

**TEIL 5**

Nachdenken/Nachlesen: Das Elektronenmikroskop

**6. Die Schrödingergleichung**

Wir müssen Teilchen durch eine Wellenfunktionen beschreiben. Hier wird gezeigt, wie man diese berechnen kann.

Nichtrelativistische Teilchen in einem Potential  $V(\vec{r}, t)$  werden durch die Schrödingergleichung beschrieben:

$$i \hbar \partial_t \Psi(\vec{r}, t) = \frac{-\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r}, t) \Psi(\vec{r}, t) \quad (1)$$

Hier ist  $\Delta$  der Laplace-Operator, in kartesischen Koordinaten also

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

und

$$\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$$

die Zeitableitung. Erwin Schrödinger postulierte ‘seine’ Gleichung im Jahr 1926 (man kann sie *nicht* aus der klassischen Physik ‘herleiten’!) und erhielt 1933 den Nobelpreis. Sie hat bis heute ungezählte experimentelle Tests gemeistert. Man bekommt sie aus der Energie-Impuls-Relation

$$E = \frac{\vec{p}^2(t)}{2m} + V(\vec{r}, t) \quad (2)$$

durch Einsetzen der Operatoren

$$\hat{\vec{p}} = \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \quad \hat{E} = -\frac{\hbar}{i} \partial_t \quad (3)$$

Letztere sind so konstruiert, dass eine ebene Welle

$$e^{i/\hbar (\vec{p} \cdot \vec{r} - E t)} \quad (4)$$

Eigenfunktion mit den Eigenwerten  $\vec{p}$  bzw.  $E$  ist.

Bemerkung:

- Oft redet man von ‘Potential’, wenn potentielle Energie gemeint ist. Hier:  $V = E_{\text{pot}}$ .

## 6.1. Die (stationäre) Schrödingergleichung

Wir betrachten jetzt Potentiale, die nicht explizit zeitabhängig sind. Mit dem Faktorisierungs-Ansatz

$$\Psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}) \cdot e^{-i/\hbar E_\psi t} \quad (5)$$

bekommt man die stationäre Schrödingergleichung

$$\boxed{E_\psi \psi(\vec{r}) = \frac{-\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\vec{r}) + V(\vec{r}) \psi(\vec{r})} \quad (6)$$

wobei  $E_\psi$  der zur Ortswellenfunktion  $\psi$  gehörige Energieeigenwert ist.  $E_\psi$  ist die Summe aus kinetischer und potentieller Energie. Die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte ist also zeitunabhängig:

$$\rho(\vec{r}) = |\psi(\vec{r})|^2 \quad (7)$$

Nebenbedingung: Normalisierung<sup>1</sup>:

$$\int |\psi(\vec{r})|^2 d^3\vec{r} = 1 \quad (8)$$

Man kann jetzt zu jedem  $V$  alle Lösungsfunktionen  $\psi$  berechnen. Im folgenden werden wir einige Beispiele diskutieren und uns mit den Ergebnissen vertraut machen.

## 6.2. Operatoren - Erwartungswerte - Eigenwerte

In der Quantenmechanik kann man für Observable nur Wahrscheinlichkeitsaussagen machen.

Der Erwartungswert  $\langle G \rangle$  einer physikalischen Größe wird für ein gegebenes stationäres System, das durch die Wellenfunktion  $\psi$  beschrieben wird, folgendermaßen berechnet:

$$\boxed{\langle G \rangle = \int \psi(\vec{r})^* \hat{G} \psi(\vec{r}) d^3\vec{r}} \quad (9)$$

Dabei ist  $\hat{G}$  der zur physikalischen Größe zugeordnete Operator. Dieser kann einfach die klassische Variable darstellen, wie etwa der Ortsoperator (hier x-Koordinate)

$$\hat{x} = x \quad (10)$$

oder er kann komplizierter aussehen, wie bei den oben angegebenen Operatoren für Energie und Impuls. In diesen beiden Fällen wird in (9) der Operator auf  $\psi$  angewandt (d.h. die Ableitung gebildet).

*Beispiel:*

*Der Erwartungswert des Impulses (x-Komponente) der ebenen Welle aus dem letzten Abschnitt ist<sup>2</sup>*

$$\langle p_x \rangle = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \int_V e^{-i/\hbar(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)} \cdot (-i\hbar \partial_x e^{i/\hbar(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)}) d^3\vec{r} = p_x \quad (11)$$

<sup>1</sup>Wenn man ein System mit  $N$  mehreren gleichen Teilchen beschreiben will, benutzt man die Normierungsbedingung ... =  $N$ .

<sup>2</sup>Achtung Normierung für ebene Welle!

Da die physikalische Größe und insbesondere der Erwartungswert (also ihr ‘‘Mittelwert’’ über viele Messungen an identischen Systemen) reelle Größen sind, muss der zugehörige Operator hermitesch sein, also

$$\int d^3\vec{r} \psi^* (G\psi) = \left( \int d^3\vec{r} \psi^* (G\psi) \right)^* = \int d^3\vec{r} (G\psi)^* \psi \quad (12)$$

*Beispiel Energieoperator:*

$$\int \psi(\vec{r})^* \hat{E}_{kin} \psi(\vec{r}) \sim \int \psi(\vec{r})^* \Delta \psi(\vec{r}) = \int \psi(\vec{r}) (\Delta \psi(\vec{r}))^* \quad (13)$$

FRAGE: Ist der Impulsoperator hermitesch ?

Ähnlich wie den Mittelwert = Erwartungswert kann man auch die Schwankungsbreite  $\Delta G$  = mittlere quadratische Abweichung vom Mittelwert berechnen; deren Quadrat ist

$$(\Delta G)^2 = \langle (G - \langle G \rangle)^2 \rangle = \int \psi(\vec{r})^* (\hat{G} - \langle G \rangle) (\hat{G} - \langle G \rangle) \psi(\vec{r}) d^3\vec{r} \quad (14)$$

Dabei wird der Operator  $\hat{G} - \langle G \rangle$  zweimal hintereinander auf  $\psi$  angewandt.

