Physik II, RWTH, SS 2002, T.Hebbeker

16-Jul-2002

Skriptteil 1

WWW ('Physlets' der Uni Kaiserslautern):
http://fips-server.physik.uni-kl.de/medienserver/html/index.html

Nachdenken/Nachlesen:
Elektrisches Feld der Erde: ca 130 V/m
Influenzmaschine

Mitbringsel:
Bernstein, 'Blitzgerät', 1F-Kondensator

Elektromagnetische Wechselwirkungen bestimmen unser Leben entscheidend: Zusammenhalt von Atomen und Stoffen, Chemie, Licht, Technik, ...

1. Elektrostatik

1.1. Elektrische Ladung(en)

Die Ladungsmenge bezeichnen wir mit Q oder q.

• Geschichte: Entdeckung: Griechenland, Antike: Reibungselektrizität: Elektron (gr.) = Bernstein (dt.) = amber (engl.) lädt sich bei Reibung mit Stoff negativ auf. Nachweis der Ladung: Anziehen von Federn, Strohhalmen etc.

J.J. Thomson 1897: entdeckte Elektron, nannte die Ladung ‘Elektron’; heute: ‘Elektron’ bezeichnet das negativ geladene Elementarteilchen selbst.

● Nachweis Elektrizität: Reibung . . .

VERSUCH 4.1.1: Reibungselektrizität

- Ladungen werden beim Reiben getrennt.

FRAGE: SIND DIE FEDERN/PAPIERSCHNITZEL AUCH GELADEN ?

Anwendung: über Teppichboden hin- und herlaufen . . .

Anwendung: Pullover im Dunkeln ausziehen: kleine Funken; Haare sträuben sich.

Anwendung: Photokopierer/Laserdrucker: Tonerpartikel sammeln sich an Stellen elektrischer Aufladung auf Trommel

● Phänomenologie:

- Es gibt negative und positive Ladungen. B. Franklin: Seide/Glasstab = -/+.

- Ladung immer an massive Objekte/Teilchen gebunden.

- Zwischen Ladungen herrschen Kräfte: gleichnamige Ladungen stoßen sich ab und entgegengesetzte ziehen sich an. (Nur durch die Kräfte können wir die Ladungen erkennen!)

- Die Reichweite der Kräfte ist unendlich groß.

- Ladungen sind additiv.
Insbesondere: positive und negative Ladungen (am gleichen Ort) kompensieren sich:

$$K \sim |Q^+| - |Q^-| \tag{1}$$

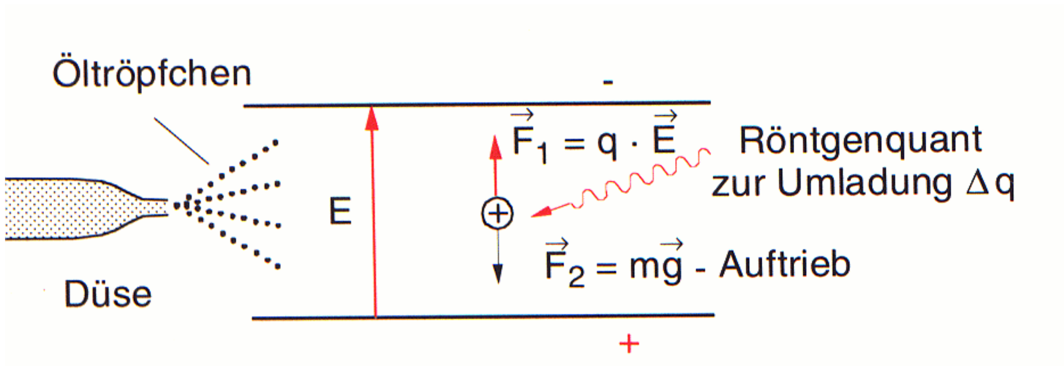
(Superposition der Felder): nur ‘Nettoladung’ zählt.
Materie: Elektronen leicht verschiebbar/abtrennbar (Reibungselektrizität!). Negativ geladen: Elektronenüberschuss; positiv geladen: Protonenüberschuss = Elektronenmangel.

- Ladung ist gequantelt (bis heute unverstanden!):
kleinste im Experiment direkt beobachtbare Ladung: ‘Elementarladung’:

$$e = 1.60217733(49) \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \tag{2}$$

(C = Coulomb, s.u.);
Beispiele:
Elektron: $Q = -e$; Positron (Antiteilchen): $Q = e$.
Proton: $Q = e$.
Quarks: $Q = \pm 1/3, \pm 2/3$, aber nicht als freie Teilchen beobachtbar.
Makroskopische Phänomene: sehr viele Ladungen $\longrightarrow$ quasi kontinuierliche Ladungsverteilungen!

VERSUCH 4.1.2: Millikan-Versuch (R.C. Millikan, 1907)



Ladung wird bestimmt aus der kompensierenden Gravitationskraft. Tröpfchengröße wird vorher aus 'Fallgeschwindigkeit' bestimmt (Stokessche Reibung): ÜBUNG!

- Atome (im Grundzustand) und unsere materielle Umgebung sind elektrisch neutral:
$N_e = N_p$, $Q_p + Q_e = 0$: Experimentell mit einer Genauigkeit von 10^{-21} überprüft. (SF_6-Atomstrahl in elektrostatischem Feld). Unverstanden!

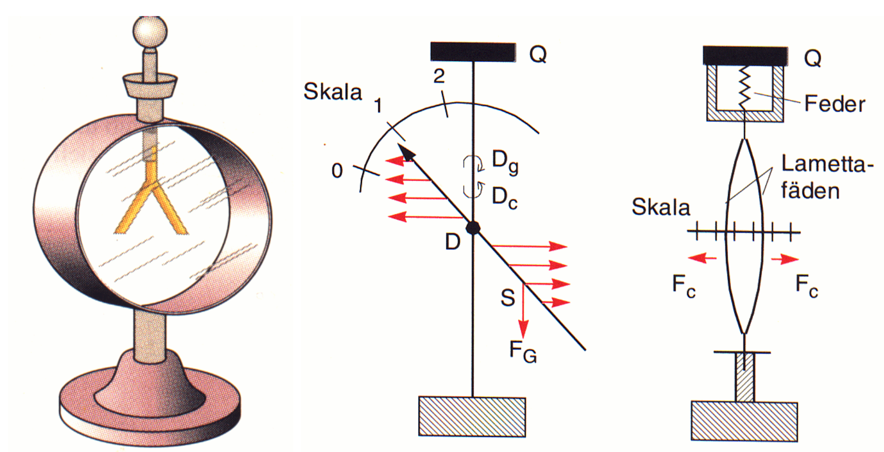
- Erhaltungsgröße: Abgeschlossenes System:

$$\boxed{\sum Q_i = const} \tag{3}$$

Beispiel: Plastikstab und Fell: zunächst $Q_P = Q_F = 0$. Reiben: $Q_P = -10^{-9}\,\mathrm{C} = -Q_F$

● Messung (großer) elektrischer Ladungen (nur Betrag!):

Elektrometer: gleichnamig geladene Metalle stoßen sich ab.



VERSUCH 4.1.3: Elektrometer

● Einheit der elektrischen Ladung[1]:

$$\mathrm{Coulomb} = \mathrm{C} = \mathrm{As} \quad , \tag{4}$$

[1] Man beachte: Man könnte die Ladung auch direkt über ihre elektrostatische Kraftwirkung definieren, aber dieser Weg wird im SI nicht beschritten.

wird definiert über den elektrischen Strom[2] $\boldsymbol{I}$ der Einheit Ampere = $\mathbf{A}$ (spätere Vorlesung):

$$\boldsymbol{Q = \int I dt} \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{I = \dot{Q}} \tag{5}$$

● Vergleich mit anderen Kräften/Wechselwirkungen:

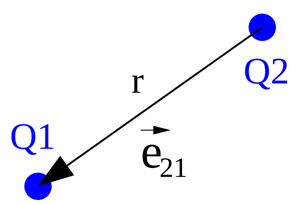
- Gravitation: Gravitationsladung = schwere Masse; macht sich unabhängig von Kraftwirkung auch als träge Masse bemerkbar! Nur ein Vorzeichen!
- schwache Wechselwirkung: schwache Ladung; da nur endliche Reichweite nicht unmittelbar erfahrbar.
- starke Wechselwirkung: ‘Farb’-Ladung; endliche Reichweite.
- Magnetismus: es gibt **keine** Punktladungen (‘magnetische Monopole’)!

