

EINFÜHRUNG IN DIE QUANTENFELDTHEORIE

G.Roepstorff

Institut für Theoretische Physik

RWTH Aachen

WS 00/01

Einleitung

A great deal of my work is just playing with equations.

Paul Dirac (1963)

Quantenfeldtheorie, so sagt man, resultiere aus einer Vereinigung quantenmechanischer und relativistischer Prinzipien. Daneben wird auch die Meinung vertreten, sie sei letztlich nichts anderes als die *Theorie der zweiten Quantisierung*. Oft wird behauptet, die Quantenfeldtheorie sei eine Erweiterung der Quantenmechanik auf unendlich viele Freiheitsgrade. Für viele ist sie eine geeignete Sprache zur Beschreibung von Elementarteilchen und den in diesem Bereich stattfindenden Prozessen. Die heutige Gestalt der Quantenfeldtheorie wird allen diesen Charakterisierungen tatsächlich gerecht, und dennoch entzieht sich — viele Jahrzehnte nach ihrer Entstehung — eine der umfangreichsten und komplexesten Theorien, die je Physiker erdacht haben, der präzisen Definition und dem raschen Zugriff des Historikers. Warum? Nun, weil sie nie eine endgültige Form erreichte, es gleichermaßen Erfolge wie Rückschläge gab, und sie eher so etwas war wie ein Nährboden und immer noch ist, auf dem neue Ideen gedeihen, die die Physik in diesem Jahrhundert vorantreiben. Viele Ideen von gestern gelten heute nichts mehr, und die von morgen lassen sich nicht erahnen: Die Quantenfeldtheorie ist einem ständigen Wandel unterworfen.

1927 gilt als das Geburtsjahr dieser Theorie. In diesem Jahr publizierte P. Dirac zwei Arbeiten, in denen er das Fundament zur Quantenelektrodynamik legte¹. Dirac studierte darin das Strahlungsfeld und seine Kopplung an ein Atom. Indem er das Strahlungsfeld nicht mehr klassisch (im Sinne von Maxwell) sondern als ein Operatorfeld (Quantisierung der Fourier-Koeffizienten im Sinne von Bose-Vertauschungsrelationen) auffaßte, gelang ihm eine Überwindung der semiklassischen Strahlungstheorie, eine Beschreibung der quantenhaften Emission und Absorption von Photonen bei Strahlungsübergängen. Er konnte so die Lichtquantenhypothese von A. Einstein

¹P.A.M.Dirac, *Proc.Roy.Soc.A* **114**, 243 (1927), A **114**, 710 (1927). Eine eingehende Analyse dieser beiden Arbeiten findet man in: R.Jost: Foundations of Quantum Field Theory, in *Aspects of Quantum Theory* A.Salam, E.P.Wigner (Eds.), Cambridge Univ.Press. 1972 (Dirac zum 70sten Geburtstag gewidmet).

aus dem Jahre 1905 auf ein mathematisches Fundament stellen, fand das Teilchenverhalten der elektromagnetischen Strahlung zusammen mit der korrekten Statistik der Photonen in seinem Formalismus wieder und erkannte die Gesetze der Kopplung von Strahlung an Materie. Er konnte so zwei Dinge miteinander verschmelzen: (1) Die Quantenmechanik der Atome im Sinne von Bohr, Heisenberg und Schrödinger, (2) die Quantentheorie der Strahlung im Sinne von Planck, Einstein und Debye. Dirac unterschied bereits deutlich zwischen dem reellen Vektorfeld $A_\mu(x)$ der klassischen Theorie, das hier als ein Erwartungswert des Operatorfeldes auftrat, und der komplexen Wellenfunktion $a_\mu(x)$ eines *einzelnen* Photons als eines Übergangsmatrixelementes des Operatorfeldes (zwischen dem Vakuum und einem Einteilchenzustand). Er erweiterte somit das Korrespondenzprinzip, das nun nicht nur die klassische Mechanik mit der Quantenmechanik, sondern auch die Maxwell'sche Theorie mit der Quantenelektrodynamik verbindet: eine einfache Erweiterung, wenn man so will, von endlich vielen zu unendlich vielen Freiheitsgraden. Es wurde deutlich, daß dabei nur Systeme mit fluktuierender Photonenzahl, nicht aber Zustände einzelner Photonen eine klassische Entsprechung fanden.

Ebenfalls im Jahre 1927 berichtete M. Born auf der Solvay Konferenz, daß P. Jordan der Frage nachging, wie man Feldern eine andere Statistik unter Berücksichtigung des Paulischen Ausschließungsprinzips (heute als Fermi-Dirac-Statistik bekannt) unterlegen könnte. Ein Jahr später wurde die vollständige Antwort — zweite Quantisierung unter Benutzung von Antivertauschungsrelationen — in einer Arbeit von Jordan und Wigner gegeben. Dirac gründete seine Feldtheorie von Elektronen sowie seine Löchertheorie (Existenz von Positronen) auf diese Überlegungen. Es fehlte in diesem Stadium nur noch eine umfassende Theorie der Wechselwirkung von den (derzeit bekannten) Elementarteilchen miteinander. Diese ließ nicht sehr lange auf sich warten: 1929 unternahmen Heisenberg und Pauli einen neuen Anlauf zur konsistenten Formulierung einer relativistischen Quantenelektrodynamik, indem sie eine Anleihe — das war nun das entscheidend Neue an dem Verfahren — bei den Methoden der klassischen Mechanik machten. Sie führten die Lagrange-Funktion auch für Felder ein, sprachen von kanonisch konjugierten Variablen und benutzen eine Quantisierungsvorschrift, die wir heute *kanonisch* nennen. Die Feldgleichungen folgten nun aus einem Wirkungsprinzip. Dieser Zugang zur Feldtheorie hat sich seither durchgesetzt und gilt auch heute noch als ein gesichertes Verfahren zur Konstruktion konkreter Feldtheorien. Kurzum, innerhalb von zwei Jahren waren die Fundamente der Quantenfeldtheorie gelegt.

Rückschauend dürfen wir heute behaupten, daß die ersten spektakulären Erfolge der Quantenelektrodynamik trotz der im Anfangsstadium noch dürf-

tigen rechnerischen Methoden darauf beruhten, daß die Feinstrukturkonstante einen recht kleinen Wert, nämlich

$$\alpha = 1/137,036 \dots$$

besitzt, daß dieser wichtige Parameter insbesondere dimensionslos ist, weil nur so eine gedachte Reihenentwicklung nach α bereits nach dem ersten nicht-trivialen Glied abgebrochen werden darf, unabhängig von dem Wert anderer dimensionsbehafteter Parameter wie Masse und Energie. Es blieb und ist auch heute noch ein Geheimnis, welche Gründe die Natur hatte für die Wahl der Größe von α .

Welche Einsichten in die Struktur des Mikrokosmos gewann man aus der neuen Theorie? Wenn ein Atom aus einem angeregten Zustand in das Grundniveau unter Aussendung eines Photons zurückkehrt, so war nun klar, daß das Photon in einem Elementarprozeß, einem schöpferischen Akt also, geboren wird und nicht irgendwie ‘vorher schon da war’. Umgekehrt kann durch Absorption eines Photons (Aufgabe seiner Identität als Teilchen) ein Atom aus seinem Grundzustand in ein höher gelegenes Niveau gelangen. Beide Prozesse können aus dem gleichen Wechselwirkungsansatz heraus beschrieben und ihre Rate störungstheoretisch berechnet werden. Erhaltung der Energie hat Vorrang vor der Erhaltung der Teilchenzahl. Auch die spontane Erzeugung von Elektronen beim Betazerfall eines Kern und die Paarerzeugung konnten nun als Beispiele von Elementarprozessen aufgefaßt werden, bei denen massive Teilchen geboren werden. Eine wesentliche Aufgabe für die nachfolgende Generation von Physikern bestand darin, Wirkungsquerschnitte für eine Vielzahl von beobachteten Reaktionen bei Elementarteilchen zu bestimmen. Hierzu waren Ansätze mit geeigneten Kopplungskonstanten notwendig. Man unterschied starke, elektromagnetische und schwache Wechselwirkungen. Man konnte mit Recht dies das *phänomenologische Stadium* der Feldtheorie nennen.

Die Jahre zwischen 1930 und 1960 waren auch dem formalen Ausbau der Feldtheorie, insbesondere der S-Matrix-Theorie, und der Entwicklung von Rechentechniken im Rahmen der Störungstheorie gewidmet (R. Feynman, J. Schwinger, F. Dyson). Dabei auftretende Divergenzen mußten durch ein Renormierungsverfahren beseitigt werden. Der Zusammenhang von Spin und Statistik wurde entdeckt, das CPT-Theorem fand seine erste Formulierung und die Darstellungstheorie der kanonischen (Anti-)Vertauschungsrelationen wurde entwickelt. Invarianzprinzipien traten immer stärker in den Vordergrund. Trotz massiven Einsatzes der Gruppentheorie war man dennoch nicht in der Lage, die Größe der Massen neu entdeckter Teilchen vorherzusagen. Die Hoffnungen in dieser Richtung wurden später neu belebt einerseits durch

die korrekte Vorhersage der Existenz des Ω^- -Teilchens und seiner Masse als Folge einer genäherten SU(3)-Symmetrie, andererseits durch das Quarkmodell der Hadronen.

Die letzten Jahrzehnte sind geprägt durch die Konzentration aller Bemühungen auf die sog. Eichtheorien und durch Versuche, das allgemeine Grundkonzept aus den Gründerjahren 1927-29 zu erweitern. Es entstanden so: Supersymmetrie, *string theory*, Quantengravitation, Feldtheorie in gekrümmten Räumen, euklidische Feldtheorie, Gitterfeldtheorie, Anwendung von Funktionalintegration. Bisher erfolgreich war die Formulierung einer umfassenden Theorie der elektroschwachen Wechselwirkung durch Glashow, Salam und Weinberg und der Quantenchromodynamik als einer Theorie der Kräfte zwischen Gluonen und Quarks, nunmehr die Grundlage der starken Wechselwirkung.

Der gesamten Vorlesung liegen Maßeinheiten zugrunde, so daß $\hbar = c = 1$ gilt. Die Beziehung zwischen Elementarladung und Feinstrukturkonstante lautet $e^2 = 4\pi\alpha$. Punkte x in der vierdimensionalen Raumzeit – sogenannte Ereignisse – haben nach Wahl eines Inertialsystems vier Koordinaten x^μ , wobei $x^0 = t$ die ‘Zeit’ ist. Vektoren des dreidimensionalen Raumes werden durch Buchstaben in Fettschrift (bold face) charakterisiert, z.B. $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$. In ähnlicher Weise werden Impulse p (auch ‘Viererimpulse’ genannt) nach der Energie $p^0 = E$ und den räumlichen Komponenten $\mathbf{p} = (p^1, p^2, p^3)$ zerlegt. Weitere Details und eine Diskussion der Grundlagen findet man in dem Skriptum der vorausgegangenen Vorlesung *Relativistische Quantenmechanik* vom Sommersemester.

Literatur

A.Pais, *Inward Bound*, Oxford Univ.Press 1986

G.Wentzel in: *Theoretical Physics in the Twentieth Century*, M.Fierz, V.Weisskopf (Eds.), Interscience Publ. 1960

P.A.M.Dirac, *Lectures on Quantum Field Theory*, Yeshiva University, New York 1966

S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, vol. I: Foundations, Section 1, Cambridge University Press 1996

Inhaltsverzeichnis

1	Das Relativitätsprinzip	1
1.1	Die Struktur der Lorentz-Gruppe	1
1.2	Spinordarstellungen der $SL(2, \mathbb{C})$	5
1.3	Kovariante Feldgleichungen	13
1.3.1	Die Dirac-Gleichung	13
1.4	Die Weyl-Gleichung	15
1.5	Die Proca-Gleichungen	16
1.6	Pauli-Fierz-Gleichungen	17
1.7	Chirale und Nichtchirale Felder	17
2	Das Quantenprinzip	19
2.1	Bosonen	19
2.1.1	Die kanonischen Vertauschungsrelationen	19
2.2	Eigenschaften des Vakuums	24
2.3	Energie und Impuls	26
2.4	Einteilchenzustände	27
2.5	Mehrteilchenzustände	28
2.6	Antiteilchen	30
2.7	Photonen	32
2.8	Das Vektorpotential in der Coulomb-Eichung	35
2.9	Fermionen	36
2.9.1	Dirac-Teilchen	37
2.9.2	Fock-Darstellung	39
2.9.3	Energie und Impuls	41
3	Das Wirkungsprinzip	44
3.1	Die Euler-Lagrange-Gleichungen	44
3.2	Der Energie-Impuls-Tensor	47
3.3	$U(1)$ -Symmetrie und Ladungen	50
4	Eichtheorien	52
4.1	Die QED als $U(1)$ -Eichtheorie	52
4.2	Die $SU(n)$ -Eichtheorie	56
4.3	Die Quantenchromodynamik	64
5	Spontane Symmetriebrechung	70
5.1	Allgemeine Begriffsbestimmung	70
5.2	Skalare Felder und Higgs-Bosonen	75
5.3	Das Goldstone-Theorem	78

5.4	Der Higgs-Kibble-Mechanismus	82
5.5	Der Meißner-Ochsenfeld-Effekt	87
5.6	Das Salam-Weinberg-Modell	89
6	Der Streuoperator	96
6.1	Ein lösbares Modell	96
6.2	Der formale Ausdruck für den S-Operator	103
6.3	Die Identität von Wick	109
6.4	Bosonen	109
6.5	Fermionen	111
6.6	Impulsdarstellung der Feynman-Funktionen	114
6.7	Was rettet die Lorentz-Invarianz der QED?	116
6.8	Die Gupta-Bleuler-Methode	120
6.9	Erzeugende Funktionale	124
6.10	Feynman-Graphen	128
6.11	Graphen im Ortsraum	128
6.12	Graphen im Impulsraum	131
7	Spezielle Effekte und Prozesse	134
7.1	Der Casimir-Effekt bei $T=0$	134
7.2	Der Casimir-Effekt bei endlicher Temperatur	138
7.3	Die Mott-Streuung	141
7.4	Elektron-Proton-Streuung	144
7.5	Elektromagnetische Formfaktoren	147
7.6	Das anomale magnetische Moment des Elektrons	151
7.7	Die Compton-Streuformel	159
8	Die Fermion-Determinante	164
8.1	Regularisierung	164
8.2	Äußere Algebra	166
8.3	Determinante und Zustandsdichte	170
8.4	Einfache Umformungen	173
8.5	Paarerzeugung in einem konstanten Feld	174
	8.5.1 Temporale Eichung	174
	8.5.2 Die Zustandssumme des harmonischen Oszillators . . .	177
9	Renormierung	181
9.1	Die Källen-Lehmann-Darstellung	181
9.2	Die Notwendigkeit zu renormieren	183
9.3	Massenrenormierung	187
9.4	Die Vakuum-Polarisation	189

9.5	Korrektur zum Coulomb-Potential	192
9.6	Die Selbstenergie des Photons	194
9.7	Lamb Shift	196
9.8	Die 2-Punktfunktion eines Dirac-Feldes	199
9.9	Weitere Renormierungskonstanten des Dirac-Feldes	201
9.10	Die Fermion-Selbstenergie in niedrigster Ordnung der QED . .	203
9.11	Die Ward-Takahashi-Identität	205

1 Das Relativitätsprinzip

1.1 Die Struktur der Lorentz-Gruppe

Die Anschauung von Raum und Zeit, welche der Quantenfeldtheorie zugrunde liegt, wird allgemein durch das mathematische Modell des *flachen* Minkowski-Raumes M_4 beschrieben. Daraus geht ganz eindeutig hervor, daß nicht daran gedacht ist, Gravitationseffekte mit in die Betrachtung einzu beziehen, die sich in einer Krümmung der Raum-Zeit bemerkbar machen würden, obwohl die Feldtheorie in einem Hintergrundfeld möglich und für die Kosmologie auch interessant ist.

Das Lorentz-invariante Skalarprodukt zweier Vierervektoren x und y in M_4 mit den Komponenten x^μ bzw. y^μ ist durch

$$xy = x^\mu y^\nu g_{\mu\nu} \quad (1)$$

festgelegt mit dem metrischen Tensor $(g_{\mu\nu}) = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Eine Lorentz-Transformation $\Lambda : M_4 \rightarrow M_4$ ist linear und erfüllt $(\Lambda x)(\Lambda y) = xy$. Es ist klar, daß die Gesamtheit aller Lorentz-Transformationen eine Gruppe beschreibt. Man nennt sie die *volle Lorentz-Gruppe* und bezeichnet sie mit dem Symbol L . Für jedes $\Lambda \in L$ gilt somit die Gleichung

$$\Lambda^T g \Lambda = g \quad (2)$$

(wir schreiben das Skalarprodukt als $x^T g y$ und fassen Λ und g als Matrizen auf). Indem man hier auf beiden Seiten die Determinante bildet und $\det g = -1$ beachtet, folgt $\det \Lambda^2 = 1$, also $\det \Lambda = \pm 1$. Isolieren wir die 00-Komponente der Gleichung (2), so lautet sie

$$(\Lambda^0_0)^2 - \sum_{i=1}^3 (\Lambda^i_0)^2 = 1 \quad (3)$$

und deshalb gilt $|\Lambda^0_0| \geq 1$. Daraus folgt, daß die Gruppe L aus vier (topologischen) Komponenten besteht:

$$\begin{array}{ll} L_+^\uparrow & : \quad \det \Lambda = +1 \quad \Lambda^0_0 \geq 1 \\ L_-^\uparrow & : \quad \det \Lambda = -1 \quad \Lambda^0_0 \geq 1 \\ L_+^\downarrow & : \quad \det \Lambda = +1 \quad \Lambda^0_0 \leq -1 \\ L_-^\downarrow & : \quad \det \Lambda = -1 \quad \Lambda^0_0 \leq -1 \end{array}$$

Von den vier Komponenten ist nur L_+^\uparrow eine Gruppe: in ihr liegt das neutrale Element. Diese Untergruppe von L trägt den Namen *eigentliche orthochrone*

Lorentz-Gruppe. Die Raumspiegelung I_r liegt in L_-^\uparrow , die Zeitspiegelung I_z in L_-^\downarrow und die Inversion $I = I_r I_z$ in L_+^\downarrow .

Drehungen des dreidimensionalen euklidischen Raumes E_3 können auf einfache Weise zu Lorentz-Transformationen erklärt werden. In diesem Sinne verstehen wir die $SO(3)$ als eine Untergruppe von L_+^\uparrow . Sie ist zugleich die Menge aller orthogonalen Matrizen Λ in L_+^\uparrow , d.h. $\Lambda^T = \Lambda^{-1}$. Unter einer *reinen* Lorentz-Transformation (engl. *boost*) verstehen wir eine positive Matrix $\Lambda \in L_+^\uparrow$: $\Lambda^T = \Lambda$ und $\Lambda > 0$. Diese Transformationen bilden keine Gruppe. Ihre Bedeutung liegt vielmehr darin, daß ein beliebiges $\Lambda \in L_+^\uparrow$ eine Zerlegung der Art

$$\Lambda = R\Lambda_r \quad (4)$$

erlaubt, wobei R eine Drehung und Λ_r eine reine Lorentz-Transformation ist. Dies folgt aus einem allgemeinen Satz der Algebra, wonach eine reelle Matrix stets als Produkt einer orthogonalen und einer positiven Matrix geschrieben werden kann (Polarzerlegung). Die reinen Lorentz-Transformationen stehen damit in 1:1-Korrespondenz zu den Rechtsnebenklassen $L_+^\uparrow / SO(3)$ im Sinne der Gruppentheorie.

Nun kann man jede positive Matrix $\Lambda_r \in L_+^\uparrow$ durch eine unitäre Transformation diagonalisieren und würde so die Eigenwerte $e^\gamma, 1, 1, e^{-\gamma}$ mit $\gamma \geq 0$ erhalten; mit der Einführung unitärer Matrizen verlassen wir jedoch den reellen Zahlkörper. Sinnvoller ist Frage, ob wir auf andere Weise dem Exponenten γ einen Sinn geben können. Es zeigt sich, daß bei geeigneter Wahl von $R_1 \in L_+^\uparrow \cap SO(4)$ die reine Lorentz-Transformation Λ_r als ein Produkt der folgenden Art geschrieben werden kann:

$$\Lambda_r = R_1^{-1}L(\gamma)R_1, \quad (\gamma \geq 0), \quad (5)$$

wobei $L(\gamma)$ eine *spezielle* Lorentz-Transformation darstellt:

$$L(\gamma) = \begin{pmatrix} \cosh \gamma & 0 & 0 & \sinh \gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh \gamma & 0 & 0 & \cosh \gamma \end{pmatrix} \quad (6)$$

mit $\tanh \gamma = v/c$ (v ist die Relativgeschwindigkeit zweier Inertialsysteme). Setzen wir nun $R_2 = RR_1^{-1}$, so erhalten wir die Aussage, daß jede Lorentz-Transformation $\Lambda \in L_+^\uparrow$ durch Wahl geeigneter Drehungen letztlich auf eine spezielle Lorentz-Transformation $L(\gamma)$ zurückgeführt werden kann:

$$\Lambda = R_2L(\gamma)R_1 \quad (7)$$

Der Parameter γ berechnet sich aus der Formel $\text{Spur}(\Lambda^T \Lambda) = 2(1 + \cosh 2\gamma)$. Die speziellen Lorentz-Transformationen bilden eine Halbgruppe², d.h. es gilt $L(\gamma)L(\gamma') = L(\gamma + \gamma')$. Sie stehen für die zweiseitigen (oder Rechts-Links-) Nebenklassen von L_+^\uparrow nach der Untergruppe $SO(3)$.

Die Komponente L_+^\uparrow der Lorentz-Gruppe ist auf enge Weise mit der *speziellen linearen Gruppe* $SL(2, C)$ (auch *unimodulare Gruppe* genannt) des zweidimensionalen komplexen Raumes verknüpft. Dies ist die Gruppe aller komplexen 2×2 -Matrizen mit Determinante 1. Die Beziehung zwischen diesen beiden Gruppen ist nicht nur mathematisches Hilfsmittel des Physikers, sondern ist unverzichtbar für ein Verständnis der Struktur relativistischer Feldtheorien: Seit Dirac benutzen wir Spinoren zur Beschreibung von Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen und benötigen deshalb den Spinorkalkül. Die Abbildung von $SL(2, C)$ auf L_+^\uparrow wird in zwei Schritten erreicht:

1. Jedem Vektor $x \in M_4$ ordnen wir eine hermitesche 2×2 -Matrix \underline{x} durch folgende Vorschrift zu:

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} \quad (8)$$

Man erkennt unschwer die Pauli-Matrizen in dieser Beschreibung wieder. Es ist typisch für den relativistischen Formalismus, daß die drei Pauli-Matrizen σ_i durch eine weitere Matrix, nämlich die Einheitsmatrix σ_0 ergänzt werden, so daß formal ein Vierervektor σ_μ daraus entsteht und man ebensogut $\underline{x} = x^\mu \sigma_\mu$ schreiben kann. Welche Schreibweise man auch immer wählt, wichtig ist nur dies: Die Korrespondenz $x \Leftrightarrow \underline{x}$ ist 1:1 zwischen Vektoren und hermiteschen Matrizen, und die Minkowski-Metrik besitzt in der Matrixensprache die folgende einfache Charakterisierung:

$$x^\mu x_\mu = \det \underline{x} \quad (9)$$

Manchmal ist es nützlich sich daran zu erinnern, daß dem Vektor $(1,0,0,0)$ (d.h. dem Richtungsvektor der Zeitachse) die Einheitsmatrix entspricht.

2. Für jede komplexe 2×2 -Matrix a ist $a \underline{x} a^*$ wieder eine hermitesche Matrix³. Es existiert also ein $x' \in M_4$ mit

$$\underline{x}' = a \underline{x} a^* \quad (10)$$

²Natürlich ist es möglich, die Definition von $L(\gamma)$ auf negative Werte für γ auszudehnen, um so eine Gruppe zu erhalten. Jedoch besitzt $L(-\gamma) = RL(\gamma)R^{-1}$ immer Lösungen in R : Jede Drehung um den Winkel π leistet dies, wenn die Drehachse nur senkrecht zur 3-Achse gewählt wird.

³Mit a^* bezeichnen wir die adjungierte Matrix: $(a^*)_{ik} = \overline{a_{ik}}$.

Darüberhinaus können wir $\det \underline{x}' = \det \underline{x}$ dadurch erfüllen, daß wir die Matrix a der Bedingung $\det a = 1$ unterwerfen. Die durch $a \in SL(2, C)$ vermittelte Abbildung $M_4 \rightarrow M_4, x \mapsto x'$ ist linear und erhält die Lorentz-Metrik. Es existiert somit eine Lorentz-Transformation $\Lambda_a \in L$ mit $x' = \Lambda_a x$. In der $SL(2, C)$ können alle Gruppenelemente durch eine stetige Kurve mit der Einheit verbunden werden: Die Gruppe ist also *zusammenhängend*. Ferner ist ersichtlich, daß die Abbildung $SL(2, C) \rightarrow L, a \mapsto \Lambda_a$ ein (stetiger) Homomorphismus zwischen Gruppen darstellt. Daraus ergibt sich, daß das Bild der $SL(2, C)$ eine zusammenhängende Untergruppe von L und damit von L_+^\uparrow ist. Man überzeugt sich leicht, daß dieses Bild mit L_+^\uparrow übereinstimmt. Zusammenfassend:

$$\underline{(\Lambda_a x)} = a \underline{x} a^* \quad a \in SL(2, C), \Lambda_a \in L_+^\uparrow \quad (11)$$

Nun besitzt $\Lambda_a = 1$ die beiden Lösungen $a = \pm \mathbb{1}$. Es handelt sich hierbei um die beiden Zentrums-elemente der Gruppe $SL(2, C)$. Das Zentrum (selbst eine Gruppe), das wir mit \mathbb{Z}_2 bezeichnen, ist damit der *Kern* des Homomorphismus $SL(2, C) \rightarrow L_+^\uparrow$. Die Existenz eines nichttrivialen Kernes bewirkt, daß wir keine 1:1-Korrespondenz zwischen den beiden Gruppen erreichen können. Vielmehr entsprechen a und $-a$ der gleichen Lorentz-Transformation Λ . Diese ‘Eindeutigkeit bis auf ein Vorzeichen’ ist uns von der Quantenmechanik des Spins her vertraut. Die tiefere Ursache lag dort in einer Eigentümlichkeit der Rotationsgruppe $SO(3)$: Diese Gruppe, so stellte sich heraus, ist nicht einfach zusammenhängend und führt den Physiker dazu, die Überlagerungsgruppe $SU(2)$ in den Vordergrund zu stellen. Denn ohne die $SU(2)$ in die Diskussion einzubeziehen, könnte der Spin eines Elektrons gar nicht beschrieben werden. Der gleiche Grund zwingt uns, in einer relativistischen Theorie die Gruppe $SL(2, C)$ in den Vordergrund zu stellen. Denn es ist sofort zu sehen, daß die $SU(2)$ eine Untergruppe der $SL(2, C)$ ist, deren Bild unter dem oben betrachteten Homomorphismus gerade die Rotationsgruppe $SO(3)$ darstellt. Die Gruppe L_+^\uparrow ist nicht einfach zusammenhängend, weil die darin enthaltene $SO(3)$ diese Eigenschaft hat. Indem wir den Übergang von den Lorentz-Transformationen zur $SL(2, C)$ vollzogen, haben wir im Grunde nur die universelle Überlagerungsgruppe von L_+^\uparrow konstruiert. Die vier hier angesprochenen Symmetriegruppen stehen in einem engen Zusammenhang, den man am besten durch ein kommutatives Diagramm wiedergibt:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & SU(2) & \longrightarrow & SO(3) & \longrightarrow & 1 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & SL(2, C) & \longrightarrow & L_+^\uparrow & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

Alle Pfeile stehen für Homomorphismen. Die senkrechten Pfeile sind injektiv. Die beiden Zeilen des Diagramms sind *exakt* in dem Sinne, daß das Bild eines Pfeiles zugleich der Kern des nachfolgenden Pfeiles ist. Die Gruppe \mathbb{Z}_2 hat – wie oben bemerkt – nur zwei Elemente: ± 1 .

Der Zerlegung (4) eines beliebigen Elementes der Gruppe L_+^\uparrow entspricht die Polarzerlegung

$$a = uh, \quad u \in SU(2), \quad h^* = h, \quad \det h = 1$$

eines beliebigen Elementes $a \in SL(2, C)$ in eine unitäre und eine hermitesche Matrix, so daß der Rotation R die unitäre Matrix u (genauer $\pm u$) und der reinen Lorentz-Transformation Λ_r die hermitesche Matrix h entspricht. Der speziellen Lorentz-Transformation $L(\gamma)$, wie in (6) beschrieben, entspricht die Diagonalmatrix

$$h = \begin{pmatrix} e^{\gamma/2} & 0 \\ 0 & e^{-\gamma/2} \end{pmatrix}$$

wie man durch eine leichte Rechnung bestätigt.

1.2 Spinordarstellungen der $SL(2, C)$

Bis 1900 reichte es aus, wenn ein Physiker mit Vektoren umzugehen wußte. Bis 1930 genügte eine Kenntnis der Tensoralgebra, und selbst dies galt als eine Kunst, die nur wenige beherrschten. Die Erfindung der Dirac-Gleichung hat einen neuen Schrecken in die theoretische Physik gebracht: den Spinorkalkül.

Die Dirac-Gleichung selbst gab den Anstoß zur Formulierung vieler weiterer Feldtheorien mit ähnlicher und zum Teil komplizierterer Struktur. Diese Entwicklung machte es notwendig, den allgemeinen Gesichtspunkt seinem Wesen nach zu begreifen:

Definition 1 *Unter einem Feld $\psi(x)$ verstehen wir eine mehrkomponentige Funktion mit einem definierten Transformationsverhalten gegenüber Lorentz-Transformationen:*

$$\psi'(x') = D(a)\psi(x), \quad x' = \Lambda_a x, \quad a \in SL(2, C)$$

Streng genommen handelt es sich dabei um die Wirkung der Gruppe $SL(2, C)$. Sie tritt an die Stelle der Lorentz-Gruppe; $D(a)$ beschreibt demgemäß eine Matrixdarstellung der $SL(2, C)$ und nicht der L_+^\uparrow . Dies heißt, daß

$$D(a)D(a') = D(aa') \quad \text{und} \quad D(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$$

gilt. Nun ist es sicher wünschenswert, die Felder nach den *irreduziblen* Darstellungen der $SL(2, C)$ zu klassifizieren und hier das Dirac-Feld richtig einzuordnen. Dies wollen wir nun tun, ohne auf den mathematischen Hintergrund allzu sehr einzugehen⁴.

Zunächst kann man folgendes feststellen: Die Gruppe $SL(2, C)$ besitzt genau zwei Fundamentaldarstellungen (dies sind Darstellungen aus denen sich alle weiteren Matrixdarstellungen als direkte Produkte gewinnen lassen):

1. Die *definierende Darstellung* wird durch

$$D^{\frac{1}{2}0}(a) = a$$

beschrieben (umständlich aber sinnvoll). Die Gruppe $SL(2, C)$ wirkt somit auf natürliche Weise auf dem zweidimensionalen komplexen Vektorraum \mathbb{C}^2 , dessen Elemente wir nun *Spinoren* nennen wollen, um sie von den Vektoren $x \in M_4$ zu unterscheiden. Ein solcher Spinor u besitzt zwei (komplexe) Komponenten und kann in der folgenden Weise dargestellt werden:

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

wie dies schon in der Quantenmechanik üblich war. Die Transformation $u' = au$ lautet ausführlich geschrieben

$$u'_\alpha = a_\alpha^\beta u_\beta, \quad a \in SL(2, C).$$

Wir vereinbaren, daß vorzugsweise die griechischen Buchstaben α und β als Spinorindizes benutzt werden.

2. Die *konjugierte Darstellung* wird durch

$$D^{0\frac{1}{2}}(a) = \bar{a}$$

beschrieben, wobei wir mit \bar{a} diejenige Matrix bezeichnen, deren Komponenten durch $(\bar{a})_\alpha^\beta = \overline{a_\alpha^\beta}$, also durch die konjugiert komplexen Matrixelemente gegeben sind. Auch hier betrachten wir wiederum Spinoren $v = (v_\alpha)$ mit dem durch $v' = \bar{a}v$ beschriebenen Transformationsverhalten. Explizit:

$$v'_\alpha = \bar{a}_\alpha^\beta v_\beta, \quad a \in SL(2, C).$$

Es ist wichtig, daß in einer relativistischen Theorie dieser Typ von Spinoren deutlich unterschieden wird von dem vorherigen Typ. Wir vereinbaren

⁴Der Spinorkalkül wurde zuerst von E.Cartan 1913 für die Gruppen $SO(n)$ entwickelt. Auf andere Weise haben dies 1935 R.Brauer und H.Weyl getan. Für die Lorentz-Gruppe wurde der Spinorkalkül 1929 von van der Waerden eingeführt.

deshalb, daß nur *gepunktete* Indizes (vorzugsweise $\dot{\alpha}$ und $\dot{\beta}$) zu ihrer Beschreibung herangezogen werden. Sobald wir den relativistischen Standpunkt verlassen und von der Gruppe $SL(2, C)$ nur den Anteil $SU(2)$ (anstelle der Lorentz-Gruppe also nur die Rotationsgruppe) betrachten, wird der Unterschied zwischen den beiden besprochenen Spinortypen aufgehoben⁵. Auf diese Weise wird verständlich, warum in der Quantenmechanik des Elektronenspins nur *ein* Typ von Spinoren auftritt. Wir wollen nun allgemeine Spinoren einführen.

Definition 2 *Ein Spinor s vom Typ (j, k) ist ein Tensor mit komplexen Komponenten $s_{\alpha_1 \dots \alpha_{2j}, \dot{\alpha}_1 \dots \dot{\alpha}_{2k}}$ ($j, k = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$) und dem dadurch implizierten Transformationsverhalten. Wir setzen voraus, daß der Tensor symmetrisch unter Permutationen der $2j$ ungepunkteten Indizes und symmetrisch unter Permutationen der $2k$ gepunkteten Indizes ist.*

Es zeigt sich, daß die auf den Raum aller Spinoren vom Typ (j, k) wirkende Darstellung D^{jk} von $SL(2, C)$ irreduzibel ist. Die Dimension dieses Raumes ist $(2j + 1)(2k + 1)$. Sie wird auch Dimension der Darstellung D^{jk} genannt. Algebraisch gesehen, vollzieht sich die Konstruktion in zwei Stufen. Im ersten Schritt konstruiert man zwei symmetrische Tensorprodukte⁶

$$\begin{aligned} D^{j0} &= D^{\frac{1}{2}0} \vee \dots \vee D^{\frac{1}{2}0} && (2j \text{ Faktoren}) \\ D^{0k} &= D^{0\frac{1}{2}} \vee \dots \vee D^{0\frac{1}{2}} && (2k \text{ Faktoren}), \end{aligned}$$

und im zweiten Schritt deren gewöhnliches Tensorprodukt⁷.

$$D^{jk} = D^{j0} \otimes D^{0k}.$$

Darstellungen D^{jk} , die auch als Darstellungen von L_+^\uparrow aufgefaßt werden können, erfüllen die Bedingung, daß das Zentrum der Gruppe $SL(2, C)$, beste-

⁵Der Grund hierfür ist: Die konjugierte Darstellung der $SU(2)$ ist unitär äquivalent zur definierenden Darstellung der $SU(2)$. Anders formuliert, die $SU(2)$ besitzt nur *eine* Fundamentaldarstellung.

⁶Die Symbole \otimes , \vee und \wedge werden benutzt, um das gewöhnliche, das symmetrische und das antisymmetrische Tensorprodukt zu bezeichnen. Die Konstruktion geht von linearen Räumen aus und wird auf die darauf wirkenden Operatoren übertragen. Siehe W. Greub, *Multilineare Algebra*.

⁷Van der Waerden hat gezeigt, daß man alle endlichdimensionalen irreduziblen Darstellungen der Gruppe $SL(2, C)$ auf diese Weise erhält. Er hat auch gezeigt, daß jede endlichdimensionale Darstellung als direkte Summe irreduzibler Darstellungen verstanden werden kann (solche Darstellungen werden *diskret reduzibel* genannt). Die letzte Eigenschaft ist nicht selbstverständlich, weil es sich bei der $SL(2, C)$ um eine nichtkompakte Gruppe handelt.

hend aus den Matrizen $\mathbb{1}$ und $-\mathbb{1}$, trivial dargestellt wird. Nun gilt offensichtlich⁸

$$D^{jk}(-\mathbb{1}) = (-1)^{2j+2k}.$$

Somit sind alle Darstellungen D^{jk} mit $2j + 2k = \text{gerade}$ zugleich auch Darstellungen⁹ von L_+^\uparrow . Man bezeichnet sie auch als *einwertige* Darstellungen der Lorentz-Gruppe. Alle anderen Darstellungen sind *zweiwertige* Darstellungen (d.h. Spinordarstellungen im engeren Sinne). Wir wollen die wichtigsten Spinoren einführen:

- Das zweidimensionale Levi-Civita-Symbol $\epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon^{\alpha\beta}$, das man mit der Matrix

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

identifizieren kann, ist ein *invarianter* Tensor. Grund: für jede 2×2 -Matrix a gilt $a_\alpha^\beta a_{\alpha'}^{\beta'} \epsilon_{\beta\beta'} = (\det a) \epsilon_{\alpha\alpha'}$ und $\det a = 1$ für $a \in SL(2, C)$. Mit Hilfe dieses Tensors können wir nun Indizes ‘heraufziehen’ bzw. ‘herunterziehen’:

$$u^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta} u_\beta \quad u_\beta = u^\alpha \epsilon_{\alpha\beta}$$

und *Invarianten* bilden wie $u^\alpha u_\alpha$. Die gleichen Überlegungen gelten sinngemäß für $\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$. Der ϵ -Tensor leistet also im Raum der Spinoren Ähnliches wie der metrische Tensor $g_{\mu\nu}$ im Minkowski-Raum.

- Die von uns im vorigen Abschnitt eingeführte Matrix \underline{x} ist ein Spinor vom Typ $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ mit den Komponenten $x_{\alpha\dot{\alpha}}$. Dies beruht auf der Transformationsvorschrift (siehe (1.10):

$$x'_{\alpha\dot{\alpha}} = a_\alpha^\beta \bar{a}_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} x_{\beta\dot{\beta}}. \quad (12)$$

Damit ist jede physikalische Größe, die sich wie ein Vierervektor transformiert (z.B. x^μ) vom Standpunkt der Darstellungstheorie ein Spinor vom Typ $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Aber nicht alle Spinoren s vom Typ $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ entsprechen einem *reellen* Vierervektor $x \in M_4$. Vielmehr gilt $s = \underline{x} + i\underline{y}$ für $x, y \in M_4$.

⁸Anschaulich: Die Matrix $a = -\mathbb{1}$ in $SL(2, C)$ kann als eine Drehung um 2π (im Spinorraum) interpretiert werden. Dies bedeutet, daß bei den zweiwertigen Darstellungen erst eine Drehung um 4π einen Spinor wieder in sich transformiert.

⁹Man macht leicht klar, daß es sich dabei in jedem Fall um *Tensordarstellungen* (im ursprünglichen Sinn des Wortes) von L_+^\uparrow handelt, die man natürlich schon früher, d.h. bevor der Spinorkalkül eingeführt war, beschrieben hat.

Offensichtlich gilt $\epsilon^2 = -1$, also $\epsilon^{-1} = -\epsilon$, und durch eine einfache Rechnung bestätigt man: Für jedes $a \in SL(2, C)$ gilt

$$\epsilon \bar{a} \epsilon^{-1} = (a^*)^{-1}.$$

Mit anderen Worten, die Darstellung \bar{a} ist äquivalent zur Darstellung $(a^*)^{-1}$. Ist nun speziell a in $SU(2)$ gelegen (a entspricht einer Rotation), so gilt selbstverständlich $(a^*)^{-1} = a$ und wir erkennen: Bei Einschränkung der Darstellung D^{jk} auf die Untergruppe $SU(2)$ wird diese äquivalent zur reduziblen Darstellung $D^j \otimes D^k$ der $SU(2)$ mit den Spinquantenzahlen j und k . Die Zerlegung in irreduzible Bestandteile ist uns von der Theorie der Kopplung von Drehimpulsen (E. Wigner) her bekannt:

$$D^j \otimes D^k = \sum_{s=|j-k|}^{j+k} D^s$$

Auf die Dimensionen der zugrundeliegenden Räume bezogen, liest sich diese Aussage als

$$(2j+1)(2k+1) = \sum_{s=|j-k|}^{j+k} s.$$

Dadurch ist es nun möglich, den ‘Spininhalt’ eines relativistischen Feldes unmittelbar anzugeben:

Definition 3 *Transformiert sich ein Feld $\psi(x)$ unter Lorentz-Transformationen gemäß der irreduziblen Darstellung D^{jk} der $SL(2, C)$, so heißt es ein irreduzibles Feld. Ihm werden die Spinquantenzahlen*

$$s = |j - k|, |j - k| + 1, \dots, j + k$$

zugeordnet.

Der Spininhalt gibt nur an, welche Teilchenarten *möglicherweise* durch das Feld beschrieben werden. Es ist denkbar, daß gewisse Spinwerte, die im Prinzip möglich sind, gar nicht auftreten. Als einfaches Beispiel betrachten wir ein Vektorfeld $A_\mu(x)$. Da es sich hierbei um einen Spinor vom Typ $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ handelt, transformiert ein Vektorfeld sich gemäß der Darstellung $D^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$. Sein Spininhalt ist $s = 0$ und $s = 1$. Ohne Zusatzbedingungen beschreibt ein solches Feld also zwei Arten von Teilchen. Obwohl das Feld im Sinne der Darstellungstheorie *algebraisch irreduzibel* genannt werden muß, ist es auf nicht-algebraischem Wege (durch Differentiation) möglich, den Spin-0-Anteil eines Vektorfeldes zu isolieren, und zwar dadurch, daß wir das folgende Skalarfeld erzeugen:

$$\Phi(x) = \partial^\mu A_\mu(x)$$

$(\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu)$. Ebenso gelingt es, den Spin-1-Anteil zu isolieren:

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\nu A_\mu(x) - \partial_\mu A_\nu(x)$$

Ist $\Phi(x) = 0$ oder $F_{\mu\nu}(x) = 0$, so beschreibt das Vektorfeld keine Spin-0-Teilchen bzw. keine Spin-1-Teilchen. Das erste ist der Fall, wenn

$$A_\mu = \partial^\nu L_{\mu\nu} \quad L_{\mu\nu} = -L_{\nu\mu}$$

gilt, das zweite, wenn $A_\mu = \partial_\mu R$ erfüllt ist¹⁰.

Wir betrachten ein zweites Beispiel, das für die allgemeine Relativitätstheorie von Interesse ist. Es sei $T_{\mu\nu}(x)$ ein Tensorfeld. Werden keine einschränkenden Bedingungen gestellt, so transformiert es sich gemäß der Darstellung

$$D^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \otimes D^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}.$$

Diese Darstellung ist reduzibel, und die Zerlegung in irreduzible Bestandteile lautet:

$$D^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \otimes D^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = D^{10} \oplus D^{01} \oplus D^{00} \oplus D^{11}.$$

Beschränken wir diese Aussage auf die Dimensionen der hier vorkommenden Darstellungsräume, so lautet sie: $4 \times 4 = 3 + 3 + 1 + 9$. Viel konkreter bedeutet die Aussage jedoch, daß wir das Feld $T^{\mu\nu}$ zerlegen können, und zwar zunächst in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Anteil:

$$T_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} + F_{\mu\nu}.$$

Der symmetrische Anteil $G_{\mu\nu}$ kann stets in einen spurfreien Anteil und in die Spur zerlegt werden:

$$G_{\mu\nu} = \left(G_{\mu\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} G^\gamma_\gamma \right) + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} G^\gamma_\gamma.$$

Die Spur G^μ_μ ergibt ein Skalarfeld; ihr entspricht die Darstellung D^{00} . Der symmetrische spurfreie Anteil hat 9 unabhängige Komponenten: Ihm entspricht die Darstellung D^{11} . Dem antisymmetrischen Anteil $F_{\mu\nu}$ ist somit die reduzible Darstellung $D^{10} \oplus D^{01}$ zugeordnet. Wie kann man nun diesen Anteil weiter zerlegen? Antwort:

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(F_{\mu\nu} + \hat{F}_{\mu\nu}) + \frac{1}{2}(F_{\mu\nu} - \hat{F}_{\mu\nu})$$

¹⁰Man erkennt unschwer in $\partial^\mu A_\mu = 0$ die *Lorentz-Bedingung* der Elektrodynamik. Sie sorgt dafür, daß Photonen mit $s = 0$ ausgeschlossen sind.

wobei $\hat{F}_{\mu\nu}$ den *dualen* Tensor bezeichnet, der mit Hilfe des Levi-Civita-Symbols konstruiert¹¹ wird: $\hat{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}i\epsilon_{\mu\nu\sigma\tau}F^{\sigma\tau}$. Durch unsere Konstruktion haben wir $F_{\mu\nu}$ in einen *selbstdualen* und einen *antiselbstdualen* Tensor zerlegt: Dies sind nun gerade die Anteile, die den beiden Darstellungen D^{10} und D^{01} entsprechen. In der Elektrodynamik konstruiert man den Feldstärketensor mit Hilfe der Komponenten des elektrischen Feldes \mathbf{E} und des magnetischen Feldes \mathbf{B} :

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

wobei wir $c = 1$ vorausgesetzt haben. Damit folgt für den dualen Tensor:

$$(\hat{F}_{\mu\nu}) = i \begin{pmatrix} 0 & B_1 & B_2 & B_3 \\ -B_1 & 0 & E_3 & -E_2 \\ -B_2 & -E_3 & 0 & E_1 \\ -B_3 & E_2 & -E_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Abgesehen von dem Faktor i bedeutet dies eine Ersetzung $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B}$, $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{E}$. Schließlich finden wir nach Einführung des komplexen Feldes $\mathbf{Z} = \mathbf{E} + i\mathbf{B}$:

$$(F_{\mu\nu} + \hat{F}_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & Z_1 & Z_2 & Z_3 \\ -Z_1 & 0 & iZ_3 & -iZ_2 \\ -Z_2 & -iZ_3 & 0 & iZ_1 \\ -Z_3 & iZ_2 & -iZ_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Mit anderen Worten, der selbstduale Anteil von $F_{\mu\nu}$ ist linear von $\mathbf{E} + i\mathbf{B}$, der antiselbstduale Anteil linear von $\mathbf{E} - i\mathbf{B}$ abhängig. Fazit: Die komplexen Felder $\mathbf{E} \pm i\mathbf{B}$ sind mit den beiden 3-dimensionalen irreduziblen Darstellungen D^{10} , D^{01} der Lorentz-Gruppe verknüpft. Wie diese Felder sich unter Rotationen $R \in SO(3)$ transformieren, ist offensichtlich. Bleibt zu prüfen, wie sie sich bei einer speziellen Lorentz-Transformation $L(\gamma)$ verhalten. Diese wird durch die hermiteschen Matrizen

$$D^{10}(\gamma) = \begin{pmatrix} \cosh(\gamma) & -i \sinh(\gamma) & 0 \\ i \sinh(\gamma) & \cosh(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

¹¹Man beachte den Faktor i in der Definition. In der Elektrodynamik führt man oft $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\sigma\tau}F^{\sigma\tau}$ als den ‘dualen’ Tensor ein. Er verdient jedoch diese Bezeichnung nicht; denn der ‘doppelduale’ Tensor wäre dann $-F_{\mu\nu}$ und nicht $F_{\mu\nu}$. Realitätseigenschaften von $F_{\mu\nu}$ bleiben bei unserer Weise der Zerlegung des Tensors unberücksichtigt. Dies ist sinnvoll; denn die Matrizen der Darstellungen D^{10} und D^{01} sind komplex (entsprechen somit Operatoren eines dreidimensionalen komplexen Vektorraumes) und können durch keine Wahl der Basis in eine reelle Gestalt gebracht werden.

und

$$D^{01}(\gamma) = \overline{D^{10}(\gamma)} = \begin{pmatrix} \cosh(\gamma) & i \sinh(\gamma) & 0 \\ -i \sinh(\gamma) & \cosh(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

beschrieben. Die komplexen Felder $\mathbf{E} \pm i\mathbf{B}$ haben eine definierte Chiralität: Unter Raumspiegelung vertauschen sie ihre Rollen. In dem Abschnitt über die Photonen kommen wir auf diese Tatsache zurück.

Betrachten wir jetzt den symmetrischen Anteil $G_{\mu\nu}$ und nehmen wir $G_{\mu}^{\mu} = 0$ an: Der Spininhalt der Darstellung D^{11} ist immer noch $s = 0, 1, 2$. Der Spin-0-Anteil tritt nicht auf, wenn wir

$$\partial^{\mu} \partial^{\nu} G_{\mu\nu} = 0$$

fordern. Eine stärkere Bedingung ist

$$\partial^{\mu} G_{\mu\nu} = 0$$

die sowohl $s = 0$ als auch $s = 1$ ausschließt. In diesem Fall bleibt der Wert $s = 2$, und dies ist der Spin der Gravitonen (hypothetische Teilchen der Quantengravitation). Wir haben bei unserem Beispiel natürlich die Metrik $G_{\mu\nu}(x)$ eines gekrümmten Universums im Auge gehabt.

Die Rolle der Nebenbedingungen in Form von Differentialgleichungen zur Eliminierung ungewünschter Spinfreiheitsgrade erscheint auf den ersten Blick sehr mysteriös, weil solche Bedingungen nicht algebraischer Natur sind und deshalb vom Standpunkt der Darstellungen der $SL(2, C)$ ganz und gar nicht interpretiert werden können. Dennoch existiert auch hierfür ein darstellungstheoretischer Hintergrund. Teilchen werden korrekterweise durch unitäre (zwangsläufig unendlich-dimensionale) Darstellungen der Poincaré-Gruppe (die um die Gruppe der Translationen erweiterte $SL(2, C)$) beschrieben. Solche Darstellungen werden in den uns interessierenden Fällen durch die Masse m und den Spin s charakterisiert. Da ein Feld nicht nur ein Vektor eines Darstellungsraumes ist, sondern überdies von x abhängt und einen Operator ist, kann es auch so komplexe Strukturen (wie sie die Darstellungen der Poincaré-Gruppe nun mal sind) beschreiben. Den Zusammenhang zwischen Feldern und Teilchen stiftet die zweite Quantisierung unter Verwendung einer Fourier-Zerlegung und der damit verbundenen Einführung von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren, die die Rolle der Fourier-Koeffizienten übernehmen. Es sind also die Fourier-Koeffizienten, denen man eine Spinquantenzahl s zuschreiben kann. Hat man diese volle Beschreibung des Feldes als Operator zur Hand, so erweisen sich obigen Aussagen über den Spininhalt eines Feldes und die Rolle der Nebenbedingungen als völlig korrekt. Sie haben den Vorzug, daß sie einfach sind und nicht bereits den gesamten Stoff einer Vorlesung über Feldtheorie und Darstellungstheorie der Poincaré-Gruppe voraussetzen.

1.3 Kovariante Feldgleichungen

1.3.1 Die Dirac-Gleichung

Wir haben erläutert, wie man jedem Vektor $x \in M_4$ eine hermitesche Matrix \underline{x} zuordnen kann und wie diese Matrix als ein Spinor vom Typ $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ aufzufassen ist. Dieselbe Idee wird verwandt, um aus dem ‘Vektor’ $\partial_\mu = (\partial_0, \nabla)$ eine ‘Matrix’ zu konstruieren (deren Komponenten Operatoren sind):

$$(\partial_{\beta\dot{\alpha}}) = \begin{pmatrix} \partial_0 - \partial_3 & -\partial_1 + i\partial_2 \\ -\partial_1 - i\partial_2 & \partial_0 + \partial_3 \end{pmatrix} = \partial_0 - \vec{\sigma} \cdot \nabla \quad (13)$$

Durch den Vorgang des ‘Heraufziehens’ der Indizes und durch den Übergang zur transponierten Matrix gewinnt man den *konjugierten* Spinor:

$$(\partial^{\dot{\alpha}\beta}) = \begin{pmatrix} \partial_0 + \partial_3 & \partial_1 - i\partial_2 \\ \partial_1 + i\partial_2 & \partial_0 - \partial_3 \end{pmatrix} = \partial_0 + \vec{\sigma} \cdot \nabla \quad (14)$$

Die Dirac-Theorie ist durch das folgende gekoppelte Gleichungssystem definiert:

$$\begin{aligned} i\partial_{\beta\dot{\alpha}} \chi^\alpha - m\xi_\beta &= 0 \\ i\partial^{\dot{\alpha}\beta} \xi_\beta - m\chi^\alpha &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Sie benutzt also *zwei* Felder ξ und χ zur Beschreibung von Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen. Jedes dieser Felder ist irreduzibel und besitzt zwei Komponenten. Aus der Schreibweise ist ersichtlich, wie diese Felder sich unter Lorentz-Transformationen verhalten¹²:

$$\begin{aligned} \xi'(x') &= a\xi(x) \\ \chi'(x') &= (a^*)^{-1}\chi(x) \end{aligned}$$

($x' = \Lambda_a x$, $a \in SL(2, C)$). Nun besteht der Diracsche Ansatz gerade darin, daß man die beiden irreduziblen Spinoren zu *einem* Spinor (mit vier Komponenten) zusammenfaßt:

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \chi \end{pmatrix}.$$

Ein solcher Spinor wird dann *Dirac-Spinor* genannt. Er ist, wie aus der Konstruktion ersichtlich, ein *reduzierbarer* Spinor. Dies bedeutet, daß das Dirac-Feld $\psi(x)$ sich gemäß der Darstellung $D^{\frac{1}{2}0} \oplus D^{0\frac{1}{2}}$ transformiert:

$$\psi'(x') = S(a)\psi(x), \quad S(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & (a^*)^{-1} \end{pmatrix} \quad (16)$$

¹²Da der Index des Feldes χ oben steht, transformiert es sich, wie aus dem letzten Abschnitt hervorgeht, gemäß der Darstellung $(a^*)^{-1}$ und nicht gemäß \bar{a} .

($x' = \Lambda_a x$, $a \in SL(2, C)$). Durch Einführung der γ -Matrizen¹³

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad (17)$$

($i = 1, 2, 3$) nimmt die Feldgleichung schließlich die vertraute Gestalt an:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0 \quad (18)$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \quad (19)$$

Um die Ausreduktion des Dirac-Spinors (die Zerlegung von ψ in ξ und χ) vornehmen zu können, wird die γ_5 -Matrix benötigt:

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \quad \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \gamma_5) = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{2}(\mathbb{1} - \gamma_5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}$$

Die Matrizen $\frac{1}{2}(\mathbb{1} \pm \gamma_5)$ stellen Projektoren dar, deren Anwendung auf einen Dirac-Spinor nun die gewünschte Zerlegung leistet:

$$\psi_R = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \gamma_5)\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (R = \text{rechts}) \quad (20)$$

$$\psi_L = \frac{1}{2}(\mathbb{1} - \gamma_5)\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix} \quad (L = \text{links}) \quad (21)$$

Wir nennen die entstehenden Spinoren *rechtshändig* bzw. *linkshändig*¹⁴. Der Grund für diese Bezeichnung ist aus der Diskussion der Weyl-Gleichung ersichtlich (siehe dazu den nächsten Abschnitt).

Warum benötigt die Dirac-Gleichung *vier* Feldkomponenten, wo man erwarten würde, daß *zwei* ausreichen, um Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen zu beschreiben? Oft wird die Frage mit dem Hinweis auf die Existenz der Antiteilchen beantwortet. Dies ist ein Irrglaube. Um die wahre Antwort zu finden, müssen wir die Raumspiegelung mit in die Betrachtung einbeziehen. Wir erweitern L_+^\uparrow um das Element I_r (d.h. um die Transformation $I_r : (x^0, \vec{x}) \mapsto (x^0, -\vec{x})$) und gelangen so zur *orthochronen* Lorentz-Gruppe L^\uparrow . Diese Erweiterung ist nicht-trivial in folgendem Sinn: Obwohl I_r mit allen Rotationen vertauscht, gilt

¹³Dies sind selbstverständlich 4×4 -Matrizen, die wir nur der besseren Übersicht wegen in jeweils vier Blöcke aufgeteilt haben. Jeder Block ist eine 2×2 -Matrix. Solche Matrizen wollen wir in Zukunft *Blockmatrizen* nennen.

¹⁴Die Aufspaltung $\psi = \psi_R + \psi_L$ ist, wie die Konstruktion zeigt, *unabhängig* vom Bezugssystem. Diese Aussage gilt z.B. für das Elektronfeld. Dies darf nicht dazu verleiten, anzunehmen, es gäbe zwei Arten von Elektronen: rechts- und linkshändige. Zwar kann die Helizität eines Elektrons definiert werden. Jedoch ist der Erwartungswert dieser Meßgröße, wie überhaupt die Spinrichtung eines Teilchens allgemein, *abhängig* vom Bezugssystem.

dies nicht mehr für ein allgemeines Element der Gruppe L_+^\uparrow . Für spezielle Lorentz-Transformationen (siehe (1.6)) gilt nämlich $I_r L(\gamma) = L(-\gamma)I_r$. Deshalb hat die erweiterte Gruppe L^\uparrow *nicht* die Gestalt eines direkten Produktes: $L^\uparrow \neq L_+^\uparrow \otimes \mathbf{Z}_2$. Dies äußert sich darin, daß die endlichdimensionalen Darstellungen von L_+^\uparrow zu Darstellungen von L^\uparrow nur durch eine *Verdoppelung* des Darstellungsraumes erweitert werden können. Am Beispiel der Dirac-Gleichung wird dies sofort deutlich. Eine Raumspiegelung vertauscht die Rolle der in ihr auftretenden Differentialoperatoren:

$$\partial_0 \pm \vec{\sigma} \cdot \nabla \quad \mapsto \quad \partial_0 \mp \vec{\sigma} \cdot \nabla.$$

Grund hierfür ist, daß ∇ in $-\nabla$ übergeht. Damit vertauschen auch ξ und χ ihre Rollen:

$$\begin{aligned} \xi'(x') &= \chi(x) \\ \chi'(x') &= \xi(x) \quad x' = I_r x \end{aligned}$$

Die Transformation des Dirac-Feldes unter einer Raumspiegelung hat also die folgende Gestalt¹⁵:

$$\psi'(x') = S(I_r)\psi(x), \quad S(I_r) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad x' = I_r x. \quad (22)$$

Durch diese Vorschrift wird die *reduzible* Spinordarstellung der L_+^\uparrow zu einer *irreduziblen* Darstellung der größeren Gruppe L^\uparrow erweitert. Fazit:

Die Dirac-Theorie benutzt zur Beschreibung von Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen eine vierdimensionale irreduzible Spinordarstellung der Gruppe L^\uparrow .

1.4 Die Weyl-Gleichung

In dem System von Differentialgleichungen (15) tritt eine Entkopplung für $m = 0$ ein, und wir gelangen so zu den beiden Weil-Gleichungen:

$$\partial_0 \xi(x) = -\vec{\sigma} \cdot \nabla \xi(x) \quad (23)$$

$$\partial_0 \chi(x) = \vec{\sigma} \cdot \nabla \chi(x) \quad (24)$$

¹⁵Daß die Darstellungsmatrix $S(I_r)$ mit γ^0 übereinstimmt, hat keine tiefere Bedeutung und liegt in der von uns getroffenen Wahl der γ -Matrizen begründet. Der Einfachheit halber haben wir hier die Parität π des Dirac-Feldes gleich 1 gesetzt. Allgemein gilt $\psi'(x') = \pi S(I_r)\psi(x)$.

Diese Gleichungen beschreiben recht- bzw. linkshändige Neutrinos. Die Rechts-Links-Asymmetrie jeder dieser Gleichungen versteht man sofort, wenn man ebene Wellen betrachtet:

$$\chi(x) = \chi_0 e^{-ipx}, \quad p = (p^\mu) = (|\vec{p}|, \vec{p}).$$

Der Spinor χ_0 beschreibt die Spinorientierung. Aus der Weyl-Gleichung und $\vec{n} = \vec{p}/|\vec{p}|$ folgt

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{n} \chi_0 = -\chi_0.$$

Mit anderen Worten: χ_0 ist dadurch eingeschränkt, daß Spin und Impuls *antiparallel* stehen (die Helizität des so beschriebenen Neutrinos ist $-\frac{1}{2}$, und dies entspricht der Beobachtung). Rechtshändige Neutrinos würden durch die Weyl-Gleichung für ξ beschrieben: Dies sind die Antiteilchen der linkshändigen Neutrinos. Für die schwache Wechselwirkung, in der diese Teilchen auftreten, ist die Raumspiegelung keine Symmetrieoperation. Aus diesem Grunde spielt die Transformation $\xi \mapsto \chi$, $\chi \mapsto \xi$, die die Helizität der Neutrinos umkehrt, dort keine Rolle.

Die Zweikomponententheorie des Neutrinos wird man am bequemsten in der Sprache der Dirac-Theorie formulieren:

$$\gamma^\mu \partial_\mu \psi = 0, \quad \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \gamma_5)\psi = 0. \quad (25)$$

1.5 Die Proca-Gleichungen

Gewöhnlich betrachtet man die Klein-Gordon-Gleichung $(\square + m^2)\Phi = 0$ (mit $m \neq 0$) für ein Skalarfeld $\Phi(x)$ als die einfachste Feldgleichung¹⁶. Es gibt jedoch gute Gründe, Differentialgleichungen 1.Ordnung den Vorzug zu geben. Die Umformung der Klein-Gordon-Theorie gelingt durch Einführung von vier zusätzlichen Feldkomponenten, $A_\mu = m^{-1}\partial_\mu \Phi$:

$$-\partial^\mu A_\mu - m\Phi = 0 \quad (26)$$

$$\partial_\mu \Phi - mA_\mu = 0 \quad (27)$$

Dieses Gleichungssystem hat eine ähnliche Struktur wie sie die Dirac-Gleichung aufweist,

$$(\beta^\mu \partial_\mu - m)B = 0, \quad ,$$

wobei B nun ein fünfkomponentiges Feld ist: $B = (\Phi, A_\mu)$. Es ist bemerkenswert, daß die hier auftretenden β -Matrizen die folgenden algebraischen Relationen (bekannt unter dem Namen ‘Kemmer-Algebra’) erfüllen:

$$\beta^\mu \beta^\nu \beta^\lambda + \beta^\lambda \beta^\nu \beta^\mu = \beta^\mu g^{\nu\lambda} + \beta^\lambda g^{\nu\mu}$$

¹⁶Wie allgemein üblich, bezeichnet $\square = \partial^\mu \partial_\mu$ den d'Alembert- oder Wellenoperator.

Es zeigt sich nun, daß es außer der trivialen Darstellung $\beta^\mu = 0$ und der eben beschriebenen 5-dimensionalen Darstellung der Kemmer-Algebra nur noch eine weitere irreduzible Darstellung gibt. Sie ist 10-dimensional und wird durch die *Proca-Gleichungen* realisiert:

$$-\partial^\mu A^\nu + \partial^\nu A^\mu - mF^{\mu\nu} = 0 \quad (28)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} - mA^\nu = 0 \quad (29)$$

Das Verhalten unter Lorentz-Transformationen zeigt, daß von der reduzierten Darstellung $D^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \oplus D^{10} \oplus D^{01}$ Gebrauch gemacht wurde. Dennoch beschreiben die Proca-Gleichungen ausschließlich Spin-1-Teilchen. Denn es gilt $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$ und $\partial_\mu A^\mu = 0$ als Folge der Feldgleichungen.

Die Maxwell-Gleichungen (im Vakuum) sind ein Grenzfall der Proca-Gleichungen. Wenn man nämlich das Vektorfeld anders normiert und dann den Limes $m \rightarrow 0$ ausführt, bekommt man:

$$-\partial^\mu A^\nu + \partial^\nu A^\mu - F^{\mu\nu} = 0 \quad (30)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \quad (31)$$

1.6 Pauli-Fierz-Gleichungen

Wir betrachten ein Feld $\psi_\mu(x)$, das sowohl ein Dirac-Spinor als auch ein Vektor ist und damit 16 Komponenten besitzt. Die zugrunde liegende Spinordarstellung der L_+^\uparrow ist

$$D^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \otimes \left\{ D^{\frac{1}{2}0} \oplus D^{0\frac{1}{2}} \right\} = D^{0\frac{1}{2}} \oplus D^{\frac{1}{2}0} \oplus D^{1\frac{1}{2}} \oplus D^{\frac{1}{2}1}$$

Der Spininhalt wäre somit $s = \frac{1}{2}$ und $s = \frac{3}{2}$. Pauli und Fierz (ebenso Rarita und Schwinger) formulierten die folgenden Feldgleichungen:

$$(i\gamma^\nu \partial_\nu - m)\psi_\mu = 0 \quad (32)$$

$$\partial^\mu \psi_\mu = 0 \quad (33)$$

Die erste Gleichung garantiert, daß es sich um Teilchen der Masse m handelt, die zweite schließt Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$ aus der Betrachtung aus.

1.7 Chirale und Nichtchirale Felder

Die einfachsten Beispiele für Felder mit definierter Chiralität (links/rechts-Händigkeit) haben wir bei der Zerlegung des Dirac-Feldes $\psi = \psi_R + \psi_L$

kennengelernt. Sie entspricht der Zerlegung der Darstellung der $SL(2, C)$ in die irreduziblen Bestandteile $D^{\frac{1}{2}0}$ und $D^{0\frac{1}{2}}$. Die Chiralität erben die symmetrischen Tensorprodukte:

$$\begin{aligned} D^{j0} &= D^{\frac{1}{2}0} \vee \dots \vee D^{\frac{1}{2}0} & (2j \text{ Faktoren}) \\ D^{0k} &= D^{0\frac{1}{2}} \vee \dots \vee D^{0\frac{1}{2}} & (2k \text{ Faktoren}) \end{aligned}$$

Diese Tatsache fanden wir bestätigt am Beispiel der Zerlegung des Feldstärketensors $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$ in den selbstdualen und den antiselbstdualen Tensor. Sie entspricht der Zerlegung der Darstellung der $SL(2, C)$ in die irreduziblen Bestandteile D^{10} und D^{01} . Allgemein gilt:

- Bei Raumspiegelung geht ein (j, k) -Feld in ein (k, j) -Feld über.
- Ist speziell $j = 0$ oder $k = 0$, so hat das Feld eine definierte Chiralität. Ein $(0, k)$ -Feld ist immer linkshändig, ein $(j, 0)$ -Feld immer rechtshändig.
- Ein (j, j) -Feld gilt als nichtchiral. Ebenso reduzible Felder, bei deren Zerlegung die Darstellung D^{jk} zusammen mit der Darstellung D^{kj} auftritt.

Beispiele für nichtchirale Felder:

1. Das Skalarfeld Φ unter der (trivialen) Darstellung D^{00} .
2. Das Dirac-Feld ψ unter der Darstellung $D^{\frac{1}{2}0} \oplus D^{0\frac{1}{2}}$.
3. Das Vektorfeld A_μ unter der Darstellung $D^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$.
4. Das Gravitationsfeld $G_{\mu\nu}$ unter der Darstellung D^{11} .

Weitere Beispiele sind leicht zu konstruieren, jedoch von geringem Interesse.

2 Das Quantenprinzip

Bevor wir von einer Quantenfeldtheorie (QFT) überhaupt erst sprechen können, muß erläutert werden, wie die Quantisierung eines Feldes vollzogen wird. Bekanntlich erhält man die gewöhnliche Quantenmechanik von endlich vielen Freiheitsgraden dadurch, daß man die klassischen Observablen, wie Ort und Impuls, durch Operatoren ersetzt. Die Rolle der Poisson-Klammer übernimmt der Kommutator, und die Vertauschungsrelationen von Heisenberg charakterisieren die Operatoren bis auf Äquivalenz bereits eindeutig. In der QFT geht man ähnlich vor: Die klassischen Felder werden durch Operatoren ersetzt. Diese werden durch kanonische Vertauschungs- oder Antivertauschungsrelationen festgelegt. Einen Eindeutigkeitssatz gibt es jedoch nicht mehr. Die so konstruierte Theorie entspricht einer Quantenmechanik von unendlich vielen Freiheitsgraden.

2.1 Bosonen

Das Grundprinzip der kanonischen Quantisierung soll am Beispiel des freien (d.h. wechselwirkungsfreien) Feldes erläutert werden. Das Ziel ist, freie Teilchen mit Spin 0 und Spin 1 zu beschreiben. Wir stützen uns hierbei auf die bekannten Feldgleichungen und beginnen mit der Beschreibung von Spin-0-Teilchen. Die Benutzung reeller Felder führt automatisch zu einer Situation, bei der das Teilchen mit seinem Antiteilchen übereinstimmt. Erst die Einführung komplexer Felder ermöglicht eine Unterscheidung von Teilchen und Antiteilchen: Obwohl ihre Massen gleich sind, haben sie entgegengesetzte Ladungen (elektrische Ladung, Baryonenzahl usw.). Folglich beschreiben reelle Felder solche Teilchen, deren Ladungen verschwinden.

2.1.1 Die kanonischen Vertauschungsrelationen

Ein reelles Feld $\Phi(x)$, das der Klein-Gordon-Gleichung $(\square + m^2)\Phi(x) = 0$ genügt, wird dadurch zu einem Operatorfeld, daß man zu einer festen (jedoch beliebigen) Zeit $t = x^0$ kanonische Vertauschungsrelationen für das Feld und seine zeitliche Ableitung $\dot{\Phi} = \partial_0\Phi$ fordert¹⁷:

$$[\Phi(x), \dot{\Phi}(x')]_{t=t'} = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (34)$$

$$[\Phi(x), \Phi(x')]_{t=t'} = 0 \quad (35)$$

$$[\dot{\Phi}(x), \dot{\Phi}(x')]_{t=t'} = 0 \quad (36)$$

¹⁷Punkte x der Raumzeit haben die Koordinaten (x^0, \mathbf{x}) . Mit $\delta^3(\mathbf{x})$ wird die dreidimensionale Diracsche Deltafunktion bezeichnet. Es handelt sich dabei jedoch nicht um eine 'Funktion' im üblichen Sinn, sondern um eine *Distribution*.

Diese Relationen haben eine formale Ähnlichkeit mit den Heisenbergschen Relationen für Ort und Impuls. Wir wollen zeigen, daß sie das Gewünschte leisten, nämlich eine Beschreibung von relativistischen Teilchen, die der Bose-Statistik unterworfen sind. Dazu wählen wir die folgende Zerlegung:

$$\Phi(x) = (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3k}{2\omega} \{e^{-ikx} a(k) + e^{ikx} a^\dagger(k)\} \quad (37)$$

mit $k = (k^0, \mathbf{k})$, $k^0 = \omega = \sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2}$ und $kx = \omega t - \mathbf{k}\mathbf{x}$. Es ist sinnvoll, hier das Lorentz-invariante Maß $d^3k/(2\omega)$ auf dem Massenhypربولoid $k^2 = m^2$, $k^0 > 0$ anstelle von d^3k zu benutzen.

Es gelingt nun, die Fourier-Amplituden a und a^\dagger durch Φ und $\dot{\Phi}$ zur Zeit $t = 0$ (oder zu irgendeiner anderen Zeit) auszudrücken:

$$a(k) = (2\pi)^{-3/2} \int d^3x e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \{ \omega \Phi(0, \mathbf{x}) + i \dot{\Phi}(0, \mathbf{x}) \} \quad (38)$$

$$a^\dagger(k) = (2\pi)^{-3/2} \int d^3x e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \{ \omega \Phi(0, \mathbf{x}) - i \dot{\Phi}(0, \mathbf{x}) \} \quad (39)$$

Auf diese Weise ermittelt man die kanonischen Vertauschungsrelationen für die Operatoren a und a^\dagger :

$$[a(k), a^\dagger(k')] = 2\omega \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (40)$$

$$[a(k), a(k')] = 0 \quad (41)$$

$$[a^\dagger(k), a^\dagger(k')] = 0 \quad (42)$$

Die Rechnung, die zur Formel (40) führt, verlangt nur eine einfache Integration:

$$\begin{aligned} & -i(\omega + \omega')(2\pi)^{-3} \int d^3x \int d^3x' e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \mathbf{k}'\mathbf{x}')} i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ &= (\omega + \omega')(2\pi)^{-3} \int d^3x e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\mathbf{x}} = 2\omega \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \end{aligned}$$

Die Felder wie auch ihre Fourier-Amplituden sind sehr singuläre mathematische Objekte, wie das Auftreten der δ -Funktion signalisiert. Um diese Größen besser kontrollieren zu können, integrieren wir a und a^\dagger mit Wellenfunktionen $\phi(\mathbf{k})$:

$$a(\phi) = \int \frac{d^3k}{2\omega} \overline{\phi(\mathbf{k})} a(k) \quad (43)$$

$$a^\dagger(\phi) = \int \frac{d^3k}{2\omega} a^\dagger(k) \phi(\mathbf{k}). \quad (44)$$

Unter diesen Wellenfunktionen hat man sich Zustände *eines* Teilchens in der Impulsdarstellung vorzustellen. Mit dem Skalarprodukt

$$(\phi, \phi') = \int \frac{d^3k}{2\omega} \overline{\phi(\mathbf{k})} \phi'(\mathbf{k}) \quad (45)$$

sind diese Funktionen Vektoren eines Hilbertraumes

$$\mathcal{H} = \{\phi \mid (\phi, \phi) < \infty\} \quad (46)$$

Wir werden ihn kurz den *Einteilchenraum* nennen. Die kanonischen Vertauschungsrelationen erhalten nun die Gestalt:

$$[a(\phi), a^\dagger(\phi')] = (\phi, \phi') \quad (47)$$

$$[a(\phi), a(\phi')] = 0 \quad (48)$$

$$[a^\dagger(\phi), a^\dagger(\phi')] = 0 \quad (49)$$

Wir wollen nun die Herkunft der Größen $a(\phi)$ und $a^\dagger(\phi)$ vergessen und sie uns lediglich durch die Vertauschungsrelationen definiert denken. Dazu sind allerdings noch zwei Bedingungen erforderlich, die wir gesondert formulieren:

- Die Abbildung $\phi \mapsto a^\dagger(\phi)$ ist *linear*.
- Die Abbildung $\phi \mapsto a(\phi)$ ist *antilinear*¹⁸.

