

VORLESUNG 8

Nachdenken/Nachlesen:

Wie kann man Spin und magnetische Momente von Atomen und Kernen messen ? Stichwort: Spinresonanz.

9. Drehimpuls**9.1. Bahndrehimpulse**

Wir hatten in Kapitel 7 gesehen, dass die allgemeinen Lösungen für den Winkelanteil im kugelsymmetrischen Potential durch die Kugelfunktionen

$$Y_m^l(\theta, \phi) = \psi_\theta(\theta) \cdot \psi_\phi(\phi) \quad (1)$$

gegeben sind.

Wir wollen jetzt den Zusammenhang mit dem Bahndrehimpuls und mit dem zugehörigen magnetischen Moment studieren.

Aus dem klassischen Drehimpuls

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (2)$$

wird in der Quantenmechanik durch Einsetzen der Operatoren für \vec{r} (einfache Multiplikation) und \vec{p} der Drehimpulsoperator

$$\hat{\vec{L}} = \hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}} = -i\hbar (\vec{r} \times \vec{\nabla}) \quad (3)$$

Das Betragsquadrat ist

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2 \quad (4)$$

mit den kartesischen Komponenten

$$\hat{L}_x = -i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (5)$$

usw. In Kugelkoordinaten bekommt man z.B.

$$\hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (6)$$

und

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \quad (7)$$

Das ist der winkelabhängige Teil der in der Schrödingergleichung für das Wasserstoffatom, siehe Kapitel 7.4. Also sind die Kugelfunktionen Eigenfunktionen zu \hat{L}^2 . Auch den Eigenwert kennen wir schon:

$$\hat{L}^2 Y_m^l = l(l+1) \hbar^2 \cdot Y_m^l \quad (8)$$

Das ist bei einem Eigenzustand gleichzeitig auch der Erwartungswert.

Ferner zeigt man leicht, dass Y_m^l auch Eigenfunktion zu \hat{L}_z ist:

$$\hat{L}_z Y_m^l = m \hbar \cdot Y_m^l \quad (9)$$

Allerdings kann Y_m^l nicht auch noch Eigenfunktion der Drehimpulskomponenten \hat{L}_x und \hat{L}_y sein, denn das würde erfordern, dass diese Operatoren mit \hat{L}_z kommutieren, was nicht der Fall ist. Beachte:

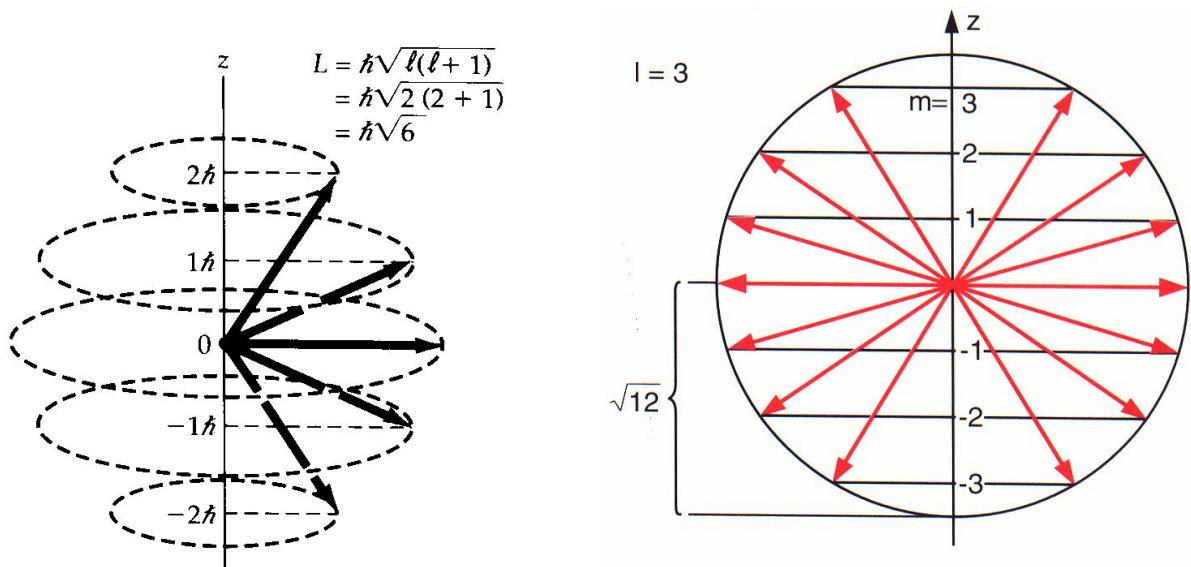
$$[\hat{L}_z, \hat{L}^2] = 0 \quad (10)$$

Auch vertauschen beide mit dem Hamiltonoperator, die Eigenwerte können also zusammen mit der Energie gemessen werden.

$$[\hat{L}_z, \hat{H}] = 0 \quad [\hat{L}^2, \hat{H}] = 0 \quad (11)$$

Es gibt also im Wasserstoffatom drei physikalische Größen, die man gleichzeitig messen kann und die durch die Quantenzahlen n, l, m beschrieben werden. Diese sind auch ausreichend, das Wasserstoffatom vollständig zu beschreiben. Der Betrag und die z-Komponente des Drehimpulses haben also einen zeitlich festen Wert, während die beiden anderen Komponenten unbestimmt sind! Die z-Achse heißt deshalb Quantisierungsachse. Natürlich ist damit keine Richtung im Raum ausgezeichnet, denn die z-Achse kann ja beliebig orientiert werden bzw. man kann auch eine Eigenfunktion z.B. zu \hat{L}_x konstruieren.

