

Darstellungstheorie der Drehgruppe

Skriptum zur Vorlesung
Quantentheorie I
von Prof. D. Schütte
im Wintersemester 1991/92



2. überarbeitete, korrigierte und erweiterte Auflage 1995
Zusammengestellt von
J. Nitschkowski
L^AT_EX-Satz von
C. Weichmann

**Institut für
Theoretische Kernphysik**
Nußallee 14–16 · D–53115 Bonn · Germany

Inhaltsverzeichnis

1 Drehungen im \mathbb{R}^3	1
2 Drehungen in der klassischen Mechanik	2
3 Drehungen in der Quantenmechanik	3
4 Lineare Lie-Gruppen und Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n	6
4.1 Untermannigfaltigkeiten und Tangentialräume	6
4.2 Lie-Gruppen und Algebren	9
5 Lie-Algebra der Drehgruppe	17
6 Irreduzible Darstellungen der Drehgruppe	28
7 Das Wasserstoffatom im Magnetfeld	35
8 Spin-s-Felder und Tensorprodukt	37
8.1 Exkurs: Tensorprodukt	37
8.2 Der Spin-Hilbertraum als Tensorprodukt	40
9 Der Spinoperator	44
10 Darstellungen von $SO(3)$ für Spin-$\frac{1}{2}$-Felder	49
11 Ausreduktion von Produktdarstellungen	64
Literaturverzeichnis	78
Index	79

Kapitel 1

Drehungen im \mathbb{R}^3

Wir wollen in den ersten beiden Kapiteln kurz wiederholen, wie Drehungen im \mathbb{R}^3 beschrieben und charakterisiert werden, und die Konsequenzen in der klassischen Mechanik darstellen.

Def.: Drehgruppe, $SO(3)$

$$SO(3) := \left\{ R \mid R : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, R \text{ linear, } R^{-1} = R^T, \det R = 1 \right\}$$

Def.: $\mathbb{E}^3 := \mathbb{R}^3$ mit euklidischem Skalarprodukt (\cdot, \cdot)

Bem.: $R \in SO(3)$, $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{E}^3$, $(R\vec{x}, R\vec{y}) = (\vec{x}, \vec{y})$

Die Drehungen sind also im \mathbb{E}^3 dadurch charakterisiert, daß sie das euklidische Skalarprodukt unverändert lassen.

Welche Konsequenzen sich daraus für die klassische Mechanik ergeben, werden wir im nächsten Kapitel kurz (ohne explizite Beweise) angeben.

Kapitel 2

Drehungen in der klassischen Mechanik

Die Aktion der Drehgruppe $SO(3)$ auf dem Phasenraum der klassischen Mechanik ist wie folgt gegeben:

$$R \in SO(3); (\vec{x}(t), \vec{p}(t)) \mapsto (R\vec{x}(t), R\vec{p}(t))$$

d.h. die Kurven im Phasenraum gehen in gedrehte Kurven über.

Von Interesse ist nun der Zusammenhang zwischen einer rotationsinvarianten klassischen Hamiltonfunktion und dem Drehimpuls.

Def.: $H(\vec{x}(t), \vec{p}(t))$ rotationsinvariant $\Leftrightarrow H(R\vec{x}(t), R\vec{p}(t)) = H(\vec{x}(t), \vec{p}(t))$

Es gilt nun der Zusammenhang:

$$H(\vec{x}(t), \vec{p}(t)) \text{ rotationsinvariant} \Leftrightarrow \{H(\vec{x}(t), \vec{p}(t)), L_i\} = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

Dabei sind L_i die Komponenten des klassischen Drehimpulses.

Die Klammer $\{\cdot, \cdot\}$ ist die sogenannte Poisson-Klammer:

$$\{f, g\} := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial x_i}$$

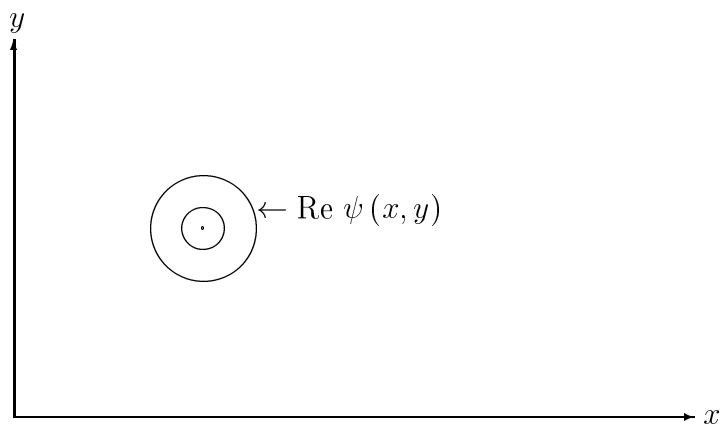
Nach dieser kurzen Wiederholung können wir uns nun der Übertragung in die Quantenmechanik widmen.

Kapitel 3

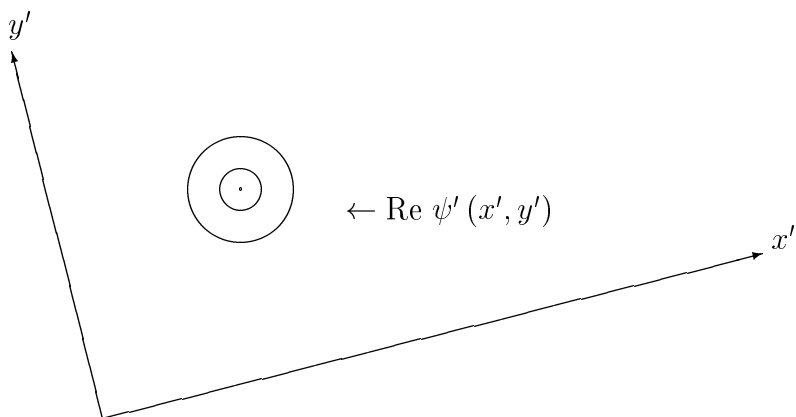
Drehungen in der Quantenmechanik

Bisher hatten wir Drehungen im \mathbb{E}^3 betrachtet, nun wollen wir untersuchen, wie die Wirkung der Drehgruppe $SO(3)$ auf quantenmechanische Zustände im Hilbertraum \mathcal{H} erklärt werden kann. Dazu stellen wir zunächst eine anschauliche Überlegung an:

Betrachte (beispielsweise) den Real- oder Imaginärteil einer im allgemeinen komplexen (hier zwei-dimensionalen) Wellenfunktion $\psi(x, y)$.



Wir verlangen, daß ein Beobachter im gedrehten System $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ die gleiche funktionale Abhängigkeit seiner Wellenfunktion ψ' von den gedrehten Koordinaten mißt.



Mathematisch ausgedrückt, lautet unsere Bedingung:

$$\boxed{\psi'(\vec{x}') = \psi(\vec{x}), \vec{x}', \vec{x} \in \mathbb{E}^3} \quad (3.1)$$

Diese Bedingung gilt natürlich für Vektoren im \mathbb{E}^3 , die Beschränkung auf 2 Dimensionen diene nur der Veranschaulichung.

Das Transformationsverhalten gilt so aber nur, weil die Wellenfunktion eine skalare Funktion im Hilbertraum ist, die spinlose Teilchen beschreibt. Das Transformationsverhalten von Wellenfunktionen für Teilchen mit Spin ist komplizierter, da diese Wellenfunktionen keine skalaren Funktionen mehr sind. Deshalb verschieben wir die Betrachtung dieses Falles auf die Kapitel 7 bis 10.

Man kann nun die Bedingung (3.1) umschreiben. Mit

$$\vec{x}' = R\vec{x} \rightarrow \vec{x} = \overset{-1}{R} \vec{x}'$$

und der Umbenennung

$$\begin{aligned} \vec{x}' &\rightarrow \vec{x} \\ \vec{x} &\rightarrow \overset{-1}{R} \vec{x} \end{aligned}$$

lautet sie nun:

$$\psi'(\vec{x}) = \psi\left(\overset{-1}{R} \vec{x}\right)$$

ψ' ist der „gedrehte Zustand“, der zu einer Drehung R gehört. Wir definieren nun eine Abbildung ρ :

Def.:

$$\begin{aligned} \rho : \text{SO}(3) &\rightarrow \text{Aut}\mathcal{H} \\ R &\mapsto \rho(R), \text{ mit } \psi'(\vec{x}) = (\rho(R)\psi)(\vec{x}) \end{aligned}$$

Damit lautet unsere Bedingung in der endgültigen Form:

$$\boxed{(\rho(R)\psi)(\vec{x}) = \psi\left(\overset{-1}{R} \vec{x}\right)}$$

Mit dieser, zwar anschaulich motivierten, jedoch abstrakten Definition von ρ beweisen wir die folgenden beiden Aussagen:

i). ρ ist unitär.

Interpretation: Die in dem gestrichenen, bzw. ungestrichenen System gemessenen Wahrscheinlichkeitsdichten müssen natürlich gleich sein:

$$\|\psi'\|^2 = \|\psi\|^2 \Rightarrow \|(\rho(R)\psi)\|^2 = \|\psi\|^2$$

ii). Es gilt: $\rho(R_1 \cdot R_2) = \rho(R_1) \cdot \rho(R_2)$

Interpretation: Zwei hintereinander ausgeführte Drehungen R_1, R_2 des Labors ändern die Wellenfunktion in der gleichen Weise, als wenn das Labor direkt mit $R_1 \cdot R_2$ gedreht wird.

Dieser Zusammenhang wird besonders einprägsam durch ein klassisches Zitat dargestellt:

„Es ist egal, ob man erst um ϕ und dann um ψ dreht oder ob man gleich ganz durchdreht“ [4]

Durch diese Eigenschaft von ρ wird die Matrixmultiplikation des \mathbb{E}^3 im Hilbertraum dargestellt, deshalb nennt man diese Eigenschaft auch Darstellungseigenschaft.

Beweis:

i).

$$\begin{aligned} \langle \rho(R) \phi | \rho(R) \psi \rangle &= \int d^3x (\rho(R) \phi)^*(\vec{x}) (\rho(R) \psi)(\vec{x}) \\ &= \int d^3x \phi^* \left(\begin{matrix} -1 \\ R \end{matrix} \vec{x} \right) \psi \left(\begin{matrix} -1 \\ R \end{matrix} \vec{x} \right) \end{aligned}$$

Mit der Substitution $\vec{y} := R^{-1} \vec{x}$ und der Tatsache, daß die Jacobi-Determinante dieser Transformation 1 ist, erhält man:

$$\langle \rho(R) \phi | \rho(R) \psi \rangle = \int d^3y \phi^*(\vec{y}) \psi(\vec{y}) = \langle \phi | \psi \rangle \quad \forall \phi, \psi \in \mathcal{H}$$

ii).

$$\begin{aligned} (\rho(R_1 \cdot R_2) \psi)(\vec{x}) &= \psi((R_1 \cdot R_2)^{-1} \vec{x}) = \psi \left(\begin{matrix} -1 \\ R_2 \cdot R_1 \end{matrix} \vec{x} \right) \\ &= [\rho(R_2) \psi] \left(\begin{matrix} -1 \\ R_1 \end{matrix} \vec{x} \right) \\ &= \rho(R_1) [\rho(R_2) \psi](\vec{x}) \\ &= (\rho(R_1) \rho(R_2) \psi)(\vec{x}) \quad \forall \psi \in \mathcal{H} \\ \Rightarrow \rho(R_1 \cdot R_2) &= \rho(R_1) \rho(R_2) \end{aligned}$$

Kapitel 4

Lineare Lie-Gruppen und Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n

4.1 Untermannigfaltigkeiten und Tangentialräume

In diesem Kapitel soll eine allgemein gehaltene Definition von Lie-Gruppen und -Algebren gegeben werden. Dabei wird die Sprache der Differentialgeometrie benutzt, wie sie auch in immer stärkerem Maß in der physikalischen Literatur Eingang findet. Die fundamentalen Konzepte sind dabei die differenzierbare (Unter-)Mannigfaltigkeit und der Tangentialraum an diese Mannigfaltigkeit. Aus Platzgründen und um nicht vom eigentlichen Thema dieses Skriptums abzuschweifen, wird auf Beweise in diesem Abschnitt verzichtet, sie können beispielsweise in der angegebenen Literatur nachgelesen werden.

Wir beginnen mit dem Begriff der Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n . Dazu betrachten wir zunächst als Beispiel die Lage eines Blattes Papier im Raum. Aus der unmittelbaren Anschauung ergibt sich, daß dieses (idealisiert) ein 2-dimensionales Objekt ist. Betrachtet man nun ein solches Blatt im Raum, also im \mathbb{R}^3 , so muß dieses 2-dimensionale Objekt in den \mathbb{R}^3 eingebettet werden. Mathematisch bedeutet das, daß man eine Abbildung zwischen einem Rechteck als Teilmenge des \mathbb{R}^2 (dem „Standardblatt“⁽ⁱ⁾) und einer Teilmenge des \mathbb{R}^3 definiert. Diese Abbildung muß hinreichend glatt sein, denn man wird erwarten, daß sie die lokalen Eigenschaften des Blattes richtig beschreibt. Dies führt uns zunächst zur Definition des Diffeomorphismus:

Def.: Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$, U, V offen, sei $\phi : U \rightarrow V$ eine differenzierbare Abbildung. ϕ heißt Diffeomorphismus, falls ein ebenfalls differenzierbares Inverses ϕ^{-1} existiert. Differenzierbarkeit ist hierbei natürlich im Sinne des \mathbb{R}^n , aber eingeschränkt auf U gemeint.

Wir wissen nun aus der Anschauung, daß ein Blatt Papier im Raum lokal um einen Punkt auf diesem Blatt aussieht wie der $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$. Mit dem Begriff des Diffeomorphismus läßt sich diese Beobachtung präziser und allgemeiner fassen:

⁽ⁱ⁾Fläche $\frac{1}{16}\text{m}^2$, Seitenverhältnis $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Def.: $M \subset \mathbb{R}^n$, M offen, heißt k -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n , falls für jeden Punkt $x \in M$ die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\forall x \in M \exists U \subset M, U \text{ offen, mit } x \in U \exists \phi : U \rightarrow V$$

Dabei ist ϕ ein Diffeomorphismus mit der „Flachmacher-Eigenschaft“ (Kartenbedingung):⁽ⁱⁱ⁾

$$\phi(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}_{n-k}) = \{x \in V \mid x_{k+1} = \dots = x_n = 0\}$$

Ein weiteres Beispiel für eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 bildet die 2-Sphäre S^2 (z.B. eine Kristallkugel). Es ist klar, daß man jeden Punkt auf dieser Kugel durch Angabe von 2 Koordinaten (Polarkoordinaten) beschreiben kann, allerdings ist dies global (z. B. an den Polen) nicht in ein-eindeutiger Weise möglich.

Um nun nachzuprüfen, ob diese Kugel oder ein beliebiges Objekt eine Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 oder \mathbb{R}^n ist, benutzt man nun nicht die obige Definition, sondern versucht, Sätze zu finden, die es ermöglichen, die Untermannigfaltigkeitseigenschaft komfortabler zu prüfen. Eine analoge Situation kennt man aus der Analysis: Dort wird für eine gegebene Funktion meistens auch nicht die $\epsilon - \delta$ -Definition der Stetigkeit verwendet, um diese Funktion auf ihre Stetigkeitseigenschaften zu untersuchen, sondern es wird versucht, die aus dieser grundlegenden Definition folgenden Eigenschaften stetiger Funktionen (Summe, Produkt, Hintereinanderschaltung stetiger Funktionen sind wieder stetig) zum Stetigkeitsnachweis heranzuziehen.

Analog sollen nun zwei Sätze (ohne Beweis) angegeben werden, die zeigen, wie sich Untermannigfaltigkeiten erzeugen lassen. Mit diesen Sätzen ausgerüstet, läßt sich bereits aus der Konstruktion eines Objektes angeben, ob es eine Untermannigfaltigkeit darstellt.

Satz 1: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$, U offen und $g : U \rightarrow \mathbb{R}^p$, g differenzierbar. Ferner habe $Dg(x)$ den Rang p , für alle x mit $g(x) = 0$. Dann ist $g^{-1}(0)$ eine $(n - p)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit im \mathbb{R}^n .

In Worten: Die Nullstellenmenge einer differenzierbaren Abbildung g ist eine Untermannigfaltigkeit, wenn die Jacobi-Matrix dieser Abbildung auf der Nullstellenmenge maximalen Rang besitzt.

Satz 2: Eine offene Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n genau dann, wenn für alle Punkte x in M die folgende Bedingung erfüllt ist:

$\exists U \subset \mathbb{R}^n$ offen, mit $x \in U$, $\exists W \subset \mathbb{R}^k$ offen und $\exists f : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit:

i). $f(W) = M \cap U$

ii). $\text{Rg}(Df(y)) = k \quad \forall y \in W$

Eine Funktion mit diesen Eigenschaften heißt Parametrisierung (von M).

Ein Beispiel für die Anwendung von Satz 1 ist die n -Sphäre (also auch unsere Kristallkugel, die S^2):

⁽ⁱⁱ⁾Die Schreibweise $\{0\}_{n-k}$ kennzeichnet den Nullpunkt im \mathbb{R}^{n-k}

Die n -Sphäre ist charakterisiert durch die folgende Menge:

$$S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1, \|\cdot\| \text{ ist die euklidische Norm des } \mathbb{R}^{n+1}\}$$

Definiere nun eine Abbildung $g(x)$:

$$g(x) := \|x\| - 1$$

Dann gilt:

$$g(x_0) = 0 \iff x_0 \in S^n$$

Die S^n ist also die Nullstellenmenge von g . Bleibt noch die Rangeigenschaft zu zeigen. Es ist

$$Dg(x) = D(\|x\| - 1) = D\left(\sqrt{\langle x, x \rangle}\right) = \frac{x^T}{\|x\|} \quad (x^T \text{ Zeilenvektor})$$

Ferner: $g(x_0) = 0 \iff \|x_0\| = 1$. Also $Dg(x_0) = x_0^T$ und damit $\text{Rg}(Dg(x_0)) = 1$. Somit ist S^n eine $(n+1) - 1 = n$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^{n+1} .

Bemerkung und Beispiel für Satz 2:

Wir betrachten den Spezialfall $n=3$. Ferner sei eine Abbildung $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben. Dann ist:

$$\begin{aligned} \phi: \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ F(x, y) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

eine Parametrisierung einer Untermannigfaltigkeit M , mit

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ F(x, y) \end{pmatrix} \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\},$$

wenn $F(\cdot, \cdot)$ die Rangbedingung ii) auf der vorhergehenden Seite erfüllt⁽ⁱⁱⁱ⁾. Diese Konstruktion von f erklärt die Bezeichnung „Koordinatenbedingung“, bzw. „Parametrisierung“ in der obigen Definition, da eine auf diese Weise zustande gekommene Mannigfaltigkeit aus einem „Netz“ der Koordinaten (x, y) aufgebaut wird.

Beispiel: Sei $c \in \mathbb{R}$ und $f(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ c \end{pmatrix}$, $W = \mathbb{R}^2$

Dann ist $M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ c \end{pmatrix} \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 , denn

$$Df = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \text{Rg}(Df(x, y)) = 2 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Veranschaulicht man sich diese Mannigfaltigkeit, so erkennt man den Ausgangspunkt unserer Überlegungen, das im Raum befindliche Blatt Papier.^(iv)

⁽ⁱⁱⁱ⁾Die Bedingung i) auf der vorhergehenden Seite ist per Konstruktion erfüllt.

^(iv)Jedenfalls fast, denn die beschriebene Mannigfaltigkeit ist natürlich unendlich ausgedehnt. Tatsächlich ist das Papier auch keine echte Mannigfaltigkeit, da es keine offene Menge darstellt, sondern eine sogenannte Mannigfaltigkeit mit Rand. Doch dieser Unterschied ist für unsere Zwecke unwesentlich.

Später benötigen wir noch den Begriff der differenzierbaren Abbildung zwischen zwei Untermannigfaltigkeiten. Diese ist wie folgt definiert:

Def.: $M \subset \mathbb{R}^n, N \subset \mathbb{R}^m, M, N$ Untermannigfaltigkeiten.

$\phi : M \rightarrow N$ Abbildung. ϕ heißt differenzierbar in $x \in M$, falls f eine Parametrisierung von M ist und die Abbildung $\phi \circ f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($k = \dim M$) differenzierbar ist.

Damit ist die Diskussion von Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n abgeschlossen. Wir behandeln nun den zweiten wichtigen Begriff für die Diskussion von Lie-Gruppen und -Algebren, den des Tangentialraums (an eine Untermannigfaltigkeit).

Def.: Sei M eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^n, I \subset \mathbb{R}$ mit $0 \in I$ und $\Gamma : = \{\gamma : I \rightarrow M\}$ die Menge aller Kurven in M , dann ist

$$T_x(M) := \left\{ \left. \frac{d\gamma(t)}{dt} \right|_{t=0} \mid \gamma \in \Gamma \wedge \gamma(0) = x \right\}$$

der Tangentialraum von M in x .

Diese Formulierung des Tangentialraumes ist die am einfachsten einzusehende, da hier die Ableitungen von γ als Tangentenvektoren von M in x aufgefaßt werden. Dies entspricht gerade der ursprünglichen geometrischen Bedeutung der Ableitung.

Vergleicht man diese Definition mit den in der Literatur angegebenen, so wird man feststellen, daß es verschiedene äquivalente Formulierungen des Tangentialraumes gibt. Eine Diskussion von drei äquivalenten Definitionen (nämlich den drei häufigsten) und den Beweis ihrer Äquivalenz findet man im Buche von Jänich [2].

4.2 Lie-Gruppen und Algebren

Nach dieser Vorbereitung können wir die allgemeine Definition einer linearen Lie-Gruppe angeben:

Def.: Sei $G \subset \text{GL}(n, K)$ ($K = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C}). G heißt lineare Lie-Gruppe, falls gilt:

- i). G ist eine Untergruppe von $\text{GL}(n, K)$ (d.h. G hat Gruppenstruktur).
- ii). G ist eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit im \mathbb{R}^{n^2} bzw. \mathbb{R}^{2n^2} .

Dabei ist zu beachten, daß aus dieser Definition schon folgt, daß die Gruppenoperationen Multiplikation und Inversion differenzierbar sind. Denn in $\text{GL}(n, K)$ sind dies ja Matrixmultiplikation und Inversion, die sich komponentenweise als einfache (und differenzierbare) algebraische Ausdrücke schreiben lassen.

Beispiele:

i). $SL(n, \mathbb{R}) := \{A \in GL(n, \mathbb{R}) ; \det A = 1\}$ ist Lineare Lie-Gruppe, denn sei

$$g(A) := \det A - 1$$

Dann ist:

$$SL(n, \mathbb{R}) = g^{-1}(0)$$

Ferner ist:

$$Dg(A) = \frac{\partial(\det A)}{\partial A_{ij}} = a_{ij}$$

wobei a_{ij} der Minor zu A_{ij} ist

$$\Rightarrow Dg(A) \neq 0 \text{ falls } g(A) = 0$$

mit Satz 1 ergibt sich die Behauptung.

ii). $O(n, \mathbb{R}) := \{R \in GL(n, \mathbb{R}) ; R^T R = 1\}$ ist Lineare Lie-Gruppe:

$$g(R) := R^T R - 1$$

$$\Rightarrow O(n, \mathbb{R}) = g^{-1}(0)$$

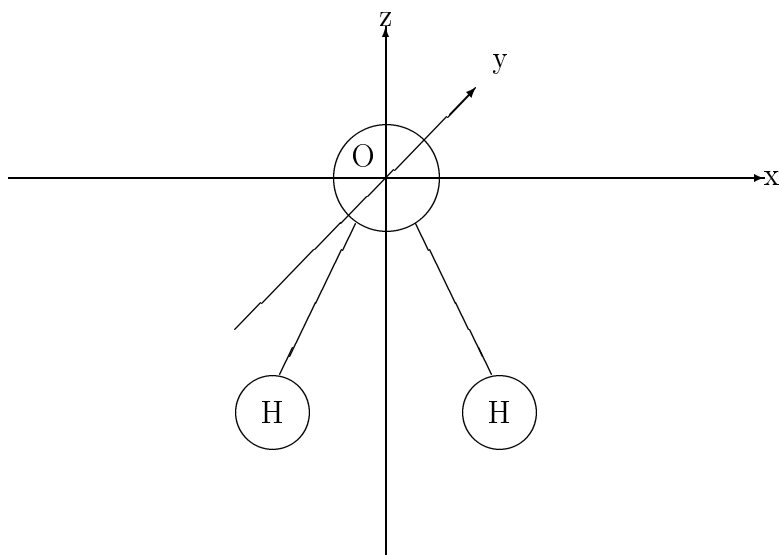
$$Dg(R) = \frac{\partial g(R)}{\partial R} = R^T \Rightarrow Dg(R) \neq 0 \text{ für } R \in g^{-1}(0)$$

Allgemein gilt (ohne Beweis):

Satz (Élie Cartan): Jede abgeschlossene Untergruppe von $GL(n, K)$ ist eine Lineare Lie-Gruppe

Man könnte nun glauben, daß jede physikalisch relevante Gruppe eine Lie-Gruppe sei (z.B. Rotationen, Translationen, Boosts).

Daher soll hier auch ein Beispiel für eine Gruppe, die zwar auch physikalische Bedeutung hat, aber keine Lie-Gruppe ist, gegeben werden. Dazu betrachten wir die Symmetriegruppe des Wassermoleküls in seiner Gleichgewichtsgeometrie:



Die Symmetrieelemente des Wasser-Moleküls sind diejenigen Operationen, die man am Molekül ausführen kann, ohne dessen Lage im Raum zu ändern. Dies sind im einzelnen:

- die Identität (d.h. nichts tun) (E)
- eine Drehung um 180° um die z -Achse (C_{2z})
- eine Spiegelung an der xz -Ebene (σ_{xz})
- eine Spiegelung an der yz -Ebene (σ_{yz})

Stellt man eine Verknüpfungstafel auf, so findet man, daß die vier oben genannten Elemente eine Gruppe bilden. Diese wird üblicherweise mit $C_{2v}^{(v)}$ bezeichnet.

Da die Elemente dieser Gruppe diskret sind, bilden sie keine differenzierbare Mannigfaltigkeit, also ist C_{2v} keine Lie-Gruppe. Dennoch ist die Symmetrieklassifikation von Molekülen keine bloße Spielerei, sondern mit gruppentheoretischen Methoden lassen sich Aussagen über Schwingungsspektren herleiten, sowie quantenmechanische Rechnungen vereinfachen.

Nach dieser — zugegebenermaßen recht kurzen — Behandlung der Lie-Gruppen, führen wir nun noch den Begriff der Lie-Algebra ein und geben den Zusammenhang zwischen diesen beiden Strukturen an.

Da wir eine Lie-Gruppe als Mannigfaltigkeit definiert haben, können wir auch den Tangentialraum an diese betrachten. Sei G also eine Lie-Gruppe und $L_G := T_{\mathbf{I}}(G)$ sei der Tangentialraum von G im „Punkt“ \mathbf{I} (\mathbf{I} : Identität in G) angeheftet. Das bedeutet, daß sich jedes $X \in L_G$ wie folgt darstellen läßt:

$$A(\tau) \in \Gamma, \quad X = \left. \frac{dA(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=0}, \quad A(0) = \mathbf{I}$$

Sei ferner die Lie-Klammer $[\cdot, \cdot] : L_G \times L_G \rightarrow L_G$ wie folgt definiert:

$$\forall X, Y \in L_G : [X, Y] := X \circ Y - Y \circ X$$

Dabei ist \circ das Matrixprodukt in L_G .

Dann gilt: Mit der Lie-Klammer versehen, bildet L_G eine schiefe (daher nichtkommutative), abgeschlossene Algebra.

Beweis:

$$\text{Schiefe: } [X, Y] = X \circ Y - Y \circ X = -(Y \circ X - X \circ Y) = -[Y, X]$$

Abgeschlossenheit: Seien $X, Y \in L_G$. Dann existieren Kurven $A(s), B(t)$ in G mit

$$X = \left. \frac{dA(s)}{ds} \right|_{s=0}, \quad A(0) = \mathbf{I}$$

$$Y = \left. \frac{dB(t)}{dt} \right|_{t=0}, \quad B(0) = \mathbf{I}$$

^(v)Nicht zu verwechseln mit $2CV$.

