

TEIL 13

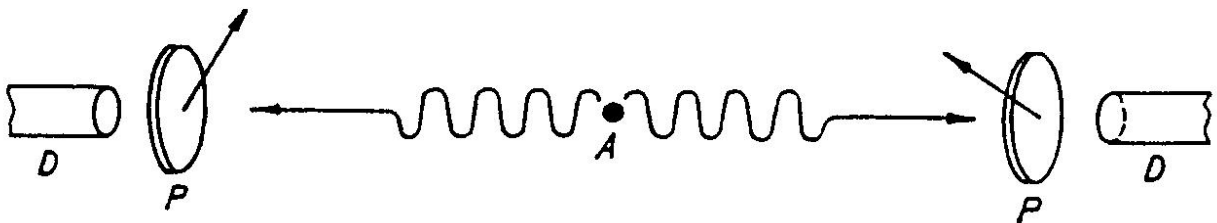
Nachdenken/Nachlesen:

Informieren Sie sich über die neuesten Experimente zu ‘Bose-Einstein-Kondensaten’.

15. Paradoxa und moderne Anwendungen der Quantenmechanik**15.0. Verschränkte Zustände**

Man spricht von einem verschränkten Zustand (engl. ‘entangled’) und verschränkten Teilchen, wenn es in einem System aus zwei Teilchen eine Observable für Teilchen 1 und eine Observable für Teilchen 2 gibt, die **nicht** unabhängig voneinander sind, d.h. bei Messung der einen ist die andere festgelegt. Man muss also das Gesamtsystem betrachten und es quantenmechanisch durch eine Gesamtwellenfunktion beschreiben.

Beispiel: Verschränkter Zustand mit Photonen (siehe Bild): Ein ruhendes angeregtes Atom mit Ge-

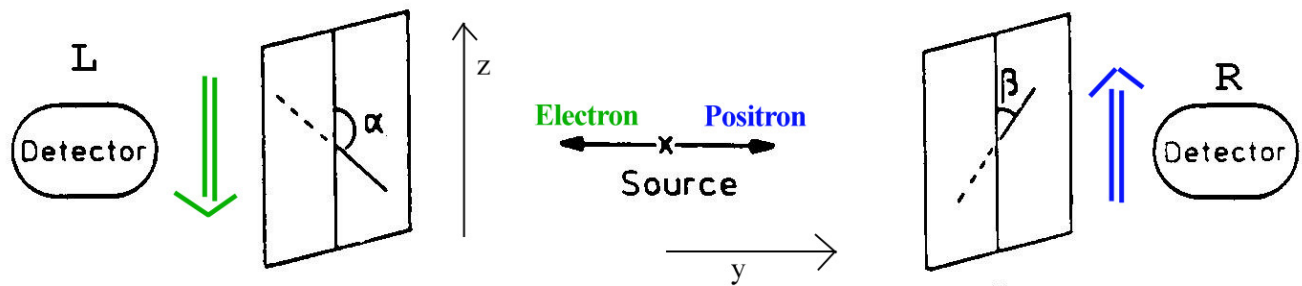


samtdrehimpuls $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ sendet in sehr kurzem Abstand zwei Photonen entlang der $\pm\mathbf{y}$ -Achse aus, und geht dabei in den Grundzustand mit $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ über. Wir betrachten nur solche Zerfälle, bei denen die beiden Photonen in entgegengesetzte Richtungen wegfliegen und keine Bahndrehimpulse¹ auftreten. Wegen der Drehimpulserhaltung gilt, dass beide Photonen die gleiche Helizität (Projektion des Spins auf die Flugrichtung) besitzen. Die beiden Drehimpulsvektoren zeigen also in entgegengesetzte Richtungen. Oder, äquivalent, aber in klassischer Sprache: wenn das eine Photon linkszirkular polarisiert ist, dann auch das andere, und umgekehrt; wenn das eine Photon rechtsszirkular polarisiert ist, dann auch das andere.

Beispiel: Verschränkter Zustand mit Elektronen (siehe Skizze): Wieder zerfällt ein System mit Gesamtspin 0, z.B. ein neutrales Meson, diesmal in Elektron und Positron (fliegen entlang $\pm\mathbf{y}$ -Achse), die beide in Bezug auf die z-Achse (senkrecht zur Flugrichtung) den Spin $+1/2$ oder $-1/2$ haben können, aber die Spins müssen entgegengesetzt gerichtet sein.

Wir betrachten im folgenden die Version mit Elektronen.

¹Abschätzung: $r_{Atom} \cdot p_{Photon} \sim 10^5 \text{ fm} \cdot 1 \text{ eV}/c = 0.1 \text{ fm MeV}/c \ll 200 \text{ MeV fm}/c = \hbar$ - zu klein!



Wir messen zunächst links in $+z$ -Richtung und auch rechts in $+z$ -Richtung. Vor der Emission der Teilchen (genauer vor der *Messung* der Polarisationsrichtung!) wissen wir nicht, wie sie polarisiert sind. Wir messen nun *eines* der Elektronen². Die Versuchsanordnung funktioniert so, dass der Filter nur Teilchen mit der 'richtigen' Polarisationsrichtung durchlässt, und der Detektor dann '1' sagt, sonst '0'. Man beachte: Im Gegensatz zu einem Pol-Filter für linear pol. Licht darf man den Elektronfilter *nicht* um 180° drehen!

In der Sprache der Quantenmechanik ist durch die Messung aus der zunächst unbestimmten Polarisationsrichtung eine herausprojiziert worden! Sobald wir das eine Elektron gemessen haben, wissen wir mit Sicherheit, welchen Ausgang die gleiche Messung am anderen Teilchen haben wird: die entgegengesetzte nämlich!

Beispiel:

Messprotokoll:

<i>Elektron</i>	<i>Positron</i>
1	0
1	0
0	1
1	0
0	1

Man kann die Filter/Detektoren z.B. durch Stern-Gerlach-Apparate realisieren.

Beachte: Oft ist unsere Sprechweise in diesem Zusammenhang 'schlampig': man darf eigentlich nicht sagen 'das Elektron wird beim Zerfall mit dieser oder jener Spinorientierung produziert' - wir können erst nach der Messung über diese Größe Aussagen machen, vorher hat man immer eine Linearkombination der möglichen Zustände!

Beispiel, siehe Kapitel 8:

Zwei unterscheidbare Teilchen befinden sich in einem Potentialtopf der Breite a . Beide seien zunächst im Grundzustand (Energie jeweils E_1). Jetzt fügen wir dem System die Energie $\Delta E = 3 E_1$ zu, ohne kontrollieren zu können, wie sich diese auf die Teilchen verteilt. Da der nächsthöhere Energiezustand gerade $E_2 = 4 E_1$ erfüllt, kann offenbar genau eines der Teilchen die Energie ΔE aufnehmen. Da beide Teilchen gleichberechtigt sind, wird sich Teilchen A nach der Energiezufuhr in folgendem

²Hier: Elektron = Sammelbegriff für Elektron und Positron!

