

**MATHEMATISCHE METHODEN  
DER QUANTENFELDTHEORIE**

G.Roepstorff

Institut für Theoretische Physik

RWTH Aachen

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Methoden für Systeme mit endlich vielen Freiheitsgraden</b>	<b>6</b>
1.1	Was sind und warum studiert man unbeschränkte Operatoren?	6
1.2	Abschließbare Operatoren . . . . .	11
1.3	Der Graph eines Operators . . . . .	15
1.4	Symmetrische und selbstadjungierte Operatoren . . . . .	17
1.5	Hilbert-Tensorprodukte . . . . .	23
1.6	Theorie der Vertauschungsrelationen . . . . .	25
<b>2</b>	<b>Methoden für Systeme mit unendlich vielen Freiheitsgraden</b>	<b>31</b>
2.1	Die Fock-Cook-Darstellung . . . . .	31
2.2	Das neutrale Skalarfeld . . . . .	34
2.3	Tensoralgebra und symmetrische Algebra . . . . .	36
2.4	Die äußere Algebra . . . . .	39
2.5	Weyl-Systeme . . . . .	41
2.6	Der moderne Begriff des Zustandes . . . . .	43
2.7	Die Bose-Einstein-Kondensation . . . . .	45
2.8	Higgs-Teilchen und das Higgs-Kondensat . . . . .	50
2.9	Infrarotdarstellungen . . . . .	51
2.10	Die Gel'fand-Neumark-Segal-Konstruktion . . . . .	56
2.11	Thermo-Feldtheorie . . . . .	59
2.12	Wigner-Funktionale . . . . .	60
2.13	Weitere Eigenschaften des Fock-Weyl-Systems . . . . .	64
<b>3</b>	<b>Grundlagen der Eichtheorien</b>	<b>67</b>
3.1	Mannigfaltigkeiten . . . . .	67
3.2	Differentialformen . . . . .	70
3.3	Pull-back von Differentialformen . . . . .	72
3.4	Die Lie-Ableitung . . . . .	74
3.5	Differentialformen mit Werten in einem Vektorraum . . . . .	76
3.6	Semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten . . . . .	77
3.7	Der Levi-Civita-Zusammenhang . . . . .	80
3.8	Lie-Gruppen als Mannigfaltigkeiten . . . . .	83
3.9	Zusammenhänge auf allgemeinen Vektorbündeln . . . . .	85
3.10	Hauptfaserbündel . . . . .	87
3.11	Zusammenhänge auf einem Hauptfaserbündel . . . . .	92
3.12	Das horizontale und das vertikale Bündel . . . . .	93
3.13	Das Hauptfaserbündel lokal gesehen . . . . .	95

3.14	Die Übertragung des Zusammenhanges auf assoziierte Vektorbündel: Die kovariante Ableitung . . . . .	97
<b>4</b>	<b>Wirkungsfunktionale für Eichtheorien</b>	<b>100</b>
4.1	Metrische Zusammenhänge auf hermiteschen Vektorbündeln . . . . .	100
4.2	Wirkungsfunktionale . . . . .	104
4.3	Beispiele für Eichtheorien . . . . .	106
4.4	Eichtransformationen . . . . .	109

# Einleitung

Die mathematischen Methoden, die in der Feldtheorie – klassisch oder quantentheoretisch – Anwendungen finden, sind vielfältig:

- Eigenschaften von Operatoren auf einem Hilbertraum und Spektraltheorie.
- Darstellungen der kanonischen Vertauschungsrelationen von unendlich vielen Freiheitsgraden auf der Basis der Weyl-Relationen.
- Differentialgeometrie der Faserbündel als Grundlage der Eichtheorien.
- Borchers-Algebra und Wightman-Funktionale, fälschlich als “axiomatische Feldtheorie” bezeichnet.
- Theorie der Distributionen oder “verallgemeinerter Funktionen”.
- Euklidische und konstruktive Feldtheorie auf der Basis einer Maßtheorie über einem Raum von Distributionen. Existenzbeweise für nicht-triviale Feldtheorien. Osterwalder-Schrader-Axiome.
- Algebren von lokalen Observablen, entweder als  $C^*$ -Algebren oder als von-Neumann-Algebren. Theorie der Sektoren als Interpretation von Superauswahlregeln.

Alles in einer Vorlesung abzuarbeiten, ist unmöglich. Der erste Versuch wurde von mir 1973 an der Universität Hamburg in einem 2-semesterigen Kurs mit zweifelhaftem Erfolg unternommen. Teile, die mir heute obsolet erscheinen, habe ich aus dem Skriptum entfernt. An der RWTH Aachen habe später ich im kleinen Kreis von Diplomanden und Doktoranden mehrfach differentialgeometrische Themen behandelt, als klar wurde, daß die Eichtheorien ein solches Fundament benötigen. Aus der Wechselwirkung mit vielen begabten jungen Leuten sind Notizen hervorgegangen, die ich nun zusammen mit alten Notizen zu einem Ganzen vereinige, als Skriptum einer Vorlesung, die ich nie gehalten habe, aber gern gehalten hätte.

Die “Vorlesung” gliedert sich in drei Teile. Der erste Teil benutzt die sehr einfache Theorie der kanonischen Vertauschungsrelationen von endlich vielen Freiheitsgraden, um in das sehr komplizierte Verhalten von unbeschränkten Operatoren einzuführen. Der zweite Teil zeigt, daß es sehr viele inäquivalente Darstellungen der Weyl-Relationen gibt, sobald man unendlich viele Freiheitsgrade behandeln möchte, wie es die Quantenfeldtheorie verlangt. Einige interessante und in Anwendungen wichtige Beispiele werden ausführlich

diskutiert. Der dritte Teil schließlich führt in die Terminologie der Differentialgeometrie soweit ein, daß die Grundlagen der Eichtheorien sichtbar werden. Der Schwerpunkt liegt nicht im Bereich der Riemannschen Geometrie (obwohl wichtig für die Allgemeine Relativitätstheorie), sondern in dem Studium von Vektorbündeln, die assoziiert zu einem Hauptfaserbündel sind, und auf dem Begriff des Zusammenhanges sowie der kovarianten Ableitung. Zentrale Bedeutung kommt dem Yang-Mills-Funktional zu. Zum tieferen Verständnis des dritten Teils empfehle ich die folgenden Bücher:

1. M. Schottenloher, *Geometrie und Symmetrie in der Physik*, Vieweg, Wiesbaden 1995
2. A. Trautmann, *Differential Geometry For Physicists*, Stony Brook Lectures, Monographs and Textbooks in Physical Science, Bibliopolis, Napoli (Italia) 1984
3. H. Holmann, H. Rummler, *Alternierende Differentialformen*, B.I.-Wissenschaftsverlag Mannheim 1972
4. J. Jost, *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*, Springer 1995
5. K.B. Marathe, G. Martucci, *The Mathematical Foundations of Gauge Theories*, North-Holland 1992

# 1 Methoden für Systeme mit endlich vielen Freiheitsgraden

## 1.1 Was sind und warum studiert man unbeschränkte Operatoren?

Wir wollen zunächst folgendes vereinbaren. Mit dem Wort *Hilbertraum* meinen wir stets einen *komplexen* Hilbertraum, der separabel ist, d.h. eine abzählbare Basis besitzt. Das Skalarprodukt  $(f, g)$  ist linear in  $g$  und antilinear in  $f$ . Unter einem Operator in dem Hilbertraum  $\mathcal{H}$  verstehen wir eine lineare Abbildung

$$A : D(A) \rightarrow \mathcal{H}, \quad D(A) \subset \mathcal{H},$$

wobei  $D(A)$  der Definitionsbereich ist, für den wir zwei Dinge voraussetzen:

1.  $D(A)$  ist eine lineare Mannigfaltigkeit,
2.  $D(A)$  liegt dicht in  $\mathcal{H}$ .

Ein Operator  $A$  heißt *beschränkt*, wenn eine Konstante  $C$  existiert, so daß überall im Definitionsgebiet

$$\|Af\| \leq C\|f\| \tag{1}$$

gilt. Die kleinste Konstante mit dieser Eigenschaft wird die *Norm* des Operators genannt und mit  $\|A\|$  bezeichnet. Man sieht sofort, daß (1) der Aussage

$$\|Af - Ag\| \leq C\|f - g\| \tag{2}$$

äquivalent ist, und diese wiederum mit der Stetigkeitsaussage

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall f, g) \quad \|f - g\| < \delta \Rightarrow \|Af - Ag\| < \epsilon \tag{3}$$

Zum Beweis setze man  $\delta = \epsilon/C$  in der einen und  $C = 2\epsilon/\delta$  in der anderen Richtung. Das Beweisverfahren lehrt:

*Eine lineare Abbildung zwischen normierten Räumen ist genau dann stetig, wenn sie beschränkt ist.*

Beschränkte Operatoren mit einem dichten Definitionsbereich können immer eindeutig zu einem stetigen Operator auf ganz  $\mathcal{H}$  erweitert werden.

Die Notwendigkeit, unbeschränkte (also in jedem Punkt unstetige) Operatoren in die Betrachtung einzubeziehen, tritt bereits in der Quantenmechanik auf, und verstärkt sich in der Quantenfeldtheorie. Nehmen wir etwa die Vertauschungsrelation

$$[a, a^*] = \mathbb{1} \tag{4}$$

und versuchen wir, sie als eine Identität für beschränkte Operatoren zu deuten. Dann finden wir durch Induktion für jedes natürliche  $n$

$$[a^n, a^*] = na^{n-1} \quad (5)$$

und damit

$$n\|a^{n-1}\| \leq 2\|a^*\| \|a^n\| \leq 2\|a^*\| \|a\| \|a^{n-1}\|. \quad (6)$$

Wählen wir nun  $N > 2\|a^*\| \|a\|$ , so folgt  $\|a^{N-1}\| = 0$ . Ebenso folgt aus (6) für  $n = N - 1$

$$(N - 1)\|a^{N-2}\| \leq 2\|a^*\| \|a^{N-1}\|, \quad (7)$$

also  $\|a^{N-2}\| = 0$  falls  $N \geq 2$ , und durch Induktion schließlich  $\|a\| = 0$ , d.h.  $a = 0$  im Widerspruch zu den Vertauschungsrelationen. Ähnlich beweist man  $a^* = 0$ . Fazit: Unsere Annahme,  $a$  und  $a^*$  seien *beschränkte* Operatoren, ist falsch.

Wir haben hier die Wurzel eines Übels zu fassen, das den kanonischen Vertauschungsrelationen

$$[\phi^a(x), \pi_b(x')]_{t=t'} = i\delta_b^a \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (8)$$

für Bose-Felder anhaftet. Selbst nach Integration mit geeigneten Testfunktionen  $f$  sind die Operatoren

$$\begin{aligned} \phi(f, t) &= \int d^3x f_a(\mathbf{x}) \phi^a(\mathbf{x}, t) \\ \pi(f, t) &= \int d^3x f^a(\mathbf{x}) \pi_a(\mathbf{x}, t) \end{aligned}$$

noch unbeschränkt.

Die zweite Schwierigkeit folgt auf dem Fuße. Operatoren wie  $a$  und  $a^*$  können nicht auf dem ganzen Hilbertraum (stetig) definiert werden:

*Wenn zwei Operatoren  $A$  und  $B$  überall auf  $\mathcal{H}$  stetig definiert sind und  $(Ag, f) = (g, Af)$  für alle  $f, g \in \mathcal{H}$  gilt, so sind  $A$  und  $B$  beschränkt.*

Wenn wir diesen Satz besser verstehen wollen, müssen wir ihn zu beweisen suchen. Die Aussage  $\|Ag\| \leq C\|g\|$ , die wir herleiten wollen, können wir in die Form

$$\|Ae\| \leq C, \quad g = \|g\|e$$

bringen, d.h.  $A$  ist beschränkt genau dann, wenn das Bild der Einheitskugel in  $\mathcal{H}$ , also die Menge

$$M = \{Ae \mid e \in \mathcal{H}, \|e\| = 1\}$$

beschränkt ist. Aus

$$|(Ag, f)| = |(g, Bf)| \leq \|g\| \|Bf\| \quad (9)$$

folgt, daß  $M$  *schwach beschränkt ist*. Die Definition hierfür lautet:

$$(\forall f \in \mathcal{H})(\exists C > 0)(\forall h \in M) \quad |(h, f)| < C. \quad (10)$$

Die Reihenfolge  $(\forall f \in \mathcal{H})(\exists C > 0)$  sagt, daß die Konstante  $C$  von  $f$  abhängt. In unserem Beispiel erfüllt  $M$  die Bedingung (10) mit  $C = \|Bf\|$ . Man sagt,  $M$  sei *beschränkt*, wenn die stärkere Bedingung

$$(\exists C > 0)(\forall h \in M) \quad \|h\| < C \quad (11)$$

erfüllt ist. Obwohl in unserem Beispiel die Menge  $M$  schwach beschränkt ist, haben wir noch keinen Beweis dafür geliefert, daß sie auch beschränkt ist.

Es gehört zu den bemerkenswerten Eigenschaften eines Hilbertraumes, daß die beiden Beschränktheitsbegriffe in einen zusammenfallen. Der Grund liegt in einem sehr tiefen und fundamentalen Satz der Funktionalanalysis, dem Satz von Banach oder dem Prinzip von der gleichmäßigen Beschränktheit:

*Eine Menge  $M$  von stetigen Abbildungen  $T : F \rightarrow G$  zwischen normierten Räumen sei in jedem Punkt beschränkt,*

$$(\forall f \in F)(\exists C > 0)(\forall T \in M) \quad \|Tf\| \leq C.$$

*Ist  $F$  vollständig (jede Cauchy-Folge konvergent), so ist  $M$  gleichmäßig beschränkt,*

$$(\exists C > 0)(\forall T \in M) \quad \|T\| \leq C.$$

Der Satz von Banach macht deutlich, wie stark die Voraussetzung sein kann, daß ein Raum vollständig ist. Zum Beweis des Satzes sei auf die Literatur verwiesen. Um den Satz auf unseren Fall anzuwenden, setzen wir  $F = \mathcal{H}$  und  $G = \mathbb{C}$  und definieren spezielle Abbildungen  $T_h : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $T_h f = (h, f)$ . Insbesondere lernen wir auf diese Weise:

*Jede schwach beschränkte Teilmenge eines Hilbertraumes ist beschränkt.*

Wir kehren zurück zu der Vertauschungsrelation (4) mit dem Wissen, daß  $a$  und  $a^*$  nicht auf dem ganzen Hilbertraum definiert werden können. Zwei Fragen drängen sich auf:

1. Welchen Sinn hat die Relation (4), wenn die drei Operatoren,  $aa^*$ ,  $a^*a$  und  $\mathbb{1}$  verschiedene Definitionsbereiche haben?
2. Welchen Sinn hat die Aussage,  $a^*$  sei der adjungierte Operator zu  $a$  ?

Um die erste Frage zu beantworten, müssen wir erst Regeln aufstellen für die Addition und Multiplikation von Operatoren mit verschiedenen Definitionsbereichen. Seien also  $A$  und  $B$  mit Definitionsbereichen  $D(A)$  und  $D(B)$ . Wir vereinbaren:

- $D(cA) = cD(A)$  und  $(cA)f = c(Af)$  für alle  $f \in D(A)$  und  $c \neq 0$ .
- $cA = 0$  falls  $c = 0$ .
- $D(A + B) = D(A) \cap D(B)$  und  $(A + B)f = Af + Bf$  für  $f \in D(A) \cap D(B)$ .
- $D(\mathbb{1}) = \mathcal{H}$ .

Gilt  $D(A) \subset D(B)$  und  $Af = Bf$  für alle  $f \in D(A)$ , dann schreiben wir  $A \subset B$ . Man sagt,  $B$  sei eine *Erweiterung* von  $A$ .

Aus den genannten Regeln folgen sofort einige Aussagen:

- (1)  $(A + B) + C = A + (B + C)$  und  $(AB)C = A(BC)$ .
- (1)  $(A + B)C = AC + BC$  aber  $A(B + C) \supset AB + AC$ .

Warnung: Aus  $A + B = A + C$  kann nicht auf  $B = C$  geschlossen werden!

Wir haben nun noch den adjungierten Operator zu definieren. Was könnte der Definitionsbereich von  $D(A^*)$  sein? Für welche  $g \in \mathcal{H}$  hat

$$(\forall f \in D(A)) \quad (g, Af) = (h, f) \quad (12)$$

eine eindeutige Lösung  $h$ . Die Menge dieser Vektoren  $g$  identifizieren wir mit  $D(A^*)$ .

Existenz: Der Satz von Riesz sagt, daß ein  $h \in \mathcal{H}$  mit der Eigenschaft (12) genau dann existiert, wenn das Funktional

$$F_g : D(A) \rightarrow \mathbb{C}, \quad F_g(f) = (g, Af)$$

beschränkt ist, d.h.

$$|F_g(f)| \leq C\|f\| \quad (13)$$

gilt.

Eindeutigkeit: Der Vektor  $h$  ist eindeutig genau dann, wenn aus  $(h, f) = 0$  für alle  $f \in D(A)$  die Aussage  $h = 0$  folgt. An dieser Stelle erkennen wir, daß die Annahme wichtig wird,  $D(A)$  sei dicht in  $\mathcal{H}$ . Wir unterscheiden folgende

Fälle:

1. Fall.  $D(A)$  dicht in  $\mathcal{H}$  und  $A$  beschränkt. Hier kann die Bedingung (13) für alle  $g \in \mathcal{H}$  erfüllt werden. Man hat nur  $C = \|A\| \|g\|$  zu setzen. Folglich gilt  $D(A^*) = \mathcal{H}$ .

2. Fall.  $D(A)$  dicht in  $\mathcal{H}$ , aber  $A$  unbeschränkt. Hier kann die Bedingung (13) nur für geeignete  $g$  (z.B. für  $g = 0$ ) erfüllt werden:  $D(A^*)$  ist nichtleer.

In den beiden genannten Fällen ist der adjungierte Operator  $A^*$  auf  $D(A^*)$  durch die lineare Abbildung  $g \mapsto h$  definiert.

Wir wollen uns die abstrakte Konstruktion an einem Beispiel klarmachen. Wir wählen hierzu den Raum  $L^2(\mathbb{R})$  der quadratintegrablen Funktionen  $f(x)$  und setzen

$$(Af)(x) = f(0)e^{-x^2}, \quad D(A) = L^2(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R}) \quad (14)$$

Der Operator  $A$  ist linear, unbeschränkt und dicht definiert. Um  $D(A^*)$  zu finden, fragen wir: Für welche Funktionen  $g \in L^2(\mathbb{R})$  hat

$$(\forall f \in D(A)) \quad (g, Af) = f(0) \int dx \overline{g(x)} e^{-x^2} = \int dx \overline{h(x)} f(x) \quad (15)$$

eine eindeutige Lösung in  $h$ ? Zur Abkürzung setzen wir  $I = \int dx g(x)e^{-x^2}$  und unterscheiden:

1. Fall  $I \neq 0$ . Dann folgt  $|f(0)| \leq C \|f\|$  mit  $C = |I|^{-1} \|h\|$  and alle  $f \in D(A)$ , was unmöglich ist.

2. Fall  $I = 0$ . Dann folgt  $h = 0$  eindeutig.

Wir sehen also,  $D(A^*)$  besteht aus allen  $g \in L^2(\mathbb{R})$ , die orthogonal zu  $e^{-x^2}$  sind. Der Operator  $A^*$  bildet  $D(A^*)$  auf den Nullvektor ab. Da  $D(A^*)$  nicht dicht in  $L^2(\mathbb{R})$  ist, existiert der Operator  $A^{**}$  nicht. Hier zeigt sich, daß recht harmlose Operatoren pathologische Züge haben können.

Gleichfalls auf dem Raum  $L^2(\mathbb{R})$  betrachten wir den Operator

$$(Af)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx e^{ipx} f(x) \quad (16)$$

mit  $D(A) = L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ . Die  $L^1$ -Eigenschaft ist erforderlich, damit das Integral (16) – im Sinne von Lebesgue – wohldefiniert ist. Aufgrund der Parsevalschen Gleichung

$$\int dp |(Af)(p)|^2 = \int dx |f(x)|^2$$

ist  $A$  ein beschränkter Operator mit  $\|A\| = 1$  und somit gilt

$$D(A^*) = D(A^{**}) = L^2(\mathbb{R}).$$

Der Operator  $F = A^{**}$ , der Abschluß von  $A$ , wird *Fourier-Operator* genannt. Er ist unitär:  $F^* = F^{-1}$ .

## 1.2 Abschließbare Operatoren

Es gibt eine Eigenschaft von Operatoren, die einen dafür entschädigen kann, daß man auf die Stetigkeit verzichtet hat: Ein Operator muß *abschließbar* sein. Beispiele zeigen, daß nichtabschließbare Operatoren extrem unstetig sind. Wir haben von Beginn an verlangt, daß  $D(A)$  dicht in  $\mathcal{H}$  ist. Nun verlangen wir noch, daß auch  $D(A^*)$  dicht in  $\mathcal{H}$  ist. In diesem Fall existiert  $A^{**}$  und stellt eine Erweiterung von  $A$  dar. Nun hat  $A^{**}$  die bemerkenswerte Eigenschaft, abgeschlossen zu sein. Hierfür kann man zwei Definitionen angeben, eine “geometrische” und eine “topologische”. Zuvor stellen wir einige leicht zu beweisende Tatsachen zusammen:

- Aus  $A \subset B$  folgt  $B^* \subset A^*$ .
- Ist  $A$  abschließbar, so gilt  $A \subset A^{**}$ .
- Ist  $A$  invertierbar und  $D(A^{-1})$  dicht in  $\mathcal{H}$ , so gilt  $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$ .
- Ist  $B$  beschränkt, so gilt  $(A + B)^* = A^* + B^*$  und  $(BA)^* = A^*B^*$ .

Warnung: Nicht immer gilt  $(AB)^* = B^*A^*$ , wenn  $B$  beschränkt ist. Wichtig:

*Existiert  $A^{**}$ , so auch  $A^{***}$  und stimmt mit  $A^*$  überein. Damit stellt  $A \mapsto A^{**}$  eine Abschlußoperation dar.*

Denn  $A^{**}$  ist dicht definiert. Also existiert  $A^{***}$ . Aus  $A \subset A^{**}$  folgt  $(A^{**})^* \subset A^*$ . Andererseits gilt  $A^* \subset (A^*)^{**}$ .

Für den Abschluß von  $A$  (falls er existiert) schreibt man auch  $A^- = A^{**}$ . Es gilt  $A^{- -} = A^-$  und: Aus  $A \subset B$  folgt  $B^- \subset A^-$ . Gilt  $A = A^-$ , so heißt der Operator  $A$  abgeschlossen. Gilt  $A \subset B$  für einen abgeschlossenen Operator  $B$ , so heißt  $B$  eine *abgeschlossene Erweiterung* von  $A$ .

Unsere Resultate lassen sich auch so interpretieren, daß  $A^*$  stets abgeschlossen ist. Ferner, daß  $A^-$ , falls existent, stets eine abgeschlossene Erweiterung von  $A$  darstellt. Die Frage, wie  $A^-$  sich zu anderen denkbaren Erweiterungen verhält, kann beantwortet werden:

*Falls  $A$  eine abgeschlossene Erweiterung besitzt, so existiert auch der Abschluß  $A^-$  und stellt die kleinste abgeschlossene Erweiterung dar.*

Zum Beweis nehme man an,  $B$  sei eine abgeschlossene Erweiterung von  $A$ . Aus  $B^{**} = B^*$  folgt, daß  $B^*$  dicht definiert ist. Aus  $A \subset B$  folgt  $D(B^*) \subset D(A^*)$ . Folglich ist auch  $A^*$  dicht definiert und  $A^{**}$  existiert. Ebenso folgt  $A^- \subset B^- = B$  und somit ist  $A^-$  in jeder abgeschlossenen Erweiterung von  $A$  enthalten. q.e.d.

Warnung: Zwar gilt  $(cA)^* = \bar{c}A^*$  für  $c \in \mathbb{C}$ , aber die Relationen  $(A+B)^* = A^* + B^*$ ,  $(A+B)^- = A^- + B^-$  und  $(AB)^* = B^*A^*$  sind i.allg. falsch. Ein günstiger Fall tritt dann ein, wenn  $A+B$  und  $(A+B)^*$  dicht definiert sind:

*Ist  $D(A) \cap D(B)$  dicht in  $\mathcal{H}$ , so gilt  $(A+B)^* \supset A^* + B^*$ . Ist auch  $D(A^*) \cap D(B^*)$  dicht in  $\mathcal{H}$ , so gilt*

$$\begin{aligned} A+B &\subset (A+B)^- \subset (A^* + B^*)^* \\ A+B &\subset A^- + B^- \subset (A^* + B^*)^* \end{aligned}$$

Beweis. Sei  $g \in D(A^*) \cap D(B^*)$ . Dies bedeutet, daß

$$|(g, Af)| \leq C_1 \|f\|, \quad |(g, Bf)| \leq C_2 \|f\|$$

für alle  $f \in D(A) \cap D(B)$  gilt. Damit folgt

$$|(g, (A+B)f)| \leq (C_1 + C_2) \|f\|$$

und  $g$  liegt somit in  $D((A+B)^*)$ , weil  $D(A) \cap D(B)$  dicht in  $\mathcal{H}$  ist. Wir haben noch zu zeigen, daß die Operatoren  $(A+B)^*$  und  $A^* + B^*$  auf  $D(A^*) \cap D(B^*)$  übereinstimmen. Aus

$$\begin{aligned} (g, Af) &= (A^*g, f) \\ (g, Bf) &= (B^*g, f) \\ (g, Af) + (g, Bf) &= ((A+B)^*g, f) \end{aligned}$$

folgt

$$([(A+B)^* - A^* - B^*]g, f) = 0 \quad f \in D(A) \cap D(B), \quad g \in D(A^*) \cap D(B^*)$$

Da  $D(A) \cap D(B)$  dicht in  $\mathcal{H}$  ist, gilt  $(A+B)^*g = A^*g + B^*g$ . Aus unseren Annahmen folgt auch die Existenz der Operatoren  $A^-$ ,  $B^-$  und  $(A^* + B^*)^*$ . Da  $(A+B)^* \supset A^* + B^*$ , ist auch  $(A+B)^*$  dicht definiert und  $(A+B)^-$  existiert. Der Rest ist einfach. q.e.d.

Wir setzen nun die Diskussion des Vertauschungsrelationen  $[a, a^*] = \mathbb{1}$  fort, indem wir eine konkrete Darstellung des Operators  $a$  angeben:

$$(af)(n) = \sqrt{n+1}f(n+1) \tag{17}$$

$$D(a) = \{f \in \ell^2 \mid \sum_{n=1}^{\infty} n|f(n)|^2 < \infty\} \tag{18}$$

Unter dem Raum  $\ell^2$  versteht man alle quadratsummierbaren Folgen  $f(0)$ ,  $f(1)$ ,  $f(2)$ , ... von komplexen Zahlen. Wir behaupten:

1. Zwar ist der Operator  $a$  unbeschränkt, aber durch unseren Ansatz bereits dicht definiert. Der adjungierte Operator  $a^*$  ist dicht definiert und es gilt  $D(a^*) = D(a)$ . Konkret:

$$(a^*f)(n) = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \sqrt{n}f(n-1) & n \geq 1 \end{cases} \quad (19)$$

und

$$\|a^*\|^2 = \|af\|^2 + \|f\|^2 \quad f \in D(A). \quad (20)$$

2. Der Operator  $a$  ist abgeschlossen.  
 3. Die Operatoren  $a^*a$  und  $aa^*$  sind dicht definiert. Es gilt

$$D(a^*a) = D(aa^*) = \{f \in \ell^2 \mid \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |f(n)|^2 < \infty\}$$

und  $(a^*af)(n) = nf(n)$ . Eine korrekte Form der Vertauschungsrelation (unter Berücksichtigung der Definitionsbereiche) lautet:

$$aa^* = a^*a + \mathbb{1}.$$

4. Jede komplexe Zahl ist Eigenwert von  $a$ . Hingegen besitzt der Operator  $a^*$  keinen Eigenwert.

Zu 1. Wir bestimmen  $D(a^*)$ , indem wir die Frage beantworten: Für welche  $g \in \ell^2$  gilt

$$(\exists C \geq 0)(\forall f \in D(a)) \quad |(g, af)| \leq C\|f\| ?$$

Nun ist  $D(a)$  dicht in  $\ell^2$  und

$$(g, af) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{g(n)}(af)(n) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{g(n)}\sqrt{n+1}f(n+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \overline{g(n)}f(n)$$

so daß wegen der Cauchy-Ungleichung zu fordern ist:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|g(n-1)|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)|g(n)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n|g(n)|^2 + \|g\|^2 < \infty.$$

Zu 2. Wir bestimmen  $D(a^{**})$  indem wir fragen: Für welche  $g \in \ell^2$  gilt

$$(\exists C \geq 0)(\forall f \in D(a^*)) \quad |(g, a^*f)| \leq C\|f\| ?$$

Nun gilt

$$(g, a^*f) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{g(n)}(a^*f)(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{g(n)}\sqrt{n}f(n-1) = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} \overline{g(n+1)}f(n)$$

und wir haben zu fordern:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)|g(n+1)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n|g(n)|^2.$$

Damit gilt  $D(a^{**}) = D(a)$  und  $a^{**}$  keine echte Erweiterung von  $a$ , d.h.  $a = a^{**}$ :  $a$  ist abgeschlossen.

Zu 3. Wegen  $D(a) = D(a^*)$  gilt

$$D(a^*a) = D(aa^*) = \{f \in D(a) \mid af \in D(a)\}$$

Damit  $f$  in  $D(a^*a)$  liegt, müssen also zwei Bedingungen erfüllt sein:

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} n|f(n)|^2 < \infty$
2.  $\sum_{n=1}^{\infty} n|(af)(n)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)|f(n+1)|^2 < \infty.$

Sie lassen sich zu einer Bedingung zusammenfassen:  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2|f(n)|^2 < \infty$ . Für alle  $f \in D(a^*a)$  gilt definitionsgemäß  $a^*af = a^*(af)$  und  $aa^*f = a(a^*f)$  und somit

$$\begin{aligned} (a^*af)(n) &= \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \sqrt{n}(af)(n-1) = nf(n) & n \geq 1 \end{cases} \\ (aa^*f)(n) &= \sqrt{n+1}(a^*f)(n+1) = (n+1)f(n) \end{aligned}$$

Zu 4. Sei  $z \in \mathbb{C}$ . Der Vektor  $f_z \in \ell^2$  mit den Komponenten  $f_z(n) = z^n/\sqrt{n!}$  hat das Normquadrat

$$\|f_z\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^{2n}}{n!} = e^{|z|^2}.$$

Wegen

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|f_z(n)|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^{2n}}{(n-1)!} = |z|^2 e^{|z|^2}$$

liegt  $f_z$  sogar in  $D(a)$ . Wegen

$$(af_z)(n) = \sqrt{n+1}f_z(n+1) = \sqrt{n+1} \frac{z^{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}} = z \frac{z^n}{n!} = zf_z(n)$$

ist  $f_z$  ein Eigenvektor des Operators  $a$  zum Eigenwert  $z$ . Schließlich zeigen wir, daß der adjungierte Operator  $a^*$  keine Eigenwerte besitzt. Für jedes

komplexe  $z$  und jeden Vektor  $f \in D(a)$  gilt (unter Ausnutzung der Vertauschungsrelation  $\|a^*f\|^2 = \|af\|^2 + \|f\|^2$ )

$$\begin{aligned} \|a^*f - zf\|^2 &= \|a^*f\|^2 + |z|^2\|f\|^2 - z(a^*f, f) - \bar{z}(f, a^*f) \\ &= \|af\|^2 + (1 + |z|^2)\|f\|^2 - z(f, af) - \bar{z}(af, f) \\ &= \|af - \bar{z}f\|^2 + \|f\|^2 \geq \|f\|^2. \end{aligned}$$

Da offenbar die linke Seite nur für  $f = 0$  verschwindet, folgt, daß kein komplexes  $z$  Eigenwert sein kann.

### 1.3 Der Graph eines Operators

Wir nehmen unsere allgemeine Erörterung der Eigenschaften von abgeschlossenen bzw. abschließbaren Operatoren wieder auf. Ein sehr nützliches Hilfsmittel ist der *Graph*  $\mathcal{G}(A)$  eines Operators  $A$ . Hierbei handelt es sich um einen linearen Teilraum des Hilbertraumes  $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ . Er besteht aus allen Paaren der Form  $\{f, Af\}$  mit  $f \in D(A)$ . Obwohl ein Teilraum, ist  $\mathcal{G}(A)$  i.allg. nicht abgeschlossen in  $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ .

In der Sprache der Graphen hat der adjungierte Operator  $A^*$  eine sehr einfache Charakterisierung. Die Gleichung

$$(g, Af) - (A^*g, f) = 0$$

läßt sich nämlich als eine Orthogonalitätsrelation in  $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$  lesen:

$$\{-A^*g, g\} - \{f, Af\}.$$

Umgekehrt: Gilt für irgendein Element  $\{-h, g\} \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$  die Aussage

$$\{-h, g\} - \{f, Af\},$$

also die Relation  $(g, Af) = (h, f)$ , so gehört  $g$  zum Definitionsbereich von  $A^*$  und es gilt  $h = A^*g$ . Man kann daher die Definition des adjungierten Operators (vermöge seines Graphen) auch in der folgenden Form angeben:

$$\mathcal{G}(A^*) = (U\mathcal{G}(A))^\perp = U\mathcal{G}(A)^\perp.$$

Hier bezeichnet  $U$  den durch  $U\{f, g\} = \{-g, f\}$  definierten unitären Operator auf  $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ . Dies zeigt, daß  $\mathcal{G}(A^*)$  stets abgeschlossen ist.

Die *Abgeschlossenheit eines Graphen* hat eine bemerkenswerte Konsequenz: Die Konvergenz (für  $n \rightarrow \infty$ )

$$\{f_n, Af_n\} \rightarrow \{f, g\} \quad f_n \in D(A)$$

hat automatisch  $\{f, g\} \in ?(A)$  und  $g = Af$  zur Folge. Wir zeigen nun, daß der Begriff *Abgeschlossenheit eines Graphen* mit dem Begriff *Abgeschlossenheit eines Operators* übereinstimmt und behaupten, daß die folgenden drei Aussagen gleichwertig sind:

1.  $A^{**}$  existiert und es gilt  $A = A^{**}$ .
2. Der Graph  $?(A)$  ist abgeschlossen in  $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ .
3.  $D(A)$  ist ein Hilbertraum in bezug auf das Skalarprodukt

$$(f, g)_1 = (f, g) + (Af, Ag), \quad (21)$$

ist also insbesondere vollständig in der neuen Topologie.

Der Beweis benötigt drei Schritte:

1.  $\rightarrow$  2.  $?(A) = ?(A^{**}) = (U?(A^*))^-$

2.  $\rightarrow$  1. Wir müssen zunächst zeigen, daß  $D(A^*)$  dicht ist. Sei  $f \in D(A^*)$ . Dann gilt  $\{f, 0\} \in ?(A^*)$  oder

$$\{f, 0\} \in ?(A^*)^- = U?(A)^{- -} = U?(A)$$

wobei die letzte Gleichung gilt, weil  $?(A)$  abgeschlossen ist. Also gilt  $\{0, -f\} \in ?(A)$ , was nur für  $f = 0$  erfüllbar ist. Also existiert  $A^{**}$  und

$$?(A^{**}) = (U?(A^*))^- = ?(A)^{- -} = ?(A)$$

2.  $\rightarrow$  3. Die lineare Abbildung

$$D(A) \rightarrow ?(A), \quad f \mapsto \{f, Af\}$$

ist 1:1. Unter dem Skalarprodukt (20) ist  $D(A)$  ein Hilbertraum genau dann, wenn  $?(A)$  ein solcher ist.

Der Graph eines Operators hat eine weitere bemerkenswerte Eigenschaft: Er enthält keine Elemente der Form  $\{0, g\}$  mit  $g \neq 0$ . Es ist genau diese Eigenschaft, die bei der Abschließung eines Operators gewahrt werden muß:

*Ein Operator  $A$  ist abschließbar genau dann, wenn  $?(A)^-$  (der Abschluß des Graphen also) die folgende Eigenschaft hat: Aus  $\{0, g\} \in ?(A)^-$  folgt  $g = 0$ . Es gilt dann  $?(A^-) = ?(A)^-$ .*

Hier benutzen wir die Bezeichnungen

$$?(A)^- = ?^{- -}, \quad A^- = A^{**}.$$

Zum Beweis wollen wir annehmen, aus  $\{0, g\} \in ?(A)^-$  folge  $g = 0$ . Wir schließen, daß  $D(A^*)$  dicht ist. Aus  $?(A^*) = U?(A)^-$  folgt  $?(A)^- = U?(A^*)$  und somit  $?(A)^- = (U?(A^*))^-$ . Nehmen wir nun an, es existiere  $g \in \mathcal{H}$  mit  $(g, f) = 0$  für alle  $f \in D(A^*)$ , also

$$\{0, g\} = \{-A^*f, f\}$$

oder anders geschrieben,  $\{0, g\} \in (U?(A^*))^- = ?(A)^-$ , also  $g = 0$  und  $D(A^*)$  ist dicht in  $\mathcal{H}$ . In der umgekehrten Richtung wollen wir annehmen, daß  $D(A^*)$  dicht sei. Dann existiert  $A^-$  und es gilt

$$?(A^-) = ?(A^{**}) = (U?(A^*))^- = ?(A)^{- -} = ?(A)^-.$$

Dies zeigt, daß  $?(A)^-$  der Graph eines Operators, nämlich von  $A^-$  ist. Von einem Graphen wissen wir, daß  $\{0, g\}$  nur dazugehören kann, wenn  $g = 0$  ist.

## 1.4 Symmetrische und selbstadjungierte Operatoren

Nicht alle Operatoren sind abschließbar. Von *symmetrischen Operatoren* weiß man aber mit Sicherheit, daß sie abschließbar sind.

Definition: Ein Operator  $A$  heißt *symmetrisch*, wenn  $(g, Af) = (Ag, f)$  für alle  $f, g \in D(A)$  gilt, gleichbedeutend mit  $A \subset A^*$ . Gilt darüberhinaus  $A = A^*$ , so heißt  $A$  *selbstadjungiert*.