Ladungen sind a) Erhaltungsgrößen und b) Ursache von Kräften!

1.2. Coulomb-Gesetz

Wir betrachten ruhende Ladungen!

Charles Coulomb fand Ende des 18. Jahrhunderts das nach ihm benannte Coulombgesetz der elektrostatischen Kräfte zwischen zwei Punktladungen $\boldsymbol{Q_1}$ und $\boldsymbol{Q_2}$ im Abstand $\boldsymbol{r}$.



Die Kraft auf Teilchen 1 ist

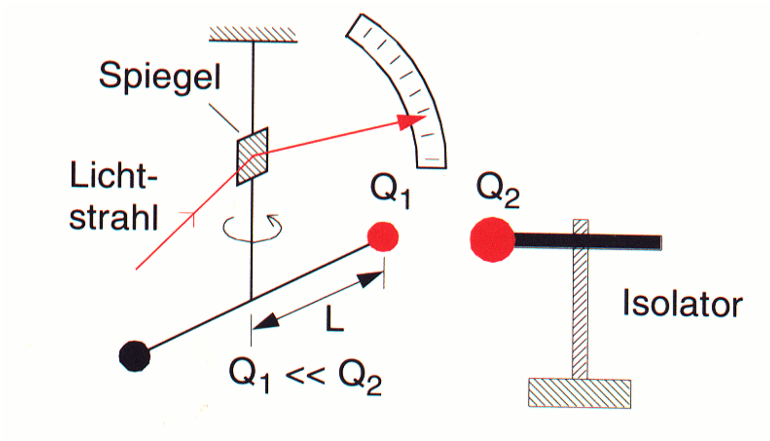
$$\boxed{\vec{K}_1 = k \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \cdot \vec{e}_{21}} \tag{6}$$

mit dem von 2 nach 1 weisenden Einheitsvektor $\vec{e}_{21}$.

Man beachte die Ähnlichkeit mit dem Gravitationsgesetz!

Coulomb bestimmte die Abhängigkeiten mit Hilfe einer Drehwaage, ähnlich der von Cavendish im Zusammenhang mit dem Gravitationsgesetz benutzten.

[2] und dieser über seine Kraftwirkung



Mit der Definition der Einheit der elektrischen Ladung liegt die Proportionalitätskonstante k fest. Messungen ergeben

$$k = +8.99 \cdot 10^9 \,\mathrm{Nm^2/C^2} \tag{7}$$

Man schreibt sie meist in anderer Form, deren Vorteil später klar wird:

$$k = \tfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \tag{8}$$

mit der Dielektrizitätskonstanten (auch: elektrische Feldkonstante, Influenzkonstante)

$$\epsilon_0 = 8.854187817 \cdot 10^{-12} \,\tfrac{\mathrm{C^2}}{\mathrm{Nm^2}} \tag{9}$$

Der Index 0 deutet an, dass dieser Wert nur für Vakuum (als 'Medium' zwischen den Ladungen) gültig ist. Man kennt ϵ_0 deshalb so genau, weil man es aus der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ausrechnen kann, s. später[3].

VERSUCH 4.1.4: Coulomb-Waage

Es gilt das Superpositionsprinzip, d.h. man findet, dass die von mehreren Punktladungen Q_i (i = 2 $\ldots$ n) auf eine Ladung Q_1 ausgeübten Kräfte sich vektoriell addieren:

$$\boxed{\vec{K}_1 = \sum_{i=2}^{n} \vec{K}_i = k \cdot Q_1 \cdot \sum_{i=2}^{n} \frac{Q_i}{r_{1i}^2} \cdot \vec{e}_{i1}} \tag{10}$$

1.3. Elektrisches Feld

Letztere Gleichung legt nahe, analog zum Gravitationsfeld das elektrische Feld $\vec{E}$ einzuführen durch

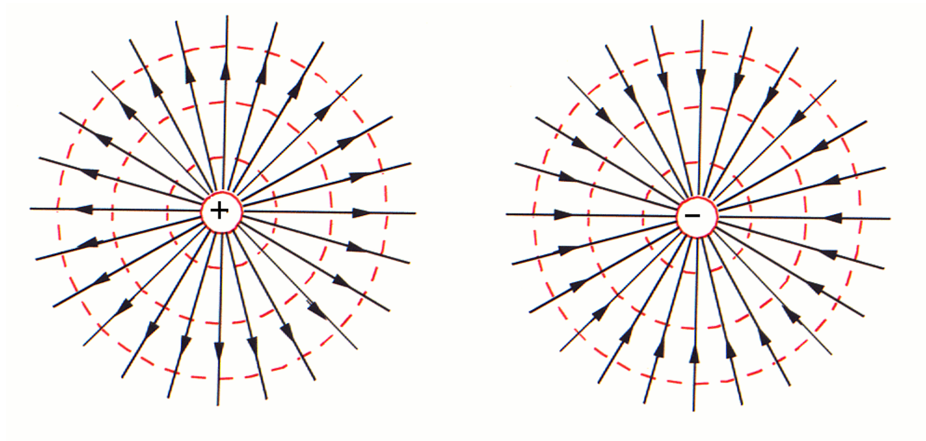
$$\boxed{\vec{K}(\vec{r}) = Q \cdot \vec{E}(\vec{r}) \qquad D} \tag{11}$$

wobei Q eine punktförmige 'Probeladung' am Ort $\vec{r}$ ist und $\vec{K}$ die auf Q wirkende Kraft. Das Feld beschreibt also die durch die felderzeugenden Ladungen bewirkte Raumeigenschaft.

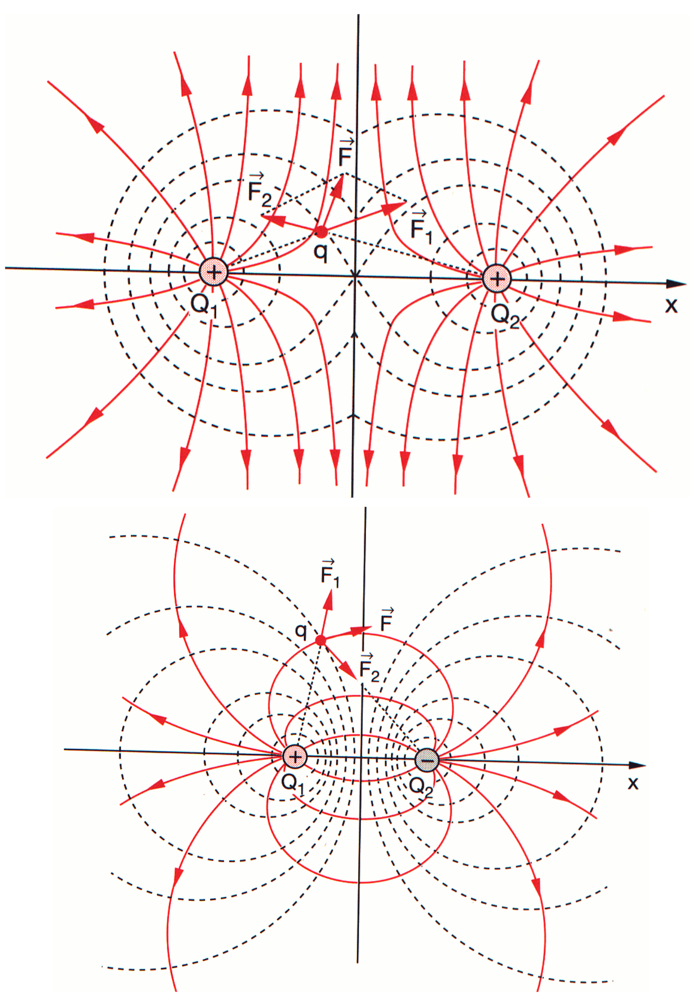
[3] Beachte: Im SI wird die Längenheit, die ja auch im Coulomb-Gesetz auftaucht, über die Lichtgeschwindigkeit definiert!

