F} und der virtuellen Verrückung $\delta \mathbf{s} = \delta x \hat{\mathbf{x}}$ wird aus Gl.(1.9.68)

$$\delta W = \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{s} + \mathbf{F}^* \cdot \delta \mathbf{s} = F_x \delta x + F_x^* \delta x = 0 \quad . \tag{1.9.70}$$

Mit der potentiellen Energie $E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}kx^2$ ist $F_x\delta x = -\delta E_{\text{pot}} = -kx\delta x$. Damit folgt für die Gleichgewichtslage x aus $-kx\delta x + F_x^*\delta x = 0$ die Bedingung $x = F_x^*/k$. Diese Bedingung hätte man im vorliegenden Fall, für den die Federkraft bekannt ist, viel schneller aus der Gleichgewichtsbedingung (1.9.67) für die Kräfte ableiten können. Es kommt aber in vielen Fällen vor, daß man die potentielle Energie der inneren Kräfte viel einfacher berechnen kann als die Kräfte selbst. Führt man hier äußere Kräfte \mathbf{F}^* ein, die den inneren Kräften das Gleichgewicht halten, so lassen sich diese nach dem eben beschriebenen Verfahren auffinden.

Massenpunkte gewissen Zwangskräften ausgesetzt sind, die ihre Bewegungsmöglichkeiten einschränken (z.B. Bewegung entlang von vorgeschriebener Bahn, Schiene, Unterlage, etc.). Als Zwangsbedingung kann auch ein konstanter Abstand der Massenpunkte gefordert werden oder daß Körper in einem bestimmten Volumen eingeschlossen sein sollen (Moleküle von Gasen, Flüssigkeiten). Für die Einhaltung der Zwangsbedingungen sorgen Zwangskräfte f, die von den Führungen, Wänden, Unterlagen etc. auf die Massenkörper übertragen werden. Am *i*-ten Massenpunkt greift dann zusätzlich zur inneren Kraft F_i die Zwangskraft f_i an. Im Gleichgewichtszustand muß die Vektorsumme aus F_i und f_i für jeden einzelnen Massenpunkt verschwinden, wodurch Gl.(1.9.67) zu

$$\mathbf{F}_{i} + \mathbf{f}_{i} = 0$$
 für $i = 1, ..., n$ (1.9.71)

verallgemeinert wird. Bei der praktischen Anwendung von Gl.(1.9.71) tritt die Schwierigkeit auf, daß man zur Berechnung der äußeren Kräfte, die das System von Massenpunkten ins Gleichgewicht bringen, die Zwangskräfte \mathbf{f}_i kennen muß, was bei komplizierten mechanischen Apparaturen (z.B Kurbel) nicht der Fall ist. Das Prinzip der virtuellen Arbeit bringt nun den entscheidenden Vorteil, daß es ohne Kenntnis der Zwangskräfte auskommt. Um dies zu zeigen, führt man wieder virtuelle Verrückungen $\delta \mathbf{q}$ der Massenpunkte ein, die jetzt aber mit den Zwangsbedingungen verträglich sein müssen. Wir betrachten dazu das in Abb. 1.82 gezeigt System aus zwei Massenpunkten mit Masse m_1 und m_2 , die über eine starre Stange aneinander gekoppelt sind. Die virtuellen Verrückungen $\delta \mathbf{s}_1$ und $\delta \mathbf{s}_2$ lassen sich immer als eine Translation der Stange um $\delta \mathbf{s}_1$ und eine Rotation der Stange um m_1 als Drehpunkt darstellen. Bei infinitesimal kleinen Verrückungen ist dabei die bei der Rotation erzielte Verschiebung der Masse m_2 immer senkrecht zur Stange, so daß die Verrückung $\delta \mathbf{s}_2$ als $\delta \mathbf{s}_2 = \delta \mathbf{s}_1 + \delta \mathbf{s}_n$ ausgedrückt werden kann.

Die mit den Verrückungen δs_i aus der Gleichgewichtslage heraus berechnete virtuelle Arbeit δW ist dann mit Gl.(1.9.71)

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n} \left(\mathbf{F}_{i} + \mathbf{f}_{i} \right) \cdot \delta \mathbf{s}_{i} = 0 \quad . \tag{1.9.72}$$

Man kann nun ansetzen, daß die Zwangskräfte in einem mechanischen System für sich genommen keine Arbeit verrichten können, d.h. es gilt



Abbildung 1.82: Virtuelle Verrückung zweier starr gekoppelter Massen.

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{f}_{i} \cdot \delta \mathbf{s}_{i} = 0 \quad . \tag{1.9.73}$$

Dieser Ansatz läßt sich bei einer Schienenführung z.B. damit begründen, daß die zulässigen Verrückungen nur in Richtung der Schiene (tangential) verlaufen dürfen, die von den Schienen ausgeübte Zwangskraft aber immer normal zur Schiene gerichtet ist. Somit wird das Skalarprodukt $\mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{s_i} = 0.^{63}$

Faßt man die Gleichungen (1.9.72) und (1.9.73) zusammen, so erhält man das *Prinzip der virtuellen Arbeit* in der Form

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_{i} \cdot \delta \mathbf{s}_{i} = 0 \quad . \tag{1.9.74}$$

Im Gleichgewicht verschwindet also die virtuelle Arbeit der eingeprägten Kräfte \mathbf{F}_i für Verrückungen $\delta \mathbf{s}_i$, die gemäß den Zwangsbedingungen zulässig sind. Die Zwangskräfte treten hier zwar nicht mehr auf, man muß aber berücksichtigen, daß die einzelnen Verrückungen jetzt nicht mehr unabhängig voneinander sind. Daher kann man jetzt nicht mehr auf $\mathbf{F}_i = 0$ schließen.⁶⁴

Sind die eingeprägten Kräfte alle konservativ, so wird mit der potentiellen Energie E_{pot} des Gesamtsystems wegen Gl.(1.9.30)

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_{i} \cdot \delta \mathbf{s}_{i} = -\delta E_{\text{pot}} = 0 \quad . \quad (1.9.75)$$

Im Gleichgewicht nimmt deshalb die potentielle Energie der eingeprägten Kräfte auch bei Anwesenheit von Zwangskräften ein Extremum ein, wobei allerdings das Extremum die Zwangsbedingungen als Nebenbedingungen enthalten muß.

⁶³Ein allgemeiner Beweis für die Richtigkeit dieses Ansatzes soll hier nicht geführt werden.

⁶⁴Bei der Diskussion der Gleichgewichtsbedingungen muß man sich nicht mehr um die im einzelnen auftretenden Zwangsbedingungen kümmern. Trotzdem spielen diese bei vielen mechanischen Systemen (z.B. Brückenkonstruktionen, Kran, etc.) eine wichtige Rolle und ihre Kenntnis ist bei der Konstrution notwendig. Auf **Lagrange** geht ein allgemeines Verfahren zurück, das im Anschluß an das Prinzip der virtuellen Arbeit die Bestimmung von Zwangskräften gestattet. Darauf soll aber hier nicht eingegangen werden.

Prinzip der virtuellen Arbeit: Beispiel schiefe Ebene:

Abb. 1.83a zeigt eine schiefe Ebene, auf der eine Masse m_1 reibungsfrei gleiten kann und durch eine Masse m_2 über ein Seil und eine Umlenkrolle im Gleichgewicht gehalten wird. Die eingeprägten Kräfte sind $\mathbf{F_1} = m_1 \mathbf{g}$ und $\mathbf{F_2} = m_2 \mathbf{g}$. Mit den zulässigen Verrückungen $\delta \mathbf{s_1}$ und $\delta \mathbf{s_2}$ sowie den Winkeln α und β erhält man

$$\delta W = \mathbf{F_1} \cdot \delta \mathbf{s_1} + \mathbf{F_2} \cdot \delta \mathbf{s_2} = m_1 \mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{s_1} + m_2 \mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{s_2}$$

= $m_1 g \delta s_1 \cos \alpha + m_2 g \delta s_2 \cos \pi = m_1 g \delta s_1 \sin \beta - m_2 g \delta s_2$ (1.9.76)

Wegen $\delta s_1 = \delta s_2$ folgt daher aus der Gleichgewichtsbedingung $\delta W = 0$

$$m_2 = m_1 \sin \beta$$
 (1.9.77)

Bei diesem einfachen Beispiel hätte man wohl dieses Resultat einfacher anhand einer Komponentenzerlegung der eingeprägten Kräfte erhalten. Das Beispiel zeigt aber immerhin, daß das Prinzip der virtuellen Arbeit die Ermittlung der Zwangskraft der Unterlage überflüssig macht.

Prinzip der virtuellen Arbeit: Beispiel Flaschenzug:

Abb. 1.83b zeigt einen *Flaschenzug*, bei dem ein Seil über eine lose und eine feste Rolle geführt ist. Gesucht ist die Kraft F_2 die der Last F_1 das Gleichgewicht hält. Das Prinzip der virtuellen Arbeit verlangt

$$\delta W = \mathbf{F_1} \cdot \delta \mathbf{s_1} + \mathbf{F_2} \cdot \delta \mathbf{s_2} = 0 \quad . \tag{1.9.78}$$

Bei Anhebung der losen Rolle um δs_1 gewinnt man die Seillänge $2\delta s_1$, d.h. $2\delta s_1 = \delta s_2$. Da außerdem $\mathbf{F_1} \| - \delta \mathbf{s_1}$ und $\mathbf{F_2} \| \delta \mathbf{s_2}$ folgt

$$-F_1 \delta s_1 + F_2 \delta s_2 = -F_1 \delta s_1 + F_2 2 \delta s_1 = 0$$

oder
$$F_2 = \frac{1}{2} F_1 . \qquad (1.9.79)$$

Auch hier muß man sich nicht um die Zwangskräfte kümmern.



Abbildung 1.83: (a) Gelichgewichtsbedingung bei der schiefen Ebene. (b) Gleichgewichtsbedingung beim Flaschenzug.

Zum Abschluß dieses Abschnitts soll noch darauf hingewiesen werden, daß man mit dem Prinzip der
virtuellen Arbeit auch dynamische Probleme betrachten kann. Dazu muß man ledigich mit Hilfe der **d'Alembert**schen Trägheitskraft $\mathbf{F_T} = -m\mathbf{a}$ die Newtonsche Bewegungsgleichung $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ zu $\mathbf{F} - m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{F_T} = 0$ umschreiben und damit die Dynamik formal auf ein Gleichgewichtsproblem zwischen realen und Trägheitskräften zurückführen. Macht man auch in der Dynamik den Ansatz, daß die Zwangskräfte keinen Beitrag zur virtuellen Arbeit liefern, so erhält man das d'Alembertsche Prinzip

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n} \left(\mathbf{F_i} - m_i \frac{d^2 \mathbf{r_i}}{dt^2} \right) \cdot \delta \mathbf{s_i} = 0 \quad . \quad (1.9.80)$$

In dieser Formulierung der Dynamik sind die Bewegungsgleichungen uminterpretiert worden zu einer Aussage über die virtuelle Arbeit. Vom **d'Alembert**schen Prinzip ausgehend werden die *Lagrange-Gleichungen* und die *Hamilton-Gleichungen* abgeleitet, die die Grundlage der theoretischen Mechanik bilden.⁶⁵ Der für **Newton** zentrale Begriff der Kraft tritt dabei in den Hintergrund zugunsten der Begriffe Energie, Impuls und Drehimpuls.

1.9.5 Was ist Energie ?

Wir haben soeben gelernt, daß es ein Gesetz gibt, daß alle Naturphänomene beherrscht, die bis heute bekannt sind, nämlich das Gesetz der Energieerhaltung. Es besagt, daß eine Größe, die wir Energie nennen, bei allen Vorgängen in der Natur unverändert bleibt. Im Prinzip ist dies eine sehr abstrakte Aussage, ja ein mathematisches Prinzip. Es besagt, daß eine numerische Größe existiert, die sich nicht verändert. Es ist zunächst unverständlich, daß wir eine Zahl berechnen können und, wenn wir nach einiger Zeit, in der in der Natur viel passiert ist, diese Zahl wieder berechnen, feststellen, daß diese Zahl gleich geblieben ist.

Es ist wichtig, sich klar zu machen, daß wir in der heutigen Physik nicht wissen, was Energie ist. Wir haben kein Bild davon, daß z.B. Energie in kleinen Klumpen definierter Größe vorkommt. Aber wir haben mathematische Formeln, mit denen wir eine numerische Größe berechnen können, die immer die gleiche Zahl besitzt. Insofern ist Energie eine abstrakte Sache.

Zum Anschluß soll noch ein Hinweis auf den Zusammenhang zwischen der Energieerhaltung und einer Symmetrieeigenschaft der physikalischen Gesetze gegeben werden. Es zeigt sich, daß die physikalischen Gesetze bezüglich einer Translation in der Zeit unverändert bleiben, was gleichbedeutend mit der Energieerhaltung ist. Allgemein gibt es in der Quantenmechanik für jede Symmetrieeigenschaft ein entsprechendes Erhaltungsgesetz, d.h. es gibt eine definierte Verbindung zwischen den Erhaltungsgesetzen und den Symmetrien der physikalischen Gesetze. Im Moment können wir dies natürlich nur ohne irgendeinen Versuch einer Erklärung behaupten. Eine genaue Erörterung folgt im Rahmen der Quantenmechanik.

⁶⁵Diese Gleichungen werden ausführlich in den Vorlesungen zur Theoretischen Physik diskutiert.

1.10 Der Impuls

Nach der Energie, die durch das Wegintegral der Kraft $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ gegeben ist, beschäftigen wir uns in diesem Abschnitt mit einer weiteren Größe, dem Zeitintegral der Kraft $\int \mathbf{F} dt$, für die ebenso ein Erhaltungssatz gilt und uns zum Begriff des *Impulses* führt. Die neue Größe $\int \mathbf{F} dt$ wird *Kraftstoß* genannt. Es läßt sich ein Impulserhaltungssatz formulieren, der zusammen mit dem Energieerhaltungssatz zu den Fundamentalgesetzen der Physik gehört. Wegen seiner fundamentalen Bedeutung soll der *Impulserhaltungssatz* ausgehend von unterschiedlichen Voraussetzungen bewiesen werden. Für Systeme von Massenpunkten wird der *Massenmittelpunkt* oder *Schwerpunkt* eingeführt und damit der *Schwerpunktsatz* abgeleitet, der eine Aussage über den Gesamtimpuls des Systems macht. Schließlich wird die Energieund Impulserhaltung angewendet, um die *Stoßgesetze* aufzustellen.

1.10.1 Impuls und Kraftstoß

Als Impuls p eines Körpers (Massenpunktes) mit Masse m und Geschwindigkeit v bezeichnet man den Vektor

 $\mathbf{p} := m\mathbf{v}$. (1.10.1)

Der Impuls hat also die gleiche Richtung wie die Geschwindigkeit und seine Einheit im SI-System ist

$$[p] = 1 \text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$
 (1.10.2)

Mit Hilfe des Impulses läßt sich die Newtonsche Bewegungsgleichung zu

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$
(1.10.3)

umschreiben. D.h. eine an einem Körper angreifende Kraft führt zu einer Änderung des Impulses und die Impulsänderungsgeschwindigkeit ist gleich der Kraft.⁶⁶

Die allgemeinere Formulierung (1.10.3) führt zu einem dynamischen Grundgesetz für Körper zeitlich veränderlicher Masse

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{dm}{dt}\mathbf{v} = m\mathbf{a} + \frac{dm}{dt}\mathbf{v} \quad . \quad (1.10.4)$$

Das Gesetz $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ deckt in Gl.(1.10.4) also nur den Spezialfall m = const ab.

Geschwindigkeitsabhängige, d.h. variable Massen, treten in der **Einstein**schen speziellen Relativitätstheorie auf. Nach **Einstein** ist die maximale Geschwindigkeit, mit der sich Körper bewegen können, die Lichtgeschwindigkeit c. Für Geschwindigkeiten $v \approx c$ muß deshalb die Beschleunigung a auch dann verschwinden, wenn eine Kraft $\mathbf{F} \neq 0$ in Bewegungsrichtung einwirkt. Dennoch führt die einwirkende Kraft über den Term $\frac{dm}{dt}\mathbf{v}$ zu einer Impulsänderung $d\mathbf{p}/dt$ des Körpers, die sich in einer relativistischen Massenänderung manifestiert. Für $\mathbf{F} \| \mathbf{v}$ entspricht die Vergrößerung des Impulses um $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}$ einer Massenzunahme dm/dt > 0, die sich wegen $a \approx 0$ zu $d\mathbf{p}/dt \approx \frac{dm}{dt}\mathbf{v} \approx \frac{dm}{dt}\mathbf{c}$ ergibt. Bei extrem



Abbildung 1.84: (a) Reflexion von Stahlkugeln an einer Stahlplatte. (b) Zur Veranschaulichung des Gesamtimpulses und der Gesamtkraft in einem System von Massenpunkten.

relativistischen Geschwindigkeiten $v \approx c$ kann man also in Gl.(1.10.4) den Term $m\mathbf{a}$, den wir bisher ausschließlich betrachtet haben, gegenüber $\frac{dm}{dt}\mathbf{v}$ sogar vernachlässigen.

In folgendem soll angenommen werden, daß die auftretenden Geschwindigkeiten v klein gegen die Lichtgeschwindigkeit sind und deshalb die Massen der einzelnen Körper als konstant angenommen werden können. Als Beispiel betrachten wir eine Stahlkugel der Masse m, die unter dem Winkel α relativ zur Flächennormalen $\hat{\mathbf{n}}$ mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} auf eine Stahlplatte (siehe Abb. 1.84a) aufprallt. Man beobachtet, daß die Stahlkugel in der von \mathbf{v} und $\hat{\mathbf{n}}$ aufgespannten Ebene mit dem Ausfallswinkel d und der Geschwindigkeit \mathbf{v}' reflektiert wird. Dabei gilt für die Winkel das Spiegelungsgesetz $\alpha = \alpha'$ und für die Beträge der Geschwindigkeiten v = v'. Die Kugel erfährt dann nach Abb. 1.84a eine Impulsänderung $\Delta \mathbf{p} = \mathbf{p}' - \mathbf{p} = m\mathbf{v}' - m\mathbf{v} = (m\mathbf{v}'_n + m\mathbf{v}'_t) - (m\mathbf{v}_n + m\mathbf{v}_t) = m\mathbf{v}'_n - m\mathbf{v}_n$, die normal zur Oberfläche steht und wegen der Antiparallelität von \mathbf{v}'_n und \mathbf{v}_n den Betrag $\Delta p = 2mv_n = 2mv \cos \alpha$ besitzt. Wenn nun im Zeitinterval dt genau N Kugeln auftreffen, so ist die Auftreffrate n = dN/dt und in der Zeit dtmuß der Impuls $dp = dN \cdot \Delta p = ndt \cdot 2mv \cos \alpha$ von der Stahlplatte auf die Kugeln übertragen werden. Nach Gl.(1.10.3) ist dazu die Kraft

$$F = \frac{dp}{dt} = 2nmv \cos \alpha \tag{1.10.5}$$

erforderlich, mit der die Platte in Richtung der Flächennormalen gedrückt werden muß.⁶⁷

Um von der Idealisierung der Körper zu Massenpunkten weg zu kommen, betrachten wir nun einen Gesamtkörper, den wir uns aus einem System von Massenpunkten zusammengesetzt denken können (siehe Abb. 1.84b). Bei diesem System von Massenpunkten mit den Massen m_i , den Geschwindigkeiten v_i und den Impulsen p_i , auf die die Kräfte F_i einwirken, gilt zunächst für jeden einzelnen Massenpunkt

$$\mathbf{F}_{\mathbf{i}} = \frac{d\mathbf{p}_{\mathbf{i}}}{dt} \quad . \tag{1.10.6}$$

Man führt dann den Gesamtimpuls p_{tot} des Systems als

⁶⁶Newton hat übrigens seine Lex Secunda als $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ formuliert und nicht, wie von uns bisher angesetzt, als $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Beide Formulierungen sind natürlich bei konstanter Masse identisch.

⁶⁷In unserem Alltagsleben entspricht dieses Experiment dem Anstemmen eines Regenschirms gegen die auftrefenden Wasser- und Luftmoleküle.

$$\mathbf{p_{tot}} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{p_i}$$
(1.10.7)

und entsprechend die Gesamtkraft $\mathbf{F_{tot}}$ als

$$\mathbf{F_{tot}} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F_i}$$
(1.10.8)

ein und erhält aus Gl.(1.10.6) bis (1.10.8) den Ausdruck

$$\mathbf{F_{tot}} = \frac{d\mathbf{p_{tot}}}{dt} \quad . \quad (1.10.9)$$

Diese Gleichung ist das *dynamische Grundgesetz* für Systeme von Massenpunkten, die teilweise oder ganz in ausgedehnten makroskopischen Körpern zusammengefaßt sein können.

Wir betrachten nun wieder Gl.(1.10.3), bringen sie in die Form

$$\mathbf{F}dt = d\mathbf{p} \quad . \tag{1.10.10}$$

und integrieren von der Anfangszeit t_1 bis zur Endzeit t_2 . Man erhält

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = \int_{t_1}^{t_2} d\mathbf{p} = \mathbf{p}(t_2) - \mathbf{p}(t_1) := \mathbf{p_2} - \mathbf{p_1} := \Delta \mathbf{p} \quad (1.10.11)$$

bzw. bei konstanter Masse

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = \Delta \mathbf{p} = m(\mathbf{v_2} - \mathbf{v_1}) . \qquad (1.10.12)$$

Die Integration ist in Abb. 1.85 veranschaulicht. Insbesondere wird klar, daß

$$\mathbf{p}(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} d\mathbf{p} = \mathbf{p}(t_2)$$
 bzw. $\int_{t_1}^{t_2} d\mathbf{p} = \mathbf{p_2} - \mathbf{p_1} = \Delta \mathbf{p}$. (1.10.13)

Das Zeitintegral der Kraft nennt man den *Kraftstoß* (siehe Abb. 1.86), der nicht mit dem Wegintegral der Kraft, der Arbeit W_{21} , verwechselt werden darf. Zusammenfassend kann man festhalten, daß *der auf einen Körper übertragene Kraftstoß gleich dessen Impulsänderung* $\Delta \mathbf{p}$ *ist.*

Für einen sich kräftefrei bewegenden Körper ist $\mathbf{F} = 0$ und damit verschwindet auch der Kraftstoß und die Impulsänderung. Das heißt, der Impuls des Körpers ist konstant. Dies ist lediglich eine andere



Abbildung 1.85: Zur Veranschaulichung der Impulsänderung zwischen den Zeiten t_1 und t_2 .



Abbildung 1.86: (a) Zur Definition des Kraftstosses. Die getönte Fläche unter der Kurve entspricht dem Kraftstoß $\int_{t_1}^{t_2} F dt$. (b) Impulsänderung durch eine im Zeitintervall zwischen t_1 und t_2 zeitlich konstante Kraft.

Formulierung des Galileischen Trägheitsgesetzes aus Abbschnitt 1.4, da für $\mathbf{p} = const$ bei m = const auch $\mathbf{v} = const$.

Schließlich kann man eine direkte Beziehung zwischen Impuls und kinetischer Energie ableiten. Es ist

$$E_{\rm kin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{m^2v^2}{2m} = \frac{(m\mathbf{v})\cdot(m\mathbf{v})}{2m} = \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}}{2m}$$
(1.10.14)

oder

$$E_{\rm kin} = \frac{p^2}{2m} . \tag{1.10.15}$$

Für einen Körper mit definierter Masse sind also kinetische Energie und Impuls nicht unabhängig voneinander vorgebbar.

1.10.2 Impulserhaltungssatz

Wir betrachten zwei Massen m_1 und m_2 , zwischen denen die inneren Kräfte F_1 und F_2 wirken. Es sollen keine äußeren Kräfte F^* vorhanden sein. Man sagt dann, die Massen bilden ein *abgeschlossenes System*. Aus dem 3. Newtonschen Axiom (actio = reactio) folgt dann

$$F_1 = -F_2 \Rightarrow F_{tot} = F_1 + F_2 = 0$$
. (1.10.16)

Mit der Bewegungsgleichung $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ folgt dann

$$\frac{d\mathbf{p_1}}{dt} = -\frac{d\mathbf{p_2}}{dt} \Rightarrow \frac{d(\mathbf{p_1} + \mathbf{p_2})}{dt} = 0$$
(1.10.17)

und somit für den Gesamtimpuls $\mathbf{p_{tot}} = \mathbf{p_1} + \mathbf{p_2}$

$$\frac{d\mathbf{p}_{tot}}{dt} = 0 \quad . \tag{1.10.18}$$

Das heißt:

Der Gesamtimpuls der Teilchen eines abge-
schlossenen Systems ist zeitlich konstant:
$$p_{tot} = const$$
 (abgeschlossenes System) .(1.10.19)

Dies ist der Inhalt des *Impulserhaltungssatzes* oder kurz *Impulssatzes*. Einen analogen Erhaltungssatz für die Energie haben wir in Abschnitt 1.9.2 aufgestellt.



Abbildung 1.87: Zur Impulserhaltung in einem abgeschlossenen System.

Zur Veranschaulichung des Impulssatzes betrachten wir die in Abb. 1.87 gezeigte Versuchsanordnung, bei der zwei Massen m_1 und m_2 auf einer horizontalen Unterlage reibungsfrei gleiten können. Zu Beginn des Experiments werden die beiden Massen unter Wirkung der äußeren Kraft \mathbf{F}^* zusammengeschoben und dabei eine masselos angenommene Feder gestaucht. Von dem Moment an, zu dem die Massen losgelassen werden, stellt das System ein abgeschlossenes System dar, da keine externen Kräfte mehr wirken. Am Anfang gilt $\mathbf{v_1} = 0$ und $\mathbf{v_2} = 0$ sowie $\mathbf{p_1} = 0$ und $\mathbf{p_2} = 0$, wodurch $\mathbf{p_{tot}} = 0$. Die Federkräfte $\mathbf{F_1}$ und $\mathbf{F_2}$ können zum Zeitpunkt t_0 , zu dem die äußeren Kräfte entfernt werden, mit der Beschleunigung und damit der Impulsänderung der Massen m_1 und m_2 beginnen. Die Federkräfte bleiben eine Zeitspanne Δt wirksam, bis die Feder völlig entspannt ist. Zu jedem Zeitpunkt gilt hierbei aufgrund des Wechselwirkungsgesetzes $\mathbf{F_1} = -\mathbf{F_2}$ und damit für die Impulsänderung im Zeitintervall dt

$$d\mathbf{p}_1 = \mathbf{F}_1 dt = -\mathbf{F}_2 dt = -d\mathbf{p}_2$$
 (1.10.20)

Die Integration dieser Gleichung von t_0 bis $(t_0 + \Delta t)$ ergibt

$$\Delta \mathbf{p_1} = \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \mathbf{F_1} dt = -\int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \mathbf{F_2} dt = -\Delta \mathbf{p_2}$$
(1.10.21)

oder

$$\Delta \mathbf{p_{tot}} = \Delta \mathbf{p_1} + \Delta \mathbf{p_2} = 0 \quad . \tag{1.10.22}$$

Das heißt, der Impulserhaltungssatz $\Delta \mathbf{p_{tot}} = 0$ bzw. $\mathbf{p_{tot}} = const$ ist erfüllt und zwar im Gegensatz zu Gl.(1.10.18) nicht nur für infinitesimale Impulsänderungen, sondern für das gesamte Zeitinterval Δt . Da der Gesamtimpuls zu Versuchsbeginn $\mathbf{p_{tot}} = 0$ war, verschwindet er auch bei Versuchsende, obwohl hier die Einzelimpulse $\mathbf{p'_1}$ und $\mathbf{p'_2}$ bzw. die Einzelgeschwindigkeiten $\mathbf{v'_1}$ und $\mathbf{v'_2}$ nicht verschwinden. Aufgrund des nicht verschwindenden Kraftstoßes in Gl.(1.10.21) ist $\Delta \mathbf{p_l} = \mathbf{p'_1} - \mathbf{p_1}$ und $\Delta \mathbf{p_2} = \mathbf{p'_2} - \mathbf{p_2}$ endlich. Außerdem folgt aus Gl.(1.10.21) und (1.10.22), daß die Impulse $\mathbf{p'_1}$ und $\mathbf{p'_2}$ betragsmäßig gleich groß sind und antiparallel zueinander gerichtet sind. Für das Verhältnis der Geschwindigkeiten erhält man deshalb

$$\frac{v_1'}{v_2'} = \frac{m_2}{m_1} . (1.10.23)$$

Die Geschwindigkeiten verhalten sich also umgekehrt wie ihre Massen.

Die Beziehung zwischen den Kraftstößen bzw. den Impulsänderungen läßt sich so interpretieren, daß bei der Wechselwirkung zwischen zwei Körpern ein Impuls $\Delta \mathbf{p}$ ausgetauscht wird, und zwar so, daß der Impuls, den der Körper 2 abgibt ($\Delta \mathbf{p} = -\Delta \mathbf{p_2}$), von dem Körper 1 aufgenommen wird ($\Delta \mathbf{p} = \Delta \mathbf{p_1} = -\Delta \mathbf{p_2}$). Die zum abgegebenen Impuls $-\Delta \mathbf{p_2}$ antiparallele Impulsänderung $\Delta \mathbf{p_2}$ von Körper 2 wird als *Rückstoß* auf den Körper 2 bezeichnet. Insgesamt läßt sich festhalten, daß der wechselweise Impulsaustausch letztendlich nur eine andere Formulierung von actio = reactio ist.⁶⁸

Verallgemeinerung auf n-Teilchen-Systeme

Die bislang für ein abgeschlossenes System aus zwei Teilchen gemachten Überlegungen können leicht für ein n-Teilchen-System verallgemeinert werden. Die Gesamtkraft \mathbf{F}_i auf den *i*-ten Massenpunkt setzt sich dabei aus den Zweikörperkräften \mathbf{F}_{ki} zwischen dem betrachteten Körper und allen anderen zusammen:

$$\mathbf{F}_{\mathbf{i}} = \sum_{k=1;k\neq i}^{n} \mathbf{F}_{\mathbf{k}\mathbf{i}} . \qquad (1.10.24)$$

Für den *i*-ten Massenpunkt ist $\mathbf{F}_{i} = d\mathbf{p}_{i}/dt$ und für das Gesamtsystem mit der Kraft \mathbf{F}_{tot} und dem Impuls \mathbf{p}_{tot} gilt

⁶⁸Es wird weiter unten gezeigt, daß die Impulserhaltung allgemein aus der Translationsinvarianz physikalischer Prozesse folgt.

$$\mathbf{F}_{tot} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_{i}$$
 und $\mathbf{p}_{tot} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{p}_{i}$, (1.10.25)

woraus $\mathbf{F_{tot}} = d\mathbf{p_{tot}}/dt$ folgt. Damit ist dann

$$\frac{d\mathbf{p_{tot}}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F_i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1; k \neq i}^{n} \mathbf{F_{ki}} . \qquad (1.10.26)$$

Mit dem Newtonschen Wechselwirkungsgesetz verschwindet die Summe auf der rechten Seite von Gl.(1.10.26), da bei der Summation jedes Teilchenpaar (i, k) zur Gesamtkraft \mathbf{F}_{ki} und \mathbf{F}_{ik} beitragen, die sich gegenseitig aufheben. Daher gilt für ein abgeschlossenes *n*-Teilchen-System ebenfalls:

$$\mathbf{F_{tot}} = 0$$
 (abgeschlossenes System) (1.10.27)
und der Gesamtimpuls des Systems bleibt erhalten:
 $\mathbf{p_{tot}} = const$ (abgeschlossenes System) (1.10.28)

Startende Rakete

Als Beispiel für das Rückstoßprinzip soll hier kurz der Raketenantrieb diskutiert werden. Bei Raketenmotoren wird Treibstoff entzündet und die bei der Verbrennung entstehenden Gase entweichen mit hoher Geschwindigkeit aus dem Auspuff. Der zum Impuls der ausgestoßenen Gasmoleküle antiparallele Rückstoß wird zur Beschleunigung der Rakete benutzt. Die entsprechende Raketengleichung soll in folgendem für eine im Schwerefeld der Erde senkrecht nach oben startende Rakete aufgestellt werden (siehe Abb. 1.88). Die Gesamtmasse m(t) der Rakete zum Zeitpunkt t können wir uns als aus der Masse |dm| der Auspuffgase, die in der Zeit dt zwischen t und t + dt entstehen, und der Restmasse m - |dm|zusammengesetzt denken. Im Zeitintervall dt kann in guter Näherung angenommen werden, daß die Gasteilchen mit konstanter Geschwindigkeit $-\mathbf{u}$ relativ zur Rakete abgestoßen werden. Für einen Beobachter außerhalb der Rakete haben die Gasteilchen dann die Geschwindigkeit $-\mathbf{u} + \mathbf{v}$. Die Restmasse m - |dm| der Rakete wird beschleunigt und hat nach der Zeit dt die Geschwindigkeit $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$. Die Bewegungsgleichung des Gesamtsystems ist mit Gl.(1.10.9) gegeben durch $\mathbf{F}_{tot} = d\mathbf{p}_{tot}/dt$. Für die Gesamtkraft Ftot ist zu beachten, daß sich die bei der Treibstoffverbrennung entwickelten inneren Kräfte wegen actio = reactio gegenseitig kompensieren, so daß für die Impulsänderung nur die als äußere Kraft wirkende Schwerkraft $\mathbf{F}_{\mathbf{G}} = m\mathbf{g}$ zu berücksichtigen ist. Die inneren Kräfte liefern für sich genommen aufgrund des Impulssatzes die Impulsänderung $d\mathbf{p_{tot}}/dt = 0$. Man erhält somit

$$m\mathbf{g} = \frac{d\mathbf{p}_{\text{tot}}}{dt} \quad . \tag{1.10.29}$$

Mit den oben angegebenen Massen und Geschwindigkeiten berechnet sich daraus die Impulsänderung des Systems Rakete+Gas zu



Abbildung 1.88: Zum Rückstoßprinzip bei einem Raketenstart.

$$d\mathbf{p_{tot}} = \mathbf{p_{tot}}(t+dt) - \mathbf{p_{tot}}(t)$$

= $(m - |dm|)(\mathbf{v} + d\mathbf{v}) + |dm|(-\mathbf{u} + \mathbf{v}) - (m - |dm|)\mathbf{v} - |dm|\mathbf{v}$
= $(m - |dm|)d\mathbf{v} - |dm|\mathbf{u} = md\mathbf{v} - |dm|\mathbf{u}$. (1.10.30)

unter Vernachlässigung des 2. Ordnung Terms (|dm|dv). Durch Einsetzen in Gl.(1.10.29) erhält man

$$m\mathbf{g} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} - \frac{|dm|}{dt}\mathbf{u} \quad . \tag{1.10.31}$$

In dieser Gleichung stellt $\eta := |dm|/dt$ die Verbrennungsrate des Treibstoffes dar. Setzt man $\eta = const$ an, so erhält man mit der Startmasse M die nach der Flugzeit t noch verbleibende Raketenmasse zu $m(t) = M - \eta t$. Die maximale Brennzeit des Triebwerks ergibt sich aus m(t) = 0 zu $T = M/\eta$. Mit der Verbrennungsrate η ergibt sich aus Gl.(1.10.31) die sogenannte *Raketengleichung*

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \eta \mathbf{u} + m\mathbf{g} \quad . \tag{1.10.32}$$

Nach dieser Gleichung ist die Beschleunigung $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ der Rakete durch die Summe aus Schubkraft $\eta \mathbf{u}$ des Raketenmotors und Schwerkraft $m\mathbf{g}$ gegeben.⁶⁹ Mit $m(t) = M - \eta t$ und einer Bewegung nur in z-Richtung senkrecht zur Erdoberfläche erhält man

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\eta u}{M - \eta t} - g = \frac{u}{T - t} - g$$
(1.10.33)

und damit mit v(0) = 0 und g = const die Geschwindigkeit

 $^{^{69}}$ Raketentriebwerke erreichen Schubkräfte $\eta u \sim 10^6 {\rm N}$ und sind damit in der Lage, eine Startmasse im Bereich von $M \sim 10^5 {\rm kg}$ von der Erde abzuheben.

$$v(t) = u \ln \frac{T}{T-t} - gt$$
 (1.10.34)

Durch nochmalige Integration erhält man mit z(0) = 0

$$z(t) = ut + u(T-t)\ln\frac{T-t}{T} - \frac{1}{2}gt^2 \quad . \tag{1.10.35}$$

Diese Gleichung gilt natürlich nur für t < T. Für $t \rightarrow t$ wird die Geschwindigkeit der Rakete in unserem idealisierten Experiment, in dem die gesamte Rakete aus Treibstoff besteht, unendlich groß und die verbleibende Raketenmasse unendlich klein.

In realen Raketensystemen wird immer eine Nutzlast m_n transportiert, so daß nach Verbrennen des Treibstoffes von der Gesamtmasse die Nutzlast übrigbleibt. Aus Gl.(1.10.32) erhält man in diesem Fall

$$\frac{dv}{dt} = \frac{u}{m}\frac{|dm|}{dt} + g \quad . \tag{1.10.36}$$

Durch Integration erhält man mit v(0) = 0 und unter Vernachlässigung des Terms g die nach Verbrennen des gesamten Treibstoffs erreichte Geschwindigkeit zu

$$v(t) = -u \int_{M}^{m_{n}} \frac{|dm|}{m} = u \ln\left(\frac{M}{m_{n}}\right) .$$
 (1.10.37)

Für eine hohe Endgeschwindigkeit benötigt man also eine hohe Austrittsgeschwindigkeit der Gasteilchen und eine geringe Nutzlast.

Impulserhaltung und Translationsinvarianz

Der Impulssatz wurde unter der Voraussetzung, daß alle inneren Kräfte dem **Newton**schen Wechselwirkungsgesetz (actio = reactio) unterliegen, abgeleitet. Es soll jetzt gezeigt werden, daß die Gültigkeit des Impulssatzes aber viel weitreichender ist. Wie hier allerdings nicht in voller Allgemeinheit gezeigt werden kann, folgt der Impulssatz aus einer Symmetrieeigenschaft des Raumes gegenüber Translationen. Darunter versteht man, daß ein bestimmter physikalischer Vorgang genau gleich abläuft, wenn man den Versuchsaufbau im Raum verschiebt. Diese *Translationsinvarianz* ist eine Folge der *Homogenitit* des Raumes und bis heute ist kein Experiment bekannt, das der Translationsinvarianz widersprechen würde. Um anzudeuten, wie man den Impulserhaltungssatz aus der Forderung nach Translationsinvarianz erhalten kann, betrachten wir wieder zwei Teilchen, die auf der x-Achse die Positionen x_1 und x_2 einnehmen und deren Wechselwirkung durch die potentielle Energie $E_{pot}(x_1, x_2)$ beschrieben wird. Die Translationsinvarianz besagt nun, daß die potentielle Energie unverändert bleibt, wenn beide Teilchen auf der x-Achse um die Strecke s versetzt werden. Das heißt, es muß $E_{pot}(x_1, x_2) = E_{pot}(x_1 + s, x_2 + s)$ gelten. Dies ist genau dann erfüllt, wenn die potentielle Energie nicht von der Absolutposition der Teilchen sondern nur von ihrem relativen Abstand $x_{21} = x_2 - x_1$ abhängt, der sich bei einer Verschiebung s nicht ändert. Es muß also gelten

$$E_{pot}(x_1, x_2) = f(x_{21}) = f(x_2 - x_1)$$
, (1.10.38)

wobei $f(x_{21})$ eine stetig differenzierbare Funktion (sonst beliebig) sein soll.⁷⁰ Mit Hilfe von Gl.(1.9.43) kann man die Kräfte F_{x1} und F_{x2} auf Teilchen 1 und 2 berechnen zu

$$F_{x1} = -\frac{\partial E_{\text{pot}}(x_2 - x_1)}{\partial x_1} = -\frac{dE_{pot}(x_{21})}{dx_{21}} \cdot \frac{\partial x_{21}}{\partial x_1} = -\frac{dE_{pot}(x_{21})}{dx_{21}} \cdot (-1)$$

$$F_{x2} = -\frac{\partial E_{\text{pot}}(x_2 - x_1)}{\partial x_2} = -\frac{dE_{pot}(x_{21})}{dx_{21}} \cdot \frac{\partial x_{21}}{\partial x_2} = -\frac{dE_{pot}(x_{21})}{dx_{21}} \cdot (+1) \quad (1.10.39)$$

und damit

$$F_{x1} = -F_{x2} {.} {(1.10.40)}$$

Damit sind wir wieder beim Newtonschen Wechselwirkungsgesetz angelangt und haben mit dem Beweisgang von Gl.(1.10.15) zum Impulssatz in Gl.(1.10.16) insgesamt gezeigt, daß die Impulserhaltung aus der Translationsinvarianz der potentiellen Energie folgt.⁷¹

Es sei abschließend darauf hingewiesen, daß die Impulserhaltung eine der am besten gesicherten Erkenntnisse der Physik ist. Abweichungen treten nur im atomaren Bereich aufgrund der Heissen**berg**schen Unschärferelation $\Delta p \Delta x > h$ auf. Innerhalb der Impulsunschärfe Δp kann der Impulssatz verletzt sein. Für klassische Objekte ist diese Unschärfe aber vernachlässigbar klein, da auf einer atomaren Skala klassische Körper nur ungenau lokalisiert sind.

1.10.3 Massenmittelpunkt und Schwerpunktsatz

Zu zwei punktförmigen Massen m_1 und m_2 läßt sich ein Massenmittelpunkt als ein Raumpunkt definieren, der auf der Verbindungslinie der beiden Massen liegt und den Abstand der beiden Massen im umgekehrten Verhältnis der beiden Massen teilt. Liegen die beiden Massen wie in Abb. 1.89 gezeigt auf der x-Achse und bezeichnet man mit x_{cm} die x-Koordinate des Massenmittelpunktes CM (CM: Center of Mass) und mit s_1 und s_2 die Abstände zwischen Masse 1 bzw. 2 und CM, so ist nach Definition

$$\frac{s_1}{s_2} := \frac{m_2}{m_1} . \tag{1.10.41}$$

Der Massenmittelpunkt befindet sich also immer näher bei der größeren Masse. Wegen $s_1 = x_{cm} - x_1$ und $s_2 = x_2 - x_{cm}$ ergibt sich

⁷⁰Ein Beispiel dafür ist die potentielle Energie der Gravitation: $f(x_{21}) = -G\frac{Mm}{x_{21}}$. ⁷¹Es sei hier noch angemerkt, daß bei keiner Wechselwirkung zwischen Körpern das **Newton**sche Wechselwirkungsgesetz exakt zu jedem Zeitpunkt gilt, da letztlich die Wechselwirkung nicht "momentan" erfolgt, sondern nur mit einer endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit (maximal mit c). Dies manifestiert sich vor allem in Kraftwirkungen, die bei bewegten Körpern von deren Geschwindigkeit abhängen, wie z.B. der magnetischen Wechselwirkung zwischen bewegten Ladungen. Um die Impulserhaltung auch in diesen allgemeineren Fällen zu erfüllen, muß man neben den Teilchenimpulsen auch noch dem Kraftfeld, das die Wechselwirkung vermittelt und damit Impuls überträgt, einen Impuls zuordnen.



Abbildung 1.89: Zur Definition des Massenmittelpunktes.

$$m_1(x_{cm} - x_1) = m_2(x_2 - x_{cm}) \Rightarrow x_{cm}(m_1 + m_2) = m_1x_1 + m_2x_2$$
. (1.10.42)

oder

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} . \qquad (1.10.43)$$

Bei allgemeiner Lage der Massen erhält man in Analogie zu Gl.(1.10.43) den Ortsvektor des Massenmittelpunktes zu

$$\mathbf{r_{cm}} := \frac{m_1 \mathbf{r_1} + m_2 \mathbf{r_2}}{m_1 + m_2} .$$
 (1.10.44)

Schließlich läßt sich diese Definition auf n Massenpunkte mit Massen m_i und Ortsvektoren r_i erweitern zu





Abbildung 1.90: Zur sukzessiven Bestimmung des Massenmittelpunkts von mehreren Massenpunkten.

Bei mehr als 2 Massen liegt der Massenmittelpunkt im allgemeinen nicht mehr auf der Verbindungslinie zweier Massen, wie in Abb. 1.90 für 3 Massen veranschaulicht ist. Der Massenmittelpunkt läßt sich sukzessive ermitteln. Es gilt

$$\mathbf{r_{cm}^{12}} = \frac{m_1 \mathbf{r_1} + m_2 \mathbf{r_2}}{m_1 + m_2}$$

$$\Rightarrow \mathbf{r_{cm}} = \frac{(m_1 + m_2) \mathbf{r_{cm}^{12}} + m_3 \mathbf{r_3}}{(m_1 + m_2) + m_3} = \frac{m_1 \mathbf{r_1} + m_2 \mathbf{r_2} + m_3 \mathbf{r_3}}{m_1 + m_2 + m_3} \quad . \tag{1.10.46}$$

Dieses Verfahren läßt sich auf *n* Massenpunkte erweitern, wodurch man zu Gl.(1.10.45) gelangt. Mit der Gesamtmasse $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$ wird aus Gl.(1.10.45)

$$M\mathbf{r_{cm}} = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r_i} \quad . \tag{1.10.47}$$

Die Differentiation dieses Ausdrucks nach der Zeit liefert für zeitlich konstante Massen

$$M\frac{d\mathbf{r_{cm}}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\mathbf{r_i}}{dt} . \qquad (1.10.48)$$

Hierbei bedeutet $d\mathbf{r_{cm}}/dt := \mathbf{v_{cm}}$ die Geschwindigkeit des Massenmittelpunktes. Denkt man sich die Gesamtmasse M des Systems im Massenmittelpunkt vereinigt, so erhält man den Impuls des Massenmittelpunktes zu

$$\mathbf{p_{cm}} := M \mathbf{v_{cm}} := M \frac{d\mathbf{r_{cm}}}{dt} . \tag{1.10.49}$$

Andererseits sind in Gl.(1.10.48) $\mathbf{v_i} = d\mathbf{r_i}/dt$ die Geschwindigkeit und $\mathbf{p_i} = m_i \mathbf{r_i}$ der Impuls des *i*-ten Körpers des Gesamtsystems, so daß sich mit Gl.(1.10.7) für den Gesamtimpuls des Systems



ergibt. Das heißt, *der Impuls des Gesamtsystems ist gleich dem Impuls des Massenmittelpunktes*. Wenn man also vom Impuls eines ausgedehnten Körpers spricht, so meint man damit immer den Impuls seines Massenmittelpunktes.

Führt man nach Gl.(1.10.8) die Gesamtkraft \mathbf{F}_{tot} auf das System ein, so erhält man durch Differenzieren von Gl.(1.10.50) die Bewegungsgleichung des Gesamtsystems

$$\mathbf{F_{tot}} = \frac{d\mathbf{p_{tot}}}{dt} = \frac{d\mathbf{p_{cm}}}{dt}$$
 (1.10.51)

Der Massenmittelpunkt des Systems bewegt sich also gerade so, wie wenn die Summe der an den Massen m_i angreifenden Kräfte $\mathbf{F_i}$ auf einen Massenpunkt der Gesamtmasse M im Massenmittelpunkt einwirken würde. Da der Massenmittelpunkt auch der Schwerpunkt des Systems genannt wird, heißt die Beziehung Gl.(1.10.51) auch der Schwerpunktsatz.

Ist das System abgeschlossen, d.h. wirken auf die Massen nur innere Kräfte, so verschwindet nach Gl.(1.10.27) die Gesamtkraft F_{tot} und aus dem Schwerpunktsatz folgt

$$\mathbf{p_{cm}} = const$$
 (abgeschlossenes System) . (1.10.52)

Der Massenmittelpunkt eines abgeschlossenen Systems gehorcht daher dem Galileischen Trägheitsprinzip. ⁷² Wenn äußere Kräfte wirken, wird $\mathbf{F}_{tot}^{\star} \neq 0$ und der Massenmittelpunkt erfährt eine Beschleunigung:

$$\mathbf{F}_{\text{tot}}^{\star} = \frac{d\mathbf{p}_{\text{tot}}}{dt} = \frac{d\mathbf{p}_{\text{cm}}}{dt}$$
(1.10.53)

Der Vergleich der Beziehungen (1.9.39) und (1.10.53) zeigt, daß die äußeren Kräfte sowohl für die Energie- als auch die Impulsänderung des Gesamtsystems von Massenpunkten verantwortlich sind.

Eine interessante Folgerung des Schwerpunktsatzes ist, daß die Flugbahn des Massenmittelpunkts in einem äußeren Kraftfeld unverändert bleibt, wenn ein Körper im Flug aufgrund von inneren Kräften mit $\mathbf{F}_{tot} = 0$ explodiert. Dies kann bei einem explodierenden Feuerwerkskörper beobachtet werden. Der Massenmittelpunkt der Bruchstücke fliegt nach der Explosion auf einer Wurfparabel weiter.

Beispiel: Massenmittelpunkt des Systems Erde-Mond

Die Masse der Erde ist $m_E = 5.98 \times 10^{24}$ kg, die des Mondes $m_M = 7.35 \times 10^{22}$ kg und der mittlere Abstand der Mittelpunkte von Erde und Mond beträgt $r_{EM} = 3.84 \times 10^8$ m.^{*a*} Für den Abstand s_E und s_M des Erd- bzw. Mondmittelpunkts vom Massenmittelpunkt des Erde-Mond-Systems folgt dann $s_E/s_M = m_M/m_E$. Da nun $r_{EM} = (s_E + s_M)$ ist (siehe Abb. 1.91), folgt

$$\frac{s_E}{r_{EM} - s_E} = \frac{m_M}{m_E} \Rightarrow s_E m_E = r_{EM} m_M - s_E m_M \Rightarrow s_E (m_E + m_M) = r_{EM} m_M$$
oder
$$s_E = \frac{r_{EM} m_M}{m_E + m_M}.$$
(1.10.54)

Mit obigen Zahlenwerten erhält man $s_E = 4.66 \times 10^6$ m. Da der Erdradius $r_E = 6.38 \times 10^6$ m beträgt, liegt der Massenmittelpunkt bei etwa 3/4 des Erdradius, also innerhalb der Erde. Dies liegt an dem großen Massenverhältnis von $m_E/m_M \simeq 81$.

^{*a*}Der Massenmittelpunkt einer homogenen Kugel liegt dabei im Kugelmittelpunkt. Daher fällt der partielle Massenmittelpunkt der Erde und des Mondes mit dem jeweiligen Erd- bzw. Mondmittelpunkt zusammen. Beide Körper werden als Kugeln mit homogener Massenverteilung approximiert.

Schwerpunktsystem

Die in einem Inertialsystem beobachtete geradlinig gleichförmige Bewegung des Massenmittelpunktes eines *abgeschlossenen Systems* von Massenpunkten eröffnet die Möglichkeit, auf ein Bezugssystem überzugehen, dessen Ursprung mit dem Massenschwerpunkt zusammenfällt und sich relativ zum Inertialsystem, das wir im folgenden mit *Laborsystem* bezeichnen werden, mit der konstanten Geschwindigkeit v_{cm} bewegt. Dieses Bezugssystem heißt *Schwerpunktsystem* und ist wiederum ein Inertialsystem. Laut Definition gilt für die Geschwindigkeit des Massenmittelpunkts im Schwerpunktsystem, also des Koordinatenursprungs⁷³

⁷²Es sei darauf hingewiesen, daß dies lediglich eine etwas abgewandelte Formulierung des Impulserhaltungssatzes ist.

⁷³Die Größen im Schwerpunktsystem werde im folgenden zur Unterscheidung von denjenigen im Laborsystem mit einer Schlange versehenen.



Abbildung 1.91: Massenmittelpunkt des Erde-Mond-Systems. Der Erdmittelpunkt und mit ihm alle Erdpunkte bewegen sich auf einer Kreisbahn um den Massenmittelpunkt. Da in guter Näherung die Erdachse im Raum stehen bleibt, ist die Bewegungsform der Erde allerdings keine Rotation um den Schwerpunkt sondern vielmehr eine Translationsbewegung der Erde parallel zu sich selbst auf einer Kreisbahn. Folglich durchlaufen alle Erdpunkte Kreise mit einheitlichem Radius s_E . Dies ist für den Erdmittelpunkt sowie den mondnächsten und mondfernsten Erdpunkt gezeigt.

$$\tilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{cm}} = 0 , \qquad (1.10.55)$$

wobei der Übergang zum Schwerpunktsystem durch die **Galilei**transformation aus Abschnitt 1.8.1 vermittelt wird. Im Rahmen der nicht-relativistischen klassischen Mechanik sind dabei neben Beschleunigungen auch Massen und Kräfte galileiinvariant und man erhält

$$\mathbf{a} = \tilde{\mathbf{a}}, \qquad m = \tilde{m}, \qquad \mathbf{F} = \tilde{\mathbf{F}}, \qquad (1.10.56)$$

Dagegen transformiert sich die Geschwindigkeit und die kinetische Energie eines Massenpunktes bei der Transformation wie

$$\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{v}_{\rm cm} \quad . \tag{1.10.57}$$

Das Schwerpunktsystem hat die bemerkenswerte Eigenschaft, daß der Gesamtimpuls $\tilde{\mathbf{p}}_{tot}$ in diesem System verschwindet, was man einfach anhand von einem Zweikörpersystem mit den Massen m_1 und m_2 zeigen kann. Im Laborsystem ist $\mathbf{p}_{tot} = \mathbf{p_1} + \mathbf{p_2} = m_1 \mathbf{v_1} + m_2 \mathbf{v_2}$. Die Schwerpunktgeschwindigkeit ergibt sich damit mit $\mathbf{p}_{cm} = M \mathbf{v}_{cm} = \mathbf{p}_{tot} = m_1 \mathbf{v_1} + m_2 \mathbf{v_2}$ zu

$$\mathbf{v_{cm}} = \frac{m_1 \mathbf{v_1} + m_2 \mathbf{v_2}}{m_1 + m_2}$$
 (1.10.58)

Damit erhält man mit Gl.(1.10.57) den Gesamtimpuls im Schwerpunktsystem

$$\tilde{\mathbf{p}}_{tot} = \tilde{\mathbf{p}}_1 + \tilde{\mathbf{p}}_2 = m_1 \tilde{\mathbf{v}}_1 + m_2 \tilde{\mathbf{v}}_2 = m_1 (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_{cm}) + m_2 (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_{cm})$$
, (1.10.59)

woraus sich

 $\tilde{\mathbf{p}}_{tot} = 0$ (1.10.60)

ergibt.

Schließlich interessiert noch der Zusammenhang zwischen der kinetischen Energie $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$ im Labor- und $\tilde{E}_{kin} = \frac{1}{2}m\tilde{v}^2$ im Schwerpunktsystem. Für ein Zweikörpersystem ist die gesamte kinetischen Energie $T_{tot} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$ und $\tilde{T}_{tot} = \frac{1}{2}m_1\tilde{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\tilde{v}_2^2$. Mit den obigen Transformationen erhält man

$$T_{\rm tot} = \tilde{T}_{tot} + \frac{1}{2}Mv_{cm}^2$$
 . (1.10.61)

Die gesamte kinetische Energie läßt sich also zerlegen in einen Anteil T_{tot} , der die kinetische Energie der Massenpunkte im Schwerpunktsystem (aufgrund ihrer Bewegung relativ zum Massenschwerpunkt) beschreibt, und einen Anteil $\frac{1}{2}Mv_{cm}^2$, der die Bewegung des Systems als ganzes erfaßt.⁷⁴

Im vorangegangenen Abschnitt hatten wir gefunden, daß die potentielle Energie $V = E_{pot}$ aufgrund der Translationsinvarianz der Wechselwirkung zwischen 2 Körpern nur von den Relativabständen der Körper abhängen kann. Da die **Galilei**transformation aber Relativabstände unverändert läßt, ist der Ansatz

$$V = \tilde{V} \tag{1.10.62}$$

für die **Galilei**invarianz der potentiellen Energie innerhalb der klassischen Mechanik konsistent. Die Gesamtenergie als Summe aus kinetischer und innerer potentieller Energie wird im Schwerpunktsystem als *innere Energie U* bezeichnet und ist durch

$$U := \tilde{T}_{tot} + \tilde{V}_{tot}$$
 (1.10.63)

gegeben. Dabei steht \tilde{T}_{tot} für die Summe aller kinetischen Einzelenergien der Massenpunkte und \tilde{V}_{tot} für die Summe aller Wechselwirkungsenergien zwischen Paaren von Massenpunkten. Für die Gesamtenergie E im abgeschlossenen ursprünglichen Inertialsystem folgt dann mit $E = T_{tot} + V_{tot} = \tilde{T}_{tot} + \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \tilde{V}_{tot}$ die wichtige Beziehung

$$E = U + \frac{1}{2}Mv_{cm}^2$$
 . (1.10.64)

Die Energie eines abgeschlossenen Systems von Massenpunkten ist demnach durch die Summe aus innerer Energie U und kinetischer Energie aufgrund der Schwerpunktsbewegung gegeben. Bei einem aus vielen Massenpunkten aufgebauten makroskopischen Körper meint man mit der kinetischen Energie immer nur den Term $\frac{1}{2}Mv_{cm}^2$, der die allen Massenpunkten gemeinsame Bewegung des Körpers beschreibt, während der Energieanteil der inneren Energie, der die innere Bewegung im Schwerpunktsystem berücksichtigt, nicht mitgerechnet wird.

⁷⁴So ist beispielsweise für einen ruhenden Kasten, in dem sich Gasmoleküle bewegen, nur $\tilde{T}_{tot} \neq 0$, während bei einer Bewegung des gesamten Kastens noch die kinetische Energie $\frac{1}{2}Mv_{cm}^2$ aufgrund der allen Gasmolekülen aufgeprägten Geschwindigkeit v_{cm} dazukommt.

Der Energiesatz besagt, daß für ein abgeschlossenes System die Gesamtenergie E nach Gl.(1.10.64) konstant sein soll. Da aber auch der Gesamtimpuls $\mathbf{p}_{tot} = \mathbf{p}_{cm} = M\mathbf{v}_{cm} = const$ ist, gilt sogar einzeln $\frac{1}{2}Mv_{cm}^2 = const$ und U = const. Bei der Verletzung dieser Gesetzmäßigkeit könnte sich z.B. die Bewegungsenergie eines einzelnen Körpers in innere Energie umwandeln, d.h. ein bewegter Körper könnte spontan zu Ruhe kommen ($\mathbf{v}_{cm} = 0$) und dabei seine innere Energie erhöhen ("heiß" werden).

Experiment zum Impulserhaltungssatz: Luftkissenfahrzeuge

Durch das Zusammenschieben von zwei Luftkissenfahrzeugen wird eine zwischen diesen Fahrzeugen befindliche Feder gestaucht und mit Hilfe eines Fadens in dieser Stellung festgehalten. Es handelt sich dann um ein abgeschlossenes System, da keine äußeren Kräfte mehr einwirken. Der Gesamtimpuls \mathbf{p}_{tot} des Systems verschwindet, da sich beide Fahrzeuge in Ruhe befinden. Durchtrennt man nun den Faden, so erhalten die Fahrzeuge Kraftstöße $\mathbf{F}\Delta t$ durch die Federkraft und damit Impulse, welche aufgrund von actio = reactio die gleiche Größe aber die entgegengesetzte Richtung haben: $m_1\mathbf{v}_1 = -m_2\mathbf{v}_2$ oder $m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = 0$. Die Summe der Impulse verschwindet zu jedem Zeitpunkt und der Massenmittelpunkt bleibt in Ruhe. Für die Geschwindigkeiten gilt $\mathbf{v}_1 = -\frac{m_2}{m_1}\mathbf{v}_2$ und man erhält z.B $\mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}_2$ für $m_1 = m_2$ oder $\mathbf{v}_1 = -2\mathbf{v}_2$ für $m_2 = 2m_1$.

Experiment zum Impulserhaltungssatz: Abschuß von Pfeil

Ein Pfeil soll aus einem Rohr abgeschossen werden, das an einem Faden beweglich aufgehängt ist. Das Rohr bewegt sich beim Abschuß nach hinten, da es aufgrund der Impulserhaltung einen zum wegfliegenden Pfeil entgegengesetzten Impuls erhalten hat. Wird der Pfeil durch ein mit dem Rohr verbundenes Brett wieder aufgefangen, so bleibt das Gesamtsystem in Ruhe, da der Pfeil beim Auftreffen den Rückstoß des Rohres wieder exakt kompensiert.

Auf dem Satz der Erhaltung des Gesamtimpulses bei Abwesenheit von äußeren Kräften beruht auch der bereits oben diskutierte Raketenantrieb.

1.10.4 Die Stoßgesetze

Im folgenden soll der Stoß zwischen zwei Körpern unter Anwendung des Energie- und Impulssatzes diskutiert werden. Dabei wird unter Stoß die Wechselwirkung zwischen zwei Körpern verstanden. Um den Energie- und Impulssatz anwenden zu können, müssen wir annehmen, daß das Zwei-Körpersystem abgeschlossen ist. Das heißt, die Körper 1 und 2 sollen nur einer gegenseitigen Wechselwirkung V_2 unterliegen, aber keinerlei Wechselwirkung V^* mit äußeren Kräften \mathbf{F}^* haben. Nur im speziellen Fall einer während des Stoßes konstanten potentiellen Energie V^* (z.B. durch konstantes Schwerefeld an der Erdoberfläche beim Stoß von Billardkugeln in einer horizontalen Ebene) sind äußere Kräfte zugelassen, da die damit verbundene potentielle Energie V^{\star} in der Energiebilanz vor und nach dem Stoß nicht zum Tragen kommt. Weiterhin wollen wir nur das sogenannte asymptotische Verhalten der Stoßpartner diskutieren, d.h. Energie und Impuls vor und nach der Wechselwirkung sollen für einen Zeitpunkt, zu dem sich die beiden Körper bereits weit voneinander entfernt bewegen, betrachtet werden. Man erreicht dadurch, daß die Wechselwirkungsenergie V_{12} vernachlässigt werden kann. Diese Annahme vereinfacht die Analyse von Stoßprozessen wesentlich, da die genaue Form der Wechselwirkung gar nicht bekannt sein muß. Die abgeleiteten Stoßgesetze bekommen dadurch eine universelle Gültigkeit. Man kann sie in der gleichen Weise für den Stoß von makroskopischen Körpern wie Billardkugeln und von Elementarteilchen wie Elektronen, Protonen, Neutronen etc. anwenden. Andererseits verzichtet man bei einer solchen Analyse auf Aussagen über die Größe der Wechselwirkung und der ausgetauschten Impulse. Damit beschreiben die Stoßgesetze nicht die Dynamik des Prozesses, sondern lediglich die durch die Energie- und Impulserhaltung aufgezwungene Kinematik.



Abbildung 1.92: Zum Stoß zweier Massen.

Wir betrachten den in Abb. 1.92 skizzierten Stoß zwischen zwei Massen m_1 und m_2 sowie mit den Geschwindigkeiten v_1 und v_2 vor und v'_1 und v'_2 nach dem Stoß. Im allgemeinen sind die Körper aus vielen Massenpunkten aufgebaut und sind deswegen als Teilsysteme anzusehen, deren Energie E durch die Summen der inneren Energie U und der Bewegungsenergie $\frac{1}{2}mv^2$ der jeweiligen Schwerpunkte gegeben ist. Der Impuls jedes Systems ist der Schwerpunktimpuls mv des jeweiligen Körpers. Da das System der beiden Körper abgeschlossen sein soll, folgt aus dem Energie- und Impulssatz

	$E_{1} + E_{2}$	=	$E_1' + E_2'$	(1.10.65)
bzw.	$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + U_1 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + U_2$	=	$\frac{1}{2}m_1'v_1'^2 + U_1' + \frac{1}{2}m_2'v_2'^2 + U_2'$	(1.10.66)
und	$\mathbf{p_1} + \mathbf{p_2}$	=	$\mathbf{p_1'} + \mathbf{p_2'}$	(1.10.67)
bzw.	$m_1\mathbf{v_1} + m_2\mathbf{v_2}$	=	$m_1' {f v_1'} + m_2' {f v_2'}$.	(1.10.68)

Es ist zweckmäßig, Stoßprozesse in *elastische* und *inelastische Stöße* zu kassifizieren. Führt man mit $\Delta U := (U'_1 + U'_2) - (U_1 + U_2)$ die beim Stoßprozeß eingetretene Änderung der gesamten inneren Energie ein, so erhält man durch Umformen von Gl.(1.10.66)

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1'v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2'v_2'^2 + \Delta U \quad . \tag{1.10.69}$$

Man kann somit folgende Klassifizierung vornehmen

ΔU	=	0	elastischer Stoß	
ΔU	>	0	inelastischer Stoß, endotherm	
ΔU	<	0	inelastischer Stoß, exotherm .	(1.10.70)

Entsprechend dem Vorzeichen von ΔU verändert sich die Summe der kinetischen Energien vor und nach dem Stoß.⁷⁵ Bei inelastisch exothermen Stößen nimmt die kinetische Energie beim Stoß zu. Solche Prozesse kommen hauptsächlich bei chemischen Reaktionen oder Kernreaktionen vor. Bei chemischen Reaktionen oder Kernreaktionen kann sich auch die Masse der Stoßpartner beim Stoß ändern. Im folgenden soll aber immer $m_1 = m'_1$ und $m_2 = m'_2$ gelten.

⁷⁵Häufig wird zur Klassifizierung von Stößen auch die *Wärmetönung* oder *Q*-Wert der Reaktion verwendet, wobei $Q = -\Delta U$ gilt.

Der elastische Stoß

Wir wollen zuerst den elastischen Stoß näher diskutieren, bei dem $\Delta U = 0$ gilt und deshalb die kinetische Energie über den Stoßprozeß hinweg erhalten bleibt. Die Wechselwirkung zwischen den Körpern ist hier durch eine potentielle Energie V_{12} beschreibbar, oder, anders formuliert, die Wechselwirkung wird durch konservative Kräfte vermittelt. Mit $m_1 = m'_1$ und $m_2 = m'_2$ ergibt sich aus Gl.(1.10.66) und (1.10.68)

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 \qquad (1.10.71)$$

und
$$m_1 \mathbf{v_1} + m_2 \mathbf{v_2} = m_1 \mathbf{v'_1} + m_2 \mathbf{v'_2}$$
. (1.10.72)

Bei vorgegebenen Anfangsbedingungen $(m_1, m_2, \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2})$ sind das 4 Gleichungen (eine skalare und eine vektorielle) für insgesamt 6 unbekannte Komponenten von $\mathbf{v_1}$ und $\mathbf{v_2}$. Zwei Parameter bleiben daher unbestimmt und sind frei wählbar (z.B. die Flugrichtung des Teilchen 2 nach dem Stoß). Im allgemeinen benötigt man zur exakten Lösung Zusatzinformationen. Diese stecken in der genauen Wechselwirkung der Stoßpartner, die im Moment aber nicht diskutiert werden soll.

Bei Stoßexperimenten im Laboratorium wird i.a. das bewegte Teilchen 1 an dem ruhenden Teilchen 2 gestreut und der Energie- und Impulssatz vereinfachen sich zu

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 \qquad (1.10.73)$$

und
$$m_1 \mathbf{v_1} = m_1 \mathbf{v'_1} + m_2 \mathbf{v'_2}$$
. (1.10.74)



Abbildung 1.93: Zentraler Stoß im Laborsystem.

Wir beschränken uns nun vorerst auf den in Abb. 1.93 gezeigten *zentralen Stoß*, bei dem der Winkel zwischen v_1 und v_2 entweder 0° oder 180° betragen soll.⁷⁶ Durch Quadrieren von Gl.(1.10.74) erhält man

$$m_1^2 v_1^2 = m_1^2 v_1'^2 + m_2^2 v_2'^2 + 2m_1 m_2 v_1 v_2 \cos(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}) \quad . \tag{1.10.75}$$

Die Lösung des Gleichungssystems aus (1.10.73) und (1.10.75) ergibt für den zentralen Sto β mit $\mathbf{v}_2 = 0$

$$\mathbf{v}'_{\mathbf{1}} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v}_{\mathbf{1}}$$
 $\mathbf{v}'_{\mathbf{2}} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{v}_{\mathbf{1}}$ (1.10.76)

⁷⁶Durch Vorgabe der Flugrichtung von Körper 2 ist das Gleichungssystem jetzt voll lösbar.

Man kann folgende Sonderfälle des zentralen Stoßes betrachten:

• $m_1 = m_2 \Rightarrow \mathbf{v}'_1 = 0$ und $\mathbf{v}'_2 = \mathbf{v}_1$. Nach dem Zusammenstoß bleibt Körper 1 in Ruhe und gibt seinen gesamten Impuls an m_2 ab.

Beispiel: Kugelspiel

Beispiel: Es werden identische Stahlkugeln an gleichlangen Fäden so aufgehängt, daß sie sich gerade berühren. Lenkt man die äußerste linke Kugel aus und läßt sie gegen die anderen, ruhenden Kugeln schwingen, so bleiben alle Kugeln in Ruhe bis auf die äußerste rechte Kugel, auf die der volle Impuls übertragen wird und dadurch ausschwingt. Die rechte Kugel schwingt dann wieder zurück und der gleiche Vorgang wiederholt sich in umgekehrter Richtung.

- *m*₁ > *m*₂ ⇒ **v**'₁ ||**v**₁ und |**v**'₂| > |**v**₁|.
 Körper 1 und 2 bewegen sich nach dem Stoß in die gleiche Richtung, Körper 2 besitzt die größere Geschwindigkeit.
- $m_1 < m_2 \Rightarrow \mathbf{v'_1} \parallel \mathbf{v_1}$ und $|\mathbf{v'_2}| < |\mathbf{v_1}|$. Körper 1 und 2 bewegen sich nach dem Stoß in die entgegengesetzte Richtung, Körper 2 besitzt die kleinere Geschwindigkeit.
- m₁ ≫ m₂ ⇒ v'₁ ≃ v₁ und v'₂ ≃ 2v₁.
 Diese Situation beschreibt z.B. den Stoß eines Atomkerns mit einem Elektron. Die maximale Geschwindigkeit, die dem Körper 2 verliehen werden kann, ist die doppelte Anfangsgeschwindigkeit 2v₁.
- m₁ ≪ m₂ ⇒ v'₁ ≃ -v₁ und v'₂ ≃ 0.
 Diese Situation beschreibt z.B. den Stoß eines Elektrons mit einem Atomkern. Wie erwartet, bewegt sich die große Masse nicht, während die kleine Masse reflektiert wird.

Stoßexperimente mit Luftkissenbahn:

Auf einer Luftkissenbahn können sich Massen unterschiedlicher Größe reibungsfrei bewegen. Mit einer solchen Bahn können die obigen Fälle in einem einfachen Experiment realisiert werden.

Wir betrachten nun die Energieverhältnisse für den zentralen elastischen Stoß ($v_2 = 0$). Mit den Ausdrücken (1.10.76) für die Geschwindigkeiten v'_1 und v'_2 erhält man

$$\mathbf{E}_{1}^{\prime} = \frac{1}{2}m_{1}v_{1}^{\prime 2} = \frac{1}{2}m_{1}\left(\frac{m_{1}-m_{2}}{m_{1}+m_{2}}\right)^{2}v_{1}^{2} = \left(\frac{m_{1}-m_{2}}{m_{1}+m_{2}}\right)^{2}E_{1}$$
(1.10.77)

$$\mathbf{E}'_{\mathbf{2}} = \frac{1}{2}m_2v_2^{\prime 2} = \frac{1}{2}m_2\left(\frac{2m_1}{m_1+m_2}\right)^2v_1^2 = \frac{4m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}E_1 \quad . \tag{1.10.78}$$

Das Verhältnis E'_2/E_1 stellt die *relative Energieabgabe* des Körpers 1 an den Körper 2 dar und ist gegeben durch

$$\frac{E_2'}{E_1} = \frac{4m_1m_2}{(m_1+m_2)^2} \quad (1.10.79)$$



Abbildung 1.94: Energieübertrag beim zentralen elastischen Stoß.

Der Energieübertrag ist in Abb. 1.94 gezeigt. Er ist immer kleiner oder gleich Eins, d.h $E_2 \leq E_1$. Körper werden deshalb bei Stoßprozessen immer abgebremst (themalisiert). Der Energieübertrag ist maximal für $m_1 = m_2$. Hier ist $E'_2 = E_1$, d.h. beim zentralen Stoß gleichgroßer Massen wird die Energie vollständig übertragen.

Beispiel: Thermalisierung von Neutronen

Die Tatsache, daß beim Stoß gleichgroßer Massen am meisten Energie transferiert werden kann, macht man sich z.B. in Kernreaktoren zum Bremsen (Thermalisieren) von schnellen Neutronen zu Nutze. Beim Stoß eines Neutrons mit Masse m_n und Geschwindigkeit v_n mit einem Stoßpartner der Masse m_2 und Geschwindigkeit v_2 gilt $v'_n = \frac{m_n - m_2}{m_n + m_2}v_n$. Das heißt, v'_n wird sehr klein, wenn $m_2 \simeq m_n$. Man benutzt deshalb zur Moderation von schnellen Neutronen in Kernreaktoren Wasser, da die Protonen des Wassers eine sehr ähnliche Masse wie die Neutronen besitzen $(m_n \simeq m_p)$.

Beispiel: Stoß einer Masse mit über Feder gekoppeltem Massenpaar

Auf einer Luftkissenbahn befinden sich drei identische Massen, wobei zwei Massen über eine Feder miteinander gekoppelt sind (siehe Abb. 1.95). Alle Massen können sich reibungsfrei auf der Bahn bewegen. Die Masse 1 bewegt sich mit Geschwindigkeit v_1 auf das ruhende Massenpaar ($v_2 = 0$) zu und vollzieht mit diesem einen Stoß. Der Stoß geschieht allerdings nur mit einer Masse des Paares, da die Stoßzeit kurz gegenüber der charakteristischen Schwingungsdauer des Masse-Feder-Systems ist. Da alle drei Massen gleich sein sollen, wird $v'_1 = 0$. Durch den Stoß erhält das Massenpaar eine endliche Translationsgeschwindigkeit v_2 (Schwerpunktgeschwindigkeit) und wird gleichzeitig zu einer Schwingung angeregt. Aus dem Impulssatz $mv_1 = 2mv'_2$ folgt $v'_2 = v_1/2$. Aus dem Energiesatz $\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}(2m)v'^2_2 + E_{vibrat}$ ergibt sich $E_{vibrat} = \frac{1}{4}mv_1^2 = T/2$. Das heißt, jeweils die Hälfte der kinetischen Energie der stoßenden Masse 1 wird in Schwingungsenergie und in kinetische Energie der Schwerpunktbewegung des Massenpaares umgesetzt.



Abbildung 1.95: Zentraler Stoß zwischen einer Masse m und einem über eine Feder gekoppelten Massenpaar.

Blasenkammeraufnahme: β -Zerfall und Neutrino

Würde der β -Zerfall von ${}_{2}^{6}$ He nach der Reaktion ${}_{2}^{6}$ He \rightarrow_{3}^{6} Li + e^{-} ablaufen, so würde man, da sich ${}_{2}^{6}$ He vor dem Zerfall in Ruhe befinden soll, nach dem Impulssatz erwarten, daß sich die beim Zerfall entstandenen Teilchen entgegengesetzt auseinander bewegen. In einem Blasenkammerexperiment beobachtet man, daß beim Zerfall zwar zwei Teilchen entstehen, daß aber der Winkel zwischen ihren Geschwindigkeitsvektoren kleiner als 180° ist. Man kann daraus folgern, daß beim Zerfall ein weiteres, für den Blasenkammernachweis unsichtbares Teilchen entstanden sein muß. Dieses Teilchen ist ein Antineutrino und die richtige Reaktionsgleichung für den β -Zerfall lautet: ${}_{2}^{6}$ He \rightarrow_{3}^{6} Li + e^{-} + $\overline{\nu}$.

Es soll nun der nichtzentrale oder *schiefe elastische Stoß* diskutiert werden. Hierbei treten beliebige Stoßwinkel zwischen der Einfallsrichtung von Körper 1 und den Emissionsrichtungen der Teilchen 1 und 2 auf. Wie in Abb. 1.96 gezeigt ist, fliegt die Masse m_2 beim schiefen Stoß in Richtung der Stoßachse (Verbindungslinie der Mittelpunkte der beiden Massen) weg, da nur in der Stoßachsenrichtung Impuls übertragen wird. Die Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur Stoßachse bleibt unbeeinflußt, weil keine Kräfte wirken. Die Geschwindigkeitskomponente in Stoßrichtung ist $v_1 \cos \varphi$. Mit dieser läßt sich der schiefe Stoß als zentraler Stoß in Richtung der Stoßachse mit der Einschußgeschwindigkeit $v_1 \cos \varphi$ interpretieren. Für den relativen Energieübertrag gilt dann



Abbildung 1.96: Impulsdiagramm des schiefen elastischen Stoßes.

$$\frac{E_2'}{E_1} = \frac{4m_1m_2\cos^2\varphi}{(m_1+m_2)^2} . \quad (1.10.80)$$

Es gelten nach wie vor die Beziehungen (1.10.73) und (1.10.74) für die Energie- und Impulserhaltung. Für die Geschwindigkeiten ergeben sich aus diesen Beziehungen allerdings komplizierte Ausdrücke, die hier nicht im Detail diskutiert werden sollen. Im Falle gleicher Massen $m_1 = m_2$ vereinfacht sich jedoch die Ausgangsgleichung zu

$$v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2 (1.10.81)$$

und
$$\mathbf{v_1} = \mathbf{v'_1} + \mathbf{v'_2} \Rightarrow v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2 + 2|\mathbf{v'_1}||\mathbf{v'_2}|\cos(\mathbf{v'_1},\mathbf{v'_2})$$
. (1.10.82)

Beide Beziehungen lassen sich nur dann erfüllen, wenn $\cos(\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2) = 0$ bzw. $(\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2) = 90^\circ$ ist. Beispiele dafür sind der Stoß zweier Billardkugeln, die Streuung von α -Teilchen an Heliumkernen bzw. die Streuung von Protonen an Protonen. Letztere Streuprozesse von Elementarteilchen können eindrucksvoll anhand von Nebel- oder Blasenkammeraufnahmen sichtbar gemacht werden.

Der inelastische Stoß

Treten zum Zeitpunkt des Zusammentreffens zweier Körper auch nichtkonservative Kräfte auf (diese führen z.B. zu einer Deformation der Körper beim Stoß), so gilt der Energiesatz nur in seiner erweiterten Form. Wir nehmen an, daß Körper 2 vor dem Stoß ruht ($v_2 = 0$) und die Massen vor und nach dem Stoß gleich groß sind ($m_1 = m'_1$ und $m_2 = m'_2$). Aus den Gln.(1.10.73) und (1.10.74) folgt dann

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 + \Delta U$$
(1.10.83)

und
$$m_1 \mathbf{v_1} = m_1 \mathbf{v'_1} + m_2 \mathbf{v'_2}$$
 (1.10.84)

Das sind bei vorgegebenem m_1 , m_2 und $\mathbf{v_1}$ vier Gleichungen mit sechs Unbekannten in $\mathbf{v'_1}$ und $\mathbf{v'_2}$ und der zusätzlichen Unbekannten ΔU . Wenn wir Stöße zwischen makroskopischen Körpern ins Auge fassen, so ist die Reaktion endotherm und die Zunahme ΔU der inneren Energie geht zu Lasten der kinetischen Schwerpunktsenergien der einzelnen Körper. Vom Energiesatz aus gesehen sind für ΔU alle Werte in Bereich $0 \leq \Delta U \leq \frac{1}{2}m_1v_1^2$ zulässig. Der Grenzfall $\Delta U = 0$ wurde beim elastischen Stoß bereits behandelt. Der andere Grenzfall, $\Delta U = \frac{1}{2}m_1v_1^2$, ist dagegen in Wirklichkeit nicht erreichbar, da hierzu gleichzeitig $v'_1 = 0$ und $v'_2 = 0$ sein müßten, was im Widerspruch zum Impulssatz steht.

Im folgenden soll überlegt werden, wie groß ΔU maximal werden kann, um noch mit dem Impulssatz verträglich zu sein. Anschaulich ist klar, daß der maximale Wert für ΔU beim zentralen Stoß erreicht wird, da dies dem "kräftigsten" Stoß entspricht, bei dem Körper 1 den Körper 2 voll trifft. Der zentrale Stoß verläuft entlang einer Geraden und im folgenden sollen die Geschwindigkeitskomponenten entlang der Gerade einfach mit v bezeichnet werden. Aus den Beziehungen (1.10.83) und (1.10.84) erhält man dann

$$v_2' = \frac{m_1}{m_2}v_1 - \frac{m_1}{m_2}v_1' = \frac{m_1}{m_2}(v_1 - v_1')$$
 (1.10.85)

und
$$\Delta U = \frac{1}{2}m_1v_1^2 - \frac{1}{2}m_1v_1'^2 - \frac{1}{2}m_2\frac{m_1^2}{m_2^2}(v_1 - v_1')^2$$
. (1.10.86)

Den Extremalwert von ΔU finden wir aus der Bedingung $d(\Delta U)/dv'_1 = 0$ oder

$$-m_1v_1' - \frac{m_1^2}{m_2}(v_1 - v_1')(-1) = 0 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2}v_1 = v_1' + \frac{m_1}{m_2}v_1' = \frac{m_1 + m_2}{m_2}v_1' \quad (1.10.87)$$

bzw.
$$v_1' = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1$$
 (1.10.88)

Mit obigem Ausdruck für v'_2 erhält man dann

$$v_2' = \frac{m_1}{m_2}(v_1 - v_1') = \frac{m_1}{m_2}\left(v_1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}v_1\right) = \frac{m_1(m_1 + m_2) - m_1^2}{m_2(m_1 + m_2)}v_1 \quad (1.10.89)$$

bzw.
$$v_2' = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1$$
 (1.10.90)

Wir haben also das wichtige Resultat, daß der *vollkommen inelastische Stoß* mit maximalem ΔU -Wert durch

$$v_1' = v_2'$$
 (1.10.91)

charakterisiert ist. Beide Körper fliegen nach dem Stoß mit gleicher Geschwindigkeit weiter (siehe Abb. 1.97), die dann auch der Schwerpunktsgeschwindigkeit entspricht, d.h. $v'_1 = v'_2 = v_{cm}$. Beispiele für einen voll inelastischen Stoß sind z.B. der Einfang eines Neutrons in einem Atomkern oder das Steckenbleiben eines Geschosses in einem Stück Holz.



Abbildung 1.97: Der vollkommen inelastische Stoß zweier Körper mit Masse m_1 und m_2 . Die Geschwindigkeiten nach dem Stoß sind identisch, $v'_1 = v'_2 = v_{cm}$.

Zur Berechnung des maximalen ΔU Wertes setzen wir Gl.(1.10.91) in Gl.(1.10.83) ein und erhalten

$$\Delta U_{\text{max}} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 - \frac{1}{2}m_1v_1'^2 - \frac{1}{2}m_2v_2'^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{cm}^2 (1.10.92)$$

bzw.
$$\Delta U_{\text{max}} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 - \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 . \qquad (1.10.93)$$

Diese Beziehung besagt, daß allenfalls die um die Schwerpunktsenergie $\frac{1}{2}Mv_{cm}^2$ verminderte anfängliche Energie $T_1 = \frac{1}{2}m_1v_1^2$ für eine Energieumwandlung zur Verfügung steht. Wegen $u_{cm} = \frac{m_1}{m_1+m_2}v_1$ ergibt sich weiter

$$\Delta U_{\max} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \frac{m_1^2 v_1^2}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{1}{2} m_1 \left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) v_1^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_1^2$$
(1.10.94)

bzw. mit der reduzierten Masse $\mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$

$$\Delta U_{\rm max} = \frac{1}{2}\mu v_1^2 \qquad (1.10.95)$$

ΔU_{max} m_2 (1.10.96) $1 + m_1$ T_1 $+m_{2}$ $/m_{2}$ 1.0 0.8 oll inelastisch 0.6 $\Delta U_{max} / T_1$ 0.4 0.2 0.0 2 6 0 4 8 10 m_{1} / m_{2}

Für das Verhältnis von ΔU_{max} zu der anfangs zur Verfügung stehenden Energie $T_1 = \frac{1}{2}m_1v_1^2$ findet man

Abbildung 1.98: Zur Umwandlung von kinetischer in innere Energie beim inelastischen Stoß. Die durchgezogene Linie zeigt den Energieübertrag beim vollkommen inelastischen Stoß. Die getönte Fläche gibt den möglichen Wertebereich zwischen elastischem ($\Delta U/T_1 = 0$) und voll inelastischem Stoß an.

Die Funktion $\frac{\Delta U_{\text{max}}}{T_1}(m_1/m_2)$ ist in Abb. 1.98 gezeigt. Je kleiner m_1 im Vergleich zu m_2 ist, umso besser kann die kinetische Energie T_1 in innere Energie umgewandelt werden.

Experiment: Das ballistische Pendel

Eine Gewehrkugel der Masse m_1 wird mit einer Geschwindigkeit v_1 auf ein Pendel geschossen. Das Pendel soll sich in der Ruhelage befinden ($v_2 = 0$) und die Kugel soll im Pendelkörper der Masse m_2 beim Aufprall stecken bleiben (siehe Abb. 1.99). Ist die Abbremszeit der Gewehrkugel klein gegen die Schwingungsdauer des Pendels, so kann man ansetzen, daß das Pendel den gesamten Stoß in der Ruhelage $\varphi = 0$ erfährt und die Geschwindigkeit v'_2 identisch mit der Maximalgeschwindigkeit v_{\max} der harmonischen Pendelschwingung im Nulldurchgang ist (*ballistisches Pendel*). Mit der Schwingungsamplitude φ_0 und der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi/T$ ist $\varphi(t) = \varphi_0 \sin \omega t$, $d\varphi/dt = \omega \varphi_0 \cos \omega t$ und $v_{\max} = l \frac{d\varphi}{dt}(0) = l \omega \varphi_0$, wenn l die Pendellänge bedeutet. Insgesamt ergibt sich damit

$$v_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} v_2' = \frac{m_1 + m_2}{m_1} l\omega \varphi_0$$
(1.10.97)

Die Größen auf der rechten Seite lassen sich alle leicht messen, wodurch Gl.(1.10.97) eine einfache Bestimmung von Geschoßgeschwindigkeiten gestattet.

1.10.5 Stoßvorgänge im Schwerpunktsystem

Die Behandlung von Stoßprozessen wird häufig einfacher, wenn man die Vorgänge statt im Laborsystem im Schwerpunktsystem beschreibt, wie es in Abschnitt 1.10.3 eingeführt wurde. Für das Schwerpunkt-





Abbildung 1.99: Das ballistische Pendel.

system gilt für den elastischen Stoß (vergleiche Gl.(1.10.58) bis (1.10.61))⁷⁷

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{p}}_{tot} &= m_1 \tilde{\mathbf{v}}_1 + m_2 \tilde{\mathbf{v}}_2 = 0 & \text{vor dem Stoß} \\ \tilde{\mathbf{p}}'_{tot} &= m_1 \tilde{\mathbf{v}}'_1 + m_2 \tilde{\mathbf{v}}'_2 = 0 & \text{nach dem Stoß} . \end{aligned}$$
 (1.10.98)

Das heißt, die Impulse vor und nach dem Stoß sind entgegengesetzt und gleich groß. Aus diesen Beziehungen für den Impuls folgen zusammen mit dem Energieerhaltungssatz

$$\frac{1}{2}m_1\tilde{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\tilde{v}_2^2 = \frac{1}{2}m_1\tilde{v}_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\tilde{v}_2'^2$$
(1.10.100)

die Aussagen

$$\begin{aligned} |\tilde{\mathbf{v}}_{1}'| &= |\tilde{\mathbf{v}}_{1}| & |\tilde{\mathbf{v}}_{2}'| = |\tilde{\mathbf{v}}_{2}| \\ \text{und} & |\tilde{\mathbf{p}}_{1}'| &= |\tilde{\mathbf{p}}_{1}| & |\tilde{\mathbf{p}}_{2}'| = |\tilde{\mathbf{p}}_{2}| \\ \end{aligned}$$
(1.10.101) (1.10.102)

Im Schwerpunktsystem werden also die Beträge der Geschwindigkeit durch den elastischen Stoß nicht verändert. Die kinetischen Energien beider Teilchen werden somit im Schwerpunktsystem einzeln erhalten. In Abschnitt 1.10.3 wurde bereits gezeigt, daß sich die gesamte kinetischen Energie T_{tot} im Laborsystem als Summe der gesamten kinetischen Energie \tilde{T}_{tot} im Schwerpunktsystem und einem Anteil $\frac{1}{2}Mv_{em}^2$ ausdrücken läßt, der die kinetische Energie der Schwerpunktsbewegung erfaßt. Die gesamte kinetische Energie im Schwerpunktsystem ist folglich immer kleiner als diejenige im Laborsystem, $\tilde{T}_{tot} \leq T_{tot}$.⁷⁸

Aufgrund der Beziehung zwischen den Impulsen und Geschwindigkeiten vor und nach dem Stoß (Gln.(1.10.98) bis (1.10.102)) und der Geschwindigkeitstransformation zwischen Labor und Schwerpunktsystem, $\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{v}_{cm}$ (vergleiche Gl.(1.10.57)) lassen sich die Geschwindigkeiten \mathbf{v}'_1 und \mathbf{v}'_2 nach dem Stoß im Laborsystem geometrisch konstruieren (siehe Abb. 1.100).

⁷⁷Die gestrichenen Größen bezeichnen diejenigen nach dem Stoß. Die Größen im Schwerpunktsystem sind zur Unterscheidung zu denjenigen im Laborsystem wie in Abschnitt 1.10.3 mit einer Schlange versehen.

⁷⁸Für den Spezialfall $v_2 = 0$, bei dem der Körper 2 im Laborsystem vor dem Stoß ruht, erhält man $\tilde{T}_{tot} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} T_{tot}$.



Abbildung 1.100: Impulse und Geschwindigkeiten beim elastischen Stoß im Labor und Schwerpunktsystem für $v_2 = 0$. Die mit einer Schlange versehenen Größen stellen die Geschwindigkeiten und Impulse im Schwerpunktsystem dar. Die gestrichenen Größen entsprechen den Größen nach dem Stoß.

Die Endpunkte der Vektoren \tilde{v}'_1 und \tilde{v}'_2 liegen auf Kreisen um den Massenmittelpunkt mit Radien $|\tilde{v}'_1|$ und $|\tilde{v}'_2|$. Außerdem stehen \tilde{v}'_1 und \tilde{v}'_2 antiparallel zueinander. Diesen Geschwindigkeiten im Schwerpunktsystem überlagert sich im Laborsystem die Schwerpunktsgeschwindigkeit v_{cm} . Die Endpunkte von v'_1 und v'_2 liegen demnach auf dem um v_{cm} verschobenen Kreisen.



Abbildung 1.101: Impulsdiagramm des schiefen elastischen Stoßes im Laborsystem für $m_1 = m_2$ (a), $m_1 < m_2$ (b) und $m_1 > m_2$ (c).

Man unterscheidet 3 Fälle:

1. $m_1 = m_2$ (siehe Abb. 1.101a):

Aus obigen Überlegungen folgt:

$$\mathbf{v_2} = 0;$$
 $\mathbf{v_{cm}} = \frac{1}{2}\mathbf{v_1};$ $|\mathbf{\tilde{v}_1}| = |\mathbf{\tilde{v}_1}| = \frac{1}{2}|\mathbf{v_1}| = |\mathbf{\tilde{v}_2}| = |\mathbf{\tilde{v}_2}| = |\mathbf{v_{cm}}|$.

Aus Abb. 1.101a wird klar, daß der Winkel $\alpha = \vartheta_1 + \vartheta_2$ zwischen den beiden Stoßpartnern nach **Thales** stets 90° ist. Man kann ferner folgende Grenzfälle diskutieren:

- (a) Wenn $\vartheta_1 = 90^\circ$, dann ist $\vartheta_2 = 0^\circ$ und damit $\mathbf{v}'_1 \to 0$. Das heißt, m_1 ist nach dem Stoß in Ruhe (zentraler Stoß, vergleiche Abschnitt 1.10.4).
- (b) Wenn $\vartheta_1 = 0^\circ$, dann ist $\vartheta_2 = 90^\circ$ und damit $\mathbf{v}'_2 \to 0$. Das heißt, m_2 ist nach dem Stoß in Ruhe (streifender Stoß).
- 2. $m_1 < m_2$ (siehe Abb. 1.101b):

Aus obigen Überlegungen folgt:

$$|\mathbf{v}_{cm}| < \frac{1}{2}|\mathbf{v}_{1}|; \quad |\tilde{\mathbf{v}}'_{1}| = |\tilde{\mathbf{v}}_{1}| > \frac{1}{2}|\mathbf{v}_{1}|; \quad |\tilde{\mathbf{v}}'_{2}| = |\tilde{\mathbf{v}}_{2}| = |\mathbf{v}_{cm}|.$$

Der Winkel α zwischen den beiden Stoßpartnern ist in diesem Fall größer als 90^o (siehe Abb. 1.101b). Man kann wiederum folgende Grenzfälle diskutieren:

- (a) Wenn $\vartheta_1 = 180^\circ$, dann ist $\vartheta_2 = 0^\circ$ und m_1 bewegt sich nach dem Stoß rückwärts, m_2 vorwärts (zentraler Stoß).
- (b) Wenn $\vartheta_1 = 0^\circ$, dann wird $\mathbf{v}'_2 \to 0$. Das heißt, m_2 ist nach dem Stoß in Ruhe (streifender Stoß).
- 3. $m_1 > m_2$ (siehe Abb. 1.101c):

Aus obigen Überlegungen folgt:

$$|{\bf v}_{cm}| > \frac{1}{2} |{\bf v}_1|; \qquad |{\bf \tilde v}_1'| = |{\bf \tilde v}_1| < \frac{1}{2} |{\bf v}_1|; \qquad |{\bf \tilde v}_2'| = |{\bf \tilde v}_2| = |{\bf v}_{cm}| \ .$$

Man erkennt, daß in allen Fällen der Winkel $\vartheta_2 \le 90^\circ$ ist (siehe Abb. 1.101c). Man kann wiederum folgende Grenzfälle diskutieren:

- (a) Wenn $\vartheta_2 = 0^\circ$, dann wird auch $\vartheta_1 = 0^\circ$. Das heißt, m_1 und m_2 bewegen sich nach dem Stoß in Vorwärtsrichtung (zentraler Stoß).
- (b) Wenn $\vartheta_1 = 0^\circ$, dann wird $\vartheta_2 \to 0$ und m_2 bleibt nach dem Stoß in Ruhe (streifender Stoß).

Allgemein gilt für den zentralen Stoß, daß sich m_2 nach dem Stoß immer in Vorwärtsrichtung bewegt und sich m_1 nur für $m_1 < m_2$ in Rückwärtsrichtung bewegt, für $m_1 = m_2$ dagegen in Ruhe bleibt und für $m_1 > m_2$ nach vorne fliegt. Das bedeutet, daß Teilchen mit $m_1 < m_2$ in den ganzen Raum, solchen mit $m_1 = m_2$ nur in den vorderen Halbraum und schließlich solche mit $m_1 > m_2$ nur in einen Bruchteil des vorderen Halbraums gestreut werden. Der erlaubte Winkelbereich ist also abhängig vom Massenverhältnis der Stoßpartner. Durch Bestimmung des maximalen Stoßwinkels läßt sich dieses Massenverhältnis experimentell bestimmen.

1.10.6 Winkelverteilung und Wirkungsquerschnitt

Die bisherigen Betrachtungen gestatten nur kinematische Aussagen über den Zusammenhang zwischen den Impulsen bzw. Energien der Stoßpartner nach dem Stoß und den Streuwinkeln. Es konnten aber keine Aussagen über die Wahrscheinlichkeit gemacht werden, mit der die Stoßpartner unter einem bestimmten Streuwinkel auseinander fliegen. Hierzu ist die Kenntnis der Kräfte bei der Wechselwirkung der beiden Stoßpartner notwendig. Dies soll in folgendem am Beispiel zweier harter Kugeln (Billardspiel) veranschaulicht werden.



Abbildung 1.102: Zum elastischen Stoß zweier Kugeln.

Zwei Kugeln der Masse m_1 und m_2 und den Radien r_1 und r_2 stoßen, wie in Abb. 1.102 gezeigt ist, zusammen. Die Geschwindigkeiten im Schwerpunktsystem seien \tilde{v}_1 und \tilde{v}_2 . Der Abstand der beiden Geraden, auf denen die Kugelmittelpunkte aufeinander zufliegen, wird als *Stoßparameter p* bezeichnet. Beim zentralen Stoß ist p = 0 und die als Stoßachse bezeichnete Verbindungsachse der Massenmittelpunkte beim Stoß liegt parallel zur Einfallsrichtung. Beim nichtzentralen Stoß bildet die Stoßachse gegen die Einfallsrichtung den Winkel α . Aus Abb. 1.102 folgt

$$\sin \alpha = \frac{p}{r_1 + r_2} \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{1}{2}(\pi - \vartheta) \quad ,$$
 (1.10.103)

wobei ϑ der Streuwinkel im Schwerpunktsystem ist. Für den Stoßparameter folgt somit

$$p = (r_1 + r_2) \sin \alpha \tag{1.10.104}$$

und damit

$$\frac{\alpha p}{d\alpha} = (r_1 + r_2) \cos \alpha \tag{1.10.105}$$

oder

$$p \, dp = (r_1 + r_2)^2 \sin \alpha \, \cos \alpha \, d\alpha = \frac{1}{2} (r_1 + r_2)^2 \sin 2\alpha \, d\alpha \, . \, (1.10.106)$$

Daraus ergibt sich mit $\alpha = (\pi - \vartheta)/2$ und $d\alpha/d\vartheta = -1/2$

dn

$$p dp = -\frac{1}{4}(r_1 + r_2)^2 \sin \vartheta \, d\vartheta$$
 (1.10.107)

Diese Beziehung gibt den Zusammenhang zwischen Stoßparameter und Streuwinkel an. Eine Zunahme des Stoßparameters entspricht einer Abnahme des Streuwinkels. Damit die Kugeln überhaupt noch stoßen, muß $p < r_1 + r_2$ sein. Der Fall $p = r_1 + r_2$ beschreibt den streifenden Einfall. Beim Zusammenprall der Kugeln wirken entlang der Stoßachse elastische Rückstellkräfte durch eine elastische Deformation der Kugeln. Diese Kräfte führen zu einer Impulsänderung in Richtung der Stoßachse. Die Impulskomponenten senkrecht zur Stoßachse bleiben unverändert, da in dieser Richtung keine Kraft wirksam ist.



