

Lineare Algebra I

Burkhard Külshammer

WS 04/05
Universität Jena

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----|---|-----|
| 1 | Grundbegriffe der Logik | 3 |
| 2 | Grundbegriffe der Mengenlehre | 4 |
| 3 | Relationen und Funktionen | 8 |
| 4 | Algebraische Grundbegriffe | 13 |
| 5 | Vektorräume | 17 |
| 6 | Lineare Gleichungssysteme | 22 |
| 7 | Matrizen | 30 |
| 8 | Basis und Dimension | 37 |
| 9 | Der Rang von Matrizen | 42 |
| 10 | Lineare Abbildungen | 53 |
| 11 | Lineare Abbildungen und Matrizen | 61 |
| 12 | Determinanten | 67 |
| 13 | Eigenwerte und Eigenvektoren | 75 |
| 14 | Euklidische Vektorräume | 87 |
| 15 | Isometrien und orthogonale Matrizen | 96 |
| 16 | Selbstadjungierte lineare Abbildungen und symmetrische Matrizen | 104 |

1 Grundbegriffe der Logik

Aussage: entweder *wahr* (w) oder *falsch* (f)
w bzw. f: *Wahrheitswert*

Beispiel 1.1. Die Winkelsumme im Dreieck beträgt 180° . (w)

Für jede Aussage A ist $\neg A$ (*nicht A*) ihre *Negation* (*Verneinung*).

| | | |
|----------|---|---|
| A | w | f |
| $\neg A$ | f | w |

Beispiel 1.2. A : Jede natürliche Zahl ist Summe von höchstens 4 Quadraten. (w)

$\neg A$: Nicht jede natürliche Zahl ist Summe von höchstens 4 Quadraten. (f)

Für Aussagen A, B sind auch die *Konjunktion* $A \wedge B$ (A *und* B) und die *Disjunktion* $A \vee B$ (A *oder* B) Aussagen:

| | | | | |
|--------------|---|---|---|---|
| A | w | w | f | f |
| B | w | f | w | f |
| $A \wedge B$ | w | f | f | f |
| $A \vee B$ | w | w | w | f |

Unterscheide: mathematisches \vee
umgangssprachliches "entweder-oder"

Beispiel 1.3. Die Winkelsumme im Dreieck beträgt 180° oder jede natürliche Zahl ist Summe von höchstens 4 Quadraten. (w)

Für Aussagen A, B ist auch die *Implikation* $A \Rightarrow B$ (A *impliziert* B , *aus A folgt B*) eine Aussage:

| | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|
| A | w | w | f | f |
| B | w | f | w | f |
| $A \Rightarrow B$ | w | f | w | w |

Beispiel 1.4. " $3 = -3 \Rightarrow 3^2 = (-3)^2$ " ist eine wahre Aussage (!!!)

Statt $A \Rightarrow B$ schreibt man auch $B \Leftarrow A$, statt $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ auch $A \Leftrightarrow B$ (A *äquivalent, gleichwertig* zu B)

| | | | | |
|-----------------------|---|---|---|---|
| A | w | w | f | f |
| B | w | f | w | f |
| $A \Leftrightarrow B$ | w | f | f | w |

Beispiel 1.5. $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$ (w)

Satz 1.5. Für Aussagen A und B gilt:

- (i) $A \vee (\neg A)$ ist stets wahr, $A \wedge (\neg A)$ ist stets falsch.
- (ii) $\neg(\neg A)$ ist gleichwertig zu A .
- (iii) $\neg(A \vee B)$ ist gleichwertig zu $(\neg A) \wedge (\neg B)$. (De Morgan)
- (iv) $\neg(A \wedge B)$ ist gleichwertig zu $(\neg A) \vee (\neg B)$. (De Morgan)
- (v) $A \Rightarrow B$ ist gleichwertig zu $(\neg A) \vee B$.
- (vi) $A \Rightarrow B$ ist gleichwertig zu $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$.

Beweis. Stelle jeweils die **Wahrheitstafel** auf, z.B. (v)

| A | B | $\neg A$ | $(\neg A) \vee B$ | $A \Rightarrow B$ |
|-----|-----|----------|-------------------|-------------------|
| w | w | f | w | w |
| w | f | f | f | f |
| f | w | w | w | w |
| f | f | w | w | w |

□

Bemerkung 1.5. (i) Regeln nützlich für Beweise: statt $A \Rightarrow B$ zeigt man oft $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$.

(ii) Weitere Regeln: Übungsaufgaben

(iii) Logische Symbole *sparsam* verwenden! (Bessere Lesbarkeit!)

2 Grundbegriffe der Mengenlehre

Definition 2.1. (G. Cantor 1845-1918)

“Eine *Menge* ist eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.”

Bemerkung 2.1. (i) Definition nicht ganz exakt.

(ii) Objekte einer Menge: *Elemente*

Schreibweise: $x \in M, x \notin M$

Beispiel 2.1. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ *natürliche* Zahlen (nicht einheitlich)

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ *ganze* Zahlen

$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ *rationale* Zahlen

\mathbb{R} *reelle* Zahlen (Analysis!)

$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$ *komplexe* Zahlen (später!)

Definition 2.2. $|M|$ Anzahl der Elemente einer Menge M (**Mächtigkeit**)

$|M| = 0$: **leere** Menge. Schreibweise: \emptyset oder $\{ \}$

$|M| = \infty$: **unendliche** Menge

Definition 2.3. M, N Mengen.

N **Teilmenge** von M ($N \subseteq M$) $:\Leftrightarrow$

jedes Element von N ist auch Element von M . (Sonst $N \not\subseteq M$).

Bemerkung 2.3. (i) Manche Bücher: $N \subset M$ statt $N \subseteq M$.

(ii) N **echte** Teilmenge von M : $N \subseteq M$ und $N \neq M$.
Schreibweise: $N \subsetneq M$.

(iii) Die Aussagen $M = N$ und $M \subseteq N \wedge N \subseteq M$ sind gleichwertig. (Nützlich für Beweise!)

Beispiel 2.3. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

$\emptyset \subseteq M$ und $M \subseteq M$ für jede Menge M .

Definition 2.4. M, N Mengen.

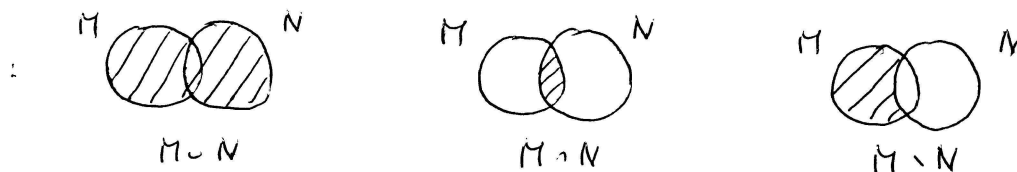
(i) $M \cup N := \{x : x \in M \vee x \in N\}$ **Vereinigung**

(ii) $M \cap N := \{x : x \in M \wedge x \in N\}$ **Durchschnitt**

(iii) $M \setminus N := \{x : x \in M \wedge x \notin N\}$ **Differenzmenge**

(iv) M, N **disjunkt** $:\Leftrightarrow M \cap N = \emptyset$.

Venn-Diagramme:



Bemerkung 2.4. (i) Doppelpunkt vor dem Gleichheitszeichen: linke Seite wird durch die rechte definiert.

(ii) Stets gilt $M \cap N \subseteq M \subseteq M \cup N$ und $M \cap N \subseteq N \subseteq M \cup N$.

Satz 2.5. Für Mengen M, N, P gilt stets:

(i) $M \cup M = M = M \cap M$ (Idempotenz)

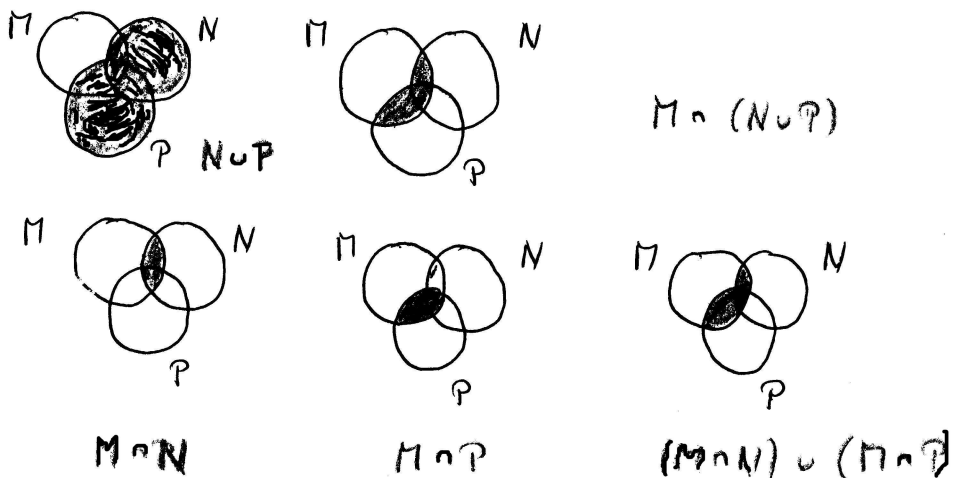
(ii) $\left. \begin{array}{l} M \cup N = N \cup M \\ M \cap N = N \cap M \end{array} \right\}$ (Kommutativität)

$$(iii) \left. \begin{aligned} M \cap (N \cap P) &= (M \cap N) \cap P \\ M \cup (N \cup P) &= (M \cup N) \cup P \end{aligned} \right\} \text{(Assoziativit\u00e4t)}$$

$$(iv) \left. \begin{aligned} M \cap (N \cup P) &= (M \cap N) \cup (M \cap P) \\ M \cup (N \cap P) &= (M \cup N) \cap (M \cup P) \end{aligned} \right\} \text{(Distributivit\u00e4t)}$$

$$(v) \left. \begin{aligned} M \setminus (N \cap P) &= (M \setminus N) \cup (M \setminus P) \\ M \setminus (N \cup P) &= (M \setminus N) \cap (M \setminus P) \end{aligned} \right\} \text{(De Morgan)}$$

Beweis. nur erster Teil von (iv), Rest \u00e4hnlich oder offensichtlich



□

Definition 2.6. M Menge.

$\mathcal{P}(M) := 2^M := \{N : N \subseteq M\}$ **Potenzmenge** von M (Menge aller Teilmengen von M).

Beispiel 2.6. $M = \{1, 2\} \Rightarrow \mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

Satz 2.6. F\u00fcr jede endliche Menge M ist $|2^M| = 2^{|M|}$.

Bemerkung 2.6. Unser Beweis beruht auf dem *Prinzip der vollst\u00e4ndigen Induktion*:

F\u00fcr $n \in \mathbb{N}_0$ sei eine Aussage A_n gegeben.

Ist A_0 wahr (Induktionsanfang) und gilt $A_n \Rightarrow A_{n+1}$ (Induktionsschritt) f\u00fcr alle $n \in \mathbb{N}_0$, so ist A_n f\u00fcr jedes $n \in \mathbb{N}_0$ wahr.

Beweis. **Ind.-Anf.:** $|M| = 0$

Dann $M = \emptyset$, also $2^M = \{\emptyset\}$ und $|2^M| = 1 = 2^0$.

Ind.-Schr.: Sei $n \in \mathbb{N}_0$ fest und die Aussage richtig f\u00fcr jede Menge mit n Elementen.

z.z. sie ist auch richtig f\u00fcr jede Menge mit $n + 1$ Elementen.

Sei also M Menge mit $|M| = n + 1$. Wegen $n \geq 0$ ist $n + 1 \geq 1$, also $M \neq \emptyset$. W\u00e4hle $x \in M$ fest. Setze $N := M \setminus \{x\}$. Unterscheide zwei Sorten von Teilmengen von M :

- (a) die Teilmengen von M , die x nicht enthalten, d.h. die Teilmengen von N . Wegen $|N| = n$ ist deren Anzahl 2^n .
- (b) die Teilmengen von M , die x enthalten. Diese sind von der Form $P \cup \{x\}$ mit $P \subseteq N$. Wegen $|N| = n$ ist auch deren Anzahl 2^n .

Insgesamt hat M also $2^n + 2^n = 2^{n+1}$ Teilmengen.

□

Definition 2.7. M Menge, $a, b \in M$.

Dann heißt $(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$ das (*geordnete*) *Paar* mit den *Komponenten* a und b .

Bemerkung 2.7. (i) Für $c, d \in M$ gilt also: $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$.

z.B. $(1, 2) \neq (2, 1) \neq \{2, 1\} = \{1, 2\}$.

- (ii) Für $a, b, c \in M$ nennt man $(a, b, c) := ((a, b), c)$ das *Tripel* mit den Komponenten a, b, c .
Es gilt: $(a, b, c) = (d, e, f) \Leftrightarrow a = d \wedge b = e \wedge c = f$.

(iii) Fährt man so fort, dann erhält man *Quadrupel, Quintupel, Sextupel*, etc.

Definition 2.8. M, N Mengen.

$M \times N := \{(m, n) : m \in M \wedge n \in N\}$ *direktes (kartesisches) Produkt*.

Beispiel 2.8. $M = \{a, b\}, N = \{0, 1, 2\}$

$\Rightarrow M \times N = \{(a, 0), (a, 1), (a, 2), (b, 0), (b, 1), (b, 2)\}$

Bemerkung 2.8. M, N endliche Mengen $\Rightarrow |M \times N| = |M| \cdot |N|$.

(Beweis leicht mit vollständiger Induktion)

Definition 2.9. Gegeben seien eine Menge M und für jedes $x \in M$ eine Aussage A_x . Dann hat man neue Aussagen " $\forall x \in M : A_x$ " und " $\exists x \in M : A_x$ ".

" $\forall x \in M : A_x$ " wahr $\Leftrightarrow A_x$ ist wahr für *jedes* $x \in M$.

" $\exists x \in M : A_x$ " wahr $\Leftrightarrow A_x$ ist wahr für *mindestens* ein $x \in M$.

[\forall alle, \exists existiert]

Bemerkung 2.9. (i) Die Negation von " $\forall x \in M : A_x$ " ist " $\exists x \in M : \neg A_x$ ", nicht etwa " $\forall x \in M : \neg A_x$ ".

Zum Beispiel ist die Negation der falschen Aussage: " $\forall x \in \mathbb{R} : x \neq -x$ " die wahre Aussage " $\exists x \in \mathbb{R} : x = -x$ ".

(ii) Die Negation von " $\exists x \in M : A_x$ " ist analog " $\forall x \in M : \neg A_x$ ".

Definition 2.10. Gegeben seien eine nichtleere Menge X und zu jedem $x \in X$ eine Menge M_x .

Dann: $\bigcup_{x \in X} M_x := \{m : \exists x \in X : m \in M_x\}$ *Vereinigung*

$\bigcap_{x \in X} M_x := \{m : \forall x \in X : m \in M_x\}$ *Durchschnitt*

Beispiel 2.10. $X = \mathbb{N}, M_x := \{r \in \mathbb{R} : -x \leq r \leq x\}, N_x := \{r \in \mathbb{R} : -\frac{1}{x} \leq r \leq \frac{1}{x}\}$
 Dann: $\bigcup_{x \in \mathbb{N}} M_x = \mathbb{R}, \bigcap_{x \in \mathbb{N}} N_x = \{0\}$.

Bemerkung 2.10. $X = \{1, 2, \dots, n\} : M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_n = \bigcup_{x \in X} M_x =: \bigcup_{i=1}^n M_i$.

$X = \mathbb{N} : \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i$. Ähnlich für \bigcap .

Definition 2.11. Eine *Partition* einer Menge M ist eine Menge \mathcal{P} nichtleerer, paarweise disjunkter Teilmengen von M mit $M = \bigcup_{P \in \mathcal{P}} P$.

Schreibweise: $M = \bigsqcup_{P \in \mathcal{P}} P$.

Bemerkung 2.11. "paarweise disjunkt" bedeutet:
 $N \cap P = \emptyset$ für je zwei verschiedene $N, P \in \mathcal{P}$.

Beispiel 2.11. (i) $\mathbb{Z} = \{z \in \mathbb{Z} : z \text{ gerade}\} \sqcup \{z \in \mathbb{Z} : z \text{ ungerade}\}$.
 Partition in gerade und ungerade Zahlen.

(ii) $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \sqcup \{0\} \sqcup (-\mathbb{N})$
 Partition in positive Zahlen, negative Zahlen und 0.

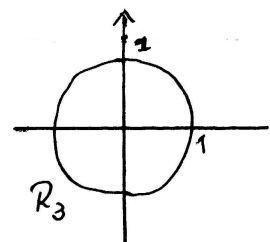
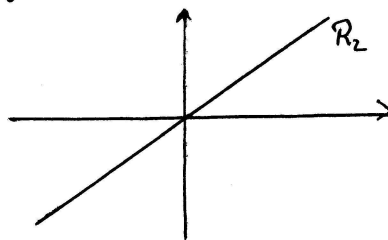
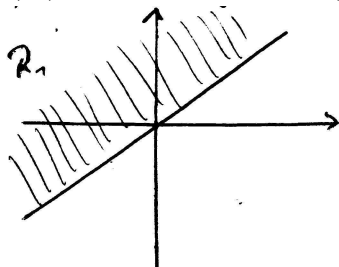
3 Relationen und Funktionen

Definition 3.1. Eine *Relation* ist ein Tripel (M, N, R) , das aus Mengen M, N und einer Teilmenge R von $M \times N$ besteht. Statt $(x, y) \in R$ schreibt man xRy .

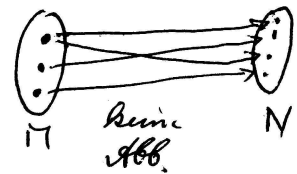
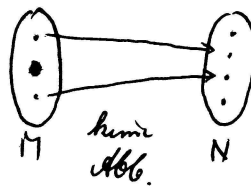
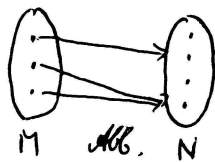
Beispiel 3.1. (i) $M = N = \mathbb{R}, R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x < y\}$ *Kleiner-Relation*

(ii) $M = N = \mathbb{R}, R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x = y\}$ *Gleichheitsrelation*

(iii) $M = N = \mathbb{R}, R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1\}$



Definition 3.2. Eine Relation (M, N, R) nennt man *Funktion (Abbildung)*, falls gilt:
 (★) Zu jedem $x \in M$ existiert genau ein $y \in N$ mit xRy .



y heißt **Bild** von x unter R ; man schreibt $y = R(x)$.

M : **Definitionsbereich**, N : **Wertebereich**, Schreibweise:

$$R : M \longrightarrow N, x \longmapsto R(x).$$

$\text{Abb}(M, N)$ bezeichne die Menge aller Abbildungen von M nach N .

Beispiel 3.2. M beliebige Menge.

Identitätsabbildung $\text{id}_M : M \longrightarrow M, x \longmapsto x$

Allgemeiner: $L \subseteq M$ Teilmenge

Inklusionsabbildung $\text{in}_L^M : L \longrightarrow M, x \longmapsto x$.

Definition 3.3. Gegeben: Abbildung $f : M \longrightarrow N$, Teilmengen $X \subseteq M, Y \subseteq N$.

Dann: $f(X) := \{f(x) : x \in X\}$ **Bild** von X unter f

Insbesondere: $\text{Bld}(f) := f(M)$ **Bild** von f

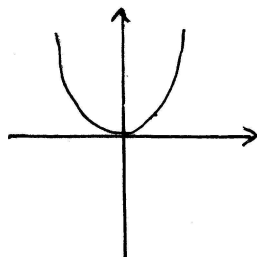
$f^{-1}(Y) := \{x \in X : f(x) \in Y\}$ **Urbild** von Y unter f .

Beispiel 3.3. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^2$

$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ **Intervall**

$$f([-1, 2]) = [0, 4]$$

$$f^{-1}([0, 4]) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}].$$

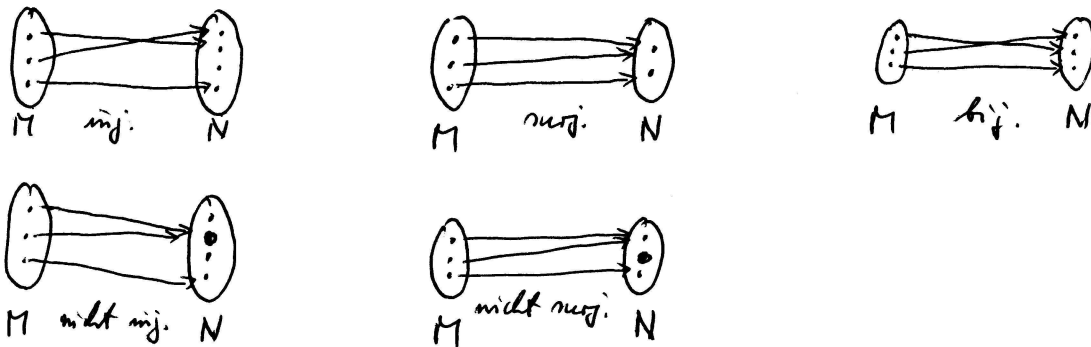


Definition 3.4. Eine Abbildung $f : M \longrightarrow N$ heißt

(i) **injektiv**, falls für alle $x, y \in M$ gilt: $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

(ii) **surjektiv**, falls zu jedem $y \in N$ ein $x \in M$ mit $f(x) = y$ existiert.

(iii) **bijektiv**, falls f injektiv und surjektiv ist.



Bemerkung 3.4. (i) f injektiv $\Leftrightarrow |f^{-1}(\{z\})| \leq 1 \forall z \in N$.

(ii) f surjektiv $\Leftrightarrow f(M) = N \Leftrightarrow |f^{-1}(\{z\})| \geq 1 \forall z \in N$.

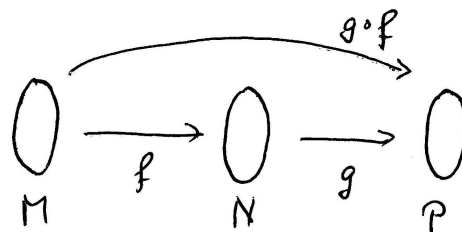
(iii) f bijektiv $\Leftrightarrow |f^{-1}(\{z\})| = 1 \forall z \in N$.

Beispiel 3.4. (i) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$, weder injektiv noch surjektiv

(ii) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, x \mapsto x + 1$, injektiv, nicht surjektiv

Definition 3.5. Gegeben Abbildungen $f : M \rightarrow N, g : N \rightarrow P$.

Dann heißt die Abbildung $g \circ f : M \rightarrow P, x \mapsto g(f(x))$ **Komposition (Hintereinanderausführung)** von g und f .



Beispiel 3.5.

$$\begin{array}{ll}
 f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x + 2 & g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x}{3} \\
 g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x + 2}{3} & f \circ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x}{3} + 2.
 \end{array}$$

Achtung: $g \circ f \neq f \circ g$; denn $(g \circ f)(0) = \frac{2}{3}; (f \circ g)(0) = 2$.

Satz 3.5. Für Abbildungen $f : M \rightarrow N, g : N \rightarrow P, h : P \rightarrow Q$ gilt stets:

(i) $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ (Assoziativität)

(ii) $f \circ \text{id}_M = f = \text{id}_N \circ f$.

Beweis. (i) $((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))) = h((g \circ f)(x)) = (h \circ (g \circ f))(x)$.

(ii) $(f \circ \text{id}_M)(x) = f(\text{id}_M(x)) = f(x)$,
 $(\text{id}_N \circ f)(x) = \text{id}_N(f(x)) = f(x)$.

□

Bemerkung 3.5. Schreibe kurz: $h \circ g \circ f$.

Satz 3.6. Gegeben: Mengen M, N mit $M \neq \emptyset$ und Abbildung $f : M \rightarrow N$.

(i) f injektiv $\Leftrightarrow \exists g : N \rightarrow M : g \circ f = \text{id}_M$.

(ii) f surjektiv $\Leftrightarrow \exists h : N \rightarrow M : f \circ h = \text{id}_N$.

(iii) f bijektiv $\Leftrightarrow \exists g : N \rightarrow M : g \circ f = \text{id}_M \wedge f \circ g = \text{id}_N$.

Ggf. ist g eindeutig bestimmt.

Beweis. (i)' \Rightarrow ': Sei f injektiv und $z \in M$ fest. Wir definieren die Abbildung $g : N \rightarrow M$:

Sei $y \in N$. Im Fall $y \notin \text{Bld}(f)$ sei $g(y) := z$. Im Fall $y \in \text{Bld}(f)$ existiert genau ein $x \in M$ mit $y = f(x)$. Setze $g(y) := x$. Dann: $g(f(x)) = x$ für $x \in M$, d.h. $g \circ f = \text{id}_M$.

" \Leftarrow ": Seien $f : M \rightarrow N, g : N \rightarrow M$ Abbildungen mit $g \circ f = \text{id}_M$. Seien $x, y \in M$ mit $f(x) = f(y)$. Dann:

$$x = \text{id}_M(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(y)) = (g \circ f)(y) = \text{id}_M(y) = y.$$

(ii)' \Rightarrow ': Sei $f : M \rightarrow N$ surjektiv. Zu jedem $y \in N$ existiert dann ein $x \in M$ mit $y = f(x)$. Setze $h(y) := x$. Dann: $f(h(y)) = f(x) = y$. Wir erhalten eine Abbildung $h : N \rightarrow M$ mit $f \circ h = \text{id}_N$.

" \Leftarrow ": Seien $f : M \rightarrow N, h : N \rightarrow M$ Abbildungen mit $f \circ h = \text{id}_N$. Dann:

$$N = \text{id}_N(N) = (f \circ h)(N) = f(h(N)) \subseteq f(M) \subseteq N, \text{ also } f(M) = N.$$

(iii)' \Rightarrow ': Sei $f : M \rightarrow N$ bijektiv. Nach (i) und (ii) existieren Abbildungen $g, h : N \rightarrow M$ mit $g \circ f = \text{id}_M, f \circ h = \text{id}_N$. Dabei:

$$g = g \circ \text{id}_N = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = \text{id}_M \circ h = h.$$

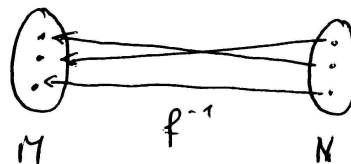
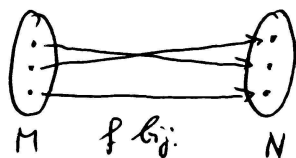
" \Leftarrow ": folgt aus (i),(ii).

Eindeutigkeit: Sei auch $g_1 : N \rightarrow M$ mit $g_1 \circ f = \text{id}_M, f \circ g_1 = \text{id}_N$.

$$\text{Dann: } g_1 = g_1 \circ \text{id}_N = g_1 \circ (f \circ g) = (g_1 \circ f) \circ g = \text{id}_M \circ g = g.$$

□

Bemerkung 3.6. In (iii) heißt g **Umkehrabbildung** von f . Man schreibt: $g = f^{-1}$.
Also: $f^{-1} \circ f = \text{id}_M, f \circ f^{-1} = \text{id}_N$. Daher ist f^{-1} bijektiv und $(f^{-1})^{-1} = f$.



Unterscheide:

- $f^{-1}(x)$ Bild von $x \in N$ unter der Umkehrabbildung von f (nur definiert, falls f bijektiv)
- $f^{-1}(X)$ Urbild von $X \subseteq N$ unter f (auch definiert, falls f nicht bijektiv ist).

Beispiel 3.6. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x$, ist bijektiv mit $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x}{2}$.

Satz 3.7. Für Abbildungen $f : M \rightarrow N, g : N \rightarrow P$ gilt stets:

- f, g injektiv $\Rightarrow g \circ f$ injektiv.
- f, g surjektiv $\Rightarrow g \circ f$ surjektiv.
- f, g bijektiv $\Rightarrow g \circ f$ bijektiv. Ggf. ist $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ (!)

Beweis. (i) Seien f, g injektiv und $x, y \in M$ mit $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$, d.h. $g(f(x)) = g(f(y))$. Dann: $f(x) = f(y)$, da g injektiv. Also $x = y$, da f injektiv.

(ii) Seien f, g surjektiv. Dann: $(g \circ f)(M) = g(f(M)) \stackrel{f \text{ surj.}}{=} g(N) \stackrel{g \text{ surj.}}{=} P$.
Also: $g \circ f$ surjektiv.

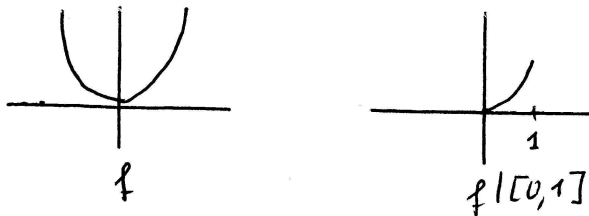
(iii) Seien f, g bijektiv, also injektiv und surjektiv. Nach (i) und (ii) ist $g \circ f$ injektiv und surjektiv, also bijektiv. Ferner ist $f^{-1} \circ g^{-1} : P \rightarrow N \rightarrow M$ eine Abbildung mit
 $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = ((g \circ f) \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = (g \circ (f \circ f^{-1})) \circ g^{-1} = (g \circ \text{id}_N) \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \text{id}_P$,
 $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = \dots = \text{id}_M$.
 Also: $f^{-1} \circ g^{-1} = (g \circ f)^{-1}$ nach Satz 3.6 (iii).

□

Definition 3.8. Gegeben Abbildung $f : M \rightarrow N$ und $X \subseteq M$.

Dann heißt $g := f|_X : X \rightarrow N, x \mapsto f(x)$ **Einschränkung (Restriktion)** von f auf X . Man schreibt $g = f|_X$ oder $\text{res}_X^M f$. Andererseits heißt f **Fortsetzung** von g auf M .

Beispiel 3.8. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$
 $f|_{[0,1]} : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$



Definition 3.9. Eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ nennt man manchmal *Familie* oder (im Fall $M = \mathbb{N}$ oder $M = \mathbb{N}_0$) *Folge*.

Dann heißt M *Indexmenge*. Man schreibt: $f = (f(m))_{m \in M} = (f(m) : m \in M)$.

Beispiel 3.9. Die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ist die Abbildung $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, n \mapsto \frac{1}{n}$.

Definition 3.10. Sei $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie von Mengen. Dann heißt

$$\prod_{i \in I} M_i := \times_{i \in I} M_i := \{(m_i)_{i \in I} : m_i \in M_i \text{ für } i \in I\}$$

das *direkte (kartesische) Produkt* von $(M_i)_{i \in I}$.

Bemerkung 3.10. Es gilt: $(m_i)_{i \in I} = (n_i)_{i \in I} \Leftrightarrow m_i = n_i$ für $i \in I$. Im Fall $I = \{1, \dots, k\}$ schreibt man $M_1 \times \dots \times M_k$ oder $\prod_{i=1}^k M_i = \times_{i=1}^k M_i$ statt $\prod_{i \in \{1, \dots, k\}} M_i$, und man schreibt (m_1, \dots, m_k) statt $(m_i)_{i \in \{1, \dots, k\}}$. Für $k = 2$ identifiziert man das so definierte kartesische Produkt mit dem früher definierten (vgl. Def. 2.8). Im Fall $M_1 = \dots = M_k =: M$ schreibt man M^k statt $M_1 \times \dots \times M_k$. Also:

$$M^k = \{(m_1, \dots, m_k) : m_i \in M \text{ für } i = 1, \dots, k\}.$$

Definition 3.11. Sei $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie von Mengen. Für $j \in I$ heißt

$$pr_j : \prod_{i \in I} M_i \rightarrow M_j, (m_i)_{i \in I} \mapsto m_j$$

j-te *Projektion* (Projektion auf die *j*-te *Koordinate*).

4 Algebraische Grundbegriffe

Definition 4.1. Eine (*innere*) *Verknüpfung* auf einer Menge M ist eine Abbildung $M \times M \rightarrow M$. Das Bild von $(a, b) \in M \times M$ schreibt man oft in der Form $a * b, a \circ b, a + b, a \cdot b$ oder kurz ab .

Beispiel 4.1. (i) Addition $+$, Multiplikation \cdot , Subtraktion $-$ auf \mathbb{Q} oder \mathbb{R} , aber nicht Division, da z.B. $5 : 0$ nicht definiert ist.

- (ii) $\wedge, \vee, \Rightarrow$ auf $M = \{w, f\}$
- (iii) \cap, \cup, \setminus auf $M = 2^X$ (X Menge)
- (iv) Komposition \circ auf $M = \text{Abb}(X, X)$.

Bemerkung 4.1. In der Algebra studiert man allgemeine Eigenschaften von Verknüpfungen wie z.B. die Gültigkeit des Kommutativgesetzes $[a*b = b*a]$ oder Assoziativgesetzes $[(a*b)*c = a*(b*c)]$.

Definition 4.2. Eine *Gruppe* ist ein Paar $(G, *)$, das aus einer Menge G und einer Verknüpfung $*$ auf G mit folgenden Eigenschaften besteht:

- (i) $a*(b*c) = (a*b)*c$ für alle $a, b, c \in G$ (Assoziativgesetz)
- (ii) Es existiert ein $e \in G$ mit $e*a = a = a*e$ für alle $a \in G$ (*neutrales Element*)
- (iii) Zu jedem $a \in G$ existiert ein $a' \in G$ mit $a*a' = e = a'*a$. (*inverses Element zu a*)

Bemerkung 4.2. (i) Das Element e in (ii) ist eindeutig bestimmt; ist nämlich auch $f \in G$ mit $f*a = a = a*f$ für alle $a \in G$, so folgt:

$$f = f*e = e.$$

Eine Gruppe enthält also *genau ein* neutrales Element.

- (ii) Zu jedem $a \in G$ ist das Element a' in (iii) eindeutig bestimmt; denn ist auch $\tilde{a} \in G$ mit $a*\tilde{a} = e = \tilde{a}*a$, so gilt:

$$\tilde{a} = \tilde{a}*e = \tilde{a}*(a*a') = (\tilde{a}*a)*a' = e*a' = a'.$$

Zu jedem $a \in G$ existiert also *genau ein* inverses Element a' . Man schreibt $a' =: a^{-1}$. Also $a*a^{-1} = e = a^{-1}*a$.

- (iii) Wegen des Assoziativ-Gesetzes schreibt man kurz $a*b*c$ (ohne Klammern).
- (iv) Man nennt $(G, *)$ eine *kommutative* oder *abelsche* Gruppe (N.H. Abel, 1802-1829), falls gilt:

$$a*b = b*a \text{ für alle } a, b \in G \text{ (Kommutativgesetz).}$$

Beispiel 4.2. (i) $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +)$ abelsche Gruppen:
 neutrales Element 0, invers zu x ist $-x$
 Aber : $(\mathbb{N}, +)$ *keine* Gruppe (kein neutrales Element)
 $(\mathbb{N}_0, +)$ *keine* Gruppe (2 besitzt kein Inverses).

- (ii) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ abelsche Gruppen:
 neutrales Element 1, invers zu x ist $\frac{1}{x}$.
 Aber $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist *keine* Gruppe (2 besitzt kein Inverses)
- (iii) X beliebige Menge, $\text{Sym}(X)$ Menge der bijektiven Abbildungen $f : X \mapsto X$
 $(\text{Sym}(X), \circ)$ ist eine Gruppe:
 neutrales Element id_X , invers zu f ist die Umkehrabbildung f^{-1} . Man nennt $\text{Sym}(X)$
 die *symmetrische Gruppe* auf X . Die Elemente in $\text{Sym}(X)$, d.h. die bijektiven Ab-
 bildungen $f : X \rightarrow X$ heißen *Permutationen* von X . Man schreibt sie in der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ f(1) & f(2) & \dots & f(n) \end{pmatrix}.$$

Ist z.B. $X = \{1, 2, 3\}$, so ist

$$\text{Sym}(X) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

d.h. $|\text{Sym}(X)| = 6$. Beachte:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Folglich ist $\text{Sym}(X)$ nicht kommutativ.

Satz 4.2. Sei $(G, *)$ eine Gruppe mit neutralem Element e . Dann gilt:

- (i) $e^{-1} = e$.
 (ii) $(a^{-1})^{-1} = a$.
 (iii) $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$ (Achtung!; vgl. Satz 3.7).

Beweis. (i) $e * e = e \Rightarrow e^{-1} = e$.

(ii) $a^{-1} * a = e = a * a^{-1} \Rightarrow (a^{-1})^{-1} = a$.

