

Skriptteil 8

WWW: Aussehen schnell bewegter Objekte, Simulationen:

www.tat.physik.uni-tuebingen.de/weiskopf/gallery/index.html

<http://didaktik.physik.uni-essen.de/backhaus/Relativity/startGermanWWW.htm>

Literatur Relativitätstheorie:

R. Sexl und H.K. Schmidt, Raum - Zeit - Relativität, Vieweg 2000

U. Kraus: Tempolimit Lichtgeschwindigkeit, Tübingen 2000

R. und H. Sexl, Weiße Zwerge - Schwarze Löcher, Vieweg 2000

7.4. Elektromagnetismus und Relativitätstheorie

Eine wichtige Frage ist die nach den Transformationseigenschaften der elektrischen Ladung. Direkte Messungen (z.B. der Ablenkung von Ladungen im Magnetfeld) zeigen, dass die Ladung nicht von der Geschwindigkeit abhängt, also sich bei Lorentztransformationen nicht ändert:

$$\boxed{Q' = Q} \quad (1)$$

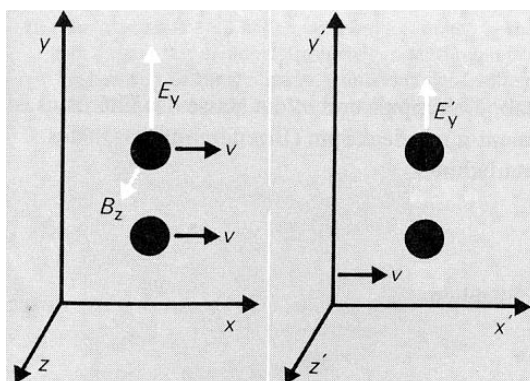
Dies kann man auch aus der elektrischen Neutralität der Atome folgern: in ihnen bewegen sich Elektronen und Protonen mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten, die von der Atomsorte abhängen. Eine exakte Ladungskompensation ist nur möglich, wenn die Geschwindigkeit keinen Einfluss hat.

Aus Einsteins 1. Postulat folgt, dass die Gleichung für die Lorentzkraft in allen Inertialsystemen die gleiche Form hat:

$$S : \vec{F} = Q (\vec{E} + \vec{w} \times \vec{B}) \quad S' : \vec{F}' = Q (\vec{E}' + \vec{w}' \times \vec{B}') \quad (2)$$

Die auftretenden Größen sind die im jeweiligen System gemessenen.

An einfachen Beispielen kann man erkennen, dass Lorentzkraft und Galileitransformationen nicht 'zusammenpassen':



Die Ladungen Q seien gleich. Im System S' ruhen beide Punktladungen im Abstand d parallel zur y -Achse und es tritt nur die Coulombkraft in $\pm y$ -Richtung auf. In S , in dem beide sich parallel zur x -Achse mit $v > 0$ bewegen, 'spürt' jedes Teilchen aber zusätzlich eine magnetische Kraft, auch in $\pm y$ -Richtung, die der Coulombabstoßung entgegenwirkt. Da aber die Kraft sich unter Galileitransformationen nicht verändert, kommen Beobachter in den beiden Inertialsystemen zu widersprüchlichen Aussagen über den Bewegungsablauf!

Den Widerspruch in unserem Beispiel löst die Relativitätstheorie folgendermaßen auf: Man muss berücksichtigen, dass sich die *Felder und Kräfte transformieren*. Die entsprechenden Gleichungen für die Kraft haben wir schon in Kapitel 7.2 aufgestellt. Aus diesen Transformationseigenschaften und der Gleichung für die Lorentzkraft kann man die Transformationsformeln der zugehörigen Felder \vec{E} und \vec{B} herleiten; das Ergebnis lautet:

$$\boxed{E'^1 = E^1 \quad E'^2 = \gamma (E^2 - v B^3) \quad E'^3 = \gamma (E^3 + v B^2)} \quad (3)$$

$$\boxed{B'^1 = B^1 \quad B'^2 = \gamma (B^2 + v E^3/c^2) \quad B'^3 = \gamma (B^3 - v E^2/c^2)} \quad (4)$$

Für $v \ll c$ kann man $\gamma = 1$ nähern und kompakt zusammenfassen:

$$\boxed{\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \quad \vec{B}' = \vec{B} - \vec{v} \times \vec{E}/c^2} \quad (5)$$

Interpretation: **B-Felder entstehen aus Coulombfeldern durch relativistische Koordinatentransformationen!** Mehr dazu weiter unten. Man beachte die Symmetrie zwischen E und B !

Damit stellt sich das System der beiden Punktladungen so dar:

System S' (nur y -Komponenten)¹:

$$E'^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{d^2} \quad (6)$$

$$F'^2 = Q E'^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{d^2} \quad (7)$$

Die Felder beziehen sich auf das obere Teilchen. Es sind jeweils nur von null verschiedene Feldkomponenten aufgelistet.

System S (bewegt sich relativ zu S' mit $-v$; Felder berechnen wir durch Lorentztransformation aus S'):

$$E^2 = \gamma E'^2 = \frac{\gamma}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{d^2} \quad B^3 = \gamma v E'^2/c^2 = \frac{\gamma}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{d^2} \frac{v}{c^2} \quad (8)$$

$$F^2 = Q [E^2 + (0 - v B^3)] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{d^2} \gamma \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \quad (9)$$

Somit:

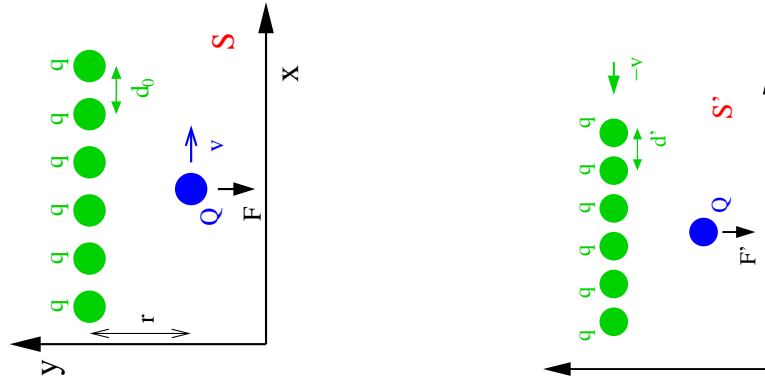
$$F^2 = \frac{1}{\gamma} F'^2 \quad (10)$$

in Einklang mit Kapitel 7.2².

¹Bitte nicht verwechseln: $E^2 = 2$. Komponente von \vec{E} , $Q^2 = Q \cdot Q$

²Man beachte: hier haben wir von S' nach S transformiert, $\vec{w} = \vec{0}$!

Also ist jetzt *formal* ‘alles in Ordnung’. Wir wollen jetzt aber *verstehen*, wieso die magnetischen Effekte durch Lorentztransformationen zustande kommen. Dazu untersuchen wir die Kraft auf eine Probeladung, die durch eine unendliche Linienladung im Abstand r ausgeübt wird:



Die Linienladung approximieren wir durch Punktladungen q im Abstand d . Im System S' ruht die Testladung Q , in S bewegt sie sich mit $v > 0$ entlang der (horizontalen) x -Achse. In S ruht die Linienladung, in S' bewegt sie sich mit $-v$, stellt also einen Strom dar. Wir betrachten die Kraft auf die Testladung Q . In der Skizze ist der Fall gleicher Ladungsvorzeichen eingezeichnet, $q Q > 0$.