Abbildung 1.103: (a) Zur Definition der Stoßzone (getönte Fläche). Die schraffierte Fläche gibt die Größe der gesamten Zielscheibe an. Der Mittelpunkt der Scheiben entspricht dem Mittelpunkt von m_2 . (b) Zur Veranschaulichung des Raumwinkelelements $d\Omega$. Die getönte Fläche entspricht dA.

Es soll nun der der elastische Stoß einer bewegten Kugel mit einer ruhenden Kugel diskutiert werden. Die Wahrscheinlichkeit für eine Streuung der stoßenden Kugel in einen Winkelbereich zwischen ϑ und $\vartheta + d\vartheta$ ist proportional zur Fläche der sogenannten Stoßzone. Darunter versteht man die Fläche $d\sigma$ einer Ringscheibe mit Radius p und Breite dp, d.h. $d\sigma = 2\pi p dp$ (siehe Abb. 1.103a). Mit der obigen Beziehung zwischen Stoßparameter und Streuwinkel erhält man

$$d\sigma = 2\pi \frac{1}{4} (r_1 + r_2)^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, . \qquad (1.10.108)$$

Dieser Ausdruck ist ein Maß dafür, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Kugel beim Stoß in den Raumwinkelbereich zwischen ϑ und $\vartheta + d\vartheta$ gestreut wird (siehe Abb. 1.103b). Die Größe des Raumwinkelelements $d\Omega$ ergibt sich aus Abb. 1.103b zu

$$d\Omega = \frac{dA}{r^2} = \frac{2\pi r \sin \vartheta \, ds}{r^2} = \frac{2\pi r \sin \vartheta \, r \, d\vartheta}{r^2} = 2\pi \sin \vartheta \, d\vartheta \quad , \tag{1.10.109}$$

wobei dA = a ds mit dem Kreisumfang $a = 2\pi r \sin \vartheta$ und der Bogenlänge $ds = r d\vartheta$ benutzt wurde. Damit erhält man folgende Beziehung zwischen Stoßzone und Raumwinkelelement

$$d\sigma = 2\pi \frac{1}{4} (r_1 + r_2)^2 \sin \vartheta \, d\vartheta = \frac{1}{4} (r_1 + r_2)^2 d\Omega \quad . \tag{1.10.110}$$

Die Wahrscheinlichkeit für die Streuung in einen Bereich zwischen ϑ und $\vartheta + d\vartheta$ normiert auf das Raumwinkelelement $d\Omega$ heißt differentieller Wirkungsquerschnitt $d\sigma/d\Omega$ und ist gegeben durch

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4}(r_1 + r_2)^2 , \qquad (1.10.111)$$

d.h. der differentielle Wirkungsquerschnitt ist unabhängig vom Streuwinkel: Die Streuung an der ruhenden Kugel ist isotrop.

Die Wahrscheinlichkeit, daß sich überhaupt ein Stoß ereignet, erhält man durch Integration über den gesamten Raumwinkelbereich. Sie wird *totaler Wirkungsquerschnitt* σ genannt und ist gegeben durch

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \pi (r_1 + r_2)^2$$
 (1.10.112)

Der totale Wirkungsquerschnitt entspricht, wie man intuitiv erwartet, der gesamten Fläche der in Abb. 1.103a gezeigten "Zielscheibe".

Liegt ein anderes Kraftgesetz vor, so ändert sich der Ausdruck für den Wirkungsquerschnitt. So erhält man für die **Rutherford**-Streuung (Coulomb-Wechselwirkung zwischen geladenen punktförmigen Stoßpartnern) den Ausdruck

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{\sin^4 \vartheta/2} . \tag{1.10.113}$$

Es soll abschließend darauf aufmerksam gemacht werden, daß die Ausdrücke für die Wirkungsquerschnitte im Schwerpunktsystem abgeleitet wurden, während Experimente üblicherweise im Laborsystem durchgeführt werden. Zum Vergleich zwischen Experiment und Theorie müssen die experimentellen Ergebnisse deshalb immer erst ins Schwerpunktsystem umgerechnet werden.

1.11 Der Drehimpuls

Aus den **Newton**schen Axiomen läßt sich ein Erhaltungssatz für eine weitere Größe – den *Drehimpuls* ableiten. Wie der Name bereits klar macht, spielt der Drehimpuls bei Drehbewegungen eine zum Impuls bei der Translationsbewegung vergleichbare Rolle. Nach der Definition von *Drehmoment* und *Drehimpuls* wird der *Drehimpulserhaltungssatz* aufgestellt. Es soll ferner kurz skizziert werden, wie dieser Satz aus einer sehr allgemeinen Forderung nach der Invarianz des Raumes gegenüber Drehungen folgt. Abschließend wird der Drehimpulserhaltungssatz auf einige Bewegungsprobleme angewandt.

1.11.1 Drehmoment und Drehimpuls

Wir betrachten einen Massenpunkt mit Ortsvektor \mathbf{r} , an dem die Kraft \mathbf{F} angreift. Dann definiert man das *Drehmoment* \mathbf{T} der Kraft \mathbf{F} bezüglich des Bezugspunkts O (in diesem Fall des Koordinatenursprungs) als das Vektorprodukt



Abbildung 1.104: (a) Zur Definition des Drehmoments $\mathbf{T} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. (b) Das Drehmoment $\mathbf{T}_{\mathbf{P}}$ bezüglich des Raumpunktes $P: \mathbf{T}_{\mathbf{P}} = \mathbf{r}^{\mathbf{P}} \times \mathbf{F}$.

Das Drehmoment, das manchmal auch als Kraftmoment oder Torsionsmoment bezeichnet wird, steht senkrecht auf der von \mathbf{r} und \mathbf{F} aufgespannten Fläche und definiert eine Drehachse, um die die angreifende Kraft die Masse in Bewegung zu setzen sucht (siehe Abb. 1.104a). Die Richtung von \mathbf{T} gibt den Drehsinn im Sinne einer Rechtsschraube an (daher der Name Drehmoment). Mit Hilfe des Winkels α zwischen \mathbf{r} und \mathbf{F} läßt sich der Betrag des Drehmoments wie folgt ausdrücken:

$$T = F r \sin \alpha \quad . \tag{1.11.2}$$

Die Größe $b = \sin \alpha$ bezeichnet man als *Kraftarm*, wodurch der Betrag von **T** als

$$Drehmoment = Kraft \cdot Kraftarm$$
(1.11.3)

gegeben ist.

Die Einheit des Drehmoments im SI-System ergibt sich aus der Definitionsgleichung (1.11.1) zu

Die Einheit des Drehmoments ist formal mit der Einheit der Energie 1 J=1 Nm identisch. Die Benutzung der Einheit 1 J für das Drehmoment ist aber nicht üblich.

Es ist sehr wichtig, sich klar zu machen, daß das Drehmoment vom Bezugspunkt abhängt, bezüglich dessen es angegeben wird. Das Drehmoment $\mathbf{T}^{\mathbf{P}}$ in bezug auf den Raumpunkt P (siehe Abb.1.104b) ist definiert als

$$\mathbf{T}^{\mathbf{P}} := \mathbf{r}^{\mathbf{P}} \times \mathbf{F} , \qquad (1.11.5)$$

wobei $\mathbf{r}^{\mathbf{P}}$ den Verschiebungsvektor vom Bezugspunkt P zum Angriffspunkt der Kraft \mathbf{F} bezeichnet. Nach Abb.1.104b gilt

$$\mathbf{r} := \mathbf{r}_{\mathbf{P}} + \mathbf{r}^{\mathbf{P}} \tag{1.11.6}$$

und daher

$$\mathbf{T} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r}_{\mathbf{P}} \times \mathbf{F} + \mathbf{r}^{\mathbf{P}} \times \mathbf{F}$$
(1.11.7)

oder
$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_{\mathbf{P}} + \mathbf{r}_{\mathbf{P}} \times \mathbf{F}$$
 (1.11.8)

Beim Wechsel des Bezugssystems ändert sich somit auch das Drehmoment.

In enger Analogie zum "Kraftmoment" **T** führt man das "Impulsmoment" oder den *Drehimpuls* **L** ein. Hat die Masse m mit dem Ortsvektor **r** den Impuls $\mathbf{p} = m\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$, so ist der Drehimpuls definiert als

$$\mathbf{L}$$
 := $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$. (1.11.9)

Als Vektorprodukt von \mathbf{r} und \mathbf{p} steht \mathbf{L} senkrecht auf der von \mathbf{r} und \mathbf{p} aufgespannten Fläche (siehe Abb.1.105).



Die Einheit des Drehimpulses im SI-System ist definitionsgemäß



$$[L] = 1 \,\mathrm{m} \frac{\mathrm{kgm}}{\mathrm{s}} = 1 \,\mathrm{kg} \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}} \ . \tag{1.11.10}$$

Wegen $1 \text{ kg m}^2/\text{s} = 1 \text{ Nms} = 1 \text{ Js}$ hat der Drehimpuls die Dimension von Energie × Zeit. Eine Größe mit dieser Dimension nennt man eine *Wirkung*.

Kreisbewegung:

Ist die Bewegung eines Massenpunktes, wie in Abb.1.106a gezeigt, auf die *xy*-Ebene beschränkt, so verschwinden die *x*- und *y*-Komponente des Drehimpulses und man hat nur $L_z \neq 0$. Zur Beschreibung der Bewegung verwendet man zweckmäßigerweise *Kreis*oder *Polarkoordinaten* (r, φ) . Mit den Basisvektoren $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}}$ und $\hat{\mathbf{e}}_{\varphi}$, die senkrecht auf den Koordinatenlinien r = const und $\varphi = const$ stehen, läßt sich die Geschwindigkeit als $\mathbf{v} = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_{\varphi} = v_r \hat{\mathbf{e}}_r + v_{\varphi} \hat{\mathbf{e}}_{\varphi}$ ausdrücken. Aus Abb.1.106a läßt sich $v_r = dr/dt$ und $v_{\varphi} = rd\varphi/dt$ ablesen. Da der Ortsvektor \mathbf{r} parallel zu \mathbf{v}_r steht, verschwindet das Vektorprodukt $\mathbf{r} \times \mathbf{v}_r$ und man erhält

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = m\,\mathbf{r} \times \mathbf{v}_{\mathbf{r}} + m\,\mathbf{r} \times \mathbf{v}_{\varphi} = m\,\mathbf{r} \times \mathbf{v}_{\varphi} \tag{1.11.11}$$

bzw. für den Betrag des senkrecht auf der (r, φ) -Ebene stehenden Drehimpulses L

$$L = m r v_{\varphi} = m r^2 \frac{d\varphi}{dt} . \qquad (1.11.12)$$

Im Falle einer Kreisbewegung (siehe Abb.1.106b) läßt sich diese Beziehung unter Benutzung der Kreisfrequenz ω umformen. Mit $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ erhält man (wegen $\mathbf{v}_{\mathbf{r}} = 0$) $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\omega} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ und damit mit $v_{\omega} = \omega r$ den Ausdruck

$$L = m r^2 \omega . (1.11.13)$$

Da L und ω parallel zueinander sind, gilt sogar vektoriell

$$\mathbf{L} = m r^2 \boldsymbol{\omega} . \tag{1.11.14}$$

Anhand von GI.(1.11.14) kann man eine interessante Analogie zwischen einer geradlinigen und einer Kreisbewegung aufstellen. Bei einer geradlinigen gleichförmigen Bewegung ist nach dem Trägheitsgesetz der Impuls $\mathbf{p} = const$. Ähnlich hierzu ist bei einer gleichförmigen Kreisbewegung wegen $\boldsymbol{\omega} = const$ der Drehimpuls $\mathbf{L} = const$. Dies rechtfertigt die Namensgebung "Drehimpuls'.

Wie beim Drehmoment muß auch für den Drehimpuls nicht notwendigerweise der Koordinatenursprung als Bezugspunkt verwendet werden. Für einen beliebigen Bezugspunkt P erhält man

$$\mathbf{L}_{\mathbf{P}} = \mathbf{r}^{\mathbf{P}} \times \mathbf{p} \quad (1.11.15)$$

wobei $\mathbf{r}^{\mathbf{P}}$ wiederum den Vektor vom Raumpunkt P zum Massenpunkt m darstellt. Mit Gl.(1.11.6) erhält man

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{\mathbf{P}} + \mathbf{r}_{\mathbf{P}} \times \mathbf{p} , \qquad (1.11.16)$$



Abbildung 1.106: (a) Bewegung in der xy-Ebene in Kreiskoordinaten. (b) Drehimpuls bei der Kreisbewegung.

wobei $\mathbf{r}_{\mathbf{P}}$ der Ortsvektor des Bezugspunktes P ist. Der Drehimpuls ist also wie das Drehmoment abhängig vom gewählten Bezugspunkt.⁷⁹

Wir wollen im folgenden ein Inertialsystem als Bezugssystem benutzen, in dem die Newtonsche Bewegungsgleichung $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ Gültigkeit besitzt. Wir wollen zeigen, daß in einem Inertialsystem ein einfacher Zusammenhang zwischen Drehmoment und Drehimpuls besteht. Differenziert man den Ausdruck $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ nach der Zeit so erhält man unter Berücksichtigung der Produktregel der Differentiation

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} , \qquad (1.11.17)$$

da $\mathbf{v} \times m\mathbf{v} = 0$. Wegen $\mathbf{T} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ folgt somit

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad . \quad (1.11.18)$$

Die zeitliche Änderung des Drehimpulses wird also durch ein Drehmoment hervorgerufen. Aufgrund dieses Zusammenhangs kann man für die Drehbewegung eine dem 1. Newtonschen Axiom entsprechende Aussage machen:

⁷⁹Man beachte, daß die Aussage $\mathbf{L} = const$ für die gleichförmige Kreisbewegung nur dann Gültigkeit besitzt, wenn man als Bezugspunkt den Mittelpunkt der Kreisbahn gewählt hat.

Ein Körper verharrt bezüglich der Rotation im Zustand der							
Ruhe oder der gleichförmigen Kreisbewegung, wenn die							
Summe der an ihm angreifenden Drehmomente							
verschwindet:							
$\sum \mathbf{T}_{\mathbf{i}} = 0 \Rightarrow \mathbf{L} = const.$	(1.11.19)						

Durch Integration der Gl.(1.11.18) im endlichen Zeitintervall $\Delta t = t_2 - t_1$ erhält man den *Drehimpuls-stoß*⁸⁰

$$\Delta \mathbf{L} = \mathbf{L}_2 - \mathbf{L}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{T}(t) dt . \qquad (1.11.20)$$

Gibt man Drehmoment und Drehimpuls nicht bezüglich des Koordinatenursprungs sondern bezüglich des Bezugspunktes P an, so erhält man mit den Beziehungen (1.11.6) und (1.11.16)

$$\frac{d\mathbf{L}_{\mathbf{P}}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}^{\mathbf{P}} \times \mathbf{p}) = \frac{d}{dt}\left((\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\mathbf{P}}) \times \mathbf{p}\right) = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) - \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_{\mathbf{P}} \times \mathbf{p})$$

$$= \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} - \frac{d\mathbf{r}_{\mathbf{P}}}{dt} \times \mathbf{p} - \mathbf{r}_{\mathbf{P}} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

$$= 0 + \mathbf{r} \times \mathbf{F} - \frac{d\mathbf{r}_{\mathbf{P}}}{dt} \times \mathbf{p} - \mathbf{r}_{\mathbf{P}} \times \mathbf{F}$$

$$= \mathbf{T} - \mathbf{r}_{\mathbf{P}} \times \mathbf{F} - \frac{d\mathbf{r}_{\mathbf{P}}}{dt} \times \mathbf{p} = \mathbf{T}_{\mathbf{P}} - \frac{d\mathbf{r}_{\mathbf{P}}}{dt} \times \mathbf{p}$$
oder $\mathbf{T}_{\mathbf{P}} = \frac{d\mathbf{L}_{\mathbf{P}}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_{\mathbf{P}}}{dt} \times \mathbf{p}$. (1.11.21)

Danach gilt nur für einen in einem Inertialsystem ruhenden Bezugspunkt P, d.h. einen raumfesten Bezugspunkt mit $d\mathbf{r}_{\mathbf{P}}/dt = 0$, die zu Gl.(1.11.18) analoge Beziehung $\mathbf{T}_{\mathbf{P}} = d\mathbf{L}_{\mathbf{P}}/dt$.

Bewegung eines kräftefreien Massenpunktes:

Ein sehr einfaches Beispiel für die Beziehung $\mathbf{T} = d\mathbf{L}/dt$ ist ein sich kräftefrei bewegender Massenpunkt. Mit $\mathbf{F} = 0$ ist auch $\mathbf{T} = 0$ und daher $\mathbf{L} = const$. Wie Abb.1.107 zeigt, ist für einen sich in der *xy*-Ebene gleichförmig bewegenden Massenpunkt der Drehimpuls immer in *z*-Richtung orientiert und der Betrag von \mathbf{L} ist $L = r p \sin \alpha = b p = const$. Hierbei ist $b = r \sin \alpha$ der Abstand der Flugbahn vom Koordinatenursprung *O*.

Liegt ein System von *n* Massenpunkten mit Massen m_i , Ortsvektoren $\mathbf{r_i}$ und Impulsen $\mathbf{p_i}$ vor, auf die die Kräfte $\mathbf{F_i}$ einwirken, so definiert man naheliegenderweise das Gesamtdrehmoment $\mathbf{T_{tot}}$ und den Gesamtdrehimpuls $\mathbf{L_{tot}}$ als

⁸⁰Man beachte die Analogie der Beziehungen $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ und $\mathbf{T} = d\mathbf{L}/dt$ für den Zusammenhang zwischen Kraft und Impulsänderung bzw. Drehmoment und Drehimpulsänderung sowie $\Delta \mathbf{p} = \int \mathbf{F} dt$ und $\Delta \mathbf{L} = \int \mathbf{T} dt$ für den Kraftstoß bzw. Drehmomentstoß.


Abbildung 1.107: Drehimpuls bei einer kräftefreien Bewegung in der xy-Ebene.

$$\mathbf{T}_{tot} := \sum_{i=1}^{n} \mathbf{T}_{i} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_{i} \times \mathbf{F}_{i}$$
(1.11.22)

und
$$\mathbf{L}_{tot} := \sum_{i=1}^{n} \mathbf{L}_{i} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_{i} \times \mathbf{p}_{i}$$
 (1.11.23)

Entsprechend zu Gl.(1.11.18) findet man dann

$$\mathbf{T_{tot}} = \frac{d\mathbf{L_{tot}}}{dt} \quad . \quad (1.11.24)$$

Dieser Ausdruck ist analog zu der Beziehung $\mathbf{F}_{tot} = d\mathbf{p}_{tot}/dt$ zwischen Gesamtkraft und Änderung des Gesamtimpulses in einem System aus *n* Massenpunkten.

Beim Wechsel des Bezugspunktes vom Koordinatenursprung zu einem beliebigen Raumpunkt P erhält man die Verallgemeinerung von Gl.(1.11.21)

$$\mathbf{T}_{\text{tot},\mathbf{P}} = \frac{d\mathbf{L}_{\text{tot},\mathbf{P}}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_{\mathbf{P}}}{dt} \times \mathbf{p}_{\text{tot}}$$
(1.11.25)

mit dem Gesamtimpuls ptot des Systems.

1.11.2 Der Drehimpulserhaltungssatz

Wir haben im vorherigen Abschnitt gesehen, daß der Drehimpuls für eine kräftefreie Bewegung zeitlich konstant ist und damit eine Erhaltungsgröße der Bewegung darstellt. Aus der Beziehung (1.11.18) bzw. (1.11.24) kann man allgemein folgenden Erhaltungssatz für den Drehimpuls angeben:

Greifen keine äußeren Drehmomente an einem Körper an, so bleibt sein Drehimpuls zeitlich nach Betrag und Richtung konstant: $\mathbf{L} = const \quad \text{für} \quad \mathbf{T} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0 \quad . \quad (1.11.26)$ Wir wollen uns im folgenden mit der Frage beschäftigen, in welchen Fällen die Bedingung T = 0 erfüllt ist. Wie werden zeigen, daß das Drehmoment insbesondere für folgende 3 Fälle verschwindet:

Kräftefreie Bewegung

Wir haben bereits diskutiert, daß für $\mathbf{F} = 0$ das Drehmoment $\mathbf{T} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ verschwindet und damit $\mathbf{L} = const$ wird.

Zentralkräfte

Unter Zentralkräften versteht man solche Kräfte, die auf einen festen Punkt hin oder von einem festen Punkt wegzeigen. Man kann Zentralkräfte deshalb schreiben als

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) := f(\mathbf{r}) \,\hat{\mathbf{r}} \quad (1.11.27)$$

wobei $f(\mathbf{r})$ eine skalare Funktion des Positionsvektors \mathbf{r} und $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$ ist. Als Beispiel dafür haben wir die Gravitationskraft kennengelernt, für die $f(\mathbf{r}) = -Gm_1m_2/r^2$ ist. Wählt man als Bezugspunkt das Zentrum der Zentralkraft so ergibt sich mit der durch (1.11.27) gegebenen Eigenschaft von Zentralkräften $\mathbf{T} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = f(\mathbf{r}) \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{r}} = 0$ und damit

	Т	=	0		(1.11.28)
und	\mathbf{L}	=	const.	Zentralkräfte .	(1.11.29)

Das heißt, unter der Voraussetzung, daß das Kraftzentrum zum Koordinatenzentrum des Inertialsystems gemacht werden kann, erhält man für die Bewegung eines Körpers im Zentralfeld einen zeitlich konstanten Drehimpuls.



Abbildung 1.108: Die Erhaltung des Drehimpulses und der Flächensatz bei Zentralkräften.

Aus dem Drehimpulserhaltungssatz lassen sich das 1. und 2. **Kepler**sche Gesetz ableiten. Da der Drehimpuls $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ immer senkrecht auf der von \mathbf{r} und \mathbf{p} aufgespannten Ebene steht, muß sich ein Körper bei $\mathbf{L} = const$ in einer Ebene bewegen, die durch die Anfangsbedingungen $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ und $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$ zur Zeit $t = t_0$ festgelegt ist. Die Ebene steht senkrecht auf \mathbf{L} und geht durch das Kraftzentrum. Dies ist in Übereinstimmung mit dem 1. **Kepler**schen Gesetz, wonach die Planetenbahnen ebene Bahnen um die Sonne sind. Die Konstanz des Drehimpulses läßt sich anhand von Abb.1.108 leicht geometrisch interpretieren. Wenn der Planet in der Zeit dt den Weg $d\mathbf{r}$ zurücklegt, dann ist die in der Zeit dt vom Fahrstrahl überstrichene Fläche dA aufgrund der geometrischen Bedeutung des Vektorproduktes durch $dA = \frac{1}{2} |\mathbf{r} \times d\mathbf{r}|$ gegeben. Daraus folgt für die Flächengeschwindigkeit

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} |\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}| = \frac{1}{2m} |\mathbf{r} \times \mathbf{p}| = \frac{|\mathbf{L}|}{2m} , \qquad (1.11.30)$$

woraus für $\mathbf{L} = const$

$$\frac{dA}{dt} = const \tag{1.11.31}$$

folgt. Dies ist aber genau das 2. Keplersche Gesetz.

Laborexperiment zum Drehimpulserhaltungssatz:

Wie in Abb.1.109 gezeigt ist, soll sich eine Masse m reibungsfrei auf einer Unterlage mit konstantem Impuls $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ bewegen. An der Masse ist ein dünner Faden befestigt, der durch ein enges Loch in der Unterlage geführt wird. Zieht man an dem Faden, so übt man auf die Masse m eine Kraft F aus, die auf die lochförmige Öffnung in der Unterlage gerichtet ist. Das Loch stellt also das Kraftzentrum dar. Legt man den Koordinatenursprung in dieses Kraftzentrum, so verschwindet das Drehmoment T und der Drehimpuls bleibt zeitlich konstant. Zu Beginn sei die wirksame Fadenlänge r_0 und die Masse laufe auf einer Kreisbahn mit Radius r_0 mit einer Geschwindigkeit v_0 . Der Drehimpuls ist damit $L = r_0 m v_0$. Dann wird der Faden sehr langsam eingezogen, so daß in guter Näherung die Bahnkurve immer als Kreis angesehen werden kann, dessen Radius langsam schrumpft. Bei Verkürzung des Bahnradius auf r folgt aus der Konstanz des Drehimpulses $r_0 m v_0 = rmv$ oder

$$v = \frac{L}{mr} . \tag{1.11.32}$$

Bei Annäherung an das Kraftzentrum steigt also die Geschwindigkeit $\propto 1/r$ an. Die zugehörige kinetische Energie ist

$$E_{\rm kin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\frac{L^2}{m^2r^2} = \frac{L^2}{2mr^2}$$
 (1.11.33)

Je kleiner also der Bahnradius wird, umso größer wird die durch den konstanten Drehimpuls erzwungene kinetische Energie. Die Zunahme der kinetischen Energie wird durch die gegen die Zentrifugalkraft $F_{TZ} = mv^2/r$ geleistete Arbeit beim Verkürzen des Fadens aufgebracht. Ein äquivalentes Experiment kann auf einem Drehschemel durchgeführt werden. Eine Versuchsperson sitzt auf dem Drehschemel und hält zwei Gewichte mit gestreckten Armen nach außen. Der Drehschemel wird dann in eine Rotationsbewegung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit versetzt. Die Versuchsperson zieht dann die Gewichte an den Körper, wodurch der Bahnradius der Gewichte verkleinert wird. Wie bereits diskutiert wurde, nimmt dadurch die durch den konstanten Drehimpuls erzwungene kinetische Energie zu. Insgesamt erhält man eine höhere Drehgeschwindigkeit. Durch Ausstrecken der Arme kann die Drehgeschwindigkeit wieder auf den alten Wert reduziert werden. Diese Technik wird von Schlittschuhläufern ausgenutzt, um bei Pirouetten hohe Drehgeschwindigkeiten zu erreichen (siehe hierzu auch Abschnitt 2.3).

Für ein konservatives zentrales Kraftfeld lassen sich die obigenÜberlegungen noch verallgemeinern. Für ein konservatives Kraftfeld kann die Differenz der potentiellen Energie in zwei Punkten 1 und 2 durch



Abbildung 1.109: Laborexperiment zur Drehimpulserhaltung bei Zentralkräften.

 $\Delta E_{\text{pot}} = -\int_{1}^{2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ ausgedrückt werden. Für ein zentrales Kraftfeld verschwindet aber die Differenz ΔE_{pot} für zwei Punkte die auf einer Kugelschale liegen.⁸¹ Das heißt, daß die potentielle Energie auf der gesamtem Kugelschale konstant ist. Die Kugelschale stellt somit eine Äquipotentialfläche dar und die potentielle Energie $E_{\text{pot}} = V$ hängt nur vom Abstand $r = |\mathbf{r}|$ des Massenpunktes vom Kraftzentrum ab: $E_{\text{pot}} = V(r)$. Ein Beispiel hierfür ist das Gravitationspotential $V(r) = -G\frac{Mm}{r}$. Im konservativen Kraftfeld gelten nun die zwei Erhaltungssätze für die Gesamtenergie E (Summe aus kinetischer und potentieller Energie) und für den Drehimpuls L

$$E = T + V = const \tag{1.11.34}$$

und
$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = const$$
. (1.11.35)

Führt man für die ebene Bahnbewegung des Massenpunktes Polarkoordinaten ein, so wird mit $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\mathbf{r}} + \mathbf{v}_{\varphi} \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}} + v_{\varphi} \hat{\mathbf{e}}_{\varphi}$ und $v_r = dr/dt$ sowie $v_{\varphi} = rd\varphi/dt$

$$E = T + V = const = \frac{1}{2}m\left(\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right) + V(r) \quad . \tag{1.11.36}$$

Andererseits folgt aus der Drehimpulserhaltung

$$L = mr^2 \frac{d\varphi}{dt} = const . \qquad (1.11.37)$$

Substituiert man $d\varphi/dt$ aus Gl.(1.11.37) in Gl.(1.11.36), so erhält man

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) = const .$$
 (1.11.38)

⁸¹Man kann hier immer einen Integrationsweg auf der Kugelschale wählen, für den $\mathbf{F} \perp d\mathbf{s}$ und damit $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$ gilt.

In diesem Ausdruck tritt nur noch die Radialkomponente r und ihre zeitliche Ableitung dr/dt auf, weshalb dieser Ausdruck auch radiale Energiegleichung genannt wird. Wie wir in Gl.(1.11.33) gesehen haben, stellt der Term $\frac{L^2}{2mr^2}$ die kinetische Energie dar, die mit der Bewegung in der zu r orthogonalen φ -Richtung verknüpft ist. In Gl.(1.11.38) läßt sich dagegen dieser Term formal als ein Potential interpretieren, das sogenannte Zentrifugalpotential $V_Z(r)$:

$$V_Z(r) := \frac{L^2}{2mr^2} . (1.11.39)$$

Die effektive potentielle Energie ergibt sich damit zu

$$V_{\text{eff}}(r) = V(r) + V_Z(r) = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2}$$
 (1.11.40)

und aus Gl.(1.11.36) wird

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + V_{\text{eff}}(r) = const \quad .$$
 (1.11.41)

Das effektive Potential ist für das Gravitationspotential $(V(r) \propto 1/r)$ in Abb.1.110 dargestellt. Da wegen $\mathbf{F} = -\operatorname{grad} E_{\text{pot}}$ sich die Zentralkraft $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r})\hat{\mathbf{r}}$ zu

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{V_{\text{eff}}(r)}{dr}\mathbf{\hat{r}}$$
(1.11.42)

ergibt, ist die Kraft attraktiv for dV/dr > 0 (z.B. das Gravitationspotential) und repulsiv für dV/dr < 0 (z.B. das Zentrifugalpotential). Die effektive Gravitationskraft ist demnach nach Abb.1.110 für große r wie erwartet attraktiv, für kleine r dagegen überraschenderweise repulsiv. Dies liegt an der wegen $\mathbf{L} = const$ für kleine r für die Bewegung in φ -Richtung erforderlichen hohen kinetischen Energie $L^2/2mr^2$, die bei vorgegebener Gesamtenergie E aus der potentiellen Energie der Gravitation zur Verfügung gestellt werden muß und für die Bewegung in radialer Richtung keine kinetische Energie $\frac{1}{2}m\frac{d^2r}{dt^2}$ mehr übrig läßt. Dieser Sachverhalt wirkt sich wie eine Barriere für die Annäherung an das Kraftzentrum aus und man spricht deshalb von einer Zentrifugalbarriere.

Die mit dem Zentrifugalpotential verknüpfte Kraft

$$\mathbf{F}_{\mathbf{Z}}(r) = -\frac{dV_{\mathbf{Z}}(r)}{dr} = \frac{L^2}{mr^3} = \frac{m^2 r^4 (d\varphi/dt)^2}{mr^3} = mr \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{mv_{\varphi}^2}{r}$$
(1.11.43)

ist gerade die Zentrifugalkraft einer Kreisbewegung mit der Bahngeschwindigkeit ψ_{ω} und dem Radius r.

Man kann aus dem Energiediagramm in Abb.1.110 noch mehr Information über die möglichen Bewegungsformen einer Masse im Zentralpotential ablesen. So ist für E < 0 die Bewegung auf den Raumbereich zwischen zwei Kugelschalen mit Radius r_1 und r_2 eingeschränkt (gebundene Zustände). Die Radien genügen dabei der Bedingung $E = V_{\text{eff}}(r)$. Für $r < r_1$ und $r > r_2$ wäre $E < V_{\text{eff}}(r)$ und



Abbildung 1.110: Gravitationspotential V(r), Zentrifugalpotential $V_Z(r)$ und effektives Potential $V_{\text{eff}}(r)$.

damit nach Gl.(1.11.41) $\frac{1}{2}m(dr/dt)^2 < 0$, was physikalisch nicht zulässig ist. Für E > 0 resultieren ungebundene Bahnkurve, die sich bis $r = \infty$ erstrecken und für den Minimalabstand v_0 , für den $E = V_{\text{eff}}(r_0)$ gilt, einen Umkehrpunkt besitzen. Für jedes r kann man ferner $E - V_{\text{eff}}(r) = \frac{1}{2}m(dr/dt)^2$ und $E - V(r) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(v_r^2 + v_{\varphi}^2)$ ablesen. Hieraus erhält man die Geschwindigkeitskomponenten v_r und v_{φ} und damit v. Es soll hier aber nicht im Detail darauf eingegangen werden, wie man mit Hilfe der Erhaltungsgleichungen (1.11.36) und (1.11.37) die Bahnkurve berechnet. Es sei hier aber darauf hingewiesen, daß für das Gravitationspotential Kurven 2. Ordnung resultieren und zwar for E < 0 Ellipsen (1. **Kepler**sches Gesetz), für E = 0 Parabeln und für E > 0 Hyperbeln.

Abgeschlossene Systeme

Wir betrachten jetzt ein abgeschlossenes System von Massenpunkten. Der Gesamtdrehimpuls und das Gesamtdrehmoment des Systems von Massenpunkten setzt sich aus der Summe der Einzeldrehimpulse bzw. der Einzeldrehmomente zusammen:

$$\mathbf{L_{tot}} = \sum_{i} \mathbf{L_{i}} = \sum_{i} \mathbf{r_{i}} \times \mathbf{p_{i}}$$
(1.11.44)

und
$$\mathbf{T}_{tot} = \sum_{i} \mathbf{T}_{i} = \sum_{i} \mathbf{r}_{i} \times \mathbf{F}_{i}$$
 (1.11.45)

Postuliert man für die Wechselwirkungskräfte der einzelnen Massenpunkte im abgeschossenen System das 3. Newtonsche Axiom (actio=reactio), so erhält man für ein System aus zwei Massen mit $F_1 = -F_2$

$$\mathbf{T}_{tot} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 = -\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_2 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 = \mathbf{r}_{21} \times \mathbf{F}_2$$
. (1.11.46)

Da die Wechselwirkungskräfte längs der Verbindungslinie der Massen wirken, verschwindet das Vektorprodukt $\mathbf{r_{21}} \times \mathbf{F_2}$ und damit auch das Gesamtdrehmoment. Zusammen mit Gl.(1.11.24) erhält man somit

Diese Aussage kann auf ein *n*-Teilchensystem erweitert werden, was hier nicht explizit gezeigt wird. Die für das abgeschlossene System zentrale Aussage $\mathbf{L} = const$ heißt *Drehimpulserhaltungssatz*:

Der Gesamtdrehimpuls der Teilchen eines abgeschlossenen Systems bleibt erhalten: L = const.

Ähnliche Erhaltungssätze wurden bereits für die Energie (Gl.(1.9.38)) und den Impuls (Gl.(1.10.19)) formuliert.

Ist das System nicht abgeschlossen und wirken äußere Kräfte \mathbf{F}_i^\star auf die einzelnen Massen, deren Drehmomentsumme über die Einzeldrehmomente nicht verschwindet, so ist der Gesamtdrehimpuls des Systems nicht mehr zeitlich konstant und es gilt

$$\mathbf{T}_{\mathbf{tot}}^{\star} = \frac{d\mathbf{L}_{\mathbf{tot}}}{dt} \quad . \tag{1.11.49}$$

Dieser Ausdruck ist die Übertragung der Beziehung $\mathbf{F}_{tot}^{\star} = d\mathbf{p}_{tot}/dt$ für die Translationsbewegung auf die Rotationsbewegung.

Experiment zur Drehimpulserhaltung:

Eine Versuchsperson sitzt auf einem ruhenden Drehschemel. Man gibt ihr ein sich schnell drehendes Rad so in die Hand, daß dessen Achse parallel zur Drehachse des Schemels verläuft (siehe Abb. 1.111). Der Drehimpuls des Rades und damit des Gesamtsystems aus Rad, Schemel und Versuchsperson sei L. Dreht die Versuchsperson das Rad um, so ändert sich der Drehsinn und damit das Vorzeichen von L, d.h. der Drehimpuls des Rades ist jetzt -L. Da die Änderung durch ein inneres Drehmoment ausgelöst wurde, muß der Gesamtdrehimpuls des Systems konstant, d.h. +L bleiben. Die Versuchsperson erhält dadurch den Drehimpuls +2L, so daß 2L - L = L = const. Der Schemel mit der Versuchsperson beginnt sich also gegen die Drehrichtung des Rades zu drehen. Durch Zurückstellen des Rades in die Ausgangslage kommt der Schemel wieder zur Ruhe.

Die Drehimpulserhaltung kann auch dadurch demonstriert werden, daß die Versuchsperson auf dem ruhenden Drehschemel sitzt ($\mathbf{L_{tot}}=0$) und dann beginnt, ein an einem Seil befestigte Masse über dem Kopf kreisförmig zu schwingen. Das mit der Kreisbewegung der Masse verbundene Drehmoment L muß, um das Gesamtdrehmoment ($\mathbf{L_{tot}}=0$) zu erhalten, durch ein Drehmoment –L durch eine Rotation des Drehschemels in die entgegengesetzte Richtung kompensiert werden.

1.11.3 Der Drehimpuls bezüglich des Massenmittelpunktes

Wir greifen nun auf Gl.(1.11.21) und (1.11.25) zurück und berücksichtigen, daß für ein System von nMassenpunkten die inneren Kräfte \mathbf{F}_i gemäß Abschnitt 1.11.2 keinen Beitrag zum Gesamtdrehmoment $\mathbf{T}_{tot,P}$ erbringen, sondern allenfalls äußere Kräfte \mathbf{F}_i^* . Deren Drehmoment ist gegeben durch



Abbildung 1.111: Experiment zur Drehimpulserhaltung.

$$\mathbf{T}_{\mathbf{tot},\mathbf{P}}^{\star} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_{i}^{\mathbf{P}} \times \mathbf{F}_{i}^{\star} , \qquad (1.11.50)$$

wobei $\mathbf{r}_{i}^{\mathbf{P}}$ der Vektor vom Bezugspunkt P zum *i*-ten Massenpunkt ist. Dann wird

$$\mathbf{T}_{\mathbf{tot},\mathbf{P}}^{\star} = \frac{d\mathbf{L}_{\mathbf{tot},\mathbf{P}}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_{\mathbf{P}}}{dt} \times \mathbf{p}_{\mathbf{tot}}$$
(1.11.51)

mit dem Ortsvektor $\mathbf{r}_{\mathbf{P}}$ des Bezugspunkts *P*. Man ist jetzt bestrebt, den lästigen zweiten Term in dieser Gleichung durch geeignete Wahl des Bezugspunktes zu eliminieren. Für einen in einem Inertialsystem ruhenden Bezugspunkt *P* wird $d\mathbf{r}_{\mathbf{P}}/dt = 0$ und man hat sein Ziel erreicht:

$$\mathbf{T}_{\text{tot},\mathbf{P}}^{\star} = \frac{d\mathbf{L}_{\text{tot},\mathbf{P}}}{dt} \qquad (\text{P ruhend}) . \qquad (1.11.52)$$

Für eine Vereinfachung ist es am zweckmäßigsten, den Koordinatenursprung in diesen ruhenden Punkt zu legen.⁸²

Interessanterweise verschwindet der zweite Term in Gl.(1.11.51) aber auch dann, wenn als Bezugspunkt der Massenmittelpunkt gewählt wird, und zwar gleichgültig, ob dieser ruht oder sich beliebig bewegt. In diesem Fall ist der Ortsvektor $\mathbf{r_P}$ des Bezugspunktes identisch mit dem Ortsvektor $\mathbf{r_{cm}}$ des Massenmittelpunkts aus Gl.(1.10.45). Dann ist $d\mathbf{r_P}/dt = d\mathbf{r_{cm}}/dt = \mathbf{v_{cm}}$ die Geschwindigkeit des Massenmittelpunkts, die aufgrund von Gl.(1.10.49) ($\mathbf{v_{cm}} = \mathbf{p_{cm}}/M$) und Gl.(1.10.50) ($\mathbf{p_{cm}} = \mathbf{p_{tot}}$) parallel zu $\mathbf{p_{tot}}$ steht. Daher folgt ($d\mathbf{r_P}/dt \times \mathbf{p_{tot}} = 0$ und

$$\mathbf{T}_{\text{tot,cm}}^{\star} = \frac{d\mathbf{L}_{\text{tot,cm}}}{dt} . \qquad (1.11.53)$$

⁸²Beispiele hierfür werden in Kapitel 2 gegeben.

Hierbei ist

$$\mathbf{L}_{tot,cm} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\mathbf{r}}_{i} \times \mathbf{p}_{i}$$
(1.11.54)

der Gesamtdrehimpuls aller Massenpunkte im inertialen Laborsystem, wobei der Massenmittelpunkt nur als Bezugspunkt zur Berechnung des Drehimpulses verwendet wurde. Dagegen ist der Gesamtdrehimpuls im Schwerpunktsystem $\tilde{\mathbf{L}}_{tot}$ mit dem Koordinatenursprung (=Massenmittelpunkt) als Bezugspunkt gegeben durch⁸³

$$\tilde{\mathbf{L}}_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\mathbf{r}}_{i} \times \tilde{\mathbf{p}}_{i} \quad . \tag{1.11.55}$$

Mit $\mathbf{v_i} = \mathbf{\tilde{v}_i} + \mathbf{v_{cm}}$ folgt $\mathbf{p_i} = \mathbf{\tilde{p}_i} + m_i \mathbf{v_{cm}}$ und im allgemeinen wird $\mathbf{L_{i,cm}} = \mathbf{\tilde{r}_i} \times \mathbf{p_i} \neq \mathbf{\tilde{L}_i} = \mathbf{\tilde{r}_i} \times \mathbf{\tilde{p}_i}$ gelten. Überraschenderweise kann man aber für das Gesamtsystem zeigen, daß⁸⁴

$$\mathbf{L}_{\text{tot,cm}} = \tilde{\mathbf{L}}_{\text{tot}} \quad . \tag{1.11.56}$$

Durch Kombination mit Gl.(1.11.53) ergibt sich dann

$$\mathbf{T}_{\text{tot,cm}}^{\star} = \frac{d\tilde{\mathbf{L}}_{\text{tot}}}{dt} \quad (1.11.57)$$

Interessant ist hierbei, daß zur Ableitung dieser Gleichung nirgends vorausgesetzt werden muß, daß das Schwerpunktsystem ein Inertialsystem ist. Das heißt, Gl.(1.11.57) giht demnach auch bei einer beschleunigten Bewegung des Massenmittelpunktes im "momentanen" Schwerpunktsystem die zeitliche Änderung des Gesamtdrehimpulses aufgrund äußerer Kräfte an.

Für ein abgeschlossenes System mit $\mathbf{F}_{\mathbf{i}}^{\star} = 0$ wird

 $\tilde{\mathbf{L}}_{tot} = const$ (abgeschlossenes System) . (1.11.58)

Die Bewegung des Schwerpunktes wird durch Gl.(1.10.53)

$$\mathbf{F}_{\mathbf{tot}}^{\star} = \frac{d\mathbf{p}_{\mathbf{tot}}}{dt} = \frac{d\mathbf{p}_{\mathbf{cm}}}{dt}$$
(1.11.59)

beschrieben. Zusammen mit den Gln.(1.11.53) und (1.11.57) hat man damit eine Beschreibung für die Bewegung eines Systems von Massenpunkten als ganzes gefunden. Man berechnet zunächst anhand von Gl.(1.11.59) die Translationsbewegung des Massenmittelpunktes, um dann mit Gl.(1.11.53) und (1.11.57) die durch den Gesamtdrehimpuls $L_{tot,cm}$ bzw. \tilde{L}_{tot} global erfaßte Drehung des Systems um

⁸³Hierbei werden die Größen im Schwerpunktsystem wiederum mit einer Schlange versehen.

⁸⁴Dies soll an dieser Stelle nicht explizit bewiesen werden.

den Massenmittelpunkt im inertialen Laborsystem bzw. im momentanen Schwerpunktsystem zu finden. Anwendungsbeispiele hierfür werden in Kapitel 2 bei der Behandlung der Mechanik des Starren Körpers diskutiert.

Abschließend wollen wir noch den Zusammenhang zwischen dem Drehimpuls \mathbf{L}_{tot} im Laborsystem und $\tilde{\mathbf{L}}_{tot}$ im Schwerpunktsystem herstellen, wobei wir jeweils den Koordinatenursprung als Bezugspunkt wählen wollen. Aus Gl.(1.11.16) folgt mit dem Bezugspunkt P = CM für den Ortsvektor $\mathbf{r}_{P} = \mathbf{r}_{cm}$ und nach Summation über alle Massenpunkte zunächst $\mathbf{L}_{tot} = \mathbf{L}_{tot,cm} + \mathbf{r}_{cm} \times \mathbf{p}_{tot}$. Ferner ist der Gesamtimpuls \mathbf{p}_{tot} identisch mit dem Impuls des Massenmittelpunkts \mathbf{p}_{cm} und man erhält wegen $\mathbf{L}_{tot,cm} = \tilde{\mathbf{L}}_{tot}$

$$\mathbf{L}_{tot} = \tilde{\mathbf{L}}_{tot} + \mathbf{r}_{cm} \times \mathbf{p}_{cm}$$
 . (1.11.60)

Danach ist der Gesamtdrehimpuls im Laborsystem die Summe aus dem Gesamtdrehimpuls $\tilde{\mathbf{L}}_{tot}$ im (nicht notwendigerweise inertialen) Schwerpunktsystem und dem Drehimpuls $\mathbf{r}_{cm} \times \mathbf{p}_{cm}$ der Schwerpunktsbewegung. Da $\tilde{\mathbf{L}}_{tot}$ im wohldefinierten Schwerpunktsystem der Massenpunkte angegeben wird und insoweit eindeutig ist, nennt man $\tilde{\mathbf{L}}_{tot}$ auch den *Eigendrehimpuls* des Systems oder – insbesondere bei Elementarteilchen – den *Spin*. Dagegen heißt $\mathbf{r}_{cm} \times \mathbf{p}_{cm}$ der *Bahndrehimpuls* des Systems, dessen Größe von der speziellen Wahl des Bezugssystems abhängt.

Erhaltungs- größe	Energie	Impuls	Drehimpuls
Erhaltungs- satz	$E_{tot} = T + V = const$ (konservative Kräfte) bzw. $E_{tot} = V + T + Q = const$ (nichtkonservative Kräfte)	$\mathbf{p_{tot}} = const$	$\mathbf{L_{tot}} = const$
oder	$dE_{tot}/dt = 0$	$d\mathbf{p_{tot}}/dt = 0 = \mathbf{F_{tot}}$	$d\mathbf{L_{tot}}/dt = 0 = \mathbf{T_{tot}}$
folgt aus	Homogenität der Zeit	Homogenität des Raumes	Isotropie des Raumes
Vorausset- zung	abgeschlossenes System	freies System: kein Einwirken äußerer Kräfte: $\sum \mathbf{F}_{i}^{\star} = 0$	freies System: kein Einwirken äußerer Drehmomente: $\sum \mathbf{T}_{i}^{\star} = 0$
für abge- schlossenes System:	$dE_{tot} = d(T+V) = 0$	$\mathbf{F_{tot}} = \sum \mathbf{F_i} = 0$	$\mathbf{T_{tot}} = \sum \mathbf{T_i} = 0$
bei Ein- wirken von äußeren	$dE_{\rm pot} = \mathbf{F}^{\star} \cdot d\mathbf{s}$	$d\mathbf{p_{tot}}/dt = \mathbf{F_{tot}^{\star}} = \sum \mathbf{F_i^{\star}}$	$ \begin{aligned} d\mathbf{L_{tot, \mathbf{P}}}/dt &= \mathbf{T_{tot, \mathbf{P}}^{\star}} \\ \sum_{i} \mathbf{r_{i}^{\mathbf{P}}} \times \mathbf{F_{i}^{\star}} \\ (\text{für } P \text{ ruhend}) \end{aligned} $
Kiatten.			$d\mathbf{L}_{tot,cm}/dt = d\tilde{\mathbf{L}}_{tot}/dt = \mathbf{T}_{tot,cm}^{\star} = \sum \tilde{\mathbf{r}}_{i} \times \mathbf{p}_{i}$ (für Massenmittelpunkt)
	$\Delta E_{\text{pot}} = \int \mathbf{F}^{\star} \cdot d\mathbf{s} = W_{21}^{\star}$ (Energieänderung durch Arbeit äußerer Kräfte)	$\Delta \mathbf{p_{tot}} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F_{tot}}^{\star} dt$ (Kraftstoß)	$\Delta \mathbf{L}_{tot} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{T}_{tot}^{\star} dt$ (Drehimpulsstoß bei ruhen- dem Bezugspunkt)

1.12 Zusammenfassung der Erhaltungssätze der Mechanik

Tabelle 1.1: Zusammenfassende Darstellung der Erhaltungssätze der Mechanik.

Kapitel 2

Mechanik des Starren Körpers

In der Mechanik der Massenpunkte wurde bereits mehrfach von der Vorstellung Gebrauch gemacht, daß ein makroskopischer Körper aus vielen Massenpunkten aufgebaut ist. In diesem Kapitel idealisieren wir einen Festkörper als einen *starren Körper* mit definiertem Volumen und definierter Gestalt. Man kann folgende Definition für einen starren Körper angeben:

Ein starrer Körper ist ein System von Massenpunkten, bei dem die Relativabstände der einzelnen Massenpunkte auch unter der Einwirkung von Kräften unverändert bleiben.

Technisch läßt sich zwar ein ideal starrer Körper nicht realisieren, aber in vielen Fällen ist der starre Körper eine gute Näherung.

In diesem Kapitel untersuchen wir in der Statik die Gleichgewichtsbedingungen und in der Dynamik die Bewegungsformen starrer Körper unter dem Einfluß äußerer Kräfte.

2.1 Der Starre Körper

Wir übertragen zunächst eine Reihe von Beziehungen, die in der Mechanik der Massenpunkte aufgestellt wurden, auf den speziellen Fall des starren Körpers. Insbesondere werden wir mit diesen Beziehungen die Bewegungsgleichungen für den starren Körper ableiten. Hierbei werden Formeln für die potentielle Energie und das Drehmoment eines starren Körpers in einem konstanten Gravitationsfeld aufgestellt, die uns zur Deutung des Massenmittelpunktes als *Schwerpunkt* führen.

Ist ein starrer Körper mit Masse m und Volumen V räumlich homogen, so kann ihm eine konstante Massendichte

$$\rho := \frac{m}{V} \qquad [\rho] = 1 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$
(2.1.1)

zugeordnet werden. Beispiele für Massendichten sind $\rho = 1.000 \times 10^3 \text{kg/m}^3$ für Wasser, $\rho = 5.500 \times 10^3 \text{kg/m}^3$ für die mittlere Massendichte der Erde, $\rho = 19.30 \times 10^3 \text{kg/m}^3$ für Uran und $\rho \simeq 10^{17} \text{kg/m}^3$ für die Dichte von Atomkernen.

Für einen räumlich inhomogenen starren Körper ist es zweckmäßig, den Körper in einzelne Volumenelemente dV aufzuteilen, die einerseits so groß sind, daß sie viele Atome enthalten, und andererseits so klein sind, daß die Massenverteilung innerhalb von dV als homogen angesehen werden kann. Die in dVenthaltene Masse dm ist dann

$$dm = \rho dV \tag{2.1.2}$$

mit

$$\rho := \frac{dm}{dV} \tag{2.1.3}$$

als lokale Massendichte eines inhomogenen starren Körpers

2.1.1 Bewegungsgleichungen und Freiheitsgrade

Unter der Zahl der *Freiheitsgrade* eines Körpers versteht man in der Mechanik die Zahl von unabhängigen Parameter, die zur Festlegung der Lage und Orientierung eines Körpers im Raum notwendig ist. So hat ein im Raum frei beweglicher Massenpunkt 3 Freiheitsgrade, ein auf einer Fläche frei beweglicher Massenpunkt dagegen nur noch 2 Freiheitsgrade und ein entlang einer Raumkurve frei beweglicher Massenpunkt nur einen Freiheitsgrad. Für die Festlegung eines Systems von *n* Massenpunkten im Raum benötigt man 3n unabhängige Parameter, das heißt, dieses System besitzt 3n Freiheitsgrade. Die Zahl der Freiheitsgrade eines frei beweglichen starren Körpers ist dagegen wesentlich kleiner, da alle Massenpunkte starr miteinander verbunden sind. Wir ermitteln die Zahl der Freiheitsgrade anhand von Abb. 2.1. Greift man sich willkürlich einen Massenpunkt 1 heraus, so hat dieser 3 Freiheitsgrade. Ein zweiter Massenpunkt 2 kann sich dann lediglich auf einer Kugel um 1 als Mittelpunkt bewegen, da der relative Abstand von 1 und 2 in einem starren Körper konstant ist. Der Körperpunkt 2 besitzt demnach nur noch 2 Freiheitsgrade. Schließlich kann sich ein dritter Massenpunkt 3 nur noch auf einem Kreis um die Verbindungslinie 1 - 2 bewegen (Schnittlinie zweier Kugeln) und liefert somit nur noch einen zusätzlichen



Abbildung 2.1: Zur Ableitung der Zahl der Freiheitsgrade eines starren Körpers.

Freiheitsgrad. Alle weiteren Punkte sind durch die herausgegriffenen drei (nicht-kollinearen) Massenpunkte festgelegt. Daher hat der frei bewegliche starre Körper nur 3 + 2 + 1 = 6 Freiheitsgrade. Wird dagegen ein Körperpunkt festgehalten, so verbleiben nur noch 2 + 1 = 3 Freiheitsgrade, und bei einer vorgegebenen festen Drehachse lediglich ein einziger Freiheitsgrad.

Mit obiger Überlegung läßt sich die Bewegung eines starren Körpers in eine *Translationsbewegung* und eine *Rotationsbewegung* unterteilen. Bei einer Translation wird der Körper parallel zu sich selbst verschoben, d.h. die Differenz der Anfangs- und Endvektoren aller Massenpunkte ist durch einen einheitlichen Verschiebevektor $\Delta \mathbf{r}$ gegeben (siehe Abb. 2.2a). Der zeitliche Bewegungsablauf ist eine Aufeinanderfolge von infinitesimalen Verschiebungen $d\mathbf{r}$, die sich im allgemeinen zu einer gekrümmten Bahnkurve addieren. Nach Vorgabe der Raumkurve eines beliebigen Körperpunktes P laufen alle anderen Körperpunkte auf parallel versetzten, aber ansonsten identischen Bahnen. Für die Beschreibung der Translationsbewegung sind 3 Freiheitsgrade notwendig.

Unter der Rotation eines starren Körpers versteht man eine Bewegungsform, bei der sich alle Massenpunkte auf Kreisbahnen um eine feste Drehachse und zwar um den gleichen Winkel $\Delta \varphi$ bewegen. Der Körper ändert zwar seine Orientierung im Raum, die Punkte auf der Drehachse bleiben aber raumfest. Man kann jede Bewegung eines starren Körpers um einen festen Raumpunkt P als Rotation um eine feste Drehachse mit geeignetem Drehwinkel $\Delta \varphi$ darstellen.¹ Wenn wir – ohne Angabe eines strengen Beweises – dieses **Euler**sche Theorem übernehmen, dann läßt sich in der Tat jede Bewegung eines starren Körpers als eine Überlagerung einer Translation und einer Rotation beschreiben.²

Eine weitere Schwierigkeit bei der Beschreibung von Drehbewegungen besteht darin, daß es nicht gelingt, endliche Drehungen mit Drehkoordinaten zu erfassen, die eine ähnliche Symmetrie wie die kartesischen Lagekoordinaten (x, y, z) eines Raumpunktes besitzen.³ Dagegen ist es üblich, die Orientierung bzw. Rotation eines starren Körpers mit den **Euler**schen Winkeln (θ, φ, ψ) zu beschreiben. Zur Definition verwendet man ein im Bezugspunkt P liegendes raumfestes Koordinatensystem (x, y, z) sowie ein zweites im Körper verankertes "körperfestes" Koordinatensystem (x', y', z'), dessen Ursprung mit P zusammenfällt. Wie aus Abb. 2.3 ersichtlich ist, ist dadurch die Orientierung des Körpers im Raum festgelegt und zwar durch die Winkel (θ, φ) für die Raumrichtung der körperfesten z'-Achse und den Winkel ψ für die Drehung um die z'-Achse. Man kann dieser Konstruktion insbesondere entnehmen, daß die Orientierung bzw. Rotation des starren Körpers durch 3 Freiheitsgrade charakterisiert ist.

¹Dies ist keineswegs trivial aber aus Abb. 2.2b anschaulich klar.

²Der zeitliche Bewegungsablauf bei der Rotation ist anschaulich schwieriger nachzuvollziehen. Ähnlich wie die einzelnen infinitesimalen Translationen $d\mathbf{r}$ nicht entlang der globalen endlichen Translation $\Delta \mathbf{r}$ verlaufen müssen, dreht sich bei der Rotation der Körper um eine *momentane* Drehachse um einen infinitesimalen Drehwinkel $d\varphi$, wobei i.a. die momentane Drehachse sowohl im Raum als auch relativ zum Körper wandert. Die Endlage des Körpers kann man aber aus der Anfangslage durch eine Rotation um eine einzige Drehachse mit endlichem $\Delta \varphi$ hervorgehen lassen.

³Darauf wurde bereits im Abschnitt 1.1 hingewiesen.



Abbildung 2.2: Translationsbewegung (a) und Rotationsbewegung (b) eines starren Körpers.



Abbildung 2.3: Die Eulerschen Winkel.

Wir haben bereits im Abschnitt 1.8.2 diskutiert, daß im Gegensatz zu endlichen Drehbewegungen infinitesimale Drehungen durch axiale Vektoren darstellbar sind. Im folgenden werden die im Bewegungsablauf der Rotation auftretenden momentanen Drehachsen mit dem Vektor ω der Winkelgeschwindigkeit beschrieben. Hierbei gibt ω die Lage der Drehachse, den Drehsinn (Rechte-Hand-Regel) und die Änderungsgeschwindigkeit $d\varphi/dt$ des Drehwinkels an. Die Dynamik des frei beweglichen starren Körpers ist im allgemeinen dadurch erschwert, daß die momentane Winkelgeschwindigkeit ω nach Größe und Richtung weder raum- noch körperfest ist.

Es soll jetzt die Bewegungsgleichung für einen frei beweglichen starren Körper aufgestellt werden. Die Bewegung ist vollständig bestimmt, wenn die 6 Freiheitsgrade durch 6 Bewegungsgleichungen abgedeckt sind. Um diese zu finden, wählen wir einen im Körper fest verankerten Bezugspunkt P, bezüglich dessen wir die Translation und die Rotation angeben. Es stellt eine wesentliche Vereinfachung dar, ist aber keineswegs zwingend, wenn man als Bezugspunkt den Massenmittelpunkt CM aus Abschnitt 1.10 wählt (siehe Abb. 2.4). Mit der Masse m_i und dem Ortsvektor $\mathbf{r_i}$ des *i*-ten Massenpunktes ist der Ortsvektor $\mathbf{r_{cm}}$ des Massenmittelpunktes durch

$$\mathbf{r_{cm}} = \frac{\sum m_i \mathbf{r_i}}{\sum m_i} = \frac{1}{M} \sum m_i \mathbf{r_i}$$
(2.1.4)

gegeben, wobei die Summation über alle Massenpunkte zu erstrecken ist und $M = \sum m_i$ die Gesamtmasse des Körpers angibt. Da der starre Körper aus sehr vielen Massenpunkten aufgebaut ist, ist es zweckmäßig, den Körper in einzelne Volumenelemente dV aufzuteilen, die einerseits so groß sind, daß sie viele Atome enthalten, und andererseits so klein sind, daß die Massenverteilung innerhalb von dV als homogen angesehen werden kann. An Stelle der Massenpunkte m_i in Gl.(2.1.4) tritt das Massenelement dm und aus der Summation wird eine Integration:

$$\mathbf{r_{cm}} = \frac{1}{M} \int \mathbf{r} \,\rho \, dV \quad . \tag{2.1.5}$$

Hierbei ist **r** der Ortsvektor des Massen- bzw. Volumenelements dm bzw. dV. Im allgemeinen schwankt die Massendichte, d.h. $\rho = \rho(\mathbf{r})$. Nur im Falle eines homogenen Körpers ist $\rho = const$ und kann vor das Integral gezogen werden.



Abbildung 2.4: Die Bewegung eines starren Körpers als Überlagerung von Translation (Geschwindigkeit v_{cm}) und Rotation (Winkelgeschwindigkeit ω) mit dem Massenmittelpunkt CM als Bezugspunkt.

Die Translationsbewegung vcm des Massenmittelpunkts und damit aller Körperpunkte ist

$$\mathbf{v_{cm}} = \frac{d\mathbf{r_{cm}}}{dt} \quad . \tag{2.1.6}$$

Der Gesamtimpuls des Körpers als Summation bzw. Integration über alle Einzelimpulse $m_i \mathbf{v_i}$ bzw. $\mathbf{v}(\mathbf{r})dm$ ist nach Gl.(1.10.50) gleich dem Schwerpunktsimpuls $\mathbf{p_{cm}} = M\mathbf{v_{cm}}$, den wir künftig einfach als Impuls des Körpers bezeichnen werden. Mit der am Körper angreifenden äußeren Kraft \mathbf{F}_{tot}^* als Summe bzw. Integral der Einzelkräfte an den Massenpunkten m_i bzw. Massenelementen dm ergibt sich (vergleiche Gl.(1.10.51))

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p_{cm}}}{dt} , \quad (2.1.7)$$

wobei die von außen angreifende Gesamtkraft im folgenden einfach mit $\mathbf{F} := \mathbf{F}_{tot}^{\star}$ bezeichnet wird. Die Impulsgleichung (2.1.7) ist die gesuchte Bewegungsgleichung für die Translationsbewegung des starren Körpers. Als Vektorgleichung faßt sie drei unabhängige Bewegungsgleichungen für die drei Freiheitsgrade der Translation zusammen. Sie besagt, daß die mit dem Bezugspunkt *CM* beschriebene Translationsbewegung so erfolgt, wie wenn die Gesamtkraft \mathbf{F} am Massenmittelpunkt angreifen würde, in dem die Gesamtmasse des Körpers vereinigt zu denken ist.

Die Bewegungsgleichung für die Rotationsbewegung um den Massenmittelpunkt CM ist die Drehimpulsgleichung. Um diese Behauptung einzusehen, legen wir ein zum Inertialsystem (x, y, z) achsenparalleles System $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ in den Massenmittelpunkt CM, das dann von der Translationsbewegung mitgeführt wird (siehe Abb. 2.4). Mit CM als Bezugspunkt ist das Gesamtdrehmoment der äußeren Kräfte $\mathbf{T_{cm}} := \mathbf{T_{tot,cm}^{\star}}$ gleich der Summe der Einzelmomente $\tilde{\mathbf{r}} \times d\mathbf{F}$, wobei $d\mathbf{F}$ die am Massenelement dm angreifende äußere Kraft darstellt. Entsprechend liefert die Summation bzw. Integration über die Einzeldrehimpulse $\tilde{\mathbf{r}}_{i} \times \tilde{\mathbf{p}}_{i} = \tilde{\mathbf{r}}_{i} \times m_{i}\tilde{\mathbf{v}}_{i}$ bzw. $\tilde{\mathbf{r}} \times d\tilde{\mathbf{p}} = \tilde{\mathbf{r}} \times \tilde{\mathbf{v}} dm$ den Gesamtdrehimpuls $\tilde{\mathbf{L}} := \tilde{\mathbf{L}_{tot}$ im translatorisch bewegten CM-System. Die Drehimpulsgleichung (1.11.57) wird dann zu

$$\mathbf{T_{cm}} = \frac{d\tilde{\mathbf{L}}}{dt} \quad (2.1.8)$$

Es sei an dieser Stelle nochmals darauf hingewiesen, daß nur mit dem Massenmittelpunkt als Bezugspunkt die Drehimpulsgleichung unabhängig von der Bewegung des Bezugspunktes diese einfache Form annimmt (vergleiche hierzu die Diskussion in Abschnitt 1.11.3). Die Interpretation der Drehimpulsgleichung ist schwieriger als die der Impulsgleichung. Jedenfalls regelt (2.1.8) die Rotationsbewegung des Körpers um den Massenmittelpunkt. Zu jedem Zeitpunkt ist die Rotation durch eine Winkelgeschwindigkeit ω charakterisiert, die mit den für den Drehimpuls $\tilde{\mathbf{L}}$ benötigten Geschwindigkeiten $\tilde{\mathbf{v}}$ gemäß Gl.(1.8.32) über die Beziehung

$$\tilde{\mathbf{v}} = \boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}}$$
 (2.1.9)

verknüpft ist. Damit stellt letztlich Gl.(2.1.8) die Bewegungsgleichung für ω , also die Rotation, dar. Als Vektorgleichung faßt sie wiederum 3 unabhängige Gleichungen für die 3 Freiheitsgrade der Rotation zusammen.

Insgesamt bilden Gl.(2.1.7) und (2.1.8) ein vollständiges Gleichungssystem für die Beschreibung der Bewegung eines starren Körpers unter der Einwirkung äußerer Kräfte. Falls F von der Rotations- und T_{cm} von der Translationsbewegung abhängig ist (z.B. beim Bumerang), sind beide Gleichungen miteinander gekoppelt und es gelingt nur in Sonderfällen eine geschlossene Lösung anzugeben. Sind Translationsund Rotationsbewegung dagegen entkoppelt, so ist die Impulsgleichung $F = d\mathbf{p}_{cm}/dt$ ein einfaches Problem der Punktmechanik. Dagegen ist die Drehimpulsgleichung selbst in diesem Fall nicht allgemein geschlossen lösbar (Kreiselproblem).

Die kinetische Energie des starren Körpers läßt sich mit dem Massenmittelpunkt als Bezugspunkt (vergleiche hierzu Gl.(1.10.61)) in

$$T = \tilde{T} + \frac{1}{2}Mv_{cm}^2$$
 (2.1.10)

aufspalten. Dabei ist

$$T_{\rm trans}$$
 := $\frac{1}{2}Mv_{cm}^2$ (2.1.11)

die kinetische Energie, die mit der Translationsbewegung des Massenmittelpunktes verknüpft ist, und

$$T_{\rm rot} := \tilde{T}$$
 (2.1.12)

die kinetische Energie der Rotation um den Massenmittelpunkt. Ein Hauptziel der folgenden Abschnitte ist es, explizite Ausdrücke für $T_{\rm rot}$ abzuleiten.

Die innere Energie U des starren Körpers enthält neben T_{rot} noch die potentielle Energie der Wechselwirkung der Massenpunkte m_i bzw. der Massenelemente dm untereinander (vergleiche Gl.(1.10.63)). In der Näherung des starren Körpers ist allerdings die Wechselwirkungsenergie konstant und kann daher außer Betracht bleiben. Dagegen müssen wir in der Bilanz der Gesamtenergie E noch die potentielle Energie mitberücksichtigen, die der Körper in einem äußeren Kraftfeld (z.B. dem Gravitationsfeld) hat. Für die Gesamtenergie E des frei beweglichen starren Körpers erhält man somit

$$E = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + T_{\rm rot} + E_{\rm pot}$$
 . (2.1.13)

Abschließend wollen wir noch die Bewegungsgleichung eines starren Körpers diskutieren, der einen raumfesten Punkt P besitzt (z.B. die in einer Führung aufsitzende Spitze eines Kreisels). Die allgemeinste Bewegungsform ist eine Rotation (3 Freiheitsgrade) um den ruhenden Punkt P. Es ist in diesem Fall zweckmäßig, den ruhenden Punkt P als Bezugspunkt zu wählen. Die Bewegungsgleichung ist dann die Drehimpulsgleichung (1.11.52) und man erhält

$$\mathbf{T}_{\mathbf{P}} = \frac{d\mathbf{L}_{\mathbf{P}}}{dt} \quad . \quad (2.1.14)$$

Mit der momentanen Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ ist die Geschwindigkeit \mathbf{v} eines Massenpunktes mit dem vom Punkt P aus gemessenen Ortsvektor $\mathbf{r}^{\mathbf{P}}$ durch $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}^{\mathbf{P}}$ gegeben. Die Gesamtenergie wird

$$E = T_{\rm rot} + E_{\rm pot}$$
, (2.1.15)

wobei $T_{\rm rot}$ jetzt abweichend zu Gl.(2.1.13) die kinetische Energie der Rotation um den Bezugspunkt P bedeutet.⁴

2.1.2 Der Schwerpunkt

In diesem Abschnitt soll der Schwerpunkt eines starren Körpers eingeführt werden und eine Beziehung zu dem in Kapitel 1 eingeführten Massenmittelpunkt hergestellt werden. Im Gravitationsfeld $\mathbf{f}_{\mathbf{G}}(\mathbf{r})$ wirkt auf das Massenelement dm eines starren Körpers die äußere Kraft $d\mathbf{F} = \mathbf{f}_{\mathbf{G}} dm$. Befindet sich der Körper in einem Bereich, in dem $\mathbf{f}_{\mathbf{G}} = const$ ist, so erhält man die am Körper angreifende Gewichtskraft $\mathbf{F}_{\mathbf{G}}$, das *Gewicht* des Körpers, durch Integration über alle Massenelemente

⁴Die Translationsenergie verschwindet für einen ruhenden Bezugspunkt.



Abbildung 2.5: (a) Drehmoment eines starren Körpers im Gravitationsfeld: $\mathbf{T}_{\mathbf{G}} = \mathbf{r}_{\mathbf{cm}} \times \mathbf{F}_{\mathbf{G}}$. (b) Potentielle Energie eines starren Körpers im konstanten Gravitationsfeld: $E_{\text{pot}} = MgH$.

$$\mathbf{F}_{\mathbf{G}} = \left(\int dm\right) \mathbf{f}_{\mathbf{G}} = M \mathbf{f}_{\mathbf{G}} \quad . \tag{2.1.16}$$

Hierbei ist $M = \int dm$ die Gesamtmasse des Körpers. Ebenso läßt sich das Drehmoment $\mathbf{T}_{\mathbf{G}}$ angeben, das der Körper im konstanten Schwerefeld erfährt (siehe Abb. 2.5a). Es ist

$$\mathbf{T}_{\mathbf{G}} = \int \mathbf{r} \times d\mathbf{F}_{\mathbf{G}} = \int \mathbf{r} \times (dm) \mathbf{f}_{\mathbf{G}} = \left(\int \mathbf{r} dm\right) \times \mathbf{f}_{\mathbf{G}}$$
(2.1.17)

und mit Gl.(2.1.5) für den Ortsvektor rcm des Massenmittelpunktes erhält man

$$\mathbf{T}_{\mathbf{G}} = M\mathbf{r}_{\mathbf{cm}} \times \mathbf{f}_{\mathbf{G}} = \mathbf{r}_{\mathbf{cm}} \times M \mathbf{f}_{\mathbf{G}} = \mathbf{r}_{\mathbf{cm}} \times \mathbf{F}_{\mathbf{G}} \quad . \tag{2.1.18}$$

Danach berechnet sich das Drehmoment des starren Körpers im Schwerefeld gerade so, als ob die Gesamtmasse M des Körpers im Massenmittelpunkt vereinigt wäre. Daher nennt man den Massenmittelpunkt auch *Schwerpunkt*. Aus Gl.(2.1.18) folgt weiter, daß daß das Drehmoment T_G bezüglich des Schwerpunkts verschwindet: für ein im Schwerpunkt verankertes Bezugssystem ist $\tilde{\mathbf{r}}_{cm} = 0$ und damit auch $T_{G,cm} = 0$. Diese Aussage läßt sich zu einer allgemeinen Definition des Schwerpunkts erweitern:

> Der Schwerpunkt eines Körpers ist der Punkt, bezüglich dessen das Drehmoment in einem Gravitationsfeld verschwindet.

Wichtig ist, daß der so definierte Schwerpunkt nur dann mit dem Massenmittelpunkt CM zusammenfällt, wenn das Gravitationsfeld räumlich konstant ist.

Der Schwerpunkt spielt auch für die potentielle Energie eines Körpers in einem konstanten Gravitationsfeld eine ausgezeichnete Rolle. Anhand von Abb. 2.5b und Gl.(1.9.48) ist die potentielle Energie des Massenelements dm, das sich in der Höhe h über einer normal zur Fallbeschleunigung g stehenden Bezugsebene befindet, durch $dE_{pot} = (dm)gh$ gegeben. Durch Integration über alle Massenelemente erhält man dann

$$E_{\rm pot} = \int (dm)gh = g \int h \, dm$$
 . (2.1.19)

Nach Gl.(2.1.5) ist nun die Höhe H des Massenmittelpunkts durch

$$H = \frac{1}{M} \int h \, dm \quad \text{bzw.} \quad \int h \, dm = M \, H \tag{2.1.20}$$

gegeben, woraus

$$E_{\rm pot} = M g H \tag{2.1.21}$$

folgt. Analog zum Schweremoment T_G berechnet sich also auch die potentielle Energie eines Körpers im konstanten Gravitationsfeld so, als ob die Gesamtmasse im Schwerpunkt vereinigt wäre.



Abbildung 2.6: Stabiles und labiles Gleichgewicht.

2.2 Statik des starren Körpers

In der Statik betrachtet man einen Zustand, in dem alle Körperpunkte bezüglich eines geeigneten Inertialsystems ruhen. Die Bedingungen, unter denen dieser Zustand beibehalten wird, nennt man *Gleichgewichtsbedingungen*. In Abschnitt 1.9.4 hatten wir abgeleitet, daß im statischen Gleichgewicht die Gesamtkraft $\mathbf{F_i}$ (als Summe der inneren und äußeren Kräfte) auf jeden einzelnen Massenpunkt verschwinden muß: $\mathbf{F_i} = 0$ (Gl.(1.9.67)). Unterliegen die Massenpunkte noch Zwangsbedingungen, so müssen zu den äußeren Kräften noch die Zwangskräfte $\mathbf{f_i}$ dazugerechnet werden: $\mathbf{F_i} + \mathbf{f_i} = 0$ (Gl.(1.9.71)). Bei *n* Massenpunkten sind das jeweils *n* vektorielle Gleichungen.

2.2.1 Gleichgewicht

Bei der Statik des starren Körpers mit nur 6 Freiheitsgraden genügt es, die Gleichgewichtsbedingung für die Translation und die Rotation anzugeben. Die Forderung, daß im Gleichgewicht keine Beschleunigungen auftreten dürfen, führt auf $d\mathbf{p}/dt = 0$ und $d\mathbf{L}/dt = 0$. Aus den Bewegungsgleichungen für die Translation und Rotation (Gln.(2.1.7) und (2.1.8)) liest man dann folgende Gleichgewichtsbedingungen der Statik ab

 $\mathbf{F} = 0$ und $\mathbf{T} = 0$ (Gleichgewicht) . (2.2.1)

Hierbei ist **F** die Summe aus äußeren eingeprägten Kräften (z.B. Gravitationskräften) und Zwangskräften und entsprechend ist **T** das äußere Gesamtdrehmoment. Man muß beachten, daß die inneren Kräfte zwischen den einzelnen Massenpunkten eines starren Körpers nicht in die Bewegungsgleichungen des starren Körpers eingehen und deshalb völlig außer Betracht gelassen werden können. Die inneren Kräfte sorgen sozusagen nur für die "Starrheit" des Körpers. Unter den Bedingungen von Gl.(2.2.1) verharrt ein starrer Körper mit $\mathbf{P} = 0$ und $\mathbf{L} = 0$ im Ruhezustand.

Wir betrachten nun einen Körper, der an einem körperfesten Punkt P unterstützt wird, ansonsten aber frei beweglich sein soll (siehe Abb. 2.6). Es gibt drei Positionen, in denen der Körper im Schwerefeld im Gleichgewicht ist:

1. Der Schwerpunkt CM befindet sich lotrecht unter dem Unterstützungspunkt P. In diesem Fall ist $\mathbf{r_{cm}} \| M \mathbf{g}$ und damit ist $\mathbf{T_G} = \mathbf{r_{cm}} \times M \mathbf{g} = 0$, d.h. es herrscht Gleichgewicht. Bei einer kleinen

Auslenkung aus dieser Gleichgewichtsposition tritt ein Drehmoment $\mathbf{T}_{\mathbf{G}} = \mathbf{r}_{\mathbf{cm}} \times M\mathbf{g}$ auf, das den Körper wieder in die Ruhelage zurücktreibt. Man spricht deshalb von *stabilem Gleichgewicht*.

- 2. Der Schwerpunkt CM befindet sich lotrecht über dem Unterstützungspunkt P. In diesem Fall ist $\mathbf{r_{cm}} \parallel (M\mathbf{g})$. Es ist zwar wiederum $\mathbf{T_G} = \mathbf{r_{cm}} \times M\mathbf{g} = 0$, d.h. es herrscht Gleichgewicht, bei einer kleinen Auslenkung aus dieser Gleichgewichtsposition treibt das auftretende Drehmoment $\mathbf{T_G} = \mathbf{r_{cm}} \times M\mathbf{g}$ den Körper aber nicht mehr in die Ruhelage zurück. Man spricht deshalb von *labilem Gleichgewicht*.
- 3. Der Schwerpunkt CM fällt mit dem Unterstützungspunkt P zusammen. In diesem Fall verschwindet wegen $\mathbf{r_{cm}} = 0$ das Drehmomnet $\mathbf{T_G}$, d.h. jede Drehposition des Körpers ist im Gleichgewicht. Man spricht hier von einem *indifferenten Gleichgewicht*.

Experiment: Bestimmung des Schwerpunkts

Aus der obigen Betrachtung folgt sofort ein Verfahren zur experimentellen Bestimmung des Schwerpunkts eines starren Körpers. Der Körper wird frei beweglich aufgehängt. Sein Schwerpunkt versucht dann, die stabile Lage unterhalb des Aufhängepunktes einzunehmen. Durch zweimaliges Aufhängen an verschiedenen Punkten findet man den Schwerpunkt als Schnittpunkt der beiden Lote, die durch die Aufhängepunkte gehen.

Experiment: Kippen eines Schrankes

Versucht man einen Schrank über eine Kante zu kippen, bedeutet das ein Anheben seines Schwerpunktes (siehe Abb. 2.7). Es wirkt ein Drehmomnent T_G , das den Schrank so lange in seine alte Stellung zurückzukippen versucht, wie das Lot des Schwerpunktes sich noch innerhalb der Unterstützungsfläche befindet. Ist das Lot außerhalb, wirkt ein Drehmoment, das den Schrank umzukippen versucht.



Abbildung 2.7: Drehmomente beim Kippen eines Schrankes. Die y-Achse zeigt in die Papierebene hinein.

Wir haben bisher die Gleichgewichtsbedingungen für einen starren Körper als Bedingungen für die Kräfte und Drehmomente formuliert. Dabei sind neben den äußeren eingeprägten Kräften auch die Zwangskräfte zu berücksichtigen. Im Abschnitt 1.9.4 wurde dagegen die Gleichgewichtsbedingung eines Systems als "Prinzip der virtuellen Arbeit" gefaßt. Es besagt, daß im Gleichgewicht die Arbeit der inneren und äußeren Kräfte bei virtuellen Verrückungen δ s verschwindet, wobei allerdings die Verrückungen den Zwangsbedingungen genügen müssen (vergleiche Gl.(1.9.74)). Bei dieser Formulierung der Gleichgewichtsbedingung war wesentlich, daß die Zwangskräfte für sich genommen keine virtuelle Arbeit

leisten, die Zwangskräfte also außer Betracht gelassen werden können. Für einen starren Körper ergibt sich die weitere Vereinfachung, daß die inneren Kräfte keine Arbeit leisten könne, da die dazu erforderlichen Verrückungen der einzelnen Massenelemente gegeneinander bei einem starren Körper nicht zulässig sind. Beim starren Körper verschwindet deshalb die virtuelle Arbeit der äußeren eingeprägten Kräfte für sich allein. Sind schließlich die äußeren Kräfte konservativ und aus einem Potential ableitbar, so besagt Gl.(1.9.75), daß im Gleichgewicht

$\delta E_{\rm pot}$	=	0	(Gleichgewicht)	(2.2.2)
-				

ist. Das heißt, die potentielle Energie der eingeprägten Kräfte nimmt im Gleichgewicht ein Extremum an.

Als Beispiel hierfür kann nochmals Abb. 2.6 betrachtet werden. Anhand des Ausdrucks für die potentielle Energie, $E_{pot} = MgH$ des Körpers im Gravitationsfeld erkennt man, daß die Extremalwerte der Höhenkoordinate H, die der Schwerpunkt im labilen und stabilen Gleichgewicht einnimmt, jeweils zu einem Extremum der potentiellen Energie führen. Die stabile Gleichgewichtslage entspricht dabei einem Minimum, die labile Gleichgewichtslage einem Maximum der potentiellen Energie.

2.2.2 Balkenwaage und Hebel

Hebel und Hebelgesetze

Die Gleichgewichtsbedingungen finden Anwendung in den Hebelgesetzen. Hierzu betrachten wir den in Abb. 2.8a gezeigten *Hebel*, der in einem raumfesten Punkt unterstützt wird und an dessen Hebelarmen $\mathbf{r_1}$ und $\mathbf{r_2}$ die Kräfte $\mathbf{F_1}$ und $\mathbf{F_2}$ angreifen sollen. In Abb. 2.8a ist ferner angenommen, daß die Kräfte vertikal gerichtet sind und die Gewichtskräfte des Hebels vernachlässigt werden können. Die Gleichgewichtsbedingung für die Rotation $\mathbf{T} = 0$ besagt, daß die Drehmomente $\mathbf{T_1} = \mathbf{r_1} \times \mathbf{F_1}$ und $\mathbf{T_2} = \mathbf{r_2} \times \mathbf{F_2}$ sich zu Null addieren müssen. Für die Beträge der Momente muß also gelten

$$|\mathbf{T}_1| = |\mathbf{T}_2|$$
 bzw. $|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1| = |\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2|$. (2.2.3)

Deutet man den Betrag des Drehmoments wie in Abschnitt 1.11.1 als Produkt aus Kraft F und Kraftarm b, so lautet die Gleichgewichtsbedingung am Hebel

$$F_1b_1 = F_2b_2 (2.2.4)$$

Diese Beziehung nennt man das Hebelgesetz, das sich in Worten als

$$Kraft \cdot Kraftarm = Last \cdot Lastarm$$
 (2.2.5)

formulieren läßt. Am längeren Hebel kann man also mit kleinerem Karftaufwand einer größeren Kraft das Gleichgewicht halten. Die Stützkraft f (Zwangskraft) im Lagerpunkt erhält man aus der Bedingung $\mathbf{F} = \mathbf{f} + \mathbf{F_1} + \mathbf{F_2} = 0.$

Experiment: Mehrarmiger Hebel

Mit Hilfe eines mehrarmigen Hebels läßt sich einfach zeigen, daß es für die Gleichgewichtsbedingung nur auf den senkrechten Abstand zwischen Kraftrichtung und Drehpunkt ankommt.



Abbildung 2.8: (a) Gleichgewichtsbedingung am Hebel. (b) Gleichgewichtsbedingung für die Balkenwaage.

Balkenwaage

Die Balkenwaage wird zur vergleichenden Messung von Gewichtskräften und dadurch von Massen verwendet. Sie besteht, wie in Abb. 2.8b gezeigt ist, aus einem dreiarmigen Hebel. Im raumfesten Drehpunkt der Waage kommen zwei Hebel der Länge l, die den Waagebalken der Länge 2l bilden, und ein weiterer Hebel für den Zeiger der Waage zusammen. Die Masse von Zeiger und Balken bezeichnen wir als M. Für die Bestimmung von Drehmomenten denken wir uns M im partiellen Schwerpunkt CMvereinigt. Aus Symmetriegründen liegt der Schwerpunkt im Zeiger und sein Abstand von dem Waagebalken sei s. Die Masse von Waagschale und Wägegut fassen wir zu $(m + \Delta m)$ bzw. m zusammen. Im Gleichgewicht muß die Summe der links und rechts drehenden Momente, die vektoriell gesehen aus der Zeichenebene heraus oder in die Zeichenebene hinein zeigen, betragsmäßig gleich groß sein, um insgesamt $\mathbf{T} = 0$ zu liefern. Mit dem Neigungswinkel bzw. Zeigerausschlag φ der Waage ergibt sich daher anhand von Abb. 2.8b

$$(m + \Delta m) g (l \cos \varphi) = m g (l \cos \varphi) + M g (s \sin \varphi) . \qquad (2.2.6)$$

Für kleine Neigungswinkel folgt daraus

$$\varphi \approx \tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{l}{Ms} \Delta m$$
 (2.2.7)

Im Gegensatz zum zweiarmigen Hebel gerät der dreiarmige Hebel nicht beim kleinsten von Δm verursachten Übergewicht aus dem Gleichgewicht. Vielmehr ist der Zeigerausschlag φ proportional zum "Übergewicht" Δm auf einer Waagschale. Der Proportionalitätsfaktor wird als *Empfindlichkeit* ϵ der Waage bezeichnet. Es ist

$$\epsilon := \frac{\varphi}{\Delta m} = \frac{l}{Ms} . \tag{2.2.8}$$

Eine Waage ist also umso empfindlicher, je stärker sie bei vorgegebenem Übergewicht ausschlägt. Um eine hohe Empfindlichkeit zu erreichen, muß man gemäß Gl.(2.2.8) lange und massearme Waagbalken verwenden, sowie bei der Konstruktion den Abstand *s* klein halten.⁵

⁵Es soll hier aber darauf hingewiesen, daß sich bei realen Waagen der Waagbalken durchbiegt. Die Empfindlichkeit der Waage hängt dann auch von der Gesamtbelastung, die den Grad der Durchbiegung ausmacht, ab.

2.3 Dynamik des starren Körpers bei fester Drehachse

Der Übergang von der Statik zur Dynamik eines starren Körpers soll in mehreren Stufen vollzogen werden. Dabei braucht die reine Translationsbewegung nicht diskutiert werden, da sie sich nicht von der eines Massenpunktes unterscheidet. Wir beginnen mit der nach der Translation einfachsten Bewegung, der Rotation eines starren Körpers um eine nach Lage und Orientierung fest vorgegebene Drehachse. Mit Hilfe der Bewegungsgleichung $\mathbf{T} = d\mathbf{L}/dt$ berechnen wir zunächst den Drehimpuls, der mit der Drehung um die vorgegebene Achse verknüpft ist, was uns auf den Begriff des *Trägheitsmoments* führen wird. Anschließend werden Arbeit und Energie bei Drehbewegungen diskutiert. Nach der Bestimmung der Trägheitsmomente einfacher Körper wird dann der **Steiner**sche Satz abgeleitet. Als Anwendungsbeispiele sollen die *Drehschwingung* und das *Physikalische Pendel* diskutiert werden.

2.3.1 Das Trägheitsmoment

Bei vorgegebener ortsfester Drehachse kann ein Körper als einzige Bewegungsform eine Rotation um diese Achse ausführen. Wählt man als Bezugspunkt P einen beliebigen Punkt auf der Drehachse, so ist dieser Punkt raumfest. Die Bewegungsgleichung ist dann (vergleiche (2.1.14)) durch

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad (2.3.1)$$

gegeben. Zur Auswertung der Bewegungsgleichung suchen wir einen geschlossenen Ausdruck für L. Nach Abb. 2.9 bewegt sich bei der starren Rotation jeder Massenpunkt m bzw. Massenelement dm mit Ortsvektor r auf einer raumfesten Kreisbahn um die Achse. Die Drehachse geht durch den Mittelpunkt diesen Kreises und steht normal zur Bahnebene. Die Geschwindigkeit v eines jeden Massenpunktes ist bei gegebener Winkelgeschwindigkeit ω durch

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \tag{2.3.2}$$

gegeben. Die Geschwindigkeit steht also immer senkrecht auf ω und damit auf der Drehachse. Mit dem Impuls $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ eines Massenpunktes erhält man dessen Drehimpuls $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$. Wie in Abb. 2.9 gezeigt, zerlegt man der Ortsvektor in eine Komponente \mathbf{r}_{\parallel} und \mathbf{r}_{\perp} parallel und senkrecht zur Drehachse und man erhält

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = (\mathbf{r}_{\parallel} + \mathbf{r}_{\perp}) \times \mathbf{p} = \mathbf{r}_{\parallel} \times \mathbf{p} + \mathbf{r}_{\perp} \times \mathbf{p} .$$
(2.3.3)

Da v $\|\mathbf{p} \text{ ist } \mathbf{p} \perp \boldsymbol{\omega} \text{ und man entnimmt Abb. 2.9, daß } (\mathbf{r}_{\parallel} \times \mathbf{p}) \perp \boldsymbol{\omega} \text{ und } (\mathbf{r}_{\perp} \times \mathbf{p}) \|\boldsymbol{\omega} \text{ ist. Man hat damit eine zu } \mathbf{r} = \mathbf{r}_{\parallel} + \mathbf{r}_{\perp} \text{ analoge Komponentenzerlegung für den Drehimpuls gefunden:}$

$$\mathbf{l} = \mathbf{l}_{\parallel} + \mathbf{l}_{\perp} \quad \text{mit} \quad \mathbf{l}_{\perp} = \mathbf{r}_{\parallel} \times \mathbf{p} \quad \text{und} \quad \mathbf{l}_{\parallel} = \mathbf{r}_{\perp} \times \mathbf{p} \quad .$$
 (2.3.4)

Danach hat der Drehimpuls l interessanterweise sowohl eine Komponente parallel als auch senkrecht zur Drehachse, die zur Folge hat, daß l nicht parallel zu ω ist. Bei einer gleichförmigen Rotation ($\omega = const$) ist zwar wegen $|\mathbf{r}_{\perp}| = const$ und $|\mathbf{p}| = const$ auch $\mathbf{l}_{\parallel} = const$, dagegen ist aber $\mathbf{l}_{\perp} \neq const$.



Abbildung 2.9: Der Drehimpuls des starren Körpers bei fester Drehachse.

Die Komponente \mathbf{l}_{\perp} steht vielmehr antiparallel zu \mathbf{r}_{\perp} und läuft daher mit der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ um die Drehachse. Betragsmäßig ist aber $|\mathbf{l}_{\perp}| = const$ und im zeitlichen Mittel ist deshalb $\langle \mathbf{l}_{\perp} \rangle = 0$. Entsprechend ist der gesamte Drehimpuls des umlaufenden Massenpunktes zeitlich konstant.

Durch Summation der Beiträge der einzelnen Massenpunkte erhält man den Gesamtdrehimpuls des starren Körpers zu

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{\parallel} + \mathbf{L}_{\perp} , \qquad (2.3.5)$$

wobei wiederum $\mathbf{L}_{\parallel} = const$ und $\mathbf{L}_{\perp} \neq const$. Das heißt, damit ist auch $\mathbf{L} \neq const$ und insbesondere ist der Gesamtdrehimpuls nicht parallel zu $\boldsymbol{\omega}$. Dies stellt im Vergleich zur Translation, wo $\mathbf{p}_{cm} || \mathbf{v}_{cm}$ ist, eine erhebliche Erschwerung der Diskussion der Drehbewegung dar. Wir werden allerdings im nächsten Abschnitt zeigen, daß es für jeden Körper drei ausgezeichnete Achsen gibt, für die sich die Einzelbeiträge \mathbf{l}_{\perp} gegenseitig kompensieren und damit $\mathbf{L}_{\perp} = 0$ und damit $\mathbf{L} = \mathbf{L}_{\parallel} || \boldsymbol{\omega}$ wird.

Wir diskutieren nun den Zusammenhang zwischen \mathbf{L}_{\parallel} und $\boldsymbol{\omega}$. Die Integration über alle Massenelemente dm liefert

$$\mathbf{L}_{\parallel} = \int \mathbf{r}_{\perp} \times \mathbf{v} \, dm \quad . \tag{2.3.6}$$

Mit $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ und $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{||} + \mathbf{r}_{\perp}$ ergibt sich

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_{\parallel} + \mathbf{r}_{\perp}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\perp} , \qquad (2.3.7)$$

da $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\parallel} = 0$. Nach Einsetzen von (2.3.7) in (2.3.6) ist der Term $\mathbf{r}_{\perp} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\perp})$ auszuwerten. Anhand von Abb. 2.9 ist klar, daß ($\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\perp}$) normal auf der von $\boldsymbol{\omega}$ und \mathbf{r}_{\perp} aufgespannten Ebene steht und $\mathbf{r}_{\perp} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\perp})$ parallel zu $\boldsymbol{\omega}$ gerichtet ist. Für die Beträge gilt

$$|\mathbf{r}_{\perp} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\perp})| = |\mathbf{r}_{\perp}| \cdot |(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\perp})| = |\mathbf{r}_{\perp}| \cdot |\boldsymbol{\omega}| \cdot |\mathbf{r}_{\perp}| = r_{\perp}^{2} \boldsymbol{\omega} .$$
(2.3.8)

Insgesamt wird dadurch

$$\mathbf{L}_{\parallel} = \int \mathbf{r}_{\perp} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\perp}) \, dm = \int r_{\perp}^2 \boldsymbol{\omega} \, dm \quad .$$
 (2.3.9)

Da bei der Rotation eines starren Körpers alle Massenelemente die gleiche Winkelgeschwindigkeit besitzen, kann ω vor das Integral gezogen werden. Mit dem *Trägheitsmoment I*

$$I = \int r_{\perp}^2 dm \qquad (2.3.10)$$

des starren Körpers erhält man schließlich

$$\mathbf{L}_{\parallel} = I \boldsymbol{\omega} . \quad (2.3.11)$$

Bei fester Drehachse ist wegen $\mathbf{r}_{\perp} = const$ das Trägheitsmoment eines starren Körpers ebenfalls eine Konstante, die die Massenverteilung des Körpers um die Drehachse charakterisiert. Ein und derselbe Körper hat aber für verschiedene Drehachsen unterschiedliche Trägheitsmomente. Das Trägheitsmoment übernimmt als Proportionalitätskonstante zwischen Drehimpuls und Winkelgeschwindigkeit bei der Rotationsbewegung die Rolle der trägen Masse als Proportionalitätskonstante zwischen Impuls und Geschwindigkeit bei der Translationsbewegung. Da I > 0 ist \mathbf{L}_{\parallel} immer parallel zu $\boldsymbol{\omega}$.

Die Einheit des Trägheitsmoments im SI-System ist

$$[I] = 1 \text{ kg m}^2 . \tag{2.3.12}$$

Analog zu Gl.(2.3.9) kann man für die Drehimpulskomponente L_{\perp} den Ausdruck

$$\mathbf{L}_{\perp} = \left(-\int r_{\parallel} \mathbf{r}_{\perp} dm\right) \omega \qquad (2.3.13)$$

ableiten, der schwieriger zu interpretieren ist, da der Klammerterm zeitlich nicht konstant ist.

Entsprechend zum Drehimpuls zerlegen wir jetzt das am Körper wirksame Drehmoment \mathbf{T} in eine Komponente \mathbf{T}_{\parallel} parallel und \mathbf{T}_{\perp} senkrecht zur Drehachse, so daß

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_{\parallel} + \mathbf{T}_{\perp} \quad . \tag{2.3.14}$$

Die Komponente $\mathbf{T}_{||}$ kann dabei parallel oder antiparallel zu $\boldsymbol{\omega}$ sein. Aus der Bewegungsgleichung (2.3.1) folgt dann unter der Randbedingung, daß bei fester Achse $\mathbf{T}_{||}$ bzw. \mathbf{T}_{\perp} nur auf $\mathbf{L}_{||}$ bzw. \mathbf{L}_{\perp} einwirken können

$$\mathbf{T}_{\parallel} = \frac{d\mathbf{L}_{\parallel}}{dt} \text{ und } \mathbf{T}_{\perp} = \frac{d\mathbf{L}_{\perp}}{dt}$$
 (feste Achse) . (2.3.15)

Da bei fester Drehachse ferner I zeitlich konstant ist, erhält man durch Einsetzen von (2.3.11) in (2.3.15)

$$\mathbf{T}_{\parallel} = I \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$$
 (feste Achse) . (2.3.16)

Bei fester Achse hat der starre Körper nur einen Freiheitsgrad, der kinematisch durch die Komponente der Winkelgeschwindigkeit in Achsenrichtung eindeutig charakterisiert ist. Aus $\boldsymbol{\omega} = \omega \hat{\boldsymbol{\omega}}$ folgt wegen $d\hat{\boldsymbol{\omega}}/dt = 0$ (feste Achse) für die Winkelgeschwindigkeit $d\boldsymbol{\omega}/dt = (d\omega/dt)\hat{\boldsymbol{\omega}} + \omega d\hat{\boldsymbol{\omega}}/dt = (d\omega/dt)\hat{\boldsymbol{\omega}}$. Mit $\mathbf{T}_{\parallel} = T_{\parallel}\hat{\boldsymbol{\omega}}$ erhält man also für die Komponenten in $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ -Richtung

$$T_{\parallel} = I \frac{d\omega}{dt}$$
 (feste Achse) . (2.3.17)

Diese Gleichung beschreibt, wie das Drehmoment der am Körper angreifenden äußeren Kräfte eine Winkelbeschleunigung $d\omega/dt$ hervorruft. Die Komponente \mathbf{T}_{\perp} hat die Tendenz die Drehachse zu verkippen und kann deshalb bei vorgegebener fester Drehachse nicht zur Geltung kommen. Gl.(2.3.17) stellt somit bereits die volle Bewegungsgleichung dar.

Die in Abb. 2.10 gezeigte Komponentenzerlegung für den Ortsvektor und die angreifende Kraft macht klar, daß zum Drehmoment \mathbf{T}_{\parallel} nur der Term $\mathbf{r}_{\perp} \times \mathbf{F}_{\perp}$ beiträgt. Für alle Massenpunkte zusammengenommen ist $\mathbf{T}_{\parallel} = \int \mathbf{r}_{\perp} \times d\mathbf{F}_{\perp}$. Diese Überlegung macht deutlich, daß ein ideales Drehlager (keine Reibung) wegen $\mathbf{F}_{\perp} = 0$ kein Drehmoment \mathbf{T}_{\parallel} liefert. Dagegen sind im allgemeinen von den Lagern bereitzustellende Zwangskräfte mit $\mathbf{T}_{\perp} \neq 0$ notwendig, um gemäß Gl.(2.3.15) das bei der Rotation auftretende $d\mathbf{L}_{\perp}/dt \neq 0$ zu kompensieren. In der Technik wird dies als "Unwucht" des rotierenden Körpers bezeichnet, die bei entsprechender Stärke zu einer Zerstörung der Lager führen kann.