Interpretation, für $l = 2$ und $l = 3$:



Der Drehimpulsvektor der Länge $\sqrt{l(l+1)}\hbar$ präzediert um die z-Achse, die Projektion auf diese hat die Länge $|m|\hbar$.

Vergleiche auch die Polardiagramme von Vorlesung 6: je größer $|m|$, desto weiter sind die Elektronen im Mittel von der z-Achse entfernt ($|L_z| = r \cdot p$!).

Jetzt verstehen wir auch den Zusammenhang $|m| \leq l$. Die Beziehung zwischen n und l dagegen ist von der Form des Potentials abhängig. Im $1/r$ -Potential: $l < n$. Im Bohrschen Planetenmodell erscheint eher $l \sim n$ sinnvoll, denn klassisch gilt $l \sim 1/\sqrt{E}$. Im Bohrschen Modell ist $|L| = n\hbar$. Der Zustand mit $l = 0$ entspricht klassisch am ehesten einer Schwingung durch den Kernort, allerdings mit variierender Schwingungsrichtung (Rotationssymmetrie). In der Tat ist (nur!) im Fall $l = 0$ die Aufenthaltswahrscheinlichkeit nahe des Kerns von null verschieden. Die anderen Drehimpulse kann man entsprechend durch mehr oder weniger exzentrische Ellipsen veranschaulichen. Man beachte: Bei fester Energie (festem n) kann man unterschiedliche l nicht (alle) mit Kreisbahnen realisieren!

Auch die Radialgleichung im zentralsymmetrischen Potential verstehen wir jetzt besser:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\psi_r}{dr} \right) + \frac{2m_e}{\hbar^2} \left[E - V(r) - \frac{l(l+1)\hbar^2}{2m_e r^2} \right] \psi_r = 0 \quad (12)$$

Der Term proportional zu $l(l+1)$ enthält die kinetische Energie der Rotation ('Zentrifugalpotential')! Die kinetische Energie der Bewegung entlang r steckt dagegen im ersten Term von (12).

Beispiel:

Erwartungswert von \hat{L}_x im Wasserstoff, Grundzustand:

$$\hat{L}_x = i\hbar \left(\sin\phi \frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta \cos\phi \frac{\partial}{\partial\phi} \right)$$

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{\pi} a_0^3} \cdot e^{-r/a_0}$$

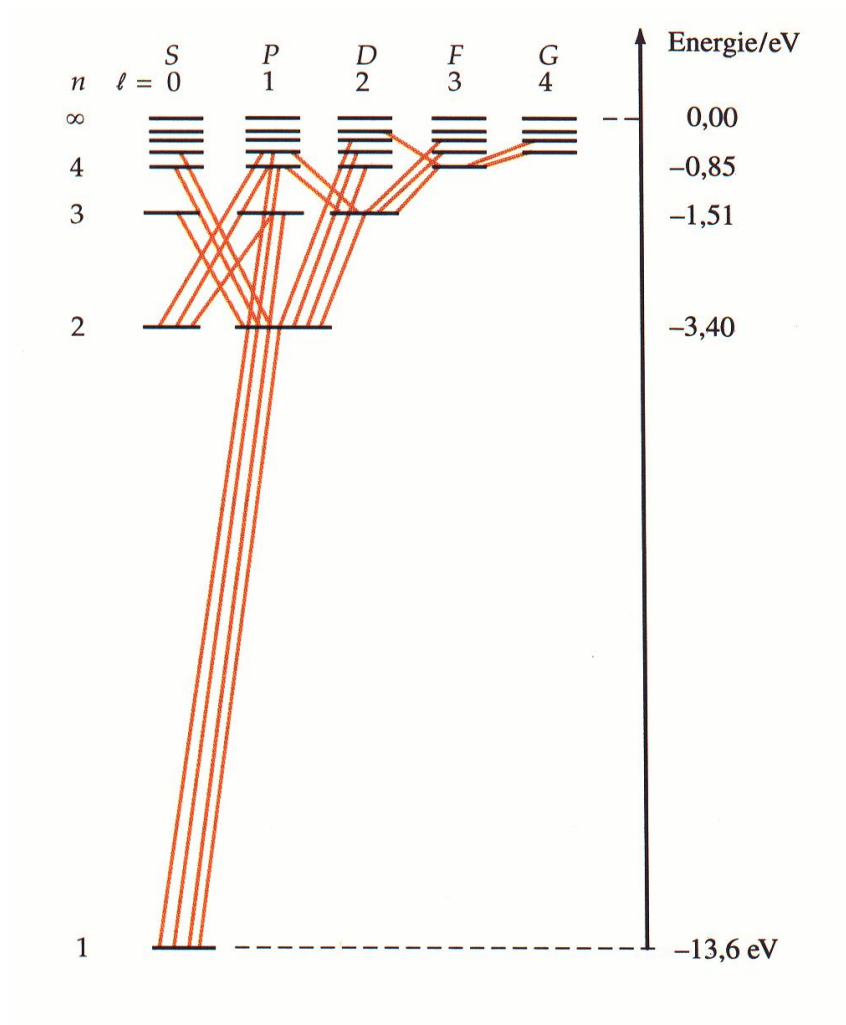
Offenbar:

$$\langle \hat{L}_x \rangle = 0$$

FRAGE: Und wie groß sind $\langle \hat{L}_y \rangle$ und $\langle \hat{L}_z \rangle$? Kann man alle drei Komponenten gleichzeitig messen?

Das [Termschema](#) zeigt die Abbildung. Man beachte die l -Entartung. Elektromagnetische Übergänge sind nur möglich wenn $|\Delta l| = 1$, da ja das Photon den Drehimpuls \hbar trägt, s. unten.