In S wirkt nur der E -Anteil der Lorentzkraft, proportional zur Linienladungsdichte q/d (s. Elektrostatik). In S' tritt zusätzlich ein magnetisches Feld auf, proportional zum Strom $v q/d$ (s. Magnetostatik). Die zugehörige Kraft verschwindet aber, da die Testladung hier ruht. Im Inertialsystem S' ist die *Längenkontraktion* zu berücksichtigen, also

$$d' = \frac{1}{\gamma} d_0 = \sqrt{1 - v^2/c^2} d_0 \quad (11)$$

Quantitativ: Wir betrachten die y -Komponenten der Kraft, alle anderen verschwinden, in beiden Systemen.

System S :

$$F_E = -Q \frac{1}{\epsilon_0} \frac{q/d_0}{2\pi r} \quad (12)$$

$$F_B = Q v \mu_0 \frac{0 q/d}{2\pi r} = 0 \quad (13)$$

Gesamtkraft:

$$F = F_E + F_B = -Q \frac{1}{\epsilon_0} \frac{q/d_0}{2\pi r} \quad (14)$$

System S' :

$$F'_E = -Q \frac{1}{\epsilon_0} \frac{q/d'}{2\pi r} \quad (15)$$

$$F'_B = Q \cdot 0 \cdot \mu_0 \frac{v q/d'}{2\pi r} = 0 \quad (16)$$

mit Gesamtkraft:

$$F' = F'_E + F'_B = -\gamma Q \frac{1}{\epsilon_0} \frac{q/d_0}{2\pi r} \quad (17)$$

Also, ist die Kraft, in dem System, in welchem Q sich bewegt, betragsmäßig um γ kleiner:

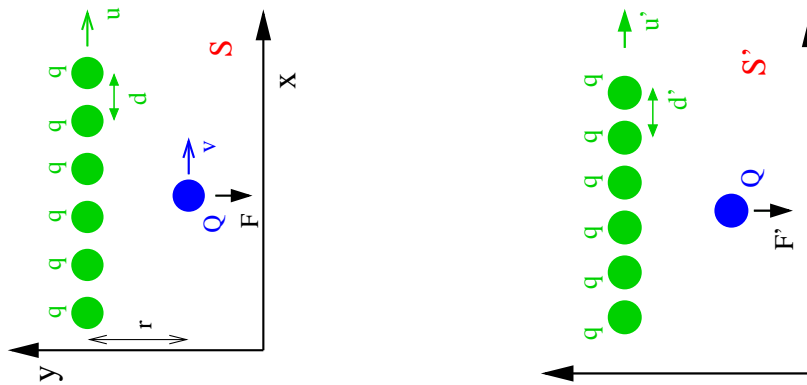
$$F = \frac{1}{\gamma} F' \quad (18)$$

wie zu erwarten. Den im Transformationsgesetz der Kräfte formal hergeleiteten Faktor γ können wir hier durch die *Längenkontraktion* verstehen!

Wir wandeln unser Beispiel jetzt so ab, dass sich die Linienladungen auch in S bewegen, mit der Geschwindigkeit $u > 0$ in x-Richtung, und in S' mit

$$u' = \frac{u-v}{1-uv/c^2} \quad (19)$$

da sich S' wie vorher relativ zu S mit v bewegt:



Jetzt tritt in beiden Systemen eine Lorentzkontraktion auf:

$$d = \sqrt{1 - u^2/c^2} d_0 \quad d' = \sqrt{1 - u'^2/c^2} d_0 = \frac{\sqrt{1-u^2/c^2} \sqrt{1-v^2/c^2}}{1-uv/c^2} d_0 \quad (20)$$

Während in S' das Magnetfeld nicht zu einer Kraftwirkung führt, ist das in S jetzt der Fall:

$$F_E = -Q \frac{1}{\epsilon_0} \frac{q/d}{2\pi r} \quad (21)$$

$$F_B = Q v \mu_0 \frac{u q/d}{2\pi r} \quad (22)$$

Beide Kräfte sind entgegengesetzt gerichtet, entlang der y -Achse. Gesamtkraft:

$$F = F_E + F_B = -Q \frac{q/d}{2\pi r} \left(\frac{1}{\epsilon_0} - \mu_0 v u \right) = -Q \frac{1}{\epsilon_0} \frac{q/d_0}{2\pi r} \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} (1 - uv/c^2) \quad (23)$$

Hier haben wir den Zusammenhang $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$ benutzt - ohne diesen 'funktioniert' es nicht!

System S' :

$$F'_E = -Q \frac{1}{\epsilon_0} \frac{q/d'}{2\pi r} \quad (24)$$

$$F'_B = -Q \mu_0 \frac{u' q/d'}{2\pi r} = 0 \quad (25)$$

Gesamtkraft:

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F}'_E + \mathbf{F}'_B = -Q \frac{1}{\epsilon_0} \frac{q/d'}{2\pi r} = -Q \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{q/d_0}{2\pi r} \frac{1-uv/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2} \sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (26)$$

bzw.

$$\frac{1}{\gamma} \mathbf{F}' = \sqrt{1-v^2/c^2} \mathbf{F}' = -Q \frac{1}{\epsilon_0} \frac{q/d_0}{2\pi r} \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} (1-uv/c^2) \quad (27)$$

Vergleich:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\gamma} \mathbf{F}' \quad (28)$$

Das Magnetfeld kompensiert die unterschiedlichen Längenkontraktionen! Das B-Feld ist also notwendig für eine konsistente Beschreibung in allen Inertialsystemen; in diesem Sinne werden B-Felder durch Lorentztransformationen ‘erzeugt’.

Also: Es gibt nicht getrennt elektrische und magnetische Effekte, sondern beide beschreiben das gleiche Phänomen - aus verschiedenen Blickwinkeln. Deshalb kann man sinnvollerweise nur von ‘elektromagnetischen’ Kraftwirkungen sprechen.

7.5. Anwendungen: Relativistische Kinematik

Ein wichtiges Anwendungsfeld der speziellen Relativitätstheorie ist die experimentelle Elementarteilchenphysik an Beschleunigern, weil dort hohe Energien und Geschwindigkeiten auftreten.

In den meisten Fällen rechnet man die Lorentztransformationen nicht explizit durch, sondern benutzt
 - Viererimpulserhaltung
 - Lorentz-Invarianz von Skalarprodukten von Viererimpulsen.

Da in fast allen Formeln c auftritt, ist es einfacher, ein Einheitensystem zu wählen, in dem $c = 1$ gesetzt wird. Das bedeutet, dass Impulse, Massen und Energien die gleiche Einheit haben, z.B. eV.

Masse, Energie und Impuls sind verknüpft durch die Lorentzinvariante m^{23} :

$$m^2 = E^2 - \vec{p}^2 \quad (29)$$

Bei sehr großen Energien $E \gg m$ kann man einfach $|\vec{p}| = E$ nähern, im hochrelativistischen Grenzfall sind Rechnungen also viel einfacher als im klassischen Limes!