Beispiele folgen.

Falls  $\psi$  Eigenfunktion zum Operator  $\hat{G}$  ist, also

$$\hat{G}\psi = G \cdot \psi \quad (15)$$

mit dem Eigenwert  $G$ , so folgt insbesondere, dass die Messung exakt diesen und nur diesen Wert ergibt. Mathematisch formuliert:

$$\langle G \rangle = G \quad (16)$$

$$\langle (G - \langle G \rangle)^2 \rangle = 0 \quad (17)$$

*Beispiel:*

*Impulsoperator und ebene Welle, s. oben.*

Ohne Beweis hier eine Tabelle von Operatoren (Ortsraum):

Ort	$\vec{r}$	
Impuls	$-i\hbar \vec{\nabla}$	
Geschwindigkeit	$-i\hbar/m \vec{\nabla}$	
Gesamtenergie	$\frac{-\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{r})$	<u>Hamiltonoperator</u>
Drehimpuls	$-i\hbar(\vec{r} \times \vec{\nabla})$	

### 6.3. Potentialtöpfe - gebundene Systeme

Im folgenden wollen wir für spezielle stationäre Systeme die Schrödingergleichung lösen.

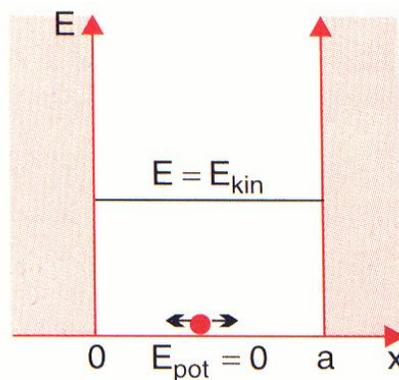
Das wichtigste gebundene System in diesem Kurs ist das Wasserstoffatom mit einem  $1/r$ -Potential. Das ist aber nicht ganz einfach mathematisch zu behandeln, und deshalb betrachten wir zunächst einfachere, z.B. kastenförmige Potentiale! Ferner beschränken wir uns erst einmal auf eine Raumdimension, also:

$$E_\psi \psi(x) = \frac{-\hbar^2}{2m} \psi''(x) + V(x) \psi(x) \quad (18)$$

Das Potential normieren wir der Einfachheit halber so, dass für ein Teilchen, das keine Kraft spürt,  $V = 0$  gilt.

FRAGE: Ändert sich  $\Psi$  in den folgenden Beispielen, wenn man den Nullpunkt anders wählt ?

#### 6.3.1. Unendlich hoher Potentialkasten



Außerhalb des Potentialtopfes verschwindet die Wellenfunktion (mehr dazu später), also müssen wir mit den Randbedingungen (Stetigkeit von  $\psi$ )

$$\psi(0) = \psi(a) = 0 \quad (19)$$

die Differentialgleichung

$$\psi''(x) + k_\psi^2 \psi(x) = 0 \quad (20)$$

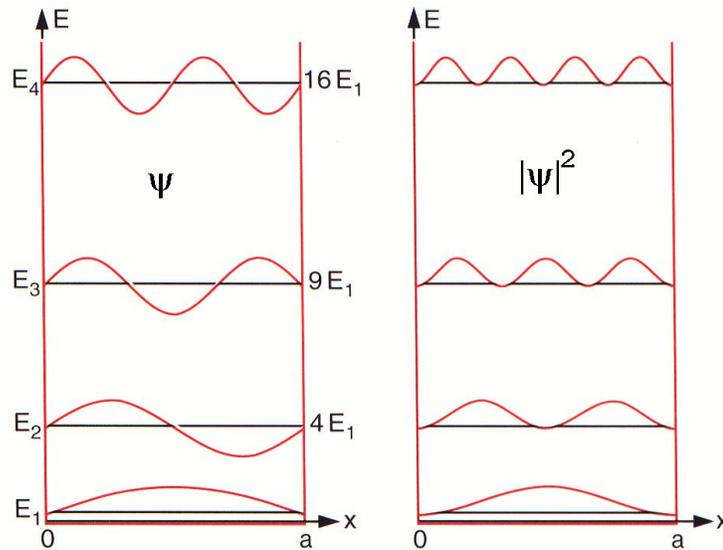
mit

$$k_\psi^2 = \frac{2mE_\psi}{\hbar^2} \quad (21)$$

lösen. Die Lösungen sind

$$\psi_n = C_n \cdot \sin k_n x \quad k_n = \frac{\pi}{a} n \quad E_n = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\pi^2}{a^2} n^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (22)$$

Die Energie ist quantisiert! Beachte:



- In der obigen Darstellung werden die Funktionen  $\psi$  und  $|\psi|^2$  einfach mit ins Energieniveaudia-gramm eingezeichnet! Vorsicht,  $\psi$  variiert immer um 0 !

- Die Wellenfunktion ist im allgemeinen komplex (wegen  $C_n$ ), die Abbildung zeigt den Spezialfall mit reellem  $C_n$ .

-  $n = 0$  bedeutet  $\psi = 0$ . Das bedeutet: kein Teilchen da! Diesen Fall schließen wir deshalb aus, er erfüllt auch nicht die Normierungsbedingung.

Die Energieeigenwerte

$$E_n = n^2 E_1 \quad E_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2 m a^2} \quad (23)$$

sind alle positiv.  $E_1$  ist die Nullpunktsenergie, der zugehörige Impuls beträgt  $p_1 = \hbar \frac{\pi}{a}$ . Das ist eine Folge der Unschärferelation:

$$\Delta x \cdot \Delta p \sim a \cdot p_1 = \hbar \pi \quad (24)$$

FRAGE: Fehlt da nicht ein Faktor  $2\pi$  ?

