Physik IV, RWTH, SS 2005, T.Hebbeker

May 9, 2005

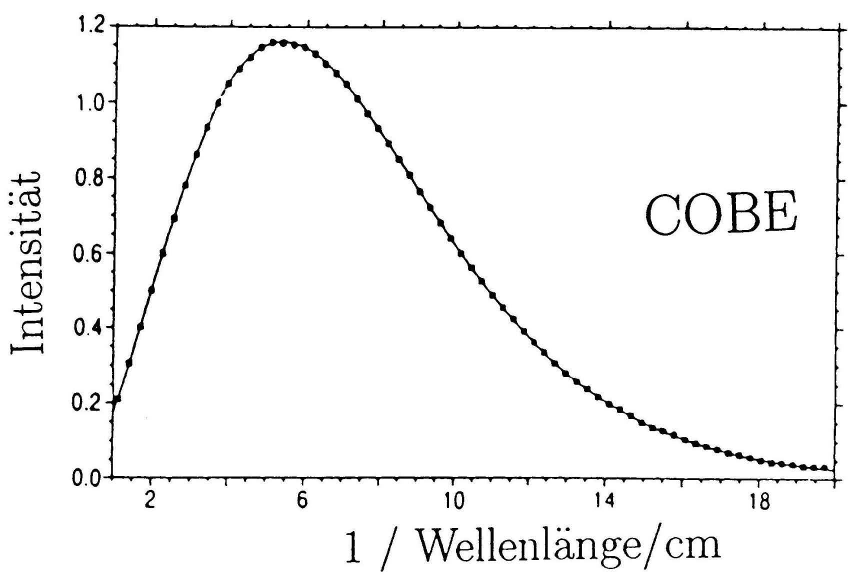
TEIL 3

Nachdenken/Nachlesen: Lesen Sie nach: Plancks Forschungsarbeiten in Berlin, die zur Entdeckung der Strahlungsformel und zum Planckschen Wirkungsquantum führten.

4. Hohlraumstrahlung

Während einzelne Atome bzw. Moleküle (z.B. in Form eines Gases unter Normalbedingungen) ein Linienspektrum erzeugen, beobachtet man kontinuierliche Strahlungsspektren bei festen und flüssigen Körpern sowie Gasen bei hohem Druck und bei hoher Temperatur (Plasmen).

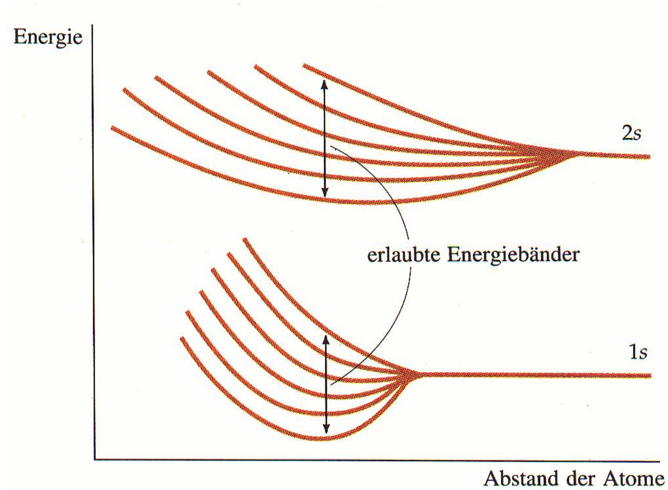
Beispiele:
• *glühender Wolfram-Draht in Lampe (ca* $3000\,\mathrm{K}$*),*
• *Quecksilber bei* $-10^0\,\mathrm{C}$*,*
• *Sonnenoberfläche*[1] *(*$6000\,\mathrm{K}$*)*
• $2.7\mathrm{K}$*-Hintergrundstrahlung (Abbildung)*



Die Wechselwirkung zwischen den Atomen/Molekülen ist für die Aufspaltung und Verbreiterung der Einzellinien verantwortlich, so dass im Extremfall eine kontinuierliche Wellenlängenverteilung resultiert.

Beispiel:
'Zusammenwachsen' der Spektren von 6 Atomen, siehe Abbildung.

[1] Gase an Sonnenoberfläche sind weitgehend ionisiert ⟶ Plasma, also kontinuierliche Spektren und insgesamt näherungsweise Spektrum eines 'schwarzen Körpers', siehe unten. Diskrete Spektrallinien - insbesondere von Helium (Entdeckung durch Fraunhofer) - findet man in der Absorption in höheren Sonnenatmosphärenschichten.



FRAGE: Wieso entsteht in Herbstnächten Reif/Eis, obwohl die Lufttemperatur nicht unter 0^0 C sinkt ?

Im folgenden beschäftigen wir uns mit diesen kontinuierlichen Spektren; nach einigen phänomenologischen Betrachtungen versuchen wir, die Temperatur- und Frequenzabhängigkeit quantitativ zu erklären.

4.1. Das Kirchhoffsche Gesetz

VERSUCH: Bogenlampe: Wellenlängenverteilung

VERSUCH: Draht: Temperatur und Farbe

VERSUCH: Wärmestrahlungsgerät

Die ausgestrahlte Leistung hängt von Wellenlänge (bzw. Frequenz), Temperatur und Beschaffenheit des Körpers (Oberfläche) ab.

Als Absorptionsvermögen A^* einer Oberfläche bezeichnet man das Verhältnis von *absorbierter* zu eingestrahlter Wärmeleistung, integriert über alle Wellenlängen.

Der komplementäre Begriff ist das Reflexionsvermögen $R^* = 1 - A^*$.

