Physik II, RWTH, SS 2002, T.Hebbeker

17-Jul-2002

Skriptteil 3

WWW (Schwebende Magnete, Earnshaw-Theorem):
http://www.geocities.com/Area51/Shire/3075/maglev.html
http://www.wundersamessammelsurium.de/Magnetisches/Magnetisches.html
http://users.aol.com/gykophys/levitron/levitron.htm

Nachdenken/Nachlesen:
- Wie entsteht das Magnetfeld der Erde ? Ist es zeitlich veränderlich ?
- Magnetische Monopole

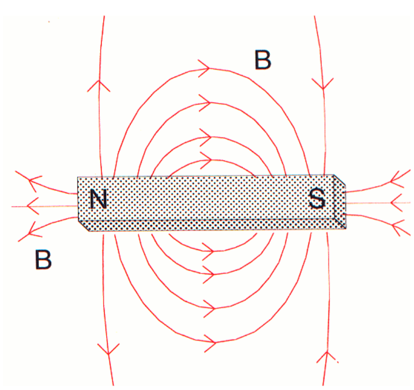
3. Magnetostatik

3.1. Überblick

3.1.1. Permanentmagnete

Im Altertum entdeckte man in der Nähe der Stadt Magnesia ein Material, das Eisen anzieht. Dieses Phänomen heißt Magnetismus; diese neue Kraft kann zunächst nicht mit elektrischen Effekten in Verbindung gebracht werden.

Man findet nur magnetische Dipole, deren Pole man als ‘magnetischer Nordpol’ und ‘magnetischer Südpol’ bezeichnet, entsprechend der Ausrichtung im Erdfeld.



Der Magnetismus solcher Magnete ist permanent vorhanden, man spricht von Permanentmagneten. Zerteilt man einen Magneten, erhält man zwei kleinere Dipole.

Die magnetische Polstärke entspricht der elektrischen Ladung: Nord = positiv, Süd = negativ. Die beiden Polstärken eines Dipolmagneten sind betragsmäßig gleich.

Gleichnamig geladene Pole stoßen sich ab, ungleichnamige ziehen sich an. Bei sehr langen Stabmagneten kann man die Pole angenähert als Monopole betrachten und findet ein Kraftgesetz analog zum Coulomb-Gesetz:

$$\boxed{\vec{K}_1 = \text{const} \cdot \frac{P_1 \cdot P_2}{r^2} \cdot \vec{e}_{21}} \tag{1}$$

Bringt man zwei Pole zusammen, ist die resultierende Gesamtpolstärke $P = P_1 + P_2$, also bei entgegengesetzten Polen: $|P| = ||P_1| - |P_2||$.

VERSUCH 4.10.1: Permanentmagnete

Die Feldlinien sind immer geschlossen (s. unten); sie können mit Eisenfeilspänen sichtbar gemacht werden:

VERSUCH 4.10.2: 2-dim Feldlinienbilder von Magneten

VERSUCH 4.10.3: 3-dim Feldlinienbilder eines Stabmagneten

Per definitionem weisen die Feldlinien außen von Nord nach Süd. Man kann eine magnetische Feldstärke $\vec{B}$ (vorläufig) definieren durch

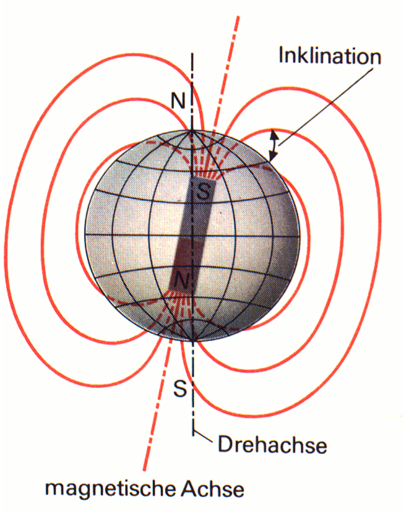
$$\vec{B} \sim \tfrac{1}{P}\vec{K} \tag{2}$$

Die Polstärke müss te man vorher mit Hilfe eines Referenzmagneten festlegen. Genaueres unten.

Wie in der Elektrostatik gilt auch hier das Superpositionsprinzip der Felder.

Die Anziehung von nicht magnetisiertem Weicheisen und einigen anderen Materialien funktioniert analog zur Anziehung ungeladener Papierschnitzel im elektrischen Feld: Eisenatome werden im Magnetfeld ‘polarisiert’ und angezogen.

