

Skriptteil 7

WWW:

Einsteins berühmtes Papier:

<http://soliton.wins.uva.nl/frankla/Special.html>

Global Positioning System:

<http://kowoma.de/gps/index.htm>

<http://www.cmtinc.com/gpsbook/index.htm>

Nachdenken/Nachlesen:

- Einsteins Gedankenexperiment zur trägen Masse von Licht: Photonen bewegen sich in einem leeren von der Umgebung isolierten Kasten . . .
- Und wenn der Wert von c viel kleiner wäre ? Buch: George Gamow: Mr. Tompkins in Wonderland, 1939

7. Spezielle Relativitätstheorie

Im folgenden werden wir die Problematik der fehlenden Invarianz der elektromagnetischen Formeln unter Galilei-Transformationen zunächst nicht explizit betrachten und darauf erst am Ende zurückkommen.

In den nächsten Unterkapiteln werden zuerst grundlegende Experimente diskutiert und anschließend wird der 'mechanische' Zugang zur Relativitätstheorie vorgestellt.

Man sollte nicht vergessen, dass auch andere Probleme der 'klassischen' Physik, die Ende des 19. Jahrhunderts *nicht* im Zentrum des Interesses standen, durch die Einsteinsche Theorie aufgelöst wurden, insbesondere die unverstandene Erhaltung der Masse.

7.1. 'Klassische' Experimente

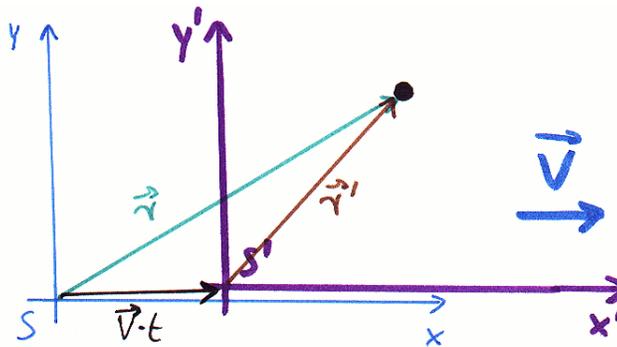
Im folgenden werden zwei Experimente beschrieben, die vor mehr als 100 Jahren durchgeführt wurden und wesentlich zur Entwicklung der Speziellen Relativitätstheorie (A. Einstein u.a.) beitrugen.

Allerdings darf man ihren Einfluss auf *Einstein* nicht überschätzen; für ihn war die Konsistenz der Koordinaten-Transformationen mit den Maxwellgleichungen ein wesentlicher Punkt. Seine wichtigste Arbeit zu diesem Thema trug den Titel "Zur Elektrodynamik bewegter Körper" (1905).

Formal wurden schon 1890 von H.A. Lorentz die nach ihm benannten modifizierten Gesetze für die Koordinatentransformationen berechnet (Lorentz-Transformationen), aber erst Einstein erkannte die tiefere Bedeutung.

Der Status der Physik im Jahre 1880 war:

A) Es gilt das Newtonsche Bild vom absoluten Raum und absoluter Zeit. Die Koordinaten transformieren sich beim Übergang zwischen Inertialsystemen nach Galilei. Galilei-Transformationen:



$$t' = t \quad \vec{r}' = \vec{r} - \vec{v} \cdot t \quad (1)$$

B) In der Mechanik sind alle Inertialsysteme gleichwertig: Die physikalischen Gesetze sind die gleichen, die zugehörigen Gleichungen haben überall die gleiche Form ('Forminvarianz'). Die Zahlenwerte der physikalischen Größen hängen allerdings im allgemeinen vom Bezugssystem ab!

Beispiel: Gleichförmig beschleunigte Bewegung

$$s(t) = s_0 + v \cdot t + \frac{1}{2} a t^2$$

In allen Inertialsystemen gilt diese Beziehung. Systemunabhängig: t, a ; unterschiedlich: $s - s_0, v$

'Gegen'-Beispiel: Doppler-Effekt bei Schallwellen in Luft

Geschwindigkeit $v_S = 300 \text{ m/s}$, eindimensionale Bewegung.

i) In Inertialsystem I_1 betrage die Frequenz einer Schallquelle $\nu_1 = 1000 \text{ Hz}$. In I_2 (Relativgeschwindigkeit $v = 100 \text{ m/s}$) misst man $\nu_2 = \nu_1 \cdot (1 - v/v_S) = 666.7 \text{ Hz}$.

ii) In I_2 beträgt die Frequenz $\nu_2 = 666.7 \text{ Hz}$. In I_1 erwartet man also durch Anwenden der gleichen Transformation wie unter i) [$v \rightarrow -v$] $\nu_1 = \nu_2 \cdot (1 + v/v_S) = 888.9 \text{ Hz}$.

*Widerspruch? Wenn in I_1 die Luft ruht, ist dieses System 'ausgezeichnet', für einen dort ruhenden Beobachter ist die Schallgeschwindigkeit v_S (Vorsicht! Nicht die Frequenz!) unabhängig von der Geschwindigkeit der Quelle, sie wird durch eine Galilei-Transformation **nicht** verändert!*

Die Formel für die Frequenzverschiebung (Quelle ruht in Luft, Beobachter bewegt) kann im Fall ii) nicht angewandt werden, sondern man muss die Beziehung $\nu_1 = \nu_2 / (1 - v/v_S)$ für die umgedrehte Konstellation (Quelle bewegt sich relativ zur Luft, Beobachter ruht) benutzen, s. Physik I, also $\nu_1 = 1000 \text{ Hz}$.

Beispiel (Fortsetzung):

a) Gewehr und Ziel ruhen im 'Luftsystem'. Aus dem Gewehr wird eine Kugel mit $v_K = 300 \text{ m/s}$ auf das Ziel geschossen. Das ist zufällig die Schallgeschwindigkeit, also kommen Kugel und Knall gleichzeitig am Ziel an.

b) Das Gewehr bewegt sich mit der konstanten Geschwindigkeit v_G auf das Ziel zu, als ausgelöst

wird: Jetzt ist die am Ziel gemessene Geschwindigkeit des Schalls immer noch v_S , während die Kugel mit $v_K + v_G > v_S$ fliegt, also vor dem Knall ankommt.

Für die Kugelgeschwindigkeit gelten die Galileitransformationen, für den Schall sind sie nicht anwendbar!

C) Der Elektromagnetismus wird durch die Maxwellgleichungen beschrieben.

D) Die Maxwellgleichungen sind **nicht** forminvariant unter Galilei-Transformationen (siehe Theorievorlesungen.) Es gibt also unter den Inertialsystemen ein ausgezeichnetes System! Wieso? Welches?

Beispiel:

Schallwellen: Formel für Wellengleichung ist nicht Galilei-invariant, wenn man das Ausbreitungsmedium nicht in die Betrachtungen mit einbezieht.

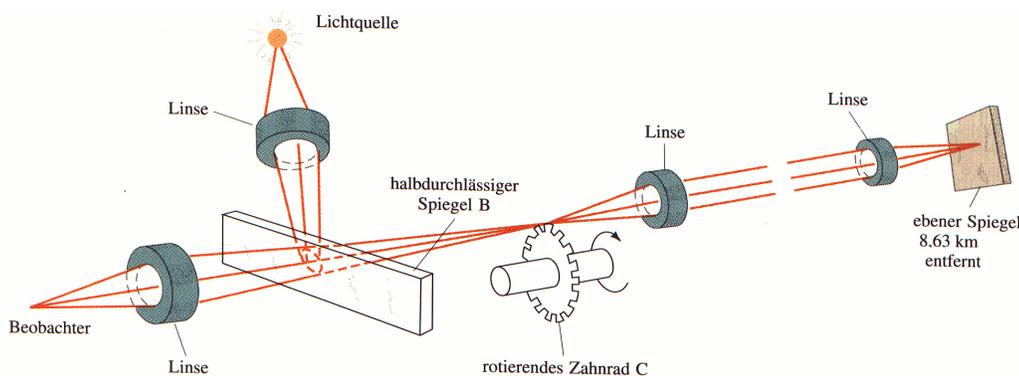
Elektromagnetische Wellen: Auch hier keine Forminvarianz für Wellengleichung!

Naheliegender Ausweg: Es gibt in der Tat **ein** ausgezeichnetes Bezugssystem für die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen, in dem das 'Medium', genannt 'Äther' ruht. In diesem ist die Lichtgeschwindigkeit c eine Konstante, die der Schallgeschwindigkeit v_S entspricht¹.

Das Ruhesystem des Äthers definiert den Newtonschen absoluten Raum. Man stellte sich vor, dass die Himmelskörper den Äther ohne gegenseitige Behinderung durchfliegen können. Um diese Hypothese zu testen, versuchte man den Äther (indirekt) nachzuweisen.

7.1.1. Die Lichtgeschwindigkeit

Da die Lichtgeschwindigkeit eine zentrale Rolle in der Relativitätstheorie spielt und die im folgenden vorgestellten Experimentatoren wie Fizeau und Michelson auch Experten für die **absolute** Messung von c waren, sollen hier einige Methoden kurz vorgestellt werden:



Die Geschwindigkeit des Zahnrades wird variiert und man überprüft, ob Licht am Beobachter ankommt. Bei sehr langsamer Drehzahl gelangt das reflektierte Licht noch durch die gleiche Zahnücke wieder zurück. Bei schnellerer Rotation bleibt es dunkel, da das Licht auf dem Rückweg auf ein Zahnrad trifft. Rotiert das Rad noch schneller, kann das durch Zahnücke n ausgesandte Licht durch

¹ Beide, Schall- und Lichtgeschwindigkeit, haben eine wichtige Eigenschaft gemeinsam, die Frequenzunabhängigkeit, es kommt also nicht zur Dispersion

Lücke $n + 1$ zurückfliegen. Aus der Geometrie und der Umlaufgeschwindigkeit berechnet man c :

$$\Delta t(n \rightarrow n + 1) = \frac{1}{\nu N} \quad (2)$$

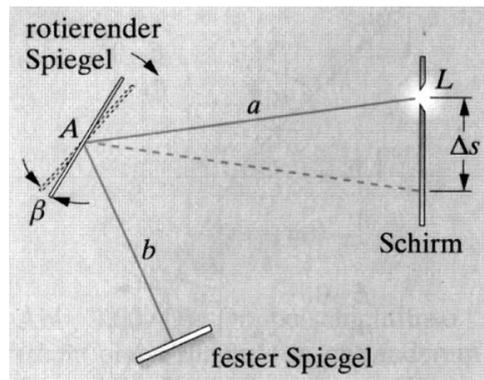
wenn das Zahnrad insgesamt N Lücken/Zähne hat. Also:

$$c = \frac{2d}{\Delta t} = 2 d N \nu \quad (3)$$

d ist der Abstand Spiegel-Zahnrad.