Die pro Fläche und Raumwinkel senkrecht zur Oberfläche *emittierte* Leistung (integriert über alle Frequenzen) ist durch das Emissionsvermögen E^* gegeben:

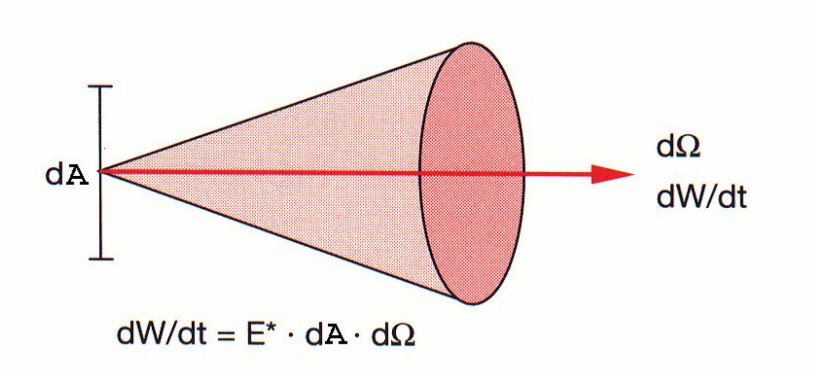
$$d^3W_E = E^*(T, \text{Oberflaeche}) \cdot dA \cdot d\Omega \cdot dt \tag{1}$$

Man beachte: A^* und R^* sind als ‘relative’ Größen dimensionslos während E^* eine ‘absolute’ Größe der Dimension Energie/Fläche/Zeit ist.

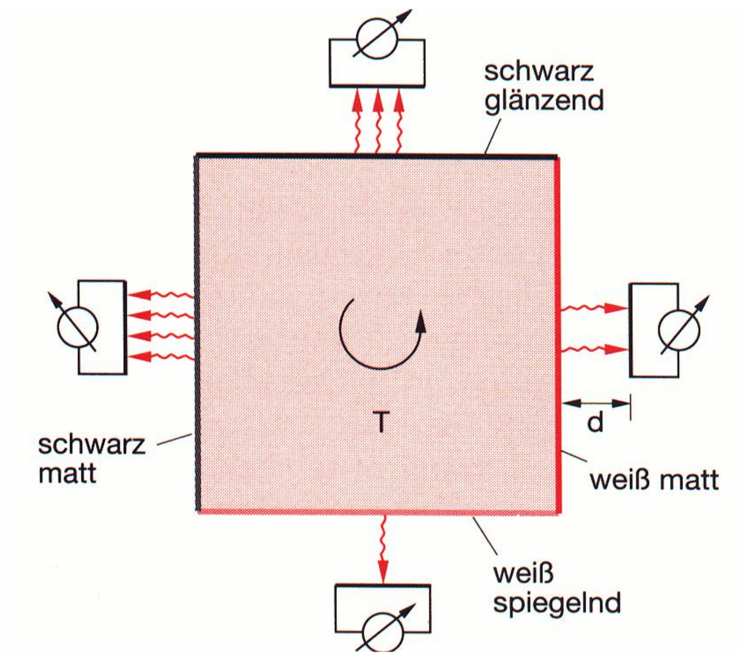
Wie wir im folgenden zeigen werden, ist (auch) die *emittierte* Strahlung maximal für schwarze Oberflächen.

Die Wärmestrahlung kann sich offenbar im Vakuum ausbreiten: Sonne! Die Einstellung eines thermischen Gleichgewichtes auch zwischen räumlich getrennten Objekten ist also möglich.

Beispiele:



Lesliescher Würfel:



Man kann die Oberflächen des heißen (mit kochendem Wasser gefüllten) emittierenden Würfels und der kalten Detektoroberflächen[2] *unabhängig voneinander variieren.*

ideal schwarz: $A^* = 1$ = *maximal (Definition von schwarz !),*
ideal verspiegelt: $A^* = 0$

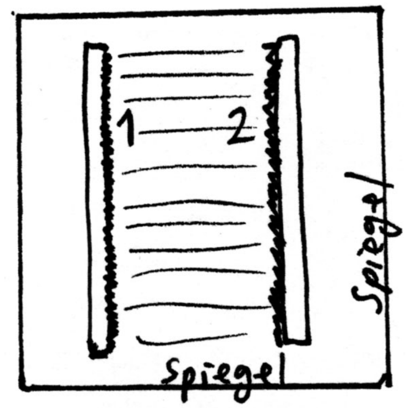
Eine schwarze rauhe Oberfläche führt zu relativ starker Absorption und auch zu starker Emission!

VERSUCH: Wärmestrahlung

FRAGE: Heizmethoden im Haushalt: Wann spielt die Wärmestrahlung eine wesentliche Rolle ?

Emissions- und Absorptionsvermögen hängen zusammen, wie folgendes Experiment zeigt: Die Temperaturen T_i der beiden Platten sind zu Beginn gleich. Umgeben sind die Platten von Spiegeln, die dafür sorgen, dass aus diesem System keine Strahlung entweichen kann. Das Experiment zeigt, dass

[2] strahlen auch, aber wegen $P \sim T^4$ sehr viel weniger, siehe unten.



die Temperaturen gleich bleiben, wie es auch vom 2. Hauptsatz der Thermodynamik vorausgesagt wird. Die gegenüberstehenden Plattenoberflächen unterscheiden sich nur in den Parametern E_1^*, A_1^* und E_2^*, A_2^*. Die jeweils empfangenen Wärmemengen sind gleich, andernfalls gäbe es einen Netto-Energietransfer und eine Temperaturdifferenz:

$$W_1 = W_2 \tag{2}$$

Mit obigen Definitionen für Absorptions- und Emissionsvermögen folgt:

$$C \cdot E_2^* \cdot A_1^* = W_1 \ = W_2 \ = C \cdot E_1^* \cdot A_2^* \tag{3}$$