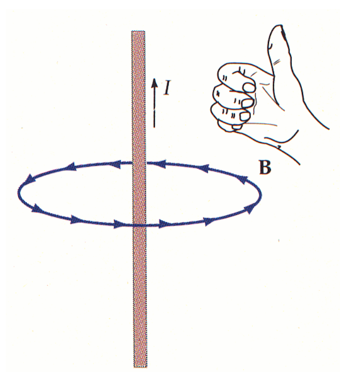
Die Erde hat auch ein Dipol-Magnetfeld, der magnetische Nordpol befindet sich in der Nähe des geographischen Südpols (!):



VERSUCH: magnetischer Kompass

3.1.2. Magnetfelder stationärer Ströme

1820 entdeckte C. Oerstedt einen Zusammenhang zwischen Magnetismus und Elektrizität: Ein elektrischer Gleichstrom erzeugt ein Magnetfeld!



Richtung des Magnetfeldes wechselt mit Stromrichtung, die Stärke nimmt proportional zum Abstand ab. Die Magnetfeldlinien sind geschlossen (Wirbelfeld), die Kraft auf einen gedachten magnetischen Monopol hängt also vom Weg ab: dieses Magnetfeld ist **nicht** konservativ!

VERSUCH: Oerstedt-Versuch

VERSUCH 4.10.4: Magnetische Feldlinien um einen stromdurchflossenen Leiter

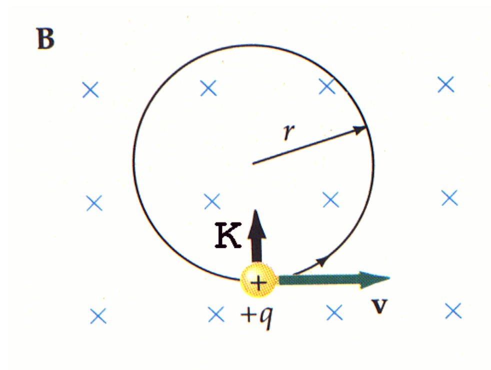
VERSUCH 4.10.5: ‘Monopol’ umkreist stromdurchflossenen Leiter

3.1.3. Lorentzkraft

Weitere Experimente zeigten, dass auch umgekehrt Magnetfelder Kräfte auf elektrische Ladungen ausüben, aber nur wenn letztere sich bewegen!

Das zugehörige Kraftgesetz wurde von H.A. Lorentz formuliert:

$$\vec{K} \sim q \cdot \vec{v} \times \vec{B} \tag{3}$$



Da die Kraft senkrecht zur Geschwindigkeit steht, wird nur die Richtung geändert, die Teilchenenergie bleibt konstant! Bei geeigneter Einheitenwahl (SI) und unter Hinzunahme auch elektrischer Felder erhalten wir die Lorentzkraft

$$\boxed{\vec{K} = q\,(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})} \tag{4}$$

Diese fundamentale Gleichung beschriebt vollständig alle **Wirkungen** von elektrischen und magnetischen Feldern auf (geladene) materielle Objekte.

Die Lorentzkraft auf elektrische Ströme (=bewegte Ladungen) und einzelne Teilchen kann man leicht nachweisen:

VERSUCH 4.10.6: Fadenstrahlrohr

VERSUCH 4.10.7: ‘Barlowsches Rad’

3.1.4. Elektromagnetismus und Relativitätstheorie

Später beobachtete man (M. Faraday u.a.), dass zeitlich veränderliche E-Felder Magnetfelder erzeugen und umgekehrt variierende B-Felder elektrische Felder verursachen.

Wie elektrische Felder und magnetische Felder **erzeugt** werden, wurde dann von James Maxwell 1873 in den vier Maxwell-Gleichungen zusammengefasst. Wegen der engen Verknüpfung der beiden Felder spricht man vom Elektromagnetismus. Dies war die erste erfolgreiche ‘Vereinigung’ zweier Kräfte durch eine übergeordnete Theorie!

Zusammen mit der Lorentzkraft hat man ein vollständiges Gleichungssystem zur Berechnung aller elektromagnetischer Phänomene!