Für verschwindendes \mathbf{T}_{\parallel} erhält man für einen rotierenden Körper $\mathbf{L}_{\parallel} = const$, d.h. die Drehimpulskomponente in Drehachsenrichtung bleibt zeitlich konstant und der Körper rotiert gleichförmig mit $\boldsymbol{\omega} = const$. Die Bedingung $\mathbf{T}_{\parallel} = 0$ ist außer bei der kräftefreien Bewegung auch für eine Bewegung im Gravitationsfeld erfüllt, falls der Schwerpunkt auf der Drehachse liegt.



Abbildung 2.10: Zum Drehmoment des starren Körpers bei fester Drehachse.

Die Pirouette

Eine Anwendung der Konstanz von \mathbf{L}_{\parallel} bei $\mathbf{T}_{\parallel} = 0$ ist die Pirouette. Bei $\mathbf{L}_{\parallel} = I\omega$ ist für I = const auch $\omega = const$. Eine Eiskunstläuferin ist aber kein starrer Körper, sie kann vielmehr ihr Trägheitsmoment um die vertikale Körperachse variieren. Dies tut sie durch Ausstrecken und Anlegen der Arme. Bei ausgestreckten Armen ist I groß (da r_{\perp} groß), bei an den Körper angeschmiegten Armen ist I dagegen klein. Bei der Pirouette holt man mit ausgestreckten Armen "Drehschwung", d.h. man erzeugt einen bestimmten Drehimpuls $\mathbf{L}_{\parallel} = I\omega$ um die vertikale Körperachse. Da beim Heranziehen der Arme $\mathbf{T}_{\parallel} = 0$ ist, bleibt \mathbf{L}_{\parallel} erhalten. Die Verringerung von I muß sich deshalb in einer Zunahme von ω manifestieren.

Derselbe Effekt kann auch auf einem Drehschemel demonstriert werden. Eine Versuchsperson sitzt auf dem Drehschemel und hält zwei Gewichte mit gestreckten Armen nach außen. Der Drehschemel wird dann in eine Rotationsbewegung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit versetzt ($\mathbf{L}_{\parallel} = const$). Die Versuchsperson zieht dann die Gewichte an den Körper, wodurch wegen $\mathbf{L}_{\parallel} = const$ das Trägheitsmoment verkleinert und die Winkelgeschwindigkeit erhöht wird. Durch Ausstrecken der Arme kann die Drehgeschwindigkeit wieder auf den alten Wert reduziert werden.

2.3.2 Arbeit und Energie

Mit Hilfe der Definitionsgleichung für die Arbeit, $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ (vergleiche (1.9.8)) wollen wir jetzt die bei der Rotation von den äußeren Kräften geleistete Arbeit berechnen. Für jedes Massenelement steht das Wegelement $d\mathbf{r}$ senkrecht zur Rotationsachse (siehe Abb. 2.11). Zerlegt man die Kraft \mathbf{F} in eine Komponente \mathbf{F}_{\parallel} parallel und \mathbf{F}_{\perp} senkrecht zur Drehachse, so kann deshalb nur die Komponente \mathbf{F}_{\perp} zur Arbeit beitragen: $dW = \mathbf{F}_{\perp} \cdot d\mathbf{r}$. Diese Kraftkomponente gibt aber auch Anlaß zur einem Drehmoment $\mathbf{T}_{\parallel} = \mathbf{r}_{\perp} \times \mathbf{F}_{\perp}$ in der Drehachse. Man sieht also, daß die Arbeit dW mit dem Drehmoment \mathbf{T}_{\parallel} verknüpft ist.

Um den genauen Zusammenhang zwischen dW und \mathbf{T}_{\parallel} abzuleiten, muß man berücksichtigen, daß für die gesamte am Körper verrichtete Arbeit über alle Beiträge $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ der einzelnen Massenelemente dm aufsummiert werden muß:

$$dW = \sum \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad . \tag{2.3.18}$$

Mit $d\mathbf{s} = d\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}$ (vergleiche (1.8.30)), wobei $d\boldsymbol{\varphi}$ der infinitesimale Drehvektor in der Achse ist, erhält man

$$dW = \sum \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \sum \mathbf{F} \cdot (d\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}) = -\sum \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r} \times d\boldsymbol{\varphi}) \quad . \tag{2.3.19}$$

Mit der Vektoridentität $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ ergibt sich nach Umformen

$$dW = -\sum \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r} \times d\varphi) = -\sum (\mathbf{F} \times \mathbf{r}) \cdot d\varphi = \sum (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \cdot d\varphi \quad . \tag{2.3.20}$$

Der Drehvektor $d\varphi$ ist hierbei im Gegensatz zu $d\mathbf{r}$ für alle Massenelemente gleich und kann deswegen aus der Summe herausgezogen werden, so daß $dW = (\sum (\mathbf{r} \times \mathbf{F})) \cdot d\varphi$. Der Ausdruck in Klammern ist aber gerade das gesamte am Körper wirksame Drehmoment und man erhält

$$dW = \mathbf{T} \cdot d\boldsymbol{\varphi} \quad . \tag{2.3.21}$$

Mit $\mathbf{T}_{\perp} \cdot d\boldsymbol{\varphi} = 0$ erhält man schließlich den Ausdruck

$$dW = \mathbf{T}_{\parallel} \cdot d\boldsymbol{\varphi} , \qquad (2.3.22)$$

der die Verknüpfung von dW und \mathbf{T}_{\parallel} angibt.

Mit $d\varphi/dt = \omega$ erhält man durch Differenzieren von (2.3.22) nach der Zeit die von den Kräften verrichtete Leistung

$$P = \frac{dW}{dt} = \mathbf{T}_{\parallel} \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (2.3.23)$$

Diese Gleichung entspricht der Beziehung (1.9.15) für die Leistung $P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ einer Kraft an einem bewegten Massenpunkt.

Die Arbeit W_{21} , die bei einer Drehung von der Anfangslage φ_1 bis zur Endlage φ_2 an einem Körper verrichtet wird, erhält man durch Integration von Gl.(2.3.22) zu

$$W_{21} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \mathbf{T} \cdot d\boldsymbol{\varphi}$$
 . (2.3.24)

Wir wollen nun die kinetische Energie der Rotationsbewegung T_{rot} eines Körpers um eine feste Achse diskutieren. Die *Rotationsenergie* erhält man dabei als die Summe der kinetischen Energien $T = \frac{1}{2}mv^2$ der einzelnen Massenpunkte. Mit $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\perp}$ und $|\mathbf{v}| = v = |\boldsymbol{\omega}||\mathbf{r}_{\perp}| = \omega r_{\perp}$ und mit der Tatsache, daß ω für alle Massenpunkte identisch ist, ergibt sich

$$T_{\rm rot} = \sum \frac{1}{2} m v^2 = \sum \frac{1}{2} m r_{\perp}^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \left(\sum m r_{\perp}^2 \right) \omega^2 , \qquad (2.3.25)$$

bzw. mit dem Trägheitsmoment $I = \sum m r_{\perp}^2$ aus Gl.(2.3.10)

$$T_{\rm rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$$
 . (2.3.26)

Vergleicht man diesen Ausdruck mit der kinetischen Energie $\frac{1}{2}mv^2$ des Massenpunktes bzw. der Translationsenergie $T_{\text{trans}} = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2$ der Schwerpunktsbewegung (vergleiche Gl.(2.1.11)), so erkennt man, daß bei der Rotation das Trägheitsmoment *I* die Rolle der trägen Masse (*m* bzw. *M*) und die Winkelgeschwindigkeit ω diejenige der Translationsgeschwindigkeit (*v* bzw. v_{cm}) übernimmt. Benutzt man die Beziehung $\mathbf{L}_{||} = I\omega$, so läßt sich (2.3.26) wie folgt umschreiben:

$$T_{\rm rot} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}I\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\mathbf{L}_{\parallel}\cdot\boldsymbol{\omega} . \qquad (2.3.27)$$

Mit $\mathbf{L} = \mathbf{L}_{||} + \mathbf{L}_{\perp}$ und $\mathbf{L}_{\perp} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$ ergibt sich schließlich

$$T_{\rm rot} = \frac{1}{2} \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega}$$
 . (2.3.28)

Man kann aber auch $\omega = \mathbf{L}_{\parallel}/I$ aus Gl.(2.3.11) in Gl.(2.3.26) substituieren und erhält

$$T_{\rm rot} = \frac{L_{||}^2}{2I}$$
. (2.3.29)

Diese Beziehung korreliert mit dem Ausdruck $T = p_{cm}^2/2M$ für die kinetische Energie der Translationsbewegung des Schwerpunktes.

Wie bei der Translationsbewegung stammt auch die kinetische Rotationsenergie aus der Arbeit, die am Körper angreifende Kräfte bzw. Drehmomente aufbringen. Dies soll im folgenden kurz gezeigt werden. Bei fester Drehachse ergibt sich mit den obigen Beziehungen

$$dW = \mathbf{T}_{\parallel} \cdot d\boldsymbol{\varphi} = I \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \cdot d\boldsymbol{\varphi} = I \boldsymbol{\omega} \cdot d\boldsymbol{\omega} \quad . \tag{2.3.30}$$

Für einen beliebigen Vektor \mathbf{a} mit $|\mathbf{a}| = a$ erhält man durch Anwenden der Produktregel beim Differenzieren eines Skalarprodukts $a^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$: $2a \, da = \mathbf{a} \cdot d\mathbf{a} + (d\mathbf{a}) \cdot \mathbf{a} = 2\mathbf{a} \cdot d\mathbf{a}$ oder $\mathbf{a} \cdot d\mathbf{a} = a \, da$. Daher erhält man für die Arbeit



Abbildung 2.11: Zur Arbeit $dW = \mathbf{T}_{\parallel} \cdot d\varphi$ des Drehmoments \mathbf{T}_{\parallel} bei der Rotation eines starren Körpers.

$$dW = I\boldsymbol{\omega} \cdot d\boldsymbol{\omega} = I\omega d\omega = d\left(\frac{1}{2}I\omega^2\right)$$
(2.3.31)

oder

$$dW = dT_{\rm rot} \quad . \tag{2.3.32}$$

Die von Drehmoment \mathbf{T}_{\parallel} verrichtete Arbeit dW ist also gleich der Änderung dT_{rot} der Rotationsenergie. Die positive Arbeit dW > 0 im Falle eines die Rotation antreibenden Moments $\mathbf{T}_{\parallel} \parallel d\varphi$ findet sich als Zunahme der kinetischen Energie wieder.

Wenn das Drehmoment eine eindeutige Funktion des Drehwinkels φ ist, um den ein Körper aus seiner Ruhelage φ_0 ausgelenkt wurde, so ist $\mathbf{T}_{\parallel}(\varphi)$ konservativ und man kann mit

$$E_{\text{pot}}(\varphi) := -\int_{\varphi_0}^{\varphi} \mathbf{T}_{\parallel}(\varphi) \cdot d\varphi$$
 (2.3.33)

eine potentielle Energie E_{pot} bezüglich der Rotation einführen. Offensichtlich ist

$$dW = -dE_{\rm pot} , \qquad (2.3.34)$$

d.h. eine vom Drehmoment auf den Körper übertragene Arbeit dW > 0 entspricht einer Abnahme $dE_{\text{pot}} < 0$ der potentiellen Energie. Durch Kombination von Gl.(2.3.34) mit Gl.(2.3.32) folgt für die Gesamtenergie $E = T_{\text{rot}} + E_{\text{pot}}$ von Gl.(2.1.15) ein Erhaltungssatz

	dE	=	$dT_{\rm rot} + dE_{\rm pot} = 0$	(2.3.35)
oder	E	=	$T_{\rm rot} + E_{\rm pot} = const$.	(2.3.36)

Die hier angegebenen Energiebeziehungen stimmen wiederum mit denen der Punktemechanik überein.

Genauso wie man in der Punktemechanik (vergleiche Gl.(1.9)) die Kraft als Gradienten der potentiellen Energie erhält, erhält man auch das Drehmoment durch Differenzieren der potentiellen Energie nach der Winkelkoordinate. Es gilt⁶

$$T_{\parallel} = -\frac{dE_{\rm pot}}{d\varphi} , \qquad (2.3.37)$$

2.3.3 Trägkeitsmomente einfacher Körper

Zylindermantel

Am einfachsten läßt sich das Drehmoment eines Massenpunktes m im Abstand R von der Drehachse angeben Die Definitionsgleichung (2.3.10) liefert

$$I = mR^2$$
 (Massenpunkt) . (2.3.38)

Besteht der Körper aus mehreren Massenpunkten, die wie in Abb. 2.12a gezeigt auf einem Zylindermantel mit Radius *r* liegen, so ergibt sich

$$I = \sum m_i R^2 = \left(\sum m_i\right) R^2$$

oder
$$I = MR^2$$
 (Hohlzylinder) . (2.3.39)

Hierbei ist M die Gesamtmasse des Körpers. Dieser Ausdruck gilt z.B. für kreisförmige Reifen (Fahrradfelge) oder Hohlzylinder bezüglich deren Symmetrieachse.

Homogene Kreisscheibe

Fällt wie in Abb. 2.12b gezeigt die Drehachse mit der Symmetrieachse der Scheibe zusammen, so läßt sich das Trägheitsmoment mit Einführung der Massenbelegung $\sigma = M/A$ der Scheibe durch Integration über konzentrische Ringe mit Innenradius r und Außenradius r + dr und damit der Fläche $dA = 2\pi r dr$ bzw. der Masse $dm = \sigma dA = \sigma 2\pi r dr$ berechnen zu

⁶Da man es bei einer festen Drehachse nur mit einem Freiheitsgrad zu tun hat, muß man nur nach einer Variablen differenzieren.



Abbildung 2.12: Zum Trägheitsmoment einfacher homogener Körper: (a) Zylindermantel, (b) Scheibe, (c) Kugel und (d) Stab.

$$I = \int_{0}^{R} r^{2} dm = \int_{0}^{R} r^{2} \sigma 2\pi r dr = 2\pi \sigma \int_{0}^{R} r^{3} dr = 2\pi \sigma \frac{1}{4} R^{4} = \frac{1}{2} (\sigma \pi R^{2}) R^{2}$$

oder $I = \frac{1}{2} M R^{2}$ (homogene Scheibe) . (2.3.40)

Dies Beziehung gilt auch für einen Vollzylinder. Vergleicht man (2.3.39) und (2.3.40) so sieht man, daß das Trägheitsmoment eines Hohlzylinders mit gleicher Gesamtmasse größer ist als das eines Vollzylinders, da bei Vollzylinder die Gesamtmasse nicht den größtmöglichen Abstand R von der Drehachse hat.
Physik I

Homogene Vollkugel

Ausgehend von Gl.(2.3.40) läßt sich das Trägheitsmoment einer homogenen Vollkugel mit Radius Rund Masse M berechnen, deren Drehachse durch den Kugelmittelpunkt geht. Dazu denken wir uns die Kugel aus flachen Scheiben der Höhe dh und dem Radius r_h aufgebaut. Für eine Scheibe im Abstand h vom Kugelmittelpunkt ist nach Abb. 2.12c $r_h^2 = R^2 - h^2$. Mit der Massendichte ρ der Kugel ist die Masse einer Kreisscheibe gegeben durch $dm = \rho dV = \rho \pi r_h^2 dh$ und deren Beitrag dI zum Gesamtträgheitsmoment nach Gl.(2.3.40) $dI = \frac{1}{2} dm r_h^2 = \frac{\pi}{2} \rho (R^2 - h^2)^2 dh$. Durch Integration über alle Scheiben erhält man für die gesamte Kugel

$$I = \frac{\pi}{2}\rho \int_{-R}^{R} (R^2 - h^2)^2 dh = \frac{\pi}{2}\rho \int_{-R}^{R} (R^4 - 2R^2h^2 + h^4) dh$$
$$= \frac{\pi}{2}\rho \left(R^4 2R - 2R^2 \frac{2R^3}{3} + \frac{2R^5}{5} \right) = \frac{\pi}{2}\rho R^5 \frac{16}{15} .$$
(2.3.41)

Mit $\rho = M / \frac{4\pi}{3} R^3$ ergibt sich schließlich⁷

$$I = \frac{2}{5}MR^2 \qquad (\text{homogene Kugel}) . \qquad (2.3.42)$$

Homogener Stab

Als letztes soll das Trägheitsmoment eines dünnen Stabes mit Querschnittsfläche A, Länge l und Masse $M = \rho Al$ bestimmt werden. Wie in Abb. 2.12d gezeigt ist, soll die Drehachse durch den Schwerpunkt des Stabes gehen. Man teilt den Stab in Segmente der Länge dr und der Masse $dm = \rho Adr$ auf. Im Abstand r von der Drehachse ist das Trägheitsmoment dI des Segments gegeben durch $dI = r^2 dm = \rho Ar^2 dr$. Das Gesamtdrehmoment erhält man durch Integration über die einzelnen Segmente zu

$$I = \rho A \int_{-l/2}^{l/2} r^2 dr = \frac{2}{24} (\rho A l) l^2$$

oder $I = \frac{1}{12} M l^2$ (homogener Stab) . (2.3.43)

2.3.4 Der Steinersche Satz

Die im letzten Abschnitt haben wir Ausdrücke für das Trägheitsmoment bei fest vorgegebener Drehachse abgeleitet. Da es im Prinzip unendlich viele mögliche Drehachsen gibt, gibt es auch unendlich viele verschiedene Drehmomente. Der in diesem Abschnitt abgeleitete *Satz von Steiner* gibt eine einfache Relation zwischen dem Trägheitsmoment bezüglich einer Drehachse durch den Körperschwerpunkt und dem Trägheitsmoment bezüglich einer dazu parallelen, aber sonst beliebigen Drehachse.

Zur Ableitung des Satzes von Steiner legt man den Schwerpunkt des starren Körpers in den Ursprung eines raumfesten Koordinatensystems, dessen z-Achse mit der Drehachse durch den Schwerpunkt zusammenfällt (siehe Abb. 2.13). Die zweite Drehachse verläuft parallel zu dieser Achse und schneidet die

⁷Das gleiche Ergebnis erhält man, wenn man Kugelkoordinaten verwendet. Der Abstand eines Massenelements dm von der Drehachse ist dann $r \sin \alpha$ und das Volumenelement ist $dV = (r \sin \alpha d\alpha) \cdot (rd\varphi) \cdot (dr) = r^2 \sin \alpha d\alpha d\varphi dr$. Man erhält damit $I = \rho \int (r^2 \sin^2 \alpha) dV = \rho \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R r^4 \sin^3 \alpha d\alpha d\varphi dr = \frac{8}{15} \rho \pi R^5$.





Abbildung 2.13: Zur Ableitung des Steinerschen Satzes.

x-Achse in Punkt *A*. Der Abstand der beiden Achsen sei *s* und die Gesamtmasse des Körpers *M*. Mit den Bezeichnungen aus Abb. 2.13 ergeben sich dann die Trägheitmomente I_{cm} und I_A bezüglich der beiden Drehachsen zu

$$I_{cm} = \int r^2 dm$$
 und $I_A = \int r'^2 dm$. (2.3.44)

Der Kosinussatz liefert wegen $r \cos \alpha = x$ die Beziehung

$$r^{\prime 2} = r^2 + s^2 - 2rs\cos\alpha = r^2 + s^2 - 2sx$$

Nach Integration über dm erhält man dann

$$\int r'^{2} dm = \int r^{2} dm + \int s^{2} dm - 2s \int x dm$$

bzw. $I_{A} = I_{cm} + s^{2} \int dm - 2s \int x dm$. (2.3.45)

Mit $\int dm = M$ und $\int x dm = x_{cm}M$ und der Tatsache, daß die x-Koordinate des Schwerpunktes $x_{cm} = 0$, da der Schwerpunkt in den Ursprung des Koordinatensystems gelegt wurde, erhält man mit $\int x dm = 0$ den Satz von Steiner:

$$I_A = I_{cm} + Ms^2$$
 . (2.3.46)



Abbildung 2.14: Die Rotation um A als Überlagerung der Translationsbewegung von CM auf einer Kreisbahn (Revolutionsbewegung) und der Rotationsbewegung um CM.

Der Satz von Steiner besagt, daß es genügt, sich eine Übersicht über alle Trägheitsmomente bezüglich der Drehachsen durch den Körperschwerpunkt zu verschaffen, um daraus dann ohne mühsame Integration Trägheitsmomente bezüglich beliebiger Achsen anzugeben. Da ferner für alle nicht durch der Schwerpunkt gehenden Achsen $Ms^2 > 0$ ist, ist bei vorgegebener Richtung der Drehachse das Trägheitsmoment bezüglich der Schwerpunktachse minimal.

Der Steinersche Satz steht in engem Zusammenhang mit der Darstellung der Bewegung eines starren Körpers als Überlagerung der Translationsbewegung des Massenmittelpunktes CM und einer Rotationsbewegung um CM. Dies soll anhand des in Abb. 2.14 gezeigten Beispieles veranschaulicht werden, wo ein Körper um eine senkrecht zur Zeichenebene stehende Drehachse A rotieren soll. Die Bahnkurve der Translationsbewegung von CM (unter Beibehaltung der Orientierung im Raum) ist eine Kreisbahn mit Radius s. Diese Bewegungsform nennt man eine "Revolutionsbewegung".⁸ Die Bahngeschwindigkeit von CM ist $v_{cm} = \omega s$. Die Drehachsen der Rotation um A und CM stehen parallel zueinander und man entnimmt Abb. 2.14, daß auch die Winkelgeschwindigkeit ω der Rotation um beide Achsen übereinstimmt. Die kinetische Bewegungsenergie T des Körpers mit A als Bezugspunkt (reine Rotation) ist

$$T = T_{\rm rot} = \frac{1}{2} I_A \omega^2$$

während mit CM als Bezugspunkt unter Benutzung von $T_{\text{trans}} = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2$

$$T = T_{\text{trans}} + T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 = \frac{1}{2}M\omega^2s^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$$

gilt. Da die kinetische Energie eindeutig ist, folgt

⁸Ein typisches Beispiel dafür ist die Gondelbewegung eines Riesenrades, bei der die Gondel Orientierung im Raum beibehält.

$$\frac{1}{2}I_A\omega^2 = \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2}M\omega^2s^2$$

oder $I_A = I_{cm} + Ms^2$,

also genau der Steinersche Satz.

Anwendungsbeispiel zum Steinerschen Satz:

Als Anwendungsbeispiel zum Steinerschen Satz soll das Trägheitsmoment eines Stabes der Länge l und der Masse M berechnet werden, der um das Stabende rotiert und zwar um eine Drehachse, die senkrecht zur Stabrichtung steht. Mit Gl.(2.3.43) und dem Steinerschen Satz erhält man

$$I = I_{cm} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}Ml^2 + \frac{1}{4}Ml^2$$

oder $I = \frac{1}{3}Ml^2$.

2.3.5 Drehschwingungen

Eine spezielle Bewegungsform eines an einer festen Achse drehbar gelagerten starren Körpers ist die Drehschwingung. Dabei pendelt der Drewinkel $\varphi(t)$ periodisch um seine Ruhelage φ_0 .

Drehpendel

Bei *Drehpendel* läuft die Drehachse durch den Massenmittelpunkt eines starren Körpers und die Gleichgewichtslage wird durch eine am Körper bzw. der Drehachse befestigte Spiralfeder definiert (siehe Abb. 2.15). Greift am Körper ein äußeres Drehmoment $\mathbf{T}_{\mathbf{F}} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ an, so wird der Körper um $\Delta \varphi = \varphi - \varphi_0$ aus seiner Ruhelage ausgelenkt. Hierbei entsteht aufgrund der Verdrillung der Spiralfeder ein rücktreibendes elastisches Moment \mathbf{T}_{el} , so daß in der neuen Gleichgewichtslage $\mathbf{T} = \mathbf{T}_{\mathbf{F}} + \mathbf{T}_{el} = 0$ gilt. Zur Beschreibung der Schwingung wählt man einen festen Basisvektor $\hat{\mathbf{a}}$ in der Drehachse und setzt willkürlich $\varphi_0 = 0$, so daß $\varphi = \varphi \hat{\mathbf{a}}$ und $\mathbf{T}_{el} = T_{el} \hat{\mathbf{a}}$. Erfüllt das rücktreibende Moment die Bedingung

$$\mathbf{T}_{\mathbf{el}} = -T_r \boldsymbol{\varphi} \quad \text{oder} \quad T_{\mathbf{el}} = -T_r \boldsymbol{\varphi} \quad (2.3.47)$$

so nennt man \mathbf{T}_{el} ein harmonisches Drehmoment. Die Größe T_r heißt Richt- oder Direktionsmoment und entspricht der Federkonstanten k im **Hooke**schen Gesetz $\mathbf{F} = -k\mathbf{s}$. Die potentielle Energie einer um den Winkel φ aus dem Gleichgewicht verdrehten Spiralfeder folgt aus Gl.(2.3.33) zu

$$E_{\text{pot}} = -\int_{\varphi_0}^{\varphi} \mathbf{T}_{\mathbf{el}} \cdot d\varphi = \int_{\varphi_0}^{\varphi} T_r \varphi d\varphi = T_r \int_{\varphi_0}^{\varphi} \varphi d\varphi$$

oder $E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} T_r \varphi^2$. (2.3.48)

Diese Beziehung ist das Analogon zum Ausdruck $E_{pot} = \frac{1}{2}kx^2$ für die Energie einer Schraubenfeder.



Abbildung 2.15: Das Drehpendel.

Eine einmal aus der Gleichgewichtslage ausgelenkter und dann losgelassener Körper vollführt unter der Wirkung des rücktreibenden Torsionsmoments eine harmonische Drehschwingung. Setzt man in die Bewegungsgleichung (2.3.16) für \mathbf{T}_{\parallel} das elastische Drehmoment \mathbf{T}_{el} ein und berücksichtigt noch, daß $\boldsymbol{\omega} = \omega \hat{\mathbf{a}} = (d\varphi/dt)\hat{\mathbf{a}}$ und damit $d\varphi/dt = \omega$, so erhält man

$$T_{\parallel} = I \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow T_{\rm el} = I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \Rightarrow -T_r \varphi = I \frac{d^2 \varphi}{dt^2}$$

oder $\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\frac{T_r}{I} \varphi$. (2.3.49)

Die Lösung dieser Gleichung ist die harmonische Schwingung (dies ist vom Masse-Feder Pendel schon bekannt) $\varphi(t) = \hat{\varphi} \sin(\omega t + \varphi_0)$ mit der Winkelamplitude $\hat{\varphi}$, der Kreisfrequenz ω und der Phasenverschiebung φ_0 .⁹

Mit der gleichen Rechnung wie für das Masse-Feder Pendel in Abschnitt 1.6.2 erhält man für die Kreisfrequenz ω bzw. die Schwingungsdauer T

$$\omega = \sqrt{\frac{T_r}{I}} \quad \text{bzw.} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{T_r}} \quad (2.3.50)$$

Diese Gleichungen sind analog zu den Gln.(1.6.34) und (1.6.35) für das Masse-Feder Pendel.

⁹Es ist hier darauf zu achten, daß die konstante Kreisfrequenz ω der harmonischen Schwingung nicht mit der zeitlich variierenden Winkelgeschwindigkeit $\omega(t) = d\varphi/dt$ des schwingenden Körpers verwechselt wird.

Bestimmung von Trägheitsmomenten mit dem Drehpendel:

Da die Schwingungsdauer eines Drehpendels einfach zu messen ist, wird das Drehpendel häufig zur Bestimmung von Trägheitsmomenten verwendet. Hierzu wird der zu untersuchende Körper auf einer Drehachse montiert, die über eine Feder ein bekanntes Richtmoment T_r erhält. Falls der Schwerpunkt des starren Körpers bei dieser Bestimmung nicht auf der Drehachse liegt, so ist darauf zu achten, daß die Drehachse vertikal steht, um ein Drehmoment der Gravitationskraft in der Drehachse zu vermeiden.

Das physikalische Pendel

Beim *physikalischen Pendel* benutzt man das von der Gravitationskraft bereitgestellte Drehmoment zur Anregung einer Schwingung. Ein physikalisches Pendel ist dabei ein beliebig geformter starrer Körper, der um eine raumfeste Achse A schwingen kann (siehe Abb. 2.16a). Wir betrachten nur den Fall, daß die Drehachse (diese wird als masselos angenommen) senkrecht zur Gravitationskraft steht. Das Drehmoment $\mathbf{T}_{\mathbf{G}}$ der Gravitationskraft $\mathbf{F}_{\mathbf{G}} = M\mathbf{g}$ ist mit dem Ortsvektor \mathbf{r}_{cm} des Schwerpunkts CM nach Gl.(2.1.18) $\mathbf{T}_{\mathbf{G}} = \mathbf{r}_{cm} \times M\mathbf{g}$ und die in der Achse liegende Komponente \mathbf{T}_{\parallel} ist $\mathbf{T}_{\parallel} = \mathbf{r}_{cm,\perp} \times M\mathbf{g}$. Dabei ist in der Zerlegung $\mathbf{r}_{cm} = \mathbf{r}_{cm,\parallel} + \mathbf{r}_{cm,\perp}$ der Vektor $\mathbf{r}_{cm,\perp}$ nach Abb. 2.16a die zur Achse senkrecht stehende Komponente von \mathbf{r}_{cm} . Der Schwerpunkt CM läuft auf einem Kreis mit Radius $|\mathbf{r}_{cm,\perp}| = s$ um die Achse um. Wählt man wiederum einen festen Basisvektor $\hat{\mathbf{a}}$ in der Drehachse, so ist $\varphi = \varphi \hat{\mathbf{a}}$ und $\mathbf{T}_{\parallel} = T_{\parallel} \hat{\mathbf{a}}$. Für den Betrag von \mathbf{T}_{\parallel} gilt

$$|\mathbf{T}_{\parallel}| = |\mathbf{r}_{\mathbf{cm},\perp}| \cdot |M\mathbf{g}| \cdot \sin(\mathbf{r}_{\mathbf{cm},\perp}, M\mathbf{g}) = Mgs \sin\varphi .$$
(2.3.51)

Man entnimmt Abb. 2.16a, daß das Moment rücktreibend ist, d.h. \mathbf{T}_{\parallel} und φ stehen antiparallel zueinander. Man erhält somit

$$T_{\parallel} = -Mgs\sin\varphi \quad . \tag{2.3.52}$$

Für kleine Auslenkungswinkel erhält man in der harmonischen Näherung (sin $\varphi \simeq \varphi$) $T_{\parallel} = -Mgs \varphi$ und das Direktionsmoment T_r des physikalischen Pendel ergibt sich zu

$$T_r = Mgs$$
 . (2.3.53)

Damit ergibt sich die Kreisfrequenz ω und die Schwingungsdauer T des physikalischen Pendels zu

$$\omega = \sqrt{\frac{Mgs}{I}}$$
 bzw. $T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgs}}$. (2.3.54)

Diese Beziehungen gelten nur für kleine Schwingungsamplituden $\hat{\varphi}$. Für größere Auslenkungswinkel wird das rücktreibende Moment kleiner als ein harmonisches Moment und die Schwingungsdauer damit länger. Man sieht insgesamt, daß sich das physikalische Pendel wie ein mathematisches Pendel mit Fadenlänge *s* verhält, wenn man sich die Gesamtmasse *M* im Massenmittelpunkt *CM* konzentriert denkt.



Abbildung 2.16: Das physikalische Pendel (a) und das Reversionspendel (b).

Das Reversionspendel

Das Reversionspendel ist eine bestimmte Ausführungsform des physikalischen Pendels, das zur Präzisionsmessung der Fallbeschleunigung verwendet werden kann. Es sollen zunächst die theoretischen Grundlagen diskutiert werden. Berücksichtigt man in dem Ausdruck $\omega^2 = Mgs/I$ den Steinerschen Satz für das Trägheitsmoment I, so erhält man $\omega^2 = Mgs/(I_{\rm cm} + Ms^2)$. Für festgehaltenes ω ist dies eine quadratische Gleichung in s, nämlich $\omega^2 Ms^2 - Mgs + \omega^2 I_{\rm cm} = 0$, mit zwei Lösungen s_1 und s_2 . Mit dem Schwerpunkt CM als Mittelpunkt gibt es deshalb zwei konzentrische Kreise mit Radien s_1 und s_2 , die den geometrischen Ort für Drehachsen mit konstantem ω^2 angeben (siehe Abb. 2.16b). Für die $(s_1 + s_2)$ findet man

$$l_{\rm red} := s_1 + s_2 = \frac{g}{\omega^2}$$
 (2.3.55)

Man nennt hierbei $l_{\rm red}$ die reduzierte Pendellänge, da ein mathematisches Pendel mit der Fadenlänge $l_{\rm red}$ gerade die vorgegebene Kreisfrequenz ω mit $\omega^2 = g/l$ hätte.

Das Reversionspendel ist nun ein physikalisches Pendel, bei dem zwei parallele Drehachsen mit festem Abstand d vorgesehen sind. Dabei liegt der Schwerpunkt CM erstens in der von den beiden Drehachsen aufgespannten Ebene und zweitens zwischen den beiden Achsen. Mit längs des Pendels verschiebbaren Zusatzmassen läßt sich die Position des Schwerpunktes so einstellen, daß die Schwingungsdauer für Schwingungen um beide Drehachsen exakt gleich groß werden. In diesem Fall ist $d = s_1 + s_2 = l_{red} = g/\omega^2$. Durch eine sehr geanue Abstimmung der Frequenzen und genaue Bestimmung von d läßt sich damit die Erdbeschleuinigung g exakt bestimmen.

2.3.6 Vergleich von Rotations- und Translationsbewegung

Für die Beschreibung von Drehbewegungen eines starren Körpers um eine feste Achse ergeben sich formal ähnliche Ausdrücke wie für die Translationsbewegung eines Massenpunktes.¹⁰ In folgender Tabelle werden die entsprechenden Ausdrücke der Translations- und Rotationsbewegung einander gegenübergestellt.

Translationsbewegung des Massenpunktes		Rotationsbewegung des starren Körpers bei fester Drehachse		
Weg	$d\mathbf{s}$	Winkel	$doldsymbol{arphi}$	
Geschwindigkeit	$\mathbf{v} = d\mathbf{s}/dt$	Winkelgeschwindigkeit	$\dot{\omega} = d \varphi / dt$	
Beschleunigung	$\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt = d^2\mathbf{s}/dt^2$	Winkelbeschleunigung	$oldsymbol{eta} = doldsymbol{\omega}/dt = d^2oldsymbol{arphi}/dt^2$	
Träge Masse	m	Trägheitsmoment	Ι	
Kraft	$\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt = m\mathbf{a}$	Drehmoment	$\mathbf{T} = d\mathbf{L}/dt = I\boldsymbol{\beta}$	
Impuls	$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$	Drehimpuls	$\mathbf{L} = I \boldsymbol{\omega}$	
Kinetische Energie	$\begin{array}{rcl} E_{\mathrm{kin}} & = & \frac{1}{2}mv^2 & = \\ \frac{1}{2m}p^2 \end{array}$	Rotationsenergie	$E_{\rm rot} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2I}L^2$	
Arbeit	$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$	Arbeit	$dW = \mathbf{T} \cdot d\boldsymbol{\varphi}$	
lineare Schwingung	$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$	Drehschwingung	$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{T_r}}$	

Tabelle 2.1: Gegenüberstellung der entsprechenden Ausdrücke für die Translations- und Rotationsbewegung.

Zwischen Translations- und Rotationsgrößen bestehen folgende Verknüpfungen:

$$d\mathbf{s} = d\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}$$
$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$$
$$I = \int r^2 dm$$
$$\mathbf{T} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$
$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} .$$

¹⁰Hierbei ist anzumerken, daß die mit dem Bezugspunkt CM beschriebene Translationsbewegung eines starren Körpers äquivalent zur derjenigen seines punktförmigen Schwerpunktes ist. D.h. der starre Körper bewegt sich so, wie wenn die Gesamtkraft am Massenmittelpunkt, an dem die Gesamtmasse vereinigt ist, angreifen würde.

Beim starren Körper mit freier Drehachse ist weder Betrag noch Richtung der Winkelgeschwindigkeit ω der Rotationsbewegung festgelegt. Dieser Fall liegt vor, wenn die Bewegung eines Körpers im Raum keinerlei Zwangsbedingungen unterworfen ist, oder aber höchstens ein Körperpunkt Zwangsbedingungen genügt. Letzterer Fall liegt beim Kreisel vor, wo ein Körperpunkt raumfest gehalten wird. Die Berechnung von Drehimpuls und kinetischer Energie führt auf den *Trägheitstensor*, den wir als *Trägheitsellipsoid* darstellen und zu veranschaulichen suchen. Als Anwendungsbeispiele betrachten wir einfache Kreiselprobleme (*Nutation* und *Präzession*) und die Stabilität von freien Drehachsen. Als Beispiel einer kombinierten Translations- und Rotationsbewegung werden Abrollbewegungen diskutiert.

2.4.1 Das Trägheitsellipsoid

Für einen einzelnen Massenpunkt galt $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v}_{\varphi})$ (vergleiche Gl.(1.11.11)). Wegen $\mathbf{v}_{\varphi} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ und $v_{\varphi} = \omega r$ war hier immer $\mathbf{L} \| \boldsymbol{\omega}$ und es galt $L = mr^2 \omega$, d.h. Drehimpuls und Drehachse stehen immer parallel zueinander. Wie bereits im letzten Abschnitt erläutert wurde, besitzt ein starrer Körper sowohl eine nichtverschwindende Drehimpulskomponente \mathbf{L}_{\parallel} parallel und \mathbf{L}_{\perp} senkrecht zu $\boldsymbol{\omega}$, d.h. es gilt jetzt nicht mehr $\mathbf{L} \| \boldsymbol{\omega}^{11}$ Nach den in Abschnitt 2.1.1 gemachten Überlegungen ist es zweckmäßig, bei einem frei beweglichen Körper den Massenmittelpunkt *CM* als Bezugspunkt zu wählen, bei einem in einem Punkt festgehaltenen Körper ist es dagegen sinnvoller, diesen als Bezugspunkt *P* für die Beschreibung der Rotationsbewegung zu wählen. Im folgenden soll diese Vorschrift immer benutzt werden. Die Bewegungsgleichung der Rotation nimmt in diesem Fall die einfache Form

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad (2.4.1)$$

an. Die Rotation wird ihrerseits durch eine momentane Winkelgeschwindigkeit ω charakterisiert, die i.a. weder raum- noch körperfest ist. Man steht also vor der Aufgabe, die Winkelgeschwindigkeit ω der Rotation mit dem Drehimpuls L der Bewegungsgleichung in Beziehung zu setzen.

Zur Berechnung von L benötigt man die Geschwindigkeit v der Rotation um die Drehachse ω . Sie ist mit dem vom Bezugspunkt P anzugebenden Ortsvektor r durch $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ gegeben. Jedes einzelne Massenelement des Körper trägt den Impuls $d\mathbf{p} = \mathbf{v}dm$, woraus sich mit $\mathbf{L} = \sum \mathbf{r}_{\mathbf{i}} \times \mathbf{p}_{\mathbf{i}}$ durch eine Integration über alle Massenelemente der Drehimpuls $\mathbf{L} = \int (\mathbf{r} \times d\mathbf{p}) = \int (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) dm$ ergibt. Mit $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ erhält man schließlich

$$\mathbf{L} = \int (\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})) dm \quad . \tag{2.4.2}$$

Diese Gleichung gibt im Prinzip schon die gesuchte Verknüpfung zwischen L und $\boldsymbol{\omega}$ an. Das Vektorprodukt läßt sich mit der Vektoridentität $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ weiter umformen und man erhält folgenden allgemeinen Ausdruck für L

$$\mathbf{L} = \boldsymbol{\omega} \int r^2 dm - \int \mathbf{r} (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega}) dm \quad . \tag{2.4.3}$$

¹¹Wir werden später sehem, daß der Drehimpuls L nur dann parallel zu ω ist, wenn die Rotationsachse eine Symmetrieachse des starren Körpers darstellt.



Abbildung 2.17: Drehimpuls und Winkelgeschwindigkeit eines rotierenden Körpers.

Man erkennt einfach, daß der erste Term auf der rechten Seite eine Komponente von L in ω -Richtung angibt. Die Richtung des Vektors im zweiten Term ist nicht so einfach zu sehen, da man über alle Ortsvektoren r gewichtet mit ($\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega}$) aufsummieren muß. Zur weiteren Auswertung benuzen wir ein im Bezugspunkt *P* raumfestes, bzw. von *P* = *CM* translatorisch mitgeführtes kartesisches Koordinatensystem (siehe hierzu Abb. 2.17). Schreibt man Gl.(2.4.3) in Komponenten , so ergibt sich

$$L_x = I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z$$

$$L_y = I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z$$

$$L_z = I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z .$$
(2.4.4)

Man erkennt aus diesem Ausdruck, daß der Grund dafür, daß L und ω nicht mehr parallel zueinander verlaufen, die Tatsache ist, daß bei beliebiger Rotationsachse das Trägheitsmoment *I* kein Skalar, sondern ein Tensor ist. Die neun *Trägheitskoeffizienten* des Trägheitstensors faßt man in Form einer quadratischen Matrix zusammen:

$$\tilde{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} .$$
(2.4.5)

Die Komponenten I_{jk} mit j = k(j, k = x, y, z) heißen Trägheitsmomente und sind gegeben durch

$$I_{xx} = \int (y^2 + z^2) dm \qquad I_{yy} = \int (x^2 + z^2) dm \qquad I_{zz} = \int (x^2 + y^2) dm \quad . \quad (2.4.6)$$

Die Bezeichnung Trägheitsmoment kommt also daher, daß in den Integralen die Klammerausdrücke jeweils den senkrechten Abstand des Massenelements von der x, y und z-Achse angeben. Daher ist z.B. I_{zz} mit dem Trägheitsmoment I um eine feste z-Achse identisch. Die Komponenten I_{jk} für $j \neq k$ nennt

man dagegen *Trägheitsprodukte* oder *Deviationsmomente*. Sie sind verantwortlich dafür, daß L und ω im allgemeinen nicht parallel zueinander stehen. Sie sind gegeben durch

$$I_{xy} = -\int xy \, dm \qquad I_{xz} = -\int xz \, dm$$

$$I_{yx} = -\int yx \, dm \qquad I_{yz} = -\int yz \, dm$$

$$I_{zx} = -\int zx \, dm \qquad I_{zy} = -\int zy \, dm \quad .$$
(2.4.7)

Die Komponenten des Drehimpulses ergeben sich mit Hilfe der Komponenten des Trägheitstensors zu

$$L_x = \sum_k I_{xk} \omega_k$$

$$L_y = \sum_k I_{yk} \omega_k \qquad (k = x, y, z)$$

$$L_z = \sum_k I_{zk} \omega_k . \qquad (2.4.8)$$

Gemäß den Regeln der Matrizenmultiplikation erhält man die kompakte Schreibweise

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

bzw. $\mathbf{L} = \tilde{\mathbf{I}} \cdot \boldsymbol{\omega}$. (2.4.9)

Mit dem Ausdruck $\mathbf{L} = \mathbf{\tilde{I}} \cdot \boldsymbol{\omega}$ hat man eine Beziehung zwischen der die Bewegung charakterisierenden kinematischen Größe $\boldsymbol{\omega}$ und der den Körper charakterisierenden Größe $\mathbf{\tilde{I}}$ hergestellt und damit sein Ziel erreicht. Der Ausdruck ist analog zu der Beziehung $\mathbf{p_{cm}} = M \mathbf{v_{cm}}$. Sowohl $\mathbf{L}(\boldsymbol{\omega})$ als auch $\mathbf{p_{cm}}(\mathbf{v_{cm}})$ sind lineare Vektorfunktionen. Der wesentliche Unterschied besteht darin, daß M ein Skalar, $\mathbf{\tilde{I}}$ dagegen eine tensorielle Größe ist, was insbesondere zu $\mathbf{p_{cm}} \| \mathbf{v_{cm}}$ aber $\mathbf{L} \notin \boldsymbol{\omega}$ führt.

Es sei ferner darauf hingewiesen, daß M im Rahmen der nichtrelativistischen klassischen Mechanik eine von der Bewegung und dem Koordinatensystem unabhängige Konstante ist. Die Tensorkomponenten I_k bei der Rotation des Körpers sind dagegen zeitabhängig und ändern sich mit der Orientierung eines Körpers relativ zu einem raumfesten Bezugssystem. Selbst bei einer starren Rotation um eine raum- und körperfeste Drehachse, z.B. die z-Achse, ist zwar $I_{zz} = const$ aber i.a. $I_{xz} \neq const$ und $I_{yz} \neq const$, da die Komponenten x = x(t) und y = y(t) in den Ausdrücken für I_{xz} und I_{yz} Funktionen der Zeit und nur r und z zeitlich konstant sind.

Wir wollen nun eine physikalische Deutung des Trägheitstensors anhand der Betrachtung der Rotationsenergie T_{rot} machen. Mit $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ erhält man

$$T_{\rm rot} = \frac{1}{2} \int v^2 dm = \frac{1}{2} \int \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dm = \frac{1}{2} \int (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) dm \quad .$$
(2.4.10)

Zur Auswertung dieses Integrals benutzt man die Vektoridentität $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$, womit sich

$$T_{\rm rot} = \frac{1}{2} \int (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}) (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) dm - \frac{1}{2} \int (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) dm$$

oder
$$T_{\rm rot} = \frac{1}{2} \int \omega^2 r^2 dm - \frac{1}{2} \int (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})^2 dm \qquad (2.4.11)$$

ergibt. Diesen Ausdruck kann man auch durch skalare Multiplikation von L aus Gl.(2.4.3) mit $\omega/2$ erhalten. Es ist also

$$T_{\rm rot} = \frac{1}{2} \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}$$
. (2.4.12)

Diese Beziehung wurde bereits für die Rotation um eine starre Drehachse abgeleitet (vergleiche Abschnitt 2.3, Gl.(2.3.28)). Diese Beziehung ist wiederum analog zum Ausdruck $E_{\text{trans}} = \frac{1}{2}\mathbf{p_{cm}} \cdot \mathbf{v_{cm}}$ für die Translationsbewegung.

Schreibt man Gl.(2.4.12) in Komponenten, so erhält man

$$T_{\rm rot} = \frac{1}{2} I_{xx} \omega_x^2 + \frac{1}{2} I_{yy} \omega_y^2 + \frac{1}{2} I_{zz} \omega_z^2 + I_{xy} \omega_x \omega_y + I_{yz} \omega_y \omega_z + I_{zx} \omega_z \omega_x \quad . \quad (2.4.13)$$

Diese Beziehung ist einer interessanten Interpretation zugänglich. Wie in der analytischen Geometrie gezeigt wird, stellt Gl.(2.4.13) für $T_{\text{rot}} = const$ und $I_{jk} = const$ eine Fläche 2. Grades (Hyperbel, Parabel, Ellipsoid) im ω -Raum dar. Man kann zeigen, daß es sich in diesem Fall nur um ein Ellipsoid handeln kann. Dieses Ellipsoid läßt sich durch Einführen eines geeigneten Streckungsfaktors in eine normierte Form bringen, die als *Trägheitsellipsoid* bezeichnet wird. Dazu setzt man $\mathbf{L} = \tilde{\mathbf{I}} \cdot \boldsymbol{\omega}$ in den Ausdruck für T_{rot} ein und erhält

$$T_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \tilde{\mathbf{I}} \cdot \boldsymbol{\omega}$$
 . (2.4.14)

Mit dem Einheitsvektor $\hat{\omega}$ in ω -Richtung erhält man schließlich

$$T_{\rm rot} = \frac{1}{2}I\omega^2$$
 mit $I = \hat{\boldsymbol{\omega}} \cdot \tilde{\mathbf{I}} \cdot \hat{\boldsymbol{\omega}}$. (2.4.15)

Man sieht, daß man denselben Ausdruck für T_{rot} (vergleiche Gl.(2.3.26)) auch bei freier Drehachse erhält, wenn man nur I als das "momentane" Trägheitsmoment um die momentane Drehachse auffaßt. Bemerkenswert an dem Ausdruck $I = \hat{\omega} \cdot \tilde{\mathbf{I}} \cdot \hat{\omega}$ ist, daß man bei bekanntem Trägheitstensor die Trägheitsmomente I um alle beliebigen Drehachsen angeben kann. Man benötigt also für einen noch so kompliziert geformten Körper nur die 6 unabhängigen Komponenten I_{jk} des symmetrischen Tensors $\tilde{\mathbf{I}}$ zu kennen. Ist der Trägheitstensor für den Massenmittelpunkt bekannt, so kann man mit Hilfe des Satzes von Steiner eine vollständige Übersicht über alle Trägheitsmomente eines Körpers gewinnen.

Um schließlich zum Trägheitsellipsoid zu kommen, führt man den Vektor

$$\boldsymbol{\rho} := \frac{\hat{\boldsymbol{\omega}}}{\sqrt{I}} = \frac{1}{\sqrt{I}} \frac{\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{\omega}}$$
(2.4.16)

mit den kartesischen Koordinaten

$$(\rho_x, \rho_y, \rho_z) = \frac{1}{\sqrt{I}} \left(\frac{\omega_x}{\omega}, \frac{\omega_y}{\omega}, \frac{\omega_z}{\omega} \right) = \sqrt{I} \left(\hat{\omega}_x, \hat{\omega}_y, \hat{\omega}_z \right)$$
(2.4.17)

ein, wobei I das Trägheitsmoment um die jeweilige ω -Achse ist. Nach Division von Gl.(2.4.13) durch $T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}I\omega^2$ erhält man

$$1 = I_{xx}\rho_x^2 + I_{yy}\rho_y^2 + I_{zz}\rho_z^2 + 2I_{xy}\rho_x\rho_y + 2I_{yz}\rho_y\rho_z + 2I_{zx}\rho_z\rho_x , \qquad (2.4.18)$$

d.h. die Endpunkte der Vektoren ρ in Richtung von ω mit der Länge $1/\sqrt{I}$ liegen auf einem normierten Ellipsoid, dem sogenannten *Trägheitsellipsoid*

Zur experimentellen Bestimmung des Trägheitsellipsoids mißt man für verschiedene Drehachsen die zugehörigen Trägheitsmomente I. Trägt man vom Schwerpunkt CM aus in Richtung der jeweiligen Drehachse, d.h. in Richtung von ω , die reziproke Wurzel des gemessenen Trägheitsmomentes $\rho = 1/\sqrt{I}$ auf, so liegen die Endpunkte dieser Strecken auf dem Trägheitsellipsoid (siehe Abb. 2.18). Für die vollständige Konstruktion des Trägheitsellipsoids sind 6 unabhängige Messungen für die 6 unabhängigen Komponenten des Trägheitstensors notwendig. Ist das Ellipsoid bestimmt, so kann für eine beliebige Drehachsenrichtung ω das zugehörige Trägheitsmoment als $1/\sqrt{I}$ an dem vom Ellipsoid begrenzten Achsenabschnitt abgelesen werden.



Abbildung 2.18: Das Trägheitsellipsoid mit den Hauptträgheitsachsen 1, 2 und 3.

Aus der Konstruktion des Trägheitsellipsoids wird verständlich, daß sich dieses, wie in Abb. 2.18 angedeutet, der Körperform anschmiegt. So ist z.B. für einen langen Stab das Trägheitsmoment I um die Längsachse klein und daher $1/\sqrt{I}$ groß, während um eine dazu senkrechte Achse I groß und damit $1/\sqrt{I}$ klein ist. Qualitativ ist also das Trägheitsellipsoid ein langgestrecktes Ellipsoid in der Stablängsachse. Entsprechend übertragen sich die Symmetrieeigenschaften des starren Körpers auf sein Trägheitsellipsoid. Eine Symmetrieebene der Massenverteilung führt auf eine Symmetrieebene des Trägheitsellipsoids und eine Rotationssymmetrieachse des Körpers führt auf eine Rotationssymmetrieachse des Trägheitsellipsoids. So ist z.B. das Trägheitsellipsoid einer homogenen Kugel wiederum eine Kugel. Aber auch das Trägheitsellipsoid eines Würfels nimmt Kugelform an, da dieser drei aufeinander senkrecht stehende Achsen mit gleichem I besitzt.

Hauptträgheitsachsen

Das Trägheitsellipsoid ist bei vorgegebenem Bezugspunkt nach Form und Lage fest im Körper verankert. Es liegt deshalb nahe, das bislang verwendete raumfeste Bezugssystem zu verlassen und zu einem körperfesten Bezugssystem mit Ursprung im Bezugspunkt P überzugehen. Dies hat den Vorteil, daß in diesem System die Komponenten I_{jk} des Trägheitstensors zeitlich konstant sind. Man kann aber gleich noch einen Schritt weiter gehen und ein besonders geeignetes körperfestes Bezugssystem wählen. Jedes Trägheitsellipsoid hat drei aufeinander senkrecht stehende Hauptachsen, die im Falle des Trägheitsellipsoid *Hauptträgheitsachsen* genannt werden. Im folgenden werden die Hauptachsen mit den Indizes 1, 2 und 3 unterschieden und die zugehörigen Hauptträgheitsachsen zusammen, so nennt man es ein Hauptachsensystem. In der analytischen Geometrie wird gezeigt, daß im Hauptachsensystem das Ellipsoid "Normalform" annimmt, d.h. bei einer Hauptachsentransformation wird aus Gl.(2.4.18)

$$1 = I_1 \rho_1^2 + I_2 \rho_2^2 + I_3 \rho_3^2 . \qquad (2.4.19)$$

Die Größen ρ_1 , ρ_2 und ρ_3 sind hierbei die Komponenten des Vektors $\rho = \omega/\sqrt{I}$ bezüglich der Hauptachsen. Im Unterschied zu Gl.(2.4.18) treten in Gl.(2.4.19) jetzt keine gemischten Glieder mehr auf. Die 6 Bestimmungsstücke des Trägheitstensors $\tilde{\mathbf{I}}$ zerfallen in 3 Bestimmungsstücke für die drei Hauptträgheitsmomente, die die Form des Trägheitsellipsoid festlegen, und drei weitere Bestimmungsstücke für die Orientierung des körperfesten Hauptachsensystems relativ zum raumfesten Bezugssystem (z.B. die drei **Euler**schen Winkel aus Abb. 2.3).

Im Hauptachsensystem nimmt der Trägheitstensor die einfache Darstellung

$$\tilde{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$
(2.4.20)

an und ist somit auf Diagonalform. Für den Drehimpuls von Gl(2.4.8) ergibt sich deshalb

$$L_1 = I_1 \omega_1 \quad L_2 = I_2 \omega_2 \quad L_3 = I_3 \omega_3 \quad , \tag{2.4.21}$$

wobei L_i und ω_i die Komponenten von **L** und ω im Hauptachsensystem sind. Aus Gl.(2.4.21) erkennt man die wichtige Eigenschaft, daß **L** $\|\omega$, falls ω in Hauptachsenrichtung zeigt. Bei einem zur Kugel entarteten Trägheitsellipsoid ist z.B. jede Achse gleichzeitig auch eine Hauptachse und damit L immer parallel zu ω (dies trifft z.B. für eine homogene Kugel zu).

Im Hauptachsensystem vereinfachen sich die Ausdrücke für die Rotationsenergie zu

$$T_{\rm rot} = \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 + \frac{1}{2}I_3\omega_3^2 \qquad (2.4.22)$$

bzw. unter Benutzung von Gl.(2.4.21) zu

$$T_{\rm rot} = \frac{L_1^2}{2I_1} + \frac{L_2^2}{2I_2} + \frac{L_3^2}{2I_3} . \qquad (2.4.23)$$

Poinsot-Konstruktion

Für ein 3-achsiges Trägheitsellipsoid mit drei unterschiedlichen Hauptträgheitsmomenten ist nur in Hauptachsenrichtung $\mathbf{L} \| \boldsymbol{\omega}$. Die Richtung von \mathbf{L} für davon abweichende Drehachsenrichtungen läßt sich mit Hilfe einer einfachen geometrischen Konstruktion am Trägheitsellipsoid aufsuchen. Geht man von Gl.(2.4.22) für die Rotationsenergie aus und berücksichtigt, daß die Trägheitsmomente I_i zeitlich konstant sind und nur die Komponenten ω_i von $\boldsymbol{\omega}$ bezüglich der drei Hauptachsen zeitlich variabel sind, so folgt für die Änderung von T_{rot}

$$dT_{\rm rot} = d\left(\frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 + \frac{1}{2}I_3\omega_3^2\right) = I_1\omega_1d\omega_1 + I_2\omega_2d\omega_2 + I_3\omega_3d\omega_3 \qquad (2.4.24)$$

und damit unter Berücksichtigung von Gl.(2.4.21)

$$dT_{\rm rot} = \mathbf{L} \cdot d\boldsymbol{\omega} \quad . \tag{2.4.25}$$

Aus der Diskussion von Gl.(2.4.13) ist bekannt, daß $T_{\rm rot} = const$ einem Ellipsoid im ω -Raum entspricht, das mit einem für die drei Hauptachsen einheitlichen Streckungsfaktor $\sqrt{2T_{\rm rot}}$ ähnlich zum Trägheitsellipsoid ist (siehe Abb. 2.19). Für einen Verschiebungsvektor $d\omega$ auf der Fläche $T_{\rm rot} = const$ ist $dT_{\rm rot} = 0$. Nach Gl.(2.4.25) muß dann aber L senkrecht zu diesem Vektor stehen und damit parallel zur Flächennormalen des Trägheitsellipsoids im Durchstoßpunkt von ω sein. Dies ist die *Poinsotsche Konstruktion* zur Ermittlung der Richtung von L. Sie zeigt nochmals geometrisch, daß bei einem dreiachsigen Trägheitsellipsoid genau in Hauptachsenrichtung L $||\omega$ ist.

Freie Achsen

Will man einen Körper bei fester Drehachse so rotieren lassen, daß keine Kräfte auf das Lager der Drehachse wirken, muß die Achse durch den Schwerpunkt gehen. Man sagt, der Körper muß *statisch gewuchtet* sein. Andernfalls tritt durch die Rotation des Schwerpunktes um die Drehachse eine Zentrifugalkraft auf, die vom Lager der Drehachse kompensiert werden muß (siehe Abb. 2.20a). Das statische Wuchten ist aber nicht hinreichend, wenn man Kräfte auf die Lager der Drehachse vermeiden will. Selbst bei einer gleichförmigen Rotation müssen die Lager i.a. noch ein Drehmoment T auf den Körper übertragen,



Abbildung 2.19: Die **Poinsot**sche Konstruktion: der Drehimpuls L steht senkrecht auf der Ellipsoidfläche $T_{rot} = const$ im Durchstoßpunkt von ω .



Abbildung 2.20: Zum statischen (a) und dynamischen Wuchten (b).

um die zeitliche Änderung $d\mathbf{L}_{\perp}/dt$ der zur Achse senkrecht stehenden Komponenten des Drehimpulses aufzufangen.

Läßt man z.B. das in Abb. 2.20b gezeigte starr verbundene Massenpaar um die Schwerpunktsachse rotieren, so greift an beiden Massen die Zentrifugalkraft an. Steht die Drehachse nicht senkrecht zu Verbindungsstange der Massen, so bewirkt die Zentrifugalkraft $\mathbf{F_{TZ}}$ im Drehpunkt ein Drehmoment $\mathbf{T} = \mathbf{r} \times \mathbf{F_{TZ}} = 2dF_{TZ}$, welches die Achse im Lager zu verkippen sucht. Dieses Drehmoment auf die Lager verschwindet, wenn die Drehachse mit einer der drei Haupträgheitsachsen zusammenfällt. Deshalb wird beim *dynamischen Wuchten* (z.B. von Autoreifen) die Massenverteilung so lange verändert, bis die Rotationsachse mit einer Hauptträgheitsachse zusammenfällt. Bei einem statisch und dynamisch gewuchteten Körper müssen die Lager der Drehachsen keine Kräfte mehr aufnehmen. Man kann die Lager entfernen und der Körper rotiert frei, ohne seinen Rotationszustand zu verändern. Man nennt die Hauptträgheitsachsen deshalb auch *freie Achsen*.

Die Rotation eines starren Körpers um seine freien Achsen unterscheidet sich hinsichtlich der Stabilität der Rotationsbewegung. Während die Rotation um die Achsen mit dem größten und dem kleinsten Hauptträgheitsmoment stabil ist, ist die Rotation um die Achse mit dem mittleren Hauptträgheitsmoment

labil. Eine beliebig kleine Störung läßt den Körper aus der Rotation um diese Achse herauskippen.

Rotation einer Zigarrenkiste:

Versetzt man eine quaderförmige Zigarrenkiste so in Rotation, daß die Drehachse mit einer der drei Hauptträgheitsachsen zusammenfällt, so stellt man folgendes fest: Die Rotation ist um die Achse mit dem kleinsten und größten Trägheitsmoment stabil (Drehachsen parallel zur größten und kleinsten Abmessung der Kiste), während die Rotation um die Achse mit dem mittleren Trägheitsmoment zu einer eigenartigen Schlingerbewegung führt.

Rotation einer geschlossenen Kette:

Man bringt eine geschlossene Kette, die an einer Stelle an einem Faden aufgehängt ist, zur Rotation. Nach einiger Zeit spannt sich die Kette zu einem Kreis, dessen Fläche senkrecht auf der Rotationsachse steht, während der Faden auf einem Kegelmantel um die Drehachse umläuft. Die stabile Rotation erfolgt auch hier um die Achse mit dem größten Trägheitsmoment.

Bei einem rotationssymmetrischen Körper, bei dem zwei Hauptträgheitsmomente gleich sind, ist nur die Rotation um eine Symmetrieachse stabil, d.h. um die Achse, zu der das dritte (nur einmal vorkommende) Hauptträgheitsmoment gehört.

Rotation von gekochtem Ei:

Bringt man ein Stopfei oder ein gekochtes Hühnerei um die Achse senkrecht zur Symmetrieachse zum Rotieren, so richtet es sich auf. Die stabile Rotation erfolgt nur um die Achse mit dem kleinsten Trägheitsmoment.

Bewegungsgleichung im Hauptachsensystem

Die Bewegungsgleichung (2.4.1), $\mathbf{T} = d\mathbf{L}/dt$, gilt nur in einem raumfesten Inertialsystem bzw. in einem vom Massenmittelpunkt translatorisch mitgeführten Bezugssystem. In einem raumfesten Bezugssystem sind aber die Komponenten I_{jk} des Trägheitstensors zeitabhängig, so daß bei der Differentiation von $\mathbf{L} = \mathbf{\tilde{I}} \cdot \boldsymbol{\omega}$ komplizierte Ausdrücke auftreten. In einem rotierenden körpereigenen System sind dagegen die Trägheitskoeffizienten zeitlich konstant und speziell im Hauptachsensystem ist sogar $\mathbf{\tilde{I}}$ in Diagonalform. Daher ist es nützlich, die Bewegungsgleichung $\mathbf{T} = d\mathbf{L}/dt$ in das rotierende System zu übertragen. Dazu muß man lediglich beachten, daß ein raumfester und körperfester mit $\boldsymbol{\omega}$ rotierender Beobachter die Änderungsgeschwindigkeit von \mathbf{L} unterschiedlich bewerten. Dieses Problem ist bereits in Abschnitt 1.8.2 bei der Diskussion von Drehbewegungen diskutiert worden. Dort wurde Gl.(1.8.38) $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$ für den Zusammenhang der Geschwindigkeiten in einem raum- und körperfesten Bezugssystem abgeleitet. Diese Formel läßt sich auch auf die Änderungsgeschwindigkeit $d\mathbf{L}/dt$ des Drehimpulses übertragen. Mit der Bezeichnungsweise $(d\mathbf{L}/dt)_R$ für die Änderungsgeschwindigkeit von \mathbf{L} im ruhenden System und $(d\mathbf{L}/dt)_K$ für die Änderungsgeschwindigkeit der Komponenten von \mathbf{L} im körperfesten System ergibt sich

$$\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{R} = \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{K} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} \quad .$$
(2.4.26)

Mit $\mathbf{T} = (d\mathbf{L}/dt)_R$ und Gl.(2.4.21) erhält man dann die **Euler**schen Gleichungen

$$T_{1} = I_{1} \frac{d\omega_{1}}{dt} + (I_{3} - I_{2})\omega_{3}\omega_{2}$$

$$T_{2} = I_{2} \frac{d\omega_{2}}{dt} + (I_{1} - I_{3})\omega_{1}\omega_{3}$$

$$T_{3} = I_{3} \frac{d\omega_{3}}{dt} + (I_{2} - I_{1})\omega_{2}\omega_{1} . \quad (2.4.27)$$

Diese Gleichungen lassen kaum mehr erkennen, daß ihr physikalischer Gehalt nicht über die Newtonschen Axiome hinausgeht, aus denen sie letztendlich abgeleitet wurden.

2.5 Kreiselprobleme

An einigen Beispielen sollen in diesem Abschnitt die interessanten Bewegungsformen des *Kreisels* diskutiert werden, wie sie sich aus der Bewegungsgleichung $\mathbf{T} = d\mathbf{L}/dt$ unter Berücksichtigung von $\mathbf{L} = \mathbf{\tilde{I}} \cdot \boldsymbol{\omega}$ ergeben. Dabei soll die Translationsbewegung vollkommen abgespalten sein, so daß hier nur die Rotation des Körpers um einen raum- und körperfesten Punkt interessiert. Dieses Problem wird als Kreiselproblem bezeichnet.

2.5.1 Der kräftefreie symmetrische Kreisel

Unter einem kräftefreien symmetrischen Kreisel versteht man einen Körper, dessen Trägheitsellipsoid eine Rotationssymmetrieachse besitzt. Ein solcher Körper ist z.B. der Kinderkreisel mit der "Figurenachse" als Symmetrieachse. Im folgenden soll die Symmetrieachse die Hauptachse 3 des Trägheitsellipsoids sein. Die Rotationssymmetrie drückt sich dann in der Gleichheit der beiden anderen Hauptträgheitsmomente aus. Da bei einem kräftefreien Kreisel ferner kein Drehmoment angreifen soll, gilt

$$I_1 = I_2$$
 und $T = 0$, (2.5.1)

so daß aus der Bewegungsgleichung $\mathbf{T} = d\mathbf{L}/dt$ unmittelbar die zeitliche Konstanz des Drehimpulses

$$\mathbf{L} = const \quad (2.5.2)$$

folgt. Bei $\mathbf{T} = 0$ verschwindet wegen $dW = \mathbf{T} \cdot d\boldsymbol{\varphi}$ und $dW = dT_{\text{rot}}$ die zeitliche Änderung der Rotationsenergie und damit ist

$$T_{\rm rot} = const$$
 . (2.5.3)

Im Gravitationsfeld der Erde muß der Kreisel im Schwerpunkt CM unterstützt sein, um die Kräftefreiheit zu gewährleisten (siehe hierzu Abb. 2.21a). Man beachte, daß die Figurenachse durch den Schwerpunkt verläuft.

Einen anschaulichen Einblick in den Bewegungsablauf des kräftefreien symmetrischen Kreisels gewinnt man anhand der **Poinsot**schen Konstruktion von Abb. 2.21b. Der Drehimpuls L, die momentane Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ und die Figurenachse liegen immer in einer Ebene. Man kann ferner zeigen, daß die Tangentialebene TE im Durchstoßpunkt von $\boldsymbol{\omega}$ immer einen konstanten Abstand d von CM hat. Dieser Abstand ist mit Gl.(2.4.16), sowie $T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L} = const$ und $\mathbf{L} = const$ gegeben durch

$$d = \boldsymbol{\rho} \cdot \hat{\mathbf{L}} = \frac{1}{\sqrt{I}} \frac{\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{\omega}} \cdot \frac{\mathbf{L}}{L} = \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}}{L\sqrt{I\omega^2}} = \frac{2T_{\text{rot}}}{L\sqrt{2T_{\text{rot}}}}$$

oder
$$d = \frac{\sqrt{2T_{\text{rot}}}}{L} = const$$
 (2.5.4)

Da weiterhin die Tangentialebene senkrecht zum raumfesten Vektor $\mathbf{L} = const$ steht, ist auch die Orientierung der Tangentialebene zeitlich konstant. Die Tangentialebene ist somit insgesamt raumfest und



Abbildung 2.21: (a) Ein im Massenmittelpunkt CM unterstützter kräftefreier Kreisel. (b) Bewegung des kräftefreien Kreisels: das Trägheitsellipsoid rollt auf der invarianten Tangentialebene TE ab, es ist $\mathbf{L} = const$ und d = const.

man nennt sie die "invariante Ebene". Die Kreiselbewegung ist somit als die Abrollbewegung des Trägheitsellipsoid auf der invarianten Ebene zu beschreiben, mit festgehaltenem Abstand des Bezugspunktes CM zur invarianten Ebene. Da der Berührungspunkt von Ellipsoid und Tangentialebene auf der ω -Achse liegt, in der sich momentan alle Körperpunkte in Ruhe befinden, rollt das Ellipsoid sogar ohne Schlupf auf der invarianten Ebene ab. Die Momentanachse ω läuft dabei auf einem Kreiskegel, dem sogenannten "Raum- oder Spurkegel", um die Drehimpulsachse L. Bei dieser Bewegung von ω wird zwangsläufig die Figurenachse synchron mitgenommen, da L, ω und die Figurenachse in einer Ebene liegen. Die Wanderung von ω um L ist zudem gleichförmig, da in $T_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2 = const$ das Trägheitsmoment I wegen des festen Winkels zwischen ρ und der rotationssymmetrischen Hauptträgheitsachse 3 konstant und damit



ist.

Vom Körper aus gesehen wandert ω ebenfalls auf einem Kreiskegel, dem sog. "Körper- oder Polkegel", um die Figurenachse, und zwar mit der Winkelgeschwindigkeit Ω , die weiter unten berechnet wird. Die gemeinsame Berührungslinie zwischen Raum- und Körperkegel ist die ω -Achse, in der die Körperpunkte momentan ruhen, so daß insgesamt auch der Körper- und Raumkegel ähnlich zu oben ohne Schlupf abrollen (siehe Abb. 2.22).

Für einen außen stehenden Beobachter ist die momentane Drehachse ω und damit der Raum- und Körperkegel schlecht zu erkennen. Dagegen ist die Bewegung der Figurenachse auf einem Kreiskegel um die raumfeste Drehimpulsachse deutlich sichtbar (Abb. 2.22). Diese Bewegungsform nennt man *reguläre Präzession* oder *Nutation*. Entsprechend nennt man den von der Figurenachse beschriebenen Kegel den "Präzessions- oder Nutationskegel".



Abbildung 2.22: Nutationsbewegung eines kräftefreien symmetrischen Kreisels: der Körperkegel rollt auf dem Raumkegel ab, die Figurenachse FA wandert auf dem Nutationskegel um $\mathbf{L} = const$.

Die Kreisfrequenz Ω , mit der die Figurenachse um die ω -Achse im Körpersystem umläuft, läßt sich mit Hilfe der **Euler**schen Gleichungen (2.4.27) bestimmen. Setzt man darin $T_1 = T_2 = T_3 = 0$ und $I_1 = I_2$ so ergibt sich unmittelbar

$$L_3 = I_3 \omega_3 = const$$
, (2.5.6)

d.h. die Projektion von L auf die Figurenachse des symmetrischen Kreisels bleibt zeitlich erhalten. Dies kann direkt aus Abb. 2.22 abgelesen werden. Mit der Konstanten

$$\Omega = \frac{I_1 - I_3}{I_1} \omega_3 \tag{2.5.7}$$

erhält man eine Differentialgleichungen für die zeitliche Änderung von ω_1 und ω_2 mit den Lösungen

$$\omega_1 = A \sin \Omega t$$
 und $\omega_2 = A \sin \Omega t$. (2.5.8)

Im Hauptachsensystem $\hat{\rho}_1$, $\hat{\rho}_2$ und $\hat{\rho}_3$ rotiert also der Endpunkt des Vektorpfeils $\omega_1 \hat{\rho}_1 + \omega_2 \hat{\rho}_2$ mit $\Omega = const$ gleichförmig auf einer zur Figurenachse senkrechten Ebene. Wegen $\omega_3 \hat{\rho}_3 = const$ läuft dann für einen körperfesten Beobachter die $\omega = \omega_1 \hat{\rho}_1 + \omega_2 \hat{\rho}_2 + \omega_3 \hat{\rho}_3$ Achse mit konstanter Kreisfrequenz Ω auf dem Körperkegel um die Figurenachse.

Die zugehörige Nutationsfrequenz ω_N läßt sich aus dem Verhältnis der Mantelumfänge von Raum- und Körperkegel bestimmen, da das Verhältnis der Umlaufzeiten $T_N = 2\pi/\omega_N$ und $\tau = 2\pi/\Omega$ gleich dem Verhältnis der Kreisumfänge und damit der Radien der beiden Kegelmäntel ist. Die Radien sind durch $(\omega^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{L}})^2)^{1/2}$ bzw. $(\omega^2 - \omega_3^2)^{1/2}$ gegeben. Nach einiger Algebra findet man für die Nutationsfrequenz ω_N von $\boldsymbol{\omega}$ bzw. der Figurenachse um das raumfeste \mathbf{L} :

$$\omega_N = \frac{L}{I_1} \quad (2.5.9)$$

Es ist wichtig, darauf hinzuweisen, daß bei der Kreiselbewegung die Analogie zur Translationsbewegung zusammenbricht. Bei der kräftefreien Translation mit $\mathbf{F} = 0$ verschwindet wegen $\mathbf{F} = d\mathbf{p_{cm}}/dt$ die Beschleunigung $d\mathbf{v_{cm}}/dt$. Bei der kräftefreien Kreiselbewegung mit $\mathbf{T} = 0$ ist dagegen $d\boldsymbol{\omega}/dt \neq 0$. Dies ist das eigentlich Überraschende an der Kreiselbewegung. Nur wenn die Drehachse mit einer der Hauptträgheitsachsen zusammenfällt, entarten der Raum- und der Körperkegel zu einer Geraden in der Drehimpulsachse $\mathbf{L} \| \boldsymbol{\omega}$ und es liegt eine "reine" Rotation mit $\boldsymbol{\omega} = const$ vor. Dies ist z.B. für den Kugelkreisel ($I_1 = I_2 = I_3$) gegeben.

Polschwankungen des Erdkörpers:

Eine Anwendung finden die obigen Überlegungen bei der Deutung der Polschwankungen des Erdkörpers. Der kinematische Nord- bzw. Südpol (Durchstoßpunkt der Drehachse) weicht geringfügig vom geographischen Nord- bzw. Südpol (Durchstoßpunkt der Figurenachse) ab (um etwa 10 m). Für die Erde ist aufgrund ihrer Abplattung $(I_1 - I_3)/I_1 = -0.033$, d.h. die Erde ist kein Kugelkreisel und man erwartet eine Nutationsbewegung. Da in erster Näherung die Gravitationskräfte der Sonne und des Mondes kein Drehmoment auf die Erde ausüben, ist zu erwarten, daß der kinematische Pol gleichförmig mit der Kreisfrequenz Ω um den geographischen Pol wandert. Mit $\omega_3 \simeq \omega = 2\pi/\text{Tag}$ rechnet man eine Nutationsperiode $\tau = 2\pi/\Omega = (1/0.033)$ Tage $\simeq 304$ Tagen aus (Eulersche Periode). Beobachtet wird dagegen eine Periode von etwa 430 Tagen (Chandlersche Periode). Es läßt sich zeigen, daß die Abweichung zwischen theoretischem und experimentellem Wert durch die Elastizität der Erde verursacht wird. Die Erde ist also kein idealer starrer Körper.

2.5.2 Der schwere symmetrische Kreisel

Der schwere symmetrische Kreisel ist ein Körper mit rotationssymmetrischem Trägheitsellipsoid ($I_1 = I_2$), der in einem Körperpunkt P auf der Figurenachse FA (Trägheitsmoment I_3) außerhalb des Schwerpunktes unterstützt wird und sich in einem Schwerefeld befindet. Ein bekanntes Beispiel dafür ist der Kinderkreisel. Im Schwerefeld greift das Drehmoment

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_{\mathbf{G}} = \mathbf{r}_{\mathbf{cm}} \times M\mathbf{g} \tag{2.5.10}$$

an und die Bewegungsgleichung $\mathbf{T} = d\mathbf{L}/dt$ besagt, daß der Drehimpuls jetzt nicht mehr zeitlich konstant ist. Da aber die Komponente T_z des Drehmoments in der Vertikalrichtung $\hat{\mathbf{z}}$ wegen $\hat{\mathbf{z}} || M \mathbf{g}$ verschwindet, bleibt die Komponente L_z des Drehimpulses konstant:

$$L_z = const$$
 . (2.5.11)

Entsprechend verschwindet wegen $\hat{\rho} || \mathbf{r_{cm}}$ die Komponente T_3 des Drehmoments in Richtung der Hauptträgheitsachse 3 bzw. der Figurenachse und aus den **Euler**schen Gleichungen (2.4.27) folgt für den symmetrischen Kreisel mit $I_1 = I_2$

$$L_3 = const$$
 . (2.5.12)

Physik I

Ein weiterer Erhaltungssatz bezieht sich auf die Gesamtenergie E. Nach Gl.(2.3.36) ist

$$E = E_{\text{pot}} + T_{\text{rot}} = MgH + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \tilde{\mathbf{I}} \cdot \boldsymbol{\omega} = const \quad . \quad (2.5.13)$$

Schneller schwerer Kreisel

Im Gegensatz zum kräftefreien Kreisel lassen sich für den schweren Kreisel nur Näherungslösungen angeben. Einer elementaren Behandlung ist dabei nur der "schnelle" Kreisel zugänglich. Darunter versteht man einen Kreisel der so schnell um seine Figurenachse rotiert, daß praktisch der gesamte Drehimpls L und die Winkelgeschwindigkeit ω in der Figurenachse ρ_3 liegen:

$$\mathbf{L} \simeq L_3 \hat{\boldsymbol{\rho}}_3 = I_3 \omega_3 \hat{\boldsymbol{\rho}}_3 \qquad (2.5.14)$$

$$\text{und} \qquad \boldsymbol{\omega} = \omega_3 \hat{\boldsymbol{\rho}}_3 \qquad (2.5.15)$$

In dieser Näherung kann man plausibel machen, daß der Drehimpuls L und wegen Gl.(2.5.14) mit ihm auch die Figurenachse unter der Wirkung des Drehmoments $T_{G} = r_{cm} \times Mg$ um eine raumfeste Vertikale wandern. Diese Bewegung der Figurenachse heißt *Präzession*.



Abbildung 2.23: Präzessionsbewegung des schnellen, schweren symmetrischen Kreisels: der Drehimpuls L wandert auf dem Präzessionskegel um die Vertikale.

Wegen $\mathbf{T} = d\mathbf{L}/dt$ ist die Drehimpulsänderung $d\mathbf{L}$ in Abb. 2.23 jeweils parallel zum Drehmoment \mathbf{T} gerichtet. Beim schnellen Kreisel steht ferner wegen $\mathbf{T} \perp \mathbf{r}_{cm}$ und $\mathbf{L} || \mathbf{r}_{cm}$ das Drehmoment $\mathbf{T} \perp \mathbf{L}$, so daß $d\mathbf{L} \perp \mathbf{L}$ wird. Damit ändert sich nur die Richtung aber nicht der Betrag des Drehimpulses. Ferner steht $\mathbf{T} \perp M\mathbf{g}$, d.h. \mathbf{T} und folglich $d\mathbf{L}$ liegen immer horizontal. Für den Drehimpuls und damit die Figurenachse bleibt damit nur die Möglichkeit, auf einem Kreiskegel, dem sog. "Präzessionskegel", um eine raumfeste Vertikale durch den Unterstützungspunkt P umzulaufen. Man sagt, der Kreisel "präzediert".

Das Ungewöhnliche an dieser Kreiselbewegung ist die Tatsache, daß der rotierende Kreisel im Gegensatz zu einem nichtrotierenden Körper nicht unter der Wirkung der Schwerkraft umkippt, sondern in Richtung des Drehmoments "ausweicht".

Die Präzessionsfrequenz läßt sich anhand von Abb. 2.23 bestimmen. Es ist

$$T = |\mathbf{T}| = r_{\rm cm} Mg \sin \theta \quad \text{und} \quad |d\mathbf{L}| = L \sin \theta d\varphi \tag{2.5.16}$$

und wegen $d\mathbf{L} = Tdt$ folgt

$$L\sin\theta d\varphi = r_{\rm cm} Mg\sin\theta dt \qquad (2.5.17)$$

oder

$$\omega_P := \frac{d\varphi}{dt} = \frac{r_{\rm cm}Mg}{L} \quad (2.5.18)$$

An diesem Ausdruck ist besonders bemerkenswert, daß die Präzessionsfrequenz unabhängig vom Neigungswinkel θ der Figurenachse ist. Setzt man noch L aus Gl.(2.5.14) ein, so ergibt sich

$$\omega_P := \frac{d\varphi}{dt} = \frac{r_{\rm cm}Mg}{I_3\omega_3} . \qquad (2.5.19)$$

Je höher also der "Spin" des Kreisels ist (L bzw. ω_3 groß), umso langsamer wird die Präzessionsbewegung. Dies kann man bei Kinderkreiseln beobachten, bei denen aufgrund von Reibungseffekten mit abnehmendem ω_3 die Präzessionsfrequenz immer größer wird.

Es soll abschließend noch die Richtung von ω_p diskutiert werden. Aus $|d\mathbf{L}| = L \sin\theta d\varphi$ bzw. $|d\mathbf{L}|/dt = \omega_P L \sin\theta$ und der Richtung der Vektoren $d\mathbf{L}$, ω_P und \mathbf{L} in Abb. 2.23 ersieht man $d\mathbf{L}/dt = \omega_P \times \mathbf{L}$ bzw. mit $\mathbf{T} = d\mathbf{L}/dt$

$$\mathbf{T} := \boldsymbol{\omega}_P \times \mathbf{L} \quad . \tag{2.5.20}$$

Diese Gleichung bleibt auch für andere Drehmomente als das Gravitationsmoment T_G richtig, solange nur $T \perp L$ steht und T in einer raumfesten Ebene liegt.

Die beschriebene gleichförmige Präzession des Kreisels im konstanten Schwerefeld ist für hinreichend große ω eine mögliche, aber nicht die einzig mögliche Bewegungsform. Gibt man z.B. einem gleichförmig präzedierenden Kreisel einen kurzen seitlichen Stoß auf die Figurenachse, so führt dieser Drehmomentstoß zu einer Drehimpulsänderung ΔL . Ein bestimmtes ΔL resultiert in einer Änderung der Drehachse um $\Delta \omega$. Da aber $I_3 \neq I_2 = I_1$ ist, muß die neue Drehimpulsrichtung nicht mehr parallel zur neuen ω -Richtung sein. Man bekommt dann eine Überlagerung einer Nutations- und einer Präzessionsbewegung. Der Öffnungswinkel des Präzessionskegels ist jetzt nicht mehr zeitlich konstant, sondern schwingt mit der Frequenz ω_N der Nutation. Diese "Nickschwingung" überlagert sich der Präzession und man spricht von *pseudoregulärer Präzession*. Die Erdabplattung, die wir uns als Äquatorwülste auf einer idealen Kugel vorstellen wollen, zusammen mit der Neigung der Erdachse um 23.5° zur Normalen der Ekliptik (Bahnebene der Erde um die Sonne) bewirken, daß Sonne und Mond ein Drehmoment auf die Erde ausüben: die Gravitationskraft auf den sonnennahen Äquatorwulst ist größer als auf den sonnenfernen; das resultierende Drehmoment um CM versucht die Erdachse normal zur Ekliptik zu stellen, aber aufgrund der Erddrehung ω um die Figurenachse setzt stattdessen eine Präzessionsbewegung der Erdachse um die Normale zur Ekliptik ein (siehe Abb. 2.24). Die Zeit für einen vollen Umlauf beträgt etwa 26 000 Jahre. Diese Präzessionsbewegung macht verständlich, daß sich die antiken Seefahrer nicht am heutigen Polarstern orientieren konnten.

Der Präzession der Erdachse sind die **Euler**schen Polschwankungen als Nutation aufgelagert. Hinzu kommt allerdings noch eine astronomische Nutation der Erdachse. Der Mond ist zu 2/3 für die pseudoreguläre Präzession der Erdachse verantwortlich. Die Mondbahn um die Erde ist aber nicht stationär, sondern unterliegt aufgrund von Störeinflüssen durch die Sonne und die Nachbarplaneten selber einer Präzessionsbewegung: die um 5° gegen die Ekliptik geneigte Mondbahn präzediert mit einer Periode von 18.6 Jahren um die Normale zur Ekliptik. Diese Präzession war wahrscheinlich schon den Menschen in der Megalith-Kultur bekannt. Da die Größe des vom Mond auf die Erde ausgeübten Drehmoments von der Orientierung der Mondbahn relativ zur Erdachse abhängt, überträgt sich die Mondpräzession mit einer Periode von 18.6 Jahren als zusätzliche Störung auf die Erdpräzession. Diese Störung ist sehr klein. Die astronomische Nutation führt zu einer Kippschwingung der Erdachse mit nur etwa 9 Winkelsekunden Amplitude.



Abbildung 2.24: Zur Deutung der Erdpräzession.

2.5.3 Der Kreiselkompaß

Abb. 2.25a zeigt einen Kreisel in *kardanischer Aufhängung*, bei der der Körper in drei zueinander senkrecht stehenden Achsen drehbar gelagert ist. Wird der Kreisel um seine Figurenachse in schnelle Rotation versetzt ($\boldsymbol{\omega} \| \mathbf{L} \|$ Figurenachse), so behält er seinen Drehimpuls und deshalb seine Figurenachse (d.h. seine Orientierung im Raum) bei, da bei keiner von außen aufgeprägten Bewegung des kardanischen Gehänges auf den Körper ein Drehmoment T übertragen wird. In der Navigation wird deshalb der kardanische Kreisel als "künstlicher Horizont" eingesetzt, der unabhängig von der Schiffs- oder Flugzeugbewegung eine feste Raumrichtung anzeigt.



Abbildung 2.25: (a) Kardanische Aufhängung. (b) Der Kreiselkompaß: L versucht sich möglichst parallel zu ω einzustellen.

Beim *Kreiselkompaß* ist dagegen neben der Figurenachse nur noch eine weitere (und zwar die vertikal stehende) Drehachse vorgesehen. Der Kreisel ist somit in der Horizontalebene der Erde gefesselt (siehe Abb. 2.25b). In der Näherung des schnellen Kreisels liegt der Drehimpuls L in der Figurenachse. Bei der Rotation ω der Erde um ihre eigene Achse wird nun zwangsweise der Kreiselkompaß um die Erdachse gedreht, d.h. es wird ein Drehmoment $\mathbf{T} \parallel \omega$ ausgeübt, das beim gefesselten Kreisel am Kreiselkörper angreifen kann. Wegen $\mathbf{L} = \mathbf{T} dt$ versucht sich daher der Drehimpuls L und mit ihm die Figurenachse möglichst "hoch", d.h. in Nordrichtung einzustellen. Der Kreiselkompaß bringt für die Navigation gegenüber der gewöhnlichen Kompaßnadel den Vorteil, keine magnetische Fehlweisung zu haben.

Ρηλεικ Ι

2.6 Abrollbewegungen

Die Bewegungsgleichungen des frei beweglichen starren Körpers sind die Impulsgleichung $\mathbf{F} = d\mathbf{P_{cm}}/dt$ für die Translation und die Drehimpulsgleichung $\mathbf{T} = d\mathbf{L}/dt$ (mit dem Massenmittelpunkt als Bezugspunkt) für die Rotation. Dabei sind die dynamischen Größen \mathbf{p} und \mathbf{L} mit den kinematischen Größen $\mathbf{v_{cm}}$ und $\boldsymbol{\omega}$ über $\mathbf{p_{cm}} = M\mathbf{v_{cm}}$ und $\mathbf{L} = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}$ verknüpft. Sind die Translations- und Rotationsbewegung völlig voneinander entkoppelt, so ist $\mathbf{F} = d\mathbf{p_{cm}}/dt$ ein Problem der Punktmechanik und $\mathbf{T} = d\mathbf{L}/dt$ ein Kreiselproblem. Die Translations- und Rotationsbewegung überlagern sich unabhängig voneinander. Häufig tritt allerdings der Fall ein, daß Translations- und Rotationsbewegung miteinander verkoppelt sind (z.B. Bumerang).

Es soll hier nur ein sehr einfacher Bewegungstyp einer gekoppelten Translations- und Rotationsbewegung behandelt werden, nämlich die Abrollbewegung, bei der die Verknüpfung über eine kinematische Bedingung erfolgt. Unter einer Abrollbewegung versteht man eine Bewegungsform, bei der sich ein Körper auf einer Unterlage schlupffrei, d.h. ohne zu gleiten, bewegt.



Abbildung 2.26: Abrollbewegung auf der schiefen Ebene.

Bei der kombinierten Translations- und Rotationsbewegung ist die Geschwindigkeit \mathbf{v} jedes Massenelements gegeben zu

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{trans}} + \mathbf{v}_{\text{rot}} \quad . \tag{2.6.1}$$

Mit dem Massenmittelpunkt als Bezugspunkt ergibt sich gemäß Gl.(2.1.6) und (2.1.9)

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\mathrm{cm}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\mathrm{cm}}$$
 (2.6.2)

Betrachtet man einen kugel- oder zylinderförmigen Körper auf einer ebenen Unterlage, so erfordert die Bedingung eines schlupffreien Abrollens, daß die Schwerpunktgeschwindigkeit des Körpers entgegengesetzt gleich der Rotationsgeschwindigkeit eines Massenelements auf der Kugel- oder Zylinderoberfläche ist. Mit dem Radius R des Körpers muß also

$$\mathbf{v}_{\mathbf{cm}} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} \tag{2.6.3}$$

gelten. Für die Gesamtenergie des Körpers gilt ferner

$$E = T_{\rm trans} + T_{\rm rot} + E_{\rm pot} \tag{2.6.4}$$

mit $T_{\rm trans} = \frac{1}{2}Mv_{\rm cm}^2$ und $T_{\rm rot} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\tilde{\mathbf{I}}\cdot\boldsymbol{\omega}.$

Als erstes Beispiel soll die Abrollbewegung eines Zylinders auf einer schiefen Ebene diskutiert werden (siehe Abb. 2.26). Der Körper soll sich zunächst am oberen Ende der schiefen Ebene in Ruhe befinden, d.h. die Gesamtenergie ist gleich der potentiellen Energie $E_{\text{pot}} = MgH$. Wird der Körper losgelassen, so rollt er die schiefe Ebene herunter, wobei die potentielle Energie in kinetische Translations- und Rotationsenergie umgewandelt wird. Aus der Energieerhaltung folgt für die Endgeschwindigkeit am unteren Ende der schiefen Ebene

$$MgH = \frac{1}{2}Mv_{\rm vm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 . \qquad (2.6.5)$$

Mit $v = \omega R$ folgt dann

$$v_{\rm cm}^2 = \frac{2gH}{1+\frac{I}{MR^2}}$$
. (2.6.6)

Setzt man das Trägheitsmoment I für verschieden Körperformen ein, so erhält man

Vollzylinder:
$$I = MR^2/2 \Rightarrow v_{\rm cm}^2 = \frac{4gH}{3}$$
 (2.6.7)

Hohlzylinder:
$$I = MR^2 \Rightarrow v_{cm}^2 = gH$$
. (2.6.8)

Man erkennt, daß die Translationsgeschwindigkeit unabhängig von Masse und Radius ist, d.h ein Stahlund Holzzylinder beliebiger Abmessungen rollen gleich schnell die schiefe Ebene hinunter. Ein Vollzylinder hat ein kleineres Trägheitsmoment als ein Hohlzylinder und damit eine höhere Translationsgeschwindigkeit.

Kapitel 3

Mechanik deformierbarer Körper

In den vorangegangenen Kapiteln wurde die Mechanik des Massenpunktes und des starren Körpers diskutiert. Beim Massenpunkt blieb die räumliche Ausdehnung eines Körpers völlig unberücksichtigt. Dies wurde beim Übergang zum starren Körper geändert. Hier wurde aber die einschränkende Annahme gemacht, daß sich ein starrer Körper aus Massenelementen zusammensetzt, deren gegenseitiger Abstand sich unter dem Einfluß von Kräften oder Drehmomenten nicht ändert. Diese idealisierende Annahme hat zu einer wesentlichen Vereinfachung geführt. Während ein System aus N frei beweglichen Massenpunkten 3N Freiheitsgrade besitzt und seine Bewegung unter dem Einfluß äußerer Kräfte deshalb schwierig zu beschreiben ist, reduzierte sich die Zahl der Freiheitsgrade beim starren Körper auf sechs. Die Bewegung des starren Körpers konnte dann mit zwei Vektorgleichungen für die Translations- und Rotationsbewegung beschrieben werden.

Die Mechanik des starren Körpers befaßte sich also nur mit den Bewegungsvorgängen des Gesamtkörpers unter der Einwirkung von äußeren Kräften und Drehmomenten. Die äußeren Kräfte konnten per Definition nicht zu einer Änderung der Relativabstandes der einzelnen Massenelemente eines starren Körpers führen. Mit dieser Einschränkung konnten wir sehr gut Drehbewegungen von Körpern beschreiben (siehe z.B. Kreiselprobleme). Die Vorstellung, daß ein Körper unter der Einwirkung äußerer Kräfte und Drehmomente unverändert bleibt, ist aber nur ein idealisierter Grenzfall und widerspricht in vielen Fällen unserer Alltagserfahrung. Man stellt häufig fest, daß sich Körper unter dem Einfluß von äußeren Kräften *deformieren*. Kräfte können also sowohl Bewegungsänderungen als auch eine Deformation von Körpern verursachen. In diesem Kapitel wollen wir deshalb die Vorstellung des starren Körpers (fester Relativabstand der Massenelemente) fallen lassen und zu deformierbaren Körpern übergehen. Unter einem deformierbaren Körper wollen wird einen Körper verstehen, bei dem äußere Kräfte und Drehmomente neben einer Änderung des Bewegungszustandes auch eine Verformung hervorrufen.

Zum Verständnis der Deformation von Körpern sind Grundvorstellungen über den Aufbau der Materie notwendig, die wir im folgenden Abschnitt kurz beschreiben wollen. Eine genaue Diskussion dieser Vorstellungen erfolgt dann später im Rahmen der Vorlesungen zur Festkörperphysik.

3.1 Grundvorstellungen zur Materiestruktur

Wir wissen heute, daß Materie aus Atomen bzw. Molekülen aufgebaut ist, die mehr oder weniger fest miteinander gekoppelt sind. Der typische Durchmesser eines Atoms beträgt etwa 0.1 nm oder 1 Ångström. Idealisieren wir die Atome als Massenpunkte, so sind wir wieder bei der Vorstellung angelangt, daß wir einen makroskopischen Körper als ein System von wechselwirkenden Massenpunkten betrachten können.

Die Wechselwirkung zwischen den einzelnen Atomen und Molekülen wird im Detail in der Festkörperphysik diskutiert. Es sei hier nur darauf hingewiesen, daß die Wechselwirkungskräfte hauptsächlich elektrischer Natur sind, d.h. Gravitations- oder magnetische Kräfte spielen keine Rolle. Die Wechselwirkung zwischen zwei Atomen kann durch die potentielle Energie V(r) der Wechselwirkung ausgedrückt werden. In Abb. 3.1 ist der typische Verlauf dieser potentiellen Energie für die Van der Waals Wechselwirkung gezeigt. Die Wechselwirkungskraft ergibt sich als Gradient der potentiellen Energie, $F(r) = -\partial V/\partial r$. Man erkennt, daß die Wechselwirkungskraft für kleine Abstände r repulsiv und für große r attraktiv ist. Die attraktive Wechselwirkung ist elektrostatischer Natur, während die repulsive Wechselwirkung auf dem Paulischen Ausschließungsprinzip beruht, das erst im Rahmen der Vorlesung zur Quantenmechanik im Detail diskutiert wird. Man erkennt aus Abb. 3.1 zwei weitere wichtige Dinge. Erstens besitzt die potentielle Energie ein Minimum für r = d, d.h. die wechselwirkenden Atome werden versuchen, sich in einem mittleren Abstand r = d anzuordnen, da dieser Zustand energetisch am günstigsten ist. Zweitens kann man eine Bindungsenergie der wechselwirkenden Atome als $E_B = E(d) - E(\infty)$ definieren. Diese Energie muß aufgebracht werden, um zwei wechselwirkende Atome zu trennen. Ist die kinetische Energie der Atome (z.B. aufgrund der thermischen Bewegung bei endlicher Temperatur) kleiner als diese Bindungsenergie, so bleiben die Atome in der Potentialmulde gefangen und bilden einen gebundenen Zustand. Es ist evident, daß ein gebundener Zustand bevorzugt dann gebildet wird, wenn die Potentialmulde sehr tief, d.h. die Bindungsenergie sehr groß ist, und die kinetische Energie klein (z.B. niedrige Temperatur) ist. Die Größe der Bindungsenergie hängt von der genauen Art der Wechselwirkung ab. Man unterscheidet z.B. zwischen kovalenter, ionischer, metallischer und Van der Waals Bindung, wobei die Bindungsstärke von der kovalenten zur van der Waals Bindung abnimmt.

Je nach Verhältnis von Bindungsenergie und kinetischer Energie der wechselwirkenden Atome kann Materie verschiedene *Aggregatszustände* einnehmen. Man spricht von Festkörpern, Flüssigkeiten und Gasen. Der Übergang zwischen diesen Aggregatszuständen ist allerdings teilweise fließend. In diesem Kapitel werden die Gesetzmäßigkeiten der Deformation von Festkörpern sowie die Statik und Dynamik von Flüssigkeiten (*Hydrostatik* und *Hydrodynamik*) und Gasen (*Aerostatik* und *Aerodynamik*) behandelt. In dem späteren Kapitel Wärmelehre erfolgt dann eine Vermittlung der Vorstellungen zu inneren Bewegungsvorgängen.

