OSNABRÜCKER SCHRIFTEN ZUR MATHEMATIK

Reihe V Vorlesungsskripten

Heft 147 Wintersemester 2000/2001

Lineare Algebra

W. Bruns

Fachbereich Mathematik/Informatik
Universität Osnabrück

OSM Osnabrücker Schriften zur Mathematik

Oktober 2000

Herausgeber	Selbstverlag der Universität Osnabrück Fachbereich Mathematik/Informatik 49069 Osnabrück
Geschäftsführer	Prof. Dr. W. Bruns
Berater:	Prof. Dr. P. Brucker (Angew. Mathematik) Prof. Dr. E. Cohors-Fresenborg (Didaktik der Mathematik) Prof. Dr. V. Sperschneider (Informatik) Prof. Dr. R. Vogt (Reine Mathematik)
Druck	Hausdruckerei der Universität Osnabrück

Weitere Reihen der OSM:

Reihe D	Mathematisch-didaktische Manuskripte
Reihe I	Manuskripte der Informatik
Reihe M	Mathematische Manuskripte
Reihe P	Preprints
Reihe U	Materialien zum Mathematikunterricht

Lineare Algebra

Winfried Bruns

Skript zur Vorlesung WS 2000/01

Inhaltsverzeichnis

ABSCHNITT 1

Das Induktionsprinzip

Wir bezeichnen mit

$\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen (einschließlich 0),
$\mathbb{Z}$ die Menge der ganzen Zahlen,
$\mathbb{Q}$ die Menge der rationalen Zahlen,
$\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen.

Wir gehen davon aus, daß der Leser auf der Schule gelernt hat, in diesen Zahlbereichen zu rechnen, und daß er die Zeichen $<$ („kleiner“), $\leq$ („kleiner oder gleich“), $>$ („größer“), $\geq$ („größer oder gleich“) kennt. Ebenso setzen wir voraus, daß der Leser mit dem Begriff „Menge“ vertraut ist. Mengentheoretische Symbole werden immer dann erklärt, wenn wir sie das erste Mal benutzen. In

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ bedeutet $\subset$ „Teilmenge von“, in
$\mathbb{N} \subsetneqq \mathbb{Z} \subsetneqq \mathbb{Q} \subsetneqq \mathbb{R}$ bedeutet $\subsetneqq$ „echte Teilmenge von“, in
$\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$ bedeutet $\not\subset$ „nicht Teilmenge von“, in
$3 \in \mathbb{Z}$ bedeutet $\in$ „Element von“ und in
$-5 \notin \mathbb{N}$ bedeutet $\notin$ „nicht Element von“.

Die *leere Menge* bezeichnen wir mit $\emptyset$. Häufig werden wir Mengen M dadurch definieren, daß wir alle Elemente einer gegebenen Menge, die eine gewisse Eigenschaft besitzen, in M zusammenfassen. Dabei ist der Definitionsdoppelpunkt nützlich: Etwa

$$M := \{z \in \mathbb{Z} \mid z \text{ gerade}\}.$$

$\{\dots\}$ ist das Mengenklammernpaar, und wir definieren, daß M die Menge aller geraden ganzen Zahlen bezeichnet. $\{a_1, \dots, a_n\}$ steht für die Menge, die aus den Elementen $a_1, \dots, a_n$ besteht.

Besonders wichtig ist das Summenzeichen $\sum$. Provisorisch kann man es etwa so definieren: $\sum_{i=0}^{n} a_i := a_0 + \cdots + a_n$. Provisorisch ist dies, weil „$\cdots$“ wenig

präzise ist. Besser ist die folgende *rekursive Definition*

$$\sum_{i=0}^{0} a_i := a_0,$$
$$\sum_{i=0}^{n} a_i := \sum_{i=0}^{n-1} a_i + a_n \quad \text{bei } n \geq 1.$$

Analog führt man das Produktzeichen $\prod$ ein. Eng verknüpft mit rekursiven Definitionen sind die Beweise durch *(vollständige) Induktion*, die nach folgendem *Induktionsschema* (auch *Induktionsprinzip*) verlaufen:

A sei eine Aussage über natürliche Zahlen.

(a) *Induktionsbeginn*: (Man zeigt:) A gilt für die natürliche Zahl n_0.
(b) *Induktionsannahme*: (Man nimmt an:) A gilt für eine natürliche Zahl $n \geq n_0$.
(c) *Induktionsschritt*: (Man zeigt:) Aus der Induktionsannahme folgt, daß A auch für $n + 1$ gilt.
(d) *Induktionsschluß*: Daher gilt A für alle natürlichen Zahlen $\geq n_0$.

Statt *Induktionsannahme* wird häufig auch der Terminus *Induktionsvoraussetzung* verwendet.

Beispiel. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Wir beweisen dies durch Induktion:

(a) Die Aussage gilt für die natürliche Zahl $n_0 = 0$; denn es ist $\sum_{k=0}^{0} k = 0$ nach Definition des Summenzeichens.
(b) Die Aussage gelte für die natürliche Zahl $n \geq 0$.
(c) Es ist

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \sum_{k=0}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1$$
$$= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Hier haben wir in der zweiten Gleichung die Induktionsannahme benutzt.
(d) Die Aussage gilt für alle natürlichen Zahlen n.

Das Induktionsschema beschreibt eine *fundamentale Eigenschaft* der natürlichen Zahlen, die man letztlich nicht aus einfacheren Eigenschaften der natürlichen

Zahlen herleiten kann. Es präzisiert das „und so weiter“-Argument. Das Schema kann hinsichtlich der Bezeichnungen variiert werden.

Weiteres Beispiel einer rekursiven Definition sind die Potenzen einer reellen Zahl a mit Exponenten $n \in \mathbb{N}$:

$$a^0 := 1, \qquad a^n := a^{n-1} \cdot a.$$

Um das Induktionsprinzip zu üben, beweisen wir die folgende nützliche Aussage: Es ist

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

für alle $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 1$, und alle $n \in \mathbb{N}$. Die Aussage ist in der Tat richtig für $n_0 = 0$. Sie gelte für ein $n \geq 0$. Dann ist sie auch für $n + 1$ richtig:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} a^k &= \sum_{k=0}^{n} a^k + a^{n+1} = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} + a^{n+1} \\ &= \frac{1 - a^{n+1} + a^{n+1}(1 - a)}{1 - a} = \frac{1 - a^{n+2}}{1 - a}.\end{aligned}$$

Die Aussage gilt somit für alle natürlichen Zahlen.

Wir geben eine naheliegende Verallgemeinerung des Summenzeichens an: Für $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \leq n$, sei

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := \sum_{k=0}^{n-m} a_{k+m}.$$

(Mit dieser Definition läßt sich die Summation beliebig verschieben.) Die folgenden, leicht beweisbaren, Rechenregeln werden wir ständig verwenden:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k = \sum_{k=m}^{n} (a_k + b_k), \qquad c \sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n} c a_k.$$

Es sei M eine n-elementige Menge (etwa $\{1, \ldots, n\}$). Dann definieren wir $n!$ als die Anzahl der Möglichkeiten, die Elemente von M anzuordnen; dabei setzen wir $0! := 1$. ($n!$ wird „n Fakultät“ gesprochen.) Zum Beispiel sind

$$1,2,3 \qquad 1,3,2 \qquad 2,1,3 \qquad 2,3,1 \qquad 3,1,2 \qquad 3,2,1$$

die möglichen Anordnungen für die Elemente von $M = \{1, 2, 3\}$, also $3! = 6$. Mit der folgenden Aussage läßt sich $n!$ einfach berechnen. In ihrem Beweis benutzen wir das Symbol „$\setminus$“. Für beliebige Mengen M, N ist

$$M \setminus N := \{x \in M \mid x \notin N\}.$$

Man nennt $M \setminus N$ das *Komplement von N in M*.

Satz 1.1. *Für jede ganze Zahl $n \geq 1$ ist*

$$n! = \prod_{i=1}^{n} i \quad (= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n).$$

Beweis. Wir beweisen die Gleichung durch Induktion über n. Für $n = 1$ ist sie offenbar richtig. Sei $n \geq 1$, M eine $(n+1)$-elementige Menge und $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ eine Anordnung der Elemente von M. Für a_{n+1} gibt es $n+1$ Möglichkeiten, und ist a_{n+1} fixiert, so hat man $n!$ Möglichkeiten, die Elemente der n-elementigen Menge $M \setminus \{a_{n+1}\}$ davor zu setzen. Insgesamt gibt es also $n! \cdot (n+1)$ Möglichkeiten, die Elemente von M anzuordnen. Nach Induktionsvoraussetzung ist

$$n! \cdot (n+1) = \left(\prod_{i=1}^{n} i \right) \cdot (n+1) = \prod_{i=1}^{n+1} i. \qquad \square$$

Wir ergänzen die Definition von $n!$ noch durch

$$0! = 1.$$

Eng mit $n!$ verwandt sind die *Binomialkoeffizienten*: Für alle $n, k \in \mathbb{N}$ sei

$$\binom{n}{k}$$

die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge. Das Symbol $\binom{n}{k}$ wird „n über k“ gesprochen. Es ist $\binom{n}{0} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$: Jede Menge enthält genau eine Teilmenge mit 0 Elementen, nämlich die leere Menge.

Für das Rechnen mit Binomialkoeffizienten werden häufig die folgenden Aussagen herangezogen.

Satz 1.2. (a) *Für alle $k, n \in \mathbb{N}$ ist*

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}.$$

(b) *Für alle $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ gilt*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Beweis. (a) Es sei $n \geq 0$ und M eine $(n+1)$-elementige Menge. Ferner sei $a \in M$ und $N = M \setminus \{a\}$. Eine $(k+1)$-elementige Teilmenge von M ist entweder Teilmenge von N, oder sie entsteht aus einer k-elementigen Teilmenge von N durch Hinzufügen von a. Dementsprechend gilt die behauptete Formel.

(b) Wir beweisen die Formel durch Induktion über n. Sie ist offenbar richtig, wenn $n = 0$ ist. Beim Induktionsschritt dürfen wir annehmen, daß $0 < k < n+1$

gilt, da für $k = 0$ oder $k = n + 1$ nichts zu beweisen ist. Mit Hilfe von (a) und der Induktionsvoraussetzung erhält man dann

$$\begin{aligned}\binom{n+1}{k} &= \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \\ &= \frac{n!(n-k+1) + n!k}{k!(n+1-k)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}.\end{aligned}$$

□

Die Binomialkoeffizienten haben ihren Namen wegen

Satz 1.3. *Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die „binomische Formel“:*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Beweis. Wir verwenden das Induktionsprinzip. Offenbar ist nur beim Induktionsschritt etwas zu beweisen. Es ist

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n &= (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} + b^{n+1} \\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} \\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} \\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k.\end{aligned}$$

Dabei haben wir den Summationsindex verschoben und 1.2 benutzt. □

Die Binomialkoeffizienten lassen sich dank 1.2 besonders einfach mit Hilfe des *Pascalschen Dreiecks* ermitteln:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \ldots & & & & &
\end{array}
$$

Die n-te Zeile des Schemas ($n = 0, 1, 2, \ldots$) enthält der Reihe nach die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ ($k = 0, \ldots, n$). Bei $1 \leq k \leq n-1$ erhält man sie gemäß 1.2 durch Addition der beiden unmittelbar schräg darüber stehenden.

Daß die Binomialkoeffizienten in der binomischen Formel auftauchen, kann nicht überraschen: Beim Ausmultiplizieren von $(a+b)^n$ tritt der Summand $a^{n-k}b^k$ genau so oft auf, wie es möglich ist, aus den n Faktoren diejenigen k auszuwählen, bei denen der Faktor b in das Produkt $a^{n-k}b^k$ eingeht.

ABSCHNITT 2

Mengen und Abbildungen

Ein wichtiger Bestandteil der modernen mathematischen Sprache sind Mengen, Abbildungen und die mit ihnen verbundenen Operationen. Die bereits in Abschnitt 1 benutzten Symbole $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ bezeichnen nicht einzelne Zahlen, sondern gewisse Mengen von Zahlen.

Ähnlich wie wir das Induktionsprinzip nicht beweisen können, so können wir keine präzise Definition des Begriffs „Menge“ geben. Dies wird aber (im Rahmen der linearen Algebra) zu keinerlei Schwierigkeiten führen. Der Schöpfer der Mengenlehre, Georg Cantor, hat folgendermaßen beschrieben, was er unter einer Menge versteht: Eine *Menge* M ist die Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die *Elemente* von M genannt werden) zu einem Ganzen.

Mengen M, M' stimmen überein, wenn sie die gleichen Elemente enthalten – die Beschreibung von M und M' spielt dabei keine Rolle. Wir können Mengen in aufzählender Form beschreiben, etwa

$$M = \{1, 2, 3, 4, 5\},$$

oder durch Angabe der Eigenschaften, die die Elemente der Menge charakterisieren:

$$M = \{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq 5\}.$$

Hier haben wir zum ersten Mal das Elementzeichen $\in$ benutzt:

„$x \in M$“ bedeutet „x ist Element von M“.

Eine Menge N heißt *Teilmenge* der Menge M, symbolisch $N \subset M$, wenn jedes Element von N auch Element von M ist. Die *leere Menge* $\emptyset = \{\}$ ist Teilmenge jeder Menge; $\emptyset$ hat keine Elemente. Statt $N \subset M$ schreiben wir auch $M \supset N$ und nennen M eine *Obermenge* oder N umfassende Menge. Der *Durchschnitt* $M_1 \cap M_2$ von Mengen M_1, M_2 ist gegeben durch

$$M_1 \cap M_2 = \{x : x \in M_1 \text{ und } x \in M_2\}.$$

Ihre *Vereinigung* $M_1 \cup M_2$ ist

$$M_1 \cup M_2 = \{x : x \in M_1 \text{ oder } x \in M_2\}.$$

(Man beachte, daß dabei „oder“ im nicht ausschließenden Sinn gebraucht wird; „oder“ bedeutet *nicht* „entweder – oder“.)

Beispiele.

$$\{1,2,3\} \cup \{2,3,4,5\} = \{1,2,3,4,5\},$$
$$\{1,2,3\} \cap \{2,3,4,5\} = \{2,3\}.$$

Ferner können wir das *Komplement von M_1 in M_2* bilden:

$$M_2 \setminus M_1 = \{x \in M_2 : x \notin M_1\}.$$

Hierbei bedeutet „$x \notin M_1$“ natürlich, daß x nicht Element von M_1 ist. Entsprechend steht „$\not\subset$“ für „nicht Teilmenge“ usw. Rechenregeln für die genannten Operationen mit Mengen werden in den Übungsaufgaben formuliert. Eine wichtige Kennzahl von Mengen M ist die Anzahl $|M|$ ihrer Elemente. Wenn M endlich ist und n Elemente hat, setzen wir

$$|M| = n.$$

Bei unendlichen Mengen schreiben wir

$$|M| = \infty.$$

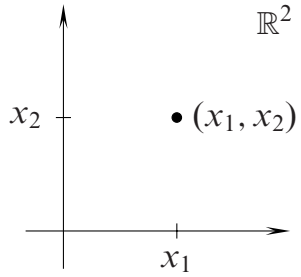
Eine weitere wichtige Konstruktion ist das *kartesische Produkt* zweier Mengen:

$$M_1 \times M_2 = \{(x_1, x_2) : x_1 \in M_1, x_2 \in M_2\}.$$

Dabei bezeichnet (x_1, x_2) das *Paar* mit erster Komponente x_1 und zweiter Komponente x_2. Wenn $x_1 \neq x_2$, so ist

$$(x_1, x_2) \neq (x_2, x_1)$$

(hingegen $\{x_1, x_2\} = \{x_2, x_1\}$). Statt $M \times M$ schreibt man auch M^2. So ist uns geläufig, daß jedem Punkt der Ebene genau ein Element von $\mathbb{R}^2$ entspricht:



Beim Begriff „Abbildung“ geht es uns ebenso wie beim Begriff „Menge“. Wir können nur eine vage, für unsere Zwecke aber hinreichend präzise Beschreibung angeben. Eine *Abbildung* f einer Menge A in eine Menge B ist eine Vorschrift, die jedem Element von A genau ein Element von B zuordnet. Wir bezeichnen dies kurz durch

$$f : A \to B.$$

Man nennt A den *Definitionsbereich*, B den *Wertebereich* von f. Das $x \in A$ zugeordnete Element aus B wird mit $f(x)$ bezeichnet und heißt *Bild* von x unter f

oder auch *Wert* von f an der Stelle x. Zwei Abbildungen $f : A \to B$, $g : C \to D$ sind gleich, wenn $A = C$, $B = D$ und $f(x) = g(x)$ für alle $x \in A$ gilt.

Abbildungen sind aus dem Schulunterricht vor allem als Funktionen bekannt, z.B.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Es ist wichtig festzuhalten, daß Funktionen eindeutig sind. Beispielsweise wird durch

$$f : \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \pm\sqrt{x}$$

keine Funktion definiert. Auf jeder Menge ist die *identische Abbildung* definiert:

$$\mathrm{id}_M : M \to M, \quad \mathrm{id}_M(x) = x \text{ für alle } x \in M.$$

Sei $f : A \to B$ eine Abbildung. Für eine Teilmenge $A' \subset A$ setzen wir

$$f(A') = \{f(x) : x \in A'\};$$

$f(A')$ heißt das *Bild* von A' unter f. Für $f(A)$ schreiben wir auch Bild f. Für $B' \subset B$ sei

$$f^{-1}(B') = \{x \in A : f(x) \in B'\}$$

das *Urbild* von B' unter f. Für $y \in B$ setzen wir

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(\{y\}) = \{x \in A : f(x) = y\}.$$

Für das Beispiel $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, ist

$$\begin{aligned} f(\{1,2,3\}) &= \{1,4,9\}, \\ f^{-1}(4) &= \{2,-2\}, \\ f^{-1}(\{1,4,9\}) &= \{1,-1,2,-2,3,-3\}. \end{aligned}$$

Es wird oft wichtig sein, daß wir den Definitionsbereich einer Abbildung einschränken. Sei $f : A \to B$ eine Abbildung und $A' \subset A$; dann ist die Abbildung

$$f \mid A' : A' \to B$$

gegeben durch $(f \mid A')(x) = f(x)$ für alle $x \in A'$. Diese Abbildung heißt *Beschränkung* von f auf A'. Wenn wir f auf A' beschränken, tun wir wirklich nichts anderes, als die f definierende Zuordnung nur auf Elemente von A' anzuwenden.

Definition. Sei $f : A \to B$ eine Abbildung.

(a) f ist *injektiv*, wenn für $x_1, x_2 \in A$ mit $x_1 \neq x_2$ auch $f(x_1) \neq f(x_2)$ ist.
(b) f ist *surjektiv*, wenn $f(A) = B$ gilt.
(c) f ist *bijektiv*, wenn f injektiv und surjektiv ist.

Wir können dies auch so beschreiben:

f ist injektiv $\iff$ Zu jedem $y \in N$ gibt es *höchstens* eine Lösung der Gleichung $f(x) = y$.

f ist surjektiv $\iff$ Zu jedem $y \in N$ gibt es *mindestens* eine Lösung der Gleichung $f(x) = y$.

f ist bijektiv $\iff$ Zu jedem $y \in N$ gibt es *genau* eine Lösung der Gleichung $f(x) = y$.

Wir setzen $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ und definieren

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, \quad f_4 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$$

sämtlich durch die Vorschrift $f_i(x) = x^2$, $i = 1, \ldots, 4$. Dann ist

f_1 weder injektiv, noch surjektiv,

f_2 injektiv, aber nicht surjektiv,

f_3 nicht injektiv, aber surjektiv,

f_4 bijektiv.

Definition. Sei $f : A \to B$ eine bijektive Abbildung. Die Abbildung $f^{-1} : B \to A$, die jedem $y \in B$ jenes $x \in A$ mit $f(x) = y$ zuordnet, heißt *Umkehrabbildung* von f oder zu f *inverse Abbildung*.

Im obigen Beispiel ist f_4 bijektiv; es gilt $f_4^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

Definition. Seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Abbildungen. Die Abbildung

$$g \circ f : A \to C, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

heißt *Komposition* von f und g.

Wenn $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = x^2$ und $g(y) = 1 + y$ gegeben sind, so ist

$$(g \circ f)(x) = g(x^2) = 1 + x^2,$$
$$(f \circ g)(x) = f(1 + x) = (1 + x)^2.$$

Dieses Beispiel zeigt, daß die Komposition von Abbildungen nicht (wie man sagt) *kommutativ* ist. Hingegen ist sie *assoziativ*:

Satz 2.1. *$f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$ seien Abbildungen. Dann ist $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.*

In der Tat ist $(h \circ (g \circ f))(x) = h(g(f(x))) = ((h \circ g) \circ f)(x)$ für alle $x \in A$. Ebenso einfach beweist man:

Satz 2.2. *Sei $f : A \to B$ eine Abbildung. Genau dann ist f bijektiv, wenn es eine Abbildung $g : B \to A$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_A$ und $f \circ g = \mathrm{id}_B$ gibt. In diesem Fall ist $g = f^{-1}$.*

Wir haben oben das kartesische Produkt zweier Mengen eingeführt. Diese Konstruktion soll im folgenden auf größere „Familien“ von Mengen verallgemeinert werden.

Sei zunächst M eine Menge und $I = \{1, \ldots, n\}$ die aus den ersten n natürlichen Zahlen bestehende Menge. Eine Abbildung $f : I \to M$ können wir einfach durch die „Tabelle“

$$(f(1), \ldots, f(n)) = (f_1, \ldots, f_n)$$

beschreiben. Eine solche Tabelle heißt ein *n-Tupel* von Elementen aus M. (2-Tupel werden *Paare*, 3-Tupel *Tripel* genannt.) Die Gesamtheit aller dieser n-Tupel ist das *n-fache kartesische Produkt* von M mit sich selbst, geschrieben

$$M^n = \underbrace{M \times \cdots \times M}_{n\text{-mal}}$$

z.B. ist $\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3)\ x_i \in \mathbb{R}\}$ die Menge aller Tripel reeller Zahlen. Wenn wir im Anschauungsraum ein Koordinatensystem eingeführt haben, können wir $\mathbb{R}^3$ mit dem Anschauungsraum identifizieren, indem wir jedem Punkt das zugehörige Koordinatentripel entsprechen lassen.

Sei allgemeiner I eine beliebige Menge, und $f : I \to M$ eine Abbildung. Auch dann ist es häufig suggestiv, diese Abbildung durch

$$(f_i)_{i \in I}$$

zu beschreiben und als eine durch I *indizierte Familie* von Elementen aufzufassen. Ein Beispiel: Sei $I = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $M = \mathbb{R}$; dann betrachten wir

$$f : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad f(n) = \frac{1}{n}.$$

Statt dessen schreibt man

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}, n \neq 0}$$

für die Familie (oder auch *Folge*) der Reziproken der natürlichen Zahlen $\neq 0$.

Wir können natürlich auch Familien von Untermengen einer Menge A betrachten. Eine Zuordnung, die jedem $i \in I$ eine Teilmenge A_i von A zuordnet, schreiben wir in der Form

$$(A_i)_{i \in I}.$$

Ist z.B. $I = \mathbb{N}$ und auch $M = \mathbb{N}$, so beschreiben wir durch

$$(T_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad T_n = \{m \in \mathbb{N} : m \text{ teilt } n\},$$

die Familie der Teilermengen der natürlichen Zahlen.

Über Familien von Mengen können wir Vereinigungen und Durchschnitte bilden:

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x : x \in A_i \text{ für } \textit{ein } i \in I\},$$
$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x : x \in A_i \text{ für } \textit{alle } i \in I\}.$$

Dabei ist „ein“ stets als „mindestens ein“ zu lesen, wenn es nicht durch Hinzufügungen wie „höchstens“ oder „genau“ weiter spezifiziert ist. Auch das *allgemeine kartesische Produkt* können wir nun definieren:

$$\prod_{i\in I} A_i = \{f : I \to A : f(i) \in A_i \text{ für alle } i \in I\}.$$

Wir können sagen: $\prod_{i\in I} A_i$ ist die Menge aller I-Tupel $(f_i)_{i\in I}$ mit $f_i \in A_i$ für alle i. Ist etwa $I = \{1, \ldots, n\}$, so schreiben wir

$$A_1 \times \cdots \times A_n$$

für $\prod_{i=1}^{n} A_i$. Zum Beispiel ist

$$\mathbb{N} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{R}$$

die Menge aller 4-Tupel, deren erste Komponente eine natürliche Zahl, deren zweite Komponente eine ganze Zahl usw. ist.

ABSCHNITT 3

Gruppen

Die Algebra ist derjenige Teil der Mathematik, der sich mit Rechenoperationen befaßt. Viele solche Rechenoperationen lassen sich als Verknüpfungen auffassen:

Definition. Eine *Verknüpfung* auf einer Menge M ist eine Abbildung

$$f : M \times M \to M.$$

Beispiele von Verknüpfungen kennen wir viele, etwa

(a) $M = \mathbb{R}$, $+(a, b) = a + b$,
(b) $M = \mathbb{R}$, $\cdot(a, b) = a \cdot b$,
(c) $M = \mathbb{R}$, $-(a, b) = a - b$,
(d) $M = \{g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$, $\quad \circ(g, h) = g \circ h$.

An den Beispielen sehen wir, daß wir Verknüpfungen meistens als Rechenoperationen schreiben:

$a + b$ statt $+(a, b)$, $\qquad a \cdot b$ (oder einfach ab) statt $\cdot(a, b)$ usw.

Wenn man abstrakt über Verknüpfungen spricht, benutzt man üblicherweise die multiplikative Schreibweise.

Zwei grundlegende Eigenschaften von Verknüpfungen benennt die folgende Definition:

Definition. Sei M eine Menge mit einer Verknüpfung $(x, y) \mapsto xy$. Die Verknüpfung heißt *assoziativ*, wenn

$$x(yz) = (xy)z \quad \text{für alle} \quad x, y, z \in M$$

gilt, und *kommutativ*, wenn

$$xy = yx \quad \text{für alle} \quad x, y \in M.$$

Kommutative Verknüpfungen schreibt man häufig auch additiv.

Die uns geläufigen Rechenoperationen sind assoziativ und kommutativ. Dies sollte aber nicht darüber hinweg täuschen, daß sehr viele für die Mathematik wichtigen Verknüpfungen nicht kommutativ sind. Nicht assoziative Verknüpfungen kommen dagegen nicht so oft vor. (Der Grund hierfür ist, daß die Komposition von Abbildungen zwar assoziativ, aber i.a. nicht kommutativ ist.)

Eine Verknüpfung sagt uns nur, wie wir *zwei* Argumente miteinander zu verknüpfen haben. Sollen mehr als zwei Argumente verknüpft werden, müssen wir

Klammern setzen, um die Reihenfolge der Ausführung der Verknüpfungen zu regeln. Dies ist von der Schule her geläufig. Wenn eine Verknüpfung assoziativ ist, dann ist das Produkt

$$xyz$$

unabhängig von einer Klammerung, weil $x(yz) = (xy)z$. Ist die Verknüpfung darüber hinaus sogar kommutativ, so spielt auch die Reihenfolge der drei Argumente keine Rolle mehr, wie man leicht überprüft. Allgemeiner gilt folgendes allgemeines Assoziativ- und Kommutativgesetz:

Satz 3.1. *Sei M eine Menge mit einer Verknüpfung $(x, y) \mapsto xy$.*

(a) *Wenn diese assoziativ ist, ist das Produkt*

$$x_1 \cdots x_n, \qquad x_i \in M,\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 1,$$

unabhängig von einer Klammerung.

(b) *Wenn diese assoziativ und kommutativ ist, ist das Produkt*

$$x_1 \cdots x_n, \qquad x_i \in M,\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 1,$$

unabhängig von einer Klammerung und der Reihenfolge der Faktoren.

Wir beweisen diesen Satz nicht, weil wir für einen Beweis erst präzisieren müßten, was eine Klammerung ist. Der dafür notwendige Aufwand lohnt sich an dieser Stelle nicht.

In $\mathbb{R}$ gilt

$$a + 0 = 0 + a = a$$
$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

für alle $a \in \mathbb{R}$: die Elemente 0 und 1 sind „neutral“ bezüglich $+$ bzw. $\cdot$.

Definition. M sei eine Menge mit einer Verknüpfung $(x, y) \mapsto x \cdot y$. Ein Element $e \in M$ heißt *neutral*, wenn $ea = ae = a$ für alle $a \in M$ ist.

Wenn ein neutrales Element existiert, so ist es eindeutig bestimmt: Für neutrale Elemente e, e' gilt nämlich

$$e = e'e = e'.$$

Wir dürfen daher von *dem* neutralen Element sprechen. Wenn man die Verknüpfung multiplikativ schreibt, bezeichnet man das neutrale Element oft mit 1; bei einer „additiven“ Verknüpfung ist die Bezeichnung 0 üblich.

An vielen algebraischen Strukturen sind mehrere Verknüpfungen beteiligt, in Zahlbereichen z.B. Addition und Multiplikation. Die wichtigste Struktur, die von einer einzigen Verknüpfung lebt, ist die einer Gruppe:

Definition. Eine *Gruppe* ist eine Menge $G \neq 0$ mit einer Verknüpfung $(x, y) \mapsto xy$, für die folgendes gilt:

(a) Die Verknüpfung ist assoziativ.

(b) Sie besitzt ein neutrales Element e.
(c) Zu jedem $a \in G$ existiert ein Element a' mit

$$aa' = a'a = e.$$

Wenn die Verknüpfung kommutativ ist, heißt G *abelsch*; es ist dann üblich, die Verknüpfung als Addition zu notieren.

Für jedes $a \in G$ ist das Element a' in (c) eindeutig bestimmt. Aus $aa' = a'a = e$ und $aa'' = a''a = e$ folgt

$$a' = a'(aa'') = (a'a)a'' = a''.$$

Wir nennen es *das zu a inverse* Element (oder *Inverses* von a). Bei multiplikativer Schreibweise wird es üblicherweise mit a^{-1} bezeichnet, bei additiver Schreibweise mit $-a$.

Wichtige Rechenregeln:

(a) Für alle $a \in G$ ist $(a^{-1})^{-1} = a$, wie unmittelbar aus Teil (c) der Definition folgt.
(b) Man kann in Gruppen „kürzen“: Aus $ab = a'b$ oder $ba = ba'$ folgt $a = a'$:

$$ab = a'b \quad \Longrightarrow \quad abb^{-1} = a'bb^{-1} \quad \Longrightarrow \quad a = a'.$$

(c) Man kann in Gruppen Gleichungen lösen: Zu $a, b \in G$ gibt es *eindeutig bestimmte* Lösungen x und y der Gleichungen

$$ax = b \quad \text{und} \quad ya = b,$$

nämlich $x = a^{-1}b$ und $y = ba^{-1}$.

(Es ist nicht schwer zu zeigen, daß die Eigenschaft (c) für Gruppen kennzeichnend ist in dem Sinne, daß jede nichtleere Menge mit einer assoziativen Verknüpfung, die (c) erfüllt, eine Gruppe ist.)

Um Mißverständnisse zu vermeiden, muß man manchmal die Verknüpfung mit angeben, bevor man von einer Gruppe spricht. Z.B. macht es wenig Sinn zu sagen, $\mathbb{R}$ sei eine Gruppe, bevor nicht klar ist, welche Verknüpfung auf $\mathbb{R}$ gemeint ist.

Beispiele. (a) $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ sind Gruppen, sogar abelsche Gruppen. Das neutrale Element ist 0, das zu a inverse Element ist $-a$.
(b) $(\mathbb{Q}, \cdot)$, $(\mathbb{R}, \cdot)$ sind keine Gruppen: 0 besitzt kein Inverses bezüglich der Multiplikation. Erst recht ist $(\mathbb{Z}, \cdot)$ keine Gruppe. Hingegen sind $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ und $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ Gruppen.

Eine vielleicht nicht so geläufige Klasse von Gruppen bilden die Permutationsgruppen, die wir nun einführen wollen. Sei M eine Menge. Wir setzen

$$S(M) = \{f : M \to M : f \text{ ist bijektiv}\}.$$

Die Komposition von Abbildungen ist eine Verknüpfung auf $S(M)$. Sie besitzt ein neutrales Element, nämlich id_M, und zu einer bijektiven Abbildung $f : M \to M$

ist die Umkehrabbildung f^{-1} das Inverse. Also ist $S(M)$ eine Gruppe, genannt die *symmetrische Gruppe* oder *Permutationsgruppe* von M. Die bijektiven Abbildungen $f : M \to M$ nennt man auch *Permutationen* von M. Man setzt

$$S_n = S(\{1, \ldots, n\}).$$

In diesem Fall bezeichnet man Permutationen π häufig durch ihre Tafel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \ldots & \pi(n) \end{pmatrix}.$$

Die Tafel gibt unter jedem Element i den Wert $\pi(i)$ von i unter π an. Es würde natürlich auch genügen, die Folge

$$\pi(1), \ldots, \pi(n)$$

anzugeben. Daher können wir die Permutationen mit den schon in Abschnitt 1 diskutierten Anordnungen von $\{1, \ldots, n\}$ identifizieren.

Sei zum Beispiel $n = 3$,

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Permutation π_1 läßt 1 und 2 die Plätze tauschen, und π_2 macht das Gleiche für 2 und 3. Es gilt

$$(\pi_1 \circ \pi_2)(3) = \pi_1(2) = 1$$
$$(\pi_2 \circ \pi_1)(3) = \pi_2(3) = 2.$$

Also ist $\pi_2 \circ \pi_1 \neq \pi_1 \circ \pi_2 : S_3$ ist nicht abelsch. Man zeigt leicht: $S(M)$ ist abelsch genau dann, wenn M höchstens zwei Elemente hat.

Die wichtigste Kenngröße insbesondere endlicher Gruppen G ist die Anzahl $|G|$ ihrer Elemente. Man nennt sie die *Ordnung von* G. Aus Abschnitt 1 ist uns bekannt, daß

$$|S_n| = n!$$

ist.

Man kann in Gruppen G Potenzen einführen. Wir definieren rekursiv für $n \in \mathbb{N}$

$$a^n = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0, \\ a^{n-1}a & \text{für } n > 0; \end{cases}$$

für $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$, setzen wir

$$a^n = (a^{-1})^{-n}$$

(beachte, daß $-n > 0$ wenn $n < 0$). Es gelten folgende Rechenregeln für $a, b \in G$, $m, n \in \mathbb{Z}$:

(a) $a^m a^n = a^{m+n}$;
(b) $(a^m)^n = a^{mn}$;

(c) wenn $ab = ba$, so ist $(ab)^n = a^n b^n$.

Wir beweisen (a) ausführlich.

(1) Sei zunächst $n = 1$.

(α) Für $m \geq 0$ ist $a^m a = a^{m+1}$ gemäß Definition der Potenz.

(β) Sei $m < 0$. Dann ist

$$a^m a = (a^{-1})^{-m} a = (a^{-1})^{-m-1} a^{-1} a$$
$$= (a^{-1})^{-m-1} = a^{m+1}.$$

(2) Für $n > 1$ schließen wir induktiv:

$$a^m a^n = a^m a^{n-1} a = a^{m+n-1} a = a^{m+n}$$

(unter Ausnutzung von (1)).

(3) Für $n = 0$ ist die Behauptung trivial.

(4) Auch für $m > 0$ ist $a^m = (a^{-1})^{-m}$, denn

$$a^m = ((a^{-1})^{-1})^m = (a^{-1})^{-m}.$$

(5) Sei nun $n < 0$. Dann ist (unter Ausnutzung von (4), (1) und (2))

$$a^m a^n = (a^{-1})^{-m} (a^{-1})^{-n} = (a^{-1})^{(-m)+(-n)}$$
$$= (a^{-1})^{-(m+n)} = a^{m+n}.$$

Der Beweis der Potenzrechenregel (a) ist abgeschlossen. Die Regeln (b) und (c) beweist man ähnlich. Bei additiver Schreibweise entsprechen den Potenzen die Vielfachen:

$$na = \begin{cases} 0 & \text{für } n = 0, \\ (n-1)a + a & \text{für } n > 0, \\ -(-n)a & \text{für } n < 0. \end{cases}$$

Die Potenzrechenregeln gehen über in die Regeln

(a) $ma + na = (m + n)a$,

(b) $m(na) = mna$,

(c) $na + nb = n(a + b)$, falls $a + b = b + a$.

Eine typische Begriffsbildung der Algebra ist die der Untergruppe:

Definition. Sei G eine Gruppe. Eine Teilmenge U von G heißt *Untergruppe* von G, wenn folgendes gilt:

(a) Die Verknüpfung auf G läßt sich auf U einschränken, d.h. $xy \in U$ für alle $x, y \in U$.

(b) U ist (bezüglich der Einschränkung der Verknüpfung von G auf U) selbst eine Gruppe.

Beispiele. (a) $(\mathbb{Z}, +)$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{Q}, +)$; $(\mathbb{Q}, +)$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{R}, +)$.

(b) Sei $n \geq 1$. Dann ist

$$\{\pi \in S_n : \pi(1) = 1\}$$

eine Untergruppe.

Zum Nachweis, daß eine Teilmenge von G eine Untergruppe ist, können wir folgendes Kriterium verwenden:

Satz 3.2. *Sei G eine Gruppe. Genau dann ist U eine Untergruppe, wenn gilt:*

(a) $U \neq \emptyset$,
(b) *mit $x, y \in U$ ist auch $xy^{-1} \in U$.*

Beweis. „$\Longrightarrow$“ Sei U Untergruppe. Dann ist automatisch $U \neq \emptyset$. Sei $x \in U$, $e \in G$ das neutrale Element von G und $e' \in U$ das neutrale Element von U. Dann gilt

$$ex = e'x,$$

und weil wir in G kürzen dürfen, ist $e = e'$: Das neutrale Element von G ist automatisch in U und ist daher das neutrale Element von U (was wir in der Definition von Untergruppe nicht explizit gefordert haben). Genauso sieht man: das Inverse von $x \in U$ in U ist einfach das Inverse von x in G.

Wenn also $y \in U$, so ist $y^{-1} \in U$, und damit $xy^{-1} \in U$.

„$\Longleftarrow$“ Weil $U \neq \emptyset$, existiert ein $x \in U$. Nach (b) ist dann $e = xx^{-1} \in U$. Also ist mit $y \in U$ auch $y^{-1} = ey^{-1} \in U$. Wenn nun $x, y \in U$, so ist $x(y^{-1})^{-1} = xy \in U$. Dies zeigt:

(a) Die Verknüpfung von G läßt sich auf U beschränken.
(b) Das neutrale Element e von G gehört zu U.
(c) Mit $x \in U$ ist auch $x^{-1} \in U$.

Daraus folgt sofort, daß U Untergruppe von G ist. □

Zum Abschluß dieses Paragraphen wollen wir alle Untergruppen von $(\mathbb{Z}, +)$ bestimmen. Wir setzen für $n \in \mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z}n = \{zn : z \in \mathbb{Z}\}.$$

$\mathbb{Z}n$ besteht also aus allen Vielfachen von n. Für $n = 5$ etwa ist

$$\mathbb{Z}5 = \{\ldots, -10, -5, 0, 5, 10, \ldots\}.$$

Satz 3.3. *Die Untergruppen von $(\mathbb{Z}, +)$ sind genau die Mengen $\mathbb{Z}n$, $n \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Daß $\mathbb{Z}n$ eine Untergruppe ist, ist offensichtlich: $0n = 0 \in \mathbb{Z}n$, also $\mathbb{Z}n \neq \emptyset$, und für $zn, z'n \in \mathbb{Z}n$ ist

$$zn - z'n = (z - z')n \in \mathbb{Z}n.$$

Nach 3.2 ist $\mathbb{Z}n$ eine Untergruppe.

Sei nun U eine beliebige Untergruppe von $\mathbb{Z}$. Falls $U = \{0\}$, ist $U = \mathbb{Z} \cdot 0$. Sei $U \neq \{0\}$. Dann existiert ein $m \in U$, $m \neq 0$. Mit $m \in U$ ist auch $-m \in U$, und eine der Zahlen m oder $-m$ ist > 0. Folglich existiert eine natürliche Zahl m mit $m \in U$. Wir setzen

$$n = \min\{m \in U : m > 0\}$$

und behaupten $U = \mathbb{Z}n$.