Definiere:

$$C(\tau) := A(s)B(t)(A(s))^{-1}(B(t))^{-1} \Big|_{s=t=\sqrt{\tau}}$$

Dann gilt: $C \in \Gamma$ und $C(0) = \mathbf{I}$. Nun:

$$\begin{aligned} \left. \frac{dC(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=0} &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{C(\tau) - \mathbf{I}}{\tau} = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \left(A(\sqrt{\tau})B(\sqrt{\tau})(A(\sqrt{\tau}))^{-1}(B(\sqrt{\tau}))^{-1} - \mathbf{I} \right) \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \left((A(\sqrt{\tau})B(\sqrt{\tau}) - B(\sqrt{\tau})A(\sqrt{\tau})) \times \right. \\ &\quad \left. \times (A(\sqrt{\tau}))^{-1}(B(\sqrt{\tau}))^{-1} \right) \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \left([A(\sqrt{\tau}), B(\sqrt{\tau})] (A(\sqrt{\tau}))^{-1}(B(\sqrt{\tau}))^{-1} \right) \\ &\stackrel{(vi)}{=} \lim_{\tau \rightarrow 0} \left(\left[\frac{A(\sqrt{\tau}) - \mathbf{I}}{\sqrt{\tau}}, \frac{B(\sqrt{\tau}) - \mathbf{I}}{\sqrt{\tau}} \right] (A(\sqrt{\tau}))^{-1}(B(\sqrt{\tau}))^{-1} \right) \\ &\stackrel{(vii)}{=} \left[\left. \frac{d}{ds} A(s) \right|_{s=0}, \left. \frac{d}{ds} B(s) \right|_{s=0} \right] = [X, Y] \quad \square \end{aligned}$$

Ferner sieht man leicht, daß $[\cdot, \cdot]$ bilinear ist, und weniger leicht, daß die Jacobi-Identität gilt:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

Definition: L_G mit $[\cdot, \cdot]$ als Verknüpfung ausgestattet, heißt Lie-Algebra zur Lie-Gruppe G .

Bemerkung: Wir haben die Lie-Algebra L_G als Tangentialraum der Gruppe(nmannigfaltigkeit) G , angeheftet am Einheitsselement, $L_G := T_{\mathbf{I}}(G)$ definiert. Es ergibt sich dabei gleich die Frage, warum gerade \mathbf{I} gewählt werden sollte. Dazu untersuchen wir den Tangentialraum $T_{A_0}(G)$ mit $A_0 \in G$:

Sei also $A_0 \in G$ und $X_{A_0} \in T_{A_0}(G)$. Dann existiert nach Definition eine Kurve $A(t)$ in G mit $A(0) = A_0$ und $X_{A_0} = \left. \frac{d}{dt} A(t) \right|_{t=0}$.

Definiere nun eine zweite Kurve $B(t)$:

$$B(t) := A_0^{-1} A(t) \quad (\text{Beachte: } A_0 \text{ ist Matrix!})$$

Dann gilt $B(0) = \mathbf{I}$ und $A(t)$ läßt sich durch $B(t)$ ausdrücken:

$$A(t) = A_0 B(t)$$

(vi) Da \mathbf{I} mit allem vertauscht.

(vii) Ausführen des Grenzübergangs.

Damit ist aber:

$$\begin{aligned} X_{A_0} &= \left. \frac{d}{dt} A(t) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} (A_0 B(t)) \right|_{t=0} \\ &= A_0 \underbrace{\left. \frac{d}{dt} B(t) \right|_{t=0}}_{\in T_{\mathbb{I}}(G)} \in A_0 T_{\mathbb{I}}(G) = A_0 L_G \end{aligned}$$

Da dies für alle X_{A_0} gilt, ist

$$T_{A_0}(G) = A_0 L_G$$

Deshalb ist die Kenntnis von L_G völlig ausreichend, um die Struktur der anderen Tangentialräume $T_{A_0}(G)$ festzulegen.

Beispiele für Lie Algebren:

i).

$$G = \mathrm{GL}(n, K); \quad K = \mathbb{R} \text{ oder } \mathbb{C}$$

$$L_G = \mathfrak{gl}(n, K) = \{X \mid X \text{ ist } K\text{-wertige } n \times n\text{-Matrix}\}$$

denn sei $X \in \mathfrak{gl}(n, K)$ so ist:

$$A(\tau) := e^{\tau X}$$

eine Kurve in $\mathrm{GL}(n, K)$, da $\det A(\tau) = e^{\tau \mathrm{Sp} X} \neq 0$ für alle $X \in \mathfrak{gl}(n, K)$ gilt, mit $A(0) = \mathbb{I}$ und (differenziere die Potenzreihe von \exp gliedweise)

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} e^{\tau X} &= \frac{d}{d\tau} \sum_m \frac{1}{m!} (\tau X)^m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} m \tau^{m-1} X^m \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m-1)!} \tau^{m-1} X^m = X \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m-1)!} \tau^{m-1} X^{m-1} \\ &= X \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} (\tau X)^l = X e^{\tau X} \end{aligned}$$

$$\text{also: } \left. \frac{d}{d\tau} e^{\tau X} \right|_{\tau=0} = X$$

ii).

$$G = \mathrm{SL}(n, K); \quad K = \mathbb{R} \text{ oder } \mathbb{C}$$

$$L_G = \mathfrak{sl}(n, K)$$

Sei $A(\tau)$ eine Kurve in $\mathrm{SL}(n, K)$ mit $A(0) = \mathbb{I}$, dann ist $\det A(\tau) = \mathbb{I} \forall \tau$

Differenzieren dieser Beziehung bei $\tau=0$ liefert:

$$\begin{aligned} 0 &= \left. \frac{d}{d\tau} \det A(\tau) \right|_{\tau=0} \stackrel{\text{(viii)}}{=} \sum_{i,j} \left. \frac{\partial \det A(\tau)}{\partial a_{ij}} \right|_{\tau=0} \left. \frac{\partial a_{ij}}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} \\ &= \sum_{i,j} \underbrace{A_{ij}(0)}_{=\delta_{ij} \text{ (ix)}} \dot{a}_{ij}(0) = \sum_i \dot{a}_{ii}(0) = \operatorname{Sp} X \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (X \in \mathfrak{sl}(n, K) \Rightarrow \operatorname{Sp} X = 0)$$

Sei andererseits: $\operatorname{Sp} X = 0$ und $A(\tau) := e^{\tau X}$ dann:

$$A(0) = \mathbb{I}, \det A(\tau) = e^{\tau \operatorname{Sp} X} = e^0 = \mathbb{I} \Rightarrow A(\tau) \in \operatorname{SL}(n, K)$$

also gilt:

$$X \in \mathfrak{sl}(n, K) \iff \operatorname{Sp} X = 0$$

oder:

$$\mathfrak{sl}(n, K) = \{X \mid \operatorname{Sp} X = 0\}$$

iii).

$$G = \operatorname{U}(n)$$

$$L_G = \mathfrak{u}(n)$$

Sei wieder $X \in \mathfrak{u}(n)$, $A(\tau)$ Kurve in $\operatorname{U}(n)$ mit $A(0) = \mathbb{I}$, $X = \left. \frac{dA(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=0}$ dann ist:

$$A^\dagger(\tau) A(\tau) = \mathbb{I}$$

Differenzieren unter Beachtung der Produktregel:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\tau} A^\dagger(\tau) A(\tau) \right|_{\tau=0} &= 0 \\ \Rightarrow \dot{A}^\dagger(0) + \dot{A}(0) &= 0 \\ \Rightarrow X^\dagger + X &= 0 \end{aligned}$$

Also:

$$X \in \mathfrak{u}(n) \Rightarrow X^\dagger + X = 0$$

Umgekehrt gelte: $X^\dagger + X = 0$, dann ist mit $A(\tau) := e^{\tau X}$: $A(0) = \mathbb{I}$

$$A^\dagger(\tau) A(\tau) = e^{\tau X^\dagger} e^{\tau X} = e^{\tau X^\dagger + \tau X} = e^0 = \mathbb{I}, \text{ also } A(\tau) \in \operatorname{U}(n)$$

Und damit ist:

$$\mathfrak{u}(n) = \{X \mid X^\dagger + X = 0\}$$

^(viii) a_{ij} Minor.

^(ix) Wegen der Bedingung an die Kurve.

iv).

$$G = O(n)$$

$$L_G = o(n)$$

Wie in iii) auf der vorherigen Seite, nur ist wegen $K = \mathbb{R}$, statt der konjugiert-transponierten nur die transponierte Matrix zu verwenden, und es ist:

$$o(n) = \{X \mid X^T + X = 0\}$$

v).

$$G = SO(n)$$

$$L_G = so(n)$$

Kombiniere ii) auf Seite 13 und iv):

$$so(n) = \{X \mid \operatorname{Sp} X = 0, X^T + X = 0\}$$

Die Beziehung zwischen einer Lie-Gruppe G und ihrer Lie-Algebra L_G wird (wie die Beispiele ja schon nahelegten) durch die Exponentialabbildung hergestellt, es gilt:

Satz: G Lie-Gruppe, L_G Lie-Algebra von G . Das Bild der Abbildung $\exp : L_G \rightarrow W$ ist in G , d. h. $W \subset G$, und \exp ist ein lokaler Diffeomorphismus.

Der Beweis soll hier nicht vorgeführt werden, da dort weitere Begriffe aus der Differentialgeometrie (Vektorfeld, Lösungskurve eines Vektorfeldes, Geodätische) benötigt werden.

Zum Abschluß dieses Abschnittes wird angegeben, wie aus der Darstellung ρ einer Lie-Gruppe G die dazugehörige Darstellung ρ' der Lie-Algebra L_G konstruiert werden kann. Das Hauptproblem bei dieser Konstruktion ist der Beweis der Darstellungseigenschaft von ρ' , die lautet:

$$\rho'([X, Y]_{L_G}) = [\rho'(X), \rho'(Y)]_{\mathcal{H}}$$

Wir werden sehen, daß sich der Beweis mit den in diesem Kapitel angegebenen Mitteln relativ einfach und kurz ausführen läßt. Im Gegensatz dazu wird die Darstellungseigenschaft weiter unten (auf Seite 20–24) nochmals bewiesen, dort allerdings ohne die differentialgeometrische Definition der Lie-Algebra als Tangentialraum an der Identität. Deshalb gestaltet sich der Beweis dann auch um einiges länger.

Sei $\rho : G \rightarrow \operatorname{Aut} \mathcal{H}$ eine Darstellung einer Lie-Gruppe. Da $\rho(A(t))$ mit $A(t)$ Kurve in G definiert ist, kann man eine Darstellung $\rho' : L_G \rightarrow \operatorname{Aut} \mathcal{H}$ erklären:

$$\forall X \in L_G : \rho'(X) := \left. \frac{d}{d\tau} \rho(A(\tau)) \right|_{\tau=0} \quad \text{mit } A(0) = X$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert und mit unserer bereits oben angegebenen Kurve an den Kommutator $C(\tau)$ (auf Seite 12) ist:

$$\begin{aligned} \rho([X, Y]_{LG}) &= \left. \frac{d}{d\tau} \rho(C(\tau)) \right|_{\tau=0} \\ &= \left. \frac{d}{d\tau} \rho \left(A(\sqrt{\tau}) B(\sqrt{\tau}) (A(\sqrt{\tau}))^{-1} (B(\sqrt{\tau}))^{-1} \right) \right|_{\tau=0} \\ &\stackrel{(x)}{=} \left. \frac{d}{d\tau} \left(\rho(A(\sqrt{\tau})) \rho(B(\sqrt{\tau})) \rho \left((A(\sqrt{\tau}))^{-1} \right) \rho \left((B(\sqrt{\tau}))^{-1} \right) \right) \right|_{\tau=0} \end{aligned}$$

Dann kann man exakt die gleiche Rechnung wie auf Seite 12 durchführen, lediglich die Terme vom Typ $A(\sqrt{\tau})$ müssen durch $\rho(A(\sqrt{\tau}))$ und so weiter ersetzt werden. Ferner ist am Ende der Rechnung zu beachten, daß

$$\left. \frac{d}{d\tau} \rho(A(\tau)) \right|_{\tau=0} = \rho'(X)$$

ist und dies analog auch für $\rho(B(\tau))$ gilt.

Damit erhalten wir

$$\rho'([X, Y]_{LG}) = [\rho'(X), \rho'(Y)]_{\mathcal{H}},$$

ρ' ist also tatsächlich eine Darstellung der Lie-Algebra.

Drückt man nun noch die Elemente der Lie-Gruppe durch die Exponentialfunktion der entsprechenden Lie-Algebra-Elemente aus

$$A(\tau) = e^{\tau X},$$

so ist gezeigt worden, daß

$$\rho'(X) := \left. \frac{d}{d\tau} \rho(e^{\tau X}) \right|_{\tau=0}$$

eine von der Darstellung ρ der Gruppe induzierte Darstellung der Lie-Algebra ist.

Im nächsten Kapitel kehren wir nun zur Drehgruppe zurück, und zeigen die Übertragung der Darstellungen an diesem Beispiel ganz explizit, was wie oben angedeutet wesentlich länger ist, dafür aber nicht des ganzen differentialgeometrischen Apparats bedarf.

Wer weiter an diesen mathematischen Themen und ihrer Beziehung zur Physik interessiert ist oder auch nur die fehlenden Beweise dieses Kapitels nachlesen will, sollte mal in die Bücher von Straumann[8] oder Isham[1] sehen.

^(x) ρ ist Darstellung.

Kapitel 5

Lie-Algebra der Drehgruppe

Wir wollen nun den Zusammenhang von \mathbb{R} mit den schiefen 3×3 -Matrizen herstellen, dazu führen wir zunächst die Lie-Algebra der Drehgruppe ein:

Def.:

$$\text{LieSO}(3) := \mathfrak{so}(3) := L_S := \{ \Theta \mid \Theta : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3; \Theta \text{ linear, } \text{Sp}\Theta = 0, \Theta = -\Theta^T \}$$

Die Lie-Algebra der Drehgruppe sind also die schiefen 3×3 -Matrizen, wie wir bereits in Beispiel v) auf Seite 15 gezeigt haben.

Ferner definieren wir die folgende Abbildung:

$$\begin{aligned} I : \mathbb{E}^3 &\rightarrow L_S \\ \vec{a} &\mapsto I(\vec{a}) \text{ mit } I(\vec{a})\vec{b} := \vec{a} \times \vec{b} \quad \forall \vec{b} \in \mathbb{E}^3 \end{aligned}$$

Beh.: I definiert einen Isomorphismus zwischen dem \mathbb{E}^3 und den schiefen 3×3 -Matrizen.

Bew.: Injektivität:

$$\begin{aligned} \text{z.z.: } I(\vec{a}) = I(\vec{a}') &\Rightarrow \vec{a} = \vec{a}' \\ I(\vec{a}) = I(\vec{a}') &\Rightarrow \forall \vec{b} \in \mathbb{E}^3 : I(\vec{a})\vec{b} = I(\vec{a}')\vec{b} \\ &\Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a}' \times \vec{b} \\ &\Rightarrow (\vec{a} - \vec{a}') \times \vec{b} = 0 \quad \forall \vec{b} \in \mathbb{E}^3 \\ &\Rightarrow \vec{a} = \vec{a}' \end{aligned}$$

Surjektivität:

$$\begin{aligned} \text{z.z.: } \forall \Theta \in L_S \exists \vec{a} : I(\vec{a}) = \Theta \\ \Theta \in L_S &\Rightarrow \Theta \text{ ist von folgender Gestalt:} \end{aligned}$$

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & \Theta_1 & \Theta_2 \\ -\Theta_1 & 0 & \Theta_3 \\ -\Theta_2 & -\Theta_3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\forall \vec{b} \in \mathbb{E}^3 : \Theta \vec{b} = \begin{pmatrix} \Theta_1 b_2 + \Theta_2 b_3 \\ -\Theta_1 b_1 + \Theta_3 b_3 \\ -\Theta_2 b_1 - \Theta_3 b_2 \end{pmatrix}$$

Andererseits ist:

$$I(\vec{a}) \vec{b} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Damit gilt

$$I(\vec{a}) \vec{b} = \Theta \vec{b}$$

setzt man:

$$a_1 = -\Theta_3$$

$$a_2 = \Theta_2$$

$$a_3 = -\Theta_1$$

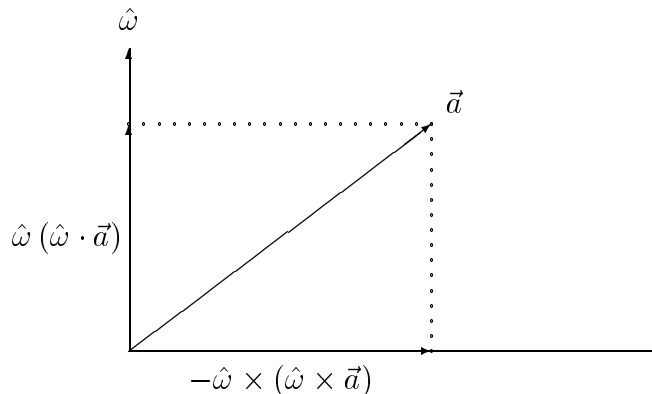
Mit dieser Abbildung sind wir nun in der Lage, die Drehungen im \mathbb{E}^3 wie folgt auszudrücken:

$$\boxed{R = e^{I(\vec{\omega})}} \quad (5.1)$$

dabei beschreibt $|\vec{\omega}|$ den Drehwinkel und $\hat{\omega}$ ist der Einheitsvektor in Richtung der Drehachse.

Beweis: Man beweist diese Aussage, indem man die e-Funktion als Reihe schreibt, die Potenzen von $I(\vec{\omega})$ berechnet und dann die Reihe geeignet zusammenfaßt. Diese Berechnung kann mit den allgemeinen Summen ausgeführt werden, wir wollen jedoch nur einige Summenglieder explizit angeben, um so den Beweis etwas durchsichtiger zu gestalten.

Wir betrachten nun die Wirkung dieser Exponentialabbildung auf einen beliebigen Vektor $\vec{a} \in \mathbb{E}^3$. Zuvor jedoch geben wir eine Zerlegung dieses Vektors an:



Bei fest vorgegebenem $\vec{\omega}$ läßt sich \vec{a} wie folgt zerlegen:

$$\vec{a} = \hat{\omega} (\hat{\omega} \cdot \vec{a}) - \hat{\omega} \times (\hat{\omega} \times \vec{a})$$

Man überzeugt sich leicht, daß die Summe der Vektoren einen Vektor mit Betrag $|\vec{a}|$ ergibt. Ferner sieht man, daß die beiden Summanden orthogonal zueinander stehen, so daß wir eine Zerlegung vorliegen haben, wie sie in der Zeichnung dargestellt ist. Warum wir gerade so zerlegen, wird im weiteren Verlauf der Rechnung klar.

Es ist:

$$R(\vec{\omega}) \vec{a} = e^{I(\vec{\omega})} \vec{a} = \left(1 + I(\vec{\omega}) + \frac{1}{2!} I^2(\vec{\omega}) + \frac{1}{3!} I^3(\vec{\omega}) + \dots \right) \vec{a}$$

Man findet nun für die ersten 6 Potenzen von $I(\vec{\omega})$:

$$I(\vec{\omega}) \vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{a}$$

$$I^2(\vec{\omega}) \vec{a} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{a})$$

$$\begin{aligned} I^3(\vec{\omega}) \vec{a} &= \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{a})] = \vec{\omega} \times [\vec{\omega} (\vec{\omega} \cdot \vec{a}) - \omega^2 \vec{a}] \\ &= (-\omega^2) \vec{\omega} \times \vec{a} \end{aligned}$$

$$I^4(\vec{\omega}) \vec{a} = (-\omega^2) \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{a})$$

$$I^5(\vec{\omega}) \vec{a} = (-\omega^2)^2 \vec{\omega} \times \vec{a}$$

$$I^6(\vec{\omega}) \vec{a} = (-\omega^2)^2 \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{a})$$

⋮

$$\begin{aligned} R(\vec{\omega}) \vec{a} &= \hat{\omega} (\hat{\omega} \cdot \vec{a}) - \hat{\omega} \times (\hat{\omega} \times \vec{a}) + \\ &+ \vec{\omega} \times \vec{a} \left[1 + \frac{1}{3!} (-\omega^2) + \frac{1}{5!} (-\omega^2)^2 + \dots \right] \\ &+ \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{a}) \left[\frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} (-\omega^2) + \frac{1}{6!} (-\omega^2)^2 + \dots \right] \end{aligned}$$

Bei dieser Zusammenfassung haben wir die obige orthogonale Zerlegung von \vec{a} verwendet, ferner wurden jeweils alle Terme mit $\vec{\omega} \times \vec{a}$ und $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{a})$ zusammengefaßt.

Nun gehen wir mit $\vec{\omega} = \omega \cdot \hat{\omega}$ zum Einheitsvektor $\hat{\omega}$ über:

$$\begin{aligned} \Rightarrow R(\vec{\omega}) \vec{a} &= \hat{\omega} (\hat{\omega} \cdot \vec{a}) - \hat{\omega} \times (\hat{\omega} \times \vec{a}) + \\ &+ \hat{\omega} \times \vec{a} \left[\omega - \frac{1}{3!} \omega^3 + \frac{1}{5!} \omega^5 \mp \dots \right] \\ &+ \hat{\omega} \times (\hat{\omega} \times \vec{a}) \left[\frac{1}{2!} \omega^2 - \frac{1}{4!} \omega^4 + \frac{1}{6!} \omega^6 \mp \dots \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow R(\vec{\omega}) \vec{a} &= \hat{\omega} (\hat{\omega} \cdot \vec{a}) \\
&+ \hat{\omega} \times \vec{a} \left[\omega - \frac{1}{3!} \omega^3 + \frac{1}{5!} \omega^5 \mp \dots \right] \\
&- \hat{\omega} \times (\hat{\omega} \times \vec{a}) \left[1 - \frac{1}{2!} \omega^2 + \frac{1}{4!} \omega^4 - \frac{1}{6!} \omega^6 \pm \dots \right] \\
\Rightarrow \boxed{R(\vec{\omega}) \vec{a} = \hat{\omega} (\hat{\omega} \cdot \vec{a}) + \hat{\omega} \times \vec{a} \sin \omega - \hat{\omega} \times (\hat{\omega} \times \vec{a}) \cos \omega} & \quad (5.2)
\end{aligned}$$

Beim Übergang zum letzten Schritt haben wir die Potenzreihenentwicklung der Sinus- bzw. Cosinusfunktion benutzt (s. z. B. [6, S. 515]).

Wir erhalten als Resultat, daß $R(\vec{\omega}) \vec{a}$ die Komponente in Richtung der $\hat{\omega}$ -Achse konstant läßt und daß in der von $\hat{\omega} \times \vec{a}$ und $\hat{\omega} \times (\hat{\omega} \times \vec{a})$ aufgespannten Ebene — die zu $\hat{\omega}$ orthogonal ist — eine Drehung von \vec{a} um den Winkel ω ausgeführt wird. \square

Wir definieren nun die zur Darstellung ρ der Lie-Gruppe $SO(3)$ gehörige Darstellung ρ' der Lie-Algebra L_S

Def.:

$$\begin{aligned}
\rho' : L_S &\rightarrow \text{End } \mathcal{H} \\
\Theta &\mapsto \rho'(\Theta) := \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} [\rho(e^{\Delta\Theta}) - \mathbb{1}]
\end{aligned}$$

Man schreibt formal: $\rho'(\Theta) = \frac{d}{dt} \rho(e^{t\Theta})|_{t=0}$

Unser weiteres Vorgehen ist nun wie folgt: Zunächst beweisen wir einige Eigenschaften von $\rho'(\Theta)$. Anschließend betrachten wir den Spezialfall $\Theta = I(\vec{\omega})$ und zeigen, daß $\rho'(I(\vec{\omega})) = : \rho'(\vec{\omega})$ mit dem quantenmechanischen Operator des Drehimpulses verknüpft ist. Aufgrund dieser Verknüpfung ergeben sich automatisch die Kommutatoren der Drehimpulskomponenten. Damit ist gezeigt, daß die Vertauschungsrelationen des Drehimpulses eine Folge der Struktur der Drehgruppe sind.

Eigenschaften von ρ' :

- i). $\rho(e^{t\Theta}) = e^{t\rho'(\Theta)}$
- ii). ρ' ist linear:
 - (a) $\rho'(\lambda\Theta) = \lambda\rho'(\Theta)$
 - (b) $\rho'(\Theta_1 + \Theta_2) = \rho'(\Theta_1) + \rho'(\Theta_2)$

Beweis:

zu i)

$$F_1(t) := \rho(e^{t\Theta}); \quad F_2(t) := e^{t\rho'(\Theta)}$$

Wir müssen nun zeigen, daß diese beiden Funktionen für alle t übereinstimmen. Dazu weisen wir nach, daß F_1, F_2 bei $t=0$ gleich sind und dieselbe Differentialgleichung 1. Ordnung lösen. Daraus folgt dann die Übereinstimmung von F_1 und F_2 für alle t , denn die Lösung einer Differentialgleichung 1. Ordnung ist bis auf eine Konstante eindeutig. Diese Konstante wird dann noch durch die — hier identischen — Anfangsbedingungen (bei $t=0$) festgelegt. Lösen also zwei Funktionen dieselbe Differentialgleichung 1. Ordnung, so sind ihre Lösungskurven parallelverschoben. Sind sie dann noch in einem Punkt gleich, so müssen sie identisch sein.

Wir haben nun:

$$F_1(0) = \rho(e^0) = \rho(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$$

$$F_2(0) = \mathbf{1}$$

Es bleibt zu zeigen, daß F_1, F_2 dieselbe Differentialgleichung 1. Ordnung lösen.

Es ist

$$\frac{d}{dt}F_2(t) = \rho'(\Theta) e^{t\rho'(\Theta)} = \rho'(\Theta) F_2(t)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}F_1(t) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} [\rho(e^{(t+\Delta)\Theta}) - \rho(e^{t\Theta})] \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} [\rho(e^{t\Theta}) \rho(e^{\Delta\Theta}) - \rho(e^{t\Theta})] \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} [\rho(e^{\Delta\Theta}) - \mathbf{1}] \rho(e^{t\Theta}) \\ &= \rho'(\Theta) \rho(e^{t\Theta}) \\ &= \rho'(\Theta) F_1(t) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}F_1(t) = \rho'(\Theta) F_1(t)$$

F_1 und F_2 lösen also dieselbe Differentialgleichung 1. Ordnung und stimmen bei $t=0$ überein. Nach unserer obigen Überlegung können wir daraus folgern, daß

$$\forall t: F_1(t) = F_2(t)$$

Mithin gilt also:

$$\rho(e^{t\Theta}) = e^{t\rho'(\Theta)}$$

zu ii)a) auf der vorherigen Seite

$$\begin{aligned} \rho'(\lambda\Theta) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} [\rho(e^{\lambda\Delta\Theta}) - \mathbf{1}] \\ &= \lim_{\tilde{\Delta} \rightarrow 0} \lambda \frac{1}{\tilde{\Delta}} [\rho(e^{\tilde{\Delta}\Theta}) - \mathbf{1}]; \quad \tilde{\Delta} = \lambda\Delta \\ &= \lambda \lim_{\tilde{\Delta} \rightarrow 0} \frac{1}{\tilde{\Delta}} [\rho(e^{\tilde{\Delta}\Theta}) - \mathbf{1}] = \lambda\rho'(\Theta) \end{aligned}$$

zu ii)b auf Seite 20

$$\begin{aligned}
\rho'(\Theta_1 + \Theta_2) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} [\rho(e^{\Delta(\Theta_1 + \Theta_2)}) - \mathbf{1}] \\
&= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} [\rho(e^{\Delta(\Theta_1 + \Theta_2)}) - \rho(e^{\Delta\Theta_2}) + \rho(e^{\Delta\Theta_2}) - \mathbf{1}] \\
&= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} [\rho(e^{\Delta(\Theta_1 + \Theta_2)}) \rho(e^{-\Delta\Theta_2}) \rho(e^{\Delta\Theta_2}) - \rho(e^{\Delta\Theta_2})] + \\
&\quad + \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} [\rho(e^{\Delta\Theta_2}) - \mathbf{1}] \\
&= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} [\rho(e^{\Delta(\Theta_1 + \Theta_2)} e^{-\Delta\Theta_2}) \rho(e^{\Delta\Theta_2}) - \rho(e^{\Delta\Theta_2})] + \rho'(\Theta_2) \\
&= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} [\rho(e^{\Delta(\Theta_1 + \Theta_2)} e^{-\Delta\Theta_2}) - \mathbf{1}] \rho(e^{\Delta\Theta_2}) + \rho'(\Theta_2)
\end{aligned}$$

Warnung: Hat man Exponentialfunktionen von Matrizen, darf man im allgemeinen nicht wie mit Funktionen von reellen Zahlen rechnen, das Zusammenfassen der Exponenten ist nämlich für beliebige Matrizen nicht erlaubt. Es gilt zwar

$$e^A \cdot e^B = e^{A+B} \text{ falls } [A, B] = 0(!)$$

aber diese Kommutatorbedingung ist meistens nicht erfüllt! Aus diesem Grund ist Vorsicht beim Umgang mit matrixwertigen Exponentialfunktionen geboten! Da wir in unserem hier vorliegenden Fall die kleine Größe Δ im Exponenten stehen haben, entwickeln wir die Exponentialfunktion nach Potenzen von Δ , wobei wir die Reihen nur bis zur 1. Ordnung in Δ schreiben.

$$\begin{aligned}
e^{\Delta(\Theta_1 + \Theta_2)} e^{-\Delta\Theta_2} &= (1 + \Delta(\Theta_1 + \Theta_2) + \dots)(1 - \Delta\Theta_2 + \dots) \\
&= 1 - \Delta\Theta_2 + \Delta(\Theta_1 + \Theta_2) + \dots \\
&= 1 + \Delta\Theta_1 + \dots \\
&= e^{\Delta\Theta_1} \\
\Rightarrow \rho'(\Theta_1 + \Theta_2) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} [\rho(e^{\Delta\Theta_1}) - \mathbf{1}] \rho(e^{\Delta\Theta_2}) + \rho'(\Theta_2) \\
&= \rho'(\Theta_1) + \rho'(\Theta_2). \quad \square
\end{aligned}$$

Damit sind wir nun in der Lage, die Darstellungseigenschaft von ρ' zu beweisen:

$$\boxed{\Theta_1, \Theta_2 \in L_S : [\rho'(\Theta_1), \rho'(\Theta_2)]_{\mathcal{H}} = \rho'([\Theta_1, \Theta_2]_{L_S})}$$

Dabei wird der Kommutator $[\cdot, \cdot]_{\mathcal{H}}$ auf Operatoren im Hilbertraum ausgewertet und $[\Theta_1, \Theta_2]_{L_S} = \Theta_1\Theta_2 - \Theta_2\Theta_1$ auf Elementen der Lie-Algebra.