Die Definition zeigt, daß  $A^*$  dicht definiert ist, wenn  $A$  symmetrisch ist. Also ist  $A$  abschließbar und es gilt  $A^{**} \subset A^*$ . Dies zeigt, daß  $A^*$  i.allg. nicht mehr symmetrisch ist, und es ist genau diese Pathologie, die man in Anwendungen verhindern muß. Allgemein lassen sich folgende Situationen unterscheiden:

$A \subset A^{**} \subset A^*$	$A$ ist symmetrisch
$A \subset A^{**} = A^*$	$A$ ist wesentlich selbstadjungiert
$A = A^{**} \subset A^*$	$A$ ist abgeschlossen symmetrisch
$A = A^{**} = A^*$	$A$ ist selbstadjungiert

Ein Operator heißt *maximal symmetrisch*, wenn er keine echte symmetrische Erweiterung zuläßt.

Ein Hamilton-Operator  $H$ , wie er in der Feldtheorie auftritt, ist zunächst nur als ein symmetrischer Operator erklärt, sobald wir eine Wechselwirkung  $H_1$  betrachten:  $H = H_0 + H_1$ . Das ist selbst dann der Fall, wenn wir schon wissen, daß  $H_0$  und  $H_1$  für sich genommen selbstadjungierte Operatoren sind. Das Grundproblem lautet: Welche selbstadjungierte Erweiterungen besitzt die Summe  $H_0 + H_1$ ? Das Problem, solche Erweiterungen zu finden, ist keineswegs einfach, noch immer lösbar.

Sei nun  $B$  irgendeine selbstadjungierte Erweiterung des symmetrischen Operators  $A$ . Dann gilt:

$$\begin{array}{ccccc} A & \subset & A^{**} & \subset & A^* \\ \cap & & \cap & & \cup \\ B & = & B^{**} & = & B^* \end{array}$$

Wir erkennen hieran zweierlei:

1. Jede selbstadjungierte Erweiterung liegt zwischen  $A^{**}$  und  $A^*$ :

$$A^{**} \subset B \subset A^* .$$

2. Ist  $A$  wesentlich selbstadjungiert, so ist  $A^*$  die einzige selbstadjungierte Erweiterung.

Aufgrund der 2. Aussage ist es wünschenswert, den Definitionsbereich eines Hamilton-Operators  $H$  wenigstens so groß zu machen, daß  $H$  darauf selbstadjungiert ist; denn nur in diesem Fall ist das durch  $H$  formulierte dynamische Problem als gelöst zu betrachten. Insbesondere gilt dann der Spektralsatz. Zu seiner Vorbereitung benötigen wir neue Begriffe.

Definition: Unter der *Resolventenmenge*  $r(A)$  eines abgeschlossenen Operators  $A$  verstehen wir die Gesamtheit der komplexen Zahlen  $z$ , für die  $(A - z\mathbb{1})^{-1}$  als ein beschränkter Operator existiert. Das Komplement  $s(A) = \mathbb{C} \setminus r(A)$  wird das *Spektrum* von  $A$  genannt.

Es ist leicht zu sehen, daß  $r(A)$  eine offene Menge in  $\mathbb{C}$  ist, d.h. mit jeder Zahl  $z$  gehört auch eine ganze Umgebung zu  $r(A)$ . Als Komplement einer offenen Menge ist  $s(A)$  eine abgeschlossene Menge in  $\mathbb{C}$ . Während das Spektrum eines symmetrischen Operators nicht notwendig reell ist, gilt für selbstadjungierte Operatoren der folgende Spektralsatz:

*Das Spektrum  $s(A)$  eines selbstadjungierten Operators  $A$  ist reell. Es gibt genau ein projektionswertiges Maß  $E(B)$  auf den Borel-Mengen  $B \subset \mathbb{R}$  mit Träger  $s(A)$ , so daß*

$$D(A) = \{f \in \mathcal{H} \mid \int p^2(f, E(dp)f) < \infty\} ,$$

*$Af = \int pE(dp)f$  für alle  $f \in D(A)$  und  $\mathbb{1} = \int E(dp)$  gilt.*

Für eine präzise Definition der Begriffe *Borel-Menge* und *Maß* verweisen wir auf die Literatur (z.B. Halmos: Measure Theory). Für einen Beweis des Spektralsatzes siehe Dunford-Schwartz, Chapter XII.

Man nennt  $E(B)$  das *Spektralmaß* von  $A$  und wegen der Eigenschaft  $\mathbb{1} = \int E(dp)$  auch eine *Zerlegung der Einheit* (vergleiche hierzu die entsprechende Eigenschaft eines Wahrscheinlichkeitsmaßes). Durch

$$U(t)f = \int e^{ipt} E(dp), \quad (f \in \mathcal{H}, t \in \mathbb{R})$$

ist ein überall definierter unitärer Operator gegeben. Wir schreiben auch  $U(t) = e^{iAt}$ , betonen aber, daß  $U(t)$  nicht durch die Entwicklung der Exponentialfunktion ist. Grund: Die Glieder der Reihe existieren nur auf den Vektoren

$$f \in C^\infty(A) = \bigcap_{n=0}^{\infty} D(A^n).$$

Für  $t \mapsto U(t)$  gilt

- die Gruppeneigenschaft  $U(t)U(s) = U(t+s)$ ,
- die Stetigkeit im Sinne der starken Operatortopologie.

Diese Eigenschaften charakterisieren die zeitliche Evolution jedes quantenmechanischen Systems. Konkrete dynamische Theorien werden jedoch immer “infinitesimal” definiert, d.h. durch eine Differentialgleichung der Art

$$i \frac{d}{dt} f(t) = H f(t),$$

wobei der Zusammenhang durch  $f(t) = e^{-itH} f$  hergestellt wird. Hat jede einparametrische unitäre Gruppe ein erzeugendes Element  $H$ ? Hierauf gibt der Satz von Stone und v. Neumann eine Antwort:

*Ist  $U(t)$  eine stark stetige unitäre Gruppe auf einem Hilbertraum, so gibt es genau einen selbstadjungierten Operator  $H$ , so daß  $U(t) = e^{-itH}$ . Der Definitionsbereich dieses Operators ist*

$$D(H) = \{f \in \mathcal{H} \mid U(t)f \text{ differenzierbar in } t\}$$

Auch hier verweisen wir auf die Literatur. Unsere Problemstellung macht es wünschenswert, Kriterien dafür zu kennen, wann ein vorgelegter symmetrischer Operator selbstadjungiert oder doch wenigstens wesentlich selbstadjungiert ist. Wir geben verschiedene Antworten:

1. Ist  $A$  ein abgeschlossener Operator ( $A = A^-$ ), so sind  $A^*A$  und  $AA^*$  selbstadjungiert.

2. Ist  $A$  abgeschlossen (abschließbar),  $B$  ein weiterer Operator mit  $D(A) \subset D(B)$  und gilt

$$\|Bf\|^2 \leq a\|f\|^2 + b\|Af\|^2$$

für  $b < 1$  und alle  $f \in D(A)$ , so ist  $A + B$  abgeschlossen (abschließbar).

3. Ist  $A$  selbstadjungiert und  $r, s \in \mathbb{R}$ , so ist auch  $rA + s\mathbb{1}$  selbstadjungiert.

4. Ist  $A$  selbstadjungiert und  $B$  symmetrisch beschränkt mit  $D(B) = \mathcal{H}$ , so ist  $A + B$  selbstadjungiert.

5. Ist  $A$  (wesentlich) selbstadjungiert,  $B$  symmetrisch mit  $D(A) \subset D(B)$  und gilt

$$\|Bf\|^2 \leq a\|f\|^2 + b\|Af\|^2$$

für  $(b \leq 1) b < 1$  und alle  $f \in D(A)$ , so ist  $A + B$  (wesentlich) selbstadjungiert (Rellich, Kato).

6. Folgt für alle  $f \in D(A)$  aus dem Bestehen der Relationen

$$(g, Af + if) = 0, \quad (h, Af - if) = 0$$

sowohl  $g = 0$  als auch  $h = 0$  für einen symmetrischen Operator  $A$ , so ist  $A$  wesentlich selbstadjungiert (v. Neumann).

7. Besitzt ein symmetrischer Operator eine dichte Menge von analytischen Vektoren in seinem Definitionsbereich, so ist er wesentlich selbstadjungiert (Nelson).

Definition: Ein Vektor  $f \in \mathcal{H}$  heißt *analytisch* in Bezug auf einen Operator  $A$ , falls  $f \in C^\infty(A)$  gilt ( $f$  liegt im Definitionsbereich aller Potenzen  $A^n$ ) und die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \|A^n f\|^n \quad (z \in \mathbb{C})$$

einen positiven Konvergenzradius in  $z$  hat.

Diese Begriffsbildung und das Kriterium von Nelson bilden den Ausgangspunkt für die *analytische Störungstheorie*, auf die wir nicht näher eingehen.

Wir illustrieren die Aussagen anhand sehr einfacher Beispiele. Sei  $a$  der Operator auf dem Hilbertraum  $\ell^2$  mit dem früher angegebenen Definitionsbereich und der Vertauschungsrelation  $aa^* = a^*a + \mathbb{1}$ . Alle Ausdrücke der Form

$$\alpha a^* + \beta a \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha| \neq |\beta|)$$

sind abgeschlossene Operatoren. Die Aussage wird falsch für  $|\alpha| = |\beta|$ . Jedoch: Der symmetrische Operator  $A = \alpha a^* + \bar{\alpha} a$  ist wesentlich selbstadjungiert; denn alle Vektoren  $f \in \ell^2$ , deren Komponenten  $f(n)$  für fast alle  $n$  verschwinden, sind analytisch für  $A$ , wie man sofort nachprüft.

Wir betrachten nun  $H_0 = a^* a$  als "freien" Hamilton-Operator. Er ist wie wir wissen selbstadjungiert auf seinem natürlichen Definitionsbereich. Frage: Gilt dies auch für Störungen der Form

$$H = a^* a + \alpha a^* + \bar{\alpha} a,$$

wenn  $\alpha \in \mathbb{C}$  beliebig ist? Die Antwort lautet: Ja. Denn für jedes  $f \in D(a^* a)$  und  $\beta > 0$  gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|af\|^2 = (f, a^* af) &\leq \|f\| \|a^* af\| \\ &= 2 \left( \frac{1}{2\sqrt{\beta}} \|f\| \right) \left( \sqrt{\beta} \|a^* af\| \right) \\ &\leq \frac{1}{4\beta} \|f\|^2 + \beta \|a^* af\|^2 \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} \|(\alpha a^* + \bar{\alpha} a)f\|^2 &\leq 2|\alpha|^2 (\|a^* f\|^2 + \|af\|^2) \\ &= 2|\alpha|^2 (\|f\|^2 + \|a^* af\|^2) \\ &\leq |\alpha|^2 (2 + \beta^{-1}) \|f\|^2 + 4|\alpha|^2 \beta \|a^* af\|^2. \end{aligned}$$

Wenn wir jetzt  $\beta$  so wählen, so daß  $4|\alpha|^2 \beta < 1$  gilt, so haben wir die Voraussetzungen des 5. Kriteriums erfüllt. Der Operator  $H$  ist selbstadjungiert, obwohl das Störglied  $\alpha a^* + \bar{\alpha} a$  für sich genommen nur *wesentlich* selbstadjungiert ist. Die hier angewandte Beweistechnik ist im Grunde zu umständlich. Ein sehr viel einfacherer Beweis der Selbstadjungiertheit gründet auf der Darstellung

$$H = (a + \alpha \mathbb{1})^* (a + \alpha \mathbb{1}) - |\alpha|^2 \mathbb{1}$$

und bleibt den Hörern (Lesern) überlassen.

Das betrachtete Beispiel legt die folgende Definition nahe: Wir sagen, ein Operator  $A$  wird durch den Operator  $B$  *majorisiert*, und schreiben  $A < B$ , wenn  $D(A) \subset D(B)$  gilt und

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0) \quad \|Af\|^2 \leq \delta^{-1} \|f\|^2 + \epsilon \|Bf\|^2$$

für alle  $f \in D(B)$  erfüllt ist. Ein Hamilton-Operator der Form

$$H = H_0 + \lambda H_1 \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

ist somit selbstadjungiert, wenn  $H_0$  selbstadjungiert ist und den symmetrischen Operator  $H_1$  majorisiert. Leider kann man sich nicht darauf verlassen, daß konkrete Ansätze für die Wechselwirkung diese Eigenschaft haben. Die Erfahrung zeigt:

*Eine kleine Kopplungskonstante  $\lambda$  bedeutet nicht immer eine "kleine" Störung.*

Zur Illustration betrachten wir den symmetrischen Hamilton-Operator

$$H_\lambda = a^* a + \lambda(a + a^*)^3$$

in Abhängigkeit von  $\lambda$ . Während  $(f, H_0 f) \geq 0$  für alle  $f \in D(H_0)$  gilt, gibt es keine Konstante  $C$ , so daß

$$(f, H_\lambda f) \geq -C \|f\|^2$$

für irgendein  $\epsilon \neq 0$  und alle  $f \in D(H_\lambda)$  gilt:  $H_\lambda$  ist nicht nach unten beschränkt. Zum Beweis dieser Behauptung nehmen wir an,  $f_x$  sei der Eigenvektor von  $a$  zum reellen Eigenwert  $x$ . Man sieht leicht, daß  $f_x \in D(H_\lambda)$  für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  erfüllt ist. Es folgt

$$\begin{aligned} (a + a^*)^3 f_x &= (a^3 + a^{*3} + a^2 a^* + a a^* a + a^* a^2 + a a^{*2} + a^* a a^* + a^{*2} a) f_x \\ &= (a^3 + a^{*3} + 3a^* a^2 + 3a^{*2} a + 3a^* + 3a) f_x \end{aligned}$$

weil  $f_x$  in dem Definitionsbereich eines jeden Polynoms von  $a$  und  $a^*$  liegt. Nachdem wir die Wick-Ordnung erreicht haben, folgt

$$\begin{aligned} (f_x, (a + a^*)^3 f_x) &= (x^3 + x^3 + 3x^3 + 3x^3 + 3x + 3x) \|f_x\|^2 \\ &= 2x(4x^2 + 3) \|f_x\|^2 \end{aligned}$$

und somit

$$(f_x, H_\lambda f_x) = x(x + 2\lambda(4x^2 + 3)) \|f_x\|^2$$

Da wir  $-\lambda x$  durch Wahl von  $x$  bei festem  $\lambda \neq 0$  beliebig groß machen können, erkennen wir, daß  $H_\lambda$  keine untere Schranke besitzt. Die Erkenntnis hat unmittelbare Relevanz für das sog.  $\Phi^3$ -Modell der Feldtheorie.

Wenn  $A$  ein symmetrischer Operator ist, so ist jede selbstadjungierte Erweiterung von  $A$  eine Einschränkung von  $A^*$ . Ist darüber hinaus der Operator  $A$  nach unten beschränkt, d.h.

$$(\exists C \geq 0)(\forall f \in D(A)) \quad (f, A f) \geq -C \|f\|^2,$$

so kann man eine natürliche Einschränkung von  $A^*$  angeben, die symmetrisch ist und die gleiche untere Grenze wie  $A$  besitzt. Man vervollständigt zu diesem Zweck  $D(A)$  in der Norm  $\|f\|_1$ , wobei

$$\|f\|_1^2 = (C + 1) \|f\|^2 + (f, A, f)$$

gesetzt wurde. Die Vervollständigung sei mit  $D(A)_1$  bezeichnet. Nun definiert man

$$\hat{A}f = A^*f, \quad f \in D(\hat{A}) = D(A^*) \cap D(A)_1.$$

Wichtig: Der so definierte Operator  $\hat{A}$  stellt eine selbstadjungierte Erweiterung von  $A$  dar (die sog. Friedrichssche Erweiterung). Wir müssen hier auf einen Beweis verzichten.

Der Satz von Friedrichs macht klar, daß formale Hamilton-Operatoren, sofern sie nach unten beschränkt sind, immer eine selbstadjungierte Erweiterung besitzen. Es bleibt jedoch im Dunkel, wann diese Erweiterung die einzige selbstadjungierte Erweiterung darstellt und ob, wenn mehrere Erweiterungen möglich sind, die durch das Verfahren von Friedrichs gewonnene Erweiterung in jedem Fall den physikalisch relevanten Operator ergibt.

## 1.5 Hilbert-Tensorprodukte

Den linearen Raum  $\mathbb{C}^n$  können wir auch als einen  $n$ -dimensionalen Hilbertraum auffassen. Zwei Konstruktionen erzeugen weitere endlich-dimensionale Hilberträume.

1. Direkte Summe:  $\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^m \cong \mathbb{C}^{n+m}$
2. Tensorprodukt:  $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m \cong \mathbb{C}^{n \times m}$

Hier fassen wir  $\mathbb{C}^{n \times m}$  als den Raum aller komplexen  $n \times m$ -Matrizen auf mit dem Skalarprodukt

$$(M, N) = \text{Spur}(M^*N).$$

Der Begriff des Tensorproduktes erlaubt eine Verallgemeinerung auf unendlich-dimensionale lineare Räume (algebraisches Tensorprodukt) und unendlich-dimensionale Hilberträume (Hilbert-Tensorprodukt).

Sind  $\mathcal{H}$  und  $\mathcal{H}'$  zwei lineare Räume, so bildet man alle Paare  $f \otimes f'$  mit  $f \in \mathcal{H}$  bzw.  $f' \in \mathcal{H}'$ , *Produktvektoren* genannt, und deren endliche Linearkombinationen. Sodann vereinbart man die folgenden Regeln:

$$\begin{aligned} (f + g) \otimes f' &= f \otimes f' + g \otimes f' \\ f \otimes (f' + g') &= f \otimes f' + f \otimes g' \\ \alpha(f \otimes f') &= (\alpha f) \otimes f' = f \otimes (\alpha f') \quad (\alpha \in \mathbb{C}). \end{aligned}$$

Genauer: Man bildet den Quotientenraum bezüglich des durch diese Relationen gewonnenen Teilraumes aller Linearkombinationen. Der so erhaltene Raum  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}'$  heißt das *algebraische Tensorprodukt*. Sind  $\mathcal{H}$  und  $\mathcal{H}'$  darüber hinaus Hilberträume, so können wir durch Einführung des Skalarproduktes

$$(f \otimes f', g \otimes g') = (f, g)(f', g')$$

(und seine natürliche Fortsetzung auf Linearkombinationen von Produktvektoren) dem Tensorprodukt die Struktur eines Prä-Hilbertraumes geben. Er ist nicht vollständig (nicht alle Cauchy-Folgen darin sind konvergent), wenn sowohl  $\mathcal{H}$  als auch  $\mathcal{H}'$  unendliche-dimensional sind. Unter dem *Hilbert-Tensorprodukt* versteht die Vervollständigung  $(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}')^-$  schreibt aber weiterhin  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}'$ .

Sind  $A$  und  $A'$  abgeschlossene Operatoren in  $\mathcal{H}$  bzw.  $\mathcal{H}'$  mit Definitionsbereichen  $D(A)$  bzw.  $D(A')$ , so definieren wir  $A \otimes A'$  als den Abschluß des Operators  $T$ , der auf allen endlichen Linearkombinationen

$$\sum_{i=1}^n f_i \otimes f'_i \in D(A) \otimes D(A')$$

durch

$$T \sum_{i=1}^n f_i \otimes f'_i = \sum_{i=1}^n A f_i \otimes A' f'_i$$

definiert ist. Da  $D(A^*) \otimes D(A'^*)$  dicht in  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}'$  ist, besitzt  $T$  immer einen Abschluß.

Wir wollen dieses Verfahren anhand des speziellen Operators  $A \otimes \mathbb{1}$  näher erläutern. Sei  $(e_n)_1^\infty$  eine Basis in dem Hilbertraum  $\mathcal{H}'$ . Die Formel

$$\|\sum_n f_n \otimes e_n\|^2 = \sum_n \|f_n\|^2$$

zeigt, daß jedes Element in  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}'$  als eine Folge  $(f_n)_1^\infty$  von Vektoren  $f_n \in \mathcal{H}$  mit  $\sum_n \|f_n\|^2 < \infty$  aufgefaßt werden kann. Der Operator  $A$  induziert die Transformation  $(Tf)_n = A f_n$  auf Folgen  $(f_n)_1^\infty$  mit  $f_n = 0$  für fast alle  $n$ . Obwohl  $A$  als abgeschlossen vorausgesetzt wurde, ist der so definierte Operator  $T$  nicht abgeschlossen. Der Abschluß  $T^- = A \otimes \mathbb{1}$  wird gewonnen, wenn wir als Bereich  $D(T^-)$  alle Folgen  $(f_n)_1^\infty$  mit  $f_n \in D(A)$  wählen, für die

$$\sum_n \|f_n\|^2 < \infty, \quad \sum_n \|A f_n\|^2 < \infty$$

erfüllt ist.

## 1.6 Theorie der Vertauschungsrelationen

Eine Darstellung der Bose-Vertauschungsrelationen für  $N$  Freiheitsgrade in dem Hilbertraum

$$\mathcal{H}_N = \ell^2 \otimes \ell^2 \cdots \otimes \ell^2 \quad (N \text{ Faktoren})$$

bekommt man aus dem früher betrachteten Operator  $a$  auf  $\ell^2$  (für einen Freiheitsgrad) durch

$$a_i = \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \cdots \otimes \mathbb{1} \otimes a \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \cdots \otimes \mathbb{1}$$

( $N$  Faktoren,  $a$  an der  $i$ -ten Stelle,  $i = 1, \dots, N$ ). Die Vektoren des Raumes  $\mathcal{H}_N$  lassen sich auffassen als komplexe Funktionen  $f(n_1, \dots, n_N)$  von  $N$  Variablen  $n_i = 0, 1, 2, \dots$  mit

$$\sum_{n_1} \cdots \sum_{n_N} |f(n_1, \dots, n_N)|^2 < \infty,$$

so daß  $(a_i f)(n_1, \dots, n_N) = \sqrt{n_i + 1} f(n_1, \dots, n_N)$  mit dem Definitionsbereich

$$D(a_i) = \{f \in \mathcal{H} \mid \sum_{n_1} \cdots \sum_{n_N} n_i |f(n_1, \dots, n_N)|^2 < \infty\}.$$

Es ist sofort zu sehen, daß die Operatoren  $a_i$  abgeschlossen sind und die Vertauschungsrelationen

$$a_i a_k^* = a_k^* a_i + \delta_{ik} \mathbb{1}$$

erfüllen ( $\delta_{ik}$ =Kronecker-Symbol). Der nächste wichtige Satz sagt, daß diese Darstellung bereits die allgemeinste (irreduzible) Darstellung ist. Wir wollen sie die *Standarddarstellung* nennen.

**Eindeutigkeitsatz.** Seien  $A_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) abgeschlossene Operatoren in einem Hilbertraum  $\mathcal{H}$ , so daß  $\sum_i A_i^* A_i$  wesentlich selbstadjungiert ist und die Relationen

$$A_i A_k = A_k A_i, \quad A_i^* A_k^* = A_k^* A_i^*, \quad A_i A_k^* = A_k^* A_i + \delta_{ik} \mathbb{1}$$

erfüllt sind, und sei  $\mathcal{H}'$  die Menge aller Vektoren  $f \in \bigcap_i D(A_i)$  mit  $A_i f = 0$  ( $i = 1, \dots, N$ ). Dann ist  $\mathcal{H}'$  ein abgeschlossener linearer Teilraum, und es existiert eine unitäre Transformation

$$U: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_N \otimes \mathcal{H}',$$

so daß

$$U A_i U^{-1} = a_i \otimes \mathbb{1}, \quad U A_i^* U^{-1} = a_i^* \otimes \mathbb{1}$$

gilt, wobei  $a_i$  die Standarddarstellung auf  $\mathcal{H}_N$  beschreibt.

**Beweis.** Er verlangt einigen Aufwand und vollzieht sich in Schritten.

1. Schritt. Wir wählen ein festes  $i$  und setzen  $A = A_i$ . Da  $A$  abgeschlossen ist, ist  $A^*A$  selbstadjungiert und es existiert eine Spektralzerlegung  $A^*A = \int pE(dp)$ . Das Spektrum enthält mit Sicherheit eine reelle Zahl  $r > 0$ ; denn  $A^*A$  ist positiv und nicht der Nulloperator. Wir zeigen nun, daß auch  $r - 1$  zum Spektrum gehört. Dies folgt, wenn die Annahme der Existenz eines beschränkten inversen Operators zu  $A^*A - (r - 1)\mathbb{1}$  zum Widerspruch führt. Dazu wählen wir geeignete Borel-Mengen  $B_n \subset \mathbb{R}$ , die die Zahl  $r$  enthalten:

$$B_n = [r, r + n^{-1}) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Da  $r$  zum Spektrum gehört, gilt  $E(B_n) \neq 0$  für alle  $n$  und es gibt Vektoren  $f_n$  mit  $f_n = E(B_n)f_n$  und  $\|f_n\| = 1$ . Wir definieren

$$g_n = (A^*A - r\mathbb{1})f_n = \int_{B_n} (p - r)E(dp)f_n$$

und schließen

$$\begin{aligned} \|g_n\|^2 &= \int_{B_n} (p - r)^2 (f_n, E(dp)f_n) \\ &\leq n^{-2} \int_{B_n} (f_n, E(dp)f_n) \\ &= n^{-2} (f_n, E(B_n)f_n) \\ &= n^{-2} \|f_n\|^2 = n^{-2} \end{aligned}$$

also  $\lim_n g_n = 0$ . Aus  $f_n \in D(A^*A) \subset D(A)$  folgt

$$\begin{aligned} \|Af_n\|^2 &= (f_n, A^*Af_n) = r + (f_n, g_n) \\ &\geq r - |(f_n, g_n)| \geq r - \|f_n\| \|g_n\| \geq r - n^{-1}. \end{aligned}$$

Aus  $g_n = E(B_n)g_n \in D(A^*A) \subset D(A)$  folgt

$$\begin{aligned} \|Ag_n\|^2 &= (g_n, A^*Ag_n) = \int_{B_n} p(g_n, E(dp)g_n) \\ &\leq (r + n^{-1})\|g_n\|^2 \leq ((r + n^{-1})n^{-2}). \end{aligned}$$

Die Vertauschungsrelation  $AA^* = A^*A + \mathbb{1}$  ausnutzend können wir schreiben:

$$Ag_n = A(A^*A - r\mathbb{1})f_n = (AA^* - r\mathbb{1})Af_n = (A^*A - (r - 1)\mathbb{1})Af_n.$$

Die Annahme,  $R = (A^*A - (r - 1)\mathbb{1})^{-1}$  existiere und sei beschränkt, führt auf Ungleichungen

$$r - n^{-1} \leq \|Af_n\|^2 \leq \|R\|^2 \|Ag_n\|^2 \leq \|R\|^2 (r + n^{-1})n^{-2}$$

gültig für alle  $n$ , die im Widerspruch zu  $r > 0$  stehen. Folglich gehört  $r - 1$  zum Spektrum von  $A^*A$ . Durch Induktion finden wir, daß  $r - n$  im Spektrum liegt, falls dies für  $r - n + 1$  gilt und  $r - n + 1 > 0$  ist. Da keine negative Zahl zum Spektrum gehören kann, muß das Spektrum ein Punktspektrum sein (enthält nur Eigenwerte) und aus den Zahlen  $0, 1, 2, \dots$  bestehen. Dies vereinfacht die Spektralzerlegung (das Integral wird zu einer Summe):

$$A^*A = \sum_{n=0}^{\infty} nE_n, \quad E_n = E(\{n\}).$$

2. Schritt. Seien  $\mathcal{H}_n$  die den Projektoren  $E_n$  zugeordneten Teilräume von  $\mathcal{H}$ , den wir als eine direkte Summe darstellen können:

$$\mathcal{H} \cong \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \dots$$

Die Transformationen

$$\begin{aligned} U_n &: \mathcal{H}_{n-1} \rightarrow \mathcal{H}_n, \quad f \mapsto n^{-1/2} A^* f \\ V_n &: \mathcal{H}_n \rightarrow \mathcal{H}_{n-1}, \quad f \mapsto n^{-1/2} A f \end{aligned}$$

sind isometrisch, d.h.

$$\begin{aligned} \|U_n f\|^2 &= n^{-1}(f, AA^*) = n^{-1}(f, (A^*A + \mathbb{1})f) = \|f\|^2 \\ \|V_n g\|^2 &= n^{-1}(g, A^*Ag) = \|g\|^2, \end{aligned}$$

( $f \in \mathcal{H}_{n-1}$ ,  $g \in \mathcal{H}_n$ ) und invers zueinander:

$$\begin{aligned} V_n U_n f &= n^{-1} AA^* f = n^{-1}(A^*A + \mathbb{1})f = f \\ U_n V_n g &= n^{-1} A^* A g = g. \end{aligned}$$

Dies zeigt uns, daß alle Räume  $\mathcal{H}_n$  die gleiche Dimension haben (endlich oder abzählbar unendlich). Ferner: Ist  $(e_k)$  eine Basis in  $\mathcal{H}_0$ , so definiert  $e_{nk} = (n!)^{-1/2} A^{*n} e_k$  eine Basis (für festes  $n$ ) in  $\mathcal{H}_n$ . Die Vektoren  $e_{nk}$  (alle  $n$ ) bilden eine Basis in  $\mathcal{H}$ .

2. Schritt. Nun betrachten wir nicht nur ein  $i$ , sondern alle Freiheitsgrade zugleich und haben demgemäß viele Spektralprojektoren:

$$A_i^* A_i = \sum_n n E_{in} \quad (i = 1, \dots, N)$$

Frage: Können wir aus der Tatsache, daß die Operatoren  $A_i^* A_i$  miteinander kommutieren, schließen, daß dies auch für deren Spektralprojektoren gilt? Die

Antwort ist: Nein, im allgemeinen nicht. Die pathologischen Fälle entstehen dadurch, daß der Durchschnitt

$$D(A_i^* A_i) \cap D(A_k^* A_k) \quad (i \neq k)$$

eventuell nicht “genügend groß” ist. Diese Pathologie haben wir ausgeschlossen, indem wir voraussetzten, der Durchschnitt

$$\bigcap_{i=1}^N D(A_i^* A_i)$$

sei so groß, daß der Operator  $\sum_{i=1}^N A_i^* A_i$  darauf wesentlich selbstadjungiert ist. Der Beweis, daß in diesem Fall die Projektoren  $E_{in}$  miteinander kommutieren, stammt von Nelson (Annals of Mathematics, Vol.70, 572 (1959) Theorem 5). Ohne Beweis benutzen wir das Ergebnis. Damit ist

$$E_{1n_1} E_{2n_2} \cdots E_{Nn_N} \quad (n_i = 0, 1, 2, \dots)$$

ein Projektor. Den zugehörigen Teilraum von  $\mathcal{H}$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{H}_{n_1 \dots n_N}$ . Die Vereinigung dieser Räume ergibt  $\mathcal{H}$ . Ist  $(e_i)_{i \geq 1}$  eine Basis in  $\mathcal{H}' = \mathcal{H}_{0 \dots 0}$  (dem Raum der Grundzustände), so ist mit  $\mathbf{n} = (i, n_1, \dots, n_N)$  und

$$e_{\mathbf{n}} = (n_1! \cdots n_N!)^{-1/2} A_1^{*n_1} \cdots A_N^{*n_N} e_i$$

eine Basis in  $\mathcal{H}$  erklärt. Wir definieren die Transformation

$$U: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_N \otimes \mathcal{H}', \quad f \mapsto \sum_i f_i \otimes e_i$$

durch  $f_i(n_1, \dots, n_N) = (e_{\mathbf{n}}, f)$ . Wir finden sofort, daß  $U$  isometrisch ist:

$$\|Uf\|^2 = \sum_i \|f_i\|^2 = \sum_{\mathbf{n}} |(e_{\mathbf{n}}, f)|^2 = \|f\|^2.$$

Hier benutzen wir die Vollständigkeitsrelation der  $e_{\mathbf{n}}$ . Nun besitzt  $U$  aber einen isometrischen inversen Operator:

$$U^{-1}: \mathcal{H}_N \otimes \mathcal{H}' \rightarrow \mathcal{H}, \quad \sum_i f_i \otimes e_i \mapsto f,$$

der durch  $f = \sum_{\mathbf{n}} f_i(n_1, \dots, n_N)$  definiert ist. Hier benutzen wir die Orthogonalitätsrelation der  $e_{\mathbf{n}}$ . Fazit:  $U$  beschreibt eine unitäre Transformation zwischen Hilberträumen. Die Relationen

$$U A_i U^{-1} = a_i \otimes \mathbb{1}, \quad U A_i^* U^{-1} = a_i^* \otimes \mathbb{1}$$

bestätigt man leicht durch direkte Rechnung. Es bleibt schließlich nur noch anzumerken, daß der Raum der Grundzustände auf verschiedene Weise charakterisiert werden kann:

$$\mathcal{H}' = \{f \mid \sum_i A_i^* A_i f = 0\} = \{f \mid A_i f = 0, i = 1, \dots, N\}$$

wie die die Identität

$$\|A_1 f\|^2 + \dots + \|A_N f\|^2 = (f, \sum_i A_i^* A_i f)$$

zeigt. Damit ist der Beweis abgeschlossen.

Anmerkung: Die Darstellung der Vertauschungsrelationen ist genau dann irreduzibel, wenn der Raum  $\mathcal{H}'$  eindimensional ist. In diesem Fall besteht er aus den Vielfachen eines Einheitsvektors  $e$ , den man das *Vakuum* nennt. Die Darstellung ist dann äquivalent zur Standarddarstellung. Ist  $\mathcal{H}'$  mehrdimensional, so haben wir die Wahl, entweder von einer *Entartung des Vakuums* zu sprechen, oder weitere, bisher unentdeckte Freiheitsgrade anzunehmen. In Anwendungen heißt  $\sum_i A_i^* A_i$  der *Teilchenzahloperator*.

Antivertauschungsrelationen als Folge des Pauli-Prinzips gültig für Fermionen wurden zuerst von Jordan und Wigner untersucht. Es zeigte sich, daß mit beschränkten Operatoren, ja sogar mit Matrizen auf endlich-dimensionalen Hilberträumen zu ihrer Darstellung auskommt, solange die Zahl der Freiheitsgrade endlich ist. Konkret: Mit Hilfe der Matrizen

$$b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und der Definition

$$b_i = \epsilon \otimes \dots \otimes \epsilon \otimes b \otimes \mathbb{1} \otimes \dots \otimes \mathbb{1}$$

( $N$  Faktoren,  $b$  an der  $i$ -ten Stelle,  $i = 1, \dots, N$ ) bekommt man auf dem Hilbertraum

$$\mathbb{C}^{2N} = \mathbb{C}^2 \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^2$$

eine Darstellung der Antivertauschungsrelationen:

$$\begin{aligned} b_i b_k + b_k b_i &= 0 \\ b_i b_k^* + b_k^* b_i &= \delta_{ik} \\ b_i^* b_k^* + b_k^* b_i^* &= 0 \end{aligned}$$

Wir wollen sie die *Standarddarstellung* nennen.

Auch hier findet man eine Entsprechung für den vorigen Eindeutigkeitsatz, der im vorliegenden Fall jedoch sehr viel einfacher zu beweisen ist.

**Eindeutigkeitssatz.** Seien  $B_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) beschränkte Operatoren auf einem Hilbertraum  $\mathcal{H}$  mit den obigen (für  $b_i$ ) geltenden Relationen und sei  $\mathcal{H}'$  der Raum aller Vektoren  $f \in \mathcal{H}$  mit  $B_i f = 0$  ( $i = 1, \dots, N$ ). Dann ist  $\mathcal{H}'$  ein abgeschlossener Teilraum, und es existiert eine unitäre Transformation  $U: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}^{2^N} \otimes \mathcal{H}'$ , so daß  $UB_iU^{-1} = b_i \otimes \mathbb{1}$  gilt.

Der Satz erlaubt somit die Rückführung einer beliebigen Darstellung auf die Standarddarstellung. Eine Darstellung ist genau dann irreduzibel, wenn  $\mathcal{H}'$  eindimensional ist. In diesem Fall ist sie äquivalent zur Standarddarstellung. Man erkennt ferner, daß das Spektrum jedes Operator  $B_i^*B_i$  nur aus den Zahlen 0 und 1 besteht. Diese werden als Besetzungszahlen für den Freiheitsgrad (Zustand)  $i$  interpretiert und sind der mathematische Ausdruck des Pauli-Prinzips. Auch hier wird  $\sum_i B_i^*B_i$  der Teilchenzahloperator genannt. Sein Spektrum besteht aus den Zahlen  $0, \dots, N$ , wobei im irreduziblen Fall der Wert 0 das Vakuum (alle Zustände unbesetzt) und der Wert  $N$  das Antivakuum (alle Zustände sind besetzt) charakterisiert.

## 2 Methoden für Systeme mit unendlich vielen Freiheitsgraden

### 2.1 Die Fock-Cook-Darstellung

Die Darstellungen der kanonischen (Anti)vertauschungsrelationen für endlich viele Freiheitsgrade besitzen, wie wir sahen, drei wesentliche Eigenschaften:

1. Existenz eines selbstadjungierten Teilchenzahloperators mit ganzzahligem diskreten Spektrum.
2. Existenz mindestens eines Vakuumzustandes.
3. Eindeutigkeit (bis auf unitäre Äquivalenz) für die irreduzible Darstellung.

Alle diese Aussagen werden falsch, wollte man sie auf Systeme mit unendlich (d.h. abzählbar) vielen Freiheitsgraden übertragen. Dennoch gibt es auch hier so etwas wie eine Standarddarstellung, die einen Teilchenzahloperator und ein Vakuum besitzt und irreduzibel ist. Die Konstruktion, die wir zunächst im Bose-Fall beschreiben wollen, führt auf die sog. Fock-Cook-Darstellung.