Das Problem, die Vertauschungsrelationen zu ‘lösen’, d.h. eine Darstellung durch Operatoren auf einem konkreten Hilbertraum zu finden, läßt sich besser handhaben, wenn wir eine *Basis*¹⁹ $(e_i)_{i=1,2,\dots}$ in dem Einteilchenraum \mathcal{H} einführen. Setzen wir nun

$$a_i = a(e_i) \quad a_i^\dagger = a^\dagger(e_i) \quad i = 1, 2, \dots \quad (50)$$

so bestimmen diese Operatoren die Größen $a(\phi)$ und $a^\dagger(\phi)$ bereits vollständig. Grund: Jedes ϕ läßt sich nach den Elementen der Basis entwickeln, und dies führt gleichzeitig zu einer Entwicklung von $a(\phi)$ und $a^\dagger(\phi)$ nach a_i bzw. a_i^\dagger .

Aus $(e_i, e_k) = \delta_{ik}$ folgen die kanonischen Vertauschungsrelationen nun in einer neuen Gestalt:

$$[a_i, a_k^\dagger] = \delta_{ik} \quad (51)$$

$$[a_i, a_k] = 0 \quad (52)$$

$$[a_i^\dagger, a_k^\dagger] = 0 \quad (53)$$

¹⁸ $a(\lambda\phi + \lambda'\phi') = \bar{\lambda}a(\phi) + \bar{\lambda}'a(\phi')$ für komplexe Zahlen λ und λ' .

¹⁹Darunter verstehen wir ein *vollständiges Orthonormalsystem*.

Die Indizes i und k durchlaufen alle natürliche Zahlen, weil die Dimension des Einteilchenraumes abzählbar unendlich ist.

Es ist hilfreich, sich für einen Augenblick vorzustellen, es gäbe nur endlich viele Freiheitsgrade: $i, k = 1, \dots, n$. In diesem Fall erhalten wir die Kommutatorrelationen des *harmonischen Oszillators* für n Freiheitsgrade. Die wesentliche Struktur erkennen wir bereits am Oszillator mit einem Freiheitsgrad. Für $n = 1$ haben wir es nur mit dem Operatorpaar a und a^\dagger zu tun, das man in der Quantenmechanik auf folgende Weise beschreibt:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x + \frac{d}{dx} \right) \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x - \frac{d}{dx} \right) \quad (54)$$

Diese Operatoren wirken auf dem Hilbertraum der quadratintegriblen Funktionen $\psi(x)$: Selbst für *einen* Freiheitsgrad ist der Darstellungsraum bereits unendlichdimensional. Der Grundzustand des Oszillators ist durch die Funktion $\Omega(x) = \pi^{-1/4} \exp(-x^2/2)$ gegeben, kann aber auch durch die Bedingung $a\Omega = 0$ (bis auf einen Normierungsfaktor) abstrakt charakterisiert werden²⁰.

Nun kehren wir zu dem Fall unendlich vieler Freiheitsgrade, dem Fall der Feldtheorie also, zurück und konstruieren den Darstellungsraum in analoger Weise. Wir nehmen dabei an:

1. *Existenz und Eindeutigkeit des Vakuums.* Es gibt genau einen Grundzustand Ω , genannt das ‘Vakuum’, mit den Eigenschaften

$$a_i \Omega = 0 \quad i = 1, 2, \dots, \quad (\Omega, \Omega) = 1 \quad (55)$$

‘Genau einen’ heißt hier, daß Ω bis auf einen (physikalisch irrelevanten) Phasenfaktor eindeutig ist.

2. *Existenz einer abzählbar unendlichen Basis.* Durch fortgesetzte Anwendung der Operatoren a_i^\dagger auf das Vakuum erhalten wir die Basisvektoren

$$\Phi_{n_1, \dots, n_k} = \frac{1}{\sqrt{n_1! n_2! \dots n_k!}} (a_1^\dagger)^{n_1} (a_2^\dagger)^{n_2} \dots (a_k^\dagger)^{n_k} \Omega \quad (56)$$

($k = 0, 1, 2, \dots$, $n_i = 0, 1, 2, \dots$). Das System dieser Vektoren²¹ ist *vollständig*, d.h. jeder Zustand besitzt eine (konvergente) Entwicklung nach diesen Basisvektoren.

²⁰Zur Erinnerung: $a\Omega = 0$ stellt eine Differentialgleichung dar, als deren Lösung die Gauß-Funktion erscheint.

²¹Falls $k = 0$, also (n_1, \dots, n_k) leer ist, fällt der Basisvektor mit dem Vakuum zusammen.

3. *Die Beziehung zwischen a_i und a_i^\dagger .* Sei \mathcal{D} der Teilraum²² der *endlichen* Linearkombinationen, die man aus den Basisvektoren bilden kann, so gilt für alle $\Phi, \Phi' \in \mathcal{D}$

$$(\Phi, a_i \Phi') = (a_i^\dagger \Phi, \Phi') \quad i = 1, 2, \dots \quad (57)$$

Man sagt deshalb, a_i und a_i^\dagger seien *konjugiert* zueinander.

Wir interpretieren n_i in (2.23) als die Zahl der Teilchen mit dem Freiheitsgrad i oder auch als die Besetzungszahl des Zustandes e_i . Wir nennen demgemäß deren Summe $n_1 + n_2 + \dots + n_k$ die *Gesamtteilchenzahl*. Die Operatoren a_i^\dagger angewandt auf einen Zustand erzeugen ein weiteres Teilchen mit dem Freiheitsgrad i . Sie heißen darum *Erzeugungsoperatoren*, während die Anwendung der Operatoren a_i Teilchen der Sorte i vernichtet, sie heißen darum *Vernichtungsoperatoren*. Konkret kann ihre Wirkung auf die Basisvektoren (56) durch die folgenden Formeln angegeben und somit eine Darstellung definiert werden:

$$\begin{aligned} a_i \Phi_{\dots n_i \dots} &= \sqrt{n_i} \Phi_{\dots n_i - 1 \dots} \\ a_i^\dagger \Phi_{\dots n_i \dots} &= \sqrt{n_i + 1} \Phi_{\dots n_i + 1 \dots} . \end{aligned}$$

Insbesondere folgt daraus

$$a_i^\dagger a_i \Phi_{\dots n_i \dots} = n_i \Phi_{\dots n_i \dots} .$$

Die so beschriebene Darstellung der kanonischen Vertauschungsrelationen heißt *Vakuumdarstellung* oder *Fock-Darstellung*. Der zugehörige Hilbertraum heißt *symmetrischer Fockraum über dem Einteilchenraum \mathcal{H}* . Wir wollen ihn mit $F_+(\mathcal{H})$ bezeichnen. Der Übergang vom Einteilchenraum \mathcal{H} zum Fockraum $F_+(\mathcal{H})$ ist zwar typisch für die Feldtheorie, aber nicht nur dort anzutreffen. Auch in der Theorie der kondensierten Materie begegnet man Vielteilchensystemen mit Bose-Statistik (z.B. He⁴, Phononen), und man benötigt zu ihrer Beschreibung den Fockraum. Der Übergang zu einem Zustandsraum mit unbegrenzter Teilchenzahl wird allgemein als *zweite Quantisierung* bezeichnet²³.

²²Es handelt sich hier um den Definitionsbereich der Operatoren a_i und a_i^\dagger , der deswegen nicht mit dem ganzen Fockraum übereinstimmen kann, weil diese Operatoren *unbeschränkt* sind. Natürlich beschreibt \mathcal{D} eine *dichte* Menge von Vektoren: Jeder beliebige Vektor kann durch Vektoren aus \mathcal{D} approximiert werden.

²³Diese Bezeichnung ist leider irreführend, weil es sich hierbei nicht um die Einführung eines neuen physikalischen Weltbildes, schon gar nicht um eine ‘Revolution’ der Physik, sondern nur um die Einführung einer bequemen Schreibweise, bestenfalls um eine mathematische Konstruktion handelt.

Der Operator der Teilchenzahl kann auf verschiedene Weise dargestellt werden, (1) basisabhängig als

$$N = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^\dagger a_i, \quad (58)$$

(2) basisunabhängig als

$$N = \int \frac{d^3k}{2\omega} a^\dagger(k) a(k). \quad (59)$$

Um (59) aus (58) abzuleiten, benötigt man nur die Vollständigkeitsrelation

$$\sum_i e_i(\mathbf{k}) \overline{e_i(\mathbf{k}')} = 2\omega \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$

der Basisvektoren e_i im Einteilchenraum. Diese lautet für jede Basis gleich. Andererseits kann der Operator N auch durch die Bedingungen

$$[a(\phi), N] = a(\phi), \quad [N, a^\dagger(\phi)] = a^\dagger(\phi), \quad N\Omega = 0$$

charakterisiert werden.

2.2 Eigenschaften des Vakuums

Sei also $F_+(\mathcal{H})$ der Fockraum über \mathcal{H} und Ω der Vakuumzustand darin. Aus $a_i\Omega = 0$ für alle i folgt $a(\phi)\Omega = 0$ für alle $\phi \in \mathcal{H}$ gleichbedeutend mit $(\Omega, a(k)\Omega) = 0$. Ebenso $(\Omega, a_i^\dagger\Omega) = (a_i\Omega, \Omega) = 0$, also $(\Omega, a^\dagger(k)\Omega) = 0$. Ein Blick auf (2.4) lehrt: Das freie Feld $\Phi(x)$ besitzt einen verschwindenden Vakuum-Erwartungswert:

$$(\Omega, \Phi(x)\Omega) = 0 \quad (60)$$

Wir nennen diesen Erwartungswert auch die *Einpunktfunktion* des Feldes. Bei freien Feldern ist es unausweichlich, daß diese Funktion verschwindet. Dies ändert sich u.U. bei Einschaltung einer Wechselwirkung. Die Salam-Weinberg-Theorie benutzt ein Skalarfeld Φ , das sog. Higgs-Feld, für das $(\Omega, \Phi(x)\Omega) = v \neq 0$ gilt, wobei v ein überall präsentenes konstantes Hintergrundfeld ist.

Anders liegen die Dinge bei der Zweipunktfunktion. Hier berechnen wir

$$\begin{aligned} (\Omega, \Phi(x)\Phi(y)\Omega) &= (2\pi)^{-3} \int \frac{d^3k}{2\omega} \int \frac{d^3k'}{2\omega'} (\Omega, a(k)a^\dagger(k')\Omega) e^{-ikx+ik'y} \\ &= (2\pi)^{-3} \int \frac{d^3k}{2\omega} \int \frac{d^3k'}{2\omega'} (\Omega, [a(k), a^\dagger(k')]\Omega) e^{-ikx+ik'y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (2\pi)^{-3} \int \frac{d^3k}{2\omega} \int \frac{d^3k'}{2\omega'} 2\omega \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') (\Omega, \Omega) e^{-ikx + ik'y} \\
&= (2\pi)^{-3} \int \frac{d^3k}{2\omega} e^{-ik(x-y)}
\end{aligned}$$

mit dem Ergebnis

$$(\Omega, \Phi(x)\Phi(y)\Omega) = \Delta_+(x-y, m) \quad (61)$$

Die hier eingeführte L_+^\uparrow -invariante Funktion $\Delta_+(x, m)$ ist in Wahrheit eine Distribution bezüglich x . Sie hängt außerdem von der Masse m des Skalarfeldes ab. Diese Funktion beschreibt die Fluktuationen des freien Feldes im Vakuum ('Vakuumfluktuationen'). In der Feldtheorie erhält das Vakuum damit eine Struktur. Es nimmt Eigenschaften an, die weder von der gewöhnlichen Quantenmechanik noch von der allgemeinen Relativitätstheorie her voraussahbar waren. Denn traditionell hat das Vakuum überhaupt keine Struktur. Die Struktur, die es in Feldtheorie erhält, kann auch im Experiment sichtbar gemacht werden, sie führt zum sog. *Lamb shift* in der Atomphysik.

Die Existenz von Vakuumfluktuationen ist auch Quelle von unerwünschten Divergenzen in der Feldtheorie. So ist etwa

$$(\Omega, \Phi(x)^2\Omega) = \Delta_+(0, m) = \infty \quad (62)$$

und der übliche Ansatz für den Energie-Dichte²⁴

$$T^{00}(x) = \frac{1}{2} \{ \dot{\Phi}(x)^2 + (\nabla\Phi(x))^2 + m^2\Phi(x)^2 \} \quad (63)$$

wird zu einem sinnlosen Ausdruck. Um diesen Mißstand zu vermeiden, bedient man sich eines Kunstgriffes. Man führt das sog. *Wick-Produkt* ein,

$$:\Phi(x)\Phi(y): = \Phi(x)\Phi(y) - \Delta_+(x-y, m) , \quad (64)$$

und ersetzt alle formalen Produkte von Feldoperatoren (auch solche für $x = y$) durch die entsprechenden Wick-Produkte²⁵. Ein Higgs-Feld mit der Masse m_H (im Bereich 110-170 GeV) und dem (Vakuums)-Erwartungswert v (ca. 246 GeV) führt gemäß (63) zu einer konstanten Energiedichte des Vakuums

$$\frac{1}{2}m_H^2v^2 \quad (\text{genauer: } \frac{1}{2}(\hbar c)^{-3}m_H^2v^2)$$

²⁴ $T^{\mu\nu}$ bezeichnet den Energie-Impuls-Tensor.

²⁵Dies geht auf einen Vorschlag von C.G.Wick zurück. Die Wick-Produkte entstehen formal durch eine Umordnung von Erzeugungs- und Vernichtungs-Operatoren. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von einer Normalordnung der Operatoren: Erzeugungs-Operatoren stehen grundsätzlich links von den Vernichtungs-Operatoren.

von der Größenordnung 10^{50} GeV/cm^3 , die alles Vorstellbare übersteigt.

Wir kehren zurück zur Situation $v = 0$ und fragen nach der Existenz eines Verfahrens, das die Berechnung der n -Punktfunktion mit $n \geq 3$

$$W_n(x_1, \dots, x_n) = (\Omega, \Phi(x_1) \cdots \Phi(x_n)\Omega)$$

für ein freies Skalarfeld gestattet. Die allgemeine Strategie, hierbei nur die Vertauschungsrelationen heranzuziehen, führt auf ein Rekursionsverfahren:

$$W_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n-1} W_{n-2}(\dots, \hat{x}_k, \dots, \hat{x}_n) \Delta_+(x_k - x_n, m).$$

Hier bedeutet \hat{x} , daß die Variable x zu entfernen sei. Wir erkennen zwei Dinge: (1) Für ungerades n verschwindet W_n , (2) für gerades n ist W_n eine Summe von Produkten der Δ_+ -Funktion. Translationsinvarianz äußert sich so, daß W_n nur von den Differenzen $x_i - x_k$ abhängt.

2.3 Energie und Impuls

Wir bemühen uns nun, die wichtigsten Observablen auf einem anderen Weg als durch Wick-Produkte einzuführen, und beginnen mit der Energie. Die QFT ist eine Quantentheorie von unendlich vielen Freiheitsgraden, die das *Heisenberg-Bild* benutzt: Nicht die Zustände, sondern die Feldoperatoren sind zeitabhängig. An die Stelle der Schrödinger-Gleichung tritt deshalb die Heisenberg-Gleichung für das Feld Φ :

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, \mathbf{x}) = [\Phi(t, \mathbf{x}), H] \quad (65)$$

Die formale Lösung dieser Gleichung lautet

$$\Phi(t + t', \mathbf{x}) = e^{itH} \Phi(t', \mathbf{x}) e^{-itH},$$

d.h. der Hamilton-Operator H ist immer erzeugendes Element einer einparametrischen Gruppe von Zeittranslationen. Für den Spezialfall eines *freien Feld* ist die zeitliche Entwicklung bekannt. Somit können wir die Gleichung (65) zur Charakterisierung des Hamilton-Operators H verwenden. Die Energie ist dadurch *fast eindeutig*, nämlich bis auf eine additive Konstante festgelegt. Denn sind H und H' zwei Lösungen der obigen Gleichung, so kommutiert die Differenz $H' - H$ mit dem Feld. In der Fock-Darstellung ist das Skalarfeld irreduzibel, d.h. es gilt die Aussage des Schurschen Lemmas: Jeder mit dem Feld kommutierende Operator ist notwendig ein Vielfaches des Einheitsoperators I . Damit haben wir $H' = H + cI$. Die beliebige Konstante c , die nur

die Energieskala verschiebt, wird von uns nun dadurch festgesetzt, daß wir dem Vakuum die Energie Null geben:

$$H\Omega = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{-itH}\Omega = \Omega \quad (66)$$

Diese Wahl ist in gewisser Weise natürlich und im Einklang mit der Vorstellung, daß das Vakuum im Schrödinger-Bild ein zeitunabhängiger Zustand und zugleich der einzige Zustand mit dieser Eigenschaft ist.

In einer relativistischen Theorie ist die Energie nur die 0-te Komponente eines Vektors P^μ , des *Viererimpulses*. Dies veranlaßt uns, die Heisenberg-Gleichung wie folgt zu erweitern:

$$i\partial^\mu\Phi(x) = [\Phi(x), P^\mu] \quad (67)$$

$$P^\mu\Omega = 0 \quad (68)$$

Damit haben wir verlangt, daß das Vakuum den Viererimpuls Null erhält. Die erweiterte Heisenberg-Gleichung läßt sich formal integrieren:

$$\begin{aligned} \Phi(x+x') &= U(x)^{-1}\Phi(x')U(x) \\ U(x)\Omega &= \Omega, \quad U(x) = \exp(-ix_\mu P^\mu) \end{aligned}$$

($P = (P^\mu) = (H, \mathbf{P})$). Für jedes $x \in M_4$ ist $U(x)$ ein unitärer Operator. Er verallgemeinert den Ausdruck e^{-itH} , und die Abbildung $x \mapsto U(x)$ ist eine *unitäre Darstellung* der Translationen auf dem Fock-Raum. Die Komponenten von P nennt man die *Erzeuger* dieser Darstellung. Das Vakuum ist ein translationsinvarianter Zustand. Man kann für die Fock-Darstellung des Feldes zeigen, daß es der *einzigste* Zustand mit dieser Eigenschaft ist.

Durch Übergang zu den Fourier-Amplituden des Feldes erhalten wir die erweiterten Heisenberg-Gleichungen in einer äquivalenten Fassung:

$$k^\mu a(k) = [a(k), P^\mu] \quad k = (k^\mu) = (\omega, \mathbf{k}) \quad (69)$$

$$k^\mu a^\dagger(k) = [P^\mu, a^\dagger(k)] \quad (70)$$

2.4 Einteilchenzustände

Wir wollen uns nun davon überzeugen, daß der Operator $a^\dagger(\phi)$ aus dem Vakuum einen Einteilchenzustand mit der Wellenfunktion $\phi(\mathbf{k})$ erzeugt²⁶.

²⁶Mit ‘Wellenfunktion’ meinen wir immer ein Wellenpaket in der *Impulsdarstellung*. Die Ortsdarstellung wird von uns nicht benutzt, weil der Begriff des Ortsoperators in der Feldtheorie problematisch ist. Es zeigt sich, daß man auf die Ortsdarstellung ganz verzichten kann.

Dazu berechnen wir das Skalarprodukt:

$$\begin{aligned}
(a^\dagger(\phi)\Omega, a^\dagger(\phi')\Omega) &= (\Omega, a(\phi)a^\dagger(\phi')\Omega) \\
&= (\Omega, [a(\phi), a^\dagger(\phi')]\Omega) \\
&= (\phi, \phi')(\Omega, \Omega) \\
&= (\phi, \phi')
\end{aligned}$$

Das Ergebnis ist wie gewünscht und läßt sich auch so interpretieren: Die formalen Zustände²⁷

$$|k\rangle = a^\dagger(k)\Omega \quad (71)$$

erfüllen

$$\langle k|k'\rangle = 2\omega\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (72)$$

$$P^\mu|k\rangle = k^\mu|k\rangle \quad (73)$$

Letzteres gilt wegen (68) und (70): $P^\mu a^\dagger(k)\Omega = [P^\mu, a^\dagger(k)]\Omega = k^\mu a^\dagger(k)\Omega$.

2.5 Mehrteilchenzustände

Zustände von zwei Teilchen erhalten wir so:

$$|\phi_1\phi_2\rangle = a^\dagger(\phi_1)a^\dagger(\phi_2)\Omega \quad (74)$$

Der Zustand ist symmetrisch unter Vertauschung der beiden Wellenfunktionen, weil die zugehörigen Erzeugungsoperatoren miteinander kommutieren. Das Skalarprodukt läßt sich elementar berechnen:

$$\begin{aligned}
\langle\phi_1\phi_2|\phi'_1\phi'_2\rangle &= (\Omega, a(\phi_1)a(\phi_2)a^\dagger(\phi'_1)a^\dagger(\phi'_2)\Omega) \\
&= (\Omega, [a(\phi_1), a^\dagger(\phi'_1)][a(\phi_2), a^\dagger(\phi'_2)]\Omega) \\
&+ (\Omega, [a(\phi_1), a^\dagger(\phi'_2)][a(\phi_2), a^\dagger(\phi'_1)]\Omega) \\
&= (\phi_1, \phi'_1)(\phi_2, \phi'_2) + (\phi_1, \phi'_2)(\phi_2, \phi'_1)
\end{aligned}$$

wobei wir nur die Regeln (47-49) und $a(\phi)\Omega = 0$ benutzten. Das Ergebnis zeigt wieder die Symmetrie der Zustände. Wir erhalten das gleiche Resultat, wenn wir zunächst das *symmetrische direkte Produkt* $\phi_1 \vee \phi_2$ der Wellenfunktionen einführen,

$$\{\phi_1 \vee \phi_2\}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \frac{1}{\sqrt{2}} \{\phi_1(\mathbf{k})\phi_2(\mathbf{k}') + \phi_2(\mathbf{k})\phi_1(\mathbf{k}')\} \quad , \quad (75)$$

²⁷Hierbei handelt es sich um nichtnormierbare Zustände. Sie können nicht als Vektoren im Fock-Raum aufgefaßt werden. Ihre Einführung ist dennoch nützlich und entspricht der Einführung ebener Wellen in der Quantenmechanik.

und dann das Skalarprodukt auf die folgende Weise berechnen:

$$\langle \phi_1 \phi_2 | \phi'_1 \phi'_2 \rangle = \int \frac{d^3 k}{2\omega} \int \frac{d^3 k'}{2\omega'} \overline{\{\phi_1 \vee \phi_2\}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')} \{\phi'_1 \vee \phi'_2\}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \quad (76)$$

Formale Zustände, die den ebenen Wellen entsprechen, lassen sich auch hier einführen:

$$|k, k'\rangle = a^\dagger(k) a^\dagger(k') \Omega \quad (77)$$

Unter Benutzung von (2.38) und (2.33) finden wir leicht den Viererimpuls dieser Zustände:

$$\begin{aligned} P^\mu |k, k'\rangle &= [P^\mu, a^\dagger(k)] a^\dagger(k') \Omega + a^\dagger(k) [P^\mu, a^\dagger(k')] \Omega \\ &= (k^\mu + k'^\mu) |k, k'\rangle \end{aligned}$$

Das Ergebnis ist auch hier wie erwartet.

Man kann nun fortfahren und schließlich den allgemeinen n -Teilchenzustand untersuchen. Durch Induktion findet man:

- Der Zustand

$$|\phi_1 \phi_2 \cdots \phi_n\rangle = a^\dagger(\phi_1) a^\dagger(\phi_2) \cdots a^\dagger(\phi_n) \Omega$$

beschreibt n Teilchen mit der symmetrischen Wellenfunktion

$$\{\phi_1 \vee \phi_2 \vee \cdots \vee \phi_n\}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\pi} \prod_{n=1}^n \phi_{\pi(i)}(\mathbf{k}_i)$$

(Die Summe erstreckt sich über alle Permutationen π von $1, \dots, n$).

- Für den Zustand $|k_1 \cdots k_n\rangle = a^\dagger(k_1) \cdots a^\dagger(k_n) \Omega$ gilt

$$P^\mu |k_1 \cdots k_n\rangle = (k_1^\mu + \cdots + k_n^\mu) |k_1 \cdots k_n\rangle$$

Alle abgeleiteten Formeln belegen, daß es sich bei den Teilchen, die ein Skalarfeld beschreibt, um wechselwirkungsfreie Bosonen mit Spin 0 handelt²⁸.

²⁸Für Bosonen gilt, daß sie nur in symmetrischen Zuständen auftreten können. Dies ist hier automatisch durch die kanonischen Vertauschungsrelationen gewährleistet. Man sagt auch, daß solche Teilchen der *Bose-Statistik* genügen.

2.6 Antiteilchen

Wir haben bislang nur das reelle Skalarfeld diskutiert. Es kann nur *eine* Sorte von Teilchen beschreiben. Das komplexe Skalarfeld besitzt weitere Freiheitsgrade. Mit ihm werden *Antiteilchen* in die Theorie eingeführt. Man erkennt dies an der Fourier-Zerlegung:

$$\Phi(x) = (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3k}{2\omega} \{a(k)e^{-ikx} + b^\dagger(k)e^{ikx}\} \quad (78)$$

$$\Phi^\dagger(x) = (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3k}{2\omega} \{b(k)e^{-ikx} + a^\dagger(k)e^{ikx}\} \quad (79)$$

Dieser Ansatz wird von vier Annahmen begleitet:

1. Die Operatoren a und a^\dagger genügen kanonischen Vertauschungsrelationen. Sie beschreiben die *Teilchen*.
2. Die Operatoren b und b^\dagger genügen kanonischen Vertauschungsrelationen. Sie beschreiben die *Antiteilchen*.
3. Die Teilchen-Operatoren kommutieren mit den Operatoren der Antiteilchen.
4. Es existiert ein gemeinsames Vakuum Ω :

$$a(k)\Omega = b(k)\Omega = 0$$

Mit diesen Forderungen ist die Struktur des Hilbertraumes aller Zustände vollständig festgelegt. Zum besseren Verständnis dieser Struktur werden wir den Einteilchenraum \mathcal{H}_T der *Teilchen* von dem entsprechenden Raum \mathcal{H}_A der *Antiteilchen* unterscheiden, obwohl beide isomorph zum Raum der quadratintegralen Funktionen $\phi(\mathbf{k})$ sind. Insbesondere folgt aus der Konstruktion, daß Teilchen und Antiteilchen die gleiche Masse haben. Durch Einführung der Antiteilchen haben wir die Zahl der Freiheitsgrade verdoppelt in dem folgenden Sinn: Der Einteilchenraum ist nunmehr die *direkte Summe*:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_T \oplus \mathcal{H}_A \quad (80)$$

Der Fock-Raum $F_+(\mathcal{H})$ beherbergt alle Zustände²⁹ des komplexen Skalarfeldes. Er enthält einerseits alle Zustände, in denen nur Teilchen vorhanden

²⁹Genau betrachtet beschreiben die Elemente dieses Raumes die *Vektorzustände*, auch *reine* Zustände genannt. Daneben gibt es Zustände, die durch statistische Operatoren ('Dichtematrizen') gegeben werden. Sie werden nur selten in der Elementarteilchenphysik betrachtet.

sind, also den Raum $F_+(\mathcal{H}_T)$, andererseits aber auch alle Zustände, in denen nur Antiteilchen vorkommen, also $F_+(\mathcal{H}_A)$. Darüberhinaus finden wir auch Zustände, in denen Teilchen und Antiteilchen zugleich auftreten:

$$a^\dagger \dots a^\dagger b^\dagger \dots b^\dagger \Omega$$

(alle Argumente der Operatoren sind hier weggelassen). Solch einen Zustand können wir als *Tensorprodukt* eines Teilchen- und eines Antiteilchenzustandes auffassen:

$$a^\dagger \dots a^\dagger \Omega_T \otimes b^\dagger \dots b^\dagger \Omega_A$$

Hier sind Ω_T und Ω_A die Vakua in $F_+(\mathcal{H}_T)$ bzw. $F_+(\mathcal{H}_A)$, so daß $\Omega \cong \Omega_T \otimes \Omega_A$. Wir gelangen so zu einer bemerkenswerten Äquivalenz bei der Beschreibung des Zustandsraumes³⁰:

$$F_+(\mathcal{H}_T \oplus \mathcal{H}_A) \cong F_+(\mathcal{H}_T) \otimes F_+(\mathcal{H}_A) \quad (81)$$

Die Konstruktionsvorschrift F_+ verwandelt die direkte Summe der Einteilchenräume in ein Tensorprodukt der zugehörigen Fock-Räume und ähnelt so einer exponentiellen Abbildung.

Unter *Ladungskonjugation* versteht man die involutive Abbildung $\Phi(x) \mapsto \Phi^*(x)$. Ähnliches gilt für andere komplexe Felder. Nach Quantisierung des Skalarfeldes kann diese Abbildung durch einen (linearen!) Operator C auf dem Fockraum, den Operator der Ladungskonjugation, induziert werden:

$$C\Phi(x)C^{-1} = \Phi^\dagger(x), \quad C\Omega = \Omega.$$

Der Operator C vertauscht damit die Rollen von Teilchen und Antiteilchen:

$$Ca(k)C^{-1} = b(k), \quad Ca^\dagger(k)C^{-1} = b^\dagger(k).$$

Mit Hilfe von $C\Omega = \Omega$ (Invarianz des Vakuums) kann die Wirkung des Operators C auf Zustände des Fockraumes explizit gemacht werden:

$$Ca^\dagger(\phi_1) \dots a^\dagger(\phi_n) b^\dagger(\varphi_1) \dots a^\dagger(\varphi_m) \Omega = b^\dagger(\phi_1) \dots b^\dagger(\phi_n) a^\dagger(\varphi_1) \dots a^\dagger(\varphi_m) \Omega.$$

Aufgrund seiner Konstruktion ist der Operator C unitär und involutiv. Es wird später zu entscheiden sein, ob die Ladungskonjugation eine Symmetrie der Wechselwirkung ist. Experimente mit schwachen Zerfällen haben gezeigt, daß dies nicht der Fall ist.

³⁰Das hier auftretende Tensorprodukt zweier Hilberträume ist eine in Mathematik und Physik viel benutzte Konstruktion. Es unterscheidet sich geringfügig von dem *algebraischen* Tensorprodukt: Das Hilbert-Tensorprodukt entsteht durch *Vervollständigung* (Hinzunahme aller Cauchy-Folgen) aus dem algebraischen Tensorprodukt.

2.7 Photonen

Ohne äußere Quellen lauten die Feldgleichungen der Maxwell'schen Theorie:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_0 \mathbf{B} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (82)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \partial_0 \mathbf{E} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (83)$$

Durch Einführung des komplexen Feldes $\mathbf{Z} = \mathbf{E} + i\mathbf{B}$ finden wir

$$\nabla \times \mathbf{Z} = i\partial_0 \mathbf{Z} \quad \nabla \cdot \mathbf{Z} = 0 \quad (84)$$

Eine dreidimensionale Fourier-Transformation

$$\mathbf{Z}(x^0, \mathbf{x}) = (2\pi)^{-3/2} \int d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \mathbf{z}(x^0, \mathbf{k}) \quad (85)$$

führt die Maxwell'schen Gleichungen schließlich über in

$$\mathbf{k} \times \mathbf{z}(x^0, \mathbf{k}) = \partial_0 \mathbf{z}(x^0, \mathbf{k}) \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{z}(x^0, \mathbf{k}) = 0 \quad (86)$$

Wir führen für jedes $\mathbf{k} = (k^1, k^2, k^3)$ unter Benutzung der Abkürzung $\omega = k^0 = |\mathbf{k}|$ die folgende komplexe Matrix ein:

$$M(\mathbf{k}) = \frac{i}{\omega} \begin{pmatrix} 0 & -k^3 & k^2 \\ k^3 & 0 & -k^1 \\ -k^2 & k^1 & 0 \end{pmatrix} \quad (87)$$

Da $\mathbf{k} \times \mathbf{z} = -i\omega M\mathbf{z}$ gilt, haben wir die Gleichung $\partial_0 \mathbf{z} = -i\omega M\mathbf{z}$ für festes \mathbf{k} zu lösen:

$$\mathbf{z}(x^0, \mathbf{k}) = e^{-i\omega M x^0} \mathbf{z}(0, \mathbf{k}) \quad (88)$$

Da die Matrix M hermitesch ist, sind ihre Eigenwerte reell. Sie ergeben sich sofort aus der Bedingung $\det(M - \lambda) = \lambda - \lambda^3 = 0$:

$$\lambda = -1, 0, +1$$

Die physikalische Bedeutung dieser Werte liegt darin, daß sie die *Helizität* des Photons beschreiben³¹. Jedem Eigenwert entspricht ein normierter Eigenvektor in \mathbf{C}^3 :

- Der Eigenvektor zur Helizität 0 ist \mathbf{k}/ω .

³¹Für ein masseloses Teilchen ist die Helizität eine Invariante unter Lorentz-Transformationen $\Lambda \in L_+^\uparrow$. Unter einer Raumpiegelung ändert die Helizität ihr Vorzeichen.

- Der Eigenvektor zur Helizität $+1$ wird mit $\mathbf{e}(\mathbf{k})$ bezeichnet³². Die Normierung ist durch $|\mathbf{e}(\mathbf{k})|^2 = \overline{\mathbf{e}(\mathbf{k})} \cdot \mathbf{e}(\mathbf{k}) = 1$ festgelegt. Es gilt $\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}(\mathbf{k}) = 0$.
- Ein Eigenvektor zur Helizität -1 ist $\mathbf{e}(-\mathbf{k})$, ein anderer ist $\overline{\mathbf{e}(\mathbf{k})}$. Beide Vektoren müssen proportional zueinander sein. Mehr noch, da sie normiert sind, können sie sich nur um einen Phasenfaktor unterscheiden. Wir wählen die Phase von $\mathbf{e}(\mathbf{k})$ in einer solchen Weise, daß

$$\mathbf{e}(-\mathbf{k}) = \overline{\mathbf{e}(\mathbf{k})}$$

gilt.

Die Amplitude $\mathbf{z}(0, \mathbf{k})$ kann immer nach diesen Eigenvektoren zerlegt werden, wobei wir nun erkennen, daß wegen der Transversalitätsbedingung $\mathbf{k} \cdot \mathbf{z}(0, \mathbf{k}) = 0$ die Helizität 0 in der Zerlegung nicht auftritt³³:

$$\mathbf{z}(0, \mathbf{k}) = ia_{+1}(\mathbf{k})\mathbf{e}(\mathbf{k}) - ia_{-1}^\dagger(-\mathbf{k})\mathbf{e}(-\mathbf{k}) \quad (89)$$

Damit folgt aus (2.56)

$$\mathbf{z}(x^0, \mathbf{k}) = ia_{+1}(\mathbf{k})\mathbf{e}(\mathbf{k})e^{-i\omega x^0} - ia_{-1}^\dagger(-\mathbf{k})\mathbf{e}(-\mathbf{k})e^{i\omega x^0}$$

In (2.53) eingesetzt bekommen wir zwei Integrale. Im zweiten Integral nehmen wir die Substitution $\mathbf{k} \mapsto -\mathbf{k}$ vor und erhalten schließlich:

$$\mathbf{E}(x) + i\mathbf{B}(x) = i(2\pi)^{-3/2} \int d^3k \mathbf{e}(\mathbf{k}) \left\{ e^{-ikx} a_{+1}(k) - e^{ikx} a_{-1}^\dagger(k) \right\} \quad (90)$$

$$\mathbf{E}(x) - i\mathbf{B}(x) = i(2\pi)^{-3/2} \int d^3k \overline{\mathbf{e}(\mathbf{k})} \left\{ e^{-ikx} a_{-1}(k) - e^{ikx} a_{+1}^\dagger(k) \right\} \quad (91)$$

Bis zu diesem Punkt haben wir nicht mehr geleistet, als lediglich die allgemeine Lösung der Maxwell'schen Gleichung aufzuschreiben, d.h. die allgemeine Form einer elektromagnetischen Welle zu finden. Die Aufspaltung einer solchen Welle in zwei Anteile mit entgegengesetzter Helizität ist identisch mit der Aufspaltung in zwei Anteile mit entgegengesetztem Vorzeichen der Frequenz. Das hat eine wichtige Konsequenz:

Die Helizität des Photons ist L_+^\dagger -invariant.

³²Die genaue Gestalt dieses komplexen Vektors ist irrelevant. Er ist bis auf eine (\mathbf{k} -abhängige) Phase eindeutig. Schreibt man ihn als $\mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2$ mit Hilfe von reellen Vektoren und setzt man $\mathbf{e}_3 = \omega^{-1}\mathbf{k}$, so bilden die drei Vektoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ eine rechtshändiges Orthonormalsystem im E_3 (dreidimensionaler euklidischer Raum).

³³Die Faktoren i und $-i$ sind willkürlich. Mit dieser Wahl sind die folgenden Formeln im Einklang mit der Mehrheit der Lehrbücher.

Der Grund hierfür ist, daß die Zerlegung einer Welle in einen Anteil positiver Frequenz und einen Anteil negativer Frequenz unabhängig von der Wahl des Bezugssystems ist.

Bekanntlich ist das elektrische (magnetische) Feld durch einen Vektor (Axialvektor) repräsentiert. Eine Raumspiegelung hat deshalb den folgenden Effekt:

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) + i\mathbf{B}(t, \mathbf{x}) \mapsto -\mathbf{E}(t, -\mathbf{x}) + i\mathbf{B}(t, -\mathbf{x}).$$

Ein Vergleich mit (90-91) lehrt:

Unter einer Raumspiegelung ändert die Helizität ihr Vorzeichen.

Offensichtlich handelt es sich bei den Kombinationen $\mathbf{E} + i\mathbf{B}$ und $\mathbf{E} - i\mathbf{B}$ um Felder mit definierter Chiralität. Beide sind irreduzibel unter der Wirkung der Lorentz-Gruppe L_+^\uparrow (äquivalent der $SL(2, C)$). Im Detail:

Feld	Chiralität	Transformationsverhalten
$\mathbf{E} + i\mathbf{B}$	rechtshändig	D^{10}
$\mathbf{E} - i\mathbf{B}$	linkshändig	D^{01}

Vergleiche hierzu die entsprechende Zerlegung des Dirac-Feldes in seine chiralen Komponenten.

Wir haben bereits von *Photonen* gesprochen, den Welle-Teilchen-Dualismus stillschweigend voraussetzend. Wir gelangen zur korrekten Beschreibung der Photonen aber erst durch den Formalismus der zweiten Quantisierung, also dadurch, daß wir die Amplituden $a_{\pm 1}$ und $a_{\pm 1}^\dagger$ als Vernichtungs- bzw. Erzeugungsoperatoren für Photonen mit Helizität ± 1 interpretieren und sie den kanonischen Vertauschungsrelationen unterwerfen³⁴:

$$\begin{aligned} [a_\lambda(k), a_{\lambda'}^\dagger(k')] &= 2\omega\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\delta_{\lambda,\lambda'} \\ [a_\lambda^\dagger(k), a_{\lambda'}^\dagger(k')] &= 0 \\ [a_\lambda(k), a_{\lambda'}(k')] &= 0 \end{aligned}$$

($\lambda, \lambda' = \pm 1$, $\omega = |\mathbf{k}|$). Diese Relationen sind den folgenden gleichzeitigen Vertauschungsrelationen der Felder äquivalent:

$$[B_j(x), E_k(x')]_{t=t'} = \sum_\ell \epsilon_{j k \ell} \nabla_\ell i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (92)$$

³⁴Das Photon besitzt damit genau *zwei* unabhängige Polarisationszustände, die dem rechts- und linkszirkularem Licht entsprechen. Bei festem Impuls kann der Hilbertraum der Linearkombinationen mit \mathbf{C}^2 identifiziert werden. Allgemeine Polarisierungen werden durch positive 2×2 -Matrizen mit Spur 1 beschrieben. Diese Theorie unterscheidet sich durch nichts von der entsprechenden Theorie der Polarisation bei Elektronen. Deshalb sind alle Aussagen, die in einem System gemacht werden (Bellsche Ungleichung, Stern-Gerlach-Experimente usw.), auch gültig für das andere System.

$$[B_j(x), B_k(x')]_{t=t'} = 0 \quad (93)$$

$$[E_j(x), E_k(x')]_{t=t'} = 0 \quad (94)$$

($j, k, \ell = 1, 2, 3$). Das Photonen-Vakuum ist durch $a_\lambda(k)\Omega = 0$ definiert.

Im Gegensatz zu den Dirac-Feldern sind die elektromagnetischen Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} physikalisch meßbare Größen. Da nicht alle Komponenten miteinander kommutieren, unterliegen sie einer Unschärferelation, analog derjenigen, die Heisenberg für Ort und Impuls aus den Vertauschungsrelationen ableitete. Schon 1933 haben Bohr und Rosenfeld Gedankenexperimente diskutiert, durch die belegt werden sollte, daß \mathbf{E} und \mathbf{B} nicht zugleich mit beliebiger Schärfe meßbar sind im Gegensatz zur Maxwell'schen Theorie.

Nachdem wir die physikalischen Größen \mathbf{E} und \mathbf{B} zu Operatoren erklärt haben, müssen wir die Beziehung zur klassischen Maxwell-Theorie dadurch wiederherstellen, daß wir erklären:

(*Korrespondenzprinzip*). Ist ϕ ein normierter Vektor im Fock-Raum der Photonen (also ein allgemeiner Zustand des Strahlungsfeldes), so sind diesem Zustand klassische Felder

$$\mathbf{E}_{\text{klass}}(x) = (\phi, \mathbf{E}(x)\phi)$$

$$\mathbf{B}_{\text{klass}}(x) = (\phi, \mathbf{B}(x)\phi)$$

zugeordnet.

Die klassischen Felder genügen dann stets den Maxwell'schen Gleichungen und beschreiben somit eine klassische elektromagnetische Welle. Hat der Zustand ϕ eine feste Photonenzahl, so verschwinden die klassischen Felder. Das mag paradox erscheinen. Es zeigt uns aber, daß in der gewöhnlichen elektromagnetischen Strahlung Zustände vorherrschend sind, in denen die Photonenzahl statistischen Schwankungen unterliegt. In der Hochenergiephysik herrschen dagegen Zustände vor, in denen wir nur *ein* Photon (manchmal auch *zwei* Photonen) vorfinden. Es ist dann nicht nur sinnlos, sondern auch unmöglich, einem einzelnen γ -Quant klassische Felder zuzuordnen.

2.8 Das Vektorpotential in der Coulomb-Eichung

Zur Beschreibung freier Photonen war es für uns nicht notwendig, das Vektorpotential $A^\mu(x)$ einzuführen. Wenn irgend möglich, wird man eine explizite Konstruktion des Vektorpotentials vermeiden, weil es nicht eindeutig ist und sich der direkten Beobachtung entzieht³⁵.

³⁵Dies gilt nur mit gewissen Einschränkungen, wie man aus dem Aharonov-Bohm-Effekt gelernt hat.

In der klassischen Strahlungstheorie zeigt man, daß es gelingt, unter Ausnutzung der Eichfreiheit *erstens* die Lorentz-Bedingung $\partial_\mu A^\mu(x) = 0$ und *zweitens* (im Vakuum) auch noch $A^0(x) = 0$ zu erfüllen. Sind beide Bedingungen erfüllt, so sprechen wir von der *Coulomb-Eichung*.

Wir wollen nun zeigen, daß man zur Beschreibung von freien Photonen ebensogut ein Vektorpotential in der Coulomb-Eichung heranziehen kann. Um das Feld $A^\mu(x)$ zu konstruieren, führen wir *Polarisationsvektoren* $e_{\pm 1} = (e_{\pm 1}^\mu)$ durch

$$e_{+1}(k) = \{0, \mathbf{e}(\mathbf{k})\} \quad (95)$$

$$e_{-1}(k) = \{0, \overline{\mathbf{e}(\mathbf{k})}\} \quad (96)$$

ein und setzen

$$A^\mu(x) = (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3k}{2\omega} \sum_{\lambda=\pm 1} \left\{ e_\lambda^\mu(k) a_\lambda(k) e^{-ikx} + \overline{e_\lambda^\mu(k)} a_\lambda^\dagger(k) e^{ikx} \right\} \quad (97)$$

so daß $(A^\mu) = \{A^0, \mathbf{A}\}$ mit $A^0 = 0$ gilt. Eine kurze Rechnung zeigt, daß die Beziehungen $\mathbf{E} = -\partial_0 \mathbf{A}$ und $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ erfüllt sind.

Das Vektorpotential in der Coulomb-Eichung ist offensichtlich kein Vektorfeld im strengen Sinn. Es ist nicht einmal Lorentz-kovariant. Denn die Bedingung $A^0 = 0$ kann nicht in allen Bezugssystemen Gültigkeit haben. Die Situation läßt sich etwa so darstellen. Führen wir formal eine Lorentz-Transformation aus, so erhalten wir ein Vektorpotential mit $A^0 \neq 0$. Durch eine nachgeschaltete Eichtransformation kann man die Bedingung $A^0 = 0$ wieder erfüllen. Dies zeigt, daß Lorentz-Transformationen und Eichtransformationen miteinander verquickt sind, also in Eichtheorien nicht unabhängig voneinander betrachtet werden können.

2.9 Fermionen

Als Fermionen bezeichnet man diejenigen Teilchen, die dem Paulischen Ausschließungsprinzip und damit der Fermi-Statistik genügen. Das Postulat über den Zusammenhang von Spin und Statistik besagt, daß diese Teilchen notwendig halbzahligen Spin haben. Die zugehörigen Felder können daher nur als Spinoren konstruiert werden, deren einfachsten Vertreter, das Dirac-Feld, wir bereits kennengelernt haben.

2.9.1 Dirac-Teilchen

Die Abkürzung $\not{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu$ benutzend schreiben wir $(i\not{\partial} - m)\psi = 0$ für die Dirac-Gleichung. Die allgemeine Lösung hat die Gestalt

$$\psi(x) = (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3p}{2\omega} \sum_{\sigma} \{u(p, \sigma) a_{\sigma}(p) e^{-ipx} + v(p, \sigma) b^{\dagger}(p, \sigma) e^{ipx}\} \quad (98)$$

($p = (p^\mu) = \{\omega, \mathbf{p}\}$, $\omega = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$, $\sigma = \pm \frac{1}{2}$), wobei u und v Dirac-Spinoren sind, die den Bedingungen

$$(\not{p} - m)u(p, \sigma) = 0 \quad (S_3 - \sigma)u(p_R, \sigma) = 0 \quad (99)$$

$$(\not{p} + m)v(p, \sigma) = 0 \quad (S_3 + \sigma)v(p_R, \sigma) = 0 \quad (100)$$

genügen; $p_R = \{m, 0, 0, 0\}$ ist der Viererimpuls eines Teilchens im Ruhssystem, wir benutzen die Abkürzung $\not{p} = \gamma^\mu p_\mu$, und $\mathbf{S} = (S_1, S_2, S_3)$ ist der Spinoperator für das Teilchen im Ruhssystem:

$$S_i = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix} \quad (101)$$

Konjugierte Spinoren werden durch die Vorschrift $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ eingeführt. Es folgt so die Zerlegung

$$\bar{\psi}(x) = (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3p}{2\omega} \sum_{\sigma} \{\bar{v}(p, \sigma) b_{\sigma}(p) e^{-ipx} + \bar{u}(p, \sigma) a^{\dagger}(p, \sigma) e^{ipx}\} .$$

Die Normierung der Spinoren u ist so gewählt, daß gilt³⁶:

$$\bar{u}(p, \sigma)u(p, \sigma') = 2m\delta_{\sigma\sigma'} \quad (\text{Orthogonalitätsrelation})$$

$$\bar{u}(p, \sigma)\gamma^\mu u(p, \sigma') = 2p^\mu \delta_{\sigma\sigma'}$$

$$\sum_{\sigma} u(p, \sigma)\bar{u}(p, \sigma) = \not{p} + m \quad (\text{Vollständigkeitsrelation})$$

mit $\bar{u} = u^* \gamma^0$. Entsprechendes gilt für v :

$$\bar{v}(p, \sigma)v(p, \sigma') = -2m\delta_{\sigma\sigma'} \quad (\text{Orthogonalitätsrelation})$$

$$\bar{v}(p, \sigma)\gamma^\mu v(p, \sigma') = 2p^\mu \delta_{\sigma\sigma'}$$

$$\sum_{\sigma} v(p, \sigma)\bar{v}(p, \sigma) = \not{p} - m \quad (\text{Vollständigkeitsrelation})$$

³⁶Man trifft allgemein die folgende Vereinbarung: $\bar{u}u$ ist ein Skalar, $u\bar{u}$ eine Matrix. Im ersten Fall wird ein *inneres* Produkt, im zweiten Fall ein *äußeres* Produkt gebildet.

Wir fassen das Dirac-Feld als Operator auf, indem wir für die Fourier-Amplituden a und b^\dagger *kanonische Antivertauschungsrelationen* postulieren:

$$\{a_\sigma(p), a_{\sigma'}^\dagger(p')\} = \{b_\sigma(p), b_{\sigma'}^\dagger(p')\} = 2\omega\delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\delta_{\sigma\sigma'} \quad (102)$$

$$\{a_\sigma(p), a_{\sigma'}(p')\} = \{b_\sigma(p), b_{\sigma'}(p')\} = 0 \quad (103)$$

$$\{a_\sigma^\dagger(p), a_{\sigma'}^\dagger(p')\} = \{b_\sigma^\dagger(p), b_{\sigma'}^\dagger(p')\} = 0 \quad (104)$$

Besondere Beachtung verdient die Forderung, daß die Teilchenoperatoren a , a^\dagger mit den Antiteilchenoperatoren b , b^\dagger antikommutieren, so als ob es sich – beide Teilchensorten zusammengenommen – um Fermionen handelt, die durch einen weiteren Freiheitsgrad, der zwei Werte annimmt, unterschieden sind. Der rechts in (102) auftretende Ausdruck $2\omega\delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\delta_{\sigma\sigma'}$ gibt uns den Hinweis zur Konstruktion des Skalarproduktes im Einteilchenraum \mathcal{H} :

$$(\phi, \phi') = \sum_\sigma \int \frac{d^3p}{2\omega} \overline{\phi_\sigma(\mathbf{p})} \phi'_\sigma(\mathbf{p}). \quad (105)$$

Das Skalarprodukt entsteht rechter Hand in der Gleichung (2.70), sobald wir auf beiden Seiten eine Integration (und Summation) mit Wellenfunktionen $\overline{\phi_\sigma(\mathbf{p})}$ und $\phi'_{\sigma'}(\mathbf{p}')$ ausführen.

Genau genommen, haben wir einen Raum \mathcal{H}_T für die *Teilchen* und einen weiteren Raum \mathcal{H}_A für die *Antiteilchen*. Die beiden Räume müssen wir unterscheiden, obwohl sie die gleiche Struktur besitzen. Wir definieren

- Erzeugungsoperatoren für Teilchen:

$$a^\dagger(\phi) = \sum_\sigma \int \frac{d^3p}{2\omega} a_\sigma^\dagger(p) \phi_\sigma(\mathbf{p}) \quad \phi \in \mathcal{H}_T \quad (106)$$

- Erzeugungsoperatoren für Antiteilchen:

$$b^\dagger(\varphi) = \sum_\sigma \int \frac{d^3p}{2\omega} b_\sigma^\dagger(p) \varphi_\sigma(\mathbf{p}) \quad \varphi \in \mathcal{H}_A \quad (107)$$

Vernichtungsoperatoren werden analog definiert:

$$a(\phi) = \sum_\sigma \int \frac{d^3p}{2\omega} \overline{\phi_\sigma(\mathbf{p})} a_\sigma(p) \quad (108)$$

$$b(\varphi) = \sum_\sigma \int \frac{d^3p}{2\omega} \overline{\varphi_\sigma(\mathbf{p})} b_\sigma(p) \quad (109)$$

Eine elementare Überlegung führt uns unmittelbar zu den Antivertauschungsrelationen:

$$\{a(\phi), a^\dagger(\phi')\} = (\phi, \phi') \quad (110)$$

$$\{b(\varphi), b^\dagger(\varphi')\} = (\varphi, \varphi') \quad (111)$$

Alle hier nicht aufgeführten Antikommutatoren ergeben Null. Insbesondere gilt dies auch für Antikommutatoren zwischen Teilchenoperatoren (a, a^\dagger) einerseits und Antiteilchenoperatoren (b, b^\dagger) andererseits (erweitertes Pauli-Prinzip): Dies bedeutet, daß die Unterscheidung Teilchen-Antiteilchen wie ein weiterer Freiheitsgrad neben Impuls \mathbf{k} und Polarisation σ aufgefaßt wird. Eine Konsequenz der Antivertauschungsrelationen ist, daß Quadrate von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren verschwinden:

$$a(\phi)^2 = 0, \quad a^\dagger(\phi)^2 = 0, \quad b(\phi)^2 = 0, \quad b^\dagger(\phi)^2 = 0.$$

Dies hat zur Folge, daß ein Zustand ϕ nur einfach besetzt werden kann (Pauli-Verbot).

2.9.2 Fock-Darstellung

Eine *Darstellung* durch Operatoren auf einem Hilbertraum wird dadurch festgelegt, daß wir die Existenz eines Vakuumzustandes fordern, d.h. für alle $\phi \in \mathcal{H}_T$ und alle $\varphi \in \mathcal{H}_A$ soll gelten³⁷:

$$a(\phi)\Omega = b(\varphi)\Omega = 0 \quad (112)$$

Auf diese Weise erhalten wir die *Fock-Darstellung* (oder *Vakuumdarstellung*) der kanonischen Antivertauschungsrelationen. Alle Betrachtungen aus dem Kapitel 2.1 lassen sich sinngemäß übertragen. Wir wollen einige Ergebnisse herausgreifen, ohne auf die Details der meist sehr einfachen Rechnung einzugehen.

Die kanonischen Antivertauschungsrelationen für die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren sind den folgenden gleichzeitigen Antikommutatorregeln für das Dirac-Feld äquivalent³⁸:

$$\begin{aligned} \{\psi_\alpha(x), \psi_\beta^*(x')\}_{t=t'} &= \delta_{\alpha\beta} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ \{\psi_\alpha(x), \psi_\beta(x')\}_{t=t'} &= 0 \end{aligned}$$

³⁷Ohne es ausdrücklich zu sagen, wollen wir immer annehmen, daß der Vakuumzustand normiert ist: $\|\Omega\| = 1$.

³⁸Die Dirac-Indices α und β werden zum besseren Verständnis hier ausnahmsweise nicht unterdrückt.

Unter den möglichen Zweipunktfunktionen des freien Dirac-Feldes gibt es eine, die nicht Null ist:

$$(\Omega, \psi(x)\bar{\psi}(y)\Omega) = (i\cancel{\partial} + m)\Delta_+(x - y, m) =: S_+(x - y, m) \quad (113)$$

Zustände von zwei Teilchen erhalten wir so:

$$|\phi_1\phi_2\rangle = a^\dagger(\phi_1)a^\dagger(\phi_2)\Omega \quad (114)$$

Der Zustand ist antisymmetrisch unter Vertauschung der beiden Wellenfunktionen, weil die zugehörigen Erzeugungsoperatoren miteinander antikommutieren. Das Skalarprodukt läßt sich elementar berechnen:

$$\begin{aligned} \langle \phi_1\phi_2 | \phi'_1\phi'_2 \rangle &= (\Omega, a(\phi_1)a(\phi_2)a^\dagger(\phi'_1)a^\dagger(\phi'_2)\Omega) \\ &= (\Omega, \{a(\phi_1), a^\dagger(\phi'_1)\}\{a(\phi_2), a^\dagger(\phi'_2)\}\Omega) \\ &\quad - (\Omega, \{a(\phi_1), a^\dagger(\phi'_2)\}\{a(\phi_2), a^\dagger(\phi'_1)\}\Omega) \\ &= (\phi_1, \phi'_1)(\phi_2, \phi'_2) - (\phi_1, \phi'_2)(\phi_2, \phi'_1) \end{aligned}$$

Das Ergebnis zeigt die Antisymmetrie der Zustände. Wir erhalten das gleiche Resultat, wenn wir das *alternierende Produkt* $\phi_1 \wedge \phi_2$ der Wellenfunktionen einführen³⁹,

$$\{\phi_1 \wedge \phi_2\}(\mathbf{k}\sigma, \mathbf{k}'\sigma') = \frac{1}{\sqrt{2}} \{\phi_1(\mathbf{k}\sigma)\phi_2(\mathbf{k}'\sigma') - \phi_2(\mathbf{k}\sigma)\phi_1(\mathbf{k}'\sigma')\} \quad , \quad (115)$$

und dann das Skalarprodukt $(\phi_1 \wedge \phi_2, \phi'_1 \wedge \phi'_2)$ berechnen. Wir können den allgemeinen n -Teilchenzustand untersuchen. Durch Induktion findet man: Der Zustand $\{\prod_{i=1}^n a^\dagger(\phi_i)\}\Omega$ beschreibt n Teilchen mit der antisymmetrischen Wellenfunktion

$$\{\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \dots \wedge \phi_n\}(\mathbf{k}_1\sigma_1, \dots, \mathbf{k}_n\sigma_n) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\pi} \text{sgn}\pi \prod_{i=1}^n \phi_{\pi(i)}(\mathbf{k}_i\sigma_i)$$

(Die Summe erstreckt sich über alle Permutationen π von $1, \dots, n$). Ein Zustand der Art

$$a^\dagger(\phi_1) \dots a^\dagger(\phi_n) b^\dagger(\varphi_1) \dots b^\dagger(\varphi_{\bar{n}})\Omega \quad (116)$$

beschreibt n Teilchen und \bar{n} Antiteilchen. Als Folge der Antivertauschungsrelationen ist er

1. *antisymmetrisch* unter der Vertauschung der Wellenfunktionen ϕ_1, \dots, ϕ_n der Teilchen,

³⁹Wir schreiben nun $\phi(\mathbf{k}\sigma)$ anstelle von $\phi_\sigma(\mathbf{k})$.

2. *antisymmetrisch* unter der Vertauschung der Wellenfunktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ der Antiteilchen.

Er genügt daher dem Pauli-Prinzip im weitesten Sinn: Teilchen wie Antiteilchen unterliegen den Gesetzen der Fermi-Statistik. Wir stellen fest: Der *Einteilchenraum* der Dirac-Theorie ist $\mathcal{H} = \mathcal{H}_T \oplus \mathcal{H}_A$. Zustände der Form (116) spannen einen Hilbertraum $F_-(\mathcal{H})$ auf, den wir den *antisymmetrischen Fock-Raum* über dem Raum \mathcal{H} nennen. Auch hier finden wir eine natürliche Isomorphie:

$$F_-(\mathcal{H}_T \oplus \mathcal{H}_A) \cong F_-(\mathcal{H}_T) \otimes F_-(\mathcal{H}_A) \quad (117)$$

Es gibt einen Operator der Teilchenzahl und einen solchen der Antiteilchenzahl:

$$N_T = \sum_{\sigma} \int \frac{d^3p}{2\omega} a_{\sigma}^{\dagger}(p) a_{\sigma}(p), \quad N_A = \sum_{\sigma} \int \frac{d^3p}{2\omega} b_{\sigma}^{\dagger}(p) b_{\sigma}(p).$$

Die Differenz $Q = N_T - N_A$ wird als *Ladungsoperator* bezeichnet. Das Spektrum von Q ist \mathbb{Z} (alle ganzen Zahlen). Unter ‘Ladung’ könnte die elektrische Ladung – in Einheiten der Elementarladung – oder etwas ähnliches (Baryonenzahl, Leptonenzahl usw.) gemeint sein. Entscheidend sind zwei Dinge: (1) Teilchen haben die Ladung 1, Antiteilchen die Ladung -1 . (2) Q ist erzeugendes Element einer einparametrischen Gruppe von Phasentransformationen des komplexen Feldes (sog. U(1)-Transformationen),

$$e^{-i\alpha Q} \psi(x) e^{i\alpha Q} = e^{i\alpha} \psi(x), \quad (0 \leq \alpha < 2\pi),$$

gleichbedeutend mit $[\psi(x), Q] = \psi(x)$, oder auch mit

$$[a(\phi), Q] = a(\phi), \quad [b^{\dagger}(\varphi), Q] = b^{\dagger}(\varphi).$$

Bei all diesen Relationen ist die stillschweigende Voraussetzung gemacht, daß $Q\Omega = 0$ gilt, gleichbedeutend mit der Invarianz des Vakuums unter U(1)-Transformationen: $e^{i\alpha Q}\Omega = \Omega$.

Die Konstruktion des antisymmetrischen Fock-Raumes wird auch außerhalb der Feldtheorie benutzt, und zwar immer dort, wo die Theorie des Fermi-Gases Anwendung findet. Das ist im besonderen in der Theorie der kondensierten Materie der Fall (elektrische Leitfähigkeit) und in der Astrophysik (Neutronenstern als Endstadium der Sternentwicklung).

2.9.3 Energie und Impuls

Wir wollen zeigen, daß die Dirac-Theorie mit der Spektrumsbedingung im Einklang ist, die verlangt, daß das Energie-Impulsspektrum der Theorie im

Vorwärtslichtkegel liegt und somit keine negativen Energien auftreten. Ohne zweite Quantisierung war es am Anfang, als Dirac die nach ihm benannte Gleichung aufstellte, nicht möglich, diese Forderung zu erfüllen. Auch heute noch gilt, daß die relativistische Quantenmechanik – basierend auf der Dirac-Gleichung – nicht in sich konsistent ist und zu Paradoxien führt.

Wir betrachten die Komponenten P^μ des Viererimpulses – wie immer in einer Quantenfeldtheorie – als Erzeuger einer unitären Darstellung der Translationen auf dem Fock-Raum:

$$\psi(x + x') = U(x)^{-1}\psi(x')U(x) \quad (118)$$

$$U(x)\Omega = \Omega \quad (119)$$

$$U(x) = \exp(-ix_\mu P^\mu) \quad (120)$$

wobei $\psi(x)$ das freie Dirac-Feld bezeichnet. In infinitesimaler Schreibweise bedeutet dies:

$$i\partial^\mu\psi(x) = [\psi(x), P^\mu] \quad (121)$$

$$P^\mu\Omega = 0 \quad (122)$$

Das folgende System von Kommutatoren ist äquivalent mit der Gleichung (121):

$$p^\mu a_\sigma(p) = [a_\sigma(p), P^\mu], \quad p^\mu a_\sigma^\dagger(p) = [P^\mu, a_\sigma^\dagger(p)] \quad (123)$$

$$p^\mu b_\sigma(p) = [b_\sigma(p), P^\mu], \quad p^\mu b_\sigma^\dagger(p) = [P^\mu, b_\sigma^\dagger(p)] \quad (124)$$

In diesen Formeln ist p^μ ein beliebiger Vektor auf der Massenschale, d.h. $p^0 = \omega = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$. Für andere Werte von p^μ sind Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren nicht definiert. Es hängt nun entscheidend von den Eigenschaften des Vakuums ab, welches Energie-Impuls-Spektrum die Ein- und Mehrteilchenzustände haben. Betrachten wir nämlich Zustände mit n Teilchen und m Antiteilchen der Art

$$|n, m\rangle = a_{\sigma_1}^\dagger(p_1) \cdots a_{\sigma_n}^\dagger(p_n) b_{\sigma'_1}^\dagger(p'_1) \cdots b_{\sigma'_m}^\dagger(p'_m)\Omega, \quad (125)$$

so besitzen sie einen definierten Viererimpuls p^μ :

$$P^\mu |n, m\rangle = p^\mu |n, m\rangle \quad (126)$$

$$p = p_1 + \cdots + p_n + p'_1 + \cdots + p'_m \quad (127)$$

Allgemeine Zustände entstehen durch Linearkombinationen (Summen bzw. Integrale). Die Darstellung $U(x)$ der Translationen auf dem gemeinsamen Fock-Raum von Teilchen und Antiteilchen erfüllt somit die Spektrumsbedingung, weil bereits die Einteilchenzustände diese Bedingung erfüllen.

Die kanonischen Antivertauschungsrelationen (engl. CAR) haben im Gegensatz zu den kanonischen Vertauschungsrelationen (engl. CCR) die bemerkenswerte Eigenschaft, daß sie unverändert bleiben, wenn Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren ihre Rolle tauschen. Diese Tatsache erlaubt Darstellungen der CAR zu konstruieren, die *inäquivalent* zur Fock-Darstellung sind, insbesondere solche, die negative Energien zulassen.

Hierzu ein historisches Beispiel: Dirac (ohne den Formalismus der zweiten Quantisierung zu kennen) ging von einem Vakuum Ω_D aus, das wir aus heutiger Sicht so charakterisieren können:

$$a(\phi)\Omega_D = b^\dagger(\varphi)\Omega_D = P^\mu\Omega_D = 0 \quad (128)$$

Einteilchenzustände der Art $b_\sigma(p)\Omega_D$ besitzen den Viererimpuls $-p^\mu$ und damit negative Energie. Weil dies ein Verstoß gegen elementare physikalische Prinzipien bedeutete, hat Dirac sich alle Zustände negativer Energie als besetzt vorgestellt, was nur bei Gültigkeit der Fermi-Statistik denkbar war. Der so konstruierte Zustand Ω (auch ‘Dirac-See’ genannt) muß zwangsläufig die Bedingungen

$$a(\varphi)\Omega = b(\varphi)\Omega = P^\mu\Omega = 0 \quad (129)$$

erfüllen. Heute benutzen wir Bedingungen (129), um das wahre Vakuum Ω der Dirac-Theorie zu charakterisieren und vermeiden es, ihn als den Dirac-See anzusprechen. Der Fehler von Dirac war, die Rolle der Operatoren $b(\varphi)$ und $b^\dagger(\varphi)$ vertauscht zu haben.

Es zeigt sich, daß die Darstellung der CAR basierend auf dem Dirac-Vakuum Ω_D inäquivalent zur Fock-Darstellung basierend auf Ω ist. Salopp formuliert: Die beiden Hilberträume lassen sich nicht identifizieren, haben keine gemeinsamen Zustände. Insbesondere liegt der Zustand Ω_D nicht im Fock-Raum von Elektronen und Positronen. Dies erklärt, warum das Energie-Impulsspektrum in beiden Darstellungen so unterschiedlich ist. Vergleiche hierzu die ausführliche Diskussion im Skriptum zur Vorlesung *Relativistische Quantenmechanik*.

3 Das Wirkungsprinzip

Bislang haben wir nur Felder und Teilchen ohne jegliche Form von Wechselwirkung studiert. Um die in der Natur wirkenden Kräfte beschreiben zu können, benötigen wir das *Wirkungsprinzip*. Man gewinnt es durch Übertragung des Hamiltonschen Prinzips aus der klassischen Mechanik auf die Feldtheorie. Der Formalismus erlaubt die Herleitung von Feldgleichungen (als die Euler-Lagrange-Gleichungen eines Variationsproblems) und eine systematische Untersuchung der Erhaltungsgrößen. Das Noethersche Theorem ordnet jeder einparametrischen Symmetriegruppe eine Stromdichte $j^\mu(x)$ zu, und zwar so, daß die Kontinuitätsgleichung $\partial_\mu j^\mu(x) = 0$ erfüllt ist⁴⁰. Wenigstens formal erhalten wir so eine Erhaltungsgröße. Dieser Zusammenhang ist die wichtigste Richtschnur bei der Einführung von Lagrange-Dichten, wenn es gilt, eine geeignete Theorie der Elementarteilchen zu formulieren.

3.1 Die Euler-Lagrange-Gleichungen

Ausgangspunkt ist *Lagrange-Dichte* \mathcal{L} . Dies ist eine *reelle* Funktion von klassischen (d.h. nichtquantisierten) Feldern ϕ_r , den Ableitungen $\partial_\mu \phi_r$ und manchmal auch von $x \in M_4$:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_r, \partial_\mu \phi_r, x) \quad (130)$$

Im allgemeinen hängt somit \mathcal{L} explizit und implizit von x ab:

$$\mathcal{L}[x] = \mathcal{L}(\phi_r(x), \partial_\mu \phi_r(x), x)$$

Wichtig ist, daß die Lagrange-Dichte stets nur die Felder an *einem* Ort x enthält. Die Wechselwirkung über eine Distanz hinweg wird so ausgeschlossen. Dieses ‘Nahewirkungsprinzip’ ist ein Grundpfeiler der *lokalen* Feldtheorie.

Mit Hilfe des Index r unterscheiden wir die einzelnen Feldkomponenten. Ist ein Feld komplexwertig, so denken wir uns entweder seine Komponenten in Real- und Imaginärteil zerlegt, die für sich genommen als die eigentlichen Feldkomponenten angesehen werden, oder wir betrachten die komplexen Komponenten zugleich mit den konjugiert komplexen Größen, so als ob diese voneinander unabhängig wären. Hierzu drei Beispiele:

⁴⁰In der QFT haben sich Sprechweisen etabliert, die dem klassischen Sprachgebrauch entgegenstehen: Man spricht von einem *Strom*, wo eigentlich eine Stromdichte $j^\mu(x)$ gemeint ist, und sagt der Strom sei *erhalten*, wenn er divergenzfrei ist, d.h. wenn die Kontinuitätsgleichung $\partial_\mu j^\mu(x) = 0$ erfüllt ist.

- *Das Elektron in einem äußeren elektromagnetischen Feld* wird durch die Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\bar{\psi}i\overleftrightarrow{\partial}\psi - m\bar{\psi}\psi - q\bar{\psi}\mathcal{A}\psi \quad (131)$$

beschrieben⁴¹, wobei $\mathcal{A} = \gamma^\mu A_\mu$ gesetzt wurde und $\overleftrightarrow{\partial}_\mu$ die asymmetrische Ableitung bezeichnet:

$$f\overleftrightarrow{\partial}_\mu g = f\partial_\mu g - g\partial_\mu f$$

Danach ist es möglich, den Ableitungsterm in (131) – auch *kinetischer Term* genannt – auch auf andere Weise zu schreiben:

$$\frac{1}{2}\bar{\psi}i\overleftrightarrow{\partial}\psi = \frac{1}{2}\left(\bar{\psi}(i\overrightarrow{\partial}\psi) + (\overleftarrow{i\partial}\bar{\psi})\psi\right) = \text{Re}(\bar{\psi}i\overrightarrow{\partial}\psi).$$

Sinnvoll ist es durch Einführung des Dirac-Operators $\mathcal{D} = \overrightarrow{\partial} + iq\mathcal{A}$ die Lagrangedichte (131) in zwei Terme aufzuspalten:

$$\mathcal{L} = \text{Re}(\bar{\psi}i\mathcal{D}\psi) - m\bar{\psi}\psi.$$

Die vier Komponenten des Dirac-Spinors ψ zusammen mit den vier Komponenten von $\bar{\psi}$ bilden die *acht* Komponenten, von denen die Lagrange-Dichte abhängt. Durch die Anwesenheit des äußeren Vektorfeldes $A_\mu(x)$ haben wir auch eine *explizite* Abhängigkeit der Lagrange-Dichte von x .

- *Das Strahlungsfeld einer klassischen Quelle* wird durch die Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - j^\mu A_\mu \quad (132)$$

beschrieben, wobei $F_{\mu\nu}$ nur als Abkürzung für $\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu$ zu betrachten ist: Wir haben es mit einer Theorie von *vier* unabhängigen Feldkomponenten zu tun. Durch die Ankopplung an einen äußeren Strom $j^\mu(x)$ mit $\partial_\mu j^\mu(x) = 0$ ist auch hier die Lagrange-Dichte eine explizite Funktion von x .

- *Die Quantenelektrodynamik* wird durch die Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\bar{\psi}i\overleftrightarrow{\partial}\psi - m\bar{\psi}\psi - q\bar{\psi}\mathcal{A}\psi \quad (133)$$

beschrieben. Dies ist eine Theorie für $8+4=12$ Feldkomponenten. Es gibt keine äußeren Felder oder Quellen. Folglich ist \mathcal{L} nicht explizit von x abhängig. Die Theorie beschreibt die Wechselwirkung von Elektronen und Positronen mit dem Strahlungsfeld.

⁴¹Hier bezeichnen m und $q = -e$ Masse bzw. Ladung des Elektrons.

Um zu den Feldgleichungen zu gelangen, geht man zum *Wirkungsintegral* über:

$$I = \int d^4x \mathcal{L}[x] \quad (134)$$

Es wird hierbei immer angenommen, daß die Felder genügend schnell im Unendlichen gegen Null streben, so daß das Integral definiert ist und darüberhinaus alle partiellen Integrationen, die wir ausführen werden, gerechtfertigt sind. Das *Wirkungsprinzip* besagt, daß unter einer Variation $\delta\phi_r$ der Felder $\delta I = 0$ gilt, d.h. daß die Wirkung *stationär* ist. Nun findet man

$$\begin{aligned} \delta I &= \int d^4x \sum_r \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} \delta \phi_r + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_r)} \partial_\mu \delta \phi_r \right\} \\ &= \int d^4x \sum_r \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_r)} \right\} \delta \phi_r \end{aligned}$$

und somit

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_r)} = 0 \quad (135)$$

da $\delta\phi_r$ beliebig war. Dies sind Feldgleichungen der QFT. Sie sind identisch mit den Euler-Lagrangeschen Gleichungen des Variationsproblems I =stationär.

Wir ermitteln die Feldgleichungen für die genannten Beispiele:

- *Äußeres Feld.* Zunächst finden wir

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = (\frac{1}{2}i\cancel{\partial} - m - qA)\psi,$$

sodann

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} = -\frac{1}{2}i\gamma^\mu \psi \Rightarrow \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} = -\frac{1}{2}i\cancel{\partial}\psi$$

und somit

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} = (i\cancel{\partial} - qA\psi - m)\psi = 0. \quad (136)$$

In ähnlicher Weise ermitteln wir

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} = \overline{(i\cancel{\partial} - qA\psi - m)\psi} = 0.$$

Fazit: Die Feldgleichung für $\bar{\psi}$ liefert keine neue Information.

