

**Skriptteil 6**

WWW: Über die Felder B, H und M:

[http://www.physik.rwth-aachen.de/hebbeker/lectures/ph2\\_02/bhm.pdf](http://www.physik.rwth-aachen.de/hebbeker/lectures/ph2_02/bhm.pdf)

Nachdenken/Nachlesen: Antiferromagnetismus, Ferrimagnetismus, . . .

**6. Elektromagnetische Felder in Medien****6.1. Die Maxwellgleichungen**

Die Maxwell-Gleichungen müssen bei Vorhandensein eines Mediums so geändert werden:

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho} \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2)$$

$$(3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (4)$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}} \quad (5)$$

Mit diesem 'Ansatz' kann man alle elektromagnetischen Phänomene beschreiben. Die Gleichung für die Lorentzkraft bleibt unverändert. Dabei bedeuten:

$\vec{H}$  = magnetische Erregung (oder einfach H-Feld)

$\vec{D}$  = dielektrische Verschiebung (D-Feld)

$\vec{M}$  = Magnetisierung (=magnetisches Dipolmoment pro Volumen)

$\vec{P}$  = Polarisierung = Polarisation (=elektrisches Dipolmoment pro Volumen)

mit den folgenden Zusammenhängen:

$$\boxed{\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})} \quad (6)$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}(\vec{D} - \vec{P})} \quad (7)$$

Direkt (aufgrund der auftretenden Kräfte) messbar sind nur  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$ !

Man beachte die Vorzeichen (!): B wird durch Materie (meist) verstärkt, E immer geschwächt.

Im Vakuum verschwinden die Felder  $\vec{M}$  und  $\vec{P}$  und die Felder  $\vec{H}$  und  $\vec{B}$  sowie  $\vec{D}$  und  $\vec{E}$  stimmen - bis auf die konstanten Faktoren - überein, wir erhalten die Maxwellgleichungen für das Vakuum zurück.

Oft sind Magnetisierung/Polarisierung proportional zu den Feldern  $\vec{H}$ ,  $\vec{B}$  bzw.  $\vec{D}$ ,  $\vec{E}$ . Dann kann man einfacher schreiben<sup>1</sup>:

$$\boxed{\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} \quad \vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}} \quad (8)$$

und

$$\boxed{\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H} \quad \vec{M} = \chi_m \vec{H}} \quad (9)$$

mit der elektrischen Suszeptibilität ('Empfindlichkeit')  $\chi_e$  und der magnetischen Suszeptibilität  $\chi_m$ :

$$\chi_e = \epsilon_r - 1 \quad \chi_m = \mu_r - 1 \quad (10)$$

Wann immer wir die letzteren Gleichungen benutzen, setzen wir implizit deren Gültigkeit voraus!

Im folgenden beschäftigen wir uns im wesentlichen mit **statischen** Effekten. Elektromagnetische Wellen (insbesondere Licht) in Medien: Optik!

## 6.2. Materie in elektrischen Feldern

Zunächst betrachten wir allgemeine Eigenschaften von Nichtleitern in elektrischen Feldern, dann gehen wir näher auf die verschiedenen Materialtypen ein.

Während ein Leiter ein elektrisches Feld abschirmt (durch Influenz), geht das E-Feld durch einen Isolator **hindurch**, daher das Wort Dielektrikum von "di" = durch.

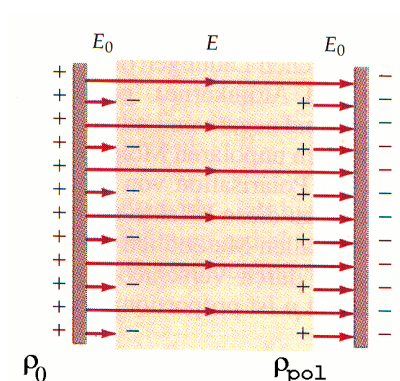
Die Dielektrizitätszahlen  $\epsilon_r$  für einige Stoffe ( $T = 20 \text{ C}$ , statischer Grenzfall):

Vakuum	1
Luft	1.00058
Benzol	2.3
Plexiglas	3.4
Quarzglas	3.75
Wasser	81
(SrBi)TiO <sub>3</sub>	≈ 1000

Es gilt immer  $\epsilon_r > 1$ .

Um den Zusammenhang zwischen  $\vec{P}$ ,  $\vec{D}$  und  $\vec{E}$  zu verstehen, betrachten wir einen Isolator in einem elektrischen Feld:

<sup>1</sup>oft auch  $\epsilon \equiv \epsilon_r$ ,  $\mu \equiv \mu_r$



Wir bezeichnen mit  $\rho_0$  die Ladungsdichte, welche das Feld  $E_0$  erzeugt, z.B. die Ladungen auf einem Plattenkondensator.  $\rho_{pol}$  ist die Dichte der auf der Oberfläche des Dielektrikums induzierten Ladungen. Man spricht hier auch von ‘scheinbaren’ Ladungen, weil sie ja nur durch Verschiebung der ‘wahren’ Ladungen zustandekommen. Die Ladungen auf dem Leiter,  $\rho_0$ , bezeichnet man auch als ‘freie’ Ladungen, weil sie sich frei bewegen können, im Gegensatz zu den Polarisationsladungen des Dielektrikums! Dann gilt für das Gesamt-E-Feld:

$$\epsilon_0 \vec{\nabla} \vec{E} = \rho_0 + \rho_{pol} \quad (11)$$

Vorzeichen beachten! Das äußere E-Feld wird geschwächt!

Man definiert die Felder  $\vec{D}$  und  $\vec{P}$  so dass

$$\boxed{\vec{\nabla} \vec{D} = \rho_0 \quad \vec{\nabla} \vec{P} = -\rho_{pol}} \quad (12)$$

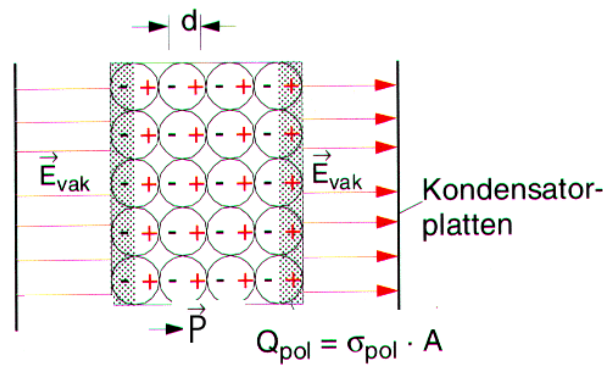
Das Vorzeichen ist so gewählt, dass  $\vec{E}$  und  $\vec{P}$  gleich gerichtet sind, also  $\vec{P}$  von der negativen Oberflächenladung zur positiven gerichtet ist.

Das D-Feld (genauer: senkrechte Komponente, s.u.) ändert sich beim vollständigen Einschieben eines Dielektrikums in einen Kondensator **nicht**!

Mit dieser Definition gelten dann die Maxwellgleichungen wie oben aufgelistet. Die dort auftretende Ladungsdichte ist die der freien Ladungen!