(iii) $(a * b) * (b^{-1} * a^{-1}) = ((a * b) * b^{-1}) * a^{-1} = (a * (b * b^{-1})) * a^{-1} = (a * e) * a^{-1} = a * a^{-1} = e$.
 $(b^{-1} * a^{-1}) * (a * b) = \dots = e$.
 Also $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$.

□

Definition 4.3. Ein *Körper* (field) ist ein Tripel $(K, +, \cdot)$, das aus einer Menge K und zwei Verknüpfungen $+, \cdot$ auf K mit folgenden Eigenschaften besteht:

- (i) $(K, +)$ ist abelsche Gruppe; das neutrale Element in $(K, +)$ bezeichnet man mit 0 (Nullelement).

(ii) $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ ist abelsche Gruppe; das neutrale Element in $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ bezeichnet man mit 1 (Einselement).

(iii) $a(b + c) = (ab) + (ac)$ für alle $a, b, c \in K$ (Distributivgesetz)

Bemerkung 4.3. (i) Für $a \in K$ bezeichnet man das inverse Element bezüglich $+$ mit $-a$ (negatives Element). Für $a, b \in K$ gilt also:

$$a + (-a) = 0, -(-a) = a, -(a + b) = (-a) + (-b).$$

(ii) Für $a \in K \setminus \{0\}$ bezeichnet man das inverse Element bezüglich \cdot mit a^{-1} oder $\frac{1}{a}$. Für $a, b \in K$ gilt also:

$$aa^{-1} = 1, (a^{-1})^{-1} = a, (a \cdot b)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = a^{-1}b^{-1}.$$

(iii) Wir sparen Klammern durch die Verabredung:

“Punktrechnung geht vor Strichrechnung.”

$$\text{Also: } a(b + c) = ab + ac.$$

(iv) Wir definieren: $a - b := a + (-b)$ (Subtraktion)

$$\frac{a}{b} := ab^{-1} \text{ (Division)}$$

(v) Statt “ $(K, +, \cdot)$ ist Körper” sagt man kurz: “ K ist Körper”. Wegen $K \setminus \{0\} \neq \emptyset$ ist stets $|K| \geq 2$.

Beispiel 4.3. (i) $(\mathbb{Q}, +, \cdot), (\mathbb{R}, +, \cdot), (\mathbb{C}, +, \cdot)$ sind Körper, $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ nicht.

(ii) $\mathbb{F}_2 := \{0, 1\}$ ist Körper, wobei man definiert:

| | | | | | | |
|-----|---|---|-----------------|---------|---|---|
| $+$ | 0 | 1 | binäre Addition | \cdot | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | | 1 | 0 | 1 |

Nachweis leicht, aber langwierig. \mathbb{F}_2 wichtig für Computer.

(iii) Gibt es auch Körper mit 3, 4, 5, ... Elementen?

Später: Sei $n \in \mathbb{N}$. Genau dann existiert ein Körper mit n Elementen, wenn n eine Primzahlpotenz ist.

Also: Es gibt Körper mit 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, ... Elementen, keine Körper mit 6, 10, 12, 14, 15, ... Elementen.

Satz 4.3. K Körper, $a, b \in K$. Dann:

(i) $a \cdot 0 = 0$.

(ii) $a \cdot (-b) = -(ab) = (-a)b$.

Beweis. (i) $a \cdot 0 = a(0 + 0) = a0 + a0$.

$$\text{Addition von } -(a \cdot 0) : \underbrace{-(a \cdot 0) + a0}_0 = \underbrace{-(a0) + (a0)}_0 + a0.$$

Also: $0 = a0$.

- (ii) $a(-b) + ab = a(-b + b) = a0 \stackrel{(i)}{=} 0$.
 Also: $a(-b) = -(ab)$.
 Daher: $(-a)b = b(-a) = -(ba) = -(ab)$.

□

5 Vektorräume

K Körper (z.B. $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}, \mathbb{F}_2$)

Definition 5.1. Ein K -Vektorraum (*Vektorraum* oder *linearer Raum über K*) ist ein Tripel $(V, +, \cdot)$, das aus einer Menge V und Abbildungen

$$+: V \times V \longrightarrow V, (v, w) \longmapsto v + w, \text{ (Addition)}$$

$$\cdot: K \times V \longrightarrow V, (a, v) \longmapsto av \text{ (Skalarmultiplikation)}$$

mit folgenden Eigenschaften besteht:

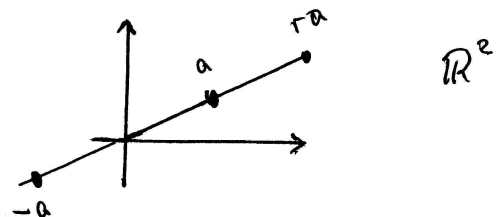
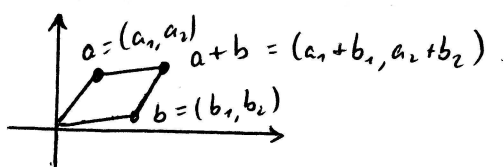
- (i) $(V, +)$ ist abelsche Gruppe.
- (ii) $(a + b)v = av + bv$ für $a, b \in K, v \in V$ (Distributivgesetz).
- (iii) $a(v + w) = av + aw$ für $a \in K, v, w \in V$ (Distributivgesetz).
- (iv) $(ab)v = a(bv)$ für $a, b \in K, v \in V$ (Assoziativgesetz).
- (v) $1_K v = v$ für $v \in V$.

Bemerkung 5.1. (i) Man sagt kurz: V ist ein K -Vektorraum.

- (ii) Elemente in V : **Vektoren**, Elemente in K : **Skalare**
 neutrales Element in $(V, +)$: **Nullvektor** $0 = 0_V : 0 + v = v$ für $v \in V$
 inverses Element zu $v \in V$ bezüglich $+$: $-v$
 Also: $v + (-v) = 0, -(-v) = v, -(v + w) = -v + (-w)$
 Definiere **Subtraktion**: $v - w := v + (-w)$
 $+$ heißt **innere**, \cdot **äußere** Verknüpfung von V .

Beispiel 5.1. (i) $\{0_V\}$ (**Nullraum**) und K selbst.

- (ii) Für $n \in \mathbb{N}$ ist $K^n = \{(a_1, \dots, a_n) : a_1, \dots, a_n \in K\}$ ein K -Vektorraum mit:
 $(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$
 $r(a_1, \dots, a_n) = (ra_1, \dots, ra_n)$



(iii) Für K -Vektorräume V_1, \dots, V_n ist auch

$$V_1 \times \dots \times V_n = \{(v_1, \dots, v_n) : v_i \in V_i \text{ für } i = 1, \dots, n\}$$

ein K -Vektorraum mit

$$(v_1, \dots, v_n) + (w_1, \dots, w_n) := (v_1 + w_1, \dots, v_n + w_n)$$

$$r(v_1, \dots, v_n) := (rv_1, \dots, rv_n).$$

(iv) Man kann \mathbb{C} auch als Vektorraum über $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ auffassen.

Satz 5.1. Gegeben: K -Vektorraum $V, a \in K, v \in V$. Dann gilt:

(i) $av = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee v = 0$.

(ii) $(-a)v = -(av) = a(-v)$.

Beweis. (i) " \Leftarrow ": analog zu Satz 4.3.

" \Rightarrow ": Sei $av = 0$. Im Fall $a = 0$ ist nichts zu tun. Sei also $a \neq 0$. Aus " \Leftarrow " folgt:
 $0 = a^{-1} \cdot 0 = a^{-1}(av) = (a^{-1}a)v = 1v = v$.

(ii) analog zu Satz 4.3.

□

Definition 5.2. Eine nichtleere (!) Teilmenge U eines K -Vektorraums V heißt **Untervektorraum (linearer Unterraum)** von V , falls gilt:

(i) $u, v \in U \Rightarrow u + v \in U$.

(ii) $u \in U, a \in K \Rightarrow au \in U$.

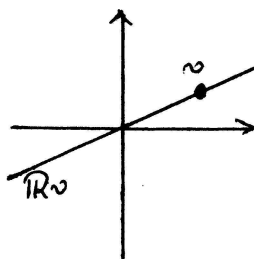
Bemerkung 5.2. Man kann (i) und (ii) zusammenfassen zu:

$$(\star) \quad a, b \in K, u, v \in U \Rightarrow au + bv \in U.$$

Wegen $U \neq \emptyset$ existiert ein Element $u \in U$. Nach Satz 5.1 ist dann auch $0_V = 0_K \cdot u \in U$, d.h. U enthält den Nullvektor von V . Ferner ist $-u = -(1u) = (-1)u \in U$. Es folgt leicht: $(U, +, \cdot)$ ist selbst ein K -Vektorraum.

Beispiel 5.2. (i) Für jeden K -Vektorraum V sind $\{0\}$ und V Untervektorräume von V .

(ii) Für $v \in V$ ist $Kv := \{av : a \in K\}$ ein Untervektorraum von V .



Satz 5.2. Für Untervektorräume U_1, U_2 eines K -Vektorraums V ist auch $U_1 \cap U_2$ ein Untervektorraum von V .

Beweis. Nach Bemerkung 5.2 ist $0_V \in U_1$ und $0_V \in U_2$, also auch $0_V \in U_1 \cap U_2$.

Folglich ist $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$.

Seien $a, b \in K$ und $u, v \in U_1 \cap U_2$. Wegen $u, v \in U_1$ ist auch $au + bv \in U_1$. Analog ist auch $au + bv \in U_2$. Daher ist $au + bv \in U_1 \cap U_2$, d.h. für $U_1 \cap U_2$ gilt (\star) . Also ist $U_1 \cap U_2$ ein Untervektorraum von V . \square

Bemerkung 5.3. Für Untervektorräume U_1, U_2 eines K -Vektorraums V ist $U_1 \cup U_2$ i.Allg. kein Untervektorraum von V .

Beispiel 5.3. $U_1 := K(1, 0) = \{(a, 0) : a \in K\}$ und $U_2 := K(0, 1) = \{(0, b) : b \in K\}$ sind nach Beispiel 5.2 Untervektorräume von $V = K^2$. Ferner ist $(1, 0) \in U_1 \subseteq U_1 \cup U_2$ und $(0, 1) \in U_2 \subseteq U_1 \cup U_2$, aber $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin U_1 \cup U_2$. Daher ist $U_1 \cup U_2$ kein Untervektorraum von $V = K^2$.

Satz 5.3. Für Untervektorräume U_1, U_2 eines K -Vektorraums V ist auch die **Summe**

$$U_1 + U_2 := \{u_1 + u_2 : u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$$

ein Untervektorraum von V .

Beweis. Wegen $U_1 \neq \emptyset \neq U_2$ ist auch $U_1 + U_2 \neq \emptyset$. Seien $a, b \in K, u, v \in U_1 + U_2$. Wir schreiben $u = u_1 + u_2, v = v_1 + v_2$ mit $u_1, v_1 \in U_1, u_2, v_2 \in U_2$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} au + bv &= a(u_1 + u_2) + b(v_1 + v_2) = au_1 + au_2 + bv_1 + bv_2 \\ &= \underbrace{au_1 + bv_1}_{\in U_1} + \underbrace{au_2 + bv_2}_{\in U_2} \in U_1 + U_2. \end{aligned}$$

Dies zeigt: $U_1 + U_2$ ist ein Untervektorraum von V . \square

Beispiel 5.4. Sei $0 \neq v_1 \in \mathbb{R}^3$. Dann ist $\mathbb{R}v_1$ die "Gerade" durch v_1 und 0.

Sei $v_2 \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}v_1$. Dann ist $\mathbb{R}v_2$ die "Gerade" durch v_2 und 0.

Ferner ist $U_1 + U_2 = \{av_1 + bv_2 : a, b \in \mathbb{R}\}$ die "Ebene" durch v_1, v_2 und 0.

Bemerkung 5.4. Für Untervektorräume U_1, U_2, U_3 eines K -Vektorraums V ist

$$\begin{aligned} (U_1 + U_2) + U_3 &= \{(u_1 + u_2) + u_3 : u_1 \in U_1, u_2 \in U_2, u_3 \in U_3\} \\ &= \{u_1 + (u_2 + u_3) : u_1 \in U_1, u_2 \in U_2, u_3 \in U_3\} \\ &= U_1 + (U_2 + U_3). \end{aligned}$$

Man schreibt kurz: $U_1 + U_2 + U_3$.

Allgemeiner: $U_1 + \dots + U_n$ für Untervektorräume U_1, \dots, U_n von V .

Satz 5.4. Für Untervektorräume U_1, \dots, U_n eines K -Vektorraums V sind folgende Aussagen gleichwertig:

(1) Sind $v_1, w_1 \in U_1, \dots, v_n, w_n \in U_n$ mit $v_1 + \dots + v_n = w_1 + \dots + w_n$, so ist $v_1 = w_1, \dots, v_n = w_n$.

(2) Sind $u_1 \in U_1, \dots, u_n \in U_n$ mit $u_1 + \dots + u_n = 0$, so ist $u_1 = \dots = u_n = 0$.

(3) Für $i = 1, \dots, n$ ist $U_i \cap (U_1 + \dots + U_{i-1} + U_{i+1} + \dots + U_n) = \{0\}$.

(4) Für $i = 2, \dots, n$ ist $U_i \cap (U_1 + \dots + U_{i-1}) = \{0\}$.

Beweis. Wir zeigen: (1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1).

(1) \Rightarrow (2): Sei (1) erfüllt, und seien $u_1 \in U_1, \dots, u_n \in U_n$ mit $u_1 + \dots + u_n = 0$.

z.z. $u_1 = \dots = u_n = 0$.

Wegen $\underbrace{u_1}_{\in U_1} + \dots + \underbrace{u_n}_{\in U_n} = 0 = \underbrace{0}_{\in U_1} + \dots + \underbrace{0}_{\in U_n}$ folgt aus (1):

$u_1 = 0, \dots, u_n = 0$.

(2) \Rightarrow (3): Sei (2) erfüllt und $i \in \{1, \dots, n\}$.

z.z. $U_i \cap (U_1 + \dots + U_{i-1} + U_{i+1} + \dots + U_n) = \{0\}$.

“ \subseteq ”: Sei $x \in U_i \cap (U_1 + \dots + U_{i-1} + U_{i+1} + \dots + U_n)$.

z.z. $x = 0$.

Schreibe $x = u_1 + \dots + u_{i-1} + u_{i+1} + \dots + u_n$ mit $u_j \in U_j$ für alle j . Setze $u_i := -x \in U_i$.

Dann:

$$0 = \underbrace{u_1}_{\in U_1} + \dots + \underbrace{u_{i-1}}_{\in U_{i-1}} + \underbrace{u_i}_{\in U_i} + \underbrace{u_{i+1}}_{\in U_{i+1}} + \dots + \underbrace{u_n}_{\in U_n}$$

Aus (2) folgt $u_1 = \dots = u_n = 0$; insbesondere ist $x = -u_i = -0 = 0$.

“ \supseteq ”: Klar, da die linke Seite ein Untervektorraum von V ist.

(3) \Rightarrow (4): Sei (3) erfüllt und $i \in \{2, \dots, n\}$.

z.z. $U_i \cap (U_1 + \dots + U_{i-1}) = \{0\}$.

“ \subseteq ”: Sei $x \in U_i \cap (U_1 + \dots + U_{i-1})$.

z.z. $x = 0$.

Schreibe $x = u_1 + \dots + u_{i-1}$ mit $u_j \in U_j$ für alle j .

Dann $x = u_1 + \dots + u_{i-1} + \underbrace{0}_{\in U_{i+1}} + \dots + \underbrace{0}_{\in U_n} \in U_1 + \dots + U_{i-1} + U_{i+1} + \dots + U_n$.

Also: $x \in U_i \cap (U_1 + \dots + U_{i-1} + U_{i+1} + \dots + U_n) \stackrel{(3)}{=} \{0\}$.

“ \supseteq ”: Klar, da die linke Seite ein Untervektorraum von V ist.

(4) \Rightarrow (1): Sei (4) erfüllt, und sei $v_1 + \dots + v_n = w_1 + \dots + w_n$ mit $v_1, w_1 \in U_1, \dots, v_n, w_n \in U_n$.

z.z. $v_1 = w_1, \dots, v_n = w_n$.

Wir machen einen **Widerspruchsbeweis**. Dazu nehmen wir an, dass $v_i \neq w_i$ für

mindestens ein $i \in \{1, \dots, n\}$ ist. Wir wählen $i \in \{1, \dots, n\}$ maximal mit $v_i \neq w_i$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= v_1 + \dots + v_n - (w_1 + \dots + w_n) = v_1 + \dots + v_n - w_1 - \dots - w_n \\ &= v_1 - w_1 + \dots + v_n - w_n = v_1 - w_1 + \dots + v_i - w_i \end{aligned}$$

nach Wahl von i . Im Fall $i = 1$ wäre $v_1 - w_1 = 0$, d.h. $v_1 = w_1$. Widerspruch. Also ist $i \geq 2$. Dann ist

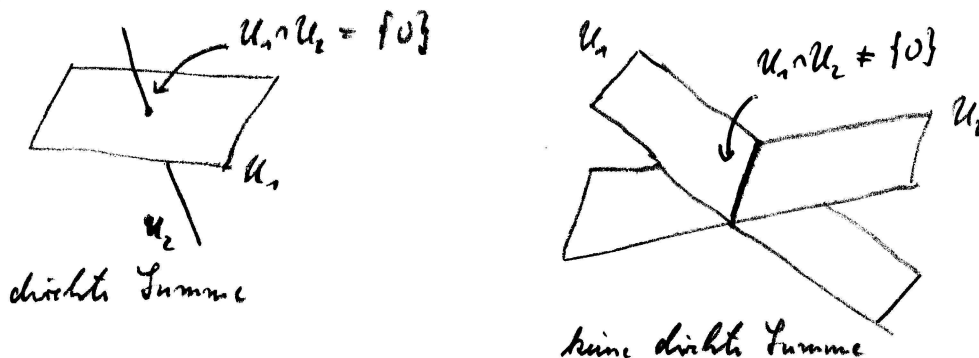
$$\underbrace{w_i - v_i}_{\in U_i} = \underbrace{v_1 - w_1}_{\in U_1} + \dots + \underbrace{v_{i-1} - w_{i-1}}_{\in U_{i-1}} \in U_i \cap (U_1 + \dots + U_{i-1}) \stackrel{(4)}{=} \{0\}.$$

Also ist $w_i - v_i = 0$, d.h. $w_i = v_i$. Widerspruch. □

Definition 5.4. Ggf. nennt man $U_1 + \dots + U_n$ eine *direkte Summe* und schreibt $U_1 \oplus \dots \oplus U_n$.

Bemerkung 5.5. Wegen Satz 5.4 (4) gilt für Untervektorräume U_1, U_2 eines K -Vektorraums V :

Genau dann ist $U_1 + U_2$ eine direkte Summe, wenn $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ ist.



Bemerkung 5.6. Gegeben: Vektoren v_1, \dots, v_n in einem K -Vektorraum V .

Setze:

$$\begin{aligned} \text{Span}_K(v_1, \dots, v_n) &:= \{a_1 v_1 + \dots + a_n v_n : a_1, \dots, a_n \in K\} \\ &= K v_1 + \dots + K v_n. \end{aligned}$$

$\text{Span}_K(v_1, \dots, v_n)$: von v_1, \dots, v_n *aufgespannter* Untervektorraum von V , *lineare Hülle* von v_1, \dots, v_n .

Elemente in $\text{Span}_K(v_1, \dots, v_n)$: *(K-)Linearkombinationen* von v_1, \dots, v_n .

Im Fall $\text{Span}_K(v_1, \dots, v_n) = V$ sagt man: v_1, \dots, v_n *spannen V auf*.

Anschaulich: $\text{Span}_K(v_1, \dots, v_n)$ ist der "kleinste" Untervektorraum von V , der v_1, \dots, v_n enthält.

Beispiel 5.6. (i) $V = \mathbb{R}^3, 0 \neq v_1 \in V, v_2 \in V \setminus \mathbb{R}v_1$.

Dann: $\text{Span}_K(v_1, v_2)$ "Ebene" durch $0, v_1, v_2$.

(ii) Man setzt zusätzlich: $\text{Span}_K(\emptyset) = \{0\}$.

6 Lineare Gleichungssysteme

K Körper

Beispiel 6.1.

$$\left. \begin{array}{r} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \\ -x + 3y + z = 8 \end{array} \right\} (\star)$$

Bemerkung 6.1. *Lineares Gleichungssystem* mit m Gleichungen in n Variablen (*Unbekannten*) x_1, \dots, x_n :

$$\left. \begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right\} (\star)$$

Kurz: $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i (i = 1, \dots, m)$.

$a_{ij} \in K$: **Koeffizienten**, $b_i \in K$ **Bekanntes**

Lösung: ein $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$, das (\star) simultan erfüllt.

Lösungsmenge: $L = \{(x_1, \dots, x_n) \in K^n : (x_1, \dots, x_n) \text{ Lösung von } (\star)\}$

Fragen:

- (i) lösbar - unlösbar?
- (ii) Wie viele Lösungen?
- (iii) Struktur der Lösungsmenge?
- (iv) Geometrische Veranschaulichung?
- (v) Lösungsalgorithmus?

Bemerkung 6.2.

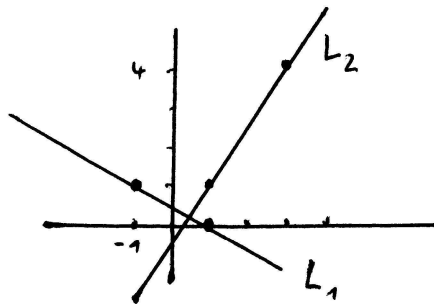
$$\left. \begin{array}{r} x + 2y = 1 \\ 3x - 2y = 1 \end{array} \right\} (\star)$$

Lösungen:

$L_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y = 1\}$ Gerade durch $(1, 0)$ und $(-1, 1)$

$L_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x - 2y = 1\}$ Gerade durch $(1, 1)$ und $(3, 4)$

Lösungsmenge $L = L_1 \cap L_2 = \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right) \right\}$.



Allgemein: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = c\}$ ist in der Regel eine Gerade ($a, b, c \in \mathbb{R}$).

Ausnahmen: $0x + 0y = 0$ (ganze Ebene), $0x + 0y = c \neq 0$ (leere Menge).

Mehr als zwei Unbekannte:

$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = d\}$ ist in der Regel eine Ebene im Raum.

Bemerkung 6.3. Elementare Umformungen eines linearen Gleichungssystems:

Typ I: Addition eines Vielfachen einer Gleichung zu einer anderen

Typ II: Multiplikation einer Gleichung mit einem $r \in K \setminus \{0\}$.

$$\text{z.B.} \quad \left. \begin{array}{rcl} x & + & y & + & 2z & = & 9 \\ 2x & + & 4y & - & 3z & = & 1 \\ 3x & + & 6y & - & 5z & = & 0 \\ -x & + & 3y & + & z & = & 8 \end{array} \right\} (A)$$

Addition des (-2)-fachen der ersten Gleichung zur zweiten ergibt:

$$\left. \begin{array}{rcl} x & + & y & + & 2z & = & 9 \\ & & 2y & - & 7z & = & -17 \\ 3x & + & 6y & - & 5z & = & 0 \\ -x & + & 3y & + & z & = & 8 \end{array} \right\} (B)$$

Wichtig: Bei einer elementaren Umformung ändert sich die Lösungsmenge nicht; aus

$$(i) \quad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$$

und

$$(ii) \quad a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n = b_j$$

folgt nämlich für $r \in K$:

$$(ii') \quad (a_{j1} + ra_{i1})x_1 + (a_{j2} + ra_{i2})x_2 + \dots + (a_{jn} + ra_{in})x_n = b_j + rb_i$$

Umgekehrt: aus (i) und (ii') folgt (ii), indem man das $(-r)$ -fache von (i) zu (ii') addiert. Entsprechend bei elementaren Umformungen vom Typ II.

Bemerkung 6.4. (Gauß-Algorithmus, Eliminationsverfahren)

lange vor Gauß (1777-1855) bekannt.

Grundidee: Überführe ein gegebenes lineares Gleichungs-System durch systematische mehrfache elementare Umformungen in ein lineares Gleichungs-System, dessen Lösungen man unmittelbar ablesen kann.

$$(A) \begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \\ -x + 3y + z = 8 \end{cases} \quad \text{Erhalte:}$$

$$(B) \begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2y - 7z = -17 \\ 3y - 11z = -27 \\ 4y + 3z = 17 \end{cases} \quad \text{Dann:}$$

$$(C) \begin{cases} x + \frac{11}{2}z = \frac{35}{2} \\ 2y - 7z = -17 \\ -\frac{1}{2}z = -\frac{3}{2} \\ 17z = 51 \end{cases} \quad \text{Also:}$$

$$(D) \begin{cases} x = 1 \\ 2y = 4 \\ -\frac{1}{2}z = \frac{-3}{2} \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \text{Daher:}$$

$$(E) \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Lösungsmenge: $L = \{(1, 2, 3)\}$.

Definition 6.5. Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Eine $m \times n$ -Matrix mit *Koeffizienten* in K ist eine Abbildung

$$A : \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \longrightarrow K, (i, j) \longmapsto a_{ij}.$$

Man schreibt:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij} : i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n) = (a_{ij})_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}} = (a_{ij}).$$

Bemerkung 6.5. (i) Sei $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \dots & b_{rs} \end{pmatrix}$ eine weitere Matrix.

Dann:

$$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} m = r, n = s \text{ (gleiches Format)} \\ \text{und } a_{ij} = b_{ij} \text{ f\u00fcr alle } i, j \text{ (gleiche Koeffizienten)} \end{cases}$$

(ii) Setze

$$\text{Mat}(m, n, K) := K^{m \times n} := \left\{ (a_{ij})_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}} : a_{ij} \in K \right\}.$$

(iii) Gegeben: lineares Gleichungssystem $(\star) \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \ (i = 1, \dots, m)$.

$$\text{Dann: } \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ Koeffizientenmatrix von } (\star)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \text{ erweiterte Matrix von } (\star)$$

Vereinfachung der Schreibweise:

F\u00fchre elementare Umformungen an der erweiterten Matrix durch!

Beispiel 6.5. Lineares Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ (\star): \quad x + 2y - z &= 0 \\ 2x + 5y - 4z &= -3 \end{aligned}$$

$$\text{Erweiterte Matrix: } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Elementare Umformungen: } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & -6 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\text{Noch einmal: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entspricht dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + 3z &= 6 \\ (\star\star): \quad y - 2z &= -3 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

L\u00f6sungsmenge $L = \{(-3z + 6, 2z - 3, z) : z \in \mathbb{R}\}$ Gerade im \mathbb{R}^3 .

Bemerkung 6.6. Durch mehrfache elementare (Zeilen-) Umformungen kann man zwei Zeilen einer Matrix vertauschen:

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ a_{i1} \dots \\ \vdots \\ a_{j1} \dots \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ a_{i1} \dots \\ \vdots \\ a_{i1} + a_{j1} \dots \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ -a_{j1} \dots \\ \vdots \\ a_{i1} + a_{j1} \dots \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ -a_{j1} \dots \\ \vdots \\ a_{i1} \dots \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ a_{j1} \dots \\ \vdots \\ a_{i1} \dots \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Beispiel 6.6. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix}$

Mehrfache elementare Zeilenumformungen:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

Weitere elementare Zeilenumformungen:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 6 & -23 & -32 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 6 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Bemerkung 6.7. Eine beliebige vorgegebene Matrix $A = (a_{ij})$ kann man durch mehrfache elementare Zeilenumformungen stets in eine Matrix der folgenden Form überführen:

$$Z = \begin{pmatrix} 0 \dots 0 & 1 & \star \dots \star & 0 & \star \dots \star & 0 & \star \dots & \dots \star \\ 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 & 1 & \star \dots \star & 0 & \star \dots & \dots \star \\ 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 & 1 & \star \dots & \dots \star \\ \vdots & & & & & & & \end{pmatrix}$$

Dabei ist \star ein beliebiges Element in K (nicht unbedingt immer das gleiche).

Man sagt: Z hat *reduzierte Zeilenstufenform*, d.h.

1. Die Zeilen, die nur Nullen enthalten, stehen ganz unten.
2. Enthält eine Zeile nicht nur Nullen, so ist der erste von 0 verschiedene Koeffizient eine Eins (*Führende Eins*).

3. Eine Spalte, die eine führende Eins enthält, enthält sonst lauter Nullen.
4. In zwei aufeinander folgenden Zeilen, die nicht nur Nullen enthalten, steht die führende Eins in der oberen Zeile links von der führenden Eins in der unteren Zeile.

Wichtig: An einer Matrix in reduzierter Zeilenstufenform kann man die Lösungsmenge des entsprechenden linearen Gleichungs-Systems unmittelbar ablesen.

Beispiel 6.7. $(\star) \begin{cases} u + 2v + 3x = 7 \\ w = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

Lösungsmenge $L = \{(-2v - 3x + 7, v, 1, x, 2) : x, v \in \mathbb{R}\}$
 v, x *freie Variablen*, u, w, y *gebundene Variablen*

Bemerkung 6.8. Ein lineares Gleichungs-System der Form

$$(\star) \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 0 \quad (i = 1, \dots, m)$$

nennt man *homogen*. Ggf. ist die Lösungsmenge L ein Untervektorraum von K^n ; denn (\star) besitzt stets die *triviale* Lösung $(0, \dots, 0)$ und für $s = (s_1, \dots, s_n), t = (t_1, \dots, t_n) \in L, c, d \in K$ ist auch $cs + dt \in L$.

Satz 6.8. *Ein homogenes lineares Gleichungs-System mit mehr Unbekannten als Gleichungen hat stets eine nicht-triviale Lösung.*

Beweis. Wir führen den Gauß-Algorithmus durch. Dabei ändert sich die Anzahl der Gleichungen und Unbekannten nicht. Das entstehende lineare Gleichungs-System in reduzierter Zeilenstufenform hat also immer noch mehr Unbekannte als Gleichungen. (und ist immer noch homogen). Daher muss es freie Variablen geben. Für diese kann man von 0 verschiedene Elemente einsetzen. \square

Bemerkung 6.9. Gegeben sei ein beliebiges (*inhomogenes*) lineares Gleichungs-System:

$$(I) \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1, \dots, m).$$

Betrachte das entsprechende homogene lineare Gleichungs-System:

$$(H) \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 0 \quad (i = 1, \dots, m).$$

Wie hängen die Lösungsmengen $L(I)$ und $L(H)$ zusammen?

Es kann vorkommen, dass $L(I) = \emptyset$ ist.

Ist $L(I) \neq \emptyset$ und $s = (s_1, \dots, s_n) \in L(I)$, so gilt:

(i) Für $t \in L(H)$ ist $s + t \in L(I)$.

(ii) Für $u \in L(I)$ ist $t := u - s \in L(H)$ mit $u = s + t$.

Man schreibt:

$$L(I) = s + L(H)$$

Beispiel 6.9.

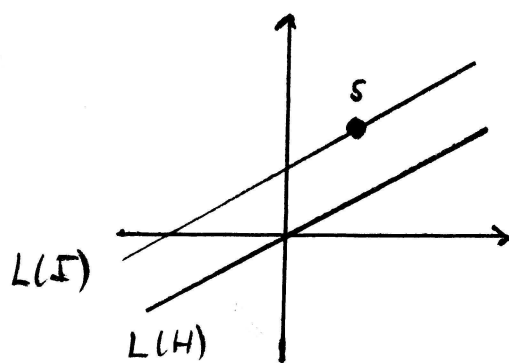
$$(I) \begin{array}{l} x + 2z = 1 \\ y + z = 0 \end{array} \quad (H) \begin{array}{l} x + 2z = 0 \\ y + z = 0 \end{array}$$

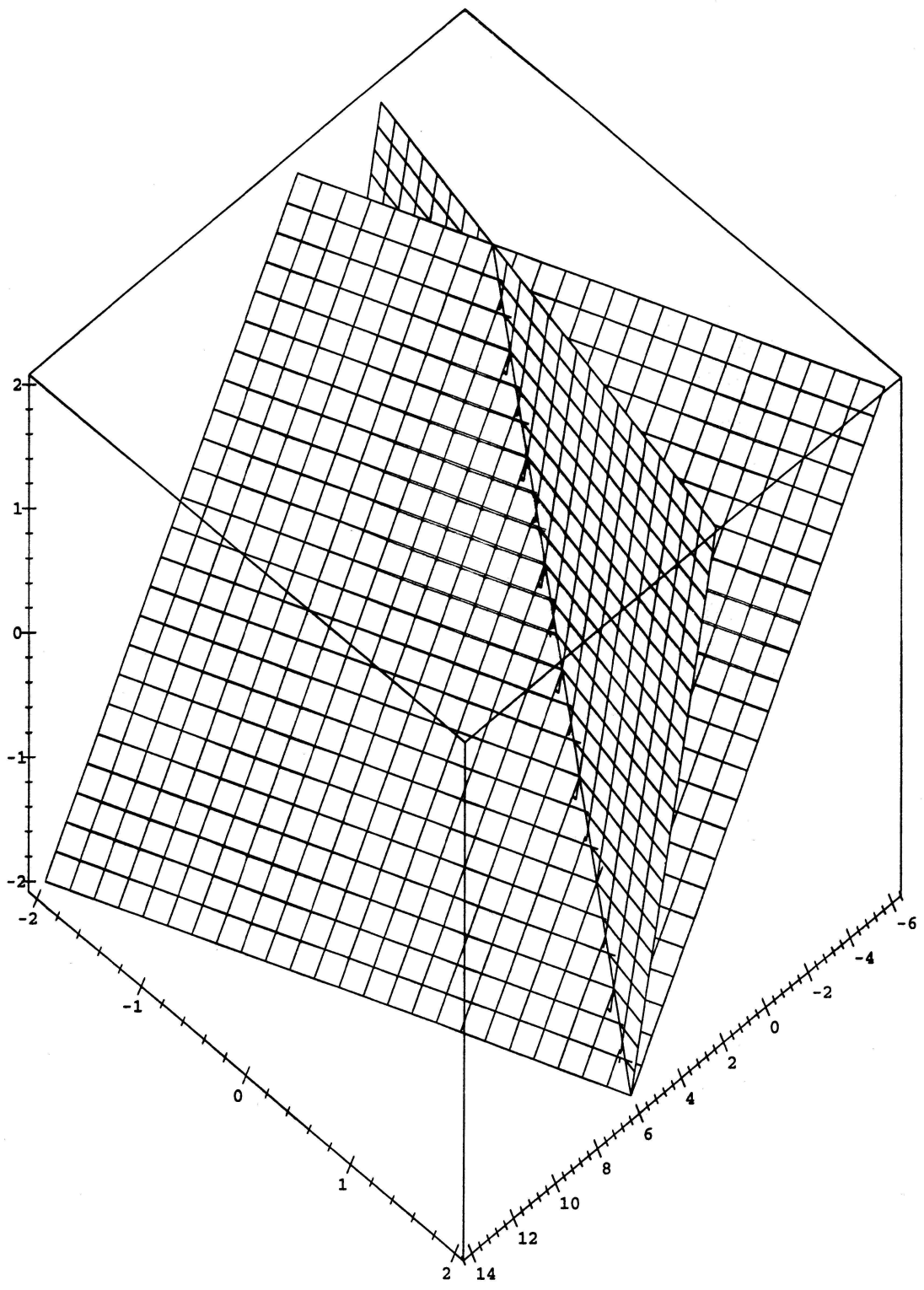
$$L(H) = \{(-2z, -z, z) : z \in \mathbb{R}\} \text{ Gerade}$$

$$L(I) = \{(-2z + 1, -z, z) : z \in \mathbb{R}\} \text{ parallele Gerade}$$

$$= (1, 0, 0) + L(H)$$

$$= (-1, -1, 1) + L(H)$$





7 Matrizen

K Körper.

Satz 7.1. Für $m, n \in \mathbb{N}$ wird $K^{m \times n}$ zu einem K -Vektorraum, wenn man definiert:

$$A + B := (a_{ij} + b_{ij}), \quad rA := (ra_{ij})$$

für $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in K^{m \times n}, r \in K$.

Neutrales Element bezüglich $+$: **Nullmatrix**

$$0 := 0_{m,n} := \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in K^{m \times n}$$

Negativ zu $A = (a_{ij})$ ist $-A = (-a_{ij})$.

