Prof. Dr. Ina Kersten

Analytische Geometrie und Lineare Algebra

LaTeX-Bearbeitung von Stefan Wiedmann

Mathematisches Institut der Georg-August-Universität Göttingen 2000/01

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Vorwort

Das vorliegende Skript ist eine TEX-Bearbeitung der Vorlesungen *Analytische Geometrie und Lineare Algebra I, II*, die ich im akademischen Jahr 1999/2000 am Mathematischen Institut der Georg-August-Universität in Göttingen gehalten habe. Bis auf einige Modifikationen enthält das Skript genau den Text, der auch tatsächlich in der Vorlesung vorgetragen wurde.

Die Kapitel 1–9 wurden im Wintersemester 1999/2000 und die Kapitel 10–16 im Sommersemester 2000 behandelt. Die Übungsaufgaben zur Vorlesung stehen jeweils am Ende eines Kapitels, und auch die beiden Klausuren sind hier mitaufgenommen.

Ganz herzlich möchte ich mich bei den Studierenden bedanken, die mit Interesse, vielen Fragen und Diskussionsbeiträgen an diesem AGLA-Kurs teilgenommen haben, sowie bei der Assistentin Charlotte Wahl, die diesen Kurs mit Initiative und Tatkraft begleitet hat. Insbesondere stammt Kapitel 13 über die *Jordansche Normalform* vor ihr; den Stoff hat sie in einer Vorlesungsstunde behandelt, als sie mich vertreten hat.

Mein besonderer Dank gilt dem Doktoranden Stefan Wiedmann für die schöne TEX-Bearbeitung des handgeschriebenen Textes sowie für etliche Anregungen und Verbesserungsvorschläge.

Juli 2000 *Ina Kersten*

Einige abkürzende Schreibweisen

$\exists$	es gibt
$\forall$	für alle
$\Longrightarrow$	es folgt
$\Longleftrightarrow$	genau dann, wenn
$\setminus$	ohne
$\square$	Ende des Beweises
$\lvert M\rvert$	Anzahl der Elemente einer Menge M

Griechische Buchstaben

α alpha, β beta, χ chi, δ delta, Δ Delta, ε epsilon, η eta, γ gamma, Γ Gamma, ι jota, κ kappa, λ lambda, Λ Lambda, μ mü, ν nü, ω omega, Ω Omega, φ phi, Φ Phi, π pi, Π Pi, ψ psi, Ψ Psi, ϱ rho, σ sigma, Σ Sigma, τ tau, ϑ theta, Θ Theta, ξ xi, Ξ Xi, ζ zeta

1 Einige Beispiele

> Unter einer *Menge* verstehen wir jede Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.
> Die wohlunterschiedenen Objekte heissen *Elemente* der Menge.
> *1895 Georg Cantor: Beiträge zur Begründung der Mengenlehre*

Für ein Element m einer Menge M schreiben wir $m \in M$, zum Beispiel $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, wobei $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen bezeichnet und $\sqrt{2}$ diejenige positive reelle Zahl, deren Quadrat gleich 2 ist. Die *reellen Zahlen* werden in dieser Vorlesung als bekannt vorausgesetzt. Geometrisch gesehen sind die reellen Zahlen genau die Punkte der Zahlengeraden.

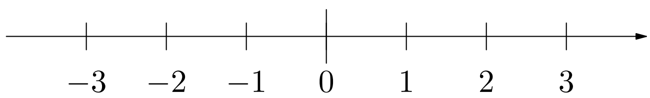

Abbildung 1: $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ (1-dimensionaler Raum)

Man kann in $\mathbb{R}$ addieren, subtrahieren, multiplizieren und durch jede Zahl $\neq 0$ dividieren. $\mathbb{R}$ wird dadurch zu einem „Körper“ (vgl. Kapitel 2).

Beispiele für verschiedene Schreibweisen von Mengen

- $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\} = \mathbb{N}$, Menge der natürlichen Zahlen
- $\{x^2 \mid x \in \mathbb{N}\} = \{1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$, Menge der Quadratzahlen in $\mathbb{N}$
- $\{n \in \mathbb{N} \mid \text{n ist einstellige Primzahl}\} = \{2, 3, 5, 7\}$
- $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0\} = \varnothing$, leere Menge, da die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ keine Lösung in $\mathbb{R}$ hat (vgl. Abschnitt 1.1).

Wir suchen nun nach einem Bereich, in dem die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ lösbar ist. Da die Zahlengerade durch die reellen Zahlen besetzt ist, weichen wir in die Ebene aus. Wir betrachten geordnete Paare (x, y) von reellen Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$. Hierbei bedeutet „geordnet“, dass $(x, y) = (x', y')$ genau dann gilt, wenn $x = x'$ und $y = y'$. Diese Paare bilden den *2-dimensionalen reellen Raum*

$$\mathbb{R}^2 := \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

und können veranschaulicht werden als Punkte in der Ebene:

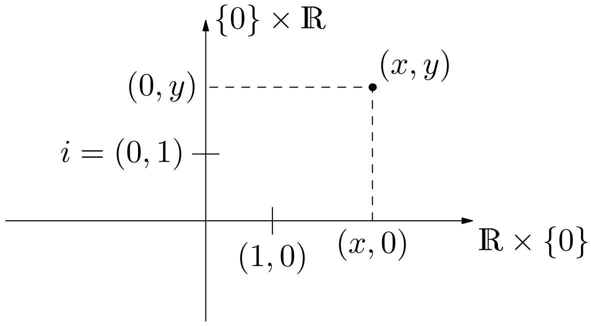

Abbildung 2: Die Ebene $\mathbb{R}^2$

Allgemein definieren wir das *kartesische Produkt* zweier Mengen A und B als

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

wiederum mit $(a, b) = (a', b')$ genau dann, falls $a = a'$ und $b = b'$. Es ist also $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

1.1 Die komplexen Zahlen

Wir definieren eine Addition und eine Multiplikation in $\mathbb{R}^2$ wie folgt:

$$(*) \qquad \begin{aligned} (x, y) + (x', y') &:= (x + x', y + y') \\ (x, y) \cdot (x', y') &:= (xx' - yy', xy' + x'y) \end{aligned}$$

Insbesondere gilt:

$$\begin{aligned} (x, 0) + (x', 0) &= (x + x', 0) \\ (x, 0) \cdot (x', 0) &= (xx', 0) \end{aligned}$$

Man kann also die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ unter Erhalt von Addition und Multiplikation mit $\mathbb{R} \times \{0\} = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$ identifizierten.
Setze:

$$\boxed{i := (0, 1)} \quad \Longrightarrow \quad i^2 = (-1, 0) = -1$$

Die Gleichung $X^2 + 1 = 0$ hat also in $\mathbb{R}^2$ eine Lösung, wenn man $\mathbb{R}^2$ mit obiger Addition und Multiplikation versieht und $\mathbb{R}$ mit $\mathbb{R} \times \{0\}$ identifiziert. Man schreibt dann $\mathbb{C}$ statt $\mathbb{R}^2$ und nennt $\mathbb{C}$ den *Körper der komplexen Zahlen*. Anstatt $(x, y) \in \mathbb{C}$ schreiben wir auch $z \in \mathbb{C}$. Die komplexe Zahl i heisst *imaginäre Einheit*.

Eigenschaften der komplexen Zahlen

1. Es ist $(x, y) \cdot (1, 0) = (x, y)$, also ist $(1, 0) = 1$ „neutrales Element“ der Multiplikation.

2. Es ist $(x, y) \cdot (\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}) = (1, 0)$, falls $(x, y) \neq (0, 0)$, d.h. jedes Element $0 \neq z \in \mathbb{C}$ besitzt bezüglich der Multiplikation $(*)$ ein inverses Element $z^{-1} \in \mathbb{C}$.

3. Jedes Element $z \in \mathbb{C}$ lässt sich eindeutig schreiben als

$$z = x + yi \quad \text{mit} \quad x, y \in \mathbb{R}$$

denn $z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1) = x + yi$. Man sagt hierfür: „$\mathbb{C}$ ist ein 2-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis $\{1, i\}$“.

Addition und Multiplikation zweier komplexer Zahlen lassen sich nun auch schreiben als (beachte $i^2 = -1$)

$$\begin{aligned} z + z' &= (x + yi) + (x' + y'i) = x + x' + (y + y')i \\ zz' &= (x + yi) \cdot (x' + y'i) = xx' - yy' + (xy' + x'y)i \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen lassen sich die folgenden Eigenschaften einfach nachrechnen:

4. $zz' = z'z$ (Kommutativität)

5. $z(z'z'') = (zz')z''$ (Assoziativität)

6. $z(z' + z'') = zz' + zz''$ (Distributivität)

Beispiel.
Man stelle $z = \frac{2+3i}{1-2i}$ in der Form $z = x + yi$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ dar. Benutze dabei die Gleichungen $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ und $i^2 = -1$. Dann ist

$$z = \frac{2 + 3i}{1 - 2i} \cdot \frac{1 + 2i}{1 + 2i} = \frac{2 + 7i - 6}{1 + 4} = -\frac{4}{5} + \frac{7}{5}i$$

1.2 Betrag einer komplexen Zahl

Ist $z = x + yi$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, so nennen wir $\bar{z} := x - yi$ die zu z *konjugiert komplexe Zahl*. Es gilt:

$$\boxed{z\bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2}$$

Dies ist genau das Quadrat des „euklidischen Abstands“ des Punktes (x, y) zum Ursprung. Wir definieren deshalb den *Betrag einer komplexen Zahl*

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$

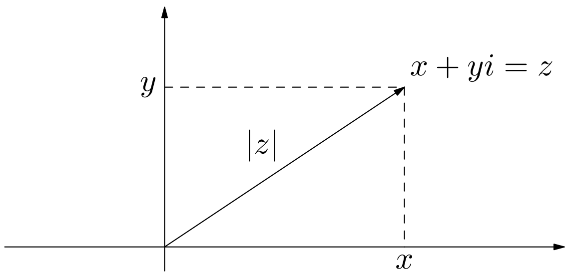

Abbildung 3: Die Zahl $|z|$ ist der Abstand von Nullpunkt

Mit Hilfe des Betrages lässt sich nun das Inverse einer komplexen Zahl $z \neq 0$ einfach bestimmen: $z \cdot \frac{\bar{z}}{|z|^2} = 1$, also $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.
Ist $z = x + yi$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, so heisst $\Re(z) := x$ *Realteil* und $\Im(z) := y$ *Imaginärteil* von z.

1.3 Der n-dimensionale Raum

Der n-dimensionale Raum besteht aus der Gesamtheit von n-*Tupeln* reeller Zahlen

$$\mathbb{R}^n := \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_k \in \mathbb{R} \text{ für } k = 1, \ldots, n\}$$

mit $(x_1, \ldots, x_n) = (x'_1, \ldots, x'_n)$ genau dann wenn, $x_1 = x'_1, \ldots, x_n = x'_n$.
Die Elemente des $\mathbb{R}^n$ lassen sich addieren und mit einem *Skalar* $\lambda \in \mathbb{R}$ multiplizieren:

$$\begin{aligned}(x_1, \ldots, x_n) + (x'_1, \ldots, x'_n) &:= (x_1 + x'_1, \ldots, x_n + x'_n)\\ \lambda \cdot (x_1, \ldots, x_n) &:= (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)\end{aligned}$$

Man kann zeigen, dass es für $n > 2$ keine zu $(*)$ in 1.1 analoge Multiplikation $(x_1, \ldots, x_n) \cdot (x'_1, \ldots, x'_n)$ gibt, die alle Axiome eines „Körpers“ erfüllt (vgl. 2.1 für den Begriff des Körpers).
Es ist $\mathbb{R}^n$ ein „n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum“. Die „Standardbasis“ ist: $(1, 0, \ldots, 0)$, $(0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $(0, 0, \ldots, 0, 1)$.

1.4 Geraden in der reellen Ebene

Eine Gerade in $\mathbb{R}^2$ ist gegeben als Lösungsmenge einer „linearen Gleichung in zwei Unbekannten“. Genauer definieren wir:

Definition.
Eine Teilmenge L von $\mathbb{R}^2$ heißt *Gerade*, wenn es $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $(a, b) \neq (0, 0)$ gibt so, dass $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = c\}$.

Beispiel.
Gegeben seien zwei Geraden durch $4x - y = 3$ und $x + y = 2$. Wie berechnet man den Schnittpunkt?

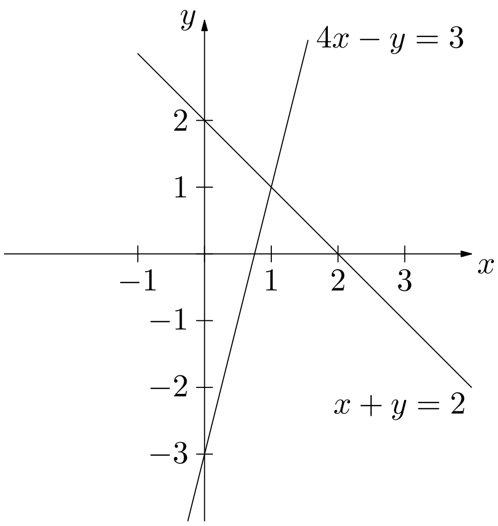

Abbildung 4: Schnittpunkt der beiden Geraden

Man hat das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 4x - y &= 3 \\ x + y &= 2 \end{aligned}$$

zu lösen. Als gemeinsame Lösung der beiden Gleichungen ergibt sich $x = 1$, $y = 1$, d.h. der Schnittpunkt ist $(1, 1)$.

1.5 Lineare Gleichungen in zwei Unbekannten

Wir betrachten zwei Geraden in $\mathbb{R}^2$

$$L_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = e\} \quad \text{und} \quad L_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid cx + dy = f\}$$

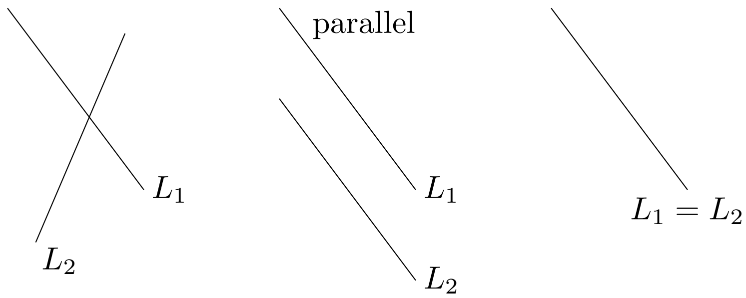

Abbildung 5: Zwei Geraden in $\mathbb{R}^2$

Wie im Beispiel ist das Gleichungssystem

$$ax + by = e \tag{1}$$
$$cx + dy = f \tag{2}$$

wobei $(a, b) \neq (0, 0)$ und $(c, d) \neq (0, 0)$ sind, zu lösen.
Multiplizieren wir (1) mit d und (2) mit $-b$ sowie (1) mit $-c$ und (2) mit a, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} adx + bdy &= de \\ -bcx - bdy &= -bf \end{aligned} \quad \text{sowie} \quad \begin{aligned} -acx - bcy &= -ce \\ acx + ady &= af \end{aligned}$$

Addition ergibt

$$\boxed{(ad - bc)x = de - bf} \quad \text{sowie} \quad \boxed{(ad - bc)y = af - ce}$$

Wir betrachten nun die zu dem Gleichungssystem (1), (2) gehörende „Determinante“

$$D := \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := ad - bc$$

und unterscheiden zwischen den folgenden drei Fällen

Fall I) $D \neq 0$.
Dann hat das Gleichungssystem genau eine Lösung:

$$\boxed{x = \frac{de - bf}{D}, \quad y = \frac{af - ce}{D}}$$

Fall II) $D = 0$ und $af - ce \neq 0$ oder $de - bf \neq 0$.
Dann hat das Gleichungssystem keine Lösung, und die beiden Geraden L_1, L_2 sind parallel, wobei $L_1 \neq L_2$.

Fall III) $D = 0$ und $af - ce = de - bf = 0$.

Ist $a \neq 0$, so ist $c \neq 0$, denn wäre $c = 0$, so wäre wegen $D = ad - bc = 0$ auch $d = 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung $(c, d) \neq (0, 0)$. Durch Multiplikation mit $\frac{c}{a}$ geht die Gleichung (1) über in

$$\frac{c}{a}ax + \frac{c}{a}by = \frac{c}{a}e,$$

und das ist Gleichung (1), da $ad - bc = 0$ und $af - ce = 0$ gilt. Es ist also $L_1 = L_2$.

Ist $b \neq 0$, so ist $d \neq 0$, denn wäre $d = 0$, so wäre wegen $D = ad - bc = 0$ auch $c = 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung $(c, d) \neq (0, 0)$. Durch Multiplikation mit $\frac{b}{d}$ geht die Gleichung (2) in die Gleichung (1) über. Es ist also wiederum $L_1 = L_2$.

1.6 Ebenen im $\mathbb{R}^3$

Eine Teilmenge E von $\mathbb{R}^3$ heißt *Ebene*, wenn es $a_1, a_2, a_3, b \in \mathbb{R}$ gibt mit $(a_1, a_2, a_3) \neq (0, 0, 0)$ derart, dass

$$E = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b\}$$

Allgemein definiert man *Hyperebenen* im $\mathbb{R}^n$ durch

$$E = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b\}$$

mit $(a_1, \ldots, a_n) \neq (0, \ldots 0)$. Eine Hyperebene im $\mathbb{R}^1$ ist dann ein Punkt und im $\mathbb{R}^2$ eine Gerade!!

1.7 Lineare Gleichungssysteme

Allgemein betrachten wir in der Linearen Algebra lineare Gleichungssysteme mit m Gleichungen und n Unbekannten der Form

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

sowie die sogenannte Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Beispiel einer Matrix (*A. Dürer 1514, Kupferstich „Melancholia“*):

$$\begin{pmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{pmatrix}$$

Zeilen-, Spalten-, Diagonal- und weitere Summen ergeben jeweils 34.

1.8 Übungsaufgaben 1 – 4

Aufgabe 1.
Man stelle die folgenden komplexen Zahlen in der Form $x + yi$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ dar:

$$\frac{2+i}{4-5i}\,, \qquad \frac{i-1}{i+1}\,, \qquad \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right)^3, \qquad \frac{1}{i}$$

Aufgabe 2.
Zeichnen Sie die folgenden komplexen Zahlen z_1, z_2, z_3, z_4 als Punkte der Ebene

$$z_1 = 1 - \sqrt{3}\,i\,, \quad z_2 = i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5\,, \quad z_3 = \frac{3 + i\sqrt{7}}{4}\,, \quad z_4 = -2 - \frac{3}{2}i$$

und berechnen Sie ihre Beträge.

Aufgabe 3.
Man untersuche das Schnittverhalten der beiden Geraden L_1 und L_2 , falls

a) $L_1 = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 6x + 3y = 10\,\}$, $L_2 = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 7x - 2y = -1\,\}$

b) $L_1 = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x + 6y = 8\,\}$, $L_2 = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 5x + \frac{15}{2}y = 10\,\}$

c) $L_1 = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{3}\,x - 3y = 0\,\}$, $L_2 = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - \sqrt{3}\,y = 1\,\}$.

Aufgabe 4.
Man löse das lineare Gleichungssystem
$(3 + 5i)z_1 + (4 - 7i)z_2 = 22 + 9i$
$(2 - 6i)z_1 + (5 - 3i)z_2 = 33 + 7i$.
(Gesucht sind zwei komplexe Zahlen $z_1 = x_1 + y_1\,i$ und $z_2 = x_2 + y_2\,i$ mit $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$, welche die beiden Gleichungen erfüllen.)

2 Vektorräume

Eine *Abbildung* einer Menge M in eine Menge N ist eine Vorschrift f, die jedem Element $m \in M$ genau ein Element $f(m) \in N$ zuordnet. Schreibweise:

$$\boxed{f : M \longrightarrow N, \quad m \longmapsto f(m)}$$

2.1 Definition eines Körpers

Ein *Körper* K ist eine Menge, auf der eine *Addition*

$$+ : K \times K \longrightarrow K, \quad (a, b) \longmapsto a + b$$

und eine *Multiplikation*

$$\cdot : K \times K \longrightarrow K, \quad (a, b) \longmapsto ab$$

gegeben sind derart, dass folgende Regeln gelten:

(A1) $(a + b) + c = a + (b + c)$ für alle $a, b, c \in K$ *(Assoziativgesetz)*

(A2) Es gibt ein Element $0 \in K$ so, dass $0 + a = a$ für alle $a \in K$ gilt

(A3) Zu jedem $a \in K$ gibt es ein Element $-a \in K$ mit $(-a) + a = 0$

(A4) $a + b = b + a$ für alle $a, b \in K$ *(Kommutativgesetz)*

(M1) $(ab)c = a(bc)$ für alle $a, b, c \in K$ *(Assoziativgesetz)*

(M2) Es gibt ein Element $1 \in K$ mit $1a = a$ für alle $a \in K$ und $1 \neq 0$

(M3) Zu jedem $a \in K$, $a \neq 0$, gibt es ein Element $a^{-1} \in K$ mit $a^{-1}a = 1$

(M4) $ab = ba$ für alle $a, b \in K$ *(Kommutativgesetz)*

(D) $(a + b)c = ac + bc$ für alle $a, b, c \in K$ *(Distributivgesetz)*

Beispiele.

- $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ sind Körper
- Sei $K = \{0, 1\}$. Setze

  $$\begin{array}{lll} 0 + 0 = 0 & 0 + 1 = 1 + 0 = 1 & \\ 1 + 1 = 0 & 1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0 \cdot 0 = 0 & 1 \cdot 1 = 1 \end{array}$$

  Dann ist K ein Körper.
- Die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen ist kein Körper, da (M3) nicht gilt, zum Beispiel ist $\frac{1}{5} = 5^{-1} \notin \mathbb{Z}$. Die Axiome (A1) — (A4) sind in $\mathbb{Z}$ alle erfüllt, $\mathbb{Z}$ ist bezüglich der Addition eine „Gruppe“.

2.2 Definition einer Gruppe

Eine Menge G heißt *Gruppe*, falls auf G eine *Verknüpfung*

$$\circ : G \times G \longrightarrow G, \quad (a,b) \longmapsto a \circ b$$

definiert ist derart, dass die folgenden Regeln gelten:

(G1) $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ für alle $a, b, c \in G$ *(Assoziativgesetz)*

(G2) Es gibt ein *neutrales Element* $e \in G$ so, dass $e \circ a = a$ für alle $a \in G$ gilt. Man nennt e auch *linksneutral*.

(G3) Zu jedem $a \in G$ gibt es ein *inverses Element* $a^{-1} \in G$ so, dass $a^{-1} \circ a = e$ gilt. Man nennt a^{-1} auch *Linksinverses* zu a.

Gilt in einer Gruppe zusätzlich $a \circ b = b \circ a$ für alle $a, b \in G$, so heißt G *abelsch* oder *kommutativ*.

Beispiel.
Sei K ein Körper. Dann ist K bezüglich Addition eine abelsche Gruppe, und

$$K^{\star} := K \setminus \{0\} = \{x \in K \mid x \neq 0\}$$

ist bezüglich der Multiplikation eine abelsche Gruppe.

2.3 Eindeutigkeit des neutralen und inversen Elements

Wir zeigen hier, dass in einer Gruppe auch ein *rechtsneutrales* Element sowie zu jedem $a \in G$ ein *rechtsinverses* Element existiert. Daraus ergibt sich dann die Eindeutigkeitsaussage in der Überschrift.

Satz.
Sei G eine Gruppe mit neutralem Element e. Dann gelten:

1. $a \circ a^{-1} = e$ *und* $a \circ e = a$ *für alle* $a \in G$
2. *Es gibt genau ein* $e \in G$ *mit* $e \circ a = a \ \forall a \in G$, *und zu jedem* $a \in G$ *gibt es genau ein* a^{-1} *mit* $a^{-1} \circ a = e$

Beweis. 1. Sei nach (G3) $(a^{-1})^{-1}$ ein Inverses von a^{-1}. Es folgt einerseits

$$\begin{aligned} \underbrace{(a^{-1})^{-1} \circ a^{-1}}_{(G3)} \circ a \circ a^{-1} &= \underbrace{e \circ a}_{(G2)} \circ a^{-1} \\ &= a \circ a^{-1} \end{aligned}$$

andererseits

$$(a^{-1})^{-1} \circ \underbrace{a^{-1} \circ a}_{(G3)} \circ a^{-1} = (a^{-1})^{-1} \circ \underbrace{e \circ a^{-1}}_{(G2)}$$
$$= \underbrace{(a^{-1})^{-1} \circ a^{-1}}_{(G3)} = e$$

und dies zeigt $a \circ a^{-1} = e$. Hieraus folgt

$$a \circ e = a \circ (a^{-1} \circ a) = (a \circ a^{-1}) \circ a = e \circ a = a$$

und damit Teil 1.

2. Angenommen es gebe $e, e' \in G$ mit $e \circ a = a = e' \circ a \; \forall a \in G$, dann gilt

$$e' \underset{(G2)}{=} e \circ e' \underset{1.}{=} e$$

Ist $a^{-1} \circ a = a' \circ a = e$, dann folgt

$$a' \underset{(G2)}{=} e \circ a' \underset{(G3)}{=} (a^{-1} \circ a) \circ a' \underset{(G1)}{=} a^{-1} \circ (a \circ a') \underset{1.}{=} a^{-1}$$

□

2.4 Definition eines K-Vektorraumes

Sei K ein Körper.
Ein K-*Vektorraum* V ist eine abelsche Gruppe bezüglich einer Addition

$$+ : V \times V \longrightarrow V, \quad (v, w) \longmapsto v + w\,,$$

und zusätzlich ist eine *Skalarmultiplikation*

$$K \times V \longrightarrow V, \quad (\lambda, v) \longmapsto \lambda v$$

gegeben derart, dass die folgenden Regeln gelten:

(SM1) $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$ für alle $\lambda, \mu \in K$, $v \in V$

(SM2) $1v = v$ für alle $v \in V$

(D1) $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$ für alle $\lambda \in K$, $v, w \in V$

(D2) $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$ für alle $\lambda, \mu \in K, v \in V$

Die Elemente eines K-Vektorraumes nennen wir auch *Vektoren*. Statt K-Vektorraum sagen wir auch *Vektorraum über* K.

2.5 Beispiele

- $\{0\}$ mit $0 + 0 = 0$ und $\lambda 0 = 0 \quad \forall\, \lambda \in K$ ist ein K-Vektorraum.

- $\mathbb{R}^n$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum (vgl. 1.3)

- Analog ist K^n ein K-Vektorraum mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation. Insbesondere ist $K = K^1$ ein K-Vektorraum.

- Sei X eine nicht leere Menge, und sei $V := \{f : X \longrightarrow K\}$ die Menge aller Abbildungen von X mit Werten in K. Definiere für $f, g \in V$ und $\lambda \in K$

  $$\begin{array}{lrl} \text{(Addition)} & f + g : X \longrightarrow K, & x \longmapsto f(x) + g(x) \\ \text{(Skalarmultiplikation)} & \lambda f : X \longrightarrow K, & x \longmapsto \lambda f(x) \end{array}$$

  Dann wird V dadurch zu einem K-Vektorraum.

  Das neutrale Element der Addition ist die *Nullabbildung*, die jedes Element aus X auf 0 abbildet

  $$X \longrightarrow K, \quad x \longmapsto 0$$

  Die zu $f \in V$ inverse Abbildung ist

  $$-f : X \longrightarrow K, \quad x \longmapsto -f(x)$$

  Dass V ein K-Vektorraum ist, zeigt man durch Rückführung auf die entsprechenden Vektorraumeigenschaften von K.

  Wir nennen $V = \{f : X \longrightarrow K\}$ einen *Funktionenraum mit Werten in* K und bezeichnen diesen Vektorraum auch als

  $$\boxed{\mathrm{Abb}(X, K) = \{f : X \longrightarrow K\}}$$

- Ist allgemeiner W ein K-Vektorraum und $V = \{f : X \longrightarrow W\}$, so ist V analog wie oben ein K-Vektorraum. Speziell nennen wir für $X = \mathbb{R}^n$ und $W = \mathbb{R}^m$ den Vektorraum $V = \{f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m\}$ den Raum der *vektorwertigen Funktionen in n Veränderlichen.*

- $\mathbb{R}$ ist ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum, wie aus den Körpereigenschaften von $\mathbb{R}$ folgt. Ebenso ist $\mathbb{C}$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum.

  Allgemein gilt: Ist L ein Körper, der K als „Teilkörper" enthält, so ist L ein K-Vektorraum.

2.6 Rechenregeln in Vektorräumen

Sei V ein K-Vektorraum. Das neutrale Element der Addition in V bezeichnen wir mit $\vec{0}$ und nennen diesen Vektor den *Nullvektor*. Wir schreiben $-v$ für das Inverse von v. Nach (G3) in Definition 2.2 folgt

$$\boxed{-v + v = \vec{0}}$$

und also nach Satz 2.3 auch

$$\boxed{v + (-v) = \vec{0}}$$

für alle $v \in V$. Ferner ist

$$\boxed{\vec{0} + v = v = v + \vec{0} \quad \forall\, v \in V}$$

nach 2.2 und Satz 2.3. Weiterhin gelten die Regeln:

1. Für das neutrale Element der Addition $0 \in K$ ist $0v = \vec{0} \quad \forall v \in V$
2. $\lambda\vec{0} = \vec{0} \quad \forall \lambda \in K$
3. $(-1)v = -v \quad \forall v \in V$

Beweis. 1. Es ist $0v = (0+0)v = 0v + 0v$. Addition von $-0v$ ergibt $\vec{0} = 0v$.

2. Es ist $\lambda\vec{0} = \lambda(\vec{0} + \vec{0}) = \lambda\vec{0} + \lambda\vec{0}$. Addition von $-\lambda\vec{0}$ ergibt $\vec{0} = \lambda\vec{0}$.
3. Es ist $\vec{0} = 0v = (-1+1)v = (-1)v + 1v = (-1)v + v$, also $-v = (-1)v$.

□

2.7 Geometrische Anschauung

Sei $V = \mathbb{R}^n$ und $v = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Für $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $\lambda v = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$

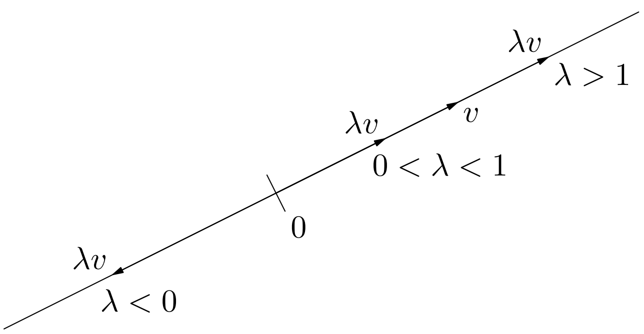

Abbildung 6: Beispiele für λv

Es ist

$$\vec{0} = 0v = (0, \ldots, 0)$$

und
$$-v = (-1)v = (-x_1, \ldots, -x_n)$$

Sei $w = (x'_1, \ldots, x'_n)$. Dann ist

$$v - w = v + (-w) = (x_1 - x'_1, \ldots, x_n - x'_n)$$

Beispiel in $\mathbb{R}^2$: $v = (2,1)$, $w = (1,2)$

$$\Longrightarrow \quad v + w = (3,3) \quad \text{und} \quad v - w = (1,-1)$$

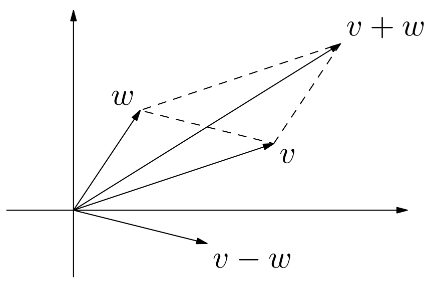

Abbildung 7: Diagonale des von v und w aufgespannten Parallelogramms

Ist $w = \lambda v$, so sind v und w „linear abhängig“

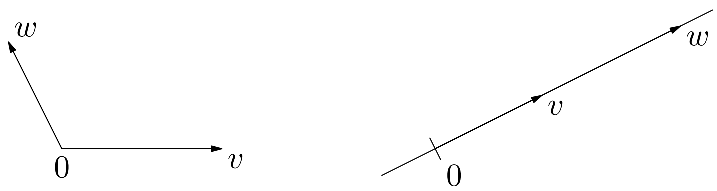

Abbildung 8: „linear unabhängig“ und „linear abhängig“

Ist $\lambda v + \mu w = \vec{0}$ nur für $\lambda = \mu = 0$ möglich, so sind v und w „linear unabhängig“.

2.8 Untervektorräume

Definition.
Sei V ein K-Vektorraum. Eine Teilmenge U von V heißt *Teilraum* oder *Untervektorraum* von V, wenn folgendes gilt:

(UV1) $U \neq \varnothing$
U enthält mindestens ein Element

(UV2) $u, v \in U \Longrightarrow u + v \in U$
U ist abgeschlossen gegenüber der Addition

(UV3) $u \in U$ und $\lambda \in K \Longrightarrow \lambda u \in U$
U ist abgeschlossen bezüglich der Skalarmultiplikation

Bemerkung.
Ein Teilraum U von V ist selbst ein K-Vektorraum

Beweis. Wir müssen nur prüfen, dass $\vec{0} \in U$ und dass mit $u \in U$ auch $-u \in U$ ist. Alle anderen Vektorraumaxiome sind dann erfüllt, da sie in V gelten.
Nach (UV1) gibt es ein $u \in U$ und es folgt:

$$\vec{0} = 0u \underset{(UV3)}{\in} U$$

Ist $u \in U$ beliebig, dann gilt:

$$-u = (-1)u \underset{(UV3)}{\in} U$$

□

2.9 Beispiele und Gegenbeispiele

1.
   - $\{\vec{0}\}$ ist ein Teilraum von V, da $\vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$ und $\lambda\vec{0} = \vec{0} \quad \forall\, \lambda \in K$
   - V ist Teilraum von V

2.
   - Sind U_1, U_2 Untervektorräume von V, dann ist auch

     $$U_1 \cap U_2 := \{v \in V \mid v \in U_1 \text{ und } v \in U_2\}$$

     ein Untervektorraum von V.
   - Allgemein gilt: Ist J eine beliebige Indexmenge und sind U_j, $j \in J$ Untervektorräume von V, so ist auch

     $$U := \bigcap_{j \in J} U_j := \{v \in V \mid v \in U_j \ \forall j \in J\}$$

     ein Untervektorraum von V.

Beweis. Liegen u, v in allen U_j, so auch $u+v$ und λu, da die U_j Untervektorräume sind. $\square$

3. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $(a, b) \neq (0, 0)$. Dann ist

$$U := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = 0\}$$

ein Untervektorraum.

Beweis. **(UV1)** Es ist $\vec{0} = (0, 0) \in U$, da $a0 + b0 = 0$. Insbesondere ist $U \neq \varnothing$.

(UV2) Seien $(x, y), (x', y') \in U$, dann gilt

$$\begin{aligned} ax + by &= 0 \\ ax' + by' &= 0 \end{aligned}$$

Addition ergibt: $a(x + x') + b(y + y') = 0$ und damit ist

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \in U$$

(UV3) Seien $(x, y) \in U$ und $\lambda \in K$, dann gilt

$$\begin{aligned} & ax + by = 0 \\ \Longrightarrow \quad & \lambda ax + \lambda by = 0 \end{aligned}$$

und damit ist

$$\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y) \in U$$

$\square$

4. Behauptung: $U := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^4 = 0\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$.

Beweis. Für $x, y \in \mathbb{R} \setminus 0$ ist stets $x^2 > 0$ und $y^4 > 0$, also wird die „nicht lineare“ Gleichung $x^2 + y^4 = 0$ in $\mathbb{R}^2$ nur von $\vec{0} = (0, 0)$ erfüllt. Es folgt $U = \{\vec{0}\}$ und somit ist U ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$. $\square$

5. Seien U_1, U_2 Untervektorräume von V, dann ist

$$U_1 \cup U_2 := \{v \in V \mid v \in U_1 \text{ oder } v \in U_2\}$$

im Allgemeinen **kein** Untervektorraum von V:

Sei $V = \mathbb{R}^2$, $U_1 = \{(x, y) \mid 2x + 3y = 0\}$, $U_2 = \{(x, y) \mid 5x + 3y = 0\}$. U_1, U_2 sind Untervektorräume nach 3.), aber $U_1 \cup U_2$ nicht:

Sei $(x, y) = (3, -2)$ und $(x', y') = (-3, 5)$, dann ist $(x, y) \in U_1$ und $(x', y') \in U_2$. Es ist $(x, y) + (x', y') = (0, 3)$, aber $(0, 3) \notin U_1$ und $(0, 3) \notin U_2$ also ist $(0, 3) \notin U_1 \cup U_2$. Axiom (UV2) gilt nicht, und damit ist $U_1 \cup U_2$ kein Untervektorraum.

6. $S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ ist **kein** Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$.

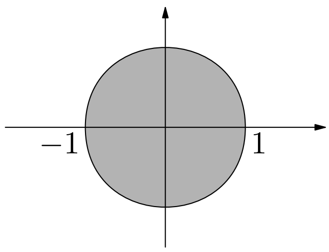

Abbildung 9: Kein Untervektorraum

Beweis. Es ist $u = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in S$, da $(\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2 \leq 1$, aber $2u = (1, 1) \notin S$, da $1^2 + 1^2 = 2 > 1$. Die Regel (UV3) gilt also nicht. □

2.10 Der von einer Teilmenge aufgespannte Teilraum

Sei V ein K-Vektorraum und $S \subset V$ eine beliebige Teilmenge von V. Dann ist

$$\operatorname{Span}(S) := \bigcap_{\substack{U \text{ Teilraum von } V \\ \text{mit } S \subset U}} U = \begin{cases} \text{Durchschnitt aller Teilräume,} \\ \text{die } S \text{ enthalten} \end{cases}$$

ein Untervektorraum von V nach 2.9. Wir nennen $\operatorname{Span}(S)$ den von S *erzeugten* oder den von S *aufgespannten Untervektorraum* von V. Es ist $\operatorname{Span}(S)$ der kleinste Unterraum von V, der S enthält („kleinste“ bezüglich „$\subset$“).

Definition.

a) Seien $v_1, \ldots, v_n$ Vektoren aus V. Dann heißt ein Vektor $v \in V$ *Linearkombination von* $v_1, \ldots, v_n$, wenn es Elemente $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ gibt so, dass
$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$$
gilt.

b) Sei $S \subset V$ eine beliebige Teilmenge. Ein Vektor $v \in V$ heißt *Linearkombination von Vektoren aus S*, falls es **endlich viele** Elemente $v_1, \ldots, v_n \in S$ gibt so, dass v Linearkombination von $v_1, \ldots, v_n$ ist.

Satz.
Seien V ein K-Vektorraum, $S \subset V$ und $\mathrm{Span}(S)$ *der von S erzeugte Untervektorraum von V. Dann besteht* $\mathrm{Span}(S)$ *aus allen $v \in V$, die Linearkombinationen von Vektoren aus S sind:*

$$\mathrm{Span}(S) = \{v \in V \mid v = \sum_{s \in S} \lambda_s s \textit{ mit } \lambda_s = 0 \textit{ für fast alle } s \in S\}$$

Beweis. Sei $U := \{v \in V \mid v$ ist Linearkombination von Vektoren aus $S\}$.
Zu zeigen: $U = \mathrm{Span}(S)$

$\subseteq$ Sei $v \in U$

$$\begin{array}{ll} \Longrightarrow & v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \text{ mit } \lambda_1, \ldots \lambda_n \in K, v_1, \ldots v_n \in S \\ \Longrightarrow & v \text{ liegt in jedem Teilraum von } V\text{, der } v_1, \ldots v_n \text{ enthält} \\ \Longrightarrow & v \in \mathrm{Span}(S) \end{array}$$

$\supseteq$ Da U selbst ein Untervektorraum von V ist, der S enthält, folgt $U \supseteq \mathrm{Span}(S)$.

□

2.11 Erzeugendensysteme

Sei V ein K-Vektorraum und $S \subset V$. Ist $\mathrm{Span}(S) = V$, so heißt S ein *Erzeugendensystem von V*.
Ist also S ein Erzeugendensystem, dann gibt es zu jedem $v \in V$ ein $m \in \mathbb{N}$ sowie Elemente $v_1, \ldots, v_m \in S$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in K$, mit $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m$
Wenn V eine endliche Teilmenge $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ als Erzeugendensystem besitzt, so heißt V *endlich erzeugt*. Es ist dann

$$V = \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K\}$$

Zum Beispiel

$$\boxed{\mathbb{R}^2 = \{\lambda_1(1,0) + \lambda_2(0,1) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}}$$

Beispiele.

- Seien $V = \mathbb{R}^2$, $U_1 = \{0\} \times \mathbb{R}$ und $U_2 = \mathbb{R} \times \{0\}$. U_1 und U_2 sind Teilräume von $\mathbb{R}^2$, aber $U_1 \cup U_2$ ist kein Vektorraum, denn $(1,0) \in U_1$, $(0,1) \in U_2$ aber $(1,0) + (0,1) = (1,1) \neq U_1 \cup U_2$.

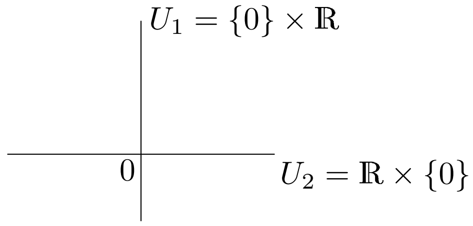

Abbildung 10: $U_1 \cup U_2$ ist kein Untervektorraum

Der von $S = U_1 \cup U_2$ aufgespannte Teilraum von $\mathbb{R}^2$ ist die Summe

$$\boxed{U_1 + U_2 := \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}}$$

Hier gilt zusätzlich noch $U_1 + U_2 = \mathbb{R}^2$.

- Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0, b \neq 0$, dann bilden $v_1 = (a,0), v_2 = (0,b)$ und $v_3 = (3,5)$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^2$.

Beweis. Sei $v \in \mathbb{R}^2$ beliebig. Nach 1.3 ist $v = (x,y)$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Es folgt

$$\begin{aligned} v = (x,y) &= \frac{x}{a}(a,0) + \frac{y}{b}(0,b) + 0(3,5) \\ &= \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 \end{aligned}$$

mit $\lambda_1 = \frac{x}{a}$, $\lambda_2 = \frac{y}{b}$ und $\lambda_3 = 0$. □

Man sieht insbesondere, dass $v_3 = (3,5)$ entbehrlich ist.

- Bilden $v_1 = (1,1)$, $v_2 = (1,-1)$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^2$?
Ansatz:

$$\begin{aligned} (x,y) &\overset{!}{=} \lambda_1(1,1) + \lambda_2(1,-1) = (\lambda_1, \lambda_1) + (\lambda_2, -\lambda_2) \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 - \lambda_2) \end{aligned}$$

also

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1+\lambda_2=x\\ \lambda_1-\lambda_2=y\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \quad \lambda_1=\frac{x+y}{2} \quad \text{und} \quad \lambda_2=\frac{x-y}{2}$$

Die Vektoren $(1,1)$ und $(1,-1)$ bilden also ein Erzeugendensystem, da

$$(x,y)=\lambda_1(1,1)+\lambda_2(1,-1)$$

mit $\lambda_1=\frac{x+y}{2}, \lambda_2=\frac{x-y}{2} \quad \forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2$ gilt.

- Bilden $v_1=(-3,3)$, $v_2=(1,-1)$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^2$? Ansatz:

$$\begin{aligned}(x,y) &\overset{!}{=} \lambda_1(-3,3)+\lambda_2(1,-1)=(-3\lambda_1,3\lambda_1)+(\lambda_2,-\lambda_2)\\ &=(-3\lambda_1+\lambda_2,3\lambda_1-\lambda_2)\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}-3\lambda_1+\lambda_2&=x\\ 3\lambda_1-\lambda_2&=y\end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem ist aber nicht für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ lösbar, denn setze z.B. $(x,y)=(0,1)$, dann ist das System

$$\begin{aligned}-3\lambda_1+\lambda_2&=0\\ 3\lambda_1-\lambda_2&=1\end{aligned} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{aligned}3\lambda_1-\lambda_2&=0\\ 3\lambda_1-\lambda_2&=1\end{aligned}$$

nicht lösbar. Insbesondere ist $v=(0,1)$ keine Linearkombination von v_1 und v_2 .

2.12 Summe von Teilräumen

Sind $U_j, j\in J$ (Indexmenge) Teilräume eines K-Vektorraumes V, so heißt der von der Vereinigung $S=\bigcup_{j\in J}U_j$ erzeugte Teilraum von V die *Summe der U_j*. Wir schreiben

$$\sum_{j\in J}U_j$$

Mit Hilfe von 2.11 folgt:

$$\sum_{j\in J}U_j=\left\{\sum_{j\in J}u_j \mid u_j\in U_j, u_j=\vec{0} \text{ für fast alle } j\in J\right\}$$

Speziell: Sind U_1, U_2 Teilräume von V, so ist

$$\boxed{U_1+U_2=\{u_1+u_2 \mid u_1\in U_1, u_2\in U_2\}}$$

2.13 Direkte Summen von Teilräumen

Satz.
Seien U_1, U_2 zwei Teilräume eines K-Vektorraumes V, und sei $U = U_1 + U_2$. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

1. *Ist $u_1 + u_2 = \vec{0}$ für $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$, dann ist $u_1 = u_2 = \vec{0}$*
2. *Für jedes $u \in U$ ist die Darstellung $u = u_1 + u_2$ eindeutig*
3. *$U_1 \cap U_2 = \{\vec{0}\}$*

Beweis. $1 \Longrightarrow 2$ Seien $u = u_1 + u_2 = u_1' + u_2'$ mit $u_1, u_1' \in U_1$, $u_2, u_2' \in U_2$ zwei Darstellungen von u. Zu zeigen: $u_1 = u_1'$ und $u_2 = u_2'$. Da

$$\begin{array}{lc}
 & u_1 + u_2 = u_1' + u_2' \\
\Longrightarrow & \underbrace{u_1 - u_1'}_{\in U_1} + \underbrace{u_2 - u_2'}_{\in U_2} = \vec{0} \\
\overset{1.}{\Longrightarrow} & u_1 - u_1' = \vec{0} \quad \text{und} \quad u_2 - u_2' = \vec{0} \\
\Longrightarrow & u_1 = u_1' \quad \text{und} \quad u_2 = u_2'
\end{array}$$

$2 \Longrightarrow 3$ Sei $u \in U_1 \cap U_2$. Zu zeigen: $u = \vec{0}$

$$\text{Es ist} \quad u = u + \vec{0} = \vec{0} + u \quad \overset{\text{nach 2.}}{\Longrightarrow} u = \vec{0}$$

$3 \Longrightarrow 1$ Sei $u_1 + u_2 = \vec{0}$. Zu zeigen $u_1 = u_2 = \vec{0}$

$$\begin{array}{l}
\text{Da} \quad u_1 + u_2 = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad u_1 = -u_2 \in U_2 \quad \Longrightarrow \quad u_1 \in U_1 \cap U_2 \\
\qquad \Longrightarrow \quad u_1 = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad u_2 = \vec{0}
\end{array}$$

□

2.14 Direkte Summen von Vektorräumen

Definition.

- Seien U_1, U_2 Teilräume eines K-Vektorraumes. Dann heißt die Summe $U_1 + U_2$ die *(innere) direkte Summe* von U_1 und U_2, falls eine der Bedingungen (und damit alle) aus Satz 2.13 erfüllt sind. Wir schreiben dann:
$$U_1 \oplus U_2$$

- Seinen V_1, V_2 beliebige K-Vektorräume. Wir definieren die *(äussere) direkte Summe* als

$$V_1 \oplus V_2 := \{(v_1, v_2) \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$$

mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation.

Bemerkung.
In Aufgabe 11 wird Satz 2.13 auf endlich viele Teilräume $U_1, \ldots, U_n$ von V verallgemeinert.

Beispiel.
Sei $V = \mathbb{R}^2$ und $U_1 = \{0\} \times \mathbb{R}$ und $U_2 = \mathbb{R} \times \{0\}$. Dann ist $\mathbb{R}^2 = U_1 \oplus U_2$ die innere direkte Summe, da $U_1 \cap U_2 = \{\vec{0}\}$.
Sei $V_1 = \mathbb{R}$ und $V_2 = \mathbb{R}$. Dann ist $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ die äussere direkte Summe.
Analog ist $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}}_{n\text{-Stück}}$ eine äussere direkte Summe.

2.15 Übungsaufgaben 5 – 11

Aufgabe 5.
Man zeige, dass die Menge $G := \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ bezüglich der durch

$$a \circ b := a + b + ab$$

für $a, b \in G$ definierten Verknüpfung eine Gruppe ist. Man löse in G die Gleichung

$$5 \circ x \circ 6 = 17$$

Hinweis. Um zu zeigen, dass G eine Gruppe ist, verifiziere man die vier Bedingungen:

(G0) Sind $a, b \in G$, so ist auch $a \circ b \in G$.
(G1) Es ist $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ für alle $a, b, c \in G$.
(G2) Es gibt ein Element $e \in G$ so, dass $e \circ a = a$ für alle $a \in G$ gilt.
(G3) Zu jedem $a \in G$ gibt es ein Element $a^{-1} \in G$ so, dass $a^{-1} \circ a = e$ gilt.

Aufgabe 6.
Es sei G eine nicht leere Menge mit einer Verknüpfung $\circ : G \times G \to G$, $(a, b) \mapsto a \circ b$, die das Assoziativgesetz (G1) erfüllt. Man zeige, dass G genau dann eine Gruppe ist, wenn die Gleichungen $b \circ x = a$ und $y \circ d = c$ Lösungen in G besitzen, wobei a, b, c, d beliebige Elemente aus G sind.

Aufgabe 7.
Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Man zeige:

a) Wenn für $\lambda \in K$ und $v \in V$ die Gleichung $\lambda v = \vec{0}$ gilt, dann ist $\lambda = 0$ oder $v = \vec{0}$.

b) Wenn für zwei Untervektorräume U_1, U_2 von V auch deren Vereinigung $U_1 \cup U_2$ ein Untervektorraum ist, dann gilt $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$.

Aufgabe 8.

a) Man untersuche, für welche $c \in \mathbb{R}$ die Menge

$$U_c := \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = c \}$$

ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Sei $V := \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Abbildungen von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Dabei seien $f + g$ und λf für $f, g \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto f(x) + g(x), \quad \text{und} \quad \lambda f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \lambda f(x) .$$

Man prüfe, ob $U := \{ f \in V \mid f(x) = f(-x) \ \forall \ x \in \mathbb{R} \}$ ein Untervektorraum von V ist.

Aufgabe 9.
Man untersuche, welche der folgenden vier Mengen Untervektorräume von $\mathbb{R}^2$ sind:
$U_1 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 \}$
$U_2 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y \}$
$U_3 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x \}$
$U_4 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 0 \}$

Aufgabe 10.
Man stelle den Vektor $w \in \mathbb{R}^3$ jeweils als Linearkombination der Vektoren v_1, v_2, v_3 dar:

a) $w = (3, 2, 1)$, $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (7, 3, 1)$, $v_3 = (4, 3, -1)$

b) $w = (-8, 17, -14)$, $v_1 = (2, 1, 0)$, $v_2 = (3, 0, 5)$, $v_3 = (-1, 4, -1)$.

Aufgabe 11.
Seien $U_1, \ldots, U_n$ Untervektorräume eines K-Vektorraums V. Dann ist auch

$$U := U_1 + \cdots + U_n := \{\, u_1 + \cdots + u_n \mid u_j \in U_j \text{ für alle } j = 1, \ldots, n \,\}$$

ein Untervektorraum von V. Man beweise, dass folgende drei Bedingungen äquivalent sind:

(1) Ist $u_1 + \cdots + u_n = \vec{0}$ in U, so folgt $u_j = \vec{0}$ für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$.

(2) Für jedes $u \in U$ ist die Darstellung $u = u_1 + \cdots + u_n$ mit $u_j \in U_j$ eindeutig.

(3) Es ist $U_i \cap (U_{i+1} + \cdots + U_n) = \{\vec{0}\}$ für jedes $i \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Man zeige dann anhand eines Gegenbeispiels, dass die obigen Bedingungen für $n > 2$ im allgemeinen nicht äquivalent sind zu $U_1 \cap \cdots \cap U_n = \{\vec{0}\}$.

3 Basis und Dimension

3.1 Lineare Unabhängigkeit

Definition.
Sei V ein K-Vektorraum. Dann heissen $v_1, \ldots, v_m \in V$ *linear unabhängig*, wenn aus

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m = \vec{0}, \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in K$$

stets folgt $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$. Andernfalls heissen $v_1, \ldots, v_m$ *linear abhängig*. Eine Teilmenge $S \subset V$ heißt *linear unabhängig*, wenn **jede endliche** Teilmenge von S aus linear unabhängigen Vektoren besteht.

Beispiele.

- $\vec{0}$ ist linear abhängig, da $1 \cdot \vec{0} = \vec{0}$. Ebenso ist jede Menge, die den Nullvektor enthält, linear abhängig.
- Die beiden Vektoren $v_1 = (-3, 3)$, $v_2 = (1, -1)$ sind linear abhängig in $\mathbb{R}^2$, denn $v_1 + 3v_2 = \vec{0}$.
- $v \in V, v \neq \vec{0}$, ist linear unabhängig, da nach Aufgabe 7a aus $\lambda v = \vec{0}$ folgt, $\lambda = 0$
- Im Gegensatz dazu ist v linear abhängig von v, da $1v + (-1)v = \vec{0}$
- $\varnothing$ ist linear unabhängig

- In K^n sind die Vektoren

$$\begin{aligned} e_1 &:= (1,0,0,\ldots,0) \\ e_2 &:= (0,1,0,\ldots,0) \\ &\vdots \\ e_n &:= (0,0,\ldots,0,1) \end{aligned}$$

linear unabhängig.

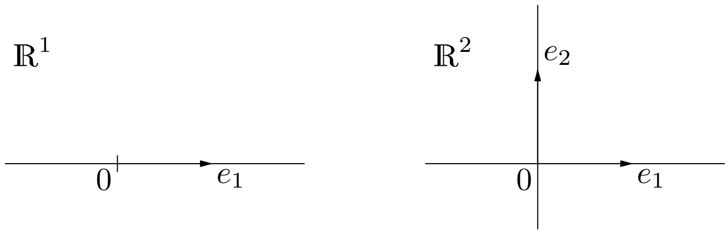

Abbildung 11: linear unabhängige Vektoren

3.2 Kriterium für lineare Abhängigkeit

Satz.
Sei $m \in \mathbb{N}, m > 1$. Dann ist sind für $v_1, \ldots, v_m \in V$ die beiden folgenden Aussagen äquivalent:

1. *$v_1, \ldots, v_m$ sind linear abhängig*
2. *Es gibt (mindestens) ein $j, 1 \leq j \leq m$ so, dass v_j Linearkombination der übrigen ist.*

Beweis. $1 \Longrightarrow 2$ Seien $v_1, \ldots, v_m$ linear abhängig. Dann gibt es $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in K$ so, dass $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m = 0$ gilt und $\lambda_j \neq 0$ für mindestens ein j. Es folgt

$$v_j = -\frac{\lambda_1}{\lambda_j} v_1 - \cdots - \frac{\lambda_{j-1}}{\lambda_j} v_{j-1} - \frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j} v_{j+1} - \cdots - \frac{\lambda_m}{\lambda_j} v_m$$

$2 \Longrightarrow 1$ Da die Definition 3.1 der linearen Unabhängigkeit nicht von der Reihenfolge der Vektoren abhängt, sei ohne Einschränkung $j = 1$. Es folgt

$$v_1 = \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m$$

$$\Longrightarrow \quad \lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2 - \cdots - \lambda_m v_m = \vec{0} \quad \text{mit } \lambda_1 = 1 \neq 0$$

□

3.3 Definition einer Basis und Beispiele

Definition.
Eine Teilmenge $\mathcal{B} \subset V$ heißt *Basis* eines K-Vektorraumes V, falls gelten:

(B1) $\mathcal{B}$ ist linear unabhängig

(B2) $\mathcal{B}$ ist ein Erzeugendensystem von V

Beispiel.

- $\varnothing$ ist eine Basis von $\{\vec{0}\}$

- Es ist $\{e_1, \ldots, e_n\}$ mit

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0)\,, e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)\,, \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$$

  eine Basis von K^n und heißt die *Standardbasis* des K^n.

- $\mathcal{B} = \{(1, 1), (1, -1)\}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^2$, denn wie bereits in 2.11 gezeigt, ist $\mathcal{B}$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^2$. Zu zeigen bleibt die lineare Unabhängigkeit. Sei also $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned}(0, 0) &= \lambda_1(1, 1) + \lambda_2(1, -1)\\ &= (\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 - \lambda_2)\end{aligned}$$

  Es folgt

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1 + \lambda_2 = 0\\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0\end{aligned}\right\} \quad\Longrightarrow\quad 2\lambda_2 = 0 \quad\Longrightarrow\quad \lambda_2 = 0 \quad\Longrightarrow\quad \lambda_1 = 0$$

  Diese Rechnung hätten wir uns eigentlich sparen können, denn ein Erzeugendensystem mit 2 Elementen von $\mathbb{R}^2$ ist stets eine Basis, wie wir in 3.13.3 sehen werden.

- Aus dem Beispiel in 2.11 wissen wir, dass $\mathcal{B} = \{(-3, 3), (1, -1)\}$ kein Erzeugendensystem und damit auch keine Basis des $\mathbb{R}^2$ ist. Die Vektoren v_1 und v_2 sind wegen $v_1 + 3v_2 = \vec{0}$ linear abhängig. Das muss auch so sein, denn in 3.13.4 werden wir sehen, dass zwei linear unabhängige Vektoren in $\mathbb{R}^2$ stets eine Basis von $\mathbb{R}^2$ bilden.

3.4 Eindeutigkeit der Basisdarstellung

Satz.
Sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum, der eine Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ besitzt. Dann lässt sich jeder Vektor $v \in V$ ***eindeutig*** *schreiben als Linearkombination*

$$(*) \quad v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \quad \textit{mit } \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$$

Beweis. Da $v_1, \ldots, v_n$ ein Erzeugendensystem von V bilden, gibt es Elemente $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ mit $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$. Sei $v = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n$ mit $\mu_1, \ldots, \mu_n \in K$ eine weitere Darstellung von v. Es folgt

$$\vec{0} = v - v = (\lambda_1 - \mu_1)v_1 + \cdots + (\lambda_n - \mu_n)v_n$$

Da $v_1, \ldots, v_n$ auch linear unabhängig sind, folgt

$$\lambda_j - \mu_j = 0 \quad \forall j = 1, \ldots, n$$

also $\lambda_j = \mu_j \quad \forall j = 1, \ldots, n.$ $\square$

Besitzt ein Vektorraum V eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$, dann können wir also jeden Vektor $v \in V$ eindeutig schreiben als Linearkombination $(*)$. Insbesondere gibt es also zu jedem $v \in V$ genau einen Vektor $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in K^n$ mit $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$. Wir nennen $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ den *Koordinatenvektor* von v bezüglich $\mathcal{B}$. Die Reihenfolge der Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ ist dabei fest gewählt. Wir sprechen dann auch von einer *geordneten Basis* und schreiben $(v_1, \ldots, v_n)$ statt $\{v_1, \ldots, v_n\}$.

Beispiel.
Sei $V = \mathbb{R}^2$. Dann schreiben wir $v \in \mathbb{R}^2$ als $v = (x, y)$, also als Koordinatenvektor zur Standardbasis (e_1, e_2), denn $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$.

3.5 Charakterisierung einer Basis

Definition.
Sei V ein K-Vektorraum und $B \subset V$ eine Teilmenge.

- B heißt *minimales Erzeugendensystem* , falls B ein Erzeugendensystem von V ist, aber jede echte Teilmenge $A \subsetneq B$ kein Erzeugendensystem von V mehr ist.
- B heißt *maximale linear unabhängige Teilmenge*, falls B linear unabhängig ist, aber jede echte Obermenge $C \supsetneq B$ in V nicht mehr linear unabhängig ist.

Satz.
Für eine Teilmenge $\mathcal{B} \subset V$ sind äquivalent

1. *$\mathcal{B}$ ist eine Basis*
2. *$\mathcal{B}$ ist ein minimales Erzeugendensystem*
3. *$\mathcal{B}$ ist eine maximale linear unabhängige Teilmenge*

Beweis. $1 \Longrightarrow 2$ Sei $A \subsetneq \mathcal{B}$ und $v \in \mathcal{B} \setminus A$. Da $\mathcal{B}$ linear unabhängig ist, gibt es nach Satz 3.2 keine Linearkombination von v mit Elementen aus $(\mathcal{B} \setminus \{v\}) \supset A$. Insbesondere ist A kein Erzeugendensystem von V

$2 \Longrightarrow 3$ Angenommen, $\mathcal{B}$ wäre nicht linear unabhängig, dann gäbe es nach Satz 3.2 ein $v \in \mathcal{B}$ derart, dass v Linearkombination von Vektoren aus $\mathcal{B} \setminus \{v\}$ wäre und also $\mathcal{B} \setminus \{v\}$ ein Erzeugendensystem wäre im Widerspruch zur Voraussetzung 2. Also ist $\mathcal{B}$ linear unabhängig. Nach Satz 3.2 ist $\mathcal{B}$ auch maximal, da $\mathcal{B}$ Erzeugendensystem ist und sich damit jedes $v \notin \mathcal{B}$ als Linearkombination von Elementen aus $\mathcal{B}$ darstellen lässt.

$3 \Longrightarrow 1$ Sei $\mathcal{B}$ eine maximale linear unabhängige Teilmenge. Zu zeigen: $\mathcal{B}$ ist ein Erzeugendensystem.

Ist $v \in \mathcal{B}$, dann ist $v = 1v$ eine Linearkombination. Sei also $v \notin \mathcal{B}$. Dann ist $\mathcal{B} \cup \{v\}$ nicht linear unabhängig nach Voraussetzung. Es gibt also $v_1, \ldots, v_m \in \mathcal{B}$ und $\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in K$, nicht alle gleich Null, mit

$$\lambda v + \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m = \vec{0}$$

Es ist dabei $\lambda \neq 0$, da sonst $v_1, \ldots, v_m$ und damit auch $\mathcal{B}$ nicht linear unabhängig wären. Es folgt

$$v = -\frac{\lambda_1}{\lambda} v_1 - \cdots - \frac{\lambda_m}{\lambda} v_m$$

und damit ist v eine Linearkombination von Elementen aus $\mathcal{B}$.

□

3.6 Polynome

Es sei $V := \mathrm{Abb}(K, K)$ der K-Vektorraum aller Abbildungen $f : K \longrightarrow K$. Dann sind Addition $f + g$ und Skalarmultiplikation λf für $f, g \in V$ und $\lambda \in K$ nach 2.5 gegeben durch

$$(f + g)(a) := f(a) + g(a) \quad \forall a \in K$$
$$(\lambda f)(a) := \lambda f(a) \quad \forall a \in K$$

Wir betrachten nun die Menge $M = \{1, t, t^2, \ldots\} \subset V$ mit

$$t^n : K \longrightarrow K \quad a \longmapsto a^n$$

für $n \in \mathbb{N}$ und

$$1 = t^0 : K \longrightarrow K \quad a \longmapsto 1$$

Ist $K = \mathbb{R}$, so erhalten wir für $f = t^2$ und $g = -\frac{1}{2}t^2$ das folgende Bild.

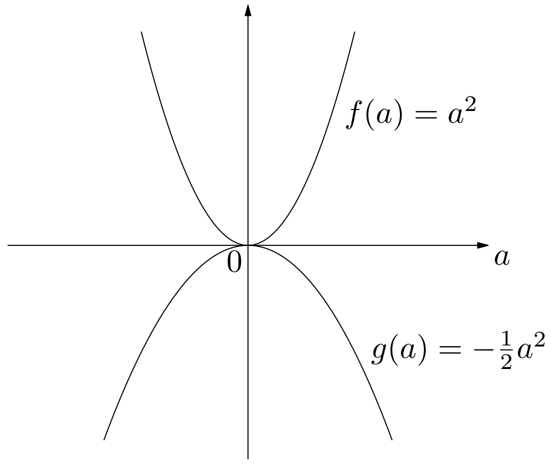

Abbildung 12: Zwei Parabeln

Satz.
Besitzt K unendlich viele Elemente, so ist $M = \{1, t, t^2, \ldots\}$ linear unabhängig in V.

Beweis. Nach Definition 3.1 genügt es zu zeigen, dass die Abbildungen

$$1, t, t^2, \ldots, t^n$$

für jedes $n > 0$ linear unabhängig sind. Für $n = 0$ ist dies sicher richtig. Wir nehmen an, dass es eine Linearkombination $f := \lambda_0 + \lambda_1 t + \cdots + \lambda_n t^n$ mit $n > 0$ und $\lambda_n \neq 0$ gibt, die $f(a) = 0$ für alle $a \in K$ erfüllt. Um diese Annahme zum Widerspruch zu führen, wählen wir n paarweise verschiedene Elemente $b_1, \ldots, b_n \in K$ und zeigen, dass $f(a) = (a - b_1) \cdots (a - b_n) \cdot \lambda_n$ für alle $a \in K \setminus \{b_1, \ldots, b_n\}$ gilt. Besitzt K unendlich viele Elemente, so folgt der Widerspruch $\lambda_n = 0$.
Da $f(b_1) = 0 = f(a)$ gilt, lässt sich $f(a)$ schreiben als $f(a) = (a - b_1)g(a)$ mit $g(a) = (\lambda_1 + \lambda_2 b_1 + \cdots + \lambda_n b_1^{n-1}) + \cdots + (\lambda_{n-1} + \lambda_n b_1)a^{n-2} + \lambda_n a^{n-1}$ und $g(a) = 0$ für alle $a \in K \setminus \{b_1\}$.

(Für $n = 1$ ist zum Beispiel $(a - b_1)g(a) = (a - b_1)\lambda_1 = a\lambda_1 - b_1\,\lambda_1 = f(a)$, da $\lambda_0 = -b_1\lambda_1$ wegen $0 = f(b_1) = \lambda_0 + \lambda_1 b_1$ gilt.)
Analog ist $g(a) = (a - b_2)g'(a)$, wobei $g'(a)$ die Form $g'(a) = \mu_0 + \cdots + \mu_{n-3}\,a^{n-3} + \lambda_n a^{n-2}$ hat und $g'(a) = 0$ für alle $a \in K \setminus \{b_1, b_2\}$ gilt. So fortfahrend erhält man $f(a) = (a - b_1) \cdot \dots \cdot (a - b_n) \cdot \lambda_n$. □

Bemerkung.
Besitzt K nur endlich viele Elemente, so braucht die Menge M nicht mehr linear unabhängig zu sein. Ist zum Beispiel $K = \{0, 1\}$ der in 2.1 definierte Körper mit zwei Elementen, so ist $t + t^2$ die Nullabbildung, und also sind t, t^2 linear abhängig.