ANTWORT: Wir haben wieder nur die Größenordnung von  $\Delta x$  und  $\Delta p$  abgeschätzt. Wir können hier aber auch exakt rechnen ( $n = 1$ ). Die Normierungsbedingung erzwingt  $|C_1|^2 = 2/a$ , o.b.d.A.  $C_1 = \sqrt{2/a}$ . Dann:

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi}{a} x \quad (25)$$

Die Erwartungswerte berechnet man so:

$$\langle x \rangle = \int \psi^* x \psi dx = \frac{2}{a} \int_0^a x \sin^2 \frac{\pi}{a} x dx = \dots = \frac{a}{2} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \langle p \rangle &= \int \psi^* \hat{p} \psi dx = \frac{2}{a} \int_0^a \sin \frac{\pi}{a} x \cdot \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \sin \frac{\pi}{a} x dx \\ &= -\frac{2 \pi i \hbar}{a^2} \int \sin \frac{\pi}{a} x \cdot \cos \frac{\pi}{a} x dx = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

Weiter:

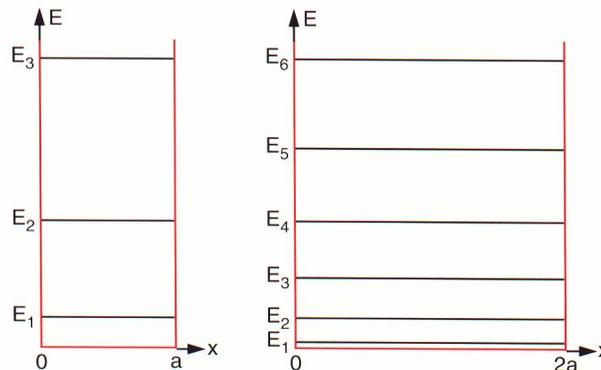
$$\begin{aligned}\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle &= \int \psi^* (x - a/2)^2 \psi dx = \dots = a^2 \cdot \left( \frac{1}{12} - \frac{1}{2\pi^2} \right) \\ &= 0.03267 a^2\end{aligned}\quad (28)$$

$$\begin{aligned}\langle (p - \langle p \rangle)^2 \rangle &= \int \psi^* \hat{p} (\hat{p} \psi) dx = \frac{2}{a} \int_0^a \sin \frac{\pi}{a} x \cdot \left( \frac{\hbar}{i} \right)^2 \frac{d^2}{dx^2} \sin \frac{\pi}{a} x \\ &= \frac{2 \pi^2 \hbar^2}{a^3} \int \sin \frac{\pi}{a} x \cdot \sin \frac{\pi}{a} x dx = \frac{2 \pi^2 \hbar^2}{a^3} \cdot \frac{a}{2} = \left( \frac{\pi \hbar}{a} \right)^2\end{aligned}\quad (29)$$

Letzteres Resultat kann man auch leichter aus  $E = \frac{p^2}{2m}$  bekommen! Unschärferelation:

$$\Delta x \cdot \Delta p = 0.1807 a \cdot 3.142 \frac{\hbar}{a} = 0.57 \hbar > \frac{\hbar}{2}\quad (30)$$

Mit zunehmender Potentialgröße nimmt die Dichte der Energiezustände zu, s. Abbildung.



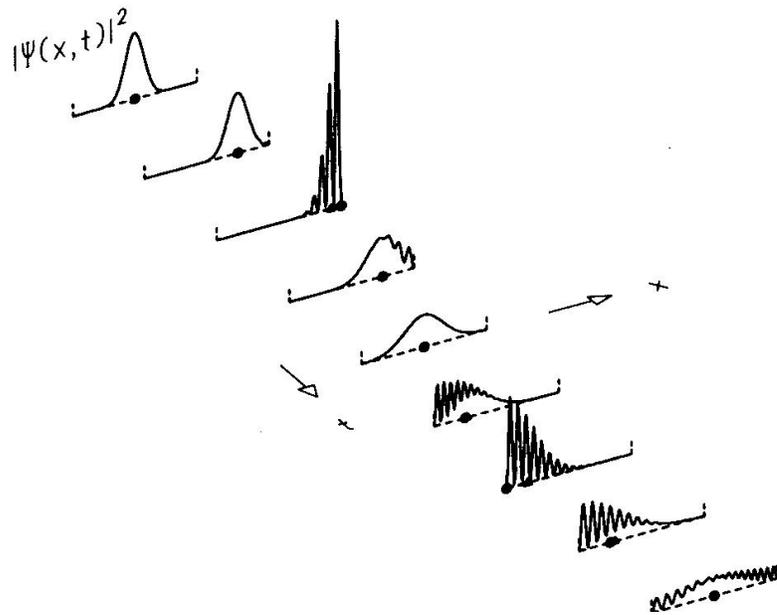
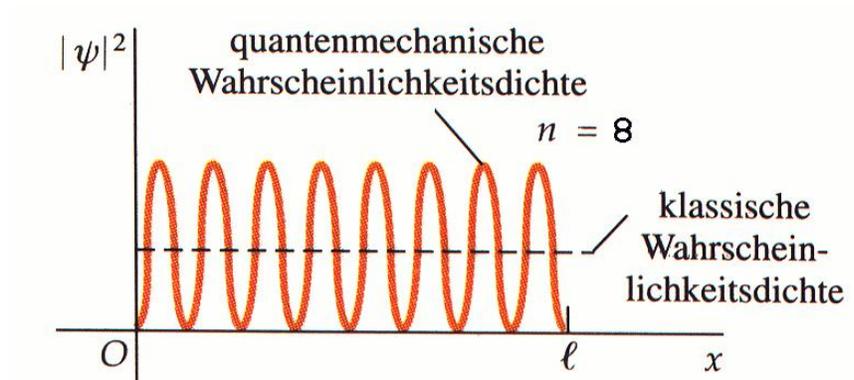
Im Topf ist die kinetische Energie durch den Mittelwert

$$\left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle = \left( \frac{\hbar}{2im} \right)^2 \int \psi^* \frac{d^2}{dx^2} \psi dx\quad (31)$$

gegeben (der natürlich gleich  $E_n$  ist!). Das heißt, je größer die zweite Ableitung ist, also je schneller die Wellenfunktion räumlich oszilliert, desto größer ist die Energie.