Die Konstante C ergibt sich durch Integration über Flächen und Raumwinkel und ist für beide Platten gleich. Also kann das Verhältnis von Emissions- und Absorptionsvermögen nur von der Temperatur abhängen, aber nicht von Material und Oberflächenstruktur. Das ist das Kirchhoffsche Strahlungsgesetz :

$$\boxed{\frac{E^*(T)}{A^*(T)} = K(T)} \tag{4}$$

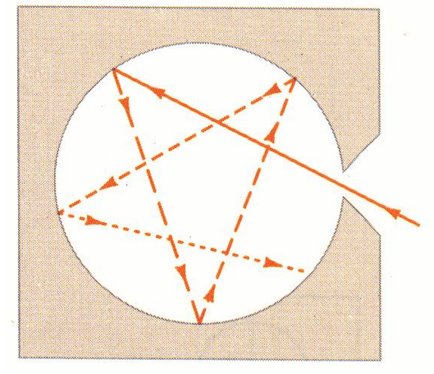
Insbesondere folgt, dass schwarze Körper auch am stärksten *emittieren*!

4.2. Der Schwarze Körper

Dem (idealisierten) Schwarzen Körper kommt damit eine besondere Bedeutung zu: Die von ihm ausgesandte Wärmestrahlung ist **universell**, d.h. hängt nur von λ und T ab, aber nicht von Materialeigenschaften! Im folgenden geht es um das Verständnis der Strahlung des Schwarzen Körpers mit $A^* \equiv 1$.

Aus dem Alltag wissen wir, dass auch ‘schwarze’ Objekte Licht reflektieren. Ein geschlossener Raum, in den wir durch ein kleines Loch hineinschauen, kommt dem Ideal sehr viel näher.

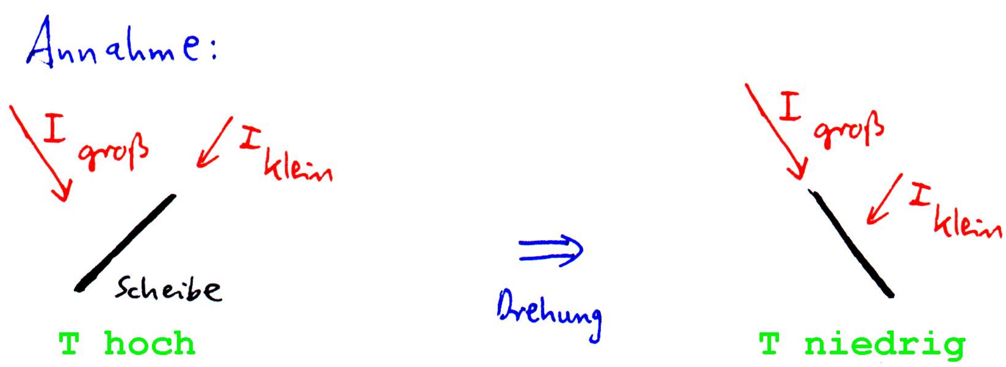
Die technische Realisierung des Schwarzen Strahlers erfolgt daher durch einen Hohlraum mit geschwärzter Innenfläche hoher Rauhigkeit und einem kleinen Loch. Auch für die Berechnung werden wir dieses Modell zugrundelegen. Durch (diffuse) Mehrfachreflexionen wird einfallendes Licht praktisch vollständig absorbiert. Die aus der Öffnung austretende Strahlung ist die uns interessierende Strahlung des Schwarzen Körpers = Hohlraumstrahlung = Plancksche Strahlung .



VERSUCH: Schwarze Fläche mit ‘schwarzem Loch’.

Auch die ‘Schwarzen Löcher’ der Astrophysik stellen sehr gute Realisierungen des Ideals dar, auch sie strahlen nach der Planckschen Strahlungsformel (S. Hawking!). Allerdings ist die ‘Temperatur’ (aus der Masse berechenbar) recht niedrig, so dass die Strahlung schwach ist (Schwarzes Loch mit Sonnenmasse: $\mathbf{2.5 \cdot 10^{-6}\,K}$!)

Innerhalb des Hohlraums der Temperatur T ist die Strahlung homogen und isotrop. Andernfalls würde ein Testplättchen durch Verschiebung oder durch unterschiedliche Orientierung seine Temperatur ändern, aber diese muss nach dem 2. Hauptsatz immer T betragen!



Computer-Animation Hohlraumstrahlung

CLIXX 26.2 Applet Hohlraumstrahlung

4.3. Charakteristische Größen der Wärmestrahlung

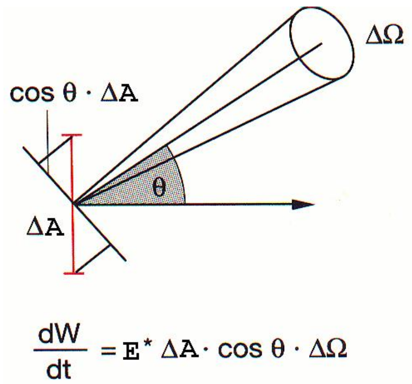
A) Die *abgestrahlte* Energie des schwarzen Körpers ist:

$$d^3W_E = E^* \cdot \cos\theta \cdot dA \cdot d\Omega \cdot dt \tag{5}$$

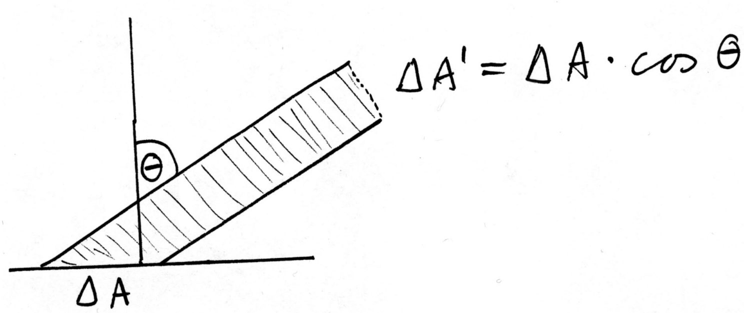
Das ist die Verallgemeinerung von (1) für beliebige Winkel. Dieses Lambertsche Gesetz der Winkelabhängigkeit ist für viele Strahler erfüllt, insbesondere für die Hohlraumstrahlung.

Das Lambertsche Gesetz gilt genau dann, wenn die ausgesandte ‘Leuchtdichte’ winkelunabhängig ist,

$$d^3W_E \sim \cos\theta \cdot dA = dA' \qquad , \tag{6}$$



siehe Skizze.

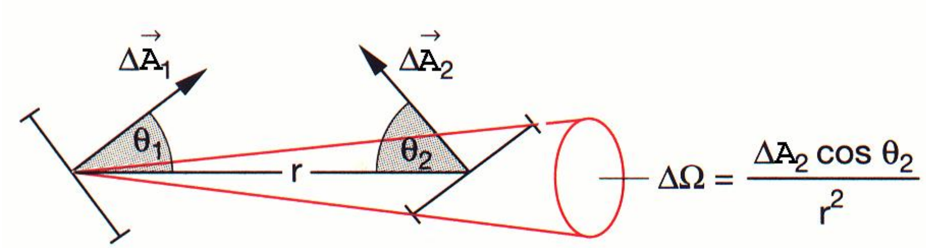


VERSUCH: Betrachten einer Papieroberfläche unter verschiedenen Blickwinkeln

B) Die von einer zweiten Fläche *empfangene* Energie ist (im allgemeinen ist noch ein Faktor $\boldsymbol{A^*}$ einzufügen):

$$\boldsymbol{d^3W^{(2)} = E_1^* \cdot \cos\theta_1 \cdot dA_1 \cdot d\Omega_1 \cdot dt = E_1^* \cdot \cos\theta_1 \cdot dA_1 \cdot dA_2 \cdot \frac{\cos\theta_2}{r^2} \cdot dt} \tag{7}$$

Die empfangene Intensität ist also



$$\boldsymbol{\frac{d^2W^{(2)}}{dA_2\,dt} = \int_{A_1} dA_1 \left[E^* \;\frac{\cos\theta_1\;\cos\theta_2}{r^2}\right]} \tag{8}$$

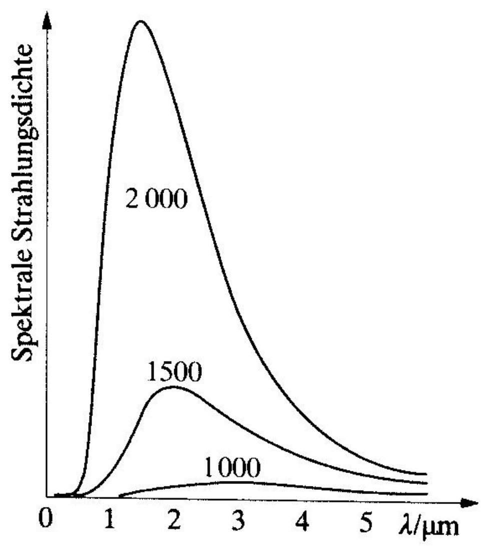
4.4. Spektrale Energiedichte

Die spektrale Strahlungsdichte S^* ist definiert durch

$$E^*(T) = \int_0^\infty S^*_\nu(T,\nu)\,d\nu \tag{9}$$

bzw.

$$E^*(T) = \int_0^\infty S^*_\lambda(T,\lambda)\,d\lambda \tag{10}$$



Im Hohlraum hat die Strahlung eine konstante, nur von der Temperatur abhängige Energiedichte $\rho(T)$. Man kann wieder spektrale Größen definieren, die spektralen Energiedichten $\rho_\nu(T,\nu)$ und $\rho_\lambda(T,\lambda)$ mit

$$\rho(T) = \int_0^\infty \rho_\nu(T,\nu)\,d\nu \;\; \text{etc.} \tag{11}$$

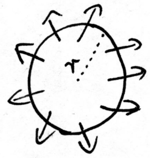
Betrachten wir ein kugelförmiges Volumen im Hohlraum. Die von diesem emittierte Strahlungsintensität ist die gleiche wie die von den Wänden ausgesandte (im thermischen Gleichgewicht). Aus dem gedachten Volumen entweicht[3] isotrop Energie $\Delta E = \Delta W$ mit Lichtgeschwindigkeit, die zugehörige Intensität ist

$$c\,\rho = \frac{d^2W}{dA\,dt} = \int \frac{d^3W}{dA\,dt\,d\Omega}\,d\Omega = 4\pi\cdot\frac{d^3W}{dA\,dt\,d\Omega} \tag{12}$$

Das folgt aus der Energieerhaltung, siehe Graphik. Der Faktor $4\,\pi$ resultiert aus der Raumwinkelintegration über Ω, die Lichtgeschwindigkeit c ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Strahlung. Andererseits gilt bei Emission senkrecht zur Oberfläche

$$\frac{d^3W}{dA\,dt\,d\Omega} = E^* \tag{13}$$

[3] Im Gleichgewicht strömt die gleiche Energiemenge zurück !



$$\Delta E = 4\pi r^2 \cdot c \cdot \Delta t \cdot \rho$$

also sind S_ν^* und ρ_ν proportional zueinander und für die Integrale gilt

$$E^* = \frac{c}{4\pi}\,\rho \qquad . \tag{14}$$

Im folgenden werden wir ρ_ν zu berechnen versuchen. Gelingt dies, ist die Hohlraumstrahlung verstanden.