Man kann die Stärke und Richtung von elektrischen Feldern durch Feldlinien veranschaulichen. Deren räumliche Dichte ist ein Maß für den Betrag der Feldstärke. Die Richtung von Kraft bzw. Feldstärke in einem Punkt ist tangential zur Feldlinie durch diesen Punkt. Feldlinien weisen von '+' nach '-'.

Monopolfeld:



Dipolfeld:



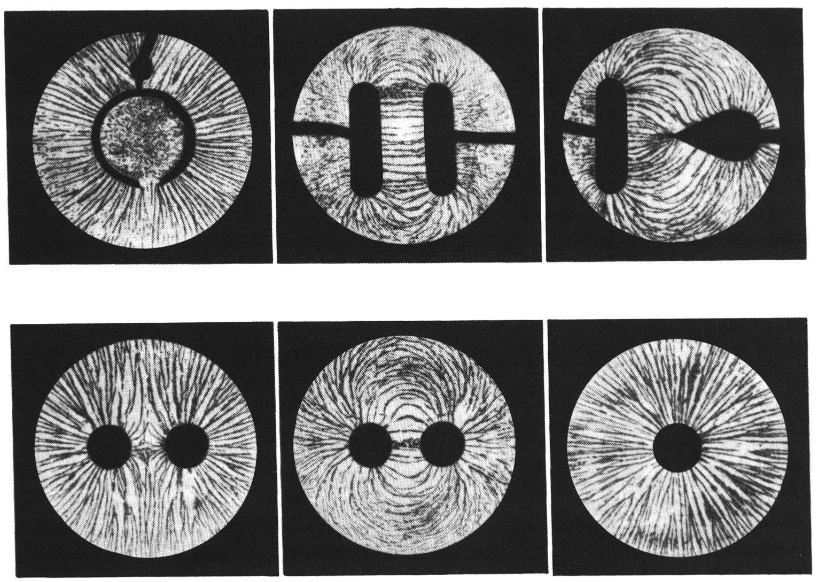
Entsprechend gibt es Quadrupolfelder etc.

SIMULATION: Elektrisches Feld

Winfunktion Physik

Man kann den Feldlinienverlauf sichtbar machen durch winzige elektrische Dipole (s.unten), die sich in einem Feld ausrichten:

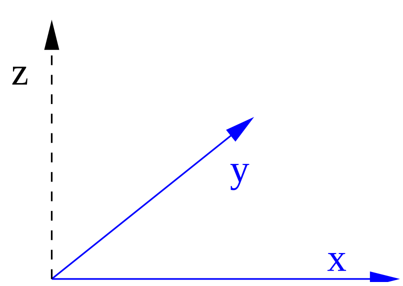
VERSUCH 4.2.1: Elektrische Feldlinien.
Vorsicht: Liniendichte hier kein Maß für Feldstärke!



Im Prinzip kann man also für beliebige Ladungsverteilungen (diskrete Punktladungen und 'kontinuierliche' Verteilungen) die Feldstärken ausrechnen.

Beispiel:

Unendlich ausgedehnte Leiterplatte in $x - y$-Ebene mit konstanter Flächenladungsdichte σ (Ladung/Fläche):



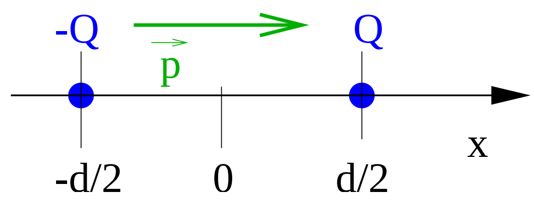
$$\begin{aligned} \vec{E} &= +\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{e}_z \quad z > 0 \\ &= -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{e}_z \quad z < 0 \end{aligned} \tag{12}$$

Herleitung: ÜBUNG!

Beispiel:

Dipolfeld in großem Abstand entlang der Dipolachse:

Ladungen $-Q$ *und* $+Q$ *auf der x-Achse mit Koordinaten* $-d/2$ *und* $d/2$.



Aus Symmetriegründen gibt es auf der x-Achse nur eine Feldkomponente entlang $\vec{e}_x$*:*

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[\frac{-Q}{(x+d/2)^2} + \frac{Q}{(x-d/2)^2}\right] \quad (13)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2\,d\,x}{(x^2-(d/2)^2)^2} \quad (14)$$

$$\approx \frac{2\,Q\,d}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{x^3} \quad (15)$$

Mit dem elektrischen Dipolmoment

$$\vec{p} = Q\,d\,\vec{e}_x = Q\,\vec{d} \quad (16)$$

(Vektor zeigt von '-' nach '+') kann man für das Feld auf der Dipolachse schreiben:

$$\vec{E} \approx \tfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \tfrac{2\vec{p}}{x^3} \quad (17)$$

Das Feld fällt also stärker ab als bei einer Punktladung (3. Potenz statt 2. Potenz)

FRAGE: 'DIPOL' MIT BETRAGSMAESSIG UNGLEICHEN LADUNGEN ?

Später werden wir die tiefere Bedeutung des Feldbegriffs verstehen (elektromagnetische Wellen).

1.4. Elektrisches Potential und elektrische Spannung

Das elektrische Feld ist wie das Gravitationsfeld konservativ, d.h. die beim Verschieben einer Ladung erforderliche Arbeit ist wegunabhängig. Dies folgt aus der gleichen Form der Kraftgesetze.

Deshalb kann man - in Analogie zur Gravitation - ein elektrostatisches Potential definieren durch

$$\boxed{\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{x}) \qquad D} \quad (18)$$

$\vec{\nabla} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ ist der Gradient. Das Vorzeichen ist Konvention!

Punktladung (Bezugspunkt = ∞):

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r} \tag{19}$$

Potentialdifferenzen bezeichnet man als elektrische Spannung U:

$$U_{21} = \phi(2) - \phi(1) = -\int_1^2 \vec{E}\, d\vec{r} \tag{20}$$

ist die Spannung des Punktes 2 gegenüber Punkt 1. Die Einheit hat den Namen Volt (nach A. Volta):

$$\text{Volt} = \text{V} = \text{J}/\text{C} \tag{21}$$

Bei Durchlaufen einer Spannung U von 1 nach 2 ändert sich die elektrostatische potentielle Energie einer Punktladung um

$$\Delta E_{pot} = Q\,\phi(2) - Q\phi(1) = Q\,U_{21} = -\int_1^2 \vec{K}\, d\vec{r} \tag{22}$$

In der Mikrophysik häufig benutzte Einheit:

$$\text{eV} = 1.60 \cdot 10^{-19}\,\text{J} \tag{23}$$

= Energie die Elektron ‘gewinnt’ beim Durchlaufen einer Spannungsdifferenz von $1\,\text{V}$.

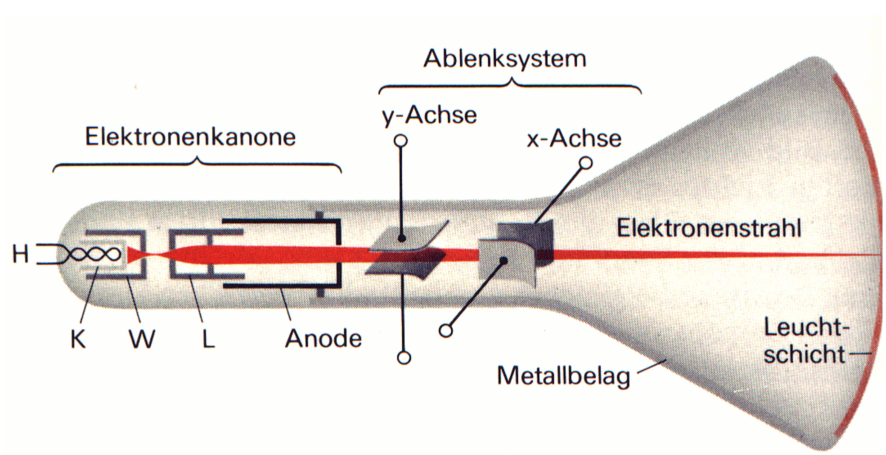
Äquipotentialflächen verlaufen senkrecht zu den Feldlinien, siehe obige Abbildungen.