¹Im quantenmechanischen Sprachgebrauch werden statt der Eigenwerte meist die Quantenzahlen angegeben. So sagt man einfach 'Der Drehimpuls ist $l = 3$ '.



9.2. Zeeman-Effekt

Ein um den Kern mit der Frequenz ν umlaufendes Elektron stellt einen Kreisstrom dar, der ein magnetisches Feld erzeugt.

a) Semiklassische Betrachtung für Kreisbahnen mit Drehimpulsbetrag $|\vec{L}| = \sqrt{l(l+1)} \hbar$ und z-Komponente $L_z = m \hbar$.

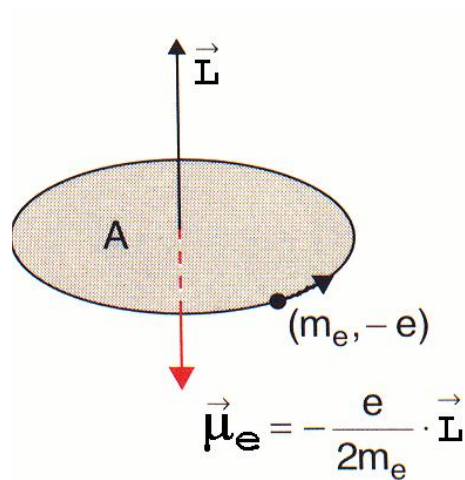
Der Kreisstrom

$$I = -e\nu = -e \frac{v}{2\pi r} \quad (13)$$

erzeugt das magnetische Moment

$$\vec{\mu}_e = I A \vec{n} = I \pi r^2 \vec{n} = -\frac{1}{2} e v r \vec{n} \quad (14)$$

Der Drehimpuls ist



$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m_e r v \vec{n} \quad (15)$$

Also:

$$\boxed{\vec{\mu}_e = -\frac{e}{2m_e} \vec{L}} \quad (16)$$

Bringt man das Atom in ein homogenes äußeres B-Feld, ist seine (zusätzliche) potentielle Energie

$$\Delta E_{pot} = -\vec{\mu}_e \cdot \vec{B} = \frac{e}{2m_e} \vec{L} \cdot \vec{B} = \frac{e\hbar}{2m_e} m B \quad (17)$$

mit der magnetischen Quantenzahl m , deren Bezeichnung wir jetzt verstehen. Wir haben die Quantisierungsachse (z) gleich der B-Richtung gewählt.

FRAGE: Und wenn das B-Feld in x-Richtung zeigt ?

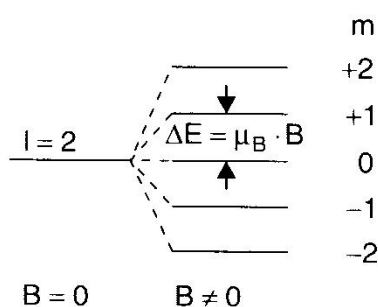
Der Vorfaktor ist das Bohrsche Magneton

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 5.79 \cdot 10^{-5} \text{ eV/T} \quad (18)$$

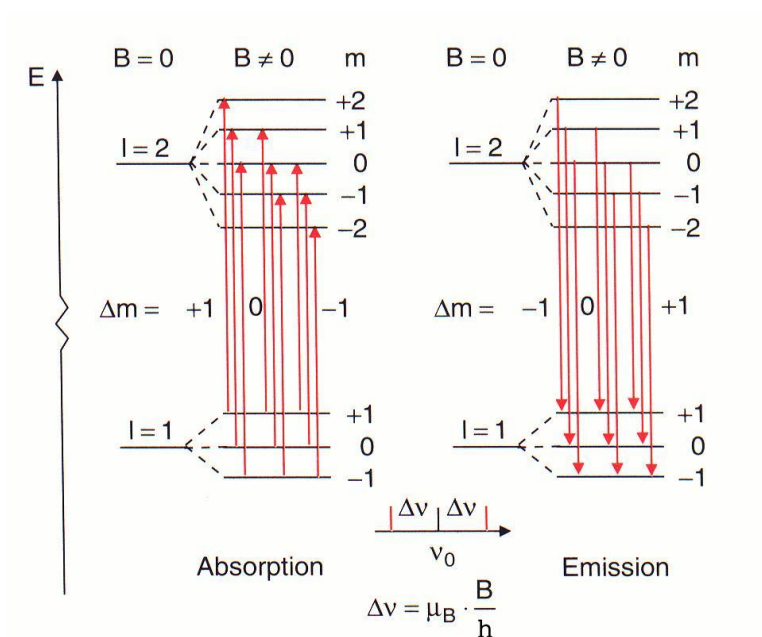
Es gibt also eine Energieverschiebung

$$\Delta E_m = \mu_B m B \quad (19)$$

Dadurch wird im Wasserstoffatom die m -Entartung aufgehoben. Die Aufspaltung der Energieniveaus



ist messbar über die Spektrallinien, siehe Skizze.



