

**TEIL 4**

Nachdenken/Nachlesen: Was hat ein lineares Polarisationsfilter mit quantenmechanischen Operatoren zu tun ?

**5. Welle-Teilchen-Dualität und Unschärferelation**

Wir haben gesehen, dass Photonen Wellen- **und** Teilchencharakter haben: **‘Welle-Teilchen-Dualismus’**. Quantenmechanik: auch ‘klassische’ Teilchen wie Elektronen haben Welleneigenschaften. Es gibt keinen prinzipiellen Unterschied zwischen den Wellen- bzw. Teilcheneigenschaften von Photonen und Elektronen. Lediglich die Masse (auch Spin ...) ist verschieden, was - bei gleicher kinetischer Energie - zu unterschiedlichen Wellenlängen führt. Man kann sich Teilchen als Wellenpakete vorstellen.

**5.1. De-Broglie-Wellenlänge**

Louis de Broglie dehnte 1924 den Begriff der Wellenlänge auf massive Teilchen aus (Nobelpreis 1929).

Photonen:

$$p \cdot c = E = h \cdot \nu = h \cdot \frac{c}{\lambda} \quad (1)$$

also

$$\boxed{\lambda = \frac{h}{p}} \quad \text{bzw.} \quad \vec{p} = \hbar \cdot \vec{k} \quad (2)$$

De Broglie: Vermutung: gilt allgemein!

Nichtrelativistisches massives Teilchen ( $E_{kin} \ll m c^2$ ):

$$\lambda = \frac{h}{m v} = \frac{h}{\sqrt{2 m E_{kin}}} \quad (3)$$

Hochrelativistisches massives Teilchen ( $E \gg m c^2$ ):

$$\lambda = \frac{h}{E/c} = \frac{h c}{E} \quad (4)$$

(im letzteren Fall ist  $E \approx E_{kin}$ !)

Entsprechend soll für den Zusammenhang von kinetischer Energie und (Kreis-)Frequenz der Welle gelten:

$$\boxed{E_{kin} = h \cdot \nu} \quad \text{bzw.} \quad E_{kin} = \hbar \cdot \omega \quad (5)$$

Letztere Beziehung ist auch wichtig, aber da man eher die Wellenlänge als die Frequenz misst oder ‘sieht’, betont man in der Literatur vor allem (2). Man beachte: nur bei relativistischen Teilchen gilt  $\nu \cdot \lambda = c$ , mehr dazu weiter unten.

Das Produkt  $h \cdot c$  bzw.  $\hbar \cdot c$  tritt hier und im folgenden häufig auf:

$$\hbar \cdot c = 1973 \text{ eV \AA} = 197.3 \text{ MeV f} \quad (6)$$

mit den für die Atom- bzw. Kernphysik charakteristischen Längeneinheiten  $\text{\AA} = 10^{-10} \text{ m}$  (Angstrom),  $\text{f} = 10^{-15} \text{ m}$  (Fermi).

Beispiele (Photon, Elektron, Proton, Fußball mit  $m_F = 1 \text{ kg}$ ):

	$E_{kin} = 1 \text{ eV}$		$E_{kin} = 1 \text{ GeV}$		$E_{kin} = 1 \text{ J}$	
Teilchen	$c \cdot p/\text{eV}$	$\lambda/\text{m}$	$c \cdot p/\text{eV}$	$\lambda/\text{m}$	$c \cdot p/\text{eV}$	$\lambda/\text{m}$
Photon	1	$1 \cdot 10^{-6}$	$10^9$	$1 \cdot 10^{-15}$	$6 \cdot 10^{18}$	$2 \cdot 10^{-25}$
Elektron	$1.0 \cdot 10^3$	$1 \cdot 10^{-9}$	$10^9$	$1 \cdot 10^{-15}$	$6 \cdot 10^{18}$	$2 \cdot 10^{-25}$
Proton	$4 \cdot 10^4$	$3 \cdot 10^{-11}$	$1.4 \cdot 10^9$	$9 \cdot 10^{-16}$	$6 \cdot 10^{18}$	$2 \cdot 10^{-25}$
Fußball	$1 \cdot 10^{18}$	$1 \cdot 10^{-24}$	$3 \cdot 10^{22}$	$4 \cdot 10^{-29}$	$3 \cdot 10^{27}$	$5 \cdot 10^{-34}$

PS:

- In der kosmischen Strahlung findet man tatsächlich Teilchen mit Energien bzw. Impulsen von mehreren J!
- Die letzte Wellenlänge der Tabelle ist von der Größenordnung der ‘Planck-Länge’ von  $\sqrt{G_N \hbar / c^3} \approx 10^{-35} \text{ m}$ . Unterhalb dieser Skala wird die Gravitation wichtig und unsere Vorstellungen vom Raum sind wahrscheinlich nicht mehr gültig.