Im Grenzfall  $a/\hbar \rightarrow \infty$  wird  $E_1 = 0$  und der Abstand zwischen zwei benachbarten Energieniveaus verschwindet ebenfalls: klassisches Teilchen! Für große  $n$  nähert man sich dem klassischen Grenzfall an: die Wahrscheinlichkeitsdichte oszilliert räumlich sehr schnell mit konstanter Amplitude, was man als konstante Wahrscheinlichkeitsdichte wahrnimmt (Teilchen bewegt sich mit konstantem Geschwindigkeitsbetrag hin und her), siehe Abbildung.

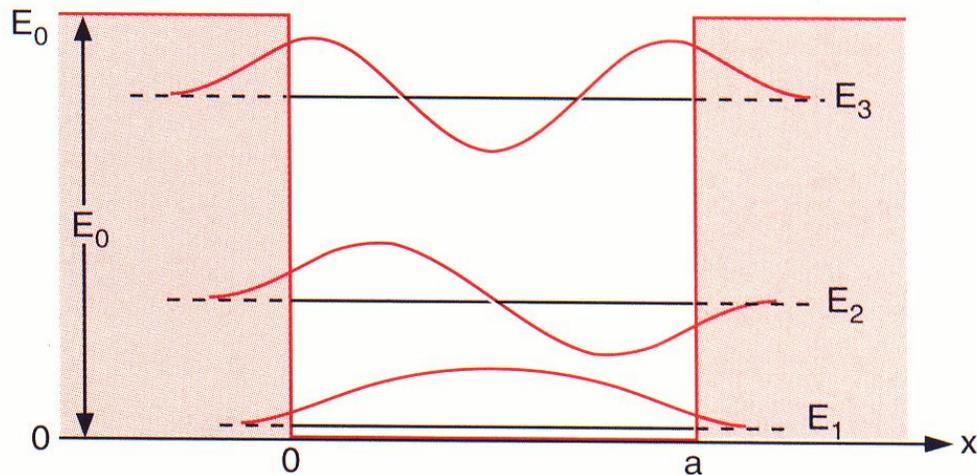
Interessant ist auch das zeitliche Verhalten eines Wellenpaketes in einem Potentialtopf. Dazu muss man die zeitabhängige Schrödingergleichung lösen. Ergebnis: Skizze



### 6.3.2. Endlich hoher Potentialkasten

Jetzt: wenn  $E > E_0$  ist das Teilchen nicht länger gebunden, es gibt keine Energiequantelung!  
Läuft ein Wellenpaket auf den Potentialtopf zu, wird ein Teil der Amplitude reflektiert, s. Kapitel 6.3.5.

Bei den gebundenen Zuständen dringt die Wellenfunktion in die Bereiche mit  $x < 0$  bzw.  $x > a$  ein, allerdings fällt sie dort exponentiell ab.



Rechnung: numerisch!

### 6.3.3. Parabel-Potential

In vielen Bereichen der Physik ist die Kraft (näherungsweise) linear vom Ort abhängig ( $\vec{F} = -D\vec{r}$ ) bzw. das Potential proportional zu  $\vec{r}^2$ . Dieses schwingungsfähige System heißt der harmonische Oszillator.

Die Schrödingergleichung lautet:

$$E_\psi \psi(x) = \frac{-\hbar^2}{2m} \psi''(x) + \frac{D}{2} x^2 \psi(x) \quad (32)$$

mit der 'Federkonstanten'  $D$ .

Man findet wieder diskrete Eigenwerte:

$$E_n = \left(n - \frac{1}{2}\right) \hbar \omega \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (33)$$

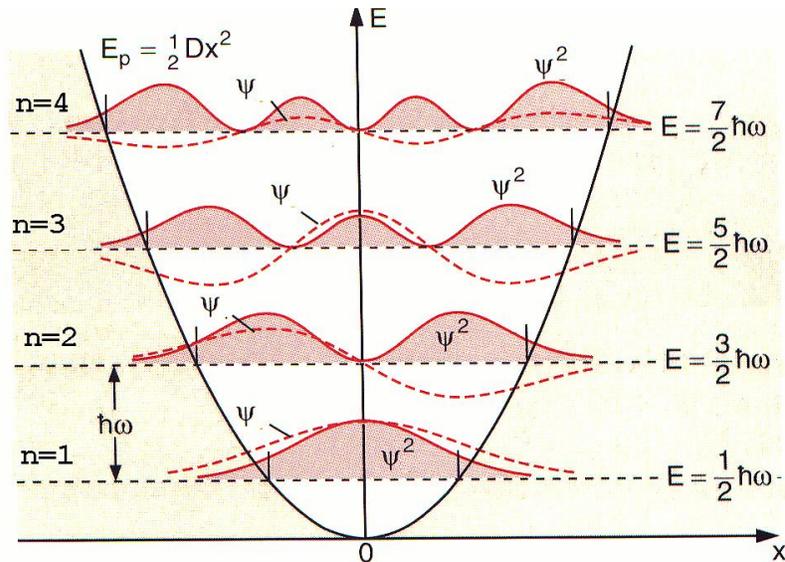
mit der klassischen Kreisfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} \quad (34)$$

Beachte: In der Literatur wird oft von  $n = 0$  an gezählt,  $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$ .

Auch hier ist also die Nullpunktsenergie von null verschieden! Im Gegensatz zum Kastenpotential sind die Abstände zwischen benachbarten Energieeigenwerten alle gleich.