- *Äußere Quelle.* Nach einigen Rechenschritten finden wir die Feldgleichung

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu \quad (137)$$

- *Quantenelektrodynamik.* Die erforderlichen Schritte sind identisch mit denen der ersten beiden Modelle. Wir erhalten gekoppelte Feldgleichungen für ψ und A_μ :

$$(i\cancel{\partial} - q\cancel{A}\psi - m)\psi = 0 \quad (138)$$

$$\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = q\bar{\psi}\gamma^\nu\psi \quad (139)$$

Bei alledem muß man im Auge behalten, daß bei Anwendung des Wirkungsprinzips die Felder wie klassische Größen und nicht wie Operatoren zu behandeln sind. Wenn wir im Anschluß daran Quantisierungsvorschriften anwenden und die Felder schließlich nicht mehr als beliebige Funktionen, sondern als fest gewählte Operatoren ansehen, verliert auch die klassische Wirkung I ihre Bedeutung und kann nicht mehr interpretiert werden. Somit erfüllt das Wirkungsprinzip nur eine *heuristische* Aufgabe. Dieser Zustand ist natürlich unbefriedigend und wird erst in der euklidischen Fassung (der Minkowski-Raum M_4 wird durch den euklidischen Raum E_4 ersetzt) der Feldtheorie überwunden, wo die Felder wieder als Variable aufgefaßt werden und die ‘funktionale Integration’ in den Mittelpunkt rückt. Dann kommt der euklidischen Wirkung eine zentrale Bedeutung zu, weil sie das Integrationsmaß festlegt.

3.2 Der Energie-Impuls-Tensor

Wir wenden uns Erhaltungssätzen zu, die aus der *Translationsinvarianz* einer Feldtheorie folgen. Wir nennen eine Lagrange-Dichte \mathcal{L} invariant gegenüber Translationen, wenn sie nicht explizit von x abhängig ist. Bei einer infinitesimalen Verschiebung $x \mapsto x + \delta x$ ändert sich $\mathcal{L}[x] = \mathcal{L}(\phi_r(x), \partial_\mu \phi_r(x))$ um

$$\delta\mathcal{L}[x] = \partial_\mu \mathcal{L}[x] \delta x^\mu \quad (140)$$

Andererseits soll \mathcal{L} nur eine Funktion der Felder und ihrer Ableitungen sein, so daß

$$\delta\mathcal{L} = \sum_r \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_r} \delta\phi_r + \pi_r^\mu \partial_\mu \delta\phi_r \right\} \quad (141)$$

wobei wir die Abkürzungen

$$\delta\phi_r = \partial_\nu \phi_r \delta x^\nu, \quad \pi_r^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_r)}$$

benutzen. Es sei δx unabhängig von x , so daß $\partial_\mu \delta \phi_r = (\partial_\mu \partial_\nu \phi_r) \delta x^\nu$ gilt. Ein Vergleich von (140) und (141) unter Ausnutzung von (135) liefert

$$\{\partial_\mu \mathcal{L}\} \delta x^\mu = \{\partial_\mu \sum_r \pi_r^\mu \partial_\nu \phi_r\} \delta x^\nu$$

Da dies für beliebige δx gilt, erhalten wir die Aussage

$$\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = 0 \quad (142)$$

für

$$\Theta^{\mu\nu} = \sum_r \pi_r^\mu \partial^\nu \phi_r - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (143)$$

Der auf diese Weise eingeführte Tensor $\Theta^{\mu\nu}$ heißt der *Energie-Impuls-Tensor*. Die Gleichung (142) zeigt, daß $\Theta^{\mu\nu}$ vier erhaltenen Strömen äquivalent ist. Die vier damit verknüpften Erhaltungsgrößen identifizieren wir mit den Komponenten P^μ des Viererimpulses:

$$P^\nu = \int d^3x \Theta^{0\nu}[x] \quad (144)$$

Insbesondere gilt also

$$H = \int d^3x (\sum_r \pi_r^0 \partial^0 \phi_r - \mathcal{L}) \quad (145)$$

und wir erkennen darin die vertraute Form der Legendre-Transformation aus der klassischen Mechanik wieder, sobald wir für die Zwecke des Vergleichs die in (145) auftretenden Größen geeignet benennen:

$L = \int d^3x \mathcal{L}[x]$	<i>Lagrange-Funktion</i>
$\phi_r(x)$	<i>verallgemeinerte Koordinaten</i>
$\pi_r^0(x)$	<i>kanonische Impulse</i>

Bei diesem Vergleich sind r und $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ als ‘Indizes’ der verallgemeinerten Koordinate $\phi_r(t, \mathbf{x})$ zur Zeit t anzusehen.

Die obige Rechnung läßt sich für den Fall wiederholen, bei dem \mathcal{L} explizit von x abhängt. Bezeichnen wir die Ableitung nach x^μ – bei konstantem ϕ_r und $\partial_\mu \phi_r$ – mit $\mathcal{L}_{|\mu}$, so finden wir

$$\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu} \mathcal{L}_{|\mu} = -\mathcal{L}^{|\nu} \quad (146)$$

anstelle von (142), und die Erhaltungssätze für Energie und Impuls gelten nun nicht mehr. Wir betrachten wieder unsere Beispiele:

- Äußeres Feld

$$\begin{aligned}\partial_\mu \Theta_D^{\mu\nu} &= q\bar{\psi}(\partial^\nu \mathcal{A})\psi \\ \Theta_D^{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu i \overleftrightarrow{\partial}^\nu \psi\end{aligned}\quad (D = Dirac)$$

- Äußerer Strom

$$\begin{aligned}\partial_\mu \Theta_M^{\mu\nu} &= A_\sigma \partial^\nu j^\sigma \\ \Theta_M^{\mu\nu} &= F^{\mu\sigma} \partial^\nu A_\sigma + \frac{1}{4}g^{\mu\nu} F^{\sigma\tau} F_{\sigma\tau}\end{aligned}\quad (M = Maxwell)$$

- Quantenelektrodynamik

$$\begin{aligned}\partial_\mu \Theta_{QED}^{\mu\nu} &= 0 \\ \Theta_{QED}^{\mu\nu} &= \Theta_D^{\mu\nu} + \Theta_M^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} q\bar{\psi}\mathcal{A}\psi\end{aligned}$$

Der Tensor $\Theta^{\mu\nu}$ ist eine wichtige und im Prinzip meßbare Größe für die Physik. Seine Bedeutung geht unter anderem daraus hervor, daß er in die Einsteinschen Gravitationsfeldgleichungen eingeht und somit eine Brücke zwischen der Teilchenphysik und der allgemeinen Relativitätstheorie schlägt. Leider hat der von uns abgeleitete Tensor $\Theta_M^{\mu\nu}$ nicht einmal für das *freie* Maxwell-Feld die Eigenschaft symmetrisch und eichunabhängig zu sein. Denn unter einer Eichtransformation $A_\sigma \mapsto A_\sigma + \partial_\sigma \Lambda$ finden wir unter Ausnutzung der Feldgleichung $\partial_\sigma F^{\mu\sigma} = 0$:

$$\Theta_M^{\mu\nu} \mapsto \Theta_M^{\mu\nu} + \partial_\sigma (F^{\mu\sigma} \partial^\nu \Lambda) \quad (147)$$

Erstens: Wir wissen, daß die Lagrange-Dichte nicht eindeutig durch die Feldgleichungen bestimmt ist. Daraus resultiert eine gewisse Unsicherheit bei der Konstruktion des Energie-Impuls-Tensors. *Zweitens:* Der Tensor $\Theta^{\mu\nu}$ kann stets durch einen Zusatzterm der Form $\partial_\sigma \Omega^{\mu\sigma\nu}$ mit $\Omega^{\mu\sigma\nu} = -\Omega^{\sigma\mu\nu}$ abgeändert werden, ohne die Bedingung (142) und die Konstruktion des Viererimpulses zu beeinflussen. Wir nutzen diese Freiheit und bestimmen – mit Blick auf (147) – einen neuen Tensor für die Maxwell-Theorie:

$$\hat{\Theta}_M^{\mu\nu} = \Theta_M^{\mu\nu} - \partial_\sigma (F^{\mu\sigma} A^\nu) \quad (148)$$

Bei Abwesenheit von äußeren Quellen gilt die Feldgleichung $\partial_\sigma F^{\mu\sigma} = 0$ und wir erhalten:

$$\hat{\Theta}_M^{\mu\nu} = \frac{1}{4}g^{\mu\nu} F^{\sigma\tau} F_{\sigma\tau} - g_{\sigma\tau} F^{\mu\sigma} F^{\nu\tau} \quad (149)$$

Dieser Tensor ist divergenzfrei, eichinvariant, symmetrisch und spurfrei. Er stimmt nun mit dem gewohnten Ausdruck überein, den man in der Strahlungstheorie betrachtet. Unter Verwendung des Maßsystems von Lorentz-Heaveside ($\epsilon_0 = \mu_0 = 1$) gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \{F^{01}, F^{02}, F^{03}\} & -\mathbf{E} \times \mathbf{B} &= \{\hat{\Theta}_M^{01}, \hat{\Theta}_M^{02}, \hat{\Theta}_M^{03}\} \\ \mathbf{B} &= \{F^{23}, F^{31}, F^{12}\} & \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) &= \hat{\Theta}_M^{00}. \end{aligned}$$

Wir erkennen hierin die bekannten Ausdrücke für den Poynting-Vektor und die Energiedichte des Strahlungsfeldes.

3.3 U(1)-Symmetrie und Ladungen

Das allgemeine Noethersche Theorem sagt, daß zu einer n -parametrischen Symmetriegruppe der Lagrange-Funktion genau n linear unabhängige erhaltene Ströme existieren. Für $n = 1$ gibt es nur zwei mögliche Situationen: Entweder kann die Symmetriegruppe mit \mathbf{R} oder mit $U(1)$ identifiziert werden. Welcher Fall vorliegt, erkennt man in der QFT unter anderem an dem Spektrum der Erhaltungsgröße. Liegt die Gruppe \mathbf{R} vor, so ist das Spektrum kontinuierlich. Handelt es sich dagegen um die Gruppe $U(1)$, so ist das Spektrum diskret und äquidistant.

Wir beschäftigen uns mit dem zweiten Fall. Wenn die $U(1)$ -Gruppe einer *inneren* Symmetrie⁴² entspricht, so nennen wir die $e^{i\alpha} \in U(1)$ zugeordnete Operation eine *globale Eichtransformation*. Es ist immer möglich, in einer konkreten Feldtheorie komplexe Felder so einzuführen, daß sich bei einer globalen Eichtransformation höchstens die *Phase* eines komplexen Feldes ändern kann, reelle Felder dagegen überhaupt nicht transformiert werden:

$$\phi_r(x) \mapsto e^{-in_r\alpha} \phi_r(x)$$

Hierbei ist n_r notwendig eine ganze Zahl, die man die *Ladung*⁴³ des Feldes ϕ_r in bezug auf die gewählte $U(1)$ -Symmetrie nennt (für reelle Felder wird man $n_r = 0$ setzen). Infinitesimal lautet das Transformationsgesetz

$$\phi_r(x) \mapsto \phi_r(x) - in_r \delta\alpha \phi_r(x) \quad (150)$$

oder kurz

$$\delta\phi_r = -in_r \delta\alpha \phi_r$$

Ist $\mathcal{L}(\phi_r, \partial_\mu \phi_r)$ invariant gegenüber einer solchen Transformation, so können wir wieder schreiben:

$$0 = \delta\mathcal{L} = \sum_r \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_r} \delta\phi_r + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)} \partial_\mu \delta\phi_r \right]$$

⁴²Allgemein spricht man dann von einer inneren Symmetrie, wenn Raum und Zeit von der Transformation unberührt bleiben, dies also eine Transformation der Felder am gleichen Ort x darstellt.

⁴³Kurzform für ‘Ladungsquantenzahl’. Als Beispiel: Die elektrische Ladung wird grundsätzlich in Einheiten der Elementarladung angegeben.

$$= -i\delta\alpha\partial_\mu \sum_r n_r \pi_r^\mu \phi_r \quad \pi_r^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)}$$

Hier haben wir beim Übergang zur zweiten Zeile die Feldgleichungen benutzt. Auf diese Weise bekommen wir einen erhaltenen Strom, der bis auf Normierung durch den Ausdruck

$$j^\mu(x) = -i \sum_r n_r \pi_r^\mu(x) \phi_r(x) \quad (151)$$

gegeben ist. Es sei $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1$. Falls die Wechselwirkung \mathcal{L}_1 keine Ableitungen der Felder enthält, ist der konkrete Ausdruck für j^μ bereits durch die freie Lagrange-Funktion \mathcal{L}_0 vollständig festgelegt.

Zur Bestimmung von $j^\mu(x)$ für ein einzelnes Dirac-Feld ψ der Ladung $n = 1$ gehen wir von der folgenden Tabelle aus:

ϕ_r	$-i\pi_r^\mu$	n
ψ	$\frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu$	1
$\bar{\psi}$	$-\frac{1}{2}\gamma^\mu\psi$	-1

Wir erhalten so:

$$j^\mu(x) = (\frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu)\psi - \bar{\psi}(-\frac{1}{2}\gamma^\mu\psi) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x).$$

Enthält die Lagrangedichte mehrere Dirac-Felder ψ_1, \dots, ψ_s und ist sie invariant unter einer gemeinsamen U(1)-Transformation, wobei dem Feld ψ_k die Ladung n_k zugeordnet ist, so existiert ein erhaltener Gesamtstrom, in den die individuellen Ströme additiv eingehen:

$$j^\mu = n_1\bar{\psi}_1\gamma^\mu\psi_1 + \dots + n_s\bar{\psi}_s\gamma^\mu\psi_s. \quad (152)$$

Es ist zweckmäßig in einer solchen Situation die Schreibweise zu vereinfachen, d.h. man schreibt $j^\mu = \bar{\psi}q\gamma^\mu\psi$ mit den folgenden Vereinbarungen:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_s \end{pmatrix} \quad \bar{\psi} = (\bar{\psi}_1, \dots, \bar{\psi}_s). \quad q = \text{diag}(n_1, \dots, n_s).$$

Hier wurde q als eine Diagonalmatrix mit den Werten n_1, \dots, n_s auf der Diagonale eingeführt.

Wir kennen in der Elementarteilchenphysik eine Reihe von ladungsartigen Quantenzahlen. Zu ihnen gehören:

elektr. Ladung, Baryonenzahl, Hyperladung, Leptonenzahl

Allen Ladungen dieser Art entsprechen erhaltene Ströme der genannten Bauart.

4 Eichtheorien

Bereits im Jahre 1929 schlug H. Weyl vor, die Invarianz gegenüber lokalen Eichtransformationen, oder wie man damals sagte, ‘Eichtransformationen zweiter Art’ dazu zu benutzen, um die Einführung des elektromagnetischen Feldes zu motivieren. Die Absicht ist, den Elektromagnetismus aus einer Symmetriebedingung heraus zu erklären. Dieser Gedankengang soll nun erläutert werden. Er führt uns auf den Bauplan der wichtigsten, gegenwärtig in der Elementarteilchenphysik benutzten Feldtheorien. Die Invarianz gegenüber *lokalen* Eichtransformationen steht dabei im Vordergrund. Wir beginnen mit der einfachsten Theorie dieser Art.

4.1 Die QED als U(1)-Eichtheorie

Um konkret zu bleiben, stellen wir uns vor, daß das Dirac-Feld ψ freie Elektronen und Positronen beschreibt. Seine Lagrange-Dichte ist

$$\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi) = \frac{1}{2} \bar{\psi} \overset{\leftrightarrow}{\not{D}} \psi - m \bar{\psi} \psi$$

Sie ist invariant unter globalen U(1)-Eichtransformationen

$$\psi(x) \mapsto \psi^\alpha(x) := e^{i\alpha} \psi(x), \quad \bar{\psi}(x) \mapsto \bar{\psi}^\alpha(x) := e^{-i\alpha} \bar{\psi}(x)$$

In bezug auf diese Eichgruppe trägt das Feld somit die Ladung -1 ; wir hätten auch jede andere Ladung vorschreiben können. Die entscheidende Frage lautet aber: Ist \mathcal{L} auch invariant unter lokalen Eichtransformationen? Dies wären Transformationen der Art

$$\begin{aligned} \psi(x) &\mapsto \psi^\alpha(x) := e^{i\alpha(x)} \psi(x) \\ \bar{\psi}(x) &\mapsto \bar{\psi}^\alpha(x) := e^{-i\alpha(x)} \bar{\psi}(x) \end{aligned}$$

wobei wir annehmen wollen, daß die x -abhängige Phase $\alpha(x)$ außerhalb eines beschränkten (aber beliebigen) Gebietes $G \subset M_4$ identisch Null modulo 2π ist, daß also die Transformation wirklich nur *lokal* wirksam ist. Daß aus der globalen Eichinvarianz nicht auch die lokale Eichinvarianz folgt, sieht man an der Art und Weise, wie sich die Ableitung des Feldes transformiert:

$$\partial_\mu \psi^\alpha = e^{i\alpha} (\partial_\mu + i\partial_\mu \alpha) \psi \quad (153)$$

Die Lagrange-Dichte \mathcal{L} ist also nicht invariant. Der Grund hierfür ist das Auftreten eines Zusatztermes $i\partial_\mu \alpha$, der ∂_μ modifiziert. Um den unerwünschten Term wieder zu eliminieren, führen wir ein sog. *Eichfeld* $A_\mu(x)$ ein. Dies ist ein *reelles* Vektorfeld mit der folgenden Transformationsvorschrift:

$$eA_\mu \mapsto eA_\mu^\alpha := eA_\mu - \partial_\mu \alpha \quad (154)$$

Immer wenn wir eine Feldableitung in der Lagrange-Dichte antreffen, wollen wir sie durch die *kovariante Ableitung*

$$D_\mu \psi := (\partial_\mu + ieA_\mu)\psi$$

ersetzen. Diese Ableitung hat nämlich das gewünschte (d.h. kovariante) Verhalten:

$$\begin{aligned} D_\mu^\alpha \psi^\alpha &= (\partial_\mu + ieA_\mu^\alpha)\psi^\alpha \\ &= e^{i\alpha}(\partial_\mu + i\partial_\mu\alpha + ieA_\mu^\alpha)\psi \\ &= e^{i\alpha}(\partial_\mu + ieA_\mu)\psi \\ &= e^{i\alpha}D_\mu\psi \end{aligned}$$

Für unser Beispiel bedeutet dies, daß die Lagrange-Dichte in folgender Weise abgeändert wird:

$$\mathcal{L}(\psi, D_\mu\psi) = \text{Re}(\bar{\psi}i\overleftrightarrow{D}\psi) - m\bar{\psi}\psi$$

Die so konstruierte Lagrange-Dichte ist invariant gegenüber lokalen U(1)-Eichtransformationen:

$$\mathcal{L}(\psi, D_\mu\psi) = \mathcal{L}(\psi^\alpha, D_\mu^\alpha\psi^\alpha)$$

Sie hat jedoch noch einen Defekt: \mathcal{L} enthält keine Ableitungen des Vektorfeldes A_μ . Wir erhalten also bei Anwendung des Wirkungsprinzips keine Differentialgleichung, der das Vektorfeld zu genügen hat. Das Vektorfeld ist daher nur ein *äußeres Feld* und beschreibt keine dynamischen Freiheitsgrade. In einer anderen Schreibweise stellt sich die Lagrange-Dichte so dar:

$$\mathcal{L}(\psi, D_\mu\psi) = \frac{1}{2}\bar{\psi}i\overleftrightarrow{\not{D}}\psi - m\bar{\psi}\psi - e\bar{\psi}\not{A}\psi$$

Sie wurde schon von uns früher betrachtet.

Wir wissen bereits aus der Maxwellschen Theorie, daß der Feldstärkensor $F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu$ invariant gegenüber den lokalen U(1)-Transformationen (154) ist: $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^\alpha$. Auf der Suche nach Ausdrücken, die sowohl eichinvariant als auch Lorentz-invariant sind, stoßen wir auf $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ als den einfachsten Ausdruck dieser Art⁴⁴. Wir ergänzen die Lagrange-Dichte, um zu einer befriedigenden Theorie zu gelangen:

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}(\psi, D_\mu\psi) - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \quad (155)$$

⁴⁴Zur Konkurrenz steht noch $F^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\sigma\tau}F^{\mu\nu}F^{\sigma\tau}$. Unter einer Lorentz-Transformation $\Lambda \in L$ multipliziert sich das Levi-Civita-Symbol mit $\det \Lambda$. Unter einer Raumspiegelung nimmt $F\tilde{F}$ also ein Vorzeichen auf und ist damit nicht invariant.

Unsere Konstruktion von \mathcal{L}' benutzte willkürlichen Konstanten, wie die Elementarladung e und die Zahl $-\frac{1}{4}$. Die getroffene Wahl hat nur den Zweck, eine Übereinstimmung mit der traditionellen Form der Maxwellschen Theorie zu erreichen. Selbstverständlich kann man alle Felder, falls gewünscht, anders normieren. Die Elementarladung e übernimmt in der QED die Rolle einer Kopplungskonstanten: Für $e \rightarrow 0$ verschwindet die Wechselwirkung der Felder ψ und A_μ .

Das hier vorgestellte Schema läßt sich verallgemeinern. Eine allgemeine U(1)-Eichtheorie hat danach die folgende Struktur.

- Für komplexe Felder ψ_r ist anfangs eine Lagrange-Dichte $\mathcal{L}(\psi_r, \partial_\mu \psi_r)$ erklärt, die invariant unter globalen U(1)-Transformationen ist:

$$\psi_r^\alpha = e^{-in_r \alpha} \psi_r$$

Hierbei ist $n_r \in \mathbf{Z}$ die Ladung des Feldes ψ_r . Es ist zweckmäßig die individuellen Felder ψ_r zu einem Feld ψ zusammenzufassen und $\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi)$ zu schreiben.

- Es existiert ein reelles Vektorfeld mit dem Transformationsverhalten

$$eA_\mu^\alpha = eA_\mu - \partial_\mu \alpha$$

unter der *lokalen* U(1)-Gruppe. Mit seiner Hilfe ist die kovariante Ableitung von ψ erklärt:

$$[D_\mu \psi]_r = (\partial_\mu - in_r e A_\mu) \psi_r$$

- Die endgültige Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}(\psi, D_\mu \psi) - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

ist durch Konstruktion invariant gegenüber *lokalen* U(1)-Transformationen.

In einer solchen allgemeinen Theorie kann man nun den fermionischen Anteil der Lagrange-Dichte nach Potenzen des Vektorfeldes (also von e) entwickeln:

$$\mathcal{L}(\psi, D_\mu \psi) = \mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi) + e j^\mu A_\mu + O(e^2), \quad (156)$$

wobei der Strom j^μ durch den Ausdruck (152) gegeben ist⁴⁵. Darüberhinaus wissen wir, daß die höheren Ordnungen in (156) verschwinden, falls die Ableitungen von ψ *linear* in die Lagrange-Dichte eingehen: Hier sehen wir, warum

⁴⁵Hier ist zu beachten, daß man in der QED vorzugsweise $-ej^\mu$ anstelle von j^μ als *Strom* bezeichnet.

es wünschenswert ist, Feldtheorien von Beginn an so zu formulieren, daß Terme der Ordnung e^2 nicht auftreten. Nur dann sind wir sicher, daß wir es mit einer reinen Stromkopplung $ej^\mu A_\mu$, der sogenannten *minimalen Wechselwirkung*, zu tun haben. Als Fazit der vorangegangenen Überlegungen können wir feststellen:

Die Wechselwirkung des el. mag. Feldes mit Materie ist vollständig festgelegt, sobald allen Materiefeldern Ladungen zugewiesen sind.

Die folgende Frage ist noch unbeantwortet: Führt der Übergang von der globalen U(1) zur lokalen U(1) auf neue Erhaltungsgrößen? Gibt es vielleicht so etwas wie *lokale Ladungen*, die zu allen Zeiten unveränderliche Werte annehmen? Die Antwort lautet: Nein. Wir wollen diese Frage am Beispiel der QED studieren und betrachten zu diesem Zweck eine beliebige einparametrische Untergruppe von lokalen U(1)-Transformationen. Wir schreiben die Eichfunktion als $\alpha(x) = -se\lambda(x)$, halten die Funktion $\lambda(x)$ fest und variieren $s \in \mathbf{R}$:

$$\psi^s(x) = e^{-ise\lambda(x)}\psi(x) \quad (157)$$

$$A_\mu^s(x) = A_\mu(x) + s\partial_\mu\lambda(x) \quad (158)$$

Wir setzen voraus, daß $\lambda(x)$ nur lokal von Null verschieden ist. Die einparametrische Gruppe ist isomorph zu \mathbf{R} . Aufgrund des Noetherschen Theorems ist ihr ein erhaltener Strom zugeordnet. Er ist leicht zu berechnen und ergibt sich zu:

$$J^\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\lambda + F^{\mu\nu}\partial_\nu\lambda \quad (159)$$

Unter Benutzung der Feldgleichung $\partial_\nu F^{\mu\nu} = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ findet man aber sofort

$$J^\mu = \partial_\nu(F^{\mu\nu}\lambda) \quad (160)$$

also $J^0 = \nabla \cdot (\mathbf{E}\lambda)$ wegen $F^{00} = 0$ und $\mathbf{E} = (F^{01}, F^{02}, F^{03})$. Durch Anwendung des Satzes von Gauß finden wir, daß die vermeintliche Erhaltungsgröße zwangsläufig Null ist:

$$\int d^3x J^0 = \int d^3x \nabla \cdot (\mathbf{E}\lambda) = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{|\mathbf{x}|=r} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{E}\lambda = 0 \quad (161)$$

Hier bezeichnet $d\sigma$ das Oberflächenelement einer Kugel vom Radius r . Das Verschwinden des Oberflächenintegrals bei hinreichend großem r folgt, weil nach Voraussetzung zu jedem x^0 ein R existiert, so daß $\lambda(x) = 0$ für $|\mathbf{x}| > R$ erfüllt ist.

4.2 Die $SU(n)$ -Eichtheorie

Die Verallgemeinerung des Begriffes der lokalen Eichinvarianz unter Einbeziehung nichtabelscher Gruppen wurde 1954 von Yang und Mills vorgeschlagen. Das Modell, das sie untersuchten, benutzte die Gruppe $SU(2)$. Diese Gruppe lag der damals bekannten Isospin-Symmetrie bei den starken Wechselwirkungen zugrunde. Nach moderner Auffassung sind es andere Symmetrien, auf denen die Konstruktion einer Eichtheorie beruht, wenn sie zur Naturbeschreibung tauglich sein soll.

Wir wollen zunächst nur den Formalismus beschreiben und wählen die $SU(n)$ als Symmetriegruppe. Ausgangspunkt ist die Standard-Dichte

$$\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi) = \frac{1}{2} \bar{\psi} \overleftrightarrow{\not{\partial}} \psi - m \bar{\psi} \psi \quad (162)$$

Angenommen, wir haben es nicht nur mit *einem* Dirac-Feld, sondern mit n Dirac-Feldern ψ_r gleicher Masse zu tun. In diesem Fall schreiben wir deren Lagrange-Dichte als

$$\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi) = \sum_{r=1}^n \mathcal{L}(\psi_r, \partial_\mu \psi_r) \quad (163)$$

In einer solchen Situation ist es immer bequem, die einzelnen Felder ψ_r als Komponenten eines ‘Superfeldes’ ψ auffassen. Die erste Beobachtung, die wir machen, ist, daß eine lineare Transformation des Feldes ψ

$$\psi'_r(x) = \sum_s u_{rs} \psi_s(x) \quad (164)$$

genau dann die Lagrange-Dichte invariant läßt, wenn die (konstante) Matrix $u = (u_{rs})$ unitär ist: $U(n)$ ist die Gruppe der inneren Symmetrien dieses Modells. Natürlich befinden sich auch Phasentransformationen darunter. Sie sind durch $u = e^{i\alpha}$ gegeben und führen zu einer Erhaltungsgröße, nämlich zu der gemeinsame Ladung der Felder. Diese wollen wir nicht betrachten, weil diese Situation im vorigen Abschnitt bereits besprochen wurde. Wir fordern also $\det u = 1$ und sind damit bei der Gruppe $SU(n)$. Die Transformationsvorschrift kürzen wir ab, indem wir schreiben: $\psi' = u\psi$ mit $u \in SU(n)$.

Ist es nun möglich, der Theorie eine solche erweiterte Gestalt zu geben, daß sie invariant unter *lokalen* $SU(n)$ -Transformationen wird? Dies wären Transformationen der folgenden Art:

$$\psi^u(x) := u(x)\psi(x), \quad u(x) \in SU(n) \quad (165)$$

Wir studieren wieder das Verhalten der Ableitungen:

$$\partial_\mu \psi^u = (\partial_\mu u)\psi + u\partial_\mu \psi \quad (166)$$

Hierfür können wir auch schreiben:

$$[\partial_\mu - (\partial_\mu u)u^{-1}] \psi^u = u \partial_\mu \psi \quad (167)$$

Um den störenden Term $(\partial_\mu u)u^{-1}$ zu eliminieren, führen wir ein *Eichfeld* $A_\mu(x)$ ein: Dies ist für festes μ und x jeweils eine $n \times n$ -Matrix, d.h. $A_\mu(x)$ enthält zwei unterdrückte Indizes. Eine kovariante Ableitung soll nun durch den Ansatz

$$D_\mu \psi = (\partial_\mu - gA_\mu) \psi \quad (168)$$

konstruiert werden. Hierbei ist g eine zunächst beliebig gewählte Kopplungskonstante. Die Kovarianz der Ableitung – die Bedingung nämlich, daß

$$D_\mu^u \psi^u = u D_\mu \psi, \quad D_\mu^u \equiv \partial_\mu - gA_\mu^u \quad (169)$$

gelten soll – gibt uns das Transformationsgesetz des Eichfeldes. Zunächst erhalten wir die Operator-Identitäten

$$\begin{aligned} (\partial_\mu - gA_\mu^u)u &= u(\partial_\mu - gA_\mu) \\ (\partial_\mu u) + u\partial_\mu - gA_\mu^u u &= u\partial_\mu - guA_\mu \quad , \end{aligned}$$

multiplizieren sie von rechts mit u^{-1} und finden:

$$A_\mu^u := uA_\mu u^{-1} + g^{-1}(\partial_\mu u)u^{-1} \quad (170)$$

Um die Struktur dieser Gleichung besser zu verstehen, führen wir die Lie-Algebra $\mathfrak{su}(\mathbf{n})$ der Gruppe $SU(n)$ ein. Bekanntlich ist jeder Lie-Gruppe eine Lie-Algebra zugeordnet, die man mit dem Tangentialraum an der Gruppeneinheit identifiziert. Wird das allgemeine Gruppenelement durch n reelle Parameter charakterisiert, so nennt man die Gruppe n -dimensional. Die zugehörige Lie-Algebra ist dann ein n -dimensionaler *reeller* Vektorraum mit einer Produktstruktur, wobei das sog. Lie-Produkt im Falle von Matrix-Gruppen durch den Kommutator zweier Matrizen gegeben ist.

Die Beschreibung der Lie-Algebra $\mathfrak{su}(\mathbf{n})$ ist sehr einfach: Eine komplexe $n \times n$ -Matrix a gehört genau dann zu $\mathfrak{su}(\mathbf{n})$, wenn zwei Bedingungen erfüllt sind:

1. a ist *antihermitesch*: $a^* + a = 0$.
2. a ist *spurfrei*: $\text{Spur } a = 0$.

Diese Bedingungen garantieren, daß $e^{ta} \in SU(n)$ für alle $t \in \mathbf{R}$ gilt. Unter den Bedingungen 1. und 2. bilden die Matrizen a einen reellen Vektorraum der Dimension $n^2 - 1$ mit der Eigenschaft, daß für beliebige $a, b \in \mathbf{su}(\mathbf{n})$ immer $[a, b] \in \mathbf{su}(\mathbf{n})$ erfüllt ist.

Sei $u(x) \in SU(n)$ differenzierbar. Wir behaupten: Für festes x und μ gilt stets $(\partial_\mu u)u^{-1} \in \mathbf{su}(\mathbf{n})$.

Für den ersten Teil des Beweises haben wir nur $uu^* = 1$ zu differenzieren:

$$(\partial_\mu u)u^* + u(\partial_\mu u)^* = 0$$

Aus $u^* = u^{-1}$ folgt

$$(\partial_\mu u)u^{-1} + ((\partial_\mu u)u^{-1})^* = 0$$

Also ist $(\partial_\mu u)u^{-1}$ antihermitesch. Der zweite Teil des Beweises verlangt, daß wir das Verschwinden der Spur nachweisen. Zunächst existiert $a(x) \in \mathbf{su}(\mathbf{n})$, so daß $u(x)$ durch die Exponentialkonstruktion daraus entsteht:

$$u(x) = e^{a(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} a(x)^n$$

Es folgt

$$\partial_\mu u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} a^k (\partial_\mu a) a^{n-k-1}$$

Beachten wir nun, daß $u(x)$ und $a(x)$ (also bei gleichem x) vertauschbare Matrizen sind, so finden wir:

$$\begin{aligned} \text{Spur } (\partial_\mu u)u^{-1} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} \text{Spur } a^k (\partial_\mu a) a^{n-k-1} u^{-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} \text{Spur } a^{n-1} (\partial_\mu a) u^{-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} n \text{Spur } a^{n-1} (\partial_\mu a) u^{-1} \\ &= \text{Spur } u (\partial_\mu a) u^{-1} = \partial_\mu (\text{Spur } a) = 0, \end{aligned}$$

denn es wurde $\text{Spur } a = 0$ vorausgesetzt. Der Zusatzterm, den das Eichfeld A_μ bei einer Umeichung (170) erhält, erweist sich somit als ein Element der Lie-Algebra. Dadurch ist nahegelegt, daß wir das Eichfeld selbst als ein solches Element auffassen. Damit dies gelingt, müssen wir noch folgendes verifizieren:

Wir behaupten: Aus $u \in SU(n)$ und $a \in \mathbf{su}(\mathbf{n})$ folgt $uau^{-1} \in \mathbf{su}(\mathbf{n})$. Anders ausgedrückt⁴⁶: Die Lie-Gruppe wirkt auf ihrer eigenen Lie-Algebra. Die

⁴⁶Diese Tatsache gilt in jeder Lie-Gruppe.

Wirkung ist reell-linear und erhält das Lie-Produkt. Der Beweis ist elementar und wird hier übergangen. Nun ist folgendes klar: Die lineare Abbildung

$$Ad(u) : \mathfrak{su}(n) \rightarrow \mathfrak{su}(n) , a \mapsto uau^{-1} \quad (171)$$

($u \in SU(n)$) beschreibt eine $(n^2 - 1)$ -dimensionale reelle Darstellung der Gruppe $SU(n)$. Sie wird die *adjungierte Darstellung* der $SU(n)$ genannt.

Nun interpretieren wir die Relation (170) als eine Beziehung zwischen Elementen der Lie-Algebra $\mathfrak{su}(n)$ und fassen das Ergebnis in Worte:

Das Eichfeld einer $SU(n)$ -Eichtheorie ist ein Vektorfeld $A_\mu(x)$ mit Werten in $\mathfrak{su}(n)$. Bei einer Umeichung transformiert sich das Eichfeld gemäß der adjungierten Darstellung der Eichgruppe und erhält darüberhinaus einen Zusatzterm aus $\mathfrak{su}(n)$. Bei einer globalen Eichtransformation ($u=\text{konst.}$) verschwindet dieser Term.

Indem man eine Basis in $\mathfrak{su}(n)$ einführt, ist es stets möglich, das Eichfeld in $n^2 - 1$ reelle Vektorfelder zu zerlegen. Wir beschreiben die einfachsten Beispiele (der Index μ und das Argument x wird unterdrückt):

- Eine Basis in $\mathfrak{su}(2)$ wird durch $-i\sigma_a$ gegeben, wobei die σ_a ($a = 1, 2, 3$) die Pauli-Matrizen sind. Es existieren also drei reelle Vektorfelder A^1, A^2, A^3 , so daß das Eichfeld $A \in \mathfrak{su}(2)$ die Form annimmt:

$$A = -i \begin{pmatrix} A^3 & A^1 - iA^2 \\ A^1 + iA^2 & -A^3 \end{pmatrix} = -iA^a \sigma_a$$

Man sieht unmittelbar, daß diese Matrix antihermitesch und spurfrei ist.

- Eine Basis in $\mathfrak{su}(3)$ wird durch $-i\lambda_a$ gegeben, wobei die λ_a ($a = 1, \dots, 8$) die Gell-Mann-Matrizen⁴⁷ sind. Es existieren also acht reelle Vektorfelder A^1, \dots, A^8 , so daß das Eichfeld $A \in \mathfrak{su}(3)$ die Form annimmt:

$$A = -i \begin{pmatrix} A^3 + \frac{1}{\sqrt{3}}A^8 & A^1 - iA^2 & A^4 - iA^5 \\ A^1 + iA^2 & -A^3 + \frac{1}{\sqrt{3}}A^8 & A^6 - iA^7 \\ A^4 + iA^5 & A^6 + iA^7 & -\frac{2}{\sqrt{3}}A^8 \end{pmatrix} = -iA^a \lambda_a$$

⁴⁷Diese Matrizen wurden von M.Gell-Mann 1961 in einem unveröffentlichten CALTECH-Report eingeführt. Sie bilden eine Basis aller hermiteschen spurfreien 3×3 -Matrizen und sind so normiert, daß $\frac{1}{2}\text{Spur } \lambda_a \lambda_b = \delta_{ab}$ gilt.

Allgemein kann man in $\mathfrak{su}(\mathbf{n})$ eine Basis $-it_a$ ($a = 1, \dots, n^2 - 1$) immer so einführen, daß die t_a hermitesche spurfreie $n \times n$ -Matrizen sind und

$$\frac{1}{2} \text{Spur } t_a t_b = \delta_{ab} \quad (172)$$

erfüllt ist. Die durch

$$[t_a, t_b] = i \sum_c f_{ab}{}^c t_c \quad (173)$$

gegebenen (basisabhängigen) reellen Zahlen $f_{ab}{}^c$ nennt man die *Strukturkonstanten* der Lie-Algebra $\mathfrak{su}(\mathbf{n})$. Mit Hilfe einer solchen Basis kann das Eichfeld $A_\mu(x)$ zerlegt und durch seine Komponenten ausgedrückt werden:

$$A_\mu(x) = -i A_\mu^a(x) t_a \quad (174)$$

Obwohl $A_\mu(x)$ in unserer Diskussion zunächst noch als ein klassisches Feld betrachtet wird, finden wir – aufgrund seines Matrixcharakters – einen nichtverschwindenden Kommutator (den man nicht als Ausdruck einer Quantisierungsvorschrift auffassen darf):

$$[A_\mu(x), A_\nu(x)] = -i f_{ab}{}^c A_\mu^a(x) A_\nu^b(x) t_c. \quad (175)$$

Anders ausgedrückt:

$$[A_\mu(x), A_\nu(x)]^c = f_{ab}{}^c A_\mu^a(x) A_\nu^b(x).$$

Die nächste Stufe auf dem Wege zu einer befriedigenden $SU(n)$ -Eichtheorie wird dadurch erreicht, daß wir in der Lagrange-Dichte (163) der Materiefelder die gewöhnliche Ableitung durch die kovariante Ableitung ersetzen:

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}(\psi, D_\mu \psi) \quad D_\mu \psi = (\partial_\mu - g A_\mu) \psi \quad (176)$$

Die so konstruierte Dichte ist bereits invariant unter lokalen Eichtransformationen: $\mathcal{L}(\psi^u, D_\mu^u \psi^u) = \mathcal{L}(\psi, D_\mu \psi)$. Da die Ableitungen des Eichfeldes hierin nicht vorkommen, fehlt noch ein wichtiger Term. Wir suchen also zunächst *Feldstärken* $F_{\mu\nu}$, die sich gemäß der Vorschrift

$$F_{\mu\nu}(x) \mapsto F_{\mu\nu}^u(x) := u(x) F_{\mu\nu}(x) u(x)^{-1} \quad (177)$$

transformieren. Im folgenden ist es bequem, die Ableitung nach x durch einen Strich-Index auszudrücken: z.B. $u_{|\mu} := \partial_\mu u$. Die Ableitung des transformierten Eichfeldes

$$A_\mu^u = u A_\mu u^* + g^{-1} u_{|\mu} u^*$$

stellt sich so dar:

$$A_{\mu|\nu}^u = u_{|\nu}A_{\mu}u^* + uA_{\mu|\nu}u^* + uA_{\mu}u_{|\nu}^* + g^{-1}u_{|\mu}u_{|\nu}u^* + g^{-1}u_{|\mu}u_{|\nu}^*$$

Andererseits gilt:

$$\begin{aligned} gA_{\mu}^uA_{\nu}^u &= guA_{\mu}A_{\nu}u^* + uA_{\mu}u^*u_{|\nu}u^* \\ &\quad + u_{|\mu}A_{\nu}u^* + g^{-1}u_{|\mu}u^*u_{|\nu}u^* \\ &= guA_{\mu}A_{\nu}u^* - uA_{\mu}u_{|\nu}^* \\ &\quad + u_{|\mu}A_{\nu}u^* - g^{-1}u_{|\mu}u_{|\nu}^* \end{aligned}$$

Hierbei benutzen wir $u_{|\nu}u^* + uu_{|\nu}^* = 0$ als Folge von $uu^* = 1$. Wenn wir jetzt geeignete Terme addieren,

$$F_{\mu\nu} := A_{\mu|\nu} - A_{\nu|\mu} + g[A_{\mu}, A_{\nu}] \quad , \quad (178)$$

wobei jeder Term für sich genommen ein kompliziertes Verhalten unter Eichtransformationen zeigt, so genügt dennoch deren Summe einem sehr einfachen Gesetz: $F_{\mu\nu}^u = uF_{\mu\nu}u^{-1}$, so wie in (177) verlangt.

Wir merken an, daß die Definition von $F_{\mu\nu}$ auch auf verschiedene andere gleichwertige Weisen gegeben werden kann. Zum Beispiel, indem wir den Operator $D_{\mu} = \partial_{\mu} - gA_{\mu}$ der kovarianten Ableitung heranziehen, gilt:

$$F_{\mu\nu} = g^{-1}[D_{\mu}, D_{\nu}] = D_{\nu}A_{\mu} - D_{\mu}A_{\nu} \quad . \quad (179)$$

Schließlich ist es möglich, bei der Theorie der Differentialformen Anleihen zu machen. Danach ist das Vektorfeld eine 1-Form

$$A = A_{\mu}(x)dx^{\mu} \quad ,$$

die Feldstärken hingegen sind Komponenten einer 2-Form:

$$F = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}(x)dx^{\mu} \wedge dx^{\nu} \quad ,$$

wobei vereinbarungsgemäß die Differentiale antivertauschen:

$$dx^{\mu} \wedge dx^{\nu} = -dx^{\nu} \wedge dx^{\mu} \quad .$$

Man erhält – im Fall der Elektrodynamik – die einfache Formel $F = -dA$ und nennt d die *äußere Ableitung*. Allgemein: d verwandelt eine p -Form in eine $(p+1)$ -Form, und es gilt $d^2 = 0$. Im Fall einer nicht-abelschen Eichgruppe hingegen hat unsere Analyse ergeben, daß

$$F = gA \wedge A - dA$$

gilt, wobei das äußere Produkt von A mit sich selbst durch das Lie-Produkt der Komponenten (d.h. durch den Kommutator) ausdrückbar ist:

$$A \wedge A = A_\mu(x)A_\nu(x)dx^\mu \wedge dx^\nu = \frac{1}{2}[A_\mu(x), A_\nu(x)]dx^\mu \wedge dx^\nu .$$

Schließlich sei betont, daß wie das Eichfeld A so auch F Werte in der Lie-Algebra $\mathfrak{su}(\mathfrak{n})$ annimmt. Es kann deshalb F nach der Basis $-it_a$ entwickelt werden:

$$F_{\mu\nu}(x) = -iF_{\mu\nu}^a(x)t_a \quad (180)$$

Jetzt ist es wünschenswert, Lorentz-invariante Ausdrücke zu erzeugen. Also bilden wir $J := F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$. Wegen (177) zeigt dieser Ausdruck das Transformationsgesetz $J^u = uJu^{-1}$. Folglich haben wir in $\text{Spur} J$ eine *eichinvariante* Größe gefunden. Aus (172) und (180) folgt $\text{Spur} J = -2 \sum_a F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}$. Die endgültige Lagrange-Dichte der $SU(n)$ -Eichtheorie setzen wir daher so an: $\mathcal{L}'' = \mathcal{L}' + \frac{1}{8}\text{Spur} J$. Ausführlich:

$$\mathcal{L}'' = \text{Re}(\bar{\psi}i\not{D}\psi) - m\bar{\psi}\psi + \frac{1}{8}\text{Spur} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (181)$$

Die Theorie beschreibt die Wechselwirkung von n massiven Dirac-Teilchen mit $n^2 - 1$ masselosen Spin-1-Teilchen, die man auch *Eichbosonen* nennt. Für $n > 1$ ist die Eichgruppe nichtabelsch und infolgedessen tritt in (181) unter anderem eine *Selbstwechselwirkung* des Eichfeldes auf. Grund: $\text{Spur} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ enthält das Feld A in zweiter, dritter und vierter Potenz. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von einer *Selbstkopplung* des Eichfeldes.

Die Lagrange-Dichte enthält keinen Massenterm für das Eichfeld, also keinen Term der Art $\frac{1}{4}M^2 \text{Spur} A_\mu A^\mu$, der den Eichbosonen eine endliche Masse M geben würde. Die Anwesenheit eines solchen Termes ist durch die Forderung der lokalen Eichinvarianz ausgeschlossen. Dies scheint zunächst ein ernstes Problem zu sein; denn wir beobachten in der Natur nur *ein* masseloses Eichfeld, nämlich das elektromagnetische Feld. Dieses Problem wird in den Theorien der schwachen und starken Wechselwirkung durch Zusatzannahmen überwunden (Stichworte: spontane Symmetriebrechung, Higgs-Mechanismus, confinement).

Als *reine Eichtheorie* oder Yang-Mills-Theorie bezeichnet man dasjenige feldtheoretische Modell, das durch die Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = \frac{1}{8}\text{Spur} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}\delta_{ab}F_{\mu\nu}^a F^{b\mu\nu} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}$$

gegeben ist. Zur Auswertung der Spur benutzen wir

$$\text{Spur}(-it_a)(-it_b) = -2\delta_{ab} .$$

Das Modell beschreibt die Eichbosonen, ihre Wechselwirkung untereinander und sonst nichts. Die Anwendung des Wirkungsprinzips führt hier auf die Feldgleichung für das A -Feld

$$[D_\nu, F^{\mu\nu}] = 0 \quad (182)$$

Man kann dies auch als ein gekoppeltes System von Differentialgleichungen erster Ordnung für das A -Feld und die Feldstärken auffassen:

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu}{}_{|\nu} + g[F^{\mu\nu}, A_\nu] &= 0 \\ A_{\mu|\nu} - A_{\nu|\mu} + g[A_\mu, A_\nu] &= F_{\mu\nu} \end{aligned}$$

Auch für die homogenen Maxwell-Gleichungen finden wir hier eine Entsprechung:

$$[D_\mu, F_{\nu\rho}] + [D_\rho, F_{\mu\nu}] + [D_\nu, F_{\rho\mu}] = 0 \quad (183)$$

Dies ist eine Identität und keine Feldgleichung: Sie folgt aus der Definition von $F_{\mu\nu}$ und der Jacobi-Identität für das Lie-Produkt. Die Gleichungen (182) und (183) lassen erkennen, wie die kovariante Ableitung eines Feldes F gebildet wird, das sich gemäß der adjungierten Darstellung der Eichgruppe transformiert. Man schreibt oft abkürzend

$$D_\mu F := [D_\mu, F] \quad (184)$$

für die kovariante Ableitung in einer solchen Situation (ähnlich wie man in der Quantenmechanik ∇V anstelle von $[\nabla, V]$ schreibt, wenn man den Gradienten des Potentials V , als Operator aufgefaßt, bestimmen möchte).

Die wesentlichen Begriffe dieser Theorie, wie *Eichfeld* und *kovariante Ableitung*, deuten auf eine mathematische Struktur, die unabhängig von dem physikalischen Kontext analysiert werden kann. Die hier zuständige mathematische Disziplin ist die *Differentialgeometrie* der Faserbündel. Details findet man in dem Buch

Martin Schottenloher: Geometrie und Symmetrie in der Physik,
Vieweg Verlag 1995

Eichtheorien, die gemäß der allgemeinen Überzeugung den fundamentalen Wechselwirkungen der Natur zugrunde liegen, sind somit ihrer mathematischen Struktur nach geometrische Theorien. In geometrischer Sprache sind die Eichtransformationen $u(x)$ *lokale Schnitte eines Hauptfaserbündels* P über einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit, der Raumzeit, mit der Strukturgruppe $SU(n)$. Für den flachen Minkowski-Raum ist P trivial, d.h. von der Form

$$P = M_4 \times SU(n).$$

Felder sind grundsätzlich Schnitte von assoziierten Vektorbündeln. Das Eichfeld A als Lie-Algebra-wertige 1-Form definiert einen *Zusammenhang*, also einen Paralleltransport in der Mannigfaltigkeit. Durch $F = dA + A \wedge A$ bestimmt man die Krümmung F als Lie-Algebra-wertige 2-Form. Die Relation (183) heißt dann *Bianchi-Identität*. In dieser Formulierung ist für die Kopplungskonstante g kein Platz. Um den Zusammenhang mit früheren Formeln herzustellen, müssen wir dort das Eichfeld umnormieren, d.h. $-gA$ durch A und ebenso gF durch F ersetzen. Danach erscheint die Konstante g nur noch in einem Faktor vor dem Teil der Lagrange-Dichte, der quadratisch in F ist:

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = \frac{1}{8g^2} \text{Spur } F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

Vom geometrischen Standpunkt ist dies die bevorzugte Darstellung einer Eichtheorie.

4.3 Die Quantenchromodynamik

Die ersten Modelle, mit denen man starke Wechselwirkungen beschrieb, waren lokale Feldtheorien mit fundamentalen Meson- und Baryon-Feldern. Diese Theorien erwiesen sich zunehmend als unhaltbar, nachdem die nichtlokale Struktur der Baryonen entdeckt worden war: Diese angeblich fundamentalen Teilchen zeigten eine Substruktur, der man durch Einführung neuer lokaler Felder Rechnung zu tragen hatte. Der Weg führte nach anfänglichen Misserfolgen und Fehlentwicklungen schließlich zur gegenwärtigen Form der *Quantenchromodynamik* (QCD). Dies ist die Theorie der lokalen Wechselwirkung von Quark- und Gluonen-Feldern. Die fundamentale QCD-Wechselwirkung verhält sich damit zur Meson-Baryon-Wechselwirkung wie etwa QED zur Theorie der chemischen Bindung. Das Hadronspektrum entspricht der verwirrenden Vielfalt der chemischen Verbindungen.

Quarks sind Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen und werden durch Dirac-Felder repräsentiert. Nach heutiger Vorstellung werden die Baryonen als gebundene Zustände dreier Quarks aufgefaßt. Symbolisch schreiben wir einen solchen Zustand als $|qqq\rangle$. Hierbei steht q für u, d, s, c, b, t , also für *up, down, strange, charm, bottom, top*. Diese Freiheitsgrade des Quarks werden im Englischen *flavors* genannt. Das Proton identifiziert man mit dem Zustand $|uud\rangle$, das Neutron mit dem Zustand $|udd\rangle$.

Der Grundzustand $|uuu\rangle$ dreier u -Quarks ist als das Δ^{++} -Teilchen bekannt. Es besitzt eine Masse von 1232 MeV und den Spin $\frac{3}{2}$. Seine Spinwellenfunktion ist damit *symmetrisch*. Andererseits erwarten wir für den Grundzustand immer eine *symmetrische* Ortswellenfunktion. Beide Eigenschaften zusammen widersprechen dem Pauli-Prinzip. Man ist deshalb gezwungen,

dem Quark weitere Freiheitsgrade zuzuschreiben, und spricht von der *Farbe* dieser Teilchen: *blau*, *rot*, *grün* für $a = 1, 2, 3$. Mit Hilfe dieser neuen Freiheitsgrade kann nun eine total antisymmetrische Wellenfunktion für alle Baryonen konstruiert werden:

$$\frac{1}{\sqrt{3!}} \sum_{abc} \epsilon_{abc} |q^a q^b q^c\rangle.$$

Die Antisymmetrie des Zustandes ist jetzt durch die Antisymmetrie des ϵ -Tensors garantiert. Dieser Tensor ist invariant unter linearen Transformationen $u : \mathbf{C}^3 \rightarrow \mathbf{C}^3$ mit $\det u = 1$. Sie formen die Gruppe $SL(3, \mathbf{C})$.

Mesonen werden als $q\bar{q}$ -Zustände aufgefaßt. Für die leichtesten Teilchen, die π -Mesonen, gilt:

$$\begin{aligned} \pi^+ & : |u\bar{d}\rangle \\ \pi^0 & : (|u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle)/\sqrt{2} \quad (\text{genähert}) \\ \pi^- & : |d\bar{u}\rangle \end{aligned}$$

Die $q\bar{q}$ -Zustände werden so gebildet, daß alle Farben mit dem gleichen Gewicht eingehen:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \sum_a |q^a \bar{q}^a\rangle.$$

Transformationen, die diese Kombination invariant lassen, müssen unitär sein und gehören somit der $U(3)$ an. Nun ist die Gruppe $SU(3)$ gerade der Durchschnitt der Gruppen $SL(3, \mathbf{C})$ und $U(3)$. Die auf diese Weise eingeführte Symmetriegruppe der QCD heißt die *Farb-SU(3)*. Man postuliert, daß alle physikalisch beobachtbaren Zustände (Baryonen, Mesonen usw.) $SU(3)$ -invariant oder, wie man sagt, *farbneutral* sind⁴⁸. Eine der wichtigsten Aufgaben der Feldtheorie ist es zu zeigen, *warum* nur farbneutrale Teilchen im ungebundenen Zustand auftreten können. Man nennt dies das Problem der *Quarkeinschließung* (im Englischen ‘confinement’).

Zur konkreten Beschreibung der QCD gehen wir von Dirac-Feldern ψ_f^a aus, die den verschiedenen Quarks zugeordnet werden, wobei wir die Indizes in der folgenden Weise interpretieren:

$$\begin{array}{ll} a = 1, 2, 3 & \text{(die ‘colors’)} \\ f = 1, 2, \dots, 6 & \text{(die ‘flavors’)} \end{array}$$

⁴⁸Das bedeutet, daß nur die triviale Darstellung der Farb- $SU(3)$ bei den physikalisch realisierbaren Zuständen auftritt. In diesem Sinn ist die Farbe ein verborgener Freiheitsgrad.

Es gelingt den Farbindex zu unterdrücken, indem man die Schreibweise vereinbart:

$$\psi_f = \begin{pmatrix} \psi_f^1 \\ \psi_f^2 \\ \psi_f^3 \end{pmatrix} \quad \bar{\psi}_f = (\bar{\psi}_f^1, \bar{\psi}_f^2, \bar{\psi}_f^3) \quad (185)$$

Das Feld ψ_f erhält die Masse m_f . Sie ist als farbunabhängig angenommen, um die Farb- $SU(3)$ als Invarianzgruppe einführen zu können. Die Lagrange-Dichte hat die bekannte Form, wie sie für eine $SU(3)$ -Eichtheorie charakteristisch ist:

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \frac{1}{8} \text{Spur } F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \sum_f \{ \text{Re} (\bar{\psi}_f i \not{D} \psi_f) - m_f \bar{\psi}_f \psi_f \} \quad (186)$$

Die Wahl garantiert unter anderem, daß die QCD invariant unter Raumspiegelungen ist.

Es wäre ohne Verletzung der Symmetrie-Prinzipien möglich, den hierin auftretenden Massenterm etwas allgemeiner zu schreiben, nämlich als

$$- \sum_{ff'} m_{ff'} \bar{\psi}_f \psi_{f'}$$

mit einer komplexen Massenmatrix $M = (m_{ff'})$. Diese Matrix muß hermitesch, jedoch nicht notwendig positiv sein. Es ist aber immer möglich, durch geeignete Wahl der Felder Matrix M zu diagonalisieren. Wir haben also in (186) entschieden, die Felder ψ_f mit den Eigenvektoren der Matrix M zu verknüpfen. Die Massenwerte m_f lassen sich nur indirekt und mit Unsicherheiten behaftet aus den gebundenen Zuständen (den Hadronen) ermitteln. Die Werte reichen von wenigen MeV (für up- und down-Quarks) bis zu 170 GeV (für das top-Quark). Angesichts der großen Massenunterschiede erscheint es zunächst wenig sinnvoll, von einem flavor-Freiheitsgrad des Quarks zu sprechen. Das erweiterte Modell (das sog. Standardmodell) gibt jedoch allen Teilchen zu Beginn die Masse Null, um dann zu erklären, wie sämtliche Massen dynamisch, d.h. durch den Higgs-Mechanismus erzeugt werden. In diesem Licht erscheint die QCD, losgelöst vom Standardmodell, nur als eine effektive Theorie mit frei wählbaren Parametern m_f .

Die Lagrange-Dichte der QCD enthält nur eine Kopplungskonstante. Es ist nicht möglich, die Felder ψ_f mit einer f -abhängigen Kopplungskonstanten g_f an das Eichfeld zu koppeln: Da die Gruppe $SU(3)$ einfach ist, gibt es nur *eine* kovariante Ableitung D_μ .

Das Eichfeld A_μ transformiert sich gemäß der adjungierten Darstellung der Farb- $SU(3)$. Da sie 8-dimensional ist, treten in dieser Theorie 8 Vektorbosonen (Spin-1-Teilchen) auf, die man *Gluonen* nennt. Das Eichfeld kann,

nach Wahl einer Basis, in 8 Vektorfelder zerlegt werden. Da diese reell sind, haben die Gluonen keine ladungsartigen Quantenzahlen, also weder eine elektrische Ladung, noch eine Baryonenzahl etc. Sie sind aber *gemischt-farbig* und können daher nicht als freie Teilchen beobachtet werden. Unter der Farb- $SU(3)$ transformieren sich die Gluonen so, wie sich die Quark-Antiquark-Zustände $|q^a \bar{q}^b\rangle$ transformieren würden, mit Ausnahme des Zustandes $\sum_a |q^a \bar{q}^a\rangle$, der $SU(3)$ -invariant ist.

Die QCD besitzt eine Reihe von $U(1)$ -Symmetrien:

$$\psi_f(x) \mapsto e^{i\alpha_f} \psi_f(x) \quad (f = 1, \dots, 6). \quad (187)$$

Die hierdurch beschriebene globale Symmetriegruppe ist

$$U(1) \times U(1) \times \dots \times U(1) \quad (6 \text{ Faktoren})$$

Jede dieser $U(1)$ -Gruppen entspricht eine Ladung. Wir konzentrieren uns auf die ersten drei Faktoren, sinnvoll für eine Welt, die nur aus den Quarks u, d und s aufgebaut erscheint. Es sei B die Baryonenzahl, Q die elektrische Ladung und Y die Hyperladung⁴⁹. Da man bei Einführung dieser Größen von den beobachtbaren Teilchen (Baryonen und Mesonen) ausging, ist es so gekommen, daß diese Ladungen drittelzahlige Werte bei den Quarks annehmen:

f	q	B	Q	Y	B+Q	B-Q+Y	B-Y
1	u	1/3	2/3	1/3	1	0	0
2	d	1/3	-1/3	1/3	0	1	0
3	s	1/3	-1/3	-2/3	0	0	1

Dieser Tabelle entnehmen wir: Die gesuchten Ladungen, die den ersten drei $U(1)$ -Gruppen der QCD entsprechen, sind mit den Linearkombinationen

$$B + Q \quad , \quad B - Q + Y \quad , \quad B - Y \quad (188)$$

identisch. Sie nehmen grundsätzlich nur ganzzahlige Werte an. Man hat $S = Y - B$ die *strangeness* genannt. Die beiden anderen Ladungen tragen keine besondere Namen.

Proton und Neutron bilden ein Isospin-Dublett, die π -Mesonen ein Isospin-Triplett, K-Mesonen dagegen zwei Isospin-Dubletts, das η -Meson ein Isospin-Singlett. Dies alles in guter Näherung unter Vernachlässigung der elektroschwachen Wechselwirkung. Wie kann man die beobachtete Isospin-Symmetrie der starken Wechselwirkung erklären? Die Antwort ist einfach: Wenn $m_1 = m_2$

⁴⁹Nicht zu verwechseln mit der *schwachen Hyperladung* der elektroschwachen Theorie.

gilt (up-Quark und down-Quark haben die gleiche Masse), was in guter Näherung erfüllt zu sein scheint, dann besitzt die Lagrange-Dichte der QCD eine weitere globale Symmetrie, beschrieben durch die Gruppe $SU(2)$, die die Felder ψ_1 und ψ_2 untereinander transformiert:

$$\begin{pmatrix} \psi_1^u \\ \psi_2^u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad u = (u_{ik}) \in SU(2).$$

Für den Fall, daß sogar $m_1 = m_2 = m_3$ gilt, wäre die Isospin-Symmetrie Teil einer umfassenden globalen $SU(3)$ -Symmetrie der Hadronen. Historisch wurde diese flavor- $SU(3)$ von Gell-Mann wegen ihrer offensichtlichen Mängel nur als genäherte Symmetrie eingeführt (unter dem mystifizierenden Namen ‘The Eightfold Way’). Ihr großer Erfolg war die Vorhersage der Existenz des Ω^- -Teilchens mit einer Masse von 1672 MeV. Die Tatsache jedoch, daß das s-Quark etwa 200 mal schwerer als seine leichten Partner ist, zeigt, auf welchen schwachen Füßen dieses Symmetriekonzept steht. Außerdem bietet es nur ein Modell zur Beschreibung der Bindungszustände der ersten drei Quarks (u, d und s).

Das Standardmodell der Elementarteilchen ordnet die sechs flavors in drei Generationen an:

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$$

wobei u,c,t einerseits und d,s,b andererseits gleiche elektrische Ladungen tragen, nämlich $Q = 2/3$ bzw. $-1/3$. Alle Quarks haben die Baryonenzahl $B = 1/3$. Die Antiteilchen haben zwangsläufig entgegengesetzte elektrische Ladungen und Baryonen-Zahlen.

Ob und wie aus der QCD color confinement folgt, ist bisher nicht in der gebotenen Strenge bewiesen. Daß confinement jedoch als Phänomen beobachtet wird, ist unbestritten. Es gibt Hinweise, daß eine Ähnlichkeit mit dem Phänomen der Supraleitung besteht und daß bei genügend hohen Temperaturen, wie sie kurz nach dem Urknall im Universum erreicht waren, das confinement aufgehoben ist, d.h. Quarks und Gluonen als freie Teilchen in Erscheinung treten. Dichte hadronische Materie verhielte sich dann wie ein Plasma aus Quarks und Gluonen. Bei im Labor erreichbaren Temperaturen jedoch, befindet sich das Vakuum in einem Zustand vergleichbar dem des Supraleiters zweiter Art. Analog zu den magnetischen Flußröhren in einem solchen Supraleiter, bilden sich im Vakuum Flußröhren des Farbfeldes $\mathbf{D} = \mathbf{E} + \mathbf{P}$ (die Polarisation des Vakuums wird durch \mathbf{P} beschrieben, unter \mathbf{E} verstehen wir die Komponenten von $F_{\mu\nu}$ mit $\mu = 0$) endlicher Länge, an deren Enden sich Quark- bzw. Antiquarkzustände befinden. Mit wachsendem Abstand (Länge des Flußschlauches) strebt die Energie gegen Unendlich

und verhindert so die Existenz freier Quarks. Zu zeigen, daß all dies aus der Lagrange-Dichte der QCD folgt, ist ein höchst anspruchvolles und ungelöstes Problem.

Eine Schwierigkeit der QCD ist, daß die Kopplungskonstante g zu groß ist, um eine Anwendung der Störungstheorie zu erlauben. Das Verfahren der Renormierungsgruppe zeigt jedoch, daß dieser Einwand nur bei kleinen Energien gerechtfertigt ist. Die renormierte Kopplungsstärke ist energie-abhängig und geht im Fall der QCD bei hohen Energien gegen Null, ein Effekt, den man *asymptotische Freiheit* nennt. Dies erlaubt bei hohen Energien sinnvolle störungstheoretische Ergebnisse zu erhalten. Bei niedrigen Energien ist man auf nicht-störungstheoretische Methoden angewiesen, deren Zuverlässigkeit nicht immer zweifelsfrei feststeht.

Ein weiteres Problem der QCD ist, daß das Proton eine solch komplexe Struktur bekommt, die es unmöglich macht zu zeigen, daß der Spin des Protons – wie experimentell bekannt – exakt $1/2$ ist. Zunächst gab das Quarkmodell eine plausible Erklärung: Der Spin ist die Summe der Spins der drei Konstituentenquarks, wobei die Spins von zwei Quarks entgegengerichtet sind, so daß das dritte Quark den Gesamtspin bestimmt. Nach heutiger Vorstellung ist der Aufbau des Nukleons allerdings viel komplizierter: Die Quarks werden durch Gluonen zusammengehalten. Diese können kurzzeitig in Quark-Antiquark-Paare (sog. See-Quarks) oder auch in weitere Gluonen übergehen und wieder verschwinden im Sinne von Quantenfluktuationen. Statistisch gesehen, sind weitere Teilchen also stets anwesend und tragen zum Spin des Nukleons bei. Nicht genug damit. Auch die Bahndrehimpulse der sich relativistisch bewegenden Teilchen müssen in die Bilanz mit einbezogen werden. Gegenwärtig ist niemand in der Lage, alle Spin- und Bahndrehimpulse aufzuzählen. Die Entdeckung dieser Schwierigkeit der QCD führte schon Mitte der 80iger Jahre des vorigen Jahrhunderts zu der ‘Spinkrise’, die bis heute andauert.

5 Spontane Symmetriebrechung

Clearly this is a subject in which common sense will have to guide the passage between the Scylla of mathematical Talmudism and the Charybdis of mathematical nonsense.

Jeremy Bernstein

Lokale Eichsymmetrie erzwingt, daß Eichbosonen masselos sind. Dies ist ein Problem für die Anwendungen in der Teilchenphysik. Wechselwirkungen, sofern sie durch masselose Teilchen vermittelt werden, sind langreichweitig. Wenn wir von der Gravitation einmal absehen, so kennt die Teilchenphysik nur *eine* langreichweitige Wechselwirkung, den Elektromagnetismus. Das Photon kann, da es masselos ist, problemlos als ein Eichboson eingeführt werden. Wie steht es aber der schwachen Wechselwirkung, vermittelt durch die Eichteilchen W^+ , W^- und Z^0 ? Wenn wir die Eichinvarianz der Lagrange-Dichte aufrecht erhalten wollen, dürfen wir darin keinen Massenterm (proportional zu $A_\mu A^\mu$) einführen. Die Lösung des Problems heißt *spontane Symmetriebrechung*. Wir werden uns nun ganz allgemein mit diesem Phänomen auseinandersetzen und beginnen mit einem Streifzug durch die Physik.

5.1 Allgemeine Begriffsbestimmung

Schon in der **klassischen Mechanik** lernt man, daß eine Symmetrie der Hamiltonschen Gleichungen nicht notwendig auch eine Symmetrie der Lösung dieser Gleichungen ist. Denn die Lösung hängt von Anfangswerten ab, d.h. von dem Zustand des Systems zur Zeit $t = 0$, und dieser Zustand kann unsymmetrisch gewählt sein. Während uns dies selbstverständlich erscheint, so erwarten wir doch, daß wenigstens der Zustand niedrigster Energie – seine Existenz vorausgesetzt – eindeutig und symmetrisch ist. Aber selbst eine so einfache Hamilton-Funktion wie

$$\begin{aligned} H(p, q) &= \frac{1}{2}p^2 + V(q^2) \\ p^2 &= p_1^2 + \dots + p_n^2 \\ q^2 &= q_1^2 + \dots + q_n^2 \quad n \geq 2 \end{aligned}$$

besitzt viele unsymmetrische Grundzustände, sobald das Potential $V(r^2)$ sein Minimum *nicht* bei $r = 0$ annimmt. Das Modell beschreibt dann einen Roulettkessel (ohne Hindernisse natürlich) in n Dimensionen. Liegt das absolute Minimum bei $r = c > 0$, so sind alle Grundzustände durch

$$q_1^2 + \dots + q_n^2 = c^2 \quad p_1 = p_2 = \dots = p_n = 0 \quad ,$$

also durch die Punkte einer $(n-1)$ -dimensionalen Sphäre charakterisiert. Die Symmetriegruppe⁵⁰ von $H(p, q)$ ist $O(n)$. Sie operiert auf dieser Sphäre und zwar *transitiv*. Sie ist in der Lage je zwei beliebige Grundzustände ineinander zu überführen. Ihre Wirkung ist aber auch *effektiv*: Außer $g = 1$ läßt kein weiteres Element $g \in O(n)$ die Sphäre punktweise invariant. Dies bedeutet, daß die Untergruppe der *residualen* Symmetrien in diesem Fall trivial ist, d.h. nur aus dem Element $g = 1$ besteht.

Besitzt eine Theorie unsymmetrische Grundzustände, so sprechen wir von einer *spontanen* Symmetriebrechung. Wir sehen, daß die spontane Brechung einer Symmetrie und die Entartung des Grundzustandes immer zusammen auftreten, sozusagen dasselbe Phänomen darstellen: Dies ist ein Grundgesetz; wir finden es in allen Bereichen der Physik.

Es bleibt die Frage zu beantworten, ob unser Roulettkessel überhaupt keinen symmetrischen Grundzustand gestattet. Die Antwort hängt davon ab, wie weit wir den Begriff des Zustandes fassen. Eine Definition, die genügend allgemein ist, um auch in der statistischen Physik anwendbar zu sein, lautet: *Jedes lineare, positive und normierte Funktional auf der Algebra der stetigen reellen Funktionen $f(p, q)$ soll ein Zustand genannt werden.*⁵¹ Da die Sphäre genau ein $O(n)$ -invariantes normiertes Maß besitzt, ist der invariante Zustand (im Sinne der obigen Definition) eindeutig:

$$\omega(f) = N \int d^n q \delta(q^2 - c^2) f(0, q) \quad (189)$$

wobei der Normierungsfaktor N so gewählt ist, daß $\omega(1) = 1$ gilt. Es handelt sich dabei um den a-priori-Zustand der Roulettkugel, wenn über ihre Lage überhaupt nichts bekannt ist und man nur weiß, daß sie den Zustand niedrigster Energie angenommen hat.

Sei allgemein G die volle Symmetriegruppe eines Problems. Nicht immer muß, wie in unserem Modell, die Untergruppe $K \subset G$ der residualen Sym-

⁵⁰Bei der Bestimmung der Symmetriegruppe ist darauf zu achten, daß die Poisson-Klammer $\{p_i, q_k\} = \delta_{ik}$ invariant bleibt.

⁵¹Ist ω ein Zustand, so ist $\omega(f)$ der *Erwartungswert* oder *Mittelwert* der Observablen f in diesem Zustand. Die drei Voraussetzungen lauten: (1) die Abbildung $f \mapsto \omega(f)$ ist linear, (2) es gilt $\omega(f) \geq 0$ für alle $f \geq 0$ und (3) $\omega(1) = 1$. Der Zustand ω heißt *zerlegbar*, wenn gilt: $\forall f \omega(f) = a\omega_1(f) + (1-a)\omega_2(f)$, wobei ω_1 und ω_2 wieder Zustände sind und $0 < a < 1$. Zustände, die nicht zerlegbar sind, heißen *reine* oder *extremale* Zustände. Gewöhnlich betrachtet man in der klassischen Mechanik vorwiegend *extremale*, in der statistischen Mechanik vorwiegend *zerlegbare* Zustände. So ist etwa durch die Abgaben $p_1 = \dots = p_n = 0$, $q_1 = c$, $q_2 = \dots = q_n = 0$ ein extremaler Grundzustand des Roulettkessels definiert: Die Roulettkugel nimmt einen definierten Platz ein. Das zugehörige Funktional ist $\omega(f) = f(0, \dots, 0, c, 0, \dots, 0)$.

metrien trivial sein. Wir könnten das Modell leicht abändern und schreiben:

$$H(p, q) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{\nu^2}{2}(q_1^2 + \dots + q_m^2) + V(q_{m+1}^2 + \dots + q_n^2)$$

($0 < m < n$). Wie im vorigen Beispiel nehmen wir an, daß $V(r^2)$ für $r = c > 0$ minimal wird. In dieser Situation ist⁵²

$$\begin{array}{ll} G = O(m) \times O(n - m) & \text{die volle Symmetriegruppe} \\ K \cong O(m) & \text{die Gruppe der residualen Symmetrien} \\ G/K \cong O(n - m) & \text{die Gruppe der spontan gebrochenen Symmetrien.} \end{array}$$

Was die spontane Symmetriebrechung angeht, so verhält sich die **Quantenmechanik** in gleicher Weise, jedoch zeigt sie besondere Züge:

1. Eine Symmetriegruppe G ist auf dem Hilbertraum \mathcal{H} aller Zustände grundsätzlich unitär dargestellt: zu jedem $g \in G$ existiert ein unitärer Operator $U(g)$. Ist H der Hamilton-Operator, so gilt $U(g)HU(g)^{-1} = H$ für alle $g \in G$.
2. Bei Entartung des Grundniveaus formen die Grundzustände einen k -dimensionalen Unterraum $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$, der die Darstellung U reduziert. Die Teildarstellung U_0 auf \mathcal{H}_0 ist i.allg. *irreduzibel*⁵³. Der Raum \mathcal{H}_0 enthält keinen invarianten Vektor: Es widerspräche ja der Irreduzibilität. Die Dimension k der unitären Darstellung U_0 ist die Dimension von \mathcal{H}_0 , ist also identisch mit dem Grad der Entartung des Grundniveaus.
3. Die Menge aller $g \in G$ mit $U_0(g) = 1$ stellt eine *invariante* Untergruppe $K \subset G$ dar (manchmal auch ein *Normalteiler* der Gruppe G genannt). Diese Gruppe K repräsentiert die *residualen*, die Gruppe G/K die *spontan gebrochenen* Symmetrietransformationen.

Auch hier gelingt es, durch Erweiterung des Zustandsbegriffes⁵⁴ einen invarianten Zustand zu konstruieren. Sei nämlich e_1, e_2, \dots, e_k eine Basis in \mathcal{H}_0 und A ein beliebiger Operator auf \mathcal{H} , so ist durch

$$\omega(A) = k^{-1} \sum_{i=1}^k (e_i, Ae_i) \tag{190}$$

⁵²Wir vereinbaren, daß $O(1) = \mathbf{Z}_2$ gesetzt wird.