Den engen Zusammenhang zwischen E-Feld und B-Feld erkennt man auch, wenn man verschiedene Inertialsysteme betrachtet:
In einem System I_1 sei $\vec{E} = \vec{0}$, die Teilchengeschwindigkeit $\vec{v}_1$ und das Magnetfeld $\vec{B}_1$ von null verschieden. Ein geladenes Teilchen ‘spürt’ die Kraft

$$\vec{K}_1 = q \cdot (\vec{0} + \vec{v}_1 \times \vec{B}_1) \tag{5}$$

Das zweite System $\boldsymbol{I_2}$ bewege sich relativ zum ersten so, dass das Teilchen in diesem System ruht:

$$\vec{K}_2 = q \cdot (\vec{E}_2 + \vec{0} \times \vec{B}_2) \tag{6}$$

Da die Kräfte in allen Inertialsystemen (bei kleinen Relativgeschwindigkeiten) gleich sind, muss gelten:

$$q\,\vec{E}_2 = q\,\vec{v}_1 \times \vec{B}_1 \tag{7}$$

Das heißt: Das gleiche Phänomen (Beschleunigung des Teilchens) wird vom einen Beobachter als rein magnetischer, vom anderen als rein elektrischer Effekt gedeutet. Die Aufteilung elektrisch - magnetisch hängt vom Bezugssystem ab und ist damit nicht fundamental! Unabhängig von den Maxwell-Gleichungen führt also auch die Lorentzkraft zu einer einheitlichen Betrachtungsweise der beiden Feldarten: Elektromagnetismus!

3.2. Magnetfelder stationärer Ströme

Auch die permanenten magnetischen Eigenschaften von Materialien werden durch (atomare) Ströme erzeugt. Deshalb befassen wir uns zunächst allgemein mit den von Strömen erzeugten $\boldsymbol{B}$-Feldern, zunächst nur im Vakuum.

3.2.1. Einheit der magnetischen Feldstärke

Im Prinzip kann man analog zur Elektrostatik zunächst magnetische Polstärken und deren Einheit definieren und dann die Einheit der magnetischen Feldstärke $\boldsymbol{B}$ daraus ableiten. Da aber die Polstärken in der Praxis keine große Rolle spielen, definiert man das B-Feld über die magnetische Wirkung eines elektrischen Stromes durch einen unendlich langen geraden Leiter:

$$\boxed{|\vec{B}(r)| = k \cdot \frac{I}{r}} \qquad k \equiv \frac{\mu_0}{2\pi} \tag{8}$$

und legt fest:

$$\boxed{\mu_0 \equiv 4\,\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{V}\,s}{\mathrm{A}\,m} \qquad D} \tag{9}$$

Dies ist die magnetische Permeabilitätskonstante oder Induktionskonstante (im Vakuum).

Die Einheit von $\boldsymbol{B}$ ist

$$\mathrm{Tesla} = \mathrm{T} = \mathrm{Vs/m^2}$$

(nach N. Tesla).

Beispiele:

Erdmagnetfeld an Oberfläche	$\approx 10^{-5}\,\mathrm{T}$
Am Pol eines Stabmagneten	$\approx 0.1\,\mathrm{T}$
durch Permanentmagnet erzeugtes Feld	*wenige* T
Supraleitender Magnet in Teilchenbeschleuniger	$\approx 10\,\mathrm{T}$
Neutronenstern	$\approx 10^{8}\,\mathrm{T}$

3.2.2. Maxwell-Gleichungen für Magnetfelder (stationäre Felder)

Die empirisch gefundene Nichtexistenz von magnetischen Monopolen kann man mathematisch so ausdrücken (vgl. $\boldsymbol{E}$-Felder!):

$$\boxed{\vec{\nabla}\vec{B} = 0} \tag{10}$$

Das ist die 3. Maxwell-Gleichung (noch nicht vollständig)! Integralform (Gaußscher Satz)[1]:

$$\boxed{\oint \vec{B}\, d\vec{F} = 0} \tag{11}$$

Die einschlägigen Experimente zeigen, dass man die Erzeugung durch Ströme allgemein so formulieren kann:

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{j}} \tag{12}$$

Dies ist die vorläufige Version der 4. Maxwell-Gleichung. Um ihn in Integralform zu bringen, benötigt man den Stokesschen Satz. Dieser stellt allgemein eine Beziehung her zwischen einem geschlossenen Linien-Integral und einem Integral über eine durch die Linie begrenzte Fläche:

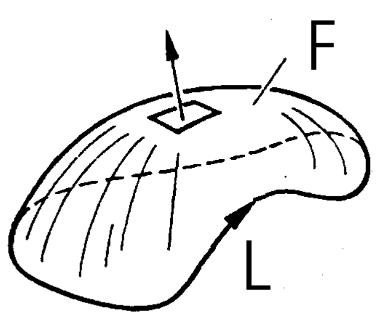
$$\boxed{\oint_L \vec{B}\, \mathrm{d}\vec{l} = \int_F \vec{\nabla} \times \vec{B}\, \mathrm{d}\vec{F} \qquad M} \tag{13}$$

Das geschlossene Linienintegral nennt man auch Zirkulation.