Diese Zahnradmethode wurde von A. Fizeau 1851 angewandt, sein Wert für c war 15% größer als heutige Messresultate.

Ähnlich funktioniert die von L. Foucault zuerst 1862 erprobte Drehspiegelmethode. Hier wird das Licht nur dann wieder genau in die Einfallsrichtung zurückreflektiert, wenn ein rotierenden Spiegel richtig positioniert ist:



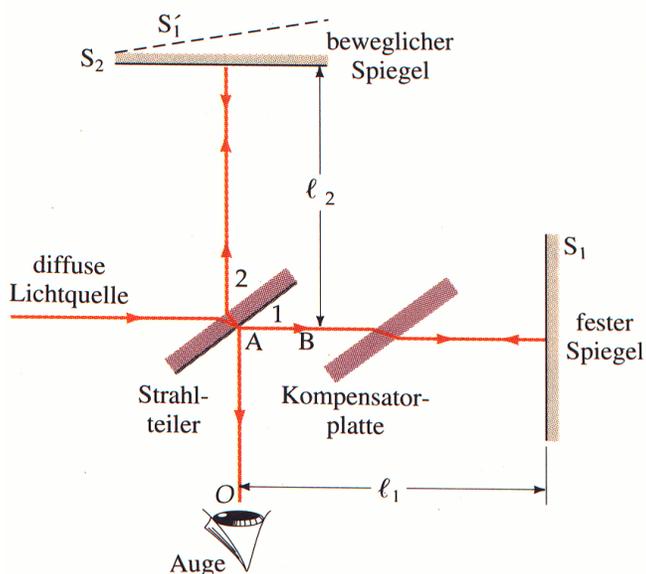
Eine moderne Methode besteht in der Messung der Phasenverschiebung von ausgesandten und reflektierten Lichtpulsen, die eine Funktion von Wegstrecke und Lichtgeschwindigkeit ist:

VERSUCH 6.1.1: Messung Lichtgeschwindigkeit: Drehspiegelmethode

7.1.2. Das Michelson-Morley-Experiment

Wenn es den Äther gibt, der das ganze Weltall ausfüllt, so bewegt sich die Erde zu einem bestimmten Zeitpunkt relativ zu diesem mit der Geschwindigkeit \vec{v} ('Ätherwind'). Diese ist a priori nach Betrag und Richtung unbekannt.

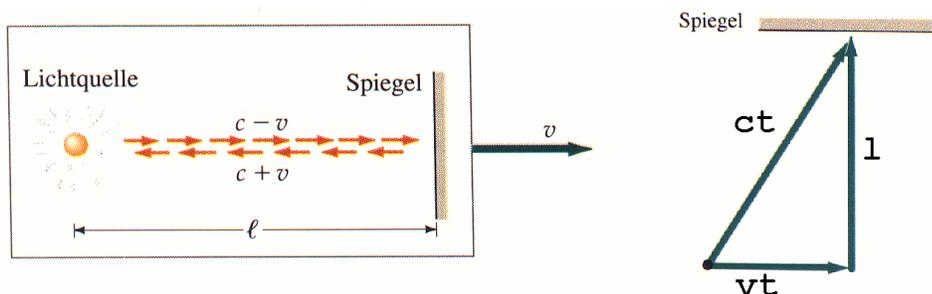
Michelson und Morley bauten das folgende Interferometer auf, um die Geschwindigkeit v zu messen (Annahme: Galilei-Transformationen sind richtig): Michelson-Morley-Experiment:



Die Kompensatorplatte ist übrigens nicht erforderlich. Sie sorgt dafür, dass bei gleichen geometrische Abständen l_1 und l_2 die entsprechenden Lichtlaufzeiten (im Äthersystem) gleich sind, was die Betrachtung vereinfacht.

Im folgenden gelte $l_1 = l_2 = l$ an. Nehmen wir an, \vec{v} weise in Richtung Lichtquelle - S1. Wir berechnen die Laufzeiten Die Geschwindigkeit des Lichtes relativ zum Spiegel ist $c \pm v$. Die Laufzeit für A - S1 - A beträgt (Newton/Galilei):

$$t_1 = \frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v} \approx \frac{2l}{c} \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) \quad (4)$$



Die Laufzeit auf der Strecke A - S2 berechnet man (Skizze!) so:

$$(ct)^2 = l^2 + (vt)^2 \quad (5)$$

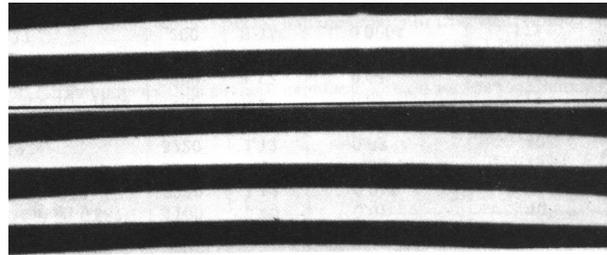
Für A - S2 - A bekommt man das Doppelte:

$$t_2 = 2t = 2 \frac{l}{\sqrt{c^2 - v^2}} \approx \frac{2l}{c} \left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right) \quad (6)$$

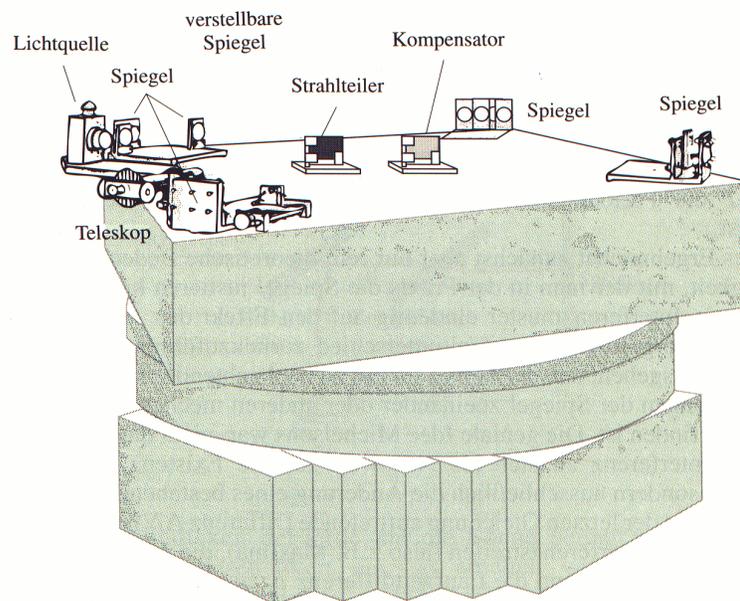
Die Laufzeitdifferenz der beiden Lichtstrahlen ist also eine Funktion von v :

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{v^2 l}{c^2 c} + \mathcal{O}(v^4) \quad (7)$$

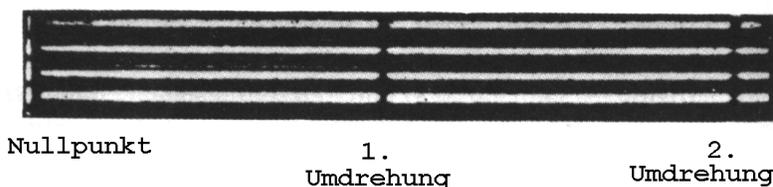
Gemessen wird der Laufzeitunterschied mit Hilfe eines Interferenzbildes, das durch Überlagerung der beiden Lichtstrahlen auf einem Schirm oder im Nachweisgerät entsteht. Man bekommt ein rotations-symmetrisches Bild von ringförmigen hellen und dunklen Streifen; ist einer der beiden Spiegel etwas gekippt, erhält man (nahezu) horizontale Streifen:



Absolute Gangunterschiede kann man nicht messen, aber die relative Verschiebung der Interferenzstreifen bei Drehung des Apparates um eine vertikale Achse. Da man die Richtung von \vec{v} nicht kennt, erwartet man bei einer bestimmten Stellung den maximalen Effekt, bei einer anderen Position gar keine Verschiebung, nämlich wenn \vec{v} einen Winkel von 45° mit den Interferometerachsen bildet². Beim Gangunterschied $\Delta t = \lambda/2$ (destruktive Interferenz) werden die dunklen Streifen hell und umgekehrt. Man kann aber auch Verschiebungen messen, die deutlich kleiner sind als $\lambda/2$. Die genauesten Messungen wurden 1887 in Chicago durchgeführt:



Man fand *keine* Änderung des Bildes bei der Drehung:

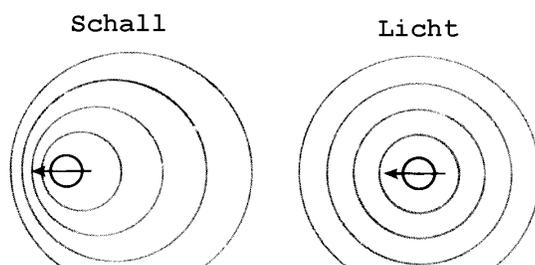


²es sei denn, v ist entlang der Drehachse gerichtet.

Obere Grenze: $v < 10^3$ m/s. Später wurde die Genauigkeit von anderen Experimentatoren noch deutlich gesteigert, aber immer mit dem gleichen Ergebnis.

