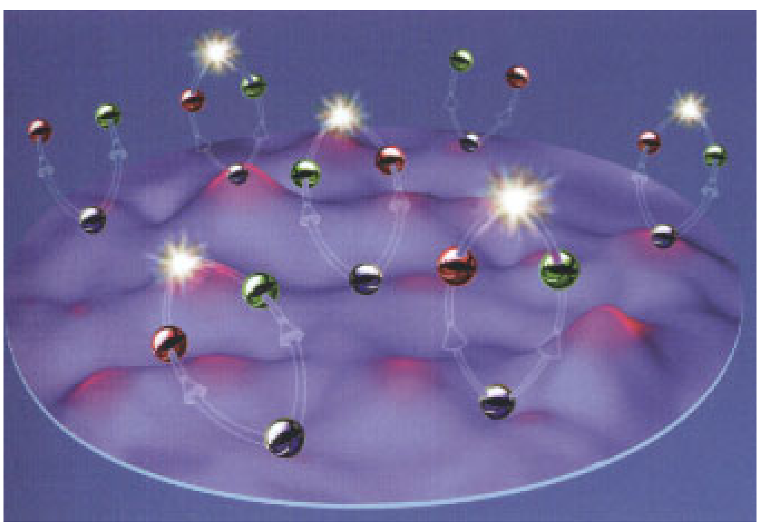
Quantenfeldtheorie

W. Cassing

Institut für Theoretische Physik,
Universität Giessen



Inhaltsverzeichnis

Teil I

Relativistische Quantentheorie freier Felder

Kapitel 1

Das skalare Mesonenfeld

1.1 Einführung

Die bisher behandelte Quantenmechanik ist als Quantentheorie mechanischer Systeme mit **endlicher** Zahl von Freiheitsgraden $q_i(t) = \{q_1(t), ..., q_{3N}(t)\}$ im **nichtrelativistischen Grenzfall** $\lim v_i \ll c$ (Lichtgeschwindigkeit) zu interpretieren. Neben der offensichtlichen Beschränkung auf kleine Geschwindigkeiten ist sie weiterhin (mit Ausnahme von §24) nicht für die Beschreibung von Feldern $\Phi(\mathbf{r}, t)$ mit unendlich vielen Freiheitsgraden geeignet, wo die Werte des Feldes Φ an den Raumpunkten $\mathbf{r}$ zur Zeit t die Rolle der diskreten Freiheitsgrade $q_i(t)$ übernehmen. Die '**Quantenfeldtheorie**' ist der Versuch, die quantenmechanische Behandlung auf Felder zu übertragen und zugleich mit den Prinzipien der **speziellen Relativitätstheorie** in Einklang zu bringen. Sie hat sich bisher als erfolgreich erwiesen in der Beschreibung der verschiedenen Elementarteilchen, ihrer Erzeugung, Vernichtung und Wechselwirkung, sowie bei der konsistenten Behandlung von Vielteilchensystemen.

Wir beginnen mit einem einfachen (skalaren) Feld $\Phi(\mathbf{r}, t)$, dessen Quantisierung eine Beschreibung kräftefreier, relativistischer, spinloser Teilchen der Masse $m \neq 0$ liefern soll (Mesonenfeld). Um die grundlegende Bewegungsgleichung zu bestimmen, geht man von der Forderung aus, daß für die Fourierkomponenten $\Phi(\mathbf{q}, \omega)$ in der Darstellung

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int d^3q \ \exp(-i[\omega t - \mathbf{q} \cdot \mathbf{r}]) \ \Phi(q, \omega) \tag{1.1}$$

die Frequenz ω und die Wellenzahl $\mathbf{q}$ durch die de Broglie-Beziehungen

$$E = \hbar\omega, \quad \mathbf{p} = \hbar\mathbf{q} \tag{1.2}$$

mit der Energie E und dem Impuls $\mathbf{p}$ verknüpft sein sollen, denn E und $\mathbf{p}$ müssen für ein kräftefreies Teilchen die relativistische Energie-Impuls Beziehung

$$E = \pm\sqrt{(c\mathbf{p})^2 + (mc^2)^2} \tag{1.3}$$

erfüllen. Mit dem im folgenden verwendeten Maßsystem, in welchem $\hbar = c = 1$ ist, fordern wir also

$$\omega = \sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2} \equiv \omega_q. \tag{1.4}$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise führen wir die Vierervektoren

$$x = (t, \mathbf{r}) \equiv (t, \mathbf{x}), \qquad q = (\omega, \mathbf{q}) \tag{1.5}$$

mit **kontravarianten** Komponenten

$$x^0 = t,\ x^1 = x,\ x^2 = y,\ x^3 = z; \qquad q^0 = \omega,\ q^1 = q_x,\ q^2 = q_y,\ q^3 = q_z, \tag{1.6}$$

und **kovarianten** Komponenten

$$x_0 = t,\ x_1 = -x,\ x_2 = -y,\ x_3 = -z; \qquad q_0 = \omega,\ q_1 = -q_x,\ q_2 = -q_y,\ q_3 = -q_z \tag{1.7}$$

ein. Die Transformation zwischen kovarianten und kontravarianten Vierervektoren ist gegeben durch

$$x_\mu = \sum_{\nu=0}^{3} g_{\mu\nu} x^\nu =: g_{\mu\nu} x^\nu \tag{1.8}$$

(für $\mu = 0, 1, 2, 3$) mit dem (in allen Bezugssystemen gleichen) **metrischen Tensor**

$$(g_{\mu\nu}) = (g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

Zur weiteren Vereinfachung der Schreibweise haben wir in (1.8) die **Einstein'sche Summenkonvention** eingeführt, *d.h.* über alle auf einer Gleichungsseite doppelt auftretenden Indizes wird summiert ($\nu = 0, .., 3$).

Die in (1.1) auftretende Phase

$$\omega t - \mathbf{q} \cdot \mathbf{r} = q_0 x^0 + \sum_{k=1}^{3} q_k x^k = q_\mu x^\mu = q \cdot x \tag{1.10}$$

ist ein **Vierer-Skalarprodukt**, welches invariant unter (eigentlichen) Lorentztransformationen ist. Die Bedingung (1.3) läßt sich dann als

$$(q^0)^2 - \mathbf{q}^2 = q_\mu q^\mu \equiv q^2 = m^2 \tag{1.11}$$

schreiben, *d.h.* der Viererimpuls q muß '**auf der Massenschale**' zur Ruhemasse m sitzen. Die Fourierkomponenten $\Phi(q)$ in (1.1) müssen also die spezielle Form

$$\Phi(q) = \sqrt{2\pi}\ \delta(q_\mu q^\mu - m^2)\ \chi(q) \tag{1.12}$$

haben, bzw. wegen

$$\delta(a^2 - b^2) = \frac{1}{2|b|}[\delta(a - b) + \delta(a + b)]$$

alternativ von der Form sein

$$\Phi(q) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\omega_q}\ [\delta(q^0 - \omega_q)\chi_+(q) + \delta(q^0 + \omega_q)\ \chi_-(q)]. \tag{1.13}$$

Mit (1.13) gilt dann nach Integration über $d\omega = dq^0$:

$$\Phi(x) = \int \frac{d^3q}{2\omega_q} \, [\chi_+(q) f_q(x) + \chi_-(q) f_q^*(x)] \tag{1.14}$$

mit den ebenen Wellen

$$\begin{aligned} f_q(x) &= (2\pi)^{-3/2} \exp(-i(\omega_q t - \mathbf{q}\cdot\mathbf{r})) = (2\pi)^{-3/2} \exp(-iq\cdot x)|_{q_0=\omega_q}, \\ f_q^*(x) &= (2\pi)^{-3/2} \exp(i(\omega_q t - \mathbf{q}\cdot\mathbf{r})) = (2\pi)^{-3/2} \exp(iq\cdot x)|_{q_0=\omega_q}. \end{aligned} \tag{1.15}$$

1.2 Die Klein-Gordon-Gleichung

In der Raum-Zeit Darstellung (1.14) ist $-q^2$ durch den Differentialoperator

$$\frac{\partial}{\partial t^2} - \Delta^2 = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu} = \partial_\mu \partial^\mu \tag{1.16}$$

gegeben. Aus der Massenschalenbedingung (1.11) ergibt sich somit die **Klein-Gordon-Gleichung**

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\Phi(x) = 0 \tag{1.17}$$

als grundlegende **Feldgleichung** des kräftefreien skalaren Feldes. Die ebenen Wellen (1.15) sind ein vollständiger Satz von Basislösungen und (1.14) ist die durch Superposition aufgebaute allgemeine Lösung.

Die Orthonormierungsrelation der ebenen Wellen (1.15) ist

$$(f_q, f_{q'}) = 2\ \omega_q\ \delta^3(\mathbf{q} - \mathbf{q}'), \tag{1.18}$$

wobei das **Skalarprodukt** (f, g) im relativistischen Fall definiert ist durch

$$(f, g) = i \int d^3x\ [f^*(x)\frac{\partial g(x)}{\partial x^0} - \frac{\partial f^*(x)}{\partial x^0} g(x)]. \tag{1.19}$$

Das Skalarprodukt (1.19) ist *i.a.* zeitabhängig, da nur über d^3x integriert wird.

Dem Feld Φ kann man wegen (1.17) eine **Viererstromdichte**

$$j(x) = \{\rho(\mathbf{r}, t), \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)\} \tag{1.20}$$

zuordnen, deren Komponenten definiert sind über

$$j^\mu(x) = i[\Phi^*(x)\partial^\mu\Phi(x) - \partial^\mu\Phi^*(x)\Phi(x)] \tag{1.21}$$

und die eine Kontinuitätsgleichung erfüllt:

$$\begin{aligned} \partial_\mu j^\mu(x) &\equiv (\frac{\partial\rho}{\partial t} - \nabla\cdot\mathbf{j}) = i\ \partial_\mu[\Phi^*(x)\partial^\mu\Phi(x) - \partial^\mu\Phi^*(x)\Phi(x)] \\ &= i[\Phi^*(x)\partial_\mu\partial^\mu\Phi(x) - \partial_\mu\partial^\mu\Phi^*(x)\Phi(x)] = -i[m^2 - m^2]\Phi^*(x)\Phi(x) = 0. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Die Dichte

$$\rho(x) = i(\Phi^*(x)\frac{\partial\Phi(x)}{\partial t} - \frac{\partial\Phi^*(x)}{\partial t}\ \Phi(x)) \tag{1.23}$$

ist nicht positiv definit und verschwindet sogar für reelles $\Phi(x)$ vollständig. Das Feld $\Phi(x)$ ist daher nicht als Wahrscheinlichkeitsamplitude geeignet!

1.3 Quantisierung des Feldes

Die Quantisierung des Feldes $\Phi(x)$ geht davon aus, daß die Werte des Feldes Φ am Raum-Zeit-Punkt x als Koordinaten wie die $q_i(t)$ (siehe §28.1) aufzufassen sind. Analog zur Hamiltonmechanik und Quantenmechanik definiert man zunächst **kanonisch- konjugierte Impulse**

$$p_i(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{1.24}$$

(für $i = 1, ..., 3N$), wozu allerdings die Kenntnis einer Lagrangefunktion

$$L = L(q_i, \dot{q}_i; t) \tag{1.25}$$

erforderlich ist, welche bei Anwendung des Hamilton'schen Prinzips gerade die Bewegungsgleichungen des Systems liefert:

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}) = \frac{\partial L}{\partial q_i}. \tag{1.26}$$

In der Quantenmechanik haben wir sodann die p_i und q_i als **Operatoren in einem Hilbertraum** — dem Zustandsraum des Systems — aufgefaßt und die **Vertauschungsrelationen** (VR) zu gleichen Zeiten t im **Heisenbergbild** postuliert:

$$[q_i, p_j] = i\ \delta_{ij} \tag{1.27}$$

für alle t . Die Zeitentwicklung der p_i und q_i wird durch die Heisenberg'schen Gleichungen (§21.2) bestimmt; alle übrigen physikalischen Größen lassen sich aus den q_i und p_i berechnen. Insbesondere hat der **Hamiltonoperator**

$$H = \sum_{i=1}^{3N} \dot{q}_i p_i - L(q_i, \dot{q}_i, q^0) \tag{1.28}$$

$i.a.$ die Bedeutung der Gesamtenergie des Systems.

Bei diesem als **kanonische Quantisierung** bezeichneten Prozeß war zu beachten, daß die Reihenfolge der nichtvertauschbaren quantenmechanischen Größen in der klassischen Lagrangefunktion nicht festgelegt war und eine 'hermitesche' Umordnung erforderte (§6.2). Auch bei der Quantisierung von Feldern werden Umordnungen oder Symmetrisierungen von Operatorprodukten erforderlich sein, um korrekte quantenmechanische Ausdrücke, die einer Wahrscheinlichkeitsinterpretation genügen, herzustellen.

Zur Quantisierung des Klein-Gordon Feldes betrachten wir im folgenden stets ein komplexes Feld mit Φ und Φ^* als unabhängigen Feldfunktionen. In Analogie zur klassischen Lagrangefunktion eines kräftefreien Teilchensystems, $L = T$, konstruieren wir eine Lagrangefunktion des Systems

$$L = \int d^3x\ \mathcal{L}(\mathbf{r}, t) \tag{1.29}$$

mit einer Lagrangedichte $\mathcal{L}(x)$ so, daß die Euler-Lagrange Bewegungsgleichungen

$$\partial^\mu[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \Phi^*)}] = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^*}, \qquad \partial^\mu[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \Phi)}] = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \tag{1.30}$$

gerade die Klein-Gordon Gleichung (1.17) und deren Komplex-Konjugiertes ergeben. Für das Klein-Gordon Feld leistet dies die Lagrangedichte

$$\mathcal{L}(x) = [\partial_\mu \Phi^*(x)][\partial^\mu \Phi(x)] - m^2 \Phi^*(x)\Phi(x), \tag{1.31}$$

wie man leicht nachrechnet (ÜB). Kanonisch konjugierte Größen sind dann analog zu (1.24)

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^0 \Phi)} = \partial_0 \Phi^* = \dot{\Phi}^* \text{ und } \pi^*(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^0 \Phi^*)} = \partial_0 \Phi = \dot{\Phi}. \tag{1.32}$$

Wir fassen nun Φ und π als operatorwertige Raum-Zeit-Funktionen (**Feldoperatoren**) auf, wobei Φ^* und π^* zu den hermitesch adjungierten Feldoperatoren werden, und fordern analog zu (1.27) die kanonischen Vertauschungsrelationen zu gleichen Zeiten:

$$[\Phi(\mathbf{r},t), \pi(\mathbf{r}',t)] = i\ \delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}'), \qquad [\Phi^\dagger(\mathbf{r},t), \pi^\dagger(\mathbf{r}',t)] = i\ \delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{1.33}$$

oder

$$\delta(r^0 - r'^0)[\Phi(r), \pi(r')] = i\ \delta^4(r-r'). \tag{1.34}$$

Alle anderen Kommutatoren sollen identisch verschwinden. Der singuläre Charakter dieser VR zeigt, daß damit den Feldoperatoren selbst ein singuläres Raum-Zeit-Verhalten aufgeprägt sein muß; sie sind *i.a.* **operatorwertige Distributionen**, und Produkte solcher Operatoren müssen rechnerisch mit Vorsicht gehandhabt werden.

Die Aufgabe lautet nun, Operatorlösungen von der Klein-Gordon Gleichung (1.17) zu finden, die zugleich den VR (1.33) genügen. In Analogie zu (1.28) ist nun

$$H = \int d^3r\ \mathcal{H}(\mathbf{r},t) \tag{1.35}$$

mit der Hamiltondichte

$$\mathcal{H}(x) = \pi(\partial^0 \Phi) + \pi^\dagger(\partial^0 \Phi^\dagger) - \mathcal{L}(x) \tag{1.36}$$

oder

$$\mathcal{H} = \pi^\dagger \pi + (\nabla \Phi^\dagger)\cdot(\nabla \Phi) + m^2 \Phi^\dagger \Phi \tag{1.37}$$

der Hamiltonoperator des Feldsystems. Seine Bedeutung ergibt sich aus

$$\begin{aligned}[\Phi(\mathbf{r},t), H(t)] &= \int d^3r'\ [\Phi(\mathbf{r},t), \mathcal{H}(\mathbf{r}',t)] = \int d^3r'\ \pi^\dagger(\mathbf{r}',t)[\Phi(\mathbf{r},t), \pi(\mathbf{r}',t)] \\ &= i \int d^3r'\ \pi^\dagger(\mathbf{r}',t)\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = i\ \pi^\dagger(\mathbf{r},t) = i\ \partial^0 \Phi(\mathbf{r},t)\end{aligned} \tag{1.38}$$

und der analogen Bewegungsgleichung

$$[\pi(x), H(t)] = i\ \partial^0 \pi(x) \qquad (\equiv i(\nabla^2 - m^2)\Phi^\dagger), \tag{1.39}$$

die den Heisenberg'schen Gleichungen in der Quantenmechanik entsprechen. Damit gilt auch für jeden Operator F, der sich als Polynom in $\Phi^\dagger$, $\pi^\dagger$, Φ und π schreiben läßt,

$$i\ \partial^0 F = [F, H] \tag{1.40}$$

und insbesondere $\partial^0 H = -i[H,H] = 0$, *d.h.* die Zeitunabhängigkeit von H für ein abgeschlossenes System.

Analog gilt für den vektoriellen Operator (mit kontravarianten Komponenten $k = 1,2,3$)

$$P^k = \int d^3r \ (\pi^\dagger \partial^k \Phi^\dagger + \pi \partial^k \Phi) \tag{1.41}$$

offenbar

$$[\mathbf{P}(t), \Phi(\mathbf{r},t)] = i\nabla\Phi(x), \qquad [\mathbf{P}(t), \pi(\mathbf{r},t)] = i\nabla\pi(x). \tag{1.42}$$

Da weiterhin gilt

$$[H, \mathbf{P}] = 0, \tag{1.43}$$

kann man für den Vierervektor-Operator

$$P = (H, \mathbf{P}) \qquad \text{mit } (P^0 = P_0 = H), \tag{1.44}$$

der mit dem **Viererimpuls** des Systems zu identifizieren sein wird, die Kommutatoren angeben:

$$[P^\mu, P^\nu] = 0 \qquad (\nu, \mu = 0,1,2,3), \tag{1.45}$$

sowie

$$[F(x), P^\mu] = i\ \partial^\mu F(x). \tag{1.46}$$

P^μ gibt also die raumzeitliche Veränderung aller aus den Feldoperatoren zusammengesetzten Größen an.

1.4 Teilcheninterpretation

Als Lösung von (1.17) muß der Feldoperator analog zu (1.14) die **Fourierdarstellung**

$$\Phi(x) = \int \frac{d^3q}{2\omega_q}\ [a(\mathbf{q}) f_q(x) + b^\dagger(\mathbf{q}) f_q^*(x)], \tag{1.47}$$

$$\Phi^\dagger(x) = \int \frac{d^3q}{2\omega_q}\ [a^\dagger(\mathbf{q}) f_q^*(x) + b(\mathbf{q}) f_q(x)] \tag{1.48}$$

besitzen, wobei der Operatorcharakter durch die Koeffizienten $a(\mathbf{q})$, $b(\mathbf{q})$, repräsentiert wird. Sie sind aus der Orthonormalität (1.18) sofort zu berechnen:

$$\begin{aligned}
a(\mathbf{q}) &= i \int d^3r\ [f_q^*(x)\partial^0\Phi(x) - \partial^0 f_q^*(x)\Phi(x)] = (f_q, \Phi), \qquad (1.49)\\
b(\mathbf{q}) &= i \int d^3r\ [f_q^*(x)\partial^0\Phi^\dagger(x) - \partial^0 f_q^*(x)\Phi^\dagger(x)] = (f_q, \Phi^\dagger),\\
b^\dagger(\mathbf{q}) &= i \int d^3r\ [f_q(x)\partial^0\Phi(x) - \partial^0 f_q(x)\Phi(x)] = (f_q^*, \Phi),\\
a^\dagger(\mathbf{q}) &= i \int d^3r\ [f_q(x)\partial^0\Phi^\dagger(x) - \partial^0 f_q(x)\Phi^\dagger(x)] = (f_q^*, \Phi^\dagger).
\end{aligned}$$

Sie sind trotz der in diesen Gleichungen scheinbar verbleibenden x^0- Abhängigkeit zeitunabhängig. Ihre Vertauschungsrelationen erhält man aus (1.49) und (1.33):

$$
\begin{aligned}
[a(\mathbf{q}), a^\dagger(\mathbf{q}')] &= \int\int d^3x\ d^3y\ [f_q^*(x)\partial_x^0\Phi(x) - \partial_x^0 f_q^*(x)\Phi(x), f_{q'}(y)\partial_y^0\Phi^\dagger(y) - \partial_y^0 f_{q'}(y)\Phi^\dagger(y)]_{y_0=x_0} \qquad (1.50)\\
&= \int\int d^3x\ d^3y\ \{-f_q^*(x)\dot{f}_{q'}(y)[\dot{\Phi}(x), \Phi^\dagger(y)]_{y_0=x_0} - \dot{f}_q^*(x)f_{q'}(y)[\Phi(x), \dot{\Phi}^\dagger(y)]_{y_0=x_0} + ..\}\\
&= i\int d^3x\ \{f_q^*(x)\dot{f}_{q'}(x) - \dot{f}_q^*(x)f_{q'}(x)\} = (f_q, f_{q'}) = 2\omega_q\ \delta^3(\mathbf{q}-\mathbf{q}')
\end{aligned}
$$

nach Definition des Skalarprodukts (1.18). Die analoge Rechnung für den Kommutator $[b, b^\dagger]$ ergibt

$$[b(\mathbf{q}), b^\dagger(\mathbf{q}')] = 2\ \omega_q\ \delta^3(\mathbf{q}-\mathbf{q}'). \qquad (1.51)$$

Alle anderen Operatorenpaare vertauschen. Damit haben die $a, a^\dagger$ und die $b, b^\dagger$ die Vertauschungsrelationen je eines Satzes unabhängiger quantenmechanischer Oszillatoren, die durch den kontinuierlichen Index $\mathbf{q}$ unterschieden werden.

Um den Hamiltonoperator zu berechnen, verwenden wir (1.47) und das daraus folgende

$$\pi(x) = \partial_0\Phi^\dagger = \int \frac{d^3q}{2\omega_q}\ [-i\omega_q b(\mathbf{q})f_q(x) + i\omega_q a^\dagger(\mathbf{q})f_q^*(x)], \qquad (1.52)$$

setzen die Ausdrücke in (1.35) ein und verwenden die Orthogonalität der ebenen Wellen bzgl. der rein räumlichen Integration,

$$\int d^3r\ f_{q'}(x)f_q^*(x) = \delta^3(\mathbf{q}-\mathbf{q}'), \qquad \int d^3r\ f_{q'}(x)f_q(x) = \delta^3(\mathbf{q}+\mathbf{q}'),$$

sowie $\omega_{-q} = \omega_q$ und erhalten:

$$
\begin{aligned}
H = \int\int \frac{d^3q}{2\omega_q}\frac{d^3q'}{2\omega_{q'}} \{ \quad & \omega_q^2 \quad [a(\mathbf{q})a^\dagger(\mathbf{q}) + b^\dagger(\mathbf{q})b(\mathbf{q})]\ \delta^3(\mathbf{q}-\mathbf{q}') \qquad (1.53)\\
+ \quad & \omega_q^2 \quad [-a(-\mathbf{q})b(\mathbf{q}) - b^\dagger(-\mathbf{q})a^\dagger(\mathbf{q})]\ \delta^3(\mathbf{q}+\mathbf{q}')\\
+ \quad & \omega_q^2 \quad [a^\dagger(\mathbf{q})a(\mathbf{q}) + b(\mathbf{q})b^\dagger(\mathbf{q})]\ \delta^3(\mathbf{q}-\mathbf{q}')\\
+ \quad & \omega_q^2 \quad [b(\mathbf{q})a(-\mathbf{q}) + a^\dagger(\mathbf{q})b^\dagger(-\mathbf{q})]\ \delta^3(\mathbf{q}+\mathbf{q}')\ \}.
\end{aligned}
$$

Nach Ausnutzen der VR verschwinden die $\delta^3(\mathbf{q}+\mathbf{q}')$-Terme und wir erhalten

$$H = \int \frac{d^3q}{2\omega_q}\ [\omega_q a^\dagger(\mathbf{q})a(\mathbf{q}) + \omega_q b(\mathbf{q})b^\dagger(\mathbf{q})]. \qquad (1.54)$$

Erneute Anwendung der VR ergibt

$$[a^\dagger(\mathbf{q}), H] = -\omega_q a^\dagger(\mathbf{q}), \qquad [a(\mathbf{q}), H] = \omega_q a(\mathbf{q}) \qquad (1.55)$$

und analoge Ausdrücke für $b, b^\dagger$.
Ist also $|E>$ ein Eigenzustand von H zur Energie E, so folgt

$$H(a^\dagger(\mathbf{q})|E>) = a^\dagger(\mathbf{q})(H|E>) + [H, a^\dagger(\mathbf{q})]|E> = (E+\omega_q)a^\dagger(\mathbf{q})|E>, \tag{1.56}$$

d.h. $a^\dagger(\mathbf{q})|E>$ ist ebenfalls Eigenzustand zu H mit der Energie $(E+\omega_q)$. Analog zeigt man

$$H(a(\mathbf{q})|E>) = (E-\omega_q)a(\mathbf{q})|E>, \tag{1.57}$$

d.h. Anwendung von $a(\mathbf{q})$ senkt den Energieeigenwert um ω_q herab. Entsprechendes gilt auch für die Operatoren $b, b^\dagger$ nach obiger Argumentation.

1.5 Normalordnung

Ein Grundpostulat der Quantenfeldtheorie ist die Existenz eines eindeutigen Zustands tiefster Energie E_0 (die dann zu Null verschoben wird), des Vakuumzustandes $|0>$, für den die Normierung

$$<0|0> = 1 \qquad\qquad \text{und } H|0> = 0 \tag{1.58}$$

erfüllt sein muß. Da die Energie des Vakuumzustandes nicht unterschritten werden kann, muß gelten

$$a(\mathbf{q})|0> = 0, \quad b(\mathbf{q})|0> = 0 \qquad \forall \mathbf{q}. \tag{1.59}$$

Mit der Form (1.53) von H ist allerdings die zweite Bedingung von (1.58) $H|0> = 0$ nicht erfüllt; bei der Berechnung des Erwartungswertes

$$<0|H|0> = E_0 \to \infty \tag{1.60}$$

führt sie sogar zu einem divergenten Integral, damit zu einem physikalisch sinnlosen (nicht meßbaren) Ergebnis. Um für H alle physikalisch erforderlichen Eigenschaften zu erhalten, muß die Reihenfolge der Operatoren im b-Term umgedreht werden (was an der klassischen Hamiltondichte nicht erkennbar ist). Wir definieren daher die **Ordnung der Operatoren** in H wie folgt:

$$H = \int \frac{d^3q}{2\omega_q}\,[\omega_q a^\dagger(\mathbf{q})a(\mathbf{q}) + \omega_q b^\dagger(\mathbf{q})b(\mathbf{q})]. \tag{1.61}$$

Damit wird wegen (1.59) automatisch $<0|H|0> = 0$.

Die Vorschrift, die Operatoren $a, a^\dagger, b, b^\dagger$ für kräftefreie Felder so umzuordnen, daß die a- und b-Operatoren mit der Eigenschaft (1.59) stets rechts von $a^\dagger, b^\dagger$ stehen, heißt **Normalordnung** der Operatoren und wird bezeichnet mit : ... :, *d.h.* für das Klein-Gordon-Feld ist die Hamiltondichte gegeben durch

$$\mathcal{H}(x) =: \pi^\dagger(x)\pi(x) + (\nabla\Phi^\dagger(x))\cdot(\nabla\Phi(x)) + m^2\Phi^\dagger(x)\Phi(x) : . \tag{1.62}$$

Die Zustände

$$|q,a> = a^\dagger(\mathbf{q})|0>, \qquad\qquad |q,b> = b^\dagger(\mathbf{q})|0>, \tag{1.63}$$

die als Folge der VR (1.50) orthonormiert sind zu

$$<q',i|q,j> = \delta_{ij}\; 2\omega_q\delta^3(\mathbf{q}'-\mathbf{q}) \qquad i,j = a,b, \tag{1.64}$$

haben mit dem normalgeordneten H (1.61) die Eigenschaften

$$H|q,i>=\omega_q|q,i> \qquad i=a,b. \tag{1.65}$$

Analog gilt für den Operator $\mathbf{P}$ (1.41) nach Normalordnung

$$\mathbf{P}=\int \frac{d^3q}{2\omega_q}\,[\mathbf{q}\;a^\dagger(\mathbf{q})a(\mathbf{q})+\mathbf{q}\;b^\dagger(\mathbf{q})b(\mathbf{q})] \tag{1.66}$$

und weiterhin (ebenso für die b-Operatoren)

$$[a^\dagger(\mathbf{q}),\mathbf{P}]=-\mathbf{q}\;a^\dagger(\mathbf{q}), \qquad [a(\mathbf{q}),\mathbf{P}]=\mathbf{q}\;a(\mathbf{q}), \tag{1.67}$$

woraus folgt, daß $a^\dagger, b^\dagger$ bzw. a, b den Impulseigenwert eines $\mathbf{P}$-Eigenzustandes um $\mathbf{q}$ erhöhen bzw. erniedrigen. Analog zu (1.65) folgt weiter

$$\mathbf{P}|q,i>=\mathbf{q}|q,i> \qquad i=a,b. \tag{1.68}$$

Damit ist die Interpretation von $a^\dagger, b^\dagger$ bzw. a, b als **Erzeugungs**- bzw. **Vernichtungs-Operatoren** von '**Feldquanten**' mit Impuls $\mathbf{q}$ und Energie ω_q (sowie der Masse m) gegeben.

Mehrteilchenzustände erhalten wir durch Nacheinanderanwendung mehrerer $a^\dagger, b^\dagger$ auf den Vakuumzustand:

$$|\Psi>=\bar{N}\frac{1}{\sqrt{m!n!}}a^\dagger(\mathbf{p}_1)....a^\dagger(\mathbf{p}_m)b^\dagger(\mathbf{q}_1).....b^\dagger(\mathbf{q}_n)|0> \tag{1.69}$$

mit einem weiteren (noch unbestimmten) Normierungsfaktor $\bar{N}$. Es gilt $\bar{N}=1$, falls alle $\mathbf{p}_i$ und alle $\mathbf{q}_j$ gleich sind.

Nach (1.56) und (1.67) hat $|\Psi>$ die Eigenschaften:

$$H|\Psi>=(\sum_{i=1}^{m}\omega_{p_i}+\sum_{j=1}^{n}\omega_{q_j})|\Psi>, \qquad \mathbf{P}|\Psi>=(\sum_{i=1}^{m}\mathbf{p}_i+\sum_{j=1}^{n}\mathbf{q}_j)|\Psi>. \tag{1.70}$$

Die im Hamiltonoperator (1.61) und im Impulsoperator (1.66) auftretenden Größen

$$N_a(\mathbf{q})=\frac{1}{2\omega_q}a^\dagger(\mathbf{q})a(\mathbf{q}) \text{ und } N_b(\mathbf{q})=\frac{1}{2\omega_q}b^\dagger(\mathbf{q})b(\mathbf{q}) \tag{1.71}$$

haben die Bedeutung von **Teilchenzahldichten** der a- bzw. b-Teilchen im Impulsraum, wie aus den Beziehungen für den Zustand (1.69),

$$N_a(\mathbf{q})|\Psi>=[\sum_{i=1}^{m}\delta^3(\mathbf{q}-\mathbf{p}_i)]|\Psi>, \qquad N_b(\mathbf{q})|\Psi>=[\sum_{j=1}^{n}\delta^3(\mathbf{q}-\mathbf{q}_j)]|\Psi>, \tag{1.72}$$

hervorgeht. Die über den Impulsraum integrierten Größen

$$\hat{N}_a=\int d^3q\;N_a(\mathbf{q}) \text{ und } \hat{N}_b=\int d^3q\;N_b(\mathbf{q}) \tag{1.73}$$

sind dementsprechend **Teilchenzahloperatoren**, deren ganzzahlige Eigenwerte die Zahl der a- bzw. b-Teilchen im Zustand (1.69) angeben:

$$\hat{N}_a|\Psi>= m|\Psi> \quad \text{und} \quad \hat{N}_b|\Psi>= n|\Psi> . \tag{1.74}$$

Mit (1.71) läßt sich der Viererimpuls auch schreiben als

$$P^\mu = \int d^3q \; q^\mu (N_a(\mathbf{q}) + N_b(\mathbf{q}))_{q_0=\sqrt{q^2+m^2}}. \tag{1.75}$$

Ist weiterhin $|\Xi>$ ein allgemeiner, durch Superposition aus den Zuständen $|\Psi>$ (1.69) aufgebauter Zustand, so gibt das Skalarprodukt

$$< q, a|\Xi> = < 0|a(\mathbf{q})|\Xi> \tag{1.76}$$

die Wahrscheinlichkeitsamplitude dafür an, in diesem Zustand genau ein Teilchen vom a-Typ mit Impuls $\mathbf{q}$ zu finden; *d.h.* **die Einteilchenwellenfunktion für ein Teilchen im Impulsraum**. Die Fouriertransformierte

$$\psi_a(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3q}{2\omega_q} \exp(-i[\omega_q x^0 - \mathbf{q}\cdot\mathbf{r}]) < 0|a(\mathbf{q})|\Xi> \tag{1.77}$$

(unter Beachtung von $< 0|b^\dagger \equiv 0$) können wir dann als **Einteilchenwellenfunktion** (für a-Teilchen) **im Ortsraum** für den Zustand $|\Xi>$ bezeichnen.

Da je zwei $a^\dagger$- oder $b^\dagger$-Operatoren kommutieren, hat (1.69) die wichtige Eigenschaft, unter Vertauschung der Einteilchenimpulse $\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j$ bzw. $\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j$ symmetrisch zu sein, *d.h.* ein System von **Bose-Teilchen** zu beschreiben. Mit (1.47), (1.75) und den Vertauschungsrelationen (1.50) ist die Struktur des **freien, quantisierten Klein-Gordon-Feldes** weitgehend aufgeklärt. Zu untersuchen bleibt noch das

1.6 Transformationsverhalten des Feldes

Das spezielle Relativitätsprinzip fordert, daß die Gleichungen der Theorie **forminvariant** in allen Bezugssystemen sind, die auseinander durch Lorentztransformationen (mit einer 4×4 Matrix Λ) hervorgehen:

$$x'^\mu = \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu. \tag{1.78}$$

Unter Lorentztransformationen bleibt der metrische Tensor invariant, *d.h.*

$$g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma = g_{\rho\sigma}, \tag{1.79}$$

wobei die Λ^μ_ν sowohl Lorentztransformationen im engeren Sinne (Boosts) als auch Raumdrehungen, bei denen nur die räumlichen Komponenten x^k $(k = 1, 2, 3)$ untereinander orthogonal transformiert werden, enthalten. Außerdem müssen die Gleichungen **forminvariant** sein unter **Raum-Zeit Verschiebungen**

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + a^\mu \tag{1.80}$$

mit einem konstanten Vierervektor a^μ. Die allgemeinen Transformationen

$$x \to x' = \Lambda x + a \quad \text{oder} \quad x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu \tag{1.81}$$

heißen **Poincaré-Transformationen**; sie bilden eine Gruppe, die **Poincaré-Gruppe**. Die einzelne Transformation ist charakterisiert durch den Verschiebungsvektor a^μ (4 Parameter) sowie durch die 6 Parameter der allgemeinen Lorentztransformation Λ, welche sich stets zerlegen läßt in eine **Raumdrehung** mit Drehvektor $\vec{\alpha}$ (3 Parameter) und Lorentz-Boosts im engeren Sinne mit Relativgeschwindigkeit $\mathbf{v}$ bzw. $\vec{\beta} = \mathbf{v}/c$ (3 Parameter).

Wir untersuchen nun, wie der Feldoperator $\Phi(x)$ sich unter Poincaré- Transformationen verhält. Dazu betrachten wir zunächst
Raum-Zeit Verschiebungen
mit infinitesimal kleinem $a^\mu \equiv \delta a^\mu$. Durch Taylorentwicklung

$$\Phi(x') = \Phi(x + \delta a) = \Phi(x) + \delta a_\mu (\partial^\mu \Phi) \tag{1.82}$$

und Verwendung des Kommutators (1.46) ($[F(x), P^\mu] = i\partial^\mu F(x)$) erhalten wir

$$\Phi(x') = \Phi(x) + i[\delta a_\mu P^\mu, \Phi(x)]. \tag{1.83}$$

Die Operatoren P^μ sind also die erzeugenden Operatoren (**Generatoren**) **infinitesimaler Verschiebungen** in $\mathbf{r}$ und t. Gleichung (1.83) ist die infinitesimale Form der (passiven) Transformation

$$\Phi(x + a) = \exp(iG_a)\Phi(x)\exp(-iG_a) \quad \text{mit} \quad G_a = a_\mu P^\mu = G_a^\dagger, \tag{1.84}$$

wie mit der allgemeinen Entwicklung

$$\begin{aligned} \exp(iG_a)\ \Phi\ \exp(-iG_a) &= \Phi + i[G, \Phi] + \frac{i^2}{2!}[G, [G, \Phi]] \\ &+ \frac{i^3}{3!}[G, [G, [G, \Phi]]] + \frac{i^4}{4!}[G, [G, [G, [G, \Phi]]]] + \ldots \end{aligned} \tag{1.85}$$

leicht zu sehen ist. Die Kommutatoren höherer Ordnung erzeugen nach (1.46) die höheren Ableitungen von Φ an der Stelle x und damit die Taylorreihe

$$\Phi + a_\mu \partial^\mu \Phi + \frac{1}{2}\ a_\mu a_\nu \partial^\mu \partial^\nu \Phi + \ldots = \Phi(x + a). \tag{1.86}$$

Allgemein gilt für Operatoren $F = F(\Phi, \pi)$ (ÜB):

$$F(x + a) = \exp(ia \cdot P)\ F(x)\ \exp(-ia \cdot P), \tag{1.87}$$

was gerade der Bewegungsgleichung für Operatoren im **Heisenberg-Bild** entspricht. Insbesondere sind nach (1.45) die Energie-Impuls Operatoren Erhaltungsgrößen der Theorie.