Festkörper

Man kann die obige Diskussion auf eine große Zahl von Atomen ausdehnen und zeigen, daß die Wechselwirkung der Atome zur Ausbildung von festen Körpern führt, wenn die Bindungsenergie groß gegenüber der kinetischen Energie ist. Es ist anschaulich klar, daß die wechselwirkenden Atome versuchen werden, sich so anzuordnen, daß sie alle den energetisch günstigsten Zustand einnehmen können. Dies ist dann gegeben, wenn sie alle einen mittleren Abstand *d* besitzen. D.h. die Atome werden versuchen, eine regelmäßige Anordnung zu etablieren. Wenn die Atome eine solche regelmäßige Anordnung einnehmen, spricht man von einem *kristallinen Festkörper* oder *Einkristall*. Das wichtige Merkmal eines Einkristalls ist die langreichweitige regelmäßige Anordnung der Atome. Man kennt hier die Position aller Atome des Kristalls, wenn man die Position eines einzigen Atoms des Kristalls kennt.



Abbildung 3.1: Potentielle Energie der Wechselwirkung (Van der Waals Wechselwirkung) zwischen zwei Atomen als Funktion des Abstandes zwischen den Atomen.

Festkörper können aber auch einen *polykristallinen* oder *amorphen* Zustand einnehmen. Polykristalline Festkörper bestehen dabei aus einer großen Zahl von kleinen Einkristallen, die eine unregelmäßige Orientierung im Raum einnehmen. Bei amorphen Festkörpern haben die Atome zwar noch einen mittleren Abstand *d*, sie besitzen aber keine langreichweitige Ordnung mehr. Polykristalline und amorphe Festkörper bekommt man dann, wenn die wechselwirkenden Atome nicht genügend Zeit haben, die optimale Position einzunehmen. Dies passiert z.B. dann, wenn man die kinetische Energie der Atome sehr schnell erniedrigt (z.B. durch schnelles Abkühlen, Abschrecken) und die bei hoher kinetischer Energie vorhandene ungeordnete Struktur dabei eingefroren wird. Zu den amorphen Festkörpern gehören z.B. die Gläser, Wachs, Gummi etc.. Im Gegensatz zu Einkristallen besitzen amorphe Festkörper keinen definierten Schmelzpunkt, sondern Erweichen langsam bei Erwärmung.

Abb. 3.2a zeigt schematisch die potentielle Energie der Atome in einem einkristallinen Festkörper. Die



Abbildung 3.2: (a) Schematische Darstellung der potentiellen Energie in einem Festkörper. Die gestrichelte Linie zeigt das harmonische Oszillatorpotential $E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}ks^2$ als lokale Näherung. (b) Masse-Feder-Modell eines Festkörpers.

Potentialminima, die die Gleichgewichtsposition der Atome bilden, besitzen regelmäßige Abstände. Aufgrund der Anbindung der Atome an die Gleichgewichtspositionen besitzen Festkörper eine feste Gestalt und damit auch ein definiertes Volumen. Aufgrund der endlichen kinetischen Energie der Atome (aufgrund der endlichen Temperatur) können diese Schwingungen um die Gleichgewichtsposition ausführen. Man kann, wie in Abb. 3.2a gezeigt ist, die potentielle Energie um die Gleichgewichtslage durch eine Parabel $E_{\text{pot}}(s) = \frac{1}{2}ks^2$ annähern, wobei $s = x - x_0$ die Auslenkung aus der Gleichgewichtsposition x_0 ist. Mit dieser Näherung erhält man die elastische Rückstellkraft $F_{\text{el}} = -dE_{\text{pot}}/ds = -ks$, d.h. die Rückstellkraft ist proportional zur Auslenkung aus der Ruhelage. Solche Kräfte haben wir als harmonische Kräfte bezeichnet (vergleiche Abschnitt 1.6.2). Der Ausdruck $F_{\text{el}} = -ks$ entspricht dem **Hooke**schen Gesetz, das wir für das Masse-Feder-Pendel kennengelernt haben, und man kann sich deshalb die Wechselwirkung eines Atoms mit den Nachbaratomen in einem Festkörper auch in Form des in Abb. 3.2b gezeigten Masse-Feder-Modells veranschaulichen. In diesem Modell wird klar, daß die Atome in einem Festkörper nicht starr fixiert sind, sondern "quasi mit Federn" an die Nachbaratome gebunden sind.

Sind die Feder- bzw. Bindungskräfte in einem Festkörper in alle Raumrichtungen gleich groß, so spricht man von einem *isotropen*, im anderen Fall von einem *anisotropen* Festkörper. Es sei ferner darauf hingewiesen, daß bei realen einkristallinen Festkörpern Fehler im Gitteraufbau auftreten. Typische Gitterfehler sind z.B. Fehlstellen, Zwischengitteratome, Fremdatome, Versetzungen, Zwillingsgrenzen etc. (siehe Abb. 3.3). Diese Gitterfehler können die physikalischen Eigenschaften von Festkörpern wesentlich beeinflussen.¹



Abbildung 3.3: Gitterfehler in einem Festkörper.

Das Masse-Feder-Modell eines Festkörpers macht klar, daß ein Festkörper nicht als starrer Körper betrachtet werden kann, sondern durch den Einfluß äußerer Kräfte und Drehmomente verformt werden kann (Dehnung, Biegung, Stauchung, Scherung, Torsion). Die äußeren Kräfte und Drehmomente stehen dabei im Gleichgewicht mit den inneren Kräften und Drehmomenten zwischen den Gitterbausteinen. An diesen wirken jetzt elastische Rückstellkräfte, da sie aus ihrer Gleichgewichtslage ausgelenkt sind. Wir werden im folgenden allerdings die mikroskopische Struktur und die Wechselwirkung zwischen den einzelnen Bauelementen eines Festkörpers außer Betracht lassen. Wir werden uns stattdessen nur mit den makroskopischen Eigenschaften von Festkörpern auf einer Längenskala, die groß gegen den mittleren Abstand der Atome im Festkörper ist, beschäftigen. Dabei kann dann der Festkörper als elastisches Kontinuum betrachtet werden. Die Herstellung des Zusammenhangs zwischen den makroskopischen elastischen Eigenschaften eines Festkörpers und den mikroskopischen Bindungseigenschaften bzw. der

¹Zum Beispiel wird die Festigkeit und Elastizität von Metallen sehr stark durch die Mirko- und Defektstruktur dieser Materialien bestimmt. In den Materialwissenschaften versucht man, die Defektstrukturen gezielt zu beeinflussen, um für Anwendungen gewünschte Materialeigenschaften zu erhalten. In Halbleitern bestimmt Fremdatome (Dotieratome) ganz wesentlich die elektronischen Eigenschaften.

249

mikroskopischen Struktur (auch Fehlordnung) von Festkörpern ist Thema der Festkörperphysik.

Die typischen Massendichten von Festkörpern liegen bei $\rho = 1 - 10 \text{ g/cm}^3$.

Flüssigkeiten

Die Moleküle in Flüssigkeiten haben zwar wie in Festkörpern aufgrund der gegenseitigen Wechselwirkung einen festen mittleren Abstand, sie sind aber nicht an eine feste Position gebunden, sondern können sich in einer *idealen Flüssigkeit* völlig frei relativ zueinander bewegen. Flüssigkeiten weisen deshalb zwar wie Festkörper ein festes Volumen aber keine feste Form auf. Man benötigt deshalb bei Flüssigkeiten nur für Volumenänderungen nicht aber für Formveränderungen eine äußere Kraft oder Drehmoment. Die Gestalt einer Flüssigkeit paßt sich z.B. immer der jeweiligen Form des Aufbewahrungsgefäßes an. Je nach Art der Flüssigkeit dauert dies aber unterschiedlich lange. So nimmt z.B. Wasser die Form eines Gefäßes fast augenblicklich an, während dies für Honig einer längeren Zeitspanne bedarf. Dies hängt mit der unterschiedlichen *Viskosität* (Zähigkeit) von *realen Flüssigkeiten* zusammen, die ein Maß dafür ist, wie frei sich die Flüssigkeitsmoleküle gegeneinander bewegen können. Erhöht man die Zähigkeit einer Flüssigkeit immer mehr, so gelangt man schließlich zu einem amorphen Festkörper. Der Übergang ist dabei kontinuierlich und die Grenze zwischen Flüssigkeiten und amorphen Festkörpern ist nicht scharf festgelegt.

Die typischen Massendichten von Flüssigkeiten sind ähnlich zu denjenigen von Festkörpern und liegen typischerweise zwischen $\rho = 1 - 10 \text{ g/cm}^3$.



Abbildung 3.4: Zur Modellvorstellung von Flüssigkeiten.

Gießt man zum Vergleich z.B. Wasser und Zucker in ein Gefäß, so bildet sich bei Zucker ein ein kegelförmiges Gebilde, währen man für Wasser eine völlig ebene Oberfläche erhält. Die Reibungskräfte zwischen den Zuckerteilchen verhindern, daß sich beim Zucker eine völlig ebene Oberfläche ausbildet. Die Tatsache, daß man für Wasser eine völlig ebene Oberfläche erhält zeigt, daß sich die Wasserteilchen völlig frei gegeneinander bewegen können müssen. Derselbe Effekt wurde bereits beim **Newton**schen Eimerversuch (siehe Abschnitt 1.7.3) diskutiert. Bei der Rotation eines Wassereimers um seine Längsachse stellte sich hier aufgrund der gleichzeitig auf die Wasserteilchen wirkenden Schwerkraft $\mathbf{F}_{\mathbf{G}}$ und Zentrifugalkraft $\mathbf{F}_{\mathbf{TZ}}$ eine parabelförmige Wasseroberfläche ein, da die wirkende Gesamtkraft auf die frei beweglichen Wasserteilchen senkrecht zur Wasseroberfläche stehen muß.

Diese Experimente mit Wasser zeigen, daß Flüssigkeitsteilchen frei verschiebbar sind. Das Volumen einer Flüssigkeit ändert sich dagegen unter der Wirkung von äußeren Kräften wenig, d.h. die Flüssigkeitsteilchen haben einen festen Abstand. Man kann mit diesen Erkenntnissen die in Abb. 3.4 gezeigte Modellvorstellung für Flüssigkeiten entwickeln. Auf ein Flüssigkeitsteilchen im Innern einer Flüssigkeit wirkt keine resultierende Kraft, es bewegt sich quasi kräftefrei. An der Oberfläche dagegen wird das Teilchen aufgrund der fehlenden Kraftkomponenten nach innen gezogen. Um Flüssigkeitsteilchen an die Oberfläche zu holen, muß die Arbeit $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ geleistet werden. Flüssigkeitsteilchen an der Oberfläche besitzen somit eine höhere potentielle Energie, die man als *Ober-flächenenergie* bezeichnet. Ohne äußere Kräfte besitzt die potentielle Energie im stabilen Gleichgewichtszustand ein Minimum. Das heißt, die Oberfläche der Flüssigkeit stellt sich so ein, um die Oberflächenenergie zu minimieren. D.h. *ohne äußere Kräfte ist die Oberfläche ein Fläche minimaler potentieller Energie*.

Gase

Bei Gasen sind die Kräfte zwischen den Molekülen so schwach oder vernachlässigbar klein, daß zwischen den Teilchen kein Zusammenhalt mehr besteht (die kinetische Energie ist hier größer als die Bindungsenergie). Die einzelnen Moleküle bewegen sich also frei im Raum, so daß das Gas jedes beliebige Volumen einnehmen kann. Die Gasmoleküle besitzen entsprechend der Temperatur des Gases eine bestimmte mittlere kinetischen Energie und bewegen sich ungeordnet. Bei ihrer Bewegung stoßen die Gasmoleküle mit anderen Molekülen und mit den Wänden des Gefäßes zusammen. Das Gas übt dadurch durch den Impulsübertrag auf die Wand einen Druck aus. Bei Zimmertemperatur und Normaldruck macht ein einzelnes Molekül etwa 10¹⁰ Stöße pro Sekunde.

Zur Beschreibung vieler Eigenschaften von Gasen kann man die schwache Wechselwirkung der einzelnen Gasmoleküle völlig vernachlässigen. Dies ist insbesondere bei stark verdünnten Gasen (d.h. Gasen bei geringem Druck) der Fall. In dieser Näherung spricht man von einem *idealen Gas*. Berücksichtigt man die zwischenmolekularen Kräfte, so nennt man das Gas ein *reales Gas*. Viele Verhaltensweisen von Gasen sind gerade eine Folge dieser nichtverschwindenden Wechselwirkungskräfte.

Bei Normaldruck und Normaltemperatur sind die Gasdichten etwa drei Größenordnungen kleiner als die von Flüssigkeiten und Festkörpern und betragen typischerweise 1 kg/m³ oder 1 g/Liter.

Gegenüberstellung der Characterika von Festkörpern, Flüssigkeiten und Gasen

	Festkörper	Flüssigkeiten	Gase
Wechselwirkung	stark	schwach	sehr schwach
Volumen	fest	fest	variabel
Gestalt	fest	variabel	variabel
Kompressibilität	klein	mittel	groß
$\Delta V/V_0$ für $\Delta p = 1$ bar	etwa 10^{-6}	etwa 10^{-5}	etwa 0.5

Tabelle 3.1: Gegenüberstellung der charakteristischen Eigenschaften von Festkörpern, Flüssigkeiten und Gasen.

3.2 Elastomechanik von Festkörpern

3.2.1 Spannung und Dehnung

Spannung

Die äußeren Kräfte, die auf einen Festkörper wirken, können in sogenannte *Massenkräfte*, die proportional zur Masse des Körpers sind (z.B. Gravitationskraft oder Trägheitskraft) und in sogenannte *Oberflächenkräfte* unterteilt werden. Letztere greifen nur an der Oberfläche des Festkörpers an. Im folgenden soll nur die Deformation von Festkörpern aufgrund solcher Oberflächenkräfte diskutiert werden. Die Massenkräfte werden nicht berücksichtigt.



Abbildung 3.5: Zur Veranschaulichung der verschiedenen Komponenten des Spannungstensors. Der erste Index der Spannungskomponente gibt die Fläche an, an der die Kraft angreift, der zweite Index die Richtung der Kraft.

Da die Oberflächenkräfte an Flächen angreifen, führt man den Begriff der Spannung σ ein:

Spannung :=
$$\frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}}$$

 σ := $\frac{F}{A}$. (3.2.1)

Wie in Abb. 3.5 gezeigt ist, können die angreifenden Kräfte normal oder tangential zu einer Fläche wirken. Man unterscheidet deshalb zwischen *Normalspannungen* σ_n und *Tangential*- oder *Schubspannungen* σ_t :

Normals pannungspannung σ_n	:=	$\frac{\text{Normalkraft } F_n}{\text{Eläche } A}$	
Tangentialspannungspannung σ.	:=	Tangentialkraft F_t	(322)
		\mathbf{F} läche A	(3.2.2)

Es geht aus Abb. 3.5 hervor, daß es insgesamt 9 Spannungskomponenten gibt, und zwar 3 Normalspannungen (σ_{xx} , σ_{yy} und σ_{zz}) und 6 Schubspannungen (σ_{xy} , σ_{yx} , σ_{yz} , σ_{zy} , σ_{xz} und σ_{zx}). Die 9 Spannungskomponenten bilden den Spannungstensor

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad . \quad (3.2.3)$$

Man kann allerdings zeigen, daß $\sigma_{ik} = -\sigma_{ki}$ gilt, so daß es nur insgesamt 6 unabhängige Komponenten gibt.² Je nach Richtung der angreifenden Normalkraft spricht man von einer Zug- oder Druckspannung. Die resultierende Verformung des Festkörpers ist eine Dehnung oder Stauchung. Die angreifenden Schubspannungen führen zur einer Scherung oder Torsion des Festkörpers. Diese Verformungen sind in Abb. 3.6 veranschaulicht. Bei gleichzeitig an einem Körper angreifender Zug- und Druchspannung kommt es zu einer Verbiegung.



Abbildung 3.6: Zu den bei einem Körper unter der Einwirkung einer Spannung auftretenden Verformungen.

Die Einheit der Spannung ergibt sich aus der Definitionsgleichung zu³

$$[\sigma] = 1 \frac{N}{m^2} := 1 \operatorname{Pascal} = 1 \operatorname{Pa} = 10^{-5} \operatorname{bar}$$
 (3.2.4)

Hohe Spannungen können sehr einfach dadurch realisiert werden, indem man eine Kraft auf eine sehr kleine Fläche wirken läßt. Drückt man z.B. auf eine Reißzwecke mit einer Kraft von nur 10 N, so erzeugt man dadurch wegen der kleinen Fläche der Spitze der Reißzwecke von etwa $A = 10^{-9}$ m² eine Druckspannung von $\sigma = F/A = 10^{10}$ N/m² oder 10^5 bar.

Dehnung

Nach der oben erfolgten Definition der Spannung muß jetzt die resultierende Verformung des Körpers beschrieben werden. Dies kann sehr anschaulich an einem eindimensionalen Körper diskutiert werden. Aufgrund der wirksamen Spannung verändert der Körper seine ursprüngliche Länge l_0 um Δl und der Grad der durch die Spannung hervorgerufenen Verformung kann durch die relative Längenänderung $\Delta l/l_0$ beschrieben werden. Man kann somit die Verzerrung oder Dehnung



²Dies folgt aus der Bedingung, daß die Schubspannungen keine Translationsbewegung und keine Rotation des Festkörpers hervorrufen dürfen.

³Die früher häufig verwendeten Einheiten 1 at = $1 \text{ kp/cm}^2 = 9.80665 \times 10^4 \text{ Pa}$ (technische Atmosphäre) und 1 atm = 760 Torr = Normaldruck = 101 325 Pa (physikalische Atmosphäre) dürfen heute nicht mehr verwendet werden.
einführen, die die Verformung eines Körpers aufgrund einer Verspannung beschreibt.

Für einen dreidimensionalen Festkörper ist die Dehnung kein Skalar, sondern wird durch den Dehnungstensor

$$\tilde{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.2.6)$$

beschrieben, der wie der Spannungstensor $\tilde{\sigma}$ auch nur 6 unabhängige Komponenten besitzt.

Nach der erfolgten Definition der Spannung und Dehnung muß jetzt der Zusammenhang zwischen einer wirksamen Spannung und der daraus resultierenden Verformung eines Festkörpers diskutiert werden. Glücklicherweise besteht für kleine Spannungen ein linearer Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung. Die Verformung des Körpers ist zudem bei kleinen Spannungen meistens elastisch, d.h. nach Wegnahme der Spannung geht der Körper wieder in seine Ausgangsform zurück. In diesem Fall läßt sich der Zusammenhang zwischen Spannung σ und Dehnung ϵ durch ein **Hooke**sches Gesetz beschreiben. Für einen eindimensionalen Festkörper ergibt sich

 $\sigma = C \epsilon . \quad (3.2.7)$

Die Konstante *C* wird als *Elastizitätsmodul* bezeichnet. Für einen dreidimensionalen Festkörper ergibt sich der allgemeine Zusammenhang zwischen den Komponenten des Spannungs- und Dehnungstensors zu

$$\sigma_{ij} = \sum_{k,l} C_{ijkl} \epsilon_{kl} . \qquad (3.2.8)$$

Der Elastizitätsmodul ist hierbei ein Tensor 4. Stufe mit insgesamt 81 unabhängigen Komponenten. Die Zahl der unabhängigen Komponenten erniedrigt sich allerdings drastisch aufgrund der Symmetrieeigenschaften von Festkörpern. Für einen isotropen Festkörper verbleiben z.B. nur noch 3 unabhängige Komponenten. In der Technik benutzt man dagegen auch für isotrope Medien üblicherweise folgende 4 Materialkonstanten zur Beschreibung der elastischen Eigenschaften:

- Elastizitätsmodul E
- Poisson- oder Querzahl μ
- Kompressionsmodul K
- Schub-, Scher- oder Torsionsmodul G

Dabei bestehen für isotrope Medien zwischen den Materialparametern E, μ , K und G Beziehungen, da man nur 3 unabhängige Materialkonstanten benötigt, um die elastischen Eigenschaften zu beschreiben. Die Bedeutung der einzelnen Konstanten soll in den folgenden Abschnitten für einen isotropen Festkörper erläutert werden. Für isotrope Festkörper sind die Materialparameter richtungsunabhängige Skalare, wodurch die Diskussion erheblich vereinfacht wird. Für anisotrope Materialien muß man mit Tensoren hantieren, was hier aus Gründen der Einfachheit und der Übersichtlichkeit nicht getan werden soll.

3.2.2 Elastizitätsmodul

Wirkt, wie in Abb. 3.7 gezeigt ist, eine Normalspannung σ_n auf einen Körper, so ändert der Körper aufgrund dieser Spannung seine Länge in Richtung der wirksamen Spannung (Dehnung oder Stauchung). Der Zusammenhang zwischen der relativen Längenänderung $\epsilon = \Delta l/l_0$ und Normalspannung $\sigma_n = F_n/A$ ist im **Hooke**schen Bereich durch



gegeben. Die Proportionanlitätskonstante E nennt man *Elastizitätsmodul*. Die Einheit von E ist 1 N/m². Da die Längenänderung üblicherweise in Richtung der wirksamen Spannung erfolgt, ist E positiv.



Abbildung 3.7: Zur Verformung eines Festkörpers unter der Einwirkung einer Normalspannung.

3.2.3 Poisson- oder Querzahl

Unter der Wirkung einer Normalspannung ändert sich nicht nur, wie in Abb. 3.7 gezeigt ist, die Ausdehnung des Körpers in Richtung der wirksamen Normalspannung σ_n , sondern auch quer zu dieser. Der Zusammenhang zwischen relativer Längenänderung $\Delta l/l_0$ in Richtung der Spannung und relativer Änderung $\Delta d/d_0$ quer zu dieser gibt die *Poisson-* oder *Querzahl* μ an:

$$\frac{\Delta d}{d_0} = -\mu \frac{\Delta l}{l_0} \quad . \quad (3.2.10)$$

Bei den bisher betrachteten Deformationen unter der Wirkung einer Normalspannung ist die auftretende Verformung in den meisten Fällen auch mit einer Volumenänderung verbunden. Das heißt, unter der Wirkung der Normalspannung erhält man weder eine reine Formänderung unter Beibehaltung des Volumes (*Formelastizität*) noch eine reine Volumenänderung unter Beibehaltung der Form (*Volumenelastizität*). Wir werden weiter unten mit der Scherung bzw. der Kompression Deformationsprozesse kennen lernen, bei denen die *Formelastizität* bzw. die *Volumenelastizität* gewährleistet ist (siehe Abschnitt 3.2.4

und 3.2.5). Bei Vorliegen reiner Formelastizität müssen $\Delta d/d_0$ und $\Delta l/l_0$ unterschiedliche Vorzeichen besitzen, da das Volumen erhalten werden muß. Die Poisson- oder Querzahl muß deshalb eine positive Zahl sein. In den meisten Fällen wird bei nicht rein formelastischen Prozessen das Volumen bei Vorliegen einer Druckspannung kleiner und bei Vorliegen einer Zugspannung größer. Nach Gl.(3.2.10 ist deshalb μ auch in diesen Fällen immer eine positive Zahl.

Querkontraktion von Gummi:

Über einen Gummischlauch wird ein zunächst festsitzender Metallring gezogen. Danach wird der Gummischlauch in Längsrichtung gedehnt. Die mit dieser Dehnung verbundene Querkontraktion führt zu einer Verkleinerung des Querschnittes des Gummischlauchs. Dadurch kann sich der zunächst festsitzende Gummiring entlang des Schlauches frei bewegen.

3.2.4 Schub-, Scher- oder Gleitmodul

Wir betrachten jetzt einen Körper, an dessen Oberfläche ein Kraft in tangentialer Richtung angreift. Man erhält dadurch eine *Scherung* oder *Schubdeformation* des Körpers (siehe Abb. 3.8a). Das Volumen des Körpers bleibt bei dieser Verformung erhalten, weshalb man es hier auch mit einer reinen Formelastizität zu tun hat. Den Zusammenhang zwischen der Schubspannung σ_t und dem Scherwinkel α gibt der *Schub*oder *Torsionsmodul G* an:

$$\sigma_t = G \alpha \quad . \quad (3.2.11)$$

Die Einheit des Schub- oder Torsionsmoduls ist 1 N/m².



Abbildung 3.8: Zur Verformung eines Festkörpers unter der Einwirkung einer Tangentialspannung: (a) Scherung, (b) Drillung, (c) Darstellung der Torsion als Scherung.

Ein Sonderfall der Scherung ist die *Torsion* oder *Drillung* (siehe Abb. 3.8b). Sie tritt auf, wenn ein Körper (z.B. ein Stab) an einem Ende festgehalten wird und am anderen Ende gedreht wird. Die Ursache für eine Torsion ist ein äußeres Drehmoment T. Den Zusammenhang zwischen Scherung und Torsion kann man sich verdeutlichen, wenn man sich den Körper (z.B. Zylinder in Stab in Abb. 3.8c) in viele kleine Quader zerlegt denkt, die bei einer Torsion alle eine Scherung erleiden.

Anhand von Abb. 3.8c läßt sich der Torsionsmodul eines Zylinders mit Radius R und Länge L berechnen. Dazu betrachtet man zunächst den in Abb. 3.8c gezeigten Hohlzylinder mit Wandstärke dr. Eine am unteren Ende des Hohlzylinders tangential angreifende Kraft dF verdrillt den Zylinder um den Winkel φ . Ein ursprünglich parallel zur Zylinderachse verlaufender Zylinderteil wird dadurch um den Winkel $\alpha = r\varphi/L$ verkippt. Nach dem **Hooke**schen Gesetz muß nun die am unteren Querschnitt des Zylinders angreifende Schubspannung dem Drillwinkel proportional sein. Da die Querschittsfläche $dA = 2\pi r dr$ ist, wird die Schubspannung

$$\sigma_t = \frac{dF}{dA} = \frac{dF}{2\pi r dr} \tag{3.2.12}$$

und man erhält mit

$$\sigma_t = G\alpha = Gr\varphi/L \tag{3.2.13}$$

den Ausdruck

$$dF = G2\pi r^2 dr \frac{\varphi}{L} \tag{3.2.14}$$

und durch Multiplikation mit dem Abstand r von der Drehachse das Drehmoment dT

$$dT = dF r = \frac{2\pi\varphi}{L} Gr^3 dr . \qquad (3.2.15)$$

Geht man nun wieder zu einem Vollzylinder über, den man sich aus einzelnen Hohlzylindern zusammengesetzt denkt, so kann man das gesamte Drehmoment durch Integration zu

$$T = \frac{2\pi\varphi}{L} G \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi}{2} \frac{\varphi}{L} G R^4$$
(3.2.16)

darstellen. Daraus ergibt sich für den Torsionsmodul

$$G = \frac{2}{\pi} \frac{L}{\varphi R^4} T . (3.2.17)$$

Man kann leicht zeigen, daß bei einem hohlen Stab gleicher Länge und gleicher Massenbelegung bei gleichem äußeren Drehmoment ein kleinerer Torsionswinkel auftritt. Deshalb sind die Knochen von Tieren und Menschen häufig als Röhrenknochen ausgebildet, um bei vorgegebener Masse eine möglichst hohe Stabilität zu erzielen.

Es sei abschließend darauf hingewiesen, daß zwischen Elastizitätsmodul, Poisson-Zahl und Schermodul bei isotropen Festkörpern folgender Zusammenhang besteht, der hier ohne Beweis angegeben wird:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} . (3.2.18)$$

Dieser Zusammenhang beruht auf der Tatsache, daß der Elastizitätstensor, der die elastischen Eigenschaften eines isotropen Festkörpers beschreibt, nur 3 unabhängige Komponenten besitzt. Deshalb können die in der Technik benutzen 4 elastischen Konstanten nicht vollkommen unabhängig voneinander sein.

Bestimmung des Torsionsmoduls aus Drehschwingungen:

Man kann GI.(3.2.17) umformen und erhält durch Auflösen nach dem Drehmonent

$$T = G \frac{\pi}{2} \frac{R^4}{L} \varphi = T_r^* \varphi \quad . \tag{3.2.19}$$

Diese Gleichung entspricht Gl.(2.3.47) für das elastische Rückstellmoment eines starren Körpers. Man kann deshalb T_r^{\star} als Direktionsmoment auffassen. Verdrillt man einen Körper und läßt ihn dann los, so erhält man eine harmonische Drehschwingung mit der Schwingungsperiode $T = 2\pi \sqrt{I/T_r^{\star}}$. Will man z.B. das Torsionsmoment eines Stabes bestimmen, so kann man an diesen Stab eine große Masse mit bekanntem Massenträgheitsmoment I ankoppeln und die Anordnung in eine Drehschwingung versetzen. Durch Messung von T kann mit den bekannten Größen I, L und R das Torsionsmodul G bestimmt werden.

3.2.5 Kompressionsmodul

Wir betrachten jetzt einen Festkörper von beliebiger Gestalt, auf dessen Oberfläche eine überall konstante Normalspannung wirken möge (siehe Abb. 3.9). Unter der Wirkung dieser Normalspannung wird sich das Volumen des Körpers ändern. Der Zusammenhang zwischen der wirksamen Normalspannung σ_n und der relativen Volumenänderung wird durch den *Kompressionsmodul K* gegeben:

$$\sigma_n = -K \frac{\Delta V}{V_0} \quad . \quad (3.2.20)$$

Eine positive (Druck-) bzw. negative (Zug-) Spannung führt üblicherweise zu einer Verkleinerung bzw. Vergrößerung des Volumens. Der Kompressionsmodul K ist somit positiv und besitzt die Einheit 1 N/m².



Abbildung 3.9: Zur Verformung eines Festkörpers unter der Einwirkung einer konstanten Normalspannung auf jedem Oberflächenelement.

Die Volumenänderung erfolgt über eine Änderung des Abstandes der Atome des Festkörpers. Hierfür sind große Kräfte notwendig, weshalb *K* für die meisten Materialien große Zahlenwerte annimmt.

Für isotrope Festkörper ergibt sich wiederum ein Zusammenhang zwischen dem Kompressionsmodul K, dem Elastizitätsmodul E und der Poisson-Zahl μ , der hier wiederum ohne Beweis angegeben wird⁴

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)} . (3.2.21)$$

Da K, E und μ üblicherweise positiv sind, kann der Wert für die Poisson-Zahl nur im Bereich $0 \le \mu \le 0.5$ liegen. Man erkennt außerdem, daß für $\mu = 0.5$ der Kompressionsmodul unendlich groß wird. Man spricht dann von einem *inkompressiblen* Festkörper.

3.2.6 Biegung

Bei einer Biegung treten Stauchung und Dehnung an einem Festkörper gleichzeitig auf. Läßt man z.B. auf einen an einem Ende fest eingespannten Balken (rechteckförmiger Querschnitt) der Länge L, Breite b und Höhe d eine Kraft senkrecht zur Balkenrichtung wirken, so wird der Balken gebogen. Die Senkung s des freien Endes des Balken nennt man dabei *Biegungspfeil*. Durch den Biegeprozeß werden die Ober- und Unterfläche des vorher geradlinigen Balkens zu konzentrischen Kreisbögen deformiert (siehe Abb. 3.10), wobei die Stirnfläche des Balkens eine Neigung um den Winkel φ gegenüber der Ausgangslage erfährt. Das obere Kreisbogenstück ist länger, das untere kürzer als die ursprüngliche Balkenlänge. Das heißt, die Oberseite des Stabes wird gedehnt (es tritt hier eine Zugspannung auf), während die Unterseite gestaucht wird (hier tritt eine Druckspannung auf). Im Zentrum des Balkens hat der Balken seine ursprüngliche Länge beibehalten. Hier tritt keine Spannung auf und man nennt diesen Teil die *neutrale Faser*.



Abbildung 3.10: Zur Durchbiegung eines Balkens.

Aufgrund der auftretenden Druck- und Zugspannungen ist klar, daß der Elastizitätsmodul maßgeblich die Größe des Biegungspfeiles bestimmt. Ferner sollte im **Hooke**schen Bereich der Biegepfeil proportional zur angreifenden Kraft F_n sein. Die genaue Analyse ergibt für einen einseitig eingespannten Balken

$$s = \frac{4F_n L^3}{Ebd^3} \tag{3.2.22}$$

⁴Zu einer Ableitung des Zusammenhangs berechne man die Volumenänderung eines Würfels durch die Wirkung einer Normalspannung und berücksichtige, daß die Kanten des Würfels bei Wirken der Normalspannung $(L + \sigma_n/E)$, $(L - \mu\sigma_n/E)$ und $(L - \mu\sigma_n/E)$ betragen.

und für einen an beiden Enden unterstützten Balken

$$s = \frac{F_n L^3}{4Ebd^3} . (3.2.23)$$

Offensichtlich trägt die Höhe d des Balkens wesentlich stärker zur Biegefestgkeit bei als die Balkenbreite b. Dies nutzt man in der Technik aus. Hier werden sogenannte T- oder Doppel-T-Träger verwendet, die bei gleicher Masse eine wesentlich höhere Biegefestigkeit aufweisen als ein massiver Balken mit rechteckförmigem Querschnitt.

Im Zusammenhang mit der Biegefestigkeit führt man den Begriff des geometrischen oder *Flächenträgheitsmoments* ein. Man versteht darunter, in Analogie zum Massenträgheitsmoment $I = \int r^2 dm$ das Integral $J = \int r^2 dA$. Es hat also die Dimension m⁴. Für einen rechteckigen Querschnitt (Dicke *d* und Breite *b*) erhält man z.B.

$$J_y = 2 \int_0^{d/2} z^2 b dz = \frac{b d^3}{12} , \qquad (3.2.24)$$

womit Gl.(3.2.22) als

$$s = \frac{F_n L^3}{3EJ_y} \tag{3.2.25}$$

ausgedrückt werden kann. Bei Biegebeanspruchungen wird aus Gründen der Materialersparnis der Querschnitt A so gewählt, daß bei gleichem Flächenträgheitsmoment J die Fläche A möglichst klein wird. Vergleicht man z.B. einen Balken mit quadratischem Querschnitt mit einem Rohr oder Doppel-T-Träger, so findet man bei gleichem J für den Doppel-T-Träger eine Materialsersparnis von 61% und für das Rohr von sogar 75%.

Biegung von Glasstab:

Die aufgrund der elastischen Deformation erzeugten Spannungen im Inneren eines durchgebogenen Glasstabes lassen sich sichtbar machen. Anisotrope Festkörper zeigen die Erscheinung der Doppelbrechung des Lichtes. Glas ist normalerweise isotrop, wird aber unter dem Einfluß äußerer Kräfte anisotrop.

Bringt man einen ungebogenen Glasstab zwischen zwei gekreuzte Polarisatoren, so läßt die Anordnung zunächst kein Licht durch. Biegt man den Stab, so wird aufgrund der erzeugten inneren Spannungen das Glas anisotrop. Durch die damit verbundene Doppelbrechung gelangt durch das zweite Prisma wieder Licht. Die einzelnen Spannungsschichten des gebogenen Glasstabes werden unterschiedlich hell sichtbar. Dieses Verfahren wird häufig zur Materialprüfung von durchsichtigen Festkörpern eingesetzt.

3.2.7 Plastische Deformation

Beim Einwirken äußerer Kräfte oder Drehmomente treten bei einem Festkörper Form- und Volumenänderungen auf. Wir haben bisher angenommen, daß diese Veränderungen *elastisch* sein sollten, d.h. daß der Körper nach Verschwinden der äußeren Kräfte und Drehmomente wieder seine ursprüngliche Gestalt annimmt. Wir hatten ferner angenommen, daß der Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung linear sein sollte (**Hooke**scher Bereich). Diese Annahmen sind nur für kleine Spannungen richtig. Wird jedoch eine materialspezifische Elastizitätsgrenze überschritten, so lagern sich die Atome in einem Festkörper um und es stellt sich eine neue Gleichgewichtslage in einer neuen Konfiguration ein. Die verursachten Formveränderungen gehen dann nach Verschwinden der äußeren Kraft nicht mehr zurück. Eine solche Verformung nennt man *plastische Deformation*.

Die Vorgänge, die oberhalb der Elastizitätsgrenze in einem Festkörper ablaufen, sind äußerst kompliziert und zudem stark materialabhängig. Man behilft sich deshalb mit einem einfachen *Spannungs-Dehnungs-Diagramm* (siehe Abb. 3.11a), um diese Vorgänge qualitativ zu diskutieren. Für kleine Spannungen nimmt die Dehnung zunächst linear mit der Spannung zu (**Hooke**scher Bereich). Nach Überschreiten des **Hooke**schen Bereichs bei *H* flacht das Spannungs-Dehnung-Diagramm ab (d.h. mit kleineren Spannungsänderungen werden größerer Verzerrungen erreicht) und man erreicht die Elastizitätsgrenze, die allerdings nicht scharf definiert ist. Bei weiterer Vergrößerung kommt man bei *F* (*Fließgrenze*) in den sogenannten *Fließbereich*, in dem der Festkörper ähnlich zu einer zähen Flüssigkeit zu fliessen anfängt. Das Spannungs-Dehnung-Diagramm verläuft hier fast horizontal. Ab Punkt *C* kommt es dann mit steigender Spannung wieder zu einer Verfestigung, wodurch das Spannungs-Dehnungs-Diagramm wieder steiler wird. Nach Überschreiten des Punktes *B* kommt es zu einer starken Querschnittsverminderung, wodurch das Spannungs-Dehnungs-Diagramm eine negative Steigung erhält. Schließlich erreicht man bei *Z* die *Zerreiß*- oder *Bruchspannung*. Die dabei erreichte relative Dehnung nennt man *Bruchdehnung*.



Abbildung 3.11: (a) Spannungs-Dehnungs-Diagramm: H – Ende des **Hooke**schen Bereichs, F – Fließgrenze, C bis B – Verfestigungsbereich, Z – Zerreiß- oder Bruchpunkt. (b) Hysteretisches Spannungs-Dehnungs-Diagramm aufgrund einer elastischen Nachwirkung.

In der Technik gibt die Zugfestigkeit σ_B eines Materials die im Punkt *B* erreichte maximale Spannung an. Als Einheit wird immer noch häufig die im SI-System nicht mehr erlaubte Einheit 1 kp/mm² verwendet.

Elastische Nachwirkung

Durchläuft man ein Spannungs-Dehnung-Diagramm in entgegengesetzte Spannungsrichtungen periodisch, so stellt sich die Frage, ob die Dehnung der vorgegebenen Spannung instantan folgen kann. Dies ist je nach Material ab einer bestimmten Änderungsgeschwindigkeit der Spannung nicht mehr der Fall. Das heißt, die Dehnung stellt sich erst nach einer gewissen Zeitverzögerung ein. Diesen Effekt nennt man *elastische Nachwirkung* oder *elastische Hysterese*. Während diese Zeitverzögerung bei Metallen sehr klein ist, kann sie bei Gummi oder Kunststoffen beträchtlich sein. Durchfährt man das Spannungs-Dehnung-Diagramm im **Hooke**schen Bereich genügend schnell, so erhält man die in Abb. 3.11b gezeigte Hysteresekurve. Beim Durchlaufen der Hysteresekurve muß man die Volumenarbeit $\int \epsilon d\sigma$ (Flächeninhalt der Hystereskurve) verrichten. Diese Arbeit führt z.B. bei einem Autoreifen (hier wird sie als *Walkarbeit* bezeichnet) zu einer Erwärmung des Reifens.

3.2.8 Materialparameter

Material	E	G	K	μ	σ_B
Al, rein, weich Duraluminium α -Eisen V2A-Stahl (Cr, Ni) CrV-Federstahl Cu, weich Pb Au Si Quarzglas Beryllium-Bronze Nylon Holz (Buche, längs)	72 77 218 195 212 120 17 81 100 76 118 etwa 10 15	27 27 84 80 80 40 60 28 34 33 	75 75 172 170 170 140 42.5 180 320 38 — —	0.0034 0.0034 0.0028 0.0028 0.0035 0.0044 0.0042 0.0045 0.0017 	0.013 0.5 0.1 0.7 1.55 0.2 0.014 0.14 0.090 3.65 0.2 - 0.6 bis 0.6

Tabelle 3.2: Elastizitätsmodul E, Torsionsmodul G, Kompressionsmodul K, Poisson-Zahl μ und Zugbzw. Druckfestigkeit σ_B einiger Materialien in GPa.

3.3 Hydro- und Aerostatik

3.3.1 Kompression von Flüssigkeiten

Im Gegensatz zu einem Festkörper nimmt eine Flüssigkeit jede beliebige Form an (vergleiche Abschnitt 3.1). Da die Flüssigkeitsteilchen keine feste Lage haben und frei gegeneinander beweglich sind, setzen Flüssigkeiten weder einer Zug noch einer Schubspannung einen Widerstand entgegen. Das heißt, *Flüssigkeiten haben keine Formelastizität*, man kann sie weder dehnen noch scheren. Als einzig mögliche Deformation bleibt die *Volumendeformation*. Genauso wie bei Festkörpern gilt

$$\sigma_n = -K \frac{\Delta V}{V_0} \quad . \tag{3.3.1}$$

Bei Flüssigkeiten wird meistens statt der Normalspannung σ_n der Druck p

$$p := \sigma_n = \frac{F_n}{A} \tag{3.3.2}$$

verwendet. So kann man z.B. Flüssigkeiten über einen Stempel komprimieren, wobei der Druck p durch den Quotienten aus der Kraft F_n senkrecht zur Stempelfläche und der Stempelfläche A gegeben ist.

Je größer K ist, desto größer ist der Druck, der notwendig ist, um das Volumen um einen bestimmten Prozentsatz zu verändern. Die Kompressionmodule von Flüssigkeiten sind im allgemeinen kleiner als die von Festkörpern, reichen aber teilweise an diejenigen von Festkörpern heran: Wasser: K = 2 GPa; Benzol: K = 1 GPa, zum Vergleich Kupfer: K = 140 GPa.

Kompression von Wasser mit Gewehrkugel:

Schießt man eine Gewehrkugel auf eine mit Luft gefüllte Kiste, so dringt das Geschoß durch beide Seitenwände der Kiste, ohne die Kiste sonst zu beschädigen. Ist die Kiste dagegen mit Wasser gefüllt, so wird sie völlig zerrissen. Die kleine Volumenänderung durch die Gewehrkugel bewirkt im Wasser eine so starke Kompression, daß die Wände der Kiste unter der Wirkung des damit verbundenen Druckes $p = -K \frac{\Delta V}{V_0}$ auseinanderfliegen. Für $V_{\rm Kugel} = 0.1 \, {\rm cm}^3$ und $V_{\rm Kiste} = 1000 \, {\rm cm}^3$ erhält man

$$p = -K \frac{\Delta V}{V_0} = 2 \times 10^9 \text{Pa} \cdot 10^4 = 2 \times 10^5 \text{ Pa} = 2 \text{ bar}$$
 (3.3.3)

Das entspricht einer Kraft von etwa F = 4000 N auf die Innenwände der Kiste.

3.3.2 Stempeldruck

Wir betrachten zunächst eine Flüssigkeit, die nicht der Schwerkraft unterworfen ist. Übt man durch einen Stempel mit der Fläche A eine Kraft F auf eine solche Flüssigkeit in einem abgeschlossenen Behälter aus, so beobachtet man im gesamten Behälter, d.h. an jeder Stelle der Oberfläche und im Inneren der Flüssigkeit den gleichen Druck, den Stempeldruck p = F/A.

Am einfachsten läßt sich dieser Sachverhalt zeigen, wenn man den in Abb. 3.12 gezeigten speziellen Körper betrachtet. Der in dieser Abbildung gezeigte Keil sei ringsum von einer Flüssigkeit umgeben.



Abbildung 3.12: Zum Stempeldruck auf unterschiedliche Flächen.

Da es sich um ein statisches Problem handelt, muß die Summe aller auf den Körper einwirkenden Kräfte verschwinden. Wäre dies nicht der Fall, so würde sich der Keil in eine bestimmte Richtung bewegen. Das heißt, alle horizontalen und alle vertikalen Kräfte müssen sich gegenseitig kompensieren. Für die vertikalen Kräfte folgt damit

$$F_1 = 2F_2 \sin \alpha \quad . \tag{3.3.4}$$

Für den Winkel α erhält man mit der Breite b des Keils

$$\sin \alpha = \frac{l_1}{2l_2} = \frac{l_1b}{2l_2b} = \frac{A_1}{2A_2} .$$
(3.3.5)

Daraus ergibt sich

$$\frac{F_1}{A_1} = p_1 = \frac{F_2}{A_2} = p_2 \quad , \tag{3.3.6}$$

d.h. der Druck auf die verschiedenen Flächen ist gleich. Diese Gesetzmäßigkeit wird in der Technik bei der *hydraulischen Presse* eingesetzt (siehe Abb. 3.13). Dabei sind zwei Zylinder mit unterschiedlichen Querschnittsflächen A_1 und A_2 über ein Rohr miteinander verbunden. Die Zylinder und das Rohr sind mit einer Flüssigkeit gefüllt (Wasser, Öl) und die Zylinder werden mit passenden Kolben ohne Lufteinschluß verschlossen. Am Kolben des Zylinders mit kleinerer Querschnittsfläche A_1 greife die Kraft F_1 an. Dann gilt

$$F_2 = pA_2 = \frac{F_1 A_2}{A_1} \quad . \tag{3.3.7}$$

Man erkennt, daß sich durch Vergrößerung des Flächenverhältnisses A_2/A_1 sehr große Kräfte am Kolben 2 erzielen lassen.

Der Energiesatz wird hierbei natürlich nicht verletzt. Die an Kolben 1 verrichtete Arbeit beträgt

$$\Delta W_1 = F_1 \,\Delta s_1 = F_1 \frac{\Delta V_1}{A_1} = p_1 \Delta V_1 \quad , \tag{3.3.8}$$



Abbildung 3.13: Hydraulische Presse.

wobei Δs_1 der von Kolben 1 zurückgelegte Weg ist. Von Kolben 2 wird die Arbeit

$$\Delta W_2 = F_2 \,\Delta s_2 = F_2 \frac{\Delta V_2}{A_2} = p_2 \Delta V_2 \quad , \tag{3.3.9}$$

geleistet. Setzt man Inkompressibilität der Flüssigkeit an, so ist $\Delta V_1 = \Delta V_2$ und wegen $p_1 = p_2$ auch $\Delta W_1 = \Delta W_2$.

3.3.3 Schweredruck, hydrostatischer Druck

In diesem Abschnitt soll eine Flüssigkeit im Schwerefeld betrachtet werden, auf die sonst aber keine weiteren Kräfte wirken. Durch ihr Gewicht übt die Flüssigkeit einen Schweredruck auf die tieferen Schichten und den Gefäßboden aus (siehe Abb. 3.14a). Mit der Dichte ρ der Flüssigkeit, dem Querschnitt A des Gefäßbodens und der Erdbeschleunigung g erhält man das Gewicht der Flüssigkeitsäule der Höhe h zu

$$F_G = mg = A h \rho g . \qquad (3.3.10)$$

Mit $p = F_G/A$ ergint sich der Schweredruck der Flüssigkeit oder der hydrostatische Druck zu

$$p = h \rho g$$
, (3.3.11)

wenn man annimmt, daß der Druck über der Flüssigkeitsoberfläche Null ist. Der durch die Schwere hervorgerufene hydrostatische Druck in einer Flüssigkeit hängt nur von der Höhe und der Dichte der Flüssigkeit ab, nicht aber von der Form des Gefäßes. Das heißt, der Bodendruck in den in Abb. 3.14b gezeigten Gefäßen ist genau gleich, obwohl die Mengen und damit die Gewichte der Flüssigkeiten in den einzelnen Gefäßen verschieden sind (*hydrostatisches Paradoxon*, **Stevin**: 1587, **Pascal**: 1660).

In den in Abb. 3.14b skizzierten Gefäßen herrscht bei gleicher Höhe des Flüssigkeitsspiegels in derselben Tiefe jeweils derselbe Druck, Bringt man z.B. in einem Gefäß eine Zwischenwand ein, so ändert sich



Abbildung 3.14: (a) Zum hydrostatischen Druck. (b) Zur Formunabhängigkeit des hydrostatischen Druckes (hydrostatisches Paradoxon).

am Druck nichts. Da sich dann das Wasser in zwei völlig getrennten Teilräumen befindet, kann man die Teilräume auch einzeln betrachten. Bei den geteilten Gefäßen übernehmen die Wände den Druck, den vorher die entfernte Flüssigkeitsmenge auf die Zwischenwand ausgeübt hat. Durch diese Kräfte erleidet der Bodendruck keine Änderung.

Verbindet man verschiedenen Gefäße mit einem Rohrsystem (kommunizierende Röhren), so verhält sich die Flüssigkeit in diesem System so, daß der Flüssigkeitsspiegel in allen Gefäßen gleich hoch ist (siehe Abb. 3.15a). Dies folgt sofort aus dem Ausdruck für den hydrostatischen Druck. Falls eine unterschiedliche Flüssigkeitshöhe in verschiedenden Teilen des Gefäßsystems vorliegen würde, so würde die aus der Differenz des hydrostatischen Drucks resultierende Kraft zu einer Umverteilung der Flüssigkeit führen, bis der Flüssigkeitsspiegel in allen Teilgefäßen übereinstimmt.



Abbildung 3.15: (a) Zum Flüssigkeitsspiegel in verbundenen Gefäßen. (b) Bestimmung des hydrostatischen Druckes mit einem Manometer.

Die Gültigkeit des Ausdruckes für den hydrostatischen Druck läßt sich experimentell einfach bestätigen. Dazu benutzt man ein Druckmeßgerät, ein *Manometer* (siehe Abb. 3.15b). Mit Hilfe des Manometers läßt sich der lineare Anstieg des Druckes mit zunehmender Tiefe nachweisen.

Wir betrachten als nächstes ein U-Rohr, das teilweise mit einer Flüssigkeit gefüllt ist. Über beiden Seiten des U-Rohres sollen verschieden Drucke p und $p + \Delta p$ herrschen (siehe Abb. 3.16). Den Druckunterschied Δp kann man mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingung $h_1g\rho = h_2g\rho + \Delta p$ aus dem Höhenunterschied $\Delta h = h_1 - h_2$ der Menisken zu

$$\Delta p = (h_1 - h_2)g\rho = \Delta h g \rho \qquad (3.3.12)$$



Abbildung 3.16: Flüssigkeitsmanometer auf der Basis eines U-Rohres.

bestimmen. Bringt man an dem freien Schenkel des U-Rohres eine Skala an, die wegen $\Delta p \propto \Delta h$ leicht in Druckeinheiten geeicht werden kann, so erhält man ein Flüssigkeitsmanometer.

Wasserdruck:

Eine Wassersäule von 10 m Höhe erzeugt einen Druck von 1 technischen Atmosphäre (1 at = 1 kp/cm²). Folglich ergeben sich in großer Meerestiefe erhebliche Drucke. In einer Tiefe von 1000 m herrschen bereit 100 at und in der größten auf der Erde vorkommenden Meerestiefe von etwa 11 000 m etwa 1 100 at. Aus diesem Grund können Taucher ohne besonders gebaute Taucheranzüge nur etwa 50 m tief tauchen. Aufgrund des hohen Drucks in dieser Tiefe löst sich Stckstoff im Blut. Beim Wiederauftauchen kommt es an zur Bildung von Stickstoffblasen in den Blutbahnen.

Druck im Inneren der Erde:

Die meisten Himmelskörper sind im Innern flüssig. Aufgrund des hydrostatischen Druckes herrschen im Inneren der Himmelskörper sehr große Drucke. Bei einer Berechnung muß man allerdings beachten, daß die Schwerkraft zum Zentrum des Himmelskörpers hin abnimmt und im Zentrum den Wert Null erreicht. Andererseits nimmt die Dichte zum Zentrum hin zu. Der im Zentrum der Erde herrschende Druck kann insgesamt zu etwa 3×10^6 at abgeschätzt werden. Unter diesem Druck ist die Dichte im Zentrum der Erde etwa 17 g/cm^3 , während die mittlere Dichte der Erde nur etwa 5.5 g/cm^3 beträgt. Für das Zentrum der Sonne ergibt sich sogar ein Druck von etwa 1.4×10^9 at.

Bestimmung von Dichten unbekannter Flüssigkeiten

In einem U-Rohr sei auf der einen Seite Hg und auf der anderen Seite Wasser eingefüllt (siehe Abb. 3.17). Man beobachtet, daß das Wasser höher steht als das Quecksilber. Legt man durch die Berührungsfläche zwischen Quecksilber und Wasser ein horizontale Nulllinie, so herrscht in dieser Ebene der gleiche Druck. Ebenso herrscht über dem Quecksilber und über dem Wasser derselbe Druck (z.B. Atmosphärendruck). Die beiden Säulen müssen somit denselben Schweredruck erzeugen und man erhält

$$h_{\rm H_2O} \rho_{\rm H_2O} g = h_{\rm Hg} \rho_{\rm Hg} g$$

oder $\frac{\rho_{\rm Hg}}{\rho_{\rm H_2O}} = \frac{h_{\rm H_2O}}{h_{\rm Hg}} .$ (3.3.13)

Im Experiment mißt man $h_{\rm H_2O}/h_{\rm Hg} = 13.6$. Mit der bekannten Dichte von Wasser ($\rho_{\rm H_2O} = 1 \,\text{g/cm}^3$ ergibt sich damit die Dichte von Quecksilber zu $\rho_{\rm Hg} = 13.6 \,\text{g/cm}^3$.



Abbildung 3.17: Zur Bestimmung der unbekannten Dichte von Flüssigkeiten.

Auftrieb

Hängt man nacheinander ein Blei- und ein Eisenstück von je 500 g Masse an eine Federwaage, so mißt man im konstanten Schwerefeld der Erde die gleiche Auslenkung. Führt man das gleiche Experiment durch, wobei die beiden Massen in Wasser eintauchen, so kann man dieses Ergebnis nicht reproduzieren. Man beobachtet, daß die Federauslenkung zurückgeht, und zwar beim Eisenstück stärker als beim Bleistück. Das Bleistück scheint also in der Flüssigkeit ein größeres Gewicht zu haben als das Eisenstück. Verantwortlich für die Abnahme der Federauslenkung ist in beiden Fällen der *Auftrieb*, der in diesem Abschnitt diskutiert werden soll.

Wir betrachten zunächst einen quaderförmigen Körper der Dichte ρ , der in eine Flüssigkeit der Dichte ρ_{F1} eingetaucht ist (siehe Abb. 3.18a). Auf alle 6 Seitenflächen des Quaders wirken Kräfte, die vom hydrostatischen Druck verursacht werden. Die Kräfte auf die 4 senkrechten Seitenflächen heben sich dabei gegenseitig auf. Wir müssen uns deshalb nur mit der Kraft auf die Ober- und Unterseite des Quaders befassen. Für die Oberseite erhalten wir mit den Bezeichnungen aus Abb. 3.18a

$$F_1 = \rho_{\rm Fl} g h_1 A = p_1 A \quad . \tag{3.3.14}$$

Genauso erhält man für die Kraft auf die Unterseite des Quaders

$$F_2 = \rho_{\rm F1} g h_2 A = p_2 A \quad . \tag{3.3.15}$$

Hierbei ist A die Deck- bzw. Bodenfläche des Quaders. Die Differenz der beiden Kräfte führt zum Auftrieb



Abbildung 3.18: (a) Auftrieb eines Körpers in einer Flüssigkeit. (b) Veranschaulichung des Archimedischen Prinzips mit einer Balkenwaage.

$$F_{A} = F_{2} - F_{1} = \rho_{Fl}g (h_{2} - h_{1})A = \rho_{Fl}g V$$

oder $F_{A} = m_{Fl}g$. (3.3.16)

Mit Hilfe dieser Gleichung läßt sich das sogenannte Archimedische Prinzip (Archimedes: 220 v.Chr.) formulieren:

Das Archimedische Prinzip: Der Auftrieb eines Körpers ist gleich dem Gewicht der von ihm verdrängten Flüssigkeit.

Diese Formulierung ist für beliebig geformte Körper richtig. Die oben diskutierte unterschiedliche Auslenkung einer Federwaage durch ein in Wasser eingetauchtes Blei- und Eisenstück gleicher Masse resultiert nach dem Archimedischen Prinzip aus der unterschiedlichen Dichte von Blei und Eisen. Aufgrund der höheren Dichte von Blei verdrängt der Bleikörper weniger Wasser, der Auftrieb wird dadurch kleiner und die Feder wird stärker gedehnt.

Das Archimedische Prinzip:

Das Archimedische Prinzip kann man gut mit dem in Abb. 3.18b gezeigten Versuchsaufbau veranschaulichen. Auf einer Waage steht auf einer Seite ein Wasserbehälter und auf der anderen ein leeres Becherglas und ein Gewichtskörper K. Die Waage soll sich im Gleichgewicht befinden. Wird nun der Gewichtskörper in den Wasserbehälter abgesenkt, so wird sein Gewicht aufgrund des Auftriebs zunächst geringer und die Waage gerät aus dem Gleichgewicht. Da das verdrängte Wasser aber über den Überlauf des Wasserbehälters in das leere Becherglas auf der anderen Seite der Waage läuft, wird das Gleichgewicht der Waage wieder hergestellt, da das Gewicht des von dem Gewichtskörper verdrängten Wassers nach dem Archimedischen Prinzip gerade dem Auftrieb des Körpers K entspricht.

Man kann, indem man einen Körper K erst in der Luft und dann in einer Flüssigkeit mit bekannter Dichte wiegt, seine Dichte bestimmen. Es gilt

$$F_K = Mg \quad \text{und} \quad F_A = V_K \rho_{\text{Fl}} g \tag{3.3.17}$$

und damit

$$\frac{F_K}{F_A} = \frac{Mg}{V_K \rho_{\rm Fl} g} . \tag{3.3.18}$$

Mit $M = \rho_K V_K$ folgt dann

(a)

$$\rho_K = \frac{F_K}{F_A} \rho_{\rm F1} . \qquad (3.3.19)$$

Da man Wägungen mit hoher Genauigkeit durchführen kann, ist dies eine Präzissionsmethode zur Bestimmung der Dichte eines Körpers (Beispiel: Jollysche Federwaage).



Abbildung 3.19: (a) Aräometer. (b) Cartesianischer Taucher. (c) Ausbleibender Auftrieb eines Körpers am Gefäßboden.

Ist der Auftrieb eines Körpers in einer Flüssigkeit kleiner als sein Gewicht, so ist die Summe aus Gewichts- und Auftriebskraft nach unten gerichtet und der Körper sinkt in der Flüssigkeit nach unten. Ist dagegen die Auftriebskraft größer als die Gewichtskraft, so steigt der Körper an die Oberfläche der Flüssigkeit und taucht in diese nur teilweise ein. Man kann also folgende Bedingung für das Schwimmen eines Körpers an der Oberfläche einer Flüssigkeit festhalten:

$$F_K - F_A = (\rho_K - \rho_{\rm Fl})V_K < 0$$
 (3.3.20)

Ein Körper schwimmt also auf einer Flüssigkeit, wenn seine Dichte kleiner als diejenige der Flüssigkeit ist. Z.B. schwimmt Holz auf Wasser; Eisen schwimmt nicht auf Wasser, dafür aber auf Quecksilber; Gold wiederum schwimmt nicht auf Quecksilber.

Das Gewicht eines schwimmenden Körpers ist gleich dem Gewicht der von ihm verdrängten Flüssigkeit. Daraus folgt

$$V_K \rho_K g = V'_K \rho_{\rm Fl} g$$

oder $\frac{V_K}{V'_K} = \frac{\rho_{\rm Fl}}{\rho_K}$. (3.3.21)

Hierbei ist V_K das Gesamtvolumen des Körpers und V'_K das Volumen des eingetauchten Teils des Körpers. Hat also ein Körper z.B. nur die Hälfte der Dichte einer Flüssigkeit, so taucht er in diese nur zur Hälfte ein. Diese Tatsache macht man sich beim *Aräometer* zunutze (siehe Abb. 3.19a). Mit ihm bestimmt man die Dichte von Flüssigkeiten über die Eintauchtiefe eines geeichten Testkörpers. Je tiefer der Testkörper sinkt, desto geringer ist die Dichte der Flüssigkeit.

Cartesianische Taucher:

Im Grenzfall $F_K = F_A$ schwebt ein Körper in einer Flüssigkeit. Bringt man in einen mit Wasser gefüllten Kolben einen teilweise mit Luft gefüllten hohlen Glaskörper ein, so kann man die in dem Glaskörper enthaltenen Luftmenge so einstellen, daß der Glaskörper genau schwebt (siehe Abb. 3.19b). Verschließt man nun den Kolben mit einer Membran und drückt auf die Membran, so fängt der Glaskörper an zu sinken. Durch den Druck wird die Luftmenge in dem Glaskörper komprimiert, wodurch sich die verdrängte Wassermenge und dadurch der Auftrieb verringert. Durch Erzeugen eines Unterdrucks kann man den Glaskörper auch nach oben schwimmen lassen.

Es ist wichtig, sich klar zu machen, daß der Auftrieb eines Körpers durch den unterschiedlichen Druck der Flüssigkeit an seiner Ober- und Unterseite zustandekommt. Drückt man z.B. ein Glasprisma (siehe Abb. 3.19c), das normalerweise auf Quecksilber schwimmt, auf den Boden eines mit Quecksilber gefüllten Gefäßes, so bleibt es unten liegen. Befindet sich der Glaskörper am Boden, so kann von unten keine Kraft auf ihn wirken, da sich keine Flüssigkeit mehr zwischen Glaskörper und Boden befindet. Es kommt also kein Auftrieb zustande.

3.3.4 Aerostatik

Gase haben eine endliche, wenn auch kleine Massendichte und damit ein endliches Gewicht. Dies kann man z.B. dadurch demonstrieren, daß man einen Glaskolben evakuiert und anschließend sein Gewicht mit einer Balkenwaage bestimmt. Dann läßt man ein Gas einströmen und bestimmt das Gewicht nochmals. Man stellt fest, daß sich das Gewicht des Glaskolbens erhöht hat. Mit dem Volumen V des Kolben und dem mit der Waage bestimmten Gewicht des Gases läßt sich die Masse des im Kolben eingeschlossenen Gases bestimmen. Ein Liter Luft hat bei Normaldruck die Masse von etwa 1 g.

Gas	Dichte in kg/m ³		
$\begin{array}{c} \text{Luft} \\ \text{CO}_2 \\ \text{H}_2 \end{array}$	1.293 1.977 0.090		

Tabelle 3.3: Dichte einiger Gase in kg/m³ bei Normaldruck.

Aufgrund ihres Gewichts üben Gase auch einen Schweredruck aus. Der von der Luft unserer Atmosphäre auf der Erdoberfläche ausgeübte Luftdruck läßt sich mit dem in Abb. 3.19a gezeigten Aufbau bestimmen. Man bringt in ein an einem Ende verschlossenen U-Rohr Quecksilber, so daß mindestens der verschlossene Schenkel des U-Rohres ganz mit Quecksilber gefüllt ist. Stellt man dann das Rohr wie in Abb. 3.19a gezeigt auf, so sinkt der Quecksilberspiegel nach unten und es entsteht über der Quecksilbersäule in dem verschlossenen Teil des U-Rohres ein Vakuum (*Torricelli-Vakuum*). Es ist nur noch der zur entsprechenden Temperatur gehörige Quecksilberdampfdruck vorhanden. Mißt man die Höhendifferenz zwischen den beiden Quecksilberspiegeln, so erhält man einen Wert von etwa 760 mm. Da nach Gl.(3.3.12) $\Delta p = \Delta h \rho g$ gilt, ist Δh direkt proportional zur Druckdifferenz zwischen Torricelli-Vakuum und dem äußeren Luftdruck. Man hat damit ein sogenanntes Quecksilber-Manometer realisiert.



Abbildung 3.20: (a) Zur Realisierung eines Quecksilber-Manometers. (b) Zur Bestimmung der Abhängigkeit des Luftdrucks von der Höhe.

Für den mittleren Luftdruck auf Meereshöhe findet man

$$p_{\rm NN} = 760 \,\mathrm{mmHg} = 760 \,\mathrm{Torr} = 1013 \,\mathrm{mbar} = 1.013 \times 10^5 \,\mathrm{Pa}$$
. (3.3.22)

Dieser Druck entspricht dem Druck einer etwa 10 m hohen Wassersäule.

Ein historisch wichtiges Experiment zur Bestimmung des Luftdrucks wurde von **Otto v. Guericke** im Jahr 1654 durchgeführt. Er zeigte, daß zwei dicht aufeinandergesetzte und luftleer gepumpte Halbkugeln (*Magdeburger Halbkugeln*, Durchmesser ca. 40 cm) durch den Druck der äußeren Luft so stark zusammengepreßt werden, daß 16 Pferde notwendig waren, um die Kugeln auseinander zu ziehen. Die Kraft, die zum Trennen der Halbkugeln notwendig ist, ergibt sich aus $F = \Delta pA$ mit $\Delta p \simeq 1$ bar und $A \simeq 0.1 \text{ m}^2$ zu $F \simeq 10^4 \text{ N}$.

Der Luftdruck hängt von der Höhe über dem Meeresspiegel ab. Dies kann man durch das in Abb. 3.19b gezeigte Experiment demonstrieren. Man zieht ein mit Luft gefülltes Gefäß in geöffnetem Zustand in eine Höhe von 5 m. Dann verschließt man das Gefäß und bringt es wieder auf die ursprüngliche Höhe. An dem an das Gefäß angeschlossenen, mit Wasser gefülltem U-Rohr stellt man eine Verschiebung des Wasserspiegels um etwa 6 mm fest. Das heißt, der Luftdruck bei h = 0 m ist um 6 mm Wassersäule oder etwa 0.6 mbar höher als der Luftdruck bei h = 5 m. Aufgrund diesen Effekts ist der mittlere Luftdruck an einem Ort auf der Höhe h über dem Meeresspiegel um einen entsprechenden Wert niedriger.⁵

⁵Dem mittleren Luftdruckwert überlagern sich natürlich immer die wetterbedingten Schwankungen aufgrund von Hochund Tiefdruckgebieten.

Genauso wie in Flüssigkeiten erhält man auch in Gasen einen Auftrieb. Aufgrund der geringeren Dichte von Helium oder Wasserstoff im Vergleich zu Luft steigt deshalb ein mit Wasserstoff oder Helium gefüllter Ballon in der Luft nach oben. Man kann auch zwei verschieden große, aber bei Normaldruck gleich schwere Körper auf eine Balkenwaage bringen. Die Balkenwaage ist, wie erwartet, im Gleichgewicht. Bringt man die Anordnung unter eine Glasglocke und evakuiert, so senkt sich die Balkenwaage auf der Seite mit dem größeren Körper. Dieser hatte bei Normaldruck eine größere Luftmenge verdrängt und deshalb größeren Auftrieb erfahren als der kleine Körper. Nach Wegfallen des Auftriebs ist der große Körper schwerer. Der Auftrieb verfälscht also das Meßergebnis von Balken- oder Federwaagen.

Die barometrische Höhenformel

Berechnet man mit dem Ausdruck $\Delta p = \rho g \Delta h$ die Dicke unserer Atmosphäre, so erhält man mit h = 8000 m ein offensichtlich falsches Ergebnis. Der Grund dafür ist die Annahme einer konstanten Dichte der Luft. Betrachtet man die Luft als *ideales Gas*, dann gilt das *Gesetz von* **Boyle-Mariotte**⁶

$$pV = const . (3.3.23)$$

Damit gilt für ein Luftvolumen V unter dem Druck p, gemessen in einer beliebigen Höhe über dem Meeresspiegel, daß das Produkt pV für die gleiche eingeschlossene Luftmasse m gleich sein muß dem Produkt p_0V_0 der entsprechenden Größen auf Meereshöhe:

$$p V = p_0 V_0 \Rightarrow \frac{pV}{m} = \frac{p_0 V_0}{m}$$
 (3.3.24)

Man erhält somit für die Dichte

$$\rho = \rho_0 \, \frac{p}{p_0} \, . \tag{3.3.25}$$

Demnach ist die Dichte der Luft proportional dem Luftdruck. Für kleine Druckänderungen dp gilt

$$dp = -\rho g \ dh = -\rho_0 \frac{p}{p_0} g \ dh$$
oder
$$\frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0}{p_0} g \ dh \quad . \tag{3.3.26}$$

Durch Integration der Differentialgleichung erhält man

$$\ln p = -\frac{\rho_0}{p_0} g h + const . \qquad (3.3.27)$$

Die Integrationskonstante ergibt sich aus der Randbedingung $p(h = 0) = p_0 \operatorname{zu} \ln p_0$ und man erhält somit

⁶Eine Herleitung dieses Gesetzes folgt erst in Kapitel 5.

Man erhält damit schließlich die barometrische Höhenformel

$$p(h) = p_0 \exp\left(-\frac{\rho_0}{p_0} g h\right)$$
 . (3.3.29)

Der Ausdruck beschreibt die Abhängigkeit des Luftdrucks p von der Höhe h über dem Meeresspiegel (siehe Abb. 3.21). Nennt man die Höhe h, auf der der Luftdruck auf die Hälfte abgesunken ist, $h_{1/2}$, so ergibt sich aus der Bedingung $p(h_{1/2}) = p_0/2$

$$h_{1/2} = \frac{p_0 \ln 2}{\rho_0 g} \simeq 5.5 \,\mathrm{km}$$
 (3.3.30)

Das heißt, auf einer Höhe von 5.5 km über Meereshöhe hat sich der Luftdruck halbiert.



Abbildung 3.21: Abnahme des Luftdrucks p mit der Höhe h über dem Meeresspiegel.

Durch Ableiten der barometrischen Höhenformel nach der Höhe erhält man die Steigung der p(h) Kurve bei h = 0 zu

$$\frac{dp(h)}{dh}|_{h=0} = -\frac{\rho_0}{p_0} g \, p_0 \exp\left(-\frac{\rho_0}{p_0} g \, h\right) = -\rho_0 \, g \quad . \tag{3.3.31}$$

Damit lautet die Gleichung für die Tangente an die p(h)-Kurve bei h = 0: $p = p_0 - \rho_0 gh$ (siehe Abb. 3.21). Man erkennt, daß der oben verwendete lineare Ausdruck $-\Delta p = \rho_0 g \Delta h$ gerade dieser Tangente, also der Näherung für kleine h entspricht.

Behnsches Rohr:

Auch die Zugwirkung von Kaminen ist eine Folge des Auftriebs, da im Innern eines Schornsteins erwärmte Luft eine geringere Dichte hat als die Luft im Außenraum. Da der Schornstein oben und unten offen ist, findet ein Ausströmen der warmen Luft aus der oberen Öffnung statt. Öffnet man in einem Treppenhaus unten und oben ein Fenster, so strömt die Luft aus dem oberen Fenster schneller aus, da dort der Außendruck geringer ist. Es entsteht dadurch eine Sogwirkung von unten nach oben.

Schließlich herrscht auch in einer Gasleitung eine Druckverteilung. Dies kann anhand des **Behn**schen Rohres demonstriert werden, das aus einem waagrechten Rohr besteht, dem in der Mitte brennbares Gas bei konstantem Druck zugeführt wird und das an den Enden zwei kleine Öffnungen hat, an denen das Gas austritt. Zündet man das austretende Gas an, so sind die Flammen für das waagrechte Rohr gleich groß. Kippt man jedoch das Rohr aus der Waagrechten heraus, so wird die Flamme an der höher gelegenen Austrittsstelle größer. Das Gas strömt hier schneller aus, da der Umgebungsdruck etwas niedriger ist.



Abbildung 3.22: (a) Zur Definition der Oberflächenspannung. (b) Apparatur zur Bestimmung der Oberflächenspannung.

3.4 Oberflächenphänomene

3.4.1 Oberflächenenergie, Oberflächenspannung

In Abschnitt 3.1 wurde bereits darauf hingewiesen, daß Flüssigkeiten ein definiertes Volumen und deshalb auch eine definierte Oberfläche haben. Im Innern einer Flüssigkeit erfahren die Flüssigkeitsteilchen Wechselwirkungskräfte, die nach allen Seiten betragsmäßig gleich groß sind, so daß die Gesamtkraft auf ein Flüssigkeitsteilchen insgesamt verschwindet (siehe Abb. 3.4). Damit ein Flüssigkeitsteilchen an die Oberfläche gelangt, muß es aufgrund der an der Oberfläche fehlenden Kraftkomponenten gegen die ins Innere der Flüssigkeit gerichteten Wechselwirkungskräfte Arbeit leisten. Diese Arbeit führt zu einer Erhöhung der potentiellen Energie an der Oberfläche, die als *Oberflächenenergie* bezeichnet wird. Damit die potentielle Energie minimal wird, muß die Oberfläche einer Flüssigkeit einen Minimalwert einnehmen. Ist eine Flüssigkeit keinen weiteren Kräften ausgesetzt, so nimmt sie eine Gestalt an, bei der die Oberfläche am kleinsten wird, d.h. sie nimmt Kugelgestalt an. Man beobachtet diesen Effekt z.B. für Öltröpfchen in einer Wasser-Alkohol-Lösung oder für Quecksilbertröpfchen, die man in eine mit Wasser gefüllte Schale bringt. Man kann dabei auch beobachten, daß zwei sich berührende Quecksilbertröpfchen zu einem Tropfen verschmelzen, da sie dadurch ihre Gesamtoberfläche und damit die potentielle Energie verkleinern können.

Da die Flüssigkeitsteilchen an der Oberfläche einer Flüssigkeit eine höhere potentielle Energie besitzen, muß zur Vergrößerung der Oberfläche Arbeit verrichtet werden. Das heißt, man muß zur Vergrößerung einer Oberfläche eine Kraft aufwenden. Diese Tatsache kann mit folgendem einfachen Experiment demonstriert werden. Man bringt auf einem *U*-förmigen Drahtbügel einen verschiebbaren Bügel an. Legt man diese Anordnung in eine Seifenlösung, so wird beim Herausziehen mit etwas Glück zwischen Draht und Bügel eine Seifenlamelle aufgespannt (siehe Abb. 3.22a). Um durch eine Verschiebung des Bügels eine Vergrößerung der Oberfläche der Seifenwasserlamelle zu erreichen, muß eine äußere Kraft *F* aufgewendet werden. Nimmt man diese Kraft weg, so zieht sich die Seifenlamelle wieder auf ihre ursprüngliche Größe zusammen. Die zur Vergrößerung der Oberfläche aufgewendete Arbeit ist proportional zur zusätzlich gebildeten Oberfläche und man kann somit eine *spezifische Oberflächenenergie* σ_0 definieren:⁷

⁷Man kann eigentlich von Oberflächenenergie streng genommen nur dann sprechen, wenn die Flüssigkeit an Vakuum an-

$$\sigma_0 := \frac{\text{Arbeit zur Bildung der zusätzlichen Oberfläche}}{\text{zusätzliche Oberfläche}} = \frac{\Delta W}{\Delta A} . \quad (3.4.1)$$

Die spezifische Oberflächenenergie entspricht der Arbeit, die pro Flächeneinheit neuer Oberfläche geleistet werden muß. Für die Drahtbügelanordnung ist $\Delta A = 2l\Delta x$,⁸ d.h. es gilt

$$\Delta W = \sigma_0 \Delta A = \sigma_0 2l \Delta x \quad . \tag{3.4.2}$$

Für die Einheit der spezifischen Oberflächenenergie erhält man aus der Definitionsgleichung

$$[\sigma_0] = \left[\frac{W}{A}\right] = \left[\frac{F}{l}\right] = 1 \text{ J/m}^2 = 1 \text{ N/m} . \qquad (3.4.3)$$

Meist wird die spezifische Oberflächenenergie in der Einheit N/m angegeben und man spricht deshalb üblicherweise von einer *Oberflächenspannung*. Die Oberflächenspannung kann als Quotient der zum Vergrößern der Oberfläche erforderlichen Kraft F und dem Doppelten der Länge l der verschiebaren Oberflächengrenze aufgefaßt werden.

Oberflächenspannung von Wasser:

Die Oberflächenspannung von Wasser läßt sich mit der in Abb. 3.22b gezeigten Anordnung bestimmen. Ein U-förmiger Bügel befinde sich in einem Wasserbehälter. An ihm ist ein am Waagebalken hängender Bügel der Länge l frei beweglich aufgehängt. Durch Austarieren der Waage stellt man zunächst den Nullpunkt ein. Dann taucht man den Bügel ins Wasser und zieht in wieder heraus. Die Waage neigt sich dabei auf die Seite der sich bei diesem Vorgang bildenden Lamelle. Auf der Gegenseite legt man jetzt so lange Massenstücke auf, bis deren Gewichtskraft F den Ausschlag wieder kompensiert. Da das Gewicht der Lamelle vernachlässigt werden kann, läßt sich die Oberflächenspannung von Wasser aus der Gewichtskraft F leicht zu

$$\sigma_{H_2O} = \frac{F}{2l} = 7.1 \times 10^{-2} \text{N/m}$$
 (3.4.4)

bestimmen. Der Versuch bestätigt, daß die Kraft nicht von der Fläche der Lamelle abhängt. Im Unterschied zur Federkraft F = -kx (Hookesches Gesetz) ist hier die rücktreibende Kraft unabhängig von der Auslenkung.

Geringe Verunreinigungen vermindern die Oberflächenspannung oft dramatisch. Gibt man z.B. in den Wasserbehälter einen Tropfen Öl oder Geschirrspülmittel, so reißt die Lamelle sofort ab. Auch durch erneutes Eintauchen und Herausziehen des Bügels läßt sich keine neue Lamelle erzeugen. Im Gegensatz dazu erhöht ein Zusatz von 25 Gewichtsprozent Kochsalz die Oberflächenspannung von Wasser auf 8.3×10^{-2} N/m.

Es sei hier noch darauf hingewiesen, daß flüssige Metalle (z.B. Rhenium, Wolfram) eine sehr große spezifische Oberflächenspannung von mehr als 2 N/m haben.

grenzt. Man tut dies üblicherweise aber auch, wenn die Flüssigkeit an Luft angrenzt. Dagegen benutzt man für zwei aneinandergrenzende Flüssigkeiten den Ausdruck *Grenzflächenenergie* oder Grenzflächenspannung. Die Grenzflächenspannung hängt stark von der Flüssigkeitenkombination ab. Z.B. erhält man für eine Grenzfläche zwischen Wasser und Petroleum eine Grenzflächenspannung von etwa 0.0480 N/m, zwischen Wasser und Olivenöl nur 0.0182 N/m.

⁸Der Faktor 2 resultiert aus der Tatsache, daß man die Oberfläche der Lamelle an der Vorder- und Rückseite um $l\Delta x$ vergrößert.

Kohäsionsdruck

Bisher wurden nur ebene Oberflächen betrachtet. Bei diesen wirkt die Oberflächenkraft (parallel zur Oberfläche) auf ein sich in der Oberfläche befindliches Flüssigkeitsteilchen von allen Seiten gleich stark ein, so daß die Gesamtkraft auf das Flüssigkeitsteilchen verschwindet. Ist die Oberfläche dagegen konvex gewölbt, so liefern die an einem Flüssigkeitsteilchen in der Oberfläche wirkenden Kräfte eine in die Flüssigkeit hinein gerichtete resultierende Kraft, die den Kohäsionsdruck vergrößert. Bei einer konkaven Oberfläche ist die resultierende Kraft aus der Flüssigkeit heraus gerichtet und führt zu einer Verringerung des Kohäsionsdrucks.

Wir wollen im folgenden den durch die Krümmung der Flüssigkeitsoberfläche bewirkten Normaldruck nur für eine kugelförmig gekrümmte Oberfläche berechnen. Bei einem kugelförmigen Flüssigkeitsvolumen ist die resultierende Kraft F an jedem Oberflächenelement auf den Mittelpunkt gerichtet. Die Kraft pro Flächeneinheit ergibt den Kohäsionsdruck

$$p = \frac{F}{A} = \frac{F}{4\pi r^2} . (3.4.5)$$

Um den Zusammenhang zwischen Kohäsionsdruck und Oberflächenspannung zu finden, nimmt man eine Vergrößerung des Kugelradius r um dr (siehe Abb. 3.23) und damit eine Vergrößerung der Kugeloberfläche um

$$dA = 4\pi (r+dr)^2 - 4\pi r^2 \simeq 8\pi r dr \tag{3.4.6}$$

an, wobei der Term in $(dr)^2$ vernachlässigt werden kann, da dr klein sein soll. Aus der Definition der Oberflächenspannung folgt dann

$$dW = \sigma_0 \, dA = 8\pi\sigma_0 \, r \, dr \quad . \tag{3.4.7}$$

Die Arbeit läßt sich aber auch über die Kraft bzw. den Kohäsionsdruck ausdrücken

$$dW = F \, ds = pA \, ds = 4\pi p r^2 dr \quad . \tag{3.4.8}$$

Aus Gl.(3.4.7) und (3.4.8) erhält man dann die gewünschte Beziehung zwischen Kohäsionsdruck p und Oberflächenspannung σ_0 zu

$$p = 2 \frac{\sigma_0}{r}$$
 . (3.4.9)

Man sieht, daß der Kohäsionsdruck umso geringer wird, je größer der Kugelradius wird und umgekehrt.

Eine beliebig gekrümmte Oberfläche kann lokal immer mit zwei Krümmungskreisen in orthogonale Richtungen angenähert werden. Mit den Radien r_1 und r_2 dieser Hauptkrümmungskreise erhält man für den Kohäsionsdruck den allgemeinen Ausdruck



Abbildung 3.23: Zum Kohäsionsdruck einer kugelförmigenm Oberfläche.

$$p = \sigma_0 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$$
 . (3.4.10)

Man bezeichnet die Summe der reziproken Hauptkrümmungsradien auch als mittlere Krümmung der Fläche. Der Kohäsionsdruck ist dann gleich dem Produkt aus der Oberflächenspannung und der mittleren Krümmung der Oberfläche.

Öltröpfchen in Wasser-Alkohol-Mischung:

Bringt man z.B. Öltröpfchen in eine Wasser-Alkohol-Mischung, so schweben die Öltröpfchen in dieser Flüssigkeit, da die Dichten gleich sind. Die Öltröpfchen nehmen dabei eine kugelförmige Gestalt an, da für diese Form die Oberfläche am kleinsten und damit die Oberflächenenergie minimal ist (eine Kugel besitzt das kleinste Verhältnis von Oberfläche zu Volumen). Man kann beobachten, daß sich berührende Tröpfchen zu einem größeren Tropfen vereinigen, da der größere Tropfen ein günstigeres Verhältnis von Oberfläche zu Volumen besitzt (die Oberfläche des größeren Tropfens ist kleiner als die Summe der Oberflächen der zwei kleineren, durch die Vereinigung der Tröpfchen kann also die Oberflächenenergie reduziert werden).

Kleine Tropfen von Wasser oder Quecksilber haben auf einer Unterlage, die nicht benetzt wird, fast kugelförmige Gestalt. Bei sehr kleinen Tropfen kann man nämlich die Schwerkraft gegenüber der Oberflächenspannung vernachlässigen, weil die Schwerkraft mit dem Volumen (also proportional zu r^3) abnimmt, der Krümmungsdruck jedoch proportional zu 1/r anwächst.

Innendruck einer Seifenblase:

Zur Vergrößerung der Oberfläche einer Seifenblase ist die Arbeit $dW = \sigma_0 dA$ notwendig. Andererseits gewinnt man durch die Vergrößerung des Volumens die Kompressionsarbeit dW = F dr = (F/A) dV = p dV. Im Gleichgewicht muß also $\sigma_0 dA = p dV$ oder $\sigma_0 16\pi r dr = p 4\pi r^2 dr$ gelten. Hierbei ist zu beachten, daß die Oberfläche sowohl der Innen- als auch der Außenseite der Seifenblasenlamelle vergrößert wird und deshalb $dA = 2(8\pi r dr)$ gilt (Haut der Seifenblase besitzt zwei Oberflächen). Für den Druck in der Seifenblase erhält man somit $p = 4\sigma_0/r$. Ein ähnlicher Zusammenhang gilt für Luftballons. Bringt man zwei Seifenblasen oder Luftballons zusammen, so bläst der kleinere Ballon den größeren auf, da in ihm wegen $p \propto 1/r$ der größere Druck herrscht.

Tropfenbildung:

Tritt Wasser oder eine andere Flüssigkeit aus einem Rohr mit Durchmesser *d* aus, so bilden sich Tropfen. Der Grund dafür liegt in der endlichen Oberflächenspannung des Wassers. Diese ermöglicht, daß ein gewisses Gewicht des Tropfens getragen werden kann. Nähert man den Druck aufgrund des Gewichts F_G des Tropfen mit $p \simeq F_G/\pi r^2$ an, wobei πr^2 die Fläche der Rohröffnung ist, so erhält man mit Gl.(3.4.9) das maximale Gewicht des Tropfens zu $F_G = 2\pi r\sigma_0$. Man kann damit aus der Tropfengröße sofort Rückschlüsse auf die Oberflächenspannung erhalten. So ist die Tropfengröße für Alkohol wesentlich kleiner als diejenige für Wasser. Da die Dichte von Alkohol geringer ist als die von Wasser, kann das nur an der geringeren Oberflächenspannung von Alkohol liegen.

3.4.2 Kapillarität, Kohäsion, Adhäsion

Wir wollen nun nach der oben bereits diskutierten Grenzfläche zwischen einer Flüssigkeit und Vakuum (bzw. einem Gas) die Grenzfläche zwischen einem Festkörper und einer Flüssigkeit betrachten. Bei dieser Grenzfläche ist wichtig, daß die Atome bzw. Moleküle des Festkörpers nicht frei verschiebbar sind. Die Flüssigkeitsteilchen an der Grenzfläche erfahren eine Wechselwirkung sowohl von den umgebenden Molekülen der Flüssigkeit als auch durch diejenigen des Festkörpers. Man kann nun je nach relativer Größe dieser Wechselwirkungskräfte zwei Fälle unterscheiden:

- 1. Die Kräfte zwischen den Molekülen des Festkörpers und denen der Flüssigkeit (*Adhäsionskräfte* F_A) sind größer als diejenigen zwischen den Flüssigkeitsmolekülen (*Kohäsionskräfte* F_K). In diesem Fall erfolgt eine Benetzung der Grenzfläche (siehe Abb. 3.24a). Beispiel: Wasser-Glas.
- 2. Die Adhäsionskräfte F_A sind kleiner als die Kohäsionskräfte F_K . In diesem Fall erfolgt keine Benetzung der Gefäßwand (siehe Abb. 3.24b). Beispiel: Quecksilber-Glas.

Wir haben bereits diskutiert, daß eine Flüssigkeitsoberfläche immer senkrecht zur Gesamtkraft auf die Flüssigkeitsmoleküle steht (dies folgt aus der freien Beweglichkeit der Flüssigkeitmoleküle). Aus dieser Bedingung ergibt sich der in Abb. 3.24 gezeigte Randwinkel der Flüssigkeit an einer Festkörper-Füssigkeit-Grenzfläche. An einem Linienelement *dl* der Flüssigkeit stoßen die Berührungsflächen Festkörper-Flüssigkeit (1-2), Flüssigkeit-Luft (2-3) und Festkörper-Luft (1-3) zusammen. Die Flüssigkeitsgrenze, in der dieses Linienelement liegt, verläuft in Abb. 3.24 senkrecht zur Zeichenebene. Im Gleichgewichtsfall müssen sich die auftretenden Kräfte durch die Oberflächenspannungen gegenseitig kompensieren, d.h. es muß gelten:

$$\sigma_{12} + \sigma_{23} \cos \varphi = \sigma_{13} . \tag{3.4.11}$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich der Randwinkel φ zu

$$\cos \varphi = \frac{\sigma_{13} - \sigma_{12}}{\sigma_{23}}$$
 (3.4.12)

Wir nehmen zunächst an, daß $|\sigma_{13} - \sigma_{12}| < \sigma_{23}$ ist. Ist dabei $\sigma_{13} > \sigma_{12}$, so ist der Randwinkel spitzt, ist dagegen $\sigma_{13} < \sigma_{12}$ so ist φ stumpf. Im Grenzfall $|\sigma_{13} - \sigma_{12}| = \sigma_{23}$ wird der Randwinkel gleich Null. Ist schließlich $|\sigma_{13} - \sigma_{12}| > \sigma_{23}$, so ist offensichtlich obiger Gleichung die Grundlage entzogen, also



Abbildung 3.24: Benetzende (a) und nichtbenetzende (b) Flüssigkeit an einer Gefäßwand (1=Festkörper; 2=Flüssigkeit; 3=Vakuum oder Luft).

kein Gleichgewicht mehr möglich. Man nimmt in diesem Fall an, daß der Randwinkel gleich Null bleibt und wegen des nicht vorhandenen Gleichgewichts eine dünne Schicht der Flüssigkeit den Festkörper vollständig überzieht. Man spricht dann von einer *vollständigen Benetzung* eines Festkörpers.

Besonders auffällig treten die Wirkungen von Oberflächenspannungen an der Grenzfläche Festkörper-Flüssigkeit in engen Kapillaren zu Tage. Taucht man ein Kapillarrohr in eine Flüssigkeit ein, so steigt in ihm die Flüssigkeit in manchen Fällen über den Flüssigkeitsspiegel hoch, man spricht hier von *Kapillarkompression*, in anderen Fällen bleibt der Flüssigkeitsstand in der Kapillare allerdings unter dem Niveau der die Kapillare umgebenden Flüssigkeit. Man spricht in diesem Fall von *Kapillardepression*. Kapillardepression wird z.B. für die Grenzfläche Glas-Quecksilber, Kapillarkompression für die Grenzfläche Glas-Wasser beobachtet. In beiden Fällen ist die Flüssigkeit in der Kapillare durch einen Meniskus begrenzt, der beim Wasser (benetzende Flüssigkeit) ein nach oben konkaves, bei Quecksilber (nichtbenetzende Flüssigkeit) ein nach oben konvexes Stück einer Kugelfläche bildet.

Die kapillare Kompression bzw. Depression kann wie folgt erklärt werden: Bei einer sphärisch gekrümmten Flüssigkeitsoberfläche herrscht eine zum Krümmungsmittelpunkt hin gerichtete Kraft, die an der Oberfläche den Druck

$$p = \frac{2\sigma_0}{r} \tag{3.4.13}$$

ergibt. Hierbei ist r der Krümmungsradius (Kugelradius des Meniskus) und σ_0 die Oberflächenspannung der Flüssigkeit gegen Luft (oben mit σ_{23} bezeichnet). Dieser Druck ist im Falle einer benetzenden Flüssigkeit nach oben und im Falle einer nichtbenetzenden Flüssigkeit nach unten gerichtet. Die Flüssigkeitssäule im Rohr wirkt wie ein Manometer, das die Druckdifferenz zwischen konkaver und konvexer Seite mißt. Der Druck addiert sich zu dem gewöhnlichen hydrostatischen Druck, der nur für sich alleine wirkend ein gleiches Flüssigkeitsniveau innerhalb und außerhalb der Kapillare erzeugen würde (Gesetz der kommunizierenden Röhren). Nach Abb. 3.25 ist der Krümmungsradius $r = R/\cos\varphi$, wobei R der Radius der Kapillare ist. Damit ergibt sich nach Gl.(3.4.13) für den Druck

$$p = \frac{2\sigma_0}{R} \cos\varphi \quad . \tag{3.4.14}$$

Dieser Druck wirkt auf das Flächenelement dA. Die Kraft auf das Flächenelement ist somit pdA und ihre Komponente parallel zur Kapillare $pdA \cos \alpha$, wenn α der Winkel zwischen der Richtung von p und der



Abbildung 3.25: Zur Bestimmung der Steighöhe in einer Kapillare.

Kapillarenrichtung ist. Ferner ist $dA \cos \alpha$ die Projektion des Flächenelements auf die Horizontalebene. Die Summe aller Vertikalkomponenten der Kraft ergibt sich damit zu

$$\sum \frac{2\sigma_0}{R} \cos \varphi \, dA \cos \alpha = \frac{2\sigma_0}{R} \cos \varphi \, \sum dA \cos \alpha \quad . \tag{3.4.15}$$

Hierbei ist $\sum dA \cos \alpha$ gleich dem gesamten Kapillarquerschnitt πR^2 und man erhält für die Gesamtkraft

$$\frac{2\sigma_0}{R} \cos\varphi \ \pi R^2 = 2\pi\sigma_0 R \cos\varphi \ . \tag{3.4.16}$$

Diese Kraft hebt die Flüssigkeit soweit nach oben, bis die Gewichtskraft der gehobenen Flüssigkeit erreicht wird. Man erhält somit folgenden Ausdruck für die Steighöhe h

$$2\pi\sigma R\cos\varphi = \pi R^2 h\rho_{\rm Fl} g$$

oder
$$h = \frac{2\sigma_0 \cos\varphi}{R\rho_{\rm Fl} g} . \qquad (3.4.17)$$

Für den speziellen Fall, daß die Flüssigkeit die Oberfläche der Kapillare benetzt, ist $\varphi = 0$ und man erhält

$$h = \frac{2\sigma_0}{R\rho_{\rm Fl}g} . \tag{3.4.18}$$

Die Gln.(3.4.17) und (3.4.18) können zur Bestimmung der Oberflächenspannung benutzt werden.

Es soll abschließend darauf hingewiesen werden, daß die Kapillarität natürlich eine Einschränkung des Gesetzes der kommunizierenden Röhren bedeutet. Dieses Gesetz gilt bei der Verwendung von kleinen Rohrquerschnitten nur dann, wenn alle Rohre denselben Querschnitt haben und aus dem gleichen Material gefertigt sind.



Abbildung 3.26: Schematische Darstellung eines Geschwindigkeitsfeldes mit Hilfe von Stromlinien.

3.5 Hydro- und Aerodynamik

Bisher haben wir nur ruhende Flüssigkeiten und Gase betrachtet. Dabei soll ruhend nicht bedeuten, daß sich die einzelnen Gas- oder Flüssigkeitsmoleküle in Ruhe befinden, sondern daß ihre mittlere Geschwindigkeit verschwindet. Das heißt, die einzelnen Moleküle können sich z.B. aufgrund der endlichen Temperatur bewegen, sie besitzen aber keine mittlere Driftgeschwindigkeit in eine Vorzugsrichtung. Zur Diskussion der Bewegung von Flüssigkeiten und Gasen betrachten wir jetzt den Einfluß äußerer Kräfte, unter deren Wirkung eine *Strömung* erfolgt. Die wirkende Kraft kann z.B. die Schwerkraft oder eine Kraft aufgrund eines Druckgradienten sein. Diese Kräfte bewirken eine Beschleunigung der Flüssigkeitsoder Gasmoleküle. Bei realen Gasen und Flüssigkeiten müssen außerdem innere Kräfte, die die Moleküle aufeinander ausüben, in Betracht gezogen werden. Diese Kräfte bewirken eine *Zihigkeit* der Flüssigkeit und resultieren in einer endlichen *Reibung*.

Um die Strömung von Flüssigkeiten beobachten zu können, muß man sie kennzeichnen und sichtbar machen. Bei Flüssigkeiten kann man dies z.B. durch Bestäuben der Oberflächen mit einem Pulver (Talkum, Korkpulver) erreichen. Jedes Staubpartikel bleibt an der gleichen Stelle der Flüssigkeit und wird von der strömenden Flüssigkeit mitgenommen. Für die Bewegung im Innern einer Flüssigkeit kann man kleine Schwebepartikel (z.B. Kunststoff- oder Aluminiumpartikel) verwenden. Gasströmungen kann man z.B. durch Tabakrauch sichtbar machen.

Strömungen von Flüssigkeiten und Gasen kann man im allgemeinen durch ein *Strömungsfeld* beschreiben. Dabei wird analog zum Kraftfeld (Zuordnung eines Kraftvektors zu jedem Raumpunkt) jedem Raumpunkt ein Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ zugeordnet. Zur Veranschaulichung des Geschwindigkeitsfeldes einer Strömung gibt es zwei Möglichkeiten:

1. Bahnlinien:

Man kann der Bahn eines Flüssigkeits- oder Gasteilchen mit fortschreitender Zeit folgen. Dadurch ergibt sich eine *Bahnlinie*. Die Bahnlinie bezieht sich also auf die Geschichte, d.h. auf das zeitliche Nacheinander eines Teilchen.

2. Stromlinien:

Man kann aber auch die momentane Geschwindigkeit aller Massenpunkte betrachten und sie in einem Geschwindigkeitsfeld darstellen. Die Hintereinanderreihung aller momentanen Geschwindigkeitsvektoren ergibt die sogenannten Stromlinien. Die Tangenten an die Stromlinien geben die augenblickliche Strömungsrichtung an. In dem Fall, daß eine Strömung stationär ist, d.h. daß bei einer Strömung an die Stelle eines Flüssigkeits- oder Gasteilchens im nächsten Moment ein genau gleiches mit gleicher Geschwindigkeit tritt, gibt eine Stromlinie auch die Bahn jedes Einzelteilchens wieder. Stromlinien und Bahnlinien sind also für eine stationäre Strömung identisch.

Eigentlich geht durch jeden Punkt einer Flüssigkeit eine Stromlinie und die Gesamtheit aller Stromlinien gibt uns ein qualitatives Bild der Strömung. Man kann die Stromlinien aber auch zu einer quantitativen

Darstellung des Geschwindigkeitsfeldes benutzen. Dazu wird ihre Anzahl geeignet beschränkt. Man zieht dazu durch jede senkrecht zur Strömungsrichtung stehende Einheitsfläche nur so viele Stromlinien, wie der Betrag der Geschwindigkeit Einheiten hat. Aus der Zahl der Stromlinien pro Einheitsfläche folgt dann der Geschwindigkeitsbetrag an der betreffenden Stelle. Wo die Stromlinien dicht liegen, ist die Geschwindigkeit hoch und umgekehrt (siehe Abb. 3.26).

Die Flüssigkeits- oder Gasströmungen fallen insofern verschieden aus, als daß bei Flüssigkeiten das Volumen in guter Näherung erhalten bleibt, während es sich bei Gasen meist stark verändert. Dies liegt an der kleinen Kompressibilität von Flüssigkeiten, die es in den meisten Fällen erlaubt, Volumenänderungen bei Strömungsprozessen ganz zu vernachlässigen. Bei den Gasen ist aber nach dem **Boyle-Mariotte**schen Gesetz das Volumen sehr stark vom Druck abhängig, so daß man erwarten kann, daß sich dies bei der Strömung von Gasen stark auswirkt. Es wird sich allerdings zeigen, daß die bei Strömungsprozessen auftretenden Druckdifferenzen meistens klein sind, so daß auch für Gasströmungen die Volumenänderungen oft vernachlässigbar sind. Dies gilt solange, wie die Strömungsgeschwindigkeit nicht in die Nähe der Schallgeschwindigkeit kommt (in Luft bei Normaldruck etwa 340 m/s). Wir werden deshalb im folgenden die vereinfachende Annahme machen, daß das Volumen bei der Strömung von Gasen und Flüssigkeiten erhalten bleibt.