Besitzt K unendlich viele Elemente, so nennen wir $f := \lambda_0 + \lambda_1 t + \cdots + \lambda_n t^n$ mit $\lambda_n \neq 0$ ein *Polynom vom Grad* n und können t auch als eine *Unbestimmte* auffassen, in die man beliebig Elemente a aus K einsetzen kann. Allgemein wird der *Polynomring* in der Algebra-Vorlesung [11] eingeführt, (vgl. dort 6.12 für eine Unbestimmte sowie 21.3 und 21.6 für beliebig viele Unbestimmte).

3.7 Basen in Vektorräumen

Satz.
Sei V ein K-Vektorraum und sei $M \subset S \subset V$, wobei M linear unabhängig und S ein Erzeugendensystem sei. Dann gibt es eine Basis $\mathcal{B}$ von V mit $M \subset \mathcal{B} \subset S$.

Beweis. Wir suchen unter allen Teilmengen X von V mit $M \subset X \subset S$ eine maximal linear unabhängige. Diese ist nach 3.5 eine Basis. Wenn S endlich ist, gibt es also sicher eine Basis $\mathcal{B}$ von V mit $M \subset \mathcal{B} \subset V$. Hat S unendlich viele Elemente, so ist nicht klar, ob es unter den obigen Mengen X eine maximale gibt. Die Schwierigkeiten werden durch ein *Axiom* der Mengenlehre behoben, das sogenannte *Lemma von Zorn*, (vgl. z. B. Algebra-Vorlesung [11, 7.5]). Dies garantiert die Existenz einer Basis $\mathcal{B}$ mit $M \subset \mathcal{B} \subset S$. □

3.8 Existenzsatz

Satz.
Jeder Vektorraum hat eine Basis.

Beweis. Wähle in $M = \varnothing$ und $S = V$ in 3.7. □

3.9 Basisergänzungssatz

Satz.
Sei V ein K-Vektorraum, M eine linear unabhängige Teilmenge und E ein Erzeugendensystem von V. Dann lässt sich M durch Elemente aus E zu einer Basis von V ergänzen.

Beweis. Wende 3.7 auf M und $S = M \cup E$ an. □

Beispiel.
Man finde eine Basis für den von

$$v_1 = (1, 0, 1), \qquad v_2 = (2, 1, 0), \qquad v_3 = (1, -1, 3)$$

erzeugten Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ und ergänze diese zu einer Basis von $\mathbb{R}^3$.
Zunächst wird nachgeprüft, ob die drei Vektoren v_1 , v_2 , v_3 linear unabhängig sind: Der Ansatz $(0, 0, 0) \stackrel{!}{=} \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = (\lambda_1, 0, \lambda_1) + (2\lambda_2, \lambda_2, 0) + (\lambda_3, -\lambda_3, 3\lambda_3) = (\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3, \lambda_2 - \lambda_3, \lambda_1 + 3\lambda_3)$ führt zu den Gleichungen $\lambda_2 = \lambda_3$ und $\lambda_1 = -3\lambda_3$. Setzt man zum Beispiel $\lambda_3 = 1$ ein, so folgt $\boxed{-3v_1 + v_2 + v_3 = \vec{0}}$, also sind v_1 , v_2 , v_3 linear abhängig.
Wir machen den Ansatz $(0, 0, 0) \stackrel{!}{=} \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 = (\mu_1, 0, \mu_1) + (2\mu_2, \mu_2, 0) = (\mu_1 + 2\mu_2, \mu_2, \mu_1)$ und erhalten $\mu_1 = 0 = \mu_2$. Also sind v_1, v_2 linear unabhängig und bilden daher eine Basis des von v_1, v_2, v_3 erzeugten Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$.
Nun muss $\{v_1, v_2\}$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^3$ ergänzt werden. Ein Kandidat für einen weiteren Basisvektor ist $e_3 = (0, 0, 1)$. Sei $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ beliebig. Der Ansatz $(x_1, x_2, x_3) \stackrel{!}{=} \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 e_3 = (\lambda_1 + 2\lambda_2, \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_3)$ führt zu $\lambda_2 = x_2$, $\lambda_1 = x_1 - 2x_2$ und $\lambda_3 = x_3 - x_1 + 2x_2$. Es ist also $\mathcal{B} := \{v_1, v_2, e_3\}$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$. Speziell für $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ folgt $\lambda_2 = 0 = \lambda_1 = \lambda_3$, also ist $\mathcal{B}$ auch linear unabhängig und damit eine Basis von R^3. (In 3.13 werden wir feststellen, dass jedes Erzeugendensystem mit drei Elementen eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bildet.)

3.10 Der Austauschsatz

Sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum. Nach 3.8 besitzt V dann eine endliche Basis $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Dann gibt es eine konstruktive Methode um eine Basis $\mathcal{B}$ zu finden. Wir wählen einen Vektor $v \neq 0$ aus einem endlichen Erzeugendensystem S von V. Wir fügen solange Vektoren aus S zu $\mathcal{B}$ hinzu, bis die Aufnahme eines jeden weiteren Vektors aus S zu linearer Abhängigkeit führt. Offensichtlich hängt $\mathcal{B}$ dann aber von der konkreten Wahl der Vektoren ab. Ist aber wenigstens die Anzahl der Elemente in verschiedenen Basen immer gleich? Auf diese Frage wollen wir im folgenden eine Antwort finden.

Satz.
Sei V ein K-Vektorraum mit Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Ist $v \in V$, $v \neq \vec{0}$, dann gibt es ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ so, dass auch die Vektoren

$$\{v_1, \ldots, v_{j-1}, v, v_{j+1}, \ldots, v_n\}$$

eine Basis von V bilden. Dabei kann man als j jeden Index wählen, für den $\lambda_j \neq 0$ ist in der Basisdarstellung $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$ mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$.

Beweis. Da $v \neq \vec{0}$ gibt es (mindestens) ein j mit $\lambda_j \neq 0$. Ohne Einschränkung sei $j = 1$, ansonsten vertauschen wir einfach v_1 und v_j. Zu zeigen ist nun, dass $v, v_2, \ldots, v_n$ eine Basis von V bilden.

Unabhängigkeit. Sei $\mu_1 v + \mu_2 v_2 + \cdots + \mu_n v_n = \vec{0}$ mit $\mu_1, \ldots, \mu_n \in K$. Setzen wir hierin die obige Basisdarstellung für v ein, so folgt

$$\mu_1\lambda_1 v_1 + (\mu_1\lambda_2 + \mu_2)v_2 + \cdots + (\mu_1\lambda_n + \mu_n)v_n = \vec{0}$$

Da $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig sind, folgt

$$\begin{aligned} \mu_1\lambda_1 = 0 \text{ und } \mu_1\lambda_i + \mu_i &= 0 \text{ für } i = 2, \ldots, n \\ \Longrightarrow \quad \mu_1 &= 0, \text{ da } \lambda_1 \neq 0 \\ \Longrightarrow \quad \mu_2 = \cdots &= \mu_n = 0\,. \end{aligned}$$

Also sind $v, v_2, \ldots, v_n$ linear unabhängig.

Erzeugendensystem. Da $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$ und $\lambda_1 \neq 0$ gilt, folgt

$$(*) \quad v_1 = \frac{1}{\lambda_1}(v - \lambda_2 v_2 - \cdots - \lambda_n v_n)$$

Ist $w \in V$ beliebig, so ist $w = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n$ mit $\mu_1, \ldots, \mu_n \in K$, da $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis bilden. Einsetzen von $(*)$ ergibt

$$\begin{aligned} w &= \mu_1\left(\frac{1}{\lambda_1}(v - \lambda_2 v_2 - \cdots - \lambda_n v_n)\right) + \mu_2 v_2 + \cdots + \mu_n v_n \\ &= \frac{\mu_1}{\lambda_1} v + \left(\mu_2 - \frac{\mu_1\lambda_2}{\lambda_1}\right) v_2 + \cdots + \left(\mu_n - \frac{\mu_1\lambda_n}{\lambda_1}\right) v_n \end{aligned}$$

Damit ist w eine Linearkombination von $v, v_2, \ldots, v_n$.

□

3.11 Folgerung aus dem Austauschsatz

Korollar.
Besitzt V eine Basis, die aus n Vektoren besteht, dann sind je m Vektoren aus V mit $m > n$ linear abhängig.
Insbesondere gilt: *In einem endlich erzeugten K-Vektorraum V haben je zwei Basen dieselbe Anzahl von Elementen.*

Beweis. Sei $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V. Der Beweis wird indirekt geführt. Annahme: $w_1, \ldots, w_m \in V$ mit $m > n$ sind linear unabhängig.
Wendet man 3.10 mit $v = w_1$ an, erhält man eine neue Basis

$$\{v_1, \ldots, v_{j-1}, w_1, v_{j+1}, \ldots, v_n\}$$

Man kann dann w_2 schreiben als $w_2 = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{j-1} v_{j-1} + \mu_1 w_1 + \lambda_{j+1} v_{j+1} + \cdots + \lambda_n v_n$ mit $\lambda_i, \mu_1 \in K$. Dabei gibt es einen Index k, für den $\lambda_k \neq 0$ gilt (denn sonst wäre $w_2 - \mu_1 w_1 = \vec{0}$ im Widerspruch zur Annahme).
Wendet man 3.10 auf die neue Basis mit $v = w_2$ und $j = k$ an, so bekommt man eine Basis von V, die w_1, w_2 und nur noch $n-2$ Vektoren aus $\mathcal{B}$ enthält. So fortfahrend erhält man eine Basis $\mathcal{B}' = \{w_1, \ldots, w_n\}$ von V, in der alle n Vektoren der Basis $\mathcal{B}$ ausgetauscht sind gegen Elemente von $\{w_1, \ldots, w_n, \ldots, w_m\}$.
Da $m > n$ ist, kann man w_m als Linearkombination der Elemente von $\mathcal{B}'$ schreiben und erhält einen Widerspruch zur Annahme.
Die zweite Behauptung folgt unmittelbar aus der ersten. □

3.12 Dimension eines K-Vektorraums

Definition.
Sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum. Dann heißt die Anzahl der Elemente einer Basis von V die *Dimension* von V. Wir schreiben für die Dimension $\dim_K V$ und nennen V einen *endlich dimensionalen Vektorraum*. In diesem Fall schreiben wir auch $\dim_K V < \infty$. Ist V nicht endlich erzeugt, dann schreiben wir $\dim_K V = \infty$.

Beispiele.

- $\dim_K K^n = n$ (vgl. 3.3)
- $\dim_K \{\vec{0}\} = 0$ (eine Basis des Nullvektorraums $\{\vec{0}\}$ hat 0 Elemente)
- $\dim_K \mathrm{Abb}(K, K) = \infty$ (vgl. Satz 3.5 und Satz 3.6)
- $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$, denn $\{1, i\}$ ist eine Basis
- $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \infty$ und $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = \infty$

3.13 Weitere Folgerungen aus dem Austauschsatz

Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum. Dann gelten:

1. Weniger als n Vektoren können kein Erzeugendensystem bilden (nach Satz 3.5)
2. Mehr als n Vektoren sind linear abhängig (nach 3.11)
3. Jedes Erzeugendensystem mit n Vektoren ist linear unabhängig und damit eine Basis (nach 1. und 3.2)
4. Jede linear unabhängige Teilmenge mit n Vektoren ist auch ein Erzeugendensystem und damit ebenfalls eine Basis (nach 3.9 und 3.11)

Haben wir zum Beispiel im $\mathbb{R}^3$ drei linear unabhängige Vektoren gefunden, so wissen wir, dass diese eine Basis bilden. Die zweite Basiseigenschaft brauchen wir dann nicht mehr nachzuweisen.

3.14 Dimension eines Untervektorraums

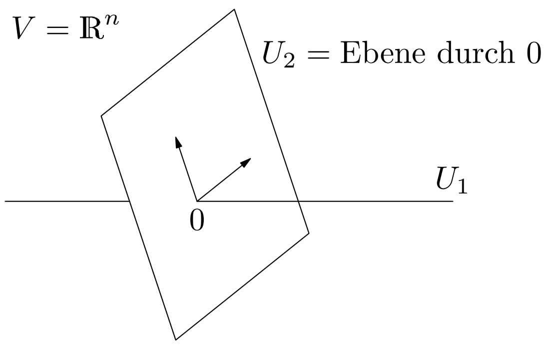

Abbildung 13: Geraden und Ebenen

Satz.
Sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum und sei $U \subset V$ ein Untervektorraum von V. Dann ist auch U endlich erzeugt und es gilt $\dim_K U \leq \dim_K V$. *Ist* $\dim_K U = \dim_K V$, *dann ist* $U = V$.

Beweis. Sei $\mathcal{M}$ eine Basis von U. Dann besteht $\mathcal{M}$ aus linear unabhängigen Elementen von V. Diese kann man nach 3.9 zu einer Basis $\mathcal{B}$ von V ergänzen. Da $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}$ und $\mathcal{B}$ eine endliche Menge ist, ist auch $\mathcal{M}$ endlich und also $\dim_K U \leq \dim_K V$.

Ist $U \subsetneq V$ und $v \in V \setminus U$. Dann ist v keine Linearkombination von Elementen aus $\mathcal{M}$, also $\mathcal{M} \cup \{v\}$ linear unabhängig nach 3.2. Es folgt $\dim_K U < \dim_K V$.
□

3.15 Dimensionssatz

Satz.
Sind U_1, U_2 Teilräume eines endlich dimensionalen K-Vektorraumes V, so gilt

$$\boxed{\dim_K(U_1 + U_2) = \dim_K U_1 + \dim_K U_2 - \dim_K(U_1 \cap U_2)}$$

Beweis. Wähle Basis $\{u_1, \ldots, u_r\}$ von $U_1 \cap U_2$. Ergänze diese mit Elementen aus U_1 zu $\{u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s\}$, einer Basis von U_1 und durch Elemente aus U_2 zu $\{u_1, \ldots, u_r, w_1, \ldots, w_t\}$, einer Basis von U_2 (vgl. 3.9). Wir zeigen, dass $\mathcal{B} := \{u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s, w_1, \ldots, w_t\}$ eine Basis von $U_1 + U_2$ ist. Da $\mathcal{B}$ offensichtlich ein Erzeugendensystem von $U_1 + U_2$ bildet, müssen wir noch die lineare Unabhängigkeit prüfen. Sei also

$$(*) \qquad \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_r u_r + \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_s v_s + \mu'_1 w_1 + \cdots + \mu'_t w_t = \vec{0}$$

Es folgt

$$\tilde{u} := \underbrace{\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_r u_r + \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_s v_s}_{\in U_1} = \underbrace{-\mu'_1 w_1 - \cdots - \mu'_t w_t}_{\in U_2}$$

also $\tilde{u} \in U_1 \cap U_2$. Insbesondere gibt es $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in K$ mit $\tilde{u} = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_r u_r$
Es folgt

$$\tilde{u} = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_r u_r + 0 v_1 + \ldots + 0 v_s = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_r u_r + \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_s v_s$$

Da $\{u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s\}$ eine Basis von U_1 bildet, ist die Darstellung von $\tilde{u}$ eindeutig, und Koeffizientenvergleich ergibt $\mu_i = 0$ für $1 \leq i \leq s$. Eingesetzt in $(*)$ folgt dann

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_r u_r + \mu'_1 w_1 + \cdots + \mu'_t w_t = \vec{0}$$

Da $\{u_1, \ldots, u_r, w_1, \ldots, w_t\}$ eine Basis von U_2 bilden folgt $\lambda_i = 0$ für $1 \leq i \leq r$ und $\mu'_j = 0$ für $1 \leq j \leq t$. Damit ist $\mathcal{B}$ linear unabhängig und bildet eine Basis von $U_1 + U_2$. Es folgt

$$\begin{aligned}\dim_K(U_1 + U_2) &= r + s + t = (r + s) + (r + t) - r \\ &= \dim_K U_1 + \dim_K U_2 - \dim_K(U_1 \cap U_2)\end{aligned}$$

□

3.16 Lineare Abbildungen

Seien V, W zwei K-Vektorräume, und sei $f : V \longrightarrow W$ eine Abbildung. Dann heißt f eine *K-lineare Abbildung* oder ein *Vektorraumhomomorphismus*, falls gelten:

(L1) $f(v+w) = f(v) + f(w)$ für alle $v, w \in V$

(L2) $f(\lambda v) = \lambda f(v)$ für alle $\lambda \in K$ und alle $v \in V$

Eine K-lineare Abbildung $f : V \longrightarrow V$ nennen wir auch einen *Endomorphismus von V*.

3.17 Beispiele

1. Die Nullabbildung $V \longrightarrow W$, $v \longmapsto \vec{0}$, ist K-linear

2. Die komplexe Konjugation $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto \bar{z}$, ist $\mathbb{R}$-linear, aber nicht $\mathbb{C}$-linear

   Beweis. Ist $z = x + yi$, $z' = x' + y'i \in \mathbb{C}$ mit $x, x', y, y' \in \mathbb{R}$, dann ist $f(z) = x - yi$ und damit

   $$\begin{aligned} f(z+z') &= (x+x') - (y+y')i = x - yi + x' - y'i = f(z) + f(z') \\ f(\lambda z) &= \lambda x - \lambda yi = \lambda(x - yi) = \lambda f(z) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

   Damit ist f eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung. Aber f ist nicht $\mathbb{C}$-linear, da

   $$\begin{aligned} f(ii) &= f(i^2) = f(-1) = -1 \quad \text{aber} \\ if(i) &= i(-i) = -(ii) = 1 \neq -1 \end{aligned}$$

   □

3. Sei $I = [a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ ein Intervall in $\mathbb{R}$, und seien

   $$\begin{aligned} \mathcal{C}^0(I) &:= \{g : I \longrightarrow \mathbb{R} \mid g \text{ stetig}\} \\ \mathcal{C}^1(I) &:= \{g : I \longrightarrow \mathbb{R} \mid g \text{ stetig differenzierbar}\} \end{aligned}$$

   Teilräume von $\mathrm{Abb}(I, \mathbb{R})$. Die beiden Abbildungen

   $$\begin{aligned} \mathcal{D} : \mathcal{C}^1(I) &\longrightarrow \mathcal{C}^0(I) \qquad g \longmapsto g' \quad \text{„Ableitung“} \\ \mathcal{I} : \mathcal{C}^0(I) &\longrightarrow \mathcal{C}^1(I) \qquad g \longmapsto \int_a^x g(t)\, dt \quad \text{„Stammfunktion“} \end{aligned}$$

   sind $\mathbb{R}$-lineare Abbildungen.

4. Sei X eine Menge und K ein Körper, dann ist für jedes $x_0 \in X$ die Abbildung $F : \mathrm{Abb}(X, K) \longrightarrow K$, $f \longmapsto f(x_0)$ eine K-lineare Abbildung. Sie heißt *Auswertungsabbildung*.

3.18 Existenz- und Eindeutigkeitssatz für lineare Abbildungen

Satz.
Seien V, W zwei K-Vektorräume, und sei $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V. Dann gibt es zu beliebig vorgegebenen Vektoren $w_1, \ldots, w_n \in W$ genau eine K-lineare Abbildung $f : V \longrightarrow W$ mit $f(v_i) = w_i$ für $1 \le i \le n$.

Beweis. Da $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V ist, gibt es zu jedem $v \in V$ eindeutig betimmte Elemente $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ mit $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$, vgl. 3.4.

Eindeutigkeit Ist f eine K-lineare Abbildung wie oben, so folgt

$$
\begin{aligned}
f(v) &= f(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) \\
&\underset{(L1),(L2)}{=} \lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_n f(v_n) \\
&= \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_n w_n
\end{aligned}
$$

Damit ist aber das Bild von v eindeutig festgelegt.

Existenz Setzen wir $f(v) := \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_n w_n$, so erhalten wir eine K-lineare Abbildung $f : V \longrightarrow W$ mit $f(v_i) = w_i$ für $1 \le i \le n$.

□

3.19 Eigenschaften von linearen Abbildungen

Seien V, W zwei K-Vektorräume, und sei $f : V \longrightarrow W$ eine K-lineare Abbildung. Dann gelten

1. $f(\vec{0}) = \vec{0}$, da $f(\vec{0}) = f(0\vec{0}) = 0f(\vec{0}) = \vec{0}$ nach 2.6
2. $f(-v) = -f(v)$, da $f(-v) = f(-1v) = (-1)f(v) = -f(v)$
3. Ist U ein Teilraum von V, dann ist $f(U) := \{f(u) \mid u \in U\}$ ein Teilraum von W, denn

   UV1 Aus $U \neq \varnothing$ folgt auch $f(U) \neq \varnothing$ nach 1.

   UV2 Sei $w_1, w_2 \in f(U)$. Dann gibt es $u_1, u_2 \in U$ mit $f(u_1) = w_1$ und $f(u_2) = w_2$. Dann ist $w_1 + w_2 = f(u_1) + f(u_2) = f(u_1 + u_2) \in f(U)$.

   UV3 Sei $w \in f(U)$, $\lambda \in K$ und $w = f(u)$ für ein $u \in U$. Dann ist $\lambda w = \lambda f(u) = f(\lambda u) \in f(U)$.

Insbesondere ist

$$\boxed{\mathrm{bild}(f) := f(V) = \{w \in W \mid \exists v \in V \text{ mit } f(v) = w\}}$$

ein Teilraum von W und heißt das *Bild von* f.

4. Sei $\mathrm{kern}(f) := \{v \in V \mid f(v) = \vec{0}\}$ der *Kern von* f. Dann ist $\mathrm{kern}(f)$ ein Teilraum von V, denn

   UV1 $\vec{0} \in \mathrm{kern}(f)$ nach 1.

   UV2 Sind $u, v \in \mathrm{kern}\, f$, dann ist $f(u+v) = f(u) + f(v) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$ und damit ist auch $u + v \in \mathrm{kern}(f)$

   UV3 Ist $u \in \mathrm{kern}(f)$ und $\lambda \in K$, dann ist $f(\lambda u) = \lambda f(u) = \lambda\vec{0} = \vec{0}$ und deshalb ist mit u auch $\lambda u \in \mathrm{kern}(f)$.

Satz.
Seien V, W zwei K-Vektorräume, und sei $f : V \longrightarrow W$ eine K-lineare Abbildung, dann gilt:

$$f : V \longrightarrow W \textit{ ist injektiv genau dann, wenn } \mathrm{kern}(f) = \vec{0}$$

Beweis. $\Longrightarrow$ Sei $v \in \mathrm{kern}(f)$ beliebig, dann folgt

$$f(v) = \vec{0} = f(\vec{0}) \quad \Longrightarrow \quad v = \vec{0}$$

$\Longleftarrow$ Seien $v, v' \in V$ mit $f(v) = f(v')$. Zu zeigen ist $v = v'$.
Aus $f(v) = f(v')$ folgt:

$$\vec{0} = f(v) - f(v') = f(v - v') \quad \Longrightarrow \quad v - v' \in \mathrm{kern}(f)$$

Da $\mathrm{kern}(f) = \vec{0}$ nach Voraussetzung ist, folgt $v - v' = \vec{0}$ und damit $v = v'$.

□

Trivialerweise gilt: $f : V \longrightarrow W$ ist *surjektiv* genau dann, wenn $\mathrm{bild}(f) = W$.

3.20 Isomorphismen von K-Vektorräumen

Definition.
Seien V, W zwei K-Vektorräume und sei $f : V \longrightarrow W$ eine K-lineare Abbildung. Ist f bijektiv (injektiv und surjektiv) dann nennen wir f einen *Isomorphismus*.

Ist $f : V \longrightarrow W$ bijektiv, so gibt es eine *Umkehrabbildung* $g : W \longrightarrow V$ mit

$$\begin{aligned} g(f(v)) &= v \quad \forall v \in V \\ f(g(w)) &= w \quad \forall w \in W \end{aligned}$$

Oft wird dafür auch $g = f^{-1}$ geschrieben.

Bemerkung.
Wenn $f : V \longrightarrow W$ ein Isomorphismus ist, dann ist die Umkehrabbildung $g : W \longrightarrow V$ K-linear und damit ebenfalls ein Isomorphismus.

Beweis. Für $w, w' \in W$ gilt

$$\begin{aligned} g(w + w') &= g(f(g(w)) + f(g(w'))) \quad \text{nach (4)} \\ &= g\Big(f\Big(g(w) + g(w')\Big)\Big) \quad \text{da } f \ K\text{-linear} \\ &= g(w) + g(w') \quad \text{nach (3)} \end{aligned}$$

Analog gilt für $w \in W$, $\lambda \in K$

$$\begin{aligned} g(\lambda w) &= g(\lambda f(g(w))) \quad \text{nach (4)} \\ &= g\Big(f\Big(\lambda g(w)\Big)\Big) \quad \text{da } f \ K\text{-linear} \\ &= \lambda g(w) \quad \text{nach (3)} \end{aligned}$$

□

Seien V, W zwei K-Vektorräume. Wir nennen V *isomorph* zu W und schreiben dafür $V \simeq W$, falls es (mindestens) einen Isomorphismus $f : V \longrightarrow W$ gibt. Ist V isomorph zu W, dann ist nach obiger Bemerkung auch W isomorph zu V.

3.21 Klassifikationssatz für endlich dimensionale Vektorräume

Satz.
Seien V, W endlich dimensionale K-Vektorräume. Dann gilt

$$\boxed{\dim_K V = \dim_K W} \iff \boxed{V \simeq W}$$

*Insbesondere ist **jeder** n-dimensionale K-Vektorraum isomorph zu K^n.*

Beweis. Sei $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V.

$\Longrightarrow$ Sei $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_n)$ eine Basis von W. Nach 3.18 gibt es eine K-lineare Abbildung $f : V \longrightarrow W$ mit $f(v_i) = w_i$ für $i = 1, \dots, n$. Da $\mathcal{C}$ ein Erzeugendensystem von W ist, gibt es zu jedem $w \in W$ Elemente $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ so, dass $w = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n$ gilt. Es folgt $w = f(v)$ mit $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$, und also ist f surjektiv. Ist $w = \vec{0}$, so folgt $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$, also $v = \vec{0}$, da $\mathcal{C}$ linear unabhängig ist. Nach 3.19 folgt, dass f injektiv ist. Es gilt also $V \simeq W$.

$\Longleftarrow$ Sei $f : V \longrightarrow W$ ein Isomorphismus. Ist $w \in W$, so ist $w = f(v)$ mit einem $v \in V$, da f surjektiv ist. Es gilt $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$, da $\mathcal{B}$ ein Erzeugendensystem von V ist. Hieraus folgt $w = f(v) = \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n)$, und $\mathcal{B}' := (f(v_1), \dots, f(v_n))$ ist also ein Erzeugendensystem von W. Ist $f(v) = \vec{0}$, so ist auch $v = \vec{0}$, da f injektiv ist. Da $\mathcal{B}$ linear unabhängig ist, muss also auch $\mathcal{B}'$ linear unabhängig sein. Es folgt $\dim_K W = n = \dim_K V$.

$\square$

3.22 Dimensionsformel

Seien V ein endlich dimensionaler und W ein beliebiger K-Vektorraum. Dann ist für jede K-lineare Abbildung $f : V \longrightarrow W$ der Untervektorraum $\mathrm{bild}(f)$ endlich dimensional, und es gilt die *Dimensionsformel*

$$\boxed{\dim_K V = \dim_K \mathrm{kern}(f) + \dim_K \mathrm{bild}(f)}$$

Beweis. Sei $\mathcal{M}$ eine Basis von V, dann wird $\mathrm{bild}(f)$ von $\{f(b) \mid b \in \mathcal{M}\}$ erzeugt. Damit ist nach 3.5 $\mathrm{bild}(f)$ ein endlich dimensionaler Untervektorraum, und die Behauptung ergibt sich aus dem folgenden Lemma. $\square$

Lemma.
Sei $\{u_1, \dots, u_r\}$ *eine Basis von* $\mathrm{kern}(f)$. *Wähle* $v_1, \dots, v_s \in V$ *so, dass* $f(v_1), \dots, f(v_s)$ *eine Basis von* $\mathrm{bild}(f)$ *bilden. Dann ist*

$$\mathcal{B} := \{u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s\}$$

eine Basis von V.

Beweis. **Unabhängigkeit** Sei

$$\vec{0} = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_r u_r + \mu_1 v_1 + \cdots \mu_s v_s, \text{ mit } \lambda_i, \mu_j \in K \ \forall i, j$$

$$\overset{f}{\Longrightarrow} \quad \vec{0} = f(\vec{0}) = \mu_1 f(v_1) + \dots + \mu_s f(v_s), \text{ da } u_1, \dots, u_r \in \mathrm{kern}(f),$$

$$\Longrightarrow \quad \mu_1 = \dots = \mu_s = 0, \text{ da } f(v_1), \dots f(v_s) \text{ linear unabhängig sind}$$

$$\Longrightarrow \quad \lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0, \text{ da } u_1, \dots, u_r \text{ linear unabhängig sind}$$

B ist also linear unabhängig.

Erzeugendensystem Sei $v \in V$, dann gibt es $\mu_1, \ldots, \mu_s \in K$ mit

$$\begin{aligned}
& f(v) = \mu_1 f(v_1) + \cdots + \mu_s f(v_s), \text{ da } f(v_1), \ldots, f(v_s) \text{ Basis von } \operatorname{bild}(f), \\
\Longrightarrow \quad & f(v) = f(\mu_1 v_1 + \cdots \mu_s v_s), \text{ da } f \ K\text{-linear} \\
\Longrightarrow \quad & v - \mu_1 v_1 - \cdots - \mu_s v_s \in \operatorname{kern}(f) \\
\Longrightarrow \quad & v - \mu_1 v_1 - \cdots - \mu_s v_s = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_r u_r \text{ mit } \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K,
\end{aligned}$$

da $u_1, \ldots, u_r$ Basis von $\operatorname{kern}(f)$ ist. Damit ist v Linearkombination der Elemente aus B.

□

Bemerkung.
Ist $\operatorname{kern}(f) = \{\vec{0}\}$, dann ist $V \simeq \operatorname{bild}(f)$, also $\dim_K V = 0 + \dim_K \operatorname{bild}(f)$ nach 3.21.
Ist $\operatorname{bild}(f) = \{\vec{0}\}$, dann ist $V = \operatorname{kern}(f)$, also $\dim_K V = \dim_K \operatorname{kern}(f) + 0$.
Man schreibt oft auch $\operatorname{rang}(f)$ statt $\dim_K \operatorname{bild}(f)$ und nennt diese Zahl den *Rang* der Abbildung f. Die Dimensionsformel lautet dann

$$\boxed{\dim_K V = \dim_K \operatorname{kern}(f) + \operatorname{rang}(f)}$$

3.23 Folgerung aus der Dimensionsformel

Korollar.
*Seien V und W zwei **endlich dimensionale** K-Vektorräume, und es gelte $\dim_K V = \dim_K W$. Dann sind für jede K-lineare Abbildung $f : V \longrightarrow W$ äquivalent*

1. *f ist injektiv (Monomorphismus)*
2. *f ist surjektiv (Epimorphismus)*
3. *f ist bijektiv (Isomorphismus)*

Beweis. $1 \Longrightarrow 2$

$$\begin{aligned}
f \text{ injektiv } & \Longrightarrow \operatorname{kern}(f) = \vec{0} \text{ nach Satz 3.19} \\
& \Longrightarrow \dim_K \operatorname{bild}(f) \underset{3.22}{=} \dim_K V \underset{\text{Vor.}}{=} \dim_K W \\
& \Longrightarrow \operatorname{bild}(f) = W \text{ nach 3.14} \\
& \Longrightarrow f \text{ surjektiv}
\end{aligned}$$

$2 \Longrightarrow 1$

$$
\begin{aligned}
f \text{ surjektiv } &\Longrightarrow \dim_K \operatorname{bild}(f) = \dim_K W \underset{\text{Vor.}}{=} \dim_K V \\
&\Longrightarrow \dim_K \operatorname{kern}(f) = 0 \text{ nach } 3.22 \\
&\Longrightarrow f \text{ injektiv nach Satz } 3.19
\end{aligned}
$$

$3 \Longleftrightarrow 1$ klar nach Obigem und da “bijektiv = injektiv + surjektiv” gilt. □

3.24 Beispiele für unendlich dimensionale Vektorräume

Beispiel.
Eine *Folge* ist eine Abbildung $\mathbb{N} \longrightarrow K$. Jedem $n \in \mathbb{N}$ ist also ein $a_n \in K$ zugeordnet, wir schreiben $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder $(a_1, a_2, \ldots)$. Im *Folgenraum* $V := \operatorname{Abb}(\mathbb{N}, K)$ ist $U := \{(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid b_1 = 0\}$ ein echter Teilraum ($U \subsetneq V$), und dennoch ist $V \longrightarrow U$, $(a_1, a_2, \ldots) \longmapsto (0, a_1, a_2, \ldots)$, ein Isomorphismus. (Nach 3.14 und 3.21 kann ein endlich dimensionaler K-Vektorraum niemals zu einem echten Teilraum isomorph sein, denn ist $\dim_K V < \infty$ und $U \subsetneq V$, dann ist $\dim_K U < \dim_K V$ und damit $V \not\cong U$.)

Beispiel.
Sei $K = \mathbb{R}$, $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Sei $V := \mathcal{C}^0([a, b])$ und $U := \{F \in \mathcal{C}^1([a, b]) \mid F(a) = 0\} \subsetneq V$ (vgl. 3.17.3). Dann besagt der *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*: Die Abbildung

$$\mathcal{I} : V \longrightarrow U, \quad f \longmapsto F, \text{ mit } F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

ist ein Isomorphismus mit Umkehrabbildung

$$\mathcal{D} : U \longrightarrow V, \quad F \longmapsto F'$$

Beispiel.
Auch Korollar 3.23 gilt nicht für unendlich dimensionale Vektorräume, das zeigen die folgenden Abbildungen:

- $f_1 : \operatorname{Abb}(\mathbb{N}, K) \longrightarrow \operatorname{Abb}(\mathbb{N}, K)$, $(a_1, a_2, \ldots) \longmapsto (0, a_1, a_2, \ldots)$ ist injektiv, aber nicht surjektiv
- $f_2 : \operatorname{Abb}(\mathbb{N}, K) \longrightarrow \operatorname{Abb}(\mathbb{N}, K)$, $(a_1, a_2, \ldots) \longmapsto (a_2, a_3, \ldots)$ ist surjektiv, aber nicht injektiv
- $\mathcal{D} : \mathcal{C}^1([a, b]) \longrightarrow \mathcal{C}^0([a, b])$ ist surjektiv, aber nicht injektiv
- $\mathcal{I} : \mathcal{C}^0([a, b]) \longrightarrow \mathcal{C}^1([a, b])$ ist injektiv, aber nicht surjektiv

3.25 Übungsaufgaben 12 – 21

Aufgabe 12.

a) Man prüfe, ob die Vektoren $v_1 = (4, 4, 4)$, $v_2 = (2, 4, 6)$ und $v_3 = (3, 4, 5)$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$ bilden.

b) Man untersuche, für welche $t \in \mathbb{R}$ die Vektoren

$$v_1 = (1, 3, 4)\,, \quad v_2 = (3, t, 11)\,, \quad v_3 = (-4, -4, 0)$$

linear abhängig in $\mathbb{R}^3$ sind.

Aufgabe 13.
Man prüfe, ob die Vektoren v_1, v_2, v_3 linear unabhängig in $\mathbb{R}^4$ sind, wenn

a) $v_1 = (1, 1, -1, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1, -2)$ und $v_3 = (3, 1, -5, 4)$,

b) $v_1 = (1, 1, -1, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1, -2)$ und $v_3 = (3, -1, -5, 4)$.

Aufgabe 14.
Man konstruiere eine Basis für den von

$$v_1 = (1, -2, 0, 1)\,, \quad v_2 = (0, 0, 2, 5)\,, \quad v_3 = (-2, 4, 2, 3)$$

erzeugten Untervektorraum von $\mathbb{R}^4$ und ergänze diese Basis dann zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 15.
Es sei $\{v_1, v_2\}$ eine Basis eines 2-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraums V. Man untersuche, für welche Zahlen $r, s \in \mathbb{R}$ auch die beiden Vektoren $w_1 = rv_1 + v_2$ und $w_2 = v_1 + sv_2$ eine Basis von V bilden.

Aufgabe 16.
Man konstruiere für die folgenden $\mathbb{R}$-Vektorräume jeweils eine Basis:

$U_1 = \{\, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - x_3 = 0 \,\}$,

$U_2 = \{\, (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + 3x_3 = 0\,,\ x_1 + x_2 + x_4 = 0 \,\}$.

Aufgabe 17.
Es sei $t \in \mathbb{R}$. Man bestimme die Dimension des von den Vektoren

$$v_1 = (1, 2, t + 2), \quad v_2 = (-1, t + 1, t), \quad v_3 = (0, t, 1)$$

erzeugten Untervektorraums U_t von $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 18.
Sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis eines K-Vektorraums V, und sei $f : V \to W$ eine K-lineare Abbildung von V in einen K-Vektorraum W. Dann ist f eindeutig bestimmt durch die n Vektoren $w_1 = f(v_1), \dots, w_n = f(v_n)$ aus W. Man beweise die folgenden beiden Aussagen:

(a) f ist injektiv $\iff$ $w_1, \dots, w_n$ sind linear unabhängig in W.

(b) f ist surjektiv $\iff$ $w_1, \dots, w_n$ bilden ein Erzeugendensystem von W.

Aufgabe 19.
Ist für Teilräume $U_1, \dots, U_n$ eines K-Vektorraums V eine der Bedingungen aus Aufgabe 11 erfüllt, so nennt man den Teilraum $U_1 + \cdots + U_n$ eine *direkte Summe von Teilräumen* und schreibt dafür $U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$.

Man nennt zwei Teilräume U_1 und U_2 eines K-Vektorraums V *komplementäre Teilräume*, wenn $U_1 + U_2 = V$ und $U_1 \cap U_2 = \{\vec{0}\}$ gelten (d. h. wenn $V = U_1 \oplus U_2$ gilt).

Man beweise für einen n-dimensionalen K-Vektorraum V die folgenden beiden Aussagen:

a) Ist U_1 ein p-dimensionaler Teilraum von V, dann gibt es einen zu U_1 komplementären Teilraum U_2, und jeder solche Teilraum U_2 hat die Dimension $n - p$.

b) Es ist V eine direkte Summe von 1-dimensionalen Teilräumen:
$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$ mit $\dim_K U_i = 1$ für $i = 1, \dots, n$.

Aufgabe 20.
Sei U_1 der von den Vektoren

$$v_1 = (1, 0, 0, 1), \quad v_2 = (-2, -1, 1, 1), \quad v_3 = (-3, -2, 2, 3)$$

und U_2 der von den Vektoren

$$v_4 = (2, 1, 0, 3), \quad v_5 = (-1, -1, 0, -2), \quad v_6 = (7, 4, 0, 11)$$

erzeugte Teilraum von $\mathbb{R}^4$. Man berechne die Dimensionen $\dim_{\mathbb{R}} U_1$, $\dim_{\mathbb{R}} U_2$, $\dim_{\mathbb{R}}(U_1 + U_2)$ und $\dim_{\mathbb{R}}(U_1 \cap U_2)$.

Aufgabe 21.
Die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei definiert durch

$$f(1, 0, 0) = (-1, 1, 3), \quad f(0, 1, 0) = (0, 6, 3), \quad f(0, 0, 1) = (2, 4, -3)\,.$$

Man konstruiere jeweils eine Basis von $\mathrm{kern}(f)$ und $\mathrm{bild}(f)$.

4 Lineare Abbildungen und Matrizen

Sei $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$, und sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung. Dann ist f durch Angabe von $f(e_1)$ und $f(e_2)$ eindeutig bestimmt (vgl. Satz 3.18). Es ist

$$\begin{aligned} f(e_1) &= a_{11}e_1 + a_{21}e_2 = (a_{11}, a_{21}) \\ f(e_2) &= a_{12}e_1 + a_{22}e_2 = (a_{12}, a_{22}) \end{aligned}$$

mit $a_{ij} \in \mathbb{R}$ für $1 \leq i, j \leq 2$.
Benutzen wir die „Spaltenschreibweise“

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad f(e_1) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \text{ und } f(e_2) = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

Dann wird f bezüglich der Standardbasis beschrieben durch ein rechteckiges Schema $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Dies nennen wir eine 2×2-Matrix.

4.1 Matrizen

Sei K ein Körper. Eine *$m \times n$-Matrix über K* ist eine Anordnung von mn Elementen aus K nach folgendem Schema

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Wir schreiben auch einfach

$$(a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \quad \text{oder} \quad (a_{ij})$$

und nennen die waagrecht geschriebenen n-Tupel $\begin{pmatrix} a_{i1} & \dots & a_{in} \end{pmatrix}$ die *Zeilen* und die senkrecht geschriebenen m-Tupel $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ die *Spalten* der Matrix. Es ist dann m die Anzahl der Zeilen und n ist die Anzahl der Spalten.
Mit $\mathrm{M}_{m \times n}(K)$ bezeichnen wir die Menge aller $m \times n$-Matrizen über K. Zum

Beispiel

$$\mathrm{M}_{2\times 3}(K) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \;\middle|\; a_{ij} \in K \text{ für } {\textstyle {i=1,2 \atop j=1,2,3}} \right\}$$

$$\mathrm{M}_{3\times 2}(K) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \;\middle|\; a_{ij} \in K \text{ für } {\textstyle {i=1,2,3 \atop j=1,2}} \right\}$$

Es ist $\mathrm{M}_{m\times n}(K)$ ein mn-dimensionaler K-Vektorraum bezüglich komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) := (a_{ij} + b_{ij}) \quad \lambda(a_{ij}) := (\lambda a_{ij})$$

Eine Basis bilden die Matrizen $\vec{e}_{ij}$, die am Kreuzungspunkt der i-ten Zeile mit der j-ten Spalte eine 1 haben und sonst nur aus Nullen bestehen. Zum Beispiel für $m = n = 2$ bilden

$$\vec{e}_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; \vec{e}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; \vec{e}_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; \vec{e}_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis von $\mathrm{M}_{2\times 2}(K)$.

4.2 Produkt von Matrizen

Das Produkt $A \cdot B$ zweier Matrizen A, B ist nur definiert, wenn die Anzahl der Spalten von A gleich der Anzahl der Zeilen von B ist.

Definition.
Sei $A = (a_{ik})_{\substack{i=1,\dots,m \\ k=1,\dots,n}}$ eine $m \times n$-Matrix und $B = (b_{kj})_{\substack{k=1,\dots,n \\ j=1,\dots\ell}}$ eine $n \times \ell$-Matrix. Dann heißt die Matrix $C = (c_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,\ell}}$ mit

$$\boxed{\begin{aligned} c_{ij} &:= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \end{aligned}}$$

das *Produkt* von $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$ und $B \in \mathrm{M}_{n\times \ell}(K)$. Es ist $C \in \mathrm{M}_{m\times \ell}(K)$. Wir schreiben $C = A \cdot B$ oder einfach $C = AB$.

Bemerkung (Merkregel).
Es ist (bezüglich des noch zu definierenden *Standardskalarprodukts*, vgl. 7.8)

$$\begin{aligned} c_{ij} &= (a_{i1}, \dots, a_{in}) \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} \qquad \text{für } {}^{i=1,\dots,m}_{j=1,\dots,\ell} \\ &= \underbrace{(i\text{-te Zeile von } A)}_{\in \mathrm{M}_{1\times n}(K)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} j\text{-te} \\ \text{Spalte} \\ \text{von } B \end{pmatrix}}_{\in \mathrm{M}_{n\times 1}(K)} \end{aligned}$$

Beispiele.

1.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{3 Spalten}} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}}_{\text{3 Zeilen}} = \begin{pmatrix} \text{1. Zeile mal 1. Spalte, 1. Zeile mal 2. Spalte} \\ \text{2. Zeile mal 1. Spalte, 2. Zeile mal 2. Spalte} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3+5+7, & 4+6+8 \\ 6+10+14, & 8+12+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 18 \\ 30 & 36 \end{pmatrix}$$

2.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}}_{\text{2 Spalten}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{2 Zeilen}} = \begin{pmatrix} 3+8, & 3+8, & 3+8 \\ 5+12, & 5+12, & 5+12 \\ 7+16, & 7+16, & 7+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 11 & 11 \\ 17 & 17 & 17 \\ 23 & 23 & 23 \end{pmatrix}$$

3.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}}_{\text{3 Spalten}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{3 Zeilen}} = \begin{pmatrix} 3+5+7, & 6+10+14 \\ 4+6+8, & 8+12+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 30 \\ 18 & 36 \end{pmatrix}$$

4.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\cdot 1 + a_{12}\cdot 0 \\ a_{12}\cdot 1 + a_{22}\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \qquad (= \text{1. Spalte})$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\cdot 0 + a_{12}\cdot 1 \\ a_{12}\cdot 0 + a_{22}\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \qquad (= \text{2. Spalte})$$

Hierdurch wird eine K-lineare Abbildung $f : K^2 \longrightarrow K^2$ definiert (vgl. 3.18).

5. Produkt von Diagonalmatrizen $\in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$. Eine Matrix der Form
$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$$
heißt *Diagonalmatrix*. Die Multiplikation zweier Diagonalmatrizen ist besonders einfach
$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2b_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}$$

4.3 Transponierte Matrix

Ist $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$, so heißt
$${}^tA := (a_{ji}) \in \mathrm{M}_{n\times m}(K)$$
die *zu A transponierte Matrix*. Es gelten die Regeln:

1. ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$ für $A, B \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$
2. ${}^t(\lambda A) = \lambda({}^tA)$ für $\lambda \in K$
3. ${}^t({}^tA) = A$ für $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$
4. ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ für $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$, $B \in \mathrm{M}_{n\times \ell}(K)$ (vgl. Beispiele 4.2 1. und 3.).

Wir erhalten ${}^tA$, indem wir die Zeilen von A als Spalten schreiben. Ist speziell $m = n$, so entsteht ${}^tA$ durch Spiegelung an der Diagonalen
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

4.4 Die Matrix $\mathrm{M}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(f)$ einer linearen Abbildung

Seien V, W zwei endlich dimensionale K-Vektorräume und sei
$$\mathrm{Hom}_K(V, W) := \{f : V \longrightarrow W \mid f \text{ ist } K\text{-linear}\}$$

Dann ist $\mathrm{Hom}_K(V,W)$ ein Teilraum von $\mathrm{Abb}(V,W)$, also insbesondere selbst ein K-Vektorraum. Sei $\dim_K V = n$ und $\dim_K W = m$. Wir wählen eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V und eine Basis $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$ von W. Dann ordnen wir jedem $f \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$ eine von $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ abhängige Matrix $\mathrm{M}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$, genannt *Darstellungsmatrix*, wie folgt zu:
Sei für $j = 1, \dots, n$

$$\boxed{f(v_j) = a_{1j}w_1 + a_{2j}w_2 + \cdots + a_{mj}w_m}$$

die gemäß 3.4 eindeutige Basisdarstellung von $f(v_j) \in W$. Die Koeffizienten $a_{1j}, \dots, a_{mj} \in K$ schreiben wir nun als **j-te Spalte** $(j = 1, \dots, n)$ der Matrix

$$\mathrm{M}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Satz.
Die Abbildung

$$\mathrm{M}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} : \mathrm{Hom}_K(V,W) \longrightarrow \mathrm{M}_{m\times n}(K), \quad f \longmapsto \mathrm{M}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(f)$$

ist ein Isomorphismus von K-Vektorräumen.

Beweis. **K-Linearität** Seien $f, g \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$ zwei K-lineare Abbildungen und seien für $j = 1, \dots n$

$$\begin{aligned} f(v_j) &= a_{1j}w_1 + a_{2j}w_2 + \cdots + a_{mj}w_m \\ g(v_j) &= b_{1j}w_1 + b_{2j}w_2 + \cdots + b_{mj}w_m \end{aligned}$$

die Basisdarstellungen von $f(v_j)$ und $g(v_j)$. Es folgt

$$\begin{aligned} \mathrm{M}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(f+g) &= (a_{ij} + b_{ij}) = (a_{ij}) + (b_{ij}) = \mathrm{M}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(f) + \mathrm{M}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(g) \\ \mathrm{M}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(\lambda f) &= (\lambda a_{ij}) = \lambda(a_{ij}) = \lambda \mathrm{M}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(f) \quad \forall \lambda \in K \end{aligned}$$

und $\mathrm{M}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$ ist damit K-linear.

Bijektivität Sei $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$. Dann gibt es nach 3.18 genau eine K-lineare Abbildung

$$f : V \longrightarrow W, \quad \text{mit} \quad f(v_j) = a_{1j}w_1 + a_{2j}w_2 + \cdots + a_{mj}w_m$$

für $j = 1, \dots, n$, also mit $A = \mathrm{M}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(f)$. Dies zeigt, dass $\mathrm{M}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$ bijektiv ist. □

Beispiele.
Sei

$$\boxed{f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \longmapsto (3x - 2y, x + y)}$$

1. Sei $\mathcal{B} = \mathcal{C} = \{(1,0),(0,1)\}$, dann ist $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, denn $f(1,0) = (3,1)$ und $f(0,1) = (-2,1)$.
2. Ist $\mathcal{B} = \{(1,0),(0,1)\}$ und $\mathcal{C} = \{(3,1),(-2,1)\}$, so ist $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, denn $f(1,0) = 1(3,1) + 0(-2,1)$ und $f(0,1) = 0(3,1) + 1(-2,1)$.

4.5 Die Dimension von $\mathrm{Hom}_K(V, W)$

Satz.
Sind V, W endlich dimensionale Vektorräume, so ist auch $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ endlich dimensional, und es gilt

$$\boxed{\dim_K \mathrm{Hom}_K(V, W) = (\dim_K V) \cdot (\dim_K W)}$$

Beweis. Sei $\dim_K V = n$ und sei $\dim_K W = m$. Dann gibt es nach Satz 4.4 einen Isomorphismus $\mathrm{Hom}_K(V, W) \simeq \mathrm{M}_{m \times n}(K)$. Aus Satz 3.21 folgt dann die Behauptung, da $\dim_K \mathrm{M}_{m \times n}(K) = mn$ nach 4.1 gilt. $\square$

Definition.
Sei V ein K-Vektorraum, dann heißt

$$\boxed{V^* := \mathrm{Hom}_K(V, K)}$$

der *Dualraum* von V.

Ist V endlich dimensional, dann ist auch V^* ein endlich dimensionaler K-Vektorraum, und für $W = K$ folgt aus Satz 4.5

$$\dim_K V^* = \dim_K \mathrm{Hom}_K(V, K) = (\dim_K V)\,\underbrace{(\dim_K K)}_{=1} = \dim_K V$$

4.6 Die Darstellungsmatrix $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id})$

Sei V ein K-Vektorraum und $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ Basis von V. Dann gehört zur *Identität*

$$\mathrm{id} : V \longrightarrow V, \quad v \longmapsto v$$

die Matrix

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} =: E_n \in \mathrm{M}_{n\times n}(K),$$

denn $\mathrm{id}(v_j) = v_j = 1v_j$ für $j = 1, \dots, n$. Wir nennen E_n auch *Einheitsmatrix* in $\mathrm{M}_{n\times n}(K)$.

4.7 Die Darstellungsmatrix $\mathrm{M}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}}(f \circ g)$

Seien U, V, W endlich dimensionale K-Vektorräume,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= (u_1, \dots, u_\ell) \text{ eine Basis von } U \\ \mathcal{B} &= (v_1, \dots, v_n) \text{ eine Basis von } V \\ \mathcal{C} &= (w_1, \dots, w_m) \text{ eine Basis von } W \end{aligned}$$

Sind $g : U \longrightarrow V$ und $f : V \longrightarrow W$ K-linear, so ist auch

$$f \circ g : U \longrightarrow W, \quad u \longmapsto f(g(u))$$

K-linear, und es gilt:

$$\boxed{\mathrm{M}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}}(f \circ g) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f) \cdot \mathrm{M}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(g)}$$

Die Hintereinanderausführung von linearen Abbildungen entspricht der Multiplikation von Matrizen.

Beweis. Es ist

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{M}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1\ell} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{n\ell} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{M}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}}(f \circ g) = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1\ell} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{m\ell} \end{pmatrix}$$

wobei

(1) $$f(v_k) = a_{1k}w_1 + \cdots + a_{mk}w_m \text{ für } k = 1, \dots, n$$

(2) $$g(u_j) = b_{1j}v_1 + \cdots + b_{nj}v_n \text{ für } j = 1, \dots, \ell$$

(3) $$(f \circ g)(u_j) = c_{1j}w_1 + \cdots + c_{mj}w_m \text{ für } j = 1, \dots, \ell$$

Für $j = 1, \dots, \ell$ gilt ferner:

$$\begin{aligned}
(f \circ g)(u_j) = f(g(u_j)) &\underset{(2)}{=} f(b_{1j}v_1 + \dots + b_{nj}v_n) \\
&= b_{1j}f(v_1) + \dots + b_{nj}f(v_n), \text{ da } f \ K\text{-linear} \\
&\underset{(1)}{=} b_{1j}(a_{11}w_1 + \dots + a_{m1}w_m) + \dots + b_{nj}(a_{1n}w_1 + \dots + a_{mn}w_m) \\
&= \underbrace{(a_{11}b_{1j} + \dots + a_{1n}b_{nj})}_{c_{1j}} w_1 + \dots + \underbrace{(a_{m1}b_{1j} + \dots + a_{mn}b_{nj})}_{c_{mj}} w_m
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich mit (3) ergibt:

$$\boxed{c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \dots + a_{in}b_{nj} \text{ für } i = 1, \dots, m}$$

Nach Definition 4.2 der Matrizenmultiplikation folgt die Behauptung. □

4.8 Rechenregeln für lineare Abbildungen

Satz.
Sind U, V, W drei K-Vektorräume, so ist die Verknüpfung

$$\mathrm{Hom}_K(U,V) \times \mathrm{Hom}_K(V,W) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(U,W), \quad (g,f) \longmapsto f \circ g$$

assoziativ und bilinear. Letzteres heißt, dass für $f, f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$, $g, g_1, g_2 \in \mathrm{Hom}_K(U,V)$ und $\lambda \in K$ gilt

$$\begin{aligned}
f \circ (g_1 + g_2) &= f \circ g_1 + f \circ g_2 & \qquad f \circ \lambda g &= \lambda(f \circ g) \\
(f_1 + f_2) \circ g &= f_1 \circ g + f_2 \circ g & \qquad \lambda f \circ g &= \lambda(f \circ g)
\end{aligned}$$

Beweis. Assoziativität ist trivial. Für $u \in U$ ist

$$\begin{aligned}
(f \circ (g_1 + g_2))(u) &= f((g_1 + g_2)(u)) = f(g_1(u) + g_2(u)) \\
&= f(g_1(u)) + f(g_2(u)) \\
&= (f \circ g_1)(u) + (f \circ g_2)(u) = (f \circ g_1 + f \circ g_2)(u)
\end{aligned}$$

Die anderen Eigenschaften folgen analog. □

Die Rechenregeln für lineare Abbildungen übertragen sich nach 4.4 und 4.7 auf Matrizen.

4.9 Rechenregeln für Matrizen

Sind $A, A' \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$, $B, B' \in \mathrm{M}_{n\times r}(K)$, $C \in \mathrm{M}_{r\times s}(K)$ und $\lambda \in K$, so gelten:

1. $(AB)C = A(BC)$ (Assoziativität)
2. $A(B + B') = AB + AB'$ und $(A + A')B = AB + A'B$
3. $A(\lambda B) = (\lambda A)B = \lambda(AB)$
4. $E_m A = AE_n = A$ (Neutralität der Einheitsmatrix) (vgl. 4.6)

4.10 Koordinatenabbildung

Sei V ein K-Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$. Nach 3.4 besitzt jeder Vektor $v \in V$ eine eindeutige Darstellung

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \text{ mit } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$$

Wir erhalten hierdurch einen Isomorphismus

$$k_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow K^n, \quad v \longmapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

und nennen diesen *Koordinatenabbildung von V bezüglich $\mathcal{B}$*.
($k_{\mathcal{B}}$ ist bijektiv nach Aufgabe 18, weil

$$k_{\mathcal{B}}(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, k_{\mathcal{B}}(v_n) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis von K^n bilden.)
Der Wahl einer Basis von V entspricht also der Wahl eines Isomorphismus $V \xrightarrow{\sim} K^n$.

4.11 Die zu einer Matrix gehörende Standardabbildung

Sei $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$. Dann erhalten wir eine K-lineare Abbildung

$$g : K^n \longrightarrow K^m, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

genannt *Standardabbildung* zur Matrix A.
Dabei ist

$$A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$
$$\underset{4.2}{=} \begin{pmatrix}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n\\ \vdots \qquad\qquad \vdots\\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n\end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{m\times 1}(K)$$

Insbesondere gilt für den j-ten Standardbasisvektor von K^n

$$e_j = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} \longleftarrow \text{j-te Zeile}$$

dass

$$Ae_j = \begin{pmatrix}a_{1j}\\ a_{2j}\\ \vdots\\ a_{mj}\end{pmatrix} = \text{ j-te Spalte von } A \text{ für } j = 1, \ldots, n$$

Regel: *Die Spalten der Matrix sind die Bilder der Standardbasisvektoren.*

Bemerkung.
Es ist $A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(g)$, wobei $\mathcal{B}$ die Standardbasis von K^n und $\mathcal{C}$ die Standardbasis von K^m ist.

Beispiel.
Sei $f : K^3 \longrightarrow K^2$ gegeben durch die Matrix $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$ bezüglich den Standardbasen von K^2 und K^3. Dann ist (in Spaltenschreibweise)

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$$

Insbesondere wird $\mathrm{bild}(f)$ von $\left\{\binom{1}{4}, \binom{2}{5}, \binom{3}{6}\right\}$ erzeugt.

4.12 Faktorisierung einer linearen Abbildung

Satz.
Sei V ein K-Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$, W ein K-Vektorraum mit Basis $\mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_m\}$ und $f : V \longrightarrow W$ eine K-lineare Abbildung. Ist g die Standardabbildung zur Matrix $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)$, so ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "k_{\mathcal{B}}"', "\simeq"] & W \arrow[d, "k_{\mathcal{C}}", "\simeq"'] \\ K^n \arrow[r, "g"] & K^m \end{tikzcd}$$

kommutativ d.h. es ist

$$\boxed{g \circ k_{\mathcal{B}} = k_{\mathcal{C}} \circ f}$$

Beweis. Für $j = 1, \ldots, n$ ist

$$\begin{aligned} (g \circ k_{\mathcal{B}})(v_j) &= g(k_{\mathcal{B}}(v_j)) && \text{nach Def. von } \circ \\ &= g(e_j) && \text{nach 4.10} \\ &= \ j\text{-te Spalte von } \mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f) && \text{nach 4.11} \end{aligned}$$

Ist

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ mit } f(v_j) = a_{1j}w_1 + \cdots + a_{mj}w_m \text{ (vgl. 4.4)}$$

dann folgt für $j = 1, \ldots, n$

$$\begin{aligned} (k_{\mathcal{C}} \circ f)(v_j) &= k_{\mathcal{C}}(f(v_j)) && \text{nach Def. von } \circ \\ &= k_{\mathcal{C}}(a_{1j}w_1 + \cdots + a_{mj}w_m) && \text{nach 4.4} \\ &= a_{1j}k_{\mathcal{C}}(w_1) + \cdots + a_{mj}k_{\mathcal{C}}(w_m) && \text{da } k_{\mathcal{C}} \ K\text{-linear} \\ &= a_{1j}e_1 + \cdots + a_{mj}e_m && \text{nach 4.10} \\ &= \ j\text{-te Spalte von } \mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f) \end{aligned}$$

Hierbei ist

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_m = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

die Standardbasis des K^m. □

4.13 Invertierbare Matrizen

Eine Matrix $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$ heißt *invertierbar*, wenn es eine Matrix $B \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$ gibt mit

$$BA = E_n$$

Lemma.
Ist $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$ invertierbar, so ist die Standardabbildung $K^n \longrightarrow K^n$, $\vec{x} \longmapsto A\vec{x}$, bijektiv.

(Dabei wird der Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ mit $x_1, \dots, x_n \in K$ als Spalte geschrieben.)

Beweis. Ist $A\vec{x} = \vec{0}$, so folgt $\vec{x} = E_n\vec{x} = BA\vec{x} = \vec{0}$. Die Standardabbildung $K^n \longrightarrow K^n$ ist also injektiv und daher nach 3.23 bijektiv. □

Satz.
Ist $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$ invertierbar und $BA = E_n$, so ist $AB = E_n$, und B ist eindeutig bestimmt.

Beweis. Nach dem Lemma ist die Standardabbildung

$$K^n \longrightarrow K^n \quad \vec{x} \longmapsto A\vec{x}$$

surjektiv. Also gibt es zu jedem $\vec{y} \in K^n$ ein $\vec{x} \in K^n$ mit

$$\vec{y} = A\vec{x} = A(BA)\vec{x} = (AB)A\vec{x} = AB\vec{y}$$

wobei das zweite Gleichheitszeichen nach Voraussetzung gilt. Die Standardabbildung zur Matrix AB ist also die Identität id, und hieraus folgt für die Standardbasis $\mathcal{B}$ von K^n, dass $AB = \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}) = E_n$ nach 4.11 und 4.6 gilt.
Ist $C \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$ eine weitere Matrix mit $CA = E_n$, so folgt $(CA)B = E_nB = B$, also $C = B$, da $AB = E_n$ gilt. □

Bemerkung.
Nach dem Satz gibt es zu jeder invertierbaren Matrix $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$ genau eine Matrix $A^{-1} \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$ mit $A^{-1}A = E_n = AA^{-1}$. Wir nennen A^{-1} die zu A *inverse Matrix*.

Die Matrix

$$T = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \text{ ist invertierbar mit } T^{-1} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$$

denn es ist

$$\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$$

Regel: Ist $T = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ und $\det(T) := ad - bc \neq 0$, dann folgt

$$T^{-1} = \frac{1}{\det(T)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Ist $\det(T) = 0$, dann gibt es keine inverse Matrix (vgl. 6.7 unten).

4.14 Basiswechsel in *V*

Beispiel.
Sei $V = \mathbb{R}^2$ und $\mathcal{B} = \{(1,0),(0,1)\}$. Der Wechsel von $\mathcal{B}$ zur Basis $\mathcal{B}' = \{(5,8),(-1,1)\}$ wird beschrieben durch die Matrix

$$\boxed{T := \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}}$$

denn

$$\begin{aligned} (5,8) &= 5(1,0) + 8(0,1) \\ (-1,1) &= -1(1,0) + 1(0,1) \quad \text{(vgl. 4.4)} \end{aligned}$$

Es ist

$$T^{-1} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} = \mathrm{M}^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id})$$

Satz.
Sei V ein K-Vektorraum, und seien $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und $\mathcal{B}' = \{v'_1, \ldots, v'_n\}$ zwei Basen von V. Dann ist $T := \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}) \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$ invertierbar, und es ist $T^{-1} = \mathrm{M}^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id})$.

Beweis. Es ist

$$\mathrm{M}^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}) \cdot \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}) \underset{4.7}{=} \mathrm{M}^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}) \underset{4.6}{=} E_n$$

□

Wir nennen $T = \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id})$ die *Matrix des Basiswechsels von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}'$* .

4.15 Basiswechsel und Darstellungsmatrix

Seien V, W endlich dimensionale K-Vektorräume, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ zwei Basen von V und $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ zwei Basen von W. Ist $T := \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_V)$ und $S := \mathrm{M}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}'}(\mathrm{id}_W)$, so gilt

$$\boxed{\mathrm{M}^{\mathcal{C}'}_{\mathcal{B}'}(f) = S^{-1}\,\mathrm{M}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(f)\,T}$$

für jede K-lineare Abbildung $f : V \longrightarrow W$.

Beweis. Nach 4.14 ist $S^{-1} = \mathrm{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}(\mathrm{id}_W)$. Es folgt

$$\begin{aligned} S^{-1}\,\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)\,T &= \Big(\mathrm{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}(\mathrm{id}_W)\,\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)\Big)\mathrm{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V) \\ &\underset{4.7}{=} \mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}'}(f)\,\mathrm{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V) \\ &\underset{4.7}{=} \mathrm{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'}(f) \end{aligned}$$

□

4.16 Spezialfall

Folgerung.
Ist speziell $V = W$, dann folgt aus 4.15 für $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ und $\mathcal{B}' = \mathcal{C}'$

$$\boxed{\mathrm{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f) = T^{-1}\,\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)\,T}$$

4.17 Beispiel zu 4.15

Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad (x, y) \longmapsto (3x - 2y, x + y)$$

und $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ die Standardbasis, $\mathcal{B}' = \{(5, 8), (-1, 1)\}$, $\mathcal{C}' = \{(0, 1), (1, 1)\}$. Damit ist

$$\begin{array}{ccccc} f(5,8) & = & (-1,13) & = & 14(0,1) + (-1)(1,1) \\ f(-1,1) & = & (-5,0) & = & 5(0,1) + (-5)(1,1) \end{array}$$

also

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'}(f) = \begin{pmatrix} 14 & 5 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} = S^{-1}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)\,T$$

mit

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad T = \mathrm{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S = \mathrm{M}_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad S^{-1} = \mathrm{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Probe

$$\begin{aligned} S^{-1}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)\,T &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 5 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} = \mathrm{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'}(f) \end{aligned}$$

4.18 Eine geschickte Basiswahl

Satz.
Seien V, W endlich dimensionale K-Vektorräume, und sei $f : V \longrightarrow W$ eine K-lineare Abbildung. Dann gibt es Basen $\mathcal{B}$ von V und $\mathcal{C}$ von W so, dass gilt

$$\mathrm{M}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} E_r & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{mit} \quad r = \dim_K \operatorname{bild} f$$

Hierbei ist $\mathrm{M}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(f)$ in Blöcken dargestellt. Es ist E_r die $(r \times r)$-Einheitsmatrix, und 0 jeweils die Nullmatrix mit passendem Format.