⁵³Dies ist eine Regel, kein Theorem, weil sie Ausnahmen gestattet. Liegt eine Ausnahme vor, so spricht man von einer *zufälligen Entartung* des Grundzustandes.

⁵⁴Ein allgemeiner Zustand ist, wie schon in der klassischen Physik, nichts anderes als ein lineares, positives und normiertes Funktional auf der Algebra der Observablen.

ein invarianter Zustand definiert⁵⁵. Die Konstruktion zeigt jedoch, daß ein solcher Zustand immer zerlegbar ist, oder anders ausgedrückt: Der invariante Zustand ist ein extremaler Zustand genau dann, wenn $k = 1$ gilt. In diesem Fall gilt $U_0(g) = 1$ für alle $g \in G$, so daß K und G zusammenfallen. Für $G = K$ tritt keine spontane Symmetriebrechung auf, d.h. $G/K = 1$.

In der **statistischen Physik** begegnet uns das Phänomen der spontanen Symmetriebrechung erneut. Das bekannteste Beispiel findet man im Ferromagnetismus einiger Metalle. Das übliche Modell für den Ferromagneten geht von einer rotationsinvarianten Wechselwirkung eines Spinsystems aus, wobei die Parallelstellung aller Spins energetisch bevorzugt ist. Dennoch treten unterhalb der kritischen Temperatur, auf jeden Fall aber bei $T = 0$, unsymmetrische Grundzustände auf, in denen der Erwartungswert des Spins, die *Magnetisierung* also, nicht verschwindet, wie es die $SO(3)$ -Invarianz verlangt. Zu jeder Raumrichtung (d.h. zu jedem Punkt der Sphäre S^2) existiert genau *ein* extremaler Grundzustand. Kühlt man einen Ferromagneten in einer Weise ab, daß die äußeren Einflüsse die Rotationsinvarianz nicht verletzen, so ist das Ergebnis für $T = 0$ allemal ein *symmetrischer* Grundzustand. Dieser Zustand entsteht rein formal durch Integration aller extremalen Grundzustände über die Sphäre S^2 . Der invariante Grundzustand existiert also auch hier, jedoch ist er zerlegbar, und unzerlegbar nur dann, wenn die spontane Symmetriebrechung verschwindet (z.B. durch Erhöhung der Temperatur). Ein schwaches Magnetfeld reicht aus, um zu erreichen, daß bei Annäherung an den absoluten Nullpunkt ein unsymmetrischer extremaler Zustand entsteht. Schaltet man dann das Magnetfeld wieder ab, so bleibt die ausgezeichnete Richtung erhalten; sie ist gewissermaßen *eingefroren*. Unsere Terminologie benutzend können wir sagen: Die Symmetriegruppe des Ferromagneten ist $G = SO(3)$. Sie ist bei $T = 0$ vollständig (spontan) gebrochen, d.h. die Untergruppe der residualen Symmetrien ist trivial: $K = 1$.

In der Theorie der Supraleitung und der Superfluidität finden wir eine ähnliche Situation. Jedoch ist die Symmetriegruppe, die hier spontan gebrochen erscheint, weniger anschaulich: Es handelt sich dabei um globale $U(1)$ -Eichtransformationen, die, wie man weiß, nur in quantentheoretischen Modellen auftreten.

Die **Feldtheorie** wird sich in jeder Beziehung ähnlich verhalten, und wir können unsere Terminologie direkt übertragen. Die Rolle des Grundzustandes übernimmt hier das *Vakuum*, das immer nur in bezug auf ein konkretes feldtheoretisches Modell definiert werden kann: Es ist der Grundzustand dieses

⁵⁵Beweis: Ist $I : \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}$ die kanonische Einbettung, $I^* : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_0$ die Projektion und $A_0 = IAI^*$, so ist auf diese Weise jedem Operator $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ ein Operator $A_0 : \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}_0$ zugeordnet und es gilt $k\omega(A) = \text{Spur } A_0$. Andererseits gilt $IU(g) = U_0(g)I$ und $U^*(g)I^* = I^*U^*(g)$. Also, $k\omega(U(g)AU^*(g)) = \text{Spur}(U_0(g)A_0U_0^*(g)) = \text{Spur } A_0 = k\omega(A)$.

Modells, nämlich der Zustand niedrigster Energie, oder auch der Zustand bei $T = 0$. Für ein freies Feld ist dieser Zustand eindeutig. Auf ihm basiert die Fock-Darstellung dieses Feldes. In einer Theorie mit Wechselwirkung müssen wir damit rechnen, daß dieser Zustand unter Umständen nicht mehr eindeutig ist. Modelle dieser Art sind leicht angebar. Der Grund für die Entartung des Vakuums ist immer die spontane Brechung einer offensichtlichen oder verborgenen Symmetrie der Lagrange-Dichte. Die Symmetriegruppe G , die gebrochen erscheint, transformiert die verschiedenen Vakua ineinander, und diejenige Untergruppe K , die jedes Vakuum für sich genommen invariant läßt, ist offensichtlich die Gruppe der residualen Symmetrien. Die Gruppe G/K enthält alle spontan gebrochenen Symmetrien im engeren Sinn.

Wenn es mehrere Vakua gibt, welches ist das *physikalische* Vakuum? Diese Frage drängt sich auf, weil es in der Teilchenphysik, anders als in der Festkörperphysik, nicht von den experimentellen Gegebenheiten abhängig sein kann, welcher Grundzustand realisiert ist. Denn das Vakuum beschreibt den leeren Raum, gewissermaßen den lokalen Zustand des Universums, einen Zustand also, den der Experimentator bereits vorfindet und den er nicht manipulieren kann⁵⁶. Die einzig mögliche Antwort auf die oben gestellte Frage zur Zeit lautet: In der Anfangsphase unseres Universums (vermutlich innerhalb weniger Sekunden) wurde diese Entscheidung getroffen, und das theoretische Weltmodell, das wir heute entwerfen, kann nur versuchen, die korrekte Beschreibung dieses (unsymmetrischen) Vakuums zu finden. Es wird dann nach menschlichem Zeitmaß für die künftige Beschreibung unserer Beobachtungen Gültigkeit besitzen. Eine Erklärung dafür, warum gerade dieses ein Vakuum ausgezeichnet ist, wird es vermutlich niemals geben.

Vergleichen wir die Invarianz der Lagrange-Dichte \mathcal{L} mit der Invarianz des Vakuums Ω , so gelangen wir zu folgender Tabelle für die vier Möglichkeiten:

	Ω invariant	Ω nicht invariant
\mathcal{L} invariant	exakte Symmetrie	spontan gebrochene Symmetrie
\mathcal{L} nicht invariant	unmöglich (Coleman-Theorem)	explizit gebrochene Symmetrie

In dieser Tabelle wird behauptet, daß eine unsymmetrische Lagrange-Dichte kein symmetrisches Vakuum zur Folge haben kann. Hierbei handelt es sich um die Aussage eines wichtigen Theorems von S.Coleman, das er so formulierte:

⁵⁶Dies schließt nicht aus, daß das Vakuum in fernen Bereichen des Universums eine andere Struktur hat, oder – auf einer astronomischen Skala – einer zeitlichen Veränderung unterworfen ist.

The symmetry of the vacuum is the symmetry of the universe.

Diese Aussage stellt eine Besonderheit der QFT dar. Ein analoges Theorem für die quantenmechanischen Systeme ist nicht bekannt. In der gewöhnlichen Mechanik ist die analoge Aussage sogar falsch.

Beispiele für explizit gebrochene Symmetrien finden wir reichlich in der Teilchenphysik: Die Raumspiegelung und die Ladungskonjugation sind solche Symmetrien, aber auch die Isospin-Gruppe und die $SU(3)_{flavor}$ gehören zu dieser Kategorie.

5.2 Skalare Felder und Higgs-Bosonen

Wir stellen uns vor, $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ sei die Lagrange-Dichte eines Modells für n reelle Skalarfelder $\phi_1, \phi_2 \dots \phi_n$. Durch lokale Transformationen (alle Felder am gleichen Ort) der Art

$$\phi'_i = F_i(\phi_1, \dots, \phi_n) \quad i = 1, \dots, n \quad (191)$$

ist es möglich, der Dichte \mathcal{L} eine neue Gestalt zu geben. Die folgende Diskussion verläuft nun ganz analog zu der entsprechenden Diskussion klassischer mechanischer Systeme bei kleinen Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage (Methode der kleinen Schwingungen). Wir wollen annehmen, daß durch eine geeignete Wahl der Felder die folgende Gestalt erzielt wurde:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_i (\partial_\mu \phi_i)(\partial^\mu \phi_i) - V(\phi) \quad (192)$$

Die Energiedichte ist dann

$$\Theta^{00} = \frac{1}{2} \sum_i \left((\partial_0 \phi_i)^2 + (\nabla \phi_i)^2 \right) + V(\phi) \quad (193)$$

Man erkennt bereits, daß die Funktion V (von n Variablen) einer physikalischen Bedingung zu unterwerfen ist: V muß nach unten beschränkt sein (Stabilitätsbedingung). Die nächste Frage lautet: Wo nimmt V sein Minimum an? Wir wollen annehmen, daß dies an der Stelle $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ geschieht. Das Verhalten in der Umgebung dieses Punktes ist sodann von Interesse. Dieses wird durch die zweiten Ableitungen diktiert:

$$V(\phi) = V(a) + \frac{1}{2} m^{ik} (\phi_i - a_i)(\phi_k - a_k) + \dots, \quad m^{ik} = \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_k}(a).$$

Wir nennen $M = (m_{ik})$ die *Massenmatrix*. Liegt ein lokales Minimum vor, so ist sie positiv definit (alle Eigenwerte ≥ 0). Eine $SO(n)$ -Transformation

der Felder ist in der Lage, diese Matrix zu diagonalisieren mit Eigenwerten m_i^2 . Wir dürfen daher o.B.d.A. von der folgenden Entwicklung ausgehen:

$$V(\phi) = V(a) + \frac{1}{2} \sum_i m_i^2 \varphi_i^2 - \mathcal{L}'(\varphi) \quad (194)$$

$$\phi_i(x) = \varphi_i(x) + a_i \quad m_i^2 \geq 0 \quad (195)$$

Hier sind wir zu neuen Feldern φ_i übergegangen, mit denen wir kleine Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage beschreiben. Die Terme von höherer Ordnung in φ haben wir in \mathcal{L}' zusammengefaßt. Wesentlich ist, daß der Vektor a unabhängig von x ist, unwesentlich ist der Wert für $V(a)$. Durch eine Umeichung der Energie erreichen wir, daß $V(a) = 0$ gilt.

Die Lagrange-Dichte erhält damit die folgende Gestalt:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_i \left((\partial_\mu \varphi_i)(\partial^\mu \varphi_i) - m_i^2 \varphi_i^2 \right) + \mathcal{L}'(\varphi) \quad (196)$$

Die Interpretation ist offensichtlich. In einer Näherung ($\mathcal{L}' = 0$) beschreibt das Modell n freie Spin-0-Teilchen (Bosonen) mit den Massen m_i . Der Zusatzterm \mathcal{L}' in der Dichte bewirkt eine Wechselwirkung dieser Teilchen untereinander.

Nun wählen wir ein spezielles $O(n)$ -symmetrisches Modell. Es sei nämlich

$$\begin{aligned} V(\phi) &= \lambda(\phi^2 - c^2)^2 \\ \phi^2 &= \sum_i \phi_i^2 \quad \lambda > 0 \end{aligned}$$

(c und λ sollen x -unabhängig sein). Das Potential V nimmt sein Minimum in allen Punkten der Sphäre $\phi^2 = c^2$ an. Wir können etwa $a = (c, 0, \dots, 0)$ und $\phi = \varphi + a$ setzen und gelangen so zu der Darstellung

$$\begin{aligned} V &= \lambda(\varphi^2 + 2c\varphi_1)^2 \\ &= \frac{1}{2} m_1^2 \varphi_1^2 - \mathcal{L}'(\varphi) \quad m_1^2 = 8\lambda c^2 \end{aligned}$$

wobei \mathcal{L}' die dritten und vierten Potenzen der Felder enthält. Die $O(n)$ -Symmetrie ist spontan gebrochen mit der Konsequenz, daß genau *ein* Feld — hier φ_1 — eine endliche Masse $m_1 = \sqrt{8c^2\lambda}$ erhält, während alle anderen Felder masselos sind. Das Auftreten von $n - 1$ masselosen Bosonen ist charakteristisch für die *totale* Brechung der $O(n)$ -Symmetrie (spontane Brechung ohne Restsymmetrie), weil die Massenmatrix in solchen Situationen immer den Rang 1 hat (dies ist im wesentlichen ein geometrisches Argument). Das Teilchen, das eine endliche Masse und Spin 0 besitzt, nennt

man das *Higgs-Boson*. Die masselosen Teilchen einer solchen Theorie heißen *Goldstone-Bosonen*. Wir werden im nächsten Abschnitt sehen, daß – gewisse Bedingungen vorausgesetzt – das Auftreten von Goldstone-Bosonen notwendig verknüpft ist mit der spontanen Brechung einer *kontinuierlichen* Symmetriegruppe (Lie-Gruppe).

Wieso ist die Wahl, die wir für den Vektor a getroffen haben, gleichbedeutend mit der Wahl eines Grundzustandes, den wir dann ein *Vakuum* der Theorie nennen? Die Antwort ist sehr einfach: Unter Vernachlässigung der Wechselwirkung \mathcal{L}' handelt es sich bei allen Komponenten von φ um *freie* Felder, für die wir die Fock-Darstellung wählen. Das gemeinsame Vakuum sei Ω . Dann gilt $(\Omega, \varphi_i \Omega) = 0$ für alle $i = 1, \dots, n$. In den ursprünglichen Feldern liest sich das so:

$$(\Omega, \phi_i, \Omega) = \begin{cases} c & i = 1 \\ 0 & i = 2, \dots, n. \end{cases}$$

In der $O(n)$ -symmetrischen Theorie hat genau eines der Skalarfelder einen nichtverschwindenden Vakuumerwartungswert erhalten und dadurch die Symmetrie zerstört. Jedem Vektor a mit $a^2 = c^2$ (jedem Punkt der Sphäre S^{n-1}) ist somit ein Vakuum Ω_a zugeordnet. Je zwei Vakua gehören zu inäquivalenten Darstellungen der Feldalgebra (d.h. der kanonischen Vertauschungsrelationen). Die Theorie besitzt überabzählbar viele solcher Darstellungsräume (die man *Sektoren* nennt), weil sie überabzählbar viele Vakua besitzt. Wir ergänzen die Diskussion durch zwei Bemerkungen:

1. Nur⁵⁷ *Skalarfelder* können einen nichtverschwindenden Vakuumerwartungswert entwickeln, wenn wir an der Lorentz-Invarianz des Vakuums festhalten. Mehr noch: ein solches Skalarfeld muß die Quantenzahlen des Vakuums besitzen, kann also weder eine elektrische Ladung noch eine negative Parität besitzen. Dies gilt dann gleichermaßen für das Higgs-Teilchen. Insbesondere ist es sein eigenes Antiteilchen.
2. Das freie Bose-Gas⁵⁸ besitzt, wenn man seine Temperatur T (oder auch seine Dichte ρ) variiert, einen Phasenübergang. Unterhalb des kritischen Punktes existieren extremale Zustände ω_T , in denen der Erwartungswert des Erzeugungsoperators $a^\dagger(\psi)$ nicht verschwindet, d.h. für

⁵⁷Gemeint ist, daß Dirac-Felder und Vektorfelder verschwindende Erwartungswerte haben. Ein Spin-2-Feld $G_{\mu\nu}$ hätte hier wieder eine Chance. Denn eine Gleichung wie $(\Omega, G_{\mu\nu} \Omega) = cg_{\mu\nu}$ ist mit der Lorentz-Invarianz des Vakuums verträglich. Die Einführung von Feldern mit Spin ≥ 2 bereitet jedoch andere schwerwiegende Probleme.

⁵⁸Hierbei handelt es sich um ein System von unendlich vielen Teilchen in einem unendlichen Volumen. Jedoch ist die Teilchendichte endlich und unabhängig von Ort und Zeit. Das Plancksche Gesetz der Hohlraumstrahlung kann durch ein Photonengas bei endlicher Temperatur erklärt werden.

alle $\psi \in \mathcal{H}$ gilt⁵⁹

$$\omega_T(a^\dagger(\psi)) = f_T(\psi) \quad \omega_T(a(\psi)) = \overline{f_T(\psi)}$$

wobei $f(\psi)$ ein lineares, translationsinvariantes und komplexwertiges Funktional darstellt. Für Bosonen mit Spin 0 muß deshalb gelten: $f_T(\psi) = c_T \psi(0)$ mit $c_T \in \mathbf{C}$. Man spricht in diesem Zusammenhang von einer *makroskopischen Besetzung des Grundzustandes*⁶⁰ oder einem *Kondensat* und nennt das Phänomen *Bose-Kondensation*. London hat es zur Erklärung der Erscheinung der Superfluidität herangezogen: Das Kondensat ist danach die superfluide Komponente des älteren Zweiflüssigkeitsmodells. Es hat sich aus diesem Grund in der Feldtheorie ein Sprachgebrauch eingebürgert, der die Parallelen zur Bose-Kondensation betont: Man spricht also von einem ‘Kondensat’, sobald ein Skalarfeld Φ die Eigenschaft $(\Omega, \Phi\Omega) \neq 0$ besitzt.

5.3 Das Goldstone-Theorem

Wir lieferten ein vages Argument dafür, daß eine spontane Symmetriebrechung notwendig mit dem Auftreten von masselosen Bosonen, sog. Goldstone-Teilchen verknüpft ist. Die Argumentation war deshalb vage, weil wir dabei den Wechselwirkungsterm \mathcal{L}' außer acht gelassen haben. Das Argument war auch nicht allgemein genug, weil die Ankopplung an weitere Felder (Dirac-Felder, Vektorfelder etc.) nicht mit in die Betrachtung einbezogen werden konnte. Tatsächlich kann man, volle Lorentz-Kovarianz vorausgesetzt, die Existenz masseloser Teilchen allgemein beweisen (Goldstone-Theorem), sobald ein Skalarfeld Φ die Eigenschaft $(\Omega, \Phi\Omega) \neq 0$ besitzt. Es ist in diesem Zusammenhang wichtig zu erfahren, welche Voraussetzungen dabei gemacht werden, um zu verstehen, warum dieses Theorem in den Eichtheorien zwar immer noch richtig ist, aber dennoch *nicht notwendig*, und das heißt, nicht in allen Situationen, zu masselosen Teilchen führt.

Wir nehmen an, eine bestimmte Lagrange-Dichte \mathcal{L} besitze eine *einparametrische* Gruppe G von Symmetrietransformationen, so daß ihr ein erhaltener Strom $j^\mu(x)$ zugeordnet ist. Wir wollen weiter annehmen, daß es sich um interne Symmetrien handelt. Es ist dann vernünftig, G als eine kompakte Gruppe vorzusetzen. Damit folgt sofort $G = SO(2)$. Um diese Symmetrie spontan zu brechen, nehmen wir die Existenz zweier reeller Skalarfelder ϕ_1

⁵⁹Zur Erinnerung: \mathcal{H} ist der Einteilchenraum und ψ eine Wellenfunktion in der Impulsdarstellung.

⁶⁰Gemeint ist der Einteilchenzustand zum Impuls $\mathbf{p} = 0$. Die komplexe Zahl c_T ist ein sog. *Ordnungsparameter* des Systems, und $|c_T|^2$ ist die Teilchendichte im Zustand $\mathbf{p} = 0$, also im Kondensat.

und ϕ_2 an, die zur Liste derjenigen Felder gehören, von denen \mathcal{L} abhängt. Die beiden Skalarfelder, so nehmen wir an, transformieren sich unter

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \in SO(2)$$

wie die Komponenten eines Vektors. Es ist dann bequem, anstelle des zweikomponentigen Feldes ein komplexes Feld $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2)$ einzuführen, dessen Transformationseigenschaften einfacher sind:

$$\phi^\alpha(x) = e^{i\alpha} \phi(x) \quad (197)$$

Dies führt uns wieder vor Augen, daß die beiden Gruppen $SO(2)$ und $U(1)$ isomorph sind.

Wir stützen die weitere Diskussion allein auf die beiden Operatorfelder $j^\mu(x)$ und $\phi(x)$. Wir sprechen von einer **exakten Symmetrie**, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

Ex1 Das Integral $Q = \int d^3x j^0(x)$ existiert und ist zeitunabhängig. Es beschreibt den Ladungsoperator. Der Strom kann so normiert werden, daß das Spektrum von Q aus den ganzen Zahlen besteht.

Ex2 Der Operator Q ist der Erzeuger einer unitären Darstellung $e^{i\alpha} \mapsto e^{i\alpha Q}$ der Gruppe $U(1)$ auf dem gemeinsamen Zustandsraum aller Felder, und es gilt speziell für das Feld ϕ :

$$e^{i\alpha Q} \phi(x) e^{-i\alpha Q} = e^{i\alpha} \phi(x) \quad (198)$$

Ex3 Das Vakuum ist eindeutig und $U(1)$ -invariant, gleichbedeutend mit $Q\Omega = 0$. In Worten: Das Vakuum hat keine Ladung.

Die Gleichung (198) lautet in infinitesimaler Form:

$$[Q, \phi(x)] = \phi(x) \quad (199)$$

Geht man hier auf beiden Seiten zu dem Vakuumerwartungswert über und benutzt Ex3, so folgt $(\Omega, \phi(x)\Omega) = 0$. Unter den Annahmen Ex1-Ex3 ist es also nicht möglich, daß man ein *Kondensat* hat.

Wir wollen nun die Annahmen abschwächen und nicht mehr annehmen, daß $Q\Omega = 0$ gültig ist. Mehr noch: wir vermeiden, die Existenz von Q überhaupt vorauszusetzen. Anstelle von (199) soll die folgende Relation treten:

$$\int d^3x [j^0(x), \phi(y)] = \phi(y) \quad (200)$$

An dieser Gleichung können wir nämlich selbst dann festhalten, wenn das Integral $\int d^3x j^0(x)$ sinnlos ist. Grund: in einer lokalen Feldtheorie gilt

$$(x - y)^2 < 0 \Rightarrow [j^\mu(x), \phi(y)] = 0, \quad (201)$$

so daß das Integrationsgebiet in (200) bei festem x^0 und y^0 beschränkt ist.

Unser Ziel ist zu zeigen, daß die folgenden sehr schwachen Annahmen ebenfalls $(\Omega, \phi(x)\Omega) = 0$ zu Folge haben.

Go1 Es gilt $\partial_\mu j^\mu = 0$ (*Stromerhaltung*).

Go2 Es gilt

$$\int d^3x (\Omega, [j^0(x), \phi(y)]\Omega) = (\Omega, \phi(y)\Omega) \quad x^0 = y^0 = 0$$

(*schwache Form der U(1)-Kovarianz des Skalarfeldes*).

Go3 (*Relativistische Kovarianz*) Es existiert eine unitäre Darstellung U der Poincaré-Gruppe⁶¹, so daß

- (a) $U(a, \Lambda)\Omega = \Omega$
- (b) $U(a, \Lambda)j^\mu(x)U(a, \Lambda)^{-1} = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu j^\nu(\Lambda x + a)$
- (c) $U(a, \Lambda)\phi(x)U(a, \Lambda)^{-1} = \phi(\Lambda x + a)$

Hier ist ausgedrückt, daß Ω sowohl translations- wie Lorentz-invariant ist, ϕ sich wie ein Skalarfeld und j^μ sich wie ein Vektorfeld transformiert (eine harmlose Annahme, wie es scheint).

Go4 (*Spektrumsbedingung*) Das Spektrum des Impulsoperators P^μ liegt im Vorwärtskegel, jedoch so, daß es die Existenz von Zuständen mit Masse Null ausschließt:

$$\text{spec } P^\mu \subset \{0\} \cup \{p : p^2 > 0, p^0 > 0\}$$

(Der Punkt $p = 0$ entspricht dem Vakuum).

Theorem (Goldstone) *Aus den Annahmen Go1-Go4 folgt $(\Omega, \phi(x)\Omega) = 0$.*

Anmerkung: Der Vakuumerwartungswert $c = (\Omega, \phi(x)\Omega) \in \mathbf{C}$ ist unabhängig von x als Konsequenz der Annahmen Go3(a) und Go3(c). Gilt $c \neq 0$ (spontane Symmetriebrechung), so ist eine der Annahmen des Theorems falsch. Gewöhnlich nimmt man an, daß Go4 falsch ist, in Worten:

⁶¹Dies ist die Gruppe aller Transformationen $x' = \Lambda x + a$ mit $\Lambda \in L_+^\uparrow$ und $a \in M_4$.

$c \neq 0$ impliziert die Existenz von Masse-0-Teilchen in der Theorie.

Diese Interpretation des Goldstone-Theorems ist aber alles andere als zwingend und nicht in allen Situationen zutreffend. Die Alternative hierzu lautet:

$c \neq 0$ impliziert, daß eine der Annahmen in Go1- Go3 falsch ist.

Vermutlich ist die Stromerhaltung (Divergenzfreiheit) eine rein klassische Eigenschaft, die durch die Quantisierung verloren gehen kann. 1969 wurde diese Tatsache an Beispielen entdeckt (durch S.Adler, J.S.Bell und R.Jackiw) und wird seitdem eine *Anomalie* der Modells genannt.

Beweis des Theorems. Wir bilden die Fourier-Transformierten (im Sinne der Distributionen):

$$(\Omega, j^\mu(x)\phi(y)\Omega) = \int d^4p e^{i(y-x)p} F_1^\mu(p) \quad (202)$$

$$(\Omega, \phi(y)j^\mu(x)\Omega) = \int d^4p e^{i(x-y)p} F_2^\mu(p) \quad (203)$$

Aus Go3 (nur die Translationen $U(a, 1) = \exp(iaP)$ benutzend) folgt

$$(\Omega, j^\mu(x)\phi(y)\Omega) = (j^\mu(0)\Omega, e^{i(y-x)P}\phi(0)\Omega) \quad (204)$$

$$(\Omega, \phi(y)j^\mu(x)\Omega) = (\phi(0)^*, e^{i(x-y)P}j^\mu(0)\Omega) \quad (205)$$

Vergleichen wir diese Darstellung mit den darüberstehenden Gleichungen: Aus der Spektrumsbedingung (Go4) folgt, daß $F_1^\mu(p)$ und $F_2^\mu(p)$ beide ihren Träger⁶² im Vorkegel haben, wo bei gilt:

$$\begin{aligned} F_i^\mu(p) &= b^\mu \delta^4(p) + \hat{F}_i^\mu(p) \\ p^2 \leq 0 &\Rightarrow \hat{F}_i^\mu(p) = 0 \end{aligned}$$

wobei wir den Vakuumbeitrag isoliert haben:

$$b^\mu = (\Omega, j^\mu(0)\Omega)(\Omega, \phi(0)\Omega)$$

Aus der Lorentz-Kovarianz (Go3) folgt $(\Omega, j^\mu(0)\Omega) = 0$, also $b^\mu = 0$. Aus Go3 folgt aber auch⁶³ die Darstellung

$$\hat{F}_i^\mu(p) = p^\mu \Theta(p^0) f_i(p^2) \quad i = 1, 2 \quad (206)$$

$$s \leq 0 \Rightarrow f_i(s) = 0 \quad (207)$$

⁶²Der Träger einer Distribution ist das Komplement derjenigen Punkte, in denen sie verschwindet. Eine Distribution verschwindet in einem Punkt, wenn sie in einer offenen Umgebung dieses Punktes verschwindet. Der Träger (engl. *support*) ist also stets eine abgeschlossene Menge.

⁶³Dieser Punkt ist mathematisch delikater, aber dennoch richtig: Eine Lorentz-invariante Distribution von p auf dem Vorkegel, deren Träger den Punkt $p = 0$ nicht enthält, ist eine Distribution von p^2 allein. In unserem Fall ist $p_\mu \hat{F}_i^\mu(p)$ eine solche Distribution.

wobei Θ die Sprungfunktion bezeichnet und die Funktionen f_i nur von einer reellen Variablen abhängen. Noch haben wir nicht die Stromerhaltung (Go1) ausgenutzt:

$$0 = p_\mu F_i^\mu(p) = \Theta(p^0) p^2 f_i(p^2) \Rightarrow f_i(p^2) \sim \delta(p^2)$$

Aus (207) folgt aber $f_i(p^2) = 0$; denn der Träger von $f_i(p^2)$ schließt den Punkt $p^2 = 0$ aus. Zusammenfassend können wir feststellen, daß die Funktionen F_i^μ verschwinden. Also gilt dies auch für den Vakuumerwartungswert des Kommutators:

$$(\Omega, [j^\mu(x), \phi(y)]\Omega) = 0$$

Mit Hilfe von Go2 folgt dann $(\Omega, \phi(x)\Omega) = 0$, was zu beweisen war.

5.4 Der Higgs-Kibble-Mechanismus

Für die spontane Symmetriebrechung in Eichtheorien ist das folgende $U(1)$ -Modell sehr lehrreich:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \overline{D_\mu\phi}D^\mu\phi - V(\phi) \quad (208)$$

mit den folgenden Definitionen:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &:= \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu \\ D_\mu &:= \partial_\mu + ieA_\mu \\ V(\phi) &:= \lambda(2\bar{\phi}\phi - c^2)^2 \quad \phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2) \end{aligned}$$

($\lambda > 0, c > 0$). Die Lagrange-Dichte ist invariant unter lokalen $U(1)$ -Eichtransformationen der Art

$$\phi^\alpha(x) := e^{i\alpha(x)}\phi(x) \quad (209)$$

$$eA_\mu^\alpha(x) := eA_\mu(x) - \partial_\mu\alpha(x) \quad (210)$$

In nullter Ordnung, also unter Vernachlässigung aller Effekte der Wechselwirkung, ist der Grundzustand (das Vakuum) entartet und wir könnten etwa die Wahl

$$(\Omega, \phi_1\Omega) = c \quad (\Omega, \phi_2\Omega) = 0 \quad (211)$$

treffen. Jede andere Wahl geht durch eine globale Eichtransformation aus dieser einen Lösung hervor.

Wir bleiben jedoch vorläufig bei unserer Auffassung, daß es sich bei dem Skalarfeld ϕ um ein *klassisches* Feld handelt, und gehen zu neuen *reellen* Skalarfeldern $\alpha(x)$ und $\varphi(x)$ über (Polarzerlegung),

$$\phi_1(x) + i\phi_2(x) = e^{-i\alpha(x)}(\varphi(x) + c) \quad , \quad (212)$$

wobei $\varphi(x)$ das Higgs-Teilchen mit der Masse $m_H = \sqrt{8\lambda c^2}$ beschreibt. Es scheint zunächst so, als ob $\alpha(x)$ einen echten dynamischen Freiheitsgrad des Modells beschreibt, das einem Goldstone-Boson zugeordnet ist. Eine lokale Eichtransformation (209-210) eliminiert jedoch das Feld $\alpha(x)$ völlig aus der Lagrange-Dichte: diese erhält in den neuen Feldvariablen die Gestalt $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1$, wobei wir in

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}e^2c^2A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - m_H^2\varphi^2) \quad (213)$$

alle Terme versammelt haben, die von zweiter Ordnung in den Feldvariablen sind; \mathcal{L}_1 enthält nur Terme der Ordnung drei und vier: sie charakterisieren die Wechselwirkung und werden in unserer Diskussion nicht berücksichtigt. Der hier beschriebene Vorgang wird **unitäre Eichung** genannt. Nachdem diese Eichung gewählt wurde, besitzt das Modell keine $U(1)$ -Symmetrie mehr, weder lokal noch global.

Die Dichte \mathcal{L}_0 , für sich genommen, führt auf freie Felder. Mit diesem Ausdruck beginnt erst die Quantisierung der Felder. Deshalb muß unsere Diskussion *quasi-klassisch* genannt werden. Welchen Sinn hätte auch eine Eichtransformation, bei der die Funktion $\alpha(x)$ ein Operator ist?

Das Feld $\alpha(x)$ ist aus der Dichte verschwunden und mit ihm das Goldstone-Boson. Hat sich die Zahl der Freiheitsgrade durch die spontane Symmetriebrechung verringert? Nein. Und dies ist die Erklärung des Phänomens:

- Solange die $U(1)$ -Symmetrie *nicht* gebrochen ist ($c = 0$), beschreibt das Modell ein masseloses Photon in *zwei* Polarisationszuständen und zwei masselose skalare Teilchen.
- Ist die Symmetrie *gebrochen* ($c > 0$), so beschreibt das Modell ein massives Spin-1-Teilchen in *drei* Polarisationszuständen und ein massives Higgs-Boson.

Durch die spontane Symmetriebrechung erhält sowohl das Eichboson, wie auch das Higgs-Boson eine Masse, während alle masselosen Zustände aus dem Geschehen verschwinden (Higgs-Kibble-Mechanismus):

$$\begin{aligned} \text{Eichboson:} \quad & m^2 = e^2c^2 \\ \text{Higgs-Boson:} \quad & m_H^2 = 8\lambda c^2 \end{aligned}$$

Nur für die Zwecke der Demonstration war das sehr einfache Modell gewählt worden. Das eigentliche Interesse richtet sich auf die $SU(n)$ -Gruppen. Das

$SU(n)$ -Higgs-Modell geht von der Dichte⁶⁴

$$\mathcal{L} = \frac{1}{8} \text{Spur} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (D_\mu \phi)^* D^\mu \phi - V(\phi) \quad (214)$$

aus. Hier ist A_μ ein $SU(n)$ -Eichfeld und $\phi = (\phi^1, \dots, \phi^n)$ ein Multipllett von n komplex-skalaren Feldern ($2n$ reell-skalare Felder). Die Bezeichnungen sind

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &:= A_{\mu|\nu} - A_{\nu|\mu} + g[A_\mu, A_\nu] \\ D_\mu &:= \partial_\mu - gA_\mu \\ V(\phi) &:= \lambda(2\phi^* \phi - c^2)^2 \quad \phi^* \phi = \sum_{a=1}^n \bar{\phi}^a \phi^a, \quad c > 0. \end{aligned}$$

Das Modell ist invariant unter lokalen $SU(n)$ -Eichtransformationen

$$\phi^u = u\phi \quad u(x) \in SU(n) \quad (215)$$

$$A_\mu^u = uA_\mu u^{-1} + g^{-1}(\partial_\mu u)u^{-1} \quad (216)$$

Für $c > 0$ tritt eine spontane Symmetriebrechung auf, der wir durch eine geeignete Wahl der Feldvariablen Rechnung tragen. Zuerst wird das Multipllett der Skalarfelder geeignet parametrisiert:

$$\begin{pmatrix} \phi^1(x) \\ \phi^2(x) \\ \vdots \\ \phi^n(x) \end{pmatrix} = u(x)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi(x) + c) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad u(x) = e^{\xi(x)} \in SU(n) \quad (217)$$

Diese Setzung zeichnet eine Richtung im Darstellungsraum aus und zerstört die $SU(n)$ -Invarianz. Die Untergruppe aller Matrizen $u \in SU(n)$, die diese Richtung invariant lassen, ist isomorph zu $SU(n-1)$. Obwohl $u(x) = e^{\xi(x)}$ nicht eindeutig in $SU(n)$ gewählt werden kann, ist es doch eindeutig in dem Raum $SU(n)/SU(n-1)$ der Linksnebenklassen, wobei die $SU(n-1)$ als Untergruppe von der $SU(n)$ aufgefaßt wird vermöge der Einbettung

$$SU(n-1) \rightarrow SU(n), \quad u \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}.$$

Für die zugehörigen Lie-Algebren bedeutet dies die Einbettung

$$\mathfrak{su}(n-1) \rightarrow \mathfrak{su}(n), \quad \alpha \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

⁶⁴Es handelt sich um die eichinvariante Erweiterung des sog. $O(2n)$ -Modells

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)^* \partial^\mu \phi - V(\phi)$$

Wir stellen fest: $\xi(x)$ ist eindeutig in dem Quotienten⁶⁵

$$L = \mathfrak{su}(\mathbf{n})/\mathfrak{su}(\mathbf{n} - \mathbf{1}).$$

Seine Dimension ist

$$\dim L = (n^2 - 1) - ((n - 1)^2 - 1) = 2n - 1.$$

Nach Wahl einer Basis in L ist $\xi(x)$ einem Multipllett von $2n - 1$ reellen Skalarfeldern äquivalent: nur scheinbar beschreiben diese Felder Goldstone-Bosonen. Zusammen mit dem reellen Higgs-Feld φ erhalten wir $2n$ reelle Skalarfelder, und zwar in 1:1 Korrespondenz zu den n komplexen Skalarfeldern ϕ^i . Die Korrespondenz ist durch (217) beschrieben.

Das Besondere der neuen Darstellung zeigt sich in der folgenden Tatsache: Mit Hilfe einer Eichtransformation (215-216) können nun die $2n - 1$ skalaren Freiheitsgrade des Feldes $\xi(x)$ eliminiert werden. Das entstehende Modell in der *unitären Eichung* hat die $SU(n)$ -Symmetrie verloren. Es wird durch eine Lagrange-Dichte beschrieben, die der Form nach völlig identisch mit (214) ist, jedoch hat darin das Skalarfeld die spezielle Form

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} a, \quad a = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (218)$$

(c reell). Die in \mathcal{L} enthaltene quadratische Form

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{8} \text{Spur} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^2 a^T A_\mu A^\mu a + \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - 8\lambda c^2 \varphi^2) \quad (219)$$

zeigt die folgenden Tatsachen:

(1) In der gebrochenen Phase hat der Massenterm für die Eichbosonen die Gestalt

$$-\frac{1}{2} g^2 a^T (-iA^b{}_\mu t_b) (-iA^{c\mu} t_c) a = \frac{1}{2} M_{bc} A^b{}_\mu A^{c\mu}$$

mit der Massenmatrix $M = (M_{bc})$, wobei

$$M_{bc} = \frac{1}{2} g^2 a^T \{t_b, t_c\} a, \quad b, c = 1, \dots, n^2 - 1. \quad (220)$$

Die Matrizen $-it_b$ bilden – wie früher erläutert – eine normierte Basis der Lie-Algebra, $\{t_b, t_c\}$ bezeichnet den Antikommutator. Die Matrix M ist hermitesch und symmetrisch zugleich, also reell:

$$M = M^* = M^T = \overline{M}.$$

⁶⁵Der Quotient ist lediglich ein reell-linearer Raum und für $n > 2$ keine Lie-Algebra. Für $n = 2$ ist $\mathfrak{su}(\mathbf{n} - \mathbf{1}) = \{0\}$, also $L = \mathfrak{su}(\mathbf{2})$.

Sie ist aber auch positiv definit und ihre Eigenwerte daher ≥ 0 . Die Eigenwerte identifizieren wir mit den Massenquadraten der physikalischen Eichbosonen. Da die Matrix durch eine *orthogonale* Transformation (ein Element aus $SO(n^2 - 1)$) diagonalisiert wird, sind die physikalischen Eichfelder *reelle* Linearkombinationen der ursprünglichen Felder A_μ^b , und damit sind sie ebenfalls reelle Vektorfelder. Wir behaupten:

$$\text{Rang}(M) = \dim L = 2n - 1.$$

Der Rang einer reellen symmetrischen Matrix M ist die Dimension des Komplementärtraumes zum Nullraum (also dessen Kodimension). Der Nullraum (oder Kern der linearen Abbildung M) ist derjenige reell-lineare Raum, der von den Vektoren v aufgespannt wird mit $v^T M v = 0$. In unserem Fall

$$v^T M v = v^b v^c M_{bc} = \frac{1}{2} g^2 a^T \{v^b t_b, v^c t_c\} a = g^2 (Va)^* (Va),$$

wobei wir $V = -i v^b t_b \in \mathfrak{su}(\mathbf{n})$ gesetzt haben. Falls $g \neq 0$, ist die Bedingung $v^T M v = 0$ mit $Va = 0$ identisch und diese wiederum mit $V \in \mathfrak{su}(\mathbf{n} - \mathbf{1})$. Die Kodimension von $\mathfrak{su}(\mathbf{n} - \mathbf{1})$ in $\mathfrak{su}(\mathbf{n})$ ist $2n - 1$, womit die Behauptung bewiesen ist.

Der Rang der Matrix M ist zugleich die Anzahl der Eigenwerte, die $\neq 0$ sind. Fazit: Die Dimension von L diktiert die Anzahl der Eichbosonen, die eine endliche Masse erhalten. Diese Anzahl ist $2n - 1$. Für den einfachsten Fall, nämlich die Eichgruppe $SU(2)$ gilt

$$\frac{1}{2} \{t_a, t_b\} = \frac{1}{2} \{\sigma_a, \sigma_b\} = \delta_{ab}, \quad \text{d.h.} \quad M_{ab} = g^2 c^2 \delta_{ab} \quad (a, b = 1, 2, 3).$$

Hier ist die Massenmatrix bereits diagonal; alle drei Eichbosonen erhalten die Masse $|gc|$. Sobald $n \geq 3$, treten masselose Eichbosonen auf. Ihre Anzahl ist

$$\dim \mathfrak{su}(\mathbf{n} - \mathbf{1}) = n(n - 2).$$

Beachte den Unterschied: Massive Eichbosonen haben 3, masselose Eichbosonen 2 unabhängige Polarisationszustände.

(2) Es gibt genau ein neutrales massives Higgs-Boson. Seine Masse ist wie schon im vorigen Modell durch $m_H^2 = 8\lambda c^2$ gegeben. Von den ursprünglich $2n$ skalaren Freiheitsgraden sind $2n - 1$ auf die neuen longitudinalen Polarisationszustände der massiven Eichteilchen übergegangen. Dieser Vorgang wird *Transmutation* genannt. Die Anzahl der Freiheitsgrade ist durch die spontane Symmetriebrechung nicht verändert worden.

(3) Die residuale Eichgruppe K ist mit $SU(n - 1)$ identisch, d.h. der Untergruppe von $SU(n)$, die den Vektor a invariant läßt. Die residuale Eichgruppe

wirkt trivial auf alle massiven Felder, jedoch nichttrivial auf die masselosen Felder der Theorie. Deshalb gibt es keine Kopplung der masselosen Eichbosonen an das massive Higgs-Boson.

5.5 Der Meißner-Ochsenfeld-Effekt

Als Eichboson ist das Photon in der Lage, durch den Effekt der spontanen Symmetriebrechung eine Masse $\sim e^2$ zu erwerben. Daß dies auch tatsächlich unter gewissen Umständen in einem Festkörper geschieht, soll nun demonstriert werden.

Der spezifische Widerstand einiger Metalle, intermetallischer Verbindungen, Legierungen und Keramiken sinkt unterhalb der *kritischen Temperatur* auf den Wert Null ab (Supraleitung). Gleichzeitig ändert sich das magnetische Verhalten des Festkörpers (idealer Diamagnetismus). Wenn man das Phänomen der Supraleitung durch die reibungsfreie Bewegung von Leitungselektronen erklärt, dann folgt für den Zusammenhang von Stromdichte \mathbf{j} und elektrischem Feld \mathbf{E} nicht das Ohmsche Gesetz $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$, sondern

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{j} = \mu^2 \mathbf{E} \quad (221)$$

(1. Londonsche Gleichung) mit

$$\mu^2 = \frac{e^2 \rho_s}{m_e} \quad (222)$$

Hier ist ρ_s die Dichte der supraleitenden Elektronen und m_e deren Masse⁶⁶. Die charakteristische Konstante $\lambda = \mu^{-1}$ heißt *Londonsche Eindringtiefe* und hat die Größenordnung von etwa 100 Atomabständen im Gitter.

Aus der Maxwell-Gleichung $\nabla \times \mathbf{E} + \dot{\mathbf{B}} = 0$ folgt sodann

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{j} + \mu^2 \mathbf{B}) = 0 \quad (223)$$

E. und H. London stellten 1935 die Hypothese auf, daß sogar

$$\nabla \times \mathbf{j} + \mu^2 \mathbf{B} = 0 \quad (224)$$

(2. Londonsche Gleichung) gilt und waren damit erfolgreich. Schließlich benutzen wir die Maxwell-Gleichung $\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j} + \dot{\mathbf{E}}$ und finden:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{j} + \nabla \times \dot{\mathbf{E}} \quad (225)$$

$$= -\mu^2 \mathbf{B} - \ddot{\mathbf{B}} \quad (226)$$

⁶⁶Dieses Gesetz folgt aus der Bewegungsgleichung $m_e \dot{\mathbf{v}} = -e\mathbf{E}$ und dem Ausdruck $\mathbf{j} = -e\rho_s \mathbf{v}$ für die Stromdichte. Wir wissen heute, daß nicht Elektronen sondern Cooper-Paare für den Suprastrom verantwortlich sind. Dies ändert aber nichts an unserem Ausdruck für μ^2 , weil er invariant ist unter der Ersetzung $e \mapsto 2e, m_e \mapsto 2m_e, \rho_s \mapsto \frac{1}{2}\rho_s$.

Nun gilt $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = -\Delta \mathbf{B}$, da $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ist. Also

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + \mu^2 \right) \mathbf{B} = 0 \quad (227)$$

Das B-Feld hat im Supraleiter die Masse μ erhalten.

Die 2. Londonsche Gleichung ist in der Lage den Meißner-Effekt zu beschreiben. Sie erklärt die Abschirmung gegen das äußere Magnetfeld durch einen verlustfreien Ringstrom (z.B. an der Oberfläche einer supraleitenden Kugel): dieser Strom erzeugt einen magnetischen Fluß, der den von außen angelegten im Inneren gerade kompensiert, abgesehen von einer Eindringsschicht der Dicke λ .

Der geometrisch einfachste Fall ist der, wo der Halbraum $x > 0$ von dem Supraleiter erfüllt ist. Die Ebene $x = 0$ stellt also seine Oberfläche dar. Wir nehmen an, daß das äußere B-Feld parallel zur z -Achse orientiert ist, und schreiben $\mathbf{B} = (0, 0, B)$, wobei B als unabhängig von y und z vorausgesetzt wird (Translationssymmetrie). Im stationären Fall (B ist t -unabhängig) haben wir nur die einfache Gleichung

$$B''(x) = \mu^2 B(x) \quad x > 0 \quad (228)$$

zu lösen und sie stetig an die Werte im Außenraum anzuschließen (die Tangentialkomponente von \mathbf{B} wird hier als stetig vorausgesetzt). Die physikalisch sinnvolle Lösung lautet:

$$B(x) = B(0)e^{-\mu x}. \quad (229)$$

Das für die spezielle Geometrie abgeleitete Ergebnis gilt auch für beliebig geformte supraleitende Körper: Durch das 2. Londonsche Gesetz ist die Stromdichte überall in der Probe durch das Magnetfeld eindeutig bestimmt und verschwindet mit diesem. Supraströme können deshalb nur in der Eindringsschicht fließen, dort, wo das Magnetfeld nicht verschwindet. Die stromführende Eindringsschicht ist experimentell sichergestellt. Die beobachteten Werte der Eindringtiefe sind aber generell *größer* als der Londonsche Wert.

Eine quantenmechanische Diskussion auf der Basis der Schrödinger-Gleichung liefert das gleiche Resultat. Wir betrachten die Cooper-Paare als punktförmige Spin-0-Teilchen mit Bose-Statistik, der Masse $m = 2m_e$ und der Ladung $q = -2e$. Sie sind völlig dislokalisiert, weil sie in einem Kristall die Hintergrundladung⁶⁷ zu neutralisieren haben. Also setzen wir die Wellenfunktion eines Cooper-Paares mit $\phi(x) = \sqrt{\rho} e^{i\alpha(x)}$ an, wobei $\rho > 0$ als konstant angenommen wird. In Gegenwart eines Magnetfeldes mit dem Vektorpotential \mathbf{A} ist der Strom

$$\mathbf{j} = \frac{q}{m} \text{Re} \left(\bar{\phi} (-i\nabla - q\mathbf{A}) \phi \right) = \frac{q\rho}{m} (\nabla\alpha - q\mathbf{A}). \quad (230)$$

⁶⁷Auf eine Skala von 10^{-5} cm können wir die Hintergrundladung als konstant ansehen.

Wir können die gleichen Formeln auch zur Beschreibung eines Gases aus Cooper-Paaren benutzen: ρ wird dann als Teilchendichte erklärt. Unter stationären Bedingungen dürfen wir $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ voraussetzen. Bei transversaler Eichung gilt $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Daraus folgt $\Delta \alpha = 0$. Die einzige Lösung der Laplace-Gleichung, die überall im \mathbb{R}^3 erklärt ist und im Unendlichen nicht anwächst, ist die konstante Lösung. Für sie gilt $\nabla \alpha = 0$ und somit $\mathbf{j} = -\frac{q^2 \rho}{m} \mathbf{A}$. Die Maxwell-Gleichung $-\Delta \mathbf{A} = \mathbf{j}$ führt auf

$$\Delta \mathbf{A} = \frac{q^2 \rho}{m} \mathbf{A} = \frac{e^2 \rho_s}{m_e} \mathbf{A} = \mu^2 \mathbf{A} \quad (231)$$

($\rho_s = 2\rho$) in völliger Übereinstimmung mit dem klassischen Resultat.

Ein Vergleich mit dem $U(1)$ -Higgs-Modell zeigt, daß dieses als grobes makroskopisches Modell geeignet ist, den Supraleiter zu beschreiben: Das dort eingeführte komplexe Skalarfeld beschreibt Cooper-Paare als elementare Bosonen mit Spin 0 und Masse m . Unterhalb der Sprungtemperatur des Supraleiters tritt eine Kondensation in dem Bose-Gas⁶⁸ ein, also eine makroskopische Besetzung des Impuls-0-Zustandes. Dies äußert sich in einem nichtverschwindenden Erwartungswert c des Skalarfeldes im Grundzustand (dies ist der im Experiment i.allg. realisierte und beobachtete Zustand). Die Teilchendichte der Cooper-Paare mit Impuls 0 ist $\rho = m|c|^2$. Diese Interpretation erklärt die Supraleitung durch einen Phasenübergang des Festkörpers, bei dem eine spontane Brechung der $U(1)$ -Symmetrie einsetzt und der Ordnungsparameter $c \in \mathbb{C}$ einen von Null verschiedenen Wert erhält.

5.6 Das Salam-Weinberg-Modell

Es sei $e(x)$ das Dirac-Feld des Elektrons und $\nu_e(x)$ das Dirac-Feld des zugehörigen Neutrinos. Während das Elektronfeld eine Zerlegung in einen linkshändigen und einen rechtshändigen Anteil gestattet,

$$e = e_L + e_R \quad (232)$$

ist das Neutrino-Feld grundsätzlich linkshändig: $\nu_{eR} = 0$. Wir fassen die beiden linkshändigen Felder zu einem $SU(2)$ -Dublett zusammen, das rechtshändige Feld interpretieren wir als ein $SU(2)$ -Singlett:

$$\psi_L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}, \quad \psi_R = e_R. \quad (233)$$

⁶⁸Die Kondensation tritt selbst dann ein, wenn es sich um ein *freies* Gas handelt, d.h. wenn die Bosonen untereinander keine Wechselwirkung zeigen.

In der gleichen Weise verfährt man mit den Leptonpaaren (μ, ν_μ) und (τ, ν_τ) . Wir begnügen uns jedoch in diesem Abschnitt mit der ersten Familie. Durch die Gruppe $SU(2)$ hat man den Feldern (nicht den Teilchen!) eine *schwache Isospin* zugeordnet, deren Quantenzahlen wie üblich mit T und T_3 bezeichnet werden:

Feld	T	T_3	Y
ν_{eL}	1/2	1/2	-1
e_L	1/2	-1/2	-1
e_R	0	0	-2

Die Quantenzahl Y heißt die *schwache Hyperladung* des Feldes. Außerdem soll die Wirkung einer $U(1)$ -Gruppe (einer Gruppe von Phasentransformationen) so eingeführt werden, daß die dadurch definierte Ladung Y die oben angegebenen Werte annimmt: dies garantiert die Gültigkeit der Regel von Gell-Mann und Nishijima für die elektrische Ladung: $Q = T_3 + Y/2$. Nun wird gefordert, daß die Lagrange-Dichte für die elektroschwachen Wechselwirkungen invariant unter *lokalen* $SU(2) \times U(1)$ -Eichtransformationen ist. Dies verlangt die Einführung eines vierkomponentigen Eichfeldes:

$$\mathbf{A}_\mu = -\frac{i}{2}(g'A_\mu^0 + gA_\mu^a\sigma_a) \quad (234)$$

$$= -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} g'A_\mu^0 + gA_\mu^3 & gA_\mu^1 - igA_\mu^2 \\ gA_\mu^1 + igA_\mu^2 & g'A_\mu^0 - gA_\mu^3 \end{pmatrix} \quad (235)$$

Darin sind g und g' Kopplungskonstanten, die noch näher zu bestimmen sind. Der Feldstärkentensor ist dann durch

$$\mathbf{F}_{\mu\nu} = \mathbf{A}_{\mu|\nu} - \mathbf{A}_{\nu|\mu} + [\mathbf{A}_\mu, \mathbf{A}_\nu] \quad (236)$$

gegeben. Er kann genau so wie das Eichfeld in seine vier Komponenten zerlegt werden:

$$\mathbf{F}_{\mu\nu} = -\frac{i}{2} \{g'F_{\mu\nu}^0 + gF_{\mu\nu}^a\sigma_a\} \quad (237)$$

Mit dem Eichfeld ist der Begriff der kovarianten Ableitung D_μ verknüpft. Die konkrete Gestalt ist abhängig von der Art des Multipletts von Feldern (ausdrückbar durch T und Y), auf das D_μ angewandt werden soll. Jedem solchen Multiplett ist eine Darstellung der Lie-Algebra $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{u}(1)$ zugeordnet, als deren kanonische Basis wir die Matrizen

$$-i\mathbf{T}_1, -i\mathbf{T}_2, -i\mathbf{T}_3, -i\mathbf{Y}$$

annehmen, so daß $T(T+1)$, T_3 und Y die Eigenwerte von $\mathbf{T}_1^2 + \mathbf{T}_2^2 + \mathbf{T}_3^2$, \mathbf{T}_3 und \mathbf{Y} sind. Damit gilt

$$D_\mu = \partial_\mu + ig' A_\mu^0 \frac{1}{2} \mathbf{Y} + ig A_\mu^a \mathbf{T}_a \quad (238)$$

Hier hat man $\mathbf{T}_a = 0$ für $T = 0$ und $\mathbf{T}_a = \frac{1}{2} \sigma_a$ für $T = \frac{1}{2}$ zu setzen.

Ohne weitere Felder einzuführen, ist die Eichtheorie durch die Dichte⁶⁹

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + \text{Re}(\bar{\psi}_R i \not{D} \psi_R + \bar{\psi}_L i \not{D} \psi_L)$$

bestimmt, wobei wir dem Elektron die Masse Null zu geben gezwungen sind, da das Elektron und sein Neutrino im gleichen Multiplett liegen.

Durch Einführung eines Dubletts von komplexen skalaren Feldern und durch den Effekt der Symmetriebrechung sollen nun zwei Dinge zugleich erreicht werden:

1. Das Elektron erhält eine endliche Masse.
2. Drei Komponenten des Eichfeldes werden massiv, während eine Komponente, das Photonfeld, masselos bleibt.

Wir schreiben das Dublett ($T = \frac{1}{2}$) als

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

und geben ihm die schwache Hyperladung $Y = 1$. Das Feld ϕ_1 bekommt dadurch die elektrische Ladung $Q = 1$, während ϕ_2 ungeladen ist. Wenn das Modell ein ungeladenes Vakuum haben soll, so kann nur ϕ_2 einen von Null verschiedenen Vakuumerwartungswert erhalten. Die eichinvariante Erweiterung des $O(4)$ -Modells wird durch die Dichte

$$\mathcal{L}_2 = (D_\mu \phi)^* D^\mu \phi - \lambda(2\phi^* \phi - c^2)^2, \quad \lambda > 0, c > 0$$

gegeben. Nun bleibt nur noch eine Wechselwirkung zwischen den Skalarfeldern und den Leptonfeldern zu berücksichtigen, die dem Elektron (Müon usw.) eine Masse erteilt, sobald $(\Omega, \phi_2 \Omega) \neq 0$ gilt. Dies leistet die Dichte

$$\mathcal{L}_3 = -G_e(\bar{\psi}_L \psi_R \phi + \phi^* \bar{\psi}_R \psi_L)$$

wobei G_e eine für die erste Leptonfamilie typische Konstante ist. Ein Wechselwirkungsansatz dieser Art wird *Yukawa-Kopplung* genannt. Beachte, daß

⁶⁹Die Summe über den Index a schließt $a = 0$ ein.

$\bar{\psi}_R\psi_L$ zwar ein Dirac-Skalar, jedoch ein $SU(2)$ -Dublett darstellt. Ähnliches gilt für $\bar{\psi}_L\psi_R$:

$$\bar{\psi}_R\psi_L = \begin{pmatrix} \bar{e}_R\nu_{eL} \\ \bar{e}_Re_L \end{pmatrix}, \quad \bar{\psi}_L\psi_R = (\bar{\psi}_R\psi_L)^* = (\bar{\nu}_{eL}e_R, \bar{e}_Le_R),$$

so daß

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_L\psi_R\phi &= \bar{\nu}_{eL}e_R\phi_1 + \bar{e}_Le_R\phi_2 \\ \phi^*\bar{\psi}_R\psi_L &= \phi_1^*\bar{e}_R\nu_{eL} + \phi_2^*\bar{e}_Re_L. \end{aligned}$$

Die Dichte \mathcal{L} stellt somit einen $SU(2)$ -Skalar dar. Wir erkennen, daß eine Elektronmasse durch einen Vakuumerwartungswert von ϕ_2 erzeugt werden kann.

Wir definieren das *minimale Salam-Weinberg-Modell* durch Addition der drei Lagrange-Dichten:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3.$$

Alle Terme sind invariant unter der Eichgruppe $SU(2) \times U(1)$. Um in diesem Modell die *unitäre Eichung* vornehmen zu können, parametrisieren wir ϕ geeignet:

$$\phi(x) = u(x)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi(x) + c) \end{pmatrix} \quad u(x) \in SU(2)$$

Aus dieser Darstellung entnehmen wir die Eichfunktion $u(x)$ und führen mit ihrer Hilfe eine Eichtransformation durch. Nur das rechtshändige Singlett e_R und die Komponente A_μ^0 des Eichfeldes bleiben davon unberührt. An der Form der Lagrange-Dichte \mathcal{L} ändert sich überhaupt nichts. Lediglich das Feld ϕ erhält eine spezielle Gestalt:

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi(x) + c) \end{pmatrix}$$

φ ist das Higgs-Feld dieser Theorie. Es bekommt, wie schon früher abgeleitet, die Masse $m_H = \sqrt{8\lambda c^2}$.

Schauen wir uns \mathcal{L}_3 nach der Transformation an:

$$\mathcal{L}_3 = -G_e \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi + c)(\bar{e}_Re_L + \bar{e}_Le_R) = -G_e \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi + c)\bar{e}e$$

In dem Ausdruck ist ein Massenterm $-m_e\bar{e}e$ für das Elektronfeld enthalten, wobei

$$m_e = \frac{1}{\sqrt{2}}G_e c$$

mit der Masse des Elektrons (=Masse des Positrons) gleichzusetzen ist. Im übrigen ist G_e die Kopplungskonstante für die Wechselwirkung des Elektron-Positron-Feldes mit dem Higgs-Feld.

Jetzt nehmen wir uns \mathcal{L}_2 vor und schreiben $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_{20} + \mathcal{L}_{21}$, wobei

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{20} &= \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - m_H^2\varphi^2) \\ &\quad + \frac{1}{8}(\varphi + c)^2 \{(g'A^0 - gA^3)^2 + (gA^1)^2 + (gA^2)^2\} \\ \mathcal{L}_{21} &= \text{Terme höherer Ordnung in den Feldern}\end{aligned}$$

Hier haben wir – der besseren Übersicht wegen – den Index μ unterdrückt⁷⁰. Darin enthalten ist der

$$\text{Massenterm} = \frac{1}{8}c^2 \{(g'A^0 - gA^3)^2 + (gA^1)^2 + (gA^2)^2\}$$

für das Eichfeld. Er läßt sich durch die Einführung geeigneter Linearkombinationen diagonalisieren:

$$\begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_W & \sin\theta_W \\ -\sin\theta_W & \cos\theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\mu^0 \\ A_\mu^3 \end{pmatrix}$$

wobei $\tan\theta_W = g'/g$ gesetzt wurde; θ_W heißt *Weinberg-Winkel*. Außerdem ist es bequem, das komplexe Feld

$$W_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^1 - iA_\mu^2)$$

einzuführen. Damit kann man endgültig schreiben:

$$\text{Massenterm} = \frac{1}{2}m_Z^2 Z_\mu Z^\mu + m_W^2 \overline{W}_\mu W^\mu$$

wobei

$$\begin{aligned}\text{Masse des W-Bosons: } & m_W = \frac{1}{2}cg \\ \text{Masse des Z-Bosons: } & m_Z = \frac{1}{2}c\sqrt{g'^2 + g^2}\end{aligned}$$

Das Feld W_μ beschreibt das W^+ -Boson (Ladung $Q = 1$) und sein Antiteilchen, das W^- -Boson (Ladung $Q = -1$). Das Z-Boson ist neutral. Das Feld A_μ erhält keinen Massenterm: es beschreibt ein masseloses Vektorteilchen, das wir mit dem Photon identifizieren.

Jetzt gilt unsere Aufmerksamkeit der Dichte \mathcal{L}_1 . Sie enthält eine Reihe von Wechselwirkungen, unter anderem die Wechselwirkung der Dirac-Feldes

⁷⁰Man interpretiere z.B. $(A^0)^2$ als $A_\mu^0 A^{0\mu}$.

mit dem Photonfeld A_μ . Damit dieser Term die gewohnte Form $\epsilon \bar{e} \not{A} e$ bekommt mit ϵ der elektrischen Elementarladung, müssen wir g und g' durch die Forderung

$$\epsilon = \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} = g \sin \theta_W$$

einschränken. Durch die rechte Seite haben wir den *Weinberg-Winkel* θ_W eingeführt. Beachte, daß $\alpha = \epsilon^2/(4\pi)$ die Feinstrukturkonstante ist. Damit sind g und g' in unseren Einheiten (mit $\hbar = c = 1$) dimensionslos.

Wir finden in der Lagrange-Dichte \mathcal{L}_1 unter anderem den Term

$$\frac{1}{\sqrt{2}} g \operatorname{Re} (\bar{\nu}_{eL} \gamma^\mu e_L W_\mu)$$

In ihm erkennen wir die traditionelle Form der schwachen Wechselwirkung (durch Austausch von W -Bosonen). Die schwache Kopplungskonstante g ist mit der Fermi-Konstante G durch die Formel

$$\frac{1}{\sqrt{2}} G = \frac{g^2}{8m_W^2}$$

verknüpft. Die rechte Seite hat in der Salam-Weinberg-Theorie den Wert $(2c^2)^{-1}$. Die Fermi-Konstante ist eine mit hoher Präzision gemessene Größe (z.B. durch Studium des Zerfalls $\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$):

$$G = (292,8 \text{ GeV})^{-2}.$$

Mit diesem Wert führt $\sin \theta_W \leq 1$ auf die Ungleichungen

$$m_W \geq 38 \text{ GeV}, \quad m_Z \geq 76 \text{ GeV}, \quad m_Z > m_W$$

Dies ist aber nicht alles! In \mathcal{L}_1 enthalten ist auch die Wechselwirkung zwischen dem neutralen Z -Teilchen und den Leptonen:

$$-\frac{1}{2} \epsilon Z_\mu (\tan \theta_W J_1^\mu + \cot \theta_W J_2^\mu)$$

wobei die beiden folgenden *neutralen Ströme* auftreten:

$$\begin{aligned} J_1^\mu &:= \bar{\nu}_{eL} \gamma^\mu \nu_{eL} + \bar{e}_L \gamma^\mu e_L + 2\bar{e}_R \gamma^\mu e_R \\ J_2^\mu &:= \bar{\nu}_{eL} \gamma^\mu \nu_{eL} - \bar{e}_L \gamma^\mu e_L \end{aligned}$$

Die Existenz neutraler Ströme in der schwachen Wechselwirkung wurde in glänzender Weise durch das Experiment bestätigt, nachdem die Rolle der geladenen Ströme (Austausch von W 's) schon sehr lange bekannt war. Die

W - und Z -Bosonen konnte direkt nachgewiesen werden mit Massen von 81 GeV bzw. 93 GeV entsprechend einem Weinberg-Winkel, der sich aus

$$\cos \theta_W = \frac{m_W}{m_Z} = \frac{81}{93}$$

ergibt, gleichbedeutend mit $\sin^2 \theta_W = 0,241$. Für das Higgs-Teilchen fehlt bislang die experimentelle Bestätigung. Die Theorie gibt keine Anhaltspunkte für seine Masse. Durch die Bestimmung der W -Masse erhält die Kopplungskonstante g den Wert 0,654. Folglich

$$c = 246 \text{ GeV} .$$

Die drei Familien von Leptonen werden völlig gleich behandelt. Nur die Konstanten vor den Yukawa-Kopplungen werden geeignet gewählt. Das Salam-Weinberg-Modell erklärt, warum einige Leptonen Massen erhalten. Über die Größe von m_e , m_μ und m_τ wird dagegen nichts ausgesagt. Das Modell führt diese Massen auf die Konstanten G_e , G_μ und G_τ der Yukawa-Kopplungen zurück, die die Wechselwirkung der Leptonen mit dem Higgs-Feld bestimmen: Das Problem der Leptonmassen ist also nur auf ein anderes Gebiet verschoben worden. Die genannten Konstanten sind frei wählbar, und es gibt zur Zeit kein theoretisches Argument, das ihren Wert näher einschränkt. Die residuale Eichsymmetrie ist in jedem Fall durch die Gruppe $U(1)$ gegeben, als deren Eichboson das Photon erscheint. Als globale Symmetrie ist diese Gruppe mit der Ladung Q (nicht mit der Hyperladung Y) verknüpft.

Ein natürlicher nächster Schritt ist die Einbeziehung der Quarkfelder und der starken Wechselwirkung (QCD) in die Theorie. Das Ergebnis ist das *Standardmodell* der Elementarteilchenphysik, das von der Eichgruppe

$$SU(3) \times SU(2) \times U(1)$$

ausgeht. Der erste Faktor ist die Farb- $SU(3)$ der QCD. Nach spontaner Symmetriebrechung verbleibt als residuale Eichsymmetrie die Gruppe

$$SU(3) \times U(1),$$

so daß die Gluonen und das Photon weiterhin masselos sind. Die Erweiterung bedarf dennoch einer sorgfältigen Diskussion, die wir auf einen späteren Zeitpunkt verschieben.

6 Der Streuoperator

Die bisher gewonnenen Ergebnisse zeigen uns noch nicht, in welchem Sinne nichtlineare Operator-Feldgleichungen zu interpretieren sind, ja sie garantieren nicht einmal, daß solche Feldgleichungen überhaupt einen mathematischen Sinn haben, ganz abgesehen von der Unsicherheit, die uns befällt, wenn wir ihren physikalischen Inhalt darstellen wollen. Alles was wir zur Zeit an Konkretem in der Hand halten, ist so etwas wie „die Theorie kleiner Schwingungen“, ein Verständnis also für die quadratischen Abweichungen der Lagrange-Dichte von ihrem Wert in der „Ruhelage“. Die höheren nicht-quadratischen Ausdrücke in der Dichte haben wir bislang nur nebulös mit der Wechselwirkung in Zusammenhang gebracht. In diesem Kapitel soll der Einfluß solcher Terme auf die Emission, Absorption und Streuung von Teilchen studiert werden.

6.1 Ein lösbares Modell

Der Einfachheit halber studieren wir ein reelles Skalarfeld in Wechselwirkung mit einer (reellen) äußeren Quelle:

$$(\square + m^2)A(x) = j(x) \quad (239)$$

Hiermit verwandt ist das Problem der Abstrahlung elektromagnetischer Wellen von einer bewegten Ladung, das von der Gleichung $\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu$ ausgeht.

Zunächst führen wir die invariante Funktion

$$i\Delta(x, m) = (2\pi)^{-3} \int \frac{d^3k}{2\omega} (e^{-ikx} - e^{ikx}) = \Delta_+(x, m) - \Delta_+(-x, m)$$

ein mit den offensichtlichen Eigenschaften

$$(\square + m^2)\Delta(x, m) = 0 \quad (240)$$

$$x^0 = 0 : \Delta(x, m) = 0 \quad (241)$$

$$x^0 = 0 : \dot{\Delta}(x, m) = -\delta^3(\mathbf{x}) \quad (242)$$

Wir behaupten: Die allgemeine Lösung von (239) kann in der Form

$$A(x) = A_T(x) - \int_T^{x^0} dx'^0 \int_{\mathbb{R}^3} d^3x' \Delta(x - x', m)j(x') \quad (243)$$

geschrieben werden, wobei T eine beliebige feste Zeit ist und $A_T(x)$ ein *freies* Feld darstellt:

$$(\square + m^2)A_T(x) = 0$$

Das freie Feld A_T hat zudem die Eigenschaft, daß es die Lösung A zur Zeit $x^0 = T$ „berührt“:

$$x^0 = T \Rightarrow A_T(x) = A(x) , \dot{A}_T(x) = \dot{A}(x)$$

Zum Beweis der Behauptung gehen wir von den allgemeinen Formeln

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_T^t dt' f(t-t')g(t') &= f(0)g(t) + \int_T^t dt' \dot{f}(t-t')g(t') & (244) \\ \frac{d^2}{dt^2} \int_T^t dt' f(t-t')g(t') &= f(0)\dot{g}(t) + \dot{f}(0)g(t) + \int_T^t dt' \ddot{f}(t-t')g(t') \end{aligned}$$

aus, gültig für beliebige differenzierbare Funktionen f und g , und setzen hierin $f(x^0) = \Delta(x, m)$ und $g(x^0) = j(x)$ (wobei wir \mathbf{x} festhalten). Es folgt

$$-(\square + m^2) \int_T^{x^0} dx'^0 \Delta(x-x', m)j(x') = \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}')j(x^0, \mathbf{x}')$$

Diese Gleichung integrieren wir über \mathbf{x}' mit dem Ergebnis

$$-(\square + m^2) \int_{x'^0=T}^{x'^0=x^0} d^4x' \Delta(x-x', m)j(x') = j(x)$$

Hierdurch ist gezeigt, daß das Integral auf der rechten Seite von (243) eine *spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung* (239) darstellt. Aufgrund eines allgemeinen Satzes über Lösungen von Differentialgleichungen muß $A_T(x)$ eine *Lösung der homogenen Gleichung* sein⁷¹. Den Zusammenhang zwischen A und A_T finden wir leicht. Die erste Beziehung $A(x) = A_T(x)$ für $x^0 = T$ folgt unmittelbar aus (239). Die zweite Beziehung $\dot{A}(x) = \dot{A}_T$ für $x^0 = T$ folgt aus der allgemeinen Formel (244), wenn – wie oben geschehen – dort $f = \Delta$ und $g = j$ gesetzt wird. q.e.d.

Wir wollen annehmen, daß der Limes

$$-\lim_{T \rightarrow -\infty} \int_{x'^0=T}^{x'^0=x^0} d^4x' \Delta(x-x', m)j(x') =: \int d^4x' \Delta_{ret}(x-x', m)j(x')$$

existiert. Rechts haben wir die *retardierte Greensche Funktion* eingeführt:

$$\Delta_{ret}(x, m) = -\Theta(x^0)\Delta(x, m)$$

Anstelle von $A_{-\infty}$ schreiben wir A_{ein} und erhalten so die Darstellung

$$A(x) = A_{ein}(x) + \int d^4x' \Delta_{ret}(x-x', m)j(x')$$

⁷¹Als Differenz zweier Lösungen der inhomogenen Gleichung.

Wir nennen A_{ein} das *einlaufende* freie Feld.

Gleichfalls wollen wir annehmen, daß der Limes

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{x^0=x^0}^{x^0=T} d^4x' \Delta(x-x', m) j(x') =: \int d^4x' \Delta_{av}(x-x', m) j(x')$$

existiert, wobei wir rechts die *avancierte* Greensche Funktion

$$\Delta_{av}(x, m) = \Theta(-x^0) \Delta(x, m) = \Delta_{ret}(-x, m)$$

eingeführt haben. Dann gilt

$$A(x) = A_{aus}(x) + \int d^4x' \Delta_{av}(x-x', m) j(x')$$

Wir nennen A_{aus} das *auslaufende* freie Feld. Nun gilt offenbar

$$\Delta_{av}(x, m) - \Delta_{ret}(x, m) = \Delta(x, m)$$

und somit

$$\boxed{A_{ein}(x) = A_{aus}(x) + \int d^4x' \Delta(x-x', m) j(x')} \quad (245)$$

Wir fassen die beiden asymptotischen freien Felder als Operatoren in *einem gemeinsamen* Hilbertraum auf. Dieser Raum kann demzufolge auf *zwei* Weisen als Fock-Raum geschrieben werden, wobei eine unitäre Transformation, der *Streuoperator* S , zwischen diesen beiden Darstellungen vermittelt. Wir diskutieren nun die Details der Konstruktion von S .

Zunächst drücken wir die Felder durch Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren aus⁷²:

$$\begin{aligned} A_{ein}(x) &= (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3k}{2\omega} \left\{ e^{-ikx} a_{ein}(k) + e^{ikx} a_{ein}^\dagger(k) \right\} \\ A_{aus}(x) &= (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3k}{2\omega} \left\{ e^{-ikx} a_{aus}(k) + e^{ikx} a_{aus}^\dagger(k) \right\} \end{aligned}$$

und definieren zwei Vakua:

$$a_{ein}(k) \Omega_{ein} = 0 \qquad a_{aus}(k) \Omega_{aus} = 0$$

⁷²Diese genügen den üblichen Vertauschungsrelationen, weil wir hier die Bose-Statistik zugrundelegen.