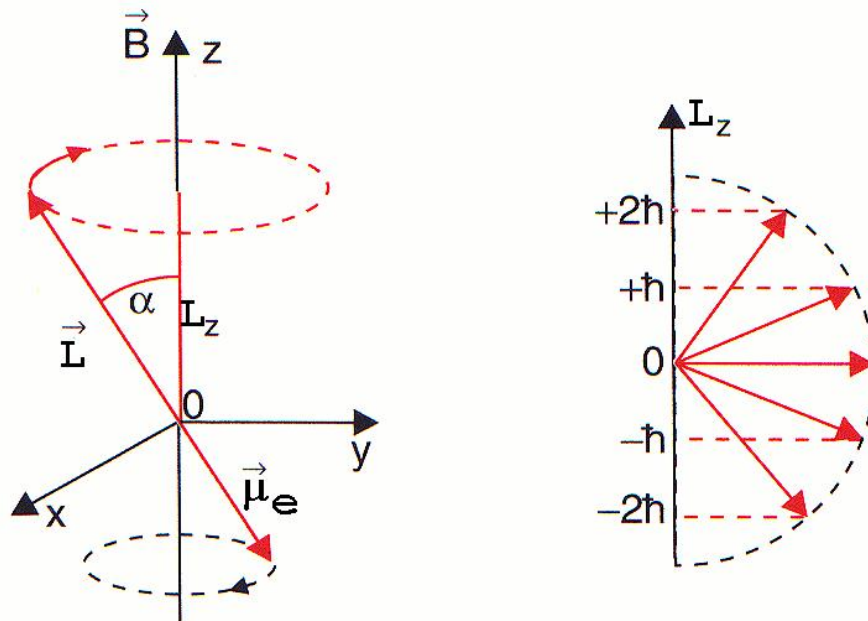
Beispiel: Wasserstoff, $B = 1 \text{ T}$.

Die Aufspaltung beträgt $\Delta E_m = m \cdot 5.8 \cdot 10^{-5} \text{ eV}$. Das ist mehr als 4 Größenordnungen kleiner als der Linienabstand bei Übergängen zwischen Zuständen mit kleiner Hauptquantenzahl!

Zuerst hat Pieter Zeeman dies im Jahr 1896 beobachtet (Nobelpreis 1902), deshalb spricht man vom (normalen) Zeeman-Effekt. Die Zahl der Energieniveaus ist

$$N = 2l + 1 \quad (20)$$

Klassische Interpretation: Der Drehimpulsvektor präzediert wegen des vom B-Feld erzeugten Drehmomentes um die z-Achse, dabei bleiben z-Komponente und Betrag konstant, siehe Bild.



b) Quantenmechanik: Man betrachtet den Zusatz-Energierterm ΔE_{pot} als ‘kleine Störung’, wie durch obiges Zahlenbeispiel nahegelegt wird. Das bedeutet, man vernachlässigt die sich dadurch ergebende Änderung der Wellenfunktion und berechnet die Energieverschiebung durch die Erwartungswerte

$$\Delta E_m = \int \psi^* \hat{E}_{pot}(m) \psi \quad \hat{E}_{pot} = \frac{\mu_B}{\hbar} \vec{B} \cdot \hat{\vec{L}} = \frac{\mu_B}{\hbar} B \cdot \hat{L}_z \quad (21)$$

aus den ‘ungestörten’ Wellenfunktionen. Man spricht von Störungsrechnung.

Im Falle des Zeeman-Effektes im Wasserstoffatom bekommt man in dieser Näherung die gleichen Ergebnisse wie unter a), da ja die Wellenfunktionen Eigenfunktionen zu \hat{L}_z sind und damit der Potentialterm vor das Integral gezogen werden kann!

Die klassische Überlegung führt also hier zum richtigen Ergebnis für das mit einem Bahndrehimpuls verbundene magnetische Moment.

Die obige Abbildung mit den Zeeman-Spektralverschiebungen zeigt, dass nicht alle Übergänge auftreten, sondern nur die mit

$$|\Delta l| = 1 \quad |\Delta m| \leq 1 \quad (22)$$

Grund dafür ist, dass das Photon den Spin $1\hbar$ trägt². $\Delta m = 0$ ist möglich, wenn der Photonspin senkrecht zur z-Achse steht. Klassisch bedeutet dies, dass das Elektron entlang der z-Achse und y-Achse schwingt und damit senkrecht dazu (in x-Richtung) abstrahlt, siehe die Polardiagramme der

²Das ist eine schlampige Ausdrucksweise! Der Betrag des Photonspins ist $\sqrt{1(1+1)}\hbar = \sqrt{2}\hbar$

früheren Vorlesung für $|Y_m^l|^2$ mit $l > 0, m = 0$. Aus einer Spektrallinie ($B = 0$, Frequenz ν_0) wird im Magnetfeld ein Triplett mit

$$\nu = \nu_0 - \Delta\nu, \nu_0, \nu_0 + \Delta\nu \quad h \Delta\nu = \mu_B B \quad (23)$$

9.3. Spin

Das Elektron hat sich in allen Experimenten immer wie ein punktförmiges Teilchen verhalten. Die heutigen oberen Grenzen für einen hypothetischen Elektronendurchmesser betragen etwa 10^{-18} m.

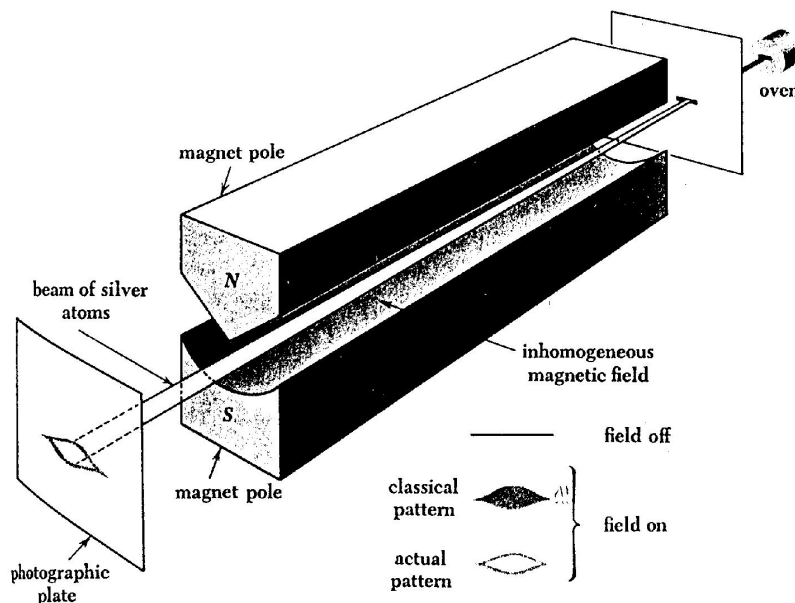
In der klassischen Physik hat das Elektron also weder einen Drehimpuls (in seinem Ruhesystem), noch ein magnetisches Moment.