Beweis. Seien $v_1, \ldots, v_r \in V$ so gewählt, dass $f(v_1) = w_1, \ldots, f(v_r) = w_r$ eine Basis von $\operatorname{bild} f$ bilden. Ergänze diese Basis zu einer Basis $\mathcal{C} = (w_1, \ldots, w_m)$ von W. Sei $(u_1, \ldots, u_s)$ eine Basis von $\operatorname{kern} f$. Nach Lemma 3.22 bildet $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_r, u_1, \ldots, u_s)$ eine Basis von V und $\mathrm{M}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(f)$ hat die angegebene Gestalt. □

4.19 Matrizentheoretische Formulierung

Folgerung.
Sei $A \in \mathrm{M}_{m \times n}(K)$ und r die maximale Anzahl linear unabhängiger Spalten von A. Dann gibt es invertierbare Matrizen $S \in \mathrm{M}_{m \times m}(K)$ und $T \in \mathrm{M}_{n \times n}(K)$ so, dass gilt

$$S^{-1}AT = \begin{pmatrix} E_r & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

Beweis. Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von K^n und $\mathcal{C}$ eine Basis von K^m. Nach 4.4 gibt es eine K-lineare Abbildung $f : K^n \longrightarrow K^m$ so, dass $A = \mathrm{M}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(f)$. Nach 4.18 gibt es Basen $\mathcal{B}'$ von K^n und $\mathcal{C}'$ von K^m so, dass gilt

$$\mathrm{M}^{\mathcal{C}'}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} E_r & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

Mit $T := \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_{K^n})$ und $S := \mathrm{M}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}'}(\mathrm{id}_{K^m})$ folgt $S^{-1}AT = \mathrm{M}^{\mathcal{C}'}_{\mathcal{B}'}(f)$ nach 4.14 und 4.15. □

4.20 Rang einer Matrix

Definition.
Der *Rang einer Matrix* $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$ (auch *Spaltenrang* genannt) ist die Dimension des von den Spalten von A erzeugten Teilraumes von K^m.

Bemerkung.
Für die Matrix $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)$ einer K-linearen Abbildung $f : V \longrightarrow W$ gilt

$$\boxed{\operatorname{rang} \mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f) = \dim_K \operatorname{bild}(f)}$$

Beweis. Nach 4.12 gilt $f = k_{\mathcal{C}}^{-1} \circ g \circ k_{\mathcal{B}}$, wobei $k_{\mathcal{C}}$ und $k_{\mathcal{B}}$ Isomorphismen sind und $g : K^n \longrightarrow K^m$ die zu $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)$ gehörige Standardabbildung ist. Es gilt also $\dim_K \operatorname{bild}(f) = \dim_K \operatorname{bild}(g)$. Nach 4.11 wird aber $\operatorname{bild}(g)$ von den Spalten von $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)$ erzeugt. □

Wie in Bemerkung 3.22 definieren wir: $\operatorname{rang}(f) := \dim_K \operatorname{bild}(f)$

4.21 Rang und Invertierbarkeit

Korollar.
Sei $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$. Dann gilt

$$\boxed{A \textit{ ist invertierbar}} \iff \boxed{\operatorname{rang} A = n}$$

Beweis. $\Longrightarrow$ Sei A invertierbar, dann ist die Standardabbildung

$$g : K^n \longrightarrow K^n, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

nach Lemma 4.13 bijektiv. Also ist $\operatorname{rang} A = n$, da nach 4.11 $\operatorname{bild}(g)$ von den Spalten von A erzeugt wird.

$\Longleftarrow$ Sei $\operatorname{rang} A = n$. Dann gibt es nach 4.19 invertierbare Matrizen $S, T \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$ mit $S^{-1}AT = E_n$. Sei $B := TS^{-1}$, dann folgt

$$BA = TS^{-1}A = TS^{-1}ATT^{-1} = TE_nT^{-1} = TT^{-1} = E_n$$

Also ist A invertierbar.

□

4.22 Die allgemeine lineare Gruppe

Satz.

1. *Die Menge der invertierbaren Matrizen*

$$\mathrm{GL}_n(K) := \{A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K) \mid A \textit{ ist invertierbar}\}$$

ist eine Gruppe bezüglich der Matrizenmultiplikation.

2. *Ist V ein n-dimensionaler K-Vektorraum, so ist*

$$\mathrm{GL}(V) := \{f : V \longrightarrow V \mid f \textit{ ist ein Isomorphismus}\}$$

eine Gruppe bezüglich der Hintereinanderausführung von Abbildungen.

3. *Ist $\mathcal{B}$ eine Basis von V, dann ist die Abbildung*

$$\mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} : \mathrm{GL}(V) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(K), \quad f \longmapsto \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$$

ein Isomorphismus von Gruppen.

Beweis. 1. Sind $A, B \in \mathrm{GL}_n(K)$, dann ist auch $AB \in \mathrm{GL}_n(K)$, denn $B^{-1}A^{-1}$ ist ein inverses Element

$$(B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}B = E_n$$

Insbesondere gilt $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Die Matrizenmultiplikation liefert damit eine Verknüpfung

$$\mathrm{GL}_n(K) \times \mathrm{GL}_n(K) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(K)$$

Zu zeigen bleibt die Gültigkeit der Gruppenaxiome (vgl. 2.2).

- Es ist $(AB)C = A(BC)$ nach 4.9.
- E_n ist neutrales Element, da $E_nA = A\ \forall A \in \mathrm{GL}_n(K)$.
- Zu jedem $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ gibt es ein Inverses A^{-1} mit $A^{-1}A = E_n$ nach Definition von $\mathrm{GL}_n(K)$.

2. Sind $f, g \in \mathrm{GL}(V)$, dann ist auch $f \circ g \in \mathrm{GL}(V)$.

- $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ gilt, da die Hintereinanderausführung von Abbildungen assoziativ ist.
- Neutrales Element ist die Identität.
- Die Existenz eines Inversen ergibt sich aus Bemerkung 3.20.

3. Seien $f, g \in \mathrm{GL}(V)$, dann gilt nach 4.7
$$\mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f \circ g) = \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)\, \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(g)$$
d.h., $\mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$ ist ein Gruppenhomomorphismus. Nach Satz 4.4 gibt es zu jeder Matrix $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ genau eine Abbildung $f \in \mathrm{Hom}_K(V, V)$ mit $\mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = A$. Es ist aber dann $f \in \mathrm{GL}(V)$, denn die Umkehrabbildung f^{-1} ergibt sich als Urbild von A^{-1}, da $E_n \underset{4.6}{=} \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id})$ gilt. Daher ist $\mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$ auch bijektiv und damit ein Gruppenisomorphismus.

□

4.23 Die Transponierte einer invertierbaren Matrix

Bemerkung.
Sei $A \in \mathrm{GL}_n(K)$. Dann ist auch die transponierte Matrix ${}^t\!A$ in $\mathrm{GL}_n(K)$ und es gilt
$$\boxed{({}^t\!A)^{-1} = {}^t(A^{-1})}$$

Beweis. Es ist
$${}^t(A^{-1})\, {}^t\!A \underset{4.3}{=} {}^t(AA^{-1}) = {}^t\!E_n = E_n$$

□

4.24 Der Zeilenrang von Matrizen

Definition.
Sei $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$. Der *Zeilenrang* von A ist die Dimension des von den Zeilen erzeugten Teilraumes von K^n.

Satz.
Sei $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$. Dann gilt
$$\boxed{\textit{Spaltenrang von } A} \quad = \quad \boxed{\textit{Zeilenrang von } A}$$

Beweis. Nach 4.19 gibt es invertierbare Matrizen $R \in \mathrm{M}_{m\times m}(K)$ und $T \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$ so, dass
$$RAT = \begin{pmatrix} E_r & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$
Wir zeigen zunächst, dass Spaltenrang von $A =$ Spaltenrang von RAT gilt. Bezeichnet g_B die zur Matrix B gehörige Standardabbildung, so gilt
$$\mathrm{rang}\, B = \dim_K \mathrm{bild}(g_B) =: \mathrm{rang}(g_B)$$

nach 4.11 und 4.20. Es sind $g_T : K^n \longrightarrow K^n$ und $g_R : K^m \longrightarrow K^m$ Isomorphismen nach Lemma 4.13, und g_R vermittelt eine injektive K-lineare Abbildung $\mathrm{bild}(g_A) \longrightarrow K^m$. Es folgt $\mathrm{rang}(g_R \circ g_A \circ g_T) = \mathrm{rang}(g_A)$ und daher $\mathrm{rang}(RAT) = \mathrm{rang}\, A$ nach 4.11 und 4.7. Nun folgt

$$\begin{aligned}
\text{Spaltenrang von } A &= \text{Spaltenrang von } RAT \text{ (eben gezeigt)}\\
&= \text{Spaltenrang von } {}^t(RAT) \text{ (offensichtlich)}\\
&= \text{Spaltenrang von } {}^tT\,{}^tA\,{}^tR \text{ (nach 4.3)}\\
&= \text{Spaltenrang von } {}^tA \text{ (eben gezeigt)}\\
&= \text{Zeilenrang von } A \text{ (nach Definition von } {}^tA \text{ in 4.3)}
\end{aligned}$$

□

4.25 Übungsaufgaben 22 – 30

Aufgabe 22.
Es sei V der Vektorraum aller 3×3-Matrizen über einem Körper K. Man zeige, dass die Abbildung

$$f : V \to K, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \mapsto a_{11} + a_{22} + a_{33}\,,$$

K-linear ist, und konstruiere eine Basis von $\mathrm{kern}(f)$.

Aufgabe 23.
(a) Seien V und W endlich dimensionale K-Vektorräume, $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V und $\mathcal{C} = (w_1, \ldots, w_m)$ eine Basis von W und $f : V \to W$ eine K-lineare Abbildung. Man zeige, dass der von den Spalten von $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(f)$ erzeugte Teilraum von K^m isomorph zu $\mathrm{bild}(f)$ ist.

(b) Sei $f : K^3 \to K^2$ die Standardabbildung zur Matrix $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 7 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. Man bestimme jeweils eine Basis von $\mathrm{bild}(f)$ und $\mathrm{kern}(f)$.

Aufgabe 24.
Für die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 - x_2 + x_3, -6x_2 + 12x_3, -2x_1 + 2x_2 - 2x_3)$$

berechne man die Matrix $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(f)$, falls

(a) $\mathcal{B} = \mathcal{C} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

(b) $\mathcal{B} = \mathcal{C} = \{(-1, 0, 1), (-1, 2, 1), (-2, 0, 4)\}$.

Aufgabe 25.
Eine K-lineare Abbildung $f : V \to V$ heißt *Projektion*, falls $f \circ f = f$ gilt. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Projektion, für die $(1,2) \in \operatorname{kern}(f)$ und $(1,-1) \in \operatorname{bild}(f)$ gelte. Man berechne die Matrix $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(f)$, falls

(a) $\mathcal{B} = \mathcal{C} = \{(1,0),(0,1)\}$

(b) $\mathcal{B} = \mathcal{C} = \{(1,2),(1,-1)\}$.

Aufgabe 26.
Sei $V^* = \operatorname{Hom}_K(V,K)$ der *Dualraum* von V. Für $j = 1,\dots,n$ sei $v_j^* \in V^*$ definiert durch

$v_j^*(v_k) = \begin{cases} 1, & \text{falls } k = j \\ 0, & \text{falls } k \neq j \end{cases}$ für $k = 1,\dots,n$. Man zeige:

(a) $\mathcal{B}^* = (v_1^*,\dots,v_n^*)$ ist eine Basis von V^*.

(b) Ist $f : V \to W$ eine K-lineare Abbildung, so ist die Abbildung

$$^t f : W^* \to V^*,\ \alpha \mapsto \alpha \circ f\,,$$

ebenfalls K-linear.

(c) Ist $A = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(f)$, so gilt $^tA = M^{\mathcal{B}^*}_{\mathcal{C}^*}(^tf)$ für die *transponierte Matrix* ^tA.

Aufgabe 27.
Gegeben seien die Basen $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ und

$$\mathcal{B}' = \{(3,-1,0),(-1,-1,1),(-3,2,-1)\}$$

von $\mathbb{R}^3$ sowie die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$(x_1,x_2,x_3) \mapsto (-5x_1 - 18x_2 - 24x_3, 4x_1 + 13x_2 + 16x_3, -2x_1 - 6x_2 - 7x_3).$$

(a) Man berechne die Matrizen $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ und $M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f)$.

(b) Man berechne die Matrizen $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id})$ und $M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id})$.

(c) Man verifiziere die Gleichung $M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f) = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id})$.

Aufgabe 28.
Gegeben seien die Basen

$$\mathcal{B} = \{(17,-25,1),(0,1,0),(16,0,1)\} \text{ und } \mathcal{B}' = \{(1,0,0),(0,1,0),(16,2,1)\}$$

von $\mathbb{R}^3$ sowie die Basen $\mathcal{C} = \{(1,0),(0,1)\}$ und $\mathcal{C}' = \{(3,7),(2,5)\}$ von $\mathbb{R}^2$.

Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ eine R-lineare Abbildung mit der Matrix

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 7 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

(a) Man berechne die Matrizen $S := M_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$, $T := M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ und $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'}(f)$.
(b) Man verifiziere die Gleichung $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'}(f) = S^{-1} \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f) \cdot T$.

Aufgabe 29.
Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine R-lineare Abbildung mit der Matrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ von $\mathbb{R}^3$. Man berechne die Matrix $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f)$ für die Basis

$$\mathcal{B}' = \{(2,1,2),(1,2,2),(2,2,3)\}.$$

Aufgabe 30.
(a) Sei $f : V \to V$ eine K-lineare Abbildung, und seien $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ zwei Basen von V. Man zeige:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f) \in \mathrm{GL}_n(K) \iff f \text{ ist ein Isomorphismus.}$$

(b) Man zeige: Die Abbildung $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} : \mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}_n(K)$, $f \mapsto M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$, ist ein Isomorphismus von Gruppen.

5 Lineare Gleichungssysteme

Sei $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in K^m$. Gesucht sind alle Vektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$, für die gilt

$$\boxed{A\vec{x} = \vec{b}}$$

oder ausführlich (gemäß Definition 4.2 der Matrizenmultiplikation für $A\vec{x}$)

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Wir nennen $A\vec{x} = \vec{b}$ ein *lineares Gleichungssystem* mit m Gleichungen in n Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$.

5.1 Beispiele

1. Das System $A\vec{x} = \vec{0}$ heißt *homogenes lineares Gleichungssystem*. Die Menge der Lösungen ist der Kern der Standardabbildung

$$K^n \longrightarrow K^m, \quad \vec{x} \longmapsto A\vec{x}$$

   Insbesondere ist $A\vec{x} = \vec{0}$ lösbar, da $\vec{0} \in K^n$ stets eine Lösung ist.

2. Sei $K = \mathbb{R}$. Das System

$$\begin{array}{rcrcl} \sqrt{3}x_1 & - & 3x_2 & = & 0 \\ x_1 & - & \sqrt{3}x_2 & = & 1 \end{array}$$

   besitzt keine Lösung (vgl. Aufgabe 3c).

5.2 Lösbarkeitskriterien

Seien $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$ und $f : K^n \longrightarrow K^m$, $\vec{x} \longmapsto A\vec{x}$, die zugehörige Standardabbildung. Dann gelten

1. Äquivalent sind
   (a) Das System $A\vec{x} = \vec{b}$ ist lösbar, d.h. hat mindestens eine Lösung
   (b) $\vec{b} \in \operatorname{bild} f$
   (c) $\operatorname{rang} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \operatorname{rang} \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$
   „Rang von A = Rang der um $\vec{b}$ erweiterten Matrix $(A|\vec{b})$."

2. Äquivalent sind
   (a) $A\vec{x} = \vec{b}$ ist *universell lösbar*, d.h. für jedes $\vec{b} \in K^m$ lösbar.
   (b) f ist surjektiv
   (c) $\operatorname{rang} A = m$

3. Äquivalent sind
   (a) $A\vec{x} = \vec{b}$ ist *eindeutig lösbar*, d.h. hat genau eine Lösung
   (b) $\operatorname{rang} A = n = \operatorname{rang}\,(A|\vec{b})$

4. Falls $m = n$ (n Gleichungen und n Unbekannte), dann sind äquivalent

(a) $A\vec{x} = \vec{b}$ ist *eindeutig lösbar*

(b) $\operatorname{rang} A = n$

In diesem Fall ist $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ die Lösung.

5. Ist $m < n$ (weniger Gleichungen als Unbekannte), so hat das homogene System $A\vec{x} = \vec{0}$ stets eine Lösung $\neq \vec{0}$ (nicht triviale Lösung).

Beweis. **zu 1., 2.** 1. und 2. gelten, weil $\operatorname{bild}(f)$ von den Spalten von A erzeugt wird (vgl. 4.11) und also

$$\boxed{\dim_K \operatorname{bild}(f) = \operatorname{rang} A}$$

ist (vgl. 4.20).

zu 3. Wenn das System $A\vec{x} = \vec{b}$ lösbar ist, so gilt

$$A\vec{x} = \vec{b} \text{ ist eindeutig lösbar } \iff \operatorname{kern}(f) = \{\vec{0}\}$$

„$\Longrightarrow$“ $\vec{z} \in \operatorname{kern}(f) \Longrightarrow A(\vec{x} + \vec{z}) = A\vec{x} + A\vec{z} = \vec{b} + \vec{0}$. Damit ist $\vec{z} = \vec{0}$, da wir sonst zwei verschiedene Lösungen hätten.

„$\Longleftarrow$“ $\operatorname{kern}(f) = \{\vec{0}\} \underset{\text{Satz } 3.19}{\Longrightarrow} f$ injektiv $\Longrightarrow$ Eindeutigkeit

3. folgt nun aus 1. und der Formel

$$n \underset{3.22}{=} \dim_K \operatorname{kern}(f) + \operatorname{rang} A$$

zu 4. Da $m = n$ ist gilt

$$\operatorname{rang} A = n \underset{4.21}{\iff} A \text{ invertierbar}$$

zu 5.

$$\begin{aligned} m < n &\Longrightarrow \dim_K \operatorname{bild}(f) < n \\ &\Longrightarrow \dim_K \operatorname{kern} f > 0, \text{ da } n \underset{3.22}{=} \dim_K \operatorname{kern}(f) + \dim_K \operatorname{bild}(f) \\ &\Longrightarrow \text{ Behauptung folgt nach 5.1 1.} \end{aligned}$$

□

5.3 Die Menge der Lösungen

Sei $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$ und $f : K^n \longrightarrow K^m, \quad \vec{x} \longmapsto A\vec{x}$. Das System $A\vec{x} = \vec{b}$ sei lösbar. Wenn $\vec{x}_0 \in K^n$ irgendeine Lösung ist, so ist

$$\boxed{\vec{x}_0 + \operatorname{kern} f := \{\vec{x}_0 + \vec{x} \mid \vec{x} \in \operatorname{kern} f\}}$$

die Menge aller Lösungen des Systems; sie ist im allgemeinen kein Teilraum von K^n, aber ein sogenannter „affiner Unterraum“.
Insbesondere ist ein lösbares Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ genau dann eindeutig lösbar, wenn das zugehörige homogene System $A\vec{x} = \vec{0}$ nur die triviale Lösung $\vec{x} = \vec{0}$ hat (und in diesem Fall gilt: Anzahl der Gleichungen $\geq$ Anzahl der Unbekannten nach 5.2 5.).

Beweis. Ist $\vec{x}_1 \in K^n$ eine Lösung, dann folgt

$$A(\vec{x}_1 - \vec{x}_0) = A\vec{x}_1 - A\vec{x}_0 = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}$$
$$\Longrightarrow \vec{x}_1 - \vec{x}_0 \in \operatorname{kern} f \Longrightarrow \vec{x}_1 \in \vec{x}_0 + \operatorname{kern} f$$

Ist umgekehrt $\vec{x}_1 \in \vec{x}_0 + \operatorname{kern} f$, also $\vec{x}_1 = \vec{x}_0 + \vec{x}$ mit $\vec{x} \in \operatorname{kern} f$, dann gilt

$$A\vec{x}_1 = A(\vec{x}_0 + \vec{x}) = A\vec{x}_0 + A\vec{x} = \vec{b} + \vec{0} = \vec{b}$$

$\square$

Beispiel.
Zu lösen ist das System

$$\begin{array}{rcrcrcr} -x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & -2 \\ 3x_1 & + & -8x_2 & + & -2x_3 & = & 4 \\ x_1 & + & & + & 4x_3 & = & -2 \end{array}$$

Methode: Es ist

$$(A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & -8 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 4 & -2 \end{array}\right)$$

Addiere das 3-fache der 1. Zeile zur 2. Zeile
Addiere die 1. Zeile zur 3. Zeile

$$M_1 := \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 5 & -4 \end{array}\right)$$

Addiere die 2. Zeile zur 3. Zeile

$$M_2 := \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & -6 \end{array}\right)$$

Es folgt

$$
\begin{aligned}
& & 6x_3 = -6 &\Longrightarrow x_3 = -1 \\
\Longrightarrow & & -2x_2 - 1 = -2 &\Longrightarrow x_2 = 1/2 \\
\Longrightarrow & & -x_1 + 2\frac{1}{2} + 1(-1) = -2 &\Longrightarrow x_1 = 2
\end{aligned}
$$

5.4 Elementare Umformungen einer Matrix

Sei $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$. Eine *elementare Zeilenumformung von A* ist einer der folgenden Vorgänge:

I) Vertauschung zweier Zeilen

II) Multiplikation einer Zeile mit einem $\lambda \in K^\star = K \setminus \{0\}$

III) Addition des λ-fachen einer Zeile zu einer anderen Zeile, $\lambda \in K$

Entsprechend ist eine elementare *Spaltenumformung* definiert.

Bemerkung.
Elementare Umformungen ändern den Rang einer Matrix nicht (vgl. Aufgabe 32a).

5.5 Elementare Umformungen und die Lösungsmenge

Bemerkung.
Sei $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$ und $\vec{b} \in K^m$. Geht die Matrix $(A|\vec{b})$ durch elementare **Zeilen**transformationen in die Matrix $(A'|\vec{b}')$ über, so haben die linearen Gleichungssysteme $A\vec{x} = \vec{b}$ und $A'\vec{x} = \vec{b}'$ dieselbe Lösungsmenge.

Beweis. Elementare Zeilenumformungen von $(A|\vec{b})$ bewirken, dass zwei Gleichungen vertauscht werden (I), eine Gleichung mit $\lambda \neq 0$ multipliziert wird (II) oder ein Vielfaches einer Gleichung zu einer anderen addiert wird (III). Die Lösungen von $A\vec{x} = \vec{b}$ sind also auch Lösungen von $A'\vec{x} = \vec{b}'$.
Da man die genannten Vorgänge auch durch ebensolche wieder rückgängig machen kann, sind die Lösungen von $A'\vec{x} = \vec{b}'$ auch die Lösungen des Systems $A\vec{x} = \vec{b}$. □

Elementare Spaltenumformungen verändern die Lösungsmenge.
Spaltenvertauschungen kann man zur Lösung benutzen, muss aber dann die Unbekannten entsprechend umnummerieren.

5.6 Gaußscher Algorithmus ($m = n = \operatorname{rang} A$)

Sei $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$ und $\operatorname{rang} A = n$. In diesem Fall ist das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ eindeutig lösbar (vgl. 5.2 4.), und in jeder Spalte von A gibt es ein Element ungleich Null.

1. Schritt Wir starten mit der Matrix $(A|\vec{b})$ und erreichen durch Zeilenvertauschungen (falls nötig) dass $a_{11} \neq 0$ ist. Addiere das $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$-fache der ersten Zeile zur i-ten Zeile für $i = 2, \ldots, n$. Wir erhalten eine Matrix der Form

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11}^* & a_{12}' & \cdots & a_{1n}' & b_1' \\ 0 & a_{22}' & \cdots & a_{2n}' & b_2' \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n1}' & \cdots & a_{nn}' & b_n' \end{array}\right)$$

2. Schritt Durch eventuelle Zeilenvertauschung mit einer Zeile, die ungleich der 1. Zeile ist (beachte: $\operatorname{rang} A = n$), stellen wir sicher, dass $a_{22}' \neq 0$ ist. Addieren wir nun das $-\frac{a_{i2}'}{a_{22}'}$-fache der 2. Zeile zur i-ten Zeile für jedes $i \neq 2$, dann ergibt sich eine Matrix der Form

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^* & 0 & a_{13}'' & \cdots & a_{1n}'' & b_1'' \\ 0 & a_{22}^* & a_{23}'' & \cdots & a_{2n}'' & b_2'' \\ 0 & 0 & a_{33}'' & \cdots & a_{3n}'' & b_3'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}'' & \cdots & a_{nn}'' & b_n'' \end{array}\right)$$

Wir iterieren nun dieses Verfahren. Da $\operatorname{rang} A = n$ ist, können wir im k-ten Schritt stets durch eventuelle Zeilenvertauschung unter den Zeilen $k, \ldots, n$ erreichen, dass das Element an der Stelle (k, k) ungleich Null ist. Schließlich ergibt sich eine Matrix der Form

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11}^* & 0 & \cdots & 0 & b_1^* \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^* & b_n^* \end{array}\right)$$

Nach 5.5 ist die Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$ gegeben durch

$$\boxed{x_i = \frac{b_i^*}{a_{ii}^*} \qquad \forall i = 1, \ldots, n}$$

5.7 Verfahren zur Inversion einer Matrix

Sei $A \in \mathrm{GL}_n(K)$. Dann ist $\operatorname{rang} A = n$ (vgl. 4.21). Wenden wir die Umformungen aus 5.6 auf A an und multiplizieren am Schluss die i-te Zeile mit $1/a^*_{ii}$, so erhalten wir die Einheitsmatrix E_n

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten nun A^{-1}, indem wir alle elementaren Umformungen, die A in E_n überführt haben, in derselben Reihenfolge auf E_n anwenden.

Beispiel.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_2 - \frac{8}{5}Z_1} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & \frac{13}{5} \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_1 + \frac{5}{13}Z_2} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & \frac{13}{5} \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{5}{13}Z_2]{\frac{1}{5}Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_2 - \frac{8}{5}Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{8}{5} & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_1 + \frac{5}{13}Z_2} \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & \frac{5}{13} \\ -\frac{8}{5} & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{5}{13}Z_2]{\frac{1}{5}Z_1} \begin{pmatrix} \frac{1}{13} & \frac{1}{13} \\ -\frac{8}{13} & \frac{5}{13} \end{pmatrix} = A^{-1}$$

(vgl. 4.13)

5.8 Gaußscher Algorithmus

Sei $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$. Um das System $A\vec{x} = \vec{b}$ zu lösen, führen wir solange elementare Zeilenumformungen der Matrix $(A|\vec{b})$ durch, bis die Gestalt

$$\left(\begin{array}{cccc|c|ccc|c} a'_{11} & * & \cdots & * & * & \cdots & \cdots & * & b'_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a'_{\ell\ell} & * & \cdots & \cdots & * & \vdots \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & * & \cdots & * & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & * & \cdots & * & b'_m \end{array}\right) \quad \text{mit } a'_{ii} \neq 0 \text{ für } i = 1, \ldots, \ell$$

erreicht ist. Durch Vertauschung der Spalten $\ell + 1, \ldots, n$ können wir das Verfahren fortsetzen, müssen dann aber die Unbekannten entsprechend umnummerieren. Schließlich erhalten wir eine Matrix der Form

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc|c}
a''_{11} & * & \cdots & * & * & \cdots & \cdots & * & b''_1 \\
0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & * & \vdots & & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & a''_{kk} & * & \cdots & \cdots & * & b''_k \\
\hline
0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b''_{k+1} \\
\vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b''_m
\end{array}\right) \quad \text{mit } a''_{ii} \neq 0 \text{ für } i = 1, \ldots, k$$

Der Rang von A und die Lösbarkeit des Systems lassen sich nun einfach ablesen: $\operatorname{rang} A = k$, und $A\vec{x} = \vec{b}$ ist lösbar genau dann, wenn $b''_{k+1} = \cdots = b''_m = 0$ (vgl. 5.2 1.).

Beispiel.
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es folgt

$$(A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1 \leftrightarrow Z_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_2 - Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{S_2 \leftrightarrow S_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_3 + Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Es folgt, dass $\operatorname{rang} A = 2$ und $\operatorname{rang}(A|\vec{b}) = 3$ ist. Das System ist deshalb nach 5.2 1. nicht lösbar.

5.9 Übungsaufgaben 31 – 35

Sofern nicht anders vermerkt, beziehen sich die folgenden Aufgaben auf den Körper $\mathbb{R}$.

Aufgabe 31.
Problem aus einem Altchinesischen Mathematikbuch: Wieviele Hähne, Hennen und Küken kann man für 100 Münzen kaufen, wenn man insgesamt 100 Vögel haben will, und ein Hahn 5 Münzen, eine Henne 3 Münzen und drei Küken 1 Münze kosten? Die 100 Münzen sollen hierbei vollständig verbraucht werden.

Man stelle ein passendes lineares Gleichungssystem auf und gebe eine Lösung dieses Systems an, die auch das Problem löst. Man ermittle dann die Menge aller Lösungen des Systems.

Aufgabe 32.
Sei K ein beliebiger Körper. Man zeige:

a) Geht eine Matrix $B \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$ durch elementare Umformungen aus einer Matrix $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$ hervor, so gilt $\operatorname{rang}(B) = \operatorname{rang}(A)$.

b) Jede $m \times n$-Matrix kann durch elementare Umformungen in eine $m \times n$-Matrix der Form

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1r} & \dots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2r} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & c_{rr} & \dots & c_{rn} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

gebracht werden mit $c_{ii} \neq 0$ für $i = 1, \dots, r$.

c) Es ist $\operatorname{rang}(C) = r$.

Bemerkung. Aufgabe 32 liefert ein Verfahren zur Bestimmung des Ranges einer Matrix. Man bringt die Matrix durch elementare Umformungen auf eine Matrix der Gestalt C und kann dann den Rang direkt ablesen.

Aufgabe 33.
Es seien $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ sowie $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) Man bestimme $\operatorname{rang}(A)$, $\operatorname{rang}(A|\vec{b})$ und $\operatorname{rang}(A|\vec{c})$.

b) Man bestimme die Dimension des Lösungsraumes

$$U := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^6 \mid A\vec{x} = \vec{0}\}$$

und löse das homogene Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{0}$.

c) Man ermittle jeweils die Lösungsmenge der Gleichungssysteme $A\vec{x} = \vec{b}$ und $A\vec{x} = \vec{c}$.

Aufgabe 34.
In Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$ bestimme man die Lösungsmenge des Gleichungssystems
$tx_1 + x_2 + x_3 = 1$
$x_1 + tx_2 + x_3 = 1$
$x_1 + x_2 + tx_3 = 1$.

Aufgabe 35.
(a) Für zwei Matrizen $A, B \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$ zeige man:

$$\operatorname{rang}(A \cdot B) \leq \operatorname{rang}(A) \quad \text{und} \quad \operatorname{rang}(A \cdot B) \leq \operatorname{rang}(B)\,.$$

(b) Man zeige: Sind $R \in \mathrm{GL}_m(K)$, $T \in \mathrm{GL}_n(K)$ und $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$, so ist

$$\operatorname{rang}(R \cdot A \cdot T) = \operatorname{rang}(A)\,.$$

6 Die Determinante einer $n \times n$-Matrix

Beispiele.

1. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2\times 2}(K) \quad \Longrightarrow \quad \det A := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \in K$

2. *Sarrussche Regel:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3\times 3}(K)$$

$$\Longrightarrow \quad \det A = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} & + & a_{12}a_{23}a_{31} & + & a_{21}a_{32}a_{13} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} & - & a_{12}a_{21}a_{33} & - & a_{23}a_{32}a_{11} \end{matrix} \in K$$

3.
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \det A = 30 + 42 - 48 - 24 = 0$$

6.1 Definition der Determinante

Die Determinante einer $n\times n$-Matrix wird durch den folgenden Satz definiert.

Satz.
Es gibt genau eine Abbildung

$$\det : \mathrm{M}_{n\times n}(K) \longrightarrow K, \quad A \longmapsto \det A$$

mit den Eigenschaften:

1. det *ist linear in jeder Zeile*

2. *Ist* $\operatorname{rang} A < n$*, so ist* $\det A = 0$

3. $\det E_n = 1$

Wir nennen $\det A$ die *Determinante* von $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$ und det die *Determinante*.
Der Beweis des Satzes erfolgt in 6.3 und 6.5 unten.

Bedeutung von 1. Seien $z_1, \ldots, z_n$ die Zeilen von $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$. Dann lässt sich A schreiben als

$$A = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

und 1. bedeutet:

$$\det \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i + z_i' \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i' \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \det \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ \lambda z_i \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

für $i = 1, \ldots, n$ und $\lambda \in K$. An den mit Punkten versehenen Stellen sind dabei die Zeilen von A unverändert übernommen.

6.2 Eigenschaften der Determinante

Lemma.
Sei $\det : \mathrm{M}_{n\times n}(K) \longrightarrow K$ *eine Abbildung mit den Eigenschaften 1., 2., 3. aus 6.1, und seien* $A, B \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$*. Dann gelten*

a) *Geht* B *aus* A *durch Addition des* λ*-fachen einer Zeile zu einer anderen hervor, dann gilt*
$$\boxed{\det B = \det A}$$

b) *Geht* B *aus* A *durch Multiplikation einer Zeile mit* $\lambda \in K$ *hervor, dann gilt*
$$\boxed{\det B = \lambda \det A}$$

c) *Geht* B *aus* A *durch Vertauschung zweier Zeilen hervor, dann gilt*
$$\boxed{\det B = -\det A}$$

Beweis. **zu a)** Ist

$$A = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_j \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_j + \lambda z_i \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

dann folgt

$$\det B \underset{6.1\ 1.}{=} \det A + \lambda \det \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \underset{6.1\ 2.}{=} \det A, \text{ da } \operatorname{rang} \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} < n \text{ (vgl. 4.24)}$$

zu b) Die Behauptung folgt direkt aus 6.1 1.

zu c) Ist

$$A = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_j \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_j \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \quad A_1 = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_i + z_j \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \quad B_1 = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_j \\ \vdots \\ z_i + z_j \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i + z_j \\ \vdots \\ z_i + z_j \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

dann folgt $\det A \underset{6.2.\text{a}}{=} \det A_1$, $\det B \underset{6.2.\text{a}}{=} \det B_1$ und

$$\det A_1 + \det B_1 \underset{6.1.1}{=} \det C \underset{6.1.2}{=} 0$$

□

6.3 Beweis der Eindeutigkeitsaussage in 6.1

Seien $\det, \det' : \mathrm{M}_{n\times n}(K) \longrightarrow K$ zwei Abbildungen mit den Eigenschaften 1., 2., 3. aus 6.1, dann ist $\det A = \det' A$ für jede Matrix $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$.

Beweis. Ist $\operatorname{rang} A < n$, dann ist nach 6.1.2 $\det A = \det' A = 0$.
Sei $\operatorname{rang} A = n$. Nach 5.6 und 5.7 können wir A durch elementare Zeilenumformungen in die Einheitsmatrix E_n verwandeln. Da $\det E_n = 1 = \det' E_n$ nach 6.1.3 gilt und wir die elementare Zeilenumformungen wieder rückgängig machen können, folgt mit den Rechenregeln aus 6.2 $\det A = \det' A$. □

6.4 Die $(n-1)\times(n-1)$-Matrix A_{ij}

Definition.
Für $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$ bezeichne A_{ij} die aus A durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entstehende $(n-1)\times(n-1)$-Matrix.

Beispiel.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

dann folgt

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad A_{21} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad A_{31} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \det A &= a_{11}\det A_{11} - a_{21}\det A_{21} + a_{31}\det A_{31} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} \\ &\quad - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} \end{aligned}$$

6.5 Laplacescher Entwicklungssatz

Satz.
Es gibt genau eine Abbildung $\det : \mathrm{M}_{n\times n}(K) \longrightarrow K$ *mit den Eigenschaften 1, 2, 3 aus 6.1. Man kann* $\det A$ *induktiv durch* Entwicklung der j-ten Spalte *berechnen, d.h. es gilt die Formel*

$$(*) \qquad \boxed{\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}}$$

für jedes $j = 1, \ldots, n$. *Ausgeschrieben bedeutet die Formel*

$$\det A = (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} + \cdots + (-1)^{n+j} a_{nj} \det A_{nj} \text{ *für* } j = 1, \ldots, n$$

Beweis durch Induktion nach n.

$n = 1$ Setze $\det a := a \ \forall a \in K$

$n > 1$ Wir nehmen an, dass es für $(n-1) \times (n-1)$-Matrizen eine Determinante gibt. Wir wählen ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ aus und definieren $\det A$ durch $(*)$ für jedes $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$. Zu zeigen: Die so gewonnene Abbildung det hat die Eigenschaften 1, 2, 3 aus 6.1.

zu 1.) det ist linear in jeder Zeile, weil dies für jeden Summanden in der Entwicklungsformel $(*)$ gilt.

zu 2.) Sei $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$ und $\operatorname{rang} A < n$. Zu zeigen $\det A = 0$. Ist $\operatorname{rang} A < n$ dann folgt aus 4.24, dass Zeilenrang $A < n$ ist. Nach 3.2 gibt es dann eine Zeile z_i von A, die Linearkombination der anderen Zeilen ist, also $z_i = \lambda_1 z_1 + \cdots + \lambda_{i-1} z_{i-1} + \lambda_{i+1} z_{i+1} + \cdots + \lambda_n z_n$ mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$. Es folgt:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow \text{ i-te Zeile} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ \lambda_1 z_1 + \cdots + \lambda_{i-1} z_{i-1} + \lambda_{i+1} z_{i+1} + \cdots + \lambda_n z_n \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

$$= \lambda_1 \det \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_{i-1} \det \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{i-1} \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow \text{ i-te Zeile} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$+ \lambda_{i+1} \det \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{i+1} \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_n \det \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow \text{ i-te Zeile} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

Die Behauptung ergibt sich nun aus der folgenden Eigenschaft $2'$.

Lemma.
Es gilt 2': Sind in einer Matrix $B \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$ zwei Zeilen gleich, so ist $\det B = 0$.

Beweis. In $B = (b_{ij})$ seien die k-te und die ℓ-te Zeile gleich, und es sei ohne Einschränkung $k < \ell$. Mit Ausnahme von $\det B_{kj}$ und $\det B_{\ell j}$ sind dann nach Induktionsvoraussetzung alle Determinanten $\det B_{ij} = 0$ (weil die Matrix B_{ij} für $i \neq k, \ell$ zwei gleiche Zeilen hat und also $\operatorname{rang} B_{ij} < n-1$ gilt). Es folgt

$$\begin{aligned}\det B &= (-1)^{k+j} b_{kj} \det B_{kj} + (-1)^{\ell+j} b_{\ell j} \det B_{\ell j}\\ &\underset{(b_{kj}=b_{\ell j})}{=} (-1)^j b_{kj}\Big((-1)^k \det B_{kj} + (-1)^\ell \det B_{\ell j}\Big)\end{aligned}$$

Ist $\ell = k+1$, so annulieren sich die Summanden in den Klammern, und es ist $\det B = 0$.

Vergleichen wir nun die beiden Matrizen

$$B_{kj} = \begin{pmatrix} z'_1 \\ \vdots \\ z'_{k-1} \\ z'_{k+1} \\ \vdots \\ z'_\ell \\ \vdots \\ z'_n \end{pmatrix} \quad \text{und } B_{\ell j} = \begin{pmatrix} z'_1 \\ \vdots \\ z'_k \\ \vdots \\ z'_{\ell-1} \\ z'_{\ell+1} \\ \vdots \\ z'_n \end{pmatrix} \quad \text{mit } z'_\ell = z'_k$$

dann können wir B_{kj} durch $\ell - k - 1$ Zeilenvertauschungen in $B_{\ell j}$ verwandeln. Nach Induktionsvoraussetzung und 6.2 bewirkt dies $\ell - k - 1$ Vorzeichenwechsel. Es folgt

$$\begin{aligned}(-1)^k \det B_{kj} + (-1)^\ell \det B_{\ell j} &= (-1)^k(-1)^{\ell-k-1} \det B_{\ell j} + (-1)^\ell \det B_{\ell j}\\ &= (-1)^{k+\ell-k-1} \det B_{\ell j} + (-1)^\ell \det B_{\ell j}\\ &= \Big((-1)^{\ell-1} + (-1)^\ell\Big) \det B_{\ell j} = 0\end{aligned}$$

und damit $\det B = 0$. □

zu 3.) Für die Einheitsmatrix E_n berechnen wir ($*$). Es ergibt sich

$$\det E_n = \underbrace{(-1)^{j+j}}_{=1} 1 \det E_{jj} \underset{\text{Ind. Vor.}}{=} 1$$

□

6.6 Die Determinante einer oberen Dreiecksmatrix

Folgerung (aus 6.5).
Ist $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$ eine *obere Dreiecksmatrix*, das heißt

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

so ist $\det A$ das Produkt der Diagonalelemente

$$\boxed{\det A = a_{11} \cdots a_{nn}}$$

Dies gilt insbesondere auch für Diagonalmatrizen.

Beweis. Der Beweis ergibt sich durch Induktion nach n und Entwicklung nach der ersten Spalte. □

Beispiel.

- $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & 9 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[z_3 - 4z_1]{z_2 - 2z_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[z_3 - z_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

  Nach 6.2 und 6.6 folgt $\det A = 1 \cdot 1 \cdot (-1) = -1$.

- Berechnung von $\det A$ durch Entwicklung nach der ersten Spalte

  $$\begin{aligned} \det A &= 1 \det \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} - 2 \det A \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} + 4 \det A \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 21 - 2 \cdot (-15) + 4 \cdot (-13) = -1 \end{aligned}$$

- Weitere Möglichkeit der Berechnung von $\det A$. Es ist

  $$\begin{aligned} \det A &\underset{6.2}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix} \\ &\underset{6.5}{=} 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -6 \end{pmatrix} = -1 \end{aligned}$$

6.7 Kriterium für invertierbare Matrizen

Sei $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$. Dann sind äquivalent:

i) A ist invertierbar

ii) $\operatorname{rang} A = n$

iii) $\det A \neq 0$

Beweis. **i) $\Longleftrightarrow$ ii)** vgl. 4.21

ii) $\Longrightarrow$ iii) Ist $\operatorname{rang} A = n$, so kann A wie in 5.6 durch elementare Zeilenumformungen in eine Diagonalmatrix überführt werden mit lauter Diagonalelementen ungleich Null. Nach 6.2 und 6.6 ist damit $\det A \neq 0$.

iii) $\Longrightarrow$ ii) Dies folgt aus 6.1 2.

□

6.8 Determinante der transponierten Matrix

Satz.
Ist $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$, so ist

$$\det A = \det {}^t\!A$$

Insbesondere können wir $\det A$ *auch durch* Entwicklung nach der i-ten Zeile *berechnen. Es gilt*

$$\boxed{\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}}$$

für jedes $i = 1, \dots, n$. Ausgeschrieben bedeutet dies

$$\det A = (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} \det A_{in}$$

für jedes $i = 1, \dots, n$.

Beweis. Definieren wir Linearität in einer Spalte analog wie in 6.1, dann ist die durch $(*)$ in 6.5 gegebene Abbildung

$$\det : \mathrm{M}_{n\times n}(K) \longrightarrow K, \quad A \longmapsto \det A$$

auch linear in der j-ten Spalte für $j = 1, \dots, n$, denn in der Spaltenentwicklungsformel 6.5 hängen die Matrizen $A_{j1}, \dots, A_{jn}$ nicht von der j-ten Spalte ab, da diese gestrichen wurde.

Da die Spalten von A die Zeilen von ${}^tA$ sind folgt, dass die Abbildung

$$\mathrm{M}_{n\times n}(K) \longrightarrow K, \quad A \longmapsto \det {}^tA$$

linear in jeder Zeile ist und damit 1. aus 6.1 erfüllt. Sie erfüllt auch 2., denn nach 4.24 ist $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} {}^tA$. Auch 3. ist erfüllt, da ${}^tE_n = E_n$. Da det nach 6.3 durch diese Eigenschaften eindeutig bestimmt ist, folgt $\det {}^tA = \det A$ für alle $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$. □

6.9 Multiplikationssatz für Determinanten

Satz.
Sind $A, B \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$ dann gilt

$$\boxed{\det(AB) = (\det A) \cdot (\det B)}$$

Insbesondere gilt: Ist A invertierbar, so ist

$$\boxed{(\det A)^{-1} = \det A^{-1}}$$

Beweis. Ist $\operatorname{rang} B < n$, dann ist $\det B = 0$ nach 6.7, und es ist auch $\operatorname{rang}(AB) < n$, (denn andernfalls wäre AB invertierbar nach 4.21 und daher auch B, was $\operatorname{rang} B = n$ nach 4.21 zur Folge hätte).
Es folgt $0 \underset{6.7}{=} \det(AB) = \det A \cdot \underbrace{\det B}_{=0}$.
Sei B fest gewählt mit $\operatorname{rang} B = n$. Dann ist nach 6.7 $\det B \neq 0$. Wir zeigen nun, dass die Abbildung

$$f : \mathrm{M}_{n\times n}(K) \longrightarrow K, \quad A \longmapsto (\det B)^{-1} \det(AB)$$

die Eigenschaften 1., 2., 3. aus 6.1 erfüllt. Mit der Eindeutigkeitsaussage aus 6.3 folgt dann $\det A = f(A) = (\det B)^{-1} \det AB$ und also die Behauptung.

zu 1.) Für

$$C := \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i + z_i' \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

folgt

$$CB \underset{4.2}{=} \begin{pmatrix} z_1 B \\ \vdots \\ (z_i + z_i')B \\ \vdots \\ z_n B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 B \\ \vdots \\ z_i B + z_i' B \\ \vdots \\ z_n B \end{pmatrix}$$

also

$$\det(CB) \underset{6.1}{=} \det\begin{pmatrix} z_1B \\ \vdots \\ z_iB \\ \vdots \\ z_nB \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} z_1B \\ \vdots \\ z_i'B \\ \vdots \\ z_nB \end{pmatrix}$$

$$\underset{4.2}{=} \det\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} B\right) + \det\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i' \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} B\right)$$

Durch Division mit $(\det B)^{-1}$ folgt hieraus

$$f\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i + z_i' \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i' \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

Analog ergibt sich

$$f\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ \lambda z_i \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \lambda f\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

zu 2.) Ist $\operatorname{rang} A < n$, dann ist nach 4.21 auch $\operatorname{rang} AB < n$ und damit $\det AB = 0$ nach 6.7, insbesondere $f(A) = 0$.

zu 3.)

$$\begin{aligned} f(E_n) &= (\det B)^{-1} \det(E_n B) \text{ nach Def. von } f \\ &= (\det B)^{-1} \det B = 1 \end{aligned}$$

□

6.10 Methode zur Berechnung der inversen Matrix

Satz.
Sei $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$ *und* $\det A \neq 0$ *dann gilt*

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} B}$$

wobei $B = (b_{ij}) \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$ *mit*

$$\boxed{b_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ji}}$$

Beweis. Wir zeigen $AB = \det A \cdot E_n$. Es ist $AB = (c_{ij})$ mit

$$\begin{aligned} c_{ij} &\underset{4.2}{=} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} (-1)^{k+j} \det A_{jk} \qquad \text{(nach Definition von } B\text{)} \\ &= \det A' \qquad \text{(Entwicklung nach der } j\text{-ten Zeile 6.8)} \end{aligned}$$

wobei A' aus A entsteht, indem die j-te durch die i-te Zeile ersetzt wird, also

$$c_{ij} = \begin{cases} \det A & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j, \text{ da in } A' \text{ zwei Zeilen gleich sind} \end{cases}$$

□

Beispiel.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \implies \det A = 13$$

Damit ergibt sich für A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} \det A_{11} & -\det A_{21} \\ -\det A_{12} & \det A_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} \text{ vgl. 4.13 und 5.7}$$

6.11 Cramersche Regel

Satz.
Sei $A = (a_{ij}) \in \mathrm{GL}_n(K)$. *Dann ist das lineare Gleichungsystem* $A\vec{x} = \vec{b}$ *für jedes* $\vec{b} \in K^n$ *eindeutig lösbar (vgl. 5.2 und 6.7), und die Lösung ist gegeben*

durch

$$x_1 = \frac{1}{\det A} \det \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$x_2 = \frac{1}{\det A} \det \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$x_n = \frac{1}{\det A} \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n-1} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & b_n \end{pmatrix}$$

Beweis. Sei $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ die Lösung des Systems

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

Sind

$$\vec{s}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \cdots, \vec{s}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

die Spalten von A, dann folgt

$$x_1\vec{s}_1 + \cdots + x_n\vec{s}_n = \vec{b}$$

und also

$$x_1\vec{s}_1 + \cdots + x_i\vec{s}_i - \vec{b} + \cdots + x_n\vec{s}_n = \vec{0}$$

Insbesondere sind also die Vektoren $\vec{s}_1, \ldots, x_i\vec{s}_i - \vec{b}, \ldots, \vec{s}_n$ linear abhängig für $i = 1, \ldots, n$, und damit sind auch die Spalten der Matrix

$$B_i := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & x_i a_{1i} - b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & x_i a_{ni} - b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

linear abhängig für $i = 1, \ldots, n$. Nach 6.7 folgt $\det B_i = 0$ für $i = 1, \ldots, n$. Für $i = 1, \ldots, n$ erhalten wir

$$0 = \det B_i = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & x_i a_{1i} - b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & x_i a_{ni} - b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\underset{6.8}{=} x_i \det A - \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

da det linear in der i-ten Spalte ist, und es folgt die Behauptung. □

6.12 Orientierung in reellen Vektorräumen

In $\mathbb{R}^1$

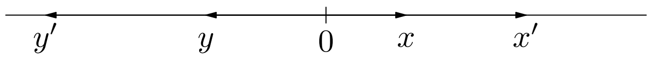

Abbildung 14: $x' = \lambda x$ mit $\det \lambda > 0$

Dann heißen x und x' *gleich orientiert*. Es sind y, y' gleich orientiert, da $y' = \lambda y$ mit $\det \lambda > 0$ gilt, und y, x sind nicht gleich orientiert, da $y = \lambda x$ mit $\det \lambda < 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Definition.
Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit $\dim_{\mathbb{R}} V = n$. Dann heißen zwei Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ von V *gleich orientiert*, wenn für die Matrix des Basiswechsels gilt

$$\boxed{\det \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}) > 0}$$

Wir schreiben dann $\mathcal{B} \sim \mathcal{B}'$.

Behauptung „$\sim$" ist eine Äquivalenzrelation, d.h.

1. $\mathcal{B} \sim \mathcal{B}$
2. $\mathcal{B} \sim \mathcal{B}' \Longrightarrow \mathcal{B}' \sim \mathcal{B}$
3. $\mathcal{B} \sim \mathcal{B}'$ und $\mathcal{B}' \sim \mathcal{B}'' \Longrightarrow \mathcal{B} \sim \mathcal{B}''$

Beweis. **zu 1.)** Es ist $\mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}) = E_n$ nach 4.6 und $\det E_n = 1 > 0$ nach 6.1

zu 2.) Sei $T := \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id})$. Dann ist $\mathrm{M}^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}) = T^{-1}$ nach 4.14. Ist $\det T > 0$, so folgt $\det T^{-1} \underset{6.9}{=} \frac{1}{\det T} > 0$.

zu 3.) Es ist $\mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id})\,\mathrm{M}^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}''}(\mathrm{id}) \underset{4.7}{=} \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}''}(\mathrm{id})$ und damit

$$\det \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}''}(\mathrm{id}) = \underbrace{\det \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id})}_{>0}\ \underbrace{\det \mathrm{M}^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}''}(\mathrm{id})}_{>0} > 0$$

□

Eine Äquivalenzklasse von Basen heißt *Orientierung* von V.

Definition.
V heißt *orientierter* $\mathbb{R}$*-Vektorraum*, wenn eine (geordnete) Basis $\mathcal{B}$ von V als *positiv orientiert* ausgezeichnet ist. Alle Basen, die zu $\mathcal{B}$ gleichorientiert sind (also in der selben Äquivalenzklasse liegen) heißen dann *positiv orientiert* und die anderen *negativ orientiert*. Im $\mathbb{R}^n$ sei stets die Standardbasis als positiv orientiert ausgezeichnet.

6.13 Die Determinante eines Endomorphismus

Sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und sei $f : V \longrightarrow V$ eine K-lineare Abbildung, das heißt ein Endomorphismus von V. Wähle eine Basis $\mathcal{B}$ von V und setze

$$\boxed{\det f := \det \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)}$$

Bemerkung.
$\det f$ ist unabhängig von der Wahl der Basis $\mathcal{B}$.

Beweis. Sei $\mathcal{B}'$ eine weitere Basis von V. Dann gilt nach 4.16

$$\mathrm{M}^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f) = T^{-1}\,\mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)\,T \text{ mit } T = \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id})$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \det \mathrm{M}^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f) &= \det(T^{-1}\,\mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)\,T) \underset{6.9}{=} \det T^{-1} \cdot \det \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) \cdot \det T \\ &= \det \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) \end{aligned}$$

□

Die Definition von $\det f$ ist also unabhängig von der Wahl der Basis.

Bemerkung.
Sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und sei $f : V \longrightarrow V$ eine K-lineare Abbildung dann gilt

$$\boxed{f \text{ ist ein Isomorphismus}} \iff \boxed{\det f \neq 0}$$

Beweis. Es gilt:

$$\begin{aligned} & f \text{ ist ein Isomorphismus} \\ \iff & \mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \text{ ist invertierbar (nach 4.22.3)} \\ \iff & \det f = \det \mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \neq 0 \text{ (nach 6.7)} \end{aligned}$$

□

Einen Isomorphismus $f : V \longrightarrow V$ nennen wir einen *Automorphismus*.

6.14 Orientierungserhaltende Automorphismen

Sei V ein endlich n-dimensionaler orientierter $\mathbb{R}$-Vektorraum. Dann heißt ein Automorphismus $f : V \xrightarrow{\sim} V$ *orientierungserhaltend*, wenn f jede Basis von V in eine gleichorientierte Basis überführt.

Bemerkung.
Es gilt

$$\boxed{f \text{ ist orientierungserhaltend}} \iff \boxed{\det f > 0}$$

Beweis. Sei $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V und sei $\mathcal{B}' = (v_1', \ldots, v_n')$ mit $f(v_j) = v_j'$ für $j = 1, \ldots, n$, dann ist auch $\mathcal{B}'$ eine Basis von V nach Aufgabe 18, da f bijektiv ist. Nach 4.4 gilt

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id})$$

also

$$\det f = \det \mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) > 0 \iff \det \mathrm{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}) > 0 \iff \mathcal{B} \sim \mathcal{B}'$$

□

Insbesondere ist f orientierungserhaltend wenn f **eine** Basis von V in eine gleichorientierte Basis überführt.

6.15 Orientierung im $\mathbb{R}^n$

Sei $v_1 = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}), \dots, v_n = (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{nn})$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$. Tragen wir v_j als j-te Spalte ein, so erhalten wir eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ mit $\det A \neq 0$ nach 6.7. Es gilt dann

$$\boxed{\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n) \sim \text{ Standardbasis}} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\det A > 0}$$

Beweis. Sei

$$f_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

die zu A gehörende Standardabbildung. Sie bildet gerade den j-ten Standardbasisvektor auf die j-te Spalte ab (vgl. 4.11), und es ist $\det A = \det f_A$. Die Behauptung folgt nun aus 6.14. □

6.16 Die Determinante als Volumen

Sei $V = \mathbb{R}^n$, und seien $v_1, \dots, v_n$ Vektoren in V. Dann heißt die Menge

$$\boxed{P(v_1, \dots, v_n) := \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \mid 0 \leq \lambda_i \leq 1 \text{ für } i = 1, \dots, n\}}$$

das von $v_1, \dots, v_n$ *aufgespannte Parallelotop* im $\mathbb{R}^n$.
Wir definieren das *Volumen* von $P(v_1, \dots, v_n)$ als den Absolutbetrag

$$|\det(v_1, \dots, v_n)|$$

(hierbei wird v_j wie in 6.15 als j-te Spalte einer $n \times n$-Matrix aufgefasst).

Beispiel.
Sei $e_1, \dots, e_n$ die Standardbasis in $\mathbb{R}^n$. Dann ist $|\det E_n| = |1| = 1$ das Volumen des n-dimensionalen „Einheitswürfels“ $P(e_1, \dots, e_n)$.

6.17 Flächeninhalt eines Parallelogramms

Sei $V = \mathbb{R}^2$. Wir berechnen den Flächeninhalt des Parallelogramms

$$P(v_1, v_2) = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \mid 0 \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq 1\}$$

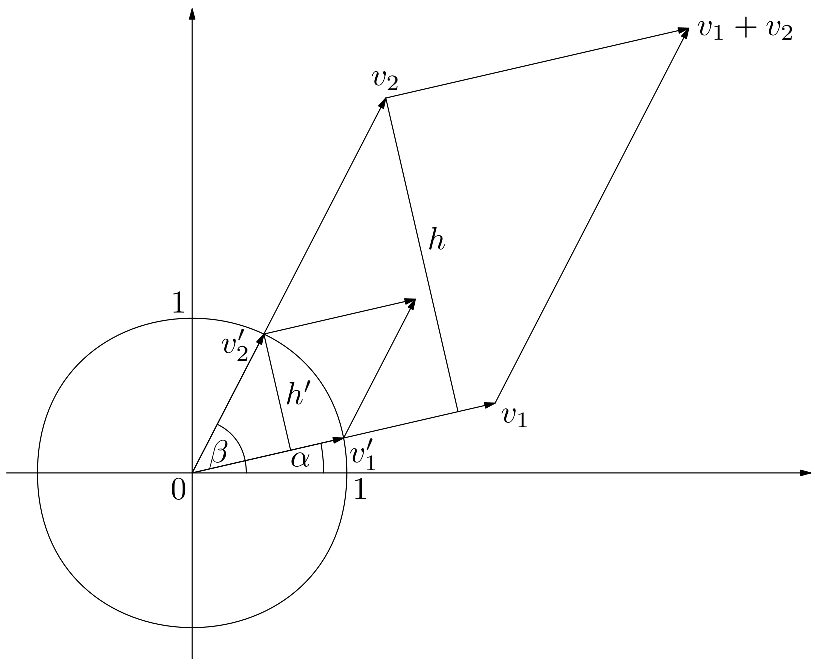

Abbildung 15: Parallelogramm

Es ist

$$\begin{aligned} v_1 &= \lambda v_1' = \lambda(\cos\alpha, \sin\alpha) \\ v_2 &= \mu v_2' = \mu(\cos\beta, \sin\beta) \end{aligned}$$

Für $0 \leq \beta - \alpha \leq \pi$ folgt

$$F' = 1 \cdot h' = 1 \cdot \sin(\beta - \alpha) = \det \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \cos\beta & \sin\beta \end{pmatrix} \geq 0$$

mit Hilfe des Additionstheorems $\sin(\beta - \alpha) = \cos\alpha \sin\beta - \sin\alpha\cos\beta$. Es folgt mit $h = \mu h'$

$$F = \lambda\mu F' = \det \begin{pmatrix} \lambda\cos\alpha & \lambda\sin\alpha \\ \mu\cos\beta & \mu\sin\beta \end{pmatrix}$$

Berechnen wir F mit 6.16, dann ergibt sich mit $v_1 = (a_1, a_2)$ und $v_2 = (b_1, b_2)$

$$F = \left| \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \right| \underset{6.8}{=} \left| \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \right|$$

6.18 Die spezielle lineare Gruppe

Bemerkung.
Die *spezielle lineare Gruppe*

$$\mathrm{SL}_n(K) := \{A \in \mathrm{GL}_n \mid \det A = 1\}$$

ist eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(K)$.

Beweis.
- Sind $A, B \in \mathrm{SL}_n(K)$, dann sind auch AB und $A^{-1} \in \mathrm{SL}_n(K)$. Dies folgt aus 6.9.
- Ferner ist $\mathrm{SL}_n(K) \neq \varnothing$, da $E_n \in \mathrm{SL}_n(K)$

□

6.19 Übungsaufgaben 36 – 42

Aufgabe 36.
Man prüfe, ob die folgenden Matrizen über $\mathbb{R}$ invertierbar sind, und bestimme gegebenenfalls die inverse Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ und } C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 37.
(a) Man berechne die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4\times 4}(\mathbb{R}).$$

(b) Man zeige mit Hilfe des LAPLACEschen Entwicklungssatzes, dass für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\det \begin{pmatrix} x & y & 0 & 1 \\ -y & x & -1 & 0 \\ 0 & 1 & x & -y \\ -1 & 0 & y & x \end{pmatrix} = (x^2 + y^2 + 1)^2.$$

Aufgabe 38.

Gegeben seien über $\mathbb{R}$ die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ und der Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Zur Lösung des linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$ benutze man

(a) die Cramersche Regel und

(b) den Gaussschen Algorithmus.

(c) Man bestimme die inverse Matrix A^{-1} und verifiziere die Gleichung $A^{-1}\vec{b} = \vec{x}$ für die unter (a) und (b) gewonnene Lösung $\vec{x}$.

Aufgabe 39.
Man untersuche, ob die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ bilden.

Aufgabe 40.
In Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$ bestimme man die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$x_1 - x_2 + x_3 + (1-t)x_4 = 1$
$t\,x_1 - (t+1)x_2 - t^2\,x_4 = t$
$x_1 + x_2 + (2t+1)x_3 + (1+t)x_4 = t^2$.

Aufgabe 41.
(a) Man bestimme alle 2×2-Matrizen über $\mathbb{R}$, die zu sich selbst invers sind.

(b) Sei $A \in \mathrm{M}_{2\times 2}(K)$, und sei A^2 die Nullmatrix. Man zeige, dass für jedes $\lambda \in K$ gilt:

$$\det(\lambda E_2 - A) = \lambda^2 .$$

Aufgabe 42.
(a) Seien (x_1, y_1), (x_2, y_2) und (x_3, y_3) drei Eckpunkte eines Parallelogramms P in $\mathbb{R}^2$.
Man zeige: Der Flächeninhalt von P ist gleich dem Betrag der Determinante

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix}.$$

(b) Man bestimme den Flächeninhalt F_i eines Parallelogramms P_i in $\mathbb{R}^2$, das die folgenden Eckpunkte besitzt:

$(-3,2),\ (1,4),\ (-2,-7)$ für P_1, $\quad (1,1),\ (2,-1),\ (4,6)$ für P_2,

$(2,5),\ (-1,4),\ (1,2)$ für P_3 und $(1,1),\ (1,0),\ (2,3)$ für P_4.

7 Metrische Vektorräume

Sei K ein Körper.

7.1 Involution auf K

Es sei K mit einer *Involution* versehen, d. h. es sei eine Bijektion

$$\bar{}: K \longrightarrow K, \quad \alpha \longmapsto \overline{\alpha}$$

gegeben derart, dass für alle $\alpha, \beta, \gamma \in K$ gilt

1. $\overline{\overline{\alpha}} = \alpha$ (“involutorisch”)
2. $\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$ (“additiv”)
3. $\overline{\alpha\beta\gamma} = \overline{\alpha}\overline{\beta}\overline{\gamma}$
   (Es werden hier drei statt zwei Faktoren genommen, weil $(-1)^3 = -1$ ist und also dann das Vorzeichen erhalten bleibt)

Bemerkung.

- Es ist $\overline{0} = 0$, denn $\overline{\alpha} = \overline{\alpha + 0} = \overline{\alpha} + \overline{0}$. Insbesondere ist $\overline{\alpha} \neq 0$ für $\alpha \neq 0$
- Es ist $\overline{1} = 1$ oder -1, denn
  $$\overline{1} = \overline{1 \cdot 1 \cdot 1} = \overline{1}^2 \cdot \overline{1} \Longrightarrow \overline{1}^2 = 1 \Longrightarrow \overline{1} = \pm 1$$
- Ist $\overline{1} = 1$, dann ist $\overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha}\overline{\beta}$, und ist $\overline{1} = -1$ dann ist $\overline{\alpha\beta} = -\overline{\alpha}\overline{\beta}$ (wegen $\overline{\alpha\beta} = \overline{1\alpha\beta} = \overline{1}\overline{\alpha}\overline{\beta}$).

Beispiele

1. Sei $K = \mathbb{C} = \{x + yi \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ mit $i^2 = -1$, und
   $$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad x + yi \longmapsto x - yi$$

die *komplexe Konjugation*. Sie ist eine Involution mit $\overline{1} = 1$.

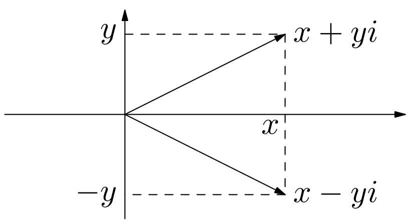

Abbildung 16: Komplexe Konjugation

1a. Die Identität $\mathrm{id} : K \longrightarrow K, \alpha \longmapsto \alpha$ ist eine Involution, bei der $\overline{\alpha} = \alpha$ für alle $\alpha \in K$ gilt.

2. Sei $K = \mathbb{C}$. Die Abbildung $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $x + yi \longmapsto -x + yi$ ist eine Involution mit $\overline{1} = -1$.

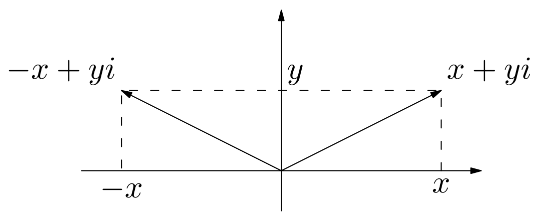

Abbildung 17: Spiegelung an der y-Achse

2a. Die Abbildung $K \longrightarrow K, \alpha \longmapsto -\alpha$ ist eine Involution mit $\overline{\alpha} = -\alpha$ $\forall \alpha \in K$.

7.2 Metrik auf V

Sei K mit einer Involution versehen.
Eine Abbildung

$$s : V \times V \longrightarrow K, \quad (v, w) \longmapsto \langle v, w \rangle$$

heißt *Metrik*, falls gilt

1. $$\left.\begin{aligned} \langle u + v, w \rangle &= \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle \\ \langle \lambda v, w \rangle &= \lambda \langle v, w \rangle \end{aligned}\right\} \text{ linear im ersten Argument}$$

2. $\overline{\langle v, w\rangle} = \langle w, v\rangle$ Symmetrieeigenschaft

für alle $u, v, w \in V$ und $\lambda \in K$.
Ein K-Vektorraum V mit einer Metrik s heißt *metrischer Vektorraum*.
Mit Hilfe einer Metrik werden wir später den „Winkel“ zwischen Vektoren definieren. Die Benutzung der spitzen Klammern deutet dies schon an.

Hinweis.
Die in dieser Vorlesung definierten metrischen Vektorräume sind nicht zu verwechseln mit den *metrischen Räumen*, die in der Analysis eingeführt werden.