Aus der 4. Maxwell-Gleichung bekommt man unter Anwendung des Stokesschen Satzes das Amperesche Gesetz:

$$\oint_L \vec{B}\, d\vec{l} = \int_F \vec{\nabla} \times \vec{B}\, d\vec{F} = \int_F \mu_0\, \vec{j}\, d\vec{F} = \mu_0\, I \tag{14}$$

$$\boxed{\oint \vec{B}\, d\vec{l} = \int \mu_0\, \vec{j}\, d\vec{F} = \mu_0\, I} \tag{15}$$



Also: Das Integral von $\vec{B}$ über eine geschlossene Linie ist proportional zum eingeschlossenen elektrischen Strom.

[1] Flächen bezeichnen wir manchmal mit dem Buchstaben F, an anderen Stellen aber mit A; dies ist leider nötig, um Verwechslungen mit anderen Größen zu vermeiden (F = Kraft, Farad; A = Ampere, Vektorpotential)

Beispiel: stromdurchflossener unendlich langer gerader Leiter:

Aus Symmetriegründen ist $\boldsymbol{B}$ nur von $\boldsymbol{r}$ abhängig. Außerhalb des Leiters:

$$\oint \vec{B}\, d\vec{l} = 2\pi r\, B = \mu_0 I \tag{16}$$

oder

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi\, r}} \tag{17}$$

also scheint Formel (12) richtig zu sein!

Im Gegensatz zum statischen $\boldsymbol{E}$-Feld ist das $\boldsymbol{B}$-Feld nicht wirbelfrei, und man kann es deshalb nicht als Gradient eines skalaren Potentials darstellen. Da aber die Divergenz des Magnetfeldes verschwindet, kann man ein Vektorpotential $\vec{A}$ einführen mit

$$\boxed{\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}} \tag{18}$$

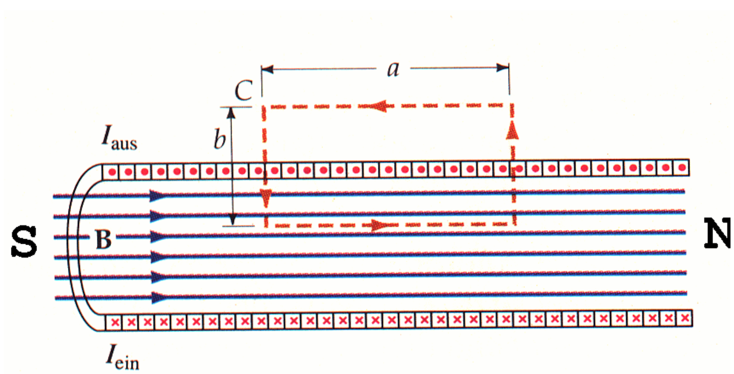
Mehr dazu in den Theorievorlesungen.

3.2.3. Berechnung von Magnetfeldern und magnetischen Kräften

Oft kann man Felder durch direkte Anwendung des Ampereschen Gesetzes und Ausnutzung von Symmetrieeigenschaften berechnen.

2. Beispiel: (Unendlich lange) Zylinderspule.

Feld ähnlich dem eines Stabmagneten. Die Anzahl $\boldsymbol{N}$ der Windungen pro Länge $\boldsymbol{l}$ sei $\boldsymbol{n = N/l}$:



Im Außenraum Feld (nahe) null, im Inneren parallel zur Spulenachse, von S nach N ! Amperesches Gesetz:

$$a \cdot B + a \cdot 0 + b \cdot 0 + b \cdot 0 = \mu_0\, N\, I = \mu_0\, n\, a\, I \tag{19}$$