Kleine Abweichungen in den beobachteten Atomspektren zu den berechneten Linien, insbesondere feine Aufspaltungen von Spektrallinien deuteten jedoch auf eine weitere Eigenschaft des Elektrons hin.

1921 untersuchten Otto Stern (Nobelpreis 1943, Protonspin!) und Walther Gerlach den Drehimpuls und das magnetische Moment von elektrisch neutralen Silberatomen, der durch den 'Spin' eines einzelnen Hüllenelektrons bestimmt wird (wie wir heute wissen). Alle anderen Drehimpulse und magnetischen Momente addieren sich zu null. Die Atome werden in einem inhomogenen zeitunabhängigen Magnetfeld abgelenkt:

$$\vec{F} = \vec{\nabla} E_{pot} = \vec{\nabla} (-\vec{\mu} \cdot \vec{B}) = -(\vec{\mu} \vec{\nabla}) \vec{B} \quad (24)$$

Man kann das Experiment nur mit neutralen Teilchen durchführen, da sonst die direkte Ablenkung



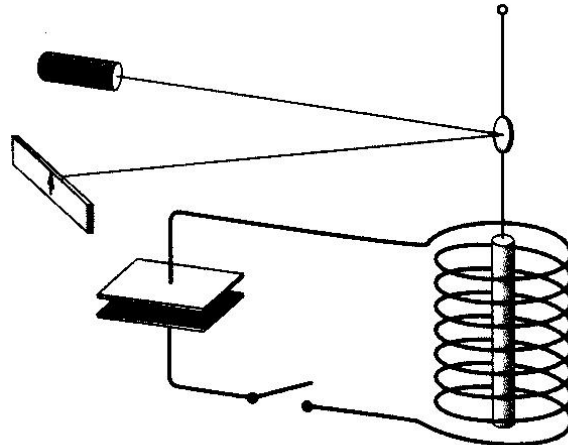
im Magnetfeld zu stark ist! Es gibt eine Aufspaltung, und aus der Zahl $N = 2$ der Linien folgt wegen

$$N = 2s + 1 \quad (25)$$

dass es (im Gegensatz zu ganzzahligen Bahndrehimpulsen) sich um einen halbzahligen Drehimpuls handelt, den wir Spin nennen.

1925 schlugen Samuel A. Goudsmit und George E. Uhlenbeck vor, dass das Elektron den Spin $s = 1/2$ besitzt, um die beobachtete Feinstruktur der Spektrallinien (Spin-Bahn-WW, s.u.) zu erklären.

Man kann den Elektronspin, der für den Ferromagnetismus verantwortlich ist, auch durch den [Einstein-de-Haas-Effekt](#) mechanisch (also makroskopisch) nachweisen. Der Effekt wurde von Einstein vorgeschlagen und die Messungen 1915 von Wander J. de Haas durchgeführt.



Wie wir heute wissen, wird der Magnetismus im wesentlichen durch den Spin bzw. das damit verbundene magnetische Moment von Leistungselektronen im Eisen erzeugt.

Mit dem Einstein-de-Haas Experiment kann man gleichzeitig die makroskopische Magnetisierung und den Drehimpuls messen. So kann man das Verhältnis von magnetischem Moment und Drehimpuls und damit den Landé-Faktor messen, s.unten.

Es stellt sich heraus, dass auch für den Elektron-Spin³ die gleichen quantenmechanischen Drehimpulsregeln gelten wie für den Bahndrehimpuls:

$$\vec{S}^2 = s(s+1)\hbar^2 \quad s = 1/2 \quad S_z = m_s \hbar \quad m_s = \pm 1/2 \quad (26)$$

Auch mit dem Elektronspin ist offenbar ein magnetisches Moment verbunden (Stern-Gerlach!):

$$\vec{\mu}_s = g_s \frac{\mu_B}{\hbar} \vec{s} \quad (27)$$

Der [Landé-Faktor](#) g_s kann nicht vorausgesagt werden, da es kein klassisches Analogon gibt. Für den Bahndrehimpuls des Elektrons gilt $g_l = -1$, aber für den Spin findet man aus vielen Experimenten:

$$g_s = -2 \quad (28)$$

Genauere Messungen haben später gezeigt, dass der Betrag nicht exakt zwei ist. Die in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts entwickelte [Quantenelektrodynamik](#), eine relativistische Quantentheorie, die auch die Erzeugung von Antimaterie (Positronen) beschreibt, kann den Messwert sehr gut

³Die Mathematik der Spinoperatoren diskutieren wir hier nicht.