Die Eigenfunktionen und Wahrscheinlichkeitsdichten sehen so aus:

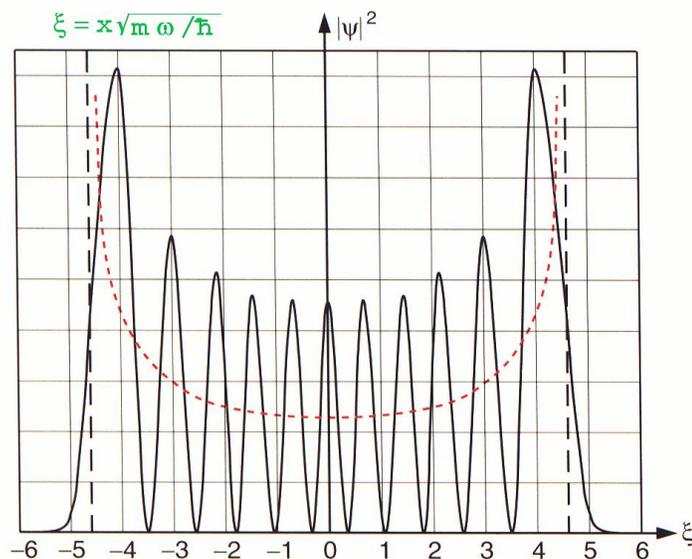


Für den Grundzustand gilt:

$$\psi_1 \sim e^{-x^2 m \omega / (2 \hbar)} \quad (35)$$

Bitte verifizieren!

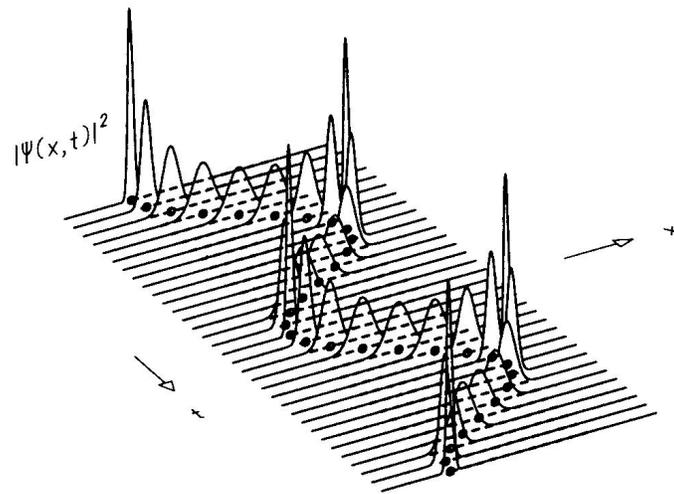
Wieder können wir den Grenzfall großer  $n$  untersuchen. Beispiel:  $n = 11$ : Die Aufenthaltswahr-



scheinlichkeit ist größer in den Randbereichen, wie in der klassischen Mechanik!

FRAGE: klassische Wahrscheinlichkeitsverteilung ?

Zeitabhängige Lösung: Siehe Skizze.



### 6.3.4. Mehrdimensionales Kastenpotential

Jetzt tritt in der Schrödingergleichung die räumliche Ableitung in der Form

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (36)$$

auf und

$$\psi(\vec{r}) = \psi(x, y, z) \quad (37)$$

Unser unendlich hoher Kasten habe jetzt die Begrenzungen

$$0 \leq x \leq a \quad 0 \leq y \leq b \quad 0 \leq z \leq c \quad (38)$$

Wir machen einen Faktorisierungsansatz:

$$\psi(x, y, z) = \psi_x(x) \cdot \psi_y(y) \cdot \psi_z(z) \quad (39)$$

Lösung:

$$\psi_x(x) = A \cdot \sin(n_x \pi x / a) \quad (40)$$

$$\psi_y(y) = B \cdot \sin(n_y \pi y / b) \quad (41)$$

$$\psi_z(z) = C \cdot \sin(n_z \pi z / c) \quad (42)$$

mit natürlichen Zahlen  $n_x, n_y, n_z$ .

Die Energieeigenwerte bekommt man aus den Impulseigenwertkomponenten:

$$E(n_x, n_y, n_z) = n_x^2 E_x + n_y^2 E_y + n_z^2 E_z \quad (43)$$

mit den Grundzustandsenergietermen

$$E_x = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} \quad E_y = \dots \quad (44)$$

Hier tritt das Phänomen der Entartung auf: zu einem Energieeigenwert gibt es mehrere Eigenfunktionen!