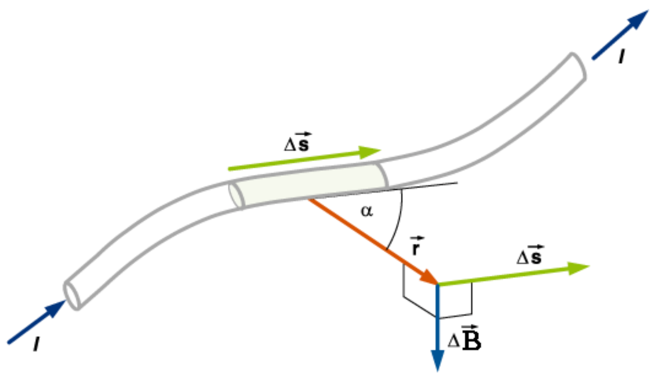
Also:

$$\boxed{B = \mu_0\, n\, I} \tag{20}$$

VERSUCH 4.10.2: Magnetische Feldlinien einer langgestreckten Spule

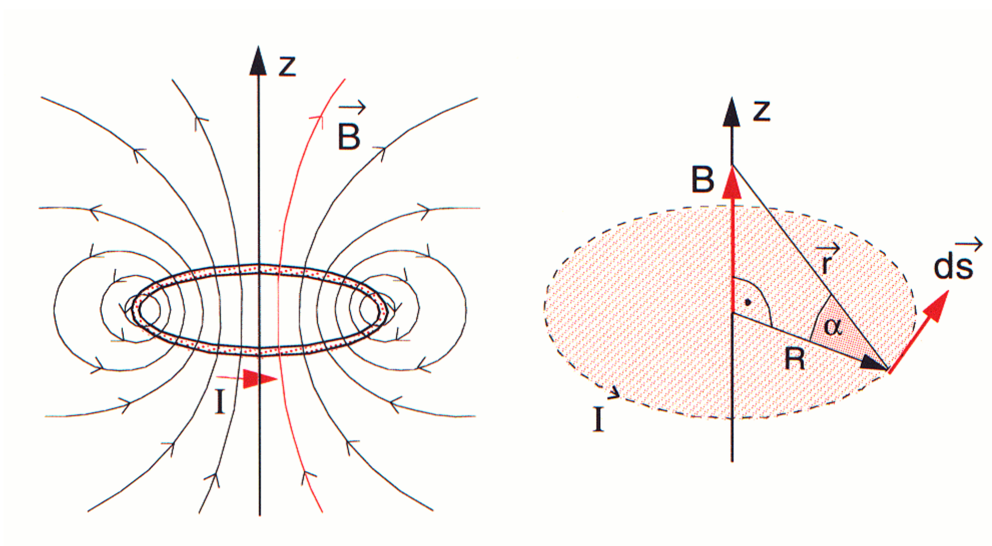
Aus den Maxwellgleichungen kann man das Biot-Savart-Gesetz herleiten, mit dem man Magnetfelder von beliebigen Stromverteilungen berechnen kann. Ein kleines 'Stromelement' $\boldsymbol{I \cdot d\,\vec{s}}$ eines dünnen Leiters erzeugt im Abstand $\vec{r}$ den Feldbeitrag

$$\boxed{d\vec{B} = -\frac{\mu_0\, I}{4\pi} \cdot \frac{\vec{r} \times d\vec{s}}{r^3}} \tag{21}$$



Die gesamte Feldstärke erhält man durch Integration entlangdes Leiters.

Beispiel: einzelne Stromschleife



Das Magnetfeld entlang der z-Achse hat aus Symmetriegründen nur eine z-Komponente:

$$dB_z(z) = \frac{\mu_0\, I}{4\pi} \cdot \frac{(\vec{r} \times d\vec{s}) \cdot \vec{e}_z}{r^3} = \frac{\mu_0\, I}{4\pi} \cdot \frac{R\, ds}{r^3} \tag{22}$$

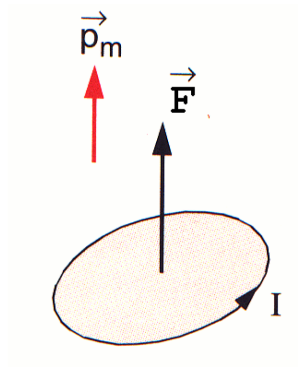
Integration entlang der Schleife:

$$B_z(z) = \frac{\mu_0\, I}{4\pi} \cdot \frac{R \cdot 2\pi R}{r^3} = \frac{\mu_0\, I}{2} \cdot \frac{R^2}{\sqrt{z^2+R^2}^3} \tag{23}$$

Die Stromschleife stellt einen magnetischen Dipol dar.