ρ' überträgt also die Kommutatorstruktur der Lie-Algebra auf den quantenmechanischen Hilbertraum. Aus diesem Grund wird die obige Beziehung als Darstellungseigenschaft bezeichnet, ähnlich wie eine entsprechende Gleichung bei ρ .

Zum Beweis dieser Eigenschaft benötigen wir folgende Hilfsformel:

$$e^A e^B e^{-A} = e^{(e^A B e^{-A})}$$

Beweis der Hilfsformel:

$$e^A e^B e^{-A} = e^A \sum_n \frac{1}{n!} B^n e^{-A}$$

Nun gilt:

$$B^n = B e^{-A} (e^A B e^{-A})^{n-2} e^A B \quad n \geq 2$$

Bem.: Diese Formel gilt auch für beliebige n , allerdings müssen dann die Inversen der auftretenden Operatoren existieren!

Beweis durch Induktion ab $n=2$:

$n = 2$: Klar!

$n \rightarrow n + 1$

$$\begin{aligned} B^{n+1} &= B \cdot B^n = B \left(B e^{-A} (e^A B e^{-A})^{n-2} e^A B \right) \\ &= B e^{-A} e^A \left(B e^{-A} (e^A B e^{-A})^{n-2} e^A B \right) \\ &= B e^{-A} (e^A B e^{-A})^{n-1} e^A B \end{aligned}$$

Damit ist:

$$\begin{aligned} e^A \sum_n \frac{1}{n!} B^n e^{-A} &= e^A \sum_n \frac{1}{n!} \left(B e^{-A} (e^A B e^{-A})^{n-2} e^A B \right) e^{-A} \\ &= \sum_n \frac{1}{n!} (e^A B e^{-A})^n \\ &= e^{(e^A B e^{-A})} \quad \square \end{aligned}$$

Nun können wir die angegebene Darstellungseigenschaft beweisen:

Es ist:

$$\begin{aligned} t, \tau \in \mathbb{R}; \quad \rho(e^{t\Theta_1}) \rho(e^{\tau\Theta_2}) \rho(e^{-t\Theta_1}) &= \rho(e^{t\Theta_1} e^{\tau\Theta_2} e^{-t\Theta_1}) = \rho(e^{\tau\Theta_{12}(t)}) \\ \Theta_{12}(t) &:= e^{t\Theta_1} \Theta_2 e^{-t\Theta_1} \end{aligned}$$

Für das Zusammenfassen der drei Exponentialfunktionen wurde die soeben bewiesene Hilfsformel verwendet.

Wir differenzieren diese Beziehung nun zuerst nach τ , werten die Ableitung bei $\tau=0$ aus und wiederholen diese Schritte bezüglich der Variablen t :

$$\begin{aligned}
& \Rightarrow \frac{d}{d\tau} (\rho(e^{t\Theta_1}) \rho(e^{\tau\Theta_2}) \rho(e^{-t\Theta_1})) = \frac{d}{d\tau} \rho(e^{\tau\Theta_{12}(t)}) \\
& \Rightarrow \rho(e^{t\Theta_1}) \left[\frac{d}{d\tau} \rho(e^{\tau\Theta_2}) \right]_{\tau=0} \rho(e^{-t\Theta_1}) = \left[\frac{d}{d\tau} \rho(e^{\tau\Theta_{12}(t)}) \right]_{\tau=0} \\
& \Rightarrow \rho(e^{t\Theta_1}) \rho'(\Theta_2) \rho(e^{-t\Theta_1}) = \rho'(\Theta_{12}(t)) \\
& \Rightarrow \frac{d}{dt} [\rho(e^{t\Theta_1}) \rho'(\Theta_2) \rho(e^{-t\Theta_1})] = \frac{d}{dt} \rho'(\Theta_{12}(t)) \\
& \Rightarrow \left[\left(\frac{d}{dt} \rho(e^{t\Theta_1}) \right) \rho'(\Theta_2) \rho(e^{-t\Theta_1}) \right]_{t=0} + \\
& \quad + \left[\rho(e^{t\Theta_1}) \rho'(\Theta_2) \frac{d}{dt} \rho(e^{-t\Theta_1}) \right]_{t=0} = \left[\frac{d}{dt} \rho'(\Theta_{12}(t)) \right]_{t=0} \\
& \Rightarrow \rho'(\Theta_1) \rho'(\Theta_2) - \rho'(\Theta_2) \rho'(\Theta_1) = \left[\frac{d}{dt} \rho'(\Theta_{12}(t)) \right]_{t=0}
\end{aligned}$$

Es bleibt die Ableitung auf der rechten Seite zu berechnen:

Es gilt allgemein:

$$A(t) \in L_S : \quad \frac{d}{dt} \rho'(A(t)) = \rho' \left(\frac{d}{dt} A(t) \right)$$

denn:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \rho'(A(t)) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} [\rho'(A(t+\Delta)) - \rho'(A(t))] \\
&= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \rho' \left(\frac{1}{\Delta} [A(t+\Delta) - A(t)] \right) \\
&= \rho' \left(\left[\frac{d}{dt} A(t) \right] \right)
\end{aligned}$$

Also ist:

$$\begin{aligned}
\left[\frac{d}{dt} \rho'(\Theta_{12}(t)) \right]_{t=0} &= \left[\rho' \left(\frac{d}{dt} \Theta_{12}(t) \right) \right]_{t=0} \\
&= \rho' \left(\left[\frac{d}{dt} (e^{t\Theta_1} \Theta_2 e^{-t\Theta_1}) \right]_{t=0} \right) \\
&= \rho' \left([(\Theta_1 e^{t\Theta_1} \Theta_2 e^{-t\Theta_1}) - (e^{t\Theta_1} \Theta_2 \Theta_1 e^{-t\Theta_1})]_{t=0} \right) \\
&= \rho'(\Theta_1 \Theta_2 - \Theta_2 \Theta_1) \\
&= \rho'([\Theta_1, \Theta_2]_{L_S})
\end{aligned}$$

Wir haben also:

$$\begin{aligned}
\rho'(\Theta_1) \rho'(\Theta_2) - \rho'(\Theta_2) \rho'(\Theta_1) &= \rho'([\Theta_1, \Theta_2]_{L_S}) \\
[\rho'(\Theta_1), \rho'(\Theta_2)]_{\mathcal{H}} &= \rho'([\Theta_1, \Theta_2]_{L_S}) \quad \square
\end{aligned}$$

Damit ist die Darstellungseigenschaft von ρ' bewiesen.

Nach diesen rein mathematischen Aussagen über die Eigenschaften einer abstrakten Darstellung der Lie-Algebra L_S wollen wir nun diese Darstellung konkret angeben.

Dazu setzen wir für $\Theta = I(\vec{\omega})$ und $\rho'(\Theta) = : \rho'(\vec{\omega})$. Dann ist:

$$\begin{aligned}
\forall \psi \in \mathcal{H}: \quad (\rho'(\vec{\omega}) \psi)(\vec{x}) &= \left(\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} [\rho(e^{\Delta I(\vec{\omega})}) - \mathbf{1}] \psi \right)(\vec{x}) \\
&= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} [(\rho(e^{\Delta I(\vec{\omega})}) \psi)(\vec{x}) - \psi(\vec{x})] \\
&= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} [\psi(e^{-\Delta I(\vec{\omega})} \vec{x}) - \psi(\vec{x})] \\
&= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} [\psi(\vec{x} - \Delta \vec{\omega} \times \vec{x} + O(\Delta^2)) - \psi(\vec{x})] \\
&= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} [\psi(\vec{x}) - \Delta (\vec{\omega} \times \vec{x}) \cdot \vec{\nabla} \psi(\vec{x}) - \psi(\vec{x}) + O(\Delta^2)] \\
&= -(\vec{\omega} \times \vec{x}) \cdot \vec{\nabla} \psi(\vec{x}) \\
&\stackrel{(i)}{=} -\vec{\omega} \cdot (\vec{x} \times \vec{\nabla}) \psi(\vec{x}) \\
&= -i [\vec{\omega} \cdot (-i) (\vec{x} \times \vec{\nabla})] \psi(\vec{x})
\end{aligned}$$

Der Operator $(-i) (\vec{x} \times \vec{\nabla})$ läßt sich mit $\vec{p} = (-i) \hbar \vec{\nabla}$ als $\frac{1}{\hbar} \vec{x} \times \vec{p}$ schreiben.

In Analogie zur klassischen Mechanik, wo $\vec{x} \times \vec{p}$ der Bahndrehimpuls war, definiert man nun in der Quantenmechanik einen Bahndrehimpulsoperator:

$$\vec{L} := (-i) (\vec{x} \times \vec{\nabla}) = \frac{1}{\hbar} (\vec{x} \times \vec{p})$$

Wir haben also folgendes Resultat:

$$\rho'(\vec{\omega}) = -i \vec{\omega} \cdot \vec{L}$$

Und damit haben wir auch eine konkrete Darstellung der Drehgruppe, denn gemäß

$$\rho(e^{I(\vec{\omega})}) = e^{\rho'(I(\vec{\omega}))}$$

haben wir

$$\rho(R) = \rho(e^{I(\vec{\omega})}) = e^{-i \vec{\omega} \cdot \vec{L}}$$

Das ist die Formel, die sich auch in der Literatur findet.

⁽ⁱ⁾Hierbei verwenden wir die zyklische Eigenschaft des Spatproduktes, wobei allerdings auf die Nichtvertauschbarkeit der Operatoren geachtet werden muß. Dieser Sachverhalt wird auch klar, wenn die Formel unter Verwendung des Levi-Civita-Symbols (siehe Fußnote (iii) auf Seite 27) mit allen Indizes ausgeschrieben wird.

Bem.: Wir haben hier den Drehimpuls ohne \hbar definiert, in den meisten Lehrbüchern wird das \hbar in die Definition des Drehimpulses einbezogen. Aus diesem Grunde steht in den meisten Büchern statt \vec{L} der Bruch \vec{L}/\hbar .

Also:	Unsere Definition:	Andere Definition:
	$\vec{L} = (-i) \vec{x} \times \vec{\nabla}$	$\vec{L} = (-i) \vec{x} \times \vec{\nabla} \cdot (\hbar)$
	$\vec{L} = \frac{1}{\hbar} \vec{x} \times \vec{p}$	$\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p}$

Mittels der Darstellungseigenschaft von ρ' können wir nun die Vertauschungsrelationen für die Komponenten herleiten.

Wir hatten:

$$[\rho'(\Theta_1), \rho'(\Theta_2)]_{\mathcal{H}} = \rho'([\Theta_1, \Theta_2]_{L_S})$$

Zunächst berechnen wir

$$[\Theta_1, \Theta_2]_{L_S} = [I(\vec{\omega}_1), I(\vec{\omega}_2)]_{L_S}$$

Im folgenden lassen wir die Bezeichnungen \mathcal{H} und L_S an den Kommutatoren weg, da sich aus dem jeweiligen Zusammenhang ergibt, welche Kommutatoren gemeint sind.

Beh.: Es gilt: $[I(\vec{\omega}_1), I(\vec{\omega}_2)] = I(\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2)$

Beweis: Wende die beiden Seiten jeweils auf einen Vektor $\vec{x} \in \mathbb{E}^3$ an und verifiziere, daß beide Seiten das gleiche Resultat ergeben:

$$\begin{aligned}
 \forall \vec{x} \in \mathbb{E}^3 \quad [I(\vec{\omega}_1), I(\vec{\omega}_2)] \vec{x} &= I(\vec{\omega}_1) I(\vec{\omega}_2) \vec{x} - I(\vec{\omega}_2) I(\vec{\omega}_1) \vec{x} \\
 &= I(\vec{\omega}_1) (\vec{\omega}_2 \times \vec{x}) - I(\vec{\omega}_2) (\vec{\omega}_1 \times \vec{x}) \\
 &= \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{x}) - \vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{x}) \\
 &= \vec{\omega}_2 (\vec{\omega}_1 \cdot \vec{x}) - \vec{x} (\vec{\omega}_1 \cdot \vec{\omega}_2) \\
 &\quad - \vec{\omega}_1 (\vec{\omega}_2 \cdot \vec{x}) + \vec{x} (\vec{\omega}_2 \cdot \vec{\omega}_1) \\
 &= \vec{\omega}_2 (\vec{\omega}_1 \cdot \vec{x}) - \vec{\omega}_1 (\vec{\omega}_2 \cdot \vec{x})
 \end{aligned}$$

Außerdem ist:

$$\begin{aligned}
 I(\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2) \vec{x} &= (\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2) \times \vec{x} = -\vec{x} \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2) \\
 &= -(\vec{\omega}_1 (\vec{x} \cdot \vec{\omega}_2) - \vec{\omega}_2 (\vec{x} \cdot \vec{\omega}_1)) \\
 &= (\vec{\omega}_2 (\vec{\omega}_1 \cdot \vec{x}) - \vec{\omega}_1 (\vec{\omega}_2 \cdot \vec{x}))
 \end{aligned}$$

Wie man sieht, führen beide Seiten der Gleichung zu demselben Resultat, damit ist die Gleichheit bewiesen.

Also haben wir:

$$[I(\vec{\omega}_1), I(\vec{\omega}_2)] = I(\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2)$$

Nun ist⁽ⁱⁱ⁾:

$$\begin{aligned} [\rho'(\Theta_1), \rho'(\Theta_2)] &= [\rho'(I(\vec{\omega}_1)), \rho'(I(\vec{\omega}_2))] \\ \Rightarrow [\rho'(\Theta_1), \rho'(\Theta_2)] &= [-i\vec{\omega}_1 \cdot \vec{L}, -i\vec{\omega}_2 \cdot \vec{L}] \\ &= -\omega_{1i}\omega_{2j} [L_i, L_j] \end{aligned}$$

Andererseits ist⁽ⁱⁱⁱ⁾:

$$\begin{aligned} \rho'([\Theta_1, \Theta_2]) &= \rho'([I(\vec{\omega}_1), I(\vec{\omega}_2)]) \\ &= \rho'(I(\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2)) \\ &= -i(\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2) \cdot \vec{L} \\ &= -i\epsilon_{kij}\omega_{1i}\omega_{2j}L_k \end{aligned}$$

so daß mit der Darstellungseigenschaft von ρ' folgt:

$$\begin{aligned} [\rho'(\Theta_1), \rho'(\Theta_2)] &= \rho'([\Theta_1, \Theta_2]) \\ \Rightarrow -\omega_{1i}\omega_{2j} [L_i, L_j] &= \omega_{1i}\omega_{2j} ((-i)\epsilon_{kij}L_k) \quad \forall \vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2 \\ \Rightarrow \boxed{[L_i, L_j] = i\epsilon_{kij}L_k} \end{aligned}$$

Dies sind die fundamentalen Vertauschungsrelationen für den Bahndrehimpuls. Bei dieser Herleitung haben wir keinerlei Gebrauch von der expliziten Struktur von \vec{L} gemacht, sondern lediglich die Darstellungseigenschaft von ρ' benutzt.

Wir haben gesehen, daß die Komponenten des quantenmechanischen Drehimpulses eine Darstellung von L_S bzw. $SO(3)$ formen. Wenn man diese hat, möchte man invariante Unterräume bezüglich der Darstellung finden, da sich dann der Umgang damit vereinfacht.

⁽ⁱⁱ⁾Bei dieser Formel wird, wie auch im folgenden eine verallgemeinerte Einsteinsche Summationskonvention verwendet. Und zwar in dem Sinne, daß, soweit nichts anderes gesagt wird, über auf einer Seite einer Gleichung doppelt vorkommende Indizes entsprechend summiert wird. Bei lateinischen Raumindizes also von 1 bis 3, bei griechischen Raum-Zeit-Indizes von 0 bis 3.

⁽ⁱⁱⁱ⁾ ϵ_{kij} ist das sogenannte Levi-Civita-Symbol. ϵ_{kij} ist in $\{k, i, j\}$ total antisymmetrisch und es ist $\epsilon_{123} = 1$.

Kapitel 6

Irreduzible Darstellungen der Drehgruppe

Def.: Reduzible Darstellung, irreduzible Darstellung

G Gruppe \mathcal{H} Hilbertraum (i.A. genügt ein komplexer Vektorraum (dessen Dimension aber normalerweise unendlich ist) mit Skalarprodukt)

$\rho : G \rightarrow \text{Aut } \mathcal{H}$ heißt unitäre Darstellung $:\Leftrightarrow$

$$\rho(g_1 g_2) = \rho(g_1) \rho(g_2)$$

$$\rho(e) = \mathbb{I}$$

$$\rho^\dagger(g) = (\rho(g))^{-1}$$

Ein Beispiel für eine Darstellung ist die im letzten Kapitel angegebene Abbildung $\rho(R)$.

Eine Darstellung heißt reduzibel, wenn es eine Zerlegung des Hilbertraums in invariante Teilräume gibt, d.h.:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3 \oplus \dots$$

$$\forall \phi_i \in \mathcal{H}_i : (\rho(g) \phi_i) \in \mathcal{H}_i$$

Existiert keine solche Zerlegung, so heißt die Darstellung irreduzibel.

Bezüglich obiger Zerlegung von \mathcal{H} hat die reduzible Darstellung ρ Blockdiagonalform:

$$\rho(g) = \begin{pmatrix} \boxed{\rho_1} & & & \\ & \boxed{\rho_2} & & \\ & & \boxed{\rho_3} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Ist nun eine beliebige Darstellung gegeben, so möchte man ihre invarianten Unterräume bestimmen. Wir werden unten sehen, daß sich diese Zerlegung des Hilbertraums in invariante Unterräume als nützlich erweist.

Man nennt das Auffinden invarianter Unterräume einer Darstellung ausreduzieren.

Wir wollen nun für den Fall der Drehgruppe $SO(3)$ diese Ausreduktion vornehmen. Da wir gefunden haben, daß die drei Komponenten des quantenmechanischen Bahndrehimpulses eine Darstellung der Drehgruppe definieren, müssen nun die invarianten Unterräume bezüglich dieser drei Drehimpulsoperatoren bestimmt werden.

Wir haben also drei Operatoren L_i , $i=1, 2, 3$ mit folgender Vertauschungsrelation gegeben:

$$[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk}L_k$$

Nun erweist es sich als zweckmäßig, statt der Operatoren L_1, L_2 die sogenannten Leiteroperatoren L_{\pm} zu verwenden:

$$L_+ := L_1 + iL_2$$

$$L_- := L_1 - iL_2$$

Ferner definiert man einen Operator⁽ⁱ⁾ L^2 :

$$L^2 := \vec{L}^2 = \sum_{i=1}^3 L_i^2$$

Man findet unter Anwendung obiger Vertauschungsrelationen für die Komponenten des Bahndrehimpulses folgende Kommutatoren:

$$[L^2, L_i] = 0; \quad i = 1, 2, 3$$

$$[L^2, L_{\pm}] = 0$$

$$[L_3, L_{\pm}] = \pm L_{\pm}$$

$$[L_+, L_-] = 2L_3$$

Ferner findet man:

$$L_- = L_+^\dagger$$

$$L_{\mp}L_{\pm} = L^2 - L_3^2 \mp L_3$$

Da L^2 und L_3 kommutieren, besitzen sie einen gemeinsamen Satz von Eigenvektoren⁽ⁱⁱ⁾ $|\phi_{\lambda m}\rangle$:

$$L^2 |\phi_{\lambda m}\rangle = \lambda |\phi_{\lambda m}\rangle$$

$$L_3 |\phi_{\lambda m}\rangle = m |\phi_{\lambda m}\rangle$$

⁽ⁱ⁾Dieser wird in der Literatur auch als Casimiroperator bezeichnet.

⁽ⁱⁱ⁾Dies bedeutet allerdings **nicht**, daß jeder Eigenvektor von L^2 auch Eigenvektor von L_3 ist und umgekehrt! Beispiele hierfür finden sich in Kapitel 11.

Wendet man nun die Kommutatorrelationen für L_{\pm}, L^2, L_3 an, so findet man:

$$\begin{aligned} L^2 (L_{\pm} |\phi_{\lambda m}\rangle) &= \lambda (L_{\pm} |\phi_{\lambda m}\rangle) \\ L_3 (L_{\pm} |\phi_{\lambda m}\rangle) &= (m \pm 1) (L_{\pm} |\phi_{\lambda m}\rangle) \end{aligned}$$

Die Eigenräume von L^2, L_3 sind die invarianten Unterräume des Drehimpulsoperators. Wir haben also die Aufgabe, diese Eigenräume zu bestimmen, wenn wir die irreduzible Darstellung auffinden wollen.

Wir beginnen mit der Berechnung des Normquadrates für $L_{\pm} |\phi_{\lambda m}\rangle$:

$$\begin{aligned} \|L_{\pm} |\phi_{\lambda m}\rangle\|^2 &= \langle L_{\pm} \phi_{\lambda m} | L_{\pm} \phi_{\lambda m} \rangle \\ &= \langle \phi_{\lambda m} | L_{\mp} L_{\pm} \phi_{\lambda m} \rangle \\ &= \langle \phi_{\lambda m} | (L^2 - L_3^2 \mp L_3) \phi_{\lambda m} \rangle \\ &= (\lambda - m^2 \mp m) \langle \phi_{\lambda m} | \phi_{\lambda m} \rangle \\ \Rightarrow \|L_{\pm} |\phi_{\lambda m}\rangle\|^2 &= (\lambda - m^2 \mp m) \| |\phi_{\lambda m}\rangle \|^2 \end{aligned}$$

Wir betrachten nun zunächst das Normquadrat für L_+ :

Die Normquadrate auf beiden Seiten der obigen Gleichung sind beide ≥ 0 und zwar für alle Werte von λ und m . Der Ausdruck $(\lambda - m^2 - m)$ wird jedoch für genügend großes m negativ, so daß nun $\|L_+ |\phi_{\lambda m}\rangle\|^2 < 0$ wäre! Da dies ein offensichtlicher Widerspruch ist, kann m nicht beliebig anwachsen, es muß also ein maximales positives m_{\max} geben, mit:

$$\lambda - m_{\max}^2 - m_{\max} = 0$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} L_+ |\phi_{\lambda m_{\max}}\rangle &= 0 \\ L_3 |\phi_{\lambda m_{\max}}\rangle &= m_{\max} |\phi_{\lambda m_{\max}}\rangle \end{aligned}$$

Die Größe m darf aber auch nicht beliebig negativ werden, denn aus der Relation, die aus dem Normquadrat für L_- folgt, ergibt sich: Würde m beliebig negativ, so würde $(\lambda^2 - m^2 + m)$ ebenfalls negativ für genügend negative Werte von m . Aus diesem Grunde muß es ein negatives minimales m_{\min} geben, mit:

$$\begin{aligned} \lambda - m_{\min}^2 + m_{\min} &= 0 \\ L_- |\phi_{\lambda m_{\min}}\rangle &= 0 \\ L_3 |\phi_{\lambda m_{\min}}\rangle &= m_{\min} |\phi_{\lambda m_{\min}}\rangle \end{aligned}$$

Wir haben durch diese Forderungen an m gefunden, daß $\lambda = m_{\max}(m_{\max} + 1)$ und andererseits $\lambda = m_{\min}(m_{\min} - 1)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow m_{\max}(m_{\max} + 1) &= m_{\min}(m_{\min} - 1) \\ \Rightarrow (m_{\max}^2 - m_{\min}^2) + (m_{\max} + m_{\min}) &= 0 \\ \Rightarrow (m_{\max} + m_{\min})(m_{\max} - m_{\min} + 1) &= 0 \end{aligned}$$

Da nun:

$$\begin{aligned} m_{\max} \geq m_{\min} &\Rightarrow (m_{\max} - m_{\min} + 1) \neq 0 \\ &\Rightarrow m_{\max} + m_{\min} = 0 \\ &\Rightarrow m_{\max} = -m_{\min} \end{aligned}$$

Nun ist:

$$L_3 (L_+^n |\phi_{\lambda m}\rangle) = (m + n) (L_+^n |\phi_{\lambda m}\rangle) \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

was man durch Induktion nach n leicht beweist.

$$\Rightarrow \exists n : L_3 (L_+^n |\phi_{\lambda m_{\min}}\rangle) = (m_{\min} + n) (L_+^n |\phi_{\lambda m_{\min}}\rangle)$$

$$\text{mit: } m_{\min} + n = m_{\max}$$

Da

$$n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \Rightarrow m_{\max} - m_{\min} = n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$\text{mit} \quad m_{\min} = -m_{\max}$$

$$\Rightarrow m_{\max} = \frac{n}{2}$$

d.h. m_{\max} kann nur ganz- oder halbzahlige Werte annehmen!

Wir führen nun eine Umbenennung durch:

$$m_{\max} = : l$$

$$\Rightarrow l = \frac{n}{2}$$

$$\Rightarrow l = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$$

Wir haben nun folgende Resultate für die Eigenwerte von L^2 und L_3 erhalten:

$$\lambda = l(l + 1); \quad l = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$$

$$-l \leq m \leq l; \quad m \in \mathbb{Z}$$

Die Zustände werden also durch die Quantenzahlen l und m charakterisiert, wir schreiben nun statt $|\phi_{\lambda m}\rangle$: $|\phi_{lm}\rangle$.

Es ist also:

$$L^2 |\phi_{lm}\rangle = l(l + 1) |\phi_{lm}\rangle$$

$$L_3 |\phi_{lm}\rangle = m |\phi_{lm}\rangle$$

Da wir an einer irreduziblen Darstellung der $SO(3)$ interessiert sind, müssen wir uns fragen, ob die erlaubten Werte für l und m eine solche Darstellung ermöglichen. In der Tat findet man, daß nicht alle zulässigen Werte für l eine irreduzible Darstellung erlauben. Es gilt vielmehr die Aussage:

Man erhält eine irreduzible Darstellung der $SO(3)$ nur für die ganzzahligen Werte von l .

Die halbzahligen Werte finden ihre Bedeutung bei der Darstellung der $SU(2)$ (s. Kapitel 10).

Damit sind die Eigenräume von L^2 und L_3 gefunden und klassifiziert und wir haben nun eine Zerlegung des Hilbertraumes \mathcal{H} in invariante Unterräume gefunden:

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{l=0}^{\infty} \mathcal{H}_l; \quad \mathcal{H}_l := \text{Span} \{ |\phi_{lm}\rangle; -l \leq m \leq l \}, \quad \dim \mathcal{H}_l = 2l + 1$$

wobei mit $\text{Span} \{ |\phi_{lm}\rangle \}$ die Menge der Linearkombinationen der $|\phi_{lm}\rangle$ zu festem l und variablem m gemeint ist (natürlich mit der Einschränkung $-l \leq m \leq l$).