Im täglichen Leben sind Welleneigenschaften (Interferenzeffekte) nicht beobachtbar, erstens weil man in der Regel keine kohärente Überlagerung vorfindet, und zweitens weil die Wellenlängen so winzig sind, dass man Interferenzminima- und Maxima räumlich nicht trennen kann. Der im Vorzeichen alternierende Interferenzterm wird ‘verwaschen’:

$$\begin{aligned} P_{12} &= |A_1 + A_2|^2 = |A_1|^2 + |A_2|^2 + 2\text{Re}(A_1 A_2^*) \\ &\rightarrow |A_1|^2 + |A_2|^2 + 2\langle \text{Re}(A_1 A_2^*) \rangle \\ &\rightarrow |A_1|^2 + |A_2|^2 = P_1 + P_2 \end{aligned} \quad (7)$$

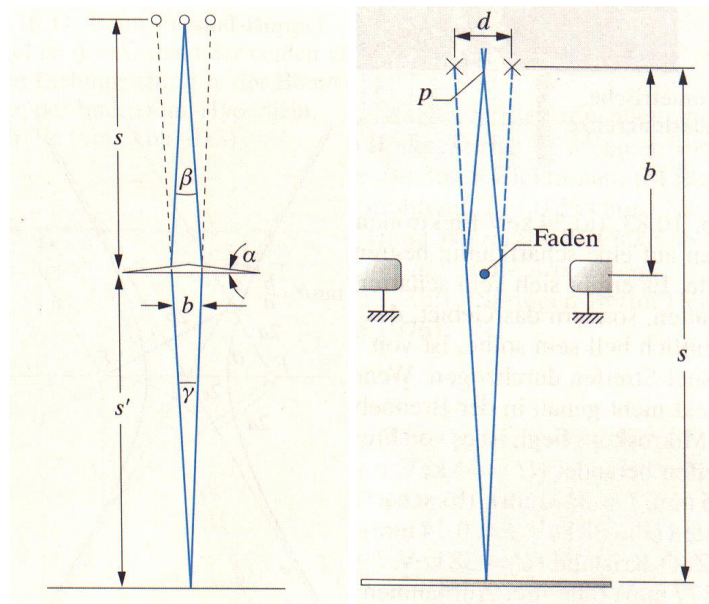
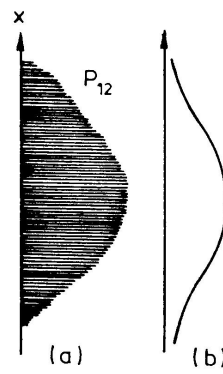
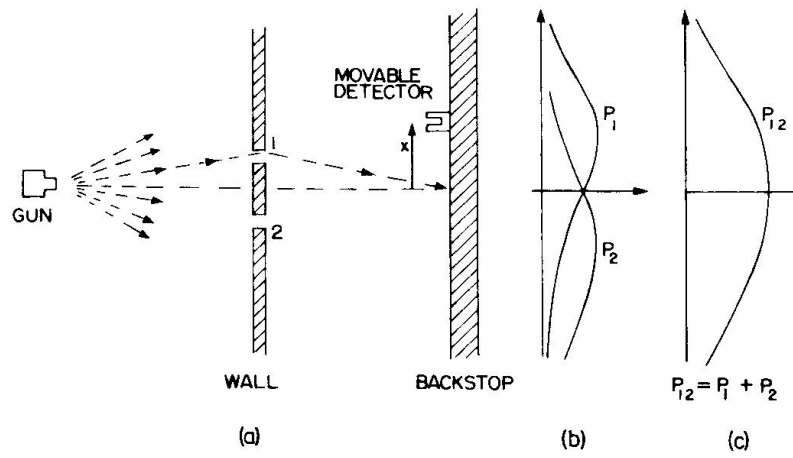
Beispiel: Gedankenexperiment mit Gewehrkugeln, siehe Bild.

Man sieht hier sehr schön, wie die QM die klassische Mechanik als Grenzfall für  $\hbar \rightarrow 0$  enthält.

## 5.2. Interferenz-Experimente

Eine Vielzahl von Experimenten mit den unterschiedlichsten Teilchen haben die Hypothese von de Broglie bestätigt. Hier folgt eine Auswahl.

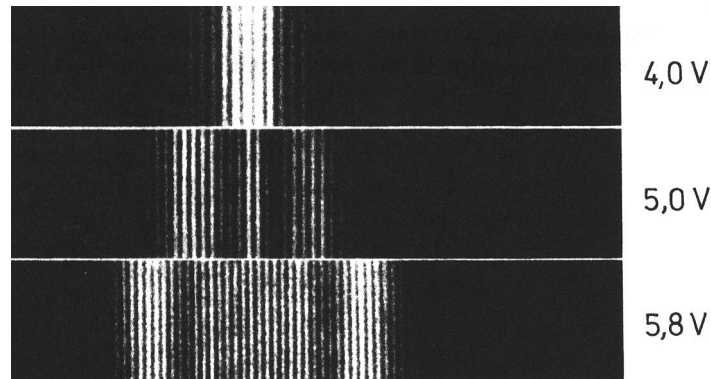
A) Das Youngsche Doppelspaltexperiment, bei dem man die Kohärenz dadurch herstellt, dass man eine Welle mit sich selbst interferieren lässt, kann man auch für Teilchen einsetzen. Da der Winkelabstand zwischen benachbarten Minima und Maxima proportional zu  $\lambda/d$  ist, kann man das Interferenzmuster nur dann gut beobachten, wenn mit kleiner werdender Wellenlänge auch der Spaltabstand  $d$  abnimmt. Ferner ist es notwendig, die Teilchen aus einer (divergenten!) Punktquelle zu fokussieren.