Zunächst ist klar: $\mathbb{Z}n \subset U$. Mit n gehören ja auch alle Vielfachen von n zu U. Sei umgekehrt $u \in U$. Dann dividieren wir u durch n mit Rest:

$$u = qn + r \qquad \text{mit } r,\ q \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq r < n.$$

Wegen $u \in U$ und $qn \in U$ ist

$$r = u - qn \in U.$$

Da $r < n$ und n die kleinste positive Zahl in U ist, muß $r = 0$ sein. Wir erhalten $u = qn \in \mathbb{Z}n$. Dies zeigt $U \subset \mathbb{Z}n$, so daß insgesamt $U = \mathbb{Z}n$. □

ABSCHNITT 4

Körper und Polynome

Körper sind diejenigen Gebilde, in denen wir nach den uns geläufigen Regeln addieren und multiplizieren können.

Definition. Ein *Körper* ist eine Menge K versehen mit einer Verknüpfung $+$, genannt Addition, und einer Verknüpfung $\cdot$, genannt Multiplikation, für die folgendes gilt:

(a) Addition und Multiplikation sind assoziativ und kommutativ.
(b) $(K, +)$ ist eine Gruppe, deren neutrales Element wir mit 0 bezeichnen.
(c) (i) Es gibt ein Element $1 \in K$, $1 \neq 0$, das neutral bezüglich $\cdot$ ist.
(ii) Zu jedem $a \in K$, $a \neq 0$, existiert ein $a' \in K$ mit $aa' = 1$.
(d) Es gelten die Distributivgesetze

$$a(b + c) = ab + ac \quad \text{und} \quad (a + b)c = ac + bc$$

für alle $a, b, c \in K$.

Anmerkung. Wenn man die Kommutativität der Multiplikation nicht verlangt, nennt man K einen *Schiefkörper*.

Standardbeispiele von Körpern sind $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$. Aber auch das folgende Beispiel ist ein Körper: $K = \{0, 1\}$,

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

,

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

.

So pathologisch dieser Körper dem Anfänger erscheinen mag, so nützlich ist er für viele moderne Anwendungen der Mathematik und speziell der Linearen Algebra in der Nachrichtentechnik und Informatik. Man kann zeigen: Genau dann existiert ein Körper mit n Elementen, wenn n eine Potenz p^e, $e \geq 1$, einer Primzahl p ist.

Wir formulieren einige Rechenregeln. In einem Körper K gilt für alle Elemente $a, b \in K$:

(a) $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$.
(b) $a \cdot b = 0 \implies a = 0$ oder $b = 0$. (Man sagt, K ist *nullteilerfrei*.)
(c) $a(-b) = (-a)b = -(ab)$.
(d) $(na)(mb) = (nm)(ab)$ für alle $n, m \in \mathbb{Z}$.

Aus (b) folgt, daß $K \setminus \{0\}$ unter der Multiplikation abgeschlossen ist. Aus Forderung (c) der Definition ergibt sich, daß $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ eine Gruppe ist (was wir an Stelle von (c) also hätten fordern können). Für das bezüglich $\cdot$ zu $a \neq 0$ Inverse schreiben wir wieder a^{-1}.

Die Rechenregeln sind leicht einzusehen:

(a) $0 \cdot a + 0 \cdot a = (0 + 0)a = 0a$ wegen des Distributivgesetzes. Addition von $-0a$ ergibt $0 \cdot a = 0$.
(b) Wenn $a, b \neq 0$, so existieren a^{-1} und b^{-1}. Also ist $b^{-1}a^{-1}ab = 1 \neq 0$, was wegen (a) die Möglichkeit $ab = 0$ ausschließt.
(c) Es gilt $ab + a(-b) = a(b + (-b)) = a0 = 0$. Also ist $a(-b)$ zu ab bezüglich $+$ invers. Dies aber heißt $a(-b) = -(ab)$.
(d) Den allgemeinen Fall führt man sofort auf den Fall $m, n \geq 0$ zurück, und diesen erledigt man schnell durch Induktion.

Der Bequemlichkeit halber führen wir Subtraktion und Division ein:

$$a - b = a + (-b) \quad \text{für alle } a, b \in K,$$
$$a/b = ab^{-1} \quad \text{für alle } a, b \in K, b \neq 0.$$

Wir sind es gewohnt, Zahlen der Größe nach zu vergleichen. Im allgemeinen ist dies in Körpern nicht möglich, so z.B. nicht in dem zweielementigen Körper oben.

Eine grobe, aber wichtige Einteilung der Körper in verschiedene Klassen kann man nach ihrer Charakteristik vornehmen:

Definition. Sei K ein Körper (mit 1 als neutralem Element der Multiplikation). Wenn für alle $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $n1 \neq 0$ ist, sagen wir, K hat die *Charakteristik* 0, kurz $\operatorname{char} K = 0$. Andernfalls setzen wir

$$\operatorname{char} K = \min\{n \in \mathbb{N} : n > 0,\ n1 = 0\}.$$

Man sagt im Fall $\operatorname{char} K = 0$ auch, K habe *unendliche* Charakteristik, im anderen Fall, K habe *endliche* Charakteristik. Nicht jede natürliche Zahl kommt als Charakteristik eines Körpers in Frage:

Satz 4.1. *Sei K ein Körper mit* $\operatorname{char} K \neq 0$. *Dann ist* $\operatorname{char} K$ *eine Primzahl.*

Beweis. Sei $n = \operatorname{char} K$. Wir nehmen an, n sei keine Primzahl, und führen diese Annahme zum Widerspruch. Daß n keine Primzahl ist, bedeutet daß $n = n'n''$ mit $n', n'' \in \mathbb{N}$, $1 < n', n'' < n$. Dann ist

$$0 = n1 = n'n''1 = (n'1)(n''1).$$

Folglich muß $n'1 = 0$ oder $n''1 = 0$ gelten – beides im Widerspruch zur Definition von n. □

Die Körper $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$ haben die Charakteristik 0, der zweielementige Körper hat die Charakteristik 2.

Alle Aussagen über $\mathbb{R}$, die nur auf der Gültigkeit der Eigenschaften eines Körpers beruhen, gelten natürlich in beliebigen Körpern, so etwa die binomische Formel. In Analogie zur Situation bei Gruppen und Untergruppen wird man sagen, $\mathbb{Q}$ sei ein Teilkörper von $\mathbb{R}$. Allgemein treffen wir folgende Definition:

Definition. K sei ein Körper. Eine Teilmenge $L \subset K$ ist ein *Teilkörper*, wenn sich Addition und Multiplikation auf L einschränken lassen und L mit diesen Verknüpfungen ein Körper ist. Man nennt in dieser Situation K einen *Erweiterungskörper* von L.

Zunächst ist die Situation $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ unser einzig signifikantes Beispiel für diese Definition.

Obwohl im Schulunterricht der Linearen Algebra das Rechnen mit Polynomen kaum auftritt, sind diese jedoch für die „höhere“ Lineare Algebra sehr wichtig. Unter einem Polynom über K verstehen wir einen Ausdruck,

$$p = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0, \qquad a_0, \ldots, a_n \in K$$

bei dem X eine „Unbestimmte“ ist. Wir wollen an diser Stelle nicht präzise sagen, was mit einer Unbestimmten gemeint ist; dies wird in der Algebra-Vorlesung genau diskutiert. Für die Unbestimmte kann man natürlich auch andere Buchstaben benutzen. Die Identität eines Polynoms ist durch seine Koeffizienten bestimmt. Das heißt, zwei Polynome stimmen überein, wenn sie die gleichen Koeffizienten haben:

$$\begin{aligned} &a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0 = b_m X^m + \cdots + b_1 X + b_0 \\ \iff\ &a_i = b_j = 0 \text{ für } i, j > \min(m,n) \text{ und } a_i = b_i \text{ für } i = 0, \ldots, \min(m,n). \end{aligned}$$

Es folgt daß jedes Polynom $p \neq 0$ genau eine Darstellung $p = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$ hat, bei der $a_n \neq 0$ ist. Wir nennen dann n den *Grad* von p und a_n den *Leitkoeffizienten*. Hat p den Leitkoeffizienten 1, so heißt p *normiert*. Dem Nullpolynom ordnen wir keinen festen Grad zu.

Die Menge der Polynome über K bezeichnen wir mit $K[X]$. Für die Addition und Multiplikation in $K[X]$ gelten alle Regeln, die wir für das Rechnen in Körpern verlangt haben, mit einer Ausnahme: nur die Polynome $a \in K$, $a \neq 0$, besitzen ein Inverses bezüglich der Multiplikation. Daher ist $K[X]$ kein Körper, sondern nur ein *Ring*; wir nennen ihn den *Polynomring in einer Unbestimmten über K*. Die Klasse der Ringe wird in der Algebra-Vorlesung eingehend diskutiert. Ein uns von Kindesbeinen an bekannter Ring ist der Ring $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen.

Wir können K als Teilmenge von $K[X]$ auffassen, wenn wir $a \in K$ mit dem Polynom $aX^0 \in K[X]$ identifizieren.

Offensichtlich gilt für Polynome $p, q \neq 0$:

$$\operatorname{grad} pq = \operatorname{grad} p + \operatorname{grad} q, \quad \operatorname{grad}(p+q) \leq \max(\operatorname{grad} p, \operatorname{grad} q),$$

wobei sogar $\operatorname{grad}(p+q) = \max(\operatorname{grad} p, \operatorname{grad} q)$ ist, falls $\operatorname{grad} p \neq \operatorname{grad} q$.

Neben Addition und Multiplikation ist aber noch die Division mit Rest von besonderer Bedeutung, genauso wie für das Rechnen mit ganzen Zahlen:

Satz 4.2. *Seien f, $g \in K[X]$, $g \neq 0$. Dann existieren eindeutig bestimmte Polynome q, $r \in K[X]$, für die*

$$f = qg + r \quad \textit{und} \quad r = 0 \quad \textit{oder} \quad \operatorname{grad} r < \operatorname{grad} g$$

gilt.

Wir werden diesen Satz in der Algebra-Vorlesung beweisen und begnügen uns hier mit einem Beispiel, das dem Schema der schriftlichen Division folgt. (Dieses Schema kann so formalisiert werden, daß es den Beweis des Satzes liefert.)

$$\begin{array}{rl}
(3x^5 - 2x^4 \quad + \; x^2 - 3x + 5) : (x^2 + 1) = 3x^3 - 2x^2 - 3x + 3, & \\
\underline{-(3x^5 \quad + \; 3x^3)} & \\
\quad -2x^4 - \; 3x^3 + \; x^2 - 3x + 5 & \text{Rest } 2. \\
\quad \underline{-(-2x^4 \quad - 2x^2)} & \\
\quad -\; 3x^3 + \; 3x^2 - 3x + 5 & \\
\quad \underline{-(-3x^3 \quad - 3x)} & \\
\quad 3x^2 + 5 & \\
\quad \underline{-(3x^2 + 1)} & \\
\quad 2 &
\end{array}$$

Jedem Polynom $p = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$ können wir eine polynomiale Funktion $K \to K$ zuordnen, indem wir

$$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, \qquad x \in K,$$

setzen. Im allgemeinen läßt sich p aber nicht mit dieser Funktion identifizieren! Wenn zum Beispiel K der Körper aus zwei Elementen ist, so gilt $x^2 + x = 0$ für alle $x \in K$, und das Nullpolynom definiert die gleiche Funktion wie $X^2 + X$. Wir werden aber gleich sehen, daß über einem unendlichen Körper diese Schwierigkeit nicht auftritt.

Eine simple, aber notwendige Feststellung ist, daß das Einsetzen von x für X mit den Rechenoperationen in $K[X]$ und K verträglich ist. Es gilt

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x).$$

Wir verzichten darauf, die einfache Rechnung durchzuführen.

Man nennt $x_0 \in K$ eine *Nullstelle* von p, wenn $p(x_0) = 0$ ist. In diesem Fall spaltet p den Linearfaktor $X - x_0$ ab:

Satz 4.3. *Genau dann ist x_0 eine Nullstelle des Polynoms p, wenn es ein $q \in K[X]$ mit*

$$p = q \cdot (X - x_0)$$

gibt.

Beweis. Nach dem Satz von der Division mit Rest ist

$$p = q \cdot (X - x_0) + r$$

wobei $r = 0$ oder $\operatorname{grad} r < \operatorname{grad}(X - x_0) = 1$ ist. In jedem Fall ist $r = a$ mit a in K. Einsetzen von x_0 liefert

$$r = r(x_0) = p(x_0) - q(x_0)(x_0 - x_0) = 0. \qquad \square$$

Satz 4.3 erlaubt es uns, die Vielfachheit einer Nullstelle zu definieren: x_0 ist eine Nullstelle der Vielfachheit $e \in \mathbb{N}$ von p, wenn es ein $q \in K[X]$ mit $p = q(X - x_0)^e$ gibt, eine Darstellung $p = s(X - x_0)^{e+1}$ aber nicht möglich ist.

Die Anzahl der Nullstellen eines Polynoms $p \neq 0$ ist durch seinen Grad beschränkt, und zwar auch dann, wenn man diese mit Vielfachheit zählt:

Satz 4.4. *Sei $p \in K[X]$, $p \neq 0$, und seien $x_1, \ldots, x_m$ die Nullstellen von p, $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$. Dann gilt für die Vielfachheiten $e_1, \ldots, e_m$ dieser Nullstellen:*

$$e_1 + \cdots + e_m \leq \operatorname{grad} p$$

Beweis. Es gilt $p = (X - x_1)^{e_1} q$. Es ist dann $\operatorname{grad} p = e_1 + \operatorname{grad} q$, und die Behauptung folgt sofort durch Induktion über m, wenn wir zeigen können, daß x_i eine Nullstelle der Vielfachheit e_i von q ist für $i = 2, \ldots, m$. Es genügt natürlich, dies für x_2 zu zeigen.

Wir benutzen dazu eine Induktion über e_2. Da $(X - x_1)(x_2) = x_2 - x_1 \neq 0$ ist, muß $q(x_2) = 0$ sein, so daß der Fall $e_2 = 1$ schon erledigt ist. Bei $e_2 > 1$ können wir zumindest den Faktor $(X - x_2)$ von p und q abspalten:

$$(X - x_2)\tilde{p} = (X - x_1)^{e_1}(X - x_2)\tilde{q}.$$

Kürzen von $X - x_2$ (dies ist nach dem Satz von der Division mit Rest sicher erlaubt) liefert

$$\tilde{p} = (X - x_1)^{e_1}\tilde{q}.$$

Da $\tilde{p}$ in x_2 eine $e_2 - 1$-fache Nullstelle besitzt, können wir nun die Induktionsvoraussetzung der Induktion über e_2 anwenden: x_2 ist $e_2 - 1$-fache Nullstelle von $\tilde{q}$, und damit e_2-fache Nullstelle von q. $\square$

Der Beweis zeigt, daß mit den Bezeichnungen des Satzes 4.4 gilt:

$$p = (X - x_1)^{e_1} \cdots (X - x_m)^{e_m} q$$

wobei das Polynom q keine Nullstelle besitzt; überdies sind alle Größen in dieser Darstellung von p eindeutig bestimmt (bis auf die Reihenfolge der Faktoren).

Die schon genannte Tatsache, daß ein Polynom über einem unendlichen Körper K durch die von ihm repräsentierte Funktion eindeutig bestimmt ist, folgt nun leicht aus dem folgenden Satz, der eine etwas schärfere Aussage enthält:

Satz 4.5. *Seien $p, q \in K[X]$ Polynome, deren Grad $\leq n$ ist. Wenn $p \neq q$ ist, so stimmen $p(x)$ und $q(x)$ für höchstens n Elemente $x \in K$ überein. (In diesem Satz setzen wir* $\operatorname{grad} 0 = 0$*).*

Beweis. Genau dann ist $p(x) = q(x)$, wenn x eine Nullstelle von $p - q$ ist. Nach 4.4 besitzt $p-q$ höchstens n Nullstellen, denn $p-q$ hat höchstens den Grad n. □

Das Rechnen mit Polynomen hat in mancher Hinsicht Ähnlichkeit mit dem Rechnen mit ganzen Zahlen. In beiden Fällen können wir nur mit Rest dividieren. Diesem Mangel wird bei den ganzen Zahlen durch Übergang zum Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen begegnet.

Genauso kann man $K[X]$ in einen Körper einbetten, indem man Brüche von Polynomen bildet. Wir verzichten auch hier auf eine formal strenge Einführung, sondern geben nur die Regeln an, wie man mit Brüchen von Polynomen rechnet. Sie sind die gleichen wie beim Umgang mit Brüchen ganzer Zahlen:

$$\frac{f}{g} = \frac{u}{v} \iff fv = gu$$
$$\frac{f}{g} + \frac{u}{v} = \frac{fv + gu}{gv}$$
$$\frac{f}{g} - \frac{u}{v} = \frac{fu}{gv}.$$

Da mit g und v auch $gv \neq 0$ ist, sind die Nenner von Summe und Produkt $\neq 0$.

Ein Bruch f/g kann auf viele Arten dargestellt werden; in $\mathbb{Q}$ gilt ja z.B. $1/2 = 2/4 = 3/6 = c \ldots$. Bevor die Definition der Addition und Multiplikation einen Sinn machen, muß man sich vergewissern, daß das Ergebnis nur von f/g usw. abhängt, nicht aber von f und g selbst. Mit anderen Worten: Für die Addition ist zu zeigen:

$$\frac{f}{g} = \frac{\tilde{f}}{\tilde{g}} \implies \frac{fv + gv}{fv} = \frac{\tilde{f}v + \tilde{g}u}{\tilde{g}v}.$$

Dies aber ist richtig:

$$(fv + gu)\tilde{g}v = f\tilde{g}v^2 + g\tilde{g}uv = \tilde{f}gv^2 + g\tilde{g}uv$$
$$= (\tilde{f}v + \tilde{g}u)gv.$$

Also ist

$$\frac{fv + gu}{gv} = \frac{\tilde{f}v + \tilde{g}u}{\tilde{g}v}.$$

Ebenso gilt, daß $f/g + u/v$ nur von u/v abhängt, und für die Multiplikation gilt analoges.

Satz 4.6. *Die Brüche f/g der Polynome $f, g \in K[X]$, $g \neq 0$, bilden mit den oben erklärten Operationen einen Körper, den wir mit $K(X)$ bezeichnen.*

Seien $f, g \in K[X]$, $g \neq 0$ und $x_1, \ldots, x_n$ die Nullstellen von g. Dann können wir f/g die Funktion

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{f(x)}, \quad x \in K, \quad x \neq x_1, \ldots, x_n,$$

zuordnen. Daher nennt man $K(X)$ den *Körper der rationalen Funktionen in einer Unbestimmten über K*.

ABSCHNITT 5

Die komplexen Zahlen

Die komplexen Zahlen bilden eine außerordentlich wichtige Erweiterung der reellen Zahlen. Wir führen auf $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ folgende Verknüpfungen ein:

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$
$$(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + b_1a_2).$$

Satz 5.1. *Mit diesen Verknüpfungen ist* $\mathbb{C}$ *ein Körper, den wir den* Körper der komplexen Zahlen *nennen.*

Beweis. Das Assoziativgesetz für die Addition rechnet man unmittelbar nach:

$$((a_1, b_1) + (a_2, b_2)) + (a_3, b_3) = ((a_1 + a_2) + a_3, (b_1 + b_2) + b_3)$$
$$= (a_1 + (a_2 + a_3)), b_1 + (b_2 + b_3)) = (a_1, b_1) + ((a_2, b_2) + (a_3, b_3)).$$

Offensichtlich ist $(0, 0)$ neutral für $+$, und $(-a, -b)$ ist invers zu (a, b). Ebenso offensichtlich ist die Addition kommutativ.

Man sieht der Definition der Multiplikation unmittelbar an, daß sie kommutativ ist. Daß sie auch assoziativ ist, muß man nachrechnen, was wir uns hier ersparen. Es gilt

$$(1, 0)(a, b) = (1a - 0b, 1b + 0a) = (a, b),$$

so daß $(1, 0)$ neutral bezüglich der Multiplikation ist.

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ oder $b \neq 0$; dann ist $a^2 + b^2 > 0$. Daher ist für $(a, b) \in \mathbb{C}$, $(a, b) \neq (0, 0)$,

$$\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right)$$

ein wohldefiniertes Element aus $\mathbb{C}$. Es gilt

$$(a, b)\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right) = \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2}, \frac{-ab + ba}{a^2 + b^2}\right) = (1, 0),$$

und wir sehen, daß $(a/(a^2 + b^2), -b/(a^2 + b^2))$ invers zu (a, b) bezüglich der Multiplikation ist.

Schließlich überprüft man das Distributivgesetz durch direktes Nachrechnen, was zwar lästig, aber nicht schwierig ist. □

Neben dem Element $(1,0)$ spielt auch das Element $(0,1)$ eine ausgezeichnete Rolle in $\mathbb{C}$:

$$(0,1)^2 = (-1,0).$$

Man nennt $(0,1)$ die *imaginäre Einheit* und schreibt dafür i:

$$i = (0,1).$$

Wenn wir das Einselement $(1,0)$ einfach durch 1 bezeichnen, gilt mithin

$$i^2 = -1.$$

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ \varphi(a) = (a,0).$$

Man überprüft sofort, daß für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b), \quad \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b).$$

Wir sehen nun $\mathbb{R}$ einfach als Teilmenge von $\mathbb{C}$ an, indem wir das Element $(a,0) \in \mathbb{C}$ mit $a \in \mathbb{R}$ identifizieren. Die Gültigkeit der vorangegangenen Gleichungen besagt dann einfach, daß $\mathbb{R}$ ein Teilkörper von $\mathbb{C}$ ist. Sei $(a,b) \in \mathbb{C}$. Dann ist

$$\begin{aligned}(a,b) &= (a,0)(1,0) + (b,0)(0,1)\\ &= a + bi,\end{aligned}$$

und in dieser Weise schreibt man komplexe Zahlen, wenn man mit ihnen rechnet. Für eine komplexe Zahl $z = a + bi$ heißt a der *Realteil* von z, b der *Imaginärteil*,

$$a = \operatorname{Re} z, \quad b = \operatorname{Im} z.$$

Eine wichtige Operation ist die *komplexe Konjugation*. Für $z = a + bi$ heißt

$$\overline{z} = a - bi$$

die zu z *konjugiert-komplexe* Zahl. Es gilt

$$z\overline{z} = a^2 + b^2,$$

und man nennt die reelle Zahl

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}}$$

den *Betrag von* z. Für die Konjugation gelten folgende Rechenregeln:

(a) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$,

(b) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$,

(c) $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$,

(d) $z + \overline{z} = 2 \operatorname{Re} z$,

(e) $z - \overline{z} = (2 \operatorname{Im} z)i$,

(f) $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$,

(g) $\overline{\overline{z}} = z$.

Dies rechnet man direkt nach.

Wichtige Rechenregeln für den Betrag: Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ ist

(a) $|z| \in \mathbb{R}, \quad |z| \geq 0, \quad |z| = 0 \iff z = 0;$
(b) $|zw| = |z||w|;$
(c) $|z + w| \leq |z| + |w|$ (Dreiecksungleichung).

Von diesen Regeln sind (a) und (b) offensichtlich. Wir beweisen (c). Es gilt

$$|z + w| \leq |z| + |w| \quad \Longleftrightarrow \quad |z + w|^2 \leq \big(|z| + |w|\big)^2,$$

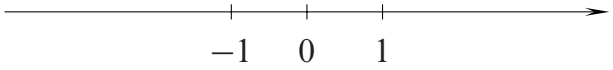
weil auf beiden Seiten der linken Ungleichung reelle Zahlen ≥ 0 stehen. Ferner ist

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w)\overline{(z + w)} = (z + w)(\overline{z} + \overline{w}) = z\overline{z} + z\overline{w} + \overline{z}w + w\overline{w} \\ &= z\overline{z} + (z\overline{w} + \overline{z\overline{w}}) + w\overline{w} = z\overline{z} + 2\,\mathrm{Re}(z\overline{w}) + w\overline{w}, \\ (|z| + |w|)^2 &= |z|^2 + 2|w||z| + |w|^2 = z\overline{z} + 2|w||z| + w\overline{w}. \end{aligned}$$

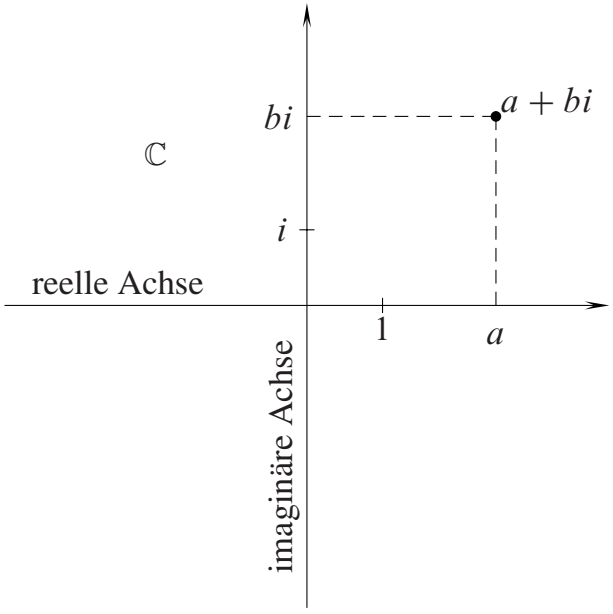
Es genügt also zu zeigen, daß $\mathrm{Re}(z\overline{w}) \leq |w||z|$ ist. Dies folgt aus

$$\mathrm{Re}(z\overline{w}) \leq |\,\mathrm{Re}(z\overline{w})| \leq |z\overline{w}| = |z||\overline{w}| = |z||w|.$$

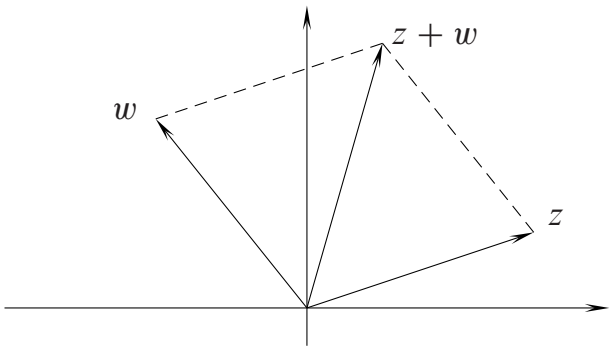
Für unsere Vorstellung von den reellen Zahlen ist wichtig, daß wir uns ein geometrisches Bild von ihnen machen. Wir identifizieren sie mit den Punkten einer Geraden



die wir *Zahlengerade* nennen. Genauso können wir $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ mit der Ebene identifizieren:



Die Addition komplexer Zahlen ist leicht geometrisch zu deuten. Sie stellt die *Parallelogramm-Regel* dar:



Ebenso leicht deutet man die Konjugation: $\overline{z}$ geht aus z durch Spiegelung an der reellen Achse hervor.

Um auch die Multiplikation geometrisch zu deuten, benötigen wir einige Kenntnisse über trigonometrische Funktionen, die man in der Schule gelernt hat. (Selbstverständlich sind die trigonometrischen Funktionen Gegenstand der Analysis-Vorlesung.)

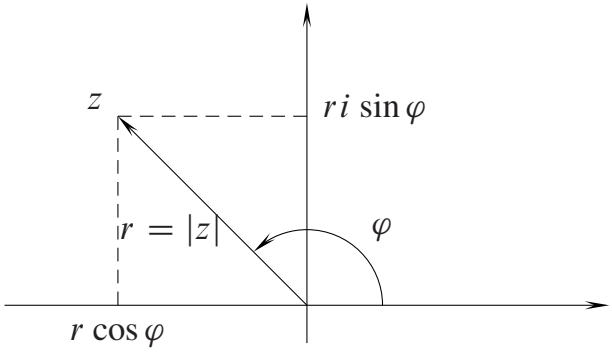
Wir betonen: Winkel werden im Bogenmaß gemessen. Der Vollwinkel hat dann das Maß 2π, der rechte Winkel dementsprechend das Maß $\pi/2$. Nach dem Satz des Pythagoras ist für $z = a + bi$ die Zahl

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

der Abstand von z zum Nullpunkt, und die elementar-geometrischen Eigenschaften des rechtwinkligen Dreiecks zeigen uns, daß

$$a = r \cos \varphi,$$
$$b = r \sin \varphi,$$

wobei φ der Winkel zwischen der positiven reellen Halbachse und dem Strahl von 0 durch z ist, gemessen gegen den Uhrzeigersinn:



Es gilt also

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Die Existenz einer solchen Darstellung von z kann ohne jeglichen Rückgriff auf unsere anschaulich-geometrische Vorstellung von der „Ebene“ hergeleitet werden. Hierfür müssen aber auch die trigonometrischen Funktionen ohne einen Bezug auf solche Vorstellungen eingeführt werden, was für einen Großteil der Hörer noch nicht geschehen ist. Was wir für die Existenz der trigonometrischen Darstellung wirklich brauchen, gibt folgender Satz an:

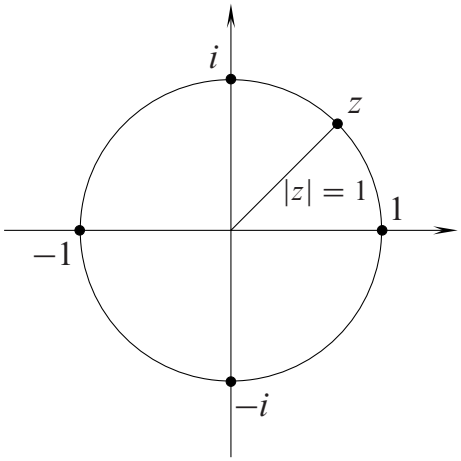
Satz 5.2. *Seien $u, v \in \mathbb{R}$ mit $u^2 + v^2 = 1$.*

(a) *Dann existiert ein φ, $0 \leq \varphi < 2\pi$, mit*

$$(u, v) = (\cos\varphi, \sin\varphi).$$

(b) *Für $\psi \in \mathbb{R}$ gilt $(u, v) = (\cos\psi, \sin\psi)$ genau dann, wenn $\psi - \varphi = 2k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$.*

Die komplexen Zahlen $z = u + iv$ mit $|z|^2 = u^2 + v^2 = 1$ liegen auf dem *Einheitskreis:*



Um den Satz auf eine beliebige komplexe Zahl anwenden zu können, schreiben wir

$$z = |z| \left(\frac{\operatorname{Re} z}{|z|} + \frac{\operatorname{Im} z}{|z|} \cdot i \right).$$

Für $u = \operatorname{Re} z/|z|$, $v = \operatorname{Im} z/|z|$ gilt dann $u^2 + v^2 = 1$, und wir erhalten ein bis auf Vielfache von 2π eindeutig bestimmtes φ mit $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Sei nun $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $w = s(\cos\psi + i\sin\psi)$. Dann ist

$$zw = rs\big((\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi) + i(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi)\big).$$

Nach dem Additionstheorem für die trigonometrischen Funktionen gilt

$$\cos(\varphi + \psi) = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi,$$
$$\sin(\varphi + \psi) = \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\varphi.$$

Damit ist

$$zw = rs\big(\cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi)\big),$$

und die geometrische Deutung der komplexen Multiplikation lautet: *Man multipliziert die Beträge von z und w und addiert die zugehörigen Winkel.*

Als Folgerung aus der (von uns nicht streng bewiesenen) trigonometrischen Darstellung der komplexen Zahlen leiten wir folgenden Satz über die Existenz n-ter Wurzeln in $\mathbb{C}$ ab:

Satz 5.3. *Sei $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$. Dann gibt es genau n Zahlen $w \in \mathbb{C}$ mit $w^n = z$, nämlich*

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, \ldots, n-1.$$

Beweis. Jede komplexe Zahl w mit $w^n = z$ ist Nullstelle der Polynoms $w^n - z$. Ein solches Polynom hat höchstens n Nullstellen, wie wir später beweisen werden.

Für jede der Zahlen w_k gilt

$$\begin{aligned} w_k^n &= \left(\sqrt[n]{r}\right)^n \left(\cos n\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin n\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) \\ &= r\big(\cos(\varphi + 2k\pi) + i\sin(\varphi + 2k\pi)\big). \end{aligned}$$

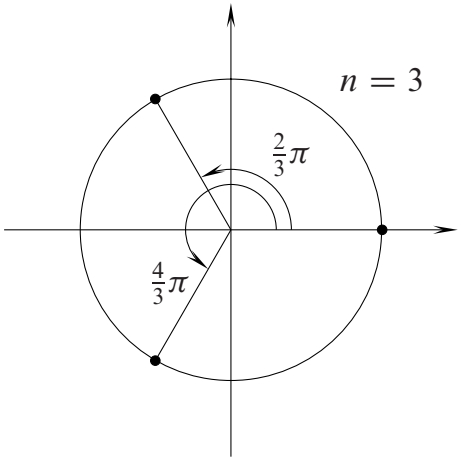
Da $\cos(\varphi + 2k\pi) = \cos\varphi$ und $\sin(\varphi + 2k\pi) = \sin\varphi$, folgt $w_k^n = z$.

Schließlich ist klar, daß die Zahlen w_k paarweise verschieden sind: wenn

$$(\cos\psi, \sin\psi) = (\cos\rho, \sin\rho),$$

so unterscheiden sich ψ und ρ durch ein ganzzahliges Vielfaches von 2π. □

Die Zahlen w mit $w^n = 1$ nennt man die *n-ten Einheitswurzeln*. Da $|w^n| = |w|^n = 1$, liegen die Einheitswurzeln sämtlich auf dem Einheitskreis. Die n-ten Einheitswurzeln bilden gerade die Eckpunkte des regulären n-Ecks, wenn man einen dieser Eckpunkte auf 1 legt:



Viel allgemeiner als 5.3 gilt der *Fundamentalsatz der Algebra:*

Satz 5.4. *Sei $p \in \mathbb{C}[X]$, $p \neq 0$, ein Polynom des Grades n. Dann zerfällt in das Produkt*

$$p = u(X - z_1)e_1 \cdots (X - z_m)^{e_m}$$

wobei $z_1, \ldots, z_m$ die paarweise verschiedenen Nullstellen von p mit den Vielfachheiten $e_1, \ldots, e_m$ sind und u der Leitkoeffizient von p ist.

Der Fundamentalsatz ermöglicht uns, auch eine Aussage über die Zerlegung von Polynomen in $\mathbb{R}[X]$ zu machen. Dazu brauchen wir im wesentlichen nur eines zu beobachten: mit $z \in \mathbb{C}$ ist auch $\overline{z}$ Nullstelle von p, und zwar mit der gleichen Vielfachheit. Um dies einzusehen, setzen wir die komplexe Konjugation auf Polynome fort: für $p = a_n X^n + \cdots + a_0 \in \mathbb{C}[X]$ sei

$$\overline{p} = \overline{a_n} X^n + \cdots + \overline{a_0}.$$

Für $p \in \mathbb{R}[X]$ ist dann $p = \overline{p}$, und es gilt

$$p = (X - z)^e q \quad \Longleftrightarrow \quad p = \overline{p} = (X - \overline{z})^e \overline{q}.$$

Ferner ist

$$\overline{(X - z)(X - \overline{z})} = (X - \overline{z})(X - z) = (X - z)(X - \overline{z}) \in \mathbb{R}[X].$$

Wenn wir in der Zerlegung von p in $\mathbb{C}[X]$ die Linearfaktoren $X - z$ und $X - \overline{z}$ jeweils zusammenfassen erhalten wir also eine Zerlegung in $\mathbb{R}[X]$:

Satz 5.5. *Sei $p \in \mathbb{R}[X]$, $p \neq 0$, ein Polynom des Grades n mit den reellen Nullstellen $x_1, \ldots, x_m$, und den Nullstellen $z_1, \ldots, z_r$ in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, die positiven Imaginärteil haben. Seien $e_1, \ldots, e_m$ bzw. $s_1, \ldots, s_r$ die Vielfachheiten. Dann gilt*

$$p = u(X - x_1)^{e_1} \cdots (X - x_m)^{e_m} (X^2 + v_1 X + w_1)^{s_1} \cdots (X^2 - v_r X + w_r)^{s_r},$$

wobei u der Leitjoeffizient von p und $X^2 + v_i X + w_i = (X - z_i)(X - \overline{z_i})$ ist.

ABSCHNITT 6

Vektorräume

Die Lineare Algebra, mit der wir uns in dieser Vorlesung hauptsächlich beschäftigen, ist die Theorie der Vektorräume. Genau wie die Begriffe „Gruppe“ und „Körper“ führen wir auch den Begriff „Vektorraum“ axiomatisch ein.

Definition. Ein *Vektorraum* über einem Körper K ist eine Menge V versehen mit

einer Verknüpfung $V \times V \to V$, genannt *Addition*,
und einer Abbildung $K \times V \to V$, genannt *skalare Multiplikation*,

die folgenden Bedingungen genügen:

(a) V ist bezüglich der Addition eine abelsche Gruppe,
(b) für alle $a, b \in K$ und $v, w \in V$ ist
  (i) $a(bv) = (ab)v$,
  (ii) $1v = v$,
  (iii) $a(v + w) = av + aw$,
  (iv) $(a + b)v = av + bv$.

Es ist unvermeidlich, daß wir das Symbol $+$ sowohl für die Addition in K, als auch für die in V benutzen, ebenso wie die Produktschreibweise innerhalb von K und für die skalare Multiplikation verwandt wird. Letzten Endes wäre es auch nicht sehr hilfreich, wenn wir etwa $0 \in K$ und $0 \in V$ typografisch unterscheiden würden.

Eine Abbildung des Typs $M \times N \to N$, wie sie etwa bei der skalaren Multiplikation gegeben ist, wird *Operation von M auf N* genannt.

Rechenregeln für Vektorräume: Für $a \in K$, $v \in V$ ist

(a) $0v = 0$
(b) $(-a)v = a(-v) = -av$
(c) $av = 0 \iff a = 0$ oder $v = 0$.

Man beweist diese Rechenregeln genauso wie die entsprechenden Regeln für das Rechnen in Körpern.

Beispiele. (a) Obwohl es uns nichts Neues bringt, ist bereits das Beispiel $V = K$ nützlich: K ist in offensichtlicher Weise ein Vektorraum über sich selbst.

(b) Das fundamentale Beispiel eines Vektorraums ist $V = K^n$. Dazu definieren wir für

$$v = (a_1, \ldots, a_n), w = (b_1, \ldots, b_n) \in K^n \quad \text{und} \quad \alpha \in K :$$

$$v + w = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n),$$
$$\alpha v = (\alpha a_1, \ldots, \alpha a_n).$$

Daß K^n mit diesen Operationen ein Vektorraum ist, kann man direkt nachrechnen. So ist etwa $0 = (0, \ldots, 0)$ das neutrale Element bezüglich $+$ und $(-a_1, \ldots, -a_n)$ das Inverse von $(a_1, \ldots, a_n)$ bezüglich $+$.

(c) Ein Erweiterungskörper L von K ist in natürlicher Weise ein Vektorraum über K: Man beschränkt die Multiplikation $L \times L \to L$ einfach auf $K \times L \to L$. So ist etwa $\mathbb{R}$ in natürlicher Weise ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum, $\mathbb{C}$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum.

Allgemeiner gilt dies für jeden L-Vektorraum V: Die Einschränkung der skalaren Multiplikation auf Elemente von K macht ihn zum K-Vektorraum.

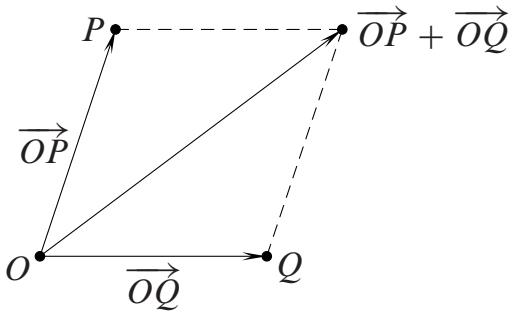
(d) Wir betrachten ein „exotisches“ Beispiel:

$$V = \mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$$

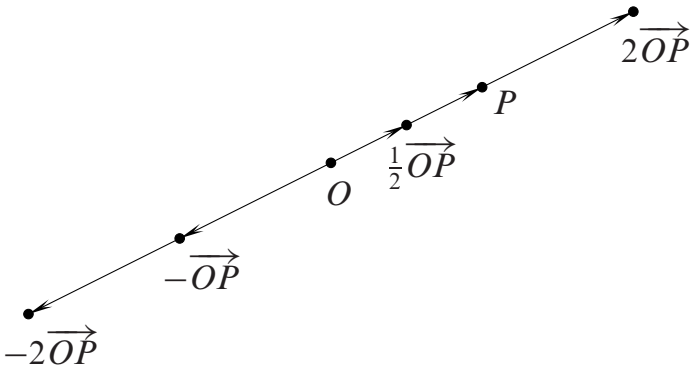
mit der Addition $x \oplus y = xy$ und der Skalarmultiplikation $\alpha * x = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(e) In der Geometrie und vor allem in Physik und Technik sind Vektoren Größen, die eine „Richtung“ und einen „Betrag“ haben, z.B. Kraft, während „Skalare“ Größen sind, denen keine Richtung zukommt, z.B. Energie.