Die Vektoren $|\phi_{lm}\rangle$ können nun explizit aus $|\phi_u\rangle$ bestimmt werden, denn wir hatten:

$$\begin{aligned} L_3 (L_-^n) |\phi_{lm}\rangle &= (m - n) L_-^n |\phi_{lm}\rangle \\ \Rightarrow L_3 (L_-)^{l-m} |\phi_u\rangle &= m (L_-)^{l-m} |\phi_u\rangle \\ \Rightarrow (L_-)^{l-m} |\phi_u\rangle &\text{ ist Eigenvektor zu } L_3 \text{ mit dem Eigenwert } m. \\ \Rightarrow (L_-)^{l-m} |\phi_u\rangle &= N_{lm} |\phi_{lm}\rangle \end{aligned}$$

mit einer noch zu bestimmenden Normierungskonstanten N_{lm} . Man findet (zur Berechnung vergleiche auf Seite 30):

$$|\phi_{lm}\rangle = \frac{\sqrt{(l+m)!}}{\sqrt{(2l)!(l-m)!}} (L_-)^{l-m} |\phi_u\rangle$$

Wir möchten noch einmal darauf hinweisen, daß $|\phi_u\rangle$ durch

$$L_+ |\phi_u\rangle = 0 \quad \text{und} \quad L_3 |\phi_u\rangle = l |\phi_u\rangle$$

bestimmt ist.

Geht man nun von abstrakten Hilbertraumvektoren in den Ortsraum, so muß man die Operatoren L^2, L_{\pm}, L_3 als Differentialoperatoren schreiben⁽ⁱⁱⁱ⁾:

$$\begin{aligned} L^2 &= -\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) - \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \\ L_{\pm} &= \pm e^{\pm i\phi} \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} \pm i \cot \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \\ L_3 &= -i \frac{\partial}{\partial \phi} \end{aligned}$$

⁽ⁱⁱⁱ⁾Wir benutzen die in (6.1) auf der gegenüberliegenden Seite beschriebenen Kugelkoordinaten

Wir bezeichnen im Ortsraum die Vektoren $|\phi_{lm}\rangle$ mit $Y_{lm}(\vartheta, \phi)$. Dann ist Y_{ll} durch folgende Differentialgleichungen gegeben:

$$L_+ |\phi_{ll}\rangle = 0 \quad \rightarrow \quad e^{i\phi} \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} + i \cot \vartheta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) Y_{ll}(\vartheta, \phi) = 0$$

$$L_3 |\phi_{ll}\rangle = l |\phi_{ll}\rangle \quad \rightarrow \quad -i \frac{\partial}{\partial \phi} Y_{ll}(\vartheta, \phi) = l Y_{ll}(\vartheta, \phi)$$

Man findet Lösungen, indem man zuerst die (leichtere) Eigenwertgleichung für L_3 löst:

$$Y_{ll}(\vartheta, \phi) = y_{ll}(\vartheta) e^{il\phi}$$

Diese Lösung wird in die Differentialgleichung für L_+ eingesetzt und $y_{ll}(\vartheta)$ bestimmt. Es ergibt sich:

$$y_{ll}(\vartheta) = c_l \cdot \sin^l \vartheta$$

$$\Rightarrow Y_{ll}(\vartheta, \phi) = c_l \cdot \sin^l \vartheta e^{il\phi}$$

Man erhält durch Normieren:

$$Y_{ll}(\vartheta, \phi) = (-1)^l \frac{1}{2^l l!} \frac{\sqrt{(2l+1)!}}{4\pi} \sin^l \vartheta e^{il\phi}$$

Man kann dieses Resultat auch bekommen, indem man zeigt, daß

$$Y_{ll} \left(\frac{\vec{x}_1}{r}, \frac{\vec{x}_2}{r} \right) = Y_{ll}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) := N_l (-1)^l (\hat{x}_1 + i\hat{x}_2)^l$$

$$\hat{x}_i = \frac{\vec{x}_i}{|\vec{x}_i|}$$

die Differentialgleichungen

$$L_+ Y_{ll}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = 0; \quad L_3 Y_{ll}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = l Y_{ll}(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$$

erfüllt, wobei man in diesem Fall zweckmäßigerweise die Drehimpulsoperatoren in kartesischen Koordinaten ausdrückt. Anschließend schreibt man Y_{ll} mit den Kugelkoordinaten um:

$$x_1 = r \cdot \sin \vartheta \cos \phi$$

$$x_2 = r \cdot \sin \vartheta \sin \phi \tag{6.1}$$

$$x_3 = r \cdot \cos \vartheta$$

und findet:

$$Y_{ll}(\vartheta, \phi) = N_l (-1)^l \sin^l \vartheta e^{il\phi}$$

Durch Normierung erhält man wiederum das obige Resultat:

$$Y_{ll}(\vartheta, \phi) = (-1)^l \frac{1}{2^l l!} \frac{\sqrt{(2l+1)!}}{4\pi} \sin^l \vartheta e^{il\phi}$$

Da wir nun den Hilbertraum der Winkelfunktionen in invariante Unterräume von L_i zerlegt (also die Darstellung der Drehgruppe ausreduziert) haben, kann man jede Wellenfunktion $\psi(\vec{x})$ unter Hinzunahme des Radialanteils schreiben als:

$$\psi(\vec{x}) = \sum_{\substack{l=0 \\ -l \leq m \leq l}}^{\infty} g_{lm}(r) Y_{lm}(\vartheta, \phi)$$

Mit der Tatsache, daß die $Y_{lm}(\vartheta, \phi)$ als Eigenfunktionen der hermiteschen Operatoren L^2 und L_3 orthogonal bezüglich m sind, gilt:

$$\int Y_{lm}^*(\vartheta, \phi) Y_{l'm'}(\vartheta, \phi) d(\cos \vartheta) d\phi = \delta_{mm'} \delta_{ll'}$$

$$\Rightarrow g_{lm}(r) = \int_{\partial B_1(0)} d\Omega Y_{lm}^*(\vartheta, \phi) \psi(\vec{x})$$

Dies bedeutet, daß die Kugelfunktionen Y_{lm} ein vollständiges Funktionensystem bilden.

Wir diskutieren abschließend die Darstellung von Drehungen im Raum der Kugelfunktionen:

$$(\rho(R) Y_{lm})(\hat{x}) = Y_{lm}\left(\begin{matrix} -1 \\ R \end{matrix} \hat{x}\right)$$

$$[\text{da } Y_{lm} \text{ irreduzibel (s. auf Seite 28)}] = \sum_{m'} D_{mm'}^{(l)}(R) Y_{lm'}(\hat{x})$$

mit Koeffizienten $D_{mm'}^{(l)}(R)$

$$\Rightarrow \rho(R)|_l = D_{mm'}^{(l)}(R)$$

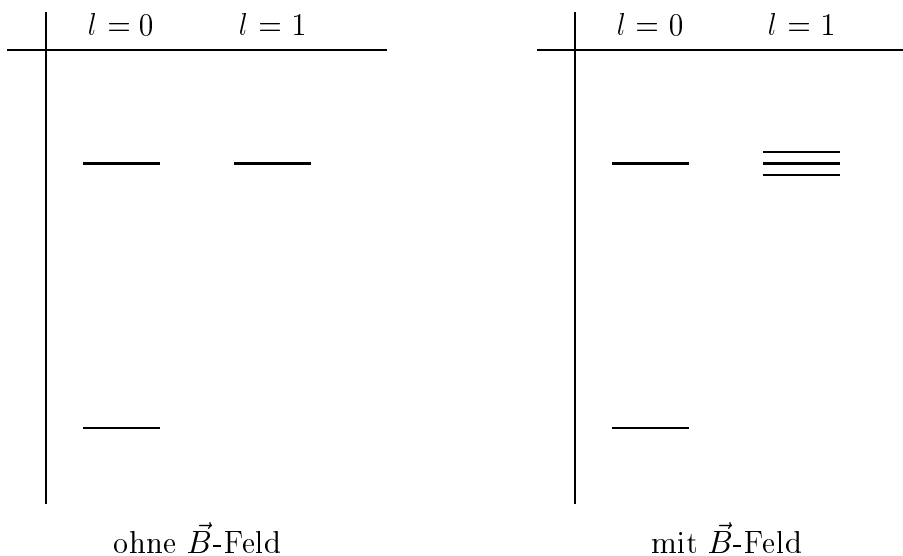
Die Darstellungen der Drehungen auf Kugelfunktionen sind also durch die sogenannten Wignerschen D -Funktionen gegeben.

Kapitel 7

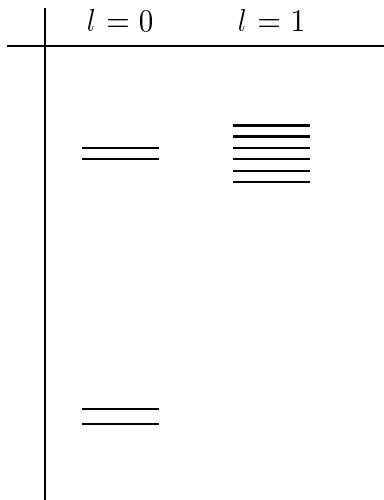
Das Wasserstoffatom im Magnetfeld

Nachdem sich unsere bisherigen Überlegungen auf skalare Teilchen beschränkt hatten, wollen wir nun die Darstellungen der Drehgruppe für solche mit Spin konstruieren. Doch zuvor erinnern wir kurz daran, was der Spin eigentlich ist und warum man ihn einführt.

Dazu beginnen wir mit einer Diskussion des Spektrums des Wasserstoffatoms. Dafür liefert die Theorie folgende Energieniveauschemata (mit und ohne äußeres Magnetfeld):



Experimentell findet man nur für das Spektrum des Wasserstoffatoms ohne Magnetfeld eine Bestätigung der Theorie. Mißt man jedoch das Spektrum des Wasserstoffatoms unter dem Einfluß eines äußeren Magnetfeldes, so ergibt sich folgendes Energieschema:



Im Vergleich zur theoretischen Vorhersage spaltet also im Experiment jedes Energieniveau — auch der Grundzustand — in doppelt so viele Niveaus auf. Die Theorie beschreibt das Verhalten des Wasserstoffatoms im Magnetfeld nicht richtig. Dies legt den Schluß nahe, daß die bisherigen Annahmen über das Atom nicht vollständig sind, sondern noch Freiheitsgrade existieren, die in der Schrödingertheorie nicht enthalten sind.

Kapitel 8

Spin- s -Felder und Tensorprodukt

Bisher haben wir zur Beschreibung der Quantenmechanik in konkreten Hilberträumen (Ortsraum, Impulsraum) skalare Wellenfunktionen $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ verwendet. Sollen nun zusätzliche Freiheitsgrade in die Theorie eingebaut werden, so kann man versuchen, dies durch eine mehrkomponentige Wellenfunktion zu erreichen. Wir erweitern also die Wellenfunktion auf den \mathbb{C}^{2s+1} :

$$\chi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}^{2s+1}; \quad s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$$
$$\chi(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \chi_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ \chi_{2s+1}(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

Eine solche Funktion $\chi(\vec{x})$ heißt Spin- s -Feld.

Der Grund, warum wir für die Charakterisierung dieser mehrkomponentigen Funktion die Größe s mit $s=0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ und die Zahl $2s+1$ verwenden, ist zu Beginn von Kapitel 9 angegeben.

An dieser Stelle führen wir nun eine neue mathematische Struktur zur Beschreibung von Hilberträumen mehrkomponentiger Funktionen ein. Es handelt sich um den Begriff des Tensorproduktes, sowie um die Wirkung von linearen Operatoren auf Tensorprodukten.

8.1 Exkurs: Tensorprodukt

U, V seien lineare Vektorräume über \mathbb{C} mit den Skalarprodukten $\langle \cdot, \cdot \rangle_U, \langle \cdot, \cdot \rangle_V$.

Def.: Kartesisches Produkt.

Als kartesisches Produkt von U und V bezeichnet man die Menge:

$$U \times V = \{(\phi, \psi) \mid \phi \in U, \psi \in V\}$$

Def.: In $U \times V$ sei eine lineare Struktur definiert durch:

$$\lambda(\phi, \psi) = (\lambda\phi, \psi) = (\phi, \lambda\psi)$$

$$(\phi_1 + \phi_2, \psi) = (\phi_1, \psi) + (\phi_2, \psi)$$

$$(\phi, \psi_1 + \psi_2) = (\phi, \psi_1) + (\phi, \psi_2)$$

Def.: Das Tensorprodukt $U \otimes V$ ist die lineare Hülle von $U \times V$ mit dieser linearen Struktur.

$$U \otimes V = \left\{ \chi \mid \chi = \sum_{m,n} \lambda_{mn} (\phi_m, \psi_n); \lambda_{mn} \in \mathbb{C}; \phi_m \in U, \psi_n \in V \right\}$$

Anstelle von (ϕ, ψ) verwendet man die Notation $\phi \otimes \psi$.

für das Tensorprodukt gelten folgende Eigenschaften (ohne Beweis):

i). $\dim(U \otimes V) = \dim U \cdot \dim V$

ii). $\left. \begin{array}{l} \phi_m \quad (m \in \mathbb{N}) \text{ Basis von } U \\ \psi_n \quad (n \in \mathbb{N}) \text{ Basis von } V \end{array} \right\} \Rightarrow \phi_m \otimes \psi_n \quad (m, n \in \mathbb{N}) \text{ Basis von } U \otimes V$

iii). Da wir nur lineare Operatoren auf dem Tensorprodukt zulassen wollen, ist es für Beweise hinreichend, die entsprechende Eigenschaft nur für (beliebige) Produkte zu beweisen, und nicht nötig, die vollen Summen zu betrachten.

Def.: Skalarprodukt auf $U \otimes V$

$$\langle \phi_1 \otimes \psi_1 \mid \phi_2 \otimes \psi_2 \rangle := \langle \phi_1 \mid \phi_2 \rangle_U \langle \psi_1 \mid \psi_2 \rangle_V$$

Das Skalarprodukt in $U \otimes V$ wird also auf das Produkt der Skalarprodukte in U und V zurückgeführt.

Def.: Tensorprodukt von linearen Operatoren:

Seien

$$A : U \rightarrow U$$

$$B : V \rightarrow V$$

lineare Operatoren.

Dann ist der Operator $A \otimes B : U \otimes V \rightarrow U \otimes V$ durch folgende Eigenschaften definiert:

i). $A \otimes B$ ist linear

ii). $(A \otimes B)(\phi \otimes \psi) := (A\phi) \otimes (B\psi)$

Es gilt nun, falls A, B diagonalisierbar sind und

$$A\phi_m = a_m \phi_m; \quad \phi_m \text{ Basis von } U$$

$$B\psi_n = b_n \psi_n; \quad \psi_n \text{ Basis von } V$$

$$\Rightarrow \chi_{mn} := \phi_m \otimes \psi_n; \quad \chi_{mn} \text{ Basis von } U \otimes V$$

$$\text{mit: } (A \otimes B)\chi_{mn} = a_m b_n \chi_{mn}$$

Wir erweitern nun die in U , bzw. V definierten Operatoren A bzw. B auf den Produktraum $U \otimes V$:

$$\tilde{A} := A \otimes \mathbb{1}_V$$

$$\tilde{B} := \mathbb{1}_U \otimes B$$

Mit dieser Definition wirken A, B nur in den Räumen U bzw. V , den jeweils anderen Raum des Tensorproduktes lassen sie unverändert.

In der Physik treten nun Summen von Operatoren auf, die analog zu A, B definiert sind. Man schreibt abkürzend:

$$A + B := \tilde{A} + \tilde{B} = A \otimes \mathbb{1}_V + \mathbb{1}_U \otimes B$$

Die Summe $A + B$ wirkt nun auf ein Element aus $U \otimes V$:

$$(A + B)(\phi \otimes \psi) = (A\phi) \otimes \psi + \phi \otimes (B\psi)$$

$$\Rightarrow (A + B)\chi_{mn} = (a_m + b_n)\chi_{mn}$$

Ferner gilt die Formel:

$$e^{A+B} = e^A \otimes e^B$$

Beachte, daß in dieser Formel auf der linken Seite die Summe $A + B$ als $\tilde{A} + \tilde{B}$ zu lesen ist, während auf der rechten Seite A, B die ursprünglich definierten Operatoren sind. Korrekt geschrieben lautet die Formel:

$$e^{\tilde{A} + \tilde{B}} = e^A \otimes e^B$$

Beweis: Wir wenden wieder jenes Verfahren an, das wir schon in Kapitel 5 auf Seite 21 kennengelernt haben: Wir führen parametrisierte Operatoren $F_1(t), F_2(t)$ ein und zeigen, daß $F_1(t), F_2(t)$ dieselbe Differentialgleichung 1. Ordnung lösen. Außerdem zeigen wir noch, daß diese Operatoren die gleiche Anfangsbedingung erfüllen. Damit ist die Identität der Operatoren $F_1(t), F_2(t)$ für alle Parameter nachgewiesen. Daraus gewinnen wir dann unsere Behauptung.

Wir definieren:

$$F_1(t) := e^{t(\tilde{A} + \tilde{B})}; \quad F_2(t) := e^{tA} \otimes e^{tB}$$

$$\Rightarrow \dot{F}_1(t) = (\tilde{A} + \tilde{B}) e^{t(\tilde{A} + \tilde{B})} = (\tilde{A} + \tilde{B}) F_1(t)$$

$$\begin{aligned} \dot{F}_2(t) &= (Ae^{tA}) \otimes e^{tB} + e^{tA} \otimes Be^{tB} \\ &= (A \otimes \mathbb{1}_V) (e^{tA} \otimes e^{tB}) + (\mathbb{1}_U \otimes B) (e^{tA} \otimes e^{tB}) \\ &= (A \otimes \mathbb{1}_V + \mathbb{1}_U \otimes B) (e^{tA} \otimes e^{tB}) \\ &= (\tilde{A} + \tilde{B}) F_2(t) \end{aligned}$$

$F_1(t), F_2(t)$ lösen also dieselbe Differentialgleichung 1. Ordnung. Ferner gilt:

$$\begin{aligned} F_1(0) &= e^{0 \cdot (\tilde{A} + \tilde{B})} = \mathbf{1}_U \otimes \mathbf{1}_V \quad (\text{da } \mathbf{1}_{U \otimes V} = \mathbf{1}_U \otimes \mathbf{1}_V) \\ F_2(0) &= e^{0 \cdot A} \otimes e^{0 \cdot B} = \mathbf{1}_U \otimes \mathbf{1}_V \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, daß $F_1(t), F_2(t)$ auch den gleichen Anfangsbedingungen genügen. Also folgt:

$$\begin{aligned} F_1(t) &= F_2(t) \quad \forall t \\ \Leftrightarrow e^{t(\tilde{A} + \tilde{B})} &= e^{tA} \otimes e^{tB} \quad \forall t \\ \Rightarrow e^{(\tilde{A} + \tilde{B})} &= e^A \otimes e^B \end{aligned}$$

also die Behauptung!

Wir zeigen nun noch:

$$(A_1 \otimes B_1)(A_2 \otimes B_2) = A_1 A_2 \otimes B_1 B_2$$

denn es ist:

$$\begin{aligned} \forall \phi \otimes \psi \in U \otimes V : (A_1 \otimes B_1)(A_2 \otimes B_2)(\phi \otimes \psi) &= (A_1 \otimes B_1)(A_2 \phi \otimes B_2 \psi) \\ &= A_1 A_2 \phi \otimes B_1 B_2 \psi \\ &= (A_1 A_2 \otimes B_1 B_2)(\phi \otimes \psi) \\ \Rightarrow (A_1 \otimes B_1)(A_2 \otimes B_2) &= (A_1 A_2 \otimes B_1 B_2) \end{aligned}$$

Damit ist der Exkurs über das Tensorprodukt abgeschlossen und wir können uns nun der Konkretisierung dieser abstrakten Aussagen in der Physik zuwenden.

8.2 Der Spin-Hilbertraum als Tensorprodukt

Wir werden nun den Hilbertraum der $2s + 1$ -komponentigen Wellenfunktionen als Tensorprodukt zweier Vektorräume auffassen. Zunächst definieren wir:

$$\mathcal{H}_0 := \left\{ \phi \mid \phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}; \langle \psi | \phi \rangle := \int d^3x \psi^*(\vec{x}) \phi(\vec{x}); \langle \phi | \phi \rangle < \infty \right\}$$

\mathcal{H}_0 ist also der bisher verwendete Hilbertraum \mathcal{H} der quadratintegrablen Funktionen.

Schreibe nun:

$$\chi(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \chi_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ \chi_{2s+1}(\vec{x}) \end{pmatrix} = \sum_{m=1}^{2s+1} \chi_m(\vec{x}) \mathbf{e}_m$$

Dabei ist \mathbf{e}_m :

$$\mathbf{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{e}_{2s+1} := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die $2s+1$ Vektoren \mathbf{e}_m seien also die Standardbasis von \mathbb{C}^{2s+1} . Die Funktion $\chi_m(\vec{x})$ sei ein Element des Hilbertraumes \mathcal{H}_0 . Entwickle nach einer Basis von \mathcal{H}_0 :

$$\begin{aligned} \chi_m(\vec{x}) &= \sum_l a_{ml} \phi_l(\vec{x}) \\ \Rightarrow \chi(\vec{x}) &= \sum_{m=1}^{2s+1} \sum_l a_{ml} \mathbf{e}_m \phi_l(\vec{x}) \end{aligned}$$

Nun läßt sich $\mathbf{e}_m \phi_l(\vec{x})$ als Tensorprodukt $\mathbf{e}_m \otimes \phi_l(\vec{x})$ auffassen, denn dieses Paar besitzt die für ein Tensorprodukt charakteristischen Eigenschaften, wie man leicht sieht. Wir können also schreiben:

$$\chi(\vec{x}) = \sum_{m=1}^{2s+1} \sum_l a_{ml} \mathbf{e}_m \otimes \phi_l(\vec{x})$$

Nun ist $\mathbf{e}_m \in \mathbb{C}^{2s+1}$, $\phi_l(\vec{x}) \in \mathcal{H}_0$ und somit $\chi(\vec{x}) \in \mathbb{C}^{2s+1} \otimes \mathcal{H}_0$. Also lassen sich die Spin- s -Felder als Elemente des Tensorproduktraumes $\mathbb{C}^{2s+1} \otimes \mathcal{H}_0$ verstehen. Wir definieren:

$$\mathcal{H}_s := \mathbb{C}^{2s+1} \otimes \mathcal{H}_0 = \{ \chi \mid \chi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}^{2s+1}; \langle \chi \mid \chi \rangle < \infty \}$$

Auf \mathcal{H}_s ist das Skalarprodukt in der im Exkurs auf Seite 38 beschriebenen Weise erklärt:

$$\chi_1 = \sum_m \mathbf{e}_m \otimes \chi_m^1, \chi_2 = \sum_n \mathbf{e}_n \otimes \chi_n^2 \in \mathcal{H}_s; \chi_m^1, \chi_n^2 \in \mathcal{H}_0$$

$$\begin{aligned} \langle \chi_1 \mid \chi_2 \rangle &= \left\langle \sum_m \mathbf{e}_m \otimes \chi_m^1 \mid \sum_n \mathbf{e}_n \otimes \chi_n^2 \right\rangle \\ &= \sum_{m,n} \langle \mathbf{e}_m \mid \mathbf{e}_n \rangle_{\mathbb{C}^{2s+1}} \cdot \langle \chi_m^1 \mid \chi_n^2 \rangle_{\mathcal{H}_0} \end{aligned}$$

$$\text{da die } \mathbf{e}_m \text{ orthogonal sind} = \sum_{m,n} \delta_{mn} \langle \chi_m^1 \mid \chi_n^2 \rangle_{\mathcal{H}_0}$$

$$= \sum_m \langle \chi_m^1 \mid \chi_m^2 \rangle_{\mathcal{H}_0} = \sum_m \int d^3x \chi_m^{1*}(\vec{x}) \chi_m^2(\vec{x})$$

Wir haben also:

$$\langle \chi_1 \mid \chi_2 \rangle = \sum_m \int d^3x \chi_m^{1*}(\vec{x}) \chi_m^2(\vec{x})$$

Wir werden nun den Hamiltonoperator des Wasserstoffatoms, der bislang in \mathcal{H}_0 definiert war, auf den \mathcal{H}_s erweitern und sehen, daß dieser Hamiltonoperator einen $2s+1$ -fach entarteten Grundzustand liefert, also tatsächlich neue Freiheitsgrade in die Theorie einbringt.

Die Ausdehnung des Hamiltonoperators erfolgt ganz analog zu der im Exkurs auf Seite 39 angegebenen Erweiterung der Operatoren A, B zu \tilde{A}, \tilde{B} :

$$\begin{aligned} H & : \mathcal{H}_s \rightarrow \mathcal{H}_s \\ H & : = \mathbb{1}_{\mathbb{C}^{2s+1}} \otimes \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta - \frac{e^2}{r} \right) \end{aligned}$$

Der Anteil

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta - \frac{e^2}{r}$$

bezieht sich natürlich nur auf \mathcal{H}_0 .

Dieser Hamiltonoperator wirkt auf eine Funktion $\chi(\vec{x}) = a \otimes \phi(\vec{x})$; $a \in \mathbb{C}^{2s+1}$, $\phi(\vec{x}) \in \mathcal{H}_0$ in folgender Weise:

$$\begin{aligned} H\chi(\vec{x}) & = \left(\mathbb{1}_{\mathbb{C}^{2s+1}} \otimes \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta - \frac{e^2}{r} \right) \right) (a \otimes \phi(\vec{x})) \\ & = a \otimes \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta - \frac{e^2}{r} \right) \phi(\vec{x}) \end{aligned}$$

Wir wollen nun zeigen, daß für eine $2s+1$ -komponentige Wellenfunktion der Grundzustand $2s+1$ -fach entartet ist.

Dazu haben wir folgende Eigenwertgleichung in \mathcal{H}_s zu lösen:

$$H\chi(\vec{x}) = E(\vec{x})$$

wobei $\chi(\vec{x}) \in \mathcal{H}_s = \mathbb{C}^{2s+1} \otimes \mathcal{H}_0$ und $H : \mathcal{H}_s \rightarrow \mathcal{H}_s$ ist.

Wir haben gesehen, wie H auf ein Tensorprodukt in \mathcal{H}_s wirkt, daher können wir die Eigenwertgleichung umschreiben in:

$$a \otimes \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta - \frac{e^2}{r} \right) \phi(\vec{x}) = E(a \otimes \phi(\vec{x})) = a \otimes (E\phi(\vec{x}))$$

für alle $a \in \mathbb{C}^{2s+1}$.

Diese Eigenwertgleichung ist gelöst, wenn für $\phi(\vec{x})$ gilt:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta - \frac{e^2}{r} \right) \phi(\vec{x}) = E\phi(\vec{x})$$

Die Lösung dieses Problems ist bekannt, es ergeben sich die Wasserstoff-Eigenfunktionen $\phi_{nlm}(\vec{x})$ und die Energieeigenwerte E_n des Wasserstoff-Atoms.

$\Rightarrow \chi(\vec{x}) = a\phi_{nlm}(\vec{x}) = a \otimes \phi_{nlm}(\vec{x})$ löst das Eigenwertproblem für jedes $a \in \mathbb{C}^{2s+1}$.

Nun gibt es aber nicht beliebig viele Lösungen, denn da $\dim\mathbb{C}^{2s+1} = 2s + 1$ ist, existieren nur $2s + 1$ linear unabhängige Vektoren. Wählt man für die Vektoren a die $2s + 1$ Basisvektoren des \mathbb{C}^{2s+1} , so erhält man als Lösungsmenge für das Eigenwertproblem:

$$\begin{aligned}\chi_1(\vec{x}) &= \mathbf{e}_1\phi_{nlm}(\vec{x}) \\ \chi_2(\vec{x}) &= \mathbf{e}_2\phi_{nlm}(\vec{x}) \\ &\vdots \\ \chi_{2s+1}(\vec{x}) &= \mathbf{e}_{2s+1}\phi_{nlm}(\vec{x})\end{aligned}$$

Zu jedem Energieeigenwert, also auch für den Grundzustand $\phi_{100}(\vec{x})$, existiert ein solcher Satz von $2s + 1$ linear unabhängigen Eigenvektoren.

Das heißt, daß jeder Energieeigenwert, also auch der Grundzustand, $2s + 1$ -fach entartet ist!

Im folgenden Kapitel werden wir den Operator konstruieren, der mit den neuen Freiheitsgraden zusammenhängt, und wir werden zeigen, daß diese $2s + 1$ -fache Entartung des Grundzustandes durch Anlegen eines äußeren Magnetfeldes vollständig aufgehoben werden kann.

Kapitel 9

Der Spinoperator

Wir haben in Kapitel 8 gesehen, daß der Grundzustand des Wasserstoffatoms für den Fall einer $2s + 1$ -komponentigen Wellenfunktion (Spin- s -Feld) genau $2s + 1$ -fach entartet ist. Wie wir später sehen werden, kann diese Entartung durch die Anwesenheit eines äußeren Magnetfeldes aufgehoben werden, der Grundzustand spaltet in $2s + 1$ äquidistante Niveaus auf.