1.6. Elektrische Ladungen in elektrischen Feldern

Einzelne Ladungen werden mit der Kraft $\vec{K} = Q\vec{E}$ beschleunigt: $\vec{K} = m\vec{a}$.
Der resultierende Bewegungsablauf hängt nur vom Verhältnis Q/m ab.

Anwendung:

Kathodenstrahlröhre

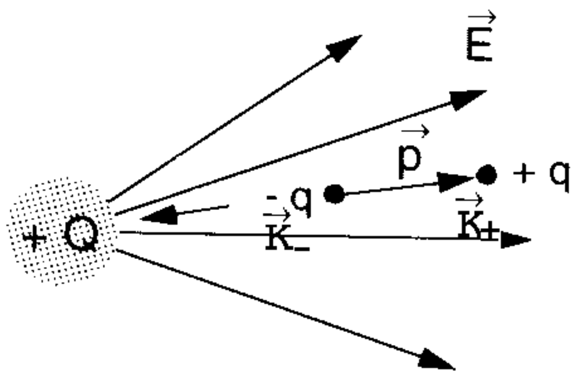


VERSUCH 4.2.2: Kathodenstrahlröhre

VERSUCH 4.2.3: Kugel bewegt sich zwischen Kondensatorplatten

Auch ein elektrischer Dipol wird beschleunigt, sofern das Feld nicht homogen ist.

Beispiel:



$$\vec{K} = \vec{K}_- + \vec{K}_+ = (-q)\vec{E}(\vec{r}) + q\,\vec{E}(\vec{r}+\vec{d}) \approx q\,(\vec{d}\cdot\vec{\nabla})\vec{E} = (\vec{p}\cdot\vec{\nabla})\vec{E} \tag{24}$$

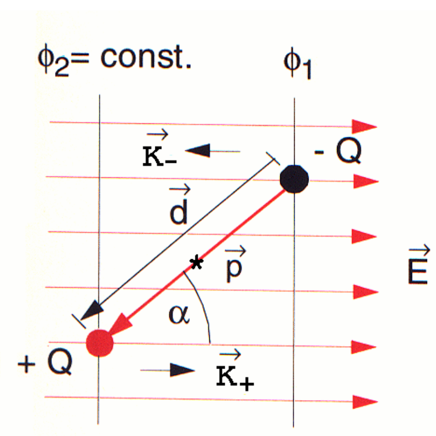
In Komponenten:

$$K_x \approx (p_x\,\tfrac{\partial}{\partial x} + p_y\,\tfrac{\partial}{\partial y} + p_z\,\tfrac{\partial}{\partial z})E_x \tag{25}$$

Herleitung = Reihenentwicklung:

$$E_x(\vec{r}+\vec{d}) \approx E_x(\vec{r}) + \tfrac{\partial E_x}{\partial x}\,d_x + \tfrac{\partial E_x}{\partial y}\,d_y + \tfrac{\partial E_x}{\partial z}\,d_z \tag{26}$$

Zusätzlich tritt ein Drehmoment auf. Im homogenen Feld:



$$\vec{M} = \tfrac{\vec{d}}{2}\times\vec{K}_+ + (-\tfrac{\vec{d}}{2}\times\vec{K}_-) = 2\cdot\tfrac{\vec{d}}{2}\times\vec{K}_+ = \vec{p}\times\vec{E} \tag{27}$$

bezüglich des Mittelpunktes.
Die potentielle Energie des Dipols ist

$$E_{pot} = Q\,\phi_2 + (-Q)\,\phi_1 = Q \cdot (\phi_2 - \phi_1) = Q\ \cdot (-\vec{d} \cdot \vec{E}) = -\vec{p} \cdot \vec{E} \tag{28}$$

Das Drehmoment versucht, den Dipol entlang der Feldlinien auszurichten.

1.6. Quellen und Senken des Feldes; Wirbel des Feldes

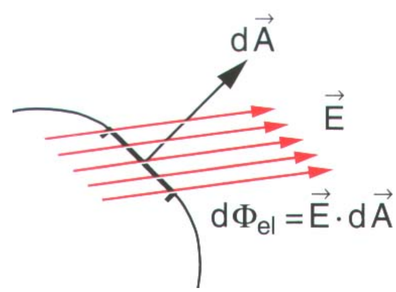
Aus der Gleichung für die Feldstärke einer Punktladung

$$\vec{E} = k \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \vec{e}_r \tag{29}$$

($\vec{e}_r$ weist radial von Q nach außen): folgt qualitativ: Eine positive (negative) Ladung ist Quelle (Senke) des elektrischen Feldes, s. auch Feldlinienbilder.

Quantitativ: Wir nutzen den Gaußschen Satz, angewandt auf den elektrischen Fluss Φ durch eine Fläche A:

$$\boxed{\Phi = \oint_A \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} \qquad D} \tag{30}$$



Der Gaußsche Satz ($\longrightarrow$ Mathematik) setzt den Fluss durch eine **geschlossene** Oberfläche A in Beziehung zu einem Integral über das eingeschlossene Volumen V:

$$\boxed{\oint_A \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{A} = \int_V \vec{\nabla}\vec{E}\,\mathrm{d}V \qquad M} \tag{31}$$

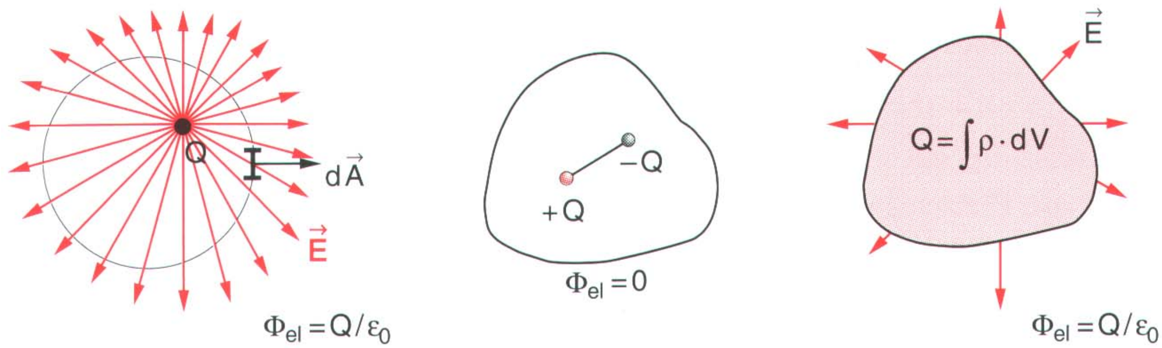
Der Integrand ist die Divergenz von E, also $\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$

Für eine Punktladung Q kann man den Fluss über eine geschlossene Kugeloberfläche direkt ausrechnen:

$$\Phi = k\,Q \cdot \oint_A \frac{\vec{e_r}}{r^2}\,\mathrm{d}\vec{A} = k\,Q\,\frac{1}{r^2} \cdot 4\,\pi\,r^2 = 4\,\pi\,k\,Q = \frac{Q}{\epsilon_0} \tag{32}$$

Andererseits kann man die eingeschlossene Ladung darstellen durch das Integral über die Volumenladungsdichte ρ:

$$Q = \int_V \rho\,dV \tag{33}$$



Also, mit Gauß:

$$\frac{1}{\epsilon_0} \cdot \int_V \rho \, dV = \frac{Q}{\epsilon_0} = \Phi = \oint_A \vec{E} \, d\vec{A} = \int_V \vec{\nabla} \vec{E} \, dV \tag{34}$$

Man kann die Integranden identifizieren und zeigen, dass allgemein gilt:

$$\boxed{\vec{\nabla} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}} \tag{35}$$

Dies ist die 1. Maxwell-Gleichung: 'Quellen des E-Feldes sind die Ladungen.' Man kann aus dieser u.a. das Feld einer Punktladung berechnen.