Überlagerungszustand befinden:

$$\psi_A = \sqrt{\frac{1}{2}} [\psi(E_1) + \psi(E_2)e^{i\phi}] = \sqrt{\frac{1}{a}} \sin \frac{\pi}{a} x - \sqrt{\frac{1}{a}} \sin \frac{2\pi}{a} x \quad (\text{Beispiel } \phi = \pi) \quad (1)$$

wobei die beiden Eigenfunktionen $\psi(E_1)$ und $\psi(E_2)$ die Energieeigenwerte E_1 und $E_2 = 4 E_1$ haben. Für Teilchen B - unabhängig betrachtet - gilt entsprechendes. Die beiden Teilchen sind hier aber verschränkt, und sobald man die Energie des einen gemessen hat, befindet es sich in einem der Eigenzustände $\psi(E_1)$ oder $\psi(E_2)$ - und damit auch das zweite Teilchen im jeweils anderen Zustand! Insbesondere ist also hier die Energie erhalten, die Summe der Energien ist immer $E_1 + E_2$.

Mathematisch kann man den verschränkten Zustand (= Gesamtsystem der beiden Teilchen) so beschreiben³:

$$\psi = \sqrt{\frac{1}{2}} [\psi_A(E_1) \psi_B(E_2) \pm \psi_A(E_2) \psi_B(E_1)] \quad (2)$$

15.1. Das ‘Paradoxon’ von Einstein, Podolsky und Rosen

A. Einstein, B. Podolsky und N. Rosen haben 1935 ein berühmtes Papier veröffentlicht, in dem es letztendlich auch um die Frage geht, ob der Zufall in der Quantenmechanik eine prinzipielle Eigenschaft der Natur darstellt oder nur eine Folge der Unvollständigkeit unseres Wissens ist.

Sie schlugen ein (Gedanken-)Experiment vor, das unter dem Namen [EPR-Paradoxon](#) bekannt ist.

Es gibt inzwischen mehrere Varianten; allen ist gemeinsam, dass man einen **verschränkten Zustand** herstellt. Wir betrachten wieder das Elektron-Experiment des vorherigen Abschnitts, aber wir verallgemeinern, indem wir die beiden Polarisations-Detektoren links und rechts jetzt so orientieren, dass ihre Vorzugsrichtungen einen Winkel α bzw. β relativ zur z-Achse einschließen. Sie sollen immer in der $x - z$ -Ebene messen (also senkrecht zur Verbindungslinie der beiden Detektoren). Wir nehmen an, dass bei der Entstehung der Elektronen alle Spinorientierungen (in der $x - z$ -Ebene) mit gleicher Wahrscheinlichkeit erzeugt werden.

Im EPR-Papier wird ein solches Experiment als Gedankenexperiment diskutiert; es erscheint ‘paradox’ aus folgendem Grund: Wenn beide Elektronen schon sehr weit voneinander entfernt sind, beeinflusst eine Messung ‘links’ eine darauffolgende (fast gleichzeitig durchgeführte) Messung ‘rechts’. Es gibt also *scheinbar* eine Informationsübertragung mit Überlichtgeschwindigkeit⁴ (‘Nichtlokalität’). Die ‘klassische’ Voraussage, dass man das linke und das rechte Elektron unabhängig messen kann, ist aber mit der Quantenmechanik nicht verträglich, denn wegen der Verschränkung bedeutet dies eine gleichzeitige Messung des Drehimpulses in zwei Raumrichtungen.

Der von EPR vorgeschlagene Ausweg: Die QM ist nicht vollständig, es gibt zusätzliche versteckte Variable: diese sorgen dafür, dass das rechte System schon von vorneherein alles über das linke ‘weiß’ und - wegen der ‘Lokalität’ der Messung (in der klassischen Physik!) - deshalb keine Konflikte mit der Relativitätstheorie auftreten können.

³Je nachdem ob es sich um identische oder unterscheidbare Teilchen handelt, kann noch ein Phasenfaktor zwischen den beiden Termen erlaubt sein - aber das ist hier nicht relevant.

⁴Man kann sich überlegen, dass man auf diese Weise NICHT Informationen mit $v > c$ übertragen kann. Man könnte eine Information ‘links’ in einen Winkel des Polarisationsfilters α übersetzen; die rechte Seite kann aber diese Information nur auswerten, wenn sie den Winkel α und das ‘linke Messresultat kennt - diese Daten muessen separat - max. mit Lichtgeschwindigkeit - übertragen werden. Siehe auch Kapitel über Teleportation.

Für eine quantitative Analyse berechnen wir (mit der Quantenmechanik), mit welcher Wahrscheinlichkeit das Elektron links durch ein Polarisationsfilter der Orientierung α durchgelassen wird, unter der Annahme dass dessen Spinrichtung bekannt ist (z.B. aus der Messung des Positrons!) bzgl einer Achse mit dem Winkel γ zur z -Achse.

Der Elektronenzustand ist (s. Theorievorlesung bzw. Theoriebücher) durch folgenden Spinor beschrieben:

$$\chi_\gamma = \begin{pmatrix} \cos \gamma/2 \\ \sin \gamma/2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Einen solchen Zustand kann man präparieren, wenn das Elektron durch ein entsprechend orientiertes Filter (Winkel γ zur z -Achse) hindurchfliegt. Wir nehmen hier vereinfachend an, dass der Spin immer senkrecht zur Flugachse steht, dann ist χ reell⁵. Beachte: Es tritt $\gamma/2$ auf!

Beispiel:

Die Spin-up - und Spin-down-Zustände ($\gamma = 0^\circ, 180^\circ$) sehen also so aus:

$$\uparrow = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \downarrow = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Der allgemeine Spinzustand χ_γ kann offenbar also Linearkombination dieser beiden Spinoren (=Basis) dargestellt werden.

Die Messung wird beschrieben durch den Drehimpulsoperator 'in α -Richtung', den wir aus den beiden Anteilen in z - und x -Richtung linear kombinieren können⁶.

$$\hat{L}_\alpha = \frac{1}{2} \cdot \left[\cos \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \sin \alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \quad (5)$$

Die auftretenden Matrizen sind zwei der drei [Pauli-Matrizen](#) (Theorie-Vorlesung).

Offenbar sind die Zustände (4) Eigenfunktionen zum Spinoperator in z -Richtung ($\alpha = 0$) mit den Eigenwerten $\pm 1/2$:

$$\hat{L}_0 \uparrow = \frac{1}{2} \uparrow \quad \hat{L}_0 \downarrow = -\frac{1}{2} \downarrow \quad (6)$$

Man beachte: Auch wenn $\gamma = 179^\circ$ ist die Wahrscheinlichkeit $+1/2$ zu messen ($\alpha = 0$) von null verschieden!

Beispiel mit $\alpha = \gamma$:

$$\begin{aligned} \hat{L}_\alpha \chi_\alpha &= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \alpha/2 + \sin \alpha \sin \alpha/2 \\ \sin \alpha \cos \alpha/2 - \cos \alpha \sin \alpha/2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (\cos^2 \alpha/2 - \sin^2 \alpha/2) \cos \alpha/2 + 2 \sin \alpha/2 \cos \alpha/2 \sin \alpha/2 \\ 2 \sin \alpha/2 \cos \alpha/2 \cos \alpha/2 - (\cos^2 \alpha/2 - \sin^2 \alpha/2) \sin \alpha/2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos \alpha/2 \\ \sin \alpha/2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7)$$

⁵hängt ab von der Darstellung der Drehimpulsoperatoren!

⁶ \hbar setzen wir gleich 1, siehe auch Optik!