Diese Entartung erinnert uns an den Bahndrehimpuls, auch dort hatten wir ein ähnliches Verhalten: Die Energien waren im feldfreien Fall für jeden Bahndrehimpuls l $2l + 1$ -fach entartet und spalteten beim Anlegen eines Magnetfeldes in $2l + 1$ äquidistante Niveaus auf.

Man könnte nun vermuten, daß eine Aufspaltung des Grundzustandes im Magnetfeld (wie sie experimentell beobachtet wird) mit zusätzlichen Drehimpulsfreiheitsgraden zusammenhängt. Aus diesem Grunde würden wir spätestens hier in Analogie zum Bahndrehimpuls von \mathbb{C}^n zu \mathbb{C}^{2s+1} übergehen und s als Quantenzahl des neuen Drehimpulses interpretieren.

Für die doppelte Aufspaltung des Wasserstoff-Grundzustandes gilt demnach $s = \frac{1}{2}$ und der für uns interessante Hilbertraum wird der $\mathcal{H}_{\frac{1}{2}}$ sein.

In völliger Analogie zum Bahndrehimpuls können wir nun die Struktur des zu der Quantenzahl s gehörenden Operators erhalten, indem wir abermals Darstellungen der $SO(3)$ betrachten.

Wir suchen in diesem Fall die Darstellung der $SO(3)$ auf dem Hilbertraum der Spin- s -Felder:

$$D_s : SO(3) \rightarrow \text{Aut } \mathcal{H}_s$$

Da $\mathcal{H}_s = \mathbb{C}^{2s+1} \otimes \mathcal{H}_0$ ist, liegt es nahe, auch D_s als Tensorprodukt zu schreiben:

$$D_s = \rho_s(R) \otimes \rho(R)$$

Dabei ist $\rho(R)$ die in Kapitel 6 behandelte Darstellung der $SO(3)$ in \mathcal{H}_0 gemäß:

$$\psi \in \mathcal{H}_0; \quad (\rho(R)\psi)(\vec{x}) = \psi\left(\begin{matrix} -1 \\ R \end{matrix} \vec{x}\right)$$

$\rho_s(R)$ ist die — noch anzugebende — Darstellung:

$$\rho_s(R) : \text{SO}(3) \rightarrow \text{Aut } \mathbb{C}^{2s+1}$$

Damit ist:

$$R \in \text{SO}(3), \phi(\vec{x}) \in \mathcal{H}_0; a \in \mathbb{C}^{2s+1}; \chi(\vec{x}) := a \otimes \phi(\vec{x}) \in \mathcal{H}_0 \otimes \mathbb{C}^{2s+1} :$$

$$\begin{aligned} (D_s(R)\chi)(\vec{x}) &= (\rho_s(R) \otimes \rho(R))(a \otimes \phi(\vec{x})) \\ &= (\rho_s(R)a) \otimes (\rho(R)\phi)(\vec{x}) \\ &= (\rho_s(R)a) \otimes \phi\left(\begin{matrix} -1 \\ R \end{matrix} \vec{x}\right) \end{aligned}$$

Damit haben wir:

$$\boxed{(D_s(R)\chi)(\vec{x}) = \rho_s(R)\chi\left(\begin{matrix} -1 \\ R \end{matrix} \vec{x}\right)}$$

Wir haben nun die Aufgabe, $\rho_s(R)$ anzugeben.

Hier geht man analog zur Konstruktion der Darstellung $\rho(R)$ vor: Wir hatten auf Seite 25

$$R = e^{I(\vec{\omega})}; \quad \rho(R) = e^{\rho'(\Theta)} = e^{-i\vec{\omega} \cdot \vec{L}}$$

mit:

$$\Theta = I(\vec{\omega})$$

Ferner hatten wir gesehen, daß $\rho'(\Theta)$ folgende Darstellungseigenschaft besitzt:

$$[\rho'(\Theta_1), \rho'(\Theta_2)] = \rho'([\Theta_1, \Theta_2])$$

Aus dieser Darstellungseigenschaft haben wir dann auf die Vertauschungsrelationen von \vec{L} geschlossen:

$$[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk}L_k$$

In Anlehnung an die Exponentialdarstellung von $\rho(R)$ definieren wir nun eine analoge Exponentialdarstellung von $\rho_s(R)$:

$$R = e^{I(\vec{\omega})}; \quad \Theta = I(\vec{\omega}); \quad \rho_s(R) = e^{\rho'_s(\Theta)}$$

mit:

$$\rho'_s(\Theta) = -i\vec{\omega} \cdot \vec{N}; \quad N_i \in \text{Aut } \mathbb{C}^{2s+1}$$

Wir verlangen nun für dieses $\rho'_s(\Theta)$ die obige Darstellungseigenschaft und erhalten damit die obigen Vertauschungsrelationen als Bedingung an \vec{N} . Wir fordern also:

$$[\rho'_s(\Theta_1), \rho'_s(\Theta_2)] = \rho'_s([\Theta_1, \Theta_2])$$

Die N_i müssen nun die gleichen Vertauschungsregeln wie die Komponenten des Bahndrehimpulses erfüllen:

$$\boxed{[N_i, N_j] = i\epsilon_{jki}N_k}$$

Ferner verlangt man die Unitarität der Darstellung $\rho_s(R)$:

$$\begin{aligned}\rho_s^\dagger(R) &= (\rho_s(R))^{-1} \\ \Rightarrow e^{i\vec{\omega} \cdot \vec{N}^\dagger} &= e^{i\vec{\omega} \cdot \vec{N}} \\ \Rightarrow N_i^\dagger &= N_i\end{aligned}$$

Die N_i müssen also hermitesch sein.

Nun sei skizziert, wie die Matrizen N_i für konkrete Fälle berechnet werden können:

Definiert man (wie beim Bahndrehimpuls) Leiteroperatoren N_\pm :

$$N_\pm = N_1 \pm iN_2$$

$$N^2 = \sum_{i=1}^3 N_i^2$$

so finden wir aufgrund der Vertauschungsrelationen für die N_i :

$$[N^2, N_\pm] = 0$$

$$[N_3, N_\pm] = \pm N_\pm$$

Wir wählen nun eine Basis von simultanen Eigenfunktionen zu N_3 und N^2 :

$$N^2 |s m_s\rangle = s(s+1) |s m_s\rangle$$

$$N_3 |s m_s\rangle = m_s |s m_s\rangle$$

Man kann nun aus den Vertauschungsrelationen der N_\pm, N_3 folgern, daß gilt:

$$N_\pm |s m_s\rangle = \sqrt{s(s+1) - m_s(m_s \pm 1)} |s m_s\rangle$$

Schreibt man nun noch N_\pm auf N_1, N_2 um:

$$N_1 = \frac{1}{2}(N_+ + N_-)$$

$$N_2 = \frac{1}{2i}(N_+ - N_-)$$

so findet man für die Matrixelemente:

$$\begin{aligned}\langle s m'_s | N_1 | s m_s \rangle &= \frac{1}{2} \left[\sqrt{s(s+1) - m_s(m_s+1)} \cdot \delta_{m'_s, m_s+1} \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{s(s+1) - m_s(m_s-1)} \cdot \delta_{m'_s, m_s-1} \right] \\ \langle s m'_s | N_2 | s m_s \rangle &= \frac{1}{2i} \left[\sqrt{s(s+1) - m_s(m_s+1)} \cdot \delta_{m'_s, m_s+1} \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{s(s+1) - m_s(m_s-1)} \cdot \delta_{m'_s, m_s-1} \right] \\ \langle s m'_s | N_3 | s m_s \rangle &= m_s \delta_{m'_s, m_s}\end{aligned}$$

Berechnet man diese Matrixelemente für den Fall $s = \frac{1}{2}; m_s, m'_s = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ so erhält man mit dem Schema:

$$\begin{array}{c|cc} & m_s = +\frac{1}{2} & m_s = -\frac{1}{2} \\ \hline m'_s = +\frac{1}{2} & & \\ m'_s = -\frac{1}{2} & & \end{array}$$

die folgenden 2×2 -Matrizen:

$$\begin{aligned}S_1 &:= N_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\sigma_1; & \sigma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ S_2 &:= N_2 = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\sigma_2; & \sigma_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ S_3 &:= N_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\sigma_3; & \sigma_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Um den Fall $s = \frac{1}{2}$ durch den Operator anzudeuten, schreiben wir statt N_1, N_2, N_3 : S_1, S_2, S_3 . Die Matrizen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ bezeichnet man als Paulische Spinmatrizen (Pauli-Matrizen).

Analog kann man die Matrizen N_i für andere Werte von s erhalten. Die Matrizen N_i bezeichnet man als Spinmatrizen, den Parameter s , der den Eigenwert von N^2 bestimmt, als Spin.

Zum Abschluß dieses Kapitels zeigen wir, daß die Wechselwirkung der Spinfreiheitsgrade, beschrieben durch den Spinoperator \vec{N} , mit einem äußeren Magnetfeld die $2s + 1$ -fache Entartung des Grundzustandes aufhebt, und daß dieser Zustand in $2s + 1$ äquidistante Niveaus aufspaltet. Insbesondere sehen wir, daß der Grundzustand des Wasserstoffatoms für den Fall $s = \frac{1}{2}$ in zwei Niveaus aufspaltet. Dies entspricht genau dem experimentellen Befund.

Dazu konstruieren wir die Wechselwirkung mit dem Magnetfeld in Analogie zum Bahndrehimpuls. Dort hatten wir gefunden, daß das Anlegen eines äußeren Magnetfeldes einen Zusatzterm $\mu_L \vec{L} \cdot \vec{B}$ bewirkt. Völlig analog setzen wir nun für die Spin-Magnetfeld-Wechselwirkung $\mu_s \vec{N} \cdot \vec{B}$.

Berücksichtigen wir noch, daß der Hamiltonoperator in \mathcal{H}_s wirken soll, und daß \vec{N} in \mathbb{C}^{2s+1} wirkt, so finden wir für den erweiterten Hamiltonoperator:

$$H = \mathbb{I}_{\mathbb{C}^{2s+1}} \otimes \left(\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta - \frac{e^2}{r} \right) + \mu_L \vec{L} \cdot \vec{B} \right) + \mu_s \vec{N} \cdot \vec{B} \otimes \mathbb{I}_{\mathcal{H}_0}$$

oder abgekürzt:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta - \frac{e^2}{r} + \mu_L \vec{L} \cdot \vec{B} + \mu_s \vec{N} \cdot \vec{B}$$

Wählt man nun \vec{B} in z -Richtung $\vec{B} := B\vec{e}_z$ so erhält man:

$$\begin{aligned} \vec{L} \cdot \vec{B} &= BL_3; \quad \vec{N} \cdot \vec{B} = BN_3 \\ \Rightarrow H &= \mathbf{1}_{\mathbb{C}^{2s+1}} \otimes \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta - \frac{e^2}{r} + \mu_L BL_3 \right) + \mu_s BN_3 \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{H}_0} \end{aligned}$$

Wähle nun als Basis von \mathbb{C}^{2s+1} eine Eigenfunktionsbasis von N_3 :

$$N_3 \mathbf{e}_{m_s} = m_s \mathbf{e}_{m_s}; \quad m_s = -s, \dots, s$$

Die Tatsache, daß m_s von $-s$ bis $+s$ läuft, folgt aus den algebraischen Eigenschaften von N_3, N_+ und N^2 in völliger Analogie zum Bahndrehimpuls (siehe auf Seite 46–47 und auf Seite 29–31).

Nun folgt:

$$\chi(\vec{x}) := \mathbf{e}_{m_s} \otimes \phi_{nlm}(\vec{x})$$

$$\boxed{H\chi(\vec{x}) = (E_n + \mu_L m B + \mu_s m_s B) \chi(\vec{x})}$$

Dabei ist E_n der Eigenwert von \mathcal{H}_0 :

$$\begin{aligned} \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta - \frac{e^2}{r} \right) \phi_{nlm}(\vec{x}) &= E_n \phi_{nlm} \\ H_0 &:= -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta - \frac{e^2}{r} \end{aligned}$$

denn es ist:

$$\begin{aligned} H\chi(\vec{x}) &= [\mathbf{1}_{\mathbb{C}^{2s+1}} \otimes (H_0 + \mu_L BL_3) + (\mu_s BN_3 \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{H}_0})] (\mathbf{e}_{m_s} \otimes \phi_{nlm}(\vec{x})) \\ &= \mathbf{e}_{m_s} \otimes (H_0 + \mu_L BL_3) \phi_{nlm}(\vec{x}) + \mu_s BN_3 \mathbf{e}_{m_s} \otimes \phi_{nlm}(\vec{x}) \\ &= \mathbf{e}_{m_s} \otimes (E_n + \mu_L Bm) \phi_{nlm}(\vec{x}) + \mu_s Bm_s \mathbf{e}_{m_s} \otimes \phi_{nlm}(\vec{x}) \\ &= (E_n + \mu_L Bm) (\mathbf{e}_{m_s} \otimes \phi_{nlm}(\vec{x})) + \mu_s Bm_s (\mathbf{e}_{m_s} \otimes \phi_{nlm}(\vec{x})) \\ &= (E_n + \mu_L Bm + \mu_s Bm_s) (\mathbf{e}_{m_s} \otimes \phi_{nlm}(\vec{x})) \\ &= (E_n + \mu_L Bm + \mu_s Bm_s) \chi(\vec{x}) = E_{nlm, m_s} \chi(\vec{x}) \end{aligned}$$

Betrachte nun den Grundzustand: $n=1, l=0, m=0$:

$$E_{100, m_s} = E_{100} + \mu_s Bm_s; \quad m_s = -s, \dots, +s$$

Man sieht nun, daß die Entartung des Grundzustandes aufgehoben ist, da jedem Energieeigenwert E_{nlm, m_s} genau ein Zustandsvektor $\chi(\vec{x}) = \mathbf{e}_{m_s} \otimes \phi_{nlm}(\vec{x})$ zugeordnet ist.

Mit dem Spinwert $s = \frac{1}{2}$ ist der Wasserstoffgrundzustand also tatsächlich in zwei Niveaus aufgespalten, wie es auch das Experiment ergibt.

Kapitel 10

Darstellungen von $SO(3)$ für Spin- $\frac{1}{2}$ -Felder

Wir haben nun angegeben, wie die Matrizen N_i konstruiert werden, ferner haben wir gesehen, daß in unserem Formalismus mit Spin- s -Feldern und einer Spin-Magnetfeld-Wechselwirkung der Grundzustand ohne Feld $2s + 1$ -fach entartet ist und daß diese Entartung durch Anlegen eines Magnetfeldes vollständig aufgehoben wird. Am Beispiel des Wasserstoffatoms schließen wir aus der beobachteten doppelten Aufspaltung aller Niveaus auf $s = \frac{1}{2}$.

Wir wollen nun die Darstellung von $SO(3)$ für Spin- $\frac{1}{2}$ -Felder genauer untersuchen, da dieser Fall von konkretem physikalischem Interesse ist.

Wir gehen von der Exponentialdarstellung für $\rho_{\frac{1}{2}}(R)$ aus:

$$\begin{aligned}\vec{N} = \vec{S} &= \frac{\vec{\sigma}}{2} \\ \rho_{\frac{1}{2}}(R) &= e^{-i\vec{\omega} \cdot \vec{N}} = e^{-i\vec{\omega} \cdot \vec{S}} \\ \rho_{\frac{1}{2}}(R) &= e^{-i\vec{\omega} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}}\end{aligned}$$

Nun ist:

$$\begin{aligned}e^{-i\vec{\omega} \cdot \vec{S}} &= 1 + (-i\vec{\omega} \cdot \vec{S}) + \frac{1}{2!} (-i\vec{\omega} \cdot \vec{S})^2 + \frac{1}{3!} (-i\vec{\omega} \cdot \vec{S})^3 + \frac{1}{4!} (-i\vec{\omega} \cdot \vec{S})^4 + \dots \\ &= 1 - i\vec{\omega} \cdot \vec{S} - \frac{1}{2!} (\vec{\omega} \cdot \vec{S})^2 + \frac{1}{3!} i (\vec{\omega} \cdot \vec{S})^3 + \frac{1}{4!} (\vec{\omega} \cdot \vec{S})^4 \mp \dots\end{aligned}$$

Um die auftretenden Potenzen $(\vec{\omega} \cdot \vec{S})^n$ berechnen zu können, zeigen wir folgende nützliche Formel:

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{A}) (\vec{\sigma} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$$

Beweis:

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{A}) (\vec{\sigma} \cdot \vec{B}) = \sum_{i,j} (\sigma_i A_i) (\sigma_j B_j) = \sum_{i,j} A_i B_j \sigma_i \sigma_j$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i,j} A_i B_j \frac{1}{2} [\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i + \sigma_i \sigma_j - \sigma_j \sigma_i] \\
&= \sum_{i,j} A_i B_j \frac{1}{2} [(\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i) + (\sigma_i \sigma_j - \sigma_j \sigma_i)]
\end{aligned}$$

Explizites Einsetzen der Pauli-Matrizen aus Kapitel 9 auf Seite 47 zeigt, daß gilt:

$$[\sigma_i, \sigma_j]_+ := \{\sigma_i, \sigma_j\} := \sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2\delta_{ij}$$

Außerdem ist:

$$\begin{aligned}
[\sigma_i, \sigma_j]_- &:= \sigma_i \sigma_j - \sigma_j \sigma_i = [2S_i, 2S_j] = 4[S_i, S_j] \\
&= 4i\epsilon_{ijk} S_k = 2i\epsilon_{ijk} (2S_k) \\
&= 2i\epsilon_{ijk} \sigma_k
\end{aligned}$$

Wir haben also:

$$\begin{aligned}
[\sigma_i, \sigma_j]_+ &= 2\delta_{ij} \\
[\sigma_i, \sigma_j]_- &= [\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk} \sigma_k
\end{aligned}$$

Und damit ist dann:

$$\begin{aligned}
(\vec{\sigma} \cdot \vec{A}) (\vec{\sigma} \cdot \vec{B}) &= \sum_{i,j} A_i B_j \frac{1}{2} \{[\sigma_i \sigma_j]_+ + [\sigma_i \sigma_j]_-\} \\
&= \sum_{i,j} A_i B_j \{\delta_{ij} + i\epsilon_{ijk} \sigma_k\} \\
&= \vec{A} \cdot \vec{B} + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})
\end{aligned}$$

Mit dieser Formel erhalten wir:

$$\begin{aligned}
(\vec{\omega} \cdot \vec{S})^2 &= \left(\vec{\omega} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} (\vec{\omega} \cdot \vec{\sigma})^2 \\
&= \frac{1}{4} |\vec{\omega}|^2 = \frac{1}{4} \phi^2; \quad \phi^2 := |\vec{\omega}|^2; \quad \vec{\omega} = \phi \hat{\omega}
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich folgende Liste der Potenzen von $(\vec{\omega} \cdot \vec{S})$

$$\begin{aligned}
\vec{\omega} \cdot \vec{S} &= \frac{\phi}{2} (\hat{\omega} \cdot \vec{\sigma}) \\
(\vec{\omega} \cdot \vec{S})^2 &= \left(\frac{\phi}{2}\right)^2 \\
(\vec{\omega} \cdot \vec{S})^3 &= \left(\frac{\phi}{2}\right)^3 (\hat{\omega} \cdot \vec{\sigma}) \\
(\vec{\omega} \cdot \vec{S})^4 &= \left(\frac{\phi}{2}\right)^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow e^{-i\vec{\omega}\cdot\vec{s}} &= 1 - i\left(\frac{\phi}{2}\right)(\hat{\omega}\cdot\vec{\sigma}) - \frac{1}{2!}\left(\frac{\phi}{2}\right)^2 + \frac{i}{3!}\left(\frac{\phi}{2}\right)^3(\hat{\omega}\cdot\vec{\sigma}) + \frac{1}{4!}\left(\frac{\phi}{2}\right)^4 \mp \dots \\ &= \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\phi}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\phi}{2}\right)^4 \mp \dots\right)}_{\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)} - i(\hat{\omega}\cdot\vec{\sigma}) \underbrace{\left(\frac{\phi}{2} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\phi}{2}\right)^3 \pm \dots\right)}_{\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)} \end{aligned}$$

Mit den bekannten Potenzreihen für Sinus und Cosinus findet man:

$$\boxed{\rho_{\frac{1}{2}}(R) = e^{-i\vec{\omega}\cdot\vec{s}} = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - i(\hat{\omega}\cdot\vec{\sigma}) \cdot \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)}$$

Wenn nun $\rho_{\frac{1}{2}}(R)$ Darstellung von $SO(3)$ wäre, so müßte $\rho_{\frac{1}{2}}(\mathbb{I}) = \mathbb{I}$ gelten. Wir finden:

$$\phi = 0 : \quad R = e^{I(\vec{\omega})} = \mathbb{I}; \quad \rho_{\frac{1}{2}}(R) = \rho_{\frac{1}{2}}(\mathbb{I}) = \mathbb{I}$$

Allerdings gilt auch für $\phi = 2\pi$ $R = \mathbb{I}$. Es ist aber für dieses ϕ :

$$\rho_{\frac{1}{2}}(R) = \rho_{\frac{1}{2}}(\mathbb{I}) = -\mathbb{I} (!!)$$

Offenbar ist $\rho_{\frac{1}{2}}$ nicht eindeutig, also auch keine Abbildung!

Die Folgerung ist, daß es keine Darstellung von $SO(3)$ für $s = \frac{1}{2}$ gibt!

Wir können den bisherigen Darstellungsbegriff zwar nicht auf Spin- $\frac{1}{2}$ -Felder anwenden, allerdings gibt es eine Verallgemeinerung bzw. Abschwächung des Darstellungsbegriffes, nämlich die sogenannte Strahldarstellung.

Diese Darstellung wird statt auf Zuständen des Hilbertraumes auf Äquivalenzklassen der Zustände definiert. Wir wollen daher zunächst eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{H}_{\frac{1}{2}}$ einführen. Diese Äquivalenzrelation ist mit der Vorzeichenfrage bei quantenmechanischen Zuständen verknüpft.

Wie wir wissen, ist das Vorzeichen eines quantenmechanischen Zustandes nicht meßbar, sondern nur die Erwartungswerte eines Operators O . Der Erwartungswert ist definiert als:

$$\langle O \rangle_{\psi} = \frac{\langle \psi | O | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}$$

Man sieht sofort, daß:

$$\langle O \rangle_{\psi'} = \langle O \rangle_{\psi} \quad \text{falls } \psi' = \lambda\psi; \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad \lambda \neq 0$$

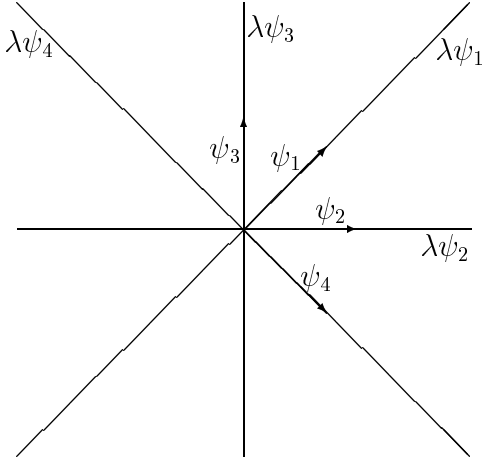
Dies legt nun nahe, eine Äquivalenzrelation auf den quantenmechanischen Zuständen zu erklären, indem wir zwei Zustände ψ, ψ' als äquivalent bezeichnen, wenn sie zum gleichen Erwartungswert von Operatoren auf dem Hilbertraum führen, also durch Messungen nicht voneinander unterschieden werden können.

Wir definieren in diesem Sinne eine Äquivalenzrelation auf \mathcal{H}

$$\psi \sim \psi' \quad :\Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{C}, \quad \lambda \neq 0, \quad \psi' = \lambda\psi$$

Man zeigt sofort, daß dieses \sim eine Äquivalenzrelation im mathematischen Sinn definiert. Ferner sieht man, daß äquivalente Zustände zu gleichen Erwartungswerten führen.

Der Hilbertraum der Zustände zerfällt also in „Strahlen“, wobei jeder „Strahl“ eine Äquivalenzklasse darstellt:



Wir definieren nun einen Hilbertraum der Äquivalenzklassen:

$$\hat{\mathcal{H}} := \left\{ [\psi] \mid [\psi] = \left\{ \psi' \mid \psi' \sim \psi : \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0, \psi' = \lambda\psi; \int |\psi(\vec{x})|^2 d^3x < \infty \right\} \right\}$$

$$\stackrel{[7]}{=} \{ \lambda\psi \mid \psi \in \mathcal{H} \}$$

Das Skalarprodukt auf $\hat{\mathcal{H}}$ definiert man in natürlicher Weise als:

$$\langle [\psi], [\phi] \rangle_{\hat{\mathcal{H}}} := \frac{\langle \psi, \phi \rangle}{\|\psi\| \|\phi\|}$$

Dies ist, wie man leicht sieht, unabhängig von der Wahl der Repräsentanten in den Äquivalenzklassen, denn ein anderer Repräsentant unterscheidet sich ja nur in einem Faktor λ , der sowohl im Zähler als auch im Nenner eingeht und sich somit im Ergebnis herauskürzt.

Wir haben oben gesehen, daß es keine wohldefinierte Darstellung der $SO(3)$ für halbzahlige Drehimpulse gibt. Allerdings ist es möglich, wie ebenfalls schon angedeutet, den Begriff der Darstellung durch den (schwächeren) der Strahldarstellung zu ersetzen. Bei Strahldarstellungen von Lie-Gruppen betrachtet man keine Darstellungen auf den Zuständen, sondern Darstellungen auf Äquivalenzklassen von Zuständen, also auf den Strahlen.

Def.: Strahldarstellung (auch: projektive Darstellung)

G Lie-Gruppe, $\hat{\mathcal{H}}$ Hilbertraum der Äquivalenzklassen

$\widehat{D} : G \rightarrow \text{Aut } \widehat{\mathcal{H}}$ heißt unitäre Strahldarstellung von G auf $\widehat{\mathcal{H}}$, falls gilt:

$$\widehat{D}(g_1 g_2) = \widehat{D}(g_1) \cdot \widehat{D}(g_2) \quad \forall g_1, g_2 \in G$$

$$\widehat{D}(\mathbf{1}) = \mathbf{I}$$

$$\widehat{D}^\dagger = (\widehat{D})^{-1}$$

In unserem konkreten Fall suchen wir die Strahldarstellung der Lie-Gruppe $\text{SO}(3)$ auf dem Hilbertraum der Äquivalenzklassen von Spin- $\frac{1}{2}$ -Feldern.

$$\widehat{D}_{\frac{1}{2}} : \text{SO}(3) \rightarrow \text{Aut } \widehat{\mathcal{H}}_{\frac{1}{2}}$$

$$\widehat{\mathcal{H}}_{\frac{1}{2}} := \{[\chi] \mid [\chi] = \{\chi' : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}^2 \mid \psi' \sim \psi$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0, \psi' = \lambda \psi; \langle \chi \mid \chi \rangle_{\mathcal{H}_{\frac{1}{2}}} < \infty\}$$

Um diese Strahldarstellung zu finden, bedient man sich einer Aussage der Gruppentheorie (dem Satz von Wigner-Bargmann), nach der jede Strahldarstellung einer (Lie-)Gruppe durch die Darstellung einer anderen Gruppe (der Überlagerungsgruppe) induziert wird.

Wir wollen nun zeigen, daß für die Strahldarstellung der $\text{SO}(3)$ in $\widehat{\mathcal{H}}_{\frac{1}{2}}$ die Darstellung der $\text{SU}(2)$ in $\mathcal{H}_{\frac{1}{2}}$ benötigt wird.

Dazu gehen wir wie folgt vor:

- i). Konstruktion einer Abbildung zwischen den Gruppen $\text{SO}(3)$ und $\text{SU}(2)$.
- ii). Bestimmung der Darstellung der Gruppe $\text{SU}(2)$.
- iii). Konstruktion der Strahldarstellung der Gruppe $\text{SO}(3)$.

Zu Beginn unserer Überlegungen geben wir die Definition der Gruppe $\text{SU}(2)$ an:

$$\text{SU}(2) := \left\{ \alpha \mid \alpha : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2; \alpha \text{ linear, } \alpha^\dagger = \bar{\alpha}^{-1}, \det \alpha = 1 \right\}$$

Nun können wir den ersten Punkt unseres Programms erfüllen. Dazu definieren wir einen Homomorphismus von $\text{SU}(2)$ auf $\text{SO}(3)$ in folgender Weise:

Def.:

$$h : \text{SU}(2) \rightarrow \text{SO}(3)$$

$$\alpha \mapsto h(\alpha)$$

Sei $\{\vec{e}_k\}$ Basis von \mathbb{R}^3 . Dann ist $h(\alpha)\vec{e}_k = \sum_j h_{jk}(\alpha)\vec{e}_j$ mit:

$$\alpha \sigma_k \alpha^\dagger =: h_{jk}(\alpha) \sigma_j \tag{10.1}$$

In dieser Definition wird bei der Anwendung der Matrix $h(\alpha)$ auf Vektoren aus \mathbb{R}^3 die in der linearen Algebra übliche Indexkonvention benutzt.