VERSUCH 5.5.6: Michelson-Morley-Experiment

In der speziellen Relativitätstheorie ist die Lichtgeschwindigkeit immer c , sie sagt keine Laufzeitdifferenz voraus:



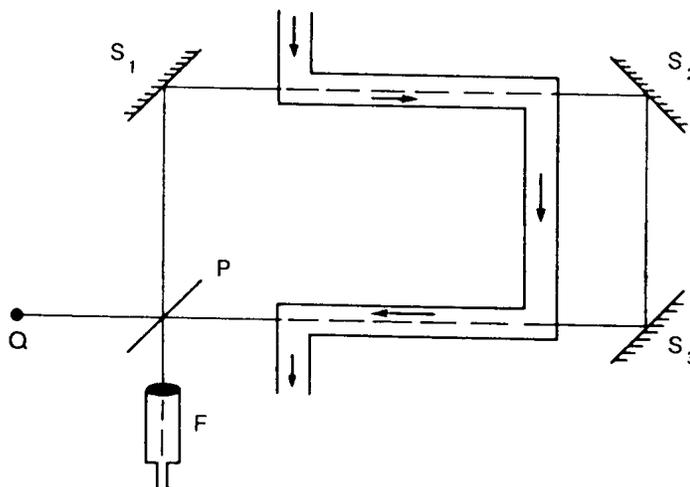
Zurück zur Ätherhypothese: Es könnte natürlich sein, dass während der Messung Erde und Äther relativ zueinander ruhen, oder die Relativgeschwindigkeit senkrecht zur Interferometerebene steht. Allerdings vollführt die Erde eine komplizierte Bewegung, sie rotiert um sich selbst und um die Sonne, letzteres mit der Bahngeschwindigkeit $3 \cdot 10^4$ m/s, mit unterschiedlichen Richtungen! Messungen zu verschiedenen Tages- und Jahreszeiten ergaben aber auch keine Laufzeitunterschiede. Da die erwarteten Effekte deutlich größer sind als die experimentelle obere Grenze, muss man folgern:

Das Äthermodell versagt oder der Äther bewegt sich immer in Richtung der Erde!

7.1.3. Das Fizeau-Experiment

Letztere Hypothese war durchaus plausibel; man stellte sich die Bewegung der Erde durch den Äther vor wie eine durch's Wasser bewegte Kugel. Da diese die Wassermoleküle in der näheren Umgebung mitreißt, ist die an der Oberfläche gemessene Relativgeschwindigkeit zwischen Kugel und Wasser null oder zumindest reduziert.

Um diesen 'Mitführungseffekt' zu untersuchen, führte A.H.L. Fizeau schon 1851 folgendes Experiment zur Lichtgeschwindigkeit in strömenden Flüssigkeiten durch:



Er fand, dass es diesen Effekt tatsächlich gibt! Für eine ruhende Flüssigkeit ist die Lichtgeschwindigkeit im Äthersystem c/n . Bewegt sich die Flüssigkeit mit v (in die gleiche Richtung wie das Licht), so erwartet man klassisch eine modifizierte Geschwindigkeit

$$\tilde{c} = \frac{c}{n} + v \quad (8)$$

wenn es eine vollständige ‘Mitnahme’ des Äthers durch die Flüssigkeit gibt. Hier ist n der Brechungsindex der Flüssigkeit. Allgemeiner:

$$\tilde{c} = \frac{c}{n} + v \cdot \eta \quad (9)$$

mit dem ‘Mitführungskoeffizienten’ η zwischen 0 und 1. Experimentell fand Fizeau:

$$\eta = 1 - \frac{1}{n^2} \quad (10)$$

Übertragen auf Erde incl. Atmosphäre und den Äther bedeutet dies, dass der im Michelson-Interferometer zu beobachtende Effekt reduziert ist. Allerdings ist für Luft mit einem Brechungsindex sehr nahe bei 1 der Mitführeffekt vernachlässigbar klein.

Es gab also im Äthermodell keine befriedigende Erklärung der experimentellen Befunde!

In der speziellen Relativitätstheorie kann man den Mitführungskoeffizienten leicht mit dem Additionstheorem der Geschwindigkeiten berechnen; man findet den Fizeauschen Wert (für $v \ll c$), siehe unten.

7.2. Grundlagen und Folgerungen der Relativitätstheorie

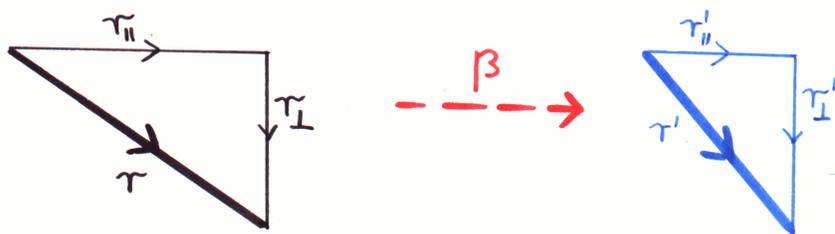
7.2.1. Einsteins Postulate

Die folgenden zwei Postulate formulierte Einstein 1905 als Grundlage seiner Theorie:

- 1) **Relativitätsprinzip: Physikalische Gesetze sind in allen Inertialsystemen gleich.**
- 2) **Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist eine universelle Naturkonstante, sie ist unabhängig von der Geschwindigkeit von Sender und Empfänger.**

Man beachte, dass 1) unverändert aus der Newtonschen Mechanik übernommen wurde. Ein ‘Inertialsystem’ ist weiterhin dadurch definiert, dass dort keine ‘Scheinkräfte’ auftreten.

Unmittelbare Konsequenz aus 2): Es gibt keine absolute Raum-Zeit, keinen Äther. Die Galilei-Transformationen gelten nicht mehr (aus ihnen folgt Additivität der Geschwindigkeit) und müssen durch neue Koordinatentransformationen, die Lorentz-Transformationen, ersetzt werden.



Im folgenden werden wir unter Licht meist einen ‘Lichtpuls’ bzw. ein Photon verstehen und die Welleneigenschaften ignorieren. Wir behandeln Lichtsignale also wie Teilchen, die mit Lichtgeschwindigkeit fliegen, und zwar im Vakuum. Wir betrachten nur Inertialsysteme.

Ganz wichtig ist Einsteins klare Definition der Observablen = Messgrößen, wie z.B. die Länge eines Objektes. Diese Definitionen sind keineswegs trivial, wegen der endlichen Geschwindigkeit der Informationsübertragung. Bei der Konfrontation mit Einsteins ‘bizarren’ Schlussfolgerungen (Relativität der Gleichzeitigkeit, Längenkontraktion etc) ist man möglicherweise geneigt, diese abzutun mit dem Hinweis, dass man eben auf die Lichtlaufzeiten korrigieren müsse, um so die vertrauten Ergebnisse zurückzubekommen. Das bedeutet aber lediglich, dass man in ein vertrautes Bezugssystem transformiert; es ändert nichts daran, dass Messungen dieser Effekte Einstein eindrucksvoll bestätigen - eben weil die endliche Signalgeschwindigkeit unauflösbar mit dem Messprozess verknüpft ist.

Ereignisse sind durch Zeitpunkt und Ort charakterisiert (‘Am 7. Juli habe ich in Hamburg gegessen’). Man kann Raum und Zeit zu einem ‘Vierervektor’ zusammenfassen:

$$\underline{x} \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, \vec{x}) \quad D \quad (11)$$

Der Faktor c wurde eingefügt, damit alle Komponenten die gleiche Einheit haben.

Während durch Galilei-Transformationen die zeitlichen und räumlichen Anteile separat transformiert werden, ist das bei den Lorentztransformationen nicht mehr der Fall, diese Vierer-Schreibweise erweist sich damit als sehr praktisch³.

7.2.2. Die Lorentz-Transformationen

Zur Herleitung der Lorentzschen Transformationsformeln betrachten wir zunächst nur eine Ortskoordinate, x^1 , und verallgemeinern dann später. Hier nehmen wir an, dass die beiden Inertialsysteme nicht gegeneinander verdreht sind und normieren die Zeitnullpunkte so, dass der Koordinatenursprung von S' mit dem von S zum Zeitpunkt $t' = t$ zusammenfällt.

Wir setzen eine allgemeine lineare Beziehung zwischen den Inertialsystemen S und S' an, deren Koordinaten seien also verknüpft durch eine Matrix:

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

A bis D sollen nur von der Relativgeschwindigkeit v , mit der sich S' relativ zu S entlang der x -Achse bewegt, abhängen.

Im Grenzfall $v \ll c$ (insbesondere für $c \rightarrow \infty!$) erwarten wir das gleiche Ergebnis wie für die Galileitransformation:

$$x'^0 = x^0 \quad x'^1 = -\frac{v}{c} x^0 + x^1 \quad (13)$$

also:

$$\frac{v}{c} \rightarrow 0 : \quad A \rightarrow 1 \quad B \rightarrow 0 \quad C \rightarrow -\frac{v}{c} \quad D \rightarrow 1 \quad (14)$$

³Manchmal benutzt man in diesem Zusammenhang den irreführenden begriff des “vierdimensionalen” Raumes; mathematisch ist diese Zählung richtig, aber der ‘Ortsraum’ ist nach wie vor nur 3-dimensional.

Aufgabe ist, die Parameter A, B, C, D zu bestimmen, bzw. diesen Ansatz als zu einfach zu verwerfen. Offenbar benötigen wir 4 Bedingungsgleichungen.

i) (Rahmenbedingungen): Der Ursprung von S' bewegt sich in S mit v , also:

$$S : x^1 = \frac{v}{c} x^0 \quad S' : 0 = x'^1 = C x^0 + D x^1 \quad (15)$$

also

$$\frac{C}{D} = -\frac{v}{c} \quad (16)$$

ii) (Postulat 2): Wir betrachten einen Lichtblitz, der bei Koinzidenz der Systeme ausgesandt wird und später auf einen Absorber trifft. Die Koordinaten des letzteren Ereignisses seien in S

$$x^0, x^1 = c t = x^0 \quad (17)$$

und in S'

$$x'^0, x'^1 = c t' = x'^0 \quad (18)$$

In beiden Fällen wurde die gleiche Lichtgeschwindigkeit c angenommen (Einsteins 2. Postulat).