3.5.1 Hydrodynamische Bewegungsgleichungen

Nach dem 2. Newtonschen Axiom ist die Resultierende aller auf ein Flüssigkeits- oder Gasteilchen wirkenden Kräfte gleich dem Produkt aus dessen Masse und der ihm erteilten Beschleunigung. Aus der konsequenten Anwendung der von Newton für Massenpunkte entwickelten dynamischen Bewegungsgleichung gelangt man zu den zuerst von L. Euler aufgestellten *hydrodynamischen Gleichungen*. Faßt man nach dem d'Alembertschen Prinzip das Produkt – ma als Trägheitskraft F_T auf, so lautet der Inhalt der hydrodynamischen Gleichungen wie folgt:

Für jedes Füssigkeitsteilchen muß die Summe aus äußeren Kräften, Druckkräften, Reibungskräften und Trägheitskräften verschwinden.

Es soll nun kurz die Aufstellung der Bewegungsgleichung eines Flüssigkeitsteilchens unter Vernachlässigung der Reibungskraft (ideale Flüssigkeit) diskutiert werden. Neben den äußeren Kräften (z.B. Schwerkraft) und der Trägheitskraft $\mathbf{F_T} = -m\mathbf{a}$ muß vor allem die aus Druckdifferenzen resultierende Kraft berücksichtigt werden. Für ein Flüssigkeitsteilchen mit Volumen $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z = \Delta A \Delta x$, das sich in *x*-Richtung bewegen soll, erhält man, wenn man zwei gegenüberliegende Flächenelemente ΔA betrachtet, für die Resultierende der beiden Druckkräfte in *x*-Richtung

$$p\Delta A - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\Delta x\right)\Delta A = -\frac{\partial p}{\partial x}\Delta x\Delta A \quad . \tag{3.5.1}$$

Mit der auf die Masse bezogenen äußeren Kraft $\mathbf{f} = d\mathbf{F}/dm$ erhält man damit die Bewegungsgleichung für die Bewegung einer Komponente (x-Richtung)

$$f_x \Delta m - \frac{\partial p}{\partial x} \Delta x \Delta A - \Delta m \frac{dv_x}{dt} = 0 . \qquad (3.5.2)$$

Faßt man die Komponenten-Gleichungen zu einer Vektorgleichung zusammen und benutzt $\rho = \Delta m / \Delta V$, so erhält man

Diese Gleichung nennt man die Eulersche Bewegungsgleichung der Hydrodynamik. Hierbei ist

grad
$$p = \frac{\partial p}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial p}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial p}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$
 (3.5.4)

und den Ausdruck $d\mathbf{v}/dt$ nennt man die substantielle Beschleunigung. Darunter versteht man die Beschleunigung des Teilchens, wenn sich sowohl der Ort als auch die Zeit ändern. Es gilt

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\frac{dz}{dt} .$$
(3.5.5)

Beachtet man, daß $dx/dt = v_x$, $dy/dt = v_y$ und $dz/dt = v_z$, so lautet die Gleichung

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(v_x)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}(v_y)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}(v_z)^2 .$$
(3.5.6)

Führt man nun als Abkürzung den Vektor rot v ein,

rot
$$\mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) \, \hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) \, \hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) \, \hat{\mathbf{z}} , \qquad (3.5.7)$$

so läßt sich die Eulersche Gleichung als

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{grad} \frac{\mathbf{v}^2}{2} - \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v} - \mathbf{f} + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = 0 \quad (3.5.8)$$

schreiben. Diese Differentialgleichung ist nichtlinear und sie läßt sich deshalb im allgemeinen nur schwierig lösen. Eine spezielle Lösung ist die weiter unten behandelte **Bernoulli**sche Gleichung.

Die Kontinuitätsgleichung

Wir betrachten zunächst ein Rohr mit konstantem Querschnitt A (siehe Abb. 3.27a). Das Flüssigkeitsvolumen, das pro Zeiteinheit durch die Querschnittsfläche in x-Richtung strömt, ist

$$I = \frac{dV}{dt} = A\frac{dx}{dt} = Av_x \quad . \tag{3.5.9}$$

Wir betrachten jetzt ein Rohr, daß an verschiedenen Stellen unterschiedliche Querschnitte A_1 und A_2 besitzt (siehe Abb. 3.27b). Die Flüssigkeitsmenge, die an einem Ende in das Rohr eintritt, muß dieses am



Abbildung 3.27: Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit durch ein Rohr mit konstantem (a) und variierendem (b) Querschnitt.

anderen Ende wieder verlassen. Bei einer Verengung der Röhre muß durch jeden Querschnitt pro Zeiteinheit das gleiche Flüssigkeitsvolumen bewegt werden. Da Flüssigkeiten als inkompressibel betrachtet werden können, gilt⁹

$$V_1 = V_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{V_1}{t} = \frac{V_2}{t} \quad \Rightarrow \quad I_1 = I_2 \quad . \tag{3.5.10}$$

Dies ist nur dann möglich, wenn die Flüssigkeit durch den engeren Rohrbereich mit einer höheren Geschwindigkeit fließt. Hieraus folgt die *Kontinuitätsgleichung*¹⁰

$$A_1v_1 = A_2v_2$$
 . (3.5.11)

3.5.2 Die Bernoullische Gleichung

Durch die Verengung eines Rohres wird die Geschwindigkeit der durch das Rohr strömenden Flüssigkeit an der Verengung größer. Es muß also an der Engstelle eine Beschleunigung erfolgen. Da Reibungskräfte in erster Näherung vernachlässigbar sind und hier nicht betrachtet werden sollen, kann bei Abwesenheit von äußeren Kräften (z.B. horizontales Rohr, keine Schwerkraft) für diese Beschleunigung nur eine Druckdifferenz verantwortlich sein. Daraus läßt sich sofort folgende Schlußfolgerung ziehen: *In einer strömenden Flüssigkeit muß der Druck mit zunehmender Strömungsgeschwindigkeit abnehmen.* Die Richtigkeit dieser qualitativen Aussage läßt sich anhand der in Abb. 3.28 gezeigten Anordnung nachprüfen. Man läßt durch zwei horizontale Rohre Wasser strömen. Während das eine Rohr einen konstanten Querschnitt hat, ist das zweite Rohr an einer Stelle verengt und an einer anderen erweitert. Zur Messung des Drucks sind an die Rohre vertikal angesetzte Rohre angebracht, die als Druckmanometer dienen. Man kann im Experiment erkennen, daß der Druck entlang des Rohres mit konstantem Querschnitt kontinuierlich abnimmt. Dies ist eine Folge der nicht zu vermeidenden Reibung. Beim Rohr mit variierendem Querschnitt erkennt man dagegen, daß an der Stelle mit höherer Geschwindigkeit (kleiner Querschnitt) der Druck erniedrigt und an der Stelle mit langsamer Geschwindigkeit (großer Querschnitt) erhöht ist.¹¹

⁹Wie oben bereits diskutiert wurde, können auch Gase näherungsweise als inkompressibel betrachtet werden, falls die Strömungsgeschwindigkeit klein gegenüber der Schallgeschwindigkeit ist.

¹⁰Einen allgemeineren Ausdruck für die Kontinuitätsgleichung erhält man, indem man betrachtet, wie sich die in einem bestimmten Volumen eingeschlossene Flüssigkeitsmenge nach der Zeit dt durch zu- oder abfließende Flüssigkeit ändert. Man erhält $\partial \rho / \partial t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$. Dies ist die allgemeine Form der für ein quellenfreies Gebiet geltenden Kontinuitätsgleichung. Für konstantes ρ (inkompressible Flüssigkeit) folgt div $\mathbf{v} = 0$.

¹¹Diese Beobachtung wird in Analogie zum hydrostatischen Paradoxon auch als hydrodynamisches Paradoxon bezeichnet.



Abbildung 3.28: Druckverteilung in einer durch ein Rohr strömenden Flüssigkeit: (a) Rohr mit variablem Querschnitt, (b) Rohr mit konstantem Querschnitt.

Um einen quantitativen Zusammenhang zwischen Druck und Geschwindigkeit bei einer idealen (= reibungsfreien) Flüssigkeit herzustellen, wendet man den Energiesatz auf ein Rohrstück an. Eine Flüssigkeitsmenge mit der Masse m, dem Volumen V und der Dichte ρ muß bei einem sich verengenden Rohr von der Geschwindigkeit v_1 auf v_2 beschleunigt werden (siehe Abb. 3.29). Der statische Druck sinkt dabei von p_1 vor der Verengung auf p_2 in der Verengung ab. Das Produkt aus Druckdifferenz und Querschnittfläche, $(p_1 - p_2)A_2$ liefert die beschleunigende Kraft. Die von dieser Kraft geleistete Arbeit $F\Delta x$ beim Übergang vom Querschnitt A_1 auf Querschnitt A_2 ist die Verschiebungsarbeit $\Delta W = W_1 - W_2 = A_1 p_1 \Delta x_1 - A_2 p_2 \Delta x_2 = (p_1 - p_2)V$. Die Arbeit ist also proportional zur Druck-differenz und dem hinausgeschobenen Volumen. Wenn $(p_1 - p_2)$ größer Null ist, muß man also Arbeit leisten. Die geleistete Arbeit führt zu einer Erhöhung der Geschwindigkeit der Flüssigkeitsteilchen, also zu einer Erhöhung der kinetischen oder Strömungsenergie.¹² Aus dem Energiesatz folgt damit

$$V(p_1 - p_2) = \frac{1}{2}m(v_1^2 - v_2^2)$$

oder $p_1V + \frac{1}{2}mv_1^2 = p_2V + \frac{1}{2}mv_2^2$. (3.5.12)

Bei einem schrägen Rohr kommt noch der jeweilige Anteil der potentiellen Energie mgh_1 bzw. mgh_2 hinzu, wenn $h_2 - h_1$ die Höhendifferenz zwischen den benachbarten Rohrquerschnitten ist. Die Summe der drei Energien, Strömungsenergie $\frac{1}{2}mv^2$, Verschiebungsarbeit pV und potentieller Energie mgh muß konstant sein, da die obige Gleichung ja für jede beliebige Stelle des Rohres gilt. Das heißt, es muß gelten

$$pV + \frac{1}{2}mv^2 + mgh = const . (3.5.13)$$

¹²Wir werden später auch reale Flüssigkeiten und Gase diskutieren, bei denen Reibungseffekte berücksichtigt werden müssen. Hier führt dann ein Druckerhöhung nicht nur zu einer Erhöhung der kinetischen Energie, d.h. der Strömungsgeschwindigkeit. Ein Teil der Arbeit muß dann zur Überwindung von Reibungskräften aufgewendet werde.



Abbildung 3.29: Zur Verschiebungsarbeit bei einer Verengung des Rohrquerschnitts.

Mit $\rho V = m$ erhält man daraus die **Bernoulli**sche Gleichung¹³ für die Strömung in einer Röhre¹⁴

$$\rho gh + \frac{\rho}{2}v^2 + p = const$$
. (3.5.14)

In dem Spezialfall, daß keine äußeren Kräfte wirken (z.B. horizontales Rohr) erhält man

$$\frac{\rho}{2}v^2 + p = const$$
 . (3.5.15)

In dieser Gleichung tritt die oben bereits qualitativ gemachte Aussage, daß der Druck in einer strömenden Flüssigkeit umso kleiner ist, je größer die Strömungsgeschwindigkeit ist, klar zu Tage.

Bezeichnet man den Gesamtdruck in einer ruhenden Flüssigkeit bei h = 0 mit p_0 , so ergibt sich die **Bernoulli**sche Gleichung in folgender Form:

$$p_0 = p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh = const$$
oder
(3.5.16)
Gesamtdruck = statischer Druck + dynamischer Druck + Schweredruck = const .

Hierbei wird der dynamische Druck auch als Staudruck bezeichnet.

Die **Bernoulli**sche Gleichung rechtfertigt zunächst unsere Annahme, daß wir auch Gase als inkompressibel betrachten können, solange die Strömungsgeschwindigkeit klein gegenüber der Schallgeschwindigkeit (in Luft etwa 340 m/s) ist. Nimmt man z.B. Luft mit einer Strömungsgeschwindigkeit von v = 10m/s und einer Dichte von $\rho = 1.293$ kg/m³, so erhält man aus Gl.(3.5.17) für den statischen Druck der strömenden Luft $p = 0.999p_0$. Für v = 100 m/s würde sich $p = 0.935p_0$ ergeben, d.h. eine Druckänderung um nur etwa 6.5%. Ebenso groß sind auch die Dichteänderungen nach dem **Boyle-Mariott**schen Gesetz. Man kann deshalb bei niedrigen Strömungsgeschwindigkeiten in der Tat von der Kompressibilität von Gasen absehen.

¹³Daniel Bernoulli: 1700 - 1782.

¹⁴Allgemeiner läßt sich der quantitative Zusammenhang zwischen Druck und Geschwindigkeit für ideale (= reibungsfreie) Flüssigkeiten durch Integration der **Euler**schen Gleichung (3.5.8) gewinnen. Eine solche Integration wird möglich, wenn sich die äußeren Kräfte als Gradient einer Potentials (konservative Kräfte, $\mathbf{f} = -\text{grad}\Phi$ darstellen lassen und die Dichte der Flüssigkeit nur vom Druck abhängt.


Abbildung 3.30: Geschwindigkeitsverteilung der Flüssigkeitsteilchen bei einer Strömungsgeschwindigkeit $v_s = 0$ (a) und $v_s > 0$ (b).

Es soll zum Abschluß ein mirkoskopisches Bild der **Bernoulli**-Gleichung diskutiert werden. Nimmt man eine konstante Dichte ρ und konstante Temperatur T eines Gases oder einer Flüssigkeit an, so folgt aus der in Kapitel 5 diskutierten kinetischen Gastheorie, daß $p = \frac{1}{3}\rho \langle v^2 \rangle = const$, da das mittlere Geschwindigkeitsquadrat $\langle v^2 \rangle = const$ ist. Aus der **Bernoulli**schen Gleichung folgt dann

$$p + \frac{1}{2}\rho v_s^2 + \rho gh = const$$
 . (3.5.17)

Hierbei ist v_s die Strömungsgeschwindigkeit (zur Unterscheidung von der Geschwindigkeit der Flüssigkeits- oder Gasteilchen aufgrund der endlichen Temperatur). Wie in Abb. 3.30 veranschaulicht ist, ist bei $v_s = 0$ die mittlere Geschwindigkeit $\langle v \rangle = 0$, während $\langle v^2 \rangle \propto T = const$ gilt. Dagegen ist für $v_s = v_x \neq 0$ auch $\langle v' \rangle = v_x \neq 0$, während nach wie vor $\langle v'^2 \rangle \propto T = const$ gilt. Das heißt, daß die ungerichtete thermische Bewegung in eine Driftgeschwindigkeit in eine Vorzugsrichtung umgewandelt wird, oder gleichbedeutend, daß thermische Energie in Strömungsenergie umgewandelt wird. Läßt man den Schweredruck außer Betracht, so erhält man mit $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$ (Luft) für eine Strömungsgeschwindigkeit $v_s = 10 \text{ m/s}$ einen Druck von $p = p_0 - 50 \text{ Pa}$. Für $v_s = 450 \text{ m/s}$ (dies entspricht etwa der thermischen Geschwindigkeit für 300 K) erhält man $p = p_0 - 10^5 \text{ Pa}$. Für ein Gas mit $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$ (Atmosphärendruck) würde dies bedeuten, daß die gesamte ungerichtete Temperaturbewegung in eine gerichtete Strömungsbewegung (oder die gesamte thermische Energie in Strömungsenergie) umgewandelt würde. Es muß hier allerdings weiter berücksichtigt werden, daß auch eine Änderung der inneren Energie der Flüssigkeit oder des Gases (z.B. Temperaturänderung) erfolgt. Die Änderung der inneren Energie muß dann im Energiesatz (vergleiche Abschnitt 1.9) berücksichtigt werden und die **Bernoulli**-Gleichung erhält die Form

$$p + \frac{1}{2}\rho v_s^2 + \rho g h + U = const .$$
 (3.5.18)

Falls die Strömungsgeschwindigkeit v_s zu hoch wird $(v_s^2 > \langle v'^2 \rangle)$, wird die innere Energie U verkleinert. Es kommt dadurch zu einer Abkühlung (Abkühlung durch Expansion).

3.5.3 Anwendungsbeispiele der Bernoulli-Gleichung

Drucksonden

Wir wollen einige Drucksonden vorstellen, mit denen der Gesamtdruck p_0 , der statische Druck p und der Staudruck $\frac{1}{2}\rho v^2$ gemessen werden können. Die speziellen Drucksonden werden zur Messung dieser Drücke an eine geeignete Stelle in der Flüssigkeitsströmung eingebracht. In Abb. 3.31a ist eine Drucksonde gezeigt, mit der der statische Druck p gemessen werden kann. Die Öffnungen O der Sonde befinden sich im Mantel der Sonde und liegen parallel zu den Stromlinien. Die Sonde steht durch das Rohr R in Verbindung mit einem Manometer, z.B. mit einem Flüssigkeitsmanometer M.



Abbildung 3.31: (a) Drucksonde mit Manometer zur Messung des statischen Druckes. (b) **Pitot**-Rohr zur Messung des Gesamtdruckes. (c) **Prandtl**sches Staurohr zur Messung des Staudruckes.

Zur Messung des Gesamtdrucks p_0 benutzt man die in Abb. 3.31b gezeigte Sonde, die nach ihrem Erfinder **Pitot**-*Rohr* genannt wird. Sie besitzt eine axiale Bohrung *B*, die wiederum über ein Rohr *R* mit einem Manometer verbunden ist. Für die gegen das vordere Ende der Sonde anströmenden Strömungslinien bildet sich vor der Sonde ein Staugebiet, in dem die Flüssigkeit zur Ruhe kommt (v = 0), so daß der hier herrschende, vom Manometer gemessene statische Druck *p* gleich dem Gesamtdruck p_0 ist. Zu dem statischen Druck *p* tritt $\frac{1}{2}\rho v^2$ hinzu, um in der Summe p_0 zu liefern. Somit erklärt sich auch die Bezeichnung *Staudruck* für $\frac{1}{2}\rho v^2$.

Die Differenz zwischen Gesamtdruck p_0 und statischem Druck p liefert nach Gl.(3.5.17) den Staudruck $\frac{1}{2}\rho v^2$. Er läßt sich mit dem von **Prandtl** vorgeschlagenen *Staurohr* messen (siehe Abb. 3.31c), das eine Vereinigung der Drucksonde mit dem **Pitot**schen Rohr darstellt. Das mit zwei Rohrleitungen an das Staurohr angeschlossene Manometer mißt direkt den Staudruck als Differenz von Gesamtdruck p_0 und statischem Druck p. Aus der so gemessenen Druckdifferenz läßt sich die Strömungsgeschwindigkeit zu

$$v = \sqrt{\frac{2(p_0 - p)}{\rho}}$$
 (3.5.19)

bestimmen. Das Staurohr stellt deshalb ein einfaches Gerät zur Messung von Strömungsgeschwindigkeiten dar und wird beim Flugzeug zur Messung der Fluggeschwindigkeit relativ zur umgebenden Luft verwendet.

Physik I

Pumpen, Zerstäuber

In Abb. 3.32a ist eine Rohrleitung gezeigt, deren Querschnitt sich an einer Stelle erweitert. Dicht vor dieser Erweiterungsstelle ist ein Steigrohr angebracht, das mit seinem unteren Ende in einen Flüssigkeitsbehälter ragt. Läßt man nun Wasser vom der engen in den weiteren Rohrbereich fließen, so kann bei genügend großer Strömungsgeschwindigkeit der statische Druck in dem engen Rohr so klein werden, daß der von außen wirkende Luftdruck das in dem Gefäß befindliche Wasser durch die Steigleitung hochdrückt. Man kann deshalb mit einer solchen Vorrichtung Flüssigkeiten aus einem Behälter saugen. Nach dem gleichen Prinzip arbeitet der in Abb. 3.32b gezeigte Zerstäuber. Der aus der Düse austretende Luftstrom saugt die Flüssigkeit aus dem Steigrohr nach oben und zerstäubt es.



Abbildung 3.32: (a) Saugwirkung durch Flüssigkeitsströmung. (b) Zerstäuber. (c) Wasserstrahlpumpe. (d) Bunsenbrenner. (e) Anordnung nach **Clément** und **Desormes** zur Demonstration des hydrodynamischen Paradoxons.

Abb. 3.32c zeigt die erstmals von **Bunsen** vorgeschlagene *Wasserstrahlpumpe*. In ihr strömt Wasser mit hoher Geschwindigkeit durch die Düse D und saugt die in der Umgebung befindliche Luft an. Auf diese Weise kann ein über das Rohr R angeschlossenes Gefäß bis auf Drucke im Bereich von einigen 10 mbar evakuiert werden.

In dem ebenfalls von **Bunsen** vorgeschlagenen *Bunsenbrenner* (siehe Abb. 3.32d) saugt das aus der Düse D mit großer Geschwindigkeit austretende brennbare Gas durch die in dem Brennrohr angebrachten seitlichen Öffnungen O Luft in den Gasstrahl, so daß das Gas den zur vollständigen Verbrennung

notwendigen Sauerstoff erhält.

Besonders anschaulich läßt sich die Druckreduzierung in einem Luftstrom hoher Geschwindigkeit mit einem von **Clément** und **Desormes** vorgeschlagenen Apparat (siehe Abb. 3.32e) demonstrieren. Aus einem Rohr, das an einem Ende einen kreisförmigen Flansch trägt, strömt eine Flüssigkeit oder ein Gas mit hoher Geschwindigkeit aus. Durch die davorgehaltenen Platte wird das ausströmende Medium seitlich abgelenkt. Überraschenderweise wird die Platte i.a. nicht abgestoßen, sondern angezogen. Da sich die Strömung nach allen Seiten erweitert, ist seine Geschwindigkeit an der Austrittsstelle viel größer als am Rand der Platte. Infolgedessen ist der statische Druck in der Mitte zwischen Platte und Flansch kleiner als der im Außenraum herrschende Atmosphärendruck. Letzterer drückt die Platte von unten gegen den Flansch (dieses Phänomen wird häufig auch als *hydrodynamisches Paradoxon* bezeichnet).

Bei starkem Wind können Dächer von Gebäuden abgehoben werden. Wenn die Luft über das Dach strömt, so erhöht sich seine Geschwindigkeit über dem Haus, so daß hier ein kleinerer statischer Druck herrscht als im Inneren des Hauses. Durch den von unten gegen das Dach wirkenden Überdruck kann dieses abgehoben werden. Nimmt man an, daß durch den Windstrom über dem Dach ein Unterdruck von 1% erzeugt wird, so liefert dies bei einer Dachfläche von 100 n² eine Gesamtkraft von 10^5 N, die von der Dachverankerung aufgenommen werden muß.

Dynamischer Auftrieb

Läßt man aus einem Rohr Luft ausströmen und bringt, wie in Abb. 3.33a gezeigt, von der Seite einen leichten Tischtennisball in den Luftstrom ein, so wird dieser vom Strahl getragen. Die Kompensation der Schwerkraft erfolgt hierbei über die weiter unten diskutierte Reibungskraft zwischen der Luftströmung und dem Ball Siehe Abschnitt 3.5.5, Gleichung (3.5.38) und (3.5.39)). Die seitliche Führung, der Ball klebt gewissermaßen am Luftstrom, kann aber mit Hilfe der **Bernoulli**schen Gleichung verstanden werden. Die Erklärung des Phänomens ergibt sich aus der Betrachtung der Stromlinien in Abb. 3.33a. Oberhalb des Balls tritt eine starke Zusammenschnürung der Stromlinien und demnach eine Verminderung des statischen Drucks auf, während unterhalb des Balls ein größerer Druck herrscht. Dadurch wird der Ball nach oben gedrückt. Nähert man einen anderen Gegenstand von unten dem Ball, so daß die Luft zwischen diesem Gegenstand und dem Ball hindurchströmen muß, so tritt auch unterhalb des Balls eine Zusammenschnürung der Stromlinien auf. Der Druckunterschied zwischen oben und unten verschwindet und der Ball fällt aufgrund seines Gewichts herunter.

Abb. 3.33b zeigt den *dynamischen Auftrieb* bei einer Flugzeugtragfläche. Ein Tragflächenprofil hat näherungsweise die Form eines langzogenen Tropfens. Wird eine horizontal liegende Tragfläche horizontal angeströmt, so ist die Strömungsgeschwindigkeit an der Oberseite der Tragfläche etwas größer als an der Unterseite (Zusammenschnürung der Stromlinien). Es entsteht dadurch an der Oberseite ein statischer Unterdruck gegenüber der Unterseite. Dies führt zu einem dynamischen Auftrieb.

Messung von Strömungsgeschwindigkeiten

Zur Messung von Strömungsgeschwindigkeiten von Flüssigkeiten und Gasen in Rohrleitungen benutzt man die sogenannte **Venturi**-Düse (siehe Abb. 3.34). Sie besteht im wesentlichen nur aus einer in das Rohr eingebrachten Querschnittsverringerung. Mittels zweier Manometer M und M_r mißt man den statischen Druck p in der Rohrleitung mit normalem und verengtem Querschnitt A bzw. A_r . Wenn vund v_r die Geschwindigkeiten an den beiden Stellen sind, so liefert die **Bernoulli**sche Gleichung die Beziehung

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_r + \frac{1}{2}\rho v_r^2 . \qquad (3.5.20)$$



Abbildung 3.33: (a) Schweben eines Balles im Luftstrom. (b) Stromlinienverlauf um eine Tragfläche (oben) und einen symmetrischen Stromlinienkörper (unten). Ein dynamischer Auftrieb wird nur für die Tragfläche erhalten.

Unter Benutzung der Kontinuitätsgleichung $Av = A_r v_r$ erhält man für die gesuchte Geschwindigkeit v

$$v = \sqrt{\frac{2(p-p_r)}{\rho\left(\frac{A^2}{A_r^2} - 1\right)}} .$$
(3.5.21)



Abbildung 3.34: Zur Bestimmung von Strömungsgeschwindigkeiten mit der Venturidüse.

Ausflußgeschwindigkeit reibungsfreier Flüssigkeiten

Man kann die **Bernoulli**sche Gleichung auch benutzen, um die Geschwindigkeit v zu berechnen, mit der eine Flüssigkeit aus der Öffnung eines Behälters ausfließt, die sich in der Höhe h unterhalb des Flüssigkeitsspiegels befinden (z.B. Seitenwand oder Boden) soll. Der an der Austrittsöffnung herrschende statische Druck sei gleich dem Atmosphärendruck p_a . Unter der Annahme, daß der Durchmesser des Behälters groß gegen den der Ausflußöffnung ist, kann die Geschwindigkeit der Flüssigkeitsteilchen in im Behälter in guter Näherung gleich Null gesetzt werden und man erhält dann aus der **Bernoulli**schen Gleichung (3.5.17)

$$p_a + \rho g h = p_a + \frac{1}{2} \rho v^2$$

oder $v = \sqrt{2gh}$. (3.5.22)

Diese zuerst von **Toricelli** aufgestellte Gesetzmäßigkeit sagt aus, daß die Ausflußgeschwindigkeit einer reibungslosen Flüssigkeit gleich der Geschwindigkeit ist, die ein Körper erlangen würde, wenn er vom Flüssigkeitsspiegel zur Ausflußöffnung frei fallen würde.

3.5.4 Umströmung fester Körper durch ideale Flüssigkeiten

Bis jetzt wurde die Strömung *idealer* Flüssigkeiten und Gase betrachtet, wobei die Wechselwirkung der Flüssigkeiten oder Gase mit den sie einschließenden Rohren oder Gefäßen und Reibungseffekte in der Flüssigkeit oder dem Gas selbst nicht berücksichtigt wurde. Falls Reibungseffekte vernachlässigbar klein sind, ist eine Beschreibung der Strömung mit der **Bernoulli**schen Gleichung möglich. Wir werden jetzt in diesem Abschnitt zuerst die Reibungseffekte von Flüssigkeit oder dem Gas selbst betrachten.



Abbildung 3.35: (a) Strömung einer idealen, reibungslosen Flüssigkeit um eine Kugel. (b) Kraftverteilung auf eine von einer idealen Flüssigkeit umströmten Kugel. (c) Strömung einer idealen, reibungslosen Flüssigkeit um eine Platte.

Die Tatsache, daß Reibungseffekte bei der Umströmung fester Körper durch eine ideale, d.h. reibungsfreie Flüssigkeit oder Gas eine große Rolle spielen, kann man aus folgendem Experiment erkennen. Bringt man in eine Parallelströmung einer reibungslosen Flüssigkeit eine Kugel ein, so trifft eine Strömungslinie den Pol P der Kugel an der Vorderseite (siehe Abb. 3.35). In diesem Punkt wird die Geschwindigkeit der Flüssigkeit gleich Null. Man nennt diesen Punkt deshalb *Staupunkt*. Von P aus teilt sich die Stromlinie dann und vereinigt sich wieder im hinteren Staupunkt P, dem entgegengesetzten Pol der Kugel. Hier ist die Geschwindigkeit ebenfalls gleich Null. Dagegen erreicht die Geschwindigkeit ihre Maximalwerte am Äquator \ddot{A} der Kugel. Die weiter außen liegenden Stromlinien weichen vor der Kugel aus und nähern sich hinter der Kugel wieder an. Man sieht aus diesem Stromlinienverlauf, daß der Wert der Strömungsgeschwindigkeit zwischen dem Pol P und Äquator auf den Maximalwert v_m anwächst und dann zwischen Äquator und dem entgegengesetzten Pol P' wieder auf Null absinkt.

Das Strömungsbild stimmt prinzipiell gut mit den Verhältnissen in realen Flüssigkeiten überein. Es besteht jedoch ein wesentlicher Unterschied. In realen Flüssigkeiten haftet die Flüssigkeit an der Oberfläche der Kugel, während in unserer idealisierten Betrachtung die Flüssigkeit einfach an der Kugel vorbeiströmt. Bei nichthaftender Flüssigkeit ist die Anordnung der Stromlinien (siehe Abb. 3.35a) völlig symmetrisch bezüglich der Achse PP' und des Äquators. Daraus ergibt sich aus der **Bernoulli**schen Gleichung, daß an den Punkten P und P' wegen v = 0 der statische Druck $p = p_0$ ist, d.h. den größten Wert hat, den er annehmen kann. Am Äquator ist dagegen $v = v_m$ und der Druck nimmt den kleinsten Wert $p = p_0 - \frac{1}{2}\rho v_m^2$ an. Die resultierende Druckverteilung ist in Abb. 3.35b gezeigt. Man erkennt, daß der Druck auf der rechten und linken Seite der Kugel völlig gleich ist. Daraus kann man folgende Schlußfolgerung ziehen: Auf eine in eine Parallelströmung eingetauchte Kugel wirkt bei idealer Flüssigkeit keinerlei Kraft. Oder umgekehrt: Eine mit konstanter Geschwindigkeit durch eine ruhende, ideale Flüssigkeit bewegte Kugel erfährt keinen Widerstand. Dieses Ergebnis gilt nicht nur für eine Kugel, sondern für jeden beliebigen eingetauchten Körper (siehe z.B. Abb. 3.35c).

Diese Tatsache widerspricht allerdings der experimentellen Erfahrung. Im Experiment stellt man fest, daß alle eingetauchten Körper einen Widerstand erfahren. Daraus kann man dann schließen, daß die Strömung vor und nach dem Körper unterschiedlich sein muß, daß also in Wirklichkeit die Symmetrie der Strömung und der resultierenden Druckverteilung beziglich des Äquators gebrochen ist. Wie die Flüssigkeit im Detail strömt wird erst später diskutiert, da für die Symmetriebrechung die bis jetzt noch nicht behandelten Reibungseffekte eine wichtige Rolle spielen. Es soll hier die Tatsache genügen, daß infolge der Reibung in der Grenzschicht die Verhältnisse vor und nach dem Körper nicht die Symmetrie besitzen, die nach der Behauptung der reibungslosen Hydrodynamik vorhanden sein sollte. Der tatsächlich in realen Flüssigkeiten auftretende Strömungswiderstand hat seine Ursache in der Asymmetrie der Druckverteilung vor und hinter dem Körper. Er wird deshalb im Gegensatz zu dem später diskutierten Reibungswiderstand innerhalb einer Flüssigkeit als Druckwiderstand bezeichnet. Die Strömungsund Druckasymmetrien stellen sich insbesondere bei solchen Körpern ein, die beim Ubergang von der Vorder- zur Rückseite eine starke Krümmung der Stromlinien aufweisen (wie z.B. eine Platte). Strömungs- und Druckasymmetrien werden umso kleiner, je langgestreckter ein Körper ist. Bei solchen Körpern tritt bei der Bewegung durch eine Flüssigkeit nahezu kein Druckwiderstand auf¹⁵ Man nennt diese Körper dann auch stromlinienformig. Eine nähere Diskussion des Druckwiderstands erfolgt in Abschnitt 3.5.5.

Wir haben gesehen, daß in einer reibungslosen Flüssigkeit (bzw. Gas) auf einen in eine Parallelströmung eingebrachten Körper Druckkräfte auftreten müssen, sobald die Symmetrie der Stromlinien zersört ist. Anschaulich kann man das dadurch erreichen, daß man der symmetrischen Strömung (z.B. um einen unendlich langen Zylinder, dessen Achse senkrecht zur Zeichenebene steht) noch eine Zirkulationsströmung überlagert. Man kann sich also die asymmetrische Strömung als Überlagerung einer symmetrischen Strömung und einer Zirkulationsströmung denken (siehe Abb. 3.36). Eine solche Zirkulationsströmung ergibt sich z.B. dadurch, daß der Zylinder rotiert und infolge der Rauigkeit seiner Oberfläche Gas- oder Flüssigkeitsteilchen mitnimmt. Die Geschwindigkeitsverteilung der Strömung wird durch die Zirkulationsströmung verändert, und zwar wird die Geschwindigkeit auf einer Seite (z.B. unten) erhöht und auf der anderen Seite (z.B. oben) erniedrigt (siehe Abb. 3.36). Entsprechend sind die Stromlinien oben dichter und unten weiter auseinander gezogen. Nach der **Bernoulli**schen Gleichung ist also der Druck oben kleiner und unten größer. Es resultiert daraus eine Querkraft F_q auf jede Längeneinheit des Zylinders senkrecht zur Strömungsrichtung. Diese Kraft F_q ist umso größer, je größer die Geschwindigkeit v der Parallelströmung. Sie ist ferner proportional zu der Größe Γ der Zirkulation und der Dichte ρ der Flüssigkeit oder des Gases. Die genaue Rechnung liefert für die Kraft pro Längeneinkheit die

¹⁵In der Natur kann dies sehr anschaulich anhand der Form von Fischen beobachtet werden.



Abbildung 3.36: Asymmetrische Strömung als Überlagerung einer symmetrischen Strömung und einer Zirkulationsströmung.

Beziehung

$$\frac{F_q}{l} = \rho v \Gamma , \qquad (3.5.23)$$

die nach ihren Begründern die **Kutta-Shukowski** Beziehung genannt wird. Hierbei ist l die Länge des Zylinders. Die Größe der Zirkulation Γ hängt bei einem rotierenden Zylinder von dessen Rotationsgeschwindigkeit und Rauigkeit ab. Ferner muß die Reibung in der Grenzschicht berücksichtigt werden, wie weiter unten noch genauer diskutiert wird. Es muß also von der idealen, reibungslosen Flüssigkeit abgewichen werden. Je größer die Zirkulation ist, um so mehr rücken die ursprünglichen Staupunkte P und P' nach unten in ihre neue Positionen B und B'. Die Stärke der Zirkulation kann über das Ringintegral

$$\Gamma = \oint \mathbf{v}_{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{s} \tag{3.5.24}$$

ausgedrückt werden. Hat die Zirkulationsströmung um den Zylinder mit Radius r die Tangentialgeschwindigkeit v_r , so erhält man

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = v_r \oint ds = v_r 2\pi r \quad . \tag{3.5.25}$$

Berücksichtigt man ferner, daß die Querschnittsfläche des Zylinders senkrecht zur Strömungsichtung A = 2rl ist, so erhält man für die Querkraft

$$F_q = \pi \rho v v_r A \quad . \tag{3.5.26}$$



Abbildung 3.37: Eine inhomogene Strömung enthält Wirbel. Im mitbewegten Bezugssystem (rechts) sieht man die Wirbel deutlicher. Der eingezeichnete Umlauf ergibt eine von Null verschiedene Zirkulation.

Eine endliche Zirkulationsströmung auch dann auftreten kann, wenn keine Rotation eines Körpers vorliegt. Dies ist aus Abb. 3.37 ersichtlich. Im allgemeinen sind Wirbelströmungen überall dort anzusetzen, wo sich die Strömungsgeschwindigkeit quer zu ihrer eigenen Richtung ändert. Die Zirkulationsströmung ist auch bei Flugzeugen von großer Bedeutung. Die sich um den Tragflügel eines Flugzeugs ausbildende Strömung (siehe Abb. 3.36b, oben) kann als eine Überlagerung einer symmetrischen Strömung und einer Zirkulationsströmung aufgefaßt werden.¹⁶

Der Magnus-Effekt

Bewegt sich ein rotierender Ball durch eine Flüssigkeit oder ein Gas, so wird er quer zu seiner Bewegungsrichtung abgelenkt. Der Ball erfährt aufgrund seiner Rotation einer Querkraft. Dieser Effekt hat bei der Ballistik von Geschossen eine große Rolle gespielt. Wurden diese aus glatten Rohren abgefeuert, so wiesen sie aufgrund einer Rotation durch eine zufällig exzentrische Lage des Schwerpunkts unerklärliche Abweichungen von ihrer ursprünglichen Flugbahn auf. Dieser Tatbestand war die Ursache dafür, daß sich 1853 **G. Magnus** mit der experimentellen Untersuchung diesen Effekts befaßte, der nach ihm heute **Magnus**-*Effekt* genannt wird.

3.5.5 Dynamische Viskosität – Laminare und turbulente Strömung

Wir haben bisher Strömungen idealer Flüssigkeiten oder Gase betrachtet und dabei Reibungseffekte vernachlässigt. Im letzten Abschnitt haben wir bereits gesehen, daß die Mitnahme von an der Oberfläche von Festkörpern haftenden Flüssigkeits- oder Gasteilchen zu Asymmetrien des Strömungsprofils und damit zu Kräften auf umströmte Körper führt. Wir haben aber Reibungseffekte in der Flüssigkeit oder dem Gas selbst vernachlässigt. Wir wollen deshalb in diesem Abschnitt die Natur von Reibungskräften in Flüssigkeiten und Gasen diskutieren und ihren Einfluß auf das Strömungsverhalten betrachten. Wir werden sehen, daß reale Flüssigkeiten und Gase eine sogenannte *Zihigkeit* oder *Viskosität* besitzen. Wir werden in diesem Zusammenhang auch von innerer Reibung sprechen.

Wir haben bereits bei der Herleitung der Bernoullischen Gleichung darauf hingewiesen, daß aufgrund von Reibungseffekten der Druck entlang eines Rohres kontinuierlich abnimmt (vergleiche

¹⁶Für ideale Flüssigkeiten fand **Helmholtz**, daß Wirbel in ihnen weder erzeugt noch vernichtet werden können. Außerdem ist die Intensität eines Wirbel ist konstant. Nimmt z-B. der Querschnitt eines Wirbels ab, so muß die Rotationsgeschwindigkeit größer werden und umgekehrt. Erst der Einfluß der Reibung führt zur Verletzung dieser Sätze. Bei geringer Reibung, z.B. in der Atmosphäre, halten sich Wirbel wie die Hoch- und Tiefdruckgebiete sehr lange. Eine Einschnürung eines Tiefs führt in den Tropen zu enormen Windstärken (Taifun, Tornado).



Abbildung 3.38: Zur Flüssigkeitsreibung.

Abb. 3.28). Die Bedeutung von Reibungseffekten wird auch klar, wenn man ein mit Wasser gefülltes Glas um seine vertikale Achse rotieren läßt. Man sieht, daß nach einer gewissen Zeit die gesamte Flüssigkeit im Glas mitrotiert. Das ist nur dann möglich, wenn zwischen den einzelnen koaxialen Flüssigkeitsschichten Kraftwirkungen bestehen, die die Rotation von der Gefäßwand allmählich auf die inneren Flüssigkeitsschichten übertragen. Zur Diskussion dieser Kraftwirkungen betrachten wir den in Abb. 3.38 gezeigten sehr einfachen Versuchsaufbau. Zwischen einem festen Boden und einer beweglichen Platte der Fläche A befinde sich eine Flüssigkeitsschicht der Dicke x. Da die an den Boden und an die Platte angrenzenden Flüssigkeitsschichten an diesen haften, bildet sich beim Bewegen der Platte ein Geschwindigkeitsgefälle dv/dx aus. Die Flüssigkeit kann man sich dabei aus einzelnen Schichten mit unterschiedlicher Geschwindigkeit aufgebaut denken. Die Geschwindigkeit nimmt vom Boden zur Deckplatte zu, und zwar für kleine Abstände linear. Diesen Vorgang kann man sich so erklären, daß die einzelnen Flüssigkeitschichten auf die angrenzenden Schichten Tangentialkräfte (parallel zu den Schichten) ausüben, die diese in Bewegung versetzen. Jede Schicht übt auf die nach unten folgende eine beschleunigende Kraft aus und erfährt nach dem Reaktionsprinzip eine gleich große, aber verzögernde Kraft. Diese Kraft ist nach der Erfahrung proportional zur Fläche der angrenzenden Schichten, ihrem Geschwindigkeitsunterschied Δv , einem von der Natur der Flüssigkeit abhängenden Faktor η und schließlich umgekehrt proportional dem Abstand Δx der betrachteten Schichten. Demnach erhält man für die Tangentialkraft

$$F = A \eta \frac{\Delta v}{\Delta x} . \qquad (3.5.27)$$

Dieser Ausdruck geht im Grenzfall verschwindend dünner Schichten über in

$$F = A \eta \frac{dv}{dx} . aga{3.5.28}$$

Da die Kraft F parallel zu den Flüssigkeitsschichten (d.h. tangential) wirkt, ist $F/A = \sigma_t$ eine *Tangential*- oder *Schubspannung* (vergleiche Abschnitt 3.2.1), die durch

$$\sigma_t = \eta \frac{dv}{dx} \tag{3.5.29}$$

gegeben ist. In einer realen Flüssigkeit existiert also außer der für ideale Flüssigkeiten alleine betrachteten *Normalspannung*, d.h. dem Druck $p = F_n/A$, auch eine *Tangentialspannung*, die durch Gl.(3.5.29) gegeben ist.

Während die Normalspannung eine elastische Spannung ist (sie ist proportional zur Deformation), ist die Tangentialspannung einer Flüssigkeit proportional zur Geschwindigkeitsdifferenz zweier benachbarter Flüssigkeitsschichten. Sie ist also keine elastische Kraft, die ja bestrebt wäre, die Deformation rückgängig zu machen. Sie hat vielmehr die Tendenz, den Geschwindigkeitsunterschied auszugleichen. Die Tangentialspannung wirkt also so, wie wir es von Reibungskräften kennen. Man nennt deshalb η auch den *Koeffizienten der inneren Reibung*. Allgemein üblich ist aber die Bezeichnung *dynamische Viskosität* oder Zähigkeit. Der reziproke Wert $1/\eta$ wird *Fluidität* genannt, der Quotient $\nu = \eta/\rho$ wird als *kinematische Zähigkeit* bezeichnet.

Man sieht aus Gl.(3.5.29), daß die Tangentialspannung sowohl proportional zur dynamischen Viskosität als auch zum Geschwindigkeitsgradienten dv/dx ist. Das heißt, selbst bei einer sehr kleinen Viskosität der Flüssigkeit kann die Tangentialspannung aufgrund von starken Geschwindigkeitsgradienten groß und deshalb bedeutend werden.

Laminare Strömung – das Hagen-Poiseuillesche Gesetz

Wir werden in diesem Abschnitt diskutieren, wie groß die Zähigkeit von Flüssigkeiten und Gasen ist und wie man sie mißt. Dazu betrachten wir zunächst den Fall, daß die Reibungskräfte die Trägheitskräfte bei weitem überwiegen sollen. Dieser Fall eignet sich besonders gut zur Bestimmung von Reibungskoeffizienten.

Wir betrachten ein Rohr mit Radius R, durch das eine Flüssigkeit strömt. Das Rohr soll horizontal verlaufen, damit Effekte der Schwerkraft vermieden werden. Das Rohr soll mit einer Flüssigkeit mit konstantem Druck gespeist werden. Die Flüssigkeit im Rohr kann man sich aus dünnen koaxialen "Stromröhren" mit einer Dicke Δr aufgebaut denken (siehe Abb. 3.39a). Die äußerste Stromröhre soll dabei fest mit der Rohrwandung verbunden sein (v = 0). Der Flüssigkeitsfaden in der Mitte des Rohres hat die höchste Geschwindigkeit. Die einzelnen Flüssigkeitsschichten gleiten aneinander vorbei, ohne sich zu stören. Deshalb nennt man eine solche Strömung auch *Schicht*- oder *Laminarstömung*. Die Stromlinien, die mit den Bahnlinien identisch sind, sind Geraden parallel zum Rohr. Wir werden weiter unten noch sehen, daß sich eine laminare Strömung nur dann ausbilden kann, wenn die Trägheitskräfte klein genug sind. Andernfalls kommt es zu einer *turbulenten Strömung*.



Abbildung 3.39: Zur laminaren Strömung einer Flüssigkeit in einem Rohr: (a) Aufteilung in Stromröhren der Dicke Δr , (b) Strömungsprofil, (c) zur Ableitung des Strömungsprofils.

Die Bewegungsgleichung für die Flüssigkeit entlang des Rohres ergibt sich nach dem **d'Alembert**schen Prinzip aus dem Verschwinden der Summe aus äußeren Kräften (Druckkraft $F_p = (p_1 - p_2)A$), der

Reibungskraft F_{η} , die der Druckkraft entgegengesetzt ist, und der Trägheitskraft $F_T = -ma = -\rho V (dv/dt)$, d.h. es muß gelten

$$(p_1 - p_2)A - F_{\eta} - \rho V \frac{dv}{dt} = 0 . \qquad (3.5.30)$$

Wir betrachten jetzt Strömungen, für die v = const ist, so daß die Trägheitskraft verschwindet und man

$$(p_1 - p_2)A - F_\eta = 0 (3.5.31)$$

erhält. Mit der Querschnittsfläche $A = \pi r^2$ der in Abb. 3.39c gezeigten Stromröhre, der Druckdiffernz $\Delta p = p_1 - p_2$ entlang eines Rohrstückes der Länge *l* und der Oberfläche $A' = 2\pi r l$ einer koaxialen Stromröhre, an der die Tangentialkraft σ_t angreift (siehe Abb. 3.39c), erhält man unter Benutzung von Gl.(3.5.28)

$$\Delta p\pi r^2 - \eta \ 2\pi r l \ \frac{dv}{dr} = 0 \quad . \tag{3.5.32}$$

Durch Auflösen nach dv/dr und Integration erhält man

$$v(r) = (R^2 - r^2) \frac{(p_1 - p_2)}{4 l \eta}$$
 (3.5.33)

Dabei ergibt sich die Integrationskonstante aus der Bedingung v(R) = 0. Man erhält also das in Abb. 3.39b skizzierte parabelförmige Geschwindigkeitsprofil einer in einem Rohr fließenden Flüssigkeit. Für das durch das gesamte Rohr pro Zeiteinheit strömende Flüssigkeitsvolumen, d.h. die Stromstärke I = V/t, erhält man dann

$$I = \int_{A} v(r) dA = \int_{0}^{R} v(r) 2\pi r \ dr = \frac{\pi R^{4}}{8 \eta l} (p_{1} - p_{2}) \ . \quad (3.5.34)$$

Diese Gesetzmäßigkeit wird nach ihren Entdeckern das **Hagen-Poiseuille**sche Gesetz genannt.¹⁷ Man erkennt, daß die durch ein Rohr strömende Flüssigkeitsmenge mit der 4. Potenz des Rohrradius, linear mit dem Druckgefälle $\Delta p/l$ entlang des Rohres und umgekehrt proportional zur dynamischen Viskosität η ansteigt. Da I, Δp , l und R leicht zu messen sind, kann man mit Hilfe von Gl.(3.5.34) sehr einfach die dynamische Viskosität von Flüssigkeiten bestimmen.¹⁸

Die Dimension der dynamischen Viskosität ergibt sich aus dem Hagen-Poiseuilleschen Gesetz zu

¹⁷Diese Gesetzmäßigkeit wurde fast gleichzeitig vom deutschen Ingenieur Hagen (1839) und vom französichen Arzt Poiseuille (1840) untersucht. Poiseuille versuchte dabei vor allem die Blutbewegung in den Arterien und Venen zu verstehen.

¹⁸Die dynamische Viskosität (siehe Tabelle 3.4) ist stark temperaturabhängig. Sie nimmt bei Flüssigkeiten mit steigender Temperatur stark ab, bei Gasen allerdings zu. Dies liegt daran, daß der Mechanismus der Reibung bei Gasen anders ist. Er beruht hier auf Diffusionsprozessen. Strömen zwei Gasschichten nebeneinander her, so werden infolge der Brownschen Mole-kularbewegung Moleküle mit höherer mittlerer Geschwindigkeit in den langsameren Gasstrom und umgekehrt übertreten und zu einer Angleichung der mittleren Geschwindigkeiten führen. Es ist einsichtig, daß dieser Prozeß bei höheren Temperaturen effektiver ist und deshalb die Zähigkeit von Gasen mit steigender Temperatur zunimmt.

$$[\eta] = 1 \frac{\text{kg}}{\text{m s}} = 1 \text{ Pa s} = 10 \frac{\text{g}}{\text{cm s}} = 10 \text{ Poise} .$$
 (3.5.35)

Man kann das **Hagen-Poiseuille**sche Gesetz auch noch in eine andere Form bringen, wenn man statt der verschiedenen Geschwindigkeiten der einzelnen Schichten eine mittlere Geschwindigkeit der Strömung einführt. Definiert man die mittlere Geschwindigkeit $\langle v \rangle$ über die Stromstärke $I = V/t = \pi R^2 \langle v \rangle$, so erhält man durch Einsetzen dieses Ausdrucks für V/t in Gl.(3.5.34)

$$\frac{(p_1 - p_2)}{l} = \frac{8\eta \langle v \rangle}{R^2} . \tag{3.5.36}$$

Multipliziert man diesen Ausdruck noch mit dem Rohrquerschnitt πR^2 und der Länge l, so ergibt sich die Kraft, die in dem Rohrstück der Länge l und des Radius R die Durchflußgeschwindigkeit $\langle v \rangle$ erzeugt, zu

$$F = 8\pi \eta l \langle v \rangle . \tag{3.5.37}$$

Dieser Kraft ist gleich (und entgegengesetzt) der Reibungskraft, d.h. dem sogenannten *Reibungswider*stand F_{η} , den das Rohr der Strömung entgegensetzt. Der Betrag des Reibungswiderstandes ist also

$$F_{\eta} = 8\pi \ \eta \ l \ \langle v \rangle$$
 . (3.5.38)

Der Reibungswiderstand verschwindet wie erwartet für $\eta = 0$, d.h. für eine ideale, reibungslose Flüssigkeit.

Eine weitere, sehr wichtige Formel für den Reibungswiderstand stammt von **Stokes**. Er betrachtete den Reibungswiderstand einer Kugel mit Radius R, die sich mit einer mittleren Geschwindigkeit $\langle v \rangle$ in einer unendlich ausgedehnten Flüssigkeit der Zähigkeit η bewegt. Für den Reibungswiderstand ergibt sich hier

$$F_{\eta} = 6\pi \ \eta \ R \langle v \rangle$$
 . (3.5.39)

Dieser Ausdruck wird als das **Stokes***sche Gesetz* bezeichnet. Eine Kugel bewegt sich nach diesem Gesetz in einer zähen Flüssigkeit unter Wirkung einer konstanten Kraft F (z.B. Schwerkraft) mit konstanter Geschwindigkeit. Eine Kugel sinkt deshalb im Schwerefeld (konstante Gewichtskraft) in einer Flüssigkeit mit konstanter Geschwindigkeit nach unten. Auch die Fallgeschwindigkeit von Regentropfen gehorcht dem **Stokes**schen Gesetz.

Zur Berechnung der Sinkgeschwindigkeit v_s von Kugeln unterschiedliche Materialdichte ρ in einer Flüssigkeit muß man neben der Gewichtskraft $\mathbf{F}_{\mathbf{G}} = V_K \rho_K \mathbf{g}$ und der Reibungskraft $\mathbf{F}_{\eta} = -6\pi \eta R \mathbf{v}_s$ die Auftriebskraft $\mathbf{F}_{\mathbf{A}} = \rho_{\text{Fl}} V_K \mathbf{g}$ berücksichtigen. Hierbei ist ρ_K die Dichte und $V_K = \frac{4}{3}\pi R^3$ das Volumen der Kugel. Aus dem Kräftegleichgewicht $\mathbf{F}_{\mathbf{G}} + \mathbf{F}_{\eta} + \mathbf{F}_{\mathbf{A}} = 0$ folgt

$$\rho_k V_K g - 6\pi \eta R v_s - \rho_{\rm Fl} V_K g = 0$$

oder $v_s = \frac{2}{9} \frac{(\rho_K - \rho_{\rm Fl})}{n} g R^2$. (3.5.40)

Die Sinkgeschwindigkeit ist also proportional zu $1/\eta$, $(\rho_K - \rho_{Fl})$ und R^2 . Das heißt, die Sinkgeschwindigkeit ist für eine zähes Öl (z.B. Glyzerin) wie erwartet kleiner als für Wasser, sie ist für eine Stahlkugel größer als für eine gleichgroße Kunststoffkugel und sie ist für eine große Kugel größer als für eine kleine Kugel.

Stoff	η [Pa s]	Stoff	η [Pa s]
Quecksilber	0.1554	Argon	2.211×10^{-3}
Diäthyläther	0.0240	Helium	$1.961 imes 10^{-3}$
Benzol	0.0648	Luft	1.819×10^{-3}
Glyzerin (wasserfrei)	148	Wasserstoff	0.884×10^{-3}
Motoröl	~ 5		
Rizinusöl	99		

Tabelle 3.4: Dynamische Viskosität einiger Stoffe bei 20°C in Pascalsekunden.

Turbulente Strömung – Reynoldssche-Zahl

Bei idealen Flüssigkeiten wurde die gesamte von außen zugeführte Arbeit in eine Beschleunigung der Flüssigkeit übergeführt, da hier keine Reibungskräfte wirken. Eine Druckdifferenz in einem Rohr führt also ausschließlich zu einer Veränderung der kinetischen Energie der Flüssigkeit. Im vorangegangenen Abschnitt wurde dann die Reibung berücksichtigt, wobei wir angenommen hatten, daß die Reibungskräfte sogar groß gegenüber den Trägheitskräften sein sollten. In diesem Fall erhielt man eine *laminare Strömung*, die dadurch ausgezeichnet ist, daß die äußere Arbeit (z.B. Druckdifferenz im Rohr) lediglich zur Überwindung der inneren Reibung notwendig ist. Trägheitskräfte wurde völlig vernachlässigt. Bei laminaren Strömungen gleiten selbst sehr dünne Flüssigkeitsschichten glatt übereinander hin.

Experimentell beobachtet man laminare Strömungen allerdings nur, wenn das Verhältnis v/η aus Strömungsgeschwindigkeit und dynamischer Viskosität klein ist. Mit zunehmender Strömungsgeschwindigkeit geht die laminare Strömung in eine sogenannte *turbulente Stömung* über, bei der Wirbel in der strömenden Flüssigkeit entstehen und dadurch aneinander angrenzende Flüssigkeitsschichten nicht mehr übereinander hingleiten, sondern durcheinander gewirbelt werden. Man nennt diese Strömungsprozesse ist außerordentlich schwierig. In den folgenden Betrachtungen soll deshalb lediglich eine Klassifikation der auftretenden Strömungsformen gemacht werden. Diese Betrachtungen führen zu dem Begriff der endlichen Grenzschichtdicke D^{19} und machen plausibel, wie es zu einer turbulenten Strömung kommen kann.

Wir machen zunächst folgendes Gedankenexperiment: Mit Hilfe einer Kraft F, die zur Überwindung der Reibung notwendig ist, wird ein dünnes Brett in eine reale Flüssigkeit so eingetaucht, daß sich eine konstante Sinkgeschwindigkeit v_s und ein im Idealfall lineares Geschwindigkeitsgefälle dv/dx zu beiden Seiten des Brettes ergibt (siehe Abb. 3.40).²⁰ Mit der Reibungskraft $F_{\eta} = 2A\eta dv/dx = 2A\eta v_s/D$ (vergleiche Gl.(3.5.28)), wobei der Faktor 2 durch die zwei Oberflächen des Brettes verursacht wird, erhält man die *Reibungsarbeit*

$$W_{\eta} = F_{\eta} \ l = 2A \ \eta \ \frac{v_s}{D} \ l$$
 . (3.5.41)

Hierbei ist A die eingetauchte Seitenfläche des Brettes, l die Eintauchtiefe und D der senkrechte Abstand zum Brett, über den die Geschwindigkeit der Flüssigkeit auf Null abgesunken ist.

¹⁹Der Begriff der endlichen Grenzschichtdicke wurde zuerst von **Prandtl** eingeführt.

²⁰Diese Konstellation ist natürlich äquivalent zum Einbringen eines fixierten Brettes in eine Strömung konstanter Geschwindigkeit.



Abbildung 3.40: Zur Strömung realer Flüssigkeiten. Der eingetauchte Körper bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit gegen die Flüssigkeit oder umgekehrt.

Andererseits wird die Flüssigkeit durch das Eintauchen des Brettes in Bewegung gesetzt, wofür die Beschleunigungsarbeit

$$W_B = 2 \int_V \frac{1}{2} \rho \, v^2 \, dV \tag{3.5.42}$$

aufgewendet werden muß. Mit $v/v_s = x/D$ und dV = Adx ergibt sich

$$W_B = 2 \int_0^D \frac{1}{2} \rho \frac{v_s^2}{D^2} A x^2 dx \qquad (3.5.43)$$

bzw.

$$W_B = \frac{1}{3}\rho v_s^2 A D . \quad (3.5.44)$$

Für die Grenzfälle $D \to 0$ und $D \to \infty$ ergeben sich Probleme, da entweder W_{η} oder W_B unendlich wird. Da die an einen Körper (in unserem Fall das Brett) angrenzende Flüssigkeitsschicht immer am Körper haftet, ist die Strömungsgeschwindigkeit dieser Schicht immer gleich der Sinkgeschwindigkeit v_s des Brettes. In zunehmender Entfernung vom Körper sinkt v mehr oder weniger schnell auf Null ab. Wichtig ist, daß auch bei sehr kleinem η in einer an den Körper angrenzenden Schicht der Gradient dv/dx groß ist, und zwar umso größer je kleiner η ist. Die Tangentialspannung $\sigma_t = \eta dv/dx$ wird daher nicht klein und es muß in dieser Grenzschicht die Reibung immer berücksichtigt werden, egal wie klein η ist. Das heißt, der Fall D = 0 kann physikalisch nicht auftreten. Für den anderen Grenzfall $D \to \infty$ verschwindet die Reibungsarbeit, da benachbarte Flüssigkeitsschichten quasi keinen Geschwindigkeits-unterschied mehr aufweisen, die Beschleunigungsarbeit würde aber unendlich groß. Für eine vorwiegend durch die Reibung kontrollierte Strömung ist dies aber ebenfalls unphysikalisch, d.h. dieser Grenzfall kann ebenfalls nicht auftreten. Da in die Beschleunigung der Flüssigkeit quasi nicht mehr Energie hineingesteckt werden kann, als durch die Reibungskräfte auf die einzelnen Flüssigkeitsschichten übertragen werden kann, muß

$$W_B \lesssim W_{\eta}$$
 (3.5.45)

gelten und es stellt sich immer eine endliche Grenzschichtdicke D ein. Aus Gl.(3.5.45) folgt

$$\frac{1}{3}\rho v_s^2 AD \lesssim 2A\eta \frac{v_s}{D}l$$
oder $\frac{\rho v_s}{\eta} \frac{D^2}{l} \lesssim 6$. (3.5.46)

Durch Erweiterung mit *l* und Vernachlässigung des Faktors 6 ergibt sich eine Verknüpfung von Konstanten, die für alle Strömungsvorgänge größenordnungsmäßig erfüllt sein muß:

$$\frac{\rho v_s l}{\eta} \left(\frac{D}{l}\right)^2 \lesssim 1$$
oder
$$D \lesssim \sqrt{\frac{\eta l}{\rho v_s}} . \quad (3.5.47)$$

Hierbei ist die $(D/l)^2$ eine dimensionslose Größe mit rein geometrischer Bedeutung und die Größe

$$Re = \frac{\rho v_s l}{\eta} \quad (3.5.48)$$

ist die **Reynolds**-*Zahl*.²¹ Die **Reynolds**-Zahl ist ebenfalls dimensionslos und verbindet die Eigenschaften, die die Flüssigkeit (ρ , η), die Strömung (v_s) und den eingetauchten Körper (l) beschreiben.

Die Bedingung (3.5.47) gestattet nun eine Klassifikation verschiedener Strömungsformen. Die einzelnen Strömungsformen lassen sich nach der Größe der **Reynolds**-Zahl klassifizieren:

1. $Re \ll 1 \Rightarrow D/l \gg 1$:

Die Grenzschichtdicke ist groß gegenüber der Linearausdehnung des eingetauchten Körpers. Dadurch herrscht ein geringes Geschwindigkeitsgefälle in der Grenzschicht. Dies ist der Grenzfall der laminaren Strömung, den wir oben bereits diskutiert haben. Es wurde dabei vorausgesetzt, daß die Reibungskräfte die Trägheitskräfte überwiegen sollen. Man nun kann zeigen, daß der Quotient aus Reibungskräften und Trägheitskräften proportional zu 1/Re ist. Eine kleine **Reynolds**-Zahl bedeutet also, daß die Reibungskräfte dominieren.

2.
$$Re \sim 1 \Rightarrow D/l \sim 1$$
:

Die **Reynolds**-Zahl und damit D/l sind in der Größenordnung von eins. Das heißt, man erhält Grenzschichtdicken in der Größenordnung der Linearausdehnung des eingetauchten Körpers.

3.
$$Re \gg 1 \Rightarrow D/l \ll 1$$
:

Das Geschwindigkeitsgefälle wird sehr groß. Ab einer kritischen **Reynolds-**Zahl $Re_{\text{krit}} \approx 1200$ kommt es zur Entstehung von Wirbeln und damit zu einer turbulenten Strömung.

²¹**Osborne Reynolds**: 1842 - 1912.

4. $Re \to \infty \Rightarrow D/l \to 0$:

Die Grenzschicht wird verschwindend klein. Der Bereich mit innerer Reibung wird also extrem dünn und es gelten die Strömungsgesetze einer idealen Flüssigkeit. Die reibungslose Hydrodynamik ist also durch $\eta = 0$ oder $Re = \infty$ charakterisiert.

Es ist wichtig darauf hinzuweisen, daß man gleiche Strömungsarten für gleiche **Reynolds**-Zahlen bekommt. Diese Tatsache ist als *hydrodynamisches Ähnlichkeitsgesetz* bekannt. Man kann also eine Änderung von η durch eine entsprechende Veränderung von ρ , r und $v_{\rm s}$ kompensieren und behält damit die Strömungsform bei. In der Strömungstechnik ist hierbei insbesondere die Möglichkeit wichtig, Versuche mit kleinen Modellkörpern zu machen, um daraus Rückschlüsse auf große Körper zu gewinnen (z.B. Flugzeuge, Autos, etc.). Verkleinert man r, so muß bei gleichem ρ und η (z.B. Luft) nur die Strömungsgeschwindigkeit entsprechend heraufgesetzt werden.

Es soll nun weiter diskutiert werden, wie es für den Fall $Re \gg 1$ zur Wirbelbildung kommt. Dazu betrachten wir die Umströmung eines kugelförmigen Körpers. Weit vor und hinter dem Körper ist die Strömungsgeschwindigkeit und deshalb nach Bernoulli der statische Druck etwa gleich. Seitlich der Kugel sind Strömungsgeschwindigkeit und Staudruck größer, was zu einer Erniedrigung des statischen Drucks führt. Ein Flüssigkeitsteilchen wird deshalb erst vor dem Körper im Druckgefälle beschleunigt und erreicht an der Aquatorlinie der Kugel seine maximale Geschwindigkeit. Hinter der Aquatorlinie kann es aufgrund seiner erhöhten kinetischen Energie wieder gegen das Druckgefälle anlaufen und verliert infolgedessen wieder an Geschwindigkeit, bis es (bei fehlender Reibung) weit hinter dem Körper die gleiche Geschwindigkeit besitzt wie davor. Ist aber Reibung zu überwinden, wird Geschwindigkeit eingebüßt und die verbleibende Geschwindigkeit reicht dann unter Umständen nach dem Körper nicht mehr aus, um das Druckgefälle zu überwinden. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Reibungsarbeit größer ist als die vor dem Körper vorhandene kinetische Energie. Es kommt dann zu einer Umkehr des Flüssigkeitsteilchen, d.h. das Flüssigkeitsteilchen strömt in den Bereich niedrigeren Drucks zurück. Dadurch wird eine Drehung eingeleitet und es bildet sich hinter der Kugel ein Wirbelpaar (siehe Abb. 3.41) mit entgegengesetztem Drehsinn. Die an den Wirbeln vorbeiströmende Flüssigkeit nimmt abwechselnd einen dieser Wirbel mit. Nach der Ablösung bilden sich neue Wirbel und es entsteht eine Wirbelstraße hinter der Kugel.

In der Wirbelstraße steckt eine höhere Energie als in der laminaren Strömung. Dies läßt sich durch folgendes Experiment demonstrieren: Man bringt in das Trommelfell einer großen Pauke ein kreisrundes Loch ein. Vor diese Öffnung wird in mehreren Metern Entfernung eine brennende Kerze aufgestellt. Schlägt man mit dem Filzhammer gegen die Rückwand der Pauke, so wird die Kerze durch die aus der Öffnung in der Vorderwand austretenden Wirbel gelöscht. Mit Hilfe von Rauch und einer Lampe lassen sich die Wirbel sichtbar machen.

Der Übergang von laminarer zu turbulenter Strömung hat ferner eine große Auswirkung auf den Strömungswiderstand eines Körpers. Gleitet eine Flüssigkeit laminar um einen Körper, so ist nach dem **Hagen-Poiseuille**schen oder **Stokes**sche Gesetz die Reibungskraft proportional zur Strömungsgeschwindigkeit. In einer turbulenten Strömung ist die Diskussion schwieriger. Qualitativ kann man sagen, daß es zu einer asymmetrischen Druckverteilung vor und nach dem umströmten Körper und damit zu einem Druckwiderstand kommt. Ein Teil der vom Druckgefälle an der Vorderseite eines Körpers geleisteten Beschleuinigungsarbeit geht aufgrund von Reibungseffekten bzw. Wirbelbildung verloren. Es gilt dann nicht mehr die aus der Energieerhaltung abgeleitete **Bernoulli**sche Gleichung, d.h. die Summe aus statischem Druck und Staudruck ist nicht mehr konstant, da die Geschindigkeitsverteilung vor und nach dem Körper nicht mehr symmmetrisch ist. Mit der resultierenden Druckdifferenz kann man eine Druckkraft $F_D = \Delta pA$ definieren. Die Druckdifferenz Δp zwischen Vorder- und Rückseite des Körpers hängt stark von der Form des Körpers ab und wird üblicherweise als $\Delta p = q_w \frac{1}{2}\rho v^2$ ausgedrückt, d.h. als Anteil c_w des Staudrucks. Man erhält damit



Abbildung 3.41: Zur allmählichen Ausbildung und Ablösung eines Wirbelpaares hinter einem Zylinder.



Abbildung 3.42: Widerstandsbeiwert (c_w -Wert) einiger Körperformen: Halbkugel, Platte, Zylinder, Halbkugel (180^o gedreht), Kugel, Stromlinienkörper).

$$F_D = \frac{1}{2} c_w A \rho v^2 . aga{3.5.49}$$

Wichtig ist hierbei, daß der Strömungswiderstand bei einer turbulenten Strömung proportional zum Geschwindigkeitsquadrat und nicht wie bei der laminaren Strömung proportional zu v ist . Die Konstante c_w ist der von der Körperform abhängige *Widerstandsbeiwert*, A die Querschnittsfläche senkrecht zur Strömung und ρ die Flüssigkeitsdichte. Da nicht vor sondern hinter dem Körper Wirbel entstehen, muß zu ihrer Vermeidung, und damit zur Herabsetzung des Strömungswiderstands, die Körperform auf der Rückseite optimiert werden. Die Auswirkungen der Körperform lassen sich im Windkanal zeigen.

In Abb. 3.42 sind die c_w -Werte für einige Körperformen gezeigt. Man sieht z.B., daß eine konvexe und konkave Fläche einen um den Faktor 4 unterschiedlichen Druckwiderstand besitzen. Diese Tatsache wird bei der Konstruktion eines Windmessers, des sogenannten *Anemometers* benutzt. Bei diesem ist ein mit vier Halbkugelschalen versehenes Kreuz um die vertikale Achse drehbar angebracht. Im Windstrom

dreht sich das Kreuz so, daß sich die Kugelschalen mit ihrer konvexen Seite voran bewegen. Die Drehung erfolgt umso schneller, je schneller die Windgeschwindigkeit ist.

Kapitel 4

Schwingungen und Wellen

In den vorangegangenen Kapiteln wurde die Mechanik der Massenpunkte sowie des starren und deformierbaren Körpers diskutiert. Ein wesentlicher Aspekt war dabei die Reaktion dieser Systeme auf äußere Kräfte, die bei einem System von Massenpunkten oder einem starren Körper zu einer Beschleunigung, bei einem deformierbaren Körper zusätzlich zu einer Verformung des Körpers führen. Wir haben bereits gesehen, daß die Wirkung von Kräften zu sich periodisch wiederholenden Vorgängen führen kann. Solche Vorgänge bezeichnen wird als Schwingungsvorgänge. Breitet sich ein Schwingungsvorgang räumlich aus, so sprechen wir von Wellen. Obwohl wir uns hier auf Schwingungen und Wellen in mechanischen Systemen beschränken wollen, spielen Schwingungen und Wellen spielen in verschiedenen Bereichen der Physik eine wichtige Rolle.

Betrachten wir zum Beispiel ein System, das sich im statischen Gleichgewicht befindet, so wissen wir, daß die potentielle Energie des Systems in diesem Zustand minimal ist. Lassen wir nun eine äußere Kraft auf das System wirken, so lenken wir das System aus seinem Gleichgewichtszustand aus, die potentielle Energie wird dabei durch die von der äußeren Kraft geleistete Arbeit erhöht. Schalten wir nun die äußere Kraft wieder ab, so wird das System wieder in seine ursprüngliche Ruhelage zurückgetrieben. Bei konservativen Kräften konnten wir dabei die rücktreibende Kraft als Gradienten der potentiellen Energie ausdrücken. Das System wird aufgrund der rücktreibenden Kraft zum Ausgangspunkt hin beschleunigt. Wenn es die Ausgangslage wieder erreicht, kann es dort aber nicht plötzlich anhalten. Durch seine Trägheit und damit seinen endlichen Impuls bewegt es sich weiter und schwingt wieder aus der Ruhelage heraus. Durch den Anstieg der potentiellen Energie wird es dabei wieder abgebremst bis es schließlich umkehrt und wieder zum Ausgangspunkt zurückschwingt. Wenn keine Reibung vorhanden ist, wiederholt sich dieser Vorgang periodisch ohne in seiner Amplitude abzuklingen. Solche sich periodisch wiederholende Bewegungen bezeichnen wir als Schwingungsvorgänge. Wir bekommen Schwingsvorgänge z.B. also immer dann, wenn wir ein System durch Wirkung einer äußeren Kraft aus seiner Ruhelage auslenken und dann in die Ruhelage zurückschwingen lassen. Dies haben wir bereits beim Masse-Feder-Pendel (Abschnitt 1.6.2), beim mathematischen (Abschnitt 1.6.3) und beim physikalischen Pendel (Abschnitt 2.3.5), oder bei Drehschwingungen (Abschnitt 2.3.5) kennengelernt. Wir werden auch sehen, daß man ein gleichförmige Kreisbewegung als Überlagerung von aufeinander senkrecht stehenden Schwingungen verstehen kann.

Während Schwingungen die periodische Bewegung eines Systems um eine ortsfeste Ruhelage beschreiben, betrachtet man bei Wellen die räumliche Ausbreitung eines Schwingungszustandes. Dies geschieht zum Beispiel dadurch, daß man mehrere schwingungsfähige Systeme miteinander koppelt, so daß der Schwingszustand eines Systems auf die benachbarten Systeme übertragen werden kann. Dadurch erhält man eine räumliche Ausbreitung des Schwingungszustandes, man spricht dann von einer Welle.

4.1 Schwingungen

Die harmonische Schwingung

Wir haben bereits in Abschnitt 1.6.2 das Masse-Feder-Pendel, in Abschnitt 1.6.3 das mathematische und in Abschnitt 2.3.5 das physikalische Pendel kennengelernt. Wir haben dort gesehen, daß (beim mathematischen und physikalischen Pendel nur für kleine Auslenkungen) die rücktreibende Kraft Flinear zur Auslenkung x war, d.h. $F \propto -x$. Solche Kräfte haben wir als *harmonische Kräfte* bezeichnet. Die resultierende Schwingungsform war die harmonische Schwingung, die bereits eingehend in den oben angegebenen Abschnitten diskutiert wurde und hier nur kurz wiederholt wird.

Der harmonischen Schwingung lag die Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{4.1.1}$$

zugrunde. Hierbei ist k die Proportionalitätskonstante zwischen Rückstellkraft und Auslenkung, F = -kx. Die Lösung dieser Differentialgleichung ist

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \quad , \tag{4.1.2}$$

wobei A die Amplitude, φ_0 die Phasenschiebung und

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} \tag{4.1.3}$$

die Kreisfrequenz der Schwingung ist. ν ist die Schwingungsfrequenz, also die Zahl der pro Sekunde ausgeführten Schwingungen und

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad . \tag{4.1.4}$$

die Schwingungsdauer.

4.1.1 Lineare Systeme

Die Differentialgleichung (4.1.1) der harmonischen Schwingung ist eine lineare Differentialgleichung. Die in dieser Gleichung enthaltenen Operationen an der Variablen x besitzen die interessante Eigenschaft, daß bei Substitution von (x + y) für x die gleiche Summe von Operationen für x und für yerhalten wird. Benutzt man für die Operationen auf x die Abkürzung $\mathcal{L}(x)$ so erhält man¹

$$\mathcal{L}(x+y) = \frac{d^2(x+y)}{dt^2} + \frac{k}{m}(x+y) = \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x + \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m}y = \mathcal{L}(x) + \mathcal{L}(y) \quad .$$
(4.1.5)

Dies folgt aus der Tatsache, daß a(x+y) = ax + ay und d(x+y)/dt = dx/dt + dy/dt usw.. Weiterhin gilt

¹Wir benutzen für \mathcal{L} einen anderen Schrifttyp, um daran zu erinnern, daß es keine gewöhnliche Funktion ist. Die verwendete Schreibweise wird mitunter Operatorschreibweise genannt.

$$\mathcal{L}(ax) = \frac{d^2(ax)}{dt^2} + \frac{k}{m}(ax) = a\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{k}{m}x = a\mathcal{L}(x) \quad .$$
(4.1.6)

In komplizierteren Systemen können in der Differentialgleichung mehr Ableitungen und mehr Glieder in \mathcal{L} existieren (z.B. durch Reibungskräfte oder periodische äußere Kräfte). Es stellt sich dann die Frage, ob die Gleichungen (4.1.5) und (4.1.6) nach wie vor gültig bleiben. Wenn sie es bleiben, sprechen wir von einem *linearen Problem*. Da die Differentialgleichung des Masse-Feder-Pendels die Gleichungen (4.1.5) und (4.1.6) erfüllt, stellt das Masse-Feder-Pendel ein lineares System dar.

Lineare Systeme sind in der Physik sehr wichtig, da viele Grundgesetze der Physik linear sind? Aus diesem Grund ist es sinnvoll, sich einige grundlegende Eigenschaften linearer Systeme zu betrachten. Wir werden also im folgenden einige Eigenschaften von schwingungsfähigen Systemen diskutieren, die genau deshalb existieren, weil diese Systeme linear sind.

Wir erweitern zunächst die Differentialgleichung (4.1.1) des harmonischen Oszillators, indem wir eine Reibungskraft $F_{\eta} = -m\eta v = -m\eta dx/dt$ und eine zeitlich variierende antreibende Kraft F(t) zulassen wollen. Man erhält dann die allgemeinere Differentialgleichung für eine gedämpfte getriebene Schwingung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \eta \frac{dx}{dt} + m\omega_0^2 \ x = F(t) \quad . \tag{4.1.7}$$

In der oben eingeführten Operatorschreibweise lautet diese Gleichung $\mathcal{L}(x) = F(t)$. Man kann leicht zeigen, daß Gl.(4.1.7) die Bedingungen für ein lineares System erfüllt.

Wir betrachten jetzt zuerst die freie Schwingung ohne Erregerkraft (F = 0), d.h.

$$\mathcal{L}(x) = 0 \quad . \tag{4.1.8}$$

Angenommen, wir haben, wie auch immer, für die Gleichung $\mathcal{L}(x) = 0$ eine Lösung x_1 gefunden. Das heißt, wir haben ein x_1 , für das $\mathcal{L}(x_1) = 0$ gilt. Wir können dann sofort sagen, daß ax_1 ebenfalls eine Lösung ist. Der Beweis folgt sofort aus Gl.(4.1.6): $\mathcal{L}(ax_1) = a\mathcal{L}(x_1) = a \cdot 0 = 0$.

Als nächstes nehmen wir an, daß wir, wie auch immer, nicht nur eine Lösung x_1 sondern auch eine weiter Lösung x_2 gefunden haben, d.h. es gilt $\mathcal{L}(x_1) = 0$ und $\mathcal{L}(x_2) = 0$. Wir können dann wiederum sofort sagen, daß jede beliebige Linearkombination $x = ax_1 + bx_2$ dieser beiden Lösungen ebenfalls eine Lösung darstellt. Der Beweis folgt wiederum aus den Gln.(4.1.5) und (4.1.6): $\mathcal{L}(ax_1 + bx_2) = \mathcal{L}(ax_1) + \mathcal{L}(bx_2) = a\mathcal{L}(x_1) + b\mathcal{L}(x_2) = a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0$. Wenn wir also eine Anzahl von Lösungen für ein System gefunden haben, so können wir diese mit konstanten Faktoren multiplizieren und addieren.

Es stellt sich die Frage, wieviel unabhängige Lösungen es für ein schwingungsfähiges System gibt. Unabhängig soll dabei bedeuten, daß eine Lösung nicht als Linearkombination anderer Lösungen dargestellt werden kann. Ohne dies im einzelnen zu diskutieren, halten wir hier fest, daß die Zahl der unabhängigen Lösungen von der *Zahl der Freiheitsgrade* abhängt. Angenommen, ein System besitzt zwei Freiheitsgrade. Hat man für dieses System zwei unabhängige Lösungen gefunden, so hat man für dieses System auch die allgemeinste Lösung.

Wir betrachten als nächstes den Fall, daß das System durch eine äußere Kraft F(t) getrieben wird, d.h. es gilt

²Die **Maxwell**schen Gleichungen für die Gesetze der Elektrizität sind lineare Differentialgleichungen; die wichtigen Gesetze der Quantenmechanik erweisen sich, soweit wir dies heute wissen, als lineare Gleichungen.

$$\mathcal{L}(x) = F(t) \quad . \tag{4.1.9}$$

Wir nehmen wiederum an, daß wir für diese Gleichung eine spezielle Lösung x_j gefunden haben, d.h. für x_j gilt $\mathcal{L}(x_j) = F(t)$. Dann können wir sofort sagen, daß auch $(x_j + x_1)$ eine Lösung ist, wobei x_1 eine Lösung der freien Schwingungsgleichung (4.1.8) ist. Der Beweis folgt aus Gl.(4.1.5): $\mathcal{L}(x_j + x_1) =$ $\mathcal{L}(x_j) + \mathcal{L}(x_1) = F(t) + 0 = F(t)$. Wir können also zur "erzwungenen" Lösung (mit äußerer Kraft) immer eine "freie" Lösung (ohne äußere Kraft) addieren und haben immer noch eine Lösung.

4.1.2 Überlagerung und Zerlegung von Schwingungen

Wir kommen nun zu einer weiteren interessanten Eigenschaft linearer Systeme. Angenommen, wir kennen die Lösung x_a der Differentialgleichung (4.1.7) für eine anregende Kraft $F_a(t)$. Nehmen wir nun an, daß am gleichen System die Kraft $F_b(t)$ angreift und wir ebenfalls für diese Kraft die Lösung x_b kennen. Es stellt sich nun die Frage, was passiert, wenn gleichzeitig beide Kräfte F_a und F_b wirken. Für ein lineares System können wir sofort sagen, daß die Lösung für diesen Fall durch die Summe der beiden Lösungen x_a und x_b gegeben ist. Durch Anwendung von (4.1.5) ergibt sich nämlich

$$\mathcal{L}(x_a + x_b) = \mathcal{L}(x_a) + \mathcal{L}(x_b) = F_a(t) + F_b(t) \quad .$$
(4.1.10)

Dies ist ein Beispiel des sogenannten *Superpositionsprinzips* für lineare Systeme. Es bedeutet folgendes: Wenn wir eine komplizierte Kraft haben, die auf bequeme Weise in einfache Teilkräfte zerlegt werden kann (und zwar einfach in dem Sinn, daß wir für diese Kräfte die Lösung der Differentialgleichung kennen), so kennen wir die Lösung für die gesamte Kraft, weil wir die Lösungen für die Teilkräfte nur addieren müssen, genauso wie die gesamte Kraft aus den Einzelkräften zusammengesetzt ist (siehe Abb. 4.1).



Abbildung 4.1: Beispiel für das Superpositionsprinzip für lineare Systeme.

Diese Eigenschaft linearer Systeme kann man zum Beispiel benutzen, wenn eine periodische, aber nicht harmonische Erregerkraft (z.B. sägezahn- oder rechteckförmig) vorliegt. Man kann diese Kraft dann in eine Reihe von harmonischen Kräften zerlegen:

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin(n \,\omega t)$$
 (4.1.11)

Diese Zerlegung wird *Fourierzerlegung* genannt.³ Wie von **Fourier** gezeigt wurde, kann diese Reihenentwicklung stets und in eindeutiger Weise gemacht werden. Hierbei ist n eine ganze Zahl und q_n die Amplitude der Kraftkomponente mit der Frequenz $n\omega$. Neben der "Grundfrequenz" ω treten in der **Fourier**-Entwicklung im allgemeinen alle ganzzahligen Vielfachen der Grundfrequenz, die sogenannten harmonischen Oberschwingungen auf. Sind die Lösungen x_n für die harmonischen Kraftkomponenten bekannt, so ergibt sich die Lösung für die Gesamtkraft als Überlagerung der Lösungen x_n :

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n(t) \quad .$$
 (4.1.12)

Man sieht daraus andererseits, daß man einen komplizierten periodischen Schwingungsvorgang immer in eine Reihe von harmonischen Schwingungen verschiedener Frequenz zerlegen kann:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin(n\,\omega t)$$
 (4.1.13)

Diesen Vorgang nennt man *Fourieranalyse* einer Schwingung. Im folgenden sollen nun einige Beispiele für die Überlagerung und Zerlegung von Schwingungen vorgestellt werden.

Überlagerung zweier aufeinander senkrecht stehender harmonischer Schwingungen

Wir betrachten das in Abb. 4.2a gezeigte schwingungsfähige System. Für die Schwingung in x- und y-Richtung erhalten wir jeweils die bekannte Lösung für ein Masse-Feder-Pendel

$$x(t) = x_0 \sin(\omega_x t + \varphi_{x0})$$
 (4.1.14)

$$y(t) = y_0 \sin(\omega_y t + \varphi_{y0})$$
 (4.1.15)

Hierbei ist $\omega_x = \sqrt{k_x/m}$ und $\omega_y = \sqrt{k_y/m}$. Diese beiden Lösungen stellen unabhängige Lösungen des Systems dar. Die allgemeinen Lösungen für eine beliebige Schwingung sind durch Linearkombinationen ax(t) + by(t) gegeben.



Abbildung 4.2: (a) Masse-Feder-Pendel als Modell für ein zweidimensionales Schwingungssystem. (b) Lineare Schwingung. (c) Elliptische und zirkulare Schwingung.

Wir diskutieren folgende Fälle:

³Für eine periodische Dreieckskurve der Amplitude *b* ergibt sich z.B. $F(t) = \frac{8b}{\pi^2} \left(\sin \omega t + \frac{1}{3^2} \sin 3\omega t + \frac{1}{5^2} \sin 5\omega t + \ldots\right).$

1. $\omega_{\mathbf{x}} = \omega_{\mathbf{y}} = \omega$:

Das Ergebnis hängt von dem Unterschied $\varphi = \varphi_{x0} - \varphi_{y0}$ ab. Für $\varphi = 0$ erhält man

$$x(t) = x_0 \sin(\omega t) \tag{4.1.16}$$

$$y(t) = y_0 \sin(\omega t)$$
 $(\varphi_{y0} - \varphi_{x0} = 0)$. (4.1.17)

Das heißt, wir erhalten

$$\frac{x}{x_0} - \frac{y}{y_0} = 0$$
oder
$$y = \frac{y_0}{x_0}x \quad . \quad (4.1.18)$$

Es ergibt sich die in Abb. 4.2b gezeigte lineare Schwingung, wobei die Schwingungsrichtung durch das Verhältnis der Amplituden gegeben ist. Es gilt $\tan \alpha = y_0/x_0$. Eine lineare Schwingung ergibt sich auch für $\varphi = \pi$. Hier erhält man $y = -\frac{y_0}{x_0}x$.

Für $\varphi = \pi/2$ erhält man

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \sin(\omega t) & (4.1.19) \\ y(t) &= y_0 \sin(\omega t + \pi/2) = y_0 \cos(\omega t) & (\varphi_{y0} - \varphi_{x0} = \pi/2) & (4.1.20) \end{aligned}$$

Es ergibt sich das in Abb. 4.2c gezeigte Bild einer Ellipse. Durch Quadrieren der obigen Gleichung folgt nämlich sofort:

$$\frac{x^2}{x_0^2} + \frac{y^2}{y_0^2} = 1 \quad , \tag{4.1.21}$$

d.h. die Bestimmungsgleichung einer Ellipse. Für beliebige Phasendifferenzen ändert sich sowohl die Richtung der Ellipsenachsen als auch das Verhältnis von kleiner zu großer Hauptachse.

Für $\varphi = \pi/2$ und $x_0 = y_0$ ergibt sich ein Kreis und man spricht von einer zirkularen Schwingung (siehe Abb. 4.2c). Wir sehen also, daß die in Abschnitt 1.6.2 diskutierte gleichförmige Kreisbewegung als Überlagerung zweier aufeinander senkrecht stehender linearer Schwingungen betrachtet werden kann.

Wir können also zusammenfassend feststellen, daß die Überlagerung zweier senkrecht zueinander stehender Schwingungen gleicher Frequenz im allgemeinen eine elliptische Schwingung ergibt, die unter besonderen Umständen ($\varphi = 0$ oder π) in eine lineare Schwingung und ($\varphi = \pi/2$ oder $3\pi/2$, $x_0 = y_0$) in eine zirkulare Schwingung ausarten kann.

2. $\omega_{\mathbf{x}} \neq \omega_{\mathbf{y}}$:

Sind die Frequenzen verschieden, so hat die resultierende Schwingung eine komplizierte Form. Stehen die Frequenzen in einem rationalen Verhältnis, so entsteht ein "stehendes Bild" des Schwingungszustandes. Die resultierenden Figuren bezeichnet man als *Lissajous*-Figuren. Sie sind für ein rationales Verhältnis der Frequenzen in sich geschlossen (siehe Abb. 4.3).



Abbildung 4.3: Lissajous-Figuren: In der linken vertikalen Spalte ist $\omega_x/\omega_y = 1$ in der zweiten 1/2, in der dritten 1/3 und in der vierten 1/4. Die Phasendifferenz ist in der obersten horizontalen Reihe $\varphi = 0$, in der zweiten $\pi/4$, in der dritten $\pi/2$, in der vierten $3\pi/4$ und in der untersten Reihe π .

Überlagerung zweier harmonischer Schwingungen gleicher Schwingungsrichtung und gleicher Frequenz

Die Überlagerung zweier harmonischer Schwingungen gleicher Schwingungsrichtung und gleicher Frequenz ergibt wiederum eine harmonische Schwingung derselben Richtung und derselben Frequenz. Nimmt man noch eine gleiche Amplitude der Schwingungen an $(x_{01} = x_{02} = x_0)$, so erhält man⁴

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1(t) + x_2(t) = x_0 \sin(\omega t + \varphi_1) + x_0 \sin(\omega t + \varphi_2) \\ &= 2x_0 \sin\left(\frac{\omega t + \varphi_1 + \omega t + \varphi_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega t + \varphi_1 - \omega t - \varphi_2}{2}\right) \\ &= 2x_0 \sin\left(\omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \cos\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \quad , \end{aligned}$$
(4.1.22)

Die resultierende Schwingung ist also wieder eine harmonische Schwingung, bei der die Amplitude $2x_0 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)/2$ von der Phasendifferenz $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ abhängt. Für $\varphi = 0$ oder $n \ 2\pi$, d.h. $\varphi_1 = \varphi_2 + n \ 2\pi$ (*n* ist hierbei eine ganze Zahl) erhält man $x(t) = 2x_0 \sin(\omega t + \varphi_2 + n\pi) \cos(n\pi)$. Für gerades n ist $\cos(n\pi) = 1$, für ungerades n ist $\cos(n\pi) = -1$. In letzterem Fall ist aber $\sin(\omega t + n\pi) = -\sin \omega t$. Es gilt also

⁴Hierbei benutzt man die Beziehung $\sin x + \sin y = 2 \sin(x+y)/2 \cos(x-y)/2$.

$$x(t) = 2x_0 \sin(\omega t + \varphi_2)$$
 ($\varphi = n \ 2\pi$) . (4.1.23)

Die Einzelschwingungen addieren sich zur größtmöglichen Gesamtschwingung (siehe Abb. 4.4a), denn sie schwingen in Phase, d.h. sie gehen zur gleichen Zeit durch die Nullage und erreichen auch gleichzeitig ihren Maximalausschlag.



Abbildung 4.4: Zur Überlagerung von zwei harmonischen Schwingungen mit gleicher Schwingungsrichtung, gleicher Frequenz und gleicher Amplitude für $\varphi = n 2\pi$ (a) und $\varphi = (n + 1/2)2\pi$ (b).

Für $\varphi = (n+1/2)2\pi$ folgt dagegen

$$\cos\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} = \cos\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right) = 0$$
 (4.1.24)

Nulldurchgänge und Maximalausschläge stimmen zwar auch hier zeitlich überein. Die Schwingungen erfolgen aber gegenphasig und heben sich deshalb gegenseitig auf (siehe Abb. 4.4b).

Zwischen den beiden Grenzfällen $\varphi = n \ 2\pi$ und $\varphi = (n + 1/2) \ 2\pi$ erhält man je nach Phasenlage andere Überlagerungen mit Amplituden zwischen Null und $2x_0$.

Überlagerung zweier harmonischer Schwingungen gleicher Schwingungsrichtung und unterschiedlicher Frequenz – Schwebung

Überlagert man zwei harmonische Wellen gleicher Schwingungsrichtung, deren Kreisfrequenzen sich nur wenig voneinander unterscheiden, entsteht eine sogenannte *Schwebung* (siehe Abb. 4.5). Aus Gründen der Einfachheit betrachten wir zwei Einzelschwingungen mit gleicher Amplitude, die keine Phasenverschiebung besitzen, d.h. $x_{01} = x_{02} = x_0$ und $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$. Man erhält dann

$$x(t) = x_0 \sin \omega_1 t + x_0 \sin \omega_2 t = 2x_0 \sin \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \cos \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \quad . \quad (4.1.25)$$

Mit $(\omega_1 + \omega_2)/2 \simeq \omega$ und $\Delta \omega = \omega_1 - \omega_2$ erhält man

$$x(t) = 2x_0 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \sin\omega t \quad . \tag{4.1.26}$$

Hierbei ist $\Delta \omega$ laut Voraussetzung sehr klein. Damit ändert sich $\cos(\Delta \omega t/2)$ zeitlich nur langsam im Vergleich zu $\sin \omega t$. Die Lösung x(t) läßt sich deshalb als eine Sinusschwingung mit der Frequenz ω auffassen, deren Amplitude $2x_0 \cos(\Delta \omega t/2)$ sich langsam mit der Kreisfrequenz ($\Delta \omega t/2$) ändert. Mit anderen Worten, die Hauptschwingung der Frequenz ω wird von einer Hüllkurve eingeschlossen, die ihrerseits auch periodisch verläuft. Diese Schwankung der Periode wird als Schwebung bezeichnet.



Abbildung 4.5: Zur Entstehung einer Schwebung durch Überlagerung zweier harmonischer Schwingungen mit Frequenzen, die nur wenig voneinander abweichen.

Unter der Schwebungsdauer T_S versteht man das Zeitintervall zwischen zwei Schwebungsmaxima bzw. Schwebungsminima. Nach der Zeit T_S muß also $|\cos(\Delta \omega t/2)|$ wieder den Ausgangswert annehmen. Damit gilt:

$$\frac{\Delta\omega}{2}T_S = \pi \quad \Rightarrow \quad T_s = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{1}{\Delta\nu} \quad . \tag{4.1.27}$$

4.1.3 Gedämpfte Schwingung

Der Idealfall einer harmonischen Schwingung, bei der keine Dämpfung auftritt, ist nur zu verwirklichen, wenn keine Reibungskräfte vorhanden sind, d.h. wenn der Term $\eta \frac{dx}{dt}$ in Gl.(4.1.7) verschwindet. Dies ist aber in den meisten realen Systemen nicht der Fall, da hier meistens aufgrund von Reibungseffekten eine Dämpfung auftritt. Es ist deshalb wichtig, auch den Fall der gedämpften Schwingung zu diskutieren.

Mit der Reibungskraft $F_{\eta} = -m\eta \frac{dx}{dt}$ ergibt sich für den Fall, daß keine äußere treibende Kraft einwirkt (F(t) = 0), folgende Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \eta \frac{dx}{dt} + m\omega_0^2 x = 0 \quad . \tag{4.1.28}$$

Wir erwarten, daß die Schwingungsamplitude aufgrund der Dämpfung zeitlich abklingt. Es läßt sich zeigen, daß folgender Lösungsansatz die obige Differentialgleichung löst:

$$x(t) = x_0(t)\sin(\omega t + \varphi_0) = x_0 \exp(-\beta t) \sin(\omega t + \varphi_0) \quad . \tag{4.1.29}$$

Hierbei ist

$$\beta = \frac{\eta}{2} \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$
 (4.1.30)

Der Beweis erfolgt durch Einsetzen des Lösungsansatzes in die Differentialgleichung. Die Amplitude $x_0(t)$ der Schwingung nimmt exponentiell ab. Das Quadrat der Kreisfrequenz ω^2 der gedämpften Schwingung ist gegenüber der Kreisfrequenz der ungedämpften Schwingung um $\beta^2 = (\eta/2)^2$ verschoben. Der Parameter β wird als Dämpfungskonstante, $1/\beta = \tau$ als Abklingzeit der gedämpften Schwingung bezeichnet.

Man kann folgende drei Fälle unterscheiden:

1. $\beta^2 < \omega_0^2 \Rightarrow \eta^2 < 4k/m$:

Die Kreisfrequenz ω ist reell, da das Argument der Wurzelfunktion größer Null ist. Es ergibt sich eine langsam abklingende Schwingung (siehe Abb. 4.6a).

Das Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Schwingungsamplituden ergibt sich zu

$$\kappa = \frac{x_0 \exp(-\beta t)}{x_0 \exp(-\beta (t+T))} = \exp(-\beta T) \quad . \tag{4.1.31}$$

Man nennt κ das Dämpfungsverhältnis. Mit der Abklingzeit $\tau = 1/\beta$ erhält man

$$\Lambda = \ln \kappa = \beta T = T/\tau \quad . \tag{4.1.32}$$

Das Verhältnis Λ von Schwingungsperiode T und Abklingzeit τ wird als *logarithmisches Dekrement* bezeichnet.

2. $\beta^2 = \omega_0^2 \Rightarrow \omega = 0$ und $\eta^2 = 4k/m$:

Die Reibung ist so groß, daß das System keine Schwingung mehr ausführen kann. Es erfolgt lediglich eine Rückkehr in die Ruhelage und man erhält

$$x(t) = x_0 \exp(-\beta t)$$
, (4.1.33)

mit $\varphi = \pi/2$ und $\sin(\omega t + \pi/2) = \cos \omega t \approx 1.5$ Dieser Fall wird aperiodischer Grenzfall genannt.

⁵Bei einer genaueren Betrachtung kann man den Kosinus für kleine Argumente entwickeln ($\cos x \simeq 1 + x$) und man erhält $x(t) = x_0 \exp(-\beta t)(1 + \beta t)$.

3. $\beta^2 > \omega_0^2 \Rightarrow \omega$ ist imaginär und $\eta^2 > 4k/m$:

Das Argument der Wurzel im Ausdruck für ω wird kleiner Null, wodurch ω imaginär wird. Das periodische Glied in der Lösung fällt dadurch weg. Man spricht hier vom *Kriechfall* (siehe Abb. 4.6b). Wir haben hier ebenfalls eine langsame Rückkehr in die Ruhelage:

$$x(t) = x_0 \exp(-\gamma t)$$
 . (4.1.34)



Abbildung 4.6: Gedämpfte Schwingung für $\beta^2 < \omega_0^2$ (a) und $\beta^2 > \omega_0^2$ (b).