Ähnlich wie in der Elektrostatik definiert man ein magnetisches Dipolmoment

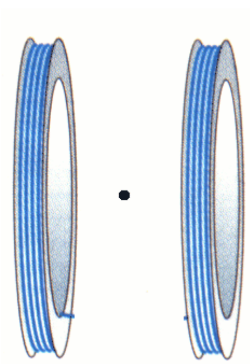
$$\boxed{\vec{P}_m = I \cdot \vec{F} \qquad D} \tag{24}$$



Das Feld der Leiterschleife sieht dann bei großen Abständen $r \gg R$ entlang der Symmetrieachse so aus:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{\vec{P}_m}{r^3} \tag{25}$$

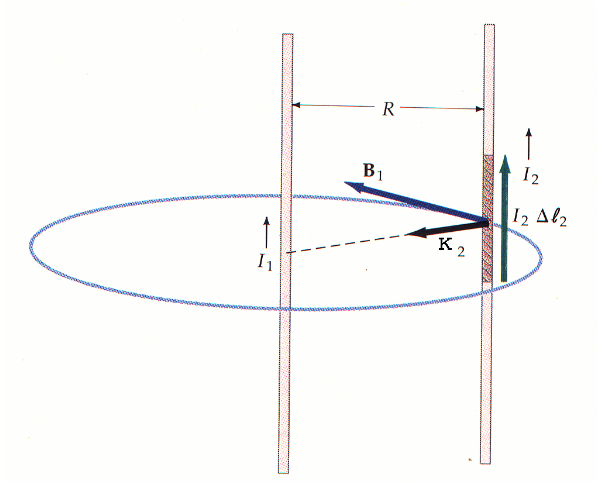
Beispiel: Helmholtzspulenpaar



Die Stromrichtung ist in beiden Spulen gleich. Diese Anordnung wird benutzt, um im Zentrum ein recht homogenes horizontales Magnetfeld zu erzeugen.

Berechnung: Übung!

Beispiel: Kräfte zwischen parallelen Drähten im Abstand R



Ein Leiter erzeugt am Ort des zweiten das Magnetfeld

$$\boldsymbol{B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R}} \tag{26}$$

Auf die Ladungsträger des zweiten Leiters wirkt (pro Länge) die Lorentzkraft

$$\boldsymbol{K/l = \frac{N\,q\,v\,B}{l} = \frac{nF\,l{\cdot}q\,v\,B}{l} = j\,F \cdot B = I_2\,B} \tag{27}$$

Hier ist $\boldsymbol{F}$ die Querschnittsfläche des 2. Leiters, $\boldsymbol{n}$ die Ladungsträgerdichte. Beachte: alle Vektoren stehen senkrecht aufeinander!

Also ist die Kraft pro Länge, mit der sich die Leiter anziehen oder abstoßen:

$$\boxed{\boldsymbol{K/l = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1 I_2}{R}}} \tag{28}$$

Siehe Definition des Ampere! $\boldsymbol{\{\mu_0/(2\pi)\}_{SI} = 2 \cdot 10^{-7}}$!

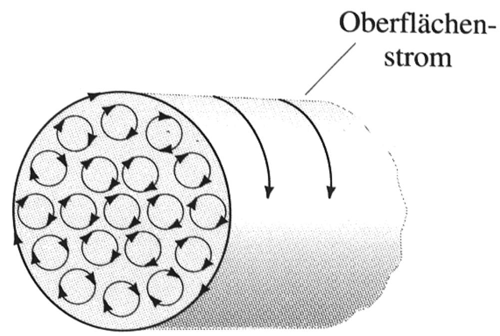
VERSUCH 4.4.1: Kraft zwischen stromdurchflossenen Leitern

Das Biot-Savart-Gesetz erlaubt auch die Berechnung des B-Feldes von bewegten Ladungen, mit der Ersetzung $\boldsymbol{I\,d\vec{s} \;\to\; Q\,\vec{v}\,dt}$.