Da die Darstellung einen Teilchenzahloperator  $N$  besitzen soll, dessen Spektrum aus den Zahlen  $0, 1, \dots$  besteht, können wir von einer Spektralzerlegung

$$N = \sum_{n=0}^{\infty} n E_n$$

ausgehen, wobei  $E_0$  auf die Vakuumzustände projiziert. Die mit  $E_n$  verknüpften Teilräume  $\mathcal{H}_n$  beschreiben – physikalisch gesprochen – Zustände mit  $n$  Teilchen. Da das Vakuum bis auf einen Phasenfaktor als eindeutig angenommen wird, setzen wir  $\mathcal{H}_0 = \mathbb{C}$ . Mit Blick auf die relativistische Feldtheorie wählen wir als  $\mathcal{H}_n$  den Raum  $L_s^2(\mathbb{R}^{3n})$  aller komplexen Funktionen  $\phi_n(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n)$ , die symmetrisch in den  $n$  Vektorvariablen  $\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^3$  sind und eine endliche Norm besitzen, deren Quadrat durch

$$\|\phi_n\|^2 = \int \frac{d^3 p_1}{2\omega_1} \cdots \int \frac{d^3 p_n}{2\omega_n} |\phi_n(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n)|^2$$

gegeben wird, wobei  $\omega_i = (m^2 + \mathbf{p}_i^2)^{1/2}$  zu setzen ist. Ein Vektor in dem Fock-Raum

$$\mathcal{H} = \mathbb{C} \oplus L^2(\mathbb{R}^3) \oplus L_s^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \oplus L_s^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \cdots$$

ist definitionsgemäß eine Folge  $\phi = (\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots)$  von  $n$ -Teilchenfunktionen  $\phi_n$ , deren Normquadrat

$$\|\phi\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|\phi_n\|^2$$

einen endlichen Wert annimmt. Natürlich ist  $\phi_0 \in \mathbb{C}$  und  $\|\phi_0\| = |\phi_0|$ . Wie immer stimmt die Zahl der Freiheitsgrade mit der Dimension des Einteilchenraumes  $\mathcal{H}_1$  überein: Diese ist hier abzählbar unendlich.

Auf dem von uns konstruierten Raum  $\mathcal{H}$  definieren wir nun die Projektoren  $E_n$  durch  $(E_n \phi)_{n'} = \delta_{nn'} \phi_n$  und finden so den Definitionsbereich des Operators  $N$ :

$$D(N) = \{\phi \in \mathcal{H} \mid \sum_n n^2 \|\phi_n\|^2 < \infty\}$$

Eine im folgenden benutzte Verallgemeinerung stellt

$$D(N^\alpha) = \{\phi \in \mathcal{H} \mid \sum_n n^{2\alpha} \|\phi_n\|^2 < \infty\} \quad (\alpha > 0)$$

dar.

Wenn wir auf dem Raum  $\mathcal{H}$  Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren konstruieren wollen, so erweist es sich als zweckmäßig, einen gemeinsamen dichten Definitionsbereich zu wählen. Als solcher bietet sich  $D(N^{1/2})$  an. Für jedes  $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^3)$  und jedes  $\phi \in D(N^{1/2})$  definieren wir:

$$\begin{aligned} (a(\varphi)\phi)_n(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) &= (n+1)^{1/2} \int \frac{d^3p}{2\omega} \overline{\varphi(\mathbf{p})} \phi_{n+1}(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) \\ (a^\dagger(\varphi)\phi)_n(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) &= n^{-1/2} \sum_{i=1}^n \varphi(\mathbf{p}) \phi_{n-1}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{i-1}, \mathbf{p}_{i+1}, \dots, \mathbf{p}_n) \end{aligned}$$

Wir erkennen sofort folgende Tatsachen:

- Die Operatoren  $a(\varphi)$  und  $a^\dagger(\varphi)$  sind *nicht abgeschlossen*, wohl aber abschließbar; denn es gilt

$$a^\dagger(\varphi) \subset a(\varphi)^*, \quad a(\varphi) \subset a^\dagger(\varphi)^*$$

also Folge von

$$(\phi, a(\varphi)\psi) = (a^\dagger(\varphi)\phi, \psi)$$

gültig für  $\phi, \psi \in D(N^{1/2})$ . Die adjungierten Operatoren sind dicht definiert und abgeschlossen.

- Die leicht zu beweisenden Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|a(\varphi)\phi\| &\leq \|\varphi\| \|N^{1/2}\phi\| \\ \|a^\dagger(\varphi)\phi\| &\leq \|\varphi\| \|(N + \mathbb{1})^{1/2}\phi\| \end{aligned}$$

zeigen, daß die Abbildungen  $\varphi \mapsto a(\varphi)$  und  $\varphi \mapsto a^\dagger(\varphi)$  ein gewisses Maß an Stetigkeit haben.

- Es gelten die Vertauschungsrelationen

$$\begin{aligned} a(\varphi)a(\varphi') &= a(\varphi')a(\varphi) \\ a(\varphi)a^\dagger(\varphi') &= a^\dagger(\varphi')a(\varphi) + (\varphi, \varphi')\mathbb{1} \\ a^\dagger(\varphi)a^\dagger(\varphi') &= a^\dagger(\varphi')a^\dagger(\varphi) \end{aligned}$$

mit dem Skalarprodukt

$$(\varphi, \varphi') = \int \frac{d^3p}{2\omega} \overline{\varphi(\mathbf{p})} \varphi'(\mathbf{p}).$$

- Die Abbildung  $\varphi \mapsto a^\dagger(\varphi)$  ist *linear*, die Abbildung  $\varphi \mapsto a(\varphi)$  hingegen *antilinear*. Man schreibt deshalb oft – in Anlehnung an die Theorie der Distributionen (Laurent Schwartz, Gelfand/Schilov) –

$$a(\varphi) = \int \frac{d^3p}{2\omega} \overline{\varphi(\mathbf{p})} a(\mathbf{p}) \quad a^\dagger(\varphi) = \int \frac{d^3p}{2\omega} \varphi(\mathbf{p}) a^\dagger(\mathbf{p}),$$

d.h. man interpretiert  $a(\mathbf{p})$  und  $a^\dagger(\mathbf{p})$  als operatorwertige Distributionen. Ähnliches gilt für die Darstellungen

$$N = \int \frac{d^3p}{2\omega} a^\dagger(\mathbf{p})a(\mathbf{p}), \quad H = \int \frac{d^3p}{2\omega} \omega a^\dagger(\mathbf{p})a(\mathbf{p})$$

$$\mathbf{P} = \int \frac{d^3p}{2\omega} \mathbf{p} a^\dagger(\mathbf{p})a(\mathbf{p})$$

der Operatoren der Teilchenzahl, der Energie und des Impulses: Sie sind formaler Natur und können nicht als gewöhnliche Integrale interpretiert werden.

- Der durch  $\Omega = (1, 0, 0, \dots) \in \mathcal{H}$  heißt das *Vakuum*. Außer der Eigenschaft  $a(\varphi)\Omega = 0$  besitzt dieser Vektor eine weitere wichtige Eigenschaft. Die von den Operatoren  $a^\dagger(\varphi)$  (alle  $\varphi$ ) gebildete abelsche Algebra  $\mathcal{A}$  aus unbeschränkten Operatoren mit dem gemeinsamen Definitionsbereich  $C^\infty(N)$  reicht aus, um ganz  $\mathcal{H}$  aus dem Vakuum zu erzeugen:

$$\mathcal{H} = (\mathcal{A}\Omega)^-$$

gleichdedeutend mit  $(\mathcal{A}\Omega)^- = \{0\}$ . Man sagt,  $\Omega$  sei *zyklisch* für die Algebra  $\mathcal{A}$ , und beweist diese Tatsache auf folgende Weise. Sei  $\phi$  ein

Vektor mit  $(\phi, A\Omega) = 0$  für alle  $A \in \mathcal{A}$ . Dann gibt es sicher ein  $n$  mit  $\phi \neq 0$ . Ist  $n = 0$ , so erhält man einen Widerspruch für  $A = \mathbb{1}$ . Ist  $n \geq 0$ , so wählt man

$$A = a^\dagger(\varphi_1) \cdots a^\dagger(\varphi_n)$$

und erhält aus  $(\phi, A\Omega) = 0$  die Aussage

$$\int \frac{d^3 p_1}{2\omega_1} \cdots \int \frac{d^3 p_n}{2\omega_n} \overline{\phi_n(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n)} \varphi_1(\mathbf{p}_1) \cdots \varphi_n(\mathbf{p}_n) = 0$$

für alle  $\varphi_i \in L^2(\mathbb{R}^3)$ , eine Relation, die sich nur für  $\phi_n = 0$  befriedigen läßt, was ein Widerspruch zur Annahme darstellt.

## 2.2 Das neutrale Skalarfeld

Die zweite Quantisierung stellt das freie neutrale Skalarfeld in der folgenden Weise dar:

$$A(x) = (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3 p}{2\omega} \left( a(\mathbf{p}) e^{-ipx} + a^\dagger(\mathbf{p}) e^{ipx} \right)$$

mit  $px = \omega t - \mathbf{p}\mathbf{x}$ . Natürlich ist auch dieses Integral formaler Natur, d.h. auch  $A(x)$  ist eine operator-wertige Distribution. Wohldefinierte Operatoren – obwohl unbeschränkt – erhält man erst durch “Integration” mit reellen Testfunktionen  $f(x)$ :

$$A(f) = \int d^4 x f(x) A(x) = a(\varphi) + a^\dagger(\varphi) \quad (22)$$

$$\varphi(\mathbf{p}) = (2\pi)^{-3/2} \int d^4 x f(x) e^{ipx} \quad (23)$$

Als klassisches Feld ist  $A(x)$  reell, als quantisiertes Feld ist  $A(f)$  ein symmetrischer Operator mit dem Definitionsbereich  $D(N^{1/2})$ , wenn  $\varphi$  quadratintegabel ist. Angenommen,  $A(f)$  besäße mehrere selbstadjungierte Erweiterungen. Dann wäre das Skalarfeld nicht eindeutig definiert und wir hätten ein großes Problem. Wir können jedoch zeigen, daß  $A(f)$  wesentlich selbstadjungiert ist,

$$A(f) \subset A(f)^{**} = A(f)^*,$$

und benötigen hierzu zwei vorbereitende Ergebnisse:

**Lemma 1.** Für jedes natürliche  $n$  und  $\phi \in C^\infty(N)$  gilt die Abschätzung

$$\|A(f)^n \phi\| \leq 2^n \sqrt{n!} \|\varphi\|^n \|(N + \mathbb{1})^{n/2} \phi\| \quad (24)$$

mit dem durch (23) definierten Zusammenhang zwischen  $f$  und  $\varphi$ .

Beweis. Wir zeigen die stärkere Aussage

$$\|A(f)^n \phi\| \leq 2^n \|\varphi\|^n \|\prod_{k=1}^n (N - k\mathbb{1})^{1/2} \phi\| \quad (25)$$

durch Induktion. Die Aussage (24) ist dann eine Folge der Ungleichung

$$(\varphi, \prod_{k=1}^n (N - k\mathbb{1})\varphi) \leq (\varphi, \prod_{k=1}^n (kN - k\mathbb{1})\varphi) = n!(\phi, (N - \mathbb{1})^n \phi)$$

Die Abschätzung (25) ist richtig für  $n = 1$ ; denn

$$\begin{aligned} \|A(f)\phi\| &\leq \|a(\varphi)\phi\| + \|a^\dagger(\varphi)\phi\| \\ &\leq \|\varphi\| \left( \|N^{1/2}\phi\| + \|(N + \mathbb{1})^{1/2}\phi\| \right) \\ &\leq 2\|\varphi\| \|(N + \mathbb{1})^{1/2}\phi\| \end{aligned}$$

Angenommen, (25) sei schon beliebiges  $n$  bewiesen. Indem wir Gebrauch machen von der Gleichung

$$F(N)(a(\varphi) + a^\dagger(\varphi)) = a(\varphi)F(N) + a^\dagger(\varphi)F(N + \mathbb{1})$$

– gültig für jede auf den ganzen Zahlen definierte Funktion  $F$  – erhalten wir unter Berücksichtigung von  $A(f)C^\infty(N) \subset C^\infty(N)$ :

$$\begin{aligned} \|A(f)^{n+1}\phi\| &\leq 2^n \|\varphi\|^n \|\prod_{k=1}^n (N - k\mathbb{1})^{1/2} A(f)\phi\| \\ &= 2^n \|\varphi\|^n \|a(\varphi) \prod_{k=0}^{n-1} (N - k\mathbb{1})^{1/2} + a^\dagger(\varphi) \prod_{k=2}^{n+1} (N - k\mathbb{1})^{1/2} \phi\| \\ &\leq 2^n \|\varphi\|^{n+1} \left( \|N^{1/2} \prod_{k=0}^{n-1} (N - k\mathbb{1})^{1/2} \phi\| \right. \\ &\quad \left. + \|(N + \mathbb{1})^{1/2} \prod_{k=2}^{n+1} (N - k\mathbb{1})^{1/2} \phi\| \right) \\ &\leq 2^{n+1} \|\varphi\|^{n+1} \|\prod_{k=1}^{n+1} (N - k\mathbb{1})^{1/2} \phi\| \end{aligned}$$

was zu beweisen war.

**Lemma 2.** Jeder analytische Vektor für  $N + \mathbb{1}$  mit dem Konvergenzradius  $r$  ist auch ein analytischer Vektor für  $A(f)$  mit einem Konvergenzradius

$$r' \leq \frac{\sqrt{r}}{2\|\varphi\|}.$$

Auch hier gilt der durch (23) definierte Zusammenhang zwischen  $f$  und  $\varphi$ .

Beweis. Sei  $\phi \in C^\infty(N)$  und die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \|(N + \mathbb{1})^n \phi\|$$

absolut konvergent für  $|z| < r$ . Sei  $\alpha \in \mathbb{C}$  mit  $0 < |\alpha| < 1$ . Für die beiden Folgen

$$\begin{aligned} a_n &= \alpha^n \\ b_n &= \frac{1}{\sqrt{n!}} \left( \frac{2z\|\varphi\|}{\alpha} \right)^n \|(N + \mathbb{1})^{n/2} \phi\| \end{aligned}$$

gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 &= \frac{1}{1 - |\alpha|^2} < \infty \\ \sum_{n=0}^{\infty} |b_n|^2 &= \|\phi\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{4|z|^2\|\varphi\|^2}{|\alpha|^2} \right)^n \|(N + \mathbb{1})^n \phi\| < \infty \end{aligned}$$

falls  $4|z|^2\|\varphi\|^2 < |\alpha|^2 r$ . Unter dieser Bedingung konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \|A(f)^n \phi\|$$

absolut; denn

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \|A(f)^n \phi\| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} (2z\|\varphi\|)^n \|(N + \mathbb{1})^{n/2} \phi\| \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |b_n| \leq \left( \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} |b_n|^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Da  $\alpha$  beliebig nahe bei 1 gewählt werden kann, folgt die Behauptung.

Insbesondere folgt aus diesem Lemma, daß  $D(N^{1/2})$  eine dichte Menge von Vektoren enthält, die analytisch für  $A(f)$  sind; denn der Operator  $N + \mathbb{1}$  ist selbstadjungiert und besitzt sicher eine dichte Menge von analytischen Vektoren (z.B. alle  $\phi \in \mathcal{H}$  mit  $\phi_n = 0$  für fast alle  $n$ ). Aufgrund des Kriteriums von Nelson ist  $A(f)$  wesentlich selbstadjungiert und damit seine selbstadjungierte Erweiterung eindeutig.

## 2.3 Tensoralgebra und symmetrische Algebra

Die Konstruktion des Fock-Raumes hat einige algebraische Aspekte, die wir nun beleuchten. Ausgehend von dem Einteilchenraum  $L^2(\mathbb{R}^3)$  und Vektoren  $\varphi_i$  darin formen wir das  $n$ -fache Tensorprodukt auf folgende Weise,

$$(\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n)(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) = \varphi_1(\mathbf{p}_1) \cdots \varphi_n(\mathbf{p}_n),$$

und fassen es als einen Vektor in  $L^2(\mathbb{R}^{3n})$  auf. Das Hilbert-Tensorprodukt von  $n$  Kopien des Einteilchenraumes enthält beliebige Summen solcher Produktvektoren und alle daraus gebildeten Cauchy-Folgen. Da man auf diese Weise alle  $n$ -Teilchen-Wellenfunktionen erhält, gilt

$$L^2(\mathbb{R}^{3n}) = L^2(\mathbb{R}^3)^{\otimes n} = L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \cdots \otimes L^2(\mathbb{R}^3) \quad (n \text{ Faktoren}).$$

Bose-Statistik wählt hiervon einen Unterraum:

$$L_s^2(\mathbb{R}^{3n}) = L^2(\mathbb{R}^3)^{\vee n} = L^2(\mathbb{R}^3) \vee \cdots \vee L^2(\mathbb{R}^3) \quad (n \text{ Faktoren}),$$

wobei das *symmetrische Produkt* auf die folgende Weise definiert wird:

$$\varphi_1 \vee \cdots \vee \varphi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\pi} \varphi_{\pi(1)} \otimes \cdots \otimes \varphi_{\pi(n)}.$$

Die Summe erstreckt sich über alle Permutationen  $\pi$  der Zahlen 1 bis  $n$ . Man errechnet leicht

$$(\varphi_1 \vee \cdots \vee \varphi_n, \varphi'_1 \vee \cdots \vee \varphi'_n) = \text{Perm}(\varphi_i, \varphi'_k),$$

wobei die sogenannte *Permanente* einer  $n \times n$ -Matrix analog zur Determinante gebildet wird:

$$\text{Perm}(\varphi_i, \varphi'_k) = \sum_{\pi} (\varphi_1, \varphi'_{\pi(1)}) \cdots (\varphi_n, \varphi'_{\pi(n)}).$$

Die Konstruktionen machen nicht Gebrauch von der Struktur des Einteilchenraumes  $\mathcal{H}$  als  $L^2(\mathbb{R}^3)$ . Unter der Hilbert-Tensoralgebra (kurz: Tensoralgebra) eines beliebigen Hilbertraumes  $\mathcal{H}$  verstehen wir die Vervollständigung der algebraischen direkten Summe aller Tensorprodukte:

$$T(\mathcal{H}) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}^{\otimes n}$$

mit der Vereinbarung  $\mathcal{H}^{\otimes 0} = \mathbb{C}$ . In analoger Weise definiert man die symmetrische Algebra (auch hier  $\mathcal{H}^{\vee 0} = \mathbb{C}$ ):

$$S(\mathcal{H}) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}^{\vee n}.$$

Ignoriert man die algebraische Struktur, so sind  $T(\mathcal{H})$  und  $S(\mathcal{H})$  immer noch Hilberträume, und  $S(\mathcal{H})$  ist gerade identisch mit dem *Fock-Raum über dem*

*Einteilchenraum*  $\mathcal{H}$  mit Bose-Statistik. Das Vakuum  $\Omega$  ist wie immer durch die Zahl  $1 \in \mathcal{H}^{\vee 0}$  repräsentiert.

Der Zusammenhang mit Erzeugungsoperatoren in  $S(\mathcal{H})$  wird durch

$$a^\dagger(\varphi_1) \cdots a^\dagger(\varphi_n) \Omega = \varphi_1 \vee \cdots \vee \varphi_n$$

hergestellt. Dies bedeutet eine Neudefinition von  $a^\dagger(\varphi)$  als Multiplikationsoperator:

$$a^\dagger(\varphi) \phi = \varphi \vee \phi, \quad \phi \in S(\mathcal{H}).$$

An dieser Stelle wird von der algebraischen Struktur von  $S(\mathcal{H})$  Gebrauch gemacht. Doch ist hier Vorsicht geboten: Wie wir bereits wissen, ist  $a^\dagger(\varphi)$  nur dicht definiert, etwa so:

$$a^\dagger(\varphi) \phi_n = \varphi \vee \phi_n, \quad \phi_n \in \mathcal{H}^{\vee n}.$$

Der Vernichtungsoperator  $a(\varphi)$  kann direkt durch

$$a(\varphi)(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) = \sum_{i=1}^n (\varphi, \varphi_i) \varphi_1 \wedge \cdots \hat{\varphi}_i \wedge \cdots \wedge \varphi_n$$

( $\hat{\phantom{x}}$  bedeutet Eliminierung) oder auch induktiv definiert werden:

$$\begin{aligned} a(\varphi)\Omega &= 0 \\ a(\varphi)(\varphi' \vee \phi_n) &= (\varphi, \varphi')\phi_n + \varphi' \vee a(\varphi)\phi_n \end{aligned}$$

Die Konstruktion des Hilbertraumes  $S(\mathcal{H})$  hat die charakteristische Eigenschaft

$$S(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2) \cong S(\mathcal{H}_1) \otimes S(\mathcal{H}_2),$$

d.h.  $S$  verwandelt eine direkte Summe stets in ein Tensorprodukt. Diese Relation wird relevant, wenn mehrere Teilchensorten beschrieben werden sollen (z.B. Teilchen + Antiteilchen). Grundlegend für diese Eigenschaft sind zwei Identifizierungen:

$$\begin{aligned} \Omega &= \Omega_1 \otimes \Omega_2 \\ a^\dagger(\varphi_1, \varphi_2) &= a^\dagger(\varphi_1) \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes a^\dagger(\varphi_2) \quad (\varphi_i \in \mathcal{H}_i). \end{aligned}$$

Hier beschreiben  $\Omega_i$  die Vakua in  $S(\mathcal{H}_i)$  und  $\Omega$  das gemeinsame Vakuum in  $S(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2)$ .

## 2.4 Die äußere Algebra

Zur Beschreibung von Fermionen benötigen wir einen anderen Teilraum der Tensoralgebra  $T(\mathcal{H})$ , nämlich den Raum

$$\bigwedge \mathcal{H} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}^{\wedge n}$$

der antisymmetrischen Tensoren, auch *äußere Algebra* genannt. Auch hier vereinbaren wir  $\mathcal{H}^{\wedge 0} = \mathbb{C}$ . Das *antisymmetrische Produkt* auf wird durch

$$\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\pi} \text{sgn}(\pi) \varphi_{\pi(1)} \otimes \cdots \otimes \varphi_{\pi(n)}$$

definiert und erzeugt Produktvektoren in  $\mathcal{H}^{\wedge n}$ . Auch hier erstreckt sich die Summe über alle Permutationen  $\pi$  der Zahlen 1 bis  $n$ . Das Signum  $\text{sgn}(\pi)$  der Permutation sorgt für die Antisymmetrie der linken Seite. Man errechnet leicht

$$(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n, \varphi'_1 \wedge \cdots \wedge \varphi'_n) = \text{Det}(\varphi_i, \varphi'_k),$$

wobei die Determinante wie üblich gebildet wird:

$$\text{Det}(\varphi_i, \varphi'_k) = \sum_{\pi} \text{sgn}(\pi) (\varphi_1, \varphi'_{\pi(1)}) \cdots (\varphi_n, \varphi'_{\pi(n)}).$$

Der so konstruierte Raum  $\bigwedge \mathcal{H}$  ist identisch mit dem *Fock-Raum über dem Einteilchenraum*  $\mathcal{H}$  mit Fermi-Statistik. Das Vakuum  $\Omega$  ist auch hier durch die Zahl  $1 \in \mathcal{H}^{\wedge 0}$  repräsentiert.

Der Zusammenhang mit Erzeugungsoperatoren in  $\bigwedge \mathcal{H}$  wird durch

$$b^\dagger(\varphi_1) \cdots b^\dagger(\varphi_n) \Omega = \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$$

hergestellt. Dies bedeutet eine Charakterisierung von  $b^\dagger(\varphi)$  als Multiplikationsoperator:

$$b^\dagger(\varphi) \phi = \varphi \wedge \phi, \quad \phi \in \bigwedge \mathcal{H}.$$

An dieser Stelle wird von der algebraischen Struktur von  $\bigwedge \mathcal{H}$  Gebrauch gemacht. Im Gegensatz zur Bose-Situation handelt es sich hier um einen beschränkten Operator. Man sieht dies auf folgende Weise ein. Sei  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine Basis in  $\mathcal{H}$ , so bilden die Vektoren

$$e_I = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

eine Basis in  $\bigwedge \mathcal{H}$  (für gegebenes  $n$  eine Basis in  $\mathcal{H}^{\wedge n}$ ). Hier bezeichnet  $I$  eine beliebige endliche Teilmenge der natürlichen Zahlen, die wir nach Ordnung so darstellen können:

$$I = (i_1, i_2, \dots, i_n), \quad i_1 < i_2 < \dots < i_n.$$

Für die leere Menge  $I = \emptyset$  setzt man  $e_\emptyset = \Omega$ . Jedes  $\varphi \in \mathcal{H}$  kann nach  $I$  und dessen Komplement  $I'$  (in  $\mathbb{N}$ ) zerlegt werden:

$$\varphi = \sum_{i \in I} c_i e_i + \varphi', \quad \varphi' = \sum_{i \in I'} c_i e_i.$$

Es gilt offenbar  $a^\dagger(\varphi)e_I = a^\dagger(\varphi')e_I$  und somit

$$\|a^\dagger(\varphi)e_I\|^2 = (\varphi' \wedge e_I, \varphi' \wedge e_I) = \text{Det diag}(\|\varphi'\|^2, 1, \dots, 1) = \|\varphi'\|^2.$$

Da  $a^\dagger(\varphi)$  auf den Basisvektoren gleichmäßig durch  $\|\varphi\|^2$  beschränkt ist, handelt es sich um einen überall definierten beschränkten Operator.

Gleiches gilt für den Vernichtungsoperator  $a(\varphi)$ , den wir als den adjungierten Operator zu  $a^\dagger(\varphi)$  einführen können. Der Vernichtungsoperator  $b(\varphi)$  kann aber auch direkt durch

$$b(\varphi)(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} (\varphi, \varphi_i) \varphi_1 \wedge \dots \wedge \hat{\varphi}_i \wedge \dots \wedge \varphi_n$$

( $\hat{\phantom{x}}$  bedeutet Eliminierung) oder auch induktiv definiert werden:

$$\begin{aligned} b(\varphi)\Omega &= 0 \\ b(\varphi)(\varphi' \wedge \phi_n) &= (\varphi, \varphi')\phi_n - \varphi' \wedge b(\varphi)\phi_n \end{aligned}$$

Die Konstruktion des Hilbertraumes  $\bigwedge \mathcal{H}$  für Fermionen hat ebenfalls die charakteristische Eigenschaft

$$\bigwedge (\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2) \cong \bigwedge \mathcal{H}_1 \hat{\otimes} \bigwedge \mathcal{H}_2, \quad (26)$$

d.h.  $\bigwedge$  verwandelt eine direkte Summe stets in ein Tensorprodukt. Mit  $\hat{\otimes}$  wird das *schiefe* Tensorprodukt zweier graduierter Algebren bezeichnet, das durch die geänderte Produktvorschrift

$$(\phi_1 \otimes \phi_2)(\phi'_1 \otimes \phi'_2) = (-1)^{nn'} \phi_1 \phi'_1 \otimes \phi_2 \phi'_2, \quad \phi_2 \in \mathcal{H}_2^{\wedge n}, \phi'_1 \in \mathcal{H}_1^{\wedge n'}$$

charakterisiert ist. Die Isomorphie (26) wird relevant, wenn mehrere Teilchensorten beschrieben werden sollen (z.B. Teilchen + Antiteilchen). Grundlegend für diese Eigenschaft sind zwei Identifizierungen:

$$\begin{aligned} \Omega &= \Omega_1 \otimes \Omega_2 \\ b^\dagger(\varphi_1, \varphi_2) &= b^\dagger(\varphi_1) \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes b^\dagger(\varphi_2) \quad (\varphi_i \in \mathcal{H}_i). \end{aligned}$$

Hier beschreiben  $\Omega_i$  die Vakua in  $\bigwedge \mathcal{H}_i$  und  $\Omega$  das gemeinsame Vakuum in  $\bigwedge(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2)$ .

Sobald der Raum  $\mathcal{H}$  eine endliche Dimension – sagen wir  $n$  – hat, ist auch die darüber konstruierte äußere Algebra endlich-dimensional. Es gilt

$$\text{Dim} \bigwedge \mathcal{H} = 2^n .$$

Denn  $\text{Dim} \mathcal{H}^{\wedge k} = \binom{n}{k}$ . Insbesondere  $\mathcal{H}^{\wedge k} = \{0\}$  für  $k > n$ .

## 2.5 Weyl-Systeme

Erfahrungen mit wechselwirkenden Systemen, die unendlich viele Freiheitsgrade haben, zeigen, daß man die Betrachtung nicht auf die Fock-Cook-Darstellung beschränken kann. Die Zeitevolution bringt i.allg. eine Vielzahl von nichtäquivalenten Darstellungen der kanonischen (Anti-)Vertauschungsrelationen ins Spiel. Das gilt sowohl für die statistische Mechanik als auch für die Quantenfeldtheorie. Viele physikalische Phänomene, unter ihnen die Bosekondensation, die Supraleitung, die Infrarotstrahlung beschleunigter Ladungen und der Higgs-Mechanismus, verdanken ihre befriedigende mathematische Beschreibung der Kenntnis spezieller Darstellungen der (Anti-)Vertauschungsrelationen.

Wir konzentrieren uns auf den Bose-Fall. Der Nutzen und die Anwendung von inäquivalenten Darstellungen läßt sich erst dann sinnvoll diskutieren, wenn wir

1. nicht die Existenz eines Teilchenzahloperators fordern,
2. keine a-priori-Voraussetzungen über den Definitionsbereich der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren machen und
3. nicht verlangen, daß die Darstellung irreduzibel ist.

Es genügt sicher, den Operator

$$A(\varphi) = a(\varphi) + a^\dagger(\varphi)$$

zu studieren, da wir  $a$  und  $a^\dagger$  daraus zurückgewinnen können:

$$a(\varphi) = \frac{1}{2}(A(\varphi) + iA(i\varphi)), \quad a^\dagger(\varphi) = \frac{1}{2}(A(\varphi) - iA(i\varphi)).$$

Wir nehmen an, daß der Operator  $A(\varphi)$  wesentlich selbstadjungiert ist. Beachte: Die Abbildung  $\varphi \mapsto A(\varphi)$  ist lediglich reell-linear. Der Abschluß  $A(\varphi)^- = A(\varphi)^{**}$  ist dann selbstadjungiert und erzeugendes Element einer

einparametrischen stark stetigen unitären Gruppe (siehe den Satz von von Stone und v. Neumann):

$$W(t\varphi) = \exp(itA(\varphi)^-) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Ohne Verlust an Information können wir den Parameter  $t$  in dem Vektor  $\varphi$  absorbieren. Man nennt die Gesamtheit aller  $W(\varphi)$  mit  $\varphi \in \mathcal{H}$  die *Weyl-Operatoren*<sup>1</sup>. Aus der Vertauschungsrelation

$$[A(\varphi), A(\varphi')]\phi = 2i \operatorname{Im}(\varphi, \varphi')\phi,$$

gültig auf einer dichten Menge von Vektoren  $\phi$ , gewinnt man die entsprechende Relation für die Weyl-Operatoren:

$$W(\varphi)W(\varphi') = e^{-i \operatorname{Im}(\varphi, \varphi')}W(\varphi + \varphi') \quad (27)$$

(eine Folge der Cambell-Hausdorff-Formel).

**Definition.** Sei  $L$  ein fest gewählter dichter Teilraum von Einteilchen-Wellenfunktionen. Ein *Weyl-System*  $(\mathcal{H}, W)$  besteht aus unitären Operatoren  $W(\varphi)$  ( $\varphi \in L$ ) auf einem Hilbertraum  $\mathcal{H}$ , so daß  $t \mapsto W(t\varphi)$  stark stetig und die Weyl-Relation (27) erfüllt sind. Zwei Weyl-Systeme  $(\mathcal{H}, W)$  und  $(\mathcal{H}', W')$  heißen *äquivalent*, wenn  $UW(\varphi) = W'(\varphi)U$  für eine unitäre Abbildung  $U: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$  gilt.

Aus der Definition folgt  $W(0)W(0) = W(0)$ , also  $W(0) = \mathbb{1}$ , sodann

$$W(\varphi)W(-\varphi) = W(0) = \mathbb{1} \quad \text{also} \quad W(\varphi)^* = W(-\varphi)$$

Die Frage entsteht, wie man auf einfache Weise die Fock-Cook-Darstellung charakterisieren kann. Wir erinnern daran, daß das Vakuum ein zyklischer Vektor für die durch  $a^\dagger(\varphi)$  erzeugte Algebra ist. Das gilt erst recht für die größere Algebra der Operatoren  $A(\varphi)$  und somit auch für die Weyl-Algebra (die von den Weyl-Operatoren  $W(\varphi)$  erzeugte Algebra). Die Weyl-Relationen (27) sagen uns, daß das allgemeinste Element der Weyl-Algebra aus Linearkombinationen  $\sum_k c_k W(\varphi_k)$  ( $c_k \in \mathbb{C}$ ) besteht. Also sind die Vektoren der Form

$$\phi = \sum_{j=1}^n c_j W(\varphi_j)\Omega$$

dicht im Fock-Raum  $\mathcal{H}$ . Behauptung:

*Das Funktional  $(\Omega, W(\varphi)\Omega) = \exp(-\frac{1}{2}\|\varphi\|^2)$  gibt bereits eine vollständige Charakterisierung der Fock-Cook-Darstellung.*

---

<sup>1</sup>Nach Hermann Weyl, der sie zuerst betrachtete

Neben den obigen Vektor  $\phi$  betrachten wir einen weiteren Vektor der gleichen Art:

$$\phi' = \sum_{k=1}^{n'} c'_k W(\varphi'_k) \Omega.$$

Für das Skalarprodukt gilt unter Ausnutzung der Weyl-Relationen:

$$(\phi, \phi') = \sum_{j,k} \bar{c}_j c'_k (\Omega, W(-\varphi_j) W(\varphi_k) \Omega) = \sum_{j,k} \bar{c}_j c'_k e^{i \operatorname{Im}(\varphi_j, \varphi'_k)} E(\varphi'_k - \varphi_j)$$

Da alle Skalarprodukte bestimmt sind und die Wirkung der Operatoren  $W(\varphi)$  ebenfalls, ist die Behauptung bewiesen, wenn wir die explizite Form des Funktionals  $E(\varphi)$  kennen. Durch Induktion beweist man zuerst

$$(\Omega, A(\varphi)^n \Omega) = \begin{cases} 0 & n \text{ ungerade} \\ \frac{n!}{2^m m!} \|\varphi\|^n & n = 2m \text{ gerade} \end{cases}$$

und findet so den zweiten Teil der Behauptung bestätigt:

$$E(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (\Omega, A(\varphi)^n \Omega) = \exp(-\frac{1}{2} \|\varphi\|^2).$$

## 2.6 Der moderne Begriff des Zustandes

Wir sind gewohnt, den Zustand eines quantenmechanischen Systems als einen *Vektor* in einem Hilbertraum aufzufassen, nehmen dabei aber zwei Nachteile in Kauf: (1) Alle Vielfache eines Vektors  $\phi$  bestimmen den gleichen Zustand, (2) bei einer unitären Abbildung des Raumes  $\mathcal{H}$  auf einen Raum  $\mathcal{H}'$ , bei der der Vektor  $\phi$  in den Vektor  $\phi'$  übergeht, kann  $\phi'$  ebensogut zur Beschreibung des gemeinten Zustandes herangezogen werden, d.h. wir treffen auf die physikalisch bedeutungslose Vielfalt von möglichen Realisierungen ein und desselben Zustandes.

Der moderne Begriff des Zustandes vermeidet die unnötige Komplikation und betrachtet den Zustand als ein *Funktional*. Dieses ist eindeutig und in allen Realisierungen gleichlautend. Die neue Auffassung findet man nicht nur in der Quantenfeldtheorie. Sie hat inzwischen alle Bereiche der Physik erfasst, beginnend mit der klassischen Mechanik.

Sei  $(\mathcal{H}, W)$  ein Weyl-System und  $\phi$  ein normierter Vektor in  $\mathcal{H}$ . Dann hat das Funktional  $E(\varphi) = (\phi, W(\varphi)\phi)$  stets folgende Eigenschaften:

- $E(0) = \mathbb{1}$  (Normierung)
- $\sum_{j,k}^n \bar{c}_j c_k e^{i \operatorname{Im}(\varphi_j, \varphi_k)} E(\varphi_k - \varphi_j) \geq 0$  (Positivität)

- $E(\varphi + t\varphi') \rightarrow E(\varphi)$  wenn  $t \rightarrow 0$  (Stetigkeit)

**Definition.** Ein Funktional  $E$  heißt *Zustand*, wenn die obigen drei Eigenschaften erfüllt sind. Der Zustand heißt *kohärent*, wenn er die Form

$$E(\varphi) = \exp\left(-\frac{1}{2}\|\varphi\|^2 + iF(\varphi)\right)$$

hat, wobei  $F(\varphi)$  ein reell-lineares und reell-wertiges Funktional ist.

Beispiele für kohärente Zustände liefert schon das Fock-System:

$$(\phi, W(\varphi)\phi) = \exp\left(-\frac{1}{2}\|\varphi\|^2 + 2i\text{Im}(\psi, \varphi)\right)$$

mit

$$\phi = W(\psi)\Omega = e^{-\frac{1}{2}\|\psi\|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} a^\dagger(\psi)^n \Omega$$

Der Begriff *kohärenter Zustand* ist der Quantentheorie der elektromagnetischen Strahlung entlehnt, in der diese Zustände eine bedeutende Rolle spielen.

Die Teilchenzahl  $N$  der Fock-Darstellung ist der erzeugende Operator einer  $U(1)$ -Gruppe mit den charakterisierenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} e^{i\alpha N} W(\varphi) &= W(e^{i\alpha}\varphi) e^{i\alpha N} \\ e^{i\alpha N} \Omega &= \Omega. \end{aligned}$$

Auf den kohärenten Zuständen des Fock-Raumes bestätigt man die erwartete Wirkung:

$$e^{i\alpha N} W(\psi)\Omega = e^{-\frac{1}{2}\|\psi\|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{in\alpha}}{\sqrt{n!}} a^\dagger(\psi)^n \Omega.$$

In diesen Zuständen fluktuiert die Teilchenzahl gemäß einer Wahrscheinlichkeitsverteilung  $P(n)$ , deren charakteristische Funktion wir auf die folgende Weise berechnen:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} P(n) e^{in\alpha} &= (W(\varphi)\Omega, W(e^{i\alpha}\varphi)\Omega) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}\|(e^{i\alpha}-1)\varphi\|^2 + 2\text{Im}(\varphi, e^{i\alpha}\varphi)\right) \\ &= \exp\left(\|\varphi\|^2(e^{i\alpha}-1)\right). \end{aligned}$$

Man erhält so die Poisson-Verteilung

$$P(n) = e^{-a} \frac{a^n}{n!}, \quad a = \|\varphi\|^2$$

wobei  $a = \sum nP(n)$  die mittlere Teilchenzahl beschreibt. Wir sehen, daß die Existenz einer mittleren Teilchenzahl an die Bedingung  $\|\varphi\| < \infty$  gebunden ist. Es gibt kohärente Zustände (außerhalb des Fock-Raumes), die dieser Bedingung nicht genügen.