Die Lorentztransformationen lauten:

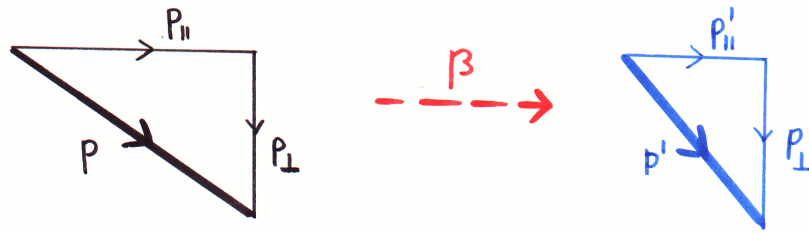
$$\mathbf{E}' = \gamma (\mathbf{E} - \beta \mathbf{p}_{\parallel}) \quad (30)$$

$$\mathbf{p}'_{\parallel} = \gamma (\mathbf{p}_{\parallel} - \beta E) \quad (31)$$

$$\mathbf{p}'_{\perp} = \mathbf{p}_{\perp} \cdot \quad (32)$$

wobei die Relativgeschwindigkeit von I' relativ zu I durch β gegeben ist und γ der zugehörige Lorentz-Faktor ist:

³Die (Ruhe-)Masse m hat also in allen Bezugssystemen den gleichen Wert und charakterisiert das zugehörige Teilchen auf eindeutige Weise



Wenn das Teilchen in I ruht, gilt also:

$$\beta \left(= \frac{v}{c} \right) = -\frac{p'_{\parallel}}{E'} \quad \gamma \left(= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) = \frac{E'}{m} \quad (33)$$

Ein wichtiger Begriff ist der des Schwerpunktsystems⁴. In diesem ist die Summe der Dreier-Impulse aller Teilchen null. Das Quadrat der Summe aller Viererimpulse (Lorentzinvariante!) nennt man s . Es gilt im Schwerpunktsystem:

$$s = (\sum \underline{p}_i)^2 = (\sum E_i, \vec{0})^2 \equiv E_{cm}^2 \quad (34)$$

$\sqrt{s} = E_{cm}$ ist die zur Erzeugung neuer Teilchen verfügbare Energie!

Beispiel: Proton mit $E_{kin} = 0.5$ GeV.

Näherung: $m = 0.938$ GeV ≈ 1 GeV.

Man erhält:

$$E = 1.50 \text{ GeV} \quad p = 1.12 \text{ GeV} \quad \beta = 0.745 \quad \gamma = 1.50$$

Beispiel: Proton im Ruhesystem und im bewegten System ($\beta = 0.99$).

Näherung: $m = 0.938$ GeV ≈ 1 GeV.

Im Ruhesystem:

$$E = 1 \text{ GeV} \quad p = 0$$

Im bewegten System ($\gamma = 7.09$):

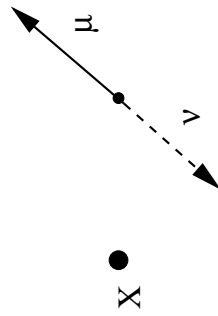
$$E' = 7.09 \text{ GeV} \quad p'_{\parallel} = -7.02 \text{ GeV} \quad p'_{\perp} = 0.$$

Beispiel: Teilchenzerfall

Ein Teilchen X zerfällt im Ruhesystem in ein Myon ($m_{\mu} = 106$ MeV) und ein masseloses Neutrino:

$$X \rightarrow \mu + \nu$$

⁴= center of mass system



Der Myonimpuls wird zu $\underline{p}_\mu \equiv |\vec{p}_\mu| = 240 \text{ MeV}$ gemessen. Masse des Teilchens X ?
 Die Impulsbeträge von Myon und Neutrino sind gleich (Schwerpunktsystem, Viererimpulserhaltung).
 Die Myonenergie ist $E_\mu = \sqrt{\vec{p}_\mu^2 + m_\mu^2}$. Damit sind die Viererimpulse der Tochterteilchen

$$\underline{p}_\mu = (E_\mu, \vec{p}_\mu) \quad \underline{p}_\nu = (|\vec{p}_\mu|, -\vec{p}_\mu)$$

Die Summe der Viererimpulse ist gleich dem des Mutterteilchens X im Ruhesystem

$$\underline{p}_X = \underline{p}_\mu + \underline{p}_\nu$$

mit

$$\underline{p}_X = (m_X, \vec{0})$$

Also:

$$m_X = \sqrt{\vec{p}_\mu^2 + m_\mu^2} + p_\mu \approx 500 \text{ MeV}$$

Es handelt sich um ein Kaon. Die exakte Masse beträgt 494 MeV.

Beispiel: p - p Kollision

Teilchenenergien E_1 und E_2 . Die Protonen sollen auf einer geraden Linie aufeinander zu fliegen.

Schwerpunktsenergie ?

Die Viererimpulse der Protonen seien $\underline{p}_1 = (E_1, \vec{p}_1)$ und $\underline{p}_2 = (E_2, \vec{p}_2)$

$$\begin{aligned} s &= (\underline{p}_1 + \underline{p}_2)^2 \\ &= \underline{p}_1^2 + \underline{p}_2^2 + 2\underline{p}_1 \underline{p}_2 \\ &= m_p^2 + m_p^2 + 2(E_1 E_2 - \vec{p}_1 \vec{p}_2) \\ &= 2m_p^2 + 2 \left(E_1 E_2 + \sqrt{E_1^2 - m_p^2} \sqrt{E_2^2 - m_p^2} \right) \\ &= 2 \left(m_p^2 + E_1 E_2 + \sqrt{E_1^2 - m_p^2} \sqrt{E_2^2 - m_p^2} \right) \end{aligned}$$

In der letzten Umrechnung wurde $\vec{p}_1 \vec{p}_2 = |\vec{p}_1| |\vec{p}_2| \cos 180^\circ = -|\vec{p}_1| |\vec{p}_2|$ benutzt.

Spezialfälle:

a) Mit $E \equiv E_1 = E_2 \gg m_p$: $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$ und $s = 2(E^2 + p^2) = 4E^2$, $\sqrt{s} = 2E$

b) Für $E_1 \gg m_p$, $E_2 = m_p$: $\vec{p}_2 = \vec{0}$ und $s = 2E_1 m_p$. In diesem Fall wächst die Schwerpunktsenergie \sqrt{s} also nur mit der Wurzel der Protonenergie.

Beispiel: Unbekanntes Teilchen Y zerfällt.

In einem Detektor werden dessen Zerfallsprodukte als vier Photonen identifiziert und deren Dreierimpulse (kartesische Koordinaten) gemessen:

$$Y \rightarrow \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$$

$$\begin{aligned} \vec{p}_1 &= (4.853, 1.396, -2.877) & \vec{p}_2 &= (0.351, 0.071, -0.265) \\ \vec{p}_3 &= (1.805, 0.434, -1.066) & \vec{p}_4 &= (1.381, 0.533, -0.957) \end{aligned}$$

Alle Angaben in GeV. Welche Masse hat das zerfallende Teilchen ?

Die Masse des gesuchten Teilchens ist gegeben durch

$$m_Y^2 = \left(\sum_1^4 \underline{p}_i \right)^2$$

Die Summe der Viererimpulse ist

$$\begin{aligned} \sum_1^4 \underline{p}_i &= (E, \vec{p}) = \left(\sum_i E_i, \sum_i \vec{p}_i \right) \\ &= (10.161, 8.390, 2.434, -5.165) \end{aligned}$$

Dabei ist $E_i = |\vec{p}_i|$. Also

$$m_Y \approx 0.5 \text{ GeV}$$

Es handelt sich um ein K^0 ($m = 498 \text{ MeV}$), das via

$$K^0 \rightarrow \pi^0 + \pi^0 \rightarrow \gamma_1 + \gamma_3 + \gamma_2 + \gamma_4$$

zerfällt. Man kann leicht überprüfen, dass die invariante Masse der Photonpaare (1,3) und (2,4) jeweils gleich der π^0 -Masse ist.

Ein auch historisch wichtiges Phänomen ist die elastische Streuung eines Photons an einem Elektron.

Licht kann an geladenen Teilchen gestreut werden. Dabei zeigt sich der Teilchencharakter der elektromagnetischen Wellen, denn die Photonen verhalten sich wie punktförmige Objekte mit einem Viererimpuls.