Deshalb benutzten Heinrich Düker und Gottfried Möllenstedt 1956 eine für Elektronen geeignete Abwandlung des Fresnelschen Biprismas: An den zentralen Metalldraht (einige  $\mu\text{m}$  Durchmesser) legt man eine positive Hochspannung an. Dadurch werden die **Elektronen** fester Energie - unabhängig vom Abstand zum Draht! - um den gleichen Winkel abgelenkt. Auf monochromatische Elektronen wirkt der Draht also wie ein Prisma auf monochromes Licht.

FRAGE: Wieso ist der Ablenkwinkel unabhängig vom Abstand ? Vergleiche Rutherford-Streuung !

Ergebnis: Spektrum mit Linienabständen wie von de Broglie vorhergesagt.



Bei diesen Experimenten beobachtet man wieder - wie für Photonen:

- Ein Interferenzmuster tritt auch auf, wenn die Intensität so gering ist, dass nur einzelne Teilchen nacheinander die Apparatur passieren.
- Versucht man, den Durchgangsweg zu detektieren, verschwindet das Muster. Der Messvorgang beeinflusst das System!

FRAGE: Wieso kann man den Elektronenweg (Durchgang durch Spalt 1 oder 2) nicht einfach aus den Anfangsbedingungen berechnen ?

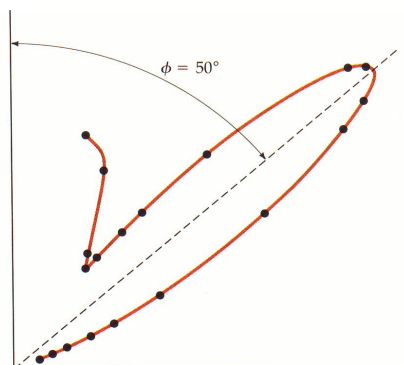
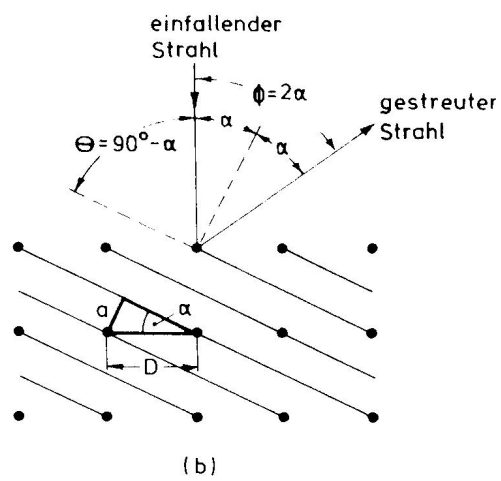
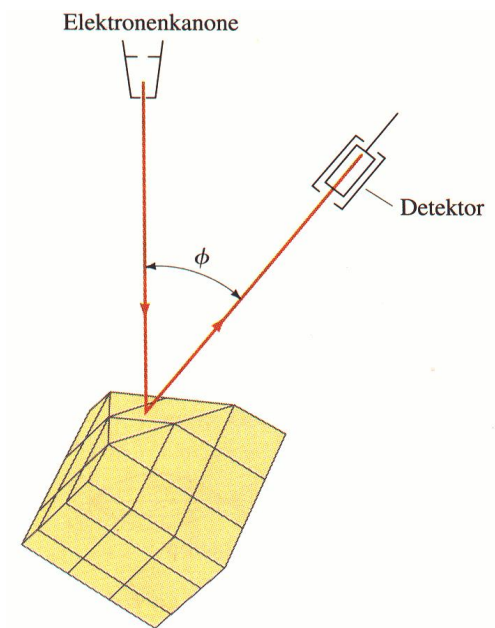
B) Zuerst gelang Clinton J. Davisson (Nobelpreis 1937) und Lester H. Germer der Nachweis von Interferenzeffekten bei **Elektronen**, im Jahr 1926. Sie lenkten Elektronen mit verschiedenen kinetischen Energien auf einen Nickelkristall. Man spricht vom Davisson-Germer-Experiment. Die Zahl der reflektierten Elektronen wurde als Funktion des Streuwinkels gemessen. Der Winkel zwischen der Senkrechten zur Netzebene und dem einfallendem Elektronenstrahl betrug  $\alpha = 25^\circ$ . Man erwartete also eine maximale Intensität bei  $\Phi = 50^\circ$ , falls die Bragg-Bedingung

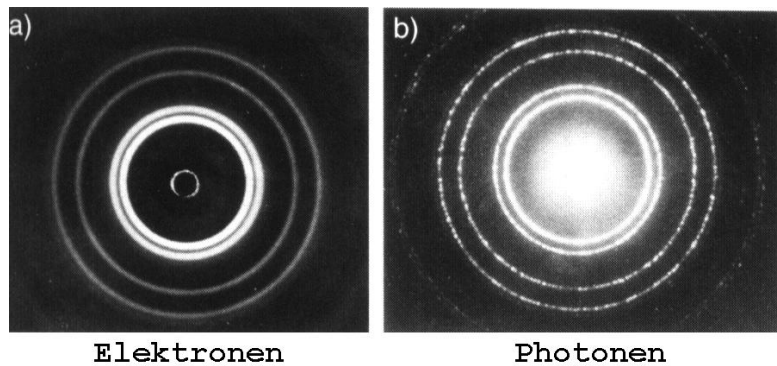
$$m \lambda = 2 a \sin(90^\circ - \alpha) \quad (8)$$

erfüllt ist. In diesem Fall berechnete man mit  $a = 0.91 \text{ \AA}$  und  $m = 1$ ,  $\lambda = 1.66 \cdot 10^{-10} \text{ m}$  nach de Broglie eine Elektronenergie von 54 eV. Tatsächlich fand man bei Variation der Energie ein Maximum der gestreuten Intensität ( $\Phi = 50^\circ$ ) genau bei diesem Wert:

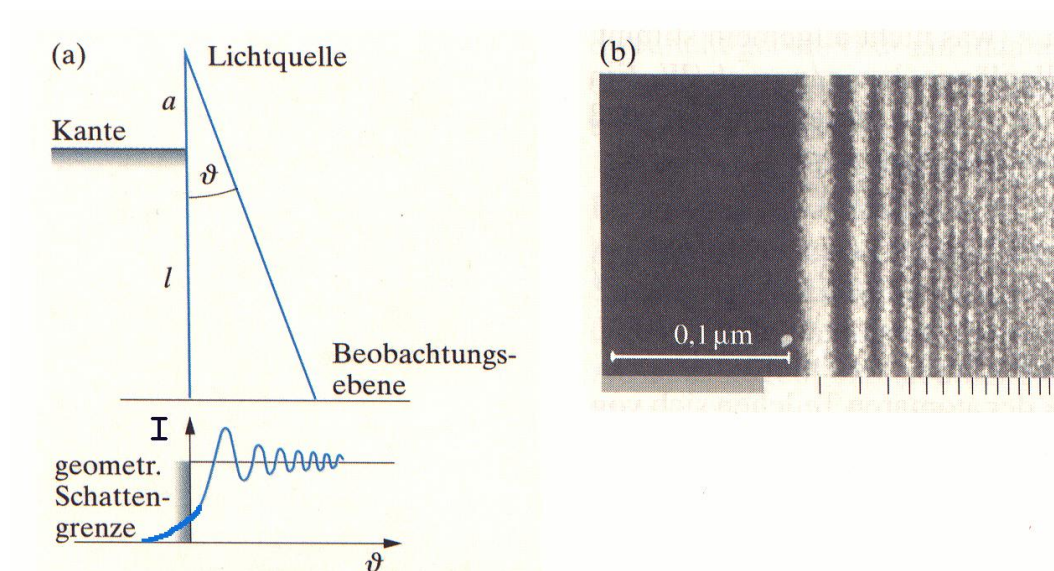
C) Beim Durchgang durch eine multikristalline dünne Schicht (Kristallorientierung zufällig) erzeugen sowohl Röntgenstrahlen als auch **Elektronen** kreisförmige Beugungsmuster, s. Abbildung. Nur bei bestimmten Streuwinkeln ist die Bragg-Bedingung erfüllt; da die Netzebenen der Einzelkristalle zufällig orientiert sind, ergeben sich auf dem Schirm helle Ringe. Falls die Elektronen nicht monochromatisch sind, oder wenn der Strahl divergent ist, wird das Muster verschmiert.

**VERSUCH:** Elektronenbeugung (Graphitfolie, ähnlich Debye-Scherrer)





D) Fresnel-Beugung von **34 keV-Elektronen** an einer Kante: Es entsteht das gleiche Muster bei



Elektron- und Röntgenbeugung - wenn man den Abstand der Photoplatte entsprechend der Wellenlängen anpasst, siehe Bild.

Ähnlich: Beugung an **Zn-Kristallen (38 keV)**: Die Kristallgrenzen spielen hier die Rolle der Kanten. Siehe Abbildung.

Anwendung: Elektronenmikroskop, s.u.!