Die physikalische Bedeutung und der sonderbare Name des D-Feldes ergeben sich aus der letzten Maxwellgleichung, in der der Verschiebungsstrom-Term proportional zur zeitlichen Ableitung von  $\vec{D}$  ist. Verantwortlich für das Entstehen von Magnetfeldern ist also das D-Feld (freie Ladungen) und nicht die Polarisation (Polarisationsladungen)! Siehe auch ‘Herleitung’ des Verschiebungsstromes in Kapitel 4!

Wir müssen noch begründen, warum  $\vec{P}$  gleich dem elektrischen Dipolmoment pro Volumen ist:



Für ein homogenes Dielektrikum der Dicke  $D$  im Plattenkondensator mit Fläche  $A$  gilt für letztere Größe:

$$\frac{\sum p_i}{V} = \frac{Np}{V} = \frac{Nqd}{AD} = \frac{Q_{pol}D}{AD} = \sigma_{pol} \quad (13)$$

Andererseits ist aber die durch die Oberflächenladungsdichte erzeugte Feldstärke

$$E_{pol} = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma_{pol} \quad (14)$$

Somit, dem Betrage nach:

$$P = \epsilon_0 E_{pol} = \sigma_{pol} = \frac{\sum p_i}{V} \quad (15)$$

Die Energiedichte des elektrischen Feldes ist

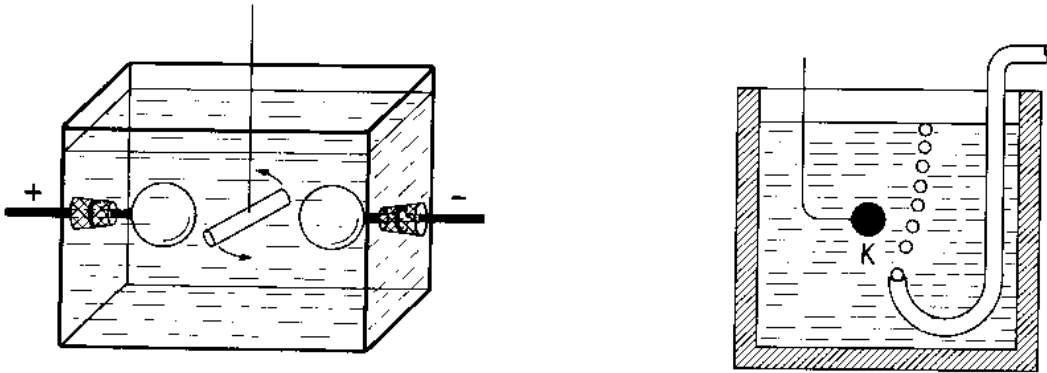
$$w = \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}^2 = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} = \frac{1}{2\epsilon_r \epsilon_0} \vec{D}^2 \quad (16)$$

Kräfte versuchen die Energie zu minimieren. Bringt man also einen Isolator in ein inhomogenes elektrisches Feld, so wird er in Richtung der höheren Feldstärke (Feldliniendichte) angezogen: Papierschnitzel und Glasstab! Das kann man dadurch verstehen, dass durch das Dielektrikum die Energiedichte (bei konstantem  $D$ !) wegen  $w \sim 1/\epsilon_r$  abnimmt!

**VERSUCH 4.16.1:** Öl im Plattenkondensator wird hineingezogen.

FRAGE: BEI ANGESCHLOSSENER SPANNUNGSQUELLE ÄNDERT SICH DAS D-FELD. WIRD DAS OEL TROTZDEM HINEINGEZOGEN ? STEIGHÖHE ?

Ist schon ein Dielektrikum vorhanden mit  $\epsilon_r^1$  (z.B. eine Flüssigkeit), und führt man einen Isolator ein mit  $\epsilon_r^2 > \epsilon_r^1$  passiert qualitativ dasselbe: Anziehung! Gilt dagegen  $\epsilon_r^2 < \epsilon_r^1$  so ist es energetisch günstiger, die Regionen mit hoher Feldstärke mit der Substanz 1 auszufüllen, und das Dielektrikum 2 wird von dort abgestoßen! Vergleiche Auftrieb!



**VERSUCH 4.16.2:** Kohlendioxid-Gasbläschen in Öl werden von einer Ladung abgestoßen.

Um die Kräfte auf ein Dielektrikum in einem elektrischen Feld zu berechnen, bildet man den negativen Gradienten der Gesamtenergie. Dazu muss die Energiedichte (16) mit dem vom Dielektrikum eingenommenen Volumen multipliziert werden.

Achtung: Man muss genau überlegen, 1) welches Feld ( $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ) sich beim Einbringen des Dielektrikums nicht ändert und 2) sicherstellen, dass man ein abgeschlossenes System betrachtet!

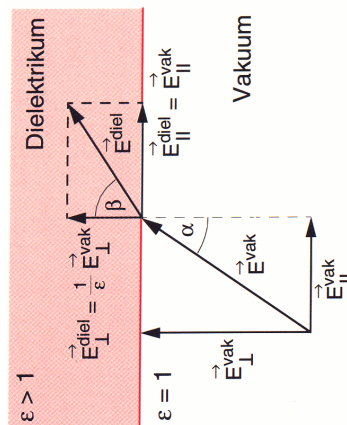
Wir müssen noch begründen, warum in (16) der Faktor  $\epsilon_r$  auftaucht. Die Gesamtenergiedichte mit Dielektrikum ist

$$w = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}PE \quad (17)$$

Der Zusatzterm berücksichtigt, dass das Feld gegen die mikroskopischen rücktreibenden Kräfte die Polarisation aufbauen muss ( $\vec{p}_i$  proportional zu  $\vec{E}_i$ , Rechnung: Übung). Also:

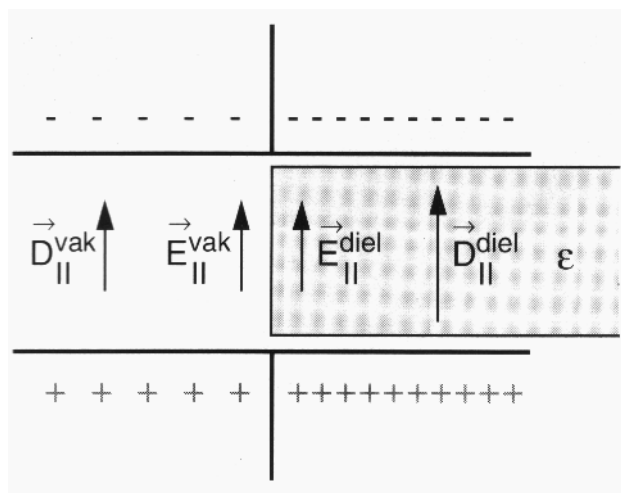
$$w = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\epsilon_0(\epsilon_r - 1)E^2 = \frac{1}{2}\epsilon_r\epsilon_0 E^2 \quad (18)$$

Schließlich studieren wir noch das Verhalten der statischen Felder  $\vec{E}$  und  $\vec{D}$  an Grenzflächen:



Die zur Grenzfläche senkrechte Komponente des E-Feldes ändert sich proportional zu  $1/\epsilon_r$ . Die parallele Komponente bleibt gleich; dies kann man aus der Wirbelfreiheit von  $\vec{E}$  folgern.