Um in der Realität ungedämpfte Schwingungen zu erhalten, muß man dem schwingenden System – wie es etwa bei der Pendeluhr oder bei einer einfachen Kinderschaukel realisiert wird – periodisch Energie zuführen, um den Energieverlust durch die Reibung und damit die Dämpfung zu kompensieren. Durch die Reibung wird ständig Schwingungsenergie in Wärme umgewandelt. Die Schwingungsenergie nimmt dadurch ohne Energiezufuhr von außen exponentiell ab. Man erhält

$$E_{\text{ges}}(t) = E_{\text{pot},\text{max}}(t) = \frac{1}{2}kx_{\text{max}}^2(t) = \frac{1}{2}kx_0^2 \exp(-2\beta t) \qquad (\beta \ll \omega_0) \quad . \quad (4.1.35)$$

Die zeitliche Änderung der Gesamtenergie ist damit proportional zu E_{ges} :

$$\frac{dE_{\rm ges}(t)}{dt} = -E_{\rm ges}(t) \quad . \tag{4.1.36}$$

4.1.4 Erzwungene Schwingung

Wir betrachten nun einen Schwingungsvorgang, der durch eine äußere Kraft F(t) getrieben wird. Der Schwingungsvorgang wird durch die Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \eta \frac{dx}{dt} + m\omega_0^2 \ x = F(t)$$
(4.1.37)

beschrieben.

Wir nehmen eine periodische Kraft $F(t) = F_a \sin \omega t$ an, deren Frequenz ω im allgemeinen nicht mit der Eigenfrequenz $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ des Systems bei verschwindender Reibung übereinstimmt. Wir unterscheiden ferner die Fälle mit und ohne Reibung:

1. Ohne Dämpfung:

Man erhält in diesem Fall die Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + m\omega_0^2 \ x = F_a \sin \omega t \quad . \tag{4.1.38}$$

Der Lösungsansatz lautet

$$x(t) = x_0 \, \sin(\omega_0 t + \varphi_0) + A \, \sin \omega t \quad . \tag{4.1.39}$$

Die Anfangsamplitude x_0 und die Phase φ_0 werden durch die Anfangsbedingungen festgelegt. Man bezeichnet $x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$ den Anteil der freien Schwingung und $A \sin \omega t$ den Anteil der erzwungenen Schwingung.

Wir betrachten zunächst den erzwungenen Anteil, d.h. wir setzen $x_0 = 0$. Man erhält dann

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) \quad . \tag{4.1.40}$$

Nach Einsetzen in die Differentialgleichung erhält man

$$-mA\omega^2 + m\omega_0^2 A = F_a \quad . \tag{4.1.41}$$

Hieraus ergibt sich

$$A = \frac{F_a}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad . \tag{4.1.42}$$

Man erkennt, daß bei $\omega = \omega_0$ die Amplitude unendlich groß wird (siehe Abb. 4.7). Es liegt *Amplitudenresonanz* vor.

Für $x_0 \neq 0$ kommt es zur Überlagerung der ungedämpften freien Schwingung mit Frequenz ω_0 mit der erzwungenen Schwingung mit Frequenz ω . Die resultierende Schwingung hat Schwebungscharakter.

2. Mit Dämpfung:

Außer der periodischen Kraft $F(t) = F_a \sin \omega t$ und der elastischen Rückstellkraft der Feder $F_K = -kx \operatorname{muß}$ jetzt noch die Reibungskraft $F_{\eta} = -\eta dx/dt$ berücksichtigt werden. Man erhält also die Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + m\omega_0^2 \ x + \eta \frac{dx}{dt} = F_a \sin \omega t \quad .$$
(4.1.43)

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung wird eine Überlagerung einer gedämpften freien und einer erzwungenen Schwingung sein. Aufgrund der Dämpfung klingt die freie Schwingung ab. Nach Abschluß eines Einschwingvorganges ist nur noch der erzwungene Anteil vorhanden. Das System hat dann seinen stationären Zustand erreicht. Der Lösungsansatz für diesen stationären Zustand lautet



Abbildung 4.7: Resonanzkurve einer ungedämpften erzwungenen Schwingung.

$$\begin{aligned} x(t) &= A \sin(\omega t + \varphi_0) \\ \frac{dx}{dt} &= \omega A \cos(\omega t + \varphi_0) \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi_0) \quad . \end{aligned}$$
(4.1.44)

Einsetzen in die obige Differentialgleichung ergibt

$$-m\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi_0) + m\omega_0^2 A \sin(\omega t + \varphi_0) + \eta\omega A \cos(\omega t + \varphi_0) = F_a \sin\omega t \quad .$$
(4.1.45)

Die Winkelfunktionen lassen sich mit Hilfe folgender Beziehungen umwandeln:

$$\cos(\omega t + \varphi_0) = \cos \omega t \cos \varphi_0 - \sin \omega t \sin \varphi_0$$

$$\sin(\omega t + \varphi_0) = \sin \omega t \cos \varphi_0 + \cos \omega t \sin \varphi_0 \quad . \quad (4.1.46)$$

Durch Einsetzen dieser Beziehungen in Gl.(4.1.45) erhält man eine Gleichung der Form

$$C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t = 0 \tag{4.1.47}$$

mit

$$C_{1} = m\omega^{2}A\cos\varphi_{0} - m\omega_{0}^{2}A\cos\varphi_{0} - \omega\eta A\sin\varphi_{0} + F_{a}$$

$$C_{2} = m\omega^{2}A\sin\varphi_{0} - m\omega_{0}^{2}A\sin\varphi_{0} + \omega\eta A\cos\varphi_{0} \quad . \tag{4.1.48}$$

Damit eine solche Gleichung für jede beliebige Zeit t gilt, müssen die Koeffizienten C_1 und C_2 gleich Null sein. Diese Forderung führt auf zwei Bestimmungsgleichungen. Die erste ($C_1 = 0$) lautet

$$A\left(\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) + \frac{\eta\omega}{m}\tan\varphi_0\right) = \frac{F_a}{m\cos\varphi_0} \quad . \tag{4.1.49}$$

Die zweite Gleichung ($C_2 = 0$) führt zu

$$-m\omega^2 A \sin\varphi_0 + m\omega_0^2 A \sin\varphi_0 = \eta \omega A \cos\varphi_0 \qquad (4.1.50)$$

oder

$$\tan\varphi_0 = \frac{\eta\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} = \frac{\omega_2\beta}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad . \quad (4.1.51)$$

Hierbei ist $\omega_0 = k/m$ die Eigenfrequenz des ungedämpften Systems und φ_0 die Phasenschiebung zwischen Zwangskraft und erzwungener Schwingung. Durch Einsetzen von (4.1.50) in (4.1.49) erhält man mit der Beziehung $1/\cos \varphi_0 = \sqrt{1 + \tan^2 \varphi_0}$ die Amplitude der Schwingung zu

$$A(\omega) = \frac{F_a/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\eta\omega/m)^2}} = \frac{F_a/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} , \quad (4.1.52)$$

wobei der bereits oben eingeführte *Dämpfungsfaktor* $\beta = \eta/2$ verwendet wurde.

Amplitudenverhalten

Wir wollen nun kurz das durch Gleichung (4.1.52) gegebene Amplitudenverhalten der erzwungenen Schwingung mit Dämpfung diskutieren. Durch Differentiation von Gl.(4.1.52) erhält man

$$\frac{dA(\omega)}{d\omega} = -\frac{2(\omega_0^2 - \omega^2)(-2\omega) + 8\beta^2\omega}{2\left(\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}\right)^3} .$$
(4.1.53)

Setzt man diesen Ausdruck gleich Null ergeben sich Extremwerte für folgende Frequenzen:

• $\omega = 0$:

Die Funktion $A(\omega)$ beginnt bei $\omega = 0$ mit einer waagrechten Tangente.

•
$$-(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\beta^2 = 0$$
:

Aus dieser Bedingung ergibt sich ein Maximum der Funktion $A(\omega)$ für die Frequenz

$$\omega_{\max} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$
 (4.1.54)



Abbildung 4.8: Resonanzkurven einer gedämpften erzwungenen Schwingung für verschiedene Werte der Dämpfung.

Im folgenden soll kurz der Einfluß der Dämpfung auf das Amplitudenverhalten diskutiert werden. Wir können dabei folgende Fälle unterscheiden:

1. $2\beta^2 < \omega_0^2$:

Trägt man in einem Diagramm die Amplitude gegen die Erreherfrequenz ω auf, so erhält man für verschiedene Dämpfungsfaktoren die in Abb. 4.8 gezeigten Kurven. Bei schwacher Dämpfung liegt das Resonanzmaximum bei der Eigenfrequenz ω_0 . Die Resonanzamplitude bleibt aber im Gegensatz zum ungedämpften Fall (siehe Abb. 4.7) endlich. Je stärker die Dämpfung, desto flacher wird die Resonanzkurve und umso weiter verschiebt sich das Maximum gegen kleinere Frequenzen.

2. $2\beta^2 = \omega_0^2 \Rightarrow \omega_{\max} = 0$:

Bei der Erregerfrequenz $\omega = 0$ ist die Amplitude A(0) am größten. An der Stelle $\omega = \omega_0$ ergibt sich die Amplitude

$$A(\omega_0) = \frac{F_a}{\sqrt{2} m \omega_0^2} = \frac{A(0)}{\sqrt{2}} .$$
(4.1.55)

3. $2\beta^2 > \omega_0^2$:

Die Dämpfung ist so stark, daß kein Resonanzmaximum mehr vorliegt. Die maximale Amplitude liegt bei der Frequenz $\omega = 0$ und nimmt mit wachsendem ω stark ab.

4. Schwache Dämpfung: $2\beta^2 \ll \omega_0^2 \Rightarrow \omega_{\max} \simeq \omega_0$:

Wir diskutieren für den Fall der schwachen Dämpfung nun insbesondere den Frequenzbereich in der Umgebung der Resonanzstelle $\omega = \omega_0$. Mit $\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega)$ und $\omega_0 + \omega \simeq 2\omega_0$ erhält man für die Amplitude

$$A(\omega) = \frac{F_a/m}{\sqrt{((\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega))^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \approx \frac{F_a/2m\omega_0}{\sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + \beta^2}} .$$
(4.1.56)

Für das Quadrat der Amplitude erhält man somit

$$A^{2}(\omega) = A^{2}_{\max} \frac{\beta^{2}}{(\omega_{0} - \omega)^{2} + \beta^{2}}$$

mit
$$A^{2}_{\max} = \frac{F^{2}_{a}}{4m^{2}\omega_{0}^{2}\beta^{2}} . \qquad (4.1.57)$$

Die Abhängigkeit $A^2(\omega)$ stellt eine *Lorentzkurve* dar (siehe Abb. 4.9). Sie beschreibt den Energieinhalt des schwingenden Systems, der proportional zum Amplitudenquadrat ist.



Erregerfrequenz

Abbildung 4.9: Lorentzkurven für verschiedene Werte der Dämpfung. Die Dämpfungswerte β der beiden Lorentzkurven unterscheiden sich um den Faktor $\sqrt{2}$.

Unter der Halbwertsbreite $\Delta \omega_H$ einer **Lorentz**kurve versteht man den Frequenzabstand zwischen den beiden Punkten, für die $A^2(\omega) = A_{\max}^2/2$ gilt (vergleiche Abb. 4.9). Die Bedingung $A^2(\omega) = A_{\max}^2/2$ ist für $(\omega_0 - \omega)^2 = \beta^2$ erfüllt. Daraus ergibt sich für die Halbwertsbreite

$$\left(\omega_0 - \left(\omega_0 \pm \frac{\Delta \omega_H}{2}\right)\right)^2 = \beta^2$$
oder
$$\Delta \omega_H = 2\beta . \qquad (4.1.58)$$

Je geringer also die Dämpfung, desto schärfer wird die Resonanzkurve. Mit der Halbwertsbreite ergibt sich folgender Ausdruck für die Resonanzkurve
$$A^{2}(\omega) = A^{2}_{\max} \frac{(\Delta \omega_{H}/2)^{2}}{(\omega_{0} - \omega)^{2} + (\Delta \omega_{H}/2)^{2}} \quad (4.1.59)$$

Dieser Ausdruck ist sehr wichtig und tritt in der Physik im Zusammenhang mit verschiedenen Fragestellungen auf (z.B. elektrische Schwingkreise oder Resonanzvorgänge in der Kern- und Atomphysik: *Breit-Wigner-Formel*).

Das Verhältnis von A_{max} und $A_0 = A(0)$ bezeichnet man als *Resonanzüberhöhung*. Hierbei ist zu beachten, daß die Amplitude A_0 nicht mit der Näherungsformel für $\omega \simeq \omega_0$ abgeleitet werden darf. Es gilt

$$\boxed{\frac{A_{\max}}{A_0}} = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega_H} . \quad (4.1.60)$$

Phasenverhalten zwischen Schwingung und erregender Kraft

Wir wollen nun anhand von Gl.(4.1.50) das Phasenverhalten zwischen Schwingung und erregender Kraft diskutieren. In Abb. 4.10 ist der Verlauf der Phasenschiebung als Funktion der Erregerfrequenz für verschiedene Werte des Dämpfungsparameters β gezeigt. Aus Abb. 4.10 und Gl.(4.1.50) folgt:





Für den Fall $\omega = \omega_0$ ist die Phasenschiebung unabhängig von der Dämpfung. Ist jedoch ω größer oder kleiner als ω_0 , besteht eine Abhängigkeit von β . Abb. 4.10 zeigt, daß alle $\varphi_0(\omega)$ Kurven für unterschiedliche Dämpfungen durch den Punkt ($\omega_0, \pi/2$) laufen.

Es soll nun kurz diskutiert werden, welche Phasenschiebung für geringe Dämpfung an den Halbwertsstellen der Resonanzkurve $A^2(\omega)$ vorliegt. Für $\beta^2 \ll \omega_0^2$ und $\omega \simeq \omega_0$ gilt:

$$\tan\varphi_0 \simeq \frac{\beta}{\omega_0 - \omega} . \tag{4.1.61}$$

Da an den Halbwertsstellen zudem $(\omega_0 - \omega)^2 = \beta^2$ ist, folgt $\tan \varphi_0 = \pm 1$. Das heißt, es liegt ein Phasenwinkel von 45^o bzw. 135^o vor.

Energieübertragung durch die Zwangskraft

Die durch die Zwangskraft auf das schwingungsfähige System übertragene Energie errechnet sich aus dem Produkt aus Zwangskraft und zurückgelegten Weg

$$dW = F dx = F \frac{dx}{dt} dt . (4.1.62)$$

Mit $F(t) = F_a \sin \omega t$ und $dx/dt = \omega A \cos(\omega t + \varphi_0)$ ergibt sich

$$dW = F_a \sin \omega t \ \omega A \ \cos(\omega t + \varphi_0) \ . \tag{4.1.63}$$

Wir interessieren uns hier nur für die auf das schwingende System übertragene mittlere Leistung. Der Querstrich über den folgenden Formelzeichen soll eine zeitliche Mittelung bedeuten. Wir erhalten

$$\overline{P} = \frac{dW}{dt} = F_a \omega A \overline{\sin \omega t \cos(\omega t + \varphi_0)}$$

$$= F_a \omega A \overline{\sin \omega t (\cos \omega t \cos \varphi_0 - \sin \omega t \sin \varphi_0)}$$

$$= F_a \omega A \overline{\left(\frac{1}{2} \sin 2\omega t \cos \varphi_0 + \frac{1}{2}(1 + \cos 2\omega t) \sin \varphi_0\right)}$$

$$= F_a \omega A \left(0 + \frac{1}{2} \sin \varphi_0\right) . \qquad (4.1.64)$$

Hierbei wurde verwendet, daß das zeitliche Mittel von $\sin 2\omega t$ und $\cos 2\omega t$ verschwindet. Für die mittlere Leistung gilt also

$$\overline{P} = \frac{1}{2} F_a \omega A \sin \varphi_0$$
. (4.1.65)

Man erkennt, daß der maximale Leistungsübertrag bei einer Phasenschiebung von 90° zwischen Schwingung und erregender Kraft erfolgt. Bei einer Anregung, die in Phase, d.h. mit $\varphi_0 = 0^o$ erfolgt, wird gar keine Energie übertragen.⁶

⁶Als typisches Beispiel hierfür kann das Anschieben einer schaukelnden Person betrachtet werden. Um den größten Effekt zu erzielen, darf man die Anschiebbewegung nicht genau phasensynchron mit der Schaukelbewegung ausführen, sondern um 90° phasenverschoben. Dies macht natürlich jeder intuitiv richtig.

Man kann nun mit der oben abgeleiteten Amplitudenfunktion $A(\omega)$ überlegen, bei welcher Frequenz die übertragene Leistung am größten wird. Ersetzt man A in Gl.(4.1.65) durch Gl.(4.1.52) und benutzt die Beziehung $\sin \varphi_0 = \tan \varphi_0 / \sqrt{1 + \tan^2 \varphi_0}$, so erhält man durch Extremalwertbestimmung $(d\overline{P}/d\omega = 0)$ die Bedingung für maximalen Leistungsübertrag zu

 $\omega = \omega_0$. (4.1.66)

An der Stelle $\omega = \omega_0$ wird also unabhängig von der Dämpfung am meisten Energie auf das System übertragen. Man spricht hier von *Energieresonanz*.

Durch die starke Übertragung von Energie auf ein schwingendes System und den starken Anstieg der Schwingungsamplitude im Resonanzfall kann es zur Zerstörung eines schwingenden Systems kommen. Ein typisches Beispiel ist die Zerstörung eines Weinglases durch Resonanzabsorption von Schall? Durch periodische Anregung von Gebäuden bei der Resonanzfrequenz kann es zum Einsturz von Gebäuden kommen. Ein berühmtes Beispiel ist der Einsturz der **Tacoma-Bridge** in Washington, USA, am 1. Juli 1940 durch Windanregung. Dieses Ereignis wurde auf einem Film festgehalten und demonstriert eindrücklich das Aufschaukeln einer Schwingung durch Resonanzabsorption. Aus diesem Grunde ist es z.B. Marschkolonnen untersagt, Brücken im Gleichschritt zu überqueren, da hierdurch auch eine Resonanzschwingung angeregt werden könnte.

4.1.5 Parametrische Verstärkung

Bei der erzwungenen Schwingung wurde die Amplitude einer Schwingung dadurch vergrößert, daß man dem schwingungsfähigen System mehr Energie zugeführt hat, als zur Aufrechterhaltung der Schwingung notwendig ist. Die Schwingung schaukelt sich in diesem Fall von kleinen zu großen Amplituden auf. Wir wollen nun eine andere Art von Verstärkung, das Prinzip der *parametrischen Verstärkung*, betrachten, die heute in der Elektrotechnik eine große Bedeutung besitzt. Das Prinzip der parametrischen Verstärkung gilt für jedes schwingungsfähige System. Es wurde bereits früh für mechanische Systeme erkannt⁸ Man spricht von parametrischer Verstärkung, weil die Verstärkung der Amplitude durch Variation eines Parameters des schwingungsfähigen Systems erzielt wird.

Das Prinzip der parametrischen Verstärkung versteht man leicht am Beispiel der Kinderschaukel. Ein Kind vergrößert die Amplitude der Schaukelschwingung ganz alleine (ohne äußeren Antrieb), indem es die Pendellänge der Schaukel verändert. Das kann z.B. durch Wechsel von geradem Sitzen und Liegen oder durch Wechsel von Stand und tiefer Kniebeuge geschehen. Im tiefsten Punkt der Pendelbewegung hat das Pendel stets die größte kinetische Energie und die potentielle Energie ist hier Null. In den oberen Wendepunkten ist dagegen die potentielle Energie maximal und die kinetische Energie Null. Bei Beginn der Abwärtsbewegung legt sich das Kind flach (oder geht in die Kniebeuge) und macht dadurch die Pendellänge groß. Damit wird potentielle Energie des Kindes an die Schaukel abgegeben. Die Schaukel erhält ein größeres Trägheitsmoment und hat beim Durchgang durch den tiefsten Punkt eine höhere kinetische Energie. In diesem Punkt hebt sich das Kind (aus der Hocke in den Stand) und erhöht dabei seine potentielle Energie durch Muskelkraft, ohne daß der Schaukel dadurch kinetische Energie entzogen wird. Dadurch wird die Winkelgeschwindigkeit größer und die Schaukel erreicht eine größere Höhe. Dieser Vorgang wiederholt sich periodisch, wobei während einer Schwingungsperiode zweimal Energie zugeführt wird.

In der Elektrotechnik wurde die parametrische Verstärkung bereits 1890 von Lord Rayleigh vorgeschlagen und zwar für einen Schwingkreis aus Kondensator und Spule. Die Energie pendelt bei einer

⁷Zum Beispiel soll der Opernsänger Caruso die Fähigkeit besessen haben, Weingläser zu "zersingen".

⁸Die ersten Hinweise findet man bei **M. Faraday** (1830).

Schwingung zwischen Kondensator und Spule hin und her, wobei die Spannung am Kondensator der potentiellen und der Strom durch die Spule der kinetischen Energie der Schaukel entspricht. Eine parametrische Verstärkung kann man durch Änderung des Plattenabstandes eines Plattenkondensators erhalten. Liegt Spannung am Kondensator an, so verrichtet man Arbeit gegen das elektrische Feld und erhöht dadurch die potentielle Energie. Ist die Spannung am Kondensator Null, so kann man die Platten ohne Enegieaustausch wieder zusammenbringen, da in diesem Augenblick keine Kräfte wirken. Durch Verändern der Parameter des Schwingkreises kann man also eine parametrische Verstärkung erzielen?

4.1.6 Gekoppelte Systeme

Bisher wurden nur Systeme mit *einem Schwingungsfreiheitsgrad* betrachtet. Solche Systeme besaßen *eine* Eigenfreqeunz ω_0 , d.h *eine* Resonanzstelle. Im folgenden sollen Systeme mit mehreren Schwingungsfreiheitsgraden betrachtet werden.



Abbildung 4.11: Gekoppelte Pendel: (a) gleichphasige und (b) gegenphasige Schwingung.

Wir betrachten zunächst die in Abb. 4.11 gezeigten gekoppelten Pendel. Setzt man Pendel 1 in Bewegung, so wird durch die Kopplung der beiden Pendel über die Feder die Schwingung von Pendel 1 auch diejenige von Pendel 2 beeinflussen, da die Kopplungsfeder durch die periodische Dehnung und Stauchung eine periodische Kraft auf Pendel 2 ausübt. Die Schwingungsenergie wird dadurch allmählich von Pendel 1 auf Pendel 2 übertragen und Pendel 1 kommt zur Ruhe. Dann kehrt sich der ganze Vorgang um. Betrachtet man die Bewegung jedes Pendels für sich, so erhält man eine Schwebung. Das bedeutet aber, daß das gesamte System der gekoppelten Pendel wenigstens zwei Eigenfrequenzen besitzen muß, die durch Überlagerung zu der Schwebung führen.

Man kann allerdings auch Schwingungsformen anregen, bei denen keine Schwebung auftritt. Dies ist der Fall, wenn beide Massen im Gleichtakt mit der Frequenz ω_1 oder genau im Gegentakt mit der Frequenz ω_2 schwingen. Man nennt diese Schwingungsformen, bei denen beide Pendel mit gleicher Frequenz, gleicher Amplitude und mit einer Phasenschiebung von 0 oder π schwingen, die *Eigenschwingungen* des System. Die Frequenzen ω_1 und ω_2 nennt man die *Eigenfrequenzen*. Die Eigenfrequenzen sollen nun für zwei gekoppelte mathematische Pendel (vergleiche Abschnitt 1.6.3) im Grenzfall kleiner Auslenkungen x abgeleitet werden. Für kleine Auslenkungen sind die Rückstellkräfte gegeben durch

⁹Bei hohen Frequenzen ist die Änderung des Abstandes der Elektroden eines Plattenkondensators nicht praktikabel. Man wählt hier Kondensatoren, deren Kapazität spannungsabhängig ist. Solche Kapazitäten können mit Halbleiterdioden realisiert werden.

$$F_1 = -mg\sin\varphi_1 \simeq -mg\frac{x_1}{l}$$

und
$$F_2 = -mg\sin\varphi_2 \simeq -mg\frac{x_2}{l} . \qquad (4.1.67)$$

Zwischen den Pendelmassen m wirkt aufgrund der um $x_2 - x_1$ ausgelenkten Kopplungsfeder die Kraft $-k(x_2 - x_1)$. Dadurch ergeben sich für die beiden Pendel folgende Differentialgleichungen

$$m\frac{d^{2}x_{1}}{dt^{2}} = -mg\frac{x_{1}}{l} + k(x_{2} - x_{1})$$

und
$$m\frac{d^{2}x_{2}}{dt^{2}} = -mg\frac{x_{2}}{l} - k(x_{2} - x_{1}) .$$
(4.1.68)

Die beiden Differentialgleichungen sind durch den 2. Term auf der rechten Seite miteinander gekoppelt. Sie stellen ein System gekoppelter Differentialgleichungen dar. Für den Fall gleichphasiger und gegenphasiger Schwingung ergeben sich folgende Eigenfrequenzen:

1. Gleichphasige Schwingung:

Beide Pendel schwingen in Phase mit gleicher Amplitude. Die Kopplungsfeder ist dadurch immer entspannt ($x_1 = x_2$) und der Kopplungsterm in (4.1.68) verschwindet. Die Eigenfrequenz ist diejenige eines mathematischen Pendels bei kleinen Auslenkungen und ist gegeben durch (vergleiche Gl.(1.6.50))

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad . \tag{4.1.69}$$

Dies ist die erste Eigenfrequenz des gekoppelten Systems. Sie ist identisch mit der Eigenfrequenz der Einzelschwingung.

2. Gegenphasige Schwingung:

Beide Pendel schwingen nun gegenphasig mit gleicher Amplitude, d.h. es gilt $x_1 = -x_2$. Man erhält somit die Differentialgleichungen

$$m\frac{d^{2}x_{1}}{dt^{2}} = -mg\frac{x_{1}}{l} - 2kx_{1} = -(\frac{mg}{l} + 2k)x_{1}$$

und
$$m\frac{d^{2}x_{2}}{dt^{2}} = -mg\frac{x_{2}}{l} - 2kx_{2} = -(\frac{mg}{l} + 2k)x_{2} .$$
(4.1.70)

Die Eigenfrequenz ist diejenige eines mathematischen Pendels mit einer vergrößerten Rückstellkraft, da jetzt zusätzlich zur Schwerkraft die Kopplungsfeder eine Rückstellkraft ausübt. Die Eigenfrequenz lautet

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}} \quad . \tag{4.1.71}$$

Dies ist die zweite Eigenschwingung des gekoppelten Systems. Aufgrund der zusätzlichen Rückstellkraft ist $\omega_2 > \omega_1$.

Das eben betrachtete System aus zwei gekoppelten Pendeln besitzt zwei Schwingungsfreiheitsgrade und somit zwei Eigenfrequenzen. Ein System mit n Schwingungsfreiheitsgraden besitzt n Eigenfrequenzen. Man unterscheidet bei gekoppelten Systemen ferner zwischen Longitudinalschwingungen und Transversalschwingungen. Bei der Longitudinalschwingung ist die Kopplungskraft parallel zur Schwingungsrichtung, während sie bei der Transversalschwingung senkrecht zur Schwingungsrichtung steht. Als weitere Erscheinungsform kann durch eine Verdrillung eine Torsionsschwingung auftreten.



Abbildung 4.12: Eigenschwingungen einer Saite.

Eine Saite kann man sich als eine Anordnung von vielen über Federn gekoppelter Massen vorstellen. Eine Saite besitzt deshalb eine sehr hohe Zahl von Schwingungsfreiheitgraden und somit eine große Zahl von Eigenschwingungen. Spannt man z.B. eine Saite zwischen einer Wand und einem Erregerzentrum mit variabler Frequenz ein, so wird die Saite immer dann zu einer Eigenschwingung angeregt, wenn die Erregerfrequenz mit einer Eigenfrequenz der Saite übereinstimmt. Die niedrigste Eigenfrequenz der Saite bezeichnet man als Grundfrequenz ν_0 . Die Grundschwingung hat an den Enden der Saite je einen Schwingungsknoten und in der Mitte einen Schwingungsbauch, d.h. eine Stelle maximaler Auslenkung (siehe Abb. 4.12). Verdoppelt man die Erregerfrequenz auf $2\nu_0$, so beobachtet man wieder eine Eigenschwingung. Diese zweite Eigenschwingung bezeichnet man auch als erste Oberschwingung. Bei 34 erhält man die zweite Oberschwingung usw. Allgemein gilt

$$\nu_n = n \cdot \nu_0$$
 mit $n = 2, 3, 4, \dots$ (4.1.72)

Hierbei ist ν_n die Frequenz der (n-1)ten Oberschwingung. Unter harmonischen Oberschwingungen versteht man alle Schwingungsformen, deren Frequenz ein ganzzahliges Vielfaches der Grundfrequenz ist. Bei Musikinstrumenten wird nicht nur ein einzige Schwingung angeregt, sondern es sind neben der Grundfrequenz verschiedene Oberschwingungen vorhanden. Diese bestimmen das Klangbild oder die Klangfarbe des Instruments.

Gekoppelte Longitudinal- und Torsionsschwingung

An einer Feder sei ein U-förmiges Eisenstück angebracht (siehe Abb. 4.13). Lenkt man die Feder in ihrer Längsrichtung aus, vollführt sie zunächst eine Longitudinalschwingung. Allmählich bildet sich eine Torsionsschwingung um die Längsachse der Feder aus, während die Longitudinalschwingung zur Ruhe kommt. Nachdem sich die gesamte Energie der Longitudinalschwingung in Energie der Torsionsschwingung umgewandelt hat, kehrt sich der Vorgang wieder um. Es handelt sich wie beim oben diskutierten Doppelpendel um zwei überlagerte Eigenschwingungszustände.



Abbildung 4.13: Gekoppelte Longitudinal- und Torsionsschwingung.

Chladnische Klangfiguren

Auch Platten und Membrane können zu Eigenschwingungen angeregt werden, die stark von der Form des Körpers abhängen. Streicht man z.B. eine in der Mite durch einen Stab befestigte Metallplatte mit einem Geigenbogen, so wird sie dadurch zu Eigenschwingungen angeregt. Auf die Platte aufgestreuter Sand wird an den Schwingungsbäuchen weggewirbelt und lagert sich an den Schwingungsknoten an. Man erhält dadurch die so genannten *Chladnischen Klangfiguren*. Zu den Eigenschwingungen der Platte gehören wiederum die Grundschwingung und verschiedene Oberschwingungen. Das Spektrum ist allerdings nicht harmonisch.

4.2 Wellen

Im Gegensatz zu den im letzten Abschnitt diskutierten Schwingungen, die eine periodische Bewegung eines Systems um eine ortsfeste Ruhelage beschreiben, betrachtet man bei Wellen die räumliche Ausbreitung eines Schwingungszustandes. Dies geschieht zum Beispiel dadurch, daß man mehrere schwingungsfähige Systeme miteinander koppelt, so daß der Schwingungszustand eines Systems auf die benachbarten Systeme übertragen werden kann. Man erhält dadurch eine räumliche Ausbreitung eines Schwingungszustandes und man spricht dann dann von einer Welle. Erfolgt zum Beispiel im Innern eines deformierbaren Mediums eine Verschiebung aus der Ruhelage (Deformation), so bleibt diese nicht auf das Erregerzentrum beschränkt, sondern wird durch die elastische Kopplung mit den Nachbargebieten auf diese übertragen. Die Nachbargebiete werden ebenfalls, aber mit einer gewissen Zeitverzögerung deformiert. Es kommt dadurch zu einer räumlichen Ausbreitung der Deformation.

Man kann also folgendes festhalten:

- Bei einer Schwingung handelt es sich um eine periodische Bewegung um eine Gleichgewichtslage.
- Bei einer Welle breitet sich eine zeitabhängige Erregung (z.B. Schwingung) mit einer endlichen Geschwindigkeit aus. Eine mechanische Welle kann sich nur dann ausbreiten, wenn eine elastische Kopplung zwischen den schwingenden Massenelementen besteht. Es findet kein Massentransport statt, es wird nur Energie transportiert (siehe unten).

Man kann Wellen hinsichtlich ihrer Natur, der Schwingungsrichtung, der Form und der Dimension ihrer Ausbreitung klassifizieren:

1. Wellennatur:

- In der Mechanik und Akustik beschäftigen wir uns mit *elastischen Wellen*, die in Festkörpern auftreten, mit *Dichtewellen* in Flüssigkeiten und Gasen (Schallwellen) oder mit *Ober-flächenwellen* von Flüssigkeiten.
- In der Elektrotechnik und Optik spielen elektromagnetische Wellen eine zentrale Rolle.



Abbildung 4.14: Gekoppelte Pendel zur Erzeugung einer transversalen (a) und longitudinalen Welle.

2. Schwingungsrichtung:

Im allgemeinen unterscheidet man zwischen (siehe z.B. Abb. 4.14)

• Transversalwellen

Die Schwingungsrichtung (Deformation) ist hier senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Welle 10

• Longitudinalwellen

Die Schwingungsrichtung (Deformation) ist hier parallel zur Ausbreitungsrichtung der Welle

3. Wellenform:

Man unterscheidet zwischen (siehe Abb. 4.15)

- harmonischen Wellen
- pulsförmigen Wellen

4. Dimension der Ausbreitung:

Man unterscheidet

- eindimensionale Wellen; hier erfolgt die Ausbreitung nur in eine Richtung (z.B. Seilwelle)
- zweidimensionale Wellen; hier erfolgt die Ausbreitung in einer Ebene. Eine zweidimensionale Wellenausbreitung kann man z.B. beobachten, wenn man einen Stein ins Wasser wirft. Um die Auftreffstelle des Steins breiten sich ringförmige Wellen aus. Im allgemeinen erhält man bei einer punktförmigen Erregerquelle für ein isotropes Medium im zweidimensionalen Fall eine *Kreiswelle*.
- dreidimensionale Welle; hier erfolgt eine Ausbreitung in alle drei Raumdimensionen. Dreidimensionale Wellen sind z.B. Schallwellen. Bei einer punktförmigen Erregerquelle in einem isotropen Medium erhält man eine *Kugelwelle*.



Abbildung 4.15: Schematische Darstellung einer harmonischen (a) und einer pulsförmigen Welle (b).

4.2.1 Transversalwellen

Als deformierbares Medium betrachten wir ein System aus Massenpunkten, die elastisch (z.B. mit Federn) miteinander gekoppelt sind. Lenkt man einen Massenpunkt aus seiner Ruhelage aus, so wird auch

¹⁰Eine besondere Art von Transversalwellen bilden die Torsionswellen. Hier wird ein Segment eines schwingungsfähigen Systems zu einer Torsionsschwingung angeregt, die sich durch elastische Kopplung der Einzelsegmente auf die benachbarten Segmente überträgt und dadurch zur Fortpflanzung einer Torsionswelle auf dem System führt. Die Torsionsschwingung erfolgt dabei senkrecht zur Ausbreitungsrichtung.

der benachbarte Massenpunkt aufgrund der elastischen Kopplung mitgezogen. Nacheinander spüren dadurch alle Massenpunkte mit unterschiedlicher Zeitverzögerung die Deformation. Bei periodischer Wiederholung der Auslenkung des ersten Massenpunktes (z.B. harmonische Schwingung des Massenpunktes) pflanzt sich auf diese Weise die diesem Massenpunkt aufgezwungene Schwingung durch die ganze Massenkette fort. Jeder einzelne Massenpunkt führt, wenn auch zeitlich verschoben, eine harmonische Schwingung aus. Als Beispiel ist in Abb. 4.14a die Erzeugung einer transversalen Welle mit Hilfe gekoppelter Pendel gezeigt.

Wir werden nun das Verhalten einer solchen Welle bei festgehaltenem Ort und fester Zeit betrachten, um empirisch einen Ausdruck für die Orts- und Zeitabhängigkeit der Auslenkung in einer Welle abzuleiten.

Verhalten an konstantem Ort

Wir betrachten zunächst das Bewegungsverhalten eines Massenpunktes an einem festen Ort in Abhängigkeit von der Zeit. Nehmen wir an, daß die Rückstellkraft proportional zur Auslenkung des Massenpunktes aus seiner Ruhelage ist (harmonische Kraft), so führt der Massenpunkt eine harmonische Schwingung aus. Der an den *n*-ten Massenpunkt gekoppelte (n + 1)-te Massenpunkt wird erst mit einer Zeitverzögerung Δt ausgelenkt. Deshalb ist, wie in Abb. 4.16 gezeigt ist, die Schwingungskurve des (n + 1)-ten Massenpunktes auch um Δt gegen diejenige des *n*-ten Massenpunktes verschoben.





Die zeitliche Verzögerung der Schwingung benachbarter Massenpunkte kann auch in eine Phasenschiebung $\Delta \varphi$ umgerechnet werden. Mit der Schwingungsdauer T einer Schwingung ist $\Delta \varphi = \Delta t (2\pi/T)$. Der Schwingungszustand der benachbarten Massenpunkte kann deshalb durch

$$\Psi_n(t) = \Psi_0 \sin(\frac{2\pi}{T}t) = \Psi_0 \sin(\omega t)$$

und
$$\Psi_{n+1}(t) = \Psi_0 \sin(\frac{2\pi}{T}t + \frac{2\pi}{T}\Delta t) = \Psi_0 \sin(\omega t + \Delta \varphi)$$
(4.2.1)

ausgedrückt werden. Hierbei ist Ψ_0 die Schwingungsamplitude (Elongation) eines einzelnen Massenpunktes.

Beträgt die Phasenschiebung der Schwingungen zweier entfernter Massenpunkte gerade $j \cdot 2\pi$, wobei j eine ganze Zahl ist, so liegt bei beiden Massenpunkten der gleiche Schwingungszustand vor. Die momentane Amplitude $\Psi(t)$ ist dann nur noch eine Funktion der Zeit und ist gegeben durch

$$\Psi(t) = \Psi_0 \sin(\frac{2\pi}{T}t) = \Psi_0 \sin(\omega t) .$$
(4.2.2)

Verhalten bei fester Zeit

Bei konstant gehaltener Zeit (Momentaufnahme) ergibt sich das Bild eines räumlich periodischen Vorgangs. In Abb. 4.17 sind mit einem bestimmten zeitlichen Abstand aufgenommene Momentaufnahmen gezeigt. Nach der Zeit t_5 ist die erste Masse wieder im gleichen Schwingungszustand wie zu Beginn (Zeit t_1). Der Ausschlag der einzelnen Massenpunkte ist nur eine Funktion des Abstandes der Massenpunkte von Masse 1 und kann durch

$$\Psi(x) = \Psi_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) \tag{4.2.3}$$

ausgedrückt werden. Hierbei ist λ die Wellenlänge. Die Wellenlänge gibt an, nach welchem Abstand die Auslenkung identisch zu derjenigen des Massenpunktes 1 ist. Alle Massenpunkte im Abstand $j \cdot \lambda$ zum Massenpunkt 1 besitzen die gleiche Auslenkung, wobei j wiederum eine ganze Zahl ist.



Abbildung 4.17: Momentaufnahmen des Schwingungszustandes der Massenpunkte nach bestimmten Zeitintervallen.

Wellenausbreitung

Die obigen Betrachtungen bei konstantem Ort und konstanter Zeit zeigen, daß es sich bei der Wellenausbreitung um einen *räumlich* und *zeitlich periodischen Vorgang* handelt. Die zusammenfassende Gleichung für die Auslenkung lautet

$$\Psi(x,t) = \Psi_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x \pm \frac{2\pi}{T} t\right) = \Psi_0 \sin(kx \pm \omega t) .$$
(4.2.4)

Hierbei ist $k = 2\pi/\lambda$ die Wellenzahl. Sie gibt die Zahl der Wellenlängen pro Meter an, multipliziert mit 2π .

Bei Gl.(4.2.4) handelt es sich um eine *harmonische Wellenfunktion*. Ein negatives (positives) Vorzeichen in der Sinusfunktion bedeutet dabei, daß sich die Welle nach rechts (links), also zu größeren (kleineren) *x*-Werten bewegt. Obwohl man von der Ausbreitung einer Welle spricht, findet kein Materialtransport statt. Jeder Massenpunkt schwingt nur um seine Ruhelage, die zeitlich konstant ist. Lediglich die Auslenkung bzw. die Phase breitet sich aus. Um die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Welle zu berechnen, betrachtet man einen Zustand gleicher Phase, z.B. ein Maximum der Auslenkung (Punkt A in Abb. 4.17). Eine Fläche konstanter Phase wird allgemein als *Wellenftäche* bezeichnet. Ist die Wellenfläche eine Ebene, eine Kugel, ein Kreis oder ein Zylinder, so spricht man von einer ebenen, einer Kugel-, Kreis- oder Zylinderwelle.

Das Maximum der Auslenkung soll zur Zeit t_1 an der Stelle x_1 liegen. Es wird nach Gl.(4.2.4) für

$$\frac{2\pi}{\lambda} x_1 - \frac{2\pi}{T} t_1 = \frac{\pi}{2}$$
(4.2.5)

erreicht. Nach der Zeit Δt hat sich der Wellenberg um die Strecke Δx verschoben. An der Stelle $x_1 + \Delta x$ gilt wiederum

$$\frac{2\pi}{\lambda} (x_1 + \Delta x) - \frac{2\pi}{T} (t_1 + \Delta t) = \frac{\pi}{2} .$$
 (4.2.6)

Aus der Differenz von Gl.(4.2.5) und (4.2.6)

$$\frac{2\pi}{\lambda}\Delta x - \frac{2\pi}{T}\Delta t = 0 \tag{4.2.7}$$

erhält man die Ausbreitungsgeschwindigkeit oder Phasengeschwindigkeit der Welle

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\lambda}{T} = \nu \cdot \lambda = \frac{2\pi\nu}{k} = \frac{\omega}{k}$$
. (4.2.8)

Diese Beziehung gilt ganz allgemein für alle Wellen, egal auf welchem Mechanismus deren Entstehung oder Ausbreitung beruht.

Beispiel: Die von Rundfunksendern im UKW-Bereich ausgestrahlten Radiowellen haben eine Frequenz von etwa 100 MHz. Bei einer Ausbreitungsgeschwindigkeit von $v = c \simeq 3 \times 10^8$ m/s ergibt sich eine Wellenlänge $\lambda \simeq 3$ m. Für eine Schallwelle im hörbaren Bereich (1 kHz) ergibt sich bei einer Schallgeschwindigkeit in Luft von etwa 340 m/s eine Wellenlänge von etwa 30 cm.

4.2.2 Longitudinalwellen

Bei einer Longitudinalwelle ist die Schwingungsrichtung der einzelnen Massenpunkte parallel zur Ausbreitungsrichtung der Welle. Dort, wo die Teilchen in Richtung der Fortpflanzung der Welle schwingen, bildet sich eine Verdichtung der Massenpunkte. Dort wo die Teilchen im entgegengesetzten Sinn schwingen, tritt eine Verdünnung auf. Longitudinalwellen, bei denen nur eine Verdichtung und Verdünnung, d.h. eine Volumenänderung auftritt, können in allen Stoffen existieren, die Volumenelastizität besitzen, die also auf Volumenänderungen mit elastischen Gegenkräften reagieren. Volumenelastizität besitzen aber nach Kapitel 3 sowohl feste, als auch flüssige und gasförmige Körper. Zum Beispiel sind Schallwellen in Luft Longitudinalwellen.

Im Gegensatz zu Longitudinalwellen findet bei Transversalwellen eine Verschiebung der Masseteilchen quer zur Ausbreitungsrichtung statt. Diese kann nur durch Schubkräfte erzeugt werden. Daher treten elastische Transversalwellen nur in Festkörpern auf, da in idealen Flüssigkeiten und Gasen solche Schubkräfte nicht auftreten können.¹¹

Die oben für Transversalwellen gemachten Betrachtungen zum Verhalten bei festgehaltenem Ort oder Zeit sowie zur Wellenausbreitung gelten für die Longitudinalwellen ganz analog.

4.2.3 Die Wellengleichung

Wir wollen in folgendem für ein System aus elastisch gekoppelten Massenpunkten mit Masse m und Abstand a die Differentialgleichung ableiten, die die Ausbreitung der Welle beschreibt. Wir betrachten dazu eine Kette aus Massenelementen, die über Federn miteinander verbunden sind (siehe Abb. 4.18). Die Massenelemente sollen nur Londitudinalschwingungen in x-Richtung ausführen können. Für die Federkonstante wird im folgenden das Symbol D verwendet, um Verwechslungen mit der Wellenzahl k zu vermeiden.



Abbildung 4.18: Lineare Kette von elastisch gekoppelten Massenelementen als Modell zur Ableitung der Wellengleichung.

Wird das Massenelement an der Stelle x_i um Ψ_i in x-Richtung ausgelenkt, so gilt für die auftretenden Kräfte

$$m \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial t^2} = D (\Psi_{i+1} - \Psi_i) - D (\Psi_i - \Psi_{i-1}) .$$
(4.2.9)

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung (siehe Abb. 4.19) darf man für kleine Werte von a

¹¹Aufgrund der freien Beweglichkeit der Flüssigkeits- oder Gasteilchen in idealen Flüssigkeiten und Gasen treten bei einer Verschiebung keine elastischen Rückstellkräfte auf.

$$\frac{\Psi_{i+1} - \Psi_i}{a} = \frac{\partial \Psi}{\partial x}|_{x \simeq x_i + a/2} \qquad \qquad \frac{\Psi_i - \Psi_{i-1}}{a} = \frac{\partial \Psi}{\partial x}|_{x \simeq x_i - a/2} \qquad (4.2.10)$$

schreiben, woraus sich

$$(\Psi_{i+1} - \Psi_i) - (\Psi_i - \Psi_{i-1}) = a \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_{x \simeq x_i + a/2} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_{x \simeq x_i - a/2} \right)$$
(4.2.11)

ergibt. Nochmalige Anwendung des Mittelwertsatzes auf den Klammerausdruck in Gl.(4.2.11) ergibt



Abbildung 4.19: Zum Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

Damit erhält man

$$m \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = D a^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} |_{x_i} . \qquad (4.2.13)$$

Dies ist die Bewegungsgleichung des Massenelements an der Stelle x_i , die aber auch für jedes andere Massenelement der Kette gilt. Durch Umstellen der Glieder erhält man die allgemeingültige *Wellengleichung*

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \frac{D a^2}{m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} . \quad (4.2.14)$$

Die einzelnen Massenelemente der Federkette führen harmonische Schwingungen aus. Zusammen mit den obigen Überlegungen ist evident, daß $\Psi = \Psi_0 \sin(kx - \omega t)$ ein Lösungsansatz der Wellengleichung ist. Einsetzen dieses Lösungsansatzes in die Wellengleichung (4.2.14) ergibt

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -\omega^2 \Psi$$

und
$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = -k^2 \Psi . \qquad (4.2.15)$$

Auflösen nach Ψ und Gleichsetzen ergibt

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \frac{\omega^2}{k^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \nu^2 \lambda^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = v^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} . \quad (4.2.16)$$

Durch Vergleich von Gl.(4.2.14) und (4.2.16) erhält man die Wellengeschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{D a^2}{m}}$$
 . (4.2.17)

Die Wellengeschwindigkeit ist also umso größer, je größer die Federkonstante der Kopplung und je kleiner die Masse der einzelnen Massenelemente ist. Die Differentialgleichung (4.2.16) ist für alle Wellen gültig. Es ergeben sich jedoch verschiedene Ausbreitungsgeschwindigkeiten der Welle je nach Art der elastischen Kopplung der einzelnen Massenelemente. In Festkörpern, Flüssigkeiten und Gasen ist die elastische Kopplung, d.h. die Federkonstante D durch die elastischen Eigenschaften gegeben.¹² Das Verhältnis m/a^2 kann durch die Massendichte ρ ausgedrückt werden. Für die Ausbreitungsgeschwindigkeit in Festkörpern, Flüssigkeiten und Gasen erhält man damit¹³

$v^2 = E/\rho$
$v^2 = G/\rho$
$v^2=\sigma/\rho$
$v^2 = K/\rho$
$v^2 = \kappa p / \rho$

Da in Festkörpern G < E gilt, ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Transversalwellen kleiner als diejenige von Longitudinalwellen.

¹²Eine ausführliche Diskussion der elastischen Eigenschaften und eine Definition der elastischen Konstanten ist in Kapitel 3 gegeben.

¹³Auf eine detaillierte Ableitung der Ausdrücke für die Wellengeschwindigkeit wird hier verzichtet. Sie kann in den einschlägigen Lehrbüchern gefunden werden.

Für Gase würde man eigentlich erwarten, daß die Schallgeschwindigkeit durch $v = \sqrt{p/\rho}$ gegeben ist, wie ursprünglich bereits von **Newton** (1686) postuliert wurde. Mit $\rho = 0.001293$ g/cm³ bei Normaldruck erhält man für Luft mit diesem Ausdruck allerdings v = 280 m/s, was von dem gemessenen Wert von v = 331 m/s erheblich abweicht. Der Grund für die Abweichung liegt darin begründet, daß sich die Luft bei den Verdichtungen und Verdünnungen in einer Longitudinalwelle erwärmt bzw. abkühlt. Da die Druckänderungen allerdings sehr schnell erfolgen, kann kein Temperaturausgleich mit der Umgebung stattfinden. Man darf deshalb für den Kompressionsmodul nicht den isothermen Wert p, sondern muß den "adiabatischen" Wert κp annehmen (die Bedeutung des Faktors κ wird erst in Kapitel 5 erklärt). Für Luft ist $\kappa = 1.4$, so daß man mit der Laplaceschen Gleichung $v = \sqrt{\kappa p/\rho}$ den Wert v = 331 m/s erhält.

Für ideale Gase gilt $p/\rho = pV/m = RT/M_{mol}$. Mit $R/M_{mol} = k_B/m_{atom}$ ergibt sich $v = \sqrt{\kappa k_B T/m_{atom}} \propto \sqrt{T}$.¹⁴ Das heißt, die Schallgeschwindigkeit steigt mit der Temperatur an.

4.2.4 Reflexion, Brechung und Interferenz von Wellen

Treffen Wellen auf die Grenze zweier Medien mit verschiedener Dichte oder unterschiedlichen elastischen Eigenschaften, so wirken diese Änderungen wie ein Hindernis für die Wellenausbreitung. Die Wellen werden zum Teil durchgelassen (Brechung) und zum Teil zurückgeworfen (Reflexion).

Reflexion

Ein Gummischlauch wird mit dem einen Ende an einer Wand befestigt und am anderen Ende durch Zug mit der Hand gespannt. Versetzt man dem in der Hand gehaltenen Ende einen kurzen Ruck nach aufwärts, so pflanzt sich die dadurch entstandene Auslenkung wie ein Wellenberg längs des Schlauches fort und wird an der Wand als Abwärtsbewegung, d.h. als Wellental zurückgeworfen. Diesen Vorgang nennt man Reflexion. Bei der Reflexion tritt offenbar ein *Phasensprung* von $\Delta \varphi = \pi$ statt (siehe Abb. 4.20a). Dieser Phasensprung entspricht einem Gangunterschied von einer halben Wellenlänge $\lambda/2$. Dieser Phasensprung wird durch das befestigte Schlauchende verursacht. Dadurch kann das letzte Segment des Schlauches keine Schwingung senkrecht zur Schlauchrichtung ausführen. Kommt also ein Wellenberg an, so führen bereits die vorletzten Segmente die ihnen nach oben erteilte Schwingung nicht voll aus, denn das feste Ende übt einen Zug nach unten auf sie aus, durch den sie einen Bewegungsantrieb ebenfalls nach unten erfahren. So kommt es zu Ausbildung eines Wellentales, das sich in der Gegenrichtung fortpflanzt.



Abbildung 4.20: Zur Reflexion einer Transversalwellen an einer festen Wand (a) und an einem freien Ende (b).

Die Reflexion an der Wand stellt nur den Sonderfall einer Reflexion einer Welle an einem dichteren oder steiferen Medium dar. Führt man das Experiment mit dem Schlauch nochmals durch, befestigt aber

¹⁴Eine Erläuterung der verwendeten Zusammenhänge für ideale Gase erfolgt in Kapitel 5, Abschnitt 5.2.3.

das Schlauchende über einen dünnen Faden an der Wand – entsprechend einem dünneren oder weniger steifen Medium – findet kein Phasensprung statt (siehe Abb. 4.20b). Der ankommende Wellenberg ändert sein "Vorzeichen" bei der Reflexion nicht, er wird als Wellenberg reflektiert. Da das Schlauchende jetzt frei beweglich ist, kann das letzte Schlauchsegment die vom ankommenden Wellenberg hervorgerufene Schwingung nach oben voll ausführen. Es ist, als ob man diesem Ende eine ruckartige Bewegung nach oben erteilt hätte, die jetzt als Wellenberg nach links läuft.

Die Reflexion einer Seilwelle an einer Wand mit festem und losem Ende ist nur ein Spezialfall einer Reflexion einer Welle an einem dichteren und dünneren Medium. Allgemein kann man festhalten, daß eine Welle an der Grenze zwischen zwei Medien teilweise oder ganz reflektiert wird und zwar mit einem Phasensprung von $\Delta \varphi = \pi$ bei Reflexion am dichteren Medium und ohne Phasensprung bei Reflexion am dünneren Medium.



Abbildung 4.21: (a) Zur Reflexion einer ebenen Wasserwelle an einer parabolischen Metallfläche. (b) Zur Definition von Einfallswinkel und Ausfallswinkel.

Wir betrachten jetzt die Reflexion einer ebenen Wasserwelle an einer parabolisch gekrümmten Metallplatte (siehe Abb. 4.21). Die ebene Wasserwelle wird durch periodisches Eintauchen einer Metallplatte in eine flache, mit Wasser gefüllte Wanne erzeugt. An dem Parabolspiegel werden die Wasserwellen reflektiert. Die reflektierten Wellen laufen alle zum Brennpunkt des Parabolspiegels. Man erkennt daraus, daß der Reflexionswinkel α' der Wasserwellen gleich ihrem Einfallswinkel α ist. Unter dem Einfallswinkel bzw. Ausfallswinkel versteht man den Winkel zwischen dem Lot auf die Spiegeloberfläche und der Ausbreitungsrichtung der Welle vor bzw. nach der Reflexion. Man kann also festhalten: *Bei der Reflexion von Wellen ist der Einfallswinkel gleich dem Ausfallswinkel*.

Brechung

Legt man in Abb. 4.21 statt eines Parabolspiegels eine flache Plexiglasscheibe schräg in die Wasserwellenwanne (siehe Abb. 4.22), so beobachtet man eine Änderung der Ausbreitungsrichtung der Wasserwellen. Die Wellen werden zum Lot auf die Grenzfläche hin gebrochen ($\alpha > \beta$). Die Ursache hierfür ist die geringere Wassertiefe über der Plexiglasscheibe. Dort besitzen die Wasserwellen eine geringere Ausbreitungsgeschwindigkeit als im tiefen Wasser.

Allgemein kann man festhalten, daß an der Grenzfläche zweier Medien Wellen gebrochen werden. Beim Übergang vom dünneren zum dichteren Medium (größere \Rightarrow kleinere Ausbreitungsgeschwindigkeit) beobachtet man immer eine Brechung zum Lot hin.¹⁵

¹⁵Eine genaue Diskussion der Brechung von Wellen erfolgt im Zusammenhang mit der Diskussion der Eigenschaften elektromagnetischer Wellen.





Interferenz

Wenn man in demselben Medium mehrere Wellen gleichzeitig erzeugt, so durchkreuzen sich die einzelnen Wellensysteme an gewissen Stellen. Es stellt sich dann die Frage, welche Auslenkung der Massenpunkt erfährt, der unter der gemeinsamen Wirkung mehrerer Wellen steht. Die Antwort auf diese Frage wurde bereits in Abschnitt 4.1 im Hinblick auf die Superposition von Schwingungen gegeben. Dort erhielt man das einfache Ergebnis, daß die resultierende Auslenkung im allgemeinen gleich der algebraischen Summe der Einzelauslenkungen ist. Wir nannten diesen Satz das Prinzip der ungestörten Überlagerung. Wendet man diesen Satz auf die Wellenausbreitung an, so erhält man das Ergebnis, daß sich jedes Wellensystem so ausbreitet, als ob die anderen Wellensysteme nicht vorhanden wären. Dies gilt für elastische Wellen allerdings nur so lange, wie die resultierende Auslenkung nicht zu groß wird. Verläßt man den **Hooke**schen Bereich, so liegt kein lineares System mehr vor und das Superpositionsprinzip verliert seine Gültigkeit.



Abbildung 4.23: Zur Interferenz von Wasserwellen. Die Kreise sollen abwechselnd Wellenberge und -täler darstellen.

Ungestörte Überlagerung kann man besonders schön bei Wasserwellen beobachten. Die durch Regentropfen erzeugten kleinen Kreiswellen bilden sich auf einer von großen Wasserwellen durchsetzten Oberfläche genauso aus wie auf einer ruhenden Wasserfläche. Erzeugt man in einer Wasserwanne zwei Kreiswellen mit gleicher Frequenz und Phase, sind vom Entstehungsort ausgehende hyperbelförmige Zonen von Wasserwellenbergen und Wellentälern zu beobachten. Dazwischen gibt es Gebiete, die frei von Wellen sind (siehe Abb. 4.23). Auslöschung erfolgt, wenn Wellental und Wellenberg zusammentreffen, die Wasseroberfläche bleibt dann in Ruhe. Trifft Berg und Berg oder Tal und Tal zusammen, so verstärkt sich die Wellenbewegung. Man bezeichnet diese Erscheinung als *Interferenz*.



Abbildung 4.24: Zur Interferenz zweier eindimensionaler Wellen gleicher Frequenz und Ausbreitungsrichtung. Der Gangunterschied beträgt in (a) $j \cdot \lambda$ und in (b) $(j + 1/2) \cdot \lambda$.

Zwei Wellen gleicher Frequenz und Phase verstärken sich (*konstruktive Interferenz*), wenn ihr Gangunterschied Δ gerade ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge λ ist, d.h. $\Delta = j \cdot \lambda$ mit j = ganze Zahl. Dieser Gangunterschied entspricht einer Phasenschiebung von $\Delta \varphi = j \cdot 2\pi$. Entsprechend bekommt man Auslöschung (*destruktive Interferenz*), wenn für den Gangunterschied $\Delta = (j + 1/2) \cdot \lambda$ oder die Phasenschiebung $\Delta \varphi = (2j + 1) \cdot \pi$ gilt (siehe Abb. 4.24).

Das Interferenzbild bleibt stationär (zeitlich unverändert), wenn die beiden Wellenerreger mit zeitlich konstanter Phasenbeziehung schwingen. Das Zustandekommen von Interferenzen zwischen zwei Wellenzügen ist im allgemeinen nur dann möglich, wenn zwischen ihnen eine *konstante Phasenbeziehung* besteht, d.h. wenn die Phasenschiebung zwischen den Schwingungsvorgängen in den beiden Erregerzentren jedenfalls für die Dauer von mehreren Schwingungen konstant bleibt. In diesem Fall nennt man die interferierenden Wellenzüge *kohärent*. Bei nicht kohärenten Wellen, bei denen sich die Phasendifferenz ständig schnell und unregelmäßig ändert, verwaschen die auftretenden Interferenzen, so daß ihre Beobachtung nicht mehr möglich wird.¹⁶

4.2.5 Stehende Wellen

Wird eine Welle an einem Medium reflektiert, interferiert sie mit sich selbst. Einlaufende und rücklaufende Wellen überlagern sich, und man sieht an jeder Stelle nur die Resultierende. Da einlaufende und reflektierte Welle kohärent sind, bildet sich ein stationäres Interferenzmuster aus. Es entsteht eine *stehende Welle* mit stationären Knoten (Stellen der Ruhe oder verschwindender Auslenkung) und Bäuchen (Stellen maximaler Bewegung oder maximaler Auslenkung).

¹⁶Die Erfahrung zeigt, daß die von zwei verschiedenen Lichtquellen ausgehenden Wellen inkohärent sind und keine beobachtbaren Interferenzen liefern. Kohärentes Licht kann man heute allerdings mit Lasern erzeugen, die extrem kohärentes Licht aussenden. Dieses extrem kohärente Licht wird z.B. für die *Holographie* benötigt.

Betrachtet man eine Seilwelle, die an einer Wand reflektiert wird, so sind die einlaufende und die reflektierte Welle durch

und
$$\Psi_1 = \Psi_0 \sin(kx - \omega t)$$
$$\Psi_2 = \Psi_0 \sin(kx + \omega t + \Delta \varphi)$$
(4.2.18)

gegeben, wobei $\Delta \varphi$ ein eventuell bei der Reflexion auftretender Phasensprung ist. Die resultierende Schwingung ergibt sich damit zu

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 = 2\Psi_0 \cos(kx + \Delta\varphi/2) \sin(\omega t + \Delta\varphi/2)$$

oder
$$\Psi = \Psi_0(x) \sin(\omega t + \Delta\varphi/2) . \qquad (4.2.19)$$

Man erhält also eine Schwingung, deren Amplitude vom Ort abhängt, jedoch nicht deren Phase, da im Argument der Sinusfunktion die Ortskoordinate nicht mehr auftritt. Die Phasengeschwindigkeit ist also v = 0, man spricht deshalb von einer stehenden Welle.



Abbildung 4.25: Zur Ausbildung einer stehenden Welle durch Reflexion am festen (oben) und losen Ende (unten).

Für die Reflexion am festen Ende tritt ein Phasensprung von $\Delta \varphi = \pi$ auf. Man erhält damit

$$\Psi_0(x) = 2\Psi_0 \cos(kx + \pi/2) = 2\Psi_0 \sin(kx) = 2\Psi_0 \sin(\frac{2\pi}{\lambda} x) .$$
 (4.2.20)

Am festen Ende (x = 0) hat die stehende Welle einen Schwingungsknoten (siehe Abb. 4.25a).

Für die Reflexion am losen Ende tritt kein Phasensprung auf. Man erhält damit

$$\Psi_0(x) = 2\Psi_0 \cos(kx) = 2\Psi_0 \cos(\frac{2\pi}{\lambda} x) .$$
(4.2.21)

Am losen Ende (x = 0) hat die stehende Welle also einen Schwingungsbauch (siehe Abb. 4.25b).



Abbildung 4.26: Bedingung für die Ausbildung von stehenden Wellen bei beidseitigem festen Ende, je einem festen und losen Ende und beidseitigem offenen Ende. Grundton (oben), erster Oberton (Mitte) und zweiter Oberton (unten).

Bisher wurde nur eine Reflexionsstelle berücksichtigt. Die zurückkehrende Welle wird aber nach einiger Zeit ebenfalls an die Grenze des Mediums gelangen und wird dort nochmals reflektiert. Sie überlagert sich mit der schon vorhandenen stehenden Welle. Soll es nicht zur Auslöschung kommen, müssen bestimmte Bedingungen erfüllt sein, die in Abb. 4.26 zusammengefaßt sind.

Ein Beispiel für eine stehende Welle bei zwei festen Enden ist die Saitenschwingung. Mit $v = \sqrt{\sigma/\rho}$ und $\sigma = F/A$, wobei A der Saitenquerschnitt und F die Kraft ist, mit der die Saite gespannt wird, erhält man die Frequenz des Grundtons zu $\nu_0 = \frac{1}{2l}\sqrt{F/A\rho}$.

4.2.6 Schallwellen

Mechanische Wellen sind an deformierbare Körper als Ausbreitungsmedium gebunden. Das Ausbreitungsmedium Luft ist für den Menschen von besonderer Bedeutung. Der Mensch kann mechanische Wellen im Frequenzbereich zwischen etwa 20 Hz und 20 kHz akustisch wahrnehmen. Man bezeichnet diese Wellen als *Schallwellen*. In gasförmigen Medien sind Schallwellen Longitudinalwellen, die Gasmoleküle werden in Fortpflanzungsrichtung der Welle periodisch aus ihrer Ruhelage ausgelenkt. Die Schallwellen unterhalb von 20 Hz bezeichnet man als *Infraschall*. Man kann diese niederfrequenten Druckschwankungen spüren (z.B. beim Fahren im Auto bei offenem Fenster). Schallwellen oberhalb von 20 kHz bezeichnet man als *Ultraschall*, oberhalb von etwa 1 GHz als *Hyperschall*. Ultraschallwellen haben eine breite Anwendung in der Medizintechnik und der zerstörungsfreien Werkstoffprüfung.

Überlagert man kohärente Schallwellen, so erhält man stehende Schallwellen. Dies kann einfach nachgewiesen werden, indem man zwei parallel ausgerichtete Lautsprecher im Abststand *d* voneinander aufstellt. Sie werden synchron von einem gemeinsamen Frequenzgenerator angeregt, wodurch die von beiden Lautsprechern abgestrahlten Wellen eine konstante Phasenbeziehung besitzen. Mit einem Mikrophon wird das Gebiet vor den Lautsprechern abgetastet und die örtliche Intensität mit einem Meßgerät angezeigt. Wie bei den Wasserwellen beobachtet man Zonen der Auslöschung und Verstärkung. Auch Schallwellen können interferieren !



Abbildung 4.27: Stehende Schallwellen im Kundtschen (a) und Quinckesche Rohr (b).

Stehende Schallwellen kann man sehr schön mit Hilfe des **Kundt**schen Rohres nachweisen (siehe Abb. 4.27a). Dazu bringt man in ein Glasrohr, das auf einer Seite mit einem verschiebbaren Stempel abgeschlossen ist, etwas Korkmehl. Auf der anderen Seite wird ein Metallstab, der in das Glasrohr hineinragt, zu Longitudinalschwingungen angeregt. Die Schwingung des Stabes überträgt sich auf die Luftsäule im Rohr. Durch Reflexion der Schallwellen am mit dem Stempel abgeschlossenen Rohrende treten stehende Schallwellen auf. Es treten genau dann stehende Wellen auf, wenn sich am Rohrende ein Schwingungsknoten ausbilden kann. Das feine Korkmehl wird an den Stellen der Schwingungsbäuche aufgewirbelt und lagert sich an den Stellen der Schwingungsknoten ab. Der Abstand benachbarter Schwingungsknoten beträgt $\lambda/2$. Bestimmt man diese Abstände durch Ausmessen, so läßt sich bei bekannter Frequenz die Schallgeschwindigkeit $v = v\lambda$ in Luft bestimmen. Setzt man andererseits die Schallgeschwindigkeit in Luft als bekannt voraus, so kann man mit dem Experiment die Schallgeschwindigkeit im Metallstab bestimmen. Die Wellenlänge der Grundschwingung des Metallstabes ist gleich der doppelten Stablänge, die leicht bestimmt werden kann. Mit $v = v_{\text{Luft}}/\lambda_{\text{Luft}} = v_{\text{Metall}}/\lambda_{\text{Metall}}$ erhält man $v_{\text{Metall}} = v_{\text{Luft}}(\lambda_{\text{Metall}}/\lambda_{\text{Luft}}) = v_{\text{Luft}}(2l/\lambda_{\text{Luft}})$.

Ein weiteres Experiment zum Nachweis stehender Schallwellen kann mit dem **Quincke**schen Resonanzrohr durchgeführt werden (siehe Abb. 4.27b). Hierzu wird ein senkrecht angebrachtes, an beiden Seiten offenes Glasrohr ein Stück weit in ein Wasserbad eingetaucht. Durch Heben und Senken des Wassergefäßes kann man den Wasserspiegel im Glasrohr verändern. Oben am Rohr befindet sich ein Lautsprecher, der einen Ton konstanter Frequenz erzeugt. Läßt man den Wasserspiegel ansteigen, so komt es bei einer bestimmten Wasserhöhe zu einer Resonanzerscheinung (der Ton wird lauter). Dies ist der Fall, wenn sich eine stehende Welle mit einem Knoten an der Wasseroberfläche und einem Schwingungsbauch am offenen Ende ausbilden kann. Die Luftsäule im Roht muß also eine Länge von (vergleiche Abb. 4.26)

$$l = \frac{2n+1}{4}\lambda \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$
(4.2.22)

haben. Füllt man Kohlendioxid in das **Quincke**sche Resonanzrohr ein, liegen die Resonanzstellen und damit die Knoten und Bäuche der stehenden Welle enger zusammen. Der Grund dafür ist, daß die Schallgeschwindigkeit und damit die Wellenlänge in Kohlendioxid kleiner als in Luft ist.

Elongation, Schallschnelle, Druck

Bei stehenden Schallwellen schwingen die Moleküle zu beiden Seiten eines Schwingungsknotens mit einer Phasendifferenz von π (siehe Abb. 4.28). Die Knoten der Bewegung sind deshalb Orte größter Druckschwankungen. Schwingen die Teilchen aufeinander zu, so wächst der Druck im Schwingungsknoten auf einen Wert über den Druck des ungestörten Mediums. Entfernen sie sich, wird der Druck kleiner. Im Bereich der Schwingungsbäuche bleibt der Druck dagegen immer konstant. Druckkäuche und Schwingungsknoten bzw, Druckknoten und Schwingungsbäuche fallen also örtlich zusammen.

Für die Teilchenelongation in einer stehenden Welle gilt (für $\Delta \varphi = 0$)

$$\Psi(x,t) = 2\Psi_0 \cos(kx) \sin(\omega t) . \qquad (4.2.23)$$

Daraus ergibt sich die Geschwindigkeit der Teilchenbewegung zu

$$u = \frac{d\Psi(x,t)}{dt} = 2\Psi_0 \ \omega \ \cos(kx)\cos(\omega t) \ . \tag{4.2.24}$$

Hierbei ist Ψ_0 die Schwingungsamplitude und $u_0 = \Psi_0 \omega$ die Geschwindigkeitsamplitude, die auch als *Schallschnelle* bezeichnet wird.

Der Druck ist proportional der örtlichen Veränderung der Elongation, d.h.

$$p \propto \frac{d\Psi(x,t)}{dx} = -2\Psi_0 \ k \ \sin(kx)\sin(\omega t) \ . \tag{4.2.25}$$

Man erkennt, daß auch der Druck Bäuche und Knoten besitzt, daß aber Knotenstellen des Druckes mit Bäuchen der Bewegung zusammenfallen und umgekehrt. Das heißt, auch die Druckschwankungen stellen einen harmonischen Vorgang dar.

Die Druckamplitude ist gegeben durch



Abbildung 4.28: Geschwindigkeits- und Druckverteilung bei einer stehenden Schallwelle. Die Pfeile deuten die Richtung der Schwingungsbewegung an, die Länge der Pfeile die Geschwindigkeit der Teilchenbewegung.

$$p_0 = u_0 \rho v , \qquad (4.2.26)$$

wobei ρ ist die Dichte des Mediums und v die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Schalls im entsprechenden Medium ist. Die Größe ρv wird als *Schallwiderstand* bezeichnet. Er ist ein Maß dafür, wie gut ein Medium den Schall leitet. Dort wo sich der Schallwiderstand unstetig ändert, wird eine Schallwelle reflektiert.

4.2.7 Energie im Schallfeld

Die schwingenden Teilchen im Schallfeld besitzen kinetische Energie. Mit der Teilchenelongation $\Psi(x,t) = \Psi_0 \sin(kx - \omega t)$ erhält man die Geschwindigkeit der Teilchenbewegung zu $u = -\Psi_0 \omega \cos(kx - \omega t) = -u_0 \cos(kx - \omega t)$. Damit ergibt sich die kinetische Energie zu

$$E_{\rm kin} = \frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}mu^2_0\cos^2(kx - \omega t) = \frac{1}{2}m\Psi^2_0\omega^2\cos^2(kx - \omega t) \quad . \tag{4.2.27}$$

$$\frac{E_{\rm kin}}{V} = \frac{1}{2} \rho \Psi_0^2 \omega^2 \cos^2(kx - \omega t) \quad . \tag{4.2.28}$$

Im zeitlichen Mittel beträgt die Energiedichte

$$\frac{\overline{E_{\rm kin}}}{V} = \frac{1}{4}\rho\Psi_0^2\omega^2 , \qquad (4.2.29)$$

da das zeitliche Mittel $\overline{\cos^2(kx - \omega t)} = 1/2$ ist.

Außer der kinetischen Energie besitzen die Moleküle im ausgelenkten Zustand noch potentielle Energie E_{pot} . Sie ist jedoch im zeitlichen Mittel genau gleich groß wie $\overline{E_{kin}}$. Damit beträgt die gesamte Energiedichte

$$\frac{\overline{E}}{V} = \frac{\overline{E_{\text{kin}}} + \overline{E_{\text{pot}}}}{V} = \frac{1}{2}\rho\Psi_0^2\omega^2 \quad . \quad (4.2.30)$$

Die Intensität oder Schallstärke I wird definiert als

$$I = \frac{\overline{E_{\rm kin}}}{V} v = \frac{1}{2} \rho \Psi_0^2 \omega^2 v = \frac{1}{2} \rho u_0^2 v . \qquad (4.2.31)$$

Die Dimension der Schallstärke ist

$$[I] = 1 \frac{J}{s m^2} = 1 \frac{W}{m^2} . \qquad (4.2.32)$$

Die Schallstärke ist die Energie, die pro Zeiteinheit auf eine senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Schallwelle gestellte Flächeneinheit trifft. Man spricht deshalb von einer *Energieflußdichte*.

Hörempfinden

Das menschliche Ohr besitzt nicht für alle Frequenzen die gleiche Empfindlichkeit. Seine höchste Empfindlichkeit hat es etwa bei 3 kHz. Die Hörschwelle, d.h. die Schallstärke, die gerade noch wahrgenommen wird, liegt für diese Frequenz bei etwa 10^{-13} W/m². Für eine Frequenz von 1 kHz beträgt sie nur noch 10^{-12} W/m². Diese Schallstärke entspricht einer Schwingungsamplitude von nur $\Psi_0 \simeq 10^{-10}$ m. Wäre das Ohr nur ein wenig empfindlicher, so könnte es die thermische Molekülschwingung als Rauschen wahrnehmen. Die Schmerzgrenze des menschlichen Ohres liegt bei etwa 10^{-6} W/m². D.h. der Empfindlichkeitsbereich des Ohres erstreckt sich über 6 Größenordnungen.¹⁷

Es besteht kein linearer Zusammenhang zwischen Hörempfinden (*Lautstürke*) und Schallstärke. Näherungsweise wird dieser Zusammenhang durch das **Weber-Fechner**sche Gesetz beschrieben. Danach verhalten sich die Empfindung des Ohres und der Logarithmus der physikalischen Intensität proportional zueinander. D.h.

¹⁷Es sei hier angemerkt, daß kein künstliches Meßgerät ohne Umschaltvorrichtung einen derart großen Bereich erfassen kann.

Empfindung des Ohres = $const. \cdot \log_{10} I$. (4.2.33)

Auf den Hörschwellenwert von $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ bei 1 kHz ist der *Schallpegel L* bezogen. Man definiert den Schallpegel *L* zu

Schallpegel
$$L = 10 \cdot \log_{10} \frac{I}{I_0}$$
 mit $I_0 = 10^{-12} \text{W/m}^2$. (4.2.34)

Der Schallpegel wird in der dimensionslosen Zahl dB (= dezibel = 1/10 Bel) angegeben und stellt eine Umrechnung der Schallstärke in ein logarithmisches Maß dar. Ein Schallpegel von 20 dB bedeutet $L = 10 \cdot 2$, also $I/I_0 = 100$ bzw. $I = 100 \times 10^{-12} = 10^{-10}$ W/m². Ein Schallpegel von 120 dB entspricht also einer Schallstärke von 1 W/m².

Leider gibt die dB-Skala nicht unser Hörempfinden wieder, da dieses von der Frequenz abhängt. Um die Lautstärke L_s eines Geräusches zu definieren, bezieht man sich auch auf den Hörschwellenwert I_0 von 1 kHz. Man bestimmt die Lautstärke durch eine Vergleichsmessung in folgender Weise: Man läßt einen 1 kHz Ton so laut tönen, daß man ihn ebenso laut wie das zu bestimmende Geräusch empfindet. Die Intensität I des 1 kHz Tons wird gemessen und man definiert die Lautstärke dann zu

Lautstärke des Geräusches
$$L_s = 10 \cdot \log_{10} \frac{I}{I_0}$$
. (4.2.35)

Die so definierte Lautstärke ist zwar eine reine Zahl, trägt aber die Einheit *Phon*. Für die Frequenz von 1 kHz entspricht also der Schallpegel in dB exakt der Lautstärke in Phon. Für die meisten anderen Frequenzen ist wegen der geringeren Empfindlichkeit des menschlichen Ohres die Lautstärke in Phon kleiner als der Schallpegel in dB (siehe Abb. 4.29). Wichtig ist, daß die Lautstärke immer durch eine Vergleichsmessung ermittelt werden muß. Führt man solche Vergleichsmessungen im gesamten hörbaren Frequenzbereich durch, so erhält man die Kurven gleicher Lautstärke, die in Abb. 4.29 gezeigt sind.

Typische Werte für die Lautstärke sind: Flüstern: 20 Phon; Sprache: 50 Phon; Preßlufthammer: 90 Phon; Motorrad: 100 Phon; Flugzeug: 110 Phon.

Für die Addition von Schallintensitäten gilt

$$L_{\rm s,ges} = 10 \log_{10} \frac{(I_1 + I_2)}{I_0}$$
 (4.2.36)

Addiert man z.B. zwei Schallquellen mit einer Lautstärke von 80 Phon, so erhält man $L_{s,ges} = 10 \log_{10} 2 \times 10^8 = 83$ Phon.

4.2.8 Der Doppler-Effekt

Werden Wellen der Frequenz ν von einer ruhenden Quelle Q ausgesandt, registriert ein ebenfalls ruhender Beobachter B genau ν Schwingungen pro Sekunde. Bewegen sich aber Sender und Empfänger relativ zueinander, nimmt der Beobachter B eine andere Frequenz ν wahr.



Abbildung 4.29: Kurven gleicher Lautstärke im hörbaren Frequenzbereich ermittelt durch Vergleichsmessungen. Die gestrichelte Kurve gibt die Hörschwelle an.

Bewegter Beobachter

Bewegt sich der Beobachter B mit der Geschwindigkeit w auf die im Medium (z.B. Luft) ruhende Quelle Q zu oder entfernt sich von dieser, so beträgt die Geschwindigkeit der Wellenberge relativ zum Beobachter $v' = v \pm w$ (siehe Abb. 4.30). Die Zeit T' zwischen 2 Wellenbergen wird dadurch $T' = \lambda/(v \pm w)$. Mit $\nu' = 1/T' = (v \pm w)/\lambda$ ergibt sich die vom Beobachter wahrgenommene Frequenz zu

$$\nu' = \nu \left(1 \pm \frac{w}{v}\right) \quad . \quad (4.2.37)$$

Die vom Beobachter wahrgenommene Frequenz ν' ist also größer, wenn sich der Beobachter auf die Quelle zubewegt und kleiner, wenn er sich von ihr wegbewegt.

Bewegte Quelle

Bewegt sich die Quelle Q auf den Beobachter B mit der Geschwindigkeit w zu oder von diesem weg, so ändert sich der Abstand zwischen zwei Wellenbergen von λ auf $\lambda = \lambda \mp wT$ (– für Bewegung auf Beobachter zu, + für Bewegung vom Beobachter weg). Mit $\lambda = v/\nu$ erhält man $v/\nu = v/\nu \mp w/\nu$ und damit

$$\nu' = \frac{\nu}{1 \pm \frac{w}{v}}$$
 . (4.2.38)

Das heißt, die wahrgenommene Frequenz ν' ist größer als ν , wenn sich die Quelle auf den Beobachter zubewegt und kleiner, wenn sie sich von ihm wegbewegt.



Abbildung 4.30: Zum Doppler-Effekt bei bewegtem Beobachter B (oben) und bewegter Quelle Q (unten).

Wichtig ist, daß ein Unterschied besteht, ob sich die Quelle oder der Beobachter bewegt. Die Frequenzänderung hängt also nicht nur von der Relativgeschwindigkeit ab.¹⁸

Schallmauer, Überschallgeschwindigkeit, Machscher Kegel

Wird w = v, d.h. bewegt sich der Sender mit Schallgeschwindigkeit, spricht man vom Erreichen der *Schallmauer*. Die Kreise, die die entstandenenWellenberge darstellen (siehe Abb. 4.31), berühren sich am Ort der bewegten Schallquelle. Dort verstärken sich die Amplituden zu sehr großen Werten.

Für w > v liegt Überschallgeschwindigkeit vor. Der Schall bleibt hinter der Schallquelle zurück und verdichtet sich zu Bugwellen, wie sie in ähnlicher Weise auch bei fahrenden Schiffen auftreten. Als Umhüllende der Bugwellen ergibt sich der so genannte **Mach**sch Kegel mit demÖffnungswinkel α , der durch

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{v}{w} = \frac{1}{M}$$
 (4.2.39)

¹⁸Dies widerspricht aber nicht dem Relativitätsprinzip, da Schallwellen an einen Träger (Medium) gebunden sind. Im Gegensatz dazu sind elektromagnetische Wellen nicht an einen Träger gebunden. Hier ist nur die Relativgeschwindigkeit zwischen Quelle und Beobachter maßgebend.



Abbildung 4.31: Zur Schallmauer und Machschem Kegel.

gegeben ist. Hierbei ist M die Machsche Zahl.

Kapitel 5

Wärmelehre

In den vorangegangenen Kapiteln haben wir gesehen, daß die Eigenschaften mechanischer Systeme mit den Grundgrößen Länge (Einheit: Meter), Zeit (Einheit: Sekunde) und Masse (Einheit: Kilogramm) beschrieben werden können. Aus unserer Alltagserfahrung kennen wir aber aber noch eine weitere Zustandsgröße, die einen festen Körper, eine Flüssigkeit oder ein Gas auszeichnet. In unserer Haut befinden sich besonders ausgebildete Nervenzellen, die uns bei Kontakt mit mit Festkörpern, Flüssigkeiten oder Gasen die Empfindung "kalt", "warm" oder "heiß" vermitteln. Diese Empfindung können wir nicht mit den bisher eingeführten mechanischen Grundgrößen beschreiben. Die Tatsache, daß wir mit unserer Sinneserfahrung verschiedene Grade der "Warmheit" unterscheiden können und deshalb Körper nach dieser Eigenschaft klassifizieren können, führt uns zu dem Begriff *"Temperatur"*. Wir werden in diesem Kapitel die Temperatur als weitere Grundgröße einführen und zeigen, wie diese Grundgröße mit Hilfe von Thermometern gemessen werden kann. Bei der Messung der Temperatur kommt es insbesondere darauf an, objektive Meßverfahren für die Temperatur zu finden, da unsere Sinneserfahrung subjektiv ist (unser Temperaturempfinden hängt mehr oder weniger stark von der Vorgeschichte ab).

Mit dem Begriff der Temperatur werden wir dann einige Eigenschaften von festen Körpern, Flüssigkeiten und Gasen diskutieren, die wir ebenfalls aus unserer Alltagserfahrung gut kennen, wie z.B. die Volumenänderung bei Temperaturänderung oder die Einstellung eines Wärmegleichgewichts, wenn man zwei Festkörper, Flüssigkeiten oder Gase mit unterschiedlicher Temperatur in Kontakt bringt.

5.1 Temperatur und Gasgesetze

5.1.1 Temperaturmessung

Wenn wir von Temperatur sprechen, unterscheiden wir entsprechend unserer Temperaturempfindung rein qualitativ zwischen warm und kalt. Zur quantitativen Bestimmung der Temperatur benötigen wir allerdings eine Meßvorschrift (Realdefinition einer physikalischen Größe), mit der eine objektive Bestimmung der Temperatur ermöglicht wird. Dazu nutzen wir aus, daß Festkörper, Flüssigkeiten und Gase ihrer Eigenschaften in gesetzmäßiger Weise mit der Temperatur ändern.



Abbildung 5.1: Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstands als Eichkurve für die Temperaturmessung.

Durch die genaue Messung einer bestimmten Körpereigenschaft als Funktion der Temperatur ist eine Temperaturmessung möglich. In Abb. 5.1 ist als Beispiel der elektrische Widerstand eines Metalls als Funktion der Temperatur gezeigt. Diese Abhängigkeit kann zur Temperaturmessung benutzt werden, sobald eine Eichung der Kurve vorgenommen wurde. Dazu legt man üblicherweise leicht reproduzierbare Fixpunkte T_1, T_2, \ldots fest, um eine reproduzierbare Temperaturmessung zu ermöglichen.

Für die quantitative Temperaturmessung haben sich in der Vergangenheit mehrere Temperaturskalen durchgesetzt, die sich durch eine unterschiedliche Wahl der gewählten *Fixpunkte*. So dienten für die *Celsiusskala*¹ und die *Rèaumurskala*² die Temperaturen des schmelzenden Eises (0°C, 0°R) und des bei Normaldruck siedenden Wassers (100°C, 80°R) als Fixpunkte (siehe hierzu das in Abb. 5.2 gezeigte (p - T)-Phasendiagramm von Wasser). Für die hauptsächlich in den USA verwendete *Fahrenheitskalå* diente die tiefste Temperatur, die er mit einer Eis-Wasser-Salmiak-Mischung erreichen konnte (0°F) und die Temperatur des menschlichen Blutes (100°F) als Fixpunkte. Nach diesen Festlegungen unterteilt man unterteilt man die Differenzen zwischen unteren und oberen Fixpunkten in äquidistante Teile und setzt diese Einteilungen über die Fixpunkte hinaus fort.

Zwischen den verschiedenen Temperaturskalen bestehen folgende Umrechnungen:

¹**A. Celsius**: 1701 - 1744.

²**R.-A. Rèaumur**: 1683 - 1757.

³G. D. Fahrenheit: 1686 - 1736.



Abbildung 5.2: Zustandsdiagramm (Phasendiagramm) des Wassers. Der Schmelzpunkt des Wassers bei Normaldruck (760 Torr) liegt bei T = 273.15 K auf Linie 3 oberhalb des Tripelpunktes (p = 4.6 Torr, T = 273.16 K).

$$T [^{o}R] = \frac{5}{4}T [^{o}C]$$

$$T [^{o}C] = \frac{4}{5}T [^{o}R]$$

$$T [^{o}F] = \frac{5}{9}(T - 32) [^{o}C]$$

$$T [^{o}C] = \frac{9}{5}(T + 17.8) [^{o}F]$$

$$T [^{o}C] = (T + 273.15) [K]$$

$$T [K] = (T - 273.15) [^{o}C] . \qquad (5.1.1)$$

Mit dieser Umrechnungsvorschrift erhält man folgende Werte für den Schmelz- und Siedepunkt von Wasser bei Normaldruck ($p = 1.013 \times 10^5$ Pa):

Skala	Kelvin	Celsius	Fahrenheit	Rèaumur
Schmelzpunkt	273.15 K	0°C	32°F	0° R
Siedepunkt	373.15 K	100°C	212°F	80° R

In die Umrechnungstabelle wurde auch die so genannte *thermodynamische Temperaturskala* aufgenommen. Diese beginnt bei der tiefsten Temperatur, die theoretische erreichbar ist (0 K).⁴ Das Kelvin wird auch zur Angabe von Temperaturintervallen benutzt, wobei der Temperaturunterschied von 1 K demjenigen von 1°C entspricht. Die Kelvin-Skala beruht auf der thermodynamischen Temperaturskala, die in Abschnitt 5.1.3 eingehend behandelt wird.

⁴Name und Symbol dieser SI-Basiseinkeit wurde von Grad Kelvin (°K) in Kelvin (K) geändert.

Die Genauigkeit der Temperaturmessung ist in unterschiedlichen Temperaturbereichen keineswegs gleich. Der Schmelzpunkt des Eises hat eine Unsicherheit von etwa 0.002 K. Wesentlich genauer (bis 0.00005 K) läßt sich der Tripelpunkt des Wassers bestimmen, der um 0.0098 K über dem Eispunkt liegt (siehe Abb. 5.2). Der Tripelpunkt des Wassers zeichnet sich dadurch aus, daß bei einer bestimmten Temperatur und einem bestimmten Druck alle drei Aggregatszustände nebeneinander existieren können. Der Siedepunkt des Wassers läßt sich mit einer Genauigkeit bis zu 0.001 K reproduzieren.⁵ Folgende weiteren Fixpunkte sind für die Eichung der Temperaturskala wichtig:

Fixpunkt bei $p=1.013\times 10^5 {\rm Pa}$	Temperatur [K]
Siedepunkt von He	4.215
Tripelpunkt von H_2	13.81
Siedepunkt H_2	20.28
Siedepunkt von Ne	27.10
Siedepunkt von O_2	90.19
Siedepunkt von H_2O	373.15
Schmelzpunkt von H_2O	273.15
Schmelzpunkt von Zn	692.73
Schmelzpunkt von Ag	1235.08
Schmelzpunkt von Au	1337.58

Thermometer

Zur Realisierung eines Thermometers können verschiedene physikalische Größen G herangezogen werden, die eine wohldefinierte Temperaturabhängigkeit besitzen. Um eine große Empfindlichkeit zu erreichen, sollte dabei die Änderung der Größe mit der Temperatur, dG/dT, groß sein. Folgende physikalischen Effekte werden am häufigsten zur Realisierung von Thermometern verwendet:

1. Thermische Ausdehnung von Festkörpern, Flüssigkeiten und Gasen:

Das Volumen von Flüssigkeiten und Gasen wird bei Erhöhung der Temperatur größer. Füllt man z.B. drei Kolben mit oben angesetztem Rohr gleich hoch mit Petroleum, Wasser und Quecksilber und taucht sie in ein Bad mit warmem Wasser ein, so sieht man am Steigen der Flüssigkeiten in den Röhrchen, daß sich Petroleum am stärksten, Quecksilber am wenigsten ausdehnt (siehe Abb. 5.3). Zur Füllung von Thermometern die auf der thermischen Ausdehnung von Flüssigkeiten verwendet, nimmt man meistens Quecksilber, Alkohol oder Toluol. Bei diesen Flüssigkeiten ist die Volumenänderung weitgehend proportional zur Temperaturänderung. Quecksilberthermometer können vom Gefrierpunkt von Hg bei -38.86°C und etwa 150°C eingesetzt werden,⁶ wo eine merkliche Verdampfung von Hg einsetzt. Alkoholthermometer werden von etwa -70°C bis 0°C eingesetzt.

⁵Wegen der großen Genauigkeit der Messung des Tripelpunktes von Wasser wurde auf der 10. Generalkonferenz für Maß und Gewicht (1954) beschlossen, die Temperatureinheit durch einen Fixpunkt, und zwar den Tripelpunkt des Wassers, festzulegen. Dieser Punkt hat durch den Beschluß die Temperatur 273.16 K erhalten. Die Gradeinteilung nach oben und unten erhält man durch Gasthermometer (eine Beschreibung der Gasthermometer erfolgt in Abschnitt 5.1.3).

⁶Durch die Verwendung von sehr engen Kapillaren und hinreichend großer Quecksilbergefäße erreicht man bei Flüssigkeitsthermometern Ablesegenauigkeiten von 0.01 Grad. Derartig empfindliche Thermometer werden aber nur für einen engen Temperaturbereich hergestellt, da sonst ihre Länge zu groß würde.



Abbildung 5.3: Zur Ausnutzung der thermischen Ausdehnung von Flüssigkeiten in Thermometern.

In Bimetallstreifen wird die unterschiedliche thermische Ausdehnung von zwei verschiedenen Metallen ausgenutzt. Bei Temperaturänderung verbiegt sich der Bimetallstreifen, was zum Beispiel zum Schalten von Kontakten verwendet werden kann (Schutzschaltung in Kaffeemaschine, Bügeleisen, etc.).

Gasthermometer beruhen auf der Änderung des Gasvolumens mit der Temperatur. Allerdings hängt das Volumen bei Gasen auch noch stark vom Druck ab. Dieser Zusammenhang wird später im Zusammenhang mit der thermischen Ausdehnung von Gasen (siehe Abschnitt 5.1.3) diskutiert, weshalb Gasthermometer erst weiter unten ausführlich beschrieben werden.

2. Widerstandsthermometer:

Eine weitverbreitete Methode der Temperaturmessung basiert auf der Änderung des elektrischen Widerstands mit der Temperatur. Solche Widerstandsthermometer bestehen häufig aus dünnen, ausgeglühten Platindrähten. Ihre Genauigkeit ist hoch und oft besser als 0.001° C im Bereich zwischen 0 und 400° C.⁷

Bei sehr tiefen Temperaturen (≤ 100 K) können Pt-Thermometer nicht mehr verwendet werden, da sich ihr Widerstand nur noch wenig mit der Temperatur ändert. In diesem Bereich werden häufig Widerstandsthermometer aus halbleitenden (Ge, C) Materialien verwendet, da diese einen sehr steilen Anstieg des Widerstands mit sinkender Temperatur zeigen (siehe Abb. 5.4).

3. Thermoelemente:

Thermoelemente bestehen aus einem Paar verschiedener Metalle A und B, das eine von der Temperatur abhängige Kontaktspannung U_{AB} liefert. Diese Kontaktspannung beruht auf der unterschiedlichen Austrittsarbeit für Elektronen aus den beiden Metallen. Verbindet man, wie in Abb. 5.5 gezeigt, zwei verschiedene Metalle an zwei Lötstellen, so kann man eine Thermospannung $U_{th} = U_{AB}(T_1) - U_{AB}(T_2)$ messen. Man findet $U_{th} = S\Delta T$, wobei S die Thermokraft ist, die selbst wiederum temperaturabhängig ist und typischerweise im Bereich von $1 \mu V/K$ liegt. Der Vorteil von Thermoelemente ist, daß sie in sehr kleiner Bauform hergestellt werden können und von tiefen Temperaturen (einige K) bis zu sehr hohen Temperaturen (etwa 3000 K für W/Mo-Thermoelemente) eingesetzt werden können.

4. Dampfdruckthermometer:

 $^{^{7}}$ Zu Pt-Thermometern existiert sogar eine DIN-Vorschrift für die Toleranzen und die R(T)-Abhängigkeit von Widerständen mit einem Wert von 100 Ω (Pt-100) und 1000 Ω (Pt-1000) bei 0°C.



Abbildung 5.4: Typische Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstands von Metallen und Halbleitern.



Abbildung 5.5: Thermoelement bestehend aus zwei Kontaktstellen verschiedener Metalle. Eine Kontaktstelle wird auf eine Referenztemperatur gebracht (z.B. Eiswasser: 0° C).

Dampfdruckthermometer beruhen auf der Änderung des Dampfdrucks von Flüssigkeiten mit der Temperatur. Zum Beispiel kann bei sehr tiefen Temperaturen die Temperatur von flüssigem Helium durch Messung des Dampfdrucks über der Heliumflüssigkeit genau bestimmt werden. Dadurch ist eine Temperaturmessung im Bereich von etwa 1 bis 5 K möglich. Eine genaue Diskussion des Zusammenhangs zwischen dem Dampfdruck über einer Flüssigkeit und der Temperatur einer Flüssigkeit erfolgt später.

5. Strahlungspyrometer:

Oberhalb von 1000 K wird häufig die ausgesandte Lichtstrahlung zur Temperaturbestimmung benutzt. Die Lichtausstrahlung ändert sich von dunkelrot über rot, gelblich und weiß bis hin zu bläulich, wenn man die Temperatur erhöht. Die spektrale Zusammensetzung des ausgestrahlten Lichts läßt eine genaue Temperaturbestimmung.

In Strahlungspyrometern macht man eine vergleichende Helligkeitsmessung zwischen einem Körper mit unbekannter Temperatur und einem Glühfaden, dessen Temperatur man mit Hilfe eines elektrischen Stromes über den Faden ändern kann. Man ändert die Stromstärke so lange,
PHYSIK I

bis die Helligkeit des Fadens mit der des Körpers übereinstimmt. Man liest dann die elektrische Stromstärke ab und aus einer Eichtabelle die zugehörige Temperatur.

5.1.2 Thermische Ausdehnung fester und flüssiger Körper

Die thermische Ausdehnung fester und flüssiger Körper wurde oben bei der Diskussion von Thermometern bereits erwähnt. Sie soll in diesem Abschnitt genauer diskutiert werden.

Thermische Ausdehnung fester Körper

Zunächst soll die Ausdehnung fester Körper und zwar die Ausdehnung in nur einer Dimension behandelt werden (siehe Abb. 5.6). Man spricht hier von Längenausdehnung, die mit Hilfe von Rohren oder Stäben leicht gemessen werden kann. Erhöht man die Temperatur eines Stabes von T_0 um ΔT auf T, so zeigt sich, daß bei nicht allzu großen ΔT in erster Näherung eine Proportionalität zwischen Ausdehnung $\Delta l = l(T_1) - l(T_0)$ und Temperaturänderung $\Delta T = T - T_0$ besteht. Außerdem ist die gemessene Längenänderung Δl proportional zur Länge l_0 des Stabes bei der Temperatur T_0 . Man kann also die Längenänderung Δl wie folgt ausdrücken:

$$\Delta l = \beta l_0 \Delta T \quad . \tag{5.1.2}$$



Abbildung 5.6: Zur linearen thermischen Ausdehnung eines festen Körpers.