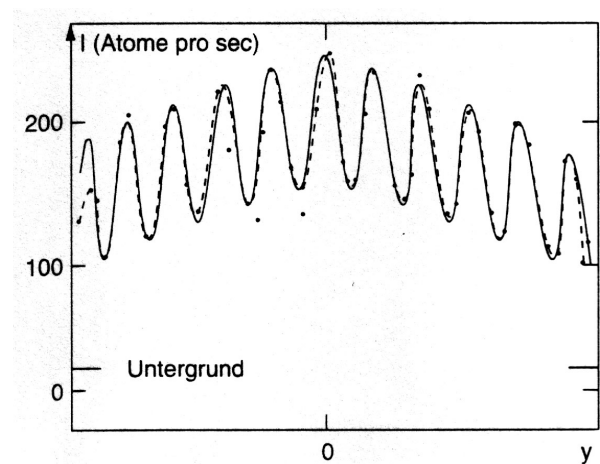
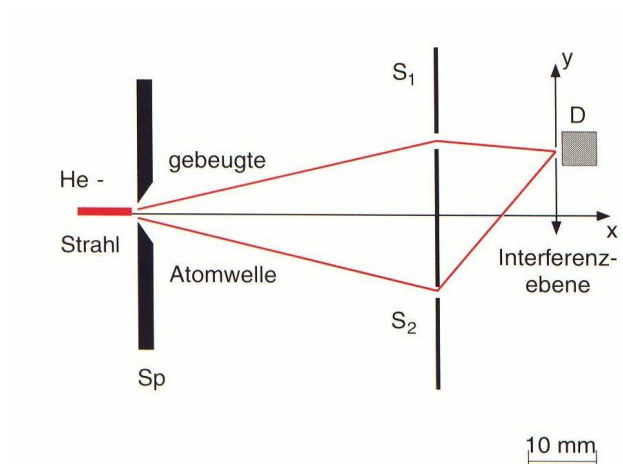
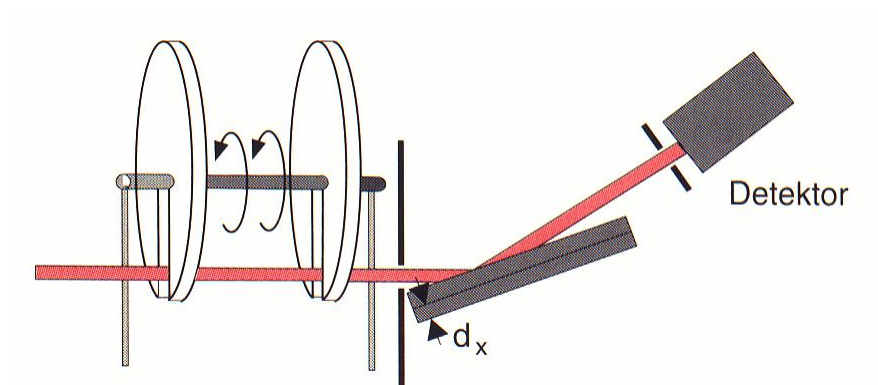
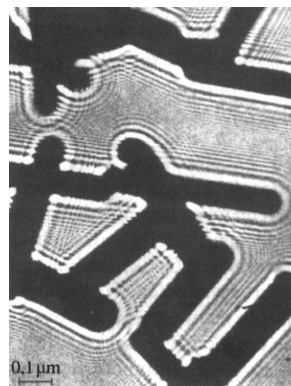
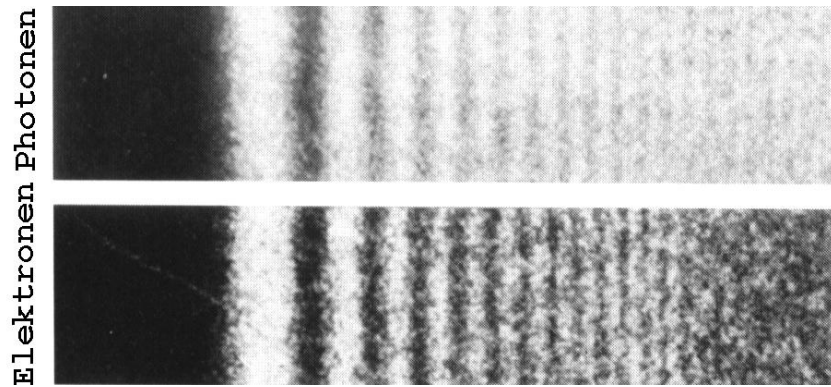
E) Reaktor-**Neutronen** einer bestimmten Geschwindigkeit können durch eine Flugzeitmethode selektiert und ihre Bragg-Reflexion nachgewiesen werden, s. Skizze.

F) **Neutrale Heliumatome** thermischer Energie passieren einen Doppelspalt, siehe Abbildung. Es werden metastabile angeregte Heliumatome verwendet, denn diese geben beim Auftreffen auf ein Metall ihr Elektron ab, was dann nachgewiesen werden kann.

### 5.3. Wellenpakete

Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines Teilchens in einem bestimmten Volumen ist in der QM durch





die komplexe Wellenfunktion  $\psi(\vec{r}, t)$  gegeben:

$$P_V(t) = \int_V \rho(\vec{r}, t) d^3\vec{r} \quad (9)$$

mit der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\boxed{\rho(\vec{r}, t) = |\psi(\vec{r}, t)|^2} \quad (10)$$

Da Teilchen - auch in der QM, bis zu einem gewissen Grade - lokalisiert sind, können wir sie durch Wellenpakete beschreiben, die wir aus ebenen Wellen zusammensetzen:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \int C(\vec{k}) \cdot \psi(\vec{r}, t, \vec{k}) d^3\vec{k} \quad (11)$$

mit

$$\psi(\vec{r}, t, \vec{k}) \sim e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = e^{i/\hbar(\vec{p} \cdot \vec{r} - E t)} \quad (12)$$

wobei  $E$  hier die kinetische Energie ist und  $\omega = E/\hbar$ . Eine ebene Wellen allein kann ein Teilchen nicht beschreiben, da die Wahrscheinlichkeitsdichte ortsunabhängig ist (und auch weil das Integral über den Raum divergiert).

*Beispiel: 1-dimensionales Wellenpaket.*

*Es kommt uns hier darauf an, ein einfaches Wellenpaket genähert zu beschreiben.*

*Im einfachsten Fall nehmen wir eine 'Kastenfunktion' für  $k$  an:*

$$C(k) = 1 \quad k_0 - \Delta k/2 \leq k \leq k_0 + \Delta k/2 \quad (\text{sonst } 0)$$

mit  $\Delta k \ll k_0$ . Dann kann man entwickeln:

$$\omega(k) = \omega_0 + \omega'_0 \cdot (k - k_0) + \dots = \omega_0 + v_g^0 \cdot (k - k_0) + \dots$$

$v_g^0$  ist die Gruppengeschwindigkeit für  $k = k_0$ , s.u. Das Maximum des Paketes bewegt sich gemäß  $x = v_g^0 \cdot t$  fort. Weiter, mit der linearen Näherung der Taylorentwicklung für  $\omega(k)$ :

$$\Psi(x, t) \sim \int_{k_0 - \Delta k/2}^{k_0 + \Delta k/2} e^{i(kx - \omega(k)t)} dk \approx \int_{-\Delta k/2}^{\Delta k/2} e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} e^{i(u \cdot \kappa)} d\kappa$$