Beweis. folgt unmittelbar aus den Rechenregeln in K . □

Beispiel 7.1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}, \quad 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}.$$

Definition 7.2. Für $A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}, B = (b_{kl}) \in K^{n \times p}$ definiert man das **Produkt** $AB =: C = (c_{rs}) \in K^{m \times p}$ durch

$$c_{rs} := \sum_{t=1}^n a_{rt}b_{ts} = a_{r1}b_{1s} + a_{r2}b_{2s} + \dots + a_{rn}b_{ns}.$$

Beispiel 7.2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ \boxed{2} & \boxed{6} & \boxed{0} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & \boxed{4} & 3 \\ 0 & -1 & \boxed{3} & 1 \\ 2 & 7 & \boxed{5} & 2 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & \boxed{26} & 12 \end{pmatrix}$$

z.B.: $2 \cdot 4 + 6 \cdot 3 + 0 \cdot 5 = 26$.

Bemerkung 7.2. (i) Achtung bei den Formaten von A, B und AB !

(ii) Ein lineares Gleichungssystem $(\star) \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i$ ($i = 1, \dots, m$) kann man auch als Matrixgleichung schreiben:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Kurz: $Ax = b$ mit $A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}, x = (x_j) \in K^{n \times 1}, b = (b_i) \in K^{m \times 1}$.

(iii) I.Allg. ist $AB \neq BA$, z.B.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ aber } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Satz 7.2. Für das Produkt von Matrizen gelten folgende Rechenregeln:

- (i) $(AB)C = A(BC)$ (Assoziativgesetz).
- (ii) $A(B + C) = AB + AC$ (Distributivgesetz).
- (iii) $(A + B)C = AC + BC$ (Distributivgesetz).
- (iv) $r(AB) = (rA)B = A(rB)$.

Dabei seien die Formate jeweils "passend" und $r \in K$.

Beweis. (i) Seien $A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$, $B = (b_{ij}) \in K^{n \times p}$, $C = (c_{ij}) \in K^{p \times q}$.

Dann: $AB \in K^{m \times p}$, $(AB)C \in K^{m \times q}$, $BC \in K^{n \times q}$, $A(BC) \in K^{m \times q}$; insbesondere haben $(AB)C$ und $A(BC)$ das gleiche Format.

Koeffizienten von AB an Position (i, j) :

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}.$$

Koeffizienten von $(AB)C$ an Position (r, s) :

$$\begin{aligned} & (a_{r1}b_{11} + a_{r2}b_{21} + \dots + a_{rn}b_{n1})c_{1s} \\ & + (a_{r1}b_{12} + a_{r2}b_{22} + \dots + a_{rn}b_{n2})c_{2s} \\ & + \dots \\ & + (a_{r1}b_{1p} + a_{r2}b_{2p} + \dots + a_{rn}b_{np})c_{ps}. \end{aligned}$$

Koeffizienten von BC an Position (k, l) :

$$b_{k1}c_{1l} + b_{k2}c_{2l} + \dots + b_{kp}c_{pl}.$$

Koeffizienten von $A(BC)$ an Position (r, s) :

$$\begin{aligned} & a_{r1}(b_{11}c_{1s} + b_{12}c_{2s} + \dots + b_{1p}c_{ps}) \\ & + a_{r2}(b_{21}c_{1s} + b_{22}c_{2s} + \dots + b_{2p}c_{ps}) \\ & + \dots \\ & + a_{rn}(b_{n1}c_{1s} + b_{n2}c_{2s} + \dots + b_{np}c_{ps}). \end{aligned}$$

Also: $(AB)C = A(BC)$.

(ii)-(iv) analog.

□

Definition 7.3. $1_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in K^{n \times n}$ heißt *Einheitsmatrix*.

Beispiel 7.3. $1_1 = (1), 1_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Bemerkung 7.3. Rechne nach: $1_m A = A = A 1_n$ für $A \in K^{m \times n}$

Bemerkung 7.4. Eine Matrix $A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$ mit $m = n$ heißt *quadratisch*. Ggf. heißt $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}) \in K^n$ *Hauptdiagonale* von A :

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \boxed{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

Definition 7.4. $A \in K^{m \times n}$ heißt

- (i) *linksinvertierbar*, falls ein $B \in K^{n \times m}$ mit $BA = 1_n$ existiert.
Ggf.: B *linksinvers* zu A .
- (ii) *rechtsinvertierbar*, falls ein $C \in K^{n \times m}$ mit $AC = 1_m$ existiert.
Ggf.: C *rechtsinvers* zu A .
- (iii) *invertierbar*, falls A linksinvertierbar und rechtsinvertierbar.

Satz 7.4. Zu jeder invertierbaren Matrix $A \in K^{m \times n}$ existiert genau ein $D \in K^{n \times m}$ mit $DA = 1_n$ und $AD = 1_m$. ($D := A^{-1}$ heißt die zu A *inverse Matrix*.)

Beweis. Sei A invertierbar. Wähle B, C wie oben. Dann:

$$B = B 1_m = B(AC) = (BA)C = 1_n C = C.$$

Also: $BA = 1_n, AB = 1_m$.

Sei $E \in K^{n \times m}$ beliebig mit $EA = 1_n$ und $AE = 1_m$. Dann:

$$B = B 1_m = B(AE) = (BA)E = 1_n E = E.$$

□

Beispiel 7.4. (i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1_2 = BA$.

Also: A invertierbar, $B = A^{-1}$.

Später: invertierbare Matrizen sind stets quadratisch.

$$(ii) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Dann: $BA = 1_2 = B_1A$, also A linksinvertierbar.

Also: linksinverse Matrizen sind i.Allg. nicht eindeutig.

Beachte: A nicht invertierbar; denn sonst wäre

$$B = B1_3 = B(AA^{-1}) = (BA)A^{-1} = 1_2A^{-1} = A^{-1}$$

und analog $B_1 = A^{-1}$, also $B = B_1$.

Satz 7.5. $GL(n, K) := \{A \in K^{n \times n} : A \text{ invertierbar}\}$ ist eine Gruppe bezüglich Matrizenmultiplikation mit neutralem Element 1_n .

Beweis. Für $A, B \in GL(n, K)$ gilt: $1_n = AA^{-1} = A^{-1}A = BB^{-1} = B^{-1}B$.

Also: $AB \cdot B^{-1}A^{-1} = A1_nA^{-1} = AA^{-1} = 1_n$, $B^{-1}A^{-1} \cdot AB = \dots = 1_n$.

Daher $AB \in GL(n, K)$.

Assoziativgesetz: Satz 7.2 (i)

neutrales Element: Bemerkung 7.3

Inverse Elemente: Für $A \in GL(n, K)$ ist $AA^{-1} = 1_n = A^{-1}A$. Also auch $A^{-1} \in GL(n, K)$. \square

Definition 7.5. $GL(n, K)$ heißt *allgemeine lineare Gruppe* des Grades n über K (general linear group)

Bemerkung 7.5. (i) (Berechnung einer rechtsinversen Matrix)

Gegeben: $A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$.

Gesucht: $X = (x_{ij}) \in K^{n \times m}$ mit $AX = 1_m$.

Vergleich der ersten Spalten liefert lineares Gleichungs-System:

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_{11} + \dots + a_{1n}x_{n1} = 1 \\ a_{21}x_{11} + \dots + a_{2n}x_{n1} = 0 \\ \dots \\ a_{m1}x_{11} + \dots + a_{mn}x_{n1} = 0 \end{array} \right\} (I)$$

Berechne daraus $x_{11}, x_{21}, \dots, x_{n1}$.

Vergleich der zweiten Spalten liefert lineares Gleichungs-System:

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_{12} + \dots + a_{1n}x_{n2} = 0 \\ a_{21}x_{12} + \dots + a_{2n}x_{n2} = 1 \\ a_{31}x_{12} + \dots + a_{3n}x_{n2} = 0 \\ \dots \\ a_{m1}x_{12} + \dots + a_{mn}x_{n2} = 0 \end{array} \right\} (II)$$

Berechne daraus $x_{12}, x_{22}, \dots, x_{n2}$. Ähnlich mit anderen Spalten!

Vereinfachung: Löse diese m linearen Gleichungs-Systeme *simultan*. Fasse dazu die verschiedenen rechten Seiten wieder zu einer Matrix 1_m zusammen. Schreibe A

und 1_m nebeneinander. Wende auf A und 1_m die gleichen elementaren Zeilenumformungen an:

$$\begin{array}{l}
 A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \\
 1_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Lösung: $X = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (Probe!)

(ii) Berechnung einer linksinversen Matrix: ähnlich

(iii) (Berechnung der inversen Matrix)

Gegeben $A \in K^{m \times n}$. Wie in (i) prüfe man zunächst, ob eine rechtsinverse Matrix $X \in K^{n \times m}$ existiert. (Falls nicht, so ist A nicht einmal rechtsinvertierbar.) Existieren verschiedene Rechtsinverse $X, Y \in K^{n \times m}$, so ist A nicht invertierbar. (Sonst: $X = 1_n X = A^{-1} A X = A^{-1} 1_m = A^{-1}$ und analog $Y = A^{-1}$, also $X = Y$.) Bleibt der Fall übrig, dass genau ein Rechtsinverses X existiert. Prüfe dann, ob auch $X A = 1_n$ ist. Falls nicht, ist A nicht invertierbar. Falls ja, ist A invertierbar und $X = A^{-1}$.

Obiges Beispiel:

$$XA = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Also: A invertierbar und $X = A^{-1}$.

(iv) Später: $A \in K^{m \times n}$ rechtsinvertierbar $\Rightarrow m \leq n$

$A \in K^{m \times n}$ linksinvertierbar $\Rightarrow n \leq m$

$A \in K^{m \times n}$ invertierbar $\Rightarrow n = m$.

$A \in K^{n \times n}$ rechtsinvertierbar $\Leftrightarrow A$ linksinvertierbar.

Definition 7.6. Für $A \in K^{n \times n}$ und $r \in \mathbb{N}$ nennt man $A^r := A \cdots A$ (r Faktoren) die r -te *Potenz* von A .

Zusätzlich: $A^0 = 1_n$. Ist A invertierbar, so außerdem:

$$A^{-r} := (A^{-1})^r.$$

Bemerkung 7.6. Dann gilt jeweils $A^r A^s = A^{r+s}$, aber i.Allg. **nicht** $(AB)^r = A^r B^r$. Sind aber A und B *vertauschbar* (d.h. $AB = BA$), so gilt auch $(AB)^r = A^r B^r$.

Definition 7.7. Gegeben $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in K^{m \times n}$.

Dann $A^T := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in K^{n \times m}$ *transponierte Matrix*.

Beispiel 7.7. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

Satz 7.7. (i) $(A^T)^T = A$.

(ii) $(A + B)^T = A^T + B^T, (rA)^T = rA^T$.

(iii) $(AB)^T = B^T A^T$ (Achtung!)

(iv) A rechtsinvertierbar, B rechtsinvers zu $A \Rightarrow A^T$ linksinvertierbar, B^T linksinvers zu A^T .

(v) A invertierbar $\Rightarrow A^T$ invertierbar und $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Beweis.(i)-(ii) offensichtlich.

(iii) Seien $A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}, B = (b_{ij}) \in K^{n \times p}$. Dann $AB \in K^{m \times p}, (AB)^T \in K^{p \times m}$. Andererseits $A^T \in K^{n \times m}, B^T \in K^{p \times n}, B^T A^T \in K^{p \times m}$.

Koeffizient von $(AB)^T$ an Position (i, j)

= Koeffizient von AB an Position (j, i)

= $a_{j1} b_{1i} + a_{j2} b_{2i} + \dots + a_{jn} b_{ni}$

= $b_{1i} a_{j1} + b_{2i} a_{j2} + \dots + b_{ni} a_{jn}$

= Koeffizient von $B^T A^T$ an Position (i, j) .

(iv) $AB = 1_m \Rightarrow 1_m = 1_m^T = (AB)^T = B^T A^T$.

(v) folgt aus (iv) und der Aussage, die man aus (iv) erhält, indem man links und rechts vertauscht.

□

Definition 7.8. Eine Matrix A mit $A^T = A$ (bzw. $A^T = -A$) heißt *symmetrisch* (bzw. *schiefssymmetrisch*).

Beispiel 7.8. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ symmetrisch, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ schiefssymmetrisch.

Bemerkung 7.8. Aus Satz 7.7 folgt leicht:

Für $r, s \in K$ und symmetrische (bzw. schiefssymmetrische) $A, B \in K^{n \times n}$ ist auch $rA + sB$ symmetrisch (bzw. schiefssymmetrisch). Ist A invertierbar, so ist auch A^{-1} symmetrisch (bzw. schiefssymmetrisch). I.Allg. ist AB *nicht* symmetrisch (bzw. schiefssymmetrisch). Dagegen ist $AB + BA$ stets symmetrisch (bzw. $AB - BA$ schiefssymmetrisch).

Definition 7.9. Für $A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$ nennt man

$$\text{spur}(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

die *Spur* von A .

Bemerkung 7.9. Mit anderen Worten: $\text{spur}(A)$ ist die Summe der Koeffizienten auf der Hauptdiagonalen von A .

Beispiel 7.9. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{spur}(A) = 1 + 5 + 9 = 15$.

Satz 7.9. Für $A, B \in K^{n \times n}, C \in K^{m \times n}, D \in K^{n \times m}, r, s \in K$ gilt:

- (i) $\text{spur}(rA + sB) = r \text{spur}(A) + s \text{spur}(B)$.
- (ii) $\text{spur}(CD) = \text{spur}(DC)$.
- (iii) $\text{spur}(A^T) = \text{spur}(A)$.

Beweis. Wir beweisen (ii); der Rest ist klar. Schreibe $C = (c_{ij}), D = (d_{ij})$. Dann:

$$\begin{aligned} \text{spur}(CD) &= \text{spur} \left(\sum_{k=1}^n c_{ik} d_{kj} : i, j = 1, \dots, m \right) = \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^n c_{lk} d_{kl} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m d_{kl} c_{lk} \\ &= \text{spur} \left(\sum_{l=1}^m d_{il} c_{lj} : i, j = 1, \dots, n \right) = \text{spur}(DC). \end{aligned}$$

□

8 Basis und Dimension

K Körper

Satz 8.1. Für Elemente v_1, \dots, v_n in einem K -Vektorraum V sind gleichwertig:

- (1) Aus $t_1v_1 + \dots + t_nv_n = 0$ mit $t_1, \dots, t_n \in K$ folgt stets $t_1 = \dots = t_n = 0$.
- (2) Jedes Element in $\text{Span}(v_1, \dots, v_n)$ lässt sich als Linear-Kombination $r_1v_1 + \dots + r_nv_n$ mit eindeutig bestimmten $r_1, \dots, r_n \in K$ schreiben.

Beweis.

- (1) \Rightarrow (2): Sei (1) erfüllt, und seien $r_1, s_1, \dots, r_n, s_n \in K$ mit $x = r_1v_1 + \dots + r_nv_n = s_1v_1 + \dots + s_nv_n$.
Dann ist

$$\begin{aligned} 0 &= r_1v_1 + \dots + r_nv_n - (s_1v_1 + \dots + s_nv_n) = r_1v_1 + \dots + r_nv_n - s_1v_1 - \dots - s_nv_n \\ &= r_1v_1 - s_1v_1 + \dots + r_nv_n - s_nv_n = (r_1 - s_1)v_1 + \dots + (r_n - s_n)v_n. \end{aligned}$$

Aus (1) folgt: $r_1 - s_1 = \dots = r_n - s_n = 0$, d.h. $r_1 = s_1, \dots, r_n = s_n$.

- (2) \Rightarrow (1): Sei (2) erfüllt, und seien $t_1, \dots, t_n \in K$ mit $0 = t_1v_1 + \dots + t_nv_n$. Da außerdem $0v_1 + \dots + 0v_n = 0$ ist, folgt aus (2): $t_1 = 0, \dots, t_n = 0$.

□

Definition 8.1. Ggf. nennt man v_1, \dots, v_n *linear unabhängig*, sonst *linear abhängig*.

Bemerkung 8.1. Die leere Menge von Vektoren betrachtet man zusätzlich als linear unabhängig.

Beispiel 8.1. Sind $v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (1, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$ linear abhängig?

Ansatz: $0 = t_1v_1 + t_2v_2 + t_3v_3 = (t_1 + t_3, t_1 + t_2, t_2 + t_3)$.

Erhalte lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcl} t_1 & + & t_3 = 0 \\ t_1 + t_2 & & = 0 \\ & t_2 + t_3 & = 0. \end{array}$$

Gauß-Algorithmus liefert: $t_1 = t_2 = t_3 = 0$.

Also: v_1, v_2, v_3 linear unabhängig.

Satz 8.2. Gegeben seien linear abhängige Vektoren v_1, \dots, v_n in einem K -Vektorraum V . Dann lässt sich einer dieser Vektoren als Linear-Kombination der übrigen schreiben.

Beweis. Nach Voraussetzung existieren $t_1, \dots, t_n \in K$, nicht alle gleich 0, mit $t_1 v_1 + \dots + t_n v_n = 0$. Sei $i \in \{1, \dots, n\}$ mit $t_i \neq 0$. Dann ist

$$v_i = \frac{-t_1}{t_i} v_1 + \dots + \frac{-t_{i-1}}{t_i} v_{i-1} + \frac{-t_{i+1}}{t_i} v_{i+1} + \dots + \frac{-t_n}{t_i} v_n.$$

□

Bemerkung 8.2. I. Allg. kann man sich nicht aussuchen, welcher der Vektoren Linear-Kombination der übrigen ist; z.B. sind

$$v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, 0, 1), v_3 = (0, 0, 2) \in \mathbb{R}^3$$

wegen $0 \cdot v_1 + 2v_2 + (-1)v_3 = 0$ linear abhängig, aber v_1 ist keine Linear-Kombination von v_2 und v_3 .

Satz 8.3. Für Elemente b_1, \dots, b_n in einem K -Vektorraum V sind gleichwertig:

- (1) b_1, \dots, b_n sind linear unabhängig und spannen V auf.
- (2) b_1, \dots, b_n spannen V auf; lässt man aber einen der Vektoren b_1, \dots, b_n weg, so spannen die übrigen V nicht mehr auf.
- (3) b_1, \dots, b_n sind linear unabhängig, nimmt man aber einen Vektor $b_{n+1} \in V$ hinzu, so sind b_1, \dots, b_n, b_{n+1} linear abhängig.

Definition 8.3. Ggf. nennt man b_1, \dots, b_n eine **Basis** von V .

Beweis.

(1) \Rightarrow (2): Sei (1) erfüllt.

Annahme: $V = \text{Span}(b_2, \dots, b_n)$.

Dann existieren $r_2, \dots, r_n \in K$ mit $b_1 = r_2 b_2 + \dots + r_n b_n$.

Folglich $(-1)b_1 + r_2 b_2 + \dots + r_n b_n = 0$.

Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von b_1, \dots, b_n .

(2) \Rightarrow (3): Sei (2) erfüllt. Wir nehmen zunächst an, dass b_1, \dots, b_n linear abhängig sind. Nach Satz 8.2 können wir einen der Vektoren als Linearkombination der übrigen schreiben. Nach Umnummerierung von b_1, \dots, b_n können wir annehmen: $b_1 = r_2 b_2 + \dots + r_n b_n$ mit $r_2, \dots, r_n \in K$. Nach (2) existieren zu jedem $v \in V$ Elemente $s_1, \dots, s_n \in K$ mit $v = s_1 b_1 + \dots + s_n b_n = (s_1 r_2 + s_2) b_2 + \dots + (s_1 r_n + s_n) b_n \in \text{Span}(b_2, \dots, b_n)$. Also ist $V = \text{Span}(b_2, \dots, b_n)$ im Widerspruch zu (2). Dies zeigt, dass b_1, \dots, b_n linear unabhängig sind.

Sei jetzt $b_{n+1} \in V$ beliebig. Dann existieren $t_1, \dots, t_n \in K$ mit $b_{n+1} = t_1 b_1 + \dots + t_n b_n$, d.h. $0 = t_1 b_1 + \dots + t_n b_n + (-1)b_{n+1}$. Folglich sind b_1, \dots, b_n, b_{n+1} linear abhängig.

(3) \Rightarrow (1): Sei (3) erfüllt und $v \in V$. Dann sind b_1, \dots, b_n, v linear abhängig. Daher existieren $r_1, \dots, r_n, s \in K$, nicht alle gleich 0, mit $r_1 b_1 + \dots + r_n b_n + s v = 0$. Im Fall $s = 0$ wäre $r_1 b_1 + \dots + r_n b_n = 0$ im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von b_1, \dots, b_n . Also ist $s \neq 0$ und $v = -\frac{1}{s}(r_1 b_1 + \dots + r_n b_n) \in \text{Span}(b_1, \dots, b_n)$. □

Beispiel 8.3. (i) $e_1 := (1, 0, \dots, 0), e_2 := (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n := (0, \dots, 0, 1)$ bilden eine Basis des K^n (**Standardbasis** oder **kanonische Basis**). Insbesondere ist 1 eine Basis von K . Zusätzlich betrachtet man \emptyset als Basis von $K^0 := \{0\}$.

Achtung: e_1, \dots, e_n ist nicht die einzige Basis des K^n !

(ii) Für $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$ sei E_{ij} die $m \times n$ -Matrix, die 1 an der Position (i, j) und 0 an allen anderen Positionen enthält, z.B.:

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ im Fall } m = n = 2.$$

Man nennt E_{ij} **Matrixeinheit**. Die Matrixeinheiten E_{ij} ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$) bilden eine Basis des $K^{m \times n}$ (**Standardbasis** oder **kanonische Basis**).

Satz 8.4. (*Austauschsatz von Steinitz (1871-1928)*)

Gegeben sei ein K -Vektorraum V , der von Elementen e_1, \dots, e_k aufgespannt wird. Außerdem seien $u_1, \dots, u_l \in V$ linear unabhängig. Dann existieren $i_1, \dots, i_m \in \{1, \dots, k\}$ mit der Eigenschaft, dass $u_1, \dots, u_l, e_{i_1}, \dots, e_{i_m}$ eine Basis von V bilden.

Beweis. Wir wählen möglichst viele e_{i_1}, \dots, e_{i_m} mit der Eigenschaft, dass $u_1, \dots, u_l, e_{i_1}, \dots, e_{i_m}$ linear unabhängig sind (evtl. $m = 0$). Für $j \in \{1, \dots, k\} \setminus \{e_{i_1}, \dots, e_{i_m}\}$ sind dann $u_1, \dots, u_l, e_{i_1}, \dots, e_{i_m}, e_j$ linear abhängig. Daher existieren $r_1, \dots, r_l, s_1, \dots, s_m, t \in K$, nicht alle gleich 0, mit $0 = r_1 u_1 + \dots + r_l u_l + s_1 e_{i_1} + \dots + s_m e_{i_m} + t e_j$. Im Fall $t = 0$ hätte man einen Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von $u_1, \dots, u_l, e_{i_1}, \dots, e_{i_m}$. Daher ist $t \neq 0$ und

$$e_j = -\frac{1}{t}(r_1 u_1 + \dots + r_l u_l + s_1 e_{i_1} + \dots + s_m e_{i_m}) \in \text{Span}(u_1, \dots, u_l, e_{i_1}, \dots, e_{i_m}).$$

Folglich gilt: $e_1, \dots, e_k \in \text{Span}(u_1, \dots, u_l, e_{i_1}, \dots, e_{i_m})$. Also gehört auch jede Linear-Kombination von e_1, \dots, e_k zu $\text{Span}(u_1, \dots, u_l, e_{i_1}, \dots, e_{i_m})$. Daher ist $V = \text{Span}(u_1, \dots, u_l, e_{i_1}, \dots, e_{i_m})$. □

Bemerkung 8.4. Insbesondere kann man also einige Vektoren e_1, \dots, e_k weglassen um eine Basis von V zu erhalten (Fall $l = 0$).

Satz 8.5. Seien $v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m$ Elemente eines K -Vektorraums V mit $V = \text{Span}(v_1, \dots, v_n)$ und $n > m$. Dann sind w_1, \dots, w_m linear abhängig.

Beweis. Schreibe $w_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} v_i$ ($j = 1, \dots, m$). Setze $A := (a_{ij}) \in K^{m \times n}$. Wegen $n > m$ hat das homogene lineare Gleichungs-System $\sum_{j=1}^m a_{ij} x_j = 0$ ($i = 1, \dots, n$) nach Satz 6.8 eine nichttriviale Lösung (t_1, \dots, t_m) . Dann ist

$$0 = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} t_j \right) v_i = \sum_{j=1}^m t_j \sum_{i=1}^m a_{ij} v_i = \sum_{j=1}^m t_j w_j.$$

Also sind w_1, \dots, w_m linear abhängig. □

Bemerkung 8.5. Sind insbesondere v_1, \dots, v_m und w_1, \dots, w_n zwei Basen von V , so folgt $n \leq m$ und analog $m \leq n$. Je zwei (endliche) Basen eines K -Vektorraums V haben also die gleiche Anzahl n von Vektoren. Diese bezeichnet man als **Dimension** von V : $n = \dim V = \dim_K V$. Besitzt V keine endliche Basis, so schreiben wir $\dim V = \infty$ und nennen V **unendlich-dimensional**. Nach Bemerkung 8.4 wird V dann auch nicht von endlich vielen Vektoren aufgespannt.

Beispiel 8.5. $\dim K^n = n, \dim K^{m \times n} = mn$.

Satz 8.6. V Vektorraum der Dimension $n < \infty, v_1, \dots, v_n \in V$. Dann:

(i) v_1, \dots, v_n linear unabhängig $\Rightarrow v_1, \dots, v_n$ Basis von V .

(ii) $V = \text{Span}(v_1, \dots, v_n) \Rightarrow v_1, \dots, v_n$ Basis von V .

Beweis. (i) Sei b_1, \dots, b_n Basis von V . Steinitz: Man kann v_1, \dots, v_n zu einer Basis der Form $v_1, \dots, v_n, b_{i_1}, \dots, b_{i_m}$ ergänzen. Nach Bemerkung 8.5 ist $m = 0$, d.h. v_1, \dots, v_n bilden eine Basis von V .

(ii) Steinitz: V hat Basis der Form v_{i_1}, \dots, v_{i_m} . Nach Bemerkung 8.5 ist $m = n$, d.h. v_1, \dots, v_n bilden Basis von V . □

Satz 8.7. Für jeden Untervektorraum eines endlich-dimensionalen Vektorraums V ist $\dim U \leq \dim V$. Im Fall $\dim U = \dim V$ folgt $U = V$.

Beweis. Sei e_1, \dots, e_n Basis von V . Sind $u_1, \dots, u_m \in U$ linear unabhängig, so kann man u_1, \dots, u_m nach Steinitz durch einige der e_1, \dots, e_n zu einer Basis von V ergänzen. Nach Bemerkung 8.5 ist also $m \leq n$. Wählt man m möglichst groß, so bilden u_1, \dots, u_m nach Satz 8.3 (3) eine Basis von U . Also: $\dim U = m \leq n = \dim V$. Ist $m = n$, so folgt aus Satz 8.6 (i), dass u_1, \dots, u_n eine Basis von V bilden. Also ist $U = V$. □

Definition 8.7. Untervektorräume der Dimension 1 bzw. 2 bzw. $n - 1$ (im Fall $\dim V = n < \infty$) nennt man **Geraden** bzw. **Ebenen** bzw. **Hyperebenen** (durch 0).

Satz 8.8. U_1, U_2 Untervektorräume eines endlich-dimensionalen Vektorraums $V \Rightarrow$

$$\dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2) = \dim U_1 + \dim U_2.$$

Beweis. Satz 8.7: $U_1, U_2, U_1 + U_2, U_1 \cap U_2$ endlich-dimensional. Wähle Basis a_1, \dots, a_k von $U_1 \cap U_2$. Ergänze diese zu Basen $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_l$ von U_1 und $a_1, \dots, a_k, c_1, \dots, c_m$ von U_2 . Wir zeigen: $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_l, c_1, \dots, c_m$ Basis von $U_1 + U_2$.

Dazu sei $u \in U_1 + U_2$. Schreibe $u = u_1 + u_2$ mit $u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$. Schreibe

$$u_1 = q_1 a_1 + \dots + q_k a_k + s_1 b_1 + \dots + s_l b_l,$$

$$u_2 = r_1 a_1 + \dots + r_k a_k + t_1 c_1 + \dots + t_m c_m$$

mit $q_1, r_1, \dots, q_k, r_k, s_1, \dots, s_l, t_1, \dots, t_m \in K$. Dann ist

$$u = u_1 + u_2 \in \text{Span}(a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_l, c_1, \dots, c_m)$$

Dies zeigt: $U_1 + U_2 = \text{Span}(a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_l, c_1, \dots, c_m)$.

Seien jetzt $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_m \in K$ mit

$$x_1 a_1 + \dots + x_k a_k + y_1 b_1 + \dots + y_l b_l + z_1 c_1 + \dots + z_m c_m = 0.$$

Dann: $x_1 a_1 + \dots + x_k a_k + y_1 b_1 + \dots + y_l b_l = -z_1 c_1 - \dots - z_m c_m \in U_1 \cap U_2$.

Schreibe $-z_1 c_1 - \dots - z_m c_m = w_1 a_1 + \dots + w_k a_k$ mit $w_1, \dots, w_k \in K$.

Dann: $w_1 a_1 + \dots + w_k a_k + z_1 c_1 + \dots + z_m c_m = 0$. Da $a_1, \dots, a_k, c_1, \dots, c_m$ linear unabhängig sind, folgt $w_1 = \dots = w_k = z_1 = \dots = z_m = 0$. Daher:

$$x_1 a_1 + \dots + x_k a_k + y_1 b_1 + \dots + y_l b_l = 0.$$

Da $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_l$ linear unabhängig sind, folgt $x_1 = \dots = x_k = y_1 = \dots = y_l = 0$. Dies zeigt: $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_l, c_1, \dots, c_m$ Basis von $U_1 + U_2$. Folglich:

$$\dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2) = (k + l + m) + k = (k + l) + (k + m) = \dim U_1 + \dim U_2.$$

□

Satz 8.9. Zu jedem Untervektorraum U eines endlich-dimensionalen Vektorraums V existiert ein Untervektorraum U' von V mit $V = U \oplus U'$.

Beweis. Wähle eine Basis b_1, \dots, b_m von U . Ergänze diese zu einer Basis $b_1, \dots, b_m, c_1, \dots, c_n$ von V . Setze $U' = \text{Span}(c_1, \dots, c_n)$. Für $v \in V$ existieren dann $r_1, \dots, r_m, s_1, \dots, s_n \in K$ mit $v = \underbrace{r_1 b_1 + \dots + r_m b_m}_{\in U} + \underbrace{s_1 c_1 + \dots + s_n c_n}_{\in U'}$. Daher: $V = U + U'$.

Ist $u \in U \cap U'$, so existieren $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n \in K$ mit

$$u = x_1 b_1 + \dots + x_m b_m = y_1 c_1 + \dots + y_n c_n,$$

d.h. $0 = x_1 b_1 + \dots + x_m b_m - y_1 c_1 - \dots - y_n c_n$. Da $b_1, \dots, b_m, c_1, \dots, c_n$ linear unabhängig sind, folgt $x_1 = \dots = x_m = y_1 = \dots = y_n = 0$. Daher ist $u = 0$. Dies zeigt: $U \cap U' = \{0\}$, d.h. $V = U \oplus U'$. □

Definition 8.9. Man nennt U' ein **Komplement** von U in V .

Bemerkung 8.9. I. Allg. ist U' durch U *nicht* eindeutig bestimmt.

9 Der Rang von Matrizen

K Körper.

Definition 9.1. Für $A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$ nennt man

$$a_1 := (a_{11}, \dots, a_{1n}), \dots, a_m := (a_{m1}, \dots, a_{mn}) \in K^n$$

die **Zeilen**, $\text{ZR}(A) := \text{Span}(a_1, \dots, a_m) \subseteq K^n$ den **Zeilenraum** und $\text{zr}(A) := \dim \text{ZR}(A)$ den **Zeilenrang** von A .

Satz 9.1. (i) Elementare Zeilenumformungen ändern Zeilenraum und Zeilenrang einer Matrix nicht.

(ii) Hat A reduzierte Zeilenstufenform, so bilden die Zeilen von A eine Basis von $\text{ZR}(A)$; insbesondere ist dann $\text{zr}(A)$ die Anzahl der von 0 verschiedenen Zeilen von A .

Beweis. (i) Seien A und a_1, \dots, a_m wie oben, seien $i, j \in \{1, \dots, m\}$ mit $i \neq j$ und sei $r \in K$. Dann: $a_j + ra_i \in \text{Span}(a_1, \dots, a_m)$, d.h. $\text{Span}(a_1, \dots, a_{j-1}, a_j + ra_i, a_{j+1}, \dots, a_m) \subseteq \text{ZR}(A)$. Die andere Inklusion erhält man analog. Ähnlich geht man bei elementaren Zeilenumformungen vom Typ II vor.

(ii) A habe reduzierte Zeilenstufenform:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1s_1} & \dots & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \dots 0 & a_{2s_2} & \dots & & & \\ \vdots & & & & & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & \dots & a_{rs_r} & \dots & \\ 0 & \dots & & & & & & & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & & & & & & & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

($s_1 < s_2 < \dots < s_r, a_{1s_1} = \dots = a_{rs_r} = 1$). Offenbar ist $\text{ZR}(A) = \text{Span}(a_1, \dots, a_m) = \text{Span}(a_1, \dots, a_r)$. Wir zeigen, dass a_1, \dots, a_r linear unabhängig sind. Dazu seien $t_1, \dots, t_r \in K$ mit $0 = t_1 a_1 + \dots + t_r a_r$. Für $j = 1, \dots, r$ ist dann

$$0 = t_1 a_{1s_j} + \dots + t_r a_{rs_j} = t_j.$$

□

Beispiel 9.1. (a) Gegeben: $u_1 = (1, -2, 1, 2), u_2 = (2, -3, 0, -1), u_3 = (1, -3, 3, 7) \in V := \mathbb{R}^4$.
Gesucht: Basis von $U := \text{Span}(u_1, u_2, u_3)$.

Betrachte Matrix mit Zeilen u_1, u_2, u_3 . Wende Gauß-Algorithmus an:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 3 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -8 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Also: $v_1 = (1, 0, -3, -8), v_2 = (0, 1, -2, -5)$ Basis von U .

- (b) Ergänze die (linear unabhängigen) Vektoren u_1, u_2 aus (a) zu einer Basis von V ! Nach (a) ist $\text{Span}(u_1, u_2) = \text{Span}(v_1, v_2)$. Außerdem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -8 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Also: $V = \text{Span}(v_1, v_2, v_3, v_4) = \text{Span}(u_1, u_2, v_3, v_4)$ mit $v_3 = (0, 0, 1, 0), v_4 = (0, 0, 0, 1)$.
Daher: u_1, u_2, v_3, v_4 Basis von V .

- (c) Gegeben: $u_1 = (1, -2, 1, 2), u_2 = (0, 1, -2, -5), u_3 = (0, 0, 1, 1)$,
 $v_1 = (1, 2, 3, 4), v_2 = (0, 1, 2, 3), v_3 = (0, 0, 1, 2)$.

Setze $U := \text{Span}(u_1, u_2, u_3), V := \text{Span}(v_1, v_2, v_3) \subseteq \mathbb{R}^4$. Bestimme Basis von $U \cap V$!

Für $w \in U \cap V$ ist $w = x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 = y_1 v_1 + y_2 v_2 + y_3 v_3$ mit $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$, d.h.

$$\begin{aligned} 0 &= x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 - y_1 v_1 - y_2 v_2 - y_3 v_3 \\ &= (x_1 - y_1, -2x_1 + x_2 - 2y_1 - y_2, x_1 - 2x_2 + x_3 - 3y_1 - 2y_2 - y_3, \\ &\quad 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 4y_1 - 3y_2 - 2y_3). \end{aligned}$$

Erhalte: homogenes lineares Gleichungssystem mit Koeffizientenmatrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -3 & -2 & -1 \\ 2 & -5 & 1 & -4 & -3 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{12} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

Lösung: $12y_1 + 4y_2 + y_3 = 0$, d.h. $y_3 = -12y_1 - 4y_2$. Folglich:

$$\begin{aligned} w &= y_1 v_1 + y_2 v_2 + (-12y_1 - 4y_2) v_3 \\ &= y_1 (v_1 - 12v_3) + y_2 (v_2 - 4v_3) \\ &= y_1 (1, 2, -9, -20) + y_2 (0, 1, -2, -5). \end{aligned}$$

Daher $(1, 2, -9, -20), (0, 1, -2, -5)$ Basis von $U \cap V$. (Probe!)