Wir berechnen die Streukinematik im Ruhesystem des Elektrons. Das Photon und das Elektron haben vor der Wechselwirkung die Viererimpulse

$$\underline{p}_\gamma = (E_\gamma, E_\gamma, 0, 0) \quad \underline{p}_e = (m_e, 0, 0, 0) \quad (35)$$

Dieses System ist symmetrisch in Bezug auf die x -Achse. O.B.d.A. findet die Ablenkung in der x - y -Ebene statt:

$$\underline{p}'_\gamma = (E'_\gamma, E'_\gamma \cos \theta, E'_\gamma \sin \theta, 0) \quad \underline{p}'_e = (E'_e, p'_e \cos \phi, p'_e \sin \phi, 0) \quad (36)$$

θ und ϕ sind die Winkel der auslaufenden Teilchen in Bezug auf die Richtung des einfliegenden Photons, p'_e ist der Betrag des angestossenen Elektrons und $E'_e = \sqrt{(p'_e)^2 + m_e^2}$.

Wir haben vier unbekannte Größen, $E'_\gamma, p'_e, \theta, \phi$, und vier Bestimmungsgleichungen:

$$\underline{p}'_\gamma + \underline{p}'_e = \underline{p}_\gamma + \underline{p}_e \quad (37)$$

von denen aber eine nichts nützt, da wir die z -Komponente des Impulses ja zu null definiert haben. Der Endzustand ist also nicht eindeutig bestimmt; es handelt sich um ein Quantenphänomen⁵!

Wir fixieren jetzt willkürlich E'_γ auf einen zulässigen Wert ($< E_\gamma$!) und berechnen alle anderen kinematischen Variablen, insbesondere θ . Aus der Impulserhaltung

$$E_\gamma = E'_\gamma \cos \theta + p'_e \cos \phi \quad 0 = E'_\gamma \sin \theta + p'_e \sin \phi \quad (38)$$

folgt nach einigen Umformungen:

$$(p'_e)^2 = (E_\gamma)^2 - 2E_\gamma E'_\gamma \cos \phi + (E'_\gamma)^2 \quad (39)$$

Andererseits (Energieerhaltung):

$$(p'_e)^2 = (E'_e)^2 - m_e^2 = (E_\gamma - E'_\gamma - m_e)^2 - m_e^2 \quad (40)$$

Gleichsetzen von (39) und (40) gibt:

$$2 m_e (E_\gamma - E'_\gamma) = 2 E_\gamma E'_\gamma (1 - \cos \theta) \quad (41)$$

Diese Gleichung kann man nun nach θ auflösen und erhält den gesuchten Zusammenhang zwischen Photonenergie nach dem Stoß und Streuwinkel:

$$\cos \theta = 1 - m_e \frac{E_\gamma - E'_\gamma}{E_\gamma E'_\gamma} \quad (42)$$

Man kann die Gleichung noch etwas umformen, indem man berücksichtigt, dass für Photonen gilt:

$$E = h \nu = h \frac{c}{\lambda} \quad (43)$$

In (??) müssen wir zunächst Potenzen von c (wieder) einfügen, da wir ins SI zurückkehren wollen:

$$m_e c^2 (E_\gamma - E'_\gamma) = E_\gamma E'_\gamma (1 - \cos \theta) \quad (44)$$

⁵Man kann im Rahmen der Quantenelektrodynamik die Wahrscheinlichkeit z.B. als Funktion des Winkels θ berechnen.

Dann bekommt man

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta) \quad (45)$$

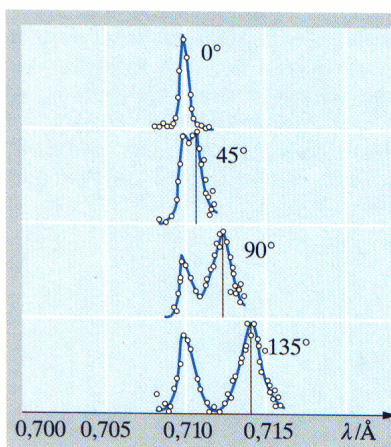
Also: Es tritt eine Wellenlängenverschiebung auf, die auf charakteristische Weise mit dem Streuwinkel variiert: Compton-Effekt.

Diese Rechnungen und entsprechende (bestätigende!) Experimente wurden zuerst von A.H. Compton durchgeführt, Anfang der 20er Jahre des 20. Jahrhunderts.

Der Faktor

$$\lambda_c \equiv \frac{h}{m_e c} = 2.4 \cdot 10^{-12} \text{ m} \quad (46)$$

heißt Compton-Wellenlänge (des Elektrons). Da der Wert sehr klein ist im Vergleich zur Wellenlänge sichtbaren Lichtes, bedarf es Röntgenstrahlung für experimentelle Untersuchungen:



Man erkennt zwei Peaks in der Verteilung der Wellenlänge, diese entsprechen den ungestreuten und den gestreuten Photonen.

7.6. Vom Aussehen bewegter Objekte

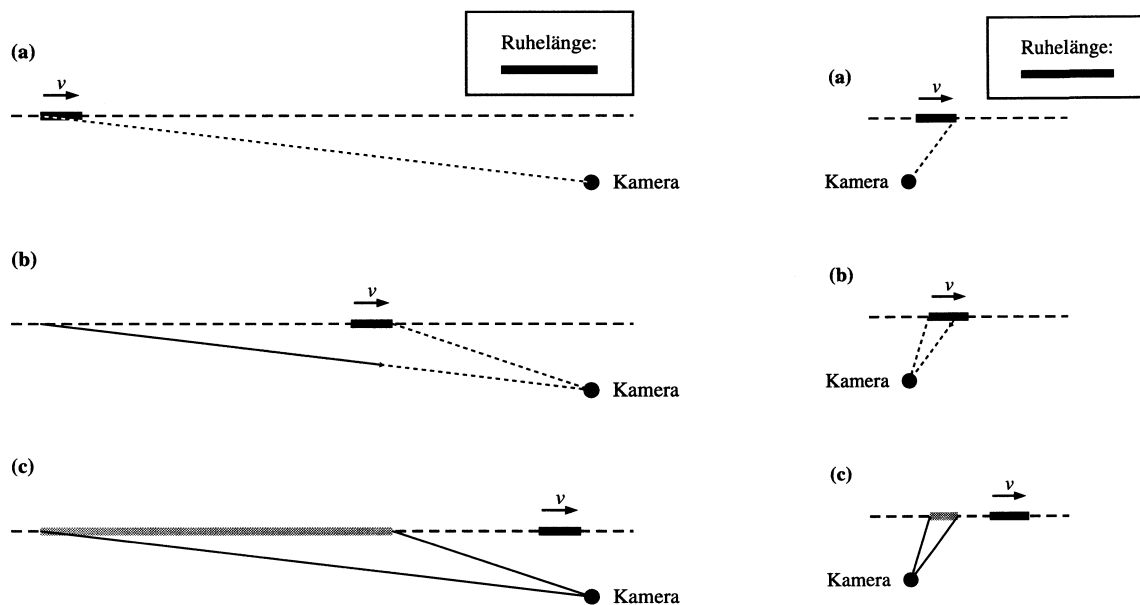
Wir betrachten (= filmen) jetzt bewegte Objekte oder machen photographische Momentaufnahmen. Es gibt keinen prinzipiellen Unterschied zwischen Kamera und Auge.

Wichtiger Unterschied:

- Anblick: Lichtsignale, die gleichzeitig im punktförmigen Auge ankommen, aber vom entfernten Objekt i.a. zu unterschiedlichen Zeiten an verschiedenen Orten emittiert wurden.**
- Längenmessung: Gleichzeitiges Bestimmen der Koordinaten der beiden Enden, z.B. durch zwei gleichzeitig (aus Sicht des Messenden) von dort ausgesandte Lichtpulse, die von zwei in unmittelbarer Nähe der Endpunkte befindlichen Uhren registriert werden.

7.6.1. Längenänderung

Ein Stab kann verlängert oder verkürzt erscheinen, je nach Blickwinkel!