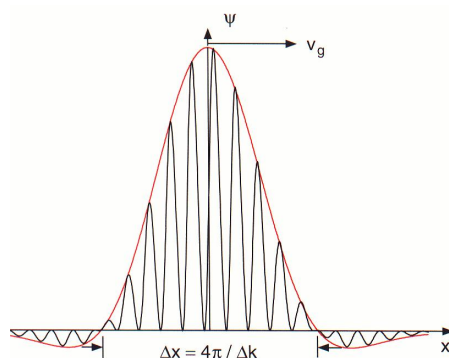
mit der Abkürzung  $u = x - v_g^0 t$  und der Substitution  $\kappa = k - k_0$ . Das Integral ist leicht berechenbar; nur der gerade Anteil des Integranden trägt bei:

$$\Psi(x, t) \sim e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \cdot 2 \frac{\sin(u \Delta k/2)}{u} \quad (13)$$

*Realteil:*

Einige Eigenschaften von Wellenpaketen wollen wir jetzt studieren. Wir betrachten nur nichtrelativistische Teilchen.





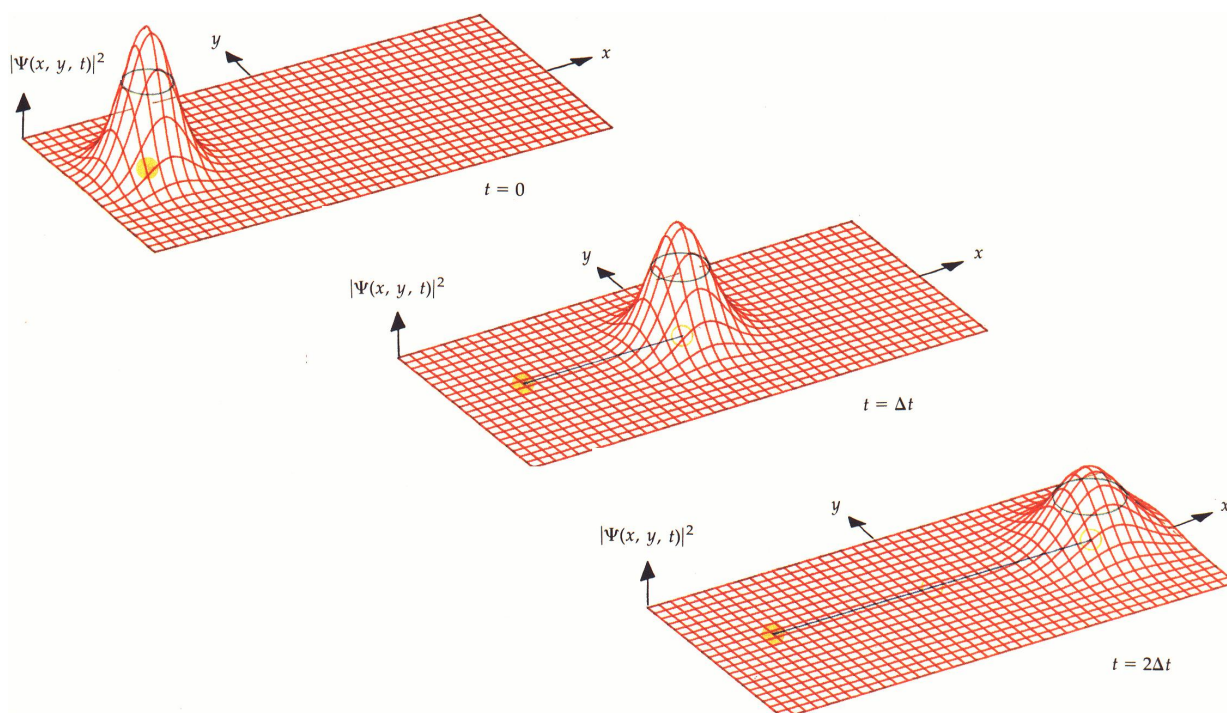
a) Stabilität.  
Wegen

$$\omega = \frac{\hbar}{2m} k^2 \quad (14)$$

(de Broglie!) folgt für die Phasengeschwindigkeit einer ebenen Welle

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar}{2m} k \quad (15)$$

Sie ist  $k$ -abhängig! Dispersion! Ein Wellenpaket ‘zerfließt’ also: Interpretation: später!



Bemerkung: Diesen Argumenten nach müsste auch das Paket (13) im obigen Beispiel zerfließen, was aber offenbar nicht der Fall ist. Der scheinbare Widerspruch rührt daher, dass wir zur Berechnung von (13) ja  $\omega(k)$  linear genähert haben. Die Dispersion kommt aber erst mit dem quadratischen Term zum Tragen.

## b) Geschwindigkeit

Die Phasengeschwindigkeit der ebenen Welle ist  $v_{ph} = v/2$ , wenn  $v$  die Teilchengeschwindigkeit ist! Die Gruppengeschwindigkeit beträgt

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\hbar}{m} k = v \quad (16)$$

wie es sein sollte.