Einsetzen von (12) ergibt:

$$C x^0 + D x^1 = A x^0 + B x^1 \quad (19)$$

Dies muss für alle möglichen Koordinaten $x^0 = x^1$ gelten, somit:

$$A + B = C + D \quad (20)$$

Damit haben wir M schon erheblich vereinfacht und können versuchen, die Matrix so zu parametrisieren⁴:

$$M(v) = D(v) \begin{pmatrix} 1 + \epsilon \cdot v & -v/c - \epsilon \cdot v \\ -v/c & 1 \end{pmatrix} \quad (21)$$

mit einer zu bestimmenden Konstanten ϵ .

iii) (Postulat 1): Schließlich betrachten wir noch die inverse Transformation $M'(-v)$, die die Koordinaten aus S' auf S abbildet:

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} = M' \cdot \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} \quad (22)$$

Da beide Systeme gleichberechtigt sind, erhält man M' aus M durch Ersetzen von $v \rightarrow -v$. Hintereinanderausführen von M und M' muss die Einheitsmatrix ergeben:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = D(v) \begin{pmatrix} 1 + \epsilon \cdot v & -v/c - \epsilon \cdot v \\ -v/c & 1 \end{pmatrix} \cdot D(-v) \begin{pmatrix} 1 - \epsilon \cdot v & v/c + \epsilon \cdot v \\ v/c & 1 \end{pmatrix} \quad (23)$$

Wenn wir nun die plausible Annahme machen, dass D nur vom Betrag von v abhängt, folgt schließlich:

$$\epsilon = 0 \quad D^2(v) \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = 1 \quad (24)$$

⁴nach Schielen zur Galilei-Transformation!

Also:

$$M = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \quad (25)$$

mit

$$\beta = \frac{v}{c} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (26)$$

Man beachte die Symmetrie zwischen Orts- und Zeitkoordinaten! Offenbar geht diese Transformation für kleine Geschwindigkeiten in die Galilei-Transformation über.

Die zur Bewegungsrichtung senkrechten Komponenten bleiben unverändert, so dass man alle Transformationsgleichungen so zusammenfassen kann:

$$x'^0 = \gamma (x^0 - \beta x_{\parallel}) \quad x'_{\parallel} = \gamma (x_{\parallel} - \beta x^0) \quad x'_{\perp} = x_{\perp} \quad (27)$$

Jeder 'Vierervektor' transformiert sich unter Lorentztransformationen nach diesem Schema, wie wir später an anderen Beispielen sehen werden.

Beispiel:

Ein 'Ereignis' habe in S die Koordinaten
(0.01 s · c, 100 km, 100 km, 100 km).

S' bewege sich relativ zu S mit $v = 0.1 c$ entlang der y -Achse, also $\beta = 0.1, \gamma = 1.005$. Hier lauten die Koordinaten also
(0.01002 s · c, 100 km, -201 km, 100 km).

Die (hier nicht anwendbare!) Galileitransformation würde ergeben:
(0.01 s · c, 100 km, -200 km, 100 km).

Beispiel:

Der Satellit Sputnik I flog 1957 mit einer Geschwindigkeit von knapp $v = 8 \text{ km/s}$ relativ zur Erdoberfläche.

Also: $\beta = 2.7 \cdot 10^{-5}$, $\gamma - 1 \approx \frac{\beta^2}{2} = 3.6 \cdot 10^{-10}$. Relativistische Effekte klein!

Bemerkung:

Betrachten wir kleine Geschwindigkeiten, also $\gamma \approx 1$. In den Lorentz-Formeln treten Zeit x^0 und Raum x^1 symmetrisch in Erscheinung. Dies steht im frappanten Widerspruch zur täglichen Erfahrung: Den Term $-\beta x^0$ gibt es schon in der Galileitransformation und eine so modifizierte Ortskoordinate ist für uns etwas selbstverständliches. Warum bemerken wir dann aber keine Änderung der Zeitkoordinate um $-\beta x^1$? 'Schuld' daran ist der große Zahlenwert der Lichtgeschwindigkeit, die ja unter anderem in x^0 versteckt ist: Um in t' den gleichen Korrekturterm zu erzielen, wie er in x'^1 durch $t = 1 \text{ s}$ hervorgerufen wird, muss man Distanzen von $x^1 = 3 \cdot 10^8 \text{ m}$ heranziehen!

7.2.3. Skalarprodukt von Vierervektoren

Ereignisse sind also Punkte in der Raum-Zeit und werden durch einen Vierervektor beschrieben. Für zwei Vierervektoren \underline{x} und \underline{y} definiert man ein Skalarprodukt in der folgenden Weise:

$$\underline{x} \cdot \underline{y} \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) \cdot (y^0, y^1, y^2, y^3) = x^0 y^0 - (x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3) \quad D \quad (28)$$

Man kann natürlich auch $\underline{x} = \underline{y}$ setzen und so das ‘Quadrat’ eines Vierervektors bilden. Das gilt insbesondere für das ‘Quadrat’ der Differenz zweier Ereignisvektoren:

$$\underline{\Delta x}^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta \vec{x})^2 \quad (29)$$

Es ist ein Maß für den ‘Abstand’ der Ereignisse, s.u. Man beachte, dass diese ‘Quadrate’ negativ sein können!

In der nichtrelativistischen Mechanik bleiben beim Übergang zwischen Inertialsystemen sowohl Zeitdifferenzen, d.h. $(c\Delta t)^2$, als auch Längen, also $(\Delta \vec{x})^2$, invariant.

In der Relativitätstheorie ist das **nicht** mehr der Fall, aber die Kombination von Zeitintervallen und räumlichen Abständen, wie sie im ‘Vierer-Quadrat’ definiert ist, ist auch unter Lorentztransformationen eine Invariante, d.h. das Quadrat eines Vierervektors und allgemein das Skalarprodukt hat in allen Inertialsystemen den gleichen Wert:

$$\underline{x}' \cdot \underline{y}' = \underline{x} \cdot \underline{y} \quad (30)$$

Dies kann man leicht nachrechnen, ausgehend von der Lorentztransformation (26) entlang der x -Achse:

$$\begin{aligned} x'^0 y'^0 - x'^1 y'^1 &= \gamma^2 (x^0 - \beta x^1) (y^0 - \beta y^1) - \gamma^2 (x^1 - \beta x^0) (y^1 - \beta y^0) \\ &= \gamma^2 [x^0 y^0 (1 - \beta^2) - x^1 y^1 (1 - \beta^2) + x^0 y^1 \cdot 0 + x^1 y^0 \cdot 0] \\ &= x^0 y^0 - x^1 y^1 \end{aligned} \quad (31)$$

Welche Bedeutung hat die Invariante $\underline{\Delta x}^2$?

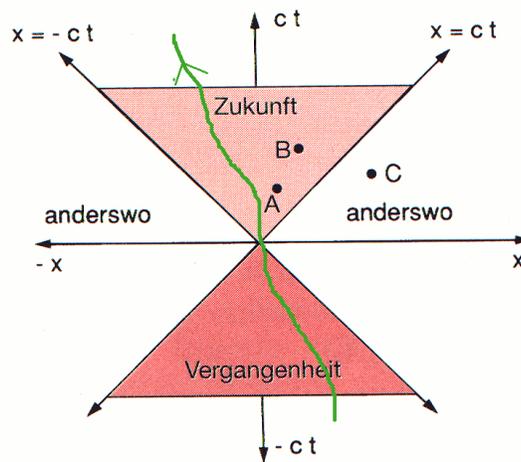
Falls ein Inertialsystem existiert, in dem die beiden Ereignisse gleichzeitig stattfinden (also $\Delta t = 0$) ist $\underline{\Delta x}^2$ gleich dem negativen Quadrat des räumlichen Abstandes.

Falls ein Inertialsystem existiert, in dem die beiden Ereignisse am gleichen Ort stattfinden (also $\Delta \vec{x} = \vec{0}$) ist $\underline{\Delta x}^2$ gleich dem Quadrat des zeitlichen Abstandes ($\cdot c^2$).

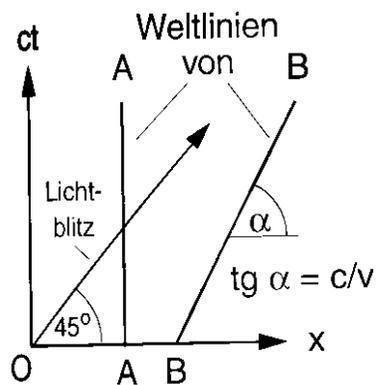
Zwei Ereignisse, die durch einen gemeinsamen Lichtpuls definiert sind (etwa Emission, Absorption) erfüllen immer: $\underline{\Delta x} = 0$.

7.2.4. Minkowski-Diagramme

Ereignisse sind Punkte im 4-dim. Raum. Objekte werden durch eine Weltlinie beschrieben:

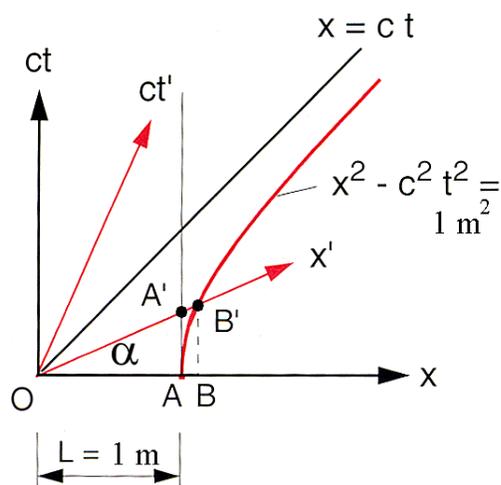


Dieses 'Minkowski-Diagramm' ist gewissermaßen die graphische Darstellung eines Fahrplanes oder Lebenslaufs, hat also mit der Relativitätstheorie zunächst nichts zu tun. Wir zeichnen nur die Zeitkoordinate und eine Ortskoordinate ein, die wir x nennen. Ein weiteres Beispiel ist:



A ruht, B bewegt sich mit v . Die Weltlinien von Licht bilden den Lichtkegel mit $x = ct$. Raumartige Ereignisse mit $\Delta x^2 < 0$ können sich kausal nicht beeinflussen. Für zeitartige Ereignisse gilt $\Delta x^2 > 0$, für lichtartige Ereignisse $\Delta x^2 = 0$.