Aus gegebenen Zuständen lassen sich leicht neue Zustände konstruieren. Denn mit  $E_1$  und  $E_2$  ist auch  $E = pE_1 + (1-p)E_2$  für jedes  $p \in [0, 1]$  ein Zustand, nämlich ein statistisches Gemisch oder gemischter Zustand. Die Gewichte  $p$  und  $1-p$  erhalten die Bedeutung von Wahrscheinlichkeiten. Aufgrund dieser Möglichkeit, Zustände zu mischen, bildet die Gesamtheit der Zustände eine *konvexe Menge*  $\mathcal{E}$ . Die Extrempunkte von  $\mathcal{E}$  heißen *reine Zustände*. Es sind genau diejenigen Zustände  $E \in \mathcal{E}$ , die keine Zerlegung der Form  $E = pE_1 + (1-p)E_2$  mit  $0 < p < 1$  gestatten. Man stelle sich  $\mathcal{E}$  als einen Simplex in großen Dimensionen vor. Die Anschauung lehrt, daß die Zerlegung eines nicht-reinen Zustandes  $E$  in reine Zustände obwohl lösbar, jedoch nicht immer eindeutig lösbar ist<sup>2</sup>.

Der Vorteil des modernen Zustandsbegriffes liegt u.a. darin, daß eine Folge von Funktionalen

$$E_n(\varphi) = (\phi_n, W(\varphi)\phi_n)$$

eventuell gegen ein Grenzfunktional  $E$  konvergiert und  $E$  einen Zustand beschreibt, *obwohl die Vektoren  $\phi_n$  im Fockraum nicht konvergieren*. Für diese Phänomene gibt es viele physikalische Beispiele. Ein solches Beispiel wollen wir im nächsten Kapitel betrachten.

## 2.7 Die Bose-Einstein-Kondensation

Wenn wir die Teilchenzahl in einem unendlich ausgedehnten System vorschreiben, so hat die Energie ein rein kontinuierliches Spektrum. Wir finden dann zwar Zustände beliebig kleiner Energie, aber keinen Grundzustand. Die Sache wird anders, wenn wir die Dichte der Teilchen vorschreiben.

Wir studieren das relativistische Bose-Gas und gehen aus von den Wellenfunktionen  $\varphi$  einzelner Teilchen, betrachten die zugehörigen Ortraumfunktionen

$$\hat{\varphi}(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2\omega}} \varphi(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}}$$

( $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ ), so daß

$$(\varphi, \varphi') = \int \frac{d^3p}{2\omega} \overline{\varphi(\mathbf{p})} \varphi'(\mathbf{p}) = \int d^3x \overline{\hat{\varphi}(\mathbf{x})} \hat{\varphi}'(\mathbf{x}).$$

---

<sup>2</sup>Man mache sich diese Tatsache am Beispiel des Spinzustandes klar, wenn dieser ein unpolarisiertes Elektron beschreibt.

Für ein Teilchen, das in einem beschränkten Gebiet  $B$  des Ortraumes lokalisiert ist, existiert ein Zustand minimaler Energie:

$$\hat{\phi}_B(\mathbf{x}) = \begin{cases} |B|^{-1/2} & \mathbf{x} \in B \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

( $|B|$ =Volumen von  $B$ ). Sind  $n$  Bose-Teilchen in dem Bereich  $B$  lokalisiert, so kann der Grundzustand durch den normierten Vektor

$$\phi_B = \frac{1}{\sqrt{n!}} a^\dagger(\varphi_B)^n \Omega$$

im Fock-Raum beschrieben werden.

Unsere Aufgabe besteht nun darin,  $B$  gegen  $\mathbb{R}^3$  und gleichzeitig  $n$  gegen  $\infty$  streben zu lassen, so daß die Dichte  $\rho = n/|B|$  konstant gehalten wird. Zu diesem Zweck fixieren wir  $\rho > 0$ , definieren  $n = \lfloor \rho|B| \rfloor$  als die größte ganze Zahl kleiner als  $\rho|B|$  und berücksichtigen dies bei der Definition von  $\phi_B$ . Vom mathematischen Standpunkt bilden die Borel-Mengen  $B \in \mathbb{R}^3$  eine *gerichtete Menge* von Mengen und die  $\phi_B$  ein *Netz* von normierten Vektoren im Fock-Raum, dessen Konvergenz man studieren kann.

Sind  $B$  und  $B'$  zwei Borel-Mengen mit  $\lfloor \rho|B| \rfloor \neq \lfloor \rho|B'| \rfloor$ , so gilt

$$(\phi_B, \phi_{B'}) = 0 \quad \text{und daher} \quad \|\phi_B - \phi_{B'}\|^2 = 2,$$

so daß *die Vektoren  $\phi_B$  nicht konvergieren*. Auch der Begriff der *schwachen Konvergenz* hilft hier nicht: Die Vektoren  $\phi_B$  konvergieren schwach gegen Null. Man sieht dies so ein: Für einen beliebigen Vektor  $\psi$  im Fockraum mit Komponenten  $\psi_n$  ( $n$ =Teilchenzahl) gilt  $\|\psi_n\| \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  und deshalb

$$|(\psi, \phi_B)| \leq \|\psi_n\| \rightarrow 0.$$

In einer anderen Formulierung:

*Im thermodynamischen Limes  $B \rightarrow \mathbb{R}^3$  wird der Vektor  $\phi_B$  des Grundzustandes orthogonal zu jedem Vektor des Fock-Raumes.*

Dessen ungeachtet werden wir nun zeigen, daß das Netz der Funktionale

$$E_B = (\phi_B, W(\varphi)\phi_B)$$

einem Grenzfunktional zustrebt. Dabei machen wir Gebrauch von den Laguerreschen Polynomen

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} \binom{n}{k} (-x)^k$$

und der Bessel-Funktion 0-ter Ordnung  $J_0(x)$ .

**Theorem.** Es gilt die Darstellung

$$E_B(\varphi) = \frac{1}{n!} L_n(|(\varphi, \varphi_B)|^2) \exp(-\frac{1}{2}\|\varphi\|^2)$$

und es existiert der thermodynamische Limes

$$E(\varphi) = \lim_{B \rightarrow \mathbb{R}^3} E_B(\varphi) = J_0\left(2\rho^{1/2} \left| \int d^3x \hat{\varphi}(\mathbf{x}) \right| \right) \exp(-\frac{1}{2}\|\varphi\|^2)$$

für alle  $\varphi$ , so daß  $\hat{\varphi} \in L^2 \cap L^1$ .

**Beweis.** Die Campbell-Hausdorff-Formel führt zu

$$W(\varphi)\phi = e^{-\frac{1}{2}\|\varphi\|^2} e^{ia^\dagger(\varphi)} e^{ia(\varphi)} \phi \quad (28)$$

für  $\phi \in C^\infty(N)$ . Aus

$$a(\varphi)^n a^\dagger(\psi) = a^\dagger(\psi) a(\varphi)^n + (\varphi, \psi) n a(\varphi)^{n-1}$$

folgt

$$e^{ia(\varphi)} a^\dagger(\psi) = (a^\dagger(\psi) + i(\varphi, \psi)) e^{ia(\varphi)}$$

und somit durch Induktion

$$e^{ia(\varphi)} a^\dagger(\psi)^n = (a^\dagger(\psi) + i(\varphi, \psi))^n e^{ia(\varphi)}.$$

Wegen  $\varphi_B \in C^\infty(N)$  können wir bedenkenlos die Zerlegung (28) in der folgenden Rechnung verwenden:

$$\begin{aligned} E_B(\varphi) &= e^{-\frac{1}{2}\|\varphi\|^2} \frac{1}{n!} \left( e^{-ia(\varphi)} a^\dagger(\varphi_B)^n \Omega, e^{ia(\varphi)} a^\dagger(\varphi_B)^n \Omega \right) \\ &= e^{-\frac{1}{2}\|\varphi\|^2} \frac{1}{n!} \left( (a^\dagger(\varphi_B) - i(\varphi, \varphi_B))^n \Omega, (a^\dagger(\varphi_B) + i(\varphi, \varphi_B))^n \Omega \right) \\ &= e^{-\frac{1}{2}\|\varphi\|^2} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \left( -|\varphi, \varphi_B|^2 \right)^k \left( a^\dagger(\varphi_B)^{n-k} \Omega, a^\dagger(\varphi_B)^{n-k} \Omega \right) \\ &= e^{-\frac{1}{2}\|\varphi\|^2} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \binom{n}{k} \left( -|\varphi, \varphi_B|^2 \right)^k \end{aligned}$$

Damit folgt der erste Teil der Behauptung. Um die Konvergenz zu zeigen, beachten wir zunächst, daß das Netz der Zahlen

$$c_B = n |(\varphi, \varphi_B)|^2 = \frac{\lfloor \rho |B| \rfloor}{|B|} \left| \int_B d^3x \hat{\varphi}(\mathbf{x}) \right|^2$$

für  $\hat{\varphi} \in L^1$  konvergiert und den Grenzwert

$$c = \rho \left| \int d^3x \hat{\varphi}(\mathbf{x}) \right|^2$$

besitzt. Darüberhinaus sind die positiven Zahlen  $c_B$  nach oben durch

$$Q = \rho \left( \int d^3x |\hat{\varphi}(\mathbf{x})| \right)^2$$

beschränkt. Wir erhalten so die Abschätzung

$$|c_B^k - c^k| = \left| (c_B - c) \sum_{i=1}^k c_B^{i-1} c^{k-i} \right| \leq kQ^{k-1} |c_B - c| \quad (k \geq 1).$$

Sodann gilt für  $n \geq 1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!} L_n \left( \frac{x}{n} \right) &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(-x)^k}{k!^2} \prod_{i=0}^{k-1} \left( 1 - \frac{i}{n} \right) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!^2} \prod_{i=0}^{k-1} \left( 1 - \frac{i}{n} \right) \end{aligned}$$

Wir benötigen die Bessel-Funktionen

$$J_0(2x^{1/2}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!^2}, \quad I_n(2x^{1/2}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{k-n}}{k!(k+n)!} \quad (x \geq 0)$$

und die Abschätzung

$$1 - \prod_{i=0}^{k-1} \left( 1 - \frac{i}{n} \right) \leq \frac{(k-1)k}{2n} \quad (k \geq 1, n \geq 1).$$

Dann folgt für  $n \geq 1$

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n!} L_n \left( \frac{c_B}{n} \right) - J_0(2c^{1/2}) \right| &\leq \left| \frac{1}{n!} L_n \left( \frac{c_B}{n} \right) - L_n \left( \frac{c}{n} \right) \right| + \left| \frac{1}{n!} L_n \left( \frac{c}{n} \right) - J_0(2c^{1/2}) \right| \\ &\leq |c_B - c| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kQ^{k-1}}{k!^2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{c^k}{k!^2} \frac{(k-1)k}{2n} \\ &\leq |c_B - c| Q^{-1} I_1(2Q^{1/2}) + (2n)^{-1} I_2(2c^{1/2}). \end{aligned}$$

Setzen wir  $n = \lfloor \rho |B| \rfloor$ , so folgt unmittelbar der zweite Teil der Behauptung, und das Theorem ist bewiesen.

Man stellt sofort fest, daß der Grundzustand, das Funktional  $E(\varphi)$  also, eine Reihe bemerkenswerter Symmetrien mit dem Vakuum-Funktional teilt:

$$\begin{aligned}
\text{Eichinvarianz:} \quad & E(e^{i\alpha\varphi}) = E(\varphi) \quad 0 \leq \alpha < 2\pi \\
\text{Translationsinvarianz:} \quad & E((\mathbf{x})\varphi) = E(\varphi) \quad \widehat{(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x}')} = \hat{\varphi}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \\
\text{Rotationsinvarianz:} \quad & E(R\varphi) = E(\varphi) \quad \widehat{R\varphi(\mathbf{x})} = \hat{\varphi}(R^{-1}\mathbf{x}), \quad R \in \text{SO}(3) \\
\text{Spiegungssymmetrie:} \quad & E(P\varphi) = E(\varphi) \quad \widehat{P\varphi(\mathbf{x})} = \hat{\varphi}(-\mathbf{x})
\end{aligned}$$

Physikalisch gesehen beschreibt  $E$  den Zustand des Bose-Einstein-Kondensats: alle Teilchen haben sich im Impuls-Null-Zustand versammelt. Einzelne Teilchen daraus lassen sich sicher anregen und im Fock-Raum beschreiben. Wir konstruieren nun das Weyl-System  $(\mathcal{H}, E)$  des Bose-Gases und zeigen die Beziehung zum Fock-System  $(\mathcal{H}_{\text{Fock}}, W_{\text{Fock}})$  und seinem Vakuum  $\Omega_{\text{Fock}} \in \mathcal{H}_{\text{Fock}}$  mit

$$(\Omega_{\text{Fock}}, W_{\text{Fock}}(\varphi), \Omega_{\text{Fock}}) = \exp(-\frac{1}{2}\|\varphi\|^2).$$

Dazu definieren wir  $L^2(G)$  als den Hilbertraum über der Eichgruppe  $G$ , d.h. als den Raum aller Funktionen  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha |f(\alpha)|^2 < \infty.$$

Auf  $L^2(G)$  führen wir sodann den unitären Operator  $U(\varphi)$  durch

$$(U(\varphi)f)(\alpha) = f(\alpha) \exp(2i\rho^{1/2} \text{Im}(\int d^3x \hat{\varphi}(\mathbf{x})))$$

ein. Setzen wir nun

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \mathcal{H}_{\text{Fock}} \otimes L^2(G) \\
W(\varphi) &= W_{\text{Fock}}(\varphi) \otimes U(\varphi) \\
\Omega &= \Omega_{\text{Fock}} \otimes 1
\end{aligned}$$

(mit 1 bezeichnen wir die konstante Funktion 1 in  $L^2(G)$ ), so ist  $(\mathcal{H}, W)$  ein Weyl-System mit der gewünschten Eigenschaft

$$(\Omega, W(\varphi)\Omega) = (\Omega_{\text{Fock}}, W_{\text{Fock}}(\varphi)\Omega_{\text{Fock}}) (1, U(\varphi)1) = E(\varphi).$$

Das Bose-System spaltet also auf in einen Fock-Anteil und ein Kondensat, wobei die Zustände des Kondensats durch den Raum  $L^2(G)$  beschrieben werden. Für den Fock-Anteil allein existiert ein Teilchenzahloperator. Er zählt die Teilchen, die sich nicht in der kondensierten Phase befinden.

Man hat die kondensierte Phase eines Bose-Gases oft auch den *fünften* Aggregatzustand genannt und die Bose-Kondensation für das Phänomen der

Superfluidität in  $\text{He}^4$  verantwortlich gemacht. Darüberhinaus ist es in letzter Zeit gelungen, verdünnte Gase aus Alkali-Atomen so weit abzukühlen, daß ein Bose-Kondensat entstand. Hierfür wurde 2001 der Nobelpreis für Physik vergeben.

Schließlich geben wir noch den Ausdruck für den Feldoperator  $A(\varphi)$  an, der der oben beschriebenen Darstellung der Weyl-Operatoren entspricht:

$$A(\varphi) = A_{\text{Fock}}(\varphi) \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes V(\varphi).$$

Hierin bezeichnet  $V(\varphi)$  den Operator

$$V(\varphi) = -i \frac{d}{dt} U(it\varphi)_{t=0}$$

auf  $L^2(G)$ . Also

$$V(\varphi)f(\alpha) = 2\rho^{1/2} \text{Im} \left( e^{i\alpha} \int d^3x \hat{\varphi}(\mathbf{x}) \right) f(\alpha) \quad (f \in L^2(G)).$$

Hieraus folgt eine Darstellung für das relativistische neutrale Skalarfeld:

$$A(x) = A_{\text{Fock}}(x) \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes S, \quad Sf(\alpha) = (2\rho/m)^{1/2} \sin \alpha f(\alpha).$$

## 2.8 Higgs-Teilchen und das Higgs-Kondensat

Bevor wir den thermodynamischen Limes  $B \rightarrow \mathbb{R}^3$  ausführten, waren alle Grundzustände  $E_B$  extremal (oder "rein"). Dies gilt nicht mehr für deren Limes  $E$ . Eine Rückführung auf extremale Zustände gelingt durch ein Integral über die Eichgruppe,

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha E_\alpha,$$

mit den kohärenten (und deshalb extremalen), aber nicht mehr eichinvarianten Zuständen

$$E_\alpha(\varphi) = \exp \left( -\frac{1}{2} \|\varphi\|^2 + iF(e^{i\alpha}\varphi) \right), \quad F(\varphi) = 2\rho^{1/2} \text{Im} \left( \int d^3x \hat{\varphi}(\mathbf{x}) \right).$$

Dies ist eine Folge der Integraldarstellung der Besselfunktion:

$$J_0(|z|) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha \exp(i \text{Im}(e^{i\alpha}z)) \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Der Versuch einer Beschreibung des reell-linearen Funktionals  $F$  als  $F(\varphi) = 2\text{Im}(\psi, \phi)$  führt auf  $\hat{\psi}(\mathbf{x}) = \rho^{1/2}$ . Da die Funktion  $\hat{\psi}$  konstant und somit nicht

quadrat-integrabel ist, liegt keiner der kohärenten Zustände  $E_\alpha$  im Fock-Raum. Einen Teilchenzahloperator einzuführen verbietet sich von selbst: Bereits der Grundzustand hat unendlich viele Teilchen.

Für jeden Wert von  $\alpha$  existiert ein neutrales Skalarfeld  $A(x)$  auf dem Fockraum  $\mathcal{H}_{\text{Fock}}$ , das sich von dem "freien Feld" zur Masse  $m$  nur um eine additive Konstante unterscheidet:

$$A(x) = A_{\text{Fock}}(x) + (2\rho/m)^{1/2} \sin \alpha .$$

Der kohärente Zustand  $E_\alpha$  entspricht dem Fock-Vakuum  $\Omega$ .

Die geschilderte Situation finden wir im Salam-Weinberg-Modell der Elementarteilchenphysik: Das Higgsfeld entwickelt hier einen konstanten Vakuumerwartungswert

$$v = (\Omega, A(x)\Omega) = (2\rho/m)^{1/2} \sin \alpha \sim 246 \text{ GeV},$$

dem die fundamentalen Fermionen ihre Masse verdanken. Mit  $A_{\text{Fock}}(x)$  beschreiben wir das neutrale Higgs-Teilchen, dessen Masse  $m$  noch unbekannt ist und möglicherweise in der Nähe von 160 GeV liegt. Es ist üblich,  $v$  das Higgs-Kondensat zu nennen. Man macht sich leicht klar, daß  $(\rho/m)^{1/2}$  tatsächlich die Dimension einer Energie hat. Zu diesem Zweck führen wir die Compton-Wellenlänge  $\lambda = \hbar/(mc)$  ein, messen das Volumen in Einheiten von  $\lambda^3$  und erhalten nach Wiedereinführung von  $\hbar$  und  $c$ :

$$(\rho \hbar^3 c/m)^{1/2} = mc^2 (\rho \lambda^3)^{1/2} .$$

Der dimensionslose Ausdruck  $\rho \lambda^3$  ist von der Größenordnung 1. Er beschreibt die Zahl der kondensierten Higgs-Teilchen, enthalten in jedem Würfel mit einer Seitenlänge, die der Compton-Wellenlänge entspricht. Beachte, daß  $\rho/m$  das quadratische Mittel  $\langle v^2 \rangle$  ist, wenn über den Winkel  $\alpha$  gemittelt wird.

## 2.9 Infrarotdarstellungen

Es gehört zu unseren wichtigen Einsichten, daß die Emission von weichen Photonen nicht durch die Fock-Darstellung des auslaufenden freien Maxwell-Feldes

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x), \quad \partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = 0$$

beschrieben werden kann, weil die Zahl der Photonen formal unendlich, also sinnlos ist. Möglich wird dies, weil die Photonen masselos sind. Die Einführung sogenannter *Infrarot-Darstellungen* wird erzwungen durch das singuläre Verhalten des elektromagnetischen Stromes, der von den beschleunigten Ladungen hervorgerufen wird. Die Singularität finden wir nach Fourier-Transformation

im Ursprung  $p = 0$  des Impulsraumes. In ähnlicher Weise hat die Störungstheorie der QED mit Infrarot-Singularitäten der Feynman-Graphen zu kämpfen, da sie von der Existenz einzelnen Photonen ausgeht.

Es zeigte sich, daß kohärente Zustände außerhalb des Fock-Raumes zu den Infrarot-Darstellungen Anlass geben und in natürlicher Weise in Modellen (klassische äußere Ströme, Bloch-Nordsieck-Modell, Pauli-Fierz-Modell usw.) auftreten. Möglicherweise gibt es tiefere Gründe statistischer Art für das Auftreten kohärenter Zustände, wenn, wie angenommen wird, die Emission weicher Photonen durch den Poisson-Prozess beschrieben wird.

Um die Algebra der Weyl-Operatoren

$$\exp\left(i \int d^4x \frac{1}{2} f^{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x)\right) = \exp\left(i \int d^4x j^\mu(x) A_\mu(x)\right) = W(\varphi),$$

für das Photonfeld einzuführen, gehen wir aus von reellen Testfunktionen

$$j^\mu(x) = \partial_\nu f^{\mu\nu}(x), \quad f^{\mu\nu}(x) = -f^{\nu\mu}(x)$$

mit kompakten Träger und gelangen so zu einem Raum  $L$  von komplexen Funktionen

$$\varphi_\mu(\mathbf{p}) = (2\pi)^{-3/2} \int d^4x e^{ipx} j_\mu(x), \quad p^0 = \omega = |\mathbf{p}|,$$

die bei  $\mathbf{p} = 0$  hinreichend rasch verschwinden und die Bedingung  $p^\mu \varphi_\mu = 0$  erfüllen, aus der

$$-\bar{\varphi}_\mu \varphi^\mu = \sum_{i=1}^3 \left| \varphi_i - \frac{p_i}{\omega} \varphi_0 \right|^2 \geq 0$$

folgt. Funktionen  $\varphi_\mu \sim p_\mu$ , für die die rechte Seite verschwindet, führen zu  $\partial^\mu A_\mu \Omega = 0$  in der Fock-Darstellung. Wir sind deshalb gehalten, Äquivalenzklassen von Funktionen  $\varphi_\mu(\mathbf{p})$  zu betrachten. In jeder Klasse wählen wir einen Repräsentanten mit  $\varphi_0(\mathbf{p}) = 0$ , dessen Normquadrat wir durch

$$\|\varphi\|^2 = \int \frac{d^3p}{2\omega} \sum_{i=1}^3 |\varphi_i(\mathbf{p})|^2$$

definieren. Außerdem gilt  $\sum_{i=1}^3 p_i \varphi_i(\mathbf{p}) = 0$ . Den so definierten Raum wollen wir mit  $L$  bezeichnen. Durch Vervollständigung in der Norm erhalten wir so einen Hilbertraum  $L_0$  von Ein-Photon-Wellenfunktionen in der sog. *Coulomb-Eichung*. Das Skalarprodukt  $(\varphi, \varphi')$  folgt in der gewohnten Weise. Es ist Bestandteil der Weyl-Relation

$$W(\varphi)W(\varphi') = \exp(-i \operatorname{Im}(\varphi, \varphi')) W(\varphi + \varphi').$$

Die Coulomb-Eichung benutzend wollen wir weitere Normen einführen,

$$\|\varphi\|_{\pm 1}^2 = \int \frac{d^3 p}{2\omega} \left( \frac{\omega}{1+\omega} \right)^{\pm 1} \sum_{i=1}^3 |\varphi_i(\mathbf{p})|^2,$$

um später die Singularitäten bei  $\mathbf{p} = 0$  besser in den Griff zu bekommen. Durch Vervollständigung erhalten wir neue Räume  $L_{\pm 1}$ . Wegen

$$\frac{\omega}{1+\omega} < 1 < \frac{1+\omega}{\omega} \quad \text{d.h.} \quad \|\varphi\|_1 < \|\varphi\| < \|\varphi\|_{-1}.$$

bilden sie mit  $L$  zusammen ein *Gel'fand-Tripel*:

$$L_{-1} \subset L_0 \subset L_1.$$

Dies bedeutet, daß – bezüglich des Skalarproduktes  $(\varphi, \varphi')$  – die Räume  $L_1$  und  $L_{-1}$  dual zueinander sind, während  $L_0$  selbstdual ist.

Es sei  $(\mathcal{H}, W_0)$  die Fock-Darstellung des Weyl-Systems über  $L$  mit dem Vakuum  $\Omega$  und

$$W_F(\varphi) = W_0(\varphi) e^{iF(\varphi)} \quad (\varphi \in L)$$

für ein reell-lineares Funktional  $F : L \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann definiert auch  $(\mathcal{H}, W_F)$  ein Weyl-System, so daß  $\Omega$  darin einen kohärenten Zustand beschreibt:

$$(\Omega, W_F(\varphi)\Omega) = \exp\left(-\frac{1}{2}\|\varphi\|^2 + iF(\varphi)\right)$$

Man beweist nun leicht das folgende

**Lemma 1.** *Seien  $F_1$  und  $F_2$  zwei reell-lineare Funktionale. Dann sind die Weyl-Systeme  $(\mathcal{H}, W_{F_1})$  und  $(\mathcal{H}, W_{F_2})$  unitär äquivalent genau dann, wenn*

$$|F_1(\varphi) - F_2(\varphi)| \leq C\|\varphi\|$$

für eine Konstante  $C$  gilt. In diesem Fall gibt es einen Vektor  $\xi \in L_0$  mit

$$F_1(\varphi) - F_2(\varphi) = 2 \operatorname{Im}(\xi, \varphi).$$

Mit dem unitären Operator  $U = W_0(\xi)$  folgt

$$UW_{F_1}(\varphi)U^{-1} = W_{F_2}(\varphi).$$

Auf dem Raum  $L$  operiert die Gruppe der Raumzeit-Translationen:

$$(x)\varphi(\mathbf{p}) = e^{-ipx} \varphi(\mathbf{p}), \quad p = (p^\mu) = (|\mathbf{p}|, \mathbf{p}).$$

Sie können auf den Räumen  $L_n$  zu unitären Operatoren  $V(x)$  erweitert werden. Ebenso existiert eine unitäre Darstellung  $U_0$  der Translationen auf dem Fock-Raum, so daß  $U_0(x)W_0(\varphi) = W_0((x)\varphi)U_0(x)$  gilt. Dies garantiert noch nicht, daß der Automorphismus

$$W_F(\varphi) \mapsto W_F((x)\varphi) \quad (29)$$

unitär implementiert werden kann, was unverzichtbar für die Existenz eines Energie-Impuls-Operators ist. Das entscheidende Kriterium wollen wir nun formulieren. Es folgt im wesentlichen aus dem Lemma 1.

**Lemma 2.** *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1. *Der Automorphismus (29) ist für jedes  $x$  unitär implementiert.*
2.  $|F(\varphi) - F((x)\varphi)| \leq C(x)\|\varphi\|.$
3.  $F((x)\varphi) = 2 \operatorname{Im}(\xi(x), \varphi)$  mit  $\xi(x) \in L_0.$

*Gilt  $U(x)W_F(\varphi) = W_F((x)\varphi)U(x)$  für ein unitäres  $U(x)$ , so hat die Gestalt*

$$U(x) = \lambda(x)U_0(x)W_0(\xi(x)), \quad |\lambda(x)| = 1. \quad (30)$$

*Die Funktion  $\xi(x)$  erfüllt*

$$\xi(x+y) = V(y)^*\xi(x) + \xi(y). \quad (31)$$

Die Relation (31) charakterisiert  $\xi(x)$  als einen 1-Kozyklus bezüglich der Darstellung  $V$  der Translationsgruppe auf  $L_0$ . 1-Kozyklen (engl. cocycles) bilden einen komplex-linearen Raum  $Z^1(V, L_0)$ . Spezielle 1-Kozyklen haben die Gestalt

$$\xi(x) = (\mathbb{1} - V(x)^*)\eta, \quad \eta \in L_0.$$

Sie heißen 1-Koränder (engl. coboundaries) und bilden einen Teilraum  $B^1(V, L_0)$ . Ist  $\xi(x)$  ein Korand und

$$\lambda(x) = \exp(i \operatorname{Im}(\eta, V(x)\eta)), \quad (32)$$

so folgt  $U(x) = W_0(\eta)^*U_0(x)W_0(\eta)$  für den Operator  $U(x)$  in (30). Koränder dieser Art sind typisch für eine Situation, wo der kohärente Zustand durch  $F(\varphi) = 2 \operatorname{Im}(\eta, \varphi)$  charakterisiert ist. Solche Zustände gehören zum Fock-Sektor und bieten nichts neues.

Wenn wir anstelle von Photonen massive Bosonen studieren, so wäre jeder 1-Kozyklus ein 1-Korand: Wir könnten hier keine neuen Darstellungen

gewinnen<sup>3</sup>. Im Fall masseloser Teilchen gewinnen wir jedoch sog. Infrarotdarstellungen. Wegen  $\text{Im}(\eta, \eta) = 0$  kann die Formel (32) umgeschrieben werden:

$$\lambda(x) = \exp(i \text{Im}(\eta, (V(x) - \mathbb{1})\eta)) = \exp(i \text{Im}(\eta, \xi(x))) .$$

Sie gibt nun einen Hinweis darauf, daß ein größerer Raum von Korändern, nämlich  $B^1(V, L_1)$  zulässig ist:

$$\xi(x) = (\mathbb{1} - V(x)^*)\eta \in L_{-1}, \quad \eta \in L_1 .$$

Die Beobachtung wird erhärtet durch das folgende

**Theorem.** *Drei Aussagen sind äquivalent:*

1. *Es existiert eine stetige unitäre Darstellung der Translationsgruppe, die die Automorphismen (29) implementiert mit physikalischem Spektrum für Energie und Impuls.*
2.  $|F(\varphi - (x)\varphi)| \leq M(x)\|\varphi\|_1$  und  $\lim_{x \rightarrow 0} M(x) = 0$ .
3.  $F(\varphi) = F_0(\varphi) + 2 \text{Im}(\eta, \varphi)$  mit  $\eta \in L_1$  und einem translationsinvarianten Funktional  $F_0$ .

Die Darstellung der Translationen hat die Form

$$U_\eta(x) = e^{i\zeta(x)}U_0(x)W_0(\xi(x))$$

mit  $\xi(x) = (\mathbb{1} - V(x)^*)\eta$  und  $\zeta(x) = \text{Im}(\eta, \xi(x))$ . Wir erfahren so, daß die Infrarotsektoren durch Elemente des Quotienten  $L_1/L_0$  charakterisiert sind (für massive Teilchen wäre  $L_1 = L_0$  und der Quotient trivial). Durch eine leichte Rechnung bestätigt man die nützliche Formel

$$(\Omega, U_\eta(x)\Omega) = \exp(\eta, (V(x) - \mathbb{1})\eta) . \quad (33)$$

In Rechnungen der QED – insbesondere bei Streuquerschnitten – tritt ein “Korrekturfaktor” auf, der die unbeobachtete Strahlung bei kleinen Frequenzen berücksichtigt. Er stellt eine Wahrscheinlichkeit dar und ist bezogen auf die Spektralzerlegung eines geeigneten kohärenten Zustandes:

$$(\Omega, U_\eta(x)\Omega) = \int (\Omega, dE_\eta(k)\Omega) e^{ikx} .$$

Angenommen,  $n$  einlaufende und  $m$  auslaufende Teilchen nehmen teil an einem Streuprozess mit den Impulsen  $-p_1, \dots, -p_n, p_{n+1}, \dots, p_{n+m}$  und den

---

<sup>3</sup>Abgesehen von einem möglichen Kondensat.

elektrischen Ladungen  $-e_1, \dots, -e_n, e_{n+1}, \dots, e_{n+m}$ , so daß  $\sum p_\alpha = 0$  und  $\sum e_\alpha = 0$  gilt. Die Abstrahlung weicher Photonen kann in guter Näherung durch einen kohärenten Zustand  $E_F$  beschrieben werden mit  $F(\varphi) = 2 \operatorname{Im}(\eta, \varphi)$ , wobei  $\eta$  aus dem klassischen Strom

$$j^\mu(x) = \sum_\alpha e_\alpha p_\alpha^\mu \int_0^\infty \delta^4(x - \lambda p_\alpha)$$

hervorgeht (siehe den Zusammenhang von  $j$  und  $\varphi$  zu Beginn des Kapitels). Sei  $B$  ein Bereich des Energie-Impuls-Raumes, der der unbeobachteten Strahlung entspricht. Sei  $s$  ein cutoff für die Frequenzen einzelner Photonen, verknüpft mit der Auflösung der Zähler. Dann ist der genannte Korrekturfaktor identisch mit

$$\begin{aligned} (\Omega, E_\eta(B)\Omega) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int_B d^4k \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \\ &\cdot \exp \left\{ \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\omega < s} \frac{d^3p}{2\omega} \left[ (e^{ipx} - 1) \sum_{\alpha\beta} e_\alpha e_\beta \frac{-(p_\alpha p_\beta)}{(p_\alpha p)(p_\beta p)} \right]_{\omega=p_0=|\mathbf{p}|} - ikx \right\} \end{aligned}$$

Das Auftreten eines Kondensates ist wenig wahrscheinlich, weil es keine Photonzahlerhaltung gibt. Nehmen wir etwa die Hohlraumstrahlung bei der Temperatur  $T$  und kühlen ein solches Gas ab, so verschwinden nacheinander alle Photonen, bis bei  $T = 0$  ein leerer Hohlraum übrig bleibt. Dennoch ist aus rein theoretischen Gründen die Existenz eines Kondensates unter geeigneten Bedingungen nicht auszuschließen.

Die Beweise für alle in diesem Kapitel gemachten Behauptungen findet man in: G.R.: Coherent Photon States and Spectral Condition, Commun.math.Phys. **19**, 301-314 (1970).

## 2.10 Die Gel'fand-Neumark-Segal-Konstruktion

Wenn ein Zustand  $E$  über  $L$  gegeben ist, so sind wir aufgrund unserer bisher durchgeführten Analyse keineswegs sicher,

- ob ein Weyl-System  $(\mathcal{H}, W)$  und ein Vektor  $\phi \in \mathcal{H}$  existiert, so daß  $(\phi, W(\varphi)\phi) = E(\varphi)$  für alle  $\varphi \in L$  darin gilt,
- wie sich verschiedene Weyl-Systeme zueinander verhalten, für die Vektoren  $\phi$  mit dieser Eigenschaft existieren.

Dies sind Fragen nach der Existenz und der Eindeutigkeit. Beide Fragen finden Antworten, wenn wir die folgende Begriffsbildung heranziehen.

**Definition.** Ein Weyl-System  $(\mathcal{H}, W, \phi)$  mit dem Vektor  $\phi \in \mathcal{H}$  heißt *zyklisch*, wenn die Menge  $\{W(\varphi)\phi \mid \varphi \in L\}$  total<sup>4</sup> ist. Ferner,  $(\mathcal{H}, W, \phi)$  und  $(\mathcal{H}', W', \phi')$  heißen *äquivalent*, wenn es eine unitäre Abbildung  $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$  gibt, so daß  $UW(\varphi) = W'(\varphi)U$  und  $U\phi = \phi'$  gilt.

**Satz.** Zu jedem Zustand  $E$  gibt es ein bis auf Äquivalenz eindeutiges zyklisches Weyl-System  $(\mathcal{H}, W, \phi)$  mit  $E(\varphi) = (\phi, W(\varphi)\phi)$ .

Beweis. Wir betrachten alle formalen endlichen Summen  $\sum c_i[\varphi_i]$  mit komplexen Koeffizienten  $c_i$ , d.h. wir konstruieren den linearen Raum über einer Menge. Die Menge erhalten wir aus  $L$ , indem wir die lineare Struktur von  $L$  vergessen (oder ignorieren). Wir wollen den so erhaltenen linearen Raum mit  $\mathcal{L}$  bezeichnen. Auf  $\mathcal{L}$  können wir durch

$$\|\sum_j c_j[\varphi_j]\|^2 = \sum_{j,k} \bar{c}_j c_k E(\varphi_k - \varphi_j) \exp(i \operatorname{Im}(\varphi_j, \varphi_k))$$

eine Halbnorm  $\|\cdot\|$  einführen. Alle Vektoren von  $\mathcal{L}$ , deren Halbnorm verschwindet, bilden einen linearen Teilraum  $\mathcal{N}$ . Vektoren, die sich um Elemente von  $\mathcal{N}$  unterscheiden sollen identifiziert werden. Der Quotientenraum  $\mathcal{L}/\mathcal{N}$  wird somit zu einem normierten komplex-linearen Raum. Da aus der Norm sich das Skalarprodukt ableitet, ist  $\mathcal{L}/\mathcal{N}$  sogar ein Prä-Hilbertraum<sup>5</sup>. Durch Vervollständigung erhalten wir daraus einen Hilbertraum:

$$\mathcal{H} = (\mathcal{L}/\mathcal{N})^-$$

Dies beendet den ersten Teil der GNS-Konstruktion. Durch

$$W(\varphi)[\varphi'] = e^{i \operatorname{Im}(\varphi, \varphi')} [\varphi + \varphi']$$

(und einer linearen Fortsetzung) ist ein Operator  $W(\varphi)$  auf  $\mathcal{L}$  gegeben. Wegen

$$\|\sum_j c_j e^{i \operatorname{Im}(\varphi_j, \varphi)} [\varphi_j + \varphi]\|^2 = \|\sum_j c_j[\varphi_j]\|^2$$

läßt sich  $W(\varphi)$  zu einem isometrischen Operator auf  $\mathcal{H}$  erweitern. Die Weyl-Relation

$$W(\varphi)W(\varphi') = e^{-i \operatorname{Im}(\varphi, \varphi')} W(\varphi + \varphi')$$

---

<sup>4</sup>Eine Menge von Vektoren heißt total, wenn die daraus gebildeten endlichen Linearkombinationen dicht im Hilbertraum sind.

<sup>5</sup>Ein Raum mit allen Eigenschaften eines Hilbertraumes mit Ausnahme der Vollständigkeit.

kann unmittelbar verifiziert werden. Desgleichen  $W(0) = \mathbb{1}$  und  $W(\varphi)^* = W(-\varphi)$ , sowie die Tatsache, daß  $W(\varphi)$  unitär ist. Schließlich setzen wir  $\phi = [0]$  und sehen so, daß die Vektoren  $W(\varphi)\phi = [\varphi]$  eine totale Menge in  $\mathcal{H}$  bilden und daß

$$(\phi, W(\varphi)\phi) = ([0], [\varphi]) = E(\varphi)$$

gilt.