Das D-Feld verhält sich gerade andersherum, wie sofort aus  $\vec{D} \sim \epsilon_r \vec{E}$  folgt: Sprung in der Parallelkomponente, keine Änderung des senkrechten Anteils:



DISKUTIEREN SIE DIE FELDER IN EINEM PLATTENKONDENSATOR, IN DEN EIN DIELEKTRIKUM NUR TEILWEISE HINEINGESCHOBEN WIRD (S. OELVERSUCH)!

### 6.2.1. 'Dielektrika'

Im engeren Sinne bezeichnet man Stoffe, die sich analog zu diamagnetischen Stoffen verhalten, als Dielektrika. Sie besitzen keine permanenten Dipolmomente, sondern diese werden durch ein äußeres Feld induziert: Verschiebungspolarisation, siehe Kapitel 1.

### 6.2.2. 'Parelektrika' (Orientierungspolarisation)

In Analogie zu magnetischen Phänomenen spricht man bei Ausrichten schon vorhandener Dipolmomente in einem äußeren Feld von Parelektrika. Siehe Kapitel 1 und 3. "para" = gleich.

### 6.2.3. Berechnung der elektrischen Suszeptibilität

Sowohl bei Verschiebungs- und auch bei Orientierungspolarisation gilt in guter Näherung bei nicht zu hohen Feldstärken:

$$\boxed{\vec{p}_i = \alpha \cdot \vec{E}} \quad (19)$$

für das in einem einzelnen Molekül im Mittel induzierte Dipolmoment. Die Polarisation ist demnach

$$\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}_i}{V} = n \vec{p}_i = n \alpha \vec{E} \equiv \chi_e \epsilon_0 \vec{E} \quad (20)$$

also können wie die Suszeptibilität so ausdrücken:

$$\boxed{\chi_e = \frac{n \alpha}{\epsilon_0}} \quad (21)$$

Beispiel (s. Kapitel 1):

Kohlendioxid  $\text{CO}_2$  (Verschiebungspolarisation):

$\alpha = 3 \cdot 10^{-40} \text{ Cm}^2/\text{V}$ . Bei einer Teilchenzahldichte von

$$n = \frac{p}{kT} = \frac{10^5}{1.4 \cdot 10^{-23} \cdot 293} \cdot \frac{1}{\text{m}^3} = 2.4 \cdot 10^{25}/\text{m}^3$$

unter Standardbedingungen folgt:

$$\chi_e \approx 0.001$$

#### 6.2.4. 'Ferroelektrika'

In Anlehnung an den Ferromagnetismus spricht man von Ferroelektrika. Vorsicht: Eisen gehört nicht dazu!

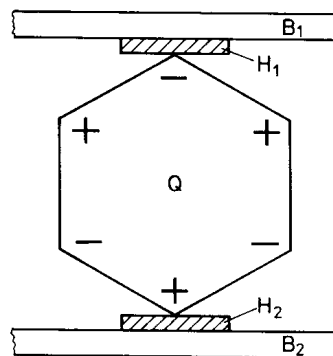
Gewisse keramische Stoffe und Salze haben sehr hohe Dielektrizitätszahlen und weisen in bestimmten Temperaturbereichen permanente Polarisierungen auf, man beobachtet Hysterese-Kurven wie bei Ferromagneten.

Allerdings tritt nach außen meist kein elektrisches Dipolmoment in Erscheinung, da mikroskopische Ladungen angezogen werden und das Feld schnell abschirmen.

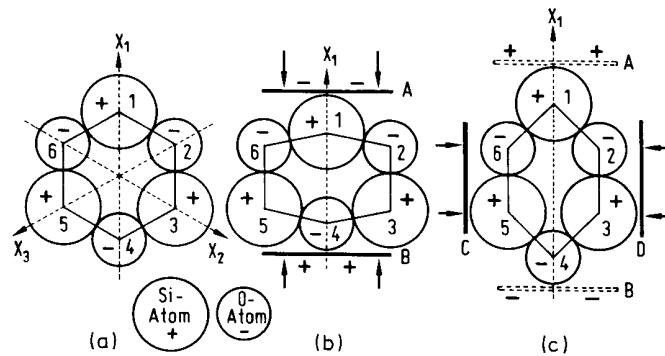
#### 6.2.5. Weitere statische Phänomene in Dielektrika

Für viele Anwendungen wichtig ist das Phänomen der Piezoelektrizität (griechisch = 'eindrücken'), das man an Kristallen (z.B. Quarz =  $\text{SiO}_2$ ) und auch an ferroelektrischen Stoffen beobachtet.

Druck (oder Zug) verformt den Kristall und die eingebetteten Ladungen verschieben sich so, dass an den Oberflächen Ladungen auftreten.



Grund ist das Entstehen von elektrischen Dipolmomenten, weil sich negative und positive Ionen im Kristall relativ zueinander verschieben; im Inneren kompensieren sich diese Ladungen, aber es entsteht eine Oberflächenladung:



Achtung: hier ist nur ein Ausschnitt gezeigt; insgesamt ist der unbelastete Kristall elektrisch neutral und hat keine Dipolmomente und keine Oberflächenladungen!

Auch umgekehrt kann man durch Anlegen einer Spannung den Kristall verformen: Elektrostriktion.

Über weite Bereiche beobachtet man für eine feste Kristallausrichtung Proportionalität zwischen mechanischer Verformung und elektrischer Spannung:

$$U = \delta \cdot \Delta l \quad (22)$$

Größenordnung:  $\delta = 10^{10} \text{ V/m}$

### VERSUCH: Piezoelektrischer Körper

Strom messen, bei konstantem Druck Strom, der abklingt. Wegnahme Druck: Strom mit entgegengesetztem Vorzeichen

*Anwendungen:*

- *Druckmessung*
- *Tonabnehmer Plattenspieler (→ Museum), Mikrophone*
- *akustische Signalgeber*
- *Schwingquarze als Frequenznormale: Wenn angelegte elektrische Frequenz  $\approx$  Frequenz der mechanischen Eigenschwingung: scharfe Resonanz ('Quarzuhr')*
- *Gasfeuerzeug*
- *sehr genaue Positionierung von Proben, z.B. unter dem Mikroskop*

### VERSUCH: Kleiner Piezo-Tonerzeuger

Auch beim schnellen Erhitzen und Abkühlen können sich in manchen Dielektrika Ladungen verschieben und Oberflächenspannungen entstehen: pyroelektrischer Effekt. Grund: thermische Längenänderung → Piezoeffekt.

Proportionalität zwischen Ladung pro Fläche und Temperatur:

$$\sigma = \zeta \cdot T \quad (23)$$

Typisch:  $\zeta = 10^{-6} \text{ C/m}^2/\text{K}$ .

### 6.2.6. Elektromagnetische Wellen und Brechungsindex

Wir hatten schon gesehen, dass die Phasengeschwindigkeit einer elektromagnetischen Welle in einem nichtmagnetischen Material

$$v_{Ph} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad (24)$$



ist. Das Verhältnis

$$\frac{v_{Ph}^0}{v_{Ph}} \equiv \frac{c}{v_{Ph}} = \sqrt{\epsilon_r} \equiv n \quad (25)$$

heißt Brechungsindex. Er bestimmt z.B. die ‘Brechung’ von Licht beim Übergang in ein anderes Medium. (Gesetz von Snellius, 1. Semester).

$\epsilon_r$  und  $n$  sind frequenzabhängig.