Schließlich kann man noch das Potential einsetzen und erhält die Poissongleichung:

$$\boxed{\Delta \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}} \tag{36}$$

mit dem Laplaceoperator

$$\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{37}$$

Anwendungen: Theorievorlesungen ...

Aus den Feldlinienbildern ersieht man, dass die Linien immer von einer Ladung ausgehend auf einer anderen (bzw. im Unendlichen) enden. Es gibt also keine geschlossenen Feldlinien, es gibt keine Wirbel: das elektrostatische Feld ist wirbelfrei.

Mathematisch wird das ausgedrückt durch die Rotation:

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}} \tag{38}$$

Das ist die 2. Maxwell-Gleichung (in vorläufiger Fassung, bei Abwesenheit von Magnetfeldern): 'Das elektrostatische Feld ist wirbelfrei'. Wir kommen später darauf zurück.

In Komponenten:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \left(\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y}, \ldots, \ldots\right) \tag{39}$$

1.7. Elektrische Leiter in elektrischen Feldern

Bisher haben wir das Verhalten einzelner Ladungen und Dipole in einem statischen E-Feld betrachtet.

Jetzt geht es um Festkörper mit einer Vielzahl mikroskopischer Einzelladungen.

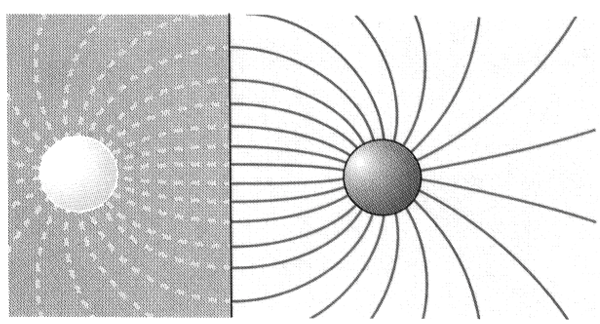
Während in Nichtleitern die Elektronen fest elektrostatisch an den Kern gebunden sind, gibt es in einem idealen Leiter viele frei verschiebbare Ladungsträger.

Für viele Metalle ist dies sehr gut realisiert: die äußeren Elektronen sind nicht an einen Kern gebunden, sondern können sich im gesamten Festkörper frei bewegen.

Konsequenzen:

- Das Metallinnere ist im elektrostatischen Gleichgewicht (stellt sich sehr schnell ein) feldfrei (sonst Bewegung!)[4].
- Ladungen sitzen auf den Oberflächen: zusätzliche (in Bezug auf die im neutralen Metall vorhandenen) Elektronen (negativ) oder fehlende Elektronen (positiv). Dies folgt aus $\rho \sim \vec{\nabla}\vec{E}$.
- Die Feldstärke steht senkrecht auf der Oberfläche (Tangentialkomponente $\longrightarrow$ Bewegung!): $\vec{E} = \vec{E}_\perp$. An der Oberfläche ist $\vec{E}(\vec{x})$ unstetig!
- Metalloberflächen sind Äquipotentialflächen (Änderung von ϕ entlang der Oberfläche ist $\sim \vec{E}_{||} \cdot \Delta\vec{x} = 0$). Das Potential ist stetig!

Beispiel: Ladung vor Metallplatte.



Feldlinienverlauf im Vakuum so, als ob es eine zweite entgegengesetzte 'Spiegelladung' gäbe; Methode zur Berechnung des Feldes!

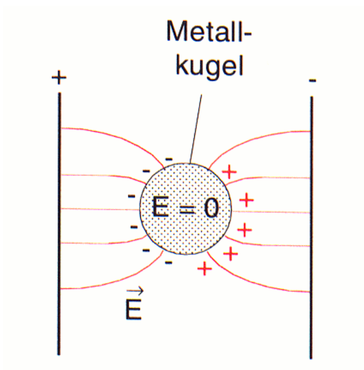
Beachte: Ladungen sitzen nur auf Oberfläche!

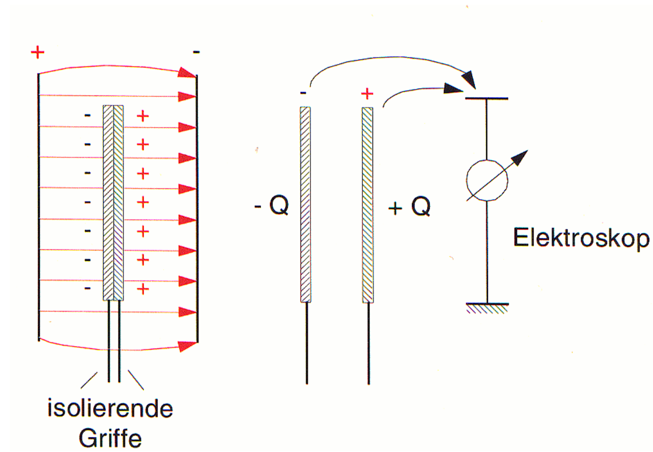
1.7.1. Influenz

Bringt man ein Metall in ein $\vec{E}$-Feld, arrangieren sich die Elektronen so, dass das Innere feldfrei bleibt: Influenz.

Beispiel: Metallkugel und Leiterplatten im Plattenkondensator

[4] Dieses Argument setzt voraus, dass genügend viele Ladungsträger vorhanden sind - ist das realistisch ?





VERSUCH 4.1.3: Influenz

am besten Stab per Reibung aufladen

VERSUCH 4.2.4: Doppelplatten im Kondensator

SIMULATION: Ladungen

Albert; N = 40 Teilchen, q klein

1.7.2. Feldstärke an Metalloberflächen

Während das Potential auf der Oberfläche konstant ist, hängt die Feldstärke vom lokalen Krümmungsradius ab!

Beispiel: geladene Metallkugel mit Radius $\boldsymbol{R}$*.*

Gesamtladung $\boldsymbol{Q}$*. Konstante Oberflächenladungsdichte*

$$\boldsymbol{\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}} \tag{40}$$

Gaußscher Satz und Symmetrie:

$$\boldsymbol{Q = \epsilon_0 \oint \vec{E}\, d\vec{A} = E \cdot 4\pi\, \epsilon_0\, R^2} \tag{41}$$

Also

$$\boldsymbol{E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{R^2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}} \tag{42}$$

Das ist die Feldstärke einer Punktladung (außerhalb!). Die Beziehung

$$\boldsymbol{E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}} \tag{43}$$

gilt ganz allgemein auf einer Metalloberfläche[5]*. Je größer die Kugel desto kleiner die Feldstärke auf der Kugeloberfläche (bei fester Gesamtladung)!*

Für das Potential gilt:

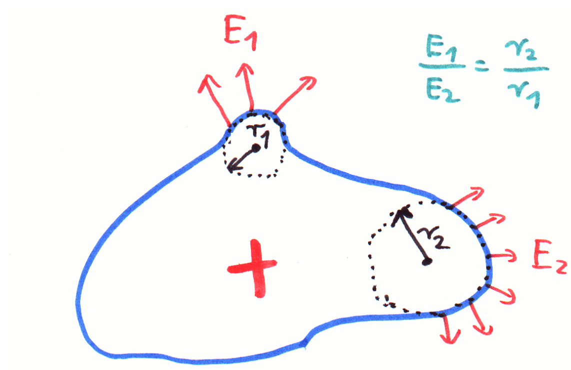
$$\boldsymbol{\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{R} = \frac{\sigma\, R}{\epsilon_0} = E \cdot R} \tag{44}$$

[5] Wieso tritt hier nicht der gleiche Faktor 1/2 auf wie in Gleichung (12) ?

Man kann dies verallgemeinern: Auf einer beliebig geformten Oberfläche sind Potential, Ladungsdichte und Feldstärke gegeben durch:

$$\boxed{\phi = const \qquad \sigma \approx \epsilon_0 \frac{\phi}{r} \qquad E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \approx \frac{\phi}{r}} \tag{45}$$

mit dem lokalen Krümmungsradius r (positiv, in zwei Dimensionen!).