*Beispiel für  $a = b = c$ :*

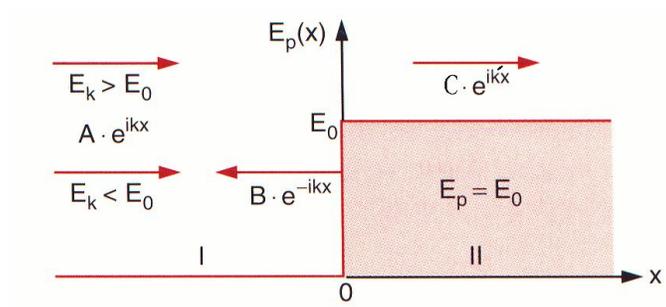
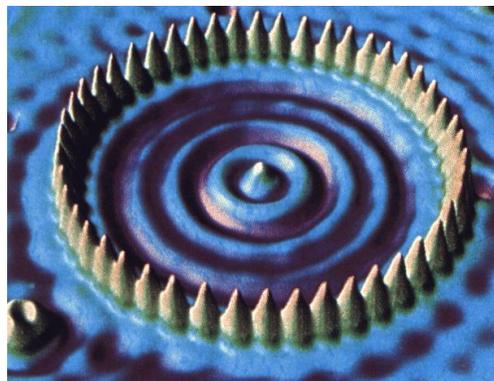
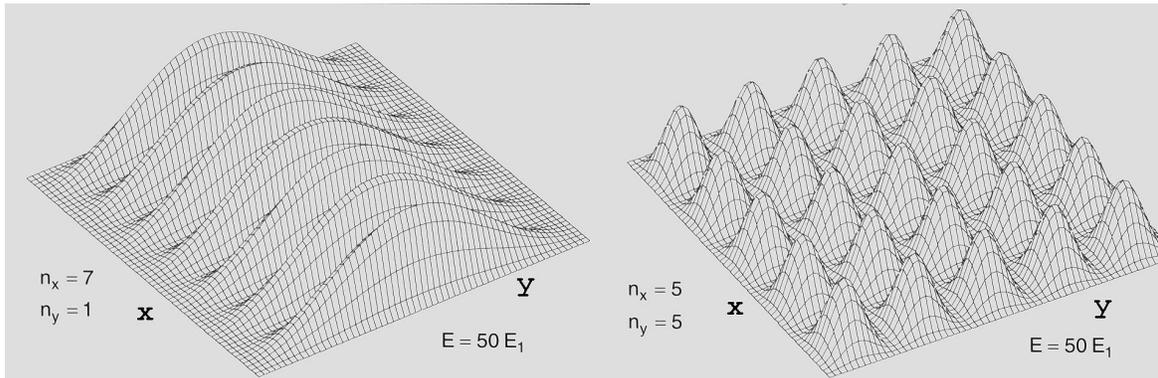
$$n_x = 1, n_y = 2, n_z = 3 \quad \leftrightarrow \quad n_x = 3, n_y = 2, n_z = 1$$

$$n_x = 1, n_y = 7, n_z = 3 \quad \leftrightarrow \quad n_x = 5, n_y = 3, n_z = 5$$

*Beispiel für  $b = 2a$  und  $c = 3a$ :*

$$n_x = 2, n_y = 2, n_z = 3 \quad \leftrightarrow \quad n_x = 1, n_y = 4, n_z = 3$$

Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit für bestimmte Eigenfunktionen in einem zweidimensionalen Potentialtopf zeigt die Abbildung:

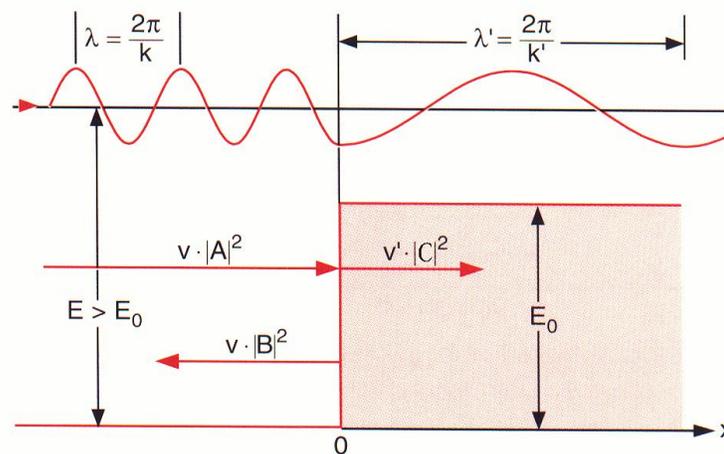
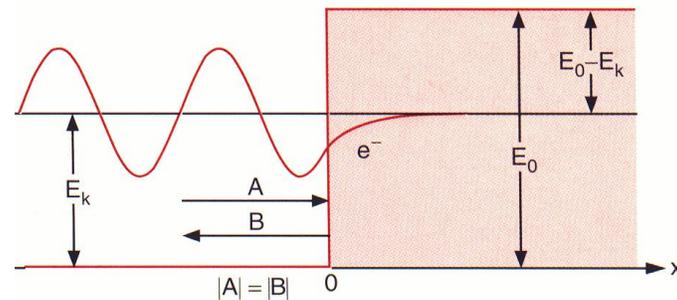


In einem runden Potentialtopf sehen die Wellenfunktionen so aus (Messung!) wie im Bild gezeigt. Die Potentialwand ist durch 48 Eisenatome realisiert, die mit einem Rastertunnelmikroskop plaziert wurden. Die Elektronendichteverteilungen sind mit dem gleichen Instrument vermessen worden.

### 6.3.5. Potentialbarriere

Die Potentialbarriere sei unendlich dick, also  $V = E_0$  für  $x > 0$ . Wieder versuchen wir die stationäre Schrödingergleichung für ein nichtrelativistisches Teilchen zu lösen.

Je nachdem, ob die anfängliche kinetische Energie  $E$  (= erhaltene Gesamtenergie) des Teilchens kleiner oder größer als die Potentialhöhe  $E_0$  ist, bekommt man eine der in den Skizzen gezeigten Lösungen.



Die Schrödingergleichung lautet:

$$\psi''(x) + k_{\psi}^2 \psi(x) = 0 \quad x \leq 0 \quad (45)$$

$$\psi''(x) + k'_{\psi}{}^2 \psi(x) = 0 \quad x > 0 \quad (46)$$

mit

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad k'^2 = \frac{2m(E - E_0)}{\hbar^2} \quad (47)$$

Ansatz: Ebene Wellen (dazu kommt noch ein Faktor  $e^{\pm i\omega t}$ , der bei der Berechnung der stationären Lösung aber herausfällt):

$$\psi(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx} \quad x \leq 0 \quad (48)$$

$$= C e^{ik'x} + D e^{-ik'x} \quad x > 0 \quad (49)$$

Die Anteile mit dem Minuszeichen im Exponenten bewegen sich von rechts nach links. Am Grenzpunkt  $x = 0$  muss die Funktion stetig differenzierbar sein, was die zwei Nebenbedingungen

$$A + B = C + D \quad k(A - B) = k'(C - D) \quad (50)$$

liefert.