Wir wollen kurz erläutern, wie elementargeometrische Überlegungen zum Begriff des Vektorraums führen. In der Ebene E der anschaulichen Geometrie zeichnen wir einen Punkt O aus, den „Ursprung“. Zu jedem Punkt $P \in E$ gehört dann eine gerichtete Strecke $\overrightarrow{OP}$



Die Addition von solchen gerichteten Strecken erfolgt mittels der Parallelogramm-Regel, während für $r \in \mathbb{R}$, $r \geq 0$, die Strecke $r\overrightarrow{OP}$ die gleiche Richtung wie $\overrightarrow{OP}$, aber die r-fache Länge hat (bei $r < 0$ erfolgt Richtungsumkehr).



Nachdem man Koordinaten eingeführt hat (mit O als Ursprung des Koordinatensystems), ist der soeben konstruierte Vektorraum der „Ortsvektoren“ gerade der $\mathbb{R}^2$. Analog erhält man den $\mathbb{R}^3$ als Vektorraum der Ortsvektoren des Anschauungsraums.

Wir betonen aber ausdrücklich, daß für uns die Elemente eines Vektorraums nicht etwa Wesen sind, die sich dadurch auszeichnen, daß sie eine Richtung und einen Betrag haben. Bei den vorangegangenen Beispielen (c) und (d) und dem folgenden Beispiel (f) ist diese Betrachtungsweise weder naheliegend noch nützlich.

(f) Sei V ein K-Vektorraum und M eine Menge. Für $f, g \in \mathrm{Abb}(M, V)$ und $\alpha \in K$ definieren wir

$$\begin{aligned} f + g \in \mathrm{Abb}(M, V) \quad &\text{durch} \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x), \\ \alpha f \in \mathrm{Abb}(M, V) \quad &\text{durch} \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x), \end{aligned}$$

$x \in M$. Man überprüft sofort, daß $\mathrm{Abb}(M, V)$ mit diesen Operationen ein K-Vektorraum ist. Die Axiome lassen sich „punktweise“ überprüfen; daher überträgt sich ihre Gültigkeit von V auf $\mathrm{Abb}(M, V)$.

(g) Der Polynomring $K[X]$ ist ein Vektorraum über K, wenn wir die Multiplikation auf Produkte $\alpha f, \alpha \in K, f \in K[X]$ einschränken.

Die Liste unserer Beispiele ist damit abgeschlossen.

So, wie wir Untergruppen von Gruppen betrachten, können wir auch Untervektorräume eines Vektorraums behandeln.

Definition. V sei ein K-Vektorraum. Eine nichtleere Teilmenge U von V heißt *Untervektorraum*, wenn gilt:

(a) Für alle $u, v \in U$ ist auch $u + v \in U$.
(b) Für alle $u \in U, \alpha \in K$ ist $\alpha u \in U$.

Wir haben nicht gefordert, daß U mit den auf U eingeschränkten Operationen einen Vektorraum bildet, weil dies automatisch richtig ist: Wegen $0 \cdot u = 0$ für $u \in U$ ($U \neq \emptyset$ wird gefordert!) gilt $0 \in U$ nach (b), und ebenso ist $-u = (-1)u \in U$.

Damit ist klar, daß U eine Untergruppe bezüglich der Addition ist, und alle anderen Forderungen sind ohnehin für beliebige Elemente von V erfüllt.

Beispiele von Untervektorräumen sind sehr leicht zu geben. In jedem Vektorraum V sind zunächst $\{0\}$ und V Untervektorräume.

Definition. Sei V ein K-Vektorraum, und seien $v_1, \ldots, v_n \in V$. Ein Element $w \in V$ ist *Linearkombination* von $v_1, \ldots, v_n$, wenn $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ existieren mit

$$w = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n.$$

Seien $w = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ und $z = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n$ Linearkombinationen von $v_1, \ldots, v_n$. Dann sind auch

$$w + z = (\alpha_1 + \beta_1)v_1 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)v_n,$$
$$\gamma w = (\gamma\alpha_1)v_1 + \cdots + (\gamma\alpha_n)v_n$$

Linearkombinationen von $v_1, \ldots, v_n$. Sei

$$L(v_1, \ldots, v_n) = \{w \in V : w \text{ ist Linearkombination von } v_1, \ldots, v_n\}.$$

Wir haben gesehen, daß $L(v_1, \ldots, v_n)$ ein Untervektorraum von V ist. Er heißt *lineare Hülle* von $v_1, \ldots, v_n$.

Sei etwa $V = K^n$. Dann verwenden wir die Standardbezeichnung

$$e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$$

mit dem Eintrag 1 and der i-ten Stelle. Damit gilt

$$K^n = L(e_1, \ldots, e_n),$$

denn für $v = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K^n$ ist

$$v = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n.$$

Die wichtigste Anwendung der linearen Algebra ist die Theorie der linearen Gleichungssysteme. Sei z.B. für $K = \mathbb{R}$ folgendes Gleichungssystem gegeben:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 + \ x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -x_1 + \ x_2 + \ x_3 &= -1. \end{aligned}$$

Um den Zusammenhang zu den Linearkombinationen herzustellen, schreiben wir Elemente des $\mathbb{R}^3$ im folgenden als Spaltenvektoren. Wir setzen

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Eine Lösung des obigen Gleichungssystems zu finden, ist dann gleichbedeutend damit, $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ zu finden, für die

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = b$$

ist. Genau dann ist das Gleichungssystem lösbar, wenn $b \in L(v_1, v_2, v_3)$.

Wie man lineare Gleichungssysteme systematisch löst, besprechen wir in Abschnitt 8. Sei nun V ein K-Vektorraum und M eine Teilmenge von V. Dann setzen wir

$$L(M) = \{w \in V : \text{ es existieren } v_1, \ldots, v_n \in M \text{ mit } w \in L(v_1, \ldots, v_n)\}$$

und nennen $L(M)$ die *lineare Hülle von* M. Zweierlei ist offensichtlich:

(a) Für endliches M stimmen beide Definitionen von $L(M)$ überein;

(b) $L(M)$ ist stets ein Untervektorraum:

$$\left.\begin{array}{l} w \in L(v_1, \ldots, v_n) \\ z \in L(u_1, \ldots, u_m) \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} w + z \in L(v_1, \ldots, v_n, u_1, \ldots, u_m), \\ \alpha w \in L(v_1, \ldots, v_n). \end{array}$$

Es ist zweckmäßig, $L(\emptyset) = \{0\}$ zu setzen.

Definition. Wenn $U = L(M)$ ist, sagen wir auch, U sei der *von* M *erzeugte* Untervektorraum oder M sei *ein Erzeugendensystem* von U.

In dieser Vorlesung werden wir es meistens mit endlichen Erzeugendensystemen zu tun haben.

Seien $U_1, U_2 \subset V$ Untervektorräume. Dann ist $U_1 \cap U_2$ ein Untervektorraum (aber $U_1 \cup U_2$ i.a. nicht!):

$$\begin{array}{lll} v, w \in U_1 \cap U_2 & \Longrightarrow & v, w \in U_1 \text{ und } v, w \in U_2 \\ & \Longrightarrow & \alpha v, v + w \in U_1 \text{ und } \alpha v, v + w \in U_2 \\ & \Longrightarrow & \alpha v, v + w \in U_1 \cap U_2. \end{array}$$

Genauso sieht man: Der Durchschnitt endlich vieler Untervektorräume $U_1, \ldots, U_n$ oder sogar beliebig vieler Untervektorräume ist ein Untervektorraum.

$U_1 \cap U_2$ ist die größte Menge, die sowohl in U_1 als auch in U_2 enthalten ist, und damit natürlich auch der größte gemeinsame Untervektorraum von U_1 und U_2.

Welches ist der kleinste Untervektorraum, der sowohl U_1 als auch U_2 enthält? Wenn $W \supset U_1 \cup U_2$ ein Untervektorraum ist, gilt $u_1 + u_2 \in W$ für alle $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$. Wir setzen

$$U_1 + U_2 = \{u_1 + u_2 : u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}.$$

Offensichtlich ist $U_1 + U_2$ ein Untervektorraum: Für $u_1, u_1' \in U_1$, $u_2, u_2' \in U_2$ und $\alpha \in K$ ist

$$\begin{aligned} (u_1 + u_2) + (u_1' + u_2') &= (u_1 + u_1') + (u_2 + u_2') \in U_1 + U_2 \\ \alpha(u_1 + u_2) &= \alpha u_1 + \alpha u_2 \in U_1 + U_2. \end{aligned}$$

Da, wie soeben gezeigt, jeder U_1 und U_2 umfassende Untervektorraum $U_1 + U_2$ enthält, ist $U_1 + U_2$ der kleinste U_1 und U_2 enthaltende Untervektorraum.

Wie man den Durchschnitt beliebig vieler Untervektorräume bilden kann, so kann man auch die Summe beliebig vieler Untervektorräume bilden. Für eine Familie $(U_i)_{i\in I}$ von Untervektorräumen setzen wir

$$\sum_{i\in I} U_i = \{u_{i_1} + \cdots + u_{i_n} : u_{i_j} \in U_{i_j}, n \in \mathbb{N}\}.$$

Da die Addition in einem Vektorraum V assoziativ und kommutativ ist, kommt es nicht darauf an, die U_i irgendwie zu ordnen.

Mit dieser Schreibweise können wir die lineare Hülle einer Teilmenge $M \subset V$ auch so angeben:

$$L(M) = \sum_{v\in M} L(v).$$

ABSCHNITT 7

Basen und Dimension

Sei K ein Körper und $V = K^n$. Wir wissen bereits, daß $e_1, \ldots, e_n$ den Vektorraum V erzeugen: Zu jedem $v = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in V$ existieren $\beta_1, \ldots, \beta_n \in K$ mit

$$v = \beta_1 e_1 + \cdots + \beta_n e_n,$$

nämlich $\beta_1 = \alpha_1, \ldots, \beta_n = \alpha_n$. Außerdem sind $\beta_1, \ldots, \beta_n$ eindeutig bestimmt: Wir müssen $\beta_i = \alpha_i$ wählen, weil $\beta_1 e_1 + \cdots + \beta_n e_n = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$.

Sei andererseits $V = K^2$, $w_1 = e_1$, $w_2 = e_2$, $w_3 = e_1 + e_2$. Auch dann existieren zu jedem $v = (\alpha_1, \alpha_2) \in K^2$ Elemente $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in K$ mit $v = \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \beta_3 w_3$. Wir können z.B. $\beta_1 = \alpha_1$, $\beta_2 = \alpha_2$, $\beta_3 = 0$ wählen, aber genauso $\beta_1 = \alpha_1 + 1$, $\beta_2 = \alpha_2 + 1$, $\beta_3 = -1$. In diesem Fall sind die Koeffizienten β_1, β_2, β_3 in der Darstellung von v nicht eindeutig bestimmt. Um zwischen Systemen wie $e_1, \ldots, e_n \in K^n$ und $w_1, w_2, w_3 \in K^2$ unterscheiden zu können, trifft man folgende

Definition. V sei ein K-Vektorraum. Die Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ heißen *linear abhängig*, wenn es $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ gibt, so daß $\alpha_i \neq 0$ für mindestens ein i, aber

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$$

ist. Sonst heißen $v_1, \ldots, v_n$ *linear unabhängig*. Mit anderen Worten: $v_1, \ldots, v_n$ sind linear unabhängig, wenn

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0 \implies \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$$

gilt.

Wir betonen ausdrücklich, daß wir nicht von der linearen Unabhängigkeit der Menge $\{v_1, \ldots, v_n\}$ sprechen. Zwar kommt es für die lineare Unabhängigkeit von $v_1, \ldots, v_n$ nicht auf die Reihenfolge an, aber man sollte nicht von vornherein ausschließen, daß unter den v_i ein Element doppelt vorkommt; ferner spielt beim später definierten Begriff „Basis“ die Reihenfolge sehr wohl eine Rolle.

Satz 7.1. *Die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ sind genau dann linear unabhängig, wenn für jedes $w \in L(v_1, \ldots, v_n)$ die Koeffizienten $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ in der Darstellung $w = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ eindeutig bestimmt sind.*

Beweis. „$\Longleftarrow$“ Es ist $0 = 0v_1 + \cdots + 0v_n$. Nach Voraussetzung sind die Koeffizienten in der Darstellung der 0 eindeutig bestimmt. Also sind $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig.

„$\Longrightarrow$“ Sei $w \in L(v_1, \ldots, v_n)$, $w = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n$. Wir müssen zeigen: $\alpha_i = \beta_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Nun ist aber

$$0 = w - w = (\alpha_1 - \beta_1)v_1 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)v_n.$$

Da $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig sind, muß $\alpha_i - \beta_i = 0$ für $i = 1, \ldots, n$ gelten. □

Man nennt die Darstellung $0 = 0v_1 + \cdots + 0v_n$ die *triviale* Darstellung der 0. Wir können obige Definition dann auch so fassen: $v_1, \ldots, v_n$ sind linear abhängig, wenn 0 eine nichttriviale Linearkombination von $v_1, \ldots, v_n$ ist; sie sind linear unabhängig, wenn sich 0 nur auf triviale Weise als Linearkombination von $v_1, \ldots, v_n$ darstellen läßt.

Daß die Vektoren $w_1, w_2, w_3 \in K^2$ linear abhängig sind, ist kein Zufall, wie wir gleich sehen werden. Zunächst beweisen wir einen Satz über lineare Gleichungssysteme. Ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \alpha_{11}x_1 + \cdots + \alpha_{1n}x_n &= \beta_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\vdots \\ \alpha_{m1}x_1 + \cdots + \alpha_{mn}x_n &= \beta_m \end{aligned}$$

α_{ij}, $\beta_i \in K$, heißt *homogen*, wenn $\beta_1 = \cdots = \beta_m = 0$. Es ist klar, daß jedes homogene lineare Gleichungssystem mindestens eine Lösung besitzt, nämlich die *triviale* Lösung $x_1 = \cdots = x_n = 0$. Für gewisse homogene lineare Gleichungssysteme ist aber von vornherein klar, daß sie auch eine nichttriviale Lösung besitzen:

Satz 7.2. *Sei K ein Körper. Dann hat jedes homogene lineare Gleichungssystem über K mit mehr Unbestimmten als Gleichungen eine nichttriviale Lösung.*

Beweis. Sei n die Zahl der Gleichungen. Wir beweisen den Satz durch Induktion über n. Es genügt offensichtlich, den Fall von $n + 1$ Unbestimmten zu behandeln. Man beachte, daß der folgende Induktionsbeweis ein effektives Verfahren zur Bestimmung einer nichttrivialen Lösung enthält.

Im Fall $n = 1$ haben wir die Gleichung

$$\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 = 0$$

zu betrachten. Wenn $\alpha_{11} = 0$ ist, wählen wir $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, sonst $x_1 = \alpha_{12}$, $x_2 = -\alpha_{11}$.

Für den Induktionsschluß sei $n \geq 1$. Wenn alle $\alpha_{ij} = 0$ sind, können wir $x_1, \ldots, x_{n+1}$ beliebig wählen, speziell $\neq 0$. Im anderen Fall existiert ein $\alpha_{ij} \neq 0$. Da es auf die Reihenfolge der Gleichungen und der Unbestimmten nicht ankommt, dürfen wir annehmen: $\alpha_{11} \neq 0$.

Wir ziehen nun das α_{i1}/α_{11}-fache der ersten Gleichung von der i-ten Gleichung ab, $i = 2, \ldots, n$, und erhalten so ein Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1,n+1}x_{n+1} &= 0 \\ 0 \quad + \alpha'_{22}x_2 + \cdots + \alpha'_{2,n+1}x_{n+1} &= 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \quad \vdots & \\ 0 \quad + \alpha'_{n2}x_2 + \cdots + \alpha'_{n,n+1}x_{n+1} &= 0, \end{aligned}$$

das zum Ausgangssystem äquivalent ist: Beide Systeme haben die gleichen Lösungen. Nach Induktionsvoraussetzung besitzt das System

$$\begin{aligned} \alpha'_{22}x_2 + \cdots + \alpha'_{2,n+1}x_{n+1} &= 0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \quad \vdots & \\ \alpha'_{n2}x_2 + \cdots + \alpha'_{n,n+1}x_{n+1} &= 0 \end{aligned}$$

eine nichttriviale Lösung $x_2, \ldots, x_{n+1}$. Wir setzen dann

$$x_1 = -\frac{1}{\alpha_{11}}(\alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1,n+1}x_{n+1})$$

und erhalten mit $x_1, \ldots, x_{n+1}$ die gesuchte Lösung des Ausgangssystems. □

Als Anwendung von Satz 7.2 erhalten wir folgende fundamentale Aussage:

Satz 7.3. *Sei V ein K-Vektorraum und seien $v_1, \ldots, v_m \in V$. Dann sind für jedes $n > m$ die Elemente $w_1, \ldots, w_n \in L(v_1, \ldots, v_m)$ linear abhängig.*

Beweis. Nach Voraussetzung existieren Elemente $\alpha_{ij} \in K$ mit

$$w_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} v_i \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \alpha_{11}x_1 + \cdots + \alpha_{1n}x_n &= 0 \\ \vdots \qquad\qquad \ldots \quad \vdots & \\ \alpha_{m1}x_1 \quad \vdots + \quad \alpha_{mn}x_n &= 0. \end{aligned}$$

Nach Satz 7.2 besitzt es eine nichttriviale Lösung $x_1, \ldots, x_n$. Für diese ist

$$\begin{aligned} x_1w_1 + \cdots + x_nw_n &= x_1 \sum_{i=1}^{m} \alpha_{i1}v_i + \cdots + x_n \sum_{i=1}^{m} \alpha_{in}v_i \\ &= \sum_{i=1}^{m} (x_1\alpha_{i1} + \cdots + x_n\alpha_{in})v_i = \sum_{i=1}^{m} 0 \cdot v_i = 0 \end{aligned}$$

eine nichttriviale Darstellung der 0 als Linearkombination von $w_1, \ldots, w_n$. □

Nachdem wir einen Satz bewiesen haben, der die lineare Abhängigkeit gewisser Systeme $w_1, \ldots, w_n \in V$ feststellt, wollen wir umgekehrt auch einen Satz beweisen, der besagt, daß andere Systeme von Vektoren mit Sicherheit linear unabhängig sind.

Satz 7.4. *V sei ein K-Vektorraum und $v_1, \ldots, v_n \in V$ seien Vektoren, für die gilt:*

$$L(v_1, \ldots, v_n) \neq L(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n) \qquad \text{für } i = 1, \ldots, n.$$

Dann sind $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig.

Beweis. Wir nehmen an, es gibt eine nichttriviale Darstellung

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0.$$

Sei etwa $\alpha_i \neq 0$. Dann ist

$$v_i = -\frac{1}{\alpha_i}(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{i-1} v_{i-1} + \alpha_{i+1} v_{i+1} + \cdots + \alpha_n v_n)$$

Linearkombination von $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n$. Es folgt

$$L(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n) = L(v_1, \ldots, v_n),$$

denn in jeder Linearkombination von $v_1, \ldots, v_n$ können wir ja v_i durch seine obige Darstellung ersetzen. □

Wenn die Voraussetzung von Satz 7.4 für $v_1, \ldots, v_n$ erfüllt ist, nennt man $v_1, \ldots, v_n$ ein *minimales Erzeugendensystem* von $L(v_1, \ldots, v_n)$. Ein linear unabhängiges Erzeugendensystem nennt man eine Basis:

Definition. Sei V ein K-Vektorraum. Ein linear unabhängiges Erzeugendensystem $v_1, \ldots, v_n$ von V nennt man eine *Basis* von V.

Es ist klar, daß die Elemente einer Basis $v_1, \ldots, v_n$ paarweise verschieden sind (d.h. $v_i \neq v_j$ für $i \neq j$); dennoch dürfen wir Basen nicht einfach als Teilmengen auffassen. Für viele Zwecke ist es wichtig, die Reihenfolge der v_i zu beachten. Für uns sind

$$e_1, e_2 \quad \text{und} \quad e_2, e_1$$

zwei verschiedene Basen von K^2.

Der folgende Satz besagt, daß jeder endlich erzeugte K-Vektorraum V eine Basis besitzt und daß jede Basis von V die gleiche Anzahl von Elementen besitzt. Man kann ihn mit Fug und Recht den Hauptsatz der linearen Algebra nennen:

Satz 7.5. *Sei V ein K-Vektorraum, der Elemente $v_1, \ldots, v_n$ mit $V = L(v_1, \ldots, v_n)$ besitzt. Dann gilt:*

(a) *V besitzt eine Basis $v_{i_1}, \ldots, v_{i_m}$, d.h. wir können aus $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V auswählen.*

(b) *Jede Basis von V hat m Elemente.*

Satz 7.5 gilt auch für beliebige K-Vektorräume, wenn man den Begriff „Basis“ geeignet erweitert.

Beweis von Satz 7.5. Wir beweisen zunächst (a) durch Induktion über n.

Im Fall $n = 0$ ist $V = L(\emptyset)$, und $\emptyset$ ist nach Definition linear unabhängig.

Sei $n > 0$. Falls

$$V = L(v_1, \ldots, v_n) \neq L(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n) \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, n,$$

ist $v_1, \ldots, v_n$ nach Satz 7.4 linear unabhängig. Damit haben wir in diesem Fall eine Basis gefunden.

Falls $V = L(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n)$ für ein i, besitzt V das Erzeugendensystem $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n$, auf das wir die Induktionsvoraussetzung anwenden können.

(b) Sei $u_1, \ldots, u_p$ eine weitere Basis. Dann ist

$$L(u_1, \ldots, u_p) = V = L(v_{i_1}, \ldots, v_{i_m}).$$

Wäre $p < m$, so wären $v_{i_1}, \ldots, v_{i_m}$ nach Satz 7.3 linear abhängig, und genauso kann auch $p > m$ nicht gelten. □

Definition. Sei V ein K-Vektorraum mit einem endlichen Erzeugendensystem $(v_1, \ldots, v_n)$. Dann nennen wir die Anzahl der Elemente einer Basis von V die *Dimension von* V.

Diese Definition ist sinnvoll, denn erstens besitzt V eine Basis, und zweitens haben alle Basen die gleiche Anzahl von Elementen. Im folgenden nennen wir endlich erzeugte Vektorräume V *endlichdimensional* oder schreiben $\dim V < \infty$.

Beispiele.

(a) $\dim K^n = n$: klar, denn $e_1, \ldots, e_n$ ist eine Basis. Wir nennen sie die *kanonische* oder *natürliche Basis* von K^n.

(b) $\dim\{0\} = 0$: klar, denn $\emptyset$ ist eine Basis.

(c) Sei K ein unendlicher Körper und V der Vektorraum der polynomialen Funktionen $f : K \to K$. Dann ist V nicht endlichdimensional: Eine Linearkombination $\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n$ von $f_1, \ldots, f_n \in V$ besitzt höchstens den Grad $\max\{\text{grad } f_i : i = 1, \ldots, n\}$ (wobei wir in diesem Fall $\text{grad}(0) = -1$ setzen). Dieses Beispiel zeigt, daß nicht jeder „natürliche“ Vektorraum endlichdimensional ist.

(d) Der Erweiterungskörper $\mathbb{C}$ von $\mathbb{R}$ hat als $\mathbb{R}$-Vektorraum die Dimension 2, denn $1, i$ ist eine Basis von $\mathbb{C}$ über $\mathbb{R}$. Also $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$. Dagegen ist $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$.

Jeden $\mathbb{C}$-Vektorraum V können wir auch als $\mathbb{R}$-Vektorraum betrachten. Ist $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V über $\mathbb{C}$, so ist $v_1, i\,v_1, \ldots, v_n, i\,v_n$ offensichtlich eine Basis von V über $\mathbb{R}$. (Der Hörer möge dies genau prüfen.) Daher gilt $\dim_{\mathbb{R}} V = 2 \dim_{\mathbb{C}} V$.

(e) Als $\mathbb{Q}$-Vektorraum besitzt $\mathbb{R}$ unendliche Dimension. Darauf kommen wir später zurück.

Häufig muß man die Dimension des von den Vektoren $v_1, \ldots, v_m \in K^n$ erzeugten Untervektorraums bestimmen. Dafür gibt es systematische Verfahren, die wir in Abschnitt 8 kennenlernen werden.

Im folgenden Satz geben wir verschiedene Charakterisierungen von Basen an. Dabei ist $v_1, \ldots, v_n$ *maximal linear unabhängig in* V, wenn für jedes $w \in V$ die Familie $v_1, \ldots, v_n, w$ linear abhängig ist.

Satz 7.6. *V sei ein K-Vektorraum, $v_1, \ldots, v_n \in V$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *$v_1, \ldots, v_n$ ist eine Basis von V.*
(b) *$v_1, \ldots, v_n$ ist ein minimales Erzeugendensystem von V.*
(c) *$v_1, \ldots, v_n$ ist maximal linear unabhängig in V.*

Beweis. Eine Basis besitzt die in (b) und (c) behaupteten Eigenschaften: Sie ist ein Erzeugendensystem nach Definition und minimal, weil eine Gleichung

$$v_i = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{i-1} v_{i-1} + \alpha_{i+1} v_{i+1} + \cdots + \alpha_n v_n$$

gegen die lineare Unabhängigkeit verstoßen würde. Sie ist linear unabhängig nach Definition und maximal, weil es zu jedem $w \in V$ eine Darstellung

$$w = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$$

gibt: $v_1, \ldots, v_n, w$ sind linear abhängig. Ein minimales Erzeugendensystem ist linear unabhängig nach Satz 7.4 und damit eine Basis.

Sei nun $v_1, \ldots, v_n$ maximal linear unabhängig. Für jedes $w \in V$ hat man daher eine nichttriviale Darstellung

$$0 = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n + \beta w.$$

Wäre $\beta = 0$, so wäre $v_1, \ldots, v_n$ linear abhängig. Also muß $\beta \neq 0$ sein, und wir erhalten

$$w = \left(-\frac{\alpha_1}{\beta}\right) v_1 + \cdots + \left(-\frac{\alpha_n}{\beta}\right) v_n \in L(v_1, \ldots, v_n).$$

Somit ist $v_1, \ldots, v_n$ ein Erzeugendensystem von V und damit eine Basis. □

Für konkrete Anwendungen ist folgender Satz manchmal nützlich:

Satz 7.7. *Sei V ein K-Vektorraum mit* $\dim V = n < \infty$. *Für $v_1, \ldots, v_m \in V$ betrachten wir folgende Eigenschaften:*

(a) *$m = n$,*
(b) *$v_1, \ldots, v_m$ erzeugt V,*
(c) *$v_1, \ldots, v_m$ ist linear unabhängig.*

Wenn zwei dieser Eigenschaften erfüllt sind, gilt auch die dritte.

Beweis. (b), (c) $\Rightarrow$ (a): siehe Satz 7.5.

(a), (b) $\Rightarrow$ (c): In diesem Fall ergibt sich aus Satz 7.5 die Existenz einer Basis $v_{i_1}, \ldots, v_{i_p}$. Wegen $m = \dim V$ muß $p = m$ sein.

(a), (c) $\Rightarrow$ (b): Für alle $w \in V$ ist $v_1, \ldots, v_m, w$ nach Satz 7.3 linear abhängig. Also ist $v_1, \ldots, v_m$ eine Basis gemäß Satz 7.6. □

Eine häufig benutzte Verallgemeinerung von Satz 7.5(a) ist der *Basisergänzungssatz*:

Satz 7.8. *V sei ein Vektorraum, der von $w_1, \ldots, w_m$ erzeugt wird. Seien $v_1, \ldots, v_n \in V$ linear unabhängig. Dann existieren $i_1, \ldots, i_p$, $p = \dim V - n$, für die $v_1, \ldots, v_n, w_{i_1}, \ldots, w_{i_p}$ eine Basis von V bilden.*

Beweis. Wir beweisen die Behauptung durch Induktion über p. Im Falle $p = 0$ ist $v_1, \ldots, v_n$ bereits eine Basis gemäß Satz 7.7. Sei $p > 0$. Dann ist $L(v_1, \ldots, v_n) \neq V$, und es existiert ein j mit $w_j \notin L(v_1, \ldots, v_n)$. Damit sind $v_1, \ldots, v_n, w_j$ linear unabhängig, wie sofort zu überprüfen, so daß wir die Induktionsvoraussetzung auf $v'_1 = v_1, \ldots, v'_n = v_n, v'_{n+1} = w_j$ anwenden können. □

Wir wenden uns nun Untervektorräumen endlichdimensionaler Vektorräume zu.

Satz 7.9. *V sei ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und U ein Untervektorraum von V. Dann ist auch U endlichdimensional. Es gilt* $\dim U \leq \dim V$. *Genau dann ist* $\dim U = \dim V$, *wenn $U = V$.*

Beweis. Sei

$$m = \max\{p : \text{ es existieren linear unabhängige } u_1, \ldots, u_p \in U\}.$$

Da $p \leq \dim V$, wenn $u_1, \ldots, u_p \in U \subset V$ linear unabhängig, ist m eine wohldefinierte natürliche Zahl $\leq \dim V$. Seien nun $w_1, \ldots, w_m \in U$ linear unabhängig. Dann sind $w_1, \ldots, w_m$ maximal linear unabhängig in U und somit nach Satz 7.6 eine Basis von U. Es folgt $m = \dim U$.

Daß $m \leq \dim V$, haben wir bereits festgestellt, und daß $U = V$ aus $\dim U = \dim V$ folgt, ist Teil von Satz 7.7: Im Falle $m = \dim V$ gelten (a) und (c) von Satz 7.7. □

Häufig wendet man Satz 7.9 in folgender Situation an: U_1, U_2 sind Untervektorräume eines endlichdimensionalen K-Vektorraums V. Man weiß, daß $U_1 \subset U_2$ und $\dim U_1 = \dim U_2$. Dann folgt $U_1 = U_2$, indem man Satz 7.9 zuerst mit $U = U_2$ anwendet (U_2 ist endlichdimensional) und dann mit $V = U_2$, $U = U_1$.

Satz 7.9 bringt unsere geometrische Vorstellung zum Ausdruck, daß die „Unterräume“ eines „Raums“ nach ihrer Dimension gestuft sind: Punkte, Geraden, Ebenen, …, der gesamte Raum.

Zum Abschluß dieses Abschnitts beweisen wir noch eine wichtige Dimensionsformel:

Satz 7.10. *Seien U_1, U_2 Untervektorräume eines endlichdimensionalen K-Vektorraums V. Dann ist*

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2).$$

Beweis. Sei $u_1, \ldots, u_p$ eine Basis von $U_1 \cap U_2$. Wir ergänzen sie gemäß Satz 7.8 zum einen durch $v_1, \ldots, v_m$ zu einer Basis $u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_m$ von U_1, zum anderen durch $w_1, \ldots, w_n$ zu einer Basis $u_1, \ldots, u_p, w_1, \ldots, w_n$ von U_2.

Die Behauptung folgt, wenn wir gezeigt haben, daß

$$u_1, \ldots, u_p, \ v_1, \ \ldots, v_m, \ w_1, \ldots, w_n$$

eine Basis von $U_1 + U_2$ ist.

Sei $W = L(u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_n)$. Dann gilt $U_1 \subset W$, $U_2 \subset W$, mithin $U_1 + U_2 \subset W$. Umgekehrt gilt $u_i, v_j, w_k \in U_1 + U_2$ für alle i, j, k, und damit ist $W \subset U_1 + U_2$, so daß insgesamt $W = U_1 + U_2$ folgt. Diese Gleichung besagt gerade, daß $u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_n$ ein Erzeugendensystem von $U_1 + U_2$ ist.

Sei nun

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_p u_p + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_m v_m + \gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_n w_n = 0.$$

Dann gilt für $z = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_m v_m \in U_1$:

$$z = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_m v_m = -(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_p u_p) - (\gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_n w_n),$$

also $z \in U_1 \cap U_2$. Somit existieren $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_p$ mit $z = \alpha'_1 u_1 + \cdots + \alpha'_p u_p$, und wir erhalten

$$0 = z - z = \alpha'_1 u_1 + \cdots + \alpha'_p u_p - \beta_1 v_1 - \cdots - \beta_m v_m.$$

Da $u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_m$ linear unabhängig sind, folgt $\alpha'_1 = \cdots = \alpha'_p = \beta_1 = \cdots = \beta_m = 0$, speziell $z = 0$, und dann $\alpha_1 = \cdots = \alpha_p = \gamma_1 = \cdots = \gamma_n = 0$, weil auch $u_1, \ldots, u_p, w_1, \ldots, w_n$ linear unabhängig sind. □

ABSCHNITT 8

Elimination

In diesem Abschnitt wollen wir zwei Probleme rechnerisch lösen, nämlich

1. die Bestimmung der Dimension eines Untervektorraums des K^n und
2. die Bestimmung der Lösungen eines linearen Gleichungssystems.

Zur Lösung dieser Aufgaben verwenden wir das *Gaußsche Eliminationsverfahren*. Dies erklärt die Benennung dieses Abschnitts.

1. Dimension von Untervektorräumen. Sei K ein Körper und seien Elemente $v_1, \ldots, v_m$ des K^n gegeben,

$$v_i = (\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in}), \qquad \alpha_{ij} \in K.$$

Zu bestimmen ist dim $L(v_1, \ldots, v_m)$. Dieses Problem löst man, indem man $v_1, \ldots, v_m$ so „umformt", daß man am Ergebnis der Umformung die Dimension ablesen kann. Wir lassen folgende Umformungsschritte zu:

(E) (Elementare Umformung)] Man ersetzt $v_1, \ldots, v_m$ durch

$$v_1, \ldots, v_{j-1}, v_j + \alpha v_i, v_{j+1}, \ldots, v_m,$$

wobei $\alpha \in K$ und $i \neq j$.

(M) (Multiplikation mit $\alpha \neq 0$) Man ersetzt $v_1, \ldots, v_m$ durch

$$v_1, \ldots, v_{j-1}, \alpha v_j, v_{j+1}, \ldots, v_m,$$

wobei $\alpha \in K$ und $\alpha \neq 0$.

(V) (Vertauschung) Man ersetzt $v_1, \ldots, v_m$ durch

$$v_1, \ldots, v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, v_i, v_{j+1}, \ldots, v_m.$$

Satz 8.1. *Die Vektoren $w_1, \ldots, w_m$ mögen durch eine Kette von Umformungen der Typen* (E), (M), (V) *aus $v_1, \ldots, v_m$ hervorgehen. Dann ist*

$$L(w_1, \ldots, w_m) = L(v_1, \ldots, v_m).$$

Beweis. Es genügt, den Fall zu betrachten, in dem $w_1, \ldots, w_m$ durch einen einzigen Umformungsschritt aus $v_1, \ldots, v_m$ hervorgehen:

(V) Hier werden v_i und v_j nur vertauscht, was am erzeugten Unterraum nichts ändert.

(M) Hier wird v_j durch αv_j ersetzt, $\alpha \neq 0$, und ebenso offensichtlich wie bei (V) ändert sich der erzeugte Unterraum nicht.

(E) Sei $w = v_j + \alpha v_i$. Dann gilt

$$L(v_1, \ldots, v_{j-1}, w, v_{j+1}, \ldots, v_m) \subset L(v_1, \ldots, v_m)$$

weil $w \in L(v_1, \ldots, v_m)$. Umgekehrt ist aber auch

$$v_j = w - \alpha v_i \in L(v_1, \ldots, v_{j-1}, w, v_{j+1}, \ldots, v_m);$$

beachte: $i \neq j$! Also

$$L(v_1, \ldots, v_m) \subset L(v_1, \ldots, v_{j-1}, w, v_{j+1}, \ldots, v_m). \qquad \square$$

Zum praktischen Rechnen ist es zweckmäßig, die $v_1, \ldots, v_m$ in ein rechteckiges Schema einzutragen:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}.$$

Ein solches Schema von $\alpha_{ij} \in K$ nennen wir eine *$m \times n$-Matrix* (über K). Die Umformungen der Typen (V), (M), (E) nennen wir dann einfach *Zeilenumformungen* von A. Die Elemente

$$v_i = (\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in}) \in K^n$$

sind natürlich die *Zeilenvektoren* von A, und $L(v_1, \ldots, v_m)$ nennen wir den *Zeilenraum* von A.

Satz 8.2. (a) *Sei A eine $m \times n$-Matrix über K. Dann können wir durch Zeilenumformungen eine Matrix der Gestalt*

$$A' = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ r \to \\ \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & & & s_1 & & & & s_2 & & & & s_3 & & s_r & & & \\
 & & & \downarrow & & & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & & \\
0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 1 & * & \cdots & * \\
\hline
0 & \cdots & & & & & & & \cdots & & & & & & & \cdots & 0 \\
\vdots & & & & & & & & & & & & & & & & \vdots \\
0 & \cdots & & & & & & & \cdots & & & & & & & \cdots & 0
\end{array}\right)$$

bilden. (Dabei steht $*$ für ein beliebiges Element aus K.)

(b) *Ist A die aus den Zeilenvektoren $v_1, \ldots, v_m \in K^n$ gebildete Matrix, so gilt*

$$\dim L(v_1, \ldots, v_m) = r.$$

Die ersten r Zeilenvektoren von A' sind eine Basis von $L(v_1, \ldots, v_m)$.

Beweis. (a) Wir gehen „spaltenweise“ vor, wobei wir darauf achten, daß keine der vorderen Spalten, die bereits die gewünschte Endgestalt hat, wieder zerstört wird. Sei durch Zeilenumformungen eine Matrix der Gestalt

$$\left(\begin{array}{ccccccccccccccc|ccc}
 & & & s_1 & & & & s_2 & & & & s_t & & & & u & & \\
 & & & \downarrow & & & & \downarrow & & & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\
0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & \vdots & & \vdots \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & * & \cdots & * \\
\hline
0 & \cdots & & & & & & & & & & & & \cdots & 0 & \beta_{t+1,u} & \cdots & \beta_{t+1,n} \\
\vdots & & & & & & & & & & & & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & & & & & & & & & & & & \cdots & 0 & \beta_{mu} & \cdots & \beta_{mn}
\end{array}\right)$$

gewonnen.

1. Fall: $\beta_{t+1,u} = \cdots = \beta_{mu} = 0$. Dann ist auch schon die u-te Spalte in der Endform, und wir können eine Spalte nach rechts rücken.

2. Fall: Es existiert ein j mit $b_{ju} \neq 0$. Durch eine Vertauschung erreichen wir, daß $\beta_{t+1,u} \neq 0$, und durch Multiplikation mit $1/\beta_{t+1,u}$, daß $\beta_{t+1,u} = 1$. Nun wenden wir Schritte des Typs (E) an, um die u-te Spalte oberhalb und unterhalb der $(t+1)$-ten Zeile „auszuputzen“. Da in den ersten $u-1$ Feldern dieser Zeile nur 0 steht, werden die Spalten $1, \ldots, u-1$ nicht verändert.

(b) Die ersten r Zeilen $w_1, \ldots, w_r$ der Matrix A' erzeugen nach 8.1 den Untervektorraum $L(v_1, \ldots, v_m)$ und sie sind überdies linear unabhängig:

$$\alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_r w_r = 0$$

impliziert $\alpha_i \cdot 1 = 0$ in der Komponente s_i und damit $\alpha_i = 0$ für $i = 1, \ldots, r$. □

Beispiel. $K = \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{C}$), $n = 4$, $m = 4$.

v_1	1	2	5	-1
v_2	2	3	8	2
v_3	3	4	11	0
v_4	4	5	14	1
	1	2	5	-1
	0	-1	-2	4
	0	-2	-4	3
	0	-3	-6	5
	1	2	5	-1
	0	1	2	-4
	0	0	0	-5
	0	0	0	-7

	1	2	5	-1
	0	1	2	-4
	0	0	0	1
	0	0	0	0
w_1	1	0	1	0
w_2	0	1	2	0
w_3	0	0	0	1
	0	0	0	0

Also ist w_1, w_2, w_3 eine Basis von $L(v_1, \ldots, v_4)$, $\dim L(v_1, \ldots, v_4) = 3$.