Allgemeine Lorentztransformationen: Wir betrachten zunächst wieder infinitesimale Transformationen mit $\Lambda = 1 + \alpha$ oder

$$\Lambda^\mu{}_\rho = g^\mu{}_\rho + \alpha^\mu{}_\rho \qquad \text{mit } |\alpha^\mu{}_\rho| << 1. \tag{1.88}$$

Die Bedingung (1.79) für die Lorentzinvarianz der Metrik liefert dann

$$\alpha_{\rho\sigma} + \alpha_{\sigma\rho} = 0, \qquad (\alpha_{\rho\sigma} = g_{\rho\mu}\alpha^{\mu}{}_{\sigma}), \tag{1.89}$$

*d.h.*die Antisymmetrie der 4×4 Matrix $\alpha_{\rho\sigma}$. Für das Feld $\Phi(x')$ erhalten wir damit

$$\begin{aligned}\Phi(x'^{\mu}) &= \Phi(x^{\mu} + \alpha^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}) \;=\; \Phi(x) + (\alpha^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu})(\partial_{\mu}\Phi(x)) + \cdots \\ &= \Phi(x) + \frac{1}{2}\,\alpha^{\mu\nu}(x_{\nu}\partial_{\mu} - x_{\mu}\partial_{\nu})\Phi(x) + \cdots\end{aligned} \tag{1.90}$$

wegen der Antisymmetrie in (1.89). Analog zu (1.82) können wir schließen, daß die endliche Transformation

$$\Phi(\Lambda x) = \exp(iG_{\Lambda})\;\Phi(x)\;\;\exp(-iG_{\Lambda}) \tag{1.91}$$

mit G_{Λ} von der Form

$$G_{\Lambda} = \frac{1}{2}\,\alpha^{\mu\nu}M_{\mu\nu} \tag{1.92}$$

und noch unbestimmten Operatoren $M_{\mu\nu}$ sein muß. Dabei bilden die $M_{\mu\nu}$ einen **antisymmetrischen Vierertensor**,

$$M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu}, \tag{1.93}$$

so daß 6 unabhängige Operatoren dieser Art existieren. Auch ohne explizite Darstellung wissen wir aus (1.90), daß sie die Eigenschaft

$$[M_{\mu\nu}, \Phi(x)] = i(x_{\mu}\partial_{\nu} - x_{\nu}\partial_{\mu})\Phi(x) \equiv L_{\mu\nu}\Phi(x) \tag{1.94}$$

besitzen, also als erzeugende Operatoren infinitesimaler Lorentztransformationen und Drehungen zu betrachten sind. Die 6 Parameter in $\alpha_{\mu\nu}$ charakterisieren dabei die Lorentzdrehung Λ. Wir führen ohne Beweis an, daß für eine **Raumdrehung mit Drehvektor** $\vec{\alpha} = (\alpha^k)$ die Matrix $\alpha_{\mu\nu}$ gegeben ist durch

$$\begin{gathered}\alpha^{k0} = -\alpha^{0k} = 0 \qquad (k = 1, 2, 3), \\ \alpha^{kl} = \epsilon^{kl}{}_{m}\alpha^{m} \text{ bzw. } \;\alpha^{m} = \frac{1}{2}\epsilon^{mkl}\alpha_{kl} \qquad (k, l = 1, 2, 3).\end{gathered} \tag{1.95}$$

Andererseits ist für einen reinen **Lorentz-Boost** mit Geschwindigkeit $\vec{\beta}$:

$$\begin{gathered}\alpha^{kl} = 0 \qquad (k, l) = (1, 2), (2, 3), (3, 1) \\ \alpha^{k0} = b^{k} \qquad (k = 1, 2, 3)\end{gathered} \tag{1.96}$$

mit dem Vektor $\mathbf{b}$ in Richtung von $\vec{\beta}$ und dem Betrag

$$\tanh b = \beta \text{ oder } \cosh b = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \text{ und } \sinh b = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{1.97}$$

Entsprechend läßt sich (1.92) in der Form

$$\frac{1}{2}\,\alpha^{kl}M_{kl} + \frac{1}{2}\,(\alpha^{k0}M_{k0} + \alpha^{0l}M_{0l}) \tag{1.98}$$

durch zwei Dreiervektor-Operatoren **J** und **K**,

$$J^m = \frac{1}{2}\,\epsilon^{mpq} M_{pq} \quad (m = 1, 2, 3) \tag{1.99}$$

und

$$K^m = M^{m0} = -M^{0m} \quad (m = 1, 2, 3), \tag{1.100}$$

schreiben als

$$G_\Lambda = \alpha^m J_m + b^m K_m = -\vec{\alpha}\cdot\mathbf{J} - \mathbf{b}\cdot\mathbf{K}. \tag{1.101}$$

Der Operator **J** ist dann der erzeugende Operator infinitesimaler Drehungen und **K** der erzeugende Operator von Lorentzboosts. Der unitäre Operator G_Λ (1.92) wird damit zu

$$U(\Lambda) = \exp(iG_\Lambda) = \exp(-i[\vec{\alpha}\cdot\mathbf{J} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{K}]). \tag{1.102}$$

1.7 Spin des Klein-Gordon-Teilchens

Die in (1.94) für $k, l = 1, 2, 3$ auftretenden Differentialoperationen

$$L^{kl} = -L^k{}_l = -i(x^k\partial_l - x^l\partial_k) \tag{1.103}$$

haben die Form der bekannten Bahndrehimpulsoperatoren:

$$L^{kl} = \epsilon^{kl}{}_m L^m, \quad L^m = -i(\mathbf{r}\times\nabla)^m. \tag{1.104}$$

In der Feldtheorie sind allerdings die J^m als die eigentlichen Bahndrehimpulsoperatoren zu betrachten; Gleichung (1.103) gibt lediglich deren (infinitesimale) Wirkung auf x-abhängige Operatoren an.

Gleichung (1.94) eignet sich jedoch dazu, den Spin der Klein-Gordon-Feldquanten zu bestimmen. Dazu schreiben wir (1.90) für eine infinitesimale Drehung ($\vec{\alpha} \equiv \delta\vec{\alpha}$)

$$\Phi(\mathbf{r} + \delta\vec{\alpha}\times\mathbf{r}, t) = [1 - i(\delta\vec{\alpha}\cdot\mathbf{L})]\Phi(\mathbf{r}, t) \tag{1.105}$$

und berechnen damit das Drehverhalten der Einteilchen-Wellenfunktion (1.77) im Ruhesystem des Feldes, *d.h.* in einem Bezugssystem mit

$$\mathbf{P}|\Xi >= 0. \tag{1.106}$$

Im Ruhesystem gilt

$$< 0|\Phi(x)|\Xi >=< 0|\exp(ix\cdot P)\Phi(0)\exp(-ix\cdot P)|\Xi >=< 0|\Phi(0)\exp(-ix_0P^0)|\Xi > \tag{1.107}$$

unabhängig von $\mathbf{r}$ ($P^0|0 >= 0$). Andererseits gilt für den um $\delta\vec{\alpha}$ gedrehten Zustand $U(\delta\vec{\alpha})|\Xi >$

$$\begin{aligned} < 0|\Phi(x)U(\delta\vec{\alpha})|\Xi > &=< 0|U(U^{-1}\Phi(x)U)|\Xi >=< U^\dagger 0|\Phi - i[G_{\delta\alpha}, \Phi]|\Xi > \\ &= (1 + i\,\delta\vec{\alpha}\cdot\mathbf{L}) < 0|\Phi(x)|\Xi >=< 0|\Phi(x)|\Xi > \end{aligned} \tag{1.108}$$

wegen (1.107). Die Wellenfunktion bleibt also bei Drehungen im Ruhesystem unverändert. Damit ist der Drehimpuls im Ruhesystem ('**Spin**') der Klein-Gordon-Teilchen gleich Null ('**skalare**' Teilchen). Diese Eigenschaft gilt ebenso für die b-Teilchen, bei den nach (1.48) $< 0|\Phi^\dagger(x)|\Xi >$ als Wellenfunktion zu betrachten ist.

Bemerkung: Die Schreibweise der Gleichungen (1.84), (1.91) entspricht einer '**passiven**' Transformation, *d.h.* das gleiche Feld Φ wird in verschiedenen, auseinander durch Transformationen hervorgehenden, Raum-Zeit-Punkten betrachtet. Bei '**aktiven**' Transformationen wird das Feld selbst als physikalisches System verschoben und damit zu einem neuen Feld Φ'. Die obigen Gleichungen bedeuten dann

$$\Phi'(x') = \Phi(x) \quad \text{mit} \quad x' = \Lambda x + a \quad \text{und} \quad \Phi' = \exp(iG)\ \Phi\ \exp(-iG). \tag{1.109}$$

Die **Forminvarianz** der Klein-Gordon-Gleichung gegenüber Lorentztransformationen ist dann direkt ablesbar; in (1.17) ist ∂_μ invariant gegen Verschiebungen und $\partial_\mu\partial^\mu$ gegen allgemeine Lorentztransformationen. Mit (1.109) gilt dann auch:

$$(\partial'_\mu \partial'^\mu + m^2)\Phi'(x') = 0 \tag{1.110}$$

gemäß der zentralen Forderung der (speziellen) Relativitätstheorie.

1.8 Raumspiegelungen

Die Spiegelung der räumlichen Koordinaten

$$x = (t, \mathbf{r}) \to x' = (t, -\mathbf{r}) \tag{1.111}$$

ist eine 'diskrete' oder **uneigentliche Lorentztransformation**, die sich in der Form (1.78), aber mit

$$\det(\Lambda) = -1 \tag{1.112}$$

schreiben läßt, während für die **eigentlichen Lorentztransformationen** $\det(\Lambda) = 1$ gilt. Die Spiegelung (1.111) hat deshalb **keine infinitesimale Form**, *d.h.* sie läßt sich nicht kontinuierlich aus der Identität $\Lambda = 1$ herausentwickeln.

Aus der Tatsache, daß die Klein-Gordon-Gleichung (1.17) sowie die Vertauschungsrelationen (1.33) — und damit die ganze Theorie — invariant unter räumlichen Spiegelungen sind, dürfen wir nur auf eine schwächere Form von (1.109) schließen, nämlich

$$\Phi'(x') = \eta\ \Phi(x) \quad \text{mit } |\eta| = 1 \tag{1.113}$$

für

$$x' = (t, -\mathbf{r}) \quad \text{und } \Phi' = \exp(iG_P)\ \Phi\ \exp(-iG_P), \tag{1.114}$$

denn Φ' und Φ können sich nur durch eine unitäre Transformation $U_P = \exp(iG_P)$ unterscheiden mit noch unbestimmten hermiteschen Operator G_P. Die Phase η bleibt unbestimmt, weil unter der Transformation (1.114)

$$\pi'(x') = \partial'_0 \Phi^{\dagger'}(x') = \eta^* \pi(x) \tag{1.115}$$

wird, was in den VR (1.33) lediglich einen Faktor $\eta^*\eta = 1$ ergibt; Faktoren mit $|\eta| \neq 1$ sind daher mit den VR (1.33) unverträglich. Ist Φ selbst Operator zu einer meßbaren Größe, also hermitesch, so muß

$$\eta^2 = 1 \quad \text{oder } \eta = \pm 1 \tag{1.116}$$

sein, weil jede beobachtbare Größe nicht durch 2 aufeinanderfolgende Spiegelungen verändert werden kann. Auch im allgemeinen Fall $\Phi^\dagger \neq \Phi$ läßt sich zeigen (hier ohne Beweis), daß man mit den Werten $\eta = \pm 1$ auskommt. Zur Unterscheidung der Felder nennt man einen Feldoperator mit

$$\Phi'(-\mathbf{r}, t) = \Phi(\mathbf{r}, t) \quad \textbf{Skalar}, \tag{1.117}$$

$$\Phi'(-\mathbf{r}, t) = -\Phi(\mathbf{r}, t) \quad \textbf{Pseudoskalar} \tag{1.118}$$

und $\eta = \pm 1$ die **innere Parität** des Feldes.

Um den Operator G_P zu finden, welcher gerade

$$\exp(iG_P)\Phi(x)\exp(-iG_P) = \eta\ \Phi(-\mathbf{r}, t) \tag{1.119}$$

für $\eta = \pm 1$ bewirkt, kann man benutzen, daß nach (1.49)

$$\exp(iG_P)a(\mathbf{q})\exp(-iG_P) = \eta\ a(-\mathbf{q}) \tag{1.120}$$

sein muß (ebenso für $b(\mathbf{q})$). Ein Operator, der dieses leistet, ist durch

$$G_P = \frac{\pi}{2}[-\eta(\hat{N}_a + \hat{N}_b) + \int \frac{d^3q}{2\omega_q}\ \{a^\dagger(\mathbf{q})a(-\mathbf{q}) + b^\dagger(\mathbf{q})b(-\mathbf{q})\}] \tag{1.121}$$

gegeben, *d.h.* G_P muß für skalare und pseudoskalare Felder verschieden definiert werden. In beiden Fällen transformiert sich jedoch wegen (1.115) der Impulsoperator $\mathbf{P}$ (1.41) gemäß

$$U_P\ \mathbf{P}\ U_P^{-1} = -\mathbf{P} \qquad \eta = \pm 1 \quad \text{und } U_P = \exp(iG_P), \tag{1.122}$$

d.h. als echter Dreiervektor, während der Hamiltonoperator der freien Klein-Gordon-Theorie (1.35) spiegelungsinvariant oder **paritätserhaltend** ist, *d.h.*

$$U_P\ H\ U_P^{-1} = H. \tag{1.123}$$

Es ist zu bemerken, daß für wechselwirkende Theorien (1.122) stets gültig bleibt, während (1.123) *z.B.* bei der schwachen Wechselwirkung verletzt wird.

Die in der Natur vorkommenden und durch einkomponentige Felder zu beschreibenden (langlebigen) Teilchen sind nahezu alle **Pseudoskalare**, *d.h.* die Mesonen $(\pi, K, \eta, \eta', ...)$. Die Identifikation **skalarer** Mesonen ist experimentell zwar eindeutig gegeben, jedoch ist deren nähere Klassifikation noch umstritten $(\sigma, f_0(980), a_0(980), f_0(1300), f_0(1500)...)$. Zudem zerfallen sie nach kurzer Zeit in pseudoskalare Mesonenpaare.

1.9 Zeitumkehr

Eine weitere **uneigentliche Lorentztransformation** mit $\det(\Lambda) = -1$ ist die Zeitumkehr

$$x = (t, \mathbf{r}) \to x' = (-t, \mathbf{r}). \tag{1.124}$$

Da sie ebenfalls den Klein-Gordon-Operator $(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)$ invariant läßt, sollte sie auch eine unitäre Operatortransformation induzieren. Dabei gibt es zunächst ein kleines Problem, da wegen

$$\pi = \partial_0 \Phi^\dagger, \quad \partial_0' = -\partial_0 \tag{1.125}$$

die kanonischen VR (1.33) nicht unitär invariant sind. Es ist allerdings zu beachten (lt. Wigner), daß die durch die Symmetrietransformation induzierten Operatoren nicht unbedingt das Skalarprodukt selbst erhalten, also unitär sein müssen, sondern lediglich die **Meßgrößen**, die Betragsquadraten von Skalarprodukten entsprechen, *d.h.*

$$| < \Psi_2' | \Psi_1' > |^2 = | < \Psi_1 | \Psi_2 > |^2. \tag{1.126}$$

Damit sind außer unitären Operatoren U auch **antiunitäre Operatoren** V zulässig mit den Eigenschaften

$$V(c_1|\Psi_1 > + c_2|\Psi_2 >) = c_1^* V|\Psi_1 > + c_2^* V|\Psi_2 > \tag{1.127}$$

(**Antilinearität**) und

$$< V\Psi | V\Psi > = < \Psi | \Psi > \tag{1.128}$$

(**Normerhaltung**). Solche Operatoren haben die Eigenschaft

$$< V\Psi_2 | V\Psi_1 > = < \Psi_2 | \Psi_1 >^* = < \Psi_1 | \Psi_2 > \tag{1.129}$$

und erfüllen damit die obige Forderung. Zum Beweis von (1.129) betrachtet man einmal (1.128) mit $|\Psi> = |\Psi_1> + |\Psi_2>$ und mit $|\Psi> = |\Psi_1> + i|\Psi_2>$ und bildet die Summe beider Ausdrücke. Wegen

$$V(i1)V^{-1} = -i1 \tag{1.130}$$

bleiben die VR (1.33) unter der Transformation (1.124) erhalten, wenn die **Zeitumkehr** durch einen **antiunitären Operator** dargestellt wird. Ein solcher Operator läßt sich stets schreiben als

$$V = UK \tag{1.131}$$

mit unitärem U und

$$K^2 = 1, \qquad\qquad K^\dagger = K. \tag{1.132}$$

Seine Wirkung auf einen beliebigen Operator A ist

$$K\ A\ K^{-1} = A^\dagger. \tag{1.133}$$

Mit diesem Operator der **komplexen Konjugation** schreiben wir für den durch die Transformation (1.124) induzierten Operator τ :

$$\tau = U_T K \tag{1.134}$$

mit unitärem U_T .

Wie bei der Paritätsoperation fordern wir

$$\tau\ \Phi(x)\tau^{-1} = \eta_T \Phi(-t, \mathbf{r}) \quad \text{mit } |\eta_T| = 1, \tag{1.135}$$

und beschränken uns auf die reellen Werte $\eta_T = \pm 1$. Dann folgt wegen (1.133)

$$U_T \Phi(x) U_T^{-1} = \pm \Phi^\dagger(-t, \mathbf{r}), \tag{1.136}$$

für die Vernichtungsoperatoren $a(\mathbf{q})$

$$U_T a(\mathbf{q}) U_T^{-1} = \pm a^\dagger(-\mathbf{q}) \tag{1.137}$$

und ebenso für $b(q)$. Für den Impuls $\mathbf{P}$ (1.41) folgt, wie erwartet,

$$\tau\ \mathbf{P}\ \tau^{-1} = -\mathbf{P}. \tag{1.138}$$

Für das freie Klein-Gordon-Feld gilt natürlich auch $\tau\ H\ \tau^{-1} = H$, was die Zeitumkehrinvarianz des Systems noch einmal zum Ausdruck bringt. Auch diese Invarianz wird bei wechselwirkenden Feldern *z.B.* durch die schwache Wechselwirkung gebrochen.

1.10 Ladung und Ladungskonjugation

Um den Unterschied zwischen den a- und b-Teilchen herauszufinden, betrachten wir den durch Quantisierung aus (1.21) entstehenden Stromoperator j_μ, den wir analog zu (1.62) gleich normalgeordnet schreiben:

$$j^\mu = i : \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi - \partial^\mu \Phi^\dagger \Phi :, \tag{1.139}$$

was die Gültigkeit der Kontinuitätsgleichung

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \tag{1.140}$$

nicht verletzt. Durch die Normalordnung erreicht man, daß das Raumintegral der 'zeitlichen' Komponente, *d.h.* die dem Strom entsprechende '**Gesamtladung**',

$$Q = \int d^3r\ j^0(x) = i \int d^3r\ [: \Phi^\dagger \dot{\Phi} - \dot{\Phi}^\dagger \Phi :] \tag{1.141}$$

nach Umrechnung auf Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren die Gestalt

$$Q = \int d^3q\ [N_a(\mathbf{q}) - N_b(\mathbf{q})] = \hat{N}_a - \hat{N}_b = Q^\dagger \tag{1.142}$$

annimmt und daher ebenso wie H in (1.58) im Vakuum den Eigenwert Null hat, *d.h.*

$$Q|0>= 0. \tag{1.143}$$

Aus (1.142) folgt erneut die zeitliche Konstanz von Q, *d.h.* der Charakter einer Erhaltungsgröße für Q in der Form

$$[H, Q] = 0 \tag{1.144}$$

sowie

$$
\begin{aligned}
[Q, a^\dagger(\mathbf{q})] &= a^\dagger(\mathbf{q}), & [Q, b^\dagger(\mathbf{q})] &= -b^\dagger(\mathbf{q}), \\
[Q, a(\mathbf{q})] &= -a(\mathbf{q}), & [Q, b(\mathbf{q})] &= b(\mathbf{q}).
\end{aligned}
\tag{1.145}
$$

Die Anwendung von $a^\dagger(\mathbf{q})$ erhöht also die 'Gesamtladung' um eine Einheit, während die Anwendung von $b^\dagger(\mathbf{q})$ sie um eine Einheit verringert. Damit sind die Mehrteilchenzustände (1.69) Eigenzustände von Q mit

$$
Q|\Psi >= (m-n)|\Psi > . \tag{1.146}
$$

Die Gleichungen (1.143) – (1.146) zeigen, daß die Q-Eigenwerte dieselben Eigenschaften haben wie die in Einheiten von e gemessene elektrische Ladung: sie sind ganzzahlig, additiv und Null für das Vakuum. Das freie Klein-Gordon-Feld besitzt daher eine **ladungsartige Quantenzahl**. Sie **kann** die Bedeutung einer elektrischen Ladung haben, wie bei den π-Mesonen, wo π^+ den a- und π^- den b-Teilchen entspricht, kann aber auch andere additiv-ganzzahlige Quantenzahlen darstellen, wie bei den beiden elektrisch neutralen Mesonen K^0, $\bar{K}^0$ in der Familie der K-Mesonen, die sich durch die Werte der **Hyperladung** Y (hier nicht näher definiert) unterscheiden.

Teilchen, die wie die a- und b-Teilchen des Klein-Gordon-Feldes das gleiche raum-zeitliche Transformationsverhalten haben – insbesondere gleiche Ruhemasse und gleichen Spin – aber entgegengesetzte Werte in einer oder mehreren ladungsartigen Quantenzahlen, heißen **Antiteilchen** zueinander. So ist π^- das Antiteilchen zu π^+ und umgekehrt. Für ein hermitesches Feld

$$
\Phi^\dagger(x) = \Phi(x) \text{ und somit } \; a^\dagger(\mathbf{q}) = b^\dagger(\mathbf{q}), \tag{1.147}
$$

sind a- und b-Teilchen identisch und es ist $Q = 0$ für alle Zeiten t; *d.h.* das Feld ist bezüglich der Q-Quantenzahl **neutral**. Beim Klein-Gordon-Feld der π-Mesonen ist dieses der Fall für das π^0-Meson. Solche Teilchen sind zugleich **ihre eigenen Antiteilchen**. Bei komplexen bzw. nichthermiteschen Feldern beschreibt ein und derselbe Feldoperator dagegen sowohl Teilchen als auch Antiteilchen.

Wir können nun rein formal wie in (1.84) vorgehen und den hermiteschen Operator Q als Erzeugende einer unitären Transformation

$$
U_\alpha = \exp(i\alpha Q) \tag{1.148}
$$

mit einer reellen Konstanten α auffassen. Die Wirkung dieser Transformation ergibt sich mit

$$
[Q, \Phi(x)] = -\Phi(x), \qquad [Q, \Phi^\dagger(x)] = \Phi^\dagger(x) \tag{1.149}
$$

zu

$$
\begin{aligned}
\exp(i\alpha Q)\ \Phi(x)\ \exp(-i\alpha Q) &= [1 + (-i\alpha) + \frac{(-i\alpha)^2}{2!} + \frac{(-i\alpha)^3}{3!} + ...]\ \Phi(x) \\
&= \exp(-i\alpha)\ \Phi(x),
\end{aligned}
\tag{1.150}
$$

d.h. die Transformation multipliziert $\Phi(x)$ lediglich mit einer Phase. Wegen der 'Ladungs'-Erhaltung (1.144) ist der Hamiltonoperator invariant unter dieser Transformation,

$$\exp(i\alpha Q)\ H\ \exp(-i\alpha Q) = H. \tag{1.151}$$

Damit ist H und zugleich auch die Lagrangefunktion L invariant unter der sogenannten **globalen abelschen Eichtransformation**

$$\Phi(x) \to \exp(-i\alpha)\Phi(x), \qquad \Phi^\dagger(x) \to \exp(i\alpha)\Phi^\dagger(x). \tag{1.152}$$

Die Transformation ist '**global**', da α als reelle Konstante nicht von $\mathbf{r}, t$ abhängt; sie ist '**abelsch**', weil die Transformation (1.150) eine abelsche Gruppe, hier die einparametrige unitäre Gruppe in einer Dimension $U(1)$, bildet. **Die Existenz einer erhaltenen ladungsartigen Quantenzahl ist daher äquivalent zu einer globalen Eichsymmetrie der Lagrangefunktion.**

Der symmetrische Aufbau der Felder Φ und $\Phi^\dagger$ in den a-, b-Operatoren legt es nahe, daß ein Austauschoperator der a- und b-Teilchen mit den Eigenschaften

$$C\ a^\dagger(\mathbf{q})C^{-1} = b^\dagger(\mathbf{q}), \qquad C\ b^\dagger(\mathbf{q})C^{-1} = a^\dagger(\mathbf{q}) \tag{1.153}$$

und

$$C^\dagger C = CC^\dagger = 1 \tag{1.154}$$

existiert. Für das Klein-Gordon-Feld würde aus (1.153) folgen

$$[C, H] = 0, \qquad [C, \mathbf{P}] = 0 \tag{1.155}$$

sowie

$$C\ Q\ C^{-1} = -Q, \tag{1.156}$$

$$C\ \Phi(x)C^{-1} = \Phi^\dagger(x). \tag{1.157}$$

Ein solcher Operator, der auch als **Ladungskonjugation** bezeichnet wird, läßt sich in der Tat konstruieren (mit Hilfe der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren):

$$C = \exp(iG_c) \qquad \text{mit } G_c = \frac{\pi}{2}[\hat{N}_a + \hat{N}_b - \int \frac{d^3q}{2\omega_q}\ \{b^\dagger(\mathbf{q})a(\mathbf{q}) + a^\dagger(\mathbf{q})b(\mathbf{q})\}]. \tag{1.158}$$

Die Beziehung (1.155) drückt die **Ladungskonjugations-Invarianz** der freien Klein-Gordon-Theorie aus, die schon aus der Invarianz von (1.17) **und** (1.33) gegen Vertauschung von Φ und $\Phi^\dagger$ ersichtlich war.

1.11 Die Schwingersche Δ-Funktion

Die Frage nach der Fortsetzung der kanonischen VR (1.33) zu verschiedenen Zeiten läßt sich für das **freie** Klein-Gordon-Feld vollständig beantworten, da man mit (1.47) die Lösung der Bewegungsgleichungen kennt. Für verschiedene Zeiten erhalten wir somit

$$
\begin{aligned}
[\Phi(x), \Phi^\dagger(y)] &= \int\int \frac{d^3q'}{2\omega_{q'}} \frac{d^3q}{2\omega_q} \; \{ \; f_q(x) f^*_{q'}(y) \; [a(\mathbf{q}), a^\dagger(\mathbf{q}')] + f^*_q(x) f_{q'}(y) \; [b^\dagger(\mathbf{q}), b(\mathbf{q}')] \; \} \\
&\quad + \text{Terme mit verschwindenden Kommutatoren} \qquad (1.159) \\
&= \int \frac{d^3q}{2\omega_q} \; [f_q(x) f^*_q(y) - f^*_q(x) f_q(y)] \\
&= \int \frac{d^3q}{2\omega_q} \frac{1}{(2\pi)^3} [\exp(-iq(x-y)) - \exp(iq(x-y))]_{q_0=\omega_q} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3q}{2\omega_q} \; [\exp(-i\omega_q(x^0-y^0)) - \exp(i\omega_q(x^0-y^0))] \; \exp(i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^4q}{2\omega_q} \; [\delta(q^0-\omega_q) - \delta(q^0+\omega_q)] \; \exp(-iq(x-y)) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4q \;\; \delta(q^2-m^2) \; [\Theta(q^0) - \Theta(-q^0)] \; \exp(-iq(x-y))
\end{aligned}
$$

mit der in (1.12) verwendeten δ-Funktions-Relation. $\Theta(x)$ ist die Stufenfunktion; an ihrer Stelle verwendet man zweckmäßigerweise

$$\epsilon(q) = \Theta(q^0) - \Theta(-q^0) = \frac{q^0}{|q^0|} \tag{1.160}$$

und bezeichnet

$$\Delta(x, m) = -\frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4q \; \epsilon(q) \delta(q^2 - m^2) \exp(-iq \cdot x) \tag{1.161}$$

als **Schwingersche Δ-Funktion**.

Die hier auftretende Kombination $\epsilon(q)\delta(q^2-m^2)$ ist im Gegensatz zu $\epsilon(q)$ **invariant gegen eigentliche Lorentz-Transformationen** (${\Lambda^0}_0 > 0$, $\det(\Lambda) = 1$), denn die δ-Funktion beschränkt den Vierervektor q auf eine zeitartige ($q^2 > 0$) Hyperfläche im Minkowski-Raum, deren zwei Teilflächen mit $q^0 = \pm\sqrt{q^2 + m^2}$ ganz innerhalb des 'Vorwärtslichtkegels' bzw. 'Rückwärtslichtkegels' (von $q = 0$ aus) liegen. Bei eigentlichen Lorentz-Transformationen wird jeder dieser beiden Kegel nur in sich selbst transformiert, *d.h.* das Vorzeichen von q^0 bleibt unverändert. Damit ist Δ eine lorentzinvariante Funktion, denn bei einer Transformation (1.78) mit $\det(\Lambda) = 1$ wird

$$\Delta(x') = \Delta(\Lambda x) = -\frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4q \; \epsilon(q)\delta(q^2 - m^2) \exp(-i(\Lambda^{-1}q) \cdot x) \tag{1.162}$$

$$= -\frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4q' \; \epsilon(\Lambda q') \; \delta((\Lambda q')^2 - m^2) \exp(-iq' \cdot x) \; \left| \frac{\partial(q^0..q^3)}{\partial(q'^0..q'^3)} \right|$$

mit $q' = \Lambda^{-1}q$. Die Funktionaldeterminante ist aber $\equiv 1$, und wegen der Invarianz des $\epsilon\delta$-Faktors folgt

$$\Delta(\Lambda x) = \Delta(x) \;\; \text{falls} \;\; \det(\Lambda) = 1. \tag{1.163}$$

Dagegen ist für die diskrete Transformation $x \to -x$ wegen $\epsilon(-q) = -\epsilon(q)$

$$\Delta(-x) = -\Delta(x). \tag{1.164}$$

Für **raumartige** x (*d.h.* $(x^0)^2 < \mathbf{x}^2$ oder $x^2 < 0$) haben (1.163,1.164) zusammen die Konsequenz, daß Δ verschwindet, denn **ein raumartiges x läßt sich durch eine eigentliche Lorentz-Transformation in $-x$ überführen**. Nach (1.163) gilt dann $\Delta(-x) = \Delta(x)$ und mit (1.164) folgt zugleich

$$\Delta(x) = 0 \;\; \text{falls} \; x^2 < 0. \tag{1.165}$$

Bemerkung: $\Delta(x)$ ist auch eine **Lösung der Klein-Gordon-Gleichung**

$$(\partial_\mu \partial^\mu - m^2)\Delta(x, m) = 0 \tag{1.166}$$

mit den singulären Anfangsbedingungen (ÜB)

$$\Delta(x, m)_{x^0=0} = 0, \qquad\qquad (\partial_0 \Delta(x, m))_{x^0=0} = -\delta^3(\mathbf{x}). \tag{1.167}$$

Der allgemeine Kommutator für das **freie Klein-Gordon-Feld** wird damit zu

$$[\Phi(x), \Phi^\dagger(y)] = i \; \Delta(x - y, m). \tag{1.168}$$

Durch Differentiation nach y^0, Übergang zu $y^0 = x^0$ und Anwendung von (1.167) erhält man die ursprünglichen VR (1.33) zu gleichen Zeiten zurück.

Durch Wigner-Transformation des Kommutators (1.168) erhalten wir als **Spektralfunktion** für freie Klein-Gordon Teilchen

$$\frac{A(p, m)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int d^4(x - y) \exp(ip(x - y)) \; [\Phi(x), \Phi^\dagger(y)] = \epsilon(p) \; \delta(p^2 - m^2). \tag{1.169}$$

Bemerkenswert an der VR (1.168) ist, daß nach (1.165) der Kommutator verschwindet bei raumartigen Abständen der Ereignisse x und y ($\Delta t^2 < \Delta \mathbf{r}^2$), *d.h.*

$$[\Phi(x), \Phi^\dagger(y)] = 0 \;\; \text{falls} \; (x - y)^2 < 0. \tag{1.170}$$

Diese als **Mikrokausalität** bezeichnete Eigenschaft ist insofern plausibel, weil raumartige Abstände nicht durch ein Lichtsignal überbrückt werden können. Messungen an raumartig zueinander gelegenen Weltpunkten können sich daher gegenseitig nicht beeinflussen. Dies bedeutet nach den Prinzipien der Quantentheorie, daß **der Kommutator zweier Meßgrößen für raumartige Abstände verschwinden muß**. Zwar sind Φ und $\Phi^\dagger$ keine Meßgrößen, aber Strom, Ladung, Energie- und Impulsdichte sind bilinear aus den

Φ, $\Phi^\dagger$ aufgebaut. Um den Kommutator zweier solcher Bilinearformen zum Verschwinden zu bringen, kann man auf einfache Art den Kommutator (oder Antikommutator) von Φ, $\Phi^\dagger$ selbst zu Null setzen und darüberhinaus wie üblich

$$[\Phi(x), \Phi(y)] = 0 \qquad \forall x, y \;\; (\text{falls } \Phi \neq \Phi^\dagger). \tag{1.171}$$

Die **Mikrokausalität** ist eine so grundlegende Eigenschaft, daß sie **bei wechselwirkenden Feldern**, wo eine explizite Lösung wie (1.168) im allgemeinen nicht möglich ist, als **Grundpostulat der Feldtheorie** eingeführt wird.

1.12 Der Feynman'sche Propagator

Eine weitere für das Klein-Gordon-Feld charakteristische (singuläre) Funktion ergibt sich, wenn wir nach Lösungen der **inhomogenen Feldgleichung**

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\Phi(x) = \rho(x) \tag{1.172}$$

suchen, die bei wechselwirkenden Feldern auftritt, mit einer zunächst beliebigen komplexen Funktion $\rho(x)$. Eine spezielle Lösung läßt sich sofort angeben, wenn eine Green'sche Funktion $G(x, x')$ existiert mit

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)G(x, x') = \delta^4(x - x'), \tag{1.173}$$

nämlich

$$\Phi(x) = \int d^4y \; G(x, y)\rho(y). \tag{1.174}$$

Wie üblich findet man $G(x, y)$ durch Fourier-Transformation:

$$G(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \int d^4p \; d^4q \;\; \exp(-ip \cdot x) \exp(iq \cdot y) G(p, q). \tag{1.175}$$

Die Gleichung (1.173) liefert

$$G(q, p) = \frac{\delta^4(p - q)}{-p^2 + m^2}, \tag{1.176}$$

d.h. G hängt nur von $x - y$ ab,

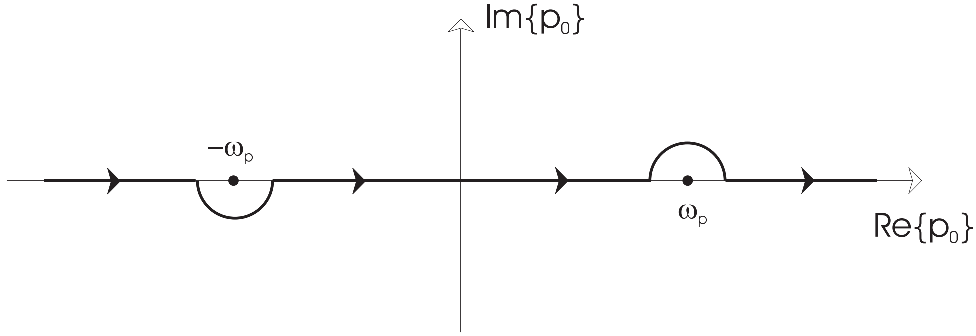
$$G(x - y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \; \frac{\exp(-ip(x - y))}{m^2 - p^2}. \tag{1.177}$$

Wie bei der Green'schen Funktion der Schrödingergleichung erfordert die allgemeine Form (1.177) noch eine Vorschrift zur Behandlung der Singularität des Integranden '**auf der Massenschale**' $p^2 = m^2$, *d.h.* bei

$$p^0 = \pm\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2} = \pm\omega_p. \tag{1.178}$$

Je nach Wahl dieser Vorschriften erhält man wieder Green'sche Funktionen zu verschiedenen Randbedingungen. Die praktisch bedeutendste, der **kausale Feynman- Propagator**

Δ_F, entsteht durch die Vorschrift, den Integrationsweg in der komplexen p^0-Ebene gemäß der folgenden Abbildung um die beiden Pole herumzuführen.