Anmerkung:
In der Photometrie und Physiologie wird eine (oft verwirrende) Vielzahl von Größen und Einheiten benutzt. Diese Größen beschreiben das für das Auge sichtbare Licht, enthalten also eine Gewichtung mit der spektralen Empfindlichkeit.

Beispiele:

Lichtstärke , entspricht **emittierter** *Leistung pro Raumwinkel. Einheit 'Candela' =* cd *= Lichtstärke pro Raumwinkel eines schwarzen Körpers der Fläche (Lochgröße)* $1/60\,\mathrm{cm}^2$ *bei* $T = 2042\,\mathrm{K}$ *(Schmelzpunkt Platin)*[4]*. Das ist eine SI-Basiseinheit!*

Beleuchtungsstärke , entspricht **empfangener** *Intensität. Einheit 'Lux' =* $\mathrm{lx} = \mathrm{cd\,sr}/\mathrm{m}^2$. *Gelbgrünes Licht (*$550\,\mathrm{nm}$*) der Intensität* $1\,\mathrm{W}/\mathrm{m}^2$ *hat eine Beleuchtungsstärke von* $680\,\mathrm{lx}$*, rotes Licht (ab* $622\,\mathrm{nm}$*!) bei* $750\,\mathrm{nm}$ *(und gleicher Intensität) aber nur* $0.1\,\mathrm{lx}$.

Mehr dazu im Anhang.

4.5. Das Rayleigh-Jeans-Gesetz

Wir stellen uns den Hohlraum als Würfel der Kantenlänge a mit ideal leitenden Flächen vor. Das kleine Loch zur Strahlungsauskopplung ignorieren wir.

Innerhalb bilden sich elektromagnetische stehende Wellen aus. Randbedingung: Feldstärke null auf den Würfelflächen, also sind nur folgende Wellenzahlen $\tilde{k} = 2\pi/\lambda$ mit $\tilde{k} = |\vec{\tilde{k}}| = \sqrt{\tilde{k}_x^2 + \tilde{k}_y^2 + \tilde{k}_z^2}$ und Frequenzen möglich:

$$\tilde{k} = \frac{\pi}{a}\cdot\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} \qquad \nu = \frac{c}{2a}\cdot\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} \tag{15}$$

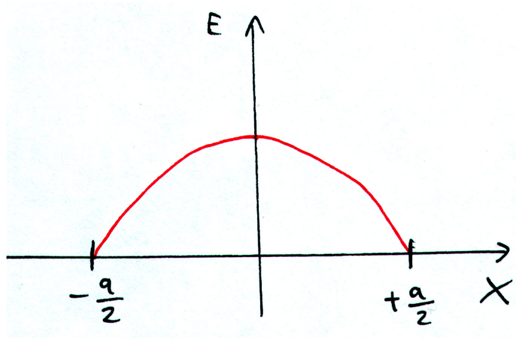
mit ganzen Zahlen n_x, n_y, n_z. Man spricht von Schwingungs- Moden .

Beispiel:

1-dimensional, Würfelzentrum im Ursprung des Koordinatensystems, $n_x = 1$*:*

$$E \sim \cos(\tilde{k}\cdot x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{x}{a/2}\right)$$

[4]Diese Definition galt bis 1979 und ist inzwischen durch eine andere ersetzt, die auf monochromem Licht beruht, s.u.; Diskussion: Bergmann-Schäfer.



wird null bei $x = \pm a/2$.

Die spektrale Energiedichte berechnen wir als das Produkt aus der Zahl der Moden (pro Volumen und pro Frequenzintervall $d\nu$) und der mittleren Modenenergie bei der Frequenz ν:

$$\boxed{\rho_\nu(\nu, T) = n_\nu(\nu) \cdot \langle E(\nu, T)\rangle} \tag{16}$$

Die Modenzahl ist gewissermaßen die Zahl der Freiheitsgrade.

Die spektrale Modendichte n_ν ist temperaturunabhängig. Man kann sie berechnen, indem man die Zahl der Moden zwischen 0 und ν aufaddiert (für große n wird das ein Integral), die obige Randbedingung erfüllen, und einen Faktor 2 für die beiden Polarisationsrichtungen berücksichtigt (⟶ Übung):

$$\boxed{n_\nu(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}} \tag{17}$$

Der interessantere Faktor in (16) ist die mittlere Energie pro Mode. In der klassischen Thermodynamik ist sie für einen harmonischen Oszillator im thermischen Gleichgewicht durch

$$E = k\,T \tag{18}$$

gegeben. Beachte: Harmonischer Oszillator hat $f = 2$ Freiheitsgrade wegen kin. + pot. Energie bzw. E- und B-Feld. In der Elektrodynamik ist die Amplitude $|\vec{E}|$ der stehenden Welle mit ihrer Energie verknüpft. Gibt man letztere vor (Mittelwert = kT) muss sich die Amplitude entsprechend anpassen. Da die Amplitude bei gegebener Frequenz kontinuierlich variieren kann, gibt es keine Quantelung.