Die Proportionalitätskonstante β nennt man den *linearen Ausdehnungskoeffizienten*. Die Dimension von β ist

$$[\beta] = \frac{1}{K} . (5.1.3)$$

Addiert man auf beiden Seiten von Gl.(5.1.2) die Länge l_0 , so erhält man die Länge bei der Temperatur T zu

$$l_0 + \Delta l = l(T) = l_0 (1 + \beta \Delta T) .$$
 (5.1.4)

Typische Längenausdehnungskoeffizienten einiger Materialien sind:

Material	linearer Ausdehnungskoeffizient β [1/K (bei Raumtemperatur)	
Quarzglas	0.5×10^{-6}	
Jenaer Glas	$9.0 imes 10^{-6}$	
Kupfer	$16.7 imes10^{-6}$	
Aluminium	$23.8 imes 10^{-6}$	
Eisen	12.3×10^{-6}	
Invarstahl	2.0×10^{-6}	
Nickel	13×10^{-6}	

Es soll hier darauf hingewiesen werden, daß β selbst von der Temperatur abhängt. Für genaue Messungen kann man für die Beschreibung der temperaturabhängigen Länge häufig Ausdrücke der Art

$$l(T) = l_0 (1 + \beta \Delta T + \beta' (\Delta T)^2 + ...) .$$
 (5.1.5)

Natürlich dehnt sich ein Stab bei einer Temperaturänderung nicht nur in seiner Längs-, sondern auch in seiner Querrichtung aus, d.h. der Stab ändert sein Volumen. Man nennt entsprechend zum linearen Ausdehnungskoeffizienten den Ausdruck $[V(T) - V(T_0)]/[V(T_0)\Delta T]$ den *Raum*- oder *Volumenausdehnungskoeffizienten* α . Für die Volumenänderung eines Quader mit Seitenlänge a_0 , b_0 und c_0 bei der Temperatur T_0 , der aus einem Material mit linearem Ausdehnungskoeffizienten β besteht, erhält man

$$V(T_0) = a_0 b_0 c_0$$

$$V(T) = a_0 (1 + \beta \Delta T) \cdot b_0 (1 + \beta \Delta T) \cdot c_0 (1 + \beta \Delta T)$$
und damit
$$V(T) = V(T_0) (1 + 3\beta \Delta T) = V(T_0) (1 + \alpha \Delta T) \quad . \quad (5.1.6)$$

Da β sehr klein ist, können Terme in β^2 und β^3 gegenüber dem linearen Glied vernachlässigt werden. Man erhält also den Raumausdehnungskoeffizienten

$$\alpha = 3\beta , \quad (5.1.7)$$

d.h. der Raumausdehnungskoeffizient beträgt das Dreifache des linearen Ausdehnungskeffizienten.

Bimetallstreifen:

In Bimetallstreifen (z.B. Zink/Eisen oder Nickel/Eisen) nutzt man den unterschiedlichen linearen Ausdehnungskoeffizienten von verschiedenen Metallen aus (siehe Abb. 5.7). Wenn man zwei gleich lange und breite Metallstreifen bei der Temperatur T_0 aufeinanderwalzt oder lötet, so muß sich der dadurch erhaltene Bimetallstreifen bei einer Temperaturänderung biegen und zwar bei einer Temperaturerniedrigung und -erhöhung in unterschiedliche Richtung. Man benutzt solche Bimetallstreifen häufig dazu, bei einer bestimmten Temperatur einen elektrischen Kontakt bei einer bestimmten Temperatur zu schließen oder zu öffnen. Damit lassen sich Temperaturregelungen konstruieren oder Schutzschalter gegen Überhitzung gewinnen (z.B. Bügeleisen, Kaffeemaschine, Heißwasserspeicher, etc.).

Biegt man einen Bimetallstreifen zu einer Spirale, befestigt diese mit ihrem äußeren Ende an einem festen Zapfen und versieht ihr inneres Ende mit einer Achse, an der ein Zeiger befestigt ist, so wird die Achse und damit der Zeiger bei einer Temperaturänderung gedreht. Auf diesem Prinzip beruhen verschiedene Metallthermometer.



Abbildung 5.7: Anwendung des Bimetallstreifens beim Metallthermometer.

Thermische Ausdehnung von Flüssigkeiten

Bei der Ausdehnung von Flüssigkeiten interessiert nur der Volumenausdehnungskoeffizient. Flüssigkeiten dehnen sich im allgemeinen mit zunehmender Temperatur stärker aus als Festkörper, außerdem hängen die Ausdehnungskoeffizienten stärker von der Temperatur ab. Bei der Messung des Volumenausdehnungskoeffizienten von Flüssigkeiten tritt das Problem aus, daß man Flüssigkeiten in ein Gefäß füllen muß. Erwärmt man die Flüssigkeit, so erwärmt man auch das Gefäß, wodurch sich dieses ebenfalls ausdehnt. Man beobachtet dann nur die Differenz der Ausdehnungskoeffizienten von Flüssigkeit und Behälter. Kennt man allerdings die Ausdehnung einer einzigen Flüssigkeit absolut, so kann man mit deren Hilfe die Ausdehnung des Behälters bestimmen und damit dann die Ausdehnung beliebiger Flüssigkeiten.

Zur absoluten Bestimmung der Ausdehnung von Flüssigkeiten benutzt man nach der Methode von **Du**long und **Petit** ein kommunizierendes Rohr, dessen einer Schenkel durch den Kontakt mit schmelzendem Eis auf 0°C gehalten wird, während der andere Schenkel vom Dampf siedenden Wassers umströmt wird und dadurch auf einer Temperatur von 100°C gehalten wird. Die Dichte ρ einer Flüssigkeit ändert sich umgekehrt wie das Volumen, da das Produkt $\rho V = m$ konstant sein muß. Es gilt also für die zwei Temperaturen die Gleichung

$$\rho(T_0) V(T_0) = \rho(T) V(T)$$
(5.1.8)

und damit, wenn wir den Volumenausdehnungskoeffizienten von Flüssigkeiten mit γ bezeichnen, auch

$$\rho(T_0) V(T_0) = \rho(T) V(T_0) (1 + \gamma \Delta T) \quad .$$
(5.1.9)

Das heißt, es gilt

$$\rho(T) = \frac{\rho(T_0)}{1 + \gamma \Delta T} .$$
 (5.1.10)

Aufgrund der höheren Dichte bei 0°C muß die Flüssigkeit im erhitzten Schenkel des kommunizierenden Rohres höher stehen als im kalten. Nach dem Gesetz der kommunizierenden Röhren verhalten sich die Höhen umgekehrt wie die Dichten selbst ($\rho_1/\rho_2 = h_2/h_1$, vergleiche Gl.(3.3.13)). Das heißt, man kann aus der Messung der Höhen das Verhältnis $\rho(T_0)/\rho(T) = 1 + \gamma \Delta T$ bestimmen. Man bekommt daraus den Absolutwert des Volumenausdehnungskoeffizienten für eine Flüssigkeit.

Typische Volumenausdehnungskoeffizienten einiger Flüssigkeiten sind:

Flüssigkeit	Volumenausdehnungskoeffizient α [1/K] (bei 18°C)				
Wasser Quecksilber Benzol Äthylalkohol Glyzerin	$\begin{array}{c} 0.18\times 10^{-3}\\ 0.18\times 10^{-3}\\ 1.06\times 10^{-3}\\ 1.1\times 10^{-3}\\ 0.49\times 10^{-3} \end{array}$				

Man erkennt, daß die Ausdehnungskoeffizienten für Flüssigkeiten etwa 100-mal so groß sind wie diejenigen von Festkörpern.



Abbildung 5.8: Volumenänderung von Wasser bei Erwärmung.

Eine für die Natur sehr wichtige Anomalie zeigt das Wasser. Es hat seine größte Dichte bei $4^{\circ}C$ (siehe Abb. 5.8). Oberhalb und unterhalb dieser Temperatur nimmt aufgrund der Volumenausdehnung die Dichte ab. Deshalb frieren stehende Gewässer bei Unterschreitung des Gefrierpunktes an der Oberfläche zu, während sie am Grund noch eine Temperatur von $4^{\circ}C$ besitzen. Aufgrund der geringeren Dichte schwimmt die an der Oberflächen von Wasser gebildete Eisschicht auf dem Wasser.

Allgemeinere Formulierung der thermischen Ausdehnung

Der Volumenausdehnungskoeffizient kann nach Gl.(5.1.6) wie folgt ausgedrückt werden:

$$\alpha = \frac{V(T) - V(T_0)}{V(T_0)} \frac{1}{\Delta T} = \frac{\Delta V}{\Delta T} \frac{1}{V(T_0)} .$$
 (5.1.11)

Man kann für infinitesimale Temperaturänderungen den Volumenausdehnungskoeffizienten dann durch

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \tag{5.1.12}$$

ausdrücken. Hierbei bedeutet der Index p, daß die partielle Differentiation bei konstantem Druck erfolgen soll, d.h. die Temperaturänderung soll bei konstantem Druck erfolgen. Im allgemeinen ändert sich das Volumen nicht nur bei einer Temperaturänderung, sondern auch für konstante Temperatur bei einer Druckänderung. Deshalb kann man allgemein formulieren:

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{p} dT - \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{T} dp$$

oder
$$\frac{dV}{V} = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{p} dT - \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{T} dp \quad .$$
(5.1.13)

Hierbei ist

$$\kappa = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T \tag{5.1.14}$$

die isotherme Kompressibilität. Damit erhält man die allgemeine Zustandsgleichung für Festkörper zu

$$\frac{dV}{V} = \alpha \, dT - \kappa \, dp \quad . \tag{5.1.15}$$

Verbiegen von Eisenbahnschienen:

Es sollen kurz die bei der thermischen Ausdehnung auftretenden Kräfte diskutiert werden. Wir nehmen an, daß ein Eisenstab eine Temperaturänderung von 500°C erfährt. Mit $\beta = 12 \times 10^{-6}$ 1/K ergibt sich eine relative Längenänderung von $\Delta l/l = 6 \times 10^{-3}$. Dadurch entsteht eine Druckspannung $\sigma = E(\Delta l/l)$ im Stab. Mit dem Elasizitätsmodul von Eisen, $E_{\rm Fe} = 2 \times 10^7$ N/cm², erhält man eine Zugspannung von $\sigma = 1.2 \times 10^5$ N/cm². Diese Zugspannung entspricht einem Gewicht von mehr als 10 Tonnen auf eine Fläche von 1 cm². Solche Kräfte können zum Verbiegen sehr stabiler Metallkonstruktionen führen (wie z.B. Eisenbahnschiene). Deshalb ist bei solchen Konstruktionen auf Dehnungsfugen zu achten.

5.1.3 Thermische Ausdehnung von Gasen

Wir betrachten im folgenden eine ideales Gas, bei dem die Wechselwirkung der Atome oder Moleküle völlig vernachlässigbar ist. Diese Annahme gilt immer gut, wenn die Temperatur des Gases weit oberhalb der Siedetemperatur liegt. Eine genaue Definition des idealen Gases wird erst am Ende diesen Abschnittes gegeben.

Gesetz von Gay-Lussac

Bei der Ausdehnung von Gasen durch Erwärmung muß man berücksichtigen, daß ihr Volumen auch sehr stark vom Druck abhängt. Hält man den Druck konstant (*isobare Zustandsünderung*), so erhält man beim Erwärmen eines Gases folgenden Zusammenhang:

$$V(T) = V(T_0) (1 + \gamma \Delta T)$$
 (p = const.) . (5.1.16)

Diesen Zusammenhang nennt man das **Gay-Lussac***sche Gesetz*.⁸ Für die experimentelle Prüfung diesen Zusammenhangs eignet sich die in Abb. 5.9 gezeigte Anordnung, bei der ein mit einem Stempel auf ein Gas ein konstanter Druck ausgeübt wird und für verschiedene Temperaturen das Volumen bestimmt wird.



Abbildung 5.9: (a) Zylinder mit verschiebbarem Stempel. (b) V(T)-Abhängigkeit eines idealen Gases.

Der Volumenausdehnungskoeffizient von Gasen ist wesentlich größer als derjenige von Festkörpern oder Flüssigkeiten. Außerdem haben alle Gase die Eigenschaft, nahezu den gleichen Volumenausdehnungskoeffizienten zu besitzen. Als Mittelwert kann man mit guter Näherung

$$\gamma = \frac{1}{273.15} \,\mathrm{K}^{-1} \quad (5.1.17)$$

angeben. Natürlich gilt Gl.(5.1.16) für reale Gase nur näherungsweise, was man schon daraus ersieht, daß bei $T = -273.15^{\circ}$ C das Gas das Volumen 0 annehmen müßte. Außerdem gehen alle Gase in den flüssigen Zustand über, wenn man sie nur genügend weit abkühlt. Gl.(5.1.16) gilt also nur so lange, wie die Druck und Temperaturverhältnisse so sind, daß das Gas nicht zu nahe an seinem Verflüssigungspunkt herankommt (man hat dann ein ideales Gas vorliegen).

Gesetz von Boyle-Mariotte

Bekanntlich hängt das Volumen von Gasen bei konstanter Temperatur stark vom Druck ab. Wir diskutieren jetzt die Änderung des Gasvolumens bei Änderung des Druckes für konstante Temperatur (*isotherme*

⁸Dieser Zusammenhang wird nach Gay-Lussac (1778 - 1850, das Gesetz stammt aus dem Jahr 1802) benannt, obwohl er von Amontons bereits 1703 aufgestellt wurde.

Zustandsänderung). Da sich die Menge des Gases bei Verringerung des Volumens mit steigendem Druck nicht ändert, muß die Dichte des Gases ansteigen. Der Druck ist also der Dichte ρ eines Gases proportional:

$$p = const. \ \rho = const. \ \frac{m}{V} \quad . \tag{5.1.18}$$

Wenn man die konstante Masse mit in die Konstante einbezieht, erhält man

$$p V = const. = p_1 V_1 = p_2 V_2 = \dots$$
 (T = const.) . (5.1.19)

Gleichung (5.1.18) ist das schon in Kapitel 3 behandelte **Boyle-Mariotte**sche Gesetz.⁹ Es ist in einem weiten Temperaturbereich gültig, sofern die Temperatur des Gases weit oberhalb der Kondensationstemperatur liegt (das Gas verhält sich dann wie ein ideales Gas). In der Nähe der Kondensationstemperatur spielen die Wechselwirkungskräfte zwischen den Gasmolekülen und ihr Eigenvolumen eine nicht zu vernachlässigende Rolle (reales Gas). Man spricht von einem idealen Gas, wenn dies gerade nicht der Fall ist. Das Gesetz von **Boyle-Mariotte** prüft man mit der in Abb. 5.9a gezeigten Vorrichtung, indem man mit verschiedenen Gewichten verschiedene Drucke auf das Gas ausübt und das zugehörige Volumen mißt.

Gesetz von Charles

Wir diskutieren jetzt noch die *isochore Zustandsänderung*, d.h. wir interessieren uns für den Druck in Abhängigkeit der Temperatur bei konstantem Volumen. Hierzu zerlegt man die isochore Zustandsänderung in zwei aufeinanderfolgende Teilschritte. Im ersten Schritt wird das Gas bei konstantem Druck $p(T_0)$ von T_0 auf T erwärmt. Dabei ändert sich das Volumen auf $V(T) = V(T_0)(1 + \gamma T)$. Im zweiten Schritt wird bei konstanter Temperatur T das Volumen auf den Ausgangswert komprimiert. Dabei gilt nach dem **Boyle-Mariotte**schen Gesetz $V(T)p(T_0) = V(T_0)p(T)$. Setzt man den Ausdruck für V(T) ein, so erhält man das Gesetz von **Charles**, das oft auch als zweites Gesetz von **Gay-Lussac** bezeichnet wird:

p(T) =	$p(T_0) (1 + \gamma T)$	(V = const.).	(5.1.20)
--------	-------------------------	---------------	----------

Es beschreibt das Verhalten eines idealen Gases bei konstantem Volumen. Der Volumen- und Druckänderungskoeffizient sind gleich.

Thermodynamische Temperaturskala

Obwohl die Extrapolation von Gl.(5.1.16) zu sehr tiefen Temperaturen unzulässig ist, hat man dennoch aus dem formelmäßigen Verschwinden des Volumens bei $T = -273.15^{\circ}$ C geschlossen, daß es keine tieferen Temperaturen als -273.15° C geben könne. Obwohl der Schluß in dieser Form unzulässig ist, stimmt die Folgerung doch mit den Tatsachen überein, wie später noch erörtert wird. Man hat deshalb den Nullpunkt der Temperaturskala vom Eispunkt des Wasser nach -273.15° C verlegt und bezeichnet die von diesem Punkt an gemessene Temperatur als die *absolute Temperatur T*. Diese Temperaturskala

⁹**Boyle**: 1627 - 1691; **Mariotte**: 1620 - 1684.

ist für wissenschaftliche Zwecke am besten geeignet wid als *thermodynamische Temperaturskala* bezeichnet. Sie wurde vom englischen Physiker **Lord Kelvin** vorgeschlagen wurde. Man zählt daher die absoluten Temperaturen in Einheiten von "K" (Kelvin). Die Temperatur T = 0K bezeichnet den *absoluten Nullpunkt*. Für den Zusammenhang der Temperatur T' auf der Celsius-Skala und der Temperatur T auf der Kelvin-Skala gilt T = T' + 273.15. Temperaturdifferenzen sind auf beiden Skalen gleich, weshalb die obigen Gesetze unabhängig von der verwendeten Temperaturskala gelten.

Verwendet man statt Temperaturdifferenzen absolute Temperaturen, so muß man die Gesetze von **Gay-Lussac** und **Charles** umschreiben. Wir wollen dies für die thermodynamischen Temperaturskala tun. Nimmt man für $T'_0 = 0^{\circ}$ C an, so ergibt sich

Celsius-Skala
$$V(T') = V(0^{\circ}C) \left(1 + \frac{1}{273.15^{\circ}C}T'\right)$$

= $V(0^{\circ}C) \left(\frac{273.15^{\circ}C + T'}{273.15^{\circ}C}\right)$, (5.1.21)

Mit T = T' + 273.15 erhält man dann

Kelvin-Skala
$$V(T) = V_0 \frac{T}{T_0}$$
, (5.1.22)

wobei $V_0 = V(T_0)$ und $T_0 = 273.15$ K ist. Ebenso erhält man

$$p(T) = p_0 \frac{T}{T_0}$$
, (5.1.23)

wobei $p_0 = p(T_0)$.

Gasthermometer



Abbildung 5.10: Schematische Darstellung eines Gasthermometers.

Da der Wärmeausdehnungskoeffizient für alle idealen Gase gleich und unabhänig von der Temperatur ist, bieten sie sich als Füllsubstanzen für Thermometer an. Man nennt diese Thermometer *Gasthermometer*. Ein Gasthermometer besteht aus einem Gasvolumen V, das durch ein mit Quecksilber abgeschlossenen U-Rohr abgeschlossen ist (siehe Abb. 5.10). Da das Quecksilbervorratsgefäß über einen flexiblen Schlauch mit dem U-Rohr verbunden ist, kann man durch Änderung der Höhe des Vorratsgefäßes die Quecksilbersäule so einstellen, daß das Gas immer das gleiche Volumen einnimmt (bis zur Marke A). Die Höhendifferenz Δh ist ein Maß für den Druckunterschied bei den verschiedenen Temperaturen: $\Delta p = p(T) - p(T_0) = \rho_{Hg}g\Delta h$. Mit (5.1.22) und (5.1.23) erhält man die Temperatur

$$T = \frac{p(T) T_0}{p_0} = T_0 \frac{\Delta p + p_0}{p_0} = T_0 \left(\frac{\Delta p}{p_0} + 1\right) = T_0 \left(\frac{\rho_{\text{Hg}} g \Delta h}{p_0} + 1\right) \quad .$$
(5.1.24)

Mit $\rho_{\text{Hg}} = 13.56 \text{ g/cm}^3$, und den bekannten Werten für p_0 , T_0 und der Erdbeschleunigung g kann man durch Messung von Δh die Temperatur T bestimmen.

5.1.4 Stoffmenge – Avogadro-Gesetz

Aufgrund zahlreicher Untersuchungen formulierte im Jahre 1799 der französische Chemiker **Joseph** Louis Proust (1745 - 1826) das *Gesetz der konstanten Proportionen*:

Das Gewichtverhältnis zweier sich zu einer chemischen Verbindung vereinigender Elemente ist konstant.

Manche Elemente sind jedoch in der Lage, mehrere Verbindungen unterschiedlicher Zusammensetzung einzugehen. Deshalb erweiterte im Jahre 1803 der englische Naturforscher **John Dalton** (1766 - 1844) dieses Gesetz zum *Gesetz der multiplen Proportionen*:

Die Gewichtverhältnisse zweier sich zu verschiedenen chemischen Verbindung vereinigender Elemente stehen im Verhältnis einfacher ganzer Zahlen zueinander.

Ein Gesetz, das über die beiden vorhergehenden hinausgeht und diese einschließt, wurde prinzipiell schon 1791 von dem deutschen Chemiker Jeremias Benjamin Richter (1762 - 1807) als das Gesetz der äquivalenten Proportionen erkannt:

Elemente vereinigen sich stets im Verhältnis bestimmter Verbindungsgewichte, sogenannter Äquivalentgewichte oder ganzzahliger Vielfacher dieser Gewichte zu chemischen Bindungen.

Eine einleuchtende Deutung finden diese empirisch gefundenen stöchiometrischen Gesetze durch die *Atomhypothese* von **Dalton** (1808):

Alle Stoffe sind nicht unendlich teilbar, sondern aus kleinsten, chemisch nicht weiter zerlegbaren Teilchen (Atomen) aufgebaut.

Die Aussage der obengenannten stöchiometrischen Gesetze läßt sich in der heutigen Sprache so formulieren: Da bei chemischen Reaktionen die kleinsten Teilchen miteinander in Wechselwirkung treten, setzen sich die Atome im Verhältnis ganzer Zahlen zu Molekülen zusammen.

Die in den Gesetzen genannten Gewichtsverhältnisse (besser Massenverhältnisse) geben dann die Verhältnisse der Massen der miteinander reagierenden Atome an. Weil es bei den stöchiometrischen Rechnungen aber nur auf Massenverhältnisse ankommt, kann man den Atomen bzw. Molekülen eine *relative Atommasse* bzw. *Molekülmasse* zuordnen.

Da Wasserstoff das leichteste Element ist, wurde ihm zunächst willkürlich die relative Masse $m_r = 1$ zugeordnet. Später wurde dann 1/16 der Atommasse des Sauerstoffs und heute 1/12 der Masse des Kohlenstoffisotops ${}_{6}^{12}$ C (Kernladungszahl 6, Massenzahl 12) als relative Atommasseneinheit bezeichnet. Für den Wasserstoff ergab sich dadurch nur eine Veränderung in der dritten Dezimale. Mit Hilfe der relativen Atommasseneinheit können jedem Atom bzw. Molekül durch Vergleich relative Atommassen bzw. Molekülmassen zugeordnet werden:

relative Atommasse
$$A_{\gamma} = \frac{m_{\text{Atom}}}{\frac{1}{12}m{\binom{12}{6}C}}$$
 (5.1.25)

relative Molekülmasse
$$M_{\gamma} = \frac{m_{\text{Molekül}}}{\frac{1}{12}m(_6^{12}C)}$$
 (5.1.26)

Nun kann die Menge eines beliebigen Stoffes entweder durch die Angabe der Stoffmasse oder durch die Anzahl der darin enthaltenen Moleküle, die Teilchenzahl *N*, charakterisiert werden.¹⁰ Benutzt man die Teilchenzahl, so kann man folgende Aussage über zwei Stoffmengen machen: *Zwei Stoffmengen sind gleich, wenn sie die gleiche Anzahl von Molekülen enthalten.* Die Einheit der Stoffmenge ist 1 mol. Sie ist wie folgt definiert:

1 mol ist diejenige Stoffmenge, die die gleiche Teilchenzahl N_A enthält, wie in 12.000 g des Kohlenstoffisotops ${}_6^{12}$ C enthalten sind. Die Teilchenzahl N_A heißt Avogadrokonstante^a oder Loschmidtsche Zahl.^b

^{*a*}Amedeo Avogadro: 1776 - 1856. ^{*b*}J. Loschmidt: 1821 - 1895.

Aus dem Vorangegangenen folgt, daß zwei Stoffmengen gleich sind, wenn ihre Massen im Verhältnis der relativen Atommassen stehen.¹¹ Es folgt demnach also, daß ein Stoff die Stoffmenge 1 mol besitzt, dessen Masse gleich seiner in Gramm gemessenen relativen Molekülemasse ist.

Darüberhinaus fand **Gay-Lusac** im Jahre 1808 bei chemischen Reaktionen von idealen Gasen das *Volumengesetz*:

¹⁰Im folgenden soll der Begriff Molekül auch für die einatomigen Moleküle verwendet werden.

¹¹Hierbei wird allerdings die Massenänderung aufgrund molekularer Bindungsenergien vernachlässigt.

Das Volumenverhältnis gasförmiger Stoffe, die bei chemischen Reaktionen vollständig miteinander reagieren, läßt sich bei gegebener Temperatur und gegebenem Druck durch einfache ganze Zahlen wiedergeben.

Damit geben die Volumenverhältnisse auch die Verhältnisse der Teilchenzahlen an. Hieraus folgt ein wichtiger Sachverhalt, den als erster der italienische Physiker **Amedeo Avogadro** im Jahre 1811 formulierte:

Gleiche Volumina idealer Gase enthalten bei gleichem Druck und gleicher Temperatur die gleiche Anzahl von Molekülen.

Diese Aussage wird als *Molekularhypothese* oder als *Avogadro-Gesetz* bezeichnet. Jedes ideale Gas der Stoffmenge 1 mol erfüllt demnach unter Normalbedingungen das gleiche Volumen, das so genannte *Molvolumen* \mathbb{V}_0 .

Zusammenfassend lassen sich alle Aussagen folgendermaßen zusammenfassen: Gleiche Stoffmengen enthalten die gleiche Anzahl von Teilchen, ihre Massen verhalten sich wie die relativen Molekülmassen und sie nehmen – als ideales Gas – bei gleichem Druck und gleicher Temperatur das gleiche Volumen ein. Für die Stoffmengeneinheit beträgt die Teilchenzahl N_A und das Molvolumen \mathbb{V}_0 .

Experimentell ergeben sich für N_A und \mathbb{V}_0 folgende Werte:

Avogadrokonstante $N_A = 6.002 \times 10^{23} \text{ 1/mol}$ (5.1.27) Molvolumen $\mathbb{V}_0 = 22.4 \text{ Liter/mol}$. (5.1.28)

Hierbei wurden für das Molvolumen Normalbedingungen ($p = 1.013 \times 10^5$ Pa, T = 273K) vorausgesetzt.

Beispiele:

- 1. Die Stoffmenge 1 mol Wasser besitzt die Masse 18 g und besteht aus 6.022×10^{23} H₂O-Molekülen.
- 2. Aus der Dichte von Gasen läßt sich das Molvolumen durch Umsetzung auf die Stoffmenge von 1 mol leicht ausrechnen. Mit der Dichte von Wasserstoff $\rho_{\rm H_2} = 0.0899$ g/1 und der Molmasse $M_{\rm H_2} = 2.016$ g erhält man

$$\mathbb{V}_{0,\mathrm{H}_2} = \frac{\mathbb{M}_{\mathrm{H}_2}}{\rho_{\mathrm{H}_2}} = \frac{2.016 \text{ g/mol}}{0.0899 \text{ g/mol}} = 22.4 \text{ l/mol}$$
 (5.1.29)

3. Mit Hilfe der Avogadrokonstanten lassen sich die tatsächlichen Atom- bzw. Molekülmassen berechnen. Für die Masse des Wasserstoffmoleküls erhält man

$$m_{\rm H_2} = \frac{M_{\rm H_2}}{N_A} = 3.34 \times 10^{-24} {\rm g}$$
 (5.1.30)

Da ein Wasserstoffmolekül aus zwei Wasserstoffatomen besteht, beträgt die Masse des Wasserstoffatoms $m_{\rm H} = 1.67 \times 10^{-24}$ g.

5.1.5 Allgemeine Zustandsgleichung von Gasen

Ein Mol eines idealen Gases sei in das Volumen \mathbb{V}_0 beim Druck p_0 und der Temperatur T_0 eingeschlossen. Wir betrachten nun eine Zustandsänderung $p_0, \mathbb{V}_0, T_0 \Rightarrow p, \mathbb{V}, T$ und zerlegen diese Änderung in zwei Schritte (siehe Abb. 5.11):

• Im ersten Schritt erfolgt eine Erwärmung von T_0 auf T, wobei der Druck p_0 konstant gehalten wird. Nach **Gay-Lussac** gilt

$$\mathbb{V}_T = \mathbb{V}_0 \frac{T}{T_0} \quad . \tag{5.1.31}$$

• Im zweiten Schritt wird bei konstanter Temperatur T von p_0 auf p komprimiert. Nach **Boyle-Mariotte** gilt

$$p_0 \mathbb{V}_T = p \mathbb{V} \quad . \tag{5.1.32}$$



Abbildung 5.11: Schematische Darstellung der Schritte zur Erzeugung einer Zustandsänderung $p_0, \mathbb{V}_0, T_0 \Rightarrow p, \mathbb{V}, T$.

Einsetzen von (5.1.32) in (5.1.31) ergibt

$$\frac{p \mathbb{V}}{T} = \frac{p_0 \mathbb{V}_0}{T_0} \quad . \quad (5.1.33)$$

Die Kombination der drei Zustandsgrößen p, V und T liefert also eine Konstante. Ihr Zahlenwert lautet

$$R := \frac{p_0 \,\mathbb{V}_0}{T_0} = 8.3143 \,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol}\,\mathrm{K}}$$
 . (5.1.34)

Sie wird als allgemeine Gaskonstante bezeichnet. Damit erhält man

$$p \mathbb{V} := RT$$
 . (5.1.35)

Für eine beliebige Stoffmenge mit der Molzahl

$$\nu = \frac{\text{Masse des Gases}}{\text{Molmasse}} = \frac{m}{M} = \frac{N}{N_A}$$
, (5.1.36)

wobei N die Gesamtzahl der Moleküle ist, führt dies mit

$$\frac{\mathbb{V}}{V} = \frac{\mathbb{M}}{m} \tag{5.1.37}$$

auf die allgemeine Gasgleichung

$$p V = \nu R T$$
 . (5.1.38)

Eine graphische Darstellung der allgemeinen Gasgleichung ist in Abb. 5.12 gegeben.



Abbildung 5.12: Graphische Darstellung der allgemeinen Gasgleichung. Die durchgezogenen Kurven zeigen die p(V)-Kurven für konstante Temperaturen (Isothermen), die gestrichelten Linien stellen Isobaren (Linien konstanten Druckes) dar.

Durch Messung von Druck und Temperatur läßt sich mit dieser Gleichung bei bekannter Dichte ρ des Gases dessen molare Masse M bestimmen:

$$\mathbb{M} = \frac{m}{V} \frac{RT}{p} = \rho \frac{RT}{p} \quad . \tag{5.1.39}$$

Benutzt man $\nu = N/N_A$ so kann man die allgemeine Gasgleichung in folgende Form bringen

$$p V = \nu R T = N \frac{R}{N_A} T = N k_B T$$
 . (5.1.40)

Hierbei ist $k_B = R/N_A = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K die **Boltzmann**konstante. In dieser Form stellt die allgemeine Gasgleichung eine Beziehung zwischen makroskopischen (p, V, T) und mikroskopischen Größen (N) dar. Eine nähere Diskussion dieses Zusammenhangs folgt bei der Behandlung der kinetischen Gastheorie.

Beispiel: Druck in Gasflasche

Es sollen 64 kg Sauerstoff bei 300 K in einer Druckflasche mit V = 3001 komprimiert sein. Wie groß ist der Druck in der Gasflasche ? Aus der allgemeinen Gasgleichung folgt $p = \nu RT/V$. Zur Berechnung von p muß noch ν bestimmt werden. Es ist $\nu = m/\mathbb{M}$ und $\mathbb{M} = 32$ g/l, d.h. $\nu = 64/32 \times 10^{-3} = 2000$. Damit ergibt sich der Druck in der Gasflasche zu $p = 2000 \cdot 8.3143 \cdot 300/0.3 = 1.66 \times 10^7$ Pa = 166 bar.

Reale Gase

Die Gleichung $p V = \nu R T$ kann nicht streng gültig sein. Bei festgehaltenem Druck würde sie zu der Folgerung führen, daß V beim absoluten Nullpunkt verschwinden würde. Diese Folgerung ist sicherlich nicht richtig. Um ihr zu entgehen, hat **van der Waals**¹² das Eigenvolumen der Moleküle berücksichtigt und schrieb zunächst

$$p(b-V) = \nu RT , (5.1.41)$$

wobei b eine von der Natur des Gases abhängige Konstante ist. Dadurch reduziert sich das Volumen bei T = 0 K auf den Wert b. Es ist aber weiter zu beachten, daß die Moleküle eines realen Gases sich gegenseitig anziehen. Dieser gegenseitigen Anziehung trägt **van der Waals** dadurch Rechnung, indem er zum Druck p ein Glied a/V^2 addiert, dessen spezielle Form durch theoretische Betrachtungen gewonnen werden kann. Damit ergibt sich die **van der Waals**sche Zustandsgleichung realer Gase zu

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right) (V - b) = \nu R T$$
 . (5.1.42)

Man erkennt, daß sich für große Werte von T und nicht allzu hohe Drucke p die **van der Waals**sche Zustandsgleichung realer Gase auf die oben abgeleitete Zustandsgleichung idealer Gase reduziert. In Abb. 5.13 ist die **van der Waals**sche Zustandsgleichung (Isothermenschar) für Kohlendioxid graphisch dargestellt.

Die beiden Konstante *a* und *b* lassen sich interpretieren, wenn man den molekularen Aufbau der Materie berücksichtigt. Zwischen den Molekülen eines Gases wirken zwischenmolekulare Kräfte, sogenannte **Van-der-Waals**-Kräfte. Da diese Kräfte kurzreichweitig sind, machen sie sich erst bei großen Gasdichten bemerkbar. Auf ein Molekül im Innenbereich des Gasvolumens wirken diese Kräfte im zeitlichen Mittel nach allen Seiten gleichmäßig. In der Nähe der Wand erfahren die Moleküle eine resultierende Kraft nach innen. Die auf ein einzelnes Molekül wirkende Kraft *f* ist proportional zur Anzahl der Moleküle in einem Raumelement, dessen Größe durch die Reichweite der Van-der-Waals-Kraft gegeben ist, d.h. *f* \propto Dichte. Andererseits ist der Druck auf die Wand ebenso proportional zur Teilchenzahl und damit der sogenannte Binnendruck p_i proportional zur ρ^2 :

¹²in seiner Doktorarbeit aus dem Jahre 1869.



Abbildung 5.13: Isothermen von Kohlendioxid.

$$p_i = \frac{a}{\mathbb{V}} \quad \propto = \quad \rho^2 \quad . \tag{5.1.43}$$

Die Konstante *b* wird durch das endliche Volumen der Gasmoleküle bestimmt, das dann nicht mehr für die freie Bewegung der Gasmoleküle zur Verfügung steht. Es beträgt etwa das Vierfache des Eigenvolumens der Gasmoleküle beträgt:

$$b \simeq 4 V_{\text{Molekül}}$$
 (5.1.44)

Die Konstanten a und b hängen von der Stoffmenge ab. Um die Werte verschiedener Gase vergleichen zu können, formt man Gl.(5.1.42) so um, daß die Größen a, b und V auf die Stoffmenge bezogen sind. Es ergibt sich

$$\left(p + \frac{a/\nu^2}{\mathbb{V}^2}\right) (\mathbb{V} - b/\nu) = \nu R T$$
 (5.1.45)

Die folgende Tabelle gibt die Werte für a/ν^2 und b/ν für einige Gase an.

Gas	a/ u^2 [atm cm^6 / mol^2]	b/ u [cm ³ / mol]
Wasserstoff Stickstoff Sauerstoff Kohlendioxid Wasserdampf	$egin{array}{c} 0.19 imes 10^6 \ 1.31 imes 10^6 \ 1.36 imes 10^6 \ 3.61 imes 10^6 \ 5.87 imes 10^6 \end{array}$	$23.0 \\ 27.3 \\ 31.6 \\ 42.8 \\ 33.2$

Da die **van der Waals**sche Zustandsgleichung die realen Gase dadurch charakterisiert, daß das Eigenvolumen der Moleküle und die gegenseitige anziehende Wechselwirkung endlich ist, kann man folgende Definition für ein ideales Gas geben: *Ein ideales Gas ist dadurch ausgezeichnet, daß seine Moleküle verschwindend klein Volumen besitzen und verschwindend kleine Kräfte aufeinander ausüben.*

Eine ausführliche Diskussion der Eigenschaften von realen Gasen erfolgt später.

Anmerkung zur Definition der absoluten Temperatur

Auf den ersten Blick ist es unzweifelhaft auffallend, daß es eine tiefste Temperatur geben soll, während einer Temperatursteigerung keine Grenzen gesetzt sind. Diese scheinbare Besonderheit hängt mit der gewählten Temperaturdefinition zusammen. Man hätte ebenso gut etwa ln T als Temperatur τ bezeichnen können. Über die spezielle Wahl entscheidet nur die Zweckmäßigkeit oder die historische Entwicklung. Würden wir die Temperaturskala τ benutzen, so hätten wir statt $V = (V_0/T_0)T$ die Gleichung $V = (V_0/T_0) \exp(\tau)$ und es würde dann der absoluten Temperatur T = 0 K die Temperatur $\tau = -\infty$ entsprechen. Das scheinbar kleine Temperaturinterval von 0 bis 1 K ist dann auf der τ -Skala unendlich ausgedehnt. Tatsächlich läßt sich die Temperatur T = 0 K nur asymptotisch erreichen.

5.2 Die Hauptsätze der Wärmelehre

5.2.1 Wärmemenge und Wärmekapazität

Bei den bisherigen Ausführungen wurden die Auswirkungen einer Temperaturänderung auf Druck und Volumen eines Körpers betrachtet, ohne der Frage nachzugehen, wie eine Temperaturerhöhung zustandekommt. Erfahrungsgemäß gibt es dafür zwei Möglichkeiten:

- Die Temperatur eines Körpers läßt sich dadurch erhöhen, daß man ihm eine Wärmemenge Q zuführt. Dies geschieht durch den Wärmeaustausch in einem Wärmebad (z.B. in einem Kalorimetermeßgerät oder in den heißen Gasen eines Bunsenbrenners).
- Temperaturerhöhungen eines Körpers lassen sich dadurch erreichen, daß man ihm von außen mechanische Arbeit zuführt (z.B. in Form von Reibungsarbeit oder bei der Kompression von Gasen in Form von Volumenarbeit).¹³

Früher nahm man an, daß die Wärme ein "materieller" Stoff ist, der vom wärmeren zum kälteren Körper fließt (niemals umgekehrt). Die Tatsache, daß man die Temperatur eines Körpers durch mechanische Arbeit erhöhen kann, legt aber die Vermutung nahe, daß die beim Wärmeaustausch umgesetzte Wärmemenge eine besondere Form der Energie ist (siehe unten und Abschnitt 1.9.2). Dennoch benutzte man bis vor kurzem für die Wärmemenge Q die Einheit

$$[Q] = 1 \text{ Kalorie} = 1 \text{ cal} \quad . \tag{5.2.1}$$

1 cal ist die Wärmemenge, die notwendig ist, um 1 g Wasser von 14.5 auf 15.5°C zu erwärmen. Im Internationalen Einheitensystem (SI) wurde aber diese Einheit aufgegeben. Wärmemengen werden heute in Einheiten der Arbeit W angegeben,¹⁴ d.h.

$$[Q] = 1$$
 Joule = 1 J . (5.2.2)

Will man also die Temperatur eines Körpers um ΔT erhöhen, muß man ihm die Wärmemenge ΔQ zuführen. Man stellt im Experiment fest, daß die für eine bestimmte Temperaturerhöhung ΔT notwendige Wärmemenge ΔQ proportional zur Masse des Körpers ist. Hierbei ist die notwendige Wärmemenge für verschiedene Materialien unterschiedlich. Man stellt außerdem fest, daß die erzielte Temperaturänderung ΔT proportional zur zugeführten Wärmemenge ΔQ ist. Das Verhältnis

$$\frac{\Delta Q}{\Delta T} = C \tag{5.2.3}$$

bezeichnet man als *Wärmekapazität* eines Körpers. In dieser Definition ist die Wärmekapazität von der Masse oder Stoffmenge des Körpers abhängig. Bezieht man die Wärmekapazität auf ein Mol eines Stoffes, so erhält man die *Molwärme*

¹³Hierbei müssen nichtkonservative Kräfte wirken, siehe Abschnitt 1.9.2.

¹⁴Der genaue Zusammenhang zwischen Wärme und anderen Energieformen wie z.B. mechanischer Energie, wird weiter unten hergestellt.

$$C_{\rm mol} = \frac{\Delta Q}{\Delta T} \frac{M}{m}$$
(5.2.4)

mit der Einheit $[C_{mol}] = 1$ J/K mol. Ebenso kann man die Wärmekapazität auf ein Gramm eines Stoffes beziehen und erhält damit die *spezifische Wärmekapazität*

$$c = \frac{\Delta Q}{m\Delta T} \quad . \tag{5.2.5}$$

Zwischen C_{mol} und c besteht der Zusammenhang

$$C_{\rm mol} = \mathbb{M} c \quad , \tag{5.2.6}$$

wobei M die molare Masse ist. Typische Werte für die spezifische Wärme einiger Stoffe bei 298 K sind:

Stoff	Ag	Au	Fe	Al	Cu	H_2O	NaCl
spez. Wärme bei 298 K	0.236	0.129	0.447	0.879	0.377	4.184	0.879
(J/mol K)	25.5	25.4	25.1	24.3	24.5	75.2	51.5

Bei der Diskussion der spezifischen Wärmekapazität muß man unterscheiden, ob die Temperaturänderung bei konstantem Volumen oder bei konstantem Druck erfolgt. Man beobachtet, daß bei konstantem Druck die spezifische Wärmekapazität c_p immer größer als die entsprechende Wärmekapazität c_V ist, die unter Konstanthaltung des Volumens gemessen wird:

$$c_p > c_V$$
 . (5.2.7)

Man nennt den Quotienten der beiden spezifischen Wärmekapazitäten

$$\kappa = \frac{c_p}{c_V} \quad . \tag{5.2.8}$$

 κ ist hierbei eine dimensionslose Zahl.¹⁵ Für Festkörper und Flüssigkeiten ist $c_p \simeq c_V$, da Festkörper und Flüssigkeiten nur eine kleine thermische Ausdehnung zeigen. Für Gase ist allerdings $\varphi \neq c_V$.

¹⁵Der Wert von c_p ist größer, da man bei Konstanthaltung des Druckes eine Volumenänderung bekommt, für die ein Teil der zugeführten Wärmemenge aufgewendet werden muß. Für die Volumenänderung muß Arbeit, also mechanische Energie, aufgewendet werden, die dann zur Temperaturerhöhung fehlt. Man bekommt somit ein kleineres ΔT und damit einen größeren Wert für die spezifische Wärmekapazität. Eine genauere Diskussion erfolgt in Abschnitt 5.2.3.

Vergleicht man die spezifischen Wärmekapazitäten von verschiedenen Metallen, so erkennt man, daß *c* umso kleiner ist, je größer die relative Atommasse A_{γ} ist. Das Produkt aus der spezifischen Wärme und der Molmasse M, d.h. die Molwärme oder molare Wärmekapazität, ist dagegen nahezu konstant und hat einen Wert von etwa 6 cal/mol K bzw. 25 J/mol K (siehe obige Tabelle). Diese Regel wurde von **Dulong** und **Petit** aufgestellt. Dadurch, daß man die Wärmekapazität nicht auf die gleiche Masse, sondern auf die gleiche Anzahl von Atomen bezieht, erhält man für fast alle Stoffe denselben Wert. Bei chemischen Verbindungen muß man durch die Zahl der Atome dividieren, um auf den **Dulong-Petit**schen Wert zu kommen (**Neumann-Kopp**sche Regel). Zum Beispiel hat NaCl eine molare Wärmekapazität von 51.5 J/mol K, also etwa den zweifachen Wert des **Dulong-Petit**schen Werts (2 Atome).



Abbildung 5.14: Temperaturabhängigkeit der molaren spezifischen Wärmekapazität $C_{\text{mol},V}$ für Blei, Kupfer, Aluminium und Kohlenstoff.

Für einige Stoffe (z.B. C, Si) besteht bei 298 K eine große Abweichung zwischen dem gemessenen Wert der molaren Wärmekapazität und dem **Dulong-Petit**schen Wert (siehe Abb. 5.14). Die molare Wärmekapazität dieser Stoffe nähert sich dem **Dulon-Petit**schen Wert erst bei wesentlich höheren Temperaturen an. Eine genaue Betrachtung im Rahmen der Festkörperphysik zeigt, daß der **Dulong-Petit**sche Wert nur ein Grenzwert für genügend hohe Temperaturen ist. Bei tiefen Temperaturen führen Quanteneffekte zu einer starken Abnahme der molaren Wärmekapazität. Bei sehr tiefen Temperaturen kann die Wärmekapazität gut mit einer T^3 -Abhängigkeit beschrieben werden (**Debye**-Gestz).

Messung der spezifischen Wärmekapazität mit Hilfe eines Kalorimeters

Will man die spezifische Wärmekapazität eines Körpers der Masse m_1 und Temperatur T_1 bestimmen, so bringt man ihn in einem Kalorimeter (siehe Abb. 5.15) in Kontakt mit einer Eichsubstanz der Masse m_2 und Temperatur T_2 , deren Wärmekapazität c_2 gut bekannt ist. Als Eichsubstanz nimmt man häufig Wasser (dies ist historisch bedingt, da die Wärmemenge 1 cal anhand von Wasser festgelegt wurde). Zwischen den beiden Körpern wird solange Wärme ausgetauscht, bis sie die gleiche Temperatur, die Mischungstemperatur T_M , besitzen. Bei einer genauen Betrachtung muß ferner die spezifische Wärmekapazität c_g des Gefäßes mit der Masse m_g berücksichtigt werden. Die Wärmemenge, die vom Testkörper aufgenommen bzw. abgegeben wird, muß von der Eichsubstanz und von Gefäß abgegeben bzw. aufgenommen werden. Das heißt, es muß gelten

$$c_1 m_1 (T_1 - T_M) = (c_g m_g + c_2 m_2) (T_M - T_1)$$
 (5.2.9)

Auflösen nach c_1 ergibt

$$c_1 = \frac{c_g m_g + c_2 m_2}{m_1} \frac{T_M - T_1}{T_1 - T_M} \quad .$$
 (5.2.10)

Die Wärmekapazität $c_g m_g$ des Kalorimeters wird dabei auch als "Wasserwert" des Kalorimeters bezeichnet, da die Wärmekapazität ursprünglich relativ zu der des Wassers (d.h. in cal/K) angegeben wurde.



Abbildung 5.15: Bestimmung der spezifischen Wärmekapazität mit Hilfe eines Kalorimeters.

Äquivalenz von Wärme und Energie

Wir haben oben bereits diskutiert, daß es sich bei der Wärme, da sie sich durch Arbeit erzeugen läßt, um eine Form der Energie handelt. Wenn dies der Fall ist, muß eine bestimmte Arbeit, wenn sie in Wärme umgewandelt wird, immer dieselbe Wärmemenge ergeben und zwar unabhängig davon, wie die Umwandlung vor sich geht. Das bedeutet, zwischen der in Kalorien gemessenen Wärme und der zu ihrer Erzeugung aufgewendeten Arbeit muß ein festes Zahlenverhältnis existieren.

Die Temperaturerhöhung eines Körpers aufgrund der Zuführung von mechanischer Arbeit wurde erstmals im Jahre 1842 durch den englischen Physiker **James Prescott Joule**¹⁶ gemessen. Er baute eine Maschine, bei der ein in Wasser der Masse m eingetauchtes Schaufelrad durch ein langsam heruntersinkendes ($E_{kin} \simeq 0$) Massenstück der Masse M in Bewegung gesetzt wurde (siehe Abb. 5.16). Beim Rühren wird dabei Arbeit gegen die Reibungskräfte geleistet, was zu einer Temperaturerhöhung ΔT führt, die sich mit einem Thermometer bestimmen läßt. Man erhält also das gleiche Ergebnis, wie wenn man eine Wärmemenge ΔQ zugeführt hätte. Damit gilt

$$E_{\text{pot}} = M g h = c m \Delta T = \Delta Q \quad . \tag{5.2.11}$$

Durch dieses Experiment war es somit möglich, den Zusammenhang zwischen mechanischer Arbeit und Wärmemenge, das mechanische Wärmeäquivalent, zu bestimmen. Das Experiment ergab

¹⁶James Prescott Joule: 1818 - 1899.



Abbildung 5.16: Anordnung von Joule zur Messung des mechanischen Wärmeäquivalents.

$$1 \text{ Joule} = 0.2388 \text{ cal}$$

oder $1 \text{ cal} = 4.1868 \text{ Joule}$ (5.2.12)

Die Wärmeenergie und die mechanische Energie sind also gleichwertig (äquivalent). Wärme ist eine Energieform. Das *mechanische Wärmeäquivalent* drückt diese Gleichwertigkeit aus. Da nicht nur mechanische Energie sondern auch elektrische Energie in Wärme umgewandelt werden kann, muß es auch ein elektrisches Wärmeäquivalent geben. Da 1 Joule = 1 Wattsekunde ist, ist der Zahlenwert für diese beiden Einheiten gleich.

Ebenfalls im Jahre 1842 leitete **Robert Mayer**¹⁷ das mechanische Wärmeäquivalent aus der Differenz des spezifischen Wärmen der Gase ab (siehe hierzu Abschnitt 5.2.3).

Mit der Wärmeenergie oder thermische Energie läßt sich der in Kapitel 1 aufgestellte Energiesatz erweitern:

Die Summe aus mechanischer, elektrischer und thermischer Energie ist in einem abgeschlossenen System konstant.

5.2.2 Der 1. Hauptsatz der Wärmelehre

Im letzten Abschnitt wurde gezeigt, daß die Temperatur T eines Körpers entweder durch Zufuhr einer Wärmemenge ΔQ oder durch Zufuhr mechanischer Arbeit ΔW erhöht werden kann. Unter Zugrundelegung dieses Sachverhaltes formulierte **Hermann von Helmholtz**¹⁸ im Jahre 1847 in Erweiterung des Energiesatzes der Mechanik den *1. Hauptsatz der Wärmelehre*, der eine Erhaltung der Energie auch bei Einbeziehung kalorimetrischer Prozesse postuliert und dessen Gültigkeit nur anhand der Erfahrung überprüft werden kann:

¹⁷**Robert Mayer**: 1814 - 1878.

¹⁸Hermann von Helmhotz: 1821 - 1894.

Bei einem Körper bewirkt die Zufuhr einer Wärmemenge ΔQ oder einer mechanischen Arbeit ΔW eine Erhöhung seiner inneren Energie ΔU .

$\Delta Q + \Delta W$	$V = \Delta U$. (5.2.13)
-----------------------	----------------	------------

Da die Zufuhr einer Wärmemenge oder einer mechanischen Arbeit die Temperatur des Körpers erhöht, muß seine innere Energie ein Maß für seine Temperatur sein. In der Tat wird weiter unten gezeigt, daß im Rahmen der kinetischen Gastheorie bei einem idealen Gas – aufgefaßt als ein System von starren Kugeln – die Temperatur mit der Translationsenergie der Moleküle verknüpft ist. Die innere Energie ist also eine weitere Zustandsgröße eines Körpers.

5.2.3 Zustandsänderungen idealer Gase

In einem Zylinder befindet sich 1 Mol eines idealen Gases (siehe Abb. 5.17). Soll das Volumen V mit Hilfe eines Stempel um dV verkleinert werden, muß von außen die Arbeit dW aufgebracht werden:

$$dW = f \, ds = p \, A \, ds = -p \, dV$$
 . (5.2.14)

Die Zuführung äußerer Arbeit führt zu einer Volumenabnahme (negatives Vorzeichen in (5.2.14)), d.h. am Gas wird Volumenarbeit verrichtet. Ist dW > 0, so wird von außen Arbeit zugeführt, ist dW < 0, so gibt das System dagegen nach außen Arbeit ab. Die Änderung der inneren Energie ist gegeben durch¹⁹

$$dU = dQ + dW = dQ - pdV {.} (5.2.15)$$

Wir betrachten im folgenden isochore Zustandsänderungen (V = const.), isobare Zustandsänderungen (p = const.), isotherme Zustandsänderungen (T = const.) und adiabatische Zustandsänderungen (dQ = 0).

Isochore Zustandsänderung

Nach Gay-Lussac gilt

$$p(T) = p_0 \frac{T}{T_0} \quad . \tag{5.2.16}$$

Der Druck steigt also linear mit der Temperatur an. Der 1. Hauptsatz lautet in diesem Fall

$$dU = dQ \quad , \tag{5.2.17}$$

¹⁹Im folgenden sollen immer infinitesimale Änderungen betrachtet werden, so daß die Differenzen ΔU , ΔQ und ΔW durch differentielle Größen dU, dQ und dW ersetzt werden können.



Abbildung 5.17: Änderung eines Gasvolumens über einen Stempel, auf den die Kraft F wirkt.

da dV = 0 ist. Für die Molwärme bei konstantem Volumen $C_{\rm mol,V}$ ergibt sich

$$C_{\text{mol},V} = \frac{dQ}{dT}|_{V} = \frac{dU}{dT}|_{V} \quad .$$
(5.2.18)

Damit ergibt sich für die Änderung der inneren Energie

$$dU = C_{\text{mol},V} dT = c_V \mathbb{M} dT \quad . \tag{5.2.19}$$

Bei einem isochoren Prozeß führt also die gesamte zugeführte Wärmemenge zu einer Erhöhung der inneren Energie. Es resultiert sowohl eine Druck- als auch eine Temperaturerhöhung.

Isobare Zustandsänderung

Hier gilt nach Gay-Lussac

$$V(T) = V_0 \frac{T}{T_0} {.} {(5.2.20)}$$

Das Volumen steigt also linear mit der Temperatur an. Da bei einer isobaren Zustandsänderung die Gasmenge unter konstantem Druck steht, dehnt sie sich aus, indem sie etwa den Kolben des Zylinders vor sich herschiebt. Die zur Temperaturerhöhung notwendige Wärmemenge $dQ_p = C_{\text{mol},p} dT$ ist größer als die entsprechende Wärmemenge $dQ_V = C_{\text{mol},V} dT$ bei isochorer Zustandsänderung.

Nach dem 1. Hauptsatz gilt:

$$dQ = dU + pdV , \qquad (5.2.21)$$

das heißt, die zugeführte Wärmemenge führt jetzt sowohl zu einer Temperaturerhöhung und damit einer Erhöhung der inneren Energie, als auch durch die Expansion des Gases zur Abgabe von Volumenarbeit pdV. Ist die zugeführte Wärmemenge gerade so groß, daß sich die Temperatur um dT ändert, so läßt sich diese zusätzliche Volumenarbeit pdV aus der idealen Gasgleichung zu²⁰

$$p(V + dV) = R(T + dT)$$
(5.2.22)

berechnen. Da ebenso pV = RT gilt ergibt sich für die Differenz

$$p \, dV = R \, dT \quad . \tag{5.2.23}$$

Nimmt man nun an, daß die gesamte bei konstantem Druck zusätzlich zugeführte Wärmemenge $dQ = dQ_p - dQ_V = (C_{\text{mol},p} - C_{\text{mol},V})dT$ in diese Volumenarbeit umgesetzt wird, so ergibt sich

$$(C_{\rm mol,p} - C_{\rm mol,V}) dT = R dT$$
 (5.2.24)

oder

$$C_{\rm mol,p} - C_{\rm mol,V} = R$$
 . (5.2.25)

Aus dieser Beziehung leitete **Robert Mayer** das mechanische Wärmeäquivalent ab, indem er experimentell die Differenz $(C_{\text{mol},p} - C_{\text{mol},V})$ in cal/mol·K bestimmte und mit dem Zahlenwert für R in J/mol·K verglich.

Gay-Lussacscher Überströmversuch

Die soeben gemachte Annahme, daß die bei einer isobaren gegenüber einer isochoren Zustandsänderung mehr zugeführte Wärmemenge dQ' ganz in Volumenarbeit pdV umgesetzt wird, ist gleichbedeutend mit der Aussage, daß die Zunahme der inneren Energie in beiden Fällen die gleiche ist. Das heißt, die Änderung der inneren Energie dU ist unabhängig davon, ob eine Temperaturänderung dT mit einer Volumenänderung dV verbunden ist oder nicht.

Diese Aussage läßt sich mit dem **Gay-Lussac**schen Überströmversuch nachprüfen (siehe Abb. 5.18). Dabei befindet sich in der einen Hälfte eines abgeteilten Gefäßes ein ideales Gas unter einem bestimmten Druck. Die andere Hälfte des Gefäßes soll zunächst völlig leer sein. Öffnet man nun das Ventil zwischen den zwei Hälften, so verteilt sich das Gas gleichmäßig auf das gesamte Volumen des Gefäßes. Es nimmt zwar jetzt ein größeres Volumen ein, hat aber beim Überströmen keine mechanische Arbeit verrichtet: dW = 0. Da auch von außen keine Wärmemenge übertragen wurde (dQ = 0), ist damit dU = 0. Das heißt, die innere Energie hat sich beim Überströmen nicht geändert. Als Erbenis dieses Versuches findet man, daß auch die Temperatur des Gases gleich bleibt. Daraus kann man folgende Schluß ziehen: *Bei idealen Gasen ist die innere Energie unabhängig vom Volumen, sie hängt nur von der Temperatur ab*²¹

$$U = U(T) = c_v \mathbb{M} T + const.$$
 1 Mol ideales Gas . (5.2.26)

 $^{^{20}}$ da wir eine Stoffmenge der Größe 1 Mol betrachten, ist $\nu = 1.$

²¹Bei realen Gasen muß bei Volumenänderungen aufgrund der zwischen den Molekülen wirkenden Wechselwirkungskräfte Arbeit geleistet werden, so daß dieser einfache Zusammenhang nicht mehr gilt.



Abbildung 5.18: Gay-Lussacscher Überströmversuch.

Isotherme Zustandsänderung

Aufgrund der Zustandsgleichung pV = RT = const. ergeben sich im pV-Diagramm bei konstanter Temperatur für die p(V)-Kurven Hyperbeln (siehe z.B. Abb. 5.12). Um eine isotherme Zustandsänderung durchzuführen, bringt man die Gasmenge – eingeschlossen in einen Zylinder mit verschiebarem Kolben – in Kontakt mit einem Wärmebehälter konstanter Temperatur. Dann lautet der 1. Hauptsatz

$$dU = dQ + dW = 0 \Rightarrow dQ = -dW = p \, dV \quad . \tag{5.2.27}$$

Während eine Expansion (dV > 0) durch Zuführung von Wärme bewirkt wird (dQ > 0), wird eine Kompression (dV < 0) mit einer Wärmeabgabe (dQ < o) verbunden. Die von außen zugeführte Wärme dQ wird also in Volumenarbeit pdV umgewandelt und umgekehrt.

Adiabatische Zustandsänderung

Bei adiabatischen Zustandsänderungen findet kein Wärmeaustausch mit der Umgebung statt (dQ = 0). Dies kann entweder durch vollkommene Isolierung oder durch einen schnellen Ablauf der Prozesse, so daß kein Temperaturausgleich mit der Umgebung einsetzen kann, erreicht werden. Der erste Hauptsatz lautet in diesem Fall

$$dU = dW = -p \, dV \quad . \tag{5.2.28}$$

Bei Expansion erfolgt (dV > 0) erfolgt eine Abkühlung (dU < 0), während bei einer Kompression (dV < 0) eine Erwärmung (dU > 0) erfolgt. Es wird innere Energie in mechanische Arbeit umgewandelt und umgekehrt. Wegen der mit adiabatischen Zustandsänderungen verbundenen Temperaturänderungen verlaufen Adiabaten im pV-Diagramm steiler als Isothermen (siehe hierzu Abb. 5.19).

Um die Zustandsgleichung für adiabatische Zustandsänderungen abzuleiten, betrachten wir wieder 1 Mol eines idealen Gases, das sich in einem durch einen Stempel variierbaren Volumen V unter dem Druck pbefindet. Der 1. Hauptsatz lautet mit $dU = C_{mol,V}dT$



Abbildung 5.19: Adiabaten (durchgezogene Linien) und Isothermen (gepunktete Linien) eines idealen Gases.

$$dU + p \, dV = C_{\text{mol},V} \, dT + p \, dV = 0 \quad . \tag{5.2.29}$$

Mit Hilfe der Zustandsgleichung pV = RT läßt sich p eliminieren und man erhält

$$C_{\rm mol,V} dT + \frac{r T}{V} dV = 0 . (5.2.30)$$

Trennung der Variablen und Integration liefert

$$\int_{T_0}^{T} \frac{dT}{T} = -\frac{R}{C_{\text{mol},V}} \int_{V_0}^{V} \frac{dV}{V}$$
(5.2.31)

und damit

$$\ln \frac{T}{T_0} = -\frac{R}{C_{\rm mol,V}} \ln \frac{V}{V_0} = \ln \left(\frac{V_0}{V}\right)^{R/C_{\rm mol,V}} .$$
(5.2.32)

Also ist

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{V_0}{V}\right)^{R/C_{\text{mol},V}} .$$
(5.2.33)

Ersetzt man ferner R durch $C_{\text{mol},p} - C_{\text{mol},V}$ und benutzt $\kappa = C_{\text{mol},p}(C_{\text{mol},V})$, so erhält man

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{V_0}{V}\right)^{\kappa-1} \tag{5.2.34}$$

und damit die die Poisson- oder Adiabatengleichung

$$T V^{\kappa-1} = T_0 V_0^{\kappa-1} = const = K_1$$
 . (5.2.35)

Um den Zusammenhang zwischen p und V zu bekommen, ersetzt man T durch pV/R und erhält

$$p V^{\kappa} = const = R K_1 = K_2$$
 . (5.2.36)

Die Kurven $pV^{\kappa} = const$ werden als Adiabaten bezeichnet.

In Kapitel 4, Abschnitt 4.2.3, wurde bereits darauf hingewiesen, daß es sich bei Schallschwingungen um adiabatische Prozesse handelt. Das Auftreten der Größe κ im Ausdruck für die Schallgeschwindigkeit $(v = \sqrt{\kappa p/\rho})$ wird mit den jetzigen Betrachtungen verständlich.

Bestimmung von κ mit der Methode nach Ruechard:

Wir betrachten die in Abb. 5.20a gezeigte Apparatur, bei der ein Schwingkolben in einem auf einen Gasbehälter mit Volumen V_0 aufgebrachtes Glasrohr hin- und herschwingen kann. Die Gleichgewichtslage des Schwingkolbens erhält man beim Druck $p = p_0 + mg/\pi r^2$ in dem Behälter, wobei p_0 der äußere Luftdruck, m die Masse und r der Radius des Schwingkolbens ist. Bei einer Auslenkung x aus der Gleichgewichtslage ändert sich p um dp und man erhält die Bewegungsgleichung $md^2x/dt^2 = \pi r^2 dp$. Da sich p schnell, d.h. adiabatisch, ändert, gilt $pV^{\kappa} = const$ und damit $d(pV^{\kappa})/dV = 0$, das heißt $dp = -p\kappa dV/V$. Hierbei ist $V = V_0 + V_1$ das Gesamtvolumen, das aus dem Volumen V_0 des Gasbehälter und dem Volumen V_1 des Glasrohrs bis zur Öffnung gebildet wird. Mit $dV = \pi r^2 x$ erhält man die Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \kappa \frac{\pi^2 r^4 p}{mV} x = 0$$
(5.2.37)

eines harmonischen Oszillators mit der bekannten Schwingungsdauer $\tau = \sqrt{4mV/r^4p\kappa}$. Durch Messung von τ kann mit den bekannten Größen V, m und r der Wert von κ bestimmt werden. Für den Druck p kann hierbei p_0 verwendet werden (mittlerer Druck bei schwingendem Kolben).

Da die Schwingung gedämpft ist, muß man für einen äußeren periodischen Antrieb sorgen. Dies erreicht man dadurch, daß man Gas am unteren Ende des Gefäßes ständig einströmen läßt, das dann je nach Kolbenlage durch die Öffnung am Steigrohr wieder ausströmen kann.

Bestimmung von κ mit der Methode nach Clement-Desormes:

Beim Experiment von Clement und Desormes wird ein Gefäß mit einer Gasmenge gefüllt, so daß der Druck knapp oberhalb des Umgebungsdrucks liegt. Der Druck kann mit einem Manometer gemessen werden. Man öffnet dann einen Hahn und läßt das Gas schnell ausströmen, bis sich der Druck demjenigen des Außenraums angleicht. Nachdem der Hahn wieder geschlossen ist, beobachtet man ein Ansteigen des Drucks im Gefäß. Der Grund dafür liegt in der Abkühlung des Gases während der schnellen Ausdehnung. Nach Schließen des Gefäßes erwärmt sich das Gas allmählich und der Druck steigt dadurch an. Durch Messung des Drucks p_1 vor dem Öffnen des Gefäßes und des Drucks p_2 nach Schließen des Gefäßes und Erwärmung des Gases kann κ bestimmt werden. Sind h_1 und h_2 die entsprechenden, an einem Quecksilbermanometer abgelesenen Höhen, so ergibt sich $\kappa = h_1/(h_1 - h_2)$.



Abbildung 5.20: (a) Versuch von Ruechard zur Bestimmung von κ . (b) Pneumatisches Feuerzeug.

Das pneumatische Feuerzeug:

Das pneumatische Feuerzeug besteht aus einer einseitig geschlossenen dickwandigen Röhre (meist Glas), in der sich ein luftdicht schließender Kolben verschieben läßt (siehe Abb. 5.20b). Der Kolben trägt in einer Vertiefung ein leicht entzündliches Material. Wird der Kolben ruckartig in den Zylinder hineingetrieben, so tritt aufgrund der starken Kompression eine große Temperaturerhöhung ein, durch die das brennbare Material entzündet wird. Die erreichbare maximale Temperatur ist durch

$$T_1 V_1^{\kappa - 1} = T_2 V_2^{\kappa - 1}$$

d damit
$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa - 1}$$
 (5.2.38)

gegeben. Bei einer Verdichtung von 1 : 15 und $T_1 = 293$ K erhält man $T_2 = 15^{0.4} \cdot 293 = 865$ K. Weitere aus der Alltagserfahrung bekannte adiabatische Zustandsänderungen: (i) Erwärmen einer Fahradpumpe durch fortgesetzte adiabatische Kompression. (ii) Nebelbildung aufgrund starker Abkühlung durch adiabatische Expansion z.B. beim Öffnen einer Mineralwasserflasche.

Der Joule-Thomson Prozeß – isenthalpischer Vorgang

un

Wir betrachten den in Abb. 5.21 gezeigten Versuchsaufbau. In einem Rohr mit geringer Wärmeleitfähigkeit sitzt in der Mitte ein Wattepfropf, durch den mittels eines Stempels S_1 ein Gas unter konstantem Druck p_1 hindurchgepreßt wird. In dem Wattepfropf tritt aufgrund von Reibungseffekten ein Druckverlust auf, so daß der Druck p_2 auf Stempel S_2 erniedrigt und das Volumen V_2 erhöht ist. Mit Hilfe von Thermometern kann die Temperatur T_1 und T_2 links und rechts des Wattepfropfes genau gemessen werden. Wir starten den Versuch mit $V_2 = 0$ und beeindigen ihn bei $V_1 = 0$. Bei dem durchgeführten Prozeß wird keine Wärme zugeführt, aber Arbeit geleistet, die den Wert $p_1V_1 - p_2V_2$ hat $(p_1V_1$ wird auf der einen Seite hineingesteckt und $-p_2V_2$ wird auf der anderen wiedergewonnen).



Abbildung 5.21: Der Joule-Thomson-Prozeß.

Der erste Hauptsatz liefert

$$U_2 - U_1 = p_1 V_1 - p_2 V_2 \quad , \tag{5.2.39}$$

woraus sich

$$U_1 + p_1 V_1 = U_2 + p_2 V_2 (5.2.40)$$

ergibt. Das heißt, bei dem durchgeführten Prozeß bleibt die Größe U + pV konstant, die man als weitere Zustandsgröße, die *Enthalpie H*, definiert:

$$H = U + pV$$
 . (5.2.41)

Der **Joule-Thomson** Versuch ist dadurch ausgezeichnet, daß die Enthalpie H konstant bleibt, d.h. $H_1 = H_2$ oder dH = 0. Man einen solchen Prozeß *isenthalpisch*.

In der Praxis läßt man den oben beschriebenen Prozeß kontinuierlich ablaufen, indem man auf der einen Seite eine Druckpumpe verwendet, um p_1 zu etablieren, und auf der anderen eine Saugpumpe, um p_2 aufrechtzuerhalten. Man kann dann Gas kontinuierlich durch den Wattepfropf strömen lassen. In den Experimenten wurde gefunden, daß die bei einer Vergrößerung des Volumens von V_1 auf V_2 gefundene Temperaturänderung umso kleiner war, je näher das verwendete Gas einem idealen Gas kam. Man schloß daraus, daß sich für ein ideales Gas die Temperaturänderung Null ergeben würde. Da sich in diesem Fall aufgrund des **Boyle-Mariotte**schen Gesetzes ($p_1V_1 = p_2V_2 = const$) auch dW = 0 ergeben würde, d.h. es wird keine Arbeit zugeführt, folgt aus Gl.(5.2.40) $U_1 = U_2$. Dies ist aber das gleiche Ergebnis, das wir bereits aus dem **Gay-Lussac**schen Überströmversuch erhalten haben.²²

5.2.4 Reversible und irreversible Prozesse

Wir haben bei der Diskussion der Eigenschaften eines idealen Gases gelernt, daß der Zustand eines idealen Gases durch zwei der drei Zustandsvariablen p, V und T vollständig charakterisiert ist. Dies folgt

²²Bei realen Gasen ergibt sich allerdings eine Temperaturänderung bei Volumenänderung, da Arbeit gegen die intermolekularen Kräfte verrichtet werden muß. Es kann sowohl zu einer Temperaturerhöhung als auch -erniedrigung kommen, je nachdem, welchen Wert das Verhältnis der Arbeit des äußeren Druckes zur Arbeit gegen die Molekularkräfte einnimmt. Aufgrund des Temperaturerniedrigungseffektes entwickelten **Linde** und **Hampson** Maschinen zur Verflüssigung von Gasen.

sofort aus der allgemeinen Gasgleichung $pV = \nu RT$. Bei der bis jetzt geführten Diskussion haben wir allerdings immer stillschweigend vorausgesetzt, daß der Zustand eines Gases bei Zustandsänderungen zu jeder Zeit durch einen einheitlichen Druck und eine einheitliche Temperatur im ganzen Volumen gekennzeichnet ist. Dies ist im Prinzip nur dann erfüllt, wenn man Zustandsänderungen immer sehr langsam (quasistatisch) durchführt,²³ so daß das betrachtete System bei der Zustandsänderung immer einen Gleichgewichtszustand einnimmt. Nur in diesem Fall kann die Zustandsänderung durch Kurven im den oben diskutierten p, T-, V, T- oder p, V-Diagrammen beschrieben werden, da jeder Punkt auf diesen Kurven ja einen Gleichgewichtszustand beschreibt.

In diesem Zusammenhang ist wichtig, daß eine Abfolge von Gleichgewichtszuständen, d.h. eine Kurve im Zustandsdiagramm, in unterschiedlichen Richtungen durchlaufen werden kann. Das heißt, eine solche Zustandsänderung ist umkehrbar oder *reversibel*. Von einem reversiblen Prozeß spricht man im allgemeinen dann, wenn eine Veränderung eines physikalischen Systems auf irgendeine Weise nückgängig gemacht werden kann, so daß keinerlei Veränderung im Vergleich zum Ausgangszustand bleibt. Reversibel sind vor allem

• Vorgänge der reinen Mechanik.

Jeder rein mechanische Vorgang (z.B. Pendelschwingung) ist reversibel, da man nur die Geschwindigkeit umzukehren braucht, damit der Prozeß rückwärts bis zum Ausgangszustand durchlaufen wird. Dabei ist nicht notwendig, daß der Hin- und Rückweg gleich sind. Wie in Kapitel 1 diskutiert wurde, ist dies nur dann erfüllt, wenn von Reibungseffekten abgesehen wird (reine Mechanik).

• Vorgänge der reinen Elektrodynamik und Optik.

Auch hier wird von Energieverlusten, die als Wärme auftreten, abgesehen.

• quasistatische Zustandsänderungen.²⁴

Für die praktische Realisierung von reversibel geführten Prozessen müssen folgende Voraussetzungen erfüllt sein:

- Die Zustandsänderung muß so langsam erfolgen, daß das betrachtete System genügend Zeit hat immer einen Gleichgewichtszustand einzunehmen.
- Beim Austausch von mechanischer Arbeit in Form von Volumenarbeit dürfen keine Beschleunigungen auftreten.
- der Austausch von Wärmenergie darf nur zwischen Körpern mit verschwindend kleiner Temperaturdifferenz stattfinden.

Unter einem *irreversiblen* Prozeß versteht man dagegen einen Vorgang, der auf keinerlei Weise, egal welche Methoden und Apparate dabei auch angewendet werden, so rückgängig gemacht werden kann, daß keine Veränderung bezüglich des ursprünglichen Zustandes zurückbleibt. Zu den irreversiblen Prozessen gehört vor allem die Erzeugung von Wärme durch Reibung. Sinkt z.B. ein Körper in einer viskosen Flüssigkeit aufgrund seiner Schwerkraft nach unten, so entsteht aufgrund der Reibung Wärme. Wollte man diesen Vorgang rückgängig machen, so bräuchte man eine Maschinerie, die eine Abkühlung der

²³In diesem Fall ist innerer und äußerer Druck quasi identisch und die Temperatur des Wärmereservoirs unterscheidet sich kaum von derjenigen des aufnehmenden oder abgebenden Körpers.

²⁴Es ist zu beachten, daß ein quasistatischer Prozeß zwar immer ein reversibler Vorgang ist, ein reversibler Prozeß aber nicht unbedingt quasistatisch zu verlaufen hat.

Flüssigkeit und eine entsprechende Hebung des herabgesunkenen Körpers bewirkt. Eine solche Maschinerie wäre die Realisierung eines so genannten Perpetuum Mobile II. Art und existiert nicht. Ein irreversibler Prozeß ist auch der oben diskutierte **Gay-Lussac**sche Überströmversuch (adiabatische Ausdehnung eines Gases ins Vakuum).

Es ist wichtig darauf hinzuweisen, daß bei den in unserer Natur ablaufenden Prozessen Reibung meistens nicht ausgeschlossen werden kann. Deshalb sind die in unserer Natur vorkommenden, von selbst ablaufenden Prozesse tatsächlich alle irreversibel. Reversibilität ist nur ein idealer Grenzfall, der nie auftritt. Trotzdem werden wir uns im nächsten Abschnitt mit einem idealen reversiblen Prozeß, dem **Carnot**schen Kreisprozeß²⁵ beschäftigen, da er eine Idealisierung der Vorgänge in thermodynamischen Maschinen (Dampfmaschine, Verbrennungsmotoren, etc.) darstellt.

5.2.5 Carnotscher Kreisprozeß

Der Carnotsche Keisprozeß wurde von Sadi Carnot im Jahre 1842 erdacht, um die Arbeitsbedingungen von thermodynamischen Maschinen zu verstehen, insbesondere um festzustellen, wie ihre Leistung von der verwendeten Arbeitssubstanz (z.B. Gas, Wasserdampf, etc.) abhängt. Wir diskutieren den Carnotschen Kreisprozeß für ein ideales Gas, für das wir bereits alle notwendigen Daten aus Abschnitt 5.2.3 kennen. Wir haben dort gelernt, daß ein ideales Gas bei einer isothermen Expansion die Wärmemenge ΔQ aufnimmt und mechanische Arbeit in Form von Volumenarbeit abgibt, während die Arbeitsabgabe bei einer adiabatischen Expansion mit einer Verringerung der inneren Energie verbunden ist. Es stellt sich dann die wichtige Frage, ob sich eine Maschine konstruieren läßt, die nicht nur bei einer einmaligen Zustandsänderung, sondern über beliebig lange Zeit hinweg Wärmeenergie in mechanische Energie überführt.

Eine solche Maschine läßt sich nur dann konstruieren, wenn das Arbeitsmedium (ideale Gas) eine Folge von Zustandsänderungen durchläuft, so daß es wieder zum Ausgangspunkt zurückkehrt. Dann kann der ganze Zyklus periodisch durchlaufen werden. Das heißt, eine Wärmekraftmaschine kann nur so konstruiert werden, daß es sich um eine periodisch arbeitende Maschine handelt, bei der ein *Kreisprozeß* zyklisch durchlaufen. Bei jeder Periode wird dem Arbeitsmedium die Wärmemenge ΔQ zugeführt, die dann mindestens teilweise wieder in Form von mechanischer Arbeit $-\Delta W$ abgegeben wird. Die innere Energie des Mediums muß über eine Periode gemittelt konstant sein, da das Arbeitsmedium sich nach einem kompletten Zyklus wieder in seinem Ausgangszustand befindet.

Man kann nun den Wirkungsgrad einer Wärmekraftmaschine wie folgt definieren:

η	=	abgegebene Arbeit	_	$-\Delta W$		(5.2.42)
		zugeführte Wärme	_	ΔQ	•	

Wegen der Gültigkeit des 1. Hauptsatzes der Wärmelehre muß

$$\eta \leq 1$$
 (5.2.43)

gelten.

Man erhält eine idealisierte Wärmekraftmaschine, wenn man als Arbeitsmedium ein ideales verwendet, das eine Folge von vier reversiblen Zustandsänderungen durchläuft. Hierbei soll die umgesetzte mechanische Arbeit ΔW entweder nur mit der Änderung der Wärmemenge ΔQ (isotherme Zustandsänderung)

²⁵Sadi Carnot: 1796 - 1832. Der nach ihm benannte Kreisprozeß wurde von Carnot bereits im Alter von 28 Jahren in Jahre 1824 diskutiert.

oder mit der Änderung der inneren Energie ΔU (adiabatische Zustandänderung) verknüpft sein. Auf eine isotherme und eine adiabatische Expansion folgt eine isotherme und adiabatische Kompression (Carnot-scher Kreisprozeß).

Die einzelnen Teilschritte des **Carnot**schen Kreisprozesses sollen anhand des in Abb. 5.22 gezeigten pV-Diagrammes näher erläutert werden.

Wir starten an Punkt 1, an dem das ideale Gas die Temperatur T_1 , den Druck p_1 und das Volumen V_1 besitzen soll. Wir führen dann eine *isotherme Expansion* durch, d.h. der Druck des Gases wird erniedrigt, wobei die Temperatur des Gases durch Ankoppeln an ein Wärmereservoir konstant gehalten wird. Im Zustandsdiagramm gelangen wir dabei von Punkt 1 nach Punkt 2. Das Gas weist hier also dieselbe Temperatur ($T_1 = T_2$) auf, aber einen kleineren Druck ($p_2 < p_1$) und ein größeres Volumen ($V_2 > V_1$). Um die Temperatur bei dem durchgeführten Prozeß konstant halten zu können, mußte die Wärmemenge $\Delta Q > 0$ zugeführt werden.²⁶ Das Gas verrichtete gleichzeitig die Volumenarbeit $\Delta W < 0$, während die nur von der Temperatur abhängige innere Energie konstant bleibt. Damit lautet der 1. Hauptsatz

$$\Delta Q_1 = -\Delta W_1 = \int_1^2 p \, dV = \nu \, R \, T_1 \, \int_1^2 \frac{dV}{V} = \nu \, R \, T_1 \, \ln \frac{V_2}{V_1} \quad . \tag{5.2.44}$$

Wir betrachten jetzt den Prozeß, der von Punkt 2 zu Punkt 3 führt. Hierbei handelt es sich um eine *adiabatische Expansion*, d.h. das Gas wird unter völliger Abkopplung vom Wärmereservoir expandiert. Dabei kühlt sich das Gas von T_1 auf T_2 ab. Da bei dem adiabatischen Prozeß kein Wärmeaustausch mit der Umgebung stattfindet ($\Delta Q = 0$), geht die vom Gas verrichtete Volumenarbeit $\Delta W_a < 0$ voll zu Lasten der inneren Energie $\Delta U_a < 0$. Auf der Adiabate ist $\Delta Q = 0$ und der 1. Hauptsatz führt zu

$$dU_a = \nu C_V \, dT = -p \, dV = dW_a \quad . \tag{5.2.45}$$

Durch Integration erhält man dann für die nach außen abgegebene Arbeit

$$\Delta W_a = \nu C_V \int_{T_1}^{T_2} dT = \nu C_V (T_2 - T_1) \quad .$$
 (5.2.46)

Da $T_1 > T_2$ ist $\Delta W_a < 0$ (Arbeit wird vom Arbeitsmedium abgegeben).

Von Punkt 3 nach Punkt 4 erfolgt eine *isotherme Kompression*. Das Gas wird also unter Ankopplung an ein Wärmereservoir der Temperatur T_2 vom Druck p_3 auf den Druck p_4 komprimiert, wodurch sich das Volumen von V_3 auf V_4 verringert. Aufgrund der zugeführten Arbeit $\Delta W_2 > 0$ wird die Wärmemenge $\Delta Q_2 < 0$ frei. Auf der zweiten Isotherme ist wieder $\Delta U = 0$ und es gilt wie oben

$$\Delta Q_2 = -\Delta W_2 = \int_3^4 p \, dV = \nu \, R \, T_2 \, \int_3^4 \frac{dV}{V} = \nu \, R \, T_2 \, \ln \frac{V_4}{V_3} \quad . \tag{5.2.47}$$

Wir betrachten schließlich das letzte Wegstück von Punkt 4 nach Punkt 1, auf dem eine adiabatische Kompression des Gases durchgeführt wird. Das Gas wird vom Druck p_4 auf p_1 komprimiert, das Volumen verringert sich dabei von V_4 auf V_1 . Die von außen zugeführte Arbeit $\Delta W_b > 0$ geht dabei

²⁶Zugeführte Wärmemengen werden in Abb. 5.22 als Pfeile in die getönte Fläche hinein, abgegebene als Pfeile aus dieser Fläche heraus gekennzeichnet. Ebenso wird die vom Gas verrichtete Volumenarbeit als Pfeil nach außen und die vom Gas aufgenommene Arbeit als Pfeil nach innen gekennzeichnet.



Abbildung 5.22: Der **Carnot**-Prozeß im pV-Diagramm.

ausschließlich in die innere Energie $\Delta U_b > 0$ und bringt diese insgesamt wieder auf ihren Ausgangswert. Analog zu oben erhält man

$$\Delta W_b = \nu C_V \int_{T_2}^{T_1} dT = \nu C_V (T_1 - T_2) \quad . \tag{5.2.48}$$

Im Gegensatz zur adiabatischen Expansion ist hier $\Delta W_b > 0$ (Arbeit wird vom Arbeitsmedium aufgenommen).

Da U = U(T) muß die Abnahme der inneren Energie bei der adiabatischen Expansion bei der adiabatischen Kompression wieder vollkommen wettgemacht werden. Aufgrund von Gl.(5.2.45), (5.2.46) und (5.2.48) muß deshalb $\Delta W_a = -\Delta W_b$ gelten. Die insgesamt bei dem gesamten Kreisprozeß abgegebene Arbeit ist damit

$$\Delta W = \Delta W_1 + \Delta W_a + \Delta W_2 + \Delta W_b = \Delta W_1 + \Delta W_2 \quad . \tag{5.2.49}$$

Mit Gl.(5.2.44) und (5.2.47) folgt dann weiter²⁷

$$\Delta W = \Delta W_1 + \Delta W_2 = -(\Delta Q_1 + \Delta Q_2) \quad . \tag{5.2.50}$$

Mit den bisherigen Betrachtungen ergibt sich der Wirkungsgrad der idealisierten Wärmekraftmaschine zu

²⁷Die Integrale $\int_{i}^{j} pdV$ stellen geometrisch die Flächen unter der jeweiligen Kurve im pV-Diagramm dar. Deshalb ist die gesamte abgegebene Arbeit $\Delta W = -\oint pdV$ die Summe aller vier Teilarbeiten beim Durchlaufen eines Kreisprozesses. Unter Berücksichtigung des Vorzeichens der verschiedenen Teilbeiträge ergibt sich, daß $\oint pdV$ gerade durch die Fläche der geschlossenen Kurve im pV-Diagramm gegeben ist (getönte Fläche in Abb. 5.22).

$$\eta_{\rm rev} = \frac{-\Delta W}{\Delta Q_1} = \frac{\Delta Q_1 + \Delta Q_2}{\Delta Q_1} \quad . \quad (5.2.51)$$

Hierbei muß berücksichtigt werden, daß $\Delta Q_2 < 0$ ist. Unter Benutzung der obigen Beziehungen folgt daraus

$$\eta_{\rm rev} = \frac{T_1 \ln(V_2/V_1) - T_2 \ln(V_3/V_4)}{T_1 \ln(V_2/V_1)}$$
 (5.2.52)

Die in diesem Ausdruck enthaltenen Volumenverhältnisse lassen sich noch mit Hilfe der **Poisson**schen Gleichung $TV^{\kappa-1} = const$ eliminieren. Auf der ersten Adiabaten von 2 nach 3 gilt $T_1V_2^{\kappa-1} = T_2V_3^{\kappa-1}$, auf der zweiten Adiabate von 4 nach 1 gilt entsprechend $T_1V_1^{\kappa-1} = T_2V_4^{\kappa-1}$. Durch Division dieser beiden Ausdrücke ergibt sich

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4} \text{ bzw. } \ln \frac{V_2}{V_1} = \ln \frac{V_3}{V_4} .$$
 (5.2.53)

Damit erhält man für den Wirkungsgrad

$$\eta_{\rm rev} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_1}{T_2} \le 1$$
 . (5.2.54)

Das Gleichheitszeichen gilt dabei nur für eine reversible Führung des **Carnot**-Prozesses, weshalb der Index "rev" verwendet wurde.

Der Wirkungsgrad einer Wärmekraftmaschine ist umso größer, je größer die Temperaturdifferenz zwischen den beiden Wärmereservoiren ist, an die bei den isothermen Prozessen angekoppelt wird. Das Maximum des Wirkungsgrades $\eta_{rev} \rightarrow 1$ erhält man für $T_2 \rightarrow 0$. Eine graphische Darstellung des Wirkungsgrades ist in Abb. 5.23 gegeben.

Es ist wichtig darauf hinzuweisen, daß der reversible **Carnot**sche Kreisprozeß ein Idealprozeß ist, der, selbst wenn man in realisieren könnte, in der Praxis unbrauchbar wäre. Zu eine reversiblen Führung des Kreisprozesses braucht man unendlich lange Zeit. Eine irreversible Führung des **Carnot**-Prozesses liegt dann vor, wenn man eine endliche Temperaturdifferent zwischen dem Arbeitsgas und den Wärmereservoiren und eine endliche Druckdifferenz zwischen dem Gasdruck und dem äußeren Druck vorliegt. Gerade solche Bedingungen sind für praktische Maschinen essentiell, um mit endlicher Geschwindigkeit arbeiten zu können. In der Praxis wird also der ideale Wirkungsgrad nie erreicht. Für eine irreversible Führung des Prozesses gilt immer $\eta < \eta_{rev}$. Daraus kann man folgern, daß es mit einer periodisch arbeitenden Wärmekraftmaschine nicht möglich ist, eine Wärmemenge ΔQ vollständig in eine mechanische Arbeit ΔW umzuwandeln.²⁸

Eichung der thermodynamischen Temperaturskala durch Messung des Wirkungsgrades η_{rev} :

Nach Gl.(5.2.54) gilt $\eta_{rev} = \Delta T/T_1$. Hierbei ist die Temperaturdifferenz ΔT unabhängig vom absoluten Nullpunkt der Temperaturskala. Durch Messung von η_{rev} kann man deshalb die absolute, thermodynamische Temperaturskala eichen.

²⁸Eine Niederdruckdampfmaschine ($T_1 = 400 \text{ K}$, $T_2 = 300 \text{ K}$) hat einen maximalen Wirkungsgrad $\eta_{rev} = 0.25$. In Wirklichkeit wird $\eta \simeq 0.15$ erreicht. Eine Hochdruckdampfmaschine ($p_{\text{Dampf}} \simeq 75$ bar) hat bei $T_1 = 500 \text{ K}$ und $T_2 = 300 \text{ K}$ hat einen maximalen Wirkungsgrad $\eta_{rev} = 0.4$. In Wirklichkeit wird nur $\eta \simeq 0.35$ erreicht.



Abbildung 5.23: Der Wirkungsgrad des reversibel geführten Carnotprozesses als Funktion von $T_1 - T_2$ für verschiedene T_2 .

Umkehrung des Carnotschen Kreisprozesses

Da der ideale **Carnot**sche Kreisprozeß reversibel geführt wird, kann man ihn auch in umgekehrter Richtung, wie wir dies oben diskutiert haben, laufen lassen. Man spricht dann von *inversen Carnot*schen Kreisprozeß (die Pfeile in Abb. 5.22 müssen dann alle umgedreht werden). Dabei wird eine Wärmemenge ΔQ_2 vom "unteren" Reservoir der Temperatur T_2 aufgenommen und eine größere ΔQ_1 an das "obere" Reservoir mit der Temperatur T_1 abgegeben. Gleichzeitig wird von außen eine der Differenz der Wärmemengen äquivalente Arbeit $\Delta W = \Delta Q_1 - \Delta Q_2$ zugeführt. Eine entsprechende Maschine bezeichnet man als *Wärmepumpe* bzw. als *Kältemaschine*.

Entsprechend dem Wirkungsgrad einer Wärmekraftmaschine (vergleiche (5.2.42)) führt man den *Pumpfaktor h* einer Wärmepumpe ein:

$$h = \frac{\text{abgegebene Wärme bei } \mathbf{T} = \mathbf{T}_1}{\text{zugeführte Arbeit}} = \frac{-\Delta Q_1}{\Delta W} \quad . \tag{5.2.55}$$

Für eine Wärmepumpe, die einen reversiblen Carnot-Prozeß durchläuft, ergibt sich

$$h_{\rm rev} = \frac{1}{\eta_{\rm rev}} = \frac{T_1}{T_1 - T_2} \ge 1$$
 . (5.2.56)

Man erkennt, daß der Pumpfaktor umso größer ist, je kleiner die Temperaturdifferenz $T_1 - T_2$ ist. Eine graphische Darstellung ist in Abb. 5.24a gegeben. Die Tatsache, daß Pumpfaktoren größer als eins erzielt werden, ist natürlich kein Verstoß gegen den 1. Hauptsatz, denn wie bei der Wärmekraftmaschine ist auch hier die Summe aller Wärmeenergien gleich der mechanischen Arbeit.²⁹

²⁹Will man z.B. einem See mit einer Wassertemperatur $T_2 = 300$ K Wärme entziehen und diese bei einer Temperatur von $T_1 = 340$ K (z.B. Warmwasserversorgung eines Hauses) wieder abgeben, so erreicht man bei diesem Prozeß den Wirkungsgrad $h_{rev} = 8.5$. Dieser hohe Wirkungsgrad zeigt, daß man mit Wärmepumpen sehr effektiv (d.h. mit geringem Einsatz von mechanischer Arbeit) Wärme einem Wärmerservoir entziehen kann, um diese z.B. im Haushalt zu verwenden.



Abbildung 5.24: Pumpfaktor und Kühlfaktor einer Wärmepumpe bzw. Kältemaschine als Funktion von T_2/T_1 .

Der *Kühlfaktor* k_{rev} einer Kältemaschine ist analog definiert als das Verhältnis der dem kälteren Reservoir entzogenen Wärme (entspricht dem Arbeitsgas zugeführten Wärme) zur aufgewandten Arbeit:

$$k = \frac{\text{zugeführte Wärme bei } \mathbf{T} = \mathbf{T}_2}{\text{zugeführte Arbeit}} = \frac{\Delta Q_2}{\Delta W} \quad . \tag{5.2.57}$$

Bei reversibler Prozeßführung ergibt sich damit

$$k_{\rm rev} = h_{\rm rev} - 1 = \frac{T_2}{T_1 - T_2} \ge 0$$
 . (5.2.58)

Auch der Kühlfaktor ist umso größer, je kleiner die Temperaturdifferenz $T_1 - T_2$ ist (siehe Abb. 5.24b).

5.2.6 Der 2. Hauptsatz der Wärmelehre

Für den Wirkungsgrad eines reversiblen **Carnot**-Prozesses mit einem idealen Gas als Arbeitssubstanz gilt nach Gl.(5.2.51) und (5.2.54)

$$\eta_{\text{rev}} = \frac{\Delta Q_1 + \Delta Q_2}{\Delta Q_1} = 1 + \frac{\Delta Q_2}{\Delta Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

oder $\frac{\Delta Q_2}{\Delta Q_1} + \frac{T_2}{T_1} = 0 = \frac{\Delta Q_1}{T_1} + \frac{\Delta Q_2}{T_2}$. (5.2.59)

Die Größe $\Delta Q/T$, die in Gl.(5.2.59) auftritt, nennt man die *reduzierte Wärmemenge*.
Man nutzt nun aus, daß sich ein beliebiger Kreisprozeß in eine Vielzahl von kleinen **Carnot**-Prozessen zerlegen läßt, deren Isothermen und Adiabaten beliebig geringe Abstände aufweisen (siehe hierzu Abb. 5.25). Im Innern des beliebigen Kreisprozesses heben sich dabei die Zustandsänderungen der kleinen **Carnot**-Prozesse gegenseitig auf, da jede Teilkurve paarweise in entgegengesetzter Richtung durchlaufen wird. Es bleibt dann lediglich die Randkurve des beliebigen Kreisprozesses übrig.





Damit gilt allgemein für einen beliebigen reversiblen Kreisprozeß mit einer beliebigen Arbeitssubstanz und beliebig vielen Wärmereservoiren

$$\sum_{i} \left(\frac{\Delta Q_i}{T_i}\right) = 0 \quad . \tag{5.2.60}$$

Werden die Wärmemengen infinitesimal klein, so kann man zu einer Integration übergehen und erhält

$$\oint_{\text{rev}} \left(\frac{dQ}{T}\right) = 0 \quad , \quad (5.2.61)$$

wobei der Kreis beim Integral andeuten soll, daß sich die Integration über den ganzen Kreisprozeß erstrecken muß. Für einen beliebigen Kreisprozeß, der auch irreversible Prozesse enthalten kann, gilt

$$\oint \left(\frac{dQ}{T}\right) \leq 0 \quad , \quad (5.2.62)$$

wobei das Gleichheitszeichen nur bei vollkommen reversibler Prozeßführung gilt. Mit den Aussagen von Gl.(5.2.61) und (5.2.61a) könnte jetzt der 2. Hauptsatz der Wärmelehre formuliert werden. Wir werden dies an dieser Stelle jedoch nocht nicht tun und erst den Begriff der Entropie einführen.

Entropie

Wir diskutieren jetzt für einen beliebigen reversiblen Kreisprozeß mit einem idealen Gas den Teilprozeß von einem Punkt A zu einem Punkt B (siehe Abb. 5.26), um zu zeigen, daß bei einem zwischen diesen Punkten reversibel geführten Prozeß die reduzierte Wärmemenge unabhängig vom gewählten Weg im Zustandsdiagramm ist.



Abbildung 5.26: Änderung des Zustandes eines idealen Gases von Zustand A nach Zustand B entlang verschiedener Wege.

Aufgrund von Gl.(5.2.60) gilt für die reduzierten Wärmemengen beimÜbergang von A nach B

$$\sum_{i} \left(\frac{\Delta Q_{i}}{T_{i}}\right)_{\mathrm{I}} - \sum_{i} \left(\frac{\Delta Q_{i}}{T_{i}}\right)_{\mathrm{II}} - = 0$$
(5.2.63)

oder

$$\sum_{i} \left(\frac{\Delta Q_{i}}{T_{i}}\right)_{\mathrm{I}} = \sum_{i} \left(\frac{\Delta Q_{i}}{T_{i}}\right)_{\mathrm{II}} .$$
 (5.2.64)

Dasselbe läßt sich für beliebige weitere Wege zeigen. Daraus kann gefolgert werden, daß bei einem zwischen zwei Punkten reversibel geführten Prozeß die reduzierte Wärmemenge in der Tat unabhängig vom gewählten Weg ist. Man kann damit jedem Punkt Z im pV-Phasendiagramm eine Größe S_Z zuordnen, so daß sich beim Übergang vom Z = A nach Z = B die reduzierte Wärmemenge als Differenz von S_a und S_B darstellen läßt.³⁰

$$\sum_{i} \left(\frac{\Delta Q_i}{T_i} \right)_{A \to B} = S_B - S_A = \Delta S_{A \to B} \quad . \quad (5.2.65)$$

Die Größe *S* heißt *Entropie* des Zustandes. Sie ist eine für das System charakteristische Zustandsgröße genauso wie die innere Energie U. Mit dieser neuen Größe läßt sich die Aussage, daß bei einem reversibel geführten Kreisprozeß mit einem idealen Gas die Summe der reduzierten Wärmemengen verschwindet, wie folgt formulieren:

³⁰Dies ist völlig analog zur Definition der Arbeit in einem konservativen Kraftfeld als Differenz zweier potentieller Energien.

$$\Delta S_{\text{rev},\odot} = \oint dS = \oint \frac{dQ_{\text{rev}}}{T} = 0$$

oder $S = const$. (5.2.66)

Das heißt, bei einem reversiblen Kreisprozeß mit einem idealen Gas als Arbeitsmedium bleibt die Entropie des Arbeitsgases konstant.

Wir betrachten jetzt nur einen Teilprozeß des **Carnot**schen Kreisprozesses und zwar die isotherme Expansion. Die dem Gas dabei vom äußeren Wärmebad zugeführte Wärmemenge ΔQ geht in Volumenarbeit über, d.h. $\Delta Q = p\Delta V = -\Delta W$. Bei diesem Teilprozeß ist die Entropieänderung ungleich Null, da das Gas Wärme aufnimmt. Es gilt

$$\Delta S_{\rm rev}({\rm Gas}) = \frac{\Delta Q}{T} > 0 \quad . \tag{5.2.67}$$

Die Wärmemenge ΔQ wird aber gleichzeitig dem Wärmebad entzogen, so daß für dieses gilt

$$\Delta S_{\rm rev}(\text{Bad}) = -\frac{\Delta Q}{T} < 0 \quad . \tag{5.2.68}$$

Es gilt somit insgesamt

$$\Delta S_{\rm rev} = \Delta S_{\rm rev}({\rm Gas}) + \Delta S_{\rm rev}({\rm Bad}) = 0$$
 . (5.2.69)

Man erhält somit das wichtige Ergebnis, daß für ein abgeschlossenes System bei einer reversiblen Zustandsänderung mit einem idealen Gas als Arbeitsmedium die Entropie konstant ist.