Darauf aufbauend konstruieren wir ebene Wellen:

$$\begin{aligned} |k\rangle_{ein} &= a_{ein}^\dagger(k)\Omega_{ein} \\ |k, k'\rangle_{ein} &= a_{ein}^\dagger(k)a_{ein}^\dagger(k')\Omega_{ein} \\ &etc. \end{aligned}$$

(analoge Zustände existieren für den Index „aus“). Wir interpretieren sie als n -Teilchenzustände *vor* (bzw. *nach*) dem Streuprozeß. Wir behaupten⁷³: Es existiert ein unitärer Operator S mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} Sa_{aus}(k)S^{-1} &= a_{ein}(k) \\ Sa_{aus}^\dagger(k)S^{-1} &= a_{ein}^\dagger(k) \\ S\Omega_{aus} &= \Omega_{ein} \end{aligned}$$

Die Eindeutigkeit folgt dann aus der Tatsache, daß die Fock-Darstellung irreduzibel ist. Zum Beweis gehen wir von der Fourier-Zerlegung

$$\int d^4x' \Delta(x - x', m)j(x') = (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3k}{2\omega} \left\{ e^{-ikx} \phi(\mathbf{k}) + e^{ikx} \overline{\phi(\mathbf{k})} \right\}$$

aus. Diese ist immer in der angegebenen Weise möglich; denn die linke Seite ist eine Lösung der homogenen Klein-Gordon-Gleichung. Ein Vergleich mit (245) lehrt, daß

$$\begin{aligned} a_{ein}(k) &= a_{aus}(k) + \phi(\mathbf{k}) \\ a_{ein}^\dagger(k) &= a_{aus}^\dagger(k) + \overline{\phi(\mathbf{k})} \end{aligned}$$

gilt. An dieser Stelle ist zu prüfen, ob

$$\int \frac{d^3k}{2\omega} |\phi(\mathbf{k})|^2 < \infty \quad (246)$$

erfüllt ist, d.h. ob die Funktion $\phi(\mathbf{k})$ dem Hilbertraum \mathcal{H} der Einteilchenzustände angehört. Wir setzen voraus, daß dies der Fall ist⁷⁴ und bilden die Operatoren $a(\phi) := a_{ein}(\phi)$ und $a^\dagger(\phi) := a_{ein}^\dagger(\phi)$. Um die Formeln nicht unnötig kompliziert zu gestalten, vereinbaren wir den Index „ein“ künftig wegzulassen. Wir schreiben:

$$S = e^B \quad B = a(\phi) - a^\dagger(\phi) \quad (247)$$

⁷³Unter geeigneten Bedingungen an $j(x)$. Siehe (246).

⁷⁴Für $\phi \notin \mathcal{H}$ sind die beiden, durch „ein“ und „aus“ bezeichneten Darstellungen der kanonischen Vertauschungsrelationen *inäquivalent* zueinander, d.h. sie gehen dann nicht durch eine unitäre Transformation auseinander hervor.

so daß $B + B^* = 0$, d.h. S ist unitär. Es gilt, wie verlangt⁷⁵:

$$\begin{aligned} S^{-1}a(k)S &= a(k) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} [\cdots [a(k), \underbrace{B, \dots, B}_n] \cdots] \\ &= a(k) - [a(k), a^\dagger(\phi)] \\ &= a(k) - \phi(k) = a_{aus}(k) \end{aligned}$$

Hierbei nutzten wir aus, daß iterierte Kommutatoren verschwinden, weil schon der erste Kommutator eine gewöhnliche Zahl (=Vielfaches des Einheitsoperators) ist. Ebenso

$$\Omega_{aus} = S^{-1}\Omega = e^{-\frac{1}{2}\|\phi\|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} a^\dagger(\phi)^n \Omega \quad (248)$$

In Worten: Der Grundzustand des auslaufenden Feldes ist ein *kohärenter Zustand* für das einlaufende Feld. Die Formel (248) fußt auf der Darstellung

$$e^{a^\dagger(\phi)-a(\phi)} = e^{-\frac{1}{2}\|\phi\|^2} e^{a^\dagger(\phi)} e^{-a(\phi)}$$

Es handelt sich hierbei um eine spezielle Form der Entwicklung (Formel von Campbell, Baker und Hausdorff):

$$\log(\exp A \exp B) = A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \frac{1}{12}[[A, B], A + B] + \cdots \quad (249)$$

wobei die durch „ \cdots “ angedeuteten Terme n -fache Kommutatoren ($n \geq 3$) der Operatoren A und B sind.

Wir haben, wie immer bei zeitlichen Vorgängen, die beiden Optionen, entweder das Heisenberg-Bild oder das Schrödinger-Bild zur Grundlage der Beschreibung zu wählen. Wenn in diesem Zusammenhang das Wort „Observable“ gebraucht wird, so ist nicht a priori klar, was damit gemeint ist. Denn schon eine so einfache Größe wie „Teilchenzahl“ tritt hier in *zwei* Bedeutungen auf: (1) als ein Operator N , der $[a(\phi), N] = a(\phi)$ und $N\Omega = 0$ erfüllt; (2) als ein Operator N_{aus} , der $[a_{aus}(\phi), N_{aus}] = a_{aus}(\phi)$ und $N_{aus}\Omega_{aus} = 0$ erfüllt. Im ersten Fall, sagen wir, die Teilchenzahl sei *in bezug auf das einlaufende Feld*, im zweiten Fall, sie sei *in bezug auf das auslaufende Feld* definiert. Jede Observable, die einen speziellen Namen trägt, wie *Impuls*, *Energie*, *Bahndrehimpuls*, *Ladung* usw., tritt demnach prinzipiell in zwei Versionen auf. Handelt es sich jedoch um eine Erhaltungsgröße, so fallen die beiden Versionen in eine zusammen.

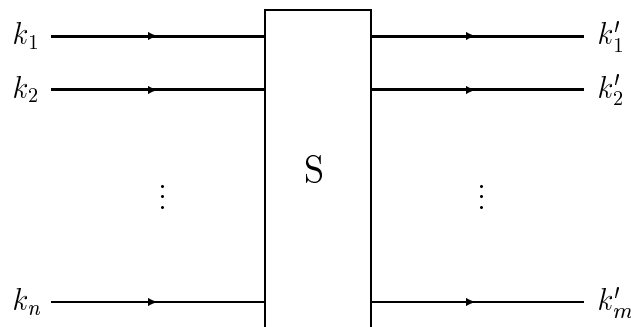
⁷⁵Dies ist eine Anwendung der Campbell-Baker-Hausdorff-Formel.

Ähnlich ist die Situation bei den Zuständen. A priori ist nicht klar, was wir meinen, wenn wir von dem Zustand *eines Teilchens mit dem Impuls k* sprechen. Denn dieser Zustand tritt gleich zweimal auf: (1) als einlaufender Zustand $|k\rangle$ und (2) als auslaufender Zustand $|k\rangle_{aus}$. Im ersten Fall sagen wir, der Zustand sei *in bezug auf das einlaufende Feld*, im zweiten Fall, er sei *in bezug auf das auslaufende Feld* definiert.

Die Identifizierung von Observablen und Zuständen ist etwas verwirrend auf den ersten Blick. Dennoch: sowohl im Heisenberg- wie im Schrödinger-Bild gelingt es, die Charakterisierung von Observablen und Zuständen allein in bezug auf die einlaufenden Felder vorzunehmen. Letztendlich sind nur die Erwartungswerte entscheidend; die Vorschrift sie zu berechnen, muß eindeutig sein:

- *Heisenberg-Bild.* Der Zustand vor und nach dem Wechselwirkungsprozeß ist der gleiche. Er kann durch einen Vektor Φ des Fock-Raumes für das *einlaufende* freie Feld charakterisiert werden. Ist Q eine Observable in bezug auf das einlaufende Feld, so korrespondiert ihr die Observable $S^{-1}QS$ nach dem Wechselwirkungsprozeß. Zu Beginn war der Erwartungswert $(\Phi, Q\Phi)$, danach ist er $(\Phi, S^{-1}QS\Phi)$.
- *Schrödinger-Bild.* Die Observablen vor und nach dem Prozeß werden durch dieselben Operatoren beschrieben. Die konkrete Festlegung geschieht in bezug auf das einlaufende Feld. Ist Φ der Zustand vor dem Prozeß und in bezug auf das einlaufende Feld definiert, so ist $S\Phi$ der Zustand danach. Aus dem Erwartungswert $(\Phi, Q\Phi)$ wird $(S\Phi, QS\Phi)$.

Von den Grundlagen her sind beide Bilder gleich gut geeignet, als Rahmen für konkrete Rechnungen zu dienen. Aufgrund der Anschauung, die Physiker mit einem Streuexperiment verknüpfen, ist jedoch das Schrödinger-Bild i.allg. die bevorzugte Beschreibungsart. Haben die beteiligten Teilchen feste Impulse, so charakterisiert man ein solches Experiment durch das folgende Diagramm:



Hier ist der einlaufende Zustand $|k_1, \dots, k_n\rangle$. Also ist der auslaufende Zustand $S|k_1, \dots, k_n\rangle$. Im gedachten Experiment wird er analysiert nach möglichen Endzuständen von m Teilchen⁷⁶. Die naheliegende Frage lautet: Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet man einen bestimmten Endzustand von m Teilchen bei einem gegebenen Anfangszustand von n Teilchen? Im Streuexperiment mißt man jedoch nicht direkt solche Wahrscheinlichkeiten, sondern die Zahl der Ereignisse pro Zeit und Stromdichte der einfallenden Teilchen (Wirkungsquerschnitt). Die theoretische Interpretation solcher Meßvorgänge ist verwickelt. Wir können hier nicht darauf eingehen. Die entscheidende Größe ist hierbei die *Übergangsamplitude*⁷⁷

$$\langle k'_1, \dots, k'_m | S | k_1, \dots, k_n \rangle$$

Doch nun zurück zu unserem Beispiel. Stellen wir hier die Frage *Was strahlt die Quelle $j(x)$ an Teilchen ab?*, so ist bereits impliziert, daß zu Beginn des Experimentes *kein* Teilchen vorhanden war⁷⁸. Wir sind also aufgefordert, die Amplituden $\langle k'_1, \dots, k'_m | S | 0 \rangle$, $m = 0, 1, 2, \dots$ zu bestimmen und erhalten:

$$\langle k'_1, \dots, k'_m | S | 0 \rangle = (-1)^m e^{-\frac{1}{2}\|\phi\|^2} \phi(\mathbf{k}'_1) \cdots \phi(\mathbf{k}'_m)$$

Diese Amplituden beschreiben die *Emission*. Da der S-Operator durch ϕ bestimmt ist, können wir diese Abhängigkeit durch die Schreibweise $S = S_\phi$ zum Ausdruck bringen. Ein Blick auf (247) lehrt, daß der S-Operator die bemerkenswerte Symmetrie $S_\phi^* = S_{-\phi}$ besitzt. Diese Eigenschaft des Streuoperators garantiert, daß der umgekehrte Vorgang, nämlich die *Absorption* von Teilchen mit der gleichen Wahrscheinlichkeit geschieht. Die für die Absorption von n Teilchen mit gegebenen Impulsen verantwortliche Amplitude ist nämlich

$$\langle 0 | S | k_1, \dots, k_n \rangle = e^{-\frac{1}{2}\|\phi\|^2} \bar{\phi}(\mathbf{k}_1) \cdots \bar{\phi}(\mathbf{k}_n)$$

Schließlich gibt

$$|\langle 0 | S | 0 \rangle|^2 = e^{-\|\phi\|^2}$$

die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß weder Emission noch Absorption beobachtet wird.

⁷⁶Die Gesamtheit der möglichen Endzustände mit spezifizierter Teilchenzahl und -art nennt man einen *Kanal*.

⁷⁷Ihr Absolutquadrat ist proportional dem Wirkungsquerschnitt.

⁷⁸Anderenfalls würde es sich ja um *induzierte* Emission handeln. Wir werden in Zusammenhang mit Streuexperimenten den teilchenlosen Zustand (das Vakuum) vorzugsweise mit $|0\rangle$ bezeichnen.

6.2 Der formale Ausdruck für den S-Operator

Ziel dieses Abschnittes ist es, einen allgemeinen Ausdruck für den S-Operator zu gewinnen. Alle mathematischen Fragen bezüglich der Existenz des so gewonnenen Ausdruckes und der Rechtfertigung der gemachten Annahmen auf dem Wege dahin sollen zurückgestellt werden. Es sei aber betont, daß alle Annahmen (bis auf die Poincaré-Kovarianz) in dem Modell einer äußeren Quelle erfüllt sind, das im vorigen Abschnitt besprochen wurde.

Es sei $\phi = \{\phi_r\}$ die Sammelbezeichnung für eine Liste von Feldern und \mathcal{L} ihre Lagrange-Dichte. Mit π^μ bezeichnen wir die Liste der Ableitungen

$$\pi_r^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_r)}$$

Zu jedem Zeitpunkt t setzen wir die Gültigkeit der gleichzeitigen kanonischen (Anti-)Vertauschungsrelationen⁷⁹ voraus:

$$[\phi_r(t, \mathbf{x}), \pi_s^0(t, \mathbf{x}')]_{\pm} = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\delta_{rs} \quad (250)$$

Das weitere Vorgehen beruht auf drei Annahmen:

1. Es existieren asymptotische freie Felder. Ihre Sammelbezeichnung sei ϕ_{ein} und ϕ_{aus} . Ihnen korrespondiert eine Lagrange-Dichte \mathcal{L}_0 (bilinear in den Feldern und ihren Ableitungen) und je eine Liste π_{ein}^μ und π_{aus}^μ . Die freien Felder erfüllen die Relationen (250).
2. Es existiert ein gemeinsamer Hilbertraum \mathcal{H} , auf dem alle Felder als Operatoren wirken. Die Darstellungen der kanonischen (Anti-)Vertauschungsrelationen (250) für die wechselwirkenden Felder und die asymptotischen Felder sind unitär äquivalent, d.h. zu jeder Zeit t existiert

⁷⁹ $[a, b]_{\pm} = ab \pm ba$. Die Art der Klammer in (250) hängt von r und s ab. Die Gültigkeit solcher Vertauschungsrelationen im Falle von Wechselwirkung ist ungeklärt, ja fraglich. Dazu R.F.Streater und A.S.Wightman:

„We believe ... that the relation between a free field and one with interaction cannot be as simple as the analogy with systems of a finite number of degrees of freedom might suggest. In particular, the kinematics gets mixed up with the dynamics in the sense that the dynamics determine which representation of the canonical commutation relations we must use. What is even more likely in physically interesting quantum field theories is that equal time commutation relations will make no sense at all.“

ein unitärer Operator $U(t)$ auf \mathcal{H} , so daß gilt⁸⁰:

$$\phi(t, \mathbf{x}) = U(t)^{-1} \phi_{ein}(t, \mathbf{x}) U(t) \quad (251)$$

$$\pi^0(t, \mathbf{x}) = U(t)^{-1} \pi_{ein}^0(t, \mathbf{x}) U(t) \quad (252)$$

Es existieren die Grenzwerte

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} U(t) = 1 \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} U(t) = S$$

Der so definierte S-Operator ist unitär.

3. Die Darstellung der freien Felder auf \mathcal{H} ist irreduzibel, d.h. jeder Operator, der zu einer festen Zeit t mit ϕ_{ein} und π_{ein}^0 vertauscht, ist ein Vielfaches des Einheitsoperators.

Die unter Punkt 3 formulierte Eigenschaft ist sehr fragwürdig, weil Quarks und Gluonen nicht als asymptotische Einteilchenzustände auftreten, ihnen also keine asymptotischen Felder entsprechen. Es wäre somit denkbar, daß der physikalische Hilbertraum nur ein Teilraum von \mathcal{H} darstellt.

Wir wollen eine Differentialgleichung für $U(t)$ herleiten und gehen zu diesem Zweck von den Heisenberg-Gleichungen aus, die wir einmal für das wechselwirkende Feld und zum anderen für das asymptotische freie Feld aufschreiben:

$$\begin{aligned} i\dot{\phi} &= [\phi, H] & i\dot{\phi}_{ein} &= [\phi_{ein}, H_0] \\ i\dot{\pi}^0 &= [\pi^0, H] & i\dot{\pi}_{ein}^0 &= [\pi_{ein}^0, H_0] \end{aligned}$$

Hier wird H als ein Funktional von ϕ und π^0 aufgefaßt⁸¹; H_0 ist hingegen ein Funktional von ϕ_{ein} und π_{ein}^0 :

$$\begin{aligned} H &= H(\phi, \pi^0) \\ H_0 &= H_0(\phi_{ein}, \pi_{ein}^0) \end{aligned}$$

⁸⁰Man weiß sehr wohl, daß diese Relationen streng genommen unhaltbar sind. Denn ein bekanntes Theorem von R.Haag besagt, daß unter unseren Annahmen (sowie Kovarianz der Felder unter der Poincare-Gruppe) es sich bei ϕ um nicht anderes als einen Satz von *freien* Feldern handelt: Es gilt $(\square + m_r^2)\phi_r = 0$ immer dann, wenn $(\square + m_r^2)\phi_{ein,r} = 0$ erfüllt ist. Ein Ausweg aus diesem Dilemma besteht darin, die Gültigkeit von (251-252) nur für $|\mathbf{x}| < R$ (R beliebig) zu verlangen. Dann hängt $U(t)$ jedoch von R ab und besitzt keinen Limes für $R \rightarrow \infty$.

⁸¹Gemeint ist, daß von der Darstellung $H = \int d^3x \Theta^{00}$ ausgegangen werden soll, wobei $\Theta^{\mu\nu}$ der kanonische Energie-Impuls-Tensor ist. Die asymptotischen freien Felder definieren ebenfalls einen Tensor $\Theta_0^{\mu\nu}$, der von dem vorigen verschieden ist.

Wir schreiben (251) in der Form $U\phi = \phi_{ein}U$ und differenzieren beidseitig nach t , erhalten so

$$\dot{U}\phi + U\dot{\phi} = \dot{\phi}_{ein}U + \phi_{ein}\dot{U}$$

und benutzen die Heisenberg-Gleichungen mit dem Ergebnis

$$[\phi_{ein}, i\dot{U}U^{-1} - UHU^{-1} + H_0] = 0$$

In gleicher Weise findet man

$$[\pi_{ein}^0, i\dot{U}U^{-1} - UHU^{-1} + H_0] = 0$$

Da die Darstellung des asymptotischen Feldes irreduzibel sein soll, gilt

$$i\dot{U}U^{-1} - UHU^{-1} + H_0 = E$$

für eine reelle Funktion $E = E(t)$. Nun beachte man

$$UH(\phi, \pi^0)U^{-1} = H(U\phi U^{-1}, U\pi^0 U^{-1}) = H(\phi_{ein}, \pi_{ein}^0)$$

Wenn wir also die *Wechselwirkungsenergie* als den folgenden Operator einführen⁸²

$$H_I := H(\phi_{ein}, \pi_{ein}^0) - H_0(\phi_{ein}, \pi_{ein}^0) + E \quad (253)$$

so lautet die Differentialgleichung schlicht $i\dot{U} = H_I U$. Mit der Randbedingung $U(-\infty) = 1$ gelingt die Umwandlung in eine Integralgleichung

$$U(t) = 1 - i \int_{-\infty}^t dt' H_I(t') U(t')$$

die man iterativ lösen kann. Etwa so: man definiert

$$\begin{aligned} U_0(t) &= 1 \\ U_n(t) &= -i \int_{-\infty}^t dt' H_I(t') U_{n-1}(t') \quad n > 0 \end{aligned}$$

Dann gilt $U(t) = \sum_n U_n(t)$, also

$$U(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_1) H_I(t_2) \cdots H_I(t_n)$$

⁸²Hier sind alle Terme t -abhängig bis auf $H_0(\phi_{ein}, \pi_{ein}^0)$. In Theorien mit t -abhängigen äußeren Feldern hängt H nicht nur implizit über ϕ_{ein} und π_{ein}^0 , sondern auch explizit von t ab.

Hier schreiben wir auch

$$U(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^t dt_1 \cdots \int_{-\infty}^t dt_n T(H_I(t_1) \cdots H_I(t_n))$$

wobei das Zeitordnungssymbol T auf folgende Weise erklärt ist. Es gelte

$$T(H_I(t_1) \cdots H_I(t_n)) := H_I(t_{\pi(1)}) \cdots H_I(t_{\pi(n)})$$

Hier stellt π diejenige Permutation von $1, \dots, n$ dar, für die

$$t_{\pi(1)} \geq t_{\pi(2)} \geq \cdots \geq t_{\pi(n)}$$

erfüllt ist. Die kürzeste Darstellung lautet:

$$U(t) = T \exp \left\{ -i \int_{-\infty}^t dt' H_I(t') \right\}$$

Im Limes $t \rightarrow \infty$ erhalten wir hieraus den formalen Ausdruck für den S-Operator:

$$S = T \exp \left\{ -i \int_{-\infty}^{\infty} dt H_I(t) \right\} \quad (254)$$

Eine Änderung der willkürlichen Energiefunktion $E(t)$ in (253) erzeugt lediglich einen physikalisch irrelevanten Phasenfaktor, d.h. ersetzen wir $E(t)$ durch $E(t) + e(t)$, so geht S über in $S \exp\{-i \int_{-\infty}^{\infty} dt e(t)\}$. Die Freiheit in der Wahl von $E(t)$ gibt uns die Möglichkeit, ein weiteres Ziel zu erreichen: *Eliminierung aller Vakuumbeiträge*. Ist nämlich die Dichte \mathcal{L} Lorentz-invariant und Ω das gemeinsame (eindeutige) Vakuum der einlaufenden freien Felder, so erwarten wir, daß Ω keine zeitliche Veränderung erfährt. Dies heißt aber nur, daß $U(t)\Omega = e^{i\alpha(t)}\Omega$ gilt mit $e^{i\alpha(t)} := (\Omega, U(t)\Omega)$. Diese Phase gilt es zu kompensieren. Wir wählen $E(t)$ in einer solchen Weise, daß $(\Omega, U(t)\Omega) = 1$ erfüllt ist und erreichen das gewünschte Verhalten des S-Operators: $S\Omega = \Omega$.

Es fehlt uns noch der Zusammenhang zwischen der Lagrange-Dichte \mathcal{L} und der Wechselwirkungsenergie H_I . Wir schreiben allgemein $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I$, wobei wir in \mathcal{L}_0 alle Terme versammelt haben, die *bilinear* in den Feldern und ihren Ableitungen sind.

Annahme: Der Wechselwirkungsterm \mathcal{L}_I hängt nur von den Feldern selbst, nicht aber von deren Ableitungen ab.

Unter dieser Annahme gilt

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\mu \phi)}$$

und

$$\begin{aligned}
H &= \int d^3x \left(\sum_r \dot{\phi}_r \pi_r^0 - \mathcal{L} \right) \\
&= \int d^3x \left(\sum_r \dot{\phi}_r \pi_r^0 - \mathcal{L}_0 \right) - \int d^3x \mathcal{L}_I \\
&= H_0 + H_I
\end{aligned}$$

mit $H_I = - \int d^3x \mathcal{L}_I$. Die Formeln zur Berechnung des S-Operators verlangen, daß wir das einlaufende Feld ϕ_{ein} in die Dichte \mathcal{L}_I einsetzen und den Nullpunkt der Energie neu festsetzen:

$$H_I(t) = E(t) - \int d^3x \mathcal{L}_I(\phi_{ein}(t, \mathbf{x}))$$

Auf diese Weise erhalten wir den endgültigen Ausdruck für den S-Operator:

$$S = \frac{T \exp\{i \int d^4x \mathcal{L}_I(\phi_{ein}(x))\}}{(\Omega, T \exp\{i \int d^4x \mathcal{L}_I(\phi_{ein}(x))\} \Omega)}$$

Er erlaubt eine Entwicklung nach Potenzen der Wechselwirkung (Störungsreihe). Er kann andererseits auch als Ausgangspunkt einer exakten Rechnung dienen.

Die Zeitordnung (254) erlaubt eine Interpretation, die in manchen Situationen von großem Nutzen ist. Wir gehen aus von einem symmetrischen Zeitintervall $-a \leq t \leq a$ mit $a > 0$ und teilen es in n gleiche Teilintervalle der Länge $\Delta t = 2a/n$. Die Mitte des k -ten Teilstückes ist durch $t_k = (k - \frac{1}{2})\Delta t - a$ gegeben ($k = 1, \dots, n$). Die Formel

$$T \exp \left\{ -i \int_{-a}^a dt H_I(t) \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-i\Delta t H_I(t_n)} \dots e^{-i\Delta t H_I(t_2)} e^{-i\Delta t H_I(t_1)}$$

stellt eine geeignete Definition des T -Produktes dar. Im Anschluß daran führt man den Limes $a \rightarrow \infty$ aus, und gelangt so zu einer alternativen Definition des S-Operators. Das Verfahren liefert ein schnelles Ergebnis, wenn der Kommutator

$$[H_I(t), H_I(t')] = ic(t, t')$$

eine gewöhnliche Zahl ist. Durch Induktion beweist man leicht die allgemeine Formel

$$\log(\exp A_n \cdots \exp A_2 \exp A_1) = \sum_{k=1}^n A_k + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i [A_i, A_k] \quad (255)$$

für Operatoren A_i , falls $[[A_i, A_j], A_k] = 0$ für alle i, j, k gilt. Diese benutzen wir für $A_k = -i\Delta t H_I(t_k)$ und erhalten die Darstellung:

$$S = \exp \left\{ -i \int_{-\infty}^{\infty} dt H_I(t) - \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^t dt' c(t, t') \right\} \quad (256)$$

Das hierin enthaltene Doppelintegral kann auch wie folgt geschrieben werden:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dt' \Theta(t - t') c(t, t').$$

Die Bedingungen, die zu diesen Formeln führen, sind erfüllt für das Modell, das wir im vorigen Abschnitt behandelt haben. Wir wenden uns noch einmal diesem Modell des äußeren Stromes zu, gehen jetzt aber von der Dichte $\mathcal{L}_I[x] = A(x)j(x)$ aus, setzen $A_{ein}(x)$ darin ein, definieren $H_I(t) = -\int d^3x \mathcal{L}_I(A_{ein}(t, \mathbf{x}))$ (ohne Energiekorrektur), finden dann

$$\begin{aligned} [H_I(t), H_I(t')] &= i \int d^3x \int d^3x' j(x) \Delta(x - x', m) j(x') \\ -\Theta(t - t')[H_I(t), H_I(t')] &= i \int d^3x \int d^3x' j(x) \Delta_{ret}(x - x', m) j(x') \end{aligned}$$

und erhalten aus (256) die Darstellung

$$S = T \exp \left\{ i \int d^4x A_{ein}(x) j(x) \right\} \quad (257)$$

$$= e^{i\alpha} \exp \left\{ i \int d^4x A_{ein}(x) j(x) \right\} \quad (258)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \int d^4x \int d^4y j(x) \Delta_{ret}(x - x', m) j(x'). \quad (259)$$

Wir zeigen nun, daß dieser Ausdruck für S – bis auf den Phasenfaktor – mit dem im vorigen Abschnitt gewonnenen übereinstimmt. Wir setzen nämlich

$$-i \int d^4x' A_{ein}(x') j(x') = a_{ein}^\dagger(\phi) - a_{ein}(\phi)$$

und berechnen den Zusammenhang zwischen j und ϕ einfach dadurch, daß wir auf beiden Seiten der Gleichung den Kommutator mit $A_{ein}(x)$ bilden:

$$\begin{aligned} \int d^4x' \Delta(x - x', m) j(x') &= [A_{ein}(x), a_{ein}^\dagger(\phi)] + [a_{ein}(\phi), A_{ein}(x)] \\ &= (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3k}{2\omega} \left\{ e^{-ikx} \phi(\mathbf{k}) + e^{ikx} \overline{\phi(\mathbf{k})} \right\} \end{aligned}$$

Früher sind wir von dieser Formel ausgegangen, um den S-Operator als $\exp\{a_{ein}(\phi) - a_{ein}^\dagger(\phi)\}$ darzustellen.

Die durch (259) beschriebene Phase ist für den formalen Ausbau der Feldtheorie von Interesse. Aus diesem Grunde ist es nützlich, auch andere Darstellungen dieser Größe zu kennen. Wegen $\Delta_{av}(x, m) = \Delta_{ret}(-x, m)$ können wir auch schreiben:

$$\alpha = \frac{1}{2} \int d^4x \int d^4x' j(x) \Delta_{av}(x - x', m) j(x').$$

6.3 Die Identität von Wick

Die Formeln für der Modell mit äußerem Strom sind von Interesse im Zusammenhang mit einer algebraischen Identität, die auf G.C.Wick (1950) zurückgeht und die man bei störungstheoretischen Rechnungen benötigt.

6.4 Bosonen

Die Resultate dieses Abschnittes formulieren wir – aus Gründen der Einfachheit – für ein reelles freies Skalarfeld. Ähnliche Resultate erhält man jedoch für jedes freie Bose-Feld, wenn man die unten gewählte Definition von $A(j)$ geeignet modifiziert.

Sei also $A(x)$ ein quantisiertes freies Feld in der Fock-Darstellung. Die Analyse des vorigen Abschnittes hat ergeben, daß für jede Quellfunktion $j(x)$ gilt:

$$T \exp\{iA(j)\} = \exp\{iA(j)\} \exp\{\frac{1}{2}i\Delta_{av}(j*j, m)\} \quad (260)$$

Hierbei haben wir die folgenden Bezeichnungen benutzt⁸³:

$$A(j) := \int d^4x A(x) j(x)$$

$$\Delta_{av}(j*j, m) := \int d^4x \int d^4y \Delta_{av}(x - y, m) j(x) j(y)$$

In Anbetracht der vagen Argumente, die zur Gleichung (260) führten, werden wir, um der Theorie ein sicheres Fundament zu geben, von nun an die Formel

⁸³Bekanntlich definiert man die *Faltung* durch $[j*j](x) = \int d^4y j(y-x)j(y)$. Die Definition (260) ist somit äquivalent zu $\Delta_{av}(j*j, m) = \int d^4x \Delta_{av}(x, m)[j*j](x)$.

(260) zur Definition des *T-Exponentials* eines freien Feldes benutzen⁸⁴. Mit seiner Hilfe definieren wir die *zeitgeordnete Potenz* eines freien Feldes:

$$T \exp\{iA(j)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} T A(j)^n$$

$$T A(j)^n = \int d^4x_1 \cdots \int d^4x_n T(A(x_1) \cdots A(x_n)) j(x_1) \cdots j(x_n)$$

Die Operatorfunktion $T(A(x_1) \cdots A(x_n))$ ist symmetrisch unter Permutationen ihrer Argumente x_1, \dots, x_n . In ähnlicher Weise definieren wir das *Wick-Exponential* eines freien Feldes als

$$: \exp\{iA(j)\} = \exp\{iA(j)\} \exp\{\frac{1}{2}\Delta_+(j*j, m)\}$$

Mit seiner Hilfe werden die *Wick-Potenzen* definiert:

$$: \exp\{iA(j)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} : A(j)^n :$$

$$: A(j)^n : = \int d^4x_1 \cdots \int d^4x_n : A(x_1) \cdots A(x_n) : j(x_1) \cdots j(x_n)$$

Die Operatorfunktion $: A(x_1) \cdots A(x_n) :$ ist symmetrisch unter Permutationen ihrer Argumente x_1, \dots, x_n . Mit Hilfe von (249) und mit der Zerlegung $A = A^{(+)} + A^{(-)}$ des Feldes in die Anteile mit positiven bzw. negativen Frequenz können wir schreiben:

$$\begin{aligned} \exp\{iA^{(-)}(j)\} \exp\{iA^{(+)}(j)\} &= \exp\{iA(j)\} \exp\{-\frac{1}{2}[A^{(-)}(j), A^{(+)}(j)]\} \\ &= \exp\{iA(j)\} \exp\{-\frac{1}{2}(\Omega, [A^{(-)}(j), A^{(+)}(j)]\Omega)\} \\ &= \exp\{iA(j)\} \exp\{\frac{1}{2}(\Omega, A^{(+)}(j)A^{(-)}(j)\Omega)\} \\ &= \exp\{iA(j)\} \exp\{\frac{1}{2}(\Omega, A(j)A(j)\Omega)\} \\ &= \exp\{iA(j)\} \exp\{\frac{1}{2}\Delta_+(j*j, m)\} \\ &= : \exp\{iA(j)\} \end{aligned}$$

Schließlich definieren wir den *Feynman-Propagator* $\Delta_F(x, m)$ durch

$$\begin{aligned} i\Delta_F(x, m) &= \Delta_+(x, m) - i\Delta_{av}(x, m) \\ &= \Theta(x^0)\Delta_+(x, m) + \Theta(-x^0)\Delta_+(-x, m) \end{aligned}$$

⁸⁴Es ist wichtig, eine mathematisch eindeutige Definition des sog. *T-Produktes* zu besitzen, weil Ausdrücke wie $T(A(x_1) \cdots A(x_n))$ in Punkten mit $x_i^0 = x_k^0$ ($i < k$) aufgrund der naiven Auffassung des *T-Produktes* unbestimmt sind.

Dann folgt aus unseren Formeln die *Wick-Identität*:

$$\boxed{T \exp\{iA(j)\} = : \exp\{iA(j)\} \exp\{-\frac{1}{2}i\Delta_F(j*j, m)\}} \quad (261)$$

Aus $(\Omega, : \exp\{iA(j)\}\Omega) = 1$ folgt insbesondere:

$$\begin{aligned} (\Omega, T \exp\{iA(j)\}\Omega) &= \exp\{-\frac{1}{2}i\Delta_F(j*j, m)\} \\ (\Omega, \exp\{iA(j)\}\Omega) &= \exp\{-\frac{1}{2}\Delta_+(j*j, m)\} \end{aligned}$$

Entwickeln wir die erste dieser Gleichungen bis zur 2.Ordnung, so finden wir

$$(\Omega, T(A(x)A(y))\Omega) = i\Delta_F(x - y, m).$$

Als τ -Funktion n -ter Ordnung bezeichnet man die in ihren Argumenten symmetrische Funktion

$$\begin{aligned} \tau(x_1, \dots, x_n) &= (\Omega, T(A(x_1) \cdots A(x_n))\Omega) \\ &= (-i)^n \frac{\delta}{\delta j(x_1)} \cdots \frac{\delta}{\delta j(x_n)} \exp\{-\frac{1}{2}i\Delta_F(j*j, m)\} \Big|_{j=0} \end{aligned}$$

die durch eine funktionale Ableitung n -ter Ordnung berechnet werden kann. Das Ergebnis ist in jedem Fall eine Summe von Produkten der Δ_F -Funktion mit Argumenten der Form $x_i - x_k$ ($i \neq k$). Die so definierten τ -Funktionen des freien Feldes $A(x)$ verschwinden, falls n ungerade ist.

6.5 Fermionen

Für ein freies Dirac-Feld $\psi(x)$ der Masse m lassen sich analoge Formeln angeben, vorausgesetzt, man führt Quellfunktionen $\eta(x)$ und $\bar{\eta}(x)$ als Dirac-Spinoren ein, die unter sich antikommutieren (sie sind Elemente einer Grassmann-Algebra) und die sowohl mit ψ und als auch mit $\bar{\psi}$ antikommutieren.

Man definiert zunächst zwei weitere Lorentz-invariante Distributionen:

$$\begin{aligned} \Delta_P &= -\Delta_{ret} - \frac{1}{2}\Delta \\ \Delta_1 &= \Delta_+ - \frac{1}{2}i\Delta \end{aligned}$$

Sodann stellt man eine Liste von abgeleiteten Distributionen auf:

$$\begin{aligned} S(x, m) &= (i\cancel{\partial} + m)\Delta(x, m) \\ S_*(x, m) &= (i\cancel{\partial} + m)\Delta_*(x, m) \end{aligned}$$

Hier ist ‘*’ ein Platzhalter für die Zeichen $+, ret, F, P, 1$. Man beweist ohne Schwierigkeit die Formeln:

$$\begin{aligned}(\Omega, \psi(x)\bar{\psi}(y)\Omega) &= S_+(x-y, m) \\(\Omega, \{\psi(x), \bar{\psi}(y)\}\Omega) &= iS(x-y, m)\end{aligned}$$

Die beiden weiteren Formeln

$$\Theta(x^0 - y^0) (\Omega, \{\psi(x), \bar{\psi}(y)\}\Omega) = -iS_{ret}(x-y, m) \quad (262)$$

$$(\Omega, T(\psi(x)\bar{\psi}(y))\Omega) = iS_F(x-y, m) \quad (263)$$

benutzen bereits Vereinbarungen über die „richtige“ Definition des retardierten Antikommutators und des zeitgeordneten Produktes⁸⁵.

Wir definieren das *T-Exponential* eines Dirac-Feldes durch

$$\boxed{T \exp\{i\psi(\eta)\} = \exp\{i\psi(\eta)\} \exp\{-iS_P(\bar{\eta}*\eta, m)\}} \quad (264)$$

mit den folgenden Bezeichnungen:

$$\begin{aligned}\psi(\eta) &= \int d^4x \{\bar{\eta}(x)\psi(x) + \bar{\psi}(x)\eta(x)\} \\S_P(\bar{\eta}*\eta, m) &= \int d^4x \int d^4y \bar{\eta}(x)S_P(x-y, m)\eta(y)\end{aligned}$$

Wir motivieren die Formel (264), indem wir die fiktive Dichte $\mathcal{L}_I = \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta$ einführen und den zugehörigen S-Operator berechnen. Dies geschieht wiederum dadurch, daß wir $[[\mathcal{L}_I(x_1), \mathcal{L}_I(x_2)]\mathcal{L}_I(x_3)] = 0$ für alle $x_i \in M_4$ ausnutzen. Wegen $\psi(\eta) = \int d^4x \mathcal{L}_I(x)$,

$$\begin{aligned}T \exp\{i\psi(\eta)\} &= T \exp\left\{i \int d^4x \mathcal{L}_I(x)\right\} \\&= \exp\{i\psi(\eta)\} \exp\left\{-\frac{1}{2} \int d^4x \int d^4y \Theta(x^0 - y^0) C(x, y)\right\} \\C(x, y) &= [\mathcal{L}_I(x), \mathcal{L}_I(y)] \\&= [\bar{\eta}(x)\psi(x) + \bar{\psi}(x)\eta(x), \bar{\eta}(y)\psi(y) + \bar{\psi}(y)\eta(y)] \\&= \bar{\eta}(x)\{\psi(x), \bar{\psi}(y)\}\eta(y) - \bar{\eta}(y)\{\psi(y), \bar{\psi}(x)\}\eta(x) \\&= \bar{\eta}(x)iS(x-y, m)\eta(y) - \bar{\eta}(y)iS(y-x, m)\eta(x)\end{aligned}$$

⁸⁵Der Grund für die Vieldeutigkeit solcher Ausdrücke liegt in der Nichtvertauschbarkeit der Multiplikation mit $\Theta(x^0)$ und der Anwendung des Differentialoperators $i\partial + m$.

Das Integral $-\frac{1}{2} \int d^4x \int d^4y \Theta(x^0 - y^0) C(x, y)$ ergibt sich somit als die Differenz zweier Integrale. Wir können hierfür schreiben:

$$-i\frac{1}{2} \int d^4x \int d^4y \bar{\eta}(x) \{\Theta(x^0 - y^0) - \Theta(y^0 - x^0)\} S(x - y, m) \eta(y)$$

nachdem wir im zweiten Integral die Rolle von x und y vertauscht haben. Schließlich gilt $\{\Theta(x^0) - \Theta(-x^0)\} S(x, m) = \{2\Theta(x^0) - 1\} S(x, m) = 2S_P(x, m)$ und wir erhalten die Formel (264).

Man gewinnt die zeitgeordneten Potenzen eines Dirac-Felder durch die Entwicklung von (264) nach den Quellfunktionen:

$$T \exp\{i\psi(\eta)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} T\psi(\eta)^n$$

In analoger Weise definiert man das *Wick-Exponential* eines freien Dirac-Feldes als

$$: \exp\{i\psi(\eta)\} = \exp\{i\psi(\eta)\} \exp\{S_1(\bar{\eta} * \eta, m)\}$$

Mit seiner Hilfe werden die *Wick-Potenzen* definiert:

$$: \exp\{i\psi(\eta)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} : \psi(\eta)^n :$$

Man rechnet leicht nach, daß die folgende Formel eine äquivalente Charakterisierung des Wick-Exponentials darstellt:

$$\begin{aligned} : \exp\{i\psi(\eta)\} &= \exp\{i\psi^{(-)}(\eta)\} \exp\{i\psi^{(+)}(\eta)\} & (265) \\ \psi^{(-)}(\eta) &= \int d^4x \{\bar{\eta}(x) \psi^{(-)}(x) + \overline{\psi^{(+)}(x)} \eta(x)\} \\ \psi^{(+)}(\eta) &= \int d^4x \{\bar{\eta}(x) \psi^{(+)}(x) + \overline{\psi^{(-)}(x)} \eta(x)\} \end{aligned}$$

In dieser Formel wird von der Zerlegung des Dirac-Feldes nach positiven und negativen Frequenzen Gebrauch gemacht.

Schließlich folgt aus der offensichtlichen Gleichung $iS_F = S_1 + iS_P$ die *Wick-Identität* :

$$T \exp\{i\psi(\eta)\} = : \exp\{i\psi(\eta)\} \exp\{-iS_F(\bar{\eta} * \eta, m)\}$$

Durch Entwicklung nach Potenzen von η erhält man hieraus eine Hierarchie von Gleichungen, die T-Produkte und Wick-Produkte miteinander verknüpfen.

Von Interesse sind auch die folgenden Erwartungswerte, die sich direkt aus unseren Formeln ergeben:

$$\begin{aligned}(\Omega, : \exp\{i\psi(\eta)\} \Omega) &= 1 \\(\Omega, T \exp\{i\psi(\eta)\} \Omega) &= \exp\{-iS_F(\bar{\eta} * \eta, m)\} \\(\Omega, \exp\{i\psi(\eta)\} \Omega) &= \exp\{-S_1(\bar{\eta} * \eta, m)\}\end{aligned}$$

Insbesondere (durch Entwicklung)

$$(\Omega, T(\psi(x)\bar{\psi}(y))\Omega) = iS_F(x - y, m)$$

im Einklang mit (263).

6.6 Impulsdarstellung der Feynman-Funktionen

Das Ergebnis der vorangegangenen Untersuchungen zeigt, daß sich die störungstheoretische Behandlung des S-Operators im wesentlichen auf die Feynman-Funktionen stützen kann. In diesem Abschnitt berechnen wir die Fourier-Transformierten der Feynman-Funktionen. Die erste Formel, die es zu beweisen gilt, lautet:

$$\Delta_F(x, m) = (2\pi)^{-4} \int d^4p \frac{e^{-ipx}}{p^2 - m^2 + i0}$$

Zum Beweis gehen wir von der Darstellung

$$\begin{aligned}i\Delta_F(x, m) &= \Theta(x^0)\Delta_+(x, m) + \Theta(-x^0)\Delta_+(-x, m) \\ \Delta_+(x, m) &= (2\pi)^{-3} \int \frac{d^3p}{2\omega} e^{i\mathbf{p}\mathbf{x} - i\omega t}\end{aligned}$$

aus. Im Sinne der Distributionen gilt die Formel

$$\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{e^{-isx^0}}{s + i0} = \Theta(x^0)$$

Durch die Substitution $s \rightarrow -s$, $x^0 \rightarrow -x^0$ erhalten wir daraus die Darstellung

$$\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{e^{-isx^0}}{-s + i0} = \Theta(-x^0)$$

Damit kann man nun schreiben

$$i\Delta_F(x, m) = (2\pi)^{-3} \int \frac{d^3p}{2\omega} \left[e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{e^{-i(s+\omega)x^0}}{s+i0} + e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}} \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{e^{-i(s-\omega)x^0}}{-s+i0} \right]$$

Wir setzen $p^0 = s + \omega$ im ersten und substituieren $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$, $p^0 = s - \omega$ im zweiten Integral mit dem Ergebnis:

$$\begin{aligned} \Delta_F(x, m) &= (2\pi)^{-4} \int d^4p e^{-ipx} \frac{1}{2\omega} \left(\frac{1}{p^0 - \omega + i0} + \frac{1}{-p^0 - \omega + i0} \right) \\ &= (2\pi)^{-4} \int d^4p e^{-ipx} \frac{1}{2\omega} \frac{-2\omega}{(\omega - i0)^2 - (p^0)^2} \\ &= (2\pi)^{-4} \int d^4p \frac{e^{-ipx}}{p^2 - m^2 + i0}, \quad d^4p = dp^0 d^3p \end{aligned}$$

wobei wir nutzten, daß $\omega = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2} > 0$ gilt.

Die entsprechende Darstellung der Feynman-Funktion für das Dirac-Feld folgt unmittelbar:

$$S_F(x, m) = (i\rlap{\not{D}} + m)\Delta_F(x, m) = (2\pi)^{-4} \int d^4p \frac{e^{-ipx}(\rlap{\not{p}} + m)}{p^2 - m^2 + i0}$$

Schließlich ist die Feynman-Funktion

$$iD_F^{\mu\nu}(x - y) = (\Omega, T(A^\mu(x)A^\nu(y))\Omega)$$

für das freie elektromagnetische Feld $A^\mu(x)$ in der Coulomb-Eichung von Interesse. Man geht hierbei von der Zweipunktfunktion aus, deren Darstellung sich aus unseren früheren Formeln⁸⁶ ergibt:

$$(\Omega, A^\mu(x)A^\nu(y)\Omega) = (2\pi)^{-3} \int \frac{d^3k}{2\omega} e^{-ik(x-y)} P^{\mu\nu}(k)$$

Hier haben wir

$$P^{\mu\nu}(k) = \begin{cases} \delta^{ij} - k^i k^j / \mathbf{k}^2 & \mu = i, \nu = j, i, j = 1, 2, 3 \\ 0 & \mu = 0 \text{ oder } \nu = 0 \end{cases} \quad (266)$$

⁸⁶Das Photon besitzt zwei mögliche Polarisationszustände, denen Polarisationsvektoren $\mathbf{e}(\mathbf{k})$ und $\overline{\mathbf{e}}(\mathbf{k})$ entsprechen. Es gilt die Vollständigkeitsrelation

$$\mathbf{e}(\mathbf{k}) \otimes \overline{\mathbf{e}}(\mathbf{k}) + \overline{\mathbf{e}}(\mathbf{k}) \otimes \mathbf{e}(\mathbf{k}) + \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} / \mathbf{k}^2 = \mathbf{1}$$

Alles weitere ergibt sich aus (255).

gesetzt. Nun gilt $iD_F^{\mu\nu}(x) = \Theta(x^0)D_+^{\mu\nu}(x) + \Theta(-x^0)D_+^{\mu\nu}(-x)$, und mit dem gleichen Argument, daß wir oben benutzten, gilt:

$$D_F^{\mu\nu}(x) = (2\pi)^{-4} \int d^4k \frac{e^{-ikx}}{k^2 + i0} P^{\mu\nu}(k)$$

Es sieht so aus, als ob wir keine Chance haben, mit dieser Feynman-Funktion eine Lorentz-invariante Quantenfeldtheorie konstruieren zu können.

6.7 Was rettet die Lorentz-Invarianz der QED?

Schauen wir uns die Funktion $P^{\mu\nu}(k)$ in (266) etwas näher an. Indem wir den Richtungsvektor $n = (n^\mu) = \{1, 0, 0, 0\}$ einführen, können wir schreiben:

$$P^{\mu\nu}(k) = -g^{\mu\nu} + \frac{(nk)(k^\mu n^\nu + n^\mu k^\nu) - k^\mu k^\nu - n^\mu n^\nu k^2}{(nk)^2 - k^2}$$

Wir müssen prüfen, ob die Wahl des Richtungsvektors n irgendeine physikalische Konsequenz hat. Die Feynman-Funktion des Photons läßt sich wie folgt aufspalten:

$$D_F^{\mu\nu}(x) = -g^{\mu\nu} D_F(x) + \partial^\mu B^\nu + \partial^\nu B^\mu + n^\mu n^\nu C(x)$$

mit

$$\begin{aligned} D_F(x) &= (2\pi)^{-4} \int d^4k \frac{e^{-ikx}}{k^2 + i0} = (2\pi)^{-2} \frac{i}{x^2 - i0} \\ B^\mu(x) &= i(2\pi)^{-4} \int d^4k \frac{e^{-ikx}}{k^2 + i0} \frac{(nk)n^\mu - \frac{1}{2}k^\mu}{(nk)^2 - k^2} \\ C(x) &= -(2\pi)^{-4} \int d^4k \frac{e^{-ikx}}{(nk)^2 - k^2} \end{aligned}$$

wobei die Funktion $C(x)$ dem Coulomb-Potential verwandt ist:

$$\begin{aligned} C(x) &= -(2\pi)^{-4} \int_{-\infty}^{\infty} dk^0 e^{-ik^0 x^0} \int d^3k \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}}{\mathbf{k}^2} \\ &= -\delta(x^0) \frac{1}{4\pi r} \quad (r = |\mathbf{x}|) \end{aligned}$$

Alle störungstheoretischen Ausdrücke der QED leiten sich aus dem Wirkungsintegral ab,

$$\int d^4x \mathcal{L}_I(x) = -e \int d^4x A^\mu(x) j_\mu(x) \quad ,$$

d.h. $D_F^{\mu\nu}(x)$ tritt immer zusammen mit einem erhaltenen Strom $j_\mu(x)$ auf, und zwar so, daß gleichzeitig über x integriert wird. Derjenige Anteil der Feynman-Funktion, der $B^\mu(x)$ enthält, kann keinen Beitrag liefern. Denn eine partielle Integration führt diesen Beitrag über in den Ausdruck

$$\int d^4x \partial^\mu j_\mu(x) B(x-y),$$

und die Stromerhaltung sorgt dafür, daß er verschwindet. Wir dürfen also diesen Anteil überall, wo er auftritt, einfach ignorieren. Anders steht es mit dem Anteil, der die Funktion $C(x)$ enthält: Er ist immer vorhanden und, weil er die Invarianz stört, unerwünscht. Sein Auftreten hängt mit unserer Fehleinschätzung der Coulomb-Wechselwirkung und der mißverstandenen Rolle des skalaren Potentials zusammen. Wir kehren deshalb noch einmal zu dem Ausgangspunkt zurück.

Die Lagrange-Dichte für die Wechselwirkung des Strahlungsfeldes $A^\mu = \{V, \mathbf{A}\}$ mit einem äußeren erhaltenen Strom $j^\mu = \{\rho, \mathbf{j}\}$ kann wie folgt geschrieben werden:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \{(\dot{\mathbf{A}} + \nabla V)^2 - (\nabla \times \mathbf{A})^2\} - \rho V + \mathbf{j} \cdot \mathbf{A}$$

Bemerkenswert ist: \mathcal{L} enthält nicht \dot{V} , d.h. der zu V kanonisch konjugierte „Impuls“ $\partial \mathcal{L} / \partial \dot{V}$ verschwindet identisch. Wir schließen daraus, daß das skalare Potential *keine eigenständige dynamische Variable* der Theorie ist. Dies äußert sich z.B. darin, daß man bei der Beschreibung von elektromagnetischen Wellen (Photonen) auf das skalare Potential verzichten und $V(x) = 0$ setzen kann. Die allgemeine Situation erlaubt die folgende Feststellung: *Das skalare Potential V kann aus der Theorie eliminiert werden unter Preisgabe der Lorentz-invarianten Form der Lagrange-Dichte und der Feldgleichungen*⁸⁷. Eine der Feldgleichungen, nämlich

$$\rho = -\Delta V - \nabla \cdot \dot{\mathbf{A}}$$

erweist sich als bloße „Nebenbedingung“, sobald die Coulomb-Eichung $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ gewählt wird. Indem wir die Poisson-Gleichung lösen, erhalten wir V als eine durch ρ ausdrückbare Größe:

$$V(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3x' \frac{\rho(t, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

⁸⁷Dies heißt nicht, daß die Lorentz-Invarianz der QED aufgegeben werden soll. Es ist nur das äußere Erscheinungsbild der Theorie, das die Invarianz verhüllt und nicht offenbar werden läßt. Das erklärte Ziel dieser Bemühungen ist gerade, die Invarianz in dem S-Operator wieder klar zum Vorschein kommen zu lassen.

Die Lagrange-Funktion $L(t) = \int d^3x \mathcal{L}(t, \mathbf{x})$ kann – nach Ausführung einer partiellen Integration – wie folgt geschrieben werden:

$$L = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{A}}^2 - V \nabla \cdot \dot{\mathbf{A}} - \frac{1}{2} V \Delta V - \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{A})^2 - \rho V + \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} \right]$$

Mit $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ und $-\Delta V = \rho$ wird daraus

$$L = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{A}}^2 - \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{A})^2 + \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} \right] - E_c$$

mit der Coulomb-Energie

$$E_c(t) = \frac{1}{2} \int d^3x \int d^3x' \frac{\rho(t, \mathbf{x}) \rho(t, \mathbf{x}')}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} ,$$

die keine Feldvariablen enthält und einen Teil der Energie des Photonen-Vakuums zur Zeit t repräsentiert. Man erkennt, daß die Definition der Coulomb-Energie eine Schar von Hyperebenen $t = \text{const.}$ des M_4 auszeichnet und damit von dem gewählten Inertialsystem abhängt.

Eine Legendre-Transformation führt auf den Hamilton-Operator:

$$\begin{aligned} H &= E_c + \int d^3x \dot{\mathbf{A}}^2 - L \\ &= \int d^3x \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{A}}^2 + \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{A})^2 - \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} \right] . \end{aligned}$$

Für das elektrische Feld gilt weiterhin $\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}} - \nabla V$, wobei V durch die Ladungsdichte ρ auszudrücken ist, und die elektrische Feldenergie zerfällt in zwei Bestandteile, den *Coulomb-Anteil* und den *Photonen-Anteil*:

$$\frac{1}{2} \int d^3x \mathbf{E}^2 = E_c + \frac{1}{2} \int d^3x \dot{\mathbf{A}}^2$$

Nachdem dies alles klargestellt ist, können wir den Fehler erkennen, den wir bei der Konstruktion des S-Operators begingen. Unsere Annahme war, daß das wechselwirkende Feld A^μ asymptotisch (für $t \rightarrow -\infty$) in das Feld A_{ein}^μ übergeht. Dies ist für $\mu = 1, 2, 3$ sinnvoll, versagt aber für $\mu = 0$, sobald wir die Coulomb-Eichung zugrundelegen. Denn das Coulomb-Potential ist zu allen Zeiten vorhanden, während $A_{ein}^0 = 0$ gilt. Wie ist der Fehler zu korrigieren? Aus der Lagrange-Dichte der QED

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \text{Re}(\bar{\psi} i \not{D} \psi) - m \bar{\psi} \psi$$

gewinnen wir durch Eliminierung von A^0 die Lagrange-Funktion

$$\begin{aligned}
L &= L_0 + L_I \\
L_0 &= \int d^3x \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{A}}^2 - \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{A})^2 + \text{Re}(\bar{\psi} i \not{\partial} \psi) - m \bar{\psi} \psi \right] \\
L_I &= -e \int d^3x \sum_{i=1}^3 \bar{\psi} \gamma^i \psi A^i - \frac{1}{2} e^2 \int d^3x \int d^3x' \frac{\psi^*(t, \mathbf{x}) \psi(t, \mathbf{x}) \psi^*(t, \mathbf{x}') \psi(t, \mathbf{x}')}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}
\end{aligned}$$

In der Coulomb-Eichung des Feldes $A^\mu = A_{ein}^\mu$ gilt

$$-\sum_{i=1}^3 \bar{\psi} \gamma^i \psi A^i = j_\mu A^\mu .$$

Beachten wir noch

$$\psi^* \psi = j_0 = n^\mu j_\mu, \quad n = (1, 0, 0, 0), \quad C(x) = -\delta(x^0) \frac{1}{4\pi r}$$

so erhalten wir den Streuoperator in der Form

$$\begin{aligned}
S &= e^{-i\alpha} T \exp \left\{ i \int dt L_I(t) \right\} \\
&= e^{-i\alpha} T \exp \left\{ ie \int d^4x j_\mu(x) A^\mu(x) \right. \\
&\quad \left. + i \frac{e^2}{2} \int d^4x \int d^4y j_\mu(x) j_\nu(y) n^\mu n^\nu C(x-y) \right\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ie)^n}{n!} S^{(n)}
\end{aligned}$$

die Abkürzungen $j^\mu =: \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$: (aus bekannten Gründen sind wir hier zur Normalordnung übergegangen) und

$$e^{i\alpha} = (\Omega, T \exp \{ i \int dt L_I(t) \} \Omega)$$

benutzend mit der Vereinbarung, daß in L_I die freien Felder A^μ und ψ eingesetzt werden und für das Feld A^μ die Coulomb-Eichung gewählt wird. Wie man leicht einsieht, gilt $S^{(0)} = 1$ und $S^{(1)} = 0$. Der erste nicht-triviale Term der Entwicklung ist damit $S^{(2)} =$

$$\begin{aligned}
&\int d^4x \int d^4y T(j_\mu(x) j_\nu(y)) \{ T(A^\mu(x) A^\nu(y)) - i n^\mu n^\nu C(x-y) \} \\
&= \int d^4x \int d^4y T(j_\mu(x) j_\nu(y)) \{ : A^\mu(x) A^\nu(y) : + i D_F^{\mu\nu}(x-y) - i n^\mu n^\nu C(x-y) \} \\
&= \int d^4x \int d^4y T(j_\mu(x) j_\nu(y)) \{ : A^\mu(x) A^\nu(y) : - i g^{\mu\nu} D_F(x-y) \}
\end{aligned}$$

Die Berücksichtigung der Coulomb-Wechselwirkung hat also gerade den Effekt, daß an die Stelle der nicht-invarianten Feynman-Funktion $D_F^{\mu\nu}(x)$ die invariante Funktion $-g^{\mu\nu}D_F(x)$ tritt. Man kann auf kombinatorischen Wege zeigen, daß diese Behauptung für alle Ordnungen der Störungstheorie zutrifft.

6.8 Die Gupta-Bleuler-Methode

Die effektive Feynman-Funktion, die wir für das Photonfeld gewonnen haben, legt die Frage nahe, ob man das freie Photonfeld nicht so quantisieren kann, daß⁸⁸

$$[A_\mu(x), A_\nu(y)] = -ig_{\mu\nu}D(x-y) \quad (267)$$

von vornherein gilt. Dieser Ansatz hätte nämlich die Gültigkeit von

$$(\Omega, A_\mu(x)A_\nu(y)\Omega) = -g_{\mu\nu}D_+(x-y)$$

und

$$(\Omega, T(A_\mu(x)A_\nu(y))\Omega) = -ig_{\mu\nu}D_F(x-y)$$

– wie gewünscht – zur Folge, und eine separate Diskussion der Coulomb-Kraft wäre in einem solchen Rahmen unnötig. Mehr noch, der Ansatz (267) garantiert manifeste Lorentz-Kovarianz und erfüllt die Lokalitätsbedingung: Aus $(x-y)^2 < 0$ folgt $[A_\mu(x), A_\nu(y)] = 0$. Die Quantisierung des Vektorfeldes A_μ , die von (267) ausgeht, wurde zum erstenmal von Gupta und Bleuler vorgeschlagen. Wir beschreiben das Verfahren im Detail. Zunächst zerlegt man das Feld geeignet:

$$A_\mu(x) = (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3k}{2\omega} \{a_\mu(k)e^{-ikx} + a_\mu^\dagger(k)e^{ikx}\}$$

und charakterisiert das Vakuum durch $a_\mu(k)\Omega = 0$ und $(\Omega, \Omega) = 1$. Es ist unmittelbar einsichtig, daß die Quantisierungsvorschrift (267) mit den folgenden Kommutatorregeln identisch ist:

$$\begin{aligned} [a_\mu(k), a_\nu^\dagger(k')] &= -2\omega\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')g_{\mu\nu} \\ [a_\mu(k), a_\nu(k')] &= [a_\mu^\dagger(k), a_\nu^\dagger(k')] = 0 \end{aligned}$$

Der Raum der zulässigen Wellenpakete $\phi = \{\phi^\mu\}$ sei

$$\mathcal{E} = \left\{ \phi : \int \frac{d^3k}{2\omega} |\phi^\mu(\mathbf{k})|^2 < \infty, \mu = 0, \dots, 3 \right\}$$

⁸⁸Man schreibt allgemein $D(x) = \Delta(x, m=0)$ und ebenso $D_*(x) = \Delta_*(x, m=0)$, wobei * für eines der folgenden Zeichen steht: +, F, ret, av, P, 1.

Falls wir jedem $\phi \in \mathcal{E}$ die Operatoren

$$\begin{aligned} a^\dagger(\phi) &= \int \frac{d^3k}{2\omega} a_\mu^\dagger(k) \phi^\mu(\mathbf{k}) \\ a(\phi) &= \int \frac{d^3k}{2\omega} \overline{\phi^\mu(\mathbf{k})} a_\mu(k) \end{aligned}$$

zuordnen, erhalten wir die Kommutatorregel

$$[a(\phi), a^\dagger(\phi')] = (\phi, \phi') := - \int \frac{d^3k}{2\omega} \overline{\phi^\mu(\mathbf{k})} \phi'_\mu(\mathbf{k})$$

aus der wir das „Normquadrat“ der Einteilchenzustände ableiten:

$$\begin{aligned} \|a^\dagger(\phi)\Omega\|^2 &= (\Omega, a(\phi)a^\dagger(\phi)\Omega) \\ &= (\Omega, [a(\phi), a^\dagger(\phi)]\Omega) = (\phi, \phi) \end{aligned} \quad (268)$$

Bei dem Gupta-Bleuler-Verfahren zahlen wir einen hohen Preis: Das natürliche „Skalarprodukt“ (ϕ, ϕ') des Raumes \mathcal{E} ist nicht positiv definit; (ϕ, ϕ) kann sowohl positive wie negative Werte annehmen; \mathcal{E} ist kein Hilbertraum, sondern ein Raum mit *indefiniten Metrik*, und (ϕ, ϕ') ist kein Skalarprodukt, sondern nur eine *hermitesche Form*. Die statistische Interpretation der Quantentheorie beruht aber gerade darauf, daß das Skalarprodukt im Zustandsraum *positiv definit* ist. Diese Grundvoraussetzung zu opfern kann doch nur heißen, daß wir über *unphysikalische* Zustände des Photons sprechen. Das hier eingeführte hypothetische Photon hat *vier* unabhängige Polarisationszustände. Zwei davon müssen unechte Zustände (engl. *spurious states*) sein.

Auch wenn \mathcal{E} kein Hilbertraum ist, kann man den Fock-Raum $F_+(\mathcal{E})$ in bekannter Weise konstruieren. Er ist der Darstellungsraum für das Gupta-Bleuler-Feld $A_\mu(x)$. Das indefinite Skalarprodukt in \mathcal{E} induziert ein indefinites Skalarprodukt in $F_+(\mathcal{E})$, d.h. der Fock-Raum über \mathcal{E} ist ebenfalls kein Hilbertraum. Wenn wir wissen, wie wir den „echten“ Einteilchenraum \mathcal{H} der beobachtbaren Photonen aus dem Raum \mathcal{E} der fiktiven Photonen zu konstruieren haben, ist damit auch klar, wie der „echte“ Fockraum $F_+(\mathcal{H})$ zu bekommen ist. Die Methode beruht auf dem folgenden einfachen Sachverhalt.

Satz Für zwei Vierervektoren k und q mit $k^2 = 0$ (jedoch $k \neq 0$) gilt:

1. Aus $kq = 0$ folgt $q^2 \leq 0$.
2. Aus $kq = 0$ und $q^2 = 0$ folgt $q = ck$ mit $c \in \mathbf{R}$.

Beweis. Nach Wahl eines geeigneten Bezugssystems dürfen wir $k_\mu = (a, 0, 0, a)$ mit $a \neq 0$ voraussetzen. Aus $kq = 0$ folgt dann $q_0 = q_3$, also $q^2 = -q_1^2 - q_2^2 \leq$

$0, q^2 = 0$ ist danach nur für $q_1 = q_2 = 0$ erfüllbar. In diesem Fall gilt $q_\mu = (b, 0, 0, b) = ck_\mu$ mit $c = b/a$. q.e.d.

1.Schritt. Wir beschränken die Einteilchenzustände auf den Raum

$$\mathcal{E}_+ = \{\phi \in \mathcal{E} : k_\mu \phi^\mu(k) = 0\}$$

Der eben bewiesene Satz erlaubt nämlich von $\phi \in \mathcal{E}_+$ auf $(\phi, \phi) \geq 0$ zu schließen⁸⁹. Obwohl es sich bei \mathcal{E}_+ um einen Unterraum von \mathcal{E} handelt, für den (ϕ, ϕ') eine *positive hermitesche Form* darstellt, existieren in \mathcal{E}_+ immer noch genügend viele Zustände ϕ mit $(\phi, \phi) = 0$. Die Form ist *entartet*.

2.Schritt. Wir betrachten den Unterraum⁹⁰

$$\mathcal{E}_0 = \{\phi \in \mathcal{E} : k^\mu \phi^\nu(k) = k^\nu \phi^\mu(k)\} \subset \mathcal{E}_+$$

Der Teil 2 des obigen Satzes sagt, daß der Raum \mathcal{E}_0 alle Zustände $\phi \in \mathcal{E}_+$ mit $(\phi, \phi) = 0$ enthält. Da im Raum \mathcal{E}_+ die Cauchy-Schwarz-Ungleichung gilt, folgt $(\phi, \phi') = 0$ für alle $\phi \in \mathcal{E}_0$ und $\phi' \in \mathcal{E}_+$. Der physikalische Einteilchenraum ist der Quotientenraum⁹¹

$$\mathcal{H} = \mathcal{E}_+ / \mathcal{E}_0$$

Damit ist der Zusammenhang mit den beobachtbaren Zuständen hergestellt. Denn der physikalische Fock-Raum kann nun als $F_+(\mathcal{H})$ erklärt werden. Dieser Raum läßt sich allerdings auch direkt aus dem Fock-Raum $F_+(\mathcal{E}_+)$ erzeugen⁹², indem man darin alle Norm-0-Zustände aufsucht, um dann zum Quotientenraum überzugehen. Konkret: Es sei $F_0(\mathcal{E}_+)$ der Norm-0-Unterraum in $F_+(\mathcal{E}_+)$. Man erhält in so:

$$F_0(\mathcal{E}_+) = \{a^\dagger(\phi)\Phi \mid \phi \in \mathcal{E}_0, \Phi \in F_+(\mathcal{E}_+)\}$$

Man hat nun die natürliche Isomorphie

$$F_+(\mathcal{E}_+ / \mathcal{E}_0) \cong F_+(\mathcal{E}_+) / F_0(\mathcal{E}_+)$$

⁸⁹Man wende den Satz einmal für $q_\mu = \text{Re}\phi_\mu(k)$ und ein zweites Mal für $q_\mu = \text{Im}\phi_\mu(k)$ an, um $\overline{\phi_\mu(k)}\phi^\mu(k) \leq 0$ zu erhalten.

⁹⁰Eine äquivalente Charakterisierung von \mathcal{E}_0 lautet: Es existiert eine komplexe Funktion $c(k)$ derart, daß $\phi^\mu(k) = c(k)k^\mu$ gilt. Da $k^2 = 0$ gilt, folgt $k_\mu \phi^\mu(k) = 0$, also $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_+$.

⁹¹Zwei Vektoren ϕ und ϕ' im Raum \mathcal{E}_+ werden als *äquivalent* angesehen und man schreibt $\phi \sim \phi'$, falls $\phi - \phi' \in \mathcal{E}_0$ gilt, ausführlich, falls $\phi_\mu(k) - \phi'_\mu(k) = c(k)k_\mu$ gilt. Die Äquivalenzklassen sind die Vektoren des Quotientenraumes \mathcal{H} . Die positive hermitesche Form auf \mathcal{E}_+ induziert eine *nicht-entartete positive hermitesche Form*, also ein *Skalarprodukt* auf \mathcal{H} . Damit wird \mathcal{H} zu einem Hilbertraum.

⁹²Eine interessante, häufig benutzte Charakterisierung des Raumes $F_+(\mathcal{E}_+)$ kennzeichnet ihn als den Raum aller Vektoren $\Phi \in F_+(\mathcal{E})$ mit der Eigenschaft $\partial^\mu A_\mu^{(+)}\Phi = 0$. Auf diese Weise wird deutlich, daß die Lorentz-Bedingung wenigstens teilweise erfüllt wird.

und kann von ihr Gebrauch machen, wannimmer es nützlich ist. Zum Beispiel in der folgenden Definition. Wir sagen, ein Operator A auf dem Fock-Raum $F_+(\mathcal{E})$ aller Gupta-Bleuler-Zustände *transformiere physikalische Zustände wieder in solche*, kurz, A sei ein *physikalischer Operator*, wenn gilt:

$$1. \quad AF_+(\mathcal{E}_+) \subset F_+(\mathcal{E}_+) \quad (269)$$

$$2. \quad AF_0(\mathcal{E}_+) \subset F_0(\mathcal{E}_+) \quad (270)$$

Denn genau unter diesen Bedingungen induziert der Operator A einen Operator \hat{A} auf dem Quotientenraum. Die Bedingungen müssen erfüllt sein für jeden physikalisch sinnvollen S-Operator sowie für jede meßbare Größe, wie „Impuls“, „Drehimpuls“ usw.

Das Verfahren von Gupta und Bleuler erscheint auf den ersten Blick nur wie ein mathematischer Trick, dazu erdacht, um die richtige Feynman-Funktion auf direktem Wege zu erzeugen. Die Überzeugung setzt sich aber mehr und mehr durch, daß hier ein wesentliches Strukturelement der Eichtheorien entdeckt worden ist. Mit den masselosen Eichbosonen untrennbar verknüpft ist das Auftreten von unphysikalischen Zuständen. Wir sehen sie nie im Experiment, und dennoch sind sie für die vollständige Fassung der Theorie unverzichtbar.

Bei konkreten Rechnungen in der QED benötigt man die Wick-Identität für das Photonfeld in der Gupta-Bleuler-Darstellung. Sie folgt auf völlig analoge Weise wie entsprechende Identität für das Skalarfeld. Wir geben deshalb nur das Resultat an:

$$T \exp\{iA(j)\} =: \exp\{iA(j)\} \exp\{\frac{1}{2}iD_F(j * j)\}$$

Die Bezeichnungen sind:

$$A(j) = \int d^4x A^\mu(x) j_\mu(x) \quad (271)$$

$$D_F(j * j) = \int d^4x \int d^4y j^\mu(x) j_\mu(y) D_F(x - y) \quad (272)$$

wobei j^μ eine reelle Quellfunktion darstellt, die nicht notwendig $\partial_\mu j^\mu = 0$ erfüllt. Falls hingegen j^μ einen erhaltenen Strom darstellt, so ist $S = T \exp\{iA(j)\}$ gerade der S-Operator für die Wechselwirkung des Strahlungsfeldes mit einer äußeren Quelle. In diesem Fall gilt

$$iA(j) = a(\phi) - a^\dagger(\phi) \quad (273)$$

für ein $\phi \in \mathcal{E}_+$ (denn aus $\partial_\mu j^\mu(x) = 0$ folgt $k_\mu \phi^\mu(k) = 0$). Diese Gleichung kennzeichnet, wie wir bereits wissen, die Funktion $\phi^\mu(k)$ im wesentlichen als

die Fourier-Transformierte von $j^\mu(x)$ mit Beschränkung auf die Werte auf dem Vorwärtslichtkegel $k^0 = \omega = |\mathbf{k}|$. Damit ist nun klar, daß $A(j)$ die Bedingungen für einen physikalischen Operator erfüllt, sobald $\partial_\mu j^\mu = 0$ gilt. Mit $A(j)$ erfüllt auch jede Funktion von $A(j)$ diese Bedingungen, insbesondere also der S-Operator für das Modell mit der äußeren Quelle. Dieser Operator gibt somit Anlaß zu einem *unitären* Operator \hat{S} auf dem physikalischen Hilbertraum $F_+(\mathcal{E}_+)/F_0(\mathcal{E}_+)$. Es sei $\hat{\Omega}$ das physikalische Vakuum⁹³. Dann ermittelt man leicht die Übergangsamplitude

$$(\hat{\Omega}, \hat{S}\hat{\Omega}) = (\Omega, S\Omega) = \exp\left\{\frac{1}{2}iD_F(j * j)\right\} \quad (274)$$

$$= \exp\left\{-\frac{1}{8\pi^2} \int d^4x \int d^4y \frac{j^\mu(x)j_\mu(y)}{(x-y)^2 - i0}\right\} \quad (275)$$

wobei wir die Formel

$$D_F(x) = \frac{i}{4\pi^2} \frac{1}{x^2 - i0}$$

benutzten. Mit der Zerlegung⁹⁴

$$\frac{1}{x^2 - i0} = \frac{P}{x^2} + i\pi\delta(x^2)$$

erhält man die Wahrscheinlichkeit

$$|(\Omega, S\Omega)|^2 = \exp\left\{-P \int d^4x \int d^4y \frac{j^\mu(x)j_\mu(y)}{4\pi^2(x-y)^2}\right\} \leq 1$$

Es ist dem Doppelintegral nicht unmittelbar anzusehen, daß es positiv ist. Man erhält jedoch für die gleiche Wahrscheinlichkeit auch eine andere Darstellung⁹⁵:

$$|(\Omega, e^{a(\phi) - a^\dagger(\phi)}\Omega)|^2 = e^{-\|\phi\|^2} = \exp\left\{\int \frac{d^3k}{2\omega} \overline{\phi_\mu(k)}\phi^\mu(k)\right\}.$$

Da ϕ in \mathcal{E}_+ liegt, gilt $\overline{\phi_\mu(k)}\phi^\mu(k) < 0$ und somit $\|\phi\|^2 \geq 0$.

6.9 Erzeugende Funktionale

Aus der Art der Konstruktion des S-Operators gewinnt man den Eindruck, es handle sich dabei um eine sehr eingeschränkte Strukturaussage. Denn wo

⁹³Konkret: ist $\Omega \in F_+(\mathcal{E}_+)$ das Gupta-Bleuler-Vakuum, so verstehen wir unter $\hat{\Omega}$ die Klasse aller Vektoren in $F_+(\mathcal{E}_+)$, die sich von Ω nur durch Norm-0-Vektoren unterscheiden.

⁹⁴ P bezeichnet den Hauptwert (auch Prinzipalwert genannt). In diesem Fall ist er identisch mit dem Realteil des Ausdrucks.