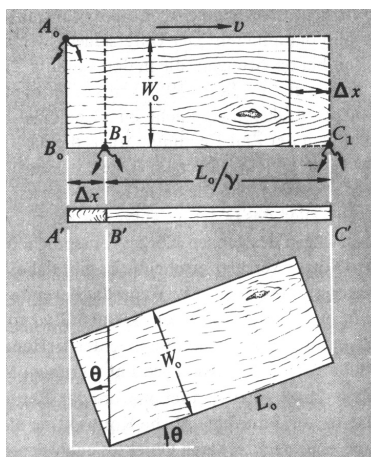


Sowohl 'Retardierung' als auch Längenkontraktion tragen bei. Bei Beobachtung senkrecht zur Flugrichtung:

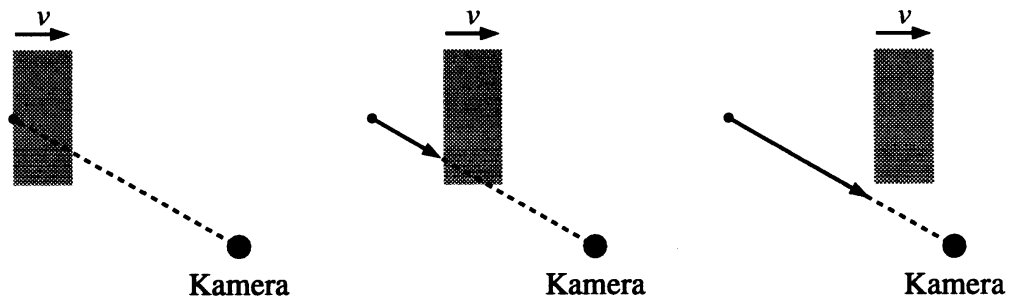
$$L = \frac{L_0}{\gamma} \tag{47}$$

7.6.2. Objektdrehung

Beobachtung senkrecht zur Flugrichtung, bei großem Abstand: Ein Objekt erscheint gedreht!

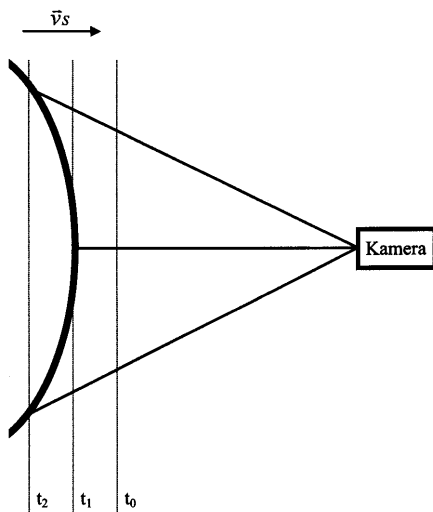


Man kann auch die verdeckten Seiten sehen!

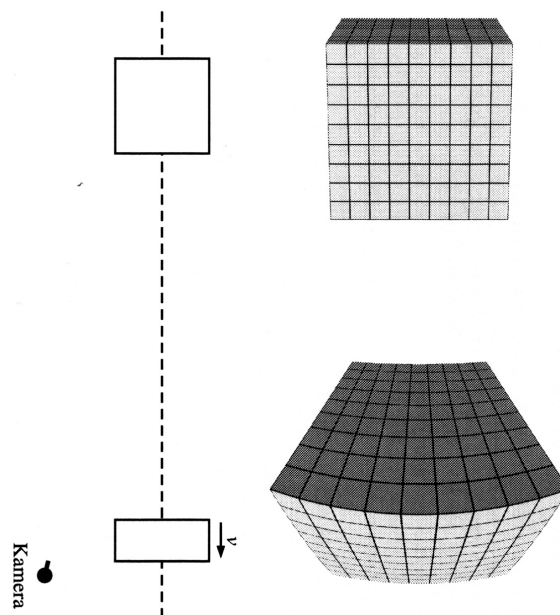


7.6.3. Verzerrung

Wenn Abstand klein: zusätzlich Verzerrung wegen endlicher Lichtlaufzeiten.



Insgesamt tritt also eine Kombination dreier geometrischer Effekte auf:



SIMULATIONEN: schneller Vorbei-/Durchflug

brand.mpeg, illum-geom.mpeg, saturn.mpeg

Backhaus et al

7.6.4. Farbveränderung

Dopplereffekt: Bei Annäherung nimmt Frequenz um den Faktor

$$f = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \quad (48)$$

zu.

7.6.5. IntensitätsveränderungWenn die Frequenz um den Faktor f zunimmt, so steigt die Intensität um den Faktor

$$F = f^5 \quad (49)$$

8.0 Allgemeine RelativitätstheorieDie von Einstein formulierte Theorie der Gravitation heißt ‘Allgemeine Relativitätstheorie’ = AR.

Sie baut auf der SR (spezielle Relativitätstheorie) auf. Im Grenzfall verschwindender Gravitationsfelder wird aus der AR die SR.

Da die Mathematik der AR nicht trivial ist, werden wir deren Inhalt und die Konsequenzen hier nur qualitativ vorstellen.

8.1 GrundlagenDie Gravitation unterscheidet sich von den anderen Naturkräften in einem wesentlichen Punkt: Die ‘Gravitationsladung’ = schwere Masse m_s ist (modulo konst. Faktor) gleich der trägen Masse m_t .Dies ist mit hoher Genauigkeit experimentell überprüft worden⁶.Die Trägheit eines Körpers beschreibt, wie schwer er ‘vom rechten Wege’ abzubringen ist; letzterer ist die Trajektorie des kräftefreien Körpers, also eine ausgezeichnete Bahn im Raum. Damit stellt $m_t = m_s$ einen Zusammenhang zwischen Gravitation und Raum her.Da die Unterscheidung zwischen ‘Gravitationskräften’ und ‘Scheinkräften’ durch *lokale* Messungen nicht möglich ist, ist die bisherige Definition des Inertialsystems zu eng gefasst. Das 1. Einsteinsche Postulat der SR kann auf andere Bezugssysteme verallgemeinert werden:**Einsteins Äquivalenzprinzip: Beschleunigte Bezugssysteme und solche in Gravitationsfeldern sind lokal ununterscheidbar.**

⁶Aus Messungen des Erde-Mond-Abstandes folgt, dass die relativen Unterschiede kleiner sind als $< 10^{-13}$, Satellitenexperimente werden die Sensitivität in den kommenden Jahren auf 10^{-18} steigern (STEP = Satellite Test of the Equivalence Principle).

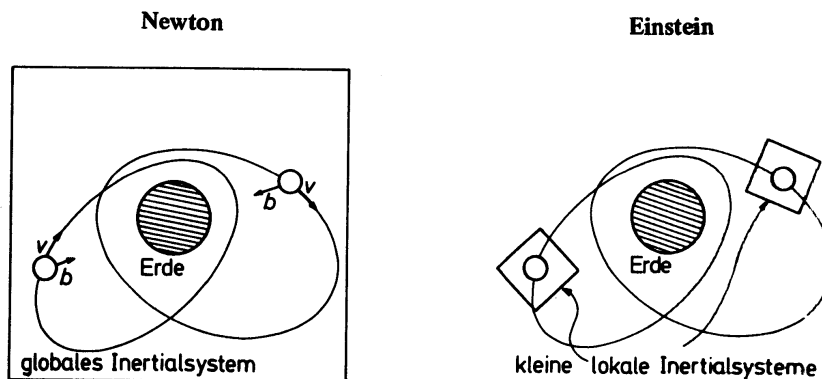
Beispiel: Interstellare Reise

Wenn die Rakete konstant mit g beschleunigt, kann man im Inneren diese nicht von einem am Erdboden geparkten Raumschiff unterscheiden.

Beispiel: Raumstation auf Erdumlaufbahn.