2. Lineare Gleichungssysteme Ein lineares Gleichungssystem hat die Form

$$\begin{array}{ccc} \alpha_{11}x_1 + \cdots + \alpha_{1n}x_n & = & \beta_1 \\ \vdots \qquad\qquad\quad \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 + \cdots + \alpha_{mn}x_n & = & \beta_m \end{array}$$

Die Lösungen $(x_1, \ldots, x_n)$ bilden eine Teilmenge S des K^n. In diesem Teil des Abschnitts wollen wir sowohl qualitative Aussagen über S gewinnen als auch eine Methode zur expliziten Bestimmung von S angeben. Wir fassen die Koeffizienten α_{ij} zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

zusammen. Die Spalten dieser Matrix sind „vertikal“ geschriebene Elemente des K^m, die wir mit $v^1, \ldots, v^n$ bezeichnen, ebenso die rechte Seite

$$b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}.$$

Die bisher eingeführten Bezeichnungen behalten wir der Einfachheit halber bei. Wir schreiben das obige Gleichungssystem dann kurz in der Form (A, b). Eine triviale Feststellung: Es gilt $S \neq \emptyset$ für die Lösungsmenge S genau dann, wenn $b \in L(v^1, \ldots, v^n)$, äquivalent, wenn $L(v^1, \ldots, v^n) = L(v^1, \ldots, v^n, b)$.

Definition. Der *Rang von A* ist $\dim L(v^1, \ldots, v^n)$.

Sei $(A \mid b)$ die „erweiterte“ Matrix des Gleichungssystems (A, b), d.h.

$$(A \mid b) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} & \beta_n \end{pmatrix}.$$

Nach 7.9 heißt $b \in L(v^1, \ldots, v^n)$ gerade, daß $\dim L(v^1, \ldots, v^n) = \dim L(v^1, \ldots, v^n, b)$. Also gilt:

Satz 8.3. *Das lineare Gleichungssystem (A, b) besitzt genau dann eine Lösung, wenn*

$$\operatorname{rang}(A \mid b) = \operatorname{rang} A.$$

Da wir die Dimension eines Untervektorraums von K^m mit der im ersten Teil beschriebenen Methode bestimmen können, können wir jetzt prinzipiell entscheiden, ob (A, b) lösbar ist. Da wir aber auch an der Bestimmung der Lösungen interessiert sind, wäre ein solches Vorgehen unzweckmäßig. Wir beweisen zunächst noch einige qualitative Aussagen.

Satz 8.4. *Die Menge S der Lösungen eines homogenen linearen Gleichungssystems $(A, 0)$ ist ein Untervektorraum des K^n. Es gilt* $\dim S = n - \operatorname{rang} A$.

Beweis. Es ist $S \neq \emptyset$, weil $(A, 0)$ die triviale Lösung $0 \in K^n$ besitzt. Wenn $s_1 = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $s_2 = (\eta_1, \ldots, \eta_n) \in S$, so ist auch

$$(\xi_1 + \eta_1)v^1 + \cdots + (\xi_n + \eta_n)v^n = 0, \quad (\alpha\xi_1)v^1 + \cdots + (\alpha\xi_n)v^n = 0,$$

und damit $s_1 + s_2, \alpha s_1 \in S$.

Zum Beweis der Dimensionsaussage dürfen wir (aus schreibtechnischen Gründen) annehmen, daß die ersten $r = \operatorname{rang} A$ Spalten von A linear unabhängig sind. Andernfalls vertauschen wir die Spalten; dies ändert zwar S, aber nicht die Dimension von S, wie man sich leicht überlegt. Es gibt dann also eindeutig bestimmte $\beta_{ij} \in K$, so daß

$$v^i = \sum_{j=1}^{r} \beta_{ji} v^j, \qquad i = r+1, \ldots, n.$$

Dann sind

$$\begin{aligned} w_1 &= (-\beta_{1r+1}, \ldots, -\beta_{r,r+1}, 1, 0, \ldots, 0), \\ &\vdots \\ w_{n-r} &= (-\beta_{1n}, \ldots, -\beta_{rn}, 0, \ldots, 0, 1) \end{aligned}$$

eine Basis von S: Für beliebiges $s = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ ist

$$s - \xi_{r+1}w_1 - \cdots - \xi_n w_{n-r} = (\eta_1, \ldots, \eta_r, 0, \ldots 0)$$

eine Lösung von $(A, 0)$ also $\eta_1 v^1 + \cdots + \eta_r v^r = 0$. Weil $v^1, \ldots, v^r$ linear unabhängig sind, folgt $\eta_1 = \cdots = \eta_r = 0$, und damit $s \in L(w_1, \ldots, w_{n-r})$. Die lineare Unabhängigkeit von $w_1, \ldots, w_{n-r}$ ist klar. □

Die Lösungsmenge eines inhomogenen Systems (A, b) mit $b \neq 0$ ist niemals ein Untervektorraum, besitzt aber eine ähnlich einfache Struktur:

Satz 8.5. *Sei $\tilde{s}$ eine Lösung des Gleichungssystems (A, b) und S_0 die Lösungsmenge des Systems $(A, 0)$. Dann ist*

$$\tilde{s} + S_0 = \{\tilde{s} + s_0 : s_0 \in S_0\}$$

die Lösungsmenge von (A, b).

Beweis. Sei S die Lösungsmenge von (A, b), $\tilde{s} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Dann gilt für $s_0 = (\eta_1, \ldots, \eta_n) \in S_0$:

$$\begin{aligned} (\xi_1 + \eta_1)v^1 + \cdots + (\xi_n + \eta_n)v^n &= (\xi_1 v^1 + \cdots + \xi_n v^n) + (\eta_1 v^1 + \cdots + \eta_n v^n) \\ &= b + 0 = b. \end{aligned}$$

Also ist $\tilde{s} + s_0 \in S$, insgesamt $\tilde{s} + S_0 \subset S$. Sei umgekehrt $s \in S$ beliebig, $s = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$. Dann ist

$$(\zeta_1 - \xi^1)v^1 + \cdots + (\zeta_n - \xi_n)v^n = b - b = 0,$$

so daß $s - \tilde{s} \in S_0$ oder

$$s = \tilde{s} + s_0 \quad \text{mit} \quad s_0 \in S_0, \quad \text{also} \quad s \in \tilde{s} + S_0;$$

insgesamt $S \subset \tilde{s} + S_0$. □

Satz 8.5 rechtfertigt es, auch im Falle eines inhomogenen Gleichungssystems vom *Lösungsraum* zu sprechen. Dieser Begriff ist besser als der der Lösungsmenge, weil er impliziert, daß die Lösungsmenge eine Struktur trägt.

Wenn die Matrix A eines Gleichungssystems (A, b) die Form von Satz 8.2 hat, können wir den Lösungsraum leicht angeben. Der bequemeren Schreibweise wegen nehmen wir im folgenden Satz an, die Spalten $s_1, \ldots, s_r$ seien die Spalten $1, \ldots, r$.

Satz 8.6. *Das lineare Gleichungssystem (A, b) liege in folgender Form vor:*

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{1r+1} & \cdots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \alpha_{rr+1} & \cdots & \alpha_{rn} & \beta_r \\ \hline & & & & & & & \beta_{r+1} \\ & & & & 0 & & & \vdots \\ & & & & & & & \beta_m \end{array}\right)$$

(a) *Es besitzt genau dann eine Lösung, wenn $\beta_{r+1} = \cdots = \beta_m = 0$.*

(b) *In diesem Fall ist $\tilde{s} = (\beta_1, \ldots, \beta_r, 0, \ldots, 0)$ eine Lösung.*

(c) *Die Vektoren*

$$\begin{aligned} u_1 &= (-\alpha_{1r+1}, \ldots, -\alpha_{rr+1},\ 1,\ 0, \ldots, 0) \\ &\vdots \\ u_{n-r} &= (-\alpha_{1n}, \ldots, -\alpha_{rn},\ 0, \ldots, 0, 0,\ 1) \end{aligned}$$

sind eine Basis des Lösungsraums des homogenen Systems $(A, 0)$.

Beweis. (a), (b): Wenn eine der Zahlen $\beta_{r+1}, \ldots, \beta_m \neq 0$ ist, besitzt das Gleichungssystem offensichtlich keine Lösung. Wenn aber $\beta_{r+1} = \cdots = \beta_n = 0$, so ist $\tilde{s}$ genauso offensichtlich eine Lösung.

(c): Durch Einsetzen sehen wir sofort, daß $u_1, \ldots, u_{n-r}$ wirklich Lösungen von $(A, 0)$ sind. Ebenso klar ist, daß diese Vektoren linear unabhängig sind. Sei $z = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ eine Lösung von $(A, 0)$. Dann ist auch

$$z' = z - \xi_{r+1}u_1 - \cdots - \xi_n u_{n-r} = (\xi'_1, \ldots, \xi'_r, 0, \ldots, 0)$$

eine Lösung. Wieder sehen wir durch Einsetzen, daß $\xi'_1 = \cdots = \xi'_r = 0$ sein muß, mithin

$$z = \xi_{r+1}u_1 + \cdots + \xi_n u_{n-r}. \qquad \square$$

Wir können den Lösungsraum S des Systems in 8.6 auch so beschreiben

$$S = \{\tilde{s} + \tau_1 u_1 + \cdots + \tau_{n-r}u_{n-r} : \tau_1, \ldots, \tau_{n-r} \in K\}.$$

Eine solche Darstellung nennt man *Parameterdarstellung* ($\tau_1, \ldots, \tau_{n-r}$ sind die Parameter).

Um Satz 8.6 anwenden zu können, müssen wir natürlich ein gegebenes Gleichungssystem erst einmal in die Form von 8.6 bringen, ohne dabei den Lösungsraum zu verändern.

Satz 8.7. *Das lineare Gleichungssystem* (A', b') *gehe durch Anwendung der Umformungen* (E), (M), (V) *auf die erweiterte Matrix* $(A \mid b)$ *von* (A, b) *aus diesem hervor. Dann besitzen* (A, b) *und* (A', b') *den gleichen Lösungsraum.*

Die Überlegung, die 8.7 beweist, ist die gleiche wie bei 8.1: Jede Gleichung, die in (A', b') vorkommt, ist Linearkombination von Gleichungen des Systems (A, b) und umgekehrt.

Um genau die Gestalt von 8.6 zu erreichen, müssen wir i.a. auf der 'linken' Seite auch noch Spaltenvertauschungen vornehmen; diese laufen nur auf eine andere Reihenfolge der Unbekannten hinaus und sind bei der endgültigen Angabe der Lösungen natürlich wieder rückgängig zu machen.

Beispiel.

$$\begin{array}{rrrrrr}
x_1 - x_2 + & x_3 & + & x_5 = & -1 \\
x_1 - x_2 + 2x_3 + & 6x_4 + & 8x_5 = & & 0 \\
2x_1 + x_2 + & x_3 + 14x_4 + & 18x_5 = & & 2 \\
3x_1 + 2x_3 + & 14x_4 + & 19x_5 = & & 1 \\
2x_1 + x_2 & + & 8x_4 + 11x_5 = & & 1
\end{array}$$

Schematische Form:

$$\begin{array}{rrrrr|r}
1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\
1 & -1 & 2 & 6 & 8 & 0 \\
2 & 1 & 1 & 14 & 18 & 2 \\
3 & 0 & 2 & 14 & 19 & 1 \\
2 & 1 & 0 & 8 & 11 & 1 \\
\hline
1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 6 & 7 & 1 \\
0 & 3 & -1 & 14 & 16 & 4 \\
0 & 3 & -1 & 14 & 16 & 4 \\
0 & 3 & -2 & 8 & 9 & 3
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrrr|r}
1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{14}{3} & \frac{16}{3} & \frac{4}{3} \\
0 & 0 & 1 & 6 & 7 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & -6 & -7 & -1 \\
\hline
1 & -1 & 0 & -6 & -6 & -2 \\
0 & 1 & 0 & \frac{20}{3} & \frac{23}{3} & \frac{5}{3} \\
0 & 0 & 1 & 6 & 7 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \\
0 & 1 & 0 & \frac{20}{3} & \frac{23}{3} & \frac{5}{3} \\
0 & 0 & 1 & 6 & 7 & 1
\end{array}$$

Ergebnis: Mit

$$\tilde{s} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, 1, 0, 0\right)$$
$$u_1 = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{20}{3}, -6, 1, 0\right)$$
$$u_2 = \left(-\frac{5}{3}, -\frac{23}{3}, -7, 0, 1\right)$$

ist

$$S = \{\tilde{s} + \tau_1 u_1 + \tau_2 u_2 : \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Sei (A, b) ein lineares Gleichungssystem. Wenn es eine Lösung besitzt, so hängt die Eindeutigkeit der Lösung nicht von b ab, sondern nur von A: Ist (A, b) lösbar, so ist (A, b) genau dann eindeutig lösbar, wenn rang $A = n$.

Als Folgerung aus den vorangegangenen Sätzen formulieren wir noch folgende Aussage über die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen von (A, b) in Abhängigkeit von A:

Satz 8.8. *A sei eine $m \times n$-Matrix über K.*

(a) *Genau dann besitzt (A, b) für jedes $b \in K^m$ mindestens eine Lösung, wenn* rang $A = m$.
(b) *Genau dann besitzt (A, b) für jedes $b \in K^m$ höchstens eine Lösung, wenn* rang $A = n$.
(c) *Genau dann ist (A, b) für jedes $b \in K^m$ eindeutig lösbar, wenn* rang $A = m = n$.

Beweis. (a) Daß (A, b) für jedes $b \in K^m$ lösbar ist, bedeutet nach der Diskussion vor 8.3, daß $L(v^1, \ldots, v^n) = K^m$. Dies ist äquivalent zu dim $L(v^1, \ldots, v^n) = m$ (vgl. 7.9).

(b) Daß (A, b) für irgendein $b \in K^m$ höchstens eine Lösung besitzt, heißt nach 8.4 und 8.5: rang $A = n$.

(c) Dies ergibt sich durch Koppelung von (a) und (b). □

Im Fall $m = n$ nennen wir eine $m \times n$-Matrix A *n-reihig quadratisch*. Der Fall einer quadratischen n-reihigen Matrix des Ranges n ist sicherlich für viele Anwendungen der wichtigste.

Mit einer $m \times n$-Matrix A sind natürlicherweise zwei Vektorräume verknüpft: (i) $L(v_1, \ldots, v_m)$ erzeugt von den Zeilenvektoren, (ii) $L(v^1, \ldots, v^n)$ erzeugt von den Spaltenvektoren. Wir haben dim $L(v^1, \ldots, v^n)$ den Rang von A genannt, hingegen $L(v_1, \ldots, v_m)$ keinen besonderen Namen gegeben. Dies ist auch überflüssig, denn es gilt:

Satz 8.9. *A sei eine $m \times n$-Matrix über dem Körper K mit den Zeilen $v_1, \ldots, v_m$ und den Spalten $v^1, \ldots, v^n$. Dann ist*

$$\dim L(v_1, \ldots, v_m) = \dim L(v^1, \ldots, v^n) = \operatorname{rang} A.$$

Beweis. Sei S der Lösungsraum des homogenen Systems $(A, 0)$. Dann ist dim $S = n - \operatorname{rang} A$ gemäß 8.4. Andererseits zeigen 8.2, 8.7 und 8.6, daß dim $S = n - \dim L(v_1, \ldots, v_m)$ gilt. □

Wenn wir die Bezeichnungen „Zeilenrang“ und „Spaltenrang“ in naheliegender Weise vergeben hätten, könnten wir 8.9 auch kurz als „Zeilenrang = Spaltenrang“ formulieren.

ABSCHNITT 9

Homomorphismen

Zu den wesentlichen Bausteinen vieler mathematischer Theorien gehören eine Klasse von Objekten – im Fall der linearen Algebra sind dies die Vektorräume – und eine Klasse von Abbildungen, die die den Objekten innewohnenden Strukturen respektieren. In der Algebra werden solche Abbildungen in der Regel Homomorphismen genannt.

Definition. Sei K ein Körper, und seien V, W K-Vektorräume. Eine Abbildung $\varphi\colon V \to W$ heißt ein *Homomorphismus von K-Vektorräumen* oder kurz *linear*, wenn gilt:

$$\begin{aligned} \varphi(u+v) &= \varphi(u) + \varphi(v) && \text{für alle } u, v \in V, \\ \varphi(\alpha u) &= \alpha\varphi(u) && \text{für alle } u \in V, \alpha \in K. \end{aligned}$$

Triviale Beispiele linearer Abbildungen sind offenbar id_V und die *Nullabbildung* $\varphi\colon V \to \{0\}$, $\varphi(v) = 0$ für alle $v \in V$. Durch Induktion zeigt man leicht, daß für eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to W$, Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ und Koeffizienten $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ gilt

$$\varphi(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_1\varphi(v_1) + \cdots + \alpha_n\varphi(v_n).$$

Ebenso leicht sieht man, daß $\varphi(0) = 0$ ist.

Implizit sind bisher schon viele nichttriviale lineare Abbildungen benutzt worden. Insbesondere kann das Bilden von Linearkombinationen als lineare Abbildung interpretiert werden: Sei $V = K^n$, W ein beliebiger K-Vektorraum, und seien $w_1, \ldots, w_n \in W$. Dann ist die Abbildung

$$\varphi : K^n \to W, \qquad \varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_n w_n$$

eine lineare Abbildung.

Wenn nun $w_1, \ldots, w_n$ eine Basis von W ist, dann ist φ surjektiv, weil $w_1, \ldots, w_n$ den Vektorraum W erzeugen: zu jedem $w \in W$ existieren $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ mit $w = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_n w_n$, und folglich ist $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ ein Urbild von w. Die lineare Abbildung φ ist aber auch injektiv: Weil $w_1, \ldots, w_n$ linear unabhängig sind, sind die Koeffizienten $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ in einer Darstellung von w eindeutig bestimmt. Daher hat w höchstens ein Urbild.

Definition. V, W seien K-Vektorräume. Eine bijektive lineare Abbildung φ heißt *Isomorphismus* (von K-Vektorräumen). Wenn es einen Isomorphismus $\varphi\colon V \to W$ gibt, nennt man V und W *isomorph*.

Das Wort „isomorph“ bedeutet „von gleicher Gestalt“ und dies vermittelt sehr genau die mathematische Bedeutung dieses Begriffs: Isomorphe Vektorräume besitzten die gleiche Struktur. Jede Aussage der linearen Algebra, die für V gilt, gilt auch für jeden zu V isomorphen Vektorraum W und umgekehrt: man „transportiert“ sie mittels eines Isomorphismus φ von V nach W, ebenso wie φ^{-1}, das sich auch als Isomorphismus erweist, die „lineare Struktur“ von W nach V überträgt. Isomorphe Objekte einer algebraischen Theorie sind innerhalb dieser Theorie gleichwertig. Sie können sich gegenseitig ersetzen, und häufig braucht man zwischen ihnen nicht zu unterscheiden.

Wir haben vor der Definition des Begriffs „Isomorphismus“ bereits bewiesen, daß jeder n-dimensionale K-Vektorraum zu K^n isomorph ist.

Satz 9.1. *Jeder K-Vektorraum der Dimension n ist zu K^n isomorph.*

Im Sinne der obigen Diskussion heißt dies: Für die Lineare Algebra haben alle Vektorräume der Dimension n die gleiche Struktur.

Satz 9.2. *Seien U, V, W K-Vektorräume, $\varphi\colon U \to V$, $\psi\colon V \to W$ lineare Abbildungen.*

(a) *Dann ist auch $\psi \circ \varphi : U \to W$ linear.*
(b) *Wenn φ und ψ Isomorphismen sind, sind auch $\psi \circ \varphi$, φ^{-1} und ψ^{-1} Isomorphismen.*

Beweis. (a) Man rechnet dies einfach aus: Für $u, v \in U$, $\alpha \in K$ ergibt sich

$$\begin{aligned}(\psi \circ \varphi)(u+v) &= \psi(\varphi(u+v)) = \psi(\varphi(u)+\varphi(v)) = \psi(\varphi(u)) + \psi(\varphi(v)) \\ &= (\psi \circ \varphi)(u) + (\psi \circ \varphi)(v),\end{aligned}$$

ebenso

$$(\psi \circ \varphi)(\alpha v) = \psi(\varphi(\alpha v)) = \psi(\alpha\varphi(v)) = \alpha\psi(\varphi(u)) = \alpha(\psi \circ \varphi)(v).$$

(b) Die Bijektivität von $\psi \circ \varphi$, φ^{-1} und φ^{-1} ist klar. Damit ist $\psi \circ \varphi$ nach (a) ein Isomorphismus. Die Linearität von φ^{-1} sieht man so: Für v, $v' \in V$ ist

$$\begin{aligned}\varphi\big(\varphi^{-1}(v+v')\big) = v + v' &= \varphi(\varphi^{-1}(v)) + \varphi(\varphi^{-1}(v')) \\ &= \varphi\big(\varphi^{-1}(v) + \varphi^{-1}(v')\big).\end{aligned}$$

Anwendung von φ^{-1} auf diese Gleichung liefert $\varphi^{-1}(v+v') = \varphi^{-1}(v) + \varphi^{-1}(v')$. Ebenso ergibt sich $\varphi^{-1}(\alpha v) = \alpha\varphi^{-1}(v)$. □

Lineare Abbildungen respektieren Untervektorräume:

Satz 9.3. *Sei $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann ist für jeden Untervektorraum U von V die Bildmenge $\varphi(U)$ ein Untervektorraum von W. Umgekehrt ist für jeden Untervektorraum N von W die Urbildmenge $\varphi^{-1}(N)$ ein Untervektorraum von V.*

Man rechnet dies direkt mittels der Definition des Begriffes „Untervektorraum“ nach.

Von besonderem Interesse bei einer linearen Abbildung $\varphi\colon V \to W$ sind die Untervektorräume

$$\begin{aligned} \operatorname{Kern}\varphi &= \varphi^{-1}(0) && \text{von } V \text{ und} \\ \operatorname{Bild}\varphi &= \varphi(V) && \text{von } W. \end{aligned}$$

Nach Definition ist φ genau dann surjektiv, wenn $\operatorname{Bild}\varphi = W$ gilt. Die Injektivität können wir mittels des Kerns testen:

Satz 9.4. *Sei $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung von K-Vektorräumen.*

(a) *Für $w = \varphi(\tilde{v})$, $\tilde{v} \in V$, gilt*

$$\varphi^{-1}(w) = \tilde{v} + \operatorname{Kern}\varphi.$$

(b) *Insbesondere ist φ genau dann injektiv, wenn* $\operatorname{Kern}\varphi = \{0\}$.

Beweis. (a) Sei $v_0 \in \operatorname{Kern}\varphi$. Dann ist

$$\varphi(\tilde{v} + v_0) = \varphi(\tilde{v}) + \varphi(v_0) = w + 0 = w.$$

Also ist $\tilde{v} + \operatorname{Kern}\varphi \subset \varphi^{-1}(w)$. Umgekehrt ist für $v \in \varphi^{-1}(w)$

$$\varphi(v - \tilde{v}) = \varphi(v) - \varphi(\tilde{v}) = w - w = 0.$$

Dies zeigt: $v = \tilde{v} + (v - \tilde{v}) \in \tilde{v} + \operatorname{Kern}\varphi$.

(b) Wenn φ injektiv ist, muß $\operatorname{Kern}\varphi = 0$ sein, denn andernfalls existiert ein $v \in V$, $v \neq 0$ mit $\varphi(v) = 0 = \varphi(0)$.

Wenn umgekehrt $\operatorname{Kern}\varphi = \{0\}$ ist, ist für jedes $w \in W$ die Urbildmenge $\varphi^{-1}(w)$ gemäß (a) höchstens einelementig. Das heißt aber, φ ist injektiv. □

Sei A eine $m \times n$-Matrix über K, und $b \in K^m$. Wir wollen die im Zusammenhang mit dem linearen Gleichungssystem (A, b) gefundenen Begriffe und Aussagen mit Hilfe des Begriffs „lineare Abbildung“ beschreiben. Dazu betrachten wir die lineare Abbildung $\varphi\colon K^n \to K^m$, die durch

$$\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \xi_1 v^1 + \cdots + \xi_n v^n$$

gegeben ist. Dabei bezeichnen $v^1, \ldots, v^n$ wie üblich die Spalten von A. Dann gilt offensichtlich:

(a) (A, b) besitzt eine Lösung $\iff$ $b \in \operatorname{Bild}\varphi$,
(b) $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ ist eine Lösung $\iff$ $\varphi(x) = b$,
(c) x ist eine Lösung von $(A, 0)$ $\iff$ $\varphi(x) = 0$ $\iff$ $x \in \operatorname{Kern}\varphi$;

(d) Satz 8.4 besagt:

$$\dim \operatorname{Kern} \varphi + \dim \operatorname{Bild} \varphi = n.$$

Aussage (d) ist allgemein richtig:

Satz 9.5. *Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und W ein beliebiger K-Vektorraum, $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt*

$$\dim \operatorname{Kern} \varphi + \dim \operatorname{Bild} \varphi = \dim V.$$

Beweis. Wir wählen eine Basis $u_1, \ldots, u_m$ von $\operatorname{Kern} \varphi$, eine Basis $w_1, \ldots, w_r$ von $\operatorname{Bild} \varphi$, sowie Elemente $v_1, \ldots, v_r \in V$ mit $\varphi(v_i) = w_i$. Es genügt zu zeigen, daß $u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_r$ eine Basis von V ist. Sei $v \in V$. Dann existieren $\beta_1, \ldots, \beta_r \in K$ mit

$$\varphi(v) = \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_r w_r.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \varphi(v - (\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_r v_r)) &= \varphi(v) - \varphi(\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_r v_r) \\ &= (\beta_1 w_1 + \cdots + \beta_r w_r) - (\beta_1 w_1 + \cdots + \beta_r w_r) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Also existieren $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in K$ mit

$$v - (\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_r v_r) = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_m u_m,$$

so daß

$$v = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_m u_m + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_r v_r.$$

Damit ist $u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_r$ ein Erzeugendensystem von V. Für die lineare Unabhängigkeit wenden wir φ auf eine Gleichung

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_m u_m + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_r v_r = 0$$

an und erhalten

$$\beta_1 \varphi(v_1) + \cdots + \beta_r \varphi(v_r) = 0.$$

Da $w_1, \ldots, w_r$ linear unabhängig sind, folgt $\beta_1 = \cdots = \beta_r = 0$ und sodann $\alpha_1 = \ldots \alpha_m = 0$ wegen der linearen Unabhängigkeit von $u_1, \ldots, u_m$. □

Man nennt $\dim \operatorname{Bild} \varphi$ auch den *Rang* von φ und schreibt

$$\operatorname{rang} \varphi = \dim \operatorname{Bild} \varphi.$$

Wir wollen Satz 9.5 auf lineare Selbstabbildungen $\varphi\colon V \to V$ anwenden. Man nennt diese *Endomorphismen* von V. Bijektive Endomorphismen nennt man *Automorphismen*. Die Automorphismen eines Vektorraums bilden bezüglich der Komposition von Abbildungen offensichtlich eine Gruppe, die man mit

$$\operatorname{Aut} V \quad \text{oder} \quad \operatorname{GL}(V)$$

bezeichnet.

Satz 9.6. *V sei ein endlichdimensionaler Vektorraum über K, φ ein Endomorphismus von V. Dann sind folgende Eigenschaften von φ äquivalent:*

(a) *φ ist injektiv,*
(b) *φ ist surjektiv,*
(c) *φ ist ein Automorphismus.*

Beweis. Genau dann ist φ ein Automorphismus, wenn $\dim \operatorname{Bild} \varphi = \dim V$ und $\dim \operatorname{Kern} \varphi = 0$. Wegen Satz 9.5 impliziert jede dieser Gleichungen die jeweils andere. □

Satz 9.6 ist ein Analogon zu folgender Aussage über Selbstabbildungen $f\colon M \to M$ einer endlichen Menge M: f injektiv $\iff$ f surjektiv $\iff$ f bijektiv.

Von allen abstrakten Konstruktionen der linearen Algebra ist die der direkten Summe die einfachste. Für K-Vektorräume V_1, V_2 sei $V_1 \oplus V_2$ die Menge $V_1 \times V_2$ versehen mit den Operationen

$$(v_1, v_2) + (v_1', v_2') = (v_1 + v_1', v_2 + v_2'),$$
$$\alpha(v_1, v_2) = (\alpha v_1, \alpha v_2),$$

$v_1, v_1' \in V_1$, $v_2, v_2' \in V_2$, $\alpha \in K$. Es ist offensichtlich, daß $V_1 \oplus V_2$ ein K-Vektorraum ist. Im Falle $\dim V_1, \dim V_2 < \infty$ gilt auch $\dim V_1 \oplus V_2 < \infty$ und zwar ist

$$\dim V_1 \oplus V_2 = \dim V_1 + \dim V_2.$$

Wenn nämlich $v_1, \ldots, v_m$ eine Basis von V_1 und $w_1, \ldots, w_n$ eine Basis von V_2 ist, so ist $(v_1, 0), \ldots, (v_m, 0), (0, w_1), \ldots, (0, w_n)$ eine Basis von $V_1 \oplus V_2$.

Zu einer direkten Summe $V_1 \oplus V_2$ gehören die *natürlichen Einbettungen*

$$i_1 : V_1 \to V_1 \oplus V_2, \qquad i_1(v_1) = (v_1, 0),$$
$$i_2 : V_2 \to V_1 \oplus V_2, \qquad i_2(v_2) = (0, v_2)$$

und die *natürlichen Projektionen*

$$\pi_1 : V_1 \oplus V_2 \to V_1, \qquad \pi_1(v_1, v_2) = v_1,$$
$$\pi_2 : V_1 \oplus V_2 \to V_2, \qquad \pi_2(v_1, v_2) = v_2.$$

Diese Abbildungen sind linear. Die Einbettungen sind injektiv, die Projektionen surjektiv. Es gilt $\operatorname{Kern} \pi_1 = i_2(V_2)$, $\operatorname{Kern} \pi_2 = i_1(V_1)$.

Es ist klar, wie die direkte Summe von mehr als zwei Vektorräumen zu bilden ist.

Es ist häufig bequem, für Untervektorräume U_1, U_2 eines Vektorraums V zu sagen, V sei *direkte Summe von U_1 und U_2*, wenn

$$V = U_1 + U_2 \quad \text{und} \quad U_1 \cap U_2 = \{0\}.$$

Dies ist wegen des folgenden Satzes gerechtfertigt:

Satz 9.7. *Die lineare Abbildung φ: $U_1 \oplus U_2 \to V$ sei gegeben durch $\varphi(u_1, u_2) = u_1 + u_2$ für alle $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$. Genau dann ist φ ein Isomorphismus, wenn V direkte Summe von U_1 und U_2 ist.*

Beweis. Daß φ linear ist, ist so offensichtlich, daß wir es nicht explizit als Behauptung formuliert haben.

Genau dann ist φ surjektiv, wenn es zu jedem $v \in V$ ein $u_1 \in U_1$ und ein $u_2 \in U_2$ mit $v = u_1 + u_2$ gibt, wenn also $V = U_1 + U_2$ ist.

Wenn $U_1 \cap U_2 \neq \{0\}$ ist, gilt für $u \in U_1 \cap U_2$, $u \neq 0$,

$$\varphi(u, -u) = u - u = 0.$$

Also ist φ dann nicht injektiv.

Umgekehrt, wenn $\varphi(u_1, u_2) = u_1 + u_2 = 0$, folgt $u_1 = -u_2 \in U_1 \cap U_2$, so daß $u_1 = u_2 = 0$, wenn $U_1 \cap U_2 = \{0\}$. Damit ist in diesem Fall $\operatorname{Kern} \varphi = \{0\}$. □

Wir haben vor den Vektorräumen bereits die Begriffe „Gruppe“ und „Körper“ eingeführt. Auch für sie definiert man Homomorphismen.

Definition. Seien G und H Gruppen (mit multiplikativ geschriebener Verknüpfung). Eine Abbildung φ: $G \to H$ ist ein *Gruppenhomomorphismus*, wenn

$$\varphi(gg') = \varphi(g)\varphi(g') \quad \text{für alle} \quad g, g' \in G.$$

Wie bei Vektorräumen heißen bijektive Homomorphismen Isomorphismen. Auch die Termini Endo- und Automorphismus werden wie bei Vektorräumen benutzt. Die Automorphismen einer Gruppe G bilden selbst eine Gruppe, genannt $\operatorname{Aut} G$. Analog zu Vektorräumen setzt man

$$\operatorname{Kern} \varphi = \varphi^{-1}(e),$$

und es folgt ebenso wie bei Vektorräumen, daß φ genau dann injektiv ist, wenn $\operatorname{Kern} \varphi = \{e\}$.

Statt von der direkten Summe spricht man bei Gruppen vom *direkten Produkt*.

Für Homomorphismen von Körpern muß man neben der Verträglichkeit mit den Rechenoperationen eine weitere Forderung stellen, um entartete Fälle zu vermeiden:

Definition. Seien K, L Körper. Eine Abbildung φ: $K \to L$ heißt *Körperhomomorphismus*, wenn

$$\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b), \qquad \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$$

für alle $a, b \in K$ und $\varphi(1) = 1$ gilt.

Homomorphismen von Körpern sind stets injektiv!

Man kann zeigen, daß der einzige Endomorphismus des Körpers $\mathbb{R}$ die Identität ist. (Dies gilt auch für $\mathbb{Q}$, wofür es aber leicht zu sehen ist.) Der Körper $\mathbb{C}$ besitzt einen nichttrivialen Automorphismus, nämlich die Konjugation: Es gilt

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w},\ \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w},\ \overline{1} = 1.$$

Daß dies der einzige Automorphismus φ von $\mathbb{C}$ mit $\varphi \mid \mathbb{R} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ ist, ist eine einfache Übungsaufgabe. Nach dem bereits Gesagten ist er sogar der einzige Automorphismus von $\mathbb{C}$ mit $\varphi(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$. (Darüberhinaus besitzt $\mathbb{C}$ noch weitere Automorphismen, deren konkrete Beschreibung (etwa relativ zu $\mathbb{R}$) jedoch nicht möglich ist.)

ABSCHNITT 10

Matrizenrechnung

Daß wir in endlichdimensionalen Vektorräumen problemlos rechnen können, beruht auf der Existenz von Basen. Sie ermöglicht uns in gleicher Weise das Rechnen mit linearen Abbildungen.

Satz 10.1. *Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, $v_1, \dots, v_n$ sei eine Basis von V. Sei W ein beliebiger K-Vektorraum, $w_1, \dots, w_n$ seien beliebige Elemente von W. Dann gilt:*

(a) *Es gibt genau eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to W$ mit $\varphi(v_i) = w_i$ für $i = 1, \dots, n$.*
(b) *Genau dann ist φ injektiv, wenn $w_1, \dots, w_n$ linear unabhängig sind.*
(c) *Genau dann ist φ surjektiv, wenn $w_1, \dots, w_n$ ein Erzeugendensystem von W bildet.*
(d) *Genau dann ist φ bijektiv, wenn $w_1, \dots, w_n$ eine Basis von W ist.*

Beweis. (a) Sei ψ eine beliebige lineare Abbildung von V nach W. Zu $v \in V$ existieren $\beta_1, \dots, \beta_n \in K$ mit

$$\psi(v) = \psi(\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n) = \beta_1 \psi(v_1) + \cdots + \beta_n \psi(v_n).$$

Diese Gleichung zeigt, daß $\psi(v)$ vollständig durch $\psi(v_1), \dots, \psi(v_n)$ bestimmt ist. Damit ist klar: Wenn es überhaupt eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to W$ mit $\varphi(v_i) = w_i$, $i = 1, \dots, n$, gibt, so ist sie eindeutig bestimmt.

Nun konstruieren wir eine solche Abbildung. Für $v \in V$ mit $v = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n$ setzen wir

$$\varphi(v) = \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_n w_n.$$

Diese Definition ist nur deshalb sinnvoll, weil $\beta_1, \dots, \beta_n$ durch v *eindeutig* bestimmt sind. Man sieht sofort, daß $\varphi(v_i) = w_i$ für $i = 1, \dots, n$ gilt und daß φ wirklich linear ist.

(b), (c), (d): Dies haben wir im Spezialfall $V = K^n$ bereits in Abschnitt 9 beobachtet, und für beliebiges V ist die Argumentation dieselbe. □

Wir führen eine nützliche Sprechweise ein. Wenn $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V ist und $v = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n$, so nennen wir $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ den *Koordinatenvektor von v* bezüglich $v_1, \dots, v_n$. Die Bildung dieses Koordinatenvektors können wir auch so beschreiben: Wir betrachten die (nach 10.1 existente und eindeutig

bestimmte) lineare Abbildung

$$\varkappa : V \to K^n, \quad \varkappa(v_i) = e_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Sie ordnet jedem $v \in V$ seinen Koordinatenvektor zu.

Sei nun $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung endlichdimensionaler K-Vektorräume mit Basen $v_1, \ldots, v_n$ bzw. $w_1, \ldots, w_m$. Nach 10.1 ist φ durch $\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n)$ eindeutig bestimmt. Die Elemente $\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n)$ wiederum sind durch ihre Koordinatenvektoren

$$(\alpha_{1i}, \ldots, \alpha_{mi}), \quad i = 1, \ldots, n$$

eindeutig bestimmt. Wir schreiben diese Koordinatenvektoren als *Spalten* einer $m \times n$-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

(Merke: Die *Spalten* sind die Koordinatenvektoren der Bildvektoren.) Diese Matrix A bestimmt φ vollständig, nachdem die Basen $v_1, \ldots, v_n$ von V und $w_1, \ldots, w_m$ von W gewählt worden sind.

Definition. Die Matrix A heißt *Matrix von φ bezüglich der Basen $v_1, \ldots, v_n$ von V und $w_1, \ldots, w_m$ von W.*

Wir haben gerade einer linearen Abbildung eine Matrix zugeordnet. Diesen Vorgang können wir auch umkehren: Wir ordnen der Matrix A diejenige lineare Abbildung φ: $V \to W$ zu, für die die Koordinatenvektoren von $\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n)$ bezüglich $w_1, \ldots, w_m$ gerade die Spalten von A sind. Insgesamt erhalten wir somit eine bijektive Abbildung von der Menge der linearen Abbildungen von V nach W auf die Menge der $m \times n$ Matrizen über K.

Wir haben bereits in Abschnitt 6 die Addition und Skalarmultiplikation von Abbildungen $V \to W$ eingeführt. Speziell können wir lineare Abbildungen φ, ψ addieren und mit $\alpha \in K$ multiplizieren. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} (\varphi + \psi)(v_1 + v_2) &= \varphi(v_1 + v_2) + \psi(v_1 + v_2) \\ &= \varphi(v_1) + \varphi(v_2) + \psi(v_1) + \psi(v_2) \\ &= \varphi(v_1) + \psi(v_1) + \varphi(v_2) + \psi(v_2) \\ &= (\varphi + \psi)(v_1) + (\varphi + \psi)(v_2). \end{aligned}$$

Dabei haben wir bei der ersten und letzten Gleichung die Definition der Addition von Abbildungen, bei der zweiten die Linearität von φ und ψ ausgenutzt. Genauso sieht man, daß

$$(\varphi + \psi)(\alpha v) = \alpha((\varphi + \psi)(v)),$$

und $\varphi + \psi$ erweist sich als lineare Abbildung. Auch $\alpha\varphi$ ist linear für jedes $\alpha \in K$, so daß die linearen Abbildungen einen Untervektorraum von $\mathrm{Abb}(V, W)$ bilden, den wir mit

$$\mathrm{Hom}(V, W)$$

bezeichnen.

Wie man $m \times n$-Matrizen addiert und mit Skalaren multipliziert, ist offensichtlich: Man faßt eine $m \times n$-Matrix einfach als Element von $K^{m \cdot n}$ auf. Also bilden die $m \times n$ Matrizen einen Vektorraum, den wir mit

$$M(m, n)$$

bezeichnen.

Satz 10.2. *Sei K ein Körper, V und W seien K-Vektorräume der Dimensionen n bzw. m. Seien Basen $v_1, \ldots, v_n$ von V und $w_1, \ldots, w_m$ von W gewählt. Dann ist die Abbildung*

$$\mathfrak{M} : \mathrm{Hom}(V, W) \to M(m, n),$$

die jeder linearen Abbildung ihre Matrix bezüglich der Basen $v_1, \ldots, v_n$ und $w_1, \ldots, w_m$ zuordnet, ein Isomorphismus von K-Vektorräumen.

Daß die Abbildung $\mathfrak{M}$ bijektiv ist, haben wir uns oben überlegt. Daß sie auch linear ist, rechnet man unmittelbar nach.