Diese Vorschrift ist äquivalent zur Einführung eines infinitesimalen, negativen Imaginärteils, $m \to m - i\eta/2$ oder $m^2 \to m^2 - i\eta$ (für $\eta << 1$), *d.h.*

$$\omega_p \to \omega_p - i\eta, \qquad\qquad -\omega_p \to -\omega_p + i\eta \tag{1.179}$$

im Limes $\eta \to 0$. Die resultierende Integraldarstellung

$$\Delta_F(x-y) = -G(x-y)_{m^2 \to m^2 - i\eta} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \, \frac{\exp(-ip\cdot(x-y))}{p^2 - m^2 + i\eta} \tag{1.180}$$

hat die Symmetrie

$$\Delta_F(-x) = \Delta_F(x) \tag{1.181}$$

und erfüllt nach (1.173)

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\Delta_F(x - x') = -\delta^4(x - x'). \tag{1.182}$$

Sie läßt sich nach dem Residuensatz auswerten und ergibt

$$\Delta_F(x) = \Delta^+(x) \text{ falls } x^0 > 0 \qquad\qquad \Delta_F(x) = -\Delta^-(x) \text{ falls } x^0 < 0 \tag{1.183}$$

mit

$$\Delta^\pm(x) = -\frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4q \, [\pm\Theta(\pm q_0)] \, \delta(q^2 - m^2) \, \exp(-iq\cdot x). \tag{1.184}$$

Der Propagator $\Delta_F(x-y)$ enthält also für $x^0 > y^0$ nur positive, für $x^0 < y^0$ nur negative Frequenzanteile.

Wir zeigen nun, daß der als **Einteilchenpropagator** oder als **Zweipunktfunktion** des **freien Klein-Gordon-Feldes** bezeichnete Vakuumerwartungswert

$$G^0(x,y) = -i < 0|T[\Phi(x)\Phi^\dagger(y)]|0 > \tag{1.185}$$

gerade durch Δ_F gegeben ist. Hier bezeichnet T das **zeitgeordnete Operatorprodukt**, *d.h.* die Vorschrift, alle Operatoren von rechts nach links in der Reihenfolge wachsender Zeitargumente anzuordnen,

$$T[A_1(x_1)....A_n(x_n)] = A_{i_n}(x_{i_n})....A_{i_1}(x_{i_1}) \qquad \text{mit } t_{i_n} > .... > t_{i_1}. \tag{1.186}$$

Speziell ist

$$T[\Phi(x)\Phi^\dagger(y)] = \Theta(x^0 - y^0)\Phi(x)\Phi^\dagger(y) + \epsilon\, \Theta(y^0 - x^0)\Phi^\dagger(y)\Phi(x) \tag{1.187}$$

mit $\epsilon = 1$ für Bosonen. Nun ist nach (1.47) und (1.59)

$$< 0|\Phi(x)\Phi^\dagger(y)|0 >= i\, \Delta^+(x-y) < 0|0 > \quad \text{und} \quad < 0|\Phi^\dagger(y)\Phi(x)|0 >= -i\, \Delta^-(x-y) < 0|0 > . \tag{1.188}$$

Zusammen ergibt sich damit nach (1.183) und (1.187):

$$G^0(x,y) = -i[\Theta(x^0 - y^0)i\Delta^+(x-y) + \Theta(y^0 - x^0)(-i\Delta^-(x-y))] = \Delta_F(x-y). \tag{1.189}$$

Die Zweipunktfunktion (1.185) ist damit zugleich lorentzinvariant. Ihre Fouriertransformierte ist aufgrund der Translationsinvarianz des Vakuumzustandes $|0>$ durch die einfache Form,

$$G^0(q) = \int d^4x\; G^0(x,0)\exp(iq\cdot x) = \int d^4x\; \Delta_F(x)\exp(iq\cdot x) = \frac{1}{q^2 - m^2 + i\eta}, \tag{1.190}$$

gegeben und hat einen (in q^2 einfachen) Pol auf der Massenschale.

Kapitel 2

Dirac Gleichung und Dirac Algebra

2.1 Heuristische Einführung

Dirac fand die nach ihm benannte Wellengleichung bei dem Versuch, eine relativistische Gleichung für freie Teilchen aufzustellen, die wie die Schrödingergleichung **von 1. Ordnung in** $\partial/\partial t \equiv \partial/\partial x^0$ sein und deshalb eine Kontinuitätsgleichung mit der positiv-definiten Dichte $\psi^*\psi$ zulassen sollte. Die relativistische Kovarianz erfordert dann, daß eine solche Gleichung dann auch **in den Raumableitungen** $\partial/\partial x^k (k = 1, 2, 3)$ **von 1. Ordnung** sein muß (im Gegensatz zur Schrödingergleichung), *d.h.* die allgemeine Form

$$H\ \psi(x) \equiv (-i\alpha^k \frac{\partial}{\partial x^k} + \beta\ M)\psi(x) = i\frac{\partial}{\partial t}\ \psi(x) \tag{2.1}$$

mit einer Ruhemasse M und

$$H^\dagger = H \tag{2.2}$$

haben muß. Wenn diese Gleichung freie Teilchen beschreiben soll, *d.h.* Lösungen vom Typ der ebenen Welle mit der richtigen (relativistischen) Frequenz-Wellenzahl-Relation für die Ruhemasse M,

$$\psi(x) = \psi(0)\exp(\pm ip\cdot x) \quad \text{mit } p^0 = E_p \equiv \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}, \tag{2.3}$$

haben soll, so muß ψ – bzw. jede Komponente ψ_j – auch Lösung der Klein-Gordon-Gleichung sein:

$$(-\nabla^2 + M^2)\psi(x) = -\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(x). \tag{2.4}$$

Der Vergleich mit der quadrierten (und in k, l symmetrisierten) Form von (2.1)

$$[-\frac{1}{2}(\alpha^k\alpha^l + \alpha^l\alpha^k)\frac{\partial^2}{\partial x^k\partial x^l} - i\ M(\alpha^k\beta + \beta\alpha^k)\frac{\partial}{\partial x^k} + M^2\beta^2]\psi(x) = -\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(x) \tag{2.5}$$

erfordert, daß die noch unbekannten Koeffizienten $\alpha^k (k = 1, 2, 3)$ und β die Eigenschaften

$$\alpha^k\alpha^l + \alpha^l\alpha^k = 2\ \delta^{kl}, \qquad \alpha^k\beta + \beta\alpha^k = 0, \qquad \beta^2 = 1 \quad (k, l = 1, 2, 3) \tag{2.6}$$

haben müssen. Die Bedingungen (2.6) können nur für matrix-wertige Koeffizienten erfüllt sein. Wegen (2.2) müssen diese Matrizen hermitesch sein:

$$(\alpha^k)^\dagger = \alpha^k, \qquad\qquad \beta^\dagger = \beta. \tag{2.7}$$

Die Eigenwerte sind damit reell und können nach (2.6) nur ± 1 sein. Wegen $\alpha^k = -\beta\alpha^k\beta$ muß zudem infolge der zyklischen Invarianz der Spur

$$Tr\alpha^k = -Tr\ \beta\alpha^k\beta = -Tr\ \beta^2\alpha^k = -Tr\ \alpha^k = 0 \tag{2.8}$$

sowie

$$Tr\beta = -Tr\ \alpha^k\beta\alpha^k = -Tr\ \alpha^k\alpha^k\beta = -Tr\ \beta = 0 \tag{2.9}$$

verschwinden; die Dimension der Matrizen muß also gerade sein. In 2 Dimensionen gibt es jedoch nur 3 linear unabhängige antikommutierende Matrizen, *z.B.* die Pauli'schen Spinmatrizen

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \tag{2.10}$$

oder unitär transformierte Matrizen von (2.10). Daher sind die α^k, β mindestens 4×4 Matrizen. In der Pauli-Dirac'schen **Standarddarstellung** (mit 2×2 Untermatrizen) sind sie gegeben durch

$$\alpha^k = \begin{pmatrix} 0_2 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0_2 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1_2 & 0_2 \\ 0_2 & -1_2 \end{pmatrix}, \quad 0_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad 1_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.11}$$

allerdings sind alle unitären Transformationen von (2.11) ebenfalls verwendbar. Darstellungen in höherer Dimension als 4×4 erweisen sich (bis auf unitäre Äquivalenz) als triviale Erweiterung und haben daher keine praktische Bedeutung.

Die Wellenfunktion $\psi(x)$ in (2.3) muß folglich 4 Komponenten

$$\psi(x) \equiv (\psi_\alpha(x)), \qquad\qquad \alpha = 1,..,4 \tag{2.12}$$

haben; das Adjungierte ist dann

$$\psi^\dagger(x) = (\psi_1^*(x)\ \psi_2^*(x)\ \psi_3^*(x)\ \psi_4^*(x)) \tag{2.13}$$

und erfüllt die Gleichung

$$i\ \frac{\partial\psi^\dagger}{\partial x^k}\alpha^k + M\ \psi^\dagger\beta = -i\ \frac{\partial\psi^\dagger}{\partial t}. \tag{2.14}$$

Multiplikation von (2.1) mit $\psi^\dagger$ von links sowie von (2.14) mit ψ von rechts und Subtraktion liefert die **Kontinuitätsgleichung**

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi^\dagger\psi) + \partial_k(\psi^\dagger\alpha^k\psi) = 0 \tag{2.15}$$

mit der positiv definiten Dichte

$$\rho(x) = \psi^\dagger\psi = \sum_\alpha |\psi_\alpha(x)|^2. \tag{2.16}$$

2.2 γ-Matrizen und Dirac-Algebra

Für die Diskussion des Transformationsverhaltens geeigneter ist eine Form der Dirac-Gleichung, die durch Einführung der Matrizen

$$\gamma^k = \beta\alpha^k = -\alpha^k\beta \quad \text{und} \quad \gamma^0 = \beta \tag{2.17}$$

entsteht, *d.h.*

$$(-i\gamma^\mu\partial_\mu + M)\psi(x) = 0, \qquad i\partial_\mu\bar{\psi}(x)\gamma^\mu + \bar{\psi}(x)M = 0, \tag{2.18}$$

mit dem **Pauli-adjungierten** Spinor

$$\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger(x)\gamma^0 \equiv (\psi_1^*(x),\ \psi_2^*(x),\ -\psi_3^*(x),\ -\psi_4^*(x)). \tag{2.19}$$

Für die γ-Matrizen nimmt (2.6) dann die kompaktere Form

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\ g^{\mu\nu} \cdot 1_4 \qquad\qquad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3) \tag{2.20}$$

an, und (2.7) liefert die **Pseudo-Hermitezität**

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0, \tag{2.21}$$

wie man anhand der **Standarddarstellung**

$$\gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad k = 1, 2, 3 \tag{2.22}$$

leicht überprüft (ÜB). In der Standarddarstellung sind γ^1, γ^3 rein reell, γ^2 rein imaginär. Die Kontinuitätsgleichung (2.15) geht nun über zu (ÜB)

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad \text{mit} \quad j^\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) \tag{2.23}$$

und beinhaltet das Verschwinden der **Viererdivergenz** des **Viererstromes** $j^\mu(x)$. Aus den 4 γ-Matrizen läßt sich durch Multiplikation ein vollständiges System von 4×4 Matrizen aufbauen. Da die allgemeine 4×4 Matrix 16 Elemente hat, bilden genau 16 linear unabhängige 4×4 Matrizen eine vollständige Basis. Zweckmäßigerweise wählt man

$$\begin{aligned}
1_4 \quad &: \quad 4 \times 4 \text{ Einheitsmatrix} \\
\gamma^\mu \quad (\mu = 0, 1, 2, 3) \quad &: \quad 4 \text{ Matrizen} \\
\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad &: \quad 6 \text{ Matrizen (antisymmetrisch)} \\
\gamma^\mu\gamma^5 \ (\mu = 0, .., 3) \quad &: \quad 4 \text{ Matrizen} \\
\gamma^5 \quad &: \quad 1 \text{ Matrix}
\end{aligned} \tag{2.24}$$

wobei γ^5 die '**Chiralitäts**'-Matrix ist mit

$$\gamma^5 = \gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.25}$$

Diese Matrix kann auch geschrieben werden als

$$\gamma^5 = \frac{i}{4!}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma \tag{2.26}$$

mit

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (\mu,\nu,\rho,\sigma) \text{ eine gerade Permutation von } (0,1,2,3) \text{ ist} \\ -1 & \text{falls } (\mu,\nu,\rho,\sigma) \text{ eine ungerade Permutation von } (0,1,2,3) \text{ ist} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

dem '**vollständig antisymmetrischen Einheitstensor 4. Stufe**'. Wie man leicht nachrechnet, hat γ^5 die Eigenschaften

$$(\gamma^5)^2 = 1_4, \qquad (\gamma^5)^\dagger = \gamma^5, \qquad \{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0 \qquad \mu = 0,..,3. \tag{2.27}$$

Die von 0 verschiedenen Elemente von $\sigma^{\mu\nu}$ sind die von räumlichen nichtdiagonalen Komponenten $(\mu,\nu) = (k,l)$ mit $k \neq l$ und $(\mu,\nu) = (0,k)$. Sie lassen sich zu

$$\Sigma^m = \frac{1}{2}\ \epsilon^{mkl}\sigma_{kl} = \frac{i}{2}\ \epsilon^{mkl}\gamma_k\gamma_l \qquad (m = 1,.,3) \tag{2.28}$$

und

$$\sigma^{0k} = i\gamma^0\gamma^k = i\alpha^k \qquad (k = 1,.,3) \tag{2.29}$$

zusammenfassen, wobei

$$\epsilon^{mkl} = \epsilon^{mkl0} \tag{2.30}$$

der ϵ-Tensor in 3 Dimensionen ist. Σ^m hat die Eigenschaften eines Satzes von Spin-Matrizen, *d.h.*

$$[\frac{1}{2}\ \Sigma^m, \frac{1}{2}\ \Sigma^n] = i\ \epsilon^{mnp}(\frac{1}{2}\ \Sigma^p) \ \text{ und } \sum_{m=1}^{3}(\frac{1}{2}\ \Sigma^m)^2 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)\cdot 1_4, \tag{2.31}$$

wie man leicht anhand der Standard-Darstellung

$$\Sigma^m = \begin{pmatrix} \sigma^m & 0 \\ 0 & \sigma^m \end{pmatrix} \qquad (m = 1,2,3) \tag{2.32}$$

zeigt, wobei σ^m wieder die Pauli'schen Spinmatrizen darstellen. In dieser Darstellung ist weiterhin

$$\gamma^k\gamma^5 = \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & -\sigma^k \end{pmatrix} \ \text{ und } \ \gamma^0\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0_2 & 1_2 \\ -1_2 & 0_2 \end{pmatrix}. \tag{2.33}$$

Die Hermitezitätseigenschaften sind gegeben durch (2.21), (2.27) und

$$(\sigma^{\mu\nu})^\dagger = \gamma^0\sigma^{\mu\nu}\gamma^0, \qquad (\gamma^\mu\gamma^5)^\dagger = \gamma^0(\gamma^\mu\gamma^5)\gamma^0. \tag{2.34}$$

Die 16 Matrizen

$$\Gamma_1 = 1_4,\ \Gamma_2 = \gamma^0, ..., \Gamma_{16} = \gamma^5 \tag{2.35}$$

bilden nun ein (bis auf Γ_1) spurfreies und bzgl. des Skalarproduktes

$$(\Gamma_A, \Gamma_B) = \frac{1}{4}\, Tr(\Gamma_A^\dagger \Gamma_B) \tag{2.36}$$

orthonormiertes System,

$$\frac{1}{4}\, Tr\Gamma_A = \delta_{A,1}, \qquad \frac{1}{4}\, Tr(\Gamma_A^\dagger\Gamma_B) = \delta_{A,B} \qquad (A, B = 1, .., 16). \tag{2.37}$$

Sie sind also insbesondere **linear unabhängig**. Damit ist jede 4×4 Matrix M als Linearkombination im System (2.35) darstellbar:

$$M = \sum_{A=1}^{16} C_A^M \Gamma_A \quad \text{mit} \quad C_A^M = \frac{1}{4}\, Tr(\Gamma_A^\dagger M). \tag{2.38}$$

Produkte zweier (oder mehrerer) Γ-Matrizen lassen sich wiederum linear durch Γ-Matrizen darstellen. Die daraus folgende '**Multiplikationstafel**' ist durch folgende Gleichungen gegeben:

$$\begin{aligned}
\gamma^\mu\ \gamma^\nu &= g^{\mu\nu}\cdot 1_4 - i\ \sigma^{\mu\nu} \qquad (2.39)\\
\gamma^\lambda\ \sigma^{\mu\nu} &= i\ (g^{\lambda\mu}\ \gamma^\nu - g^{\lambda\nu}\ \gamma^\mu - \epsilon^{\lambda\mu\nu}{}_\eta\ (\gamma^\eta\ \gamma^5))\\
\gamma^\mu\ (\gamma^\nu\ \gamma^5) &= g^{\mu\nu}\ \gamma^5 - \frac{1}{2}\ \epsilon^{\mu\nu}{}_{\kappa\lambda}\ \sigma^{\kappa\lambda}\\
(\gamma^\lambda\ \gamma^5)\ \sigma^{\mu\nu} &= i\ [g^{\lambda\mu}\ (\gamma^\nu\ \gamma^5) - g^{\lambda\nu}\ (\gamma^\mu\ \gamma^5)] - \epsilon^{\lambda\mu\nu}{}_\eta\ \gamma^\nu\\
\sigma^{\kappa\lambda}\ \sigma^{\mu\nu} &= (g^{\kappa\mu}\ g^{\lambda\nu} - g^{\kappa\nu}\ g^{\lambda\mu})\cdot 1_4 - i\ \epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}\ \gamma^5\\
&\quad -i\ [g^{\kappa\mu}\ \sigma^{\lambda\nu} + g^{\lambda\nu}\ \sigma^{\kappa\mu} - g^{\kappa\nu}\ \sigma^{\lambda\mu} - g^{\lambda\mu}\ \sigma^{\kappa\nu}]\\
\sigma^{\mu\nu}\ \gamma^5 &= -\frac{i}{2}\ \epsilon^{\mu\nu}{}_{\kappa\lambda}\ \sigma^{\kappa\lambda}(= \gamma^5\ \sigma^{\mu\nu})\\
(\gamma^\mu\ \gamma^5)\ (\gamma^\nu\ \gamma^5) &= -g^{\mu\nu}\cdot 1_4 + i\sigma^{\mu\nu}\\
\gamma^5\ (\gamma^\mu\ \gamma^5) &= -\gamma^\mu.
\end{aligned}$$

Das Matrixsystem (2.35) mit dem Multiplikationsgesetz (2.39) heißt **Dirac- Clifford-Algebra**.

Eine Anwendung von (2.39) sind die bei der Auswertung von Spinorsummationen in Übergangswahrscheinlichkeiten häufig benötigten **Spurtheoreme** für Spuren von Produkten von Γ-Matrizen, von denen (2.37) die einfachsten Beispiele darstellen. Weitere Beispiele sind:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{4}\,Tr(\gamma^\mu\gamma^\nu) &= g^{\mu\nu} && (2.40)\\
\frac{1}{4}\,Tr(\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}...\gamma^{\mu_n}) &= 0 \qquad\qquad n \text{ ungerade}\\
\frac{1}{4}\,Tr(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) &= g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}\\
\frac{1}{4}\,Tr(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5) &= 0\\
\frac{1}{4}\,Tr(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^5) &= i\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}.
\end{aligned}
$$

Sie werden oft durch Kontraktion mit beliebigen Vierervektoren a_μ, b_ν ... und mit der abgekürzten Schreibweise

$$a_\mu\gamma^\mu = \not{a} \tag{2.41}$$

umgeschrieben als

$$Tr(\not{a}\ \not{b}\,) = 4\ a\cdot b, \tag{2.42}$$

u.s.w. In diesen Zusammenhang gehören auch **γ-Identitäten** wie

$$
\begin{aligned}
\gamma_\mu\ \not{a}\ \gamma^\mu &= -2\not{a} && (2.43)\\
\gamma_\mu\ \not{a}\ \not{b}\ \gamma^\mu &= 4\ a\cdot b\cdot 1_4\\
\gamma_\mu\ \not{a}\ \not{b}\ \not{c}\ \gamma^\mu &= -2\not{c}\ \not{b}\ \not{a}\,.
\end{aligned}
$$

2.3 Transformationsverhalten der Dirac-Spinoren

Bei allgemeinen homogenen Lorentztransformationen

$$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu\, x^\nu \qquad\qquad \text{mit}\ \ \Lambda^\mu{}_\rho\,\Lambda^\rho{}_\nu = g^\mu{}_\nu, \tag{2.44}$$

(Spiegelungen noch eingeschlossen) muß die Dirac-Gleichung nach dem (speziellen) Relativitätsprinzip **forminvariant** sein, *d.h.* übergehen in

$$(-i\gamma^\mu\partial'_\mu + M\cdot 1_4)\psi'(x') = 0. \tag{2.45}$$

Für $\psi'(x')$ können wir – vergl. Vektorfelder bei Drehungen im R_3 – nicht wie beim einkomponentigen (skalaren) Feld die Gleichheit mit $\psi(x)$ erwarten, sondern müssen eine **lineare Vermischung der Komponenten**

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x) \qquad \text{oder}\ \psi'_\alpha(x') = S_{\alpha\beta}(\Lambda)\psi_\beta(x) \tag{2.46}$$

mit einer von Λ abhängigen 4×4 Matrix $S_{\alpha\beta}(\Lambda)$ zulassen. Die Bedingungsgleichungen für $S_{\alpha\beta}$ erhalten wir durch Einsetzen von (2.46) in (2.45); Multiplikation von links mit S^{-1} gibt dann

$$\{-i\left[S(\Lambda)^{-1}\gamma^\mu S(\Lambda)\Lambda^\nu{}_\mu\right]\partial_\nu + M\cdot 1_4\}\psi(x) = 0. \tag{2.47}$$

Der Vergleich mit der ursprünglichen Dirac-Gleichung zeigt, daß Ausdruck $[...] \equiv \gamma^\nu$ sein muß, *d.h.*

$$S(\Lambda)^{-1}\gamma^\mu S(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu. \tag{2.48}$$

Wir werten diesen Ausdruck zunächst aus für **eigentlich-orthochrone-Transformationen** mit $\det(\Lambda) = +1$ und $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ mit dem Ansatz

$$S(\Lambda) = \exp\{-\frac{i}{4}\ \alpha_{\mu\nu}\kappa^{\mu\nu}\}\cdot 1_4, \tag{2.49}$$

wobei $\alpha^{\mu\nu} = -\alpha^{\nu\mu}$ die nach (1.95)-(1.97) zu Λ gehörende Parametermatrix ist. Für zunächst infinitesimale Transformationen $\Lambda = 1 + \alpha$ ($|\alpha| << 1$) wird

$$S(\Lambda) = 1_4 - \frac{i}{4}\ \alpha_{\mu\nu}\kappa^{\mu\nu}, \tag{2.50}$$

und für die Matrizen $\kappa^{\mu\nu}$ ergibt sich nach (2.48) die Bedingung

$$[\kappa^{\mu\nu}, \gamma^\lambda] = -2i(g^{\lambda\mu}\gamma^\nu - g^{\lambda\nu}\gamma^\mu). \tag{2.51}$$

Mit der Multiplikationstabelle (2.39), insbesondere für den Kommutator $[\gamma^\lambda, \sigma^{\mu\nu}]$, ergibt sich die (bis auf additive Vielfache von $g_{\mu\nu}\cdot 1_4$, die in (2.49) keinen Beitrag geben) **eindeutige Lösung**

$$\kappa^{\mu\nu} = \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu]. \tag{2.52}$$

Eine vierkomponentige Feldfunktion $\psi_\alpha(x)$, die sich bei homogenen Lorentz- Transformationen nach dem Gesetz (2.46) mit

$$S(\Lambda) = \exp(-\frac{i}{4}\ \alpha_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu})\cdot 1_4, \qquad\qquad \alpha_{\mu\nu} = \alpha_{\mu\nu}(\Lambda) \tag{2.53}$$

transformiert, heißt **Dirac-Spinor**. Die 4×4 Matrizen $S(\Lambda)$ zu allen Lorentz- Transformationen Λ sind ein multiplikationstreues Abbild der $\Lambda's$ selbst, *d.h.* in dem Sinne, daß bei Nacheinanderausführung zweier Lorentz-Transformationen Λ_1, Λ_2 gilt:

$$S(\Lambda_2\Lambda_1) = S(\Lambda_2)S(\Lambda_1) \qquad \text{(Gruppenhomomorphismus)} \tag{2.54}$$

Sie bilden die **Spinordarstellung der homogenen Lorentzgruppe**. Sie ist *i.a.* nicht unitär; vielmehr gilt nach (2.34), da die Parameter-Matrix $\alpha_{\mu\nu}$ reell ist (und antisymmetrisch),

$$S^\dagger = \gamma^0 S^{-1}\gamma^0. \tag{2.55}$$

Wir betrachten nun (2.53) speziell für reine Drehungen und Lorentzboosts, wo nach (1.95)-(1.96), (2.28) und (2.29) gilt

$$-\frac{i}{4}\ \alpha_{\mu\nu}\ \sigma^{\mu\nu} = \begin{cases} -i\vec{\varphi}\cdot(\frac{1}{2}\ \mathbf{\Sigma})) & \text{bei Drehung mit Drehvektor } \vec{\varphi}, \\ \mathbf{b}\cdot\frac{1}{2}\ \vec{\alpha} & \text{bei Boosts mit Geschwindigkeit } \mathbf{v}(b)\cdot\mathbf{b}/|b|. \end{cases}$$

Die Entwicklung der Exponentialfunktion in (2.53) und Anwendung der in (2.39) enthaltenen Matrixidentitäten

$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{\Sigma})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{\Sigma}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})1_4 + i(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{\Sigma}, \tag{2.56}$$

$$(\mathbf{a}\cdot\vec{\alpha})(\mathbf{b}\cdot\vec{\alpha}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{\Sigma})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{\Sigma})$$

für beliebige komplexe Vektoren $\mathbf{a},\mathbf{b}$ gibt für **reine Drehungen** die unitäre Transformation (mit $\vec{e}_\varphi = \vec{\varphi}/|\vec{\varphi}|$)

$$S(\Lambda\varphi) = \exp(-\frac{i}{2}\ \vec{\varphi}\cdot\mathbf{\Sigma}) = \cos(\frac{\varphi}{2})\cdot 1_4 - i\ \sin(\frac{\varphi}{2})(\vec{e}_\varphi\cdot\mathbf{\Sigma}) \tag{2.57}$$

$$= \cos(\frac{\varphi}{2})\cdot 1_4 + (\frac{i}{4}\ \frac{\sin(\varphi/2)}{(\varphi/2)}\epsilon_{mkl}\ \varphi^m)\ \sigma^{kl},$$

die in der Standarddarstellung (2.31) einfach eine reduzible Verdoppelung der Transformationsmatrix für zweikomponentige Pauli-Spinoren ist. Wie die letztere hat sie bei $\varphi = |\vec{\varphi}| = 2\pi$ die für Spinortransformationen charakteristische Eigenschaft

$$S(\Lambda_{2\pi}) = -1_4. \tag{2.58}$$

Für **reine boosts** ergibt sich dagegen das im Sinne (2.55) nichtunitäre

$$S(\Lambda_b) = \exp(\frac{1}{2}\ \mathbf{b}\cdot\vec{\alpha}) = \cosh(\frac{b}{2}) + (\sinh(\frac{b}{2}))\frac{\mathbf{b}\cdot\vec{\alpha}}{|\mathbf{b}|} \tag{2.59}$$

$$= [\cosh(\frac{b}{2})\gamma^0 - \frac{b^k}{|\mathbf{b}|}\sinh(\frac{b}{2})\gamma^k]\gamma^0,$$

oder mit dem Vierer-Einheitsvektor

$$n = (\cosh(\frac{b}{2}), \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}\sinh(\frac{b}{2}))\ \ \text{mit } n_\mu n^\mu = 1, \tag{2.60}$$

$$S(\Lambda_b) = n_\mu\gamma^\mu\gamma^0 \quad \text{oder} \quad S^{-1}(\Lambda_b) = \gamma^0 n_\mu\gamma^\mu.$$

Schließlich betrachten wir die Transformation (2.46) für Raumspiegelungen, wobei (wie beim Klein-Gordon-Feld) die Phase $\eta = \pm 1$ zugelassen werden muß. Die Bedingung (2.48) liefert hier

$$S_p^{-1}\gamma^\mu S_p = \gamma^0 \ \ \text{falls } \mu = 0 \tag{2.61}$$

$$S_p^{-1}\gamma^\mu S_p = -\gamma^m \ \ \text{falls } \mu = m = 1,2,3,$$

was durch

$$S_p = \gamma^0 = S_p^\dagger = S_p^{-1} \tag{2.62}$$

erfüllt wird. Also lautet (2.46) hier

$$\psi'(t,-\mathbf{x}) = \eta\gamma^0\psi(t,\mathbf{x}) \text{ mit } \eta = \pm 1. \tag{2.63}$$

Die Dirac-Gleichung ist unter der so bestimmten Paritätstransformation forminvariant.

Für die Matrix γ^5 bedeutet (2.61) wegen (2.27)

$$S_p^{-1}\gamma^5 S_p = -\gamma^5, \tag{2.64}$$

während für die in $\sigma^{\mu\nu}$ enthaltenen Matrizen aus (2.34), (2.28) und (2.29) folgt:

$$S_p^{-1}\mathbf{\Sigma}\ S_p = \mathbf{\Sigma}, \qquad\qquad S_p^{-1}\vec{\alpha}\ S_p = -\vec{\alpha}. \tag{2.65}$$

Für eigentlich orthochrone Transformationen und Paritätstransformation gemeinsam gilt (2.55); damit folgt aus $\psi \to \eta S\psi$ für den Pauli-adjungierten Spinor

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0 \to \eta^*\psi^\dagger S^\dagger\gamma^0 = \eta^*\bar{\psi}S^{-1}. \tag{2.66}$$

Folglich ist ein Ausdruck der Form $\bar{\psi}_1\psi_2$ mit beliebigen Dirac-Spinoren immer ein **Lorentz-Skalar**:

$$\bar{\psi}_1\psi_2 \to \eta^*\eta(\bar{\psi}_1 S^{-1})(S\psi_2) = \bar{\psi}_1\psi_2, \tag{2.67}$$

während $\bar{\psi}_1(x)\gamma^5\psi_2(x)$ bei eigentlichen Lorentztransformationen wegen (2.39) ebenfalls invariant ist, bei Spiegelungen jedoch nach (2.64) sein Vorzeichen umkehrt, also ein **Pseudoskalar** ist,

$$\bar{\psi}_1\gamma^5\psi_2 \to \eta^*\eta\bar{\psi}_1 S^{-1}\gamma^5 S\ \psi_2 = \det(\Lambda)\bar{\psi}_1\psi_2. \tag{2.68}$$

Untersucht man auch die übrigen Matrizen der Basis (2.24) und wendet (2.48) an, so findet man fünf unterschiedliche '**bilineare Kovarianten**' mit dem jeweiligen Transformationsverhalten:

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}_1(x)\ \psi_2(x) &\quad:\quad \text{Skalar} \\
\bar{\psi}_1(x)\ \gamma^\mu\ \psi_2(x) &\quad:\quad \text{Vierervektor} \\
\bar{\psi}_1(x)\ \sigma^{\mu\nu}\ \psi_2(x) &\quad:\quad \text{Tensor 2. Stufe} \\
\bar{\psi}_1(x)\ \gamma^\mu\ \gamma^5\ \psi_2(x) &\quad:\quad \text{Vierer} - \text{Pseudovektor} \\
\bar{\psi}_1(x)\ \gamma^5\ \psi_2(x) &\quad:\quad \text{Pseudoskalar.}
\end{aligned} \tag{2.69}$$

Insbesondere ist der Strom (2.23) ein Vierervektor.

2.4 Lösungen der freien Dirac-Gleichung

Wir haben bereits gesehen, daß die Dirac-Gleichung Lösungen in Form von ebenen Wellen besitzt (2.3). Um die dort noch offengebliebenen Spinoren $\psi(0)$ (bzw. eine zweckmäßige Basis dafür) zu finden, betrachten wir Lösungen zu positiver und negativer Energie getrennt:

$$\psi_+(x) = u(\mathbf{p})\exp\{-i(Et - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x})\}, \qquad \psi_-(x) = v(\mathbf{p})\exp\{+i(Et - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x})\} \tag{2.70}$$

Nach Einsetzen in Gleichung (2.1) erhalten wir

$$(\mathbf{p}\cdot\vec{\alpha}+M\beta)u(\mathbf{p})=E_p u(\mathbf{p}), \qquad (-\mathbf{p}\cdot\vec{\alpha}+M\beta)v(\mathbf{p})=-E_p v(\mathbf{p}), \tag{2.71}$$

bzw. in γ-Notation:

$$(-p_\mu\gamma^\mu+M\cdot 1_4)u(\mathbf{p})=(p_\mu\gamma^\mu+M\cdot 1_4)v(\mathbf{p})=0. \tag{2.72}$$

Um die Spinoren u und v zu bestimmen, betrachten wir zunächst den Fall $\mathbf{p}=0$ (d.h. wir bestimmen den Spinor im Ruhesystem des Dirac-Teilchens). Dort wird (2.72) zu

$$\gamma^0 u(0)=u(0), \qquad \gamma^0 v(0)=-v(0). \tag{2.73}$$

Wir können nun für $u(0)$ bzw. $v(0)$ irgend zwei – zweckmäßigerweise orthonormierte – Eigenspinoren zu γ^0 zum Eigenwert +1 bzw. -1 wählen, die wir mit $u_r(0)$, $v_r(0)$, $r=\pm$, bezeichnen. Wegen $Tr(\gamma^0)=0$ tritt jeder der beiden Eigenwerte zweimal auf. Da die Matrizen (2.28) mit γ^0 kommutieren, können $u_r(0)$ und $v_r(0)$ insbesondere als gleichzeitige Eigenspinoren von $\mathbf{\Sigma}\cdot\mathbf{a}$ zu den Eigenwerten ±1 gewählt werden, wobei $\mathbf{a}$ ein beliebiger Einheitsvektor ist, denn nach (2.56) gilt

$$(\mathbf{\Sigma}\cdot\mathbf{a})^2=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})\cdot 1_4=1_4. \tag{2.74}$$

Man wählt meist $\mathbf{a}=(0,0,1)$ und hat dann

$$\Sigma^3 u_s(0)=s\ u_s(0), \qquad \Sigma^3 v_s(0)=s\ v_s(0). \tag{2.75}$$

Die so bestimmten 4 Basisspinoren normiert man gemäß

$$\bar{u}_r(0)u_s(0)=\delta_{rs}, \qquad -\bar{v}_r(0)v_s(0)=\delta_{rs}. \tag{2.76}$$

Natürlich ist dann auch

$$\bar{u}_r(0)v_s(0)=\bar{v}_r(0)u_s(0)=0, \tag{2.77}$$

weil u und v zu verschiedenen Eigenwerten von γ^0 gehören. Ihre Vollständigkeit läßt sich dann schreiben als

$$\sum_{s=\pm}[u_s(0)\bar{u}_s(0)-v_s(0)\bar{v}_s(0)]=1_4 \tag{2.78}$$

und die Bilinearentwicklung von γ^0 nach seinen Eigenspinoren als

$$\sum_{s=\pm}[u_s(0)\bar{u}_s(0)+v_s(0)\bar{v}_s(0)]=\gamma^0. \tag{2.79}$$

Daraus folgt, daß die Matrizen

$$\sum_s u_s(0)\bar{u}_s(0)=\frac{1}{2}(1_4+\gamma^0)\equiv\Lambda_+(0), \qquad -\sum_s v_s(0)\bar{v}_s(0)=\frac{1}{2}(1_4-\gamma^0)\equiv\Lambda_-(0), \tag{2.80}$$

mit

$$\Lambda_r(0)\Lambda_s(0)=\delta_{rs}\Lambda_r(0) \qquad r,s=\pm \tag{2.81}$$

die Eigenschaften von **Projektionsoperatoren** auf die Lösungen zu $\mathbf{p} = 0$ und positiver bzw. negativer Ruheenergie $\pm M$ besitzen.