Mit (16) und (18) erhält man das Rayleigh-Jeans-Strahlungsgesetz :

$$\rho_\nu(T, \nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot k\,T \tag{19}$$

Bei kleinen Frequenzen kann es in der Tat die Messdaten beschreiben. Aber bei größeren Frequenzen fand man Ende des 19. Jahrhunderts Abweichungen, und auch aus theoretischen Gründen kann diese Formel nicht stimmen, denn

$$\rho = \int_0^\infty \rho_\nu \, d\nu \;\to\; \infty \qquad \text{und} \qquad E^* = \int_0^\infty S^*_\nu \, d\nu \;\to\; \infty \tag{20}$$

Obwohl das Rayleigh-Jeans-Gesetz kein Maximum in der spektralen Energiedichte als Funktion der Frequenz besitzt, war dessen Existenz experimentell längst bekannt. Die Frequenz, bei der die Energiedichte ρ_ν maximal wird, wurde von Willhelm Wien als proportional zur Temperatur berechnet, aufgrund von Gedankenversuchen mit beweglichen Spiegeln:

$$\boxed{\nu_{max} = \text{const} \cdot T} \tag{21}$$

Das ist das Wiensche Verschiebungsgesetz .

4.6. Das Plancksche Strahlungsgesetz

Max Planck 'erriet' 1900 die Struktur der richtigen Formel, aber konnte die auftretenden Konstanten nicht berechnen. Da sie die Messdaten - bei Anpassung der Konstanten - gut beschreiben konnte, arbeitete er an einem entsprechenden Modell, dessen Ergebnis er einige Wochen später in Berlin präsentierte.

Das Wiensche Verschiebungsgesetz besagt, dass Frequenz und Energie ($\sim\ T$) proportional sind. Planck nahm an, dass die Energie der mit ν schwingenden 'Oszillatoren' **quantisiert** ist:

$$\boxed{E_n = n \cdot h\,\nu} \tag{22}$$

mit ganzzahligem n. Dabei ist $h\,\nu$ die Energie eines Photons , dem Quantum des elektromagnetischen Feldes. Diese Formel stellt zum ersten mal für elektromagnetische Wellen einen Zusammenhang zwischen ν und E her!

Der 'Oszillator' ist nicht präzise definiert - aber das ist auch nicht nötig zur Ableitung der Strahlungsformel! Wir stellen uns vor, dass jede der den Hohlraum ausfüllenden Eigenmoden diese Rolle einnimmt, und Photonen aufnehmen oder abgeben kann. Die Zahl der Oszillatoren ist also durch die Modendichte gegeben.

Um nun die mittlere Energie zu berechnen, muss man die Wahrscheinlichkeit dafür kennen, dass der Oszillator die Energie E_n besitzt. Planck nahm eine Boltzmann-Verteilung an, also[5]:

$$p(E_n) \sim e^{-E_n/kT} \tag{23}$$

Im Gegensatz zum klassischen Fall sind also jetzt die höheren Anregungen (viele Nullstellen der stehenden Welle) unterdrückt. Damit kann man den Energie-Mittelwert berechnen:

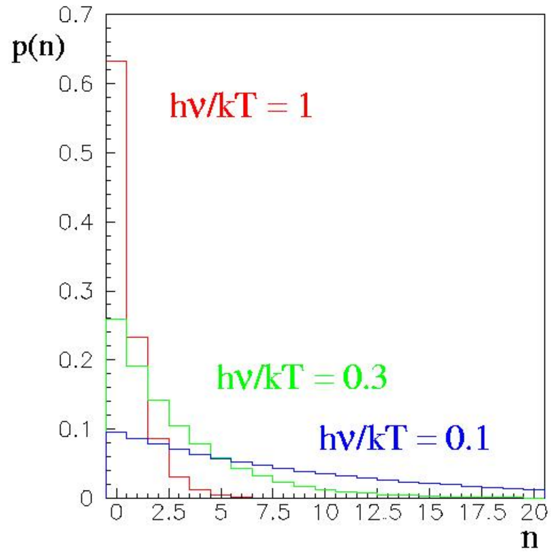
$$\langle E \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} E_n e^{-E_n/kT}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-E_n/kT}} = \ldots = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} \tag{24}$$

Die Rechnung ist einfach, wenn man die Summenformel für die geometrische Reihe anwendet und erkennt, dass man den Zähler aus dem Nenner durch Differenzieren bekommt (Übung). h ist das Plancksche Wirkungsquantum. Diese fundamentale Naturkonstante, die nicht auf andere zurückgeführt oder berechnet werden kann, wurde von Planck in genau diesem Zusammenhang eingeführt. Der Zahlenwert muss experimentell bestimmt werden, z.B. aus dem Wienschen Verschiebungsgesetz, s.u.

Für 'kleine' Frequenzen kann man die Exponentialfunktion entwickeln und durch

$$e^{h\nu/kT} - 1 \approx \frac{h\nu}{kT} \tag{25}$$

[5] Diese Gleichung ist natürlich so zu verstehen, dass kT im Nenner des Exponenten steht - auch ohne explizit Klammern zu setzen!



annähern. In diesem Grenzfall enthält man das Rayleigh-Jeans-Gesetz!

Der gleiche Grenzfall ergibt sich bei festem ν und $h \longrightarrow 0$: Die quantenmechanische Rechnung geht also in die klassische über für $h \longrightarrow 0$.

Für ‘große ’ Frequenzen dämpft der Nenner die mittlere Energie stark ab, so dass das Integral über ν *nicht* mehr divergiert wie im Fall von Rayleigh-Jeans!