Die Experimentatoren in der Station können lokal keinen Unterschied zu einem kräftefreien Inertialsystem feststellen: Beschleunigung und Gravitation kompensieren sich exakt⁷.

Wichtig ist, dass das Äquivalenzprinzip nur in einem (annähernd) homogenen Gravitationsfeld, also nur lokal anwendbar ist:



Das Äquivalenzprinzip und die notwendigen Modifizierungen der Newton-Theorie (\rightarrow Retardierung der Felder) bilden die Grundlage für Einsteins 1915 veröffentlichte AR.

In der SR ist die Gesamtenergie E durch

$$E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2 \quad (50)$$

gegeben. In der AR übernimmt E (bzw. E/c^2) die Rolle der Gravitationsladung. Für nichtrelativistische massive Teilchen ist $E/c^2 \approx m$, es ändert sich also praktisch nichts.

Für Photonen aber bedeutet dies, dass auch sie die Gravitation spüren, d.h. sie ändern Energie und Richtung z.B. beim Vorbeifliegen an Himmelskörpern⁸!

Da aber Lichtstrahlen 'gerade' Linien definieren (!), und Lichtsignale wesentlich für die Messung von Längen und Winkeln sind, bedeutet dies, dass das Skalarprodukt bzw. Quadrat eines Raumvektors und damit dessen Länge nicht mehr durch

$$|\vec{x}|^2 = \vec{x} \cdot \vec{x} = (x^1, x^2, x^3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad (51)$$

gegeben ist, sondern mit einer verallgemeinerten 3x3-Matrix g ('Metrik', 'metrischer Tensor') berechnet werden muss:

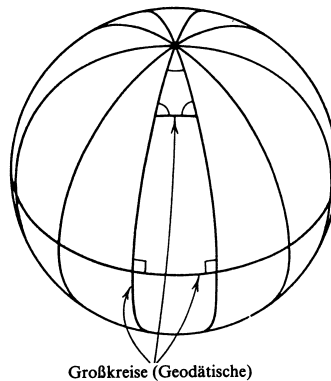
$$\vec{x} \cdot \vec{x} = (x^1, x^2, x^3) \cdot g \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad (52)$$

⁷Prinzip des STEP-Experimentes!

⁸Auch andere Energieformen, z.B. die in elektrischen, magnetischen oder Gravitationsfeldern (im Vakuum!) gespeicherte Energiedichte, haben eine anziehende Wirkung auf Massen.

Der Raum ist daher nicht mehr 'euklidisch' bzw. 'flach', sondern 'Riemannsch' bzw. 'gekrümmt'⁹.

Ein einfaches Beispiel für einen gekrümmten Raum stellt die Kugeloberfläche dar. Es ist ein zweidimensionaler Raum. 'Sichtbar' wird die Krümmung erst bei Einbettung in den 3-dimensionalen euklidischen Raum. Auf der Kugeloberfläche stellt man die Krümmung z.B. dadurch fest, dass die Winkelsumme im Dreieck nicht 180° beträgt:



Man beachte, dass lokal die Geometrie durch die euklidischen Formeln beschrieben werden kann.

Der Kugelradius R ist in diesem Beispiel ein Maß für die Krümmung. Abstände kann man **nicht** nach der einfachen euklidischen Formel

$$d^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 \quad (53)$$

berechnen! In Winkelkoordinaten gilt

$$d^2 = R^2 (\Delta\theta)^2 + R^2 \sin^2 \theta (\Delta\phi)^2 \quad (54)$$

also

$$g = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (55)$$

Nun könnte man vermuten, dass es eine geeignete Transformation

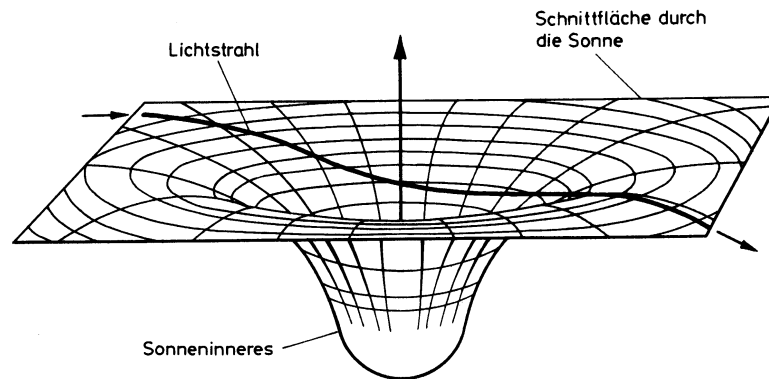
$$\theta, \phi \rightarrow x_1, x_2 \quad (56)$$

so gibt, dass in den neuen Koordinaten g zur Einheitsmatrix wird. Wie aber schon C.F. Gauß zeigte, ist dies nicht möglich, die Kugeloberfläche **ist** ein gekrümmter 2-dim. Raum.

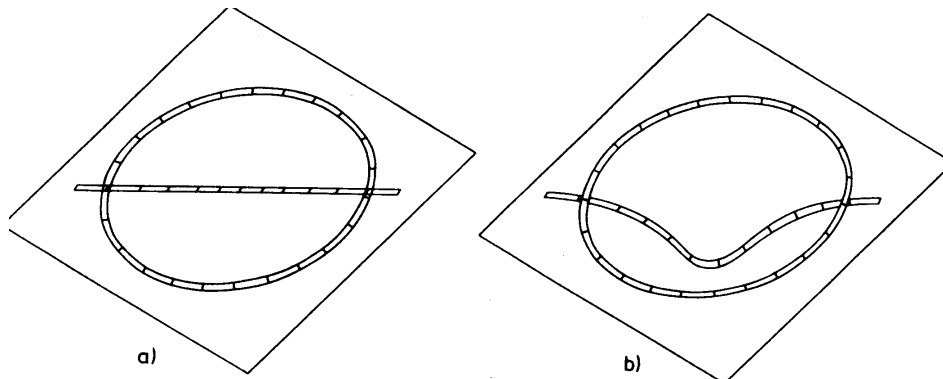
NACHDENKEN: WIE SIEHT DIESE ARGUMENTATION FUER DIE POLARKOORDINATEN EINER SCHEIBE AUS ?

Die Krümmung des dreidimensionalen Raumes kann man (da uns ein entsprechender 4-dimensionaler höherdimensionaler Raum nicht zugänglich ist) nur schwer visualisieren. Am ehesten gelingt das für die Umgebung einer Punktmasse mit Hilfe eines Gummimembran-Modells (2-dim. Raum eingebettet in 3-dim. Überraum, projiziert auf 2-dim. Papierebene!):

⁹Genauer: die 4-dim. Raum-Zeit ist gekrümmt, Skalarprodukte werden nicht mehr durch die einfache Formel $(x^0)^2 - \vec{x}^2$ beschrieben. Wir betrachten hier aber nur den räumlichen Teil.



Durch die Gravitation werden Maßstäbe verändert. Das folgt aus der Verlangsamung von Uhren (s.u.) und dem lokalen Wert der Lichtgeschwindigkeit, der überall zu c gemessen wird, also werden Längen verkürzt. Die Veränderung der Metrik kann man einerseits so darstellen wie oben, indem man die Längen unverändert lässt und den Raum 'verbiegt'; ein äquivalenter Standpunkt ist der eines flachen Raumes mit geschrumpften Maßstäben:



Beispiel:

Man kann die Erdoberfläche durch eine Kugeloberfläche modellieren (Globus), oder alternativ auf eine Ebene projizieren, wobei sich aber Längen und/oder Winkel ändern. Solange es nur um einen Stadtplan geht, ist der Unterschied unerheblich: lokal kann der gekrümmte Raum euklidisch genähert werden!