In der Standarddarstellung sind alle diese Beziehungen nahezu unmittelbar klar; hier ist (in Zweierblöcken)

$$u_r(0) = \begin{pmatrix} \chi_r \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_r = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_r \end{pmatrix} \qquad \text{mit } \chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.82}$$

und (als 4×4 Matrix)

$$\Lambda_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.83}$$

Um zum Impuls $\mathbf{p} \neq 0$ überzugehen, braucht man nun lediglich eine Lorentztransformation auszuführen, *d.h.* die zum Lorentzboost gehörende Transformation (2.60) anzuwenden

$$\Lambda : (M, 0, 0, 0) \to (\sqrt{p^2 + M^2}, \mathbf{p}). \tag{2.84}$$

Die zugehörige Geschwindigkeit ist gegeben durch

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{E_p}. \tag{2.85}$$

Nach (2.59) erhält man daher für die Parameter von (2.60) mit $\mathbf{p}_e = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$ und $\cosh(b) = E_p/M$,

$$\begin{aligned} \cosh(\frac{b}{2}) &= \sqrt{\frac{1}{2}(\cosh(b) + 1)} = N_p \; (E_p + M), \\ \sinh(\frac{b}{2}) &= \sqrt{\frac{1}{2}(\cosh(b) - 1)} = N_p \; |\mathbf{p}|, \end{aligned} \tag{2.86}$$

mit

$$N_p = \frac{1}{\sqrt{2M(E_p + M)}}. \tag{2.87}$$

Die gesuchte Matrix ist also nach (2.59), (2.60)

$$S_p = N_p \; (M \cdot 1_4 + p_\mu \gamma^\mu \gamma^0)_{p^0 = E_p}. \tag{2.88}$$

Damit ergeben sich die Spinoren für ein Dirac-Teilchen mit Impuls $\mathbf{p}$ zu

$$u_r(\mathbf{p}) = N_p \; (M \cdot 1_4 + p_\mu \gamma^\mu) \; u_r(0), \qquad v_r(\mathbf{p}) = N_p \; (M \cdot 1_4 - p_\mu \gamma^\mu) \; v_r(0), \tag{2.89}$$

welche Gleichung (2.72) lösen wegen

$$(M + p_\mu \gamma^\mu)(M - p_\mu \gamma^\mu) = M^2 - p_\mu p_\nu \frac{1}{2}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 0. \tag{2.90}$$

Da die linken Seiten von (2.76) Lorentz-Invarianten sind, folgt sofort die Normierung

$$\bar{u}_r(\mathbf{p})u_s(\mathbf{p}) = -\bar{v}_r(\mathbf{p})v_s(\mathbf{p}) = \delta_{rs}, \qquad \bar{u}_r(\mathbf{p})v_s(\mathbf{p}) = \bar{v}_r(\mathbf{p})u_s(\mathbf{p}) = 0. \tag{2.91}$$

Um die allgemeinen Projektoren auf die Lösungsräume zu positiver und negativer Energie beim Impuls $\mathbf{p}$ zu berechnen,

$$\Lambda_+(\mathbf{p}) = S_p\Lambda_+(0)S_p^{-1} = \sum_s u_s(\mathbf{p})\bar{u}_s(\mathbf{p}), \qquad \Lambda_-(\mathbf{p}) = S_p\Lambda_-(0)S_p^{-1} = -\sum_s v_s(\mathbf{p})\bar{v}_s(\mathbf{p}) \tag{2.92}$$

benutzen wir

$$\begin{aligned} S_p\gamma^0 S_p^{-1} &= N_p^2(M\cdot 1_4 + p_\mu\gamma^\mu\gamma^0)\gamma^0(M\cdot 1_4+\gamma^0 p_\mu\gamma^\mu) \qquad (2.93)\\ &= N_p^2\left[M^2\gamma^0 + 2\ Mp_\mu\gamma^\mu + p_\mu\gamma^\mu p_\nu(2g^{0\nu}-\gamma^\nu\gamma^0)\right]\\ &= N_p^2\left[2Mp_\mu\gamma^\mu + 2\ p_\mu\gamma^\mu p^0 + (M^2 - p_\mu\gamma^\mu p_\nu\gamma^\nu)\gamma^0\right]\\ &= \frac{1}{M}\ p_\mu\gamma^\mu \end{aligned}$$

und erhalten

$$\Lambda_\pm(\mathbf{p}) = \frac{1}{2M}(M\cdot 1_4 \pm p_\mu\gamma^\mu)_{p^0=E_p}. \tag{2.94}$$

Die Vollständigkeit (2.78) wird dann zu

$$\sum_s[u_s(\mathbf{p})\bar{u}_s(\mathbf{p}) - v_s(\mathbf{p})\bar{v}_s(\mathbf{p})] = 1_4. \tag{2.95}$$

Bemerkung: Die Spin-Eigenwertgleichung (2.75) gilt nicht für endliche $\mathbf{p}$, da Σ^3 nicht mit S_p vertauscht.

In der Standarddarstellung sind die 4 Basisspinoren gegeben durch

$$u_s(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2M(E_p+M)}}\begin{pmatrix}(E_p+M)\chi_s\\ (\vec{\sigma}\cdot\mathbf{p})\chi_s\end{pmatrix},\ v_s(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2M(E_p+M)}}\begin{pmatrix}(\vec{\sigma}\cdot\mathbf{p})\chi_s\\ (E_p+M)\chi_s\end{pmatrix} \tag{2.96}$$

oder explizit

$$u_+(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2M(E_p+M)}}\begin{pmatrix}E_p+M\\ 0\\ p^3\\ p^1+ip^2\end{pmatrix};\ u_-(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2M(E_p+M)}}\begin{pmatrix}0\\ E_p+M\\ p^1-ip^2\\ -p^3\end{pmatrix}; \tag{2.97}$$

$$v_+(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2M(E_p+M)}}\begin{pmatrix}p^3\\ p^1+ip^2\\ E_p+M\\ 0\end{pmatrix};\ v_-(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2M(E_p+M)}}\begin{pmatrix}p^1-ip^2\\ -p^3\\ 0\\ E_p+M\end{pmatrix}. \tag{2.98}$$

Wie man leicht nachrechnet, ergeben z.B. die Matrixelemente mit den u- und v-Spinoren

$$\bar{u}_s(\mathbf{p})\gamma^\mu u_s(\mathbf{p}) = \frac{p^\mu}{M} = \bar{v}_s(\mathbf{p})\gamma^\mu v_s(\mathbf{p}), \tag{2.99}$$

so daß die Matrixelemente der Dirac-Gleichung (2.72) (nach Multiplikation mit M)

$$M\bar{u}_s(\mathbf{p})\left(-p_\mu\gamma^\mu + M\cdot 1_4\right)u_s(\mathbf{p}) = -p_\mu p^\mu + M^2 = 0 \tag{2.100}$$

gerade die freie Dispersionsrelation $p_0^2 = \mathbf{p}^2 + M^2$ liefert.

In der Darstellung (1.105) werden im nichtrelativistischen Grenzfall $|\mathbf{p}| << M$ die beiden unteren Komponenten von u_s um einen Faktor $|\mathbf{p}|/(2M)$ kleiner als die oberen Komponenten, während bei v_s die Verhältnisse umgekehrt liegen.

Die Beziehung von u_s und v_s läßt sich mit (2.25) darstellen als

$$\gamma^5 u_s(\mathbf{p}) = v_s(\mathbf{p}), \qquad \gamma^5 v_s(\mathbf{p}) = u_s(\mathbf{p}); \tag{2.101}$$

die Chiralitätsmatrix γ^5 vertauscht also u- und v-Spinoren.

Ergänzend sei noch die explizite Form des Lorentzboosts für die Transformation (2.84) aufgeführt (mit der Abkürzung $N_E = M(E_p + M)$):

$$\Lambda^\mu{}_\nu(p) = \begin{pmatrix} E_p/M & -p_1/M & -p_2/M & -p_3/M \\ p^1/M & 1 - p^1p_1/N_E & -p^1p_2/N_E & -p^1p_3/N_E \\ p^2/M & -p^2p_1/N_E & 1 - p^2p_2/N_E & -p^2p_3/N_E \\ p^3/N_E & -p^3p_1/N_E & -p^3p_2/N_E & 1 - p^3p_3/N_E \end{pmatrix}. \tag{2.102}$$

Kapitel 3

Das Dirac-Feld

3.1 Quantisierung mit Antikommutatoren

Um zu einer Quantentheorie für das klassische Dirac-Feld überzugehen, konstruieren wir (wie im Falle des skalaren Feldes Φ) zunächst eine Lagrangedichte $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\psi, \bar{\psi}, \partial_\mu \psi, \partial_\mu \bar{\psi})$, die bei Anwendung des Hamiltonschen Prinzips die Dirac-Gleichung (2.18) ergibt. Dies leistet:

$$\mathcal{L}(x) = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - M)\psi(x). \tag{3.1}$$

Der nächste Schritt besteht darin, kanonisch konjugierte Felder zu ψ und $\bar{\psi}$ zu bilden:

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^0 \psi)} = i\bar{\psi}(x)\gamma^0 = i\psi^\dagger, \qquad \bar{\pi}(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^0 \bar{\psi})} = 0. \tag{3.2}$$

Wir erhalten hier kein zweites kanonisch-konjugiertes Feld, da $\bar{\psi}$ im wesentlichen selbst schon das kanonisch-konjugierte Feld zu ψ ist. Für π und ψ wären nun nach dem kanonischen Schema die VR (1.33) zu fordern, womit $\mathcal{L}$ und die daraus folgende **Hamiltonfunktion**

$$H = \int d^3x \; \mathcal{H}(x) \tag{3.3}$$

mit

$$\mathcal{H}(x) = \pi(x)\partial^0\psi(x) - \mathcal{L}(x) = \bar{\psi}(x)(-i\gamma^k \cdot \nabla^k + M)\psi(x) = \psi^\dagger(x)(-i\alpha^k \cdot \nabla^k + \beta M)\psi(x) \tag{3.4}$$

Operatorcharakter erhalten. Das gleiche gilt dann auch für den Impuls des Dirac-Feldes

$$P^k = \int d^3x \; [\pi(x)\partial^k\psi(x)] = \int d^3x \; [\psi^\dagger(x)\frac{1}{i} \; \frac{\partial}{\partial x^k}\psi(x)]. \tag{3.5}$$

Die Forderung kanonischer VR führt allerdings zu charakteristischen Schwierigkeiten. Dieses wird deutlich in der zu (1.47) analogen Fourierzerlegung nach ebenen (Spinor)- Wellen, in denen die Koeffizienten c_r, d_r .. den Charakter von Operatoren haben:

$$\psi(x) = \int d^3p \; \frac{M}{E_p} \; \sum_r \; [c_r(\mathbf{p})u_r(\mathbf{p})f_p(x) + d_r^\dagger(\mathbf{p})v_r(\mathbf{p})f_p^*(x)], \tag{3.6}$$

$$\bar{\psi}(x) = \int d^3p \ \frac{M}{E_p} \ \sum_r \ [c_r^\dagger(\mathbf{p})\bar{u}_r(\mathbf{p})f_p^*(x) + d_r(\mathbf{p})\bar{v}_r(\mathbf{p})f_p(x)].$$

In (3.6) haben wir das invariante Volumenelement bei Dirac-Feldern konventionsbedingt als $d^3p\ M/E_p$ und nicht als $d^3p/(2E_p)$ gewählt. Mit Hilfe der ebenen Wellen (1.15) und der Orthonormierung der $u - und\ v-$Spinoren,

$$\bar{u}_r(\mathbf{p})u_s(\mathbf{p}) = -\bar{v}_r(\mathbf{p})v_s(\mathbf{p}) = \delta_{rs}, \tag{3.7}$$

lassen sich die Entwicklungen umkehren,

$$c_r(\mathbf{p}) = (2\pi)^{-3/2} \int d^3x \ \ \exp(ip\cdot x)\bar{u}_r(\mathbf{p})\gamma^0\psi(x), \tag{3.8}$$

$$d_r(\mathbf{p}) = (2\pi)^{-3/2} \int d^3x \ \ \exp(ip\cdot x)\bar{\psi}(x)\gamma^0 v_r(\mathbf{p})$$

mit $r = \pm$ unter Berücksichtigung von (3.10). Die Umrechnung des Hamiltonoperators auf die Operatoren c, d ergibt:

$$\begin{aligned}
H \ &= \ \frac{1}{(2\pi)^3}\sum_{r,s}\int d^3p' \frac{M}{E_{p'}}\int d^3p \ \frac{M}{E_p}\int d^3x \qquad\qquad (3.9)\\
&\times \ \{ \ c_r^\dagger(\mathbf{p}')c_s(\mathbf{p}) \ \exp[+i(p'-p)\cdot x] \ u_r^\dagger(\mathbf{p}') \ (\alpha^k\cdot p^k + \beta M) \ u_s(\mathbf{p})\\
&+ \ d_r(\mathbf{p}')c_s(\mathbf{p}) \ \exp[-i(p'+p)\cdot x] \ v_r^\dagger(\mathbf{p}') \ (\alpha^k\cdot p^k + \beta M) \ u_s(\mathbf{p})\\
&+ \ c_r^\dagger(\mathbf{p}')d_s^\dagger(\mathbf{p}) \ \exp[+i(p'+p)\cdot x] \ u_r^\dagger(\mathbf{p}') \ (-\alpha^k\cdot p^k + \beta M) \ v_s(\mathbf{p})\\
&+ \ d_r(\mathbf{p}')d_s^\dagger(\mathbf{p}) \ \exp[-i(p'-p)\cdot x] \ v_r^\dagger(\mathbf{p}') \ (-\alpha^k\cdot p^k + \beta M) \ v_s(\mathbf{p}) \ \}_{p^0=E_p;p'^0=E_{p'}}.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Dirac-Gleichung für die Spinoren (2.71) und der daraus folgenden Beziehung

$$u_r^\dagger(\mathbf{p})u_s(\mathbf{p}) = v_r^\dagger(\mathbf{p})v_s(\mathbf{p}) = \frac{E_p}{M}\ \delta_{rs}, \qquad u_r^\dagger(\mathbf{p})v_s(\mathbf{p}) = v_r^\dagger(\mathbf{p})u_s(\mathbf{p}) = 0 \tag{3.10}$$

vereinfacht sich H nach Integration über d^3x und Bildung der Spur über Dirac-Indizes zu

$$H = \sum_r \int d^3p \ \frac{M}{E_p} \ [E_p c_r^\dagger(\mathbf{p})c_r(\mathbf{p}) - E_p d_r(\mathbf{p})d_r^\dagger(\mathbf{p})]. \tag{3.11}$$

Im Gegensatz zum Klein-Gordon-Feld (1.53) ist die Energie — wegen des Minus-Zeichens im $d_r d_r^\dagger$ Term — **nicht nach unten beschränkt**. Selbst nach Normalordnung, *d.h.* Umkehrung der Operatoren-Reihenfolge in $\sum_r d_r^\dagger d_r$, ist das Grundpostulat eines Zustandes niedrigster Energie nicht erfüllt!

Dieses Problem ist nur durch Änderung der Quantisierungsvorschrift selbst zu beheben: man muß fordern, daß die Umkehr der Reihenfolge in einem Operatorprodukt zugleich das Vorzeichen ändert, *d.h.* daß die Operatoren den **Antikommutator-Relationen** statt den Kommutator-Relationen (1.33) genügen. Statt (1.33) ist daher zu fordern

$$\{c_r(\mathbf{p}), c_s^\dagger(\mathbf{p}')\} = \{d_r(\mathbf{p}), d_s^\dagger(\mathbf{p}')\} = \frac{E_p}{M}\ \delta_{rs}\ \delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}'), \tag{3.12}$$

$$\{c_r(\mathbf{p}), c_s(\mathbf{p}')\} = \{d_r(\mathbf{p}), d_s(\mathbf{p}')\} = \{c_r(\mathbf{p}), d_s^\dagger(\mathbf{p}')\} = \{d_r^\dagger(\mathbf{p}), c_s^\dagger(\mathbf{p}')\} = 0.$$

Dann wird in (3.11) $-d_r d_r^\dagger = d_r^\dagger d_r - E_p/M \ \delta(0)$. Die unendliche Konstante $-\delta(0) \int d^3p \ E_p$ wird 'renormiert', *d.h.* in die Energie des Vakuumzustandes einbezogen, von dem aus alle anderen Energien gemessen werden.

Formal ist dieses Verfahren gleichwertig mit einer Neudefinition der **Normalordnung für Produkte von Dirac-Operatoren** durch Einbeziehung eines Faktors $(-)^p$, wobei p die Zahl der Vertauschungen von **Dirac**-Operatoren ist, die zur Herstellung der Normalordnung erforderlich sind. Ein einfaches Beispiel ist:

$$: x_r(\mathbf{p}) y_s^\dagger(\mathbf{p}') := -y_s^\dagger(\mathbf{p}') x_r(\mathbf{p}) \tag{3.13}$$

für $x, y \equiv c$ oder d .

Die so **normalgeordnete Hamiltondichte**

$$\mathcal{H}(x) =: \psi^\dagger(x)(-i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta M)\psi(x) : \tag{3.14}$$

und der **normalgeordnete Impulsoperator** (3.5)

$$\mathbf{P} = \int d^3x : \psi^\dagger(x)(\frac{1}{i}\vec{\nabla})\psi(x) : \tag{3.15}$$

sowie die zum Viererstrom gehörende **Gesamt-'Ladung'**

$$Q = \int d^3x \ j^0(x) \qquad \text{mit } j^0(x) =: \psi^\dagger(x)\psi(x) : \tag{3.16}$$

ergeben dann mit den Entwicklungen (3.6) die zum Klein-Gordon-Feld analogen Ausdrücke $(P^0 = H)$:

$$\begin{aligned} P^\mu &= \sum_r \int d^3p \ p^\mu \ [N_{c,r}(\mathbf{p}) + N_{d,r}(\mathbf{p})] \qquad (p^0 = E_p), \\ Q &= \sum_r \int d^3p \ [N_{c,r}(\mathbf{p}) - N_{d,r}(\mathbf{p})], \end{aligned} \tag{3.17}$$

mit den Operatoren

$$N_{c,r}(\mathbf{p}) = c_r^\dagger(\mathbf{p}) c_r(\mathbf{p}) \frac{M}{E_p}, \qquad N_{d,r}(\mathbf{p}) = d_r^\dagger(\mathbf{p}) d_r(\mathbf{p}) \frac{M}{E_p}. \tag{3.18}$$

Aus ihnen folgen über die 'Step-up' und 'Step-down' Relationen

$$\begin{aligned} [P^\mu, c_r^\dagger(\mathbf{p})] &= p^\mu c_r^\dagger(\mathbf{p}), \qquad [P^\mu, d_r^\dagger(\mathbf{p})] = p^\mu d_r^\dagger(\mathbf{p}), \qquad (p^0 = E_p) \\ [Q, c_r^\dagger(\mathbf{p})] &= +c_r^\dagger(\mathbf{p}), \qquad [Q, d_r^\dagger(\mathbf{p})] = -d_r^\dagger(\mathbf{p}) \end{aligned} \tag{3.19}$$

sofort die Interpretation der $c_r^\dagger(\mathbf{p})$ als **Erzeugungsoperatoren für Dirac-Feldquanten** oder Dirac-Teilchen mit Impuls $\mathbf{p}$, Energie E_p und Spinindex r. Die $d_r^\dagger(\mathbf{p})$ sind dann die

Erzeugungsoperatoren der zugehörigen **Antiteilchen** und die Größen (3.18) sind Teilchenzahldichten im Impulsraum für Spinstellung r.

Die über den Impulsraum integrierten Größen

$$\hat{N}_{c,r} = \int d^3p \; N_{c,r}(\mathbf{p}) \qquad \text{und} \quad \hat{N}_{d,r} = \int d^3p \; N_{d,r}(\mathbf{p}) \tag{3.20}$$

sind folglich **Teilchenzahloperatoren** für Dirac-Teilchen und deren Antiteilchen. Die Zustände

$$|c; p, s >= c_s^\dagger(\mathbf{p})|0 >, \qquad |d; p, s >= d_s^\dagger(\mathbf{p})|0 > \tag{3.21}$$

schließlich sind **Einteilchenzustände** für Teilchen bzw. Antiteilchen, wobei $|0>$ wieder der durch

$$c_s(\mathbf{p})|0 >= d_s(\mathbf{p})|0 >= 0 \qquad \forall(\mathbf{p}, s) \tag{3.22}$$

mit

$$< 0|0 >= 1 \tag{3.23}$$

und

$$p^\mu|0 >= 0 \qquad \text{und} \qquad Q|0 >= 0 \tag{3.24}$$

charakterisierte **Vakuumzustand** ist.

Bei **Mehrteilchenzuständen** vom Typ

$$|\Psi_{m,n} >\sim d_{s_n}^\dagger(\mathbf{q}_n)...d_{s_1}^\dagger(\mathbf{q}_1) \; c_{r_m}^\dagger(\mathbf{p}_m)...c_{r_1}^\dagger(\mathbf{p}_1)|0 > \tag{3.25}$$

ist zu beachten, daß die Antikommutator-Algebra (3.12) beinhaltet

$$c_{r_1}^\dagger(\mathbf{p}_1)c_{r_2}^\dagger(\mathbf{p}_2) = -c_{r_2}^\dagger(\mathbf{p}_2)c_{r_1}^\dagger(\mathbf{p}_1) \tag{3.26}$$

sowie

$$c_r^\dagger(\mathbf{p})d_s^\dagger(\mathbf{q}) = -d_s^\dagger(\mathbf{q})c_r^\dagger(\mathbf{p}), \tag{3.27}$$

d.h. die Zustände (3.25) sind antisymmetrisch bei Vertauschung zweier beliebiger Quantenzahlen für Teilchen oder Antiteilchen. Das kräftefreie Dirac-Feld beschreibt also ein System unabhängiger Fermionen und Antifermionen.

Schließlich zeigt man analog zu (1.76), daß

$$\psi_{c,p,s}(x) =< 0|\psi(x)|p, s; c >= u_s(\mathbf{p})f_p(x), \tag{3.28}$$

$$\bar{\psi}_{d,p,s}(x) =< 0|\bar{\psi}(x)|p, s; d >= \bar{v}_s(\mathbf{p})f_p(x) \tag{3.29}$$

wieder die (spinorielle) Einteilchenwellenfunktion für ein c-Teilchen bzw. die Pauli-adjungierte Einteilchenwellenfunktion für ein d-Teilchen darstellen.

3.2 Antikommutatoren für Feldoperatoren

Für gleiche Zeiten ergibt die Anwendung der VR (3.12) für das dyadische Produkt der Feldoperatoren $\psi(x)\bar{\psi}(y) + \bar{\psi}(y)\psi(x)$:

$$\{\psi(x), \bar{\psi}(y)\}_{y^0=x^0} = \gamma^0 \delta^3(y-x), \tag{3.30}$$

und

$$\{\psi(x), \psi(y)\}_{y^0=x^0} = 0. \tag{3.31}$$

Für ungleiche Zeiten ergibt (3.12) mit (3.6)

$$\begin{aligned}
\{\psi(x), \bar{\psi}(y)\} &= (2\pi)^{-3} \int\int d^3p \; d^3p' \frac{M}{E_p} \frac{M}{E_{p'}} \sum_{r,s} \qquad (3.32)\\
&\quad \times \Big[\{c_r(\mathbf{p}), c_s^\dagger(\mathbf{p}')\} \; u_r(\mathbf{p})\bar{u}_s(\mathbf{p}') \; \exp(-i[p\cdot x - p'\cdot y])\\
&\quad + \{d_r^\dagger(\mathbf{p}), d_s(\mathbf{p}')\} \; v_r(\mathbf{p})\bar{v}_s(\mathbf{p}') \; \exp(i[p\cdot x - p'\cdot y])\Big]_{p^0=E_p}\\
&\quad + \text{Terme mit verschwindenden Antikommutatoren}\\
&= (2\pi)^{-3} \int d^3p \; \frac{M}{E_p} \; \Big[\sum_r \; u_r(\mathbf{p})\bar{u}_r(\mathbf{p}) \; \exp(-ip\cdot(x-y))\\
&\qquad - (-\sum_r v_r(\mathbf{p})\bar{v}_r(\mathbf{p})) \; \exp(ip\cdot(x-y))\Big]_{p^0=E_p} .
\end{aligned}$$

Nach (2.92), (2.94) gilt dann

$$\begin{aligned}
\{\psi(x), \bar{\psi}(y)\} &= (2\pi)^{-3} \int \frac{d^3p}{2E_p} \; [(M\cdot 1_4 + p_\mu\gamma^\mu) \; \exp(-ip\cdot(x-y) \qquad (3.33)\\
&\qquad - (M\cdot 1_4 - p_\mu\gamma^\mu) \; \exp(ip\cdot(x-y))]_{p^0=E_p}\\
&= (M\cdot 1_4 + i\gamma^\mu\partial_\mu) \; (2\pi)^{-3} \int \frac{d^3p}{2E_p} \; [\exp(-ip\cdot(x-y) - \exp(ip\cdot(x-y))]_{p^0=E_p}\\
&= (M\cdot 1_4 + i\gamma^\mu\partial_\mu) \; [i \; \Delta(x-y; M)]
\end{aligned}$$

mit der Schwinger'schen Δ-Funktion von (1.159) und (1.161). Mit der Bezeichnung

$$S(x; M) = -(M\cdot 1_4 + i\gamma^\mu\partial_\mu) \; \Delta(x; M) \tag{3.34}$$

erhalten wir also die auf beliebige Zeiten für freie Dirac-Teilchen verallgemeinerte Antikommutator-Relationen

$$\{\psi(x), \bar{\psi}(y)\} = -iS(x-y; M), \qquad \{\psi(x), \psi(y)\} = 0. \tag{3.35}$$

Mit $\Delta(x, M)$ ist auch die Matrixfunktion $S(x; M) \equiv 0$ für raumartige Argumente,

$$\{\psi(x), \bar{\psi}(y)\} = 0 \qquad \text{falls } (x-y)^2 < 0. \tag{3.36}$$

Dieses Verhalten sichert ebenso wie (1.170) beim Klein-Gordon-Feld das Verschwinden der **Kommutatoren** von meßbaren Größen bei raumartigen Abständen, weil **Meßgrößen stets bilinear** in $\bar{\psi}$, ψ sind.

Nach der allgemeinen Operatoridentität (ÜB)

$$[AB, CD] = A\{B, C\}D - C\{D, A\}B - \{A, C\}BD + CA\{B, D\} \tag{3.37}$$

ist also für zwei Meßgrößen

$$M_{1,2} = \bar{\psi}(x)\Gamma_{A_1,A_2}\psi(x) \tag{3.38}$$

der Kommutator für verschiedene Weltpunkte durch

$$\begin{aligned}
[M_1(x), M_2(y)] &= \sum_{\alpha,\beta=1}^{4} \sum_{\kappa,\lambda=1}^{4} (\Gamma_{A_1})_{\alpha\beta}(\Gamma_{A_2})_{\kappa\lambda} \qquad (3.39) \\
&\quad \times \left[\bar{\psi}_\alpha(x)\{\psi_\beta(x), \bar{\psi}_\kappa(y)\}\psi_\lambda(x) - \bar{\psi}_\kappa(y)\{\psi_\lambda(y), \bar{\psi}_\alpha(x)\}\psi_\beta(x)\right] \\
&\quad + \text{verschwindende } \{..\} \\
&= -i\, [\bar{\psi}(x)\Gamma_{A_1}\ S(x-y; M)\ \Gamma_{A_2}\psi(y) - \bar{\psi}(y)\Gamma_{A_2}\ S(y-x; M)\ \Gamma_{A_1}\psi(x)]
\end{aligned}$$

gegeben, also Null für $(x-y)^2 < 0$. Damit ist die **Mikrokausalität auch für das Dirac-Feld** gewährleistet.

3.3 Die Greensche Funktion des freien Dirac-Feldes

Die **Zweipunktfunktion** des freien Dirac-Feldes ist analog zu (1.185) durch

$$G^0(x, y) = -i < 0|T[\psi(x)\bar{\psi}(y)]|0 > \tag{3.40}$$

definiert, aber jetzt eine 4×4 Matrix. Die Zeitordnungsvorschrift (1.186) ergänzt man dabei für Dirac- und andere Fermionfelder durch einen Vorfaktor $(-)^p$, wobei p die Anzahl der Vertauschungen von Fermion-Operatoren ist, um ein beliebiges Produkt von Feldoperatoren in die zeitgeordnete Reihenfolge zu bringen, $z.B.$

$$T[\psi(x)\bar{\psi}(y)] = \Theta(x^0 - y^0)\psi(x)\bar{\psi}(y) - \Theta(y^0 - x^0)\bar{\psi}(y)\psi(x). \tag{3.41}$$

Man zeigt durch eine zu (1.189) und (3.35) analoge Rechnung (ÜB)

$$\begin{aligned}
G^0(x, y) &= -i \left[\Theta(x^0-y^0)(-i\ S^{(+)}(x-y; M)) - \Theta(y^0-x^0)(-i\ S^{(-)}(x-y, M)\right] \qquad (3.42) \\
&= (M \cdot 1_4 + i\gamma^\mu\partial_\mu) \left[\Theta(x^0-y^0)\Delta^{(+)}(x-y) - \Theta(y^0-x^0)\Delta^{(-)}(y-x)\right] \\
&= (M \cdot 1_4 + i\gamma^\mu\partial_\mu)\Delta_F(x-y) \\
&= S_F(x-y; M).
\end{aligned}$$

In (3.42) sind dabei $S^{(+)}$, $S^{(-)}$ die allein mit den positiven bzw. negativen Frequenzanteilen berechneten Teilstücke von $S(x-y;M)$, *d.h.*

$$\begin{aligned} S^{(\pm)}(x;M) &= -(M\cdot 1_4 + i\gamma^\mu\partial_\mu)\ \Delta^{(\pm)}(x,M) \qquad (3.43)\\ &= i(2\pi)^{-3}\int d^3p\ \frac{M}{E_p}\ [\pm\Lambda_\pm(p)\exp(-\pm ip\cdot x)]_{p^0=E_p} \\ &= i(2\pi)^{-3}\int d^4p\ \delta(p^2-M^2)\ [\pm\Theta(\pm p^0)\ (M\cdot 1_4+\gamma^\mu p_\mu)]\exp(-ip\cdot x) \end{aligned}$$

mit

$$S^{(+)}(x;M)+S^{(-)}(x;M)=S(x;M). \qquad (3.44)$$

In (3.43) wurden die Projektionsmatrizen $\Lambda_\pm$ von (2.92) verwendet. Der in (3.42) definierte **kausale (Feynman'sche) Propagator für Dirac-Felder**,

$$S_F(x;M)=(M\cdot 1_4+i\ \gamma^\mu\partial_\mu)\Delta_F(x;M) \qquad (3.45)$$

hat nach (1.180) die Fourierdarstellung

$$S_F(x;M)=(2\pi)^{-4}\int d^4p\ S_F(p;M)\exp(-ip\cdot x) \qquad (3.46)$$

mit

$$S_F(p;M)=\frac{M\cdot 1_4+p_\mu\gamma^\mu}{p^2-M^2+i\eta}. \qquad (3.47)$$

Alternativ kann man auch (für $i\eta\to 0^+$) schreiben

$$S_F(p)=\frac{1}{p_\mu\gamma^\mu-M\cdot 1_4} \qquad (3.48)$$

unter Benutzung von

$$(M\cdot 1_4+p_\mu\gamma^\mu)\ (M\cdot 1_4-p_\mu\gamma^\mu)=M^2-p^2. \qquad (3.49)$$

Infolge von (1.182) und

$$(-i\gamma^\mu\partial_\mu+M\cdot 1_4)\ (i\gamma^\mu\partial_\mu+M\cdot 1_4)=(\partial_\mu\partial^\mu+M^2)\cdot 1_4 \qquad (3.50)$$

ist $S_F(x)$ die Greensche Funktion des Dirac-Problems in dem Sinne, daß

$$(-i\gamma^\mu\partial_\mu+M\cdot 1_4)S_F(x-x';M)=-\delta^4(x-x')\cdot 1_4. \qquad (3.51)$$

3.4 Transformationseigenschaften

Bei raum-zeitlichen Translationen werden die 4 Komponenten des Spinorfeldes nicht vermischt, so daß hier weitgehend analoge Gleichungen zum Klein-Gordon-Feld gelten. So zeigt man mit Hilfe von (3.30) für den Vierer-Impulsoperator (3.14,3.15) (ÜB)

$$[P^\mu,\psi(x)]=-i\ \partial^\mu\psi(x) \qquad (3.52)$$

und damit (wie beim skalaren Feld Φ)

$$U^{-1}(a)\psi(x+a)U(a) = \psi(x) \tag{3.53}$$

für $x \to x' = x + a$ mit dem unitären Operator

$$U(a) = \exp(ia_\mu P^\mu) = (U^{-1}(a))^\dagger. \tag{3.54}$$

Die Gleichungen (3.52) stellen wiederum die Bewegungsgleichungen im Heisenberg-Bild dar.

Bei **homogenen Lorentztransformationen** $x \to \Lambda x$ nach (1.78) ist das Verhalten komplizierter. Das klassische Dirac-Feld transformiert sich hier gemäß (2.46) mit der Spinordarstellung $S(\Lambda)$ der Lorentzgruppe

$$S(\Lambda) = \exp(-\frac{i}{4}\ \alpha_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}). \tag{3.55}$$

Wir erwarten nach dem Ehrenfest'schen Theorem, daß in der quantisierten Theorie dasselbe Verhalten für Erwartungswerte in Feldzuständen $|\Xi>$,

$$< \Xi|\psi(x)|\Xi > \tag{3.56}$$

gilt, *d.h.*

$$< \Xi'|\psi(\Lambda x)|\Xi' > = < \Xi|U^\dagger(\Lambda)\psi(\Lambda x)U(\Lambda)|\Xi > = S(\Lambda) < \Xi|\psi(x)|\Xi > \ \text{ mit } |\Xi' > = U(\Lambda)|\Xi > \tag{3.57}$$

mit dem durch Λ induzierten Operator $U(\Lambda)$. Wegen der Beliebigkeit von $|\Xi >$ muß dann gelten

$$U^\dagger(\Lambda)\psi(\Lambda x)U(\Lambda) = S(\Lambda)\psi(x) \text{ oder } U(\Lambda)\psi(x)U^\dagger(\Lambda) = S^{-1}(\Lambda)\psi(\Lambda x). \tag{3.58}$$

Da $U(\Lambda)$ als Symmetrieoperation wieder ein unitärer Operator sein muß, schreiben wir

$$U(\Lambda) = \exp(\frac{i}{2}\ \alpha_{\mu\nu}M^{\mu\nu}), \qquad \Lambda = \Lambda(\alpha) \tag{3.59}$$

mit der antisymmetrischen Parametermatrix (1.95,1.96) von Λ. Wir betrachten zunächst wieder infinitesimale Transformationen, wo nach (3.55) gilt:

$$S^{-1}(\Lambda) \approx 1_4 + \frac{i}{4}\ \alpha_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}. \tag{3.60}$$

Wir erhalten dann aus (3.58)

$$\begin{aligned} \psi(x) + \frac{i}{2}\ \alpha_{\mu\nu}[M^{\mu\nu}, \psi(x)] &= (1_4 + \frac{i}{4}\ \alpha_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu})\psi(x^\rho + \alpha^\rho{}_\delta\ x^\delta) \qquad (3.61) \\ &= (1_4 + \frac{i}{4}\ \alpha_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu})(1_4 + \alpha^\rho{}_\delta\ x^\delta\partial_\rho)\psi(x) \\ &= (1_4 + \frac{i}{4}\ \alpha_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu})[1_4 + \frac{i}{2}\ \alpha_{\rho\delta}(\frac{1}{i}\ x^\delta\partial^\rho - \frac{1}{i}\ x^\rho\partial^\delta)]\psi(x), \end{aligned}$$

also

$$[M^{\mu\nu}, \psi(x)] = [\frac{1}{2}\,\sigma^{\mu\nu} + \frac{1}{i}(-x^\mu\partial^\nu + x^\nu\partial^\mu)]\psi(x). \tag{3.62}$$

Dieses unterscheidet sich von (1.94) für das Klein-Gordon-Feld durch den nicht auf x, sondern auf den Spinorindex von ψ wirkenden **Zusatzterm** $1/2\ \sigma^{\mu\nu}$. Seine Natur wird klar beim Spezialfall der Drehungen, wo sich $\alpha_{\mu\nu}$ auf die α_{kl} von (1.95) reduziert. Bei Drehungen treten die Matrizen

$$\frac{1}{2}\,\sigma^{kl} = \epsilon^{klm}(\frac{1}{2}\,\Sigma_m) \tag{3.63}$$

auf, die die Eigenschaften von Drehimpulskomponenten zum Betragsquadrat $1/2(1+1/2)$ haben (2.31). Betrachtet man wieder die Einteilchenwellenfunktion (3.28) im Ruhesystem mit $\mathbf{p} = 0$, wo sie von x unabhängig wird, so erhält man bei einer Drehung $\Lambda = R = R(\varphi)$

$$< 0|\psi(x)U(R(\varphi))|\mathbf{p} = 0, s; c >= \exp(-\frac{i}{2}\,\vec{\varphi}\cdot\mathbf{\Sigma}) < 0|\psi(x)|\mathbf{p} = 0, s; c > \tag{3.64}$$

und sieht, daß der **Spin** (*d.h.* der Drehimpuls im Ruhesystem) der **Dirac-Teilchen** 1/2 ist.

3.5 Diskrete Transformationen

Die folgenden Transformationen, die nicht aus der 1_4 kontinuierlich entwickelbar sind, lassen die Spinor-Feldgleichungen

$$(-i\gamma^\mu\partial_\mu + M\cdot 1_4)\psi(x) = 0, \qquad i\partial_\mu\bar{\psi}(x)\gamma^\mu + \bar{\psi}(x)M\cdot 1_4 = 0 \tag{3.65}$$

und die Antikommutatorrelationen (3.35) forminvariant.

i) **Paritätstransformation** U_p

Wir erschließen ihre Form aus Gleichung (2.63) wiederum über die Betrachtung von Erwartungswerten (3.56). Analog zu (3.58) ergibt sich

$$\begin{aligned} U_p\psi(x)U_p^{-1} &= \eta_p\gamma^0\psi(t,-\mathbf{x}), \\ U_p\bar{\psi}(x)U_p^{-1} &= \eta_p^*\bar{\psi}(t,-\mathbf{x})\gamma^0 \end{aligned} \tag{3.66}$$

mit $|\eta_p| = 1$. Anwendung auf die Entwicklungen (3.6) und der Koeffizientenvergleich unter Verwendung von

$$\gamma^0 u_s(\mathbf{p}) = u_s(-\mathbf{p}), \qquad \gamma^0 v_s(\mathbf{p}) = -v_s(-\mathbf{p}) \tag{3.67}$$

liefert dann für die Teilchenoperatoren

$$\begin{aligned} U_p c_s^\dagger(\mathbf{p})U_p^{-1} &= \eta_p^* c_s^\dagger(-\mathbf{p}), \\ U_p d_s^\dagger(\mathbf{p})U_p^{-1} &= -\eta_p d_s^\dagger(-\mathbf{p}). \end{aligned} \tag{3.68}$$

Mit der üblichen Wahl $\eta_p = \pm 1$ haben folglich (für Fermionen) **Teilchen und Antiteilchen entgegengesetzte innere Parität.** Man ordnet in der Praxis einem häufig auftretenden Dirac-Teilchen, dem **Proton**, **den Wert** $\eta_p = +1$ (aus Konvention) zu und bestimmt dann die (hierzu relative) Parität anderer Fermionen (sowie dynamisch koppelnder Bosonen) aus der Paritätsbilanz bei paritätserhaltenden (*z.B.* elektromagnetischen) Prozessen. Man findet dann, daß das Elektron e^-, Muon μ^-, Neutron und alle anderen Baryonen ebenfalls $\eta_p = +1$ haben, während e^+, μ^+ sowie alle Antibaryonen $\eta_p = -1$ haben.