Man zeigt nun folgende Eigenschaften von h :

$$h(\alpha) \in SO(3) \quad \forall \alpha \in SU(2) \quad (10.2)$$

$$\text{Kern}(h) = \{-\mathbb{I}, \mathbb{I}\} \quad (10.3)$$

$$\text{Bild}(h) = SO(3) \quad (10.4)$$

Beweis: Wir zeigen zunächst die folgende

Vorbemerkung:

$$\vec{a} \in \mathbb{R}^3; \quad |\vec{a}|^2 = -\det(\vec{a} \cdot \vec{\sigma}) = -\det\left(\sum_i a_i \sigma_i\right)$$

Die σ_i sind die in Kapitel 9 auf Seite 47 definierten Pauli-Matrizen.

Es ist:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{\sigma} &= \sum_i a_i \sigma_i = a_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \\ &\quad + a_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_3 & a_1 - ia_2 \\ a_1 + ia_2 & -a_3 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow -\det(\vec{a} \cdot \vec{\sigma}) &= -[-a_3^2 - (a_1 - ia_2)(a_1 + ia_2)] \\ &= a_3^2 + a_1^2 + a_2^2 \\ &= |\vec{a}|^2 \end{aligned}$$

Damit ist die Vorbemerkung gezeigt.

Sei nun $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ und $\vec{a}' = h(\alpha)\vec{a}$. Wir behaupten, daß $h(\alpha)$ eine Isometrie ist, daß also gilt:
 $|\vec{a}'|^2 = |\vec{a}|^2$

Wir haben:

$$\begin{aligned} \vec{a}' = h(\alpha)\vec{a} &= h(\alpha) \sum_k a_k \vec{e}_k = \sum_k a_k h(\alpha) \vec{e}_k \\ &= \sum_{k,j} a_k h_{jk}(\alpha) \vec{e}_j \\ &= \sum_j a'_j \vec{e}_j \quad \text{mit: } a'_j = \sum_k a_k h_{jk}(\alpha) \end{aligned}$$

Anm.: Hier zeigt sich nun der Sinn der obigen Indexkonvention für Vektoren: Die Komponenten transformieren sich wie bekannt.

Nun ist mit obiger Vorbemerkung:

$$\begin{aligned}
 |\vec{a}'| &= -\det(\vec{a}' \cdot \vec{\sigma}) = -\det\left(\sum_j a'_j \sigma_j\right) \\
 &= -\det\left(\sum_{j,k} a_k h_{jk}(\alpha) \sigma_j\right) \\
 &= -\det\left(\sum_k a_k \alpha \sigma_k \alpha^\dagger\right) \\
 &= -\det(\alpha \vec{a} \cdot \vec{\sigma} \alpha^\dagger) \\
 &= -\det(\alpha) \cdot \det(\vec{a} \cdot \vec{\sigma}) \det(\alpha^\dagger) \\
 &= -\det(\underbrace{\alpha \alpha^\dagger}_{=1}) \cdot \det(\vec{a} \cdot \vec{\sigma}) \\
 &= -\det(\vec{a} \cdot \vec{\sigma}) = |\vec{a}|^2
 \end{aligned}$$

Mit der Erhaltung des Normquadrates haben wir gezeigt, daß $h(\alpha) \in O(3)$ gilt. Es bleibt noch zu zeigen, daß $\det h(\alpha) = 1$ ist. Dieser Beweis hängt mit der topologischen Struktur von $SU(2)$ zusammen und erfordert ein mathematisches Niveau, welches den Rahmen dieses Skriptums sprengen würde⁽ⁱ⁾.

zu (10.3))

Sei $\alpha \in \text{Kern}(h) \Rightarrow h(\alpha) = \mathbb{I}$

$$\left. \begin{aligned}
 \Rightarrow h(\alpha) \vec{e}_k &= \sum_j h_{jk}(\alpha) \vec{e}_j \\
 \text{andererseits: } h(\alpha) \vec{e}_k &= \vec{e}_k = \sum_j \delta_{jk} \vec{e}_j
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow h_{jk}(\alpha) = \delta_{jk}$$

Dies in (10.1) auf Seite 53 eingesetzt, ergibt:

$$\begin{aligned}
 \alpha \sigma_k \alpha^\dagger &= h_{jk}(\alpha) \sigma_j = \delta_{jk} \sigma_j \\
 \Rightarrow \alpha \sigma_k \alpha^\dagger &= \sigma_k \\
 \Rightarrow \alpha \sigma_k &= \sigma_k \alpha \\
 \Rightarrow [\alpha, \sigma_k] &= 0 \quad k = 1, 2, 3
 \end{aligned}$$

Wir brauchen an dieser Stelle nun die Schurschen Lemmata[9]:

⁽ⁱ⁾Für Interessierte: Wegen der Stetigkeit der Überlagerungsabbildung, kann die einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit $SU(2)$ nur auf eine Zusammenhangskomponente von $O(3)$ abgebildet werden. Grob gesagt, kann sich in einer stetigen Abbildung eine Eigenschaft der Bildelemente (in diesem Fall die Determinante) nicht sprunghaft ändern, es sei denn das Urbild wäre nicht zusammenhängend. Da aber in $O(3)$ nur die Werte 1 und -1 für die Determinante möglich sind, und die Identität mit Determinante 1 im Bild der Überlagerungsabbildung liegt, müssen alle Bildelemente Determinante 1 haben.

Vorbem.: G Gruppe, V Vektorraum, $D : G \rightarrow \text{Aut } V$. $g \mapsto D(g)$ irreduzible Darstellung.
Sei ferner V_1 ein invarianter Unterraum unter $D(g)$; $D(g)V_1 \subset V_1 \forall g \in G$. Dann ist $V_1 = \{0\}$ oder $V_1 = V$

Bew.: Dies ist nur eine Umformulierung der Definition von irreduzibel: Falls $V_1 \subset V$, $V_1 \neq V$, $V_1 \neq \{0\}$, so gäbe es in V einen invarianten Teilraum unter $D(g)$, und D wäre nicht irreduzibel $\Rightarrow V_1 = V$ oder $V_1 = \{0\}$.

1. Schursches Lemma:

$$\begin{aligned} D : G &\rightarrow \text{Aut } V \\ g &\mapsto D(g) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D' : G &\rightarrow \text{Aut } V' \\ g &\mapsto D'(g) \end{aligned}$$

seien irreduzible Darstellungen der Gruppe G . Sei nun $S : V \rightarrow V'$, S linear und es gelte

$$SD(g) = D'(g)S \quad (10.5)$$

Dann ist $S \equiv 0 \vee \exists S^{-1} : V' \rightarrow V$

Bew.: Es wird zunächst gezeigt, daß

$V'_1 := \text{Bild } S$ ein invarianter Teilraum unter $D'(g)$ und

$V_0 := \text{Kern } S$ ein invarianter Teilraum unter $D(g)$ ist.

Denn wegen (10.5) gilt:

$$D'(g)V'_1 = D'(g)SV = SD(g)V = SV = V'_1$$

$$\Rightarrow V'_1 \text{ invariant unter } D'(g)$$

sowie

$$0' = D'(g)SV_0 = SD(g)V_0 \Rightarrow D(g)V_0 \in \text{Kern } S = V_0$$

$$\Rightarrow V_0 \text{ invariant unter } D(g)$$

Da D, D' irreduzibel sind, muß nach der Vorbemerkung für V'_1 und V_0 folgendes gelten:

$$V'_1 = \{0'\} \vee V'_1 = V' \text{ und } V_0 = \{0\} \vee V_0 = V$$

Falls nun $V_0 = V$ ist, folgt sofort $S \equiv 0$, denn nur $S \equiv 0$ annulliert den gesamten Vektorraum V . Damit folgt dann automatisch $V'_1 = \{0'\}$.

Ist hingegen $V_0 = \{0\}$ so folgt sofort, daß ein S^{-1} existiert, denn es ist ja nur die Eindeutigkeit der Umkehrung zu zeigen. Gäbe es aber v_1, v_2 mit $Sw_i = v$, $i = 1, 2$ so folgt

$$0 = Sv_1 - Sv_2 = S(v_1 - v_2) \Rightarrow v_1 - v_2 \in \text{Kern } S$$

$$\Rightarrow v_1 = v_2, \text{ da } \text{Kern } S = \{0\}$$

Dabei ist $V'_1 = V'$, denn $V'_1 = \{0'\}$ hätte automatisch $V_0 = V$ zur Folge, was in Widerspruch zur Setzung $V_0 = \{0\}$ steht.

Damit ist gezeigt, daß nur die Möglichkeiten

$$V_0 = V, V'_1 = \{0'\} \text{ oder } V_0 = \{0\}, V'_1 = V'$$

existieren, und damit folgt, daß entweder $S \equiv 0$ ist oder S^{-1} existiert. □

Wichtiger als die oben bewiesene Aussage ist das nun folgende 2. Schursche Lemma⁽ⁱⁱ⁾, welches oft bei Aussagen über die Gestalt von Matrizen benutzt wird:

2. Schursches Lemma: Sei $D : g \rightarrow D(g)$ eine Darstellung im Raum V und $S : V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung. Ferner gelte:

$$\forall D(g) : SD(g) = D(g)S \quad (10.6)$$

$$\text{bzw. } [S, D(g)] = 0$$

Dann muß entweder S ein Vielfaches der Identität oder D reduzibel sein.

Bem.: Meistens geht man in den Anwendungen davon aus, daß die Darstellung D bereits irreduzibel ist. Liegt nun ein S vor, das (10.6) erfüllt, so besagt das 2. Schursche Lemma, daß dann $S = \lambda \mathbb{I}$ gilt.

Beweis des 2. Schurschen Lemmas:

Idee: Es wird zunächst gezeigt, daß der Teilraum der Eigenvektoren von S ein unter $D(g)$ invarianter Unterraum ist, anschließend folgert man dann wie im Beweis des 1. Schurschen Lemmas die Behauptung.

Sei also $V_s \subset V$ Teilraum der Eigenvektoren v_s von S zum Eigenwert s :

$$\forall v_s \in V_s : Sv_s = sv_s$$

Dann folgt:

$$\forall v_s \in V_s : SD(g)v_s \stackrel{(10.6)}{=} D(g)Sv_s = sD(g)v_s$$

$$\Rightarrow \text{mit } v_s \in V_s \text{ ist auch } D(g)v_s \in V_s$$

$$\Rightarrow V_s \text{ ist invariant unter } D(g)$$

Nun ist es möglich, daß D reduzibel oder irreduzibel ist. Im zweiten Fall muß $V_s = V$ sein ($V_s = \{0\}$ ist ausgeschlossen, da die Eigenvektoren von Null verschieden sein müssen).

$$\Rightarrow \forall v \in V \text{ gilt } Sv = sv$$

(da wegen $V_s = V$ jeder Vektor v auch Eigenvektor mit Eigenwert s ist.)

$$\Rightarrow S = s\mathbb{I}$$

⁽ⁱⁱ⁾Dieses ist auch meist gemeint, wenn man nur von *dem* Schurschen Lemma spricht.

Damit ist die Behauptung bewiesen.

In unserem Fall bilden die drei Pauli-Matrizen eine irreduzible Darstellung der $SU(2)$ in \mathbb{C}^2 , aus diesem Grunde muß gemäß dem 2. Schurschen Lemma

$$\alpha = \alpha_0 \mathbb{1}$$

sein.

Da nun α unitär ist, gilt:

$$\alpha^\dagger \alpha = \mathbb{1} \Rightarrow |\alpha_0|^2 = 1$$

Also muß $\alpha_0 = e^{i\beta}$ gelten. Da aber noch $\det \alpha = 1$ gefordert ist, kann es nur 1 oder -1 sein.

$$\Rightarrow \alpha_0 = \pm 1$$

$$\Rightarrow \text{Kern}(h) = \{+\mathbb{1}, -\mathbb{1}\}$$

zu (10.4):

Wir hatten $h(\alpha)$ bei der Definition mit Indizes ausgeschrieben, man kann nun als Abkürzung die Gleichung (10.1) auf Seite 53 in Matrixform schreiben, dabei wirkt $h(\alpha)$ auf den matrixwertigen Vektor wie auf einen gewöhnlichen Vektor aus \mathbb{R}^3 :

$$\alpha \vec{\sigma} \alpha^\dagger = h(\alpha) \vec{\sigma}$$

In Exponentialform ist wegen $h(\alpha) \in SO(3)$ (s. (10.2) auf Seite 54)

$$h(\alpha) = e^{I(\vec{\omega})}$$

Wir müssen nun zeigen, daß es ein $\alpha \in SU(2)$ gibt, mit:

$$\alpha \vec{\sigma} \alpha^\dagger = h(\alpha) \vec{\sigma} = e^{I(\vec{\omega})} \vec{\sigma} \quad (10.7)$$

Beh.: $\alpha = e^{i\vec{\omega} \cdot \vec{\sigma}} = e^{i\vec{\omega} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}}$ erfüllt die obige Gleichung.

Zunächst sieht man, daß $\alpha \in SU(2)$:

Daß α unitär ist, folgt aus der Hermitezität von σ_i .

$\det \alpha = 1$ ergibt sich aus der Spurfreiheit der Pauli-Matrizen, gemäß:

$$\det e^A = e^{\text{Sp } A}$$

Daß die Pauli-Matrizen verschwindende Spur haben, rechnet man anhand ihrer expliziten Darstellung sofort nach.

Wir beweisen die Aussage (10.7), indem wir wieder parametrisierte Operatoren $\vec{\sigma}(t), \vec{\tau}(t)$ einführen, die entsprechenden Differentialgleichungen 1. Ordnung herleiten und anschließend zeigen, daß $\vec{\sigma}(t), \vec{\tau}(t)$ der gleichen Differentialgleichung 1. Ordnung genügen und ferner $\vec{\sigma}(0) = \vec{\tau}(0)$ gilt. Damit ist dann auch gezeigt (vgl. Kapitel 5 auf Seite 21) daß $\vec{\sigma}(t) = \vec{\tau}(t)$.

Es ist nun:

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}(t) &= e^{i\vec{\omega} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} t} \vec{\sigma} e^{-i\vec{\omega} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} t} \\ \vec{\tau}(t) &= e^{I(\vec{\omega}) t} \vec{\sigma}\end{aligned}$$

(10.7) auf der vorherigen Seite in Exponentialgestalt ergibt die Behauptung:

$$\begin{aligned}e^{i\vec{\omega} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} t} \vec{\sigma} e^{-i\vec{\omega} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} t} &= e^{I(\vec{\omega}) t} \vec{\sigma} \\ \Leftrightarrow \vec{\sigma}(1) &= \vec{\tau}(1)\end{aligned}$$

Außerdem ist:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \vec{\tau}(t) &= I(\vec{\omega}) e^{I(\vec{\omega}) t} \vec{\sigma} \\ \dot{\vec{\tau}}(t) &= I(\vec{\omega}) \vec{\tau}(t) = \vec{\omega} \times \vec{\tau}(t)\end{aligned}$$

Andererseits

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(e^{i\vec{\omega} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} t} \vec{\sigma} e^{-i\vec{\omega} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} t} \right) &= \\ &= e^{i\vec{\omega} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} t} \left(i\vec{\omega} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} \right) \vec{\sigma} e^{-i\vec{\omega} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} t} - e^{i\vec{\omega} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} t} \vec{\sigma} \left(i\vec{\omega} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} \right) e^{-i\vec{\omega} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} t} \\ &= ie^{i\vec{\omega} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} t} \left[\vec{\omega} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}, \vec{\sigma} \right] e^{-i\vec{\omega} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} t}\end{aligned}$$

Nun ist:

$$\begin{aligned}\left[\vec{\omega} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}, \sigma_k \right] &= \frac{1}{2} \omega_i [\sigma_i, \sigma_k] \\ &= i\omega_i \epsilon_{ikl} \sigma_l \\ &= -i(\vec{\omega} \times \vec{\sigma})_k\end{aligned}$$

Also:

$$\left[\vec{\omega} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}, \vec{\sigma} \right] = (-i)(\vec{\omega} \times \vec{\sigma})$$

und damit:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \vec{\sigma}(t) &= \dot{\vec{\sigma}}(t) = e^{i\vec{\omega} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} t} (\vec{\omega} \times \vec{\sigma}) e^{-i\vec{\omega} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} t} \\ &= \vec{\omega} \times \left[e^{i\vec{\omega} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} t} \vec{\sigma} e^{-i\vec{\omega} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} t} \right] \\ \Rightarrow \dot{\vec{\sigma}}(t) &= \vec{\omega} \times \vec{\sigma}(t)\end{aligned}$$

$\Rightarrow \vec{\sigma}(t), \vec{\tau}(t)$ erfüllen die gleiche Differentialgleichung 1. Ordnung.

Außerdem gilt:

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}(0) &= \vec{\tau}(0) = \vec{\sigma} \\ \Rightarrow \forall t: \vec{\sigma}(t) &= \vec{\tau}(t)\end{aligned}$$

Für $t=1$ ergibt sich die obige Behauptung:

$$e^{i\vec{\omega} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}} \vec{\sigma} e^{-i\vec{\omega} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}} = e^{I(\vec{\omega})} \vec{\sigma}$$

Damit ist der erste Punkt unseres Programms, die Konstruktion eines Homomorphismus von $SU(2)$ auf $SO(3)$ abgeschlossen.

Wir können nun beginnen, die Darstellung der $SU(2)$ in $\mathcal{H}_{\frac{1}{2}}$ und anschließend die Strahldarstellung der $SO(3)$ in $\widehat{\mathcal{H}}_{\frac{1}{2}}$ zu konstruieren.

Wir definieren zunächst die Darstellung der $SU(2)$:

$$\begin{aligned}D_{\frac{1}{2}} &: SU(2) \rightarrow \text{Aut } \mathcal{H}_{\frac{1}{2}} \\ \alpha &\mapsto D_{\frac{1}{2}}(\alpha)\end{aligned}$$

mit:

$$\left(D_{\frac{1}{2}}(\alpha) \chi\right)(\vec{x}) = \alpha \chi \begin{pmatrix} -1 \\ R \vec{x} \end{pmatrix}; \quad R = h(\alpha)$$

Und zeigen, daß $D_{\frac{1}{2}}(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$ ist, $D_{\frac{1}{2}}(\alpha)$ die Darstellungseigenschaft hat und unitär ist.

Daß $D_{\frac{1}{2}}(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$ gilt, ist aus den Eigenschaften von $h(\alpha)$ klar!

Die Darstellungseigenschaft von $D_{\frac{1}{2}}$ sieht man wie folgt ein:

$$\begin{aligned}\alpha_1, \alpha_2 &\in SU(2) \\ \left(D_{\frac{1}{2}}(\alpha_1 \alpha_2) \chi\right)(\vec{x}) &= \alpha_1 \alpha_2 \chi \left((R_1 R_2)^{-1} \vec{x} \right) \\ &= \alpha_1 \alpha_2 \chi \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ R_2 R_1 \vec{x} \end{pmatrix} \\ &= \alpha_1 \left(D_{\frac{1}{2}}(\alpha_2) \chi \right) \begin{pmatrix} -1 \\ R_1 \vec{x} \end{pmatrix} \\ \left[\hat{\chi} := D_{\frac{1}{2}}(\alpha_2) \chi \right] &= \alpha_1 \hat{\chi} \begin{pmatrix} -1 \\ R_1 \vec{x} \end{pmatrix} \\ &= \left(D_{\frac{1}{2}}(\alpha_1) \hat{\chi} \right) (\vec{x}) \\ &= \left(D_{\frac{1}{2}}(\alpha_1) D_{\frac{1}{2}}(\alpha_2) \chi \right) (\vec{x})\end{aligned}$$

Außerdem zeigt man leicht die Unitarität von $D_{\frac{1}{2}}$ (Im folgenden bedeutet $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{C}^2}$ natürlich das Skalarprodukt in \mathbb{C}^2):

$$\begin{aligned}
\left\langle D_{\frac{1}{2}}(\alpha) \chi_1 \middle| D_{\frac{1}{2}}(\alpha) \chi_2 \right\rangle_{\mathcal{H}_{\frac{1}{2}}} &= \int \left\langle D_{\frac{1}{2}}(\alpha) \chi_1(\vec{x}) \middle| D_{\frac{1}{2}}(\alpha) \chi_2(\vec{x}) \right\rangle_{\mathbb{C}^2} d^3x \\
&= \int \left\langle \alpha \chi_1 \left(\begin{matrix} -1 \\ R \end{matrix} \vec{x} \right) \middle| \alpha \chi_2 \left(\begin{matrix} -1 \\ R \end{matrix} \vec{x} \right) \right\rangle_{\mathbb{C}^2} d^3x \\
\left[\vec{x}' := \begin{matrix} -1 \\ R \end{matrix} \vec{x} \right] &= \int \left\langle \chi_1(\vec{x}') \middle| \underbrace{\alpha^\dagger \alpha}_{=1} \chi_2(\vec{x}') \right\rangle_{\mathbb{C}^2} d^3x' \\
&= \int \langle \chi_1(\vec{x}') | \chi_2(\vec{x}') \rangle_{\mathbb{C}^2} d^3x' \\
&= \langle \chi_1 | \chi_2 \rangle_{\mathcal{H}_{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}$$

.

Wir geben jetzt noch die Exponentialstruktur der Darstellung $D_{\frac{1}{2}}(\alpha)$ an.

Oben hatten wir bereits gesagt, daß sich $\alpha \in \text{SU}(2)$ in Exponentialgestalt schreiben läßt als:

$$\alpha = e^{-i\vec{\omega} \cdot \vec{S}}$$

Ferner ist:

$$\begin{aligned}
\chi \left(\begin{matrix} -1 \\ R \end{matrix} \vec{x} \right) &= a \otimes \phi \left(\begin{matrix} -1 \\ R \end{matrix} \vec{x} \right); \quad a \in \mathbb{C}^2, \phi \in \mathcal{H}_0 \\
&= a \otimes e^{-i\vec{\omega} \cdot \vec{L}} \phi(\vec{x}) \\
&= \left(\mathbf{1}_{\mathbb{C}^2} \otimes e^{-i\vec{\omega} \cdot \vec{L}} \right) (a \otimes \phi(\vec{x}))
\end{aligned}$$

Damit gilt, wegen

$$\begin{aligned}
D_{\frac{1}{2}}(\alpha) \chi \left(\begin{matrix} -1 \\ R \end{matrix} \vec{x} \right) &= \alpha \chi \left(\begin{matrix} -1 \\ R \end{matrix} \vec{x} \right) \\
&= \left(e^{-i\vec{\omega} \cdot \vec{S}} \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{H}_0} \right) \left(\mathbf{1}_{\mathbb{C}^2} \otimes e^{-i\vec{\omega} \cdot \vec{L}} \right) (a \otimes \phi(\vec{x}))
\end{aligned}$$

dann:

$$\begin{aligned}
D_{\frac{1}{2}}(\alpha) &= \left(e^{-i\vec{\omega} \cdot \vec{S}} \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{H}_0} \right) \left(\mathbf{1}_{\mathbb{C}^2} \otimes e^{-i\vec{\omega} \cdot \vec{L}} \right) \\
&= e^{-i\vec{\omega} \cdot \vec{S}} \otimes e^{-i\vec{\omega} \cdot \vec{L}} \\
\Rightarrow D_{\frac{1}{2}}(\alpha) &= e^{-i\vec{\omega} \cdot (\vec{S} \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{H}_0} + \mathbf{1}_{\mathbb{C}^2} \otimes \vec{L})}
\end{aligned}$$

Def.:

$$\vec{J} := \vec{S} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{H}_0} + \mathbb{1}_{\mathbb{C}_2} \otimes \vec{L}$$

oder in der üblichen Notation:

$$\vec{J} := \vec{S} + \vec{L}$$

Die Größe \vec{J} bezeichnet man als Gesamtdrehimpuls des Spin- $\frac{1}{2}$ -Feldes.

Also:

$$D_{\frac{1}{2}}(\alpha) = e^{-i\vec{\omega} \cdot \vec{J}}$$

Abschließend müssen wir nun mittels der Darstellung $D_{\frac{1}{2}}(\alpha)$ von $SU(2)$ die (irreduziblen) Strahldarstellungen von $SO(3)$ aufbauen.

Um eine Strahldarstellung auf $\widehat{\mathcal{H}}_{\frac{1}{2}}$ zu erklären, genügt es, die Aktion dieser Darstellung auf den Repräsentanten der Äquivalenzklassen von $\widehat{\mathcal{H}}_{\frac{1}{2}}$ zu kennen.

Zu diesem Zweck definieren wir zunächst eine Projektionsabbildung P :

Def.: Sei $\psi \in \mathcal{H}_{\frac{1}{2}}$ mit $\hat{\psi} := [\psi] \in \widehat{\mathcal{H}}_{\frac{1}{2}}$

$$P : \mathcal{H}_{\frac{1}{2}} \rightarrow \widehat{\mathcal{H}}_{\frac{1}{2}}$$

$$P\phi := \hat{\psi} \quad \forall \phi \in \mathcal{H}_{\frac{1}{2}}; \quad \phi \sim \psi$$

d. h. P ordnet jedem $\phi \in \mathcal{H}_{\frac{1}{2}}$ seine Äquivalenzklasse in $\widehat{\mathcal{H}}_{\frac{1}{2}}$ zu.

Da wir die Äquivalenzrelation durch

$$\psi' \sim \psi \Leftrightarrow \psi' = \lambda\psi$$

definiert haben, ist, da P den gesamten „Strahl“ $\lambda\psi$ auf den Repräsentanten abbildet, sofort klar, daß P die Eigenschaft

$$P\lambda\psi = P\psi; \quad \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0$$

besitzt, da P sowohl $\lambda\psi$ als auch ψ auf $\hat{\psi}$ abbildet.

Wir können nun die Strahldarstellung der $SO(3)$ angeben:

$$\hat{\psi} \in \widehat{\mathcal{H}}_{\frac{1}{2}}$$

$$\left(\widehat{D}_{\frac{1}{2}}(R) \hat{\psi} \right) (\vec{x}) := P \left(D_{\frac{1}{2}}(\alpha) \psi \right) (\vec{x}) \quad \text{mit } \hat{\psi} = P\psi; R = h(\alpha)$$

Bei dieser Definition der Strahldarstellung kommt es, wie wir gleich zeigen werden, nicht auf die Wahl von $\psi \in \mathcal{H}_{\frac{1}{2}}$ an, es genügt $D_{\frac{1}{2}}(\alpha)$ auf einem $\hat{\psi}$ repräsentierenden ψ operieren zu lassen. Ebenso kommt es auch nicht auf das Vorzeichen von α an, sowohl α als auch $-\alpha$ liefern das gleiche Resultat.

Wir zeigen also nun: $P \left(D_{\frac{1}{2}}(\alpha) \psi \right) (\vec{x})$ ist gleich für alle $\psi \sim \psi' = \lambda\psi$

Bew.:

$$P\left(D_{\frac{1}{2}}(\alpha)\lambda\psi\right) = P\left(\lambda D_{\frac{1}{2}}(\alpha)\psi\right) = P\left(D_{\frac{1}{2}}(\alpha)\psi\right) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0$$

Als nächstes zeigen wir:

$$P\left(D_{\frac{1}{2}}(\alpha)\psi\right) = P\left(D_{\frac{1}{2}}(-\alpha)\psi\right)$$

Es ist:

$$\left. \begin{array}{l} h(\alpha_1) = h(\alpha_2) \\ \Downarrow \\ (h(\alpha_1))^{-1} = (h(\alpha_2))^{-1} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} h(\alpha_1\alpha_2^{-1}) = \mathbb{1} \\ \Downarrow \alpha_1\alpha_2^{-1} \in \text{Kern}(h) \end{array}$$

$$\alpha_1\alpha_2^{-1} = \pm \mathbb{1}$$

\Downarrow

$$\alpha_1 = \pm \alpha_2$$

Nun ist $R \in \text{SO}(3)$ gegeben $\Rightarrow R = h(\alpha)$ mit $\alpha = \pm \alpha_R$

$$\Rightarrow D_{\frac{1}{2}}(\alpha) = \pm D_{\frac{1}{2}}(\alpha_R)$$

$$\Rightarrow P\left(D_{\frac{1}{2}}(\alpha)\psi\right) = P\left(\pm D_{\frac{1}{2}}(\alpha_R)\psi\right) = P\left(D_{\frac{1}{2}}(\alpha_R)\psi\right)$$

unabhängig vom Vorzeichen von α .