Bemerkung.
Ist V mit einer solchen Metrik versehen, so gilt für alle $u, v, w \in V$ und $\mu \in K$

$$1.' \quad \left.\begin{aligned} \langle u, v+w\rangle &= \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle \\ \langle v, \mu w\rangle &= \overline{1}\overline{\mu}\langle v, w\rangle \end{aligned}\right\} \text{ semilinear im zweiten Argument}$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} \langle u, v+w\rangle &\underset{2.}{=} \overline{\langle v+w, u\rangle} \underset{1.}{=} \overline{\langle v, u\rangle + \langle w, u\rangle} \\ &= \overline{\langle v, u\rangle} + \overline{\langle w, u\rangle} \qquad \text{da}\ \bar{}\ \text{additiv} \\ &\underset{2.}{=} \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \langle v, \mu w\rangle &\underset{2.}{=} \overline{\langle \mu w, v\rangle} \underset{1.}{=} \overline{\mu\langle w, v\rangle} \\ &= \overline{1\mu\langle w, v\rangle} \underset{7.1}{=} \overline{1}\overline{\mu}\overline{\langle w, v\rangle} \underset{2.}{=} \overline{1}\overline{\mu}\langle v, w\rangle \end{aligned}$$

□

7.3 Spezialfälle

Sei K mit einer Involution versehen, und sei

$$s : V \times V \longrightarrow K, \quad (v, w) \longmapsto \langle v, w\rangle$$

eine Metrik auf V gemäß 7.2. Wir unterscheiden zwischen den folgenden Fällen:

I) $\overline{1} = 1$. Dann heißt V ein *hermitescher Raum* und s eine *hermitesche Form* auf V.

Ia) $\overline{\alpha} = \alpha\ \forall \alpha \in K$. Dann ist $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle\ \forall v, w \in V$, und wir nennen s eine *symmetrische Bilinearform* auf V.

II) $\overline{1} = -1$. Dann heißt V ein *schiefhermitescher Raum* und s eine *schiefhermitesche Form* auf V.

IIa) $\overline{\alpha} = -\alpha \ \forall \alpha \in K$. Dann ist $\langle v, w\rangle = -\langle w, v\rangle \ \forall v, w \in V$, und wir nennen s eine *schiefsymmetrische* oder *symplektische Form* auf V.

Beispiele.

zu Fall I

- $K = \mathbb{C}$ und $^-$ die komplexe Konjugation. Sei

$$V := \{f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ stetig }\}$$

und

$$\boxed{\langle f, g\rangle := \int_0^1 f(\alpha)\overline{g(\alpha)}\, d\alpha \text{ für } f, g \in V}$$

(Derartige Funktionenräume kommen insbesondere in der Funktionalanalysis und in der Physik vor)

- $K = \mathbb{C}$ und $^-$ die komplexe Konjugation. Sei $V = \mathbb{C}^2$. Setze

$$\langle(\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2)\rangle = \alpha_1\overline{\beta}_1 + \alpha_2\overline{\beta}_2 \text{ für } \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in K$$

zu Fall Ia $K = \mathbb{R}, ^- = \mathrm{id}$ und $V = \mathbb{R}^2$. Setze

$$\langle(\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2)\rangle = \alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2 \text{ für } \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in K$$

zu Fall II $K = \mathbb{C}, ^- : x + yi \longmapsto -x + yi$ und $V = \mathbb{C}^2$. Setze

$$\langle(\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2)\rangle = \det\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \overline{\beta}_1 & \overline{\beta}_2\end{pmatrix} \text{ für } \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in K$$

zu Fall IIa $K = \mathbb{R}\ , ^- = -\,\mathrm{id}$ und $V = \mathbb{R}^2$. Setze

$$\langle(\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2)\rangle = \det\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{pmatrix} \text{ für } \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in K$$

Zum Beispiel $\langle(3,5),(1,2)\rangle = 6-5 = 1$ und $\langle(1,2),(3,5)\rangle = 5-6 = -1$ sowie $\langle(3,5),(3,5)\rangle = 15 - 15 = 0$.

Bemerkung.
Zu den vier Fällen I, Ia, II, IIa gehören vier unterschiedliche umfangreiche mathematische Theorien. Die Definition in 7.2 ist so gemacht, dass wir einige Beweise, die man sonst entsprechend der vier Theorien viermal führt, nur einmal machen müssen wie zum Beispiel beim Basiswechsel (7.6) oder bei der Rangaussage (7.13).

7.4 Die zu einer Metrik s gehörende Matrix $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s)$

Sei K mit einer Involution versehen, und sei $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V. Dann ordnen wir einer Metrik

$$s : V \times V \longrightarrow K, \quad (v, w) \longmapsto \langle v, w \rangle$$

folgende Matrix zu

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s) := \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_1, v_n \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle v_n, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_n, v_n \rangle \end{pmatrix}$$

also $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s) = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$ mit $a_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$. Nach 7.2.2. gilt

(2_M) $$\boxed{\overline{a_{ij}} = a_{ji} \ \forall i, j = 1, \ldots, n}$$

Umgekehrt gilt der

Satz.
*Zu **jeder** Matrix $(a_{ij}) \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$ mit der Eigenschaft (2_M) gibt es genau eine Metrik s mit $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s) = A$.*

Beweis. Für

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \text{ und } w = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n$$

mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_n \in K$ setzen wir

$$\boxed{s(v, w) := \langle v, w \rangle := (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} \mu_1^* \\ \vdots \\ \mu_n^* \end{pmatrix} \ \text{mit } \mu_i^* = \overline{1}\overline{\mu}_i \ \forall i = 1, \ldots, n}$$

Nach Definition 4.2 der Matrizenmultiplikation folgt $\langle v_i, v_j \rangle = a_{ij}$, da

$$\underbrace{(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)}_{e_i} \cdot A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_j} = a_{ij}$$

und $1^* = \overline{1} \cdot \overline{1} = 1$ gilt. Also ist $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s) = A$. Offenbar ist s linear im ersten Argument. Und s ist durch $\langle v_i, v_j\rangle = a_{ij}$ eindeutig bestimmt, denn in Summenschreibweise $\sum_{j=1}^n b_j := b_1 + \cdots + b_n$ gilt nach 4.11

$$A \cdot \begin{pmatrix} \mu_1^* \\ \vdots \\ \mu_n^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}\,\mu_j^* \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj}\,\mu_j^* \end{pmatrix}, \text{ also } (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} \mu_1^* \\ \vdots \\ \mu_n^* \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \lambda_i (\sum_{j=1}^n a_{ij}\,\mu_j^*)$$

und das bedeutet $\langle v, w\rangle = \sum\limits_{i,j=1}^n \lambda_i\, \mu_j^*\, a_{ij}$. Zu zeigen bleibt $\overline{\langle v, w\rangle} = \langle w, v\rangle$ (vgl. 7.2). Es gilt

$$\begin{aligned}
\overline{\langle v, w\rangle} &= \sum_{i,j=1}^n \overline{\lambda}_i\, \overline{\mu_j^*}\, \overline{a_{ij}} \quad \text{nach } 7.1 \\
&= \sum_{i,j=1}^n \overline{\lambda}_i\, \overline{\mu_j^*}\, a_{ji}\,, \text{ da } \overline{a_{ij}} = a_{ji} \text{ nach Vor. } (2_M) \\
&= \sum_{i,j=1}^n \overline{\lambda}_i\, \overline{1}\mu_j\, a_{ji}\,, \text{ da } \overline{\mu_j^*} = \overline{\overline{1} \cdot \overline{\mu_j}} = \overline{1 \cdot \overline{1}\overline{\mu_j}} \underset{7.1}{=} \overline{1} \cdot 1 \cdot \mu_j \\
&= \sum_{i,j=1}^n \lambda_i^*\, \mu_j\, a_{ji} \\
&= (\mu_1, \dots, \mu_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^* \\ \vdots \\ \lambda_n^* \end{pmatrix} \quad \text{analog wie oben} \\
&= \langle w, v\rangle
\end{aligned}$$

□

7.5 Bezeichnungen

Für $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$ sei $\overline{A} := (\overline{a_{ij}})$. Dann heißt A

hermitesch, falls $\overline{A} = {}^tA$ und $\overline{1} = 1$ gilt (Fall I in 7.3)

schiefhermitesch, falls $\overline{A} = {}^tA$ und $\overline{1} = -1$ gilt (Fall II in 7.3)

symmetrisch, falls $A = {}^tA$ gilt, zum Beispiel $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

schiefsymmetrisch, falls $-A = {}^tA$ gilt, zum Beispiel 7.4, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Sei $s : V \times V \longrightarrow K$ eine *sesquilineare Abbildung*, d.h. 1. und 1′. in 7.2 gelten. Definieren wir $A := \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s)$ analog wie in 7.4, dann gelten:

$$\begin{aligned} A \text{ hermitesch} &\iff s \text{ hermitesch} \\ A \text{ schiefhermitesch} &\iff s \text{ schiefhermitesch} \\ A \text{ symmetrisch} &\iff s \text{ symmetrisch} \\ A \text{ schiefsymmetrisch} &\iff s \text{ schiefsymmetrisch} \end{aligned}$$

7.6 Basiswechsel

Gegeben seien eine Involution $^{-}: K \longrightarrow K,\ \alpha \longmapsto \overline{\alpha}$,
eine Metrik $s : V \longrightarrow V,\ (v, w) \longmapsto \langle v, w\rangle$,
sowie zwei Basen $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ und $\mathcal{B}' = (v'_1, \ldots, v'_n)$ von V. Setzen wir

$$\boxed{T := \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id})}$$

so gilt

$$\boxed{\mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(s) = {}^tT\, \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s)\, T^* \text{ mit } T^* := \overline{1} \cdot \overline{T}}$$

Beweis. Seien $v, w \in V$ und $T = (t_{ij})$. Es ist

$$\begin{aligned} v &= \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \\ &= \alpha_1 v'_1 + \cdots + \alpha_n v'_n \end{aligned} \quad \text{und} \quad \begin{aligned} w &= \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n \\ &= \beta_1 v'_1 + \cdots + \beta_n v'_n \end{aligned}$$

mit $\lambda_i, \mu_i, \alpha_i, \beta_i \in K$. Nach 4.12, angewandt auf $f = \mathrm{id}$, gilt $k_{\mathcal{B}}(v) = T \cdot k_{\mathcal{B}'}(v)$ für alle $v \in V$ und also

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} \underset{4.12}{=} T \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \underset{4.2}{=} \begin{pmatrix} t_{11}\beta_1 + \cdots + t_{1n}\beta_n \\ \vdots \\ t_{n1}\beta_1 + \cdots + t_{nn}\beta_n \end{pmatrix}$$

Hieraus folgt

$$\begin{pmatrix} \mu_1^* \\ \vdots \\ \mu_n^* \end{pmatrix} = \overline{1} \begin{pmatrix} \overline{t_{11}1\beta_1} + \cdots + \overline{t_{1n}1\beta_n} \\ \vdots \\ \overline{t_{n1}1\beta_1} + \cdots + \overline{t_{nn}1\beta_n} \end{pmatrix} = \overline{1}\overline{T} \begin{pmatrix} \beta_1^* \\ \vdots \\ \beta_n^* \end{pmatrix} = T^* \begin{pmatrix} \beta_1^* \\ \vdots \\ \beta_n^* \end{pmatrix}$$

und damit gilt

$$\begin{aligned} s(v, w) &\underset{7.4}{=} (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s) \begin{pmatrix} \mu_1^* \\ \vdots \\ \mu_n^* \end{pmatrix} = {}^t\!\left(T \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \right) \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s)\, T^* \begin{pmatrix} \beta_1^* \\ \vdots \\ \beta_n^* \end{pmatrix} \\ &\underset{4.3}{=} (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\, {}^tT\, \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s)\, T^* \begin{pmatrix} \beta_1^* \\ \vdots \\ \beta_n^* \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$s(v,w) \underset{7.4}{=} (\alpha_1,\dots,\alpha_n)\mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(s)\begin{pmatrix}\beta_1^*\\ \vdots\\ \beta_n^*\end{pmatrix}$$

Da dies insbesondere für die Standardbasisvektoren gilt, folgt die Behauptung. □

Beispiel.
Sei $K = \mathbb{R}$ und $^- = -\,\mathrm{id}$. Es seien $\mathcal{B} = \{(1,0),(0,1)\}$, $\mathcal{B}' = \{(5,8),(-1,1)\}$ zwei Basen von $V = \mathbb{R}^2$ und

$$s : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad ((\alpha_1,\alpha_2),(\beta_1,\beta_2)) \longmapsto \det\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{pmatrix}$$

Es liegt also das Beispiel zu Fall IIa in 7.3 vor. Es ist

$$T = \mathrm{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix}5 & -1\\ 8 & 1\end{pmatrix}$$

und nach 7.4

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix}\det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\ \det\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

und

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(s) = \begin{pmatrix}\det\begin{pmatrix}5 & 8\\ 5 & 8\end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix}5 & 8\\ -1 & 1\end{pmatrix}\\ \det\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 5 & 8\end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 13\\ -13 & 0\end{pmatrix}$$

Berechnen wir den Basiswechsel nach 7.6, so ergibt sich, da in diesem Fall $T^* = \bar{1}\bar{T} = (-1)(-T) = T$

$$\begin{aligned}{}^tT\cdot \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s)\cdot T^* &= \begin{pmatrix}5 & 8\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & -1\\ 8 & 1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-8 & 5\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & -1\\ 8 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 13\\ -13 & 0\end{pmatrix}\\ &= \mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(s)\end{aligned}$$

7.7 Euklidische und unitäre Vektorräume

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $^- =$ id oder sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $^-$ die *komplexe Konjugation* ($x + yi \longmapsto x - yi$). Ein *Skalarprodukt* auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V ist eine Abbildung

$$s : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}, \quad (v, w) \longmapsto \langle v, w\rangle$$

derart, dass für alle $u, v, w \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt

1. $\left.\begin{aligned} \langle u + v, w\rangle &= \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle \\ \langle \lambda v, w\rangle &= \lambda\langle v, w\rangle \end{aligned}\right\}$ linear im ersten Argument

2. $\overline{\langle v, w\rangle} = \langle w, v\rangle$ Symmetrieeigenschaft

3. $\langle v, v\rangle > 0$ für $v \neq \vec{0}$ positiv definit

Nach 2. ist $\langle v, v\rangle \in \mathbb{R}$, auch wenn $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist.
Ein *Skalarprodukt* ist also eine *positiv definite symmetrische Bilinearform* auf V, falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und eine *positiv definite hermitesche Form* auf V falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (vgl. 7.3, I, Ia, also $\bar{1} = 1$). Ein K-Vektorraum, der mit einem Skalarprodukt versehen ist, heißt *euklidisch*, falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, und *unitär*, falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

7.8 Das Standardskalarprodukt

Für $v = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $w = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ aus K^n setzen wir

$$\langle v, w\rangle := \alpha_1\bar{\beta}_1 + \cdots + \alpha_n\bar{\beta}_n$$

insbesondere

$$\langle v, w\rangle := \alpha_1\beta_1 + \cdots + \alpha_n\beta_n$$

falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Es ist

$$\langle v, w\rangle = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \cdot \begin{pmatrix} \bar{\beta}_1 \\ \vdots \\ \bar{\beta}_n \end{pmatrix}$$

und die zugehörige Matrix bezüglich der Standardbasis ist die Einheitsmatrix (vgl. 7.4 für $\bar{1} = 1$).

Beispiel.
Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$ und $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2$. Dann ist

$$\langle v, v\rangle = (a, b)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a^2 + b^2 = c^2$$

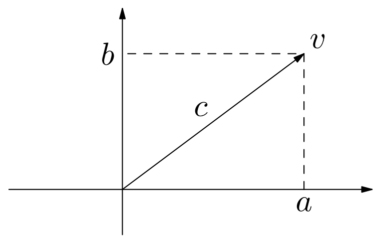

Abbildung 18: Länge des Vektors v

Wir nennen deshalb $\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle}$ die *Länge* oder *Norm* von v. Es ist $\|v\|$ der *Abstand* zwischen (a, b) und $(0, 0)$.

7.9 Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

Sei V ein euklidischer oder unitärer $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ wie in 7.7. In Anlehnung an das obige Beispiel definieren wir

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle}$$

und nennen $\|v\|$ die *Länge* oder *Norm* von v.

Satz.
Für $v, w \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gelten

i) $\|v\|^2 = \langle v, v\rangle > 0$*, falls* $v \neq \vec{0}$

ii) $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$

iii) $|\langle v, w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$ Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

iv) $|\langle v, w\rangle| = \|v\| \cdot \|w\| \iff v, w$ *sind linear abhängig*

v) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ Dreiecksungleichung

Beweis. **i)** folgt nach Definition der Norm und 7.7.3

ii)

$$\begin{aligned}\|\lambda v\|^2 &\underset{\text{i)}}{=} \langle \lambda v, \lambda v\rangle \underset{7.2}{=} \lambda\bar{\lambda}\langle v, v\rangle \\ &\underset{1.2}{=} |\lambda|^2\langle v, v\rangle = |\lambda|^2\|v\|^2\end{aligned}$$

iii) Für $w = \vec{0}$ ist die Behauptung trivial. Sei $w \neq \vec{0}$. Setze

$$\boxed{\lambda := \frac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle}}$$

Dabei ist $\langle w, w\rangle = \|w\|^2 > 0$ in $\mathbb{R}$. Es folgt

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle v - \lambda w, v - \lambda w\rangle \text{ nach 7.7 3.} \\ &\underset{7.2}{=} \langle v, v\rangle - \bar{\lambda}\langle v, w\rangle - \lambda\langle w, v\rangle + \lambda\bar{\lambda}\langle w, w\rangle \\ &= \langle v, v\rangle - \bar{\lambda}\langle v, w\rangle, \text{ da } \langle w, v\rangle \underset{2.}{=} \overline{\langle v, w\rangle} = \overline{\lambda\langle w, w\rangle} = \bar{\lambda}\langle w, w\rangle \\ &= \|v\|^2 - \frac{\overline{\langle v, w\rangle}}{\|w\|^2} \cdot \langle v, w\rangle \text{ nach i) und Definition von } \lambda \end{aligned}$$

Multiplikation der Ungleichung mit $\|w\|^2 > 0$ ergibt

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|v\|^2\|w\|^2 - \overline{\langle v, w\rangle}\langle v, w\rangle \\ &= \|v\|^2\|w\|^2 - |\langle v, w\rangle|^2 \text{ nach 1.2 falls } \mathbb{K} = \mathbb{C} \end{aligned}$$

iv) Für $w = \vec{0}$ ist die Behauptung trivial. Sei $w \neq \vec{0}$.

„$\Longrightarrow$“ Sei $|\langle v, w\rangle| = \|v\| \cdot \|w\|$. Analog wie in iii) berechnen wir

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle v - \lambda w, v - \lambda w\rangle &= \|v\|^2 - \frac{\overline{\langle v, w\rangle}}{\|w\|^2} \cdot \langle v, w\rangle \\ &= \|v\|^2 - \frac{|\langle v, w\rangle|^2}{\|w\|^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Insbesondere ist $0 = \langle v - \lambda w, v - \lambda w\rangle$ und damit folgt $v - \lambda w = \vec{0}$ nach 7.7.3.

„$\Longleftarrow$“ Ist $v = \mu w$ mit $\mu \in \mathbb{K}$, dann folgt

$$|\langle v, w\rangle| = |\langle \mu w, w\rangle| \underset{1.}{=} |\mu||\langle w, w\rangle| \underset{\text{i)}}{=} |\mu|\|w\| \cdot \|w\|$$

Andererseits gilt

$$\|v\| = \|\mu w\| \underset{\text{ii)}}{=} |\mu|\|w\|$$

Es folgt die Behauptung.

v) Mit der Bezeichnung $\Re(z)$ für den Realteil einer komplexen Zahl z aus 1.2 erhalten wir

$$\begin{aligned}
\|v+w\|^2 &= \langle v+w, v+w\rangle \text{ nach i)} \\
&= \langle v,v\rangle + \langle v,w\rangle + \langle w,v\rangle + \langle w,w\rangle \text{ nach 7.2} \\
&\underset{\text{i)}}{=} \|v\|^2 + \langle v,w\rangle + \overline{\langle v,w\rangle} + \|w\|^2 \text{ nach 7.7} \\
&= \|v\|^2 + 2\Re(\langle v,w\rangle) + \|w\|^2, \text{ da } (x+yi)+(x-yi) = 2x \\
&\le \|v\|^2 + 2|\langle v,w\rangle| + \|w\|^2, \text{ da } \Re(z) \le |z| \\
&\underset{iii)}{\le} \|v\|^2 + 2\|v\|\cdot\|w\| + \|w\|^2 \\
&= (\|v\| + \|w\|)^2
\end{aligned}$$

□

7.10 Winkel

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und V ein euklidischer Vektorraum. Dann ist der *Winkel* $\varphi = \sphericalangle(v,w)$ für $v, w \neq \vec{0}$ definiert durch

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\cdot\|w\|} \text{ und } 0 \le \varphi \le \pi}$$

Da nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$-1 \le \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\cdot\|w\|} \le 1$$

gilt und

$$\cos : [0,\pi] \longrightarrow [-1,1]$$

bijektiv ist, ist φ dadurch wohldefiniert. Es gilt also

$$\boxed{\langle v,w\rangle = \|v\|\cdot\|w\|\cos\varphi}$$

und $\langle v,w\rangle = 0$, falls $\varphi = \frac{\pi}{2}$, also falls v und w *senkrecht aufeinander stehen.* In diesem Fall schreiben wir $v \perp w$. Zum Beispiel ist für das Standardskalarprodukt

$$(1,0)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 0$$

also $(1,0)\perp(0,1)$.

Definieren wir allgemein in einem euklidischen oder unitären $\mathbb{K}$-Vektorraum V, dass $v, w \in V$ *orthogonal* sind oder *senkrecht aufeinander stehen*, wenn $\langle v, w\rangle = 0$ gilt (in Zeichen $v \perp w$), so erhalten wir aus 7.9 v) ein *Analogon zum Satz des Pythagoras*

$$\boxed{v \perp w \quad \Longrightarrow \quad \|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2}$$

Im folgenden lassen wir uns in der Vorstellung, dass auch in einem beliebigen metrischen Vektorraum $\langle v, v\rangle$ die Länge von v festlegt, und $\langle v, w\rangle$ den Winkel zwischen v und w definiert. Es gibt dann insbesondere Vektoren der Länge 0, und v und w stehen senkrecht aufeinander, wenn $\langle v, w\rangle = 0$.

7.11 Orthogonale Summen

Sei V ein K-Vektorraum, der mit einer Metrik

$$V \times V \longrightarrow K\,, \ (v, w) \longmapsto \langle v, w\rangle$$

versehen sei wie in 7.2. Wir nennen zwei Vektoren $v, w \in V$ *orthogonal*, wenn

$$\boxed{\langle v, w\rangle = 0}$$

gilt, und schreiben $v \perp w$.

Definition.
Seien $U_1, \dots, U_m$ Teilräume von V und sei

$$U := U_1 + \cdots + U_m := \{u_1 + \cdots + u_m \mid u_j \in U_j \ \forall j = 1, \dots, m\}$$

die Summe der Unterräume $U_1, \dots, U_m$. Dann heißt die Summe eine *orthogonale Summe*, wenn

1. $U = U_1 \oplus \cdots \oplus U_m$ (vgl. 2.13, 2.14 und Aufgabe 11)

2. $u_i \perp u_j$ für alle $u_i \in U_i$, $u_j \in U_j$ und $i \neq j$.

Wir schreiben dann

$$\boxed{U = U_1 \perp \cdots \perp U_m}$$

Ziel: V als orthogonale Summe zu schreiben mit möglichst einfachen Summanden.

7.12 Das Radikal eines metrischen Vektorraumes

Ist U ein Teilraum von V, so ist auch

$$U^{\perp} := \{v \in V \mid v \perp u \ \forall u \in U\}$$

ein Teilraum von V nach Aufgabe 50a.

Definition.
$\operatorname{Rad} V := \{v \in V \mid v \perp v' \ \forall v' \in V\}$ heißt das *Radikal von* V, und V heißt *regulär* oder *nicht ausgeartet*, falls $\operatorname{Rad} V = \{\vec{0}\}$ gilt. In dem Fall nennen wir auch die zugehörige Metrik $s : V \times V \longrightarrow K$, $(v, w) \longmapsto \langle v, w\rangle$, *regulär* oder *nicht ausgeartet*.

Bemerkung.
Sei U ein Teilraum von V, dann ist U bezüglich der Einschränkung der Metrik von V auf U ein metrischer Vektorraum, und es ist

$$\operatorname{Rad} U := \{u \in U \mid u \perp u' \ \forall u' \in U\} = U \cap U^{\perp}$$

Satz.
Sei V' ein zu $\operatorname{Rad} V$ komplementärer Teilraum, also $V = V' \oplus \operatorname{Rad} V$ (vgl. Aufgabe 19). Dann ist

$$\boxed{V = V' \perp \operatorname{Rad} V}$$

wobei die Einschränkung der Metrik s auf den Teilraum V'

$$s|_{V' \times V'} : V' \times V' \longrightarrow K, \quad (u', v') \longmapsto \langle u', v'\rangle$$

regulär ist und die Einschränkung der Metrik s auf den Teilraum $\operatorname{Rad} V$ trivial ist, d.h. es gilt $\langle v, w\rangle = 0$ für alle $v, w \in \operatorname{Rad} V$.

Beweis. Die Summe ist orthogonal, und es ist $\langle v, w\rangle = 0$ für alle $v, w \in \operatorname{Rad} V$ nach Definition von $\operatorname{Rad} V$. Noch zu zeigen: $\operatorname{Rad} V' = \{\vec{0}\}$.
Sei $u' \in \operatorname{Rad} V' \subset V'$ und sei $v \in V$ beliebig. Nach Voraussetzung gibt es eine Zerlegung $v = v' + w$ mit $v' \in V'$ und $w \in \operatorname{Rad} V$. Es folgt

$$\begin{aligned}\langle u', v\rangle = \langle u', v' + w\rangle &= \underbrace{\langle u', v'\rangle}_{=0, \text{ da } u' \in \operatorname{Rad} V'} + \underbrace{\langle u', w\rangle}_{=0, \text{ da } w \in \operatorname{Rad} V} \\ &= 0 \quad \Longrightarrow \quad u' \in \operatorname{Rad} V\end{aligned}$$

Insbesondere ist $u' \in (\operatorname{Rad} V) \cap V' \underset{2.14}{=} \{\vec{0}\}$. □

7.13 Geschickte Basiswahl zur Rangbestimmung

Es sei $\dim_K V = n$ und $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V. Dann ist

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1\rangle & \cdots & \langle v_1, v_n\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle v_n, v_1\rangle & \cdots & \langle v_n, v_n\rangle \end{pmatrix}$$

nach 7.4, und wir können mit Hilfe von 7.12 leicht den Rang r von $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s)$ bestimmen:

Satz.

i) $\operatorname{Rad} V = \{\vec{0}\} \iff \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s) \in \mathrm{GL}_n(K) \quad \Big(\overset{6.7}{\iff} \operatorname{rang} \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s) = n\Big)$

ii) Es gibt eine Basis $\mathcal{B}' = (v'_1, \ldots, v'_n)$ *von* V *so, dass mit* $T := \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id})$ *gilt*

$${}^tT \cdot \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s) \cdot T^* \underset{7.6}{=} \mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(s) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & 0 & \ldots & 0 \\ & B & & \vdots & & \vdots \\ & & & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{array}\right)$$

wobei $B \in \mathrm{GL}_r(K)$ *mit* $r := \operatorname{rang} \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s) \underset{\textit{Aufg. } 32}{=} \operatorname{rang} \mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(s)$.

Beweis. **zu i)** Die Beweisidee ist es zu zeigen, dass $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s) = \mathrm{M}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(\rho)$ für eine geeignete K-lineare Abbildung ρ und eine passende Basis $\mathcal{C}$ gilt, und dann die folgende Äquivalenz auszunutzen:

$\mathrm{M}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(\rho) \in \mathrm{GL}_n(K) \iff \rho$ ist ein Isomorphismus.

(Diese Äquivalenz ergibt sich so:

$\mathrm{M}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(\rho) \in \mathrm{GL}_n(K) \underset{4.21}{\iff} n = \operatorname{rang} \mathrm{M}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(\rho) \underset{4.20}{=} \dim_K \operatorname{bild}(\rho) \underset{3.23}{\iff} \rho$ Isomorphismus) Nun zum eigentlichen Beweis von i):

Sei $\mathcal{C} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ die durch

$$\varphi_i(v_j) = \begin{cases} 1 \text{ für } i = j \\ 0 \text{ für } i \neq j \end{cases}$$

definierte Basis von $\mathrm{Hom}_K(V, K)$. Ferner sei

$$\rho : \overline{V} \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(V, K), \quad v \longmapsto \begin{cases} V \longrightarrow K \\ w \longmapsto \langle w, v\rangle \end{cases}$$

wobei der K-Vektorraum $\overline{V}$ folgendermaßen definiert ist

1. Als additive Gruppe ist $\overline{V} = V$
2. Für $v \in \overline{V}$ und $\lambda \in K$ ist die Skalarmultiplikation gegeben durch

$$\lambda \cdot v := \bar{1}\,\bar{\lambda}\,v$$

Offensichtlich ist $\mathcal{B}$ auch eine Basis von $\overline{V}$, und ρ ist K-linear nach 7.2. Schreiben wir

$$\boxed{\rho(v_j) = a_{1j}\varphi_1 + \cdots + a_{nj}\varphi_n \text{ mit } a_{ij} \in K}$$

dann folgt aus 4.4, dass $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\rho) = (a_{ij})$ ist. Es ist

$$\begin{aligned}\langle v_i, v_j\rangle &= \rho(v_j)(v_i)\\ &= a_{1j}\varphi_1(v_i) + \cdots + a_{nj}\varphi_n(v_i)\\ &= a_{ij} \text{ nach Definition von } \varphi_i\end{aligned}$$

Also gilt $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\rho)$. Daraus folgt, wie eingangs gesagt,

$$\boxed{\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s) \in \mathrm{GL}_n(K) \quad \Longleftrightarrow \quad \rho \text{ ist ein Isomorphismus}}$$

Es ist

$$\mathrm{Rad}\,V := \{v \in V \mid \langle w, v\rangle = 0\ \forall w \in V\} = \mathrm{kern}\,\rho$$

Mit 3.23 folgt: ρ ist ein Isomorphismus $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Rad}\,V = \{\vec{0}\}$

zu ii) Schreibe $V = U \perp \mathrm{Rad}\,V$ wie in Satz 7.12 und bestimme eine Basis $\mathcal{B}' = (v_1', \ldots, v_n')$ von V so, dass $(v_1', \ldots, v_m')$ eine Basis von U und $(v_{m+1}', \ldots, v_n')$ eine Basis von $\mathrm{Rad}\,V$ ist (vgl. Aufgabe 19). Mit 7.4 folgt

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(s) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & 0 & \ldots & 0\\ & B & & \vdots & & \vdots\\ & & & 0 & \ldots & 0\\ \hline 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0\end{array}\right)$$

mit $B \in \mathrm{M}_{m\times m}(K)$ und passenden Nullblöcken. Nach i) ist $\mathrm{rang}\,B = m$, da die Einschränkung von s auf U nach 7.12 regulär ist. Nach 7.6 ist $\mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(s) = {}^tT \cdot \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s) \cdot T^*$, also folgt $m = r$, da T invertierbar ist.

□

7.14 Folgerung für symmetrische und schiefsymmetrische Matrizen

Sei $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$ symmetrisch (${}^tA = A$) oder schiefsysmmetrisch (${}^tA = -A$), dann gibt es $T \in \mathrm{GL}_n(K)$ so, dass

$$ {}^tT \cdot A \cdot T = \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & 0 & \dots & 0 \\ & B & & \vdots & & \vdots \\ & & & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right) $$

wobei $B \in \mathrm{GL}_r(K)$ und $r = \operatorname{rang} A$ ist.

Beweis. Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und sei $\mathcal{B}$ eine Basis von V. Nach 7.4 gibt es genau eine Metrik s auf V so, dass $A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s)$ gilt. Wähle $\mathcal{B}'$ gemäß 7.13 ii) und setze $T := \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id})$. Dann folgt die Behauptung aus 7.13, da im symmetrischen wie im schiefsymmetrischen Fall $T^* = T$ gilt. □

7.15 Dualitätssatz

Sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum, der mit einer Metrik $s : V \times V \longrightarrow K,\ (v,w) \longmapsto \langle v,w\rangle$ versehen sei (wie in 7.2), und es sei s regulär (d.h. $\operatorname{Rad} V = \{\vec{0}\}$). Dann gelten für jeden Teilraum U von V

1. $\dim_K V = \dim_K U + \dim_K U^\perp$
2. Ist $s|_{U\times U} : U \times U \longrightarrow K$ regulär, dann ist $V = U \perp U^\perp$, und auch die Einschränkung von s auf $U^\perp$ ist regulär.

Lemma.
Sei V ein K-Vektorraum und U ein Teilraum von V. Für $f \in \mathrm{Hom}_K(V,K)$ sei $f|_U : U \longrightarrow K$ die Einschränkung von f auf den Teilraum U. Dann ist die K-lineare Abbildung

$$\mathrm{Hom}_K(V,K) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(U,K), \quad f \longmapsto f|_U$$

surjektiv.

Beweis des Lemmas. Sei $g \in \mathrm{Hom}_K(U,K)$ und sei U' ein zu U komplementärer Teilraum, also $V = U \oplus U'$ (vgl. Aufgabe 19), so setzen wir

$$f : U \oplus U' \longrightarrow K, \quad u + u' \longmapsto g(u)$$

und es folgt $f|_U = g$ □

Beweis des Dualitätssatzes. **zu 1.** Wie im Beweis von 7.13 i) ist

$$\rho : \overline{V} \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(V,K), \quad v \longmapsto \begin{cases} V \longrightarrow K \\ w \longmapsto \langle w, v\rangle \end{cases}$$

ein Isomorphismus, da $\mathrm{Rad}\, V = \{\vec{0}\}$ ist. Sei

$$\rho' : \overline{V} \xrightarrow{\rho} \mathrm{Hom}_K(V,K) \xrightarrow{|_U} \mathrm{Hom}_K(U,K)$$

dann ist ρ' nach dem Lemma surjektiv (Komposition surjektiver Abbildungen ist wieder surjektiv), also

$$\dim_K \mathrm{bild}\, \rho' = \dim_K \mathrm{Hom}_K(U,K) \underset{4.5}{=} \dim_K U$$

Es ist $\mathrm{kern}\, \rho' = \{v \in V \mid \langle u, v\rangle = 0 \ \forall u \in U\} = U^\perp$. Es folgt

$$\dim_K \overline{V} = \dim_K V \underset{3.22}{=} \dim_K \underbrace{U^\perp}_{\mathrm{kern}\, \rho'} + \underbrace{\dim_K U}_{\dim_K \mathrm{bild}\, \rho'}$$

zu 2. Ist s auf U regulär, dann gilt $U \cap U^\perp = \{\vec{0}\}$ und mit 2.14 folgt $U + U^\perp = U \oplus U^\perp$. Aus 3.15 ergibt sich

$$\dim_K(U \oplus U^\perp) = \dim_K U + \dim_K U^\perp \underset{1.}{=} \dim_K V$$

Da $U \oplus U^\perp$ ein Teilraum von V ist, folgt $U \oplus U^\perp = V$ nach 3.14. Die Summe ist orthogonal nach Definition von $U^\perp$. Zu zeigen bleibt $\mathrm{Rad}\, U^\perp = \{\vec{0}\}$.

Sei $u' \in \mathrm{Rad}\, U^\perp$. Dann ist $u' \perp u''$ für alle $u'' \in U^\perp$. Wegen $u' \in U^\perp$ ist aber auch $u' \perp u$ für alle $u \in U$. Da $V = U + U^\perp$ ist, lässt sich jedes $v \in V$ schreiben als $v = u + u''$ mit $u \in U$, $u'' \in U^\perp$. Es folgt

$$\langle u', v\rangle = \langle u', u\rangle + \langle u', u''\rangle = 0$$

also $u' \in \mathrm{Rad}\, V = \{\vec{0}\}$.

□

7.16 Hyperbolische Ebenen

Sei V ein K-Vektorraum, der mit einer Metrik

$$s : V \times V \longrightarrow K\,, \ (v, w) \longmapsto \langle v, w\rangle$$

versehen sei. Ein Vektor $v \in V$ heißt *isotrop*, falls $\langle v, v\rangle = 0$ gilt. Sind $v, w \in V$ isotrop und gilt $\langle v, w\rangle = 1$, so heißt

$$\boxed{H := Kv + Kw}$$

eine *hyperbolische Ebene bezüglich s*.
Es sind v und w linear unabhängig, denn wäre $v = \lambda w$ mit $\lambda \in K$, so wäre

$$1 = \langle v, w\rangle = \langle \lambda w, w\rangle = \lambda\langle w, w\rangle = 0$$

Es folgt $\dim_K H = 2$. Die Matrix von $s|_{H\times H}$ bezüglich $\mathcal{B} = (v, w)$ ist

$$\begin{pmatrix} \langle v, v\rangle & \langle v, w\rangle \\ \langle w, v\rangle & \langle w, w\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \bar{1} & 0 \end{pmatrix}$$

wobei $\bar{1} = 1$ oder -1 (vgl. 7.2). Insbesondere ist s auf H regulär nach 7.13 i), da

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \bar{1} & 0 \end{pmatrix} = -\bar{1} \neq 0$$

7.17 Symplektische Räume

Sei $1 + 1 \neq 0$ in K. Sei V ein K-Vektorraum, der mit einer symplektischen Metrik $s : V \times V \longrightarrow K$, $(v, w) \longmapsto \langle v, w\rangle$ versehen sei. Es ist dann s schiefsymmetrisch, d.h.

$$\boxed{\langle v, w\rangle = -\langle w, v\rangle \ \forall v, w \in V}$$

Insbesondere gilt

$$\boxed{\langle v, v\rangle = 0 \ \forall v \in V}$$

Nach 7.2 und 7.3 ist dann s linear in beiden Argumenten, insbesondere

$$\langle v, \mu w\rangle = \mu\langle v, w\rangle \ \forall \mu \in K \ \text{(Fall IIa)}$$

Satz.
Sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum, so ist

$$V = H_1 \perp \cdots \perp H_m \perp L_1 \perp \cdots \perp L_k$$

mit hyperbolischen Ebenen H_i und isotropen Geraden L_j. Es ist

$$U := H_1 \perp \cdots \perp H_m \ \textit{regulär}$$

und

$$\operatorname{Rad} V = L_1 \perp \cdots \perp L_k \ \textit{das Radikal von } V$$

Hierbei ist mit einer *isotropen Geraden* ein 1-dimensionaler Teilraum $L = Ku$ mit $\langle u, u\rangle = 0$ gemeint.

Folgerung.
Jeder **reguläre** symplektische Raum V ist orthogonale Summe von hyperbolischen Ebenen, und es ist $\dim_K V = 2m$ eine gerade Zahl.

Beweis des Satzes. Sei $U \neq \{\vec{0}\}$ ein orthogonal unzerlegbarer Teilraum von V, d.h. U läßt sich nicht darstellen als $U = U_1 \perp U_2$ mit echten Teilräumen U_1, U_2.

$s|_{U\times U} = 0$ In diesem Fall ist jeder Vektor $u \in U$ isotrop und jede Zerlegung von U in eine direkte Summe von Teilräumen trivialerweise orthogonal. Da U aber orthogonal unzerlegbar ist, muss $\dim_K U = 1$ gelten.

$s|_{U\times U} \neq 0$ Dann gibt es Vektoren $v', w \in U$ mit $\langle v', w\rangle =: \lambda \neq 0$. Ist $v := \frac{v'}{\lambda}$, dann gilt

$$\langle v, w\rangle = \langle \frac{v'}{\lambda}, w\rangle = \frac{1}{\lambda}\langle v', w\rangle = 1$$

Die Vektoren v, w sind isotrop, da s symplektisch ist. Die Metrik s ist regulär auf U, da es sonst eine orthogonale Zerlegung

$$U = U' \perp \operatorname{Rad}(U)$$

geben würde (vgl. 7.12), und U unzerlegbar ist.

Sei $H = Kv + Kw$ die von v und w aufgespannte hyperbolische Ebene. Nach 7.16 ist $s|_{H\times H}$ regulär, und daher gilt $U = H \perp H^{\perp}$ nach 7.15. Hieraus folgt $H^{\perp} = \{\vec{0}\}$, da U orthogonal unzerlegbar ist. Es folgt $U = H$ ist eine hyperbolische Ebene.

Sei nun $V = V' \perp \operatorname{Rad} V$ ein Zerlegung von V gemäß Satz 7.12. Dann ist $s|_{V'\times V'}$ regulär (insbesondere $\neq 0$) und wir finden eine hyperbolische Ebene H_1, wobei $s|_{H_1\times H_1}$ regulär ist. Nach dem Dualitätssatz 7.15 gilt

$$V' = H_1 \perp \underbrace{H_1^{\perp}}_{:=V''}$$

und $s|_{V''\times V''}$ ist regulär. So fortfahrend erhalten wir eine Zerlegung

$$V' = H_1 \perp \cdots \perp H_m$$

mit hyperbolischen Ebenen H_i.
Nach Definition ist $s|_{\operatorname{Rad} V\times \operatorname{Rad} V} = 0$ und wir spalten eine (unzerlegbare) isotrope Gerade ab

$$\operatorname{Rad} V = L_1 \oplus \tilde{V}$$

Trivialerweise ist die Zerlegung sogar orthogonal und $s|_{\tilde V\times\tilde V}=0$. So fortfahrend erhalten wir eine Zerlegung

$$\operatorname{Rad} V = L_1 \perp \cdots \perp L_k$$

□

7.18 Normalform schiefsymmetrischer Matrizen

Korollar.
Ist $A\in \mathrm{GL}_n(K)$ und A schiefsymmetrisch (d.h. ${}^tA=-A$), so ist $n=2m$ gerade und es gibt eine Matrix $T\in\mathrm{GL}_n(K)$ so, dass

$${}^tTAT=\left(\begin{array}{c|c} 0 & E_m \\ \hline -E_m & 0\end{array}\right) \quad \textit{wobei } E_m=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}\in \mathrm{M}_{m\times m}(K)$$

Beweis. Es ist $A=\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s)$ nach 7.4, wobei $\mathcal{B}$ Basis eines n-dimensionalen K-Vektorraumes V und s eine symplektische Metrik auf V ist. Nach 7.13 i) ist s regulär. Nach 7.17 folgt

$$V=H_1\perp\cdots\perp H_m$$

mit hyperbolischen Ebenen H_i und Basen $\mathcal{B}_i=(v_i,w_i)$ mit

$$\langle v_i,v_i\rangle = 0 = \langle w_i,w_i\rangle \text{ und } \langle v_i,w_i\rangle = 1 \text{ für } i=1,\dots,m$$

Für $\mathcal{B}':=(v_1,\dots,v_m,w_1,\dots,w_m)$ gilt nach 7.4

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(s)=\left(\begin{array}{c|c} 0 & E_m \\ \hline -E_m & 0\end{array}\right)$$

und mit $T:=\mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id})$ folgt nach 7.6 die Behauptung. □

7.19 Orthogonalbasen

Sei $1+1\neq 0$ in K. Es sei nun V mit einer symmetrischen Bilinearform $s: V\times V\longrightarrow K$, $(v,w)\longmapsto \langle v,w\rangle$ versehen, d. h. es gelte für alle $u,v,w\in V$ und $\lambda\in K$

1. $\left.\begin{array}{r}\langle u+v,w\rangle = \langle u,w\rangle+\langle v,w\rangle \\ \langle \lambda v,w\rangle = \lambda\langle v,w\rangle\end{array}\right\}$ linear im ersten Argument

2. $\overline{\langle v,w\rangle}=\langle w,v\rangle$ symmetrisch ($\Longrightarrow$ Linearität im 2. Argument)

Satz.

1. *Ist* $\dim_K V = n$, *so besitzt* V *eine orthogonale Zerlegung*
$$V = L_1 \perp \cdots \perp L_n$$
in 1*-dimensionale Teilräume* $L_1, \ldots, L_n$.

2. V *besitzt eine* Orthogonalbasis, *das ist eine Basis* $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ *mit* $v_i \perp v_j$ *für alle* $i \neq j$ *(d. h. mit* $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ *für alle* $i \neq j$*).*

3. *Es gibt eine Basis* $\mathcal{B}$ *von* V *so, dass*
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s) = \left(\begin{array}{cccc|ccc} a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_m & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right) \quad \textit{mit } a_j \neq 0 \ \forall j = 1, \ldots, m$$
und es ist $m = n - \dim_K \operatorname{Rad} V$.

Beweis. **zu 1.** Wir zeigen zunächst, dass jeder orthogonal unzerlegbare Teilraum U von V eindimensional ist.

$s|_{U \times U} = 0$ Dann ist wie im Beweis von 7.17 $\dim_K U = 1$

$s|_{U \times U} \neq 0$ Dann ist U regulär, (denn sonst gäbe es eine Zerlegung $U = U' \perp \operatorname{Rad} U$ nach 7.12). Es gibt ein $u \in U$ mit $\langle u, u \rangle \neq 0$, denn angenommen $\langle u, u \rangle = 0$ für alle $u \in U$, dann folgt
$$\begin{aligned} 0 = \langle u+v, u+v \rangle &= \underbrace{\langle u, u \rangle}_{0} + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \underbrace{\langle v, v \rangle}_{0} \\ &= 2\langle u, v \rangle \ \forall u, v \in U \end{aligned}$$
Dann ist aber $\langle u, v \rangle = 0 \ \forall u, v \in U$, also $s|_{U \times U} = 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung.
Sei also $u \in U$ mit $\langle u, u \rangle \neq 0$. Dann ist $L := Ku$ ein regulärer Teilraum und nach 7.15 gilt
$$U = L \perp L^{\perp} \implies L^{\perp} = \{\vec{0}\}, \text{ da } U \text{ unzerlegbar} \implies \dim_K U = 1$$

Es ist $V \overset{7.12}{=} V' \perp \operatorname{Rad} V$, wobei V' regulär ist. Induktiv erhalten wir dann Zerlegungen (analog wie im Beweis von 7.17)

$$V' = L_1 \perp \cdots \perp L_m \text{ und } \operatorname{Rad} V = L_{m+1} \perp \cdots \perp L_n$$

zu 2. Sei $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ so gewählt, dass $L_i = K u_i$ ist, dann gilt

$$\begin{aligned}
\langle u_j, u_j \rangle &=: a_j \neq 0 \text{ für } j = 1, \ldots, m \\
\langle u_j, u_j \rangle &= 0 \text{ für } j = m+1, \ldots, n \\
\langle u_i, u_j \rangle &= 0 \text{ für alle } i \neq j
\end{aligned}$$

und die Behauptungen 2. und 3. folgen nach Definition 7.4 von $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s)$ und da $n = \dim_K V' + \dim_K \operatorname{Rad} V = m + \dim_K \operatorname{Rad} V$ nach dem Dimensionssatz 3.15 gilt.

□

7.20 Orthonormalbasen

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, und sei V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum wie in 7.7. Ist V endlich dimensional, so besitzt V eine *Orthonormalbasis*, d.h. eine Basis $(u_1, \ldots, u_n)$ mit $\|u_j\| = 1$ für alle $j = 1, \ldots, n$ und $u_i \perp u_j$ für alle $i \neq j$.

Satz (Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren).
Wähle eine Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ von V. Setze

$$\boxed{u_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}}$$

Dann ist $\|u_1\| = 1$. Setze

$$\boxed{u_2' := v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1 \text{ und } u_2 := \frac{u_2'}{\|u_2'\|}}$$

Setze

$$\boxed{u_3' := v_3 - \langle v_3, u_1 \rangle u_1 - \langle v_3, u_2 \rangle u_2 \text{ und } u_3 := \frac{u_3'}{\|u_3'\|}}$$

u.s.w.
Dann ist $(u_1, \ldots, u_n)$ eine Orthonormalbasis von V.

Beweis. durch Induktion nach $n = \dim_K V$

$n = 1$ klar

$n > 1$ Sei $k < n$ und U_k der von $v_1, \dots, v_k$ erzeugte Teilraum von V. Nach Induktionsvoraussetzung hat U_k eine Orthonormalbasis $(u_1, \dots, u_k)$. Setze

$$u'_{k+1} = v_{k+1} - \langle v_{k+1}, u_1 \rangle u_1 - \cdots - \langle v_{k+1}, u_k \rangle u_k$$

dann ist $u'_{k+1} \neq \vec{0}$, da $v_{k+1} \notin U_k$. Setze $u_{k+1} = \frac{u'_{k+1}}{\|u'_{k+1}\|}$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\langle u_{k+1}, u_j \rangle &= \frac{1}{\|u'_{k+1}\|} \langle v_{k+1} - \langle v_{k+1}, u_1 \rangle u_1 - \cdots - \langle v_{k+1}, u_k \rangle u_k, u_j \rangle \\
&= \frac{1}{\|u'_{k+1}\|} (\langle v_{k+1}, u_j \rangle - \langle v_{k+1}, u_1 \rangle \langle u_1, u_j \rangle - \cdots - \langle v_{k+1}, u_k \rangle \langle u_k, u_j \rangle) \\
&= \frac{1}{\|u'_{k+1}\|} (\langle v_{k+1}, u_j \rangle - \langle v_{k+1}, u_j \rangle \langle u_j, u_j \rangle) \\
&= 0 \quad \forall j = 1, \dots, k
\end{aligned}$$

da s linear im ersten Argument ist, $u_1, \dots, u_k$ paarweise orthogonal sind und $\langle u_j, u_j \rangle = 1$ ist. □

7.21 Beispiele

1. Sei $K = \mathbb{R}$ mit Involution id, $V = \mathbb{R}^2$ und s das Standard-Skalarprodukt, d.h. für $v = (x_1, x_2)$, $w = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$

   $$\boxed{\langle v, w \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2}$$

   Es folgt

   $$\langle v, v \rangle = x_1^2 + x_2^2 > 0 \; \forall v \neq (0,0)$$

   Insbesondere ist s positiv definit. Setze $r := \sqrt{\langle v, v \rangle} =: \|v\|$. Ist $r > 0$ und $K_r := \{v \in V \mid \|v\| = r\}$, dann beschreibt K_r einen Kreis.

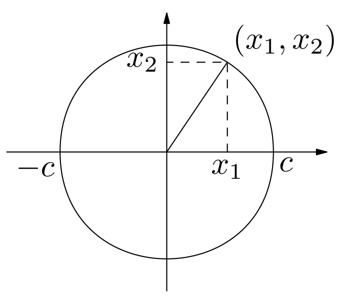

Abbildung 19: Kreis

2. Sei $K = \mathbb{R}$ mit Involution id, $V = \mathbb{R}^2$ und s eine Metrik gegeben durch

$$\boxed{\langle v, w\rangle = x_1y_1 - x_2y_2 \text{ für } v = (x_1, x_2), w = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2}$$

Dann ist s eine symmetrische Bilinearform, und es ist

$$\langle v, v\rangle = x_1^2 - x_2^2$$

Hier können drei Fälle auftreten

$\langle v, v\rangle = 0$ Zum Beispiel für $v = e_1 + e_2 = (1, 1)$ oder $v = e_1 - e_2 = (1, -1) \Longrightarrow \langle v, v\rangle = 0$

$\langle v, v\rangle > 0$ Zum Beispiel für $v = 2e_1 + e_2 = (2, 1) \Longrightarrow \langle v, v\rangle = 3$

$\langle v, v\rangle < 0$ Zum Beispiel für $v = e_1 + 2e_2 = (1, 2) \Longrightarrow \langle v, v\rangle = -3$

Ist $r \in \mathbb{R}$ und $H_r := \{v \in V \mid \langle v, v\rangle = r\}$, dann beschreibt H_r eine Hyperbel ($r \neq 0$) bzw. die beiden Winkelhalbierenden ($r = 0$).

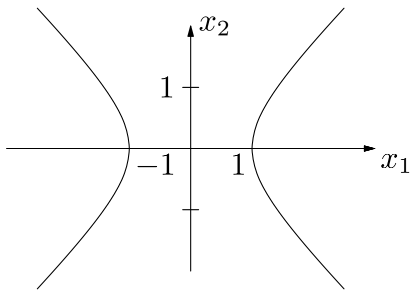

Abbildung 20: Hyperbel

Sei $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ die Standardbasis von $V = \mathbb{R}^2$. Dann ist

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} \langle e_1, e_1\rangle & \langle e_1, e_2\rangle \\ \langle e_2, e_1\rangle & \langle e_2, e_2\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Nach 7.13 i) ist s regulär (d.h. $\mathrm{Rad}(V) = \{\vec{0}\}$), denn $\det \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s) = -1 \neq 0$, also $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

Sei $u_1 := \frac{1}{2}(e_1 + e_2) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, dann ist $\langle u_1, u_1\rangle = 0$, und also ist u_1 isotrop. Sei

$$\boxed{U := \mathbb{R}u_1 := \{\lambda u_1 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}}$$

Dann ist $s|_{U\times U}$ nicht regulär, denn

$$\operatorname{Rad} U := \{u \in U \mid \langle u, w\rangle = 0 \;\forall w \in U\} = U \cap U^{\perp} = U$$

wegen $\langle \lambda u_1, \mu u_1\rangle = \lambda\mu\langle u_1, u_1\rangle = 0 \;\forall \lambda, \mu \in K$. Insbesondere ist $U \neq \{\vec{0}\}$.

Dieses Beispiel zeigt: Ein Teilraum eines regulären Raumes braucht also nicht regulär zu sein.

Die Aussage 2 des Dualitätssatzes ($V = U \perp U^{\perp}$) ist ebenfalls nicht für jeden Teilraum erfüllt, wie die folgende Behauptung zeigt.

Behauptung $U^{\perp} := \{v \in V \mid \langle v, u\rangle = 0 \;\forall\, u \in U\} = U$

Beweis. Sei $u_2 := e_1 - e_2 = (1, -1)$. Dann bilden u_1, u_2 eine Basis von V und es ist $\langle u_2, u_2\rangle = 0$ und $\langle u_1, u_2\rangle = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

$\subseteq$ Sei $v \in U^{\perp}$. Dann gilt $v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$ mit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, da $\{u_1, u_2\}$ eine Basis von V bildet und

$$\begin{aligned} 0 &= \langle v, u_1\rangle = \langle \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, u_1\rangle \\ &= \lambda_1 \underbrace{\langle u_1, u_1\rangle}_{=0} + \lambda_2 \underbrace{\langle u_2, u_1\rangle}_{=1} \\ &= \lambda_2 \end{aligned}$$

also $v = \lambda_1 u_1 \in U$

$\supseteq$ Klar, da $\langle \lambda u_1, \mu u_1\rangle = \lambda\mu\langle u_1, u_1\rangle = 0$

$\square$

Folgerung $\dim_{\mathbb{R}} U + \dim_{\mathbb{R}} U^{\perp} = 1 + 1 = \dim_{\mathbb{R}} V$ (wie in 7.15.1 allgemein bewiesen für reguläres V). Es gilt aber $V \supsetneq U + U^{\perp}$.

Bemerkung Es ist $V = \mathbb{R}u_1 + \mathbb{R}u_2$ mit $u_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ und $u_2 = (1, -1)$ eine hyperbolische Ebene, da $\langle u_1, u_1\rangle = \langle u_2, u_2\rangle = 0$ und $\langle u_1, u_2\rangle = 1$ gilt. (vgl. 7.16). Für $\mathcal{B}' = \{u_1, u_2\}$ und die Standardbasis $\mathcal{B}$ gilt dann

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T := \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

Ferner

$$
\begin{aligned}
{}^tT\,\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s)\,T &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(s)
\end{aligned}
$$

in Übereinstimmung mit 7.6.

7.22 Trägheitssatz von Sylvester

Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, und sei

$$s : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ (v, w) \longmapsto \langle v, w \rangle\,,$$

eine symmetrische Bilinearform auf V. Wir wählen einen *maximal positiv definiten* Teilraum U von V, das ist ein Teilraum mit den Eigenschaften

1. $\langle u, u \rangle > 0$ für $u \in U^+ \setminus \{\vec{0}\}$
2. Für alle $v \in V \setminus U^+$ ist $s|_{(U^+ + Kv)\times(U^+ + Kv)} \longrightarrow \mathbb{R}$ nicht positiv definit.

Sei $U^- := (U^+)^\perp = \{v \in V \mid \langle v, u \rangle = 0\ \forall u \in U^+\}$.

Lemma.
Ist s regulär (d.h. $\operatorname{Rad} V = \{\vec{0}\}$*), so gelten*

i) $V = U^+ \perp U^-$

ii) s ist auf U^- negativ definit (d. h. es ist $\langle v, v \rangle < 0$ für $v \in U^- \setminus \{\vec{0}\}$).

iii) $\dim_{\mathbb{R}} U^+ = \dim_{\mathbb{R}} V^+$ *für **jeden** maximalen positiv definiten Teilraum V^+ von V*

Beweis. **zu i)** U^+ ist regulär, da $s|_{U^+ \times U^+}$ positiv definit ist. Nach 7.15 folgt

$$V = U^+ \perp (U^+)^\perp$$

zu ii) Angenommen es gibt $v \in U^-$ mit $\langle v, v \rangle > 0$. Dann ist s ist auf $U^+ \oplus \mathbb{R}v$ positiv definit im Widerspruch zur Maximalität von U^+, denn für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, $u \in U^+$ gilt dann

$$\langle u + \lambda v, u + \lambda v \rangle = \underbrace{\langle u, u \rangle}_{>0} + 2\lambda \underbrace{\langle u, v \rangle}_{=0,\ \text{da}\ v \in (U^+)^\perp} + \lambda^2 \underbrace{\langle v, v \rangle}_{>0}$$

$$> 0$$

Also ist $\langle v,v\rangle \le 0$ für alle $v \in U^-$. Ist $\langle w,w\rangle = 0$ für ein $w \in U^-$, so gilt für alle $v \in U^-$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$, dass

$$0 \ge \langle w+\lambda v, w+\lambda v\rangle = \underbrace{\langle w,w\rangle}_{=0} + 2\lambda\langle v,w\rangle + \lambda^2 \underbrace{\langle v,v\rangle}_{\le 0}$$

Es folgt $\langle v,w\rangle = 0$ für alle $v \in U^-$ (andernfalls erhält man einen Widerspruch, da $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig), also ist $w \in \operatorname{Rad} U^-$. Es folgt $w = \vec{0}$, da s nach 7.15 regulär auf U^- ist.

zu iii) Sei $V = V^+ \perp V^-$ eine zweite Zerlegung. Dann ist nach 7.15

$$\dim_{\mathbb{R}} V^- = n - \dim_{\mathbb{R}} V^+$$

Angenommen: $\dim_{\mathbb{R}} V^+ < \dim_{\mathbb{R}} U^+$. Dann folgt

$$\begin{aligned} n &< \dim_{\mathbb{R}} U^+ + n - \dim_{\mathbb{R}} V^+ = \dim_{\mathbb{R}} U^+ + \dim_{\mathbb{R}} V^- \\ &\underset{3.15}{=} \dim_{\mathbb{R}}(U^+ + V^-) + \dim_{\mathbb{R}}(U^+ \cap V^-) \\ &= \dim_{\mathbb{R}}(U^+ + V^-), \text{ da } \underbrace{U^+}_{\text{pos. def.}} \cap \underbrace{V^-}_{\text{neg. def.}} = \{\vec{0}\} \\ &\le n \qquad \text{Widerspruch} \end{aligned}$$

Es folgt $\dim_{\mathbb{R}} V^+ = \dim_R U^+$ (denn der Fall $\dim_{\mathbb{R}} U^+ < \dim_{\mathbb{R}} V^+$ ist analog).

□

Satz.
Es ist

$$V = U^+ \perp U^- \perp \operatorname{Rad} V$$

wobei s auf U^+ positiv definit, auf U^- negativ definit und auf $\operatorname{Rad} V$ gleich 0. Ist

$$V = V^+ \perp V^- \perp \operatorname{Rad} V$$

eine weitere solche Zerlegung, so ist

$$r^+ := \dim_{\mathbb{R}} U^+ = \dim_{\mathbb{R}} V^+ \quad \textit{und} \quad r^- := \dim_{\mathbb{R}} U^- = \dim_{\mathbb{R}} V^-$$

Beweis. Der Satz folgt aus 7.12 und dem Lemma, da U^+, U^-, V^+, V^- regulär. □

Bezeichnungen

r^- heißt *Trägheitsindex* (manchmal auch $r^+ - r^-$)

$(r^+, r^-, r_0 := \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Rad} V)$ heißt *Signatur*

$\operatorname{Min}(r^+, r^-)$ heißt *Isotropieindex*

von V bezüglich s.

Beispiele.
Sei V regulär.

1. $r^+ = n \Longrightarrow V$ euklidisch

2. $r^+ = 3$ und $r^- = 1$, dann heißt V *Minkowski-Raum.* (Hier spielt sich die spezielle Relativitätstheorie ab.)

7.23 Folgerung

Korollar.
Ist V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und

$$s : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ (v,w) \longmapsto \langle v,w \rangle\,,$$

eine reguläre symmetrische Bilinearform. Dann gibt es eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ von V und ein $r^+ \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 0 \textit{ für } i \neq j \\ 1 \textit{ für } i = j \leq r^+ \\ -1 \textit{ für } i = j \in \{r^+ + 1, \ldots, n\} \end{cases}$$

Die Zahl r^+ ist durch s eindeutig bestimmt.

Beweis. Wähle gemäß Satz 7.19.2 eine Orthogonalbasis $\{u_1, \ldots, u_n\}$. Es folgt

$$\langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 0 \text{ für } i \neq j \\ a_i \neq 0 \text{ für } i = j \text{ da } s \text{ regulär} \end{cases}$$

Setze $v_i := \frac{u_i}{\sqrt{|a_i|}}$. Es folgt die Behauptung bei passender Umnummerierung und nach 7.22. $\square$

7.24 Übungsaufgaben 43 – 52

Aufgabe 43.

(a) Für $v = (x_1, x_2, x_3),\ w = (y_1, y_2, y_3)$ aus $\mathbb{R}^3$ sei

$$\langle v, w\rangle := 3x_1y_2 + 4x_1y_3 - 3x_2y_1 - x_2y_3 - 4x_3y_1 + x_3y_2 \,.$$

Hierdurch ist eine *schiefsymmetrische Bilinearform*

$$s : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (v, w) \mapsto \langle v, w\rangle\,,$$

definiert. Man bestimme die Matrizen $M_{\mathcal{B}}(s)$ und $M_{\mathcal{B}'}(s)$ bezüglich der Basen

$$\mathcal{B} = \{(1, 0, 0),\ (0, 1, 0),\ (0, 0, 1)\} \text{ und } \mathcal{B}' = \{(0, 0, 1),\ (0, 1, 0),\ (\tfrac{1}{4}, 1, -\tfrac{3}{4})\}.$$

(b) Für $v = (x_1, x_2, x_3, x_4),\ w = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ aus $\mathbb{R}^4$ sei

$$\langle v, w\rangle := 3x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 + 4x_3y_4 + 4x_4y_3 \,.$$

Hierdurch ist eine *symmetrische Bilinearform* $s : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R},\ (v, w) \mapsto \langle v, w\rangle$, definiert. Man bestimme die Matrizen $M_{\mathcal{B}}(s)$ und $M_{\mathcal{B}'}(s)$ bezüglich der Basen

$$\mathcal{B} = \{(1, 0, 0, 0),\ (0, 1, 0, 0),\ (0, 0, 1, 0),\ (0, 0, 0, 1)\} \text{ und}$$
$$\mathcal{B}' = \{(1, 0, 0, 0),\ (-1, 1, 0, 0),\ (0, 0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}),\ (0, 0, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2})\} \text{ von } \mathbb{R}^4\,.$$

Aufgabe 44.

Sei V ein euklidischer $\mathbb{R}$-Vektorraum. Man zeige, dass für $u, v, w \in V$ die folgenden drei Aussagen gelten, und fertige zu (c) eine Skizze an:

(a) $\|v - w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\langle v, w\rangle$ *("Kosinussatz")*

(b) $\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\,\|v\|^2 + 2\,\|w\|^2$ *("Parallelogrammgleichung")*

(c) $(u - w) \perp (v - w) \implies \|u - w\|^2 + \|v - w\|^2 = \|u - v\|^2\,.$

Aufgabe 45.

Es sei $\mathbb{R}^3$ mit dem Standard-Skalarprodukt versehen, und es seien

$$v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\,,\,0\,,\,\frac{-1}{2\sqrt{6}}\right),\ v_2 = \left(\frac{-1}{2\sqrt{3}}\,,\,\frac{1}{2}\,,\,\frac{-1}{2\sqrt{6}}\right),\ v_3 = \left(\frac{-1}{2\sqrt{3}}\,,\,-\frac{1}{2}\,,\,\frac{-1}{2\sqrt{6}}\right),$$

und $v_4 = \left(0, 0, \frac{3}{2\sqrt{6}}\right)$.

Man berechne den *Abstand* $\|v_i - v_j\|$ für $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}\,,\ i < j$. Sodann zeige man, dass v_1, v_2, v_3, v_4 ein regelmässiges Tetraeder mit dem Mittelpunkt $\vec{0}$ bilden. Man ermittle, welche Winkel v_1, v_2, v_3, v_4 miteinander bilden.

Aufgabe 46.
Es sei $V := \mathbb{R}^4$ mit dem Standard-Skalarprodukt versehen, und es sei U der von den Vektoren $(2,1,0,3)$, $(4,2,1,-1)$, $(1,0,2,-13)$ erzeugte Untervektorraum von V. Man bestimme eine Basis des *zu U orthogonalen Untervektorraums* $U^\perp := \{v \in V \mid v \perp u \;\forall\; u \in U\}$.

Aufgabe 47.
Sei V ein euklidischer oder unitärer $\mathbb{K}$-Vektorraum. Für $v, w \in V$, $v \neq 0$, zeige man: Es gibt genau einen Vektor $u \in V$ und genau ein $\lambda \in \mathbb{K}$ derart, dass gilt: $w = \lambda v + u$ und $u \perp v$. Hierbei ist $\lambda = \frac{\langle w,v\rangle}{\langle v,v\rangle}$. Man fertige vor der Beweisführung eine Skizze an.

(λv heißt die *orthogonale Projektion von w auf die Gerade* $\mathbb{K}v$.)

Aufgabe 48.
Es seien $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^4$ jeweils mit dem Standard-Skalarprodukt versehen.

(a) Man ergänze $u_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ zu einer Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$.

(b) Man ergänze $u_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), u_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ zu einer Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 49.
Es sei $\mathbb{R}^4$ mit dem Standard-Skalarprodukt versehen, und es sei U der von den Vektoren $v_1 = (-3,-3,3,3)$, $v_2 = (-5,-5,7,7)$ und $v_3 = (4,-2,0,6)$ erzeugte Teilraum von $\mathbb{R}^4$. Man benutze das SCHMIDTsche Orthonormalisierungsverfahren zur Konstruktion einer Orthonormalbasis von U.