Da Lorentztransformationen linear sind, kann man in ein Minkowski-Diagramm leicht die Koordinaten von zwei oder mehreren Inertialsystem eintragen:



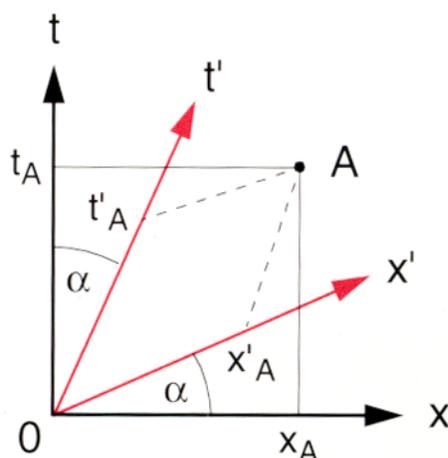
Wenn sich S' mit einer positiven Geschwindigkeit gegenüber S bewegt, liegen die beiden zugehörigen Achsen ct' und x' 'innerhalb' des durch ct und x aufgespannten Quadranten. Die S' -Achsen sind um den Winkel

$$\alpha = \arctan \beta \quad (32)$$

gegenüber den Achsen von S verdreht. Das kann man leicht daran sehen, dass ein in S mit der Geschwindigkeit v fliegendes Objekt in S' ruhen muss, also seine Weltlinie parallel zur t' -Achse verlaufen muss. Auch die Skalen der Achsen ändern sich: Einer Einheitslänge OA auf der x -Achse entspricht eine Einheitslänge OB' auf der x' -Achse: A ist durch

$$(ct)^2 - x^2 = -1 \text{ m}^2 \quad (33)$$

gekennzeichnet. Dieses Skalarprodukt ist aber eine Invariante, also muss auch B' auf dieser Hyperbel liegen. Um die Koordinaten eines gegebenen Ereignisses abzulesen, muss man Geraden parallel zu den Achsen des jeweiligen Bezugssystems ziehen:



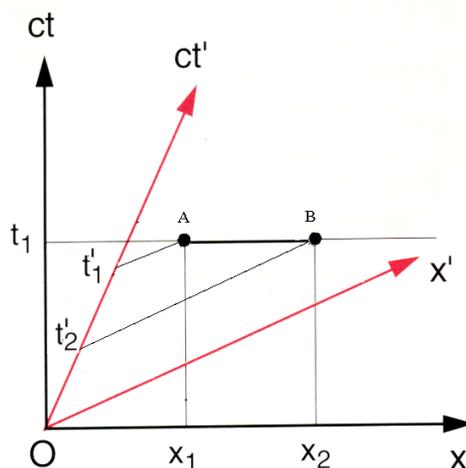
Minkowski-Diagramme erlauben ein einfaches graphisches Lorentz-Transformieren von Ereignissen. Wir werden im folgenden einige Anwendungsbeispiele sehen.

7.2.5. Gleichzeitigkeit und 'Gleichortigkeit'

Im Gegensatz zur Newton-Galilei-Mechanik sind zwei Ereignisse, die in einem System S gleichzeitig eintreten ($\Delta t = 0$), in einem anderen System in der Regel nicht mehr gleichzeitig, wegen

$$c \Delta t' = \gamma(c\Delta t - \beta\Delta x) = -\gamma\beta\Delta x \quad (34)$$

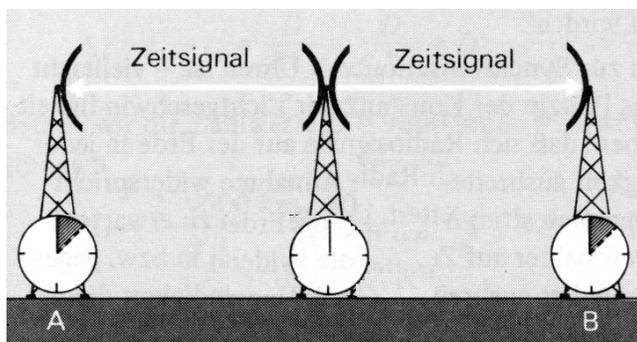
Nur wenn sie auch am gleichen Ort in S stattfinden, gilt die Gleichzeitigkeit in allen Inertialsystemen. Veranschaulichung durch Minkowski-Diagramm:



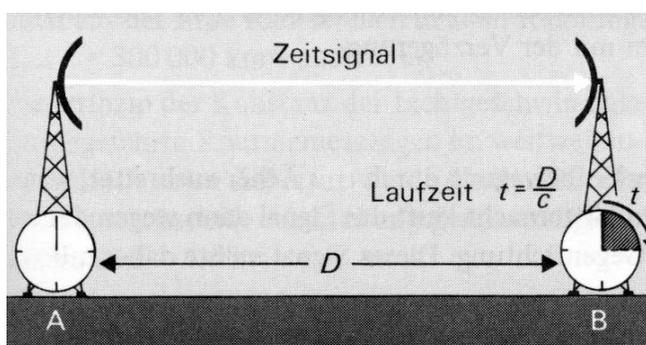
Genau das entsprechende gilt auch bei Vertauschen der Zeit- und Ortskoordinaten: Zwei Ereignisse, die in einem System S am gleichen Ort stattfinden ($\Delta x = 0$), werden in einem anderen System in der Regel an zwei verschiedenen Raumkoordinaten gemessen. Dieser Tatbestand irritiert uns aber nicht, da auch die 'klassische' Mechanik diesen beinhaltet. Der scheinbare Unterschied zwischen Raum und Zeit ist wieder eine Konsequenz des großen Wertes der Lichtgeschwindigkeit, siehe Bemerkung am Ende von Kapitel 7.2.2.

Bei der Zeitmessung ist zu berücksichtigen, dass wir in einem gegebenen Inertialsystem eine universelle Zeit so festlegen müssen, dass - zumindest im Prinzip - an jedem Ort eine diese Zeit anzeigende Uhr vorhanden ist. Dies ist erforderlich, da die Uhersignale von Uhren an anderen Orten wegen der Endlichkeit von c ja verzögert ankommen: Wenn wir auf die Uhr im Hauptbahnhof blicken, erhalten wir eine Zeitinformation, die schon viele ns 'alt' ist! Die im Jahre 1987 auf der Erde beobachtete Supernova SN 1987a ist ein vor etwa 100000 Jahren in der Magellanschen Wolke explodierter Stern ...

Wir brauchen also ein dichtes Netz von Uhren, die alle synchronisiert werden müssen; dazu verwendet man z.B. das Einsteinsche Verfahren: Eine Uhr wird als 'Master' definiert, sie befinde sich am Ort A . Eine Uhr an einem anderen Ort B wird mit der Masteruhr abgeglichen, indem man ein Signal genau in der geometrischen Mitte zwischen den beiden in alle Richtungen sendet: dann müssen beide Uhren beim Empfang des Lichtsignals die gleiche Zeit anzeigen:



Alternativ kann man zur Kalibrierung bei bekanntem Abstand der Uhren ein Zeitsignal von *A* nach *B* senden und auf die Laufzeit korrigieren:



Diese Diskussion ist keinesfalls rein akademischer Natur; für Navigationszwecke im Weltraum und auf der Erde werden laufend sehr präzise Synchronisationen durchgeführt. Für das Satellitennavigationssystem 'GPS' (Global Positioning System), das eine Genauigkeit von einigen m liefert, muss die Synchronisationsgenauigkeit ca. 10 ns betragen. Dabei sind sowohl simple Laufzeitunterschiede als auch relativistische und sogar Gravitationseffekte (allgemeine Relativitätstheorie) zu berücksichtigen.

7.2.6. Längenkontraktion und Zeitdilatation

Wie messen wir die Länge eines Objektes, z.B. eines Stabes? Indem wir *gleichzeitig* die Koordinaten der beiden Enden ermitteln. In S' ruhe der Stab:

$$L_0 \equiv L' = \Delta x' \quad (\Delta t' = 0) \quad (35)$$

Transformation von S nach S' (Bewegung entlang Stabachse):

$$L' = \gamma (\Delta x - \beta c \Delta t) = \gamma \Delta x = \gamma L \quad (\Delta t = 0) \quad (36)$$

Somit:

$$\boxed{L = \frac{L_0}{\gamma} = L_0 \sqrt{1 - \beta^2} \leq L_0} \quad (37)$$

Das ist die Längenkontraktion. Misst man also die Länge eines bewegten Objektes, erhält man einen Wert, der kleiner ist als die Eigenlänge L_0 .

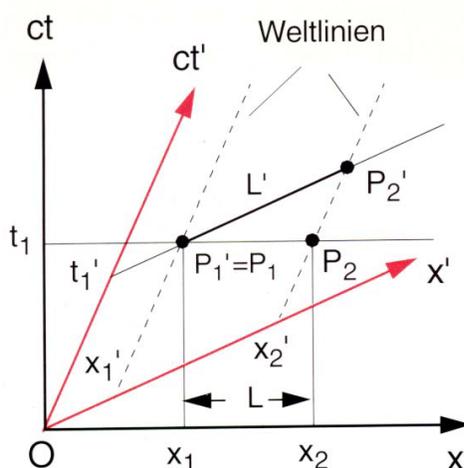
Beispiel:

Die Eigenlänge betrage $L_0 = 2 \text{ m}$, der Stab fliege mit $\beta = 0.866$, also $\gamma = 2$. Dann wird die Stablänge zu $L = 1 \text{ m}$ gemessen.

Bemerkungen:

- Wir haben die Transformation von $S \rightarrow S'$ angewandt, weil so die Messbedingung in S , $\Delta t = 0$, direkt eingebracht werden kann.
- Die Längenkontraktion ist symmetrisch: Von S aus sieht der in S' ruhende Stab kürzer aus, ein in S ruhender Stab wird in S' als kürzer gemessen.
- Die Stauchung wird auch im Experiment gemessen (s.u.), ist also reell. Andererseits bedeutet sie keine mechanische Komprimierung des Stabes!

Interpretation im Minkowski-Diagramm:



Vorsicht bei quantitativer Deutung: Skalen sind unterschiedlich, s.o.