Seien nun Vektorräume U, V, W gegeben mit Basen $u_1, \ldots, u_p$, $v_1, \ldots, v_n$ bzw. $w_1, \ldots, w_m$, ferner lineare Abbildungen $\varphi : U \to V$, $\psi : V \to W$. Seien A und B die Matrizen von φ und ψ bezüglich der gegebenen Basen und C die Matrix von $\psi \circ \varphi$. Wie ergibt sich C aus A und B? Um die Koeffizienten einer Matrix zu benennen, schreiben wir kurz z.B.

$$A = (\alpha_{jk}), \quad B = (\beta_{ij}), \quad C = (\gamma_{ik}).$$

Es gilt

$$\varphi(u_k) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jk} v_j, \quad \psi(v_j) = \sum_{i=1}^{m} \beta_{ij} w_i$$

und

$$\begin{aligned}(\psi \circ \varphi)(u_k) &= \psi\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{jk} v_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jk} \psi(v_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jk} \sum_{i=1}^{m} \beta_{ij} w_i \\ &= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} \alpha_{jk}\right) w_i.\end{aligned}$$

Der Koordinatenvektor von $(\psi \circ \varphi)(u_k)$ bezüglich $w_1, \ldots, w_m$ ist also

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \beta_{1j}\alpha_{jk}, \ldots, \sum_{j=1}^{n} \beta_{mj}\alpha_{jk} \right), \quad k = 1, \ldots, p.$$

Dies ist gerade die k-te Spalte von C. Wir erhalten also

$$\gamma_{ik} = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}\alpha_{jk}, \quad i = 1, \ldots, m, \quad k = 1, \ldots, p.$$

Definition. Sei K ein Körper, $A = (\alpha_{jk})$ eine $n \times p$-Matrix über K, $B = (\beta_{ij})$ eine $m \times n$-Matrix. Dann heißt die $m \times p$-Matrix $C = (\gamma_{ik})$ mit

$$\gamma_{ik} = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}\alpha_{jk}, \quad i = 1, \ldots, m,\ k = 1, \ldots, p$$

das *Produkt* von B und A,

$$C = BA$$

(in dieser Reihenfolge!).

Zu bemerken ist folgendes:

(a) Das Produkt von B und A läßt sich nur bilden, wenn die Spaltenzahl von B und die Zeilenzahl von A übereinstimmen.

(b) Man kann die Matrizenmultiplikation schematisch so darstellen:

$$\begin{pmatrix} & & \\ \boxed{b_{i1}} & \boxed{\ldots} & \boxed{b_{in}} \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \boxed{a_{1k}} & \\ & \boxed{\vdots} & \\ & \boxed{a_{nk}} & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & \boxed{c_{ik}} & \\ & & \end{pmatrix}$$

(c) Die Matrizenmultiplikation ist nicht kommutativ: Auch wenn wir die Produkte BA und AB bilden können, ist i.a. $BA \neq AB$. Zum Beispiel gilt

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir haben das Matrizenprodukt BA so definiert, daß BA die Matrix von $\psi \circ \varphi$ ist. Genauer gilt:

Satz 10.3. *Seien U, V, W Vektorräume über K mit den Basen $u_1, \ldots, u_p$, $v_1, \ldots, v_n$ und $w_1, \ldots, w_m$. Seien $\varphi\colon U \to V$, $\psi\colon V \to W$ lineare Abbildungen. Wenn A die Matrix von φ bezüglich $u_1, \ldots, u_p$ und $v_1, \ldots, v_n$ und B die Matrix von ψ*

bezüglich $v_1, \ldots, v_n$ und $w_1, \ldots, w_m$ ist, so ist BA die Matrix von $\psi \circ \varphi$ bezüglich $u_1, \ldots, u_p$ und $w_1, \ldots, w_m$.

Zur Vereinfachung der Sprechweise treffen wir folgende Verabredung: Die *Matrix von* $f\colon K^n \to K^m$ ist die Matrix von f bezüglich der kanonischen Basen; ist A eine $m \times n$-Matrix, so ist *die durch A definierte lineare Abbildung* $f\colon K^n \to K^m$ einfach diejenige lineare Abbildung, die f bezüglich der kanonischen Basen definiert. Für diese gilt dann:

$$f(x) = f(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \xi_1 v^1 + \cdots + \xi_n v^n$$
$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \alpha_{1j}\xi_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n \alpha_{mj}\xi_j \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = Ax,$$

wenn wir x als Spalte schreiben. Die $n \times n$-Matrix

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

heißt *n-reihige Einheitsmatrix*. Sie ist die Matrix der identischen Abbildung eines beliebigen n-dimensionalen K-Vektorraums bezüglich einer beliebigen Basis.

Wir haben oben gesehen, daß die Matrizenmultiplikation nicht kommutativ ist. Hingegen gelten die übrigen uns vertrauten Rechenregeln:

Satz 10.4. *A und B seien $n \times p$-Matrizen, C und D seien $m \times n$-Matrizen über K. E sei eine $(k \times m)$-Matrix. Dann gilt:*

(a) $I_n A = A I_p = A$,
(b) $E(CA) = (EC)A$,
(c) $(C + D)A = CA + DA$, $C(A + B) = CA + CB$.

Beweis. Man kann dies direkt ausrechnen. Es ist aber viel eleganter, die Rechenregeln für Matrizen auf die entsprechenden Regeln für Abbildungen zurückzuführen. Als Beispiel betrachten wir (b). Sind χ, ψ, φ die durch E, C, A gegebenen linearen Abbildungen, so gilt

$$\chi \circ (\psi \circ \varphi) = (\chi \circ \psi) \circ \varphi,$$

$E(CA)$ ist die Matrix von $\chi \circ (\psi \circ \varphi)$, und $(EC)A$ ist die Matrix von $(\chi \circ \psi) \circ \varphi$. □

Bei einem Endomorphismus $\varphi\colon V \to V$ hat man es bei Definitions- und Bildbereich mit ein und demselben Vektorraum zu tun. Dementsprechend betrachtet man auch nur eine Basis $v_1, \ldots, v_n$, wenn nichts anderes ausdrücklich vorausgesetzt wird. Daher kann man kurz von *der Matrix von φ bezüglich $v_1, \ldots, v_n$* sprechen.

Sei A eine $n \times n$-Matrix. Die durch A gegebene lineare Abbildung ist genau dann ein Automorphismus, wenn rang $A = n$; siehe Satz 9.6. In diesem Fall besitzt φ ein Inverses φ^{-1}, dessen Matrix wir mit A^{-1} bezeichnen. Da

$$\varphi \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \circ \varphi = \mathrm{id}_{K^n},$$

ist $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

Definition. Sei A eine $n \times n$-Matrix des Ranges n. Die soeben beschriebene Matrix A^{-1} heißt die *zu A inverse Matrix*.

Ist A eine $n \times n$-Matrix, zu der es eine $n \times n$-Matrix A' mit $A'A = I_n$ oder $AA' = I_n$ gibt, so muß bereits rang $A = n$ gelten: Für die durch A' gegebene lineare Abbildung φ' ist

$$\varphi' \circ \varphi = \mathrm{id}_{K^n} \quad \text{oder} \quad \varphi \circ \varphi' = \mathrm{id}_{K^n}.$$

Im ersten Fall ist φ injektiv, also ein Automorphismus von K^n gemäß Satz 9.6, im zweiten Fall ist φ surjektiv und damit ebenfalls ein Automorphismus. Es folgt $\varphi' = \varphi^{-1}$ und somit $A' = A^{-1}$.

Wir fassen diese Erkenntnisse zusammen:

Satz 10.5. *A sei eine $n \times n$-Matrix über K und φ der durch A gegebene Endomorphismus des K^n. Dann sind äquivalent:*

(a) *φ ist ein Automorphismus;*
(b) rang $A = n$;
(c) *es existiert eine $n \times n$-Matrix A' mit $A'A = I_n$ oder $AA' = I_n$.*

In diesem Fall ist $A' = A^{-1}$ die Matrix von φ^{-1}. Die Bestimmung von A^{-1} ist mit unserem Verfahren zum Lösen linearer Gleichungssysteme (prinzipiell) sehr einfach. Sei

$$AB = I_n.$$

Dann erfüllt die j-te Spalte von B das lineare Gleichungssystem

$$(A, e_j)$$

dessen rechte Seite die j-te Spalte der Einheitsmatrix ist. Also haben wir insgesamt n lineare Gleichungssysteme gleichzeitig zu lösen. Sie alle haben die „linke Seite“ A, und daher können wir mit allen rechten Seiten simultan arbeiten.

Beispiel.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 01 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1/2 & 1/2 & 1/2
\end{array}
$$

$$
A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}
$$

Auf der rechten Seite können wir jetzt die Lösungen unserer vier Gleichungssysteme, d.h. aber A^{-1}, direkt ablesen.

ABSCHNITT 11

Determinanten

Wir betrachten ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{aligned} ax + by &= u \\ cx + dy &= v \end{aligned}$$

mit rang $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = 2$. Wir kennen ein Verfahren zur Lösung solcher Gleichungssysteme. Gibt es auch eine „Formel“ für x und y, vergleichbar etwa der „p-q-Formel“ für quadratische Gleichungen?

Durch Umformen erhalten wir zunächst:

$$\begin{aligned} (ad - bc)x &= ud - bv \\ (ad - bc)y &= av - uc. \end{aligned}$$

Wegen rang $A = 2$ muß $ad - bc \neq 0$ sein (!), und wir erhalten

$$x = \frac{ud - bv}{ad - bc} \quad \text{und} \quad y = \frac{av - uc}{ad - bc}.$$

Auffällig ist, daß die Terme $ud - bv$, $ad - bc$, $av - uc$ alle von der gleichen Bauart sind. Wenn wir für eine 2×2-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

$\det A = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}$ setzen, so gilt

$$ad - bc = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad ud - bv = \det \begin{pmatrix} u & b \\ v & d \end{pmatrix}, \quad av - uc = \det \begin{pmatrix} a & u \\ c & v \end{pmatrix}.$$

Der nächste Schritt wäre nun, lineare Gleichungssysteme mit drei Unbestimmten zu untersuchen und herauszufinden, ob es dort ähnliche Gesetzmäßigkeiten gibt. Wir werden sehen, daß dies zutrifft und daß die in Zähler und Nenner der Auflösungsformel auftretenden Größen „Determinanten“ gewisser Matrizen sind. Natürlich müssen wir Determinanten erst noch definieren. Dabei gehen wir rekursiv vor.

Für eine quadratische n-reihige Matrix $A = (\alpha_{ij})$ sei A_i diejenige Matrix, die aus A durch Streichen der ersten Spalte und i-ten Zeile entsteht:

$$A_i = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & & \alpha_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

Die Matrizen A_i haben das Format $(n-1) \times (n-1)$.

Definition. Sei A eine $n \times n$-Matrix. Wir setzen

$$\det A = \begin{cases} a, & \text{wenn } n = 1 \quad \text{und } A = (a), \\ \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_i & \text{für } n > 1. \end{cases}$$

Mit dieser Definition ergibt sich für $n = 2$:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - cb.$$

Für $n = 3$,

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}$$

erhält man:

$$\begin{aligned} \det A =& \alpha_1 \det \begin{pmatrix} \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} - \alpha_2 \det \begin{pmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} + \alpha_3 \det \begin{pmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} \\ =& \alpha_1(\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2) - \alpha_2(\beta_1\gamma_3 - \beta_3\gamma_1) + \alpha_3(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1) \\ =& \alpha_1\beta_2\gamma_3 - \alpha_1\beta_3\gamma_2 - \alpha_2\beta_1\gamma_3 + \alpha_2\beta_3\gamma_1 + \alpha_3\beta_1\gamma_2 - \alpha_3\beta_2\gamma_1. \end{aligned}$$

Wir haben nun zwar die Determinante einer beliebigen $n \times n$-Matrix definiert, aber mit der Definition allein kann man nicht viel mehr anfangen, als Determinanten auszurechnen. Zunächst wollen wir wichtige Eigenschaften der Determinante festhalten. Dazu betrachten wir die Matrix A als Zusammensetzung ihrer Zeilenvektoren $v_1, \ldots, v_n$ und schreiben auch $(v_1, \ldots, v_n)$ für A.

Satz 11.1. (a) *Die Funktion* det *ist linear in jeder Zeile, d.h.*

$$\begin{aligned} &\det(v_1, \ldots, v_{j-1}, v_j + v_j', v_{j+1}, \ldots, v_n) \\ &\quad = \det(v_1, \ldots, v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, \ldots, v_n) + \det(v_1, \ldots, v_{j-1}, v_j', v_{j+1}, \ldots, v_n) \\ &\det(v_1, \ldots, v_{j-1}, \alpha v_j, v_{j+1}, \ldots, v_n) = \alpha \det(v_1, \ldots, v_n). \end{aligned}$$

(b) *Wenn eine der Zeilen von A der Nullvektor ist, so gilt* $\det A = 0$.

(c) $\det I_n = 1$ *für alle* $n \geq 1$.

Beweis. Für jedes $v \in K^n$ sei $\overline{v}$ der um die erste Komponente gekürzte Vektor: Für $v = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ ist $\overline{v} = (\xi_2, \ldots, \xi_n)$. Die $\overline{v}_k$, $k \neq i$, sind ja gerade die Zeilen der Matrizen A_i. Wir beweisen (a) durch Induktion über n; der Fall $n = 1$ ist offensichtlich richtig. Sei

$$A' = (v_1, \ldots, v_{j-1}, v'_j, v_{j+1}, \ldots, v_n),$$
$$A'' = (v_1, \ldots, v_{j-1}, v_j + v'_j, v_{j+1}, \ldots, v_n).$$

Für $j \neq i$ ist $\alpha''_{i1} = \alpha'_{i1} = \alpha_{i1}$ und

$$\begin{aligned}\det A''_i &= \det(\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_{i-1}, \overline{v}_{i+1} \ldots, \overline{v}_{j-1}, \overline{v}_j + \overline{v}'_j, \overline{v}_{j+1}, \ldots, \overline{v}_n)\\ &= \det(\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_{i-1}, \overline{v}_{i+1}, \ldots, \overline{v}_{j-1}, \overline{v}_j, \overline{v}_{j+1}, \ldots, \overline{v}_n)\\ &\quad + \det(\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_{i-1}, \overline{v}_{i+1}, \ldots, \overline{v}_{j-1}, \overline{v}'_j, \overline{v}_{j+1}, \ldots, \overline{v}_n)\\ &= \det A_i + \det A'_i\end{aligned}$$

nach Induktionsvoraussetzung.

Für $j = i$ ist $A''_i = A'_i = A_i$, aber es gilt

$$\alpha''_{i1} = \alpha_{i1} + \alpha'_{i1}.$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}\det A'' &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \alpha''_{i1} \det A''_i\\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \alpha_{i1} (\det A_i + \det A'_i) + (-1)^{j+1} (\alpha_{j1} + \alpha'_{j1}) \det A_j\\ &= \sum_{i \neq j} (-1)^{i+1} \alpha_{i1} \det A_i + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \alpha'_{i1} \det A'_i\\ &= \det A + \det A'.\end{aligned}$$

Dies ist die erste Behauptung in (a). Genauso beweist man die zweite Behauptung.

(b) Sei etwa $v_i = 0$. Dann ist nach (a)

$$\det(v_1, \ldots, v_n) = \det(v_1, \ldots, v_{i-1}, 0 \cdot v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n) = 0 \cdot \det(v_1, \ldots, v_n).$$

(c) Dies ergibt sich sofort durch Induktion über n:

$$\det I_n = 1 \cdot \det I_{n-1},$$

denn alle anderen Summanden enthalten den Faktor 0. □

Bis jetzt hat die Wahl $(-1)^{i+1}$ der Vorzeichen in der Definition der Determinante keine Rolle gespielt. Ihre Bedeutung ergibt sich aus dem folgenden Satz:

Satz 11.2. (a) *Wenn zwei Zeilen v_j, v_k übereinstimmen, ist*

$$\det(v_1, \ldots, v_n) = 0.$$

(b) *Bei Vertauschung von zwei Zeilen wird die Determinante mit* -1 *multipliziert:*

$$\det(v_1, \ldots, v_{j-1}, v_k, v_{j+1}, \ldots, v_{k-1}, v_j, v_{k+1}, \ldots, v_n) = -\det(v_1, \ldots, v_n).$$

(c) *Die Determinante ändert sich nicht bei elementaren Zeilentransformationen:*

$$\det(v_1, \ldots, v_{j-1}, v_j + \alpha v_k, v_{j+1}, \ldots, v_n) = \det(v_1, \ldots, v_n).$$

Beweis. Wir beweisen (a) und (b) gleichzeitig durch Induktion über n. Im Fall $n = 1$ sind beide Behauptungen „leer“ – es gibt ja nur eine Zeile – und damit automatisch richtig.

Sei $n > 1$. Dann ist (mit $A = (v_1, \ldots, v_n)$)

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_i.$$

Die Induktionsvoraussetzung für (a) ergibt, daß $A_i = 0$ für $i \neq j, k$. Also ist

$$\det A = (-1)^{j+1} a_{j1} \det A_j + (-1)^{k+1} a_{k1} \det A_k.$$

Die Matrizen A_j und A_k haben die gleichen Zeilen, allerdings in verschiedenen Reihenfolgen. Bei A_j steht $v_k = v_j$ auf dem $(k-1)$-ten Platz, bei A_k steht $v_j = v_k$ auf dem j-ten Platz, und die anderen Zeilen sind entsprechend verschoben:

$$A_j = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{j-1} \\ v_{j+1} \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ v_j \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \qquad A_k = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Mittels $k - j - 1$ Zeilenvertauschungen können wir A_k in A_j überführen (oder umgekehrt). Also ist

$$\det A_j = (-1)^{k-j-1} \det A_k,$$

wie sich aus der Induktionsannahme für (b) ergibt. Wegen $a_{j1} = a_{k1}$ folgt

$$\begin{aligned}\det A &= (-1)^{j+1} a_{j1} \det A_j + (-1)^{k+1} a_{k1} \det A_k \\ &= \big((-1)^{j+1}(-1)^{k-j-1} + (-1)^{k+1}\big) a_{k1} \det A_k \\ &= \big((-1)^k + (-1)^{k+1}\big) a_{k1} \det A_k \\ &= 0.\end{aligned}$$

Nun ist noch (b) zu zeigen. Dabei brauchen wir die Induktionsvoraussetzung nicht zu bemühen, sondern können dies direkt aus (a) herleiten. Nach (a) und 11.1 ist

$$\begin{aligned}0 &= \det(\dots, v_j + v_k, \dots, v_j + v_k, \dots) \\ &= \det(\dots, v_j, \dots, v_j + v_k, \dots) + \det(\dots, v_k, \dots, v_j + v_k, \dots) \\ &= \det(\dots, v_j, \dots, v_j, \dots) + \det(\dots, v_j, \dots, v_k, \dots) + \\ &\qquad \det(\dots, v_k, \dots, v_j, \dots) + \det(\dots, v_k, \dots, v_k, \dots) \\ &= \det(\dots, v_j, \dots, v_k, \dots) + \det(\dots, v_k, \dots, v_j, \dots).\end{aligned}$$

(c) Es ist

$$\begin{aligned}\det(\dots, v_j + \alpha v_k, \dots) &= \det(v_1, \dots, v_n) + \alpha \det(\dots, v_k, \dots, v_k, \dots) \\ &= \det(v_1, \dots, v_n)\end{aligned}$$

gemäß 11.1 und Teil (a). □

Die fundamentale Bedeutung der Determinante ergibt sich aus dem folgenden Satz, der uns zeigt, was durch die Determinante determiniert wird:

Satz 11.3. *Sei A eine $n \times n$-Matrix. Dann gilt:*

$$\det A \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{rang} A = n.$$

Beweis. Sei zunächst $\operatorname{rang} A < n$. Dann sind gemäß 8.9 die Zeilen von A linear abhängig. Da Zeilenvertauschungen die Determinante nur um den Faktor -1 ändern, dürfen wir annehmen, daß

$$v_n = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i v_i.$$

Nach 11.1 und 11.2 ist

$$\begin{aligned}\det A &= \det(v_1, \dots, v_{n-1}, \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i v_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i \det(v_1, \dots, v_{n-1}, v_i) = 0.\end{aligned}$$

Sei nun rang $A = n$. Dann zeigt Satz 8.2, daß wir A durch elementare Umformungen, Zeilenvertauschungen und Multiplikation mit von 0 verschiedenen Elementen von K in die Einheitsmatrix überführen können. Jeder Umformungsschritt ändert die Determinante nur um einen von 0 verschiedenen Faktor. Da $\det I_n = 1$, folgt $\det A \neq 0$. □

In der Regel berechnet man Determinanten mittels der Umformungen, die wir im vorangegangenen Satz benutzt haben. Dabei braucht man nur solange zu rechnen, bis man A in eine *obere Dreiecksmatrix* umgeformt hat:

Satz 11.4. *Sei A eine n-reihige obere Dreiecksmatrix, d.h. von der Form*

$$\begin{pmatrix} d_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\det A = d_1 \cdots d_n$.

Dies folgt per Induktion direkt aus der Definition der Determinante.

Bei der Definition der Determinante erscheint es recht willkürlich, in der Rekursion von der ersten Spalte Gebrauch zu machen. Man hätte auch „nach einer anderen Spalte entwickeln können“ oder gar „nach einer Zeile“. Dies hätte aber nicht zu einem anderen Resultat geführt, denn die Determinante ist durch wenige Forderungen eindeutig bestimmt.

Wir sagen, $\Delta : M(n,n) \to K$ sei eine *Determinantenfunktion*, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(a) Δ ist linear in jeder Zeile im Sinne von 11.1 (a);
(b) wenn A zwei gleiche Zeilen besitzt, ist $\Delta(A) = 0$.

Satz 11.5. *$\Delta : M(n,n) \to K$ sei eine Determinantenfunktion mit $\Delta(I_n) = 1$. Dann ist $\Delta(A) = \det A$ für alle $A \in M(n,n)$.*

Beweis. Beim Beweis der Tatsache, daß $\det A = 0$ ist, wenn die Zeilen von A linear abhängig sind, haben wir nur von den Eigenschaften (a) und (b) oben Gebrauch gemacht. Also ist $\Delta(A) = 0$ im Falle rang $A < n$.

Der Beweis von Satz 11.3 zeigt weiter, daß jede Determinantenfunktion die Eigenschaften besitzt, die in 11.2, (b) und (c) beschrieben sind. Wenn wir also A in die Einheitsmatrix transformieren, so ändert sich dabei $\Delta(A)$ um den gleichen Faktor $\alpha \neq 0$ wie $\det A$. Es ergibt sich

$$\alpha\Delta(A) = \Delta(E) = \det E = \alpha \det A. \qquad \square$$

Für eine $n \times n$-Matrix $A = (\alpha_{ij})$ setzen wir

$$A_{pq} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1q} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{p1} & \cdots & \alpha_{pq} & \cdots & \alpha_{pn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nq} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

A_{pq} geht also durch Streichen der p-ten Zeile und der q-ten Spalte aus A hervor. Mit dieser Bezeichnung können wir den *Spaltenentwicklungssatz* formulieren:

Satz 11.6. *Sei $A = (\alpha_{ij})$ eine $n \times n$-Matrix. Dann ist für alle q, $1 \leq q \leq n$:*

$$\det A = \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p+q} a_{pq} \det A_{pq}.$$

Beweis. Wie im Fall $q = 1$, den wir zur Definition der Determinante benutzt haben, zeigt man, daß

$$\Delta_q(A) = \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p+q} a_{pq} \det A_{pq}$$

eine Determinantenfunktion ist. Die Vorzeichen sind so gewählt, daß $\Delta_q(E) = 1$. Nach 11.5 ist mithin $\Delta_q(A) = \det A$ für alle q. □

Eine wichtige Operation ist das Transponieren von Matrizen.

Definition. Sei $A = (\alpha_{ij})$ eine $m \times n$-Matrix. Dann ist $A^\top = (\alpha_{ji})$ die *Transponierte* von A. Deutlicher: Die i-te Spalte von $A^\top$ ist gerade die i-te Zeile von A, die j-te Zeile von $A^\top$ ist die j-te Spalte von A.

Satz 11.7. *Sei A eine $n \times n$-Matrix. Dann ist* $\det A = \det A^\top$.

Beweis. Da die Zeilen von $A^\top$ die Spalten von A sind, zeigen unsere bisherigen Überlegungen: Die Funktion δ: $M(n,n) \to K$, $\delta(A) = \det A^\top$, besitzt folgende Eigenschaften:

(a) Sie ist linear in jeder Spalte;
(b) $\delta(A) = 0$, wenn zwei Spalten von A übereinstimmen;
(c) $\delta(I_n) = 1$.

Ferner ist δ die einzige Funktion mit dieser Eigenschaft.

Aber auch det besitzt die Eigenschaften (a), (b), (c). Für (c) ist dies hinlänglich bekannt. Wenn zwei Spalten von A übereinstimmen, gilt $\det A = 0$, weil dann $\operatorname{rang} A < n$; vgl. 11.3. Somit ist (b) erfüllt.

Schließlich gilt auch (a). Um die Linearität in der q-ten Spalte zu beweisen, betrachten wir einfach die Entwicklung nach dieser Spalte. Wenn $\alpha''_{pq} = \alpha_{pq} + \alpha'_{pq}$

für $p = 1, \ldots, n$ und $\alpha''_{ij} = \alpha_{ij} = \alpha'_{ij}$ für $j \neq q$, so gilt $A_{pq} = A'_{pq} = A''_{pq}$ für $p = 1, \ldots, n$ und wir erhalten

$$\begin{aligned}\det A'' &= \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p+q} (\alpha_{pq} + \alpha'_{pq}) A''_{pq} \\ &= \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p+q} \alpha_{pq} A_{pq} + \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p+q} \alpha'_{pq} A'_{pq} \\ &= \det A + \det A'.\end{aligned}$$

Genauso zeigt man $\det A' = \beta \det A$ wenn

$$\alpha'_{pq} = \beta \alpha_{pq} \text{ für } p = 1, \ldots, n \quad \text{und} \quad \alpha_{ij} = \alpha'_{ij} \text{ sonst.}$$

Da die Funktion δ mit den Eigenschaften (a), (b) und (c) eindeutig bestimmt ist, muß $\delta(A) = \det A$ für alle $A \in M(n, n)$ gelten. □

Durch Anwenden der Spaltenentwicklung auf $\det A^\top$ erhalten wir wegen 11.7 den *Zeilenentwicklungssatz* für $\det A$:

Satz 11.8. *Für alle $n \times n$-Matrizen A und alle $p = 1, \ldots, n$ gilt*

$$\det A = \sum_{q=1}^{n} (-1)^{p+q} a_{pq} \det A_{pq}.$$

Ebenso ergibt sich, daß wir elementare Spaltenumformungen, Spaltenvertauschungen usw. zur Berechnung der Determinante heranziehen können.

Als nächstes untersuchen wir, wie sich die Determinante des Produktes zweier Matrizen berechnen läßt:

Satz 11.9. *Für alle $n \times n$-Matrizen A, B ist*

$$\det AB = (\det A)(\det B).$$

Beweis. Sei zunächst $\operatorname{rang} B < n$. Dann ist auch $\operatorname{rang} AB < n$. Um dies zu beweisen, betrachte man die A, B entsprechenden Endomorphismen des K^n. Es ist

$$\dim \operatorname{Bild} \varphi \circ \psi = \dim \varphi(\operatorname{Bild} \psi) \leq \dim \operatorname{Bild} \psi = \operatorname{rang} \psi,$$

und damit $\operatorname{rang} AB \leq \operatorname{rang} B$. Im Fall $\operatorname{rang} B < n$ ist $\det B = 0$, und nach dem soeben Bewiesenen ist auch $\det AB = 0$.

Sei nun $\operatorname{rang} B = n$. Wir betrachten die durch

$$\delta(A) = (\det B)^{-1} (\det AB)$$

definierte Abbildung $\delta\colon M(n, n) \to K$. (Dabei ist B festgehalten.)

Wir schreiben im folgenden eine $n \times n$-Matrix in der Form

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix},$$

wobei $v_1, \ldots, v_n$ die Zeilen von A sind. Es gilt

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_j + v_j' \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} v_1 B \\ \vdots \\ (v_j + v_j')B \\ \vdots \\ v_n B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 B \\ \vdots \\ v_j B + v_j' B \\ \vdots \\ v_n B \end{pmatrix}.$$

Also ist

$$\det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_j + v_j' \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} B = \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_j \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} B + \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_j' \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} B,$$

und durch Multiplikation mit $(\det B)^{-1}$ ergibt sich

$$\delta \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_j + v_j' \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \delta \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_j \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_j' \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Genauso folgt

$$\delta \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ \beta v_j \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \beta \delta \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_j \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Dies zeigt: δ ist linear in jeder Zeile. Falls A zwei gleiche Zeilen besitzt, besitzt auch AB zwei gleiche Zeilen, woraus $\det AB = 0$ und somit $\delta(A) = 0$ folgt. Schließlich ist

$$\delta(I_n) = (\det B)^{-1}(\det I_n B) = (\det B)^{-1}(\det B) = 1.$$

Insgesamt können wir mit Satz 11.5 schließen: $\delta(A) = \det A$ für alle A. Also ist

$$\det AB = (\det B)\delta(A) = (\det B)(\det A)$$

wie zu beweisen war. □

Als Folgerung ergibt sich

Satz 11.10. *Sei A eine $n \times n$-Matrix des Ranges n. Dann ist*

$$\det A^{-1} = (\det A)^{-1}.$$

In der Tat ist $(\det A^{-1})(\det A) = \det I_n = 1$.

Ausgangspunkt unserer Überlegungen war die Suche nach einer „Formel“ für die Lösung eines eindeutig lösbaren linearen Gleichungssystems mit n Unbestimmten in n Gleichungen. Diese geben wir in 11.12 an; zunächst bestimmen wir die Inverse einer Matrix mit Hilfe von Determinanten.

Satz 11.11. *A sei eine $n \times n$-Matrix des Ranges n. Dann gilt*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} B$$

mit $B = (\beta_{ij})$ und $\beta_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ji}$.

Wir erinnern daran, daß sich A_{ji} durch Streichen der j-ten Zeile und i-ten Spalte aus A ergibt. Für eine 2×2-Matrix bedeutet Satz 11.11:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Beweis von Satz 11.11. Wir betrachten das Produkt

$$C = AB.$$

Es ist $C = (\gamma_{km})$ mit

$$\gamma_{km} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki} \beta_{im} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki} (-1)^{i+m} \det A_{mi} = \begin{cases} \det A, & \text{falls } k = m \\ 0, & \text{falls } k \neq m. \end{cases}$$

Zur Begründung der letzten Gleichung: Im Falle $k = m$ ist

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki} (-1)^{i+k} \det A_{ki}$$

einfach die Entwicklung von $\det A$ nach der k-ten Spalte; im Falle $k \neq m$ ist es die Entwicklung von $\det A'$ nach der k-ten Spalte, wobei sich A' aus A dadurch ergibt, daß wir die m-te Spalte von A durch die k-te ersetzen. Also ist $\det A' = 0$.

Insgesamt ergibt sich

$$A \frac{1}{\det A} B = \frac{1}{\det A} C = I_n, \quad \text{somit} \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} B. \qquad \square$$

Der krönende Abschluß dieses Paragraphen ist die *Cramersche Regel*, die unser eingangs gestelltes Problem löst:

Satz 11.12. *A sei eine $n \times n$-Matrix des Ranges n und $b \in K^n$. Dann ist die eindeutig bestimmte Lösung $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ des linearen Gleichungssystems (A, b) gegeben durch*

$$\xi_i = \frac{\det B_i}{\det A}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

wobei hier B_i diejenige Matrix ist, die sich aus A ergibt, wenn man die i-te Spalte durch b ersetzt.

Beweis. Wir betrachten die Matrix A' mit den Spalten

$$v^1, \ldots, \xi_i v_i - b, \ldots, v^n.$$

A' hat Rang $< n$, weil $\xi_i v_i - b$ Linearkombination von $v^1, \ldots, v^{i-1}, v^{i+1}, \ldots, v^n$ ist. Somit ist

$$\det A' = \xi_i \det A - \det B_i = 0.$$

Auflösen nach ξ_i ergibt die gesuchte Gleichung. □

Anhang. *Das Signum einer Permutation und die Leibnizsche Formel*

Jeder Permutation $\pi \in S_n$ ist in einfacher Weise ein Endomorphismus des $\mathbb{R}^n$ zugeordnet, nämlich diejenige lineare Abbildung $\varphi_\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, die durch

$$\varphi_\pi(e_i) = e_{\pi(i)}$$

eindeutig bestimmt ist. Die lineare Abbildung φ_π permutiert also die Elemente $e_1, \ldots, e_n$ der kanonischen Basis von $\mathbb{R}^n$ in der gleichen Weise wie π die Zahlen $1, \ldots, n$. Die Matrix A_π von φ_π entsteht somit aus der Einheitsmatrix, indem wir deren Spalten so umordnen, wie es π angibt: Zum Beispiel ist für $n = 4$, $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ die Matrix von φ_π einfach

$$A_\pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrizen A_π nennt man auch *Permutationsmatrizen*.

Definition. Das *Signum von π* ist $\det A_\pi$, kurz

$$\delta(\pi) = \det A_\pi.$$

Wenn wir die Matrix A'_π dadurch bilden, daß wir $e_{\pi(i)}$ (als Zeile) zur i-ten Zeile von A'_π machen, so ergibt sich $A'_\pi = A_\pi^\top$ und somit $\det A'_\pi = \det A_\pi$.

Satz 11.13. (a) *Für alle $\pi \in S_n$ ist $\delta(\pi) = \pm 1$.*

(b) *Für alle $\pi, \rho \in S_n$ ist $\delta(\pi \circ \rho) = \delta(\pi)\delta(\rho)$.*

Beweis. Wir beweisen zunächst (b). Es gilt

$$\varphi_{\pi\circ\rho}(e_i) = e_{\pi\circ\rho(i)} = e_{\pi(\rho(i))} = \varphi_\pi(e_{\rho(i)}) = (\varphi_\pi \circ \varphi_\rho)(e_i), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Mithin ist $\varphi_{\pi\circ\rho} = \varphi_\pi \circ \varphi_\rho$ und damit $A_{\pi\circ\rho} = A_\pi A_\rho$. Aus dem Determinantenmultiplikationssatz 11.9 folgt $\delta(\pi \circ \rho) = \det A_{\pi\circ\rho} = (\det A_\pi)(\det A_\rho) = \delta(\pi)\delta(\rho)$. Die Behauptung (a) folgt mittels (b) aus dem folgenden Satz. □

Eine Permutation π heißt eine *Transposition*, wenn es $i, j \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j$, gibt mit

$$\pi(i) = j, \quad \pi(j) = i, \quad \pi(k) = k \text{ für } k \neq i, j.$$

Transpositionen sind also genau diejenigen Permutationen, die zwei Elemente vertauschen und alle anderen fest lassen.

Satz 11.14. (a) *Für jede Transposition τ ist $\delta(\tau) = -1$.*

(b) *Jede Permutation $\pi \in S_n$ läßt sich als Komposition von Transpositionen darstellen.*

Beweis. Teil (a) ist uns wohlbekannt: A_τ entsteht aus der Einheitsmatrix durch Vertauschen zweier Zeilen.

Teil (b) folgt einfach aus der Tatsache, daß man n Gegenstände durch wiederholte Vertauschungen von jeweils zweien von ihnen in jede beliebige Reihenfolge bringen kann. Formal kann man dies so beweisen: (i) Wenn $\pi(n) = n$ ist, so induziert π eine Permutation π' von $\{1, \ldots, n-1\}$, indem wir π einfach auf $\{1, \ldots, n-1\}$ einschränken. Per Induktion läßt sich π' als Produkt von Transpositionen schreiben und damit natürlich auch π.

(ii) Wenn $\pi(n) \neq n$ ist, setzen wir $\tilde{\pi} = \tau \circ \pi$, wobei τ diejenige Transposition ist, die n und $\pi(n)$ vertauscht. Auf $\tilde{\pi}$ können wir (i) anwenden, so daß

$$\tau \circ \pi = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_r$$

mit gewissen Transpositionen $\tau_1, \ldots, \tau_r$. Es folgt

$$\pi = \tau^{-1} \circ \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_r.$$

Auch τ^{-1} ist eine Transposition. □

Die Permutationen π mit $\delta(\pi) = 1$ heißen *gerade*, diejenigen mit $\delta(\pi) = -1$ *ungerade*. Motiviert wird diese Bezeichnung durch

Satz 11.15. *Genau dann ist π gerade, wenn in einer (und damit jeder) Darstellung von π als Produkt von Transpositionen deren Anzahl gerade ist.*

Beweis. Wenn $\pi = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_n$, so ist $\delta(\pi) = (-1)^n$ nach 11.13 und 11.14. □

Die geraden Permutationen bilden eine Untergruppe von S_n. Sie wird mit A_n bezeichnet und heißt *alternierende Gruppe* des Grades n.

Satz 11.16. *Für alle $n \geq 2$ ist $|A_n| = n!/2$.*

Beweis. Sei τ diejenige Transposition, die 1 und 2 vertauscht. Die Abbildung

$$\vartheta : S_n \to S_n, \quad \vartheta(\pi) = \tau \circ \pi$$

ist bijektiv und es gilt $\vartheta(A_n) = S_n \setminus A_n$: Genau dann ist $\tau \circ \pi$ ungerade, wenn π gerade ist. Es folgt $|A_n| = |S_n \setminus A_n|$, also $|A_n| = |S_n|/2 = n!/2$. □

Man kann das Signum einer Permutation auch „determinantenfrei“ definieren, etwa durch $\delta(\pi) = (-1)^n$, wenn sich π als Komposition von n Transpositionen darstellen läßt. Dann muß man sich überlegen, daß durch π eindeutig bestimmt ist, ob n gerade oder ungerade ist.

Mit Hilfe des Signums einer Permutation können wir nun die *Leibnizsche Formel* für die Determinante einer Matrix beweisen:

Satz 11.17. *Sei $A = (\alpha_{ij})$ eine $n \times n$-Matrix. Dann ist*

$$\det A = \sum_{\pi \in S_n} \delta(\pi) \alpha_{1\pi(1)} \cdots \alpha_{n\pi(n)} = \sum_{\pi \in S_n} \delta(\pi) \alpha_{\pi(1)1} \cdots \alpha_{\pi(n)n}.$$

Beweis. Sei v_i die i-te Zeile von A. Dann ist $v_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} e_j$, wobei $e_1, \ldots, e_n$ die kanonische Basis von K^n ist. Es gilt, wenn wir die Linearität von det in allen Zeilen ausnutzen,

$$\begin{aligned}
\det A &= \det \left(\sum_{j_1=1}^n \alpha_{1j_1} e_{j_1}, \ldots, \sum_{j_n=1}^n \alpha_{nj_n} e_{j_n} \right) \\
&= \sum_{j_1=1}^n \alpha_{1j_1} \det \left(e_{j_1}, \sum_{j_2=1}^n \alpha_{2j_2} e_{j_2}, \ldots, \sum_{j_n=1}^n \alpha_{nj_n} e_{j_n} \right) \\
&= \cdots \\
&= \sum_{j_1=1}^n \cdots \sum_{j_n=1}^n \alpha_{1j_1} \cdots \alpha_{nj_n} \det(e_{j_1}, \ldots, e_{j_n}) \\
&= \sum_{(j_1,\ldots,j_n) \in \{1,\ldots,n\}^n} \alpha_{1j_1} \cdots \alpha_{nj_n} \det(e_{j_1}, \ldots, e_{j_n}).
\end{aligned}$$

In dieser Summe sind alle Summanden, bei denen zwei gleiche Indizes j_i vorkommen, gleich 0, weil dann $\det(e_{j_1}, \ldots, e_{j_n}) = 0$ ist. Übrig bleiben diejenigen Summanden zu den Indizes $(j_1, \ldots, j_n)$, bei denen $j_1, \ldots, j_n$ paarweise verschieden sind. Diese entsprechen gerade den Permutationen von $\{1, \ldots, n\}$:

$$(j_1, \ldots, j_n) \longleftrightarrow \pi \quad \text{mit } \pi(i) = j_i, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Für diese ist $\det(e_{j_1}, \ldots, e_{j_n}) = \det A'_\pi = \delta(\pi)$. Es ergibt sich also

$$\det A = \sum_{\pi \in S_n} \delta(\pi) \alpha_{1\pi(1)} \ldots \alpha_{n\pi(n)}.$$

Die zweite Formel ergibt sich, wenn wir „spaltenweise“ vorgehen oder die erste auf $A^\top$ anwenden. □

ABSCHNITT 12

Skalarprodukte

Im diesem Abschnitt diskutieren wir die für die euklidische Geometrie sehr wichtigen Skalarprodukte. Man kann diese für Vektorräume über $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ definieren. Daher bezeichnen wir mit $\mathbb{K}$ im folgenden einen der Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. In beiden Fällen ist $\overline{x}$ das zu x komplex-konjugierte Element, also $\overline{x} = x$ im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Wir legen zunächst etwas Terminologie fest.