reproduzieren. Heutige Werte⁴:

$$\mu/\mu_B(\text{Theorie}) = 1.001159652149 \pm 0.000000000028 \quad (29)$$

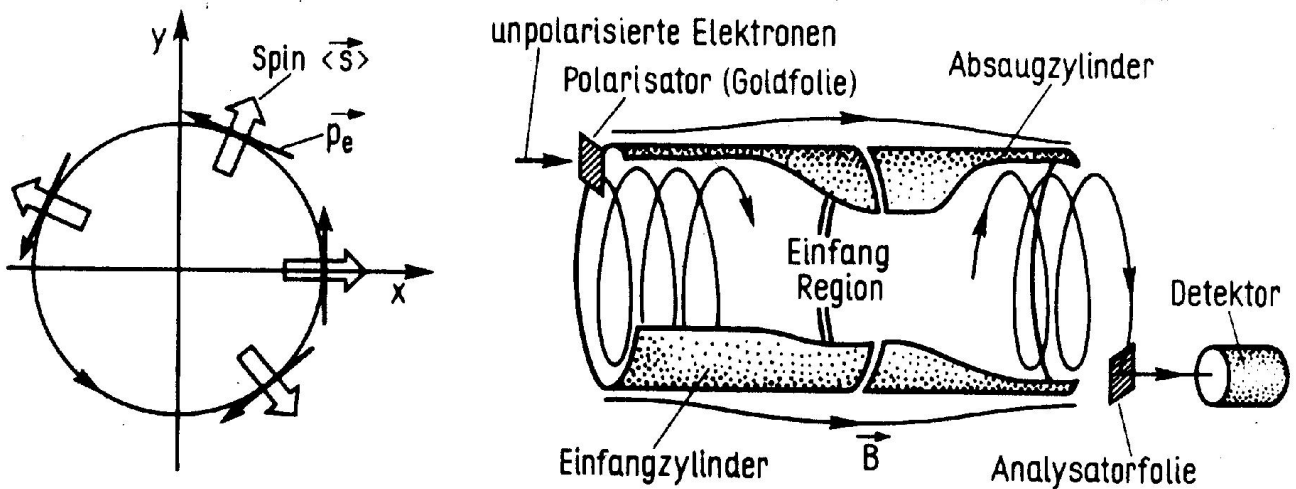
$$\mu/\mu_B(\text{Experiment}) = 1.001159652186 \pm 0.000000000004 \quad (30)$$

Das ist ein großer Triumph für die Quantentheorie! Im folgenden benutzen wir aber weiterhin den Näherungswert $g_s = -2$.

Es gibt verschiedene Methoden der präzisen Messung von $|g_s| - 2$. Eine auf D.T. Wilkinson und H.R. Crane (50er Jahre) zurückgehende Methode ist die folgende: Grundidee ist der resultierende Unterschied zwischen Zyklotronfrequenz ω_Z (Elektronen bewegen sich auf Kreisbahnen im Magnetfeld) und Larmorfrequenz ω_L (Präzessionsbewegung des Elektronspins im gleichen B -Feld); ohne Beweis:

$$\omega_Z = \frac{eB}{\gamma m_e} \quad \omega_L = \frac{eB}{\gamma m_e} \cdot \left[1 + \gamma \frac{|g_s| - 2}{2} \right] \quad (31)$$

γ ist der Lorentzfaktor⁵. Ein von 2 abweichender g-Faktor führt also zu einer relativen Drehung von Impulsrichtung und Spin. Unpolarisierte Elektronen der kinetischen Energie 100 keV werden bei



Streuung um 90° an einer Goldfolie (Polarisator) transversal zur Flugrichtung polarisiert. In einem solenoiden Magnetfeld werden sie eingefangen und bewegen sich auf Spiralbahnen auf das andere Ende zu. Das leicht inhomogene Magnetfeld ist so gewählt, dass an beiden Enden des Solenoiden 'magnetische Spiegel' entstehen, die Teilchen also hin und her fliegen. Durch eine kurzzeitig angelegte Spannung am rechten Ende werden sie schließlich nach einer Zeit t auf eine zweite Folie (Analysator) gelenkt, wo man die Spinrichtung (relativ zum Impulsvektor) messen kann.

Die genauesten Experimente schließen wenige Elektronen in sogenannte elektromagnetische Fallen ein, etwa eine Penning-Falle. Bei Einstrahlung von elektromagnetischen Wellen der richtigen Frequenz kann man den Spin im Magnetfeld umklappen und so die Energieaufspaltung und damit g_s messen.

⁴Die maximale z-Komponente des magnetischen Moments ist (für $g_s = -2$) μ_B !

⁵Massen wie m_e sind in dieser Vorlesung immer Ruhemassen!

Heute wissen wir, dass auch Proton p und Neutron n einen Spin (1/2) und ein magnetisches Moment besitzen.

Die zum Bohrschen Magneton analoge Größe ist das Kernmagneton

$$\mu_K = \frac{e\hbar}{2m_p} = 3.15 \cdot 10^{-8} \text{ eV/T} \quad (32)$$

Die magnetischen Momente der Kerne sind daher sehr viel kleiner als die der Elektronen-Hülle.

Die zugehörigen Landé-Faktoren weichen aber stark von 2 ab:

$$g_s(p) = 5.58 \quad g_s(n) = -3.82 \quad (33)$$

Diese Zahlenwerte und auch die Tatsache, dass das neutrale Neutron überhaupt ein magnetisches Moment besitzt, stellen starke Hinweise auf eine Substruktur dieser Teilchen dar. Vergleiche: Das punktförmige neutrale Photon (Spin 1) hat *kein* magnetisches Moment.