Definition 9.2. Die Matrixeinheiten in $K^{m \times m}$ seien E_{ij} ($i, j = 1, \dots, m$). Eine Matrix der Form

$$U_{ij} := 1_m + rE_{ij} \quad (r \in K; i, j \in \{1, \dots, m\}, i \neq j)$$

heißt *elementar von Typ I*, eine der Form

$$D_i(r) := \begin{pmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & r & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad (r \in K \setminus \{0\}, i \in \{1, \dots, m\})$$

elementar vom Typ II.

Beispiel 9.2. (Elementare 2×2 -Matrizen:) $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Typ I}}, \underbrace{\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}}_{\text{Typ II}}$

Bemerkung 9.2. (i) Rechenregel:

$$E_{ij}E_{kl} = \begin{cases} E_{il} & \text{falls } j = k. \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(ii) Für $r, s \in K$ gilt:

$$\begin{aligned} U_{ij}(r)U_{ij}(s) &= (1_m + rE_{ij})(1_m + sE_{ij}) \\ &= 1_m + rE_{ij} + sE_{ij} + rs \underbrace{E_{ij}E_{ij}}_{=0} \\ &= 1_m + (r + s)E_{ij} \\ &= U_{ij}(r + s). \end{aligned}$$

Insbesondere: $U_{ij}(r)U_{ij}(-r) = U_{ij}(0) = 1_m$. Analog: $U_{ij}(-r)U_{ij}(r) = 1_m$.
Daher: $U_{ij}(r) \in \text{GL}(m, K)$ und $U_{ij}(r)^{-1} = U_{ij}(-r)$.

(iii) Für $r, s \in K \setminus \{0\}$ ist analog $D_i(r)D_i(s) = D_i(rs)$. Insbesondere ist $D_i(r)D_i(\frac{1}{r}) = D_i(1) = 1_m$ und analog $D_i(\frac{1}{r})D_i(r) = 1_m$.
Daher ist $D_i(r) \in \text{GL}(m, K)$ und $D_i(r)^{-1} = D_i(\frac{1}{r})$.

(iv) Sei $A \in K^{m \times n}$ beliebig. Dann ist $U_{ij}(r)A$ die Matrix, die aus A durch Addition des r -fachen der j -ten Zeile zur i -ten entsteht. Analog ist $D_i(r)A$ die Matrix, die aus A durch Multiplikation der i -ten Zeile mit r entsteht. Daher entspricht eine elementare Zeilenumformung von A der Multiplikation von A mit einer elementaren Matrix von links. Geht also $C \in K^{m \times n}$ aus A durch k elementare Zeilenumformungen hervor, so existieren elementare Matrizen E_1, \dots, E_k mit $C = E_1 \cdots E_k A$. Folglich ist $F := E_1 \cdots E_k \in \text{GL}(m, K)$ mit $C = FA$.

Satz 9.2. Für $A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$ sind gleichwertig:

(1) A ist linksinvertierbar.

(2) Für **jede** Wahl von $y_1, \dots, y_m \in K$ hat das lineare Gleichungs-System

$$(\star) \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = y_i \quad (i = 1, \dots, m)$$

höchstens eine Lösung.

- (3) Für **mindestens eine** Wahl von $y_1, \dots, y_m \in K$ hat (\star) genau eine Lösung.
- (4) Das homogene lineare Gleichungs-System mit Koeffizienten-Matrix A hat nur die triviale Lösung.
- (5) Der Gauß-Algorithmus macht aus A die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Beweis.

(1) \Rightarrow (2): Sei $BA = 1_n$ und $A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$. Dann gilt:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 1_n \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = BA \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Folglich ist (x_1, \dots, x_n) eindeutig bestimmt.

(2) \Rightarrow (3): Setze $y_1 := \dots := y_m := 0$.

(3) \Rightarrow (4): Bemerkung 6.9

(4) \Rightarrow (5): Wende auf A den Gauß-Algorithmus an; das Ergebnis sei C . Das C entsprechende homogene lineare Gleichungs-System hat nur die triviale Lösung. Daher gibt es keine freien Variablen. Also hat C die angegebene Form.

(5) \Rightarrow (1): Sei C die angegebene Matrix. Nach obiger Bemerkung existiert ein $F \in GL(n, K)$ mit $C = FA$. Daher ist $C^TFA = C^TC = 1_n$, d.h. A ist linksinvertierbar.

□

Bemerkung 9.3. Aus Satz 9.2 (5) folgt, dass für jede linksinvertierbare $m \times n$ -Matrix gilt $n \leq m$. Transponieren ergibt, dass für jede rechtsinvertierbare $m \times n$ -Matrix gilt: $m \leq n$. Daher ist jede invertierbare Matrix quadratisch.

Satz 9.3. Für $A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$ sind gleichwertig:

(1) A ist rechtsinvertierbar.

(2) Der Gauß-Algorithmus macht aus A eine Matrix ohne Nullzeilen.

(3) Für jede Wahl von $y_1, \dots, y_m \in K$ hat das lineare Gleichungs-System

$$(\star) \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = y_i \quad (i = 1, \dots, m)$$

mindestens eine Lösung.

Beweis.

(1) \Rightarrow (2): Sei $AB = 1_m$. Der Gauß-Algorithmus macht aus A eine Matrix C . Nach Bemerkung 9.2 (iv) existiert ein $F \in GL(m, K)$ mit $C = FA$. Folglich $CBF^{-1} = FABF^{-1} = F1_mF^{-1} = FF^{-1} = 1_m$. Daher kann C keine Nullzeilen enthalten.

(2) \Rightarrow (3): Der Gauß-Algorithmus mache aus A eine Matrix $C = (c_{ij})$ ohne Nullzeilen. Sind $y_1, \dots, y_m \in K$ beliebig, so ist (\star) äquivalent zu einem linearen Gleichungs-System

$$(\star\star) \quad \sum_{j=1}^n c_{ij}x_j = z_i \quad (i = 1, \dots, m).$$

Da C reduzierte Zeilenstufenform hat und keine Nullzeilen enthält, ist $(\star\star)$ lösbar. Daher ist auch (\star) lösbar.

(3) \Rightarrow (1): Sei (3) erfüllt. Dann sind die folgenden Matrixgleichungen lösbar:

$$A \begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} x_{12} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots$$

Daher existieren Elemente $x_{ij} \in K (i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m)$ mit

$$A \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nm} \end{pmatrix} = 1_m.$$

□

Satz 9.4. Für $A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$ sind gleichwertig:

(1) A invertierbar.

(2) A linksinvertierbar.

(3) A rechtsinvertierbar.

(4) Für jede Wahl von $y_1, \dots, y_n \in K$ hat das lineare Gleichungssystem

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = y_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

genau eine Lösung.

(5) Der Gauß-Algorithmus macht aus A die Einheitsmatrix.

(6) A lässt sich als Produkt elementarer Matrizen schreiben.

Beweis.

(1) \Leftrightarrow (4): Satz 9.2 und Satz 9.3.

(1) \Rightarrow (2): trivial

(1) \Rightarrow (3): trivial

(2) \Rightarrow (5): Sei A linksinvertierbar. Nach Satz 9.2 macht der Gauß-Algorithmus aus A eine Matrix der Form

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Da C auch quadratisch ist, folgt $C = 1_n$.

(5) \Rightarrow (6): Sei (5) erfüllt. Nach Bemerkung 9.2 (iv) existieren elementare Matrizen E_1, \dots, E_k mit $E_1 \cdots E_k A = 1_n$. Folglich ist $A = E_k^{-1} \cdots E_1^{-1}$ mit elementaren Matrizen $E_1^{-1}, \dots, E_k^{-1}$.

(6) \Rightarrow (1): Seien E_1, \dots, E_k elementare Matrizen mit $A = E_1 \cdots E_k$. Mit E_1, \dots, E_k ist dann auch A invertierbar.

(3) \Rightarrow (1): Sei A rechtsinvertierbar. Dann ist A^T linksinvertierbar, also, wie wir bereits bewiesen haben, sogar invertierbar. Folglich ist auch A invertierbar.

□

Definition 9.5. $A, B \in K^{m \times n}$ heißen **zeilenäquivalent** ($A \sim_Z B$), wenn man A durch mehrfache elementare Zeilenumformungen in B überführen kann.

Bemerkung 9.5. Nach Satz 9.4 gilt: $A \sim_Z B \Leftrightarrow \exists F \in GL(m, K) : B = FA$. Ferner ist nach dem Gauß-Algorithmus jede Matrix zu einer Matrix in reduzierter Zeilenstufenform zeilenäquivalent.

Satz 9.5. Für $A, B, C \in K^{m \times n}$ gilt:

- (i) $A \sim_Z A$. (Reflexivität)
- (ii) $A \sim_Z B \Rightarrow B \sim_Z A$. (Symmetrie)
- (iii) $A \sim_Z B \wedge B \sim_Z C \Rightarrow A \sim_Z C$. (Transitivität)

Beweis. (i) $1_m A = A$.

(ii) Sei $A \sim_Z B$. Dann existiert ein $F \in GL(m, K)$ mit $B = FA$. Daher ist $F^{-1} \in GL(m, K)$ mit $A = F^{-1}B$. Folglich: $B \sim_Z A$.

(iii) Sei $A \sim_Z B$ und $B \sim_Z C$. Dann existieren $F, G \in GL(m, K)$ mit $B = FA, C = GB$. Folglich ist $GF \in GL(m, K)$ mit $C = GFA$. Also: $A \sim_Z C$. □

Satz 9.6. Seien $Y = (y_{ij}), Z = (z_{ij}) \in K^{m \times n}$ in reduzierter Zeilenstufenform mit $Y \sim_Z Z$. Dann ist $Y = Z$.

Beweis. (Induktion nach n) Zunächst sei $n = 1$. Im Fall $Y = 0$ ist auch $Z = 0$ wegen $Y \sim_Z Z$. Analog ist $Y = 0$ im Fall $Z = 0$. Sei also $Y \neq 0 \neq Z$. Dann ist $Y = (1, 0, \dots, 0)^T = Z$, da Y, Z reduzierte Zeilenstufenform haben.

Sei jetzt $n > 1$. Wir nehmen $Y \neq Z$ an. Die Matrizen Y', Z' , die aus Y, Z durch Streichen der letzten Spalten entstehen, sind auch zeilenäquivalent und haben reduzierte Zeilenstufenform. Nach Induktion ist also $Y' = Z'$. Daher existiert ein $j \in \{1, \dots, n\}$ mit $y_{jn} \neq z_{jn}$. Für jedes $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in K^{n \times 1}$ mit $Yx = 0$ ist auch $Zx = 0$, da sich bei elementaren Zeilenumformungen eines linearen Gleichungs-Systems die Lösungsmenge nicht ändert. Folglich ist $(Y - Z)x = 0$; insbesondere ist $(y_{jn} - z_{jn})x_n = 0$, wegen $Y' = Z'$. Also ist $x_n = 0$. Analog gilt für jedes $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in K^{n \times 1}$ mit $Zx = 0$ auch $x_n = 0$. Daher enthalten die n -ten Spalten von Y und Z eine führende Eins; denn sonst könnte man x_n beliebig wählen. Die relevante führende Eins steht in Y und Z in der k -ten Zeile, wobei die k -te Zeile von $Y' = Z'$ die erste Nullzeile ist. Alle übrigen Koeffizienten in der letzten Spalte von Y und Z sind gleich Null. Daher ist $Y = Z$. □

Bemerkung 9.6. (i) Anna und Bob wenden auf die Matrix X den Gauß-Algorithmus an und erhalten am Ende, ohne sich zu verrechnen, die Matrizen Y bzw. Z in reduzierter Zeilenstufenform. Dann ist $X \sim_Z Y$ (also auch $Y \sim_Z X$) und $X \sim_Z Z$, also auch $Y \sim_Z Z$ und damit $Y = Z$. Die Matrix am Ende des Gauß-Algorithmus ist daher eindeutig bestimmt.

- (ii) Wie entscheidet man, ob vorgegebene $A, B \in K^{m \times n}$ zeilenäquivalent sind? Wende auf A und B den Gauß-Algorithmus an und erhalte am Ende Matrizen Y bzw. Z . (Also $A \sim_Z Y, B \sim_Z Z$). Im Fall $Y = Z$ ist $A \sim_Z Y = Z \sim_Z B$, d.h. $A \sim_Z B$. Im Fall $Y \neq Z$ ist $A \not\sim_Z B$. (Sonst wäre $Y \sim_Z A \sim_Z B \sim_Z Z$ im Widerspruch zu obigem Satz.)

Beispiel 9.6. Sind $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ zeilenäquivalent? Konstruiere ggf. ein $F \in GL(2, \mathbb{R})$ mit $B = FA$!

Wende auf A den Gauß-Algorithmus an und nehme die gleichen elementaren Zeilenumformungen an der Einheitsmatrix vor:

$$\begin{array}{ll} 1_2 = M_1 & = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & A = A_1 & = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ M_2 & = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & A_2 & = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ M_3 & = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & A_3 & = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Für $i = 1, 2, 3$ gilt: $M_i A = A_i$ (Warum?)

Analog behandelt man B :

$$\begin{array}{ll} 1_2 = N_1 & = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & B = B_1 & = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \\ N_2 & = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} & B_2 & = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \\ N_3 & = \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} & B_3 & = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \\ N_4 & = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} & B_4 & = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Für $i = 1, 2, 3, 4$ ist wieder $N_i B = B_i$.

Insgesamt ist $A \sim_Z A_3 = B_4 \sim_Z B$ und $N_4 B = B_4 = A_3 = M_3 A$, d.h. $B = N_4^{-1} M_3 A$. Berechne also N_4^{-1} :

$$\begin{array}{ll} N_4 = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} & 1_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{5} & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 10 & 15 \\ \frac{3}{5} & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \end{array}$$

Fazit: $N_4^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{=:F} A$. (Probe!)

Bemerkung 9.7. (i) Es ist klar, wie man definiert:

- *elementare Spaltenumformungen* einer Matrix
- *reduzierte Spaltenstufenform*
- *Spaltenäquivalenz* $A \sim_S B$
- *Spaltenraum* $\text{SR}(A)$
- *Spaltenrang* $\text{sr}(A)$

(ii) Elementare Spaltenumformungen einer Matrix entsprechen der Multiplikation mit elementaren Matrizen von rechts.

(iii) $A, B \in K^{m \times n}$ heißen *äquivalent* ($A \sim B$), falls man A durch mehrfache elementare Zeilen- und Spaltenumformungen in B überführen kann. Daher gilt:

$A \sim B \Leftrightarrow \exists U \in \text{GL}(m, K) \exists V \in \text{GL}(n, K) : B = UAV$. Für \sim gilt ein zu Satz 9.5 analoges Resultat.

Satz 9.7. Für $r \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{m \times n}$ sind gleichwertig:

(1) $r = \text{zr}(A)$.

(2) $A \sim \begin{pmatrix} 1_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(3) $r = \text{sr}(A)$.

Beweis.

(1) \Rightarrow (2): Sei $r = \text{zr}(A)$. Der Gauß-Algorithmus liefert eine zu A zeilenäquivalente Matrix Z in reduzierter Zeilenstufenform mit genau r von 0 verschiedenen Zeilen. Durch mehrfache elementare Spaltenumformungen (genauer: Spaltenvertauschungen) wird aus Z eine Matrix der Form

$$T = \begin{pmatrix} 1_r & \star \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Durch weitere elementare Spaltenumformungen kann man T in die gewünschte Matrix verwandeln.

(2) \Rightarrow (1): Sei (2) erfüllt. dann existieren invertierbare U, V mit

$$UAV = \begin{pmatrix} 1_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =: N.$$

In N und $NV^{-1} = UA$ verschwinden die letzten $m-r$ Zeilen. Der Gauß-Algorithmus macht also aus UA eine Matrix Z in reduzierter Zeilenstufenform mit mindestens $m-r$ Nullzeilen. Wegen $Z \sim_Z A$ folgt $\text{zr}(A) \leq r$.

Sei $R \in \text{GL}(m, K)$ mit $Z = RUA = RNV^{-1}$. Daher haben Z und $ZV = RN$ mindestens $m - \text{zr}(A)$ Nullzeilen. Der Gauß-Algorithmus macht aus RN eine Matrix Y in reduzierter Zeilenstufenform mit mindestens $m - \text{zr}(A)$ Nullzeilen. Da N selbst reduzierte Zeilenstufenform hat und $N \sim_Z RN$ gilt, folgt $N = Y$. Insbesondere ist $m - r \geq m - \text{zr}(A)$, d.h. $r \leq \text{zr}(A)$.

(2) \Leftrightarrow (3): analog.

□

Bemerkung 9.8. Nach Satz 9.7 ist $\text{zr}(A) = \text{sr}(A) =: \text{rg}(A)$ für jede Matrix A . Man spricht daher auch kurz von dem **Rang** von A .

Satz 9.8. Für $A, B \in K^{m \times n}$ gilt: $A \sim B \Leftrightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(B)$.

Beweis. " \Rightarrow ": Sei $A \sim B$ und $r := \text{rg}(A)$. Nach Satz 9.7 ist $B \sim A \sim \begin{pmatrix} 1_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Aus Satz 9.7 folgt also: $\text{rg}(B) = r$.

" \Leftarrow ": Sei $\text{rg}(A) = \text{rg}(B) =: r$. Nach Satz 9.7 gilt dann:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim B, \text{ d.h. } A \sim B.$$

□

Beispiel 9.8. Gegeben $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$.

Finde $U, V \in \text{GL}(3, \mathbb{R})$ mit $UAV = \begin{pmatrix} 1_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $r = \text{rg}(A)$!

Ist $A \in K^{m \times n}$ gegeben so schreibt man $1_m, A, 1_n$ nebeneinander. Auf A wendet man elementare Zeilen- und Spaltenumformungen an, bis man die gewünschte Form

$$\begin{pmatrix} 1_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

erreicht hat. Dabei wendet man jede elementare Zeilenumformung (bzw. Spaltenumformung) auch auf 1_m (bzw. 1_n) an, z.B.

$$\begin{array}{l}
 1_3 = U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A = \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad 1_3 = V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \\
 U_3 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 U_4 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 \quad \quad \quad A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad V_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Jeweils gilt: $U_i A V_i = A_i$ (Warum?) Insbesondere: $U_5 A V_5 = A_5$. (Probe!)

Satz 9.9. (Rangkriterium für lineare Gleichungs-Systeme)

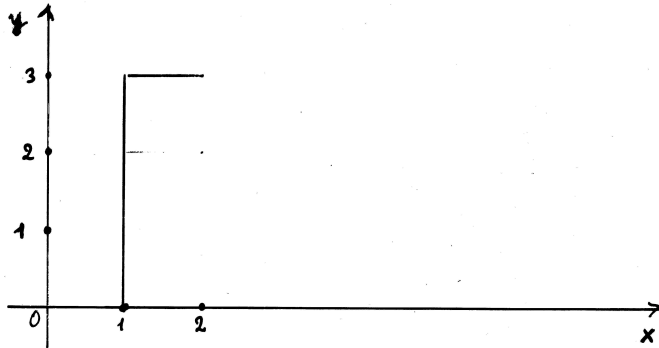
Ein lineares Gleichungs-System (\star) ist genau dann lösbar, wenn der Rang der Koeffizienten-Matrix von (\star) mit dem Rang der erweiterten Matrix von (\star) übereinstimmt.

Beweis. Bei elementaren Zeilenumformungen ändert sich weder an der Lösbarkeit von (\star) noch an den Rängen der beteiligten Matrizen etwas. Daher kann man annehmen, dass die erweiterte Matrix (und damit auch die Koeffizienten-Matrix) reduzierte Zeilenstufenform hat:

$$\begin{array}{rcl}
 a_{1s_1}x_{s_1} + \dots & + & a_{1n}x_n = b_1 \\
 & & a_{2n}x_n = b_2 \\
 & & \vdots \\
 a_{rs_r}x_{s_r} + \dots & + & a_{rn}x_n = b_r \\
 & & 0 = b_{r+1} \\
 & & \vdots \\
 & & 0 = b_m
 \end{array}$$

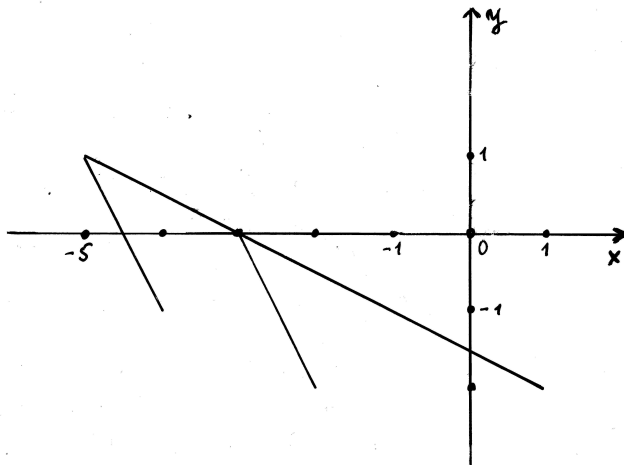
Dieses lineare Gleichungs-System ist genau dann lösbar, wenn $b_{r+1} = \dots = b_m = 0$ ist. Dies bedeutet aber gerade, dass Koeffizienten-Matrix und erweiterte Matrix den gleichen Rang haben. □

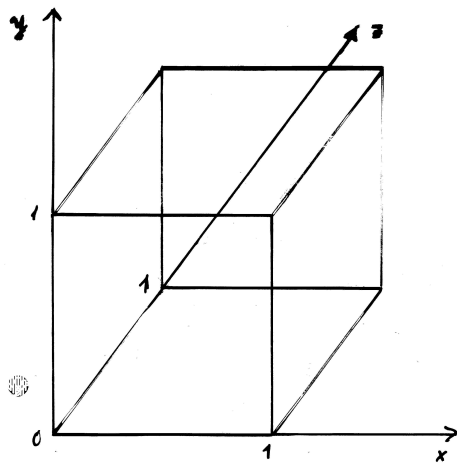
10 Lineare Abbildungen



$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \longmapsto (x - 2y, -2x + y)$$

Lineare
Abbildung

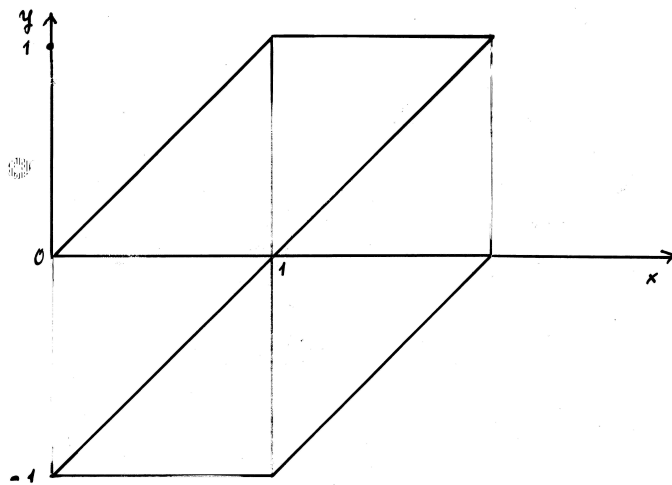




$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \longmapsto (x+z, x-y)$$

Lineare
Abbildung



K Körper.

Definition 10.1. Eine Abbildung $f: V \rightarrow W$ zwischen K -Vektorräumen V, W mit

$$(\star) \quad f(ax + by) = af(x) + bf(y) \text{ für } a, b \in K, x, y \in V$$

heißt *linear* oder (**Vektorraum-**) **Homomorphismus**. Man setzt

$$\text{Hom}(V, W) := \text{Hom}_K(V, W) := \{f: V \rightarrow W \mid f \text{ linear}\}.$$

Bemerkung 10.1. (i) Die Bedingung (\star) lässt sich folgendermaßen aufspalten:

- $f(x + y) = f(x) + f(y)$ für $x, y \in V$.
- $f(ax) = af(x)$ für $a \in K, x \in V$.

- (ii) Ggf. ist $f(0) = f(0 \cdot 0) = 0f(0) = 0$; eine lineare Abbildung bildet also den Nullvektor stets auf den Nullvektor ab.

Beispiel 10.1. Für $A \in K^{m \times n}$ ist die Abbildung $f : K^{n \times 1} \rightarrow K^{m \times 1}, x \mapsto Ax$ linear; vgl. Rechenregeln für Matrizen. Wir werden später sehen, dass jede lineare Abbildung $K^{n \times 1} \rightarrow K^{m \times 1}$ so gegeben wird.

Satz 10.1. Für K -Vektorräume V, W und $f \in \text{Hom}(V, W)$ gilt stets:

- (i) Für jeden Untervektorraum V' von V ist $f(V') = \{f(v') : v' \in V'\}$ ein Untervektorraum von W ; insbesondere ist $\text{Bld}(f) = f(V)$ ein Untervektorraum von W .
- (ii) Für jeden Untervektorraum W' von W ist $f^{-1}(W') = \{v \in V : f(v) \in W'\}$ ein Untervektorraum von V ; insbesondere ist $\text{Ker}(f) := f^{-1}(\{0\}) = \{v \in V : f(v) = 0\}$ ein Untervektorraum von V .
- (iii) Jeweils ist $f^{-1}(f(V')) = V' + \text{Ker}(f)$ und $f(f^{-1}(W')) = W' \cap \text{Bld}(f)$.
- (iv) Aus $\dim V < \infty$ folgt $\dim \text{Bld } f < \infty, \dim \text{Ker } f < \infty$ und

$$\boxed{\dim V = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Bld } f.}$$

Beweis. (i) Wegen $V' \neq \emptyset$ ist auch $f(V') \neq \emptyset$. Seien $a, a' \in K, w, w' \in f(V')$. Dann existieren $v, v' \in V'$ mit $w = f(v), w' = f(v')$. Folglich:

$$aw + a'w' = af(v) + a'f(v') = f(\underbrace{av + a'v'}_{\in V'}) \in f(V').$$

- (ii) Wegen $f(0) = 0 \in W'$ ist $0 \in f^{-1}(W')$, d.h. $f^{-1}(W') \neq \emptyset$. Seien $a, a' \in K, v, v' \in f^{-1}(W')$, d.h. $f(v), f(v') \in W'$. Dann:

$$f(av + a'v') = af(v) + a'f(v') \in W',$$

d.h. $av + a'v' \in f^{-1}(W')$.

- (iii) Sei $v \in f^{-1}(f(V'))$, d.h. $f(v) \in f(V')$. Dann existiert $v' \in V'$ mit $f(v) = f(v')$. Also $f(v - v') = f(v) - f(v') = 0$, d.h. $v - v' \in \text{Ker } f$ und $v = v' + (v - v') \in V' + \text{Ker } f$. Dies zeigt: $f^{-1}(f(V')) \subseteq V' + \text{Ker } f$.

Für $v' \in V', x \in \text{Ker } f$ ist umgekehrt $f(v' + x) = f(v') + \underbrace{f(x)}_{=0} = f(v') \in f(V')$, d.h.

$v' + x \in f^{-1}(f(V'))$. Dies zeigt: $f^{-1}(f(V')) = V' + \text{Ker } f$.

Sei $w \in f(f^{-1}(W'))$. Dann existiert $v \in f^{-1}(W')$ mit $w = f(v)$. Also: $w \in W' \cap \text{Bld } f$. Dies zeigt: $f(f^{-1}(W')) \subseteq W' \cap \text{Bld } f$.

Sei umgekehrt $w' \in W' \cap \text{Bld } f$. Dann existiert $v \in V$ mit $f(v) = w' \in W'$. Folglich $v \in f^{-1}(W')$ und $w' = f(v) \in f(f^{-1}(W'))$. Dies zeigt: $f(f^{-1}(W')) = W' \cap \text{Bld } f$.

(iv) Sei $\dim V < \infty$. Da $\text{Ker } f$ Untervektorraum von V ist, folgt $\dim \text{Ker } f < \infty$. Wähle eine Basis b_1, \dots, b_m von $\text{Ker } f$ und ergänze diese zu einer Basis b_1, \dots, b_n von V . Es genügt zu zeigen, dass $f(b_{m+1}), \dots, f(b_n)$ eine Basis von $\text{Bld } f$ bilden; denn dann ist $\dim \text{Bld } f < \infty$ und

$$\dim \text{Ker } f + \dim \text{Bld } f = m + (n - m) = n = \dim V.$$

Sei also $w \in \text{Bld } f$. Dann existiert $v \in V$ mit $w = f(v)$. Schreibe $v = r_1 b_1 + \dots + r_n b_n$ mit $r_1, \dots, r_n \in K$. Dann:

$$w = f(v) = r_1 \underbrace{f(b_1)}_{=0} + \dots + r_m \underbrace{f(b_m)}_{=0} + r_{m+1} f(b_{m+1}) + \dots + r_n f(b_n) \in \text{Span}(f(b_{m+1}), \dots, f(b_n)).$$

Dies zeigt: $\text{Bld } f \subseteq \text{Span}(f(b_{m+1}), \dots, f(b_n))$. Die andere Inklusion ist klar. Also $\text{Bld } f = \text{Span}(f(b_{m+1}), \dots, f(b_n))$.

Seien jetzt $r_{m+1}, \dots, r_n \in K$ mit

$$0 = r_{m+1} f(b_{m+1}) + \dots + r_n f(b_n) = f(\underbrace{r_{m+1} b_{m+1} + \dots + r_n b_n}_{=:x}).$$

Dann: $x \in \text{Ker } f$. Also existieren $r_1, \dots, r_m \in K$ mit $x = r_1 b_1 + \dots + r_m b_m$. Folglich:

$$0 = x - x = r_1 b_1 + \dots + r_m b_m - r_{m+1} b_{m+1} - \dots - r_n b_n.$$

Da b_1, \dots, b_n linear unabhängig sind, folgt $r_1 = \dots = r_n = 0$. Also sind $f(b_{m+1}), \dots, f(b_n)$ linear unabhängig, d.h. sie bilden eine Basis von $\text{Bld } f$. □

Definition 10.2. Für K -Vektorräume V, W und $f \in \text{Hom}(V, W)$ heißt $\text{Ker } f := \{v \in V : f(v) = 0\}$ der *Kern* von f . Ferner nennt man $\text{def}(f) := \dim \text{Ker } f$ den *Defekt* und $\text{rg}(f) := \dim \text{Bld } f$ den *Rang* von f .

Beispiel 10.2. Die Abbildung $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (x + z, x - y)$ ist linear; denn für $r, r', x, x', y, y', z, z' \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} f(r(x, y, z) + r'(x', y', z')) &= f(rx + r'x', ry + r'y', rz + r'z') \\ &= (rx + r'x' + rz + r'z', rx + r'x' - ry - r'y') \\ &= r(x + z, x - y) + r'(x' + z', x' - y') \\ &= rf(x, y, z) + r'f(x', y', z'). \end{aligned}$$

Ferner gilt: $(x, y, z) \in \text{Ker } f \Leftrightarrow (x + z, x - y) = 0 \Leftrightarrow x + z = 0 \wedge x - y = 0 \Leftrightarrow x = y = -z$. Daher ist $\text{Ker } f = \mathbb{R}(1, 1, -1)$ und $\text{def}(f) = 1$. Aus Satz 10.1 (iv) folgt $\text{rg}(f) = 3 - \text{def}(f) = 2$. Also ist $\text{Bld } f$ ein 2-dimensionaler Untervektorraum von \mathbb{R}^2 . Aus Satz 8.7 folgt $\text{Bld } f = \mathbb{R}^2$, d.h. f ist surjektiv.

Satz 10.2. Für K -Vektorräume V, W und $f \in \text{Hom}(V, W)$ gilt:

$$f \text{ injektiv} \Leftrightarrow \text{Ker } f = \{0\}.$$

Beweis. (Erinnerung: f injektiv \Leftrightarrow aus $f(x) = f(y)$ folgt stets $x = y$.)

Sei zunächst f injektiv. Für $v \in \text{Ker } f$ ist dann $f(v) = 0 = f(0)$, d.h. $v = 0$. Daher $\text{Ker } f = \{0\}$.

Sei umgekehrt $\text{Ker } f = \{0\}$. Sind $x, y \in V$ mit $f(x) = f(y)$, so ist $f(x - y) = f(x) - f(y) = 0$, d.h. $x - y \in \text{Ker } f = \{0\}$, also $x = y$. Folglich ist f injektiv. \square

Bemerkung 10.2. Injektive (bzw. surjektive) lineare Abbildungen nennt man *Monomorphismen* (bzw. *Epimorphismen*).

Satz 10.3. Für K -Vektorräume V, W mit $\dim V = \dim W < \infty$ und $f \in \text{Hom}(V, W)$ gilt:

$$f \text{ injektiv} \Leftrightarrow f \text{ surjektiv}$$

Beweis. Wegen $\dim \text{Ker } f + \dim \text{Bld } f = \dim V = \dim W < \infty$ gilt:

$$f \text{ injektiv} \stackrel{10.2}{\Leftrightarrow} \text{Ker } f = \{0\} \Leftrightarrow \dim \text{Ker } f = 0 \Leftrightarrow \dim \text{Bld } f = \dim W \stackrel{8.7}{\Leftrightarrow} \text{Bld } f = W \Leftrightarrow f \text{ surjektiv.} \quad \square$$

Bemerkung 10.3. Ggf. ist also f bijektiv, und man nennt f einen *Isomorphismus*.

Satz 10.4. Für K -Vektorräume U, V, W und $f \in \text{Hom}(U, V), g \in \text{Hom}(V, W)$ gilt:

(i) $g \circ f \in \text{Hom}(U, W)$.

(ii) g bijektiv $\Rightarrow g^{-1} \in \text{Hom}(W, V)$.

(iii) Die Identitätsabbildung $\text{id}_V : V \rightarrow V, v \mapsto v$
und die Nullabbildung $0 = 0_{V,W} : V \rightarrow W, v \mapsto 0$ sind linear.

Beweis. (i) Für $a, b \in K, x, y \in U$ gilt:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(ax + by) &= g(f(ax + by)) = g(af(x) + bf(y)) \\ &= ag(f(x)) + bg(f(y)) = a(g \circ f)(x) + b(g \circ f)(y). \end{aligned}$$

(ii) Für $a, b \in K, x, y \in W$ gilt:

$$\begin{aligned} g^{-1}(ax + by) &= g^{-1}(ag(g^{-1}(x)) + bg(g^{-1}(y))) = g^{-1}(g(ag^{-1}(x) + bg^{-1}(y))) \\ &= ag^{-1}(x) + bg^{-1}(y). \end{aligned}$$

(iii) klar. \square

Definition 10.4. Existiert ein Isomorphismus $f : V \rightarrow W$, so nennt man V, W *isomorph* ($V \cong W$).

Satz 10.5. Für K -Vektorräume U, V, W gilt stets:

- (i) $V \cong V$ (Reflexivität)
- (ii) $V \cong W \Rightarrow W \cong V$ (Symmetrie)
- (iii) $U \cong V \wedge V \cong W \Rightarrow U \cong W$ (Transitivität)

Beweis. (i) $\text{id}_V : V \rightarrow V$ ist nach Satz 10.4 ein Isomorphismus.

(ii) Sei $V \cong W$. Dann existiert ein Isomorphismus $f : V \rightarrow W$. Nach Satz 10.4 ist auch $f^{-1} : W \rightarrow V$ ein Isomorphismus. Daher ist $W \cong V$.

(iii) Sei $U \cong V$ und $V \cong W$. Dann existieren Isomorphismen $f : U \rightarrow V, g : V \rightarrow W$. Nach Satz 10.4 ist auch $g \circ f : U \rightarrow W$ ein Isomorphismus. Daher ist $U \cong W$. □

Satz 10.6. Gegeben seien K -Vektorräume V, W , eine Basis b_1, \dots, b_n von V und beliebige Elemente $c_1, \dots, c_n \in W$. Dann existiert genau ein $f \in \text{Hom}(V, W)$ mit $f(b_i) = c_i$ für $i = 1, \dots, n$. Dabei gilt:

- (i) $\text{Bld } f = \text{Span}(c_1, \dots, c_n)$.
- (ii) $\text{Ker } f = \{a_1 b_1 + \dots + a_n b_n : a_1, \dots, a_n \in K, a_1 c_1 + \dots + a_n c_n = 0\}$.
- (iii) f surjektiv $\Leftrightarrow \text{Span}(c_1, \dots, c_n) = W$.
- (iv) f injektiv $\Leftrightarrow c_1, \dots, c_n$ linear unabhängig.
- (v) f bijektiv $\Leftrightarrow c_1, \dots, c_n$ Basis von W .