Wir haben noch zu zeigen, daß die so gewonnene Darstellung bis auf unitäre Äquivalenz eindeutig ist. Sei also  $(\mathcal{H}', W', \phi')$  ein weiteres zyklisches Weyl-System mit der Eigenschaft  $E(\varphi) = (\phi', W'(\varphi)\phi')$ . Durch  $T[\varphi] = W'(\varphi)\phi'$  ist eine lineare Abbildung  $T : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{H}'$  definiert. Offenbar gilt

$$\begin{aligned} \|\sum_j c_j W'(\varphi_j)\phi'\|^2 &= \sum_{jk} \bar{c}_j c_k (\phi', W'(\varphi_k - \varphi_j)\phi') e^{i\text{Im}(\varphi_j, \varphi_k)} \\ &= \sum_{jk} \bar{c}_j c_k E(\varphi_k - \varphi_j) e^{i\text{Im}(\varphi_j, \varphi_k)} = \|\sum_j c_j [\varphi_j]\|^2 \end{aligned}$$

so daß der Kern der Abbildung  $T$  mit  $\mathcal{N}$  übereinstimmt, d.h.  $T$  faktorisiert:

$$T : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}/\mathcal{N} \xrightarrow{U} \mathcal{H}'$$

wobei  $U$  eine Isometrie ist und sich auf ganz  $\mathcal{H}$  in eindeutiger Weise fortsetzen läßt. Da die Vektoren  $\{W'(\varphi)\phi' \mid \varphi \in L\}$  als eine totale Menge vorausgesetzt war, existiert eine durch  $W'(\varphi)\phi' \mapsto [\varphi]$  definierte inverse isometrische Abbildung  $U^{-1}$ , und  $U$  ist unitär. Offenbar gilt

$$\begin{aligned} UW(\varphi)[\varphi'] &= e^{i\text{Im}(\varphi', \varphi)} U[\varphi + \varphi'] = e^{i\text{Im}(\varphi', \varphi)} W'(\varphi + \varphi')\phi' \\ &= W'(\varphi)W'(\varphi')\phi' = W'(\varphi)U[\varphi'] \end{aligned}$$

für alle  $\varphi' \in L$  und somit

$$UW(\varphi) = W'(\varphi)U, \quad U\phi = U[0] = W'(0)\phi' = \phi'.$$

Damit sind die Systeme  $(\mathcal{H}, W, \phi)$  und  $(\mathcal{H}', W', \phi')$  äquivalent.

Es fehlt noch der Nachweis, daß für den durch die GNS-Konstruktion gewonnene Weyl-Operator die Abbildung  $t \mapsto W(t\varphi)$  stetig (bei  $t = 0$ ) im Sinne der starken Operator-topologie ist. Wegen

$$\|(W(t\varphi) - \mathbb{1})\Phi\|^2 \leq 2|(\Phi, (W(t\varphi) - \mathbb{1})\Phi)|$$

genügt es aber, die Stetigkeit im Sinne der schwachen Operator-topologie zu zeigen, wobei wir uns noch auf eine dichte Menge von Vektoren  $\Phi$  beschränken können, da die Norm der Operatoren  $W(t\varphi) - \mathbb{1}$   $t$ -unabhängig abgeschätzt werden kann:  $\|W(t\varphi) - \mathbb{1}\| \leq 2$ . Wählen wir als dichte Menge die endlichen Linearkombinationen  $\sum_i c_i [\varphi_i]$ , so bleibt nur noch die Stetigkeit von

$$([\varphi_1], W(t\varphi)[\varphi_2]) = E(\varphi_2 - \varphi_1 + t\varphi) \exp(i\text{Im}[(\varphi_1, \varphi_2) + t(\varphi_1 + \varphi_2, \varphi)])$$

d.h. von  $E(\varphi' + t\varphi)$  zu prüfen. Diese Stetigkeit ist aber Teil der Voraussetzungen an den Zustand  $E$ .

## 2.11 Thermo-Feldtheorie

Das Ziel ist nun die Einführung der Temperatur  $T$ , äquivalent  $\beta = (kT)^{-1}$ , und des chemischen Potentials  $\mu$  als neue Variablen in die Feldtheorie. Wir beginnen mit einem (Bose-)Freiheitsgrad, der kanonischen Vertauschungsrelation  $[a, a^\dagger] = 1$  und den Observablen

$$H = \omega a^\dagger a, \quad N = a^\dagger a$$

Für dieses sehr einfache System wird das großkanonische Ensemble durch den Erwartungswert

$$\langle A \rangle_{\beta, \mu} = \frac{\text{Spur} (A e^{-\beta(H - \mu N)})}{\text{Spur} (e^{-\beta(H - \mu N)})}$$

beschrieben, wobei  $A$  irgendeine Observable darstellt. Eine elementare Rechnung liefert die Formeln:

$$\langle a^\dagger a \rangle_{\beta, \mu} = \frac{1}{e^{\beta(\omega - \mu)} - 1}, \quad \langle a a^\dagger \rangle_{\beta, \mu} = \frac{1}{1 - e^{-\beta(\omega - \mu)}}$$

Um dieses Ergebnis auf das freie neutrale Skalarfeld  $A(x)$  übertragen zu können, müssen wir dieses zunächst in einem Kasten mit dem Volumen  $V$  quantisieren, damit das Spektrum der Energie diskret wird, und am Ende den thermodynamischen Limes  $V \rightarrow \infty$  ausführen. Das Ergebnis für die 2-Punktfunktion lautet:

$$\langle A(x)A(y) \rangle_{\beta, \mu} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{2\omega} \frac{e^{-ip(x-y)} + e^{-\beta(\omega - \mu)} e^{ip(x-y)}}{1 - e^{-\beta(\omega - \mu)}}.$$

Im Gegensatz zu  $\mu$  ist  $\omega = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$  kein Parameter, sondern eine Funktion des Impulses  $\mathbf{p}$ .

Sei  $f(x)$  eine reelle Testfunktion,  $A(f) = \int d^4 x f(x) A(x)$  und

$$\varphi(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4 x f(x) e^{ipx}, \quad p^0 = \omega.$$

Dann ist der Grundzustand durch

$$E(\varphi) = \langle \exp(iA(f)) \rangle_{\beta, \mu} = \exp\left(-\frac{1}{2} \langle A(f)^2 \rangle_{\beta, \mu}\right) = \exp\left(-\frac{1}{2} \|\varphi\|_{\beta, \mu}^2\right)$$

gegeben mit

$$\|\varphi\|_{\beta, \mu}^2 = \int \frac{d^3 p}{2\omega} |\varphi(\mathbf{p})|^2 \coth\left(\frac{1}{2}\beta(\omega - \mu)\right).$$

Der Zusammenhang zwischen der Dichte  $\rho$  (Anzahl der Teilchen pro Volumen) und dem chemischen Potential  $\mu$  ist durch

$$\rho = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{1}{e^{\beta(\omega-\mu)} - 1}, \quad \mu < m$$

gegeben. Bei festem  $\beta$  ist somit

$$\rho < \rho_{\text{krit}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{1}{e^{\beta(\omega-m)} - 1}.$$

Erreicht  $\rho$  die kritische Dichte, setzt die Bose-Einstein-Kondensation ein und es gilt bei nunmehr festem  $\mu = m$

$$\rho = \rho_0 + \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{1}{e^{\beta(\omega-m)} - 1}$$

sobald  $\rho > \rho_{\text{krit}}$ , wobei  $\rho_0$  die Dichte des Kondensates darstellt. Es gibt eine Reihe von Zuständen, die das 2-Phasenmodell beschreiben:

$$E(\varphi)_\alpha = \exp\left(-\frac{1}{2}\|\varphi\|_{\beta,m}^2 + iF(e^{i\alpha}\varphi)\right), \quad F(\varphi) = 2\rho_0^{1/2} \text{Im}\left(\int d^3x \hat{\varphi}(\mathbf{x})\right).$$

Wie im Kapitel 2.8 haben wir auch hier

$$\hat{\varphi}(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2\omega}} \varphi(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}}$$

gesetzt, so daß

$$\int d^3x \hat{\varphi}(\mathbf{x}) = \left(\frac{(2\pi)^3}{2m}\right)^{1/2} \varphi(0).$$

Der Gaußische Charakter der hier beschriebenen Zustände ist charakteristisch für das ideale Bose-Gas. Nach Einschaltung von Wechselwirkungen erwarten wir deutliche Abweichungen von der Gauß-Funktion.

## 2.12 Wigner-Funktionale

In der klassischen Mechanik werden Observable durch Funktionen auf dem Phasenraum beschrieben. Wigner hatte die Idee, auch in der Quantenmechanik die Observablen, oder allgemeiner, Operatoren auf dem Hilbertraum durch Funktionen von  $p$  und  $q$  zu repräsentieren. Wir beschreiben das Wesentliche dieser Zuordnung anhand von Systemen mit einem Freiheitsgrad:

$$[a, a^\dagger] = \mathbb{1}, \quad a\Omega = 0.$$

Die Beziehung zu der Heisenberg-Relation  $[Q, P] = i\mathbb{1}$  wird durch

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(P - iQ), \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(P + iQ)$$

hergestellt. In Analogie zu den Weyl-Operatoren und den kohärenten Zuständen der Feldtheorie bildet man

$$W(p, q) = e^{i(pQ - qP)}, \quad |p, q\rangle = W(p, q)\Omega.$$

Hierbei werden  $p$  und  $q$  als reelle Variable eines fiktiven klassischen Phasenraumes aufgefasst. Dem Raum  $L$  des Weyl-Systems entspricht der Phasenraum, der Funktion  $\varphi(\mathbf{p})$  die komplexe Variable  $(-q - ip)/\sqrt{2}$ .

Jedem Operator  $A$  wird nun die *Wigner-Funktion*

$$\hat{A}(p, q) = \langle p, q | A | p, q \rangle$$

zugeordnet<sup>6</sup>. Man zeigt leicht, daß diese Funktion den Operator  $A$  in eindeutiger Weise charakterisiert. Ist  $\psi$  eine normierte Wellenfunktion, so existiert eine komplexwertige Funktion  $w(p, q)$  derart, daß

$$(\psi, A\psi) = \int dpdq w(p, q)\hat{A}(p, q)$$

für alle Operatoren  $A$  gilt. Man nennt  $w(p, q)$  die *Wigner-Distribution* des durch  $\psi$  beschriebenen Zustandes. Sie spielt eine wichtige Rolle in semiklassischen Näherungen und in der Theorie des Quantenchaos<sup>7</sup>.

Diese Überlegungen lassen sich mühelos auf endlich viele Freiheitsgrade übertragen. Bei unendlich vielen Freiheitsgraden ist Vorsicht geboten. Wir finden aber eine Entsprechung der Idee von Wigner in der Fock-Darstellung  $(\mathcal{H}, W, \Omega)$  des freien neutralen Skalarfeldes. Indem wir nämlich die kohärenten Zustände

$$|\varphi\rangle = W(\varphi)\Omega$$

einführen, kann jeder Operator  $A$  auf dem Fock-Raum durch das *Wigner-Funktional*

$$\hat{A}(\varphi) = \langle \varphi | A | \varphi \rangle$$

charakterisiert werden. Die Behauptung, daß hierdurch der Operator eindeutig bestimmt ist, erfordert jedoch einen gewissen Aufwand. Die folgende Begriffsbildung ist hierbei nützlich:

---

<sup>6</sup>Der Einfachheit halber betrachten wir nur beschränkte Operatoren.

<sup>7</sup>Siehe hierzu M.C. Gutzwiller: *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*, Springer 1990.

**Definition.** Sei  $L$  ein komplex-linearer Raum und  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum. Eine Funktion  $F : L \rightarrow \mathcal{H}$  heißt *ganze Funktion*, falls für jede endliche Menge  $(\varphi_i)_1^n$  von Vektoren in  $L$  die Funktion

$$f(z_1, \dots, z_n) = F(z_1\varphi_1 + \dots + z_n\varphi_n) \quad (z_i \in \mathbb{C})$$

analytisch in ganz  $\mathbb{C}^n$  ist.

Aufgrund eines Theorems von Hartog<sup>8</sup> ist  $F$  bereits ganz im obigen Sinne, wenn  $g(z) = F(z\varphi + \varphi')$  für alle  $\varphi, \varphi' \in L$  eine ganze Funktion ist<sup>9</sup>.

**Satz.** Für das Fock-System  $(\mathcal{H}, W, \Omega)$  ist

$$F(\varphi) = e^{\frac{1}{2}\|\varphi\|^2} W(\varphi)\Omega$$

eine ganze Funktion.

Beweis. Wegen  $F(z\varphi + \varphi') = e^{\frac{1}{2}\|\varphi'\|^2 + z(\varphi', \varphi)} W(\varphi')F(z\varphi)$  genügt es, die Analytizität von  $F(z\varphi)$  nachzuweisen. Sei  $N = \sum nE_n$  die Spektralzerlegung des Teilchenzahloperators. Dann gilt

$$E_n F(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt e^{-int} F(e^{it}\varphi), \quad (F(\varphi), F(\varphi')) = e^{(\varphi, \varphi')}$$

und

$$\|E_n F(\varphi)\|^2 = (F(\varphi), E_n F(\varphi)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt \exp(-int + e^{it}\|\varphi\|^2) = \frac{1}{n!} \|\varphi\|^{2n},$$

so daß die Reihe  $f(z) = \sum z^n E_n F(\varphi)$  überall absolut konvergiert und folglich eine ganze analytische Funktion darstellt. Es folgt:

$$\begin{aligned} (F(\varphi'), f(z)) &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt e^{-int} (F(\varphi'), F(e^{it}\varphi)) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt \exp(-int + e^{it}(\varphi', \varphi)) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} (\varphi', \varphi)^n = e^{(\varphi', z\varphi)} = (F(\varphi'), F(z\varphi)). \end{aligned}$$

<sup>8</sup>siehe Bochner, Martin: Several Complex Variables, Chapter VII.

<sup>9</sup>Den Begriff einer ganzen analytischen Funktion mit Werten in einem komplexen Banach-Raum findet man bei Dieudonné: Foundations of Modern Analysis, Chapter IX.

Da die Vektoren  $F(\varphi')$  total in  $\mathcal{H}$  sind, folgt  $f(z) = F(z\varphi)$ , die Behauptung des Satzes.

Insbesondere folgt aus dem Satz, daß für jeden Vektor  $\phi \in \mathcal{H}$  die Funktionen

$$f(z) = (\phi, F(z\varphi + \varphi')), \quad \overline{f(\bar{z})} = (F(\bar{z}\varphi + \varphi'), \phi)$$

ganz analytisch sind. Wir formulieren nun die entscheidende Behauptung:

**Satz.** Sei  $(\mathcal{H}, W, \Omega)$  das Fock-System,

$$|\varphi\rangle = W(\varphi)\Omega = e^{-\frac{1}{2}\|\varphi\|^2} F(\varphi)$$

und  $A$  ein beschränkter Operator in  $\mathcal{H}$ . Aus  $\langle \varphi | A | \varphi \rangle = 0$  für alle  $\varphi \in L$  folgt  $A = 0$ .

Beweis. Die Funktion

$$\begin{aligned} f(z_1, z_2) &= (F(\bar{z}_1 i \frac{1}{2}(\varphi - \varphi') + \frac{1}{2}(\varphi + \varphi')), AF(\bar{z}_2 i \frac{1}{2}(\varphi - \varphi') + \frac{1}{2}(\varphi + \varphi'))) \\ &= (A^* F(\bar{z}_1 i \frac{1}{2}(\varphi - \varphi') + \frac{1}{2}(\varphi + \varphi')), F(\bar{z}_2 i \frac{1}{2}(\varphi - \varphi') + \frac{1}{2}(\varphi + \varphi'))) \end{aligned}$$

ist ganz analytisch in  $z_1$  (für festes  $z_2$ ), ebenso in  $z_2$  (für festes  $z_1$ , dann aber auch in  $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$  aufgrund des Theorems von Hartog. Schließlich ist  $g(z) = f(z, z)$  ganz analytisch in  $z$ . Nach Voraussetzung verschwindet  $g(z)$  entlang der reellen Achse. Folglich gilt  $g(z) = 0$  überall in  $\mathbb{C}$ . Insbesondere  $g(i) = (F(\varphi), AF(\varphi)) = 0$  für beliebige Vektoren  $\varphi, \varphi' \in L$  und somit  $A = 0$ , was den Beweis beendet.

Der Satz sagt uns, daß der Operator  $A$  durch sein Wigner-Funktional  $\langle \varphi | A | \varphi \rangle$  eindeutig bestimmt ist. Denn sei

$$\langle \varphi | A | \varphi \rangle = \langle \varphi | B | \varphi \rangle,$$

so gilt  $\langle \varphi | A - B | \varphi \rangle = 0$  und folglich  $A = B$ .

Der Satz hat auch eine weitere interessante Folgerung.

**Satz.** Sei  $(\mathcal{H}, W, \Omega)$  das Fock-System und  $A$  ein beschränkter Operator in  $\mathcal{H}$  mit  $AW(\varphi) = W(\varphi)A$  für alle  $\varphi \in L$ . Dann gilt  $A = c\mathbb{1}$  mit  $c = (\Omega, A\Omega)$ .

Beweis. Mit  $B = A - (\Omega, A\Omega)\mathbb{1}$  und der Relation  $W(\varphi)^* BW(\varphi) = B$  (aufgrund der Voraussetzung) erhalten wir

$$\langle \varphi | B | \varphi \rangle = e^{\|\varphi\|^2} (\Omega, W(\varphi)^* BW(\varphi)\Omega) = e^{\|\varphi\|^2} (\Omega, (A - (\Omega, A\Omega)\mathbb{1})\Omega) = 0$$

also  $B = 0$  durch Anwendung des vorigen Satzes.

## 2.13 Weitere Eigenschaften des Fock-Weyl-Systems

Wie wir sahen, geht die Weyl-Formulierung der Feldtheorie von einem reell-linearen Teilraum  $L$  des Einteilchenraumes  $\mathcal{H}_1$  und einer symplektischen Form

$$\sigma(\varphi, \varphi') = \text{Im}(\varphi, \varphi')$$

aus. Besser gesagt,  $\mathcal{H}_1$  erscheint als Abschluß von  $L$  bezüglich der durch  $\|\varphi\|^2 = (\varphi, \varphi)$  gegebenen Normtopologie. Nur im Fock-System darf man wegen der besonderen Stetigkeit der Weyl-Operatoren  $W(\varphi)$  den Raum  $L$  mit  $\mathcal{H}_1$  identifizieren. Es ist nicht überraschend, daß im Fock-System viele Aussagen in  $\mathcal{H}_1$  eine Entsprechung im Fock-Raum  $\mathcal{H}$  haben. Wir betrachten hier einige Beispiele und benutzen dabei die Bezeichnungen des vorigen Kapitels.

**Satz.** *Sei  $M \subset \mathcal{H}_1$  ein reell-linearer Teilraum. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1.  $M$  ist total in  $\mathcal{H}_1$ .
2.  $\{W(\varphi)\Omega \mid \varphi \in M\}$  ist total in  $\mathcal{H}$ .

Beweis. 1.  $\rightarrow$  2. Sei  $\phi \in \mathcal{H}$  und  $(\phi, F(\varphi)) = 0$  für alle  $\varphi \in M$ . Die Funktion  $f(z) = (\phi, F(z\varphi + \varphi'))$  mit  $\varphi, \varphi' \in M$  ist ganz analytisch und verschwindet für reelle  $z$ . Also verschwindet  $f(z)$  identisch, und  $(\phi, F(\varphi)) = 0$  für alle  $\varphi \in M \cup iM$ . Da  $M$  reell-linear und total ist  $M \cup iM$  komplex-linear und dicht in  $\mathcal{H}_1$ . Da  $(\phi, F(\varphi))$  stetig in  $\varphi$  ist, folgt  $(\phi, F(\varphi)) = 0$  für alle  $\varphi \in \mathcal{H}_1$ . Also gilt  $\phi = 0$ . Denn  $\{F(\varphi) \mid \varphi \in \mathcal{H}_1\}$  ist total in  $\mathcal{H}$ .

2.  $\rightarrow$  1. Sei  $\varphi' \in \mathcal{H}_1$  und  $(\varphi', \varphi) = 0$  für alle  $\varphi \in M$ . Für  $\phi = \Omega - F(\varphi') \in \mathcal{H}$  gilt

$$(\phi, W(\varphi)\phi) = e^{-\frac{1}{2}\|\varphi\|^2} \left(1 - e^{(\varphi', \varphi)}\right), \quad \|\phi\|^2 = e^{\|\varphi'\|^2} - 1.$$

Wir finden daher  $(\phi, W(\varphi)\Omega) = 0$  für alle  $\varphi \in M$  und somit  $\phi = 0$ , da  $\{W(\varphi)\Omega \mid \varphi \in M\}$  dicht in  $\mathcal{H}$  ist. Die Aussage  $\|\phi\| = 0$  impliziert  $\|\varphi'\| = 0$ . Folglich ist  $M$  total in  $\mathcal{H}_1$ , was den Beweis beendet.

Sei  $M$  ein reell-linearer Teilraum von  $\mathcal{H}_1$  und

$$M' = \{\varphi \in \mathcal{H}_1 \mid \sigma(\varphi, \varphi') = 0, \varphi' \in M\},$$

das Komplement von  $M$  bezüglich der symplektischen Form  $\sigma$ . Wegen  $|\sigma(\varphi, \varphi')| \leq \|\varphi\| \|\varphi'\|$  ist  $M'$  ein abgeschlossener reell-linearer Teilraum von  $\mathcal{H}_1$ . Das doppelte Komplement,  $M''$ , stellt den Abschluss von  $M$  bezüglich der Normtopologie dar.  $M$  heißt *regulär*, falls  $M \cap M' = \{0\}$ . Wir definieren die von-

Neumann-Algebra  $R(M)$  als den schwachen Abschluß der durch die Operatoren  $W(\varphi)$  erzeugten Algebra<sup>10</sup>:

$$R(M) = \{W(\varphi) \mid \varphi \in M\}''.$$

Es gelten die leicht zu beweisenden Aussagen:

- (A)  $R(M) = R(M'')$ .
- (B)  $R(M') \subset R(M)'$ .
- (C)  $M_1 \subset M_2$  impliziert  $R(M_1) \subset R(M_2)$ .

Die erste Aussage ist eine Folge der Stetigkeit von  $W(\varphi)$ , die zweite eine Folge der Weyl-Relationen und die dritte eine unmittelbare Folge der Definition von  $R(M)$ .

**Satz.** Die folgenden Aussagen sind für reell-lineare Teilräume  $M_1, M_2 \subset \mathcal{H}_1$  äquivalent:

- (a)  $R(M_1) \subset R(M_2)$ .
- (b)  $M_1'' \subset M_2''$ .

Beweis. (a)→(b) ist eine Folge von (A) und (B). Zum Beweis von (b)→(a) nehmen wir  $M_1'' \not\subset M_2''$  an. Daraus folgt  $M_2' \not\subset M_1'$ . Also existiert  $\varphi \in M_2'$ , so daß  $\varphi \notin M_1'$ . Zu diesem  $\varphi$  finden wir ein  $\varphi' \in M_1$ , so daß  $\text{Im}(\varphi', \varphi) = \pi/2$  und

$$[W(\varphi), W(\varphi')] = 2iW(\varphi + \varphi') \sin(\text{Im}(\varphi', \varphi)) = 2iW(\varphi + \varphi') \neq 0,$$

also  $W(\varphi) \notin R(M_1)'$ . Andererseits,  $W(\varphi) \in R(M_2') \subset R(M_1)'$ , also auch  $R(M_2)' \not\subset R(M_1)'$  und somit  $R(M_1) \not\subset R(M_2)$ . q.e.d.

Sei  $\mathbb{1}$  der Einheitsoperator in  $\mathcal{H}$ ,  $\mathbb{C}_{\mathcal{H}} = \{c\mathbb{1} \mid c \in \mathbb{C}\}$  und  $M \subset \mathcal{H}_1$  ein linearer Teilraum.

**Corollar.** Die folgenden Aussagen sind äquivalent für einen reell-linearen Teilraum  $M \subset \mathcal{H}_1$ :

- (a)  $R(M)' = \mathbb{C}_{\mathcal{H}}$
- (b)  $M' = \{0\}$

---

<sup>10</sup>Mit  $\mathcal{A}' = \{B \mid [A, B] = 0, A \in \mathcal{A}\}$  bezeichnet man den Kommutator einer Menge  $\mathcal{A}$  von Operatoren. Der Doppelkommutator  $\mathcal{A}''$  heißt der schwache Abschluß von  $\mathcal{A}$ .

Beweis. Aufgrund des vorangegangenen Satzes ist  $R(M) = R(\mathcal{H}_1)$  gleichbedeutend mit  $M'' = \mathcal{H}_1$ .

Ein Vergleich von Eigenschaften der Vektoren  $W(\varphi)\Omega$  mit Eigenschaften der Operatoren  $W(\varphi)$  führt zu der folgenden interessanten Übersicht:

$$\begin{aligned} \{W(\varphi)\Omega \mid \varphi \in M\}^- = \{0\} & \Leftrightarrow M^- = M' \cap iM' = \{0\} \\ \{W(\varphi) \mid \varphi \in M\}' = \mathbb{C}_{\mathcal{H}} & \Leftrightarrow M' = \{0\} \end{aligned}$$

Identifizieren wir  $L$  mit  $M$ , so erkennen wir hier, welche Bedingungen an  $L$  nötig sind, damit das Fock-Weyl-System  $(\mathcal{H}, W, \Omega)$  über dem symplektischen Raum  $(L, \sigma)$  die gewünschten Resultate hervorbringt, d.h. ohne Einbuße an Information alle Zustände, Operatoren usw. zu konstruieren erlaubt.

## 3 Grundlagen der Eichtheorien

### 3.1 Mannigfaltigkeiten

Differentialgeometrie ist das Studium von Mannigfaltigkeiten und den Abbildungen zwischen ihnen. Grob gesprochen handelt es bei einer Mannigfaltigkeit um einen topologischen Raum  $M$ , der lokal wie der  $\mathbb{R}^n$  aussieht und eine differenzierbare Struktur besitzt. Man nennt dann  $n$  die Dimension von  $M$ . Wird der  $\mathbb{R}^n$  durch  $\mathbb{C}^n$  ersetzt, so spricht man von einer komplexen Mannigfaltigkeit der Dimension  $n$ . Wir werden uns jedoch auf reelle Mannigfaltigkeiten konzentrieren und beginnen mit einer Reihe von Definitionen.

**Definition.** Ein topologischer Raum  $M$  heißt *topologische Mannigfaltigkeit* der Dimension  $n$ , wenn jeder Punkt eine Umgebung  $U$  besitzt, die homeomorph zu einer offenen Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  ist:

$$\phi: U \rightarrow \phi(U) \subset \mathbb{R}^n .$$

Man nennt dann  $(U, \phi)$  eine Koordinatenkarte, oder kurz *Karte*, von  $M$ . Unter einem Atlas versteht man eine Familie von Karten, die  $M$  überdecken:

$$\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i), i \in I \mid \bigcup_{i \in I} U_i = M\} .$$

Zwei Atlanten  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{A}'$  heißen *vergleichbar*, falls ihre Vereinigung  $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$  wieder ein Atlas ist. Ein Atlas heißt *maximal*, wenn jeder vergleichbare Atlas darin enthalten ist, *differenzierbar*, wenn für je zwei seiner Karten  $(U_i, \phi_i)$  und  $(U_j, \phi_j)$  mit  $U_{ij} = U_i \cap U_j \neq \emptyset$  die Übergangsfunktion

$$\phi_{ij} = \phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U_{ij}) \rightarrow \phi_i(U_{ij})$$

vom Typ  $C^\infty$ , d.h. unendlich oft differenzierbar ist. Ein maximaler differenzierbarer Atlas wird eine *differenzierbare Struktur* genannt. Eine topologische Mannigfaltigkeit mit einer differenzierbaren Struktur heißt *differenzierbare Mannigfaltigkeit*.

In der Folge wird Differenzierbarkeit stillschweigend vorausgesetzt. Kompakte Mannigfaltigkeiten haben die Eigenschaft, daß man stets einen endlichen Atlas für sie finden kann. Die bekannteste kompakte Mannigfaltigkeit, die  $n$ -dimensionale Sphäre  $S^n$ , kann bereits durch zwei Karten überdeckt werden. Man beachte, daß jede Lie-Gruppe  $G$  u.a. eine Mannigfaltigkeit mit differenzierbarer Struktur ist. So ist die  $SU(2)$  als Mannigfaltigkeit mit der Sphäre  $S^3$  identisch.

**Definition.** Eine Abbildung  $f : M \rightarrow M'$  zwischen zwei Mannigfaltigkeiten heißt *differenzierbar*, wenn für beliebige Karten  $(U, \phi)$  und  $(U', \phi')$  in  $M$  bzw.  $M'$  die Abbildung  $\phi' \circ f \circ \phi^{-1}$  vom Typ  $C^\infty$  ist. Die Menge solcher Abbildungen wird mit  $F(M, M')$  bezeichnet. Eine besondere Rolle spielt die kommutative Algebra

$$? = F(M, \mathbb{R})$$

aller  $C^\infty$ -Funktionen auf  $M$ . Man darf mit Recht behaupten, daß die Kenntnis von  $?$  identisch sei mit der differenzierbaren Struktur auf einer topologischen Mannigfaltigkeit<sup>11</sup>. Alle weiteren Konstruktionen von Objekten über  $M$  gehen von der Algebra  $?$  aus. Anmerkung: Die nicht-kommutative Geometrie (A. Connes) verzichtet auf das Objekt  $M$  und geht von einer nicht-kommutativen Algebra  $?$  aus.

Eine Abbildung  $f \in F(M, M')$  heißt ein *Diffeomorphismus*, wenn  $f^{-1}$  existiert und differenzierbar ist. Mit  $\text{Diff}(M)$  bezeichnet man die Gruppe der Diffeomorphismen von  $M$ .

Jede Derivation  $X$  der Algebra  $?$  wird *Vektorfeld* auf  $M$  genannt. Die Menge der Vektorfelder wollen wir mit  $\mathfrak{V}$  bezeichnen. Zur Erinnerung, eine Derivation hat zwei Eigenschaften:

1. Linearität:  $X(\alpha f + \beta g) = \alpha Xf + \beta Xg$
2. Leibniz Regel:  $X(fg) = fXg + gXf$ .

In lokalen Koordinaten  $x^i$  hat  $X$  dann immer die Gestalt  $X^i \partial_i$ , wobei die  $X^i$  Funktionen der  $x^i$  sind und die Komponenten des Vektorfeldes genannt werden. In jedem Punkt  $x \in M$  induziert  $X$  eine lineare Abbildung

$$X(x) : ? \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \rightarrow (Xf)(x),$$

Tangentenvektor im Punkt  $x$  genannt. In lokalen Koordinaten kann  $X(x)$  mit einem Vektor in  $\mathbb{R}^n$  identifiziert werden. Die Menge der Tangentenvektoren im Punkt  $x$  wird mit  $T_x M$  bezeichnet und heißt der Tangentialraum in  $x$ . Die (disjunkte) Vereinigung aller Tangentialräume wird mit  $TM$  bezeichnet und stellt das einfachste Beispiel eines Vektorbündels dar mit dem Basisraum  $M$ , der natürlichen Projektion  $\pi : TM \rightarrow M$  und der typischen Faser  $\mathbb{R}^n$  (jeder Raum  $T_x M$  ist homeomorph zu  $\mathbb{R}^n$ ). In dieser Sprache ist ein Vektorfeld nicht anderes als ein differenzierbarer Schnitt des Tangentialbündels  $TM$ , d.h. eine Abbildung

$$X : M \rightarrow TM, \quad \text{so daß} \quad X \circ \pi = \text{id},$$

---

<sup>11</sup>Ist die Dimension  $n \geq 4$ , so kann es mehrere solcher Strukturen auf  $M$  geben.

wobei  $\text{id}: M \rightarrow M$  die identische Abbildung darstellt. In Worten:  $X$  ordnet jedem Punkt  $x \in M$  ein Vektor in  $T_x M$  zu. Wenn wir allgemein die Schnitte eines Bündels  $\mathfrak{E}$  mit  $?( \mathfrak{E})$  bezeichnen, so gilt

$$\mathfrak{V} = ?(TM).$$

Wichtig ist die Einsicht, daß man jedes  $f \in F(M, M')$  differenzieren kann. Man wählt hierzu Karten  $(U, \phi)$  und  $(U', \phi')$  in  $M$  bzw.  $M'$  und führt die Ableitung an  $\phi' \circ f \circ \phi^{-1}$  aus. Das Ergebnis ist eine lineare Abbildung

$$T_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} M'$$

in jedem Punkt  $x \in M$ . In lokalen Koordinaten wird  $T_x f$  durch eine Matrix von partiellen Ableitungen (in dem gegebenen Punkt) repräsentiert. Variiert  $x$  über  $M$ , so ergibt dies eine Abbildung

$$Tf : TM \rightarrow TM'$$

zwischen den Tangentialbündeln.

Eine weitere wichtige Einsicht ist, daß die Gesamtheit der Vektorfelder eine Lie-Algebra bildet unter dem Kommutator  $[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X$ . Denn in lokalen Koordinaten findet man

$$[X, Y] = (X^j(\partial_j Y^k) - Y^j(\partial_j X^k)) \partial_k.$$

Mehr noch: Mit  $X$  ist auch  $fX$  ein Vektorfeld für jedes  $f \in ?(M)$ . Beachte, daß ein Produkt der Form  $X \circ Y$  für sich genommen kein Vektorfeld darstellt, weil es Ableitungen 2. Ordnung beinhaltet.

Vektorfelder spielen eine prominente Rolle in der Theorie der dynamischen Systeme, speziell auch in der klassischen Mechanik und der Ergodentheorie. Sie dienen zur Beschreibung von kontinuierlichen Symmetrien, von Erhaltungsgrößen und der zeitlichen Evolution, die durch eine Differentialgleichung der Form

$$\frac{d}{dt} f_t = X f_t, \quad f_t \in ? \tag{34}$$

charakterisiert wird. Statt also Bahnen  $x(t)$  im Phasenraum zu studieren, betrachtet man Funktionen  $f(x(t)) = f_t(x)$  mit  $x(0) = x \in M$ . Bewegungsgleichungen, die  $x(t)$  definieren, sind typischerweise nichtlinear, während (34) eine lineare Differentialgleichung darstellt, was ein entscheidender Vorteil ist.

### 3.2 Differentialformen

Zu jedem Tangentialraum  $T_x M$  betrachtet man den Dualraum  $T_x^* M$  der Linearformen auf  $T_x M$  und die hierdurch definierte Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : T_x M \times T_x^* M \rightarrow \mathbb{R}.$$

Die Gesamtheit der Räume  $T_x^* M$  definiert das Kotangentialbündel  $T^* M$ . Ein Schnitt

$$A : M \rightarrow T^* M \quad (A \circ \pi = \text{id})$$

ist dann gewissermaßen das duale Objekt zu einem Vektorfeld und heißt eine 1-Form. In lokalen Koordinaten schreibt man

$$A = A_i(x) dx^i$$

unter der Vereinbarung  $\langle \partial_j, dx^i \rangle = \delta_j^i$ . Die  $A_i$  sind  $C^\infty$ -Funktionen der lokalen Koordinaten und heißen die Komponenten von  $A$ .

Die Menge aller 1-Formen soll mit  $\mathfrak{V}^*$  bezeichnet werden. Die Konstruktion liefert gleichzeitig eine Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{V} \times \mathfrak{V}^* \rightarrow ? \quad (35)$$

so daß  $\langle X, A \rangle$  in lokalen Koordinaten durch die Funktion  $X^i A_i$  beschrieben wird. Gleichzeitig können wir 1-Formen als Schnitte des Kotangentialbündels  $T^* M$  auffassen. Somit gilt

$$\mathfrak{V}^* = ?(T^* M).$$

Schließlich können wir in jedem Punkt  $x \in M$  die äußere Algebra

$$\bigwedge T_x^* M = \sum_{k=0}^n \bigwedge^k T_x^* M \quad (n = \text{Dim} M)$$

konstruieren, um so das Kotangentialbündel  $\bigwedge T^* M$  zu erhalten. Man vereinbart  $\bigwedge^0 T_x^* M = \mathbb{R}$ . Damit wird  $\bigwedge^0 T^* M$  zu dem trivialen Bündel  $M \times \mathbb{R}$ . Jeder Schnitt

$$B : M \rightarrow \bigwedge^k T_x^* M$$

heißt  $k$ -Form. Eine 0-Form ist ganz einfach eine Funktion  $f \in ?(M)$ . In lokalen Koordinaten hat eine 2-Form  $F$  die Gestalt:

$$F = \frac{1}{2} F_{ik}(x) dx^i \wedge dx^k$$

mit Komponenten  $F_{ik} = -F_{ki}$ . Klassische Feldtheorie, insbesondere die Maxwell'sche Theorie, benutzt Objekte (Felder, Potentiale, Ströme usw.), die man als Elemente von  $?( \wedge T^* M)$  aufzufassen hat.

Die Abbildung (35) kann in kanonischer Weise erweitert werden zu einer Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : ?(\wedge^k T M) \times ?(\wedge^k T^* M) \rightarrow ?$$

so daß

$$\langle X_1 \wedge \cdots \wedge X_k, u_1 \wedge \cdots \wedge u_k \rangle = \text{Det}(f_{\alpha\beta}), \quad f_{\alpha\beta} = \langle X_\alpha, u_\beta \rangle \in ? .$$

Wir führen vereinfachende Bezeichnungen ein,

$$\Omega = ?(\wedge T^* M) = \sum_{k=0}^n \Omega^k, \quad \Omega^k = ?(\wedge^k T^* M),$$

und merken an, daß  $\Omega$  eine Algebra und  $\Omega^0 = ?$  ist. Aus der Vektoranalysis kennt man die *äußere Ableitung*:

$$d : \Omega \rightarrow \Omega, \quad d : \Omega^k \rightarrow \Omega^{k+1}$$

(man setzt  $\Omega^k = \{0\}$  für  $k > n$ ) mit der charakteristischen Eigenschaft  $d^2 = 0$ . Sie führt eine  $k$ -Form in eine  $(k+1)$ -Form über und kann durch drei definierende Eigenschaften charakterisiert werden:

- (1) Falls  $f \in \Omega^0$ , so ist  $df \in \Omega^1$  durch

$$\langle X, df \rangle = Xf$$

gegeben.

- (2) Falls  $u \in \Omega^1$ , so ist  $du \in \Omega^2$  durch

$$\langle X \wedge Y, du \rangle = X \langle Y, u \rangle - Y \langle X, u \rangle - \langle [X, Y], u \rangle$$

gegeben.