*Beispiel: Wasser*

*Statisch (Messung am Kondensator):  $\epsilon_r = 81$ .*

*Radiowelle ( $\nu \sim 4 \cdot 10^8$  Hz):  $n^2 \approx 5^2 = 25$  (siehe Versuch in Kapitel 5 !)*

*Licht ( $\nu \sim 5 \cdot 10^{14}$  Hz):  $n^2 = 1.33^2 = 1.7$*

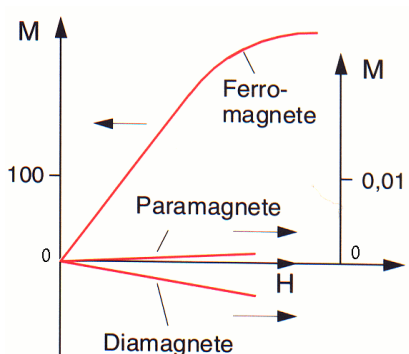
Mehr dazu in der Optik.

### 6.3. Materie in magnetischen Feldern

Zunächst betrachten wir allgemeine Eigenschaften von Stoffen in magnetischen Feldern, dann gehen wir näher auf die verschiedenen Materialtypen ein.

Während Dielektrika das E-Feld schwächen, wird das B-Feld durch paramagnetische und ferromagnetische Stoffe verstärkt.

Die relativen Permeabilitäten  $\mu_r = 1 + \chi_m$  können (im Gegensatz zu den Dielektrizitätszahlen  $\epsilon_r$ ) auch kleiner als 1 werden (d.h.  $\chi_m < 0$ ), und zwar bei diamagnetischen Stoffen:



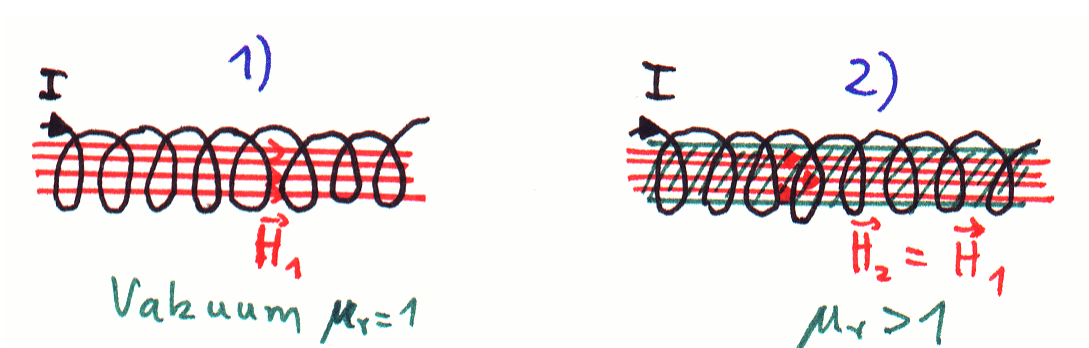
Hier für einige Stoffe ( $T = 20$  C, statischer Grenzfall) die Suszeptibilitäten  $\chi_m$ :

Wismut	$-280 \cdot 10^{-6}$
Wasser	$-10 \cdot 10^{-6}$
Vakuum	0
Wolfram	$59 \cdot 10^{-6}$
Platin	$202 \cdot 10^{-6}$
Kobalt	80 – 200
Eisen	500 – 10000

Vorsicht: Großes Durcheinander in den Lehrbüchern, u.a. da manchmal der Wert im Gaußschen Maßsystem genommen wird:  $\chi_m = \chi_{Gauss} \cdot 4\pi$ !

Im statischen Fall ist der Zusammenhang zwischen  $\vec{M}$ ,  $\vec{B}$  und  $\vec{H}$  ähnlich dem zwischen den entsprechenden elektrischen Größen:

$\vec{H}$  wird erzeugt durch die Stromdichte  $\vec{j}_0$  ('freie Ströme', z.B. einer Spule) und ist unabhängig vom Vorhandensein eines magnetischen Materials (genauer: dies gilt für die Parallelkomponente, s.u.). In einer langen Spule:



$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}_0 \quad (26)$$

Das H-Feld entspricht in diesem Punkt also dem D-Feld.

Die im Material induzierten Kreisströme ('gebundene Ströme') kompensieren sich im Inneren, führen aber zu einem Magnetisierungsstrom  $\vec{j}_m$  an der Oberfläche und damit zur Magnetisierung:

$$\vec{\nabla} \times \vec{M} = \vec{j}_m \quad (27)$$

Also entspricht  $\vec{M}$  der Polarisation  $\vec{P}$ . Ferner gelten die folgenden Analogien:

$$\rho_0 \leftrightarrow \vec{j}_0 \quad \rho_{pol} \leftrightarrow \vec{j}_m$$

Zur Erzeugung des B-Feldes tragen - in Analogie zum E-Feld - beide Arten von Strömen bei:

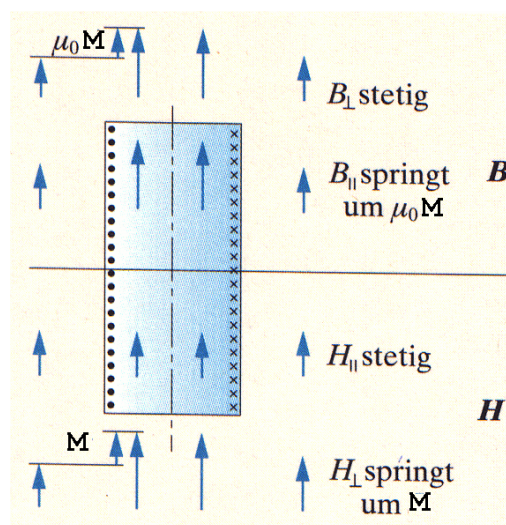
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{j}_0 + \vec{j}_m) \quad (28)$$

Das H-Feld heißt magnetische Erregung, weil es in der 4. Maxwellgleichung steht: Stromdichte und Verschiebungsstrom erzeugen das H-Feld, sie erzeugen nicht die Magnetisierung!

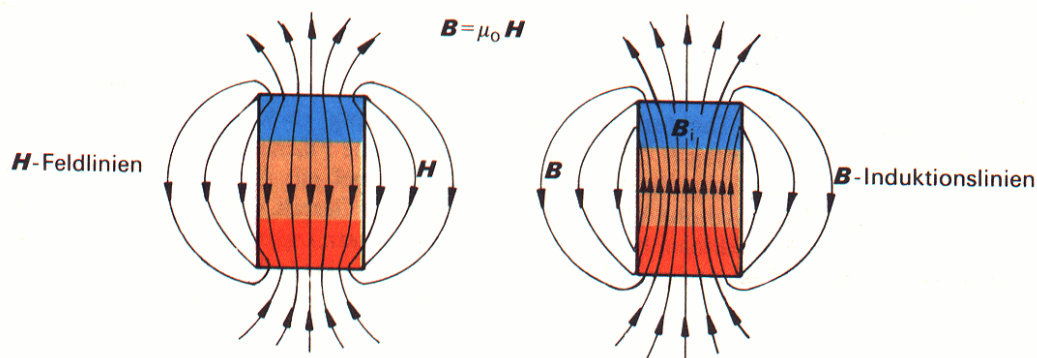
Durch (26) und (27) sind  $\vec{H}$  und  $\vec{M}$  nicht eindeutig bestimmt. Man definiert nun  $\vec{M}$  so, dass es nur im Material von null verschieden ist.