Definition. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Abbildung $\varphi\colon V \times V \to \mathbb{K}$ heißt *sesquilinear* oder *Sesquilinearform*, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned}\varphi(v + v', w) &= \varphi(v, w) + \varphi(v', w),\\ \varphi(v, w + w') &= \varphi(v, w) + \varphi(v, w'),\\ \varphi(\beta v, w) &= \beta\varphi(v, w),\\ \varphi(v, \beta w) &= \overline{\beta}\varphi(v, w)\end{aligned}$$

für alle $v, v', w, w' \in V$ und $\beta \in \mathbb{K}$.

Man nennt φ *hermitesch*, wenn stets

$$\varphi(v, w) = \overline{\varphi(w, v)}$$

ist. Gilt überdies

$$\varphi(v, v) > 0$$

für alle $v \in V$, $v \neq 0$, so heißt φ *positiv definit* oder ein *Skalarprodukt*.

Es ist üblich, statt $\varphi(v, v')$ etwas einfacher $\langle v, v'\rangle$ zu schreiben. Wir werden dies im folgenden tun.

Der etwas merkwürdige Name „Sesquilinearform“ soll zum Ausdruck bringen, daß φ „anderthalbfach linear“ ist. Von einer wirklich zweifach linearen Form würde man verlangen, daß stets $\varphi(v, \beta w) = \beta\varphi(v, w)$ ist. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ gilt nun aber $\overline{\beta} = \beta$ für alle β, so daß man im reellen Fall von einer *Bilinearform* spricht. Statt „hermitesch“ sagt man dann aus naheliegenden Gründen *symmetrisch*: es gilt ja $\varphi(v, w) = \varphi(w, v)$ für alle $v, w \in V$, wenn $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist.

Man beachte noch, daß im hermiteschen Fall für alle $v \in V$ stets $\overline{\varphi(v, v)} = \varphi(v, v) \in \mathbb{R}$ gilt. Daher ist die Forderung $\varphi(v, v) > 0$ bei der Definition von „positiv definit“ sinnvoll.

Manchmal treten auch hermitesche Sesquilinearformen auf, die nicht positiv definit sind, aber eine der im folgenden genannten Eigenschaften besitzen:

Definition. Sei $\varphi = \langle\ ,\ \rangle$ eine hermitesche Sesquilinearform auf dem $\mathbb{K}$-Vektorraum V. Man nennt φ

negativ definit, wenn $\varphi(v, v) < 0$ für alle $v \in V$, $v \neq 0$,
positiv semidefinit, wenn $\varphi(v, v) \geq 0$ für alle $v \in V$,
negativ semidefinit, wenn $\varphi(v, v) \leq 0$ für alle $v \in V$.

Wenn keine dieser Eigenschaften zutrifft, heißt φ *indefinit*.

Beispiele. (a) Sei $V = \mathbb{R}^n$. Dann wird durch

$$\big\langle(\xi_1, \ldots, \xi_n), (\eta_1, \ldots, \eta_n)\big\rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i$$

offensichtlich eine symmetrische Bilinearform definiert. Falls mindestens ein $\xi_i \neq 0$ ist, gilt

$$\big\langle(\xi_1, \ldots, \xi_n), (\xi_1, \ldots, \xi_n)\big\rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 > 0.$$

Also ist $\langle\ ,\ \rangle$ sogar ein Skalarprodukt. Man nennt es das *Standardskalarprodukt* auf $\mathbb{R}^n$.

Für $n = 3$ ergibt sich

$$\big\langle(\xi_1, \xi_2, \xi_3), (\xi_1, \xi_2, \xi_3)\big\rangle = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2.$$

Damit ist $\langle v, v\rangle = |v|^2$, wenn $|v|$ die elementargeometrische Länge von $v \in \mathbb{R}^3$ bezeichnet. Wir werden sehen, daß man mit jedem Skalarprodukt sinnvoll Längen und Winkel definieren kann.

(b) Im Fall $V = \mathbb{C}^n$ brauchen wir Beispiel (a) nur wie folgt abändern:

$$\big\langle(\xi_1, \ldots, \xi_n), (\eta_1, \ldots, \eta_n)\big\rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \overline{\eta}_i.$$

Daß es sich um eine Sesquilinearform handelt, ist wieder sofort klar. Diese ist positiv definit, denn

$$\big\langle(\xi_1, \ldots, \xi_n), (\xi_1, \ldots, \xi_n)\big\rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \overline{\xi_i} = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2.$$

Wie in Beispiel (a) spricht man vom *Standardskalarprodukt* auf $\mathbb{C}^n$.

(c) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und V der Vektorraum der stetigen Funktionen $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Dann ist

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x) g(x)\, dx$$

ein Skalarprodukt. Es ist in der Analysis von erheblicher Bedeutung.

Einer hermiteschen Sesquilinearform φ können wir eine *quadratische Form*

$$Q(v) = \langle v, v\rangle, \qquad v \in V,$$

zuordnen. (Wie schon beobachtet ist $Q(v) = \overline{Q(v)} \in \mathbb{R}$ für alle $v \in V$.) Es ist manchmal nützlich, daß man die Form φ aus Q zurückgewinnen kann.

Satz 12.1. (a) *Sei* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. *Dann gilt für jedes* $\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$*:*

$$\langle v, v'\rangle = \frac{1}{\beta - \overline{\beta}}\big(Q(\beta v + v') - \overline{\beta}\,Q(v + v') - \overline{\beta}(\beta - 1)Q(v) - (1 - \overline{\beta})Q(v')\big).$$

(b) *Sei* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. *Dann gilt*

$$\langle v, v'\rangle = \frac{1}{2}\big(Q(v + v') - Q(v) - Q(v')\big).$$

Beweis. Wir rechnen den komplizierten Fall (a) nach:

$$\begin{aligned}
&Q(\beta v + v') - \overline{\beta}\,Q(v + v') - \overline{\beta}(\beta - 1)Q(v) - (1 - \overline{\beta})Q(v') \\
&\quad = \langle \beta v + v', \beta v + v'\rangle - \overline{\beta}\langle v + v', v + v'\rangle - \overline{\beta}(\beta - 1)\langle v, v\rangle - (1 - \overline{\beta})\langle v', v'\rangle \\
&\quad = \beta\overline{\beta}\langle v, v\rangle + \beta\langle v, v'\rangle + \overline{\beta}\langle v', v\rangle + \langle v', v'\rangle \\
&\qquad\quad - \overline{\beta}\langle v, v\rangle - \overline{\beta}\langle (v, v'\rangle - \overline{\beta}\langle v', v\rangle - \overline{\beta}\langle v', v'\rangle \\
&\qquad\quad - \beta\overline{\beta}\langle v, v\rangle + \overline{\beta}\langle v, v\rangle - \langle v', v'\rangle + \overline{\beta}\langle v', v'\rangle \\
&\quad = (\beta - \overline{\beta})\langle v, v'\rangle.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir gar nicht ausgenutzt, daß φ hermitesch ist! Wohl aber benötigt man für (b) die Symmetrie von φ. □

Im Fall, daß der Vektorraum V endlichdimensional ist, können wir uns leicht eine Übersicht über alle Sesquilinearformen auf V verschaffen. Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V. Dann ist

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n} \xi_i v_i, \sum_{j=1}^{n} \eta_j v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \xi_i \overline{\eta}_j \langle v_i, v_j\rangle.$$

Also ist die Form eindeutig bestimmt durch die Einträge der $n \times n$-Matrix

$$A = \big(\langle v_i, v_j\rangle\big).$$

Sie heißt *Gramsche Matrix* der Form bezüglich der Basis $v_1, \ldots, v_n$.

Ist umgekehrt A eine $n \times n$-Matrix, so wird durch

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n} \xi_i v_i, \sum_{j=1}^{n} \eta_j v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \xi_i \overline{\eta}_j a_{ij}$$

eine Sesquilinearform auf V definiert, deren Gramsche Matrix gerade A ist. Es gilt

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n} \xi_i v_i, \sum_{j=1}^{n} \eta_j v_j \right\rangle = (\xi_1 \dots \xi_n) A \begin{pmatrix} \overline{\eta}_1 \\ \vdots \\ \overline{\eta}_n \end{pmatrix}.$$

Es ist nicht schwierig zu beschreiben, wie sich die Gramsche Matrix ändert, wenn man $v_1, \dots, v_n$ durch eine andere Basis von V ersetzt.

Definition. Seien $v_1, \dots, v_n$ und $v'_1, \dots, v'_n$ Basen von V. Die *Matrix M des Übergangs von $v'_1, \dots, v'_n$ zu $v_1, \dots, v_n$* (in dieser Reihenfolge!) ist gegeben durch die Koeffizienten mit denen wir $v'_1, \dots, v'_n$ als Linearkombinationen von $v_1, \dots, v_n$ beschreiben:

$$v'_j = \sum_{i=1}^{n} \mu_{ij} v_i, \qquad j = 1, \dots, n.$$

Wir können dies auch so ausdrücken: M ist die Matrix der identischen Abbildung auf V bezüglich der Basen $v'_1, \dots, v'_n$ und $v_1, \dots, v_n$ (in dieser Reihenfolge!).

Seien nun $v_1, \dots, v_n$ und $v'_1, \dots, v'_n$ Basen von V. Sei M die Matrix des Übergangs von $v'_1, \dots, v'_n$ zu $v_1, \dots, v_n$.

Satz 12.2. *Mit diesen Bezeichnungen gilt: Wenn A die Gramsche Matrix der Sesquilinearform φ bezüglich $v_1, \dots, v_n$ ist, so ist*

$$B = M^\top A \overline{M}$$

die Gramsche Matrix von φ bezüglich $v'_1, \dots, v'_n$. (Dabei ist $\overline{M}$ diejenige Matrix, die aus M hervorgeht, wenn wir die Konjugation auf jeden Eintrag von M anwenden.)

Beweis. Für $v = \xi_1 v_1 + \dots + \xi_n v_n$ ist

$$(\xi_1, \dots, \xi_n) = (\xi'_1, \dots, \xi'_n) M^\top,$$

wenn $(\xi'_1, \dots, \xi'_n)$ der Koordinatenvektor von v bezüglich $v'_1, \dots, v'_n$ ist. Analog ist

$$\begin{pmatrix} \overline{\eta}_1 \\ \vdots \\ \overline{\eta}_n \end{pmatrix} = \overline{M} \begin{pmatrix} \overline{\eta}'_1 \\ \vdots \\ \overline{\eta}'_n \end{pmatrix},$$

so daß

$$(\xi_1, \dots, \xi_n) A \begin{pmatrix} \overline{\eta}_1 \\ \vdots \\ \overline{\eta}_n \end{pmatrix} = (\xi'_1, \dots, \xi'_n) M^\top A \overline{M} \begin{pmatrix} \overline{\eta}'_1 \\ \vdots \\ \overline{\eta}'_n \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Definition. Seien A, B $n \times n$-Matrizen über $\mathbb{K}$. Sie heißen *kongruent*, wenn es eine invertierbare $n \times n$-Matrix M mit

$$B = M^\top A \overline{M}$$

gibt.

Genau dann sind A und B also kongruent, wenn sie bei geeigneter Wahl von Basen die gleiche Sesquilinearform darstellen. Häufig kommt es darauf an, für eine gegebene Sesquilinearform die Basis von V so zu wählen, daß die Gramsche Matrix eine möglichst einfache Gestalt hat. Inwieweit dies erreichbar ist, hängt von der Form ab. Wir werden dies im folgenden Abschnitt noch ausführlich diskutieren, das Problem für Skalarprodukte aber schon in diesem Abschnitt lösen.

Die für Sesquilinearformen geprägten Begriffe können wir nun auf Matrizen übertragen:

Definition. Eine $n \times n$-Matrix über $\mathbb{K}$ heißt *hermitesch*, wenn $A^\top = \overline{A}$; sie heißt *symmetrisch*, wenn $A^\top = A$. Genau dann ist A also hermitesch (symmetrisch), wenn die von A (bezüglich irgendeiner Basis) definierte Sesquilinearform hermitesch (symmetrisch) ist.

Eine hermitesche Matrix heißt *positiv definit*, falls die von ihr (bezüglich irgendeiner Basis) definierte Sesquilinearform positiv definit ist, und ähnlich überträgt man die Begriffe *negativ definit* usw.

Man kann natürlich über beliebigen Körpern von symmetrischen Matrizen sprechen.

Grundlegend für das Folgende ist der Begriff der Orthogonalität.

Definition. Sei $\varphi = \langle\ ,\ \rangle$ eine hermitesche Sesquilinearform auf dem $\mathbb{K}$-Vektorraum V. Vektoren v, $v' \in V$ heißen *orthogonal*, wenn $\langle v, v' \rangle = 0$; wir schreiben dann $v \perp v'$.

Wir werden am Ende dieses Abschnittes sehem, daß im Falle des Standardskalarprodukts auf $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ die soeben definierte Orthogonalität wirklich bedeutet, daß v im Sinne der Elementargeometrie auf w senkrecht steht.

Für eine Teilmenge $S \subset V$ sei

$$S^\perp = \{v \in V : v \perp v' \text{ für alle } v' \in S\}.$$

Weil die Form hermitesch ist, gilt $\langle v, v' \rangle = 0$ genau dann, wenn $\langle v', v \rangle = 0$. Ferner überprüft man unmittelbar, daß $S^\perp$ ein Untervektorraum von V ist. Für $v_1, \ldots, v_n \in V$ gilt

$$\{v_1, \ldots, v_n\}^\perp = L(v_1, \ldots, v_n)^\perp.$$

Von nun an betrachten wir in diesem Abschnitt nur noch Skalarprodukte. Vektorräume mit einem Skalarprodukt heißen im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *euklidisch*, im

Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *unitär*. Wir sprechen im folgenden einheitlich von euklidischen $\mathbb{K}$-Vektorräumen.

Sei $e_1, \ldots, e_n$ die kanonische Basis des $\mathbb{K}^n$. Dann gilt für das Standardskalarprodukt

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j, \\ 1 & i = j. \end{cases}$$

Wir wollen im folgenden zeigen, daß jeder endlichdimensionale euklidische Vektorraum eine Basis mit dieser Eigenschaft besitzt.

Definition. Eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ mit $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ für $i \neq j$ heißt *Orthogonalbasis*. Gilt darüber hinaus noch $\langle v_i, v_i \rangle = 1$ für $i = 1, \ldots, n$ so nennt man sie eine *Orthonormalbasis*.

Das *Orthogonalisierungsverfahren von E. Schmidt* zeigt, daß jeder endlichdimensionale euklidische Vektorraum eine Orthonormalbasis besitzt. Die zusätzliche Information über $w_1, \ldots, w_n$ wird später benötigt.

Satz 12.3. *Sei V ein euklidischer $\mathbb{K}$-Vektorraum und $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V. Wir definieren sukzessiv*

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{1}{\sqrt{\langle v_1, v_1 \rangle}} v_1, \\ w_j' &= v_j - \langle v_j, w_1 \rangle w_1 - \cdots - \langle v_j, w_{j-1} \rangle w_{j-1}, \\ w_j &= \frac{1}{\sqrt{\langle w_j', w_j' \rangle}} w_j' \qquad \text{für } j > 1. \end{aligned}$$

Dann ist $w_1, \ldots, w_j$ für $j = 1, \ldots, n$ eine Orthonormalbasis von $L(v_1, \ldots, v_j)$. Speziell ist $w_1, \ldots, w_n$ eine Orthonormalbasis von V.

Beweis. Wir beweisen die Behauptung durch Induktion über j. Für $j = 1$ ist $v_1 \neq 0$ (v_1 ist ja Element einer Basis). Somit ist $\langle v_1, v_1 \rangle > 0$ und w_1 ein wohlbestimmtes Element von V. Es gilt

$$\begin{aligned} \langle w_1, w_1 \rangle &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{\langle v_1, v_1 \rangle}} v_1, \frac{1}{\sqrt{\langle v_1, v_1 \rangle}} v_1 \right\rangle \\ &= \frac{1}{\langle v_1, v_1 \rangle} \langle v_1, v_1 \rangle = 1. \end{aligned}$$

Sei nun $j > 1$. Wäre $w_j' = 0$, so wäre $v_j \in L(w_1, \ldots, w_{j-1}) = L(v_1, \ldots, v_{j-1})$, im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von $v_1, \ldots, v_n$. Somit gilt $w_j' \neq 0$ und w_j ist wohldefiniert. Nach Definition ist

$$w_j \in L(w_1, \ldots, w_{j-1}, v_j) = L(v_1, \ldots, v_{j-1}, v_j),$$

so daß $L(w_1, \ldots, w_j) \subset L(v_1, \ldots, v_j)$. Umgekehrt gilt

$$v_j \in L(w_1, \ldots, w_{j-1}, w_j) = L(v_1, \ldots, v_{j-1}, w_j).$$

Insgesamt folgt $L(w_1, \ldots, w_j) = L(v_1, \ldots, v_j)$, und $w_1, \ldots, w_j$ ist eine Basis von $L(v_1, \ldots, v_j)$.

Nach Induktionsvoraussetzung sind $w_1, \ldots, w_{j-1}$ paarweise orthogonal. Ferner gilt für $i < j$:

$$\begin{aligned}\langle w_i, w_j' \rangle &= \langle w_i, v_j \rangle - \sum_{k=1}^{j-1} \langle w_i, \langle v_j, w_k \rangle w_k \rangle = \langle w_i, v_j \rangle - \sum_{k=1}^{j-1} \overline{\langle v_j, w_k \rangle} \langle w_i, w_k \rangle \\ &= \langle w_i, v_j \rangle - \overline{\langle v_j, w_i \rangle} = 0,\end{aligned}$$

da $\langle w_i, w_k \rangle = 0$ für $i \neq k$, $\langle w_i, w_i \rangle = 1$ und $\langle w_i, v_j \rangle = \overline{\langle v_j, w_i \rangle}$. Schließlich ist $\langle w_j, w_j \rangle = 1$. □

Man kann einer $n \times n$-Matrix A unmittelbar ansehen, ob sie hermitesch ist. Ob sie darüber hinaus positiv definit ist und somit ein Skalarprodukt definiert, kann man nicht ohne weiteres erkennen. Es gibt hierfür jedoch einen einfachen Test: Man definiere einfach eine hermitesche Form auf $\mathbb{K}^n$ mittels A (bezüglich der kanonischen Basis) und versuche, mit dem Schmidtschen Verfahren eine Orthonormalbasis zu bestimmen. Wenn die Matrix nicht positiv definit ist, muß irgendwann der Fall $\langle w_j', w_j' \rangle \leq 0$ eintreten. Andernfalls ist A positiv definit.

Man kann die positive Definitheit auch durch eine Determinantenbedingung beschreiben.

Satz 12.4. *Sei A eine hermitesche $n \times n$-Matrix. Für $i = 1, \ldots, n$ sei A_i die Matrix*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} \end{pmatrix}.$$

Genau dann ist A positiv definit, wenn $\det A_i > 0$ *ist für $i = 1, \ldots, n$.*

Beweis. Die Matrix A_i ist die Gramsche Matrix der Einschränkung der durch A gegebenen Sesquilinearform φ auf den von $e_1, \ldots, e_i$ erzeugten Untervektorraum V_i von V.

Wir beweisen zunächst die Implikation „ $\Longrightarrow$ “ durch Induktion über n. Im Fall $n = 1$ ist $A_1 = A$ und nichts mehr zu zeigen. Beim Induktionsschluß dürfen wir nach der vorangegangenen Bemerkung annehmen, daß $\det A_i > 0$ für $i = 1, \ldots, n-1$ gilt. Es bleibt zu zeigen, daß $\det A > 0$ ist. Da A positiv definit ist, ist A zu einer Diagonalmatrix D mit positiven Diagonalelementen konjugiert,

$$A = M^\top D \overline{M}.$$

Es folgt $\det A = (\det D)(\det M)(\overline{\det M}) = (\det D)|\det M|^2 > 0$.

Auch die Umkehrung beweist man durch Induktion über n. Wir können also annehmen, daß die Einschränkung von φ auf V_{n-1} ein Skalarprodukt ist, wenn $\det A_i > 0$ für $i = 1, \ldots, n-1$. Wir wählen in V_{n-1} eine Orthonormalbasis $v_1, \ldots, v_{n-1}$. Dann hat φ bezüglich der Basis $v_1, \ldots, v_{n-1}, e_n$ die Gramsche Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \overline{b_1} \\ 0 & \ldots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \overline{b_{n-1}} \\ b_1 & \cdots & \cdots & b_{n-1} & b_n \end{pmatrix}$$

Da $\det A > 0$, ist auch $\det B > 0$, wie die Rechnung im ersten Teil des Beweises zeigt. Für den nächsten Schritt des Orthogonalisierungsverfahrens wird der Vektor

$$w_n = e_n - \langle e_n, v_1 \rangle v_1 - \cdots - \langle e_n, v_{n-1} \rangle v_{n-1}$$

gebildet. Man rechnet nun sofort aus, daß $\det B = \langle w_n, w_n \rangle > 0$. Mithin läßt sich $v_1, \ldots, v_{n-1}$ durch w'_n gemäß Satz 13.2 zu einer Orthonormalbasis ergänzen, und φ ist positiv definit. □

Die Anschauung legt nahe, daß jeder Unterraum eines endlichdimensionalen euklidischen Vektorraums ein *orthogonales Komplement* besitzt, und diese Bezeichnung für $U^\perp$ ist nach Teil (a) des folgenden Satzes auch gerechtfertigt.

Satz 12.5. *Sei V ein euklidischer $\mathbb{K}$-Vektorraum der Dimension n und U und W seien Untervektorräume von V.*

(a) *V ist direkte Summe von U und $U^\perp$.*
(b) *Es gilt $U = (U^\perp)^\perp$.*
(c) $U \subset W \iff W^\perp \subset U^\perp$.

Beweis. (a) Sei $\dim U = r$. Nach Satz 12.3 können wir eine Orthonormalbasis $w_1, \ldots, w_n$ von V finden, für die $w_1, \ldots, w_r$ eine Basis von U sind. (Wähle zuerst eine Basis $v_1, \ldots, v_r$ von U, ergänze diese zu einer Basis von V und wende das Orthonormalisierungsverfahren an.)

Dann gilt $w_{r+1}, \ldots, w_n \in U^\perp$, und folglich ist $V = U + U^\perp$. Ferner ist $U \cap U^\perp = \{0\}$, denn kein Vektor v in V ist wegen der Positiv-Definitheit zu sich selbst orthogonal.

(b) Aus der Definition der Orthogonalität ergibt sich sofort $U \subset (U^\perp)^\perp$. Nach (a) ist einerseits $V = U \oplus U^\perp$, andererseits $V = U^\perp \oplus (U^\perp)^\perp$. Somit muß $\dim(U^\perp)^\perp = \dim U$ sein.

(c) Wiederum aus der Definition der Orthogonalität folgt: $U \subset W \Rightarrow W^\perp \subset U^\perp$. Somit gilt auch

$$W^\perp \subset U^\perp \quad \Longrightarrow \quad U = (U^\perp)^\perp \subset (W^\perp)^\perp = W,$$

wobei wir (b) ausnutzen. □

Die (eindeutig bestimmte) lineare Abbildung $\pi_U : V \to U$ mit Kern $\pi_U = U^\perp$ und $\pi_U(u) = u$ für alle $u \in U$ heißt *orthogonale Projektion* von V auf U. Mittels einer Orthonormalbasis $w_1, \ldots, w_r$ von U können wir sie leicht angeben. Es gilt

$$\pi_U(v) = \langle v, w_1\rangle w_1 + \cdots + \langle v, w_r\rangle w_r,$$

wie man sofort überprüft. Falls $U = V$, $\pi_U = \mathrm{id}_V$, ist, beschreibt diese Formel auch die Darstellung von v als Linearkombination einer Orthonormalbasis $w_1, \ldots, w_n$:

$$v = \langle v, w_1\rangle w_1 + \cdots + \langle v, w_n\rangle w_n.$$

Wir führen mit Hilfe des Skalarprodukts eine Abstandsfunktion ein. Neben der offensichtlichen Bedeutung für die Geometrie ist das „Messen“ von Entfernungen auch in unendlichdimensionalen Vektorräumen wichtig, weil man mittels der Abstandsfunktion Grenzwerte von Folgen und Stetigkeit von Funktionen definieren kann. Daher kann die fehlende „Endlichkeit“ durch Approximationen in endlich vielen Schritten ersetzt werden.

Zunächst sagen wir, was die „Länge“ eines Vektors sein soll.

Definition. V sei ein euklidischer $\mathbb{K}$-Vektorraum. Für jedes $v \in V$ sei

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$$

die *Norm von* v.

Die wichtigste Aussage über die Norm ist die *Cauchy-Schwarzsche Ungleichung*:

Satz 12.6. *In einem euklidischen $\mathbb{K}$-Vektorraum V gilt für alle $v, w \in V$:*

$$|\langle v, w\rangle| \le \|v\|\|w\|.$$

Beweis. Für $w = 0$ ist die Aussage trivial. Für $w \neq 0$ setzen wir $\lambda = \langle v, w\rangle / \|w\|^2$. Dann ist

$$\begin{aligned} 0 \le \langle v - \lambda w, v - \lambda w\rangle &= \langle v, v\rangle - \lambda\langle w, v\rangle - \overline{\lambda}\langle v, w\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle w, w\rangle \\ &= \|v\|^2 - \frac{\langle v, w\rangle\langle w, v\rangle}{\|w\|^2} - \frac{\langle w, v\rangle\langle v, w\rangle}{\|w\|^2} + \frac{\langle v, w\rangle\langle w, v\rangle\langle w, w, \rangle}{\|w\|^4} \\ &= \|v\|^2 - \frac{\langle v, w\rangle\overline{\langle v, w\rangle}}{\|w\|^2}. \end{aligned}$$

Folglich gilt $|\langle v, w\rangle|^2 \le \|v\|^2\|w\|^2$. □

Wir halten einige Eigenschaften der Norm fest:

Satz 12.7. *In einem euklidischen $\mathbb{K}$-Vektorraum V gilt für alle $v, w \in V$:*

(a) $\|v\| \ge 0$ *und* $\|v\| = 0 \iff v = 0$,

(b) $\|rv\| = |r|\|v\|$ *für alle* $r \in \mathbb{K}$,
(c) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

Beweis. (a) und (b) sind trivial. Für (c) argumentiert man mittels der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung. Man hat

$$\|v + w\|^2 = \langle v + w, v + w\rangle = \|v\|^2 + \langle v, w\rangle + \langle w, v\rangle + \|w\|^2,$$
$$(\|v\| + \|w\|)^2 = \|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2.$$

Da

$$\langle v, w\rangle + \langle w, v\rangle = \langle v, w\rangle + \overline{\langle v, w\rangle} = 2\,\mathrm{Re}\langle v, w\rangle \leq 2|\langle v, w\rangle| \leq 2\|v\|\|w\|,$$

folgt die Behauptung. □

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $V = \mathbb{R}^3$. Für das Standardskalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ und $v = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in V$ gilt

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle} = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}.$$

Wenn wir den $\mathbb{R}^3$ mit dem Anschauungsraum identifizieren und mit einem rechtwinkligen Koordinatensystem versehen, ist $\|v\|$ nach dem Satz des Pythagoras gerade der Abstand zwischen 0 und v. Dies legt nahe, in einem beliebigen euklidischen Vektorraum die Norm eines Vektors als ein Längenmaß zu interpretieren. Der Abstand zwischen zwei Vektoren ist dann die Länge des Differenzvektors:

Definition. Sei V ein euklidischer Vektorraum. Der *Abstand von v und w* ist

$$d(v, w) = \|v - w\|.$$

Eigenschaften der Norm lassen sich nun leicht als Eigenschaften des Abstands interpretieren:

Satz 12.8. *V sei ein euklidischer Vektorraum. Dann gilt für alle u, v, $w \in V$ und $r \in \mathbb{K}$:*

(a) $d(v, w) \geq 0$ *und* $d(v, w) = 0 \iff v = w$,
(b) $d(v, w) = d(w, v)$,
(c) $d(v, w) \leq d(v, u) + d(u, w)$ *(Dreiecksungleichung)*
(d) $d(v + u, w + u) = d(v, w)$
(e) $d(rv, rw) = |r|d(v, w)$.

Die Eigenschaften (a), (b) und (c) besagen gerade, daß d eine *Metrik* auf V ist. Die in (d) beschriebene Eigenschaft nennt man *Translationsinvarianz* von d.

Beweis von 12.8. (a) und (b) sind trivial. Wegen

$$\begin{aligned} d(v, w) = \|v - w\| &= \|v - u + u - w\| \\ &\leq \|v - u\| + \|u - w\| = d(v, u) + d(u, w) \end{aligned}$$

gilt (c). Teil (d) wiederum ist trivial und (e) folgt aus

$$\|rv - rw\| = \|r(v - w)\| = |r|\|v - w\|. \qquad \square$$

Der folgende Satz zeigt, daß ein Vektor $v \in V$ von allen Vektoren eines Untervektorraums U am besten durch $\pi_U(v)$ „approximiert“ wird:

Satz 12.9. *Sei V ein euklidischer Vektorraum und $U \subset V$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Sei $\pi : V \to U$ die orthogonale Projektion auf U. Dann gilt*

$$d(v, u) > d(v, \pi(v))$$

für alle $v \in V$ und $u \in U$ mit $u \neq \pi(v)$. Mit anderen Worten: $\pi(v)$ ist dasjenige Element von U, dessen Abstand von v minimal ist.

Beweis. Es gilt

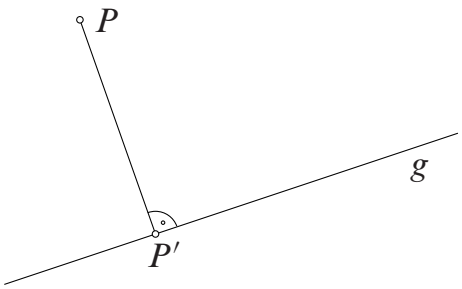
$$\langle v - \pi(v), \pi(v) - u \rangle = 0$$

weil $v - \pi(v) \in U^\perp$ und $\pi(v) - u \in U$. Also ist

$$\begin{aligned} \|v - u\|^2 &= \|(v - \pi(v)) + \pi(v) - u\|^2 \\ &= \|v - \pi(v)\|^2 + \|\pi(v) - u\|^2 \\ &> \|v - \pi(v)\|^2. \end{aligned}$$

Es folgt $d(u, v) = \|v - u\| > \|v - \pi(v)\| = d(v, \pi(v))$. $\square$

Satz 12.9 steht in Übereinstimmung mit der anschaulichen Geometrie, bei der wir z.B. das Lot von einem Punkt P auf die Gerade g fällen, wenn wir den P nächstgelegenen Punkt P' auf g bestimmen wollen:



Satz 12.9 ist ein wichtiges Hilfsmittel der Approximationstheorie. Als Beispiel betrachten wir den Vektorraum V der auf $[0, 2\pi]$ stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx.$$

Bei der Analyse von Schwingungsvorgängen ist es wichtig, f durch ein „trigonometrisches Polynom“

$$p_N(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{N} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{N} b_k \sin kx$$

anzunähern. Die Funktionen

$$c_0(x) = 1, \quad c_k(x) = \cos kx, \quad s_k(x) = \sin kx, \quad k = 1, \ldots, N;$$

bilden eine Orthogonalbasis des von ihnen erzeugten Untervektorraums von V, allerdings keine Orthonormalbasis. Gemäß 12.9 wählt man p_N als die orthogonale Projektion von f auf den von $c_0, \ldots, c_N, s_1, \ldots, s_N$ erzeugten Untervektorraum:

$$p_N = \frac{\langle f, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} \cdot 1 + \sum_{k=1}^{N} \frac{\langle f, c_k\rangle}{\langle c_k, c_k\rangle} c_k + \sum_{k=1}^{N} \frac{\langle f, s_k\rangle}{\langle s_k, s_k\rangle} s_k.$$

Wegen

$$\int_0^{2\pi} 1\, dx = 2\pi, \qquad \int_0^{2\pi} (\cos kx)^2 dx = \int_0^{2\pi} (\sin kx)^2 dx = \pi \quad \text{für } k \geq 1$$

ergeben sich die „Fourierkoeffizienten“

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx\, dx,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx\, dx \qquad k = 1, \ldots, N.$$

Die linearen Abbildungen sind gerade diejenigen Abbildungen, die mit der ‘linearen Struktur’ verträglich sind. Nachdem wir eine Abstandsfunktion eingeführt haben, können wir speziell die linearen Abbildungen betrachten, die abstandserhaltend sind:

Definition. Seien V und W euklidische $\mathbb{K}$-Vektorräume. Eine lineare Abbildung $f : V \to W$ heißt *Isometrie*, wenn für alle $v, v' \in V$ gilt:

$$d(f(v), f(v')) = d(v, v').$$

Im Sinne der elementaren Geometrie sind Isometrien also Kongurenzabbildungen.

Die in der Definition genannte Bedingung läßt sich etwas abschwächen oder verschärfen.

Satz 12.10. *V, W seien euklidische Vektorräume, $f : V \to W$ sei eine lineare Abbildung. Dann sind äquivalent:*

(a) *f ist eine Isometrie;*
(b) *für alle $v \in V$ ist $\|f(v)\| = \|v\|$;*

(c) *für alle* $v, v' \in V$ *ist* $\langle v, v' \rangle = \langle f(v), f(v') \rangle$.

Beweis. (a) $\Rightarrow$ (b): Dies ergibt sich aus der Definition mit $v' = 0$.

(b) $\Rightarrow$ (c): Es gilt $\langle f(v), f(v) \rangle = \|f(v)\|^2 = \|v\|^2 = \langle v, v \rangle$. Ferner ist die Abbildung $(v, w) \mapsto \langle f(v), f(w) \rangle$ eine hermitesche Sesquilinearform, wie man leicht überprüft. Hermitesche Sesquilinearformen, deren zugehörige quadratische Formen übereinstimmen, sind nach 12.1 identisch.

(c) $\Rightarrow$ (a): Dies ist trivial. □

Daß jeder n-dimensionale euklidische Vektorraum V eine Orthonormalbasis besitzt, können wir nun auch so ausdrücken: Es gibt eine isometrische Isomorphie $f : \mathbb{K}^n \to V$, wobei $\mathbb{K}^n$ mit dem Standardskalarprodukt versehen ist. Ist nämlich f eine solche Abbildung, so bilden die $f(e_i)$, $i = 1, \ldots, n$, nach 12.10 eine Orthonormalbasis. Sind umgekehrt $v_1, \ldots, v_n$ eine Orthonormalbasis, so ist

$$\langle f(v), f(v) \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(e_i), \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f(e_j) \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\alpha}_i = \langle v, v \rangle$$

für $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, wenn wir f durch die Zuordnung $e_i \mapsto v_i$ definieren.

Es ist klar, daß jede isometrische lineare Abbildung injektiv ist. Falls $\dim V < \infty$, ist daher jede solche Abbildung $f : V \to V$ ein Isomorphismus.

Bemerkung 12.11. Eine Isometrie zeichnet sich dadurch aus, daß sie linear und abstandserhaltend ist. Vom Standpunkt der euklidischen Geometrie, die den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ betrifft, ist die Forderung nach der Linearität eigentlich unnatürlich, und wird dort auch nicht erhoben, wenn man Kongruenzabbildungen betrachtet. Indessen existiert hier gar kein Problem. Zwar ist nicht jede abstandserhaltende Abbildung g linear, denn im allgemeinen ist $g(0) \neq 0$, aber dies ist das einzige Hindernis: Wenn wir aber zu der durch $f(v) = g(v) - g(0)$, $v \in V$, definierten Abbildung übergehen, erhalten wir eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung. Wir beweisen dies im folgenden. Zu zeigen ist, daß eine abstandserhaltende Abbildung f mit $f(0) = 0$ im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ linear ist.

Die Gleichung $d(f(v), f(w)) = d(v, w)$ impliziert

$$\langle f(v) - f(w), f(v) - f(w) \rangle = \langle v - w, v - w \rangle$$

für alle $v, w \in V$. Für $w = 0$ resultiert $\langle f(v), f(v) \rangle = \langle v, v \rangle$ (hier nutzen wir $f(0) = 0$ aus). Setzt man dies in die erste Gleichung ein, so ergibt sich $\langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle$ für alle $v, w \in V$. Mit einer einfachen Rechnung, die wir uns ersparen, erhält man nun für $a, b \in K$

$$\langle f(av + bw) - af(v) - bf(w), f(av + bw) - af(v) - bf(w) \rangle = 0.$$

Folglich ist $f(av+bw)-af(v)-bf(w) = 0$, also $f(av+bw) = af(v)+bf(w)$, wie zu zeigen war.

Im endlichdimensionalen Fall läßt sich leicht an der Matrix von f bezüglich einer Orthonormalbasis überprüfen, ob f eine Isometrie ist:

Satz 12.12. *Sei V ein euklidischer $\mathbb{K}$-Vektorraum endlicher Dimension und $v_1, \ldots, v_n$ eine Orthonormalbasis von V. Dann sind äquivalent:*

(a) *f ist eine Isometrie.*
(b) *$f(v_1), \ldots, f(v_n)$ bilden eine Orthonormalbasis.*
(c) *Die Matrix A von f bezüglich $v_1, \ldots, v_n$ genügt der Bedingung $A^\top \overline{A} = I_n$.*

Beweis. (a) $\Rightarrow$ (b) ergibt sich aus 12.10: $\langle f(v_i), f(v_j)\rangle = \langle v_i, v_j\rangle$.

(b) $\Rightarrow$ (a): Sei $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \in V$. Dann ist

$$\langle f(v), f(v)\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \overline{\alpha_j} \langle f(v_i), f(v_j)\rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overline{\alpha_i} = \langle v, v\rangle.$$

Also ist f eine Isometrie.

(b) $\Leftrightarrow$ (c): Mit $A = (\alpha_{ij})$ gilt

$$\langle f(v_k), f(v_l)\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_{ik} v_i, \sum_{j=1}^n \alpha_{jl} v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ik} \overline{\alpha}_{jl} \langle v_i, v_j\rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_{ik} \overline{\alpha}_{il}.$$

Also ist $\langle f(v_k), f(v_l)\rangle$ gerade der Eintrag von $A^\top \overline{A}$ an der Stelle (k, l). Daraus ergibt sich unmittelbar die Äquivalenz von (b) und (c). □

Definition. Eine $n \times n$-Matrix über $\mathbb{K}$, die der Bedingung $A^\top \overline{A} = I_n$ genügt, heißt

im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *orthogonal*,
im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *unitär*.

Wir sprechen im folgenden einheitlich von unitären Matrizen über $\mathbb{K}$. Die Definition unitärer Matrizen läßt sich variieren:

Satz 12.13. *Für eine $n \times n$-Matrix über $\mathbb{K}$ sind äquivalent:*

(a) *A ist unitär.*
(b) *Die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{K}^n$ bezüglich des Standardskalarprodukts.*
(c) *A hat den Rang n, und es gilt $A^{-1} = \overline{A}^\top$.*
(d) *$A^\top$ ist unitär.*
(e) *Die Zeilen von A bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{K}^n$ bezüglich des Standardskalarprodukts.*
(f) *$A^\top$ hat den Rang n und es gilt $(A^\top)^{-1} = \overline{A}$.*

Beweis. Die Äquivalenzen (a) $\iff$ (b) und (d) $\iff$ (e) sind Umformulierungen der Matrizengleichungen

$$A^\top \overline{A} = I_n \quad \text{bzw.} \quad (A^\top)^\top \overline{A}^\top = I_n.$$

Die restlichen Äquivalenzen ergeben sich aus

$$A^\top \overline{A} = I_n \iff (A^\top \overline{A})^\top = (I_n)^\top \iff \overline{A}^\top A = I_n.$$

Dabei benutzen wir die Gleichung $(BC)^\top = C^\top B^\top$ und die Tatsache, daß $BC = I_n$ genau dann gilt, wenn C invertierbar und $B = C^{-1}$ ist. □

Bemerkenswert sind noch folgende Eigenschaften unitärer Matrizen:

Satz 12.14. (a) *Für jede unitäre Matrix A ist* $|\det A| = 1$. *Speziell ist* $\det A = \pm 1$ *im Fall* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

(b) *Die unitären $n \times n$-Matrizen bilden eine Untergruppe der Gruppe der invertierbaren $n \times n$-Matrizen.*

Beweis. (a) Wegen $1 = \det I_n = \det(A^\top \overline{A}) = (\det A^\top)(\det \overline{A}) = (\det A)\overline{(\det A)}$ ergibt sich die Behauptung. (Daß $\overline{\det B} = \det \overline{B}$, folgt z.B. mit Entwicklung nach der ersten Spalte und Induktion über n.)