Eigenzustand!

Den Erwartungswert für die Messung des Spins links bekommen wir aus⁷

$$\langle s_\gamma^l(\alpha) \rangle = \chi_\gamma^T \hat{L}_\alpha \chi_\gamma = \dots = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \gamma) \quad (8)$$

Kennen wir γ nicht, entspricht das einer Mittelung über γ (alle Werte sind a priori gleich wahrscheinlich):

$$\langle s^l(\alpha) \rangle = 0 \quad (9)$$

Unsere Apparatur ist aber nun so aufgebaut, dass der Detektor nicht $+1/2$ oder $-1/2$ anzeigt, sondern 1 oder 0. Deshalb muss man die Erwartungswerte entsprechend verschieben:

$$\langle s_\gamma^l(\alpha) \rangle = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \gamma) \rightarrow \frac{1}{2} \cos(\alpha - \gamma) + \frac{1}{2} = \cos^2\left(\frac{\alpha - \gamma}{2}\right) \quad (10)$$

Der Mittelwert über γ ist jetzt $1/2$. Das ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Detektor anspricht.

Betrachtet man die rechte Seite der Apparatur allein, gilt entsprechendes, nur muss der \cos durch \sin ersetzt werden, da ja der Positronspin dem des Elektrons entgegengesetzt ist (γ bezieht sich auch weiterhin auf den Elektronspin!):

$$\langle s_\gamma^r(\beta) \rangle = \sin^2\left(\frac{\beta - \gamma}{2}\right) \quad (11)$$

Jetzt geht es um die interessantere Frage nach den Korrelationen. $p(\alpha; \beta)$ bezeichne die Wahrscheinlichkeit, dass beide Detektoren '1' messen.

a) Quantenmechanik:

Wir müssen die beiden Wahrscheinlichkeiten links und rechts multiplizieren, dabei aber berücksichtigen⁸, dass nach der Messung links (die zuerst erfolgen möge) der Elektron-Spin jetzt eine wohldefinierte Ausrichtung hat (Winkel α):

$$p_\gamma(\alpha; \beta) = \cos^2\left(\frac{\alpha - \gamma}{2}\right) \cdot \sin^2\left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right) \quad (12)$$

Gemittelt über γ :

$$\boxed{p(\alpha; \beta) = \frac{1}{2} \sin^2\left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right)} \quad (13)$$

Die beiden Messungen sind also korreliert!

Beispiel: $\beta = \alpha + 180^\circ$: $p(\alpha; \beta) = \frac{1}{2}$ (Die anderen 50%: beide Messungen ergeben 0).

Wenn links der Zähler anspricht, dann immer auch rechts!

b) EPR+Bell:

Welches alternative Modell können wir betrachten? Einstein et al. haben seinerzeit postuliert, es gäbe

⁷vgl. $\int \psi^* \hat{G} \psi$

⁸bedingte Wahrscheinlichkeiten!

‘versteckte’ Parameter ζ in der Theorie, die den Zufall eliminieren, also einen quantenmechanischen Zustand exakt festlegen, im klassischen Sinne. In unserem Beispiel wird durch ζ die Elektronspinausrichtung beim *Zerfall* (nicht erst bei der Messung) festgelegt. Man kann ζ jedoch nicht messen (damit wäre der Quantenzustand zerstört, eine Eigenfunktion herausprojiziert), deshalb könnte man diesen Vorschlag als ‘Metaphysik’ abtun. Aber es stellt sich heraus, dass die Existenz von ζ allein einen Einfluss auf Observable hat!

John Bells Überlegungen (~ 1964) dazu: Wir nehmen an, auch die Spin-Projektion (in der x-z-Ebene) in eine weitere Richtung ζ sei wohldefiniert, entweder links oder rechts. Wir betrachten das Projektionsergebnis wie ein weiteres ‘Messergebnis’ (das aber nicht experimentell zugänglich ist). D.h. wir haben zusätzliches Wissen (das versteckt ist, da es durch eine Messung nicht zugänglich ist).

Wir können schreiben:

$$p(\alpha; \beta) = p(\alpha, \zeta; \beta) + p(\alpha, \zeta + 180^\circ; \beta) = p(\alpha, \zeta; \beta) + p(\alpha; \beta, \zeta) \quad (14)$$

Dabei ist $p(\alpha, \zeta; \beta)$ die Wahrscheinlichkeit, dass rechts in Richtung β und links in Richtung α und ζ der Detektor anspricht. Diese Wahrscheinlichkeit ist offenbar $\leq p(\alpha; \beta)$. Ähnliches gilt für $p(\alpha, \zeta + 180^\circ; \beta)$, die Summe der beiden ist aber wieder $p(\alpha; \beta)$. Wegen der Drehimpulserhaltung ist das die Messung bei $\zeta + 180^\circ$ auf der linken Seite äquivalent einer Messung von ζ auf der rechten Seite. Wenn wir zwei Projektionen (α, ζ) kennen, ist der Quantenzustand vollständig bestimmt (modulo Phasen). Die zwei ‘Messungen’ auf einer Seite sollen sich nicht beeinflussen, also

$$p(\alpha, \zeta; \beta) = p(\zeta, \alpha; \beta) \quad (15)$$

etc. Das bedeutet: wir ‘kennen’ beide Projektionen (α, ζ), aber nur eine ist experimentell zugänglich. Ähnlich wie (14) kann man schreiben:

$$p(\zeta; \beta) = p(\zeta, \alpha; \beta) + p(\zeta; \beta, \alpha) \quad (16)$$

$$p(\alpha; \zeta) = p(\alpha, \beta; \zeta) + p(\alpha; \zeta, \beta) \quad (17)$$

da ja die Richtungen beliebig gewählt werden können. Da alle Wahrscheinlichkeiten positiv sind, kann man weiter folgern:

$$p(\zeta; \beta) \geq p(\zeta, \alpha; \beta) \quad p(\alpha; \zeta) \geq p(\alpha; \zeta, \beta) \quad (18)$$

Einsetzen in (14):

$$\boxed{p(\alpha; \beta) \leq p(\zeta; \beta) + p(\alpha; \zeta)} \quad (19)$$

Das ist die **Bellsche Ungleichung** ! Sie⁹ hängt nur von Korrelationen mit je zwei Winkeln ab, bezieht sich also nur noch auf messbare Größen, nämlich je eine Messung links und rechts. Wie wir gleich sehen, ist diese Ungleichung keineswegs trivial. Die Theorie der versteckten Parameter ist also anhand dieser Ungleichung überprüfbar.

c) Naives Modell:

Wir folgen der Philosophie von EPR und konstruieren ein konkretes ‘naives’ Modell. Wie nehmen

⁹Man kann sie an einem Dreieck (Seitenlängen) visualisieren.

an, dass der Spin schon bei Zerfall des Mutterteilchens eine wohldefinierte Richtung γ hat, die wir zwar noch nicht kennen, die aber festliegt. γ ist jetzt der ‘versteckte’ Parameter im Sinne von EPR.

$$p_{\gamma}(\alpha; \beta) = \cos^2\left(\frac{\alpha - \gamma}{2}\right) \cdot \sin^2\left(\frac{\beta - \gamma}{2}\right) \quad (20)$$

Beachte den Unterschied zu (13)! Die Messungen links und rechts sind unabhängig! Da wir γ nicht kennen, müssen wir wieder mitteln:

$$p(\alpha; \beta) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \sin^2\left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right) \quad (21)$$

Dies ist verschieden von der Vorhersage der QM!