Das Einsteinsche Gravitationsgesetz hat die Form

$$\boxed{X = G_N \cdot T} \quad (57)$$

Auf der linken Seite steht eine Matrix X , die die Raumeigenschaften beschreibt, auf der rechten der Energie-Impulstensor T , der die Quellen der Gravitation beinhaltet. In Worten: Materie und Energie bestimmen die Krümmung des Raumes, die wiederum die Bewegung der Materie vorgibt: "Matter tells space how to bend, space tells matter how to move".

8.2 Voraussagen und Tests

8.2.1. Licht und Gravitation

8.2.1.1. Schwarzschildradius und schwarze Löcher

Die Fluchtgeschwindigkeit, die ein Teilchen mindestens benötigt, um von einem kugelförmigen Himmelskörper (Radius r , Masse M) entgegen der Gravitationskraft wegfliegen zu können, ist gegeben durch

$$\frac{1}{2}v^2 = G_N \frac{M}{r} \quad (58)$$

Mit kleiner werdendem Radius (aber *fester Masse*) wächst v , bis zum Grenzwert $v = c$; der zugehörige Wert für r ist der Schwarzschildradius¹⁰:

$$r_S = \frac{2 G_N}{c^2} M \quad (59)$$

Bedeutung: Ist $r \leq r_S$, kann selbst Licht das Himmelsobjekt nicht mehr verlassen, von außen kann es nur noch durch seine Gravitationswirkung wahrgenommen werden: schwarzes Loch.

Beispiel:

Der Schwarzschildradius r_S und das Verhältnis zum wahren Radius r einiger Himmelskörper:

	r_S	r_S/r
Erde	9 mm	$1.3 \cdot 10^{-9}$
Sonne	3 km	$4 \cdot 10^{-6}$
Neutronenstern	3 km	0.3

Würde man also die Erde auf etwa 1 cm komprimieren, könnten die Marsianer nur den kreisenden Erdmond sehen ...

Beim Entweichen wird das Licht nicht langsamer, sondern der Verlust an Energie spiegelt sich in der Frequenzabnahme bzw. Wellenlängenzunahme wieder, s.u.

Schwarze Löcher sind auf verschiedene Weisen im Kosmos nachgewiesen worden. Man vermutet, dass alle Galaxienzentren ein schwarzes Loch enthalten.

Beispiel:

Aus der schnellen Bewegung der Sterne in der Nähe des Zentrums der Milchstraße (~ 1 Lichtjahr Abstand) schließt man auf eine Zentralmasse von etwa 3 Millionen Sonnenmassen, die nicht leuchtet.

ANIMATION: Sternbewegung um Sagittarius A

Bei konstanter Dichte ρ des Objektes folgt für den Schwarzschildradius:

$$r_S = \frac{2 G_N}{c^2} \frac{4\pi}{3} \rho r^3 \quad (60)$$

Der Grenzradius für die Entstehung eines schwarzen Loches ist gegeben durch $r_S = r_G = r$, also

$$r_G = \sqrt{\frac{3 c^2}{8 \pi G_N} \frac{1}{\rho}} \quad (61)$$

¹⁰K. Schwarzschild, 1915

Für $r \geq r_G$ bekommen wir ein schwarzes Loch.

Beispiel:

In einem Neutronenstern ist die Dichte die eines Atomkernes, $\rho \approx 4 \cdot 10^{17} \text{ kg/m}^3$, somit $r_G \approx 20 \text{ km}$; die zugehörige Masse ist $M_G \approx 6M_{\text{Sonne}}$.

8.2.1.2. Frequenzverschiebung im Gravitationsfeld

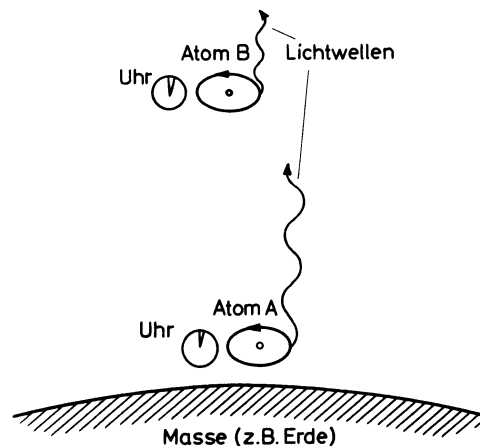
Beim ‘Fallen’ oder ‘Steigen’ von Photonen im konstanten Gravitationsfeld gewinnen/verlieren sie Energie, damit ändert sich ihre Wellenlänge bzw. Frequenz:

$$\boxed{\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\Delta E}{E} = \frac{m g h}{E} = \frac{g h}{c^2}} \quad (62)$$

Beispiel: Turmexperiment von Pound, Rebka (1960) und Pound, Snider (1965)

= erster Nachweis dieses Effektes: 20 m hoher Turm in Harvard, Gamma-Strahlung. Frequenzverschiebung¹¹ $\Delta\nu/\nu = 2.5 \cdot 10^{-15}$.

Apparaturen, die Signale mit fester Frequenz aussenden, sind Uhren. Wir stellen uns Atomuhren vor, die im Takt des Elektronumlaufes Lichtwellen abstrahlen. Jeder Wellenberg definiert ein ‘Tick-Tack’:



Ein weit entfernter Beobachter empfängt von A eine kleinere Frequenz als von B, da die Photonen im Gravitationsfeld Energie verlieren.

Also: Uhren werden in Gravitationsfeldern verlangsamt.

Beispiel:

Das schon in Kapitel 7.3.3 vorgestellte Experiment von J. Hafele und R. Keating ergab, dass nach einer Erdumkreisung in ca. 10 km Höhe die Uhren an Bord des Flugzeuges knapp 200 ns Verspätung aufwiesen, in Einklang mit den Rechnungen. Um den Gravitationseffekt vom Geschwindigkeitseffekt (SR) zu trennen, wurden die Zeitverschiebungen für Ost- und Westflug addiert, dabei fällt der SR-Effekt in guter Näherung heraus.

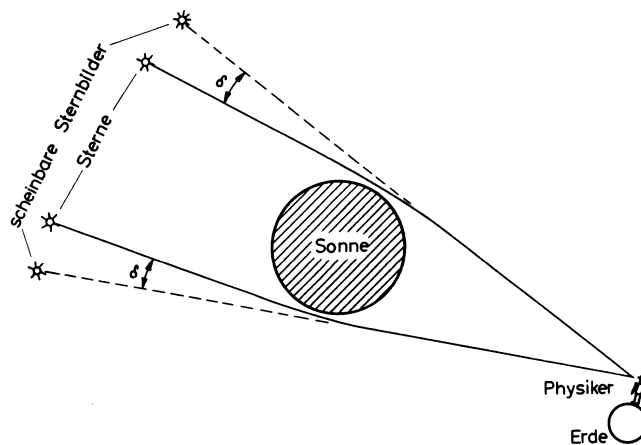
¹¹gemessen via Mößbauer-Effekt

Beispiel:

Sendung Quarks und Co: Atomuhr auf dem Turm des Kölner Doms geht nach 1 Woche um 7 ns vor relativ zu einer 80 m tiefer aufgestellten Uhr.

8.2.1.3. Lichtablenkung im Gravitationsfeld

Außer der richtigen Berechnung der Merkur-Periheldrehung (s.u.) erlebte die AR einen großen Triumph, als die von Einstein berechnete Ablenkung des Lichts durch die Sonne durch Beobachtungen im Jahre 1919 bestätigt wurde:



Die ersten (allerdings nicht sehr genauen) Messungen wurden von A.S. Eddington et al. während einer Sonnenfinsternis gemacht; Heute ist der Effekt mit einer Genauigkeit von besser als 1% gemessen worden.