Konventionsunabhängig gilt jedoch, daß die innere Parität eines Teilchen-Antiteilchen-Systems stets -1 ist (*z.B.* Quark-Antiquark gebundene oder resonante Zustände), denn für einen Zustand vom Typ

$$|\Xi >= \sum_{ss'} \int d^3p \;\; \xi_{ss'}(\mathbf{p}) c_s^\dagger(-\mathbf{p}) d_{s'}^\dagger(\mathbf{p})|0> \tag{3.69}$$

mit **gerader 'Bahnparität'**, *d.h.*

$$\xi_{ss'}(-\mathbf{p}) = \xi_{ss'}(\mathbf{p}), \tag{3.70}$$

gilt nach (3.68) für jede Wahl der Phase η_p

$$U_p|\Xi >= -|\Xi > . \tag{3.71}$$

Wegen

$$|\eta_p|^2(\gamma^0)^2 = 1_4, \qquad |\eta_p|^2\gamma^0\gamma^5\gamma^0 = -\gamma^5 \tag{3.72}$$

ergibt sich weiter wie in (2.69), daß für zwei beliebige Dirac-Feldoperatoren $\psi^1(x)$, $\psi^2(x)$ wiederum

$$\bar{\psi}^1(x)\psi^2(x): \text{ Lorentz} - \text{Skalar}, \qquad \bar{\psi}^1(x)\gamma^5\psi^2(x): \text{ Pseudoskalar} \tag{3.73}$$

ist *u.s.w.*

Die explizite Form von U_p ergibt sich ähnlich wie in (1.121), jedoch wegen (3.69) mit einem Minuszeichen für den $d^\dagger d$-Term:

$$U_p = \exp\left(i\frac{\pi}{2}[-\eta_p \hat{N} + \sum_s \int d^3p \; \frac{M}{E_p} \; \{c_s^\dagger(\mathbf{p})c_s(-\mathbf{p}) - d_s^\dagger(\mathbf{p})d_s(-\mathbf{p})\}]\right). \tag{3.74}$$

ii) Zeitumkehrtransformation τ

Diese Transformation ist wieder **antiunitär**, also von der Form

$$\tau = U_T K \tag{3.75}$$

mit unitärem U_T , wobei K der Operator der Komplexkonjugation ist wie in (1.133). Die Wirkung dieser Transformation (bis auf eine Phase η_T, die wir zu $\eta_T = 1$ wählen) ist

$$\tau \; \psi_\alpha(x)\tau^{-1} = \sum_{\beta=1}^{4} T_{\alpha\beta} \; \psi_\beta(-t, \mathbf{x}) \tag{3.76}$$

für $\alpha = 1, .., 4$, mit einer 4×4 Matrix T, die aus Gründen der Unitarität und Forminvarianz der Dirac-Gleichung

$$T^{-1} = T^{\dagger},\ T\gamma^{\mu}T^{-1} = (\gamma^{\mu})^{*} \tag{3.77}$$

erfüllen muß. Die explizite Realisierung von T hängt von der Darstellung ab; in der **Standarddarstellung** hat sie die Form

$$T = i\gamma^1\gamma^3 = -\mathbf{\Sigma}^2 = -\begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix} (= -T^*), \tag{3.78}$$

und es gilt

$$T\ u_s(\mathbf{p}) = u^*_{-s}(-\mathbf{p}), \qquad T\ v_s(\mathbf{p}) = v^*_{-s}(-\mathbf{p}). \tag{3.79}$$

Aus (3.76) folgt für $c^{\dagger}_s$, $d^{\dagger}_s$ das Transformationsverhalten

$$\tau\ c^{\dagger}_s(\mathbf{p})\tau^{-1} = -c^{\dagger}_{-s}(-\mathbf{p}), \tag{3.80}$$

$$\tau\ d^{\dagger}_s(\mathbf{p})\tau^{-1} = -d^{\dagger}_{-s}(-\mathbf{p}). \tag{3.81}$$

Die explizite Realisierung von U_T in (3.75) ist durch

$$U_T = \exp\{-i\frac{\pi}{2}[\eta_T(\hat{N}_c - \hat{N}_d) + \sum_s \int d^3p\ \frac{M}{E_p}(c^{\dagger}_s(\mathbf{p})c_{-s}(-\mathbf{p}) - d^{\dagger}_s(\mathbf{p})d_{-s}(-\mathbf{p}))]\} \tag{3.82}$$

gegeben (mit $\eta_T = 1$).

iii) Ladungskonjugation U_c

Dieser unitäre Operator, unter dem der Strom (3.91) das Vorzeichen ändert, wirkt wie folgt:

$$U_c\psi(x)U_c^{-1} = \eta_c C\bar{\psi}^T(x), \qquad U_c\bar{\psi}(x)U_c^{-1} = -\eta_c^*\psi^T(x)C^{-1}, \tag{3.83}$$

mit $|\eta_c| = 1$ und einer 4×4 Matrix C mit den Eigenschaften

$$C^{-1} = C^{\dagger}, \qquad C\gamma^{\mu}C^{-1} = -(\gamma^{\mu})^T, \tag{3.84}$$

wobei T hier die 'Transposition' bedeutet. In der **Standarddarstellung** ist C gegeben durch

$$C = i\gamma^2\gamma^0 = -i\vec{\alpha}^2 = -i\begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix} (= -C^{-1} = -C^{\dagger} = -C^T = C^*). \tag{3.85}$$

Aus der Wirkung von $C\gamma^0 = i\ \gamma^2$ auf die Basisspinoren,

$$(C\gamma^0)u^*_s(\mathbf{p}) = v_s(\mathbf{p}), \qquad (C\gamma^0)v^*_s(\mathbf{p}) = u_s(\mathbf{p}), \tag{3.86}$$

folgt die Wirkung von U_c auf Teilchenoperatoren:

$$U_c c^{\dagger}_s(\mathbf{p})U_c^{-1} = \eta^*_c d^{\dagger}_s(\mathbf{p}), \qquad U_c d^{\dagger}_s(\mathbf{p})U_c^{-1} = \eta_c c^{\dagger}_s(\mathbf{p}). \tag{3.87}$$

Damit hat insbesondere – unabhängig von der Konvention für η_c – ein Teilchen-Antiteilchen-System die **Ladungskonjugations-Parität -1**, (weil c und d jeweils antikommutieren), wenn seine Orts-Spin-Wellenfunktion ξ in (3.69) gerade ist unter Vertauschung aller Quantenzahlen der beiden Teilchen, *d.h.*

$$\xi_{s's}(-\mathbf{p}) = \xi_{ss'}(\mathbf{p}). \tag{3.88}$$

Bemerkenswert ist weiterhin, daß wegen

$$U_c\ [\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)]\ U_c^{-1} = \sum_{\alpha,\beta}\ \psi_\alpha(x)\ (\gamma^\mu)^T_{\alpha\beta}\ \bar{\psi}_\beta(x) \tag{3.89}$$

der Stromoperator $j^\mu(x)$ nur in der **normalgeordneten** Form (3.16) – bzw. in der dazu äquivalenten antisymmetrisierten Form –

$$j^\mu(x) = \frac{1}{2}[\bar{\psi}(x), \gamma^\mu\psi(x)] = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) - \frac{1}{2}\{\bar{\psi}(x), \gamma^\mu\psi(x)\} =: \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) : \tag{3.90}$$

das **richtige Ladungskonjugationsverhalten hat:**

$$U_c j^\mu(x) U_c^{-1} = -j^\mu(x). \tag{3.91}$$

Kapitel 4

Vektormesonen und Photonen

4.1 Vektorfeld mit Ruhemasse

Außer den pseudo-skalaren Klein-Gordon Mesonen treten in der Natur **massive Mesonen mit Spin 1**, *d.h.* drei möglichen Polarisationseinstellungen längs einer gegebenen Quantisierungsachse auf (*z.B.* das ω-Meson mit $m_\omega \approx 783$ MeV). Sie lassen sich in Abwesenheit von Wechselwirkungen beschreiben durch ein vierkomponentiges Feld $\varphi^\mu(x)(\mu = 0, .., 3)$, das sich bei homogenen Lorentztransformationen gemäß

$$U(\Lambda)\varphi^\mu(x)U^{-1}(\Lambda) = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu \varphi^\nu(x) \tag{4.1}$$

mit einem unitären Operator Λ, *d.h.* als **Vierervektor**, transformiert. Dabei beschreibt ein nichthermitesches Feld, $(\varphi^\mu)^\dagger \neq \varphi^\mu$, wieder Teilchen und Antiteilchen mit entgegengesetztem Vorzeichen einer ladungsartigen Quantenzahl q, ein hermitesches Feld mit $(\varphi^\mu)^\dagger = \varphi^\mu$ ein neutrales System mit Teilchen $\equiv$ Antiteilchen.

Jede Komponente des Feldes muß Lösung der Klein-Gordon-Gleichung sein:

$$(\partial_\nu \partial^\nu + m^2)\varphi^\mu(x) = 0 \tag{4.2}$$

für $(\mu = 0, .., 3)$. Da die 4 Feldkomponenten für die Beschreibung der 3 möglichen Spineinstellungen zuviel Freiheitsgrade beinhalten, ist (4.2) allein als Feldgleichung nicht ausreichend. Es muß also eine **Nebenbedingung** hinzukommen, die es erlaubt, eine der 4 Komponenten zu eliminieren. Die einfachste lorentzinvariante Bedingung ist die **Transversalitäts-bedingung**

$$\partial_\mu \varphi^\mu(x) = 0 \tag{4.3}$$

für alle x . Wir werden zeigen, daß für $m \neq 0$ (4.3) als **Operatorgleichung** erfüllbar ist und somit das Gewünschte leistet.

Die Nebenbedingung wird zweckmäßigerweise mittels eines (antisymmetrischen) tensoriellen **Hilfsfeldes**

$$f^{\mu\nu} = -f^{\nu\mu} \tag{4.4}$$

in die Lagrangedichte eingebaut. Man wählt

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}[(f^{\mu\nu})^\dagger(\partial_\mu\varphi_\nu - \partial_\nu\varphi_\mu) + f^{\mu\nu}(\partial_\mu\varphi^\dagger_\nu - \partial_\nu\varphi^\dagger_\mu)] + \frac{1}{2}(f^{\mu\nu})^\dagger f_{\mu\nu} + m^2(\varphi^\mu)^\dagger\varphi_\mu. \tag{4.5}$$

Die zugehörigen Euler-Lagrange'schen Feldgleichungen (die **Proca-Gleichungen**) lauten dann

$$f^{\mu\nu} = \partial^\mu \varphi^\nu - \partial^\nu \varphi^\mu, \qquad (f^{\mu\nu})^\dagger = \partial^\mu \varphi^{\nu\dagger} - \partial^\nu \varphi^{\mu\dagger}, \tag{4.6}$$

im Einklang mit (4.4), und

$$\partial_\mu f^{\mu\nu} + m^2 \varphi^\nu = 0, \qquad \partial_\mu (f^{\mu\nu})^\dagger + m^2 \varphi^{\nu\dagger} = 0. \tag{4.7}$$

Die Differentiation von (4.7) nach x^ν gibt

$$m^2 \partial_\nu \varphi^\nu = -\partial_\mu \partial_\nu f^{\mu\nu} = 0 \tag{4.8}$$

(wegen der Antisymmetrie von $f^{\mu\nu}$) und dasselbe für $\varphi^{\nu\dagger}$. Damit ist für $m \neq 0$ die Nebenbedingung (4.3) erfüllt. Eliminiert man nun mittels (4.6) das Hilfsfeld f, so bleibt

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\varphi^\nu = (\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\varphi^{\nu\dagger} = 0, \tag{4.9}$$

womit die gewünschten Feldgleichungen hergestellt sind.

Als **kanonisch konjugierte Felder** ergeben sich aus (4.5)

$$\begin{aligned} \pi^\mu(x) &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \varphi^\mu)} = -(f_{0\mu})^\dagger = (f_{\mu 0})^\dagger, \\ (\pi^\mu(x))^\dagger &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \varphi^{\dagger\mu})} = -f_{0\mu} = f_{\mu 0} = \partial_\mu \varphi_0 - \partial_0 \varphi_\mu. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Wegen $f_{00} = 0$ verschwinden die zu φ_0, $\varphi_0^\dagger$ konjugierten Felder identisch, erlauben also keine kanonische Quantisierung. Dies stellt jedoch kein echtes Problem dar, da auf Grund der Nebenbedingung (4.3) die Felder φ^0, $\varphi^0\dagger$ als dynamische Variable ohnehin eliminiert werden können und so auch nicht quantisiert werden müssen. Damit treten nur die Felder $\varphi^k (k = 1, 2, 3)$ und deren Adjungierte als **unabhängige dynamische Variable** auf. Die so erhaltene Formulierung ist wegen der unsymmetrischen Auszeichnung einer der 4 Komponenten nicht manifest kovariant. Dieses ist ein Beispiel dafür, daß **bei Feldern mit Spin ≥ 1 manifeste Kovarianz nur durch Einführung überzähliger Freiheitsgrade und entsprechender Nebenbedingungen erfüllbar ist**.

Wir benutzen also nach (4.7)

$$\begin{aligned} \varphi^0 &= -\frac{1}{m^2}\partial_\mu f^{\mu 0} = -\frac{1}{m^2}\partial_\mu (\pi_\mu)^\dagger = \frac{1}{m^2}\vec{\nabla} \cdot \vec{\pi}^\dagger \\ (\varphi^0)^\dagger &= -\frac{1}{m^2}\partial_\mu (f^{\mu 0})^\dagger = -\frac{1}{m^2}\partial_\mu \pi_\mu = \frac{1}{m^2}\vec{\nabla} \cdot \vec{\pi}, \end{aligned} \tag{4.11}$$

wobei $m \neq 0$ wesentlich ist, und eliminieren damit aus der Hamiltondichte

$$\mathcal{H}(x) = \sum_{k=1}^{3} (\pi^{k\dagger} \partial_0 \varphi^{k\dagger} + \pi^k \partial_0 \varphi^k) - \mathcal{L}(x) \tag{4.12}$$

die Feldvariablen φ^0, $\varphi^{0\dagger}$. Das Resultat ist dann (ÜB):

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x) &= \vec{\pi}^\dagger \cdot \vec{\pi} + (\vec{\nabla} \times \vec{\varphi}^\dagger) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{\varphi}) + m^2 \vec{\varphi}^\dagger \cdot \vec{\varphi} + \frac{1}{m^2}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\pi}^\dagger)(\vec{\nabla} \cdot \vec{\pi}) \\ & \quad -\vec{\nabla} \cdot \{\frac{1}{m^2}[\vec{\pi}^\dagger(\vec{\nabla} \cdot \vec{\pi}) + \vec{\pi}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\pi}^\dagger)]\}. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Der letzte Term ist eine Dreierdivergenz, die bei Einführung in $H = \int d^3x\, \mathcal{H}(x)$ nach dem Gaußschen Integralsatz (für asymptotisch vernünftig abfallende Felder) keinen Beitrag liefert. Der **Impulsoperator** wird dementsprechend

$$\mathbf{P} = \int d^3x \sum_{k=1}^{3} (\pi^{k\dagger} \vec{\nabla} \varphi^k + \pi^k \vec{\nabla} \varphi^{k\dagger}). \tag{4.14}$$

4.2 Quantisierung

Die Quantisierung kann nun für die unabhängigen Felder $\varphi^{k\dagger}$, $\varphi^k (k = 1, 2, 3)$ nach dem kanonischen Verfahren vor sich gehen:

$$[\pi^k(x), \varphi^l(y)]_{x^0=y^0} = -i\delta^{kl}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \qquad [\pi^{k\dagger}(x), \varphi^{l\dagger}(y)]_{x^0=y^0} = -i\delta^{kl}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \tag{4.15}$$

alle übrigen Kommutatoren sind $\equiv 0$.

Bei manifest kovarianter Formulierung ist es zweckmäßig, die VR für φ^0, $\varphi^{0\dagger}$ hinzuzunehmen, die allerdings **Folge** von (4.15) sind! Mit (4.11) ist

$$[\varphi^{0\dagger}(x), \varphi^l(y)]_{x^0=y^0} = \frac{1}{m^2}\partial_k[\pi^k(x), \varphi^l(y)]_{x^0=y^0} = \frac{i}{m^2}\partial^l\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})[\varphi^0(x), \varphi^l(y)] \equiv 0. \tag{4.16}$$

Damit lassen sich (falls nötig) alle weiteren Kommutatoren berechnen, *z.B.* solche mit Zeitableitungen der Felder wie

$$\begin{aligned} [\partial^0\varphi^{k\dagger}(x), \varphi^l(y)]_{x^0=y^0} &= [\partial^k\varphi^{0\dagger}(x) - f^{k0}(x)^\dagger, \varphi^l(y)]_{x^0=y^0} \\ &= \partial^k[\varphi^{0\dagger}(x), \varphi^l(y)]_{x^0=y^0} + [\pi^k(x), \varphi^l(y)]_{x^0=y^0} \\ &= [\partial^k(+\frac{i}{m^2}\partial^l) + ig^{kl}]\ \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \\ &= i(g^{kl} + \partial^k\partial^l\frac{1}{m^2})\ \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}). \end{aligned} \tag{4.17}$$

Zur Verallgemeinerung dieser VR auf $x^0 \neq y^0$ verwenden wir wieder die allgemeine Lösung von (4.2), (4.3) in Form einer Fourierentwicklung. Die Basislösungen sind von der Form

$$\varphi^\mu_+(x) = (2\pi)^{-3/2}e^\mu_+(\mathbf{q})\exp(-iq\cdot x)|_{q^0=\omega_q}, \quad \varphi^\mu_-(x) = (2\pi)^{-3/2}e^\mu_-(\mathbf{q})\exp(+iq\cdot x)|_{q^0=\omega_q}, \tag{4.18}$$

mit drei reellen und linear unabhängigen Vierervektoren $e^\mu_+(\mathbf{q})$, $e^\mu_-(\mathbf{q})$, die ein analoge Rolle spielen zu den Spinoren $u_s(\mathbf{p})$, $v_s(\mathbf{p})$ beim Dirac-Feld. Nach (4.2,4.3) müssen sie den Gleichungen

$$(-q^2 + m^2)e^\mu_\pm(\mathbf{q}) = 0, \qquad q_\mu e^\mu_\pm(\mathbf{q}) = 0 \tag{4.19}$$

erfüllen. Es genügt (wegen der Lorentzinvarianz des 2. Terms in (4.19) und der $(-q^2 + m^2)$ im 1. Term) diese Gleichungen im Ruhesystem ($\mathbf{q} = 0$) zu lösen und dann einen Lorentzboost mit der dem Impuls $\mathbf{q}$ entsprechenden Geschwindigkeit auszuführen. Für $\mathbf{q} = 0$ reduziert sich (4.19) auf

$$m\ e^0_\pm(0) = 0 \to e^0_\pm = 0. \tag{4.20}$$

Wir können also für $e_\pm(0)$ drei beliebige linear unabhängige Vektoren mit verschwindender Zeitkomponente wählen, zweckmäßigerweise

$$\mathbf{e}^{(1)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{e}^{(2)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{e}^{(3)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{4.21}$$

und für $e_-(0)$ dieselben Vektoren, da die Bedingungen (4.19) für (+) und (-) Vektoren – anders als beim Dirac-Feld – gleich lauten. Mit der expliziten Form des Lorentzboosts (2.102) erhalten wir dann für $n = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} e^{\mu(n)}(\mathbf{q}) &= \Lambda^\mu{}_\nu(\mathbf{q}) e^{\nu(n)}(0) = \Lambda^\mu{}_\nu(\mathbf{q})(-g^{\nu n}) = -\Lambda^{\mu n}(\mathbf{q}) \\ &= \begin{cases} \frac{q^n}{m} & \mu = 0, \\ \delta^{kn} + \frac{q^k q^n}{m(\omega_q + m)} & \mu = k = 1, 2, 3. \end{cases} \end{aligned} \tag{4.22}$$

Diese Eigenvektoren sind orthogonal (wegen (1.78)) im Sinne von

$$e^{(m)}_\mu e^{\mu(n)} = \Lambda_\mu{}^m \Lambda^{\mu n} = g^{mn}, \tag{4.23}$$

aber unvollständig, *d.h.*

$$\sum_{n=1}^{3} e^{\mu(n)} e^{\nu(n)} = -(\Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^{\nu\rho} - \Lambda^\mu{}_0 \Lambda^{\nu 0}) = -(g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{m^2}), \tag{4.24}$$

da sie alle viererorthogonal zu q sind. Mit diesen Basisvektoren schreiben wir die **allgemeine Lösung** von (4.2) und (4.3) als

$$\begin{aligned} \varphi^\mu(x) &= \sum_{n=1}^{3} \int \frac{d^3q}{2\omega_q}\ e^{\mu(n)}(\mathbf{q})\ [a_n(\mathbf{q}) f_q(x) + b^\dagger_n(\mathbf{q}) f^*_q(x)], \\ \varphi^{\mu\dagger}(x) &= \sum_{n=1}^{3} \int \frac{d^3q}{2\omega_q}\ e^{\mu(n)}(\mathbf{q})\ [b_n(\mathbf{q}) f_q(x) + a^\dagger_n(\mathbf{q}) f^*_q(x)]. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Die Operatoren a_n, b_n erhält man durch Umkehrung mit der Orthogonalitätsrelation (4.23) als

$$\begin{aligned} a_n(\mathbf{q}) &= -ie^{(n)}_\mu(\mathbf{q}) \int d^3x\ [f^*_q(x)\partial^0 \varphi^\mu(x) - \partial^0 f^*_q(x) \varphi^\mu(x)], \\ b_n(\mathbf{q}) &= -ie^{(n)}_\mu(\mathbf{q}) \int d^3x\ [f^*_q(x)\partial^0 \varphi^{\mu\dagger}(x) - \partial^0 f^*_q(x) \varphi^{\mu\dagger}(x)]. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Ihre Interpretation als Vernichtungsoperatoren für Feldquanten mit Impuls $\mathbf{q}$, Ruhemasse m und Polarisationsrichtung $n = 1, 2, 3$ (bezogen auf die 'lorentztransformierte z-Achse') folgt in der üblichen Weise aus den VR, die sich als Folge von (4.15,4.16) ergeben zu

$$[a_n(\mathbf{q}), a^\dagger_{n'}(\mathbf{q}')] = [b_n(\mathbf{q}), b^\dagger_{n'}(\mathbf{q}')] = 2\omega_q \; \delta^3(\mathbf{q} - \mathbf{q}') \; \delta_{n'n}; \tag{4.27}$$

– alle übrigen Kommutatoren sind $\equiv 0$ – sowie aus der Darstellung des normalgeordneten Viererimpuls-Operators $P^\mu = (H, \mathbf{P})$,

$$: P^\mu := \sum_{n=1}^{3} \int \frac{d^3q}{2\omega_q} \; q^\mu \; [a^\dagger_n(\mathbf{q}) a_n(\mathbf{q}) + b^\dagger_n(\mathbf{q}) b_n(\mathbf{q})]_{q^0 = \omega_q}. \tag{4.28}$$

Die a-Teilchen und ihre b-Antiteilchen sind wieder (wie bei allen Feldern mit ganzzahligem Spin) **Bosonen**; entsprechend wird die Normalordnung wie beim Klein- Gordon-Feld, *d.h.* ohne den Faktor $(-)^p$, definiert.

Mit (4.25) läßt sich der Kommutator für ungleiche Zeiten berechnen; das Resultat (HA)

$$[\varphi^{\mu\dagger}(x), \varphi^\nu(y)] = -i(g^{\mu\nu} + \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{m^2}) \Delta(x - y; m) \tag{4.29}$$

enthält die früheren VR (4.15-4.17) als Spezialfälle für $x^0 \to y^0$ und sichert wieder die **Mikrokausalität** für alle aus den φ^μ, $\varphi^{\mu\dagger}$ aufgebauten Meßgrößen. Die tensorielle Zweipunktfunktion

$$G^0_{\mu\nu}(x, y) = -i < 0 | T[\varphi_\mu(x) \varphi^\dagger_\nu(y)] | 0 >, \tag{4.30}$$

mit der Zeitordnung T (ohne $(-)^p$ — Faktor) führt dementsprechend auf den

4.3 Feynman-Propagator

$$G^0_{\mu\nu}(x, y) = (\Delta_F)_{\mu\nu}(x - y) \equiv (g_{\mu\nu} + \frac{1}{m^2} \partial_\mu \partial_\nu) \Delta_F(x - y; m) \tag{4.31}$$

mit der Fourierdarstellung (für $\epsilon \to 0^+$)

$$\begin{aligned} (\Delta_F)_{\mu\nu}(x) \;\; &= \;\; (2\pi)^{-4} \int d^4q \; \left\{ \frac{g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{m^2}}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \right\} \; \exp(-iq \cdot x) \\ &= \;\; (2\pi)^{-4} \int d^4q \; \tilde{\Delta}_{F,\mu\nu}(q) \exp(-iq \cdot x). \end{aligned} \tag{4.32}$$

Die aus (4.32) abzulesenden Eigenschaften

$$q^\mu \tilde{\Delta}_{F,\mu\nu}(q) = -\frac{1}{m^2} q_\nu, \qquad\qquad q^\mu q^\nu \tilde{\Delta}_{F,\mu\nu}(q) = -\frac{q^2}{m^2}, \tag{4.33}$$

dieses Propagators spiegeln wiederum die **Vierer-Transversalität** (4.3) wieder, wobei $m \neq 0$ wesentlich ist.

Weiterhin sei noch die aus den Proca-Gleichungen folgende **Kontinuitätsgleichung** angegeben:

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0 \qquad \text{mit } j^\mu(x) = i\{\varphi^\dagger_\nu(x)\partial^\mu\varphi^\nu(x) - \partial^\mu\varphi^\dagger_\nu(x)\varphi^\nu(x)\}. \tag{4.34}$$

Der Eigenwert der zugehörigen **Ladung**

$$Q = \int d^3x \ : j^0(x) := \sum_{n=1}^{3} \int \frac{d^3q}{2\omega_q} \, [a^\dagger_n(\mathbf{q})a_n(\mathbf{q}) - b^\dagger_n(\mathbf{q})b_n(\mathbf{q})] \tag{4.35}$$

ist wieder die Teilchen und Antiteilchen unterscheidende ladungsartige Quantenzahl.

4.4 Spin der Vektormesonen

Bei den Transformationseigenschaften des Feldes $\varphi^\mu(x)$ ist die einzige hervorzuhebende Besonderheit die unter **homogenen** Lorentztransformationen. Gleichung (4.1) ergibt für infinitesimale Transformationen

$$\Lambda = 1_4 + \alpha \text{ mit } (\alpha_{\mu\nu} = -\alpha_{\nu\mu}), \qquad U(\Lambda) = 1 + \frac{i}{2}\,\alpha_{\mu\nu}M^{\mu\nu}, \tag{4.36}$$

die Beziehung

$$[M_{\mu\nu}, \varphi_\rho(x)] = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)\varphi_\rho(x) + i[g_{\mu\rho}\varphi_\nu(x) - g_{\nu\rho}\varphi_\mu(x)]. \tag{4.37}$$

Speziell für Drehungen ($\mu, \nu = 1, 2, 3$) erhält man

$$\begin{aligned} [M_{kl}, \varphi^\rho(x)] &= -i(x^k\partial_l - x^l\partial_k)\varphi^\rho(x) + i[g_k{}^\rho g_{l\sigma} - g_l{}^\rho g_{k\sigma}]\varphi^\sigma(x) \\ &= \epsilon_{klm}[L_m\varphi^\rho(x) + (S_m)^\rho{}_\sigma\varphi^\sigma(x)] \end{aligned} \tag{4.38}$$

mit den Differentialoperatoren aus (1.103) und – als neuen Elementen – den drei 4×4 Matrizen

$$(S_k)_{\rho\sigma} = -\frac{i}{2}\,\epsilon_k{}^{lm}(g_{l\rho}g_{m\sigma} - g_{l\sigma}g_{m\rho}) = -i\,\epsilon_{0k\rho\sigma}. \tag{4.39}$$

Diese Matrizen haben für $\rho = 0$ oder $\sigma = 0$ nur Nullen als Elemente, transformieren also nur die raumartigen Komponenten φ_k untereinander. Man rechnet leicht nach (ÜB), daß sie die Eigenschaften

$$[S_k, S_l] = i\,\epsilon_{klm}S_m \qquad \text{und} \sum_{k=1}^{3}(S_k)^2 = 1(1+1)\cdot 1_4 \tag{4.40}$$

besitzen, die für eine $J = 1$ – Darstellung der Drehimpulsoperatoren charakteristisch sind.

Man kann wieder das Transformationsverhalten einer **Einteilchenwellenfunktion** mit Polarisation λ,

$$\chi_{\mathbf{q},\lambda}(\mu, x) :=< 0|\varphi^\mu(x)|\mathbf{q}, \lambda >, \tag{4.41}$$

im Ruhesystem ($\mathbf{q} = 0$) unter Raumdrehungen mit Drehvektor $\vec{\alpha}$ betrachten,

$$< 0|\varphi^\mu(x)U_\alpha|\mathbf{q} = 0, \lambda >= [\exp(-i\vec{\alpha}\cdot\mathbf{S})]^\mu{}_\nu < 0|\varphi^\nu(x)|\mathbf{q} = 0, \lambda >, \tag{4.42}$$

was die **Vektormesonen direkt als Spin-1-Teilchen** erweist.

4.5 Das elektromagnetische Feld (klassisch)

Obwohl die Quantisierung des elektromagnetischen Feldes ebenfalls auf Spin-1-Teilchen (Photonen) führt, ist seine Theorie nicht einfach durch den Grenzübergang $m \to 0$ aus der obigen Theorie für massive Vektorfelder gegeben. Der Sonderfall $m = 0$ ist in der Tat qualitativ verschieden: hier gibt es **nur zwei unabhängige Freiheitsgrade** (Feldfunktionen)! Wir zeigen diesen Sachverhalt zunächst an der klassischen Theorie (in kovarianter Formulierung).

Das **klassische elektromagnetische Feld im Vakuum**, gekoppelt an den Strom $j = (\rho, \mathbf{j})$, genügt den homogenen Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0, \qquad \vec{\nabla} \times \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t}\,\mathbf{B} = 0 \tag{4.43}$$

und den inhomogenen Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \rho, \qquad \vec{\nabla} \times \mathbf{B} - \frac{\partial}{\partial t}\,\mathbf{E} = \mathbf{j}. \tag{4.44}$$

Mit dem antisymmetrischen **Feldstärketensor**

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & B_x \\ E_z & -B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{4.45}$$

oder $F^{0k} = -E^k = -F^{k0}$, $F^{kl} = \epsilon^{kl}{}_m B^m$ $(k, l = 1, 2, 3)$, und dem **dualen Tensor**

$$\bar{F}^{\kappa\lambda} = \epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} F_{\mu\nu} \tag{4.46}$$

lassen sich die Maxwell-Gleichungen zusammenfassen zu

$$\partial_\kappa \bar{F}^{\kappa\lambda} = 0 \text{ (homogene Glgn.)}, \qquad \partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \text{ (inhomogene Glgn.)}. \tag{4.47}$$

Eine vierkomponentige – aber nicht eindeutige Darstellung der Felder – ist mittels des **Viererpotentials** $A(x) = (\Phi(x), \mathbf{A}(x))$ möglich:

$$\mathbf{E} = -\vec{\nabla}\, A^0 - \frac{\partial}{\partial t}\,\mathbf{A}, \qquad \mathbf{B} = \vec{\nabla} \times \mathbf{A}, \tag{4.48}$$

oder in Viererschreibweise

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \tag{4.49}$$

Diese Darstellung löst wegen $\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}\partial_\kappa\partial_\mu \equiv 0$ die homogenen Gleichungen in (4.47); die inhomogenen Gleichungen in (4.47) fordern dann:

$$(\partial_\mu \partial^\mu) A^\nu(x) - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu(x)) = j^\nu(x). \tag{4.50}$$

Die Potentiale $A^\mu(x)$ sind (wie bereits bemerkt) nicht eindeutig. Sie entsprechen nicht selbst physikalischen Meßgrößen, denn nur die **Feldstärken** $F_{\mu\nu}(x)$ sind Meßgrößen. Jede **Eichtransformation**

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu \chi(x) \tag{4.51}$$

mit beliebigem Vierergradienten $\partial_\mu \chi(x)$ läßt die Viererrotation (4.49) invariant. Man kann durch Beschränkung auf eine spezielle '**Eichung**' die Wellengleichung (4.50) vereinfachen, $z.B.$ durch die einfachste (lorentzinvariante und lineare) 'Lorentz-Bedingung'

$$\partial_\mu A'^\mu(x) = 0, \tag{4.52}$$

welche man erhält, wenn man in (4.51) χ als Lösung der Gleichung

$$\partial_\mu \partial^\mu \chi = \partial_\mu A^\mu$$

wählt. Sie beschränkt A_μ auf die Klasse der **Lorentz- oder Feynman-Eichungen**, denn (4.52) bleibt erhalten, wenn man Eichtransformationen (4.51) mit den **eingeschränkten Eichfunktionen**

$$\chi_L(x) \qquad \text{mit } \partial_\mu \partial^\mu \chi_L(x) = 0 \tag{4.53}$$

ausführt. Gleichung (4.52) vereinfacht dann (4.50) zu

$$(\partial_\mu \partial^\mu) A'^\nu(x) = j^\nu(x). \tag{4.54}$$

Zusammen sind (4.54), (4.49) und (4.52) den Maxwell-Gleichungen äquivalent.

Die beiden ersteren lassen sich für das freie Feld ($\mathbf{j} \equiv 0, \rho \equiv 0$) aus der **Lagrange-Dichte**

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{1}{2}\; F^{\mu\nu}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \frac{1}{2}\; F_{\mu\nu}) = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) \tag{4.55}$$

als Bewegungsgleichungen gewinnen. Dagegen muß, da (4.8) für $m = 0$ sinnlos ist, Gleichung (4.52) stets als Zusatzbedingung eingeführt werden. Man arbeitet also in den Bewegungsgleichungen mit **vier Feldamplituden** A^0, A^1, A^2, A^3. Die zweifache Reduktion der Zahl der unabhängigen Freiheitsgrade wird, wie sogleich gezeigt wird, teils durch die Lorentzbedingung (4.52), teils durch die noch verbleibende Eichfreiheit vom Typ (4.53) bewirkt.

Dazu schreiben wir die allgemeine Lösung von (4.54) für $j = 0$, $d.h.$ die masselosen Klein-Gordon-Gleichungen

$$(\partial_\mu \partial^\mu) A^\nu(x) = 0 \qquad (\nu = 0, .., 3) \tag{4.56}$$

in Form einer **Fourierentwicklung**, wobei zu beachten ist, daß die Feldstärken und damit auch die A_μ **reelle Felder** sind:

$$A_\mu(x) = \sum_{\lambda=0}^{3} \int \frac{d^3k}{2|\mathbf{k}|}\; e_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k})\; [a_\lambda(\mathbf{k}) f_k(x) + a_\lambda^*(\mathbf{k}) f_k^*(x)]_{k^0=|\mathbf{k}|}. \tag{4.57}$$

In (4.57) sind dabei die $e_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k})$, im Gegensatz zum Fall $m \neq 0$, vier linear unabhängige Vierervektoren. Die Lorentzbedingung verlangt dann

$$\sum_{\lambda=0}^{3} k^\mu e_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k})\; a_\lambda(\mathbf{k}) = 0. \tag{4.58}$$

Beim massiven Vektorfeld waren die drei Vektoren $e_\mu^{(\lambda)}$ einzeln viererorthogonal zu k^μ wählbar, so daß die drei a_λ durch die entsprechende Bedingung nicht eingeschränkt wurden. Hier sind nun nicht alle vier $e^{(\lambda)}$ zu k orthogonal wählbar, so daß eine lineare Abhängigkeit zwischen den vier Fourieramplituden $a_\lambda(\mathbf{k})$ unvermeidbar bleibt. In der zweckmäßigerweise gewählten **Basis**, bestehend aus

$$\lambda = 1, 2: \qquad e_0^{(\lambda)} = 0, \qquad \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}^{(\lambda)} = 0 \text{ mit } \mathbf{e}^{(1)} \cdot \mathbf{e}^{(2)} = 0, \tag{4.59}$$

d.h. zwei zu **k transversalen** und orthogonalen Einheitsvektoren und dem **longitudinalen** Einheitsvektor

$$\lambda = 3: \qquad e_0^{(3)} = 0, \qquad \mathbf{e}^{(3)} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \tag{4.60}$$

sowie dem rein **zeitartigen** Einheitsvektor

$$\lambda = 0: \qquad e_0^{(0)} = 1, \qquad \mathbf{e}^{(0)} = (0, 0, 0) \tag{4.61}$$

mit der Eigenschaft

$$e_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k}) e^{\mu(\lambda')}(\mathbf{k}) = g^{\lambda\lambda'} \tag{4.62}$$

gilt

$$\begin{aligned} k^\mu e_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k}) &= 0 \qquad\qquad (\lambda = 1, 2) \\ k^\mu e_\mu^{(3)}(\mathbf{k}) &= -|\mathbf{k}|, \\ k^\mu e_\mu^{(0)}(\mathbf{k}) &= k^0 = +|\mathbf{k}|, \end{aligned} \tag{4.63}$$

d.h. die Abhängigkeit zwischen den Fourieramplituden $a_\lambda(\mathbf{k})$ wegen der Lorentzbedingung nimmt die Form

$$a_3(\mathbf{k}) = a_0(\mathbf{k}) \tag{4.64}$$

an, während die $a_1(\mathbf{k})$, $a_2(\mathbf{k})$ frei wählbar bleiben.