Der Zusammenhang zwischen $\vec{E}$ und ϕ ist hier nur eine grobe Abschätzung; je 'kugeliger' die Oberfläche, desto besser ist die Näherung!

An Spitzen (r klein) treten also sehr hohe Feldstärken auf: Spitzeneffekt. Im Extremfall wird die Luft ionisiert und/oder es werden Elektronen aus der Oberfläche emittiert.

Beispiel:

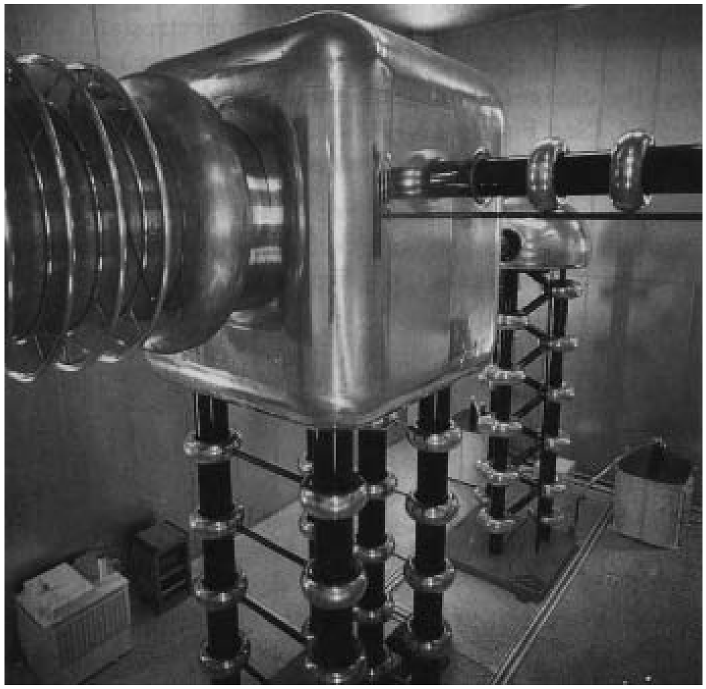
Blitzableiter

VERSUCH 4.2.5: Blitze

VERSUCH 4.2.8: Sprührad

Beispiel:

Hochspannung führende Teile: glatte Oberflächen!



1.7.3. Faraday-Käfig und ähnliche Effekte

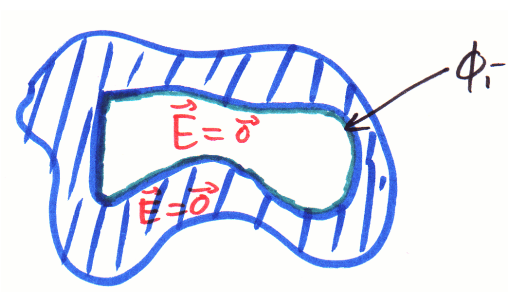
Im Inneren eines Hohlleiters (ladungsfrei) verschwindet das elektrische Feld. Eine Lösung der Poissongleichung

$$\Delta\phi = 0 \tag{46}$$

ist $\phi = \phi_i = const$ wobei ϕ_i das Potential an der inneren Oberfläche bezeichnet. Die eindeutige (!) Lösung ist also

$$\vec{E} = \vec{0} \tag{47}$$

Das gilt auch wenn von außen ein Feld angelegt wird!



VERSUCH: Feldlinien im ‘Faraday-Käfig’.

Die abschirmende Wirkung bleibt auch erhalten, wenn der Hohlleiter ‘Löcher’ enthält (Metallgitter): Faraday-Käfig.

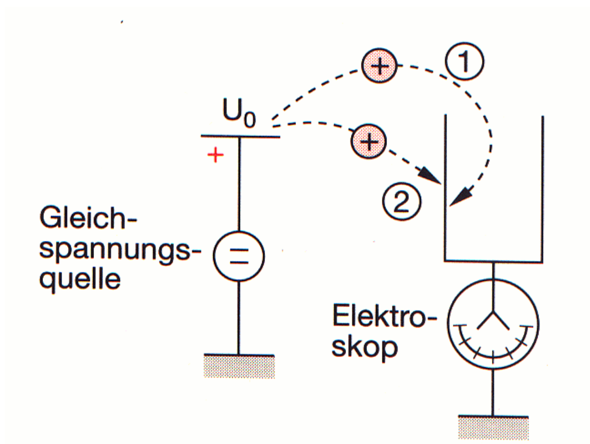
Beispiel:

Autos = Blitzschutz

VERSUCH 4.2.9: Faraday-Käfige

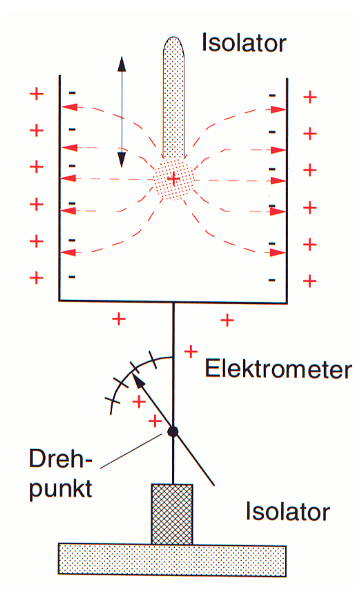
Bringt man Ladungen auf einen Hohlleiter, sammeln sie sich an der äußeren Oberfläche: Im Hohlraum und im Metallinneren ist die Feldstärke null, also kann es außer auf der Oberfläche keine Ladungen geben!

Beispiel: Becherelektrometer



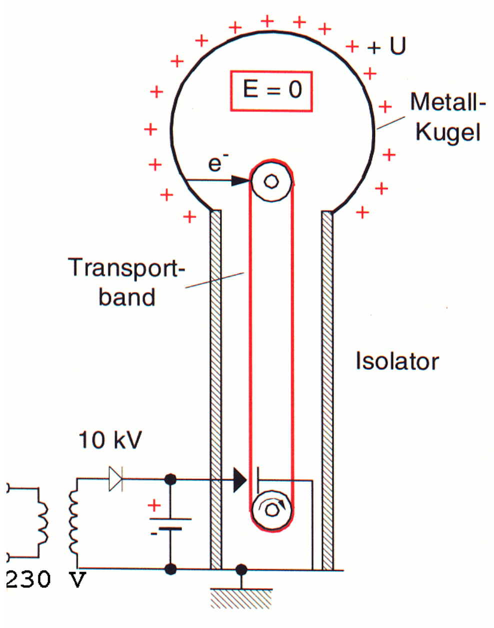
Man kann Ladungen 'ablöffeln' und die Becherladung sukzessive erhöhen.

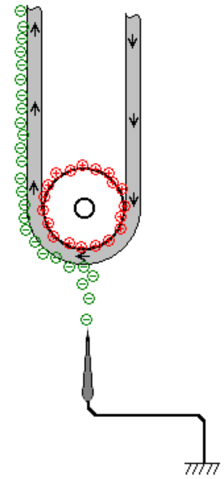
Man kann auch die Ladung eines 'Löffels' berührungsfrei via Influenz messen:



VERSUCH 4.2.10: Becherelektrometer

VERSUCH 4.2.6: Van-de-Graaff-Generator





Links: Fremderregung, rechts Selbsterregung (nur unterer Teil gezeigt). Alle Rollen sind aus Metall, Ausnahme rechts unten. Rechts: Bei der Berührung von Rolle und Band wird die Rolle (stark) negativ, das Band (schwach) positiv aufgeladen. Die Spitze wird durch Influenz positiv geladen und von dort wird (via ioniserter Luft) positive Ladung auf das Band gesprüht.

Anwendung von Spitzeneffekt und Faraday-Käfig!