Beweis. Existenz: Da b_1, \dots, b_n eine Basis von V bilden, lässt sich jedes Element in V in der Form $a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$ mit eindeutig bestimmten $a_1, \dots, a_n \in K$ schreiben. Wir setzen

$$f(a_1 b_1 + \dots + a_n b_n) := a_1 c_1 + \dots + a_n c_n$$

und erhalten so eine Abbildung $f : V \rightarrow W$ mit $f(b_i) = c_i$ für $i = 1, \dots, n$. Diese ist linear; denn für $r, r', a_1, a'_1, \dots, a_n, a'_n \in K$ gilt:

$$\begin{aligned} & f(r(a_1 b_1 + \dots + a_n b_n) + r'(a'_1 b_1 + \dots + a'_n b_n)) \\ &= f(ra_1 b_1 + \dots + ra_n b_n + r'a'_1 b_1 + \dots + r'a'_n b_n) \\ &= f((ra_1 + r'a'_1)b_1 + \dots + (ra_n + r'a'_n)b_n) \\ &= (ra_1 + r'a'_1)c_1 + \dots + (ra_n + r'a'_n)c_n \\ &= ra_1 c_1 + r'a'_1 c_1 + \dots + ra_n c_n + r'a'_n c_n \\ &= r(a_1 c_1 + \dots + a_n c_n) + r'(a'_1 c_1 + \dots + a'_n c_n) \\ &= rf(a_1 b_1 + \dots + a_n b_n) + r'f(a'_1 b_1 + \dots + a'_n b_n) \end{aligned}$$

Eindeutigkeit: Seien $f, g \in \text{Hom}(V, W)$ mit $f(b_i) = c_i = g(b_i)$ für $1, \dots, n$, und sei $v \in V$ beliebig. Schreibe $v = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$ mit $a_1, \dots, a_n \in K$. Dann:

$$f(v) = a_1 f(b_1) + \dots + a_n f(b_n) = a_1 g(b_1) + \dots + a_n g(b_n) = g(v)$$

Dies zeigt: $f = g$.

(i) $\text{Bld } f = \{a_1 c_1 + \dots + a_n c_n : a_1, \dots, a_n \in K\} = \text{Span}(c_1, \dots, c_n)$

(ii) Klar.

(iii) folgt aus (i).

(iv) " \Rightarrow ": Sei f injektiv, und seien $a_1, \dots, a_n \in K$ mit $a_1 c_1 + \dots + a_n c_n = 0$. Nach (ii) ist dann $a_1 b_1 + \dots + a_n b_n \in \text{Ker } f = \{0\}$. Da b_1, \dots, b_n linear unabhängig sind, folgt $a_1 = \dots = a_n = 0$. Daher sind c_1, \dots, c_n linear unabhängig.

" \Leftarrow ": Seien c_1, \dots, c_n linear unabhängig, und sei $v \in \text{Ker } f$. Schreibe $v = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$ mit $a_1, \dots, a_n \in K$. Nach (ii) ist $a_1 c_1 + \dots + a_n c_n = 0$. Folglich ist $a_1 = \dots = a_n = 0$ und damit $v = 0$. Dies zeigt: $\text{Ker } f = \{0\}$. Daher ist f injektiv.

(v) folgt aus (iii) und (iv).

□

Satz 10.7. Für endlich-dimensionale K -Vektorräume V, W gilt stets:

$$\boxed{V \cong W \Leftrightarrow \dim V = \dim W.}$$

Bemerkung 10.7. Ein K -Vektorraum der Dimension $n < \infty$ ist also stets zu K^n isomorph.

Beweis. " \Rightarrow ": Sei $V \cong W$. Dann existiert ein Isomorphismus $f : V \rightarrow W$. Aus Satz 10.1 folgt also $\dim V = \underbrace{\dim \text{Ker } f}_{=\{0\}} + \underbrace{\dim \text{Bld } f}_{=W} = \dim W$.

" \Leftarrow ": Sei $\dim V = \dim W$. Wähle Basen b_1, \dots, b_n von V und c_1, \dots, c_n von W . Nach Satz 10.6 existiert genau ein $f \in \text{Hom}(V, W)$ mit $f(b_i) = c_i$ für $i = 1, \dots, n$, und f ist ein Isomorphismus. Also ist $V \cong W$.

□

Bemerkung 10.8. Für K -Vektorräume V, W und $f, g \in \text{Hom}(V, W), a \in K$ definiere man Abbildungen

$$f + g : V \rightarrow W, v \mapsto f(v) + g(v) \text{ und } af : V \rightarrow W, v \mapsto af(v).$$

Dann gilt: $f + g, af \in \text{Hom}(V, W)$; denn für $r, s \in K, x, y \in V$ ist

$$\begin{aligned} (f + g)(rx + sy) &= f(rx + sy) + g(rx + sy) = rf(x) + sf(y) + rg(x) + sg(y) \\ &= r(f(x) + g(x)) + s(f(y) + g(y)) = r(f + g)(x) + s(f + g)(y), \\ (af)(rx + sy) &= af(rx + sy) = a(rf(x) + sf(y)) = arf(x) + asf(y) \\ &= raf(x) + saf(y) = r(af)(x) + s(af)(y). \end{aligned}$$

Satz 10.8. Auf diese Weise wird $\text{Hom}(V, W)$ zu einem K -Vektorraum.

Beweis. Offensichtlich ist die Addition in $\text{Hom}(V, W)$ assoziativ und kommutativ. Nullvektor in $\text{Hom}(V, W)$ ist die Nullabbildung. Negativ zu $f \in \text{Hom}(V, W)$ ist die Abbildung $-f = (-1)f \in \text{Hom}(V, W)$. Außerdem ist die Multiplikation mit Skalaren assoziativ. Ferner gilt für $v \in V$:

$$\begin{aligned}(a(f + g))(v) &= a(f + g)(v) = a(f(v) + g(v)) = af(v) + ag(v) \\ &= (af)(v) + (ag)(v) = (af + ag)(v), \\ ((a + b)f)(v) &= (a + b)f(v) = af(v) + bf(v) \\ &= (af)(v) + (bf)(v) = (af + bf)(v),\end{aligned}$$

d.h. es gelten die Distributivgesetze $a(f + g) = af + ag$ und $(a + b)f = af + bf$ für $a, b \in K, f, g \in \text{Hom}(V, W)$. Schließlich ist $1 \cdot f = f$ für $f \in \text{Hom}(V, W)$. \square

Satz 10.9. Für K -Vektorräume U, V, W und $a \in K, f, f' \in \text{Hom}(U, V), g, g' \in \text{Hom}(V, W)$ gilt:

- (i) $a(g \circ f) = (ag) \circ f = g \circ (af),$
- (ii) $(g + g') \circ f = g \circ f + g' \circ f,$
- (iii) $g \circ (f + f') = g \circ f + g \circ f'.$

Beweis. Für $u \in U$ gilt:

- (i) $(a(g \circ f))(u) = a(g \circ f)(u) = ag(f(u)) = (ag)(f(u)) = ((ag) \circ f)(u),$
 $(a(g \circ f))(u) = \dots = ag(f(u)) = g(af(u)) = g((af)(u)) = (g \circ (af))(u),$
- (ii) $((g + g') \circ f)(u) = (g + g')(f(u)) = g(f(u)) + g'(f(u)) = (g \circ f)(u) + (g' \circ f)(u) =$
 $(g \circ f + g' \circ f)(u),$
- (iii) analog.

\square

Bemerkung 10.10. Für einen K -Vektorraum V setzt man

$$\begin{aligned}\text{End}(V) &:= \text{Hom}(V, V) = \{f : V \rightarrow V : f \text{ linear}\}, \\ \text{GL}(V) &:= \text{Aut}(V) := \{f \in \text{End}(V) : f \text{ bijektiv}\}.\end{aligned}$$

Die Elemente in $\text{End}(V)$ (bzw. $\text{Aut}(V)$) nennt man **Endomorphismen** (bzw. **Automorphismen**) von V .

Satz 10.10. $\text{GL}(V)$ ist eine Gruppe bzgl. der Komposition von Abbildungen.

Beweis. Für $f, g \in \text{GL}(V)$ ist auch $g \circ f \in \text{GL}(V)$ nach Satz 10.4. Die Komposition von Abbildungen ist nach Satz 3.5 assoziativ. Neutrales Element in $\text{GL}(V)$ ist id_V ; invers zu $f \in \text{GL}(V)$ ist die Umkehrabbildung $f^{-1} \in \text{GL}(V)$ (vgl. Satz 10.4). \square

Definition 10.10. Man nennt $\text{GL}(V)$ die **allgemeine lineare Gruppe** von V (general linear group).

11 Lineare Abbildungen und Matrizen

K Körper.

Definition 11.1. Seien V, W K -Vektorräume mit Basen b_1, \dots, b_m bzw. c_1, \dots, c_n , und sei $f \in \text{Hom}(V, W)$. Schreibe

$$f(b_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} c_i \quad (j = 1, \dots, m)$$

mit $a_{ij} \in K$ für alle i, j . Dann heißt $A := (a_{ij}) \in K^{n \times m}$ die **Matrix** von f bzgl. b_1, \dots, b_m und c_1, \dots, c_n .

Bemerkung 11.1. (i) Die Elemente $a_{ij} \in K$ sind durch $f, b_1, \dots, b_m, c_1, \dots, c_n$ eindeutig bestimmt.

(ii) Merkregel: Die Matrix von f enthält in der j -ten Spalte die "Koeffizienten" ("Koordinaten") von $f(b_j)$ bzgl. c_1, \dots, c_n .

(iii) Nach Satz 10.6 existiert umgekehrt zu jeder Matrix $A = (a_{ij}) \in K^{n \times m}$ genau ein $f \in \text{Hom}(V, W)$ mit $f(b_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} c_i$ für $j = 1, \dots, m$.

Beispiel 11.1. (a) Nach Beispiel 10.1 ist für $A = (a_{ij}) \in K^{n \times m}$ die Abbildung

$$f : K^{m \times 1} \longrightarrow K^{n \times 1}, x \longmapsto Ax$$

linear. Seien b_1, \dots, b_m bzw. c_1, \dots, c_n die Standardbasen von $K^{m \times 1}$ bzw. $K^{n \times 1}$. Für $j = 1, \dots, m$ ist dann

$$f(b_j) = Ab_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = a_{1j}c_1 + \dots + a_{nj}c_n.$$

Daher ist A selbst die Matrix von f bzgl. b_1, \dots, b_m und c_1, \dots, c_n .

(b) Man rechnet leicht nach, dass

$$V := \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a + b + c = 0\},$$

$$W := \{(r, s, t, u) \in \mathbb{R}^4 : r + s + t + u = 0\}$$

Untervektorräume von \mathbb{R}^3 bzw. \mathbb{R}^4 mit Basen

$$v_1 := (1, -1, 0), v_2 := (0, 1, -1) \quad \text{bzw.}$$

$$w_1 := (1, -1, 0, 0), w_2 := (0, 1, -1, 0), w_3 := (0, 0, 1, -1)$$

sind. Man sieht leicht, dass durch

$$f(a, b, c) := (a - 2b - c, 2a - b - c, -a - b, -6a - 2c)$$

eine lineare Abbildung $f : V \rightarrow W$ definiert wird; denn aus $a + b + c = 0$ folgt

$$(a - 2b - c) + (2a - b - c) + (-a - b) + (-6a - 2c) = -4(a + b + c) = 0.$$

Wir setzen an:

$$f(v_1) = (3, 3, 0, -6) = xw_1 + yw_2 + zw_3 = (x, -x + y, -y + z, -z)$$

und erhalten $x = 3, y = 6, z = 6$, d.h. $f(v_1) = 3w_1 + 6w_2 + 6w_3$.

Analog berechnet man: $f(v_2) = (-1, 0, -1, 2) = -1w_1 - 1w_2 - 2w_3$.

Die Matrix von f bzgl. v_1, v_2 und w_1, w_2, w_3 ist also

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

Satz 11.1. Für K -Vektorräume U, V, W mit Basen a_1, \dots, a_l bzw. b_1, \dots, b_m bzw. c_1, \dots, c_n gilt:

- (i) Sind $s, s' \in K$ und $f, f' \in \text{Hom}(V, W)$ mit Matrizen $R, R' \in K^{n \times m}$ bzgl. b_1, \dots, b_m und c_1, \dots, c_n , so ist $sR + s'R'$ die Matrix von $sf + s'f'$ bzgl. b_1, \dots, b_m und c_1, \dots, c_n .
- (ii) Sind $f \in \text{Hom}(U, V)$ und $g \in \text{Hom}(V, W)$ mit Matrizen $R \in K^{m \times l}$ bzgl. a_1, \dots, a_l und b_1, \dots, b_m bzw. $S \in K^{n \times m}$ bzgl. b_1, \dots, b_m und c_1, \dots, c_n , so ist $SR \in K^{n \times l}$ die Matrix von $g \circ f$ bzgl. a_1, \dots, a_l und c_1, \dots, c_n .

Beweis. (i) Aus $f(b_j) = \sum_{i=1}^n r_{ij}c_i$ und $f'(b_j) = \sum_{i=1}^n r'_{ij}c_i$ folgt

$$(sf + s'f')(b_j) = sf(b_j) + s'f'(b_j) = s \sum_{i=1}^n r_{ij}c_i + s' \sum_{i=1}^n r'_{ij}c_i = \sum_{i=1}^n (sr_{ij} + s'r'_{ij})c_i.$$

(ii) Aus $f(a_j) = \sum_{i=1}^m r_{ij}b_i$ und $g(b_i) = \sum_{k=1}^n s_{ki}c_k$ folgt

$$(g \circ f)(a_j) = g(f(a_j)) = g\left(\sum_{i=1}^m r_{ij}b_i\right) = \sum_{i=1}^m r_{ij}g(b_i) = \sum_{i=1}^m r_{ij} \sum_{k=1}^n s_{ki}c_k = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^m s_{ki}r_{ij}\right)c_k.$$

□

Satz 11.2. Für K -Vektorräume V, W mit Basen b_1, \dots, b_m bzw. c_1, \dots, c_n ist die Abbildung

$$\Delta : \text{Hom}(V, W) \rightarrow K^{n \times m},$$

die jeder linearen Abbildung $f : V \rightarrow W$ ihre Matrix $\Delta(f)$ bzgl. b_1, \dots, b_m und c_1, \dots, c_n zuordnet, ein Vektorraum-Isomorphismus.

Beweis. 11.1. □

Bemerkung 11.2. (i) Insbesondere ist

$$\dim \operatorname{Hom}(V, W) = \dim K^{n \times m} = nm = (\dim V)(\dim W).$$

Im Fall $W = K$ nennt man $V^* := \operatorname{Hom}(V, K)$ **Dualraum** von V und seine Elemente **Linearformen** auf V . Es ist also $\dim V^* = \dim V$.

(ii) Im Fall $V = W$ ist $m = n$. Meist wählt man dann $c_1 = b_1, \dots, c_n = b_n$ und spricht von der Matrix $\Delta(f)$ von f bzgl. b_1, \dots, b_n . Nach Satz 11.1 (ii) gilt in diesem Fall $\Delta(g \circ f) = \Delta(g)\Delta(f)$ für $f, g \in \operatorname{End}(V)$.

Satz 11.3. Für K -Vektorräume V, W und $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$ mit Matrix A bzgl. Basen b_1, \dots, b_m von V und c_1, \dots, c_n von W gilt:

$$f \text{ bijektiv} \Leftrightarrow A \text{ invertierbar.}$$

Ggf. ist $m = n$ und A^{-1} die Matrix von f^{-1} bzgl. c_1, \dots, c_n und b_1, \dots, b_m .

Beweis. "⇒": Sei f bijektiv. Nach Satz 10.4 ist dann $f^{-1} \in \operatorname{Hom}(W, V)$. Sei A' die Matrix von f^{-1} bzgl. c_1, \dots, c_n und b_1, \dots, b_m . Nach Satz 11.1 ist $A'A$ die Matrix von $f^{-1} \circ f = \operatorname{id}_V$ bzgl. b_1, \dots, b_m . Wegen $\operatorname{id}_V(b_j) = b_j$ für $j = 1, \dots, m$ ist 1_m die Matrix von id_V bzgl. b_1, \dots, b_m . Daher ist $A'A = 1_m$. Analog ist $AA' = 1_n$. Folglich ist A invertierbar und $A' = A^{-1}$; insbesondere ist $m = n$.

"⇐": Sei A invertierbar und $g \in \operatorname{Hom}(W, V)$ die nach Satz 11.2 eindeutig bestimmte lineare Abbildung mit Matrix A^{-1} bzgl. c_1, \dots, c_n und b_1, \dots, b_m . Nach Satz 11.1 ist $A^{-1}A = 1_m$ die Matrix von $g \circ f$ bzgl. b_1, \dots, b_m , d.h. $(g \circ f)(b_j) = b_j = \operatorname{id}_V(b_j)$ für $j = 1, \dots, m$. Aus Satz 10.6 folgt also $g \circ f = \operatorname{id}_V$. Analog ist $f \circ g = \operatorname{id}_W$, d.h. f ist bijektiv. □

Satz 11.4. Sei V ein K -Vektorraum mit Basis b_1, \dots, b_n , und sei $S = (s_{ij}) \in K^{n \times n}$. Setze $c_j := \sum_{i=1}^n s_{ij} b_i$ für $j = 1, \dots, n$. Dann gilt:

$$S \text{ invertierbar} \Leftrightarrow c_1, \dots, c_n \text{ Basis von } V.$$

Beweis. Nach Satz 11.2 existiert genau ein $f \in \operatorname{End}(V)$ mit Matrix S bzgl. b_1, \dots, b_n . Nach Definition ist $f(b_j) = \sum_{i=1}^n s_{ij} c_i$ für $j = 1, \dots, n$. Nach Satz 11.3 und Satz 10.6 gilt:

$$S \text{ invertierbar} \Leftrightarrow f \text{ bijektiv} \Leftrightarrow c_1, \dots, c_n \text{ Basis von } V. \quad \square$$

Bemerkung 11.4. Ggf. ist $b_j = \sum_{i=1}^n s'_{ij} c_i$ für $j = 1, \dots, n$ mit $(s'_{ij}) = S^{-1}$.

Bemerkung 11.5. Seien V, W K -Vektorräume und $f \in \text{Hom}(V, W)$ mit Matrix $A = (a_{ij}) \in K^{n \times m}$ bzgl. Basen b_1, \dots, b_m von V und c_1, \dots, c_n von W . Hat man weitere Basen b'_1, \dots, b'_m von V und c'_1, \dots, c'_n von W , so kann man auch die Matrix $A' = (a'_{ij}) \in K^{n \times m}$ von f bzgl. dieser Basen betrachten. Wie hängen A und A' zusammen?

Satz 11.5. Unter den obigen Voraussetzungen sei

$$b'_j = \sum_{i=1}^m s_{ij} b_i, \quad c_l = \sum_{k=1}^n t_{kl} c'_k$$

mit $s_{ij}, t_{kl} \in K$ für alle i, j, k, l . Dann gilt: $S := (s_{ij}) \in \text{GL}(m, K), T := (t_{kl}) \in \text{GL}(n, K)$ und $A' = TAS$; insbesondere ist $A' \sim A$.

Beweis. Nach Satz 11.4 sind S, T invertierbar. Für $j = 1, \dots, m$ gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a'_{ij} c'_i &= f(b'_j) = f\left(\sum_{k=1}^m s_{kj} b_k\right) = \sum_{k=1}^m s_{kj} f(b_k) = \sum_{k=1}^m s_{kj} \sum_{l=1}^n a_{lk} c_l \\ &= \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^m a_{lk} s_{kj} \sum_{i=1}^n t_{il} c'_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^m t_{il} a_{lk} s_{kj}\right) c'_i. \end{aligned}$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit von c'_1, \dots, c'_n folgt daraus:

$$a'_{ij} = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^m t_{il} a_{lk} s_{kj} \quad (i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m).$$

Daher ist $A' = TAS$. □

Satz 11.6. Seien V, W endlich-dimensionale K -Vektorräume und $f \in \text{Hom}(V, W)$. Dann hat die Matrix von f bzgl. passend gewählter Basen von V und W die Form

$$\begin{pmatrix} 1_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ mit } r = \text{rg}(f).$$

Beweis. Sei b_1, \dots, b_m eine Basis von $\text{Ker } f$. Ergänze diese zu einer Basis $b_1, \dots, b_m, b_{m+1}, \dots, b_n$ von V . Im Beweis zu Satz 10.1 hatten wir gesehen, dass $f(b_{m+1}), \dots, f(b_n)$ eine Basis von $\text{Bld } f$ bilden. Ergänze diese zu einer Basis $c_1 = f(b_{m+1}), \dots, c_{n-m} = f(b_n), c_{n-m+1}, \dots, c_n$ von W . Dann hat die Matrix von f bzgl. $b_{m+1}, \dots, b_n, b_1, \dots, b_m$ und $c_1, \dots, c_{n-m}, c_{n-m+1}, \dots, c_n$ die gewünschte Form (mit $r = n - m$). Dabei ist $r = \dim \text{Bld } f = \text{rg } f$. □

Beispiel 11.6. Die Abbildung $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (x+2y+3z, 4x+5y+6z, 7x+8y+9z)$ ist linear. Man berechnet: $\text{Ker } f = \mathbb{R}(1, -2, 1)$. Man ergänzt zu einer Basis

$$b_1 := (1, 0, 0), b_2 := (0, 1, 0), b_3 := (1, -2, 1)$$

von $V := \mathbb{R}^3$. Wie oben bilden

$$c_1 := f(b_1) = (1, 4, 7), c_2 := f(b_2) = (2, 5, 8)$$

eine Basis von $\text{Bld } f$. Elementare Zeilenumformungen ergeben:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Daher bilden $c_1, c_2, c_3 := (0, 0, 1)$ eine Basis von $W := \mathbb{R}^3$. Wegen

$$f(b_1) = c_1, f(b_2) = c_2, f(b_3) = 0$$

hat die Matrix von f bzgl. b_1, b_2, b_3 und c_1, c_2, c_3 die Form

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Satz 11.7. Seien V, W K -Vektorräume und $f \in \text{Hom}(V, W)$ mit Matrix A bzgl. Basen b_1, \dots, b_m von V und c_1, \dots, c_n von W . Dann ist $\text{rg}(f) = \text{rg}(A)$.

Beweis. Nach Satz 11.6 hat die Matrix von f bzgl. passender Basen b'_1, \dots, b'_m von V und c'_1, \dots, c'_n von W die Form

$$A' = \begin{pmatrix} 1_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ mit } r = \text{rg}(f).$$

Nach Satz 11.5 gilt: $A' \sim A$. Aus Satz 9.8 folgt: $\text{rg } A = \text{rg } A' = r = \text{rg } f$. □

Satz 11.8. Seien V ein K -Vektorraum und $f \in \text{End}(V)$ mit Matrix A bzgl. der Basis b_1, \dots, b_n von V und mit Matrix A' bzgl. der Basis b'_1, \dots, b'_n von V . Schreibe $b'_j = \sum_{i=1}^n s_{ij} b_i$ mit $s_{ij} \in K$ für $i, j = 1, \dots, n$. Dann ist $S := (s_{ij}) \in \text{GL}(n, K)$ und

$$\boxed{A' = S^{-1}AS}$$

Beweis. Nach 11.4 ist $S \in \text{GL}(n, K)$. Schreibt man $S^{-1} = (s'_{ij})$, so ist $b_j = \sum_{i=1}^n s'_{ij} b'_i$ ($j = 1, \dots, n$) nach Bemerkung 11.4. Die Behauptung folgt also aus Satz 11.5. □

Bemerkung 11.8. Es ist nicht immer möglich, eine Basis von V so zu wählen, dass die Matrix von f bzgl. dieser Basis eine **Diagonalmatrix** ist, d.h. folgende Form hat:

$$\begin{pmatrix} \star & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \star \end{pmatrix}.$$

Ist eine solche Wahl möglich, so nennt man f **diagonalisierbar**.

Beispiel 11.8. Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (0, x)$ ist linear mit $f \circ f = 0$.

Annahme: Es existiert eine Basis b_1, b_2 von \mathbb{R}^2 , bzgl. der die Matrix von f die Form

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$$

hat. Dann ist A^2 die Matrix von $f \circ f = 0$, d.h.

$$0 = A^2 = \begin{pmatrix} a_1^2 & 0 \\ 0 & a_2^2 \end{pmatrix}.$$

Daher ist $a_1 = a_2 = 0$ und $f = 0$. Widerspruch.

Definition 11.9. Man nennt $A, B \in K^{n \times n}$ *ähnlich* und schreibt $A \approx B$, falls ein $S \in GL(n, K)$ mit $B = S^{-1}AS$ existiert.

Bemerkung 11.9. (i) Man zeigt leicht, dass \approx reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

(ii) Nach Satz 11.8 sind Matrizen, die zum gleichen Vektorraum-Endomorphismus, aber verschiedenen Basen gehören, ähnlich.

(iii) Wie stellt man fest, ob vorgegebene $A, B \in K^{n \times n}$ ähnlich sind? Dazu mehr in LA II.

Definition 11.10. $A \in K^{n \times n}$ heißt *diagonalisierbar*, wenn A zu einer Diagonalmatrix ähnlich ist.

Bemerkung 11.10. (i) Seien V ein K -Vektorraum und $f \in \text{End}(V)$ mit Matrix A bzgl. einer Basis von V . Nach Satz 11.8 gilt dann:

$$f \text{ diagonalisierbar} \Leftrightarrow A \text{ diagonalisierbar}$$

(ii) Wie stellt man fest, ob eine gegebene Matrix A diagonalisierbar ist? Dazu mehr später.

(iii) Ist

$$A \approx D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$$

und $S \in GL(n, K)$ mit $A = S^{-1}DS$, so ist

$$A^2 = S^{-1}DS \cdot S^{-1}DS = S^{-1}D^2S = S^{-1} \begin{pmatrix} d_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n^2 \end{pmatrix} S.$$

Durch Induktion folgt für $k \in \mathbb{N}$:

$$A^k = S^{-1}D^kS = S^{-1} \begin{pmatrix} d_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n^k \end{pmatrix} S.$$

Auf diese Weise kann man die Potenzen von A schnell berechnen.

12 Determinanten

K Körper.

Definition 12.1. Für $A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$ definiert man die *Determinante*

$$\det(A) := |A| := \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

folgendermaßen: Für $n = 1$, d.h. $A = (a_{11})$, sei $|A| := a_{11}$.

Ist $n > 1$ und $|B|$ für $B \in K^{(n-1) \times (n-1)}$ schon definiert, so sei

$$|A| := \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i1} |A_{i1}|;$$

dabei ist A_{ij} jeweils die Matrix, die aus A durch Streichen der i -ten Zeile und der j -ten Spalte entsteht:

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \dots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \dots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \dots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

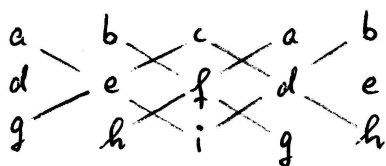
Beispiel 12.1.

$$n = 2: \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb = ad - bc$$

$n = 3$:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + g \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} \\ = aei - afh - dbi + dch + gbf - gce.$$

Merkregel:



$$n = 4: \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{21} |\dots| + a_{31} |\dots| - a_{41} |\dots| = \dots$$

Es ergibt sich eine Summe von 24 Produkten mit Vorzeichen.

$n = 5$: $|A|$ ist eine Summe von $5 \cdot 24 = 120$ Produkten mit Vorzeichen.

$n = 6$: $|A|$ ist eine Summe von $10! = 3628800$ Produkten mit Vorzeichen.

Allgemein ist $|A|$ eine Summe von $n!$ Produkten mit Vorzeichen. Schon für relativ kleine n ist die Definition für die Berechnung von Determinanten unbrauchbar (auch mit Computer). Wir brauchen daher Eigenschaften von Determinanten, die die Berechnung erleichtern. Wir beginnen mit Spezialfällen:

Eine *obere Dreiecksmatrix* ist eine Matrix der Form

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ggf. ist

$$|A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & \dots & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = \dots = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}.$$

Die Determinante einer oberen Dreiecksmatrix ist also das Produkt der Elemente auf der Hauptdiagonalen; insbesondere ist $|0_{n,n}| = 0$ und $|1_n| = 1$.

Eine *untere Dreiecksmatrix* ist eine Matrix der Form

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ggf. ist

$$|A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n2} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_{22} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} & \dots & \\ \vdots & & & & \\ a_{n2} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} - + \dots$$

Wir behaupten, dass $|A|$ auch in diesem Fall das Produkt der Elemente auf der Hauptdiagonalen ist. Wir argumentieren dazu mit Induktion nach n . Im Fall $n = 1$ ist alles klar. Im Fall $n = 2$ ist

$$\begin{vmatrix} a & 0 \\ b & c \end{vmatrix} = ac - b \cdot 0 = ac.$$

Sei jetzt $n > 2$ und die Behauptung für $(n - 1) \times (n - 1)$ -Matrizen bewiesen. Dann ergibt die obige Gleichung:

$$|A| = a_{11}(a_{22} \cdots a_{nn}) - a_{21}(0 \cdot a_{33} \cdots a_{nn}) + a_{31}(0 \cdot 0 \cdot a_{44} \cdots a_{nn}) - + \cdots = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}.$$

Damit ist unsere Behauptung für beliebige untere Dreiecksmatrizen bewiesen. Als Spezialfälle halten wir fest:

- Die Determinante einer elementaren Matrix $U_{ij}(a)$ vom Typ I ist stets gleich 1.
- Die Determinante einer elementaren Matrix $D_i(a)$ vom Typ II ist stets gleich a .

Satz 12.1. (i) Für $k = 1, \dots, n$ und $r, s \in K$ gilt:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k-1,1} & \cdots & a_{k-1,n} \\ rb_1 + sc_1 & \cdots & rb_n + sc_n \\ a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = r \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k-1,1} & \cdots & a_{k-1,n} \\ b_1 & \cdots & b_n \\ a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + s \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k-1,1} & \cdots & a_{k-1,n} \\ c_1 & \cdots & c_n \\ a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(ii) Für $k = 1, \dots, n - 2$ gilt:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k-1,1} & \cdots & a_{k-1,n} \\ b_1 & \cdots & b_n \\ b_1 & \cdots & b_n \\ a_{k+2,1} & \cdots & a_{k+2,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Beweis. (Induktion nach n)

(i) $n = 1$: $\det(rb + sc) = rb + sc = r \det(b) + s \det(c)$.

Sei also $n > 1$ und die Behauptung für $(n - 1) \times (n - 1)$ -Matrizen schon bewiesen.

Die drei Matrizen seien $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}), C = (c_{ij})$.

$$\text{z.z.: } |A| = r|B| + s|C|.$$

Nach Definition ist $|A| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i1} |A_{i1}|$.

Für $i \neq k$ ist $A_{i1} \in K^{(n-1) \times (n-1)}$ von der gleichen Bauart. Nach Induktion ist also $|A_{i1}| = r|B_{i1}| + s|C_{i1}|$. Außerdem ist $a_{i1} = b_{i1} = c_{i1}$. Für den entsprechenden Summanden gilt also:

$$(-1)^{i+1} a_{i1} |A_{i1}| = (-1)^{i+1} b_{i1} r |B_{i1}| + (-1)^{i+1} c_{i1} s |C_{i1}|.$$

Dagegen ist $A_{k1} = B_{k1} = C_{k1}$ und $a_{k1} = r b_{k1} + s c_{k1}$. Der k -te Summand ist also

$$(-1)^{k+1} a_{k1} |A_{k1}| = (-1)^{k+1} b_{k1} r |B_{k1}| + (-1)^{k+1} c_{k1} s |C_{k1}|.$$

Insgesamt folgt:

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{i=1}^n \left[(-1)^{i+1} b_{i1} r |B_{i1}| + (-1)^{i+1} c_{i1} s |C_{i1}| \right] = r \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} b_{i1} |B_{i1}| + s \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} c_{i1} |C_{i1}| \\ &= r|B| + s|C|. \end{aligned}$$

- (ii) z.z. Die Determinante einer Matrix mit zwei gleichen aufeinander folgenden Zeilen verschwindet.

$$n = 2 : \begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = ab - ab = 0.$$

Sei also $n > 2$ und die Behauptung für $(n-1) \times (n-1)$ -Matrizen schon bewiesen. Die angegebene Matrix sei A . Dann gilt: $|A| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i1} |A_{i1}|$. Für $k \neq i \neq k+1$ enthält auch A_{i1} zwei gleiche aufeinander folgende Zeilen. Daher ist $|A_{i1}| = 0$ nach Induktion. Außerdem ist $A_{k1} = A_{k+1,1}$ und $a_{k1} = b_1 = a_{k+1,1}$. Folglich ist

$$|A| = (-1)^{k+1} b_1 |A_{k1}| + (-1)^{k+2} b_1 |A_{k1}| = 0.$$

□

Satz 12.2. (i) Vertauscht man in einer $n \times n$ -Matrix zwei Zeilen, so wird ihre Determinante mit -1 multipliziert.

(ii) Die Determinante einer $n \times n$ -Matrix mit zwei gleichen Zeilen verschwindet.

(iii) Die Determinante einer $n \times n$ -Matrix mit einer Nullzeile verschwindet.

Beweis. (i) Aus Satz 12.1 folgt:

$$\begin{aligned}
 0 &= \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k-1,1} & \dots & a_{k-1,n} \\ b_1 + c_1 & \dots & b_n + c_n \\ b_1 + c_1 & \dots & b_n + c_n \\ a_{k+2,1} & \dots & a_{k+2,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k-1,1} & \dots & a_{k-1,n} \\ b_1 & \dots & b_n \\ b_1 + c_1 & \dots & b_n + c_n \\ a_{k+2,1} & \dots & a_{k+2,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k-1,1} & \dots & a_{k-1,n} \\ c_1 & \dots & c_n \\ b_1 + c_1 & \dots & b_n - c_n \\ a_{k+2,1} & \dots & a_{k+2,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
 &= \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k-1,1} & \dots & a_{k-1,n} \\ b_1 & \dots & b_n \\ b_1 & \dots & b_n \\ a_{k+2,1} & \dots & a_{k+2,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{=0} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k-1,1} & \dots & a_{k-1,n} \\ b_1 & \dots & b_n \\ c_1 & \dots & c_n \\ a_{k+2,1} & \dots & a_{k+2,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k-1,1} & \dots & a_{k-1,n} \\ c_1 & \dots & c_n \\ b_1 & \dots & b_n \\ a_{k+2,1} & \dots & a_{k+2,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k-1,1} & \dots & a_{k-1,n} \\ c_1 & \dots & c_n \\ c_1 & \dots & c_n \\ a_{k+2,1} & \dots & a_{k+2,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{=0}
 \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen, falls die beiden zu vertauschenden Zeilen benachbart sind. Den allgemeinen Fall führen wir darauf zurück. Wir wollen also jetzt Zeile i und Zeile j vertauschen; dabei können wir $i < j$ annehmen:

$\begin{pmatrix} \vdots \\ \hline \vdots \\ \dots & \dots & \dots \\ \vdots \end{pmatrix}$ Zunächst können wir durch $(j - i)$ -fache Vertauschung von jeweils

zwei benachbarten Zeilen folgende Konfiguration erreichen:

$\begin{pmatrix} \vdots \\ \dots & \dots & \dots \\ \hline \vdots \end{pmatrix}$ Dann führen wir noch $j - i - 1$ Vertauschungen von jeweils zwei

benachbarten Zeilen durch, um die endgültige Konfiguration zu erreichen:

$\begin{pmatrix} \vdots \\ \dots & \dots & \dots \\ \hline \vdots \end{pmatrix}$ Die Determinante ändert sich also insgesamt um den Faktor $(-1)^{j-i}(-1)^{j-i-1} = -1$.

(ii) Nach (i) kann man annehmen, dass die beiden ersten Zeilen von A übereinstimmen.