- (3) Es gilt eine Leibniz-Regel (Produktregel der Differentiation) der folgende Art:

$$d(u \wedge v) = (du) \wedge v - u \wedge dv, \quad u \in \Omega^1, v \in \Omega .$$

Die Definition nutzend kann man folgendes zeigen: Ist in lokalen Koordinaten

$$u = \sum_{i_1 < \dots < i_k} u_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k},$$

so gilt (wiederum lokal)

$$du = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \partial_j u_{i_1 \dots i_k} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

In abgekürzter Form:  $d = \partial_j dx^j$ . Man zeigt auch leicht die Gültigkeit der allgemeinen Leibniz-Regel:

$$d(u \wedge v) = (du) \wedge v + (-1)^k u \wedge dv, \quad u \in \Omega^k, v \in \Omega.$$

Eine  $k$ -Form  $u$  heißt *geschlossen*, wenn  $du = 0$  gilt, *exakt*, wenn  $u = dv$  für eine  $(k-1)$ -Form erfüllt ist. Wegen  $d^2 = 0$  ist jede exakte Form auch geschlossen. Es hängt von der Mannigfaltigkeit ab, ob die Umkehrung gilt. In der physikalischen Literatur spielt *lokale Umkehrbarkeit* eine wichtige Rolle, die wir hier ohne Beweis zitieren:

**Lemma von Poincaré.** Ist  $u$  eine geschlossene  $k$ -Form, so existiert zu jedem  $x \in M$  eine Umgebung, so daß die Einschränkung von  $u$  auf diese Umgebung dort exakt ist. Kurz, lokal ist jede geschlossene Form exakt.

### 3.3 Pull-back von Differentialformen

Es sei  $\phi : M \rightarrow N$  ein Morphismus<sup>12</sup> zwischen zwei Mannigfaltigkeiten. Er induziert eine lineare Abbildung

$$T_x M \xrightarrow{T_x \phi} T_{\phi(x)} N \quad (x \in M)$$

zwischen Tangentialräumen, so daß für alle  $X(x) \in T_x M$  gilt:

$$(T_x \phi X(x))f = X(x)(f \circ \phi), \quad f \in ?_N := C^\infty(N)$$

Zur Erinnerung:

$$X(x) : ?_M \rightarrow \mathbb{R}, \quad T_x \phi X(x) : ?_N \rightarrow \mathbb{R}.$$

Alle Abbildungen  $T_x \phi$  ( $x \in M$ ) zusammengenommen ergeben einen Morphismus

$$TM \xrightarrow{T\phi} TN$$

zwischen Tangentialbündeln. Zusammenfassend stellen wir fest:

---

<sup>12</sup>Eine differenzierbare Abbildung

*Der Tangential-Funktor  $T$  führt von der Kategorie der Mannigfaltigkeiten zu der Kategorie der Vektorbündel.*

Unser Ziel ist, zu zeigen, daß man jede Differentialform auf der Mannigfaltigkeit  $N$  in eine Differentialform auf  $M$  mit Hilfe von  $\phi$  umwandeln (“zurückziehen”) kann. Wir beginnen bei den 0-Formen, den gewöhnlichen Funktionen auf  $N$ :

$$f \in \Omega_N^0 = ?_N .$$

Jeder Funktion auf  $N$  entspricht eine Funktion auf  $M$  vermöge der Vorschrift

$$\phi^*(f) = f \circ \phi ,$$

die auf einfache Weise bereits den pull-back

$$\Omega_N^0 \xrightarrow{\phi^*} \Omega_M^0$$

für 0-Formen definiert. Beachte, daß  $\phi^*$  die algebraische Struktur respektiert.

Wir wenden uns nun den 1-Formen  $u \in \Omega_N^1$  zu und erwarten einen pull-back  $\phi^*(u) \in \Omega_M^1$ . Zur Konstruktion nutzen wir die Vektoren

$$\phi^*(u)(x) \in T_x^* M , \quad u(\phi(x)) \in T_{\phi(x)}^* N .$$

Zu jedem Vektorfeld  $X$  auf  $M$  gibt es Vektoren in den zugehörigen Dualräumen:

$$X(x) \in T_x M , \quad T_x \phi X(x) \in T_{\phi(x)} N .$$

Dies gibt uns die Möglichkeit, den pull-back von 1-Formen durch die Bedingung

$$\langle X(x), \phi^*(u)(x) \rangle = \langle T_x \phi X(x), u(\phi(x)) \rangle$$

eindeutig festzulegen, indem  $X$  über alle Vektorfelder auf  $M$  und  $x$  über alle Punkte von  $M$  variiert.

Die Konstruktion des pull-backs läßt sich nun leicht auf alle  $k$ -Formen ausdehnen, indem man fordert, daß  $\phi^*$  linear ist und äußere Produkte erhält:

$$\phi^*(u_1 \wedge \cdots \wedge u_k) = \phi^*(u_1) \wedge \cdots \wedge \phi^*(u_k) \quad (u_i \in \Omega_N^1)$$

Die so konstruierte Abbildung

$$\Omega_N := ?(\wedge T^* N) \xrightarrow{\phi^*} \Omega_M := ?(\wedge T^* M)$$

nennt man den *pull-back von Differentialformen*. Sie kommutiert nicht nur mit dem äußeren Produkt sondern auch mit der äußeren Ableitung:

$$\phi^*(u \wedge v) = \phi^*(u) \wedge \phi^*(v) , \quad \phi^*(dv) = d\phi^*(v) , \quad u, v \in \Omega_N .$$

Schließlich respektiert  $\phi^*$  die  $\mathcal{A}$ -Modulstruktur:

$$\phi^*(fv) = \phi^*(f)\phi^*(v) \quad (f \in \mathcal{A}_N, v \in \Omega_N).$$

Anmerkung: Ein Morphismus  $\phi : M \rightarrow N$  führt i.allg. nicht zu Abbildung zwischen Vektorfeldern; denn dazu wäre nötig, daß zu jedem Vektorfeld  $X$  auf  $M$  ein Vektorfeld  $Y$  auf  $N$  existiert mit der Eigenschaft

$$Y(\phi(x)) = T_x\phi X(x) \quad (x \in M).$$

Dies ist jedoch nur garantiert, falls  $\phi$  invertierbar ist:

$$Y(q) = T_x\phi X(x) \quad (q \in N, x = \phi^{-1}(q)).$$

In vielen Situationen, die wir später betrachten wollen, ist dies gewährleistet, so in dem folgenden Fall:

$$M = N, \quad \phi \in \text{Diff}(M).$$

Nehmen wir etwa an, eine Lie-Gruppe  $G$  operiere auf  $M$ , also  $G \subset \text{Diff}(M)$ . Die Wirkung der Gruppe drückt man oft durch eine "Rechtsmultiplikation" aus:

$$M \times G \rightarrow M, \quad (x, g) \mapsto xg,$$

so daß

$$x(gg') = (xg)g'$$

gilt. Jedes  $g \in G$  induziert vermöge der pull-back-Konstruktion eine lineare Abbildung  $g^* : \Omega \rightarrow \Omega$ . Man rechnet sofort nach, daß

$$(gg')^* = g^* \circ g'^*, \quad g, g' \in G$$

gilt, d.h. die Abbildung  $g \mapsto g^*$  ist eine lineare Darstellung von  $G$ . Die infinitesimale Form dieser Darstellung ist durch die Lie-Ableitung gegeben, mit der wir uns im nächsten Kapitel beschäftigen.

### 3.4 Die Lie-Ableitung

Wir haben Vektorfelder als Derivationen der Funktionenalgebra  $\mathcal{A}$  eingeführt. Indem wir  $\mathcal{A} = \Omega^0$  auch als Teil der größeren Algebra  $\Omega$  auffassen können, entsteht die Frage, ob sich ein Vektorfeld  $X$  zu einer Derivation

$$L_X : \Omega \rightarrow \Omega$$

erweitern läßt. Die Antwort ist positiv und  $L_X$  wird die *Lie-Ableitung* genannt. Sie kann durch drei Eigenschaften definiert werden:

(1) Falls  $f \in \Omega^0$ , so gilt  $L_X f = Xf$ .

(2) Falls  $u \in \Omega^1$ , so ist  $L_X u \in \Omega^1$  durch

$$\langle Y, L_X u \rangle = X \langle Y, u \rangle - \langle [X, Y], u \rangle$$

gegeben.

(3) Es gilt eine Leibniz-Regel (Produktregel der Differentiation) der folgende Art:

$$L_X(u \wedge v) = (L_X u) \wedge v + u \wedge L_X v, \quad u \in \Omega^1, v \in \Omega.$$

Selbstverständlich folgt hieraus die allgemeine Leibniz-Regel

$$L_X(u \wedge v) = (L_X u) \wedge v + u \wedge L_X v, \quad u, v \in \Omega.$$

Vom Standpunkt der Physik ist es nützlich, sich die Lie-Ableitung als eine "infinitesimale Transformation" von  $\Omega$  vorzustellen, d.h. als erzeugendes Element einer einparametrischen Gruppe von Automorphismen. Da  $L_X$  die Wirkung von  $X$  auf ganz  $\Omega$  fortsetzt, ist  $X \mapsto L_X$  eine Lie-Homomorphismus:

$$L_{\alpha X + \beta Y} = \alpha L_X + \beta L_Y, \quad [L_X, L_Y] = L_{[X, Y]} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

Man überzeugt sich leicht, daß die äußere Ableitung und Lie-Ableitung kommutieren,

$$d(L_X v) = L_X(dv) \quad (v \in \Omega),$$

was wir auch in der Form  $[d, L_X] = 0$  schreiben können.

Die formale Ähnlichkeit von  $\Omega$  mit dem Fock-Raum der Teilchenphysik führt dazu, daß viele dem Physiker bekannte Konstruktionen (Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren für Fermionen, Operator der Teilchenzahl usw.) in der Differentialgeometrie ihre Entsprechung – jedoch mit anderen Namen – haben.

**Definition.** Jeder 1-Form  $u$  ordnen wir den *Operator der äußeren Multiplikation*  $\epsilon(u)$  auf  $\Omega$  zu:

$$\epsilon(u)v = u \wedge v \quad (v \in \Omega).$$

Dual dazu ordnen wir jedem Vektorfeld  $X$  den *Operator der Kontraktion*  $\iota(X)$  auf  $\Omega$  zu mit den definierenden Eigenschaften:

(1) Falls  $f \in \Omega^0$ , so gilt  $\iota(X)f = 0$ .

(2) Falls  $u \in \Omega^1$ , so ist  $\iota(X)u \in \Omega^0$  durch  $\iota(X)u = \langle X, u \rangle$  gegeben.

(3) Es gilt eine Produktregel der folgende Art:

$$\iota(X)(u \wedge v) = \langle X, u \rangle v - u \wedge \iota(X)v, \quad u \in \Omega^1, v \in \Omega.$$

Die Entsprechung

$$\begin{aligned} \epsilon(u) : \Omega^k &\rightarrow \Omega^{k+1} && \Leftrightarrow && \text{Erzeugungsoperator} \\ \iota(X) : \Omega^k &\rightarrow \Omega^{k-1} && \Leftrightarrow && \text{Vernichtungsoperator} \\ 1 \in \Omega^0 &&& \Leftrightarrow && \text{Vakuum} \end{aligned}$$

ist offensichtlich, und es verwundert uns nicht, wenn man aus den Definitionen die Gültigkeit der Antivertauschungsrelation

$$\{\iota(X), \epsilon(u)\} = \langle X, u \rangle \in ?$$

folgt. Interessant sind zwei weitere (Anti-)Kommutatoren:

$$\{\iota(X), d\} = L_X, \quad [L_X, \iota(Y)] = \iota([X, Y]).$$

Erstere kann zur alternative Definition der Lie-Ableitung benutzt werden. Sie ist in der Literatur als *Cartan-Relation* bekannt.

### 3.5 Differentialformen mit Werten in einem Vektorraum

Bislang waren Differentialformen reell-wertig. Wir benötigen für unsere Zwecke eine Verallgemeinerung, bei der  $\mathbb{R}$  durch einen Vektorraum  $E$  (über  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ ) ersetzt wird. Dies kann auf mehrfache Weise beschrieben werden. Eine Methode besteht darin, daß man dem Vektorraum  $E$  das triviale Bündel  $\mathfrak{E} = M \times E$  zuordnet und das Produktbündel  $\wedge T^*M \otimes \mathfrak{E}$  konstruiert, dessen

$$\omega \in \Omega(M, E) := ?(\wedge T^*M \otimes \mathfrak{E})$$

Schnitte gerade die gewünschten  $E$ -wertigen Differentialformen sind. Der Raum der  $E$ -wertigen  $k$ -Formen wird entsprechend mit  $\Omega^k(M, E)$  bezeichnet.

Sei  $\omega$  eine solche  $k$ -Form und  $X_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) gewöhnliche Vektorfelder auf  $M$ . Für jedes  $x \in M$  gilt aufgrund unserer Konstruktion:

$$\langle X_1(x) \wedge \dots \wedge X_k(x), \omega(x) \rangle \in E.$$

Anders ausgedrückt:

$$\langle X_1 \wedge \dots \wedge X_k, \omega \rangle \in ?(\mathfrak{E}),$$

wobei  $\mathfrak{E}$  (der Raum der Schnitte des Bündels  $\mathfrak{E}$ ) nicht anderes ist als der Vektorraum  $C^\infty(M, E)$  aller Funktionen  $f : M \rightarrow E$ .

In den Eichtheorien ist der Fall bedeutsam, bei dem  $E$  eine Lie-Algebra ist. Man sieht an dem von uns gewählten Zugang, daß  $\mathfrak{E}$  auch ein beliebiges (nicht-triviales) Vektorbündel sein kann. Die Konstruktion ergibt dann  $\mathfrak{E}$ -wertige Differentialformen. In diesem Fall gilt

$$\langle X_1(x) \wedge \cdots \wedge X_k(x), \omega(x) \rangle \in E_x$$

mit  $E_x$  der Faser über  $x \in M$ . Wir werden Beispiele hierfür sehen.

### 3.6 Semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten

Eine nichtentartete symmetrische Bilinearform in jedem Tangentialraum  $T_x M$ , die differenzierbar von  $x \in M$  abhängt, definiert eine semi-Riemannsche Geometry. Falls darüber hinaus die Bilinearform positiv ist (also ein Skalarprodukt darstellt), haben wir es mit einer Riemannschen Mannigfaltigkeit im klassischen Sinn zu tun. Anders ausgedrückt: Eine (semi-)Riemannsche Mannigfaltigkeit induziert eine (pseudo-)euklidische Struktur in jedem ihrer Tangentialräume. Jede Metrik besitzt eine Signatur  $(r, s)$  mit  $r + s = n$ . Der Einfachheit halber werden wir  $s$  allein als *die Signatur* bezeichnen, so daß  $s = 0$  für Riemannsche Mannigfaltigkeiten gilt. Die Allgemeine Relativitätstheorie wird auf Mannigfaltigkeiten der Signatur  $s = 1$  formuliert.

Entscheidend für das folgende ist, daß die Riemannsche Geometry zu einer Bilinearform  $(X, Y) \in \mathfrak{V}$  in dem Raum der Vektorfelder,  $\mathfrak{V}$ , führt.

Lokal (in einer Karte) gibt es eine Basis  $(\partial_i)_{i=1}^n$ , so daß  $[\partial_i, \partial_j] = 0$  gilt. Dort hat ein Vektorfeld die Form  $X = X^i \partial_i$  und der metrische Tensor ist durch

$$g_{ij} = (\partial_i, \partial_j), \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Da die Bilinearform  $(\cdot, \cdot)$  nach Voraussetzung nichtentartet ist, wird durch sie ein Isomorphismus

$$\mathfrak{V} \rightarrow \mathfrak{V}^*, \quad Y \mapsto Y^\#$$

mit der Eigenschaft  $\langle X, Y^\# \rangle = (X, Y)$  definiert. Die bedeutet auch, daß eine symmetrische Bilinearform auf dem Raum der 1-Formen,  $\mathfrak{V}^*$ , induziert wird:  $(X^\#, Y^\#) = (X, Y)$ . Lokal können wir die duale Basis  $dx^i$  in  $\mathfrak{V}^*$  einführen mit der definierenden Eigenschaft  $\langle \partial_i, dx^j \rangle = \delta_i^j$ . Es gilt dann  $\partial_i^\# = g_{ij} dx^j$ , und der inverse metrische Tensor ist  $g^{ij} = (dx^i, dx^j)$ .

Die Metrik auf  $\mathfrak{V}^* = \Omega^1$  kann in kanonischer Weise zu einer Metrik auf  $\Omega^k$  und somit auf ganz  $\Omega$  erweitert werden, und zwar durch die Formel

$$(u_1 \wedge \cdots \wedge u_k, v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) = \text{Det}(f_{\alpha\beta}), \quad f_{\alpha\beta} = (u_\alpha, u_\beta) \in ?$$

gültig für alle  $u_\alpha, v_\beta \in \Omega^1$ .

Eine orientierte Mannigfaltigkeit der Dimension  $n$  besitzt immer eine kanonische Volumenform  $\omega_0 \in \Omega^n$ . Sie ist lokal durch

$$\omega_0 = |\text{Det}(g_{ij})|^{1/2} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

definiert<sup>13</sup>. Sie gibt Anlaß zu einer der wichtigsten Konstruktionen in der Riemannschen Geometrie, des *Hodge-Operators*: Die Abbildung

$$* : \Omega \rightarrow \Omega, \quad * : \Omega^k \rightarrow \Omega^{n-k}$$

ist durch die Eigenschaft

$$u \wedge *v = (u, v)\omega_0 \quad (u, v \in \Omega^k)$$

festgelegt. Es gilt dann  $*1 = \omega_0$  und  $*\omega = (-1)^s$ , wobei  $s$  die Signatur der Metrik ist. Sodann auch

$$** = (-1)^{k(n-k)+s} : \Omega^k \rightarrow \Omega^k.$$

Man sieht, bis auf ein Vorzeichen ist der Hodge-Operator eine Involution. Verbunden mit dem Hodge-Operator ist die *Koableitung*: Die Abbildung  $d^* : \Omega^k \rightarrow \Omega^{k-1}$  (falls  $k \geq 1$  und  $d^* = 0$  falls  $k = 0$ ) ist durch

$$d^* = \sigma * d*, \quad \sigma = \pm 1$$

definiert, wobei das Vorzeichen durch

$$d(u \wedge *v) = ((v, du) - (d^*v, u))\omega_0, \quad u \in \Omega^k, v \in \Omega^{k+1} \quad (36)$$

festgelegt ist<sup>14</sup>.

Man findet  $\sigma = (-1)^{kn+k+s+1}$  und die folgenden Eigenschaften:

- (1)  $d^{*2} = 0, \quad *d^*d = dd^*, \quad **dd^* = d^*d^*, \quad d * d^* = d^* * d$
- (2)  $*(uf) = (*u)f, \quad *(d^*u) = (-1)^k d(*u), \quad d^*(*u) = (-1)^{k-1} *(du)$

mit  $f \in ?$  und  $u \in \Omega^k$ . Als *Laplace-Beltrami-Operator* bezeichnet man<sup>15</sup>

$$\Delta = (d + d^*) = dd^* + d^*d.$$

---

<sup>13</sup>Dieser Ausdruck ist invariant gegenüber einem Wechsel des Koordinatensystems, sofern dieser Wechsel die Orientierung der Mannigfaltigkeit erhält.

<sup>14</sup>Manchmal bezeichnet man auch  $\delta = -d^*$  als die Koableitung.

<sup>15</sup>Auch hier ist es so, daß oft  $-\Delta$  diesen Namen trägt.

Wir definieren das  $L^2$ -Produkt von  $u, v \in \Omega^k$  mit kompakten Träger durch eine Integration über die Mannigfaltigkeit:

$$(u, v)_{L^2} = \int_M (u, v) \omega_0 = \int_M u \wedge *v .$$

Nur für Riemannsche Mannigfaltigkeiten ist dieses Produkt positiv definit, sonst indefinit.

Die Maxwell-Gleichungen im Vakuum lauten

$$dF = 0, \quad d^*F = 0$$

für das Maxwell-Feld  $F = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}(x)dx^\mu \wedge dx^\nu$ , wenn  $M$  mit dem Minkowski-Raum identifiziert wird. Sie resultieren aus dem Variationsprinzip

$$\frac{1}{2}(F, F)_{L^2} = \text{stationär}$$

wobei man die rechte Seite als die *Wirkung* bezeichnet. Oft nennt man  $*F$  den *dualen Feldstärkentensor* und schreibt die zweite Maxwell-Gleichung in der Form  $d(*F) = 0$ . Mit dem Poincaré-Lemma erhalten wir die Darstellung  $F = dA$ , wobei  $A = A_\mu(x)dx^\mu$  das Potential ist. Eichtransformationen werden durch

$$A \rightarrow A + df \quad (f \in \Omega^0)$$

und die Lorentz-Bedingung durch  $d^*A = 0$  beschrieben, so daß die Wellengleichung  $\Delta A = d^*dA = 0$  gilt. Physiker schreiben jedoch  $\square$  anstelle von  $\Delta$  und sprechen von dem d'Alembert-Operator. In Materie werden diese Gleichungen durch die Anwesenheit eines Stromes  $j$  modifiziert. Es ist sinnvoll, den Strom nicht als 1-Form, sondern vermöge des Hodge-Operators als 3-Form einzuführen:

$$d(*F) = j ,$$

so daß die Kontinuitätsgleichung die Form  $dj = 0$  annimmt und aufgrund des Satzes von Gauß der Fluß durch eine 3-dimensionale Oberfläche verschwindet:

$$\int_{\partial G} j = \int_G dj = 0 \quad (G \subset M).$$

Zum Abschluß berechnen wir einen expliziten Ausdruck für  $d^*F$  in der allgemeinen Situation, wo der metrische Tensor  $g^{\mu\nu} = (dx^\mu, dx^\nu)$  ortsabhängig ist, jedoch  $|\text{Det}(g^{\mu\nu})| = 1$  erfüllt. Dazu setzen wir

$$F = \frac{1}{2}dx^\mu \wedge dx^\nu F_{\mu\nu} , \quad d^*F = dx^\mu (d^*F)_\mu , \quad *F = \frac{1}{2}dx^\mu \wedge dx^\nu (*F)_{\mu\nu}$$

sowie

$$F^{\mu\nu} = g^{\mu\sigma} g^{\nu\tau} F_{\sigma\tau} , \quad (d^*F)^\mu = g^{\mu\nu} (d^*F)_\nu$$

und erhalten für beliebiges  $u = dx^\mu u_\mu \in \Omega^1$ :

$$\begin{aligned}
u \wedge *F &= \frac{1}{2} dx^\nu \wedge dx^\sigma \wedge dx^\tau u_\nu (*F)_{\sigma\tau} \\
d(u \wedge *F) &= \frac{1}{2} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\sigma \wedge dx^\tau \partial_\mu (u_\nu (*F)_{\sigma\tau}) \\
&= \omega_0 \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\sigma\tau} \partial_\mu (u_\nu (*F)_{\sigma\tau}) \\
&= \omega_0 ((F, du) - (d^*F, u)) \quad (\text{siehe (36)}) \\
&= \omega_0 (F^{\mu\nu} \partial_\mu u_\nu - (d^*F)^\nu u_\nu).
\end{aligned}$$

Hieraus folgen zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned}
F^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\sigma\tau} (*F)_{\sigma\tau} \\
(d^*F)^\nu &= -\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\sigma\tau} \partial_\mu (*F)_{\sigma\tau}.
\end{aligned}$$

Insbesondere folgt so die einfache Beziehung

$$(d^*F)^\nu = -\partial_\mu F^{\mu\nu}.$$

Durch eine analoge Rechnung finden wir

$$A = dx^\mu A_\mu, \quad A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu \quad \Rightarrow \quad d^*A = -\partial_\mu A^\mu.$$

Die Gleichung  $d^*A = 0$  ist als Lorentz-Bedingung bekannt. Sie schränkt die Eichfreiheit ein.

### 3.7 Der Levi-Civita-Zusammenhang

Tangentialräume in verschiedenen Punkten der Mannigfaltigkeit obwohl isomorph können i.allg. nicht miteinander identifiziert werden: Es gibt keinen Zusammenhang, der einen Vektor  $a \in T_x(M)$  in einen Vektor  $b \in T_{x'}M$  überführt. Hat man jedoch einen solchen Zusammenhang definiert, so spricht man von einem *Paralleltransport*. Dem Physiker begegnet ein solcher Transport zum erstenmal in Form des Levi-Civita-Zusammenhanges einer semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit<sup>16</sup>. Er wird infinitesimal dadurch charakterisiert, daß man jedem Vektorfeld  $X$  einen Differentialoperator  $\nabla_X$  mit gewissen Eigenschaften zuordnet. Es ist dieser mehr algebraische Aspekt, den wir hervorheben wollen, weil er verallgemeinerungsfähig ist, nämlich auf beliebige Vektorbündel  $\mathfrak{E}$  übertragen werden kann.

Zunächst wollen wir den Begriff "Differentialoperator" näher beleuchten, d.h. abheben von der Klasse der *lokalen Operatoren*. Während Differentialoperatoren zwischen infinitesimal benachbarten Fasern von  $\mathfrak{E}$  vermitteln,

<sup>16</sup>Siehe hierzu die mathematische Ausformung der Allgemeinen Relativitätstheorie.

operieren lokale Operatoren nur innerhalb der Fasern. Wie läßt sich dies streng formulieren?

Dazu betrachten wir als Beispiel den Raum  $\Omega = ?(\wedge T^*M)$  der Differentialformen und beschreiben ihn als ein  $?$ -Module. Dies entspricht der Beobachtung, daß Elemente  $v \in \Omega$  mit Funktionen  $f, g \in ?$  multipliziert werden können, so daß gilt:

$$(f + g)v = fv + gv, \quad (fg)v = f(gv).$$

Folglich läßt sich jedes  $f \in ?$  auch als Multiplikationsoperator in  $\Omega$  auffassen. Ein Operator  $A : \Omega \rightarrow \Omega$  heißt *lokal*, wenn  $[A, f] = 0$  gilt, d.h. wenn  $A$  die Struktur von  $\Omega$  als ein  $?$ -Module respektiert. Die Operatoren  $\iota(X)$  und  $\epsilon(u)$  sind solche Beispiele:

$$[\iota(X), f] = 0, \quad [\epsilon(v), f] = 0.$$

Operatoren, die die Bedingung der Lokalität nicht erfüllen, weil sie  $f$  differenzieren, werden Differentialoperatoren genannt. Die äußere Ableitung und die Lie-Ableitung sind Beispiele hierfür:

$$[d, f] = \epsilon(df), \quad [L_X, f] = Xf.$$

Wir kommen nun zu der entscheidenden

**Definition.** Sei  $M$  eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit. Der *Levi-Civita-Zusammenhang*  $\nabla$ , auch *kovariante Ableitung* auf dem Tangentialbündel genannt, ist durch zwei Eigenschaften charakterisiert:

1. Er ist torsionsfrei

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0, \quad \nabla_X := \epsilon(X) \circ \nabla.$$

2. Er erhält die Metrik:

$$d(X, Y) = (\nabla X, Y) + (X, \nabla Y).$$

Bemerkung: Man charakterisiert den Levi-Civita-Zusammenhang entweder durch einen Operator

$$\nabla : \mathfrak{X} \rightarrow ?(T^*M \otimes TM),$$

oder durch die Richtungsableitungen

$$\nabla_X : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X} \quad (X \in \mathfrak{X}).$$

Somit ist  $(\nabla X, Y) \in \mathfrak{V}^*$ , also eine 1-Form, ebenso wie  $(X, \nabla Y)$  und  $d(X, Y)$ , da  $(X, Y) \in ? = \Omega^0$ . In lokalen Koordinaten haben wir die Darstellung durch Christoffel-Symbole:

$$\nabla \partial_j = ?_{ij}^k dx^i \otimes \partial_k .$$

wobei

$$?_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}) .$$

Dualität erlaubt die Übertragung des Levi-Civita-Zusammenhanges vom Tangential- auf das Kotangentialbündel, d.h. wir definieren

$$\nabla v \in ?(T^*M \otimes T^*M) \quad \text{für} \quad v \in \mathfrak{V}^*$$

durch

$$d\langle X, v \rangle = \langle \nabla X, v \rangle + \langle X, \nabla v \rangle \in \mathfrak{V}^* .$$

Es folgt damit die Gültigkeit von

$$d(u, v) = (\nabla u, v) + (u, \nabla v) \in \mathfrak{V}^* \quad (u, v \in \mathfrak{V}^*),$$

was auf andere Weise die Erhaltung der Metrik ausdrückt. Lokal erhalten wir so die Beschreibung

$$\nabla dx^j = -?_{ik}^j dx^i \otimes dx^k .$$

(Man beachte das Minuszeichen.)

Unser nächstes Ziel ist die Übertragung des Levi-Civita-Zusammenhanges von dem Kotangentialbündel  $T^*M$  auf das größere Bündel  $\bigwedge T^*M$ , dessen Schnitte Differentialformen sind, an denen wir vornehmlich interessiert sind. Die Übertragung geschieht auf bewährte Weise durch drei Forderungen:

- (1) Falls  $f \in \Omega^0$ , so gilt  $\nabla_X f = Xf$ .
- (2) Falls  $u \in \Omega^1$ , so ist  $\nabla_X u \in \Omega^1$  durch  $X\langle Y, u \rangle = \langle \nabla_X, u \rangle + \langle Y, \nabla_X u \rangle$  gegeben.
- (3) Es gilt die Leibniz-Regel  $\nabla_X(u \wedge v) = \nabla_X u \wedge v + u \wedge \nabla_X v$  mit  $u \in \Omega^1$  und  $v \in \Omega$ .

Die Leibniz-Regel ist äquivalent der Kommutator-Relation

$$[\nabla_X, \epsilon(u)] = \epsilon(\nabla_X u) .$$

Nach Konstruktion ist  $\nabla_X$  ein Differentialoperator auf  $\Omega$ , der den Grad  $k$  einer Differentialform erhält und  $[\nabla_X, f] = Xf$  erfüllt, wenn wir  $f \in ?$  als Multiplikationsoperator auffassen. In lokalen Koordinaten gilt

$$\nabla_{\partial_i} dx^j = -?_{ik}^j dx^k ,$$

also

$$X = X^i \partial_i, \quad u = u_i dx^i \quad \Rightarrow \quad \nabla_X u = X^i (\partial_i u_k - ?_{ik}^j u_j) dx^k .$$

### 3.8 Lie-Gruppen als Mannigfaltigkeiten

Unter einer Lie-Gruppe  $G$  der Dimension  $m$  versteht man eine differenzierbare Mannigfaltigkeit (der Dimension  $m$ ), die zugleich eine Gruppenstruktur hat. Das neutrale Element (oder Einheit) in  $G$  bezeichnen wir mit  $e$ . Jedes  $g \in G$  definiert eine *Linkstranslation*

$$l_g : G \rightarrow G \quad h \mapsto gh$$

und eine *Rechtsstranslation*

$$r_g : G \rightarrow G \quad h \mapsto hg.$$

Beide Abbildungen sind Diffeomorphismen von  $G$ . Mit  $?_G$  bezeichnen wir die Algebra der Funktionen  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ , erinnern an die induzierten linearen Abbildungen

$$\begin{aligned} T_h l_g &: T_h G \rightarrow T_{gh} G, & (T_h l_g X(h))f &= X(h)(f \circ l_g) & (f \in ?_G) \\ T_h r_g &: T_h G \rightarrow T_{hg} G, & (T_h r_g X(h))f &= X(h)(f \circ r_g) \end{aligned}$$

und die hierdurch beschriebenen Automorphismen des Tangentialbündels:

$$Tl_g; TG \rightarrow TG, \quad Tr_g; TG \rightarrow TG.$$

Ein Vektorfeld  $X \in ?(TG)$  wird *rechts-invariant* genannt, wenn

$$T_h r_g X = X \circ r_g, \quad \text{das heißt} \quad T_h r_g X(h) = X(hg)$$

Ein rechts-invariantes Vektorfeld  $X$  ist bereits eindeutig durch den den Vektor  $X(e) \in T_e G$  gegeben:  $X(g) = T_e r_g X(e)$ . Den Tangentialraum  $T_e G$  bezeichnen wir mit  $\mathfrak{g} = \text{Lie } G$ . Wir erhalten somit eine 1:1-Korrespondenz zwischen Vektoren in  $\mathfrak{g}$  und rechts-invarianten Vektorfeldern:

$$r_* : \mathfrak{g} \rightarrow ?(TM), \quad (r_* a)(g) = T_e r_g a \quad (a \in \mathfrak{g}).$$

Der Lie-Kommutator  $[X, Y]$  zweier rechts-invarianten Vektorfelder ist wieder rechts-invariant. Dies erlaubt uns, den Lie-Kommutator  $\mathfrak{g}$  zu übertragen:

$$r_*[a, b] = [r_* a, r_* b] \quad (a, b \in \mathfrak{g}).$$

Folglich ist  $\mathfrak{g}$  eine Lie-Algebra.

Auf  $\mathfrak{g}$  wirkt eine Darstellung von  $\mathfrak{g}$ , die man die *adjungierte Darstellung* nennt:

$$\text{ad}(a) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}, \quad b \mapsto [a, b].$$

Sie führt auf eine ausgezeichnete quadratische Form

$$(a, b) = \text{Spur}(\text{ad}(a)\text{ad}(b)) ,$$

die man die *Killing-Form* von  $\mathfrak{g}$  nennt. Da wir jedem  $a \in \mathfrak{g} := T_e G$  in kanonischer Weise einen Vektor  $T_e r_g a \in T_g G$  zuordnen, können wir die Killing-Form auf alle Tangentialräume  $T_g G$  durch

$$(T_e r_g a, T_e r_g b) = (a, b)$$

übertragen. In Situationen, wo die Killing-Form nicht entartet ist, besitzen wir somit eine semi-Riemannsche Struktur auf  $G$ . Für kompakte halbeinfache Gruppen ist  $-(a, b)$  positiv definit.

Schließlich wenden wir uns den Differentialformen  $u \in \Omega_G$  zu, auf denen die Gruppe  $G$  operiert:

$$r_g^* : \Omega_G \rightarrow \Omega_G .$$

Sei speziell  $u$  eine 1-Form. Für jedes Vektorfeld  $X \in \mathfrak{X}(TG)$  gilt somit

$$\langle T_h r_g X(h), u(hg) \rangle = \langle X(h), r_g^*(u)(h) \rangle ,$$

Noch spezieller: Sei  $X$  ein rechts-invariantes Vektorfeld, so erhalten wir die Aussage

$$\langle X(hg), u(hg) \rangle = \langle X(h), r_g^*(u)(h) \rangle ,$$

gültig für alle  $g, h \in G$ , und damit für  $h = e$ :

$$\langle X(g), u(g) \rangle = \langle X(e), r_g^*(u)(e) \rangle ,$$

Eine Differentialform  $u$  heißt *rechts-invariant*, wenn  $r_g^* u = u$  für alle  $g \in G$  gilt. In diesem Fall gilt sogar

$$\langle X(g), u(g) \rangle = \langle X(e), u(e) \rangle$$

für alle  $g \in G$  und jedes rechts-invariante Vektorfeld  $X$ . Wir haben somit eine 1:1-Korrespondenz zwischen rechts-invarianten 1-Formen  $u \in \Omega_G^1$  und Vektoren  $u(e) \in \mathfrak{g}^*$ , wobei  $\mathfrak{g}^*$  den Dualraum von  $\mathfrak{g}$  bezeichnet.

Oft betrachtet man auch  $\mathfrak{g}$ -wertige Differentialformen, d.h. Elemente des Raumes  $u \in \Omega(G, \mathfrak{g}) = \Omega_G \otimes \mathfrak{g}$ , so daß  $\langle X(g), u(g) \rangle \in \mathfrak{g}$ .

**Definition.** Als *kanonische 1-Form* oder *Zusammenhang* auf  $G$  bezeichnet man  $\Theta \in \Omega^1(G, \mathfrak{g})$  mit

$$\Theta(h) = T_h r_{h^{-1}} : T_h G \rightarrow T_e G = \mathfrak{g} \quad (h \in G).$$

Aufgrund der Definition besitzt  $\Theta$  die Eigenschaft

$$\langle X(h), \Theta(h) \rangle = T_h r_{h^{-1}} X(h) \in \mathfrak{g}, \quad h \in G, \quad X \in ?(TG).$$

Da  $\Theta(h)$  die Vektoren von  $T_h G$  mit denen von  $T_e G$  in Beziehung setzt, kann man die Wirkung als eine Parallelverschiebung interpretieren. Deshalb definiert  $\Theta$  einen *Zusammenhang* auf der Lie-Gruppe. Man zeigt leicht die Gültigkeit der folgenden Relation

$$d\Theta + \frac{1}{2}[\Theta, \Theta] = 0 \quad (\text{Maurer-Cartan}),$$

wobei  $d : \Omega_G^1 \rightarrow \Omega_G^2$  die äußere Ableitung bezeichnet und man das Klammer-symbol geeignet definiert: Seien  $u \otimes a$  und  $v \otimes b$  Elemente in  $\Omega_G^1 \otimes \mathfrak{g}$ , so setzt man

$$[u \otimes a, v \otimes b] = (u \wedge v) \otimes [a, b].$$

Die Klammer ist damit auf das Lie-Produkt  $[a, b]$  zurückgeführt. Es wird später klar, daß die Maurer-Cartan-Relation das Verschwinden der Krümmung ausdrückt.

### 3.9 Zusammenhänge auf allgemeinen Vektorbündeln

Sei  $\mathfrak{E}$  ein Vektorbündel über der Mannigfaltigkeit  $M$ . Selbst wenn  $M$  in Anwendungen der Minkowski-Raum oder irgendein anderer flacher Raum ist, gibt es nicht-triviale Zusammenhänge – auch kovariante Ableitungen genannt – auf  $\mathfrak{E}$ . In der Feldtheorie interessiert man sich sogar für den Raum aller Zusammenhänge dieser Art. Der Levi-Civita-Zusammenhang erweist sich nur als ein Beispiel, bei dem  $\mathfrak{E}$  mit dem Tangentialbündel  $TM$  übereinstimmt. Ja selbst in der Situation  $\mathfrak{E} = TM$  gibt es viele weitere Beispiele von kovarianten Ableitungen auf  $\mathfrak{E}$ .