Beispiel:

$$\alpha = 0, \beta = 90^{\circ}, \gamma = 45^{\circ}$$

A) QM:

$$p(\alpha; \beta) = 0.250 \quad p(\alpha; \gamma) = 0.073 \quad p(\gamma; \beta) = 0.073$$

B) Bell:

$$p(\alpha; \beta) \leq p(\alpha; \gamma) + p(\gamma; \beta)$$

konsistent mit QM.

C) *naiv:*

$$p(\alpha; \beta) = 0.250 \quad p(\alpha; \gamma) = 0.162 \quad p(\gamma; \beta) = 0.162$$

verletzt QM !

Beachte: solange man nur eine Seite des Experimentes betrachtet, stimmen alle Modelle/Theorien überein!

Experimente haben überprüft, welche der Aussagen richtig ist. Das Bild zeigt das Ergebnis eines frühen Versuchs mit Protonen aus den 70er Jahren mit noch recht großen (statistischen) Fehlern. Die im Diagramm aufgetragene Korrelation ist etwas anders definiert als hier. Die Bellsche Ungleichung lässt nur Punkte in der oberen linken Hälfte zu.

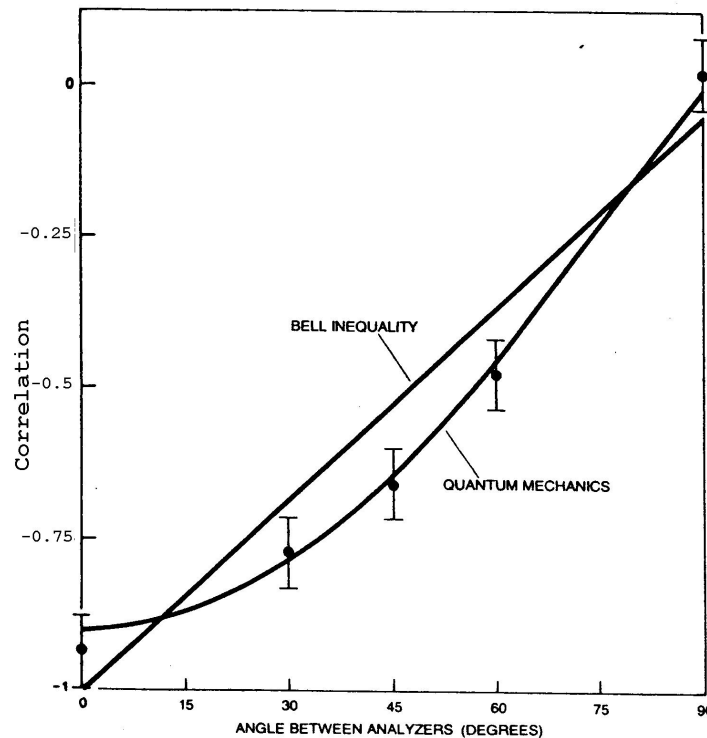
Alle Messungen haben die Quantenmechanik bestätigt und schließen die EPR-Hypothese klar aus!

15.2. Quantenkryptographie

Bei der Verschlüsselung geht es darum, eine Nachricht so zu kodieren, dass nur der legitime Empfänger die zur Dekodierung notwendige Information besitzt. Die Übertragung der Daten kann also ‘öffentlich’ erfolgen.

Es gibt verschiedene Verfahren, die auf einem geheimem ‘Schlüssel’ (z.B. einer Zahlenkette) basieren. Dieser Schlüssel muss (unverschlüsselt!) so übertragen werden, dass ein ‘Mithören’ ausgeschlossen ist. Dazu kann die QM zwar nicht *direkt* beitragen, aber bei quantenmechanischen Übertragungsverfahren können ‘Lauscher’ erkannt werden!

Grundidee: Eine Messung (=lauschen) beeinflusst einen quantenmechanischen Zustand, insbesondere wird aus einer Linearkombination von Eigenzuständen einer herausprojiziert.



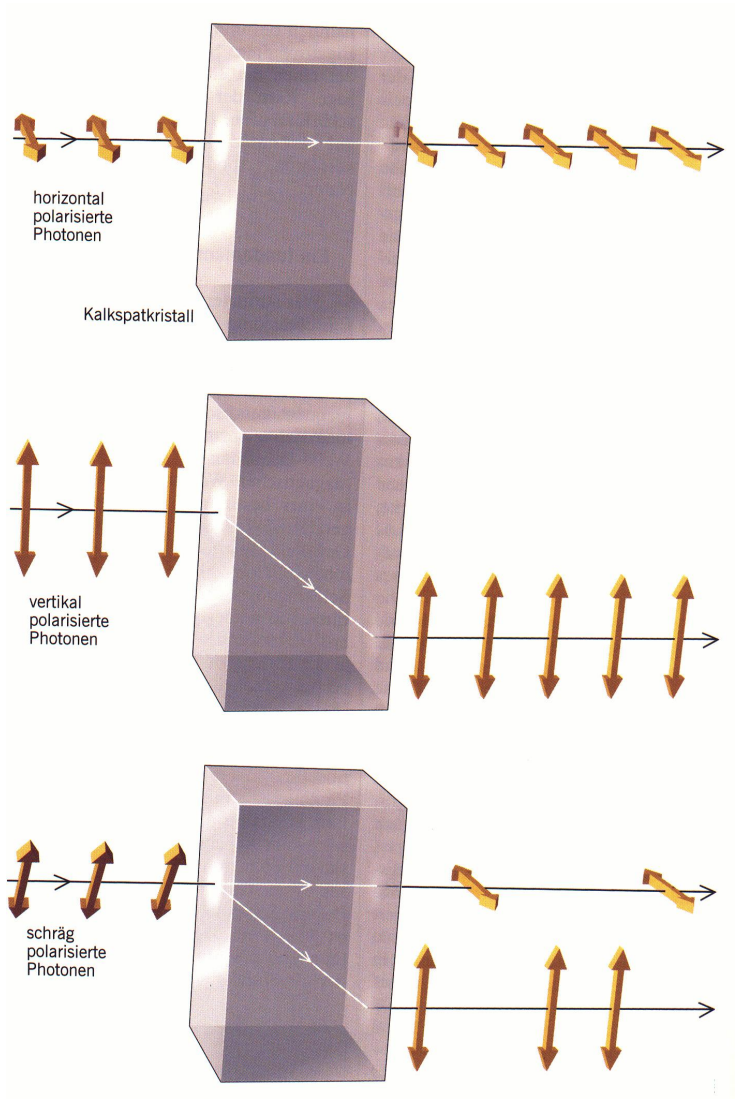
Gesendet wird von 'Alice', 'Bob' ist der legitime Empfänger und 'Eve' lauscht.

Alice sendet Photonen aus, die jeweils (bei fester Frequenz und gegebener Richtung) nur zwei mögliche Zustände haben können: Spin in oder entgegen der Flugrichtung, also Helizität ± 1 . In klassischer Sprechweise sind das rechts-zirkular oder links-zirkular polarisierte Wellen. Statt der zirkularen Polarisation benutzen wir im folgenden Gedankenexperiment aber die uns vertrautere lineare Polarisation (indem wir die Photonen durch ein $\lambda/4$ -Plättchen schicken).