Die Behauptung folgt dann aus Satz 12.1 (ii).

(iii) folgt direkt aus Satz 12.1 (i). □

Satz 12.3. (i) Bei einer elementaren Zeilenumformung vom Typ I ändert sich die Determinante nicht.

(ii) Multipliziert man eine Zeile einer Matrix mit einem $r \in K$, so wird ihre Determinante auch mit r multipliziert.

(iii) Multipliziert man eine $n \times n$ -Matrix mit einem $r \in K$, so wird ihre Determinante mit r^n multipliziert.

Beweis. (i) Für $i \neq j$ gilt nach obigen Sätzen:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i1} + ra_{j1} & \dots & a_{in} + ra_{jn} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + r \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{=0}.$$

(ii) folgt aus Satz 12.1 (i).

(iii) folgt aus (ii). □

Bemerkung 12.3. Man erhält so eine gute Methode zur Berechnung von Determinanten:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 2 = 4.$$

Satz 12.4. Für $A \in K^{n \times n}$ gilt:

$$\boxed{A \in \text{GL}(n, K) \Leftrightarrow \det A \neq 0.}$$

Beweis. Nach Satz 9.4 wird die Invertierbarkeit von A durch elementare Zeilenumformungen nicht beeinflusst. Nach Satz 12.3 wird auch das Verschwinden von $|A|$ nicht durch elementare Zeilenumformungen beeinflusst. Daher kann man annehmen, dass A reduzierte Zeilenstufenform hat.

Ist $A \in \text{GL}(n, K)$, so ist $A = 1_n$ nach Satz 9.4. Folglich ist $|A| = 1 \neq 0$. Ist $A \notin \text{GL}(n, K)$, so ist A nach Satz 9.4 nicht rechtsinvertierbar. Nach Satz 9.3 enthält also A Nullzeilen. Nach Satz 12.2 ist also $|A| = 0$. □

Bemerkung 12.4. Nach Satz 9.4 gilt auch: $A \in \text{GL}(n, K) \Leftrightarrow \text{rg}(A) = n$.

Satz 12.5. (Produktregel für Determinanten)

$$A, B \in K^{n,n} \Rightarrow |AB| = |A| \cdot |B|.$$

Beweis. Sei $A \notin \text{GL}(n, K)$, also auch $AB \notin \text{GL}(n, K)$. Nach Satz 12.4 verschwinden dann beide Seiten.

Sei also $A \in \text{GL}(n, K)$. Nach Satz 9.4 ist dann $A = E_1 \cdots E_k$ mit elementaren Matrizen E_1, \dots, E_k . Für jede elementare Matrix $E \in K^{n \times n}$ und beliebige $C \in K^{n \times n}$ gilt nach Satz 12.3: $|EC| = |E| \cdot |C|$. Daher ist

$$\begin{aligned} |AB| &= |E_1 \cdots E_k B| = |E_1| \cdot |E_2 \cdots E_k B| = \dots = |E_1| \cdots |E_k| \cdot |B| \\ &= |E_1| \cdots |E_{k-2}| \cdot |E_{k-1} E_k| \cdot |B| = \dots = |E_1 \cdots E_k| \cdot |B| = |A| \cdot |B|. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 12.5. Für $A \in \text{GL}(n, K)$ ist $AA^{-1} = 1_n$. Daher ist $1 = |1_n| = |AA^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}|$, d.h. $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.

Satz 12.6. $A \in K^{n \times n} \Rightarrow |A^T| = |A|$.

Beweis. Ist $A \notin \text{GL}(n, K)$, so ist auch $A^T \notin \text{GL}(n, K)$. Ggf. sind beide Seiten Null. Sei also $A \in \text{GL}(n, K)$. Dann ist $A = E_1 \cdots E_k$ mit elementaren Matrizen E_1, \dots, E_k , also $A^T = E_k^T \cdots E_1^T$. Nach Satz 12.5 ist $|A| = |E_1| \cdots |E_k|$ und $|A^T| = |E_k^T| \cdots |E_1^T| = |E_1^T| \cdots |E_k^T|$. Daher genügt zu zeigen, dass $|E^T| = |E|$ für jede elementare Matrix E ist. Im Fall $E = U_{ij}(a)$ ist $E^T = U_{ji}(a)$, also $|E| = 1 = |E^T|$. Im Fall $E = D_i(a)$ ist $E^T = E$, also auch $|E^T| = |E|$. □

Bemerkung 12.6. Alles, was wir über Zeilen von Determinanten bewiesen haben, gilt also entsprechend auch für Spalten.

Satz 12.7. (Entwicklungssatz von Laplace)

$$A \in K^{n \times n} \Rightarrow |A| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} |A_{ik}| \text{ für } k = 1, \dots, n.$$

Beweis. Man vertausche die Spalten von A so, dass die k -te Spalte zur ersten wird und die Reihenfolge der übrigen Spalten beibehalten wird. Dabei ändert sich die Determinante um den Faktor $(-1)^{k-1} = (-1)^{k+1}$. Dann folgt die Behauptung aus der Definition. □

Bemerkung 12.7. Genauer spricht man bei der obigen Formel von einer Entwicklung nach der k -ten Spalte. Nach Satz 12.6 hat man die analoge Formel für die Entwicklung nach der k -ten Zeile. Man entwickelt meist nach Zeilen oder Spalten mit vielen Nullen:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 7 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \dots$$

Die Vorzeichen in der Formel verteilen sich schachbrettartig:

$$\begin{array}{cccc} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

Definition 12.8. Für $A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$ definiert man die **Adjunkte** $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij}) \in K^{n \times n}$ von A durch $\tilde{a}_{ij} := (-1)^{i+j}|A_{ji}|$ (Achtung bei der Reihenfolge!)

Satz 12.8. Dann ist $A\tilde{A} = |A| \cdot 1_n = \tilde{A}A$.

Beweis. Für $i \neq k$ ist das Element an der Position (i, k) von $A\tilde{A}$ gleich

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}\tilde{a}_{jk} = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+k} a_{ij}|A_{kj}| = |B|,$$

wobei $B \in K^{n \times n}$ aus A dadurch entsteht, dass man die k -te Zeile durch die i -te ersetzt. Da B zwei gleiche Zeilen hat, ist $|B| = 0$. Dagegen ist das Element an der Position (k, k) von $A\tilde{A}$ gleich

$$\sum_{j=1}^n a_{kj}\tilde{a}_{jk} = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+k} a_{kj}|A_{kj}| = |A|.$$

Damit ist $A\tilde{A} = |A|1_n$. Analog ist $\tilde{A}A = |A|1_n$. □

Bemerkung 12.8. Im Fall $A \in GL(n, K)$ ist $|A| \neq 0$, also $A^{-1} = |A|^{-1}\tilde{A}$. Damit hat man eine explizite Formel für die inverse Matrix. In der Praxis ist diese Formel jedoch nur für kleine Matrizen von Bedeutung.

Beispiel 12.8. Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $0 \neq |A| = ad - bc$.

Dann ist $A \in GL(2, K)$ und $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. (Probe!)

Satz 12.9. (Cramersche Regel, 1704-1752)

Ein lineares Gleichungssystem $(\star) \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i$ ($i = 1, \dots, n$) mit quadratischer Koeffizientenmatrix $A = (a_{ij})$ ist genau dann **eindeutig** lösbar, wenn $d := |A| \neq 0$ ist. Ggf. gilt für $i = 1, \dots, n$:

$$x_i = \frac{1}{d} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Beweis. Nach Satz 9.4 ist (\star) genau dann eindeutig lösbar, wenn $A \in GL(n, K)$ gilt. Nach Satz 12.4 ist dies gleichwertig zu $d \neq 0$. Im Fall $d \neq 0$ folgt aus Bemerkung 12.8:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{d} \tilde{A} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

d.h. für $i = 1, \dots, n$ gilt:

$$x_i = \frac{1}{d} \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} b_j = \frac{1}{d} \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} b_j |A_{ji}| = \frac{1}{d} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

□

Beispiel 12.9. Für das lineare Gleichungssystem $(\star) \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$ gilt:

$$d = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \text{ also } x = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1, y = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1. \text{ (Probe!)}$$

Bemerkung 12.9. Der obige Satz liefert eine explizite Formel zur Lösung linearer Gleichungs-Systeme mit invertierbarer Koeffizienten-Matrix. In der Praxis zieht man jedoch meist den Gauß-Algorithmus vor.

Definition 12.10. Sei $A \in K^{m \times n}$. Eine Matrix, die man durch Streichen von Zeilen und/oder Spalten von A erhält, nennt man **Untermatrix** von A .

Satz 12.10. Für $A \in K^{m \times n}$ ist $\text{rg}(A)$ die maximale Größe einer quadratischen Untermatrix von A mit nichtverschwindender Determinante.

Beispiel 12.10. $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 0$ (nachrechnen!), aber $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 8 \neq 0$. Daher: $\text{rg}(A) = 2$. (Probe mit Gauß-Algorithmus!)

Beweis. Sei $r := \text{rg}(A) = \dim \text{ZR}(A)$. Dann enthält A r linear unabhängige Zeilen a_{i_1}, \dots, a_{i_r} . Die entsprechende $r \times n$ -Untermatrix A' von A hat also Rang r . Daher enthält A' analog r linear unabhängige Spalten $a'_{j_1}, \dots, a'_{j_r}$. Die entsprechende $r \times r$ -Untermatrix A'' von A' hat also Rang r . Folglich ist $|A''| \neq 0$.

Andererseits gilt für jede Untermatrix B von A : $\text{rg}(B) \leq r$. Für $s > r$ und jede $s \times s$ -Untermatrix B von A ist also $\text{rg}(B) \leq r < s$ und damit $|B| = 0$. □

13 Eigenwerte und Eigenvektoren

K Körper.

Bemerkung 13.1. Seien b_1, \dots, b_n und b'_1, \dots, b'_n Basen eines K -Vektorraums V . Ferner sei $f \in \text{End}(V)$ mit Matrix A bzgl. b_1, \dots, b_n und Matrix A' bzgl. b'_1, \dots, b'_n . Nach Satz 11.8 ist $A' = S^{-1}AS$ für ein $S \in \text{GL}(n, K)$; insbesondere ist $|A'| = |S|^{-1} \cdot |A| \cdot |S| = |A|$, d.h. $\det A$ hängt nicht von der Wahl der Basis ab. Man nennt $|A|$ auch die *Determinante* von f und schreibt $\det f := |A|$. Rechenregeln für Determinanten von Matrizen übertragen sich dann in Rechenregeln für Determinanten von Endomorphismen. Z.B. gilt für $f, g \in \text{End}(V), r \in K$:

- (i) $\det(g \circ f) = (\det g)(\det f)$.
- (ii) $\det \text{id}_V = 1$.
- (iii) $\det(rf) = r^n \det f$.
- (iv) f bijektiv $\Leftrightarrow \det f \neq 0 \Rightarrow \det(f^{-1}) = (\det f)^{-1}$

Bemerkung 13.2. In der Situation von Bemerkung 13.1 gilt auch:

$$\text{spur}(A') = \text{spur}(S^{-1}AS) = \text{spur}(ASS^{-1}) = \text{spur}(A).$$

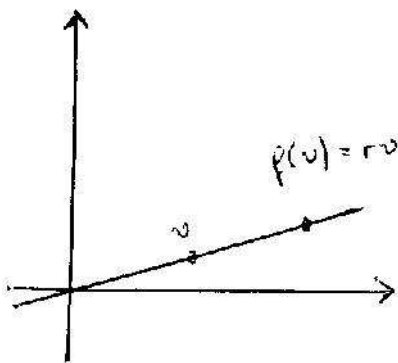
Daher hängt $\text{spur}(A)$ nicht von der Wahl der Basis ab. Man nennt $\text{spur}(A)$ auch die *Spur* von f und schreibt: $\text{spur}(f) := \text{spur}(A)$. Rechenregeln für Spuren von Matrizen übertragen sich auf Spuren von Endomorphismen. Z.B. gilt für jeden K -Vektorraum W und $f, f' \in \text{End}(V), g \in \text{Hom}(V, W), h \in \text{Hom}(W, V)$ und $a, a' \in K$:

- (i) $\text{spur}(af + a'f') = a \text{spur}(f) + a' \text{spur}(f')$;
- (ii) $\text{spur}(g \circ h) = \text{spur}(h \circ g)$;
- (iii) $\text{spur}(\text{id}_V) = (\dim V)1_K$.

Definition 13.3. Seien V ein K -Vektorraum, $f \in \text{End}(V)$ und $r \in K$. Man nennt r *Eigenwert* von f , falls $f(v) = rv$ für ein $v \in V \setminus \{0\}$ ist. Ggf. heißt v *Eigenvektor* und

$$E_r(f) := \{x \in V : f(x) = rx\} = \{x \in V : (f - r \cdot \text{id}_V)(x) = 0\} = \text{Ker}(f - r \cdot \text{id}_V)$$

Eigenraum von f zum Eigenwert r .



Bemerkung 13.3. $E_r(f)$ ist also ein Untervektorraum von V ; insbesondere ist $0 \in E_r(f)$. Aber: 0 zählt nicht als Eigenvektor.

Beispiel 13.3. (i) Sei $V := \mathbb{R}^2$ und $f(a, b) := (b, a)$ für $a, b \in \mathbb{R}$. Dann ist $(1, 1)$ Eigenvektor von f zum Eigenwert 1 und $(1, -1)$ Eigenvektor von f zum Eigenwert -1 .

(ii) Sei $V := \mathbb{R}^2$ und $f(a, b) := (b, -a)$ für $a, b \in \mathbb{R}$. Ist $(a, b) \in V$ Eigenvektor von f zum Eigenwert $r \in \mathbb{R}$, so ist

$$(-a, -b) = f(b, -a) = f(f(a, b)) = f(r(a, b)) = rf(a, b) = r^2(a, b) = (r^2a, r^2b),$$

d.h. $r^2 = -1$ wegen $a \neq 0$ oder $b \neq 0$. Dies ist unmöglich. Daher besitzt f weder Eigenwerte noch Eigenvektoren.

Satz 13.3. Seien V ein K -Vektorraum und $r_1, \dots, r_k \in K$ paarweise verschiedene Eigenwerte von $f \in \text{End}(V)$. Dann gilt:

$$E_{r_1}(f) + \dots + E_{r_k}(f) = E_{r_1}(f) \oplus \dots \oplus E_{r_k}(f).$$

Ist u_i ein Eigenvektor von f zum Eigenwert r_i ($i = 1, \dots, k$), so sind u_1, \dots, u_k linear unabhängig.

Beweis. Wir beweisen zunächst die erste Aussage mit Induktion nach k . Im Fall $k = 1$ ist nichts zu tun. Sei also $k > 1$ und bereits gezeigt:

$$E_{r_1}(f) + \dots + E_{r_{k-1}}(f) = E_{r_1}(f) \oplus \dots \oplus E_{r_{k-1}}(f).$$

Ferner sei $v \in E_{r_k}(f) \cap (E_{r_1}(f) + \dots + E_{r_{k-1}}(f))$. Schreibe $v = v_1 + \dots + v_{k-1}$ ($v_i \in E_{r_i}(f)$). Dann:

$$r_k v_1 + \dots + r_k v_{k-1} = r_k v = f(v) = f(v_1) + \dots + f(v_{k-1}) = r_1 v_1 + \dots + r_{k-1} v_{k-1}.$$

Nach Induktion gilt also für $i = 1, \dots, k-1$: $r_i v_i = r_k v_i$, d.h. $0 = \underbrace{(r_i - r_k)}_{\neq 0} v_i$. Also ist $v_i = 0$

und $v = 0$. Damit ist gezeigt:

$$E_{r_k}(f) \cap (E_{r_1}(f) + \dots + E_{r_{k-1}}(f)) = \{0\}.$$

Aus Satz 5.4 und der Induktionsvoraussetzung folgt:

$$E_{r_1}(f) + \dots + E_{r_k}(f) = E_{r_1}(f) \oplus \dots \oplus E_{r_k}(f).$$

Seien jetzt $a_1, \dots, a_k \in K$ mit $0 = \underbrace{a_1 u_1}_{\in E_{r_1}(f)} + \dots + \underbrace{a_k u_k}_{\in E_{r_k}(f)}$. Für $i = 1, \dots, k$ ist dann $a_i u_i = 0$

nach dem ersten Teil des Beweises. Wegen $u_i \neq 0$ folgt $a_i = 0$. Also sind u_1, \dots, u_k linear unabhängig. \square

Bemerkung 13.4. Aus Satz 13.3 folgt:

$$\begin{aligned} n := \dim V &\geq \dim [E_{r_1}(f) \oplus \dots \oplus E_{r_k}(f)] \\ &= \underbrace{\dim E_{r_1}(f)}_{\geq 1} + \dots + \underbrace{\dim E_{r_k}(f)}_{\geq 1} \geq k. \end{aligned}$$

Daher kann f im Fall $n < \infty$ höchstens n verschiedene Eigenwerte haben.

Satz 13.4. Seien V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum und $f \in \text{End}(V)$ mit Matrix A bzgl. einer Basis von V . Für $r \in K$ gilt dann:

$$r \text{ Eigenwert von } f \Leftrightarrow |r1_n - A| = 0.$$

Beweis. r Eigenwert von $f \stackrel{13.3}{\Leftrightarrow} E_r(f) \neq \{0\} \Leftrightarrow \text{Ker}(f - r \cdot \text{id}_V) \neq \{0\} \stackrel{10.2}{\Leftrightarrow} f - r \cdot \text{id}_V$ nicht injektiv $\Leftrightarrow f - r \cdot \text{id}_V$ nicht bijektiv $\Leftrightarrow A - r1_n \notin \text{GL}(n, K) \Leftrightarrow |A - r1_n| = 0. \quad \square$

Beispiel 13.4. Sei $V := \mathbb{R}^2$ und $f(a, b) := (3a + b, a + 3b)$ für $a, b \in \mathbb{R}$. Die Matrix von f bzgl. der Standardbasis ist $A := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Für $x \in \mathbb{R}$ ist

$$|x1_3 - A| = \begin{vmatrix} x-3 & -1 \\ -1 & x-3 \end{vmatrix} = (x-3)^2 - 1 = x^2 - 6x + 8.$$

Dabei gilt: $x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow x \in \{2, 4\}$. Daher sind 2, 4 die einzigen Eigenwerte von f . Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} (a, b) \in E_2(f) &\Leftrightarrow (3a + b, a + 3b) = 2(a, b) && \Leftrightarrow a = -b. \\ (a, b) \in E_4(f) &\Leftrightarrow (3a + b, a + 3b) = 4(a, b) && \Leftrightarrow a = b. \end{aligned}$$

Daher ist $E_2(f) = \mathbb{R}(1, -1)$ und $E_4(f) = \mathbb{R}(1, 1)$. Nach Satz 13.3 sind $(1, -1), (1, 1)$ linear unabhängig, bilden also eine Basis von V . Die Matrix von f bzgl. $(1, -1), (1, 1)$ ist $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Bemerkung 13.5. Für $A \in K^{n \times n}$ nennt man die Abbildung

$$K \longrightarrow K, x \longmapsto |x1_n - A|$$

das *charakteristische Polynom* von A . Nach dem Entwicklungssatz ist es von der Form

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

mit $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in K, a_0 = (-1)^n |A|$ und $a_{n-1} = -\text{spur } A$. Es hat also **Grad** n und ist **normiert**, d.h. der Koeffizient a_n von x^n ist gleich 1. Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms von A nennt man auch die **Eigenwerte** von A . Ist also V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum und $f \in \text{End}(V)$ mit Matrix A bzgl. einer Basis von V , so sind die Eigenwerte von f genau die Eigenwerte von A .

Satz 13.5. Ähnliche Matrizen besitzen das gleiche charakteristische Polynom (und damit die gleichen Eigenwerte).

Beweis. Seien $A, B \in K^{n \times n}$ ähnlich, d.h. $B = S^{-1}AS$ für ein $S \in \text{GL}(n, K)$. Für $x \in K$ gilt dann:

$$|x1_n - B| = |xS^{-1}S - S^{-1}AS| = |S^{-1}(x1_n - A)S| = |S|^{-1} \cdot |x1_n - A| \cdot |S| = |x1_n - A|.$$

□

Bemerkung 13.6. Seien V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum und $f \in \text{End } V$ mit Matrix A bzgl. einer Basis b_1, \dots, b_n von V . Dann hängt das charakteristische Polynom von A nur von f , nicht aber von der Wahl von b_1, \dots, b_n ab. (Wählt man eine andere Basis c_1, \dots, c_n von V , so ist die Matrix B von f bzgl. c_1, \dots, c_n zu A ähnlich, besitzt also nach Satz 13.5 das gleiche charakteristische Polynom.) Man spricht daher auch vom **charakteristischen Polynom** von f .

Satz 13.6. Für einen endlich-dimensionalen K -Vektorraum V und $f \in \text{End}(V)$ sind gleichwertig:

- (1) f ist diagonalisierbar.
- (2) V hat eine Basis, die aus Eigenvektoren von f besteht.
- (3) V ist Summe der Eigenräume von f .
- (4) V ist direkte Summe der Eigenräume von f .
- (5) $\dim V$ ist die Summe der Dimensionen der Eigenräume von f .

Beweis.

“(1) \Rightarrow (2)”: Sei f diagonalisierbar. Dann hat die Matrix von f bzgl. einer geeigneten Basis b_1, \dots, b_n von V die Form

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}.$$

Für $i = 1, \dots, n$ ist also $f(b_i) = a_i b_i$, d.h. b_i ist Eigenvektor von f zum Eigenwert a_i .

“(2) \Rightarrow (3)”: Sei b_1, \dots, b_n Basis von V , und jedes b_i sei Eigenvektor von f zum Eigenwert a_i . Ist $v \in V$ beliebig, so existieren $r_1, \dots, r_n \in K$ mit $v = r_1 b_1 + \dots + r_n b_n \in E_{a_1}(f) + \dots + E_{a_n}(f)$. Also gilt:

$$V = E_{a_1}(f) + \dots + E_{a_n}(f).$$

“(3) \Rightarrow (4)”: Satz 13.3.

“(4) \Rightarrow (5)”: Aus $V = E_{a_1}(f) \oplus \dots \oplus E_{a_k}(f)$ folgt:

$$\dim V = \dim E_{a_1}(f) + \dots + \dim E_{a_k}(f).$$

“(5) \Rightarrow (1)”: Seien r_1, \dots, r_k die paarweise verschiedenen Eigenwerte von f , und sei

$$\dim V = \dim E_{r_1}(f) + \dots + \dim E_{r_k}(f) = \dim [E_{r_1}(f) \oplus \dots \oplus E_{r_k}(f)].$$

Dann ist $V = E_{r_1}(f) \oplus \dots \oplus E_{r_k}(f)$. Wählt man eine Basis b_1, \dots, b_{s_1} von E_{r_1} , eine Basis $b_{s_1+1}, \dots, b_{s_2}$ von $E_{r_2}(f)$, usw., so bilden $b_1, \dots, b_{s_1}, b_{s_1+1}, \dots, b_{s_2}, \dots$ eine Basis von V , bzgl. der die Matrix von f folgende Form hat:

$$A = \begin{pmatrix} r_1 & & & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & r_1 & & & & & & & \\ & & & r_2 & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & r_2 & & & & \\ & & & & & & \ddots & & & \\ 0 & & & & & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

□

Beispiel 13.6. (i) Sei $V = \mathbb{R}^2$ und $f(a, b) = (a, a + b)$ für $a, b \in \mathbb{R}$. Die Matrix von f bzgl. der Standardbasis von V ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom von A ist $\begin{vmatrix} x-1 & 0 \\ -1 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)^2$. Daher ist 1 der einzige Eigenwert von A und f . Ferner gilt:

$$(a, b) \in E_1(f) \Leftrightarrow (a, a + b) = 1(a, b) \Leftrightarrow a = 0.$$

Folglich ist $E_1(f) = \mathbb{R}(0, 1)$; insbesondere ist $\dim E_1(f) = 1 < 2 = \dim V$. Also ist f *nicht* diagonalisierbar.

(ii) Sei $V := \mathbb{R}^4$ und $f(a, b, c, d) = (a - b + d, b, -a - b + 2c + d, -b + 2d)$ für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Die Matrix von f bzgl. der Standardbasis von V ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Für $x \in \mathbb{R}$ ist $|x1_4 - A| = \dots = (x-1)^2(x-2)^2$. Daher sind 1, 2 die einzigen Eigenwerte von f . Wir berechnen zunächst $E_1(f) = \text{Ker}(id_V - f)$:

$$1_4 - A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \dots \text{Gauß-Algorithmus} \dots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Daher bilden $b_1 := (0, 1, 0, 1), b_2 := (1, 0, 1, 0)$ eine Basis von $E_1(f)$. Jetzt berechnen wir $E_2(f) = \text{Ker}(2 \cdot id_V - f)$:

$$2 \cdot 1_4 - A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daher bilden $b_3 := (1, 0, 0, 1), b_4 := (0, 0, 1, 0)$ eine Basis von $E_2(f)$. Folglich bilden b_1, b_2, b_3, b_4 ein Basis von V . Die Matrix von f bzgl. b_1, b_2, b_3, b_4 ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

insbesondere ist f diagonalisierbar.

Satz 13.7. Sei V ein K -Vektorraum der Dimension $n < \infty$ und sei $f \in \text{End}(V)$ mit n **verschiedenen** Eigenwerten r_1, \dots, r_n . Dann ist f diagonalisierbar.

Beweis. Die Behauptung folgt aus Satz 13.6 wegen

$$\begin{aligned} \dim V &\geq \dim [E_{r_1}(f) \oplus \dots \oplus E_{r_n}(f)] = \dim E_{r_1}(f) + \dots + \dim E_{r_n}(f) \\ &\geq n = \dim V. \end{aligned}$$

□

Beispiel 13.7. Die *Fibonacci-Zahlen* sind definiert durch

$$F_0 := 0, F_1 := 1, F_{n+1} := F_n + F_{n-1} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Die ersten Fibonacci-Zahlen sind also 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

Wir suchen eine geschlossene Formel für F_n . Dazu beobachten wir:

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_n \end{pmatrix} = \dots = A^n \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix}.$$

Zur Berechnung von A^n diagonalisieren wir A . Das charakteristische Polynom ist

$$\begin{vmatrix} x & -1 \\ -1 & x-1 \end{vmatrix} = x^2 - x - 1,$$

mit Nullstellen $r := \frac{1+\sqrt{5}}{2}, s := \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Daher ist die lineare Abbildung:

$$f: \mathbb{R}^{2 \times 1} \longrightarrow \mathbb{R}^{2 \times 1}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \longmapsto A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

diagonalisierbar. Wir berechnen die Eigenräume von f :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in E_r(f) \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} b \\ a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra \\ rb \end{pmatrix} \Leftrightarrow b = ra.$$

Daher: $E_r(f) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ r \end{pmatrix}$ und analog $E_s(f) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix}$. Wir erhalten:

$$A \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ r & s \end{pmatrix}}_{=:S} = \begin{pmatrix} r1 & s1 \\ rr & ss \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ r & s \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}}_{=:D}.$$

Also $A = SDS^{-1}$ mit $S^{-1} = \frac{1}{s-r} \begin{pmatrix} s & -1 \\ -r & 1 \end{pmatrix}$. Daher:

$$A^n = SD^nS^{-1} = S \begin{pmatrix} r^n & 0 \\ 0 & s^n \end{pmatrix} S^{-1} = \dots = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} rs^n - r^n s & r^n - s^n \\ rs^{n+1} - r^{n+1}s & r^{n+1} - s^{n+1} \end{pmatrix}$$

und

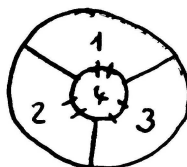
$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} r^n - s^n \\ r^{n+1} - s^{n+1} \end{pmatrix};$$

insbesondere:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Wegen $\left| \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right| < 1$ kann man F_n auch durch Runden von $\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n$ berechnen. In ähnlicher Weise kann man andere rekursiv definierte Folgen behandeln.

Beispiel 13.8. Eine Maus befindet sich in einem Labyrinth der Form:



Für $i, j = 1, \dots, 4$ sei a_{ij} die Übergangswahrscheinlichkeit von Zelle i zu Zelle j nach einer Minute. Die Übergangsmatrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ habe die Form

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Dann gibt

$$A^2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{3}{16} & \frac{3}{16} & \frac{3}{16} & \frac{7}{16} \end{pmatrix}$$

die Übergangswahrscheinlichkeiten nach 2 Minuten an. Für $n \in \mathbb{N}$ enthält A^n die Übergangswahrscheinlichkeiten nach n Minuten. Wie ist das Verhalten für $n \rightarrow \infty$? Zur Berechnung von A^n diagonalisieren wir A . Das charakteristische Polynom von A ist

$$x^4 - \frac{7}{4}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{16}x - \frac{1}{16} = (x-1)\left(x + \frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Die Eigenräume der linearen Abbildung

$$f: \mathbb{R}^{4 \times 1} \rightarrow \mathbb{R}^{4 \times 1}, v \mapsto Av$$

sind

$$E_1(f) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, E_{-\frac{1}{4}}(f) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, E_{\frac{1}{2}}(f) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Daher:

$$A \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=:S} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = SD.$$

d.h. $A = SDS^{-1}$ und $A^n = SD^nS^{-1}$ ($n \in \mathbb{N}$). Folglich:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = S (\lim_{n \rightarrow \infty} D^n) S^{-1} \text{ mit } \lim_{n \rightarrow \infty} D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Also:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

Asymptotisch hält sich also die Maus mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{5}$ in jeder der Zellen 1, 2, 3 und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{5}$ in Zelle 4 auf, unabhängig von der Ausgangszelle. In ähnlicher Weise kann man andere Prozesse in Biologie und Wirtschaft behandeln.

Beispiel 13.9. Ein Glücksspieler besitzt 100€. Der Einsatz für jedes Spiel beträgt 100€. Der Spieler gewinnt jedes Spiel mit einer Wahrscheinlichkeit von 60%. Er braucht unbedingt 600€. Wie liegen seine Chancen, dieses Ziel zu erreichen?

Wir haben 7 Zustände: den Besitz von 0, 100, ..., 600€. Die Übergangswahrscheinlichkeiten werden durch folgende Matrix gegeben:

$$A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Z.B. bedeutet die hervorgehobene 2, dass die Wahrscheinlichkeit, von 300€ zu 200€ überzugehen, bei 40% liegt. (Der Spieler hört auf, wenn er 0 oder 600€ besitzt.) Für $n \in \mathbb{N}$ gibt A^n die Übergangswahrscheinlichkeiten nach n Spielen an. Wir suchen $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$. Die Eigenwerte von A sind (nachrechnen!)

$$1, 1, \frac{\sqrt{6}}{5}, -\frac{\sqrt{6}}{5}, \frac{3\sqrt{2}}{5}, -\frac{3\sqrt{2}}{5}, 0.$$

Die entsprechenden Eigenräume der linearen Abbildung

$$f: \mathbb{R}^{7 \times 1} \rightarrow \mathbb{R}^{7 \times 1}, x \mapsto Ax$$

sind (nachrechnen!)

$$\begin{aligned}
 E_1 &= \mathbb{R} \begin{pmatrix} \frac{665}{32} \\ \frac{211}{16} \\ \frac{65}{8} \\ \frac{19}{4} \\ \frac{5}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -\frac{633}{32} \\ -\frac{195}{16} \\ -\frac{57}{8} \\ -\frac{15}{4} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & E_{\frac{\sqrt{6}}{5}} &= \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \\ 0 \\ -\frac{2\sqrt{6}}{9} \\ -\frac{4}{9} \\ 0 \end{pmatrix}, & E_{-\frac{\sqrt{6}}{5}} &= \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{\sqrt{6}}{5} \\ 0 \\ \frac{2\sqrt{6}}{9} \\ -\frac{4}{9} \\ 0 \end{pmatrix}, \\
 E_{\frac{3\sqrt{2}}{5}} &= \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{9}{4} \\ \frac{9\sqrt{2}}{4} \\ 3 \\ \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & E_{-\frac{3\sqrt{2}}{5}} &= \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{9}{4} \\ -\frac{9\sqrt{2}}{4} \\ 3 \\ -\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & E_0 &= \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{9}{4} \\ 0 \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Setze

$$S := \begin{pmatrix} \frac{665}{32} & -\frac{633}{32} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{211}{16} & -\frac{195}{16} & 1 & 1 & \frac{9}{4} & \frac{9}{4} & \frac{9}{4} \\ \frac{65}{8} & -\frac{57}{8} & \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{9\sqrt{2}}{4} & -\frac{9\sqrt{2}}{4} & 0 \\ \frac{19}{4} & -\frac{15}{4} & 0 & 0 & 3 & 3 & -\frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{2\sqrt{6}}{9} & \frac{2\sqrt{6}}{9} & \frac{3\sqrt{2}}{2} & -\frac{3\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3\sqrt{2}}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3\sqrt{2}}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann: $AS = SD$, d.h. $A = SDS^{-1}$.

Folglich: $A^n = SDS^{-1}S(\lim_{n \rightarrow \infty} D^n)S^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} A^n$.

Beachte:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Man berechnet:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{422}{665} & \vdots & & \vdots & \frac{243}{665} \\ \frac{52}{133} & \vdots & & \vdots & \frac{81}{133} \\ \frac{8}{35} & \vdots & & \vdots & \frac{27}{35} \\ \frac{16}{133} & \vdots & & \vdots & \frac{117}{133} \\ \frac{32}{665} & \vdots & & \vdots & \frac{633}{665} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Wahrscheinlichkeit, bei einem Startguthaben von x Euro irgendwann 600€ zu haben, ist also:

| 0€ | 100€ | 200€ | 200€ | 400€ | 500€ | 600€ |
|----|-------------------|------------------|-----------------|-------------------|-------------------|------|
| 0 | $\frac{243}{665}$ | $\frac{81}{133}$ | $\frac{27}{33}$ | $\frac{117}{133}$ | $\frac{633}{665}$ | 1 |
| 0% | 36,5% | 60,9% | 77,1% | 88% | 95,2% | 100% |

Beispiel 13.10. Die *Tschebyscheff-Polynome (erster Art)* werden definiert durch

$$T_0(x) := 1, T_1(x) := x, T_{n+1}(x) := 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Sie sind wichtig für die Interpolations- und Approximationstheorie.

Man berechnet:

$$\begin{aligned} T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1 \\ &\dots \end{aligned}$$

Wir suchen eine geschlossene Formel für $T_n(x)$. Ansatz:

$$\begin{pmatrix} T_n \\ T_{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2x \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} T_{n-1} \\ T_n \end{pmatrix} = \dots = A^n \begin{pmatrix} T_0 \\ T_1 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte von A sind (nachrechnen!)

$$\alpha := x + \sqrt{x^2 - 1}, \beta := x - \sqrt{x^2 - 1}.$$

Die Eigenräume der linearen Abbildung

$$f : \mathbb{R}^{2 \times 1} \longrightarrow \mathbb{R}^{2 \times 1}, v \longmapsto Av$$

sind

$$E_\alpha = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}, E_\beta = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix}$$

Setze

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}, D := \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

Dann gilt:

$$S^{-1} = \frac{1}{\beta - \alpha} \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix}, AS = SD, A = SDS^{-1}, A^n = SD^n S^{-1} = S \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix} S^{-1}.$$

Es ergibt sich:

$$A^n = \frac{1}{\beta - \alpha} \begin{pmatrix} \alpha^n \beta - \beta^n \alpha & \beta^n - \alpha^n \\ \alpha^{n+1} \beta - \beta^{n+1} \alpha & \beta^{n+1} - \alpha^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Wegen $\alpha + \beta = 2x$ folgt:

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{1}{\beta - \alpha} [\alpha^n \beta - \beta^n \alpha + x(\beta^n - \alpha^n)] &= \frac{1}{\beta - \alpha} \left[\alpha^n \beta - \beta^n \alpha + \frac{\alpha + \beta}{2} (\beta^n - \alpha^n) \right] \\ &= \frac{1}{\beta - \alpha} \cdot \frac{1}{2} [\alpha^n \beta - \alpha \beta^n + \beta^{n+1} - \alpha^{n+1}] &= \frac{1}{\beta - \alpha} \cdot \frac{1}{2} [\alpha^n + \beta^n][\beta - \alpha] \\ &= \frac{1}{2} [\alpha^n + \beta^n]. \end{aligned}$$

Wir erhalten also die explizite Formel:

$$T_n(x) = \frac{1}{2} (x + \sqrt{x^2 - 1})^n + \frac{1}{2} (x - \sqrt{x^2 - 1})^n.$$

14 Euklidische Vektorräume

Definition 14.1. Ein *Skalarprodukt* auf einem \mathbb{R} -Vektorraum V ist eine Abbildung

$$V \times V \longrightarrow \mathbb{R}, (v, w) \longmapsto (v|w)$$

mit folgenden Eigenschaften:

(i) $(av + a'v'|w) = a(v|w) + a'(v'|w)$ für $a, a' \in \mathbb{R}, v, v', w \in V$.