“Felder” im Sinne der Feldtheorie sind stets Schnitte eines geeigneten Vektorbündels  $\mathfrak{E}$  und damit Elemente von  $?( \mathfrak{E} )$ . Wir betonen auch an dieser Stelle, daß  $?( \mathfrak{E} )$  ein  $?$ -Modul ist, d.h. Felder  $\phi \in ?( \mathfrak{E} )$  können mit Funktionen  $f, g \in ?$  (reell-wertige Funktionen auf  $M$ ) multipliziert werden, so daß gilt:

$$(f + g)\phi = f\phi + g\phi, \quad (fg)\phi = f(g\phi).$$

Sind  $\mathfrak{E}_1$  und  $\mathfrak{E}_2$  zwei Vektorbündel über der gleichen Mannigfaltigkeit  $M$ , so konstruiert man deren Tensorprodukt  $\mathfrak{E}_1 \otimes \mathfrak{E}_2$  auf naheliegender Weise, um ein neues Vektorbündel zu erhalten. Will man die Produktstruktur auf die Felder übertragen, so ist Vorsicht geboten. Man findet einen Isomorphismus der Form

$$?( \mathfrak{E}_1 ) \otimes_{\Gamma} ?( \mathfrak{E}_2 ) \cong ?( \mathfrak{E}_1 \otimes \mathfrak{E}_2 )$$

gleichbedeutend damit, daß man links die folgende Identifikation vornimmt:

$$(f\phi_1) \otimes \phi_2 = \phi_1 \otimes (f\phi_2), \quad f \in ?, \phi_i \in ?(\mathfrak{E}_i).$$

Sind etwa  $A_i$  Operatoren auf  $?(\mathfrak{E}_i)$ , so läßt sich deren Tensorprodukt  $A_1 \otimes A_2$  auf  $?(\mathfrak{E}_1) \otimes_{\Gamma} ?(\mathfrak{E}_2)$  nur konstruieren, falls  $[A_i, f] = 0$  für alle  $f \in ?$  erfüllt ist, d.h. wenn die Operatoren  $A_i$  die  $?-$ Modulstruktur von  $?(\mathfrak{E}_i)$  respektieren. Erinnerung: Operatoren mit dieser Eigenschaft haben wir *lokale Operatoren* genannt. Zu ihnen gehören der Kontraktionsoperator  $\iota(X)$  und der Multiplikationsoperator  $\epsilon(u)$  (beide auf  $?(\wedge T^*M)$  definiert). Wenn wir im folgenden das Bündel  $\wedge T^*M \otimes \mathfrak{E}$  betrachten, so wollen wir  $\iota(X)$  anstelle von  $\iota(X) \otimes \mathbb{1}$  schreiben. Ähnlich verfahren wir mit anderen lokalen Operatoren.

Unser Hauptinteresse gilt Differentialoperatoren. Sie respektieren nicht die  $?-$ Modulstruktur. Vielmehr ist deren Kommutator mit  $f$  eine charakterisierende Größe. Dies gilt es zu beachten.

**Definition.** Eine *kovariante Ableitung* auf  $\mathfrak{E}$  ist ein Differentialoperator erster Ordnung

$$\nabla : ?(\mathfrak{E}) \rightarrow ?(T^*M \otimes \mathfrak{E}), \quad [\nabla, f] = df \quad (f \in ?)$$

äquivalent den Richtungsableitungen

$$\nabla_X = \iota(X) \circ \nabla : ?(\mathfrak{E}) \rightarrow ?(\mathfrak{E}).$$

Hier ist  $X$  ein beliebiges Vektorfeld, d.h. ein Element von  $?(TM)$ .

Sind  $\nabla_1$  und  $\nabla_2$  zwei kovariante Ableitungen auf  $\mathfrak{E}$ , so ist deren Differenz  $\nabla_1 - \nabla_2$  ein lokaler Operator und

$$\nabla_1 - \nabla_2 \in ?(T^*M \otimes \text{End}\mathfrak{E}).$$

In Worten: Die Differenz ist eine  $\text{End}\mathfrak{E}$ -wertige 1-Form, wobei  $\text{End}\mathfrak{E}$  das Endomorphismenbündel bezeichnet. Dies bedeutet: Die kovarianten Ableitungen bilden einen affinen Raum modelliert über dem Raum  $\text{End}\mathfrak{E}$ .

Wir wollen sehen, was die obige Definition in lokalen Koordinaten bedeutet:

$$\nabla = dx^i \otimes (\partial_i + A_i) = d + dx^i \otimes A_i.$$

In einer anderen Schreibweise

$$\nabla = dx^i \otimes \nabla_{\partial_i} \quad \nabla_{\partial_i} = \partial_i + A_i.$$

Die Felder  $A_i(x)$  – auch “Potential” genannt – sind lokale Schnitte des Bündels  $\text{End}\mathfrak{E}$ . Im allgemeinen kann das Potential *nicht global* definiert werden.

### 3.10 Hauptfaserbündel

Wir haben spezielle Vektorbündel kennengelernt und einen Zusammenhang darauf konstruiert. Wenn wir nun allgemeine Vektorbündel ins Auge fassen, wie sie für die Zwecke der Eichtheorien wichtig werden, so stellen wir fest, daß sie sich oft auf ein Bündel zurückführen lassen, das man aus diesem Grunde das *Hauptfaserbündel* nennt. Die vielen Vektorbündel, die sich daraus ableiten lassen, heißen *assoziierte Bündel*. Ist ein Zusammenhang einmal auf dem Hauptfaserbündel definiert, so überträgt sich diese Struktur auf alle assoziierten Vektorbündel. Wir wollen die nötigen Begriffe stufenweise einführen.

**Definition.** Ein differenzierbares Faserbündel  $(E, M, \pi, G)$  (kurz Bündel  $E$  über  $M$  genannt) besteht aus drei Mannigfaltigkeiten  $E$ ,  $M$  und  $G$  und einer surjektiven differenzierbaren Abbildung  $\pi : E \rightarrow M$ , so daß lokal  $E = M \times G$  gilt und  $\pi$  die natürliche Projektion  $\pi(x, g) = x$  darstellt. Falls  $E = M \times G$  global gilt, so heißt  $E$  ein *triviales Bündel*.  $E$  heißt totaler Raum,  $M$  heißt Basis,  $\pi$  die Projektion und  $G$  die typische Faser.  $E_x = \pi^{-1}(x)$  heißt Faser über  $x \in M$ .

Die in der Definition zitierte *lokale Trivialität* bedarf einer näheren Erläuterung:

*Es existiert eine offene Überdeckung  $(U_i)_{i \in I}$  der Basis  $M$  und dazu eine Familie von Diffeomorphismen*

$$\phi_i : U_i \times G \rightarrow \pi^{-1}(U_i) \quad (i \in I)$$

*so daß  $(\pi \circ \phi_i)(x, g) = x$  für alle  $(x, g) \in U_i \times G$  gilt.*

Man zeigt leicht, daß für jedes  $i \in I$  und jedes  $x \in U_i$  die Abbildung  $f : G \rightarrow E_x$ ,  $g \mapsto \phi_i(x, g)$  ein Diffeomorphismus ist: Jede Faser sieht wie die typische Faser aus. Wenn  $G$  eine Lie-Gruppe ist, so gelangen wir zu dem Konzept des Hauptfaserbündels, müssen hier aber zusätzliche Bedingungen stellen:

**Definition.** Sei  $G$  eine Lie-Gruppe. Ein Bündel  $(P, M, \pi, G)$  heißt *Hauptfaserbündel* (engl. principal  $G$  bundle), wenn gilt:

1.  $G$  operiert *frei* auf  $P$  (von rechts nach Vereinbarung), d.h.  $(p, g) \in P \times G$  wird auf  $pg \in P$  abgebildet, so daß  $pg \neq p$  für  $g \neq e$  ( $e =$  Einheit) und  $(pg)g' = p(gg')$  gilt.
2. Bezeichnen wir den Raum der Bahnen unter der Gruppe  $G$  mit  $P/G$ , so gilt  $M = P/G$ , so daß jede Faser  $\pi^{-1}(x)$  ( $x \in M$ ) mit  $G$  identifiziert werden kann.

3. Das Bündel ist lokal trivial in dem folgenden erweiterten Sinne. Zu jedem  $x \in M$  existiert eine Umgebung  $U$  von  $x$  und ein Diffeomorphismus

$$\phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G, \quad x \mapsto (\pi(x), \varphi(x)),$$

der *äquivariant* ist:

$$\phi(xg) = (\pi(g), \varphi(x)g) \quad (g \in G).$$

Ein typisches Beispiel ist das sog. *Rahmenbündel* (engl. frame bundle) einer Mannigfaltigkeit  $M$  der Dimension  $n$ , das man so konstruiert. Unter einem *Rahmen*<sup>17</sup> im Punkt  $x \in M$  versteht man eine Basis  $b = (e_i)_{i=1}^n$  des Tangentenraumes  $T_x M$ . Die Menge aller solchen Basen soll mit  $B_x$  bezeichnet werden. Ihre disjunkte Vereinigung ( $x$  variiert über  $M$ ) ergibt das Bündel  $B$  mit der Projektion  $\pi : B \rightarrow M$ ,  $b \mapsto x$  wenn  $b \in B_x$ . Sei  $G = GL(n, \mathbb{R})$  die volle reell-lineare Gruppe in  $n$  Dimensionen. Sie operiert frei auf  $B$  vermöge der aus der linearen Algebra vertrauten Basis-Transformation:

$$(b, g) \mapsto bg = b', \quad b = (e_i), \quad b' = (e'_i), \quad e'_i = e_k g^k_i$$

mit  $g = (g^k_i) \in G$ . Dies gibt  $(B, M, \pi, G)$  die Struktur eines Hauptfaserbündels.

Ist in dem vorangegangenen Beispiel  $M$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, so bekommt "Basis" eine neue Bedeutung: Sie ist stets orthonormiert, so daß  $G = O(n)$  gesetzt werden muß. Ist  $M$  darüberhinaus orientiert, so hat man  $G = SO(n)$  zu setzen. Ist  $M$  eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit und hat ihre Metrik die Signatur  $(r, s)$  ( $r + s = n$ ), so setzt man  $G = O(r, s)$ . Die Allgemeine Relativitätstheorie benutzt  $G = O(3, 1)$ , auch Lorentz-Gruppe genannt.

Weitere Beispiele von Hauptfaserbündeln – manche davon interessant für die Feldtheorie – wollen wir nun kurz diskutieren:

1. Die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\alpha} \end{pmatrix}$$

bilden die Elemente einer Untergruppe  $U(1)$  von  $U(2)$ . Den Raum der Rechtsnebenklassen  $U(2)/U(1)$  können wir mit der Sphäre  $S^3$  identifizieren, weil die Nebenklassen durch zwei komplexe Zahlen  $a$  und  $b$  beschrieben werden:

$$u = \begin{pmatrix} a & \cdot \\ b & \cdot \end{pmatrix}, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1.$$

---

<sup>17</sup>Physiker sprechen auch von einem "Vielbein" oder einem  $n$ -Bein.

Die kanonische (Maurer-Cartan) 1-Form auf  $U(2)$  hat die Gestalt

$$\begin{aligned}\Theta &= u^{-1}du = u^*du = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} da & \cdot \\ db & \cdot \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \bar{a}da + \bar{b}db & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Hieraus resultiert die kanonische 1-Form auf  $S^3$ :

$$\omega = \bar{a}da + \bar{b}db.$$

Als lokale Koordinaten wählen wir die Euler-Winkel:

$$a = e^{i(\chi+\phi)/2} \cos(\theta/2), \quad b = e^{i(\chi-\phi)/2} \sin(\theta/2).$$

Darin wird

$$\omega = i(d\chi + d\phi \cos\theta)/2.$$

Wir können nun eine Wirkung der Gruppe  $U(1)$  auf die 3-Sphäre definieren:

$$a \mapsto e^{i\alpha}a, \quad b \mapsto e^{i\alpha}b.$$

Dies entspricht der Ersetzung  $\chi \mapsto \chi + 2\alpha$ . Der Quotient  $S^2 = S^3/U(1)$  wird zur Basis eines  $U(1)$ -Hauptfaserbündel  $S^3$  (ein Spezialfall der Hopf-Faserung, s.u.), auf dem  $\omega$  einen Zusammenhang definiert. Die Winkel  $\theta$  und  $\phi$  werden zu Kugelkoordinaten der 2-Sphäre. Mit der Krümmung

$$\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = d\omega = id\phi \wedge d\theta \frac{1}{2} \sin\theta$$

verbinden wir Physik: Die 2-Form  $B = d\phi \wedge d\theta \frac{1}{2} \sin\theta$  beschreibt – bis auf einen konstanten Vorfaktor – das Magnetfeld eines magnetischen Monopols der Stärke  $ge = \frac{1}{2}$  mit Sitz im Zentrum der 2-Sphäre. Die 1-Form  $\omega$  ist mit seinem Vektorpotential zu identifizieren. Daß hier  $[\omega, \omega] = 0$  gilt, liegt an der abelschen Natur der Eichgruppe  $U(1)$ . Die Nichttrivialität des  $U(1)$ -Bündels  $S^3 \rightarrow S^2$  äußert sich in der Anwesenheit des “Dirac string” im  $\mathbb{R}^3$ .

2. Die Gruppe  $SU(2)$  operiert auf

$$SL(2, \mathbb{C}) = \{A \in GL(2, \mathbb{C}) \mid \text{Det} A = 1\}.$$

Der Quotient  $SL(2, \mathbb{C})/SU(2)$  kann mit dem Hyperboloid

$$V_{+m} = \{p \in M_4^* \mid (p, p) = m^2, p^0 \geq m\}$$

zur Masse  $m$  identifiziert werden, indem man  $AA^* = \underline{p}/m$  setzt mit

$$\underline{p} := \begin{pmatrix} p^0 + p^3 & p^1 - ip^2 \\ p^1 + ip^2 & p^0 - p^3 \end{pmatrix}.$$

Den Wurzeln  $(\underline{p}/m)^{1/2} \in SL(2, \mathbb{C})$  entsprechen spezielle Lorentz-Transformationen (engl. "boosts") unter der Überlagerungsabbildung

$$SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow L_+^\uparrow$$

in die eigentliche orthochrone Lorentzgruppe. Durch  $\pi : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow V_{+m}$  ist ein Hauptfaserbündel mit der Strukturgruppe  $SU(2)$  gegeben.

- Die beiden vorigen Beispiele sind Spezialfälle einer allgemeinen Konstruktion. Sei  $G$  eine abgeschlossene<sup>18</sup> Untergruppe in der Lie-Gruppe  $H$  und  $H/G$  der homogene Raum aller Linksnebenklassen  $hG$  ( $h \in H$ ). Die kanonische Projektion

$$\pi : H \rightarrow H/G, \quad h \mapsto hG$$

definiert ein Hauptfaserbündel mit Strukturgruppe  $G$ . Selbst wenn  $G$  ein Normalteiler (auch invariante Untergruppe genannt) in  $H$  und somit  $H/G$  eine Gruppe darstellt, ist es nur selten möglich,  $H$  mit dem direkten Produkt  $H/G \times G$  zu identifizieren. Wir erwähnen weitere Sonderfälle<sup>19</sup>:

- Das Bündel  $SO(n+1) \rightarrow SO(n+1)/SO(n) \cong S^n$ ,
  - Das Bündel  $SU(n+1) \rightarrow SU(n+1)/SU(n) \cong S^{2n+1}$ ,
  - Das Bündel  $Sp(n+1) \rightarrow Sp(n+1)/Sp(n) \cong S^{4n+3}$ .
  - Das Bündel  $U(3) \rightarrow U(3)/U(2) = S^5$  spielt in der Theorie der Instantonen eine wichtige Rolle, wobei  $U(2)$  die Eichgruppe einer Yang-Mills-Theorie ist.
- Durch  $|z_0|^2 + \dots + |z_n|^2 = 1$  wird die Sphäre  $S^{2n+1}$  in den  $\mathbb{C}^{n+1}$  eingebettet mit einer natürlichen Wirkung  $z_i \mapsto e^{i\alpha} z_i$  der Gruppe  $G = U(1)$  und der Interpretation

$$CP^n = S^{2n+1}/U(1)$$

als komplex-projektiver Raum der Dimension  $n$ . Das Bündel  $S^{2n+1} \rightarrow CP^n$  mit der Strukturgruppe  $U(1)$  wird als *Hopf-Faserung* bezeichnet.

---

<sup>18</sup>Die Abgeschlossenheit in  $H$  ist notwendig, um pathologische Fälle auszuschließen. Ein solcher Fall liegt etwa vor, wenn man die Gruppe  $G = \mathbb{R}$  dicht in den 2-Torus  $H = U(1) \times U(1)$  einbettet.

<sup>19</sup> $S^n$  bezeichnet die  $n$ -Sphäre und  $Sp(n)$  die symplektische Gruppe in  $2n$  Dimensionen.

5. Die Eichgruppe des Standardmodells der Elementarteilchen ist

$$G = S(U(3) \times U(2)) \subset SU(5)$$

mit der Lie-Algebra  $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(3) \times \mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{u}(1)$ . Der homogene Raum

$$M = SU(5)/S(U(3) \times U(2))$$

ist kompakt, 12-dimensional und ein Kandidat für die Raumzeit erweitert um 8 Extradimensionen. Das Bündel  $SU(5) \rightarrow M$  mit Strukturgruppe  $G$  könnte zur Interpretation des Standardmodells dienen.

In der Quantentheorie, der Elementarteilchenphysik und in der Feldtheorie treten verschiedene Lie-Gruppen auf, und zwar immer in geeignet gewählten linearen Darstellungen auf Vektorräumen. Wir sagen in einem solchen Fall, *die Gruppe  $G$  operiert auf dem Vektorraum  $V$*  (von links nach Vereinbarung):

$$(g, v) \mapsto gv \quad (g \in G, v \in V).$$

Verlangt wird, daß diese Abbildung strukturerhaltend ist:

- $g(g'v) = (gg')v$ .
- $g(v + v') = gv + gv'$

Ein Vektorraum  $V$  mit diesen Eigenschaften heißt auch ein  *$G$ -Modul*. Die folgende Konstruktion ist grundlegend für die Feldtheorie:

**Definition.** Sei  $P$  ein Hauptfaserbündel über  $M$  mit der Strukturgruppe  $G$  und  $V$  ein  $G$ -Modul. Unter dem *assozierten Bündel*  $R = P \times_G V$  verstehen wir ein Vektorbündel mit Basis  $M$  und der typischen Faser  $V$ . Der totale Raum  $R$  entsteht aus dem direkten Produkt  $P \times V$  durch Identifizierung:

$$(pg, v) = (p, gv) \quad (\text{alle } g \in G).$$

In einer anderen Formulierung sagt man,  $G$  operiere von rechts auf  $P \times V$  vermöge der Vorschrift  $(p, v)g = (pg, g^{-1}v)$  und  $R$  ist der Raum der Bahnen unter der Wirkung von  $G$ :

$$R = (P \times V)/G.$$

Wir erkennen Sinn und Nutzen dieser Konstruktion sofort an dem folgenden Beispiel. Sei  $B_x$  die Menge aller Basen  $b = (e_i)_{i=1}^n$  in dem Tangentialraum  $T_x M$  eines Punktes  $x \in M$  und  $x = (x^i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$  beliebig. Die Abbildung

$$B_x \times \mathbb{R}^n \rightarrow B_x \times_G \mathbb{R}^n \quad (b, x) \mapsto e_i x^i$$

hat die oben geforderte Eigenschaft, daß  $(bg, x)$  und  $(b, gx)$  das gleiche Bild liefern, wenn  $g$  ein Element der Strukturgruppe ist. Gleichzeitig erkennen wir die Identität

$$B_x \times_G \mathbb{R}^n = T_x M.$$

Da dies für alle  $x \in M$  gilt, folgt, daß das Tangentialbündel einer Mannigfaltigkeit ein zum Rahmenbündel  $B$  assoziiertes Vektorbündel ist:

$$B \times_G \mathbb{R}^n = TM.$$

Die gleiche Aussage ist richtig für viele weitere Vektorbündel, z.B.

$$B \times_G \bigwedge^k \mathbb{R}^n = \bigwedge^k TM, \quad B \times_G \bigwedge \mathbb{R}^n = \bigwedge TM.$$

Sei  $\mathfrak{g} = \text{Lie}G$  die Lie-Algebra von  $G$ . Dann operiert  $G$  darauf vermöge der adjungierten Darstellung:

$$\text{ad}(g)a = gag^{-1}, \quad g \in G, \quad a \in \mathfrak{g}$$

Wir können auch sagen,  $G$  operiere von links auf dem linearen Raum  $\mathfrak{g}$ , und so das *adjungierte Vektorbündel* zu einem Hauptfaserbündel  $P$  (mit Strukturgruppe  $G$ ) konstruieren:

$$\text{ad}(P) = P \times_G \mathfrak{g}.$$

Dies Bündel hat also Fasern, die alle der typischen Faser  $\mathfrak{g}$  gleichen. Bündel deren Fasern Lie-Algebren sind, werden im folgenden eine besondere Rolle spielen.

### 3.11 Zusammenhänge auf einem Hauptfaserbündel

Ein Hauptfaserbündel  $P$  ist in erster Linie ein Mannigfaltigkeit. Vergessen wir alle weitere Struktur, so ist  $P$  ein Objekt in der Kategorie der Mannigfaltigkeiten, und wir sind in der Lage nacheinander die Objekte

$$TP, \quad T^*P, \quad \bigwedge T^*P$$

in der Kategorie der Vektorbündel zu konstruieren. Vektorfelder

$$X \in ?(TP)$$

sind wie früher Schnitte des Tangentialbündels  $TP$ , Differentialformen

$$v \in \Omega_P := ?(\bigwedge T^*P)$$

Schnitte des Vektorbündels  $\wedge T^*P$ .

Jetzt geben wir noch ein weiteres Strukturelement hinzu: Die Lie-Gruppe  $G$  operiert auf  $P$  (von rechts). Durch die pull-back-Konstruktion operiert sie dann auch auf  $\Omega_P$  (von links):

$$g^* : \Omega_P \rightarrow \Omega_P, \quad v \mapsto g^*(v) \quad (g \in G).$$

Siehe hierzu den Abschnitt 3.3.

Es sei  $\mathfrak{g}$  die Lie-Algebra von  $G$  und  $\Omega_P \otimes \mathfrak{g}$  der Raum der  $\mathfrak{g}$ -wertigen Differentialformen. Die Gruppe  $G$  operiert auf  $\Omega_P \otimes \mathfrak{g}$  (von links) vermöge des pull-backs und der adjungierten Darstellung:

$$g(v \otimes a) = g^*(v) \otimes ga g^{-1}, \quad g \in G, \quad a \in \mathfrak{g}, \quad v \in \Omega_P.$$

Eine  $\mathfrak{g}$ -wertige Differentialform  $\omega$  heißt *äquivariant*, wenn sie invariant unter dieser Wirkung von  $G$  ist, d.h. wenn  $g\omega = \omega$  für alle  $g \in G$  gilt.

Schließlich erinnern wir an die Rolle von  $a \in \mathfrak{g}$  als erzeugendes Element einer einparametrischen Untergruppe  $e^{ta} \in G$  ( $t \in \mathbb{R}$ ). Dies erlaubt die Konstruktion des Vektorfeldes  $X_a$  über  $P$  vermöge

$$X_a f(p) = \frac{d}{dt} f(pe^{ta})_{t=0} \quad (f \in ?_P).$$

Mit  $\omega \in \Omega_P^1 \otimes \mathfrak{g}$  gilt  $\langle X_a(p), \omega(p) \rangle \in \mathfrak{g}$ . Wir werden somit durch  $\omega$  und  $p \in P$  zurückgeführt zu einem Element in der Lie-Algebra. Ein Sonderfall tritt ein, wenn es mit dem Ausgangselement  $a \in \mathfrak{g}$  übereinstimmt. Dies führt zu der

**Definition.** Sei  $P$  ein Hauptfaserbündel mit der Strukturgruppe  $G$  und  $\mathfrak{g} = \text{Lie } G$ . Ein *Zusammenhang in  $P$*  ist eine  $\mathfrak{g}$ -wertige 1-Form  $\omega$  mit den Eigenschaften:

- (1)  $\omega$  ist äquivariant.
- (2)  $\langle X_a(p), \omega(p) \rangle = a$  für alle  $p \in P$  und  $a \in \mathfrak{g}$ .

### 3.12 Das horizontale und das vertikale Bündel

Sei  $P$  ein Hauptfaserbündel mit der Basis  $M$ . Wir erinnern an die Projektion

$$P \xrightarrow{\pi} M, \quad TP \xrightarrow{T\pi} TM.$$

Das *vertikale Bündel*  $VP = \ker(T\pi)$  über  $M$  hat als Fasern die Teilräume

$$V_p P = \{X(p) \mid T_p \pi X(p) = 0\} \subset T_p P \quad (p \in P).$$

Elemente von  $?(VP)$  heißen *vertikale Vektorfelder*. Ein Vektorfeld  $X$  ist genau dann vertikal, wenn

$$\langle X, u \rangle = 0, \quad u \in \pi^*(\Omega_M^1) \subset \Omega_P^1$$

gilt. Eine 1-Form  $u$ , die auf allen vertikalen Vektorfeldern verschwindet, heißt *horizontal*. Die Gesamtheit solcher 1-Formen wollen wir mit  $\Omega_H^1$  bezeichnen. Jedes  $u \in \pi^*(\Omega_M^1)$  ist horizontal. Jedoch umfasst  $\pi^*(\Omega_M^1)$  nicht alle horizontalen 1-Formen.

Sei  $G$  die Strukturgruppe von  $P$ . Aus  $\pi(pg) = \pi(p)$  für alle  $p \in P$  und  $g \in G$  folgt

$$g^* \circ \pi^* = \pi^* .$$

In Worten: Die Gruppe  $G$  läßt jede horizontale 1-Form invariant. Sie operiert somit auf dem Quotienten  $\Omega_P^1/\Omega_H^1$ . Es gibt jedoch i.allg. keine kanonische Weise, den Quotienten mit einem Unterraum von  $\Omega_P^1$  zu identifizieren (es existiert keine kanonische Projektion  $\Omega_P^1 \rightarrow \Omega_H^1$ ); es sei denn, wir haben einen Zusammenhang auf  $P$  definiert.

Sei  $\omega$  ein Zusammenhang auf  $P$ . Das *horizontale Bündel*  $HP = \ker(\omega)$  über  $M$  hat als Fasern die Teilräume

$$H_p P = \{X(p) \mid \langle X(p), \omega(p) \rangle = 0\} \subset T_p P \quad (p \in P).$$

Elemente von  $?(HP)$  heißen *horizontale Vektorfelder*. Ein Vektorfeld  $X$  ist genau dann horizontal, wenn  $\langle X, \omega \rangle = 0$  gilt. Eine 1-Form  $u$ , die auf allen horizontalen Vektorfeldern verschwindet, heißt *vertikal*.

Das Tangentialbündel kann als direkte Summe dargestellt werden<sup>20</sup>:

$$TP = VP \oplus HP \quad \text{d.h.} \quad T_p P = V_p P \oplus H_p P$$

Dies bedeutet, daß die Tangentialvektoren eindeutig zerlegt werden können:

$$X(p) = X_V(p) + X_H(p), \quad X_V(p) \in V_p P, \quad X_H(p) \in H_p P .$$

Folglich besitzt jedes Vektorfeld  $X$  über  $P$  eine Zerlegung

$$X = X_V + X_H, \quad X_V \in ?(VP), \quad X_H \in ?(HP) .$$

Wir wollen nun sehen, was unsere Definitionen in lokalen Koordinaten bedeuten.

---

<sup>20</sup>Hierzu beweist man, daß die Bedingungen  $\langle X, u \rangle = 0$  ( $u \in \pi^*(\Omega_M^1)$ ) und  $\langle X, \omega \rangle = 0$  die Aussage  $X = 0$  zur Folge haben.

### 3.13 Das Hauptfaserbündel lokal gesehen

Lokal ist das Hauptfaserbündel  $P$  trivial, d.h. es hat die Gestalt  $M \times G$ , so daß  $\pi(p) = x$  wenn  $p = (x, h)$ . Alle folgenden Formeln in diesem Abschnitt gehen von der lokalen Trivialisierung aus und haben deshalb auch nur lokal Gültigkeit. Die Aufspaltung der Tangentialräume

$$T_p P = T_x M \oplus T_h G, \quad p = (x, h).$$

führt dazu, daß jedes Vektorfeld  $X \in \mathfrak{X}(TP)$  in zwei Anteile zerfällt,

$$\begin{aligned} X &= X_M \oplus X_G \\ X_M &: G \rightarrow \mathfrak{X}(TM), \quad h \mapsto X_M(h) \\ X_G &: M \rightarrow \mathfrak{X}(TG), \quad x \mapsto X_G(x), \end{aligned}$$

so daß  $X_M(h)$  für festes  $h \in G$  ein Vektorfeld auf  $M$  und  $X_G(x)$  für festes  $x \in M$  ein Vektorfeld auf  $G$  darstellt. In ähnlicher Weise zerfällt die 1-Form  $\omega \in \Omega_P^1 \otimes \mathfrak{g}$ , die den Zusammenhang auf  $P$  bestimmt:

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_M \otimes \omega_G \\ \omega_M &= G \rightarrow \Omega_M^1 \otimes \mathfrak{g}, \quad h \mapsto \omega_M(h) \\ \omega_G &= M \rightarrow \Omega_G^1 \otimes \mathfrak{g}, \quad x \mapsto \omega_G(x). \end{aligned}$$

Die Forderung  $\langle X_a, \omega \rangle = a$  ( $a \in \mathfrak{g}$ ) sagt uns, daß  $\omega_G(x)$  unabhängig von  $x \in M$  mit der kanonischen 1-Form  $\Theta$  also dem Zusammenhang auf  $G$  übereinstimmt (siehe hierzu den Abschnitt 3.8). Die Äquivarianzbedingung  $\omega_M(h) = g\omega_M(hg)g^{-1}$  führt zu der Darstellung

$$\omega_M(h) = h^{-1}\omega_M(e)h,$$

so daß wir zu der folgenden wichtigen Erkenntnis gelangen:

*Es besteht lokal eine 1:1-Korrespondenz zwischen den möglichen Zusammenhängen  $\omega$  auf dem Hauptfaserbündel  $P$  und  $\mathfrak{g}$ -wertigen 1-Formen  $\omega_M(e)$  auf der Basismannigfaltigkeit  $M$ .*

Ein Vektorfeld  $X$  ist vertikal, falls  $X_M = 0$ , horizontal, falls

$$\langle X_M, \omega_M \rangle + \langle X_G, \omega_G \rangle = 0.$$

An der Stelle  $p = (x, h)$  lautet diese Bedingung

$$\langle X_M(x, h), h^{-1}\omega_M(x, e)h \rangle + \langle X_G(x, h), \Theta(h) \rangle = 0$$

mit der offensichtlichen Interpretation:

$$X_M(x, h) \in T_x M, \quad X_G(x, h) \in T_h G, \quad \omega_M(x, e) \in T_x^* M \otimes \mathfrak{g}.$$

Nun gilt  $\langle X_G(x, h), \Theta(h) \rangle = T_h r_{h^{-1}} X_M(x, h) \in \mathfrak{g}$  und deshalb

$$\begin{aligned} X_G(x, h) &= T_e r_h \langle X_G(x, h), \Theta(h) \rangle \\ &= -T_e r_h \langle X_M(x, h), \omega_M(x, h) \rangle = -J_{x, h} X_M(x, h). \end{aligned}$$

Hier haben wir jedem  $p = (x, h)$  eine Abbildung  $J_p : T_x M \rightarrow T_h G$  als Produkt zweier Abbildungen zwischen Tangentialräumen zugeordnet:

$$T_x M \xrightarrow{\omega_M(x, h)} T_e G \xrightarrow{T_e r_h} T_h G.$$

Vermöge dieser Abbildung ist es möglich,  $X_G$  durch  $X_M$  auszudrücken, falls  $X = X_M \oplus X_G$  horizontal ist:  $X_G = -JX_M$ . Dies ermöglicht uns, die gewünschten Projektionen auf die horizontalen und vertikalen Anteile eines Vektorfeldes  $X$  auf dem Hauptfaserbündel  $P$  (lokal) explizit anzugeben:

$$X_H = X_M \oplus (-JX_M), \quad X_V = 0 \oplus (JX_M + X_G).$$

Es sei  $n$  die Dimension der Basismannigfaltigkeit  $M$  und seien  $x^i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) lokale Koordinaten für  $x \in M$ . Wie wir sahen, ist ein Zusammenhang  $\omega$  auf  $P$  lokal durch eine  $\mathfrak{g}$ -wertige 1-Form  $A$  auf  $M$  mit  $A(x) = \omega_M(x, e)$  festgelegt, die keinen Einschränkungen mehr unterliegt. In den lokalen Koordinaten können wir schreiben:

$$A = A_i(x) dx^i, \quad A_i(x) \in \mathfrak{g}.$$

Wir nennen  $A$  das *Potential*. Es ist das zentrale Objekt der Eichtheorien und bestimmt den Zusammenhang auf allen assoziierten Vektorbündeln. Dies ist das Thema des Abschnittes 3.14.

Es ist  $M \times \mathfrak{g}$  offenbar die lokale Version des adjungierten Bündels  $\text{ad}(P) = P \times_G \mathfrak{g}$  und  $\Omega^1(M, \mathfrak{g}) = \Omega_M^1 \otimes \mathfrak{g}$  die lokale Version von  $\Omega^1(M, \text{ad}(P))$ . Es ist zwar falsch,  $\Omega^1(M, \text{ad}(P))$  mit dem Raum der Zusammenhänge auf  $P$  zu identifizieren (es sei denn,  $P$  ist trivial), jedoch gilt: Je zwei Zusammenhänge auf  $P$  unterscheiden sich (global!) immer um ein Element in  $\Omega^1(M, \text{ad}(P))$ .

Als *Krümmung* zeichnet man die dem Zusammenhang  $\omega$  auf  $P$  zugeordnete  $\mathfrak{g}$ -wertige 2-Form  $\Omega \in \Omega_P^2 \otimes \mathfrak{g}$  mit der definierenden Eigenschaft

$$\langle X \wedge Y, \Omega \rangle = \langle X_H \wedge Y_H, d\omega \rangle, \quad X, Y \in ?(TP).$$

Der Zusammenhang wird *flach* genannt, wenn seine Krümmung verschwindet. Man findet die folgende explizite Gestalt<sup>21</sup>:

$$\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]$$

Lokal gilt

$$\Omega = \Omega_M \oplus \Omega_G, \quad \Omega_M = d\omega_M + \frac{1}{2}[\omega_M, \omega_M], \quad \Omega_G = 0.$$

Die Relation  $\Omega_G = 0$  sagt, daß der Zusammenhang auf  $G$  flach ist (siehe die Maurer-Cartan-Relation). Schließlich haben wir die Möglichkeit durch

$$\Omega_M(h) = h^{-1}Fh, \quad F = dA + \frac{1}{2}[A, A]$$

die Krümmung (lokal) auf die Feldstärke  $F \in \Omega_M^2$  zurückzuführen.

### 3.14 Die Übertragung des Zusammenhanges auf assoziierte Vektorbündel: Die kovariante Ableitung

Es sei  $P$  ein Hauptfaserbündel über  $M$  mit  $G$  als Strukturgruppe,  $E$  ein  $G$ -Modul, d.h. ein Vektorraum mit einer Darstellung von  $G$ . Wir betrachten das assoziierte Vektorbündel  $\mathfrak{E} = P \times_G E$  über  $M$ , dessen Fasern Vektorräume sind, die wie die typische Faser  $E$  aussehen. Die Projektion  $\pi : \mathfrak{E} \rightarrow M$  wird durch  $P \rightarrow M$  induziert. In der Feldtheorie ist  $M$  ein Modell für die Raumzeit,  $G$  eine Eichgruppe und  $E$  ein Darstellungsraum, der die "inneren" Freiheitsgrade (wie Farbe, schwacher Isospin, Hyperladung usw.) beschreibt.

Eine kovariante Ableitung (oder Zusammenhang) auf  $\mathfrak{E}$  ist ein Differentialoperator erster Ordnung

$$\nabla : ?(\mathfrak{E}) \rightarrow ?(T^*M \otimes \mathfrak{E}), \quad [\nabla, f] = df \quad (f \in ?) \quad (37)$$

(? ist die Algebra der Funktionen  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ ). Siehe hierzu den Abschnitt 3.8. Eine kovariante Ableitung auf  $\mathfrak{E}$  läßt sich aus einem Zusammenhang  $\omega$  auf  $P$  ableiten. Zunächst führt  $\omega$  zu einer Zerlegung des Tangentialbündels in ein vertikales und ein horizontales Bündel:

$$TP = VP \oplus HP.$$

Die natürliche Projektion

$$\phi : P \times E \rightarrow P \times_G E = \mathfrak{E}, \quad \phi(p, v) = r$$

---

<sup>21</sup>Das Klammersymbol ist in gleicher Weise definiert, wie im Abschnitt 3.8 erläutert.

führt zu einer Projektion

$$\phi_v : P \rightarrow \mathfrak{E}, \quad \phi_v(p) = r$$

und die wiederum zu einer linearen Abbildung

$$T\phi_v : T_p P \rightarrow T_r \mathfrak{E}$$

und somit zu einer Aufspaltung  $T\mathfrak{E} = V\mathfrak{E} \oplus H\mathfrak{E}$  in horizontale und vertikale Bündel vermöge

$$\begin{aligned} V_r \mathfrak{E} &= \{T\phi_v X(p) \mid X(p) \in V_p P\} \\ H_r \mathfrak{E} &= \{T\phi_v X(p) \mid X(p) \in H_p P\} \end{aligned}$$

Man kann zeigen, daß diese Definitionen unabhängig von  $(p, v)$  sind, solange  $\phi(p, v) = r$  gilt (Grund: Die Gruppe  $G$  operiert nur auf dem horizontalen Bündel). Damit sind wir in der Lage, der Projektion

$$?(T\mathfrak{E}) \rightarrow ?(H\mathfrak{E}), \quad X \mapsto X_H$$

einen Sinn zu geben, die jedem Vektorfeld ein horizontales Vektorfeld zuordnet. Als *Lift* bezeichnet man die eindeutige Abbildung

$$?(TM) \rightarrow ?(T\mathfrak{E}), \quad X \mapsto X_\uparrow,$$

die folgende zwei Bedingungen erfüllt:

- (1)  $X_\uparrow$  ist horizontal, d.h.  $X_\uparrow \in ?(H\mathfrak{E})$ .
- (2) Es gilt  $\langle X_\uparrow, \pi^*(u) \rangle = \langle X, u \rangle$  für alle  $u \in ?(T^*M)$ .