Die Polarisationsrichtung kann man verlustfrei mit einem doppelbrechenden Kristall messen, siehe Skizze. Es reicht, z.B. den oberen Weg mit einem Detektor abzufragen. Das Resultat einer Messung ist dann also 'ja' oder 'nein'.

Um zu testen, ob der Übertragungskanal abgehört wird, sendet Alice ca. 100 zufällig orientierte Photonen aus, die Bob empfängt. Auch Alice selbst muss wissen, welche Polarisation die verschickten Photonen haben; sie kann dazu einen verschränkten Zustand aus zwei Photon benutzen: eines wird vermessen, das andere verschickt. Alice wählt zur Messung ihres Photons zufällig ein Polarisationsfilter, das entweder die 'geraden' ($0^\circ, 90^\circ$) oder die 'schrägen' ($45^\circ, 135^\circ$) Zustände misst. In jedem Fall wird das Photon nachgewiesen, siehe Skizze. Insgesamt gibt es also jetzt vier Möglichkeiten der Messung von Alice, die wir mit den Polarisationsrichtungen, die durch die vier Winkel $0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$ der Polarisationsrichtung relativ zur Vertikalen gekennzeichnet sind, gleichsetzen. Beispiel: Photon habe Winkel 128° (d.h. bei einer Messung mit dieser Filterausrichtung ist dieser Zustand herausprojiziert worden), Alice misst in Bezug auf die $45^\circ/135^\circ$ -Achsen: mögliches Resultat: 135° !

Auch Bob wählt jeweils einen der beiden Polarisationsfilter zufällig, auch er erhält 4 mögliche Resultate (Zwei Einstellungen, zwei Messalternativen). Auch sein Filter kann für jedes eintreffende Photon neu eingestellt werden- Zur Synchronisierung werden die Zeitpunkte der Emission öffentlich (also für Eve zugänglich) übertragen. Auch Bobs Wahl der Filterorientierung wird öffentlich gemacht, ebenso



ALICE sendet:

↑ ↓ ↗ ↘ ↔ ↗ ↑ ↓

BOB misst:

⊕ ⊕ ⊗ ⊗ ⊕ ⊗ ⊗ ⊗ ⊕

↑ ↔ ↗ ↘ ↔ ↗ ↗ ↗ ↓

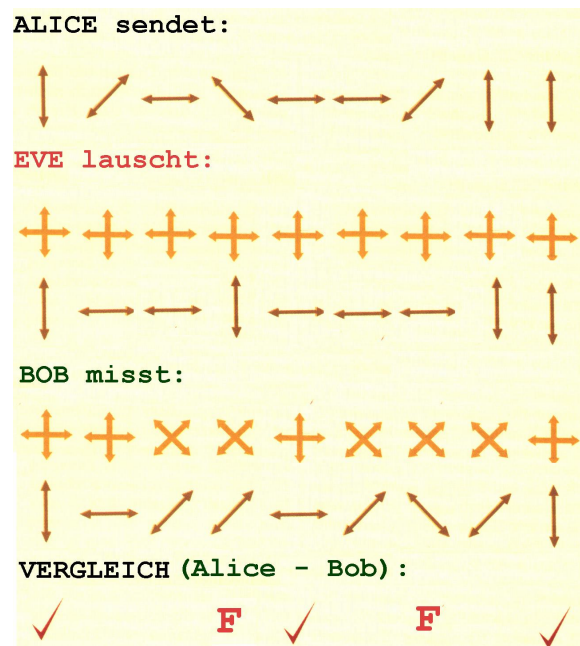
VERGLEICH:

✓ ✓ ✓ ✓ ✓

Bobs Messergebnisse, die er an Alice zwecks Vergleich übersendet; diese führt den Vergleich durch, denn nur sie kennt die PolarisationsEinstellungen und Messergebnisse ihres Filters. Dabei werden nur die Ergebnisse berücksichtigt, die mit der 'richtigen' Einstellung von Bobs Filter erfolgten.

a) Eve hat nicht gelauscht: Alice und Bob haben etwa 50 brauchbare Paare von Messungen, alle stimmen überein, siehe Bild. Nach der Messung werden die Photonen von Bob zerstört/absorbiert.

b) Eve lauscht. Sie ist genauso wie Bob ausgerüstet und analysiert die Photonen vor Bob. O.B.d.A. nehmen wir an, dass Eves Polarisationsfilter immer 'gerade' ausgerichtet ist. In 50% der Fälle 'passt' diese Richtung und das Photon von Alice bleibt unverändert. 'Schräge' Photonen dagegen werden durch die Projektion zu 'geraden'. Misst Bob 'schräg' (und wenn diese Messung gültig ist), findet er mit 50% Wahrscheinlichkeit das falsche Resultat. Insgesamt ist also ein Viertel der gültigen Messungen fehlerhaft, das bedeutet im Mittel 12.5 bei 100 Photonen; die Wahrscheinlichkeit, dass diese Zahl zufällig null wird - und damit der Lauschangriff unentdeckt bleibt - ist vernachlässigbar. Obiges Beispiel wird also jetzt abgewandelt, wie in der Abbildung unten gezeigt.



Ist sichergestellt, dass nicht abgehört wird, kann man den Schlüssel übertragen (kann Teil der Testsequenz sein).

FRAGE: Warum müssen die Polarisationsrichtungen immer wieder geändert werden ?

Das obige Gedankenexperiment wurde schon auf verschiedene Weisen experimentell realisiert: Die Messungen bestätigen die Quantenmechanik!

Beispiel:

Experiment in Wien, Photonübertragung über eine Strecke von 1 km via Glasfaser.

15.3. Teleportation

Kann man wie in der Fernsehreihe 'Star Trek' Menschen mit Überlichtgeschwindigkeit an andere Orte 'beamen'? Dabei wird angenommen, dass der menschliche Bauplan/Quantenzustand vollständig gemessen (von Alice) und übertragen wird. Am Empfängerort (Bob) wird aus dort vorhandenen Atomen dann der Anfangszustand vollständig rekonstruiert. Am Ort des Senders wird gleichzeitig der Mensch zerstört, d.h. in seine Atome zerlegt, und der Bauplan vernichtet.

Antwort: Jein, man kann es zumindest mit einem Photon X (statt einem Menschen) und nur mit Lichtgeschwindigkeit. Dabei wird nicht der Quantenzustand des Photons X gemessen und (irgendwie) verschickt, sondern dessen Quantenzustand wird auf ein anderes (im Prinzip ununterscheidbares) Photon übertragen, das an Bob versandt wird; Details folgen.

Beachte: Sowohl bei Star Trek als auch in der QM wird am Ort des *Senders* die Information zerstört, es findet also *kein* Klonen statt. Das ist in der QM verboten, denn dadurch könnte man die Heisenbergsche Unschärferelation umgehen, indem man z.B. von A den Impuls genau und von B den Ort genau messen würde ...