Betrachten wir nun von S aus eine vorbeifliegende Uhr. Im bewegten System S' werden zwei zeitlich verzögerte Signale am *gleichen Ort* ausgesandt, etwa zwei aufeinanderfolgende 'Ticks' der Uhr:

$$T_0 \equiv T' = \Delta t' \quad (\Delta x' = 0) \quad (38)$$

T_0 nennt man Eigenzeit. Im S sind die zu diesen beiden Ereignissen gehörigen Koordinaten durch die Lorentztransformation gegeben, insbesondere:

$$T \equiv \Delta t = \gamma(\Delta t' - \beta \Delta x') = \gamma T' \quad (39)$$

Also:

$$\boxed{T = T_0 \cdot \gamma = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \geq T_0} \quad (40)$$

Die vorbeifliegende Uhr zeigt weniger an (T_0) als der Beobachter misst (T).

Beispiel:

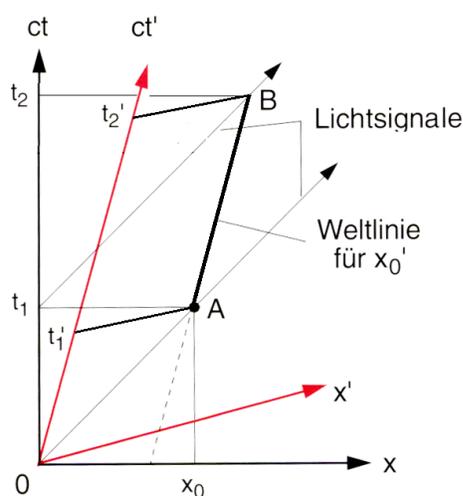
$\beta = 0.943$, $\gamma = 3$. Nachdem die Uhren in S 30 mal getickt haben, zeigt die bewegte (baugleiche) Uhr erst 10 Ticks an.

Diese Zeitdilatation kann man auch so zusammenfassen: Bewegte Uhren laufen langsamer!

Bemerkungen:

- Der Zeitdilatationseffekt hängt nicht davon ab, in welcher Richtung sich die beiden Systeme zueinander bewegen⁵.
- Man beachte, dass die zu den beiden Ereignissen gehörenden Ortskoordinaten in S unterschiedlich sind!
- Auch hier gibt es eine Symmetrie zwischen den Bezugssystemen! Eine in S' ruhende Uhr tickt von S aus gesehen langsamer, eine in S ruhende Uhr tickt von S'' aus gesehen weniger schnell!

Interpretation im Minkowski-Diagramm:



Vorsicht bei quantitativer Deutung: Skalen sind unterschiedlich, s.o.

Übung: Einsteinsche Lichtuhr.

Zeitdilatation und Längenkontraktion sind komplementär: Man kann die Länge des Stabes bestimmen, indem man die Zeit misst, die er benötigt, sich an einer Uhr vorbeizubewegen:

a) Im System S' ruht der Stab, die Uhr (= System S) bewegt sich an ihm vorbei: $L' = v \cdot T'$

b) Im System S , in dem der Stab sich bewegt, wird eine verkürzte Stablänge gemessen: $L = v \cdot T$.

Die Ergebnisse sind konsistent, denn $L = L'/\gamma$ (Längenkontraktion) und $T' = \gamma T$ (Zeitdilatation). Siehe dazu auch Kapitel 7.3 (atmosphärische Myonen).

Auch die Formeln für den relativistischen Dopplereffekt kann man nun leicht aufstellen: Eine in S' ruhende Uhr sendet periodische Signale mit einem zeitlichen Abstand von T_S . In S wird deren Ankunft an einem *festen Ort* registriert. Der Laufzeitunterschied bedeutet für die Zeitdifferenz im Empfänger:

$$T_E = (1 + \beta) T_S \quad (41)$$

⁵Beachte: Zeit = 1-dimensional, Raum = 3-dimensional: Der Längenkontraktion kann man ausweichen, indem man auf die 'anderen' Raumdimensionen senkrecht zu \vec{v} ausweicht (Stab entsprechend orientiert), bei der Zeitdilatation geht das nicht!

Der zeitliche Abstand ist vergrößert, wenn $\beta > 0$. Dazu kommt die Zeitdilatation:

$$T_E = \gamma (1 + \beta) T_S = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} T_S \quad (42)$$

Für die Frequenzen folgt das inverse Verhältnis

$$\nu_E = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \nu_S \quad (43)$$

Diese Gleichung gilt für positive und negative β , da beide Systeme gleichberechtigt sind! Im Gegensatz zum Schall (s.o.) gilt hier für den Faktor $f(\beta) = \nu_E/\nu_S$: $f(-\beta) = 1/f(\beta)$.

Genauer handelt es sich hier um den longitudinalen Dopplereffekt. Misst man die Frequenz *senkrecht* zur Bewegungsrichtung, tritt der transversale Dopplereffekt auf, der kein 'klassisches' Gegenstück hat. In diesem Fall kommt nur die Zeitdilatation zum Tragen, also:

$$\nu_E = \frac{1}{\gamma} \nu_S = \sqrt{1-\beta^2} \nu_S \quad (44)$$

Beispiel:

$\beta = -0.30$, *longitudinaler Dopplereffekt: Frequenzerhöhung um Faktor 1.36; Licht der roten Ampel erscheint grün!*

7.2.7. Vierervektoren

Zeit und Raum kann man zu einem (speziellen) Vierervektor, dem 'Raum-Zeit'-Vektor zusammenfassen, der sich gemäß den Lorentz-Formeln beim Übergang zwischen Inertialsystemen transformiert. Den Begriff des Vierervektors wollen wir jetzt verallgemeinern. Man kann auch je 4 andere physikalische Größen so zusammenfassen, dass sie den Lorentztransformationsformeln genügen:

$$\begin{aligned} a'^0 &= \gamma (a^0 - \beta a_{\parallel}) \\ a'_{\parallel} &= \gamma (a_{\parallel} - \beta a^0) \\ a'_{\perp} &= a_{\perp} \end{aligned} \quad (45)$$

Man sagt, sie bilden einen 'Vierervektor'

$$\underline{a} = (a^0, a^1, a^2, a^3) \quad (46)$$

Den zugehörigen Vektorraum nennt man Minkowski-Raum. Insbesondere dessen 'Quadrat'

$$\underline{a}^2 = (a^0)^2 - (a^1)^2 - (a^2)^2 - (a^3)^2 \quad (47)$$

ist damit eine Invariante unter Koordinatentransformationen, also eine sehr nützliche Größe.

7.2.7.1. Vierergeschwindigkeit und Additionstheorem

Zuerst konstruieren wir die ‘Vierergeschwindigkeit’. Ein Teilchen, das sich in S mit der Geschwindigkeit

$$\vec{w} = (w^1, w^2, w^3) = \left(\frac{dx^1}{dt}, \frac{dx^2}{dt}, \frac{dx^3}{dt} \right) \quad (48)$$

bewegt, hat in S' die Geschwindigkeitskoordinaten

$$\vec{w}' = (w'^1, w'^2, w'^3) = \left(\frac{dx'^1}{dt'}, \frac{dx'^2}{dt'}, \frac{dx'^3}{dt'} \right) \quad (49)$$

Die erste Komponente berechnen wir explizit:

$$w'^1 = \frac{dx'^1}{dt} \cdot \frac{dt}{dt'} \quad (50)$$

$$= \gamma \left(\frac{dx^1}{dt} - \beta c \right) \cdot \gamma \left(1 + \beta \frac{w^1}{c} \right) \quad (51)$$

Die gesuchte Größe tritt auch auf der rechten Seite auf. Lösen der Gleichung:

$$\boxed{w'^1 = \frac{w^1 - \beta c}{1 - \beta w^1/c}} \quad (52)$$

Für die anderen beiden Komponenten folgt analog:

$$w'^2 = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{w^2}{1 - \beta w^1/c} \quad w'^3 = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{w^3}{1 - \beta w^1/c} \quad (53)$$

Im Grenzfall $\beta \rightarrow 0$ bekommt man die bekannten Galilei-Formeln zurück.

Konsequenz: Analysieren wir ein Objekt, das sich entlang der x-Achse mit w bewegt:

Das relativistische Additionstheorem der Geschwindigkeiten lautet, je nach Vorzeichen von v :

$$w' = \frac{w - |v|}{1 - |v|w/c^2} \quad w' = \frac{w + |v|}{1 + |v|w/c^2} \quad (54)$$

Die resultierende Geschwindigkeit w' kann nie größer als c werden!

Beispiel:

$$w = c: w' = c$$

Beispiel:

$$v = \pm c: w' = \pm c$$

Beispiel:

$$w = c/n, v = -v_F:$$

$$w' = \frac{c/n + v_F}{1 + v_F/(cn)} = \frac{c}{n} + \frac{(1 - 1/n^2)v}{1 + v/(cn)} \approx \frac{c}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)v$$

Mitführungskoeffizient des Fizeau-Experimentes!

Bemerkung:

- Man beachte, dass die Additionsformeln symmetrisch sind in Bezug auf $w \leftrightarrow -v$: Betrachtet man

ein Teilchen, das in S die Geschwindigkeit w hat, im mit $-v$ bewegten Bezugssystem S' , hat es dort die gleiche Geschwindigkeit wie im Fall eines mit v fliegenden Teilchens, gemessen im mit $-w$ bewegten System S' .

\vec{w} transformiert sich offenbar nicht wie die räumlichen Komponenten eines Vierervektors. Man kann aber aus \vec{w} einen Vierervektor konstruieren, der sich wie gefordert transformiert:

$$\underline{u} = g \cdot (c, w^1, w^2, w^3) \quad g = \frac{1}{\sqrt{1 - \vec{w}^2/c^2}} \quad \vec{w}^2 = (w^1)^2 + (w^2)^2 + (w^3)^2 \quad (55)$$

(= Vierergeschwindigkeit), wie man nachrechnen kann (relativ einfach für den Spezialfall $w^3 = 0$).