Die Bedingung (1) macht deutlich, daß die Konstruktion des Liftes ganz entscheidend von dem gewählten Zusammenhang auf  $P$  abhängt. Die Bedingung (2) läßt sich auch so formulieren:

$$T_r \pi X_\uparrow(r) = X(x), \quad x = \pi(r) \in M, \quad r \in \mathfrak{E}.$$

Schließlich erinnern wir an die äußere Ableitung von  $k$ -Formen auf dem Vektorbündel  $\mathfrak{E}$ :

$$d : ?(\wedge^k T^* \mathfrak{E}) \rightarrow ?(\wedge^{k+1} T^* \mathfrak{E}).$$

Beachte hierbei, daß  $?( \wedge^0 T^* \mathfrak{E}) = ?(\mathfrak{E})$  der Vektorraum aller Funktionen  $f : M \rightarrow \mathfrak{E}$  mit  $\pi \circ f = \text{id}_M$  ist. Auf der äußeren Ableitung beruht entscheidend die folgende Definition:

**Definition.** Die *kovariante Ableitung* (37) auf dem assoziierten Vektorbündel  $\mathfrak{E}$  ist durch

$$\langle X, \nabla f \rangle = \langle X_{\uparrow}, df \rangle \in ?(\mathfrak{E}), \quad X \in ?(TM), \quad f \in ?(\mathfrak{E})$$

definiert.

Die Darstellung von  $G$  auf dem Vektorraum  $E$  sei mit  $D$  bezeichnet:

$$D(g) : E \rightarrow E \quad v \mapsto D(g)v \quad (g \in G).$$

Verbunden damit ist eine Darstellung  $\theta$  der Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  auf  $E$ :

$$\theta(a) = \frac{d}{dt} D(e^{ta})_{t=0} \quad (a \in \mathfrak{g}).$$

Man rechnet leicht nach, daß in lokalen Koordinaten

$$\nabla = d + \theta(A) = dx^i (\partial_i + \theta(A_i))$$

gilt, wenn der Zusammenhang auf  $P$  durch das Potential  $A = dx^i A_i$  mit  $A_i(x) \in \mathfrak{g}$  beschrieben wird (siehe den vorigen Abschnitt).

## 4 Wirkungsfunktionale für Eichtheorien

### 4.1 Metrische Zusammenhänge auf hermiteschen Vektorbündeln

Sei  $\mathfrak{E} \rightarrow M$  ein Vektorbündel mit typischer Faser  $E$ . Hierbei kann  $E$  ein reeller oder komplexer Vektorraum sein. In vielen Situationen, die in der Feldtheorie auftreten, ist  $E$  ein komplexer endlich-dimensionaler Vektorraum mit einer hermiteschen Struktur, der eine unitäre Darstellung der Eichgruppe  $G$  trägt, während  $M$ , wie schon früher betont, ein Modell für die Raum-Zeit darstellt. Wir haben es also im wesentlichen mit einer der folgenden typischen Situationen zu tun:

*$E$  ist ein komplexer (reeller) Vektorraum mit einem Skalarprodukt  $(\cdot, \cdot)$  und einer unitären (orthogonalen) treuen Darstellung  $D(g)$  der Eichgruppe  $G$ . Das Vektorbündel  $\mathfrak{E}$  ist assoziiert zu einem Hauptfaserbündel  $P \rightarrow M$  mit der Strukturgruppe  $G$ :*

$$\mathfrak{E} = P \times_G E.$$

*Das Skalarprodukt in  $E$  induziert ein Skalarprodukt  $(\cdot, \cdot)$  in jeder Faser  $E_x$  in einer Weise, daß dieses differenzierbar von  $p \in M$  abhängt, d.h. aus  $f \in ?(\mathfrak{E})$  folgt  $(f, f) \in C^\infty(M)$ . Jeder Zusammenhang  $\omega$  auf  $P$  führt auf eine kovariante Ableitung  $\nabla$  (ein Zusammenhang auf  $\mathfrak{E}$ ) mit der Eigenschaft*

$$d(f, f) = (\nabla f, f) + (f, \nabla f) \quad (38)$$

*für alle  $f \in ?(\mathfrak{E})$ . Äquivalent hierzu ist die Relation*

$$X(f, f) = (\nabla_X f, f) + (f, \nabla_X f)$$

*gültig für alle Vektorfelder  $X \in ?(TM)$ .*

Ein Vektorbündel mit einer hermiteschen Struktur in jeder Faser wird *hermitesches Bündel* genannt<sup>22</sup>, und eine kovariante Ableitung  $\nabla$  mit der Bedingung (38) heißt *metrisch*. Wir erinnern daran, daß die Darstellung  $D$  dann *treu* genannt wird, wenn  $D(g) = \text{id}$  nur für  $g = e$  (Einheit in  $G$ ) gilt.

Lokal haben wir immer die Darstellung

$$\nabla = d + A, \quad A = \Omega_M^1 \otimes \text{End } E,$$

---

<sup>22</sup>Immer vorausgesetzt, daß das Skalarprodukt sich differenzierbar mit  $p \in M$  ändert.

gleich welche Eichgruppe  $G$  und Darstellung  $D$  wir gewählt haben. Sei  $n$  die Dimension von  $E$  und  $(e_a)_1^n$  eine orthonormierte Basis in  $E$ . In Analogie zu den Christoffel-Symbolen des Levi-Civita-Zusammenhanges kann man auch hier schreiben:

$$Ae_a = dx^\mu ?_{\mu a}^b(x) e_b,$$

wobei die  $?_{\mu a}^b$  reell- oder komplexwertige Funktionen auf einer Karte von  $M$  sind.

Die Erweiterung der kovarianten Ableitung zu einem Operator auf ganz  $\Omega(\mathfrak{E})$  mit der Eigenschaft

$$\nabla : \Omega^k(\mathfrak{E}) \rightarrow \Omega^{k+1}(\mathfrak{E})$$

vermöge der Leibniz-Regel ist eine Standard-Prozedur: Dies geschieht am zweckmäßigsten über die Richtungsableitung

$$\nabla_X : \Omega^k(\mathfrak{E}) \xrightarrow{\nabla} \Omega^{k+1}(\mathfrak{E}) \xrightarrow{\iota(X)} \Omega^k(\mathfrak{E}), \quad X \in ?(TM),$$

die den Grad einer Differentialform erhält. Siehe hierzu die parallele Diskussion im Abschnitt 3.7. Schließlich benötigen wir die Übertragung der kovarianten Ableitung auf Differentialformen mit Werten im Endomorphismenbündel  $\text{End } \mathfrak{E}$ . Dies geschieht so, daß

$$\nabla_X(U\omega) = (\nabla_X U)\omega + U(\nabla_X \omega), \quad U \in \Omega(\text{End } \mathfrak{E}), \quad \omega \in \Omega(\mathfrak{E})$$

erfüllt ist. Anders ausgedrückt: Man identifiziert  $\nabla_X U$  mit dem Kommutator  $[\nabla_X, U]$ . Wollen wir diese Vereinbarung direkt für  $\nabla$  formulieren, so wird sie ein wenig komplizierter:

$$\nabla U := \begin{cases} [\nabla, U] & U \in \Omega^k(\text{End } \mathfrak{E}) \text{ und } k=\text{gerade} \\ \{\nabla, U\} & U \in \Omega^k(\text{End } \mathfrak{E}) \text{ und } k=\text{ungerade}. \end{cases}$$

Als *Krümmung*  $F$  bezeichnet man die folgende Komposition zweier Abbildungen:

$$F : \Omega^k(\mathfrak{E}) \xrightarrow{\nabla} \Omega^{k+1}(\mathfrak{E}) \xrightarrow{\nabla} \Omega^{k+2}(\mathfrak{E}).$$

Aus  $[\nabla, f] = df$  für alle Funktionen  $f \in ?$  und  $d^2 = 0$  folgt  $[F, f] = 0$ , d.h.  $F$  ist ein *lokaler* Operator auf  $\Omega(\mathfrak{E})$ . Wir können  $F$  als 2-Form mit Werten in dem Endomorphismenbündel interpretieren:  $F \in \Omega^2(\text{End } \mathfrak{E})$ . Lokal haben wir die vertraute Darstellung

$$F = dA + \frac{1}{2}[A, A] \in \Omega_M^2 \otimes \theta(\mathfrak{g}),$$

wobei  $\theta : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End } E$  die mit  $D$  verknüpfte Darstellung der Lie-Algebra ist. Bezüglich des Skalarproduktes in  $E$  gilt

$$(\theta(a)u, v) + (u, \theta(a)v) = 0, \quad a \in \mathfrak{g}, \quad u, v \in E,$$

wofür wir auch  $\theta(a)^* + \theta(a) = 0$  schreiben.

Es seien  $D_1(g)$  und  $D_2(g)$  zwei unitäre (bzw. orthogonale) Darstellungen der Eichgruppe  $G$  auf den komplex-(bzw. reell-)linearen Räumen  $E_1$  und  $E_2$ . Es sei  $\phi : E_1 \rightarrow E_2$  eine lineare Abbildung mit  $\phi \circ D_1(g) = D_2(g) \circ \phi$  für alle  $g \in G$ , also ein Morphismus

$$(E_1, D_1) \xrightarrow{\phi} (E_2, D_2)$$

zwischen  $G$ -Modulen, kurz ein  $G$ -Morphismus. Verbunden damit ist ein Morphismus zwischen den assoziierten Vektorbündeln  $\mathfrak{E}_1$  und  $\mathfrak{E}_2$ , so daß das folgenden Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccc} P \times E_1 & \xrightarrow{\text{id} \times \phi} & P \times E_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{E}_1 := P \times_G E_1 & \xrightarrow{\text{id} \times_G \phi} & P \times_G E_2 =: \mathfrak{E}_2 \end{array}$$

Zur Begründung: Wenn  $(pg, v)$  und  $(p, D_1(g)v)$  dasselbe Element in  $P \times_G E_1$  sind, so auch  $(pg, \phi v)$  und  $(p, \phi D_1(g)v) = (p, D_2(g)\phi v)$  in  $P \times_G E_2$ . Der Einfachheit halber schreiben wir  $\phi$  anstelle von  $\text{id} \times_G \phi$ . Wir demonstrieren diese Konstruktion an zwei Beispielen.

**1. Beispiel.** Es sei  $E$  ein komplex-linearer Raum mit einer hermiteschen Struktur,  $U(E)$  die Gruppe der unitären Operatoren,  $D : G \rightarrow U(E)$  eine treue Darstellung der Eichgruppe und  $\theta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{u}(E)$  die zugehörige Darstellung der Lie-Algebra. Es seien durch

$$(E_1, D_1) = \mathfrak{g}, \quad (E_2, D_2) = \mathfrak{u}(E)$$

zwei reell-lineare  $G$ -Module bestimmt mit den Darstellungen

$$D_1(g)a = gag^{-1} \quad (a \in \mathfrak{g}), \quad D_2(g)A = D(g)AD(g)^{-1} \quad (A \in \mathfrak{u}(E)).$$

Wegen  $\theta(gag^{-1}) = D(g)\theta(a)D(g)^{-1}$  ist  $\theta$  ein  $G$ -Morphismus und kann zu einem Morphismus

$$\text{ad } P := P \times_G \mathfrak{g} \xrightarrow{\theta} P \times_G \mathfrak{u}(E) =: \text{ad } \mathfrak{E}$$

erweitert werden. Wir erkennen sofort, daß die Krümmung  $F$  (oder Feldstärke) eine 2-Form mit Werten in der Lie-Algebra  $\text{ad } \mathfrak{E}$  ist. Zwei kovariante Ableitungen auf  $\mathfrak{E}$  unterscheiden sich um einen lokalen Operator:

$$\nabla_1 - \nabla_2 = A, \quad A \in \Omega^1(\theta(\text{ad } P)).$$

Im Gegensatz zu dem Vektorpotential ist die 1-Form  $A$  *global* definiert. Die kovarianten Ableitungen bilden also einen affinen Raum über den 1-Formen

mit Werten in der Lie-Algebra  $\theta(\text{ad } P)$ .

**2. Beispiel.** Mit den Voraussetzungen vom 1. Beispiel betrachten wir den  $G$ -Morphismus

$$(E, D) \xrightarrow{\wedge} (\wedge E, \wedge D)$$

zwischen komplex-linearen  $G$ -Modulen. Er kann zu einem Morphismus

$$\mathfrak{E} := P \times_G E \xrightarrow{\wedge} P \times_G \wedge E =: \wedge \mathfrak{E}$$

erweitert werden.

Oft schreibt man auch  $A \wedge A$  für  $\frac{1}{2}[A, A]$ . Mit

$$A = dx^\mu A_\mu(x), \quad F = \frac{1}{2} dx^\mu \wedge dx^\nu F_{\mu\nu}(x)$$

finden wir explizit:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu].$$

**Satz.** Die Krümmung erfüllt die sog. *zweite Bianchi-Identität*  $\nabla F = 0$ .

Den Beweis führt man am besten lokal, um zu erkennen, daß  $\nabla F = 0$  eine Folge der Jakobi-Identität ist:

$$\begin{aligned} \nabla F &= dF + [A, F] \\ &= dA \wedge A - A \wedge dA + [A, dA + A \wedge A] \\ &= dA \wedge A - A \wedge dA + A \wedge dA - dA \wedge A + [A, A \wedge A] \\ &= 2A \wedge A \wedge A \\ &= \frac{2}{3!} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\sigma ([A_\mu, [A_\nu, A_\sigma]] + [A_\nu, [A_\sigma, A_\mu]] + [A_\sigma, [A_\mu, A_\nu]]) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Es sei  $M$  eine orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension  $d$ . Im Abschnitt 3.6 wurde gezeigt, daß in jedem Punkt  $x \in M$  ein kanonisches reelles Skalarprodukt in dem reellen Vektorraum  $\wedge^k T_x^* M$  existiert mit der Eigenschaft

$$v \wedge *u = *(u, v) = \omega_0(u, v), \quad u, v \in \wedge^k T_x^* M,$$

wobei  $*$  den Hodge-Operator und  $\omega_0 = *1$  die Volumenform der Mannigfaltigkeit bezeichnet. Dies gibt dem reellen Vektorbündel  $\wedge T^* M$  eine reell-hermitesche Struktur. Wir können sie dazu nutzen, um dem komplexen Vektorbündel  $\wedge T^* M \otimes \text{End } \mathfrak{E}$  eine komplex-hermitesche Struktur zu geben, und

zwar dadurch, daß wir in jeder Faser  $\wedge T_x^* M \otimes \text{End } E_x$  ein Skalarprodukt einzuführen:

$$(u \otimes A, v \otimes B) = (u, v) \text{Spur}(A^* B), \quad u, v \in \wedge T_x^* M, \quad A, B \in \text{End } E_x.$$

Der Hodge-Operator kann ebenfalls auf das Bündel  $\wedge T^* M \otimes \text{End } \mathfrak{E}$  durch die Vorschrift

$$*(u \otimes A) = *u \otimes A^*,$$

ausgedehnt werden, so daß gilt:

$$\text{Spur}(V \wedge *U) = \omega_0(U, V), \quad U, V \in \Omega^k(\text{End } \mathfrak{E}).$$

Mit der Erweiterung des Hodge-Operators gelingt es uns, jeder Ableitung  $\nabla$  ihre *Koableitung*  $\nabla^*$  zuzuordnen:

$$\nabla^* = (-1)^{kd+k+1} * \nabla * : \Omega^k(\text{End } \mathfrak{E}) \rightarrow \Omega^{k-1}(\text{End } \mathfrak{E})$$

in Analogie zur Definition der Koableitung  $d^*$  (siehe den Abschnitt 3.6). Deshalb ist auch hier das Vorzeichen so gewählt, daß

$$d \text{Spur}(U \wedge *V) = \omega_0((V, \nabla U) - (\nabla^* V, U))$$

für alle  $U \in \Omega^k(\text{End } \mathfrak{E})$  und  $V \in \Omega^{k+1}(\text{End } \mathfrak{E})$  gilt. Nach Integration über die Mannigfaltigkeit verschwindet die linke Seite aufgrund des Theorems von Stokes.

## 4.2 Wirkungsfunktionale

Wir übernehmen alle Voraussetzungen des vorigen Abschnittes und fordern darüberhinaus, daß die Raumzeit  $M$  kompakt sei (damit Integrale über  $M$  existieren). Die hermitesche Struktur des Bündels  $\wedge T^* M \otimes \text{End } \mathfrak{E}$  erlaubt, der Krümmung  $F$  eine  $d$ -Form ( $d$  ist die Dimension von  $M$ ) zuzuordnen:

$$\omega_0(F, F) \in \Omega_M^d = ? (\wedge^d T^* M), \quad 0 \leq (F, F) \in \Omega_M^0 = ?.$$

Durch Integration entsteht daraus das Wirkungsfunktional einer Eichtheorie:

$$W = \frac{1}{2}(F, F)_{L^2} = \int_M \omega_0 \frac{1}{2}(F, F).$$

Es wird begriffen als ein Funktional des Zusammenhanges auf  $\mathfrak{E}$ . Wir betonen erneut, daß die möglichen kovarianten Ableitungen  $\nabla$  einen affinen Raum bilden: Zwei kovarianten Ableitungen unterscheiden sich um ein Element

$$A \in \Omega^1(\theta(\text{ad } P)) \subset \Omega^1(\text{ad } \mathfrak{E}) \subset \Omega^1(\text{End } \mathfrak{E})$$

Um die Euler-Lagrangeschen Gleichungen des Variationsproblems

$$W = \text{stationär}$$

zu erhalten, haben wir  $\nabla$  durch  $\nabla + tA$  zu ersetzen, das Wirkungsfunktional an der Stelle  $t = 0$  zu differenzieren und das Ergebnis gleich Null zu setzen. Durch die Ersetzung werden  $F$  und  $W$   $t$ -abhängig. Wir finden  $F(t) = F + t\nabla A + O(t^2)$  und somit

$$\frac{d}{dt}W(t)_{t=0} = \int_M \omega_0 \operatorname{Re}(\nabla A, F) = \int_M \omega_0 \operatorname{Re}(A, \nabla^* F).$$

Hier haben wir die Eigenschaft

$$\int_M \omega_0 (V, \nabla U) = \int_M \omega_0 (\nabla^* V, U)$$

gültig für  $U \in \Omega^k(\operatorname{End} \mathfrak{E})$  und  $V \in \Omega^{k+1}(\operatorname{End} \mathfrak{E})$  ausgenutzt. Die Krümmung  $F$  entspricht einem stationären Punkt der Wirkung genau dann, wenn

$$\operatorname{Re}(A, \nabla^* F) = 0$$

für alle  $A \in \Omega^1(\operatorname{ad} \mathfrak{E})$  gilt. Da sowohl  $A$  wie auch  $\nabla^* F$  antihermitesche Matrizen als Werte annehmen, ist  $(A, \nabla^* F)$  sicher reell, und wir können uns auf die Bedingung  $(A, \nabla^* F) = 0$  konzentrieren. Da wir verlangten, daß die Darstellung der Eichgruppe auf  $E$  treu sei, folgt daraus die Feldgleichung

$$\nabla^* F = 0.$$

Beachte, daß  $\nabla^* F$  in  $\Omega^1(\operatorname{ad} \mathfrak{E})$  liegt.

Da  $\theta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{u}(E)$  injektiv ist (aus  $\theta(a) = 0$  folgt  $a = 0$ ), ist die durch

$$(a, b) := \operatorname{Spur}(\theta(a)^* \theta(b)) = -\operatorname{Spur}(\theta(a)\theta(b)) \quad (a, b \in \mathfrak{g})$$

definierte (reelle) Bilinearform nicht-entartet, stellt also ein Skalarprodukt in  $\mathfrak{g}$  dar. Wir können eine Basis  $e_i \in \mathfrak{g}$  so wählen, daß  $(e_i, e_k) = \delta_{ik}$  gilt, und definieren

$$\hat{e}_i = \theta(e_i) \in \operatorname{End} E.$$

In einer lokalen Trivialisierung

$$U \times \mathfrak{g} \xrightarrow{\theta} U \times \mathfrak{u}(E), \quad (U \subset M)$$

werden die  $\hat{e}_i$  zu Vektoren in der Faser  $\operatorname{ad} E_x$  ( $x \in U$ ), nach denen das Eichpotential zerlegt werden kann,

$$A = dx^\mu \hat{e}_i A_\mu^i(x),$$

mit reellen Koeffizienten  $A_\mu^i(x)$ , den ‘‘Komponenten’’ von  $A$ . Ähnlich verfahren wir mit der Krümmung:

$$F = \frac{1}{2} dx^\mu \wedge dx^\nu \hat{e}_i F_{\mu\nu}^i(x).$$

Auch hier sind die Koeffizienten  $F_{\mu\nu}^i(x)$  reell. Wir sehen in ihnen die physikalischen Feldstärken. Wir finden nun lokal

$$\begin{aligned} (F, F) &= \frac{1}{4} (d^\mu \wedge dx^\nu, dx^\sigma \wedge dx^\tau) \text{Spur}(\hat{e}_i^* \hat{e}_k) F_{\mu\nu}^i F_{\sigma\tau}^k \\ &= \frac{1}{4} ((d^\mu, dx^\sigma)(dx^\nu, dx^\tau) - (d^\mu, dx^\tau)(dx^\nu, dx^\sigma)) (e_i, e_k) F_{\mu\nu}^i F_{\sigma\tau}^k \\ &= \frac{1}{4} (g^{\mu\sigma} g^{\nu\tau} - g^{\mu\tau} g^{\nu\sigma}) \delta_{ik} F_{\mu\nu}^i F_{\sigma\tau}^k \\ &= \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} g^{\nu\tau} \delta_{ik} F_{\mu\nu}^i F_{\sigma\tau}^k. \end{aligned}$$

Wir können nach bewährtem Schema (siehe die Rechnung am Ende des Abschnittes 3.6) einen expliziten lokal gültigen Ausdruck für  $\nabla^* F$  erhalten. Dazu setzen wir:

$$\begin{aligned} \nabla^* F &= dx^\mu (\nabla^* F)_\mu, & (\nabla^* F)^\mu &= g^{\mu\nu} (\nabla^* F)_\nu \\ F &= \frac{1}{2} dx^\mu \wedge dx^\nu F_{\mu\nu}, & F^{\mu\nu} &= g^{\mu\sigma} g^{\nu\tau} F_{\sigma\tau}, \end{aligned}$$

nehmen wie früher  $|\text{Det}(g^{\mu\nu})| = 1$  an und erhalten

$$(\nabla^* F)^\nu = -\partial_\mu F^{\mu\nu} - [A_\mu, F^{\mu\nu}].$$

Bevor wir mit den allgemeinen Erörterungen fortfahren, wollen wir einige relevante Beispiele studieren.

### 4.3 Beispiele für Eichtheorien

In den folgenden Beispielen wollen wir offen lassen, wie das jeweilige Hauptfaserbündel  $P \rightarrow M$  beschaffen ist. Man mag um der Konkretheit willen annehmen, daß es sich um ein triviales Hauptfaserbündel der Form  $P = M \times G$  handelt, so daß alle assoziierten Vektorbündel gleichfalls trivial werden, z.B.

$$\mathfrak{E} = M \times E, \quad \text{End } \mathfrak{E} = M \times \text{End } E.$$

Zugleich hat dann jede kovariante Ableitung auf  $\mathfrak{E}$  nicht nur lokal, sondern auch *global* die Gestalt  $\nabla = d + A$  mit  $A \in \Omega_M^1 \otimes \mathfrak{g}$ . Wir wählen lokale Koordinaten  $x^\mu$ , setzen  $g^{\mu\nu} := (dx^\mu, dx^\nu)$  und schließen den Fall der Lorentz-Metrik nicht aus. Wenn wir von dem Raum  $\mathbb{C}^n$  sprechen, so besitzt er die durch

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_n|^2$$

gegebene hermitesche Struktur.

**Die Elektrodynamik im Vakuum.** Hier ist  $G = U(1)$  und  $E = \mathbb{C}$  mit der Darstellung  $z \mapsto e^{i\alpha}z$ . Zugleich gilt  $\mathfrak{g} = i\mathbb{R}$ ,  $\theta = \text{id}$  und

$$\text{ad } \mathfrak{E} = M \times i\mathbb{R} \subset M \times \mathbb{C} = \text{End } \mathfrak{E}.$$

Wir betrachten die imaginäre Einheit  $i$  als die normierte Basis der eindimensionalen Lie-Algebra  $\mathfrak{u}(\mathbf{1})$  und zerlegen das Eichpotential  $A$  sowohl nach dieser Basis als auch nach der Basis  $dx^\mu$  in  $?(T^*M)$ :

$$A = dx^\mu i A_\mu(x), \quad A_\mu(x) \in \mathbb{R}.$$

Ähnlich verfahren wir mit der Feldstärke  $F$ . Da die Eichgruppe abelsch ist, ist die Feldgleichung linear:

$$\nabla^* F = d^* F = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0.$$

Das Beispiel ist sehr einfach und wurde schon im Abschnitt 3.6 betrachtet.

**Die Eichtheorie des Salam-Weinberg-Modells.** Dieses Modell vereinigt alle Eichfelder der elektro-schwachen Wechselwirkung, ohne Higgs-Feld und Materie-Felder. Folglich findet keine Symmetriebrechung statt, und alle Eichteilchen sind masselos. Die Eichgruppe ist  $G = U(2)$ . Ihr Darstellungsraum ist  $E = \bigwedge \mathbb{C}^2$  mit der durch  $u : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ ,  $z \mapsto uz$  ( $u \in U(2)$ ) induzierten Darstellung  $\bigwedge u : \bigwedge \mathbb{C}^2 \rightarrow \bigwedge \mathbb{C}^2$ . Wir gewinnen die zugeordnete Darstellung der Lie-Algebra durch

$$\theta(a) = \frac{d}{dt} (\bigwedge e^{ita})_{t=0} \quad (a \in \mathfrak{u}(\mathbf{2})).$$

Nun rechnet man leicht nach, daß

$$(a, a) := -\text{Spur } \theta(a)^2 = -\text{Spur } a^2 - (\text{Spur } a)^2$$

gilt. Dies hat man zu vergleichen mit dem von Salam und Weinberg gewählten Ansatz, der eine Trennung in einen  $\mathfrak{su}(\mathbf{2})$ -Anteil und einen  $\mathfrak{u}(\mathbf{1})$ -Anteil vorsieht mit den Kopplungskonstanten  $g$  und  $g'$ :

$$(a, a)_{\text{sw}} := -\underbrace{\frac{1}{g^2} \langle (a - \langle a \rangle)^2 \rangle}_{\mathfrak{su}(\mathbf{2})} - \underbrace{\frac{1}{g'^2} \langle a \rangle^2}_{\mathfrak{u}(\mathbf{1})}, \quad \langle \cdot \rangle = \frac{1}{2} \text{Spur } (\cdot).$$

Man findet Übereinstimmung mit  $(a, a)$  (bis auf einen Faktor), wenn  $g^2 = 3g'^2$  gesetzt wird. Gewöhnlich schreibt man  $g'/g = \tan \theta_W$  und nennt  $\theta_W$  den

Weinberg-Winkel. Experimentell mißt man  $\sin^2 \theta_W$ . Die theoretische Voraussage ergibt den Wert  $\sin^2 \theta_W = 0,25$ .

Eine geeignete Basis  $e_i$  in der Lie-Algebra  $\mathbf{u}(2)$ , die  $(e_i, e_k) = \delta_{ik}$  erfüllt, ist durch

$$a = a^k e_k = \frac{-i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{1/3} a^4 + a^3 & a^1 - ia^2 \\ a^1 + ia^2 & \sqrt{1/3} a^4 - a^3 \end{pmatrix} \in \mathbf{u}(2) \quad (a^k \in \mathbb{R})$$

gegeben. In der gewählten Darstellung erhalten wir die Bilder  $\hat{e}_i = \theta(e_i)$ . Dies ist auch die Basis, nach der das Eichfeld  $A$  und die Feldstärke  $F$  zerlegt wird, um die “physikalischen” reell-wertigen Felder zu erhalten:

$$A = dx^\mu \hat{e}_i A_\mu^i, \quad F = \frac{1}{2} dx^\mu \wedge dx^\nu \hat{e}_i F_{\mu\nu}^i.$$

Die Wirkung zerfällt in einen  $U(1)$ -Anteil und einen  $SU(2)$ -Anteil. Der erste beschreibt eine QED-artige Theorie, der zweite eine Yang-Mills-Theorie.

**Die Eichtheorie des Standardmodells.** Diese Modell vereinigt alle Eichfelder der elektro-schwachen und der starken Wechselwirkung, jedoch ohne das Higgs-Feld und die Dirac-Felder der fundamentalen Fermionen. Die Eichgruppe ist

$$G = S(U(3) \times U(2)) \subset SU(5)$$

mit der Lie-Algebra  $\mathfrak{g} = \mathbf{su}(3) \times \mathbf{su}(2) \times \mathbf{u}(1)$ . Der Darstellungsraum ist  $E = \bigwedge^5 \mathbb{C}^5$  mit der Darstellungen

$$\bigwedge : G \rightarrow U(E), \quad \theta = \text{Lie } \bigwedge : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbf{u}(E).$$

Hier bezeichnet  $U(E)$  die Gruppe der unitären Operatoren auf  $E$  und  $\mathbf{u}(E)$  die korrespondierende Lie-Algebra. Jedes Element  $a \in \mathfrak{g}$  verstehen wir als eine antihermitesche  $5 \times 5$ -Matrix. Eine Rechnung zeigt:

$$(a, a) = -\text{Spur } \theta(a)^2 = -8 (\text{Spur } a^2 + (\text{Spur } a)^2).$$

Eine Basis  $e_k = -it_k$  ( $k = 1, \dots, 12$ ) mit der Eigenschaft  $(e_j, e_k) = \delta_{jk}$  ist

$$t_k \left| \begin{array}{c|c|c} k = 1, 2, 3 & k = 4 & k = 5, \dots, 12 \\ \hline \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix} & \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3}{5}} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \mathbb{1}_3 & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_2 \end{pmatrix} & \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \lambda_{k-4} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right|$$

Hier sind  $\sigma_k$  die Pauli-Matrizen und  $\lambda_k$  die Gell-Mann-Matrizen. Beschränken wir uns auf die darin enthaltene  $\mathbf{u}(2)$ -Algebra, so erhalten wir die folgende Parametrisierung:

$$\frac{-i}{4} \begin{pmatrix} \sqrt{3/5} a^4 + a^3 & a^1 - ia^2 \\ a^1 + ia^2 & \sqrt{3/5} a^4 - a^3 \end{pmatrix} \in \mathbf{u}(2) \quad (a^k \in \mathbb{R}).$$

Der Faktor vor  $a^4$  (relativ zu dem vor  $a^3$  und absolut genommen) ist mit  $g'/g = \tan \theta_W$  zu identifizieren. Also

$$\tan \theta_W = \sqrt{\frac{3}{5}} \quad \Rightarrow \quad \sin^2 \theta_W = \frac{3}{8}$$

Die Abweichung von dem im Experiment bestimmten Wert<sup>23</sup> des Weinberg-Winkels läßt sich durch Quantenkorrekturen erklären.

**Die Yang-Mills-Theorie.** Historisch gesehen war dies die erste nicht-abelsche Eichtheorie, ein Modell also, mit dem wir heute keine konkrete Physik mehr verknüpfen. Die Eichgruppe ist  $G = SU(n)$  ( $n \geq 2$ , ursprünglich  $n = 2$ ) in der adjungierten Darstellung auf dem reellen Vektorraum  $E = \mathfrak{su}(\mathbf{n})$ . Bis auf ein Vorzeichen ist das Skalarprodukt mit der Killing-Form identisch:

$$(a, a) = -\text{Spur}(\text{ad}(a)^2) = -2n \text{ Spur } a^2,$$

wobei

$$\text{ad}(a) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}, \quad b \mapsto [a, b] \quad (a, b \in \mathfrak{g})$$

die adjungierte Darstellung der Lie-Algebra  $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(\mathbf{n})$  beschreibt.

Es ist unmittelbar klar, daß man ebensogut von dem Darstellungsraum  $E = \mathbb{C}^2$  ausgehen kann, mit einem unbedeutenden Unterschied, der sich im veränderten Skalarprodukt zeigt. Es gilt jetzt  $(a, a) = -\text{Spur } a^2$  ohne den Vorfaktor  $2n$ .

## 4.4 Eichtransformationen

Sei  $P$  ein Hauptfaserbündel über  $M$  mit der Lie-Gruppe  $G$  als Strukturgruppe. Sei  $\mathfrak{g}$  die Lie-Algebra von  $G$ . Eine globale Eichung wäre dann ein Schnitt  $s \in \Gamma(P)$ . Gäbe es einen solchen Schnitt, so könnten wir jedem Zusammenhang  $\omega \in \Omega_P^1 \otimes \mathfrak{g}$  vermöge der pull-back-Konstruktion

$$A = s^*(\omega) \in \Omega_M^1 \otimes \mathfrak{g}$$

ein global (auf  $M$ ) definiertes Eichpotential zuordnen. Es zeigt sich jedoch, daß ein globaler Schnitt nur dann existiert –  $\Gamma(P)$  also nichtleer ist –, wenn  $P$  ein triviales Bündel ist, d.h. die Struktur  $M \times G$  besitzt. Wir erkennen so den tieferen Grund, warum Eichpotentiale i.allg. nicht global definiert werden können.

Das Wirkungsfunktional einer Eichtheorie ist so konstruiert, daß es eichinvariant ist. Was ist jedoch eine Eichtransformation? Die Gruppe  $\text{Diff}(P)$

---

<sup>23</sup>Experimentell:  $\sin^2 \theta_W \approx 0,23$

der Diffeomorphismen von  $P$  ist zu groß, da sie die Faserstruktur von  $P$  nicht respektiert. Ein Diffeomorphismus  $f : P \rightarrow P$  respektiert die Faserstruktur – ist ein Bündelmorphismus –, wenn es einen Diffeomorphismus  $f_M : M \rightarrow M$  gibt, so daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{f} & P \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{f_M} & M \end{array}$$

Nun ist  $P$  nicht nur ein Bündel, sondern besitzt auch noch eine Strukturgruppe  $G$ . Hieraus resultiert die stärkere Forderung, nämlich daß  $f$  äquivariant sei:

$$f(pg) = f(p)g \quad (p \in P, g \in G).$$

Für ein Hauptfaserbündel folgt hieraus in der Tat, daß  $f$  die Faserstruktur respektiert. Man definiert deshalb die Automorphismengruppe von  $P$  in der folgenden Weise:

$$\text{Aut}(P) = \{f \in \text{Diff}(P) \mid f \text{ ist äquivariant}\}.$$

Vom Standpunkt der Differentialgeometrie erscheint diese Definition sehr natürlich. Vom Standpunkt der Eichtheorien ist jedoch diese Gruppe immer noch zu groß. Als Gruppe der Eichtransformationen bezeichnet man diejenige Untergruppe von  $\text{Aut}(P)$ , deren Elemente trivial auf der Basis  $M$  operieren:

$$\mathcal{G}(P) = \{f \in \text{Aut}(P) \mid f_M = \text{id}\}.$$

Man erkennt leicht, daß  $\mathcal{G}(P)$  eine normale (oder invariante) Untergruppe von  $\text{Aut}(P)$  ist, wobei der Quotient gerade alle Diffeomorphismen von  $M$  enthält<sup>24</sup>. Dieser Sachverhalt läßt sich durch die folgende exakte Sequenz von Gruppen ausdrücken:

$$1 \rightarrow \mathcal{G}(P) \xrightarrow{i} \text{Aut}(P) \xrightarrow{j} \text{Diff}(M) \rightarrow 1 .$$

Hier bezeichnet die Abbildung  $i$  die natürliche Einbettung, und  $j$  ist durch  $j(f) = f_M$  ( $f \in \text{Aut}(P)$ ) gegeben.

Die physikalische Interpretation einer Eichtransformation  $f \in \mathcal{G}(P)$  ist die einer lokalen (punktweisen in Bezug auf  $M$ ) Änderung der Eichung. Ist das Bündel trivial, so kann  $f$  wiederum als eine Abbildung  $M \rightarrow G$  aufgefaßt werden. Es ist bemerkenswert, daß es alternative Charakterisierungen der Gruppe  $\mathcal{G}(P)$  gibt.

**Theorem.** Die folgenden beiden Gruppen sind isomorph zu  $\mathcal{G}(P)$ :

---

<sup>24</sup>Da  $M$  ein Modell für die Raumzeit sein soll, bedeutet die Forderung  $f_M = \text{id}$  gerade, daß eine Eichtransformation nicht auch noch einen Koordinatenwechsel im Sinne der Allgemeinen Relativitätstheorie mit beinhaltet.

1. Die Gruppe aller äquivarianten  $C^\infty$ -Funktionen  $f : P \rightarrow G$ ,

$$C_G^\infty(P, G) = \{f \in C^\infty(P, G) \mid f(pg) = g^{-1}f(p)g, p \in P, g \in G\}$$

2. Die Gruppe  $\mathcal{G}(\text{Ad}(P))$  der Schnitte des assoziierten Bündels  $\text{Ad}(P) = P \times_G G$ , konstruiert bezüglich der adjungierten Wirkung von  $G$  auf sich selbst.

Der Beweis ist leicht und wird hier übergangen. Wir sehen: Nach allen Hindernissen ist dennoch möglich, Eichtransformationen als Schnitte eines Bündels aufzufassen. Man beachte jedoch, daß  $\text{Ad}(P)$  zwar ein Bündel von Gruppen, jedoch kein Hauptfaserbündel ist. Ferner: Wir können der Gruppe  $\mathcal{G}(P)$  eine Lie-Algebra zuordnen, die unendlich-dimensional ist:

$$\text{Lie } \mathcal{G}(P) = \mathcal{G}(\text{ad}(P)),$$

wenn  $\text{ad}(P) = P \times_G \mathfrak{g}$  dasjenige assoziierte Vektorbündel ist, das bezüglich der adjungierten Wirkung der Gruppe  $G$  auf ihre Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  konstruiert ist. Eine andere Auffassung ist

$$\text{Lie } \mathcal{G}(P) = C_G^\infty(P, \mathfrak{g}),$$

als Folge des obigen Theorems. Gemeint sind alle Funktionen  $C^\infty$ -Funktionen  $f : P \rightarrow \mathfrak{g}$  mit der Eigenschaft, äquivariant zu sein:  $f(pg) = g^{-1}f(p)g$ .