Mit der Angabe der Strahldarstellung der $\text{SO}(3)$ sind wir nun endgültig am Ziel.

Zum Abschluß unserer Betrachtungen sei noch bemerkt, daß man bei der Untersuchung auf Drehinvarianz bestimmter Systeme zumeist mit Darstellungen der $\text{SU}(2)$ arbeitet, da diese leichter handhabbar sind, als die doch recht umständliche Strahldarstellung der $\text{SO}(3)$.

Kapitel 11

Ausreduktion von Produktdarstellungen

Nachdem wir nun die irreduziblen Darstellungen der Drehgruppe gefunden haben, können wir einzelne Teilchen oder effektive Ein-Teilchen-Systeme in Bezug auf ihren Drehimpuls beschreiben und haben auch die nötigen Operatoren zur Hand, um durch Skalarproduktbildung ($\vec{J} \cdot \vec{J}, \vec{J} \cdot \vec{S}, \vec{S} \cdot \vec{S}$) die Wechselwirkung zu behandeln.

Allerdings stellt sich die Frage, wie man bei einem Nukleon (das aus drei Quarks (Spin $\frac{1}{2}$) besteht) davon sprechen kann, es habe auch Spin $\frac{1}{2}$, oder gar einem Au¹⁹⁷-Kern mit 79 Protonen und 118 Neutronen einen Kernspin von $\frac{3}{2}$ zuspricht. Dieses Problem führt uns auf einen neuen physikalischen Begriff, die Drehimpulskopplung, bei der es sich mathematisch um die Ausreduktion von Produktdarstellungen handelt.

Bevor wir erklären, was eine Produktdarstellung ist, und wie man sie ausreduziert, wollen wir erläutern, warum dieses Problem physikalisch relevant ist.

Dies wurde oben schon durch die Beispiele angedeutet. Wie so häufig in der Physik ist alles nur eine Frage der Skala: Denn je nachdem in welchem Energiebereich man mißt, sieht man gewisse Teilchen (z.B. das Proton) als zusammengesetztes System (aus Quarks) oder als elementare Bausteine (des Kerns). Es stellt sich also die Frage, ob und wie man einem zusammengesetzten System die Eigenschaften eines Elementarteilchens (insbesondere auch den Spin) zuweisen kann.

Natürlich muß man sich dazu — angesichts der oben angedeuteten Mehrdeutigkeit erst einmal darüber einigen — was man als Elementarteilchen bezeichnen will. Eine der elegantesten und aus unserer Sicht natürlichsten Definitionen dafür ergibt sich aus der Überlegung, daß Teilchen (auch nicht elementare) üblicherweise durch ihr Verhalten unter Symmetrietransformationen gekennzeichnet werden. Die grundlegenden Symmetrien unserer Welt sind nun durch die Poincaré-Gruppe [5] gegeben. Teilchen sind also Darstellungen der Poincaré-Gruppe. Die Eigenschaft elementar (d.h. möglichst einfach und nicht zusammengesetzt) zu sein, ist auf die Darstellungen übertragen natürlich die Irreduzibilität. Also sind Elementarteilchen irreduzible Darstellungen der Poincaré-Gruppe und damit (da die Drehgruppe eine Untergruppe der Poincaré-Gruppe ist) auch der Drehgruppe. Zusammengesetzte Teilchen sind hingegen reduzible Darstellungen und somit ist klar, daß beim Übergang von einem Bild ins andere eine Ausreduktion nötig ist.

Nach diesen allgemeinen Vorüberlegungen kommen wir nun zu den mathematischen Details.

Zuerst müssen wir uns überlegen, wie mit unseren Mitteln zusammengesetzte Systeme beschrieben werden, und wie eine reduzible Darstellung der Drehgruppe auf diesen definiert wird: Ein

zusammengesetztes Objekt ist zuerst einmal ein System von unabhängigen Teilchen⁽ⁱ⁾, die bei einer Drehung alle gleichzeitig um denselben Winkel gedreht werden⁽ⁱⁱ⁾. Dieses physikalische Phänomen beschreiben wir am besten mit dem bekannten Tensorprodukt, indem wir für jedes Teilchen den entsprechenden Ein-Teilchen-Hilbertraum nehmen und diese tensorieren:

Def.: Seien $\mathcal{H}_{(1)}, \dots, \mathcal{H}_{(n)}$ $n \in \mathbb{N}$ möglicherweise unterschiedliche Hilberträume, auf denen quantenmechanisch ein Teilchen beschrieben wird (Ein-Teilchen-Hilberträume), so heißt

$$\mathcal{H} := \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{H}_{(i)}$$

n -Teilchen-Hilbertraum.

Die Drehimpulsoperatoren der einzelnen Teilchen werden — wie schon in Kapitel 8 dargestellt — durch Ergänzen der Identität auf allen anderen Komponenten in den Produktraum geliftet:

$$\begin{aligned} \widetilde{\vec{L}}^{(k)} &: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \\ \widetilde{\vec{L}}^{(k)} &:= \bigotimes_{j=1}^n \left[\delta_{kj} \vec{L}^{(j)} + (1 - \delta_{kj}) \mathbf{I} \right] \end{aligned}$$

$$\text{wobei } \vec{L}^{(j)} : \mathcal{H}_{(j)} \rightarrow \mathcal{H}_{(j)}$$

Dabei ist zu beachten, daß bei Systemen von Teilchen mit Spin schon die Ein-Teilchen-Drehimpulse $\vec{L}^{(k)}$ Gesamtdrehimpulsoperatoren im Sinne von Kapitel 8 sind. Ebenso wie in diesem Fall auch die Ein-Teilchen-Hilberträume schon Tensorprodukte aus skalarem Hilbertraum und \mathbb{C}^{2n+1} sind.

Außerdem möchten wir noch auf einen möglichen Fallstrick der Nomenklatur in diesem Fall hinweisen: Häufig werden die in den n -Teilchen-Hilbertraum gelifteten Drehimpulsoperatoren der einzelnen Teilchen als Ein-Teilchen-Operatoren bezeichnet. Ein-Teilchen-Operatoren, sind also keine Operatoren im Ein-Teilchen-Hilbertraum, sondern Operatoren im n -Teilchen-Hilbertraum, die nur auf ein Teilchen wirken.

Zusätzlich ist es möglich, einen Gesamtdrehimpulsoperator für das ganze System zu definieren. Auch hierbei orientieren wir uns wieder an Kapitel 8. Dort waren die Tensorproduktkomponenten der Spin- und der Bahndrehimpulsanteil und der Gesamtdrehimpuls die Summe der gelifteten Operatoren. Ebenso ist im n -Teilchen Fall der Gesamtdrehimpuls die Summe der gelifteten Ein-Teilchen-Drehimpulse:

$$\vec{J} := \bigoplus_{j=1}^n \widetilde{\vec{L}}^{(j)} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$$

Diesen Definitionen folgend, können über die Exponentialdarstellung verschiedene Darstellungen der Drehgruppe auf dem n -Teilchen-Hilbertraum angegeben werden. Zum einen die einzelnen Darstellungen für jedes Teilchen:

$$\widetilde{D}^{(j)} = \exp \left(\vec{\phi} \cdot \widetilde{\vec{L}}^{(j)} \right)$$

⁽ⁱ⁾Natürlich im allgemeinen mit Wechselwirkung, aber diese hat keinen Einfluß auf unsere Überlegungen.

⁽ⁱⁱ⁾Beziehungsweise deren gemeinsames Koordinatensystem um einen bestimmten Winkel gedreht wird.

Andererseits auch die Darstellung auf dem Gesamtsystem:

$$D_J = \exp(\vec{\phi} \cdot \vec{J})$$

Letztere bezeichnet man auch als die Produktdarstellung, da es sich hier ja einerseits um eine Darstellung auf einem Tensorprodukt von Darstellungsräumen, andererseits auch direkt um ein Produkt der Ein-Teilchen-Darstellungen handelt:

$$D_J = \exp(\vec{\phi} \cdot \vec{J}) = \exp\left(\vec{\phi} \cdot \bigoplus_{j=1}^n \widetilde{L}^{(j)}\right) = \bigotimes_{j=1}^n \exp\left(\vec{\phi} \cdot \widetilde{L}^{(j)}\right) = \bigotimes_{j=1}^n \widetilde{D}^{(j)}$$

Betrachtet man diese Darstellung genauer, fällt bald auf, daß sie normalerweise reduzibel ist. Denn auch hier hat man für den Gesamtdrehimpuls einen Casimiroperator J^2 , der mit der Operation der Darstellung vertauscht. Da die Eigenwerte dieses Operators also invariant unter Drehungen sind, bilden die Eigenräume invariante Unterräume⁽ⁱⁱⁱ⁾ des Produktraums. Zur Ausreduktion müssen wir diese Unterräume auffinden und können dann die irreduziblen Darstellungen des n -Teilchen-Systems als Einschränkungen der Produktdarstellung auf die Unterräume einführen. Wir suchen also Darstellungen, die einen definierten Gesamtdrehimpuls haben und die zusammen die Produktdarstellung bilden:

$$D_J = \bigoplus D_J^{(j)}$$

Wie schon oben gesagt, ist es mit diesen irreduziblen Darstellungen dann möglich, das zusammengesetzte System als effektives Elementarteilchen zu beschreiben^(iv).

Zur Bestimmung der J^2 -Eigenräume, benutzt man meistens die Methode der maximalen Gewichte. Diese werden wir nun erst einmal allgemein vorstellen, um dann zum Abschluß noch ein Beispiel vorzuführen (eventuell empfiehlt es sich, wenn Sie das allgemeine Verfahren nicht gleich verstehen, zuerst das Beispiel durchzuarbeiten).

Im allgemeinen haben wir ein n -Teilchen-System und bezeichnen die Drehimpulsquantenzahl des k -ten Teilchens mit $l^{(k)}$. Zur Ausreduktion gehen wir nun folgendermaßen vor:

i). Die Zustände im Produktraum werden nach ihrem J_3 -Eigenwert geordnet:

$$\begin{aligned} j_3 = \sum_{k=1}^n l^{(k)} & : \bigotimes_{k=1}^n |l^{(k)}, l^{(k)}\rangle \\ j_3 = \sum_{k=1}^n l^{(k)} - 1 & : |l^{(1)}, (l^{(1)} - 1)\rangle \otimes \left(\bigotimes_{k=2}^n |l^{(k)}, l^{(k)}\rangle \right), \dots \\ & \dots \left(\bigotimes_{k=1}^{n-1} |l^{(k)}, l^{(k)}\rangle \right) \otimes |l^{(n)}, (l^{(n)} - 1)\rangle \\ & \vdots \quad \quad \quad \vdots \end{aligned}$$

⁽ⁱⁱⁱ⁾Das es echte Teilräume sind, sehen wir gleich bei der Ausreduktion.

^(iv)Jedenfalls in Bezug auf Drehungen. Zur vollständigen Beschreibung müßte man Darstellungen der ganzen Poincaré-Gruppe betrachten.

$$\begin{aligned}
j_3 &= -\sum_{k=1}^n l^{(k)} - 1 : |l^{(1)}, (-l^{(1)} + 1)\rangle \otimes \left(\bigotimes_{k=2}^n |l^{(k)}, (-l^{(k)})\rangle \right), \dots \\
&\dots \left(\bigotimes_{k=1}^{n-1} |l^{(k)}, (-l^{(k)})\rangle \right) \otimes |l^{(n)}, (-l^{(n)} + 1)\rangle \\
j_3 &= -\sum_{k=1}^n l^{(k)} : \bigotimes_{k=1}^n |l^{(k)}, (-l^{(k)})\rangle
\end{aligned}$$

Desweiteren definiert man wie in Kapitel 6 die Leiteroperatoren:

$$J_+ : = J_1 + iJ_2$$

$$J_- : = J_1 - iJ_2$$

- ii). Nun sucht man den Zustand mit dem maximalen Gewicht (= maximalen Eigenwert von J_3).^(v) Also jenen Zustand $|j^{\max}, j^{\max}\rangle^{(vi)}$ für den gilt

$$\begin{aligned}
J_3 |j^{\max}, j^{\max}\rangle &= j^{\max} |j^{\max}, j^{\max}\rangle \\
j^{\max} &: = \max \left\{ m \left| J_3 \bigotimes_{k=1}^n |l^{(k)}, m^{(k)}\rangle = m \bigotimes_{k=1}^n |l^{(k)}, m^{(k)}\rangle, \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \bigotimes_{k=1}^n |l^{(k)}, m^{(k)}\rangle \in \mathcal{H} \right\}
\end{aligned}$$

$$J_+ |j^{\max}, j^{\max}\rangle = 0$$

$$J_-^2 |j^{\max}, j^{\max}\rangle = j^{\max} (j^{\max} + 1) |j^{\max}, j^{\max}\rangle$$

Diese Beschreibung mag übergenu erscheinen, da es ja nur einen Zustand mit maximalen J_3 Eigenwert gibt, aber dies gilt nur im ersten Durchlauf. Wiederholt man das Verfahren um die Eigenräume zu niedrigeren Gesamtdrehimpulsen zu finden, ist diese vollständige Kennzeichnung nötig.

- iii). Aus diesem Zustand maximalen Gewichtes erhält man nun leicht, durch wiederholtes Anwenden des Absteigeoperators und anschließendes Normieren, alle Eigenzustände mit demselben J^2 -Eigenwert

$$|j^{\max}, (j^{\max} - k)\rangle = (J_-)^k |j^{\max}, j^{\max}\rangle / \left\| (J_-)^k |j^{\max}, j^{\max}\rangle \right\|$$

^(v)Es wäre natürlich auch möglich das minimale Gewicht zu nehmen, dann müßten im folgenden immer Auf- und Absteigeoperatoren ausgetauscht werden.

^(vi)Wir benutzen diese vereinfachte Notation für die sonst übliche $|j^{\max}, j^{\max} l^{(1)} \dots l^{(n)}\rangle$, um die Übersicht zu erleichtern. Die Konvention ist also ganz einfach: Kets in denen die Eigenwerte mit $l^{(i)}$ bezeichnet werden, sind Elemente des i -ten Ein-Teilchen-Hilbertraums. Jene mit den j -Eigenwerten sind Elemente des Produktraumes nach der Ausreduktion. Später werden wir dann noch andere Elemente des Produktraumes definieren, die noch nicht unbedingt Eigenvektoren zum Gesamtdrehimpuls-Casimir-Operator sind. Diese werden dann durch ein „?“ in der ersten Komponente gekennzeichnet.

Diese Eigenzustände sind natürlich Elemente des Unterraums der Funktionen mit dem J_3 -Eigenwert $j^{\max} - k$ und können als Linearkombination der ursprünglichen Produktbasisfunktionen mit diesem Eigenwert geschrieben werden. Im Falle der Kopplung von zwei Drehimpulsen, nennt man die dabei auftretenden Koeffizienten Clebsch-Gordan-Koeffizienten und schreibt sie in der Form $\langle JM | l_1 m_1 l_2 m_2 \rangle$:^(vii)

$$|j^{\max}, (j^{\max} - k)\rangle =: \sum_{m_1=-l_1}^{l_1} \sum_{m_2=-l_2}^{l_2} \langle j^{\max} (j^{\max} - k) | l_1 m_1 l_2 m_1 \rangle^* |l_1, m_1\rangle \otimes |l_2, m_2\rangle$$

Natürlich sind viele dieser Koeffizienten 0. Wir wollen aber nicht genauer auf die Symmetrien, die Bedingungen für das Verschwinden und die genaue Definition (insbesondere die Normierung) eingehen, sondern verweisen dazu nur auf die übliche Quantenmechanik-Literatur.

- iv). Anschließend muß man noch in den Unterräumen mit konstantem J_3 -Eigenwert, eine neue Orthogonalbasis konstruieren, deren erster Basisvektor der berechnete Eigenzustand $|j^{\max}, (j^{\max} - k)\rangle$ ist.

Man sucht also Zustände^(viii)

$$|?, m_J\rangle_i, \quad i = 1, \dots, k_{m_J}; \quad k_{m_J} = \dim \{h \in \mathcal{H} | J_3 h = m_J h\}$$

für jedes m_J mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} J_3 |?, m_J\rangle_i &= m_J |?, m_J\rangle_i \\ |?, m_J\rangle_1 &:= |j^{\max}, m_J\rangle \\ {}_i\langle ?, m_J | ? , m_J \rangle_l &= \delta_{il} \end{aligned}$$

Dies geht zum Beispiel durch die Anwendung des Gram-Schmidtschen Orthonormierungsverfahrens auf den entsprechenden Teilraum des Produktraumes.

- v). Schließlich wiederholt man dieses Vorgehen auf dem Resthilbertraum, der sich ergibt, wenn man die Zustände $|j^{\max}, m\rangle$ und alle ihre Linearkombinationen aus dem Produktraum entfernt, solange bis keine Basisvektoren mehr übrigbleiben, die nicht nach Eigenwerten von J^2 und J_3 klassifiziert sind.

Dabei muß man natürlich in der oben gegebenen Anleitung die Bedeutung von \mathcal{H} und des Wortes „Produktraum“ entsprechend modifizieren. Aber um keine unnötige Verwirrung zu stiften haben wir darauf verzichtet, eine konsistente Schreibweise für dieses Verfahren einzuführen, da wir denken, daß es auch so einigermaßen klar wird.

Damit sind dann die invarianten Unterräume \mathcal{H}_j und die irreduziblen Darstellungen bestimmt:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_j &:= \text{span} \{ |j, m_J\rangle | j \geq m_J \geq -j \} \\ D_J^{(j)} &:= D_J|_{\mathcal{H}_j} \end{aligned}$$

^(vii)Normalerweise kann man die komplexe Konjugation in dieser Formel weglassen, da die Koeffizienten reell definiert sind, aber wir gehen hier auf Nummer sicher.

^(viii)Das „?“ bedeutet hier, wie schon in der Fußnote (vi) auf der vorhergehenden Seite definiert, daß diese Zustände zwar Eigenzustände zu J_3 , aber nicht unbedingt zu J^2 sind. Dies ist das schon in Kapitel 6 auf Seite 28 angekündigte Beispiel dafür, daß aus der Vertauschbarkeit zweier Operatoren **nicht** folgt, daß Eigenvektoren des einen auch Eigenvektoren des anderen sind.

Die Anzahl der invarianten Unterräume läßt sich für die Kopplung zweier Teilchen mit den Drehimpulsen $l_>$ und $l_<$ (o.B.d.A. $l_> \geq l_<$) leicht berechnen. Sie entspricht nach dem beschriebenen Verfahren gerade der maximalen Dimension eines Teilraums mit festem J_3 -Eigenwert: Jeder invariante Unter- raum enthält je einen Eigenvektor aus allen vorhandenen J_3 -Teilräumen (wir beginnen ja mit dem obersten und steigen durch alle ab), der zum Abschluß aus diesem entfernt wird, wodurch sich die Dimension um eins erniedrigt. Das Verfahren endet, wenn auch der größte entsprechende Teilraum „leergeräumt“ ist.

Im gegebenen Fall ist nun $m_J = m_{l_<} + m_{l_>}$ und es gilt $-l_> \leq m_{l_>} \leq l_>$ und $-l_< \leq m_{l_<} \leq l_<$. Um ein gegebenes m_J zu erreichen, kann $m_{l_>}$ höchstens (wenn überhaupt möglich) zwischen $m_J - l_<$ und $m_J + l_<$ schwanken. Die gesuchte maximale Dimension ist also $2l_< + 1$.

Im allgemeinen erspart man sich die Überlegungen mit größerem und kleinerem Drehimpuls und gibt nur die Schwankungsbreite an:

$$l_1 + l_2 \geq j \geq |l_1 - l_2|$$

Die Kopplung von mehr als zwei Drehimpulsen kann man immer auch auf die sukzessive Kopplung von jeweils zweien zurückführen, indem man zuerst zwei beliebige und anschließend den jeweiligen Gesamtdrehimpuls mit einem weiteren koppelt.

Dabei ergeben sich allerdings abhängig von der Reihenfolge, in der die Spins gekoppelt werden, unterschiedliche Basisfunktionen, die bestimmte Fälle besser oder schlechter beschreiben. Das bekanntesten Beispiele dafür sind die sogenannte LS-Kopplung und die jj-Kopplung, die unter anderem in der Atomphysik[3] eine Rolle spielen.

Bei der LS-Kopplung werden zuerst die Bahndrehimpulse aller Valenzelektronen zu einem Gesamt- bahndrehimpuls \vec{L} gekoppelt, dann die Spins zu einem Gesamtspin \vec{S} , und schließlich der Gesamt- bahndrehimpuls und der Gesamtspin zu einem Gesamtdrehimpuls \vec{J} .

Bei der jj-Kopplung hingegen werden zuerst für jedes Teilchen Spin und Bahndrehimpuls zu einem Ein-Teilchen-Gesamtdrehimpuls \vec{j} und dann diese zu einem Gesamtdrehimpuls \vec{J} gekoppelt.

Den Übergang zwischen den beiden Basen beschreibt man im Falle von zwei Elektronen mit den sogenannten 9-j-Symbolen.^(ix) Entsprechenden Umkopplungskoeffizientengibt es auch für 3 (6-j-Symbole), 5 (35-j-Symbole), ... Drehimpulse. Für die häufigsten Fälle sind die Koeffizienten glück- licherweise tabelliert.

Zum Abschluß möchten wir noch als kleines Beispiel (auch für die Möglichkeit sofort mehr als zwei Drehimpulse zu koppeln) die Verbindung von zwei u-Quarks und einem d-Quark zu einem Baryon vorführen (natürlich nur soweit es die Spins betrifft)^(x). Dabei werden wir die Schritte genau wie beim allgemeinen Schema numerieren, um den Vergleich zu erleichtern:

- i). Zuerst einmal bemerken wir, daß wir, da wir uns nur für das Verhalten bezüglich Drehun- gen interessieren, nur den Orts- und Spinanteil der Wellenfunktionen, bzw. des Hilbertraums betrachten müssen. Nehmen wir nun noch zur Vereinfachung an, daß sich die Teilchen in

^(ix)Der Name kommt daher, daß 4 Ausgangsdrehimpulse (2 Bahn, 2 Spins), ein Enddrehimpuls und je Basis zwei Zwischendrehimpulse (\vec{j}_1, \vec{j}_2 oder \vec{L}, \vec{S}), also insgesamt 9 Drehimpulse (allgemein durch j abgekürzt) nötig sind, um den Übergang eindeutig zu bezeichnen.

^(x)Das andere am Anfang angegebene Beispiel, den 197er-Gold-Kern, rechnen wir aus naheliegenden Gründen nicht vor.

Bahndrehimpuls- $l=0$ -Zuständen^(xi) befinden, so müssen wir uns nur mit den Spinkomponenten beschäftigen. Das heißt, wir nehmen als Ein-Teilchen-Hilbertraum nur den Spinanteil (den \mathbb{C}^2). Ebenso ist der Produktraum nur ein Tensorprodukt dieser Spinanteile.

Da wir es hier nur mit Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen in den Ein-Teilchen-Hilberträumen zu tun haben, also gilt $\forall i \in \{1, 2, 3\} : \mathcal{H}_{(i)} = \mathcal{H}_{\frac{1}{2}}$, führen wir für die Ein-Teilchen-Zustände eine in diesem Fall sehr häufig verwendete Abkürzung ein:

$$|\uparrow\rangle := \left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle; \quad |\downarrow\rangle := \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle;$$

In jedem der drei Ein-Teilchen-Hilberträume, ist nun der Spin-Operator definiert und es gilt:

$$\begin{aligned} S_i & : \mathcal{H}_{(i)} \rightarrow \mathcal{H}_{(i)} \\ S_i & : = \frac{1}{2} \sigma_i \\ S^2 |\uparrow\rangle & = S^2 |\downarrow\rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{3}{4} \\ S_3 |\uparrow\rangle & = \frac{1}{2} |\uparrow\rangle \\ S_3 |\downarrow\rangle & = -\frac{1}{2} |\downarrow\rangle \end{aligned}$$

Der Gesamthilbertraum ist in diesem Fall der 3-Teilchen-Produktraum:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3$$

Daher sind die drei Ein-Teilchen-Spin-Operatoren im Gesamthilbertraum:

$$\begin{aligned} S_i^{(1)} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} & : = S_i \otimes \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} \\ S_i^{(2)} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} & : = \mathbb{I} \otimes S_i \otimes \mathbb{I} \\ S_i^{(3)} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} & : = \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} \otimes S_i \end{aligned}$$

und der Gesamtdrehimpulsoperator ist:

$$J_i := \sum_{l=1}^3 S_i^{(l)}$$

Damit ergibt sich für die Tabelle mit den nach J_3 Eigenwerten geordneten Zuständen folgendes Bild:

$$j_3 = \frac{3}{2} : |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle.$$

^(xi)Diese werden spektroskopisch oft auch als s-Zustände bezeichnet

$$j_3 = \frac{1}{2} : |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle; |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle; |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle.$$

$$j_3 = -\frac{1}{2} : |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle; |\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle; |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle.$$

$$j_3 = -\frac{3}{2} : |\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle.$$

Die Auf- und Absteigeoperatoren definiert man nun wie vorgeschrieben:

$$J_+ : = J_1 + iJ_2 = \sum_{l=1}^3 S_1^{(l)} + i \sum_{l=1}^3 S_2^{(l)} = \sum_{l=1}^3 (S_1^{(l)} + iS_2^{(l)}) = \sum_{l=1}^3 S_+^{(l)}$$

$$J_- : = J_1 - iJ_2 = \sum_{l=1}^3 S_1^{(l)} - i \sum_{l=1}^3 S_2^{(l)} = \sum_{l=1}^3 (S_1^{(l)} - iS_2^{(l)}) = \sum_{l=1}^3 S_-^{(l)}$$

Damit erhält der Casimiroperator folgende zwar übel aussehende, aber dem Problem angepaßte Form:

$$\begin{aligned} J^2 = & \left(\left(\sum_{l=1}^3 (S^{(l)})^2 \right) + S_+^{(1)} S_-^{(2)} + S_-^{(1)} S_+^{(2)} + 2S_3^{(1)} S_3^{(2)} + \right. \\ & + S_+^{(1)} S_-^{(3)} + S_-^{(1)} S_+^{(3)} + 2S_3^{(1)} S_3^{(3)} + S_+^{(2)} S_-^{(3)} + \\ & \left. + S_-^{(2)} S_+^{(3)} + 2S_3^{(2)} S_3^{(3)} \right) \end{aligned}$$

- ii). Wie gesagt, ist es im ersten Durchlauf relativ einfach, den Zustand maximalen Gewichtes zu finden, denn es ist immer der einzige in der ersten Zeile der Tabelle. Trotzdem wollen wir schnell nachrechnen, ob er die geforderten Bedingungen erfüllt:

$$\begin{aligned} J_3 (|\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle) & = \left(\sum_{l=1}^3 S_3^{(l)} \right) (|\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle) = \sum_{l=1}^3 \left(\frac{1}{2} |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \right) \\ & = \frac{3}{2} |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} & = \max \left\{ m \left| J_3 \left(\bigotimes_{k=1}^3 \left| \frac{1}{2}, m^{(k)} \right\rangle \right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left(\bigotimes_{k=1}^3 \left| \frac{1}{2}, m^{(k)} \right\rangle \right) \in \mathcal{H} \right\} = \max \left\{ \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \right\} \end{aligned}$$

$$J_+ (|\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle) = \left(\sum_{l=1}^3 S_+^{(l)} \right) (|\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle) = \sum_{l=1}^3 0 = 0$$

$$J^2 (|\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle) = \left(\left(\sum_{l=1}^3 (S^{(l)})^2 \right) + S_+^{(1)} S_-^{(2)} + S_-^{(1)} S_+^{(2)} + 2S_3^{(1)} S_3^{(2)} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + S_+^{(1)} S_-^{(3)} + S_-^{(1)} S_+^{(3)} + 2S_3^{(1)} S_3^{(3)} + S_+^{(2)} S_-^{(3)} + \\
& + S_-^{(2)} S_+^{(3)} + 2S_3^{(2)} S_3^{(3)}) |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \\
& = \left(\left(\sum_{l=1}^3 \frac{3}{4} \right) + 2 \left(0 + 0 + \frac{1}{4} + 0 + 0 + \frac{1}{4} + 0 + 0 + \frac{1}{4} \right) \right) \\
& \quad \times |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \\
& = \frac{15}{4} |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \\
& = \frac{3}{2} \left(\frac{3}{2} + 1 \right) |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle
\end{aligned}$$

Also ist wirklich:

$$\left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle = |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle$$

iii). Nun berechnen wir durch Absteigen die anderen Zustände mit $j = \frac{3}{2}$:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle &= J_- \left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle / \left\| J_- \left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle \right\| \\
J_- \left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle &= \sum_{l=1}^3 S_-^{(l)} (|\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle) \\
&= |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle + |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle + |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle \\
\left\| J_- \left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle \right\|^2 &= 3^{(xii)} \\
\Rightarrow \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} (|\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle + |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle + |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle) \\
\left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle &= (J_-)^2 \left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle / \left\| (J_-)^2 \left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle \right\| = J_- \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle / \left\| J_- \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \right\| \\
J_- \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle &= \sum_{l=1}^3 \frac{S_-^{(l)}}{\sqrt{3}} (|\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle + |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle + |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} (0 + |\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle + |\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle + \\
& \quad + 0 + |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle + |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle + |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle + 0 \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} (|\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle + |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle)
\end{aligned}$$

^(xii) Da die Ein-Teilchen-Zustände orthonormal sind.

$$\begin{aligned}
\left\| J_- \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \right\|^2 &= 4 \\
\Rightarrow \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} (|\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle + |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle + |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle) \\
\left| \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle &= (J_-)^3 \left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle / \left\| (J_-)^3 \left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle \right\| = J_- \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle / \left\| J_- \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \right\| \\
J_- \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle &= \sum_{l=1}^3 \frac{S_-(l)}{\sqrt{3}} (|\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle + |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle + |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} (0 + |\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle + 0 + 0 + 0 + |\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle + \\
&\quad + |\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle + 0 + 0) \\
&= \sqrt{3} |\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle \\
\left\| J_- \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \right\|^2 &= 3 \\
\Rightarrow \left| \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle &= |\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle
\end{aligned}$$

Die neuen Gesamtdrehimpulszustände sind oben schon als Linearkombination der Produktbasiszustände angegeben. Da wir allerdings drei Drehimpulse und nicht nur zwei koppeln, sind die Koeffizienten nicht die üblichen Clebsch-Gordans.^(xiii)

iv). Nun müssen wir noch die neuen Orthonormalbasissysteme in den J_3 -Eigenräumen bestimmen:

In den $j_3 = \pm \frac{3}{2}$ -Eigenräumen gibt es ja nur einen Basisvektor, der es auch weiterhin bleibt, so daß hier mit

$$\left| ?, \pm \frac{3}{2} \right\rangle_1 := \left| \frac{3}{2}, \pm \frac{3}{2} \right\rangle$$

schon die ganze Basis bestimmt ist.