Die bekannten fundamentalen Teilchen haben entweder den Spin 1/2 (Fermionen) oder Spin 1 (Bosonen). Erstere sind die Materieteilchen (Elektronen, Quarks, ...), letztere sind die Austauschteilchen der verschiedenen Wechselwirkungen (Photon, Gluon, ...). Es gibt einen wichtigen Unterschied zwischen beiden Klassen: Fermionen unterliegen dem Pauli-Prinzip, nach dem ein quantenmechanischer Zustand immer nur von maximal einem Fermion einer Sorte besetzt sein kann. Das ist von grundlegender Bedeutung beim Aufbau der Atomhülle aus mehreren Elektronen, s. folgende Vorlesungen. Bosonen unterliegen einer derartigen Einschränkung nicht!

Ob es eine tiefere Beziehung zwischen Fermionen und Bosonen gibt, weiß man noch nicht, aber es gibt erfolgversprechende theoretische Ideen (Supersymmetrie).

Beachte: Der Photonspin genügt nicht (25); als masseloses Teilchen hat es zwar 'Gesamtspin 1', aber es gibt bezüglich der Flugachse nur zwei mögliche Spineinstellungen: $m = \pm 1$; Begründung siehe Theorie-Lehrbücher.

9.4. Spin und Wasserstoffatom

Der Elektronspin \vec{S} und der Elektronbahndrehimpuls \vec{L} addieren sich zum Gesamtdrehimpuls \vec{J} des Atoms:

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \quad (34)$$

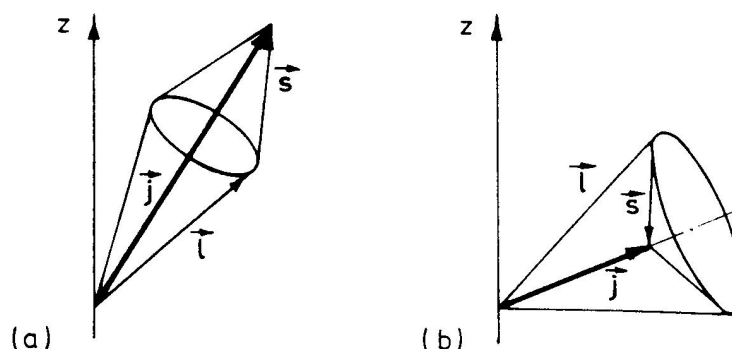
Der Kernspin wird weiterhin ignoriert. In der Quantenmechanik ist wegen der Quantelung von S und L auch der Gesamtdrehimpuls gequantelt und es gilt hier:

$$j = l \pm s = l \pm \frac{1}{2} \quad (l \neq 0) \quad (35)$$

Der Betrag des Gesamtdrehimpulses ist gegeben durch

$$|\vec{J}|^2 = j(j+1)\hbar^2 \quad (36)$$

Der Betrag von \vec{J} ist kleiner als die Summe der Beträge von \vec{L} und \vec{S} !



Beispiel:

$l = 1, j = 3/2:$

$$|J|/\hbar = \sqrt{15}/2 = 1.94 \quad |L|/\hbar = \sqrt{2} = 1.41 \quad |S|/\hbar = \sqrt{3}/2 = 0.87$$

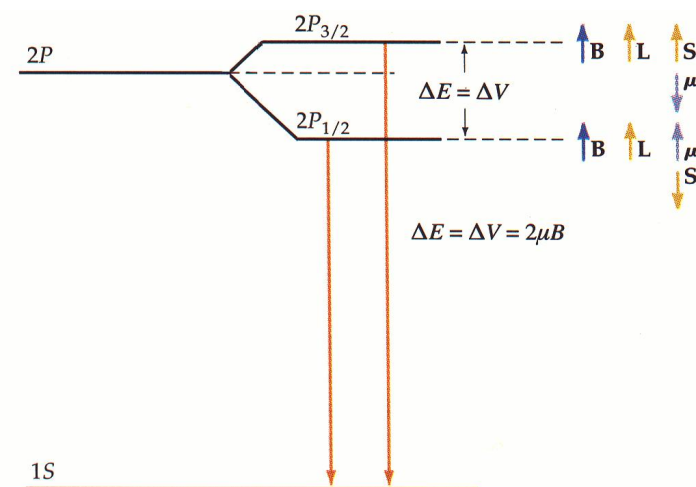
Spektroskopische Notation von Zuständen (Atome):

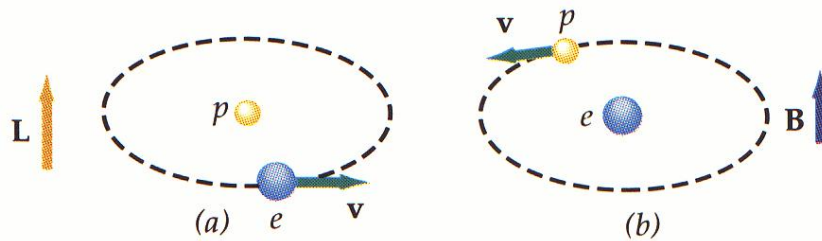
$$n l_j \tag{37}$$

Beispiel:

Wasserstoff mit $n = 2$ und $l = 1$: Je nach Spinorientierung ist die Quantenzahl $j = 1/2$ oder $= 3/2$, Notation: $2P_{1/2}, 2P_{3/2}$.

Die Wechselwirkung der mit L und S verbundenen magnetischen Momente führt zu einer Aufspaltung der Spektrallinien, der Feinstruktur-Aufspaltung (ohne äußeres Feld).





Die Aufspaltung kann halbklassisch aus dem Magnetfeld berechnet werden, welches das rotierende Proton (!) am Ort des Spins erzeugt:

$$\Delta E = \pm \mu_s B_l \quad (38)$$

B_l kann mit dem Biot-Savart-Gesetz berechnet werden; anschließend muss man wieder auf das Ruhesystem des Atoms Lorentz-transformieren, wobei ein Faktor $1/2$ auftritt ('Thomas-Faktor')⁶.