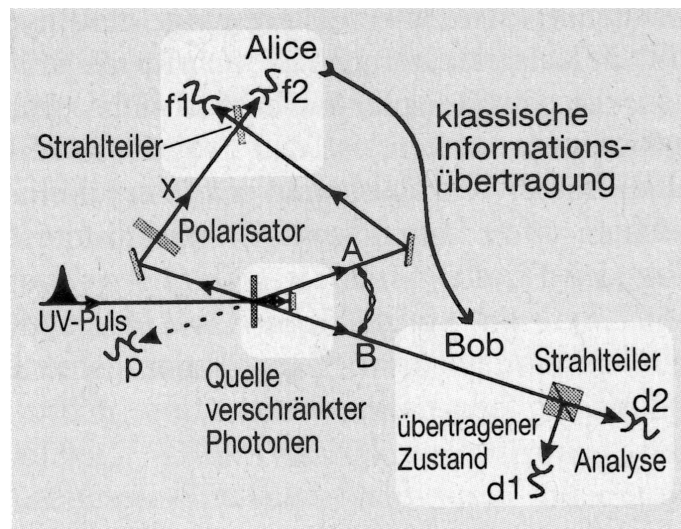
Die Schwierigkeiten bei der vollständigen Messung des Quantenzustandes des Menschen sind quantenphysikalischer Natur:

- Messung verändert im allgemeinen das zu messende System,
- Heisenbergsche Unschärferelation beschränkt Messgenauigkeit z.B. von Orstkoordinaten (aber das ist nicht immer erforderlich).

Punkt a) kann nur umgangen werden, wenn Alice KEINE Messungen direkt am Photon X vornimmt.

Auch bei der **(Quanten-)Teleportation** wird die Verschränkung ausgenutzt, in dem hier diskutierten Beispiel die von Photonen. Im Prinzip funktioniert es so, dass Alice und Bob je ein Photon A bzw. B aus einem verschränkten Paar erhalten. Dem Bob zugeschickten Photon B soll der Quantenzustand des Photons X , das Alice besitzt, aufgeprägt werden. Damit gilt sozusagen $B = X$.

Die Zeichnung illustriert das Verfahren.



Grob zusammengefasst:

- Ein hochenergetisches UV-Photon (Teil eines ultrakurzen UV-Laserpulses) wird beim Durchgang

durch einen Kristall in zwei miteinander verschränkte Photonen A und B im sichtbaren/nahen infraroten Wellenlängenbereich umgewandelt; diese sind senkrecht zueinander polarisiert, die einzelnen Polarisationsrichtungen (senkrecht, horizontal; jeweils relativ zur Zeichenebene) aber unbekannt; der Quantenzustand kann auch eine Superposition sein! Details zur Photonerzeugung: siehe Literatur.

ii) Ein zweites UV-Photon wird in ein linear polarisiertes ‘sichtbares’ Photon X (und ein weiteres Photon, das hier nicht wichtig ist) umgewandelt¹⁰. Der unbekannte Polarisationszustand dieses Photons (also *ein* Bit) soll an Bob übertragen werden. Dazu wird X ins Labor von Alice geschickt. Wir nehmen an, dass es entweder senkrecht oder horizontal polarisiert ist.

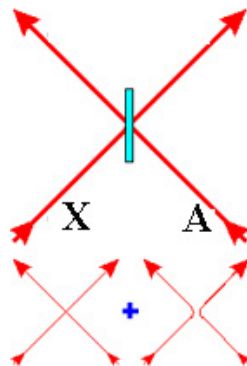
iii) Photonen A und X werden im Labor von Alice praktisch gleichzeitig am gleichen Ort (ein Strahlteiler) überlagert und so miteinander verschränkt. Im Prinzip könnte X auch irgendwoandersher außerhalb des Labors kommen, aber um den zeitlichen Überlapp mit A zu gewährleisten, wählt man die in ii) beschriebene Herstellungsweise. Das Gesamtsystem der beiden Photonen A und X befindet sich dann in einem der vier möglichen Bell-Zustände (modulo Normierung):

$$\psi_{diff}^{\pm} = \psi(H, V) \pm \psi(V, H) \quad \psi_{same}^{\pm} = \psi(H, H) \pm \psi(V, V) \quad (22)$$

bzw. einer Superposition dieser Zustände. Dabei bedeutet $\psi(H, V)$, dass A horizontal und X vertikal polarisiert ist.

iv) Um festzustellen, ob A und X gleich polarisiert sind oder nicht (dies muss bekannt sein, damit Bob seine Messung interpretieren kann), führt Alice mit Hilfe des Strahlteilers (Reflektion oder Durchlass je nach Polarisation) eine Messung durch und damit kollabiert die Gesamtwellenfunktion in genau einen der vier Bell-Zustände; die beiden Photonen werden dadurch verändert und können anschließend nicht weiter informationstechnisch verwertet werden. Es wird gemessen, ob beide Photonen links oder rechts den Strahlteiler verlassen oder je eins links und rechts herauskommt.

v) Der Bell-Verschränkungszustand kann eindeutig genau dann bestimmt werden, wenn die beiden Photonen in unterschiedlichen Richtungen ausgetreten sind. Die austretenden Photonen können aber nicht A bzw. X zugeordnet werden (entweder werden beide reflektiert oder beide durchgelassen). Dann liegt (ohne Beweis) der Zustand ψ_{diff}^{-} vor, die beiden Photonen A und X sind also unterschiedlich polarisiert, und damit haben X und B die gleiche Polarisationsrichtung! Hat Alice diesen



Bell-Zustand gefunden, signalisiert sie dies Bob, der B messen kann (Strahlteiler wie in Kapitel 15.2) und die gleiche Polarisation bekommt wie bei einer direkten Messung von X .

Falls (mit 75% Wahrscheinlichkeit) einer der drei anderen Bell-Zustände vorliegt, ist das Experiment gescheitert¹¹, was Alice sofort Bob mitteilt.

¹⁰Der Polarisator in der Zeichnung dient zur Neu-Polarisierung des Photons (!) und eventuellen Umwandlung in zirkular polarisiertes Licht, aber dies betrachten wir hier nicht.

¹¹Wir betrachten hier nur die einfachste Experimentieranordnung; man kann noch mehr ‘rausholen, siehe Literatur

Ein wichtiger Schritt ist, dass Alice Bob über die Auswertung der Strahlteiler-Messung informieren muss. Das erfolgt über konventionelle Kanäle, also höchstens mit Lichtgeschwindigkeit!

Experimente haben 1997 Teleportation demonstrieren können, z.B. in Innsbruck (Anton Zeilinger et al), inzwischen sogar über Entfernungen von mehreren Kilometern. Die theoretischen Grundlagen wurden 1993 von Charles Bennett u.a. gelegt.

Was hat man dadurch erreicht ? Praktische Anwendungen gibt es noch nicht, aber man kann so, wenn man anstelle des Photons X ein massives Teilchen benutzt, und dieses von Bob rekonstruieren lässt (in großem Abstand von Alice!), eine Teleportation mit Lichtgeschwindigkeit (Limitierung Informationsübertragung Alice - Bob) erzielen, was klassisch nicht möglich ist. Teleportation von Atomen ist inzwischen auch schon demonstriert worden, und zwar in mehreren Experimenten.

Ein Beamten eines Menschen ist aber noch lange nicht in Sicht, denn dazu muss der ganze Quantenzustand erfasst werden (10^{30} bits ?), ohne dass dabei eine Störung auftritt (zB. keine Wechselwirkung mit thermischen Photonen!)