⁹⁵Siehe die analoge Diskussion im Abschnitt 6.1.

findet man in diesem Schema das wechselwirkende Feld? Dieser Eindruck täuscht. Wir wollen jetzt zeigen, daß es möglich ist, im Prinzip jede gewünschte Information aus dem S-Operator zu extrahieren, wenn wir die zugrunde liegende Dichte $\mathcal{L}_I(\phi)$ um Quellterme $\phi(j)$ bereichern:

$$S(j) = T \exp \left(i\mathcal{L}_I(\phi) + i\phi(j) \right).$$

Durch diesen technischen Kunstgriff wird $S(0)^{-1}S(j)$ zum erzeugenden Operator für die zeitgeordneten Produkte des Feldes ϕ und sein Vakuumerwartungswert zum erzeugenden Funktional für die τ -Funktionen⁹⁶:

$$\tau(x_1, \dots, x_n)_{r_1, \dots, r_n} = (\Omega, T(\phi_{r_1}(x_1) \cdots \phi_{r_n}(x_n))\Omega) \quad (276)$$

Wir wählen die folgende allgemeine Aussage als Fundament unserer Überlegungen:

Satz *Es seien $L(t)$ und $M(t)$ zwei t -abhängige selbstadjungierte Operatoren, definiert auf dem Intervall $a \leq t \leq b$. Für $s \in \mathbf{R}$ sei der unitäre Operator*

$$U(b, a; s) = T \exp \left\{ i \int_a^b dt [L(t) + sM(t)] \right\} \quad (277)$$

erklärt. Dann gilt

$$\frac{d}{ds} U(b, a; s) = i \int_a^b dt U(b, t; s) M(t) U(t, a; s) \quad (278)$$

Beweis. Wir teilen das Intervall $[a, b]$ in n gleiche Teilstücke der Länge $\Delta t = (b - a)/n$ und setzen $t_k = a + (k - \frac{1}{2})\Delta t$ für $k = 1, \dots, n$, sowie $H_k = L(t_k) + sM(t_k)$. Dann gilt (vgl. das Verfahren auf S.87):

$$U(b, a; s) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{i\Delta t H_n} \cdots e^{i\Delta t H_2} e^{i\Delta t H_1}$$

Nun gilt offenbar

$$\frac{d}{ds} e^{i\Delta t H_k} = i\Delta t M(t_k) e^{i\Delta t H_k} + O((\Delta t)^2)$$

Also

$$\frac{d}{ds} U(b, a; s) = i \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \Delta t e^{i\Delta t H_n} \cdots e^{i\Delta t H_{k+1}} M(t_k) e^{i\Delta t H_k} \cdots e^{i\Delta t H_1}$$

⁹⁶Diese Funktionen werden gelegentlich auch die *Greenschen Funktionen* der Feldtheorie genannt.

Im Limes $n \rightarrow \infty$ entsteht das Integral auf der rechten Seite von (278).
q. e. d.

Durch fortgesetzte Differentiation nach s und Anwendung der Basisformel (278) gelangen wir zu der Aussage

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{ds^n} U(b, a; s) = \\ n! i^n \int_a^b dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \cdots \int_a^{t_{n-1}} dt_n U(b, t_1; s) M(t_1) U(t_1, t_2; s) M(t_2) \cdots \\ U(t_{n-1}, t_n; s) M(t_n) U(t_n, a; s) \end{aligned} \quad (279)$$

Aus der Definition (277) folgt unmittelbar das Kompositionsgesetz

$$U(t, t'; s) U(t', a; s) = U(t, a; s) \quad a \leq t' \leq t$$

Daraus ergibt sich die Darstellung

$$U(t, t'; s) = U(t, a; s) U(t', a; s)^{-1}$$

die wir nun n -mal, nämlich für $(t, t') = (b, t_1), (t_1, t_2), \dots, (t_{n-1}, t_n)$ in (279) anwenden wollen. Um das Ergebnis übersichtlich zu gestalten, ermitteln wir die Ableitungen an dem speziellen Punkt $s = 0$ und setzen zur Abkürzung

$$U(t, t') = U(t, t'; 0) \quad (280)$$

$$M(t, a) = U(t, a)^{-1} M(t) U(t, a) \quad (281)$$

Wir erhalten so die Taylor-Entwicklung um den Punkt $s = 0$:

$$\begin{aligned} U(b, a; s) &= U(b, a) \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n s^n}{n!} \int_a^b dt_1 \cdots \int_a^{t_{n-1}} dt_n T(M(t_1, a) \cdots M(t_n, a)) \right\} \\ &= U(b, a) T \exp \left\{ i s \int_a^b dt M(t, a) \right\} \end{aligned} \quad (282)$$

Und nun die Anwendung dieser bemerkenswerten Formel: Es sei

$$L(t) = \int d^3x \mathcal{L}_I(\phi_{ein}(t, \mathbf{x})) \quad (283)$$

$$M(t) = \int d^3x \sum_r \phi_{ein,r}(t, \mathbf{x}) j_r(t, \mathbf{x}) \quad (284)$$

mit der Vereinbarung, daß j_r eine Grassmann-Variable ist, sobald ϕ_r eine Fermi-Feld ist. Die beliebigen Funktionen j_r werden als *Quellfunktionen* be-

zeichnet. Der Limes $a \rightarrow -\infty$, $b \rightarrow +\infty$ führt dann direkt zu dem j -abhängigen S-Operator

$$\begin{aligned} S(j) &= T \exp \left\{ i \int d^4x \left[\mathcal{L}_I(\phi_{ein}(x)) + \sum_r \phi_{ein,r}(x) j_r(x) \right] \right\} \\ &= U(\infty, -\infty; 1) \end{aligned}$$

Wir erinnern nun an die Formeln des Abschnitts 6.2, die den Zusammenhang zwischen dem freien Feld ϕ_{ein} und dem wechselwirkenden Feld ϕ herstellen. Aus ihnen und aus (281) sowie (284) folgt, daß

$$M(t, -\infty) = \int d^3x \sum_r \phi_r(t, \mathbf{x}) j_r(t, \mathbf{x})$$

gilt. Wie schon früher, benutzen wir die Abkürzung

$$\phi(j) = \int d^4x \sum_r \phi_r(x) j_r(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dt M(t, -\infty).$$

Dann nimmt (282) die Gestalt $S(j) = S(0) T \exp\{i\phi(j)\}$ an; also gilt

$$\boxed{T \exp\{i\phi(j)\} = S(0)^{-1} S(j)} \quad (285)$$

wobei rechterhand nur Ausdrücke in dem freien Feld ϕ_{ein} auftreten. Insbesondere gilt

$$\phi_r(x) = -i S(0)^{-1} \left. \frac{\delta}{\delta j_r(x)} S(j) \right|_{j=0}.$$

Als weitere Annahme fügen wir nun die Bedingung hinzu, daß das Vakuum die Beziehung $S(0)\Omega = e^{i\alpha}\Omega$ erfüllt. Dann folgt aus (285)

$$F(j) := (\Omega, T \exp\{i\phi(j)\}\Omega) = \frac{(\Omega, S(j)\Omega)}{(\Omega, S(0)\Omega)}.$$

Entwickelt man hier beide Seiten der Gleichung nach Potenzen von j , so gewinnt man eine Hierarchie von Formeln für die τ -Funktionen (276). Für die Entwicklung von $F(j)$ schreibt man

$$F(j) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots \int d^4x_n \sum_{r_1, \dots, r_n} \tau(x_1, \dots, x_n)_{r_1, \dots, r_n} j_{r_1}(x_1) \cdots j_{r_n}(x_n)$$

Man nennt daher $F(j)$ das *erzeugende Funktional* dieser Funktionen.

Falls wir mit Hilfe des Funktionals $F(j)$ nur ein freies reelles Skalarfeld der Masse m beschreiben wollen, dessen Vakuumerwartungswert die reelle Zahl c ist, so folgt aus (261) die Formel

$$\log F(j) = ic \int d^4x j(x) - \frac{1}{2}i\Delta_F(j * j, m)$$

Es ist typisch für das freie Feld, daß die Entwicklung von $\log F(j)$ nach j bereits nach dem quadratischen Term abbricht. Es erscheint aus diesem Grunde sinnvoll, auch in der allgemeinen Situation das erzeugende Funktional $F_*(j) = \log F(j)$ und mit ihm „einfachere“ τ_* -Funktionen einzuführen⁹⁷:

$$F_*(j) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots \int d^4x_n \sum_{r_1, \dots, r_n} \tau_*(x_1, \dots, x_n)_{r_1, \dots, r_n} j_{r_1}(x_1) \cdots j_{r_n}(x_n)$$

Ein Feld (Bose oder Fermi) heißt *quasifrei*, wenn $\tau_*(x_1, \dots, x_n) = 0$ für alle $n \geq 3$ gilt. Solche Felder sind in einem gewissen Sinn trivial, weil für sie der S-Operator trivial wird: $S = 1$. Man kann zeigen: Verschwinden die τ_* -Funktionen von einem gewissen n an, so handelt es sich bereits um ein quasifreies Feld⁹⁸. Die Konsequenz davon ist, daß es in den interessanten Situationen nichtverschwindende τ_* -Funktionen beliebig hoher Ordnung gibt.

In jedem Fall ist es möglich die τ -Funktionen auf die τ_* -Funktionen zurückzuführen, indem man die Exponentialfunktion in $F(j) = \exp F_*(j)$ in eine Taylorreihe entwickelt.

6.10 Feynman-Graphen

6.11 Graphen im Ortsraum

Die störungstheoretische Behandlung der Wechselwirkung vollzieht sich in drei Schritten. Jeder Schritt zerlegt den S-Operator in einfachere Ausdrücke:

⁹⁷Diese Funktionen heißen in der englischsprachigen Literatur *connected τ functions*, da sie den Summen aller *zusammenhängenden* Feynman-Graphen der Ordnung n entsprechen. Aus der Sicht der Störungstheorie, sind die τ_* -Funktionen in der Tat „einfacher“. Es besteht eine gewisse Analogie zu Begriffsbildungen in der Wahrscheinlichkeitstheorie. Ist nämlich X eine reelle Zufallsvariable und bedeutet E der Erwartungswert, so bezeichnet $F(t) = E[e^{itX}] = 1 + \sum m_n i^n t^n / n!$ die erzeugende Funktion der Momente $m_n = E[X^n]$, die Funktion $F_*(t) = \log F(t) = \sum c_n i^n t^n / n!$ hingegen erzeugt die *Kumulanten* c_n . Die Momente lassen sich auf die Kumulanten zurückführen.

⁹⁸Dieser Sachverhalt ist auch in der Wahrscheinlichkeitstheorie als *Satz von Marcinkiewicz (1939)* bekannt. Mit den Bezeichnungen der vorigen Fußnote: ist $F_*(t)$ ein Polynom in t , so gilt $F_*(t) = iat - \sigma^2 t^2$ für reelle Konstanten a und σ , d.h. X ist Gaußisch verteilt.

1. Eine Entwicklung nach Potenzen der Wechselwirkung, $S = \sum S_n$, wobei

$$S_n = \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots \int d^4x_n T(\mathcal{L}_I(x_1) \cdots \mathcal{L}_I(x_n))$$

2. Eine Entwicklung des Integranden nach Normalprodukten der Felder, wobei jedem auftretenden Normalprodukt ein *Graph* zugeordnet wird, so daß die Summe über (nach gewissen Regeln erzeugte) Graphen G geführt wird:

$$T(\mathcal{L}_I(x_1) \cdots \mathcal{L}_I(x_n)) = \sum_G N_G(x_1, \dots, x_n)$$

Die Raumpunkte $x_i \in M_4$ werden die *Vertices* eines Graphen genannt. Man mag sich darunter Punkte vorstellen, in denen eine Wechselwirkung stattfindet (was experimentell nicht nachprüfbar ist, weil die beobachtbare Größe erst nach Integration über die x_i entsteht).

3. Eine Zerlegung des Graphen G in zusammenhängende Teilgraphen (falls G unzusammenhängend ist). Einer solchen Zerlegung entspricht immer eine Zerlegung der Vertexmenge in (nichtleere) Teilmengen. Ist etwa G die Vereinigung der Graphen G_1 und G_2 , so schreibt man $G = G_1 \cup G_2$. Enthält G_1 die Vertices x_1, \dots, x_s und G_2 die Vertices x_{s+1}, \dots, x_n , so gilt

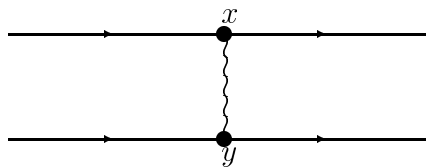
$$N_G(x_1, \dots, x_n) =: N_{G_1}(x_1, \dots, x_s) N_{G_2}(x_{s+1}, \dots, x_n):$$

Den Beitrag eines zusammenhängenden Graphen errechnet man nach Maßgabe von Regeln (sog. Feynman-Regeln), die für eine Theorie spezifisch sind.

Wir wollen die Feynman-Regeln anhand der QED darlegen. In diesem Fall gilt

$$\mathcal{L}_I(x) = -e j^\mu(x) A_\mu(x) \quad j^\mu(x) =: \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x):$$

Hier ist $A_\mu(x)$ das freie Photonfeld in der Gupta-Bleuler-Darstellung, und $\psi(x)$ ist das freie Dirac-Feld der Masse m . Das Normalprodukt in der Definition des Stromes garantiert, daß $(\Omega, j^\mu(x)\Omega) = 0$ gilt. Wir wählen als Beispiel den Graphen



Ihm entspricht in zweiter Ordnung das Normalprodukt

$$N_G(x, y) = -ie^2 D_F(x - y) : \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) \bar{\psi}(y) \gamma_\mu \psi(y) :$$

Seine Entstehung ist so zu erklären: Zunächst schreibt man

$$T(\mathcal{L}_I(x) \mathcal{L}_I(y)) = T(j^\mu(x) j^\nu(y)) T(A_\mu(x) A_\nu(y))$$

Sodann wendet man die Wick-Formel an, um

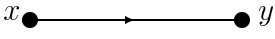
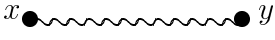
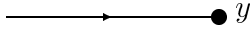
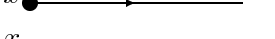

$$T(A_\mu(x) A_\nu(y)) = :A_\mu(x) A_\nu(y) : - i g_{\mu\nu} D_F(x - y) \quad (286)$$

zu erhalten. Schließlich folgt:

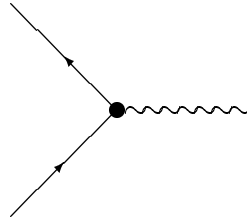
$$\begin{aligned} T(j^\mu(x) j^\nu(y)) &= : \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) \bar{\psi}(y) \gamma^\nu \psi(y) : \\ &+ : \bar{\psi}(x) \gamma^\mu i S_F(x - y) \gamma^\nu \psi(y) : \\ &+ : \bar{\psi}(y) \gamma^\nu i S_F(y - x) \gamma^\mu \psi(x) : \\ &- \text{Spur} \{ \gamma^\mu i S_F(x - y, m) \gamma^\nu i S_F(y - x, m) \} \quad (287) \end{aligned}$$

Multiplizieren wir den zweiten Term auf der linken Seite von (286) mit dem ersten Term auf der linken Seite von (287) so entsteht der Beitrag $N_G(x, y)$ des Graphen G .

Bei der graphischen Beschreibung benutzt man die folgenden Regeln für die Übersetzung in konkrete mathematische Ausdrücke:

innere Fermionlinie:	$i S_F(y - x)$	
innere Photonlinie:	$-i g_{\mu\nu} D_F(y - x)$	
äußere Fermionlinie:	$\psi(x)$	
äußere Fermionlinie:	$\bar{\psi}(x)$	
äußere Photonlinie:	$A_\mu(x)$	

Fermionlinien sind grundsätzlich gerichtet (sie beschreiben den Fluß der elektrischen Ladung durch das Diagramm), Photonlinien sind grundsätzlich ungerichtet (entsprechend der Tatsache, daß das Photon keine ladungsartige Quantenzahl besitzt). An jedem Vertex ist zusätzlich ein Faktor $-e\gamma^\mu$ und für jede geschlossene Fermionschleife ist ein weiterer Faktor -1 anzubringen. Ein Graph heißt *erlaubt*, wenn er nach den Regeln, die für eine Theorie spezifisch sind, konstruiert wurde. Die Regel der QED ist sehr einfach: An jedem Vertex greifen drei Linien an, eine Photonlinie und zwei Fermionlinien, wobei die Richtung der Fermionlinien die Ladungserhaltung am Vertex garantiert:



Im Grunde ist die graphische Sprache besser geeignet, die Ausdrücke zu repräsentieren, weil die mathematische Formelsprache *eindimensional* ist, die Graphen jedoch *zweidimensional* gezeichnet werden können.

6.12 Graphen im Impulsraum

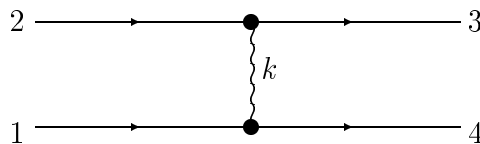
Der Feynman-Graph zweiter Ordnung, den wir oben diskutiert haben, vermag drei physikalisch verschiedene Prozesse zu beschreiben:

$$\begin{aligned} e^- + e^- &\rightarrow e^- + e^- \\ e^- + e^+ &\rightarrow e^- + e^+ \\ e^+ + e^+ &\rightarrow e^+ + e^+ \end{aligned}$$

Wir geben den beteiligten Teilchen bestimmte Impulse p_1 bis p_4 und Polarisationen σ_1 bis σ_4 und schreiben für den Anfangszustand einfach $|12\rangle$, also $S|12\rangle$ für den Endzustand. Die Analyse des Endzustandes nach Zuständen $|34\rangle$ führt uns auf die Übergangsamplitude $\langle 34|S|12\rangle$, die ihrerseits eine Entwicklung nach Graphen gestattet:

$$\langle 34|S|12\rangle = \sum_G S_G(12, 34)$$

Als Demonstrationsbeispiel wählen wir die e^-e^- -Streuung. Der für diesen Prozeß relevante Feynman-Graph sieht wie oben aus:



Er wird jedoch ein wenig anders interpretiert: Äußere Fermionlinien, die nach *rechts* gerichtet sind, entsprechen immer einem Elektron, linksgerichtete einem Positron. Dem Graphen G entspricht der folgende Beitrag:

$$S_G(12, 34) = \frac{ie^2}{8\pi^2} \frac{R}{k^2} \delta^4(\Sigma p) \quad (288)$$

mit

$$R = \bar{u}(3)\gamma^\mu u(2) \bar{u}(4)\gamma_\mu u(1) - \bar{u}(3)\gamma^\mu u(1) \bar{u}(4)\gamma_\mu u(2) \\ + \bar{u}(4)\gamma^\mu u(1) \bar{u}(3)\gamma_\mu u(2) - \bar{u}(4)\gamma^\mu u(2) \bar{u}(3)\gamma_\mu u(1)$$

und den Abkürzungen

$$k = p_1 - p_3 = p_4 - p_2 \quad \Sigma p = p_1 + p_2 - p_3 - p_4 \quad u(r) = u(p_r, \sigma_r)$$

Wir zeigen, wie dieser Beitrag entsteht. Zuerst erhält man

$$\langle 34 | : \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\bar{\psi}(y)\gamma_\mu\psi(y) : | 12 \rangle = \\ \langle 3 | \bar{\psi}(x) | 0 \rangle \gamma^\mu \langle 0 | \psi(x) | 2 \rangle \langle 4 | \bar{\psi}(y) | 0 \rangle \gamma_\mu \langle 0 | \psi(y) | 1 \rangle \\ - \langle 3 | \bar{\psi}(x) | 0 \rangle \gamma^\mu \langle 0 | \psi(x) | 1 \rangle \langle 4 | \bar{\psi}(y) | 0 \rangle \gamma_\mu \langle 0 | \psi(y) | 2 \rangle \\ - \langle 4 | \bar{\psi}(x) | 0 \rangle \gamma^\mu \langle 0 | \psi(x) | 2 \rangle \langle 3 | \bar{\psi}(y) | 0 \rangle \gamma_\mu \langle 0 | \psi(y) | 1 \rangle \\ + \langle 4 | \bar{\psi}(x) | 0 \rangle \gamma^\mu \langle 0 | \psi(x) | 1 \rangle \langle 3 | \bar{\psi}(y) | 0 \rangle \gamma_\mu \langle 0 | \psi(y) | 2 \rangle$$

mit

$$\langle 0 | \psi(x) | r \rangle = (2\pi)^{-3/2} e^{-ip_r x} u(r) \\ \langle r | \bar{\psi}(x) | 0 \rangle = (2\pi)^{-3/2} e^{ip_r x} \bar{u}(r)$$

($r = 1, 2, 3, 4$). Sodann greifen wir auf die Darstellung

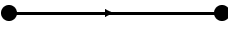
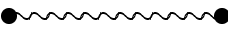
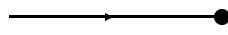
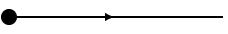
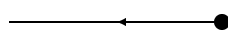
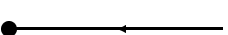


$$D_F(x - y) = (2\pi)^{-4} \int d^4k \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 + i0}$$

zurück und setzen alle so erhaltenen Ausdrücke in

$$-i \frac{e^2}{2} \int d^4x \int d^4y D_F(x - y) \langle 34 | : \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\bar{\psi}(y)\gamma_\mu\psi(y) : | 12 \rangle$$

ein. Nun führen wir die Integration über x und y aus, indem wir sie mit der k -Integration vertauschen. Hierbei entstehen zwei δ^4 -Funktionen: Die erste legt den Wert von k fest (die k -Integration wird somit ausführbar), die zweite garantiert die Energie-Impuls-Erhaltung im Streuprozess. Das Ergebnis ist der Ausdruck (288).

Wir kommen nun zu den allgemeinen Regeln für die Graphen in der Impulsdarstellung:

innere Fermionlinie:	$i(\not{p} + m)(p^2 - m^2 + i0)^{-1}$	
innere Photonlinie:	$-ig_{\mu\nu}(k^2 + i0)^{-1}$	
äußere Elektronlinie (einlaufend):	$u(p, \sigma)$	
äußere Elektronlinie (auslaufend):	$\bar{u}(p, \sigma)$	
äußere Positronlinie (einlaufend):	$\bar{v}(p, \sigma)$	
äußere Positronlinie (auslaufend):	$v(p, \sigma)$	
äußere Photonlinie (einlaufend):	$e_\lambda^\mu(k)$	
äußere Photonlinie (auslaufend):	$\overline{e_\lambda^\mu(k)}$	

Die Helizität des Photons kann die Werte $\lambda = \pm 1$ annehmen, die Polarisation des Fermions die Werte $\sigma = \pm \frac{1}{2}$. Für jeden Vertex des Graphen setzt man einen Faktor

$$-e\gamma^\mu \delta^4(p_1 \pm p_2 \pm k)$$

p_1, p_2 und k sind die Impulse der drei angreifenden Linien. Ladungs- und Impulserhaltung ist an jedem Vertex zu garantieren. Über den Impuls q einer inneren Linie ist stets zu integrieren, und zwar mit dem Maß d^4q . Für jede geschlossene Fermionschleife des Graphen bekommt die Amplitude einen weiteren Faktor -1. Bei rechts- oder linksseitigen Mehrphotonzuständen muß durch eine Summation über geeignete Permutationen von Indices dafür gesorgt werden, daß die Bose-Statistik nicht verletzt ist. Bei rechts- oder linksseitigen Mehrfermionzuständen muß durch eine entsprechende Summation die Fermi-Statistik gewahrt werden.

Schließlich erhält die Amplitude den Faktor $i^n (n!)^{-1} (2\pi)^{-s}$ mit $s = 3a/2 + 4b - 4n$. Hier bedeuten

- a = Zahl der äußeren Linien
- b = Zahl der inneren Linien
- n = Zahl der Vertices (Ordnung des Graphen)

Man bestätigt leicht die Identität $3n = a + 2b$ für die QED. Damit vereinfacht sich der Exponent s zu

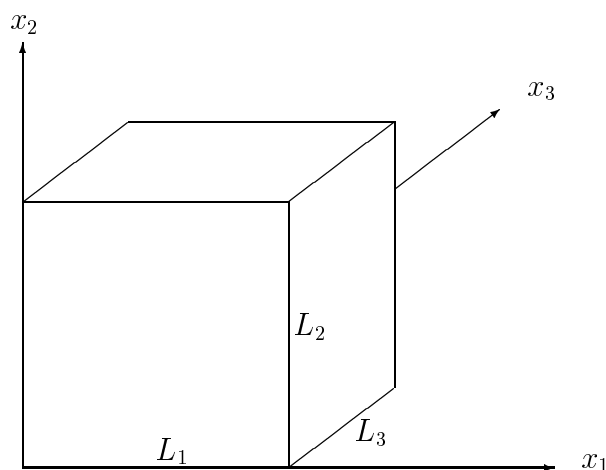
$$s = 2n - a/2$$

Im Gegensatz zu den Feynman-Graphen im Ortsraum, ist es bei den Graphen im Impulsraum möglich, daß sie Teilgraphen besitzen, die überhaupt keinen Vertex enthalten: es handelt sich dabei um „durchlaufende“ Linien. Sie entsprechen Teilchen, die wie Zuschauer das Geschehen nur beobachten, jedoch nicht daran teilnehmen.

7 Spezielle Effekte und Prozesse

7.1 Der Casimir-Effekt bei $T=0$

Wir betrachten das freie elektromagnetische Feld in einem dreidimensionalen Kasten mit ideal spiegelnden metallischen Wänden und dem Volumen $L_1 \times L_2 \times L_3$:



Unser Ziel ist das Studium der Grundzustandsenergie in Abhängigkeit von dem Volumen. Wir werden zu diesem Zweck die Kantenlänge L_1 variieren, bei festgehaltenen aber großen Werten für L_2 und L_3 . Die hier ins Auge gefaßte Situation entspricht sehr gut der Hohlraumstrahlung nahe am absoluten Nullpunkt der Temperatur.

Unter den Randbedingungen $\mathbf{E}_{\parallel} = \mathbf{B}_{\perp} = 0$ folgt die Darstellung

$$\begin{aligned} E_1(\mathbf{x}, t) &= \sum \tilde{E}_1(\mathbf{k}, t) \cos k_1 x_1 \sin k_2 x_2 \sin k_3 x_3 \\ E_2(\mathbf{x}, t) &= \sum \tilde{E}_2(\mathbf{k}, t) \sin k_1 x_1 \cos k_2 x_2 \sin k_3 x_3 \\ E_3(\mathbf{x}, t) &= \sum \tilde{E}_3(\mathbf{k}, t) \sin k_1 x_1 \sin k_2 x_2 \cos k_3 x_3 \end{aligned}$$

für das elektrische Feld $\mathbf{E} = \{E_1, E_2, E_3\}$. Die Summation erstreckt sich über alle Impulse $\mathbf{k} = \{k_1, k_2, k_3\}$ mit

$$k_i = \frac{n_i \pi}{L_i} \quad , \quad n_i = 0, 1, 2, \dots \quad , \quad n_1 n_2 + n_2 n_3 + n_3 n_1 > 0 \quad (289)$$

Jedem Vektor \mathbf{k} ist eine Frequenz $\omega = |\mathbf{k}|$ zugeordnet, so daß gilt:

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, t) = \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{k}) e^{-i\omega t} + \hat{\mathbf{E}}^\dagger(\mathbf{k}) e^{i\omega t} \quad (290)$$

Wir nehmen an, daß der Kasten in seinem Inneren keine Ladungen enthält:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{d.h.} \quad k_1 \hat{E}_1 + k_2 \hat{E}_2 + k_3 \hat{E}_3 = 0 \quad (291)$$

Diese Gleichung besitzt $N_{\mathbf{k}}$ linear unabhängige Lösungen bei gegebenem Vektor \mathbf{k} , wobei

$$N_{\mathbf{k}} = \begin{cases} 2 & k_i > 0 \quad i = 1, 2, 3 \\ 1 & k_i = 0 \quad \text{für genau ein } i \in \{1, 2, 3\} \end{cases} \quad (292)$$

Solche Fälle, in denen zwei der Komponenten von \mathbf{k} verschwinden, wurden bereits durch die Bedingung (289) ausgeschlossen. Es ist immer möglich, eine Basis von Polarisationsvektoren $\mathbf{e}_\lambda(\mathbf{k})$, $1 \leq \lambda \leq N_{\mathbf{k}}$ einzuführen, so daß das E-Feld eine Entwicklung danach besitzt,

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{k}) = \sum_{\lambda} a_{\lambda}(\mathbf{k}) \mathbf{e}_{\lambda}(\mathbf{k}) \quad , \quad (293)$$

die Koeffizienten den kanonischen Vertauschungsrelationen

$$[a_{\lambda}(\mathbf{k}), a_{\lambda'}^{\dagger}(\mathbf{k}')] = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \delta_{\lambda, \lambda'} \quad (294)$$

genügen und der Energie-Operator die Form annimmt⁹⁹:

$$H = \int d^3x \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}\lambda} \omega (a^{\dagger} a + a a^{\dagger}) = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \omega (a^{\dagger} a + \frac{1}{2}) \quad (295)$$

Entscheidend dabei ist, daß hier keine Wick-Ordnung bei der Definition der Energie vorgenommen wurde (also keine Renormierung der Energie), weil die Energie des Grundzustandes von den Abmessungen des Kastens abhängig ist und somit zu beobachtbaren Effekten Anlaß gibt, z.B. dadurch, daß man L_1 variiert. Wir haben jedoch nicht vermeiden können, daß die Energie des Grundzustandes unendlich ist und der Ausdruck für H nur einen Sinn bekommt, wenn die darin enthaltene Summe über \mathbf{k} bei großem $|\mathbf{k}|$ abgeschnitten wird. Wir schreiben für die Grundzustandsenergie

$$E_0 = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}\lambda} \omega = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}} |\mathbf{k}| \quad (296)$$

Statt die Summe einfach irgendwo abzuschneiden, können wir auch viel bequemer eine exponentielle Dämpfung einführen, um zu einem wohldefinierten Ausdruck zu gelangen, d.h. wir definieren

$$E_{\alpha} = -\frac{1}{2} \frac{d}{d\alpha} \sum_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}} e^{-\alpha |\mathbf{k}|} \quad (297)$$

⁹⁹Das Integral erstreckt sich über den Kasten.

für $\alpha > 0$. Sodann wollen wir L_2 und L_3 sehr groß werden lassen, so daß π/L_i ($i = 2, 3$) gegen dk_i strebt. Der Übergang zu einem Integral gelingt, wenn wir die Energie pro Fläche an die Stelle der Gesamtenergie setzen:

$$\begin{aligned}\sigma(\alpha) &= \lim_{L_2, L_3 \rightarrow \infty} (L_2 L_3)^{-1} E_\alpha(L_1, L_2, L_3) & k &= \pi L_1^{-1} \\ &= \frac{-1}{2\pi^2} \frac{d}{d\alpha} \int_0^\infty dk_2 \int_0^\infty dk_3 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\alpha \sqrt{n^2 k^2 + k_2^2 + k_3^2} \right\}\end{aligned}$$

Bei der Umformung zu einem Integral folgten wir der Regel, daß π/L_i für $i = 2, 3$ durch dk_i zu ersetzen ist, wenn die Längen L_2 und L_3 große Werte annehmen. Die Summation über n von $-\infty$ bis ∞ (statt von 0 bis ∞) berücksichtigt, daß die Frequenz

$$\omega = \sqrt{n^2 k^2 + k_2^2 + k_3^2}$$

genau zweimal auftritt, es sei denn, n ist Null: in diesem Fall tritt sie nur einmal auf. Wir können das Ergebnis noch symmetrischer schreiben, nämlich als

$$\sigma(\alpha) = \frac{-1}{8\pi^2} \frac{d}{d\alpha} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \iint_{\mathbf{R}^2} dk_2 dk_3 \exp \left\{ -\alpha \sqrt{n^2 k^2 + k_2^2 + k_3^2} \right\} \quad (298)$$

Mit Hilfe von Polarkoordinaten der Ebene ergibt sich daraus:

$$\begin{aligned}\sigma(\alpha) &= \frac{-1}{4\pi} \frac{d}{d\alpha} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \int_0^\infty r dr \exp \left\{ -\alpha \sqrt{n^2 k^2 + r^2} \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{d^2}{d\alpha^2} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \int_0^\infty \frac{r dr}{\sqrt{n^2 k^2 + r^2}} \exp \left\{ -\alpha \sqrt{n^2 k^2 + r^2} \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{d^2}{d\alpha^2} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \int_{|n|k}^\infty dx e^{-\alpha x} \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{d^2}{d\alpha^2} \left\{ \frac{1}{\alpha} \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{-\alpha|n|k} \right\} = \frac{1}{4\pi} \frac{d^2}{d\alpha^2} \left\{ \frac{1}{\alpha} \coth \frac{\alpha k}{2} \right\}\end{aligned}$$

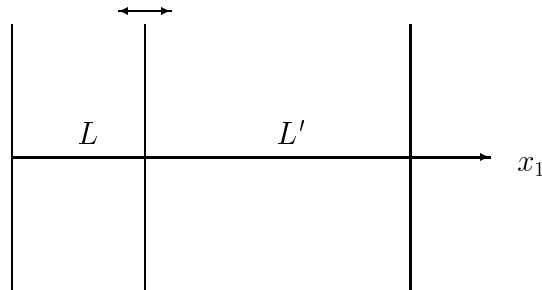
Beachten wir nun die Reihenentwicklung

$$x \coth x = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{B_n}{(2n)!} (2x)^{2n}$$

mit den Bernoulli-Zahlen $B_1 = \frac{1}{6}$, $B_2 = \frac{1}{30}$, $B_3 = \frac{1}{42}$ usw., so folgt

$$\begin{aligned}\sigma(\alpha) &= \frac{1}{\pi k \alpha^4} \left[3 - \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{B_n}{(2n)!} (n-1)(2n-3)(\alpha k)^{2n} \right] \\ &= \frac{3}{\pi^2 \alpha^4} L - \frac{\pi^2}{720} L^{-3} + O(\alpha^2) \quad L = L_1 = \pi/k\end{aligned}$$

Der für $\alpha \rightarrow 0$ singuläre erste Term ist proportional L . Er stellt aus diesem Grunde keine beobachtbare Größe dar. Um dies zu erkennen, denken wir uns eine dünne Metallplatte bei $x_1 = L$ in einem größeren Hohlraum $0 < x_1 < L + L'$ angebracht:



Da durch das Bewegen der Metallplatte die Summe $L + L'$ nicht verändert wird, können alle Anteile der Energie, die proportional zu L sind, keine Kraftwirkung verursachen, die die Bewegung der Platte behindert oder unterstützt. Es bleibt als beobachtbarer Anteil der Energie im Limes $\alpha \rightarrow 0$ nur der Term $-\pi^2(720 L^3)^{-1}$ übrig. Ihm entspricht eine anziehende Kraft pro Fläche vom Betrage

$$\boxed{K = \frac{d\sigma}{dL} = \frac{\pi^2}{240} L^{-4}} \quad (299)$$

oder (nach Wiedereinführung von \hbar und c):

$$L^4 K = \frac{\pi^2}{240} \hbar c = 1,30014 \cdot 10^{-27} \text{ Newton} \cdot \text{m}^2$$

In dem Experiment, von M. J. Sparnaay im Jahre 1958 erstmalig ausgeführt, wurde eine Flächegröße von 1 cm^2 gewählt. Zwei Metallplatten dieser Fläche standen sich in einem Abstand von $L = 1\text{ }\mu\text{m}$ gegenüber. Die bei diesem Abstand wirkende Anziehungskraft entspricht dem Gewicht von $0,0133\text{ mg}$. Diese Kraft konnte in der Tat dem Vorzeichen und der Größe nach gemessen werden. Dabei wurde der Abstand im Bereich $0,5\text{-}2,5\text{ }\mu\text{m}$ variiert, um das Abstandsgesetz zu testen. Im nebenstehenden Bild sind die Meßergebnisse, deren Unsicherheit nur auf die ungenaue Kenntnis der Distanz beruht, der Theorie (gestrichelte Kurve) gegenübergestellt.

7.2 Der Casimir-Effekt bei endlicher Temperatur

Die im vorigen Abschnitt durchgeführte Rechnung geschah für den Fall $T = 0$, das geschilderte Experiment von Sparnaay wurde dagegen bei $T = 300^\circ\text{K}$ durchgeführt. Welchen Einfluß hat die Temperatur auf die theoretische Vorhersage? Wir erwarten eine Verminderung der Anziehung durch den Strahlungsdruck. In der Situation $T > 0$ setzt sich die Gesamtenergie aus der Nullpunktsenergie und der Strahlungsenergie zusammen.

Wir ermitteln nun die Strahlungsenergie eines Hohlraumes bei gegebener Temperatur. Zu diesem Zweck ziehen wir das Plancksche Resultat heran, das folgendes besagt: Die bei $\beta = (k_B T)^{-1}$ (k_B ist die Boltzmann-Konstante) in der Strahlung gespeicherte Energie ist¹⁰⁰

$$E(\beta) = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \frac{\omega}{e^{\beta\omega} - 1} \quad (300)$$

Wie im vorigen Abschnitt, gilt auch hier $\omega = |\mathbf{k}|$, und wie dort, sind wir auch

¹⁰⁰Diese Formel entspricht der Vorstellung, daß es sich bei unserem System um ein wechselwirkungsfreies Bosegas (aus Photonen) bei der Temperatur T und dem chemischen Potential Null handelt.

hier nur an der Energie pro Fläche interessiert:

$$\sigma(\beta) = \lim_{L_2, L_3 \rightarrow \infty} \frac{E(\beta)}{L_2 L_3} = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\mathbf{R}^2} dk_2 dk_3 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega}{e^{\beta\omega} - 1} \quad (301)$$

wobei

$$\omega = \sqrt{n^2 k^2 + k_2^2 + k_3^2} \quad , \quad L = L_1 = \pi k^{-1}$$

Wir benötigen für die weitere Umformung die folgende mathematische Aussage¹⁰¹.

Satz (Poissonsche Summenformel) *Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ und*

$$\tilde{f}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{2\pi i p x}$$

Dann gilt

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \tilde{f}(n) \quad (302)$$

Insbesondere sind beide Summen absolut konvergent.

Wir wenden diesen Satz auf die Funktion $f(n) = \omega(e^{\beta\omega} - 1)^{-1}$ an. Aus n wird nun die kontinuierliche Variable x , die wir aber sogleich durch die Variable $k_1 = xk$ ersetzen. Auf diese Weise gelangen wir zu der Darstellung

$$\sigma(\beta) = \frac{1}{4\pi^2 k} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \int_{\mathbf{R}^3} d^3k \frac{|\mathbf{k}|}{e^{\beta|\mathbf{k}|} - 1} \exp(2\pi i n k_1 / k) \quad (303)$$

mit $d^3k = dk_1 dk_2 dk_3$ und $|\mathbf{k}|^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$. Nun führen wir Kugelkoordinaten im \mathbf{R}^3 ein, führen die Winkelintegration aus und separieren den Term mit $n = 0$. Das Ergebnis ist

$$\sigma(\beta) = \frac{1}{\pi k} \int_0^{\infty} \frac{r^3 dr}{e^{\beta r} - 1} + \frac{1}{\pi^2} \sum_1^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^{\infty} \frac{r^2 dr}{e^{\beta r} - 1} \sin(2\pi n r / k) \quad (304)$$

Wir vereinfachen durch $s = \beta r$, $\alpha = 2\pi(\beta k)^{-1}$:

$$\sigma(\beta) = \frac{1}{\pi k \beta^4} \int_0^{\infty} \frac{s^3 ds}{e^s - 1} - \frac{1}{\pi^2 \beta^3} \frac{d^2}{d\alpha^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \int_0^{\infty} \frac{\sin n\alpha s}{e^s - 1} ds \quad (305)$$

¹⁰¹Unter dem Raum $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ versteht man solche Funktionen $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$, die unendlich oft differenzierbar und samt ihren Ableitungen schnell abfallend sind: $\forall n, m \geq 0 |x^n f^{(m)}(x)| < C_{n,m}$.

und aus den Integraltafeln entnehmen wir

$$\int_0^\infty \frac{s^3 ds}{e^s - 1} = \frac{\pi^4}{15} \quad (306)$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin n\alpha s}{e^s - 1} ds = \frac{\pi}{2} \coth n\pi\alpha - \frac{1}{2n\alpha} \quad (307)$$

so daß gilt:

$$\sigma(\beta) = \frac{\pi^3}{15k\beta^4} - \frac{1}{2\pi\beta^3} \frac{d^2}{d\alpha^2} \sum_{n=1}^\infty \frac{\coth n\pi\alpha}{n^3} + \frac{1}{\pi^2\alpha^3\beta^3} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^4} \quad (308)$$

Jetzt benutzen wir die Formeln

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^4} = \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$$

$$\frac{d^2}{d\alpha^2} \coth n\pi\alpha = 2n^2\pi^2 \frac{\coth n\pi\alpha}{(\sinh n\pi\alpha)^2}$$

und die offensichtlichen Relationen $\alpha\beta = 2\pi/k$ und $\pi/k = L$. Damit folgt mit der Abkürzung $a = 2\pi L/\beta$:

$$\sigma(\beta) = \frac{\pi^2}{15\beta^4} L + \frac{\pi^2}{720} L^{-3} - \frac{\pi}{\beta^3} \sum_{n=1}^\infty \frac{\coth na}{n(\sinh na)^2} \quad (309)$$

Die Strahlungsenergie (pro Fläche) ist somit eine Summe von drei Termen. Der erste Term ist der 'Volumenanteil'. Er ist uns vom Stefan-Boltzmann-Gesetz her vertraut: Die Strahlungsenergie pro Volumen ist

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\sigma(\beta)}{L} = (\pi^2/15)(k_B T)^4$$

im Grenzfall großen Volumens. Der zweite Term wird durch die Nullpunktsenergie, die wir im vorigen Abschnitt errechneten, vollständig kompensiert. Der dritte Term beschreibt die Korrektur zum Stefan-Boltzmann-Gesetz für den Fall endlicher Werte von L . Dieser Anteil strebt für $L \rightarrow \infty$ exponentiell schnell gegen Null, nämlich wie $\exp(-4\pi k_B T L)$ (ohne Berücksichtigung der Nullpunktsenergie würde die Abweichung vom Stefan-Boltzmann-Gesetz nur wie L^{-3} gegen Null streben). Der dritte Term in (309) ist also allein verantwortlich für die auf einen metallischen Leiter wirkende (anziehende) Kraft.

Wir finden für die Kraft pro Fläche:

$$\begin{aligned}
 K &= -\frac{\pi}{\beta^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dL} \frac{\coth na}{n(\sinh na)^2} = -\frac{2\pi^2}{\beta^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} \frac{\coth x}{(\sinh x)^2} \Big|_{x=na} \\
 &= \frac{2\pi^2}{\beta^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + 2(\sinh na)^2}{(\sinh na)^4} = \frac{\pi^2}{240} L^{-4} f(2\pi k_B TL)
 \end{aligned}$$

wobei wir die Funktion

$$f(a) = \frac{1}{\zeta(4)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{\sinh na} \right)^4 \left(1 + \frac{2}{3} (\sinh na)^2 \right) \quad (310)$$

eingeführt haben. Nach Wiedereinführung von \hbar und c bekommt die dimensionslose Variable a die Gestalt

$$a = \frac{2\pi k_B TL}{\hbar c}$$

Einige Funktionswerte sind in der nebenstehenden Tabelle angegeben. Für das Experiment von Sparnaay galt $T = 300^0 K$ und $L = 1\mu m$. Für diese Werte ist $a \approx 1$, also $f(a) \approx 0,99$. Der Fehler, der durch Nichtberücksichtigung der Temperatur entstand, liegt somit bei 1%.

a	$f(a)$
0	1
0,5	0,9993
1,0	0,9897
1,5	0,9485
2,0	0,8482
3,0	0,5058
4,0	0,2122
5,0	0,0699

7.3 Die Mott-Streuung

Für die Streuung von geladenen Teilchen (z.B. α -Teilchen) an Atomkernen gilt bekanntlich die Rutherford-Streuformel. Sie ist das Resultat einer nicht-relativistischen Rechnung für die Bewegung in einem Coulomb-Potential. Auf die Streuung von Elektronen an Atomkernen (Kernladungszahl Z) angewandt lautet sie:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Ruth.} = \frac{Z^2 \alpha^2 m^2}{4\mathbf{p}^4 \sin^4(\Theta/2)} \quad (311)$$

Hier bezeichnet $\alpha = e^2/(4\pi)$ die Feinstrukturkonstante, \mathbf{p} und m den Impuls bzw. die Masse des Elektrons, Θ den Streuwinkel im Laborsystem und $d\sigma/d\Omega$ den *differentiellen* Wirkungsquerschnitt.

In der Formel (311) fehlen jedoch die relativistischen Korrekturen, und sie ist auch aus einem anderen Grunde nicht korrekt: die Elektronen besitzen – im Gegensatz zu den α -Teilchen – einen Spin, der sich selbst dann bemerkbar macht, wenn der Strahl aus unpolarisierten Elektronen besteht und die Polarisation nach der Streuung nicht festgestellt wird.

Um die korrekte Formel zu gewinnen, betrachten wir das feldtheoretische Problem eines Elektrons in einem äußeren Potential, dem Coulomb-Potential des Kerns

$$A_\mu(x) = \begin{cases} Ze(4\pi r)^{-1} & \mu = 0 \quad r = |\mathbf{x}| \\ 0 & \mu \neq 0 \end{cases} \quad (312)$$

Mit p und σ bezeichnen wir den Impuls und die Polarisation des einlaufenden Elektrons. Dann ist $S|p\sigma\rangle$ der auslaufende Zustand. Er wird nach den Zuständen $|p'\sigma'\rangle$ analysiert, und wir erhalten so die Übergangsamplitude

$$\langle p'\sigma'|S - 1|p\sigma\rangle = -ie \int d^4x \langle p'\sigma'|: \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x): |p\sigma\rangle A_\mu(x) + O(e^2) \quad (313)$$

Wir wollen die Terme der Ordnung e^2 und höher vernachlässigen. Nun gilt

$$\begin{aligned} \langle p'\sigma'|: \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x): |p\sigma\rangle &= \langle p'\sigma'|\bar{\psi}(x)|0\rangle\gamma^\mu\langle 0|\psi(x)|p\sigma\rangle \\ \langle p'\sigma'|\bar{\psi}(x)|0\rangle &= (2\pi)^{-3/2} e^{ip'x} \bar{u}(p'\sigma') \\ \langle 0|\psi(x)|p\sigma\rangle &= (2\pi)^{-3/2} e^{-ipx} u(p\sigma) \end{aligned}$$

Dies führt auf die Darstellung

$$\begin{aligned} \langle p'\sigma'|S - 1|p\sigma\rangle &= -ie u^*(p'\sigma')u(p\sigma) \tilde{A}_0(p-p') \\ \tilde{A}_0(q) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4x e^{-iqx} A_0(x) = \frac{Ze}{(2\pi\mathbf{q})^2} \delta(q^0) \end{aligned}$$

Da das Coulomb-Potential zeitunabhängig ist, entsteht bei der Fourier-Transformation die δ -Funktion mit dem Argument $q^0 = p^0 - p'^0$. Sie ist Ausdruck der Energieerhaltung im Streuprozess. Allgemein definiert man die *Streuamplitude* f durch

$$\langle p'\sigma'|S - 1|p\sigma\rangle = \frac{i}{\pi} \delta(p^0 - p'^0) f(\mathbf{p}\sigma, \mathbf{p}'\sigma') \quad (314)$$

und den *differentiellen Wirkungsquerschnitt* als $|f|^2$. Benutzt man einen Elektronenstrahl aus unpolarisierten Elektronen, so bestimmt das Experiment die Größe $\frac{1}{2} \sum_\sigma |f|^2$. Wird darüberhinaus auch die Polarisation im Endzustand nicht gemessen, so ermittelt das Experiment den differentiellen Wirkungsquerschnitt für unpolarisierte Teilchen, nämlich

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Mott} = \frac{1}{2} \sum_{\sigma, \sigma'} |f(\mathbf{p}\sigma, \mathbf{p}'\sigma')|^2 \quad (315)$$

In unserem Fall gilt, nach Einführung von $\alpha = e^2/(4\pi)$,

$$f(\mathbf{p}\sigma, \mathbf{p}'\sigma') = -\frac{Z\alpha}{\mathbf{q}^2} u^*(p'\sigma')u(p\sigma)$$

mit $p^0 = p'^0$ und $\mathbf{q} = \mathbf{p} - \mathbf{p}'$. Also:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Z\alpha}{\mathbf{q}^2}\right)^2 \frac{1}{2} \sum_{\sigma, \sigma'} |u^*(p'\sigma')u(p\sigma)|^2 \quad (316)$$

Die Spinsummutation läßt sich ausführen. Wir setzen $n = \{1, 0, 0, 0\}$, so daß $\gamma^0 = \not{n}$. Damit kann man schreiben:

$$\begin{aligned} R := \sum_{\sigma, \sigma'} |u^*(p'\sigma')u(p\sigma)|^2 &= \sum_{\sigma, \sigma'} |\bar{u}(p'\sigma')\not{n}u(p\sigma)|^2 \\ &= \text{Spur} \sum_{\sigma'} u(p'\sigma')\bar{u}(p'\sigma')\not{n} \sum_{\sigma} u(p\sigma)\bar{u}(p\sigma)\not{n} \\ &= \text{Spur} (\not{p}' + m)\not{n}(\not{p} + m)\not{n} \\ &= \text{Spur} \not{p}'\not{n}\not{p}\not{n} + m^2 \text{Spur} \not{n}\not{n} \end{aligned}$$

Hierbei verwendeten wir die Vollständigkeitsrelation der u -Spinoren (s.Seite 28) und die Tatsache, daß die Spur eines Produktes aus drei γ -Matrizen verschwindet. Elementare Algebra führt auf die Identitäten:

$$\text{Spur} \not{a}\not{b} = 4a \cdot b \quad (317)$$

$$\text{Spur} \not{a}\not{b}\not{c}\not{d} = 4(a \cdot b \ c \cdot d + a \cdot d \ b \cdot c - a \cdot c \ b \cdot d) \quad (318)$$

Mit ihnen gilt

$$R = 4(2p \cdot n \ p' \cdot n - p \cdot p' + m^2) = 4(2p^0 p'^0 - p \cdot p' + m^2)$$

Aus $p^0 = p'^0$ folgt $|\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'|$, also $\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}' = \mathbf{p}^2 \cos \Theta$ oder

$$p \cdot p' - m^2 = \mathbf{p}^2(1 - \cos \Theta) = 2\mathbf{p}^2 \sin^2(\Theta/2)$$

wobei Θ den Streuwinkel bezeichnet. Nun setzen wir $\beta = |\mathbf{p}|/p^0$ und erhalten

$$R = 8 \frac{\mathbf{p}^2}{\beta^2} (1 - \beta^2 \sin^2(\Theta/2)) = 8 \frac{m^2}{1 - \beta^2} (1 - \beta^2 \sin^2(\Theta/2))$$

Schließlich schreiben wir für den Impulsübertrag

$$\mathbf{q}^2 = (\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2 = 2\mathbf{p}^2(1 - \cos \Theta) = 4\mathbf{p}^2 \sin^2(\Theta/2) \ ,$$

setzen die Ausdrücke für R und \mathbf{q}^2 in $d\sigma/d\Omega = (Z\alpha/\mathbf{q}^2)^2 \frac{1}{2} R$ ein und gewinnen so die Endformel

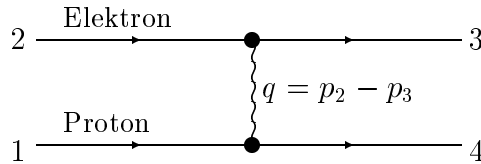
$$\boxed{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Ruth.} \frac{1 - \beta^2 \sin^2(\Theta/2)}{1 - \beta^2}} \quad (319)$$

Die im zweiten Faktor ausgedrückte Korrektur macht sich für relativistische Elektronen bemerkbar. Dieser Faktor ist stets ≥ 1 und $= 1$ nur für die Rückwärtsstreuung ($\Theta = \pi$).

7.4 Elektron-Proton-Streuung

Für $Z = 1$ beschreibt die Mott-Formel die Streuung von Elektronen an Protonen im Ruhesystem des Protons. Die bereits im Ansatz enthaltene Näherung (Verwendung des Potentialmodells) gibt dem Proton eine unendlich schwere Masse, so daß der Rückstoß im Streuprozess vernachlässigbar ist. Was geschieht, wenn wir das Proton als gleichberechtigtes Teilchen mit all seinen Freiheitsgraden¹⁰² in die Beschreibung einbeziehen und den Formalismus der QED voll anwenden? Es sei m die Masse des Elektrons und M die Masse des Protons. Gewinnen wir in der statischen Näherung ($M \gg m$) die Mott-Formel zurück?

Ursache der Streuung ist der Austausch eines virtuellen Photons (2. Ordnung Störungstheorie):



Die sich daraus ergebende Übergangsamplitude hat die Gestalt

$$\langle 34|S - 1|12\rangle = i\delta^4(\Sigma p)F(12, 34) \quad (320)$$

mit $\Sigma p = p_1 + p_2 - p_3 - p_4$ und der Streuamplitude

$$F(12, 34) = \frac{e^2}{8\pi^2} \bar{u}(3)\gamma^\mu u(2) \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \bar{u}(4)\gamma^\nu u(1) \quad (321)$$

Um den Zusammenhang zwischen dem differentiellen Wirkungsquerschnitt *im Laborsystem* und der Streuamplitude F zu finden, ist eine lange und komplizierte Betrachtung notwendig¹⁰³. Das Ergebnis ist eine einfache, allerdings nur im statischen Limes gültige Formel

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Lab} = \pi^2 M^{-2} |F(12, 34)|^2 \quad M \gg m \quad (322)$$

Auf (321) angewandt bedeutet dies

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Lab} = \left(\frac{\alpha}{2Mq^2}\right)^2 |a \cdot b|^2 \quad (323)$$

¹⁰²Hier soll das Proton als elementares Dirac-Teilchen ohne innere Struktur aufgefaßt werden.

¹⁰³Vergleiche hierzu die ausführliche Diskussion in Bjorken, Drell *Relativistische Quantenmechanik*, Kapitel 7.4.

Hier haben wir zur Abkürzung die komplexen Vierervektoren

$$a^\mu = \bar{u}(3)\gamma^\mu u(2) \quad b^\mu = \bar{u}(4)\gamma^\mu u(1)$$

eingeführt. Angenommen, die Spinrichtung des Protons wird weder vor noch nach dem Streuprozess festgestellt. Dies veranlaßt uns zu der folgenden Rechnung:

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma_1, \sigma_4} |a \cdot b|^2 &= \sum_{\sigma_1, \sigma_4} |\bar{u}(4) \not{a} u(1)|^2 \\ &= \text{Spur } (\not{p}_4 + M) \not{a} (\not{p}_1 + M) \bar{q} \\ &= \text{Spur } \not{p}_4 \not{a} \not{p}_1 \bar{q} + M^2 \text{Spur } \bar{q} \\ &= p_4 \cdot a \, p_1 \cdot \bar{a} + p_4 \cdot \bar{a} \, p_1 \cdot a + (M^2 - p_1 \cdot p_4) |a|^2 \end{aligned}$$

Statische Näherung bedeutet unter anderem $p_i^0 \approx M \gg |\mathbf{p}_i|$, ($i = 1, 4$), also

$$\frac{1}{2} \sum_{\sigma_1, \sigma_4} |a \cdot b|^2 = |2Ma^0|^2 = (2M)^2 |u(3)^* u(2)|^2. \quad (324)$$

Indem wir dieses Ergebnis in (323) einsetzen, gelangen wir unmittelbar zur Mott-Formel; denn der vierdimensionale Impulsübertrag q^2 unterscheidet sich von dem dreidimensionalen Ausdruck \mathbf{q}^2 nur durch das Vorzeichen:

$$q^2 = (p_2 - p_3)^2 = -(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3)^2 = -\mathbf{q}^2$$

Der statische Limes wirkt sich damit in einer solchen Weise aus, daß effektiv für das Protonen-Matrixelement die Ersetzung vorgenommen wird:

$$\bar{u}(4)\gamma^\mu u(1) \xrightarrow{\text{stat.Lim.}} \begin{cases} 2M & \mu = 0 \\ 0 & \mu \neq 0 \end{cases} \quad (325)$$

Die statische Näherung erlaubt gleichzeitig, den Zusammenhang zwischen der Feynman-Funktion des Photons, $D_F(x)$, und dem Coulomb-Potential zu erkennen: $-(k^2 + i0)^{-1}$ stimmt mit \mathbf{k}^{-2} , der Fourier-Transformierten des Potentials genau dann überein, wenn $k^0 = 0$ gilt. Explizit,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi r} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \frac{1}{\mathbf{k}^2} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4k \delta(k^0) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \frac{1}{-k^2} \\ &= \frac{-1}{(2\pi)^4} \int d^4k \int_{-\infty}^{\infty} dx^0 e^{-ikx} \frac{1}{k^2} = - \int_{-\infty}^{\infty} dx^0 D_F(x) \end{aligned}$$

Es handelt sich hier um den Spezialfall $m = 0$ einer allgemeineren Formel. Wären wir nämlich von der gültigen Relation

$$\frac{e^{-mr}}{4\pi r} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \frac{1}{\mathbf{k}^2 + m^2} \quad (326)$$

für das Yukawa-Potential ausgegangen, so hätte unsere obige Rechnung ergeben:

$$\boxed{\frac{e^{-mr}}{4\pi r} = - \int_{-\infty}^{\infty} dx^0 \Delta_F(x, m)} \quad (327)$$

($r = |\mathbf{x}|$). In Worten: Das Yukawa-Potential beschreibt – unter den Bedingungen der statischen Näherung – den Austausch eines virtuellen Bosons der Masse m . Die Reichweite dieses Potentials ist m^{-1} , oder $\hbar(mc)^{-1}$ (Compton-Wellenlänge/ 2π). Identifiziert man das Teilchen mit dem Pion, so erhält man auf diese Weise ein Potentialmodell, das mit großem Erfolg in der Kernphysik angewandt wird. Auch für die Frage, ob das Photon eine von Null verschiedene Masse besitzt, ist unser Ergebnis relevant: Jeder experimentelle Test des elektrostatischen Potentials einer ruhenden Ladung bei großen Abständen (d.h. jede Abweichung vom $1/r$ -Verhalten), ist auch immer ein Test auf die Masselosigkeit des Photons. Die augenblickliche Schranke liegt bei $m_{\text{photon}} < 2 \cdot 10^{-21}$ MeV.

Während das $1/r$ -Verhalten des Coulomb-Potentials and des Gravitationspotentials für große Werte von r gut getestet und theoretisch verstanden ist, gibt neuerdings Spekulationen über mögliche Abweichungen bei sehr kleinen Werten von r , hervorgerufen durch Effekte der Stringtheorie, die einen 10-dimensionalen Raum an die Stelle des 4-dimensionalen Raumes der allgemeinen Relativitätstheorie setzt. Von den zusätzlichen 6 ‘aufgerollten’ Dimensionen könnten einige makroskopische Durchmesser haben (*large extra dimensions*) und so das Gravitationspotential im Bereich $r < 1$ mm beeinflussen. Vereinfachend wollen wir annehmen, daß der euklidische Raum E_3 durch den Raum E_n ($n > 3$) ersetzt wird. Das Potential, durch den Austausch masseloser Teilchen verursacht, ist weiterhin die Lösung der Poisson-Gleichung mit δ -förmiger Quelle, also von der Form

$$V(r) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int d^n k \frac{ikx}{k^2} \quad (x \in E_n, r = |x|).$$

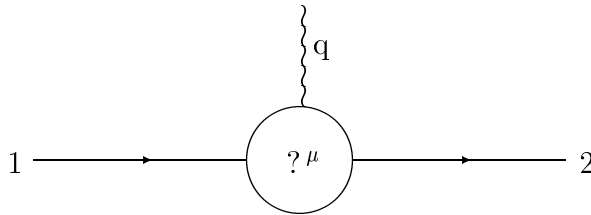
Die Integrationsvariable $k \in E'_n$ (=Dualraum zu E_n) hat weiterhin die physikalische Dimension (Länge) $^{-1}$, das Integral also die Dimension (Länge) $^{2-n}$. Folglich

$$V(r) = \frac{c}{r^{n-2}}$$

für eine gewisse Konstante c . Trotz intensiver Suche nach dieser r -Abhängigkeit im Submillimeterbereich, konnte bislang keine Abweichung von $n = 3$ gefunden werden (s. Spektrum der Wissenschaft, Mai 2001).

7.5 Elektromagnetische Formfaktoren

Unsere Behandlung der e-p-Streuung ging von der Annahme aus, daß das Proton ein gewöhnliches Dirac-Teilchen ist und keine innere Struktur besitzt: der Aufbau aus drei gebundenen Quarks blieb dabei unbeachtet. Da eine störungstheoretische Behandlung von gebundenen Zuständen sich von selbst verbietet, sind wir für den Augenblick auf eine phänomenologische Analyse des Strommatrixelementes am Protonvertex angewiesen:



Die allgemeine Gestalt

$$\langle 2 | j^\mu(x) | 1 \rangle = e(2\pi)^{-3} e^{iqx} b^\mu(1, 2) \quad q = p_2 - p_1 \quad (328)$$

begründet man leicht mit der Translationsinvarianz, und der Ansatz

$$b^\mu(1, 2) = \bar{u}(2) ?^\mu(p_1, p_2) u(1) \quad ?^\mu(p_1, p_2) = 4 \times 4\text{-Matrix} \quad (329)$$

berücksichtigt die Spin- $\frac{1}{2}$ -Natur des Protons. Für ein strukturloses Proton hätten wir $?^\mu(p_1, p_2) = \gamma^\mu$. Die komplexe Matrix $?^\mu$ ist keineswegs eindeutig durch die Amplitude b^μ bestimmt. Dies folgt bereits schon aus dem Bestehen der Relationen $(\not{p}_1 - M)u(1) = 0$ und $\bar{u}(2)(\not{p}_2 - M) = 0$. Andererseits haben wir eine Reihe von Bedingungen zu erfüllen, nämlich

1. Stromerhaltung, 2. Realität des Stromes und 3. Lorentz-Invarianz

Die drei Forderungen erfüllt der Ansatz

$$?^\mu(p_1, p_2) = \gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{1}{4M} (\not{q}\gamma^\mu - \gamma^\mu\not{q})(F_2(q^2) + i\gamma^5 F_3(q^2)) \quad (330)$$

mit *reellen* Funktionen $F_i(q^2)$, genannt *Formfaktoren*. Es läßt sich zeigen, daß unter den genannten Bedingungen¹⁰⁴ dies der allgemeinste Ansatz ist. Es ist bemerkenswert, daß sich die Matrix $?^\mu$ immer so wählen läßt, daß sie nur von dem Impulsübertrag $q = p_2 - p_1$ abhängig ist. Die Einführung von

¹⁰⁴Eine ungenannte, aber oft als selbstverständliche empfundene Bedingung ist die Analytizität von Γ^μ in den Vektoren p_1 und p_2 .

Formfaktoren verallgemeinert das nichtrelativistische Konzept der (Fouriertransformierten) Ladungsverteilung.

Invarianz unter Raum- und Zeitspiegelung wären zwei weitere diskutabile Bedingungen. Sie sind allerdings bei Einbeziehung der schwachen Wechselwirkung verletzt und dürfen deshalb von uns nicht als absolut gültige Naturgesetze betrachtet werden. Obwohl es sich hier um zwei ihrem Wesen nach sehr unterschiedliche Bedingungen handelt, würden sie doch an dieser Stelle das gleiche Resultat liefern: $F_3(q^2) = 0$. Bisher gibt es keine experimentellen Hinweise auf $F_3(q^2) \neq 0$. Jeder der drei Formfaktoren entspricht einer bekannten meßbaren Größe innerhalb der nichtrelativistischen Theorie eines Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchens:

1. Die elektrische Ladung des Teilchens ist $Q = eF_1(0)$.
2. Das magnetische Dipolmoment des Teilchens (im Ruhesystem) ist

$$\frac{e}{2M}(F_1(0) + F_2(0)) \quad .$$

$(e/2M)F_1(0)$ ist das ‘normale’, $(e/2M)F_2(0)$ das ‘anormale’ magnetische Moment. Man setzt für ein geladenes Teilchen

$$g - 2 = 2 \frac{F_2(0)}{F_1(0)} \quad , \quad (331)$$

und nennt g das *gyromagnetische Verhältnis*. Ein geladenes Dirac-Teilchen hat $g = 2$.

3. Das elektrische Dipolmoment des Teilchens ist $(e/2M)F_3(0)$. Invarianz gegen Zeitumkehr schließt jedoch die Existenz eines solchen Momentes für ein Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen aus.

Einige experimentell bestimmte Werte sind:

	$F_1(0)$	$F_2(0)$	$F_3(0)$
Proton	1	1,792846	0
Neutron	0	-1,913042	0
Elektron	-1	-0,001159	0

Wir wollen diese Aussagen kurz begründen. Die Ladung des Teilchens ist durch

$$Q = \int d^3x \langle \phi | j^0(x) | \phi \rangle$$

definiert, wobei ϕ irgendeine normierte Wellenfunktion bezeichnet:

$$|\phi\rangle = \int \frac{d^3p}{2\omega} \sum_{\sigma} \phi(\mathbf{p}\sigma) |p\sigma\rangle \quad \int \frac{d^3p}{2\omega} \sum_{\sigma} |\phi(\mathbf{p}\sigma)|^2 = 1$$

Indem wir die Darstellungen (328), (329), (330) und $?^0(p, p) = \gamma^0 F_1(0)$ sowie $\bar{u}(p, \sigma)^* u(p, \sigma') = 2\omega \delta_{\sigma\sigma'}$ benutzen, finden wir:

$$\begin{aligned} Q &= e \int \frac{d^3p}{2\omega} \int \frac{d^3p'}{2\omega'} \sum_{\sigma, \sigma'} \overline{\phi(\mathbf{p}\sigma)} \phi(\mathbf{p}'\sigma') \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \bar{u}(p, \sigma) ?^0(p', p) u(p', \sigma') \\ &= e F_1(0) \int \frac{d^3p}{2\omega} \sum_{\sigma} |\phi(\mathbf{p}\sigma)|^2 = e F_1(0) \end{aligned}$$

Und nun zum magnetischen Moment. Man definiert es in der Elektrodynamik als den Vektor

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int d^3x \mathbf{x} \times \mathbf{j}(\mathbf{x}) \quad (332)$$

und wir übernehmen die Definition sinngemäß für die QED. Allerdings wird \mathbf{m} zu einem Operator, und wir haben die Aufgabe $(\phi, \mathbf{m} \phi)$ für eine normierte Wellenfunktion ϕ zu berechnen. Die Rechnung ist ähnlich wie zuvor; das entscheidende Integral lautet jedoch

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x \mathbf{x} e^{i(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\mathbf{x}} = -i \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}'} \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p})$$

Zur Abkürzung führen wir den Dirac-Spinor

$$\psi(p) = (2M)^{-1/2} \sum_{\sigma} \phi(\mathbf{p}\sigma) u(p, \sigma)$$

ein. Es handelt sich dabei um eine Lösung der Dirac-Gleichung mit der Normierung

$$\int \frac{d^3p}{2\omega} \bar{\psi}(p) \psi(p) = 1$$

Wir setzen auch $?^\mu = \{?^0, \mathbf{\Gamma}\}$, $\mathbf{a}(p', p; t) = e^{i(\omega - \omega')t} (M/\omega') \bar{\psi}(p) \mathbf{\Gamma}(p', p) \psi(p')$ und erhalten so

$$(\phi, \mathbf{m} \phi) = ie \frac{1}{2} \int \frac{d^3p}{2\omega} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}'} \times \mathbf{a}(p, p', t) \Big|_{\mathbf{p}'=\mathbf{p}} \quad (333)$$

Die Ableitung $(\partial/\partial \mathbf{p}') \{(M/\omega') \exp(-i\omega't)\}$ wird für $\mathbf{p}' = \mathbf{p}$ zu einem Vektor $\sim \mathbf{p}$. Andererseits ist auch $\bar{\psi} \mathbf{\Gamma} \psi \sim \mathbf{p}$, sobald $\mathbf{p}' = \mathbf{p}$ (denn $\bar{u}(p, \sigma) \gamma^\mu u(p, \sigma') = 2p^\mu \delta_{\sigma\sigma'}$), und das aus beiden Ausdrücken gebildete Vektorprodukt verschwindet. Auf diese Weise erkennt man, daß $(\phi, \mathbf{m} \phi)$ unabhängig von t wird, und wir können $t = 0$ setzen:

$$(\phi, \mathbf{m} \phi) = ie \frac{1}{2} \int \frac{d^3p}{2\omega} \frac{M}{\omega} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}'} \times \bar{\psi}(p) \mathbf{\Gamma}(p', p) \psi(p') \Big|_{\mathbf{p}'=\mathbf{p}}$$

Aus den Identitäten

$$\begin{aligned} \not{q}\gamma^\mu - \gamma^\mu\not{q} &= 2(p^\mu + p'^\mu + \not{p}\gamma^\mu + \gamma^\mu\not{p}') \\ (\not{p}' - M)u(p', \sigma') &= 0 \qquad \bar{u}(p, \sigma)(\not{p} - M) = 0 \end{aligned}$$

mit $q = p - p'$ folgt die *Gordon-Zerlegung*

$$\bar{u}(p, \sigma)\gamma^\mu u(p', \sigma') = \bar{u}(p, \sigma) \left[\frac{1}{2M}(p^\mu + p'^\mu) + \frac{1}{4M}(\not{q}\gamma^\mu - \gamma^\mu\not{q}) \right] u(p', \sigma') \quad (334)$$

Mit ihr erhalten wir

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(p)\mathbf{\Gamma}(p', p)\psi(p') &= \\ \bar{\psi}(p) \left[(\mathbf{p} + \mathbf{p}')\frac{F_1(q^2)}{2M} + (\not{q}\vec{\gamma} - \vec{\gamma}\not{q})\frac{F_1(q^2) + F_2(q^2) + i\gamma^5 F_3(q^2)}{4M} \right] \psi(p') \end{aligned}$$

Nun verlangen wir, daß die Wellenfunktion ψ ein Proton beschreibt, das sich nahezu in Ruhe befindet, d.h. wir ersetzen ω durch M , also insbesondere q^2 durch $-(\mathbf{p}' - \mathbf{p})^2$. Die nichtrelativistische Näherung verlangt auch, daß wir

$$\psi(p) = \sqrt{M} \begin{pmatrix} \xi(\mathbf{p}) \\ \xi(\mathbf{p}) \end{pmatrix}$$

schreiben. Hier ist $\xi(\mathbf{p})$ der zweikomponentige Pauli-Spinor der nichtrelativistischen Theorie. Er ist so normiert, daß

$$\int d^3p \xi^*(\mathbf{p})\xi(\mathbf{p}) = 1$$

gilt. Mit den Erwartungswerten

$$\langle \mathbf{L} \rangle = \int d^3p \xi^*(\mathbf{p}) i\mathbf{p} \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \xi(\mathbf{p}) \quad (335)$$

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \int d^3p \xi^*(\mathbf{p}) \frac{1}{2}\vec{\sigma} \xi(\mathbf{p}) \quad (336)$$

gewinnt man so die Darstellung

$$(\phi, \mathbf{m} \phi) = \frac{e}{2M}\langle \mathbf{L} \rangle + \frac{e}{M}(F_1(0) + F_2(0))\langle \mathbf{S} \rangle \quad (337)$$

$$= \frac{e}{2M}(\langle \mathbf{L} \rangle + g\langle \mathbf{S} \rangle) \quad (338)$$

Der Erwartungswert $\langle \mathbf{L} \rangle$ verschwindet, sobald das Teilchen sich in einem S-Zustand befindet. Der Term $\sim \langle \mathbf{S} \rangle$ gibt den gesuchten Zusammenhang zwischen den Formfaktoren und dem intrinsischen magnetischen Moment des

Teilchens. Eine ähnliche Argumentation gibt uns die Beziehung des elektrischen Dipolmomentes zum Formfaktor F_3 an der Stelle $q^2 = 0$.

Wie gewinnt man Kenntnis über die numerischen Werte der Formfaktoren $F_1(q^2)$ und $F_2(q^2)$ des Protons oder Neutrons für $q^2 < 0$? Um in einem Streuexperiment merkbare Abweichungen von der Mott-Formel zu finden, benötigt man ultrarelativistische Energien für die streuenden Elektronen: Energien nämlich, die vergleichbar mit der Ruhenergie des Protons sind. In dieser Situation gilt die Mott-Formel schon deshalb nicht, weil der Rückstoß des Targetteilchens zu berücksichtigen ist. An ihre Stelle tritt die *Rosenbluth-Formel*:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Lab.} = \alpha^2 \frac{\left(F_1^2 - \frac{q^2}{4M^2} F_2^2\right) \cos^2 \frac{\Theta}{2} - \frac{q^2}{2M^2} (F_1 + F_2)^2 \sin^2 \frac{\Theta}{2}}{4E^2 \left(1 + \frac{2M}{E} \sin^2 \frac{\Theta}{2}\right) \sin^4 \frac{\Theta}{2}} \quad (339)$$

Hier bezeichnet E die Energie der unpolarisierten Elektronen, deren Masse vernachlässigt wurde; q^2 ist der relativistische Impulsübertrag, der stets $q^2 < 0$ erfüllt. Von ihm hängen die Formfaktoren ab; jedoch sind wir von $F_3(q^2) = 0$ ausgegangen.