Aufgabe 50.
Sei V ein metrischer K-Vektorraum mit Metrik $s : V \times V \to K$, $(v,w) \mapsto \langle v,w\rangle$. Man zeige:

(a) Ist U ein Teilraum von V, so ist $U^\perp := \{v \in V \mid v \perp u \;\forall\; u \in U\}$ ein Teilraum von V.

(b) Wenn $\overline{V} := V$ als additive Gruppe und eine Skalarmultiplikation für $\overline{V}$ durch $\lambda \cdot v := \overline{1}\overline{\lambda} v$ erklärt ist, so wird $\overline{V}$ dadurch zu einem K-Vektorraum.

(c) Für jedes $v \in V$ sind $\ell_v : \overline{V} \to K$, $w \mapsto \langle v,w\rangle$, und $r_v : V \to K$, $w \mapsto \langle w,v\rangle$, K-linear.

(d) Es sind $\ell : V \to \mathrm{Hom}_K(\overline{V},K)$, $v \mapsto \ell_v$, und $r : \overline{V} \to \mathrm{Hom}_K(V,K)$, $v \mapsto r_v$, K-linear.

Aufgabe 51.
Sei K ein Körper, in dem $1+1 \neq 0$ gelte, und sei V ein 2-dimensionaler K-Vektorraum, versehen mit einer regulären symmetrischen Bilinearform $s : V \times V \to K$, $(v,w) \mapsto \langle v,w\rangle$.

Man zeige: Wenn es einen isotropen Vektor $u \neq \vec{0}$ in V gibt, ist V eine hyperbolische Ebene.

Aufgabe 52.
(a) Man zeige: Vektoren $v_1 \neq \vec{0}, \dots, v_n \neq \vec{0}$ in einem euklidischen $\mathbb{R}$-Vektorraum mit der Eigenschaft $v_i \perp v_j \ \forall\, i \neq j$ sind linear unabhängig, und für jeden Vektor v aus dem von $v_1, \dots, v_n$ erzeugten Teilraum gilt:

$$v = \frac{\langle v, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 + \cdots + \frac{\langle v, v_n \rangle}{\langle v_n, v_n \rangle} v_n \,.$$

(b) Es sei $\mathbb{R}^3$ versehen mit dem Standard-Skalarprodukt. Man konstruiere mit Hilfe des SCHMIDTschen Orthonormalisierungsverfahrens eine Orthonormalbasis für den Teilraum $U = \{\, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \,\}$ und bestimme eine Basis von $U^\perp$.

8 Metrische Abbildungen

8.1 Metrische Abbildung und Isometrie

Seien V, W zwei metrische K-Vektorräume bezüglich derselben Involution $\bar{}: K \longrightarrow K, \alpha \longmapsto \overline{\alpha}$, und seien $s_V : V \times V \longrightarrow K$ und $s_W : W \times W \longrightarrow K$ Metriken auf V und W (gemäß 7.2).

Definition.

1. Eine K-lineare Abbildung $f : V \longrightarrow W$ heißt *metrisch* oder *Metrik erhaltend*, falls gilt:

$$\boxed{s_V(v, v') = s_W(f(v), f(v')) \ \forall v, v' \in V}$$

2. Eine K-lineare Abbildung $f : V \longrightarrow W$ heißt *Isometrie*, falls f metrisch und bijektiv ist. Wir nennen V und W dann *isometrisch*.

8.2 Metrische Abbildung eines regulären Raumes

Bemerkung.
Ist s_V regulär (d.h. $\operatorname{Rad} V = \{\vec{0}\}$), so ist jede K-lineare metrische Abbildung $f : V \longrightarrow W$ injektiv.

Beweis. Sei $v \neq \vec{0}$ in V. Dann gibt es ein $v' \in V$ mit $s_V(v, v') \neq 0$ (da sonst $v \in \operatorname{Rad} V$ wäre). Es folgt $s_W(f(v), f(v')) \underset{f \text{ metrisch}}{=} s_V(v, v') \neq 0$ und insbesondere $f(v) \neq 0$. Also ist f injektiv, (vgl. Satz 3.19). $\square$

8.3 Spiegelungen

Sei $1+1\neq 0$ in K, und sei $s : V\times V \longrightarrow K$ eine reguläre, symmetrische Bilinearform. Sei $\dim_K V = n \geq 2$. Wähle $v\in V$ mit $\langle v,v\rangle \neq 0$. Nach 7.15 ist dann $V = Kv \perp (Kv)^\perp$, also $\dim_K (Kv)^\perp = n-1$. Wir nennen dann

$$\boxed{\sigma : V \longrightarrow V, \quad w \longmapsto w - 2\frac{\langle w,v\rangle}{\langle v,v\rangle}v}$$

eine *Spiegelung an der zu Kv senkrechten Hyperebene $U := (Kv)^\perp$*.

Behauptung.
$\sigma : V \longrightarrow V$ ist eine Isometrie mit den Eigenschaften

i) $\sigma(u) = u \ \forall u \in U$

ii) $\sigma\circ\sigma = \mathrm{id}$

Beweis. 1. σ ist K-linear, denn:

$$\sigma(\lambda w) = \lambda w - 2\frac{\langle \lambda w,v\rangle}{\langle v,v\rangle}v \underset{7.2}{=} \lambda\sigma(w) \ \forall \lambda\in K, w\in V$$

und

$$\begin{aligned}\sigma(w+w') &= w+w' - 2\frac{\langle w+w',v\rangle}{\langle v,v\rangle}v \\ &\underset{7.2}{=} w+w' - 2\frac{\langle w,v\rangle}{\langle v,v\rangle}v - 2\frac{\langle w',v\rangle}{\langle v,v\rangle}v \\ &= \sigma(w)+\sigma(w') \ \forall w,w'\in V\end{aligned}$$

2. σ ist Metrik erhaltend, denn für alle $w,w'\in V$ gilt

$$\begin{aligned}\langle \sigma(w),\sigma(w')\rangle &= \langle w - 2\frac{\langle w,v\rangle}{\langle v,v\rangle}v, w' - 2\frac{\langle w',v\rangle}{\langle v,v\rangle}v\rangle \\ &= \langle w,w'\rangle - 2\frac{\langle w',v\rangle}{\langle v,v\rangle}\langle w,v\rangle - 2\frac{\langle w,v\rangle}{\langle v,v\rangle}\langle v,w'\rangle \\ &\quad + 4\frac{\langle w,v\rangle\langle w',v\rangle}{\langle v,v\rangle^2}\langle v,v\rangle \\ &= \langle w,w'\rangle\end{aligned}$$

da s symmetrisch ist und also $\langle v,w'\rangle = \langle w',v\rangle$ gilt.

3. σ ist injektiv nach 8.2, also bijektiv nach 3.23. Gezeigt ist nun, dass σ eine Isometrie ist.

zu i) Sei $u \in U$. Dann ist $\sigma(u) = u - 2\frac{\langle u,v\rangle}{\langle v,v\rangle}v = u$, da $\langle u,v\rangle = 0$ für alle $u \in U = (Kv)^{\perp}$.

zu ii) Es ist

$$\begin{aligned}\sigma(\sigma(w)) &= \sigma\Big(w - 2\frac{\langle w,v\rangle}{\langle v,v\rangle}v\Big) \\ &= \sigma(w) - 2\frac{\langle w,v\rangle}{\langle v,v\rangle}\sigma(v) \quad \text{nach 1.)} \\ &= w - 2\frac{\langle w,v\rangle}{\langle v,v\rangle}v + 2\frac{\langle w,v\rangle}{\langle v,v\rangle}v, \text{ da } \sigma(v) = -v \\ &= w \ \forall w \in V\end{aligned}$$

$\square$

Beispiel.
Sei $V = \mathbb{R}^2$ und s das Standard-Skalarprodukt. Dann ist $U = (Kv)^{\perp}$ eine Gerade. Für $\|v\| = 1$ ist $w \longmapsto \langle w,v\rangle v$ die *orthogonale Projektion* von w auf $\mathbb{R}v$ (vgl. Aufgabe 47).

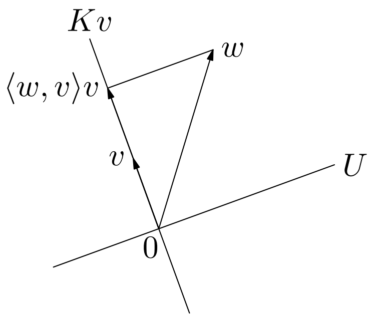

Abbildung 21: orthogonale Projektion von w auf Kv

8.4 Die Matrix $\mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ einer Isometrie $f : V \longrightarrow V$

Satz.
Seien $s : V \times V \longrightarrow K$, $(v,w) \longmapsto \langle v,w\rangle$, eine Metrik (wie in 7.2), $f : V \longrightarrow V$ eine Isometrie und $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V. Für

$$\boxed{T := \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)}$$

gilt dann

$$\boxed{{}^tT\,\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s)\,T^* = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s)} \quad (\textit{mit } T^* = \overline{1} \cdot \overline{T}\,).$$

Beweis. Da f ein Isomorphismus ist, ist $\mathcal{B}' := (f(v_1), \dots, f(v_n))$ eine Basis von V nach Aufgabe 18. Dann gilt $\mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id})$ nach 4.4. Es folgt

$$\begin{aligned} {}^tT\,\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s)\,T^* &= \mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(s) \qquad \text{nach 7.6} \\ &= \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s) \end{aligned}$$

nach 7.4, da f metrisch ist. □

8.5 Lineare Gruppen

Nach 4.22 ist

$$\boxed{\mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} : \mathrm{GL}(V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}_n(K), \quad f \longmapsto \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)}$$

ein Isomorphismus von Gruppen. Im Hinblick auf 8.4 betrachten wir in $\mathrm{GL}(V)$ die Untergruppe $G(V,s)$ aller Isometrien $f : V \longrightarrow V$, und in $\mathrm{GL}_n(K)$ die Untergruppe

$$\boxed{G_n(K, \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s)) := \{T \in \mathrm{GL}_n(K) \mid {}^tT\,\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s)\,T^* = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s)\}}$$

Dann erhalten wir einen Isomorphismus der Untergruppen

$$\mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} : G(V,s) \xrightarrow{\sim} G_n(K, \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s)), \quad f \longmapsto \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$$

Beispiele.

1. V euklidischer $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ eine Orthonormalbasis von V (vgl. 7.20). Dann ist $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s) = E_n$, und die Gruppe $G_n(\mathbb{R}, \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s))$ ist die *orthogonale Gruppe*

   $$\boxed{O_n(\mathbb{R}) := \{T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tTT = E_n\}}\,.$$

   Auch jede Matrix $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ mit ${}^tTT = E_n$ wird *orthogonal* genannt. Nach 4.2 sind äquivalent

   i) T ist orthogonal

   ii) Die Spalten von T bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ bezüglich des Standard-Skalar-Produkts

2. Analog: V unitärer $\mathbb{C}$-Vektorraum und $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ eine Orthonormalbasis von V. Dann ist $G_n(\mathbb{C}, \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s))$ die *unitäre Gruppe*

   $$\boxed{U_n(\mathbb{C}) := \{T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid {}^tT\overline{T} = E_n\}}\,.$$

   Auch jede Matrix $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ mit ${}^tT\overline{T} = E_n$ *unitär* genannt.

3. Sei $1+1 \neq 0$ in K und $s : V \times V \longrightarrow K$ eine reguläre schiefsymmetrische Bilinearform. Dann ist $n = 2m$ nach 7.17, 7.18 und es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ von V so, dass

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & E_m \\ \hline -E_m & 0 \end{array}\right) := I_m \text{ wobei } E_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Gruppe $\mathrm{Sp}_{2m}(K) := \{T \in \mathrm{GL}_{2m}(K) \mid {}^tT I_m T = I_m\}$ heißt *symplektische Gruppe*.

8.6 Klassifikation regulärer symplektischer Räume

Satz.
Sei $1+1 \neq 0$ in K. Seien V, W endlich dimensionale K-Vektorräume und $s_V : V \times V \longrightarrow K$ sowie $s_W : W \times W \longrightarrow K$ reguläre symplektische Metriken. Dann gilt

$$\boxed{V \text{ und } W \text{ sind isometrisch}} \iff \boxed{\dim_K V = \dim_K W}$$

Zu jeder geraden positiven Zahl $2m$ gibt es also bis auf Isometrie genau einen regulären symplektischen K-Vektorraum der Dimension $2m$.

Beweis. $\Longrightarrow$ klar (vgl. 3.21)

$\Longleftarrow$ Es ist $V = H_1 \perp \cdots \perp H_m$ und $W = H'_1 \perp \cdots \perp H'_m$ mit hyperbolischen Ebenen H_i, H'_i nach 7.17. Sei (u_i, v_i) eine Basis von H_i, wobei u_i, v_i isotrop und $\langle u_i, v_i \rangle = 1$. Wähle analoge Basis (u'_i, v'_i) von H'_i für $i = 1, \dots, m$. Dann ist

$$f : V \longrightarrow W, \quad u_i \longmapsto u'_i,\ v_i \longmapsto v'_i$$

eine Isometrie.

□

8.7 Klassifikation orthogonaler Räume

Satz.
Seien V, W zwei endlich dimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume mit orthogonaler Geometrie (d.h. sie seien jeweils mit einer symmetrischen Bilinearform $s_V : V \times V \longrightarrow K$ und $s_W : W \times W \longrightarrow K$ versehen). Dann gilt

$$\boxed{V \text{ und } W \text{ sind isometrisch}} \iff \boxed{V \text{ und } W \text{ haben die gleiche Signatur}}$$

Insbesondere gibt es auf einem n-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum V bis auf Isometrie genau $n+1$ verschiedene reguläre orthogonale Geometrien.

Beweis. Die Äquivalenz folgt aus 7.22 und 7.23.
Sei (r^+, r^-, r_0) die Signatur von V. Da s regulär ist, ist $r_0 = 0$. Dann verbleiben für r^+ und r^- die $n+1$ Möglichkeiten $(0, n), (1, n-1), \ldots, (n, 0)$. □

8.8 Beispiele für reguläre orthogonale $\mathbb{R}$-Vektorräume

Sei V ein regulärer orthogonaler $\mathbb{R}$-Vektorraum wie in 8.7. Dann ist $n = \dim_K V = r^+ + r^-$, wobei (r^+, r^-) die Signatur von V bezeichnet, vgl. 7.22, 7.23.

1. $r^+ = n$, $r^- = 0 \Longrightarrow V$ euklidisch (vgl. 7.7)
2. $r^+ = 1$, $r^- = 1 \Longrightarrow V$ ist eine hyperbolische Ebene, (vgl. 7.16)
3. $r^+ = 3$, $r^- = 1 \Longrightarrow V$ ist der *Minkowski-Raum* (kommt, wie schon in 7.22 erwähnt, in der *Relativitätstheorie* vor)

8.9 Orthogonale Gruppen $O_{(r^+,r^-)}(\mathbb{R})$

Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, versehen mit einer regulären symmetrischen Bilinearform $s : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ mit Signatur (r^+, r^-). Dann ist die Gruppe $G(V, s)$ aller Isometrien $V \longrightarrow V$ isomorph zu

$$\boxed{O_{(r^+,r^-)}(\mathbb{R}) := \left\{ T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \;\middle|\; {}^tT \left(\begin{array}{c|c} E_{r^+} & 0 \\ \hline 0 & -E_{r^-} \end{array}\right) T = \left(\begin{array}{c|c} E_{r^+} & 0 \\ \hline 0 & -E_{r^-} \end{array}\right) \right\}}$$

nach 7.23 und 8.5.

1. $r^+ = n$, also V euklidisch $\Longrightarrow O_{(r^+,r^-)}(\mathbb{R}) = O_n(\mathbb{R})$ wie in 8.5.1.
2. $r^+ = 3$, $r^- = 1$ (Minkowski-Raum). Dann heißt

$$O_{(3,1)}(\mathbb{R}) := \left\{ T \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R}) \;\middle|\; {}^tT \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Lorentzgruppe (wichtig in der Physik).

8.10 Bestimmung aller orthogonaler 2×2-Matrizen

Seien $a, b \in K$ mit $a^2 + b^2 = 1$. Dann sind die Matrizen

$$\boxed{T = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ und } S = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}}$$

orthogonal denn:

$${}^tTT = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$${}^tSS = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dabei heißt $T \in \mathrm{M}_{2\times 2}(K)$ *orthogonal*, falls ${}^tTT = E_2$, also falls $T \in \mathrm{GL}_2(K)$ und $T^{-1} = {}^tT$ (vgl. Regel 4.13).

Satz.
Für Matrizen $T \in \mathrm{M}_{2\times 2}(K)$ gilt

$$\boxed{T \text{ orthogonal}} \Longleftrightarrow \boxed{T = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ oder } T = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \text{ mit } a^2 + b^2 = 1}$$

Beweis. $\Longleftarrow$ siehe oben

$\Longrightarrow$ Es ist $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $a, b, c, d \in K$ und

$${}^tTT = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

also $a^2 + c^2 = 1$, $b^2 + d^2 = 1$ und $ab + cd = 0$.

1. Fall $a \neq 0$. Dann ist $b = -\frac{cd}{a} \Longrightarrow 1 = b^2 + d^2 = \frac{d^2}{a^2} \underbrace{(c^2 + a^2)}_{1} \Longrightarrow$

$$(d + a)(d - a) = 0 \Longrightarrow d = \pm a \Longrightarrow b = \begin{cases} -c \text{ falls } d = a \\ c \text{ falls } d = -a \end{cases}$$

2. Fall $a = 0$. Dann ist $c^2 = 1 \Longrightarrow c = \pm 1 \Longrightarrow d = 0$, da $ab + cd = 0$ $\Longrightarrow b^2 = 1 \Longrightarrow b = \pm 1$

□

8.11 Orthogonale Abbildungen

Sei V ein euklidischer $\mathbb{R}$-Vektorraum. Dann nennen wir eine metrische Abbildung $f : V \longrightarrow V$ auch *orthogonal.*

Satz.
Ist $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ eine Orthonormalbasis von V, so gilt

$$\boxed{f : V \longrightarrow V \text{ ist orthogonal}} \iff \boxed{T := \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) \text{ ist orthogonal}}$$

und wir haben nach 8.2, 8.4, 8.5 eine Isomorphie von Gruppen

$$\mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} : \{f : V \longrightarrow V \mid f \text{ orthogonal}\} \xrightarrow{\sim} O_n(\mathbb{R}), \quad f \longmapsto \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$$

Beweis. „$\Longrightarrow$“ Sei f ein orthogonale Abbildung. Dann ist f nach 8.2 und 3.23 eine Isometrie $\underset{8.4}{\Longrightarrow}$ ${}^tTT = E_n$, da $\mathcal{B}$ eine Orthonormalbasis ist.

„$\Longleftarrow$“ Da $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

$\Longrightarrow$ f ist bijektiv nach 4.22.

$\Longrightarrow$ $\mathcal{B}' = (f(u_1), \ldots, f(u_n))$ ist eine Basis von V nach Aufgabe 18

$\Longrightarrow$ $\mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id})$ nach 4.4

$\Longrightarrow$ $\mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(s) = E_n$, da $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s) = E_n$ und ${}^tT\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s)T = \mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(s)$ nach 7.6

$\Longrightarrow$ $\mathcal{B}'$ ist ebenfalls eine Orthonormalbasis von V

Für $v = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n$ und $w = \mu_1 u_1 + \ldots + \mu_n u_n$ mit $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{R}$ folgt nun nach den Regeln 7.7 für das Skalarprodukt

$$\langle v, w\rangle = \lambda_1\mu_1 + \cdots + \lambda_n\mu_n = \langle f(v), f(w)\rangle$$

□

Beispiel.
Ist $\dim_{\mathbb{R}} V = 2$, so entsprechen die orthogonalen Abbildungen $f : V \longrightarrow V$ bijektiv den Matrizen der Form

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}}_{\text{Drehung, } \det()=1} \quad \text{oder} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}}_{\text{Spiegelung, } \det()=-1} \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R} \text{ und } a^2 + b^2 = 1$$

(vgl. 8.10).

8.12 Geometrische Bedeutung, falls $\dim_{\mathbb{R}} V = 2$

Sei V euklidisch, $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ eine Orthonormalbasis von V und $f : V \longrightarrow V$ orthogonal.

Behauptung.

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \text{ mit } a^2 + b^2 = 1 \Longrightarrow f \text{ ist eine Spiegelung}$$

Beweis. **1. Fall** $a = 1 \Longrightarrow b = 0$.
Für die Spiegelung

$$\sigma : V \longrightarrow V \quad w \longmapsto w - 2\langle w, u_2\rangle u_2$$

an der Geraden $\mathbb{R}u_1 = (\mathbb{R}u_2)^\perp$ gilt $\sigma(u_1) = u_1$ und $\sigma(u_2) = -u_2$, also

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \Longrightarrow \sigma = f \text{ nach } 8.11$$

2. Fall $a \neq 1 \Longrightarrow a = -1$ oder $|a| < 1$, da $a^2 + b^2 = 1$. Setze $v = \alpha u_1 + \beta u_2$ mit $\alpha = \sqrt{\frac{1-a}{2}}$ und $\beta = \frac{-b}{2\alpha}$. Es folgt

$$\begin{aligned} \langle v, v\rangle = \alpha^2 + \beta^2 &= \frac{1-a}{2} + \frac{b^2}{4\alpha^2} \\ &= \frac{1-a}{2} + \frac{b^2}{2(1-a)} = \frac{(1-a)^2 + b^2}{2(1-a)} \\ &= \frac{1 - 2a + \overbrace{a^2 + b^2}^{=1}}{2 - 2a} = 1 \end{aligned}$$

Sei

$$\boxed{\sigma : V \longrightarrow V \quad w \longmapsto w - 2\langle w, v\rangle v}$$

die Spiegelung an der Geraden $(\mathbb{R}v)^\perp$. Mit Hilfe von $\langle u_1, v\rangle = \alpha$ und $\langle u_2, v\rangle = \beta$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \sigma(u_1) &= u_1 - 2\alpha(\alpha u_1 + \beta u_2) = u_1 - 2\alpha^2 u_1 - 2\alpha\beta u_2 \\ &= (1 - 1 + a)u_1 + bu_2 = au_1 + bu_2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\sigma(u_2) &= u_2 - 2\beta(\alpha u_1 + \beta u_2) = u_2 - 2\beta^2 u_2 - 2\alpha\beta u_1 \\
&= (1 - \frac{b^2}{1-a})u_2 + bu_1 = \frac{1-a-b^2}{1-a}u_2 + bu_1 \\
&= \frac{a^2-a}{1-a}u_2 + bu_1, \text{ da } 1 - b^2 = a^2 \\
&= \frac{-a(1-a)}{1-a}u_2 + bu_1 = bu_1 - au_2
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\sigma) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \Longrightarrow \sigma = f \text{ nach } 8.11$$

□

Es ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) &:= \{T \in O_2(\mathbb{R}) \mid \det T = 1\} \\
&\underset{8.10}{=} \{T \in O_2(\mathbb{R}) \mid T = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ mit } a^2 + b^2 = 1\}
\end{aligned}$$

eine Untergruppe von $O_2(\mathbb{R})$, genannt *spezielle orthogonale Gruppe*.
Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a^2 + b^2 = 1$. Dann gibt es genau ein $\varphi \in [0, 2\pi[$ mit

$$a = \cos\varphi \text{ und } b = \sin\varphi$$

Insbesondere können wir jede Matrix $T \in O_2(\mathbb{R})$ in dieser Form darstellen. Die Matrix

$$T = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

beschreibt bezüglich der Standardbasis eine Drehung um den Winkel φ im mathematisch positiven Sinne (gegen die Uhrzeigerrichtung), und die Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$$

beschreibt eine Spiegelung an der Winkelhalbierenden von φ.

8.13 Übungsaufgaben 53 – 54

Aufgabe 53.
Es sei $\mathbb{R}^4$ versehen mit dem Standard-Skalarprodukt, und es sei $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definiert durch

$$f(x) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4, x_1 + x_2 + x_3 + x_4, x_1 + x_2 - x_3 - x_4, x_1 + x_2 - x_3 - x_4)$$

für $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$.
Man bestimme eine Orthogonalbasis von $\mathrm{kern}(f)$ und ergänze diese zu einer Orthogonalbasis von $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 54.
(a) Man berechne die Determinante der Matrix

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

und bestimme die inverse Matrix T^{-1}.

(b) Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Matrix

$$T = \frac{1}{1 + x(x+1)} \begin{pmatrix} -x & x(1+x) & 1+x \\ 1+x & -x & x(1+x) \\ x(1+x) & 1+x & -x \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

orthogonal ist.

8.14 Klausur I

1. Seien $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$.

(a) Man bestimme $\mathrm{rang}(A)$, $\mathrm{rang}(A|\vec{b}\,)$ und die Lösungsmenge des Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$.

(b) Sei $B = {}^tA$, und sei $U = \{\, \vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid B\vec{x} = \vec{0}\,\}$. Man bestimme eine Basis von U .

2. Seien $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 5 & 0 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in$ $\mathrm{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$.

Man bestimme alle $a \in \mathbb{R}$, für die A invertierbar ist, und berechne in diesen Fällen A^{-1} .

Man untersuche, ob B invertierbar ist.

3. Man berechne die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4\times 4}(\mathbb{R}) \; .$$

4. Es sei $\mathbb{R}^4$ mit dem Standard-Skalarprodukt versehen, und es sei U der von den Vektoren $v_1 = (1,0,1,0)$, $v_2 = (1,1,-1,1)$ und $v_3 = (-1,2,0,1)$ erzeugte Teilraum von $\mathbb{R}^4$.

Man benutze das SCHMIDTsche Orthonormalisierungsverfahren zur Konstruktion einer Orthonormalbasis von U.

5. Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum über einem Körper K, und sei $f : V \to V$ eine K-lineare Abbildung. Man zeige, dass die beiden folgenden Eigenschaften äquivalent sind:

(1) $\mathrm{bild}(f) = \mathrm{kern}(f)$

(2) $f \circ f$ ist die Nullabbildung $V \to V$, $v \mapsto \vec{0}$, und

$$\dim_K V = 2 \cdot \dim_K \mathrm{kern}(f) \; .$$

6. Man zeige, dass der Rang der Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$ für beliebige Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ nie 1 oder 3 sein kann.

9 Eigenwerte

Sei K ein Körper, und sei $f : V \longrightarrow W$ eine K-lineare Abbildung endlich dimensionaler K-Vektorräume V, W. Dann gibt es nach 4.18 Basen $\mathcal{B}$ von V und $\mathcal{C}$ von W so, dass

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{mit } r = \dim_K \mathrm{bild}\, f$$

Problem: Wenn $f : V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus ist, gibt es dann eine Basis $\mathcal{B}$ von V so, dass $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ möglichst einfache Gestalt hat?
Dieses Problem ist nicht so einfach zu lösen, wie das folgende Beispiel zeigt:

Beispiel.
V euklidisch, $n = 2$ und $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ eine Orthonormalbasis von V. Für die Spiegelung σ an der Geraden $\mathbb{R}u_1$ ist dann

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\sigma) \underset{8.12}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

eine Diagonalmatrix. Aber eine Drehung $\sigma \neq \pm\,\mathrm{id}$ läßt sich bezüglich keiner Basis durch eine Diagonalmatrix beschreiben, wie sich aus 8.10 und 8.11 ergibt, (denn Drehungsmatrizen haben die Gestalt $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ mit $a^2 + b^2 = 1$, und aus $a \neq \pm 1$ folgt $b \neq 0$).

Um Darstellungsmatrizen auf eine einfachere Gestalt (möglichst sogar auf Diagonalgestalt) zu transformieren, müssen wir Basiswechsel durchführen wie in 4.15:

$$\boxed{\mathrm{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'}(f) = S^{-1}\,\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)\,T}$$

oder wie in 4.16:

$$\boxed{\mathrm{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f) = T^{-1}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)T}$$

Im ersten Fall (4.15) spricht man von *äquivalenten* und im zweiten Fall (4.16) von *ähnlichen* Darstellungsmatrizen. Diese beiden Begriffe wollen wir jetzt allgemein für Matrizen einführen.

9.1 Äquivalente Matrizen

Zwei Matrizen $A, B \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$ heißen *äquivalent*, falls es $R \in \mathrm{GL}_m(K)$ und $T \in \mathrm{GL}_n(K)$ gibt so, dass $\boxed{B = RAT}$ gilt.
Nach 4.19 ist jede Matrix $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$ vom Rang r äquivalent zu

$$\left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \text{„Normalform“}$$

9.2 Ähnliche Matrizen

Zwei Matrizen $A, B \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$ heißen *ähnlich*, falls $\exists\, T \in \mathrm{GL}_n(K)$ so, dass

$$\boxed{B = T^{-1}AT}$$

Das Problem ist es nun, auch für Ähnlichkeit eine „Normalform“ zu finden. Für $K = \mathbb{C}$ führt die Lösung des Problems zur *Jordanschen Normalform* (vgl. Kapitel 13).

9.3 Diagonalisierbare Endomorphismen und Matrizen

Definition.

1. Ein Endomorphismus $f : V \longrightarrow V$ heißt *diagonalisierbar*, falls es eine Basis $\mathcal{B}$ von V gibt so, dass $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ eine Diagonalmatrix ist.
2. Eine Matrix $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$ heißt *diagonalisierbar*, falls A ähnlich zu einer Diagonalmatrix ist.

9.4 Eigenwerte und Eigenvektoren

Sei $f : V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus eines K-Vektorraums V. Ein Element $\lambda \in K$ heißt *Eigenwert von* f, falls es einen Vektor $v \neq \vec{0}$ in V gibt mit

$$\boxed{f(v) = \lambda v}$$

Jeder solche Vektor $v \neq \vec{0}$ heißt dann *Eigenvektor zum Eigenwert* λ.

Beispiel.
Sei V euklidisch, $\dim_{\mathbb{R}} V = 2$ und $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ eine Orthonormalbasis. Für die Spiegelung $\sigma : V \longrightarrow V$ an der Geraden $\mathbb{R}u_1$ gilt dann

$$\sigma(u_1) = u_1 \quad \text{und} \quad \sigma(u_2) = -u_2 \quad (\text{vgl. } 8.3,\ 8.12)$$

Es folgt: u_1 ist Eigenvektor zum Eigenwert 1, und u_2 ist Eigenvektor zum Eigenwert -1. Es ist $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ und also σ diagonalisierbar.
Allgemein gilt:

9.5 Kriterium für Diagonalisierbarkeit

Bemerkung.
Sei V endlich dimensional. Dann ist ein Endomorphismus $f : V \longrightarrow V$ genau dann diagonalisierbar, wenn V eine Basis besitzt, die nur aus Eigenvektoren von f besteht.

Beweis. Für eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ von V sind äquivalent:

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$$

$\underset{4.4}{\Longleftrightarrow} f(v_j) = \lambda_j v_j \ \forall j = 1, \ldots, n$
$\Longleftrightarrow v_j$ ist Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_j \ \forall j = 1, \ldots, n$ $\square$

9.6 Wann sind Eigenvektoren linear unabhängig?

Satz.
Sei V ein K-Vektorraum. Ist v_j Eigenvektor eines Endomorphismus $f : V \longrightarrow V$ zum Eigenwert λ_j für $j = 1, \ldots, n$ und gilt $\lambda_i \neq \lambda_j$ für alle $i \neq j$, so sind $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig.
Im Fall $n = \dim_K V$ besitzt f also höchstens n verschiedene Eigenwerte; und falls f genau n verschiedene Eigenwerte besitzt, ist f diagonalisierbar.

Beweis. Induktion nach n:

$n = 1$ Ist trivial, da $v_1 \neq \vec{0}$ nach Definition 9.4

$n > 1$ Die Behauptung sei richtig für $k < n$. Sei

$$(*) \qquad \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_{k+1} v_{k+1} = \vec{0} \text{ mit } \mu_1, \ldots, \mu_{k+1} \in K$$

Es folgt

$$(1) \qquad \begin{aligned} \vec{0} = f(\vec{0}) &= \mu_1 f(v_1) + \cdots + \mu_{k+1} f(v_{k+1}) \\ &\underset{\text{Vor.}}{=} \mu_1 \lambda_1 v_1 + \cdots + \mu_{k+1} \lambda_{k+1} v_{k+1} \end{aligned}$$

Da außerdem

$$(2) \qquad \vec{0} \underset{(*)}{=} \lambda_{k+1}(\mu_1 v_1 + \cdots + \mu_{k+1} v_{k+1})$$

gilt, ergibt $(1) - (2)$

$$\begin{aligned} \vec{0} = {} & \mu_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1}) v_1 + \cdots + \mu_k(\lambda_k - \lambda_{k+1}) v_k \\ & + \mu_{k+1} \underbrace{(\lambda_{k+1} - \lambda_{k+1})}_{0} v_{k+1} \end{aligned}$$

$$\underset{\text{Indvor.}}{\Longrightarrow} \quad \mu_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1}) = \cdots = \mu_k(\lambda_k - \lambda_{k+1}) = 0$$

$$\xrightarrow[\text{für } i \neq j]{\lambda_i \neq \lambda_j} \quad \mu_1 = \cdots = \mu_k = 0$$

$$\underset{(*)}{\Longrightarrow} \quad \mu_{k+1} = 0, \text{ da } v_{k+1} \neq \vec{0}$$

Ist $\dim_K V = n$ und hat f genau n verschiedene Eigenwerte, so besitzt V eine Basis, die aus Eigenvektoren besteht, und f ist nach 9.5 diagonalisierbar. $\square$

9.7 Eigenräume

Ist $f : V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus und λ ein Eigenwert von f, so heißt der Teilraum

$$\boxed{V_\lambda := \operatorname{kern}(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)}$$

der *Eigenraum* von f zum Eigenwert λ. Es ist also $\boxed{V_\lambda = \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}}$ und $V_\lambda \setminus \{\vec{0}\}$ ist die Menge aller Eigenvektoren von f zum Eigenwert λ.

Bemerkung.
Ist $\dim_K V = n$, und sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ paarweise verschiedene Eigenwerte von f, so ist die Summe $V_{\lambda_1} + \cdots + V_{\lambda_k}$ direkt (wie aus 9.6 folgt), und es gilt

$$\dim_K V_{\lambda_1} + \cdots + \dim_K V_{\lambda_k} \leq n$$

(wie mit Induktion aus 3.14, dem Dimensionssatz 3.15 und der Definition der (inneren) direkten Summe 2.14 folgt).

9.8 Charakteristisches Polynom eines Endomorphismus

Sei $\dim_K V = n$ und $h : V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus. Dann ist die Determinante $\det h$ definiert durch $\det h := \det \mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(h)$ mit irgendeiner Basis $\mathcal{B}$ von V. (Die Definition ist davon unabhängig, welche Basis wir wählen, vgl.6.13.)

Bemerkung.
Sei $g = f - \lambda\,\mathrm{id}$ mit $\lambda \in K$, wobei $f : V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus von V ist. Dann folgt $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(g) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) - \lambda E_n$ nach Satz 4.4 und 4.6 und also

$$\boxed{\det g = \det\Big(\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) - \lambda E_n\Big)}$$

Ersetzen wir hierin λ durch eine Unbestimmte x über K, so erhalten wir das *charakteristische Polynom von* f. Es ist definiert als

$$\boxed{\chi_f(x) := \det\Big(\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) - xE_n\Big)}$$

9.9 Charakteristisches Polynom einer Matrix

Sei x eine Unbestimmte über K, und sei $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$. Dann heißt

$$\boxed{\chi_A(x) := \det(A - xE_n)}$$

das *charakteristische Polynom von* A.

Bemerkung.
Es gibt Elemente $a_0, a_1, \ldots, a_n \in K$ so, dass gilt

$$\boxed{\chi_A(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0}$$

Hierbei ist

- $a_n = (-1)^n$, also $a_n \neq 0$
- $a_{n-1} = (-1)^{n-1}\,\mathrm{Spur}\,A$, wobei $\mathrm{Spur}\,A :=$ Summe der Diagonalelemente von A
- $a_0 = \det A$

(Einen Beweis findet man z. B. in dem Buch von Fischer [7, S. 220].)

Beispiele.

1. $A = (n \times n)$-Nullmatrix $\Longrightarrow \chi_A(x) = \det(-xE_n) = (-1)^n x^n$
2. $A = E_n \Longrightarrow \chi_A(x) = (1-x)^n = (-1)^n(x-1)^n$
3. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2\times 2}(K) \Longrightarrow$

$$\chi_A(x) = \det\begin{pmatrix} a-x & b \\ c & d-x \end{pmatrix} = x^2 - \underbrace{(a+d)}_{\mathrm{Spur}\,A}x + \underbrace{ad-bc}_{\det A}$$

9.10 Nullstellen des charakteristischen Polynoms

Satz.
Sei $f : V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus eines endlich dimensionalen K-Vektorraumes V. Dann sind für $\lambda \in K$ äquivalent:

i) *λ ist Eigenwert von f, (d.h. $\exists v \in V \setminus \{\vec{0}\}$ mit $f(v) = \lambda v$ nach 9.4)*

ii) $V_\lambda := \mathrm{kern}(f - \lambda\,\mathrm{id}) \neq \{\vec{0}\}$

iii) *$\chi_f(\lambda) = 0$, (d.h. λ ist Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\chi_f(x)$)*

Beweis. Sei $g = f - \lambda\,\mathrm{id}_V$, also $g(v) = f(v) - \lambda v \; \forall v \in V$. Dann gilt:
λ Eigenwert von $f \iff V_\lambda = \mathrm{kern}\, g \neq \{\vec{0}\}$
$\iff g$ ist kein Isomorphismus (vgl. Satz 3.19, 3.23)
$\iff \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(g)$ ist nicht invertierbar (vgl. Satz 4.4 und 4.22.3)
$\iff 0 \underset{6.7}{=} \det \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(g) \underset{9.8}{=} \det\big(\mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) - \lambda E_n\big) \underset{9.8}{=} \chi_f(\lambda)$ □

Beispiel.
Sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ der durch $f(e_1) = -e_2$ und $f(e_2) = e_1$ definierte Endomorphismus, und sei $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ die Standardbasis.

$$\Longrightarrow \mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \chi_f(x) = \det \begin{pmatrix} -x & 1 \\ -1 & -x \end{pmatrix} = x^2 + 1$$

$\Longrightarrow \chi_f(x)$ hat keine Nullstelle in $\mathbb{R}$

$\underset{\textbf{Satz 9.10}}{\Longrightarrow}$ f besitzt keine Eigenwerte in $\mathbb{R}$

$\underset{\textbf{9.5}}{\Longrightarrow}$ f ist nicht diagonalisierbar

9.11 Dimension eines Eigenraums

Lemma.
Sei $\dim_K V = n$ *und* $f : V \longrightarrow V$ *ein Endomorphismus. Ist* λ *eine* m*-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms* $\chi_f(x)$*, so gilt* $\dim_K V_\lambda \leq m$ *für den Eigenraum* $V_\lambda = \mathrm{kern}(f - \lambda\, \mathrm{id}_V)$

Beweis. Sei $(v_1, \ldots, v_\ell)$ eine Basis von V_λ. Ergänze diese zu einer Basis $\mathcal{B}$ von V. Dann gilt

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} A & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right) \qquad \text{mit } A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{\ell \times \ell}(K)$$

und also folgt $\chi_f(x) \overset{9.8}{=} \det\big(\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) - xE_n\big) = (\lambda - x)^\ell q(x)$ mit passendem Polynom $q(x)$. Es folgt $\ell \leq m$ □

9.12 Hauptsatz über Diagonalisierbarkeit

Satz.
Sei $\dim_K V = n$ *und* $f : V \longrightarrow V$ *ein Endomorphismus. Seien* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ *die verschiedenen Eigenwerte von* f *und* $V_{\lambda_i} := \mathrm{kern}(f - \lambda_i\, \mathrm{id})$ *die zugehörigen Eigenräume für* $i = 1, \ldots, k$*. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. f *ist diagonalisierbar*
2. $\chi_f(x) = (\lambda_1 - x)^{n_1} \cdots (\lambda_k - x)^{n_k}$ ***und*** $\dim_K V_{\lambda_i} = n_i$ *für* $i = 1, \ldots, k$
3. $V = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}$

Beweis. Es ist $k \leq n$ nach 9.6.

1. $\Longrightarrow$ 2. Nach 9.5 besitzt V eine Basis $\mathcal{B}$, die aus Eigenvektoren besteht. Wir ordnen diese Basis entsprechend den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, also $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ und $f(v_1) = \lambda_1 v_1, \dots, f(v_{n_1}) = \lambda_1 v_{n_1}, f(v_{n_1+1}) = \lambda_2 v_{n_1+1}, \dots, f(v_{n_2}) = \lambda_2 v_{n_2}$, usw. Es folgt

$$(*) \quad n_i \leq \dim_K V_{\lambda_i} \text{ für } i = 1, \dots, k$$

und

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} n_1 \left\{ \begin{matrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \end{matrix} \right. & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \left. \begin{matrix} \lambda_k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_k \end{matrix} \right\} n_k \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow \chi_f(x) = \det\left(\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) - xE_n\right) = (\lambda_1 - x)^{n_1} \cdots (\lambda_k - x)^{n_k}$

$\Longrightarrow \dim_K V_{\lambda_i} \leq n_i$ nach 9.11

Mit $(*)$ folgt $\dim_K V_{\lambda_i} = n_i$ für $i = 1, \dots, k$.

2. $\Longrightarrow$ 3. Da $\chi_f(x)$ den Grad n hat (vgl. 9.9) und da nach Voraussetzung $\chi_f(x) = (\lambda_1 - x)^{n_1} \cdots (\lambda_k - x)^{n_k}$ gilt, folgt

$$\boxed{n = n_1 + \cdots + n_k}$$

Nach 9.7 ist die Summe $V_{\lambda_1} + \cdots + V_{\lambda_k}$ direkt

$$\xRightarrow[3.15]{2.13} \quad \begin{aligned} \dim_K(V_{\lambda_1} + \cdots + V_{\lambda_k}) &= \dim_K V_{\lambda_1} + \cdots + \dim_K V_{\lambda_k} \\ &\underset{2.}{=} n_1 + \cdots + n_k \\ &= n \end{aligned}$$

und also $\dim_K(V_{\lambda_1} + \cdots + V_{\lambda_k}) = \dim_K V$. Da $V_{\lambda_1} + \cdots + V_{\lambda_k}$ ein Unterraum von V ist, folgt $V_{\lambda_1} + \cdots + V_{\lambda_k} = V$ nach 3.14.

3. $\Longrightarrow$ **1.** Wir wählen von jedem V_{λ_i} eine Basis und erhalten dadurch eine Basis von Eigenvektoren von $V \Longrightarrow$ 1. nach 9.5.

□

Beispiel.
Sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(e_1) = e_1 \quad \text{und} \quad f(e_2) = e_1 + e_2$$

und sei $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ die Standardbasis.

$$\Longrightarrow A := \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \chi_f(x) = \det(A - xE_2) = \begin{pmatrix} 1-x & 1 \\ 0 & 1-x \end{pmatrix} = (1-x)^2$$

$\underset{\mathbf{9.10}}{\Longrightarrow}$ 1 ist zweifacher Eigenwert.

$\underset{\mathbf{9.12}}{\Longrightarrow}$ f ist nicht diagonalisierbar, da $\dim_{\mathbb{R}} V_1 \neq 2$ gilt:

Es ist $e_1 \in \mathrm{kern}(f - \mathrm{id})$, da $f(e_1) - e_1 = \vec{0}$. Ist $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 \in \mathrm{kern}(f - \mathrm{id})$ mit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, so folgt $\vec{0} = \vec{0} + \lambda_2 (f - \mathrm{id})(e_2) = \lambda_2 e_1 + \lambda_2 e_2 - \lambda_2 e_2 = \lambda_2 e_1$ und also $\lambda_2 = 0$. Es folgt $V_1 := \mathrm{kern}(f - \mathrm{id}) = \mathbb{R}e_1$.

9.13 Trigonalisierbarkeit

Ist V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum, so heißt ein Endomorphismus $f : V \longrightarrow V$ *trigonalisierbar*, wenn es eine Basis $\mathcal{B}$ von V gibt so, dass $\mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

Satz.
Sei $\dim_K V = n$ und $f : V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus. Dann ist äquivalent

i.) f ist trigonalisierbar

ii.) $\chi_f(x) = (\lambda_1 - x) \cdots (\lambda_n - x)$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$

Insbesondere ist im Fall $K = \mathbb{C}$ jeder Endomorphismus von V trigonalisierbar

Beweis. **i.)** $\Longrightarrow$ **ii.)** Ist f triagonalisierbar, dann gibt es eine Basis $\mathcal{B}$ von V so, dass

$$\mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$$

Es folgt

$$\chi_f(x) \underset{9.8}{=} \det\Big(\mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) - xE_n\Big) = \det\begin{pmatrix} \lambda_1 - x & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n - x \end{pmatrix}$$

$$\underset{6.6}{=} (\lambda_1 - x)\cdots(\lambda_n - x)$$

ii.) $\Longrightarrow$ **i.)** Wir zeigen durch Induktion nach n, dass es eine „f- invariante Fahne“ gibt, das ist eine Kette von Teilräumen

$$\{\vec{0}\} = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n = V$$

mit $\dim_K V_j = j$ und $f(V_j) \subseteq V_j \ \forall j = 1, \ldots, n$. Hieraus folgt (i), denn dann gibt es nach dem Basisergänzungssatz 3.9 eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ von V so, dass $(v_1, \ldots, v_j)$ eine Basis von V_j ist für jedes $j = 1, \ldots, n$, und nach 4.4 ist $\mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ eine obere Dreiecksmatrix.

$n = 1$ klar

$n > 1$ Nach Voraussetzung ist $\chi_f(x) = (\lambda_1 - x)\cdots(\lambda_n - x)$. Dann ist λ_1 eine Nullstelle und also ein Eigenwert von f nach 9.10. Sei w_1 Eigenvektor zu λ_1, also $w_1 \neq \vec{0}$ und $f(w_1) = \lambda_1 w_1$. Wir ergänzen w_1 zu einer Basis $\mathcal{B}' = (w_1, \ldots, w_n)$ von V.

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{M}^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f) = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A & \\ 0 & & & \end{array}\right) \quad \text{mit } A := (a_{ij})_{i,j=2,\ldots,n}$$

Sei U der von $(w_2, \ldots, w_n)$ erzeugte Teilraum von V. Wir definieren zwei K-lineare Abbildungen:

$$h : U \longrightarrow V_1 := Kw_1, \quad w_j \longmapsto a_{1j}w_1 \ \forall j = 2, \ldots, n$$

$$g : U \longrightarrow U, \quad w_j \longmapsto a_{2j}w_2 + \cdots + a_{nj}w_n \ \forall j = 2, \ldots, n$$

Es folgt $f(u) = h(u) + g(u) \ \forall u \in U$ nach 4.4, und A ist die Matrix von g bezüglich der Basis $(w_2, \ldots, w_n)$ von U. Es ist

$$\chi_f(x) = \det\left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 - x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A - xE_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right) = (\lambda_1 - x)\chi_g(x)$$

also $\chi_g(x) = (\lambda_2 - x)\cdots(\lambda_n - x)$ nach Voraussetzung (ii). Wir wenden die Induktionsvoraussetzung auf U und g an und erhalten eine g-invariante Fahne

$$\{\vec{0}\} = U_0 \subset U_1 \subset \cdots \subset U_{n-1} = U$$

Dann ergibt $V_j := V_1 + U_{j-1}$ die gewünschte f-invariante Fahne, denn für $\lambda \in K$ und $u \in U_{j-1}$ ist

$$\begin{aligned} f(\lambda w_1 + u) &= \lambda\lambda_1 w_1 + f(u) \\ &= \underbrace{\lambda\lambda_1 w_1 + h(u)}_{\in V_1} + \underbrace{g(u)}_{\in U_{j-1}} \in V_j \end{aligned}$$

Nach dem „Fundamentalsatz der Algebra" (der in der Funktionentheorie-Vorlesung gezeigt wird), zerfällt jedes Polynom mit komplexen Koeffizienten über $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren. Hieraus folgt die letzte Behauptung im Satz. □

9.14 Selbstadjungierte Endomorphismen

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, und sei

$$\overline{\alpha} := \begin{cases} \alpha \text{ falls } \mathbb{K} = \mathbb{R} \\ x - yi \text{ falls } \alpha = x + yi \in \mathbb{C} \text{ mit } x, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Sei V ein euklidischer oder unitärer $\mathbb{K}$-Vektorraum (vgl. 7.7).

Definition.
Ein Endomorphismus $f : V \longrightarrow V$ heißt *selbstadjungiert* (bzgl. $\langle\ ,\ \rangle$), falls

$$\langle f(v), w\rangle = \langle v, f(w)\rangle \quad \forall v, w \in V$$

Bemerkung.
Wenn $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Orthonormalbasis von V und $A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ ist, so gilt

$$\boxed{f \text{ selbstadjungiert}} \iff \boxed{{}^tA = \overline{A}}$$

(${}^tA = \overline{A}$ bedeutet, dass A symmetrisch bzw. hermitesch ist, vgl. 7.5)

Beweis. Es gilt

$$\boxed{f \text{ selbstadjungiert} \iff \langle f(v_j), v_k\rangle = \langle v_j, f(v_k)\rangle\ \forall j, k = 1, \ldots, n}$$

Da $\mathcal{B}$ orthonormal ist, gilt für $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) =: (a_{ij})$ nach Definition 4.4:

$$\begin{aligned} \langle f(v_j), v_k\rangle &= a_{1j}\langle v_1, v_k\rangle + \cdots + a_{nj}\langle v_n, v_k\rangle = a_{kj} \\ \langle v_j, f(v_k)\rangle &= \overline{a_{1k}}\langle v_j, v_1\rangle + \cdots + \overline{a_{nk}}\langle v_j, v_n\rangle = \overline{a_{jk}} \end{aligned}$$

□

9.15 Spektralsatz („Hauptachsentransformation“)

Sei $f : V \longrightarrow V$ ein selbstadjungierter Endomorphismus eines n-dimensionalen euklidischen oder unitären $\mathbb{K}$-Vektorraumes V. Dann besitzt V eine Orthonormalbasis, die aus Eigenvektoren von f besteht. Die Eigenwerte von f sind sämtlich reell.

Beweis mit Fundamentalsatz der Algebra. Nach 9.13 hat $\chi_f(x)$ eine Nullstelle $\lambda \in \mathbb{C}$. Sei v Eigenvektor zu λ, also $v \neq \vec{0}$ und $f(v) = \lambda v$. Es folgt

$$\begin{aligned} \langle f(v), v\rangle &= \langle \lambda v, v\rangle = \lambda\langle v, v\rangle \\ \langle v, f(v)\rangle &= \langle v, \lambda v\rangle = \overline{\lambda}\langle v, v\rangle \end{aligned}$$

Da $\langle v, v\rangle \neq 0$ (vgl. 7.7) $\Longrightarrow \lambda = \overline{\lambda}$ und also $\lambda \in \mathbb{R}$.
Setzte $U = \mathbb{K}v \Longrightarrow f(U) \subseteq U \Longrightarrow f(U^\perp) \subseteq U^\perp$, denn für $u \in U^\perp$ folgt

$$\langle f(u), v\rangle \underset{f \text{ selbstadjungiert}}{=} \langle u, \underbrace{f(v)}_{\in U}\rangle \underset{u \in U^\perp}{=} 0$$

Da U regulär ist, folgt $V = U \perp U^\perp$ und $\dim_K U^\perp = n - 1$ nach 7.15. Da $f|_{u^\perp} : U^\perp \longrightarrow U^\perp$ selbstadjungiert, ergibt Induktion die Behauptung. $\square$

9.16 Hermitesche und symmetrische Matrizen

Korollar.

a) Sei $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ hermitesch (d.h. ${}^tA = \overline{A}$). Dann gibt es eine unitäre Matrix $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ (d.h. ${}^tT\overline{T} = E_n$) so, dass

$${}^tTA\overline{T} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$

b) Sei $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch (d.h. ${}^tA = A$). Dann gibt es eine orthogonale Matrix $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (d.h. ${}^tTT = E_n$) so, dass

$${}^tTAT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

In beiden Fällen sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *die Eigenwerte (mit Vielfachheiten) der Standardabbildung* $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$, $\vec{x} \longmapsto A\vec{x}$.

Beweis. Sei s das Standardskalarprodukt (vgl. 7.8) und $\mathcal{B}$ die Standardbasis von $V := \mathbb{K}^n$. Dann ist $A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ (vgl. 4.11), und f ist selbstadjungiert nach Voraussetzung und Bemerkung 9.14. Nach dem Spektralsatz 9.15 besitzt V eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}'$, die aus Eigenvektoren von f besteht. Es folgt

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f) \underset{9.5}{=} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \underset{4.16}{=} T^{-1}AT \text{ mit } T := \mathrm{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V)\,,$$

wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Eigenwerte von f sind. Da $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ Orthonormalbasen $\underset{7.4}{\Longrightarrow} \mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(s) = E_n = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s) \underset{7.6}{\Longrightarrow} E_n = {}^tTE_n\overline{T} \Longrightarrow {}^tT = \overline{T}^{-1}$. Es folgt die Behauptung im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist, folgt

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = T^{-1}AT = {}^t\overline{T}AT = {}^tSA\overline{S} \text{ mit } S := \overline{T}$$

□

9.17 Beispiele

Man untersuche, ob

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3\,, \quad (a,b,c) \longmapsto (-5a + 7c, 6a + 2b - 6c, -4a + 6c)$$

diagonalisierbar ist und konstruiere gegebenenfalls eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^3$ so, dass $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ eine Diagonalmatrix ist.

1. Schritt Bestimme die Matrix $\mathrm{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f)$ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{B}'$ von $\mathbb{R}^3$. Es ist

$$\left.\begin{aligned} f(1,0,0) &= (-5,6,-4) \\ f(0,1,0) &= (0,2,0) \\ f(0,0,1) &= (7,-6,6) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow A := \mathrm{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & -6 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

2. Schritt Prüfe, ob das charakteristische Polynom $\det(A - xE_3)$ in Linearfaktoren zerfällt. (Falls nein $\underset{9.12}{\Longrightarrow}$ f ist nicht diagonalisierbar.) Es ist

$$\begin{aligned}\det(A - xE_3) &= \det\begin{pmatrix} -5-x & 0 & 7 \\ 6 & 2-x & -6 \\ -4 & 0 & 6-x \end{pmatrix} \\ &= (2-x)((-5-x)(6-x)+28) \\ &= (2-x)(x^2-x-2) \\ &= (2-x)^2(-1-x)\end{aligned}$$

Das charakteristische Polynom zerfällt (über $\mathbb{R}$) in Linearfaktoren, und seine Nullstellen sind die *Eigenwerte* von f. Es ist -1 ein einfacher Eigenwert und 2 ein zweifacher Eigenwert von f.

3. Schritt Bestimme zu jedem Eigenwert λ die Dimension des *Eigenraums* $V_\lambda := \operatorname{kern}(f - \lambda\,\mathrm{id})$. Falls $\dim_{\mathbb{R}} V_\lambda =$ Vielfachheit von λ für jeden Eigenwert λ gilt $\underset{9.12}{\Longrightarrow}$ f ist diagonalisierbar. (Andernfalls ist f nicht diagonalisierbar.)

$\lambda = -1$: Bestimme eine Basis von $V_{-1} = \operatorname{kern}(f + \mathrm{id})$. Es ist

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5+1 & 0 & 7 \\ 6 & 2+1 & -6 \\ -4 & 0 & 6+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4a+7c \\ 6a+3b-6c \\ -4a+7c \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow -4a + 7c = 0, \quad 6a + 3b - 6c = 0$$

$$\underset{\text{nachrechnen}}{\Longrightarrow} v_1 = (7,-6,4) \text{ bildet eine Basis von } V_1, \text{ also } \dim_{\mathbb{R}} V_{-1} = 1$$

$\lambda = 2$: Bestimme eine Basis von $V_2 = \operatorname{kern}(f - 2\,\mathrm{id})$. Es ist

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5-2 & 0 & 7 \\ 6 & 2-2 & -6 \\ -4 & 0 & 6-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7a+7c \\ 6a-6c \\ -4a+4c \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow a = c, \ b \text{ beliebig}$$
$$\Longrightarrow v_2 = (0,1,0) \text{ und } v_3 = (1,0,1) \text{ bilden eine Basis von } V_2$$
$$\Longrightarrow \dim_{\mathbb{R}} V_2 = 2$$

Ergebnis f ist diagonalisierbar, und

$$\mathcal{B} = \{v_1 = (7,-6,4), v_2 = (0,1,0), v_3 = (1,0,1)\}$$

ist eine Basis von $\mathbb{R}^3$, die aus Eigenvektoren von f besteht. Es ist

$$\begin{aligned} f(v_1) &= (-7,6,4) = -v_1 \\ f(v_2) &= (0,2,0) = 2v_2 \\ f(v_3) &= (2,0,2) = 2v_3 \end{aligned} \qquad \text{und} \qquad \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Beispiel.
Sei $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (a,b,c) \longmapsto (a-2c, 0, -2a+4c)$. Es ist zu zeigen, dass f selbstadjungiert ist, und eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ bezüglich des Standardskalarprodukt zu konstruieren, die aus Eigenvektoren von f besteht.

- Es ist f selbstadjungiert, denn es ist

$$\begin{aligned} f(1,0,0) &= (1,0,-2) \\ f(v_2) &= (0,0,0) \\ f(v_3) &= (-2,0,4) \end{aligned} \qquad \text{also} \qquad A := \mathrm{M}^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

eine symmetrische Matrix, vgl. 9.14.

- Wir zerlegen das charakteristische Polynom $\det(A - xE_3)$ in Linearfaktoren. Es ist

$$\begin{aligned} \det(A - xE_3) &= \det \begin{pmatrix} 1-x & 0 & -2 \\ 0 & -x & 0 \\ -2 & 0 & 4-x \end{pmatrix} = (1-x)(-x)(4-x) + 4x \\ &= -x^3 + 5x^2 = x^2(5-x) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ 5 ist ein einfacher und 0 ist zweifacher Eigenwert von f.

- Bestimme jeweils eine Basis der Eigenräume

$$V_5 = \mathrm{kern}(f - 5\,\mathrm{id}) \qquad \text{und} \qquad V_0 = \mathrm{kern}\, f$$

$\lambda = 5$: Es ist

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-5 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 0 \\ -2 & 0 & 4-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4a-2c \\ -5b \\ -2a-c \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow c = -2a$ und $b = 0$

also bildet $v_1 = (1,0,-2)$ eine Basis von V_5

$\lambda = 0$: Es ist

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - 2c \\ 0 \\ -2a + 4c \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow a = 2c$ und b ist beliebig

also bilden $v_2 = (0, 1, 0)$ und $v_3 = (2, 0, 1)$ eine Basis von $V_0 = \operatorname{kern} f$

- Für die Basis $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ von $\mathbb{R}^3$ gilt

$$\begin{aligned} f(v_1) &= (5, 0, -10) = 5v_1 \\ f(v_2) &= (0, 0, 0) = 0v_2 \\ f(v_3) &= (0, 0, 0) = 0v_3 \end{aligned} \qquad \text{und} \qquad \mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow \mathcal{B}$ ist Basis aus Eigenvektoren von f. Es gilt

$$\left.\begin{aligned} \langle v_1, v_2 \rangle &= 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = 0 \Longrightarrow v_1 \perp v_2 \\ \langle v_1, v_3 \rangle &= 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 - 2 \cdot 1 = 0 \Longrightarrow v_1 \perp v_3 \end{aligned}\right\} V_0 \perp V_5 \text{ nach } 9.15$$

$$\langle v_2, v_3 \rangle = 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0 \Longrightarrow v_2 \perp v_3$$

und

$$\begin{aligned} \|v_1\| &= \sqrt{\langle v_1, v_1 \rangle} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5} \\ \|v_2\| &= \sqrt{\langle v_2, v_2 \rangle} = 1 \\ \|v_3\| &= \sqrt{\langle v_3, v_3 \rangle} = \sqrt{5} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 0, -2), \quad u_2 = (0, 1, 0), \quad u_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 0, 1)$
bilden eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren.

9.18 Tabelle mit Normalformen von Matrizen

Seien $A, B \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$, und sei $1 + 1 \neq 0$ in K.

Relation $B \sim A$	Normalform	Invarianten
$B = RAT$ mit $R, T \in \mathrm{GL}_n(K)$	$\left(\begin{array}{c\|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$	$r = \operatorname{rang} A$ vgl. 4.18, 4.19
$B = {}^tTAT$ mit $T \in \mathrm{GL}_n(K)$ A, B symmetrisch ——— $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$	Diagonalmatrix vgl. 7.19.3 ——— $\left(\begin{array}{c\|c} E_{r^+} & 0 \\ \hline 0 & -E_{r^-} \end{array}\right)$ vgl. 8.9	Rang, Dimension + weitere ——— Signatur vgl. 7.23, 8.7
$B = {}^tTAT$ mit $T \in \mathrm{GL}_n(K)$ A, B schiefsymmetrisch $A, B \in \mathrm{GL}_n(K)$	$\left(\begin{array}{c\|c} 0 & E_m \\ \hline -E_m & 0 \end{array}\right)$	$n = 2m$ vgl. 7.18, 8.6
$B = T^{-1}AT$ mit $T \in \mathrm{GL}_n(K)$ vgl. 4.15, 4.16 Für $K = \mathbb{C}$ (vgl. §13)	$\exists$ Kriterien für Trigonalisierbarkeit Diagonalisierbarkeit vgl. 9.13, 9.5, 9.12 *Jordan-Normalform*	Rang char. Polynom Eigenwerte (mit Vielfachheit) Dimension von Eigenräumen
$B = {}^tTAT$ mit $T \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ $A, B \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ symmetr. vgl. 8.5.1	$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$	$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ Eigenwerte mit Vielfachheit vgl. 9.16.b
$B = {}^tTA\overline{T}$ mit $T \in \mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ $A, B \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ hermitesch vgl. 8.5.2	$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$	$\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ Eigenwerte mit Vielfachheit vgl. 9.16.a

9.19 Übungsaufgaben 55 – 61

Aufgabe 55.
Sei K ein Körper, und sei $f : V \longrightarrow W$ eine K-lineare Abbildung eines K-Vektorraums V in einen K-Vektorraum W. Für Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ aus V sei $w_1 = f(v_1), \ldots, w_n = f(v_n)$. Man beweise die folgende Aussage und prüfe, ob auch die umgekehrte Richtung gilt:
$w_1, \ldots, w_n$ *linear unabhängig in* $W \implies v_1, \ldots, v_n$ *linear unabhängig in* V.

Aufgabe 56.
Man zeige, dass die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \ \ (a,b,c) \longmapsto (3a + 2b - c\,,\ 2a + 6b - 2c\,,\ 2c)\,,$$

diagonalisierbar ist, und konstruiere eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^3$ derart, dass die Matrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ Diagonalgestalt hat.

Aufgabe 57.
Es sei R^3 mit dem Standard-Skalarprodukt versehen, und es sei

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3\,,\ (a,b,c) \longmapsto (3a - c, 2b, -a + 3c)$$

(a) Man zeige, dass f selbstadjungiert ist.

(b) Man konstruiere eine Orthonormalbasis von R^3, die aus Eigenvektoren von f besteht.

Aufgabe 58.
Es sei R^3 mit dem Standard-Skalarprodukt versehen, und es sei

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3\,,\ (a,b,c) \longmapsto (4a - 2b, -2a + 3b + 2c, 2b + 2c)$$

(a) Man zeige, dass f selbstadjungiert ist.

(b) Man konstruiere eine Orthonormalbasis von R^3, die aus Eigenvektoren von f besteht.

Aufgabe 59.
Sei $f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \longmapsto A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, die zu $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ gehörige Standardabbildung. Man bestimme das charakteristische Polynom, Eigenwerte und Eigenvektoren von f, wenn

$$\textbf{a)} \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \textbf{b)} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 60.
Man bestimme das charakteristische Polynom, Eigenwerte und Eigenvektoren von f, wenn

a) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (a, b, c) \longmapsto (2a + b, b - c, 2b + 4c)$,

b) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (a, b, c) \longmapsto (a + 2b, a + 2b, c)$,

c) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (a, b, c) \longmapsto (a, -c, b)$.

Man entscheide jeweils, ob f diagonalisierbar ist.

Aufgabe 61.
Seien $f, g : K^n \longrightarrow K^n$ zwei K-lineare Abbildungen. Wenn es eine Basis $\mathcal{B}$ von K^n gibt, deren Vektoren sowohl Eigenvektoren von f wie auch Eigenvektoren von g sind, so sagt man, dass f und g *simultan diagonalisierbar* seien. Man zeige:

(a) Wenn f und g simultan diagonalisierbar sind, so gilt $f \circ g = g \circ f$.

(b) Wenn f genau n verschiedene Eigenwerte besitzt und wenn $f \circ g = g \circ f$ gilt, dann sind f und g simultan diagonalisierbar.

Bemerkung. Die Umkehrung von 61 (a) gilt tatsächlich nur unter geeigneten Zusatzvoraussetzungen, wie schon das Beispiel $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ und $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (a, b) \longmapsto (a + b, b)$, zeigt.

10 Einige Grundbegriffe der Algebra

10.1 Äquivalenzrelationen

Für je zwei Elemente a, b in einer Menge M stehe fest, ob eine Beziehung „$a \sim b$“ gilt oder nicht (z.B. $5 \leq 7$, aber $3 \nleq 1$ in $\mathbb{R}$). Wir sprechen von einer *Äquivalenzrelation* auf M, wenn

1. $a \sim a$
2. $a \sim b \Longrightarrow b \sim a$
3. $a \sim b$ und $b \sim c \Longrightarrow a \sim c$

Beispiel.
„=“ ist eine Äquivalenzrelation.

Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M, so können wir zu jedem $a \in M$ die *Klasse* $k_a := \{c \in M \mid c \sim a\}$ betrachten.

Lemma.
Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge M. Dann gelten

i) $a \sim b \iff k_a = k_b$

ii) $b \notin k_a \iff k_a \cap k_b = \varnothing$

iii) $M = \bigcup_{a \in M} k_a$

Beweis.

i) $\Longrightarrow$ Sei $a' \in k_a$, also $a' \sim a$. Da $a \sim b \Longrightarrow a' \sim b$ nach 3. $\Longrightarrow a' \in k_b$ $\Longrightarrow k_a \subseteq k_b$. Nach 2. ist $b \sim a$, daher folgt $k_b \subseteq k_a$ analog.

$\Longleftarrow$ ist trivial.

ii) $\Longrightarrow$ $b \notin k_a \Longrightarrow b \nsim a$. Angenommen es gibt $c \in k_a \cap k_b \Longrightarrow a \sim c$ und $c \sim b \underset{3.}{\Longrightarrow} a \sim b$ im Widerspruch zur Annahme.