Wir betrachten nun eine eingeschränkte Eichfunktion (4.53) in der Fourierdarstellung

$$\chi_L(x) = \int \frac{d^3k}{2|\mathbf{k}|} \left[\chi_l(\mathbf{k}) f_k(x) + \chi_l^*(\mathbf{k}) f_k^*(x)\right] \tag{4.65}$$

und führen damit die Eichtransformation (4.51) aus. Es entsteht dann ein Feld A'_μ mit Fourierkomponenten a'_λ gemäß

$$\sum_{\lambda=0}^{3} e_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \left[a'_\lambda(\mathbf{k}) - a_\lambda(\mathbf{k})\right] = i k_\mu \chi_l(\mathbf{k}). \tag{4.66}$$

Es ist nun klar, daß $\chi_l(\mathbf{k})$ stets so gewählt werden kann, daß $a'_3 \equiv 0$ und damit nach (4.64) auch $a'_0 \equiv 0$ ist, *d.h.* nur **zwei nichtverschwindende Fourieramplituden** (die beiden **transversalen** a_1, a_2) übrig bleiben. Eine entsprechende Lösung von (4.66) ist *z.B.*

$$\begin{aligned} a'_\lambda(\mathbf{k}) &= a_\lambda(\mathbf{k}) & (\lambda = 1, 2) \\ a'_\lambda(\mathbf{k}) &= a_\lambda(\mathbf{k}) + i|\mathbf{k}|\chi_l(\mathbf{k}) & (\lambda = 0, 3). \end{aligned}$$

In dieser speziellen Eichung ist dann wegen (4.59,4.60,4.61)

$$A_0' \equiv 0, \quad \mathbf{A}'(x) = \sum_{\lambda=1}^{2} \int \frac{d^3k}{2|\mathbf{k}|} \, \mathbf{e}^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \, [a_\lambda(\mathbf{k}) f_k(x) + a_\lambda^*(\mathbf{k}) f_k^*(x)] \tag{4.67}$$

mit $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{A}' = 0$.

Bei Lorentztransformationen werden zwar diese speziellen Beziehungen (*d.h.* die Eichung) unter Erhaltung der invarianten Bedingung (4.52) und damit auch (4.64) geändert, aber es wird lediglich eine andere spezielle Eichung innerhalb der Klasse (4.52) hergestellt. Die obigen Überlegungen zeigen jedoch, daß tatsächlich nur **zwei unabhängige Feldfunktionen** vorhanden sind.

4.6 Quantisierung des elektromagnetischen Feldes

Die Lagrangedichte (4.55) gibt als konjugierte Felder

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial(\partial_0 A^\mu)} = F^{0\mu} = -F^{\mu 0}, \tag{4.68}$$

was für $\mu = 0$ identisch verschwindet. Die $\mu = 0$ Komponente ist daher (wie beim massiven Vektorfeld) nicht kanonisch quantisierbar. Von den möglichen Auswegen aus dieser Situation werden nun zwei häufig benutzte aufgezeigt:

a) Man gibt die Forderung nach manifester Lorentz-Kovarianz auf, verzichtet auf die Quantisierung von A^0, welches als klassische Feldfunktion behandelt wird, und quantisiert $\mathbf{A}(x)$ nach den kanonischen Regeln in der speziellen Eichung $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{A} = 0$ ('**Coulomb**'- oder '**Strahlungs**'-Eichung). Beim **freien** Feld ist dann nach (4.67) sogar $A^0 = 0$ erreichbar, so daß man A^0 einfach vergessen kann. Die Kovarianz der Theorie wird dann erst im 'Endstadium', *d.h.* bei Meßgrößen wie Übergangswahrscheinlichkeiten *u.s.w.*, wieder sichtbar. Falls Übergänge zu anderen Lorentz-Bezugssystemen notwendig werden, müssen sie stets von einer Eichtransformation begleitet sein, um im neuen System die Coulomb-Eichung wieder herzustellen.

b) Man besteht auf manifester Kovarianz und behandelt alle vier Komponenten A_μ symmetrisch nach dem kanonischen Schema, wobei wegen (4.68) eine geeignete andere Lagrangedichte als $\mathcal{L}_1$ benötigt wird. Dann wird — entsprechend der Mitnahme 'unphysikalischer', nichttransversaler Freiheitsgrade — eine **Erweiterung des physikalischen Hilbertraumes um unphysikalische Sektoren notwendig**; die Bedingung (4.52) in einer abgeschwächten Form dient dann dazu, den **'physikalischen' Teilraum** wieder auszusondern. Im Folgenden werden wir diesen Weg vorziehen. In jedem Falle ist zu fordern, daß die **Gleichungen der klassischen Maxwell-Theorie für die Erwartungswerte der Felder** bestehen bleiben.

Eine geeignete Lagrangedichte ist von Fermi angegeben worden:

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{1}{2}[\partial_\mu A_\nu(x)][\partial^\mu A^\nu(x)]. \tag{4.69}$$

Sie kann umgeformt werden zu

$$\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1' - \partial_\mu R^\mu - \frac{1}{2}[\partial_\mu A^\mu(x)]^2 \tag{4.70}$$

mit

$$R^\mu = \frac{1}{2}(A_\nu \partial^\nu A^\mu - A^\mu \partial^\nu A_\nu), \tag{4.71}$$

wobei der Anteil

$$\mathcal{L}_1' = -\frac{1}{4}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \tag{4.72}$$

unter Berücksichtigung von (4.49) zu $\mathcal{L}_1$ (4.55) äquivalent ist. Der Viererdivergenzterm ändert an dieser Äquivalenz nichts, da er zum Wirkungsintegral, bzw. seiner Variation

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L\ dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x\ \mathcal{L}(t, \mathbf{x}), \tag{4.73}$$

und damit zu den Bewegungsgleichungen nichts beiträgt. Wir behalten an dieser Stelle im Gedächtnis, daß die **Lagrangedichte stets nur bis auf eine Viererdivergenz** $\partial_\mu R^\mu$ bestimmt ist. Damit liefert $\mathcal{L}_1' - \partial_\mu R^\mu$ wie $\mathcal{L}_1$ auch eichinvariante Feldgleichungen.

Der Term mit $(\partial_\mu A^\mu)^2$ ist nicht eichinvariant; die auf (4.69) aufgebaute Theorie muß deshalb noch durch **eine Bedingung ergänzt werden, die zumindest für die Erwartungswerte** $< \partial_\mu A^\mu >= 0$ (Lorentzeichung) sichert (siehe (4.100)). Deshalb heißt $-1/2(\partial_\mu A^\mu)^2$ in (4.69) auch **Eichfixierungsterm.**

Die Bewegungsgleichungen zu (4.69) sind

$$(\partial_\nu \partial^\nu) A_\mu(x) = 0 \qquad\qquad (\mu = 0, .., 3) \tag{4.74}$$

wie in (4.56), und die konjugierten Felder sind gegeben durch

$$\pi^\mu = -\partial^0 A^\mu \qquad\qquad (\mu = 0, .., 3), \tag{4.75}$$

so daß auch die $\mu = 0$ Komponente eine nichttriviale Vertauschungsrelation erlaubt.

Für eine **Quantisierung** sind zunächst die A^μ und π^μ, da ihre Erwartungswerte reell sein sollen, als hermitesche Operatoren in einem Hilbertraum aufzufassen. Es ist nun bemerkenswert, **daß bereits diese Hermitezität in einem neuartigen Sinne aufgefaßt werden muß, will man die manifeste Kovarianz des Formalismus beibehalten.** Da Hermitezität ein metrischer Begriff ist, heißt dies, daß das Skalarprodukt im Hilbertraum, das bisher wie in der nichtrelativistischen Theorie stillschweigend als positiv definit angenommen wurde,

$$< \Psi | \Psi > \; > \; 0 \tag{4.76}$$

für $|\Psi >\neq$ dem Nullvektor, neu definiert werden muß. Dazu ist die Annahme einer **indefiniten Metrik** erforderlich, bei der also insbesondere die Norm eines Zustandsvektors verschwinden kann, obwohl er nicht der Nullvektor ist. Ihre Beziehung zur 'alten' Metrik (4.76) wird durch die Einführung eines **metrischen Operators** η – analog zu $g_{\mu\nu}$ im Minkowskiraum – hergestellt, der bezüglich der 'alten' Metrik hermitesch ist,

$$\eta^\dagger = \eta, \tag{4.77}$$

und zweckmäßigerweise auch

$$\eta^{-1} = \eta, \tag{4.78}$$

$d.h$ $\eta^2 = 1_{\mathcal{H}}$ erfüllt. Man definiert dann das **neue Skalarprodukt** zweier Zustände $|\Phi>$, $|\Psi>$ durch

$$(\Phi, \Psi) =< \eta\Phi|\Psi> . \tag{4.79}$$

Die entsprechende **Norm** ist dann wegen (4.77) noch **reell**,

$$(\Phi, \Phi)^* =< \eta\Phi|\Phi>^* =< \Phi|\eta\Phi> =< \eta^\dagger\Phi|\Phi> =< \eta\Phi|\Phi> = (\Phi, \Phi), \tag{4.80}$$

aber im allgemeinen nicht mehr positiv, weil der metrische Operator (4.77) auch Eigenzustände zum Eigenwert -1 haben kann, für die dann $(\Phi, \Phi) = - < \Phi|\Phi> \ < 0$ ist. Entsprechend muß das **Adjungierte eines Operators** A neu definiert werden und zwar als $\bar{A}$ mit

$$(\Phi, \bar{A}\Psi) = (\Psi, A\Phi)^*. \tag{4.81}$$

Nach (4.79) bedeutet dies $\bar{A} = (\eta^\dagger)^{-1}A^\dagger\eta$, wegen (4.78) also

$$\bar{A} = \eta A^\dagger \eta. \tag{4.82}$$

Operatoren mit stets reellen Erwartungswerten, wie die Viererpotentiale $A^\mu(x)$ und Feldstärken $F_{\mu\nu}(x)$, sind nun diejenigen mit der **verallgemeinerten Hermitezität oder Selbstadjungiertheit**

$$A = \bar{A}, \text{ oder } \eta A = A^\dagger \eta. \tag{4.83}$$

Die in diesem Sinne selbstadjungierten Feldoperatoren

$$A_\mu(x) = \bar{A}_\mu(x), \qquad \pi_\mu(x) = \bar{\pi}_\mu(x) \tag{4.84}$$

können nun durch postulieren von

$$[A^\mu(x), \pi^\nu(y)]_{x^0=y^0} = i\ g^{\mu\nu}\ \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \tag{4.85}$$

– alle anderen Kommutatoren sind $\equiv 0$, – so quantisiert werden, daß die manifest kovarianten Vertauschungsrelationen (4.92) (siehe unten) für ungleiche Zeiten resultieren. Die Konsequenzen des ungewöhnlichen Vorzeichens für $\mu = \nu = 0$ in (4.85), **das bei Beibehaltung der 'alten' Metrik (4.76) zu Widersprüchen führen würde, werden dabei durch die neue Metrik gerade soweit neutralisiert**, daß für physikalische Zustandsvektoren die übliche **Wahrscheinlichkeitsinterpretation** erhalten bleibt! In der 'alten' Metrik könnte man sie nur durch unsymmetrische Abänderung von (4.85) und damit von (4.92) (siehe unten) für $\mu = \nu = 0$ beseitigen, womit die kovariante Formulierung der Theorie zerstört würde.

Die allgemeine Lösung (4.57) von (4.74) wird nun mit **Operatorkoeffizienten** a_λ und deren verallgemeinerten Adjungierten $\bar{a}_\lambda = \eta a^\dagger \eta$ in der Form

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &= A_\mu^{(+)}(x) + A_\mu^{(-)}(x), \qquad (4.86) \\ A_\mu^{(+)}(x) &= \sum_{\lambda=0}^{3} \int \frac{d^3k}{2|\mathbf{k}|}\ e_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k})\ f_k(x)\ a_\lambda(\mathbf{k}), \\ A_\mu^{(-)}(x) &= \sum_{\lambda=0}^{3} \int \frac{d^3k}{2|\mathbf{k}|}\ e_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k})\ f_k^*(x)\ \bar{a}_\lambda(\mathbf{k}), \end{aligned}$$

geschrieben, womit (4.84) erfüllt ist. Aus (4.85) folgen die VR

$$[a_\lambda(\mathbf{k}), \bar{a}_{\lambda'}(\mathbf{k}')] = -2|\mathbf{k}|\ g_{\lambda\lambda'}\ \delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}'), \tag{4.87}$$

alle anderen Kommutatoren sind $\equiv 0$.

Das für $\lambda = \lambda' = 0$ ungewöhnliche Vorzeichen wird durch die Zusatzforderungen

$$[a_\lambda(\mathbf{k}), \eta] = 0 \qquad\qquad (\lambda = 1, 2, 3) \tag{4.88}$$

und

$$\{a_0, \eta\} = 0$$

neutralisiert. Die $\bar{a}_\lambda(\mathbf{k})$ sind dann **Erzeugungsoperatoren für Strahlungsquanten oder Photonen** vom Impuls $\mathbf{k}$, Ruhemasse $m = 0$ und Polarisation λ, die der **Bosestatistik** gehorchen und wegen (4.84) ohne ladungsartige Quantenzahlen, *d.h.* **ihre eigenen Antiteilchen** sind.

In der Basis (4.59,4.62) haben wir für $\lambda = 1{,}2$ 'transversale', für $\lambda = 3$ 'longitudinale' und für $\lambda = 0$ 'zeitartige' Photonen.

Aus dem **Vakuum aller Photonen**, charakterisiert durch

$$a_\lambda(\mathbf{k})|0>= 0 \qquad \forall(\lambda, \mathbf{k}) \qquad \eta|0>= +|0>, \qquad (0,0) =< 0|0>= +1, \tag{4.89}$$

entstehen durch Anwendung der $\bar{a}_\lambda$ **Ein-Photon-Zustände**

$$|k, \lambda>= \bar{a}_\lambda(\mathbf{k})|0>, \tag{4.90}$$

die wegen (4.88) die Orthonormierung

$$(k'\lambda', k\lambda) = 2|\mathbf{k}|\ \delta_{\lambda\lambda'}\ \delta^3(\mathbf{k}'-\mathbf{k}) \tag{4.91}$$

aufweisen. Daß das Auftreten von $\delta_{\lambda\lambda'}$ (statt $-g_{\lambda\lambda'}$) die Kovarianz nicht stört, zeigt man, indem man aus (4.87) die **manifest kovarianten (vierertensoriellen) Vertauschungsrelationen** für $x^0 \neq y^0$,

$$[A_\mu(x), A_\nu(y)] = -ig_{\mu\nu}D(x-y), \tag{4.92}$$

mit der lorentzinvarianten Funktion

$$D(x) = \Delta(x, m=0) = -\frac{i}{(2\pi)^3}\int d^4k\ \epsilon(k)\ \delta(k^2)\ \exp(-ik\cdot x) \tag{4.93}$$

ableitet. Explizit ist

$$D(x) = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}\ [\delta(x^0 - |\mathbf{x}|) - \delta(x^0 + |\mathbf{x}|)] = -\frac{1}{2\pi}\ \epsilon(x)\ \delta(x^2), \tag{4.94}$$

d.h. $D(x)$ ist eine antisymmetrische Mischung der in der klassischen Theorie verwendeten 'retardierten' Green'schen Funktion des Strahlungsfeldes mit der zugehörigen 'avancierten' Funktion. Die damit gegebene **Mikrokausalität** überträgt sich auf alle Observablen, also nicht nur auf die in den A_μ bilinearen Meßgrößen wie den Viererimpuls (4.110,4.112), sondern auch auf die in den A_μ linearen **Feldstärken** (4.48), für die aus (4.92) folgt:

$$[F_{\kappa\lambda}(x), F_{\mu\nu}(y)] = -i(g_{\kappa\mu}\partial_\lambda\partial_\nu + g_{\lambda\nu}\partial_\kappa\partial_\mu - g_{\kappa\nu}\partial_\lambda\partial_\mu - g_{\lambda\mu}\partial_\kappa\partial_\nu)D(x-y). \tag{4.95}$$

Bemerkenswert ist weiter, daß sich die für lorentzkovariante Quantisierung wesentliche **Lorentz-Eichung** (4.52) **nicht mehr als Operatorgleichung**, *d.h.* nicht mehr auf dem gesamten Hilbertraum des Strahlungssystems, aufrechterhalten läßt, denn aus (4.92) folgt

$$[\partial_\mu A^\mu(x), A^\nu(y)] = -i\partial^\nu D(x-y) \neq 0, \tag{4.96}$$

während bei $\partial_\mu A^\mu \equiv$ 'Nulloperator' dieser Kommutator identisch verschwinden müßte. Die Lösung dieses Puzzles liegt darin, daß zur Erfüllung der **klassischen** Lorentzbedingung

$$\partial_\mu(\Psi, A^\mu(x)\Psi) = 0 \qquad\qquad \forall|\Psi> \tag{4.97}$$

nämlich nur die **abgeschwächte Form der Lorentzbedingung**

$$\partial_\mu A^{\mu(+)}(x)|\Psi>= 0 \tag{4.98}$$

für **physikalische** $|\Psi>$ und alle x mit dem positiven Frequenzanteil $A^{\mu(+)}$ von (4.86) erforderlich ist (nach Gupta und Bleuler). Damit ist eine **Einschränkung auf den physikalischen Zustandsraum hinreichend**, um Widersprüche zu vermeiden, die sich in Form einer Operatorgleichung auf dem gesamten Hilbertraum ergeben.

Mit der Darstellung (4.86) folgt aus (4.98) sofort die klassische Lorentzbedingung

$$\partial_\mu(\Psi, A^\mu\Psi) = \partial_\mu(\Psi, A^{\mu(-)}\Psi) = \partial_\mu(A^{\mu(+)}\Psi, \Psi) = 0 \tag{4.99}$$

für physikalische $|\Psi>$. Die Bedingung $\partial_\mu A^\mu|\Psi>$ kann hier nicht gefordert werden, da dann der Vakuumzustand $|0>$ infolge $\partial_\mu A^{\mu(-)}|0>\neq 0$ nicht zum physikalischen Unterraum gehören würde! Natürlich ist für die Erfüllbarkeit von (4.98) notwendig, daß $\partial_\mu A^{\mu(+)}(x)$ und $\partial'_\nu A^{\nu(+)}(x')$ für $x \neq x'$ kommutieren, weil sie nur dann einen gemeinsamen Eigenraum mit Eigenwert 0 haben können. Dies trifft aber zu, denn aus den allgemeinen VR (4.92) folgt

$$[\partial_\mu A^{\mu(+)}(x), \partial'_\nu A^{\nu(+)}(x')] = i\partial_\mu\partial^{\mu'} D^{(+)}(x-x') = -i\ \partial_\mu\partial^\mu D^{(+)}(x-x') = 0, \tag{4.100}$$

weil der positive Frequenzanteil $D^{(+)}$ von (4.93) wie $D(x)$ selbst Lösung der masselosen Klein-Gordon-Gleichung ist.

Wir stellen nun $A_\mu(x)$ in der Form (4.86) mit den Vektoren

$$b_\mu(\mathbf{k}) = e_\mu^{(1)}(\mathbf{k})\ a_1(\mathbf{k}) + e_\mu^{(2)}(\mathbf{k})\ a_2(\mathbf{k}), \tag{4.101}$$

$$e_\mu^{(3)}(\mathbf{k}) + e_\mu^{(0)}(\mathbf{k}) = \frac{k_\mu}{|\mathbf{k}|} \tag{4.102}$$

und $e^{(3)} - e^{(0)}$ in der Form

$$A_\mu^{(+)}(x) = \int \frac{d^3k}{2|\mathbf{k}|}\ [b_\mu(\mathbf{k}) + \frac{1}{2}\ \frac{k_\mu}{|\mathbf{k}|}\ \beta(\mathbf{k}) + \frac{1}{2}(e_\mu^{(3)}(\mathbf{k}) - e_\mu^{(0)}(\mathbf{k}))\ \alpha(\mathbf{k})] f_k(x) \tag{4.103}$$

dar, wobei $\alpha(\mathbf{k})$, $\beta(\mathbf{k})$ die Operatorkombinationen

$$\alpha(\mathbf{k}) = a_3(\mathbf{k}) - a_0(\mathbf{k}), \qquad \beta(\mathbf{k}) = a_3(\mathbf{k}) + a_0(\mathbf{k}) \tag{4.104}$$

sind, von deren Vertauschungsrelation die Eigenschaft

$$[\alpha(\mathbf{k}), \alpha(\mathbf{k}')] \sim (g_{33} + g_{00}) = 0 \tag{4.105}$$

zu erwähnen ist. Damit wird wegen der Relationen (4.63)

$$\partial_\mu A^{\mu(+)}(x) = \frac{i}{2} \int d^3k \; f_k(x)\alpha(\mathbf{k}) \tag{4.106}$$

und (4.98) erweist sich als äquivalent zu

$$\alpha(\mathbf{k})|\Psi >= 0 \tag{4.107}$$

für **physikalische** $|\Psi >$ und alle $\mathbf{k}$. **Die Lorentzeichung erlegt also der Beimischung nichttransversaler Photonen** ($\lambda = 0, 3$) **zu den physikalischen Feldzuständen eine Bedingung auf.** Diese Bedingung genügt bereits, um zu beweisen, daß **im Unterraum der physikalischen Zustände die Matrixelemente von Observablen nur Beiträge von transversalen Photonen enthalten**!

Wir zeigen dies zunächst für die Feldstärken $F_{\mu\nu}$:
bei der Vierer-Rotationsbildung (4.49) fallen die $k_\mu\beta(\mathbf{k})$-Terme von (4.103) und die entsprechenden $k_\mu\bar{\beta}(\mathbf{k})$-Terme von $A_\mu^{(-)}$ heraus, und wir erhalten

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}(x) \;=\; -i\int \frac{d^3k}{2|\mathbf{k}|} \{ & \sum_{\lambda=1}^{2} (k_\mu e_\nu^{(\lambda)}(\mathbf{k}) - k_\nu e_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k})) \; (a_\lambda(\mathbf{k}) f_k(x) - \bar{a}_\lambda(\mathbf{k}) f_k^*(x)) \\ & -(k_\mu g_{\nu 0} - k_\nu g_{\mu 0}) \; (\alpha(\mathbf{k}) f_k(x) - \bar{\alpha}(\mathbf{k}) f_k^*(x))\}. \end{aligned} \tag{4.108}$$

Der Term mit α, $\bar{\alpha}$ liefert aber zu Matrixelementen zwischen **physikalischen** Zuständen $|\Psi >, |\Psi' >$ in der Metrik (4.79) wegen (4.107) keinen Beitrag, und wir erhalten damit

$$\begin{aligned} (\Psi', F^{\mu\nu}\Psi) \;\;=\;\; -i\sum_{\lambda=1}^{2} \int \frac{d^3k}{2|\mathbf{k}|} & \; (k_\mu e_\nu^{(\lambda)}(\mathbf{k}) - k_\nu e_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k})) \\ & \times [f_k(x)(\Psi', a_\lambda(\mathbf{k})\Psi) - f_k^*(x)(\Psi', \bar{a}_\lambda(\mathbf{k})\Psi)]. \end{aligned} \tag{4.109}$$

Als Beispiel einer in den A_μ **bilinearen** Observablen sei der Viererimpuls angegeben, der sich aus dem normalgeordneten **Hamiltonoperator**

$$P^0 = H = \int d^3x \; \mathcal{H}(x) \tag{4.110}$$

mit

$$\mathcal{H}(x) =: \pi^\mu \partial_0 A_\mu(x) - \mathcal{L}(x) := -\frac{1}{2} : (\vec{\nabla} A_\mu) \cdot (\vec{\nabla} A^\mu) + (\partial_0 A_\mu)(\partial_0 A^\mu) : \tag{4.111}$$

und dem normalgeordneten **Impulsoperator**

$$\mathbf{P} = \int d^3x \ :\pi^\mu \vec{\nabla} A_\mu := - \int d^3x \ :(\partial_0 A_\mu)(\vec{\nabla} A^\mu): \tag{4.112}$$

zusammensetzt. Mit (4.86) erhält man

$$P^\mu = (-g^{\lambda\lambda}) \int \frac{d^3k}{2|\mathbf{k}|} \ k^\mu \ \bar{a}_\lambda(\mathbf{k}) a_\lambda(\mathbf{k}) \tag{4.113}$$

mit $k^0 = |\mathbf{k}|$ und somit für Matrixelemente zwischen **physikalischen** Zuständen wegen

$$(\Psi', [\bar{a}_3(\mathbf{k})a_3(\mathbf{k}) - \bar{a}_0(\mathbf{k})a_0(\mathbf{k})]\Psi) = (\Psi', \overline{[a_3(\mathbf{k}) - a_0(\mathbf{k})]} \ a_3(\mathbf{k})\Psi) = 0 \tag{4.114}$$

nur den transversalen Beitrag

$$(\Psi', P^\mu \Psi) = \int d^3k \ k^\mu \ (\Psi', [N_1(\mathbf{k}) + N_2(\mathbf{k})]\Psi) \tag{4.115}$$

mit den (Impulsraum-) Dichteoperatoren

$$N_\lambda(\mathbf{k}) = \frac{1}{2|\mathbf{k}|} \bar{a}_\lambda(\mathbf{k}) a_\lambda(\mathbf{k}). \tag{4.116}$$

Auch der nicht eichinvariante Term $-1/2(\partial_\mu A^\mu)^2$ in (4.70) ist damit neutralisiert, denn nach Normalordnung, $\mathcal{L}_2 \rightarrow: \mathcal{L}_2 :$, gilt im physikalischen Teilraum wegen (4.98)

$$(\Psi', :(\partial_\mu A^\mu)^2 : \Psi) = (\Psi', :(\partial_\mu A^{\mu(+)})(\partial_\nu A^{\nu(-)}) : \Psi) = (\Psi', (\partial_\nu A^{\nu(-)})(\partial_\mu A^{\mu(+)})\Psi) = 0, \tag{4.117}$$

d.h. die Lagrangedichte ist dort gemäß (4.70, 4.72) zu einer eichinvarianten Lagrangedichte äquivalent.

Andererseits zeigen (4.109) und (4.115), daß die physikalischen Zustände noch erhebliche Mehrdeutigkeiten enthalten, da ja die Beimischung nichttransversaler Photonen zu $|\Psi>$ innerhalb der Bedingung (4.107) noch beliebig variiert werden kann, ohne die Projektionen von Observablen auf den physikalischen Teilraum zu ändern. Insbesondere folgt, daß das **physikalische Vakuum** $|0_{ph}>$, definiert durch

$$(0_{ph}, P^\mu 0_{ph}) = 0, \qquad\qquad (0_{ph}, 0_{ph}) = 1, \tag{4.118}$$

lediglich die Bedingungen

$$a_1(\mathbf{k})|0_{ph}> = a_2(\mathbf{k})|0_{ph}> = \alpha(\mathbf{k})|0_{ph}> = 0 \tag{4.119}$$

zu erfüllen braucht und daher eine ganze **Äquivalenzklasse physikalischer Vakua** bezeichnet, von denen das **Vakuum aller Photonen** (4.89) nur einen Repräsentanten darstellt. Man kann in dieser Äquivalenzklasse eine vollständige Basis angeben, indem man in (4.89) sukzessive α-Quanten erzeugt, *d.h.* die Zustände

$$|\Phi_n> = \bar{N} \frac{1}{\sqrt{n!}} \bar{\alpha}(\mathbf{k}_n) .... \bar{\alpha}(\mathbf{k}_1)|0_{ph}> \tag{4.120}$$

bildet (mit einer Normierungskonstanten $\bar{N}$), die wegen (4.105) alle (4.119) erfüllen, zu $|0>$ in der Metrik (4.79) orthogonal sind und verschwindende Norm haben für $n > 0$:

$$< \Phi_{n'}|\Phi_n >= \delta_{n'n}\delta_{n0}. \tag{4.121}$$

Die **allgemeinste Linearkombination**

$$c_0|0> + \sum_{n=1}^{\infty} \int d^3k_1 .... \int d^3k_n \; c_n(\mathbf{k}_1, ..., \mathbf{k}_n)|\Phi_n > \tag{4.122}$$

mit $|c_0| = 1$ ist dann **Repräsentant** von $|0_{ph}>$ mit der positiven Norm $|c_0|^2 = 1$. Der physikalische Zustand $|\Psi_{n_1n_2}>$ mit n_1 bzw. n_2 transversalen Quanten vom Typ $\lambda = 1$ bzw. 2 ist dann ebenfalls eine Äquivalenzklasse, deren sämtliche Elemente durch Anwendung eines Operators vom Typ

$$\bar{N}\frac{1}{\sqrt{n_1!n_2!}}\bar{a}_2(\mathbf{k}_{n_2})....\bar{a}_2(\mathbf{k}_1)\bar{a}_1(\mathbf{q}_{n_1})....\bar{a}_1(\mathbf{q}_1) \tag{4.123}$$

auf sämtliche Zustände (4.122) entstehen.

Man kann nun zeigen, daß diese Vieldeutigkeit genau der in der klassischen Maxwell-Theorie vorhandenen Freiheit entspricht, **innerhalb der Lorentz-Eichklasse noch eingeschränkte Umeichungen** vom Typ (4.53) bzw. (4.65) vorzunehmen. Dazu bemerken wir zunächst, daß die eingeschränkten Umeichungen im Hilbertraum durch unitäre Operatoren (im Sinne der Metrik (4.79))

$$U = \exp(iG) \text{ mit } \bar{G} = G \text{ und } [G, a_1(\mathbf{k})] = [G, a_2(\mathbf{k})] = [G, \alpha(\mathbf{k})] = 0 \tag{4.124}$$

für alle $\mathbf{k}$ dargestellt werden. Ein solcher Operator kommutiert nämlich in (4.103) lediglich nicht mit dem k_μ-Term, *d.h.*

$$U \; A_\mu(x)U^{-1} = A_\mu(x) - \partial_\mu\Lambda(x) \tag{4.125}$$

mit

$$\Lambda(x) = i \int \frac{d^3k}{2|\mathbf{k}|} \; \{[U\beta(\mathbf{k})U^{-1} - \beta(\mathbf{k})]f_k(x) - [U\bar{\beta}(\mathbf{k})U^{-1} - \bar{\beta}(\mathbf{k})]f_k^*(x)\} = \bar{\Lambda}(x), \tag{4.126}$$

wobei (4.126) offensichtlich Lösung von $\partial_\mu\partial^\mu\Lambda = 0$, also das operatorwertige Äquivalent von (4.53,4.65) ist. Λ ist ein Vielfaches des Einheitsoperators, wenn

$$[G, \beta(\mathbf{k})] = \lambda(\mathbf{k}) \cdot 1_4 \tag{4.127}$$

mit einer komplexen Zahl $\lambda(\mathbf{k})$ ist, weil dann die Entwicklung für die in (4.126) auftretenden Operatoren nach dem $[G, \beta]$-Term abbricht. Eine Transformation (4.124) läßt aber die Lorentz-Bedingung (4.107) unverletzt. Insbesondere erfüllt mit beliebigem $|\Phi>$ auch $U|\Phi>$ die physikalische Vakuumsbedingung (4.119), muß also von der Form (4.122) sein. Umgekehrt läßt sich zu zwei Zuständen vom Typ (4.122) stets eine Eichtransformation vom Typ (4.124) konstruieren.

4.7 Der Feynman-Propagator des Strahlungsfeldes

Will man den Feynman-Propagator des Strahlungsfeldes,

$$\begin{aligned} G^0_{\mu\nu}(x,y) &= -i(0_{ph}, T[A_\mu(x)A_\nu(y)]0_{ph}) && (4.128) \\ &= -i\ \Theta(x^0-y^0)(0_{ph}, A_\mu(x)A_\nu(y)0_{ph}) - i\Theta(y^0-x^0)(0_{ph}, A_\nu(y)A_\mu(x)0_{ph}) \end{aligned}$$

angeben, so muß man selbst innerhalb der Eichungsklasse (4.107) eine spezielle Eichung, *d.h.* einen Repräsentanten von $|0_{ph}>$, spezifizieren. Wählt man das Vakuum aller Photonen (4.89), so erhält man mit der üblichen Rechnung (HA)

$$G^0_{\mu\nu}(x,y) = g_{\mu\nu}D_F(x-y) = -g_{\mu\nu}\Delta_F(x-y; m=0) \qquad (4.129)$$

mit der Fourierdarstellung

$$D_F(x) = (2\pi)^{-4}\int d^4k\ \tilde{D}_F(k)\exp(-ik\cdot x), \qquad \tilde{D}_F(k) = -\frac{1}{k^2+i0}. \qquad (4.130)$$

Abschließend sei noch eine explizite, die Bedingungen (4.77) und (4.88) erfüllende **Realisierung des metrischen Operators** η aufgeführt, nämlich

$$\eta = \exp\{-i\pi \int \frac{d^3k}{2|\mathbf{k}|}\ a_0^\dagger(\mathbf{k})a_0(\mathbf{k})\} = (-1)^{-\hat{N}_0'} \qquad (4.131)$$

mit

$$\hat{N}_0' = \int \frac{d^3k}{2|\mathbf{k}|}\ a_0^\dagger(\mathbf{k})a_0(\mathbf{k}), \qquad (4.132)$$

wobei der im Exponenten auftretende Operator $\hat{N}_0'$ – bis auf die Verwendung des 'alten' Operatorkonjugierten $a_0^\dagger$ – den Anzahloperator $\hat{N}_0$ für zeitartige Photonen darstellt. Wegen (4.88) ist $\bar{a}_0 = -a_0^\dagger$, also $\hat{N}_0' = -\hat{N}_0$. Der metrische Operator η ändert also nur das Vorzeichen bei einer ungeraden Anzahl von zeitartigen Photonen.

Teil II

Felder in Wechselwirkung

Kapitel 5

Aktionsprinzip und Noether'sches Theorem

5.1 Schwinger'sches Aktionsprinzip

Um physikalische Prozesse wie Produktion, Streuung und Zerfall von Elementarteilchen zu beschreiben, muß man Wechselwirkungen zwischen mindestens 2 Feldern einführen. Dann entstehen im allgemeinen **nichtlineare Feldgleichungen**, die eine explizite und zugleich die aufgeprägten Vertauschungsrelationen erfüllende Lösung wie in (1.47), (3.6), (4.86) meist nicht mehr zulassen. Es ist dann nützlich, ein allgemeines dynamisches Prinzip zu kennen, das auch bei wechselwirkenden Systemen die Aufstellung **miteinander konsistenter Bewegungsgleichungen und Vertauschungsrelationen** sowie die Herleitung allgemeingültiger Erhaltungssätze gestattet.

Wir betrachten dazu ein gekoppeltes System von Feldern mit f unabhängigen Feldfunktionen

$$\varphi_r(\mathbf{x}, t) = \varphi_r(x) \qquad\qquad (r = 1, .., f) \tag{5.1}$$

die unabhängig von ihrer Zusammenfassung zu lorentzkovarianten Sätzen (Skalaren, Vierervektoren, Tensoren *u.s.w.*) durchnumeriert seien. Observable wie Viererimpuls, Ladungen, meßbare Feldstärken sind dann aus den $\varphi_r(x)$ und ihren Ableitungen aufgebaut: $\Omega = \Omega(\varphi_r, \partial_\mu \varphi_r)$.

Zur Beschreibung der dynamischen Entwicklung des Systems benutzen wir das **Heisenberg-Bild**, in dem der Zustandsvektor $|\psi>$ des Systems konstant ist und die Anfangsbedingungen des Problems (Präparation) repräsentiert, während die Observablen $\Omega = \Omega(t)$ sich *i.a.* zeitlich ändern, sofern sie nicht Konstanten der Bewegung sind, d.h. $d\Omega(t)/dt = 0$ gilt. Die Entwicklung des Systems wird dann beschrieben durch Angabe des Zeitverlaufs **eines vollständigen – bei Feldsystemen unendlichen – Satzes vertauschbarer Observabler** über ein interessierendes Zeitintervall $t_1 ... t_n$.