Es handelt sich also um einen 'internen Zeeman-Effekt'. Man bekommt:

$$\Delta E = \frac{\mu_0 e^2}{8\pi m_e^2 r^3} \vec{S} \cdot \vec{L} = \frac{e^2 c^2}{8\pi \epsilon_0 m_e^2 r^3} \vec{S} \cdot \vec{L} \quad (39)$$

mit dem 'Bahnradius' r . Das Skalarprodukt kann man so berechnen:

$$\vec{S} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2} \left(\vec{J}^2 - \vec{L}^2 - \vec{S}^2 \right) = \frac{\hbar^2}{2} [j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)] \quad (40)$$

Beispiel:

Wasserstoff, $l = 1$:

$$a) j = 3/2: \quad j(j+1) - l(l+1) - s(s+1) = 1$$

$$b) j = 1/2: \quad j(j+1) - l(l+1) - s(s+1) = -2$$

Die Energieverschiebung ist nicht symmetrisch!

Um die Energieverschiebung quantitativ zu bestimmen, muss man - mit der Störungsrechnung - den Erwartungswert $\langle \frac{1}{r^3} \rangle$ mit den Wellenfunktionen des Wasserstoffs berechnen.

Abschätzung der Größenordnung (Bohr-Formel):

$$\left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle \sim \frac{1}{r_n^3} \sim \frac{\alpha^3 m_e^3}{n^6} \cdot \frac{1}{(\hbar c)^3} \quad (41)$$

Hier ist die von Sommerfeld im Zusammenhang mit der Feinstruktur der Spektrallinien eingeführte dimensionslose Feinstrukturkonstante verwendet worden (siehe Vorlesung 6):

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 \hbar c} \approx 0.0073 \approx \frac{1}{137} \quad (42)$$

⁶Qualitativ: Aus Protonsicht rotiert das Ruhe-Koordinatensystems des Elektrons bei jedem Umlauf einmal um seine Achse; siehe Jackson: Classical Electrodynamics

Die Energiekorrektur ist also von der Größenordnung

$$\Delta E \sim \alpha^4 m_e c^2 \frac{1}{n^6} \quad (43)$$

Diese ist um den Faktor

$$\frac{\alpha^2}{n^4} \quad (44)$$

kleiner als die Energieeigenwerte

$$E_n \sim \alpha^2 m_e c^2 \frac{1}{n^2} \quad (45)$$

VERSUCH: gelbe Natrium-Doppellinie

589.0 nm und 589.6 nm. Das Alkalimetall Natrium besitzt 11 Elektronen, das 'äußere' hat $n = 3$; Doppellinie: Übergang zwischen $3P_{1/2}$, $3P_{3/2}$ und $3S_{1/2}$. Achtung: Hier keine l-Entartung wie im H-Atom!

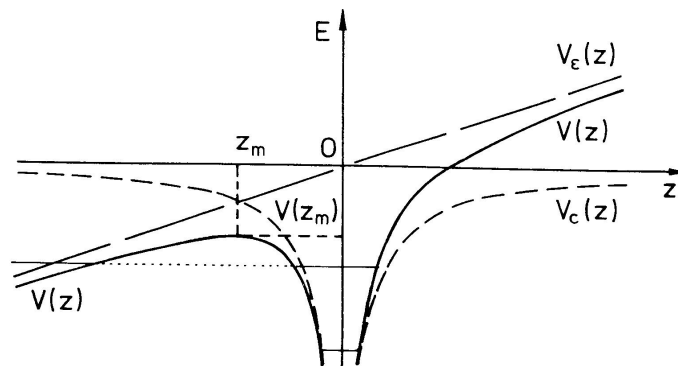
Bei Anlegen eines äußeren Magnetfeldes wird die Zeeman-Aufspaltung durch den Elektronspin in der Regel komplizierter. Man spricht dann vom anomalen Zeeman-Effekt, s. folgende Vorlesungen.

9.5. Stark-Effekt

Außer in äußere magnetische Felder kann man ein Atom auch in homogene externe E-Felder setzen. Im Jahr 1913 entdeckte Johannes Stark (Nobelpreis 1919), dass auch in diesem Fall Spektrallinien aufgespalten werden können. Der Nachweis ist relativ schwierig, da man vergleichsweise hohe Felder benötigt, um eine beobachtbare Linienverschiebung zu erzeugen.

Ein elektrisches Dipolmoment kann schon vorhanden sein (etwa beim Wassermolekül), oder muss erst durch das externe Feld induziert werden.

Wir betrachten den Stark-Effekt hier nur für Wasserstoff (den Spin ignorieren wir!). Wir wählen die z-Achse entlang der Feldrichtung. Dann wird das Coulombpotential verändert, siehe Abbildung.



Beim H-Atom ist im Grundzustand das Dipolmoment null (Symmetrie!) und deshalb verschwindet der Stark-Effekt in niedrigster Ordnung. Erst durch Induktion entsteht ein Dipolmoment und die Energieverschiebung ist

$$|\Delta E| = \alpha_P \vec{E}^2 \quad (46)$$

mit der Polarisierbarkeit α_P (\rightarrow Dielektrizitätskonstante!):

quadratischer Stark-Effekt .

Für die angeregten Zustände, etwa bei $n = 2$, spielt die l -Entartung eine wichtige Rolle (s. Theorie-Lehrbücher) und man beobachtet den linearen Stark-Effekt . Sowohl beim linearen als auch beim quadratischen Stark-Effekt ist die Polarisation proportional zur Feldstärke!