$\Longleftarrow$ klar, denn $b \in k_a$ würde $b \in k_a \cap k_b$ implizieren.

iii) gilt, da $a \in k_a$ für alle $a \in M$.

□

Beispiel.
Sei $M = \mathbb{Z}$, und sei

$$a \sim b :\Longleftrightarrow a - b \text{ ist durch 2 teilbar}$$

Dies ist eine Äquivalenzrelation (vgl. Aufgabe 62), und es ist $\mathbb{Z} = k_0 \cup k_1$, wobei k_0 die Klasse der geraden und k_1 die Klasse der ungeraden Zahlen ist ($k_0 = 2\mathbb{Z}$, $k_1 = 1 + 2\mathbb{Z}$).

10.2 Quotientenvektorräume

Sei V ein K-Vektorraum und U ein Teilraum von V (gemäß 2.8). Dann ist auf V durch

$$\boxed{v \sim v'} :\Longleftrightarrow \boxed{v - v' \in U}$$

eine Äquivalenzrelation erklärt, und es gilt

$$\boxed{k_v = \{v' \in V \mid v' \sim v\} = v + U := \{v + u \mid u \in U\}}$$

Sei $V/U := \{k_v \mid v \in V\}$ die Menge aller solcher Klassen. Man sagt „V modulo U“.

Wir definieren eine Addition und eine Skalarmultiplikation durch

$$\boxed{k_v + k_w := k_{v+w}} \text{ und } \boxed{\lambda k_v := k_{\lambda v}} \; \forall v, w \in V \text{ und } \lambda \in K$$

Dies ist wohldefiniert, denn ist $v \sim v'$ und $w \sim w'$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow v - v' \in U \text{ und } w - w' \in U \\
&\underset{2.8}{\Longrightarrow} (v - v') + (w - w') = (v + w) - (v' + w') \in U \Longrightarrow v + w \sim v' + w' \\
&\Longrightarrow k_{v+w} = k_{v'+w'}
\end{aligned}$$

Ist $v \sim v'$ und $\lambda \in K$

$$\begin{aligned}
&\underset{2.8}{\Longrightarrow} \lambda \underbrace{(v - v')}_{\in U} = \lambda v - \lambda v' \in U \\
&\Longrightarrow \lambda v \sim \lambda v' \Longrightarrow k_{\lambda v} = k_{\lambda v'}
\end{aligned}$$

Damit wird V/U zu einem K-Vektorraum, genannt *Quotientenvektorraum*. Es ist $k_{\vec{0}} = U$ der Nullvektor in V/U.

Beispiele.

1. $U = V \Longrightarrow V/U = \{\vec{0}\}$ (Nullvektorraum)
2. $U = \{\vec{0}\} \Longrightarrow V/U = V$

10.3 Die kanonische Abbildung von V auf V/U

1. Die Abbildung $\pi : V \longrightarrow V/U$, $v \longmapsto v + U$ ist K-linear und surjektiv mit $\operatorname{kern} \pi = U$.

2. Ist $\dim_K V < \infty \Longrightarrow \dim_K V/U = \dim_K V - \dim_K U$. Dies folgt aus 1. und der Formel $\dim_K V = \dim_K \operatorname{kern} \pi + \dim_K \operatorname{bild} \pi$ (vgl. 3.22).

3. **Universelle Eigenschaft des Quotientenraums**. Ist $f : V \longrightarrow W$ eine K-lineare Abbildung in einen K-Vektorraum W, und ist $U \subset \operatorname{kern} f$, dann gibt es genau eine K-lineare Abbildung $\bar{f} : V/U \longrightarrow W$ so, dass $f = \bar{f} \circ \pi$ gilt, und also das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & W \\
& V/U \arrow[ur, "\bar{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

10.4 Beispiele für Gruppen

Nach 2.2 ist eine *Gruppe* eine Menge G mit einer Verknüpfung $G \times G \longrightarrow G$, $(a, b) \longmapsto a \circ b$ so, dass gelten

G1 $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$

G2 $\exists$ ein neutrales Element $e \in G$ so, dass $e \circ a = a \; \forall a \in G$

G3 Zu jedem $a \in G$ gibt es ein inverses Element $a^{-1} \in G$ so, dass $a^{-1} \circ a = e$ gilt

Gilt zusätzlich noch $a \circ b = b \circ a \; \forall a, b \in G$, so heißt G *abelsch* oder *kommutativ.*

1. $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ ist bezüglich $+$ eine Gruppe. Neutrales Element ist 0, inverses Element zu $a \in \mathbb{Z}$ ist $-a$.

2. Die symmetrische Gruppe (Permutationsgruppe)

$$S_n := \{\sigma : \{1, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, \ldots, n\} \mid \sigma \text{ bijektiv}\}$$

hat als Verknüpfung die Hintereinanderausführung von Abbildungen, sie hat $n! = n(n-1) \cdots 2 \cdot 1$ Elemente. Schreibweise für $\sigma \in S_n$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Zum Beispiel hat S_2 die Elemente

$$\mathrm{id} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

S_3 hat 6 Elemente

$$\mathrm{id} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

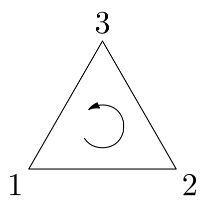

Abbildung 22: Gleichseitiges Dreieck

Drehung um 120 Grad

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \longmapsto & 2 & \longmapsto & 3 \\ 2 & \longmapsto & 3 & \longmapsto & 1 \\ 3 & \longmapsto & 1 & \longmapsto & 2 \end{array}$$

3. Die (allgemeine) lineare Gruppe

$$\mathrm{GL}(V) = \{f : V \longrightarrow V \mid f \text{ Automorphismus}\}$$

(V ein K-Vektorraum) bildet bezüglich Hintereinanderausführung von Abbildungen eine Gruppe, vgl. 4.22.

4. Kleinsche Vierergruppe

$$V_4 = \{e, a, b, c\} \text{ mit}$$
$$a^2 = b^2 = c^2 = e \text{ und } ab = c = ba, ac = b = ca, bc = a = cb$$

Bis auf Isomorphie gibt es genau 2 Gruppen mit 4 Elementen (nämlich $V_4 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, vgl. 5. und 6. unten).

5. Sind G_1, G_2 Gruppen

$$\Longrightarrow G_1 \times G_2 = \{(g_1, g_2) \mid g_1 \in G_1, g_2 \in G_2\}$$

ist eine Gruppe mit komponentenweiser Verknüpfung

$$(g_1, g_2) \circ (g_1', g_2') = (\underbrace{g_1 \circ g_1'}_{\in G_1}, \underbrace{g_2 \circ g_2'}_{\in G_2})$$

6. Ist G eine Gruppe mit endlich vielen Elementen, so heißt die Anzahl der Elemente von G die *Ordnung von* G. Wir schreiben $|G|$ für die Ordnung von G. Hat G unendlich viele Elemente, so schreiben wir $|G| = \infty$.

   Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine abelsche Gruppe der Ordnung n, nämlich die additive Gruppe
$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\overline{a} \mid a \in \mathbb{Z}\}$$
   wobei $\overline{a} := k_a$ die Klasse von a bezüglich der Äquivalenzrelation

$$a \sim b :\Longleftrightarrow a - b \text{ ist durch } n \text{ teilbar (vgl. Aufgabe 62)}$$

   Insbesondere liegen a und b in derselben (Rest-)Klasse, falls sie den gleichen Rest bei Division mit n haben.

Rechnen mit den Klassen, z.B. $n = 13$

$$\begin{aligned}
\overline{5}+\overline{7} &= \overline{12}, \quad \overline{5}+\overline{8}=\overline{0}\\
\overline{5}+\overline{9} &= \overline{1}, \text{ da } 14 = 1\cdot 13+1, \text{ also } 14 \sim 1\\
\overline{5}+\overline{10} &= \overline{2}, \text{ da } 15 = 1\cdot 13+2, \text{ also } 15 \sim 2\\
\overline{30} &= \overline{4}, \text{ da } 30 = 2\cdot 13+4, \text{ also } 30 \sim 4\\
\overline{-5} &= \overline{8}, \text{ da } -5 = (-1)\cdot 13+8, \text{ also } 8 \sim -5
\end{aligned}$$

Problem Sei $n \in \mathbb{N}$. Wie viele Gruppen der Ordnung n gibt es bis auf Isomorphie?

- Wenn $n = p$ eine Primzahl ist, so gibt es (bis auf Isomorphie) genau eine Gruppe der Ordnung p, nämlich die Gruppe $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$
- $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ist sogar ein Körper ($\overline{a}\cdot\overline{b} := \overline{ab}$).

7. Übersicht bis zur Ordnung 15 (ohne Primzahlordnungen)

Gruppenordnung	4	6	8	9	10	12	14	15
Gruppenanzahl bis auf Iso.	2	2	5	2	2	5	2	1
davon nicht abelsch	0	1	2	0	1	3	1	0

10.5 Untergruppen

Sei G eine (multiplikativ geschriebene) Gruppe mit neutralem Element e. Eine Teilmenge H von G heißt *Untergruppe von* G, falls gilt:

- $e \in H$
- $x, y \in H \Longrightarrow xy^{-1} \in H$

Es ist dann H selbst wieder eine Gruppe.

Beispiele.

1. $\{e\}$ und G sind Untergruppen von G (sog. triviale Untergruppen).
2. $$\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid a \neq 0, d \neq 0\right\}$$
   ist eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ (bez. Matrizenmultiplikation).
3. $\mathrm{SL}_n(K) = \{A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K) \mid \det A = 1\}$ ist eine Untergruppe nach 6.9 (bez. Matrizenmultiplikation).

4. $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ ist eine Untergruppe von $\mathbb{C}^\times := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (bez. Multiplikation, vgl. 1.1).

5. Sei $n \in \mathbb{Z}$ fest gewählt, und sei $n\mathbb{Z} := \{nz \mid z \in \mathbb{Z}\}$ (ganzzahlige Vielfache von n). Dann ist $n\mathbb{Z}$ eine Untergruppe von $\mathbb{Z}$ (bez. Addition), denn:

   - $0 = n \cdot 0 \in n\mathbb{Z}$
   - Ist $x = nz_1$ und $y = nz_2 \Longrightarrow x - y = n(z_1 - z_2) \in n\mathbb{Z}$

   Satz Sei H eine beliebige Untergruppe von $\mathbb{Z}$, dann gibt es ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $H = n\mathbb{Z}$.

   Beweis. Ist $H = \{0\}$, dann ist $H = 0\mathbb{Z}$. Ist $H \neq \{0\}$, dann gibt es $m \neq 0 \in H$. Ist $m < 0$, so ist $-m > 0 \in H$, also gibt es mindestens eine natürliche Zahl in H. Sei $n \in \mathbb{N}$ die kleinste natürliche Zahl in H (ungleich Null). Wir zeigen nun $H = n\mathbb{Z}$.

   „$n\mathbb{Z} \subseteq H$“ Sei $k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} k > 0 &\underset{\text{Induktion}}{\Longrightarrow} nk = kn = \underbrace{n + \cdots + n}_{k \text{ Summanden}} \in H \\ k < 0 &\Longrightarrow n(-k) \in H \Longrightarrow -n(-k) = nk \in H \\ k = 0 &\Longrightarrow n \cdot 0 = 0 \in H \end{aligned}$$

   $\Longrightarrow nk \in H$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

   „$H \subseteq n\mathbb{Z}$“ Sei $h \in H$. Es gibt $q, r \in \mathbb{Z}$, $0 \leq r < n$ mit

$$\begin{aligned} h &= nq + r \text{ (Division mit Rest)} \\ \Longrightarrow \quad r &= \underbrace{h}_{\in H} - \underbrace{nq}_{\in H} \in H \end{aligned}$$

   $\Longrightarrow r = 0$, da n nach Definition die kleinste positive Zahl in H ist.

   $\square$

6. Seien

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathfrak{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \mathfrak{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \mathfrak{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$$

wobei $i^2 = -1$ sei. Die Matrizen

$$\mathbb{H} := \{\pm E_2, \pm\mathfrak{i}, \pm\mathfrak{j}, \pm\mathfrak{k}\}$$

bilden eine (nicht abelsche) Untergruppe der Ordnung 8 in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. Sie heißt *Quaternionengruppe* $\mathbb{H}$. Es gilt:

$$\mathfrak{i}^2 = \mathfrak{j}^2 = \mathfrak{k}^2 = -E_2\,,\ \mathfrak{j}\mathfrak{i} = -\mathfrak{i}\mathfrak{j}\,,\ \mathfrak{i}\mathfrak{j} = \mathfrak{k}$$

10.6 Homomorphismus von Gruppen

Definition.
Sei G eine Gruppe mit neutralem Element e und G' eine Gruppe mit neutralem Element e'. Wir schreiben G und G' multiplikativ. Ein *Homomorphismus* $\varphi : G \longrightarrow G'$ ist eine Abbildung so, dass $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)\ \forall a, b \in G$ gilt.

Beispiele.
Folgende Abbildungen sind Gruppenhomomorphismen:

1. $\det : \mathrm{GL}_n(K) \longrightarrow K^* = K \setminus \{0\},\ A \longmapsto \det A$
2. $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow G',\ n \longmapsto a^n$, für festes $a \in G'$
3. $\varphi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^*,\ x \longmapsto \exp(x)$, wobei $\mathbb{R}^+ = \mathbb{R}$ versehen mit Addition. Es gilt die *Funktionalgleichung der Exponentialfunktion*:
$$\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$$
Es ist $\mathrm{kern}(\varphi) = \{x \in \mathbb{R}^+ \mid \varphi(x) = 1\} = \{0\}$ und $\mathrm{bild}(\varphi) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$
4. $\varphi : \mathbb{C}^+ \longrightarrow \mathbb{C}^*,\ z \longmapsto \exp z$. Dann gilt:
$$\exp z = \exp w \iff z - w \in 2\pi i\mathbb{Z}$$
Es ist $\mathrm{kern}(\varphi) := \{z \in \mathbb{C} \mid \exp z = 1\} = 2\pi i\mathbb{Z}$. Die komplexe Exponentialfunktion ist periodisch mit den Zahlen $2\pi ik,\ k \in \mathbb{Z}$ (und nur diesen) als Perioden.
5. Eine *n-dimensionale Darstellung* einer Gruppe G ist ein Homomorphismus $\varphi : G \longrightarrow \mathrm{GL}_n(K)$. Beispiel: $\varphi : S_3 \longrightarrow \mathrm{GL}_3(K)$
$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Es ist $S_3 = \{\mathrm{id},\ \sigma,\ \sigma^2,\ \tau,\ \sigma\tau,\ \sigma^2\tau\}$ mit der Hintereinanderausführung als Verknüpfung. Die Bilder der anderen Permutationen ergeben sich nun aus diesen Beziehungen. Es ist $\sigma^3 = \mathrm{id},\ \tau^2 = \mathrm{id},\ \tau\sigma^2 = \sigma\tau$ und $\tau\sigma = \sigma^2\tau$ in S_3 (vgl. 10.4.2).

10.7 Eigenschaften von Gruppenhomomorphismen

Sei $\varphi : G \longrightarrow G'$ ein Gruppenhomomorphismus, und seien e bzw. e' die neutralen Elemente von G bzw. von G'. (Wir schreiben G und G' multiplikativ.) Dann gelten:

1. $\varphi(e) = e'$ (denn: $\varphi(e) = \varphi(ee) = \varphi(e)\varphi(e) \Longrightarrow e' = \varphi(e)$)
2. $\varphi(a)^{-1} = \varphi(a^{-1})$ (denn: $e' = \varphi(e) = \varphi(aa^{-1}) = \varphi(a)\varphi(a^{-1})$)
3. Ist H eine Untergruppe von G, so ist auch $\varphi(H) := \{\varphi(h) \mid h \in H\}$ eine Untergruppe von G'
4. $\operatorname{kern}\varphi := \{a \in G \mid \varphi(a) = e'\}$ ist eine Untergruppe von G
5. $\operatorname{kern}\varphi = \{e\} \Longleftrightarrow \varphi$ ist injektiv. (Vgl. Aufgabe 64; geht analog wie bei dem Satz in 3.19)

10.8 Isomorphismus von Gruppen

Ein bijektiver Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \longrightarrow G'$ heißt *Isomorphismus*. Zwei Gruppen G und G' heißen *isomorph*, wenn es einen Isomorphismus $\varphi : G \longrightarrow G'$ gibt.

Beispiel.
S_3 ist isomorph zur Gruppe P der Permutationsmatrizen

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(Nachrechnen durch Aufstellen einer Multiplikationstabelle!) Die Gruppe P operiert auf K^3 durch die Standardabbildungen, z.B.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ c \\ a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ a \\ b \end{pmatrix}$$

(vgl. 10.6.5, 10.4.2)

Sind G und G' isomorph, so schreiben wir

$$\boxed{G \simeq G'}$$

Bemerkung.
Ist $\varphi : G \longrightarrow G'$ ein Isomorphismus, so ist die Umkehrabbildung $\varphi^{-1} : G' \longrightarrow G$ ebenfalls ein Isomorphismus.

Beweis. Seien $x, y \in G'$ und $a = \varphi^{-1}(x)$, $b = \varphi^{-1}(y) \Longrightarrow \varphi(a) = x$ und $\varphi(b) = y$. Es folgt:

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(xy) &= \varphi^{-1}(\varphi(a)\varphi(b)) = \varphi^{-1}(\varphi(ab)) \\ &= ab = \varphi^{-1}(x)\varphi^{-1}(y)\end{aligned}$$

□

10.9 Nebenklassen

Sei G eine (multiplikativ geschriebene) Gruppe mit neutralem Element e, und sei H eine Untergruppe von G.

Definition.
Eine *Linksnebenklasse* ist eine Teilmenge von G der Form

$$\boxed{aH := \{ah \mid h \in H\}}$$

wobei $a \in G$ fest gewählt ist.

Behauptung Die sogenannte *Kongruenzrelation*

$$\boxed{a \equiv b} :\Longleftrightarrow \boxed{\exists h \in H \text{ mit } b = ah}$$

ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis. 1. $a \equiv a$, denn $a = ae$ und $e \in H$ nach 10.5

2. $a \equiv b \Longrightarrow b \equiv a$, denn: $a \equiv b \Longrightarrow \exists h \in H$ mit $b = ah \Longrightarrow a = bh^{-1}$ und $h^{-1} \in H$ (nach 10.5) $\Longrightarrow b \equiv a$

3. $a \equiv b$, $b \equiv c \Longrightarrow a \equiv c$, denn: $a \equiv b$, $b \equiv c \Longrightarrow \exists h, h' \in H$ mit $b = ah$ und $c = bh' \Longrightarrow c = ahh' \Longrightarrow a \equiv c$, da $hh' \in H$ (nach 10.5)

□

Beispiel.
Die symmetrische Gruppe $S_3 = \{\mathrm{id}, \sigma, \sigma^2, \tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau\}$ mit

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

hat bezüglich der Untergruppe $H = \{\mathrm{id}, \sigma\tau\}$ die drei Mengen

$$\boxed{\{\mathrm{id}, \sigma\tau\} = H = \sigma\tau H} \boxed{\{\sigma, \sigma^2\tau\} = \sigma H = \sigma^2\tau H} \boxed{\{\sigma^2, \tau\} = \sigma^2 H = \tau H}$$

als Linksnebenklassen. (Denn: $\sigma\tau \in H \Longrightarrow H = \sigma\tau H \Longrightarrow \sigma H = \sigma^2\tau H$ und $\sigma^2 H = \sigma^3\tau H = \tau H$) Man hat eine disjunkte Zerlegung

$$\boxed{S_3 = H \cup \sigma H \cup \tau H}$$

gemäß 10.1.

Beobachtung Es ist $|H| = 2$ und also Index(H) := Anzahl der Linksnebenklassen $= 3 = \frac{6}{2} = \frac{|S_3|}{|H|}$.

10.10 Abzählformel

Satz.
Sei G eine (multiplikativ geschriebene) Gruppe mit neutralem Element e, und sei H eine Untergruppe. Dann gelten:

1. *G ist die disjunkte Vereinigung der Linksnebenklassen aH mit $a \in G$.*

2. *Jede Linksnebenklasse hat gleich viele Elemente wie H (ist gleichmächtig, falls ∞)*

3. *Für die Gruppenordnungen $|G|$ und $|H|$ gilt die Abzählformel*

$$\boxed{|G| = |H| \cdot (G : H)}$$

Dabei bezeichnet $(G : H)$ den Index von H in G*, das ist die Anzahl der Linksnebenklassen. Ist $|G|$ unendlich, so ist $|H|$ oder $(G : H)$ unendlich (oder beide).*

Beweis.

1. Die Nebenklassen sind nach 10.9 Äquivalenzklassen, also folgt die Behauptung aus 10.1.

2. Die Abbildung (von Mengen) $H \longrightarrow aH$, $h \longmapsto ah$, ist bijektiv, denn sie ist offensichtlich surjektiv und es ist noch zu zeigen: $ah = ah' \Longrightarrow h = h'$:
Sei $ah = ah' \Longrightarrow a^{-1}(ah) = a^{-1}(ah') \Longrightarrow h = h'$.

3. Die Abzählformel folgt aus 1. und 2.

□

10.11 Die Ordnung von Gruppenelementen

Sei G eine (multiplikativ geschriebene) Gruppe mit neutralem Element e, und sei $a \in G$. Die *Ordnung von* a ist die kleinste natürlich Zahl $m \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $a^m = e$, oder ∞, falls ein solches m nicht existiert. Wir schreiben „$\operatorname{ord} a$" für die Ordnung von a.

Beispiele.

1. Die Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ist ein Element der Ordnung 6 in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, denn:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \ A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$
$$A^4 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ A^5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ A^6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$$

2. Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ hat unendliche Ordnung, denn es ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ \forall n \in \mathbb{N}$$

10.12 Die von einem Element erzeugte Untergruppe

Satz.
Sei m die Ordnung von $a \in G$. Dann sind die Elemente a^k für $0 \le k < m$ paarweise verschieden in G. Ist $m < \infty$, so ist $H = \{e, a, a^2, \ldots, a^{m-1}\}$ eine Untergruppe der Ordnung m von G.

Beweis. Angenommen $a^j = a^i$ mit $0 \le i < j < m \Longrightarrow a^{j-i} = e \underset{10.11}{\Longrightarrow}$ $\operatorname{ord} a < m \Longrightarrow$ Widerspruch.
Sei $m < \infty \Longrightarrow H$ hat m Elemente. Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ ist $a^k \in H$ (wobei $a^0 := e$), denn es ist

$$\begin{aligned} a^k &= a^{qm+r} \text{ mit } q, r \in \mathbb{Z},\ 0 \le r < m \\ &= \underbrace{(a^m)^q}_{e} a^r \underset{10.11}{=} a^r \in H \end{aligned}$$

□

10.13 Satz von Lagrange

Sei G eine endliche Gruppe und H eine Untergruppe. Dann ist die Ordnung von H ein Teiler der Ordnung von G. Insbesondere ist die Ordnung eines jeden Elements von G ein Teiler der Ordnung von G.

Beweis. Nach 10.10 ist $|G| = |H| \cdot (G : H)$. Sei $a \in G \underset{10.12}{\Longrightarrow} \operatorname{ord} a < \infty$, da $|G| < \infty$. Wählen wir H wie in 10.12, folgt auch die zweite Behauptung. $\square$

10.14 Gruppen von Primzahlordnung

Korollar.
Sei p eine Primzahl. Dann ist jede Gruppe der Ordnung p isomorph zu $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Beweis. Sei G eine Gruppe der Ordnung p. Wähle $a \neq e$ aus G
$\Longrightarrow \operatorname{ord} a =: m \neq 1$
$\underset{10.13}{\Longrightarrow} m = p$, da m ein Teiler von $p = |G|$ und p Primzahl
$\underset{10.12}{\Longrightarrow} G = \{e, a, \ldots, a^{p-1}\}$
$\Longrightarrow G \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $a^k \longmapsto \overline{k}$ für $k = 0, \ldots, p-1$ ist ein Isomorphismus. $\square$

10.15 Erzeugung von Gruppen

Sei G eine Gruppe. Die von einer nichtleeren Teilmenge $U \subset G$ *erzeugte Untergruppe* ist definiert als die kleinste Untergruppe von G, die U enthält. Sie besteht (bei multiplikativer Schreibweise) aus allen möglichen Produkten mit endlich vielen Faktoren aus U, deren Inversen und e.

Beispiele.

1. Die von einem Element $a \in G$ erzeugte Gruppe H nennt man *zyklische Gruppe*. Ist $\operatorname{ord} a = \infty$, so ist $H = \{\ldots, a^{-2}, a^{-1}, e, a, a^2, \ldots\}$. Ist $\operatorname{ord} a = m < \infty$, so ist $H = \{e, a, a^2, \ldots, a^{m-1}\}$ von der Ordnung m nach 10.12.

   - $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ ist eine unendliche zyklische Gruppe bezüglich Addition, sie wird von 1 erzeugt. Die Untergruppen $n\mathbb{Z} = \{\ldots, -2n, -n, 0, n, 2n, \ldots\} \subset \mathbb{Z}$ werden von n erzeugt.
   - $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$ wird von $\overline{1}$ erzeugt, ist also zyklisch.

2. Die Kleinsche Vierergruppe V_4 ist nicht zyklisch. Sie wird in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ von den beiden Matrizen
$$a := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ und } b := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

erzeugt. Es ist $V_4 = \{e = E_2, a, b, c := ab\}$ mit Multiplikationstabelle:

	a	b	c
a	e	c	b
b	c	e	a
c	b	a	e

Die Gruppe ist kommutativ (vgl. 10.4.4).

3. Die symmetrische Gruppe S_3 ist nicht zyklisch. Sie wird von zwei Elementen erzeugt (vgl. 10.6.5 und Aufgabe 67).

10.16 Klassifikation der zyklischen Gruppen

Satz.
Jede zyklische Gruppe ist isomorph zu $\mathbb{Z}$ oder zu $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ mit einem $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Sei G eine (multiplikativ geschriebene) zyklische Gruppe und a ein erzeugendes Element von G.

1. $|G| = \infty \Longrightarrow G = \{\dots, a^{-2}, a^{-1}, e, a, a^2, \dots\}$ und $\mathbb{Z} \longrightarrow G$, $k \longmapsto a^k$ ist ein Isomorphismus ($a^0 := e$).

2. $|G| =: n < \infty \Longrightarrow G = \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$, und $G \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $a^k \longmapsto \overline{k}$ ist ein Isomorphismus nach 10.12.

□

10.17 Normalteiler

Sei G eine (multiplikativ geschriebene) Gruppe. Eine Untergruppe H von G heißt *Normalteiler in* G, falls gilt

$$\boxed{aHa^{-1} \subset H \text{ für jedes } a \in G}$$

Hierbei ist $aHa^{-1} := \{aha^{-1} \mid h \in H\}$.

Bemerkung.
Äquivalent sind:

i) H ist Normalteiler in G

ii) $aHa^{-1} = H \ \forall a \in G$

iii) $aH = Ha \ \forall a \in G$ (d.h. jede Linksnebenklasse ist gleich der entsprechenden Rechtsnebenklasse)

Beweis. **i) $\Longrightarrow$ ii)** H Normalteiler $\Longrightarrow aHa^{-1} \subset H \; \forall a \in G$
$\Longrightarrow a^{-1}Ha = a^{-1}H(a^{-1})^{-1} \subset H \; \forall a \in G$
$\Longrightarrow H = a \underbrace{a^{-1}Ha}_{\subset H} a^{-1} \subset aHa^{-1}$
ii) $\Longrightarrow$ iii) und iii) $\Longrightarrow$ i) sind trivial. □

Beispiele.

1. G abelsch $\Longrightarrow$ Jede Untergruppe ist Normalteiler
2. $\mathrm{SL}_n(K)$ ist Normalteiler in $\mathrm{GL}_n(K)$, denn für $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ und $B \in \mathrm{SL}_n(K)$ gilt:
$$\det(ABA^{-1}) \underset{6.9}{=} \det B = 1, \text{ also } ABA^{-1} \in \mathrm{SL}_n(K)$$
3. $\varphi : G \longrightarrow G'$ Gruppenhomomorphismus $\Longrightarrow \ker\varphi$ ist Normalteiler in G, denn für $a \in G$, $b \in \ker\varphi$ gilt
$$\varphi(aba^{-1}) \underset{10.7}{=} \varphi(a) \underbrace{\varphi(b)}_{e'} \varphi(a^{-1}) = e' \text{ also } aba^{-1} \in \ker\varphi$$
4. Jede Untergruppe von Index 2 ist Normalteiler, denn
$$H \cup aH \underset{10.10}{=} G \underset{\text{analog zu } 10.10}{=} H \cup Ha \Longrightarrow aH = Ha$$

10.18 Faktorgruppen

Sei G eine (multiplikativ geschriebene) Gruppe, und **sei H Normalteiler in G**. Dann ist die Menge

$$\boxed{G/H := \{aH \mid a \in G\}}$$

aller Linksnebenklassen eine Gruppe mit Einselement H bezüglich

$$aH \cdot bH := abH$$

Es ist $aHbH = abHH = abH$, da $bH \underset{10.17}{=} Hb$ und $HH \underset{10.5}{=} H \Longrightarrow$ Wohldefiniertheit und Gruppengesetze.
Man nennt G/H die *Faktorgruppe von G nach H* und sagt „G modulo H“. Sind zwei der Gruppen G, H, G/H endlich, so ist auch die dritte endlich, und es gilt

$$\boxed{|G/H| = \frac{|G|}{|H|}}$$

nach der Abzählformel in 10.10. Ferner ist $\pi : G \longrightarrow G/H$, $a \longmapsto aH$, ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit $\ker\pi = H$.

10.19 Homomorphiesatz

Satz.

1. *Ist $\varphi : G \longrightarrow G'$ ein Gruppenhomomorphismus, so induziert φ einen Isomorphismus*

$$\boxed{\overline{\varphi} : G/\operatorname{kern}\varphi \xrightarrow{\sim} \operatorname{bild}\varphi}$$

2. *Ist $f : V \longrightarrow W$ eine K-lineare Abbildung von K-Vektorräumen, so induziert f einen Isomorphismus*

$$\boxed{\overline{f} : V/\operatorname{kern} f \xrightarrow{\sim} \operatorname{bild} f}$$

Beispiel.
$\det : \mathrm{GL}_n(K) \longrightarrow K^*$ ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit Kern $\mathrm{SL}_n(K)$, induziert also einen Isomorphismus $\mathrm{GL}_n(K)/SL_n(K) \longrightarrow K^*$.

Beweis des Homomorphisatzes.

1. Sei $H := \operatorname{kern}\varphi$ und $\overline{\varphi} : G/H \longrightarrow \operatorname{bild}\varphi$, $aH \longmapsto \varphi(a)$, dann ist $\overline{\varphi}$ wohldefiniert und injektiv, denn es gilt:

$$\begin{aligned} aH = bH &\iff b \in aH \text{ nach 10.9 und 10.1i} \\ &\iff a^{-1}b \in H = \operatorname{kern}\varphi \\ &\iff e' = \varphi(a^{-1}b) = \varphi(a)^{-1}\varphi(b) \\ &\iff \varphi(a) = \varphi(b) \end{aligned}$$

und es ist

$$\overline{\varphi}(aH \cdot bH) = \overline{\varphi}(abH) = \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = \overline{\varphi}(aH)\overline{\varphi}(bH)$$

Offenbar ist $\overline{\varphi}$ auch surjektiv und damit ein Isomorphismus.

2. folgt aus 1., da jeder Vektorraum eine (additive, abelsche) Gruppe ist. Es ist

$$\overline{f} : V/\operatorname{kern} f \longrightarrow \operatorname{bild} f, \quad v + \operatorname{kern} f \longmapsto f(v)$$

□

10.20 Der Begriff des Ringes

Definition.
Ein *Ring* R ist eine Menge mit zwei Verknüpfungen, Addition und Multiplikation genannt, und den Eigenschaften

i) R bildet bezüglich Addition eine abelsche Gruppe

ii) Die Multiplikation ist assoziativ und hat ein neutrales Element

iii) Es gelten die Distributivgesetze

$$(a+b)c = ac + bc \text{ und } c(a+b) = ca + cb \ \forall a, b, c \in R$$

Beispiele.
Jeder Körper ist ein Ring. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sind Ringe bezüglich gewöhnlicher Addition und Multiplikation. $\mathrm{M}_{n\times n}(K)$ ist ein Ring bezüglich Matrizenaddition und -multiplikation.

10.21 Der Begriff einer *K*-Algebra

Definition.
Ein Ring R heißt K-*Algebra*, falls R mit einer K-Vektorraumstruktur versehen ist, die

$$(\lambda a)b = a(\lambda b) = \lambda(ab) \ \forall a, b \in R, \lambda \in K$$

erfüllt (Verträglichkeit der Skalarmultiplikation mit der Multiplikation im Ring) und deren Addition die des Ringes ist.

Beispiele.

1. $\mathrm{M}_{n\times n}(K)$ ist eine K-Algebra bezüglich Matrizenaddition, -multiplikation und der Skalarmultiplikation

$$\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{pmatrix}$$

   (Addition und Skalarmultiplikation sind komponentenweise definiert)

2. Sei V ein K-Vektorraum. Dann ist

$$R := \mathrm{End}_K V := \{f : V \longrightarrow V \mid f \text{ ist } K\text{-linear}\}$$

eine K-Algebra vermöge

$$\left.\begin{array}{r}(f+g)(v) := f(v)+g(v)\ \forall v \in V\\ (f\circ g)(v) := f(g(v))\ \forall v \in V\end{array}\right\} \Longrightarrow \text{Ringstruktur}$$

und

$$(\lambda f)(v) := \lambda f(v)\ \forall v \in V, \lambda \in K$$

(Es ist $(\lambda f)\circ g = f \circ (\lambda g) = \lambda(f\circ g)$; neutrales Element bezüglich der Addition ist die Nullabbildung $v \longmapsto 0$ und neutrales Element bezüglich der Multiplikation ist die Identität $v \longmapsto v$.)

10.22 Operationen von Gruppen auf Mengen

Definition.
Eine *Operation* oder *Aktion* (von links) einer Gruppe G auf einer Menge X ist eine Abbildung $G \times X \longrightarrow X$, $(g,x) \longmapsto gx$, mit den Eigenschaften

1. $ex = x\ \forall x \in X$, wobei e das neutrale Element von G
2. $(gg')x = g(g'x)\ \forall g, g' \in G, x \in X$

Man nennt X dann eine *G-Menge.*

Bemerkung.
Ist X eine G-Menge, so definiert jedes $g \in G$ eine bijektive Abbildung $t_g : X \longrightarrow X$, $x \longmapsto gx$ mit Umkehrabbildung $t_{g^{-1}}$.

10.23 Affiner Raum (additives Beispiel)

Ein *affiner Raum über K* besteht aus einer Menge $X = \{P, Q, \ldots\}$ von „Punkten“, einem K-Vektorraum V sowie einer „einfach transitiven“ Rechtsoperation von V (als additiver Gruppe) auf X, das ist eine Abbildung

$$\boxed{X \times V \longrightarrow X,\ (P,v) \longmapsto P+v}$$

mit den Eigenschaften

1. $P + \vec{0} = P\ \forall P \in X$
2. $P + (v+w) = (P+v)+w\ \forall P \in X, v, w \in V$
3. Zu je zwei Punkten $P, Q \in X$ gibt es genau einen Vektor $v \in V$ mit $P + v = Q$. Wir schreiben dann $v = \overrightarrow{PQ}$, also $P + \overrightarrow{PQ} = Q$.

Es ist $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$, denn

$$P + (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}) \underset{(2)}{=} (P + \overrightarrow{PQ}) + \overrightarrow{QR} \underset{(3)}{=} Q + \overrightarrow{QR} \underset{(3)}{=} R$$

Andererseits gilt $P + \overrightarrow{PR} \underset{(3)}{=} R$. Aus der Eindeutigkeitsaussage in (3) folgt $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$. Wir haben uns hier von der Auszeichnung des Nullpunktes befreit.

Spezialfall Sei $X = V$. Definiere $X \times V \longrightarrow X$, $(w, v) \longmapsto w + v$, durch Addition in $V \Longrightarrow$ 1.,2.,3. sind erfüllt. Also kann jeder K-Vektorraum als affiner Raum betrachtet werden. Falls $V = K^n$ ist, schreibt man $\mathbb{A}^n(K)$.

10.24 Bahn und Stabilisator

Sei X eine G-Menge (mit Linksaktion). Dann gelten

1. X ist ein disjunkte Vereinigung von *Bahnen* (auch Orbits genannt), das sind Teilmengen der Form

   $$\boxed{Gx := \{gx \mid g \in G\}}$$

   wobei $x \in X$ ist.

2. Für jedes $x \in X$ ist der *Stabilisator*

   $$\operatorname{Stab} x := \{g \in G \mid gx = x\}$$

   eine Untergruppe von G.

3. Sei $G_x := \operatorname{Stab} x$ und $G/G_x := \{gG_x \mid g \in G\}$ die Menge der Linksnebenklassen. Dann hat man eine Bijektion

   $$G/G_x \xrightarrow{\sim} Gx, \; gG_x \longmapsto gx$$

Beweis.

1. Durch $\boxed{x \sim y}$ $:\Longleftrightarrow$ $\boxed{\exists g \in G \text{ mit } y = gx}$ ist eine Äquivalenzrelation auf X definiert, denn $x = ex \Longrightarrow x \sim x$. Ist $x \sim y \Longrightarrow y = gx \Longrightarrow x = g^{-1}y \Longrightarrow y \sim x$. Gilt $x \sim y$ und $y \sim z \Longrightarrow y = gx$, $z = g'y = g'gx$ $\Longrightarrow x \sim z$.

   Nach Definition ist $Gx = \{y \in X \mid x \sim y\} \underset{10.1}{\Longrightarrow} 1.$

2. Es ist $ex \underset{10.22}{=} x \Longrightarrow e \in \operatorname{Stab} x$. Sind $g', g^{-1} \in \operatorname{Stab} x \Longrightarrow$

$$(g'g^{-1})x \underset{10.22}{=} g'(g^{-1}x) \underset{g^{-1} \in \operatorname{Stab} x}{=} g'x \underset{g' \in \operatorname{Stab} x}{=} x$$

3. Es gilt

$$\begin{aligned} gG_x = g'G_x &\underset{10.1}{\Longleftrightarrow} g' \in gG_x \\ &\Longleftrightarrow g^{-1}g' \in G_x \\ &\Longleftrightarrow g^{-1}g'x = x \\ &\Longleftrightarrow g'x = gx \end{aligned}$$

Die Zuordnung ist also wohldefiniert und injektiv. Sie ist offensichtlich auch surjektiv.

□

10.25 Bahnformel

Satz.
Sei G eine endliche Gruppe, die auf einer Menge $X \neq \varnothing$ operiere. Für die Länge der Bahn Gx gilt dann

$$|Gx| = \frac{|G|}{|G_x|}$$

wobei G_x der Stabilisator von $x \in X$ ist.

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} |Gx| &= (G : G_x) \text{ nach } 10.24.3 \\ &= \frac{|G|}{|G_x|} \text{ nach } 10.10 \end{aligned}$$

□

10.26 Übungsaufgaben 62 – 68

Aufgabe 62.
Es sei $n \in \mathbb{Z}$ fest gewählt und $n\mathbb{Z} := \{nz \mid z \in \mathbb{Z}\}$. Man zeige, dass durch

$$a \sim b \quad :\Longleftrightarrow \quad a - b \in n\mathbb{Z}$$

eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ definiert ist, und bestimme die Anzahl der Äquivalenzklassen in Abhängigkeit von n.

Aufgabe 63.
Man beweise, dass $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ bezüglich der Vorschrift $\overline{a}+\overline{b} := \overline{a+b}$ für $a, b \in \mathbb{Z}$ eine abelsche Gruppe ist.

Aufgabe 64.
Seien G, G' zwei Gruppen, e das neutrale Element von G und e' das neutrale Element von G'. Man zeige, dass für jeden Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \longrightarrow G'$ die folgende Aussage gilt: $\operatorname{kern}(\varphi) = \{e\} \iff \varphi$ ist injektiv.

Aufgabe 65.
Man untersuche, welche der folgenden Teilmengen Untergruppen sind:

(a) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$,

(b) $\{1, -1\} \subset \mathbb{R}^*$,

(c) die Menge der ganzen Zahlen ≥ 0 in $\mathbb{Z}^+$,

(d) die Menge der reellen Zahlen > 0 in $\mathbb{R}^*$,

(e) die Menge der Matrizen der Form $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$, $a \neq 0$, in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

Aufgabe 66.
Sei $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ die in Aufgabe 63 eingeführte additive Gruppe. Die Addition in der Gruppe $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sei komponentenweise erklärt. Man beweise oder widerlege: $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $\quad \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$,
$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Aufgabe 67.
Es sei $R = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Man zeige, dass die durch

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{x-1}{x}$$

definierten Funktionen $f, g : R \longrightarrow R$ eine Gruppe von Funktionen erzeugen, die zur symmetrischen Gruppe S_3 isomorph ist, wenn man als Verknüpfung die Hintereinanderausführung von Funktionen verwendet.

Aufgabe 68.
Zwei Elemente a, b einer Gruppe G heißen *konjugiert in* G, wenn es ein Element $t \in G$ gibt derart, dass $a = t^{-1}\,b\,t$ gilt. Man zeige, dass die beiden Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

in der Gruppe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ konjugiert sind, in der Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ aber nicht.

11 Euklidische Räume und Bewegungen

Sei V ein euklidischer Vektorraum, also ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, der mit einem Skalarprodukt

$$V \times V \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (v, w) \longmapsto \langle v, w \rangle$$

versehen ist (vgl. 7.7). Man nennt $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$ die *Länge* von v, (vgl. 7.9), und $\|v - w\|$ den *Abstand* von $v, w \in V$.

11.1 Lemma über orthogonale Abbildungen

Lemma.
Jede Abbildung $f : V \longrightarrow V$, die das Skalarprodukt erhält, für die also

$$\langle v, w \rangle = \langle f(v), f(w) \rangle \quad \forall v, w \in V$$

gilt, ist $\mathbb{R}$-linear (und daher orthogonal *gemäß 8.11, 8.1).*

Beweis.

1. Setze $z := f(v + w) - f(v) - f(w)$. Zu zeigen $z = \vec{0}$.
   Für alle $u \in V$ gilt

$$\begin{aligned}
\langle z, f(u) \rangle &= \langle f(v + w) - f(v) - f(w), f(u) \rangle \\
&\underset{7.7}{=} \langle f(v + w), f(u) \rangle - \langle f(v), f(u) \rangle - \langle f(w), f(u) \rangle \\
&= \langle v + w, u \rangle - \langle v, u \rangle - \langle w, u \rangle \text{ nach Vor.} \\
&= 0 \text{ nach } 7.7
\end{aligned}$$

   Es sei U der von der Menge $\{f(u) \mid u \in V\}$ erzeugte Teilraum von V. Dann ist $\langle z, z' \rangle = 0$ für alle $z' \in U$ nach 7.7 Da $z \in U$ ist, folgt insbesondere $\langle z, z \rangle = 0$ und also $z = \vec{0}$ nach 7.7.3.

2. Setze analog $z := f(\lambda v) - \lambda f(v)$ für $\lambda \in \mathbb{R}$. Für alle $u \in V$ gilt

$$\begin{aligned}
\langle z, f(u) \rangle &= \langle f(\lambda v) - \lambda f(v), f(u) \rangle \\
&= \langle f(\lambda v), f(u) \rangle - \lambda \langle f(v), f(u) \rangle \\
&= \langle \lambda v, u \rangle - \langle \lambda v, u \rangle = 0
\end{aligned}$$

   Wie in 1. folgt nun $z = \vec{0}$.

$\square$

11.2 Bewegungen von V

Definition.
Eine *Bewegung* von V ist eine abstandserhaltende Abbildung $\beta : V \longrightarrow V$, also eine Abbildung, die

$$\|v - w\| = \|\beta(v) - \beta(w)\| \quad \forall v, w \in V$$

erfüllt.

Bemerkung.

1. Jede Bewegung $\beta : V \longrightarrow V$ ist injektiv, denn

$$\beta(v) = \beta(w) \Longrightarrow 0 = \|\vec{0}\| = \|\beta(v) - \beta(w)\| = \|v - w\| \underset{7.7}{\Longrightarrow} v = w$$

2. Die Hintereinanderausführung zweier Bewegungen ist eine Bewegung.

Beispiel.
Die *Translation* $\beta = t_{v_0} : V \longrightarrow V$, $v \longmapsto v + v_0$, ist für jeden Vektor $v_0 \in V$ eine Bewegung, denn

$$\|\beta(v) - \beta(w)\| = \|v + v_0 - (w + v_0)\| = \|v - w\|$$

Aber t_{v_0} ist nicht $\mathbb{R}$-linear, falls $v_0 \neq \vec{0}$ (da dann $t_{v_0}(\vec{0}) = v_0 \neq \vec{0}$ ist), also auch nicht orthogonal nach 11.1. Offensichtlich gilt

$$t_{v_0} \circ t_{v_1} = t_{v_1} \circ t_{v_0} = t_{v_0+v_1} \quad \forall v_0, v_1 \in V$$

Insbesondere gilt $t_{v_0} \circ t_{-v_0} = \mathrm{id}_V = t_{-v_0} \circ t_{v_0}$, und es ist t_{v_0} bijektiv $\forall v_0 \in V$.

11.3 Bewegungen, die den Nullvektor festlassen

Wie gewohnt nennen wir eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f : V \longrightarrow V$ *orthogonal*, falls $\langle v, w\rangle = \langle f(v), f(w)\rangle \quad \forall v, w \in V$ gilt.

Satz.
Ist $\beta : V \longrightarrow V$ eine Bewegung, so ist die Abbildung

$$f := t_{-\beta(\vec{0})} \circ \beta : V \longrightarrow V, \quad v \longmapsto \beta(v) - \beta(\vec{0})$$

orthogonal. Insbesondere ist jede Bewegung, die $\vec{0}$ festhält, orthogonal.

Beweis. Da f nach Bemerkung 2. in 11.2 eine Bewegung ist, gilt

$$\boxed{\|v-w\|^2 = \|f(v)-f(w)\|^2}$$

Es ist

$$\begin{aligned}\|v-w\|^2 &= \langle v-w, v-w\rangle \underset{7.7}{=} \langle v,v\rangle + \langle w,w\rangle - 2\langle v,w\rangle \\ &= \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\langle v,w\rangle\end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned}\|f(v)-f(w)\|^2 &= \|f(v)\|^2 + \|f(w)\|^2 - 2\langle f(v), f(w)\rangle \\ &= \|\beta(v)-\beta(\vec{0})\|^2 + \|\beta(w)-\beta(\vec{0})\|^2 - 2\langle f(v), f(w)\rangle \\ &= \|v-\vec{0}\|^2 + \|w-\vec{0}\|^2 - 2\langle f(v), f(w)\rangle, \text{ da } \beta \text{ Bewegung} \\ &= \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\langle f(v), f(w)\rangle\end{aligned}$$

Da $\|v-w\|^2 = \|f(v)-f(w)\|^2$ gilt, folgt $\langle v,w\rangle = \langle f(v), f(w)\rangle$ $\forall v,w \in V$, und nach 11.1 ist f dann $\mathbb{R}$-linear. □

11.4 Wie sieht eine Bewegung aus?

Korollar.
Jede Bewegung $\beta : V \longrightarrow V$ hat die Gestalt $\beta = t \circ f$, wobei $f : V \longrightarrow V$ orthogonal und $t : V \longrightarrow V$ eine Translation ist. Dabei ist $t(v) = v + \beta(\vec{0})$ $\forall v \in V$.

Beweis. Nach 11.3 ist $f := t_{-\beta(\vec{0})} \circ \beta$ orthogonal $\Longrightarrow \beta = t_{\beta(\vec{0})} \circ f$. □

11.5 Bewegungsgruppen

Korollar.
Sei V endlich dimensional. Dann ist jede Bewegung $V \longrightarrow V$ bijektiv, und die Bewegungen $V \longrightarrow V$ bilden bezüglich Hintereinanderausführung eine Gruppe.

Beweis. Nach Bemerkung 11.2 ist nur noch zu zeigen, dass eine Bewegung $\beta : V \longrightarrow V$ bijektiv ist. Nach 11.2, 11.3 ist $f := t_{-\beta(\vec{0})} \circ \beta$ injektiv und $\mathbb{R}$-linear. Da $\dim_K V < \infty$

$$\begin{aligned}&\underset{3.23}{\Longrightarrow} \quad f \text{ ist surjektiv} \\ &\Longrightarrow \quad \beta = \underbrace{t_{\beta(\vec{0})}}_{\text{surj.}} \circ \underbrace{f}_{\text{surj.}} \text{ ist surjektiv}\end{aligned}$$

□

11.6 Reelle orthogonale Gruppen

In 8.5.1 haben wir die *orthogonale Gruppe*

$$O_n(\mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tAA = E_n\}$$

eingeführt und ihre Elemente *orthogonale* Matrizen genannt.

Bemerkung.
Es ist $\det A = \pm 1$ für jede orthogonale Matrix A, und die orthogonalen Matrizen mit Determinante 1 bilden eine Untergruppe von $O_n(\mathbb{R})$, genannt *spezielle orthogonale Gruppe*

$$\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) := \{A \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$$

Sie ist vom Index 2 in $O_n(\mathbb{R})$ und also Normalteiler (vgl. 10.17).

Beweis. Ist $A \in O_n(\mathbb{R}) \Longrightarrow (\det A)^2 = \det E_n = 1$, da $\det {}^tA \underset{6.8}{=} \det A$ und da die Determinante multiplikativ ist. Es folgt $\det A = \pm 1$. Nun ist auch sofort zu sehen, dass $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ eine Untergruppe von $O_n(\mathbb{R})$ ist. Die beiden Nebenklassen in $O_n(\mathbb{R})$ sind $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ und die Menge der Matrizen mit Determinante $= -1$, und also ist der Index 2. □

11.7 Fixpunkte orthogonaler Abbildungen

Sei $\dim_{\mathbb{R}} V = n$. Dann hat V eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ (nach 7.20), und für jede $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f : V \longrightarrow V$ gilt nach 8.11

$$\boxed{f \text{ orthogonal}} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) \text{ orthogonal}}$$

Lemma.
Sei $n = \dim_{\mathbb{R}} V$ *ungerade und* $f : V \longrightarrow V$ *orthogonal. Es sei* $A := \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ *in* $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ *für eine Orthonormalbasis* $\mathcal{B}$ *von* V*. Dann ist* $\det(A - E_n) = 0$*. Insbesondere besitzt* f *den Eigenwert* 1*, und* f *hat einen Fixpunkt* $v_1 \neq \vec{0}$*.*

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}
\det(A - E_n) &= \det {}^tA \det(A - E_n), \text{ weil } 1 \underset{\text{Vor.}}{=} \det A \underset{6.8}{=} \det {}^tA \\
&= \det({}^tA(A - E_n)), \text{ weil det multiplikativ nach 6.9} \\
&= \det(E_n - {}^tA), \text{ weil } A \in O_n(\mathbb{R}) \\
&= \det({}^t(E_n - A))), \text{ da Transponieren additiv und } {}^tE_n = E_n \text{ ist} \\
&= \det(-(A - E_n)) \text{nach 6.8} \\
&= (-1)^n \det(A - E_n) \text{ durch } n\text{-maliges Anwenden von 6.2b)} \\
&= -\det(A - E_n) \in \mathbb{R}, \text{ da } n \text{ ungerade}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \det(A - E_n) = 0$$
$$\Longrightarrow \quad f \text{ hat Eigenwert } 1 \text{ nach } 9.10$$
$$\Longrightarrow \quad \exists v_1 \neq \vec{0} \text{ mit } f(v_1) = v_1 \text{ nach } 9.4$$

Insbesondere ist v_1 ein *Eigenvektor zum Eigenwert* 1. □

11.8 Drehungen von $\mathbb{R}^2$

Nach 8.10 und 8.12 hat jede Matrix $D \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ die Form

$$D = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Die Matrix D beschreibt per Standardabbildung eine Drehung von $\mathbb{R}^2$ um $\vec{0}$ mit dem Drehwinkel φ (gegen die Uhrzeigersinn), wie man sieht, wenn man $v \in \mathbb{R}^2$ in Polarkoordinaten $v = \begin{pmatrix} r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}^+$ und $0 \leq \alpha < 2\pi$ schreibt.

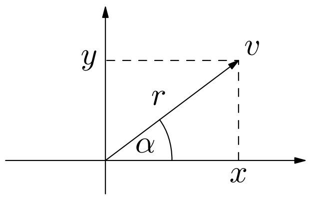

Abbildung 23: Polarkoordinaten

Es ist

$$Dv = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(\cos\varphi\,\cos\alpha - \sin\varphi\,\sin\alpha) \\ r(\sin\varphi\,\cos\alpha + \cos\varphi\,\sin\alpha) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} r\cos(\alpha+\varphi) \\ r\sin(\alpha+\varphi) \end{pmatrix} \text{ nach Additionstheoremen}$$

Es sei $\mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt versehen. Dann gilt:

Ist f eine beliebige Drehung von $\mathbb{R}^2$ um $\vec{0}$
$\Longrightarrow$ f ist eine Bewegung, die $\vec{0}$ festlässt $\underset{11.3}{\Longrightarrow}$ f ist orthogonal
$\underset{8.11}{\Longrightarrow}$ Die Matrix A von f bezüglich der Standardbasis ist orthogonal
$\Longrightarrow$ $A \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ nach 8.10, 8.12, da f eine Drehung ist.

Ergebnis: Die Drehungen von $\mathbb{R}^2$ um den Nullpunkt sind die orthogonalen Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\det f = 1$. Für $A \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ gilt

$$\boxed{A \text{ beschreibt eine Drehung per Standardabbildung}} \iff \boxed{A \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})}$$

11.9 Drehungen von $\mathbb{R}^3$

Die Drehungen von $\mathbb{R}^3$ um den Nullpunkt sind die orthogonalen Abbildungen $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\det f = 1$. Für $A \in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ gilt

$$\boxed{A \text{ beschreibt eine Drehung per Standardabbildung}} \iff \boxed{A \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})}$$

Beweis. Sei $\mathcal{B}'$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$, und sei $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt versehen. Es ist dann $\mathcal{B}'$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$.

„$\Longrightarrow$“ Ist $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Drehung mit Drehwinkel φ um den Nullpunkt
$\Longrightarrow$ f ist eine Bewegung, die $\vec{0}$ festlässt
$\underset{11.3}{\Longrightarrow}$ f ist orthogonal
$\underset{8.11}{\Longrightarrow}$ $A := \mathrm{M}^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f)$ ist orthogonal
$\underset{11.6}{\Longrightarrow}$ $\det A = \pm 1 \Longrightarrow \det f = \pm 1$ nach 6.13.
Für $\varphi = 0$ ist $f = \mathrm{id}$ und also $\det f = 1$. Da die Determinante stetig vom Drehwinkel abhängt folgt $\det f = 1$ für jede Drehung f
$\Longrightarrow A = \mathrm{M}^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f) \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$

„$\Longleftarrow$“ Sei $A \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, und sei $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ die zu A gehörige Standardabbildung. Dann gilt $A = \mathrm{M}^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f)$, und f ist orthogonal nach 8.11. Da f $\mathbb{R}$-linear ist, gilt $f(\vec{0}) = \vec{0}$. Nach 11.7 hat f auch einen Fixpunkt $v_0 \neq \vec{0}$ in $\mathbb{R}^3$, also $f(v_0) = v_0$. Sei $U := (\mathbb{R}v_0)^\perp$ die Ebene durch $\vec{0}$, die senkrecht zu v_0 ist. Dann ist U ein f-invarianter Unterraum von $\mathbb{R}^3$, d.h. $f(u) \in U\ \forall u \in U$, denn für $u \perp v_0$ gilt

$$0 = \langle u, v_0 \rangle \underset{f \text{ orth.}}{=} \langle f(u), f(v_0) \rangle = \langle f(u), v_0 \rangle \text{ also } f(u) \perp v_0\ \forall u \in U$$

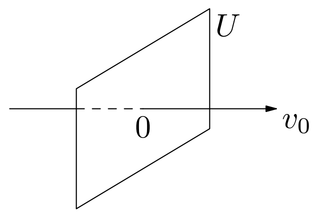

Abbildung 24: Untervektorraum U

Wir zeigen nun, dass $f|_U : U \longrightarrow U$ wie eine Drehung wirkt. Dies erreichen wir durch geeigneten Basiswechsel. Wir konstruieren eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^3$ so, dass die Matrix $C := \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ die Form

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

hat und also eine Drehung von $\mathbb{R}^3$ mit Drehwinkel φ per Standardabbildung zu C beschreibt, wobei $e_1 = (1,0,0)$ auf der Drehachse liegt.

Konstruktion von $\mathcal{B}$: Sei $v_1 := \frac{v_0}{\|v_0\|} \Longrightarrow \|v_1\| = 1$. Wir wählen gemäß 7.20 eine Orthonormalbasis $\mathcal{D} := \{v_2, v_3\}$ von U. Dann ist $\mathcal{B} := \{v_1, v_2, v_3\}$ ist eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$, da $v_1 \perp U$.
Es ist $f(v_1) = v_1$, da mit v_0 auch v_1 ein Fixpunkt ist. Da $f(u) \in U$ $\forall u \in U$ ist, gibt es $\lambda_2, \lambda_3, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} f(v_2) &= \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 \\ f(v_3) &= \mu_2 v_2 + \mu_3 v_3 \end{aligned}$$

Daher gilt

$$C := \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) \underset{4.4}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \mu_2 \\ 0 & \lambda_3 & \mu_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D := \mathrm{M}^{\mathcal{D}}_{\mathcal{D}}(f|_U) \underset{4.4}{=} \begin{pmatrix} \lambda_2 & \mu_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 \end{pmatrix}$$

und aus 8.11 folgt, dass C und D orthogonal sind. Da $A = \mathrm{M}^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f)$ gilt, ist $A \underset{4.16}{=} T^{-1}CT$ mit $T = \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id})$. Es folgt

$$1 \underset{\text{Vor.}}{=} \det A \underset{6.9}{=} \det C \underset{6.5}{=} 1 \cdot \det D$$

also $C \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ und $D \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. Nach 11.8 ist daher

$$D = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Mit C beschreibt auch $A = T^{-1}CT$ eine Drehung von $\mathbb{R}^3$ um $\vec{0}$ per Standardabbildung. Der Vektor v_1 liegt auf der Drehachse, der Drehwinkel φ wird auf der zu v_1 senkrechten Ebene U gemessen und zwar gegen den Uhrzeigersinn, wenn man von v_1 aus auf die Ebene U sieht.

□

11.10 Orientierung und Bewegungen

Sei $\beta : V \longrightarrow V$ eine Bewegung eines endlich dimensionalen Vektorraums V. Dann gibt es nach 11.4 eine orthogonale Abbildung $f : V \longrightarrow V$ so, dass $\beta(v) = f(v) + \beta(\vec{0})\ \forall v \in V$ gilt. Wir nennen β *orientierungserhaltend*, wenn $\det f = 1$, und *orientierungsumkehrend*, wenn $\det f = -1$ gilt. Versieht man $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt, so ergibt 11.3, 11.8 und 11.9:

- Die Drehungen von $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ sind die orientierungserhaltenden Bewegungen, die den Nullpunkt festlassen. Sie bilden jeweils eine Untergruppe der Gruppe aller Bewegungen von $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$.

Sei $E = \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ die affine Ebene (wie im Spezialfall 10.23). Dann bilden die Bewegungen von E nach 11.5 eine Gruppe $\mathcal{G}$, und man erhält einen Gruppenhomomorphismus

$$\mathcal{G} \longrightarrow \{-1, 1\}$$

indem man jeder orientierungserhaltenden Bewegung den Wert 1, und jeder orientierungsumkehrenden Bewegung den Wert -1 zuordnet.

11.11 Die Bewegungsgruppe der Ebene $E = \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$

Jede orientierungserhaltende Bewegung der Ebene ist

- eine *Translation* $P \longmapsto P + w$, das ist eine Parallelverschiebung um einen Vektor w
  oder

- eine *Drehung* um einen Punkt um eine Winkel $\varphi \neq 0$

Jede orientierungsumkehrende Bewegung der Ebene ist

- eine *Spiegelung* an einer Geraden ℓ (vgl. 8.3, 8.12)
  oder

- eine *Gleitspiegelung*, das ist die Hintereinanderausführung einer Spiegelung an einer Geraden ℓ und einer Verschiebung um einen zu ℓ parallelen Vektor $w \neq \vec{0}$

Durch diese Liste sind alle Bewegungen der Ebene E, d.h. alle abstandserhaltenden Abbildungen $E \longrightarrow E$, beschrieben (vgl. 11.13).

11.12 Die Bewegungsgruppe von $\mathbb{R}^2$

Satz.
Die Gruppe der Bewegungen von $\mathbb{R}^2$ wird erzeugt von den Translationen t_w *um den Vektor $w = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, also*

$$t_w \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + a_1 \\ x_2 + a_2 \end{pmatrix} \quad \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

den Drehungen d_φ *um den Winkel φ um $\vec{0}$, also*

$$d_\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

und der Spiegelung s *an der x_1-Achse, also*

$$s \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} \quad \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Genauer gilt: Jede Bewegung $\beta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ lässt sich eindeutig darstellen als

$$\beta = t_w \circ d_\varphi \text{ oder } \beta = t_w \circ d_\varphi \circ s$$

Beweis. Sei β eine Bewegung von $\mathbb{R}^2$. Nach 11.4 ist dann $\beta = t_w \circ f$, wobei t_w eine Translation um w ist und f orthogonal ist, also insbesondere $f(\vec{0}) = \vec{0}$ und $\det f = \pm 1$.

1) Sei $\det f = 1$. Dann ist f nach 11.8 eine Drehung d_φ. Es ist also $\beta = t_w \circ d_\varphi$.

2) Sei $\det f = -1$. Dann gilt $\det(f \circ s) = \det f \cdot \det s = (-1)(-1) = 1$. Nach 11.8 ist $f \circ s$ eine Drehung, also $f \circ s = d_\varphi$. Da $s \circ s = id$ ist, folgt $f = d_\varphi \circ s$ und somit $\beta = t_w \circ d_\varphi \circ s$.

3) Eindeutigkeit der Darstellung: Sei $\beta = t_w \circ d_\varphi \circ s^i = t_v \circ d_\eta \circ s^j$, wobei $i, j = 0$ oder 1 sind. Es ist zu zeigen, daß $i = j$, $w = v$ und $\varphi = \eta$ gelten. Sei $i = 0$, dann ist β nach 11.10 orientierungserhaltend, folglich ist $j = 0$. Sei $i = 1$, dann ist β nach 11.10 orientierungsumkehrend, folglich ist $j = 1$. Also gilt $i = j$. Da $s \circ s = id$ ist, folgt $t_w \circ d_\varphi = t_v \circ d_\eta$. Multipliziere von links mit t_{-v} und von rechts mit $d_{-\varphi}$. Man erhält $t_{w-v} \circ d_{\varphi-\varphi} = t_{v-v} \circ d_{\eta-\varphi}$, also $t_{w-v} = d_{\eta-\varphi}$. Eine Translation ist aber nur dann eine Drehung, wenn sie die Identität $t_{\vec{0}}$ ist. Folglich gelten $w = v$ und $\eta = \varphi$.

□

Rechenregeln in der Bewegungsgruppe von $\mathbb{R}^2$: Es gelten

i) $t_v \circ t_w = t_{v+w}$, $d_\varphi \circ d_\eta = d_{\varphi+\eta}$ und $s \circ s = id$

ii) $d_\varphi \circ t_w = t_{d_\varphi(w)} \circ d_\varphi$

iii) $s \circ t_w = t_{s(w)} \circ s$

iv) $s \circ d_\varphi = d_{-\varphi} \circ s$

Beweis. Wir zeigen hier nur ii): $d_\varphi \circ t_w = t_{d_\varphi(w)} \circ d_\varphi$
Sei $w = (a_1, a_2)$. Es ist

$$d_\varphi\left(t_w\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right) = d_\varphi\begin{pmatrix}x_1+a_1\\x_2+a_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(x_1+a_1)\cos\varphi-(x_2+a_2)\sin\varphi\\(x_1+a_1)\sin\varphi+(x_2+a_2)\cos\varphi\end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned}\left(t_{d_\varphi(w)}\circ d_\varphi\right)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} &= t_{d_\varphi(w)}\begin{pmatrix}x_1\cos\varphi-x_2\sin\varphi\\x_1\sin\varphi+x_2\cos\varphi\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}(x_1+a_1)\cos\varphi-(x_2+a_2)\sin\varphi\\(x_1+a_1)\sin\varphi+(x_2+a_2)\cos\varphi\end{pmatrix}\end{aligned}$$

□

11.13 Zum Beweis von 11.11

In 11.12 hatten wir ein Koordinatensystem gewählt und dadurch die Ebene $E = \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ mit $\mathbb{R}^2$ identifiziert. Sei nun $\beta : E \longrightarrow E$ eine Bewegung. Wir gehen analog wie in 11.12 vor:

1. Fall. Sei β orientierungserhaltend. Schreibe $\beta = t_w \circ d_\varphi$.
Behauptung: Ist $d_\varphi \neq \mathrm{id}$, so hat β hat genau einen Fixpunkt, und β ist eine Drehung um den Winkel φ um P.

Beweis. Es ist $\beta(v) = d_\varphi(v) + w$. Zu lösen ist die Gleichung

$$(\mathrm{id} - d_\varphi)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$$

und also das zugehörige Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix}1-\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & 1-\cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$$

Die Matrix hat die Determinante $2 - 2\cos\varphi \neq 0$, da $d_\varphi \neq \mathrm{id}$. Das System hat also genau eine Lösung P. Es ist $P = d_\varphi(P) + w$. Folglich ist $\beta(P+v) = d_\varphi(P+v)+w = d_\varphi(P)+d_\varphi(v)+w = d_\varphi(P)+w+d_\varphi(v) = P + d_\varphi(v) \Longrightarrow \beta$ ist eine Drehung um P mit Drehwinkel φ.