Einsetzen in (16) liefert die Plancksche Strahlungsformel :

$$\boxed{\rho_\nu(T,\nu) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}} \tag{26}$$

Diese auch historisch sehr wichtige Gleichung vereint die Thermodynamik (k), den Elektromagnetismus (c) und die Quantenphysik (h).

Die Plancksche Formel ist heute experimentell sehr gut bestätigt worden, am besten mit den am Anfang gezeigten Messungen des COBE-Satelliten der kosmischen Hintergrundstrahlung!

PS:

Die Unterschiede zur klassischen Betrachtung der Oszillatorenergien sind also:

	klassisch	Planck
Energiequantelung	nein	ja
Frequenzabhängigkeit	nein	ja
Temperaturbhängigkeit	ja	(ja)
Boltzmann-Faktor	(ja)	ja
Energie	$0 \rightarrow \infty$	$n\,h\,\nu$
mittlere Energie	$k\,T$	$\frac{h\nu}{e^{h\nu/kT}-1}$

Man beachte: In der klassischen Sicht ist der Boltzmann-Faktor wirkungslos, da $e^{-kT/kT} = const.$

Wieso benötigt man eigentlich eine Quantisierung, könnte man nicht ansetzen $E = x\,h\nu$ mit reellem x ? Das bedeutet, dass man beliebig kleine Photonenergien austauschen kann, und das bedeutet $h \to 0$, liefert also den klassischen Grenzfall (den man nicht will!). Formal kann man das auch anhand von (24) sehen, denn daraus würde bei ungequantelter Energie

$$\langle E \rangle = \frac{\int_{x=0}^{\infty} x\,h\,\nu\,e^{-xh\nu/kT}\,dx}{\int_{x=0}^{\infty} e^{-xh\nu/kT}\,dx} = k\,T\,\frac{\int_{y=0}^{\infty} y\,e^{-y}\,dy}{\int_{y=0}^{\infty} e^{-y}\,dy} = k\,T$$

4.7. Das Stefan-Boltzmann-Gesetz

Integration über die Frequenz liefert die gesamte Energiedichte. Mit der Substitution $x = h\nu/kT$ bekommt man:

$$\rho(T) = \int_0^{\infty} \rho_\nu(T,\nu)\,d\nu = \frac{8\pi h}{c^3}\left(\frac{kT}{h}\right)^4 \cdot \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1}\,dx \tag{27}$$

Das Integral hat den Wert $\pi^4/15 \approx 6.5$. Also:

$$\rho(T) = \frac{8\pi^5 k^4}{15 h^3 c^3} \cdot T^4 \tag{28}$$

Um die Abstrahlungsleistung einer Oberfläche der Größe A zu berechnen, muss über den Halbraum mit $\Omega = 2\pi$ integriert werden:

$$\begin{aligned} P(T) &= A \cdot E^*(T) \int_0^{2\pi} \int_0^1 \cos\theta\; d\phi\, d\cos\theta & (29) \\ &= A \cdot E^*(T) \cdot \pi = A \cdot \frac{c}{4\pi}\,\rho(T) \cdot \pi & (30) \end{aligned}$$

Das ist das Stefan-Boltzmann-Gesetz :

$$\boxed{P = \sigma \cdot A \cdot T^4} \tag{31}$$

mit der Stefan-Boltzmann-Konstanten

$$\boxed{\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15\,h^3 c^2} = 5.67 \cdot 10^{-8}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2 K^4}}} \tag{32}$$

Das Gesetz ist schon 1884 von Ludwig Boltzmann gefunden worden, aufgrund rein thermodynamischer Überlegungen, und im Einklang mit Messungen von Josef Stefan aus dem Jahr 1879. Den Proportionalitätsfaktor konnte er allerdings nicht berechnen!

Beispiele:

Sonnenoberfläche, $T = 6000\,\mathrm{K}$*:* $P/A = 70\,\mathrm{MW/m^2}$.

Schwarze Herdplatte, $T = 600\,\mathrm{K}$, $A = 0.05\,\mathrm{m^2}$*:* $P/A = 370\,\mathrm{W}$.

VERSUCH: Strahlung von kaltem und heißem Wasser

FRAGE: Kann es sein, dass in einem engen Frequenzintervall bei Temperaturerhöhung des schwarzen Strahlers die Energiedichte abnimmt ?

4.8. Das Wiensche Verschiebungsgesetz

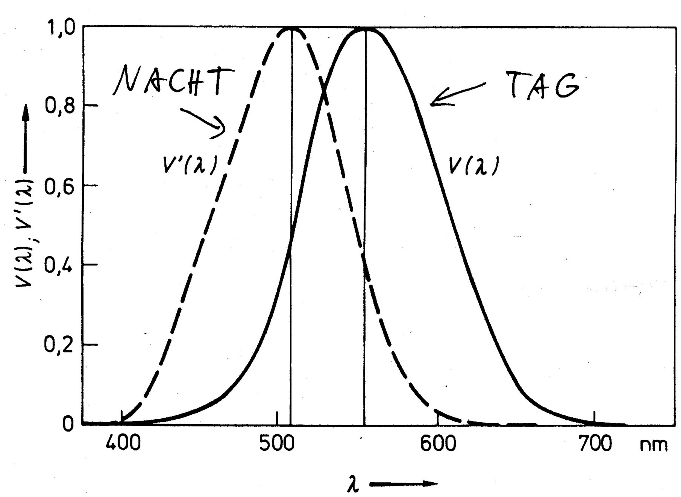
Die Berechnung des Maximums der Planckschen Formel (26) bestätigt das Wiensche Verschiebungsgesetz (21) und erlaubt die Berechnung der auftretenden Konstanten:

$$\boxed{\nu_{max} = \frac{2.82\,\mathrm{k}}{h} \cdot T = 5.88 \cdot 10^{10} Hz \cdot T/\mathrm{K}} \tag{33}$$

FRAGE: Bekommt man das gleiche Ergebnis, wenn man von $\rho_\lambda(T, \lambda)$ ausgeht und $\lambda\,\nu = c$ benutzt ?