Wir betrachten jetzt eine isotherme Expansion, die irreversibel ablaufen soll. Dazu soll einfach eine Zwischenwand aus einem Gasgefäß entfernt werden und damit das Gasvolumen von V_A auf V_B vergrößert werden. Das Gas, das im Zustand A nur das Volumen V_A einnimmt, wird nach kurzer Zeit in Zustand B das gesamte verfügbare Volumen einnehmen (vergleiche **Gay-Lussac**scher Überströmversuch, Abschnitt 5.2.3). Dieser Prozeß läuft von selbst nur in Richtung von Zustand A nach Zustand B ab, wobei die Zwischenzustände keine Gleichgewichtszustände sind. Die Zustandsänderung ist also nicht reversibel. Da der Endzustand B des Arbeitsgases ununterscheidbar ist vom Endzustand B einer reversibel geführten Expansion, gilt auch hier

$$\Delta S(\text{Gas}) > 0 \quad . \tag{5.2.70}$$

Dem Außenraum wird beim Überströmen aber keine Wärmemenge entzogen, da das Überströmen des Gases bei völliger Wärmeisolierung nach außen erfolgt. Es gilt also $\Delta S(Bad) = 0$. Die gesamte Entropieänderung des irreversiblen Prozesses ist dann

$$\Delta S_{\mathrm{irrev}} = \Delta S(\mathrm{Gas}) + \Delta S(\mathrm{Bad}) > 0$$
 . (5.2.71)

In einem abgeschlossenen System kann also die Entropie bei einer irreversiblen Zustandsänderung stets nur zunehmen: *Prinzip der Vermehrung der Entropie*.

2. Hauptsatz

Alle bisherigen Betrachtungen wurden für ein ideales Gas als Arbeitsmedium gemacht. Die Erweiterung der gewonnenen Aussagen auf beliebige Arbeitsmedien beinhaltet der 2. *Hauptsatz der Wärmelehre:*

Bei einem reversiblen Kreisprozeß bleibt für jedes Arbeitsmedium die Entropie konstant. Die Entropie eines abgeschlossenen Systems kann niemals abnehmen. Sie nimmt bei allen natürlichen, mit endlicher Geschwindigkeit ablaufenden Prozessen zu. Nur im Grenzfall unendlich langsam verlaufender reversibler Prozesse bleibt sie konstant.

Der 2. Hauptsatz ist ebenso wie der erste Hauptsatz der Wärmelehre ein Erfahrungssatz. Das Prinzip der Vermehrung der Entropie schaltet von dem nach dem Energiesatz erlaubten Prozessen alle diejenigen aus, die mit einer Abnahme der Entropie verbunden sind. Das Entropieprinzip bestimmt die Richtung der Vorgänge.

Beispiele zum 2. Hauptsatz:

- 1. Bringt man zwei Körper mit Temperatur T_1 und T_2 in thermischen Kontakt, so gleichen sie ihre Temperatur stets an. Nach dem Energiesatz wäre auch erlaubt, daß sich ein Körper abkühlt und der andere erwärmt. Dies würde aber zu einer Erhöhung der Entropie führen und ist somit nach dem 2. Hauptsatz der Wärmelehre verboten.
- 2. Zwei verschiedene, in getrennten Behältern befindliche Gase durchmischen sich nach Wegnahme der Trennwand vollständig aufgrund der Diffusion. Eine selbständige Entmischung, obwohl nach dem Energiesatz nicht verboten, wird nie beobachtet. Eine solche Entmischung würde zu einer Erhöhung der Entropie (siehe nächster Abschnitt) führen und damit dem 2. Hauptsatz widersprechen.

Entropie und Wahrscheinlichkeit

Die in einem Gas ablaufenden mikroskopischen Prozesse unterliegen alle der **Newton**schen Mechanik, d.h. die in einem Gas ablaufenden rein mechanischen Elementarprozesse sind ihrer Natur nach alle reversibel. Es stellt sich somit die Frage, wie man irreversible Vorgänge eines Ensembles von Teilchen mit den reversiblen Prozesse der einzelnen Teilchen in Einklang bringen kann. Die Beantwortung dieser Frage hängt mit der Tatsache zusammen, daß zur theoretischen Beschreibung von Gasen neben den Gesetzen der Mechanik noch Wahrscheinlichkeitsaussagen über das Verhalten einer sehr großen Zahl von Teilchen benötigt werden, da man über die Bewegung eines einzelnen Teilchens keine Angaben machen kann. Deshalb sind die Aussagen der entsprechenden kinetischen Theorien nicht Behauptungen über zwangsläufig eintretende Ereignisse, sondern nur über wahrscheinlich vor sich gehende. Ist diese Anschauung richtig, so dürfen die Aussagen des 2. Hauptsatzes nur als Wahrscheinlichkeitsaussagen gewertet werden (eine genaue Diskussion erfolgt in den Vorlesungen zur Statistischen Mechanik).

Um den Begriff Entropie mit Wahrscheinlichkeitsaussagen in Zusammenhang zu bringen, machen wir folgendes Gedankenexperiment: Wir betrachten einen Gasbehälter mit Volumen V_1 , das wir uns in xgleiche Teile mit Volumen V_2 aufgeteilt denken. Es gilt also $V_1 = xV_2$. In dem Behälter befinde sich zunächst nur ein Gasmolekül. Dann ist die Wahrscheinlihkeit, das Gasmolekül in einem bestimmten Teilvolumen V_2 zu finden, genau 1/x. Befinden sich zwei Gasmoleküle im Gesamtvolumen, so ist die Wahrscheinlichkeit, beide gleichzeitig in einem Teilvolumen anzutreffen, genau $(1/x)^2$. Nun soll der Gasbehälter ν Mole eines Gases, also νN_A Gasmoleküle enthalten. Die Wahrscheinlichkeit, alle Gasmoleküle in einem Teilvolumen gleichzeitig anzutreffen, ist dann

$$w = \left(\frac{1}{x}\right)^{\nu N_A} \quad . \tag{5.2.72}$$

Der Kehrwert dieses Ausdrucks

$$W = \frac{1}{w} = x^{\nu N_A}$$
(5.2.73)

wird als *thermodynamische Wahrscheinlichkeit* bezeichnet. W kann alle Wert oberhalb von 1 annehmen, während w nur Werte zwischen 0 und 1 annehmen kann. Da ferner die mathematische Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich alle Moleküle im Gesamtvolumen V_1 befinden gleich 1 ist, stellt W das Verhältnis zweier Wahrscheinlichkeiten dar. W gibt an, um wieviel wahrscheinlicher alle Moleküle gleichzeitig im Gesamtvolumen V_1 statt im Teilvolumen V_2 anzutreffen sind. Bildet man jetzt noch den Logarithmus von W, so erhält man mit $x = V_1/V_2$ und $N_A = R/k_B$

$$k_B \ln W = \nu R \ln \left(\frac{V_1}{V_2}\right) \quad , \tag{5.2.74}$$

wobei k_B die bereits oben eingeführte **Boltzmann**-Konstante ist. Wie im folgenden kurz gezeigt werden soll, steht aber auf der rechten Seite dieser Gleichung nichts anderes als die Entropiedifferenz ΔS , die auftritt, wenn sich ein ideales Gas vom Volumen V_2 auf das Volumen V_1 ausdehnt (wie es z.B. bei **Gay-Lussac**schen Überströmversuch der Fall war). Dabei bleibt bekanntlich die Temperatur T der gesamten Anordnung konstant (vergleiche Abschnitt 5.2.3). Für infinitesimale Änderungen der Entropie kann man schreiben

$$dS = \frac{dQ_{\text{rev}}}{T} = \frac{dU + pdV}{T} \quad , \tag{5.2.75}$$

Für ein ideales Gas gilt ferner $p = \nu RT/V$ und $dU = C_{mol,V}dT$, so daß man den Ausdruck

$$dS = \frac{C_{\text{mol},V} \, dT + \frac{\nu \, R \, T}{V} \, dV}{T} = \nu \, C_{\text{mol},V} \, \frac{dT}{T} + \nu \, R \, \frac{dV}{V}$$
(5.2.76)

erhält. Durch Integration erhält man dann

$$\Delta S = S_1 - S_2 = \nu C_{\text{mol},V} \int_{T_2}^{T_1} \frac{dT}{T} + \nu R \int_{V_2}^{V_1} \frac{dV}{V} = \nu C_{\text{mol},V} \ln \frac{T_1}{T_2} + \nu R \ln \frac{V_1}{V_2} \quad (5.2.77)$$

Da die Temperatur konstant bleibt, ergibt sich

$$\Delta S = \nu R \ln \frac{V_1}{V_2} \tag{5.2.78}$$

und damit durch Vergleich mit Gl.(5.2.75)

$$\Delta S = k_B \ln W \quad . \tag{5.2.79}$$

Diese fundamentale Beziehung, die hier nur mit Hilfe eines speziellen Beispieles abgeleitet wurde, gilt allgemein und wurde von **Boltzmann** gefunden. Die Entropie eines Zustandes ist demnach proportional dem Logarithmus seiner thermodynamischen Wahrscheinlichkeit. Der Satz vom Wachstum der Entropie ist danach identisch mit dem Satz, daß ein System bei allen von selbst eintretenden Prozessen sich so ändert, daß es von einem unwahrscheinlicheren zu einem wahrscheinlicheren Zustand übergeht. Der wahrscheinlichere Zustand ist dabei immer derjenige geringerer Ordnung. Der 2. Hauptsatz der Wärmelehre ist demnach ein Wahrscheinlichkeitssatz im Gegensatz zum 1. Hauptsatz, dem Energieprinzip. Während der Begriff Energie selbst für ein einzelnes Teilchen einen wohldefinierten Sinn macht, kann von der Entropie nur dann gesprochen werden, wenn eine Gesamtheit von Teilchen statistisch betrachtet wird.

Eine Erhöhung der Entropie und damit der Unordnung eines Systems ist nur durch eine Wärmezufuhr möglich. Dies kommt in der Proportionalität $dS \propto dQ$ zum Ausdruck. Bei bei tiefen Temperaturen genügt ein kleines dQ um einen bestimmten Grad der Unordnung herbeizuführen. Bei hohen Temperaturen ist ein großes dQ notwendig. Dies kommt in der Proportionalität $dS \propto 1/T$ zum Ausdruck.

5.3 Phasenumwandlungen und Lösungen

Unter einer Phase versteht man einen Teil eines Systems, der bis in den molekularen Bereich physikalisch homogen aufgebaut ist. Auch homogene Mischungen verschiedener chemischer Stoffe bilden deshalb eine einzige Phase, eine sogenannte Mischphase, obwohl die chemische Zusammensetzung nicht einheitlich ist (z.B. Kochsalzlösung). Phasen sind also keine inhomogen aufgebauten Mehrstoffgemische. Allerdings treten in einer Phase eines homogenen Stoffes immer Verunreinigungen auf, da sich Stoffe nicht in beliebiger Reinheit herstellen lassen.

In jedem System kann es nur eine einzige gasförmige Phase geben, da Gase bis in den molekularen Bereich vollkommen mischbar und daher homogen sind. Unter den Flüssigkeiten gibt es mischbare und nicht mischbare Kombinationen. Unmischbare Flüssigkeiten bilden zwei getrennte Phasen. Bei Festkörpern ist die Kristallstruktur das Kriterium, ob diese aus einer oder mehreren Phasen bestehen.

5.3.1 Änderung des Aggregatzustandes

Allgemeines über die Änderung des Aggregatzustandes

Jede Substanz kann in verschiedenen Aggregatzuständen (fest, flüssig, gasförmig) vorliegen. Wie in Abb. 5.27 gezeigt ist, erhält man bei bestimmten Temperaturen Phasenübergänge zwischen den einzelnen Aggregatzuständen. In Abb. 5.27 ist ein System fest-flüssig-gasförmig gezeigt. Es gibt aber auch Systeme, für die zwei unterschiedliche feste Phasen (z.B. mit unterschiedlicher Kristallstruktur vorliegen), zwischen denen bei einer bestimmten Temperatur ein Phasenübergang stattfindet.



Abbildung 5.27: Phasenübergänge in einem System fest-flüssig-gasförmig.

Führt man z.B. einem chemisch einheitlichen, festen Körper Wärme zu, so erhöht sich seine Temperatur. Das kann man aus dem 1. Hauptsatz dQ = dU + pdV ersehen. Da die Volumenänderung fester Körper bei Temperaturänderung sehr klein ist, kann man meistens die Ausdehnungsarbeit pdV vernachlässigen. Für die Änderung der inneren Energie kann man dann $dU = \nu C_{\text{mol},p} dT$ schreiben und erhält

$$dQ = \nu C_{\text{mol},p} dT \quad . \tag{5.3.1}$$

Man sieht, daß der Körper sich durch Zuführen der Wärmemenge dQ um dT erwärmt. Die Temperatur eines festen Körpers läßt sich aber nicht beliebig erhöhen. Je nach Stoff ändert sich bei einer bestimmten Temperatur der Aggregatzustand des Körpers: er wird flüssig oder geht in den gasförmigen Zustand über.

In Abb. 5.28 ist der Verlauf der Temperatur bei Erwärmung von 1 g Eis gegen die zugeführte Wärmemenge im Bereich zwischen -30° C und 120° C für Normaldruck gezeigt. Beginnend bei $T_0 =$

 -30° C verläuft die $T(\Delta Q)$ -Kurve zunächst linear. Dies ist anschaulich klar, da die Integration von Gl.(5.3.1)

$$\Delta Q = m c_{p,Eis} (T - T_0) = m c_{p,Eis} \Delta T$$
(5.3.2)

liefert. Dasselbe gilt für die anderen Kurvenstücke mit Ausnahme der Horizontalen, für die man schreiben kann

$$\Delta Q = m c_{p,Fl.} (T - T_{Schmelz}) = m c_{p,Fl.} \Delta T$$

und
$$\Delta Q = m c_{p,Gas} (T - T_{Siede}) = m c_{p,Gas} \Delta T .$$
(5.3.3)

Die unterschiedliche Steigung der drei Geraden wird durch die unterschiedliche Wärmekapazität der festen, flüssigen und gasförmigen Substanz verursacht. In Abb. 5.28 ist die Steigung der $T(\Delta Q/m)$ -Kurven durch $1/c_p$ gegeben.



Abbildung 5.28: Verlauf der Temperatur bei Erwärmung von 1 g Wasser.

Überraschend sind die beiden parallel zur ΔQ -Achse verlaufenden Kurvenstücke. Hier ändert sich die Temperatur nicht, obwohl ständig Wärme zugeführt wird. Die Kurvenstücke treten genau bei den Temperaturen auf, bei denen die Substanz vom festen in den flüssigen und vom flüssigen in den gasförmigen Zustand übergeht. Man kann daraus schließen, daß die auf den horizontalen Kurvenstücken zugeführte Wärmemenge für diese Umwandlung benötigt wird. Diese Vermutung wird dadurch bestätigt, daß bei langsamem Abkühlen dieselbe $T(\Delta Q)$ -Kurve durchlaufen wird. Außerdem sind die in den horizontalen Bereichen zugeführten Wärmemengen proportional zur Stoffmenge. Man nennt diese Wärmemengen deshalb *Umwandlungswärmen* und je nach Art der speziellen Umwandlung auch *Schmelzwärme* Q_S , *Verdampfungswärme* Q_V , *Kristallisationswärme* Q_K , usw. Häufig werden die Umwandlungswärmen auf die Masse normiert, man spricht dann von spezifischen Umwandlungswärmen $\lambda = Q/m$.³¹ Für Wasser mißt man die spezifische Schmelzwärme $\lambda_S = 334.9$ J/g und die spezifische Verdampfungswärme $\lambda_V = 2260$ J/g.

³¹Ebenso kann man auf die Molmasse normieren und erhält die molaren Umwandlungswärmen $\Lambda = Q/\mathbb{M}$.

Die Umwandlungstemperaturen hängen vom Druck ab. Würde man das Experiment mit Wasser statt bei Normaldruck bei einem Druck von 10 bar durchführen, so würde man für die Schmelztemperatur eine niedrigere und die Siedetemperatur eine wesentlich höhere Temperatur messen. Das Absinken der Schmelztemperatur mit steigendem Druck ist allerdings eine Besonderheit des Wasser. Im allgemeinen nehmen sowohl die Schmelz- als auch die Siedetemperatur mit steigendem Druck zu. Die genauen Zusammenhänge werden unten diskutiert.

Umwandlung flüssig – gasförmig

Wir diskutieren zunächst den Übergang von der flüssigen in die gasförmige Phase. Viele der erhaltenen Ergebnisse können dann direkt auf die Umwandlung fest-flüssig oder fest-gasförmig übertragen werden.

Will man den eigentlichen Prozeß des Verdampfens einer Flüssigkeit studieren, so ist es am einfachsten, wenn man die Flüssigkeit ins Vakuum verdampfen läßt, da dann keine anderen Stoffe stören. Man kann hierzu folgendes Experiment machen. Man benutzt ein Quecksilberbarometer, dessen Rohr oben durch einen Hahn abgeschlossen ist, dessen Küken nur halb durchbohrt ist (siehe Abb. 5.29). In dem Raum zwischen Quecksilbermeniskus und Hahn befindet sich dann ein Vakuum. Es handelt sich hier um das sogenannte Torricelli-Vakuum, bei dem sich Quecksilberflüssigkeit und -dampf im Gleichgewicht befinden $(1.8 \times 10^{-3}$ Torr bei 20°C). In das Rohr oberhalb des Hahns wird nun Wasser gefüllt und durch mehrmaliges Drehen des Kükens in das Vakuum portionsweise überführt. Man beobachtet, daß sich das Wasser auf der Oberfläche des Quecksilbers ansammelt und gleichzeitig die Höhe der Quecksilbersäule stark abnimmt. Der Raum über dem Meniskus ist jetzt mit Wasserdampf gefüllt, dessen Druck aus der Differenz der Höhe vor und nach dem Einfüllen bestimmt werden kann. Aus der Tatsache, daß keineswegs die gesamte eingefüllte Wassermenge verdampft und sich unabhängig von der eingefüllten Menge immer der gleiche Druck einstellt, kann man folgern, daß sich die Flüssigkeit mit dem darüber befindlichen Gas im Gleichgewicht befindet. Bei einem bestimmten Druck, dem sogenannten Sättigungsdampfdruck p_S, verdampfen offenbar genausoviele Flüssigkeitsmoleküle wie gleichzeitig wieder kondensieren.



Abbildung 5.29: (a) Hahnküken mit Anbohrung für die portionsweise Überführung von Flüssigkeiten. (b) Zum Nachweis des verschiedenen Dampfdruckes von Flüssigkeiten im Vakuum; Wasser: $p_1 = 23.3$ mbar, Alkohol: $p_1 = 58.6$ mbar, Äther: $p_1 = 589$ Torr (bei 20°C).

Der Sättigungsdampfdruck p_S ist unabhängig vom Volumen. Eine Veränderung des abgeschlossenen Volumens bewirkt nur, daß bei $p = p_S$ und T = const mehr Dampf kondensiert (Verkleinerung von

V) bzw. mehr Flüssigkeit verdampft (Vergrößerung von V). Demnach kann eine Flüssigkeit nicht für sich alleine in einem sonst leeren Raum bestehen. Neben der flüssigen existiert, wie in Abb. 5.30 gezeigt ist, immer eine Dampf- oder Gasphase. In einem bestimmten Koexistenzbereich, der unten noch näher erläutert wird, befinden sich beide Phasen im Gleichgewicht. Es gehen hier gleichviele Moleküle pro Zeiteinheit von der flüssigen in die gasförmige Phase über und umgekehrt. Dieser Austausch an der Oberfläche der Flüssigkeit ist zwar temperaturabhängig, d.h. $p_S = p_S(T)$, aber unabhängig vom zur Verfügung stehenden Volumen, solange noch Flüssigkeit vorhanden ist.



Abbildung 5.30: Zur Koexistenz von flüssiger und gasförmiger Phase beim Sättigungsdampfdruck. Der Sättigungsdampfdruck hängt nicht vom Volumnen ab.

Die Temperaturabhängigkeit des Sättigungsdampfdrucks des Wassers kann aus Tabelle 5.1 entnommen werden. Man erkennt, daß der Sättigungsdampfdruck des Wassers mit zunehmender Temperatur stark ansteigt.

T (°C)	0	4	20	60	100	120	200	300
p_S (bar)	6.12×10^{-3}	8.11×10^{-3}	23.2×10^{-3}	0.2	1	2	15	85

Tabelle 5.1: Temperaturabhängigkeit des Sättigungsdampfdrucks von Wassers.

Das Gleichgewicht zwischen Verdampfen und Kondensieren kann sich nur in einem geschlossenen Gefäß einstellen, da der sich bildende Dampf nicht entweichen kann. Bei einem offenen Gefäß verdampft jede Flüssigkeit vollständig bei jeder Temperatur. Die Verdampfung wird allerdings dadurch verlangsamt, daß die Moleküle durch die Luft von der Flüssigkeitsoberfläche weg diffundieren müssen. Diese langsame Verdampfung aus einem offenen Gefäß nennt man *Verdunstung* (siehe unten).

Trägt man den Sättigungsdampfdruck p_S gegen die Temperatur auf, so erhält man die *Dampfdruckkurve* $p_S(T)$. Bei p - T-Werten, die auf dieser Kurve liegen, existieren die gasförmige und flüssige Phase nebeneinander im Gleichgewicht. Die Dampfdruckkurve stellt also die Grenzkurve zwischen beiden Phasen in dem Bereich dar, in dem der Phasenwechsel mit unstetigen Änderungen der physikalischen Eigenschaften verbunden ist. Deshalb endet die Dampfdruckkurve bei T_{krit} am kritischen Punkt (siehe Abb. 5.2). Es ist wichtig, darauf hinzuweisen, daß die $p_S(T)$ -Kurve nicht mit den p(T)-Kurve nienes Gases (Gay-Lussacsches Gesetz) zu tun hat, da die $p_S(T)$ -Kurve an die Koexistenz von Flüssigkeit und Dampf gebunden ist und das System Flüssigkeit-Dampf völlig andere Eigenschaften besitzt. Würde man

den Dampf isoliert betrachten, so hätte dieser die gleichen Eigenschaften wie ein Gas. Das gleiche gilt für die V(p)-Abhängigkeit. Die für das System Flüssigkeit-Dampf gefundene Abhängigkeit entspricht keinesfalls dem für Gase gefundenen Boyle-Mariotteschen Gesetz.

Kritische Temperatur

Es soll nun diskutiert werden, auf welche Weise Gas verflüssigt werden können. Prinzipiell ist dies einfach, man muß das zu verflüssigende Gas auf seinen Sättigungsdampfdruck bringen. Dann muß eine Volumenverkleinerung – ohne das eine weitere Drucksteigerung notwendig ist – genügen, um das Gas zu verflüssigen. Der Sättigungsdampfdruck kann aber, da er temperaturabhängig ist, auf verschiedene Weise erreicht werden. Man kann erstens bei konstantem Druck die Temperatur soweit erniedrigen, bis der zu dem Druck gehörende Sättigungsdampfdruck erreicht wird. Auf diese Weise kann man ein Gas immer in den flüssigen oder festen Zustand überführen. Man kann zweitens bei konstanter Temperatur den Druck soweit erhöhen, daß man den zu dieser Temperatur gehörigen Sättigungsdampfdruck erreicht. Obwohl dieses Verfahren oft zum Ziel führt, gelingt es nicht immer. So gelingt es z.B. nicht, Kohlendioxid bei einer Temperatur oberhalb von 31.0°C in den flüssigen oder festen Zustand überzuführen. Das deutet darauf hin, daß die obigen Überlegungen noch nicht vollständig waren.



Abbildung 5.31: Druck-Volumen-Diagramm des Kohlendioxids. Der schraffierte Bereich markiert das Sättigungsgebiet.

Offenbar verhalten sich reale Gase in bestimmten Bereichen von Temperatur und Druck nicht so, wie man es nach dem **Boyle-Mariotte**schen und **Gay-Lussac**schen Gesetz erwartet. Dies soll anhand des CO_2 diskutiert werden. Dazu betrachten wir das in Abb. 5.31 gezeigte experimentell bestimmte pV-Diagramm, in das die gemessenen Isothermen eingezeichnet sind. Betrachtet man die für $T = 10^{\circ}C$ gemessene Isotherme, so stellt man fest, daß für große V und kleine p mit einer Verkleinerung des Volumens der Druck zunächst ansteigt, wie man es nach dem **Boyle-Mariotte**schen Gesetz erwartet. Am Punkt A erreicht man dann aber den Sättigungsdampfdruck des CO_2 für $T = 10^{\circ}C$. Das CO_2 liegt jetzt als gesättigter Dampf vor und verhält sich dementsprechend. Da der Dampfdruck unabhängig vom Volumen ist, nimmt bei weiterer Volumenverkleinerung der Druck nicht mehr ab, sondern es tritt eine partielle Verflüssigung ein. Man erhält eine horizontale Linie im pV-Diagramm. Man erreicht schließlich Punkt B, an dem nur noch Flüssigkeit vorliegt. Eine weitere Volumenverkleinerung führt dann aufgrund der geringen Kompressibilität der Flüssigkeit zu einem sehr steilen Anstieg des Druckes. Die Diskussion der Isotherme für $T = 10^{\circ}$ C ergibt also das bereits oben diskutierte Verhalten, daß man bei konstanter Temperatur ein Gas durch bloße Druckerhöhung den Sättigungsdampfdruck erreichen kann und durch weitere Volumenverkleinerung dann verflüssigen kann.

Für die Isothermen von $T = 15^{\circ}$ C und $T = 20^{\circ}$ C gilt entsprechendes. Allerdings ist das Volumen des Gases entsprechend dem höheren Sättigungsdampfdruck kleiner und das Volumen der Flüssigkeit infolge der thermischen Ausdehnung größer geworden. Die Punkte A' und B' rücken somit näher zusammen. Betrachtet man schließlich die Isotherme für $T = 31^{\circ}$ C, so erkennt man, daß die beiden Volumina im Punkt C sogar zusammenfallen. Die flüssige und die gasförmige Phase haben in diesem Fall die gleiche Dichte. Bei noch höheren Temperaturen tritt überhaupt keine Umwandlung in eine Flüssigkeit mehr ein. Die Isothermen nehmen in etwa wieder die Form von Hyperbeln an, die dem **Boyle-Mariotte**schen Gesetz entsprechen würden. Man erkennt also, daß man CO₂ nur unterhalb der Temperatur von $T = 31^{\circ}$ C durch Druckerhöhung verflüssigen kann, oberhalb ist dies selbst bei Anwendung noch so hoher Drucke nicht möglich. Man nennt die Temperatur, oberhalb der keine Verflüssigung möglich ist, die *kritische Temperatur* T_k , das gemeinsame Volumen in Punkt C das *kritische Volumen* V_k und den zugehörigen Druck in diesem Punkt den *kritischen Druck* p_k . Die zum kritischen Volumen gehörende Dichte nennt man die *kritische Dichte* ρ_k . Die Werte für T_k , p_k und ρ_k sind für einige Stoffe in Tabelle 5.2 zusammengefaßt.

Stoff	T_k in K	p_k in bar	$ ho_k$ in g/cm ³
Kohlendioxid	304.15	73.86	0.468
Wasserdampf	647.3	228.5	0.328
Argon	150.85	50.55	0.536
Stickstoff	126.25	35.05	0.311
Sauerstoff	154.77	52.5	0.430
Wasserstoff	33.25	13.40	0.0310
Helium	5.20	2.37	0.0693

Tabelle 5.2: Kritische Temperatur T_k , kritischer Druck p_k und kritische Dichte ρ_k einiger Gase.

Verbindet man in Abb. 5.31 die Punkte $A, A', A'I, \ldots, C$ sowie die Punkte $B, B', B'I, \ldots, C$, so umschließt die resultierende Kurve das sogenannte *Sittigungsgebiet* in der pV-Ebene.

Die für CO_2 abgeleiteten Aussagen gelten allgemein für alle Gase: Es existiert für jedes Gas eine kritische Temperatur, oberhalb der auch durch noch so hohen Druck keine Verfüssigung bewirkt werden kann.

Für die Verflüssigung von Gasen muß man also erst unter die kritische Temperatur abkühlen und dann bis zur Sättigung komprimieren. Je tiefer die kritische Temperatur ist, desto kleiner wird der Sättigungsdruck, bei dem Verflüssigung eintritt. Für Helium liegt die Sättigungstemperatur bei nur etwa 5 K. Helium wurde deshalb erst im Jahr 1908 von **Kamerlingh Onnes** in Leiden verflüssigt.

Gasverflüssigung durch Entspannung (Joule-Thomson-Prozeß):

Man muß Gase, um sie durch Druckerhöhung zu verflüssigen, erst unter die kritische Temperatur abkühlen. Für reale Gase kann man das über den **Joule-Thomson**-Effekt (siehe Abb.5.21) erreichen. Bei der Expansion eines idealen Gases ins Vakuum bleibt die Temperatur konstant, da keine Volumenarbeit geleistet wird (die innere Energie ist hier nur eine Funktion von *T* unabhängig von *p* und *V*). Dies ist bei realen Gasen allerdings anders. Hier liegen intermolekulare Wechselwirkungskräfte vor, die bei der Expansion überwunden werden müssen. Das heißt, bei der Expansion eines realen Gases ins Vakuum muß Volumenarbeit geleistet werden, wodurch sich das Gas bei adiabatischer Prozeßführung abkühlt. Die Temperaturänderung kann man aus der **Van der Waals** Gleichung zu $dT/dP = (1/C_{mol,p})(\frac{2a}{RT}-b)$ ableiten.

Man kann dies sehr einfach zeigen, indem man Preßluft durch eine Spirale ausströmen läßt, die so angeordnet ist, daß die beim Auströmen durch Expansion abgekühlte Luft an der Preßluftleitung wieder zurückstreicht und diese dadurch vorkühlt (Gegenstromprinzip). Nach einigen Minuten erhält man am Ausgang der Düse flüssige Luft, die man in einem Dewargefäß auffangen kann.

Van der Waalssche Zustandsgleichung

Die **Van der Waals**sche Zustadsgleichung für reale Gase (Gl.(5.1.42) oder (5.1.45)) gilt prinzipiell sowohl für den gasförmigen als auch den flüssigen Zustand eines Gases. Wäre dies in der Tat der Fall, so müßten die von der **Van der Waals** Gleichung beschriebenen Isothermen (siehe Abb. 5.13) den experimentell gewonnenen (siehe Abb. 5.31) entsprechen. Dies ist aber nicht der Fall.

Multipliziert man die Van der Waals Gleichung aus, so erhält man

$$V^{3} - V^{2} \frac{p b + \nu R T}{p} + V \frac{a}{p} - \frac{a b}{p} = 0 \quad .$$
 (5.3.4)

Dies ist bei festem p und T eine Gleichung dritten Grades für V. Eine Parallele zur V-Achse (festes p) würde die Isotherme (festes T) deshalb in maximal 3 Punkten schneiden. Dies ist in Abb. 5.32 gezeigt. Die Isotherme für $T = 15^{\circ}$ C wird in drei Punkten A, B und C geschnitten. Das heißt, es solltem jedem Druck drei verschiedene Werte V_1 , V_2 und V_3 des Volumens entsprechen. Das zeigen aber die experimentell gemessenen Isothermen nicht. Ein weiterer Unterschied zwischen Theorie und Experiment besteht darin, daß die experimentellen Kurven beim Übergang in das Sättigungsgebiet Knicke aufweisen, während die theoretischen Kurven dies nicht tun. Diese zeigen dagegen im Sättigungsbereich einen S-förmigen Verlauf. Das größte Volumen V_1 entspricht dem Gaszustand, das kleinste V_2 dem flüssigen Zustand. Das mittlere Volumen V_3 hat keine physikalische Bedeutung. Abgesehen vom Sförmigen Verlauf entspricht also die aus der Van der Waals Gleichung erhaltene Isotherme dem experimentellen Verlauf. Es wurde von Maxwell gezeigt, daß der horizontale Verlauf der Isotherme, die den Sättigungsbereich darstellt, so gelegt werden muß, daß die oberhalb der horizontalen Geraden liegende Fläche gleich der unterhalb liegenden ist (Maxwell-Konstruktion). Den Beweis dafür lieferte Maxwell durch die Betrachtung eines Kreisprozesses. Aus energetischen Gründen muß es egal sein, ob man den Punkt C in Abb. 5.32 direkt entlang der Geraden oder über die S-förmige Van der Waals Isotherme erreicht. Mit Hilfe dieser Regel läßt sich aus den theoretisch berechneten Van der Waals Isothermen der Sättigungsdampfdruck bestimmen. Ein ausführliche Diskussion des Zusammenhangs zwischen Dampfdruck und Temperatur erfolgt weiter unten bei der Ableitung der Clausius-Clapeyron Gleichung.

Geht man zu höheren Temperaturen, so nähern sich die drei Volumina immer mehr an und nehmen schließlich bei der kritischen Temperatur denselben Wert an. Die kritische Isotherme hat nur noch einen



Abbildung 5.32: Zum Zusammenhang der **Van der Waals** Isothermen mit den Isothermen eines realen Gases. Die horizontale Gerade im Sättigungsbereich (schraffiert) muß so gelegt werden, daß die Flächen oberhalb und unterhalb der Gerade gleich sind (**Maxwell**-Konstruktion).

Schnittpunkt mit einer Horizontalen bestimmten Druckes. Für die kritische Temperatur fallen beim kritischen Druck die drei reelen Wurzeln der **Van der Waals**schen Gleichung zusammen. Oberhalb gibt es nur noch ein reelles Volumen.

Verdunsten und Sieden

Wir werden in diesem Unterabschnitt diskutieren, welche Unterschiede auftreten, wenn die Verdampfung einer Flüssigkeit nicht mehr in einem geschlossenen Gefäß abläuft, sondern in einem offenen Gefäß vor sich geht, so daß auf der freien Oberfläche ein unveränderlicher Druck, z.B. Atmosphärendruck, lastet.

Die Anwesenheit eines Fremdgases, z.B. Luft, stört die Verdampfung nicht. Aus der Flüssigkeit treten nach wie vor die energiereichsten Moleküle entgegen der Wirkung der Oberflächenspannung aus. Diese entfernen sich dann durch Diffusion von der Oberfläche. Der in Abb. 5.33 gezeigte Versuch zeigt die Verdampfung einer Flüssigkeit in Gegenwart von Luft. In dem Gefäß soll sich zunächst Luft bei Atmosphärendruck befinden. Man läßt dann über einen Hahn, wie er in Abb. 5.29a gezeigt ist, eine Flüssigkeit, z.B. Äther, in die Flasche eintreten. Der Äther verdampft dann in dem Behälter und das Manometer zeigt nach einiger Zeit den Druck des Ätherdampfes in dem mit Luft gefüllten Raum an. Bei der Temperatur von 20°C erhält man für Äther denselben Druck von 589 mbar wie bei einer Verdampfung in den luftleeren Raum. Der Partialdruck des Dampfes der Flüssigkeit ist also nach Eintritt des Gleichgewichtszustandes unabhängig vom Vorhandensein anderer Gase oder Dämpfe.

Das Gleichgewicht kann erst eintreten, wenn genausoviele Moleküle aus der Flüssigkeit austreten wie aus der Gasphase in die Flüssigkeit wieder eintreten. Bei einem offenen Gefäß kann dieses Gleichgewicht nie erreicht werden, da das für das Gas zur Verfügung stehende Volumen unendlich groß ist. Die Folge davon ist, daß eine offen stehende Flüssigkeit vollständig verdampft, und zwar bei allen Temperaturen und



Abbildung 5.33: Zur Verdampfung im gaserfüllten Raum.

Drucken. Diese langsame Verdampfung durch eine freie Oberfläche nennt man Verdunstung. Auch hier muß zur Aufrechterhaltung der Temperatur der Flüssigkeit die Verdampfungswärme von außen zugeführt werden. Falls dies nicht schnell genug geschieht, kühlt sich die Flüssigkeit ab. Die Verdampfungswärme tritt jetzt als Verdunstungskälte auf, die der Flüssigkeit entzogen wird. Die Abkühlung erfolgt umso schneller, je größer der Dampfdruck der Flüssigkeit ist (bei 20°C: Wasser: p = 23.3 mbar; Alkohol: p = 58.6 mbar; Äther: p = 589 Torr).³²

Erzeugung von Verdunstungskälte auf der Haut:

Zur örtlichen Betäubung der Haut benutzt man die starke Verdunstung von Äthylchlorid (C_2H_5CI), dessen Siedepunkt bei 13.1°C liegt. Man sprüht dazu Äthylchlorid auf die zu betäubende Hautstelle. Es vedampft dort sofort und entzieht der Haut die zu seiner Verdampfung notwendige Wärme, so daß lokal Temperaturen von weniger als 0°C entstehen.

Kühlen von Wein durch Verdunstung:

Füllt man Wein in einen unglasierten Tonkrug, so sorgt die starke Verdunstung durch die Oberfläche dafür, daß der Wein kühl bleibt.

Kryophor:

Zwei Glasgefäße A und B sind dicht mit einem U-Stück verbunden. In den Gefäßen soll sich nur Wasser und Wasserdampf befinden. Bringt man alles Wasser in Gefäß A und taucht Gefäß B in ein Kältebad, so kondensiert dort der Wasserdampf an der Gefäßwand von Gefäß B. Um den Wasserdampf wieder zu sättigen, verdunstet das Wasser im Gefäß A so schnell, daß es infolge der dabei auftretenden Abkühlung gefriert.

Bei starker Wärmezufuhr tritt der Fall ein, daß die Verdampfung durch die Oberfläche nicht mehr ausreicht, um einen stationären Zustand zu erzielen. Die Temperatur der Flüssigkeit steigt dann immer

³²Führt man die verdampfenden Moleküle durch einen Konvektionsstrom schnell von der Oberfläche weg, so treten aus der Oberfläche in der gleichen Zeit mehr Moleküle aus. Es wird in der gleichen Zeit dann mehr Verdampfungswärme gebraucht bzw. Verdunstungskälte der Flüssigkeit zugeführt. Diese Erscheinung ist jedem bekannt, der sich zur Abkühlung schon einmal Luft zugefächert hat. Die verdampfende Flüssigkeit ist in diesem Fall der aus dem Körper ausgetretene Schweiß.

mehr an, bis sich schließlich im Innern der Flüssigkeit Blasen bilden. Die Blasen führen zu einer Vergrößerung der Oberfläche. Die Gasblasen steigen in der Flüssigkeit auf und führen so zu einer vielfach höheren Wärmeabfuhr, so daß die Temperatur nicht weiter ansteigt. Eine Erhöhung der Wärmezufuhr führt in diesem Zustand nicht mehr zu einer Temperaturerhöhung, sondern zu einer Erhöhung der Dichte der Gasblasen. Der Zustand konstanter Temperatur wird dann erreicht, wenn der in den Dampfblasen vorhandene Sättigungsdruck gleich dem gesamten auf der Flüssigkeit lastenden Druck ist. Die aus dem Innern heraus erfolgende Verdampfung wird als *Sieden* bezeichnet. Wegen des Zusammenhangs zwischen Sättigungsdruck und Temperatur, ist die *Siedetemperatur* druckabhängig. Die Siedetemperaturen für einen Druck von p = 1 bar sind für einige Gase in Tabelle 5.3 zusammengestellt.

Stoff	Verdampfungswärme spezifische, λ_V (kJ/g)	Verdampfungswärme molare, Λ_V (kJ/mol)	Siedetemperatur T_S (K)	Siedetemperatur T_S (°C)
H ₂ O Sauerstoff Stickstoff Wasserstoff Helium Kohlendioxid Quecksilber	2.2446 0.2131 0.1971 0.4518 0.1362 0.2837	40.642 6.816 5.55 0.915 6.021 57.168	373.15 90.18 77.35 20.38 4.2 194.70 629.73	100 -182.97 -195.80 - 252.77 -268.95 - 78.45 356.58

Tabelle 5.3: Siedetemperaturen und Verdampfungswärmen einiger Stoffe bei einem Druck von 760 Torr oder 1.013 bar.

Druckabhängigkeit der Siedetemperatur:

Das der Luftdruck mit steigender Höhe abnimmt, siedet das Wasser in den Bergen bereits bei einer niedrigeren Temperatur als auf Meereshöhe. In einer Höhe von 4 800 m (Montblanc) kocht das Wasser bei einem durchschnittlichen Barometerstand von 556 mbar bereits bei 84°C. Einer Abnahme der Siedetemperatur um 1°C entspricht eine Druckabnahme von 36 mbar an der Erdoberfläche oder eine vertikale Erhebung von 297 m.

In "Schnellkochtöpfen" wird der Druck künstlich erhöht um eine Erhöhung der Siedetemperatur des Wasser und damit eine Verkürzung der Garzeiten zu erreichen.

Geysire:

Geysire schleudern in regelmäßigen Abständen Wasser unter gleichzeitiger Dampfentwicklung aus. Dies kann durch eine Siedepunktserhöhung des Wassers in großer Tiefe aufgrund der Druckerhöhung durch die darüberliegende Wassersäule erklärt werden. Fängt das Wasser in der Tiefe zu sieden an, so steigen Dampfblasen auf, die zu einer plötzlichen Druckverminderung in der Tiefe und damit zu einem explosionsartigen Sieden führen. Dabei wird die Wassersäule unter heftiger Dampfentwicklung ausgeworfen. Das Wasser fließt dann wieder in die Öffnung zurück und erhöht dabei wieder den Druck. Dadurch wird die Siedetemperatur wieder angehoben und das Sieden hört auf. Es vergeht dann eine gewisse Zeit, bis sich der beschriebene Vorgang wiederholt.

Eine Flüssigkeit, die zu sieden beginnt, zeigt die Blasenbildung nicht gleichmäßig im gesamten Flüssigkeitsvolumen. Wenn ein Gefäß von unten geheizt wird, so bilden sich die Blasen zuerst am Boden des Gefäßes, da die Wärmeleitfähigkeit der Flüssigkeit im Normalfall zu gering ist, um die Temperaturunterschiede schnell auszugleichen. Abgesehen von der ungleichmäßigen Beheizung ist die Blasenbildung vom Vorhandensein von sogenannten "Keimen" abhängig. Als Keime dienen Fremdkörper, gelöste Gase oder Gefäßrauigkeiten. Durch die Oberflächenspannung σ der Gasblasen herrscht in der Gasblase ein Überdruck von $2\sigma/r$, wobei r der Radius der Gasblase ist (vergleiche Abschnitt 3.4). Die Oberflächenspannung wird aber durch Verunreinigungen, Fremdstoffe, Spitzen etc. stark herabgesetzt, weshalb sich Gasblasen bevorzugt an solchen Stellen bilden. In Wasser dienen gelöste Luftbläschen als Kondensationskeime. Befreit man Wasser von diesen Bläschen (z.B. durch langes Kochen) und bringt es in ein sehr sauberes Gefäß, dann stellt man eine Erhöhung des Siedepunktes (bis zu 140°C) fest. Dieser *Siedeverzug* kann gefährlich sein, da bei der erhöhten Temperatur die Blasenbildung oft explosionsartig einsetzt.

Druck des gesättigten Dampfes – Clausius-Clapeyron-Gleichung

Es soll jetzt eine Beziehung für die Temperaturabhängigkeit des Dampfdruckes abgeleitet werden, die oben nur qualitativ diskutiert wurde. Es wird sich zeigen, daß hierfür die Verdampfungswärme eines Stoffes bekannt sein muß. Die spezifische Verdampfungswärme λ_V bzw. die molare Verdampfungswärme Λ_V kann mit Hilfe der Mischungsmethode gemessen werden, die für die Bestimmung der spezifischen Wärme bereits diskutiert wurde (siehe Abschnitt 5.2.1). Die für einige Stoffe gemessenen gemessenen Werte sind in Tabelle 5.3 aufgelistet.

Sind die spezifischen Verdampfungswärmen bekannt, so kann der Dampfdruck als Funktion der Temperatur abgeleitet werden, wie die erstmals von **Clausius** und **Clapeyron** gemacht wurde. Sie betrachteten hierzu einen reversiblen Kreisprozeß, wie er in Abb. 5.34 gezeigt ist. Unter Verwendung der Ergebnisse zum Wirkungsgrad reversibler Kreisprozesse kann eine Beziehung abgeleitet werden, die es erlaubt, den Dampfdruck einer Flüssigkeit in einem abgeschlossenen Volumen zu berechnen. Dabei wird zwischen zwei benachbarten Isothermen eines realen Gases ein **Carnot**scher Kreisprozeß durchgeführt.



Abbildung 5.34: Kreisprozeß zur Ableitung der **Clausius-Clapeyron** Gleichung anhand des pV-Diagramms von Kohlendioxid (gezeigt sind die Isothermen für 15 und 17^oC).

Bei Punkt A liegt zunächst eine rein flüssige Phase vor. Dann wird unter Zufuhr der Verdampfungswärme

 $Q_V = m\lambda_V = \nu\Lambda_V$ unendlich langsam vollständig verdampft. Nach außen wird dabei die Volumenarbeit $W_A = (p + dp) \cdot (V_D - V_{\rm Fl})$ abgegeben, wobei V_D und $V_{\rm Fl}$ die Volumina des Dampfes und der Flüssigkeit sind. Von Punkt *B* nach *C* erfolgt eine Expansion unter Abkühlung auf die Temperatur *T*. Je kleiner der Temperatuunterschied dT ist, umso geringer ist der Unterschied zwischen $V_D(C)$ und $V_D(B)$, sowie zwischen $V_{\rm Fl}(D)$ und $V_{\rm Fl}(A)$. In guter Näherung kann der Beitrag dieser Zustandsänderung in der Arbeitsbilanz vernachlässigt werden. Von *C* nach *D* wird isotherm komprimiert bis zur vollständigen Kondensation. Die Volumenarbeit $W_C = p(V_D - V_{\rm Fl})$ muß dabei aufgewendet werden und die Kondensationswärme *Q'* wird abgegeben. Auf dem Weg von *D* nach *A* erfolgt wieder eine Erwärmung auf T + dT, deren Betrag wiederum vernachlässigt werden kann. Die vom Kreisprozeß ingesamt abgegebene Arbeit ist demnach

$$W = W_A - W_C = dp \cdot (V_D - V_{\rm Fl}) \quad . \tag{5.3.5}$$

Man erhält damit den Wirkungsgrad des reversiblen Kreisprozesses zu

$$\eta_{\rm rev} = \frac{W}{Q} = \frac{dp \cdot (V_D - V_{\rm Fl})}{\nu \Lambda_V} \quad \frac{2. \text{ Hauptsatz}}{=} \quad \frac{(T + dT) - T}{T + dT} \simeq \frac{dT}{T} \quad . \tag{5.3.6}$$

Daraus folgt die Clausius-Clapeyronsche Differentialgleichung

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\nu \Lambda_V}{T \cdot (V_D - V_{\rm Fl})}$$

oder
$$\Lambda_V = T \frac{dp}{dT} \left(\frac{V_D}{\nu} - \frac{V_{\rm Fl}}{\nu}\right) \qquad (5.3.7)$$

für die molare Verdampfungswärme Λ_V . Diese hängt von der Verdampfungstemperatur T, dem Temperaturgradienten dp/dT des Dampfdruckes und der Differenz der Molvolumina von Dampf und Flüssigkeit ab. Aus der **Clausius-Clapeyron** Gleichung folgt sofort, daß am kritischen Punkt die Verdampfungswärme Null wird, da hier die Molvolumina V_D/ν und V_{Fl}/ν gleich sind. Man kann Gl.(5.3.7) auch in der Form $dT/dp = \frac{T\nu}{\Lambda_V}(V_D - V_{Fl}) \simeq \frac{T\nu}{\Lambda_V}V_D$, da $V_D \gg V_{Fl}$ ist, schreiben. Man erhält also eine starke Zunahme der Siedetemperatur mit zunehmendem Druck, da die Volumenänderung beim Verdampfen sehr groß ist.

Um die Dampfdruckkurve p(T) zu erhalten, muß man diese Differentialgleichung integrieren. Dies ist bei Annahme einiger Näherungen einfach möglich. Wegen $V_{\text{Fl}} \ll V_D$ kann man erstens das Volumen der Flüssigkeit vernachlässigen. Zweitens kann man mit Hilfe der allgemeinen Gasgleichung $V_D = \nu RT/p$ setzen, wenn man den Dampf eines idealen Gases betrachtet. Damit erhält man

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\Lambda_V p}{R T^2} \quad . \tag{5.3.8}$$

Nach Trennung der Variablen und anschließender Integration erhält man

$$\ln \frac{p}{p_0} = \frac{\Lambda_V}{R} \int_{T_0}^T \frac{dT}{T^2} = -\frac{\Lambda_V}{R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right) \quad . \tag{5.3.9}$$

Hierbei wurde bei der Integration vorausgesetzt, daß die molare Verdampfungswärme nicht von der Temperatur abhängt, also konstant ist. Diese Voraussetzung ist allerdings nur innerhalb eines engen Temperaturbereiches gültig. Mit dieser Näherung erhält man also



Abbildung 5.35: Dampfdruckkurve von Wasser. Das Inset zeigt den Dampfdruck für kleinere Temperaturen auf einer feineren Skala.

$$p = const. \cdot \exp\left(-\frac{\Lambda_V}{R T}\right) \quad . \quad (5.3.10)$$

Die nach dieser Gleichung berechnete Dampfdruckkurve von Wasser ist in Abb. 5.35 gezeigt. Trägt man also $\ln p$ gegen 1/T auf, so erhält man eine Gerade mit der negativen Steigung Λ_V/R .

Schmelzen und Sublimieren

Wir diskutieren jetzt die Phasenumwandlung fest-flüssig und fest-gasförmig. Wie bereits oben erwähnt wurde, ist auch die Schmelztemperatur vom Druck abhängig. Diese Druckabhängigkeit wird durch die **Clausius-Clapeyron**sche Gleichung gegeben, die auch für den Übergang fest-flüssig gilt.³³

Mit

$$\Lambda_S = T \frac{dp}{dT} \left(\frac{V_{\rm Fl}}{\nu} - \frac{V_{\rm Fest}}{\nu} \right) \quad , \tag{5.3.11}$$

wobei Λ_S die molare Schmelzwärme ist, ergibt sich für die Druckabhängigkeit der Schmelztemperatur

$$\frac{dT}{dp} = \frac{T}{\Lambda_S} \left(\frac{V_{\rm Fl}}{\nu} - \frac{V_{\rm Fest}}{\nu} \right) \quad . \tag{5.3.12}$$

³³Der Beweis kann auf die gleiche Weise wie für den Übergang flüssig-gasförmig geführt werden.

Daraus ergibt sich sofort, daß die Schmelztemperatur nur wenig vom Druck abhängen kann, da die Volumenänderung beim Schmelzen klein ist – im Gegensatz zur Verdampfung.

Da im allgemeinen $V_{\rm Fl} > V_{\rm Fest}$ ist, erhält man für das Schmelzen einer Flüssigkeit $dT/dp = \frac{T\nu}{\Lambda_S}(V_{\rm Fl} - V_{\rm Fest}) > 0$. Das heißt, die Schmelztemperatur nimmt mit steigendem Druck zu. Eine Ausnahme bildet hierbei Wasser. Da für Wasser $V_{\rm Fl} < V_{\rm Fest}$ ist, sinkt die Schmelztemperatur mit steigendem Druck. Mit der Schmelzwärme von Wasser und den Dichten von Eis und Wasser bei 0°C kann man berechnen, daß der Schmelzpunkt des Eises bei einer Druckzunahme um 1 bar um 0.0075°C sinkt. Da Wasser beim Druck von 1 bar bei 0°C schmilzt, müßte es in Vakuum dann erst bei 0.0075°C schmelzen. Dies kann experimentell beobachtet werden.



Abbildung 5.36: Zum Schmelzen des des Eises unter Druck – Regelation des Eises.

Ein Demonstrationsexperiment zum Schmelzen des Eises unter hohem Druck ist in Abb. 5.36 gezeigt. Um einen Eisblock wird eine Drahtschlinge gezogen und an dieser ein Gewicht befestigt. Da nur der dünne Draht auf dem Eis aufliegt, entsteht lokal ein sehr hoher Druck. Daher schmiltz das Eis unter der Schlinge und diese sinkt in das Eis ein. Da über ihr kein Druck mehr vorhanden ist, friert das Wasser dort wieder. Das Gewicht zieht die Schlinge auf diese Weise langsam durch den Eisblock hindurch, wobei der Eisblock am Ende nicht durchtrennt ist. Diese Erscheinung wird als *Regelation* des Eises bezeichnet und bildet die Erklärung für die langsame Talwanderung von Gletschern. Durch das große Gewicht der Eismassen werden die Gletscher auf der Unterseite flüssig, wodurch die Reibungskräfte kleiner werden und ein Fließen des Gletschers erlauben. Auf der Regelation beruht auch zum Teil die Beweglichlkeit eines Schlittschuhläufers. Durch den Druck und die Reibung verflüssigt sich das Eis unter den Kufen. Nach Entfernen des Schlittschuhs bildet sich das Eis sofort wieder.

Unter bestimmten Umständen geht eine feste Substanz direkt in den gasförmigen Zustand über und umgekehrt. Dieses Verhalten ist nicht auf bestimmte Stoffe beschränkt, sondern ist eine allgemeine Erscheinung. Man nennt diesen Vorgang *Sublimation* bzw. *Verfestigung*. Ob im gegeben Fall Schmelzen oder Sublimieren eintritt, hängt von den Druck- und Temperaturbedingungen ab. EineÜbersicht darüber, bei welchen Bedingungen eine Substanz schmilzt, verdampft oder sublimiert gibt das Phasendiagramm, das im nächsten Unterabschnitt näher diskutiert wird. Am klarsten sind die Verhältnisse bei der Sublimation ins Vakuum. Es stellt sich hier bei konstanter Temperatur ein bestimmter Sättigungsdruck, der *Sublimationsdruck*, ein. Solange dieser nicht erreicht ist, sublimiert die feste Substanz. Der Sublimationsdruck ist wiederum unabhängig vom Volumen. Versucht man durch Volumenverkleinerung den Sublimationsdruck zu erniedrigen, so gelingt dies nicht. Es schlägt sich solange Dampf auf der Oberfläche der festen Substanz nieder, bis der der Temperatur entsprechende Sublimationsdruck erreicht ist.

Selbstverständlich gehört zum Sublimieren einer festen Substanz eine bestimmte latente *Sublimati*onswärme Λ_{sub} bzw. λ_{sub} je nachdem, ob man sie auf ein Mol oder ein Gramm bezieht. Sie gehorcht der **Clausius-Clapeyron**schen Gleichung. Für den Tripelpunkt braucht sie übrigens nicht gemessen zu werden, da sie sich hier aus der Summe aus Schmelz- und Verdampfungswärme ergibt. Nach dem 1. Hauptsatz ist es nämlich egal, ob man eine Substanz erst schmilzt und dann verdampft oder direkt vom festen in den gasförmigen Zustand überführt.

Zustandsdiagramme

In den vorangegangenen Abschnitten wurde die Änderung des Aggregatzustandes einer Substanz diskutiert. Es hat sich gezeigt, daß die Koexistenz von zwei Aggregatzuständen nur für bestimmte Werte von Druck und Temperatur möglich ist. Bei Wärmezufuhr wird dann bei konstant gehaltenem Druck nicht die Temperatur erhöht, sondern es wird ein Teil der Substanz vom einen in den anderen Aggregatzustand übergeführt. Wichtigstes Ergebnis der obigen Analyse war die **Clausius-Clapeyron**sche Gleichung, die in gleicher Wiese für die verschiedenen Änderungen des Aggregatzustandes gilt:

$$\frac{dT}{dp} = \frac{T}{\Lambda \nu} \Delta V \quad . \tag{5.3.13}$$

Hierbei ist Λ die molare Phasenumwandlungswärme und ΔV die Differenz der Volumina V_1 der Substanz im Aggregatzustand 1 und V_2 im Aggregatzustand 2. Die **Clausius-Clapeyron**sche Gleichung beschreibt die Steigung der Gleichgewichtskurven im Druck-Temperatur-Diagramm. Wie oben bereits diskutiert, ist die Steigung abhängig von der Umwandlungswärme und der Differenz der Volumina. Bei Übergang fest-flüssig ist die Volumendifferenz klein und damit die Steigung dT/dp viel kleiner als beim Übergang von der flüssigen oder festen in die gasförmige Phase.

Da die Umwandlungswärmen und Dichten temperaturabhängig sind, ist eine Integration von Gl.(5.3.13) nicht einfach möglich. In gewissen Bereichen können mit Hilfe von Näherungen aber einfache Lösungen erhalten werden (vergleiche z.B. Gl.(5.3.10)).



Abbildung 5.37: Zustandsdiagramme von Wasser (a) und Kohlendioxid (b).

In Abb. 5.37 sind die Gleichgewichtskurven der verschiedenen Zustandsänderungen von Wasser und Kohlendioxid gemeinsam in ein Druck-Temperatur-Phasendiagramm eingezeichnet. Die Kurven teilen

die Fläche des gesamten Druck-Temperatur-Diagramms in 3 Teile. Entlang von Kurve 1 sind die feste und die gasförmige im Gleichgewicht. Entlang von Kurve 2, der Dampfdruckkurve, die am kritischen Punkt P_{krit} endet, sind Flüssigkeit und Dampf im Gleichgewicht. Schließlich sind entlang von Kurve 3, der Schmelzdruckkurve Flüssigkeit und feste Substanz im Gleichgewicht. Weil die in Abb. 5.37 gezeigten Diagramme alle Informationen über den Aggregatzustand einer Substanz enthalten, werden sie als *Zustandsdiagramme* bezeichnet.

Anhand des Zustandsdiagramms kann die Änderung des Zustandes von Wasser verfolgt werden. Geht man vom Punkt A aus, bei dem Wasser flüssig ist, und erniedrigt den Druck, so erreicht man Punkt B. Um die Temperatur an diesem Punkt konstant zu halten, wird aus der Umgebung die Verdampfungswärme zugeführt, wobei das Wasser verdampft. Bei weiterer Drucksenkung gelangt man zu Punkt C. Beginnt man jetzt bei konstantem Druck die Temperatur zu erniedrigen, so gelangt man zu Punkt D. Am Punkt D geht der Dampf bei konstanter Temperatur unter Abgabe der Sublimationswärme in den festen Zustand über. Nach weitere Abkühlung gelangt man zu Punkt E, wo dann bei konstanter Temperatur der Druck erhöht wird. Bei Wasser ist interessant, daß man bei Druckerhöhung irgendwann wieder in den flüssigen Zustand gelangt. Wie oben bereits diskutiert wurde, liegt dies daran, daß $\Delta V = V_{\rm Fl} - V_{\rm Fest} < 0$ ist. Kohlendioxid bleibt dagegen auch bei noch so hohen Drucken fest.

Es muß nun noch kurz diskutiert werden, in welchem Zustand die Substanz am Punkt TP vorliegt. Im Schnittpunkt der Kurven 2 und 3 müssen alle drei Aggregatzustände nebeneinander im Gleichgewicht sein, da entlang von 1 fester und gasförmiger und entlang von 2 flüssiger und gasförmiger Zustand im Gleichgewicht sind. Da entlang von 3 flüssiger und fester Zustand im Gleichgewicht sind, muß die Kurve 3 auch durch den Schnittpunkt der Kurven 1 und 2 verlaufen. Weil an dem Punkt TP alle Aggregatzustände koexistieren, nennt man TP den *Tripelpunkt*. Er liegt bei Wasser³⁴ bei p = 6.13 mbar und T = 273.16 K, bei Kohlendioxid bei p = 5.17 bar und T = 216.6 K. Man sieht unmittelbar aus Abb. 5.37, daß für einen Druck unterhalb demjenigen des Tripelpunktes, die Substanzen nicht im flüssigen Zustand existieren können. Festes Kohlendioxid (Trockeneis) geht deshalb für Atmosphärendruck bei Erwärmung direkt vom festen in den gasförmigen Zustand über.

Adiabatische Expansion von Kohlendioxid:

In einer Gasflasche befindet sich Kohlendiodid bei Raumtemperatur und hohem Druck. Kohlendioxid liegt dann in flüssiger Form vor. Öffnet man die Gasflasche und läßt das Kohlendioxid schnell auströmen, so findet eine adiabatische Expansion statt. Bei der Entspannung geht das Kohlendioxid vom Flüssigen in den gasförmigen Zustand über. Dabei muß allerdings die Verdampfungswärme aufgebracht werden. Da der Prozeß adiabatisch abläuft, wird die Verdampfungswärme dem Gas entzogen, wodurch sich dieses stark abkühlt und schließlich verfestigt. Man erhält durch die adiabatische Expansion festes Kohlendioxid, daß bei p = 1 bar eine Temperatur von $T = -79^{\circ}$ C besitzt.

Abschließend sei bemerkt, daß das Zustandsdiagramm von Stoffen mit nur 3 Aggregatzuständen den einfachsten Fall darstellt. Ein große Zahl von Stoffen existiert jedoch in zwei oder mehr festen Aggregatzuständen mit unterschiedlicher Kristallstruktur. Die Zustandsdiagramme werden dann erheblich komplizierter. Dasselbe gilt für Systeme, die aus mehreren *Komponenten* bestehen (z.B. Lösung von Kochsalz in Wasser: Komponente 1 = Kochsalz; Komponente 2 = Wasser). In solchen Systemen können mehrere *Phasen* existieren, bei denen es sich um räumlich getrennte Gebiete handelt, von denen jedes in bezug auf seine physikalischen Eigenschaften räumlich homogen ist (z.B. Phase 1: Einkristall; Phase 2: Salzlösung).

³⁴Der Tripelpunkt von Wasser wird, wie in Abschnitt 5.1.1 beschrieben wurde, als Fixpunkt für die Kelvin-Skala verwendet und auf T = 273.16 K festgelegt.

5.3.2 Lösungen

Verschiedene Arten von Lösungen

1. Gase in Gasen:

Cavendish (1781) und **Dalton** (1802) beschäftigten sich mit dem Druck von Gasgemischen. Sie erkannten rein empirisch, daß der Gesamtdruck einer Gasmischung gleich groß ist, wie die Summe aller Partialdrücke der Gaskomponenten:

$$p_{\text{ges}} = p_1 + p_2 + \ldots + p_n = \sum_{i=1}^n p_i$$
 (5.3.14)

Dies ist das **Dalton**sche *Partialdruckgesetz*. Unter dem Partialdruck einer Komponente versteht man dabei den Druck, den diese ausüben würde, wenn sie alleine in dem Behälter wäre. Da die Gesetze von **Boyle-Mariotte** und **Gay-Lussac** unabhängig von der speziellen Gassorte sind, gelten diese Gesetze auch für Mischungen.

Definition der relativen Luftfeuchtigkeit:

Ist p_{H_2O} der gemessene Wasserpartialdruck und $p_S(T)$ der Sättigungsdampfdruck von Wasser bei der Temperatur T, so definiert man die relative Luftfeuchtigkeit als

$$f_{\rm rel} = 100\% \frac{p_{\rm H_2O}}{p_S(T)}$$
 . (5.3.15)

Die relative Luftfeuchtigkeit gibt also das Verhältnis des Wasserpartialdrucks zum Sättigungsdampfdruck in Abhängigkeit von der Temperatur an.

2. Gase in Flüssigkeiten:

Die in einer Flüssigkeit gelöste Gasmenge ist bei gegebener Temperatur proportional zum Partialdruck dieses Gases über der Lösung (**Henry-Dalton***sches Gesetz*). Mit steigender Temperatur nimmt die Löslichkeit ab. So läßt sich z.B. Wasser durch Abkochen luftfrei machen.

3. Gase in Festkörpern:

Bei der Diskussion von Oberflächenphänomenen in Kapitel 3 wurde gezeigt, daß Flüssigkeitsmoleküle an den Gefäßwänden haften bleiben (Adhäsion). Im Gegensatz dazu versteht man unter *Okklusion* die Absorption eines Gases, das dabei in tiefere Schichten des Festkörpers eindringt. Fast alle Metalle können Gase okkludieren und geben diese im Vakuum erst wieder bei hohen Temperaturen ab. Platin und Paladium können z.B. beträchtliche Mengen an Wasserstoff aufnehmen.

4. Feste Stoffe in Flüssigkeiten:

Bei Lösen von Festkörpern in Flüssigkeiten ist zurÜberwindung der intermolekularen Kräfte Energie notwendig. Da elektrische Prozesse bei Lösungsvorgängen eine wichtige Rolle spielen, sind Wasser und Ammoniak ausgesprochen gute Lösungsmittel für ionogene und polare Verbindungen. Sie besitzen elektrische Dipolmomente und können sich deshalb an die gelösten Moleküle oder Ionen anlagern. Man spricht von *Solvation*, speziell beim Wasser von *Hydration*.

Je nachdem, ob die Anlagerungsenergie größer oder kleiner als die Bindungsenergie ist, verläuft dieser Vorgang exotherm, also unter Wärmeabgabe, oder endotherm, also unter

Wärmeaufnahme.³⁵

Osmose

Eine Lösung (z.B. Zucker in Wasser) befindet sich in einem Behälter, der durch eine semipermeable Membran in zwei Teile unterteilt ist. Im Teilvolumen A befindet sich die Lösung, während sich im Teilvolumen B nur das Lösungsmittel (Wasser) befinden soll (siehe Abb. 5.38). Die semipermeable Trennwand hat die Eigenschaft, Wassermoleküle durchzulassen, nicht aber die größeren Zuckermoleküle. Nach einiger Zeit stellt sich in Teilvolumen A ein Überdruck, der sogenannte *osmotische Druck* ein. Ist die semipermeable Membran elastisch, so wölbt sie sich in das Teilvolumen B hinein.



Abbildung 5.38: Zum osmotischen Druck. Die semipermeable Membran ist nur für die Moleküle des Lösungsmittels, nicht aber für die des gelösten Stoffes durchlässig.

Der Gleichgewichtszustand ist dann erreicht, wenn der Wasserpartialdruck auf beiden Seiten der Membran gleich groß ist. Im Bild der kinetischen Gastheorie (siehe Abschnitt 5.4) bedeutet das, daß pro Zeiteinheit gleichviele Wassermoleküle von links und rechts auf die Membran treffen. Unter diesen Bedingungen verhalten sich die Zuckermoleküle wie ein verdünntes bzw. ideale Gas. Für den osmotischen Druck p_{os} gilt dann die allgemeine Gasgleichung und man erhält

$$p_{\rm os} = \frac{\nu R T}{V}$$
 . (5.3.16)

Diese Beziehung nennt man das Van't Hoffsche Gesetz. ν bezeichnet hierbei die Anzahl der gelösten Mole (z.B. Zucker in Wasser).

Der osmotische Druck einer Lösung ist also gleich demjenigen, die der gelöste Stoff ausüben würde, wenn seine Moleküle als ideales Gas im gleichen Raum vorhanden wären, den die Lösung einnimmt. In der Natur spielt der osmotische Druck eine bedeutende Rolle (z.B. beim Aufsteigen von Säften in Pflanzen).

Messung des osmotischen Drucks mit einer Pfefferschen Zelle:

Eine zweckmäßige Anordnung zur Messung des osmotischen Druckes ist die *Pfeffersche Zelle* (siehe Abb. 5.39). In einer Blase mit semipermeable Wand befindet sich dabei eine Zuckerlösung, außerhalb davon reines Wasser. Durch den osmotischen Druck steigt die Lösung im Steigrohr um die Höhe *h* über den äußeren Wasserspiegel an. Daraus läßt sich der osmotische Druck nach der Formel für den hydrostatischen Druck (vergleiche Gl.(3.3.12) zu

$$p_{\rm os} = \rho_{\rm L\ddot{o}sung} g h \quad . \tag{5.3.17}$$

berechnen.

³⁵Löst man Äthanol in Wasser, so beobachtet man eine Temperaturerhöhung durch die bei der Anlagerung der H₂O-Moleküle



Abbildung 5.39: Messung des osmotischen Drucks mit einer Pfefferschen Zelle.

Dampfdruck und Siedepunkt von Lösungen

Die Untersuchung des Dampfdruckes von Lösungen ist besonders interessant, da man daraus die Bindungskräfte zwischen den Lösungsmittelmolekülen und den Molekülen des gelösten Stoffes untersuchen kann. Man erwartet, daß der Dampfdruck einer Lösung kleiner wird, wenn die Kräfte zwischen seinen Molekülen und denen des gelösten Stoffes groß sind, da dann weniger Moleküle aus der Lösung austreten.

Wir betrachten zunächst die Mischung zweier Stoffe A und B, die bei einer bestimmten Temperatur die Dampfdrucke p_{A0} und p_{B0} haben sollen. Sind die intermolekularen Kräfte zwischen A und B genauso groß, wie zwischen den Molekülen von A und B selbst, so ist es für ein verdampfendes Molekül egal, ob in seiner Umgebung A- oder B-Moleküle sind. Der Partialdruck von A nimmt, wie in Abb. 5.40a gezeigt, linear mit dem Anteil von A an der Mischung ab. Entsprechendes gilt für B. Der Dampfdruck verläuft in diesem Fall linear zwischen p_{A0} und p_{B0} . Man nennt eine solche Mischung eine *ideale Mischung*. Falls die Kräfte zwischen A und B stärker sind, als zwischen gleichartigen Molekülen von A oder B, dann werden durch Zugabe von B zu A die Moleküle A am Verdampfen gehindert und der Partialdruck p_A wird reduziert. Entsprechendes gilt umgekehrt für die Zugabe von B zu A (siehe gestrichelte Kurven in Abb. 5.40a).³⁶

Wir wollen im folgenden nur Mischungen von Stoffen A und B betrachten, von denen der eine (B) bei der betreffenden Temperatur einen sehr kleinen Dampfdruck hat. Der gesamte Dampfdruck p ist dann praktisch gleich dem Partialdruck des Stoffes A (siehe Abb. 5.40b). Diese Dampfdruckerniedrigung hat zur Folge, daß der Siedepunkt einer solchen Lösung höher liegt als der des reinen Lösungsmittels A. Als relative Dampfdruckerniedrigung wird der Ausdruck $(p - p_A)/p_A$ bezeichnet, worin p_A der Dampfdruck über dem reinen Lösungsmittel (Stoff A) und p den Druck über der Lösung bezeichnet. Sind die Lösungen stark verdünnt, so befindet man sich in Abb. 5.40b ganz in der Nähe von p_{A0} . In diesem Gebiet gilt für die Steigung der $p(X_B)$ -Kurve $-\Delta p/X_B \simeq p_{A0}/1$ oder $\Delta p/p_{A0} = -X_B$, wobei

an die Alkoholmoleküle frei werdende Energie. Bei der Lösung von CaCl₂ in Wasser entstehen Ionen, die sich in Lösungsmittel mit einer Hydrathülle umgeben. Da die Hydrationsenergie größer ist als die zur Dissoziation aufzubringende Energie, führt die freiwerdende Energie zu einer Temperaturerhöhung.

³⁶Walter J. Moore vergleicht dieses Verhalten mit der Auswanderungsrate von Staaten, aus der man auf die inneren Verhältnisse eines Staates schließen könne. "Wenn das Leben der Nation erfreulich ist, so ist die Tendenz zur Emigration kelin".



Abbildung 5.40: Dampfdruck der Mischungen zweier Stoffe mit etwa gleiche (a) und sehr unterschiedlichen Dampfdrucken p_{A0} und p_{B0} .

 $\Delta p = p - p_{A0}$ und $X_B = \nu_B / (\nu_A + \nu_B)$ der Molenbruch ist. Berücksichtigt man ferner, daß bei sehr verdünnten Lösungen die Molzahl $\nu_A \gg \nu_B$ ist, so erhält man

$$\frac{p - p_{A0}}{p_{A0}} = \frac{\Delta p}{p_{A0}} = -\frac{\nu_B}{\nu_A} \quad . \quad (5.3.18)$$

Man nennt dieses Gesetz das **Raoult**sche Gesetz. Das Minuszeichen deutet an, daß es sich um eine Erniedrigung des Dampfdruckes handelt. Die Dampfdruckerniedrigung ist demnach proportional zur Menge des gelösten Stoffes. Dieser Effekt beruht auf der größeren Kohäsion in der Lösung.

Messung der Dampfdruckerniedrigung:

Es wird der Dampfdruck über dem reinen Lösungsmittel (Wasser) und über der gleichen Menge Zuckerlösung verglichen. Durch Öffnen des Hahn in der in Abb. 5.41 gezeigten Anordnung stellt man zunächst Druckausgleich her. Schließt man den Hahn, so stellt sich das Manometer sofort gemäß den in den getrennten Räumen herrschenden Dampfdrücken ein. Der Dampfdruck über der Lösung ist immer niedriger als über dem reinen Lösungsmittel.

Aus der Dampfdruckerniedrigung folgt, daß Lösungen einen höheren Siedepunkt haben als das reine Lösungsmittel. Reines Wasser hat beispielsweise bei 373 K einen Dampfdruck von 1.013 bar. Eine Lösung hat einen etwas geringeren Dampfdruck. Der Dampfdruck von 1.013 bar ist allerdings zur Überwindung des Luftdruckes über der Flüssigkeit notwendig. Demnach wird die Siedetemperatur bei einer etwas höheren Temperatur liegen. Man erhält eine *Siedepunktserhöhung* um ΔT_S (siehe hierzu Abb. 5.42). Die Siedepunktserhöhung von Lösungen ist als eine direkte Folge der Dampfdruckerniedrigung.

Aus Abb. 5.42 folgt sofort die Beziehung³⁷

$$\frac{p_0 - p}{T - T_0} \simeq \frac{dp}{dT} \quad . \tag{5.3.19}$$

 $^{^{37}}$ Im folgenden wird p_0 für den Sättigungsdampfdruck des reinen Lösungsmittels verwendet.



Abbildung 5.41: Zur Messung der Dampfdruckerniedrigung von Lösungen.



Abbildung 5.42: Zur Siedepunktserhöhung von Lösungen.

In dieser Gleichung kann man, da es sich um kleine Druck- und Temperaturdifferenzen handelt, den Differenzenquotienten in guter Näherung durch den Differentialquotienten ersetzen. Für diesen gilt aber auch die **Clausius-Clapeyron**sche Gleichung, wodurch man

$$\frac{p_0 - p}{T - T_0} = \frac{dp}{dT} = \frac{\Lambda_{0V}\nu_0}{T_0(V_D - V_{\rm Fl})} .$$
(5.3.20)

Hierbei ist Λ_{0V} die molare Verdampfungswärme des reinen Lösungsmittels. Da $V_D \gg V_{\text{Fl}}$, kann V_{Fl} vernachlässigt werden. Benutzt man ferner für V_D die allgemeine Gasgleichung $V_D = \nu_0 R T_0 / p_0$, so erhält man

$$\frac{p_0 - p}{T - T_0} = \frac{\Lambda_{0V} p_0}{R T_0^2} \quad . \tag{5.3.21}$$

Daraus folgt für die Siedepunkterhöhung

$$T - T_0 = \frac{p_0 - p}{p_0} \frac{RT_0^2}{\Lambda_{V0}} \quad . \tag{5.3.22}$$

Verwendet man für die Dampfdruckänderung Gl.(5.3.18), so erhält man das **Raoult**sche Gesetz für die Siedepunkterhöhung zu

$$T - T_0 = \frac{RT_0^2}{\Lambda_{V0}} \frac{\nu_1}{\nu_0} . \qquad (5.3.23)$$

Hierbei ist ν_0 die Molzahl des Lösungsmittels und ν_1 diejenige des gelösten Stoffes.

Aus der Dampfdruckerniedrigung folgt auch, daß der Gefrierpunkt einer Lösung tiefer liegt als der des Lösungsmittels. Man erhält eine *Gefrierpunktserniedrigung* um ΔT_G .

Kältemischung:

Ein Gemisch aus Eis und Wasser hat eine Temperatur von 0° C. Wird jedoch Kochsalz dazugegeben, so sinkt die Temperatur ab, ohne daß die Lösung erstarrt. Der Grund dafür ist, daß sich Kochsalz in Eis und im Wasser löst. Die dazu nötige Lösungswärme wird dem System entzogen. Auf diese Weise kann man bei günstigem Mischungsverhältnis Temperaturen bis herunter zu -22° C erreichen.

5.4 Kinetische Gastheorie

In den vorangegangenen Abschnitten haben wir gesehen, daß Wärme eine Energieform ist. Es wurde allerdings nichts darüber gesagt, welche Energieform der Wärme zuzuschreiben ist. Darüber sagt der 1. Hauptsatz nichts aus. Jede weitergehende Aussage über die spezielle Natur der Wärmeenergie stellt deshalb eine Hypothese dar, die über die unmittelbare Erfahrung hinausgeht. Es liegt aber nahe die Wärmeenergie mit der atomistischen Struktur der Materie zu verknüpfen. Die kleinsten Teile der Materie sind im allgemeinen nicht in Ruhe und besitzen deshalb eine kinetische Energie. Man kann diese Bewegung zwar nicht direkt sehen, aber doch wenigstens indirekt sichtbar machen (**Brown**sche Molekularbewegung). Man hat deshalb die Hypothese aufgestellt (**R. Clausius** und **J. Cl. Maxwell**), daß die Wärmeenergie identisch mit der kinetischen Energie der Moleküle bzw. Atome ist. Die auf dieser Hypothese basierende Theorie nennt man die *molekularkinetische Theorie der Wärme*.

Betrachtet man zunächst ein ideales Gas, so besteht dieses vom molekularen Standpunkt aus betrachtet aus Molekülen verschwindender Volumenausdehnung, die keine Kräfte aufeinander ausüben. Ein Molekül eines idealen Gases muß sich also gleichförmig geradlinig bewegen, bis es mit einem anderen Molekül oder der Wandung des Gefäßes zusammenstößt, wobei es elastisch reflektiert wird. Man kann zu einem realen Gas weitergehen, indem man den Molekülen ein endliches Volumen gibt und endliche Wechselwirkungskräfte zuläßt. Basierend auf diesen einfachen Annahmen, kann man mit Hilfe der molekularkinetischen Theorie Aussagen über die Zustandsgleichung, die spezifischen Wärmen, die Wärmeleitung usw. machen, die alle im Einklang mit der Erfahrung stehen. Man betrachtet heute deshalb diese Theorie als in ihren Grundzügen gesichert.

5.4.1 Gaskinetischer Druck

Es soll nun zunächst gezeigt werden, daß das Gesetz von **Boyle-Mariotte** sich aus dem molekularen Aufbau eines gasförmigen Stoffes verstehen läßt. Dazu schreiben wir den Molekülen eines Gases folgende Eigenschaften zu:

- Die Moleküle eines Gases befinden sich in ständiger ungeordneter Bewegung. Zwischen zwei Zusammenstößen bewegen sie sich gleichförmig geradlinig, d.h. sie üben in dieser Zeit keine Wechselwirkungskräfte aus.
- Bei Zusammenstößen untereinander und mit der Wand des Gefäßes verhalten sich die Gasmoleküle wie vollkommen elastische Kugeln. Damit wird die vom Gas auf die Behälterwand ausgeübte Kraft auf die Stöße der Moleküle gegen die Wand zurückgeführt.

Da die Masse m der Moleküle klein gegen die Masse der Wand sind, werden die Moleküle nach dem Auftreffen reflektiert. Die Impulsänderung eines senkrecht auf die Wand auftreffenden Moleküls mit dem Impuls $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ beträgt $\Delta p = 2|\mathbf{p}| = 2mv$, da beim Stoß der Impuls umgekehrt wird (vergleiche Abschnitt 1.10). Für die pro Stoß auf die Wand übertragene Kraft ergibt sich betragsmäßig

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2mv}{\Delta t} \quad . \tag{5.4.1}$$

Dabei ist Δt die unbekannte Wechselwirkungszeit zwischen Molekül und Wand.³⁸

³⁸Dieser Zusammenhang kann mit einer Waage überprüft werden, auf deren eine Waagschale in periodischer Folge Kugeln auftreffen. Die resultierende Kraft hängt von der Masse, der Geschwindigkeit und der Anzahl der Kugeln, die pro Zeiteinheit auf die Waagschale auftreffen, ab.

Zur Ableitung des **Boyle-Mariotte**schen Gesetz aus den Vorstellungen der kinetischen Gastheorie sollen folgende vereinfachenden Annahmen gemacht werden.³⁹

- 1. Das Gas soll aus N Molekülen bestehen, die in einen Würfel mit Volumen V eingeschlossen sind.
- 2. Die Gasmoleküle haben alle den gleichen Geschwindigkeitsbetrag.
- 3. Jeweils 1/6 der Gasmoleküle bewege sich senkrecht auf eine der 6 Würfelflächen zu.

In der Zeit Δt wird eine Wand von den Molekülen erreicht, die maximal die Stecke $v\Delta t$ von der Wand entfernt sind, sich also im Volumen $Av\Delta t$ vor der Wand befinden. Hierbei ist A die Würfelfläche. Die Zahl der Moleküle, die pro Zeit Δt auf die Wand treffen, ist dann

$$Z = \frac{1}{6}N\frac{\Delta V}{V} = \frac{1}{6}N\frac{Av\Delta t}{V} \quad . \tag{5.4.2}$$

Durch die Z Moleküle wird aufgrund der Impulsänderung die Kraft

$$F = Z \frac{2mv}{\Delta t} = \frac{1}{3} N m v^2 \frac{A}{V}$$
(5.4.3)

auf die Wand ausgeübt. Mit der Teilchendichte n = N/V und p = F/A ergibt sich damit der Druck

$$p = \frac{1}{3} n m v^2$$
 . (5.4.4)

Dies ist die *Grundgleichung der kinetischen Gastheorie*. Der Druck eines Gases auf die Wand des einschließenden Gefäßes ist damit gleich der auf die Flächeneinheit der Wand übertragene Impulsänderung der Moleküle. Das **Boyle-Mariotte**sche Gesetz ergibt sich mit diesem Ausdruck sofort zu

$$p V = \frac{1}{3} N m v^2 = const$$
 . (5.4.5)

Die Konstante

$$\frac{1}{3} N m v^2 = \frac{2}{3} N \left(\frac{1}{2} m v^2\right)$$
(5.4.6)

enthält offensichtlich die kinetische Energie der einzelnen Moleküle. Andererseits hängt sie über die allgemeine Gasgleichung $pV = \nu RT$ mit der absoluten Temperatur zusammen. Man erhält daraus

$$pV = \frac{2}{3} N \frac{1}{2} m v^2 = \nu R T$$
(5.4.7)

³⁹Diese vereinfachenden Annahmen werden in den folgenden Abschnitten bei einer genaueren Betrachtung dann teilweise wieder zurückgenommen.

Beträgt die Stoffmenge genau ein Mol, d.h. $\nu = 1$ und $N = N_A$, so ergibt sich

$$R T = \frac{2}{3} N_A \frac{1}{2} m v^2$$
(5.4.8)

und damit

$$E_{\rm kin} = \frac{1}{2}m v^2 = \frac{3}{2} \frac{R}{N_A} T = \frac{3}{2} k_B T \quad . \quad (5.4.9)$$

Hierbei ist $k_B = R/N_A$ die bereits oben eingeführte **Boltzmann**-Konstante. Sie hat den Zahlenwert

$$k_B = \frac{R}{N_A} = \frac{8.315 \text{ J mol}^{-1} \text{K}^{-1}}{6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}} = 1.3807 \times 10^{-23} \text{ J/K}$$
 (5.4.10)

Damit ist gezeigt, daß das Produkt k_BT ein Maß für die Energie des einzelnen Moleküls ist und zwar für die kinetische Energie seiner Translationsbewegung. Man bezeichnet die Summe der Energien aller Moleküle eines Stoffes als die innere Energie des Stoffes. Die abgeleiteten Ausdrücke zeigen dann, daß die Temperatur eines Stoffes ein Maß für seine innere Energie ist.

Die bisherige Überlegung enthält die vereinfachenden Annahmen, daß alle Moleküle die gleiche Geschwindigkeit v haben und senkrecht auf die Wand auftreffen. Wir werden nun im folgenden unter Berücksichtigung einer Geschwindigkeitsverteilung entsprechende Beziehungen ableiten. Es wird sich zeigen, daß sich dann die hier gemachten Aussagen nur für die Mittelwerte der entsprechenden Größen halten lassen.

5.4.2 Boltzmannsche Energieverteilung

Die Antwort auf die Frage, mit welchen Geschwindigkeiten man für die Moleküle in einem idealen Gas bei der Temperatur T zu rechnen hat, geben der **Boltzmann**sche Energieverteilungssatz und das **Maxwell**sche Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung. Es soll nun zuerst anhand zweier einfacher Beispiele der Begriff einer Verteilungsfunktion plausibel gemacht werden.



Abbildung 5.43: Volumen V mit N Teilchen.

Wir betrachten dazu ein Volumen V, in dem sich N Teilchen befinden sollen (siehe Abb. 5.43). Die Schwerkraft soll zunächst vernachlässigt werden und das Gas sei homogen verteilt. Dann ist die Teilchendichte n = N/V im ganzen Raum konstant. Unter diesen Bedingungen ist die Zahl der Teilchen dN, die sich im Volumenelement dV = dx dy dz am Ort r befinden, proportional zur Größe des Volumenelements, d.h. $dN \propto dV$ und man kann schreiben

$$dN = f(\mathbf{r}) \, dV$$
 . (5.4.11)

Hierbei nennt man $f(\mathbf{r})$ die räumliche Verteilungsfunktion. Sie hat die Bedeutung einer Teilchendichte am Ort \mathbf{r} . In diesem einfachen Beispiel läßt sich $f(\mathbf{r})$ sofort angeben:

$$f(\mathbf{r}) = \frac{dN}{dV} = \frac{N}{V} = n = const \quad .$$
 (5.4.12)

Das heißt, $f(\mathbf{r})$ ist also unabhängig vom Ort. Wegen $\int_V dN = N$ einerseits und $\int_V dN = \int_V f(\mathbf{r}) dV$ andererseits gilt

$$\int_{V} f(\mathbf{r}) \, dV = N$$
oder
$$\frac{1}{N} \int_{V} f(\mathbf{r}) \, dV = 1 \quad . \quad (5.4.13)$$

Die Verteilungsfunktion $f(\mathbf{r})$ ist auf die Teilchenzahl N normiert.

Nun soll in *z*-Richtung die Schwerkraft eingeschaltet werden, die bisher vernachlässigt wurde. Ferner soll das den Teilchen zur Verfügung stehende Volumen in *z*-Richtung unbegrenzt sein. Aus der Aerostatik ist bereits bekannt, daß der Druck eines idealen Gases bei konstanter Temperatur nach der *barometrischen Höhenformel* als Funktion der Höhe *z* abnimmt (vergleiche Abschnitt 3.3.4, Gl.(3.3.29))

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{\rho_0}{p_0} g z\right)$$
 (5.4.14)

Dabei bedeuten ρ_0 und p_0 die Dichte und den Druck des Gases bei der Höhe z = 0. Bei einem idealen Gas ist bei konstanter Temperatur die Teilchendichte proportional zum jeweils herrschenden Druck (**Boyle-Mariotte**sches Gesetz). Das heißt, es gilt

$$n(z) \propto p(z)$$

und damit $n(z) = n_0 \exp\left(-\frac{\rho_0}{p_0} g z\right)$. (5.4.15)

Bezieht man nun die Dichte ρ_0 auf ein Mol eines Gases, das nur aus Molekülen der Masse *m* bestehen soll, kann man mittels der allgemeinen Zustandsgleichung für ideale Gase den Exponenten durch molekulare Größen ausdrücken. Es gilt

$$\frac{\rho_0 gz}{p_0} = \frac{\mathbb{M}_0 gz}{\mathbb{V}_0 p_0} = \frac{N_A m gz}{\mathbb{V}_0 p_0} = \frac{N_A m gz}{RT} = \frac{m gz}{(R/N_A)T} = \frac{m gz}{k_B T} \quad .$$
(5.4.16)

Hierbei ist \mathbb{M}_0 die Molmasse, \mathbb{V}_0 das Molvolumen und N_A die Avogadro-Konstante. Man erhält somit

$$n(z) = n_0 \exp\left(-\frac{mgz}{k_BT}\right) = n_0 \exp\left(-\frac{E_{\text{pot}}}{k_BT}\right) \quad . \quad (5.4.17)$$

Diese Dichteverteilung gilt für die atmosphärische Luft natürlich nicht streng, da die Voraussetzungen T = const und gleiche Masse aller Gasmoleküle nicht erfüllt sind und Turbulenzen zusätzlich die Verteilung stören. Eine durch Gl.(5.4.17) gegebene Verteilung muß sich aber z.B. auch für aufgeschwemmte Teilchen der Dichte ρ in einer Flüssigkeit der Dichte $\dot{\rho}$ einstellen. Unter Berücksichtigung des Auftriebes erhält man

$$n(z) = n_0 \exp\left(-\frac{(\rho - \rho')V_T gz}{k_B T}\right)$$
 (5.4.18)

Hierbei ist V_T das Teilchenvolumen. Mit Hilfe dieses Ausdruckes bestimmte **Perrin**⁴⁰ aus dem Sedimentationsgewicht aufgeschwemmter Teilchen die **Boltzmann**-Konstante und aus dieser mit Hilfe von $k_B = R/N_A$ die **Avogadro**-Konstante.

Da die Verteilungsfunktion $f(\mathbf{r})$ die Teilchendichte am Ort \mathbf{r} angibt, darf man auch schreiben

$$f(\mathbf{r}) = f(z) = f_0 \exp\left(-\frac{mgz}{k_BT}\right) = f_0 \exp\left(-\frac{E_{\text{pot}}(z)}{k_BT}\right) \quad . \quad (5.4.19)$$

Hierbei entspricht f_0 der Teilchendichte n_0 . Die Verteilungsfunktion $f(\mathbf{r})$ (siehe Abb. 5.44) gibt die Dichte der Teilchen eines Gases der Temperatur T am Ort \mathbf{r} , an dem ein Teilchen die potentielle Energie $E_{\text{pot}}(z) = mgz$ besitzt, an. Der Ausdruck

$$f(\mathbf{r})dV = f_0 \exp\left(-\frac{E_{\text{pot}}(z)}{k_B T}\right) dx dy dz$$
(5.4.20)

gibt die Anzahl der Teilchen an, die sich in einem Volumenelement der Größe dV am Ort r mit der potentiellen Energie $E_{pot}(z)$ aufhalten, wenn das Gas die Temperatur T besitzt.

Die Verallgemeinerung dieser Erkenntnis ist der Boltzmannsche Energieverteilungssatz:

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = f_0 \exp\left(-\frac{E}{k_B T}\right) = f_0 \exp\left(-\frac{E_{\text{pot}}(\mathbf{r}) + E_{\text{kin}}(\mathbf{v})}{k_B T}\right) \quad . \quad (5.4.21)$$

An der Stelle der potentiellen Energie steht jetzt die Gesamtenergie E, d. h. die Summe aus potentieller und kinetischer Energie. Der **Boltzmann**sche Energieverteilungssatz ermöglicht, die Verteilung der Teilchen eines Systems bei der Temperatur T nicht nur auf die verschiedenen Zustände der potentiellen, sondern auch auf diejenigen der kinetischen Energie auszurechnen. Die Verteilungsfunktion ist jetzt sowohl eine Funktion des Ortes und der Geschwindigkeit. In Gl.(5.4.21) wurde vereinfachend angenommen, daß die potentielle Energie nur von der Ortkoordinate und die kinetische Energie nur von der Geschwindigkeitskoordinate abhängt.

Wegen $E = E_{pot}(\mathbf{r}) + E_{kin}(\mathbf{v})$ kann man die Verteilungsfunktion faktorisieren und erhält

⁴⁰**Perrin**: 1870 - 1942.



Abbildung 5.44: Dichte der Teilchen eines Gases der Temperatur T am Ort \mathbf{r} , an dem ein Teilchen die Energie pot(z) = mgz besitzt.

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = f_1(\mathbf{r}) + f_2(\mathbf{v}) , \qquad (5.4.22)$$

wobei $f_1(\mathbf{r})$ die geschwindigkeitsunabhängige Verteilung im Ortsraum angibt. Sie ist gleich der Teilchendichte am Ort r. Man erhält sie durch Integration der Funktion $f(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ üver alle Geschwindigkeiten

$$f_1(\mathbf{r}) = \int \int_{\infty}^{\infty} \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \, dv_x dv_y dv_z = n(\mathbf{r}) \quad . \quad (5.4.23)$$

Damit gilt für die Verteilung der Geschwindigkeiten an einem festen Ort r

$$f_2(\mathbf{v}) = \phi(\mathbf{v}) = \frac{f(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{n(\mathbf{r})}$$
 . (5.4.24)

Die Geschwindigkeitsverteilung ist auf eins normiert:

$$\int \int_{\infty}^{\infty} \int \phi(\mathbf{v}) \, dv_x dv_y dv_z = \int \int_{\infty}^{\infty} \int \frac{f(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{n(\mathbf{r})} \, dv_x dv_y dv_z = \frac{n(\mathbf{r})}{n(\mathbf{r})} = 1 \quad . \quad (5.4.25)$$

Die Funktion $\phi(\mathbf{v})$ gibt also die Wahrscheinlichkeit dafür an, ein Teilchen mit einer Geschwindigkeit zwischen v_x und $v_x + dv_x$, v_y und $v_y + dv_y$ und v_z und $v_z + dv_z$ zu finden, d.h. ein Teilchen im Volumenelement $dv_x dv_y dv_z$ des Geschwindigkeitsraumes zu finden. Interessiert man sich nur für die Geschwindigkeitsverteilung bei fester potentieller Energie, so erhält man

$$\phi(\mathbf{v}) = \phi_0 \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_BT}\right) \quad \text{mit} \quad \int \int_{\infty}^{\infty} \int \phi(\mathbf{v}) \, dv_x dv_y dv_z = 1 \quad . \tag{5.4.26}$$

Aus der Normierung ergibt sich der Wert für ϕ_0 zu $(\frac{m}{2\pi k_B T})^{3/2}$ und damit

$$\phi(\mathbf{v}) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right) \quad . \tag{5.4.27}$$

Wegen $\mathbf{v} = v_x \hat{\mathbf{x}} + v_y \hat{\mathbf{y}} + v_z \hat{\mathbf{z}}$ und $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ folgt mit

$$\phi(\mathbf{v}) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m v_x^2}{2k_B T} - \frac{m v_y^2}{2k_B T} - \frac{m v_z^2}{2k_B T}\right)$$
(5.4.28)

die Boltzmannsche Geschwindigkeitsverteilung

$$\phi(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{m v_x^2}{2k_B T}\right)$$
(5.4.29)

Der Ausdruck gibt die Verteilung der x-Komponente der Geschwindigkeiten an. Für die y- und z-Komponenten ergeben sich völlig analoge Ausdrücke. Die Größe $\phi(v_x)dv_x$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, ein Teilchen im Geschwindigkeitsintervall zwischen v_x und $v_x + dv_x$ anzutreffen.

Multipliziert man $\phi(v_x)$ mit der räumlichen Teilchendichte *n* sowie mit dv_x , erhält man

$$\phi(v_x) \ n \ dv_x = n(v_x) \ dv_x = n \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{1/2} \ \exp\left(-\frac{m v_x^2}{2k_B T}\right) \ dv_x \quad . \quad (5.4.30)$$

Dabei ist $n(v_x)dv_x$ die Zahl der Teilchen pro Volumeneinheit, die eine Geschwindigkeitskomponente im Geschwindigkeitsintervall zwischen v_x und $v_x + dv_x$ besitzen.

Wird, wie in Abb. 5.45 gezeigt, die Größe $n(v_x)$ in Abhängigkeit von v_x unter Berücksichtigung des Vorzeichens aufgetragen, ergibt sich eine *Gaußfunktion*, deren wahrscheinlichster Wert bei $u_x = 0$ liegt. Größere Geschwindigkeitskomponenten sind weniger wahrscheinlich. Die Fläche zwischen der Kurve $n(v_x)$ und der v_x -Achse entspricht der räumlichen Teilchendichte

$$n = \int_{\infty}^{\infty} n(v_x) \, dv_x = \frac{N}{V} \quad . \tag{5.4.31}$$

Bei einer Temperaturerhöhung bleibt die Fläche unter der Kurve konstant, Die Kurve selbst wird jedoch mit zunehmender Temperatur flacher, d.h. es treten mehr Teilchen mit höheren Geschwindigkeiten auf, während die Zahl der Teilchen mit $v_x = 0$ abnimmt.



Abbildung 5.45: Zahl der Teilchen pro Volumeneinheit, die eine Geschwindigkeitskomponente v_x im Geschwindigkeitsintervall zwischen v_x und $v_x + dv_x$ besitzen für verschiedene Temperaturen.
A Literatur

- 1. Alonso-Finn: Fundamental University Physics, Addison-Wesley, 1992. Deutsche Übersetzung: Physik, Addison-Wesley, 3. Aufl. 1980
- 2. Bergmann-Schäfer: Lehrbuch der Experimentalphysik (6 Bde.), de Gruyter
- 3. Berkeley Physics Course, McGraw Hill, 1965. Deutsche Übersetzung: Vieweg, 4. Aufl. 1989
- 4. Brandt-Dahmen: Physik, Bd. 2 (Elektrodynamik), Springer, 2. Aufl. 1986
- 5. Dransfeld-Kienle-Vonach: Physik, Oldenbourg, 4. Aufl. 1991
- 6. Feynman-Lectures on Physics, Addison-Wesley, 1963. Deutsche Übersetzung: Oldenbourg, 1991
- 7. Fleischmann: Einführung in die Physik, Physik-Verlag Verlag Chemie, 2. Aufl. 1980
- 8. Frauenfelder-Huber: Einführung in die Physik, Bd. 2, Reinhardt, 2. Aufl. 1967
- 9. Gerthsen-Kneser-Vogel: Physik, Springer, 16. Aufl. 1989
- 10. Gönnenwein: Experimentalphysik, rororo-Vieweg, 1977
- 11. Hänsel-Neumann: Physik, Spektrum Akademischer Verlag, 1993
- 12. Kneubühl: Repetitorium der Physik, Teubner, 4. Aufl. 1990
- 13. Lüscher: Experimentalphysik II, BI-Taschenbuch 115, 1987
- 14. Martienssen: Einführung in die Physik, Akadem. Verlagsgesellschaft, 6. Aufl. 1992
- 15. Niedrig: Physik, Springer, 1992
- 16. Orear: Physik, Carl-Hanser-Verlag, 1982
- 17. Pohl: Einführung in die Physik, Bd. 2, Springer, 21. Aufl. 1975
- 18. Wegener: Physik für Hochschulanfänger, Teubner, 3. Aufl. 1991
- 19. Westphal: Physik, Springer, 26. Aufl. 1970