Die beiden $j_3 = \pm \frac{1}{2}$ -Eigenräume machen da schon etwas mehr Arbeit. Wir führen hier die Orthonormierung nach Gram-Schmidt nur für $j_3 = \frac{1}{2}$ vor, denn im anderen Fall geht es völlig analog:

Zunächst wählen wir einen der berechneten und schon normierten Zustände in diesem Eigenraum aus und bezeichnen diesen als den ersten Basisvektor der neuen Orthonormalbasis:

$$\left| ?, \frac{1}{2} \right\rangle_1 := \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$$

^(xiii) Allerdings bezeichnet man diese Darstellung der Zustände auch als Clebsch-Gordan-Reihe und kann somit die Koeffizienten in diesem Sinne auch Clebsch-Gordan-Koeffizienten nennen.

Anschließend nehmen wir den zweiten Zustand aus diesem Eigenraum und ziehen von ihm den zum ersten Basisvektor parallelen Anteil ab. Dies tun wir, indem wir den Basisvektor, multipliziert mit dem Skalarprodukt der beiden Zustände, subtrahieren. Hierbei schreiben wir das Skalarprodukt sofort — nach der allgemeinen Definition des Skalarproduktes im Tensorprodukt auf Seite 38 — als Produkt der Skalarprodukte in den einzelnen Faktoren aus, wobei auch die Dualraum-(Bra-)zustände analog zu den Vektoren mit den Pfeilen bezeichnet werden.

$$\begin{aligned}
\left| \widetilde{?, \frac{1}{2}} \right\rangle_2 &:= |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle - \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{3}} (\langle \downarrow | \uparrow \rangle \langle \uparrow | \downarrow \rangle \langle \uparrow | \uparrow \rangle + \langle \uparrow | \uparrow \rangle \langle \downarrow | \downarrow \rangle \langle \uparrow | \uparrow \rangle + \\
&\quad + \langle \uparrow | \uparrow \rangle \langle \uparrow | \downarrow \rangle \langle \downarrow | \uparrow \rangle) \times \\
&\quad \times \frac{1}{\sqrt{3}} (|\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle + |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle + |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle) \\
&= |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle - \\
&\quad - \frac{1}{3} (|\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle + |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle + |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle) \\
&= \frac{1}{3} (-|\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle + 2|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle - |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle)
\end{aligned}$$

Dieser Zustand ist nun schon orthogonal zu dem anderen Basiselement, aber er muß noch normiert werden, was dadurch geschieht, daß er durch seine Norm geteilt wird.

$$\begin{aligned}
\left\| \left| \widetilde{?, \frac{1}{2}} \right\rangle_2 \right\|^2 &= \frac{2}{3} \\
\Rightarrow \left| \widetilde{?, \frac{1}{2}} \right\rangle_2 &= \frac{1}{\sqrt{6}} (-|\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle + 2|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle - |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle)
\end{aligned}$$

Abschließend wird diese Prozedur (Abziehen der Anteile parallel zu den beiden schon bestimmten Elementen der neuen Orthonormalbasis und anschließendes Normieren) mit dem dritten noch verbleibenden berechneten Zustand in diesem Eigenraum wiederholt:

$$\begin{aligned}
\left| \widetilde{?, \frac{1}{2}} \right\rangle_3 &:= |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle - \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{3}} (\langle \downarrow | \downarrow \rangle \langle \uparrow | \uparrow \rangle \langle \uparrow | \uparrow \rangle + \langle \uparrow | \downarrow \rangle \langle \downarrow | \uparrow \rangle \langle \uparrow | \uparrow \rangle + \\
&\quad + \langle \uparrow | \downarrow \rangle \langle \uparrow | \uparrow \rangle \langle \downarrow | \uparrow \rangle) \times \\
&\quad \times \frac{1}{\sqrt{3}} (|\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle + |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle + |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\sqrt{6}} (-\langle \downarrow \downarrow \rangle \langle \uparrow \uparrow \rangle \langle \uparrow \uparrow \rangle + 2 \langle \uparrow \downarrow \rangle \langle \downarrow \uparrow \rangle \langle \uparrow \uparrow \rangle \\
& \quad - \langle \uparrow \downarrow \rangle \langle \uparrow \uparrow \rangle \langle \downarrow \uparrow \rangle) \times \\
& \quad \times \frac{1}{\sqrt{6}} (-|\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle + 2|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle - |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle) \\
& = |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle - \\
& \quad -\frac{1}{3} (|\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle + |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle + |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle) + \\
& \quad +\frac{1}{6} (-|\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle + 2|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle - |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle) \\
& = \frac{1}{2} (|\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle) \\
\left\| \widetilde{\left| \left\langle ?, \frac{1}{2} \right\rangle_3 \right.} \right\|^2 & = \frac{1}{2} \\
\Rightarrow \left| \left\langle ?, \frac{1}{2} \right\rangle_3 \right. & = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle)
\end{aligned}$$

Für den $j_3 = -\frac{1}{2}$ -Fall ist das Ergebnis dann:

$$\begin{aligned}
\left| \left\langle ?, -\frac{1}{2} \right\rangle_1 \right. & := \left| \left\langle \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \right. \\
\left| \left\langle ?, -\frac{1}{2} \right\rangle_2 \right. & = \frac{1}{\sqrt{6}} (-|\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle + 2|\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle - |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle) \\
\left| \left\langle ?, -\frac{1}{2} \right\rangle_3 \right. & = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle - |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle)
\end{aligned}$$

v). Nun müssen wir dasselbe Verfahren auf den Resthilbertraum anwenden, der sich ergibt, wenn man die $|\frac{3}{2}, m\rangle$ -Zustände herausnimmt.

Also geht es nun folgendermaßen weiter:

i).

$$\begin{aligned}
j_3 = \frac{1}{2} & : \left| \left\langle ?, \frac{1}{2} \right\rangle_2 \right. ; \left| \left\langle ?, \frac{1}{2} \right\rangle_3 \right. . \\
j_3 = -\frac{1}{2} & : \left| \left\langle ?, -\frac{1}{2} \right\rangle_2 \right. ; \left| \left\langle ?, -\frac{1}{2} \right\rangle_3 \right. .
\end{aligned}$$

- ii). In diesem Fall ist es nicht so einfach, den Zustand mit dem maximalen Gewicht zu finden. Es ist klar, daß er im $j_3 = \frac{1}{2}$ -Unterraum liegen muß, da nun $\frac{1}{2}$ der höchste J_3 -Eigenwert ist. Wir prüfen noch einmal nach, daß diese Zustände alle durch den Aufsteigeoperator annihiliert werden, indem wir J_+ auf einen beliebigen normierten Vektor^(xiv) in diesem Unterraum anwenden.

$$\begin{aligned}
 & J_+ \left(\cos(\alpha) \left| ?, \frac{1}{2} \right\rangle_2 + \sin(\alpha) \left| ?, \frac{1}{2} \right\rangle_3 \right) \\
 &= \frac{\cos(\alpha)}{\sqrt{6}} (-J_+ |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle + 2J_+ |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle - J_+ |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle) \\
 &\quad + \frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{2}} J_+ (|\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle) \\
 &= \frac{\cos(\alpha)}{\sqrt{6}} (-|\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle + 2|\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle - |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle) \\
 &\quad + \frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle - |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle) = 0
 \end{aligned}$$

Zur Bestimmung des Zustandes maximalen Gewichtes muß also ein Eigenvektor von J^2 in diesem Unterraum gesucht werden. Dazu wendet man den Operator wieder auf einen allgemeinen normierten Zustand an. Dabei ergibt sich unter Verwendung der schon oben angegebenen Zerlegung des Operators:

$$J^2 \left(\cos(\alpha) \left| ?, \frac{1}{2} \right\rangle_2 + \sin(\alpha) \left| ?, \frac{1}{2} \right\rangle_3 \right) = \frac{3}{4} \left(\cos(\alpha) \left| ?, \frac{1}{2} \right\rangle_2 + \sin(\alpha) \left| ?, \frac{1}{2} \right\rangle_3 \right)$$

Wir sehen also, daß alle Zustände in diesem Unterraum gleichberechtigt sind, und daß es keinen eindeutigen Zustand maximalen Gewichtes gibt. Das kommt daher, daß es in der Ausreduktion zwei orthogonale Unterräume zum Gesamtdrehimpuls $\frac{1}{2}$ gibt. Wenn man den üblichen Weg gehen würde, erst zwei Drehimpulse zu koppeln und dann den dritten dazu, so ergeben sie sich einmal aus der Kopplung des Zweiteilchen-Drehimpulses 1 mit dem dritten und zum anderen aus der von 0 mit $\frac{1}{2}$. Wobei die Zuordnung eines beliebigen Basisvektors zu einem der beiden Teilräume gerade von der Definition je eines Drehimpulses als „ersten“, „zweiten“ und „dritten“ abhängt, womit wir wieder bei dem schon auf Seite 69 angesprochenen Problem der Umkopplung (hier mit 6-j-Symbolen) wären.

In unserem Fall wählen wir einfach einen der Zustände aus:

$$\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle_1 := \left| ?, \frac{1}{2} \right\rangle_2$$

- iii). Absteigen ergibt nun:

$$J_- \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle_1 = - \left| ?, -\frac{1}{2} \right\rangle_2$$

^(xiv)Um diesen als Linearkombination der Basisvektoren darzustellen, benutzen wir einen „Mischungswinkel“ α zur Parametrisierung der Koeffizienten.

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle_1 : = - \left| ?, -\frac{1}{2} \right\rangle_2$$

Weiteres Absteigen annihiliert die Zustände ganz analog zum Aufsteigen im letzten Schritt.

- iv). Eine erneute Orthonormierung ist nicht mehr nötig, da wir keine neuen Zustände als Linearkombinationen eingeführt haben und somit die Basen der Eigenräume schon orthonormal sind. Vorzeichenänderungen beeinflussen ja glücklicherweise die Orthonormalität nicht.
- v). Der verbleibende Resthilbertraum ist schon invariant, so daß man nur noch die beiden Zustände mit einem neuen Namen versehen muß. Durch das Absteigen zwischen den beiden ergibt sich noch ein Vorzeichen im unteren Teilraum, das aber natürlich reine Konvention ist.

$$\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle_2 : = \left| ?, \frac{1}{2} \right\rangle_3$$

$$\left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle_2 : = - \left| ?, -\frac{1}{2} \right\rangle_3$$

Damit haben wir die Produktdarstellung für drei Quarks ausreduziert. Wir erhielten eine irreduzible Darstellung zum Spin $\frac{3}{2}$ und zwei mit Spin $\frac{1}{2}$.

Natürlich müßte zur Angabe der vollständigen Wellenfunktion des Protons, die entsprechende Spinfunktion noch mit Orts-(und Farb-)anteilen versehen.

Literaturverzeichnis

- [1] Chris J. Isham. *Modern Differential Geometry for Physicists*. No. 32 in World Scientific Lecture notes in Physics. World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 1. Aufl., 1989.
- [2] K. Jänich. *Vektoranalysis*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, 1992.
- [3] S. Penselin. “Atomphysik.”. Vorlesungsmitschrift zum WS 69/70, Institut für Angewandte Physik der Universität Bonn, Juni, 1970.
- [4] D. Schütte, “Vorlesung „Quantentheorie I“.” 1991/92. Unveröffentlicht.
- [5] D. Schütte. “Darstellungstheorie der Poincaré-Gruppe.”. Skriptum zur Vorlesung „Quantentheorie II“, Institut für theoretische Kernphysik, Universität Bonn, 1992. Zusammengestellt von J. Nitschkowski.
- [6] I. N. Bronstein; K. A. Semendjajew. *Taschenbuch der Mathematik*. Harri Deutsch, Thun und Frankfurt / Main, 23. Aufl., 1987.
- [7] D. J. Simms. *Lie Groups and Quantum Mechanics*, Bd. 52 von *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1. Aufl., 1968.
- [8] N. Straumann. *Klassische Mechanik*. No. 289 in Lecture notes in Physics. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, 1. Aufl., 1987.
- [9] Roman U. Sexl; Helmuth K. Urbantke. *Relativität, Gruppen, Teilchen*. Springer-Verlag, Wien — New York, 1976.

Index

Fette Seitenzahlen bezeichnen die Definition des entsprechenden Begriffes. Kleine Seitenzahlen verweisen auf Bilder.

Abbildung zwischen Untermannigfaltigkeiten, differenzierbare	9	C_{2v}	11
Ableitungen von Kurven in einer Mannigfaltigkeit	9	Cartan, Satz von Élie	10
Absteigeoperator	67, 71	Casimiroperator	29 , 66, 67
Äquivalenzklassen	62	Clebsch-Gordan-Koeffizienten	68 , 73
Hilbertraum der	52	Clebsch-Gordan-Reihe	73
Skalarprodukt im	52	D -Funktionen, Wignersche	34
Repräsentanten von	52, 62	Darstellung	4 , 28
von Zuständen	51, 52, 52	der $so(3)$	20 , 25
Äquivalenzrelation	51, 51 , 52 , 62	der $SO(3)$	20
Analysis	7	auf Spin- s -Feldern	44
Atomphysik	69	der $SU(2)$	60 , 60-63
Ausreduktion	29 , 64-77	Exponentialform	61
für $SO(3)$	29-34	der Lie-Algebra	15, 16
im Ortsraum	34	der Überlagerungsgruppe	53
Bahndrehimpuls	65	Ein-Teilchen	66
Entartung	44	Erklärung der Strahl-	
Gesamt-	69	der $SO(3)$	62 , 62-63
Bahndrehimpulsoperatoren	25	für Spin-1/2-Felder	49-63
als Differentialoperatoren	32	irreduzible	28 , 68, 77
Eigenwerte	31	von $SO(3)$	32
Eigenzustände	31	Projektive	52
Kommutatoren	26, 27 , 29	reduzible	28
Baryon	64, 69	Strahl-	52 , 51-63
Basis des \mathbb{C}^{2s+1}	41	der $SO(3)$	53-63
Bilinearität der Lie-Klammer	12	und Überlagerungsgruppe	53, 62
Blockdiagonalform von ρ	28	Unitarität	46
		Darstellungseigenschaft	5
		von ρ	5
		von ρ'	22
		von $D_{\frac{1}{2}}$	60
		Diffeomorphismus	6 , 7, 15
		Differentialgeometrie	6-16

- Differenzierbare Abbildung zwischen Untermannigfaltigkeiten **9**
- Differenzierbare Mannigfaltigkeit *siehe* Untermannigfaltigkeit
- Drehgruppe **1**
 Lie-Algebra der **17**, 17-34
- Drehimpuls 2, 64, 68, 69, 73, 76
 Bahn- 65
 Eigenvektoren 29
 Eigenwerte 31
 Eigenzustände 31
 Ein-Teilchen-Gesamt- 69
 Gesamt- **62**
- Drehimpulskopplung 64-77
- Drehimpulsoperatoren 65
 Ein-Teilchen- 65
 Geliftete 65
 Gesamt- 65, **65**, 67, 69
- Drehungen
 im \mathbb{E}^3 1-34
 im Hilbertraum **3**, **4**
 im Phasenraum 2
 von skalaren Wellenfunktionen 4
- Eigenraum 67, 73
 Eigenvektoren des Drehimpuls 29
 Eigenwert 66-70, 76
 Eigenwerte des Drehimpuls 31
 Eigenzustände 67, 68
 des Drehimpuls 31
 des Spins 46
- Ein-Teilchen-Darstellung 66
 Ein-Teilchen-Gesamtdrehimpuls 69
 Ein-Teilchen-Hilbertraum **65**, 67, 70
 Ein-Teilchen-Operatoren 65, **65**, 70
 Ein-Teilchen-Systeme 64
 Einsteins Summationskonvention **27**
 Elementarteilchen **64**
 Élie Cartan, Satz von 10
 Entartung beim Bahndrehimpuls 44
 Erstes Schursches Lemma **56**
- Erwartungswert eines Operators **51**, **52**
 Erzeugung einer Untermannigfaltigkeit 7
 Euklidischer Raum **1**
 Euklidisches Skalarprodukt **1**
 Exponentialabbildung 18
 der Lie-Algebra 15, 16
 Exponentialdarstellung 65
 Exponentialdarstellung von ρ 49
 Exponentialform
 der Darstellung der $SU(2)$ 61
 von $SU(2)$ -Elementen 58, 61
- Flachmacher-Eigenschaft **7**
 Freiheitsgrade 37
 35-j-Symbole 69
 Funktionen, quadratintegrale 40
- Gedrehtes System 3
 Geliftete Operatoren 65
 Gesamtbahndrehimpuls 69
 Gesamtdrehimpuls **62**
 Ein-Teilchen- 69
 Gesamtdrehimpulsoperatoren . 65, **65**, 67, 69
 Gesamtspin 69
 Gewichte, maximale 66, 67, **67**, 71, 76
 $gl(n, K)$ **13**
 $GL(n, K)$ 13
 Gold 64, 69
 Gram-Schmidt 68, 73, 77
- Gruppe
 Lie- **9**, 11, 12, 15, 16, *siehe* auch bei den einzelnen Gruppen
 Lineare Lie- **9**, 11, 12, 15, 16, *siehe* auch bei den einzelnen Gruppen
 Überlagerungs- 53
 Gruppenmannigfaltigkeit 12
 Gruppenoperationen
 Differenzierbarkeit 9
 Gruppenstruktur 9

- H-Atom
 mit Spin 42-43
 Spektrum 35, 35-36
 im Magnetfeld 35, 36
- Hadron 64, 69
- Hamiltonfunktion, klassische 2
- Hamiltonoperator des Wasserstoffatoms ... 42
 im Magnetfeld 47
- Hilbertraum 3, 52
 der $2s + 1$ -dimensionalen
 Wellenfunktionen 40
 der Äquivalenzklassen **52**
 Skalarprodukt im **52**
 der quadratintegrablen Funktionen ... 40
 der Spin- s -Felder **41**, 44
 Zerlegung des 28
- Indexkonvention 54, 55
- Invariante Teilräume ... 28, 32, 66, 68, 69, 77
- Invarianz unter Rotationen **2**
- Irreduzible Darstellung 28, **56**
 der $SU(2)$ 58
- Jacobi-Identität der Lie-Klammer 12
- Jacobi-Matrix 7
- jj-Kopplung 69
- Kartenbedingung *siehe* Flachmacher
 -Eigenschaft
- Kartesisches Produkt **37**
- Kernspin 64
- Klassische Hamiltonfunktion 2
- Klassische Mechanik 1-2
- Koeffizienten
 Clebsch-Gordan **68**, 73
 Umkopplungs- 69
- Koordinaten
 Polar- 7
- Koordinatenbedingung *siehe* Parametrisierung
 einer Untermannigfaltigkeit
- Koordinatennetz 8
- Kugel 7, **8**
- Kugelfunktionen **33**, 34
 Vollständigkeitsrelation 34
- Kugelkoordinaten **33**
- Kurven
 in einer Lie-Gruppe 11-16
 in einer Mannigfaltigkeit 9
 Ableitungen 9
- Leiteroperatoren 29, 46, 67
- Lemma
 Erstes Schursches **56**
 Zweites Schursches **57**
- Levi-Civita-Symbol **27**
- Lie-Algebra **12**, 11-17
 Darstellung 15, 16
 der Drehgruppe **17**, 17-34
 Exponentialabbildung 15
 Exponentialfunktion 16
 und Lie-Gruppe 15, 16
- Lie-Gruppe . **9**, 11, 12, 15, 16, *siehe* auch bei
 den einzelnen Gruppen
 Lineare . **9**, 11, 12, 15, 16, *siehe* auch bei
 den einzelnen Gruppen
 Tangentialraum 11-13, 15
- Lie-Klammer **11**, 12, 15, 16
 Bilinearität 12
 Jacobi-Identität 12
- Lineare Lie-Gruppe ... **9**, 11, 12, 15, 16, *siehe*
 auch bei den einzelnen Gruppen
- Lineare Operatoren, Tensorprodukt **38**
- Lineare Struktur des Tensorprodukts **37**
- LS-Kopplung 69
- Magnetfeld
 Hamiltonoperator des Wasserstoffs im 47
 Wechselwirkung mit einem 47

- Mannigfaltigkeit *siehe* Untermannigfaltigkeit
 Mannigfaltigkeit mit Rand 8
 Matricelemente des Spinoperators 47
 Matrizen, schiefe 17
 Maximale Gewichte 66, 67, **67**, 71, 76
 Mechanik
 klassische 1-2
 Quanten- 3-77
 Mehrkomponentige Wellenfunktion **37**
 Menge der Kurven in einer Mannigfaltigkeit 9
 Methode d. maximalen Gewichte 66-77
 Mischungswinkel 76

 n -Teilchen-Hilbertraum 65, **65**
 9-j-Symbole 69
 Normieren 67
 Nukleon 64, 69
 Nullstellen als Untermannigfaltigkeit 7, 8

 $o(n)$ **15**
 $O(n)$ 15
 $O(n, \mathbb{R})$ **10**
 Operatoren 64, 76
 Casimir- 66, 67
 Eigenwerte 66
 Erwartungswerte **51, 52**
 Gesamtdrehimpuls- 65, **65**, 67, 69
 Liften 65
 Tensorprodukt von Linearen **38**
 Orthonormierung 68, 73, 77
 Ortsraum 32-34

 Parametrisierung
 einer Untermannigfaltigkeit **7, 9**
 Pauli-Matrizen 47, 54
 Paulische Spinmatrizen 47
 Phasenraum 2
 Drehungen 2
 Poincaré-Gruppe 64

 Poisson-Klammer **2**
 Polarkoordinaten 7
 Produkt
 Kartesisches **37**
 Tensor- **38**
 Lineare Struktur **37**
 Skalarprodukt **38**
 von linearen Operatoren **38**
 Produktbasis 68, 73
 Produktdarstellung **66**, 64-77
 Produktraum 66-68, 70
 Projektionsabbildung auf Repräsentanten **62**
 Projektive Darstellung **52**

 Quadratintegrale Funktionen 40
 Quantenmechanik 3-77
 Quantenmechanischer Zustand 3
 Vorzeichen 51
 Quarks 64, 69, 77

 Raum, Euklidischer **1**
 Reduzibel 66
 Reduzible Darstellung **28**
 Reihe
 Clebsch-Gordan 73
 Repräsentanten
 in den Äquivalenzklassen 52, 62
 Projektionsabbildung auf **62**
 ρ **4**
 Blockdiagonalform 28
 Darstellungseigenschaft 5
 Unitarität 4
 ρ' **20**
 Rotationsinvarianz **2**

 Satz von Élie Cartan 10
 Schiefe Matrizen 17

- Schursche Lemma
 Erstes **56**
 Zweites **57**
- 6-j-Symbole 69, 76
- Skalare Wellenfunktion **37**
- Skalarprodukt 64
 auf dem Hilbertraum der
 Äquivalenzklassen **52**
 auf dem Tensorprodukt **38**
 Euklidisches **1**
 für Spin- s -Felder **41**
- $sl(n, K)$ **13**
- $SL(n, K)$ 13
- $SL(n, \mathbb{R})$ **10**
- $SO(3)$ **1**
 Darstellung
 auf Spin- s -Feldern **44**
 Exponentialform 49
- $so(3)$ **17**
- $so(n)$ **15**
- $SO(n)$ 15
- Spektrum des H-Atoms 35, 35-36
 im Magnetfeld 35, 36, 48
- Sphäre 7, **8**
- Spin 35-77
 Eigenzustände 46
 Gesamt 69
- Spin-1/2-Felder
 $SO(3)$ -Darstellung 49-63
 $SU(2)$ -Darstellung **60**, 60-63
 Exponentialform 61
- Spin- s -Feld **37**
 $SO(3)$ -Darstellung **44**
 Hilbertraum **41**, 44
 Skalarprodukt **41**
- Spin-Magnetfeld-Wechselwirkung 47
- Spinmatrizen, Paulische 47
- Spinoperator 47
 Matrixelemente 47
- Standardbasis des \mathbb{C}^{2s+1} 41
- Stetigkeit 7
- Strahl **52**, 52, 62
- Strahldarstellung **52**, 51-63
 der $SO(3)$ 53-63
 Erklärung **62**, 62-63
 und Überlagerungsgruppe 53, 62
- Summationskonvention (Einstein) **27**
- $SU(2)$ **53**, 53-77
 Exponentialform der Elemente 58, 61
- Symmetriegruppe d. H_2O -Moleküls 10-11
- System, Zusammengesetztes **65**
- Tangentenvektoren 9
- Tangentialraum
 an eine Lie-Gruppe 11-13, 15
 an eine Untermannigfaltigkeit 6, **9**
- Teilchen **64**
- Teilräume, invariante ... 28, 32, 66, 68, 69, 77
- Tensorprodukt **38**, 37-42, 44, 65, 66, 70
 Lineare Struktur **37**
 Skalarprodukt **38**
 von linearen Operatoren **38**
- Überlagerungsabbildung **53**, 53-60
- Überlagerungsgruppe 53
 Darstellung 53
- Umkopplung 76
- Umkopplungskoeffizienten 69
- $u(n)$ **14**
- $U(n)$ **14**
- Unitarität
 der Darstellung 46
 von $D_{\frac{1}{2}}$ 61
- Untergruppe 9, 10

Untermannigfaltigkeit	
Ableitungen der Kurven	9
aus Nullstellenmenge	7, 8
Differenzierbare Abbildung	9
Erzeugung	7
im \mathbb{R}^n	6 , 6-9
Kurven	9
Menge der Kurven	9
Parametrisierung	7
Tangentialraum	6, 9
Unterraum, invarianter	<i>siehe</i> Teilräume, invariante
Valenzelektronen	69
Wassermolekül	10
Wasserstoffatom	
Hamiltonoperator	42
im Magnetfeld	47
mit Spin	42-43
Spektrum	35, 35-36
im Magnetfeld	35, 36, 47, 48
Wechselwirkung mit einem Magnetfeld	47
Wellenfunktion	3
$2s + 1$ -dimensionale	40
Drehung einer skalaren	4
Mehrkomponentige	37
Skalare	37
Wignersche D -Funktionen	34
Zerlegung des Hilbertraums	28
Ziel	63
Zusammengesetztes System	65
Zustände	
Äquivalenzklassen	51, 52, 52
quantenmechanische	3
Vorzeichen	51
$2s + 1$ -dimensionale Wellenfunktion	40
2-Sphäre	7
Zweites Schursches Lemma	57