7.2.7.2. Impuls, Energie, Masse

In der Newtonschen Physik ist der Impuls das Produkt aus Geschwindigkeit und Masse. Deshalb kann man versuchen, aus der Vierergeschwindigkeit den neuen Impuls-Vierervektor so zusammensetzen:

$$\underline{p} = g (m c, m \vec{w}) \quad (56)$$

Das ist der Viererimpuls. Der 'räumliche' Anteil ist

$$\vec{p} = \frac{m \vec{w}}{\sqrt{1 - \vec{w}^2/c^2}} \quad (57)$$

Diese Definition ersetzt den klassischen Impulsbegriff, denn letzterer ist bei relativistischen Geschwindigkeiten zeitlich **nicht** erhalten, wohl aber der neue Ausdruck!

Dies kann man allgemein zeigen, und an Beispielen illustrieren (man betrachte etwa die Kollision zwischen zwei Massenpunkten, aus der Sicht verschiedener Inertialsysteme).

Alle Messungen bestätigen die 'neue' Impulserhaltung.

Dass die alte Impulsdefinition nicht mehr funktionieren kann, sieht man u.a. auch daran, dass einerseits $p = \int F dt$ beliebig groß werden kann, andererseits $p \leq m c$ gilt.

Die kinetische Energie eines Teilchens bekommen wir - wie in der 'klassischen' Physik - durch Integration über die Kraft. Eindimensional:

$$E_{kin} = \int F dx = \int \frac{dp}{dt} dx = \int \frac{dx}{dt} dp = \int w dp = \dots \quad (58)$$

Schließlich:

$$E_{kin} = m c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \vec{w}^2/c^2}} - 1 \right) \quad (59)$$

Entwickelt man diesen Ausdruck nach w/c , folgt

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m \vec{w}^2 + \mathcal{O}(\vec{w}^4) \quad (60)$$

Man bekommt die Newtonsche kinetische Energie!

Die nullte Komponente des Viererimpulses lautet

$$p^0 = g m c = \frac{1}{c} \cdot (E_{kin} + m c^2) \quad (61)$$

Das ist - bis auf eine Konstante (in der 'klassischen' Physik!) - die kinetische Energie. Dies legt nahe, als Gesamtenergie zu definieren⁶:

$$E = c p^0 = E_{kin} + m c^2 \quad (62)$$

oder

$$E = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \vec{w}^2/c^2}} \quad (63)$$

Alle Experimente bestätigen, dass diese Größe zeitlich erhalten ist! Die separate Erhaltung von kinetischer Energie und Masse gilt nicht mehr, **Masse und Energie können ineinander umgewandelt werden**, also insbesondere die Ruhenergie

$$E_0 = m c^2 \quad (64)$$

eines Teilchens - im Prinzip - z.B. in elektromagnetische Energie umgesetzt werden.

Beispiel:

$$m = 1 \text{ kg}, E_0 \approx 10^{17} \text{ J} \sim 3 \text{ 'Kraftwerksjahre'}$$

Anmerkung: Bisher haben wir die Geschwindigkeit eines Teilchens in S mit \vec{w} und die Relativgeschwindigkeit von S' mit \vec{v} bezeichnet. Falls $\vec{w} = \vec{0}$ ruht das Teilchen in S und hat dort den Viererimpuls

$$\underline{p} = (m c, \vec{0}) \quad (65)$$

Falls $\vec{v} = (-v, 0, 0)$, wird daraus in S' (im eindimensionalen Fall) durch Lorentztransformation:

$$\underline{p}' = \gamma (m c, m v, 0, 0) \quad (66)$$

Deshalb können wir im folgenden statt w und g auch v bzw. β und γ schreiben, wenn es um den Viererimpuls geht, also $E = \gamma m c^2$ und $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$.

Masse, Impuls und Gesamtenergie sind so verknüpft:

$$m^2 c^4 = E^2 - p^2 c^2 \quad (67)$$

Dies folgt aus der Invarianz des Quadrates des Viererimpulses: Im Ruhesystem eines Teilchens ist $\vec{p} = \vec{0}$, also $c^2 p^2 = E_0^2 = m^2 c^4$, das muss aber in allen Bezugssystemen gelten! Die Relation (67) gilt auch für masselose Teilchen wie Photonen.

Zeitliche Impuls- und Energie-/Massenerhaltung werden jetzt zusammengefasst in der Viererimpulserhaltung:

$$\underline{p}_i = \underline{p}_f \quad (68)$$

⁶potentielle Energie ist zusätzlich zu addieren!

Das gilt für jedes Inertialsystem! p_i und p_f bezeichnen die Gesamtviererimpulse im Anfangs- bzw. Endzustand einer Wechselwirkung von Teilchen.

7.2.7.3. Kraft

Die Kraft ist die zeitliche Ableitung der räumlichen Komponente des Vierervektors \underline{p} . Die Situation ist also analog zur Geschwindigkeit, und man bekommt entsprechende Transformationsformeln:

$$\underline{F}'^1 = \frac{F^1 - \beta \frac{\vec{F}\vec{p}}{cm}}{1 - \beta w^1/c} \quad \underline{F}'^2 = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{F^2}{1 - \beta w^1/c} \quad \underline{F}'^3 = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{F^3}{1 - \beta w^1/c} \quad (69)$$

Man kann nun auch eine 'Viererkraft' so konstruieren:

$$\underline{F} = g \left(\frac{\vec{F}\vec{w}}{c}, \vec{F} \right) \quad (70)$$

Beispiel: Lorentzkraft

'Vierer-Lorentzkraft':

$$\underline{F} = g Q \left(\frac{\vec{w}\vec{E}}{c}, \vec{E} + \vec{w} \times \vec{B} \right) \quad (71)$$

7.3. Tests der Relativitätstheorie

7.3.1. Lichtgeschwindigkeit als Grenzgeschwindigkeit

Während sich masselose Teilchen (Photonen und Gravitonen) immer mit c bewegen, können massive Teilchen diese Geschwindigkeit niemals erreichen.

Das kann man aus dem relativistischen Additionstheorem für Geschwindigkeiten ablesen. \vec{u} sei die Teilchengeschwindigkeit im Inertialsystem 1, die Richtung sei entgegengesetzt gleich der Boostichtung⁷ \vec{v} . Im System 2 hat es die Geschwindigkeit

$$\underline{w}' = \frac{w+v}{1+wv/c^2} \quad (72)$$

(jeweils Beträge).

Selbst wenn man in dessen Ruhesystem ein relativistisches Elektron stark beschleunigt, ändert sich im Laborsystem praktisch nichts, da der Nenner die Vergrößerung des Zählers weitgehend kompensiert.

Beispiel:

Im Laborsystem fliege ein Elektron mit der Geschwindigkeit $v = 0.99 c$. In seinem Ruhesystem ruht es zunächst, wird dann aber auf $u = 0.9 c$ beschleunigt. Im Laborsystem hat es dann die Geschwindigkeit

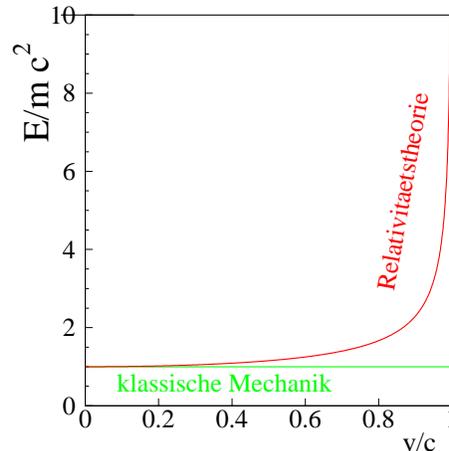
$$\underline{u}' = 0.9995 c$$

⁷Boost = Auftrieb, Antrieb, Verstärkung

Auch aus der Formel für die Energie

$$E = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \cdot m c^2$$

folgt dass eine Beschleunigung auf c nicht möglich ist, da dies unendlich viel Energie erfordern würde.



Beispiel:

Die höchsten γ -Faktoren hat man am LEP-Beschleuniger am CERN erreicht, an dem Elektronen auf eine Energie von $E = 100 \text{ GeV}$ 'beschleunigt' wurden.

Newtonsche Rechnung ($m_e = 0.511 \text{ MeV}/c^2$):

$$v = \sqrt{2E/m_e} = 600 \cdot c$$

Relativitätstheorie:

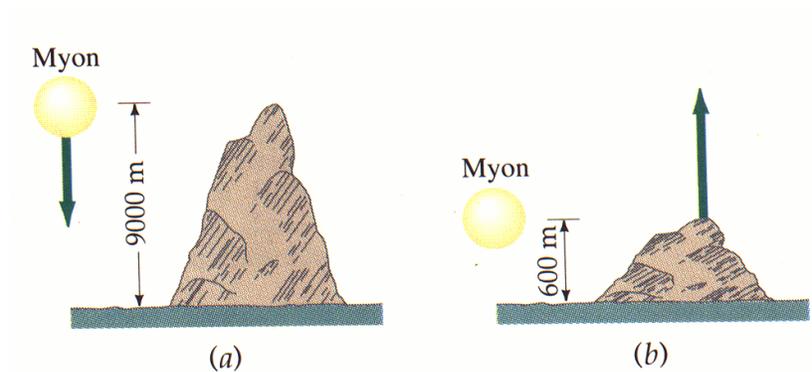
$$v/c = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \approx 1 - \frac{1}{2\gamma^2} = 1 - \frac{m_e^2 c^4}{2E_e^2} = 1 - 1.3 \cdot 10^{-11} = 0.999999999987$$

Der Lorentz-Faktor γ beträgt 196000.

Die gemessene Umlaufzeit ergibt, dass die Geschwindigkeit praktisch c ist, bestätigt also Einsteins Theorie.