(ii) $(v|w) = (w|v)$ für $v, w \in V$.

(iii) $(v|v) > 0$ für $v \in V \setminus \{0\}$.

Bemerkung 14.1. Aus (i), (ii) folgt:

(iv) $(v|bw + b'w') = b(v|w) + b'(v|w')$ für $b, b' \in \mathbb{R}, v, w, w' \in V$.

Wegen (i) ist für $w \in V$ die Abbildung $f_w : V \rightarrow \mathbb{R}, v \mapsto (v|w)$ linear. Daher ist $f_w(0) = 0$, d.h.

(v) $(0|w) = 0$ für $w \in V$.

Mit (ii) folgt:

(vi) $(v|0) = 0$ für $v \in V$.

Beispiel 14.1. (i) Die Abbildung $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto (x|y)$ mit $(x|y) := \sum_{i=1}^n x_i y_i$ für $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ ist ein Skalarprodukt, das **Standardskalarprodukt** des \mathbb{R}^n .

(ii) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $C[a, b]$ der \mathbb{R} -Vektorraum aller stetigen (continuous) Funktionen auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$. Durch $(f|g) := \int_a^b f(t)g(t)dt$ wird ein Skalarprodukt auf $C[a, b]$ definiert, das **Standardskalarprodukt** von $C[a, b]$.

Satz 14.1. (Ungleichung von Cauchy-Schwarz)

Für jedes Skalarprodukt auf einem \mathbb{R} -Vektorraum V gilt:

$$(x|y)^2 \leq (x|x)(y|y) \text{ für } x, y \in V.$$

Das Gleichheitszeichen tritt genau dann auf, wenn x, y linear abhängig sind.

Beweis. Im Fall $y = 0$ steht auf beiden Seiten Null. Sei also $y \neq 0$ und $c := \frac{(x|y)}{(y|y)}$. Dann gilt:

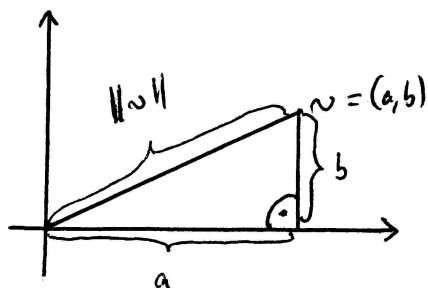
$$\begin{aligned} 0 &\leq (x - cy|x - cy) = (x|x) - c(x|y) - c(y|x) + c^2(y|y) \\ &= (x|x) - 2c(x|y) + c^2(y|y) \\ &= (x|x) - 2\frac{(x|y)^2}{(y|y)} + \frac{(x|y)^2(y|y)}{(y|y)^2} = (x|x) - \frac{(x|y)^2}{(y|y)}. \end{aligned}$$

Multiplizieren mit $(y|y)$ ergibt $0 \leq (x|x)(y|y) - (x|y)^2$. Damit ist die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung bewiesen. Im Fall $(x|x)(y|y) = (x|y)^2$ folgt $0 = (x - cy|x - cy)$, d.h. $x - cy = 0$. Also sind x, y linear abhängig.

Ist umgekehrt $x = dy$ für ein $d \in \mathbb{R}$, so ist $(x|y)^2 = d^2(y|y)^2 = (x|x)(y|y)$. \square

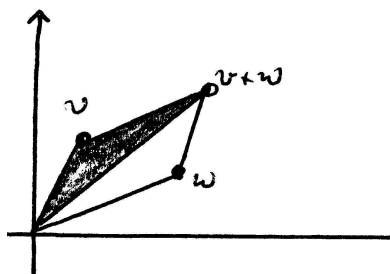
Definition 14.2. Einen \mathbb{R} -Vektorraum V mit Skalarprodukt nennt man einen *euklidischen* Vektorraum. Für $v \in V$ heißt $\|v\| := \sqrt{(v|v)}$ die *Länge (Betrag, Norm)* von v .

Beispiel 14.2. Im \mathbb{R}^2 mit dem Standardskalarprodukt gilt: $\|v\| = \sqrt{a^2 + b^2}$ für $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, d.h. $\|v\|^2 = a^2 + b^2$ (Pythagoras!)



Satz 14.2. In jedem euklidischen Vektorraum V gilt:

- (i) $\|v\| \geq 0$ für $v \in V$.
- (ii) $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$.
- (iii) $\|av\| = |a| \cdot \|v\|$ für $a \in \mathbb{R}, v \in V$.
- (iv) (Dreiecksungleichung)
 $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ für $v, w \in V$.



Beweis. (i) klar nach Definition

(ii) $\|v\| = 0 \Leftrightarrow (v|v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$.

(iii) $\|av\| = \sqrt{(av|av)} = \sqrt{a^2(v|v)} = \sqrt{a^2} \sqrt{(v|v)} = |a| \cdot \|v\|$.

(iv) $\|v + w\|^2 = (v + w|v + w) = (v|v) + (v|w) + (w|v) + (w|w) = (v|v) + 2(v|w) + (w|w)$
 $\leq (v|v) + 2|(v|w)| + (w|w) \stackrel{CSU}{\leq} \|v\|^2 + 2\|v\| \cdot \|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2$.

□

Bemerkung 14.2. Im Fall $\|v + w\| = \|v\| + \|w\|$ folgt aus dem Beweis: $|(v|w)| = \|v\| \cdot \|w\|$. Nach Satz 14.1 sind also v, w linear abhängig. Im Fall $w \neq 0$ ist daher $v = cw$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Folglich ist

$$c(w|w) = (v|w) = |(v|w)| = |c| \cdot (w|w),$$

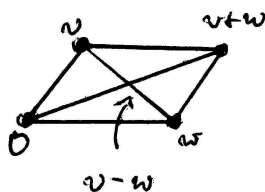
d.h. $c \geq 0$. Es gilt also:

$$\|v + w\| = \|v\| + \|w\| \Leftrightarrow w = 0 \text{ oder } v = cw \text{ für ein } c \geq 0.$$

Satz 14.3. Für alle Elemente v, w eines euklidischen Vektorraums V gilt:

(i) $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2(v|w)$ (Satz des Pythagoras)

(ii) $\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2$ (Parallelogrammgleichung)



Beweis. (i) $\|v + w\|^2 = (v + w|v + w) = (v|v) + (v|w) + (w|v) + (w|w) = \|v\|^2 + 2(v|w) + \|w\|^2$.

(ii) $\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = \|v\|^2 + 2(v|w) + \|w\|^2 + \|v\|^2 - 2(v|w) + \|w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2$. □

Definition 14.4. Für Elemente v, w eines euklidischen Vektorraums V nennt man $d(v, w) := \|v - w\|$ den **Abstand** (die **Distanz**) zwischen v und w . Die so definierte Abbildung $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ nennt man die **Metrik** von V .

Satz 14.4. Für Elemente x, y, z eines euklidischen Vektorraums V gilt stets:

(i) $d(x, y) = d(y, x)$.

(ii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. (Dreiecksungleichung)

(iii) $d(x, y) \geq 0$.

(iv) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

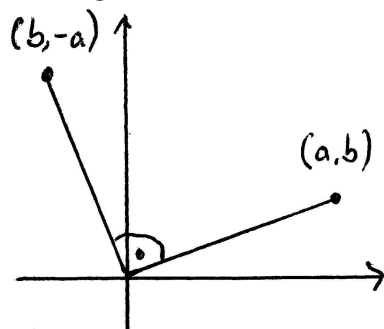
Beweis. (i) $d(x, y) = \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |-1| \cdot \|y - x\| = d(y, x)$.

(ii) $d(x, z) = \|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z)$.

(iii) klar.

(iv) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$. □

Definition 14.5. Elemente v, w in einem euklidischen Vektorraum V mit $(v|w) = 0$ nennt man *orthogonal (senkrecht)*. Man schreibt: $v \perp w$.



Von 0 verschiedene Elemente $v_1, \dots, v_n \in V$ nennt man

- (i) ein *Orthogonalsystem*, falls $v_i \perp v_j$ für alle $i \neq j$ gilt.
- (ii) ein *Orthonormalsystem*, falls zusätzlich $\|v_i\| = 1$ für alle i gilt.
- (iii) eine *Orthonormalbasis* (ONB) von V , falls sie ein Orthonormalsystem und eine Basis von V bilden.

Satz 14.5. Jedes Orthogonalsystem v_1, \dots, v_n in einem euklidischen Vektorraum V ist linear unabhängig.

Beweis. Seien $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ mit $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0$. Für $k = 1, \dots, n$ ist dann $0 = (0|v_k) = a_1(v_1|v_k) + \dots + a_n(v_n|v_k) = a_k \underbrace{(v_k|v_k)}_{\neq 0}$, d.h. $a_k = 0$. □

Bemerkung 14.5. Für jede ONB b_1, \dots, b_n eines euklidischen Vektorraums V und beliebige $r_1, s_1, \dots, r_n, s_n \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\left(\sum_{i=1}^n r_i b_i \mid \sum_{j=1}^n s_j b_j \right) = \sum_{i,j=1}^n r_i s_j (b_i | b_j) = \sum_{i=1}^n r_i s_i$$

Beispiel 14.5. Die Standardbasis e_1, \dots, e_n des \mathbb{R}^n ist eine ONB bzgl. des Standardskalarprodukts.

Satz 14.6. (*Orthonormalisierungsverfahren von Gram-Schmidt*)

Zu jeder Basis a_1, \dots, a_n eines euklidischen Vektorraums V existiert eine ONB b_1, \dots, b_n von V mit der Eigenschaft, dass jedes b_i eine Linear-Kombination von a_1, \dots, a_i ist.

Beweis. Für $b_1 := \frac{a_1}{\|a_1\|}$ gilt: $\|b_1\| = 1$. Sind bereits b_1, \dots, b_{k-1} für ein $k \leq n$ konstruiert, so setzen wir

$$c_k := a_k - \sum_{i=1}^{k-1} (a_k | b_i) b_i.$$

Für $j = 1, \dots, k-1$ gilt dann:

$$(c_k|b_j) = (a_k|b_j) - \sum_{i=1}^{k-1} (a_k|b_i)(b_i|b_j) = (a_k|b_j) - (a_k|b_j) = 0.$$

Daher bilden b_1, \dots, b_{k-1}, c_k ein Orthogonalsystem und $b_1, \dots, b_{k-1}, b_k := \frac{c_k}{\|c_k\|}$ ein Orthonormalsystem. Nach Satz 14.5 bilden am Ende b_1, \dots, b_n eine Basis von V . \square

Beispiel 14.6. Im euklidischen Vektorraum \mathbb{R}^4 mit dem Standardskalarprodukt orthonormalisieren wir $a_1 = (4, 2, -2, -1), a_2 = (2, 2, -4, -5), a_3 = (0, 8, -2, -5)$:

$$b_1 := \frac{a_1}{\|a_1\|} = \frac{1}{5}(4, 2, -2, -1).$$

$$c_2 := a_2 - (a_2|b_1)b_1 = (2, 2, -4, -5) - \frac{1}{5}25\frac{1}{5}(4, 2, -2, -1) = (-2, 0, -2, -4)$$

$$b_2 := \frac{c_2}{\|c_2\|} = \frac{1}{\sqrt{24}}(-2, 0, -2, -4).$$

$$\begin{aligned} c_3 &:= a_3 - (c_3|b_1)b_1 - (a_3|b_2)b_2 \\ &= (0, 8, -2, -5) - \frac{1}{5}25\frac{1}{5}(4, 2, -2, -1) - \frac{1}{\sqrt{24}}24\frac{1}{\sqrt{24}}(-2, 0, -2, -4) \\ &= (-2, 6, 2, 0) \end{aligned}$$

$$b_3 := \frac{c_3}{\|c_3\|} = \frac{1}{\sqrt{44}}(-2, 6, 2, 0).$$

Daher bilden b_1, b_2, b_3 eine ONB von $U := \text{Span}(a_1, a_2, a_3)$.

Satz 14.7. Jedes Orthonormalsystem a_1, \dots, a_m in einem endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraum V kann man zu einer Orthonormalbasis von V ergänzen.

Beweis. Nach Satz 14.5 sind a_1, \dots, a_m linear unabhängig. Wir ergänzen a_1, \dots, a_m zu einer Basis $a_1, \dots, a_m, a_{m+1}, \dots, a_n$ von V und wenden darauf das Gram-Schmidt-Verfahren an. Wir erhalten eine Orthonormalbasis b_1, \dots, b_n von V . Dabei gilt nach Konstruktion: $b_i = a_i$ für $i = 1, \dots, m$. \square

Definition 14.8. Für jede Teilmenge M eines euklidischen Vektorraums V nennt man

$$\begin{aligned} M^\perp &:= \{v \in V : m \perp v \text{ für } m \in M\} \\ &= \{v \in V : (m|v) = 0 \text{ für } m \in M\} \end{aligned}$$

das *orthogonale Komplement* von M in V .

Bemerkung 14.8. Für $m \in M$ ist $(m|0) = 0$, d.h. $0 \in M^\perp$. Für $v, w \in M^\perp, a, b \in \mathbb{R}$ und $m \in M$ ist $(m|av + bw) = a(m|v) + b(m|w) = 0$, d.h. $av + bw \in M^\perp$. Dies zeigt, dass M^\perp ein Untervektorraum von V ist.

Satz 14.8. Für jeden Untervektorraum U eines endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraums V gilt:

(i) $V = U \oplus U^\perp$; insbesondere ist $\dim V = \dim U + \dim U^\perp$.

(ii) $U = (U^\perp)^\perp =: U^{\perp\perp}$.

Beweis. Wir wählen eine Basis von U , orthonormalisieren diese mit dem Gram-Schmidt-Verfahren und erhalten so eine Orthonormalbasis b_1, \dots, b_m von U . Diese ergänzen wir mit Satz 14.7 zu einer Orthonormalbasis $b_1, \dots, b_m, b_{m+1}, \dots, b_n$ von V . Für $j = m+1, \dots, n$ und $r_1, \dots, r_m \in \mathbb{R}$ ist dann

$$\left(\sum_{i=1}^m r_i b_i \mid b_j \right) = \sum_{i=1}^m r_i \underbrace{(b_i \mid b_j)}_{=0} = 0,$$

d.h. $b_j \in U^\perp$. Daher ist $\dim U^\perp \geq n - m$.

Für $u \in U \cap U^\perp$ ist $(u \mid u) = 0$, d.h. $u = 0$. Daher ist $U \cap U^\perp = \{0\}$, also $U + U^\perp = U \oplus U^\perp$ und

$$\dim(U + U^\perp) = \dim U + \dim U^\perp \geq m + (n - m) = n = \dim V.$$

Folglich ist $V = U + U^\perp = U \oplus U^\perp$.

Für $u \in U, v \in U^\perp$ ist $0 = (u \mid v) = (v \mid u)$. Daher ist $U \subseteq U^{\perp\perp}$. Andererseits gilt nach (i):

$$\dim U^{\perp\perp} = \dim V - \dim U^\perp = \dim V - (\dim V - \dim U) = \dim U.$$

Folglich ist $U = U^{\perp\perp}$. □

Satz 14.9. Für Untervektorräume U_1, U_2 eines endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraums V gilt stets:

(i) $U_1 \subseteq U_2 \Leftrightarrow U_2^\perp \subseteq U_1^\perp$.

(ii) $(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$.

(iii) $(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$.

Beweis. (i)' \Rightarrow ": klar nach Definition.

" \Leftarrow ": $U_2^\perp \subseteq U_1^\perp \Rightarrow U_1^{\perp\perp} \subseteq U_2^{\perp\perp} \stackrel{14.8}{\Rightarrow} U_1 \subseteq U_2$.

(ii) Wegen $U_1 \subseteq U_1 + U_2$ gilt nach (i): $(U_1 + U_2)^\perp \subseteq U_1^\perp$. Analog ist $(U_1 + U_2)^\perp \subseteq U_2^\perp$. Daher ist $(U_1 + U_2)^\perp \subseteq U_1^\perp \cap U_2^\perp$. Umgekehrt gilt für $u_1 \in U_1, u_2 \in U_2, v \in U_1^\perp \cap U_2^\perp$:

$$(u_1 + u_2 \mid v) = (u_1 \mid v) + (u_2 \mid v) = 0 + 0 = 0,$$

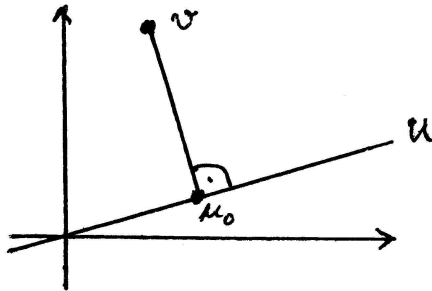
d.h. $v \in (U_1 + U_2)^\perp$. Daher ist $U_1^\perp \cap U_2^\perp \subseteq (U_1 + U_2)^\perp$.

(iii) $(U_1 \cap U_2)^\perp \stackrel{14.8}{=} (U_1^{\perp\perp} \cap U_2^{\perp\perp})^\perp \stackrel{(ii)}{=} (U_1^\perp + U_2^\perp)^{\perp\perp} \stackrel{14.8}{=} U_1^\perp + U_2^\perp$. □

Satz 14.10. Sei U ein Untervektorraum eines endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraums V . Zu jedem $v \in V$ existiert dann genau ein $u_0 \in U$ mit

$$d(v, u_0) = \min \{d(v, u) : u \in U\}.$$

Für jede Orthonormalbasis u_1, \dots, u_m von U ist $u_0 = \sum_{i=1}^m (v|u_i)u_i$.



Beweis. Seien V, U, v und u_1, \dots, u_m gegeben. Wir setzen $u_0 := \sum_{i=1}^m (v|u_i)u_i$. Für $j = 1, \dots, m$ gilt dann:

$$(v - u_0|u_j) = (v|u_j) - \sum_{i=1}^m (v|u_i)(u_i|u_j) = (v|u_j) - (v|u_j) = 0.$$

Daher ist $v - u_0 \in U^\perp$. Für $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ und $u := \sum_{i=1}^m a_i u_i$ gilt also:

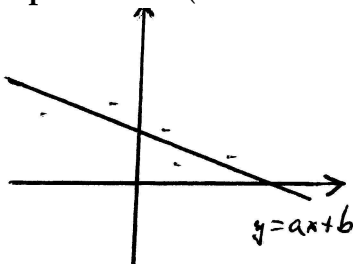
$$v - u = \underbrace{v - u_0}_{\in U^\perp} + \underbrace{\sum_{i=1}^m [(v|u_i) - a_i]u_i}_{\in U}.$$

Nach Pythagoras ist

$$\|v - u\|^2 = \|v - u_0\|^2 + \sum_{i=1}^m [(v|u_i) - a_i]^2 \geq \|v - u_0\|^2,$$

und Gleichheit hat man nur im Fall $a_i = (v|u_i)$ für $i = 1, \dots, m$. □

Beispiel 14.10. (Methode der kleinsten Quadrate, Gauß)



Eine Versuchsreihe hat Messwerte

$$(r_1, s_1), \dots, (r_n, s_n) \in \mathbb{R}^2$$

ergeben. Wir suchen eine Gerade $y = ax + b$, die diese Messwerte "approximiert", d.h. es soll gelten:

$$s_i \sim ar_i + b \text{ für } i = 1, \dots, n.$$

Genauer soll $\sum_{i=1}^n (ar_i + b - s_i)^2$ möglichst klein werden. Wir setzen

$$v_1 := (r_1, \dots, r_n), v_2 := (1, \dots, 1), v := (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Dann suchen wir $a, b \in \mathbb{R}$ mit $\|av_1 + bv_2 - v\| = \min$, d.h. im Untervektorraum $U := \text{Span}(v_1, v_2)$ von V suchen wir einen Vektor $u_0 = av_1 + bv_2$, der von v minimalen Abstand hat. Nach dem Satz ist $u_0 = (v|u_1)u_1 + (v|u_2)u_2$, wobei u_1, u_2 eine Orthonormalbasis von U ist.

Als konkretes Beispiel nehmen wir die Messwerte $(2, 8), (3, 10), (-5, -3)$. Dann ist

$$v_1 = (2, 3, -5), v_2 = (1, 1, 1), v = (8, 10, -3).$$

Wir wenden das Gram-Schmidt-Verfahren auf v_1, v_2 an und erhalten die Orthonormalbasis

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{38}}(2, 3, -5), u_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1).$$

von U . Daher ist

$$u_0 = \frac{1}{\sqrt{38}}61 \frac{1}{\sqrt{38}}(2, 3, -5) + \frac{1}{\sqrt{3}}15 \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) = \dots = \frac{1}{38}(312, 373, -115).$$

Wegen $u_0 = av_1 + bv_2$ ist $\frac{312}{38} = 2a + b$ und $\frac{373}{38} = 3a + b$, d.h.

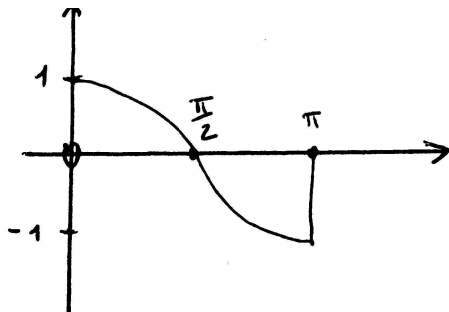
$$a = \frac{61}{38}, b = \frac{190}{38}.$$

“Probe”: $(2a + b - 8)^2 + (3a + b - 10)^2 + (-5a + b + 3)^2 = \frac{[8^2 + (-7)^2 + (-1)^2]}{38^2} = \frac{114}{1444} = \frac{3}{38} \sim 0,08$

Bemerkung 14.10. Seien V ein euklidischer Vektorraum und $a, b \in V \setminus \{0\}$. Nach der Cauchy-Schwarz’schen Ungleichung gilt:

$$-1 \leq \frac{(a|b)}{\|a\| \cdot \|b\|} \leq 1.$$

Daher existiert genau ein $\vartheta = \vartheta_{a,b} \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq \vartheta \leq \pi$ und $\cos \vartheta = \frac{(a|b)}{\|a\| \cdot \|b\|}$.

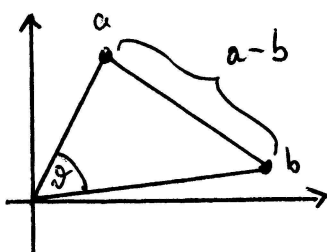


Man nennt ϑ den *Winkel* zwischen a und b . Es gilt also:

$$(a|b) = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \cos \vartheta_{a,b}.$$

Der Satz der Pythagoras nimmt dann folgende Form an:

$$\|a - b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\|a\| \cdot \|b\| \cos \vartheta_{a,b} \text{ (Cosinussatz)}$$

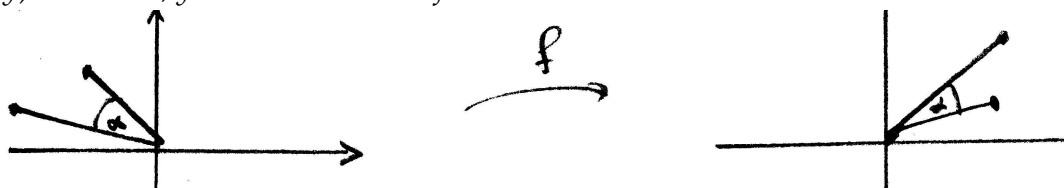


Offenbar gilt stets:

- (i) $\vartheta_{a,b} = \vartheta_{b,a}$.
- (ii) $\vartheta_{a,-b} = \pi - \vartheta_{a,b}$.
- (iii) $\vartheta_{ra, sb} = \vartheta_{a,b}$ für positive $r, s \in \mathbb{R}$.
- (iv) a, b linear abhängig $\Leftrightarrow \vartheta_{a,b} \in \{0, \pi\}$.
- (v) $a \perp b \Leftrightarrow \vartheta_{a,b} = \frac{\pi}{2}$.

15 Isometrien und orthogonale Matrizen

Definition 15.1. Seien V, W euklidische Vektorräume und $f \in \text{Hom}(V, W)$ mit $(f(x)|f(y)) = (x|y)$ für alle $x, y \in V$. Dann heißt f *Isometrie*.



Bemerkung 15.1. (i) Ggf. erhält f Längen und Winkel; insbesondere ist f injektiv.

- (ii) Ist f sogar bijektiv, so ist auch die Umkehrabbildung $f^{-1} : W \rightarrow V$ eine Isometrie; für $w, w' \in W$ gilt nämlich:

$$(f^{-1}(w)|f^{-1}(w')) = (f(f^{-1}(w))|f(f^{-1}(w'))) = (w|w').$$

- (iii) Für euklidische Vektorräume U, V, W und Isometrien $f : U \rightarrow V, g : V \rightarrow W$ ist auch $g \circ f : U \rightarrow W$ eine Isometrie; für $u, u' \in U$ gilt nämlich:

$$(g(f(u))|g(f(u'))) = (f(u)|f(u')) = (u|u').$$

(iv) Stets ist $\text{id}_V : V \rightarrow V$ eine Isometrie. Es folgt leicht, dass

$$O(V) := \{f \in \text{End}(V) : f \text{ Isometrie}\}$$

eine Gruppe bzgl. \circ ist. Man nennt $O(V)$ die *orthogonale Gruppe* von V und ihre Elemente *orthogonale Transformationen*.

Beispiel 15.1. Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (a, b) \mapsto (\frac{3}{5}a + \frac{4}{5}b, -\frac{4}{5}a + \frac{3}{5}b)$ ist eine Isometrie; denn für $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$\begin{aligned} (f(x)|f(y)) &= \left(\frac{3}{5}x_1 + \frac{4}{5}x_2\right)\left(\frac{3}{5}y_1 + \frac{4}{5}y_2\right) + \left(-\frac{4}{5}x_1 + \frac{3}{5}x_2\right)\left(-\frac{4}{5}y_1 + \frac{3}{5}y_2\right) \\ &= \frac{9}{25}x_1y_1 + \frac{12}{25}x_1y_2 + \frac{12}{25}x_2y_1 + \frac{16}{25}x_2y_2 + \frac{16}{25}x_1y_1 - \frac{12}{25}x_1y_2 - \frac{12}{25}x_2y_1 + \frac{9}{25}x_2y_2 \\ &= x_1y_1 + x_2y_2 \\ &= (x|y). \end{aligned}$$

Definition 15.2. Zwei euklidische Vektorräume V, W heißen *isometrisch isomorph*, falls eine bijektive Isometrie $f : V \rightarrow W$ existiert.

Bemerkung 15.2. Wie üblich ist die isometrische Isomorphie reflexiv, symmetrisch und transitiv.

Satz 15.2. Zwei endlich-dimensionale euklidische Vektorräume sind genau dann isometrisch isomorph, wenn sie die gleiche Dimension haben.

Beweis. Nach Satz 10.7 haben isomorphe Vektorräume stets die gleiche Dimension. Umgekehrt zeigen wir, dass jeder euklidische Vektorraum V der Dimension $n < \infty$ zum \mathbb{R}^n mit dem Standardskalarprodukt isometrisch isomorph ist. Dazu wählen wir eine Orthonormalbasis b_1, \dots, b_n von V . Die Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow V, (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i b_i$ ist linear und bijektiv, und für $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$(f(x)|f(y)) = \left(\sum_{i=1}^n x_i b_i \middle| \sum_{j=1}^n y_j b_j\right) \stackrel{14.5}{=} \sum_{i=1}^n x_i y_i = (x|y).$$

Daher ist f eine Isometrie. □

Satz 15.3. Seien V, W euklidische Vektorräume mit Orthonormalbasen b_1, \dots, b_m bzw. c_1, \dots, c_n und sei $f \in \text{Hom}(V, W)$ mit Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ bzgl. b_1, \dots, b_m und c_1, \dots, c_n . Dann gilt:

$$\boxed{f \text{ Isometrie} \Leftrightarrow A^T A = 1_m.}$$

Beweis. "⇒": Sei f Isometrie. Für $i, j = 1, \dots, m$ setzen wir

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases} \quad (\text{Kronecker-Delta})$$

Dann gilt:

$$\delta_{ij} = (b_i | b_j) = (f(b_i) | f(b_j)) = \left(\sum_{k=1}^n a_{ki} c_k \mid \sum_{l=1}^n a_{lj} c_l \right) \stackrel{14.5}{=} \sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj}.$$

Folglich ist $1_m = A^T A$.

“ \Leftarrow ”: Sei umgekehrt $A^T A = 1_m$. Für $i, j = 1, \dots, m$ gilt dann:

$$(f(b_i) | f(b_j)) = \left(\sum_{k=1}^n a_{ki} c_k \mid \sum_{l=1}^n a_{lj} c_l \right) \stackrel{14.5}{=} \sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj} = \delta_{ij}.$$

Für beliebige $x_1, y_1, \dots, x_m, y_m \in \mathbb{R}$ gilt also:

$$\begin{aligned} \left(f \left(\sum_{i=1}^m x_i b_i \right) \mid f \left(\sum_{j=1}^m y_j b_j \right) \right) &= \left(\sum_{i=1}^m x_i f(b_i) \mid \sum_{j=1}^m y_j f(b_j) \right) = \sum_{i,j=1}^m x_i y_j \underbrace{(f(b_i) | f(b_j))}_{=\delta_{ij}} \\ &= \sum_{i=1}^m x_i y_i \stackrel{14.5}{=} \left(\sum_{i=1}^m x_i b_i \mid \sum_{j=1}^m y_j b_j \right). \end{aligned}$$

Also ist f Isometrie. □

Bemerkung 15.3. (i) Sei V ein euklidischer Vektorraum und sei $f \in \text{End}(V)$ mit Matrix A bzgl. einer Orthonormalbasis b_1, \dots, b_n von V . Dann gilt insbesondere:

$$\boxed{f \in O(V) \Leftrightarrow A^T A = 1_n} \quad (\Leftrightarrow A \in \text{GL}(n, \mathbb{R}) \text{ und } A^{-1} = A^T).$$

(ii) Man zeigt leicht, dass

$$O(n) := O(n, \mathbb{R}) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A^T A = 1_n\}$$

eine Gruppe bzgl. der Multiplikation von Matrizen ist. Man nennt $O(n)$ die **orthogonale Gruppe** des Grades n (über \mathbb{R}) und ihre Elemente **orthogonale Matrizen**. Für $A \in O(n)$ ist

$$1 = |1_n| = |A^T A| = |A^T| \cdot |A| = |A|^2,$$

d.h. $|A| \in \{1, -1\}$.

(iii) Für jeden endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraum V und alle $f \in O(V)$ mit Matrix A bzgl. einer Orthonormalbasis von V gilt also: $\det f = |A| = \pm 1$.

Satz 15.4. Es seien V ein euklidischer Vektorraum mit Orthonormalbasis b_1, \dots, b_n und $S := (s_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Wir setzen $b'_j := \sum_{i=1}^n s_{ij} b_i$ ($j = 1, \dots, n$). Dann gilt:

b'_1, \dots, b'_n Orthonormalbasis von $V \Leftrightarrow S \in O(n)$.

Beweis. Für $j, k = 1, \dots, n$ ist $(b'_j | b'_k) \stackrel{14.5}{=} \sum_{i=1}^n s_{ij} s_{ik}$. Daher gilt:

b'_1, \dots, b'_n Orthonormalbasis von $V \Leftrightarrow (b'_j | b'_k) = \delta_{jk}$ für alle $j, k \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n s_{ij} s_{ik} = \delta_{jk}$ für alle $j, k \Leftrightarrow S^T S = 1_n \Leftrightarrow S \in O(n)$. \square

Satz 15.5. Seien V ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum und $0 \neq v \in V$. Wir definieren

$$s_v : V \longrightarrow V, x \longmapsto x - \frac{2(v|x)}{(v|v)}v.$$

Dann gilt:

- (i) s_v ist linear.
- (ii) $s_v(v) = -v$.
- (iii) $s_v(x) = x$ für $x \in (\mathbb{R}v)^\perp$.
- (iv) $s_v^2 = \text{id}_V$.
- (v) $s_v \in O(v)$.

Beweis. (i) Für $x, y \in V, a, b \in \mathbb{R}$ ist

$$s_v(ax+by) = (ax+by) - \frac{2(v|ax+by)}{(v|v)}v = a \left(x - \frac{2(v|x)}{(v|v)}v \right) + b \left(y - \frac{2(v|y)}{(v|v)}v \right) = as_v(x) + bs_v(y).$$

(ii) $s_v(v) = v - \frac{2(v|v)}{(v|v)}v = -v$.

(iii) $x \in (\mathbb{R}v)^\perp \Rightarrow s_v(x) = x - \frac{2(v|x)}{(v|v)}v = x$.

(iv) $s_v^2(v) = s_v(-v) = -s_v(v) = -(-v) = v$ und $s_v^2(x) = s_v(s_v(x)) = s_v(x) = x$ für $x \in (\mathbb{R}v)^\perp$.
Wegen $V = \mathbb{R}v \oplus (\mathbb{R}v)^\perp$ folgt die Behauptung.

(v) Für $x, y \in V$ gilt:

$$\begin{aligned} (s_v(x) | s_v(y)) &= \left(x - \frac{2(v|x)}{(v|v)}v \mid y - \frac{2(v|y)}{(v|v)}v \right) \\ &= (x|y) - \frac{2(v|x)}{(v|v)}(v|y) - \frac{2(v|y)}{(v|v)}(x|v) + \frac{4(v|x)(v|y)}{(v|v)(v|v)}(v|v) = (x|y). \end{aligned}$$

\square

Definition 15.5. Man nennt s_v die *Spiegelung* an der Hyperebene $(\mathbb{R}v)^\perp$

Bemerkung 15.5. Die Matrix von s_v bzgl. einer geeigneten Orthonormalbasis von V ist also

$$\begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix};$$

insbesondere ist $\det s_v = -1$.

Satz 15.6. Seien V ein euklidischer Vektorraum der Dimension $n < \infty$ und $f \in O(V)$. Dann existieren $k \leq n$ Elemente $v_1, \dots, v_k \in V$ mit $f = s_{v_1} \circ \dots \circ s_{v_k}$ [d.h. f lässt sich als Produkt von höchstens n Spiegelungen schreiben].

Bemerkung 15.6. Dabei wird ein "leeres" Produkt als $1 = \text{id}_V$ interpretiert.

Beweis. (Induktion nach n)

Im Fall $n = 0$ ist nichts zu tun. Sei also $n \geq 1$. Wir können $f \neq \text{id}_V$ annehmen und $v \in V$ mit $f(v) \neq v$ wählen. Wir setzen $w := f(v) - v$ und $s := s_w$. Dann ist $s(w) = -w$, d.h.

$$s(f(v) - v) = v - f(v). \quad (1)$$

Andererseits ist

$$(w|f(v) + v) = (f(v) - v|f(v) + v) = (f(v)|f(v)) - (v|v) = 0,$$

d.h. $f(v) + v \in (\mathbb{R}w)^\perp$ und damit

$$s(f(v) + v) = f(v) + v. \quad (2)$$

Addition von (1) und (2) ergibt $s(2f(v)) = 2v$, d.h. $s(f(v)) = v$.