15.4. Quantencomputer

In jedem 'konventionellen' Computer kommen Quanteneffekte zum Einsatz, von der Festplatte (Magnetismus) über das CD-Laufwerk (Laser) bis zum Transistor (Halbleitereigenschaften).

Da die einzelnen elektronischen Elemente wie Transistoren immer kleiner werden, kann man diese in ein paar Jahren nicht mehr als klassische makroskopische Systeme betrachten, sondern muss ihre quantenmechanischen Eigenschaften berücksichtigen.

Mit einem **Quantencomputer** ist aber etwas anderes gemeint, nämlich ein Computer, der Superpositionen von Zuständen benutzt und alle möglichen Superpositionszustände gleichzeitig verarbeitet. Das verspricht eine enorme Steigerung der Rechenleistung.

Sogenannte **Qubits** (Quantum Bits) sind die Basis des Quantencomputers. Sie können beliebige Werte zwischen 0 und 1 annehmen (= lineare Superposition der Werte 0 und 1). Eine Messung gibt immer nur 0 oder 1. Entsprechendes gilt für ein System aus N Qubits:

$$\psi_N = \sum_i c_i \psi_i \quad (23)$$

mit

$$\psi_1 = \psi(0, 0, 0), \quad \psi_2 = \psi(0, 0, 1) \quad \dots \quad \psi_8 = \psi(1, 1, 1) \quad (24)$$

am Beispiel $N = 3$. Mit N normalen binären Bits kann man 2^N verschiedene Integerzahlen darstellen, mit N QuBits aber jeden beliebigen 2^N -dimensionalen komplexen Vektor (gegeben durch die Koeffizienten c_i).

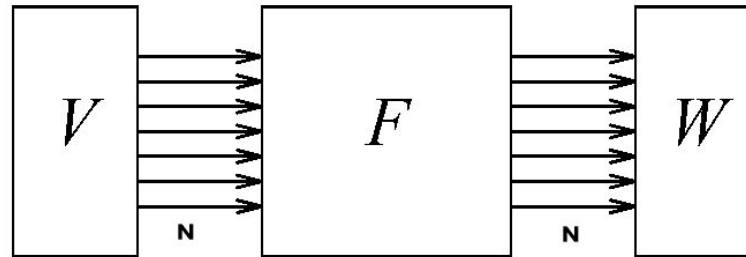
Beispiel:

Ein Speicherelement aus 3 Qubits könnte in einem der folgenden Zustände sein (modulo Normierung):

$$\begin{aligned} &\psi(1, 0, 0) \\ &0.5 \psi(0, 1, 0) - 0.8 i \psi(1, 0, 1) + 0.1 \psi(1, 1, 1) \\ &\psi(0, 1, 0) + \psi(1, 0, 0) \end{aligned} \quad (25)$$

Im letzten Fall sind die beiden ersten Bits offenbar verschränkt.

Die Skizze zeigt die prinzipielle Funktionsweise: N Eingangs-Qubits werden mit einem Quanten-Algorithmus auf N Ausgangs-Qubits abgebildet. Man kann also wegen der Superpositionszustände



den Algorithmus gewissermaßen gleichzeitig auf alle möglichen Eingangszustände anwenden. Es handelt sich also um einen Super-Parallelrechner!

Die experimentelle Realisierung von (max. ca. einer Handvoll) Qubits ist bereits auf verschiedene Weisen gelungen (Elektronen, Photonen, Ionen). Die beiden Zustände können Spinorientierungen, elektronischen Anregungen oder Ladungen entsprechen. Damit hat man bisher nicht viel mehr als logische Gatter realisieren können.

Problembereiche sind:

- Ein System von N Qubits kann zwar sehr viele interne Zustände repräsentieren, aber die Ausgabe des Ergebnisses (= Messung !) umfasst nur N gewöhnliche Bits - man kann Quantencomputer also nur anwenden, wenn das Resultat 'einfach' ist, z.B. bei einer Primzahlzerlegung. Einer der bekanntesten Algorithmen für Quantencomputer wurde 1994 von Peter Shor entwickelt - er zerlegt Primzahlen. Eine Realisierung gibt es mit 7 Qubits.
- Jede Messung (d.h. auch jede Wechselwirkung mit der Umgebung, z.B. mit IR-Photonen) zerstört die Superposition, es kommt - typisch nach Bruchteilen von Mikrosekunden - zur 'Dekohärenz'. Deshalb ist es schwierig, mehrere Qubits über längere Zeiträume als Quantenrechner zu betreiben.

Beispiel:

Eines der einfachsten Gatter die man mit einem 2er Qubit realisieren kann ist das CNOT (Controlled NOT); eigentlich interessiert nur eines der Output-Bits (das zweite), da man aber immer nur N auf N abbilden kann, und mindestens $N = 2$ Qubits zur Realisierung erforderlich sind, arbeitet man mit 2 Qubits. Auch wenn dieses CNOT-Gatter sehr einfach erscheint, spielt es eine wichtige Rolle, denn man kann zeigen, dass jeder Quantenalgorithmus zusammengesetzt werden kann aus einzelnen Qubit-Operationen und aus 2-Qubit-CNOT-Gattern. Die Tabelle zeigt die Definition und die Formel die Matrixrealisierung der CNOT-Abbildung:

$$\begin{aligned}
 (0,0) &\rightarrow (0,0) \\
 (0,1) &\rightarrow (0,1) \\
 (1,0) &\rightarrow (1,1) \\
 (1,1) &\rightarrow (1,0)
 \end{aligned}$$

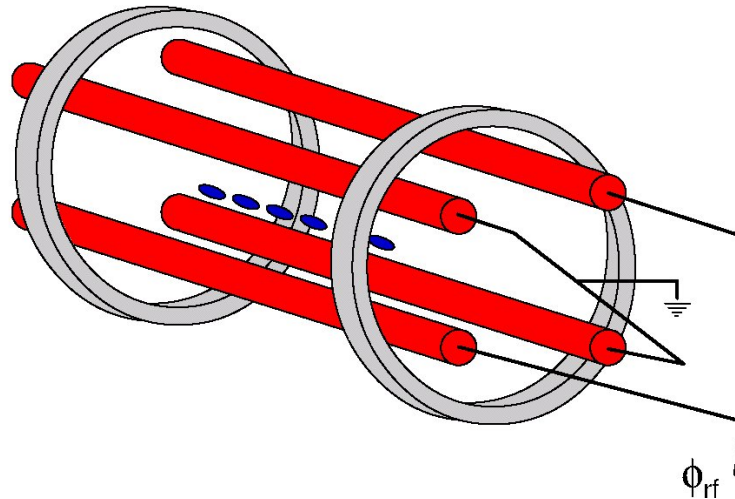
Das erste Bit hat die Rolle eines Kontrollbits; nur wenn es gesetzt ist, wird auf das zweite Bit die NOT-Operation angewandt. Man beachte, dass als Input eine beliebige Linearkombination der vier

'reinen' Konfigurationen erlaubt ist.

$$\begin{pmatrix} (0,0) \\ (0,1) \\ (1,1) \\ (1,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (0,0) \\ (0,1) \\ (1,0) \\ (1,1) \end{pmatrix} \quad (26)$$

Diese Matrix kann man durch das Produkt (= Hintereinanderausführung) dreier Matrizen ausdrücken, die man jeweils aus Phasendrehungen bzw. Umklappoperationen zusammensetzen kann.