7.3.2. Zeitdilatation und Längenkontraktion

In etwa 10 km Höhe in der Erdatmosphäre entstehen durch auftreffende hochenergetische Protonen Myonen, die in ihrem Ruhesystem eine mittlere Lebensdauer von $\tau = 2 \cdot 10^{-6} \text{ s}$ haben. Sie fliegen also in diesem System nach der Newtonschen Rechnung maximal $c\tau = 600 \text{ m}$ weit. Trotzdem kommen viele dieser Myonen auf der Erdoberfläche an:



Grund ist die Zeitdilatation (aus Sicht des Erdbewohners) [bzw. die Längenkontraktion aus Sicht des Myons], denn dadurch erhöht sich die mittlere Flugstrecke (im Erdsystem) auf

$$l = v \gamma \tau \approx c \gamma \tau$$

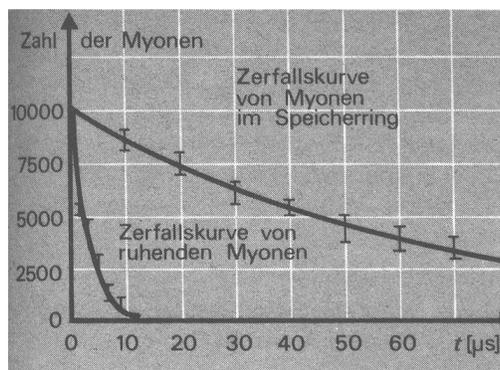
Mit $m_\mu \approx 0.1 \text{ GeV}/c^2$ und $E_\mu \approx 5 \text{ GeV}$ folgt:

$$l \approx \frac{E_\mu}{c m_\mu} \tau = 30 \text{ km}$$

Messungen der Myonlebensdauer wurden 1959 genauer an einem Beschleuniger am CERN durchgeführt. Myonen wurden auf eine Gesamtenergie von 3.1 GeV beschleunigt ($v = 0.99942 c$). Man erwartet im Laborsystem eine mittlere Lebensdauer, die um den Faktor

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 29.4$$

verlängert ist. Die Messungen bestätigten dies:



Die Myonen altern also in bewegten Systemen weniger schnell.

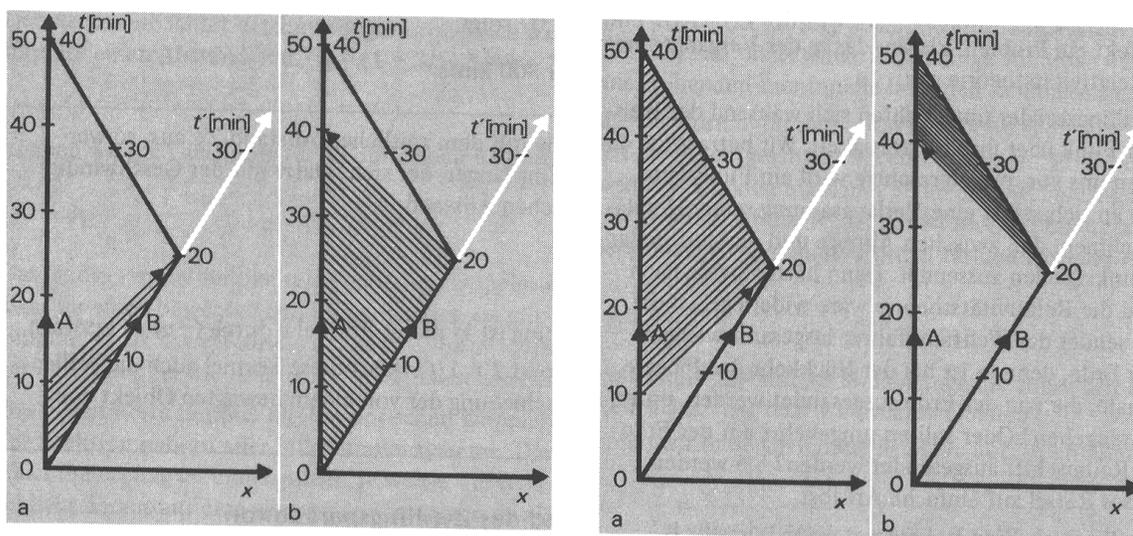
7.3.3. Zwillingsparadoxon

Ein Zwilling (A) bleibt unbeschleunigt auf der Erde, der andere (B) tritt eine Reise an und kommt schließlich zur Erde zurück. B ist nach der Rückkehr weniger gealtert als A! Wegen der von B beim

Start, Umkehren und Bremsen erfahrenen Beschleunigungen ist die Situation *asymmetrisch*; nur A sitzt in einem Inertialsystem! Wenn man die Beschleunigungsphasen kurz hält und eine konstante Reisegeschwindigkeit v annimmt, bekommt man die bekannte Formel für die Zeitdilatation, d.h. die Reisezeiten in den beiden Systemen sind

$$T_B = \frac{T_A}{\gamma} = \sqrt{1 - v^2/c^2} \cdot T_A < T_A \quad (73)$$

Man kann das sehr schön mit dem Dopplereffekt illustrieren. Dazu nehmen wir an, dass beide Zwillinge mit konstanter und gleicher Frequenz (aus der jeweiligen Sicht!) Lichtpulse emittieren:



Die Gesamtzahl der ausgesandten Pulse ist proportional zur jeweiligen Reisezeit und damit der biologischen Alterung der Astronauten (Pulse = Herzschlag!).

Beispiel:

Relativgeschwindigkeit $v = 3/5 c$. Auf der Erde sei $T_A = 50$ min, Signale werden mit der Frequenz von $\nu = 1/\text{min}$ ausgesandt.

Fliegen die beiden voneinander weg, ergibt sich eine Reduzierung der empfangenen Frequenzen (Dopplereffekt):

$$\nu_1 = \nu \cdot \sqrt{\frac{c - v}{c + v}} = \nu/2$$

Umgekehrt für den Rückflug:

$$\nu_2 = \nu \cdot \sqrt{\frac{c + v}{c - v}} = 2\nu$$

Auf dem Hinflug sendet A 10 Signale und empfängt 20. (Vorsicht, Abbildung nicht exakt.) Auf dem Rückflug sendet A 40 und empfängt 20. B ist also um den Faktor

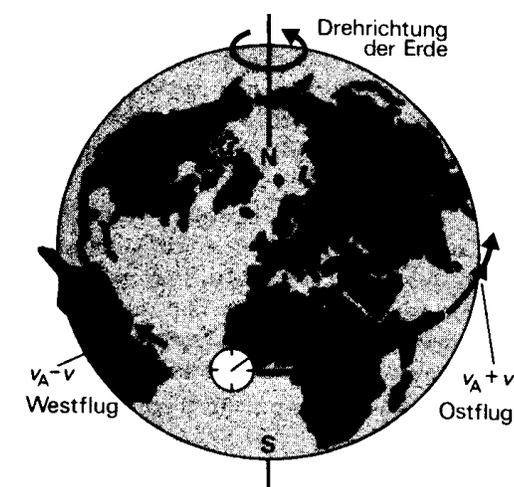
$$\frac{T_B}{T_A} = \frac{20 + 20}{10 + 40} = \frac{4}{5} = 0.8 = \sqrt{1 - 3^2/5^2}$$

weniger gealtert als A!

Entscheidend ist die Asymmetrie am Umkehrpunkt: Während B sofort die höhere Frequenz von A sieht, dauert es eine Weile, bis auch A die höhere Frequenz von B empfängt! A empfängt also über eine längere Zeit die kleineren Frequenzen und damit insgesamt weniger Signale von B als er selbst ausgesandt hat.

FRAGE: WIESO STEHT DER GAMMA-FAKTOR IN DER FORMEL FUER DIE MYONLEBENS-DAUER IM ZAEHLER, BEIM ZWILLINGSPARADOXON ABER IM NENNER ?

Ein erstes Experiment zum Zwillingsparadoxon wurde 1971 mit Atomuhren in einem Linienflugzeug von Hafele und Keating durchgeführt:



Die Erde wird einmal in östlicher und einmal in westlicher Richtung um den Äquator umflogen. Aus Sicht eines außenstehenden Beobachters sind die Geschwindigkeiten wegen der Erddrehung verschieden! Bei beiden Flügen beobachtete man eine Zeitverschiebung der Atomuhren an Bord relativ zu auf der Erde stationierten. Da auch die Gravitation Uhren beeinflusst (allgemeine Relativitätstheorie), bildet man die Differenz der Zeitverschiebungen für den Ost- und Westflug, dann fällt der Gravitationseinfluss heraus, wenn die Flüge in gleicher Höhe stattfinden.

Messwert: $\Delta t_W - \Delta t_O = (332 \pm 12)$ ns

Spezielle Relativitätstheorie: (315 ± 31) ns (Unsicherheit: Flugdaten)

7.3.4. Energie und Masse

Einsteins berühmte Formel

$$E = \gamma m c^2 \quad (74)$$

besagt, dass auch die in einem ruhenden Teilchen steckende träge Masse in Prinzip in Energie umwandelbar ist und umgekehrt.

Im folgenden bezeichnen wir E als 'Gesamtenergie'. [Vorsicht: potentielle Energie kommt noch hinzu.] und $E_{kin} = E - m c^2$ als kinetische Energie, $E_0 = m c^2$ ist die 'Ruhenergie'.

Beispiel:

Deuteronen sind Bindungszustände aus Protonen und Neutronen. Die starke Wechselwirkung hält sie zusammen. Bei der Entstehung der Bindung wird Energie 'freigesetzt' in Form von Photonen.

Die Ruhmassen der beteiligten Teilchen betragen

$$m_p = 938.28 \text{ MeV}/c^2 \quad m_n = 939.57 \text{ MeV}/c^2 \quad m_d = 1875.63 \text{ MeV}/c^2$$

Die Massendifferenz

$$\Delta m = m_d - (m_p + m_n) = 2.2 \text{ MeV}/c^2$$

entspricht einer Energiedifferenz von

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2$$

die man tatsächlich experimentell in der Photonenergie wiederfindet!

Im Prinzip treten 'Massendefekte' auch z.B. in Atomen (Atomhüllen) auf, aber da die hier verantwortliche elektrische Kraft relativ schwach ist, fallen die Energiedifferenzen kleiner und die Massenunterschiede (E/c^2) recht bescheiden aus.

Man beachte, dass andere Erhaltungsgrößen (Ladung, Quarkzahl) in der Regel eine vollständige Umwandlung von Masse in Energie verhindern (erfreulicherweise!).

(Gegen-)Beispiel:

Das neutrale Pion ist ein instabiles Elementarteilchen, das so zerfällt:

$$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$$

Im Ruhesystem wird die gesamte Ruhenergie $m_\pi = 135 \text{ MeV}/c^2$ in elektromagnetische Energie umgewandelt.