(b) Die Komposition $f \circ g$ von Isometrien des $\mathbb{K}^n$ (mit dem Standardskalarprodukt) ist eine Isometrie; ebenso ist f^{-1} eine Isometrie. Daraus folgt, daß das Produkt unitärer Matrizen und die Inverse einer unitären Matrix unitär sind. (Dies ergibt sich natürlich auch sofort aus 12.13). □

Für geometrische Anwendungen ist es wichtig, daß man mit Hilfe des Skalarprodukts Winkel bestimmen kann.

Definition. Sei V ein euklidischer $\mathbb{R}$-Vektorraum. Der *Öffnungswinkel* $\angle(v, w)$ zwischen Vektoren $v, w \in V$ ist gegeben durch

$$\angle(v, w) = \arccos\left(\frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\|w\|}\right).$$

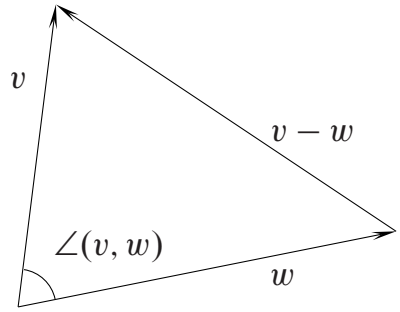
Diese Definition ist sinnvoll, denn das Argument des Arcuscosinus liegt wegen der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung stets zwischen -1 und 1. Der Wertebereich des Arcuscosinus ist das Intervall $[0, \pi]$. Folglich liegt $\angle(v, w)$ stets zwischen 0 und π. „Orientierte Winkel“, bei denen die Reihenfolge von v und w eine Rolle spielt (und deren Werte dann im Intervall $[0, 2\pi]$ liegen), kann man erst definieren, nachdem man die von v und w erzeugte Ebene durch 0 mit einer „Orientierung“ versehen hat. Das soll hier nicht weiter verfolgt werden.

Daß die obige Definition des Winkels mit der elementar-geometrischen übereinstimmt, folgt aus dem Kosinussatz 12.15. Insbesondere ist dann auch unsere Definition von „orthogonal“ elementar-geometrisch gerechtfertigt.

Satz 12.15. *Für alle Vektoren v, w eines euklidischen $\mathbb{R}$-Veltorraums gilt*

$$\|v - w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\|v\|\|w\| \cdot \cos \angle(v, w).$$

Dies folgt durch einfache Rechnung aus der Definition.



ABSCHNITT 13

Bilinearformen und Sesquilinearformen

Im diesem Abschnitt betrachten wir Bilinear- und Sesquilinearformen über beliebigen Körpern und versuchen, den Satz über die Existenz von Orthogonalbasen möglichst weitgehend zu verallgemeinern.

Im folgenden ist K ein beliebiger Körper mit einem Automorphismus α, für den $\alpha^2 = \mathrm{id}$ gilt. Solche Automorphismen heißen *involutorisch*. Im Anschluß an den wichtigsten Fall, in dem $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und α die komplexe Konjugation ist, schreiben wir $\overline{x}$ für $\alpha(x)$. Falls $\alpha = \mathrm{id}$ ist, sprechen wir von Bilinearformen.

Die anfangs des vorangegangenen Abschnitts eingeführten Begriffe übertragen sich nun unmittelbar. Insbesondere können wir wieder von hermiteschen Sesquilinearformen oder symmetrischen Bilinearformen sprechen. Wie in den speziellen Fällen des letzten Abschnitts ordnet man einer hermiteschen Sesquilinearform $\varphi = \langle\ ,\ \rangle$ auf demVektorraum V die quadratische Form

$$Q(v) = \langle v, v\rangle, \qquad v \in V,$$

zu. Satz 12.1 zeigt, daß sich φ fast immer aus Q rekonstruieren lässt, nämlich dann, wenn $\alpha \neq \mathrm{id}$ ist (wir finden dann ein $\beta \in K$ mit $\beta \neq \overline{\beta}$) oder $\mathrm{char}\, K \neq 2$ ist (in Teil (b) von Satz 12.1 muß man durch 2 teilen).

Orthogonalität definiert man wie im vorangegangenen Abschnitt. Aber ein Begriff wie „positiv-definit“ macht nur Sinn, wenn man die Werte von φ der Größe nach vergleichen kann. Dies ist zum Beispiel schon für Bilinearformen über $\mathbb{C}$ nicht mehr möglich. Einen gewissen Ersatz bietet der folgende Begriff:

Definition. Eine hermitesche Sesquilinearform φ auf V heißt *nicht ausgeartet*, wenn aus $\langle v, v'\rangle = 0$ für alle $v' \in V$ folgt, daß $v = 0$ ist, m.a.W. wenn $V^\perp = \{0\}$ ist.

Im folgenden sagen wir, φ sei auf einem Untervektorraum U von V nicht ausgeartet, wenn die Einschränkung von φ auf U eine nicht ausgeartete Sesquilinearform auf U ist.

Satz 13.1. *Sei V ein Vektorraum der Dimension n und φ eine hermitesche Sesquilinearform auf V. Auf dem Untervektorraum U von V sei φ nicht ausgeartet. Dann ist V direkte Summe von U und $U^\perp$.*

Beweis. Sei $u_1, \ldots, u_r$ eine Basis von U. Wir betrachten die lineare Abbildung

$$\psi : V \to K^r, \quad \psi(v) = \big(\langle v, u_1\rangle, \ldots, \langle v, u_r\rangle\big).$$

Genau dann ist $\psi(v) = 0$, wenn $\langle v, u_i\rangle = 0$ für $i = 1, \ldots, r$. Mit anderen Worten:

$$U^\perp = \operatorname{Kern} \varphi.$$

Da $\operatorname{rang} \varphi \leq r$, ist $\dim U^\perp = n - \operatorname{rang} \varphi \geq \dim V - r$.

Nun nutzen wir aus, daß φ auf U nicht ausgeartet ist. Dies bedeutet

$$U \cap U^\perp = \{0\}.$$

Folglich ist

$$\dim U^\perp = \dim(U + U^\perp) - \dim U + \dim U \cap U^\perp \leq \dim V - r.$$

Insgesamt gilt $\dim U^\perp = \dim V - r$. Ferner folgt $\dim U + U^\perp = \dim V$, so daß $U + U^\perp = V$. □

Wie im Fall der Skalarprodukte nennen wir (wenn φ auf U nicht ausgeartet ist) $U^\perp$ das *orthogonale Komplement* von U. Jedes $v \in V$ läßt sich auf eindeutige Weise in der Form

$$v = u + u' \quad \text{mit} \quad u \in U, u' \in U^\perp$$

darstellen. Die durch $\pi_U : V \to U$, $\pi(v) = u$, gegebene lineare Abbildung von V nach U heißt auch jetzt *orthogonale Projektion von V auf U*.

Wir können nun den Satz von der Existenz einer Orthogonalbasis beweisen. Eine *Orthogonalbasis* $v_1, \ldots, v_n$ von V zeichnet sich dadurch aus, daß

$$v_i \perp v_j \quad \text{für} \quad i \neq j.$$

Satz 13.2. *Sei $\alpha \neq \mathrm{id}_K$ oder* $\operatorname{char} K \neq 2$. *Dann existiert zu jeder hermiteschen Sesquilinearform φ auf einem endlichdimensionalen Vektorraum V eine Orthogonalbasis.*

Beweis. Wir argumentieren per Induktion. Im Fall $\dim V = 1$ ist die Behauptung trivialerweise richtig. Sei $\dim V > 1$. Wenn $\langle v, v\rangle = 0$ für alle $v \in V$, so ist $\varphi = 0$ gemäß 12.1 und jede Basis von V ist eine Orthogonalbasis. Andernfalls wählen wir $v \in V$ mit $\langle v, v\rangle \neq 0$. Dann ist $V = L(v) \oplus L(v)^\perp$ gemäß 13.1. Nach Induktionsvoraussetzung besitzt $L(v)^\perp$ eine Orthogonalbasis $v_2, \ldots, v_n$. Dann ist aber $v_1 = v, v_2, \ldots, v_n$ eine Orthogonalbasis von V. □

Mit Hilfe einer Orthogonalbasis läßt sich die orthogonale Projektion leicht beschreiben. Sei $V = U \oplus U^\perp$. Wenn $u_1 \ldots, u_r$ eine Orthogonalbasis von U ist, so ist $\langle u_i, u_i\rangle \neq 0$ für alle i (sonst wäre $u_i \in U^\perp$), und es gilt

$$\pi_U(v) = \frac{\langle v, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} u_1 + \cdots + \frac{\langle v, u_r\rangle}{\langle u_r, u_r\rangle} u_r.$$

Der Beweis von Satz 13.2 läßt sich zu einem effektiven Verfahren zur Bestimmung einer Orthogonalbasis ausbauen. Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V.

(a) Wenn $\langle v_1, v_i \rangle = 0$ für $i = 1, \ldots, n$ ist, genügt es eine Orthogonalbasis von $L(v_2, \ldots, v_n)$ zu bestimmen.

(b) Wenn es ein j mit $\langle v_j, v_j \rangle \neq 0$ gibt, dürfen wir annehmen, daß $\langle v_1, v_1 \rangle \neq 0$ ist, nachdem wir v_1 und v_j vertauscht haben. Dann setzen wir für $i = 2, \ldots, n$

$$v_i' = v_i - \frac{\langle v_i, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1.$$

Dann ist $v_i' \perp v_1$ für $i = 2, \ldots, n$, und $v_1, v_2', \ldots, v_n'$ bilden eine Basis von V. Somit ist $v_2', \ldots, v_n'$ eine Basis von $L(v_1)^\perp$, und wieder genügt es, eine Orthogonalbasis von $L(v_2', \ldots, v_n')$ zu bestimmen.

(c) Es bleibt der Fall, in dem $\langle v_j, v_j \rangle = 0$ für $j = 1, \ldots, n$, aber ein k mit $\langle v_1, v_k \rangle \neq 0$ existiert. Wir überlegen uns zuerst, daß es ein $b \in K$ mit $\overline{b} \neq -b$ gibt. Wäre nämlich $b = -\overline{b}$ für alle $b \in K$, so wäre speziell $1 = \overline{1} = -1$, und damit $\operatorname{char} K = 2$; sodann würde folgen, daß $b = -\overline{b} = \overline{b}$ für alle $b \in K$, und gerade diesen Fall haben wir ausgeschlossen.

Sei $a = b/\langle v_k, v_1 \rangle$. Dann ist

$$\begin{aligned} \langle v_1 + a v_k, v_1 + a v_k \rangle &= a \langle v_k, v_1 \rangle + \overline{a} \langle v_1, v_k \rangle \\ &= a \langle v_k, v_1 \rangle + \overline{a} \overline{\langle v_k, v_1 \rangle} = b + \overline{b} \neq 0. \end{aligned}$$

Wir ersetzen v_1 durch $v_1 + a v_j$ und befinden uns dann wieder im Fall (b).

Als spezielles Beispiel betrachten wir den Fall $K = \mathbb{C}$ mit der komplexen Konjugation, $V = \mathbb{C}^3$ und φ gegeben bezüglich der kanonischen Basis durch die Gramsche Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & i \\ 1 & 0 & 1 \\ -i & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Zunächst tritt der Fall (c) ein mit $\langle e_1, e_2 \rangle = 1 \neq 0$. Wir können $b = 1$ wählen. Dann ist $a = 1$ und wir betrachten die Basis

$$e_1' = e_1 + e_2, e_2, e_3.$$

Es gilt $\langle e_1', e_1' \rangle = 2$, so daß

$$\begin{aligned} e_2' &= e_2 - \frac{\langle e_2, e_1' \rangle}{\langle e_1', e_1' \rangle} e_1' = e_2 - \frac{1}{2}(e_1 + e_2) = \frac{1}{2}(e_2 - e_1), \\ e_3' &= e_3 - \frac{\langle e_3, e_1' \rangle}{\langle e_1', e_1' \rangle} e_1' = e_3 - \frac{1-i}{2}(e_1 + e_2) = -\frac{1-i}{2} e_1 - \frac{1-i}{2} e_2 + e_3. \end{aligned}$$

Es bleibt eine Orthogonalbasis von $L(e_2', e_3')$ zu bestimmen. Wegen

$$\langle e_2', e_2' \rangle = \frac{1}{4} \langle e_2 - e_1, e_2 - e_1 \rangle = \frac{1}{4}(-1 - 1) = -\frac{1}{2}$$

befinden wir uns direkt im Fall (b). Wir setzen somit

$$\begin{aligned} e_3'' &= e_3' - \frac{\langle e_3', e_2' \rangle}{\langle e_2', e_2' \rangle} e_2' \\ &= e_3' - \frac{1/2 + i/2}{-1/2} \left(\frac{1}{2} e_2 - \frac{1}{2} e_1 \right) \\ &= -\frac{1-i}{2} e_1 - \frac{1-i}{2} e_2 + e_3 + \frac{1+i}{2} e_2 - \frac{1+i}{2} e_1 \\ &= -e_1 + i e_2 + e_3. \end{aligned}$$

Ergebnis insgesamt:

$$e_1 + e_2,\ \frac{1}{2}(e_2 - e_1),\ -e_1 + i e_2 + e_3$$

ist eine Orthogonalbasis von $\mathbb{C}^3$ bezüglich φ.

Wir können den Rang der Gramschen Matrix unabhängig von einer Basis beschreiben.

Satz 13.3. *Sei φ eine hermitesche Sesquilinearform auf dem endlichdimensionalen Vektorraum V. Dann ist der Rang der Gramschen Matrix von φ (bezüglich einer beliebigen Basis) gleich der Dimension jedes Untervektorraums U von V, der maximal ist hinsichtlich der Eigenschaft, daß $\varphi \mid U$ nicht ausgeartet ist.*

Beweis. Wenn M eine $n \times n$-Matrix des Ranges n ist, so besitzen auch $M^\top$ und $\overline{M}$ den Rang n und daher gilt

$$\operatorname{rang} M^t A \overline{M} = \operatorname{rang} A$$

für jede $n \times n$-Matrix A. Also ist der Rang der Gramschen Matrix unabhängig von der Wahl der Basis.

Sei U einer der im Satz genannten Untervektorräume. Nach 13.1 gilt $V = U \oplus U^\perp$; eine Orthogonalbasis $u_1, \ldots, u_r$ von U und eine Orthogonalbasis $u_1', \ldots, u_{n-r}'$ von $U^\perp$ ergeben eine Orthogonalbasis $u_1, \ldots, u_r, u_1', \ldots, u_{n-r}'$ von V. Es muß $\varphi(u_i, u_i) \neq 0$ sein für $i = 1, \ldots, r$; andernfalls wäre $u_i \in U^\perp$. Andererseits muß $\langle u_i', u_i' \rangle = 0$ sein für $i = 1, \ldots, n-r$, denn sonst wäre $U' = U \oplus L(u_i')$ ein Untervektorraum, auf dem φ nicht ausgeartet ist. Insgesamt: Die Gramsche Matrix von φ bezüglich $u_1, \ldots, u_r, u_1', \ldots, u_{n-r}'$ hat den Rang r. □

Im letzten Teil dieses Abschnitts wollen wir den Satz von der Existenz einer Orthogonalbasis in den wichtigsten Spezialfällen verfeinern. Sei φ eine hermitesche Sesquilinearform auf V und $v_1, \ldots, v_n$ eine Orthogonalbasis von V. Die Form φ ist durch die Werte $a_i = \langle v_i, v_i \rangle$, $i = 1, \ldots, n$, vollständig bestimmt.

Wir nehmen zunächst einmal an, φ sei symmetrisch. Wenn es ein $b \in K$ mit $b^2 = a_i$ gibt, so können wir im nichttrivialen Fall $a_i \neq 0$ das Basiselement v_i

durch $(1/b)v_i$ ersetzen. Für dieses gilt

$$\left\langle \frac{1}{b}v_i, \frac{1}{b}v_i \right\rangle = \frac{1}{b^2}\langle v_i, v_i\rangle = 1.$$

Zum Beispiel können wir in $\mathbb{C}$ aus jedem Element die Wurzel ziehen, so daß wir stets eine Orthogonalbasis $v_1, \ldots, v_n$ finden können, bei der $\langle v_i, v_i\rangle = 1$ für $i = 1, \ldots, r$ und $\langle v_i, v_i\rangle = 0$ für $r+1, \ldots, n$ gilt; dabei ist r der Rang einer Gramschen Matrix von φ.

Satz 13.4. *Sei φ eine symmetrische Bilinearform auf dem n-dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraum V. Dann existiert eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V, bezüglich der die Gramsche Matrix von φ folgende Form hat:*

$$A_r = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & 1 & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right)$$

Dabei ist $\operatorname{rang} A_r = r$.

Wir können Satz 13.4 auch so formulieren: Jede symmetrische Matrix A über $\mathbb{C}$ ist zu einer der Matrizen A_r kongruent; dabei ist $r = \operatorname{rang} A$. Die „Invariante“, die den Kongruenz-Typ einer symmetrischen $n \times n$-Matrix über $\mathbb{C}$ bestimmt, ist einzig ihr Rang.

Sei nun $K = \mathbb{R}$. Wieder betrachten wir den symmetrischen Fall. Nun können wir zwar nicht beliebig Quadratwurzeln ziehen, aber zu jedem $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, gibt es ein $b \in \mathbb{R}$ mit

$$a = b^2 \quad \text{oder} \quad a = -b^2.$$

Wenn $\langle v_i, v_i\rangle = a$ ist, so gilt

$$\left\langle \frac{1}{b}v_i, \frac{1}{b}v_i \right\rangle = 1 \quad \text{oder} \quad \left\langle \frac{1}{b}v_i, \frac{1}{b}v_i \right\rangle = -1.$$

Im Fall $K = \mathbb{C}$, α = komplexe Konjugation, gilt für jedes $v \in V$

$$\langle v, v\rangle = \overline{\langle v, v\rangle} \in \mathbb{R},$$

so daß wir wieder

$$\left\langle \frac{1}{b}v_i, \frac{1}{b}v_i \right\rangle = 1 \quad \text{oder} \quad \left\langle \frac{1}{b}v_i, \frac{1}{b}v_i \right\rangle = -1$$

erreichen können.

Satz 13.5. *Sei φ eine komplex-hermitesche oder eine reell-symmetrische Sesquilinearform auf einem endlichdimensionalen Vektorraum V über $\mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{R}$. Dann gibt es eine Orthogonalbasis von V, bezüglich der φ die Gramsche Matrix*

$$A_{p,q} = \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & & & & \\ & \ddots & & 0 & 0 \\ & & 1 & & \\ \hline & & & -1 & \\ & 0 & & \ddots & 0 \\ & & & & -1 \\ \hline & & & & \\ 0 & & & 0 & 0 \\ & & & & \end{array}\right)$$

besitzt. Die Zahlen p der Einträge 1 und q der Einträge -1 sind eindeutig durch φ bestimmt. Man nennt p den Trägheitsindex *und $p-q$ die* Signatur *von φ.*

Satz 13.5 wird *Trägheitssatz von Sylvester* genannt. Es bleibt zu zeigen, daß p und q durch φ eindeutig bestimmt sind. Bevor wir dies tun, formulieren wir 13.5 noch einmal als Aussage über Matrizen: Jede komplex-hermitesche (reell-symmetrische) Matrix A ist zu genau einer der Matrizen $A_{p,q}$ konjugiert. Der „Kongruenztyp“ wird von zwei Invarianten bestimmt, nämlich dem Trägheitsindex p und der Signatur $p-q$ (aus denen sich ja q wieder ergibt).

Satz 13.6. *Sei φ komplex-hermitesch oder reell-symmetrisch. Wenn es eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V gibt, bezüglich der φ die Gramsche Matrix $A_{p,q}$ besitzt, so ist die Zahl p durch die Dimension eines jeden Untervektorraums U von V gegeben, der maximal ist hinsichtlich der Eigenschaft, daß φ auf U positiv definit ist.*

Aus Satz 13.6 folgt sofort, daß p eindeutig bestimmt ist. Dies gilt dann auch für q, da $p+q$ der Rang der Gramschen Matrix ist. (Man kann q natürlich analog 13.6 charakterisieren.)

Beweis von 13.6. Sei U einer der im Satz genannten Untervektorräume und $d = \dim U$. Wir setzen $W = L(v_1, \ldots, v_p)$ und $W' = L(v_{p+1}, \ldots, v_n)$. Für $w = \alpha_{p+1}v_{p+1} + \cdots + \alpha_n v_n \in W'$ gilt

$$\langle w, w\rangle = -\sum_{i=p+1}^{p+q} \alpha_i^2 \leq 0.$$

Daher ist $w \notin U$, falls $w \neq 0$: $U \cap W' = \{0\}$. Es folgt $d \leq \dim V - \dim W' = p$ (da $\dim V \geq \dim(U + W') = \dim U + \dim W'$).

Zum Beweis der Ungleichung $p \leq d$ wählen wir Orthogonalbasen $u_1, \ldots, u_d$ und $u_{d+1}, \ldots, u_n$ von U und $U^\perp$ mit $\langle u_i, u_i\rangle \in \{0, \pm 1\}$. Dies ist nach dem oben

Gesagten möglich. (Beachte, daß die Einschränkung von φ auf U nicht ausgeartet ist.) Da φ auf U positiv definit ist, muß $\langle u_i, u_i \rangle = 1$ für $i = 1, \ldots, d$ gelten. Ferner kommen für $\langle u_i, u_i \rangle$, $i > d$, nur die Werte 0 oder -1 in Frage; sonst wäre φ auf $L(u_1, \ldots, u_d, u_i)$ positiv definit im Widerspruch zur Maximalität von U.

Für $U' = L(u_{d+1}, \ldots, u_n)$ folgt nun wie oben $W \cap U' = \{0\}$, so daß $p = \dim W \leq \dim V - \dim U' = d$. □

ABSCHNITT 14

Das Normalformenproblem für Endomorphismen

In Abschnitt 13 haben wir hermitesche Sesquilinearformen φ auf einem endlichdimensionalen K-Vektorraum V betrachtet und gezeigt, daß stets eine Orthogonalbasis $v_1, \ldots, v_n$ existiert. Die Orthogonalbasen zeichnen sich gerade dadurch aus, daß die Gramsche Matrix von φ bezüglich einer solchen Basis eine Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} \varphi(v_1, v_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varphi(v_n, v_n) \end{pmatrix}$$

ist, also eine besonders einfache Gestalt besitzt. (Über $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}$ z.B. lassen sich noch weitere Vereinfachungen durchführen, siehe Satz 13.4 und Satz 13.5.) Dem Satz von der Existenz einer Orthogonalbasis äquivalent ist die Aussage, daß jede hermitesche Matrix zu einer Diagonalmatrix konjugiert ist.

In diesem Abschnitt wollen wir das entsprechende Problem für lineare Abbildungen betrachten. Für lineare Abbildungen $f : V \to W$ ist seine Lösung sehr einfach.

Satz 14.1. *Sei K ein Körper, V, W seien endlichdimensionale K-Vektorräume und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann existieren Basen $v_1, \ldots, v_n$ von V und $w_1, \ldots, w_m$ von W, so daß die Matrix von f bezüglich $v_1, \ldots, v_n$ und $w_1, \ldots, w_m$ gerade*

$$A_r = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & 1 & \\ \hline & 0 & & 0 \\ & & & \end{array}\right)$$

ist mit $r = \operatorname{rang} f$.

Beweis. Es gilt $r = \operatorname{rang} f = \dim \operatorname{Bild} f$. Wir wählen eine Basis $w_1, \ldots, w_r$ von Bild f und ergänzen sie durch $w_{r+1}, \ldots, w_m$ zu einer Basis von W. Dann wählen wir $v_1, \ldots, v_r \in V$ so, daß $f(v_i) = w_i$. Es gilt $\dim \operatorname{Kern} f = \dim V - \dim \operatorname{Bild} f$ gemäß 9.5. Daher können wir eine Basis von Kern f mit $v_{r+1}, \ldots, v_n$ bezeichnen.

Wir haben bereits beim Beweis von 9.5 gesehen, daß nun $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V ist.

Bezüglich der Basen $v_1, \ldots, v_n$ und $w_1, \ldots, w_m$ besitzt f gerade die behauptete darstellende Matrix. □

Unter den Voraussetzungen von 14.1 seien zunächst $v_1, \ldots, v_n$ und $w_1, \ldots, w_m$ beliebige Basen von V und W und A die Matrix von f bezüglich dieser Basen. Seien $v'_1, \ldots v'_n$ und $w'_1, \ldots, w'_m$ weitere Basen. Die Matrix $C = (\gamma_{ij})$ des Übergangs von $v'_1, \ldots, v'_n$ zu $v_1, \ldots, v_n$ ist gegeben durch die Gleichungen

$$v'_j = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ij} v_i \qquad j = 1, \ldots, n;$$

sie wurde bereits in Abschnitt 13 eingeführt. Die Matrix C ist gerade die Matrix der identischen Abbildung id_V bezüglich der Basen $v'_1, \ldots, v'_n$ und $v_1, \ldots, v_n$. Ferner wählen wir D als die Matrix des Übergangs von $w_1, \ldots, w_m$ zu $w'_1, \ldots, w'_m$. Dann ist

$$B = DAC$$

die Matrix der Abbildung $\mathrm{id}_W \circ f \circ \mathrm{id}_V = f$ bezüglich $v'_1, \ldots, v'_n$ und $w'_1, \ldots, w'_m$. (vgl. Satz 10.3.)

Sind umgekehrt invertierbare Matrizen $C = (\gamma_{ij})$ und $D = (\delta_{ij})$ mit n bzw. m Zeilen gegeben, so ist

$$B = DAC$$

die Matrix von f bezüglich geeigneter Basen von V und W, nämlich bezüglich

$$v'_j = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ij} v_i, \qquad j = 1, \ldots, n$$

und

$$w'_l = \sum_{k=1}^{m} \tilde{\delta}_{kl} w_k, \qquad l = 1, \ldots, m$$

wobei $(\tilde{\delta}_{kl}) = D^{-1}$; dann ist D ja die Matrix des Übergangs von $w'_1, \ldots, w'_m$ zu $w_1, \ldots, w_m$.

Wir nennen $m \times n$-Matrizen A und B *äquivalent*, wenn es invertierbare Matrizen C und D mit n bzw. m Zeilen gibt, so daß $B = DAC$. Wie wir gerade gesehen haben, ist dies äquivalent dazu, daß A und B die gleiche lineare Abbildung bezüglich jeweils geeignet gewählter Basen darstellen. Also können wir 14.1 auch so formulieren: Jede $m \times n$-Matrix A ist zu genau einer der $m \times n$-Matrizen A_i äquivalent, nämlich zu A_r mit $r = \mathrm{rang}\, A$.

Wir betrachten nun speziell lineare Abbildungen $f : V \to V$. Sobald wir zulassen, daß im Definitionsbereich V und im Bildbereich V *verschiedene* Basen auftreten, ist die Bestimmung einer möglichst einfachen Matrix für f nur ein

Spezialfall von 14.1. Dies ist aber vielen Problemen nicht angemessen. Es kommt vielmehr darauf an, mit der *gleichen* Basis im Definitionsbereich V und im Bildbereich V zu arbeiten. Für eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V haben wir ja auch dementsprechend in Abschnitt 10 die Matrix $A = (\alpha_{ij})$ von f bezüglich $v_1, \ldots, v_n$ durch die Gleichungen

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} v_i, \quad j = 1, \ldots, n$$

definiert. Sei nun $v'_1, \ldots, v'_n$ eine weitere Basis von V und C die Matrix des Übergangs von $v_1, \ldots, v_n$ zu $v'_1, \ldots, v'_n$. Dann ist C^{-1} die Matrix des Übergangs von $v'_1, \ldots, v'_n$ zu $v_1, \ldots, v_n$. Unsere obigen Überlegungen ergeben daher, daß

$$B = CAC^{-1}$$

die Matrix von f bezüglich $v'_1, \ldots, v'_n$ ist.

Definition. Die $n \times n$-Matrizen A und B heißen *ähnlich*, wenn es eine invertierbare $n \times n$-Matrix C gibt, so daß

$$B = CAC^{-1}.$$

Daß A und B ähnlich sind, können wir auch so ausdrücken: Bei jeweils geeigneter Wahl einer Basis beschreiben A und B den gleichen Endomorphismus eines n-dimensionalen K-Vektorraums V.

Das Problem, zu einer gegebenen $n \times n$-Matrix A eine „möglichst einfache“ ähnliche Matrix B zu finden, ist also äquivalent dazu, zu einem gegebenen Endomorphismus f eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V zu bestimmen, bezüglich der f eine „möglichst einfache“ Matrix besitzt. Dieses Problem ist ungleich wichtiger, aber auch ungleich schwerer zu lösen als das entsprechende Problem für die Äquivalenz von Matrizen, das ja in 14.1 eine sehr einfache Antwort erfahren hat.

Ein Begriff wie „ähnlich“ teilt die Menge der $n \times n$-Matrizen in Klassen ein, wenn wir nämlich die jeweils zueinander ähnlichen Matrizen zu einer Klasse zusammenfassen. Wir wollen uns aus diesem Anlaß auf ganz abstrakter Ebene mit solchen Klasseneinteilungen beschäftigen. Sei M eine Menge. Eine *Partition* von M ist eine Zerlegung von M in paarweise disjunkte Teilmengen, präziser: Eine Partition ist eine Menge $\mathscr{P}$, deren Elemente Teilmengen von M sind und die folgenden Bedingungen genügen:

(a) $\bigcup_{N \in \mathscr{P}} N = M$,
(b) $N, N' \in \mathscr{P}, N \neq N' \Rightarrow N \cap N' = \emptyset$,
(c) $N \neq \emptyset$ für alle $N \in \mathscr{P}$.

Eine Partition stellt also eine Klasseneinteilung dar, wobei die Klassen gerade die in $\mathscr{P}$ vorkommenden Teilmengen von M sind.

Die Definition des Begriffs „ähnlich“ nimmt ja zunächst keinen Bezug auf Teilmengen der Menge der $n \times n$-Matrizen, sondern benennt eine Beziehung zwischen Matrizen. Beziehungen dieser Art nennt man Äquivalenzrelationen. Wir präzisieren diesen Begriff im folgenden. Seien M, M' Mengen. Eine Teilmenge $\mathscr{R}$ von $M \times M'$ nennt man auch eine *Relation* zwischen M und M'; im Fall $M' = M$ nennen wir $\mathscr{R}$ eine Relation auf M. Wir kennen viele solcher Relationen, z.B. für $M = M' = \mathbb{R}$ die „Kleiner-gleich-Beziehung“

$$\mathscr{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \leq y\}.$$

Man nennt eine Relation $\mathscr{R}$ auf einer Menge M eine Äquivalenzrelation, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(a) $(x, x) \in \mathscr{R}$ für alle $x \in M$,
(b) $(x, y) \in \mathscr{R} \implies (y, x) \in \mathscr{R}$,
(c) $(x, y) \in \mathscr{R}, (y, z) \in \mathscr{R} \implies (x, z) \in \mathscr{R}$.

Man nennt diese Eigenschaften der Reihe nach *Reflexivität*, *Symmetrie* und *Transitivität* von $\mathscr{R}$. Wenn wir mit $x \sim y$ bezeichnen, daß $(x, y) \in \mathscr{R}$, so können wir die Bedingungen (a), (b), (c) suggestiver als

$$\begin{aligned} &x \sim x \\ &x \sim y \quad \Longrightarrow \quad y \sim x \\ &x \sim y, \quad y \sim z \quad \Longrightarrow \quad x \sim z \end{aligned}$$

schreiben. Die „feinste“ Äquivalenzrelation auf einer Menge M ist die Gleichheit: wenn wir $\mathscr{R} = \{(x, x) : x \in M\}$ setzen, so gilt: $x \sim y \iff x = y$. „Gröbere“ Äquivalenzrelationen kommen in der Regel dadurch zustande, daß man für die Äquivalenz von zwei Elementen nur die Übereinstimmung gewisser Merkmale fordert. So definiert zum Beispiel jede Abbildung $f : M \to \tilde{M}$ eine Äquivalenzrelation auf M, wenn wir festsetzen:

$$x \sim y \iff f(x) = f(y).$$

Es ist klar, daß die Ähnlichkeit von $n \times$n-Matrizen eine Äquivalenzrelation ist, Matrizen sind ja genau dann ähnlich, wenn sie den gleichen Endomorphismus darstellen können. Man kann dies aber auch direkt aus der Definition schließen:

$$\begin{aligned} &A = I_n A I_n^{-1} \implies A \sim A \\ &B = CAC^{-1} \implies A = (C^{-1})B(C^{-1})^{-1}, \quad \text{also} \quad A \sim B \implies B \sim A \\ &B = CAC^{-1}, \ B' = C'B(C')^{-1} \\ &\qquad \Longrightarrow \quad B' = C'CAC^{-1}(C')^{-1} = (C'C)A(C'C)^{-1}, \\ &\text{also} \quad A \sim B, \ B \sim B' \implies A \sim B'. \end{aligned}$$

Der Zusammenhang zwischen Partitionen und Äquivalenzrelationen wird vollständig beschrieben durch den folgenden Satz 14.2, den wir etwas vorbereiten.

Sei zunächst $\mathscr{P}$ eine Partition von M. Dann definieren wir die Abbildung

$$f_{\mathscr{P}} : M \to \mathscr{P}$$

mittels $f_{\mathscr{P}}(x) = N \iff x \in N$. Ist umgekehrt $\mathscr{R}$ eine Äquivalenzrelation auf M, so sei für $x \in M$

$$\mathscr{R}(x) = \{y \in M : (x, y) \in \mathscr{R}\}$$

die *Äquivalenzklasse* von x.

Satz 14.2. *Sei M eine Menge.*

(a) *Für jede Partition $\mathscr{P}$ von M ist die durch*

$$(x, y) \in \mathscr{R} \iff f_{\mathscr{P}}(x) = f_{\mathscr{P}}(y)$$

definierte Relation $\mathscr{R}$ eine Äquivalenzrelation.

(b) *Für jede Äquivalenzrelation $\mathscr{R}$ ist*

$$\mathscr{P} = \{\mathscr{R}(x) : x \in M\}$$

eine Partition von M.

(c) *Die in* (a) *und* (b) *beschriebenen Zuordnungen sind invers zueinander.*

Beweis. (a) Dies ist klar, vorausgesetzt wir haben überhaupt eine Abbildung $f_{\mathscr{P}}$ definiert! Wenn wir dies oben auch nicht ausgeführt haben: aus der Voraussetzung, daß $\mathscr{P}$ eine Partition ist, folgt, daß zu jedem $x \in M$ genau ein $N \in \mathscr{P}$ mit $x \in N$ existiert.

(b) Für jedes $x \in M$ gilt $(x, x) \in \mathscr{R}$, also $x \in \mathscr{R}(x)$. Somit ist $M = \bigcup\{N : N \in \mathscr{P}\}$ und $\mathscr{R}(x) \neq \emptyset$ für alle $x \in M$. Wir haben noch zu zeigen: $\mathscr{R}(x) \neq \mathscr{R}(y) \Rightarrow \mathscr{R}(x) \cap \mathscr{R}(y) = \emptyset$, oder äquivalent: $\mathscr{R}(x) \cap \mathscr{R}(y) \neq \emptyset \Rightarrow \mathscr{R}(x) = \mathscr{R}(y)$. Sei also $z \in \mathscr{R}(x) \cap \mathscr{R}(y)$. Für jedes $w \in \mathscr{R}(x)$ gilt $(w, x) \in \mathscr{R}$ wegen der Symmetrie. Ferner ist $(x, z) \in \mathscr{R}$ und auch $(z, y) \in \mathscr{R}$! Mittels der Transitivität schließen wir: $w \in \mathscr{R}(y)$. Es folgt $\mathscr{R}(x) \subset \mathscr{R}(y)$, und genauso gilt $\mathscr{R}(y) \subset \mathscr{R}(x)$, insgesamt also $\mathscr{R}(x) = \mathscr{R}(y)$.

(c) Sei $\mathscr{P}$ eine Partition und die ihr gemäß (a) zugeordnete Äquivalenzrelation $\mathscr{R}$. Es ist offensichtlich, daß wir $\mathscr{P}$ zurückerhalten, wenn wir $\mathscr{R}$ nun wieder eine Partition gemäß (b) zuordnen.

Ebenso erhält man eine gegebene Äquivalenzrelation $\mathscr{R}$ zurück, wenn man erst gemäß (b) zu einer Partition übergeht und dieser dann mit (a) wieder eine Äquivalenzrelation zuordnet. □

Bei allen Klassifikationen in der Mathematik kommt es darauf an, die Klassen möglichst gut zu beschreiben. Ferner möchte man natürlich entscheiden können, ob zwei gegebene Objekte zur gleichen Klasse gehören. So versucht man, in

jeder Klasse ein möglichst eindeutig bestimmtes „Normalobjekt“ zu bestimmen, und jedem Objekt gewisse „Invarianten“ zuzuordnen, aus denen man seine Klasse bestimmen kann.

In Abschnitt 9 haben wir gesehen, daß die Klassifikation von endlichdimensionalen Vektorräumen nach Isomorphie sehr einfach ist: Die Isomorphieklasse wird durch eine einzige Invariante, nämlich die Dimension, bestimmt, und K^n ist das Normalobjekt in der Klasse der Dimension n.

Ähnlich einfach konnten wir in diesem Abschnitt Matrizen nach Äquivalenz klassifizieren: In jeder Klasse ist A_r das Normalobjekt, und die Invariante, die die Klasse bestimmt, ist gerade der Rang. Das Problem, Matrizen nach Ähnlichkeit zu klassifizieren, werden wir erst in der Algebra-Vorlesung vollständig lösen können. In dieser Vorlesung müssen wir uns damit begnügen, die Lösung für den Fall $K = \mathbb{C}$ wenigstens zu nennen.

ABSCHNITT 15

Eigenwerte und Eigenvektoren

Wie wir in Abschnitt 14 ausgeführt haben, ist es unser Ziel, zu einem gegebenen Endomorphismus f eines endlichdimensionalen K-Vektorraums V eine Basis von V zu bestimmen, bezüglich der die Matrix von f eine möglichst einfache Gestalt hat. Sicherlich wird man eine Diagonalmatrix als „einfach“ ansehen. Nehmen wir einmal an, f besäße bezüglich $v_1, \ldots, v_n$ Diagonalform,

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$$

sei die Matrix von f. Dann gilt für $i = 1, \ldots, n$

$$f(v_i) = d_i v_i,$$

v_i wird also von f auf ein Vielfaches von sich selbst abgebildet.

Definition. Sei V ein K-Vektorraum und f ein Endomorphismus von V. Wenn für $v \in V$, $v \neq 0$,

$$f(v) = \lambda v$$

mit $\lambda \in K$ gilt, heißt v ein *Eigenvektor* und λ der zugehörige *Eigenwert* von f.

Genau dann ist 0 ein Eigenwert von f, wenn f nicht injektiv ist, und die Eigenvektoren zum Eigenwert 0 sind gerade die von 0 verschiedenen Elemente des Kerns.

Genau dann gilt $f(v) = \lambda v$, wenn

$$(\lambda \,\mathrm{id} - f)(v) = 0,$$

denn $(\lambda \,\mathrm{id} - f)(v) = (\lambda \,\mathrm{id})(v) - f(v) = \lambda v - f(v)$. Die Eigenvektoren zum Eigenwert λ sind also die von 0 verschiedenen Elemente des Untervektorraums

$$E_\lambda(f) = \mathrm{Kern}(\lambda \,\mathrm{id} - f).$$

Wir nennen $E_\lambda(f)$ den Eigenraum von f zum Eigenwert λ. Die Dimension von $E_\lambda(f)$ heißt *geometrische Vielfachheit* des Eigenwertes λ.

Der folgende Satz informiert uns über die Beziehungen zwischen den Eigenräumen und die Zahl der möglichen Eigenwerte.