## c) Breite

Im obigen Beispiel ist die Breite des Paketes (definiert durch die ersten Nullstellen links und rechts vom Maximum der einhüllenden)

$$\Delta x = \frac{4\pi}{\Delta k} = 4\pi \frac{\hbar}{\Delta p} \quad (17)$$

Je größer der verwendete Wellenzahl- bzw. Impulsbereich, desto besser ist das Teilchen lokalisiert!

**Computer-Animation:** Wellenpakete

Albert, Tunneleffekt (sqpot.exe)

QPhyslab: Realteil und Imaginarteil!

**5.4. Die Heisenbergsche Unschärferelation**

Werner Heisenberg (Nobelpreis 1932) hat 1927 allgemein formuliert, wie die Messgenauigkeiten von 'kanonisch konjugierten' Größen zusammenhängen:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \quad \Delta t \cdot \Delta E \geq \frac{\hbar}{2} \quad (18)$$

Entsprechend:

$$\Delta y \cdot \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2} \quad (19)$$

$$\Delta z \cdot \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2} \quad (20)$$

Das sind die Heisenbergschen Unschärferelationen.  $E$  ist die Gesamtenergie. Im Grenzfall der klassischen Mechanik ( $\hbar \rightarrow 0$ ) gibt es eine solche fundamentale Einschränkung nicht. Die Gleichheitszeichen gelten im günstigsten Fall, z.B. bei einem gaussförmigen Wellenpaket.

Dabei ist die Auflösung einer Größe  $a$  durch die mittlere quadratische Abweichung vom Mittelwert definiert:

$$\Delta a = \sqrt{\langle (a - \langle a \rangle)^2 \rangle} \quad (21)$$

Die Unschärferelation bedeutet:

**Der Messprozess beeinflusst die zu messende Größe.**

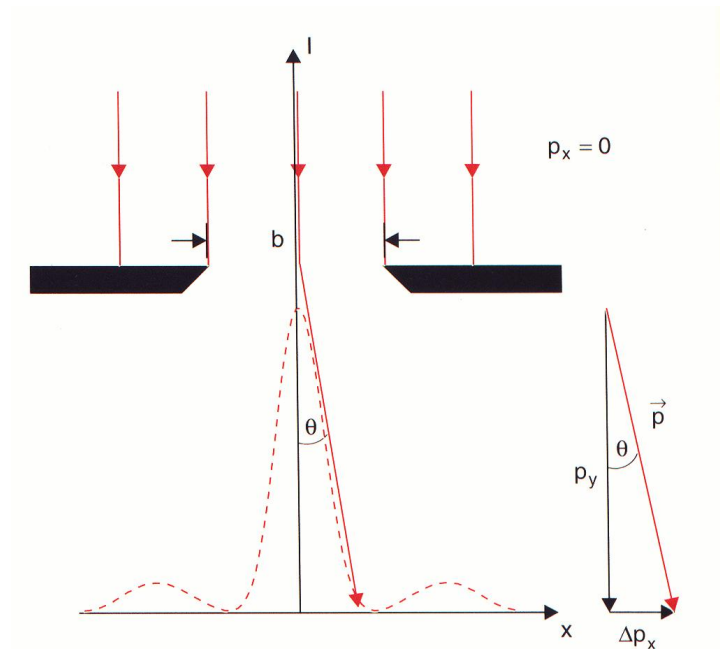
Diese Aussage ist von fundamentaler Bedeutung für die Physik.

Jetzt verstehen wir die Breite des Wellenpaketes (Kapitel 5.3) und auch das Auseinanderfließen: Eine anfängliche Impulsunschärfe übersetzt sich wegen  $\Delta x = \Delta v \cdot t = \Delta p / m \cdot t$  in eine mit der Zeit zunehmende Ortsunschärfe.

FRAGE: Nimmt dabei die Impulsunschärfe ab ?

Beispiel: Elektronenbeugung am Spalt (Abschätzung Größenordnung!)

Ein breiter Elektronenstrahl mit Impuls  $\vec{p} = p_y$  und einlaufender horizontaler Impulskomponente  $p_x = 0$  treffe auf einen Spalt der Breite  $b$ : Nach Durchfliegen ist  $\Delta x \sim b$ , mit Heisenberg folgt für



den Transversalimpuls  $\Delta p_x \sim p \theta$ :

$$p \theta \sim \frac{\hbar}{b}$$

also

$$\theta \sim \frac{h}{2\pi p b} \sim \frac{h}{p b} = \frac{\lambda}{b}$$

Das ist der Winkel des ersten Beugungsminimums, wie er aus der Optik bekannt ist!

Beispiel: Auflösung des Lichtmikroskops (Abschätzung Größenordnung!)

Wir betrachten ein mikroskopisches Objekt, das untersucht werden soll. Wir schätzen für dieses unabhängig die Impuls- und Ortsunschärfe ab und verifizieren die Unschärferelation:

a) Wenn das gestreute Photon  $\gamma$  durch die Linse gehen soll, muss die Impulskomponente in x-Richtung kleiner als

$$\Delta p_x = p_\gamma \cdot \alpha \sim \frac{h}{\lambda} \cdot \frac{d}{y}$$

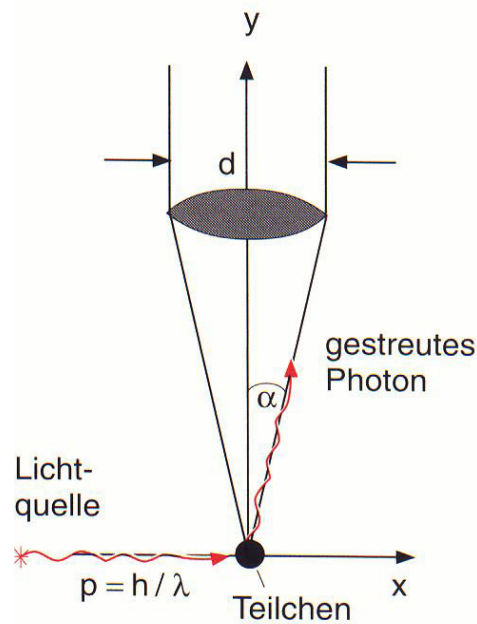
sein. Das ist wegen der Impulserhaltung auch die Impulsunschärfe des Mikro-Teilchens an dem das Photon gestreut wurde.