Das Verhalten der statischen Felder  $\vec{B}$  und  $\vec{H}$  an Grenzflächen (die äußere Stromdichte  $\vec{j}_0$  sei null) ist anders als im elektrischen Fall, da nicht die zu  $\vec{E}$  analoge Größe  $\vec{B}$  wirbelfrei ist, sondern  $\vec{H}$ . Ähnlich ist nicht  $\vec{H}$  divergenzfrei, sondern  $\vec{B}$ . Somit müssen wir feststellen, dass es eine vollständige Analogie zwischen elektrischen und magnetischen Feldgrößen eben **nicht** gibt! Die Parallelkomponente von  $\vec{H}$  ist stetig, die Transversalkomponente macht einen Sprung, und vice versa für  $\vec{B}$ .

Paramagnet in äußerem Feld:



Ein Ferromagnet im feldfreien Raum weist folgende Feldlinienbilder auf:



Im Inneren sind H-Feld und B-Feld entgegengesetzt gerichtet! Dies folgt aus der Wirbelfreiheit von  $\vec{H}$ ! Im Fall eines Ferromagneten sind also  $\vec{H}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{M}$  **nicht** proportional, man muss die allgemeine Beziehung  $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0 - \vec{M}$  benutzen!

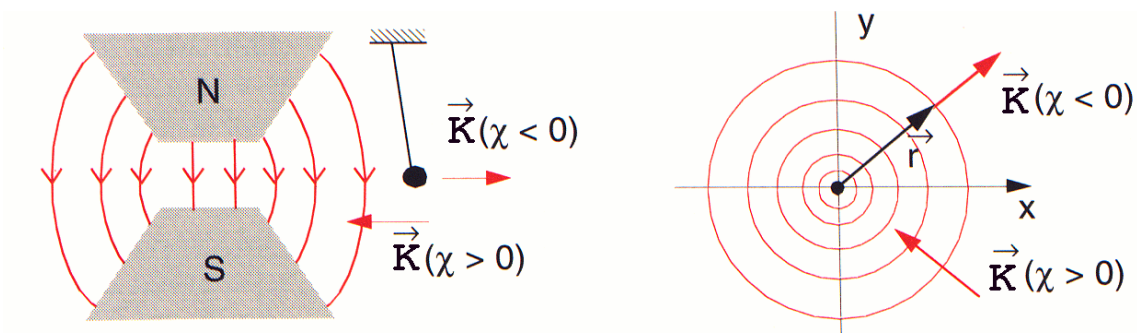
(Vergleiche auch statischen Plattenkondensator: Auch hier sind wegen  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$  die E-Feldlinien im Inneren und im Außenraum entgegengesetzt gerichtet!)

Die Energiedichte des magnetischen Feldes ist

$$w = \frac{1}{2\mu_r\mu_0} \vec{B}^2 = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} = \frac{1}{2} \mu_r\mu_0 \vec{H}^2 \quad (29)$$

Die Anmerkungen in Kapitel 6.2 gelten hier auch.

Bringt man einen Gegenstand in ein inhomogenes magnetisches Feld, so wird er in Richtung der höheren Feldstärke (Feldliniendichte) angezogen ( $\mu_r > 1$ ) oder abgestoßen ( $\mu_r < 1$ ):

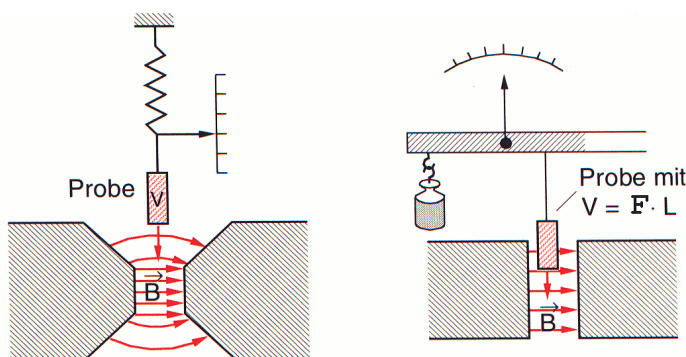


### VERSUCH 4.16.3: Ausrichtung eines Stabes im Magnetfeld: Wismut, Wolfram

Im Versuch ist das Feld näherungsweise homogen. In einem paramagnetischen Material entsteht ein makroskopisches magnetisches Dipolmoment, auf welches ein *Drehmoment* wirkt, bis der Stab entlang der Feldlinien ausgerichtet ist.

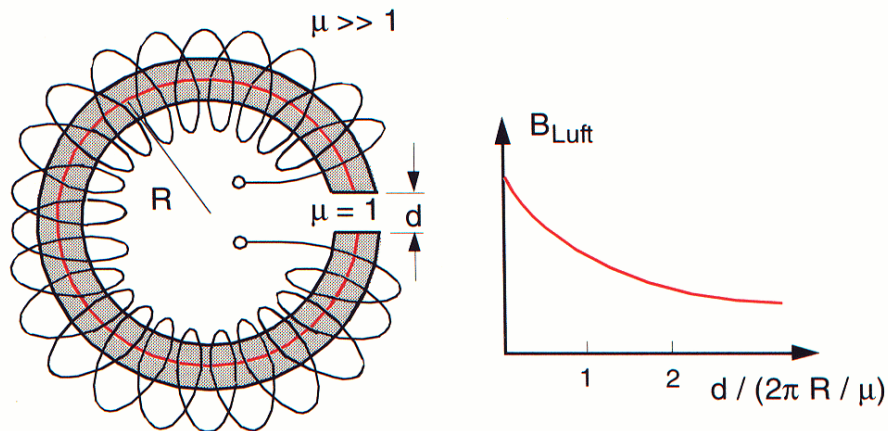
Bei einem Diamagneten hat das Drehmoment das andere Vorzeichen, die Stabenden werden von den nächstliegenden Magnetpolen abgestoßen (immer!) und der Stab stellt sich senkrecht zu den Feldlinien ein.

Die Kraftwirkungen kann man ausnutzen, um die Suszeptibilitäten (insbes. für paramagnetische und diamagnetische Stoffe mit  $|\chi_m| \ll 1$ ) zu messen:



### VERSUCH 4.16.4: Flüssige Luft im Magnetfeld

Anwendung: dünner Luftspalt im mit Weicheisen gefüllten Elektromagneten



Ist der Ring geschlossen, so gilt für das  $H$ -Feld:

$$\oint \vec{H} d\vec{s} = 2\pi R \cdot H = N I$$

mit Windungszahl  $N$  und Stromstärke  $I$ . Bei Vorhandensein eines kleinen Luftspaltes der Dicke  $d \ll R$  gilt

$$\oint \vec{H} d\vec{s} = (2\pi R - d) \cdot H_{\text{Fe}} + d \cdot H_{\text{Luft}} = N I$$

Die  $H$ -Komponente macht an der Spaltgrenze einen Sprung. Da die Permeabilitätskonstante für Luft sehr nahe bei 1 liegt, folgt

$$H_{\text{Fe}} = \frac{1}{\mu_{\text{Fe}}} H_{\text{Luft}}$$

und weiter, näherungsweise

$$\left( \frac{2\pi R}{\mu_{\text{Fe}}} + d \right) \cdot H_{\text{Luft}} = N I$$