Anstelle der Zeitpunkte $t_1 ... t_n$ kann man allgemeiner – um Raum und Zeit symmetrisch zu behandeln – eine Folge **raumartiger Hyperebenen der Dimension 3 im Minkowski-Raum**,

$$\sigma = \{x | n_\mu x^\mu - \tau = 0, n_\mu n^\mu = 1\}, \tag{5.2}$$

mit den Parametern $\tau_1 ... \tau_2$ betrachten, deren Normaleneinheitsvektoren n^μ zeitartig sind. Die Hyperebenen konstanter Zeit sind dann ein Spezialfall mit $n = (1,0,0,0)$ und $\tau = t_0$. Das Flächenelement in der Hyperfläche (5.2) sei $d^3\sigma$ und das orientierte Flächenelement $d\sigma_\mu = d^3\sigma \; n_\mu$. Wir schreiben $\Omega(x \,\epsilon\, \sigma)$ oder kurz $\Omega(\sigma)$ für die Werte der Observablen Ω auf der Hyperfläche (5.2). Zu beschreiben ist nun der **Zusammenhang zwischen den Observablen $\Omega(\sigma)$ längs einer einparametrigen Familie paralleler Hyperflächen** $\sigma_1 ... \sigma_n$ mit demselben n_μ. Da in einer Quantentheorie die Erhaltung der Gesamtwahrscheinlichkeit (= 1) für die Existenz des Systems zu fordern ist, erwarten wir, daß dieser Zusammenhang durch unitäre Transformationen vermittelt wird.

Wir betrachten dazu zunächst **allgemeine infinitesimal-unitäre Transformationen der Feldoperatoren mit einem beliebigen Generator** G,

$$\varphi_r \to \varphi_r + \delta_0 \varphi_r, \qquad \delta_0 \varphi_r = i[G, \varphi_r] \qquad (r = 1,..,f) \tag{5.3}$$

mit bezüglich der gewählten Hilbertraum-Metrik selbstadjungiertem G, das *i.a.* zeit- bzw. σ-abhängig sein kann. In den Observablen auf der Hyperfläche σ wird daher die Variation

$$\delta_0 \Omega(\sigma) = i[G(\sigma), \Omega(\sigma)] \tag{5.4}$$

induziert. Entsprechend werden die simultanen Eigenzustände $|\psi(\omega_1) >$ des vollständigen Satzes $\{\Omega(\sigma_1)\}$, charakterisiert durch deren Eigenwertsatz ω_1, und die entsprechenden Zustände $|\psi(\omega_2) >$ auf σ_2 – beide sind zu unterscheiden vom σ-unabhängigen Heisenberg-Zustandsvektor – geändert gemäß

$$\delta_0 < \psi(\omega_1)| = -i < \psi(\omega_1)|G(\sigma_1), \qquad \delta_0|\psi(\omega_2) >= i\; G(\sigma_2)|\psi(\omega_2) > . \tag{5.5}$$

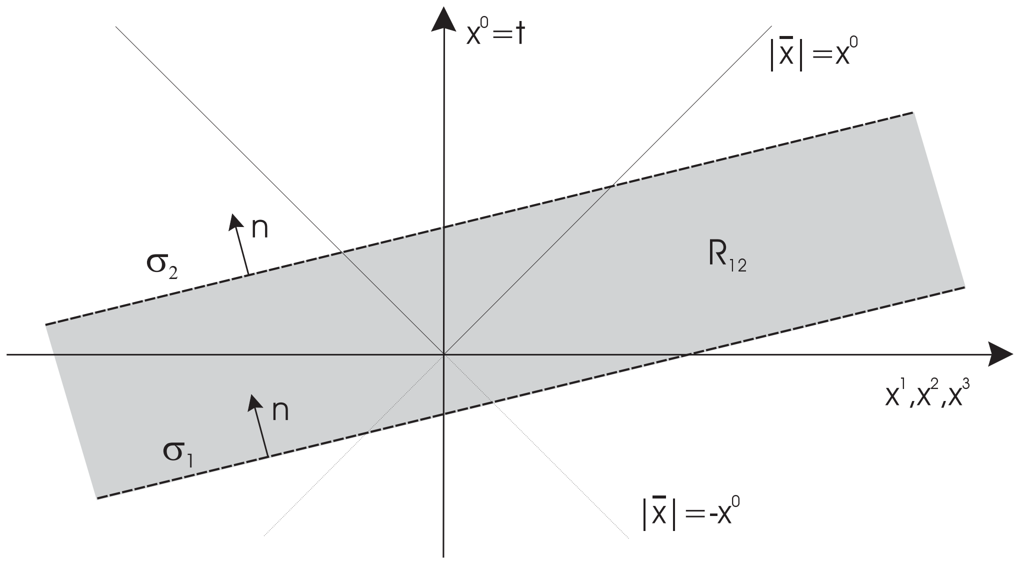
Die **Transformationsmatrix** $< \psi(\omega_1)|\psi(\omega_2) >$, die ebenso wie $\{\Omega(\sigma)\}$ die Zeitentwicklung des Systems beschreibt, ändert sich daher gemäß

$$\delta < \psi(\omega_1)|\psi(\omega_2) >= i < \psi(\omega_1)|\delta W|\psi(\omega_2) > \tag{5.6}$$

mit

$$\delta W = G(\sigma_2) - G(\sigma_1). \tag{5.7}$$

Zur Formulierung des dynamischen Postulats für den Operator δW betrachten wir nun spezieller die von 2 **parallelen** raumartigen Hyperebenen σ_1 und σ_2 begrenzte Raum-Zeit-Region R_{12} (vgl. Abb.), auf der Feldoperatoren (5.1) definiert seien.



Eine allgemeine kanonische Variation der Felder in diesem Gebiet und auf seinen Rändern sowie der Ränder selbst (*d.h.* des Gebietes) erhält man durch Angabe eines einparametrigen hermiteschen Operatorensatzes $\{G(\sigma)\}$ auf einer Schar paralleler Hyperebenen σ zwischen σ_1 und σ_2. Dieser induziert gemäß (5.3) Änderungen der Felder

$$\delta_0\varphi_r(x) = \varphi'_r(x) - \varphi_r(x) \tag{5.8}$$

sowie die infinitesimalen raumzeitlichen Transformationen

$$x_\mu \to x'_\mu = x_\mu + \delta x_\mu. \tag{5.9}$$

Eine solche allgemeine Variation bewirkt in allen Funktionalen der Feldoperatoren wohldefinierte Änderungen. Insbesondere wird die sogenannte lokale Variation eines Feldes φ_r auf dem Rand σ_1 bzw. σ_2,

$$\delta\varphi_r(x) = \varphi'_r(x') - \varphi_r(x), \qquad\qquad x \,\epsilon\, \sigma_{1,2}, \tag{5.10}$$

hervorgerufen **a**) durch die Variation (5.8) bei festem $x \,\epsilon\, \sigma_{1,2}$, **b**) bei raumzeitlichen Transformationen zusätzlich durch den von der Verschiebung der Randfläche herrührenden Beitrag

$$\varphi_r(x') - \varphi_r(x) = (\partial_\mu\varphi_r(x))\ \delta x^\mu, \tag{5.11}$$

da die linke Seite von (5.11) auch in 2. Ordnung geschrieben werden kann als $\varphi'_r(x') - \varphi'_r(x)$.

Wir erhalten damit nach Addition (5.10) für $x \epsilon \sigma_{1,2}$:

$$\delta\varphi_r(x) = \delta_0\varphi_r(x) + (\partial_\mu\varphi_r(x))\delta x^\mu. \tag{5.12}$$

Wir postulieren nun das **Schwinger'sche Aktionsprinzip:**

(5.13)

Es existiert eine lorentzinvariante, von den Feldoperatoren $\varphi_r(x)$ und deren Ableitungen $\partial_\mu\varphi_r(x)$, jedoch nicht explizit von x abhängende Operatorfunktion $\mathcal{L}$, die Lagrangedichte des Systems, derart, daß der die Änderung der Transformationsmatrix bestimmende Operator δW aus (5.6,5.7) gegeben ist durch die Variation des Wirkungsintegrals

$$W = \int_{R_{12}} \mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi)\ d^4x = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \mathcal{L}\ d^4x. \tag{5.14}$$

Dieses Prinzip ist allgemeiner als das Hamilton'sche Prinzip der klassischen Mechanik insofern, als es sich **a**) auf quantisierte Felder bezieht, **b**) auch Variationen dieser Felder an den Rändern und **c**) Variationen der Ränder selbst, *d.h.* des Integrationsgebietes zuläßt.

Wir schreiben die Variation von (5.14) als

$$\delta W = \int_{R'_{12}} (\mathcal{L} + \delta\mathcal{L})\ d^4x' - \int_{R_{12}} \mathcal{L}\ d^4x, \tag{5.15}$$

wobei R'_{12} das aus R_{12} unter (5.9) hervorgehende, infinitesimal verschobene Gebiet ist. Bei nicht raumzeitlichen Transformationen (*z.B.* Eichtransformationen) ist diese Verschiebung nicht vorhanden ($\delta x_\mu = 0$), wohl aber *i.a.* die Änderung der Lagrangedichte

$$\delta\mathcal{L} = \sum_r [\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_r}\delta_0\varphi_r + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_r)}\delta_0(\partial_\mu\varphi_r)], \tag{5.16}$$

in der $\delta_0(\partial_\mu\varphi_r) = \partial_\mu(\delta_0\varphi_r)$ zu setzen ist.

Man beachte dabei, daß die oben eingeführte Schreibweise, die auf Schwinger zurückgeht, die eventuelle Nichtvertauschbarkeit der operatorwertigen Variationen $\delta_0\varphi_r$ mit den φ_r bzw. $\partial_\mu\varphi_r$ selbst nicht hervortreten läßt. Sie ist also symbolisch derart zu verstehen, daß etwa $2\ \varphi_r\ \delta_0\varphi_r$ (als Variation von φ_r^2) zu lesen ist als

$$\varphi_r \cdot (\delta_0\varphi_r) + (\delta_0\varphi_r) \cdot \varphi_r, \tag{5.17}$$

u.s.w. Da praktisch alle wichtigen Lagrangedichten Polynome bzw. Multilinearformen niedrigen Grades in den φ_r und $\partial_\mu\varphi_r$ sind, bedeutet diese Änderung keine praktische Schwierigkeit.

Man transformiert nun den 1. Term von (5.15) mittels der Funktionaldeterminante

$$\left|\frac{\partial(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)}\right| = 1 + \frac{\partial}{\partial x^\mu}\delta x^\mu \tag{5.18}$$

auf das ursprüngliche Integrationsgebiet R_{12} zurück und hat nach Linearisierung in den kleinen Variationen

$$\delta W = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \{\mathcal{L} \ \frac{\partial(\delta x^\mu)}{\partial x^\mu} + \sum_r [\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_r} \cdot \delta_0 \varphi_r + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_r)} \cdot \partial_\mu(\delta_0 \varphi_r)]\} \ d^4x. \tag{5.19}$$

Nach partieller Integration im letzten Term und Einführung der Hilfsgrößen

$$\pi_r^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_r)}, \tag{5.20}$$

von denen die π_r^0 die schon bekannten **kanonisch konjugierten Felder** sind, erhalten wir

$$\delta W = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} [\sum_r (\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_r} - \partial_\mu \pi_r^\mu) \delta_0 \varphi_r + \partial_\mu (\mathcal{L} \ \delta x^\mu + \sum_r \pi_r^\mu \delta_0 \varphi_r)] \ d^4x. \tag{5.21}$$

Der ∂_μ-Term wird mittels des **Gauß'schen Integralsatzes**

$$\int_V \ \partial_\mu f^\mu \ d^4x = \int_{S(V)} \ f^\mu \ d\sigma_\mu, \tag{5.22}$$

wo $S(V)$ die dreidimensionale Randhyperfläche des vierdimensionalen Volumens V und $d\sigma_\mu$ ihr orientiertes Flächenelement ist, umgewandelt in die Differenz von Integralen über die beiden Randhyperebenen σ_1 und σ_2,

$$\int_{\sigma_2} \ F^\mu \ d\sigma_\mu - \int_{\sigma_1} \ F^\mu \ d\sigma_\mu. \tag{5.23}$$

Die **raumartig unendlich fernen Teile der Berandung liefern keinen Beitrag**, da die Felder als in allen raumartigen Richtungen asymptotisch hinreichend schnell abfallend angenommen werden. Dabei ist

$$F^\mu = \sum_r \ \pi_r^\mu \delta_0 \varphi_r + \mathcal{L} \ \delta x^\mu, \tag{5.24}$$

oder, da auf den Randflächen (5.12) gilt,

$$F^\mu = \sum_r \ \pi_r^\mu \delta \varphi_r - (\sum_r \ \pi_r^\mu \partial^\nu \varphi_r - g^{\mu\nu} \mathcal{L}) \delta x_\nu. \tag{5.25}$$

Aus der so erhaltenen Form von δW,

$$\delta W = \int_{\sigma_2} \ F^\mu \ d\sigma_\mu - \int_{\sigma_1} \ F^\mu \ d\sigma_\mu + \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \ [\sum_r (\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_r} - \partial_\mu \pi_r^\mu) \ \delta_0 \varphi_r(x)] \ d^4x, \tag{5.26}$$

folgen nun durch Anwendung des Aktionsprinzips die

5.2 Feldgleichungen

Wir betrachten nun speziell Variationen, die auf den Rändern $\sigma_{1,2}$ verschwinden (wie beim klassischen Hamilton-Prinzip) und diese Randflächen ungeändert lassen, *d.h.* $F_\mu = 0$ für $x \epsilon \sigma_{1,2}$. Im Inneren des Integrationsgebietes sollen die $\delta_0\varphi_r$ ansonsten beliebig sein. Da dann die Observablen $\{\Omega(\sigma_{1,2})\}$ und deren Eigenzustände $|\psi(\omega_{1,2}) >$ unverändert bleiben, ist nach (5.6) $\delta W = 0$, und (5.26) ist nur erfüllbar, wenn im letzten Integral die Koeffizienten aller $\delta_0\varphi_r$ für alle $x \epsilon R_{12}$ verschwinden, *d.h.*

$$\partial_\mu \pi_r^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_r}; \qquad\qquad r = 1, .., f. \tag{5.27}$$

Dies sind die **Euler-Lagrange'schen Bewegungsgleichungen** für Feldoperatoren. Auf dem durch diese Feldgleichungen festgelegten Pfad des Systems im Hilbertraum bzw. Observablenraum hat dann nach (5.26) δW die in (5.7) geforderte Form mit

$$G(\sigma) = \int_\sigma F^\mu(x)\; d\sigma_\mu \tag{5.28}$$

mit dem in (5.25) definierten F^μ.

5.3 Gleichzeitige Vertauschungsrelationen

Wir betrachten nun Variationen mit $\delta x_\mu = 0$ um die Lösung von (5.27) herum; dann bleibt in (5.25) nur der 1. Term und in den Feldoperatoren auf einer Hyperfläche σ wird nach (5.4) die Änderung

$$\delta\varphi_s = i \sum_r \int_\sigma d\sigma_\mu(x')\; [\, \pi_r^\mu(x')\, \delta\varphi_r(x')\, ,\, \varphi_s(x)\,], \qquad\qquad x \epsilon \sigma, \tag{5.29}$$

induziert. Eine entsprechende Gleichung gilt für die konjugierten Felder $\pi_r^\mu(x)$. Mit den Kommutator-Identitäten

$$[AB, C] \;=\; A[B, C] + [A, C]B \tag{5.30}$$

$$[AB, C] \;=\; A\{B, C\} - \{A, C\}B \tag{5.31}$$

läßt sich dies in den beiden äquivalenten Formen

$$\delta\varphi_s = i \sum_r \int_\sigma d\sigma_\mu(x')\;\; \pi_r^\mu(x')\, [\, \delta\varphi_r(x')\, ,\, \varphi_s(x)\,] + [\, \pi_r^\mu(x')\, ,\, \varphi_s(x)\,]\, \delta\varphi_r(x') \tag{5.32}$$

für $x \epsilon \sigma$ und

$$\delta\varphi_s = i \sum_r \int_\sigma d\sigma_\mu(x')\;\; \pi_r^\mu(x')\, \{\, \delta\varphi_r(x')\, ,\, \varphi_s(x)\, \} - \{\, \pi_r^\mu(x')\, ,\, \varphi_s(x)\, \}\, \delta\varphi_r(x') \tag{5.33}$$

für $x \epsilon \sigma$ schreiben. Die einfachste Lösung erhält man, indem man von (5.32) ausgeht und setzt

$$[\, \delta\varphi_r(x')\, ,\, \varphi_s(x)\,] = 0 \tag{5.34}$$

für $x,\ x' \epsilon\ \sigma$ und

$$[\,\pi_r^\mu(x')\,,\,\varphi_s(x)\,] = -i\ \delta_{rs}\ \delta^\mu(x,x') \tag{5.35}$$

für $x,\ x' \epsilon\ \sigma$, wobei als Verallgemeinerung von $\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$ die δ-Funktion bzgl. der Hyperfläche σ, d.h. $\delta^\mu(x,x')$ mit der Eigenschaft

$$\int_\sigma d\sigma_\mu(x)\ \delta^\mu(x,y)\ f(x) = f(y), \qquad y\ \epsilon\ \sigma, \tag{5.36}$$

verwendet wurde. Da mit (5.34) auch

$$\delta[\,\varphi_r(x')\,,\,\varphi_s(x)\,] = [\,\delta\varphi_r(x')\,,\,\varphi_s(x)\,] - [\,\delta\varphi_s(x)\,,\,\varphi_r(x')\,] = 0 \tag{5.37}$$

für $x,\ x' \epsilon\ \sigma$ für beliebige Variationen gilt, hat man dann sogar

$$[\,\varphi_r(x')\,,\,\varphi_s(x)\,] = 0 \tag{5.38}$$

für $x,\ x' \epsilon\ \sigma$ und aus den analogen Relationen für $\pi_r^\mu(x)$ ebenso

$$[\,\pi_r^\mu(x')\,,\,\pi_s^\nu(x)\,] = 0 \tag{5.39}$$

für $x,\ x' \epsilon\ \sigma$.

Da man durch zwei raumartig gelegene Weltpunkte x, x' stets eine raumartige Hyperebene σ legen kann, besagen (5.35, 5.38, 5.39) zunächst die Vertauschbarkeit aller Felder und konjugierten Felder auf derartigen Punktepaaren. (5.35) legt zusätzlich **die Singularität der Kommutatoren für (von raumartigen Abständen) gegen 0 gehenden Abstand der Punkte x, x' fest.** Für die speziellen Hyperebenen $n = (1,0,0,0)$, $t = const.$, haben wir wieder die bekannten kanonischen Vertauschungsrelationen für gleiche Zeiten

$$[\,\pi_r^0(x')\,,\,\varphi_s(x)\,] = -i\ \delta_{rs}\ \delta^3(\vec{x}-\vec{x}') \tag{5.40}$$

für $x^0 = x'^{\,0}$,

$$[\,\varphi_r(x')\,,\,\varphi_s(x)\,] = [\,\pi_r^0(x')\,,\,\pi_s^0(x)\,] = 0 \tag{5.41}$$

für $x^0 = x'^{\,0}$.

Andererseits kann man auch von (5.33) ausgehen und die **Antikommutatorrelationen**

$$\{\,\pi_r^0(x')\,,\,\varphi_s(x)\,\} = -i\ \delta_{rs}\ \delta^3(\vec{x}-\vec{x}') \tag{5.42}$$

für $x^0 = x'^{\,0}$,

$$\{\,\varphi_r(x')\,,\,\varphi_s(x)\,\} = \{\,\pi_r^0(x')\,,\,\pi_s^0(x)\,\} = 0 \tag{5.43}$$

für $x^0 = x'^{\,0}$ fordern, die sich für die speziellen Hyperflächen $t = const.$ auf die beim **Dirac-Feld benutzten gleichzeitigen Antikommutatorrelationen reduzieren.** Sie sichern ebenfalls die Mikrokausalität für bilineare Observable.

Kanonische Vertauschungsrelationen und Fermi-Dirac-Antikommutatoren sind also einfachste Lösungen einer aus dem Aktionsprinzip folgenden Integralbedingung.

Die Antwort, welche Quantisierungsart bei welchem Feldtyp anzuwenden ist, liefert das unter sehr allgemeinen Voraussetzungen zuerst von Pauli bewiesene

5.4 Spin-Statistik-Theorem

Läßt man nur Quantisierung mit entweder kanonischen Kommutatoren oder Antikommutatoren zu, so müssen Felder mit ganzzahligem Spin nach dem ersteren Schema quantisiert werden, *d.h.* ihre Feldquanten müssen Bose-Einstein-Statistik zeigen – anderenfalls wird die Mikrokausalität verletzt. Felder mit halbzahligem Spin müssen dagegen nach der zweiten Methode quantisiert werden, *d.h.* Feldquanten mit Fermi-Dirac-Statistik haben – anderenfalls ist die vom Vakuumzustand aus gezählte Energie nicht mehr positiv definit (siehe *z.B.*: P. Roman, Introduction to Quantum Field Theory).

5.5 Das Noether'sche Theorem

Wir betrachten nun kanonische Variationen, die Symmetrieoperationen des Systems darstellen in dem Sinne, daß sie längs des durch die Feldgleichungen (5.27) festgelegten Pfades im Hilbertraum bzw. Operatorraum $\delta W \equiv 0$ erzeugen. Nach (5.7) bedeutet dies

$$G(\sigma_1) = G(\sigma_2) \qquad\qquad \forall\, \sigma_1, \sigma_2, \tag{5.44}$$

d.h. der zugehörige Generator G ist σ-unabhängig. Definieren wir – als Verallgemeinerung der Zeitableitung eines Raumintegrals – die σ-Ableitung gemäß

$$\frac{d}{d\sigma}\int_\sigma F^\mu \; d\sigma_\mu = \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\Big(\int_{\sigma'} - \int_\sigma\Big)\, F^\mu \; d\sigma_\mu, \tag{5.45}$$

wobei Δ das Volumen eines Raumstücks um Punkt x zwischen den parallelen Hyperebenen σ' und σ ist. Beachten wir weiterhin, daß dies für raumartig-asymptotisch schnell abfallende Felder nach dem Gauß'schen Satz gleich

$$\lim_{\Delta\to 0}\Big(\frac{1}{\Delta}\int_\Delta \partial_\mu F^\mu \; d^4x\Big) = \partial_\mu F^\mu(x) \tag{5.46}$$

ist, so finden wir, daß (5.44) in der Form

$$\frac{dG(\sigma)}{d\sigma} = 0 \tag{5.47}$$

einen **Erhaltungssatz in Form der Kontinuitätsgleichung**

$$\partial_\mu F^\mu(x) = 0 \tag{5.48}$$

zur Folge hat. Man spricht von dem **erhaltenen Strom** F^μ mit F^μ aus (5.25). Dieser **Zusammenhang zwischen Symmetrien des Wirkungsintegrals und Erhaltungssätzen** ist der Inhalt des **Noether-Theorems**.

Zur Illustration betrachten wir die (von allen physikalischen Systemen zu fordernde) **Poincaré-Invarianz**. Bei der allgemeinen infinitesimalen Poincaré-Transformation

$$\delta x_\mu = \alpha_{\mu\nu} x^\nu + \epsilon_\mu, \qquad\qquad \alpha_{\mu\nu} = -\alpha_{\nu\mu} \tag{5.49}$$

mit kleinem $|\alpha_{\mu\nu}|$ und $|\epsilon_\mu|$ liegt die in den Gleichungen (1.109) bzw. (3.60) beschriebene Situation vor, *d.h.* die in (5.10) definierte lokale Variation $\delta\varphi_r$ ist beim einkomponentigen Feld Null ('starre Mitführung' der Feldwerte), beim mehrkomponentigen Feld höchstens eine zu $\alpha_{\mu\nu}$ proportionale lineare Komponentenvermischung

$$\delta\varphi_r(x) = \frac{1}{2}\sum_s \; \alpha_{\mu\nu} \; I^{\mu\nu}_{rs} \; \varphi_s(x) \tag{5.50}$$

mit 6 konstanten Matrizen $I^{\mu\nu} = -I^{\nu\mu}$.

Da diese Transformation $\delta W = 0$ läßt, existiert nach (5.48) und (5.25) der divergenzfreie Strom

$$\begin{aligned} F^\rho(x) \;\; &= \;\; -\,\epsilon_\mu \,[\sum_r \; \pi^\rho_r \partial^\mu \varphi_r - g^{\rho\mu}\mathcal{L}] \qquad (5.51) \\ &\quad + \alpha_{\mu\nu}\,[\frac{1}{2}\sum_{r,s} \; \pi^\rho_r \; I^{\mu\nu}_{rs} \; \varphi_s + (-\sum_r \; \pi^\rho_r \partial^\mu \varphi_r + g^{\rho\mu}\mathcal{L})x^\nu]. \end{aligned}$$

Wegen der Antisymmetrie von $\alpha_{\mu\nu}$ können wir ersetzen

$$\partial^\mu \varphi_r \, x^\nu \;\to\; \frac{1}{2}(x^\nu\partial^\mu - x^\mu\partial^\nu)\varphi_r, \qquad \mathcal{L}\; g^{\rho\mu}x^\nu \;\to\; \frac{1}{2}(g^{\rho\mu}x^\nu - g^{\rho\nu}x^\mu)\,\mathcal{L}. \tag{5.52}$$

Da $\partial_\rho F^\rho = 0$ für beliebiges $\alpha_{\mu\nu}$ und ϵ_μ gelten soll, erhalten wir 2 getrennte Sätze von Kontinuitätsgleichungen

$$\partial_\rho T^{\rho\mu}(x) \;=\; 0 \qquad\qquad (\mu = 0,..,3), \tag{5.53}$$

$$\partial_\rho M^{\rho\mu\nu}(x) \;=\; 0 \qquad\qquad (\mu,\nu = 0,..,3) \tag{5.54}$$

mit dem **kanonischen Energie-Impuls-Tensor**

$$T^{\rho\mu}(x) = \sum_r \; \pi^\rho_r \; (\partial^\mu\varphi_r) - g^{\rho\mu}\mathcal{L} \tag{5.55}$$

und der Drehimpuls-Tensordichte

$$M^{\rho\mu\nu}(x) = \sum_{r,s} \; \pi^\rho_r \; I^{\mu\nu}_{rs} \; \varphi_s + \sum_r \pi^\rho_r(x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu)\varphi_r + (g^{\rho\mu}x^\nu - g^{\rho\nu}x^\mu)\,\mathcal{L}, \tag{5.56}$$

die in den beiden Indizes μ,ν antisymmetrisch ist,

$$M^{\rho\mu\nu}(x) = -M^{\rho\nu\mu}(x). \tag{5.57}$$

In (5.55) ist insbesondere

$$T^{00}(x) = \sum_r \; (\pi^0_r \, \partial^0 \varphi_r) - \mathcal{L} = \mathcal{H} \tag{5.58}$$

die **Energie- oder Hamiltondichte** und

$$T^{0n}(x) = \sum_r \; (\pi^0_r \, \partial^n \varphi_r) \qquad\qquad (n = 1,2,3) \tag{5.59}$$

die **Dreier-Impulsdichte** des Feldes. Entsprechend sind $T^{m0}(x)\quad(m=1,2,3)$ die Komponenten der **Energiestromdichte**, $T^{mn}(x)\quad(m,n=1,2,3)$ die der Strömung der Impulskomponente n in m-Richtung. Die letzten 9 Größen werden analog zur Kontinuumsmechanik zum **Dreier-Spannungstensor** zusammengefaßt.

Die integralen Erhaltungssätze lassen sich wegen der σ-Unabhängigkeit der Generatoren ohne Einschränkung mit $n=(1,0,0,0)$, *d.h.* als

$$\frac{d}{dt}\,P^\mu=0 \qquad \text{mit } P^\mu=\int d^3x\; T^{0\mu}(x,t) \tag{5.60}$$

schreiben. Dieses ist der **Erhaltungssatz des Viererimpulses**. Der zugehörige Generator raum-zeitlicher Translationen,

$$G=-\epsilon_\mu\int_\sigma T^{\rho\mu}(x)\;d\sigma_\rho(x)=-\epsilon_\mu P^\mu, \tag{5.61}$$

ergibt in (5.4) – zusammen mit der aus (5.12) und (5.50) für $\alpha=0$ folgenden Variation

$$\delta_0\varphi_r=-\epsilon^\mu\partial_\mu\varphi_r \tag{5.62}$$

– nach Koeffizientenvergleich bzgl. der ϵ_μ die bereits an Spezialfällen demonstrierte Beziehung

$$i[P^\mu,\Omega]=\partial^\mu\Omega \tag{5.63}$$

für aus den Feldern φ_r und $\partial_\mu\varphi_r$ aufgebaute Operatoren Ω. Die integrale Form (Heisenberg'sche Bewegungsgleichungen) haben wir bereits in (1.87) kennengelernt.

Andererseits entsprechen die Gleichungen (5.54,5.56) den 6 integralen Erhaltungssätzen

$$\frac{d}{dt}\,M^{\mu\nu}=0, \qquad\qquad M^{\mu\nu}=\int d^3x\; M^{0\mu\nu} \tag{5.64}$$

mit dem **antisymmetrischen Drehimpuls-Vierertensor**

$$M^{\mu\nu}=-M^{\nu\mu}=\int d^3x\left[\sum_r\pi_r^0\left(\sum_s I_{rs}^{\mu\nu}\varphi_s+(x^\mu\partial^\nu-x^\nu\partial^\mu)\,\varphi_r\right)+(g^{0\mu}x^\nu-g^{0\nu}x^\mu)\,\mathcal{L}\right]. \tag{5.65}$$

Aus ihm baut sich der allgemeine Generator homogener Lorentztransformationen auf gemäß

$$G=\frac{1}{2}\,\alpha_{\mu\nu}M^{\mu\nu}, \qquad\qquad \alpha_{\mu\nu}=-\alpha_{\nu\mu}. \tag{5.66}$$

Von besonderem Interesse sind die 3 rein raumartigen Komponenten

$$J^k=-M^{lm} \qquad (k,l,m \text{ zyklisch}), \tag{5.67}$$

die Operatoren des **Gesamtdrehimpulses** des Feldsystems:

$$J^k=-\frac{1}{2}\,\epsilon^k{}_{lm}\sum_r\int d^3x\;\pi_r^0\;\left(\sum_s I_{rs}^{lm}\,\varphi_s+(x^l\partial^m-x^m\partial^l)\;\varphi_r\right). \tag{5.68}$$

Sie zerfallen in einen – die I^{lm} Matrizen enthaltenden – Spin-Term und einen Bahndrehimpuls-Anteil; jedoch hat diese Zerlegung, die die Raumkomponenten auszeichnet, keine lorentzkovariante Bedeutung. Nur der **Gesamtdrehimpuls ist Erhaltungsgröße.** Als Analogon zu (5.63) erhält man die für Sonderfälle bereits bekannten Vertauschungsrelationen

$$[\, M^{\mu\nu} \,,\, \varphi_r \,] = i \sum_s \, [(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu) \; \delta_{rs} + I^{\mu\nu}_{rs}] \; \varphi_s. \tag{5.69}$$

Man beachte, daß hier kein Term $\sim \mathcal{L}$ wie in (5.65) auftritt!

Beispiele:

I) Dirac-Feld

Hier hat man die 8 Felder ψ_α bzw. $\bar{\psi}_\alpha$ $(\alpha = 1, .., 4)$ mit konjugierten Feldern $i\,\psi^\dagger_\alpha$ bzw. 0. Die Matrizen $I_{\mu\nu}$ sind bis auf Faktoren die Spinmatrizen der Spinordarstellung:

$$I^{\mu\nu}_{\alpha\beta} = -\frac{i}{2} (\sigma^{\mu\nu})_{\alpha\beta} \tag{5.70}$$

und (5.67, 5.68) liefert die **Gesamtdrehimpuls-Operatoren**

$$J^k = -\frac{1}{2} \; \epsilon^k{}_{lm} \int d^3x \;\, \psi^\dagger(x) \;\; \left(\frac{1}{2} \; \sigma^{lm} + i(x^l \partial^m - x^m \partial^l) \cdot 1_4 \right) \;\; \psi(x). \tag{5.71}$$

II) Elektromagnetisches Feld:

Hier sind (4.75) die kanonisch konjugierten Felder und die Spinmatrizen sind

$$I^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma} = -i(S^{\mu\nu})_{\rho\sigma} = -i(g^\mu{}_\rho \, g^\nu{}_\sigma - g^\nu{}_\rho \, g^\mu{}_\sigma) \tag{5.72}$$

wie in (4.37). Gleichung (5.67, 5.68) ergibt dann für den Gesamtdrehimpuls

$$J^k = -\frac{1}{2} \; \epsilon^k{}_{lm} \int d^3x \;\, (i\partial^0 A^\rho) \;\, [(S^{lm})_{\rho\sigma} + i(x^l \partial^m - x^m \partial^l) g_{\rho\sigma}] \;\, A^\sigma. \tag{5.73}$$

In diesem Falle ist die formale Zerlegung in Spin- und Bahndrehimpuls selbst in einem speziellen Lorentzsystem noch **eichungsabhängig**; sie hat daher überhaupt keine durch Messung überprüfbare Bedeutung mehr. Nur der **Gesamtdrehimpuls des Strahlungsfeldes** ist eine Meßgröße.

Aus den expliziten Ausdrücken (5.60, 5.65) für P^μ und $M^{\mu\nu}$ lassen sich nun auch die **Vertauschungsrelationen der Poincaré-Generatoren** untereinander bestimmen. Man findet nach einiger Rechnung, daß **sowohl bei Verwendung der kanonischen Kommutatoren (5.34, 5.35) als auch der Antikommutatoren (5.42, 5.43)** folgende Relationen – für $\kappa, \lambda, \mu, \nu = (0, .., 3)$ – gelten:

$$[\, P^\mu \,,\, P^\nu \,] \;\; = \;\; 0 \tag{5.74}$$

$$[\, M^{\kappa\lambda} \,,\, P^\mu \,] \;\; = \;\; i\,(g^{\kappa\mu} P^\lambda - g^{\lambda\mu} P^\kappa) \tag{5.75}$$

$$[\, M^{\kappa\lambda} \,,\, M^{\mu\nu} \,] \;\; = \;\; i\,(g^{\kappa\mu} M^{\lambda\nu} + g^{\lambda\nu} M^{\kappa\mu} - g^{\kappa\nu} M^{\lambda\mu} - g^{\lambda\mu} M^{\kappa\nu}). \tag{5.76}$$

Gleichung (5.74) drückt aus, daß die Translationen untereinander vertauschbar sind, *d.h.* eine abelsche Untergruppe der Poincaré-Gruppe bilden. Gleichung (5.75) besagt, daß der Viererimpuls sich als Vierervektor transformiert während (5.76) $M_{\mu\nu}$ als Komponenten eines Tensors 2. Stufe ausweist. Alle 3 Relationen zusammen sind als Verallgemeinerung der Gleichungen

$$[J^k, J^l] = i\, \epsilon^{kl}{}_m\, J^m \qquad\qquad (k, l = 1, 2, 3) \tag{5.77}$$

für die Drehimpulsgruppe anzusehen, die als Spezialfall in (5.76) enthalten sind. Sie drücken den Kommutator zweier Generatoren als Linearkombination von Generatoren aus und definieren damit die sogenannte **Lie-Algebra** der betreffenden Transformationsgruppe; die dabei auftretenden, zu $\epsilon^{kl}{}_m$ analogen, Koeffizienten heißen die **Strukturkonstanten** der Gruppe.

In der Theorie der Lie-Gruppen wird gezeigt, daß die Kommutatoralgebra im wesentlichen (*d.h.* bis auf globale topologische Eigenschaften) die Transformationsgruppe festlegt und umgekehrt. **Daher genügt im allgemeinen die Angabe der Lie-Algebren für ein physikalisches System zur Festlegung der Transformationseigenschaften des Systems und damit zu dessen Klassifikation**.

Kapitel 6

Konstruktion von Lagrangedichten

Eine wichtige Rolle spielt die Poincaré-Invarianz bei der Konstruktion von Lagrangedichten insbesondere für solche wechselwirkende Feldsysteme, die kein klassisches Analogon haben, so daß die Wechselwirkungsterme nicht einfach durch Quantisierung klassischer Ausdrücke zu gewinnen sind. Man sieht aus (5.19), daß $\delta W = 0$ gleichbedeutend mit $\delta\mathcal{L} = 0$ ist; dies ist die schon im Aktionsprinzip enthaltene Forderung, daß die **Lagrangedichte $\mathcal{L}$ eine Poincaré- und insbesondere eine Lorentz-Invariante** sein muß. Zusammen mit der Forderung, daß $\mathcal{L}$ höchstens erste Ableitungen der Felder enthalten soll, ergibt dies **wesentliche Einschränkungen der Form der möglichen Lagrangedichten.**

So kann nach der in (2.69) gegebenen Aufstellung der bilinearen Kovarianten die Kopplung eines neutralen Skalarfeldes an ein Dirac-Feld nur eine Funktion von Lorentzskalaren sein wie

$$\bar{\psi}(x)\,\psi(x)\cdot\varphi(x), \tag{6.1}$$

$$\bar{\psi}(x)\,\gamma^\mu\,\psi(x)\cdot\partial_\mu\varphi(x) \tag{6.2}$$

$$\bar{\psi}(x)\,\sigma^{\mu\nu}\,\psi(x)\cdot\partial_\mu\partial_\nu\varphi(x) \tag{6.3}$$

sein. Falls die Wechselwirkung nicht invariant unter Raumspiegelungen ist, sind auch **Pseudoskalare** wie

$$\bar{\psi}(x)\,\gamma^5\,\psi(x)\cdot\varphi(x), \tag{6.4}$$

$$\bar{\psi}(x)\,\gamma^\mu\gamma^5\,\psi(x)\cdot\partial_\mu\varphi(x) \tag{6.5}$$

zugelassen. Dagegen braucht etwa

$$\partial_\mu[\bar{\psi}(x)\,\sigma^{\mu\nu}\,\psi(x)]\cdot\partial_\nu\varphi(x) \tag{6.6}$$

nicht berücksichtigt zu werden, weil es sich von (6.3) wegen $\sigma^{\mu\nu} = -\sigma^{\nu\mu}$ nur um eine additive Viererdivergenz unterscheidet, die sich in den Feldgleichungen nicht auswirkt.