Die Realisierung gelang z.B. 2003 in Innsbruck, indem man zwei $^{40}\text{Ca}^+$ -Ionen, die bei sehr niedriger Umgebungstemperatur nebeneinander in einer 'Ionenfalle' eingesperrt sind, als Qubits einsetzte. Man erreicht sehr lange Dekohärenzzeiten, die sich 1 s annähern. Die Zustände 0 und 1 und Superpositionen werden durch zwei langlebige elektronische Anregungszustände realisiert (Grundzustand $S_{1/2}$ und $D_{5/2}$; elektrischer Quadrupolübergang!) Man kann zwischen ihnen umschalten, indem man fokussiertes Laserlicht geeigneter Wellenlänge auf eines der Ionen einwirken läßt.



Auslesen kann man den Zustand des Qubit-Systems durch Anregung vom Grundzustand in den $P_{1/2}$ -Zustand mit einem zweiten Laser. Falls diese Anregung gelingt, messbar durch das ausgestrahlte Fluoreszenzlicht, war das Ion im Grundzustand (und nicht im $D_{5/2}$ -Zustand).

Entscheidend ist die Kopplung der beiden Qubits, denn die CNOT-Operation (Inversion) des zweiten Qubits soll ja nur dann stattfinden, wenn das erste (Kontroll-Qubit) im Zustand '1' ist. Man kann die beiden Ionen in der Falle zu gemeinsamer mechanischer Schwingung anregen - falls diese angeregt ist, soll keine Änderung des 2. Qubits erfolgen dürfen.

Die Übertragung des Zustands des Kontroll-Qubits auf den Schwingungsmodus erfolgt mit Laserlicht etwas verschobener Frequenz, so dass z.B. vom $D_{5/2}$ -Zustand ('1') aus das Ion in den elektronischen Grundzustand ('0') übergeht bei gleichzeitiger Vibrationsanregung:

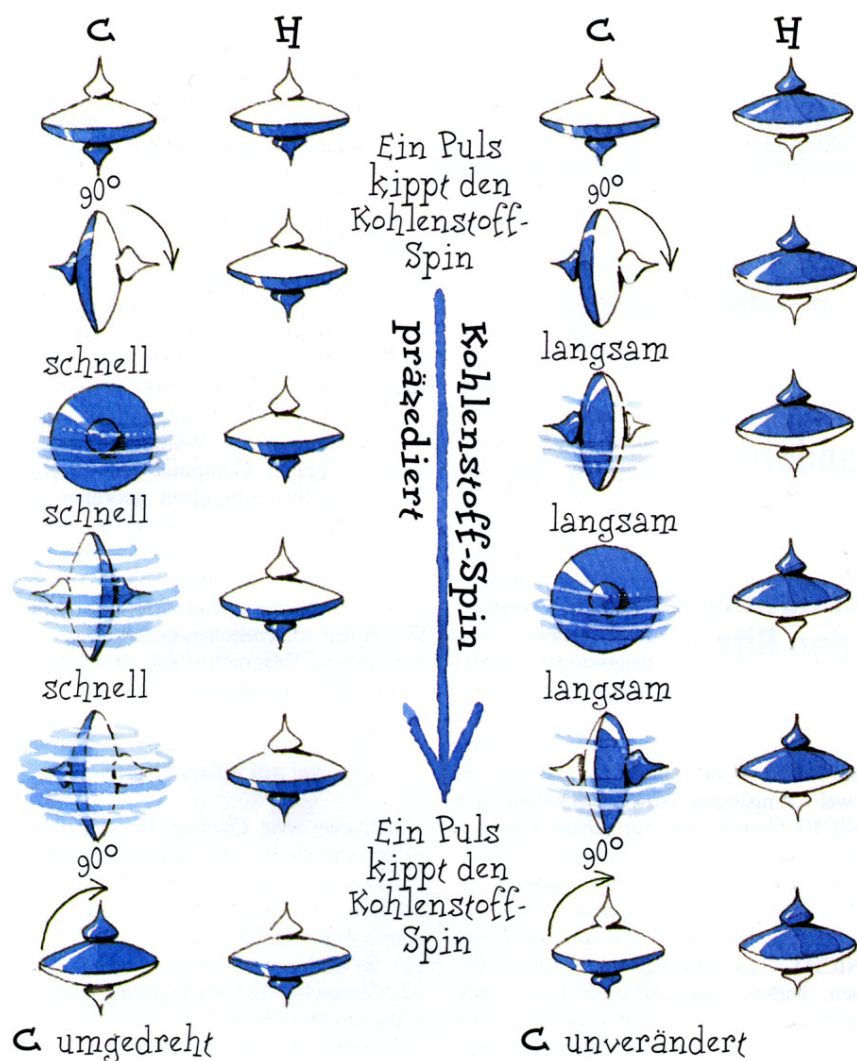
$$E_{\text{Laser}} = E_1 - E_0 - \Delta E_{\text{vib}} \quad (27)$$

Die CNOT-Operation wird mit unterschiedlich langen Laserpulsen realisiert; je nach Dauer ergibt sich ein elektronischer Übergang bzw. eine Phasenverschiebung um 180° . Besser kann man das am folgenden Beispiel verstehen.

Beispiel:

Eine andere Realisierung eines CNOT-Gatters nutzt die Kernspins von Kohlenstoff (C) und Wasserstoff (H, Kontrollbit) sowie deren Wechselwirkung in einem Chloroform-Molekül (C H Cl_3) aus (allerdings mit dem Kohlenstoff-Isotop ^{13}C das den Spin $1/2$ trägt, während ^{12}C spinlos ist). Ein äußeres B-Feld bestimmt die Referenzachse und die Präzessionsgeschwindigkeiten. Durch die Molekülbewegungen und deren Stöße untereinander werden die Kernspins praktisch nicht beeinflusst. Wichtig: man kann eine makroskopische Menge von Chloroform-Molekülen benutzen; so kann man den Zustand gut vermessen, mittels NMR = Nuclear Magnetic Resonance (Kernspinresonanz): die synchron rotierenden Spins senden ein Radiosignal aus, das man nachweist (genauer: beim Ausrichten der magnetischen Momente parallel zum externen B-Feld werden niederenergetische Photonen abgestrahlt).

Die Spinausrichtungen der Kernspins relativ zum Magnetfeld (magnetische Quantenzahl jeweils $\pm 1/2$) definiert die beiden Qubit-Werte. Die Skizze erläutert, wie durch sukzessives Anwenden von Pulsen elektromagnetischer Wellen (Drehung um x-Achse, welche senkrecht aus Zeichenebene herausragt; kurzer Puls: Spinänderung 90° = Überlagerung Spin 0 und Spin 1 in Bezug auf z, längerer Puls: Spinumklapp 180°) die CNOT-Operation zustande kommt, unabhängig vom Anfangszustand (incl. Überlagerungen!). Wichtig ist dabei die Kopplung der beiden Kernspins (mittels der Elektronenhülle),



denn die Spinorientierung des H-Kerns bestimmt die Präzessionsgeschwindigkeit des C-Kerns und damit den Ausgang der Operation.