Satz 15.1. *Sei V ein Vektorraum der Dimension n und f ein Endomorphismus von V. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ paarweise verschiedene Eigenwerte von f und $U = E_{\lambda_1}(f) + \cdots + E_{\lambda_m}(f)$. Dann gilt*

(a) *U ist die direkte Summe von $E_{\lambda_1}(f), \ldots, E_{\lambda_m}(f)$,*

$$U = E_{\lambda_1}(f) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_m}(f).$$

(b) *Speziell ist $\sum_{i=1}^{m} \dim E_{\lambda_i}(f) \leq \dim V$ und erst recht $m \leq \dim V$.*

Beweis. Daß U direkte Summe der $E_{\lambda_i}(f)$ ist, heißt ja folgendes: die lineare Abbildung

$$E_{\lambda_1}(f) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_m}(f) \to V,\ (v_1, \ldots, v_m) \mapsto v_1 + \cdots + v_m,$$

bildet die „externe“ direkte Summe $E_{\lambda_1}(f) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_m}(f)$ isomorph auf U ab. Nach Definition von U ist U das Bild. Für die Injektivität ist zu zeigen:

$$v_1 + \cdots + v_m = 0 \quad \Longrightarrow \quad v_1, \ldots, v_m = 0.$$

Wir beweisen dies durch Induktion über m. Im Fall $m = 1$ ist die Behauptung trivial. Sei $m > 1$. Es gilt

$$0 = f(v_1 + \cdots + v_m) = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m.$$

Damit ergibt sich mittels Subtraktion von $\lambda_m(v_1 + \cdots + v_m) = 0$:

$$(\lambda_1 - \lambda_m)v_1 + \cdots + (\lambda_{m-1} - \lambda_m)v_{m-1} = 0.$$

Auf $v_1' = (\lambda_1 - \lambda_m)v_1, \ldots, v_{m-1}' = (\lambda_{m-1} - \lambda_m)v_{m-1}$ können wir die Induktionsvoraussetzung anwenden, und wegen $\lambda_i - \lambda_m \neq 0$ für $i \neq m$ ergibt sich dann $v_1, \ldots, v_{m-1} = 0$ und somit auch $v_m = 0$.

Teil (b) folgt aus $\sum_{i=1}^{m} \dim E_{\lambda_i}(f) = \dim U \leq \dim V$. □

Für die Bestimmung der Eigenwerte beachten wir, daß die Definition von $E_\lambda(f)$ für beliebiges $\lambda \in K$ Sinn macht. Es gilt offensichtlich

$$\lambda \text{ Eigenwert von } f \quad \Longleftrightarrow \quad E_\lambda(f) \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda\,\mathrm{id} - f \text{ nicht injektiv.}$$

Wir wählen eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V. Sei A die Matrix von f bezüglich $v_1, \ldots, v_n$. Dann ist $\lambda I_n - A$ die Matrix von $\lambda\,\mathrm{id} - f$, und genau dann ist $\lambda\,\mathrm{id} - f$ nicht injektiv, wenn $\operatorname{rang}(\lambda I_n - A) < n$, äquivalent, wenn

$$\det(\lambda I_n - A) = 0.$$

Mit $A = (\alpha_{ij})$ ist

$$\lambda I_n - A = \begin{pmatrix} \lambda - \alpha_{11} & -\alpha_{12} & \ldots & -\alpha_{1n} \\ -\alpha_{21} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\alpha_{n-1n} \\ -\alpha_{n1} & \ldots & -\alpha_{nn-1} & \lambda - \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Die Leibnizsche Entwicklung der Determinante zeigt uns, daß

$$\det(\lambda I_n - A) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_0$$

eine polynomiale Funktion von λ ist. Wir erweitern den Körper K zum Körper der rationalen Funktionen $K(X)$. Dann können wir die Determinante

$$\det(XI_n - A) = \det \begin{pmatrix} X - \alpha_{11} & -\alpha_{12} & \dots & -\alpha_{1n} \\ -\alpha_{21} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\alpha_{n-1n} \\ -\alpha_{n1} & \dots & -\alpha_{nn-1} & X - \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

bilden. Es gilt

$$\det(XI_n - A) = X^n + c_{n-1}X^{n-1} + \cdots + c_0$$

und

$$\det(\lambda I_n - A) = \big(\det(XI_n - A)\big)(\lambda).$$

Definition. Sei A eine $n \times n$-Matrix. Das Polynom

$$\chi_A = \det(XI_n - A)$$

heißt *charakteristisches Polynom von* A.

Wie wir gesehen haben, ist χ_A ein normiertes Polynom vom Grad n.

Sei $w_1, \dots, w_n$ eine weitere Basis von V. Dann ist f bezüglich $w_1, \dots, w_n$ durch die Matrix

$$B = CAC^{-1}$$

gegeben, wobei C die Matrix des Übergangs von $v_1, \dots, v_n$ zu $w_1, \dots, w_n$ ist. Es gilt $(\det C)(\det C^{-1}) = 1$. Also ist

$$\begin{aligned} \chi_A = \det(XI_n - A) &= (\det C)\det(XI_n - A)(\det C^{-1}) \\ &= \det(C(XI_n - A)C^{-1}) = \det(XCI_nC^{-1} - CAC^{-1}) \\ &= \det(XI_n - B) = \chi_B. \end{aligned}$$

Wir haben damit gezeigt:

Satz 15.2. *Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum und f ein Endomorphismus von V. Dann besitzen alle Matrizen A, die f bezüglich einer Basis von V darstellen, das gleiche charakteristische Polynom χ_A.*

Wegen Satz 15.2 dürfen wir χ_A das *charakteristische Polynom von* f nennen und mit χ_f bezeichnen. Seine Nullstellen sind gerade die Eigenwerte von f.

Eine zu Satz 15.2 äquivalente Aussage ist, daß ähnliche Matrizen das gleiche charakteristische Polynom besitzen. Wenn wir von einer $n \times n$-Matrix A ausgehen, dann heißen die Eigenwerte des von A bezüglich der kanonischen Basis von K^n

dargestellten Endomorphismus f die *Eigenwerte* von A. Entsprechendes soll für die Eigenvektoren und Eigenräume gelten.

Es ist unser Ziel, die Klassen ähnlicher Matrizen durch Invarianten zu beschreiben. Eine Invariante, die wir nun gefunden haben, ist das charakteristische Polynom. Zwei seiner Koeffizienten wollen wir uns näher ansehen. Sei

$$\chi_A = X^n + c_{n-1}X^{n-1} + \cdots + c_0.$$

Dann gilt

$$c_0 = \chi_A(0) = \det(0I_n - A) = \det(-A) = (-1)^n \det A.$$

Damit ist c_0 identifiziert. Nach der Leibnizschen Entwicklungsformel gilt

$$\chi_A = \sum_{\pi \in S_n} \delta(\pi)\gamma_{1\pi(1)} \cdots \gamma_{n\pi(n)}$$

wenn γ_{ij} die Koeffizienten von $XI_n - A$ bezeichnet. Einen Beitrag zu $c_{n-1}X^{n-1}$ leistet $\gamma_{1\pi(1)} \ldots \gamma_{n\pi(n)}$ nur dann, wenn mindestens $n-1$ der $\gamma_{i\pi(i)}$ von der Form γ_{ii} sind. Dann gilt aber auch $\pi(j) = j$ für den n-ten Index j, so daß c_{n-1} gerade der Koeffizient von X^{n-1} in

$$(X - \alpha_{11}) \cdots (X - \alpha_{nn})$$

ist. Mithin gilt also

$$c_{n-1} = -\alpha_{11} - \cdots - \alpha_{nn}.$$

Man nennt $-c_{n-1} = \alpha_{11} + \cdots + \alpha_{nn}$ die *Spur* von A.

Da zu einem gegebenen Endomorphismus f das charakteristische Polynom χ_f unabhängig von der Wahl einer Matrix A für f ist, dürfen wir von der *Determinante* und *Spur von* f sprechen.

Wenn auch ähnliche Matrizen das gleiche charakteristische Polynom haben, so ist die Umkehrung doch falsch. Die Matrizen

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

haben beide das charakteristische Polynom $(X-1)^2$, aber die Einheitsmatrix ist nur zu sich selbst ähnlich.

Ferner gilt $\dim E_1(I_2) = 2$, aber $\dim E_1(A) = 1$. Obwohl in beiden Fällen 1 doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, haben die Eigenräume zum Eigenwert 1 verschiedene Dimensionen.

Den Zusammenhang zwischen der Dimension von $E_\lambda(f)$ und der Vielfachheit von λ als Nullstelle von χ_f nennt der nächste Satz. Außerdem gibt er ein einfaches Kriterium für Diagonalisierbarkeit: Ein Endomorphismus heißt *diagonalisierbar*, wenn er bezüglich einer geeigneten Basis durch eine Diagonalmatrix dargestellt wird; eine Matrix heißt *diagonalisierbar*, wenn sie zu einer Diagonalmatrix ähnlich ist.

Satz 15.3. *Sei f ein Endomorphismus des endlichdimensionalen K-Vektorraums V. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von f und $e_1, \ldots, e_m$ ihre Vielfachheiten als Nullstellen von χ_f.*

(a) *Es gilt* $\dim E_{\lambda_i}(f) \leq e_i$ *für* $i = 1, \ldots, m$.

(b) *Folgende Aussagen über f sind äquivalent:*

(i) *f ist diagonalisierbar.*

(ii) *V besitzt eine Basis aus Eigenvektoren von f.*

(iii) *χ_f zerfällt in Linearfaktoren, und es gilt* $\dim E_{\lambda_i}(f) = e_i$ *für* $i = 1, \ldots, m$.

Beweis. (a) Sei λ ein Eigenwert. Wir wählen eine Basis $v_1, \ldots, v_r$ von $E_\lambda(f)$ und ergänzen sie zu einer Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V. Die Matrix von f bezüglich $v_1, \ldots, v_n$ hat dann die Gestalt

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \lambda & & 0 & * & \cdots & * \\ & \ddots & & & & \\ 0 & & \lambda & & & \\ \hline & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & & * & \cdots & * \end{array}\right).$$

Sukzessive Entwicklung von $\det(XI_n - A)$ nach den Spalten $1, \ldots, r$ ergibt

$$\chi_f = \chi_A = (X - \lambda)^r \cdot g$$

mit einem Polynom $g \in K[X]$. Daraus folgt unmittelbar Teil (a).

(b) Die Äquivalenz von (i) und (ii) haben wir bereits zu Beginn des Abschnitts gesehen.

Wenn f eine Basis aus Eigenvektoren $v_1, \ldots, v_n$ mit den Eigenwerten $\tilde{\lambda}_1, \ldots, \tilde{\lambda}_n$ besitzt, gilt

$$\chi_f = (X - \tilde{\lambda}_1) \cdots (X - \tilde{\lambda}_n),$$

χ_f zerfällt also in Linearfaktoren. Unter $\tilde{\lambda}_1, \ldots, \tilde{\lambda}_n$ kommt λ_i genau e_i-mal vor. Also ist $\dim E_{\lambda_i}(f) \geq e_i$ und dann $\dim E_{\lambda_i}(f) = e_i$ gemäß (a). Dies beweist die Implikation (ii) $\Rightarrow$ (iii).

Die Umkehrung (iii) $\Rightarrow$ (ii) ergibt sich aus 15.1: Wenn $\dim E_{\lambda_i}(f) = e_i$ für $i = 1, \ldots, m$ und χ_f in Linearfaktoren zerfällt, dann ist

$$\sum_{i=1}^{m} \dim E_{\lambda_i}(f) = \sum_{i=1}^{m} e_i = \operatorname{grad} \chi_f = \dim V.$$

Mit den Bezeichnungen von 15.1 gilt also

$$V = U = E_{\lambda_1}(f) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_m}(f). \qquad \square$$

Eine unmittelbare Folgerung aus Satz 15.3:

Satz 15.4. *Sei f ein Endomorphismus des K-Vektorraums V mit $n = \dim V < \infty$. Wenn χ_f n paarweise verschiedene Nullstellen besitzt, so ist f diagonalisierbar.*

Zur Bestimmung der Eigenwerte haben wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms zu ermitteln.

Wenn uns dies gelungen ist, finden wir den Eigenraum zu einem Eigenwert λ als Lösung eines homogenen linearen Gleichungssystems: Wenn A die Matrix von f bezüglich einer Basis $v_1, \ldots, v_n$ ist, so bilden die Lösungen des homogenen linearen Gleichungssystems $(\lambda I_n - A, 0)$ gerade die Koordinatenvektoren der Eigenvektoren von f zum Eigenwert λ bezüglich $v_1, \ldots, v_n$.

Bei den folgenden Beispielen ist der betrachtete Endomorphismus stets der von der jeweiligen Matrix A bezüglich der kanonischen Basis des K^n bestimmte Endomorphismus.

(a) $K = \mathbb{Q}$ (oder $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\chi_A = (X-1)^2 - 4 = X^2 - 2X - 3$
Eigenwerte: $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$
Basis von $E_{-1}(A)$: $(1, 1/2)$
Basis von $E_3(A)$: $(1, -1/2)$

A ist diagonalisierbar.

(b) $K = \mathbb{R}$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\chi_A = X^2 + 1$
A besitzt keinen Eigenwert.

(c) $K = \mathbb{C}$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\chi_A = X^2 + 1$
Eigenwerte: $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$
Basis von $E_i(A)$: $(1, i)$,
Basis von $E_{-i}(A)$: $(1, -i)$.

Die Matrix A ist also über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar, besitzt aber keinen reellen Eigenwert.

(d) K beliebig,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\chi_A = (X-1)^2$
Eigenwert: $\lambda_1 = 1$.
Basis von $E_1(A)$: $(1, 0)$.

Über keinem Körper K ist A diagonalisierbar.

Wir rechnen noch ein etwas komplizierteres Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A = \det \begin{pmatrix} X+1 & -2 & 1 \\ -1 & X & 1 \\ 1 & 2 & X+1 \end{pmatrix} = X^3 + 2X^2 - 4X - 8$$
$$= (X-2)(X+2)^2.$$

Eigenwerte: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$.

Lösen des linearen Gleichungssystems $(2I_n - A, 0)$:

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} 3 & -2 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 4 & 4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & -8 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

Basis von $E_2(A)$: $v = (-1, -1, 1)$.

Lösen des linearen Gleichungssystems $(-2I_n - A, 0)$:

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & 1 & 1 & +2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

Basis von $E_{-2}(A)$: $w_1 = (-2, 1, 0)$, $w_2 = (1, 0, 1)$.

Wir betrachten noch kurz die Fälle $K = \mathbb{C}$ und $K = \mathbb{R}$. Da nach dem Fundamentalsatz der Algebra jedes nicht konstante Polynom $f \in \mathbb{C}[X]$ eine Nullstelle besitzt, hat jeder Endomorphismus eines endlichdimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraums V mindestens einen Eigenwert (außer im trivialen Fall $V = \{0\}$):

Satz 15.5. *Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit $0 < \dim V < \infty$ und $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Dann besitzt f einen Eigenwert.*

Daß die Aussage von 15.5 für $K = \mathbb{R}$ nicht gilt, haben wir oben gesehen. Es gilt aber folgender

Satz 15.6. *Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit $0 < \dim V < \infty$ und f ein Endomorphismus von V. Dann tritt einer der folgenden Fälle ein:*

(a) *f besitzt einen Eigenwert;*

(b) *es existieren $v_1, v_2 \in V$, nicht beide $= 0$, und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit*

$$f(v_1) = \alpha v_1 - \beta v_2,$$
$$f(v_2) = \beta v_1 + \alpha v_2,$$

Speziell gilt $f(U) \subset U$ für $U = L(v_1, v_2)$.

Beweis. Wir müssen zeigen, daß der Fall (b) eintritt, wenn χ_f keine reelle Nullstelle besitzt. Die Kernidee der folgenden Überlegung ist, V zu einem komplexen Vektorraum zu erweitern und dann 15.5 auszunutzen. Wir reduzieren dazu die Behauptung zunächst auf den Fall $V = \mathbb{R}^n$. Dann können wir als komplexe Erweiterung einfach $\mathbb{C}^n$ wählen.

Daß es genügt, den Fall $V = \mathbb{R}^n$ zu betrachten, liegt einfach daran, daß $V \cong \mathbb{R}^n$ für $n = \dim V$. Wir begründen dies aber etwas ausführlicher. Sei $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ ein Isomorphismus. Dann ist

$$g = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$$

ein Endomorphismus von $\mathbb{R}^n$. Wenn wir $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^n$ mit $g(u_1) = \alpha u_1 - \beta u_2$, $g(u_2) = \beta u_1 + \alpha u_2$ finden, so gilt, wie man direkt ausrechnet, die Behauptung (b) mit $v_i = \varphi^{-1}(u_i)$, $i = 1, 2$.

Wir brauchen also nur den Fall $V = \mathbb{R}^n$ zu betrachten. Dazu betrachtet man $\mathbb{R}^n$ als reellen Untervektorraum von $\mathbb{C}^n$. Zum Zwecke der Rechnung ist es zweckmäßig, die komplexe Konjugation mittels $\overline{(z_1, \ldots, z_n)} = (\overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_n)$ auf $\mathbb{C}^n$ zu erweitern.

Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$, $w \in \mathbb{C}^n$ gilt dann $\overline{\lambda w} = \overline{\lambda}\overline{w}$, und für $w_1, w_2 \in \mathbb{C}^n$ ist $\overline{w_1 + w_2} = \overline{w_1} + \overline{w_2}$.

Nachdem wir $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{C}^n$ eingebettet haben, müssen wir auch f noch auf $\mathbb{C}^n$ ausdehnen. Jedes $w \in \mathbb{C}^n$ besitzt eine eindeutige Darstellung $w = x + iy$ mit x, $y \in \mathbb{R}^n$. Wie im Fall $n = 1$ setzt man $\operatorname{Re} w = x$, $\operatorname{Im} w = y$. Wir setzen einfach

$$\tilde{f}(w) = f(x) + if(y).$$

Dann ist, wie man leicht nachrechnet, $\tilde{f}$ ein $\mathbb{C}$-Endomorphismus von $\mathbb{C}^n$.

Nach 15.5 besitzt $\tilde{f}$ einen Eigenwert $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$. Sei $w = x + iy$ ein Eigenvektor zu diesem Eigenwert. Dann ist $\overline{w}$ wegen

$$\tilde{f}(\overline{w}) = f(x) - if(y) = \overline{\tilde{f}(w)} = \overline{\lambda w} = \overline{\lambda}\overline{w}$$

ein Eigenvektor von $\tilde{f}$ zum Eigenwert $\overline{\lambda}$. (Dabei haben wir ausgenutzt, daß $\overline{f(x)} = f(x)$, $\overline{f(y)} = f(y)$ wegen $f(x), f(y) \in \mathbb{R}^n$.)

Wir setzen nun

$$v_1 = \operatorname{Re} w = \frac{1}{2}(w + \overline{w})$$

$$v_2 = \operatorname{Im} w = \frac{1}{2i}(w - \overline{w}).$$

Dann gelten die Gleichungen in (b) mit $\alpha = \operatorname{Re}\lambda$, $\beta = \operatorname{Im}\lambda$. □

Wir haben uns als Ziel gesetzt, möglichst einfache Matrizen für Endomorphismen zu finden oder, was auf das Gleiche hinausläuft, Matrizen nach Ähnlichkeit zu klassifizieren. Dieses Ziel ist in einer einsemestrigen Vorlesung nicht zu erreichen. Wir wollen aber wenigstens für den Körper $\mathbb{C}$ (und jeden anderen algebraisch

abgeschlossenen Körper) eine Lösung dieses Problems angeben, die *Jordansche Normalform*. Eine quadratische Matrix soll *Jordan-Block* zum Eigenwert λ heißen, wenn sie von der Form

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

ist. Zum Beispiel ist

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

ein Jordanblock zum Eigenwert 5.

Der Satz von der Jordanschen Normalform lautet dann:

Satz 15.7. *Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorrraum der Dimension n. Zu jedem Endomorphismus f von V gibt es eine Basis $v_1 \ldots, v_n$ von V, so daß die Matrix von f bezüglich $v_1 \ldots, v_n$ sich aus Jordanblöcken J_i in der Form*

$$\begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_m \end{pmatrix}$$

zusammensetzt. Die Anzahl der Jordanblöcke zu einem Eigenwert λ von f ist $\dim E_\lambda(f)$.

Ein Beipsiel für eine Matrix in Jordanscher Normalform. Wir geben dabei nur die Jordanblöcke voll an; die restlichen Felder sind mit 0 zu füllen.

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & & & \\ 1 & 5 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 5 & & & \\ & & & 3 & 0 & \\ & & & 1 & 3 & \\ & & & & & 4 \end{pmatrix}$$

Satz 15.7 sagt uns nur, wieviele Jordanblöcke zum Eigenwert λ vorhanden sind, nicht aber wie groß diese sind, und auch nicht, wie man die Jordansche Normalform eines Endomorphismus (oder einer Matrix) bestimmen kann. Wir erläutern

dies hier ohne Beweis; er ergibt sich leicht aus Satz 15.7. Sei

$$\begin{aligned} a_k &= \dim \operatorname{Kern}(f - \lambda \operatorname{id})^k, \qquad k = 1, \ldots, n, \\ b_1 &= a_1, \\ b_k &= a_k - a_{k-1} \qquad k \geq 2, \\ c_k &= b_k - b_{k+1} \qquad k \geq 1. \end{aligned}$$

(Mit $(f - \lambda \operatorname{id})^k$ ist natürlich die k-fache Verkettung von $f - \lambda \operatorname{id}$ mit sich selbst gemeint.) Dann ist b_k die Anzahl der Jordanblöcke zum Eigenwert λ mit mindestens k Zeilen und c_k die Anzahl der Jordanblöcke mit genau k Zeilen.

Wir haben oben gesehen, daß Matrizen das gleiche charakteristische Polynom haben können, obwohl sie nicht ähnlich sind. Der Satz von der Jordanschen Normalform zeigt aber, daß nur endlich viele Ähnlichkeitsklassen im charakteristischen Polynom übereinstimmen: Sobald die Eigenwerte vorgegeben sind, kann man nur endlich viele Matrizen in Normalform bilden.

ABSCHNITT 16

Isometrien und selbstadjungierte Endomorphismen

In diesem Abschnitt wollen wir die Methoden und Ergebnisse des Abschnitts 15 auf spezielle Endomorphismen endlichdimensionaler euklidischer Vektorräume anwenden. Sei $\mathbb{K}$ wie in Abschnitt 12 einer der Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und V ein endlichdimensionaler euklidischer $\mathbb{K}$-Vektorraum, also ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle , \rangle$.

1. Isometrien. $f : V \to V$ ist genau dann eine Isometrie, wenn

$$\langle f(v), f(w)\rangle = \langle v, w\rangle$$

für alle $v, w \in V$ gilt.

Wir wollen die Eigenwerttheorie von Isometrien studieren. Sie wird uns zeigen, daß die aus der Anschauung entwickelten Vorstellungen über die Struktur von Kongruenzabbildungen wirklich zutreffen. Dazu beweisen wir zunächst folgenden Satz:

Satz 16.1. *Sei $f : V \to V$ eine Isometrie des endlichdimensionalen euklidischen $\mathbb{K}$-Vektorraums V. Dann gilt:*

(a) *Jeder Eigenwert von f hat den Betrag* 1.
(b) *Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal zueinander.*
(c) *Sei U ein Untervektorraum von V mit $f(U) \subset U$. Dann ist auch $f(U^\perp) \subset U^\perp$.*

Beweis. (a) Sei λ Eigenwert von f, und v ein Eigenvektor zu λ. Dann ist

$$\|v\| = \|f(v)\| = \|\lambda v\| = |\lambda|\,\|v\|.$$

Wegen $\|v\| \neq 0$ folgt $|\lambda| = 1$.

(b) Seien v_1 und v_2 Eigenvektoren zu den Eigenwerten λ_1 und λ_2, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Es gilt

$$\langle v_1, v_2\rangle = \langle f(v_1), f(v_2)\rangle = \langle \lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2\rangle = \lambda_1\overline{\lambda}_2\langle v_1, v_2\rangle.$$

Nach (a) ist $\lambda_1^{-1} = \overline{\lambda_1}/|\lambda_1|^2 = \overline{\lambda_1}$. Wegen $\lambda_1 \neq \lambda_2$ gilt also $\lambda_1\overline{\lambda_2} \neq 1$. Folglich ist $\langle v_1, v_2\rangle = 0$.

(c) Da U endlichdimensional ist und f injektiv, muß $f(U) = U$ sein. Für $u \in U$, $w \in U^\perp$ haben wir

$$\langle u, f(w)\rangle = 0$$

zu beweisen. Wegen $f(U) = U$ existiert ein $u' \in U$ mit $u = f(u')$. Also ist

$$\langle u, f(w)\rangle = \langle f(u'), f(w)\rangle = \langle u', w\rangle = 0. \qquad \square$$

Nun ist es sehr leicht, eine befriedigende Aussage über die „Struktur“ von Isometrien komplexer Vektorräume zu beweisen:

Satz 16.2. *Sei V ein endlichdimensionaler unitärer $\mathbb{C}$-Vektorraum und $f : V \to V$ eine Isometrie. Dann existiert eine Orthonormalbasis von V aus Eigenvektoren von f, und alle Eigenwerte von f haben den Betrag* 1.

Beweis. Wir argumentieren ohne Heranziehung der Sätze aus Abschnitt 15 direkt durch Induktion über $\dim V$. Im Fall $\dim V = 0$ ist nichts zu beweisen. Sei $\dim V > 0$. Da $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist, besitzt χ_f mindestens eine Nullstelle, f also einen Eigenvektor v mit $\|v\| = 1$. Sei $W = \{v\}^\perp$. Dann ist $V = L(v) \oplus W$. Ferner gilt nach 16.1 (c), daß $f(W) \subset W$ ist. Wir können also f zu einem Endomorphismus von W einschränken. Nach Induktionsvoraussetzung besitzt W eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von $f \mid W$. Zusammen mit v bilden sie eine solche Basis von V.

Daß alle Eigenwerte von f den Betrag 1 haben, wurde in 16.1 schon festgestellt. $\square$

Wir können Satz 16.2 auch matrizentheoretisch interpretieren. Eine unitäre $n \times n$-Matrix A bestimmt bezüglich der kanonischen Basis $e_1, \ldots, e_n$ von $\mathbb{C}^n$ und dem Standardskalarprodukt eine Isometrie f. Die Übergangsmatrix C von $e_1, \ldots, e_n$ zu der Orthonormalbasis gemäß 16.2 ist eine unitäre Matrix. Es gilt $C^{-1} = \overline{C}^\top$ und

$$B = CAC^{-1} = CA\overline{C}^\top.$$

Also ist A bezüglich einer unitären Übergangsmatrix zu einer Diagonalmatrix ähnlich.

Wir können natürlich nicht erwarten, daß Satz 16.2 auch im Reellen gilt. Z.B. besitzt ja die orthogonale Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

keinen Eigenwert in $\mathbb{R}$. (Geometrisch ist der von A (bezüglich der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^2$) gegebene Endomorphismus eine 90°-Drehung um den Nullpunkt als Zentrum.) Dieses Beispiel ist typisch im Sinn des folgenden Satzes:

Satz 16.3. *Sei V ein euklidischer $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension $n < \infty$ und $f : V \to V$ eine Isometrie. Dann besitzt V eine Orthonormalbasis $v_1, \ldots, v_n$, in der*

f durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & D_1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & & & D_r \end{pmatrix}$$

dargestellt wird, wobei $D_i = \begin{pmatrix} \cos\alpha_i & -\sin\alpha_i \\ \sin\alpha_i & \cos\alpha_i \end{pmatrix}$ *mit* $0 < \alpha_i < \pi$, $i = 1, \ldots, r$. *Die Zahl der Einträge* 1 *ist* $p = \dim E_1(f)$, *die Zahl der Einträge* -1 *ist* $q = \dim E_{-1}(f)$, *und* $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ *sind bis auf die Reihenfolge eindeutig durch* f *bestimmt.*

Beweis. Wir argumentieren per Induktion über $\dim V$, wobei wir zunächst die Existenz einer solchen Matrixdarstellung von f beweisen. Im Fall $\dim V = 0$ ist nichts zu beweisen.

Sei $\dim V > 0$. Wenn f den Eigenwert 1 besitzt, wählen wir v_1 als einen normierten Eigenvektor zum Eigenwert 1. Nach 16.1 ist $f(L(v_1)^\perp) \subset L(v_1)^\perp$, so daß wir die Induktionsvoraussetzung auf $f \mid L(v_1)^\perp$ anwenden können. Wenn f nicht 1, aber -1 als Eigenwert besitzt, wählen wir v_1 als normierten Eigenvektor zum Eigenwert -1 und wenden wieder die Induktionsvoraussetzung auf $L(v_1)^\perp$ an.

Wenn f weder 1 noch -1 als Eigenwert hat, besitzt es überhaupt keinen Eigenwert, denn alle Eigenwerte von f haben den Betrag 1. Nach 15.6 gibt es aber einen zweidimensionalen Untervektorraum U von V mit $f(U) \subset U$. Wir wählen eine Orthonormalbasis v_1, v_2 von U. Sei

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

die Matrix von $g = f \mid U$ bezüglich v_1, v_2. Die Matrix A ist orthogonal. Also ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A^\top A = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix}.$$

Ferner ist $ad - bc = \det g = \pm 1$. Da g keinen Eigenwert besitzt, muß $\det g > 0$ und somit $ad - bc = 1$ gelten. Es folgt

$$(a - d)^2 + (b + c)^2 = (a^2 + c^2) + (b^2 + d^2) - 2(ad - bc) = 0.$$

Mithin ist $a = d$, $b = -c$ und

$$A = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}.$$

Wegen $a^2 + c^2 = 1$ existiert ein eindeutig bestimmtes α', $0 \leq \alpha' < 2\pi$, mit $a = \cos\alpha'$, $c = \sin\alpha'$. Da A keine Eigenwerte besitzt, ist $c \neq 0$; also sind die Fälle $\alpha' = 0, \pi$ ausgeschlossen. Im Fall $0 < \alpha' < \pi$ setzen wir $\alpha = \alpha'$, sonst $\alpha = 2\pi - \alpha'$. Wenn wir im Fall $\pi < \alpha' < 2\pi$ noch v_2 durch $-v_2$ ersetzen, ergibt sich für g stets die Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad \text{mit } 0 < \alpha < \pi.$$

Um den Beweis der Existenz zu beenden, wenden wir die Induktionsvoraussetzung auf $U^\perp$ an.

Die Eindeutigkeit können wir am charakteristischen Polynom ablesen. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \chi_f &= (X-1)^p (X+1)^q \det(XI_2 - D_1) \cdots \det(XI_2 - D_r) \\ &= (X-1)^p (X+1)^q (X^2 - 2(\cos\alpha_1)X + 1) \cdots (X^2 - 2(\cos\alpha_r)X + 1). \end{aligned}$$

Daraus und aus der Bedingung $0 < \alpha_i < \pi$ ergibt sich, daß p die Häufigkeit der Nullstelle 1 von χ_f ist, q die Häufigkeit der Nullstelle -1, und $\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1, \ldots, \cos\alpha_r + i\sin\alpha_r$ die Nullstellen positiven Imaginärteils von χ_f sind, wobei jede mit ihrer Häufigkeit aufgeführt ist. Daß schließlich $p = \dim E_1(f)$, $q = \dim E_{-1}(f)$ ist, folgt aus 15.3. □

Die Matrizen D_i in 16.3 repräsentieren Drehungen der euklidischen Ebene um das Zentrum 0. Wenn wir noch jeweils zwei Eigenwerte -1 auf der Diagonalen zu Matrizen

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

zusammenfassen, können wir sagen, daß sich jede Isometrie f von V aus Drehungen und höchstens einer Spiegelung zusammensetzen läßt. Die Spiegelung tritt genau dann auf, wenn $\det f = -1$, äquivalent, wenn q ungerade ist.

Solange man keinen „Drehsinn“ in einer Ebene auszeichnet, läßt sich jede Drehung durch einen Winkel α mit $0 \leq \alpha \leq \pi$ darstellen, und daher treten in 16.3 nur solche Winkel auf.

2. Selbstadjungierte Endomorphismen. Die Gramschen Matrizen A hermitescher Sesquilinearformen sind hermitesch, d.h. es gilt $\overline{A}^\top = A$. Wir wollen nun die Endomorphismen studieren, die durch solche Matrizen vermittelt werden. Die für sie gewonnenen Ergebnisse können wir dann auf Sesquilinearformen anwenden.

Es kommt darauf an, die aus der Gleichung $\overline{A}^{\top} = A$ resultierenden Informationen strukturell richtig zu erfassen. Dies bereiten wir mit dem folgenden Satz vor.

Satz 16.4. *Sei V ein euklidischer $\mathbb{K}$-Vektorraum der Dimension n und $v_1, \ldots, v_n$ eine Orthonormalbasis von V.*

(a) *Zu jedem Endomorphismus f von V existiert ein eindeutig bestimmter Endomorphismus g von V, so daß*

$$\langle f(v), w\rangle = \langle v, g(w)\rangle \quad \textit{für alle } v, w \in V.$$

(b) *Wenn A die Matrix von f bezüglich $v_1, \ldots, v_n$ ist, so ist $\overline{A}^{\top}$ die Matrix von g.*

Der Endomorphismus g heißt der zu f *adjungierte Endomorphismus*. Man sieht sofort, daß dann auch f zu g adjungiert ist. Ein Endomorphismus f heißt *selbstadjungiert*, wenn $g = f$ ist. Nach 16.4 (b) ist dies genau dann der Fall, wenn $A = \overline{A}^{\top}$ ist.

Beweis von 16.4. Wir zeigen zunächst, daß ein solcher Endomorphismus g existiert. Sei nämlich g der durch $\overline{A}^{\top}$ definierte Endomorphismus. Wir bezeichnen die Einträge von A mit α_{ij}. Seien $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ und $w = \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j$ zwei Elemente von V. Es gilt

$$\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta}_i = (\alpha_1 \ldots \alpha_n) \begin{pmatrix} \overline{\beta}_1 \\ \vdots \\ \overline{\beta}_n \end{pmatrix}.$$

Dementsprechend ist

$$\langle v, g(w)\rangle = (\alpha_1 \ldots \alpha_n) \overline{\left(\overline{A}^{\top} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \right)} = (\alpha_1 \ldots \alpha_n) A^{\top} \begin{pmatrix} \overline{\beta}_1 \\ \vdots \\ \overline{\beta}_n \end{pmatrix}$$

$$= \left(A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \right)^{\top} \begin{pmatrix} \overline{\beta}_1 \\ \vdots \\ \overline{\beta}_n \end{pmatrix} = \langle f(v), w\rangle.$$

Die Eindeutigkeit von g ergibt sich, wenn man für v und w die Vektoren v_i und v_j einsetzt, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$. □

Der folgende Satz zeigt uns, daß jeder selbstadjungierte Endomorphismus diagonalisierbar ist.

Satz 16.5. *Sei V ein endlichdimensionaler euklidischer $\mathbb{K}$-Vektorraum und f ein selbstadjungierter Endomorphismus von V. Dann existiert eine Orthonormalbasis von V aus Eigenvektoren von f, und alle Eigenwerte von f sind reell.*

Der Beweis ergibt sich völlig analog zu dem von 16.2, wenn wir die 16.1 entsprechende Aussage für selbstadjungierte Endomorphismen benutzen:

Satz 16.6. *Unter den Voraussetzungen von* 16.5 *gilt:*

(a) *Jeder Eigenwert von f ist reell.*
(b) *Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal zueinander.*
(c) *Sei U ein Untervektorraum von V mit $f(U) \subset U$. Dann ist auch $f(U^\perp) \subset U^\perp$.*

Beweis. (a) Im Fall $f(v) = \lambda v$ ist

$$\lambda\langle v, v\rangle = \langle f(v), v\rangle = \langle v, f(v)\rangle = \overline{\lambda}\langle v, v\rangle.$$

Für $v \neq 0$ folgt $\lambda = \overline{\lambda}$.

(b) Seien v, w Eigenvektoren von f zu den Eigenwerten λ, μ, $\lambda \neq \mu$. Dann gilt

$$\lambda\langle v, w\rangle = \langle \lambda v, w\rangle = \langle f(v), w\rangle = \langle v, f(w)\rangle = \mu\langle v, w\rangle.$$

Wegen $\lambda \neq \mu$ folgt $\langle v, w\rangle = 0$.

(c) Sei $v \in U^\perp$. Dann gilt für alle $u \in U$

$$\langle f(v), u\rangle = \langle v, f(u)\rangle = 0,$$

weil $f(u) \in U$ und $v \in U^\perp$. Es folgt $f(v) \in U^\perp$, wie behauptet. □

In Analogie zu der entsprechenden Interpretation von 16.2 können wir auch 16.5 matrizentheoretisch deuten. Wegen ihrer Bedeutung formulieren wir diese Aussage explizit als Satz:

Satz 16.7. *Zu jeder hermiteschen Matrix A über $\mathbb{K}$ gibt es eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren, und alle ihre Eigenwerte sind reell. Mit anderen Worten: A ist bezüglich einer unitären Übergangsmatrix C zu einer reellen Diagonalmatrix D ähnlich; es gilt*

$$D = CAC^{-1} = CA\overline{C}^{\top} = (C^{\top})^{\top}A\overline{C^{\top}}.$$

Die letzte Gleichung zeigt, daß die hermiteschen Matrizen A und D zugleich auch konjugiert sind, also bei geeigneter Basiswahl die gleiche hermitesche Sesquilinearform darstellen. Wenn man 16.5 auf Sesquilinearfomen φ anwenden will, so muß man, sollen denn die Übergangsmatrizen auch wirklich „passen“, zu einer Gramschen Matrix A den durch $A^{\top}$ vermittelten Endomorphismus benutzen, wie wir im Beweis des folgenden Satzes sehen werden.

Satz 16.8. *Sei V ein euklidischer $\mathbb{K}$-Vektorraum endlicher Dimension. Sei φ eine hermitesche Sesquilinearform auf V. Dann gibt es eine Orthonormalbasis von V (bezüglich des Skalarprodukts), die zugleich eine Orthogonalbasis für φ ist.*

Beweis. Wir wählen eine Orthonormalbasis $w_1, \ldots, w_n$ von V. Sei A die Gramsche Matrix von φ bezüglich $w_1, \ldots, w_n$ und f der durch $A^\top$ bezüglich $w_1, \ldots, w_n$ gegebene Endomorphismus. Mit A ist auch $A^\top$ hermitesch, f also selbstadjungiert. Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine gemäß 16.5 existierende Orthonormalbasis von V aus Eigenvektoren von f und C die Übergangsmatrix von $w_1, \ldots, w_n$ zu $v_1, \ldots, v_n$. Die Matrix von f bezüglich $v_1, \ldots, v_n$ ist dann die Diagonalmatrix

$$D = CA^\top C^{-1}.$$

Damit gilt

$$D = D^\top = (C^{-1})^\top A C^\top = (C^{-1})^\top A \overline{C}^{-1},$$

und gemäß 12.2 ist D die Gramsche Matrix von φ bezüglich $v_1, \ldots, v_n$. (Beachte, daß C^{-1} den Übergang von $v_1, \ldots, v_n$ zu $w_1, \ldots, w_n$ vermittelt.) □

In den Beweis von 16.8 geht die Theorie aus Abschnitt 13 nur über das Skalarprodukt ein; für φ benutzen wir lediglich 12.2. Daher kann man, wenn man zunächst nur die Theorie der Skalarprodukte entwickelt, die Existenz von Orthogonalbasen für hermitesche Sesquilinearformen über $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}$ auch aus Satz 16.8 schließen (der natürlich eine sehr viel schärfere Aussage macht als die entsprechenden Sätze aus Abschnitt 13). Wenn wir 16.8 etwa mit dem Trägheitssatz von Sylvester vergleichen, so sehen wir, daß der Trägheitsindex von φ übereinstimmt mit der Zahl der positiven Eigenwerte von f und entsprechend die Zahl der negativen Eigenwerte gerade die im Trägheitssatz auftretende Zahl q ist.

Literaturverzeichnis

[Art] Artin, M.: Algebra. Birkhäuser, Basel 1993

[Bri] Brieskorn, E.: Lineare Algebra und analytische Geometrie I, II. Vieweg, Braunschweig 1985

[Fis] Fischer, G.: Lineare Algebra. Vieweg, Braunschweig 1997

[Jan] Jänich, K.: Lineare Algebra. Springer, Berlin 1998

[Kow] Kowalsky, H.-J.: Lineare Algebra. de Gruyter, Berlin 1995

[Lan] Lang, S.: Linear Algebra. Springer, Berlin 1993

[Lip] Lipschutz, S.: Linear Algebra. McGraw-Hill, New York 1974

[Lor] Lorenz, F.: Lineare Algebra I, II. Spektrum, Heidelberg 1996

[Smi] Smith, L.: Linear Algebra. Springer, New York 1978

[StG] Stoppel, H. und Griese, B.: Übungsbuch zur Linearen Algebra. Vieweg, Braunschweig 1998.

[StW] Storch, U. und Wiebe, H.: Lehrbuch der Mathematik, Band 2. Spektrum, Heidelberg 1999

[Tra] Trapp, H.-W.: Einführung in die Algebra. Rasch, Osnabrück 1995