6.1 Global eichsymmetrische Lagrange-Funktionen

Wir haben mit (1.151,1.152) gesehen, daß in Theorien mit nichthermiteschen Feldern $\varphi^\dagger \neq \varphi$ divergenzfreie Viererströme existieren können, die eine Invarianz von $\mathcal{L}$ unter gewissen nicht raumzeitlichen Transformationen, den **globalen abelschen Eichtransformationen** oder Phasentransformationen

$$\varphi(x) \to e^{-i\alpha}\,\varphi(x), \qquad\qquad \varphi^\dagger(x) \to e^{i\alpha}\,\varphi^\dagger(x) \tag{6.7}$$

mit $\alpha = const.$ $(0 \leq \alpha \leq 2\pi)$ zur Folge haben. Das Noether'sche Theorem zeigt nun, daß auch die Umkehrung zutrifft; die entsprechenden Erhaltungsgrößen sind **ladungsartig**.

Ist also bei einem physikalischen System eine ladungsartige Erhaltungsgröße **empirisch** gesichert, so muß seine feldtheoretische Behandlung von Lagrangedichten ausgehen, die aus eichinvarianten Kombinationen der Felder wie

$$\varphi^\dagger\varphi,\ (\varphi^\dagger\varphi)^2,\ (\partial_\mu\varphi^\dagger)(\partial^\mu\varphi) \text{ usw.} \tag{6.8}$$

beim einkomponentigen Feld oder

$$\bar\psi\psi,\ (\bar\psi\gamma^\mu\psi)(\bar\psi\gamma_\mu\psi),\ (\bar\psi\gamma^\mu\partial_\mu\psi) \text{ usw.} \tag{6.9}$$

beim Diracfeld aufgebaut sind. Die zugehörigen erhaltenen Viererströme folgen aus (5.25), wenn man beachtet, daß bei solchen Transformationen

$$\delta x_\nu = 0,\ \delta_0\varphi_r = -i\ q_r\ \alpha\ \varphi_r \quad (\text{mit } \sum_r q_r = 0) \tag{6.10}$$

gelten muß. Im Beispiel (6.7) etwa ist

$$q_r = +1 \quad \text{für} \quad \varphi_r = \varphi. \qquad\qquad q_r = -1 \quad \text{für} \quad \varphi_r = \varphi^\dagger; \tag{6.11}$$

Damit erhält man

$$F^\mu(x) = \sum_r\ \pi_r^\mu(\delta_0\varphi_r) = -\alpha\ j^\mu(x) \tag{6.12}$$

mit

$$j^\mu(x) = i\sum_r\ q_r\,\pi_r^\mu(x)\,\varphi_r(x), \tag{6.13}$$

wobei noch hinsichtlich der Reihenfolge der Operatoren zu symmetrisieren ist. Bei einem einkomponentigen nichthermiteschen Feld erhält man so

$$j^\mu(x) = i\,[\varphi^\dagger(\pi^\dagger)^\mu - \pi^\mu\varphi], \tag{6.14}$$

d.h. Gleichung (1.21).

Ein komplizierteres Beispiel ist die Wechselwirkung zwischen dem Proton-Antiproton Feld ψ_P, dem Neutron-Antineutron Feld ψ_N (Diracfelder) und dem Ladungstriplett π^+, π^0, π^- der π-Mesonen. Die beiden geladenen Pionen werden durch ein nichthermitesches Feld $\varphi(x)$ beschrieben, und wir setzen

$$\varphi_{+1}(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\ \varphi^\dagger(x), \qquad\qquad \varphi_{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\ \varphi(x). \tag{6.15}$$

Dem π^0-Meson entspricht ein hermitesches Feld φ_0; es gilt also in kompakter Form

$$\varphi_m^\dagger(x) = (-)^m \varphi_{-m}(x) \qquad (m = -1, 0, +1). \tag{6.16}$$

Die Lagrangedichte muß invariant sein unter der simultanen Transformation

$$\begin{aligned} \psi_P &\to e^{-i\alpha}\, \psi_P, & \bar{\psi}_P &\to e^{i\alpha}\, \bar{\psi}_P \\ \psi_N &\to \psi_N, & & \\ \varphi_m &\to e^{i\alpha m}\, \varphi_m & & (m = 1, 0, -1). \end{aligned} \tag{6.17}$$

Diese Forderung ist für die kräftefreien einzelnen Lagrangefunktionen getrennt erfüllt. Wechselwirkungsterme $\mathcal{L}_I$ in $\mathcal{L}$ müssen, da die Raumspiegelungsinvarianz empirisch gesichert ist und die Pionen Pseudoskalare sind, aus Beiträgen vom Typ (6.4, 6.5) – die hier insgesamt Skalare sind – aufgebaut werden und unter (6.17) eichinvariant sein. Überdies sollen sie natürlich **hermitesch** sein, damit $P^0 = H$ hermitesch bleibt. Beschränken wir uns zunächst auf den Typ (6.4), so sind also

$$i\, \bar{\psi}_P\, \gamma^5\, \psi_P \cdot \varphi_0, \qquad i\, \bar{\psi}_N\, \gamma^5\, \psi_N \cdot \varphi_0, \tag{6.18}$$

$$(\bar{\psi}_P\, \gamma^5\, \psi_N \cdot \varphi_{-1} - \bar{\psi}_N\, \gamma^5\, \psi_P \cdot \varphi_{+1}), \tag{6.19}$$

$$i\,(\bar{\psi}_P\, \gamma^5\, \psi_N \cdot \varphi_{-1} + \bar{\psi}_N\, \gamma^5\, \psi_P \cdot \varphi_{+1}), \tag{6.20}$$

die möglichen Bausteine von $\mathcal{L}_I$, wobei **jeder der Terme eine unabhängige Kopplungskonstante haben kann.** Terme von Typ (6.5) können, da α nicht von x abhängt und daher

$$\partial_\mu \varphi_m \to e^{i\alpha m}\, \partial_\mu \varphi_m \qquad (m = 1, 0, -1) \tag{6.21}$$

gilt, nach demselben Schema konstruiert werden:

$$\bar{\psi}_P\, \gamma^\mu \gamma^5\, \psi_P \cdot \partial_\mu \varphi_0, \qquad \bar{\psi}_N\, \gamma^\mu \gamma^5\, \psi_N \cdot \partial_\mu \varphi_0, \tag{6.22}$$

$$i\,(\bar{\psi}_P\, \gamma^\mu \gamma^5\, \psi_N \cdot \partial_\mu \varphi_{-1} - \bar{\psi}_N\, \gamma^\mu \gamma^5\, \psi_P \cdot \partial_\mu \varphi_{+1}), \tag{6.23}$$

$$(\bar{\psi}_P\, \gamma^\mu \gamma^5\, \psi_N \cdot \partial_\mu \varphi_{-1} + \bar{\psi}_N\, \gamma^\mu \gamma^5\, \psi_P \cdot \partial_\mu \varphi_{+1}). \tag{6.24}$$

Man beachte die gegenüber (6.19, 6.20) umgekehrte Verteilung der i-Terme, die für die Hermitezität wichtig sind. Sie stammen von $(\gamma^0\gamma^\mu\gamma^5)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^5$ im Gegensatz zu $(\gamma^0\gamma^5)^\dagger = -\gamma^0\gamma^5$. Zusätzlich sind noch **Selbstwechselwirkungen** der beiden Feldtypen wie

$$(\bar{\psi}_P \psi_N)\; (\bar{\psi}_N \psi_P), \qquad (\bar{\psi}_P\, \gamma^\mu\, \psi_N)\; (\bar{\psi}_N\, \gamma_\mu\, \psi_P), \text{ usw.} \tag{6.25}$$

für die Nukleonenfelder oder

$$\sum_{m=-1}^{1} \sum_{n=-1}^{1} c_{mn} (\varphi_m \varphi_{-m})(\varphi_n \varphi_{-n}), \qquad c_{mn}^* = c_{nm} \tag{6.26}$$

mit den Invarianzforderungen verträglich. Man beachte, daß in diesem Beispiel **zwei globale Eichinvarianzen nebeneinander** existieren, denn außer der Invarianz unter (6.17), die die Erhaltung der elektrischen Ladung sichert, ist auch die Invarianz unter der nur die Nukleonfelder betreffenden Transformation

$$\begin{aligned} &\psi_P \to e^{-i\beta}\ \psi_P, && \psi_N \to e^{-i\beta}\ \psi_N, \\ &\bar{\psi}_P \to e^{i\beta}\ \bar{\psi}_P, && \bar{\psi}_N \to e^{i\beta}\ \bar{\psi}_N, \\ &\varphi_m \to \varphi_m && (m = 1, 0, -1) \end{aligned} \tag{6.27}$$

für alle diskutierten $\mathcal{L}_I$ -Terme gegeben. Sie entspricht der Erhaltung der Baryonenzahl.

Die empirischen Befunde bei den Pion-Nukleon-Systemen zeigen nun, daß diese Systeme in sehr guter Näherung ($\sim 10^{-2}$) sogar eine wesentlich höhere Symmetrie aufweisen, nämlich der Invarianz unter der Gruppe der Drehungen in einem dreidimensionalen **Isospin-Raum**: dabei transformiert sich das aus ψ_P und ψ_N aufgebaute **Nukleonenfeld** als **Isodublett**, *d.h.* wie ein Zweierspinor

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_P(x) \\ \psi_N(x) \end{pmatrix} \ \to\ e^{-i\,\vec{\alpha}\cdot\frac{1}{2}\vec{\tau}} \begin{pmatrix} \psi_P(x) \\ \psi_N(x) \end{pmatrix}, \tag{6.28}$$

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{6.29}$$

während sich das **Pionfeld als Isotriplett** oder **Isovektor** $\vec{\varphi}$ mit den Komponenten φ_{+1}, φ_0 und φ_{-1} transformiert mit den unitären dreidimensionalen Matrizen

$$\vec{\varphi}(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_0(x) \\ \varphi_{-1}(x) \end{pmatrix} \ \to\ e^{-i\,\vec{\alpha}\cdot\vec{t}}\ \vec{\varphi}(x), \tag{6.30}$$

$$t_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad t_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad t_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{6.31}$$

In beiden Transformationsgleichungen ist $\vec{\alpha}$ reell und $0 \leq |\vec{\alpha}| \leq \pi$ der Drehvektor der **Isospindrehung**, die wir zusammenfassen können als

$$\begin{pmatrix} \Psi \\ \vec{\varphi} \end{pmatrix} \ \to\ e^{-i\,\alpha_k\cdot I_k} \begin{pmatrix} \Psi \\ \vec{\varphi} \end{pmatrix}, \qquad I_k = \begin{pmatrix} \tau_k/2 & 0 \\ 0 & t_k \end{pmatrix} \tag{6.32}$$

für k=1,2,3, wobei die I_k 5×5 Matrizen sind.

Das Neue gegenüber der Phasentransformation (6.17), die wir auch schreiben können als

$$\begin{pmatrix} \Psi \\ \vec{\varphi} \end{pmatrix} \ \to\ e^{-i\,\alpha\,(\frac{1}{2}B+I_3)} \begin{pmatrix} \Psi \\ \vec{\varphi} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{6.33}$$

liegt darin, daß nicht nur statt der einen Phase α **drei reelle – noch immer globale** (x **unabhängige) – Parameter auftreten**, sondern daß vor allem die ihnen zugeordneten Generatormatrizen I_i $(i = 1, 2, 3)$ die charakteristischen Vertauschungsrelationen für Drehimpulskomponenten erfüllen,

$$[I_k, I_l] = i\ \epsilon_{klm} I^m, \tag{6.34}$$

so daß die Transformationen (6.28-6.32) *i.a.* nicht vertauschbar sind. Wir haben damit ein Beispiel für eine **globale nichtabelsche Eichsymmetrie**, die in der starken Wechselwirkung in guter Näherung realisiert ist. Hier ist es speziell die Invarianz unter der unitär-unimodularen Gruppe in 2 komplexen Dimensionen, **SU(2)**, die strukturgleich zur Drehgruppe ist. Von ihr ist (6.32) eine fünfdimensionale Darstellung, die in eine zwei- und dreidimensionale irreduzible Darstellung aufspaltet. Die entsprechenden Erhaltungsgrößen sind die 3 Komponenten des **Isospins**

$$T^k = \int d^3x\ [\,\Psi^\dagger(x)\ \frac{\tau^k}{2}\ \Psi(x) + i \sum_{m,n}\ (-)^m\ \pi^0_m(x)\ (t^k)_{-m,n}\ \varphi_n(x)\,]. \tag{6.35}$$

Daneben existiert nach wie vor die Invarianz unter der einparametrigen abelschen Gruppe (6.27) (isomorph zu $U(1)$, der Drehgruppe in einer komplexen Dimension); die zugehörige Erhaltungsgröße ist

$$N_B = \int d^3x\ (\bar\Psi \gamma^0 \Psi) = \int d^3x\ (\psi^\dagger_P \psi_P + \psi^\dagger_N \psi_N), \tag{6.36}$$

die den Operator der Baryonenzahl darstellt. Zusammen mit T_3 erhalten wir dann für den **Operator der elektrischen Ladung**,

$$Q = e\ (\frac{1}{2}\ N_B + T_3), \tag{6.37}$$

mit der Protonladung e. Die Gesamt-Symmetriegruppe ist das **direkte Produkt SU(2) $\otimes$ U(1).**

Die höhere Symmetrie schränkt die in (6.18-6.20, 6.22-6.24) angegebenen Wechselwirkungsterme weiter ein, da $\mathcal{L}_I$ nun auch invariant unter Isospin-Drehungen sein muß. Beschränken wir uns auf den Typ (6.4), so muß, da $\varphi(x)$ sich als Isovektor transformiert, ein Skalarprodukt

$$\vec I \cdot \vec\varphi = \sum_m\ (-)^m I_m\, \varphi_{-m} \tag{6.38}$$

gebildet werden, wo I_m die (sphärischen) Komponenten eines in $\bar\Psi$, Ψ bilinearen Isospinors **I** sind. Hierfür kommt nur die dem 1. Term von (6.35) analoge Bildung

$$\bar\Psi(x)\ \frac{1}{2}\vec\tau\ \gamma^5\ \Psi(x) \tag{6.39}$$

in Frage. Mit einer Kopplungskonstanten $2g$ haben wir also

$$\mathcal{L}_I(x) = ig\ \bar\Psi(x)\ \gamma^5\ \vec\tau\ \Psi(x) \cdot \vec\varphi(x), \tag{6.40}$$

d.h. nur **eine** zulässige Kombination statt der 4 in (6.18-6.20) angegebenen. Außerdem muß im kräftefreien Anteil von $\mathcal{L}$ die Masse der Nukleonen gleich sein, $M_P = M_N$, sowie die der Pionen, $m_{\pi^+} = m_{\pi^-} = m_{\pi^0}$, *d.h.* die **Isospinmultipletts müssen exakte Massenentartung zeigen,** weil sich nur dann die Massenterme zu den Isoskalaren

$$M(\bar{\Psi}_P\Psi_P + \bar{\Psi}_N\Psi_N), \qquad\qquad m^2(\vec{\varphi}\cdot\vec{\varphi}) \tag{6.41}$$

zusammenfassen lassen. Diese Massenentartung ist empirisch in guter Näherung erfüllt. Diese Wechselwirkung (6.40), die aus Gründen der Renormierbarkeit noch um den (6.26) entsprechenden Isoskalar

$$\mathcal{L}'_I = -\lambda(\vec{\varphi}\cdot\vec{\varphi})^2 \tag{6.42}$$

erweitert wird, bildet den Rahmen für die **Yukawa'sche Mesontheorie der Kernkräfte**, die eine Beschreibung des langreichweitigen Anteils der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung sowie der niederenergetischen Nukleon-Pion-Prozesse liefert.

6.2 Lokale Eichsymmetrien

Eine wesentlich stärkere Symmetrieforderung ist die, daß $\mathcal{L}$ invariant sei gegen einen an jedem Raum-Zeit-Punkt verschieden ausfallenden Phasenwechsel der Felder, *d.h.* eine **lokale Eichtransformation,** die im einfachsten (einparametrig-abelschen) Fall

$$\varphi_r(x) \;\to\; e^{-i\,q_r\,\Theta(x)}\,\varphi_r(x), \qquad\qquad \sum_r q_r = 0 \tag{6.43}$$

lautet. Bei der Konstruktion invarianter Lagrangedichten trifft man nun auf die Schwierigkeit, daß Relationen wie (6.21) wegen der x-Abhängigkeit der Phase $\Theta(x)$ nicht mehr gelten; man hat daher

$$\partial_\mu\varphi_r(x) \;\to\; e^{-i\,q_r\,\Theta(x)}\,[\,\partial_\mu - i\,q_r\,\partial_\mu\Theta(x)\,]\,\varphi_r(x), \tag{6.44}$$

so daß die letzte der 3 Kombinationen (6.8) nicht eichinvariant ist.

Die Lösung des Problems ist im Rahmen der Differentialgeometrie wohlbekannt: man ersetzt die gewöhnliche Ableitung ∂_μ durch eine **eichkovariante Ableitung** D_μ,

$$\partial_\mu\varphi_r(x) \;\to\; D_\mu\,\varphi_r(x) = [\,\partial_\mu - i\,q_r\,A_\mu(x)\,]\,\varphi_r(x), \tag{6.45}$$

in der neben ∂_μ noch eine Multiplikation mit einem Vierervektorfeld $A_\mu(x)$, dem **Eichbosonfeld**, auftritt. Die Transformationseigenschaft von $A_\mu(x)$ wird dabei so gewählt, daß der Zusatzterm in (6.44) kompensiert wird, *d.h.* wie in (6.21)

$$D_\mu\,\varphi_r(x) \;\to\; e^{-i\,q_r\,\Theta(x)}\,[\,D_\mu\,\varphi_r(x)\,] \tag{6.46}$$

gilt. Dies ist offenbar der Fall für

$$A_\mu(x) \;\to\; A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu\Theta(x). \tag{6.47}$$

Dieses ist genau das Eichverhalten des elektromagnetischen Viererpotentials! Wichtig ist, daß mit der Einführung von (6.45) automatisch Wechselwirkungsterme zwischen $A_\mu(x)$ und den Feldern $\varphi_r(x)$ in das eichinvariante $\mathcal{L}$ eingebaut werden, die man als **minimale Kopplungen** bezeichnet.

Wir betrachten als **Beispiel** das Elektron-Positron-Diracfeld $\psi(x)$, dessen Lagrangedichte (2.17) wir nun mit $\mathcal{L}_0$ bezeichnen. Die Forderung nach Invarianz unter

$$\psi(x) \;\to\; e^{-i\,e\,\Theta(x)}\,\psi(x), \qquad\qquad \bar{\psi}(x) \;\to\; e^{i\,e\,\Theta(x)}\,\bar{\psi}(x) \tag{6.48}$$

(mit $q_r = \pm e$) erfordert die Ersetzung (6.45) und damit

$$\mathcal{L}_0 \;\to\; \mathcal{L}_0 + j^\mu(x)A_\mu(x), \qquad\qquad j^\mu(x) = e\,\bar{\psi}(x)\,\gamma^\mu\,\psi(x). \tag{6.49}$$

Damit ist der von der klassischen Elektrodynamik bekannte Wechselwirkungsterm $j^\mu A_\mu$ in der Lagrangedichte $\mathcal{L}$ erzeugt worden, an dem lediglich noch aus Gründen der Invarianz unter Ladungskonjugation die Symmetrisierung (3.90) des Fermionenstromes vorzunehmen ist. Außerdem müssen Terme mit $\mathcal{L}_0'$ hinzugefügt werden, die das **Eichbosonfeld für sich allein** beschreiben und zugleich die Eichinvarianz wahren. Dies leistet *z.B.*

$$\mathcal{L}_0' = -\frac{1}{4}\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \qquad\qquad F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \tag{6.50}$$

während ein Massenterm der Form

$$-m^2 A_\mu(x)A^\mu(x) \tag{6.51}$$

die Eichinvarianz zerstören würde. **Eichbosonfelder müssen daher masselos sein!**

Statt (6.50) kann auch, wie beim freien Strahlungsfeld, die nicht manifest eichinvariante Form (4.69) beibehalten werden: die dazu notwendige Einschränkung des Hilbertraumes durch die schwache Lorentzbedingung (4.98) scheint zwar zunächst für das wechselwirkende Feld nicht mehr sinnvoll zu sein, weil $A_\mu(x)$ nicht mehr Lösung einer freien Klein-Gordon-Gleichung und seine Zerlegung in A_μ^+, A_μ^- damit nicht mehr definiert ist. Jedoch sichern die aus (6.49) **unabhängig von der Form von** $\mathcal{L}_0'$ folgenden Feldgleichungen für $\psi(x)$,

$$(-i\gamma^\mu\partial_\mu + M\cdot 1_4)\psi(x) = e\;\gamma^\mu\psi(x)A_\mu(x), \tag{6.52}$$

bereits $\partial_\mu j^\mu = 0$, so daß die Feldgleichung für A^μ ,

$$\partial_\nu\partial^\nu A^\mu(x) = -e\;j^\mu(x), \tag{6.53}$$

durch Differenzieren nach x^μ

$$\partial_\nu\partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) = -e(\partial_\mu j^\mu) = 0 \tag{6.54}$$

ergibt, *d.h.* $\partial_\mu A^\mu$ **ist selbst für das wechselwirkende Feld Lösung einer freien Feldgleichung.** Damit behält die schwache Lorentzbedingung

$$(\partial_\mu A^\mu(x))^{(+)}|\psi_{phys}>= 0 \tag{6.55}$$

ihren Sinn und sichert die Eichinvarianz auf dem physikalischen Teil des Hilbertraumes.

Die Feldgleichungen (6.52-6.55) sind die Grundlage der Quantenelektrodynamik (QED), die die Wechselwirkung des $e^+ - e^-$-Feldes oder des $\mu^+ - \mu^-$-Feldes mit dem Strahlungsfeld A_μ beschreibt. Als erste erfolgreiche Eichfeldtheorie mit minimaler Kopplung ist sie zum Modell für nahezu alle Eichfeldtheorien geworden.

6.3 Die lokale nichtabelsche Eichinvarianz

erfordert einen aufwendigeren Formalismus. Wir gehen wieder aus von einem Satz von Feldoperatoren $\{\varphi_r(x)|r=1,..,f\}$, die wir zu einem f-komponentigen Spaltenvektor anordnen und die sich bei nun x-abhängigen und nichtabelschen Umeichungen gemäß

$$\varphi(x) \;\rightarrow\; e^{-i\sum_{a=1}^{N}\Theta^a(x)\,L_a}\;\varphi(x) \tag{6.56}$$

linear untereinander transformieren, *d.h.* mit einer $(f\times f)$-Matrixdarstellung einer N-parametrigen, nichtabelschen Gruppe G (der **Eichgruppe**). Diese Darstellung wird im allgemeinen **reduzibel** sein – wie im Beispiel (6.28) – , *d.h.* $\varphi(x)$ darf in mehrere je nur in sich transformierte Teilsätze zerfallen. Die $\Theta_a(x)$ in (6.56) seien N reelle Parameterfunktionen und die L_a die f-dimensionalen Matrixdarstellungen der N Generatoren von G. Sie müssen hermitesch sein, damit (6.56) unitär ist, und außerdem in Verallgemeinerung von (6.32) die **Lie-Algebra**

$$[L_a, L_b] = i\; f_{ab}{}^{c}L_c \qquad\qquad (a,b,c=1,..,N) \tag{6.57}$$

erfüllen. Da die Kommutatoren antisymmetrisch sind und stets die **Jacobi-Identität**

$$[[A,B],C]+[[B,C],A]+[[C,A],B]=0 \tag{6.58}$$

erfüllen, müssen die **Strukturkonstanten** $f_{ab}{}^{c}$ für $(a,b,c,d=1,..,N)$ die Eigenschaften

$$f_{ab}{}^{c} = -f_{ba}{}^{c} \tag{6.59}$$

$$f_{ab}{}^{m}\,f_{mc}{}^{d} + f_{bc}{}^{m}\,f_{ma}{}^{d} + f_{ca}{}^{m}\,f_{mb}{}^{d} = 0 \tag{6.60}$$

besitzen, sofern die L_a alle linear unabhängig sind. Darüberhinaus können bei allen physikalisch wichtigen Eichgruppen – den sogenannten kompakten halbeinfachen Lie-Gruppen – die L_a so gewählt werden, daß die Strukturkonstanten sogar in allen 3 Indizes antisymmetrisch sind,

$$f_{ab}{}^{c} = -f_{cb}{}^{a} = -f_{ac}{}^{b}. \tag{6.61}$$

Soll $\mathcal{L}$ nun unter (6.56) invariant sein, so müssen die darin auftretenden $\partial_\mu\varphi_r$ wieder durch eichkovariante Ableitungen ersetzt werden,

$$D_\mu\,\varphi(x) = [\,\partial_\mu - ig\;A_\mu^a(x)L_a\,]\;\varphi(x), \tag{6.62}$$

wobei der Zusatzterm $-igA_\mu^aL_a$ nun matrixwertig ist. Es sind also N **Vektoreichfelder** $A_\mu^a(x)$ $(a=1,..,N)$, die im nichtabelschen Fall auch **Yang-Mills-Felder** heißen, einzuführen und zwar für jede Dimension der Lie-Algebra genau eins. Ihr Transformationsverhalten ist so einzurichten, daß $D_\mu\,\varphi$ sich wie φ selbst transformiert:

$$D_\mu\,\varphi(x) \;\rightarrow\; e^{-i\,\Theta^a(x)\,L_a}\,[D_\mu\,\varphi(x)]. \tag{6.63}$$

Dazu betrachtet man wegen der Nichtvertauschbarkeit der L_a zweckmäßigerweise zunächst infinitesimale Eichtransformationen mit $|\Theta_a(x)|\ll 1$; hierbei sei

$$A_\mu^a(x) \;\rightarrow\; A_\mu^a(x) + \delta A_\mu^a(x). \tag{6.64}$$

Dann gilt nach Linearisierung in den kleinen Größen $\Theta^a(x)$

$$\begin{aligned} D_\mu\,\varphi(x) \;\; \rightarrow \;\; & (1_f - i\Theta^b\,L_b)(\partial_\mu\varphi(x)) - ig\,A_\mu^a\,L_a\,\varphi(x) \\ & -ig\,[\,(\delta A_\mu^c)\,L_c\,\varphi(x) + (\frac{1}{g}\partial_\mu\Theta^c)\,L_c\,\varphi(x) + A_\mu^a\,\Theta^b\,(-iL_aL_b)\,\varphi(x)\,], \end{aligned} \tag{6.65}$$

wobei 1_f die f-dimensionale Einheitsmatrix bezeichnet.

Im letzten Term schreiben wir mit (6.57)

$$-iL_aL_b = -iL_bL_a + f_{ab}{}^c\,L_c \tag{6.66}$$

und fassen den Term mit $-iL_bL_a$ mit den ersten beiden Termen in (6.65) zusammen zu

$$(1_f - i\Theta^b L_b)(\partial_\mu - ig\,A_\mu^a\,L_a)\;\varphi(x). \tag{6.67}$$

Dies ist gerade (in infinitesimaler Form) die rechte Seite von (6.63). Also muß der Restterm

$$-ig\,[\,\delta A_\mu^c + \frac{1}{g}(\partial_\mu\Theta^c) + f_{ab}{}^c A_\mu^a\,\Theta^b\,]\;L_c\;\varphi(x) \tag{6.68}$$

für alle φ-Werte verschwinden. Wegen der linearen Unabhängigkeit der L_c bedeutet dies

$$\delta A_\mu^c(x) = -\frac{1}{g}\partial_\mu\Theta^c(x) - f_{ab}{}^c A_\mu^a(x)\,\Theta^b(x). \tag{6.69}$$

Die entsprechende **endliche** Transformation ist am einfachsten für die in (6.62) auftretende Kombination $A_\mu^a L_a$ zu schreiben:

$$A_\mu'^a(x)\,L_a = A_\mu^a(x)\,[\,e^{-iK(x)}\;L_a\;e^{iK(x)}\,] - \frac{i}{g}\,[\,\partial_\mu e^{-iK(x)}\,]\;e^{iK(x)} \tag{6.70}$$

mit der Abkürzung

$$K(x) = \Theta^b(x)L_b. \tag{6.71}$$

Für abelsche Eichgruppen sind alle Strukturkonstanten f in (6.57) identisch Null; also ist dann $[K, L_a] = 0$ für alle $a = 1, .., N$ und

$$\partial_\mu e^{-iK} = (-i\partial_\mu K)\,e^{-iK}. \tag{6.72}$$

Man erhält dann nach Koeffizientenvergleich bzgl. der L_a separat für jedes $A_\mu^a(x)$ das einfachere Gesetz (6.47) zurück.

Der das Eichfeldermultiplett allein beschreibende, zu (6.50) analoge $\mathcal{L}$-Term wird ebenfalls komplizierter, denn im nichtabelschen Fall ist

$$F_{\mu\nu}^c(x) = \partial_\mu A_\nu^c(x) - \partial_\nu A_\mu^c(x) \tag{6.73}$$

nicht eichinvariant: vielmehr ist nach (6.69) bei infinitesimalen Eichtransformationen

$$\begin{aligned} \delta F_{\mu\nu}^c \;\; &= \;\; -f_{ab}{}^c\,[\,\partial_\mu(A_\nu^a\,\Theta^b) - \partial_\nu(A_\mu^a\,\Theta^b)\,] \\ &= \;\; -f_{ab}{}^c\,\Theta^b\,[\,\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a\,] + f_{ab}{}^c\,[\,A_\mu^a(\partial_\nu\Theta^b) - A_\nu^a(\partial_\mu\Theta^b)\,]. \end{aligned} \tag{6.74}$$

Diese unerwünschte Änderung ist linear in den A^a_μ; um sie zu kompensieren, benötigt man daher einen in den Eichfeldern bilinearen Zusatzterm zu $F_{\mu\nu}$. Wir berechnen daher

$$\begin{aligned} \delta[f_{ab}{}^c\, A^a_\mu\, A^b_\nu] &= -\frac{1}{g}\; f_{ab}{}^c\,[\, A^a_\mu\,(\partial_\nu\Theta^b) + A^b_\nu\,(\partial_\mu\Theta^a)\,] \\ & \quad -f_{ab}{}^c\,[\, f_{de}{}^b\, A^a_\mu\, A^d_\nu + f_{de}{}^a\, A^d_\mu\, A^b_\nu\,]\;\Theta^e. \end{aligned} \tag{6.75}$$

Im 2. Term vertauschen wir die Summationsindizes a, b und benutzen (6.59); im 3. und 4. Term werden die Indizes so umbenannt, daß in beiden $A^d_\mu A^e_\nu$ erscheint. Wir wenden erneut (6.59) an, wobei mit (6.60)

$$f_{eb}{}^m\, f_{md}{}^c + f_{bd}{}^m\, f_{me}{}^c = -f_{de}{}^a\, f_{ab}{}^c \tag{6.76}$$

entsteht. Also erhalten wir zusammengefaßt:

$$\delta\,[\, g\, f_{ab}{}^c\, A^a_\mu\, A^b_\nu\,] = -f_{ab}{}^c\,[\, A^a_\mu\,(\partial_\nu\Theta^b) - A^a_\nu\,(\partial_\mu\Theta^b)\,] - f_{ab}{}^c\,\Theta^b\,[\, g\, f_{de}{}^a\, A^d_\mu\, A^e_\nu\,]. \tag{6.77}$$

Hier kompensiert der 1. Term gerade den 2. Term von (6.74). Definieren wir also

$$G^c_{\mu\nu} = \partial_\mu A^c_\nu - \partial_\nu A^c_\mu + g\, f_{ab}{}^c\, A^a_\mu\, A^b_\nu, \tag{6.78}$$

dann folgt durch Zusammenfassung von (6.74, 6.77)

$$\delta G^c_{\mu\nu} = -f_{ab}{}^c\,\Theta^b\,[\,\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g\, f_{de}{}^a\, A^d_\mu\, A^e_\nu\,] = -f_{ab}{}^c\, G^a_{\mu\nu}\,\Theta^b. \tag{6.79}$$

Die Größe $G^c_{\mu\nu}$ transformiert sich zwar **nicht als Eichskalar** (und kann daher keine meßbare Feldstärke sein), wohl aber als **Eichvektor** gemäß der gegebenen Lie-Algebra. Der Term

$$\mathcal{L}'_0 = -\frac{1}{4}\; G^c_{\mu\nu}\, G^{\mu\nu,c} \tag{6.80}$$

ist die gewünschte Eichinvariante (als 'Betragsquadrat' des Eichvektors), denn

$$\delta\mathcal{L}'_0 = -\frac{1}{4}[\,\delta G^c_{\mu\nu}\, G^{\mu\nu,c} + G^c_{\mu\nu}\,\delta G^{\mu\nu,c}\,] = (f_{ab}{}^c + f_{cb}{}^a)(\frac{1}{4}\, G^a_{\mu\nu}\, G^{\mu\nu,c})\,\Theta^b \tag{6.81}$$

ist nach (6.61)$\equiv 0$.

Bemerkenswert an der **Yang-Mills-Lagrangedichte** (6.80) ist vor allem, daß **selbst bei Abwesenheit anderer Felder die Yang-Mills-Vektorbosonen nach (6.78) Selbstwechselwirkungen 3. und 4. Grades** (in $\mathcal{L}$) aufweisen. Wiederum müssen die Eichvektorbosonen masselos sein, weil ein $\mathcal{L}$-Term $\sim -m^2 A^a_\mu A^{\mu,a}$ die Eichinvarianz zerstören würde.

Als wichtiges Beispiel geben wir die Lagrangedichte einer nichtabelschen Eichfeldtheorie mit der **8-parametrigen Eichgruppe SU(3)** – der Gruppe der unitären Matrizen mit Determinante 1 in 3 komplexen Dimensionen – an, deren 8 Generatoren die Vertauschungsrelationen

$$[F_a, F_b] = i\; f_{ab}{}^c\, F_c, \qquad\qquad F_a = F_a^\dagger, \tag{6.82}$$

Tabelle 6.1: Strukturkonstanten der SU(3) in (6.82)

(a,b,c)	1,2,3	1,4,7	1,5,6	2,4,6	2,5,7	3,4,5	3,6,7	4,5,8	6,7,8
${f_{ab}}^c$	1	1/2	-1/2	1/2	1/2	1/2	-1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/2$

besitzen, wobei die nichtverschwindenden Strukturkonstanten in der Tabelle 6.1 gegeben sind.

Die Materiefelder sind Dirac-Felder Ψ, $\bar{\Psi}$, die bzgl. der Eichgruppe in Tripletts zerfallen derart, daß sich die Ψ-Tripletts mit der dreidimensionalen Darstellung '3', die $\bar{\Psi}$ – Tripletts mit der davon unabhängigen Darstellung '3*' von SU(3) in sich transformieren (Quark-Felder). Die entsprechenden 3×3 Matrizen L_a heißen hier $1/2\ \lambda_a$ bzw. $-1/2\ \lambda_a^*$ ($a = 1, .., 8$); explizit

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \tfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Die innerhalb eines Tripletts $\Psi(x) = \{\psi^r(x) | r = 1,2,3\}$ oder $\bar{\Psi}(x) = \{\bar{\psi}^s(x) | s = 1,2,3\}$ drei Werte annehmende Quantenzahl heißt **color** oder **Farbe**. Verschiedene Tripletts sind außerdem durch N Werte einer weiteren, mit einer **globalen** Symmetriegruppe (analog zum Isospin) verknüpften Quantenzahl m unterschieden, die **flavor** oder **Geschmack** heißt. In der Natur sind $N = 6$ flavors realisiert, die als 'up', 'down', 'strange', 'charm', 'bottom' und 'top' bezeichnet werden.

Das Oktett der Eichbosonen $A_\mu^a(x)$ wird als **Gluon**-Feld bezeichnet und besitzt ebenfalls **color**, hier mit 8 Werten $a = 1, .., 8$. Die Lagrangedichte lautet demnach

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QCD}(x) \quad &= \quad -\frac{1}{4} \sum_{a=1}^{8} G_{\mu\nu}^a(x)\ G^{\mu\nu,a}(x) \qquad (6.83) \\ & \quad -\bar{\Psi}_{m,c}(x) \{ -i\gamma^\mu [\delta_{cd}\, \partial_\mu - ig\, A_\mu^a(x)\, (\frac{\lambda_a}{2})_{cd}]\, \delta_{mn} + M_{mn} \}\, \Psi_{n,d}(x), \end{aligned}$$

wobei M_{mn} die $6{\times}6$ **Massenmatrix** der Quarks im flavor-Raum ist und $c = 1,2,3$ für den Farb-Index steht, an den die Matrizen λ_a angreifen. In (6.83) sind weiterhin die 4

Dirac-Indizes (für Teilchen und Antiteilchen sowie Spin 'up' und 'down') an den Fermion Spinoren unterdrückt.

Diese Eichfeldtheorie wird unter dem Namen **Quanten-Chromo-Dynamik** (**QCD**) als Theorie der starken Wechselwirkung betrachtet, die die innere Struktur der Mesonen und Baryonen (Hadronen) und deren Wechselwirkung beschreibt. Im Gegensatz zur Quantenelektrodynamik (**QED**) ist die QCD insbesondere bei kleinen Impulsüberträgen (großen Abständen) gegenwärtig noch nicht verstanden; bei hohen Impulsüberträgen (kurzen Abständen) dagegen ist sie experimentell sehr gut gesichert, wie störungstheoretische Lösungen zeigen.