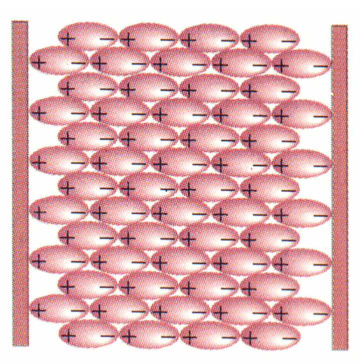
Die Ladungsmenge ist nur durch Sprühverluste begrenzt (max. Spannung gegenüber der Erde $\mathbf{10^5 - 10^7\ V}$, die hohen Werte erfordern Einschluss in spezielle Gasatmosphäre)

VERSUCH 4.2.5: Influenzmaschine

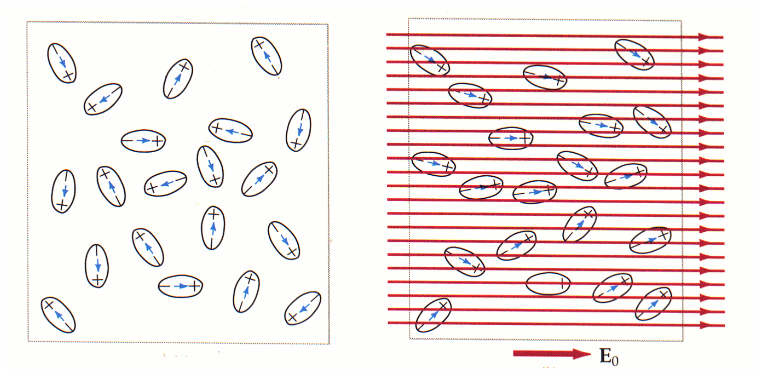
1.8. Nichtleiter in elektrischen Feldern

Bei einem Isolator sind die Ladungen zwar nicht frei beweglich, aber es kann im äußeren elektrischen Feld zu Polarisierungen kommen, durch die folgenden Mechanismen:

- Verschiebungspolarisation
  In unpolaren Molekülen wird eine Ladungsverschiebung und damit ein Dipolmoment induziert



- Orientierungspolarisation
  In diesem Fall sind die Moleküle schon polarisiert, aber dieser Effekt tritt ohne Feld nach außen wegen der zufälligen Orientierung nicht zutage.



Beide Effekte können gleichzeitig auftreten!

Beispiel:

Wassermoleküle haben ein permanentes Dipolmoment von $6 \cdot 10^{-30}\,\mathrm{Cm}$.

Den Nichtleiter nennt man Dielektrikum (di=durch).

Bei kleinen Feldstärken sind die *mittleren* Dipolmomente $\vec{p}_i$ der Feldstärke proportional, bei beiden Polarisationsarten:

$$\boxed{\vec{p}_i = \alpha \cdot \vec{E}} \tag{48}$$

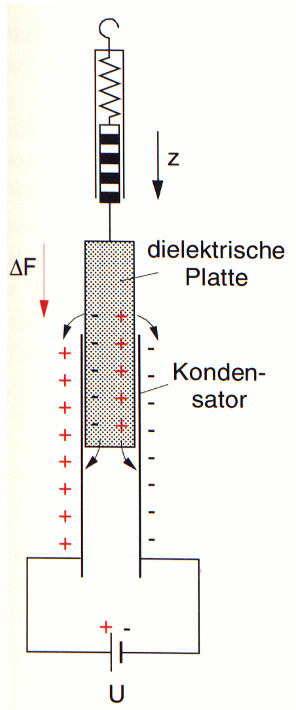
mit Polarisierbarkeit α, einer temperaturabhängigen Materialkonstanten.

Beispiel:

Kohlendioxid CO_2 (Verschiebungspolarisation, kein permanentes Dipolmoment!):
$\alpha = 3 \cdot 10^{-40}\,\mathrm{Cm^2/V}$. *Bei einer Feldstärke von* $E = 10^6\,\mathrm{V/m}$ *wird also im Molekül ein Dipolmoment von* $p = 3 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Cm}$ *induziert.*

Folge: auch neutrale Isolatoren erfahren Kräfte in inhomogenen elektrischen Feldern!

Beispiel:



Beispiel:

Geladener Glasstab und Papierschnitzel!

VERSUCH 4.2.11: Hartgummistab im Kondensatorfeld

VERSUCH 4.2.12: Hartgummistab und Wasserstrahl

1.9. Kondensatoren

Eine Anordnung von zwei genau entgegengesetzt geladenen Leitern der Ladung $Q = |q^+| = |q^-|$ heißt Kondensator.

Die Spannung $U = |U_{12}|$ zwischen den Leitern ist proportional zum Feld, das proportional zur Ladung wächst. Also:

$$\boxed{Q = C \cdot U \qquad D} \tag{49}$$

Die nur von der Geometrie (und dem Dielektrikum zwischen den Leitern) abhängige Proportionalitätskonstante C heißt Kapazität. Einheit:

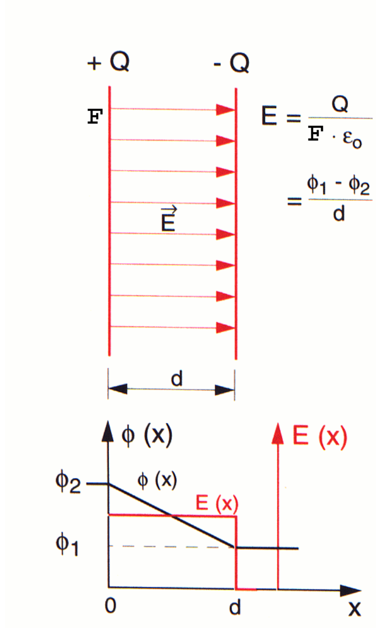
$$\mathbf{Farad = F = C/V = C^2/J} \tag{50}$$

(zu Ehren des Experimentators M. Faraday).

In der Praxis (elektronische Bauteile) treten viel kleinere Werte auf, so dass man die Untereinheiten $\mathbf{nF, pF, \mu F}$ benutzt.

Beispiel:

Plattenkondensator im Vakuum. Plattenfläche F, Abstand d.



Bei kleinem Abstand kann man das Feld im Inneren als das von zwei unendlichen homogen geladenen Platten annähern. Die zugehörigen Feldstärken sind gleichgerichtet und addieren sich:

$$\boldsymbol{E = E_+ + E_- = 2\frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{Q}{F\epsilon_0}} \tag{51}$$

Wegen

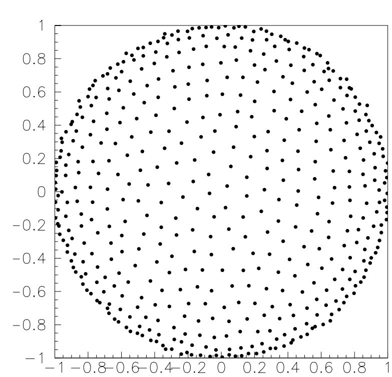
$$\boldsymbol{U = E \cdot d} \tag{52}$$

folgt:

$$\boxed{\boldsymbol{C = \epsilon_0 \cdot \frac{F}{d}}} \tag{53}$$

Mit $\boldsymbol{F = 10\,\mathrm{cm}^2, d = 1\,\mathrm{mm}}$ *folgt:* $\boldsymbol{C = \epsilon_0 \cdot 1\,\mathrm{m} = 0.9\,\mathrm{nF}}$*!*

Bei endlichen Platten (hier kreisförmig) verteilt sich die Ladung wegen der gegenseitigen Abstoßung allerdings nicht gleichmäßig:

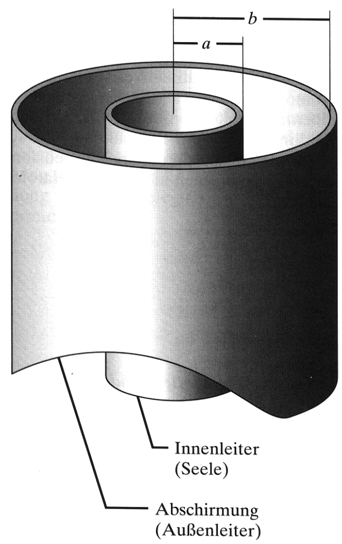


VERSUCH 4.3.2: Plattenkondensator

VERSUCH 4.3.2: Leidener Flasche

Beispiel:

Zylinderkondensator.



$$\boxed{C = 2\pi\epsilon_0 \cdot \frac{L}{\ln b/a}} \tag{54}$$

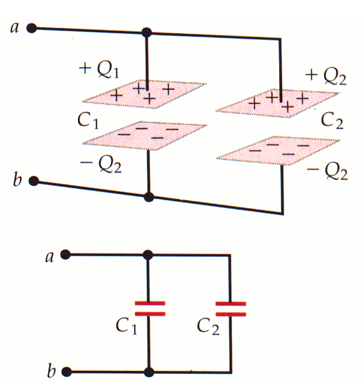
Herleitung: ÜBUNG!