Erste Rechnungen von Einstein ergaben:

$$\delta' = \frac{r_S}{r} \quad (63)$$

Diesen Wert kann man leicht nachvollziehen, wenn man die Newtonsche Bahn (Hyperbel) eines Teilchens mit $v = c$ und der 'Photonmasse' E/c^2 berechnet¹².

Später hat er die Rechnung in der AR wiederholt und den korrekten Wert

$$\delta = 2 \frac{r_S}{r} = 1.75'' = 8.5 \cdot 10^{-6} \quad (64)$$

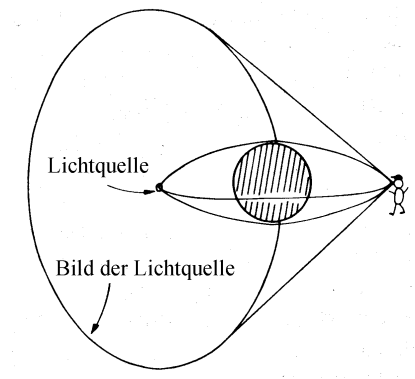
gefunden. Der Unterschied ist eine Konsequenz der Raumkrümmung und damit verbundenen Maßstabsverzerrung in Sonnennähe. Anders formuliert: Man kann den Effekt nicht in einem einzigen lokalen Inertialsystem beschreiben (wie z.B. die Frequenzverschiebung im homogenen Gravitationsfeld, s.o.), sondern muss ihn in einem globalen Inertialsystem berechnen. Damit ist die Lichtablenkung - im Gegensatz zu den oben betrachteten Phänomenen - *nicht* einfach zu beschreiben durch Lichtteilchen, die eine effektive Masse haben und den Newtonschen Gesetzen gehorchen . . .

¹²Der Winkel wurde schon 1801 von J.G. von Söldner berechnet, indem er Lichtkorpuskeln eine Masse zuwies; der Wert selbst geht nicht in das Ergebnis ein!

Spektakulär sind die in jüngerer Zeit photographierten Lichtablenkungen entfernter Galaxien an Gravitationslinsen in Form von Galaxienhaufen:



Bei idealer Geometrie (Lichtquelle und Linse punktförmig, beide zusammen mit Beobachter auf einer Linie) beobachtet man einen Einstein-Ring:

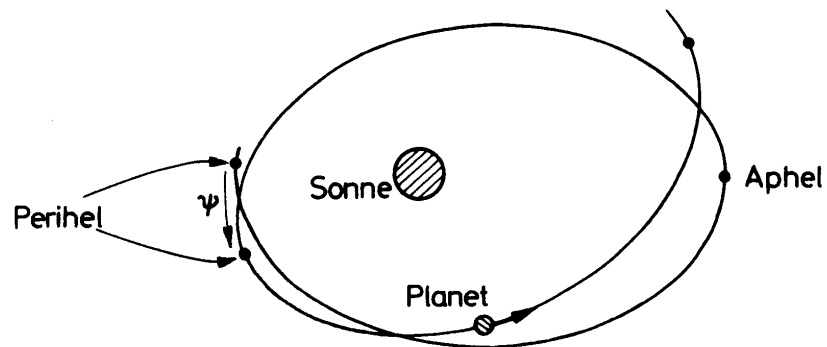


8.2.2. Abweichungen vom Newtonschen Gravitationsgesetz

8.2.2.1. Periheldrehung des Merkur

In der klassischen Mechanik bewegen sich die Planeten, insbesondere Merkur, auf raumfesten Ellipsenbahnen um die Sonne (genauer: den gemeinsamen Schwerpunkt).

Die Relativitätstheorie sagt ein langsames Rotieren der großen Halbachse der Ellipse voraus, so dass eine rosettenförmige Bahn resultiert. Man spricht von der 'Periheldrehung':



Es gibt zwei Beiträge zu diesem Effekt:

- SR: In den Bewegungsgleichungen ist der γ -Faktor zu berücksichtigen (für die Merkur-Umlaufgeschwindigkeit $v = 47 \text{ km/s} \rightarrow \gamma - 1 = 1.3 \cdot 10^{-8}$).
- AR: Die Gravitations-Energiedichte in der Umgebung der Sonne modifiziert das Gravitationspotential.

Der Gesamteffekt wird zu

$$\omega_{Merkur}^R = 43''/\text{Jahrhundert} \quad (65)$$

vorausgesagt, das ist sehr wenig!

Dazu kommen 'bekannte' Störungen durch nicht kugelsymmetrische Massenverteilungen und die anderen Planeten, die man (in der klassischen Mechanik!) berechnen kann zu

$$\omega_{Merkur}^K = 5558''/\text{Jahrhundert} \quad (66)$$

Beobachtet wird:

$$\omega_{Merkur} = 5601''/\text{Jahrhundert} \quad (67)$$

in schöner Übereinstimmung mit der Summe der beiden berechneten Terme. Alle Zahlen sind mit einer Genauigkeit von weniger als $1''/\text{Jahrhundert}$ bestimmt¹³.

8.2.3. Gravitationswellen

Ein schwingender elektrischer Dipol \mathbf{p} strahlt elektromagnetische Wellen ab, mit der Leistung:

$$P \sim \frac{1}{\epsilon_0 c^3} \ddot{\mathbf{p}}^2 \quad (68)$$

Aus Gravitationsladungen kann man schwingende Dipolmomente nicht aufbauen, da es keine unterschiedlichen Vorzeichen gibt und eine einzelne hin- und herschwingende Masse (\rightarrow Dipolmoment!) den Impuls nicht erhalten würde.

¹³Die Diskrepanz $\omega^K - \omega$ war schon 1860 bekannt und wurde erst 1915 durch die AR aufgelöst! Bis dahin vermutete man einen weiteren inneren Planeten 'Vulkan' als Ursache . . .

Gravitationswellen können aber von schwingenden Quadrupolen ¹⁴ Q abgestrahlt werden, wie Einstein 1916 vorhersagte:

$$P \sim \frac{G_N}{c^3} \ddot{Q}^2 \quad (69)$$

Beispiel:

2 gleiche Massen m im Abstand r haben ein Quadrupolmoment der Größenordnung $Q = m r^2$. Rotieren sie umeinander, strahlen sie, da die relative Orientierung variiert.

Wegen der Kleinheit des Vorfaktors in (65) ist die Strahlungsleistung in irdischen und auch in vielen kosmischen Systemen gering, so dass bis heute ein direkter Nachweis nicht gelungen ist.

Beispiel:

Erde umkreist Sonne: $P \sim 200$ W.

Ein Doppelsternsystem aus zwei Neutronensternen im Abstand von ca 10^6 km haben die Astronomen R.H. Taylor and J.H. Hulse¹⁵ viele Jahre lang beobachtet. Aus der kontinuierlichen Abnahme der kinetischen Energie des Systems haben Sie indirekt auf die abgestrahlten Gravitationswellen geschlossen; die so gemessene Strahlungsleistung stimmt mit der berechneten überein.

In diesen Jahren werden mehrerer Gravitationswellendetektoren auf der Erde in Form von gigantischen Michelson-Interferometern aufgebaut¹⁶. Sie sollen nach kosmischen Quellen wie Supernovae oder verschmelzenden Doppelpulsaren suchen. Ankommende Quadrupolstrahlung versetzt die Spiegel relativ zueinander in Schwingungen, die sich durch das Interferenzmuster zu erkennen geben.

Eine äußerst hohe Empfindlichkeit ist nötig, denn selbst eine Supernova in unserer Milchstraße bewegt die Spiegel nur um $\Delta l/l \sim 10^{-18}$.

¹⁴Quadrupol ist Tensor bzw. Matrix.

¹⁵erhielten zusammen 1993 den Nobelpreis

¹⁶u.a. GEO600 bei Hannover