Somit erhält man für das  $B$ -Feld im Spalt:

$$B = \mu_0 H_{\text{Luft}} = \frac{\mu_{\text{Fe}} \mu_0 N I}{\mu_{\text{Fe}} d + 2\pi R}$$

Zahlenbeispiel:  $R = 20$  cm,  $N = 5000$ ,  $I = 1$  A,  $\mu_{\text{Fe}} = 2000$ ,  $d = 1$  mm:  $B = 0.8$  T

Im Grenzfall  $\mu_{\text{Fe}} d \ll R$  und mit  $n = N / (2\pi R)$  folgt die einfache Formel:

$$B = \mu_{\text{Fe}} \mu_0 n I$$

In diesem Grenzfall sieht man sehr schön die Bedeutung eines Luftspaltes: Hier ist die magnetische Energiedichte viel höher als im Eisen, das System ist also bestrebt, den Luftspalt zu verkleinern. Das erklärt die hohe Tragfähigkeit von (Elektro-)Magneten!

**VERSUCH 4.16.5:** Hufeisenmagnet und Eisenplatte6.3.1. Diamagnetismus

Diamagnetische Stoffe besitzen keine permanenten Dipolmomente, sondern diese werden durch ein äußeres Feld induziert, siehe Kapitel 3.

Wenn Atome permanente magnetische Dipolmomente besitzen, so sind die Stoffe paramagnetisch (oder ferromagnetisch); die im Prinzip immer vorhandene diamagnetische Komponente kommt hinzu, aber sie hat entgegengesetztes Vorzeichen hat und ist betragsmäßig in vielen Stoffen kleiner als die paramagnetische.

(Vergleiche Dielektrika: Auch bei polaren Molekülen können Verschiebungs- und Orientierungspolarisation gleichzeitig auftreten, aber dort haben beide Effekte das gleiche Vorzeichen!).

Mikroskopisch entstehen magnetische Momente durch Elektronen auf atomaren Bahnen um den Kern mit Drehimpuls  $\neq 0$  oder aufgrund des mit dem Elektronspin assoziierten magnetischen Dipolmomentes, s.u.

Diamagnetische Materialien sind:

a) Stoffe, deren Elektronenschale insgesamt (incl. Elektronenspins) den Drehimpuls null hat (abgesättigte Schale):

Edelgase He, Ne, Ar . . .

Zweiatomige Moleküle  $H_2$ ,  $N_2$ , . . .

b) Stoffe deren paramagnetische Komponente klein ist:

Metalle Cu, Ag, Au . . .

c) Supraleiter:  $\mu_r = 0$ ,  $\chi_m = -1 \rightarrow B = 0$ : perfekter Diamagnet! Äußeres B-Feld wird vollständig durch Oberflächenströme kompensiert: Meißner-Ochsenfeld-Effekt.

6.3.2. Paramagnetismus

Im folgenden vernachlässigen wir die diamagnetischen Effekte!

In einem äußeren B-Feld haben die elementaren Dipolmomente  $\vec{p}_i$  die potentielle Energie

$$E_i = -\vec{p}_i \cdot \vec{B} = -p_i B \cos \theta_i \quad (30)$$

wobei  $\theta_i$  der Winkel zwischen den beiden Vektoren ist, bei vollständiger 'Ausrichtung' gilt  $\theta = 0^\circ$ .

Die einzelnen Dipolmomente seien alle betragsmäßig gleich:  $p = |\vec{p}| = |\vec{p}_i|$ . Bei nicht zu starken äußeren Feldern ist die potentielle Energie klein gegenüber  $kT$ , siehe mikroskopische Deutung weiter unten. Also ist die Wahrscheinlichkeit für eine durch  $\cos \theta$  charakterisierte Ausrichtung

$$\text{prob}(\cos \theta) = e^{-E/(kT)} = e^{pB \cos \theta / (kT)} \approx 1 + \frac{pB}{kT} \cos \theta \quad (31)$$

Diese und die folgenden Formeln gelten nur für  $pB \ll kT$ . Der Mittelwert für  $\cos \theta$  ist

$$\langle \cos \theta \rangle = \frac{\int \text{prob}(\cos \theta) \cos \theta d \cos \theta}{\int \text{prob}(\cos \theta) d \cos \theta} = \dots = \frac{pB}{3kT} \quad (32)$$

Die Integrale erstrecken sich über das Intervall  $\cos \theta = -1 \dots +1$ . Damit können wir die Magnetisierung berechnen:

$$\vec{M} = n \langle \vec{p} \rangle = n p \langle \cos \theta \rangle \cdot \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} = \frac{np^2}{3kT} \vec{B} \quad (33)$$

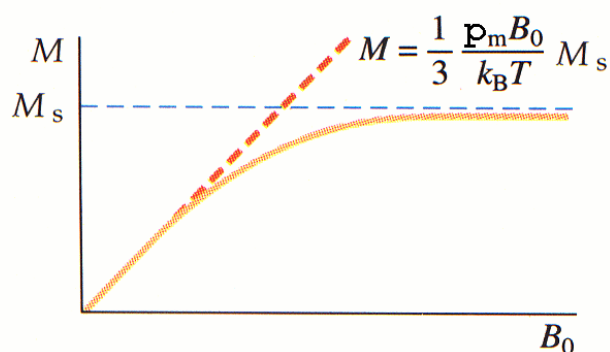
Die maximale Magnetisierung, die Sättigungsmagnetisierung ist

$$\boxed{M_S = n p} \quad (34)$$

Die tatsächliche Magnetisierung ist also bei kleinen Feldern durch

$$\boxed{\vec{M} = \frac{p B}{3kT} \vec{M}_S} \quad (35)$$

gegeben. Bei hohen Magnetfeldern gilt diese lineare Beziehung aber nicht mehr:



Für die Suszeptibilität bekommen wir mit  $\mu_r \approx 1$ :

$$\boxed{\chi_m = \mu_0 \frac{M}{B} = \frac{\mu_0 n p^2}{3kT} \sim \frac{1}{T}} \quad (36)$$

Diese Temperaturabhängigkeit wird experimentell bestätigt (Curiesches Gesetz).

Jetzt wollen wir eine mikroskopische Deutung versuchen. Ein Atom stellen wir uns als um einen Kern kreisende (nichtrelativistische) Elektronen vor. Das Dipolmoment eines Elektrons ist (betragsmäßig):

$$p_l = I F = e \frac{v}{2\pi R} \pi R^2 = \frac{1}{2} e R v = \frac{e}{2m_e} L \quad (37)$$

$F$  ist die umkreiste Fläche,  $I$  der mittlere Strom,  $L$  ist der Drehimpuls, für den quantenmechanisch gilt<sup>2</sup>:

$$L = l \hbar \quad \hbar = \frac{h}{2\pi} \quad l = 0(!), 1, 2, 3, \dots \quad (38)$$

Also:

$$p_l = \mu_B \cdot l \quad (39)$$

<sup>2</sup>genauer: wir sprechen hier über die Projektion des Drehimpulses auf eine Achse, siehe Quantenmechanik ...

mit dem Bohrschen Magneton

$$\mu_B = \frac{e \hbar}{2 m_e} = 9.27 \cdot 10^{-24} \text{ J/T} = 5.79 \cdot 10^{-5} \text{ eV/T} \quad (40)$$

Der Atomkern trägt praktisch nicht zum Dipolmoment des Atomes bei, da die zum Bohrschen Magneton analoge Größe, das Kernmagneton

$$\mu_K = \frac{e \hbar}{2 m_p} \quad (41)$$

wegen der großen Protonmasse sehr klein ist.