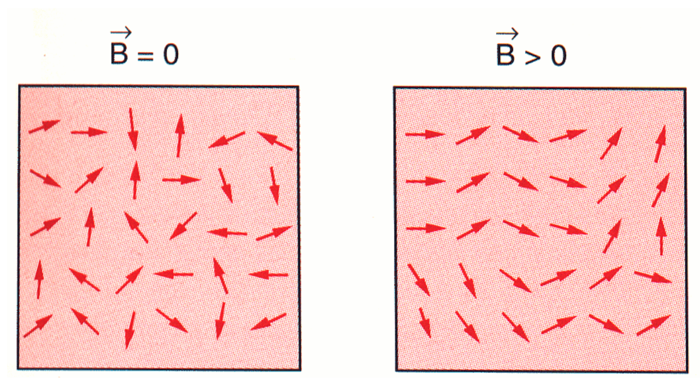
3.3. Materie in magnetischen Feldern

In Atomen bewegen sich Elektronen auf kreisförmigen Bahnen (genauer: Quantentheorie) und stellen damit kleine magnetische Dipole dar. Auch ein einzelnes Elektron trägt aufgrund seines ‘Spins’ ein magnetisches Moment. In manchen Atomen überlagern sich die Dipolfelder so, dass das resultierende Dipolmoment verschwindet (z.B. ^{4}He).

Sind die atomaren Dipole zufällig ausgerichtet, verschwinden das resultierende makroskopische magnetische Dipolmoment und das $\boldsymbol{B}$-Feld.
Sind sie jedoch entlang einer Achse ausgerichtet, entspricht dies einem Nettostrom an der Oberfläche, der ein zur Achse paralleles Magnetfeld erzeugt:



Wie in der Elektrostatik kann man in einem äußeren $\boldsymbol{B}$-Feld
a) vorhandene atomare Dipole (teilweise) ausrichten:



b) magnetische Dipole (Richtung entlang der Feldlinien) induzieren

Dabei ändert sich das ursprüngliche Feld relativ zum Vakuum um einen Faktor μ_r, die relative Permeabilitätskonstante μ_r:

$$\boxed{\vec{B} = \mu_r \vec{B}_0} \tag{29}$$

Im Fall b) spricht man von Diamagnetismus. Das äußere Feld wird geschwächt, $\mu_r < 1$.

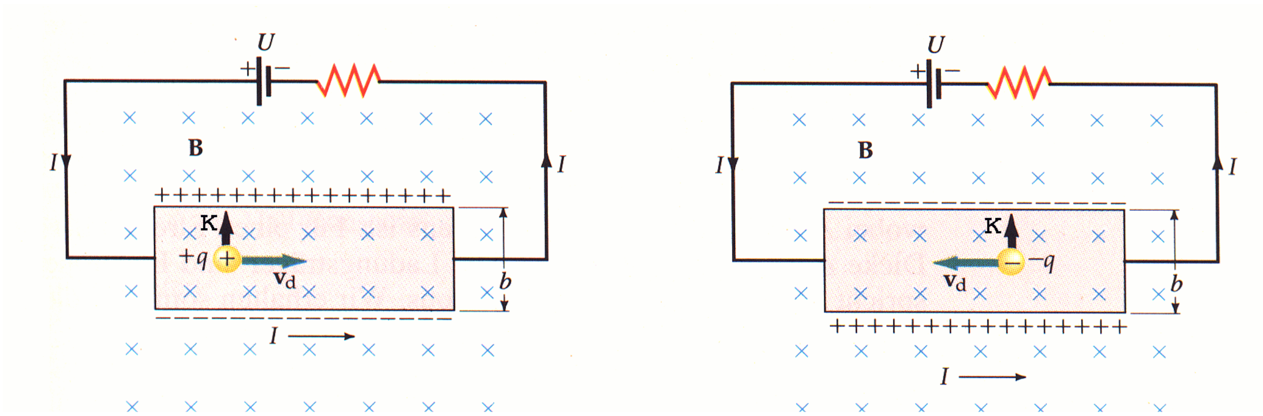
Bei a) tritt - anders als in der Elektrostatik ! - eine Vergrößerung des $\boldsymbol{B}$-Feldes auf: $\mu_r > 1$. Grund: $\boldsymbol{B}$-Feldlinien sind geschlossen, weisen im Innern des Dipols von S nach N ! Bei den meisten Materialien ist die Permeabilitätskonstante nur wenig größer als 1: Paramagnetismus.