2. Fall. Sei β orientierungsumkehrend. Schreibe $\beta = t_w \circ d_\varphi \circ s$. Die Bewegung $d_\varphi \circ s$ ist eine Spiegelung s' an der Geraden durch $\vec{0}$, die mit der x_1-Achse den Winkel $\frac{\varphi}{2}$ bildet, denn

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} \quad \text{(vgl. 8.12)}$$

Es ist also $\beta = t_w \circ s'$. Drehe das Koordinatensystem so, dass die x_1-Achse zur Spiegelachse wird. Dann wird s' zur Standardspiegelung s aus 11.12 und t_w bleibt eine Translation (mit geänderten Koordinaten). Bezüglich des neuen Koordinatensystems ist

$$\beta = t_w \circ s \text{ und } \beta \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + a_1 \\ -x_2 + a_2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \beta \begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{a_2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + a_1 \\ \frac{a_2}{2} \end{pmatrix}$$

Damit führt β die durch $x_2 = \frac{a_2}{2}$ gegebene, zur x_1-Achse parallele Gerade in sich über und wirkt danach wie eine Verschiebung. Also ist β eine Gleitspiegelung. □

Sei $\mathcal{G}$ die Gruppe der Bewegungen von $E = \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$. Betrachte die beiden Untergruppen

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &:= \text{Gruppe der Translationen} \\ \mathcal{O} &:= \text{Gruppe der orthogonalen Abbildungen} \\ &= \text{Gruppe der Bewegungen, die } \vec{0} \text{ festlassen} \\ &\underset{8.12}{=} \left\{ \text{Drehungen um } \vec{0} \text{ und Spiegelungen an Geraden durch } \vec{0} \right\} \end{aligned}$$

Sei $\mathcal{B}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$, dann sind

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathcal{T}, \quad w \longmapsto t_w \\ \mathcal{O} &\longrightarrow O_2(\mathbb{R}), \quad \beta \longmapsto \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\beta) \end{aligned}$$

Isomorphismen von Gruppen.

Wir betrachten nun endliche Untergruppen der Bewegungsgruppe $\mathcal{G}$. Dies führt zum Studium der „Symmetriegruppen“ von Figuren wie

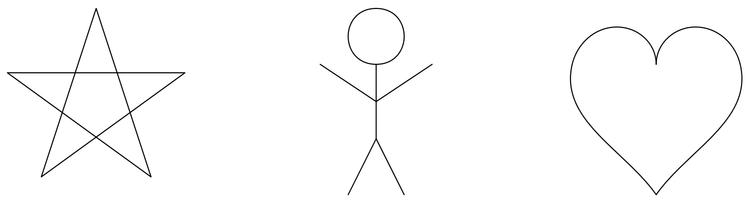

Abbildung 25: Spiegel- und Drehsymmetrie

11.14 Symmetriegruppen

Sei $E = \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ und sei $F \subset E$. Eine *Symmetrie* von F ist eine Bewegung $\beta : E \longrightarrow E$, die F in sich überführt, für die also $\beta(F) = F$ gilt. Die Symmetrien von F bilden eine Untergruppe der Bewegungsgruppe $\mathcal{G}$ von E, genannt *Symmetriegruppe* der „Figur“ F.

Beispiel.
Sei $n \geq 3$ und F eine regelmäßiges n-Eck. Dies verhält sich bezüglich Drehungen um den Mittelpunkt P um den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ symmetrisch. F enthält auch Spiegelachsen. Die Symmetriegruppe von F ist die „Diedergruppe“ D_n der Ordnung $2n$. Speziell ergeben sich zum Beispiel für $n = 3$ die Symmetrien eines gleichseitigen Dreiecks:
Bei Drehungen der Ebene um P um den Winkel $\frac{2\pi}{3}$ und Spiegelung an einer Spiegelachse geht F in sich über.

11.15 Die endlichen Untergruppen von $\mathcal{O} \simeq O_2(\mathbb{R})$

Satz.
Sei $\mathcal{O}$ die Gruppe der Bewegungen $E \longrightarrow E$, die den Nullpunkt festlassen, und sei G eine endliche Untergruppe von $\mathcal{O}$. Dann ist G

- *die zyklische Gruppe Z_n der Ordnung n, die von der Drehung d_η mit $\eta = \frac{2\pi}{n}$ erzeugt wird* oder

- *die* Diedergruppe *D_n der Ordnung $2n$, die von der Drehung d_η mit $\eta = \frac{2\pi}{n}$ und einer Spiegelung s' an einer Geraden durch den Nullpunkt erzeugt wird.*

Beweis. **1. Fall.** Alle Elemente von G sind Drehungen. Es ist zu zeigen, dass G zyklisch ist. Ist $|G| = 1$, so ist $G = \{\mathrm{id}\}$. Sei $|G| > 1$. Dann enthält G eine Drehung um einen Winkel $\varphi \neq 0$. Sei $\eta \in \mathbb{R}$ der kleinste positive Drehwinkel, der bei einer Drehung aus G auftritt. Dann ist

$\varphi = m\eta + \alpha$ mit $0 \leq \alpha < \eta$ und einem $m \in \mathbb{Z}$. Da G eine Gruppe ist, gilt $d_\alpha = d_{\varphi - m\eta} \in G \Longrightarrow \alpha = 0$, da η minimal ist und $0 \leq \alpha < \eta$ gilt. Demnach ist

$$d_\varphi = d_{m\eta} = d_\eta^m$$

also ist G zyklisch. Wähle $n \in \mathbb{N}$ minimal mit der Eigenschaft $n\eta \geq 2\pi$, also $2\pi \leq n\eta < 2\pi + \eta$. Es folgt $n\eta = 2\pi$ und also $\eta = \frac{2\pi}{n}$, da ansonsten $d_{n\eta - 2\pi}$ eine Drehung in G mit kleinerem Drehwinkel als η wäre.

2. Fall. G enthält eine Spiegelung. Durch Änderung des Koordinatensystems (falls nötig) kann man erreichen, dass dies die Standardspiegelung s aus 11.12 in G ist. Sei H die Untergruppe der Drehungen aus G. Nach Fall 1. gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ so, dass $H = Z_n$. Folglich ist

$$D_n := \left\{ d_\eta^i \circ s^j \mid i = 0, \ldots, n-1, j = 0, 1 \right\} \subset G$$

Es ist noch zu zeigen, dass $G \subset D_n$ gilt.

Sei $\beta \in G$. Ist β eine Drehung, so ist $\beta \in H \subset D_n$. Ist β eine Spiegelung
$\Longrightarrow \beta = d_\varphi \circ s$ mit einer geeigneten Drehung d_φ nach 11.13
$\Longrightarrow d_\varphi = \beta \circ s$ (da $s \circ s = \mathrm{id}$) $\Longrightarrow d_\varphi \in G \Longrightarrow d_\varphi \in H$.
Nach Fall 1 gilt $d_\varphi = d_\eta^n$, also ist $\beta = d_\eta^n \circ s \in D_n$.

□

Folgerung.
Schreiben wir $x := d_\eta$ und $y := s$, so können wir die Diedergruppe D_n durch Erzeugende und definierende Relationen beschreiben: Erzeugende sind x, y und die Relationen sind $x^n = 1,\ y^2 = 1,\ yx = x^{n-1}y$. Es ist dann
$D_n = \{1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}, y, xy, x^2y, \ldots, x^{n-1}y\}$

11.16 Die endlichen Untergruppen der Bewegungsgruppe $\mathcal{G}$ von $E = \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$

Diese werden durch 11.15 vollständig beschrieben: Wir zeigen, dass jede endliche Untergruppe G von $\mathcal{G}$ einen Fixpunkt P hat, legen das Koordinatensystem so, dass P der Nullpunkt wird und sind in der Situation von 11.15.

Lemma.
Sei $M = \{q_1, \ldots, q_n\}$ eine endliche Menge von Punkten der Ebene, und sei

$$P = \frac{1}{n}(q_1 + \ldots + q_n) \text{ der Schwerpunkt von } M$$

Für jede Bewegung $\beta : E \longrightarrow E$ gilt dann

$$\beta(P) = \frac{1}{n}(\beta(q_1) + \cdots + \beta(q_n))$$

Eine Bewegung bildet also Schwerpunkte auf Schwerpunkte ab.

Beweis. Nach 11.12 und 11.13 ist jede Bewegung zusammengesetzt aus Drehungen d_φ um den Nullpunkt, Translationen und der Spiegelung s aus 11.12. Da d_φ und s $\mathbb{R}$-linear sind, braucht man die Behauptung nur für Translationen zu zeigen. Sei $\beta = t_w$ eine Translation um w. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\beta(P) &= P + w \text{ nach Definition von } t_w \\
&= \frac{1}{n}(q_1 + \ldots + q_n) + \frac{1}{n}\underbrace{(w + \ldots + w)}_{n \text{ mal}} \text{ nach 2.4} \\
&= \frac{1}{n}(q_1 + w + \ldots + q_n + w) \\
&= \frac{1}{n}(\beta(q_1) + \ldots + \beta(q_n))
\end{aligned}$$

□

Satz.
Jede endliche Untergruppe G der Bewegungsgruppe $\mathcal{G}$ von E hat einen Fixpunkt, d.h. es gibt einen Punkt $P \in E$ mit $\beta(P) = P$ für alle $\beta \in G$.

Beweis. Sei $q \in E$ und sei $Gq := \{\beta(q) | \beta \in G\}$ die Bahn von q unter der Wirkung von G. Die Bahn ist endlich, weil G endlich ist. Schreibe $Gq = \{q_1, \ldots, q_m\}$. Es ist $P = \frac{1}{m}(q_1 + \ldots + q_m)$ der Schwerpunkt der Bahn. Also ist $\beta(P) = P$ für jedes $\beta \in G$, denn β permutiert die Elemente der Bahn, und $\beta(P)$ ist wieder der Schwerpunkt dieser Elemente nach dem Lemma. □

11.17 Endliche Untergruppen der Drehgruppe von $\mathbb{R}^3$

Sei $\mathcal{D}_3(\mathbb{R}^3)$ die Gruppe der Drehungen von $\mathbb{R}^3$ um $\vec{0}$. Dann ist

$$\mathcal{D}_3(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \mid f \text{ orthogonal}, \ \det f = 1 \right\} \simeq \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}^3) \text{ nach 11.9}$$

Satz.
Sei G eine endliche Untergruppe von $\mathcal{D}_3(\mathbb{R})$. Dann ist G eine der folgenden Gruppen:

- Z_n*: Zyklische Gruppe der Drehungen um Vielfache von* $\frac{2\pi}{n}$ *mit* $n \in \mathbb{N}$ *um eine Drehachse. Es ist* $|Z_n| = n$.
- D_n*: Diedergruppe der Symmetrien eines regelmäßigen* n*-Ecks in einer Ebene, aufgefasst als räumliche Drehungen. Es ist* $|D_n| = 2n$.
- T*: Tetraedergruppe der 12 Drehungen, die ein Tetraeder in sich überführen.*

- *W: Würfelgruppe der 24 Drehungen, die einen Würfel oder ein Oktaeder in sich überführen.*
- *I : Ikosaedergruppe der 60 Drehungen, die ein Dodekaeder oder ein Isokaeder in sich überführen.*

Beweis. Die Idee ist, die *Pole* von G auf der *Einheitssphäre*

$$S^2 := \Big\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\Big\}$$

abzuzählen. Dabei heißt ein Punkt $p \in S^2$ ein *Pol von* G, falls es eine Drehung $\gamma \neq \mathrm{id}$ aus G gibt mit $\gamma(p) = p$. Man nennt dann p auch *Pol von* γ. Die Schwierigkeit bei der Zählung der Pole von G ist, dass ein Punkt $p \in S^2$ ein Pol von mehreren Elementen aus G sein kann.
Ist $f \neq \mathrm{id}$ ein Element aus G, so ist f eine Drehung um eine (eindeutig bestimmte) Drehachse ℓ. Die beiden Schnittpunkte von ℓ mit S^2 sind dann die Pole von f. Die Gruppe G operiert auf S^2 vermöge

$$G \times S^2 \longrightarrow S^2,\ (p, f) \longmapsto f(p)$$

denn es gilt $f(p) \in S^2\ \forall\ p \in S^2$, da jede Drehung f orthogonal und insbesondere abstandserhaltend ist.

Lemma.
Bei der Operation von G auf S^2 geht die Menge X der Pole von G in sich über. Die Gruppe G operiert also auf X.

Beweis. Ist p Pol von $f \neq \mathrm{id}$ aus G und $g \in G \setminus \{\mathrm{id}\}$ beliebig. Dann ist $g(p)$ Pol von $g \circ f \circ g^{-1}$, denn es ist $(g \circ f \circ g^{-1})(g(p)) = g(f(p)) = g(p)$. □

Nach 10.24 kann man die Menge der Pole X disjunkt in Bahnen zerlegen. Wir zeigen nun mit Hilfe der Bahnformel in 10.25, dass es höchstens 3 Bahnen geben kann. Fallunterscheidung nach Anzahl und Länge der Bahnen ergibt dann die obige Liste.

Sei $\mathrm{Stab}(p) := \{g \in G \mid g(p) = p\}$ der *Stabilisator* eines Pols p von G und sei $Gp := \{g(p) \mid g \in G\}$ die zugehörige *Bahn*. Mit den Bezeichnungen

$$N := |G|\,, \quad n_p := |Gp| = \text{“Bahnlänge”}, \quad r_p := |\mathrm{Stab}(p)|$$

gilt nach der Bahnformel $\boxed{N = r_p \cdot n_p}$, vgl. 10.25.
Sei $N > 1$. Dann ist $r_p > 1$ nach Definition des Pols, da $\mathrm{id} \in \mathrm{Stab}(p)$ ist, und G hat $r_p - 1$ Elemente mit Pol p nach Definition des Stabilisators. Da jedes $f \in G \setminus \{\mathrm{id}\}$ zwei Pole hat, folgt:

(1) $$\sum_{p \in X} (r_p - 1) = 2(N - 1)$$

Wenn zwei Pole p und p' in derselben Bahn liegen, folgt $Gp = Gp'$ nach 10.1, also auch $n_p = n_{p'}$, und aus $N = r_p n_p = r_{p'} n_{p'}$ folgt dann auch $r_p = r_{p'}$. Man kann also Summanden von Polen, die in derselben Bahn liegen zusammenfassen. Wir schreiben nun $B_1, \dots, B_m$ für die Bahnen. Sei $r_i := r_p$, falls $p \in B_i$ und $n_i := |B_i| =$ „Länge der Bahn B_i“. Aus (1) folgt nun

$$\sum_{i=1}^{m} n_i(r_i - 1) = 2N - 2 \tag{2}$$

Es ist $N = r_i n_i$ für alle $i = 1, \dots, m$. Division der Gleichung (2) durch N ergibt:

$$\underbrace{2 - \frac{2}{N}}_{<2} = \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \underbrace{(1 - \frac{1}{r_i})}_{\geq 1/2}}_{\geq \frac{m}{2}} \tag{3}$$

Es folgt $m \leq 3$, d. h. es gibt höchstens drei Bahnen.

Fall 1: Es gibt nur eine Bahn. Dann folgt mit (3)

$$\underbrace{2 - \frac{2}{N}}_{\geq 1} = \underbrace{1 - \frac{1}{r_1}}_{<1}$$

Dieser Fall kann nicht vorkommen.

Fall 2: Es gibt genau zwei Bahnen. Dann folgt mit (3)

$$2 - \frac{2}{N} = 1 - \frac{1}{r_1} + 1 - \frac{1}{r_2} \quad \text{und daher} \quad \frac{2}{N} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$$

Es ist $r_i \leq N$, da $N = n_i r_i$ gilt. Also folgt $r_1 = r_2 = N$ und somit $n_1 = n_2 = 1$. Beide Bahnen haben die Länge 1. Folglich gibt es nur 2 Pole p und p', und beide sind Fixpunkte (werden von allen Elementen aus G festgelassen wegen $N = r_1 = r_2$). Also liegen sich p und p' auf der Sphäre gegenüber, d. h. sie liegen beide auf einer Geraden ℓ durch durch $\vec{0}$. Die Gruppe G kann also nur aus Drehungen um die Drehachse ℓ bestehen. Daraus folgt, dass $G = Z_N$ die zyklische Gruppe ist, die von der Drehung um den Winkel $\frac{2\pi}{N}$ erzeugt wird.

Fall 3: Es gibt genau drei Bahnen. Mit (3) folgt nun:

$$\frac{2}{N} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} - 1 \tag{4}$$

Numeriere die Bahnen so, dass $r_1 \leq r_2 \leq r_3$ gilt. Es folgt $r_1 = 2$, denn wären alle $r_i \geq 3$, so wäre die rechte Seite in (4) ≤ 0, die linke Seite ist aber > 0.

Fall 3a: $r_1 = r_2 = 2$ und $r := r_3$ beliebig.

Mit (4) folgt $N = 2r$, also $n_3 = 2$, da $N = n_3 r$ ist. Es ist also $B_3 = \{p, p'\}$ mit Polen $p, p' \in S^2$.
Jedes Element von G läßt entweder p und p' fest oder vertauscht beide. Also liegen sich p und p' auf S^2 gegenüber, und die Elemente von G sind Drehungen um die Gerade ℓ durch p und p' oder Drehungen um den Winkel π um eine Gerade ℓ', die in der Ebene $E := \ell^\perp$ liegt. Es ist also

$$G = \{f \in \mathcal{D}_3(\mathbb{R}) \mid f \text{ führt ein regelmäßiges } r\text{-Eck } F \subset E \text{ in sich über}\}$$

Die Eckpunkte und Mittelpunkte der Seiten von F entsprechen den übrigen Polen. Schränkt man die Wirkung von G auf die Ebene E ein, so erhält man die Diedergruppe D_r, wobei die Drehungen um ℓ als ebene Drehungen um den Mittelpunkt von F wirken und die Drehungen um eine Gerade ℓ' in E wie eine Spiegelung an ℓ' wirken.

Fall 3b: $r_1 = 2$ und r_2, $r_3 > 2$.
Mit Hilfe von (4) überlegt man, daß es nur die folgenden Möglichkeiten gibt:

Gruppe	(r_1, r_2, r_3)	N
T	$(2, 3, 3)$	12
W	$(2, 3, 4)$	24
I	$(2, 3, 5)$	60

Die Tripel $(2, r_2, r_3)$ mit $r_2, r_3 \geq 4$ können nicht vorkommen, da

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 1 = 0$$

ist. Die Tripel $(2, 3, r_3)$ mit $r_3 \geq 6$ können nicht vorkommen, weil

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - 1 = 0$$

ist.

Im Fall $(r_1, r_2, r_3) = (2, 3, 3)$ ist $(n_1, n_2, n_3) = (6, 4, 4)$, da $N = r_i n_i$ ist. Die Pole der Bahn B_2 sind die Eckpunkte eines Tetraeders F, und G

besteht aus den Drehungen, die F in sich überführen. Es ist

$$\begin{aligned} n_1 &= \#\text{ Kanten von } F \\ n_2 &= \#\text{ Eckpunkte von } F \\ n_3 &= \#\text{ Seitenflächen von } F \end{aligned}$$

Im Fall $(r_1, r_2, r_3) = (2, 3, 4)$ ist $(n_1, n_2, n_3) = (12, 8, 6)$. Die Pole der Bahn B_2 sind die Eckpunkte eines Würfels F, und die Pole in B_3 sind die Eckpunkte eines Oktaeders F', und G besteht aus den Drehungen, die diese Figuren in sich überführen. Es ist

$$\begin{aligned} n_1 &= \#\text{ Kanten von } F = \#\text{ Kanten von } F' \\ n_2 &= \#\text{ Eckpunkte von } F = \#\text{ Seitenflächen von } F' \\ n_3 &= \#\text{ Seitenflächen von } F = \#\text{ Eckpunkte von } F' \end{aligned}$$

Im Fall $(r_1, r_2, r_3) = (2, 3, 5)$ ist $(n_1, n_2, n_3) = (30, 20, 12)$. Die Pole in B_2 sind die Eckpunkte eines Dodekaeders F, und die Pole in B_3 sind die Eckpunkte eines Ikosaeders F'. Es ist $G = I$.

□

Der obige Beweis ist dem Algebrabuch von M. Artin [2] entnommen.

11.18 Euklidische Räume

Ein affiner Raum X über $\mathbb{R}$ (vgl. 10.23), dessen zugehöriger Vektorraum V ein euklidischer Vektorraum ist, heißt *euklidischer Raum*.

Beispiel.
$\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ wird durch das Standard-Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ zu einem euklidischen Raum.

Definition.
Der *Abstand* zweier Punkte P, Q eines euklidischen Raumes X ist definiert als

$$d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\|, \text{ wobei } \|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle} \text{ ist für } v \in V$$

Dadurch wird X zu einem *metrischen Raum* mit einer *translationsinvarianten Metrik*. Für alle $P, Q \in X$, $v \in V$ gilt:

1) $d(P, Q) \geq 0\ \forall P, Q \in X$ und $d(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$

2) $d(P, Q) = d(Q, P)$ „Symmetrie“

3) $d(P, R) \leq d(P, Q) + d(Q, R)$ „Dreiecksungleichung“

4) $d(P+v, Q+v) = d(P,Q)$ „Translationsinvarianz“

1), 2) und 3) folgen aus 7.7 und 7.9, und 4) folgt aus $\overrightarrow{(P+v)(Q+v)} = \overrightarrow{PQ}$ (vgl. 10.23).

11.19 Übungsaufgaben 69 – 80

Aufgabe 69.
Sei $A \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ eine Matrix mit lauter positiven Einträgen, und sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ die zugehörige Standardabbildung. Man zeige:

(a) f hat zwei verschiedene reelle Eigenwerte.

(b) Der größere Eigenwert besitzt einen Eigenvektor, der im ersten Quadranten liegt und der kleinere einen Eigenvektor, der im zweiten Quadranten liegt.

Aufgabe 70.
Man bringe die reelle Drehmatrix $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ in $\mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ auf Diagonalgestalt.

Aufgabe 71.
Sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum und $f : V \longrightarrow V$ eine orthogonale Abbildung mit Determinante $\det(f) = -1$. Man zeige, dass -1 Eigenwert von f ist.

Aufgabe 72.
Sei $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$, und sei

$$p(x) := \det(A - xE_n) = (-1)^n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + a_0$$

das charakteristische Polynom von A. Nach dem Satz von HAMILTON-CAYLEY ist

$$p(A) = (-1)^n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \cdots + a_0\, E_n$$

die Nullmatrix. Man beweise diese Aussage für (2×2)-Matrizen und für Diagonalmatrizen.

Aufgabe 73.
Man ermittle, welche Matrix die Drehung von $\mathbb{R}^3$ um den Winkel φ um die durch den Vektor $e_2 = (0,1,0)$ bestimmte Achse beschreibt.

In den folgenden Aufgaben ist V ein n-dimensionaler euklidischer Vektorraum, $f : V \longrightarrow V$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung und $\mathcal{B}$ eine Orthonormalbasis

von V. Man nennt f *selbstadjungiert*, wenn $\langle f(v), w\rangle = \langle v, f(w)\rangle$ für alle $v, w \in V$ gilt. Wie in 9.14 der Vorlesung gezeigt wurde, ist f genau dann selbstadjungiert, wenn die Matrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ symmetrisch ist.
Eine symmetrische Matrix $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ heißt *positiv definit*, wenn

$$(\mu_1, \dots, \mu_n)\; A \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} > 0$$

für jeden Vektor $(\mu_1, \dots, \mu_n) \neq \vec{0}$ aus $\mathbb{R}^n$ gilt.

Aufgabe 74.
Sei $f : V \longrightarrow V$ selbstadjungiert. Man zeige, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind.
(a) Alle Eigenwerte von f sind > 0.
(b) Für jeden Vektor $v \neq \vec{0}$ aus V ist $\langle f(v), v\rangle > 0$.
(c) Die Matrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ ist positiv definit.

Aufgabe 75.
Man untersuche, welche der folgenden reellen Matrizen positiv definit sind.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 76.
Es sei $f : V \longrightarrow V$ selbstadjungiert, und f besitze genau n verschiedene Eigenwerte. Man zeige, dass die zugehörigen Eigenvektoren eine Orthogonalbasis von V bilden.

Aufgabe 77.
Es sei β eine orientierungsumkehrende Bewegung der Ebene. Man zeige, dass $\beta \circ \beta$ eine Translation ist.

Aufgabe 78.
Sei V ein 2-dimensionaler euklidischer Vektorraum. Dann ist eine *Spiegelung* von V eine orthogonale Abbildung $V \longrightarrow V$, deren Determinante gleich -1 ist.
Man zeige, dass eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f : V \longrightarrow V$ genau dann eine Spiegelung ist, wenn f die Eigenwerte 1 und -1 hat und die zugehörigen Eigenvektoren senkrecht aufeinander stehen.

Aufgabe 79.
Sei D_4 die Diedergruppe der Ordnung 8. Man bestimme alle Untergruppen von D_4 und ermittle, welche davon Normalteiler sind.

Aufgabe 80.
Eine Gruppe G der Ordnung 55 operiere von links auf einer Menge X mit 18 Elementen. Man zeige, dass es mindestens zwei Fixpunkte in X gibt.

(Dabei heißt ein Element $x \in X$ *Fixpunkt*, wenn $gx = x$ für alle $g \in G$ gilt.)

12 Quadratische Formen und Quadriken

Sei K ein Körper mit $1+1 \neq 0$ in K. Sei V ein K-Vektorraum, der versehen sei mit einer symmetrische Bilinearform

$$s : V \times V \longrightarrow K, (v, w) \longmapsto \langle v, w \rangle$$

Es gelten also:

$$(1) \quad \left.\begin{array}{l} \langle u+v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle \\ \langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle \end{array}\right\} \text{„linear im 1. Argument“}$$

(2) $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$ „Symmetrie“

Aus (1) und (2) folgt die Linearität im 2. Argument (vgl. 7.2).
Sei $\dim_K V < \infty$ und $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V. Dann ist die Matrix

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_1, v_n \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle v_n, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_n, v_n \rangle \end{pmatrix}$$

symmetrisch wegen (2). Umgekehrt gibt es zu jeder symmetrischen Matrix

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_{n \times n}(K)$$

genau eine symmetrische Bilinearform s mit $A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s)$. Seien $v, w \in V$, also $v = x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n$ und $w = y_1 v_1 + \ldots + y_n v_n$ mit eindeutig bestimmten $x_i, y_i \in K$ (vgl. 3.4). Man setzt

$$s(v, w) = (x_1, \ldots, x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad \text{(vgl. 7.4)}$$

Im Fall $K = \mathbb{R}$ nennt man eine solche symmetrische Bilinearform auch *indefinit*. Zum Beispiel ist die *Lorentzform*, definiert auf $\mathbb{R}^4$ durch

$$s(v, w) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - c^2 x_4 y_4 \,,$$

indefinit. Man kann $\mathbb{R}^4$ als “Raum + Zeit“ auffassen, und es steht c für die Lichtgeschwindigkeit. Wähle die Zeiteinheit so, dass $c = 1$ wird. Dann folgt

$$M_B(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gemäß 7.22 und 7.23 für eine geeignete Basis $\mathcal{B}$.

Bemerkung.
Es ist

$$\boxed{\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s) \in GL_n(K)} \Longleftrightarrow \boxed{\mathrm{Rad}(V) = \{\vec{0}\}}$$

Man nennt s dann auch *regulär* oder nicht ausgeartet (vgl. 7.12 und 7.13).

12.1 Der Begriff einer quadratischen Form

Sei weiterhin $\dim_K V = n < \infty$ und sei $s : V \times V \longrightarrow K$ eine symmetrische Bilinearform. Dann nennt man eine Abbildung

$$q : V \longrightarrow K, v \longmapsto q(v) := s(v, v)$$

die zu s gehörige *quadratische Form* auf V. Sie hat die Eigenschaften:

(i) $q(\lambda v) = \lambda^2 q(v)$ für alle $\lambda \in K$ und $v \in V$

(ii) $s(v, w) = \frac{1}{2}(q(v + w) - q(v) - q(w))$ für alle $v, w \in V$ „Polarisierung“.

Man kann also s aus q zurückgewinnen.

12.2 Basiswahl

Sei $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V und $q(v) = s(v, v)$ für alle $v \in V$ die zu s gehörende quadratische Form. Seien $A = (a_{ij}) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s)$ und $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$ der Koordinatenvektor von $v \in V$, also $v = x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n$. Es ist dann

$$\begin{aligned} q(v) =: q_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) &= (x_1, \dots, x_n) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij} x_i y_j \end{aligned}$$

mit $a_{ij} = \langle v_i, v_j\rangle$ und $a_{ij} = a_{ji}$, da s symmetrisch ist. Nach 7.19 besitzt V eine Orthogonalbasis $\mathcal{B}' = (w_1, \ldots, w_n)$. Dafür gilt

$$q(v) = q_{\mathcal{B}'}(y_1, \ldots, y_n) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} y_i^2$$

wobei

$$M_{\mathcal{B}'}(s) = (b_{ij}) \text{ mit } b_{ij} = \langle w_i, w_j\rangle = \begin{cases} \langle w_i, w_i\rangle & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

Durch Wahl einer Orthogonalbasis, kann man also eine quadratische Form *diagonalisieren*.

12.3 Hauptachsentransformation

Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch, $\mathcal{B}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$ und

$$q_{\mathcal{B}} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto (x_1, \ldots, x_n) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

die zugehörige quadratische Form. Eine *Hauptachsentransformation* von A ist eine Koordinatentransformation

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto S \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

mit einer orthogonalen Matrix S (also ${}^tSS = E_n$) so, dass

$$q_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = q_{\mathcal{C}} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$$

gilt mit einer geeigneten Basis $\mathcal{C}$ von $\mathbb{R}^n$ und passenden $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

Verfahren: Sei

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

die zu A gehörige Standardabbildung, also $A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$.

- Berechne die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ von f und konstruiere eine Orthonormalbasis $\mathcal{C}$ aus Eigenvektoren von f bezüglich des Standard-Skalarprodukts s' von $\mathbb{R}^n$.

- Setze
$$T := \mathrm{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}) \Longrightarrow C := M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) = {}^tTAT$$
und man erhält mit $S := {}^tT$ die Hauptachsentransformation von A.

Begründung: Es ist $C = T^{-1}AT$ nach 4.16 und

$$E_n = M_{\mathcal{C}}(s') \underset{7.6}{=} {}^tT \underbrace{\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s')}_{=E_n} T = {}^tTT$$

da $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ orthonormal bezüglich s' sind. Es ist also $T^{-1} = {}^tT$. Sei

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = {}^tT \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Longrightarrow (x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n)^tT$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} q_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &= (x_1, \dots, x_n) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (y_1, \dots, y_n)^tTAT \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ &= (y_1, \dots, y_n) C \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2, \text{ da } C = \mathrm{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) \underset{9.5}{=} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \\ &= q_{\mathcal{C}} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Geometrische Interpretation für $n = 2$. Ist $\lambda_1 > 0$ und $\lambda_2 \neq 0$, so setze $\alpha = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$ und $\beta = \frac{1}{\sqrt{|\lambda_2|}}$, und es folgt

$$q \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{y_1^2}{\alpha^2} \pm \frac{y_2^2}{\beta^2}$$

Betrachte die „Kurve“

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, q \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 1 \right\}$$

Im Fall „+“ ist F eine Ellipse und im Fall „−“ eine Hyperbel.

12.4 Kegelschnitte

Ein *Kegelschnitt* ist die Lösungsmenge X einer quadratischen Gleichung in zwei Variablen

(1) $$f(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + a_1x_1 + a_2x_2 + a = 0$$

in $\mathbb{R}^2$. Dabei sind die Koeffizienten $a_{ij}, a_j, a \in \mathbb{R}$. Man nennt den Kegelschnitt *ausgeartet*, wenn $X = \varnothing$ oder X aus einem Punkt oder einer Geraden oder aus zwei Geraden besteht. Andernfalls heißt X *nicht ausgeartet*.

Satz.
Jeder nicht ausgeartete Kegelschnitt kann durch Bewegungen von $\mathbb{R}^2$ *auf eine der folgenden* Normalformen *gebracht werden:*

i) Ellipse*:* $c_1y_1^2 + c_2y_2^2 - 1 = 0$

ii) Hyperbel*:* $c_1y_1^2 - c_2y_2^2 - 1 = 0$

iii) Parabel*:* $c_1y_1^2 - y_2 = 0$

wobei jeweils $c_1 > 0$ *und* $c_2 > 0$ *sind.*

Beweis. Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$. Dann gibt es nach dem Spektralsatz 9.15 und 12.3 eine orthogonale Matrix T so, dass ${}^tTAT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ Diagonalgestalt hat. Die Gleichung (1) lautet in Matrizenschreibweise

$$f(x_1, x_2) = (x_1, x_2)A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (a_1, a_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + a = 0$$

Setze hierin $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ ein (vgl. 12.3), dann folgt

$$(y_1, y_2) \underbrace{{}^tTAT}_{= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + (a_1, a_2)T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + a = 0.$$

Also lässt sich (1) schreiben als

$$\boxed{\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + b_1 y_1 + b_2 y_2 + a = 0} \tag{2}$$

Wir haben hier eine orthogonale Koordinatentransformation vorgenommen (Drehung oder Spiegelung).

1. Fall $\lambda_1 \neq 0$ und $\lambda_2 \neq 0$. Dann lassen sich b_1, b_2 durch quadratische Ergänzung eliminieren. Durch die Substitution $y_i = z_i - \frac{b_i}{2\lambda_i}$ erhält man

$$\boxed{\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + b = 0}$$

mit einem $b \in \mathbb{R}$. Diese Substitution entspricht einer Translation um den Vektor ${}^t\!\left(\frac{b_1}{2\lambda_1}, \frac{b_2}{2\lambda_2}\right)$.

Ist $b = 0$, so definiert die Gleichung einen Punkt oder ein Geradenpaar, insbesondere ist X dann ausgeartet.

Ist $b \neq 0$, so kann man durch $-b$ dividieren, und erhält

$$\mu_1 z_1^2 + \mu_2 z_2^2 - 1 = 0$$

mit $\mu_i = \frac{\lambda_i}{-b}$. Sind μ_1, μ_2 beide negativ, dann ist $X = \varnothing$.

2. Fall In (2) ist ein $\lambda_i = 0$, etwa $\lambda_2 = 0$, aber $\lambda_1 \neq 0$ und $b_2 \neq 0$. Es ergibt sich

$$\lambda_1 y_1^2 + b_1 y_1 + b_2 y_2 + a = 0$$

Die Substitution $y_1 = z_1 - \frac{b_1}{2\lambda_1}$ ergibt

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_1 z_1^2 - z_1 b_1 + \frac{b_1^2}{4\lambda_1} + b_1 z_1 - \frac{b_1^2}{2\lambda_1} + b_2 y_2 + a \\ &= \lambda_1 z_1^2 + b_2 y_2 + b \end{aligned}$$

mit einem passenden $b \in \mathbb{R}$. Mit der Substitution $y_2 = z_2 - \frac{b}{b_2}$ erhält man $0 = \lambda_1 z_1^2 + b_2 z_2$. Dividiere durch $-b_2$ und erhalte

$$0 = c_1 z_1^2 - z_2$$

Ist $c_1 < 0$, so ändert man das Vorzeichen durch Spiegelung $y_2 = -z_2$.

Die übrigen Fälle liefern ausgeartete Kegelschnitte (vgl. Aufgabe 84). □

12.5 Quadriken

Eine *Quadrik* ist die Lösungsmenge einer quadratischen Gleichung

$$\boxed{f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + \sum_{i<j} 2a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a = 0}$$

Der Term

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + \sum_{i<j} 2a_{ij} x_i x_j$$

lässt sich wie in 12.3 behandeln, und man kann mit der in 12.4 beschriebenen Methode die Quadriken in Dimension n klassifizieren. Für $n = 3$ ergibt sich folgendes:
Jede nicht ausgeartete Quadrik in $\mathbb{R}^3$ ist einer der folgenden Typen

i) *Ellipsoid*: $b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + b_3 y_3^2 - 1 = 0$

ii) *einschaliges Hyperboloid*: $b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 - b_3 y_3^2 - 1 = 0$

iii) *zweischaliges Hyperboloid*: $b_1 y_1^2 - b_2 y_2^2 - b_3 y_3^2 - 1 = 0$

iv) *elliptisches Paraboloid*: $b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 - y_3 = 0$

v) *hyperbolisches Paraboloid*: $b_1 y_1^2 - b_2 y_2^2 - y_3 = 0$

wobei jeweils $b_1, b_2, b_3 > 0$ sind.

12.6 Beispiel zur Hyperbel

Man führe die Hauptachsentransformation von $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ durch:

- Die Eigenwerte von

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_2}{2} \\ \frac{x_1}{2} \end{pmatrix}$$

  sind $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ und $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$.

- Dazu gehören die normierten Eigenvektoren

$$w_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } w_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sei $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ und $\mathcal{C} = (w_1, w_2)$, dann folgt

$$q_{\mathcal{B}}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = (x_1, x_2)\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \left(\frac{x_2}{2}, \frac{x_1}{2}\right)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = x_1x_2$$
$$q_{\mathcal{C}}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} = (y_1, y_2)\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 = \frac{y_1^2}{2} - \frac{y_2^2}{2}$$

wobei

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} = {}^tT\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \text{ mit } T = \mathrm{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}) = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

also

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}x_1 + x_2\\ -x_1 + x_2\end{pmatrix}$$

Probe:

$$\begin{aligned}{}^tTAT &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Es folgt

$$X = \left\{ \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{y_1^2}{2} - \frac{y_2^2}{2} = 1 \right\}$$

Insbesondere ist X eine Hyperbel.

12.7 Übungsaufgaben 81 – 88

Aufgabe 81.
Es sei $V = \{\, a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynome in einer Unbestimmten x vom Grad ≤ 2. Dann ist auf V durch

$$\langle f, g\rangle := \int_{-1}^{1} f(x)\, g(x)\, dx$$

eine symmetrische Bilinearform erklärt. Man konstruiere eine Orthogonalbasis von V.

Aufgabe 82.
Es sei $A = \begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Man führe die Hauptachsentransformation von A durch.

Aufgabe 83.
Es sei $A = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 89 & -48 \\ -48 & 61 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Man führe die Hauptachsentransformation von A durch und fertige eine Skizze an.

Aufgabe 84.
Man diskutiere alle ausgearteten Kegelschnitte.

Aufgabe 85.
Man bestimme die Normalform des Kegelschnitts mit der Gleichung
$x_1^2 + 4\,x_1\,x_2 + 4\,x_2^2 + 2\,x_1 - x_2 - 5 = 0$

Aufgabe 86.
Es sei $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 9 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Man führe die Hauptachsentransformation von A durch und fertige eine Skizze an.

Aufgabe 87.
Es sei $A = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 11 & -5\sqrt{3} \\ -5\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Man führe die Hauptachsentransformation von A durch und fertige eine Skizze an.

Aufgabe 88.
Es sei E eine Ellipse mit den Hauptachsen $w_1 = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $w_2 = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und den zugehörigen Hauptachsenabschnitten 3 und 1. Man bestimme die zu E gehörige Gleichung $a_{11}x_1^2 + 2\,a_{12}\,x_1\,x_2 + a_{22}x_2^2 - 1 = 0$, in der $a_{12} \neq 0$ ist.

13 Jordansche Normalform (von C. Wahl)

Sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum.

Theorem.
Sei $f : V \to V$ eine K-lineare Abbildung. Das charakteristische Polynom p von f zerfalle in Linearfaktoren. Dann gibt es eine Basis $\mathcal{B}$ von V so, dass

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{J_k} \end{pmatrix} \quad \textit{mit } J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

ist, dabei ist λ_i ein Eigenwert von f. Die Matrix $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ heißt Jordansche Normalform *von f. Die J_i heißen* Jordankästchen. *Bis auf Permutation der Jordankästchen ist die Jordansche Normalform eindeutig bestimmt.*

Bemerkung.
Zu einem Eigenwert λ können mehrere Jordankästchen gehören. Die Anzahl der Jordankästchen zu λ ist gleich der Dimension des Eigenraums von λ.
Nach 9.13 existiert die Jordansche Normalform für alle trigonalisierbaren Endomorphismen, insbesondere für alle Endomorphismen von endlich dimensionalen komplexen Vektorräumen. Da die Jordansche Normalform eine obere Dreiecksmatrix ist, ist die Trigonalisierbarkeit eine notwendige Bedingung.

Beispiele (für Jordansche Normalformen).

- Bei Diagonalmatrizen handelt es sich um Jordansche Normalformen.
- $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
- Bei
$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{4} \end{pmatrix}$$
gibt es zwei Jordankästchen zu 2. Es sind e_1 und e_2 Eigenvektoren zu 2 und es ist e_4 Eigenvektor zu 4.

Anwendungen

Physik Lösen von homogenen linearen Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten.
Sei $K = \mathbb{C}$, $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ und $y_0 \in \mathbb{C}^n$. Gesucht wird eine differenzierbare Funktion $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^n$ mit

$$\frac{d}{dt}y(t) = Ay(t) \text{ und } y(0) = y_0$$

Für $n = 1$ ist $y(t) = e^{At}y_0$ eine Lösung.
Formal löst $y(t) := e^{At}y_0$ mit

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i t^i}{i!}$$

und $A^0 := E_n$ das Problem auch für $n > 1$. Es ist allerdings nicht auf Anhieb klar, ob die Summe in $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ konvergiert.

Existenz und Rechenverfahren für e^{At}:

1) Für eine Diagonalmatrix

$$\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

konvergiert die Summe absolut, denn es ist $e^{Dt} = \operatorname{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t})$.

2) Sei N eine nilpotente Matrix, d.h. es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ mit $N^k = 0$. Dann konvergiert

$$e^{Nt} = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{N^i t^i}{i!}$$

absolut.

3) Für $C \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ konvergiere die Summe absolut. Sei $B \in GL_n(\mathbb{C})$ und $A := B^{-1}CB$, dann konvergiert

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i t^i}{i!} = B^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{C^i t^i}{i!} B$$

absolut, inbesondere gilt

$$e^{At} = B^{-1} e^{Ct} B.$$

4) Sei $A = B + C$ und $BC = CB$, und die Summe konvergiere für B und C absolut. Dann konvergiert $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i t^i}{i!}$ absolut, und es gilt

$$e^{At} = e^{Bt} e^{Ct}$$

(Cauchysche Summationsformel, hier geht die absolute Konvergenz ein).

Sei J die *Jordansche Normalform von A*, d.h. es gibt $B \in GL_n(\mathbb{C})$ mit $A = B^{-1}JB$. Es ist

$$J = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{=:D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & * & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & * \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}}_{=:N} \quad \text{mit } * \in \{0, 1\}$$

Es gilt $DN = ND$. Damit folgt:

$$e^{At} \underset{3)}{=} B^{-1}e^{Jt}B \underset{4)}{=} B^{-1}(e^{Dt}e^{Nt})B$$
$$\underset{1),2)}{=} B^{-1}\mathrm{diag}(e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}) \left(\sum_{i=0}^{k-1} \frac{N^i t^i}{i!} \right) B$$

Dies zeigt die Existenz von e^{At}. Mit dieser Formel kann e^{At} auch berechnet werden.

Mathematik Klassifikationsproblem. Sei X eine Menge, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X und $X/\sim$ die Menge der Äquivalenzklassen. Gesucht wird eine Teilmenge $S \subset X$ so, dass $S \longrightarrow X/\sim$ eine Bijektion ist. Diese wird Vertretersystem von $X/\sim$ genannt.
Sei

$$X = M_{n\times n}(\mathbb{C})$$

und

$$A \sim B :\Longleftrightarrow \text{Es gibt } T \in GL_n(\mathbb{C}) \text{ mit } A = T^{-1}BT.$$

Dann ist jede Matrix äquivalent zu einer Jordanschen Normalform, und es gibt nur endlich viele Jordansche Normalformen in einer Äquivalenzklasse, die sich durch eine Permutation der Jordankästchen voneinander unterscheiden. Man kann also ein Vertretersystem aus Jordanschen Normalformen konstruieren. (Diese Äquivalenzrelation wird auch *Ähnlichkeit* genannt, vgl. 9.2.) Mit Hilfe der Jordanform kann so entschieden werden, ob zwei Matrizen durch einen Basiswechsel ineinander überführt werden können: Dann müssen ihre Jordanschen Normalformen bis auf Reihenfolge der Jordankästchen übereinstimmen.
Doch nun zum Beweis des Theorems:

13.1 Teilbarkeitseigenschaft des charakteristischen Polynoms

Lemma.
Sei $M \in M_{n+m\times n+m}(K)$ von der Form

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

mit $A \in M_{n\times n}(K)$, $C \in M_{m\times m}(K)$ und $B \in \mathrm{M}_{n\times m}(K)$.
Dann gilt

$$\det M = (\det A) \cdot (\det C)$$

Beweis. Betrachte die Abbildung

$$\det' : M_{n\times n}(K) \to K,\ X \mapsto (\det C)^{-1} \det \begin{pmatrix} X & B \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

Sie ist linear in den Spalten von X.
Für $X = E_n$ ergibt die Entwicklung der Determinante nach der n-ten Spalte per Induktion:

$$\det' E_n = (\det C)^{-1} \det C = 1$$

Sind zwei Spalten von X linear abhängig, so ist $\det' X = 0$. Diese Eigenschaften sind gerade die definierenden Eigenschaften der Determinante, also gilt $\det' X = \det X$. Daraus folgt die Behauptung. □

Lemma.
Sei $f : V \longrightarrow V$ eine K-lineare Abbildung, und sei $U \subset V$ ein unter f stabiler Untervektorraum, d.h. es gelte $f(U) \subset U$. Dann teilt das charakteristische Polynom von $f|_U : U \longrightarrow U$ das charakteristische Polynom von $f : V \longrightarrow V$

Beweis. Sei $\mathcal{B}_U$ eine Basis von U. Ergänze diese zu einer Basis $\mathcal{B}_V$ von V. Sei $\dim U =: n$ und $\dim V - \dim U =: m$. Es ist dann wegen $f(U) \subset U$

$$M_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}_V}(f) = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ 0 & M_{22} \end{pmatrix}$$

mit $M_{11} = M_{\mathcal{B}_U}^{\mathcal{B}_U}(f|_U) \in M_{n\times n}(K)$, $M_{22} \in M_{m\times m}(K)$ und $M_{12} \in \mathrm{M}_{n\times m}(K)$.
Dann gilt für das charakteristische Polynom von f nach dem vorigen Lemma:

$$\det(M_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}_V}(f) - xE_{m+n}) = \det(M_{11} - xE_n)\det(M_{22} - xE_m)$$

Das charakteristische Polynom von $f|_U$ ist gerade $\det(M_{11} - xE_n)$. □

13.2 Satz von Cayley-Hamilton

Satz (Cayley-Hamilton).
Sei $f : V \longrightarrow V$ und sei $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ das charakteristische Polynom von f. Dieses zerfalle in Linearfaktoren.
Dann gilt $p(f) := \sum_{i=0}^n a_i f^i = 0$, wobei $f^0 := \mathrm{id}$.

Beweis. Sei $\dim V = n$. Sei $p(x) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - x)$. Dann ist $p(f) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - f)$.
Sei $f_i := (\lambda_i - f)$.
Nach 9.13 gibt es eine Basis $\mathcal{B}$ von V, so dass $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ eine obere Dreiecksmatrix mit Diagonalelementen λ_i ist. Sei U_i der von den ersten i Basisvektoren aufgespannte Unterraum von V, sei $U_0 = 0$. Dann gilt $f(U_i) \subset U_i$.

Für den i-ten Basisvektor v_i gilt $f_i(v_i) = (\lambda_i - f)(v_i) \in U_{i-1}$, da die Matrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\lambda_i - f)$ eine obere Dreiecksmatrix ist, deren i-tes Diagonalelement verschwindet. Also gilt $f_i(U_i) \subset U_{i-1}$. Aus

$$p(f) = f_1 \circ f_2 \ldots \circ f_n$$

und $U_n = V$ folgt $p(f)(V) \subset U_0 = 0$ $\square$

Bemerkung.
Der Satz gilt auch für nicht trigonalisierbare Endomorphismen. Wir werden ihn aber nur in der obigen Form weiter anwenden.

13.3 Verallgemeinerte Eigenräume

Folgendes Lemma entnehmen wir ohne Beweis der Algebra (vgl. 8.3 und 8.4 in [11]):

Lemma.
Seien $p_1, \ldots, p_k$ Polynome aus $K[x]$, und es gebe kein Polynom vom Grad ≥ 1, das alle diese Polynome teilt. Dann gibt es Polynome $h_1, \ldots, h_k \in K[x]$ so, dass $\sum_{i=1}^k h_i p_i = 1$.

Satz.
Sei $f : V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus, und das charakteristische Polynom p von f zerfalle, d.h. $p(x) = \prod_{i=1}^k (\lambda_i - x)^{r_i}$, wobei die $\lambda_i \in K$ paarweise verschieden seien. Sei $V_i := kern(\lambda_i - f)^{r_i}$. Dann gelten

1) $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$

2) $f(V_i) \subset V_i$ *für alle* $i = 1, \ldots, k$

3) $\dim_K V_i = r_i$ *für alle* $i = 1, \ldots, k$

Bemerkung.
Der Untervektorraum V_i heißt *verallgemeinerter Eigenraum* oder *Hauptraum* zum Eigenwert λ_i .

Beweis.

1) Sei

$$g_i(x) = \frac{p(x)}{(\lambda_i - x)^{r_i}} \text{ für } i = 1, \ldots, k$$

Die Polynome g_i haben keinen gemeinsamen Teiler vom Grad ≥ 1. Es gibt also Polynome $h_1, \ldots, h_k$ so, dass

$$\sum_{i=1}^k g_i h_i = 1$$

ist. Daraus folgt

$$\sum_{i=1}^{k} g_i(f) \circ h_i(f) = \mathrm{id}$$

und daher

$$\sum_{i=1}^{k} \mathrm{bild}(g_i(f) \circ h_i(f)) = V$$

Wegen

$$(\lambda_i - f)^{r_i} \circ g_i(f) \circ h_i(f) = p(f) \circ h_i(f) \underset{13.2}{=} 0 \circ h_i(f) = 0$$

folgt

$$\mathrm{bild}(g_i(f) \circ h_i(f)) \subset V_i = \mathrm{kern}(\lambda_i - f)^{r_i}$$

also $\sum_{i=1}^{k} V_i = V$. In 3) wird gezeigt, dass die Summe direkt ist.

2) Die Behauptung folgt aus

$$(\lambda_i - f)^{r_i}(f(v_i)) = f((\lambda_i - f)^{r_i}(v_i)) = 0$$

für ein beliebiges $v_i \in V_i$.

3) Das charakteristische Polynom q von $f|_{V_i}$ teilt p nach 2) und 13.1. Das Polynom q zerfällt also in Linearfaktoren. Sei μ Nullstelle von q, dann ist μ Eigenwert von $f|_{V_i}$, vgl. 9.10. Sei $v \in V_i$ ein zugehöriger Eigenvektor. Aus

$$0 = (\lambda_i - f)^{r_i}(v) = (\lambda_i - \mu)^{r_i}(v)$$

folgt $\mu = \lambda_i$. Daher gilt $q(x) = (\lambda_i - x)^{\ell}$. Das Polynom q teilt p, somit ist der Grad von q kleinergleich r_i . Dieser ist gleich der Dimension von V_i, also $\dim_K V_i \leq r_i$. In 1) wurde $\sum_{i=1}^{k} V_i = V$ gezeigt, was bedeutet

$$\sum_{i=1}^{k} r_i \geq \sum_{i=1}^{k} \dim_K V_i \geq \dim_K V = \sum_{i=1}^{k} r_i .$$

Damit muss $\dim_K V_i = r_i$ gelten, und außerdem folgt $\sum_{i=1}^{k} \dim_K V_i = \dim_K V$. Dies zeigt, dass die Summe der V_i direkt ist.

□

Für Matrizen bedeutet dies: Ist $\mathcal{B}_i$ eine Basis von V_i, dann ist $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^k \mathcal{B}_i$ eine Basis von V, und es gilt

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_1 \end{matrix}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{\begin{matrix} \lambda_k & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Es ist also $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = D + N$ mit einer Diagonalmatrix $D = \mathrm{diag}(D_1, \dots, D_k)$, für die gilt $D_i = \mathrm{diag}(\lambda_i, \dots, \lambda_i) \in M_{r_i \times r_i}(K)$, und einer nilpotenten Matrix N, für die gilt $N^{\dim_K V} = 0$ und $DN = ND$.
Es bleibt noch zu zeigen, dass man die Basen $\mathcal{B}_i$ so wählen kann, dass die nilpotente Matrix die gewünschte Form hat. Dies ist die Aussage des folgenden Satzes, angewandt auf den nilpotenten Endomorphismus

$$(f|_{V_i} - \lambda_i) : V_i \longrightarrow V_i$$

13.4 Normalform nilpotenter Endomorphismen

Satz.
Sei $u : V \longrightarrow V$ nilpotent, d.h. es gebe ein $k \in \mathbb{N}$ so, dass $u^k = 0$. Dann gibt es eine Basis $\mathcal{B}$ von V so, dass

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & * & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & * \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{mit } * \in \{0, 1\}$$

Beweis. Sei $q \in \mathbb{N}$ minimal mit $u^{q+1} = 0$ und $u^0 := id$.
Sei

$$E_i := \operatorname{kern} u^i, \ i = 0, \dots, q+1.$$

Für $v \in E_{i+1}$ gilt $u^i(u(v)) = u^{i+1}(v) = 0$ und damit $u(v) \in E_i$. Wir erhalten

$$u(E_{i+1}) \subset E_i.$$

Der Raum E_i ist im Raum E_{i+1} enthalten; wir behaupten, dass er sogar ein echter Unterraum von E_{i+1} ist:

Wir nehmen an, dass für ein i die Räume E_i und E_{i+1} gleich sind.
Für alle $x \in V$ gilt: $u^{i+1}u^{q-i}(x) = 0$. Daraus folgt $u^{q-i}(x) \in E_{i+1}$, also $u^{q-i}(x) \in E_i$, und daher $u^q(x) = u^i u^{q-i}(x) = 0$. Es ist also $u^q = 0$ im Widerspruch mit der Definition von q.
Die Räume E_i bilden eine *Fahne*

$$0 = E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq E_2 \ldots E_q \subsetneq E_{q+1} = V.$$

Hilfssatz Sei $F \in V$ ein Untervektorraum, für den für ein $i > 0$ gilt:

$$F \cap E_i = \{\vec{0}\}.$$

Dann folgt:

1) $u(F) \cap E_{i-1} = \{\vec{0}\}$

2) $u|_F : F \longrightarrow u(F)$ ist ein Isomorphismus.

Beweis.

1) Sei $y \in F$ so, dass $u(y) \in E_{i-1}$. Dann ist $u^{i-1}(u(y)) = 0$, also $y \in E_i$ und damit $y = 0$ nach Voraussetzung.

2) Injektivität: Sei $v \in (\operatorname{kern} u) \cap F$. Dann ist $v \in E_1 \subset E_i$, also $v = 0$.

$\square$

Induktiv konstruieren wir eine Folge von Untervektorräumen U_i für $i = 1, \ldots, q+1$ so, dass gilt:

$$\begin{aligned} U_i \oplus E_{i-1} &= E_i \\ u(U_i) &\subset U_{i-1} \\ u|_{U_i} : U_i &\to E_{i-1} \text{ ist injektiv} \end{aligned}$$

Wir wählen zunächst U_{q+1} so, dass $E_q \oplus U_{q+1} = V$ gilt. Es ist $u(U_{q+1}) \subset E_q$, und wegen $U_{q+1} \cap E_q = \{\vec{0}\}$ gilt nach dem Hilfssatz

$$u(U_{q+1}) \cap E_{q-1} = \{\vec{0}\},$$

und $u|_{U_{q+1}} : U_{q+1} \to E_q$ ist injektiv. Der Raum U_{q+1} genügt damit den obigen Bedingungen.
Sei nun U_{i+1} wie verlangt, d.h. insbesondere $u(U_{i+1}) \subset E_i$ und $u(U_{i+1}) \cap E_{i-1} = \{\vec{0}\}$. Wir können dann den Raum $U_i \subset E_i$ so wählen, dass er $u(U_{i+1})$ enthält und ein Komplement zu E_{i-1} in E_i ist.

Nach Hilfssatz hat U_i die gewünschten Eigenschaften.
Diese Eigenschaften und die Tatsache, dass die direkte Summe der U_i den ganzen Raum V ergibt, nutzen wir im folgenden aus, um uns eine geeignete Basis von V zu konstruieren.
Da $u : U_{i+1} \to U_i$ injektiv ist, können wir induktiv für jedes i eine Basis $\mathcal{B}_i$ von U_i so finden, dass $u(\mathcal{B}_{i+1}) \subset \mathcal{B}_i$ ist. Die Vereinigung $\mathcal{B}$ dieser Basen ist eine Basis von V. Wir ordnen die Basisvektoren aus $\mathcal{B}$ so um, dass für zwei aufeinanderfolgende Basisvektoren $v_{k-1},\ v_k$ gilt: Ist $v_k \in \mathcal{B}_i,\ i \neq 1$, dann sei $v_{k-1} = u(v_k) \in \mathcal{B}_{i-1}$. Also gilt

$$u(v_k) = v_{k-1} \text{ für } v_k \notin \mathcal{B}_1 \text{ und } u(v_k) = 0 \text{ für } v_k \in \mathcal{B}_1.$$

Die Matrix $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(u)$ hat somit die verlangte Form. □

13.5 Übungsaufgabe 89

Aufgabe 89.
Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Man bestimme die JORDANsche Normalform der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & b \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$$

14 Affine Räume und affine Abbildungen

Sei (X, V, t) ein affiner Raum über einem Körper K gemäß 10.23. Dabei ist X eine Menge von Punkten $p, q, \ldots,$
V ein K-Vektorraum und
$t : X \times V \longrightarrow X, (p, v) \longmapsto p + v$, eine *einfach transitive* Operation.
„t transitiv“ bedeutet, dass es zu je zwei Punkten $p, q \in X$ einen Vektor $v \in V$ mit $q = p + v$ gibt, und „t einfach transitiv“ bedeutet, dass es jeweils nur einen solchen Vektor $v \in V$ gibt. Man schreibt dann $v = \overrightarrow{pq}$ und nennt $\overrightarrow{pq}$ den *Ortsvektor von q bezüglich p*.

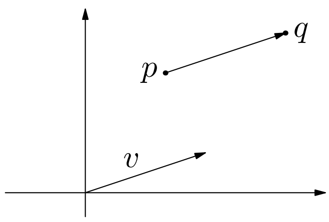

Abbildung 26: $v = \overrightarrow{pq}$

14.1 Affine Abbildungen

Seien (X, V, t) und (Y, W, t') affine Räume über K.

Definition.
Eine Abbildung $\varphi : X \longrightarrow Y$ heißt *affin*, wenn es eine K-lineare Abbildung $\vec{\varphi} : V \longrightarrow W$ gibt so, dass gilt

$$(*) \qquad \overrightarrow{\varphi(p)\varphi(q)} = \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{pq}) \quad \forall p, q \in X$$

Eine bijektive affine Abbildung heißt *Affinität*.

Lemma.
Eine Abbildung $\varphi : X \longrightarrow Y$ ist affin, wenn es ein $p_0 \in X$ gibt so, dass

$$f : V \longrightarrow W, \quad \overrightarrow{p_0 q} \quad \longmapsto \overrightarrow{\varphi(p_0)\varphi(q)}$$

eine K-lineare Abbildung ist.

Beweis. Für $p, q \in X$ gilt

$$\overrightarrow{pq} \underset{10.23}{=} \overrightarrow{pp_0} + \overrightarrow{p_0 q} = \overrightarrow{p_0 q} - \overrightarrow{p_0 p}$$

Weil f K-linear ist, folgt daraus

$$f(\overrightarrow{pq}) = f(\overrightarrow{p_0 q}) - f(\overrightarrow{p_0 p}) = \overrightarrow{\varphi(p_0)\varphi(q)} - \overrightarrow{\varphi(p_0)\varphi(p)} = \overrightarrow{\varphi(p)\varphi(q)}$$

Es ist also $(*)$ mit $\overrightarrow{\varphi} = f$ erfüllt. □

Satz.
Sei $p_0 \in X$ fest. Dann ist eine affine Abbildung $\varphi : X \longrightarrow Y$ durch Angabe von

$$\varphi(p_0) \text{ und } \overrightarrow{\varphi} : V \longrightarrow W$$

eindeutig festgelegt. Umgekehrt gibt es zu jedem $q_0 \in Y$ und jeder K-linearen Abbildung $f : V \longrightarrow W$ genau eine affine Abbildung $\varphi : X \longrightarrow Y$ mit

$$\varphi(p_0) = q_0 \text{ und } \overrightarrow{\varphi} = f$$

Beweis. Sei φ affin. Dann gilt

$$\varphi(p) \underset{t' \text{ transitiv}}{=} \varphi(p_0) + \overrightarrow{\varphi(p_0)\varphi(p)} \underset{(*)}{=} \varphi(p_0) + \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{p_0 p}) \quad \forall p \in X$$

Umgekehrt: Seien $q_0 \in Y$ und f vorgegeben. Dann ist durch

$$\varphi(p) = q_0 + f(\overrightarrow{p_0 p})$$

nach dem Lemma eine affine Abbildung φ mit $\varphi(p_0) = q_0$ und $\vec{\varphi} = f$ definiert. □

14.2 Beispiele für affine Abbildungen

1) Eine affine Abbildung $\varphi : X \longrightarrow X$ heißt *Translation*, wenn $\overrightarrow{\varphi} = \mathrm{id}_V$ gilt, also wenn
$$\overrightarrow{\varphi(p)\varphi(q)} = \overrightarrow{pq}$$
für alle $p, q \in X$ gilt.

   Für $q_0 = \varphi(p_0)$ und $p \in X$ gilt:
$$\begin{aligned}\varphi(p) &= q_0 + \mathrm{id}_V(\overrightarrow{p_0p}) = q_0 + \overrightarrow{p_0p} \underset{10.23}{=} q_0 + \overrightarrow{p_0q_0} + \overrightarrow{q_0p} \\ &= q_0 + \overrightarrow{q_0p} + \overrightarrow{p_0q_0} = p + \overrightarrow{p_0q_0}\end{aligned}$$

   Eine Translation ist eine Affinität.

2) Eine affine Abbildung $\varphi : X \longrightarrow X$ heißt *Dilation* oder *Homothetie*, falls $\overrightarrow{\varphi} = \lambda\,\mathrm{id}_V$ mit einem $\lambda \in K$ gilt.

14.3 Affine Unterräume

Sei (X, V, t) ein affiner Raum über K. Eine Teilmenge $Y \subset X$ heißt *affiner Unterraum*, wenn es einen Punkt $p_0 \in X$ und einen Untervektorraum $U \subset V$ gibt mit
$$Y = \{p_0 + u \mid u \in U\} = p_0 + U$$
Es ist dann Y selbst ein affiner Raum oder $\varnothing$, und man nennt U auch die *Richtung von* Y oder *Richtungsvektorraum von* Y.

14.4 Beispiele für affine Unterräume

1) Seien $(Y_i)_{i\in I}$ affine Unterräume von (X, V, t) mit Richtungen $(U_i)_{i\in I}$. Dann ist $\bigcap_{i\in I} Y_i$ ein affiner Unterraum mit Richtung $\bigcap_{i\in I} U_i$ oder $\varnothing$. Die Vereinigung von affinen Unterräumen ist i.A. kein affiner Unterraum.

2) Sei (X, V, t) ein affiner Raum über K. Setze $\boxed{\dim X := \dim_K V}$ Dann gilt:

   - Die 0-dimensionalen affinen Unterräume sind die *Punkte* von X.
   - Die 1-dimensionalen affinen Unterräume sind die *Geraden* von X.
   - Die 2-dimensionalen affinen Unterräume sind die *Ebenen* von X.
   - Die $(n-1)$-dimensionalen affinen Unterräume sind die *Hyperebenen* von X, wobei $n = \dim_K V$ gilt.

3) Sei $X = K^n = V$ und t die Addition in V. Ist

$$A\vec{x} = \vec{b} \text{ mit } A \in M_{m\times n}(K)$$

ein lineares Gleichungssystem, und $f : K^n \longrightarrow K^m, \vec{x} \longmapsto A\vec{x}$, so ist die Lösungsmenge $Y = \varnothing$ oder von der Form $Y = \vec{x_0} + \mathrm{kern}(f)$, also ein affiner Unterraum von X (vgl. 5.3).

14.5 Parallelprojektion

Sei (X, V, t) ein affiner Raum über K und $\dim X < \infty$. Sei W ein Untervektorraum von V und $Y = p_0 + U$ ein affiner Unterraum von X derart, dass $V = W \oplus U$ gilt. Dann ist

$$\pi : X \longrightarrow Y,\ p \longmapsto (p + W) \cap Y$$

eine surjektive affine Abbildung, genannt *Parallelprojektion von X auf Y längs W*. Die Einschränkung von π auf Y ist eine Affinität.

Beweis. Es gilt $\dim X \underset{3.15}{=} \dim_K W + \dim_K U$, da $W \cap U = \{\vec{0}\}$ ist. Wir zeigen zunächst, dass $\pi(p)$ aus genau einem Punkt besteht für jedes $p \in X$:
Wäre $(p + W) \cap Y = \varnothing$, so würde die Verbindungsgerade zwischen p und p_0 einen zusätzlichen Beitrag zur Dimension liefern, und X würde einen affinen Unterraum der Dimension $1 + \dim X$ enthalten, was unmöglich ist. Es ist also $Y \neq \varnothing$, und daher folgt $\dim((p + W) \cap Y) = \dim_K(W \cap U) = 0$. Dies besagt nach 14.4.1, dass $\pi(p) = (p + W) \cap Y$ ein Punkt ist.
Die Abbildung π ist affin, da die zugehörige lineare Abbildung

$$\vec{\pi} : V = W \oplus U \longrightarrow U, \quad v = w + u \longmapsto u$$

die Projektionsabbildung ist, und π ist surjektiv, da $\pi(p) = p$ für alle $p \in Y$. □

14.6 Affine Koordinaten

Ein *Koordinatensystem* eines n-dimensionalen affinen Raumes (X, V, t) besteht aus $n + 1$ Punkten $p_0, p_1, \ldots, p_n$ so, dass die Vektoren $v_i = \overrightarrow{p_0p_i}$ für $i = 1, \ldots, n$ linear unabhängig sind. Bezeichnung $(p_0; p_1, \ldots, p_n)$. Jedes $p \in X$ hat dann eine Darstellung

$$p = p_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{p_0p_i}$$

mit eindeutig bestimmten $\lambda_i \in K$.