Fallunterscheidung:

a)  $E < E_0$

$k' = i\kappa$  ist imaginär, für  $x > 0$  wird die eindringende Welle exponentiell gedämpft.  $D$  muss verschwinden, weil  $\psi$  sonst nicht normierbar wird. Ergebnis:

$$\frac{B}{A} = \frac{k - i\kappa}{k + i\kappa} \quad \frac{C}{A} = \frac{2k}{k + i\kappa} \quad (51)$$

Der Bruchteil  $R$  der reflektierten Teilchen ist das Reflexionsvermögen

$$R = \frac{|B e^{-ikx}|^2}{|A e^{ikx}|^2} = \frac{|B|^2}{|A|^2} = 1 \quad (52)$$

(da  $k$  und  $\kappa$  reell), wie in der klassischen Mechanik!

Die Eindringtiefe ist von der Größenordnung

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(E_0 - E)}} \quad (53)$$

und offenbar nur im Grenzfall  $\hbar \rightarrow 0$  mit dem klassischen Fall identisch.

**Computeranimation:** Streuung eines Wellenpaketes an einer Potentialbarriere

Albert, Tunneleffekt (Sspot.exe), V0 = 12, E0 = 9 (statt E!), a = 19 (max!) [oder Harfesoft oder QPhysLab]. Hoehe von E0 erkennbar an Teilchengeschwindigkeit; interessant auch E0=0!

**B)  $E > E_0$** 

$k'$  ist reell. Wenn wir annehmen, dass das Teilchen von links kommt, muss  $D = 0$  gelten. Rechts ist die kinetische Energie kleiner als links sie beträgt nur noch  $E - E_0$ , während die Gesamtenergie  $E$  des Teilchens sich nicht ändert. Wir erhalten also auf beiden Seiten eine ebene Welle, aber rechts mit erhöhter Wellenlänge und (bei gleicher Gesamtenergie) reduzierter Geschwindigkeit:

$$\frac{v'}{v} = \frac{k'}{k} = \frac{\lambda}{\lambda'} \quad (54)$$

Quantitativ:

$$\frac{B}{A} = \frac{k - k'}{k + k'} \quad \frac{C}{A} = \frac{2k}{k + k'} \quad (55)$$

Reflexionsvermögen und Transmissionsvermögen sind

$$R = \frac{(k - k')^2}{(k + k')^2} \quad T = \frac{v' |C|^2}{v |A|^2} = \frac{4 k k'}{(k + k')^2} \quad (56)$$

Diese Größen messen die 'Intensität', also den Teilchenstrom pro Zeit und Fläche - deshalb die Gewichtung mit der Geschwindigkeit! Offenbar gilt  $R + T = 1$ .

FRAGE: Wie groß ist  $T$  im Fall  $E_0 > E$  ?

**Computeranimation:** Streuung eines Wellenpaketes an einer Potentialbarriere

Albert, Tunneleffekt (Sqpot.exe),  $V_0 = 12$ ,  $E_0 = 15$ ,  $a = 19$

*Beispiel:*

Elektron mit  $mc^2 = 511$  keV,  $E_0 = 1$  eV.

a)  $E = 0.9$  eV:

$$1/\kappa = 6 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

b)  $E = 1.1$  eV:

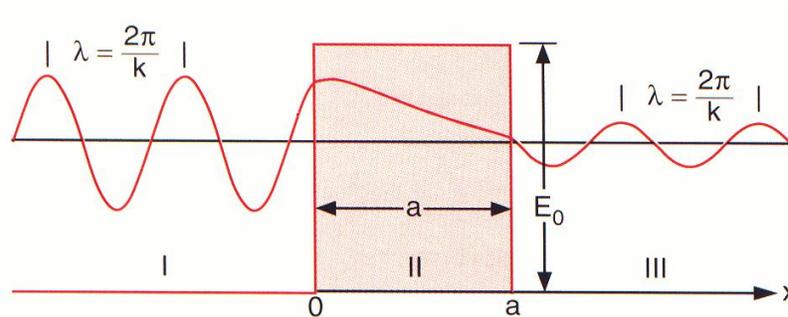
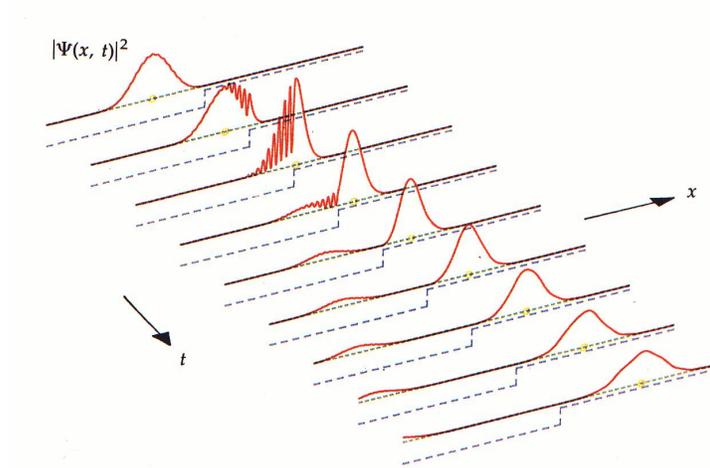
$$T = \frac{4\sqrt{1 - E_0/E}}{(1 + \sqrt{1 - E_0/E})^2} = 0.71$$

FRAGE: Vergleich Optik ?

Auch hier ist die Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung für ein Wellenpaket sehr interessant:

**6.3.6. Tunneleffekt**

Jetzt beschränken wir die Potentialbarriere auf den Bereich  $0 \leq x \leq a$ : Der interessanteste Fall ist der mit  $E < E_0$ . Ein Teil der Welle dringt durch die Potentialwand und pflanzt sich rechts mit reduzierter Amplitude weiter fort. Der Tunneleffekt hat kein klassisches Analogon.