b) Die Ortsauflösung des Mikroskops kennen wir schon:

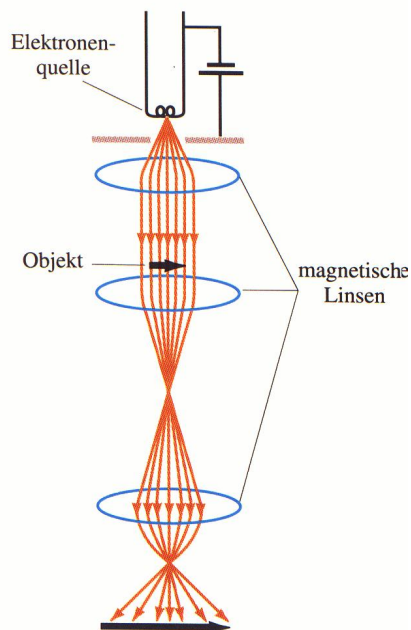
$$\Delta x \sim y \cdot \frac{\lambda}{d}$$

Also:

$$\Delta p_x \cdot \Delta x \sim h$$



Anwendung: Elektronenmikroskop (Ernst Ruska 1932, Nobelpreis 1986!).



Da die Auflösung eines Mikroskopes durch die Wellenlänge des Lichtes begrenzt ist, benutzt man Elektronen im keV-Bereich, um Strukturen unterhalb  $1 \mu\text{m}$  aufzulösen. Die 'Linsen' werden durch Magnetfelder realisiert. Man kann die Intensität der durchgelassenen Elektronen z.B. auf einer Photoplatte festhalten.

Das derzeit beste 'Elektronenmikroskop' ist der 6 km HERA-Beschleuniger am DESY in Hamburg, mit dem Elektronen von 30 GeV an Protonen von 900 GeV gestreut werden, um so deren Struktur

mit einer Auflösung von  $10^{-18}$  m zu untersuchen (allerdings funktioniert das nicht mit einer Photoplatte).

*Beispiel: Größe  $\Delta x$  des Wasserstoffatoms*

Wir schätzen ab (alle numerischen Faktoren der Größenordnung 1 werden ignoriert):

Da das Elektron im Wasserstoffatom auf  $\Delta x$  eingeschränkt wird, muss es eine entsprechende kinetische Energie

$$E_{kin} \sim \frac{(\Delta p)^2}{m} \sim \frac{\hbar^2}{(\Delta x)^2 m}$$

besitzen.  $m$  ist die Elektronmasse. Damit es im Atom gebunden ist, ist seine potentielle Energie und damit die Ionisierungsenergie  $E_I$  etwa gleich der kinetischen Energie.  $E_I$  wurde aus den Spektrallinien und mit anderen Experimenten zu etwa  $E_I = 10$  eV bestimmt.

Also:

$$\Delta x \sim \frac{\hbar}{\sqrt{m \cdot E_I}} \sim \frac{\hbar c}{\sqrt{m c^2 \cdot E_I}} \sim \frac{2000 \text{ A eV}}{\sqrt{5 \cdot 10^6 \text{ eV}^2}} \sim 1 \text{ A}$$

FRAGE: Kann man diese Argumentation auch auf den Kern anwenden ?

Abschätzungen wie diese sind sehr nützlich!

Die vierte Unschärferelation beinhaltet einen Zusammenhang zwischen der Lebensdauer  $\tau$  eines instabilen Teilchens und seiner Energie- bzw. Massenunschärfe.

*Beispiel: Linienbreite im Atom*

Da die angeregten Zustände typisch  $\tau = 10^{-8}$  s leben, ist die Energie- bzw. Frequenzunschärfe etwa  $\Delta \nu \sim \frac{1}{\tau} \sim 10^8$  Hz. Das sieht gewaltig aus, ist aber im Vergleich zur Lichtfrequenz von  $> 10^{14}$  Hz sehr klein.

*Beispiel: Z-Boson*

Das Z-Boson ist sehr kurzlebig,  $\tau \sim 10^{-25}$  s. Seine Ruhenergie bzw. Ruhmasse von 91 GeV ist deshalb um mehrere GeV bzw. GeV/c<sup>2</sup> verschmiert, wie man mit dem Prozess  $e^+e^- \rightarrow Z$  nachweisen kann: Der Wirkungsquerschnitt ist maximal, wenn die Schwerpunktsenergie  $= \sqrt{s}$  gleich der Z-Boson-Masse ist, also der Prozess kinematisch möglich ist. Aber auch bei benachbarten Energien kann die Z-Erzeugung offenbar stattfinden, wegen der endlichen Breite dieses Teilchens.