Für $u \in U := (\mathbb{R}v)^\perp$ gilt also:

$$(v|s(f(u))) = (s(f(v))|s(f(u))) = (v|u) = 0,$$

d.h. $s(f(u)) \in U$. Daher kann man $s \circ f$ zu einer Abbildung

$$g : U \longrightarrow U, u \longmapsto s(f(u))$$

einschränken. Sicher ist $g \in O(U)$. Nach Induktion existieren $u_2, \dots, u_k \in U$ ($k-1 \leq n-1$) mit $g = s_{u_2}|U \circ \dots \circ s_{u_k}|U$. (Beachte, dass $s_{u_i}|U$ eine Spiegelung auf U ist.) Für $u \in U$ ist also

$$s(f(u)) = g(u) = s_{u_2}(\dots s_{u_k}(u) \dots).$$

Außerdem ist $s(f(v)) = v = (s_{u_2} \circ \dots \circ s_{u_k})(v)$. Wegen $V = (\mathbb{R}v) \oplus (\mathbb{R}v)^\perp$ ist also $s \circ f = s_{u_2} \circ \dots \circ s_{u_k}$, d.h. $f = s \circ s_{u_2} \circ \dots \circ s_{u_k}$. \square

Beispiel 15.7. Sei V ein euklidischer Vektorraum der Dimension 2, und sei $f \in O(V)$ mit Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ bzgl. einer Orthonormalbasis e_1, e_2 von V . Wegen $A^T A = 1_2$ ist

$$a^2 + c^2 = 1, ab + cd = 0, b^2 + d^2 = 1.$$

Daher existiert genau ein $\vartheta \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$ und $a = \cos \vartheta, c = \sin \vartheta$. Ferner folgt leicht: $(b, d) = \pm(-c, a)$.

Fall 1: $(b, d) = (-c, a)$, d.h. $A = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}$ und $|A| = \cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta = 1$. Geometrisch ist f eine *Drehung* um den Winkel ϑ .

Fall 2: $(b, d) = (c, -a)$, d.h. $A = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & -\cos \vartheta \end{pmatrix}$ und $|A| = -\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta = -1$. Wir setzen

$$b_1 := \left(\cos \frac{\vartheta}{2}\right)e_1 + \left(\sin \frac{\vartheta}{2}\right)e_2$$

$$b_2 := \left(-\sin \frac{\vartheta}{2}\right)e_1 + \left(\cos \frac{\vartheta}{2}\right)e_2.$$

Wir erinnern an die Additionstheoreme:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

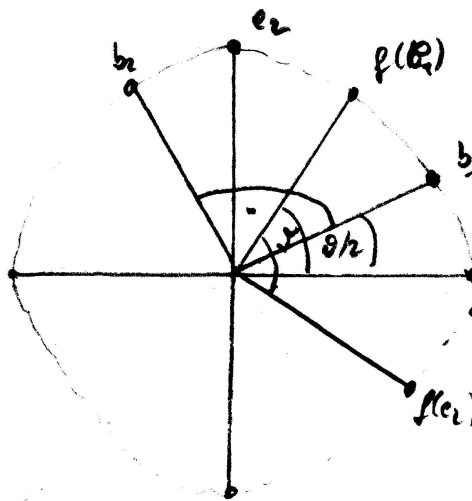
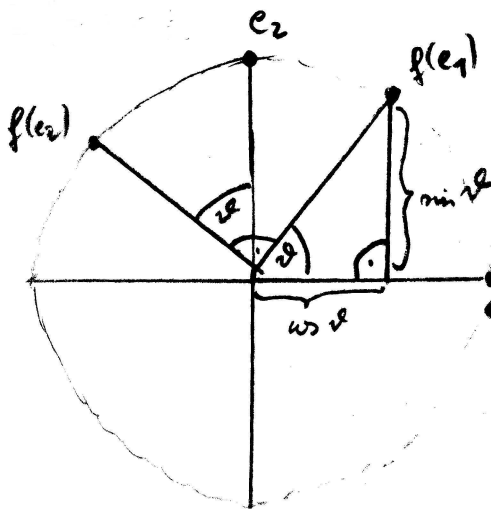
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta.$$

Offenbar bilden b_1, b_2 eine Orthonormalbasis von V mit

$$\begin{aligned} f(b_1) &= \left(\cos \frac{\vartheta}{2}\right)[(\cos \vartheta)e_1 + (\sin \vartheta)e_2] + \left(\sin \frac{\vartheta}{2}\right)[(\sin \vartheta)e_1 - (\cos \vartheta)e_2] \\ &= \left[(\sin \vartheta)\left(\sin \frac{\vartheta}{2}\right) + (\cos \vartheta)\left(\cos \frac{\vartheta}{2}\right)\right]e_1 + \left[(\sin \vartheta)\left(\cos \frac{\vartheta}{2}\right) - (\cos \vartheta)\left(\sin \frac{\vartheta}{2}\right)\right]e_2 \\ &= \cos\left(\vartheta - \frac{\vartheta}{2}\right)e_1 + \sin\left(\vartheta - \frac{\vartheta}{2}\right)e_2 = b_1 \end{aligned}$$

$$f(b_2) = \dots = -b_2$$

Die Matrix von f bzgl. b_1, b_2 ist also $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Geometrisch ist f eine Spiegelung an der Geraden $\mathbb{R}b_1$.



Satz 15.8. (QR-Zerlegung von Matrizen)

Sei $A \in GL(n, \mathbb{R})$. Dann existieren ein $Q \in O(n)$ und eine obere Dreiecksmatrix R mit lauter positiven Diagonalelementen und $A = QR$; dabei sind Q, R eindeutig bestimmt.

Beweis. Wir versehen den $\mathbb{R}^{n \times 1}$ mit dem Standardskalarprodukt und wenden auf die Spalten a_1, \dots, a_n von A das Gram-Schmidt-Verfahren an. Wir erhalten eine Orthonormalbasis b_1, \dots, b_n von $\mathbb{R}^{n \times 1}$ mit $\text{Span}(b_1, \dots, b_i) = \text{Span}(a_1, \dots, a_i)$ für $i = 1, \dots, n$. Wir schreiben:

$$\begin{aligned} a_1 &= r_{11}b_1 \\ a_2 &= r_{12}b_1 + r_{22}b_2 \\ &\vdots \\ a_n &= r_{1n}b_1 + r_{2n}b_2 + \dots + r_{nn}b_n \end{aligned} \quad (r_{ij} \in \mathbb{R}).$$

Das Gram-Schmidt-Verfahren zeigt auch, dass $r_{11}, r_{22}, \dots, r_{nn}$ positiv sind. Es sei Q die

Matrix mit den Spalten b_1, \dots, b_n . Dann ist $Q \in O(n)$ und $A = QR$ mit

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & r_{nn} \end{pmatrix}.$$

Zum Beweis der Eindeutigkeit sei auch $A = Q_1 R_1$ mit $Q_1 \in O(n)$ und einer oberen Dreiecksmatrix R_1 , die lauter positive Diagonalelemente hat. Dann ist $Q^{-1}Q_1 = R R_1^{-1} \in O(n)$ eine obere Dreiecksmatrix, die lauter positive Diagonalelemente hat. Wir schreiben

$$Q^{-1}Q_1 = \begin{pmatrix} \star & \star & \dots & \star \\ 0 & \star & \dots & \star \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \star \end{pmatrix}.$$

Da die Spalten dieser Matrix paarweise orthogonal sind, folgt leicht: $Q^{-1}Q_1 = 1_n$, d.h. $Q = Q_1$ und $R = R_1$. □

Beispiel 15.8. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Spalten: $a_1 = (1, 1, 1), a_2 = (1, 2, 1), a_3 = (2, 3, 1)$.

Gram-Schmidt-Verfahren:

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1), b_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, -1), b_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1).$$

Schreibe:

$$\begin{aligned} a_1 &= r_{11}b_1 \\ a_2 &= r_{12}b_1 + r_{22}b_2 \\ a_3 &= r_{13}b_1 + r_{23}b_2 + r_{33}b_3 \end{aligned}$$

Dann:

$$\begin{aligned} r_{11} &= (a_1|b_1) = \sqrt{3} \\ r_{12} &= (a_2|b_1) = \frac{4}{\sqrt{3}} \\ r_{13} &= (a_3|b_1) = 2\sqrt{3} \\ r_{22} &= (a_2|b_2) = \frac{\sqrt{6}}{3} \\ r_{23} &= (a_3|b_2) = \frac{\sqrt{6}}{2} \\ r_{33} &= (a_3|b_3) = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

QR-Zerlegung:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}_{=:Q} \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{4}{\sqrt{3}} & 2\sqrt{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}}_{=:R}$$

(Probe!)

16 Selbstadjungierte lineare Abbildungen und symmetrische Matrizen

Definition 16.1. Seien V ein euklidischer Vektorraum und $f \in \text{End}(V)$ mit $(f(x)|y) = (x|f(y))$ für alle $x, y \in V$. Dann heißt f **selbstadjungiert**.

Satz 16.1. Seien V ein euklidischer Vektorraum und $f \in \text{End}(V)$ mit Matrix $A = (a_{ij})$ bzgl. einer Orthonormalbasis b_1, \dots, b_n von V . Dann gilt:

$$f \text{ selbstadjungiert} \Leftrightarrow A \text{ symmetrisch.}$$

Beweis. Für $i, j = 1, \dots, n$ gilt:

$$\begin{aligned} (f(b_i)|b_j) &= \left(\sum_{k=1}^n a_{ki} b_k \mid b_j \right) &&= \sum_{k=1}^n a_{ki} (b_k|b_j) = a_{ji}, \\ (b_i|f(b_j)) &= \left(b_i \mid \sum_{k=1}^n a_{kj} b_k \right) &&= \sum_{k=1}^n a_{kj} (b_i|b_k) = a_{ij}. \end{aligned}$$

“ \Rightarrow ”: Sei f selbstadjungiert. Für $i, j = 1, \dots, n$ gilt dann:

$$a_{ji} = (f(b_i)|b_j) = (b_i|f(b_j)) = a_{ij}.$$

Daher ist A symmetrisch.

“ \Leftarrow ”: Sei A symmetrisch. Dann gilt für $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \left(f \left(\sum_{i=1}^n x_i b_i \right) \mid \sum_{j=1}^n y_j b_j \right) &= \left(\sum_{i=1}^n x_i f(b_i) \mid \sum_{j=1}^n y_j b_j \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n x_i y_j (f(b_i)|b_j) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j a_{ji} = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j a_{ij} \\ &= \sum_{i,j=1}^n x_i y_j (b_i|f(b_j)) = \dots = \left(\sum_{i=1}^n x_i b_i \mid f \left(\sum_{j=1}^n y_j b_j \right) \right). \end{aligned}$$

Daher ist f selbstadjungiert.

□

Beispiel 16.1. Sei $V := \mathbb{R}^2$ ausgestattet mit dem Standardskalarprodukt und sei $f \in \text{End}(V)$ mit $f(a, b) = (a + 3b, 3a + 2b)$ für $a, b \in \mathbb{R}$. Die Matrix von f bzgl. der Standardbasis von V ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Da die Standardbasis eine Orthonormalbasis von V ist, ist f selbstadjungiert. Man kann dies auch direkt sehen; für $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in V$ gilt nämlich:

$$\begin{aligned} (f(x)|y) &= (x_1 + 3x_2)y_1 + (3x_1 + 2x_2)y_2 = x_1y_1 + 3x_2y_1 + 3x_1y_2 + 2x_2y_2 \\ &= x_1(y_1 + 3y_2) + x_2(3y_1 + 2y_2) = (x|f(y)). \end{aligned}$$

Satz 16.2. (Fundamentalsatz der Algebra, C.F. Gauß 1777-1855)

Seien $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ mit $a_n \neq 0$ und $n \neq 0$. Dann hat die Funktion

$$p : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

mindestens eine Nullstelle in \mathbb{C} .

Beweis. Funktionentheorie oder Algebra. □

Satz 16.3. Jede symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ besitzt einen reellen Eigenwert.

Beweis. Das charakteristische Polynom p von A ist ein reelles Polynom vom Grad n . Man kann p auch als komplexes Polynom auffassen. Nach Satz 16.2 hat p eine Nullstelle $t \in \mathbb{C}$. Dann ist t Eigenwert von A , aufgefasst als komplexe Matrix. Wir werden zeigen: $t \in \mathbb{R}$. Die Abbildung $f : \mathbb{C}^{n \times 1} \longrightarrow \mathbb{C}^{n \times 1}, z \longmapsto Az$ ist linear mit Matrix A bzgl. der Standardbasis.

Daher ist t auch Eigenwert von f . Sei $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times 1}$ ein entsprechender Eigenvektor.

Wir schreiben $t = r + si$ und $z_j = x_j + y_j i$ mit $r, s, x_j, y_j \in \mathbb{R}$ ($j = 1, \dots, n$) und setzen

$$x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1}. \text{ Dann ist } z = x + iy \text{ und}$$

$$Ax + iAy = A(x + iy) = Az = f(z) = tz = (r + si)(x + iy) = (rx - sy) + i(sx + ry).$$

Vergleich von Real- und Imaginärteil liefert $Ax = rx - sy$ und $Ay = sx + ry$. Daher gilt:

$$\begin{aligned} \underbrace{r \sum_{i=1}^n y_i x_i - s \sum_{i=1}^n y_i^2}_{\in \mathbb{R}} &= ry^T x - sy^T y = y^T (rx - sy) = y^T Ax = (y^T Ax)^T \\ &= x^T A^T y = x^T Ay = x^T (sx + ry) = sx^T x + rx^T y \\ &= s \sum_{i=1}^n x_i^2 + r \sum_{i=1}^n x_i y_i, \end{aligned}$$

d.h. $0 = s \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n y_i^2 \right)}_{\neq 0}$ und $s = 0$. Folglich ist $t = r \in \mathbb{R}$. □

Satz 16.4. Seien V ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum und $f \in \text{End}(V)$. Genau dann ist f selbstadjungiert, wenn eine Orthonormalbasis von V existiert, die aus Eigenvektoren von f besteht.

Beweis. “ \Rightarrow ”: Sei f selbstadjungiert und A die Matrix von f bzgl. einer beliebigen Orthonormalbasis von V . Dann ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch. Nach Satz 16.3 besitzt A einen Eigenwert $r_1 \in \mathbb{R}$. Dieser ist auch Eigenwert von f . Sei v_1 ein entsprechender Eigenvektor, o.B.d.A. $\|v_1\| = 1$. Dann ist $V = \mathbb{R}v_1 \oplus U$ mit $U := (\mathbb{R}v_1)^\perp$, und für $u \in U$ gilt:

$$(v_1|f(u)) = (f(v_1)|u) = (r_1 v_1|u) = r_1 \underbrace{(v_1|u)}_{=0} = 0,$$

d.h. $f(u) \in (\mathbb{R}v_1)^\perp = U$. Daher kann man f zu einer linearen Abbildung $g : U \rightarrow U$ einschränken. Offenbar ist U auch ein euklidischer Vektorraum, und für $x, y \in U$ gilt:

$$(g(x)|y) = (f(x)|y) = (x|f(y)) = (x|g(y)).$$

Daher ist g auch selbstadjungiert. Wir argumentieren jetzt mit Induktion nach $\dim V$. Dann können wir annehmen, dass eine Orthonormalbasis v_2, \dots, v_n von U existiert, die aus Eigenvektoren von g besteht. Dann bilden v_1, v_2, \dots, v_n eine Orthonormalbasis von V , die aus Eigenvektoren von f besteht.

“ \Leftarrow ”: Sei b_1, \dots, b_n eine Orthonormalbasis von V , die aus Eigenvektoren von f besteht. Die Matrix A von f bzgl. b_1, \dots, b_n ist also eine Diagonalmatrix; insbesondere ist A symmetrisch. Daher ist f selbstadjungiert. □

Beispiel 16.4. Sei $V := \mathbb{R}^3$, versehen mit dem Standardskalarprodukt, und sei $f \in \text{End}(V)$ mit Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -1 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

bzgl. der Standardbasis von V . Wegen $A^T = A$ ist f selbstadjungiert. Wir berechnen die Eigenwerte von f :

$$\begin{vmatrix} r-6 & 1 & 1 \\ 1 & r-6 & 1 \\ 1 & 1 & r-6 \end{vmatrix} = \dots = (r-4)(r-7)^2$$

Daher sind 4 und 7 die einzigen Eigenwerte von A (und f). Als nächstes berechnen wir $E_4(f)$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Eigenvektor ist z.B. $(1, 1, 1)$. Normierung ergibt $b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$.

Dann berechnen wir $E_7(f)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Z.B. bilden $(1, -1, 0), (1, 0, -1)$ eine Basis von $E_7(f)$. Auf diese wenden wir das Gram-Schmidt-Verfahren an und erhalten die Orthonormalbasis

$$b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0), b_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2).$$

von $E_7(f)$. Dann bilden b_1, b_2, b_3 eine Orthonormalbasis von V , und die Matrix von f bzgl. b_1, b_2, b_3 ist

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Satz 16.5. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau dann symmetrisch, wenn ein $S \in O(n)$ existiert mit der Eigenschaft, dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist.

Beweis. " \Rightarrow ": Sei A symmetrisch. Wir betrachten den euklidischen Vektorraum $V = \mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt und die selbstadjungierte lineare Abbildung $f : V \rightarrow V$ mit Matrix A bzgl. der Standardbasis e_1, \dots, e_n von V . Nach Satz 16.4 existiert eine Orthonormalbasis b_1, \dots, b_n von V , die aus Eigenvektoren von f besteht. Die Matrix B von f bzgl. b_1, \dots, b_n ist also eine Diagonalmatrix. Wir schreiben $b_j = \sum_{i=1}^n s_{ij}e_i$ ($s_{ij} \in \mathbb{R}$). Dann ist $B = S^{-1}AS$, und nach Satz 15.4 ist $S \in O(n)$.

" \Leftarrow ": Seien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $S \in O(n)$ und $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix. Dann ist

$$S^{-1}AS = (S^{-1}AS)^T = S^T A^T (S^{-1})^T = S^{-1}A^T S,$$

d.h. $A = A^T$.

□

Bemerkung 16.5. Die Sätze 16.4 und 16.5 bezeichnet man als *Hauptachsentransformation*. Sie sind äußerst wichtig.

Beispiel 16.5. Zu

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

suchen wir ein $S \in O(3)$ mit der Eigenschaft, dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist. Zunächst bestimmen wir die Eigenwerte:

$$\begin{vmatrix} r-2 & 1 & -2 \\ 1 & r-2 & -2 \\ -2 & -2 & r+1 \end{vmatrix} = \dots = (r-3)^2(r+3).$$

Daher sind 3 und -3 die einzigen Eigenwerte von A . Wir betrachten den euklidischen Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt und die lineare Abbildung $f : V \rightarrow V$ mit Matrix A bzgl. der Standardbasis von V . Wegen $A^T = A$ ist f selbstadjungiert. Wir berechnen $E_{-3}(f)$:

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & -2 \\ 1 & -5 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Z.B. ist $(-1, -1, 2)$ eine Basis von $E_{-3}(f)$. Normierung ergibt: $b_1 := \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, -1, 2)$. Analog berechnen wir $E_3(f)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Z.B. bilden $(2, 0, 1), (-1, 1, 0)$ eine Basis des $E_3(f)$. Auf diese wenden wir das Gram-Schmidt-Verfahren an und erhalten die Orthonormalbasis

$$b_2 := \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 0, 1), b_3 := \frac{1}{\sqrt{30}}(-1, 5, 2).$$

von $E_3(f)$. Dann bilden b_1, b_2, b_3 eine Orthonormalbasis von V . Daher ist

$$S := \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \end{pmatrix} \in O(3)$$

und

$$AS = S \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \text{ d.h. } S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(Probe!) Beachte dabei: $S^{-1} = S^T$!

Satz 16.6. Seien V ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum und $f \in O(V)$. Dann existiert eine Orthonormalbasis von V , bzgl. der die Matrix von f folgende Form hat:

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 & & & & & & & 0 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & \cos \varphi_r & -\sin \varphi_r & & & & \\ & & & \sin \varphi_r & \cos \varphi_r & & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & -1 & \\ & & & & & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

Beweis. (Induktion nach $\dim V =: n$)

Im Fall $n = 1$ wählen wir $b_1 \in V$ mit $\|b_1\| = 1$. Dann ist b_1 eine Orthonormalbasis von V , und nach Bemerkung 15.3 ist $\det f = \pm 1$. Also hat die Matrix von f bzgl. b_1 die Form (± 1) .

Im Fall $n = 2$ kann man nach Beispiel 15.7 eine Orthonormalbasis b_1, b_2 von V so wählen, dass die Matrix von f bzgl. b_1, b_2 eine der beiden folgenden Formen hat:

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sei also $n \geq 3$ und $g := f + f^{-1} \in \text{End}(V)$. Hat f die Matrix A bzgl. einer beliebigen Orthonormalbasis von V , so hat g bzgl. der gleichen Orthonormalbasis die Matrix $A + A^{-1} = A + A^T$. Diese ist symmetrisch, besitzt also einen Eigenwert $a \in \mathbb{R}$. Dieser ist auch Eigenwert von g . Sei $v \in V$ ein entsprechender Eigenvektor und $U := \text{Span}(v, f(v))$. Wegen

$$f(f(v)) = f(g(v) - f^{-1}(v)) = f(av) - v = af(v) - v \in U$$

ist $f(U) \subseteq U$. Da f bijektiv ist, folgt $f(U) = U$ und $U = f^{-1}(U)$. Für $w \in U^\perp =: W$ und $u \in U$ ist

$$(u|f(w)) = \underbrace{(f^{-1}(u)|}_{\in U} \underbrace{f^{-1}(f(w))}_{=w \in U^\perp}) = 0.$$

Daher ist auch $f(W) \subseteq U^\perp = W$, d.h. $f(W) = W$. Wir können also f zu Abbildungen $f_U \in O(U)$ und $f_W \in O(W)$ einschränken. Wegen $\dim U \leq 2$ und $\dim W < \dim V$ existieren nach Induktion Orthonormalbasen b_1, \dots, b_m von U und b_{m+1}, \dots, b_n von W , bzgl. denen die Matrizen von f_U und f_W die gewünschte Form haben. Wegen $V = U \oplus W$ ist b_1, \dots, b_n eine Orthonormalbasis von V . Nummeriert man b_1, \dots, b_n notfalls noch um, so hat die Matrix von f auch die gewünschte Form. \square

Beispiel 16.6. Sei $V := \mathbb{R}^3$, ausgestattet mit dem Standardskalarprodukt, und sei $f \in \text{End}(V)$ mit Matrix

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

bzgl. der Standardbasis. Wegen $A^T A = 1_3$ ist $f \in O(V)$. Das charakteristische Polynom von A ist

$$p(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = (x-1)(x^2 - x + 1).$$

Daher ist 1 der einzige Eigenwert von f . Der entsprechende Eigenraum ist $\mathbb{R}(1, 1, 1)$ mit Orthonormalbasis $b_1 := \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$.

Wir setzen $W := E_1(f)^\perp$. Dann bilden $a_2 = (1, -1, 0), a_3 = (1, 0, -1)$ eine Basis von W . Darauf wenden wir das Gram-Schmidt-Verfahren an und erhalten die folgende Orthonormalbasis von W :

$$b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0), b_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2).$$

Dabei gilt:

$$\begin{aligned} f(b_2) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1) & &= \frac{1}{2}b_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}b_3. \\ f(b_3) &= \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, -1) & &= -\frac{\sqrt{3}}{2}b_2 + \frac{1}{2}b_3. \end{aligned}$$

Die Matrix von f bzgl. der Orthonormalbasis b_1, b_2, b_3 von V ist also

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ 0 & \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{pmatrix}.$$

Satz 16.7. Zu jeder Matrix $Q \in O(n)$ existiert eine Matrix $S \in O(n)$ mit der Eigenschaft, dass $S^{-1}QS = S^T QS$ die folgende Form hat:

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 & & & & & & & & & 0 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & & & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & & & \\ & & & \cos \varphi_r & -\sin \varphi_r & & & & & & \\ & & & \sin \varphi_r & \cos \varphi_r & & & & & & \\ & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & & -1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

Beweis. Sei $V := \mathbb{R}^{n \times 1}$, versehen mit dem Standardskalarprodukt. Dann ist die Abbildung $f : V \rightarrow V, v \mapsto Qv$ eine Isometrie. Nach Satz 16.6 existiert eine Orthonormalbasis b_1, \dots, b_n von V , bzgl. der die Matrix R von f die gewünschte Form hat. Es gilt also:

$$\begin{aligned} Qb_1 &= f(b_1) &&= (\cos \varphi_1)b_1 + (\sin \varphi_1)b_2 \\ Qb_2 &= f(b_2) &&= (-\sin \varphi_1)b_1 + (\cos \varphi_1)b_2 \\ &\dots && \end{aligned}$$

Für die Matrix S mit den Spalten b_1, \dots, b_n gilt also:

$$QS = Q(b_1 b_2 \dots) = (b_1 b_2 \dots) \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 & & \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & & \\ & & \ddots & \end{pmatrix} = SR,$$

d.h. $R = S^{-1}QS = S^T QS$ wegen $S \in O(n)$. □

Beispiel 16.7. Sei

$$Q := \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & -4 & -2\sqrt{2} \\ -4 & -1 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}, \text{ d.h. } Q \in O(3).$$

Das charakteristische Polynom von Q ist

$$p(x) = x^3 - \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{5}x + 1 = (x+1)\left(x^2 - \frac{6}{5}x + 1\right).$$

Daher ist -1 der einzige reelle Eigenwert von Q , also auch der einzige reelle Eigenwert der Isometrie

$$f : \mathbb{R}^{3 \times 1} \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 1}, v \mapsto Qv.$$

Dabei hat $E_{-1}(f) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ die Orthonormalbasis $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Wir setzen $W := E_{-1}(f)^\perp$. Dann bilden

$$a_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis von W . Das Gram-Schmidt-Verfahren macht daraus die Orthonormalbasis

$$b_2 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

von W . Dabei gilt:

$$f(b_2) = \frac{3}{5}b_2 + \frac{4}{5}b_3$$
$$f(b_3) = -\frac{4}{5}b_2 + \frac{3}{5}b_3$$

Also ist

$$Q \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_S = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_S \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}}_R$$

d.h. $R = S^{-1}QS = S^TQS$ (Probe!)

Setze also $\varphi := \arccos\left(\frac{3}{5}\right)$.

Literatur

- [1] A. Beutelspacher
- [2] G. Fischer
- [3] W. Gawronski
- [4] H. Grauert - H.-Ch. Grunau
- [5] K. Jänich
- [6] K.-H. Kija - F. Schwarz
- [7] M. Koecher
- [8] H.-J. Kowalsky - G. Michler
- [9] F. Lorenz
- [10] H. Lüneburg
- [11] U. Stambach
- [12] G. Stroth
- [13] R. Walter
- [14] H. Zieschang
- [15] Preiswerte Alternative:
Vorlesungsskripten im Internet

Index

- Äquivalenz von Aussagen, 3
- Übergangswahrscheinlichkeit, 83
- ähnliche Matrizen, 66
- äquivalente Matrizen, 50
- äußere Verknüpfung eines Vektorraums, 17

- Abbildung, 8
- Abel, 14
- abelsche Gruppe, 14
- Abstand, 90
- Additionstheoreme für Sinus und Cosinus, 101
- Adjunkte, 74
- Algebra, 105
- allgemeine lineare Gruppe eines Vektorraums, 60
- allgemeine lineare Gruppe von Matrizen, 33
- Approximationstheorie, 86
- Assoziativgesetz für Gruppen, 14
- Assoziativgesetz für Matrixmultiplikation, 31
- Assoziativgesetz für Vektorräume, 17
- Assoziativität der Hintereinanderausführung, 10
- Assoziativität von Durchschnitt und Vereinigung, 6
- aufgespannter Untervektorraum, 21
- Austauschsatz, 39
- Automorphismus, 60

- Basis, 38
- Bekannte eines linearen Gleichungssystem, 22
- Betrag, 89
- bijektive Abbildung, 9
- Bild einer Funktion, 9
- Bild einer Teilmenge, 9
- Bild eines Elements, 9

- Cantor, 4

- Cauchy, 88
- Cauchy-Schwarz-Ungleichung, 88
- charakteristisches Polynom einer Matrix, 78
- charakteristisches Polynom eines Endomorphismus, 79
- Cosinussatz, 96
- Cramer, 74
- Cramersche Regel, 74

- De Morgan'sche Regel für Aussagen, 4
- De Morgan'sche Regeln für Durchschnitt und Vereinigung, 6
- Defekt einer linearen Abbildung, 56
- Definitionsbereich, 9
- Determinante einer Matrix, 67
- Determinante eines Endomorphismus, 76
- diagonalisierbare Matrix, 65
- diagonalisierbarer Endomorphismus, 66
- Diagonalmatrix, 65
- Differenzmenge, 5
- Dimension, 40
- direkte Summe von Untervektorräumen, 21
- direktes Produkt von Mengen, 7
- disjunkte Mengen, 5
- Disjunktion, 3
- Distanz, 90
- Distributivgesetz für Körper, 16
- Distributivgesetz für Vektorräume, 17
- Distributivgesetze für Matrizen, 31
- Distributivität von Durchschnitt und Vereinigung, 6
- Drehung, 101
- Dreiecksungleichung für die Metrik, 90
- Dreiecksungleichung für die Norm, 89
- Dualraum, 63
- Durchschnitt, 5

- Ebene, 40

Eigenraum eines Endomorphismus, 76
 Eigenvektor eines Endomorphismus, 76
 Eigenwert einer Matrix, 78
 Eigenwert eines Endomorphismus, 76
 Einheitsmatrix, 32
 Einschränkung von Abbildungen, 12
 Einselement eines Körpers, 16
 Element, 4
 elementare Matrix, 43
 elementare Spaltenumformungen einer Matrix, 50
 Elementare Umformungen eines linearen Gleichungssystems, 23
 Elementare Zeilenumformungen einer Matrix, 25
 Eliminationsverfahren, 24
 Endomorphismus, 60
 Epimorphismus, 57
 erweiterte Matrix eines linearen Gleichungssystems, 25
 euklidischer Vektorraum, 89

 führende Eins, 26
 Familie, 13
 Fibonacci, 81
 Fibonacci-Zahlen, 81
 Folge, 13
 Format einer Matrix, 25
 Fortsetzung von Abbildungen, 12
 freie Variable, 27
 Fundamentalsatz der Algebra, 105
 Funktion, 8
 Funktionentheorie, 105

 ganze Zahlen, 4
 Gauß, 24
 Gauß-Algorithmus, 24
 gebundene Variable, 27
 general linear group, 33
 geordnetes Paar, 7
 Gerade, 40
 Gleichheits-Relation, 8
 Gleichwertigkeit von Aussagen, 3

 Gram, 91
 Gram-Schmidt-Verfahren, 91
 Gruppe, 14

 Hauptachsentransformation, 107
 Hauptdiagonale, 32
 Hintereinanderausführung von Abbildungen, 10
 homogenes lineares Gleichungssystem, 27
 Homomorphismus, 54
 Hyperebene, 40

 Idempotenz von Durchschnitt und Vereinigung, 5
 Identitätsabbildung, 9
 Implikation, 3
 Indexmenge, 13
 inhomogenes lineares Gleichungssystem, 27
 injektive Abbildung, 9
 Inklusionsabbildung, 9
 innere Verknüpfung eines Vektorraums, 17
 Interpolationstheorie, 86
 Intervall, 9
 inverse Matrix, 32
 inverses Element, 14
 invertierbare Matrix, 32
 Isometrie, 96
 isometrisch isomorphe euklidische Vektorräume, 97
 isomorphe Vektorräume, 57
 Isomorphismus, 57

 Körper, 15
 kanonische Basis, 39
 kartesisches Produkt von Mengen, 7
 Kern einer linearen Abbildung, 55
 Kleiner-Relation, 8
 kleinste Quadrate, 94
 Koeffizienten einer Matrix, 24
 Koeffizienten eines linearen Gleichungssystems, 22
 Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystems, 25
 kommutative Gruppe, 14

Kommutativgesetz für Gruppen, 14
 Kommutativität von Durchschnitt und Vereinigung, 5
 Komplement eines Untervektorraums, 41
 komplexe Zahlen, 4
 Komponenten eines geordneten Paares, 7
 Komposition von Abbildungen, 10
 Konjunktion, 3
 Koordinate, 13
 Kronecker, 98
 Kronecker-Delta, 98

 Länge, 89
 Lösung eines linearen Gleichungssystems, 22
 Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems, 22
 Labyrinth, 82
 Laplace, 73
 leere Menge, 5
 lineare Abbildung, 54
 lineare Abhängigkeit, 37
 lineare Hülle, 21
 lineare Unabhängigkeit, 37
 linearer Raum, 17
 linearer Unterraum, 18
 Lineares Gleichungssystem, 22
 Linearform, 63
 Linearkombination, 21
 linksinverse Matrix, 32
 linksinvertierbare Matrix, 32

 Mächtigkeit, 5
 Matrix, 24
 Matrix einer linearen Abbildung, 61
 Matriceinheit, 39
 Maus, 82
 Menge, 4
 Methode der kleinsten Quadrate, 94
 Metrik, 90
 Monomorphismus, 57

 natürliche Zahlen, 4
 Negation, 3

 negatives Element in Körpern, 16
 neutrales Element, 14
 Norm, 89
 normiertes Polynom einer Matrix, 78
 Nullabbildung, 57
 Nullelement eines Körpers, 15
 Nullmatrix, 30
 Nullraum, 17
 Nullvektor, 17

 obere Dreiecksmatrix, 68
 orthogonale Gruppe eines Vektorraums, 97
 orthogonale Gruppe von Matrizen, 98
 orthogonale Matrix, 98
 orthogonale Transformation, 97
 orthogonale Vektoren, 91
 orthogonales Komplement, 92
 Orthogonalsystem, 91
 Orthonormalbasis, 91
 Orthonormalisierungsverfahren von Gram-Schmidt, 91
 Orthonormalsystem, 91

 Parallelogrammgleichung, 90
 Partition einer Menge, 8
 Permutation, 15
 Potenzen einer Matrix, 35
 Potenzmenge, 6
 Prinzip der vollständigen Induktion, 6
 Produkt von Matrizen, 30
 Produktregel für Determinanten, 73
 Projektion, 13
 Pythagoras, 90

 QR-Zerlegung, 102
 quadratische Matrix, 32
 Quadrupel, 7
 Quintupel, 7

 Rang einer linearen Abbildung, 56
 Rang einer Matrix, 51
 Rangkriterium für lineare Gleichungssysteme, 52
 rationale Zahlen, 4

rechtsinverse Matrix, 32
 rechtsinvertierbare Matrix, 32
 reduzierte Spaltenstufenform, 50
 reduzierte Zeilenstufenform, 26
 reelle Zahlen, 4
 Reflexivität der Isomorphie, 58
 Reflexivität der Zeilenäquivalenz, 48
 rekursive Folge, 82
 Relation, 8
 Restriktion von Abbildungen, 12

 Satz des Pythagoras, 90
 schiefsymmetrische Matrix, 36
 Schmidt, 91
 Schwarz, 88
 selbstadjungierter Endomorphismus, 104
 senkrechte Vektoren, 91
 Sextupel, 7
 Skalar, 17
 Skalarprodukt, 87
 spaltenäquivalente Matrizen, 50
 Spaltenrang einer Matrix, 50
 Spaltenraum einer Matrix, 50
 Spiegelung, 99
 Spur einer Matrix, 36
 Spur eines Endomorphismus, 76
 Standardbasis, 39
 Standardskalarprodukt des \mathbb{R}^n , 88
 Standardskalarprodukt des $C[a, b]$, 88
 Steinitz, 39
 Summe von Untervektorräumen, 19
 surjektive Abbildung, 9
 Symmetrie der Isomorphie, 58
 Symmetrie der Zeilenäquivalenz, 48
 symmetrische Gruppe, 15
 symmetrische Matrix, 36

 Teilmenge, 5
 Transitivität der Isomorphie, 58
 Transitivität der Zeilenäquivalenz, 48
 transponierte Matrix, 35
 Tripel, 7
 triviale Lösung, 27

 Tschebyscheff, 86
 Tschebyscheff-Polynome, 86

 Umkehrabbildung, 12
 Unbekannte, 22
 untere Dreiecksmatrix, 68
 Untermatrix, 75
 Untervektorraum, 18
 Urbild einer Teilmenge, 9

 Variable, 22
 Vektor, 17
 Vektorraum, 17
 Venn-Diagramme, 5
 Vereinigung, 5
 Verknüpfung, 13
 Verneinung, 3
 Vertauschbarkeit von Matrizen, 35
 Vollständige Induktion, 6

 Wahrheitstafel, 4
 Wahrheitswert, 3
 Wertebereich, 9
 Winkel, 95

 Zeilen einer Matrix, 42
 zeilenäquivalente Matrizen, 48
 Zeilenrang einer Matrix, 42
 Zeilenraum einer Matrix, 42