Man löst das stationäre Problem, indem man wie in Kapitel 6.3.5. für jede der drei Gebiete einen Ansatz mit einer ebenen Welle macht und Stetigkeitsbedingungen berücksichtigt. Den Transmissionskoeffizienten kann man für dicke Barrieren mit  $a \cdot \kappa \gg 1$  so annähern:

$$T \approx \frac{16 E (E_0 - E)}{E_0^2} \cdot e^{-2\kappa a} \quad (57)$$

Exponentielle Abnahme ! Wenn  $E$  und  $E_0 - E$  von der gleichen Größenordnung sind (!), ist  $\kappa \sim 1/\lambda$ ; also ist der Transmissionskoeffizient nur groß, wenn  $a < \lambda$ .

Zeitabhängigkeit: siehe Abbildung.

FRAGE: Wird beim Tunneleffekt bzw. beim Eindringen in die Potentialstufe (s. oben) der Energiesatz verletzt ?

Nein, denn die Unschärferelation erlaubt bei zeitlich kurzen oder räumlich kleinen 'Verfehlungen' nicht, diese zu messen, da ja die Messunsicherheiten  $\Delta E > \hbar/2/\Delta t$  bzw.  $\Delta p > \hbar/2/\Delta x$  sind.

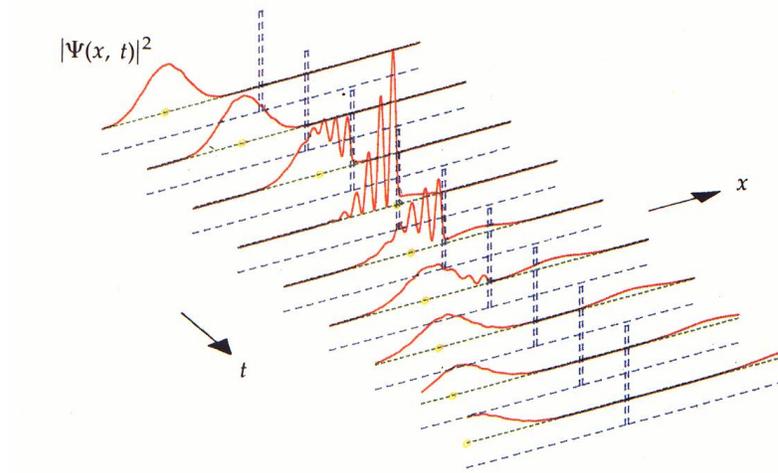
**Computeranimation:** Streuung eines Wellenpaketes an einer Potentialbarriere

Albert, Tunneleffekt (Sqpot.exe),  $V_0 = 12$ ,  $E_0 = 9$ ,  $a = 2.0$ ,  $1.0$ ,  $0.5$

siehe auch Harfesoft !

Der Tunneleffekt hat eine große Bedeutung in der Natur. Viele wichtige Prozesse können sonst nicht ablaufen!

*Beispiel:*



*Kernfusion in der Sonne, bei der zur Verschmelzung zweier Protonen der abstoßende ‘Coulombwall’ überwunden werden muss.*

FRAGE: Ist für  $E > E_0$  die Transmission 1 ?

**Computeranimation:** Streuung eines Wellenpaketes an einer Potentialbarriere

Albert, Tunneleffekt (Sqpot.exe),  $V_0 = 12$ ,  $E_0 = 15$ ,  $a = 2$

FRAGE: Was passiert bei einer ‘Potentialmulde’ mit  $E_0 < 0$  ?

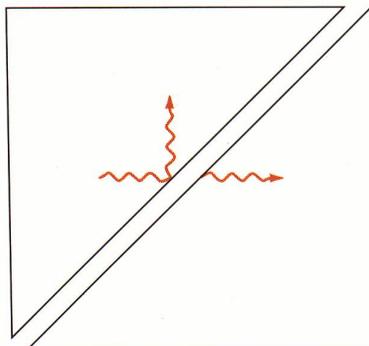
**Computeranimation:** Streuung eines Wellenpaketes an einer Potentialbarriere

Albert, Tunneleffekt (Sqpot.exe),  $V_0 = -36$ ,  $E_0 = 9$ ,  $a = 15$

*Anwendungen:*

*Optik:*

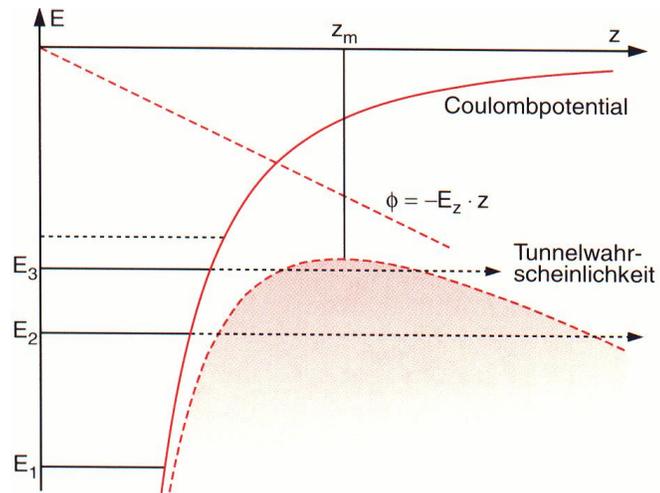
*Licht kann durch die totalreflektierende (!) Grenzfläche eines Prismas tunneln, wenn der Luftspalt zum Nachbarprisma dünn genug ist. Signifikant wird die Tunnelwahrscheinlichkeit, wenn die Dicke nicht größer als die Lichtwellenlänge ist.*



**VERSUCH:** *Tunneleffekt mit Mikrowellen und Plexiglasprismen*

*Atomphysik:*

Legt man ein hohes elektrisches Feld an ein Metall an, so wird das Coulombfeld in Atomnähe 'verbo- gen'; Elektronen können heraustunneln: Feldemission

*Kernphysik:*

Radioaktivität,  $\alpha$ -Zerfall