Auch das (punktförmige!) Elektron hat einen Drehimpuls (Spin),  $\hbar/2$ , und ein magnetisches Moment

$$p_s = \mu_B \quad (42)$$

Es ist also relativ zu seinem Drehimpuls doppelt so groß wie im Fall des Bahndrehimpulses!

Um nun die Sättigungsmagnetisierung und die Suszeptibilität abzuschätzen nehmen wir an, dass jedes Atom im Mittel *ein* magnetisches Moment  $p = \mu_B$  beiträgt. Also:

$$M_S = n \mu_B \quad \chi_m = \frac{\mu_0 n \mu_B^2}{3kT} \quad (43)$$

*Beispiel: Platin bei Zimmertemperatur:  $T = 293 \text{ K}$ . Atommasse  $A = 185$ , Dichte  $\rho = 21.4 \text{ g/cm}^3$ .*

$$n = \frac{21400 \text{ kg/m}^3}{185 \cdot 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}} = 7.0 \cdot 10^{28} / \text{m}^3$$

$$M_S = 6.5 \cdot 10^5 \text{ A/m}$$

*Das entspricht einem B-Feld  $B = \mu_0 \cdot M_S = 0.8 \text{ T}$ . Also erhalten wir für  $\chi_m$  die Abschätzung<sup>3</sup>:*

$$\chi_m = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Tm/A} \cdot 7.0 \cdot 10^{28} / \text{m}^3 \cdot (9.3 \cdot 10^{-24} \text{ J/T})^2}{3 \cdot 1.4 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} \cdot 293 \text{ K}} \approx 6 \cdot 10^{-4}$$

*Vergleich mit dem Messwert:  $\chi_m = 2 \cdot 10^{-4}$ .*

### 6.3.3. Ferromagnetismus

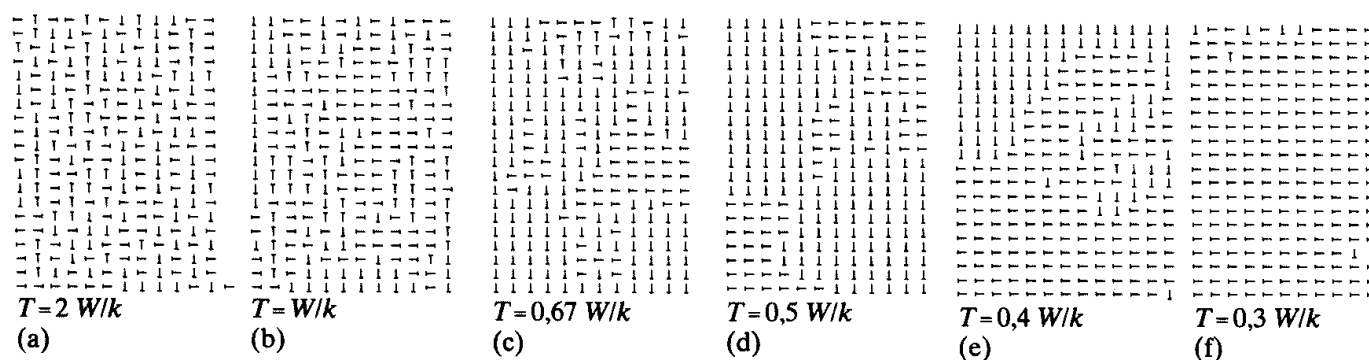
Im Prinzip sind in ferromagnetischen Stoffen die atomaren magnetischen Dipolmomente die gleichen wie für paramagnetische Substanzen. Die Sättigungsmagnetisierung ist in beiden Fällen von der gleichen Größenordnung, aber die Suszeptibilitäten unterscheiden sich bei Zimmertemperatur sehr.

Anders formuliert: In Ferromagneten ist die Suszeptibilität bei Zimmertemperatur so groß wie in paramagnetischen Materialien bei sehr kleiner Temperatur. Es gibt also offenbar einen Mechanismus, der

<sup>3</sup>Einheitenumrechnung:  $\text{J} = \text{A T m}^2$



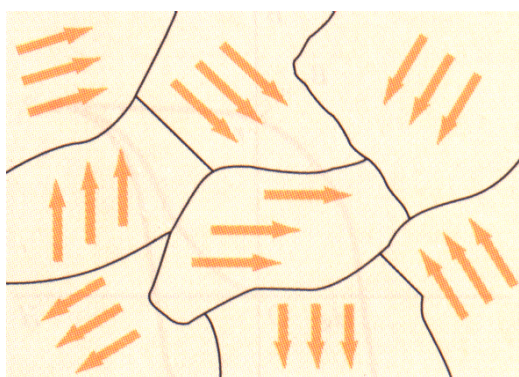
die störende zufällige thermische Bewegung der einzelnen atomaren Dipolmomente drastisch reduziert! Ursache ist die beim Ferromagneten (nicht aber in Paramagnetika) vorhandene starke Kopplung **zwischen** den atomaren Momenten. Ein entsprechendes Modell wurde von Ising entwickelt und trägt seinen Namen. Die Gesamtenergie enthält einen Zusatzterm, der die Summe der Wechselwirkungen zwischen allen Paaren von benachbarten elementaren Dipolmomenten beschreibt:  $E_{ij} = \pm W$  bei antiparalleler/paralleler Einstellung. Die Wahrscheinlichkeit der Dipolausrichtung ist durch einen Boltzmannfaktor  $e^{-W/(kT)}$  gegeben. Simulationsrechnungen ergeben:



Bei fester Temperatur wächst die gegenseitige Kopplung mit dem Parameter  $W$ . Es kommt auch ohne äußeres Feld zur Ausbildung von größeren Regionen mit der gleichen Dipolausrichtung: spontane Magnetisierung. Im Grenzfall verschwindender Kopplung erhält man den Paramagnetismus.

#### VERSUCH 4.16.6: Kubisches und Hexagonales Magnetmodell in Helmholtz-Spule

Die Regionen heißen Weißsche Bezirke (nach P. Weiß) oder Domänen. Sie enthalten  $10^8 - 10^{12}$  atomare Momente.