7.6 Das anomale magnetische Moment des Elektrons

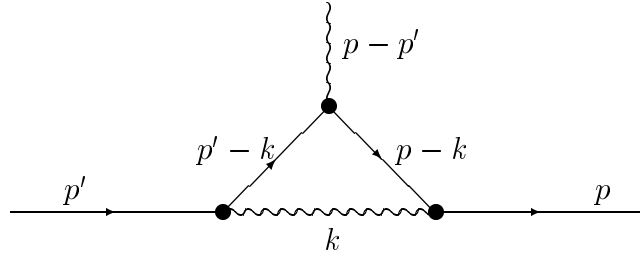
Da man allgemein das Elektron als ein elementares Dirac-Teilchen ansieht, folgen seine elektromagnetischen Eigenschaften allein aus der QED. Im Prinzip sind also die Formfaktoren $F_i(q^2)$ des Elektrons im Rahmen einer Störungstheorie berechenbar. Für das Strommatrixelement zwischen Elektronenzuständen können wir den bekannten Ansatz benutzen:

$$\langle p\sigma | j^\mu(x) | p'\sigma' \rangle = \frac{-e}{(2\pi)^3} \bar{u}(p\sigma) \gamma^\mu(p', p) u(p'\sigma') e^{i(p-p')x} \quad (340)$$

Durch die Wahl des Vorfaktors $-e$ anstelle von e bekommt γ^μ ein anderes Vorzeichen verglichen mit dem Ansatz im Abschnitt 7.5. Damit wird erreicht, daß die Formfaktoren F_i des Elektrons nunmehr *positive* Größen sind. Für die Vertexfunktion gilt eine Entwicklung der Form

$$\gamma^\mu(p', p) = \gamma^\mu + e^2 \gamma_1^\mu(p', p) + O(e^4) \quad (341)$$

wobei γ_1 aus einem Dreiecksgraphen resultiert:



Wenden wir die Feynman-Regeln zur Berechnung dieses Graphen an, so erhalten wir (für das Dreieck allein):

$$?_1^\mu = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{1}{k^2 + i0} \gamma^\nu \frac{\not{p} - \not{k} + m}{(p-k)^2 - m^2 + i0} \gamma^\mu \frac{\not{p}' - \not{k} + m}{(p'-k)^2 - m^2 + i0} \gamma_\nu \quad (342)$$

Zur Vereinfachung des Integranden kann man die Relationen

$$(p-k)^2 - m^2 = k^2 - 2pk \quad (343)$$

$$(p'-k)^2 - m^2 = k^2 - 2p'k \quad (344)$$

anwenden. Das Integral ist in zweierlei Hinsicht unbestimmt: Zum einen divergiert es für große Werte der Komponenten von k (Ultraviolett-Divergenz), zum anderen divergiert es bei $k = 0$ (Infrarot-Divergenz). Um das Integral infrarotkonvergent zu machen, führen wir vorübergehend eine endliche Photonmasse λ ein, d.h. wir ersetzen $(k^2 + i0)^{-1}$ durch $(k^2 - \lambda^2 + i0)^{-1}$. Eine Alternative dazu wäre der Ausschluß einer Umgebung von $k = 0$ bei der Integration. Unsere Wahl der Regularisierung hat den Vorzug, daß sie die Lorentz-Invarianz des Integrals nicht stört. Nach Einführung der Photonmasse ist es bequem, die folgenden Abkürzungen zu benutzen:

$$a_1 = k^2 - \lambda^2 + i0, \quad a_2 = k^2 - 2pk + i0, \quad a_3 = k^2 - 2p'k + i0 \quad (345)$$

Dabei wollen wir die a_i als Funktionen von k ansehen, während p und p' fest gewählt sind. Mit der Hilfsfunktion

$$F(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{e^{-ikx}}{a_1 a_2 a_3} \quad (x \in M_4) \quad (346)$$

und dem Ableitungsoperator

$$D^\mu = -i\gamma^\nu (\not{p} - i\not{\partial} + m) \gamma^\mu (\not{p}' - i\not{\partial} + m) \gamma_\nu \quad (347)$$

kann man schreiben:

$$?_1^\mu = D^\mu F(x)|_{x=0} . \quad (348)$$

Es ist evident, daß $F(x)$ eine skalare Funktion ist und die Matrixstruktur der Vertexfunktion in D^μ verborgen ist. Für die Analyse von Integralen vom Typ (346) benutzt man – nach einem Vorschlag von R.Feynman – ein neues Werkzeug, nämlich eine Integralformel, die aus vielerlei Gründen bemerkenswert ist:

$$\prod_{i=1}^3 \frac{1}{a_i} = 2 \int_0^1 d\beta_1 \int_0^1 d\beta_2 \int_0^1 d\beta_3 \frac{\delta(\sum \beta_i - 1)}{(\sum \beta_i a_i)^3} \quad (349)$$

Voraussetzung für die Gültigkeit ist, das $\sum \beta_i a_i$ keine Nullstelle im Integrationsgebiet besitzt. Beachtet man die δ -Funktion im Integranden, so erkennt man, daß dieses Gebiet die Form eines Dreiecks hat mit den Eckpunkten $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ und $(0, 0, 1)$; und die genannte Voraussetzung ist erfüllt, sobald $\text{Im } a_i > 0$ gilt. Dies ist aber in allen Anwendungen durch die $i0$ -Vorschrift bei den Propagatoren gewährleistet.

In den folgenden Formeln benutzen wir die Abkürzung

$$d\beta = \begin{cases} d\beta_1 d\beta_2 d\beta_3 \delta(\sum \beta_i - 1) & 0 \leq \beta_i \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (350)$$

Zunächst folgt aus (345) und $\sum \beta_i = 1$:

$$\begin{aligned} \sum \beta_i a_i &= k^2 - 2ka(\beta) - \beta_1 \lambda^2 + i0 \\ &= [k - a(\beta)]^2 - M^2(\beta) + i0 \end{aligned}$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} a(\beta) &= \beta_2 p + \beta_3 p' \\ M^2(\beta) &= a(\beta)^2 + \beta_1 \lambda^2 \\ &= \beta_1 \lambda^2 + (\beta_2 + \beta_3)^2 m^2 - \beta_2 \beta_3 q^2 \end{aligned}$$

($q = p - p'$). Sodann können wir schreiben:

$$F(x) = 2 \int d\beta \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ikx}}{([k - a]^2 - M^2 + i0)^3} \quad (351)$$

$$= 2 \int d\beta e^{-ixa} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ikx}}{(k^2 - M^2 + i0)^3} \quad (352)$$

Für den Übergang von der ersten zur zweiten Zeile haben wir die Substitution $k - a \rightarrow k$ vorgenommen. Man erhält so ein k -Integral, dessen Verwandtschaft zur Feynman-Funktion

$$\Delta_F(x, M) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ikx}}{k^2 - M^2 + i0} \quad (353)$$

offensichtlich ist. Denn durch zweimaliges Ableiten nach M^2 entsteht gerade der gewünschte Ausdruck:

$$\left(\frac{d}{d(M^2)}\right)^2 \Delta_F(x, M) = 2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ikx}}{(k^2 - M^2 + i0)^3} \quad (354)$$

Andererseits gestattet die Feynman-Funktion eine Integraldarstellung ganz anderer Art¹⁰⁵:

$$\Delta_F(x, M) = \frac{-\pi^2}{(2\pi)^4} \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} \exp \left\{ -is(M^2 - i0) - i\frac{x^2 - i0}{4s} \right\} \quad (355)$$

Die Konsequenz davon ist:

$$\left(\frac{d}{d(M^2)}\right)^2 \Delta_F(x, M) = \frac{\pi^2}{(2\pi)^4} \int_0^\infty ds \exp \left\{ -is(M^2 - i0) - i\frac{x^2}{4s} \right\} \quad (356)$$

Fassen wir zusammen: Die $?_1^\mu$ -Funktion läßt sich als ein Integral der folgenden Art schreiben,

$$\begin{aligned} ?_1^\mu &= (2\pi)^{-4} \int d\beta \int_0^\infty ds e^{-is[M^2(\beta) - i0]} f^\mu(a(\beta), s) \\ f^\mu(a, s) &= D^\mu \exp \left\{ -ixa - i\frac{x^2}{4s} \right\} \Big|_{x=0} \\ &= -i\gamma^\nu (\not{p} - \not{q} + m) \gamma^\mu (\not{p}' - \not{q} + m) \gamma_\nu + \frac{1}{2s} \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\mu \gamma_\sigma \gamma_\nu \\ &= -i\gamma^\nu (\not{p} - \not{q} + m) \gamma^\mu (\not{p}' - \not{q} + m) \gamma_\nu + \frac{2}{s} \gamma^\mu \end{aligned}$$

Hierbei entstehen zwei einfache Integrale über s , von denen eines problematisch ist:

$$\int_0^\infty ds e^{-is(M^2 - i0)} = \frac{1}{iM^2} \quad (357)$$

$$\int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-is(M^2 - i0)} = \text{divergent} \quad (358)$$

Das divergente Integral regularisieren wir so:

$$\int_r^\infty \frac{ds}{s} e^{-is(M^2 - i0)} = -\text{Ei}(-irM^2 - 0) \quad (r > 0) \quad (359)$$

$$= -C - \log(irM^2 + 0) + O(r) \quad (r \downarrow 0) \quad (360)$$

¹⁰⁵Diese Formel resultiert aus einer bekannten Integraldarstellung der Hankel-Funktion $H_1^{(1)}(z)$.

Hier haben wir von der in der Mathematik öfter benötigten Funktion

$$\text{Ei}(z) = - \int_{-z}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = C + \log(-z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n \cdot n!} \quad (361)$$

Gebrauch gemacht; $C = 0.5772\dots$ ist die Euler-Konstante. Damit haben wir die Ultraviolettdivergenz zunächst einmal beseitigt. Jedoch hängt unsere Vertexfunktion von dem willkürlichen Parameter r ab: $?^\mu(p', p; r)$. Nun wenden wir ein Verfahren an, daß man **Ladungsrenormierung** nennt. Wir möchten nämlich erreichen, daß $-e$ die Ladung des Elektrons ist. Um dies zu gewährleisten, muß $?^\mu(p, p) \hat{=} \gamma^\mu$ gelten¹⁰⁶. Wir erreichen das gewünschte Verhalten, wenn wir die *renormierte Vertexfunktion* durch die Vorschrift

$$?_{ren}^\mu(p', p) = \gamma^\mu + e^2 \lim_{r \rightarrow 0} [?_1^\mu(p', p; r) - ?_1^\mu(p, p; r)] \quad (362)$$

$$= \gamma^\mu + e^2 ?_{ren,1}^\mu(p', p) \quad (363)$$

konstruieren. Wir möchten natürlich verstehen, was diese Vorschrift physikalisch bedeutet. Man überlegt sich sofort, daß $?^\mu(p, p; r) \hat{=} c(r)\gamma^\mu$ gilt mit $c(0) = \infty$. Rein formal haben wir durch die Ladungsrenormierung ein Vielfaches des 'nackten' Vertex, nämlich $c(0)\gamma^\mu$, von $?_1^\mu(p', p; 0)$ abgezogen. Beginnen wir die Störungstheorie daher mit der 'unrenormierten' Ladung e_0 in der Wechselwirkung, so liefert unser Verfahren die renormierte¹⁰⁷ (d.h. die experimentell beobachtete) Ladung $e = e_0 - c(0)e_0^3 + \dots$. Nun ist aber e die Größe, die wir als 'klein' anzusehen haben, und auch diejenige, nach der zu entwickeln ist. Folglich müssen wir umgekehrt von einer Reihenentwicklung $e_0 = e + c_1 e^3 + c_2 e^5 + \dots$ mit unbekanntem Koeffizienten c_i ausgehen, die Ordnung für Ordnung durch die Renormierungsbedingung $?^\mu(p, p) \hat{=} \gamma^\mu$ zu bestimmen sind. Insgesamt gelangen wir so zu einer Reihenentwicklung der Vertexfunktion *nach der renormierten Ladung e* . Von dieser Entwicklung wollen wir hier nur den Term der Ordnung e^2 bestimmen. Konkret bedeutet das Verfahren, daß wir

$$M_0^2 = M^2(\beta)|_{p'=p} = (\beta_2 + \beta_3)^2 m^2 + \beta_1 \lambda^2 \quad (364)$$

definieren und damit die folgende Differenz ermitteln:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_r^\infty \frac{ds}{s} \left[e^{-is(M^2 - i0)} - e^{-is(M_0^2 - i0)} \right] = \log \frac{M_0^2}{M^2} \quad (365)$$

¹⁰⁶Vergleiche die Beschreibung der Vertexfunktion durch Formfaktoren und die Diskussion im Abschnitt 7.5. Das Zeichen $\hat{=}$ bedeutet hier, daß die beiden Ausdrücke zwischen den Spinoren \bar{u} und u das gleiche Ergebnis liefern.

¹⁰⁷Wir ermitteln hier die Ladungsrenormierung nur in niedrigster Ordnung. Weitere Korrekturen werden bei einer Diskussion der 5., 7. usw. Ordnung notwendig.

Als Hilfsgröße führen wir sodann die regularisierte $?_1^\mu$ -Funktion ein:

$$?_{reg,1}^\mu(p', p) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\beta \left\{ \frac{-1}{M^2} \gamma^\nu (\not{p} - \not{q} + m) \gamma^\mu (\not{p}' - \not{q} + m) \gamma_\nu + 2\gamma^\mu \log \frac{M_0^2}{M^2} \right\}$$

die noch nicht $?_{reg,1}^\mu(p, p) = 0$ erfüllt. Jedoch erhalten wir die renormierte $?_1^\mu$ -Funktion nun leicht als

$$?_{ren,1}^\mu(p', p) = ?_{reg,1}^\mu(p', p) - ?_{reg,1}^\mu(p, p) \quad (366)$$

Nun können wir uns dem algebraischen Ausdruck

$$R(\beta) = -\gamma^\nu (\not{p} - \not{q} + m) \gamma^\mu (\not{p}' - \not{q} + m) \gamma_\nu$$

widmen. Die Eigenschaften der γ -Matrizen benutzend findet man:

$$\frac{1}{2}[R(\beta_1, \beta_2, \beta_3) + R(\beta_1, \beta_3, \beta_2)] \hat{=}$$

$$2m^2(\beta_1^2 - 4\beta_1 + 1)\gamma^\mu + m\beta_1(1 - \beta_1)[\not{q}, \gamma^\mu] + 2q^2(1 - \beta_2)(1 - \beta_3)\gamma^\mu$$

($q = p - p'$). Die Symmetrisierung bezüglich der Abhängigkeit von β_2 und β_3 konnten wir deshalb durchführen, weil $d\beta$, $M(\beta)$ und das Integrationsgebiet diese Symmetrie besitzen. Drücken wir die Vertexfunktion mit Hilfe der Formfaktoren aus,

$$?_{ren}^\mu(p', p) = \gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{1}{4m}[\not{q}, \gamma^\mu] F_2(q^2) \quad , \quad (367)$$

so erhalten wir Integralausdrücke für F_1 und F_2 :

$$\begin{aligned} F_1(q^2) &= 1 + \frac{e^2}{8\pi^2} \int d\beta \left[(\beta_1^2 - 4\beta_1 + 1) \left(\frac{m^2}{M^2(\beta)} - \frac{m^2}{M_0^2(\beta)} \right) \right. \\ &\quad \left. + (1 - \beta_2)(1 - \beta_3) \frac{q^2}{M^2(\beta)} + \log \frac{M_0^2(\beta)}{M^2(\beta)} \right] \\ F_2(q^2) &= \frac{e^2}{4\pi^2} \int d\beta \beta_1(1 - \beta_1) \frac{m^2}{M^2(\beta)} \end{aligned} \quad (368)$$

Hier ist insbesondere der Wert $F_2(0)$ von Interesse:

$$\begin{aligned} F_2(0) &= \frac{e^2}{4\pi^2} \int_0^1 d\beta_1 \int_0^1 d\beta_2 \int_0^1 d\beta_3 \delta(\sum \beta_i - 1) \frac{\beta_1(1 - \beta_1)}{(1 - \beta_1)^2 + \beta_1(\lambda/m)^2} \\ &= \frac{e^2}{4\pi^2} \int_0^1 d\beta_1 \int_0^{1-\beta_1} d\beta_2 \frac{\beta_1(1 - \beta_1)}{(1 - \beta_1)^2 + \beta_1(\lambda/m)^2} \\ &= \frac{e^2}{4\pi^2} \int_0^1 d\beta_1 \frac{\beta_1(1 - \beta_1)^2}{(1 - \beta_1)^2 + \beta_1(\lambda/m)^2} \end{aligned}$$

An dieser Stelle angekommen, können wir aufatmen. Denn das verbleibende Integral ist auch dann noch konvergent, wenn wir der Photonmasse λ ihren physikalischen Wert Null geben. Das auszuwertende Integral ist sehr einfach: $\int_0^1 d\beta_1 \beta_1 = \frac{1}{2}$. Indem wir die Feinstrukturkonstante $\alpha = e^2/(4\pi)$ einführen, lautet das Resultat für das anomale magnetische Moment des Elektrons:

$$F_2(0) = \frac{\alpha}{2\pi} \quad (369)$$

Eine andere Art dasselbe zu sagen ist $g-2 = \alpha/\pi$. Das Resultat (J.Schwinger 1948) und dessen experimentelle Bestätigung war eines der ersten Triumphe der Feldtheorie.

Das Integral, das den Formfaktor $F_2(q^2)$ definiert, läßt sich für $\lambda = 0$ geschlossen lösen:

$$F_2(q^2) = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{\Theta}{\sinh \Theta} \quad (2m \sinh(\Theta/2))^2 = -q^2 \geq 0 \quad (370)$$

Die Variable Θ wurde hier nur als eine bequeme Hilfsgröße eingeführt. Interessant ist auch, daß der Formfaktor sich analytisch fortsetzen läßt, wenn wir nämlich $z = q^2$ als eine komplexe Variable auffassen. Wir gelangen so zu einer komplexen Funktion $F_2(z)$, die die Beziehung $\overline{F_2(z)} = F_2(\bar{z})$ erfüllt. Auch in dem Bereich $0 \leq q^2 < 4m^2$ (hier gilt $\Theta = i\theta$) ist $F_2(q^2)$ noch reell:

$$F_2(q^2) = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{\theta}{\sin \theta} \quad (2m \sin(\theta/2))^2 = q^2 \geq 0 \quad (371)$$

Die Stelle $q^2 = 4m^2$ ist ein Verzweigungspunkt für die analytische Funktion. Man findet jenseits dieses Punktes einen Imaginärteil der Funktion¹⁰⁸:

$$\text{Im } F_2(q^2 + i0) = -\text{Im } F_2(q^2 - i0) = \alpha \frac{m^2}{q^2} \left(1 - \frac{4m^2}{q^2}\right)_+^{-1/2} \geq 0 \quad (372)$$

Durch eine direkte Rechnung bestätigt man die Gültigkeit der **Dispersionsrelation**

$$F_2(z) = \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} dt \frac{\text{Im } F_2(t + i0)}{t - z}, \quad (373)$$

die nicht nur in jeder Ordnung der Störungstheorie, sondern, aufgrund funktionentheoretischer Argumente, sogar allgemeine Gültigkeit beansprucht. Daß

¹⁰⁸Unter x_+^{ν} ($x \in \mathbf{R}$) versteht man diejenige Funktion von x , die den Wert 0 für $x \leq 0$ und den Wert x^{ν} für $x > 0$ annimmt.

der Wert $(2m)^2$ als die untere Grenze des Integrals auftritt, liegt darin begründet, daß $2m$ die kleinste Energie eines e^+e^- -Paares ist.

Man hat zeigen können, daß $F_2(0)$ in allen Ordnungen der Störungstheorie frei von Infrarotdivergenzen ist. Diese Tatsache erlaubt es, $g - 2$ sehr genau als eine Reihe nach α^n theoretisch zu bestimmen:

$$\begin{aligned}
 g - 2 &= \frac{\alpha}{\pi} && (1 \text{ Graph}) \\
 &+ \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \left[\frac{197}{72} + \frac{\pi^2}{6} - \pi^2 \log 2 + \frac{3}{2}\zeta(3) \right] && (7 \text{ Graphen}) \\
 &+ \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 [2,98 \pm 0,40] && (72 \text{ Graphen})
 \end{aligned}$$

Die Berechnung des Beitrages der Ordnung α^2 gelang Sommerfield und Petermann im Jahre 1957; $\zeta(s)$ ist die Riemannsche Zetafunktion, und der Wert des Ausdruckes in der eckigen Klammer ist $-0,6595\ 79314$.

Die Berechnung des Beitrages der Ordnung α^3 erforderte einen hohen Aufwand: 30 Physiker und eine Großrechenanlage waren daran beteiligt. Das Ergebnis blieb dennoch ungenau, weil hier Monte-Carlo-Integrationstechniken zur Bewältigung mehrdimensionaler Integrale eingesetzt wurden. Insgesamt erhält den den folgenden theoretischen Wert:

$$\begin{aligned}
 (g - 2)_{\text{Theorie}} &= && 0,00232\ 28195(34) && (\text{Ordnung } \alpha) \\
 &&& -0,00000\ 35446 && (\text{Ordnung } \alpha^2) \\
 &&& +0,00000\ 00373(50) && (\text{Ordnung } \alpha^3) \\
 &&& \hline
 &&& 0,00231\ 93122(84)
 \end{aligned}$$

Die letzten beiden Stellen sind mit Fehlern behaftet, die in Klammern angegeben wurden. Sie haben jedoch verschiedenen Ursprung: (34) beruht auf der Ungenauigkeit, mit der die Feinstrukturkonstante bekannt ist, (50) beruht auf der ungenauen Rechnung in der Ordnung α^3 .

Auch im Experiment hat man eine erstaunliche Genauigkeit erzielt:

$$(g - 2)_{\text{Exp.}} = 0,00231\ 93154(70) \quad ,$$

so daß wir von einer hervorragenden Übereinstimmung mit der theoretischen Vorhersage sprechen können.

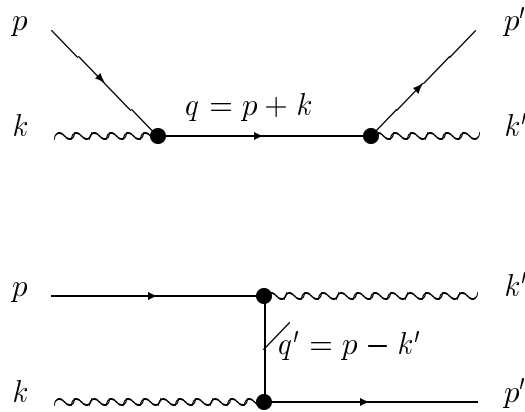
Wenden wir uns nun dem Formfaktor F_1 zu. Seine Struktur ist wesentlich komplizierter. Auch hier kann man $F_1(q^2)$ zu einer analytischen Funktion $F_1(z)$ erweitern mit einem Verzweigungspunkt bei $z = 4m^2$, und es gilt eine **Dispersionsrelation** der Form

$$F_1(z) = 1 + \frac{z}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} dt \frac{\text{Im } F_1(t + i0)}{t(t - z)} \quad (374)$$

mit $\text{Im} F_1(t + i0) \geq 0$. Jedoch gelingt es hier nicht, die Photonmasse gleich Null zu setzen: $\text{Im} F_1(t + i0)$ ist infrarotdivergent. Die Ursache mag darin zu suchen sein, daß wir den Dreiecksgraphen isoliert betrachtet und keine Strahlungskorrekturen berücksichtigt haben. In einem realistischen Experiment ist nicht auszuschließen, daß das Elektron von weicher unbeobachtbarer Bremsstrahlung begleitet wird. Wir verstehen dies als eine Warnung, daß ein Feynman-Graph für sich genommen unter Umständen kein sinnvolles Resultat hat. Die Frage „Welche Ladungsverteilung hat das Elektron?“ kann nicht losgelöst werden von der Frage „Durch welches Experiment, insbesondere mit welcher Energieauflösung des Detektors soll der Formfaktor F_1 bestimmt werden?“.

7.7 Die Compton-Streuformel

Die Streuung von Photonen an Elektronen wird in der Ordnung e^2 durch zwei Feynman-Graphen bestimmt:



Für die Übergangsamplitude schreiben wir wie früher

$$\langle p'\sigma', k'\lambda' | S - 1 | p\sigma, k\lambda \rangle = i\delta^4(\Sigma p) F \quad (375)$$

mit $\Sigma p = p + k - p' - k'$. Indem wir die Feynman-Regeln anwenden, erhalten aus den beiden Graphen die folgende Darstellung für die Streuamplitude F :

$$F = -(e/2\pi)^2 \bar{u}(p'\sigma') A u(p\sigma) \quad (376)$$

$$A = \overline{e_{\lambda'}^{\mu}(k')} B_{\mu\nu} e_{\lambda}^{\nu}(k) \quad (377)$$

$$B_{\mu\nu} = \gamma_{\mu} \frac{\not{q}' + m}{q'^2 - m^2} \gamma_{\nu} + \gamma_{\nu} \frac{\not{q} + m}{q^2 - m^2} \gamma_{\mu} \quad (378)$$

Ohne ein bestimmtes Bezugssystem auszuzeichnen, kann allgemein der differentielle Wirkungsquerschnitt für die Zweiteilchenstreuung durch die Formel

$$d\sigma = \frac{\pi^2}{K} |F|^2 d\vartheta \quad (379)$$

eingeführt werden mit $K = \sqrt{(pk)^2 - p^2 k^2}$. Im vorliegenden Fall gilt $k^2 = 0$, also $K = pk$. Bei festen Eingangsimpulsen p und k sind die Ausgangsimpulse p' und k' auf eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit, den *Phasenraum* der Streureaktion beschränkt, auf dem das Lorentz-invariante Maß

$$d\vartheta = \delta^4(\Sigma p) \frac{d^3 p'}{2p'^0} \frac{d^3 k'}{2k'^0} \quad (380)$$

definiert ist. Den differentiellen Wirkungsquerschnitt für unpolarisierte Elektronen und Photonen erhält man als¹⁰⁹

$$d\bar{\sigma} = \frac{\alpha^2}{pk} \frac{1}{2} \sum_{\lambda, \lambda'} \frac{1}{2} \sum_{\sigma, \sigma'} |\bar{u}(p' \sigma') A u(p \sigma)|^2 d\vartheta \quad (381)$$

$$= \frac{\alpha^2}{4pk} \sum_{\lambda, \lambda'} \text{Spur}(\not{p}' + m) A (\not{p} + m) \bar{A} d\vartheta \quad (382)$$

$$= \frac{\alpha^2}{4pk} \text{Spur}(\not{p}' + m) B_{\mu\nu} (\not{p} + m) B^{\nu\mu} d\vartheta \quad (383)$$

Hierbei machten wir von der Summenformel¹¹⁰

$$\sum_{\lambda} e_{\lambda}^{\mu}(k) \overline{e_{\lambda}^{\nu}(k)} = -g^{\mu\nu} - \frac{k^{\mu} k^{\nu}}{(nk)^2} + \frac{k^{\mu} n^{\nu} + n^{\mu} k^{\nu}}{nk}, \quad (384)$$

von der Stromerhaltung $k^{\mu} B_{\mu\nu} = 0 = B_{\mu\nu} k^{\nu}$ und von $\bar{B}^{\mu\nu} = B^{\nu\mu}$ Gebrauch. Schließlich beachten wir

$$\begin{aligned} q^2 - m^2 &= (p + k)^2 - m^2 = 2pk \\ q'^2 - m^2 &= (p - k')^2 - m^2 = -2pk' \end{aligned}$$

¹⁰⁹In der Dirac-Theorie schreiben wir $\bar{A} = \gamma^0 A^* \gamma^0$ für eine 4×4 -Matrix A , wenn A^* die gewöhnliche adjungierte Matrix darstellt.

¹¹⁰Durch die Summe über die beiden Helizitäten $\lambda = \pm 1$ des Photons entsteht der Polarisationsensor $P^{\mu\nu}(k)$ für $k^2 = 0$, den wir in der allgemeinen Form, nämlich für $k^2 \neq 0$, schon früher untersucht haben (siehe das Kapitel 6).

und erhalten

$$d\bar{\sigma} = \frac{\alpha^2}{16pk} \left[\frac{r}{(pk)^2} - \frac{s+s'}{(pk)(pk')} + \frac{r'}{(pk')^2} \right] d\vartheta \quad (385)$$

mit den Abkürzungen:

$$\begin{aligned} r &= \text{Spur } (\not{p}' + m)\gamma^\mu(\not{q} + m)\gamma^\nu(\not{p} + m)\gamma_\nu(\not{q} + m)\gamma_\mu \\ s &= \text{Spur } (\not{p}' + m)\gamma^\mu(\not{q} + m)\gamma^\nu(\not{p} + m)\gamma_\mu(\not{q}' + m)\gamma_\nu \\ s' &= \text{Spur } (\not{p}' + m)\gamma^\nu(\not{q}' + m)\gamma^\mu(\not{p} + m)\gamma_\nu(\not{q} + m)\gamma_\mu \\ r' &= \text{Spur } (\not{p}' + m)\gamma^\nu(\not{q}' + m)\gamma^\mu(\not{p} + m)\gamma_\mu(\not{q}' + m)\gamma_\nu \end{aligned}$$

Zur Vereinfachung benutzen wir die algebraischen Identitäten

$$\gamma^\nu\gamma_\nu = 4 \quad (386)$$

$$\gamma^\nu\not{q}\gamma_\nu = -2\not{q} \quad (387)$$

$$\gamma^\nu\not{q}\not{p}\gamma_\nu = 4ab \quad (388)$$

$$\gamma^\nu\not{q}\not{p}\not{q}\gamma_\nu = -2\not{q}\not{p}\not{q} \quad (389)$$

Durch Vertauschung von q mit q' entsteht r' aus r und ebenso s' aus s . Es genügt daher r und s auszurechnen:

$$\begin{aligned} r &= 4\text{Spur}(\not{p}' - 2m)(\not{q} + m)(\not{p} - 2m)(\not{q} + m) \\ &= 16 [4m^4 + m^2(4q^2 + pp' - 4pq - 4p'q) + 2(pq)(p'q') - q^2(pp')] \\ s &= 4\text{Spur}(\not{q} + m)[m\not{p}'\not{q}' - 2(pp')\not{q}' + m(\not{q}' + \not{p}')(\not{p} + m) + m^2(\not{p} - 2m)] \\ &= 16 [m^2(pq + p'q') - 2(pp')(qq') + m^2(q + p)(q' + p') - 2m^4] \end{aligned}$$

Bislang haben wir von der Relation $p + k = p' + k'$ noch keinen Gebrauch gemacht. Wird sie berücksichtigt, so kann man die Lorentz-invarianten algebraischen Ausdrücke r, r', s' auf die Produkte pk und pk' zurückführen:

$$r = 32[m^4 + m^2pk + (pk)(pk')] \quad (390)$$

$$s + s' = 32m^2[2m^2 + pk - pk'] \quad (391)$$

$$r' = 32[m^4 - m^2pk' + (pk)(pk')] \quad (392)$$

Mit Hilfe dieser Formeln läßt sich $d\bar{\sigma}$ in die folgende Gestalt bringen:

$$d\bar{\sigma} = \frac{2\alpha^2}{pk} \left[\frac{pk}{pk'} + \frac{pk'}{pk} + \left\{ 1 + m \left(\frac{m}{pk} - \frac{m}{pk'} \right) \right\}^2 - 1 \right] d\vartheta \quad (393)$$

Als spezielles Bezugssystem wählen wir das Laborsystem, so daß $p = (m, 0, 0, 0)$ und $kk' = \omega\omega'(1 - \cos \Theta)$ gilt, wobei Θ der Streuwinkel ist; ω und ω' sind die

Photonenergien vor bzw. nach der Streuung. Der infinitesimale Raumwinkel $d\Omega$, in dem das Photon nach der Streuung registriert wird, ist durch

$$d^3 k' = \omega'^2 d\omega' d\Omega$$

gegeben. Für den Vergleich mit dem Experiment wünscht man sich eine Formel für $d\bar{\sigma}/d\Omega$. Dazu setzen wir

$$f(\omega, \omega') = \frac{2\alpha^2}{m\omega} \left[\frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} + \left\{ 1 + m \left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega'} \right) \right\}^2 - 1 \right],$$

formen das Integrationsmaß (380) geeignet um,

$$d\vartheta = \frac{1}{2} \omega' d\omega' d\Omega \Theta(p'^0) \delta(p'^2 - m^2) \delta^4(p' + k' - p - k')$$

und integrieren $d\bar{\sigma}$ unter Festhaltung des Raumwinkels Ω :

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega} &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \omega' d\omega' f(\omega, \omega') \int d^4 p' \Theta(p'^0) \delta(p'^2 - m^2) \delta^4(p' + k' - p - k') \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \omega' d\omega' f(\omega, \omega') \delta(m\omega - m\omega' - kk') \end{aligned}$$

Die verbleibende δ -Funktion läßt sich umformen:

$$\delta(m\omega - m\omega' - kk') = \frac{\omega_0}{m\omega} \delta(\omega' - \omega_0) \quad \omega_0 := \frac{m\omega}{m + \omega(1 - \cos \Theta)}$$

Nach Ausführung der ω' -Integration schreiben wir wieder ω' anstelle von ω_0 und gewinnen so die *Klein-Nishina-Formel*:

$$\boxed{\left(\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega} \right)_{Lab.} = \frac{\alpha^2}{2m^2} \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - \sin^2 \Theta \right)} \quad (394)$$

ω' und Θ sind durch die bekannte Relation verknüpft:

$$\frac{1}{\omega'} - \frac{1}{\omega} = \frac{1}{m} (1 - \cos \Theta) \quad (395)$$

Es gilt somit stets $\omega' \leq \omega$. Das Quadrat des klassischen Elektronenradius

$$r_e = \frac{\alpha}{m} = 2,8179 \cdot 10^{-15} \text{ m} \quad (396)$$

bestimmt in der Comptonstreuung die Größenordnung des Wirkungsquerschnittes:

$$d\bar{\sigma}/d\Omega \sim 10^{-30} \text{ m}^2$$

Für die Streuung in Vorwärtsrichtung ($\Theta = 0$, $\omega' = \omega$) finden wir einen energieunabhängigen Ausdruck:

$$\left(\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega}\right)_{Lab. \Theta=0} = r_e^2 \quad (397)$$

Interessant ist ferner das Verhalten im optischen Bereich $\omega \ll m$ (statische Näherung für das Elektron). Hier geht die Klein-Nishina-Formel in die klassische Thomson-Formel über:

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega} = \frac{1}{2}r_e^2(1 + \cos^2 \Theta) \quad (398)$$

Das Licht erfährt hierbei keine Frequenzänderung, und das Elektron erhält keinen Rückstoß. Die Thomson-Formel zeigt die für Lichtstreuung charakteristische Vorwärts-Rückwärts-Symmetrie (Invarianz gegenüber der Ersetzung $\Theta \rightarrow \pi - \Theta$).

Im Falle des Thomson-Limes ist es auch leicht, den *totalen* Wirkungsquerschnitt zu errechnen. Zu diesem Zweck setzt man

$$d\Omega = d\phi d(\cos \Theta)$$

und führt die beiden Winkelintegrationen aus¹¹¹:

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{1}{2}r_e^2 2\pi \int_{-1}^1 d\zeta (1 + \zeta^2) = \frac{8\pi}{3}r_e^2 \quad (399)$$

wobei wir $\zeta = \cos \Theta$ gesetzt haben.

¹¹¹Der numerische Wert ist $0,66523 \cdot 10^{-28} \text{ m}^2$. Als bequeme Einheit für Wirkungsquerschnitte gilt $1 \text{ barn} = 10^{-28} \text{ m}^2$, so daß man die Faustregel formulieren kann: $\sigma_{\text{tot}}(\text{Thomson}) = 2/3 \text{ barn}$.

8 Die Fermion-Determinante

Fast alle gegenwärtig benutzten feldtheoretischen Ansätze in der Teilchenphysik gehen davon aus, daß die Lagrange-Dichte *bilinear* in den Fermi-Feldern ist. Aus diesem Bauprinzip folgt eine explizite Formel für $(\Omega, S\Omega)$, wenn S der Streuoperator für ein Modell mit äußerem Feld ist (d.h. Graphen mit inneren Bosonlinien werden vernachlässigt). Die Ableitung der Formel benötigt Konzepte der multilinearen Algebra und führt zu einer fundamentalen Größe des Modells, die man die *Fermion-Determinante* nennt. Sie repräsentiert gewissermaßen die Summe aller Feynman-Graphen, die zwei Bedingungen genügen: (1) alle inneren Linien sind Fermionlinien, (2) alle äußeren Linien sind Bosonlinien. Betrachtet man die Fermion-Determinante als ein *Funktional*, abhängig von äußeren Quellen und einem äußeren Feld, so wird diese Größe zu einem wichtigen Baustein der QED, der QCD oder auch der Salam-Weinberg-Theorie.

8.1 Regularisierung

Ein Paradebeispiel ist die Paarerzeugung in einem starken äußeren elektromagnetischen Feld. Äußere Ströme und Potentiale wurden schon mehrfach angesprochen. Bei Problemen mit starken Feldern ist es notwendig, die vertrauten Pfade der Störungsrechnung zu verlassen und neue Rechenmethoden zu entwickeln. Es sei also $A_\mu(x)$ das äußere elektromagnetische Potential und $\psi(x)$ das freie Dirac-Feld zur Beschreibung von Elektronen und Positronen¹¹². Der formale Ausdruck für den S-Operator ist¹¹³

$$S = T \exp \left\{ -ie \int d^4x \bar{\psi}(x) \not{A}(x) \psi(x) \right\} \quad (400)$$

Wenn im folgenden von dem Vakuum Ω die Rede ist, so ist wichtig im Auge zu behalten, daß es sich hierbei zwar um einen Zustand ohne Elektronen und Positronen, aber doch um einen das *äußere Feld beschreibenden* Zustand handelt. In einem gewissen Sinne sind das Vakuum Ω und das Feld $A_\mu(x)$ ein und dasselbe, besser: sie entsprechen einander. Natürlich gilt hier nicht

¹¹²Wenn man überhaupt eine Chance hat, Paarerzeugung zu beobachten, wird man seine Hoffnung primär auf die leichtesten Fermionen richten. Die für die Erzeugung notwendige Energie stammt aus dem äußeren Feld, das in diesem Modell ein unendliches Energiereservoir darstellt.

¹¹³Wir verzichten an dieser Stelle (d.h. außerhalb der Störungsrechnung) auf die Einführung des Wick-Produktes $:\bar{\psi}\gamma^\mu\psi:$, die nur eine unendliche Phase aus dem S-Operator entfernt. Grund: diese Eliminierung verbessert den Ausdruck keineswegs, wie man glauben könnte, weil es weitere Beiträge gibt, die sich zu einer unendlichen Phase aufaddieren. Hier hilft nur eine strikte Anwendung der Regularisierungsvorschrift.

$S\Omega = e^{i\alpha}\Omega$, und somit ist die Amplitude $(\Omega, S\Omega)$ die erste Größe der Theorie, auf die sich unser Interesse richtet.

Sobald $A_\mu(x) \neq 0$ gilt, nützen keine noch so strengen Bedingungen an den Verlauf dieser Funktion bei dem Versuch, dem Ausdruck (400), so wie er steht, einen mathematisch einwandfreien Sinn zu geben. Er muß in jedem Fall regularisiert werden. Hierzu gibt es mehrere Möglichkeiten. Sehr drastische Eingriffe in die Raum-Zeit-Struktur erlaubt sich die Methode, die den Minkowski-Raum (oder einen korrespondierenden vierdimensionalen euklidischen Raum) durch ein *endliches Gitter* ersetzt. Wir gehen einen anderen Weg.

Als *Zerlegung der Einheit* bezeichnen wir ein System von geeignet gewählten Testfunktionen¹¹⁴ $f_n : M_4 \rightarrow \mathbb{C}^4$ ($n = 1, 2, \dots$) mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \bar{f}_n(y) = \delta^4(x-y) \mathbb{1}_4 \quad (401)$$

Im folgenden benutzen wir die Abkürzungen

$$a_n = \int d^4x \bar{f}_n(x) \psi(x) \quad (402)$$

$$a_n^\dagger = \int d^4x \bar{\psi}(x) f_n(x) \quad (403)$$

$$A_{nn'} = \int d^4x \bar{f}_n(x) \mathcal{A}(x) f_{n'}(x) \quad (404)$$

$$iB_{nn'} = (\Omega, T(a_n a_{n'}^\dagger) \Omega) = i \int d^4x \int d^4y \bar{f}_n(x) S_F(x-y, m) f_{n'}(y) \quad (405)$$

Die Wahl der Testfunktionen f_n ist offensichtlich dadurch eingeschränkt, daß die Existenz der Integrale (404) und (405) gewährleistet sein muß. Die zugrunde liegende Idee wird sichtbar, wenn wir für jedes natürliche $N < \infty$ eine regularisierte Form des Wirkungsintegrals definieren, so daß

$$\int d^4x \bar{\psi}(x) \mathcal{A}(x) \psi(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n,m}^N a_n^\dagger A_{nm} a_m . \quad (406)$$

In Worten: Wir erhalten das volle Wirkungsintegral aus seiner regularisierten Fassung für $N \rightarrow \infty$, sind jedoch gehalten, die Zahl N in allen Rechnungen endlich zu lassen, bis wir zu physikalischen Größen gelangen, deren

¹¹⁴Hier ist $f_n(x)$ als ein Dirac-Spinor aufzufassen. Es gilt, wie in der Dirac-Theorie vereinbart, $\bar{f}_n(x) = f_n^*(x) \gamma^0$.

Limes existiert. Deshalb vereinbaren wir, daß A und B von nun an $N \times N$ -Matrizen sind. Es ist zweckmäßig, als weitere Matrix das Produkt $AB = C$ einzuführen, dessen Bedeutung aus

$$iC_{nn'} = (\Omega, T(a'_n a_{n'}^\dagger) \Omega) \quad a'_n := \sum_m A_{nm} a_m \quad (407)$$

ersichtlich ist: C ist die regularisierte Form von

$$(\Omega, T A(x) \psi(x) \bar{\psi}(y) \Omega).$$

Wir entwickeln die e-Funktion in dem regularisierten Ausdruck für $(\Omega, S\Omega)$, um das T-Exponential auf das T-Produkt zurückzuführen:

$$(\Omega, S\Omega) = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-ie)^p}{p!} (\Omega, T (\sum_n a'_n a_n^\dagger)^p \Omega) \quad (408)$$

Weiter folgt

$$\begin{aligned} (\Omega, T (\sum_n a'_n a_n^\dagger)^p \Omega) &= \sum_{n_1, \dots, n_p} (\Omega, T(a_{n_1}^\dagger a'_{n_1} a_{n_2}^\dagger a'_{n_2} \cdots a_{n_p}^\dagger a'_{n_p}) \Omega) \\ &= \sum_{n_1, \dots, n_p} \sum_{\pi \in S_p} (-1)^p \text{sgn} \pi \prod_{i=1}^p (\Omega, T(a'_{n_i} a_{n_{\pi(i)}}^\dagger) \Omega) \quad (409) \\ &= (-i)^p \sum_{n_1, \dots, n_p} \sum_{\pi \in S_p} \text{sgn} \pi \prod_{i=1}^p C_{n_i, n_{\pi(i)}} \\ &= (-i)^p p! \sum_{n_1 < n_2 < \dots < n_p} \begin{vmatrix} C_{n_1 n_1} & \cdots & C_{n_1 n_p} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{n_p n_1} & \cdots & C_{n_p n_p} \end{vmatrix} \quad (410) \end{aligned}$$

wobei S_p die Gruppe der Permutationen von p Elementen bezeichnet. Die Herkunft des in (409) auftretenden Vorzeichens erklärt sich dadurch, daß allgemein $(-1)^p \text{sgn} \pi = (-1)^r$ gilt, wenn r die Anzahl der Vertauschungen (Nachbartranspositionen) von Dirac-Feldern bei dem Übergang

$$a_{n_1}^\dagger a'_{n_1} a_{n_2}^\dagger a'_{n_2} \cdots a_{n_p}^\dagger a'_{n_p} \quad \rightarrow \quad a'_{n_1} a_{n_{\pi(1)}}^\dagger a'_{n_2} a_{n_{\pi(2)}}^\dagger a'_{n_p} a_{n_{\pi(p)}}^\dagger$$

darstellt.

8.2 Äußere Algebra

Das Ergebnis des letzten Abschnittes weist auf ein Gebiet der Algebra, das von Grassmann entdeckt und von Poincaré und E.Cartan zur Perfektion

entwickelt wurde: den äußeren Produktkalkül. An dieser Stelle soll davon nur soviel mitgeteilt werden, daß wir damit arbeiten können¹¹⁵

Es sei E ein komplex-linearer Raum der Dimension N . Wir betrachten Tensorprodukte von E mit sich selbst, insbesondere sei

$$\bigotimes^p E = E \otimes E \otimes \cdots \otimes E \quad (p \text{ Faktoren})$$

das p -fache tensorielle Eigenprodukt. In ihm finden wir den Unterraum $N^p(E)$, der von allen Produkten der Form

$$a_1 \otimes \cdots \otimes a_p \quad (a_i \in E)$$

aufgespannt wird, bei denen $a_i = a_j$ für wenigstens ein Paar $i \neq j$ gilt. Als das p -fache *äußere Produkt* von E bezeichnet man den Quotienten

$$\bigwedge^p E = \bigotimes^p E / N^p(E)$$

Die Elemente von $\bigwedge^p E$ werden p -Vektoren genannt. Die kanonische (lineare, injektive) Abbildung $\bigotimes^p E \rightarrow \bigwedge^p E$ führt jedes Tensorprodukt $a_1 \otimes \cdots \otimes a_p$ in das korrespondierende äußere Produkt $a_1 \wedge \cdots \wedge a_p$ über. Bezeichnet π irgendeine Permutation der Zahlen $1, \dots, p$, so gilt

$$a_{\pi(1)} \wedge \cdots \wedge a_{\pi(p)} = \text{sgn} \pi \, a_1 \wedge \cdots \wedge a_p$$

Es sei $\{e_n\}_{n=1, \dots, N}$ eine Basis in E . Dann bilden die p -Vektoren

$$e_I := e_{n_1} \wedge \cdots \wedge e_{n_p} \quad (n_1 < \cdots < n_p)$$

eine Basis in $\bigwedge^p E$. Mit I haben wir diejenige Teilmenge von $(1, 2, \dots, N)$ bezeichnet, die aus den Zahlen n_1, \dots, n_p besteht. Aus der 1:1-Korrespondenz zwischen p -Teilmengen und Basisvektoren folgt

$$\dim \bigwedge^p E = \binom{N}{p} \quad (1 \leq p \leq n)$$

Es sei $C : E \rightarrow E$ irgendeine lineare Abbildung. Dann ist ihr nach Wahl einer Basis in E eine Matrix zugeordnet:

$$C e_m = \sum_{n=1}^N C_{nm} e_n$$

¹¹⁵Genauerer kann man in dem Buch von W. Greub *Multilinear Algebra*, Springer 1978, nachlesen. Insbesondere sei auf die Kapitel 5 und 7 verwiesen.

Andererseits induziert C auf natürliche Weise eine lineare Abbildung

$$\wedge^p C : \wedge^p E \rightarrow \wedge^p E$$

durch die Vorschrift $\wedge^p C (a_1 \wedge \cdots \wedge a_p) = C a_1 \wedge \cdots \wedge C a_p$ so daß gilt:

$$\wedge^p C e_J = \sum_{|I|=p} C_{IJ} e_I$$

(Summe über alle p -Mengen I), und zwar mit den Koeffizienten

$$C_{IJ} = \begin{vmatrix} C_{n_1 m_1} & \cdots & C_{n_1 m_p} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{n_p m_1} & \cdots & C_{n_p m_p} \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} I = (n_1, \dots, n_p) \\ J = (m_1, \dots, m_p) \end{array}$$

Das Konzept der 'Spur' einer Abbildung ist, wie man weiß, basisunabhängig. Mit seiner Hilfe gelingt es, alle N Invarianten¹¹⁶ von $C : E \rightarrow E$ zu definieren:

$$\text{Spur } \wedge^p C = \sum_{|I|=p} C_{II} = \sum_{n_1 < n_2 < \cdots < n_p} \begin{vmatrix} C_{n_1 n_1} & \cdots & C_{n_1 n_p} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{n_p n_1} & \cdots & C_{n_p n_p} \end{vmatrix} \quad (p = 1, \dots, N)$$

Insbesondere gilt $\text{Spur } C = \text{Spur } \wedge^1 C$ und $\det C = \text{Spur } \wedge^N C$.

Als *äußere Algebra* bezeichnet man die direkte Summe¹¹⁷

$$\wedge E = \bigoplus_{p=0}^N \wedge^p E$$

wobei man $\wedge^0 E$ mit dem eindimensionalen Raum \mathbf{C} identifiziert, den man sich von dem Basisvektor e_\emptyset ($\emptyset =$ leere Menge) aufgespannt denkt. Mit dieser Vereinbarung kann behauptet werden: Aus der Basis $\{e_n\}$ in E gewinnt man die Basis $\{e_I\}$ in $\wedge E$, falls I über *alle* Teilmengen von $(1, \dots, N)$ läuft. Offenbar ist

$$\dim \wedge E = 2^N$$

Jede lineare Transformation $C : E \rightarrow E$ besitzt eine natürliche Erweiterung

$$\wedge C : \wedge E \rightarrow \wedge E$$

indem $\wedge C$ auf jedem Teilraum $\wedge^p E$ mit $\wedge^p C$ identifiziert wird. Man setzt $\wedge^0 C = 1$. Als Matrixelemente von $\wedge C$ haben wir nun alle Koeffizienten C_{IJ}

¹¹⁶Im wesentlichen die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms.

¹¹⁷Bezüglich des \wedge -Produktes handelt es sich in der Tat um eine Algebra.

anzusehen, wobei I und J beliebige Teilmengen von $(1, \dots, N)$ sind. Spezielle Matrixelemente sind

$$C_{II} = \begin{cases} 1 & I = \emptyset \\ \det C & I = (1, \dots, N) \end{cases}$$

und für die Spur gilt: $\text{Spur } \bigwedge C = \sum_{p=0}^N \bigwedge^p C = \sum_I C_{II}$ (Summe über alle Teilmengen I).

Es sei $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}$ die Liste der Eigenwerte¹¹⁸ der linearen Abbildung C . Wählt man die Basis so, daß C auf Jordan-Gestalt gebracht ist, so erkennt man leicht, daß gilt:

$$\text{Spur } \bigwedge^p C = \sum_{|I|=p} \prod_{n \in I} \lambda_n$$

Die klassische Identität

$$\prod_{n=1}^N (1 + z\lambda_n) = \sum_{p=0}^N z^p \sum_{|I|=p} \prod_{n \in I} \lambda_n$$

gültig für alle komplexen z , hat nun folgende algebraische Interpretation:

$$\det(1 + zC) = \text{Spur } \bigwedge (zC) = \sum_{p=0}^N z^p \text{Spur } \bigwedge^p C \quad (411)$$

Man nennt $r = \max\{|\lambda_n| : n = 1, \dots, N\}$ den *Spektralradius* der linearen Abbildung C . Für $|z| < r^{-1}$ existiert

$$\log(1 + zC) = - \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} (-z)^k C^k$$

und es gilt

$$\det(1 + zC) = \exp \text{Spur } \log(1 + zC) \quad (412)$$

$$= \exp \left\{ - \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} (-z)^k \text{Spur } C^k \right\} \quad (413)$$

$$\text{Spur } C^k = \sum_{n=1}^N \lambda_n^k \quad (414)$$

¹¹⁸Jeder mehrfach auftretende Eigenwert wird hier entsprechend seiner algebraischen Vielfachheit aufgeführt.

Durch eine Entwicklung um $z = 0$ es möglich, die Spuren von C^k und von $\bigwedge^p C$ miteinander zu verknüpfen. Aus

$$\frac{d}{dz} \det(1 + zC) = \det(1 + zC) \sum_{k=1}^{\infty} (-z)^{k-1} \text{Spur } C^k$$

folgt die Rekursionsformel

$$\text{Spur } \bigwedge^p C = \frac{1}{p} \sum_{n=0}^{p-1} (-1)^{p-n-1} \text{Spur } \bigwedge^n C \text{ Spur } C^{p-n} \quad 1 \leq p \leq N \quad (415)$$

8.3 Determinante und Zustandsdichte

Der Ausflug in die exotischen Gärten der Algebra hat uns gelehrt, daß sich die Reihe (408) – beachtet man (410) und (411) – zu einer Determinante aufsummiert:

$$(\Omega, S\Omega) = \det(1 - eC) \quad (416)$$

Nun galt ja $C = AB$, also $1 - eC = (B^{-1} - eA)B$ und somit

$$(\Omega, S\Omega) = \frac{\det(B^{-1} - eA)}{\det B^{-1}} \quad (417)$$

unter der Annahme, daß B invertierbar ist. Um dieses Ergebnis besser zu verstehen, erinnern wir an

$$(i\cancel{\partial} - m)S_F(x - y, m) = \delta^4(x - y)\mathbb{1}_4 \quad (418)$$

und an den Beginn unserer Betrachtung im Abschnitt 8.1, als wir Testfunktionen $f : M_4 \rightarrow \mathbb{C}^4$ einführten. Ein Operator T , der f in Tf überführt, wird *Integraloperator* genannt, wenn er durch eine Vorschrift der Art

$$(Tf)(x) = \int d^4y T(x, y)f(y) \quad (419)$$

definiert ist, mit einem Integralkern $T(x, y)$, der (für festes x und y) eine 4×4 -Matrix darstellt. Für komplexes z definiert man die *Resolvente* eines Operators T als

$$R(T, z) = (T - z)^{-1} \quad (420)$$

wobei der Ausdruck unbestimmt wird, sobald z mit einem Punkt des Spektrums von T zusammenfällt. Nun sei speziell $T = i\cancel{\partial}$ und $z = m - i0$. Die Gleichung (418) und die $i0$ -Vorschrift für die Feynman-Funktion besagt:

- $S_F(x - y, m)$ ist der Integrkern der Resolvente $R(i\cancel{D}, m - i0)$

Die von uns im Abschnitt 8.1 vorgenommene Regularisierung hat folgendes bewirkt: sie ersetzte die Resolvente $R(i\cancel{D}, m - i0)$ durch eine endliche Matrix B . Somit ist es möglich, die folgende Auffassung zu vertreten:

- B^{-1} ist eine Regularisierung des Operators $i\cancel{D} - m$,
- $B^{-1} - eA$ ist eine Regularisierung des Operators $i\cancel{D} - eA - m$.

Wenn wir also strikt den Dirac-Operator (mit und ohne äußeres Feld) in dem hier beschriebenen Sinne regularisieren, bevor wir seine Determinante, die sog. Fermion-Determinante, berechnen, so können wir schreiben:

$$(\Omega, S\Omega) = \frac{\det(i\cancel{D} - eA - m)}{\det(i\cancel{D} - m)} \quad (421)$$

Bei dem Umgang mit formalen Determinanten ist also Vorsicht geboten.

Auch die Spur eines Integraloperators T mit dem Kern $T(x, y)$ kann unter günstigen Voraussetzungen¹¹⁹ definiert werden:

$$\text{Spur } T = \int d^4x \text{tr}_4 T(x, x) \quad (422)$$

Mit „tr₄“ bezeichnen wir die Spur von $T(x, x)$ als einer 4×4 -Matrix. Für viele Operatoren (solche, die nicht zur 'Spurklasse' gehören) wird das Integral (422) jedoch nur nach einer geeigneten Regularisierung definierbar sein.

Es sei insbesondere

$$T = -\log [1 - eA(i\cancel{D} - m)^{-1}] \quad (423)$$

Rein formal können wir mit Hilfe von (8.13) schreiben:

$$(\Omega, S\Omega) = \exp \left\{ - \int d^4x \text{tr}_4 T(x, x) \right\} \quad (424)$$

¹¹⁹Ein Operator $T : E \rightarrow E$ auf einem Banach-Raum E gehört genau dann zur Spurklasse, wenn er in der Form $Tf = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (g_n, f) h_n$ geschrieben werden kann, mit normierten $g_n \in E^*$ (Dualraum) und $h_n \in E$, so daß $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty$ mit $\lambda_n > 0$ gilt. Ein Spurklasse-Operator (auch *nuklearer* Operator genannt) ist demnach immer ein beschränkter Operator. Er besitzt darüberhinaus ein rein diskretes Spektrum. Ist λ ein Häufungspunkt des Spektrums, so gilt $\lambda = 0$. Als *Fredholm-Determinante* bezeichnet man die (nicht abbrechende Reihe) $\det(1 + zT) = \sum_{p=0}^{\infty} z^p \text{Spur } \wedge^p T$, die für $|z| < r^{-1}$ konvergent ist, wenn $r = \max\{\lambda_n\}$ der Spektralradius von T ist.

Dies hat zur Konsequenz, daß

$$|(\Omega, S\Omega)|^2 = \exp \left\{ - \int d^4x w(x) \right\} \quad (425)$$

$$w(x) = 2\text{Re tr}_4 T(x, x) \quad (426)$$

gilt. Wir sehen in der Bestimmung von $w(x)$ das eigentliche Ziel unserer Anstrengungen und geben dieser Größe Vorrang auch dann, wenn das Integral $\int d^4x w(x)$ nicht existiert: Wir nennen $w(x)$ die *Zustandsdichte* des Modells. Sie ist einerseits eine zeitliche Rate, andererseits aber auch eine räumliche Dichte: die Dimension von $w(x)$ ist Wahrscheinlichkeit pro Zeit und Volumen; $w(x)d^4x$ ist nach unserem Verständnis die Wahrscheinlichkeit dafür, daß in dem Zeitintervall dx^0 und in dem Volumen d^3x Paarerzeugung stattfindet¹²⁰. Man kann für diese Interpretation keinen Beweis, wohl aber eine plausible Begründung angeben. Das Argument beruht auf der folgenden Überlegung. Angenommen $G \subset M_4$ sei ein Gebiet mit einem endlichen Volumen $|G| = V$, so daß $A_\mu(x)$ außerhalb von G verschwindet. Wir teilen G in N mikroskopisch kleine Zellen ein, jede mit dem Volumen V/N . Jeder Zelle wird ein innerer Punkt x_n zugeordnet, wenn n die Nummer der Zelle ist. Durch fortgesetzte Verfeinerung der Einteilung erhalten wir den gewünschten Grenzwert:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N \left(1 - w(x_n) \frac{V}{N} \right) &= \exp \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \log \left(1 - w(x_n) \frac{V}{N} \right) \right\} \\ &= \exp \left\{ - \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \left(w(x_n) \frac{V}{N} + O(N^{-2}) \right) \right\} \\ &= \exp \left\{ - \int w(x) d^4x \right\} = |(\Omega, S\Omega)|^2 \quad (427) \end{aligned}$$

Die folgenden Punkte erhärten unsere Interpretation der Dichte $w(x)$:

- Für genügend großes N ist $w(x_n)V/N$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß Paare in der Zelle mit der Nummer n erzeugt werden. Folglich ist $1 - w(x_n)V/N$ die Wahrscheinlichkeit, daß dort *keine* Paare erzeugt werden.
- Die Wahrscheinlichkeit für Paarerzeugung in verschiedenen Zellen ist statistisch unabhängig. Folglich ist $\prod_n (1 - w(x_n)V/N)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß in keiner der Zellen Paarerzeugung stattfindet: das ist gerade die Interpretation von $|(\Omega, S\Omega)|^2$.
- Verschwindet in einer der Zellen das äußere Feld $A_\mu(x)$, so gilt dies auch für die Zustandsdichte $w(x)$.

¹²⁰Wenigstens ein e^+e^- -Paar wird beobachtet.

8.4 Einfache Umformungen

Es ist leicht zu sehen¹²¹, daß die Fermion-Determinante nicht von der Wahl der Darstellung der γ -Matrizen abhängt. Mit γ^μ ist auch $-\gamma^\mu$ eine mögliche Darstellung, und somit gilt:

$$\frac{\det(i\cancel{\partial} - e\cancel{A} - m)}{\det(i\cancel{\partial} - m)} = \frac{\det(-i\cancel{\partial} + e\cancel{A} - m)}{\det(-i\cancel{\partial} - m)} \quad (428)$$

Mit den Differentialoperatoren

$$\mathcal{D}_4 := (i\cancel{\partial} - e\cancel{A} - m)(-i\cancel{\partial} + e\cancel{A} - m) \quad (429)$$

$$\mathcal{D}_{40} := (i\cancel{\partial} - m)(-i\cancel{\partial} - m) = \mathbb{1}_4(\square + m^2) \quad (430)$$

erhalten wir deshalb

$$|(\Omega, S\Omega)|^2 = \frac{\det \mathcal{D}_4}{\det \mathcal{D}_{40}} \quad , \quad (431)$$

oder äquivalent:

$$w(x) = \text{Re } \text{tr}_4 [\log \mathcal{D}_{40} - \log \mathcal{D}_4](x, x) \quad (432)$$

Zwar konnten die γ -Matrizen nicht vollständig eliminiert werden, jedoch enthält nur noch der Operator \mathcal{D}_4 diese Matrizen, und diese auch nur in der Form ihrer antisymmetrischen Produkte $\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}i[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$. Grund: aus $\gamma^\mu\gamma^\nu = g^{\mu\nu} - i\sigma^{\mu\nu}$ folgt

$$\mathcal{D}_4 = \cancel{D}^2 + m^2 = \mathbb{1}_4(D^2 + m^2) - \mathcal{F} \quad (433)$$

$$D^2 = D_\mu D^\mu \quad D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu \quad (434)$$

$$\mathcal{F} = i\sigma^{\mu\nu} D_\mu D_\nu = \frac{1}{2}i\sigma^{\mu\nu} [D_\mu, D_\nu] \quad (435)$$

$$= \frac{1}{2}e\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad F_{\mu\nu} = A_{\mu|\nu} - A_{\nu|\mu} \quad (436)$$

Die hier erzielte Vereinfachung wird deutlich durch die Bemerkung, daß \mathcal{F} blockdiagonal ist:

$$\mathcal{F} = e \begin{pmatrix} \vec{\sigma}(\mathbf{B} - i\mathbf{E}) & 0 \\ 0 & \vec{\sigma}(\mathbf{B} + i\mathbf{E}) \end{pmatrix} \quad (437)$$

Dies führt zur Aufspaltung

$$\mathcal{D}_4 = \mathcal{D}_2 \oplus \mathcal{D}_2^* \quad \mathcal{D}_{40} = \mathcal{D}_{20} \oplus \mathcal{D}_{20}^* \quad (438)$$

¹²¹Zwei Darstellungen sind immer durch eine Ähnlichkeitstransformation miteinander verknüpft.

mit den Operatoren

$$\mathcal{D}_2 = \mathbb{1}_2(D^2 + m^2) - e\vec{\sigma}(\mathbf{B} - i\mathbf{E}) \quad (439)$$

$$\mathcal{D}_2^* = \mathbb{1}_2(D^2 + m^2) - e\vec{\sigma}(\mathbf{B} + i\mathbf{E}) \quad (440)$$

$$\mathcal{D}_{20} = \mathcal{D}_{20}^* = \mathbb{1}_2(\square + m^2) \quad (441)$$

Als Konsequenz der Darstellung (438) finden wir

$$\det \mathcal{D}_4 = \det \mathcal{D}_2 \det \mathcal{D}_2^* = |\det \mathcal{D}_2|^2 \quad (442)$$

$$\det \mathcal{D}_{40} = |\det \mathcal{D}_{20}|^2 \quad (443)$$

Das nächste Ziel, das wir mit einer weiteren Umformung erreichen wollen, ist die Ersetzung der (für konkrete Rechnungen unbequemen) Logarithmusfunktion durch die Exponentialfunktion. Dies gelingt durch die elementare Formel

$$\log u - \log v = \int_0^\infty \frac{ds}{s} (e^{-isv} - e^{-isu}) \quad (444)$$

gültig für beliebige komplexe Zahlen u und v mit $\text{Im } u < 0$ und $\text{Im } v < 0$. Setzen wir zum einen $u = \mathcal{D}_{20}$ und zum anderen Mal $u = \mathcal{D}_2$ und ziehen die beiden so erhaltenen Gleichungen beidseitig voneinander ab, so erhalten wir¹²²:

$$\log \mathcal{D}_{20} - \log \mathcal{D}_2 = \int_0^\infty \frac{ds}{s} (e^{-is\mathcal{D}_2} - e^{-is\mathcal{D}_{20}}) \quad (445)$$

Als Ausgangspunkt für spezielle Rechnungen dient daher die Formel

$$w(x) = \int_0^\infty \frac{ds}{s} 2\text{Re } \text{tr}_2 (e^{-is\mathcal{D}_2} - e^{-is\mathcal{D}_{20}})(x, x) \quad (446)$$

Mit $\text{tr}_2 T(x, x)$ ist die Spur von $T(x, x)$ als einer 2×2 -Matrix bezeichnet.

8.5 Paarerzeugung in einem konstanten Feld

8.5.1 Temporale Eichung

Es sei jetzt \mathbf{E} zeitlich wie räumlich konstant und $\mathbf{B} = 0$. Wir zerlegen das Feld nach Betrag und Richtung

$$\mathbf{E} = E\mathbf{n} \quad eE > 0 \quad (447)$$

¹²²Eine Rechtfertigung kann nur a posteriori gegeben werden, weil das Spektrum dieser Operatoren unbekannt ist. Wenn das Integral bei $s \rightarrow \infty$ konvergiert, haben wir Glück gehabt.

Mit der Richtung des Feldes verknüpft man die Zerlegung der räumlichen Ableitung in einen Transversal- und einen Longitudinalanteil:

$$\nabla = \nabla_T + \nabla_L \quad \nabla_L = \mathbf{n}(\mathbf{n}\nabla) \quad (448)$$

Als *temporale Eichung* bezeichnet man die Wahl $A_\mu = (0, \mathbf{E}t)$. Die kovariante Ableitung bekommt daher die Form

$$D_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla + ie\mathbf{E}t \right) \quad (449)$$

Drei Operatoren, die alle in verschiedenen Räumen operieren, werden in unserer Diskussion eine Rolle spielen: Sie sind den drei Variablen *Raum*, *Zeit* und *Spin* zugeordnet:

$$\begin{array}{ll} \text{Raum:} & R_s = \exp\{is(\nabla_T^2 - m^2)\} \quad \text{wirkt auf Funktionen von } \mathbf{x} \\ \text{Zeit:} & Z_s = \exp\{is(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} - e^2 E^2 t^2)\} \quad \text{wirkt auf Funktionen von } t \\ \text{Spin:} & S_s = \exp\{seE(\mathbf{n} \cdot \vec{\sigma})\} \quad \text{wirkt auf Pauli-Spinoren.} \end{array}$$

Der folgende Satz zeigt, daß es sich hierbei um die wesentlichen Bestandteile von $\exp\{-is\mathcal{D}_2\}$ handelt:

Satz Für ein konstantes elektrisches Feld $\mathbf{E} \neq 0$ gilt die Zerlegung:

$$e^{-is\mathcal{D}_2} = U(R_s \otimes Z_s)U^{-1} \otimes S_s \quad (450)$$

mit der Ähnlichkeitstransformation

$$U = e^{-i\Omega} \quad \Omega = (\mathbf{a} \cdot \nabla)\partial/\partial t \quad \mathbf{a} = (eE)^{-1}\mathbf{n} \quad (451)$$

Beweis. Vermöge der Hausdorff-Formel hat man zunächst

$$U(\nabla_T + ie\mathbf{E}t)U^{-1} = \nabla_T + ie\mathbf{E}t + e\mathbf{E}[\Omega, t] = \nabla_T + \nabla_L + ie\mathbf{E}t = \nabla + ie\mathbf{E}t$$

denn $[\Omega, [\Omega, t]] = 0$. Also

$$(\nabla + ie\mathbf{E}t)^2 = U(\nabla_T + ie\mathbf{E}t)^2 U^{-1} = U(\nabla_T^2 - e^2 E^2 t^2)U^{-1}$$

wobei wir $\mathbf{E} \cdot \nabla_T = 0$ nutzten. Dies führt auf die Darstellung

$$D^2 = U(\partial^2/\partial t^2 - \nabla_T^2 + e^2 E^2 t^2)U^{-1}$$

und somit gilt

$$\exp\{-is(D^2 + m^2)\} = U(R_s \otimes Z_s)U^{-1}$$

Fügen wir die Spinvariablen hinzu, so lautet diese Formel:

$$\exp\{-is[\mathbb{1}_2(D^2 + m^2) + ie\vec{\sigma}\mathbf{E}]\} = U(R_s \otimes Z_s)U^{-1} \otimes S_s \quad ,$$

wodurch der Satz bewiesen ist.

Die Prozedur tr_2 eliminiert die Spinabhängigkeit:

$$\text{tr}_2 e^{-is\mathcal{D}_2} = U(R_s \otimes Z_s)U^{-1}\text{Spur}S_s \quad (452)$$

$$\text{Spur}S_s = 2 \cosh(seE) \quad (453)$$

Wir benutzen ein weiteres Hilfsmittel: die Fourier-Transformation. Ist T ein Integraloperator auf Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ mit dem Integralkern $T(x, x')$, so führt die Fourier-Transformation

$$f[p] = (2\pi)^{-n/2} \int d^n x e^{ipx} f(x) \quad (454)$$

zu einer neuen Beschreibung des gleichen Operators:

$$(Tf)[p] = \int d^n p' T[p, p']f[p'] \quad (455)$$

mit dem Integralkern

$$T[p, p'] = (2\pi)^{-n} \int d^n x \int d^n x' e^{ipx - ip'x'} T(x, x') \quad (456)$$

Umgekehrt gilt

$$T(x, x') = (2\pi)^{-n} \int d^n p \int d^n p' e^{ip'x' - ipx} T[p, p'] \quad (457)$$

Mit den oben eingeführten Operatoren gilt definitionsgemäß

$$(R_s \otimes Z_s)(x, x') = R_s(\mathbf{x}, \mathbf{x}')Z_s(t, t') \quad , \quad (458)$$

und damit

$$(R_s \otimes Z_s)[p, p'] = R_s[\mathbf{p}, \mathbf{p}']Z_s[p^0, p'^0] \quad (459)$$

$$R_s[\mathbf{p}, \mathbf{p}'] = \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \exp\{-is(\mathbf{p}_T^2 + m^2)\} \quad (460)$$

Die Transformation U , die Raum und Zeit miteinander verknüpft, multipliziert die Funktionen $f[p]$ schlicht mit einer Phase:

$$(Uf)[p] = e^{i(\mathbf{a}\mathbf{p})p^0} f[p] \quad (461)$$

so daß gilt:

$$\begin{aligned}
(e^{-is(D^2+m^2)})[p, p'] &= e^{i(\mathbf{ap})(p^0-p'^0)} R_s[\mathbf{p}, \mathbf{p}'] Z_s[p^0, p'^0] \\
(e^{-is(D^2+m^2)})(x, x) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \int d^4p' e^{i(p'-p)x} e^{-is(D^2+m^2)}[p, p'] \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp^0 e^{i(p^0-p'^0)t} I_s[p^0, p'^0] Z_s[p^0, p'^0]
\end{aligned}$$

Hier benutzen wir die Abkürzung

$$\begin{aligned}
I_s[p^0, p'^0] &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p e^{i(\mathbf{ap})(p^0-p'^0)} e^{-is(\mathbf{p}_T^2+m^2)} \\
&= \frac{eE\pi}{(2\pi)^3} e^{-ism^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\tau(p^0-p'^0)} \int_0^{\infty} d\rho e^{-i\rho s} \\
&= \delta(p^0 - p'^0) \frac{eE}{4\pi} \frac{e^{-ism^2}}{is + 0}
\end{aligned}$$

Das Fazit dieses Abschnittes ist die Darstellung:

$$2 \operatorname{tr}_2 e^{-isD_2}(x, x) = \frac{eE}{(2\pi)^2} \frac{e^{-ism^2}}{is + 0} \operatorname{Spur} Z_s \operatorname{Spur} S_s \quad (462)$$

$$\operatorname{Spur} Z_s = \int_{-\infty}^{\infty} dp^0 Z_s[p^0, p^0] \quad (463)$$

$$\operatorname{Spur} S_s = 2 \cosh(seE) \quad (464)$$

Wie zu erwarten war, ist der Integralkern von e^{-isD_2} auf der Diagonalen unabhängig von x . Etwas allgemeiner formuliert: die Translationsinvarianz verlangt, daß $e^{-isD_2}(x, x')$ nur eine Funktion von $x - x'$ ist.

8.5.2 Die Zustandssumme des harmonischen Oszillators

Das Hauptproblem ist keineswegs gelöst, es wurde durch unsere Analyse nur auf den entscheidenden Punkt gebracht: die Regularisierung der Spur des Operators $Z_s = \exp\{is(-\partial^2/\partial t^2 - e^2 E^2 t^2)\}$. Das Spektrum des Differentialoperators $-\partial^2/\partial t^2 - e^2 E^2 t^2$ ist kontinuierlich¹²³, wie eine naive Anwen-

¹²³Das Spektrum ist selbstverständlich abhängig von dem Funktionenraum und dem darin vorgegebenen Definitionsbereich, auf den dieser Operator wirken soll. Aber in dem typischen Raum der Quantenmechanik, $L^2(\mathbf{R})$, besteht das Spektrum dieses Operators aus allen reellen Zahlen: Es entspricht, physikalisch gesprochen, den möglichen Energiezuständen eines Schrödinger-Teilchens in einem ümgedrehten Oszillatorpotential.

ding quantenmechanischer Prinzipien lehrt. Aus diesem Grund ist Spur Z_s zunächst nur ein sinnleerer Ausdruck.