FRAGE: WAS BEKOMMT MAN IM FALL $b - a \ll a$ *?*

Anwendung: Koaxialkabel

1.9.1. Serien- und Parallelschaltung

Bei der Parallelschaltung von Kondensatoren summieren sich die Ladungen bei gleicher Spannung:



(In diesem Bild wird auch das Schaltzeichen für den Kondensator eingeführt.)

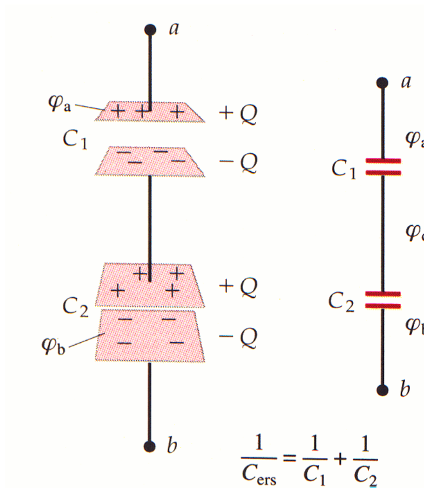
$$U \cdot C = Q = \sum Q_i = \sum U \cdot C_i \tag{55}$$

Also ist die Gesamtkapazität

$$\boxed{C = \sum C_i} \tag{56}$$

VERSUCH 4.3.3: Parallelschaltung von Kondensatoren

Bei der Serienschaltung



ist es umgekehrt: Die Ladungen sind gleich, aber der Gesamtspannungsabfall teilt sich auf:

$$Q/C = U = \sum U_i = \sum Q/C_i \tag{57}$$

$$\boxed{C^{-1} = \sum C_i^{-1}} \tag{58}$$

VERSUCH 4.3.3: Serienschaltung von Kondensatoren

1.9.2. Gespeicherte Energie

Um den Kondensator aufzuladen, muss gegen das sich aufbauende E-Feld Arbeit geleistet werden. Um im Ladungszustand Q eine zusätzliche Ladung ΔQ von '-' nach '+' zu bringen benötigt man

$$\Delta W = \Delta Q \cdot U = \Delta Q \cdot Q/C \tag{59}$$

Insgesamt:

$$W = \frac{1}{C} \cdot \int_0^Q q\,dq = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \quad \longrightarrow \quad \boxed{W = \frac{1}{2} C\,U^2} \tag{60}$$

Beispiel:

Obiger Plattenkondensator mit $C = 0.9\,\mathrm{nF}$, *auf* $U = 1000\,\mathrm{V}$ *aufgeladen: nur* $W = 5 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{J}$*!*

Für die auf das Volumen bezogene Energiedichte

$$w = \frac{W}{V} \tag{61}$$

bekommt man für den Plattenkondensator

$$w = \tfrac{1}{2}\epsilon_0 \,\tfrac{F}{d} \cdot (E\,d)^2 \cdot \tfrac{1}{F\,d} \quad \longrightarrow \quad \boxed{w = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2} \tag{62}$$

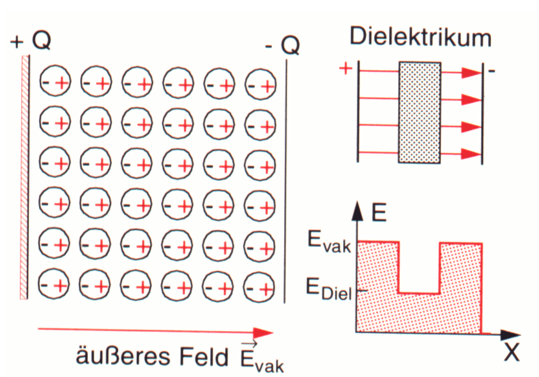
Dies ist eine universelle Beziehung, auf die wir später zurückkommen werden!

Ein Kondensator ist also ein Ladungs- und Energiespeicher.

VERSUCH 4.3.4: Kondensator treibt Glühlampe

1.9.3. Dielektrika

Bringt man ein Dielektrikum in einen Plattenkondensator, wird durch die Polarisation ein dem äußeren Feld entgegengerichtetes Feld aufgebaut:



Bei gleicher Ladung nimmt die Feldstärke und damit die Spannung ab, also wird die Kapazität größer.

VERSUCH 4.3.5: Dielektrikum bewirkt Spannungsabfall am Kondensator

Füllt das Dielektrikum den Kondensator ganz, erhöht sich (relativ zur Kapazität C_0 im Vakuum) C um einen Faktor ϵ_r = relative Dielektrizitätszahl:

$$\boxed{C = \epsilon_r \cdot C_0 \qquad D} \tag{63}$$

Dies gilt allgemein für alle Kondensatoren. ϵ_r ist eine materialabhängige Konstante, die mit der Polarisierbarkeit α zusammenhängt; mehr dazu später.

Beispiele für ϵ_r:

Luft	1.000576
Glas	3-14
Wasser	81
Bariumtitanat	1000-2000

VERSUCH : Dielektrikum bewirkt Ladungserhöhung bei konstanter Spannung

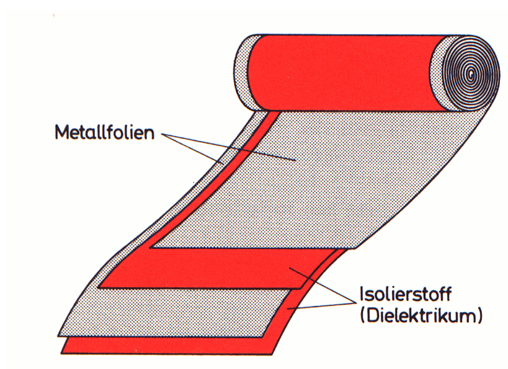
FRAGE: WELCHEN ϵ_r-WERT HABEN METALLE ? KAPAZITÄTSÄNDERUNG BEI EINSCHIEBEN EINER METALLPLATTE ?

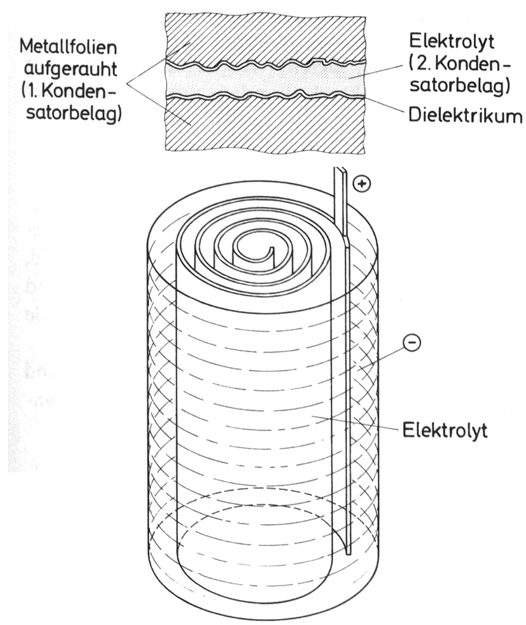
1.9.4. Kondensatoren in der Elektronik

Bedeutung: Wechselstromwiderstand, Energiespeicher

Große Kapazitäten erreicht man durch:

- Vergrößern der Oberfläche: Folienkondensator: viele $\mathbf{m^2}$
- Verkleinern des Elektrodenabstandes: Folienkondensator, Elektrolytkondensator: $d \approx 0.1\ \mu\mathrm{m}$.
- Große Dielektrizitätskonstante: Keramikkondensatoren: $\epsilon_r > 10000$.





VERSUCH 4.3.1: Kondensatoren