Bei einigen Metallen wie Eisen und Nickel findet man aber sehr große μ_r-Werte von über 1000: Ferromagnetismus. In diesem Fall bleibt die Magnetisierung auch nach Abschalten des äußeren $\boldsymbol{B}$-Feldes erhalten: Permanentmagnete! Ein analoges Phänomen gibt es im Prinzip auch in der Elektrostatik (‘Ferroelektrika’), aber dort werden die Polarisationsladungen normalerweise durch angelagerte äußere Ladungen kompensiert!

Mehr zu diesem Thema in späteren Vorlesungen!

3.4. Anwendungen

3.4.1. Hall-Sonde



Zum Strom durch die rechteckige Leiterplatte können negative und positive Ladungsträger beitragen. Im folgenden nehmen wir jedoch $N_+ = 0$ an. Das Magnetfeld lenkt die Ladungsträger ab, so dass eine Ladungsasymmetrie aufgebaut wird, bis das resultierende elektrische Feld die magnetische Lorentzkraft kompensiert: Hall-Effekt. Die geometrischen Abmessungen des Plättchens seien l, b, d. Für die 'senkrechten' Kraftkomponenten auf einen negativen Ladungsträger (Elektron) gilt:

$$K_m = e\, v_D\, B \tag{30}$$

$$K_e = -e\, E_H = -e\,\frac{U_H}{b} \tag{31}$$

Die Summe der Kräfte ist im Gleichgewicht null; Daraus ergibt sich zusammen mit

$$I = j \cdot (\mathrm{d}b) = n\, e\, v_D\, \mathrm{d}b \tag{32}$$

die leicht messbare Hallspannung U_H:

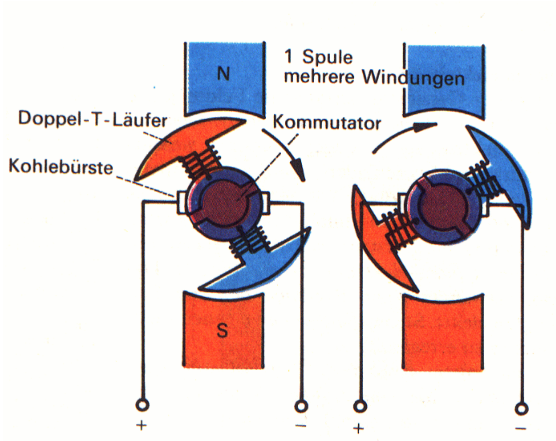
$$\boxed{U_H = v_D\, B\, b = \frac{I\, B}{n\, e\, d}} \tag{33}$$

Anwendung: Messung von Magnetfeldern! Hohe Empfindlichkeit: n nicht zu groß $\longrightarrow$ Halbleiter!

VERSUCH 4.10.10: Hall-Effekt

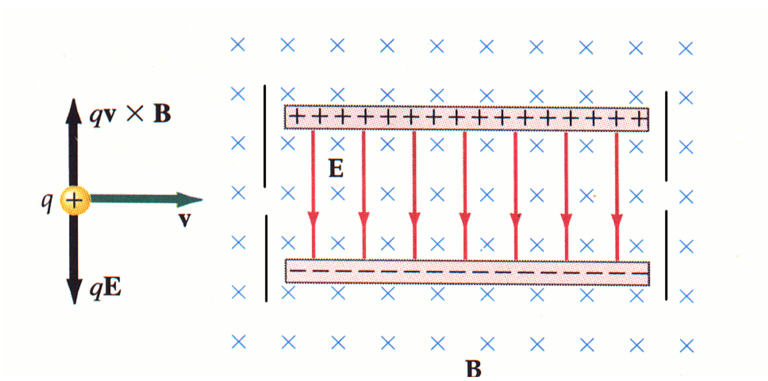
3.4.2. Elektromotor

Mit einem Elektromagneten (Spule, mit Weicheisen gefüllt zur Erhöhung von B), kann man Kräfte z.B. auf einen Permanentmagneten ausüben.



3.4.3. Wiensches Geschwindigkeitsfilter

Eine Kombination von senkrechten $\boldsymbol{E}$- und $\boldsymbol{B}$-Feldern dient zur Selektion von Ionen einer bestimmten Geschwindigkeit:



Offenbar:

$$v = \frac{E}{B} \tag{34}$$

3.4.4. Informationsspeicher

Magnetische Medien spielen eine zentrale Rolle: Magnetbänder, Computer-Festplatten!