Der Schlüssel zur Regularisierung ist der eindimensionale harmonische Oszillator. Wir benutzen ξ als Lagekoordinate eines fiktiven Teilchens und schreiben den Energie-Operator als

$$H = -\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{4}\omega^2 \xi^2 \quad (\omega = 2eE > 0)$$

mit dem bekannten Spektrum $E_n = (n + \frac{1}{2})\omega$, ($n = 0, 1, 2, \dots$). Als *Zustandssumme* des Oszillators bezeichnet man

$$\text{Spur } e^{-sH} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-sE_n} = \frac{1}{2 \sinh(seE)} \quad (s > 0) \quad (465)$$

Wir machen die Beobachtung: Durch die formale Ersetzung

$$\xi^2 = it^2 \quad \text{d.h.} \quad \xi = e^{i\pi/4}t \quad (466)$$

geht e^{-sH} in den Operator Z_s über. Dies bedeutet, daß Spur Z_s mit der Zustandssumme des harmonischen Oszillators übereinstimmt, wenn man den zugrundeliegenden Funktionenraum von Z_s nur geeignet wählt. Eine geeignete Wahl könnte sein: die Raum aller Funktionen $f(it)$, die eine analytische Fortsetzung $f(z)$, $z = \tau + it$ in den ersten Quadranten ($\tau > 0, t > 0$) der komplexen Ebene besitzen, mit der Eigenschaft, daß $\sup_{z \in G} |f(z)| < C_G$ für jedes abgeschlossene Gebiet $G \subset \{z \mid 0 < \arg z < \pi/2\}$ gilt. Man kann diesen Kunstgriff eine *Regularisierung durch analytische Fortsetzung in der Zeit* nennen. Es wäre unredlich, wollte man verschweigen, daß die letzte Rechtfertigung für solche Zauberei noch aussteht. Die hier dargelegte Methode steht allerdings nicht isoliert da. Die euklidische Feldtheorie erhebt die analytische Fortsetzung in der Zeit zu einem fundamentalen Prinzip. Dort wird τ , der Realteil von z , zur *euklidischen Zeitvariablen*, der von der Minkowski-Zeit t , dem Imaginärteil von z , sorgfältig zu unterscheiden ist. Eine andere Schreibweise ist $z = x^4 + ix^0$. Die euklidische Formulierung eines Modells setzt $\text{Im } z = 0$, die Minkowski-Formulierung $\text{Re } z = 0$. Der Übergang von der euklidischen Formulierung zur Minkowski-Formulierung, die Rückkehr zur 'realen' Welt also, vollzieht sich in jedem Fall durch eine analytische Fortsetzung auf dem Wege über den Quadranten $x^4 > 0, x^0 > 0$.

Schauen wir uns die Früchte unserer Bemühung näher an! Wir haben numehr die Darstellung

$$2 \text{Re tr}_2 e^{-isD_2}(x, x) = -\frac{eE}{(2\pi)^2} \frac{\sin(sm^2)}{s} \frac{\cosh(seE)}{\sinh(seE)} \quad (s > 0) \quad (467)$$

unabhängig von x und somit für $E \rightarrow 0$:

$$2 \operatorname{Re} \operatorname{tr}_2 e^{-is\mathcal{D}_{20}}(x, x) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{\sin(sm^2)}{s^2} \quad (s > 0) \quad (468)$$

An diesem Punkt angekommen, sind wir nunmehr aufgefordert, das konvergente Integral

$$w = \frac{eE}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} \left[\frac{1}{seE} - \coth(seE) \right] \sin(sm^2) \quad (469)$$

$$= \frac{e^2 E^2}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{dx}{x^2} \left[\frac{1}{x} - \coth x \right] \sin(ax) \quad a = \frac{m^2}{eE} > 0 \quad (470)$$

zu berechnen. Dies gelingt, indem man die bekannte Reihe

$$\frac{1}{x} \left[\frac{1}{x} - \coth x \right] = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^2\pi^2} \quad (471)$$

und das elementare Integral

$$\int_0^\infty dx \frac{x^{-1} \sin(ax)}{x^2 + r^2} = -\frac{\pi}{2r^2} e^{-ar} \quad (a > 0, r > 0) \quad (472)$$

für $r = n\pi$ ($n = 1, 2, \dots$) benutzt mit dem Ergebnis:

$$w = \frac{eE}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n\pi a}}{n^2\pi^2} \quad (473)$$

Durch Wiedereinführung von \hbar und c können wir das Ergebnis so zusammenfassen: *Die Wahrscheinlichkeit für Paarerzeugung pro Zeit und Volumen in einem konstanten elektrischen Feld E ist gegeben durch den Ausdruck*

$$w = \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^4 c F \left(\frac{eE\hbar}{\pi m^2 c^3} \right) \quad (474)$$

wobei die numerische Funktion

$$F(x) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (x/n)^2 e^{-n/x} \quad (x \geq 0) \quad (475)$$

benutzt wurde. Das Besondere an dieser Funktion ist, daß sie nicht durch ihre Taylorreihe im Punkt $x = 0$ darstellbar ist. Denn alle Taylor-Koeffizienten

verschwinden dort. Dies zeigt uns sehr deutlich, daß die QED quantitative Resultate hervorzubringen vermag, die nicht durch eine Störungsreihe nach der Kopplungskonstanten e gewonnen werden können. Effekte dieser Art nennt man 'nicht-störungstheoretisch'.

Der Vorfaktor in (474) hat einen erschreckend großen Wert:

$$\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^4 c = 1,35 \cdot 10^{58} \text{ m}^{-3} \text{ s}^{-1} \quad (476)$$

Dies wird jedoch mehr als kompensiert durch die sehr kleinen Funktionswerte, die für $F(x)$ technisch erreichbar sind. Die nebenstehende Tabelle zeigt dies sehr deutlich. Als Referenzfeldstärke könnten wir etwa dasjenige Feld einführen, das ein einzelnes Elektron im Abstand von einer Compton-Wellenlänge erzeugt:

$-\log_{10} x$	$-\log_{10} F(x)$
0	1,49
1	8
2	47
3	440
4	4350
5	43439
6	434306

$$E_0 = 9,67 \cdot 10^{15} \text{ Volt/m}$$

Dann gilt

$$x = \frac{eE\hbar}{\pi m^2 c^3} = \frac{\alpha E}{\pi E_0}$$

(α = Feinstrukturkonstante). Bevor Paarerzeugung beobachtet werden kann, müßte ein weithin homogenes Feld E erzeugt werden, das in etwa die Größenordnung von E_0 erreicht.

9 Renormierung

9.1 Die Källen-Lehmann-Darstellung

Für ein wechselwirkendes neutrales Skalarfeld $\Phi(x)$ ist die Information über das Massenspektrum der Zustände $\Phi(f)\Omega$ in der 2-Punktfunktion

$$W(x-y) = (\Omega, \Phi(x)\Phi(y)\Omega)$$

enthalten, wobei die Translationsinvarianz $U(a)\Omega = \Omega$ des Vakuums zusammen mit $U(a)^{-1}\Phi(x)U(a) = \Phi(x-a)$ dazu führt, daß W nur von der Differenz $x-y$ abhängt. Sei $P^\mu = (H, \mathbf{P})$ der Energie-Impuls-Operator und $xP = x^\mu P_\mu$, so erscheint $W(x)$ als ein Erwartungswert des Operator

$$U(-x) = e^{-iPx},$$

in dem (nicht-normierbaren) Zustand $\phi = \Phi(0)\Omega$:

$$(\phi, e^{-ixP}\phi) = (\Omega, \Phi(0)U(-x)\Phi(0)\Omega) = (\Omega, \Phi(x/2)\Phi(-x/2)\Omega) = W(x).$$

Dies legt nahe, die Fourier-Zerlegung vorzunehmen:

$$W(x) = \int d^4p e^{-ipx} \tilde{W}(p).$$

Zu diesem Integral können nur physikalische (Vierer)Impulse p beitragen, die also zum Spektrum von P gehören. Der Träger (engl. *support*) von $\tilde{W}(p)$ liegt somit im Vorwärtskegel:

$$\text{supp } \tilde{W} \subset V_+ = \{p \mid p^2 \geq 0, p^0 \geq 0\}.$$

Führen wir die gleiche Betrachtung mit der Gruppe der Lorentz-Transformationen durch, so folgt aus der Invarianz des Vakuums unter $\Lambda \in L_+^\uparrow$ die Eigenschaft $W(\Lambda x) = W(x)$ oder, äquivalent,

$$\tilde{W}(\Lambda p) = \tilde{W}(p).$$

Wir dürfen nun nicht ohne weiteres schließen, daß $\tilde{W}(p)$ nur ein Funktion der Invarianten p^2 ist, da es sich hierbei nicht um eine gewöhnliche Funktion sondern um eine Distribution handelt. Jedoch hat sie besondere einschränkende Eigenschaften.

Für Vektoren der Form $\Psi = \sum_j c_j \Phi(x_j)\Omega$ mit komplexen Koeffizienten c_j ($j = 1, \dots, n$) gilt

$$0 \leq (\Psi, \Psi) = \sum_{j,k} \bar{c}_j c_k W(x_j - x_k),$$

d.h. die Funktion $W(x)$ ist so beschaffen, daß jede quadratische Matrix M mit Elementen $M_{jk} = W(x_j - x_k)$ positiv definit ist. Funktionen mit dieser Eigenschaft heißen *vom positiven Typ*. Was folgt für $\tilde{W}(p)$? Offenbar gilt

$$\int d^4p \left| \sum c_k e^{ipx_k} \right|^2 \tilde{W}(p) = \sum_{j,k} \bar{c}_j c_k W(x_j - x_k) \geq 0.$$

Da man durch Summen der Art $\sum c_k e^{-ipx_k}$ jede stetige Funktion $f(p)$ approximieren kann, lautet die Bedingung an $\tilde{W}(p)$:

$$\int d^4p \tilde{W}(p) |f(p)|^2 \geq 0.$$

Anders ausgedrückt¹²⁴: $d^4p \tilde{W}(p)$ ist ein *positives Maß*. Nun gilt (ohne Beweis): *Jedes L_+^\uparrow -invariante positive Maß $d^4p \tilde{W}(p)$ auf V_+ hat die Struktur*

$$\tilde{W}(p) = a\delta(p) + (2\pi)^{-3} \int_0^\infty d\sigma(m) \Theta(p^0) \delta(p^2 - m^2) \quad (a \geq 0).$$

Hier ist $d\sigma(m)$ ein positives Maß in der Variablen m , der Masse. Der Träger dieses Maßes sind die möglichen Massen der Zustände $\Phi(f)\Omega$. Ableitungen der δ -Funktion sind hierdurch ausgeschlossen.

Man nennt $d\sigma(m)$ das Källen-Lehmansche Spektralmaß der 2-Punktfunktion, kurz KL-Maß. Indem wir an die bekannte 2-Punktfunktion

$$\Delta_+(x, m) = (2\pi)^{-3} \int d^4p \Theta(p^0) \delta(p^2 - m^2) e^{-ipx}$$

des freien Skalarfeldes erinnern, können wir abschließend schreiben:

$$(\Omega, \Phi(x)\Phi(y)\Omega) = a + \int_0^\infty d\sigma(m) \Delta_+(x - y, m)$$

(Källen-Lehmann-Darstellung). Bemerkungen:

1. Ist Ω der einzige translationsinvariante Zustand (d.h. der einzige Zustand ohne Energie und Impuls), so folgt aus der Eigenschaft $a > 0$, daß $(\Omega, \Phi(x)\Omega) \neq 0$ gilt, nämlich

$$a = |(\Omega, \Phi(x)\Omega)|^2.$$

¹²⁴Diese Aussage ist in der Mathematik als der Satz von Bochner bekannt.

Für jede Theorie, symmetrisch unter $\Phi \rightarrow -\Phi$, bedeutet dies eine *spontane Symmetriebrechung*, d.h. es gibt dann keinen unitären Operator U mit

$$U\Phi(x)U^{-1} = -\Phi(x) \quad \text{und} \quad U\Omega = \Omega.$$

Ein skalares Feld Φ mit $a > 0$ nennen wir ein Higgs-Feld.

2. Ist $\Phi(x)$ ein freies Feld der Masse M , also $(\square + M^2)\Phi = 0$, so gilt

$$a = 0 \quad \text{und} \quad d\sigma(m) = dm \delta(m - M).$$

3. Ist $\Phi(x)$ ein wechselwirkendes Feld (mit $a = 0$) und M die kleinste Masse im Spektrum, so erwarten wir (bei Abwesenheit von Masse-0-Teilchen) eine Massenslücke zwischen M und $2M$ (der Schwelle für Mehrteilchenzustände). In dieser Situation folgt eine Darstellung der Art

$$(\Omega, \Phi(x)\Phi(y)\Omega) = Z \left(\Delta_+(x-y, M) + \int_{2M}^{\infty} d\sigma(m) \Delta_+(x-y, m) \right) \quad (477)$$

wobei die positive Konstante Z durch die Art der Wechselwirkung bestimmt wird und in der Störungstheorie oft divergente Terme erzeugt. Jedes Feld $\lambda\Phi(x)$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) erfüllt eine ähnliche Relation. Unter den Vielfachen zeichnet man dasjenige Feld aus, für das $Z = 1$ gilt und nennt es das *renormierte Feld*. Es gilt somit

$$\Phi_{\text{ren}}(x) = Z^{-1/2}\Phi(x),$$

wobei man Z die *Renormierungskonstante des Feldes* nennt¹²⁵.

9.2 Die Notwendigkeit zu renormieren

Der Lagrange-Formalismus zusammen mit der kanonischen Quantisierung legt eine *kanonische Normierung* des Feldes $\Phi(x)$ fest:

$$[\Phi(x), \dot{\Phi}(y)]_{x^0=y^0} = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (478)$$

Im allgemeinen wird das so bestimmte $\Phi(x)$ nicht mit $\Phi_{\text{ren}}(x)$ übereinstimmen, d.h. eine Renormierung wird notwendig. Wir wollen zeigen, daß die Renormierungskonstante Z durch das KL-Maß ausgedrückt werden kann. Dazu

¹²⁵In der älteren Literatur wird der Vorgang *Wellenfunktionsrenormierung* genannt.

setzen wir voraus, daß $\Phi(x)$ eine 2-Punktfunktion der Form (477) besitzt. Sie führt uns auf die Formel

$$(\Omega, [\Phi(x), \Phi(y)]\Omega) = iZ \left(\Delta(x-y, M) + \int_{2M}^{\infty} d\sigma(m) \Delta(x-y, m) \right), \quad (479)$$

denn der Übergang zum Kommutator auf der linken Seite bewirkt eine Ersetzung $\Delta_+ \rightarrow i\Delta$ auf der rechten Seite. Schließlich nutzen wir, daß

$$\dot{\Delta}(x, m)_{x^0=y^0} = -\delta^3(\mathbf{x})$$

unabhängig von der Variablen m ist:

$$(\Omega, [\Phi(x), \dot{\Phi}(y)]\Omega)_{x^0=y^0} = iZ \left(1 + \int_{2M}^{\infty} d\sigma(m) \right) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Dies ist konsistent mit (478), wenn

$$Z^{-1} = 1 + \int_{2M}^{\infty} d\sigma(m)$$

gilt. Fazit:

Allgemein gilt $0 \leq Z \leq 1$, und es ist $Z = 1$ nur dann, wenn $\Phi(x)$ ein freies Feld, also $d\sigma(m) = 0$ ist. Es gilt $Z = 0$ immer dann, wenn $\int d\sigma(m) = \infty$. Dies ist der Normalfall.

Falls $Z \neq 0$ ist, erfüllt das renormierte Feld eine kanonische Vertauschungsrelation der Art

$$[\Phi_{\text{ren}}(x), \dot{\Phi}_{\text{ren}}(y)]_{x^0=y^0} = iZ^{-1}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (480)$$

Ist jedoch $Z = 0$, so verliert die Relation ihren Sinn. Da dies die normale Situation charakterisiert, ist unser Vertrauen in die kanonische Quantisierung schwer erschüttert. Moderne Feldquantisierung sucht deshalb neue Wege (Methode der Pfadintegrale).

Eng verbunden mit der Zweipunktfunktion ist der volle Feynman-Propagator

$$(\Omega, T\Phi(x)\Phi(y)\Omega) = i\Delta'_F(x-y).$$

In der Störungstheorie entspricht er einer unendlichen Summe von Feynman-Graphen, deren genaue Gestalt von der konkreten Theorie abhängt. In jedem Fall beginnt die Reihe mit dem 'ungestörtem' Propagator:

$$\begin{aligned} i\Delta'_F(x-y) &= i\Delta_F(x-y, M_0) + \text{Terme höherer Ordnung} \\ &= (\Omega, T\Phi_{\text{ein}}(x)\Phi_{\text{ein}}(y)\Omega) + \text{Terme höherer Ordnung} \end{aligned}$$

wobei M_0 die Masse des freien Feldes $\Phi_{\text{ein}}(x)$ ist. Wir können aber auch eine Integraldarstellung unter Benutzung des KL-Maßes und der Formel (479) finden:

$$(\Omega, T\Phi(x), \Phi(y)\Omega) = iZ \left(\Delta_F(x-y, M) + \int_{2M}^{\infty} d\sigma(m) \Delta_F(x-y, m) \right). \quad (481)$$

Es gibt a priori keinen Grund, warum die Masse M mit M_0 übereinstimmen sollte. Jedoch ist M durch M_0 festgelegt und wird als die *physikalische* oder *renormierte* Masse interpretiert. Die Masse M_0 hingegen ist ein geeignet zu wählender Parameter der Theorie und heißt die *nackte* oder *unrenormierte* Masse. In jeder Ordnung der Störungstheorie muß die nackte Masse neu bestimmt (angepasst) werden, damit M den beobachteten Wert bekommt.

Dem renormierten Feld $\Phi_{\text{ren}}(x)$ ist ein renormierter Propagator zugeordnet, der durch das KL-Maß ausgedrückt werden kann:

$$\Delta_F^{\text{ren}}(x) = \Delta_F(x, M) + \int_{2M}^{\infty} d\sigma(m) \Delta_F(x, m).$$

Mit Hilfe einer Fourier-Zerlegung

$$\Delta_F^{\text{ren}}(x) = (2\pi)^{-4} \int d^4q e^{-iqx} \tilde{\Delta}_F^{\text{ren}}(q)$$

folgt die Darstellung

$$\tilde{\Delta}_F^{\text{ren}}(q) = \frac{1}{q^2 - M^2 + i0} + \int_{2M}^{\infty} \frac{d\sigma(m)}{q^2 - m^2 + i0},$$

jedoch sinnvoll nur dann, wenn die Bedingung

$$\int_{2M}^{\infty} \frac{d\sigma(m)}{m^2} < \infty$$

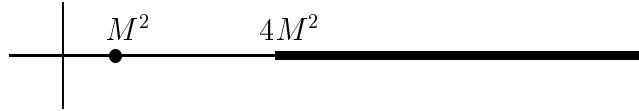
erfüllt ist. Ist sie verletzt, so versagt die naive Definition des T -Produktes (der Zeitordnung). Wir wollen zu diesem Zweck die analytischen Eigenschaften von $\tilde{\Delta}_F^{\text{ren}}(q^2)$ untersuchen und schreiben deshalb

$$\tilde{\Delta}_F^{\text{ren}}(q) = F(q^2 + i0)$$

mit

$$F(z) = \frac{1}{z - M^2} + \int_{2M}^{\infty} \frac{d\sigma(m)}{z - m^2} \quad (z \in \mathbb{C}, \text{Re}z \neq 0).$$

Die Funktion $F(z)$ erfüllt die Bedingung $F(z^*) = F(z)^*$ und ist analytisch in der komplexen Variablen z mit Ausnahme der reellen Punkte $z = M^2$ (Pol) und $z \geq 4M^2$ (Schnitt):



Wie im Fall des freien Propagators hat der Pol das Residuum 1 als Konsequenz der Renormierungsbedingung. Aus der Zerlegung

$$\frac{1}{t+i0} = \frac{P}{t} \mp i\pi\delta(t) \quad (t \in \mathbb{R}, P = \text{Cauchyscher Hauptwert})$$

folgt mit $t = p^2 - M^2$ ein Ausdruck für die Diskontinuität von $F(z)$:

$$F(p^2 - i0) - F(p^2 + i0) = 2\pi i \left(\delta(p^2 - M^2) + \int_{2M}^{\infty} d\sigma(m) \delta(p^2 - m^2) \right)$$

Die Fourier-Transformierte der (renormierten) 2-Punktfunktion $W(x)$ hat die Gestalt

$$\tilde{W}(p) = (2\pi)^{-3} \Theta(p^0) \left(\delta(p^2 - M^2) + \int_{2M}^{\infty} d\sigma(m) \delta(p^2 - m^2) \right)$$

und führt zu dem Zusammenhang

$$(2\pi)^4 \tilde{W}(p) = i\Theta(p^0)(F(p^2 + i0) - F(p^2 - i0)).$$

In Worten: Die 2-Punktfunktion ist durch die Diskontinuität von $F(z)$ entlang der reellen Achse bestimmt. Addieren wir zu $F(z)$ ein Polynom $P_n(z)$ der Ordnung n mit reellen Koeffizienten,

$$F'(z) = F(z) + P_n(z),$$

so gilt weiterhin $F'(z^*) = F'(z)^*$ und

$$(2\pi)^4 \tilde{W}(p) = i\Theta(p^0)(F'(p^2 + i0) - F'(p^2 - i0)).$$

Dies bedeutet, daß $\tilde{\Delta}_{F'}^{\text{ren}}(q) = F'(q^2 + i0)$ eine zulässige Definition des Feynman-Propagators darstellt, die lediglich eine andere Interpretation des T -Produktes beinhaltet. Die so gewonnene Freiheit ist das Hilfsmittel zur Gewinnung eines wohldefinierten Ausdrucks für $\tilde{\Delta}_{F'}^{\text{ren}}(q)$ in Situationen mit $\int d\sigma(m)m^{-2} = \infty$.

Wir studieren beispielhaft die Situation

$$\int d\sigma(m)m^{-2} = \infty \quad \text{aber} \quad \int d\sigma(m)m^{-4} < \infty$$

und wählen zunächst einen *cut-off* Λ :

$$F(z)_\Lambda = \frac{1}{z - M^2} + \int_{2M}^\Lambda \frac{d\sigma(m)}{z - m^2} .$$

Mit einem Polynom 0-ter Ordnung

$$P_0(z) = a_\Lambda = \int_{2M}^\Lambda d\sigma(m) m^{-2}$$

und der Definition $F'(z) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} (F(z)_\Lambda + a_\Lambda)$ finden wir

$$\begin{aligned} F'(z) &= \frac{1}{z - M^2} + \int_{2M}^\infty d\sigma(m) \left(\frac{1}{z - m^2} - \frac{1}{m^2} \right) \\ &= \frac{1}{z - M^2} + z \int_{2M}^\infty \frac{d\sigma(m)}{m^2(z - m^2)} \end{aligned}$$

und somit den renormierten Propagator

$$\tilde{\Delta}_{F'}^{\text{ren}}(q) = \frac{1}{q^2 - M^2 + i0} + q^2 \int_{2M}^\Lambda \frac{d\sigma(m)}{m^2(q^2 - m^2 + i0)} .$$

Das Integral auf der linken Seite ist nun konvergent. Es ist klar, daß a_Λ keinen Limes besitzt: a_∞ ist eine weitere unendliche (additive) Renormierungskonstante der Theorie.

9.3 Massenrenormierung

Die nackte Masse M_0 taucht in der Darstellung des renormierten Propagators nicht mehr auf. Der Verdacht liegt nahe, daß sie nur in der Störungstheorie eine Bedeutung erlangt. Diese Auffassung ist jedoch falsch, wie wir nun demonstrieren wollen. Wir benötigen hierzu ein paar allgemeine weitergehende Annahmen: Das unrenormierte Feld $\Phi(x)$ genüge einer Feldgleichung der Form

$$(\square + M_0^2)\Phi(x) = J(x)$$

und kanonischen Vertauschungsrelationen

$$[\Phi(x), \dot{\Phi}(y)]_{x^0=y^0} = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad [J(x), \dot{\Phi}(y)]_{x^0=y^0} = 0 .$$

Die Annahmen wären etwa erfüllt für das Modell einer 'effektiven' Pion-Nukleon-Wechselwirkung mit $J = g\bar{\psi}\gamma_5\psi$.

Es sei wie im vorigen Abschnitt $d\sigma(m)$ das KL-Maß des renormierten Feldes $\Phi_{\text{ren}}(x) = Z^{-1/2}\Phi(x)$. Also:

$$\begin{aligned} & (\Omega, [J(x), \Phi(y)]\Omega) \\ &= iZ(M_0^2 - \square) \left(\Delta(x-y, M) + \int_{2M}^{\infty} d\sigma(m) \Delta(x-y, m) \right) \\ &= iZ \left((M_0^2 - M^2)\Delta(x-y, M) + \int_{2M}^{\infty} d\sigma(m) (M_0 - m^2)\Delta(x-y, m) \right) \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} & (\Omega, [\Phi(x), \dot{\Phi}(y)]\Omega)_{x^0=y^0} \\ &= iZ \left(M_0^2 - M^2 + \int_{2M}^{\infty} d\sigma(m) (M_0 - m^2) \right) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned}$$

Wegen $[J(x), \dot{\Phi}(y)]_{x^0=y^0} = 0$ gilt

$$M_0^2 - M^2 + \int_{2M}^{\infty} d\sigma(m) (M_0 - m^2) = 0$$

oder, anders geschrieben,

$$M_0^2 = \frac{M^2 + \int_{2M}^{\infty} d\sigma(m) m^2}{1 + \int_{2M}^{\infty} d\sigma(m)} \quad (482)$$

Fazit:

Es gilt $M_0 > M$ und $M_0 = M$ nur dann, wenn $\Phi(x)$ ein freies Feld, also $d\sigma(m) = 0$ ist. Es gilt $M_0 = \infty$ immer dann, wenn $\int d\sigma(m)m^2 = \infty$. Dies ist der Normalfall.

Unsere Behauptungen folgen aus der Ungleichung:

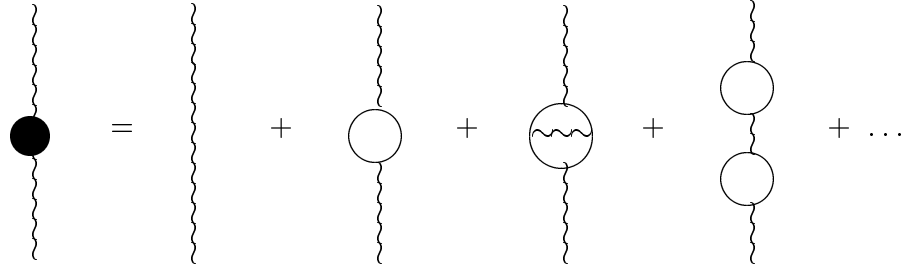
$$\int_{2M}^{\infty} d\sigma(m) m^2 \geq (2M)^2 \int_{2M}^{\infty} d\sigma(m) > M^2 \int_{2M}^{\infty} d\sigma(m).$$

Eine Massenrenormierung ist somit unvermeidlich. Die Formel (482) hat noch einen interessanten Aspekt. Denn das KL-Spektralmaß wird nach Normierung zu einem W-Maß¹²⁶ und M_0^2 zu einem Erwartungswert bezüglich dieses W-Maßes: $M_0^2 = \langle m^2 \rangle$.

¹²⁶Wahrscheinlichkeitsmaß

9.4 Die Vakuum-Polarisation

Wir untersuchen nun die Struktur des Photon-Propagators in der QED. Die störungstheoretische Entwicklung



benutzt einen Ausdruck für den freien Propagator, der, wie früher erläutert, von der Wahl der Eichung abhängt. Wir wählen hier die Gupta-Bleuler-Eichung, so daß der freie Propagator im Impulsraum die sehr einfache Form $-ig^{\mu\nu}(k^2 + i0)^{-1}$ annimmt. Die obige Entwicklung zeigt, daß der volle Propagator dann die Struktur

$$\begin{aligned} & (\Omega, T A^\mu(x) A^\nu(y) \Omega) \\ &= (2\pi)^{-4} \int d^4 k e^{-ik(x-y)} \left(\frac{-ig^{\mu\nu}}{k^2 + i0} - \frac{-ig^{\mu\sigma}}{k^2 + i0} I_{\sigma\tau}(k) \frac{-ig^{\tau\nu}}{k^2 + i0} \right) \\ &= (2\pi)^{-4} \int d^4 k e^{-ik(x-y)} \left(\frac{-ig^{\mu\nu}}{k^2 + i0} + \frac{I^{\mu\nu}(k)}{(k^2 + i0)^2} \right) \end{aligned}$$

besitzt, wobei die Strukturfunktion

$$I^{\mu\nu}(k) = e^2 I_1^{\mu\nu}(k) + e^4 I_2^{\mu\nu}(k) + \dots$$

im Rahmen der Störungstheorie zu bestimmen ist. Sie ist die Fourier-Transformierte der Stromkorrelationsfunktion, d.h.

$$(\Omega, T j^\mu(x) j^\nu(y) \Omega) = (2\pi)^{-4} \int d^4 k e^{-ik(x-y)} I^{\mu\nu}(k), \quad (483)$$

wie aus der Feldgleichung $\square A^\mu(x) = j^\mu(x)$ und

$$\begin{aligned} \square_x \square_y (\Omega, T A^\mu(x) A^\nu(y) \Omega) &= (2\pi)^{-4} \int d^4 k e^{-ik(x-y)} (-ig^{\mu\nu} k^2 + I^{\mu\nu}(k)) \\ &= ig^{\mu\nu} \square_x \delta^4(x-y) + (\Omega, T j^\mu(x) j^\nu(y) \Omega) \end{aligned}$$

folgt. Der erste Term auf der rechten Seite ist ein Effekt der Zeitordnung.

Die Analyse beginnen wir mit der Källen-Lehmann-Darstellung der 2-Punktfunktion

$$(\Omega, j^\mu(x)j^\nu(y)\Omega) = (g^{\mu\nu} \square - \partial^\mu \partial^\nu) \int_0^\infty d\sigma(m) \Delta_+(x-y, m).$$

Hier haben wir die Stromerhaltung $\partial_\mu j^\mu(x) = 0$ berücksichtigt. Allgemein gilt:

Ein Goldstone-Teilchen (der Masse Null) tritt auf, wenn das KL-Maß einen Anteil der Form $a\delta(m)dm$ enthält. In der QED liegt diese Situation mit Sicherheit nicht vor. Ein solcher Anteil im KL-Maß verhindert, daß

$$(\Omega, j^\mu(x)j^\nu(y)\Omega)$$

für raumartige Abstände $x-y$ exponentiell abklingt, mit der Konsequenz, daß die Erhaltungsgröße

$$Q = \int d^3x j^0(x)$$

nicht existiert: Das Integral konvergiert nicht. Ist $j^\mu(x)$ ein Noether-Strom der klassischen Lagrange-Funktion, so existiert die unitäre Gruppe $U(\alpha) = \exp(i\alpha Q)$ der quantisierten Theorie nicht. Das Goldstone-Teilchen verhindert somit, daß die Symmetrie der Lagrange-Funktion unitär implementiert wird, und wir sprechen von einer spontanen Symmetrie-Brechung.

Wir gehen davon aus, daß die Goldstone-Situation nicht vorliegt. Zur Bestimmung des KL-Maßes genügt in diesem Fall das Studium des Skalars

$$W(x-y) := -(\Omega, j^\mu(x)j_\mu(y)\Omega) = 3 \int_0^\infty d\sigma(m) m^2 \Delta_+(x-y, m). \quad (484)$$

In der Ordnung e^2 haben wir nur $j^\mu = e : \bar{\phi} \gamma^\mu \psi :$ zu setzen, wobei ψ das freie Elektronfeld zur Masse M ist. Eine leichte Rechnung führt auf den Ausdruck

$$\begin{aligned} W(x) &= e^2 \text{Spur} (\gamma^\mu S_+(x, M) \gamma_\mu S_+(-x, M)) \\ &= 8e^2 (2M^2 \Delta_+(x, M)^2 - \partial_\mu \Delta_+(x, M) \partial^\mu \Delta_+(x, M)). \end{aligned}$$

Obwohl $\Delta_+(x, M)$ eine Distribution ist, sind ihre Potenzen wohldefiniert, im Gegensatz zu $\Delta_F(x, M)$. Grund: $\Delta_+(x, M)$ ist Randwert einer analytischen Funktion in der Variablen x^2 . Mehr noch, es existieren Produktformel, von denen wir hier zwei benötigen:

$$\Delta_+(x, m_1) \Delta_+(x, m_2) = \int_{m_1+m_2}^\infty dm \frac{\sqrt{\lambda(m_1^2, m_2^2, m^2)}}{2m(2\pi)^2} \Delta_+(x, m)$$

$$\begin{aligned} & \partial_\mu \Delta_+(x, m_1) \partial^\mu \Delta_+(x, m_2) \\ &= \int_{m_1+m_2}^{\infty} dm (m_1^2 + m_2^2 - m^2) \frac{\sqrt{\lambda(m_1^2, m_2^2, m^2)}}{4m(2\pi)^2} \Delta_+(x, m) \end{aligned}$$

wobei wir die Funktion

$$\lambda(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ac$$

eingeführt haben. In unserer Situation gilt $m_1 = m_2 = M$ (=Elektronmasse):

$$\begin{aligned} \Delta_+(x, M)^2 &= \int_{2M}^{\infty} dm \frac{\sqrt{m^2 - 4M^2}}{2(2\pi)^2} \Delta_+(x, m) \\ \partial_\mu \Delta_+(x, M) \partial^\mu \Delta_+(x, M) &= \int_{2M}^{\infty} dm (2M^2 - m^2) \frac{\sqrt{m^2 - 4M^2}}{4(2\pi)^2} \Delta_+(x, m) \end{aligned}$$

und folglich

$$W(x) = \frac{e^2}{2\pi^2} \int_{2M}^{\infty} dm (2M^2 - m^2) \frac{\sqrt{m^2 - 4M^2}}{2(2\pi)^2} \Delta_+(x, m).$$

Ein Vergleich mit (484) liefert das KL-Spektralmaß

$$\boxed{d\sigma(m) = \frac{2\alpha}{3\pi} \left(1 + 2\frac{M^2}{m^2}\right) (m^2 - 4M^2)_+^{1/2} dm} \quad (485)$$

in der Ordnung $\alpha = e^2/(4\pi)$. Aus der Mathematik haben wir das Symbol

$$x_+^\alpha = \begin{cases} x^\alpha & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

entlehnt. In der Ordnung α ist die 2-Punktfunktion des elektromagnetischen Stromes ein wohlbestimmter Ausdruck. Wir nutzen diesen Ausdruck nun, um die Feynman-Funktion

$$(\Omega, T j^\mu(x) j^\nu(y) \Omega)$$

zu finden. Die naive Vorschrift – Ersetzung $\Delta_+ \rightarrow i\Delta_F$ – versagt aber, weil das Integral

$$\int \frac{d\sigma(m)}{k^2 - m^2 + i0}$$

logarithmisch divergent ist: es verhält sich wie $\int^\infty dm/m$. Wie früher beschrieben, hilft die Ersetzung

$$\int \frac{d\sigma(m)}{k^2 - m^2 + i0} \rightarrow k^2 \int \frac{d\sigma(m)}{m^2(k^2 - m^2 + i0)}.$$

Ein Vergleich mit (483) zeigt, daß

$$I^{\mu\nu}(k) = -i(g^{\mu\nu}k^2 - k^\mu k^\nu)k^2 \int \frac{d\sigma(m)}{m^2(k^2 - m^2 + i0)} \quad (486)$$

die korrekte Darstellung in der Ordnung α ist.

9.5 Korrektur zum Coulomb-Potential

Aus $I^{\mu\nu}(k)$ folgt für den Photon-Propagator bis zur Ordnung α im Impulsraum der Ausdruck

$$-ig^{\mu\nu} \left(\frac{1}{k^2 + i0} + \int_{2M}^{\infty} \frac{d\sigma(m)}{m^2(k^2 - m^2 + i0)} \right) \quad (487)$$

wobei wir einen Term proportional zu $k^\mu k^\nu$ bereits weggelassen haben. Seine Anwesenheit bedeutet, daß wir die Gupta-Bleuler-Eichung verlassen haben. Da das Photon an einen erhaltenen Strom koppelt, ist ein solcher Term irrelevant. Der Anteil, der proportional zu $g^{\mu\nu}$ ist, wird zum effektiven Photon-Propagator.

Dem korrigierten Photon-Propagator (487) entspricht eine Korrektur des Coulomb-Potentials $1/r$ durch die Vakuumpolarisation:

$$V(r) = \frac{1}{r} + \int_{2M}^{\infty} \frac{d\sigma(m)}{m^2} \frac{e^{-mr}}{r}. \quad (488)$$

Für $r \gg M^{-1}$ (Compton-Wellenlänge des Elektrons) ist das Integral auf der rechten Seite vernachlässigbar. Deshalb ist selbst im Bereich des Bohrschen Radius

$$a_{\text{Bohr}} = (\alpha M)^{-1} \approx 137 M^{-1}$$

die Korrektur gering. Ernst genommen, führt sie zu einer Absenkung des Potentials $-Z\alpha/r$ und der Grundzustandsenergie für Atome der Kernladungszahl Z . Die Energieverschiebung ΔE berechnen wir gemäß den Regeln der Störungstheorie:

$$\Delta E = Z\alpha \int_{2M}^{\infty} \frac{d\sigma(m)}{m^2} \left\langle \frac{e^{-mr}}{r} \right\rangle,$$

wobei wir mit $\langle \cdot \rangle$ den Erwartungswert im Grundzustand $c \cdot \exp(-Z\alpha Mr)$ bezeichnen. Wir finden so

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{e^{-mr}}{r} \right\rangle &= \frac{\int_0^{\infty} r dr e^{-(m+2Z\alpha M)r}}{\int_0^{\infty} r^2 dr e^{-2Z\alpha M r}} = \frac{Z\alpha M}{\left(1 + \frac{m}{2Z\alpha M}\right)^2} \\ &= 4(Z\alpha M/m)^3 m + O((Z\alpha)^4). \end{aligned}$$

und deshalb

$$\Delta E = 4(Z\alpha)^4 M^3 \int_{2M}^{\infty} \frac{d\sigma(m)}{m^4} + O(\alpha(Z\alpha)^5) .$$

Das hier auftretende Integral läßt sich geschlossen lösen: Es hat den Wert $\alpha/(15\pi M)$, so daß das Resultat lautet:

$$\Delta E = \frac{4}{15\pi} \alpha(Z\alpha)^4 M + O(\alpha(Z\alpha)^5) .$$

Diese Energie ist sehr klein verglichen mit der Bindungsenergie

$$E = \left(1 - \sqrt{1 - (Z\alpha)^2}\right) M = \frac{1}{2}(Z\alpha)^2 M + O((Z\alpha)^3) .$$

Wir erhalten so $\Delta E/E = (8/15)(\alpha/\pi)(Z\alpha)^2 = 6.6 \cdot 10^{-8}$ ($Z = 1$). Die Energieverschiebung ΔE ist auch klein verglichen mit der Feinstruktur-Aufspaltung ($\sim (Z\alpha)^4$) und der Hyperfeinstruktur-Aufspaltung ($\sim \alpha(Z\alpha)^3$). Selbst bei der Berechnung des Lamb-shifts spielt die Vakuum-Polarisation eine untergeordnete Rolle: Von den insgesamt 1057 MHz ($2S_{1/2} - 2P_{1/2}$ im H-Atom) entfallen auf die Vakuum-Polarisation nur -27 MHz.

Merkbare Korrekturen erwarten wir erst, wenn das Coulomb-Potential bei sehr kleinen Abständen getestet wird. In der Atomphysik erwarten wir merkbare Effekte für $Z\alpha \approx 1$. Dann ist aber bereits das Potential-Modell der Dirac-Theorie ungültig geworden.

Unsere Ergebnisse haben noch einen anderen Aspekt, der unter dem Titel *running coupling constant* bekannt geworden ist. Das Potential $-Z\alpha/r$ ist durch ein Potential ersetzt worden, dessen Fourier-Transformierte wir auf zwei Weisen schreiben können:

$$-Z\alpha \left(\frac{1}{\mathbf{k}^2} + \int_{2M}^{\infty} \frac{d\sigma(m)}{m^2} \frac{1}{\mathbf{k}^2 + m^2} \right) = -Z\alpha(\mathbf{k}^2) \frac{1}{\mathbf{k}^2} .$$

Rechts haben wir die Feinstrukturkonstante als eine Funktion von \mathbf{k}^2 eingeführt, so daß der bekannte Wert $\alpha \approx 1/137$ für $\mathbf{k}^2 = 0$ erreicht wird; denn es gilt

$$\alpha(\mathbf{k}^2) = \alpha(0) \left(1 + \mathbf{k}^2 \int_{2M}^{\infty} \frac{d\sigma(m)}{m^2} \frac{1}{\mathbf{k}^2 + m^2} \right) .$$

Es folgt $\alpha(\mathbf{k}^2) > \alpha(0)$. Um zu einer lorentz-invarianten Schreibweise zu kommen, ersetzt man \mathbf{k}^2 durch den Impulsübertrag $-k^2 > 0$:

$$\alpha(-k^2) = \alpha(0) \left(1 + k^2 \int_{2M}^{\infty} \frac{d\sigma(m)}{m^2} \frac{1}{k^2 - m^2} \right) .$$

Die hier eingeführte Energie-Abhängigkeit von α ist jedoch sehr gering:

$$\alpha(0) \leq \alpha(-k^2) < \alpha(\infty) = \alpha(0) \left(1 + \frac{3}{16} \alpha(0) \right) .$$

Analog verfährt man in höheren Ordnungen der Störungstheorie. Bedenken wir jedoch, daß es außer dem Elektron noch viele andere geladene Elementarteilchen gibt, so wird klar, daß langwierige Rechnungen notwendig sind, um die wahre Form von $\alpha(-k^2)$ zu finden. In der Hochenergiephysik benötigt man Werte von $\alpha(-k^2)$ mit $-k^2$ im Bereich 1-100 GeV. Ein typischer Wert ist $\alpha(m_Z^2) \approx 1/128$.

9.6 Die Selbstenergie des Photons

Wir erinnern an die Korrelationsfunktion des elektromagnetischen Stromes,

$$(\Omega, T j^\mu(x) j^\nu(y) \Omega) = (2\pi)^{-4} \int d^4 k e^{-ik(x-y)} I^{\mu\nu}(k) ,$$

die wir grafisch veranschaulichen:

$$\Leftrightarrow -I^{\mu\nu}(k) = i(g^{\mu\nu} k^2 - k^\mu k^\nu) I(k^2)$$

Der linke Graph steht gleichzeitig für eine unendliche Summe von Feynman-Graphen. Lassen wir Vakuum-Graphen außer acht, so ist jeder einzelne Feynman-Graph zusammenhängend, d.h. seine Teile sind immer durch innere Linien verbunden. Wir nennen einen Graphen *irreduzibel*, wenn er nicht durch Zerschneiden einer inneren Linie in zwei unzusammenhängende Teile zerfällt. Anderenfalls heißt er *reduzibel*. Die Summe aller irreduziblen Graphen soll mit

$$\Leftrightarrow -\Pi^{\mu\nu}(k) = i(g^{\mu\nu} k^2 - k^\mu k^\nu) \Pi(k^2)$$

bezeichnet werden. Dann gibt es eine Entwicklung der folgenden Art:

$$= \text{hexagonal lattice circle} + \text{hexagonal lattice circle} \sim \text{hexagonal lattice circle} + \text{hexagonal lattice circle} \sim \text{hexagonal lattice circle} \sim \dots$$

$$= \text{hexagonal lattice circle} + \text{hexagonal lattice circle} \sim \text{shaded circle}$$

In Formeln:

$$-I^{\mu\nu}(k) = -\Pi^{\mu\nu}(k) + (-\Pi^{\mu\lambda}(k)) \frac{-ig_{\lambda\tau}}{k^2 + i0} (-\Pi^{\tau\nu}(k))$$

Hiermit folgt eine einfache Beziehung

$$I(k^2) = \Pi(k^2) + \Pi(k^2)I(k^2)$$

zwischen den skalaren Funktionen mit der Auflösung

$$I(k^2) = \frac{\Pi(k^2)}{1 - \Pi(k^2)}. \quad (489)$$

Der effektive Photon-Propagator

$$\frac{-ig^{\mu\nu}}{k^2 + i0} (1 + I(k^2)) = \frac{-ig^{\mu\nu}}{k^2 - k^2\Pi(k^2) + i0}$$

erhält so eine suggestive Form: Anstelle des Terms m^2 im Propagator steht hier $k^2\Pi(k^2)$. Man nennt $\Pi(k^2)$ die *Selbstenergie-Funktion* des Photons.

Aus (486) folgt, daß in der Ordnung α die beiden Funktionen $\Pi(k^2)$ und $I(k^2)$ zu identifizieren sind:

$$\Pi(k^2) = I(k^2) = k^2 \int \frac{d\sigma(m)}{m^2(k^2 - m^2 + i0)},$$

wobei das KL-Spektralmaß durch (485) gegeben ist. Für große Werte von $|k^2|$ gilt $|I(k^2)| \approx |k^2|$, und die Entwicklung nach α wird unbrauchbar. Das Verhalten bei kleinen Werten von $|k^2|$ haben wir jedoch gut im Griff:

Der volle Propagator des Photons besitzt einen Pol bei $k^2 = 0$ mit Residuum 1. Denn es gilt $\Pi(0) = 0$ bis zu beliebigen Ordnungen der Störungsrechnung. Die QED gibt dem Photon keine Masse.

Bemerkenswert ist das Verhalten von $\Pi(k^2)$ im Bereich $k^2 < 0$. Die Funktion $\Pi(k^2)$ ist dort reell positiv, wächst monoton und verhält sich wie $\log(-k^2/M^2)$ für $k^2 \rightarrow -\infty$. Mit Sicherheit wird der Wert $\Pi(k^2) = 1$ für ein kritisches $k^2 = k_c^2$ erreicht. Wegen (489) hat $I(k^2)$ eine Singularität an dieser Stelle, die wir aus physikalischen Gründen dort nicht erwarten. Fazit: Spätestens bei dem kritischen Impulsübertrag k_c^2 versagt die Störungsrechnung der QED. Anders ausgedrückt, die Kopplungskonstante $\alpha(-k^2)$ nimmt im Bereich von k_c^2 zu große Werte an. Wir erwarten, daß $-k_c^2 \gg M^2$ ist (M =Masse des

Elektrons), was sich leicht bestätigen läßt; denn die Bestimmungsgleichung für k_c^2 lautet

$$\frac{2\alpha}{3\pi} k_c^2 \int_{2M}^{\infty} dm \frac{1 + 2(m/M)^2}{m^2(k_c^2 - m^2)} \sqrt{m^2 - 4M^2} = 1,$$

was sehr gut durch $(\alpha/(3\pi)) \log(-k_c^2/M^2) = 1$ approximiert werden kann. Dies ergibt die Abschätzung

$$-k_c^2/M^2 = e^{3\pi/\alpha} \approx e^{1291} \approx 10^{560}.$$

Anmerkung: Der scheinbare Pol von $I(k^2)$ im Bereich $k^2 < 0$ wird *Landau ghost* genannt.

9.7 Lamb Shift

Für ein gebundenes Elektron im Kernfeld

$$A_{\text{Kern}}^\mu(x) = \frac{Ze}{4\pi r} g^{\mu 0}$$

sind die möglichen Energieniveaus durch die stationären Lösungen der Dirac-Gleichung

$$(i\mathcal{D} - m - e\mathcal{A}_{\text{Kern}})\psi = 0$$

gegeben. Darüberhinaus wechselwirkt das Elektron mit dem quantisierten Strahlungsfeld $A^\mu(x)$:

$$(i\mathcal{D} - m - e\mathcal{A}_{\text{Kern}} - e\mathcal{A})\psi = 0.$$

Die Auswirkungen hiervon sind gering, weil der Mittelwert verschwindet:

$$(\Omega, A^\mu(x)\Omega) = 0.$$

Dennoch existieren Vakuumfluktuationen, die sich in der 2-Punktfunktion

$$(\Omega, A^\mu(x)A^\nu(y)\Omega) = -g^{\mu\nu} D_+(x-y)$$

äußern. Äquivalent: Man deutet Ω als den Zustand des ruhenden (weil schweren) Kerns und setzt

$$\begin{aligned} (\Omega, A^\mu(x)\Omega) &= A_{\text{Kern}}^\mu(x) \\ (\Omega, A^\mu(x)A^\nu(y)\Omega) &= A_{\text{Kern}}^\mu(x)A_{\text{Kern}}^\nu(y) - g^{\mu\nu} D_+(x-y). \end{aligned}$$

Mit dieser Interpretation behält die Dirac-Gleichung ihre übliche Gestalt:

$$(i\mathcal{D} - m - e\mathcal{A})\psi = 0 .$$

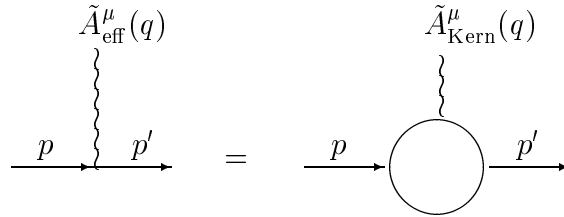
Klassisch gesehen, veranlassen die Fluktuationen des Strahlungsfeldes das Elektron zu einer Oszillation entlang seiner Bahn. Quantenmechanisch führt dies zu einer Korrektur der Bindungsenergie, *Lamb shift* genannt.

Um rechnen zu können, ist es dennoch nötig zu einer Beschreibung mit äußeren Feldern zurückzukehren, im Sinne einer Approximation:

$$(i\mathcal{D} - m - e\mathcal{A}_{\text{eff}} - c\sigma_{\mu\nu}F_{\text{Kern}}^{\mu\nu})\psi = 0 , \quad c = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{e}{4m} ,$$

wobei $F_{\text{Kern}}^{\mu\nu} = \partial^\nu A_{\text{Kern}}^\mu - \partial^\mu A_{\text{Kern}}^\nu$ gesetzt wurde. Man sieht: Der Term, der $F_{\text{Kern}}^{\mu\nu}$ enthält, beschreibt die Wechselwirkung des anomalen magnetischen Momentes des Elektrons mit dem Kernfeld. Im folgenden werden wir diesen Beitrag vernachlässigen.

Entscheidend ist die Konstruktion des effektiven Potentials A_{eff}^μ durch Feynman-Graphen (die gerichteten äußeren Linien beschreiben Elektronen mit den Impulsen p, p' und Impulsübertrag $q = p - p'$):



In Formeln:

$$\tilde{A}_{\text{eff}}^\mu(q) = (F_1(q^2) + I(q^2))\tilde{A}_{\text{Kern}}^\mu(q) ,$$

d.h. der punktförmigen (strukturlosen) Ankopplung von A_{eff}^μ entspricht der Ankopplung des Kernfeldes unter Berücksichtigung der Vertex-Korrektur F_1 und der Vakuumpolarisation I . Da der Bohrsche Radius groß gegenüber der Comptonwellenlänge des Elektrons ist, begnügen wir uns mit einer Näherung für kleine Werte von $-q^2 \geq 0$ (λ ist eine fiktive Photonmasse):

$$F_1(q^2) = 1 + \frac{\alpha}{3\pi m^2} \left(\log \frac{m}{\lambda} - \frac{3}{8} \right) q^2$$

$$I(q^2) = -\frac{\alpha}{15\pi m^2} q^2 .$$

Damit folgt:

$$A_{\text{eff}}^\mu(x) = A_{\text{Kern}}^\mu(x) - \frac{\alpha}{3\pi m^2} \left(\log \frac{m}{\lambda} - \frac{3}{8} - \frac{1}{5} \right) \square A_{\text{Kern}}^\mu(x) .$$

Diese Formel gilt im Grunde für jedes äußere Potential. Im Fall des Kernpotentials finden wir speziell

$$\square A_{\text{Kern}}^\mu(x) = -\Delta A_{\text{Kern}}^\mu(x) = Ze\delta^3(\mathbf{x})g^{\mu 0}$$

also

$$V_{\text{eff}}(\mathbf{x}) := -eA_{\text{eff}}^0(x) = -\frac{Z\alpha}{r} + \frac{4Z\alpha^2}{3m^2} \left(\log \frac{m}{\lambda} - \frac{3}{8} - \frac{1}{5} \right) \delta^3(\mathbf{x})$$

Die Abhängigkeit von der Photonmasse λ ist unbefriedigend. Sie ist ein Zeichen dafür, daß ein weiterer Beitrag zum effektiven Potential fehlt, der Beitrag der weichen Bremsstrahlung (Abstrahlung weicher Photonen). Eine genaue Analyse zeigt, daß die Berücksichtigung dieses Beitrages sich so auswirkt, als ob in den obigen Formeln λ den Wert $(Z\alpha)^2 m$ hat. Ein weiterer Kritikpunkt ist, daß die Entwicklung nach kleinen q^2 unzulässig ist, weil die relativistische Wellenfunktion des Grundzustandes singulär im Ursprung ist¹²⁷ und deshalb der Erwartungswert von $\delta^3(\mathbf{x})$ im Grundzustand nicht existiert. Für den nichtrelativistischen Ausdruck der Wellenfunktion existiert dieser Erwartungswert.

Die δ -förmige Korrektur zum Kernpotential ist nur wirksam für s-Zustände; denn nur dann ist $\psi(0) \neq 0$. Die Entartung der Dirac-Niveaus (die Zustände $2S_{1/2}$ und $2P_{1/2}$ haben die gleiche Energie) wird damit aufgehoben: Das $2S_{1/2}$ -Niveau erscheint um ΔE erhöht, wobei:

$$\Delta E = \frac{m\alpha}{6\pi} (Z\alpha)^4 \left(2 \log(Z\alpha)^{-1} - \frac{3}{8} - \frac{1}{5} \right) = 1050 \text{ MHz (für } Z = 1\text{)}.$$

Der Wert $1/5$ in der Klammer ist der Beitrag der Vakuumpolarisation. Genauere umfangreiche Rechnungen ergaben

$$1057,864 \pm 0,014 \text{ MHz (Mohr 1975)}.$$

Der experimentelle Wert liegt bei

$$1057,862 \pm 0,020 \text{ MHz (Andrews, Newton 1976)},$$

so daß wir von einer ausgezeichneten Übereinstimmung sprechen können. Die Rechnungen sind leider überschattet von der Schwierigkeit, die anfallenden Infrarotprobleme in einer überzeugenden Weise zu lösen.

Es sei erwähnt, daß das $2P_{1/2}$ -Niveau eine (wenn auch geringe) Korrektur seiner Energie erfährt, und zwar durch das anormale magnetische Moment des Elektrons.

¹²⁷Nämlich wie $1/r^s$ mit $s = 1 - \sqrt{1 - (Z\alpha)^2}$. Siehe hierzu Itzykson/Zuber: Quantum Field Theory, Seite 79.

9.8 Die 2-Punktfunktion eines Dirac-Feldes

Auch für ein Dirac-Feld $\psi(x)$ existiert eine Spektraldarstellung der 2-Punktfunktion mit einem Källen-Lehmann-Maß $d\mu(m)$:

$$(\Omega, \psi(x)\bar{\psi}(y)\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\mu(m) (i\cancel{\partial} + m)\Delta_+(x - y, m). \quad (490)$$

Obwohl die Variable m in dieser Darstellung positive wie negative Werte annehmen kann, ist weiterhin der Absolutbetrag $|m|$ die ‘physikalische Masse’ von Zuständen der Form $\bar{\psi}(f)\Omega$. Es stellt sich die Frage nach dem Sinn des Vorzeichens von m . Man erkennt aber sofort: Eine chirale Transformation $\psi \rightarrow \gamma_5\psi$ führt $d\mu(m)$ in $d\mu(-m)$ über. Die Transformation ist mit Sicherheit *nicht unitär implementierbar* (die Theorie ist nicht chiral symmetrisch), wenn $d\mu(m) \neq d\mu(-m)$.

Unter den Bedingungen

$$d\mu(m)/dm = \begin{cases} c\delta(m - M) & \text{falls } -M \leq m \leq M \\ \text{stetig} & \text{falls } |m| > M \end{cases} \quad (491)$$

und $c \neq 0$ beschreibt das Dirac-Feld $\psi(x)$ ein Teilchen der Masse M . Das Massenspektrum besteht somit aus einem δ -förmigen Beitrag und einem Kontinuum. In der QED ist M die Masse des Elektrons, während das Kontinuum Zuständen entspricht, in denen das Elektron von Photonen begleitet wird. Das Feld heißt renormiert, wenn $c = 1$ gilt. Das renormierte Feld besitzt daher die 2-Punktfunktion

$$(\Omega, \psi(x)\bar{\psi}(y)\Omega) = S_+(x - y, M) + \int_{>} d\mu(m) S_+(x - y, m)$$

mit $S_+(x, m) = (i\cancel{\partial} + m)\Delta_+(x, m)$, wobei das Zeichen $>$ am Integral andeutet, daß nur über den Bereich $|m| > M$ integriert wird. Von hier aus gelangen wir zum Propagator

$$S_F(x - y, M) = -i(\Omega, T\psi(x)\bar{\psi}(y)\Omega) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \tilde{S}_F(p)$$

in bekannter Manier:

$$\tilde{S}_F(p) = \frac{1}{\cancel{p} - M + i0} + \int_{>} d\mu(m) \frac{1}{\cancel{p} - m + i0}. \quad (492)$$

Oder, in einer anderen Schreibweise:

$$\tilde{S}_F(p) = \frac{\cancel{p} + M}{p^2 - M^2 + i0} + \int_{>} d\mu(m) \frac{\cancel{p} + m}{p^2 - m^2 + i0}.$$

Eine Renormierung (Subtraktion einer unendlichen Konstanten) kann auch hier notwendig werden, wenn das links stehende Integral nicht konvergiert.

Eine völlig andere Darstellung des Propagators wird durch die Störungstheorie (z.B. der QED) nahegelegt, nämlich

$$\tilde{S}_F(p) = \frac{1}{\not{p} - M + i0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\not{p} - M + i0} \left[\Sigma(p) \frac{1}{\not{p} - M + i0} \right]^n,$$

wobei die 4×4 -Matrix $\Sigma(p)$ als Summe aller renormierten und irreduziblen Selbstenergie-Feynman-Graphen anzusehen ist. Die Summe kann auch geschlossen dargestellt werden:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_F(p) &= (\not{p} - M + i0)^{-1} [1 - \Sigma(p)(\not{p} - M + i0)^{-1}]^{-1} \\ &= [\{1 - \Sigma(p)(\not{p} - M + i0)^{-1}\}(\not{p} - M + i0)]^{-1} \\ &= [\not{p} - M + i0 - \Sigma(p)]^{-1} \end{aligned}$$

oder

$$\tilde{S}_F(p)^{-1} = \not{p} - M + i0 - \Sigma(p)$$

mit $\Sigma(p)$ als sog. Selbstenergiefunktion (kurz *Selbstenergie*) des Dirac-Teilchens. Aus der früheren Darstellung (492) folgt, daß $\Sigma(p)$ die folgende allgemeine Form haben muß:

$$\Sigma(p) = a(p^2)\not{p} + b(p^2).$$

Hier sind $a(z)$ und $b(z)$ reell-analytische Funktionen¹²⁸ einer komplexen Variablen $z \in \mathbb{C} \setminus [M^2, \infty]$. Man renormiert in der jeder Ordnung der Störungstheorie die Selbstenergie so, daß sie an der Stelle $p^2 = M^2$ verschwindet, d.h. man verlangt

$$a(M^2) = b(M^2) = 0,$$

äquivalent zur Forderung

$$(\not{p} - M)\tilde{S}_F(p) \Big|_{p^2=M^2} = 1.$$

In diesem Fall heißt M die *renormierte Masse*. Wir wollen zeigen, daß diese Bedingung auch für die Darstellung (492) erfüllbar ist, sofern wir auf der rechten Seite eine geeignete Konstante C hinzufügen:

$$\tilde{S}_F(p) = C + \frac{1}{\not{p} - M + i0} + \int_{>} d\mu(m) \frac{1}{\not{p} - m + i0}.$$

¹²⁸Eine Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *reell*, wenn $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ gilt.

Sie wird so bestimmt, daß für $p^2 = M^2$

$$(\not{p} - M) \left(C + \int_{>} d\mu(m) \frac{\not{p} + m}{M^2 - m^2} \right) = 0$$

gilt, was wegen

$$\begin{aligned} (\not{p} - M)(\not{p} - m) &= (\not{p} - M)(\not{p} + M) + (\not{p} - M)(m - M) \\ &= p^2 - M^2 + (\not{p} - M)(m - M) \\ &= (\not{p} - M)(m - M) \end{aligned}$$

auf den Ausdruck

$$C = \int_{>} d\mu(m) \frac{m - M}{m^2 - M^2} = \int_{>} d\mu(m) \frac{1}{m + M}$$

für die Renormierungskonstante führt.

9.9 Weitere Renormierungskonstanten des Dirac-Feldes

Das kanonische (nichtrenormierte) Dirac-Feld $\psi_0(x)$ läßt sich aus dem renormierten Feld $\psi(x)$ zurückgewinnen. Dazu betrachten wir den Erwartungswert des Antikommutators¹²⁹:

$$(\Omega, \{\psi(x), \bar{\psi}(y)\}\Omega) = i \int_{-\infty}^{\infty} d\mu(m) S(x - y, m), \quad (493)$$

wobei $S(x, m) = (i\not{\partial} + m)\Delta(x, m)$. Aus

$$\Delta(x, m) = 0, \quad \dot{\Delta}(x, m) = -\delta^3(\mathbf{x}) \quad \text{für} \quad x^0 = 0$$

folgt

$$(\Omega, \{\psi(x), \bar{\psi}(y)\}\Omega)_{x^0=y^0} = \gamma^0 \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \int_{-\infty}^{\infty} d\mu(m). \quad (494)$$

Wir nehmen an, daß $\psi_0(x) = Z^{1/2}\psi(x)$ die kanonischen Antivertauschungsrelationen

$$\{\psi_0(x), \psi_0^*(y)\}_{x^0=y^0} = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

erfüllt, gleichbedeutend mit

$$\{\psi_0(x), \bar{\psi}_0(y)\}_{x^0=y^0} = \gamma^0 \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

¹²⁹Tatsächlich ist hierfür ein Beweis nötig. Man benutzt die CPT-Invarianz, um (493) aus (490) abzuleiten.

Ein Vergleich mit (494) lehrt, daß

$$Z^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} d\mu(m) = 1 + \int_{>} d\mu(m)$$

gilt. In der Situation $\int_{>} d\mu(m) = \infty$ ist $Z = 0$, und wir wären gezwungen, in allen Zwischenrechnungen einen *cut-off* zu benutzen.

Wir betrachten beispielhaft die QED. Die nichtrenormierten Felder genügen der Feldgleichung

$$(i\partial - M_0)\psi_0(x) = e_0 A_0(x)\psi_0(x). \quad (495)$$

M_0 =nackte Masse, e_0 =nackte Ladung, $A_0^\mu(x)$, $\psi_0(x)$ =kanonische (nicht-renormierte) Felder. Ähnliche Gleichungen gelten in anderen Eichtheorien. Durch Anwendung des Dirac-Operators $i\partial - M_0$ auf

$$(\Omega, \{\psi_0(x), \bar{\psi}_0(y)\}\Omega) = iZ \int_{-\infty}^{\infty} d\mu(m) S(x-y, m),$$

folgt mit Hilfe von (495):

$$e_0(\Omega, \{A_0(x)\psi_0(x), \bar{\psi}_0(y)\}\Omega) = iZ \int_{-\infty}^{\infty} d\mu(m) (i\partial - M_0)S(x-y, m).$$

Es gilt $(i\partial - m)S(x, m) = 0$ und deshalb

$$(i\partial - M_0)S(x-y, m) = (m - M_0)S(x-y, m).$$

Wir finden so

$$e_0(\Omega, \{A_0(x)\psi_0(x), \bar{\psi}_0(y)\}\Omega)_{x^0=y^0} = Z\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \int_{-\infty}^{\infty} d\mu(m).$$

Da die Felder $A_0^\mu(x)$ und $\psi_0(x)$ zu gleichen Zeiten miteinander kommutieren, erhalten wir

$$\{A_0(x)\psi_0(x), \bar{\psi}_0(y)\}_{x^0=y^0} = A_0(x)\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})$$

und somit

$$e_0(\Omega, A_0^\mu(x)\Omega)\gamma_\mu = Z \int_{-\infty}^{\infty} d\mu(m) (m - M_0) \mathbb{1}.$$

Da die fünf Matrizen γ_μ , $\mathbb{1}$ linear unabhängig sind, folgt

$$(\Omega, A_0^\mu(x)\Omega) = 0 \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} d\mu(m) (m - M_0) = 0.$$

Die zweite dieser Bedingungen führt zu einem Ausdruck für die nackte Masse:

$$M_0 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} d\mu(m) m}{\int_{-\infty}^{\infty} d\mu(m)}$$

Im Falle chiraler Symmetrie gilt $d\mu(-m) = d\mu(m)$, also $\int d\mu(m) m = 0$, d.h. $M_0 = 0$. Entweder beschreibt das renormierte Dirac-Feld $\psi(x)$ ein Neutrino oder ein Fermion-Dublett:

$$\frac{d\mu(m)}{dm} = \delta(m - M) + \delta(m + M) + \text{Kontinuum.}$$

In dem Salam-Weinberg-Modell gelten die obigen Formeln nicht, weil dort zu berücksichtigen ist, daß es eine Yukawa-Kopplung gibt und das Skalarfeld einen Vakuumerwartungswert besitzt.

9.10 Die Fermion-Selbstenergie in niedrigster Ordnung der QED

Es sei $\psi(x)$ das Elektron-Positron-Feld und

$$(\Omega, T\psi(x)\bar{\psi}(y)\Omega) = i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \tilde{S}_F(p)$$

sein Propagator, für den wir eine Darstellung der Form

$$\tilde{S}_F(p) = \frac{1}{\not{p} - M + i0} + \frac{1}{\not{p} - M + i0} \tilde{S}'_F(p) \frac{1}{\not{p} - M + i0}$$

haben, wobei $\tilde{S}'_F(p)$ in niedrigster Ordnung mit der Selbstenergie $\Sigma(p)$ übereinstimmt. Zugleich ist $\tilde{S}'_F(p)$ jedoch der Propagator eines weiteren Dirac-Feldes, nämlich von

$$\psi'(x) := (i\cancel{\partial} - M)\psi(x) = eA(x)\psi(x). \quad (496)$$

Zur Berechnung von $\tilde{S}'_F(p)$ in der Ordnung e^2 setzen wir rechts in (496) die freien Felder ein und erhalten so eine Faktorisierung:

$$(\Omega, T\psi'(x)\bar{\psi}'(y)\Omega) = e^2 (\Omega, TA_\mu(x)A_\nu(y)\Omega) \gamma^\mu (\Omega, T\psi(x)\bar{\psi}(y)\Omega) \gamma^\nu .$$

Kurzgefaßt (mit Gupta-Bleuler-Eichung):

$$iS'_F(x) = e^2 \Delta_F(x, 0) \gamma^\mu S_F(x, M) \gamma_\mu .$$

Das links stehende Produkt zweier Propagatoren entspricht – in der Sprache der Feynman-Graphen einem Schleifenintegral (*one-loop integral*). Das Produkt ist nicht definiert, das Integral divergent. Wir kehren deshalb zur 2-Punktfunktion $S'_+(x-y) = (\Omega, \psi'(x)\bar{\psi}'(y)\Omega)$ zurück, für die man in der Ordnung e^2

$$S'_+(x) = -e^2 \Delta_+(x, 0) \gamma^\mu S_+(x, M) \gamma_\mu = 2e^2 \Delta_+(x, 0) (i\cancel{\partial} - 2M) \Delta_+(x, M)$$

erhält. Vorteil: Produkte von Δ_+ -Funktionen und ihren Ableitungen lassen sich elementar berechnen. Das Ergebnis kann in der Form

$$S'_+(x) = \int_{>} d\mu'(m) S_+(x, m)$$

dargestellt werden mit dem Spektralmaß

$$\begin{aligned} d\mu'(m) &= d\mu(m) (m^2 - M^2) \\ d\mu(m) &= \frac{\alpha}{4\pi|m|^3} (m^2 + M^2 - 4mM) dm \end{aligned}$$

(M = Masse des Elektrons). Das Zeichen $>$ beschränkt das Integral auf das Gebiet $|m| > M$. Das so bestimmte Maß ist nicht positiv für

$$M \leq m \leq (2 + \sqrt{3})M.$$

Dies hat zwei Gründe: 1. $S'_+(x)$ ist eichabhängig, 2. wir haben die indefinite Gupta-Bleuler-Eichung verwandt.

Wie zu erwarten war, ist die Selbstenergie (in der Ordnung α) durch ein divergentes Integral beschrieben:

$$\Sigma(p) = \tilde{S}'_F(p) = \int_{>} d\mu'(m) \frac{1}{i\not{p} - m + i0}$$

denn $d\mu'(m) \sim m dm$ ($|m| \gg M$). Andererseits gibt es eine Darstellung

$$\Sigma(p) = a(p^2)\not{p} + b(p^2).$$

Die Bedingungen $a(M^2) = b(M^2) = 0$ erfüllen wir durch eine Renormierung:

$$\begin{aligned} a_{\text{ren}}(p^2) &= a(p^2) - a(M^2) = (p^2 - M^2) \int_{>} d\mu(m) \frac{1}{p^2 - m^2 + i0} \\ b_{\text{ren}}(p^2) &= b(p^2) - b(M^2) = (p^2 - M^2) \int_{>} d\mu(m) \frac{m}{p^2 - m^2 + i0}. \end{aligned}$$

Zusammenfassend: Die renormierte Selbstenergie in der Ordnung α hat die Gestalt

$$\Sigma_{\text{ren}}(p) = (p^2 - M^2) \int_{>} \frac{d\mu(m)}{i\not{p} - m + i0} \quad (497)$$

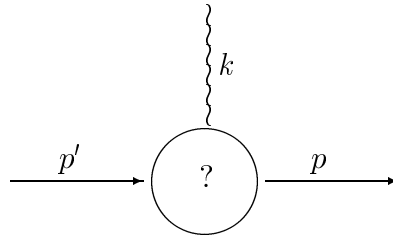
Die durch die Renormierung entstandenen Integrale sind allesamt konvergent; denn $d\mu(m) \sim m^{-1}dm$ (für $|m| \gg M$).

9.11 Die Ward-Takahashi-Identität

Sei $k = p - p'$. Die triviale Relation

$$k_\mu \gamma^\mu = (\not{p} - M) - (\not{p}' - M) \quad (498)$$

besitzt eine nicht-triviale Verallgemeinerung in der QED. Sei nämlich



die Summe aller irreduziblen und renormierten Feynman-Graphen. Die drei äußeren Linien mit den Impulsen p , p' und k betrachten wir als innere Linien eines größeren Graphen, d.h. es wird weder $k^2 = 0$ noch $p^2 = p'^2 = M^2$ vorausgesetzt. Ohne die Propagatoren, die diesen drei Linien entsprechen, und ohne den Faktor $-e$ wird die Summe durch die sog. Vertexfunktion (eine 4×4 -Matrix)

$$?^\mu(p, p') = \gamma^\mu + \Lambda^\mu(p, p')$$

beschrieben, so daß bei einer Reihenentwicklung nach der Feinstrukturkonstanten die Matrix Λ^μ die Ordnung α besitzt. Dann sagt (498), daß in 0-ter Näherung die Relation

$$k_\mu ?^\mu(p, p') = \tilde{S}_F(p)^{-1} - \tilde{S}_F(p')^{-1} \quad (499)$$

gilt. Es zeigt sich nun, daß die Relation (499) in allen Ordnungen der Störungstheorie erfüllt ist. Sie ist als *Ward-Takahashi-Identität* bekannt. Führen wir die Selbstenergie $\Sigma(p)$ ein, für die

$$\tilde{S}_F(p)^{-1} = \not{p} - M - \Sigma(p)$$

gilt, so kann man auch schreiben:

$$k_\mu \Lambda^\mu(p, p') = \Sigma(p') - \Sigma(p).$$

Für $p^2 = p'^2 = M^2$ gilt $\Sigma(p) = \Sigma(p') = 0$, also

$$k_\mu \Lambda^\mu(p, p') = \not{k} \quad \text{und} \quad \bar{u}(p\sigma)\not{k}u(p'\sigma') = 0$$

als Ausdruck der Stromerhaltung $\partial_\mu j^\mu(x) = 0$. Zum Beweis von (499) schreiben wir

$$\Lambda^\mu(p, p') = \Lambda_1^\mu(p, p') + \Lambda_2^\mu(p, p')$$

aufgrund der Beobachtung, daß sich alle irreduziblen Vertexkorrekturen in zwei Graphenklassen zerlegen lassen.

1. Die erste Klasse besteht aus Graphen, bei denen der Vertex (k, μ) auf einer Fermionschleife liegt, d.h. $\Lambda_1^\mu(p, p')$ enthält einen Bestandteil

$$\frac{1}{\not{q} + \not{k} - M} \gamma^\mu \frac{1}{\not{q} - M}$$

wobei q eine Integrationsvariable darstellt. Hier ergibt die Multiplikation mit k :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\not{q} + \not{k} - M} \not{k} \frac{1}{\not{q} - M} &= \frac{1}{\not{q} + \not{k} - M} \{(\not{q} + \not{k} - M) - (\not{q} - M)\} \frac{1}{\not{q} - M} \\ &= \frac{1}{\not{q} - M} - \frac{1}{\not{q} + \not{k} - M}. \end{aligned}$$

Der Vertex (k, μ) ist verschwunden. Zwei neue Integrale über q sind entstanden, deren Differenz zu berechnen ist. Im zweiten Integral führen wir die Substitution $q + k \rightarrow q$ durch und erkennen, daß sich beide Integrale annullieren, d.h. $k_\mu \Lambda_1^\mu(p, p') = 0$.

2. Die zweite Klasse besteht aus allen Graphen, bei denen der Vertex (k, μ) auf derjenigen Fermionlinie liegt, die p mit p' verbindet. Die Multiplikation mit k (s. oben) eliminiert den Vertex (k, μ) und zerlegt $k_\mu \Lambda^\mu(p, p')$ in zwei Bestandteile, die aufgrund ihrer Struktur als Selbstenergiefunktionen des Fermions identifizierbar sind:

$$k_\mu \Lambda^\mu(p, p') = \Sigma(p') - \Sigma(p).$$

Ende der Beweisskizze.

Wir studieren nun den Effekt, den eine Renormierung

$$\begin{aligned} \tilde{S}_F(p)^{-1} &\rightarrow \tilde{S}_F(p)^{-1} + a\not{p} + b\mathbb{1}_4 \\ ?^\mu(p, p') &\rightarrow ?^\mu(p, p') + c\gamma^\mu \end{aligned}$$

hat, wobei a , b und c drei reelle Parameter sind, die die Masse, das Residuum (des Pols im Propagator) und die Ladung des Fermions ändern. Die QED muß durch Vorgabe dieser (physikalischen) Werte in jeder Ordnung der Störungsrechnung renormiert werden. Soll jedoch die Ward-Takahashi-Identität dabei erhalten bleiben, so ist dies nur möglich, falls $a = c$ gilt. Dies bedeutet, daß wir in der QED *nur zwei freie Renormierungskonstanten* besitzen.