14.7 Der Schwerpunkt

Lemma.
Seien $p_1, \dots, p_k \in X$ *und* $\mu_1, \dots, \mu_k \in K$ *mit* $\sum_{i=1}^k \mu_i = 1$ *(wobei* $k \in \mathbb{N}$*). Dann hängt der Punkt* $s \in X$ *mit dem Ortsvektor*

$$\overrightarrow{p_0 s} = \sum_{i=1}^k \mu_i \, \overrightarrow{p_0 p_i}$$

nicht von der Wahl von p_0 *ab.*

Beweis. Sei $p_0' \in X$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} s = p_0 + \overrightarrow{p_0 s} &= p_0 + \sum_{i=1}^k \mu_i \overrightarrow{p_0 p_i} = p_0 + \sum_{i=1}^k \mu_i (\overrightarrow{p_0 p_0'} + \overrightarrow{p_0' p_i}) \\ &= p_0 + \left(\sum_{i=1}^k \mu_i \right) \overrightarrow{p_0 p_0'} + \sum_{i=1}^k \mu_i \overrightarrow{p_0' p_i} = p_0' + \sum_{i=1}^k \mu_i \overrightarrow{p_0' p_i} \end{aligned}$$

□

Man nennt s den *Schwerpunkt* der mit den Massen $\mu_1, \dots, \mu_k$ belegten Punkte $p_1, \dots, p_k$.

14.8 Affine Unterräume und Schwerpunkte

Satz.
Sei (X, V, t) *ein affiner Raum über* K*, und sei* $Y \subset X$ *mit* $Y \neq \varnothing$*. Dann ist äquivalent:*

1) Y *ist ein affiner Unterraum von* X

2) Für jedes System $p_1, \dots, p_k \in Y$ *und jede Massenbelegung* $\mu_1, \dots, \mu_k$ *mit* $\sum_{i=1}^k \mu_i = 1$ *gehört auch der Schwerpunkt zu* Y

Beweis.

1) $\Rightarrow$ 2) Sei Y affiner Unterraum, also $Y = p + U$ mit einem Untervektorraum U von V. Sei $p_0 \in Y$, dann ist $\overrightarrow{p_0 p_i} \in U$ für $i = 1, \dots, k$, also auch $\sum_{i=1}^k \mu_i \overrightarrow{p_0 p_i} \in U$. Daraus folgt $s = p_0 + \sum_{i=1}^k \mu_i \, \overrightarrow{p_0 p_i} \in Y$

2) $\Rightarrow$ 1) Sei $p_0 \in Y$. Zeige: $U = \{\overrightarrow{p_0 p} \mid p \in Y\}$ ist ein Untervektorraum von V. Seien $\lambda, \mu \in K$ und $p, q \in Y$. Nach Voraussetzung ist

$$p_0 + (1 - \lambda - \mu)\overrightarrow{p_0 p_0} + \lambda \overrightarrow{p_0 p} + \mu \overrightarrow{p_0 q} \in Y$$

woraus $\lambda \overrightarrow{p_0 p} + \mu \overrightarrow{p_0 q} \in U$ folgt, da $\overrightarrow{p_0 p_0} \underset{10.23}{=} \vec{0}$ gilt.

□

14.9 Bemerkung zum Hauptsatz der affinen Geometrie

Eine Affinität führt Geraden in Geraden über. Aus dem „Hauptsatz der affinen Geometrie“ folgt, dass für $K = \mathbb{R}$ und jeden affinen Raum X über $\mathbb{R}$ mit $\dim X \geq 2$ umgekehrt gilt:
Jede bijektive Abbildung $X \longrightarrow X$, die Geraden in Geraden überführt, ist eine Affinität (vgl. [8]).

15 Projektive Räume und Projektivitäten

Im Projektiven hat man stärkere Schnittpunktsätze als im Affinen. Durch das Arbeiten im Projektiven erspart man sich daher einige sonst nötige Fallunterscheidungen.
Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum.

15.1 Der projektive Raum $\mathbb{P}(V)$

Der zu V gehörige *projektive Raum* $\mathbb{P}(V)$ ist definiert als die Menge aller 1-dimensionalen Untervektorräume von V. Ist $\dim_K V < \infty$, so setzt man

$$\dim \mathbb{P}(V) = \dim_K V - 1$$

und spricht von der *Dimension von* $\mathbb{P}(V)$.
Es ist $\mathbb{P}(\{\vec{0}\}) = \varnothing$ und $\dim \varnothing = -1$.
Man setzt $\mathbb{P}^n(K) := \mathbb{P}(K^{n+1})$ und nennt $\mathbb{P}^n(K)$ den n-dimensionalen *projektiven Raum über* K.

Bemerkung.
Man hat eine Abbildung

$$V \setminus \{\vec{0}\} \longrightarrow \mathbb{P}(V), v \longmapsto Kv$$

wobei $Kv := \{\lambda v | \lambda \in K\}$ die durch $v \neq \vec{0}$ eindeutig bestimmte Gerade durch $\vec{0}$ ist.

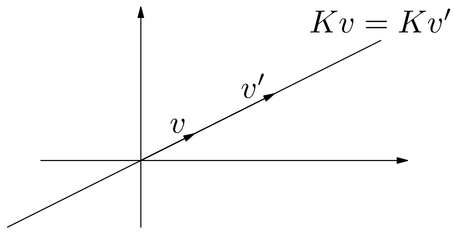

Abbildung 27: Gerade durch $\vec{0}$

15.2 Homogene Koordinaten

Sei $V = K^{n+1}$.
Dann sind die *homogenen Koordinaten* von $v = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in V \setminus \{\vec{0}\}$ definiert durch

$$\boxed{(x_0 : x_1 : \ldots : x_n) := Kv}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} Kv = Kv' &\iff \exists \lambda \in K^* \text{ mit } v' = \lambda v \\ &\iff \exists \lambda \in K^* \text{ mit } x_0' = \lambda x_0 \,, \ \ldots, \ x_n' = \lambda x_n \end{aligned}$$

Die homogenen Koordinaten sind also nur bis auf einen gemeinsamen Faktor $\lambda \neq 0$ aus K festgelegt.

15.3 Beispiele zur Homogenisierung

Sei $(a, b, c) \in K^3$ und $(b, c) \neq (0, 0)$. Betrachte in der affinen Ebene die Gerade mit der Gleichung

(1) $$\boxed{bx + cy + a = 0}$$

Die Gleichung ist *inhomogen*, wenn $a \neq 0$.

Homogenisierung Setze

$$\boxed{x = \frac{x_1}{x_0}} \text{ und } \boxed{y = \frac{x_2}{x_0}} \text{ mit } x_0 \neq 0$$

Dann folgt $b\frac{x_1}{x_0} + c\frac{x_2}{x_0} + a = 0$ und also durch Multiplikation mit x_0

(2) $$\boxed{ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0}$$

Nach 15.2 ist $(x_0 : x_1 : x_2) = (\frac{1}{x_0} x_0 : \frac{1}{x_0} x_1 : \frac{1}{x_0} x_2) = (1 : x : y)$.
Es ist also $(y_0 : y_1 : y_2) \in \mathbb{P}^2(K)$ genau dann eine Lösung von (2), wenn $(y_0 : y_1 : y_2) = (1 : x : y)$ mit einer Lösung (x, y) von (1) gilt oder wenn $(y_0 : y_1 : y_2) = (0 : c : -b)$ ist.

Beispiel.
Betrachte in $\mathbb{R}^2$ die parallelen Geraden

$$x + y - 2 = 0, \quad x + y = 0, \quad x + y + 3 = 0$$

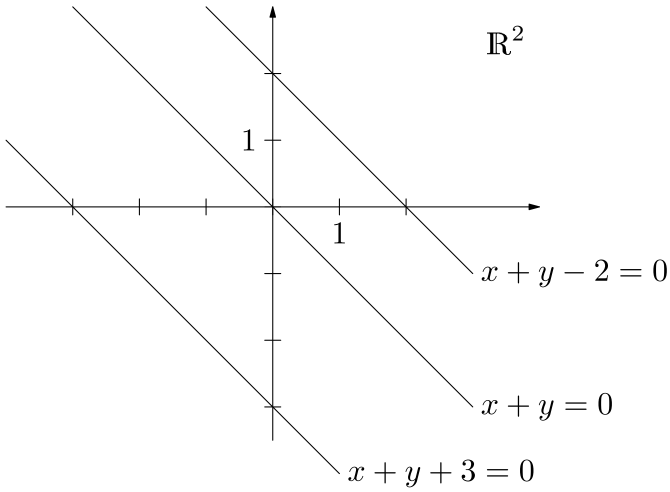

Abbildung 28: Drei parallele Geraden

Homogenisierung liefert:

$$\begin{aligned} x + y - 2 = 0 &\quad\rightsquigarrow\quad -2x_0 + x_1 + x_2 = 0 \\ x + y = 0 &\quad\rightsquigarrow\quad 0 \cdot x_0 + x_1 + x_2 = 0 \\ x + y + 3 = 0 &\quad\rightsquigarrow\quad 3x_0 + x_1 + x_2 = 0 \end{aligned}$$

In allen drei Fällen ist $(0 : 1 : -1)$ eine Lösung in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Die Geraden haben also einen Schnittpunkt in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

15.4 Projektive Geraden in $\mathbb{P}^2(K)$

Eine *projektive Gerade* $L \subseteq \mathbb{P}^2(K)$ ist die Nullstellenmenge in $\mathbb{P}^2(K)$ einer Gleichung

$$ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0 \text{ mit } (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$$

Es ist also

$$L = \Big\{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2(K) \mid ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0\Big\}$$

Ist $b = c = 0$, so ist L die „unendlich ferne Gerade“

$$P^1 := \Big\{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2(K) \mid x_0 = 0\Big\}$$

Die übrigen Geraden in $\mathbb{P}^2(K)$ erhält man, wie in 15.3 beschrieben, durch (1) und durch Hinzufügen des „unendlich fernen Punktes“ $(0 : c : -b) \in P^1$. Ist $c \neq 0$, so ist $U = \{(x_0, x_1, x_2) \in K^3 \mid ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0\}$ ein Untervektorraum von K^3 mit Basis $\Big\{(1, 0, -\frac{a}{c}), (0, -c, b)\Big\}$ und es ist $L = \mathbb{P}(U)$.

15.5 Projektive Unterräume in $\mathbb{P}(V)$

Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{P}(V)$ heißt *projektiver Unterraum*, falls $X = \mathbb{P}(U)$ mit einem Untervektorraum U von V gilt. Es ist dann

- X eine *projektive Gerade* in $\mathbb{P}(V)$, falls $\dim X = 1$
- eine *projektive Hyperebene* in $\mathbb{P}(V)$, falls $\dim X = \dim \mathbb{P}(V) - 1$ und $\dim_K V < \infty$

Beispiele.
Seien $(X_i = \mathbb{P}(U_i))_{i\in I}$ projektive Unterräume von $\mathbb{P}(V)$, dann ist

$$\boxed{\bigcap_{i\in I} X_i = \mathbb{P}\Big(\bigcap_{i\in I} U_i\Big)}$$

ein projektiver Unterraum.
Man nennt den kleinsten projektiven Unterraum von $\mathbb{P}(V)$, der $\bigcup_{i\in I} X_i$ enthält, den *Verbindungsraum* $\bigvee_{i\in I} X_i$. Es ist

$$\boxed{\bigvee_{i\in I} X_i = \mathbb{P}\Big(\sum_{i\in I} U_i\Big)}$$

Dabei ist $\sum_{i\in I} U_i$ der von $\bigcup_{i\in I} U_i$ erzeugte Untervektorraum von V, und das ist der kleinste Unterraum von V, der alle U_i enthält.

15.6 Dimensionssatz

Satz.
Sei $\dim \mathbb{P}(V) < \infty$. *Für projektive Unterräume* $X_1 = \mathbb{P}(U_1)$ *und* $X_2 = \mathbb{P}(U_2)$ *gilt*

$$\boxed{\dim(X_1 \vee X_2) = \dim X_1 + \dim X_2 - \dim(X_1 \cap X_2)}$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}\dim(X_1 \vee X_2) &= \dim_K(U_1 + U_2) - 1 \text{ nach 15.1 und 15.5}\\ &= \dim_K U_1 + \dim_K U_2 - \dim_K(U_1 \cap U_2) - 1 \text{ nach 3.15}\\ &\underset{15.1}{=} \dim X_1 + 1 + \dim X_2 + 1 - (\dim(X_1 \cap X_2) + 1) - 1\\ &= \dim X_1 + \dim X_2 - \dim(X_1 \cap X_2)\end{aligned}$$

□

15.7 Schnittpunktsatz

Satz.
Sei $\dim_K V < \infty$. *Dann gelten*

1) Ist $\dim X_1 + \dim X_2 \geq \dim \mathbb{P}(V)$ *für zwei projektive Unterräume* X_1, X_2 *von* $\mathbb{P}(V)$, *so ist* $X_1 \cap X_2 \neq \varnothing$.

2) Ist $X_1 = L$ *eine projektive Gerade in* $\mathbb{P}(V)$, $X_2 = H$ *eine projektive Hyperebene in* $\mathbb{P}(V)$, *und gilt* $L \not\subseteq H$, *dann schneiden sich* L *und* H *in genau einem Punkt* $P \in \mathbb{P}(V)$.

3) Zwei projektive Geraden in $\mathbb{P}^2(K)$ *schneiden sich stets.*

Beweis.

1) $\dim(X_1 \cap X_2) \underset{15.6}{=} \dim X_1 + \dim X_2 - \dim(X_1 \vee X_2)$
$\geq \dim X_1 + \dim X_2 - \dim \mathbb{P}(V) \underset{\text{Vor.}}{\geq} 0 \Longrightarrow X_1 \cap X_2 \neq \varnothing$.

2) Aus $L \not\subseteq H$ folgt $\dim(X_1 \vee X_2) = \dim \mathbb{P}(V)$ und somit $\dim(X_1 \cap X_2) = 0$ nach 15.6. Es ist also $X_1 \cap X_2 = \{P\}$ ein Punkt.

3) folgt aus 2), da die Hyperebene H eine projektive Gerade in $\mathbb{P}^2(K)$ ist.

□

15.8 Projektiver Abschluss von $\mathbb{A}^n(K)$

Sei $V = K^{n+1}$. Betrachte die Abbildung

$$\psi : K^n \longrightarrow \mathbb{P}(V), \quad (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto (1 : x_1 : \ldots : x_n) = Kv$$

mit $v = (1, x_1, \ldots, x_n)$. Es ist

$$U = \Big\{(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in K^{n+1} \mid x_0 = 0\Big\}$$

ein n-dimensionaler Untervektorraum von K^{n+1}, also ist $H := \mathbb{P}(U)$ eine *Hyperebene* in $\mathbb{P}(V)$.

Behauptung Es ist $\operatorname{bild}(\psi) = \mathbb{P}(V) \setminus H$.

Beweis. Es ist $\operatorname{bild}(\psi) \subset \mathbb{P}(V) \setminus H$ nach Definition.
Sei $(y_0 : y_1 : \ldots : y_n) \in \mathbb{P}(V) \setminus H$, also $y_0 \neq 0$.

$$\Longrightarrow \quad (y_0 : y_1 : \ldots : y_n) = (1 : \frac{y_1}{y_0} : \ldots : \frac{y_n}{y_0}) = \psi(\frac{y_1}{y_0}, \ldots, \frac{y_n}{y_0})$$

□

Man nennt H die *unendlich ferne Hyperebene*, ψ heißt *kanonische Einbettung* von $\mathbb{A}^n(K)$ in $\mathbb{P}^n(K)$, und $\mathbb{P}(V)$ wird als *projektiver Abschluss* von $\mathbb{A}^n(K)$ bezeichnet. Man schreibt auch $\mathbb{P}^n(K) = \mathbb{A}^n(K) \cup A_\infty$, wobei $A_\infty = H$ ist. Für $n = 1$ schreibt man dann speziell $\mathbb{P}^1(K) = \mathbb{A}^1(K) \cup \{\infty\}$, da H dann ein Punkt ist.

15.9 Projektivitäten

Seien V, W zwei $(n+1)$-dimensionale K-Vektorräume. Dann heißt eine bijektive Abbildung $\varphi : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ eine *Projektivität*, falls es eine bijektive K-lineare Abbildung

$$\vec{\varphi} : V \longrightarrow W \text{ gibt mit } \varphi(P) = \vec{\varphi}(P) \quad \forall P \in \mathbb{P}(V)$$

(Hierbei ist P ein Punkt von $\mathbb{P}(V)$ und also ein eindimensionaler Teilraum von V.) Es ist dann $\vec{\varphi}$ *nicht* eindeutig durch φ bestimmt, denn für $\lambda \in K^*$ ist $(\lambda\vec{\varphi})(P) = \vec{\varphi}(\lambda P) = \vec{\varphi}(P)$.

Ferner gilt $\boxed{\varphi(\mathbb{P}(U)) = \mathbb{P}(\vec{\varphi}(U))}$ für jeden Untervektorraum U von V und jede Projektivität φ.

15.10 Kollineationen

Definition.
Eine bijektive Abbildung $\varphi : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(W)$ heißt *Kollineation*, wenn das Bild einer projektive Geraden g durch die Punkte $P, Q \in \mathbb{P}(V)$ die projektive Gerade durch die Punkte $\varphi(P), \varphi(Q) \in \mathbb{P}(W)$ ist.

Satz.

1) *Zu je zwei Punkten $P, Q \in \mathbb{P}(V)$ mit $P \neq Q$ gibt es genau eine projektive Gerade g, die P und Q enthält.*

2) *Ist $\varphi : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(W)$ eine Projektivität, so ist φ eine Kollineation.*

Beweis.

1) Es ist $P = Kv_1$ und $Q = Kv_2$ mit $v_1, v_2 \in V \setminus \{\vec{0}\}$. Da $P \neq Q$ ist folgt, dass v_1 und v_2 linear unabhängig sind. Es ist also $g = \mathbb{P}(U)$ mit $U = Kv_1 + Kv_2$ die gesuchte projektive Gerade.

2) Es ist $\varphi(g) = \mathbb{P}(\vec{\varphi}(U))$. Daraus folgt die zweite Behauptung.

□

15.11 Weitere Beispiele zur Homogenisierung

Analog wie in 15.4 konstruiert man zu einer Hyperebene

$$X = \{(x_1, \ldots, x_n) \in K^n \mid a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + b = 0\}$$

durch Homogenisierung ihrer definierenden Gleichung den Abschluss

$$\overline{X} = \{(y_0 : y_1 : \ldots : y_n) \in \mathbb{P}^n(K) \mid by_0 + a_1y_1 + \ldots + a_ny_n = 0\}$$

in $\mathbb{P}^n(K)$. Man setze $\boxed{x_i = \frac{y_i}{y_0}}$ für alle $i = 1, \ldots, n$.

Analog erhält man durch Homogenisierung den projektiven Abschluss von Quadriken, Kegelschnitten, Kubiken, etc.

Beispiele.
Betrachte die definierenden Gleichungen:

i) $x^2 + y^2 - 1 = 0$ Kreis

ii) $x^2 - y^2 - 1 = 0$ Hyperbel (vgl. 12.4)

iii) $x^2 - y = 0$ Parabel (vgl. 12.4)

Homogenisierung Mit $x = \frac{x_1}{x_0}$ und $y = \frac{x_2}{x_0}$ erhält man:

i) $-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$

ii) $-x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$

iii) $x_1^2 - x_2x_0 = 0$

Behauptung Kreis, Hyperbel und Parabel sind *projektiv äquivalent*, d.h. die zugehörigen projektiven Kurven gehen durch eine Projektivität

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$$

ineinander über.

Beweis. Durch $(x_0 : x_1 : x_2) \longmapsto (x_1 : x_0 : x_2)$ geht die projektive Quadrik mit der Gleichung ii) in die projektive Quadrik mit der Gleichung i) über. Durch $(x_0 : x_1 : x_2) \longmapsto (x_0 + x_2 : x_1 : x_0 - x_2)$ erhält man aus Gleichung iii) die Gleichung i). □

15.12 Übergang vom Projektiven ins Affine

Bemerkung.
Ist $H = \mathbb{P}(U)$ eine projektive Hyperebene in $\mathbb{P}(V)$, so ist $\mathbb{A} := \mathbb{P}(V) \setminus H$ ein affiner Raum mit zugehörigem Vektorraum U, und es ist $\mathbb{A}_\infty = H$.

Was geschieht dabei mit einer projektiven Quadrik in $\mathbb{P}(V)$?

Beispiel.
Sei $Q = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \mid -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0\}$.

1) Sei $H = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \mid x_0 = 0\}$ und

$$\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus H,\ (x_1, x_2) \longmapsto (1 : x_1 : x_2)$$

(vgl. 15.8). Dann ist $Q \cap H = \varnothing$, und

$$\psi^{-1}(Q) = \Big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0\Big\}$$

ist ein Kreis. Ersetzt man $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{C}$, so besteht $Q \cap H$ aus zwei Punkten (vgl. Aufgabe 92).

2) Sei $H = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \mid x_1 = 0\}$. Dann besteht $Q \cap H$ aus zwei Punkten, und für

$$\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus H, (x_0, x_2) \longmapsto (x_0 : 1 : x_2)$$

ist

$$\psi^{-1}(Q) = \Big\{(x_0, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_0^2 - x_2^2 - 1 = 0\Big\}$$

eine Hyperbel.

3) Sei $H = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \mid x_0 + x_1 = 0\}$. Dann ist $Q \cap H$ ein Punkt, und für

$$\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus H, (x_1, x_2) \longmapsto ((1 - x_1) : x_1 : x_2)$$

ist

$$\psi^{-1}(Q) = \Big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2^2 + 2x_1 - 1 = 0\Big\}$$

eine Parabel. (Die Substitution $x_1 = -z_1 + \frac{1}{2}$ ergibt $\frac{1}{2}x_2^2 - z_1 = 0$.)

(Je nachdem, was man als unendlich ferne Hyperebene auszeichnet, erhält man aus Q die drei affinen Kurven: Kreis, Hyperbel, Parabel)

15.13 Explizite Beschreibung von Projektivitäten

Sei $V = K^{n+1}$ und $\varphi : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V)$ eine Projektivität. Bezüglich der Standardbasis wird $\vec{\varphi} : V \longrightarrow V$ durch eine Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n0} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{n+1}(K)$$

beschrieben (vgl. 4.11). Es ist dann

$$\varphi(x_0 : x_1 : \ldots : x_n) = (y_0 : y_1 : \ldots : y_n)$$

mit $y_i \underset{4.11}{=} a_{i0}x_0 + \ldots + a_{in}x_n$. Übergang zu inhomogenen Koordinaten ergibt

$$y_i' = \frac{y_i}{y_0} = \frac{a_{i0}x_0 + \ldots + a_{in}x_n}{a_{00}x_0 + \ldots + a_{0n}x_n} = \frac{a_{i0} + a_{i1}x_1' + \ldots + a_{in}x_n'}{a_{00} + a_{01}x_1' + \ldots + a_{0n}x_n'}$$

mit $x_i' = \frac{x_i}{x_0}$ und $x_0 \neq 0$ (vgl. 15.8). Die Abbildung

$$\varphi' : K^n \longrightarrow K^n,\ (x_1', \ldots, x_n') \longmapsto (y_1', \ldots, y_n')$$

ist auf der affinen Hyperebene

$$E = \{(x_1', \ldots, x_n') \in K^n \mid a_{00} + a_{01}x_1' + \ldots + a_{0n}x_n' = 0\}$$

nicht definiert. Die Punkte von E werden auf die unendlich ferne Hyperebene abgebildet.
Ist speziell $n = 1$ und $\mathbb{P}^1(K) = \mathbb{A}^1(K) \cup \{\infty\}$, so ist mit $x_1' =: x$ und $y_1' =: y$ eine Projektivität gegeben durch

$$x \longmapsto y = \frac{a_{11}x + a_{10}}{a_{01}x + a_{00}}$$

(„Möbiustransformation"). Der Punkt $x = -\frac{a_{00}}{a_{01}}$ wird auf ∞ abgebildet, falls $a_{01} \neq 0$. Definiere $\infty \longmapsto -\frac{a_{11}}{a_{01}}$.

15.14 Projektive Basen

Seien V, W zwei $(n+1)$-dimensionale K-Vektorräume. Dann sind $n+2$ Punkte $P_0, \ldots, P_{n+1}$ von $\mathbb{P}(V)$ *in allgemeiner Lage*, wenn keine $n+1$ Punkte davon einen echten projektiven Unterraum von $\mathbb{P}(V)$ erzeugen. Man sagt dann, dass $P_0, \ldots, P_{n+1}$ eine *projektive Basis* von $\mathbb{P}(V)$ bilden.

Satz.
Sind $P_0, \ldots, P_{n+1}$ in allgemeiner Lage in $\mathbb{P}(V)$ und sind $Q_0, \ldots, Q_{n+1}$ in allgemeiner Lage in $\mathbb{P}(W)$, dann gibt es genau eine Projektivität

$$\varphi : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(W) \text{ mit } \varphi(P_i) = Q_i \text{ für alle } i = 0, \ldots, n+1$$

Beweis. Es ist $P_i = Kv_i$ mit $v_i \in V \setminus \{\vec{0}\}$ für $i = 0, \ldots, n$ und analog $Q_i = Kw_i$ mit $w_i \in W \setminus \{\vec{0}\}$. Nach Voraussetzung bilden $v_0, \ldots, v_n$ eine Basis von V und $w_0, \ldots, w_n$ eine Basis von W. Sei $f : V \to W$ die durch $f(v_i) = \lambda_i w_i$ mit noch zu bestimmenden $\lambda_i \in K^*$ für $i = 0, \ldots, n$ definierte K-lineare Abbildung. Es ist

$$v_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \mu_i v_i \text{ mit } 0 \neq \mu_i \in K \text{ für alle } i = 0, \ldots, n$$

da $P_0, \ldots, P_{n+1}$ in allgemeiner Lage sind, und analog

$$w_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \eta_i w_i \text{ mit } 0 \neq \eta_i \in K \text{ und } i = 0, \ldots, n$$

Setze $\lambda_i = \frac{\eta_i}{\mu_i}$, also $\eta_i = \mu_i \lambda_i$ für $i = 0, \ldots, n$. Dann ist

$$f(v_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n} \mu_i f(v_i) = \sum_{i=0}^{n} \eta_i w_i = w_{n+1}$$

Für $\varphi : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(W)$, $Kv \longmapsto Kf(v)$, ist dann $\varphi(P_i) = Q_i$ und $\vec{\varphi} = f$. Bis auf einen Faktor $\lambda \in K^*$ ist $\vec{\varphi}$ eindeutig bestimmt. □

15.15 Das Doppelverhältnis

Sei $n = 1$ und $X = \mathbb{P}(V)$ mit $\dim_K V = 2$. Dann sind je drei verschiedene Punkte $P_0, P_1, P_2 \in X$ in allgemeiner Lage. Seien nun P_0, P_1, P_2, P_3 vier paarweise verschiedene Punkte in X. Dann gibt es nach 15.14 genau eine Projektivität $\varphi_X : X \longrightarrow \mathbb{P}^1(K)$ mit

$$\varphi_X(P_0) = (1:0), \ \varphi_X(P_1) = (1:1), \ \text{ und } \ \varphi_X(P_2) = (0:1)$$

Dadurch ist $\varphi_X(P_3) =: (\lambda : \mu)$ schon eindeutig festgelegt. Man nennt

$$D(P_0, P_1, P_2, P_3) = (\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1(K)$$

das *Doppelverhältnis* der vier Punkte $P_0, P_1, P_2, P_3 \in X$.

Satz.
Sei $\dim_K V = 2 = \dim_K W$. *Seien* $X = \mathbb{P}(V)$ *und* $Y = \mathbb{P}(W)$ *zwei projektive Geraden. Ist* $\varphi : X \to Y$ *eine Projektivität, so gilt*

$$\boxed{D(P_0, P_1, P_2, P_3) = D(\varphi(P_0), \varphi(P_1), \varphi(P_2), \varphi(P_3))}$$

für je vier paarweise verschiedene Punkte $P_0, P_1, P_2, P_3 \in X$. *Das Doppelverhältnis bleibt also unter Projektivitäten erhalten.*

Beweis. Sei $Q_i = \varphi(P_i)$ für $i = 0, 1, 2, 3$. Dann gelten

$$\begin{aligned}(\varphi_Y \circ \varphi)(P_0) &= \varphi_Y(Q_0) = (1:0) = \varphi_X(P_0)\\ (\varphi_Y \circ \varphi)(P_1) &= \varphi_Y(Q_1) = (1:1) = \varphi_X(P_1)\\ (\varphi_Y \circ \varphi)(P_2) &= \varphi_Y(Q_2) = (0:1) = \varphi_X(P_2),\end{aligned}$$

also ist $\varphi_Y \circ \varphi = \varphi_X$ nach 15.14. Damit folgt

$$(\varphi_Y \circ \varphi)(P_3) = \varphi_X(P_3) = D(P_0, P_1, P_2, P_3).$$

Andererseits ist $(\varphi_Y \circ \varphi)(P_3) = \varphi_Y(Q_3) = D(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3)$

□

Beispiel.
Seien $P_i = (1 : \mu_i) \in \mathbb{P}^1(K)$ für $i = 0, 1, 2, 3$ paarweise verschiedene Punkte. Für die Möbiustransformation (vgl. 15.13)

$$\varphi : K \cup \{\infty\} \longrightarrow K \cup \{\infty\}, \quad x \longmapsto \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 - \mu_0} \cdot \frac{x - \mu_0}{x - \mu_2}$$

gilt $\varphi(\mu_0) = 0$, $\varphi(\mu_1) = 1$ und $\varphi(\mu_2) = \infty$. Es ist dann

$$D(\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3) = \frac{\frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 - \mu_0}}{\frac{\mu_3 - \mu_2}{\mu_3 - \mu_0}}$$

das Doppelverhältnis von $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3$.

Bemerkung.
Seien $a, b, c, d \in \mathbb{A}^1(K)$ paarweise verschiedene Punkte auf einer affinen Geraden. Dann ist $\frac{b-c}{b-a}$ das durch b gegebene *Teilverhältnis* der „ Strecke“ [c,a]. Dies ist invariant unter affinen Abbildungen. Analoges gilt für das Teilverhältnis $\frac{d-c}{d-a}$. Wir haben gezeigt, dass der Quotient $\frac{b-c}{b-a} : \frac{d-c}{d-a}$ auch bei gebrochen linearen Transformationen invariant bleibt. Ist $D(a, b, c, d) = -1$, so sagt man, dass sich die vier Punkte a, b, c, d in *harmonischer Lage* befinden.

15.16 Zentralprojektion

Sei V ein $(n+1)$-dimensionaler K-Vektorraum und $X = \mathbb{P}(U)$ ein projektiver Unterraum von $\mathbb{P}(V)$. Ferner seien $\mathbb{P}(U_1)$ und $\mathbb{P}(U_2)$ zwei m-dimensionale projektive Unterräume von $\mathbb{P}(V)$. Es gelte:

i) $X \cap \mathbb{P}(U_1) = X \cap \mathbb{P}(U_2) = \varnothing$

ii) $X \vee \mathbb{P}(U_1) = X \vee \mathbb{P}(U_2) = \mathbb{P}(V)$

Dann ist
$$(X \vee P) \cap \mathbb{P}(U_2) = P'$$
ein Punkt für alle $P \in \mathbb{P}(U_1)$ wie aus dem Dimensionssatz 15.6 folgt. Die Abbildung $\varphi : \mathbb{P}(U_1) \longrightarrow \mathbb{P}(U_2)$, $P \longmapsto P'$, heißt *Zentralprojektion.*

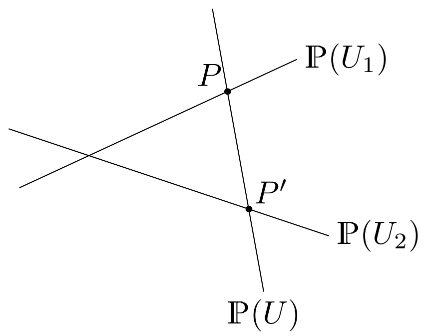

Abbildung 29: Zentralprojektion

Satz.
Die Zentralprojektion $\varphi : \mathbb{P}(U_1) \longrightarrow \mathbb{P}(U_2)$ ist eine Projektivität.

Beweis. Aus i) folgt $U \cap U_1 = U \cap U_2 = \{\vec{0}\}$ und wegen ii) ist
$$U \oplus U_1 = U \oplus U_2 = V$$
Nach 2.13 gibt es zu jedem $u_1 \in U_1$ eindeutig bestimmte Vektoren $u \in U$ und $u_2 \in U_2$ mit
$$u_1 = \vec{0} + u_1 = u + u_2$$
Setze
$$\vec{\varphi} : U_1 \longrightarrow U_2,\ u_1 \longmapsto u_2$$
Dann ist
$$\varphi(Ku_1) = \mathbb{P}(U + Ku_1) \cap \mathbb{P}(U_2) = Ku_2 = \vec{\varphi}(Ku_1) \quad \forall u_1 \in U_1 \setminus \{\vec{0}\}$$
und $\vec{\varphi}$ ist K-linear und injektiv, also nach 3.23 bijektiv, da $\dim_K U_1 = \dim_K U_2$. $\square$

15.17 σ-lineare Abbildungen von K-Vektorräumen

Sei $\sigma : K \longrightarrow K$ ein *Automorphismus*, d.h. σ ist bijektiv, und es gilt

$$\sigma(a+b) = \sigma(a) + \sigma(b) \quad \text{und} \quad \sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$$

für alle $a, b \in K$. Eine Abbildung $f : V \longrightarrow W$ heißt σ-*linear*, falls gilt

$$\boxed{f(v+v') = f(v) + f(v') \quad \text{und} \quad f(\lambda v) = \sigma(\lambda)\, f(v)}$$

für alle $\lambda \in K$ und $v, v' \in V$.

15.18 Zum Hauptsatz der projektiven Geometrie

In 15.10 haben wir gesehen, dass jede Projektivität eine Kollineation ist. Umgekehrt gilt der

Hauptsatz der projektiven Geometrie

Seien V, W zwei $(n+1)$-dimensionale K-Vektorräume, $n \geq 2$, und sei $\varphi : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ eine Kollineation. Dann gibt es einen Automorphismus $\sigma : K \to K$ und eine σ-lineare bijektive Abbildung

$$\widetilde{\varphi} : V \longrightarrow W \text{ mit } \widetilde{\varphi}(P) = \varphi(P)$$

für alle $P \in \mathbb{P}(V)$. Ist $K = \mathbb{R}$, so ist dies eine Projektivität.

Den Beweis müssen wir hier aus Zeitgründen fortlassen; man findet ihn zum Beispiel in: E. Artin [1], Stuhler [18] oder Fischer [8].

Für $n = 1$ ist der Satz im Allgemeinen falsch, da dann jede bijektive Abbildung eine Kollineation ist. Für $K = \mathbb{R}$ ist die Identität der einzige Automorphismus, daher ist $\widetilde{\varphi}$ stets eine Projektivität für $K = \mathbb{R}$. Analoges gilt für $K = \mathbb{Q}$:

Behauptung Ist σ ein Automorphismus von $\mathbb{Q}$, so ist $\sigma = id$.

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$, also $n = 1 + \ldots + 1$ mit n Summanden. Aus

$$\sigma(1) = \sigma(1 \cdot 1) = \sigma(1)\,\sigma(1)$$

folgt $1 = \sigma(1)$. Daher gilt $\sigma(n) = \sigma(1) + \ldots + \sigma(1) = 1 + \ldots + 1 = n$. Außerdem gilt $\sigma(-n) = -n$, denn $0 = \sigma(0) = \sigma(n + (-n)) = \sigma(n) + \sigma(-n) = n + \sigma(-n)$. Ist $x = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$ mit geeigneten $m, n \in \mathbb{Z}, m \neq 0$. Dann ist $\sigma(x) = \sigma(\frac{n}{m}) = \frac{\sigma(n)}{\sigma(m)} = \frac{n}{m} = x$. □

15.19 Satz von Desargues

Satz.
In einer projektiven Ebene seien zwei Dreiecke in perspektivischer Lage gegeben, d.h. es sind 6 paarweise verschiedene Punkte P_1, P_2, P_3 und P_1', P_2', P_3' gegeben so, dass sich die Verbindungsgeraden $P_1 \vee P_1'$, $P_2 \vee P_2'$ und $P_3 \vee P_3'$ in einem Punkt Q schneiden. Dann liegen die Schnittpunkte

$$A := (P_1 \vee P_2) \cap (P_1' \vee P_2'), B := (P_2 \vee P_3) \cap (P_2' \vee P_3'), C := (P_3 \vee P_1) \cap (P_3' \vee P_1')$$

auf einer Geraden.

Beweis für $\mathbb{P}^2(K)$. Wähle Vektoren $v, v_i, v_i' \in K^3$ für $i = 1, 2, 3$ mit

$$Q = Kv,\ P_i = Kv_i,\ P_i' = Kv_i'$$

Nach Voraussetzung kann man v_i und v_i' so wählen, dass $v = v_1 - v_1' = v_2 - v_2' = v_3 - v_3'$ gilt. Dann folgt

$$\begin{aligned} w_1 &:= v_1 - v_2 = v_1' - v_2' \\ w_2 &:= v_2 - v_3 = v_2' - v_3' \\ w_3 &:= v_1 - v_3 = v_1' - v_3' \end{aligned}$$

Da w_1, w_2, w_3 linear abhängig sind (es ist $w_1 + w_2 - w_3 = \vec{0}$) und $A = Kw_1$, $B = Kw_2$ und $C = Kw_3$ gilt, folgt die Behauptung. □

15.20 Satz von Pappos

Satz.
In einer projektiven Ebene seien zwei verschiedene Geraden g und g' und darauf paarweise verschiedene Punkte $P_1, P_2, P_3 \in g$ und $P_1', P_2', P_3' \in g'$ gegeben. Dann liegen die Schnittpunkte

$$(P_1 \vee P_2') \cap (P_1' \vee P_2),\ (P_2 \vee P_3') \cap (P_2' \vee P_3),\ (P_3 \vee P_1') \cap (P_3' \vee P_1)$$

auf einer Geraden.

Der Beweis geht mit dem Doppelverhältnis. Es sei hier als Übung gelasssen.

15.21 Synthetischer Aufbau der projektiven Geometrie

Definition.
Eine (allgemeine) *projektive Ebene E* ist eine Menge, deren Elemente „Punkte“ genannt werden, und in der gewisse Teilmengen als „Geraden“ ausgezeichnet werden derart, dass gelten

1) Zu je zwei verschiedenen Punkten P, Q gibt es genau eine Gerade

$$g(P, Q) \subset E$$

die P, Q enthält.

2) Zu je zwei Geraden g_1, g_2 in E gibt es genau einen Schnittpunkt $g_1 \cap g_2$.

3) Es gibt vier verschiedene Punkte $P, Q, R, S \in E$, von denen keine drei auf einer Geraden liegen, d.h. es gibt Vierecke in E.

Beispiel.
Sei K ein Schiefkörper, also ein nicht notwendig kommutativer Körper. Dann erfüllt $E = \mathbb{P}(V)$ die Bedingungen 1), 2) und 3), wobei V ein 3-dimensionaler K-Vektorraum ist.

Für eine allgemeine projektive Ebene E gilt genau dann der Satz von Desargues, wenn es einen Schiefkörper K gibt mit $E = \mathbb{P}(V)$ und $\dim_K V = 3$. Und genau dann gilt der Satz von Pappos, wenn K kommutativ ist. Für allgemeine projektive Räume siehe Emil Artin [1].

15.22 Übungsaufgaben 90 – 92

Aufgabe 90.
Man bestimme die Normalform des Kegelschnitts mit der Gleichung

$$4\,x_1^2 + 9\,x_2^2 - 12\,x_1 - 24\,x_2 - 144 = 0$$

und fertige eine Skizze an.

Aufgabe 91.
Man ermittle in den folgenden Fällen, ob die Kurven X und X' projektiv äquivalent sind, und bestimme gegebenenfalls eine entsprechende Projektivität $\varphi : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$:

(a) $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - x^3 = 0\}$ und $X' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x^3 = 0\}$,

(b) $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 5y^2 - 1 = 0\}$ und
$X' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 5x^2 - 1 = 0\}$.

Aufgabe 92.
Sei $f(x, y) = a_{11}\,x^2 + 2\,a_{12}\,x\,y + a_{22}\,y^2 + a_1\,x + a_2\,y - a = 0$ eine Gleichung mit reellen Koeffizienten. Man bestimme die zu $f(x, y)$ gehörige homogene

Gleichung $\bar{f}(x_0, x_1, x_2) = 0$, für die $\bar{f}(1, x, y) = f(x, y)$ gelte, und beweise, dass der Kegelschnitt

$$X := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}$$

genau dann ein Kreis ist, wenn

$$\bar{X} := \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \mid \bar{f}(x_0, x_1, x_2) = 0\}$$

die unendlich ferne Hyperebene $H := \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \mid x_0 = 0\}$ in den Punkten $(0 : i : 1)$ und $(0 : -i : 1)$ schneidet und X nicht ausgeartet ist.

(Man nennt die beiden Punkte $(0 : i : 1)$ und $(0 : -i : 1)$ die *imaginären unendlich fernen Kreispunkte.*)

15.23 Klausur II

1. Sei $A = \begin{pmatrix} a & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & b & 1 \end{pmatrix}$. Man bestimme $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass $-x^3 + x$ das charakteristische Polynom von A wird. Dann bestimme man Eigenwerte und Eigenvektoren von $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, und entscheide, ob f diagonalisierbar ist.

2. Es sei $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Man führe die Hauptachsentransformation von A durch und fertige eine Skizze an.

3. Man bestimme die Normalform des Kegelschnitts mit der Gleichung
$$16\,x_1^2 + 24\,x_1\,x_2 + 9\,x_2^2 + 60\,x_1 - 80\,x_2 = 0$$
und fertige eine Skizze an.

4. Sei D_3 die Diedergruppe der Ordnung 6. Man bestimme alle Untergruppen von D_3 und ermittle, welche davon Normalteiler sind.

5. (a) Seien G, G' zwei additiv geschriebene Gruppen. Man zeige, dass $f(0) = 0$ für jeden Gruppenhomomorphismus $f : G \longrightarrow G'$ gilt.
   (b) Man bestimme alle Gruppenhomomorphismen $\mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/17\,\mathbb{Z}$.

6. Man prüfe, ob die beiden Flächen
$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - zy^2 = 0\}$ und $X' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - yz^2 = 0\}$
projektiv äquivalent sind, und bestimme gegebenenfalls eine entsprechende Projektivität $\varphi : \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.

16 Multilineare Algebra

16.1 Das Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$

Sei $\mathbb{R}^3$ mit dem Standard-Skalarprodukt versehen, und sei

$$\{e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0),\ e_3 = (0,0,1)\}$$

die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$. Schreibe $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ und $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ mit $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ für $i = 1, 2, 3$. Das *Vektorprodukt*

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (\vec{x}, \vec{y}) \longmapsto \vec{x} \times \vec{y}$$

ist definiert durch

$$\boxed{\vec{x} \times \vec{y} = (x_2y_3 - x_3y_2,\ x_3y_1 - x_1y_3,\ x_1y_2 - x_2y_1)}$$

Merkregel Entwickle die folgende „Determinante“ formal nach der 1. Zeile:

$$\begin{aligned}
\vec{x} \times \vec{y} &= \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \\
&= e_1 \det \begin{pmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{pmatrix} - e_2 \det \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{pmatrix} + e_3 \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \\
&= (x_2y_3 - x_3y_2)e_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)e_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)e_3
\end{aligned}$$

Rechenregeln Für $\vec{x},\ \vec{x}',\ \vec{y},\ \vec{y}' \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

1) $(\vec{x} + \vec{x}') \times \vec{y} = \vec{x} \times \vec{y} + \vec{x}' \times \vec{y}$ und $\lambda\vec{x} \times \vec{y} = \lambda(\vec{x} \times \vec{y})$
   $\vec{x} \times (\vec{y} + \vec{y}') = \vec{x} \times \vec{y} + \vec{x} \times \vec{y}'$ und $\vec{x} \times \lambda\vec{y} = \lambda(\vec{x} \times \vec{y})$
   Das Vektorprodukt ist also bilinear.

2) $\vec{x} \times \vec{x} = \vec{0}$

3) $\|\vec{x} \times \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 \cdot \|\vec{y}\|^2 - \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2$ denn:

$$\begin{aligned}
\|\vec{x} \times \vec{y}\|^2 &= (x_2y_3 - x_3y_2)^2 + (x_3y_1 - x_1y_3)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \\
&= x_2^2y_3^2 - 2x_2x_3y_2y_3 + x_3^2y_2^2 + x_3^2y_1^2 \\
&\quad - 2x_1x_3y_1y_3 + x_1^2y_3^2 + x_1^2y_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2 + x_2^2y_1^2 \\
&= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2 \\
&= \|\vec{x}\|^2 \cdot \|\vec{y}\|^2 - \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2
\end{aligned}$$

4) $\vec{x} \times \vec{y} = \vec{0} \underset{3.}{\iff} \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| = |\langle x, y \rangle| \underset{7.9}{\iff} \vec{x}, \vec{y}$ sind linear abhängig

Bemerkung.
2) kann man ersetzen durch 2') $\boxed{\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}}$
denn: $\vec{x} \times \vec{x} = -\vec{x} \times \vec{x} \Longrightarrow \vec{x} \times \vec{x} = \vec{0}$ und umgekehrt:
$\vec{x} \times \vec{x} = \vec{0}\ \forall\, \vec{x} \Longrightarrow \vec{0} = (\vec{x} + \vec{y}) \times (\vec{x} + \vec{y}) \underset{1)}{=} \underbrace{\vec{x} \times \vec{x}}_{=\vec{0}} + \vec{x} \times \vec{y} + \vec{y} \times \vec{x} + \underbrace{\vec{y} \times \vec{y}}_{=\vec{0}}$

16.2 Geometrische Eigenschaften des Vektorprodukts

a) Für $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{z} \rangle = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$$

und also $\langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{x} \rangle = \langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{y} \rangle = 0$. Dies folgt unmittelbar aus den Formeln für die Determinante einer (3×3)-Matrix und für das Standard-Skalarprodukt sowie daraus, dass $\det() = 0$ ist, wenn zwei Zeilen gleich sind. Der Vektor $\vec{x} \times \vec{y}$ steht senkrecht auf $\vec{x}$ und auf $\vec{y}$, wenn $\vec{x}$ und $\vec{y}$ linear unabhängig sind.

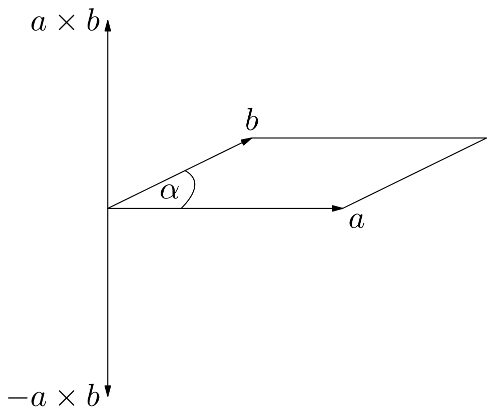

Abbildung 30: Vektorprodukt

b) **Behauptung** Die Länge von $\vec{x} \times \vec{y}$ ist der Flächeninhalt des von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ aufgespannten Parallelogramms, also

$$\|\vec{x} \times \vec{y}\| = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot |\sin \varphi| \quad \text{für} \quad 0 \leq \varphi := \sphericalangle(\vec{x}, \vec{y}) < \pi$$

Beweis. Aus 16.1.3 folgt $\|\vec{x} \times \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 \cdot \|\vec{y}\|^2 - \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2$ und also gilt
$\|\vec{x} \times \vec{y}\|^2 \underset{7.10}{=} \|\vec{x}\|^2 \cdot \|\vec{y}\|^2 \cdot (1 - \cos^2 \varphi) = \|\vec{x}\|^2 \cdot \|\vec{y}\|^2 \cdot \sin^2 \varphi$ □

c) **Orientierung** Seien $\vec{x}, \vec{y}$ linear unabhängig, sei also $\mathcal{B} = \{\vec{x}, \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y}\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$. Es ist $\vec{x} \times \vec{y} = (z_1, z_2, z_3)$ mit $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{R}$ und daher

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \underset{\text{a)}}{=} \langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y} \rangle > 0,$$

da das Skalarprodukt positiv definit ist. Die Basis $\mathcal{B}$ ist also gleich orientiert wie die Standardbasis. Man sagt auch $\vec{x}, \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y}$ bilden ein „positiv orientiertes Dreibein", denn sie liegen im Raum wie Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der rechten Hand.

16.3 Äußere Algebren

Sei $M = \{1, 2, \ldots, n\}$. Dann hat M hat 2^n Teilmengen, die mit

$$\varnothing, M, R, S, T, \ldots$$

bezeichnet seien. Sei A ein K-Vektorraum der Dimension 2^n mit Basiselementen $e_R, e_S, e_T, \ldots$, die den 2^n Teilmengen von M zugeordnet seien. Für $r, s \in \mathbb{Z}$ sei

$$(r, s) := \begin{cases} 0 & \text{falls } r = s \\ 1 & \text{falls } r < s \\ -1 & \text{falls } r > s \end{cases}$$

Sei

$$\boxed{e_R \wedge e_S := \Big(\prod_{r \in R, s \in S} (r, s) \Big) e_{R \cup S} \quad \forall R, S \subset M}$$

(Dabei setzt man $\prod_{r \in R, s \in S} (r, s) = 1$, falls $R = \varnothing$ oder $S = \varnothing$.)
Für $\vec{x} = \sum_{R \subset M} x_R \, e_R$ und $\vec{y} = \sum_{S \subset M} y_S \, e_S$ mit $x_R, y_S \in K$ sei dann

$$\boxed{\vec{x} \wedge \vec{y} = \sum_{R, S \subset M} x_R \, y_S (e_R \wedge e_S)}$$

Man erhält so eine Multiplikation $A \times A \longrightarrow A, (\vec{x}, \vec{y}) \longmapsto \vec{x} \wedge \vec{y}$, genannt *äußere Multiplikation*. Damit ist A eine K-Algebra mit Einselement $e_\varnothing$.
Ist $R \cap S \neq \varnothing$, so ist $\prod_{r \in R, s \in S} (r, s) = 0$. Also gelten

(1) $e_R \wedge e_S = \vec{0}$, falls $R \cap S \neq \varnothing$.

(2) $e_R \wedge e_S = (-1)^{pq} e_S \wedge e_R$ falls $|R| = p$ und $|S| = q$ (Vertauschungsregel).

Beispiele (für $n = 3$).
Es ist $e_{\{1,3\}} \wedge e_{\{2\}} = (1,2)(3,2)e_{\{1,2,3\}} = -e_{\{1,2,3\}}$ und $e_{\{1,3\}} \wedge e_{\{2,3\}} = \vec{0}$
Mit der Schreibweise e_i statt $e_{\{i\}}$ sei

$$\vec{x} = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \text{ und } \vec{y} = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3 \text{ mit } x_i, y_i \in K$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\vec{x} \wedge \vec{y} &\overset{(1)}{=} x_1y_2(e_1 \wedge e_2) + x_1y_3(e_1 \wedge e_3) + x_2y_1(e_2 \wedge e_1)\\ &\quad + x_2y_3(e_2 \wedge e_3) + x_3y_1(e_3 \wedge e_1) + x_3y_2(e_3 \wedge e_2)\\ &= (x_1y_2 - x_2y_1)e_{\{1,2\}} + (x_1y_3 - x_3y_1)e_{\{1,3\}} + (x_2y_3 - x_3y_2)e_{\{2,3\}}.\end{aligned}$$

Die Koeffizienten sind (bis auf Vorzeichen) gerade die Koordinaten von $\vec{x} \times \vec{y}$ aus 16.1, falls $K = \mathbb{R}$ ist. Es folgt $\|\vec{x} \wedge \vec{y}\| = \|\vec{x} \times \vec{y}\|$ für $K = \mathbb{R}$ und die Standardbasis e_1, e_2, e_3 von $\mathbb{R}$.

16.4 Die äußere Algebra eines K-Vektorraums

Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Bette V in einen 2^n-dimensionalen K-Vektorraum A ein und ergänze $\mathcal{B}$ zu einer Basis von A. Die Basiselemente von A seien mit e_R für $R \subset M := \{1, \dots, n\}$ bezeichnet, wobei $e_{\{i\}} = e_i$ zu setzen ist. Wie in 16.3 wird A zu einer K-Algebra gemacht. Man nennt A die *Grassmann-Algebra* oder *äußere Algebra* von V und schreibt $A = \Lambda(V)$.

Beispiel (für $n = 3$).
Dann ist

$$\{e_\varnothing, e_1, e_2, e_3, \underbrace{e_1 \wedge e_2}_{=e_{\{1,2\}}}, \underbrace{e_1 \wedge e_3}_{=e_{\{1,3\}}}, \underbrace{e_2 \wedge e_3}_{=e_{\{2,3\}}}, \underbrace{e_1 \wedge e_2 \wedge e_3}_{=e_{\{1,2,3\}}}\}$$

eine Basis von A (mit $8 = 2^3$ Elementen).

Man kann zeigen, dass die äußere Algebra von V unabhängig von der Wahl der Basis von V ist.

16.5 Zwei Regeln für die äußere Multiplikation von Vektoren

Sei V ein K-Vektorraum mit Basis $(e_1, \dots, e_n)$. Dann gilt für alle $v, w \in V$:

$$v \wedge v = \vec{0} \quad \text{und} \quad v \wedge w = -w \wedge v$$

Beweis. Für $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ mit $\lambda_i \in K$ gilt

$$v \wedge v = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) \wedge \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j\right) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \lambda_i \lambda_j (e_i \wedge e_j) = \vec{0}$$

denn in der Summe gibt es nur Glieder der Form

$$\lambda_i^2 (e_i \wedge e_i) \underset{(1)}{=} \vec{0} \text{ und } \lambda_i \lambda_j (e_i \wedge e_j) + \lambda_j \lambda_i (e_j \wedge e_i) \underset{(2)}{=} \vec{0}$$

Es folgt nun auch die zweite Regel $v \wedge w = -w \wedge v$, denn:

$$\vec{0} = (v+w) \wedge (v+w) = \underbrace{(v \wedge v)}_{=\vec{0}} + (v \wedge w) + (w \wedge v) + \underbrace{(w \wedge w)}_{=\vec{0}}$$

□

16.6 Ein neues Kriterium für lineare Abhängigkeit

Satz.
Für Vektoren $v_1, \ldots, v_p \in V$ gilt:

$$\boxed{v_1 \wedge \ldots \wedge v_p = \vec{0}} \iff \boxed{v_1, \ldots, v_p \textit{ sind linear abhängig}}$$

Beweis.

„$\Longrightarrow$" Sei $v_1 \wedge \ldots \wedge v_p = \vec{0}$. Angenommen $v_1, \ldots, v_p$ sind linear unabhängig (insbesondere $p \leq n$). Ergänze $v_1, \ldots, v_p$ zu einer Basis

$$v_1, \ldots, v_p, v_{p+1}, \ldots, v_n$$

von V. Dann ist $\{v_R \mid R \subset M\}$ mit $v_{\{i\}} = v_i$ eine Basis von $\Lambda(V)$ nach 16.4. Insbesondere ist $v_1 \wedge \ldots \wedge v_p = v_R$ mit $R = \{1, \ldots, p\}$ ein Basiselement von $\Lambda(V)$ und somit $\neq \vec{0}$. Widerspruch!

„$\Longleftarrow$" Seien $v_1, \ldots, v_p$ linear abhängig. Dann ist einer dieser Vektoren eine Linearkombination der übrigen. Da sich bei Vertauschung der Vektoren in $v_1 \wedge \ldots \wedge v_p$ nach 16.5 höchstens das Vorzeichen ändert, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $v_p = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{p-1} v_{p-1}$ mit $\lambda_i \in K$ ist. Hieraus folgt

$$\begin{aligned} v_1 \wedge \ldots \wedge v_p &= (v_1 \wedge \ldots \wedge v_{p-1}) \wedge (\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{p-1} v_{p-1}) \\ &= \lambda_1 (v_1 \wedge \ldots \wedge v_{p-1} \wedge v_1) + \ldots \\ &\quad + \lambda_{p-1} (v_1 \wedge \ldots \wedge v_{p-1} \wedge v_{p-1}) = \vec{0} \end{aligned}$$

nach 16.5, denn in jedem Summanden treten zwei gleiche Faktoren auf.

□

16.7 Ein Kriterium für Untervektorräume

Satz.
Seien $u_1, \ldots, u_p$ linear unabhängige Vektoren in V und $u'_1, \ldots, u'_p \in V$. Es sei U der von $u_1, \ldots, u_p$ erzeugte Untervektorraum von V und U' der von $u'_1, \ldots, u'_p$ erzeugte Untervektorraum von V. Dann gilt:

$$\boxed{U = U'} \iff \boxed{\exists \lambda \in K^* \text{ mit } u_1 \wedge \ldots \wedge u_p = \lambda(u'_1 \wedge \ldots \wedge u'_p)}$$

Beweis.

„$\Longrightarrow$“ Sei $U = U'$. Dann ist $u_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} u'_i$ für $j = 1, \ldots, p$ mit $a_{ij} \in K$. Es folgt

$$u_1 \wedge \ldots \wedge u_p = \sum_{i_1, \ldots, i_p = 1}^{p} a_{i_1 1} \cdots a_{i_p p} (u'_{i_1} \wedge \ldots \wedge u'_{i_p})$$

Nach 16.5 fallen die Summanden weg, bei denen die $i_1, \ldots, i_p$ nicht alle verschieden sind. Wir können also annehmen, dass $(i_1, \ldots, i_p)$ eine Permutation von $(1, \ldots, p)$ ist. Durch Vertauschen der u'_{i_j} folgt nach 16.5, dass

$$u'_{i_1} \wedge \ldots \wedge u'_{i_p} = \varepsilon(u'_1 \wedge \ldots \wedge u'_p)$$

mit $\varepsilon = \pm 1$ gilt. Es folgt

$$u_1 \wedge \ldots \wedge u_p = \lambda(u'_1 \wedge \ldots \wedge u'_p) \text{ mit } \lambda = \varepsilon \sum_{i_1, \ldots, i_p = 1}^{p} a_{i_1 1} \cdots a_{i_p p}$$

„$\Longleftarrow$“ Es ist

$$u_1 \wedge \ldots \wedge u_p \wedge u'_i = \lambda(u'_1 \wedge \ldots \wedge u'_p \wedge x u'_i) \underset{16.5}{=} \vec{0} \quad \forall i = 1, \ldots, p$$

Es sind also $u_1, \ldots, u_p, u'_i$ linear abhängig für alle $i = 1, \ldots, p$ nach 16.6, d.h. es gibt Linearkombinationen

$$\lambda_{1i} u_1 + \ldots + \lambda_{pi} u_p + \mu_i u'_i = \vec{0} \text{ mit } \lambda_{ij}, \mu_i \in K$$

in denen jeweils nicht alle Koeffizienten 0 sind. Da $u_1, \ldots, u_p$ linear unabhängig sind nach Voraussetzung, ist $\mu_i \neq 0$ für $i = 1, \ldots, p$. Es ist also $u'_i \in U$ für alle i und somit $U' \subset U$. Da $u_1, \ldots, u_p$ linear unabhängig sind und $u_1 \wedge \ldots \wedge u_p = \lambda(u'_1 \wedge \ldots \wedge u'_p)$ ist, folgt nach 16.6, dass $u'_1, \ldots, u'_p$ linear unabhängig sind. Also $U' = U$.

□

16.8 Die äußere Potenz $\Lambda^p(V)$

Sei $M := \{1, \ldots, n\}$. Dann hat M genau $\binom{n}{p}$ Teilmengen mit p Elementen $(p \leq n)$.

Definition Sei $\Lambda^p(V)$ der Untervektorraum von $\Lambda(V)$, der von allen e_R mit $R \subset M$ und $|R| = p$ erzeugt wird. Man nennt $\Lambda^p(V)$ die *p-te äußere Potenz von V*.

Bemerkung.
Ist $\{e_1, \ldots, e_n\}$ eine Basis von V, so ist $\{e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p} \mid i_1 < i_2 < \ldots < i_p\}$ eine Basis von $\Lambda^p(V)$, und es ist $\dim_K \Lambda^p(V) = \binom{n}{p}$.

Beispiel.
Sei $n = 4$ und $p = 2$. Dann ist $\binom{n}{p} = \dfrac{4!}{2! \cdot (4-2)!} = 6$ und

$$\{e_1 \wedge e_2,\ e_1 \wedge e_3,\ e_1 \wedge e_4,\ e_2 \wedge e_3,\ e_2 \wedge e_4,\ e_3 \wedge e_4\}$$

ist eine Basis von $\Lambda^2(V)$.

Bemerkung.
Ist $\{e_1, \ldots, e_n\}$ eine Basis von V, so gelten

- $\dim_K \Lambda^0(V) = 1$, und $e_\varnothing$ ist eine Basis von $\Lambda^0(V)$
- $\Lambda^1(V) = V$, und $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ist eine Basis von $\Lambda^1(V)$
- $\dim_K \Lambda^n(V) = 1$, und $\{e_1 \wedge \ldots \wedge e_n\}$ ist eine Basis von $\Lambda^n(V)$
- Es ist $\Lambda(V) = \Lambda^0(V) + \Lambda^1(V) + \ldots + \Lambda^n(V)$ als K-Vektorraum
- Wir setzen $\Lambda^m(V) = 0$ für $m > n$

Man kann zeigen, dass die Konstruktion von $\Lambda^p(V)$ unabhängig von der Wahl der Basis von V ist.

16.9 Fortsetzungssatz

Satz.
Seien V, W zwei endlich-dimensionale K-Vektorräume, und sei $f : V \longrightarrow W$ eine K-lineare Abbildung. Dann gibt es genau einen K-Algebrahomomorphismus $\overline{f} : \Lambda(V) \longrightarrow \Lambda(W)$, der f fortsetzt, d.h. $\overline{f}(v) = f(v)$ für alle $v \in V$. Außerdem gilt $\overline{f}(\Lambda^p(V)) \subseteq \Lambda^p(W)$.

- $\overline{f}(x+y) = \overline{f}(x) + \overline{f}(y)$
- $\overline{f}(x \wedge y) = \overline{f}(x) \wedge \overline{f}(y)$
- $\overline{f}(e_\varnothing) = 1_{\Lambda(W)}$

für alle $x, y \in \Lambda(V)$)

Zum Beweis. Sei $\{e_1, \ldots, e_n\}$ eine Basis von V und sei $R = \{i_1, \ldots, i_p\}$ eine Teilmenge von $M = \{1, \ldots, n\}$ mit $i_1 < \ldots < i_p \le n$. Dann bilden die $e_R = e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}$ zusammen mit $e_\varnothing$ eine Basis von $\Lambda(V)$. Durch

$$\overline{f}(e_\varnothing) = 1_{\Lambda(W)} \text{ und } \overline{f}(e_R) = f(e_{i_1}) \wedge \ldots \wedge f(e_{i_p})$$

wird eine K-lineare Abbildung $\overline{f} : \Lambda(V) \longrightarrow \Lambda(W)$ erklärt, die f fortsetzt. Man zeigt nun, dass $\overline{f}$ ein K-Algebrahomomorphismus ist, und die übrigen Behauptungen. □

16.10 Die Determinante

Sei V ein K-Vektorraum mit Basis $\{e_1, \ldots, e_n\}$, dann ist $\{e_1 \wedge \ldots \wedge e_n\}$ eine Basis des 1-dimensionalen K-Vektorraums $\Lambda^n(V)$. Sei $f : V \longrightarrow V$ eine K-lineare Abbildung. Nach 16.9 gibt es dann ein wohlbestimmtes Element $\det(f) \in K$ so, dass für $\overline{f} : \Lambda^n(V) \longrightarrow \Lambda^n(V)$ gilt

$$\overline{f}(e_1 \wedge \ldots \wedge e_n) = \det(f)\, e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$$

Für beliebige Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ ist $v_1 \wedge \ldots \wedge v_n \in \Lambda^n(V)$ und es ist $\overline{f}(v_1 \wedge \ldots \wedge v_n) = f(v_1) \wedge \ldots \wedge f(v_n)$. Also

$$\boxed{\det(f) v_1 \wedge \ldots \wedge v_n = f(v_1) \wedge \ldots \wedge f(v_n)}$$

Es ist $\det(f)$ die Determinante von f.

Satz (Multiplikationssatz).
Für $f, g \in End_K(V)$ gilt $\det(f \circ g) = \det f \cdot \det g$.

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}
\det(f \circ g)(e_1 \wedge \ldots \wedge e_n) &= (f \circ g)e_1 \wedge \ldots \wedge (f \circ g)e_n \\
&= f(g(e_1)) \wedge \ldots \wedge f(g(e_n)) \\
&= \det f \cdot (g(e_1) \wedge \ldots \wedge g(e_n)) \\
&= \det f \cdot \det g \cdot (e_1 \wedge \ldots \wedge e_n)
\end{aligned}$$

□

17 Literaturverzeichnis

[1] Artin, Emil: *Analytische Geometrie und Algebra I, II.* Vorlesungen an der Universität Hamburg, 1960/61. Teil I ausgearbeitet von H. Behncke und W. Hansen, Teil II ausgearbeitet von H. Kiendl und W. Hansen.

[2] Artin, Michael: *Algebra.* Birkhäuser, 1998.

[3] Artmann, Benno: *Lineare Algebra.* Birkhäuser Skripten, 1991.

[4] Beutelspacher, Albrecht: *Lineare Algebra.* vieweg, 1998.

[5] Brieskorn, E. und H. Knörrer: *Ebene algebraische Kurven.* Birkhäuser, 1981.

[6] Dieck, Tammo tom: *Lineare Algebra.* Mathematisches Institut der Universität Göttingen, 1995.

[7] Fischer, Gerd: *Lineare Algebra.* vieweg, 1997.

[8] Fischer, Gerd: *Analytische Geometrie.* vieweg, 1998.

[9] Fischer, H. und H. Kaul: *Mathematik für Physiker.* Teubner, 1988.

[10] Jänich, Klaus: *Lineare Algebra.* Springer Verlag, 1981.

[11] Kersten, Ina: *Algebra-Vorlesung.* Mathematisches Institut der Universität Göttingen, 2000/01.

[12] Lang, Serge: *Linear Algebra.* Addison-Wesley, 1977.

[13] Lenz, H. und E. Witt: *Euklidische Kongruenzsätze in metrischen Vektorräumen (1957).* In: *Ernst Witt: Gesammelte Abhandlungen, 27-32.* Springer, 1998.

[14] Maus, Eckhart: *Analytische Geometrie und Lineare Algebra I.* Mathematisches Institut der Universität Göttingen, 1992.

[15] Maus, Eckhart: *Analytische Geometrie und Lineare Algebra II.* Mathematisches Institut der Universität Göttingen, 1997.

[16] Smith, Larry: *Linear Algebra.* Springer, Zweite Auflage, 1984.

[17] Stoppel, H. und B. Griese: *Übungsbuch zur Linearen Algebra.* vieweg, 1998.

[18] Stuhler, Ulrich: *Analytische Geometrie und Lineare Algebra II.* Mathematisches Institut der Universität Göttingen, 1999.

18 Index