#### SIMULATION: Ferromagnetismus

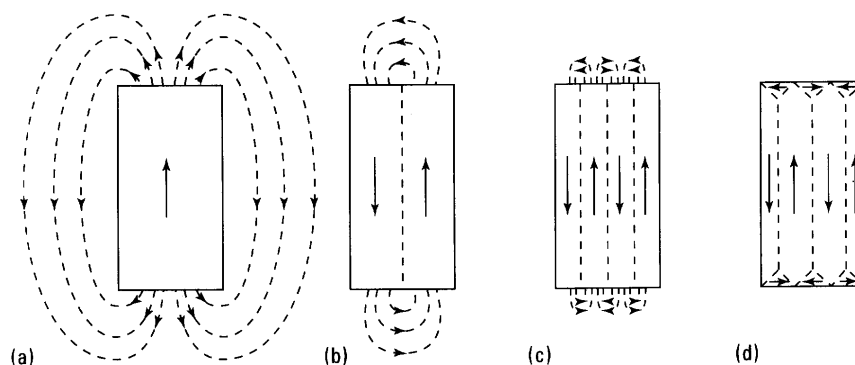
Albert: Ising.exe

Versuchsfeld vergrößern, andere Felder schließen oder nur M, H, T, und J nebeneinander anzeigen

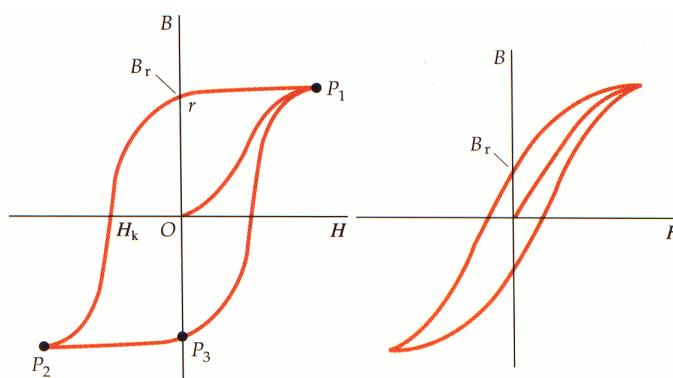
- 1) T von 5 auf 2 erniedrigen, dann wieder auf 5
- 2) H-Feld von 0 auf 1 erhöhen, dann -1, dann 1
- 3) T von 5 auf 10 auf 5 auf 2 verändern
- 4) H-Feld wieder auf 0 setzen
- 5) T auf 3 erhöhen (offenbar oberhalb Curie-Temperatur!) und wieder auf 2
- 6) Kopplung  $J = 0$  und dann wieder 1

**VERSUCH 4.16.7:** Weißsche Bezirke unter dem Mikroskop

Ohne äusseres Feld arrangieren sich die Weißschen Bezirke so, dass das äußere Streufeld und damit die Feldenergie minimiert wird:



In einem äußeren Feld richten sich die Weißschen Bezirke aus (klappen um) und/oder werden vergrößert/verkleinert, es entsteht eine Magnetisierung, die auch nach Zurückfahren des Feldes auf null bestehen bleibt: Remanenz. Erst nach Umpolung des Feldes kann man die Magnetisierung wieder entfernen:



Die  $M(H)$ -Kurve (bzw.  $B(H)$ -Kurve) heißt ‘Hysterese’. Die eingeschlossene Fläche gibt die Energie an, die bei Durchlaufen eines Zyklus in Wärme umgewandelt wird. Ist die Fläche groß, spricht man von ‘harten’ magnetischen Materialien, sonst von ‘weichen’. Letztere werden bevorzugt, wenn man keine Verluste (z.B. im Eisenkern eines Trafos, zusätzlich zu den Wirbelstromverlusten!) haben will, erstere sind insbesondere dann besser, wenn es um das Speichern von Informationen geht.

**SIMU:LATION:** Ferromagnetismus

Albert: Ising.exe, Neustart!

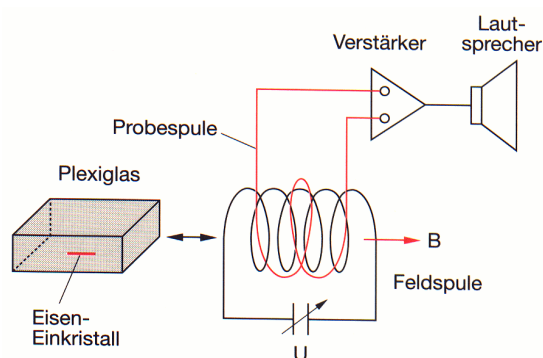
Versuchsfeld vergrößern,  $M(H)$  darstellen (xy), J und H anzeigen, Versuchsfeld (vertikal teilen),  $T = 2.4$  setzen, Frequenz 0.1,  $H = 0.5$

Starten!

Wiederholen mit Spinkopplung = 1.1

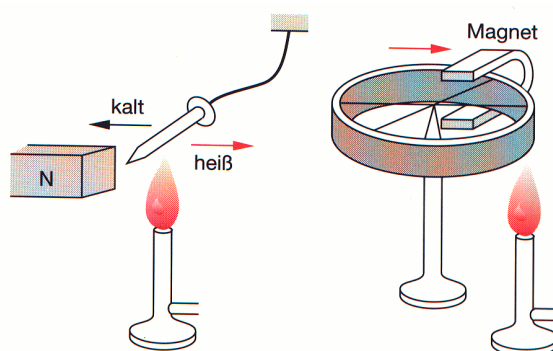
**VERSUCH 4.16.8:** Hysterese

Wie die Computersimulation zeigt, ist die Hysteresekurve nicht glatt, sondern es gibt kleine Sprünge, wenn eine Domäne umklappt. Diese Barkhausen-Sprünge kann man akustisch nachweisen:



### VERSUCH 4.16.9: Barkhausen-Effekt

Der Ferromagnetismus verschwindet, wenn das Verhältnis  $W/(kT)$  zu klein wird. Das kann man durch Temperaturerhöhung erreichen: Oberhalb der Curie-Temperatur wird der Stoff paramagnetisch.



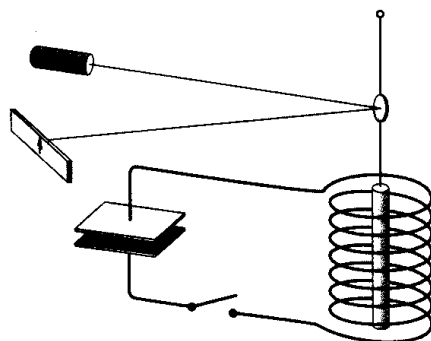
Für Eisen beträgt diese Temperatur 1043 K.

Rechter Teil der Abbildung: Der Eisenring dreht sich, da der hintere kältere Teil noch ferromagnetisch ist und in den Hufeisenmagneten hineingezogen wird, während der vordere Teil über die Curie-Temperatur hinaus erhitzt wird.

### VERSUCH 4.16.10: Curie-Temperatur: Nagel an Draht

### VERSUCH 4.16.11: Curie-Temperatur: Motor

Wir haben die makroskopische Magnetisierung als Ausrichtung kleiner Drehimpulse interpretiert. Diesen Zusammenhang kann man nachweisen (Einstein-de-Haas-Effekt):



Bei Magnetisierung bilden die ausgerichteten atomaren Drehimpulse zusammen einen makroskopischen Drehimpuls, der den Stab rotieren lässt. Genaue Messungen zeigen, dass das Verhältnis von magnetischem Dipolmoment und Drehimpuls dem vom Elektronspin entspricht (Faktor 2 höher als für Bahndrehimpulse, s.o.). Daraus muss man folgern, dass, die Elektronenspins eine wesentliche Rolle für das Phänomen Ferromagnetismus spielen!

Auch das umgekehrte Phänomen konnte man nachweisen: Ein in schnelle Rotation versetzter Eisenstab wird magnetisiert!