ANHANG: Candela und Co

Die photometrischen (=physiologischen) Größen wie Candela beinhalten eine Gewichtung mit der spektralen Empfindlichkeit V des menschlichen Auges (bei Tageslicht), siehe Abbildung. Insofern



ist es erstaunlich, dass es sich hier um eine SI-Basiseinheit handelt. Der in Candela gemessenen Lichtstärke enspricht die physikalische Größe Leistung pro Raumwinkel.

Historisch:

- bis 1948: Hefner-Kerze ($\approx 0.9\,\mathrm{cd}$), definiert. über Kerzenflamme
- bis 1979: Candela, definiert über schwarzen Strahler (s.o.).
- ab 1979: Candela wird jetzt so definiert: monochromatische Strahlung der Frequenz $540\,\mathrm{THz}$ ($\approx 555\,\mathrm{nm}$) aus Quelle mit Strahlstärke $1/683\,\mathrm{W/sr}$.

In der neueren Definition gibt es einen einfachen Zusammenhang zu radiometrischen (=physikalischen) Größen, allerdings ist sie recht abstrakt …

Beispiel:

Ein typisches Notebook-Display erreicht ca $100\,\mathrm{cd/m^2}$.

Zur Charakterisierung von Lichtquellen benutzt man oft den ‘Lichtstrom’ Φ, das der physikalischen Größe Strahlungsleistung P (Einheit: W) entspricht. Der Lichtstrom kann auf die Lichtstärke (Lichtstrom pro Raumwinkel) zurückgeführt werden, deren Einheit das Candela ist. Die Einheit des Lichtstromes ist das Lumen $= \mathrm{lm} = cd\,sr$). Bei der Wellenlänge von $550\,\mathrm{nm}$ (maximale Empfindlichkeit des Auges) gilt für monochromatisches Licht:

$$1\,\mathrm{W} \quad \leftrightarrow \quad 680\,\mathrm{lm} \tag{34}$$

Dies folgt aus obiger Definition der Einheit Candela! Eine ‘weiße’ Lichtquelle, die die gleiche Wellenlängenverteilung hat wie Sonnenlicht (Schwarzer Körper, $6000\,\mathrm{K}$), aber nur im Bereich sichtbaren Lichtes emittiert, hat eine Lichtausbeute von

$$r_{ideal} = \frac{\Phi_{weiss}}{P} = 240\,\mathrm{lm/W} \tag{35}$$

Eine solche Lichtquelle ist ‘ideal’ insofern als unser Auge im Laufe der Evolution an dieses Spektrum angepasst ist, andererseits keine Energie in unsichtbare Wellenlängenbereiche verschwendet wird.

Beispiele:

- *Die Sonne selbst, die ja einen großen Teil der Strahlung außerhalb des Intervalls* $400 - 800\,\mathrm{nm}$ *aussendet, kommt nur auf eine Lichtausbeute von*

  $$r_{Sonne} = 80\,\mathrm{lm/W} \tag{36}$$

  hat also nur eine relative Effizienz von

  $$\eta_{Sonne} = \frac{r_{Sonne}}{r_{ideal}} \approx 25\% \tag{37}$$

- *Typische Lichtausbeute/Effizienz einer konventionellen* $230\,\mathrm{V}$, $60\,\mathrm{W}$ *Glühbirne:*

  $$r \sim 15\,\mathrm{lm/W},\ \eta \sim 6\% \tag{38}$$

- *Typische Lichtausbeute/Effizienz einer Leuchtstofflampe in Form einer ‘Energie-Sparlampe’ (*$230\,\mathrm{V}$, $15\,\mathrm{W}$*):*

  $$r \sim 60\,\mathrm{lm/W},\ \eta \sim 25\% \tag{39}$$

Die in der Einheit $\mathrm{lx} = \mathrm{lm/m^2}$ angegebene Beleuchtungsstärke (entspricht der Intensität) wird z.B. von einem Belichtungsmesser oder ‘Luxmeter’ (Photographie) ermittelt. Sie ist die relevante Größe zur Einstellung der Parameter (Blende, Belichtungszeit) des Photoapparates.

Beispiele:

- *Bei* $500\,\mathrm{lx}$ *kann man bei einer Filmempfindlichkeit von ISO 400 z.B. mit Blende 4 und Belichtungszeit* $1/60\,\mathrm{s}$ *photographieren.*

- $500\,\mathrm{lx}$ *ist auch der Wert, den die Beleuchtungsstärke am Schreibtischarbeitsplatz nicht unterschreiten sollte.*

- *Projiziert man mit einem Beamer, so sollte das Bild deutlich heller als die Umgebung sein (dafür nehmen wir* $500\,\mathrm{lx}$ *an), sagen wir* $2000\,\mathrm{lx}$. *Bei einer Bildgröße von* $2 \times 1.5\,\mathrm{m^2}$ *bedeutet das einen Mindestlichtstrom des Projektors von* $6000\,\mathrm{lm}$. *Falls dieser Wert nicht erreicht wird, muss man abdunkeln …*

- *Sonnenlicht an Erdoberfläche: bis* $10^5\,\mathrm{lx}$.